
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Σχολή θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Μελέτη της στοχαστικότητας τροχιών μη γραμμικών
δυναμικών συστημάτων - Συστήματα με επαναλαμβανόμενες
σκεδάσεις

Νικόλαος Δελής

Διδακτορική Διατριβή

Αθήνα Μάρτιος 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Μελέτη της στοχαστικότητας τροχιών μη γραμμικών
δυναμικών συστημάτων - Συστήματα με επαναλαμβανόμενες
σκεδάσεις

Νικόλαος Δελής

Επταμελής Επιτροπή:

Γεώργιος Κοντόπουλος	Ακαδημαϊκός
Ξενοφών Μουσσάς	Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Χρήστος Ευθυμιόπουλος	Ερευνητής Α' Ακαδημία Αθηνών
Δημήτρης Φραντζεσκάκης	Καθηγητής Πανεπιστήμιο Αθηνών
Θεοχάρης Αποστολάτος	Αν. Καθηγητής Πανεπιστήμιο Αθηνών
Φώτης Διάκονος	Αν. Καθηγητής Πανεπιστήμιο Αθηνών
Νεκτάριος Βλαχάκης	Επικ. Καθηγητής Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνεισέφεραν στην πραγματοποίησή της.

Πρώτα απ' όλους τον ομότιμο Καθηγητή και Ακαδημαϊκό κ. Γ. Κοντόπουλο για τη δυνατότητα που μου έδωσε να εργαστώ στο Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Ακαδημίας Αθηνών (ΚΕΑΕΜ) και να αισθανθώ μέλος της επιστημονικής του ομάδας. Στο χώρο αυτό που δόθηκε η ευκαιρία να πραγματοποιήσω απερίσπαστος την έρευνα μου και να έρθω σε επαφή με την υπόλοιπη επιστημονική κοινότητα. Επίσης τον ευχαριστώ για την βοήθεια που μου προσέφερε με την εμπειρία και τις γνώσεις του καθώς και για τη σχολαστική διόρθωση του τελικού κειμένου της διατριβής. Η συνεργασία μας όλα αυτά τα χρόνια ήταν για μένα πολύ μεγάλη τιμή και προνόμιο.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Ευθυμιόπουλο Ερευνητή Α' της Ακαδημίας Αθηνών ο οποίος συνέβαλε περισσότερο απ' όλους στην πραγματοποίηση της παρούσης διατριβής. Είμαι πολύ χαρούμενος που μου δίνεται εδώ η ευκαιρία να εκφράσω την εκτίμηση μου στο πρόσωπο του αλλά και την ευγνωμοσύνη μου για όλα όσα έχει κάνει για μένα. Η γνωριμία-συνεργασία μας με τον κ. Ευθυμιόπουλο ξεκίνησε το 2001 απ' την περίοδο ακόμη που ήμουν μεταπτυχιακός φοιτητής και υπήρξε καθοριστική καθώς ήταν ο πρώτος που με έφερε σε επαφή με τον χώρο της έρευνας αλλά και που με προέτρεψε να επιστρέψω σε αυτήν μετά από την διακοπή λόγω των υποχρεώσεων μου στη μέση εκπαίδευση. Σε όλη αυτή την περίοδο και κυρίως κατά την διάρκεια εκπόνησης της διατριβής αυτής μου προσέφερε αδιάλειπτα την βοήθεια του και μου μετέφερε τις γνώσεις και τον ενθουσιασμό του στην διεξαγωγή της έρευνας. Παράλληλα στο διάστημα αυτό αναπτύχθηκε ανάμεσα μας μια προσωπική σχέση και φιλία που είναι για μένα ιδιαίτερα σημαντική και αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα προσωπικά οφέλη που προέκυψαν μέσα από αυτή την κοινή προσπάθεια. Δεν μπορώ επίσης να μην αναφερθώ, στις πάμπολλες φορές που η μητέρα του μας διένειμε το φαγητό της και στις ωραίες στιγμές που περάσαμε φτιάχνοντας το περιβόλι μας. Τέλος, θέλω να τον ευχαριστήσω συνολικά για το χρόνο που μου αφιέρωσε καθώς και για την κατανόηση και την υπομονή του.

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, κ. Ξενοφών Μουσσά. Η συνεργασία μας όλα αυτά τα χρόνια ήταν άψογη και με την βοήθεια την ενθάρρυνση και την καθοδήγηση του κατάφερα να ολοκληρώσω την διατριβή μου.

Ευχαριστώ πολύ τον κ. Δημήτρη Φραντζεσκάκη, Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις διορθώσεις του, που συνέβαλαν ουσιαστικά στην βελτίωση της παρούσης διατριβής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Θεοχάρη Αποστολάτο, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Φώτη Διάκονο και τον Επίκουρο Καθηγητή Νεκτάριο Βλαχάκη που μου έκαναν την τιμή να συμμετέχουν στην κρίση του διδακτορικού μου.

Ευχαριστώ τον κ. Παναγιώτη Πάτση Διευθυντή Ερευνών του (ΚΕΑΕΜ) για την εν γένει συνεισφορά του στην διατριβή αυτή. Κατά την εκπόνησή της πολλές φορές μου έλυσε απορίες σε θέματα Γαλαξιακής Δυναμικής και μοιράστηκε μαζί μου όπως και με τους υπόλοιπους φοιτητές του κέντρου τις γνώσεις του και την εμπειρία του στο χώρο της έρευνας. Επίσης τον ευχαριστώ για τις διευκολύνσεις που μου παρείχε στη χρήση της υλικοτεχνικής υποδομής του κέντρου και κυρίως

γιατί με την καθημερινή του προσπάθεια συνέβαλε στη διαμόρφωση καλύτερων συνθηκών και δημιουργίας ευχάριστου και φιλικού κλίματος μεταξύ όλων των μελών του κέντρου. Η συναναστροφή μαζί του ήταν πολύ μεγάλο όφελος για μένα τόσο σε επιστημονικό όσο και σε προσωπικό επίπεδο.

Ευχαριστώ τον αείμνηστο κ. Νικόλαο Βόγγλη ο οποίος υπήρξε καθηγητής μου στο Πανεπιστήμιο και κύριος επιβλέπων της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Ο κ. Βόγγλης με έφερε σε επαφή με το χώρο της μη-γραμμικής δυναμικής και με ενέπνευσε με τον τρόπο σκέψης και διδασκαλίας του να ασχοληθώ με τον τομέα αυτό της επιστήμης.

Πολλές ευχαριστίες οφείλω στους συναδέλφους κ. Χαρσούλα Μιρέλα, κ. Γιώργο Λούκες-Γερακόπουλο, κ. Καλαποθαράκο Κωνσταντίνο, κ. Κατσανικά Μάνθο, κ. Αναστασίου Γιώργο, κ. Αθηνά Πούρη, κ. Παναγιώτη Τσούτση, κ. Αθανασία Τσάτση και τον κ. Συντελή Πέτρο για τη βοήθεια που μου προσέφεραν όσες φορές χρειάστηκε, τις ενδιαφέρουσες και ευχάριστες συζητήσεις που είχαμε πάνω σε ακαδημαϊκά και καθημερινά θέματα, τη συμπαράστασή τους, τη φιλική τους στάση και την αρμονική συνύπαρξη που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια.

Ευχαριστώ πολύ τον παρασκευαστή του ΚΕΑΕΜ κ. Μανώλη Ζούλια καθώς στη διάρκεια της διατριβής μου πολλές φορές τον επιβάρυνα επιπλέον με τις τεχνικές δυσκολίες που αντιμετώπισα. Τον ευχαριστώ επίσης για την πάντα ενδιαφέρουσα και ευχάριστη διέξοδο που μου προσέφεραν οι συζητήσεις μαζί του από την πίεση της εργασίας.

Ευχαριστώ την γραμματέα του ΚΕΑΕΜ της Ακαδημίας Αθηνών κ. Γεωργία Αγγελοπούλου για την ευγενική της στάση απέναντί μου και για την πάντα πρόθυμη βοήθειά της.

Ιδιαίτερη μνεία θα ήθελα να κάνω στο Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών, για την οικονομική στήριξη που μου προσέφερε μέσω της υποτροφίας στην ειδίκευση "Αστρονομία", κατά την περίοδο 1/11/2009 έως 30/4/2013, που υλοποιήθηκε με συγχρηματοδότηση από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο-ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους στα πλαίσια του Επιχειρησιακού Προγράμματος "Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση".

Ευχαριστώ το Υπουργείο Παιδείας για την άδεια μετ' αποδοχών που μου παραχώρησε καθώς χωρίς αυτήν η πραγματοποίηση της διδακτορικής μου διατριβής θα ήταν αδύνατη.

Ευχαριστώ επίσης το Ελληνικό Κέντρο Έρευνας Μετάλλου (ΕΛΚΕΜΕ) για την οικονομική υποστήριξη της συμμετοχής μου στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο με θέμα "Μη Γραμμική Δυναμική και Πολυπλοκότητα" τον Ιούλιο του 2010 στη Θεσσαλονίκη και την Ακαδημία Αθηνών για τη χρηματοδότηση της συμμετοχής μου στο επιστημονικό συνέδριο της Ελληνικής Αστρονομικής Εταιρείας το Σεπτέμβριο του 2011 στα Ιωάννινα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την καλή μου τύχη που έφερε στο απέναντί γραφείο τη γυναίκα της ζωής μου, τη Λιάνα.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στους γονείς μου. Εύχομαι με την ολοκλήρωσή της να τους έκανα χαρούμενους και υπερήφανους.

Αθήνα, 14/11/2013

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
1.1	Γενικά	5
1.2	Δυναμικά συστήματα	6
1.2.1	Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα	7
1.2.2	Ολοκληρώσιμα συστήματα	8
1.2.3	Χαοτικά συστήματα	11
1.3	Συντονισμοί-Ομοκλιτικό Χάος	14
1.4	Δυναμική γύρω από ακίνητους κόμβους - Διακλαδώσεις	18
1.5	Χάος σε συστήματα κινούμενων κόμβων	20
1.6	Στόχος και δομή της διατριβής	25
I	Σκέδαση από μελανή οπή	27
2	Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ελλειπτικών γαλαξιών	29
2.1	Γενικά	29
2.2	Αέναη εξέλιξη-Αριθμοί Lyapunov και μάζα μελανής οπής	31
2.3	Αριθμητικός έλεγχος του νόμου $L \propto m^p$ σε απλό μοντέλο δυναμικού	35
2.4	Θεωρητική ερμηνεία του νόμου $L \propto m^p$	40
2.4.1	Σφαίρα επιρροής	41
2.4.2	Αριθμός διαστολής κατά τη σκέδαση	49
2.4.3	Αριθμός επισκέψεων στη σφαίρα επιρροής και αριθμός Lyapunov	55
2.4.4	Θεωρητικός υπολογισμός του μέσου αριθμού Lyapunov	61
3	Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ραβδωτών γαλαξιών	65
3.1	Μοντέλο δυναμικού	65
3.2	Αριθμητικός υπολογισμός	67
3.3	Ερμηνεία-Περιοδικές τροχιές και φασικά πορτρέτα	70
II	Σκέδαση από κόμβους	87
4	Σκέδαση από κβαντικούς στροβίλους- Κβαντική χαλάρωση	89
4.1	Γενικά	89
4.2	Κινούμενος κόμβος και χάος σε κβαντικό μοντέλο διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή	90
4.3	Οργανωμένες τροχιές μακριά από το κέντρο	94

4.4	Οργανωμένες και χαοτικές τροχιές στο σύστημα Hénon - Heiles	96
4.5	Επιδράσεις στην κβαντική χαλάρωση	98
4.6	Περαιτέρω παραδείγματα παρεμπόδισης της χαλάρωσης. Ποσοτικοί υπολογισμοί	103
5	Σκέδαση φορτισμένων σωματιδίων	109
5.1	Γενικά	109
5.2	Προσέγγιση επίπεδου προσπίπτοντος κύματος	109
5.2.1	Κυματοσυνάρτηση	109
5.2.2	Διαχωριστική ζώνη-Ρεύματα ροής και κόμβοι για επίπεδο κύμα	111
5.2.3	Κβαντικοί στρόβιλοι	112
5.2.4	Τροχιές de Broglie-Bohm. Δημιουργία περιθλαστικής εικόνας	118
5.3	Προσέγγιση προσπίπτοντος κυματοπακέτου	120
5.3.1	Κυματοσυνάρτηση	121
5.3.2	Διαχωριστική ζώνη-Ρεύματα ροής και κόμβοι για το κυματοπακέτο	122
5.3.3	Κβαντικοί στρόβιλοι	124
5.3.4	Τροχιές de Broglie-Bohm	124
5.3.5	Δημιουργία περιθλαστικής εικόνας	128
5.4	Χρόνοι άφιξης	129
6	Συμπεράσματα	137
6.1	Γενικά	137
6.2	Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ελλειπτικών γαλαξιών	137
6.3	Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ραβδωτών γαλαξιών	139
6.4	Σκέδαση από κβαντικούς στρόβιλους-Κβαντική χαλάρωση	139
6.5	Σκέδαση φορτισμένων σωματιδίων	140
6.6	Γενικά συμπεράσματα και νέες ερευνητικές κατευθύνσεις	141
	Παραρτήματα	146
	Α' Οι συντελεστές των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων	147
	Β' Υπολογισμός κυματοσυνάρτησης στην προσέγγιση επίπεδου κύματος	149
	Β'.1 Συνάρτηση Fraunhofer στην προσέγγιση επίπεδου κύματος	153
	Β'.1.1 $k_0 a \sim 1$	153
	Β'.1.2 $k_0 a \gg 1$	155
	Γ' Συνάρτηση Fraunhofer στην προσέγγιση κυματοπακέτου	157
	Γ'.1 $l \gg D \gg a$	159
	Γ'.1.1 $l \gg D \gg a$ κοντά στις γωνίες Bragg	160
	Γ'.2 $D \gg l \gg a$	160
	Δ' Δημοσιεύσεις	163
	Βιβλιογραφία	165

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Η παρούσα διατριβή επικεντρώνεται στη μελέτη μίας ειδικής κατηγορίας **δυναμικών συστημάτων** που συναντούν εφαρμογές τόσο στην Αστρονομία, όσο και στη μηχανική γενικότερα. Θα ονομάσουμε τα συστήματα αυτά με τον όρο “συστήματα με επαναλαμβανόμενη σκέδαση”.

Ένα τυπικό παράδειγμα είναι ένα αστρικό σύστημα (σφαιρικό σμήνος ή γαλαξίας) που φιλοξενεί μια μελανή οπή μεγάλης μάζας στο κέντρο. Χωρίς τη μελανή οπή, σ' ένα τέτοιο σύστημα πολλοί αστέρες ακολουθούν τροχιές τύπου (box orbits), ή, γενικότερα, τροχιές που χαρακτηρίζονται “κεντρόφιλες” (π.χ [58]), έχουν δηλαδή την ιδιότητα ότι μπορούν να διέλθουν αυθαίρετα κοντά από το κέντρο του συστήματος. Οι τροχιές αυτές είναι κατά κανόνα **οργανωμένες**, δηλαδή δεν εμφανίζουν στοιχεία χάους και έχουν μηδενικούς χαρακτηριστικούς εκθέτες Lyapunov. Ωστόσο, με την προσθήκη της μελανής οπής, ο χαρακτήρας των τροχιών αλλάζει δραματικά. Η χρονική εξέλιξη των τροχιών μπορεί, χονδρικά, να χαρακτηριστεί ως μια αλληλουχία “σκεδάσεων” (δηλαδή κοντινών προσεγγίσεων) από τη μελανή οπή. Κάθε σκέδαση ακολουθείται από μια ομαλή ταλάντωση (έως τη λεγόμενη “επιφάνεια μηδενικής ακτινικής ταχύτητας”), η οποία, ωστόσο, τελικά, οδηγεί σε μία νέα φάση προσέγγισης του κέντρου, εκ νέου σκέδασης από τη μελανή οπή, κ.ο.κ. Όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω η αλληλουχία αυτή οδηγεί τελικά στην εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς των τροχιών. Περαιτέρω, πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι το χάος στην περίπτωση αυτή οδηγεί σε μακροσκοπική “άεναη εξέλιξη” (secular evolution) της μορφολογίας και κινηματικής των αστρικών

συστημάτων ([67], [68], [17], [72], [98], [70], [99]).

Ένα σύστημα όπως το προηγούμενο μπορεί να περιγραφεί με το συνήθη χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Όπως θα δούμε όμως, τα χαρακτηριστικά του χάους στην περίπτωση των επαναλαμβανόμενων σκεδάσεων είναι πολύ διαφορετικά απ' ό τι στη συνήθη περίπτωση του λεγόμενου “ομοκλινικού χάους” που χαρακτηρίζει τοπικά το φασικό χώρο γύρω από ασταθείς περιοδικές τροχιές στα χαμιλτονιανά συστήματα.

Στην παρούσα διατριβή επικεντρώνουμε την προσοχή μας στη μελέτη της δυναμικής σε συστήματα με επαναλαμβανόμενες σκεδάσεις. Διαλέγουμε για το σκοπό αυτό μια περίπτωση που αναφέρεται σε τροχιές που σκεδάζονται από μελανές οπές σε γαλαξίες, και μια πολύ διαφορετική περίπτωση, τροχιών που σκεδάζονται από κβαντικούς στροβίλους στη λεγόμενη κβαντική μηχανική de Broglie-Bohm.

Στις επόμενες παραγράφους δίνουμε ορισμένα βασικά εισαγωγικά στοιχεία για τα δυναμικά συστήματα, καταλήγοντας στα συστήματα στα οποία εστιάζουμε την προσοχή μας. Στο τέλος αναφερόμαστε στις επιμέρους έννοιες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια, καθώς και στους συγκεκριμένους στόχους και τη δομή της παρούσας διατριβής.

1.2 Δυναμικά συστήματα

Δυναμικό σύστημα ονομάζουμε γενικά κάθε σύστημα που περιγράφεται ποσοτικά από N ανεξάρτητες μεταβλητές $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ οι οποίες μπορούν να μεταβάλλονται χρονικά αλληλεπιδρώντας μέσω ορισμένων εξισώσεων. Τα δυναμικά συστήματα διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

α) Τα **συνεχή συστήματα** που η κατάσταση τους περιγράφεται από ένα σύστημα πρωτοτάξιων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t), t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t), t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t), t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Σε διανυσματική μορφή το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γράφεται ισοδύναμα:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

όπου το $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ είναι ένα διάνυσμα που ανήκει σε ένα χώρο διάστασης N , $f \equiv (f_1, f_2, f_3, \dots, f_N)$ διανυσματική συνάρτηση του χώρου αυτού και t συνεχής μεταβλητή ως προς την οποία το σύστημα εξελίσσεται. Για τα φυσικά συστήματα οι μεταβλητές $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t))$ μπορούν να είναι οποιεσδήποτε φυσικές ποσότητες π.χ θέση, ταχύτητα, στροφορμή, κ.λ.π., ενώ η μεταβλητή t αντιστοιχεί κατά κανόνα στο χρόνο. Στην περίπτωση που η συνάρτηση f δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο το σύστημα ονομάζεται **αυτόνομο**.

β) Η δεύτερη κατηγορία δυναμικών συστημάτων είναι οι **απεικονίσεις**. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα περιγράφεται από ένα σύστημα εξισώσεων διαφορών της μορφής:

$$\mathbf{x}_{m+1} = f(\mathbf{x}_m, m) \quad (1.3)$$

όπου \mathbf{x}_m είναι ένα διάνυσμα που ανήκει σε ένα χώρο Ω διάστασης N , f είναι μια διανυσματική συνάρτηση του χώρου αυτού ($f_1, f_2, f_3, \dots, f_N$) και $m \in \mathbb{N}$ είναι το διακριτό βήμα ως προς το οποίο το σύστημα εξελίσσεται. Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής των απεικονίσεων είναι να θεωρηθούν ως η εξέλιξη του διανύσματος $\mathbf{x}(t)$ ενός συνεχούς συστήματος για ακέραιες τιμές της μεταβλητής t .

Τόσο η εξίσωση (1.2) όσο και η (1.3) περιγράφουν ντετερμινιστικά συστήματα υπό την έννοια ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}(t)$ ή \mathbf{x}_m καθορίζεται πλήρως από τις αρχικές τιμές του $\mathbf{x}(t = t_0)$ ή $\mathbf{x}(m = m_0)$ αντίστοιχα. Ο χώρος με συντεταγμένες τις μεταβλητές ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$) ονομάζεται **φασικός χώρος** του συστήματος. Στην περίπτωση των συνεχών συστημάτων η εξέλιξη τους περιγράφεται από μια καμπύλη στο φασικό χώρο.

Μια ειδική περίπτωση διακριτών δυναμικών συστημάτων είναι τα **κυψελικά αυτόματα**. Σ' αυτά, οι μεταβλητές \mathbf{x}_m της σχέσης (1.3) μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές. Πέραν του περιορισμού αυτού κάποιος μπορεί να εισάγει κι άλλους όπως οι συνοριακές συνθήκες, οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται κατά την εξέλιξη του συστήματος κ.λ.π. .

Τα δυναμικά συστήματα διακρίνονται επίσης σε **γραμμικά** ή **μη γραμμικά** . Ένα δυναμικό σύστημα (Ω, f) ονομάζεται γραμμικό εφόσον ισχύουν:

α) Η αρχή της υπέρθεσης, δηλαδή για δύο οποιαδήποτε σημεία του χώρου Ω επαληθεύεται η ισότητα: $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$

β) Η f διαθέτει ομοιογένεια πρώτου βαθμού, δηλαδή ισχύει : $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, όπου α βαθμωτό μέγεθος.

Ένα δυναμικό σύστημα για το οποίο δεν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις παραπάνω συνθήκες καλείται μη γραμμικό. Σ' ένα δυναμικό σύστημα η μη γραμμικότητα είναι αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση **χάους** ([15]). Ανάλογα με την ύπαρξη (ή μη) του χάους, τα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα διακρίνονται σε οργανωμένα και χαοτικά. Για περαιτέρω διακρίσεις και τη συστηματική ταξινόμηση των δυναμικών συστημάτων βλ. π.χ. [18] σελ.19.

1.2.1 Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κατηγορία δυναμικών συστημάτων, τα οποία απαντώνται σε πολλές εφαρμογές της Φυσικής και της Αστρονομίας, είναι τα **χαμιλτονιανά συστήματα**. Στα συστήματα αυτά οι εξισώσεις εξέλιξης μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}_i}, \quad \dot{\mathbf{y}}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

όπου οι $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2, \dots, y_N)$ λέγονται **συζυγείς μεταβλητές** στο \mathbb{R}^{2N} φασικό χώρο του συστήματος και η $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που λέγεται **χαμιλτονιανή** του συστήματος. Οι εξισώσεις (1.4) είναι γνωστές και ως εξισώσεις Hamilton. Ο ακέραιος N λέγεται πλήθος **των βαθμών ελευθερίας** του συστήματος. Υποθέτουμε ότι η $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ είναι συνεχής και έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους ως προς τα \mathbf{x} και \mathbf{y} . Οι μεταβλητές \mathbf{x} καλούνται χωριστά **γενικευμένες θέσεις** και οι μεταβλητές \mathbf{y} **γενικευμένες ορμές** του συστήματος.

Στην περίπτωση που η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t , η ενέργεια:

$$E \equiv H(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (1.5)$$

είναι μία διατηρούμενη ποσότητα του χαμιλτονιανού συστήματος. Η ύπαρξη άλλων διατηρούμενων ποσοτήτων έχει σημαντικές συνέπειες για τη δυναμική, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.2.2 Ολοκληρώσιμα συστήματα

Η ύπαρξη συναρτήσεων $I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ με την ιδιότητα $I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{σταθ.}$ κατά την εξέλιξη κάθε τροχιάς $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ του συστήματος βοηθάει ιδιαίτερα στην κατανόηση της δυναμικής του καθώς μειώνει τη διάσταση της υπερεπιφάνειας πάνω στην οποία εξελίσσονται οι τροχιές μέσα στο χώρο των φάσεων. Γενικά κάθε συνάρτηση $I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ η οποία είναι συνεχής και διαφορίσιμη και για την οποία ισχύει $dI/dt = 0$ κατά μήκος κάθε τροχιάς ονομάζεται **ολοκλήρωμα της κίνησης**. Για να είναι η $I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ολοκλήρωμα της κίνησης θα πρέπει :

$$[H, I] = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial I}{\partial y_k} - \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial I}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Ένα χαμιλτονιανό σύστημα μπορεί να έχει διάφορα ολοκληρώματα. Όταν για δύο ολοκληρώματα $I_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), I_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ του συστήματος $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ ισχύει ταυτοτικά η σχέση:

$$\lambda_1 \nabla I_1 + \lambda_2 \nabla I_2 = 0 \quad (1.7)$$

μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τότε τα ολοκληρώματα ονομάζονται **συναρτησιακά ανεξάρτητα**. Επιπλέον όταν για δύο ολοκληρώματα $I_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), I_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ισχύει:

$$[I_1, I_2] = 0 \quad (1.8)$$

τότε λέμε ότι τα ολοκληρώματα είναι μεταξύ τους σε **ενέλιξη**.

Ένα χαμιλτονιανό σύστημα n βαθμών ελευθερίας λέγεται **ολοκληρώσιμο** κατά Arnold-Liouville όταν έχει n συναρτησιακά ανεξάρτητα ολοκληρώματα σε ενέλιξη. Σύμφωνα με το θεώρημα Arnold-Liouville, αν κάθε υπερεπιφάνεια που ορίζεται από τη σχέση $I_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_i$, με $i = 1, 2, \dots, n$ είναι συμπαγής και συνεκτική, αποδεικνύεται ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία εξελίσσονται οι τροχιές του συστήματος είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τόρο (βλ. π.χ [1]). Επιλέγοντας ένα σύνολο μη-αναγώγιμων κλειστών καμπυλών (C_1, C_2, \dots, C_n) μονοδιάστατων κύκλων πάνω στον τόρο μπορούμε να ορίσουμε τις μεταβλητές:

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} p_k dq_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.9)$$

Οι συναρτήσεις $J_k = J_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ονομάζονται **μεταβλητές δράσης**. Οι συζυγείς μεταβλητές των δράσεων είναι οι **γωνίες** θ_i . Μπορεί να αποδειχθεί ([2]) ότι τα ζεύγη $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J})$ διατηρούν την συμπλεκτική δομή των μεταβλητών \mathbf{x}, \mathbf{y} , δηλαδή ικανοποιούν τη συμπλεκτική συνθήκη:

$$\mathbf{M}^T(t) \cdot \mathbf{J}_{2N} \cdot \mathbf{M}(t) = \mathbf{J}_{2N} \quad (1.10)$$

όπου $(\theta_{1,0}, \dots, \theta_{N,0}, J_{1,0}, \dots, J_{N,0})$ οι αρχικές συνθήκες και $\mathbf{M}(t)$ ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_{1,0}} & \cdots & \frac{\partial \theta_1}{\partial J_{N,0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J_N}{\partial \theta_{1,0}} & \cdots & \frac{\partial J_N}{\partial J_{N,0}} \end{pmatrix}$$

ενώ ο πίνακας \mathbf{J}_{2N} είναι ο $2N \times 2N$ πίνακας :

$$\mathbf{J}_{2N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix}$$

Με \mathbf{I}_N συμβολίζουμε τον $N \times N$ ταυτοτικό (μοναδιαίο) πίνακα και με $\mathbf{0}_N$ τον $N \times N$ μηδενικό πίνακα. Η γεωμετρική ερμηνεία των μεταβλητών γωνίας δράσης παρουσιάζεται στο σχήμα (1.1) για ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας. Οι γωνίες $\boldsymbol{\theta} \equiv (\theta_1, \theta_2)$ είναι οι γωνιακές συντεταγμένες των ανεξάρτητων κύκλων του τόρου και οι δράσεις $\mathbf{J} \equiv (J_1, J_2)$, που αποτελούν τα ολοκληρώματα της κίνησης, αντιστοιχούν στις ακτινικές αποστάσεις πάνω στον κάθε κύκλο.

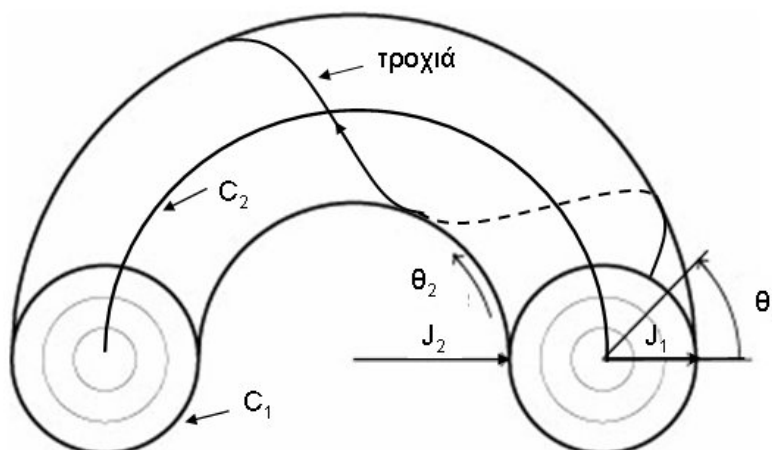
Επιπλέον στην περίπτωση ενός ολοκληρώσιμου χαμιλτονιανού συστήματος αποδεικνύεται (π.χ [62]) ότι η χαμιλτονιανή είναι συνάρτηση μόνο των δράσεων και επομένως γράφεται:

$$H_0 = H_0(\mathbf{J}). \quad (1.11)$$

Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις Hamilton δίνουν:

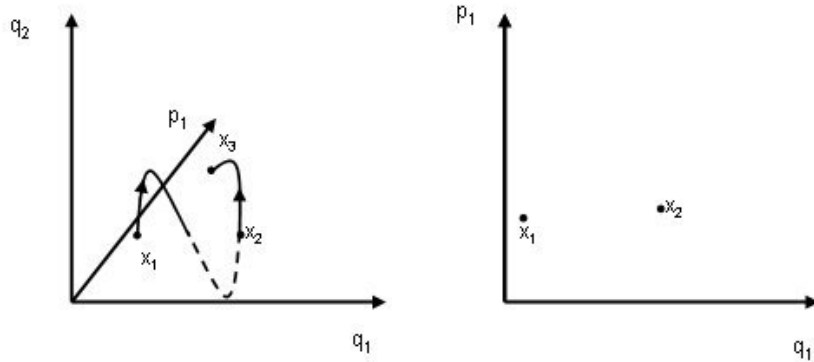
$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}), \quad \dot{\mathbf{J}} = -\frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (1.12)$$

όπου $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J})$ σταθερές. Από την πρώτη των σχέσεων (1.12) προκύπτει ότι οι σταθερές ω_i είναι οι κυκλικές συχνότητες της κίνησης πάνω στον τόρο, και $T_i = 2\pi/\omega_i$ οι αντίστοιχες περίοδοι.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική ερμηνεία των μεταβλητών γωνίας δράσης. Κάθε τροχιά ενός ολοκληρώσιμου συστήματος N βαθμών ελευθερίας βρίσκεται πάνω σ' ένα N -διάστατο τόρο και περιγράφεται πλήρως από τις γωνίες θ_1 και θ_2 .

Μια από τις συνηθέστερες μεθόδους μελέτης των δυναμικών συστημάτων, προκειμένου να αυξήσουμε την δυνατότητα μας για συνολική εποπτεία της δυναμικής, είναι η μελέτη των τομών των τροχιών με κατάλληλη **επιφάνεια τομής Poincaré** (surface of section (Poincaré, 1892)). Στην περίπτωση ενός αυτόνομου χαμιλτονιανού συστήματος δύο βαθμών ελευθερίας, η χαμιλτονιανή έχει τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Επειδή η χαμιλτονιανή είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, η τροχιά κινείται στην επιφάνεια τριών διαστάσεων $q_2 = q_2(q_1, p_1, p_2; E)$ που αντιστοιχεί στη συνθήκη σταθερής ενέργειας $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$ μέσα στον τετραδιάστατο χώρο φάσεων. Εφαρμόζοντας την μέθοδο παίρνουμε την τομή της παραπάνω επιφάνειας με μια δεύτερη κατάλληλα επιλεγμένη επιφάνεια $f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \text{σταθ}$. Η τομή των δύο επιφανειών είναι μία



Σχήμα 1.2: (α) Σχηματική αναπαράσταση μιας τροχιάς στο φασικό χώρο (q_1, q_2, p_1, p_2) . καθώς συναντάει την επιφάνεια τομής **Poincaré** (q_1, p_1) . (β) Τα σημεία της τομής **Poincaré** (q_1, p_1) .

διδιάστατη επιφάνεια και το αποτύπωμα της τροχιάς πάνω στην τομή των δύο επιφανειών ένα σύνολο σημείων. Ένα απλό παράδειγμα επιφάνειας τομής σε συστήματα με ταλαντώσεις είναι η επιφάνεια $q_2 = 0$. Τα ίχνη των τροχιών διατρέχουν τότε το επίπεδο (q_1, p_1) , ενώ η ορμή p_2 δίνεται από τη σχέση $p_2 = p_2(q_1, p_1, q_2 = 0, E)$. Καθορίζοντας το πρόσημο της αντίστοιχης συζυγούς ορμής $p_2 > 0$ ή $p_2 < 0$, το σύνολο των σημείων που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο ορίζουν την **απεικόνιση Poincaré** (q_1, p_1) με $(q_2 = 0, p_2 > 0$ ή $p_2 < 0)$ (σχήμα 1.2).

Στην περίπτωση που το σύστημα έχει ένα ακόμη ολοκλήρωμα, τότε όπως έχουμε ήδη πει η επιφάνεια πάνω στην οποία κινείται η τροχιά είναι διδιάστατη και η τομή Poincaré αποτελείται από σημεία που βρίσκονται στην ίδια κλειστή καμπύλη που τοπολογικά είναι ισοδύναμη με κύκλο. Τέτοιες καμπύλες ονομάζονται **αμετάβλητες καμπύλες**.

Είδαμε πριν πως η κίνηση πάνω σε κάποιο συγκεκριμένο τόρο ενός ολοκληρώσιμου συστήματος γίνεται με συχνότητες ω_j . Όταν δεν υπάρχει συνθήκη συντονισμού των συχνοτήτων:

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i \omega_i = 0, \quad \kappa_i \in \mathbb{Z}, \quad |\kappa| = \sum_{i=1}^n |\kappa_i| \neq 0 \quad (1.13)$$

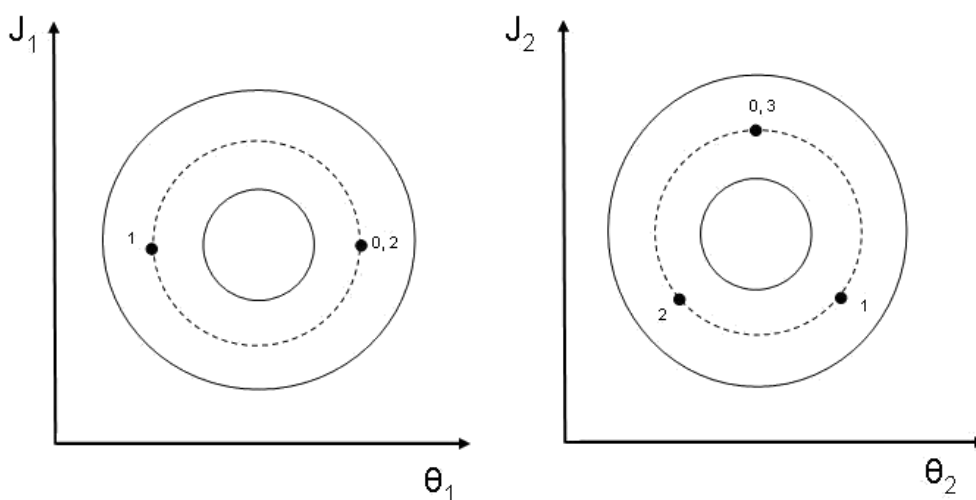
η κίνηση πάνω στον τόρο ονομάζεται **ημιπεριοδική**. Μια ημιπεριοδική τροχιά μπορεί με την πάροδο του χρόνου να πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο σημείο απ' το οποίο ξεκίνησε πάνω στον τόρο αλλά ποτέ δεν θα επιστρέψει στο αρχικό σημείο. Με αυτό τον τρόπο ο τόρος καλύπτεται πυκνά από την τροχιά και η εικόνα της τομής Poincaré παριστάνεται με τη συνεχή καμπύλη του σχήματος (σχήμα 1.3). Επειδή οι τιμές των ω_i εξαρτώνται εν γένει από τις δράσεις J_i είναι δυνατόν να επιτευχθεί συνθήκη συντονισμού αλλάζοντας τον τόρο πάνω στον οποίο βρισκόμαστε. Για να μεταβάλλεται η συχνότητα από τόρο σε τόρο θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial J_1} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial J_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \omega_n}{\partial J_1} & \cdots & \frac{\partial \omega_n}{\partial J_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.14)$$

Η συνθήκη (1.14) λέγεται **συνθήκη μη εκφυλισμού** της χαμιλτονιανής. Στην περίπτωση που υπάρχουν j συνθήκες συντονισμού ($j \leq n - 1$) τότε για κάθε τέτοια συνθήκη η διάσταση του τόρου πάνω στον οποίο κινείται η τροχιά μικραίνει κατά ένα. Για παράδειγμα σε ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας μπορεί να έχουμε μία μόνο συνθήκη συντονισμού την:

$$\kappa_1 \omega_1 + \kappa_2 \omega_2 = 0, (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.15)$$

Στην περίπτωση αυτή η τροχιά μετά από κ_2 κύκλους για την γωνία θ_1 και κ_1 κύκλους για την γωνία θ_2 θα επιστέψει στην αρχική της θέση. Στο σχήμα (1.3) βλέπουμε το ίχνος της τροχιάς στην τομή (θ_1, J_1) και (θ_2, J_2) για την περίπτωση των συντονισμών $\omega_1/\omega_2 = 2/1$ και $\omega_1/\omega_2 = 3/2$ αντίστοιχα. Ο αριθμός των σημείων που αφήνει η τροχιά πάνω στην τομή ονομάζεται **περίοδος της τροχιάς της απεικόνισης** ή και **πολλαπλότητα της περιοδικής τροχιάς**.



Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση των τομών Poincaré (θ_1, J_1) (σχ.(α)) και (θ_2, J_2) (σχ.(β)) ενός ολοκληρώσιμου συστήματος. Οι δυο συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στο αποτύπωμα μίας ημιπεριοδικής τροχιάς πάνω στις τομές (θ_1, J_1) και (θ_2, J_2) , ενώ η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο αποτύπωμα μιας 2/3 περιοδικής τροχιάς πάνω στις δύο τομές.

1.2.3 Χαοτικά συστήματα

Χαοτικά χαρακτηρίζονται γενικά τα συστήματα που εμφανίζουν ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, η παραμικρή δηλαδή μεταβολή των αρχικών συνθηκών οδηγεί το σύστημα σε μία πολύ διαφορετική χρονική εξέλιξη. Η απόκλιση δύο γειτονικών αρχικών συνθηκών σ' ένα χαοτικό σύστημα αυξάνει εν γένει εκθετικά με την πάροδο του χρόνου. Ένας πλήρης ορισμός του χάους, που να συμπεριλαμβάνει όλες τις περιπτώσεις εμφάνισης του, δεν υπάρχει. Ένας από τους ευρύτερα αποδεκτούς ορισμούς για το χάος είναι αυτός του Devaney (1989) σύμφωνα με τον οποίο ένα δυναμικό σύστημα (Ω, \mathbf{f}) (Ω ο μετρικός χώρος και \mathbf{f} διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \Omega$), είναι χαοτικό όταν:

1. Είναι τοπολογικά μεταβατικό (transitive), δηλαδή για κάθε διάδα ανοιχτών συνόλων X_1, X_2 του χώρου Ω υπάρχει χρόνος t τέτοιος ώστε η εικόνα του συνόλου X_1 τη χρονική στιγμή t να έχει τομή με το σύνολο X_2 που να διαφέρει από το κενό σύνολο.
2. Τα περιοδικά του σημεία είναι πυκνά στο χώρο Ω , δηλαδή υπάρχει ένα περιοδικό σημείο $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_p(t + T)$ σε οποδήποτε μικρή απόσταση $\rho > 0$ γύρω από τυχαίο σημείο του Ω .
3. Εμφανίζει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες, δηλαδή υπάρχει t έτσι ώστε η αρχική απόσταση δύο σημείων $d(x_{1,0}, x_{2,0}) = \varepsilon$ του χώρου φάσεων, με ε οποδήποτε μικρό, να γίνεται $d(x_1(t), x_2(t)) = \delta > \varepsilon$.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι για τον ορισμό του χαοτικού συστήματος δεν επαρκεί μόνο η συνθήκη τρία, πράγμα που μπορεί να δείξει κανείς εύκολα θεωρώντας το δυναμικό σύστημα που απορρέει από τη χαμιλτονιανή συνάρτηση $H = \frac{1}{2}(p^2 - x^2)$. Στη περίπτωση αυτή η πλειοψηφία των τροχιών του συστήματος εμφανίζουν ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες (έχουν χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov ίσο με τη μονάδα) παρόλα αυτά το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο και δεν εμφανίζει χάος. Η αντίφαση οφείλεται στο ότι ο φασικός χώρος του συστήματος δεν πληρεί τη συνθήκη της μεταβατικότητας (συνθήκη 1) ή όπως διαφορετικά λέγεται δεν είναι συμπαγής εφόσον οι τροχιές του συστήματος διαφεύγουν.

Μία άλλη σημαντική περίπτωση που δεν καλύπτεται από τον παραπάνω ορισμό είναι εκείνη της χαοτικής σκέδασης. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα δεν είναι τοπολογικά μεταβατικό καθώς ο χώρος στον οποίο εμφανίζεται το χάος είναι υποσύνολο του φασικού χώρου του συστήματος. Οι τροχιές του συστήματος, φεύγοντας από την χαοτική περιοχή, σταματούν να εμφανίζουν χάος έτσι είναι δυνατόν η εικόνα αυτών των τροχιών να έχει τομή το κενό σύνολο για οποδήποτε μεγάλο χρονικό διάστημα με κάποιο άλλο σύνολο του φασικού χώρου. Άλλοι ορισμοί για το χάος έχουν δοθεί από τους Block & Coppel (1992, [7]) και Li & Yorke (1975, [81]).

Για την ποσοτική μελέτη του χάους στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται δείκτες που βασίζονται στο **διάνυσμα απόκλισης** ξ (σχήμα 1.4). Το διάνυσμα ξ στα συνεχή συστήματα υποδηλώνει την απόκλιση δυο γειτονικών τροχιών \mathbf{x} και \mathbf{x}' στο φασικό χώρο (σχήμα 1.4) οπότε:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t) + \xi(t) . \quad (1.16)$$

Η χρονική εξέλιξη του ξ υπολογίζεται γραμμικοποιώντας τη σχέση (1.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}$$

ή

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \xi(t) . \quad (1.17)$$

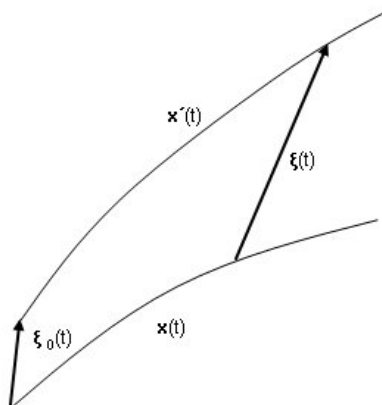
Οι εξισώσεις (1.17) που δίνουν την χρονική εξέλιξη του διανύσματος απόκλισης καλούνται και **εξισώσεις μεταβολών** ενώ ο χώρος στον οποίο ανήκει το ξ ονομάζεται **εφαπτομενικός χώρος**.

Για τις απεικονίσεις, το διάνυσμα απόκλισης ξ_m δίνεται αντίστοιχα από την **εφαπτομενική απεικόνιση**:

$$\xi_{m+1} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m} \xi_m . \quad (1.18)$$

Η ανίχνευση του χάους ενός δυναμικού συστήματος γίνεται εν γένει με τρεις βασικές μεθόδους:

1. την εύρεση των δεικτών χαοτικότητας,



Σχήμα 1.4: Σχηματική αναπαράσταση της απόκλισης δυο γειτονικών τροχιών x και x' στο φασικό χώρο. Τα $\xi_0, \xi(t)$ αναπαριστούν την απόκλιση τις χρονικές στιγμές $t=0$ και t αντίστοιχα.

2. την ανάλυση συχνοτήτων([100]), και
3. την εποπτεία του φασικού χώρου.

Στην παρούσα μελέτη οι υπολογισμοί έγιναν με τη χρήση του χαρακτηριστικού αριθμού Lyapunov (**Lyapunov Characteristic Number, LCN**). Ο δείκτης LCN ορίζεται από τη σχέση:

$$LCN \equiv \limsup_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow \infty}} \frac{\ln(\xi(t)/\xi_0)}{t} \quad (1.19)$$

όπου το supremum είναι μεταξύ όλων των ξ_0 που μπορούμε να πάρουμε αρχικά. Για ένα σύστημα N βαθμών ελευθερίας ο φασικός χώρος έχει διάσταση $2N$ οπότε τα γραμμικώς ανεξάρτητα αρχικά διανύσματα απόκλισης που μπορούμε να θεωρήσουμε έχουν πλήθος $2N$. Ο ορισμός του δείκτη LCN επιτρέπει την απευθείας διάκριση μιας τροχιάς σε χαοτική ή οργανωμένη. Πράγματι αν γράψουμε τη σχέση (1.19) χωρίς το όριο, θεωρώντας το t οσοδήποτε μεγάλο και το ξ_0 οσοδήποτε μικρό, όπως άλλωστε συμβαίνει στους πραγματικούς υπολογισμούς, παίρνουμε:

$$\xi(t) \simeq \xi_0 \exp(LCNt). \quad (1.20)$$

Όταν ο δείκτης Lyapunov είναι θετικός ($LCN > 0$) από την (1.20) προκύπτει η εκθετική αύξηση του $\xi(t)$, οπότε η τροχιά είναι χαοτική. Όταν ο αριθμός LCN είναι μηδέν ($LCN \rightarrow 0$) τότε το $\xi(t)$ μπορεί να αυξάνει το πολύ κατά ένα αλγεβρικό νόμο $|\xi(t)| \simeq \xi_0 + \mathbf{A}t^p$, $\mathbf{A}, p > 0$. Η τροχιά θεωρείται τότε οργανωμένη. Στην περίπτωση των οργανωμένων τροχιών, ο δείκτης LCN μειώνεται ασυμπτωτικά ως $LCN \propto t^{-1}$, όπως είναι φανερό από τη σχέση (1.19). Στις χαοτικές τροχιές ο χαρακτηριστικός χρόνος:

$$T_{LCN} \simeq \frac{1}{LCN} \quad (1.21)$$

ονομάζεται χρόνος Lyapunov και δείχνει την κλίμακα χρόνου μέσα στην οποία εκδηλώνεται ο χαοτικός χαρακτήρας της απόκλισης των γειτονικών τροχιών. Στην πράξη επειδή πάντοτε ο χρόνος στον οποίο ολοκληρώνονται οι τροχιές είναι πεπερασμένος χρησιμοποιούμε τον **πεπερασμένου χρόνου**

αριθμό Lyapunov (Finite Time Lyapunov Characteristic Number FT-LCN) που ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\xi(t)}{\xi_0}. \quad (1.22)$$

Στην περίπτωση αυτή χαρακτηρίζουμε ως χαοτικές τις τροχιές που έχουν αριθμό Lyapunov μεγαλύτερο από μια οριακή τιμή, η οποία προσδιορίζεται από το αντίστροφο του χρόνου στον οποίο κάνουμε την ολοκλήρωση.

Σε ορισμένες περιπτώσεις ο αριθμός Lyapunov υπολογίζεται μέσω του **αριθμού διαστολής α** (stretching number, [131]) ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\xi(t + \Delta t)}{\xi(t)}. \quad (1.23)$$

Ο αριθμός Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FT-LCN) μπορεί να υπολογιστεί κατά μήκος μιας τροχιάς από το άθροισμα των επιμέρους αριθμών διαστολής. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\xi(t)}{\xi_0} \right) \\ &= \frac{1}{n\Delta t} \left(\ln \left(\frac{\xi(\Delta t)}{\xi_0} \right) + \ln \left(\frac{\xi(2\Delta t)}{\xi(\Delta t)} \right) + \dots + \ln \left(\frac{\xi(n\Delta t)}{\xi((n-1)\Delta t)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\xi(\Delta t)}{\xi_0} \right) + \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\xi(2\Delta t)}{\xi(\Delta t)} \right) + \dots + \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\xi(n\Delta t)}{\xi((n-1)\Delta t)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Πέραν του αριθμού LCN υπάρχουν κι άλλοι πιο εξειδικευμένοι δείκτες Lyapunov όπως ο αριθμός Lyapunov καθορισμένου χρόνου κοινής μονάδας (Common Unit Finite Time Characteristic Number CU-F-LCN). Ο πρώτος χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να έχουμε μια εικόνα για την πολυπλοκότητα του χώρου μέσα στον οποίο κινείται μία τροχιά ενώ ο δεύτερος δίνει τον ρυθμό μεταβολής του διανύσματος απόκλισης ανεξάρτητα από την δομή του χώρου (βλ. π.χ. [132]). Άλλες γνωστές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την διάκριση οργανωμένων και χαοτικών τροχιών είναι η μέθοδος του δείκτη ευθυγράμμισης (Smaller Alignment Index **SALI**, ([118]), και η γενικευμένη του εκδοχή (Generalized Alignment Index **GALI**) ([119]), ο δείκτης μέσης εκθετικής αύξησης γειτονικών τροχιών (Mean Exponential Growth Factor of Nearby Orbits **MEGNO**) ([95]), ο γρήγορος δείκτης Lyapunov (Fast Lyapunov Indicator **FLI**) ([53]) και η παραλλαγή αυτού ο ορθογώνιος γρήγορος δείκτης Lyapunov (the Orthogonal Fast Lyapunov Indicator **OFLI**) καθώς και ο σχετικός δείκτης Lyapunov (Relative Lyapunov Indicator **RLI**) ([114]). Συγκριτική μελέτη των παραπάνω δεικτών υπάρχει στην εργασία ([83]).

1.3 Συντονισμοί-Ομοκλινικό Χάος

Σ' ένα χαμιλτονιανό σύστημα ολοκληρώσιμο κατά Arnold-Liouville ο φασικός χώρος καλύπτεται πλήρως από αμετάβλητους τόρους οπότε στο σύστημα εμφανίζεται μόνο περιοδική ή ημιπεριοδική κίνηση. Στα περισσότερα δυναμικά συστήματα συνυπάρχουν, ωστόσο, χαοτικές και οργανωμένες τροχιές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν χαοτικά συστήματα που διαφέρουν λίγο από ένα ολοκληρώσιμο σύστημα. Σε μια τέτοια περίπτωση η χαμιλτονιανή του συστήματος μπορεί να γραφεί

ως:

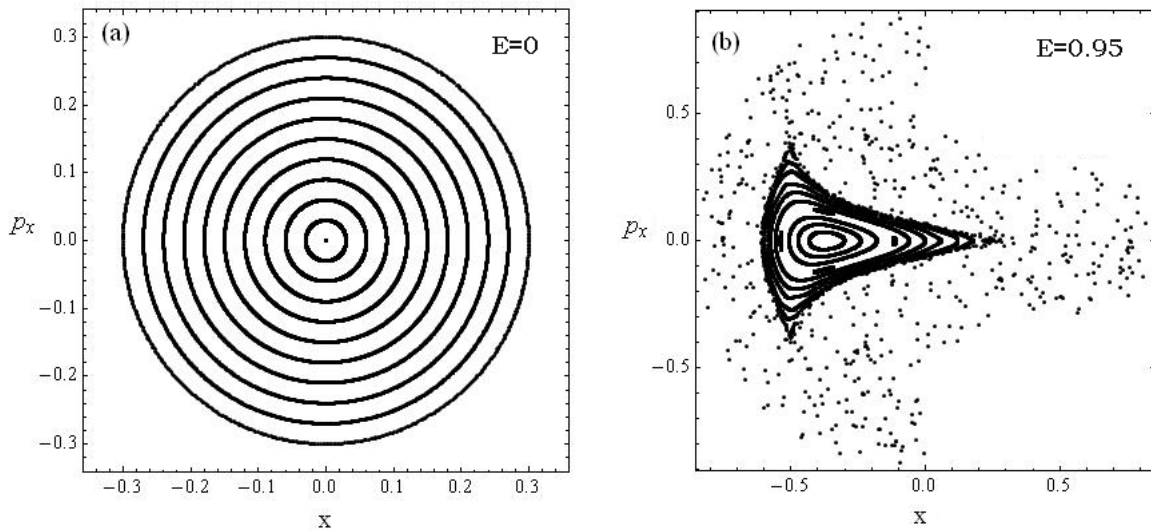
$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{J}) + \varepsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) \quad (1.25)$$

όπου ο όρος H_0 είναι η χαμιλτονιανή του ολοκληρώσιμου συστήματος και εH_1 ο όρος της διαταραχής. Ο όρος της διαταραχής γενικά είναι μικρός σε σχέση με τον όρο H_0 και το μέγεθος του καθορίζεται από την τιμή της λεγόμενης μικρής παραμέτρου ε .

Ένα βασικό ερώτημα που γεννιέται είναι κατά πόσο η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος μπορεί να παραμένει κοντά σε αυτήν του ολοκληρώσιμου όσο αυξάνεται ο παράγοντας της διαταραχής. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δόθηκε τη δεκαετία του '50 με την διατύπωση του θεωρήματος **K.A.M** (Kolmogorov-Arnold-Moser) ([2], [18]). Σύμφωνα με το θεώρημα, σε ένα αυτόνομο χαμιλτονιανό σύστημα N βαθμών ελευθερίας που δεν διαφέρει πολύ από κάποιο ολοκληρώσιμο και είναι εκπεφρασμένο σε μεταβλητές γωνίας - δράσης, υπάρχουν N -διάστατοι αμετάβλητοι τόροι των οποίων το σύνολο έχει μέτρο διάφορο του μηδενός και αντιστοιχούν σε ημιπεριοδικές κινήσεις με συχνότητες ω_i οι οποίοι ικανοποιούν τη διοφαντική συνθήκη:

$$|\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}| > \frac{\gamma}{k^N} \quad (1.26)$$

όπου $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \dots + \omega_N k_N$ με k_1, k_2, \dots, k_N ακέραιους και $|k| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_N| \neq 0$. Η παράμετρος γ είναι μία μικρή ποσότητα που εξαρτάται από το μέγεθος της διαταραχής.



Σχήμα 1.5: (α) Η τομή **Poincaré** του συστήματος *Hénon – Heiles* για διαταραχή $\varepsilon=0$. Όπως μπορούμε να δούμε στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο και η τομή **Poincaré** αποτελείται εξ' ολοκλήρου από αμετάβλητες καμπύλες. (β) Ομοίως για διαταραχή $\varepsilon=0.95$. Ένα μέρος των αμετάβλητων καμπυλών δεν υπάρχει πλέον, ενώ τη θέση τους έχουν πάρει οι χαοτικές ζώνες που περιλαμβάνουν διάσπαρτα σημεία.

Η εξίσωση (1.26) ουσιαστικά λέει ότι οι τόροι που επιζούν είναι εκείνοι που έχουν μία ελάχιστη απόσταση από τη συνθήκη συντονισμού $|\sum_{i=1}^n k_i \omega_i| = 0$. Οι κλειστές καμπύλες του σχήματος (1.5) αντιστοιχούν στις ημιπεριοδικές τροχιές του συστήματος (1.25) ενώ οι τυχαίες μαύρες κουκίδες αντιστοιχούν στις χαοτικές τροχιές του συστήματος. Ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες οι χαοτικές τροχιές τείνουν να καλύψουν ομογενώς μία επιφάνεια.

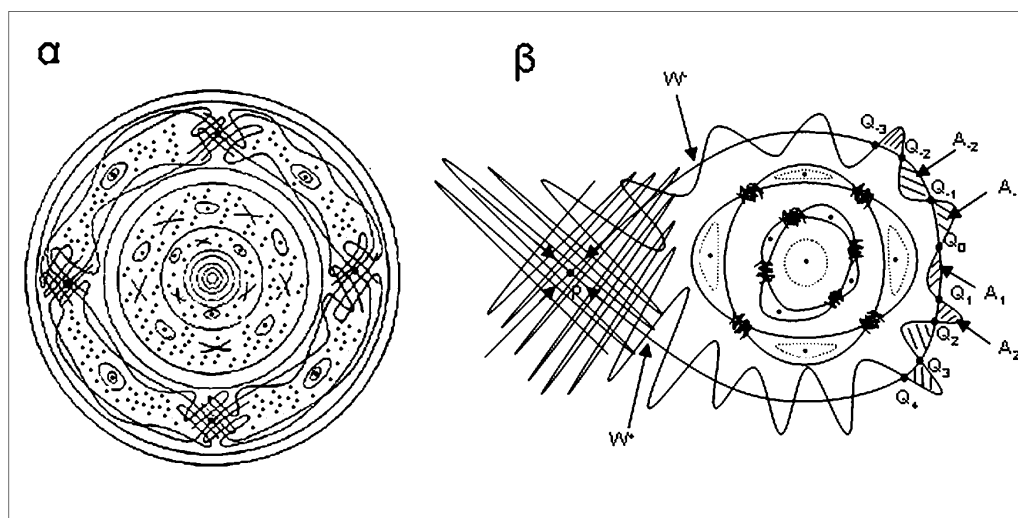
Στη θεωρία διαταραχών, προσπαθούμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς να μετατρέψουμε μια χαμιλτονιανή που είναι συνάρτηση και των γωνιών και των δράσεων $H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$ σε μια συνάρτηση μόνο των νέων δράσεων $H(\mathbf{J}')$. Στην περίπτωση αυτή οι νέες δράσεις αποτελούν τα ολοκληρώματα του συστήματος ενώ οι συχνότητες περιέλιξης πάνω στους αμετάβλητους τόρους δίνονται από τη σχέση $\omega_i(\mathbf{J}') = \partial \mathbf{H}(\mathbf{J}') / \partial J'_i$. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή στα μη-γραμμικά δυναμικά χαμιλτονιανά συστήματα ως μέθοδος Poincaré-Birkhoff ([6]), ενώ η νέα μορφή της χαμιλτονιανής ονομάζεται και κανονική μορφή Birkhoff (Birkhoff Normal Form). Η απαλοιφή των γωνιών από τη χαμιλτονιανή (1.25) μπορεί να γίνει μέσω ενός κανονικού μετασχηματισμού (βλ. [43]). Η μέθοδος Poincaré-Birkhoff δίνει μόνο προσεγγιστικά ολοκληρώματα καθώς όπως έχει αποδεχθεί από τον Poincaré ([106]) οι σειρές που δίνουν τα ολοκληρώματα εν γένει αποκλίνουν. Ένα τέτοιο προσεγγιστικό ολοκλήρωμα για την περίπτωση των γαλαξιών ορίστηκε για πρώτη φορά από τον Contopoulos ([12]).

Μία άμεση συνέπεια του θεωρήματος KAM σε συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας, είναι η ευστάθεια των τροχιών που περιορίζονται από αναλλοίωτους τόρους. Η ευστάθεια οφείλεται στο ότι, σύμφωνα με το θεώρημα της μοναδικότητας για τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων, μία τροχιά που βρίσκεται μέσα σ' ένα τόρο KAM δεν μπορεί να διασχίσει τον τόρο και να μεταβεί σε μεγαλύτερες αποστάσεις. Αντίθετα σε ένα σύστημα τριών ή περισσότερων βαθμών ελευθερίας, αν το μόνο ολοκλήρωμα της κίνησης είναι η ενέργεια, τότε οι τριδιάστατοι τόροι KAM δεν διαχωρίζουν την πενταδιάστατη επιφάνεια σταθερής ενέργειας, στην οποία κινούνται οι τροχιές του συστήματος, σε απομονωμένες περιοχές. Επομένως μία τροχιά, ακόμη κι αν ξεκινήσει πολύ κοντά σε μία ευσταθή περιοδική τροχιά, έχει τη δυνατότητα να απομακρυνθεί από αυτή και να βρεθεί σε μεγάλη απόσταση στο φασικό χώρο χωρίς να χρειαστεί να τμήσει κάποιο από τους τόρους KAM. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **διάχυση Arnold**.

Οι καμπύλες KAM δεν είναι συνεχόμενες αλλά διακόπτονται από χαοτικές ζώνες μέσα στις οποίες διακρίνονται χαρακτηριστικά κάποιες **νησίδες ευστάθειας** (σχήμα 1.6). Η δομή αυτή του φασικού χώρου προβλέπεται από το θεώρημα Poincaré-Birkhoff ([6]) και είναι το αποτέλεσμα της καταστροφής των τόρων που δεν ικανοποιούν την διοφαντική συνθήκη (1.26). Σύμφωνα με το θεώρημα Poincaré-Birkhoff όταν σε μία ολοκληρώσιμη χαμιλτονιανή δύο βαθμών ελευθερίας προστεθεί μία μικρή διαταραχή τότε από τα άπειρα περιοδικά σημεία που σχημάτιζαν μία αναλλοίωτη καμπύλη και άνηκαν σε περιοδικές τροχιές περιόδου m απομένει ένα άρτιο πλήθος περιοδικών σημείων (πολλαπλάσιο του m). Τα περιοδικά σημεία που απομένουν είναι τα μισά ευσταθή και τα άλλα μισά ασταθή. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6α τα ευσταθή σε σχέση με τα ασταθή σημεία είναι τοποθετημένα εναλλάξ και σχηματίζουν τη λεγόμενη **αλυσίδα Birkhoff**. Γύρω από κάθε ευσταθές σημείο σχηματίζονται νησίδες ευστάθειας. Η νησίδα γύρω από την κεντρική περιοδική τροχιά ονομάζεται **κύρια νησίδα ευστάθειας**. Γύρω από τα ασταθή σημεία ξεκινούν οι λεγόμενες **ασυμπτωτικές αναλλοίωτες καμπύλες** (πλέγμα γραμμών) οι οποίες απλώνονται στο χώρο που αφήνουν ελεύθερο οι νησίδες ευστάθειας μεταξύ των καμπυλών KAM. Στην τομή του σχήματος 1.6α εκτός από τις περιοδικές και τις ημιπεριοδικές τροχιές για τις οποίες μιλήσαμε υπάρχουν και οι χαοτικές τροχιές που δηλώνονται με τις τυχαία τοποθετημένες κουκίδες πάνω στο σχήμα. Η φαινομενικά απρόβλεπτη συμπεριφορά των χαοτικών τροχιών στο χώρο καθορίζεται από την μορφολογία των ασυμπτωτικών αναλλοίωτων καμπυλών. Σύμφωνα με τα θεώρημα των Poincaré και Melnikov [63] οι ευσταθείς με τις ασταθείς πολλαπλότητες δεν ενώνονται ομαλά μεταξύ τους αλλά τέμνονται για πρώτη φορά το σημείο Q_0 και στη συνέχεια στα σημεία Q_k και Q_{-k} , $k = 1, 2, 3, \dots$ που αντιστοιχούν σε θετική και αρνητική φορά του χρόνου (σχήμα 1.6β). Οι τομές στην περίπτωση αυτή ονομάζονται **ομοκλιονικές** καθώς οι ασυμπτωτικές καμπύλες αντιστοιχούν στην ίδια περιοδική τροχιά. Επιπλέον εξαιτίας του θεωρήματος Liouville για τη διατήρηση των στοιχειωδών όγκων οι επιφάνειες A_k και A_{-k} διατηρούν το μέγεθός τους κατά την εξέλιξη των χαμιλτονιανών συστημάτων ([82]). Ως συνέπεια

καθώς οι καμπύλες W^+ και W^- τείνουν στο σημείο ισορροπίας, υποχρεώνονται σε ταλαντώσεις εκθετικά αυξανόμενου πλάτους, και τέμνονται μεταξύ τους δημιουργώντας το πολύπλοκο πλέγμα του σχήματος 1.6β.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το χάος στην περιοχή γύρω από τα ασταθή περιοδικά σημεία οφείλεται στο ότι στην περιοχή γύρω από αυτό η δυναμική των τροχιών διαμορφώνεται κάτω από το πολύπλοκο πλέγμα που προκύπτει από τις τομές της ασταθούς και ευσταθούς πολλαπλότητας. Το χάος που παράγεται από την πολυπλοκότητα του ομοκλινικού πλέγματος λέγεται **ομοκλινικό χάος**.



Σχήμα 1.6: (α) Σχηματική αναπαράσταση της τομής **Poincaré** ενός μη ολοκληρώσιμου συστήματος δύο βαθμών ελευθερίας, όπου μπορούμε να διακρίνουμε τις αμετάβλητες καμπύλες **KAM**, τις νησίδες ευστάθειας διαφόρων περιόδων καθώς και αναλλοίωτες πολλαπλότητες των ασταθών περιοδικών σημείων. (β) Λεπτομερής δομή των ασταθών πολλαπλοτήτων W^+ , W^- για ένα κεντρικό ασταθές σημείο. Η συμπεριφορά της τροχιάς στην περιοχή του σημείου P γίνεται ακανόνιστη εξαιτίας των αντιθέτων τάσεων που δημιουργούν κοντά σ' αυτό οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες W^+ και W^- .

Στην περίπτωση τώρα που η διαταραχή αυξηθεί αρκετά είναι δυνατόν οι καμπύλες **KAM** που χωρίζουν τις περιοχές των νησίδων ευστάθειας διαφορετικών συντονισμών να σπάσουν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ασυμπτωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιοδικές τροχιές να μπορούν να τμηθούν. Οι τομές σ' αυτή την περίπτωση ονομάζονται **ετεροκλινικές** και το χάος που προκύπτει **ετεροκλινικό χάος**. Εξαιτίας της καταστροφής των καμπυλών **KAM** που χωρίζουν τις ζώνες των διαφορετικών συντονισμών οι περιοχές συντονισμών δεν είναι πλέον διακριτές. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **επικάλυψη ή σύγκρουση συντονισμών** ([110], [15], [11]). Η σύγκρουση των συντονισμών συμβάλλει στη δημιουργία μεγάλων περιοχών χάους στα χαμιλτονιανά συστήματα. Για την ακρίβεια η ύπαρξη άπειρων περιοδικών τροχιών δεν είναι αρκετή για την εμφάνιση χάους. Άπειρες ασταθείς περιοδικές τροχιές υπάρχουν ακόμη και σε ολοκληρώσιμα χαμιλτονιανά συστήματα όπου έχουμε μόνο οργανωμένες κινήσεις. Για την εμφάνιση χάους είναι απαραίτητη η επικάλυψη συντονισμών. Το μέγεθος των νησίδων και των χαοτικών ζωνών εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος της διαταραχής ε και την τάξη του συντονισμού. Αποδεικνύεται ([13], [14]) ότι σε συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας για το συντονισμό n/m με $n + m > 4$ το μέγιστο εύρος μιας νησίδας ευστάθειας είναι της τάξης:

$$D \sim O(\varepsilon^{(m+n-4)/2}). \tag{1.27}$$

Όταν το μέγεθος της διαταραχής είναι τέτοιο ώστε οι ζώνες των συντονισμών να είναι καλά διαχωρισμένες τότε το χάος είναι περιορισμένο. Με την αύξηση του ε αυξάνεται αρχικά το πλάτος των νησίδων. Ωστόσο με το σπάσιμο των διαχωριστικών καμπύλων KAM μεταξύ των νησίδων δημιουργούνται ενιαίες χαοτικές ζώνες. Ειδικά στην περίπτωση των συντονισμών χαμηλής τάξης, όπου οι ζώνες των νησίδων ευστάθειας έχουν μεγαλύτερο πλάτος όταν η διαταραχή ή η ενέργεια μεγαλώσει, μετά τη σύγκρουση των συντονισμών χαμηλής τάξης, οι χαοτικές περιοχές που δημιουργούνται καταλαμβάνουν πολύ μεγάλες περιοχές του φασικού χώρου.

1.4 Δυναμική γύρω από ακίνητους κόμβους - Διακλαδώσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο εξηγήσαμε ποιοτικά πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος των περιοδικών τροχιών και το είδος ευστάθειας τους στην διαμόρφωση του φασικού χώρου ενός χαμιλιτονιανού δυναμικού συστήματος. Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τα λεγόμενα **κρίσιμα σημεία** (singular points) που εμφανίζονται γενικότερα σε ορισμένα δυναμικά συστήματα. Έστω σύστημα δύο διαστάσεων που περιγράφεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) . \quad (1.28)$$

Εφόσον οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ δεν περιέχουν εκπεφρασμένα το χρόνο το σύστημα (1.28) είναι αυτόνομο. Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1.28) απαλείφεται ο χρόνος και προκύπτει η διαφορική εξίσωση 1ης τάξης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} . \quad (1.29)$$

Η εξίσωση (1.29) περιγράφει το **πεδίο διευθύνσεων** ή αλλιώς **διανυσματικό πεδίο** των λύσεων (τροχιών) του συστήματος στο φασικό χώρο (x, y) . Κάθε αρχική συνθήκη (x_0, y_0) αντιστοιχεί σε μία τέτοια καμπύλη που ονομάζεται **χαρακτηριστική** ή **ολοκληρωτική καμπύλη** του συστήματος. Η φορά κατά την οποία αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή t (χρόνος) σημειώνεται πάνω στις ολοκληρωτικές καμπύλες με ένα βέλος (σχ.1.7)

Σ' ένα τέτοιο σύστημα κρίσιμα λέγονται τα σημεία στα οποία το δεξιό μέλος των εξισώσεων (1.29) συνιστά απροσδιόριστη έκφραση. Μια τέτοια περίπτωση είναι η περίπτωση των σημείων ισορροπίας, για τα οποία ισχύει:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) = 0 . \quad (1.30)$$

Τα σημεία αυτά λέγονται αλλιώς και **σταθερά**.

Όπως φαίνεται από τη σχέση (1.29) στα κρίσιμα σημεία δεν ορίζεται η κλίση του πεδίου διευθύνσεων. Αυτό έχει ως συνέπεια να ξεκινούν ή να καταλήγουν στο σημείο αυτό περισσότερες από μία ολοκληρωτικές καμπύλες.

Στην περίπτωση των σταθερών σημείων, αποδεικνύεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις, πλην μιας που θα δούμε στη συνέχεια, για την εύρεση του είδους ευστάθειας ή αστάθειας αυτών των σημείων αρκεί η γραμμική ανάλυση στα σημεία αυτά ακόμη και όταν οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$, είναι μη γραμμικές. Παίρνοντας τα αναπτύγματα πρώτης τάξης για τις συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ το σύστημα (1.28) μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + by + \dots \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + \dots \end{aligned} \quad (1.31)$$

Το σύστημα (1.31) διαγωνιοποιείται με κατάλληλο μετασχηματισμό $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ και παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \lambda_1 X \\ \frac{dY}{dt} &= \lambda_2 Y. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Τα λ_1 και λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και δίνονται από τη σχέση:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}. \tag{1.33}$$

Οι τιμές των σταθερών a, b, c, d διαμορφώνουν ανάλογα και τις τιμές των λ_1 και λ_2 . Συγκεντρωτικά τα είδη της γραμμικής ευστάθειας ανάλογα με τις τιμές των λ_1 και λ_2 περιέχονται στον πίνακα I.

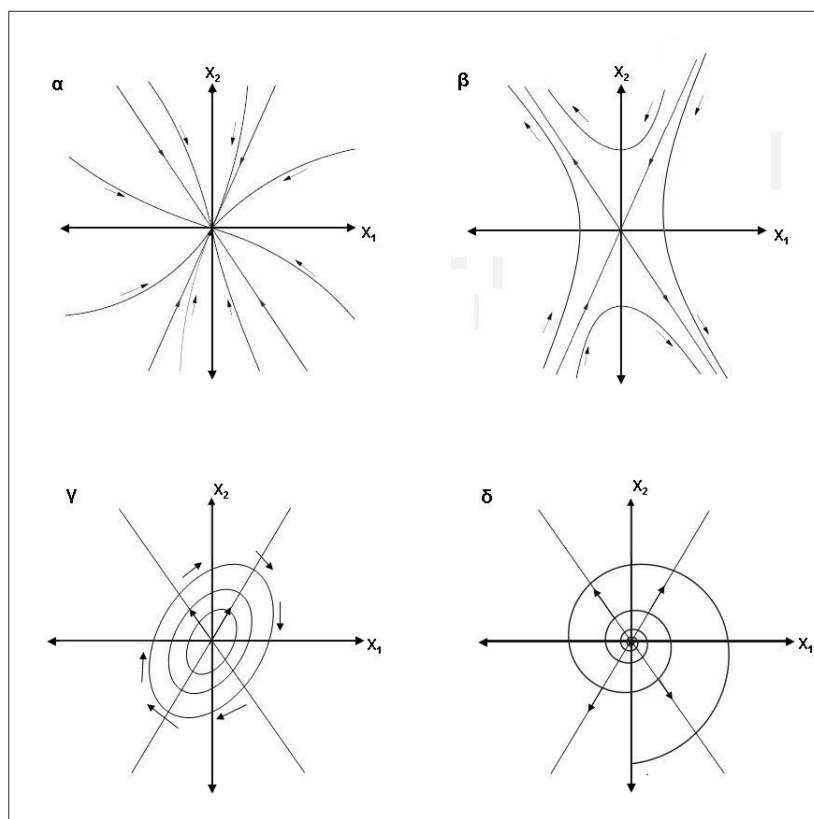
Πίνακας 1.1: Πίνακας γραμμικής ευστάθειας

ιδιοτιμές ($\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$)	κρίσιμο σημείο	ευστάθεια
πραγματικές $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	κόμβος	ευσταθής
πραγματικές $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	κόμβος	ασταθής
πραγματικές $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	σαγματικό σημείο	ασταθής
μιγαδικές $\mu_1, \mu_2 < 0$	σπειροειδές σημείο	ευσταθής
μιγαδικές $\mu_1, \mu_2 > 0$	σπειροειδές σημείο	ασταθής
μιγαδικές $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$	ελλειπτικό	ευσταθής

Για το σύστημα (1.28), εκτός από τα σταθερά σημεία είναι δυνατόν να υπάρχει και ένας άλλου είδους ελκυστής ή απωθητής, ο **οριακός κύκλος**. Πρόκειται για μία κλειστή περιοδική τροχιά που είναι τοπολογικά ισοδύναμη με κύκλο. Όταν ο οριακός κύκλος λειτουργεί σαν ελκυστής λέγεται **ευσταθής οριακός κύκλος** (σχήμα 1.8α), ενώ όταν λειτουργεί σαν απωθητής λέγεται **ασταθής οριακός κύκλος** (σχήμα 1.8β). Οι συνθήκες για την ύπαρξη οριακών κύκλων προσδιορίζονται από το λεγόμενο θεώρημα **Poincaré – Bendixon** ([104]).

Όταν ληφθούν υπόψη και οι μη γραμμικοί όροι των $P(x,y)$ και $Q(x,y)$, τότε σε μια μόνο από τις τέσσερις περιπτώσεις του πίνακα 1.1 το είδος της ευστάθειας μπορεί να αλλάξει. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται μόνο στην τελευταία περίπτωση, του ελλειπτικού σημείου, όπου το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών μηδενίζεται $Re(\lambda) = 0$. Ως συνέπεια, με την προσθήκη των μη γραμμικών όρων οι ελλείψεις μπορούν είτε να αλλάξουν απλά μορφή παραμένοντας όμως κλειστές καμπύλες, είτε να μην διατηρήσουν την ιδιότητα του κέντρου οπότε και μετατρέπονται (συνήθως) σε ευσταθείς ή ασταθείς σπείρες γύρω από το κρίσιμο σημείο.

Το είδος της ευστάθειας ενός κρίσιμου σημείου είναι δυνατόν να μεταβάλλεται με την μεταβολή μιας παραμέτρου του δυναμικού συστήματος (1.28). Κάθε τέτοια αλλαγή ονομάζεται **διακλάδωση**. Οι διακλαδώσεις συνοδεύονται από τη γέννηση είτε νέων κρίσιμων σημείων, είτε νέων περιοδικών τροχιών στη γειτονιά του αρχικού κρίσιμου σημείου.



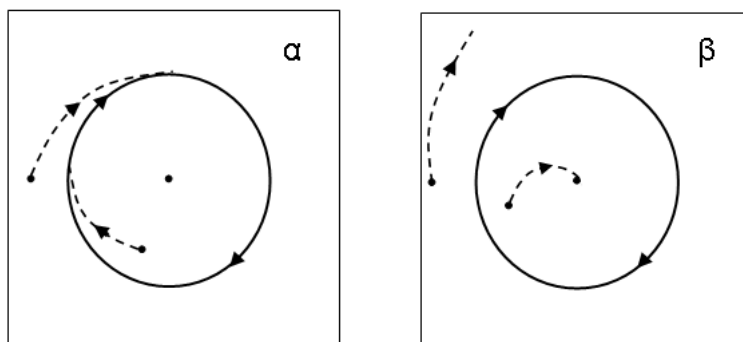
Σχήμα 1.7: (α) Σχηματική αναπαράσταση ευσταθούς κόμβου. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες πλησιάζουν τον ευσταθή κόμβο από όλες τις διευθύνσεις. (β) Σχηματική αναπαράσταση σαγματικού κόμβου. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες πλησιάζουν το σαγματικό σημείο πάνω στην ιδιοδιεύθυνση eig_2 ενώ απομακρύνονται στην ιδιοδιεύθυνση eig_1 . (γ) Σχηματική αναπαράσταση ελλειπτικού κόμβου. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες ούτε πλησιάζουν ούτε απομακρύνονται από το σημείο (δ) Σχηματική αναπαράσταση σπειροειδούς (ευσταθούς) κόμβου. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες πλησιάζουν τον κόμβο αλλά όχι από συγκεκριμένη διεύθυνση.

Μια περίπτωση διακλάδωσης που θα συναντήσουμε στην παρούσα μελέτη είναι η **διακλάδωση Hopf**. Κατά τη λεγόμενη **υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf**, ένα ευσταθές σπειροειδές σημείο μετατρέπεται σε ασταθές, με ταυτόχρονη γέννηση ενός ευσταθούς οριακού κύκλου (σχήμα 1.9β). Αντίθετα στην **υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf**, ένα ασταθές σπειροειδές σημείο μετατρέπεται σε ευσταθές με την ταυτόχρονη εξαφάνιση ενός ασταθή οριακού κύκλου (σχήμα 1.9β).

1.5 Χάος σε συστήματα κινούμενων κόμβων

Σ' ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα της μορφής (1.28) το πεδίο ταχυτήτων μένει χρονικά αναλλοίωτο. Έτσι, όλες οι κινήσεις είναι μονοδιάστατες ολοκληρωτικές καμπύλες που δίνονται από το σύστημα (1.29). Επομένως σ' ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι δυνατή η εμφάνιση χάους.

Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις, όπως αυτές που θα συναντήσουμε στα κεφάλαια 4, 5, όπου το χάος δημιουργείται εξαιτίας **κινούμενων κόμβων** ([41]). Η συσχέτιση του χάους με την ύπαρξη κινούμενων κόμβων έχει μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια ([34], [46], [101], [33], [69], [76], [137], [86], [25], [135], [125]). Στη συνέχεια αυτής της ενότητας θα αναφερθούμε συνοπτικά στο



Σχήμα 1.8: (α) Σχηματική αναπαράσταση ευσταθούς οριακού κύκλου. (β) Σχηματική αναπαράσταση ασταθούς οριακού κύκλου.

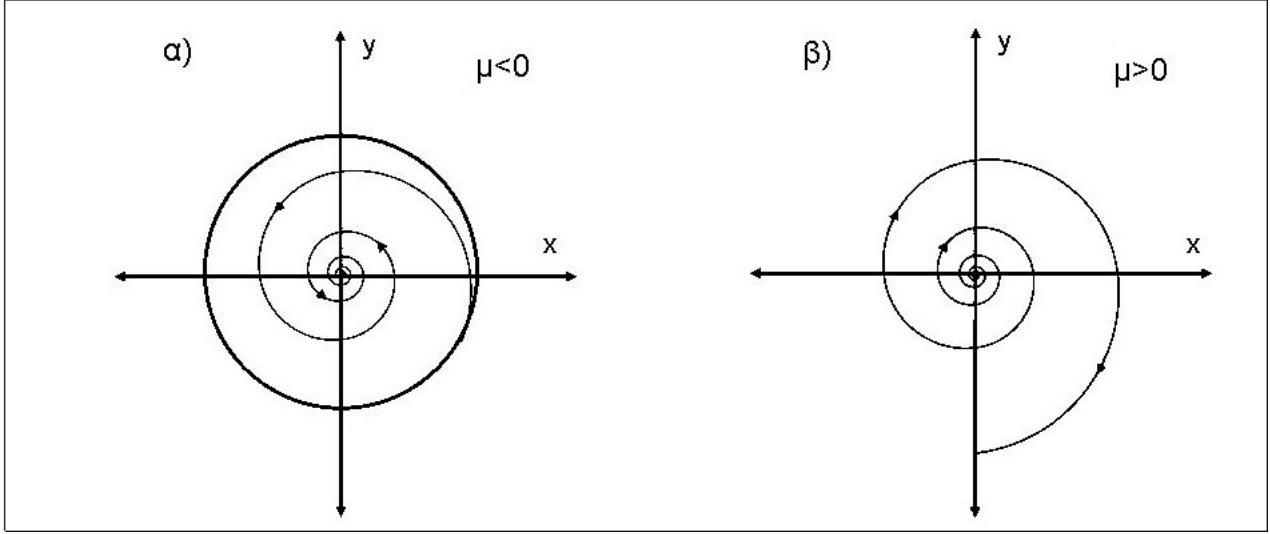
μηχανισμό της δημιουργίας χάους λόγω της κίνησης των κόμβων στο θεσογραφικό χώρο και της μορφολογίας του πεδίου ταχυτήτων γύρω από αυτούς.

Μια περίπτωση εμφάνισης χάους λόγω κινούμενων κόμβων είναι στη λεγόμενη τροχιακή προσέγγιση de Broglie-Bohm της κβαντικής μηχανικής. Όπως θα δούμε στα κεφάλαια 4, 5, σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, θεωρούμε σωμάτια που “ιχνηλατούν” τα κβαντικά ρεύματα πιθανότητας ακολουθώντας “τροχιές” που δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \text{Im}\left(\frac{\vec{\nabla}\psi}{\psi}\right) \quad (1.34)$$

όπου η κυματοσυνάρτηση ψ είναι η λύση της εξίσωσης του *Schrödinger* (βλ. [8]). Οι κόμβοι (x_N, y_N) αντιστοιχούν στα σημεία όπου η κυματοσυνάρτηση εμφανίζει έναν απλό μηδενισμό, δηλαδή μια απλή ρίζα των εξισώσεων $\text{Re}(\psi) = \text{Im}(\psi) = 0$. Η θέση των σημείων αυτών αλλάζει εν γένει στο χρόνο, παρακολουθώντας τις χρονικές μεταβολές της κυματοσυνάρτησης $\psi(\mathbf{x}, t)$. Ωστόσο, αν “παγώσουμε” το χρόνο σε κάποιο στιγμιότυπο, μπορούμε να λάβουμε τη στιγμιαία μορφή του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων γύρω από ένα κόμβο, όπως αυτή διαμορφώνεται σε σύστημα αναφοράς κινούμενο με τη στιγμιαία ταχύτητα του κόμβου. Αποδεικνύεται ([41]) ότι η στιγμιαία δομή του διανυσματικού πεδίου είναι η ακόλουθη: δίπλα σε κάθε κόμβο υπάρχει ένα στάσιμο σημείο όπου η ταχύτητα επίσης μηδενίζεται στιγμιαία. Το στάσιμο σημείο είναι πάντα υπερβολικό (X-point). Εξαιτίας της συνύπαρξης του κόμβου και του υπερβολικού σημείου δημιουργείται κάθε φορά μια χαρακτηριστική δομή από την ροή του πεδίου ταχυτήτων. Η μορφή των τροχιών γύρω από τη διάταξη του κόμβου και του ασταθούς σημείου φαίνεται στο σχήμα 1.10α. Όπως βλέπουμε, από το υπερβολικό σημείο (X-point) αναφύονται δύο κλάδοι της ευσταθούς και δύο κλάδοι της ασταθούς αναλλοίωτης πολλαπλότητας. Από τους τέσσερις κλάδους μόνο ένας κάθε φορά συνδέεται με το κομβικό σημείο. Συγκεκριμένα, όταν ο κόμβος λειτουργεί ως ελκυστής (attractor) τότε ο ένας ασταθής κλάδος των πολλαπλοτήτων από το σημείο X καταλήγει στον κόμβο (σχ. 1.10α), ενώ όταν ο κόμβος λειτουργεί ως απωθητής (repellor) τότε ένας κλάδος της ευσταθούς πολλαπλότητας συνδέεται με τον κόμβο. Η μορφή που δημιουργείται από τη ροή των ολοκληρωτικών καμπυλών (σχ. 1.10α) γύρω από τον κόμβο (nodal point) και το υπερβολικό σημείο (X-point) συμπεριλαμβανομένων των σημείων ονομάζεται “σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου” (nodal-point-X-point complex) ([40], [19], [41]).

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύσσεται στην αναφορά [41], αν σε ένα σύστημα δύο διαστάσεων ορίσουμε τη θέση του κόμβου $(x_0(t), y_0(t))$ τότε η ταχύτητα ενός κινούμενου συστήματος ανα-



Σχήμα 1.9: Σχηματική αναπαράσταση μιας υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf. Ο ασταθής οριακός κύκλος απορροφάται από την ευσταθή εστία (α) η οποία μετατρέπεται σε ασταθή (β).

φοράς με κέντρο τον κόμβο ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς (x, y) θα είναι $\vec{V} \equiv (V_x, V_y) = (x_0, y_0)$. Οι εξισώσεις κίνησης για το κινούμενο σύστημα αναφοράς γράφονται ([41]):

$$(\dot{u}, \dot{v}) = \text{Im}\left(\frac{\nabla_{u,v}\psi}{\psi}\right) - (V_x, V_y). \quad (1.35)$$

Αναπτύσσοντας την κυματοσυνάρτηση γύρω από το $(x_0(t), y_0(t))$ μέχρι όρους δεύτερης τάξης, έχουμε:

$$\begin{aligned} \psi'(u, v; z_0, R_0) &= \psi_0(t) + (a_{10} + ib_{10})u + (a_{01} + ib_{01})v \\ &+ \frac{1}{2}(a_{20} + ib_{20})u^2 + \frac{1}{2}(a_{02} + ib_{02})v^2 + (a_{11} + ib_{11})uv + \dots \end{aligned} \quad (1.36)$$

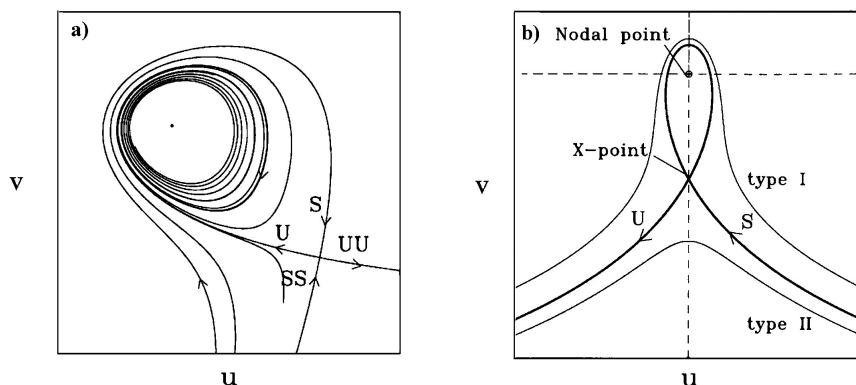
όπου $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, ενώ οι συντελεστές a_{ij} , και b_{ij} είναι πραγματικοί αριθμοί.

Περαιτέρω ανάλυση μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της αδιαβατικής προσέγγισης. Η αδιαβατική προσέγγιση για $t = t_0$ ισχύει σε περιοχές του χώρου στις οποίες οι ταχύτητες du/dt , dv/dt είναι μεγάλες σε σχέση με τις παραγώγους των a_{ij} , και b_{ij} , καθώς και σε σχέση με τις ταχύτητες V_x και V_y . Έτσι μπορούμε να “παγώσουμε” τα a_{ij} , b_{ij} , V_x και V_y στις τιμές που έχουν τη στιγμή $t = t_0$ και να μεταχειριστούμε προσεγγιστικά το σύστημα εξισώσεων (1.35) σαν αυτόνομο. Στην περίπτωση αυτή, γράφοντας το σύστημα (1.35) σε πολικές συντεταγμένες $u = R \cos \phi$ και $v = R \sin \phi$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{c_2 R^2 + c_3 R^3 + c_4 R^4 + \dots}{G} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d_0 + d_1 R + d_2 R^2 + \dots}{G} \end{aligned} \quad (1.37)$$

όπου οι συντελεστές c_j και d_j εξαρτώνται από τους συντελεστές a_{ij} , και b_{ij} , τις ταχύτητες (V_x, V_y) , καθώς και δυνάμεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos \phi$ και $\sin \phi$. Ο παρονομαστής G δίνεται από την σχέση:

$$G = R^2[(a_{10}^2 + b_{10}^2) \cos^2 \phi + (a_{01}^2 + b_{01}^2) \sin^2 \phi + (a_{01}a_{10} + b_{01}b_{10}) \sin 2\phi] + O(R^3) \quad (1.38)$$



Σχήμα 1.10: (α) Το σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου για την κυματοσυνάρτηση του συστήματος που περιγράφεται στην ([40]). Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας καταλήγει στον κόμβο (nodal point) εφόσον το κομβικό σημείο είναι ελκυστής. Στην περίπτωση που ο κόμβος θα ήταν ασταθής θα κατέληγε σε αυτόν ο κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας (σχ.1.11α). (β) Η έντονη μαύρη γραμμή αναπαριστά την διαχωριστική γραμμή (separatrix) που περνάει από το υπερβολικό σημείο. Οι λεπτές γραμμές πάνω και κάτω από τη διαχωριστική καμπύλη αναπαριστούν μια τροχιά τύπου I και τύπου II αντίστοιχα.

Από τις εξισώσεις (1.37) προκύπτει ότι οι γραμμές ροής γύρω από τη θέση του κόμβου ορίζουν σπείρες, δηλαδή:

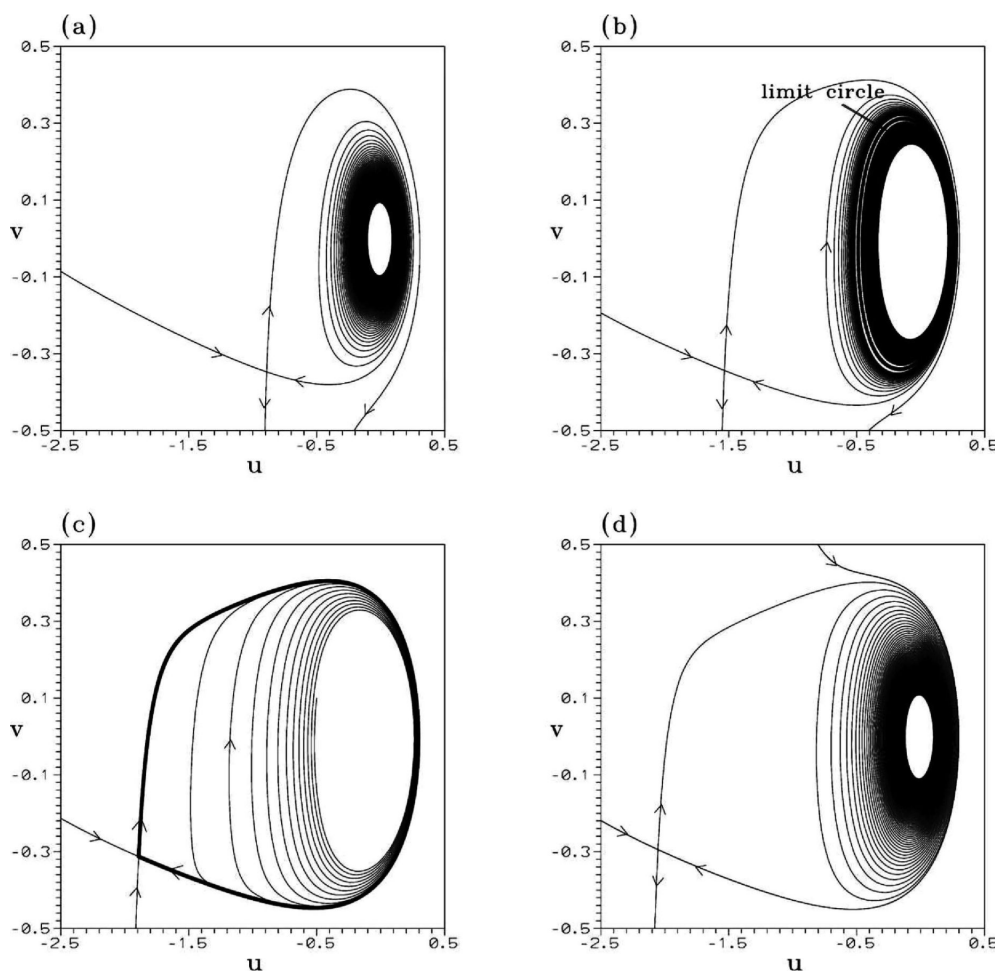
$$\bar{R}(\phi) = \frac{R_0}{\sqrt{1 - 2R_0^2 \langle f_3 \rangle (\phi - \phi_0)}} \quad (1.39)$$

όπου \bar{R} η μέση τιμή του R για μία περίοδο της γωνίας ϕ , R_0 και ϕ_0 η απόσταση από τον κόμβο και η γωνία τη χρονική στιγμή t_0 ενώ η ποσότητα $\langle f_3 \rangle$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\langle f_3 \rangle (a_{ij}, b_{ij}, V_x, V_y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{c_3}{d_0} - \frac{c_2 d_1}{d_0^2} \right) d\phi \quad (1.40)$$

με $i + j = 0, 1, 2$. Η εξίσωση (1.39) αναπαριστά μία σπείρα που καταλήγει στο $R = 0$, δηλαδή στον κόμβο όταν $\phi \rightarrow 0$ (εάν $\langle f_3 \rangle < 0$), ή όταν $-\phi \rightarrow 0$ (εάν $\langle f_3 \rangle > 0$). Έτσι ο κόμβος, ανάλογα με το αν το πρόσημο του $\langle f_3 \rangle$ είναι θετικό ή αρνητικό, μπορεί να είναι ελκυστής ή απωθητής. Εξάιρεση έχουμε όταν $V_x = 0$ και $V_y = 0$ οπότε ο κόμβος είναι ένα απλό κέντρο της στιγμιαίας ροής.

Η αλλαγή του κόμβου από ελκυστή σε απωθητή, κατά την κίνησή που προκαλείται από τη μεταβολή της ποσότητας $\langle f_3 \rangle$ καθώς η κυματοσυνάρτηση μεταβάλλεται χρονικά. Η αλλαγή αυτή στη δομή του πορτρέτου της στιγμιαίας ροής μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία διακλάδωση τύπου Hopf ([40], [19]). Στο σχήμα 1.11 ο οριακός κύκλος που δημιουργείται λειτουργεί ως απωθητής οπότε οι τροχιές στο εσωτερικό του απομακρύνονται από αυτόν με τη μορφή σπειρών καταλήγοντας στον κόμβο. Όμοια οι τροχιές έξω από αυτόν απομακρύνονται και πάλι έχοντας σπειροειδή μορφή, αλλά καταλήγουν αυτή τη φορά στο ασταθές σημείο. Ο οριακός κύκλος με την πάροδο του χρόνου ανοίγει και καταλήγει στη διαχωριστική καμπύλη (separatrix) που φαίνεται στο σχήμα 1.11γ. Στιγμιαία το σύμπλεγμα του κόμβου και του υπερβολικού σημείου μετατρέπεται σε κλειστό βρόγχο. Αμέσως



Σχήμα 1.11: Το σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου για τέσσερα διαφορετικά χρονικά στιγμιότυπα στο μοντέλο της εργασίας ([40]). Μια διακλάδωση Hopf λαμβάνει χώρα στο στιγμιότυπο του σχήματος (β) η οποία οδηγεί στο σχηματισμό ενός οριακού κύκλου (αποθητή) ο οποίος χάνεται όταν φτάσει την διαχωριστική καμπύλη του σχήματος. (γ) Μετά από αυτό ο κόμβος γίνεται ελκυστής (δ) καθώς διατηρείται η φορά της ροής που είχε δημιουργηθεί προηγουμένα (βλ. [40]).

μετά ο οριακός κύκλος καταστρέφεται και ο κόμβος γίνεται ελκυστής οπότε οι σπείρες διατηρούν τη φορά της κίνησης που είχαν αποκτήσει κατά την δημιουργία του οριακού κύκλου (1.11δ.).

Προκειμένου να μελετηθεί πώς μεταβάλλεται ο τοπικός αριθμός διαστολής των τροχιών που προσεγγίζουν τους κινούμενους κόμβους, οι Efthymiou et al. (2009, [41]) εισήγαγαν ένα απλό μοντέλο που προσεγγίζει τη συμπεριφορά των τροχιών σε κάθε τέτοια προσέγγιση. Θεωρώντας, για απλότητα, ότι ο κόμβος έχει μόνο οριζόντια ταχύτητα, η γενική μορφή των εξισώσεων κίνησης είναι:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{-Av + \dots}{Bu^2 + 2Cuv + Dv^2 + \dots} - \dot{x}_0 \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{Au + \dots}{Bu^2 + 2Cuv + Dv^2 + \dots} \end{aligned} \quad (1.41)$$

όπου $A = a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}$, $B = a_{10}^2 + b_{10}^2$, $C = a_{01}a_{10} + b_{10}b_{01}$ και $D = a_{01}^2 + b_{01}^2$. Ο παρονομαστής στην εξίσωση (1.41) είναι πάντα μια θετικά ορισμένη ποσότητα, ενώ η θέση του υπερβολικού σημείου

είναι $(u_x, v_x) = (0, -AD^{-1}x_0^{-1})$.

Εάν αγνοήσουμε τους όρους ανώτερης τάξης στον αριθμητή των εξισώσεων (1.41) ο κόμβος συμπεριφέρεται ως κέντρο της ροής και όχι ως το σημείο όπου καταλήγει η σπειροειδής ροή. Παρόλα αυτά, για τη μελέτη της σκέδασης μιας τροχιάς από το σύμπλεγμα κόμβου - ασταθούς σημείου, η προσέγγιση αυτή δεν επηρεάζει την ανάλυση καθώς οι τροχιές που σκεδάζονται δεν διεισδύουν στο εσωτερικό της διαχωριστικής καμπύλης που σχηματίζουν η ασταθής και ευσταθής αναλλοίωτη πολλαπλότητα. Αντί γι' αυτό, επιταχύνονται κατά μήκος των ασυμπτωτικών διευθύνσεων και τελικά σκεδάζονται. Αριθμητικά διαπιστώνεται ότι αυτού του είδους οι σκεδάσεις συνιστούν τον κύριο μηχανισμό που εισάγει χάος στο σύστημα. Οι τροχιές που περνάνε έξω από τη διαχωριστική καμπύλη (1.10β) διακρίνονται σε τροχιές τύπου I και τροχιές τύπου II ([41]). Οι τροχιές τύπου I περιβάλλουν το βρόγχο της διαχωριστικής καμπύλης, ενώ η τροχιές τύπου II περνούν κάτω από το υπερβολικό σημείο χωρίς να περιβάλλουν τη διαχωριστική καμπύλη. Αγνοώντας τους όρους ανώτερης τάξης στον αριθμητή των εξισώσεων (1.41), (βλ. [41]) προκύπτει το απλοποιημένο σύστημα:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{-v}{u^2 + v^2} - \dot{x}_0 \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{u}{u^2 + v^2}.\end{aligned}\quad (1.42)$$

Στο μοντέλο (1.42) είναι δυνατό να μελετηθεί αναλυτικά η χρονική εξέλιξη του διανύσματος της απόκλισης ξ . Αποδεικνύεται ότι η αύξηση του διανύσματος απόκλισης για δύο γειτονικές τροχιές της ροής (1.42) κοντά στην ευσταθή και την ασταθή πολλαπλότητα του σημείου X ακολουθεί τον νόμο:

$$\frac{\xi}{\xi_0} \sim \frac{1}{x_0 \delta v_1} \quad (1.43)$$

όπου ξ_0 και ξ είναι τα μήκη των διανυσμάτων απόκλισης πριν και μετά τη σκέδαση και δv_1 είναι η αρχική απόσταση της τροχιάς από την ευσταθή πολλαπλότητα του σημείου X όταν βρισκόμαστε ακόμη σε μεγάλη απόσταση από το σύμπλεγμα. Η ποσότητα αυτή λέγεται και παράμετρος κρούσης, κατ' αναλογία με τη συνήθη σκέδαση. Είναι σαφές από την τελευταία σχέση ότι το χάος στο σύστημα αυξάνεται όταν η ταχύτητα του κόμβου είναι μικρή. Μάλιστα όπως αποδεικνύεται ([41]) το μέγεθος του κόμβου R_X , η απόσταση δηλαδή ανάμεσα στον κόμβο και το υπερβολικό σημείο, μεταβάλλεται ως $R_X \sim V^{-1}$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η χαοτική σκέδαση είναι πιο αποτελεσματική στην περίπτωση που το σύμπλεγμα είναι σχετικά μεγάλο. Η εμφάνιση του χάους επομένως οφείλεται στο ασταθές σημείο αλλά η αποτελεσματικότητα του μηχανισμού δημιουργίας του χάους εξαρτάται από το πόσο κοντά το σύστημα θα πλησιάσει στο υπερβολικό σημείο, αλλά και από την ταχύτητα των κόμβων. Στη γενική περίπτωση η προσέγγιση των δύο σημείων μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρή οπότε και η αποτελεσματικότητα του μηχανισμού παραγωγής χάους μέγιστη.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω, είναι ότι το ποσοστό των χαοτικών τροχιών σε σχέση με τις οργανωμένες για ένα τέτοιο σύστημα σχετίζεται όχι μόνο με τον αριθμό και αλλά και το μέγεθος των εμφανιζόμενων συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου.

1.6 Στόχος και δομή της διατριβής

Μετά από την προηγούμενη εισαγωγική ανάλυση, αναφέρουμε τώρα τον κεντρικό στόχο της παρούσας διατριβής που είναι: η μελέτη των τροχιών και της στοχαστικότητας σε συστήματα που

εμφανίζουν επαναλαμβανόμενες “σκεδάσεις”, δηλαδή κοντινές προσεγγίσεις προς ένα ή περισσότερα ιδιάζοντα σημεία της ροής.

Η διατριβή χωρίζεται σε δυο βασικά μέρη. Στο πρώτο μέρος (κεφάλαια 2, 3) εξετάζουμε την επίδραση που έχει μία σημειακή ανωμαλία (μελανή οπή) στη δυναμική ενός ελλειπτικού και ενός ραβδωτού γαλαξία αντίστοιχα. Στο δεύτερο μέρος (κεφάλαια 4, 5) μελετούμε με τη βοήθεια της μεθόδου de Broglie-Bohm την περίπτωση σκεδάσεων τροχιών από κβαντικούς στροβίλους που έχουν τη δομή των συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου.

Πιο αναλυτικά η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

Στο **κεφάλαιο 2** μελετούμε πως η εισαγωγή μιας μελανής οπής στο κέντρο ενός γαλαξία επιδρά στους δείκτες χασοκότητας των τροχιών που πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στο κέντρο. Η στατιστική μελέτη των χαρακτηριστικών εκθετών Lyapunov έχει δείξει ότι η τιμή του μέσου εκθέτη Lyapunov L τους εξαρτάται από τη μάζα της μελανής οπής μέσω ενός νόμου δύναμης $L \propto m^p$. Ο εκθέτης p παίρνει τιμή πλησίον του 0.5. Αναπτύσσουμε ένα απλό αναλυτικό μοντέλο με το οποίο εξηγούνται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων και ερμηνεύεται θεωρητικά η σχέση μεταξύ της μάζας της μελανής οπής και του μέσου αριθμού Lyapunov των χασοκών τροχιών.

Στο **κεφάλαιο 3** μελετούμε τη σκέδαση τροχιών από κεντρικές μελανές οπές σε ραβδωτούς γαλαξίες. Χρησιμοποιώντας ένα αναλυτικό μοντέλο για το δυναμικό που αντιστοιχεί στον ραβδωτό γαλαξία NGC3992 επιβεβαιώσαμε αριθμητικά την σχέση $L \propto m^p$ ($p \simeq 0.5$). Η βασική διαφορά μεταξύ ενός ελλειπτικού κι ενός ραβδωτού γαλαξία είναι ότι στην δεύτερη περίπτωση λόγω της περιστροφής του γαλαξία δεν υπάρχουν τροχιές τύπου κουτιού. Εντούτοις, με τη βοήθεια των φασικών πορτρέτων για το συγκεκριμένο μοντέλο δείχνουμε ότι υπάρχουν τροχιές παγιδευμένες γύρω από τους βασικούς συντονισμούς 2/1 και 4/1 οι οποίες περνούν τόσο κοντά από το γαλαξιακό κέντρο ώστε να δέχονται την επιρροή της μελανής οπής. Οι εν λόγω τροχιές μετατρέπονται έτσι σε χασοκές, συμμετέχοντας, με τον μηχανισμό που εξηγείται στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην διαμόρφωση της σχέσης $L \propto m^p$ και στην περίπτωση των ραβδωτών γαλαξιών.

Στο **κεφάλαιο 4** μελετούμε την επίδραση κινούμενων κόμβων στο κβαντικό ισοδύναμο σύστημα του διδιάστατου δυναμικού του αρμονικού ταλαντωτή και στην περίπτωση του δυναμικού Hénon-Heiles. Όπως έχει δειχθεί, η εμφάνιση του χάους σχετίζεται με την ύπαρξη των κινούμενων κόμβων. Επιπλέον μελετούμε την επίδραση της συνύπαρξης οργανωμένων και χασοκών τροχιών στο φαινόμενο της λεγόμενης “κβαντικής χαλάρωσης”.

Στο **κεφάλαιο 5** τέλος μελετούμε τροχιές που σκεδάζονται από κβαντικούς κόμβους στο πρόβλημα της περίθλασης φορτισμένων σωματιδίων μέσα από λεπτούς κρυστάλλους. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι οι σκεδάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μία “τροχιακή” ερμηνεία του φαινομένου της περίθλασης. Επίσης, προτείνεται μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή στο λεγόμενο πρόβλημα των “κβαντικών χρόνων άφιξης”.

Μέρος Ι

Σκέδαση από μελανή οπή

Κεφάλαιο 2

Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ελλειπτικών γαλαξιών

2.1 Γενικά

Η δυναμική μελέτη των ελλειπτικών γαλαξιών βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην μελέτη τροχιών μέσα σε δυναμικά που αντιστοιχούν σε διάφορες ελλειψοειδείς κατανομές ύλης. Σ'ένα ελλειπτικό γαλαξία συνυπάρχουν εν γένει οργανωμένες και χαοτικές τροχιές. Οι οργανωμένες τροχιές μπορούν τα ταξινομηθούν σε τέσσερις βασικούς τύπους ([120]): α) τις **τροχιές κουτιού (Box orbits)**, β) τις **εσωτερικές τροχιές σωλήνα περί το μεγάλο άξονα (Inner Long Axis Tube orbits, ILAT)** γ) τις **τροχιές σωλήνα περί το μικρό άξονα (Short Axis Tube orbits SAT)** και δ) τις **εξωτερικές τροχιές σωλήνα περί το μεγάλο άξονα (Outer Long Axis Tube orbits, OLAT)**(σχήμα 2.1).

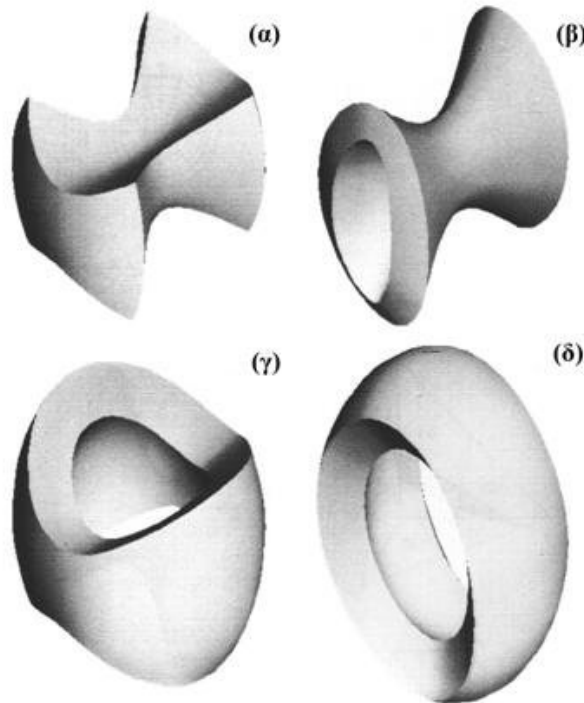
Το βασικό χαρακτηριστικό των τροχιών τύπου κουτιού είναι ότι μπορούν να περάσουν αυθαίρετα κοντά από το κέντρο του γαλαξία. Οι τροχιές αυτές γεμίζουν μία περιοχή που μοιάζει με παραλληλόγραμμο με την μεγάλη του πλευρά κατά μήκος του μεγάλου άξονα και την μικρή πλευρά κατά μήκος του μικρού άξονα. Επομένως οι τροχιές κουτιού ενισχύουν γενικά την τριαξονική μορφολογία των γαλαξιών.

Οι εσωτερικές τροχιές τύπου σωλήνα περί το μεγάλο άξονα μοιάζουν με τις τροχιές κουτιού μόνο που αφήνουν μία κενή περιοχή κατά μήκος του μεγάλου άξονα. Σε ορισμένες περιπτώσεις το κενό είναι πολύ μικρό και οι τροχιές μπορούν να περάσουν πολύ κοντά από το κέντρο. Γενικά υποστηρίζουν τριαξονικά ή επιμήκη (prolate) αξισυμμετρικά μοντέλα γαλαξιών.

Οι τροχιές τύπου σωλήνα περί το μικρό άξονα προέρχονται από την περιοδική τροχιά που περιβάλλει τον μικρό άξονα του συστήματος και από μορφολογικής άποψης υποστηρίζουν μία περισσότερο πεπλατυσμένη (oblate) μορφή του γαλαξία.

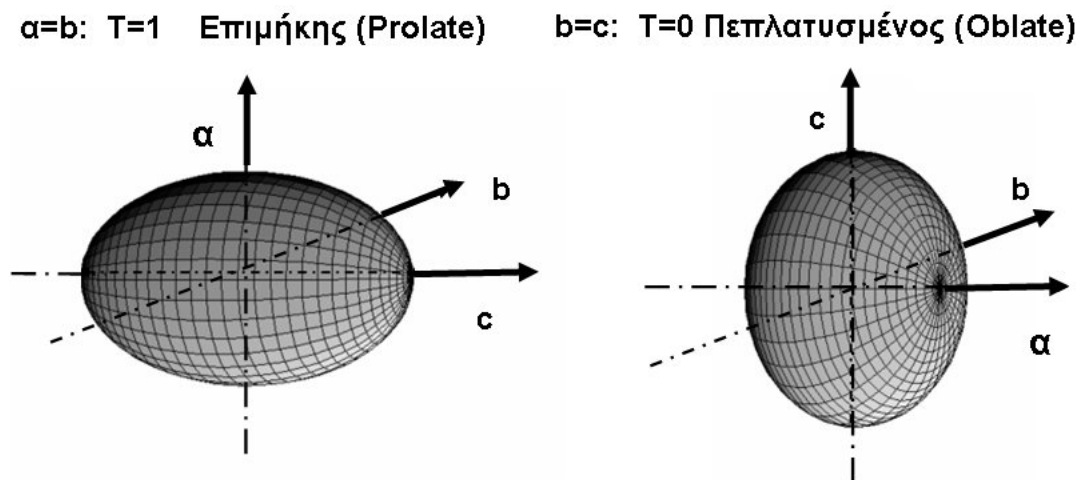
Τέλος οι εξωτερικές τροχιές τύπου σωλήνα περί το μεγάλο άξονα δεν μπορούν να περάσουν πολύ κοντά από το κέντρο του γαλαξία. Και οι εξωτερικές τροχιές τύπου σωλήνα περί το μεγάλο άξονα είναι συμβατές με τριαξονικές και επιμήκεις μορφολογίες.

Πέρα από τις παραπάνω κύριες οικογένειες τροχιών μπορούν να υπάρξουν υψηλότερης τάξης περιοδικές τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αναλογίες συχνοτήτων ως προς τον κάθε άξονα ([90], ([91])). Στην περίπτωση που οι τροχιές αυτές είναι ευσταθείς συνοδεύονται από μία ομάδα ημιπεριοδικών τροχιών τύπου σωλήνα που περιελίσσονται γύρω από αυτές. Οι τροχιές αυτού του τύπου ονομάζονται **τροχιές τύπου σωλήνα ανώτερων συντονισμών (High Order Resonant Tubes, HORT)**.



Σχήμα 2.1: Οι τέσσερις βασικές κατηγορίες τροχιών στο μοντέλο του τέλειου ελλειψοειδούς ([120]). (α) τροχιές τύπου κουτιού (*Box orbits*), (β) εσωτερικές τροχιές σωλήνα περί το μεγάλο άξονα (*ILAT*), (γ) τροχιές σωλήνα περί το μικρό άξονα (*SAT*) και (δ) εξωτερικές τροχιές σωλήνα περί το μεγάλο άξονα (*OLAT*).

Από τη μελέτη των μοντέλων με αξονική συμμετρία, αλλά και των τριαξονικών μοντέλων όπως το τέλειο ελλειψοειδές, δημιουργήθηκε η πεποίθηση ότι οι οργανωμένες τροχιές κυριαρχούν στους ελλειπτικούς γαλαξίες ενώ οι χαοτικές συμμετέχουν σε μικρό ποσοστό ([121]). Μετά όμως τις ακριβείς παρατηρήσεις του διαστημικού τηλεσκοπίου Hubble, όπου φάνηκε ότι στο κέντρο πολλών γαλαξιών η πυκνότητα της ύλης δεν είναι σταθερή αλλά αυξάνεται απότομα με νόμο της μορφής $\rho \propto r^{-\gamma}$, διαπιστώθηκε ότι δεν είναι δυνατή η κατασκευή αυτοσυνεπών μοντέλων χωρίς την ύπαρξη ενός ικανού ποσοστού χαοτικών τροχιών ([116], [49], [80], [55], [45]). Τα προφίλ αυτά πυκνότητας επικράτησε να λέγονται **απότομα προφίλ** (*cuspy density profiles*). Για $\gamma < 1$ έχουμε τα λεγόμενα ασθενώς απότομα (*weak cusp*) και για $1 < \gamma < 2$ τα ισχυρά απότομα προφίλ πυκνότητας (*strong cusp*). Επιπλέον, στις προσομοιώσεις τα μοντέλα που παρουσιάζουν αυξημένα ποσοστά χαοτικών τροχιών εμφανίζονται να μην είναι απολύτως στατικά, καθώς οι χαοτικές τροχιές εμφανίζουν διάχυση στο χώρο φάσεων ([87], [89]). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η υπέρθεση των τροχιών να δημιουργεί γαλαξιακά μοντέλα που αλλάζουν σχήμα με το χρόνο ([71], [68], [92]).



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση (α) επιμήκους και (β) πεπλατυσμένης μορφολογικής δομής ελλειπτικού γαλαξία.

2.2 Αέναη εξέλιξη-Αριθμοί Lyapunov και μάζα μελανής οπής

Όλοι οι παραπάνω τύποι τροχιών απαντώνται σε συστήματα που δεν εμφανίζουν κανένα είδος ανωμαλίας των βαρυτικών δυνάμεων στο κέντρο τους. Ωστόσο, υπάρχουν σήμερα αρκετές αποδείξεις ότι τα κέντρα των περισσοτέρων γαλαξιών φιλοξενούν μελανές οπές με μάζες από 10^6 έως $10^9 M_{\odot}$ ([50], [77], [55], [45], [78], [79], [130], [56]). Το ποσοστό των ελλειπτικών γαλαξιών που περιέχουν μελανή οπή εκτιμάται περίπου στο 97%. Ο σχηματισμός μιας μελανής οπής στο κέντρο ενός γαλαξία επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την δυναμική του και προκαλεί φαινόμενα τα οποία έχουν μελετηθεί εκτενώς τις τελευταίες τρεις δεκαετίες (βλ. [88], [87], [91], [51]).

Μεταξύ των άλλων, ο σχηματισμός της μελανής οπής στα κέντρα των γαλαξιών αποτελεί έναν από τους μηχανισμούς πρόκλησης της αέναης εξέλιξής τους (secular evolution). Πράγματι όπως έχει προκύψει επανειλημμένα από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων N-σωμάτων σε τριαξονικούς γαλαξίες σε κατάσταση ισορροπίας ([67], [68], [17], [72], [98], [70], [99]), με την εισαγωγή μιας μελανής οπής στο κέντρο ξεκινάει μια διαδικασία μορφολογικής μεταβολής του σχήματος των προσομοιωσόμενων συστημάτων η οποία οδηγεί σε μια νέα κατάσταση ισορροπίας. Η αέναη εξέλιξη έχει ως αποτέλεσμα συστήματα με επιμήκη αρχική μορφή (prolate) (σχ.2.2α) να εξελίσσονται σταδιακά σε συστήματα με πιο πεπλατυσμένη γεωμετρία (oblate) (σχ.2.2β). Μια φυσική ερμηνεία αυτού του φαινομένου δίνεται στις εργασίες ([132], [17], [71], [72], [133]), στη βάση της τροχιακής δυναμικής που διέπει τις κινήσεις των σωμάτων των οποίων οι τροχιές επηρεάζονται από την επίδραση της μελανής οπής.

Τα δυναμικά αποτελέσματα μιας κεντρικής συγκέντρωσης μάζας εξαρτώνται, από τη **σχετική παράμετρο μάζας**, δηλαδή την αναλογία $m = M_{CMC}/M_G$ της συνολικής μάζας της κεντρικής συγκέντρωσης M_{CMC} προς τη συνολική μάζα του γαλαξία M_G . Η μάζα M_{CMC} γενικά περιλαμβάνει όλους τους τύπους μάζας που μπορεί να συμμετάσχουν στη δημιουργία μιας κεντρικής συγκέντρωσης, όπως μια μελανή οπή, πυκνά σμήνη αστέρων, μεγάλες μοριακές συγκεντρώσεις, κ.λ.π..

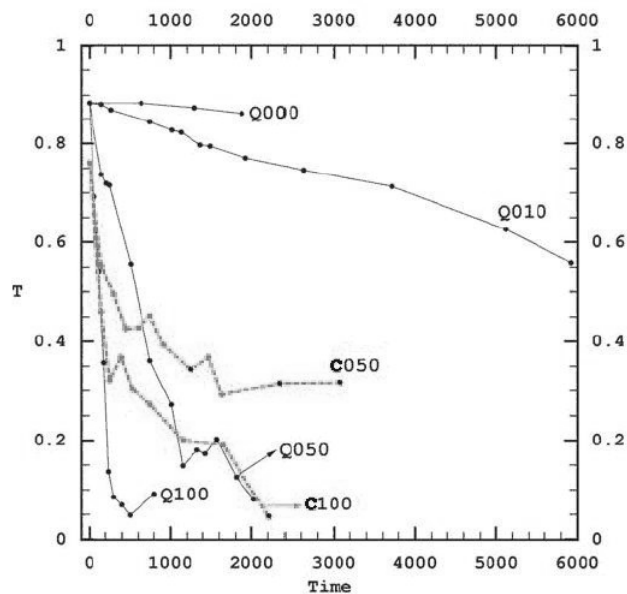
Η αέναη εξέλιξη ενός γαλαξία εξαιτίας της δημιουργίας της μελανής οπής στις προσομοιώσεις N-σωμάτων αποτυπώνεται και στην χρονική εξέλιξη του **δείκτη τριαξονικότητας** T . Ο δείκτης

αυτός μας δίνει απευθείας μια συνολική εικόνα για τη μορφή του γαλαξία και για κάθε ισόπυκνη επιφάνεια με κύριους άξονες a , b , c , ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$T = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}. \quad (2.1)$$

Η τιμή του T κυμαίνεται μεταξύ $0 < T < 1$. Η τιμή 1 αντιστοιχεί σε επιμήκη σφαιροειδή για τα οποία $a = b$ ενώ η τιμή 0 αντιστοιχεί στα πεπλατυσμένα σφαιροειδή για τα οποία $c = b$ (σχήμα 2.2). Για μια δεδομένη ελλειπτικότητα (συγκεκριμένο λόγο c/a), η μέγιστη τριαξονικότητα αντιστοιχεί στην τιμή $T = 0.5$.

Την εξέλιξη της τριαξονικότητας παρατηρούμε στις αριθμητικές προσομοιώσεις όπως π.χ. στην εργασία [71] (σχήμα 2.3). Τα διάφορα συστήματα που εμφανίζονται στο σχήμα 2.3 αντιστοιχούν σε προσομοιώσεις N -σωμάτων, με αρχικά τριαξονική κατανομή και την εισαγωγή μελανής οπής διαφόρων μαζών στο κέντρο. Παρατηρούμε ότι η αύξηση της μάζας της μελανής οπής επιταχύνει την εξέλιξη της μορφής του γαλαξία. Στα συστήματα με μάζα μεγαλύτερη από $m = 0.005$ βλέπουμε ότι σε μερικούς χρόνους Hubble το σύστημα καταλήγει σε κατάσταση πεπλατυσμένης ισορροπίας καθώς η τιμή του T γίνεται σχεδόν ίση με μηδέν. Παρόμοια αποτελέσματα έχουν βρεθεί στις εργασίες ([107], [108], [67], [68]) όπου οι προσομοιώσεις ελλειπτικών γαλαξιών με μελανή οπή δίνουν συστήματα με τριαξονική διαμόρφωση στην κατάσταση ισορροπίας τους.



Σχήμα 2.3: Χρονική εξέλιξη του δείκτη τριαξονικότητας T για διάφορα συστήματα N -σωμάτων για διάφορες τιμές της μάζας της μελανής οπής ($m=0$, $m=0.001$, $m=0.005$ και $m=0.01$) (βλ. λεπτομέρειες στην εργασία [71]).

Συνοψίζοντας, το βασικό σενάριο για την διαδικασία της αέναης εξέλιξης που παρουσιάζεται στις παραπάνω εργασίες έχει ως ακολούθως: αρχικά, η εισαγωγή της μελανής οπής (σταδιακή ή μη) έχει ως αποτέλεσμα τη μετατροπή τις πλειοψηφίας των τροχιών κουτιού σε χαοτικές. Το φαινόμενο

αυτό προκαλεί μια αδιαβατική μεταβολή του δυναμικού, κι έτσι επιδρά στη μορφή του φασικού χώρου, ιδιαίτερα στην περιοχή ενεργειών που αντιστοιχούν σε τροχιές του κεντρικού τμήματος του γαλαξία. Η κύρια τοπολογική μεταβολή στη δομή του φασικού χώρου αφορά την αύξηση του όγκου της οργανωμένης περιοχής που αντιστοιχεί στις τροχιές τύπου σωλήνα περί το μικρό άξονα ([73]). Καθώς ο όγκος του φασικού χώρου που αντιστοιχεί σε τροχιές αυτού του τύπου αυξάνεται, ορισμένες χαοτικές τροχιές συλλαμβάνονται αδιαβατικά εντός του ορίου της περιοχής των οργανωμένων τροχιών ([71]). Η σύλληψη αυτή επιφέρει νέα μεταβολή στη μορφή του συστήματος, η οποία ανατροφοδοτεί θετικά την αέναη εξέλιξη, καθώς πιο εύκολα πλέον επέρχεται η μετατροπή των χαοτικών τροχιών σε τροχιές τύπου SAT. Τα συστήματα που σχηματίζονται με αυτό το μηχανισμό είναι πολύ κοντά σε πεπλατυσμένα συστήματα. Επιπλέον στα τελικά στάδια το ποσοστό των χαοτικών τροχιών είναι σημαντικά μικρότερο απ' ό,τι στα αρχικά συστήματα, ακόμη και από τα συστήματα πριν από την εισαγωγή της μελανής οπής.

Προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί ο ρυθμός της αέναης εξέλιξης που προκύπτει με τον παραπάνω μηχανισμό, οι Kalapotharakos και Voglis ([73], [72]) εισήγαγαν μία νέα ποσότητα, μετρήσιμη στις προσομοιώσεις N-σωμάτων, την οποία ονόμασαν *ενεργό χαοτική ορμή* (effective chaotic momentum). Η ποσότητα αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$L = \frac{\Delta N_w}{N_{total}} L_w \quad . \quad (2.2)$$

Στην εξίσωση (2.2) L_w είναι η μέση τιμή του χαρακτηριστικού αριθμού Lyapunov (LCN) ενός υποσυνόλου των χαοτικών τροχιών που δημιουργούνται στο σύστημα μετά την εισαγωγή της κεντρικής μάζας. Αυτές είναι οι τροχιές που βρίσκονται σε ένα παράθυρο εύρους ± 0.3 γύρω από το σημείο όπου η κατανομή $P(\log L_j)$ των εκθετών Lyapunov L_j εμφανίζει το τοπικό της μέγιστο. Ο ορισμός αυτός είναι απαραίτητος γιατί, όπως θα δούμε πιο κάτω, η κατανομή $P(\log L_j)$ έχει δύο μέγιστα, και η αέναη εξέλιξη προκαλείται κυρίως από από τις χαοτικές τροχιές που σχηματίζουν την ψηλότερη από της δύο κορυφές της κατανομής. Απ' την άλλη, ΔN_w είναι η συνολική μάζα (πλήθος σωμάτων) μέσα στο ίδιο παράθυρο, ενώ N_{total} είναι η συνολική μάζα του θεωρούμενου συστήματος.

Η χρήση της ενεργού χαοτικής ορμής L επιτρέπει την ποσοτικοποίηση αρκετών φαινομένων που σχετίζονται με το ρυθμό αέναης εξέλιξης. Ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα ([73]) είναι ότι εμφανίζεται να υπάρχει ένα γενικό κατώφλι $K=L_{th}$ σε όλες τις προσομοιώσεις, τέτοιο ώστε όταν η τιμή της $L(t)$ γίνει μικρότερη από την L_{th} πρακτικά η αέναη εξέλιξη σταματά. Επιπλέον, στα συστήματα όπου αρχικά ισχύει $L < L_{th}$ δεν εμφανίζεται σημαντική αέναη εξέλιξη εντός ενός χρόνου Hubble.

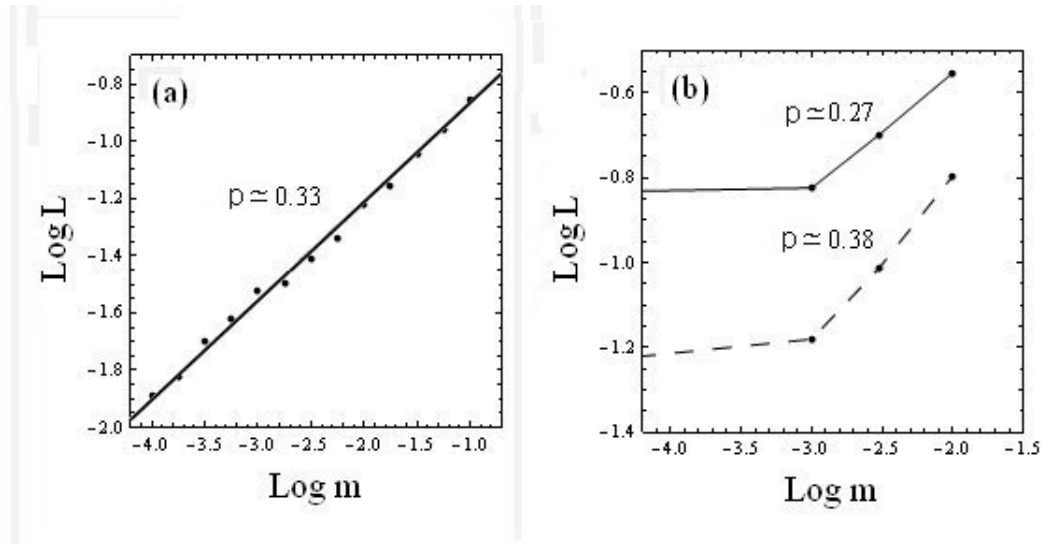
Από τους δύο παράγοντες του ορισμού (2.2), το ποσοστό των χαοτικών τροχιών $\frac{\Delta N_w}{N_{total}}$ προφανώς εξαρτάται από την επιλογή των αρχικών συνθηκών της προσομοίωσης N-σωμάτων, δηλαδή από την αρχική συνάρτηση κατανομής. Ωστόσο, έχει διαπιστωθεί αριθμητικά ότι ο δεύτερος παράγοντας L_w εξαρτάται κυρίως από μία διαφορετική παράμετρο, δηλαδή *την τιμή της σχετικής παραμέτρου μάζας m της κεντρικής μελανής οπής*. Στην εργασία ([73]) η εξάρτηση αυτή καθορίστηκε από τα τροχιακά δεδομένα των σωματιδίων των προσομοιώσεων. Βρέθηκε ότι υπάρχει μια αξιοσημείωτα καλή εξάρτηση **νόμου δύναμης** μεταξύ αυτών των μεγεθών και συγκεκριμένα:

$$L_w \propto m^p, \quad p \simeq 0.5. \quad (2.3)$$

Παρόμοια αποτελέσματα βρίσκουμε βασιζόμενοι στους υπολογισμούς των ([87]) και ([74]). Συγκεκριμένα οι Kandrup και Sideris υπολόγισαν τους αριθμούς Lyapunov για ένα δοκιμαστικό μοντέλο για το δυναμικό που αντιστοιχεί σε ένα τριαξονικό δυναμικό Dehnen (αναρμονικός ταλαντωτής) στον οποίο προστίθεται το εξομαλυμένο δυναμικό μιας κεντρικής μάζας. Αξιοποιώντας τα δεδομένα της εργασίας τους υπολογίζουμε τα αποτελέσματα του σχήματος 2.4α. Όπως μπορούμε να

παρατηρήσουμε ο μέσος Lyapunov των χαοτικών τροχιών συνδέεται με τη μάζα της μελανής οπής με νόμο δύναμης. Η κλίση στην περίπτωση αυτή προκύπτει $p \simeq 0.33$. Οι διαφορές των κλίσεων μεταξύ των διαφόρων αριθμητικών πειραμάτων οφείλονται ενδεχομένως στο διαφορετικό τρόπο δειγματοληψίας των τροχιών.

Στο σχήμα 2.4β βλέπουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα όπως αυτά έχουν εξαχθεί από την επεξεργασία της μελέτης των Merritt και Valluri ([87]). Οι Merritt και Valluri υπολόγισαν τους αριθμούς Lyapunov για δυναμικό που αντιστοιχεί στην πυκνότητα ενός γαλαξία, τόσο στην περίπτωση που ο γαλαξίας διαθέτει κεντρικό πυρήνα όσο και στην περίπτωση απότομου προφίλ. Στο σχήμα βλέπουμε τα αποτελέσματα για τη μέση τιμή των δύο δεικτών Lyapunov που υπολόγισαν, οι οποίες αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες πάνω στην επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας για έναν γαλαξία με σταθερή πυκνότητα στο κέντρο. Οι ευθείες στα διαγράμματα αποτελούν κάθε φορά τη βέλτιστη προσαρμογή στα σημεία και οι κλίσεις τους σημειώνονται πάνω στα διαγράμματα. Στο σχήμα 2.4β αντιστοιχούν δυο διαφορετικές ευθείες διότι κάθε μια αφορά τον υπολογισμό για τον ένα από τους δύο δείκτες Lyapunov των τροχιών στις ορθογώνιες ως προς την τροχιά διευθύνσεις (2.4β). Επιπλέον στην περίπτωση του σχήματος 2.4β παρατηρούμε την εμφάνιση στο διάγραμμα ενός οριζόντιου τμήματος. Τούτο οφείλεται στο ότι η επιλογή του δυναμικού είναι τέτοια ώστε να έχουμε χάος ακόμη και για μηδενική μάζα της μελανής οπής.



Σχήμα 2.4: (α) Ο λογάριθμος της μέσης τιμής του αριθμού Lyapunov ($\log L$) σε συνάρτηση με τη μάζα της μελανής οπής για τις χαοτικές τροχιές ενός συστήματος (α) για ένα τριαξονικό δυναμικό τύπου *Dehnen* (βλ. δεδομένα από εργασία [74]) και (β) με σταθερή πυκνότητα στο κέντρο (βλ. δεδομένα από εργασία [87]). Και στις δυο περιπτώσεις τα αριθμητικά δεδομένα δίνουν για την σχέση του μέσου LCN των τροχιών και της μάζας ένα παρόμοιο νόμο δύναμης.

Προκειμένου να μελετηθεί κατά πόσο η υπόθεση του νόμου δύναμης $L \propto m^p$ είναι γενική στα συστήματα με κεντρικές μελανές οπές, στην εργασία ([73]) προτάθηκε να μελετηθούν οι τροχιές ενός πολύ απλού αναλυτικού μοντέλου για το δυναμικό του γαλαξία με κεντρική μελανή οπή. Το δυναμικό αυτό αποτελείται από αρμονικούς τεταρτοβάθμιους όρους διαταραχής στους οποίους προσθέτουμε ένα εξομαλυνμένο δυναμικό σημειακής κεντρικής μάζας. Μια πρώτη μελέτη αυτού του συστήματος ([73]) έδωσε μια τιμή του p κοντά στο 0.5. Στη συνέχεια εξετάζουμε με λεπτομερή αριθμητικά πειράματα την τιμή του p και προτείνουμε μια θεωρητική ερμηνεία για το νόμο (2.3).

2.3 Αριθμητικός έλεγχος του νόμου $L \propto m^p$ σε απλό μοντέλο δυναμικού

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με τη σχέση (2.3) για την περίπτωση ενός απλού αναλυτικού μοντέλου δυναμικού που αντιστοιχεί σε ελλειπτικό γαλαξία με ομαλό προφίλ πυκνότητας στο κέντρο. Σε ένα τέτοιο δυναμικό η δύναμη που δέχεται ένας αστέρας κοντά στο κέντρο αυξάνεται περίπου γραμμικά με την ακτίνα ([139], [140], [58]). Πράγματι, θεωρώντας τη συνολική μάζα στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας r :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (2.4)$$

και υποθέτοντας ότι η πυκνότητα στο κέντρο ακολουθεί ένα νόμο δύναμης $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ βρίσκουμε:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^{2-\alpha} dr' = \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha} . \quad (2.5)$$

Στην περίπτωση που η πυκνότητα παραμένει σταθερή μέχρι μία ακτίνα r_c (αν $r < r_c$) έχουμε $\rho = \text{const}$ ($\alpha=0$) και η δύναμη που δέχεται μια δοκιμαστική μάζα m_{test} από το δυναμικό του γαλαξία στην απόσταση r , γράφεται:

$$F_c = -\frac{4\pi G \rho_c r^3 m_{\text{test}}}{3r^2} = -(4/3)\pi G \rho_c m_{\text{test}} r . \quad (2.6)$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι η δύναμη αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση, δηλαδή η κίνηση είναι αρμονική.

Η βαρυτική δύναμη τώρα, που προέρχεται από το κεντρικό αντικείμενο δίνεται από τη σχέση:

$$F_m = \frac{G m m_{\text{test}}}{r^2} . \quad (2.7)$$

Από τις σχέσεις (2.6) και (2.7), θεωρώντας μονάδες στις οποίες η μάζα του γαλαξία είναι ίση με μονάδα και ορίζοντας τη λεγόμενη “ακτίνα του πυρήνα” $r_c = (4\pi r_c^3/3)^{-1/3}$ η δύναμη της κεντρικής μάζας γίνεται ίση με τη δύναμη του υπόλοιπου γαλαξία σε απόσταση:

$$r_m = m^{1/3} r_c . \quad (2.8)$$

Η ακτίνα του γαλαξιακού πυρήνα θεωρείται της τάξης της μονάδας $r_c \simeq 1$ στο σύστημα μονάδων που θα χρησιμοποιήσουμε.

Σε αντιστοιχία προς τα παραπάνω, θα μελετήσουμε τις κινήσεις σε ένα απλό μοντέλο βαρυτικού δυναμικού που περιγράφει έναν γαλαξία με ομαλό προφίλ πυκνότητας. Το μοντέλο δίνεται από τον τύπο:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 z^2 + \varepsilon(xz + xy + y^2)^2 - m/\sqrt{r^2 + d^2} \quad (2.9)$$

όπου x, y, z , είναι οι συντεταγμένες θέσης στο φυσικό χώρο, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ η απόσταση της τροχιάς από το γαλαξιακό κέντρο και m η μάζα της μελανής οπής. Η παράμετρος d στο δυναμικό της σημειακής μάζας που αντιπροσωπεύει την μελανή οπή εξομαλύνει το δυναμικό σε μικρές αποστάσεις προκειμένου να αποφευχθούν οι απειρισμοί στις περιπτώσεις εκείνες που η τροχιά περνάει

πολύ κοντά από την κεντρική μάζα. Η συνάρτηση του δυναμικού (2.9) αποτελεί ένα συνδυασμό του δυναμικού ενός τριδιάστατου, περίπου αρμονικού, ταλαντωτή και του δυναμικού μιας σημειακής μάζας. Σημειώνουμε ότι η αρμονική προσέγγιση του δυναμικού στο κέντρο ισχύει για όλα τα προφίλ πυκνότητας με εκθέτη $a < 1$. Επιπλέον, προκειμένου να εισαγάγουμε μια αναρμονικότητα στο δυναμικό έχουμε προσθέσει ένα όρο διαταραχής τέταρτης τάξης ως προς τις συντεταγμένες θέσης. Σημειώνουμε ότι ο συγκεκριμένος όρος είναι πιο γενικός από τους όρους τέταρτης τάξης με άρτια συμμετρία οι οποίοι είναι οι μόνοι δυνατοί όροι σε ένα γαλαξία με τρία επίπεδα συμμετρίας. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, το γεγονός αυτό δεν επιδρά στο βασικό αποτέλεσμα, της εξάρτησης δηλαδή του αριθμού Lyapunov των χαοτικών τροχιών από την κεντρική μάζα.

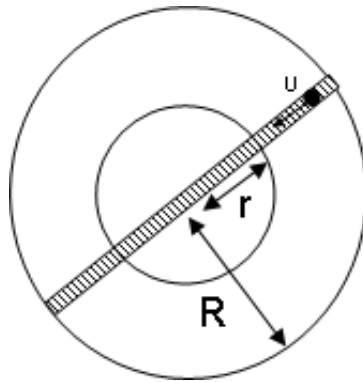
Η χαμιλτονιανή που διέπει την κίνηση των σωμάτων είναι:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 z^2 + \varepsilon(xz + xy + y^2)^2 - m/\sqrt{r^2 + d^2} . \quad (2.10)$$

Για τους υπολογισμούς επιλέξαμε ένα σύνολο συχνοτήτων με άρρητη σχέση έτσι ώστε να αποφύγουμε φαινόμενα συντονισμού, δηλαδή $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}$, $\omega_3 = \sqrt{3}$, ενώ μια τυπική τιμή για την παράμετρο d είναι $d = 10^{-3}$. Οι τιμές της μικρής παραμέτρου ε κυμαίνονται από 0.01 έως 0.5. Όπως θα δούμε στη συνέχεια η παράμετρος της διαταραχής ε , και κατ' επέκταση ο όρος αναρμονικότητας του δυναμικού του γαλαξία, δεν έχει ουσιαστική επίδραση στα αποτελέσματα. Τα μεγέθη d , ε και ω θεωρούνται αδιάστατα καθώς έχουν τεθεί για πρακτικούς λόγους όλες τις φυσικές σταθερές του συστήματος μας ίσες με τη μονάδα. Συγκεκριμένα ίσες με τη μονάδα έχουν ληφθεί η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας G , η γαλαξιακή ακτίνα r_c και η συνολική μάζα του γαλαξία. Εάν θεωρήσουμε ως χαρακτηριστικό χρόνο του συστήματος το χρόνο ταλάντωσης γύρω από το κέντρο του γαλαξία, μπορούμε να δείξουμε ότι και αυτός είναι της τάξης της μονάδας. Πράγματι παίρνοντας την εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή (σχήμα 2.5) έχουμε:

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{r_c^3} r \quad (2.11)$$

εφόσον $\Omega^2 = GM/r_c^3$ με $r_c^3 = G = M = 1$ προκύπτει ότι η $\Omega = 1$ όπου Ω είναι η χαρακτηριστική συχνότητα του συστήματος. Ο χαρακτηριστικός χρόνος επομένως θα είναι $T_c \approx 2\pi$.



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση ταλάντωσης σώματος στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφης κατανομής μάζας ακτίνας R .

Με δεδομένη την χαμιλτονιανή του συστήματος βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης και τις εξισώσεις μεταβολών για την κίνηση του κάθε σώματος στο θεωρούμενο δυναμικό, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4) του πρώτου κεφαλαίου. Για τις εξισώσεις κίνησης έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= p_x \\
 \dot{y} &= p_y \\
 \dot{z} &= p_z \\
 \dot{p}_x &= -\omega_1^2 x - 2\varepsilon(xz + xy + y^2)(z + y) + mx/(r^2 + d^2)^{(3/2)} \\
 \dot{p}_y &= -\omega_2^2 y - 2\varepsilon(xz + xy + y^2)(x + 2y) + my/(r^2 + d^2)^{(3/2)} \\
 \dot{p}_z &= -\omega_3^2 z - 2\varepsilon(xz + xy + y^2)x + mz/(r^2 + d^2)^{(3/2)}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

ενώ οι αντίστοιχες εξισώσεις μεταβολών δίνονται από τις:

$$\begin{aligned}
 \delta\dot{x} &= \delta p_x \\
 \delta\dot{y} &= \delta p_y \\
 \delta\dot{z} &= \delta p_z \\
 \delta\dot{p}_x &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \delta x - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \delta y - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \delta z \\
 \delta\dot{p}_y &= -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \delta x - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \delta z \\
 \delta\dot{p}_z &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \delta x - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \delta y - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \delta z .
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Αντικαθιστώντας το γαλαξιακό δυναμικό $V = V(x, y, z)$ από την εξίσωση (2.9) στις εξισώσεις (3.13) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 \delta\dot{x} &= \delta p_x \\
 \delta\dot{y} &= \delta p_y \\
 \delta\dot{z} &= \delta p_z \\
 \delta\dot{p}_x &= -\omega_1^2 \delta x - 2\varepsilon(xz + xy + y^2)(\delta z + \delta y) - 2\varepsilon(\delta xz + x\delta z \\
 &\quad + \delta xy + x\delta y + 2y\delta y)(z + y) + \dots \\
 \delta\dot{p}_y &= -\omega_2^2 \delta y - 2\varepsilon(xz + xy + y^2)(\delta x + 2\delta y) - 2\varepsilon(\delta xz + x\delta z \\
 &\quad + \delta xy + x\delta y + 2y\delta y)(x + 2y) + \dots \\
 \delta\dot{p}_z &= -\omega_3^2 \delta z - 2\varepsilon(xz + xy + y^2)\delta x - 2\varepsilon(\delta xz + x\delta z \\
 &\quad + \delta xy + x\delta y + 2y\delta y)x + \dots
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ολοκληρώνοντας ταυτόχρονα αριθμητικά τις εξισώσεις (3.12) και (2.14) υπολογίζουμε για κάθε τροχιά τις ποσότητες $\delta x(t), \delta y(t), \delta z(t), \delta p_x(t), \delta p_y(t), \delta p_z(t)$ και μέσω αυτών τον αριθμό Lyapunov (σχέση 1.19) όπου $\xi(t) = \sqrt{\delta x(t)^2 + \delta y(t)^2 + \delta z(t)^2 + \delta p_x(t)^2 + \delta p_y(t)^2 + \delta p_z(t)^2}$.

Ο υπολογισμός που πραγματοποιήσαμε αφορά $n = 200$ τροχιές με ενέργειες μεταξύ των τιμών $0 < E < 0.2$. Ο χρόνος για τον οποίο εξελίχθηκαν οι τροχιές είναι $t = 10^5$ και η ολοκλήρωση έγινε σε γλώσσα Fortran με τη μέθοδο Runge Kutta 7ης 8ης τάξης μεταβλητού βήματος. Το σφάλμα στην ενέργεια είναι μεταξύ $10^{-10} - 10^{-12}$.

Προκειμένου να δούμε κατά πόσο η διαταραχή του δυναμικού επηρεάζει τα αποτελέσματα μας, η ολοκλήρωση των τροχιών έγινε για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου διαταραχής και συγκεκριμένα για $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ και $\varepsilon = 0.01$. Οι αρχικές συνθήκες της κάθε τροχιάς λαμβάνονται πάνω στην **επιφάνεια μηδενικών ταχυτήτων** (zero velocity curve) η οποία οριοθετεί την κίνηση των σωμάτων στο υπό μελέτη σύστημα καθώς προκύπτει από τη συνθήκη μηδενισμού των ταχυτήτων $V(x, y, z) = H(x, y, z, 0, 0, 0)$. Πράγματι, θέτοντας στην εξίσωση (2.10) τις ταχύτητες ίσες με το μηδέν και γράφοντας την (2.10) ξανά σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε:

$$E = H(r, \theta, \phi, 0, 0, 0) = m/\sqrt{0.0001 + r^2} + \varepsilon r^4 \sin^2 \theta (\cos \phi \cos \theta + \sin \phi (\cos \phi + \sin \phi) \sin \theta)^2 + r^2(1.5 \cos^2 \theta + (0.75 - 0.25 \cos 2\phi) \sin^2 \theta). \quad (2.15)$$

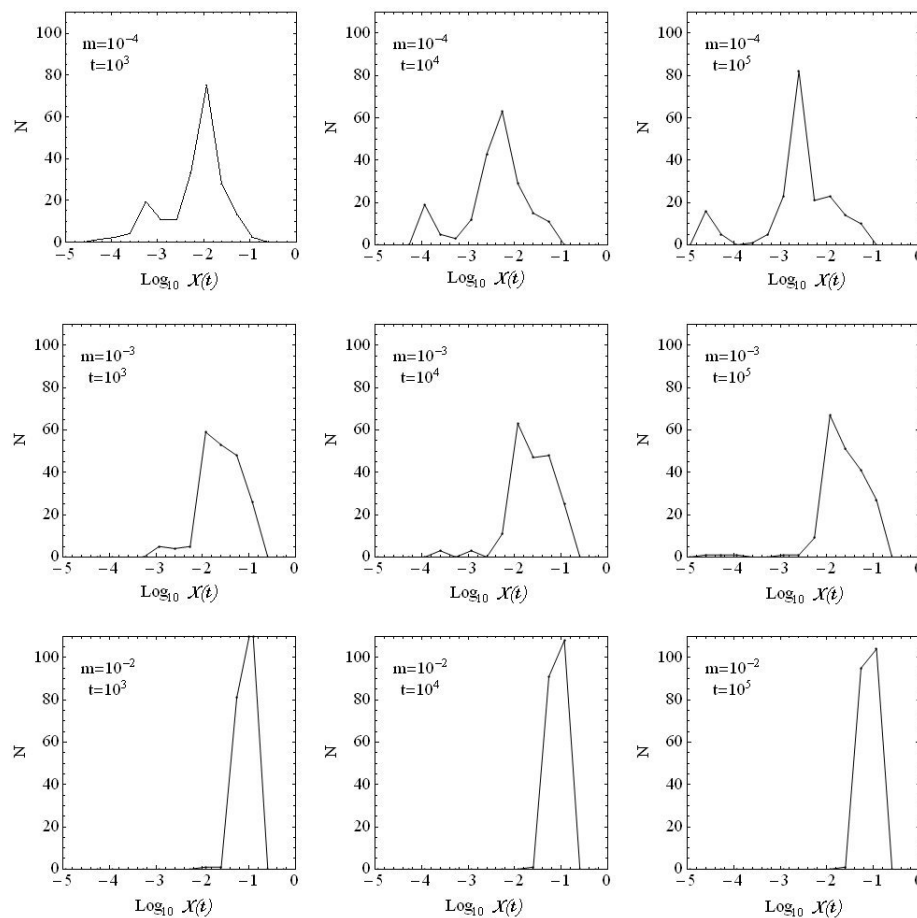
Στη συνέχεια διαλέγοντας τυχαίες τιμές για τα E, θ, ϕ μέσα στα δοθέντα όρια ($0 < E < 0.2$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$) βρίσκουμε την τιμή του r λύνοντας αριθμητικά την εξίσωση (2.15). Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε τις αρχικές συνθήκες $(r_0, \theta_0, \phi_0, 0, 0, 0)$ για κάθε μία από το σύνολο των τροχιών που μελετούμε. Σημειώνουμε ότι η ενέργεια έχει ληφθεί σε κατάλληλη περιοχή τιμών έτσι ώστε η τροχιά να μην απομακρύνεται πολύ από το γαλαξιακό κέντρο.

Η παραπάνω επιλογή αρχικών συνθηκών εγγυάται ότι οι τροχιές που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο είναι, αρχικά τουλάχιστον, όλες τύπου κουτιού εφόσον η αρχική στροφορμή τους είναι μηδέν σε κάθε άξονα. Δεδομένου ότι το δυναμικό (2.9) δεν εμφανίζει κεντρική συμμετρία, η στροφορμή των τροχιών του συστήματος που έχουμε θεωρήσει, όπως θα δούμε και πιο κάτω, μπορεί να αλλάξει εν χρόνω και στους τρεις άξονες. Οι τροχιές επομένως μπορούν κατά την εξέλιξη τους να παραμένουν κουτιού ή και να μετατρέπονται σε κάποια άλλη μορφή. Γενικά, επειδή η στροφορμή τους μπορεί να αυξάνει ή να μειώνεται χωρίς προτίμηση σε κάποια διεύθυνση, η συνολική στροφορμή των τροχιών παραμένει εν γένει μικρή.

Στο σχήμα 2.6, δίνεται η κατανομή του λογαρίθμου των αριθμών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου ($\log \chi(t)$), για τιμές της κεντρικής μάζας $m = 10^{-4}$, $m = 10^{-3}$ και $m = 10^{-2}$ για τα χρονικά στιγμιότυπα $t = 10^3$, $t = 10^4$ και $t = 10^5$. Κάθε οριζόντια τριάδα σχημάτων αναφέρεται στην κατανομή των $\chi(t)$ για την ίδια τιμή της μάζας, ενώ κάθε κατακόρυφη τριάδα αφορά την κατανομή του $\chi(t)$ για διαφορετικές μάζες την ίδια χρονική στιγμή.

Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι η κατανομή $\log \chi(t)$ παρουσιάζει ένα κύριο μέγιστο που αφορά το χαοτικό κομμάτι των τροχιών, το οποίο μετατοπίζεται προς τα δεξιά καθώς η μάζα της μελανής οπής αυξάνεται. Επομένως, με την αύξηση της κεντρικής μάζας οι τροχιές, όπως αναμενόταν, γίνονται περισσότερο χαοτικές. Επίσης για τις δύο μικρότερες τιμές της μάζας εμφανίζεται στις κατανομές και μία δεύτερη πιο χαμηλή κορυφή. Οι αριθμοί Lyapunov πεπερασμένου χρόνου $\chi(t)$ που αντιστοιχούν σε αυτή την κορυφή αφορούν τις τροχιές που παραμένουν οργανωμένες. Μάλιστα, η θέση της μικρότερης κορυφής κινείται στο διάγραμμα προς τα αριστερά με την πάροδο του χρόνου ακολουθώντας περίπου το νόμο $1/t$, πράγμα που αναμένεται για τους αριθμούς Lyapunov πεπερασμένου χρόνου των οργανωμένων τροχιών σύμφωνα με τον ορισμό του (1.19). Στην περίπτωση της μάζας $m = 10^{-2}$ η κορυφή αυτή δεν υπάρχει καθόλου καθώς για τις αρχικές συνθήκες που έχουν επιλεγεί καμία τροχιά δεν είναι οργανωμένη.

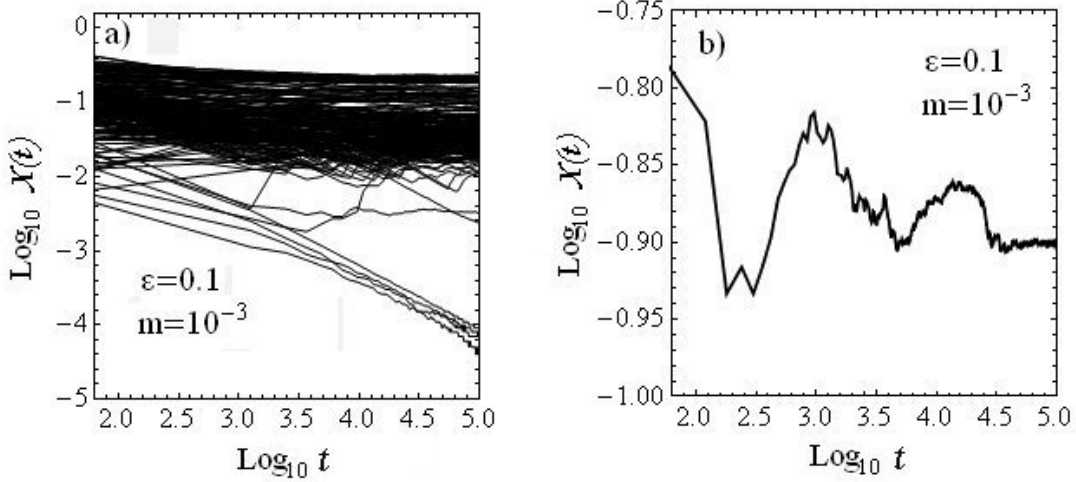
Βρίσκοντας τον αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου κάθε τροχιάς υπολογίζουμε το μέσο αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου ($\chi(t)$) για όλες τις χαοτικές τροχιές. Η χρονική εξέλιξη των αριθμών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, όπου $m = 10^{-3}$ και $\varepsilon = 0.1$, φαίνεται στο σχήμα 2.7α. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε σχεδόν όλες οι τροχιές εδώ είναι χαοτικές καθώς όλοι σχεδόν οι αριθμοί Lyapunov σταθεροποιούνται σε μη μηδενικές τιμές, εκτός από μία συστάδα τροχιών των οποίων η τιμή $\chi(t)$ δεν έχει σταθεροποιηθεί μέχρι το χρόνο



Σχήμα 2.6: Κατανομές της ποσότητας $\log \chi(t)$ για τα σώματα σε χαοτική κίνηση. Κάθε οριζόντια τριάδα ιστογραμμάτων αντιστοιχεί στην ίδια τιμή μάζας ($m = 10^{-4}$, $m = 10^{-3}$, $m = 10^{-2}$) και κάθε κατακόρυφη στήλη στον ίδιο χρόνο ολοκλήρωσης. Συνολικά για την κάθε τιμή της μάζας ολοκληρώθηκαν 200 τροχιές με παράμετρο διαταραχής $\varepsilon = 0.1$. Με την πάροδο του χρόνου η κατανομή των μαζών μετατοπίζεται σε μεγαλύτερους αριθμούς Lyapunov, κάτι που συμβαίνει και με την αύξηση της μάζας.

$t = 10^5$, αλλά εξακολουθεί να πέφτει ακολουθώντας προσεγγιστικά το νόμο $1/t$. Η συμπεριφορά με το χρόνο του $\log \chi(t)$ για μία τυπική χαοτική τροχιά φαίνεται στο σχήμα 2.7β. Παρατηρούμε ότι μετά τις αρχικές έντονες διακυμάνσεις η τιμή του $\log \chi(t)$ μένει περίπου σταθερή στο χρόνο. Σε όλους τους υπολογισμούς που πραγματοποιήθηκαν οι χαοτικές τροχιές αποτελούν την πλειοψηφία στο δείγμα των αρχικών συνθηκών που θεωρήσαμε. Όπως προέκυψε το ποσοστό των χαοτικών τροχιών επί του συνόλου είναι πάντα μεγαλύτερο από 67%. Το ελάχιστο ποσοστό παρατηρείται όταν η μάζα της μελανής οπής παίρνει τη μικρότερη τιμή στα όρια που μελετούμε ($m = 10^{-5}$) και το δυναμικό υπολογίζεται για τη μικρότερη παράμετρο διαταραχής ($\varepsilon = 0.01$).

Τα αποτελέσματα για τον μέσο $\log \chi(t)$, των χαοτικών μόνο τροχιών, ως συνάρτηση της μάζας, για τιμές της διαταραχής $\varepsilon=0.01$, $\varepsilon=0.1$ και $\varepsilon=0.5$, τις χρονικές στιγμές $t = 10^3$, $t = 10^4$ και $t = 10^5$ φαίνονται στα σχήματα 2.8. Το κύριο εύρημα των παραπάνω υπολογισμών είναι ότι η σχέση (2.3), που όπως αναφέραμε προέκυψε αρχικά από πολύπλοκα δυναμικά συστήματα προσομοιώσεων N σωμάτων αναπαράγεται επίσης από το απλό αναλυτικό μοντέλο (2.10). Επίσης, η τιμή του εκθέτη p που υπολογίζουμε είναι πολύ κοντά στην τιμή 0.5 για χρόνο μεγαλύτερο από $t = 10^4$. Για μικρό-



Σχήμα 2.7: (α) Η χρονική εξέλιξη των αριθμών Lyapunov και για τις 200 τροχιές στην περίπτωση μιας μελανής οπής με μάζα $m = 10^{-3}$. Η μικρή παράμετρος του μη αξισυμμετρικού όρου του δυναμικού έχει ληφθεί ίση με 0.1. (β) Ομοίως για μία μόνο τροχιά.

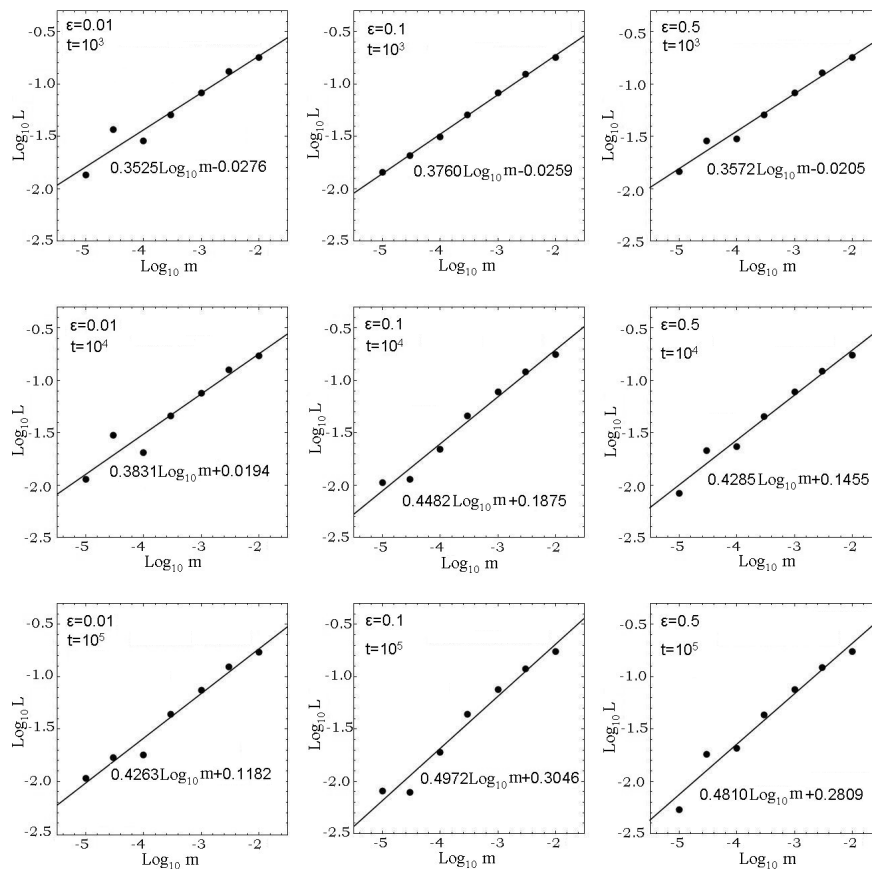
τερους χρόνους η κλίση του διαγράμματος έχει τιμή κοντά στο 0.35. Έχει ενδιαφέρον ότι η τιμή αυτή είναι κοντά στα αποτελέσματα των ([87]) και ([74]) τα οποία παρουσιάσαμε στην ενότητα 2.3 (σχ.2.4).

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο εκθέτης του νόμου (2.3) δεν φαίνεται να εξαρτάται ιδιαίτερα από την τιμή της παραμέτρου διαταραχής ε , συμπέρασμα που προκύπτει και από την μελέτη [74]. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια σαφή ένδειξη του ότι είναι κυρίως η μελανή οπή που διαμορφώνει την τιμή του χαοτικού δείκτη της τροχιάς και λιγότερο το δυναμικό του υπόλοιπου γαλαξία.

2.4 Θεωρητική ερμηνεία του νόμου $L \propto m^p$

Στην παρούσα ενότητα προσεγγίζουμε μια θεωρητική ερμηνεία του νόμου δύναμης $L \propto m^p$, κατασκευάζοντας ένα θεωρητικό μοντέλο που βασίζεται στα αποτελέσματα επιμέρους αριθμητικών πειραμάτων.

Βασική υπόθεση της ανάλυσης που ακολουθεί είναι ότι υπάρχει μία σφαίρα ακτίνας r_m στο εσωτερικό της οποίας η δυναμική καθορίζεται κατά κύριο λόγο από την μελανή οπή. Τη σφαίρα αυτή θα ονομάζουμε στο εξής *σφαίρα επιρροής της μελανής οπής*. Έτσι, θεωρούμε την προσέγγιση κατά την οποία κάθε τροχιά μέσα από την ακτίνα επιρροής της μελανής οπής r_m διαμορφώνεται μόνο από το δυναμικό της μελανής οπής, ενώ σε απόσταση μεγαλύτερη από r_m διαμορφώνεται μόνο από το δυναμικό του υπόλοιπου γαλαξία. Η προσέγγιση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές μελέτες σχετικές με τη δυναμική γύρω από μία υπερμεγέθη μελανή οπή στα κέντρα ελλειπτικών γαλαξιών (π.χ. [74], [67], [92]). Με την παραπάνω ανάλυση ουσιαστικά θεωρούμε το υπό μελέτη δυναμικό σύστημα σαν την ένωση δυο επιμέρους συστημάτων. Το ένα σύστημα αφορά την κίνηση σε κεντρικό κεplerιανό δυναμικό και το άλλο την κίνηση στο δυναμικό ενός διαταραγμένου τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. Τα δύο επιμέρους συστήματα εμφανίζουν οργανωμένες τροχιές. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω ο συνδυασμός τους επιτρέπει τόσο τη θεωρητική ερμηνεία της εμφάνισης όσο και την ποσοτική ανάλυση του χάους στο συνολικό σύστημα που προκύπτει από την

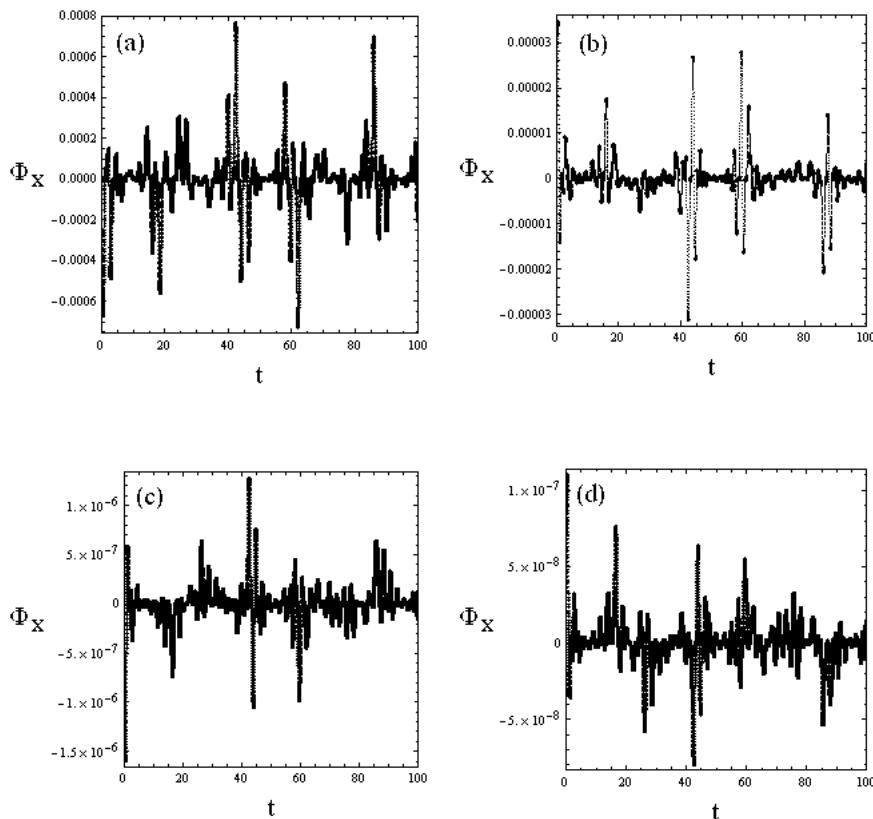


Σχήμα 2.8: Οι τιμές του λογαρίθμου του μέσου L των χαοτικών τροχιών σε σχέση με το λογάριθμο της μάζας της μελανής οπής $\log m$. Κάθε στήλη διαγραμμάτων αντιστοιχεί στην ίδια μικρή παράμετρο ϵ (0.01, 0.1, 0.5) ενώ κάθε γραμμή στο ίδιο στιγμιότυπο ($t = 10^3$, $t = 10^4$, $t = 10^5$). Σε κάθε περίπτωση τα σημεία προσαρμόζονται πολύ καλά πάνω σε ένα νόμο της μορφής $\log \chi(t) \propto m^p$. Η τιμή του εκθέτη αυξάνεται σταδιακά με την πάροδο του χρόνου, όπως φαίνεται από τις κλίσεις των διαγραμμάτων και δίνει σε όλες τις περιπτώσεις μία τιμή μεταξύ 0.35 και 0.5

ένωση των δύο συστημάτων.

2.4.1 Σφαίρα επιρροής

Η υπόθεση της ύπαρξης μιας σφαίρας επιρροής της μελανής οπής μπορεί να ελεγχθεί μελετώντας τις μεταβολές των τροχιακών χαρακτηριστικών των σωμάτων που περνούν κοντά στη μελανή οπή. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να ελέγξουμε τις μεταβολές των προσεγγιστικών ολοκληρωμάτων της κίνησης των τροχιών τύπου κουτιού όταν αυτές περνούν κοντά από τη μελανή οπή. Αν στη χαμιλτονιανή (2.10) αγνοήσουμε τον όρο του δυναμικού που αφορά την κεντρική μάζα, το εναπομένον δυναμικό είναι ένα δυναμικό διαταραγμένου αρμονικού ταλαντωτή σε τρεις διαστάσεις. Στο δυναμικό αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά ολοκληρώματα της κίνησης (Φ_x, Φ_y, Φ_z) χρησιμοποιώντας την απευθείας μέθοδο υπολογισμού του “τρίτου ολοκληρώματος” ([12]). Θεωρούμε ένα τυπικό ολοκλήρωμα σε μορφή σειράς $\Phi = \Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_6 + \dots$, όπου ο όρος Φ_r είναι βαθμού r ως προς τις πολωνυμικές μεταβλητές x, y, z, p_x, p_y, p_z . Θέτοντας $H = H_2 + H_4$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση και διαχωρίζοντας τους όρους ίδιας τάξης, καταλήγουμε στην “ομο-



Σχήμα 2.9: Οι διακυμάνσεις του $\Phi_x(t)$ για τα αναπτύγματα: (α) τέταρτης τάξης, (β) έκτης τάξης, (γ) όγδοης τάξης και (δ) δέκατης τάξης στην περίπτωση μιας τροχιάς με ενέργεια $E=0.11$ για $m = 0$ και $\varepsilon=0.1$. Οι διακυμάνσεις πέφτουν κατά μία περίπου τάξη μεγέθους για κάθε τάξη όρων που προσθέτουμε στο ανάπτυγμα.

λογική” εξίσωση :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \{\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_6 + \dots, H_2 + H_4\} = 0 \\ \text{ή} \quad \{H_2, \Phi_r\} &= \{\Phi_{r-2}, H_4\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

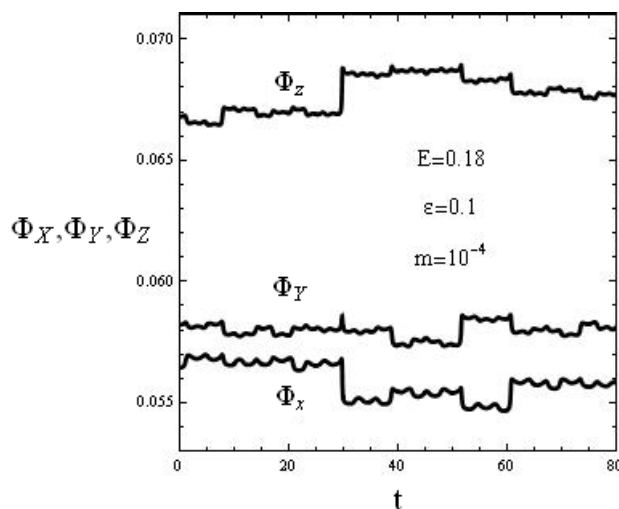
Η εξίσωση (2.16) λύνεται αναδρομικά καθώς βασιζόμαστε κάθε φορά στους γνωστούς όρους της τάξης $r - 2$ για να υπολογίσουμε τους όρους τάξης r .

Για την “έναρξη” του αλγορίθμου θέτουμε τον όρο Φ_2 ίσο με την ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή σε έναν από τους τρεις βαθμούς ελευθερίας π.χ. $\Phi_2 = (1/2)\omega_1^2 x^2 + (1/2)p_x^2$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία στο χαμιλτονιανό σύστημα (2.10), θέτοντας $m = 0$, υπολογίσαμε τα τυπικά ολοκληρώματα που απορρέουν από τους εναρκτήριους όρους $(1/2)\omega_1^2 x^2 + (1/2)p_x^2$, $(1/2)\omega_2^2 y^2 + (1/2)p_y^2$, $(1/2)\omega_3^2 z^2 + (1/2)p_z^2$ τα οποία συμβολίζουμε με Φ_x , Φ_y και Φ_z αντίστοιχα. Ο υπολογισμός έγινε μέχρι τη δέκατη τάξη με τη βοήθεια υπολογιστικού προγράμματος συμβολικής άλγεβρας. Π.χ το ολοκλήρωμα Φ_x μέχρι όρους τέταρτης τάξης δίνεται για $\varepsilon = 0.1$ από την

αναλυτική έκφραση:

$$\begin{aligned}
 \Phi_x = & 0.5x^2 + 0.5p_x^2 - 0.0025p_x^2p_y^2 - 0.007p_xp_y^3 - 0.0034p_x^2p_y p_z \\
 & - 0.01p_xp_y^2p_z - 0.00125p_x^2p_z^2 + 0.0025p_y^2x^2 + 0.0034p_y p_z x^2 \\
 & + 0.00125p_z^2x^2 - 0.01p_xp_yxy - 0.007p_y^2xy - 0.0052p_xp_zxy \\
 & - 0.02p_y p_zxy - 0.0176p_xp_yy^2 + 0.01p_xp_zy^2 - 0.0152xy^3 \\
 & - 0.0086p_xp_yxz + 0.01p_y^2xz - 0.005p_xp_zxz - 0.0017p_x^2yz \\
 & - 0.04p_xp_yyz + 0.0017x^2yz - 0.03xy^2z - 0.00125p_x^2z^2 \\
 & - 0.00125x^2z^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση αυτή τις τιμές για τα x, y, z, p_x, p_y, p_z όπως αυτές προκύπτουν από τις αριθμητικά υπολογισμένες τροχιές που αντιστοιχούν στην πλήρη χαμιλτονιανή (2.10), (δηλαδή θέτοντας $m \neq 0$) υπολογίζουμε την χρονική εξέλιξη των $\Phi_x(t), \Phi_y(t)$ και $\Phi_z(t)$ για οποιαδήποτε τροχιά. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε πώς η μελανή οπή μεταβάλλει μέσω “σκεδάσεων” τις τιμές των $\Phi_x(t), \Phi_y(t), \Phi_z(t)$, για κάθε μία από τις τροχιές του δείγματός μας. Για να γίνει φανερή η αρχική σύγκλιση των ολοκληρωμάτων καθώς προστίθενται στις σειρές όροι ανώτερης τάξης, έχουμε σχεδιάσει το ολοκλήρωμα $\Phi_x(t)$ για τα αναπτύγματα τέταρτης τάξης (2.9α), έκτης τάξης (2.9β), όγδοης τάξης (2.9γ) και δέκατης τάξης (2.9δ) στην περίπτωση μιας τροχιάς με ενέργεια $E=0.11$ για $m = 0$ και $\varepsilon = 0.1$. Παρατηρούμε ότι, με κάθε διαδοχική προσθήκη όρων της επόμενης τάξης, η διακύμανση του Φ_x περιορίζεται κατά μία περίπου τάξη μεγέθους. Βέβαια η σύγκλιση αυτή συνεχίζεται μέχρι ένα βέλτιστο σημείο, καθώς είναι γνωστό ότι τα ολοκληρώματα είναι προσεγγιστικά και από μία τάξη μεγέθους και μετά θα αρχίσουν να αποκλίνουν (βλ. [43]).

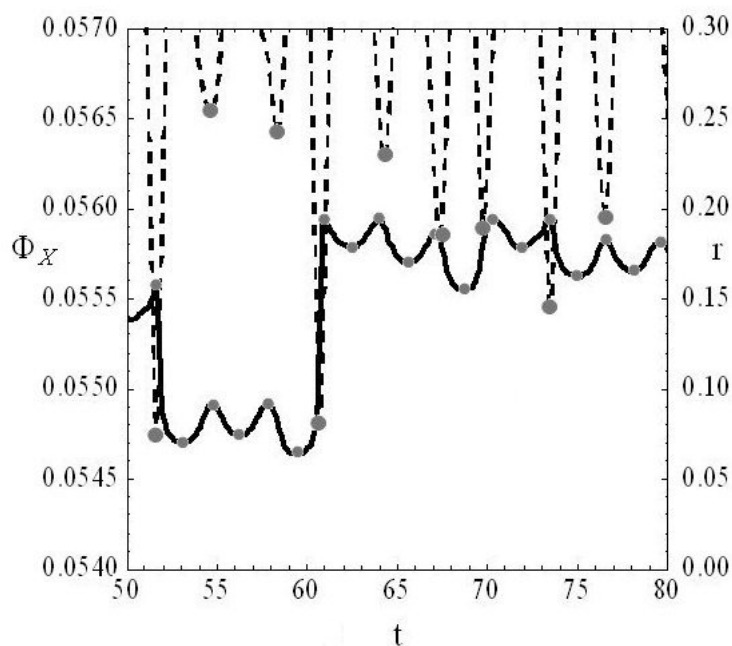


Σχήμα 2.10: Η συνολική εικόνα των διακυμάνσεων των ποσοτήτων $\Phi_x(t), \Phi_y(t), \Phi_z(t)$ (έκτη τάξη) για μια τροχιά ενέργειας $E=0.18$ με $\varepsilon=0.1$ για μάζα της μελανής οπής $m = 10^{-4}$.

Στην περίπτωση τώρα που προσθέσουμε τη μελανή οπή στο σύστημα μας, η χρονική συμπεριφορά των ποσοτήτων $\Phi_x(t), \Phi_y(t), \Phi_z(t)$ αλλάζει σημαντικά.

Δεδομένου ότι για $m \neq 0$ οι ποσότητες Φ_x, Φ_y, Φ_z δεν έχουν πλέον μηδενική αγκύλη Poisson με τη χαμιλτονιανή (2.10), καταρχήν συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες αυτές δεν αποτελούν πλέον τυπικά ολοκληρώματα της κίνησης. Όπως θα δούμε όμως, σημαντικές χρονικές μεταβολές των $\Phi_x,$

Φ_y, Φ_z προκαλούνται μόνο στις κοντινές προσεγγίσεις των τροχιών προς τη μελανή οπή, ενώ οι τιμές των Φ_x, Φ_y, Φ_z διατηρούνται περίπου σταθερές μεταξύ δύο τέτοιων κοντινών προσεγγίσεων. Στο σχήμα 2.10 έχουμε σχεδιάσει για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα τα $\Phi_x(t), \Phi_y(t)$ και $\Phi_z(t)$ για μια τυχαία αρχική συνθήκη με ενέργεια $E=0.18$ στην περίπτωση που η μάζα της μελανής οπής είναι $m = 10^{-4}$ και η διαταραχή $\varepsilon=0.1$, για τα έκτης τάξης αναπτύγματα. Παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα πλέον δεν εμφανίζουν την ομαλή συμπεριφορά που είδαμε στο σχήμα 2.9 αλλά παρουσιάζουν σημαντικές ταυτόχρονες διακυμάνσεις οι οποίες μπορούν να εξηγηθούν με τη βοήθεια του σχήματος 2.11. Στο σχήμα 2.11 είναι σχεδιασμένες στο ίδιο διάγραμμα η χρονική εξέλιξη του ολοκληρώμα-

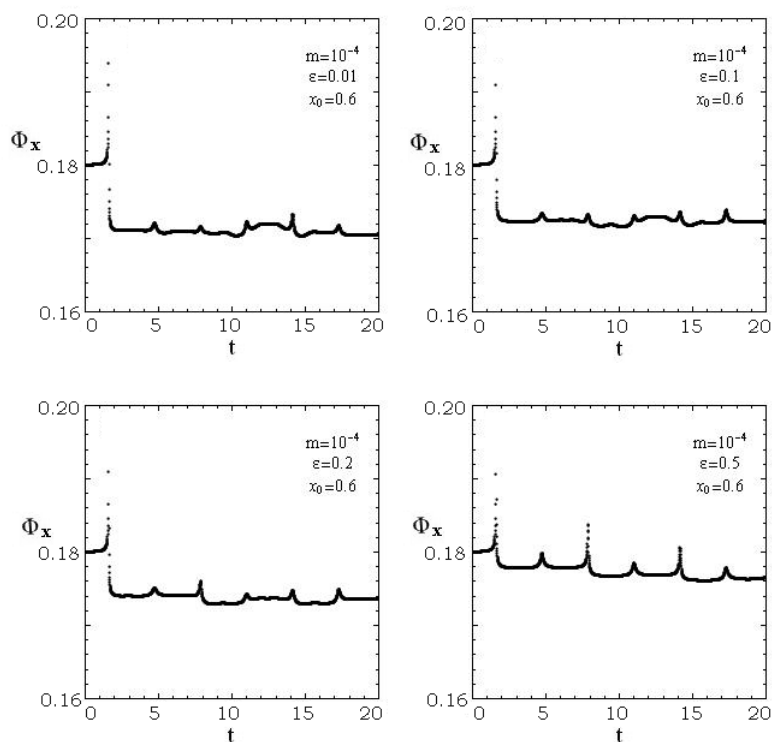


Σχήμα 2.11: Η χρονική εξέλιξη του προσεγγιστικού ολοκληρώματος Φ_x (συνεχής καμπύλη) και της απόστασης r (διακεκομμένη καμπύλη) από το κέντρο της μελανής οπής για την τροχιά του σχήματος 2.10. Τα γκριζα σημεία στην καμπύλη της απόστασης αντιστοιχούν στην ελάχιστη απόσταση από τη μελανή οπή, ενώ τα γκριζα σημεία στην καμπύλη του ολοκληρώματος αντιστοιχούν στο κάθε φορά τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο της τιμής του. Η μέγιστη τιμή του ολοκληρώματος ταυτίζεται πάντοτε χρονικά με την ελάχιστη απόσταση από τη μελανή οπή. Η εικόνα αυτή επαναλαμβάνεται για ολόκληρο το χρονικό διάστημα της ολοκλήρωσης.

τος $\Phi_x(t)$ (μαύρη καμπύλη) και η απόσταση μιας τυχαίας τροχιάς (διακεκομμένη καμπύλη) από τη μελανή οπή. Η ενέργεια της τροχιάς είναι $E=0.18$ ενώ η μάζα της μελανής οπής $m = 10^{-3}$. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, κάθε φορά που η τροχιά πλησιάζει τη μελανή οπή η τιμή του ολοκληρώματος εκτελεί ένα άλμα το οποίο είναι εν γένει τόσο μεγαλύτερο όσο η απόσταση από τη μελανή οπή μειώνεται. Μάλιστα η τιμή του ολοκληρώματος γίνεται τοπικά μέγιστη όταν η απόσταση από την μελανή οπή γίνεται ελάχιστη. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, οι διακυμάνσεις $d\Phi$ παρακολουθούν ακριβώς το μέγεθος του όρου διαταραχής του δυναμικού λόγω της μελανής οπής δηλαδή $d\Phi \propto m/\sqrt{r^2 + d^2}$. Η γενική μορφή των καμπυλών $\Phi_x(t)$ παρουσιάζει τα ίδια χαρακτηριστικά για μεγάλους χρόνους ολοκλήρωσης. Έτσι σε πολλά από τα επόμενα διαγράμματα επικεντρωνόμαστε

σε μικρότερα χρονικά διαστήματα (όπως π.χ. στο σχήμα 2.11) προκειμένου να παρατηρήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά των διακυμάνσεων των ολοκληρωμάτων.

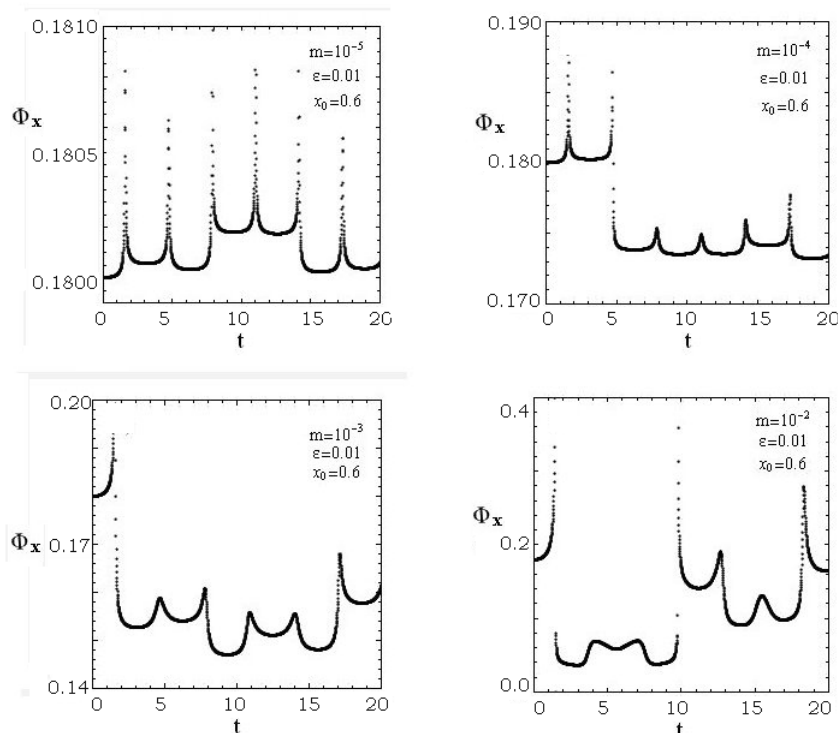
Καθώς όπως είδαμε η εισαγωγή στο δυναμικό του όρου που αντιστοιχεί στη μελανή οπή επιδρά στις διακυμάνσεις των ολοκληρωμάτων ελέγξαμε πως η αλλαγή του μεγέθους της μάζας επηρεάζει της διακυμάνσεις των ολοκληρωμάτων. Ο ίδιος έλεγχος έγινε για το κατά πόσο η ενίσχυση του αναρμονικού όρου στο δυναμικό (μέσω της αύξησης του ε) επηρεάζει την συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων. Στα σχήματα 2.12, 2.13 έχουν σχεδιαστεί οι διακυμάνσεις των ολοκληρωμάτων για διάφορες τιμές της παραμέτρου διαταραχής και της μάζας της μελανής οπής αντίστοιχα.



Σχήμα 2.12: Οι διακυμάνσεις του $\Phi_x(t)$ (έκτη τάξη) για μια τροχιά ενέργειας $E=0.18$ ($x_0 = 0.6$) στην περίπτωση μελανής οπής $m = 10^{-4}$ για διάφορες τιμές της μικρής παραμέτρου ($\varepsilon=0.01$, $\varepsilon=0.1$, $\varepsilon=0.2$, $\varepsilon=0.5$). Η μικρή παράμετρος δεν επιδρά ουσιαστικά στις μεταβολές του ολοκληρώματος.

Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα 2.12, το μέγεθος των διακυμάνσεων δεν εξαρτάται αισθητά από την παράμετρο της διαταραχής ε . Αντιθέτως με την αύξηση της μάζας μεγαλώνουν ανάλογα και τα άλματα των ολοκληρωμάτων (σχ. 2.13).

Στο σχήμα 2.13 βλέπουμε πώς η μάζα της μελανής οπής επηρεάζει τη διακύμανση της ποσότητας $\Phi_x(t)$ σε ένα τυχαίο διάστημα ολοκλήρωσης της τροχιάς. Παρατηρούμε αφενός ότι οι διακυμάνσεις του $\Phi_x(t)$ γίνονται εν γένει μεγαλύτερες με την αύξηση της μάζας. Ωστόσο παρατηρούμε επιπλέον ότι η τιμή στην οποία καταλήγει η ποσότητα $\Phi_x(t)$ αμέσως μετά κάθε άλμα εμφανίζει επίσης μεγάλες και ακανόνιστες διακυμάνσεις. Η απροσδιοριστία στην τιμή στην οποία καταλήγει το $\Phi_x(t)$ μετά από κάθε άλμα είναι ένα μέτρο του πόσο χαοτικό είναι το σύστημα μας. Είναι αξιοσημείωτο ότι σε όλες τις περιπτώσεις, με εξαίρεση αυτήν της μέγιστης τιμής της μάζας m , η ποσότητα

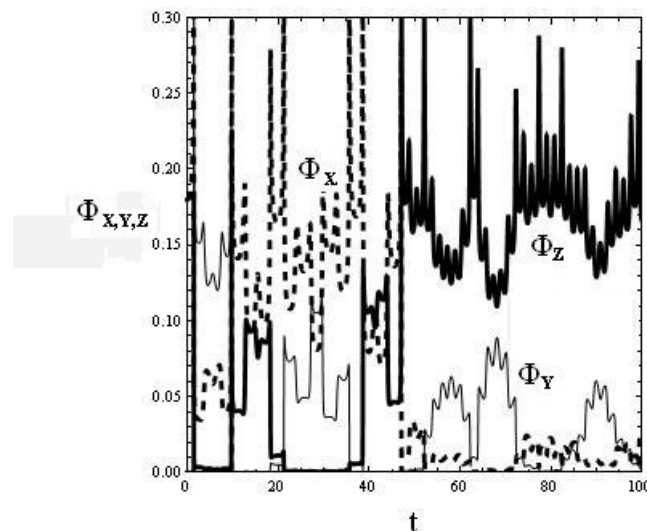


Σχήμα 2.13: Οι διακυμάνσεις του $\Phi_x(t)$ (έκτη τάξη) για μια τροχιά ενέργειας $E=0.18$ ($x_0 = 0.6$) με $\varepsilon=0.01$ για διάφορες μάζες της μελανής οπής ($m = 10^{-5}$, $m = 10^{-4}$, $m = 10^{-3}$, $m = 10^{-2}$). Η αύξηση της μάζας οδηγεί στην αύξηση των μεταβολών του ολοκληρώματος (βλ. αλλαγή στην κλίμακα του κατακόρυφου άξονα μεταξύ των σχημάτων α-δ). Η σύνδεση των δύο μεγεθών δίνεται από τη σχέση (2.18).

$\Phi_x(t)$ παραμένει σχεδόν σταθερή μεταξύ δύο διαδοχικών αλμάτων, δηλαδή το $\Phi_x(t)$ διατηρεί τα χαρακτηριστικά ενός προσεγγιστικού ολοκληρώματος μακριά από τη μελανή οπή.

Μια καλύτερη ιδέα του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται τα ολοκληρώματα για μεγάλο χρονικό διάστημα συνολικά στο χρόνο μπορούμε να πάρουμε από το σχήμα 2.14 όπου παριστάνεται η ταυτόχρονη χρονική εξέλιξη των $\Phi_x(t)$, $\Phi_y(t)$ και $\Phi_z(t)$ μιας τροχιάς με ενέργεια $E=0.18$ για το χρονικό διάστημα από $t=0$ μέχρι $t=100$, με τιμή της μάζας μελανής οπής $m = 10^{-2}$ και παράμετρο διαταραχής $\varepsilon=0.01$. Το ενδιαφέρον σε αυτό το σχεδιάγραμμα είναι ότι βλέπουμε την τιμή του ολοκληρώματος $\Phi_x(t)$ (διακεκομμένη καμπύλη) περίπου από τη χρονική στιγμή $t=50$ να υπόκειται σε ένα μεγάλο άλμα που οδηγεί σε μια τιμή κοντά στο $\Phi_x \simeq 0$, ενώ αντίστοιχα αυξάνεται η τιμή του $\Phi_z(t)$. Ένα τέτοιο άλμα συνεπάγεται τη μείωση της ενέργειας ταλάντωσης στη διεύθυνση του άξονα x με ταυτόχρονη αύξηση της ενέργειας στο άξονα z . Κατά συνέπεια αλλάζει και η μορφολογία της τροχιάς στο χώρο. Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό, διότι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, επηρεάζει τη συχνότητα των επισκέψεων μιας τροχιάς στην περιοχή επιρροής της μελανής οπής.

Προκειμένου να υπολογίσουμε πως συνδέεται το μέγεθος των αλμάτων των ολοκληρωμάτων με τη μάζα της μελανής οπής και την απόσταση των προσεγγίσεων από αυτή, υπολογίζουμε τα άλματα για διάφορες τιμές της παραμέτρου της μάζας ως συνάρτηση της ελάχιστης κάθε φορά απόστασης από τη μελανή οπή. Ως άλμα του ολοκληρώματος $d\Phi$ θεωρούμε την απόσταση ανάμεσα στην τιμή



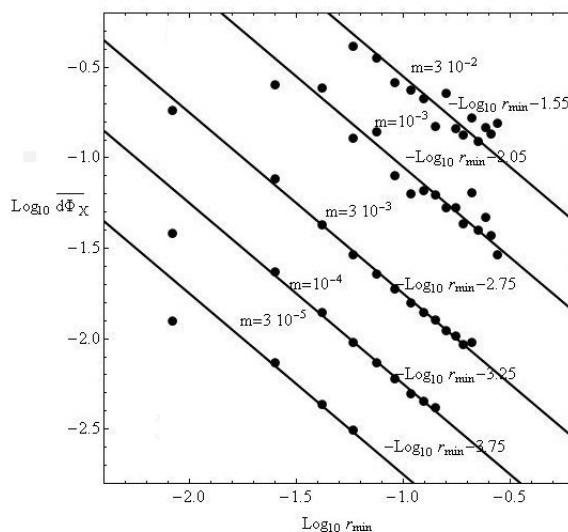
Σχήμα 2.14: Η συνολική εικόνα των διακυμάνσεων των ποσοτήτων $\Phi_x(t)$, $\Phi_y(t)$, $\Phi_z(t)$ (έκτη τάξη) για μια τροχιά ενέργειας $E=0.18$ με $\epsilon=0.01$ για μάζα της μελανής οπής $m = 10^{-2}$.

του ολοκληρώματος πριν το άλμα και στην μέγιστη τοπική τιμή του ολοκληρώματος. Η μέγιστη τιμή υπολογίζεται τοπικά βρίσκοντας το σημείο όπου η κλίση της καμπύλης $\Phi_x(t)$ γίνεται από θετική αρνητική. Ως τιμή του ολοκληρώματος πριν το άλμα θεωρούμε την τοπικά ελάχιστη τιμή του $\Phi_x(t)$ στο χρονικό διάστημα αμέσως πριν το άλμα. Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα του ολοκληρώματος αντιστοιχούν στις γκρίζες τελείες του σχήματος 2.11. Αντίστοιχα, στο ίδιο σχήμα σημειώνεται με γκρίζα σημεία πάνω στην καμπύλη της απόστασης από τη μελανή οπή (διακεκομμένη γραμμή) και η απόσταση στην οποία μεγιστοποιείται το ολοκλήρωμα, η οποία, όπως βλέπουμε, ταυτίζεται σχεδόν κάθε φορά με την ελάχιστη απόσταση από τη μελανή οπή r_{min} . Για τον υπολογισμό των αλμάτων $d\Phi$ χρησιμοποιήσαμε, για κάθε τιμή m της κεντρικής μάζας, μία τροχιά η οποία ολοκληρώθηκε για χρονικό διάστημα $t = 10^5$. Οι προσεγγίσεις στη μελανή οπή είναι περίπου μία ανά περίοδο, δηλαδή μερικές χιλιάδες στο χρόνο 10^5 . Για κάθε τιμή της μάζας m , οι αρχικές συνθήκες τις τροχιάς που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πάντοτε οι ίδιες. Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα του παραπάνω υπολογισμού φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος 2.15. Στον κατακόρυφο άξονα παριστάνεται η μέση τιμή του μεγέθους των αλμάτων για την περιοχή ακτίνων που σημειώνεται στον οριζόντιο άξονα. Για την κάθε τιμή της μάζας, τα σημεία του διαγράμματος σε λογαριθμική κλίμακα βρίσκονται περίπου πάνω σε μια ευθεία (συνεχής γραμμή). Η κλίση όλων των ευθειών είναι πολύ κοντά στην τιμή -1 , ενώ η απόσταση μεταξύ των ευθειών για μεταβολή της μάζας κατά μία τάξη μεγέθους είναι επίσης πολύ κοντά στη μονάδα. Κατά συνέπεια μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο νόμος που περιγράφει τη συσχέτιση των αλμάτων του ολοκληρώματος με τη μάζα της μελανής οπής και την ελάχιστη απόσταση από αυτή είναι:

$$d\Phi \propto \left| -\frac{m}{r_{min}} \right|. \quad (2.18)$$

Βλέπουμε επομένως ότι οι μεταβολές του ολοκληρώματος οφείλονται στην επίδραση του όρου του δυναμικού της μελανής οπής. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό της σφαίρας επιρροής της μελανής οπής αρκεί να συγκριθούν οι δυνάμεις που ασκούν σε ένα σώμα ο γαλαξίας και η μελανή οπή χωριστά, η τελευταία δε θεωρούμενη στην απλή κεπλεριανή προσέγγιση.

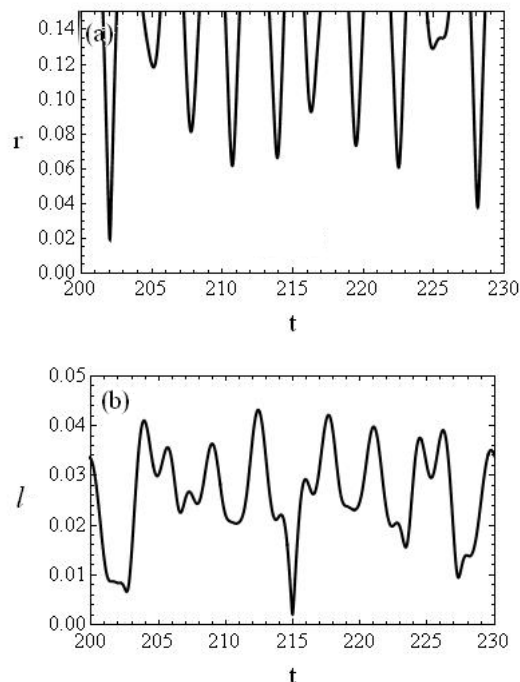
Περαιτέρω έλεγχος του τρόπου με τον οποίο ορίζεται η ακτίνα της σφαίρας επιρροής της με-



Σχήμα 2.15: Τα σημεία αναπαριστούν τον λογάριθμο του μέσου άλματος του ολοκληρώματος $\log \overline{d\Phi_x}$ για διάφορες τιμές της μάζας της μελανής οπής σε συνάρτηση με το λογάριθμο της ελάχιστης απόστασης $\log r_{min}$ από τη μελανή οπή. Για την κάθε τιμή της μάζας τα σημεία αυτά προσαρμόζονται πολύ καλά πάνω σε μια ευθεία με κλίση -1 . Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των ευθειών ανά τάξη μεταβολής του μεγέθους της μελανής οπής είναι επίσης 1 όπως μπορεί να φανεί και από τις αναλυτικές εκφράσεις των ευθειών που αναγράφονται στο σχεδιάγραμμα.

λανής οπής παρέχεται από τη μελέτη της χρονικής συμπεριφοράς των τριών συνιστωσών του διανύσματος της στροφορμής για τις τροχιές του συστήματος που σκεδάζονται από τη μελανή οπή. Συγκεκριμένα ελέγξαμε κατά πόσο η στροφορφή εμφανίζεται να σταθεροποιείται κατά τη διάρκεια κάθε τέτοιας σκέδασης. Με το κριτήριο της στροφορμής επίσης ελέγξαμε κατά πόσο η ακτίνα r_m της σφαίρας επιρροής είναι η προβλεπόμενη από τη σχέση (2.8). Πράγματι εφόσον θέλουμε να κυριαρχεί το κεντρικό δυναμικό της μελανής οπής μέσα από την ακτίνα r_m η κίνηση οφείλει να είναι κεκλεισμένη εντός αυτής της ακτίνας, οπότε η στροφορμή θα διατηρείται σταθερή (όπως επίσης κάθε συνιστώσα της) για όσο διάστημα η τροχιά βρίσκεται μέσα από την ακτίνα r_m . Στο σχήμα 2.16 έχουν σχεδιαστεί, για την περίπτωση μελανής οπής με μάζα $m = 10^{-3}$, η στροφορμή (2.16β), καθώς και η απόσταση της τροχιάς από τη μελανή οπή (2.16α) για την ίδια τροχιά όπως στο σχήμα 2.15. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει στα χρονικά διαστήματα όπου η τροχιά πλησιάζει τη μελανή οπή τόσο η συνολική στροφορμή l δείχνει να σταθεροποιείται.

Υπολογίζοντας την απόσταση από τη μελανή οπή μέσα από την οποία σταθεροποιείται κάθε φορά η συνολική στροφορμή, και παίρνοντας την μέση τιμή των αποστάσεων αυτών βρίσκουμε την μέση ακτίνα επιρροής της μελανής οπής με βάση ένα αριθμητικό κριτήριο σταθεροποίησης της στροφορμής (θεωρούμε ως κριτήριο το ότι η κλίση στο σημείο σταθεροποίησης γίνεται για πρώτη φορά μικρότερη από 0.07 της γενικής κλίσης, καθώς για την τιμή βρήκαμε με τη μεγαλύτερη ακρίβεια την τιμή που φαινόταν από τα διαγράμματα ότι σταθεροποιείται η στροφορμή). Τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές της μάζας φαίνονται στο σχήμα 2.17. Η κλίση της βέλτιστης ευθείας που προσαρμόζεται στα σημεία είναι 0.329, δηλαδή πολύ κοντά στην τιμή $1/3$ που προβλέπει η σχέση (2.8). Οι τιμές που βρίσκουμε για την r_m είναι λίγο μικρότερες, αλλά τις ίδιας τάξης μεγέθους με αυτές που προβλέπονται από τη σχέση (2.8). Για παράδειγμα, από το σχήμα 2.17 προκύπτει ότι για



Σχήμα 2.16: (α) Η χρονική εξέλιξη της απόστασης από την μελανή οπή r για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα μιας τυχαίας τροχιάς. (β) Η χρονική εξέλιξη της συνολικής στροφορμής l της τροχιάς στο ίδιο χρονικό διάστημα. Όταν η τροχιά πλησιάζει σε μικρή απόσταση από τη μελανή οπή η συνολική στροφορμή l δείχνει να σταθεροποιείται καθώς το διαγράμμα της διατηρείται περίπου οριζόντια για το διάστημα αυτό.

$m = 10^{-3}$ έχουμε $\log r_m = -1.22$, δηλαδή η ακτίνα επιρροής της μελανής οπής είναι $r_m = 0.056$, έναντι 0.1 που προβλέπεται από την εξίσωση (2.8).

2.4.2 Αριθμός διαστολής κατά τη σκέδαση

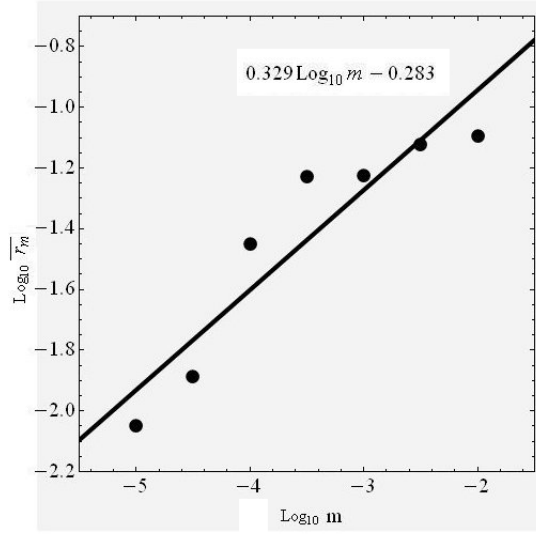
Έχοντας εκτιμήσει την ακτίνα επιρροής της μελανής οπής r_m (2.18), και θεωρώντας ότι στο εσωτερικό της η δυναμική διαμορφώνεται αποκλειστικά από τη μελανή οπή, θα εκτιμήσουμε τώρα την τιμή του **τοπικού αριθμού διαστολής** (1.23) μιας τροχιάς που σκεδάζεται από τη μελανή οπή ως συνάρτηση της μάζας m , της ακτίνας εισόδου r_m και της ταχύτητας εισόδου της τροχιάς μέσα στη σφαίρα επιρροής.

Η σκέδαση κάθε σώματος που περνάει κοντά στη μελανή οπή μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις του Κέπλερ για την κίνηση σε κεντρικό δυναμικό. Η εξίσωση της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες ενός σώματος μέσα στο βαρυτικό δυναμικό $V(r) = -Gm/r$ που δημιουργείται από τη μάζα m δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm}{C^2} + A \cos(\phi - \phi_0) \quad (2.19)$$

όπου r η απόσταση του σώματος από την πηγή του δυναμικού m και C η στροφορμή του σώματος, η οποία όπως γνωρίζουμε διατηρείται κατά την κίνηση του σώματος. Η σταθερά A δίνεται από τη σχέση:

$$A = e \frac{Gm}{C^2} \quad (2.20)$$



Σχήμα 2.17: Ο λογάριθμος της μέσης απόστασης σταθεροποίησης της στροφορμής (βλ. κείμενο) $\log \bar{r}_m$ για διάφορες τιμές της μάζας της μελανής οπής. Οι τιμές του διαγράμματος για την κάθε μάζα προέκυψαν από μία τροχιά με τις ίδιες πάντα αρχικές συνθήκες και ενέργεια $E \simeq 0.18$ η οποία ολοκληρώθηκε για χρόνο $t = 10^5$. Η κλίση της βέλτιστης ευθείας που προσαρμόζεται στα σημεία είναι πολύ κοντά στην τιμή $1/3$ όσο δηλαδή και ο εκθέτης της σχέσης 2.8 που προβλέπει η θεωρία.

όπου e η εκκεντρότητα της τροχιάς $e = \sqrt{1 + 2EC^2/mG^2}$ και η γωνιά ϕ_0 είναι η πολική γωνία στο σημείο ελάχιστης απόστασης r_{min} της τροχιάς από το κέντρο (σχήμα 2.19).

Στο σχήμα 2.19 έχουμε σχεδιάσει την τροχιά του σώματος από τη στιγμή που θα μπει στην σφαίρα ακτίνας r_m (θέση Α) έως τη στιγμή που θα βγει από αυτήν (θέση Β). Εφόσον η απόσταση των σημείων από το κέντρο δεν αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας εξόδου είναι ίσο με αυτό της ταχύτητας εισόδου $|\vec{v}_0|$.

Από τη διατήρηση της στροφορμής στη θέση ελάχιστης απόστασης και στη θέση Α παίρνουμε τη σχέση:

$$v_{\phi_0} r_{min} = v_0 r_m \sin(\phi + u) . \quad (2.21)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ του σημείου Α του σημείου της ελάχιστης απόστασης βρίσκουμε:

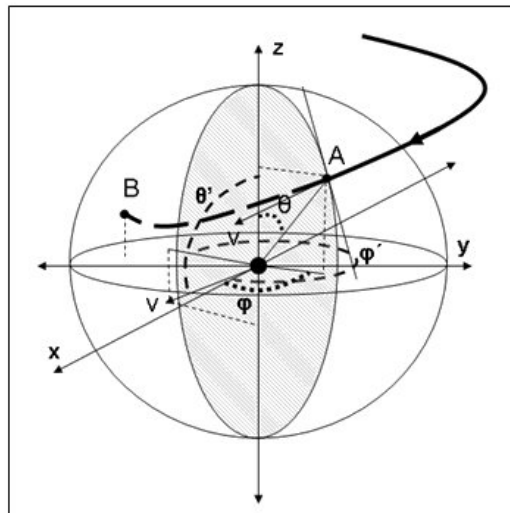
$$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{Gm}{r_m} = \frac{1}{2} v_{\phi_0}^2 - \frac{Gm}{r_{min}} . \quad (2.22)$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε το v_{ϕ_0} από την (2.21) καταλήγουμε στη σχέση:

$$2v_0^2 r_m^2 \sin^2(\phi + u) - 2Gm r_{min} = r_{min}^2 v_0^2 - 2r_{min}^2 Gm/r_m \quad (2.23)$$

η οποία δίνει για το r_{min} :

$$r_{min} = \frac{-2Gm + \sqrt{(2Gm)^2 + 4(v_0^2 - 2Gm/r_m)2v_0^2 r_m^2 \sin^2(\phi + u)}}{2(v_0^2 - 2Gm/r_m)} . \quad (2.24)$$



Σχήμα 2.18: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου της σφαίρας επιρροής της μελανής οπής. Η τροχιά εισέρχεται στη σφαίρα ακτίνας r_m στο σημείο A με συντεταγμένες (θ, φ) και εξέρχεται από αυτήν στο σημείο B. Η ταχύτητα v σχηματίζει γωνίες (θ', φ') με τους άξονες z και x αντίστοιχα. Κατά την κίνηση της τροχιάς στο εσωτερικό της σφαίρας θεωρούμε ότι δέχεται μόνο την επίδραση της μελανής οπής οπότε η στροφορομή της διατηρείται και η τροχιά περιγράφεται από το νόμο του Κέπλερ (2.19).

Για $\phi = \phi_0$ η εξίσωση (2.19) γράφεται:

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{Gm}{C^2} + A \Rightarrow A = \frac{1}{r_{min}} - \frac{Gm}{C^2} \quad (2.25)$$

οπότε αντικαθιστώντας το $1/r_{min}$ στην τελευταία έκφραση για το A παίρνουμε τελικά:

$$A = \sqrt{\frac{G^2 m^2}{r_m^4 v_0^4 \sin^4(\phi + u)} + \frac{(v_0^2 - 2Gm/r_m)}{r_m^2 v_0^2 \sin^2(\phi + u)}} \quad (2.26)$$

Στο σχήμα 2.19 η μελανή οπή είναι τοποθετημένη στην αρχή του συστήματος αναφοράς. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο κομμάτι της τροχιάς που βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας r_m . Από την εξίσωση (2.19), και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi < \phi_0$ και $\phi' > \phi_0$, βρίσκουμε:

$$\phi - \phi_0 = -\cos^{-1}\left(\frac{1}{Ar_m} - \frac{Gm}{AC^2}\right) \quad (2.27)$$

$$\phi' - \phi_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{Ar_m} - \frac{Gm}{AC^2}\right) \quad (2.28)$$

$$\phi - \phi' = -2\cos^{-1}\left(\frac{1}{Ar_m} - \frac{Gm}{AC^2}\right) \quad (2.29)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.29) την παράμετρο A από την (2.26) παίρνουμε:

$$\phi - \phi' = 2\cos^{-1}\left[\frac{v_0 \sin(\phi + u)}{\sqrt{(Gm/r_m v_0 \sin(\phi + u))^2 + v_0^2 - 2Gm/r_m}} \left(1 - \frac{Gm}{r_m v_0^2 \sin^2(\phi + u)}\right)\right] \quad (2.30)$$

υπολογίζουμε το πηλίκο $|\frac{d\phi'}{d\phi}|$ οπότε μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \left[2 \cos^{-1} \frac{v_0 \sin(\phi + u)}{\sqrt{(Gm/r_m v_0 \sin(\phi + u))^2 + v_0^2 - 2Gm/r_m}} \left(1 - \frac{Gm}{r_m v_0^2 \sin^2(\phi + u)} \right) \right] = \\ \frac{1 + 4mr_m v_0^2 - 2r_m^2 v_0^4 - 2m \csc^2 \phi r_m v_0^2}{-2mr_m v_0^2 + r_m^2 v_0^4 + m^2 \csc^2 \phi}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (2.31) καταλήγουμε στην:

$$\left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right| = \left| 1 + \frac{4mr_m v_0^2 - 2r_m^2 v_0^4 - 2m \csc^2 \phi r_m v_0^2}{-2mr_m v_0^2 + r_m^2 v_0^4 + m^2 \csc^2 \phi} \right|. \quad (2.34)$$

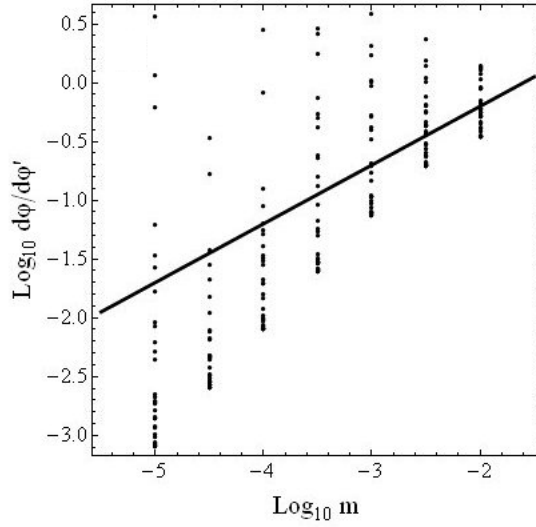
Προκειμένου να μελετήσουμε την περιοχή ενεργειών που μας ενδιαφέρει (ενέργεια $0 < E < 0.2$) το μέτρο της ταχύτητας μπορεί να έχει τιμή μέχρι περίπου 0.5 στην απόσταση r_m . Η τιμή της μάζας m κυμαίνεται μεταξύ των τιμών $10^{-5} < m < 10^{-2}$, ενώ από τη σχέση (2.8) βρίσκουμε πως η ακτίνα r_m παίρνει τιμές στην περιοχή $0.05 < r_m < 0.2$. Για τις τιμές αυτές των παραμέτρων ο όρος $2mr_m v_0^2$ είναι πολύ μικρότερος από τον όρο $r_m^2 v_0^4$. Εφόσον ο όρος $2mr_m v_0^2$ δεν επηρεάζει παρά ελάχιστα τον υπολογισμό, μπορεί να αγνοηθεί. Με την παραπάνω προσέγγιση η σχέση (2.34) παίρνει τη μορφή:

$$\left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right| \simeq \left| 1 - 2 \frac{1 + m \csc^2 \phi / r_m v_0^2}{1 + m^2 \csc^2 \phi / r_m^2 v_0^4} \right|. \quad (2.35)$$

Βασιζόμενοι στην εξίσωση (2.34) υπολογίζουμε την ποσότητα $\log(|\frac{d\phi'}{d\phi}|)$ για διάφορες τιμές της γωνίας και την σχεδιάζουμε συναρτήσει της ποσότητας $\log m$ (σχ. 2.20). Η ευθεία που έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα έχει κλίση 0.5. Όπως θα εξηγήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια η ποσότητα $|\frac{d\phi'}{d\phi}|$ εκφράζει τον τοπικό αριθμό διαστολής της τροχιάς για την κίνηση μέσα στην ακτίνα επιρροής της μελανής οπής.

Ο λογάριθμος του μέσου αριθμού διαστολής $\overline{\log|\frac{d\phi'}{d\phi}|}$ για την κίνηση μέσα στη σφαίρα r_m μπορεί να βρεθεί αριθμητικά απευθείας από την ακριβή έκφραση (2.34) είτε από την προσεγγιστική της μορφή (2.35). Και στις δυο περιπτώσεις υπολογίζουμε για δέκα διαφορετικές τιμές της μάζας τον μέσο όρο της ποσότητας $|\frac{d\phi'}{d\phi}|$ για 10000 τροχιές. Η κατανομή των γωνιών εισόδου ϕ θεωρείται ομοιόμορφη καθώς δεν υπάρχει κάποια προτιμώμενη διεύθυνση εισόδου για τις τροχιές οπότε οι τιμές της ϕ ελήφθησαν τυχαία στο διάστημα $(0, \pi/2)$. Οι τιμές για την ενέργεια ελήφθησαν τυχαία στο διάστημα $(0, 0.2)$ οπότε από αυτή προέκυπτε κάθε φορά και το μέτρο της ταχύτητας εισόδου της τροχιάς στη σφαίρα r_m .

Τα αποτελέσματα μας φαίνονται στο σχήμα (2.21). Τα μαύρα σημεία αντιστοιχούν στον υπολογισμό του $\overline{\log|\frac{d\phi'}{d\phi}|}$ με βάση την σχέση (2.34). Η ευθεία που έχει σχεδιαστεί αποτελεί την βέλτιστη προσαρμογή σε αυτά τα σημεία και η κλίση της είναι 0.28. Τα γκριζα σημεία έχουν εξαχθεί από την σχέση (2.35) και όπως μπορούμε να δούμε υπάρχει μόνο μια μικρή απόκλιση από τα αποτελέσματα που δίνει η ακριβής σχέση υπολογισμού του αριθμού διαστολής για μάζες τις μελανής οπής $10^{-3} < m < 10^{-2}$. Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως ο μέσος αριθμός διαστολής συνδέεται με τη μάζα με ένα νόμο δύναμης της μορφής $(\overline{\log|\frac{d\phi'}{d\phi}|}) \propto m^s$. Αριθμητικά βρίσκουμε από τη βέλτιστη προσαρμογή την κλίση $s \simeq 0.28$. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να εξαγάγουμε και αναλυτικά υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα της ποσότητας $\log|\frac{d\phi'}{d\phi}|$ σε όλες τις δυνατές γωνίες. Πράγματι:



Σχήμα 2.20: Η ποσότητα $\log(|\frac{d\phi'}{d\phi}|)$ (2.34) για διάφορες τιμές της γωνίας συναρτήσει της ποσότητας $\log m$. Η ευθεία που έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα έχει κλίση 0.5.

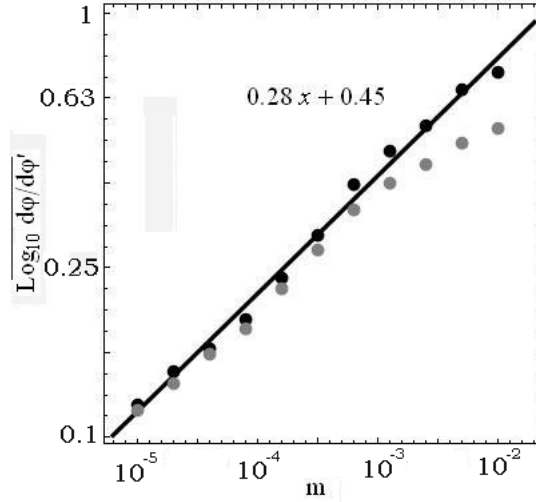
$$\begin{aligned}
 \overline{\left| \frac{\log d\phi'}{d\phi} \right|} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right| d\phi = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \left| 1 - 2 \frac{1 + \frac{m}{r_m v_0^2} \csc^2 \phi}{1 + \frac{m}{r_m^2 v_0^4} \csc^2 \phi} \right| d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \left| \left(1 - 2 \frac{\alpha_0 + \sin^2 \phi}{\alpha_0^2 + \sin^2 \phi} \right) \right| d\phi = \quad (2.36) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \left(2 \frac{\alpha_0 + \sin^2 \phi}{\alpha_0^2 + \sin^2 \phi} - 1 \right) d\phi = \log \left(2 \frac{1 + \alpha_0}{1 + \alpha_0^2} - 1 \right) + 2 \log \frac{\sqrt{1 + \alpha_0^2} (1 + \sqrt{\frac{\alpha_0(\alpha_0 - 2)}{\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1}})}{\alpha_0 + \sqrt{1 + \alpha_0^2}}
 \end{aligned}$$

όπου $\alpha_0 = m/r_m v_0^2$.

Καθώς οι τιμές της μάζας κυμαίνονται μεταξύ $10^{-5} < m < 10^{-2}$, η παράμετρος α_0 είναι εν γένει μικρή, με εξαίρεση την περιοχή των πολύ μικρών ενεργειών $E < 0.03$ και για μάζες της μελανής οπής κοντά στο άνω όριο του θεωρούμενου διαστήματος. Σε τέτοιες τιμές των ενεργειών όμως οι τροχιές δεν απομακρύνονται εν γένει από την περιοχή επιρροής της μελανής οπής, όπως για παράδειγμα οι τροχιές πυραμίδας (βλ. [93]), και είναι οργανωμένες. Στην περιοχή αυτή ενεργειών θα αναφερθούμε και στη συνέχεια.

Για τη χαοτική τώρα πλειονότητα των τροχιών, ο μέσος αριθμός διαστολής μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής: Θεωρώντας ότι $a_0 \ll 1$, η εξίσωση (2.36) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \overline{\left| \log \frac{d\phi'}{d\phi} \right|} &\simeq \log(1 + 2\alpha_0) + 2 \log \frac{(1 + \sqrt{\frac{-2\alpha_0}{-2\alpha_0 - 1}})}{a + 1} \\
 &= \log(1 + 2\alpha_0) + 2 \log \frac{(1 + \sqrt{\alpha_0} \sqrt{\frac{-2}{-2\alpha_0 - 1}})}{\alpha_0 + 1} . \quad (2.37)
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.21: Ο λογάριθμος του μέσου αριθμού διαστολής $\overline{\log \left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right|}$ υπολογισμένος με την βοήθεια των σχέσεων (2.34) (μαύρα σημεία) και (2.35) (γκρίζα σημεία). Και στις δυο περιπτώσεις υπολογίζουμε για δέκα διαφορετικές τιμές της μάζας τον μέσο όρο της ποσότητας $\log \left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right|$ για 10000 τροχιές με αρχικές συνθήκες ομοιόμορφα καταναμημένες ως προς τη γωνία εισόδου ($0 < \phi < \pi/2$) και ως προς την ενέργεια ($0 < E < 0.2$). Απ' τα μαύρα σημεία προκύπτει μια ευθεία βέλτιστης προσαρμογής με κλίση 0.28 ($\log \left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right| \propto m^{0.28}$). Τα γκρίζα σημεία εμφανίζουν μικρή απόκλιση από αυτό το νόμο δύναμης μόνο στην περιοχή των μαζών $10^{-3} < m < 10^{-2}$.

Αναπτύσσοντας την (2.37) σε δυνάμεις ως προς την ποσότητα $a_0^{1/2}$, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \overline{\log \left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right|} &\simeq 2\alpha_0 + 2 \log (1 + \sqrt{\alpha_0} \sqrt{2}) = 2\alpha_0 + 2\sqrt{2} \sqrt{\alpha_0} \\ &= \frac{2}{(r_m v_0^2)} m + \frac{\sqrt{22}}{(r_m v_0^2)^{1/2}} \sqrt{m} \simeq \sqrt{\frac{8}{(r_m v_0^2)}} \sqrt{m} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

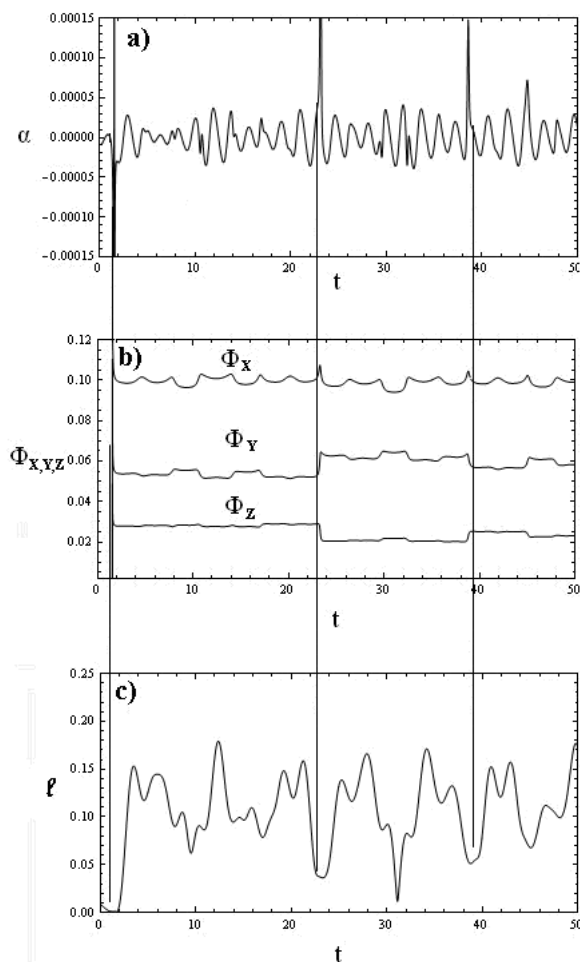
Στη σχέση (2.38) η ποσότητα r_m εξαρτάται με τη σειρά της από τη μάζα μέσω της σχέσης $r_m \propto m^{1/3}$. Επιπλέον η ενέργεια στα όρια της ακτίνας επιρροής της μελανής οπής είναι περίπου ίση με την κινητική ενέργεια οπότε μπορούμε να πούμε ότι $v_0^2 \propto E$. Έτσι, καταλήγουμε τελικά στην σχέση:

$$\overline{\log \left| \frac{d\phi'}{d\phi} \right|} \propto \frac{m^{1/3}}{E^{1/2}}. \quad (2.39)$$

Η (2.39) είναι σε καλή συμφωνία με το αριθμητικό αποτέλεσμα του διαγράμματος 2.21, καθώς η προβλεπόμενη θεωρητικά κλίση είναι περίπου 1/3 δηλαδή κοντά στην τιμή 0.28 που προκύπτει αριθμητικά. Η σύμπτωση είναι ακόμη καλύτερη στην περιοχή των μικρών μαζών m , όπου, όπως έχουμε δει, ισχύουν καλύτερα τα αναπτύγματα των σχέσεων (2.36), και (2.37).

2.4.3 Αριθμός επισκέψεων στη σφαίρα επιρροής και αριθμός Lyapunov

Η ποσότητα $\log |d\phi'/d\phi|$ που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο αριθμητικά και αναλυτικά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο του αριθμού διαστολής α για την κίνηση μέσα στην σφαίρα ακτίνας r_m .



Σχήμα 2.22: (α) Η χρονική εξέλιξη του αριθμού διαστολής α για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα μιας τυχαίας τροχιάς ($m = 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.1$, $E = 0.18$). Κατά το μεγαλύτερο διάστημα ο αριθμός διαστολής εκτελεί ταλαντώσεις παρόμοιες με αυτές στο σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή. Στις θέσεις που οι τιμές των ολοκληρωμάτων μεταβάλλονται πολύ απότομα (κατακόρυφες γραμμές), ο αριθμός διαστολής εμφανίζει επίσης πολύ μεγάλες μεταβολές. Το άθροισμα αυτών των μεταβολών καθορίζει το μέσο αριθμό Lyapunov της τροχιάς. (β) Η χρονική εξέλιξη και των τριών ολοκληρωμάτων της κίνησης για την ίδια τροχιά. Τα άλματα αντιστοιχούν στη ελάχιστη κάθε φορά απόσταση από τη μελανή οπή. (γ) Η χρονική εξέλιξη της συνολικής στροφορμής (l). Στις θέσεις που η απόσταση από τη μελανή οπή γίνεται πολύ μικρή, όπως επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα των ολοκληρωμάτων, η στροφορμή εμφανίζει τα μεγαλύτερα διαστήματα σταθερότητας.

Απ' την άλλη, ο πεπερασμένου χρόνου αριθμός Lyapunov μιας τροχιάς μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των αριθμών διαστολής α_i κατά μήκος της τροχιάς:

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\xi(t)}{\xi_0} = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\xi_i}{\xi_{i-1}} \quad (2.40)$$

Το διάλυμα απόκλισης $\xi(t)$ μιας τροχιάς αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο στην περίπτωση των οργανωμένων τροχιών (βλ. π.χ. [18]). Πράγματι, στο σχήμα 2.22 βλέπουμε τη χρονική εξέλιξη του αριθμού διαστολής α (2.22α) παράλληλα με τη χρονική εξέλιξη των ολοκληρωμάτων $\Phi_x(t)$, $\Phi_y(t)$, $\Phi_z(t)$ (2.22β) καθώς επίσης και της στροφορμής (2.22γ) για μια τυχαία τροχιά του συστήματος με παραμέτρους $m = 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.1$ και $E = 0.18$. Για το χρονικό διάστημα όπου η τροχιά βρίσκεται μακριά από τη μελανή οπή, οπότε και τα ολοκληρώματα δεν εμφανίζουν σημαντικές διακυμάνσεις, ο αριθμός διαστολής ταλαντώνεται περίπου όπως προβλέπεται για κίνηση κάτω από ένα σχεδόν αρμονικό δυναμικό. Όμως κατά την είσοδο της τροχιάς στην περιοχή της κυριαρχίας του κεντρικού δυναμικού της μελανής οπής, όπου εμφανίζονται και τα άλματα στις τιμές των τριών ολοκληρωμάτων, έχουμε σημαντική τοπική αύξηση του αριθμού διαστολής. Η τιμή του στις περιπτώσεις αυτές εκτελεί μεγάλα άλματα τα οποία έχουν την μεγαλύτερη συνεισφορά στον πεπερασμένου χρόνου αριθμό Lyapunov της τροχιάς η οποία εμφανίζεται να είναι τελικά χαοτική. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει $\alpha_i \simeq 0$ για όσο διάστημα η τροχιά μένει μακριά από τη μελανή οπή.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στις θέσεις που έχουμε τα μεγαλύτερα άλματα για το ολοκλήρωμα και τον αριθμό διαστολής, η συνολική στροφορμή εμφανίζει τα μεγαλύτερα διαστήματα σταθερότητας καθώς όσο πιο κοντά πλησιάζει η τροχιά τη μελανή οπή τόσο μεγαλύτερο διάστημα περνάει μέσα στην σφαίρα επιρροής της.

Δεχόμενοι τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov υπολογίζοντας μόνο τον αριθμό διαστολής που αντιστοιχεί στην κίνηση μέσα στη σφαίρα επιρροής της μελανής οπής, δηλαδή:

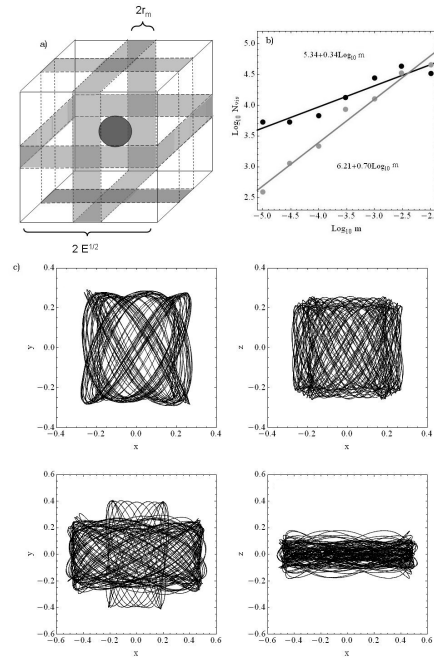
$$\chi(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\xi(t)}{\xi_0} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_{vis}} \ln \frac{d\phi'_i}{d\phi_i} = \frac{N_{vis}}{t} \ln \frac{\overline{d\phi'}}{d\phi}, \quad (2.41)$$

όπου N_{vis} το πλήθος των διελεύσεων σε ορισμένο χρόνο t εντός της σφαίρας επιρροής της μελανής οπής.

Προκειμένου τώρα να υπολογιστεί ο αριθμός Lyapunov πεπερασμένου χρόνου της κάθε τροχιάς από το άθροισμα των αριθμών διαστολής πρέπει να ληφθεί υπόψη ο αριθμός των επισκέψεων N_{vis} που πραγματοποιεί μια τροχιά στην σφαίρα ακτίνας r_m . Όσο περισσότερες επισκέψεις τόσο περισσότερα είναι τα άλματα που εκτελεί ο αριθμός διαστολής και επομένως τόσο μεγαλύτερος ο αριθμός Lyapunov.

Η συχνότητα με την οποία μια τροχιά εισέρχεται στην κεντρική περιοχή επιρροής της μελανής οπής εξαρτάται, όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια, από τη γεωμετρία της τροχιάς. Συγκεκριμένα εξαρτάται από το αν η τροχιά “γεμίζει” ομοιόμορφα όλο το διαθέσιμο χώρο και στις τρεις διαστάσεις ή αν παραμένει κατά το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα σε μία περιοχή στην οποία μία από τις τρεις διαστάσεις είναι της τάξης μεγέθους της ακτίνας r_m . Στην συνέχεια θα αποκαλούμε την πρώτη κατηγορία τροχιών με τον όρο “τριδιάστατες” και τη δεύτερη κατηγορία με τον όρο “επίπεδες”. Αναλυτικά οι συνθήκες για την κατάταξη μιας τροχιάς στις παραπάνω κατηγορίες έχουν ως εξής:

ι) *Τριδιάστατη τροχιά*: όσο οι τρεις ποσότητες Φ_x , Φ_y , Φ_z παίρνουν συγκρίσιμες μεταξύ τους τιμές, μια τροχιά γεμίζει ομοιόμορφα τον διαθέσιμο φυσικό χώρο, οπότε έχει τη μορφή ενός τριδιάστατου κυτίου.



Σχήμα 2.23: (α) Σχηματική αναπαράσταση του χώρου κίνησης των “τριδιάστατων” και “επίπεδων” τροχιών (βλ. κείμενο). Ο κύβος αντιστοιχεί στην περιοχή που καλύπτουν οι “τριδιάστατες” τροχιές. Η σφαίρα στο κέντρο του αναπαριστά την σφαίρα επιρροής της μελανής οπής. Τα τρία γραμμοσκιασμένα παραλληλεπίπεδα είναι διατεταγμένα έτσι ώστε η μικρότερη από τις τρεις διαστάσεις τους κάθε φορά να είναι ίση με την διάμετρο της περιοχής επιρροής της κεντρικής μάζας. Ο χώρος που καταλαμβάνουν τα παραλληλεπίπεδα αντιστοιχεί στις περιοχές που “πρέπει” να κινούνται βασικά οι τροχιές ώστε να θεωρούνται “επίπεδες”. (β) Ο λογάριθμος του αριθμού των επισκέψεων σε σχέση με το λογάριθμο της κεντρικής μάζας για μία τριδιάστατη (μαύρα σημεία) και μία επίπεδη τροχιά (γκρίζα σημεία). Στη μία περίπτωση η ευθεία με τη βέλτιστη προσαρμογή έχει κλίση κοντά στο $2/3$ (0.70), ενώ η άλλη κοντά στο $1/3$ (0.34). (γ) Στα δυο πρώτα διαγράμματα βλέπουμε τις προβολές μιας τριδιάστατης τροχιάς στα επίπεδα $y-x$ και $z-x$, ενώ στο τρίτο και τέταρτο τις αντίστοιχες προβολές για μια “επίπεδη” τροχιά. Η μελανή οπή έχει μάζα $m = 10^{-2}$ και η ακτίνα επιρροής της είναι $r_m = 0.21$. Η τριδιάστατη τροχιά “γεμίζει” ομοιόμορφα όλο το διαθέσιμο χώρο και στις τρεις διαστάσεις ενώ η “επίπεδη” παραμένει κατά την z διάσταση στο μεγαλύτερο χρονικό διάστημα σε απόσταση μικρότερη από $r_m = 0.21$.

ii) *επίπεδη τροχιά*: στην περίπτωση των επίπεδων τροχιών μία από τις τρεις ποσότητες Φ_x , Φ_y , Φ_z έχει σημαντικά μικρότερη τιμή σε σχέση με τις άλλες δύο. Για παράδειγμα όταν $\Phi_z \ll \Phi_x$ και $\Phi_z \ll \Phi_y$, η ταλάντωση της τροχιάς κατά μήκος του του άξονα z είναι πολύ μικρότερη απ’ ότι στους άξονες x και y . Ποσοτικά, το πλάτος της ταλάντωσης σε κάθε άξονα είναι περίπου $\Delta X_i \simeq (2\Phi_k/\omega_k^2)^{1/2}$, όπου ο δείκτης k αναπαριστά καθέναν από τους τρεις άξονες x, y, z . Επομένως, μία τροχιά χαρακτηρίζεται επίπεδη όταν:

$$(2\Phi_k/\omega_k^2)^{1/2} < r_m/2 . \quad (2.42)$$

Η επίδραση της μορφής της τροχιάς στη συχνότητα των επισκέψεων της μπορεί να γίνει κατανοητή με τη βοήθεια του σχήματος 2.23. Θεωρούμε για λόγους απλότητας ότι ο χώρος που καταλαμβάνει μια τριδιάστατη τροχιά είναι περίπου ένας κύβος όπως αυτός που βλέπουμε στο σχήμα 2.23α.

Στην “αρμονική” προσέγγιση της κίνησης (χωρίς τη μελανή οπή) η κάθε πλευρά του κύβου έχει διάσταση $\sim 2E^{1/2}$ εφόσον το πλάτος της κίνησης σε κάθε άξονα δίνεται από τη σχέση $A = \sqrt{2E}/\omega$. Για μία τριδιάστατη τροχιά ο αριθμός των επισκέψεων στην κεντρική περιοχή είναι ανάλογος με το λόγο της επιφάνειας της κεντρικής περιοχής προς τη συνολική επιφάνεια του χώρου που καταλαμβάνει η τροχιά. Αυτό γίνεται κατανοητό δεδομένου ότι ξεκινώντας από ένα σημείο και κινούμενοι ακτινικά προς τυχαίες διευθύνσεις η πιθανότητα να περάσουμε από μία συγκεκριμένη επιφάνεια είναι ανάλογη με το εμβαδό της επιφάνειας αυτής και αντιστρόφως ανάλογη με το συνολικό εμβαδό της σφαίρας στην απόσταση που βρίσκεται η επιφάνεια. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι για τη συχνότητα των επισκέψεων στην περίπτωση των τριδιάστατων τροχιών ισχύει:

$$N_{vis} \propto \frac{S_{r_m}}{S_{tot}} = \frac{r_m^2}{E} . \quad (2.43)$$

Αν λάβουμε υπόψη και την σχέση (2.8) ο αριθμός των επισκέψεων για τις τριδιάστατες τροχιές δίνεται από την σχέση:

$$N_{vis} \propto \frac{m^{2/3}}{E} . \quad (2.44)$$

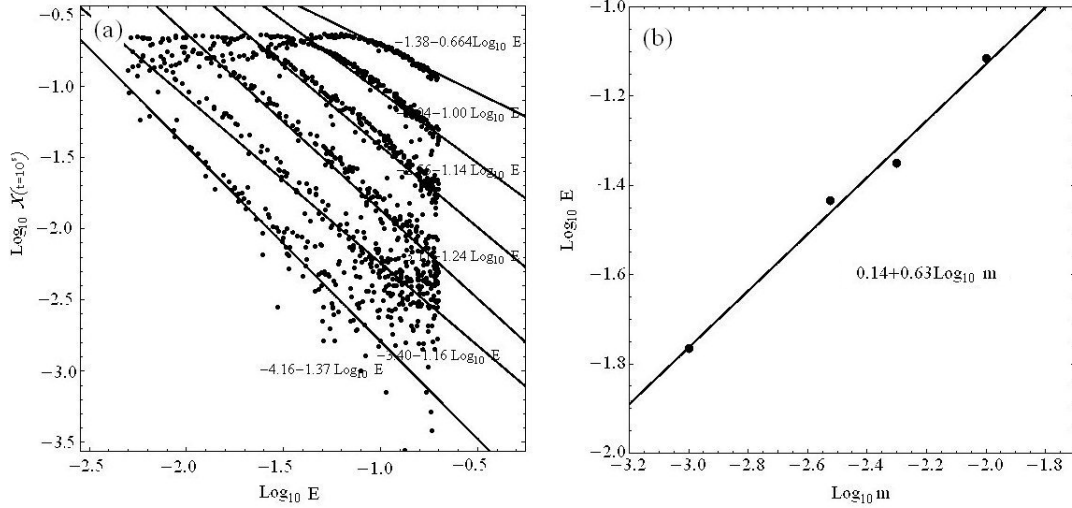
Μια τροχιά, τώρα, την οποία θεωρούμε επίπεδη, κινείται κατά κύριο λόγο σε ένα από τα τρία γραμμωσκιασμένα παραλληλεπίπεδα του σχήματος. Για μία τέτοια τροχιά η συχνότητα των επισκέψεων στην κεντρική περιοχή είναι ανάλογη όχι του εμβαδού της κεντρικής περιοχής αλλά της γραμμικής της διάστασης και αντιστρόφως ανάλογη του συνολικού εύρους της κίνησης στη μία μόνο διάσταση. Επομένως ισχύει:

$$N'_{vis} \propto \frac{r_m}{E^{1/2}} = \frac{m^{1/3}}{E^{1/2}} . \quad (2.45)$$

Ένας έλεγχος της ορθότητας των σχέσεων (2.43) και (2.45) για τη συχνότητα των επισκέψεων στην περιοχή επιρροής της μελανής οπής μπορεί να γίνει υπολογίζοντας αριθμητικά την συχνότητα των επισκέψεων για τροχιές ίδιας ενέργειας που ανήκουν στη μία ή στην άλλη κατηγορία για διάφορες τιμές της μάζας και επομένως της ακτίνας επιρροής της μελανής οπής. Για την κάθε μία περίπτωση (τριδιάστατες ή επίπεδες τροχιές) οι αρχικές συνθήκες λαμβάνονται ανεξάρτητα από την τιμή της μάζας m . Ως αποτέλεσμα οι τροχιές δεν αλλάζουν σημαντικά μορφή στο χώρο μολονότι η μάζα της μελανής οπής αλλάζει.

Στο σχήμα 2.23β μπορούμε να δούμε τον υπολογισμό αυτό για ένα παράδειγμα τροχιών στην ενέργεια $E=0.18$. Τα μαύρα σημεία δίνουν τον αριθμό των επισκέψεων μέσα στη σφαίρα $r_m = m^{1/3}$ για μια τροχιά με σταθερές αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0, z_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}) = (10^{-3}, 0.35, 0.35, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3})$ και συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης $t = 10^5$ αλλάζοντας την τιμή της μάζας m . Αντίστοιχα, τα γκρίζα σημεία δίνουν τον αριθμό των επισκέψεων μέσα στη σφαίρα $r_m = m^{1/3}$ για μια τροχιά με αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0, z_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}) = (0.2, 0.2, 0.2, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3})$ για τον ίδιο χρόνο ολοκλήρωσης. Τα μαύρα σημεία αφορούν μια τριδιάστατη τροχιά ενώ τα γκρίζα μια επίπεδη τροχιά.

Τα σημεία που προκύπτουν και στη μία και στην άλλη περίπτωση βρίσκονται γύρω από τις ευθείες που έχουν προσαρμοστεί στα σημεία αυτά και έχουν κλίσεις 2.1 και 1.1 αντίστοιχα. Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν για την πλειονότητα των χαοτικών τροχιών σε όλα τα επίπεδα. Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο αριθμός των επισκέψεων στην κεντρική περιοχή ακολουθεί το νόμο $N'_{vis} \propto r_m$ στην περίπτωση που έχουμε επίπεδη τροχιά και αντίστοιχα τον νόμο $N_{vis} \propto r_m^2$ στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με τριδιάστατη τροχιά. Δύο τέτοιες τροχιές, μία από την κάθε κατηγορία, μπορούμε να δούμε στο σχήμα 2.23γ όπου έχουμε σχεδιάσει τις προβολές μιας τριδιάστατης τροχιάς στα επίπεδα xy και xz για την περίπτωση μάζας $m = 10^{-2}$, και τις ίδιες προβολές



Σχήμα 2.24: (α) Η κατανομή του λογαρίθμου του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου στις διάφορες τιμές της ενέργειας. Κάθε συγκέντρωση σημείων έχει προκύψει για διαφορετική τιμή της μάζας της μελανής οπής (από πάνω προς τα κάτω $m = 10^{-2}$, $m = 3 \times 10^{-3}$, $m = 10^{-3}$, $m = 3 \times 10^{-4}$, $m = 10^{-4}$ και $m = 3 \times 10^{-5}$). Το μέγιστο της κάθε κατανομής βρίσκεται στη θέση $E = 2.2m^{2/3}$ και για το λόγο αυτό στις μεγάλες μάζες μπορούμε να το δούμε στο διάγραμμα ενώ στις μικρές όχι. Τα σημεία που αντιστοιχούν σε ενέργειες μικρότερες από $E = 2.2m^{2/3}$ αφορούν τροχίες που δεν βγαίνουν έξω από την ακτίνα επιρροής της μελανής οπής. Οι ευθείες που έχουν σχεδιαστεί σε κάθε περίπτωση αποτελούν τη βέλτιστη προσρμογή στα σημεία με ενέργεια $E > 2.2m^{2/3}$. Οι αναλυτικοί τύποι για την κάθε τιμή της μάζας δίνονται στο διάγραμμα. (β) Αριθμητικός υπολογισμός της θέσης του μεγίστου των κατανομών του σχήματος (α) σε σχέση με το λογάριθμο της κεντρικής μάζας. Τα σημεία ακολουθούν την προβλεπόμενη από τη θεωρία σχέση $E \sim m^{2/3}$ (βλ. κείμενο).

για μία επίπεδη τροχία για την ίδια πάλι μάζα της μελανής οπής. Θυμίζουμε ότι για μάζα $m = 10^{-2}$ η ακτίνα επιρροής της μελανής οπής είναι 0.21. Έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ενώ για την τριδιάστατη τροχία η απόσταση από το κέντρο είναι ομοιόμορφα μεγαλύτερη από την ακτίνα επιρροής της μελανής οπής προς όλες τις κατευθύνσεις, για τη διδιάστατη τροχία η συνιστώσα της στον άξονα z ξεπερνάει πολύ λιγότερες φορές την τιμή της r_m ($r_m = 0.21$ για $m = 10^{-2}$) από ότι οι άλλες δύο.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.45), (2.44) και την (2.39) βρίσκουμε ότι ο μέσος αριθμός Lyapunov πεπερασμένου χρόνου των τριδιάστατων τροχιών δίνεται από την έκφραση:

$$\bar{\chi} \propto \frac{m^{2/3}}{E} \times \frac{m^{1/3}}{E^{1/2}} = \frac{m}{E^{3/2}} \quad (2.46)$$

ενώ ο αντίστοιχος μέσος αριθμός Lyapunov πεπερασμένου χρόνου των επίπεδων τροχιών δίνεται από την:

$$\bar{\chi} \propto \frac{m^{1/3}}{E^{1/2}} \times \frac{m^{1/3}}{E^{1/2}} = \frac{m^{2/3}}{E}. \quad (2.47)$$

Η ακρίβεια των παραπάνω προσεγγίσεων μπορεί να ελεγχθεί και αριθμητικά, υπολογίζοντας την κατανομή των τιμών του μέσου χ για διάφορες τιμές της ενέργειας κρατώντας σταθερή κάθε φορά

την τιμή της μάζας m . Για τις ίδιες τροχιές που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του μέσου Lyapunov (2.7) σχεδιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα (2.24α) για την κάθε τιμή της μάζας την ποσότητα $\log \chi = f(\log E)$. Η συγκέντρωση σημείων στο πάνω δεξιό μέρος του διαγράμματος αφορά τη μάζα $m = 10^{-2}$, ενώ κατεβαίνοντας διαγώνια συναντάμε διαγράμματα $\log \chi = f(\log E)$ για τις υπόλοιπες τιμές της μάζας που διαφέρουν μεταξύ τους κατά μισή τάξη μεγέθους.

Παρατηρώντας το σχήμα 2.24α μπορούμε να πούμε ότι για κάθε τιμή της μάζας m η αντίστοιχη καμπύλη αποτελείται από δύο μέρη. Στο δεξιό μέρος, έχουμε προσαρμόσει κάθε φορά μία ευθεία, την κλίση της οποίας βλέπουμε στο διάγραμμα. Στο αριστερό μέρος, στις περιπτώσεις που έχουμε σημεία (μεγάλες μάζες) αυτά επίσης φαίνονται να διατάσσονται σε μια νοητή ευθεία. Καθώς στη θέση του μεγίστου κάθε κατανομής έχουμε αλληλεπικάλυψη των δυο νόμων δύναμης φαίνεται το διάγραμμα να παίρνει παραβολική μορφή. Ο λόγος που η καμπύλη αποτελείται από δυο διαφορετικά τμήματα οφείλεται στο ότι το σύνολο των τροχιών περιλαμβάνει δύο διαφορετικούς πληθυσμούς: τις τροχιές εκείνες, οι οποίες λόγω της πολύ χαμηλής τιμής της ενέργειας τους, περιορίζονται πάντα στο εσωτερικό της σφαίρας r_m , και τις τροχιές με ενέργεια μεγαλύτερη από μία τιμή που τους επιτρέπει να εισέρχονται και να εξέρχονται από τη σφαίρα ακτίνας r_m . Η τιμή αυτή της ενέργειας μπορεί να υπολογιστεί αν λάβουμε υπόψη τη σχέση της μάζας με την ακτίνα r_m . Πράγματι για την ενέργεια της τροχιάς μπορούμε να γράψουμε την προσεγγιστική σχέση:

$$E \simeq \frac{1}{2}(v^2 + r^2) - \frac{m}{r} \quad (2.48)$$

όπου r η απόσταση και v το μέτρο της ταχύτητας. Αν υποθέσουμε ότι η τροχιά φτάνει στο όριο της r_m με μηδενική ταχύτητα τότε η ενέργεια αυτή θα δίνεται από τη σχέση

$$E_l \simeq \frac{1}{2}(\Omega^2 - 1)r_m^2 - \frac{m}{r_m} \simeq \frac{1}{2}m^{2/3} - m^{2/3} = m^{2/3}. \quad (2.49)$$

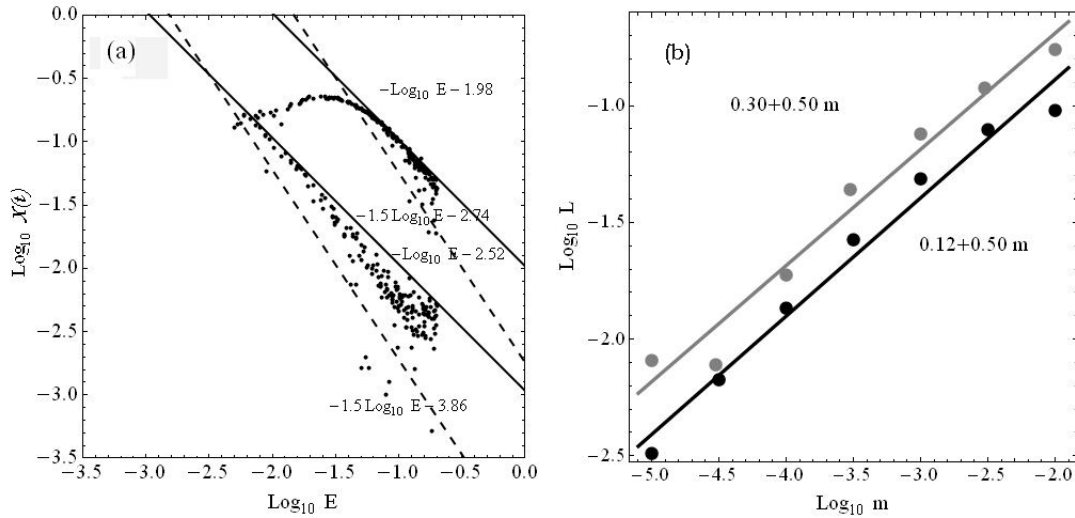
όπου Ω είναι ο γεωμετρικός μέσος των τριών συχνοτήτων. Επομένως το αριστερό μέρος του διαγράμματος που έχουμε τιμές της ενέργειας κάτω από $E \simeq m^{2/3}$ αφορά οργανωμένες τροχιές που δεν βγαίνουν από την ακτίνα επιρροής της μελανής οπής r_m . Κατά κύριο λόγο, όμως, το διάγραμμα απαρτίζεται από το δεξιό μέρος, το οποίο αφορά τροχιές που μπορούν να μπουν και να βγουν από αυτή την περιοχή και κατά πλειοψηφία είναι χαοτικές.

Τα σημεία για την κάθε τιμή της μάζας διασπείρονται κάθε φορά μεταξύ των ευθειών με κλίσεις μεταξύ των τιμών -1 και -1.5, των κλίσεων δηλαδή αυτών που προβλέπουν οι σχέσεις (2.47), (2.46). Αυτό είναι πιο εμφανές στο σχήμα (2.25α) όπου έχουμε σχεδιάσει την κατανομή $\log \bar{\chi}(t) = f(\log E)$ μόνο για δύο τιμές της μάζας $m = 10^{-2}$ και $m = 10^{-4}$ παράλληλα με τις ευθείες που προβλέπονται από τις σχέσεις (2.46), (2.47) και επιπλέον διέρχονται από το σημείο $E \propto m^{2/3}$ (ή για την ακρίβεια $E = 2.2m^{2/3}$ όπως προκύπτει αριθμητικά). Πράγματι για τις τιμές της μάζας μεταξύ $10^{-3} < m < 10^{-2}$ μπορούμε να δούμε τα μέγιστα της κατανομής στο διάγραμμα 2.24β όπου όπως παρατηρούμε η θέση του μεγίστου βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\log E = 0.14 + 2/3 \log m$ ή $E = 2.2m^{2/3}$. Η θέση του μεγίστου για την κάθε τιμή της μάζας υπολογίζεται από το σημείο τομής των βέλτιστα προσαρμοσμένων ευθειών στο αριστερό και δεξιό μέρος της αντίστοιχης παραβολικής καμπύλης του σχήματος 2.24α.

2.4.4 Θεωρητικός υπολογισμός του μέσου αριθμού Lyapunov

Για τον θεωρητικό υπολογισμό του μέσου αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου πρέπει να γνωρίζουμε το ποσοστό συνεισφοράς των επίπεδων και των τριδιάστατων τροχιών σε αυτόν. Για

τυχαίες αρχικές συνθήκες το ποσοστό των επίπεδων τροχιών επί του συνόλου είναι ανάλογο με το πηλίκο του εμβαδού που καταλαμβάνουν σε σχέση με το συνολικό εμβαδό που θα καταλάμβανε μία τριδιάστατη τροχιά ίδιας ενέργειας. Το εμβαδό των τροχιών αυτών είναι ίσο με το εμβαδό των τριών γραμμωσκιασμένων παραλληλεπιπέδων του σχήματος 2.23α. Οι δυο μεγαλύτερες διαστάσεις



Σχήμα 2.25: (α) Η κατανομή $\log \chi = f(\log E)$ για μάζες $m = 10^{-2}$, και $m = 10^{-4}$. Τα σημεία για την κάθε τιμή της μάζας διασπείρονται μεταξύ των ευθειών με κλίσεις -1 και -1.5 , όπως προβλέπουν οι σχέσεις (2.47), (2.46). Οι ευθείες είναι σχεδιασμένες ώστε να περνάνε από το σημείο $E = 2.2m^{2/3}$ που είναι το θεωρητικά προβλεπόμενο μέγιστο της κάθε κατανομής. (β) Τα μαύρα σημεία αντιστοιχούν στο μέσο Lyapunov πεπερασμένου χρόνου όπως προκύπτει θεωρητικά από τη σχέση (2.53) για τις διάφορες τιμές της μάζας, ενώ τα γκριζα σημεία αφορούν τον αριθμητικό υπολογισμό του μέσου Lyapunov για χρόνο $t = 10^5$ στην περίπτωση που η διαταραχή ε είναι ίση με 0.1 . Και στις δύο περιπτώσεις η μέση κλίση είναι πολύ κοντά στην τιμή 0.5

του καθενός από αυτά έχουν μήκος $2E^{1/2}$ ενώ η μικρότερη διάσταση έχει μήκος $2r_m$. Το πηλίκο συνεπώς των δύο εμβαδών είναι ίσο με:

$$\lambda = \frac{S_{2d}}{S_{tot}} = \frac{48E^{1/2}r_m}{24E} = \frac{2m^{1/3}}{E^{1/2}} \quad (2.50)$$

Κατά συνέπεια το ποσοστό των τριδιάστατων τροχιών είναι $1 - \lambda = 1 - 2m^{1/3}/E^{1/2}$. Με βάση τα παραπάνω η θεωρητική τιμή του μέσου Lyapunov των χαοτικών τροχιών δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$L = \frac{1}{0.2 - m^{2/3}} \left[\int_{m^{2/3}}^{0.2} dE f(E) \frac{2m^{1/3}}{E^{1/2}} + \int_{m^{2/3}}^{0.2} dE f'(E) \left(1 - \frac{2m^{1/3}}{E^{1/2}}\right) \right] \quad (2.51)$$

όπου $f(E)$ και $f'(E)$ είναι η κατανομή του Lyapunov πεπερασμένου χρόνου στις διάφορες τιμές της ενέργειας οι οποίες έχουν υπολογιστεί πιο πριν (σχέσεις (2.46), (2.47))

$$f(E) = c_1 \frac{m^{2/3}}{E}, \quad f'(E) = c_2 \frac{m}{E^{3/2}}. \quad (2.52)$$

Ως κάτω όριο ολοκλήρωσης για την τιμή της ενέργειας πήραμε την τιμή $E = m^{2/3}$ καθώς όπως έχουμε πει κάτω από αυτό το όριο οι τροχιές είναι γενικά οργανωμένες, ενώ ο υπολογισμός αφορά μόνο το μέσο Lyapunov πεπερασμένου χρόνου των χαοτικών τροχιών. Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στην (2.51) βρίσκουμε:

$$L = \frac{1}{0.2 - m^{2/3}} [4c_1 m^{2/3} + 10c_2 m^{4/3} - 2.23(4c_1 + 2c_2)m]. \quad (2.53)$$

Στηριζόμενοι στο τελευταίο αποτέλεσμα μας υπολογίζουμε τον μέσο Lyapunov των χαοτικών του συστήματος. Στο σχήμα 2.25β τα μαύρα σημεία δίνουν τον μέσο Lyapunov όπως αυτός δίνεται από τη σχέση (2.53) για τις διάφορες τιμές της μάζας, ενώ τα γκρίζα σημεία αφορούν τον αριθμητικό υπολογισμό του μέσου Lyapunov για χρόνο $t = 10^{-5}$ στην περίπτωση που η διαταραχή ϵ είναι ίση με 0.1.

Από τη σχέση (2.53) απορρέει ότι η κλίση είναι $2/3 - q$ ($\chi \propto m^{2/3-q}$) όπου q μικρός αριθμός, δεδομένου ότι στην (2.53) ο κυρίαρχος όρος είναι ο $4c_1 m^{2/3}$. Ο εκθέτης q προέρχεται από την συνεισφορά των υπόλοιπων όρων και κυμαίνεται από 0.1 έως 0.2 περίπου ανάλογα με την τιμή της μάζας. Για μεγάλες τιμές της μάζας η τιμή του q αυξάνεται ενώ για τις μικρές τιμές της μάζας μειώνεται. Στο σχήμα (2.53β), για μεγάλες τιμές της μάζας (π.χ. $m = 10^{-2.5}$, $m = 10^{-2}$) η κλίση του διαγράμματος $\log L = f(\log m)$, τόσο για την περίπτωση του θεωρητικού όσο και την περίπτωση του αριθμητικού υπολογισμού, είναι μικρότερη από τη μέση κλίση. Αντίστοιχα μεγαλύτερη είναι η κλίση των διαγραμμάτων $\log L = f(\log m)$ στην περιοχή των μικρών μαζών (π.χ. $m = 10^{-5}$, $m = 10^{-4}$). Η διακύμανση αυτή του εκθέτη $p = 2/3 - q$ της σχέσης $\chi \propto m^{2/3-q}$ γύρω από την τιμή 0.5 δίνει μια μέση τιμή κοντά στο 0.5 για όλο το εύρος των τιμών της μάζας της μελανής οπής ($10^{-5} < m < 10^{-2}$).

Κεφάλαιο 3

Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ραβδωτών γαλαξιών

3.1 Μοντέλο δυναμικού

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τον νόμο της μεταβολής του μέσου χαρακτηριστικού αριθμού Lyapunov των χαοτικών τροχιών αστερών, που περνούν αυθαίρετα κοντά από μελανή οπή που βρίσκεται στο κέντρο ενός ελλειπτικού γαλαξία, σε σχέση με τη μάζα της μελανής οπής. Η ύπαρξη ενός νόμου δύναμης της μορφής $L \propto m^p$, όπως αυτή προέκυψε από τις προσομοιώσεις N-σωμάτων για ελλειπτικούς γαλαξίες, επιβεβαιώθηκε αριθμητικά για την περίπτωση ενός απλού αναλυτικού μοντέλου που αντιστοιχεί στο τριαξονικό δυναμικό ενός ελλειπτικού γαλαξία. Κατόπιν δώσαμε μία θεωρητική ερμηνεία της σχέσης αυτής, θεωρώντας ότι κοντά στο κέντρο του γαλαξία οι τοπικοί αριθμοί Lyapunov (αριθμοί διαστολής) των τροχιών διαμορφώνονται μόνο από την σκέδαση λόγω της μελανής οπής.

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε την ύπαρξη ενός αντίστοιχου νόμου σε **ραβδωτούς** γαλαξίες. Η ύπαρξη μελανών οπών στα κέντρα δισκοειδών γαλαξιών έχει αποδειχθεί από σειρά παρατηρήσεων που έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια ([49], [77], [55], [45], [78], [79], [130], [56]). Για τον υπολογισμό των τροχιών επιλέξαμε το αναλυτικό μοντέλο ενός γαλαξία που προτάθηκε από τους Kaufmann και Contopoulos ([75]) για το γαλαξία NGC3992 (σχήμα 3.1). Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει σε μεγάλο βαθμό το δυναμικό του συγκεκριμένου γαλαξία, καθώς με την επιλογή του κατάλληλου συνδυασμού παραμέτρων του δυναμικού προκύπτουν **αυτοσυνεπή** προσεγγιστικά μοντέλα, δηλαδή μοντέλα στα οποία η πυκνότητα απόκρισης, που προκύπτει από την υπέρθεση πολλών αστρικών τροχιών είναι σε συμφωνία με την αρχική “επιβαλλόμενη” πυκνότητα (imposed density), την πυκνότητα δηλαδή που αντιστοιχεί στο αρχικά επιλεγθέν μοντέλο του δυναμικού ([75]).

Στο μοντέλο των Kaufmann & Contopoulos (1996), το δυναμικό αναλύεται σε συνιστώσες, δηλαδή το δυναμικό της άλω V_{halo} , το δυναμικό του δίσκου V_{disc} , το δυναμικό της ράβδου V_{bar} , και το δυναμικό των σπειρών V_{spiral} . Το καθένα από τα παραπάνω δυναμικά υπολογίζεται ως η λύση της εξίσωσης Poisson χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}) \quad (3.1)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας και το αντίστοιχο δυναμικό για κάθε μία από τις παραπάνω συνιστώσες είναι:

α) Άλω. Για την πυκνότητα της άλω χρησιμοποιείται το σφαιρικό μοντέλο του Plummer:

$$\rho_h(r) = \frac{3M_h}{4\pi b_h^3} \left(1 + \frac{r^2}{b_h^2}\right)^{-5/2} \quad (3.2)$$

που αντιστοιχεί στο δυναμικό:

$$V_h(r) = \frac{-M_h}{\sqrt{r^2 + b_h^2}}. \quad (3.3)$$

Η παράμετρος b_h είναι γνωστή ως ακτίνα Plummer και καθορίζει την κλίμακα μεγέθους του πυρήνα της άλω.

β) Δίσκος. Η επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου στο μοντέλο μας ακολουθεί νόμο εκθετικής πτώ-



Σχήμα 3.1: Γαλαξίας NGC3992.

σης:

$$\rho_d(r) = \Sigma_0 \exp(-\epsilon_d r). \quad (3.4)$$

Το αντίστοιχο δυναμικό είναι:

$$V_d(r) = -\Sigma_0 \pi r \left[I_0\left(\frac{1}{2}\epsilon_d r\right) K_1\left(\frac{1}{2}\epsilon_d r\right) - I_1\left(\frac{1}{2}\epsilon_d r\right) K_0\left(\frac{1}{2}\epsilon_d r\right) \right] \quad (3.5)$$

όπου I_0, I_1 και K_0, K_1 είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel* πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα.

γ) Ράβδος. Θεωρούμε ότι η ράβδος είναι τύπου Ferrers ([48]) με το μεγάλο ημιάξονα προσανατολισμένο στον άξονα y :

$$\rho_b(x, y, z) = \rho_c \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^2. \quad (3.6)$$

Το δυναμικό που αντιστοιχεί σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$V_b(x, y) = -\frac{105M_b}{96} \left[3(2W_{110}x^2y^2 - W_{120}x^4y^2 - W_{210}x^2y^2 - W_{100}y^2 + W_{020}x^4 + W_{200}y^4 - W_{010}x^2) + W_{000} - W_{030}x^6 - W_{300}y^6 \right] \quad (3.7)$$

όπου οι συντελεστές W_{ijk} υπολογίζονται με τη βοήθεια ελλειπτικών ολοκληρωμάτων (βλ. παράρτημα Α').

Οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου δίνονται στον πίνακα I που ακολουθεί. Για τις τιμές αυτές οι Kaufmann & Contopoulos (1996) έδειξαν ότι η πυκνότητα που λαμβάνεται από την υπέρθεση πολλών τροχιών εμφανίζει την καλύτερη δυνατή σύμπτωση με την πυκνότητα που επιβάλλουν οι εξισώσεις (3.2)-(3.7) ([75]). Η παράμετρος Ω_p που περιέχεται στον πίνακα είναι η ταχύτητα περιστροφής της ράβδου και των σπειρών.

Πίνακας 3.1: Πίνακας παραμέτρων γαλαξιακού μοντέλου

NGC3992					
Ράβδος:	M_b	α	b	c	Ω_p
	1.5	5.5	2.1	0.55	43.6
Δίσκος:	Σ_0	ε_d			
	750	0.235			
Άλως:	M_h	b_h			
	27.5	12			

Πίνακας 1.1: Οι τιμές των παραμέτρων για το γαλαξία NGC3992 (από Kaufmann και Contopoulos ([75])). Οι μονάδες είναι Kpc για τα α , b , c και για το b_h , $10^{10} M_\odot$ για τα M_h , M_b , $Kms^{-1} Kpc^{-1}$ για το Ω_p και b_h , M_\odot/pc^2 για το Σ_0 .

Στο παραπάνω δυναμικό προσθέτουμε αυτό της μελανής οπής στο κέντρο:

$$V_{bh}(r) = -\frac{m_{bh}}{\sqrt{r^2 + d^2}}. \quad (3.8)$$

Η παράμετρος d όπως έχουμε ξαναδεί είναι η παράμετρος εξομάλυνσης του δυναμικού στις μικρές αποστάσεις.

3.2 Αριθμητικός υπολογισμός

Η χαμιλτονιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχει τη γενική μορφή:

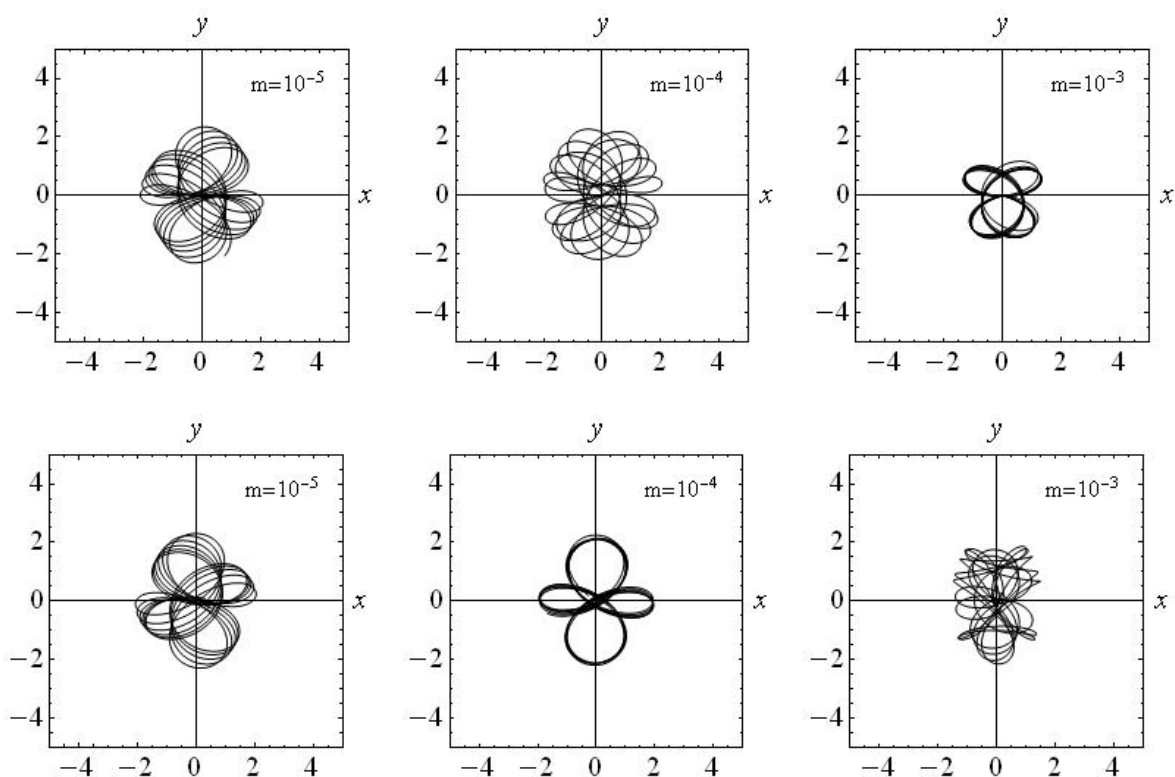
$$H(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z) = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2) - \Omega_p p_\theta + V(r, \theta, z). \quad (3.9)$$

Η κίνηση στο γαλαξιακό επίπεδο ($z = 0$) περιγράφεται από τη χαμιλτονιανή δύο βαθμών ελευθερίας:

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) - \Omega_p p_\theta + V(r, \theta). \quad (3.10)$$

Οι χαμιλτονιανές συναρτήσεις στις (3.9, 3.10) περιγράφουν την κίνηση στο στρεφόμενο σύστημα αναφοράς, ενώ η ποσότητα p_θ αντιστοιχεί στη στροφορμή στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Το δυναμικό $V(r, \theta)$ είναι το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών:

$$V(r, \theta) = V_{bh}(r) + V_h(r) + V_d(r) + V_b(r, \theta) + V_s(r, \theta). \quad (3.11)$$



Σχήμα 3.2: Χαρακτηριστικές τροχιές σωμάτων στο γαλαξιακό επίπεδο ($z=0$). Η αύξηση της μάζας της μελανής οπής αλλάζει σταδιακά τη μορφή της τροχιάς.

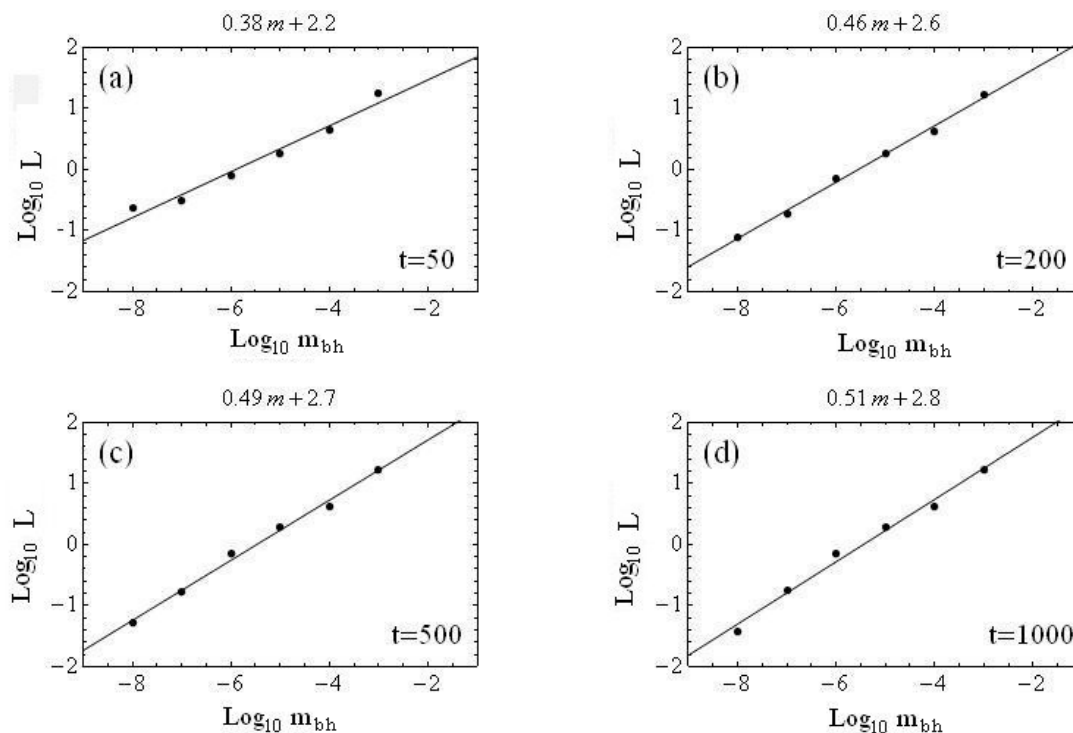
Να σημειώσουμε ότι στη σχέση (3.7) το δυναμικό της ράβδου δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες οπότε για τους υπολογισμούς κάναμε στη σχέση (3.7) την αντικατάσταση $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη χαμιλτονιανή (3.10) είναι:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= p_r \\
 \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{r^2} - \Omega_p \\
 \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \\
 \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

ενώ για τις αντίστοιχες εξισώσεις μεταβολών έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{r} &= \delta p_r \\
 \delta \dot{\theta} &= \frac{-2p_\theta}{r^3} \delta r + \frac{1}{r^2} \delta p_\theta \\
 \delta \dot{p}_r &= \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{3p_\theta^2}{r^4} \right) \delta r - \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} \delta \theta + \frac{2p_\theta}{r^3} \delta p_\theta \\
 \delta \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial V}{\partial \theta} \delta r - r \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial r} \delta r + r \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \delta \theta.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Κατ' αντιστοιχία με τα όσα είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα υπολογίσουμε τους μέσους αριθμούς Lyapunov πεπερασμένου χρόνου τροχιών που περνούν κοντά στο κέντρο του γαλαξία. Οι τροχιές που επιλέγουμε σε αυτή την περίπτωση για την μελέτη μας δεν είναι τύπου κουτιού, όπως στην περίπτωση του ελλειπτικού γαλαξία. Εξαιτίας της περιστροφής του γαλαξία η στροφορμή των τροχιών είναι σημαντική οπότε δεν υπάρχουν εν γένει τροχιές τύπου κουτιού οι οποίες να μπορούν να διέλθουν πολύ κοντά από το γαλαξιακό κέντρο.



Σχήμα 3.3: Οι τιμές του μέσου λογαρίθμου του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου των χαοτικών τροχιών $\log L$ σε σχέση με το λογάριθμο της μάζας μελανής οπής $\log m$ για τέσσερα διαφορετικά χρονικά στιγμότυπα ($t=50$, $t=200$, $t=500$ και $t=1000$). Σε κάθε περίπτωση τα σημεία προσαρμόζονται πολύ καλά πάνω σε ένα νόμο της μορφής $\log L \propto m^p$. Η τιμή του εκθέτη αυξάνεται σταδιακά με την πάροδο σταθεροποιείται κοντά στην τιμή 0.5

Ωστόσο, όπως θα δούμε γύρω από τις περιοδικές αυτές τροχιές υπάρχουν ημιπεριοδικές τροχιές με αρκετό “πάχος” ώστε να διέρχονται πλησίον της μελανής οπής. Τέτοιες είναι ημιπεριοδικές τροχιές γύρω από την βασική περιοδική τροχιά \mathbf{x}_1 που υποστηρίζουν την ράβδο ([16]) ή οι διακλαδώσεις των \mathbf{x}_1 που αντιστοιχούν σε συντονισμούς ανώτερης τάξης.

Η ενέργεια του σημείου Lagrange L_1 είναι $E_{j,L_1} = -1.915 \times 10^5$ κατά συνέπεια οι τροχιές της ράβδου αντιστοιχούν σε ενέργειες $E < E_{j,L_1}$. Έτσι, οι τροχιές που επιλέγουμε έχουν ενέργειες στην περιοχή κοντά στο -200000 στο σύστημα μονάδων που χρησιμοποιούμε και συγκεκριμένα από -203000 έως -216000 .

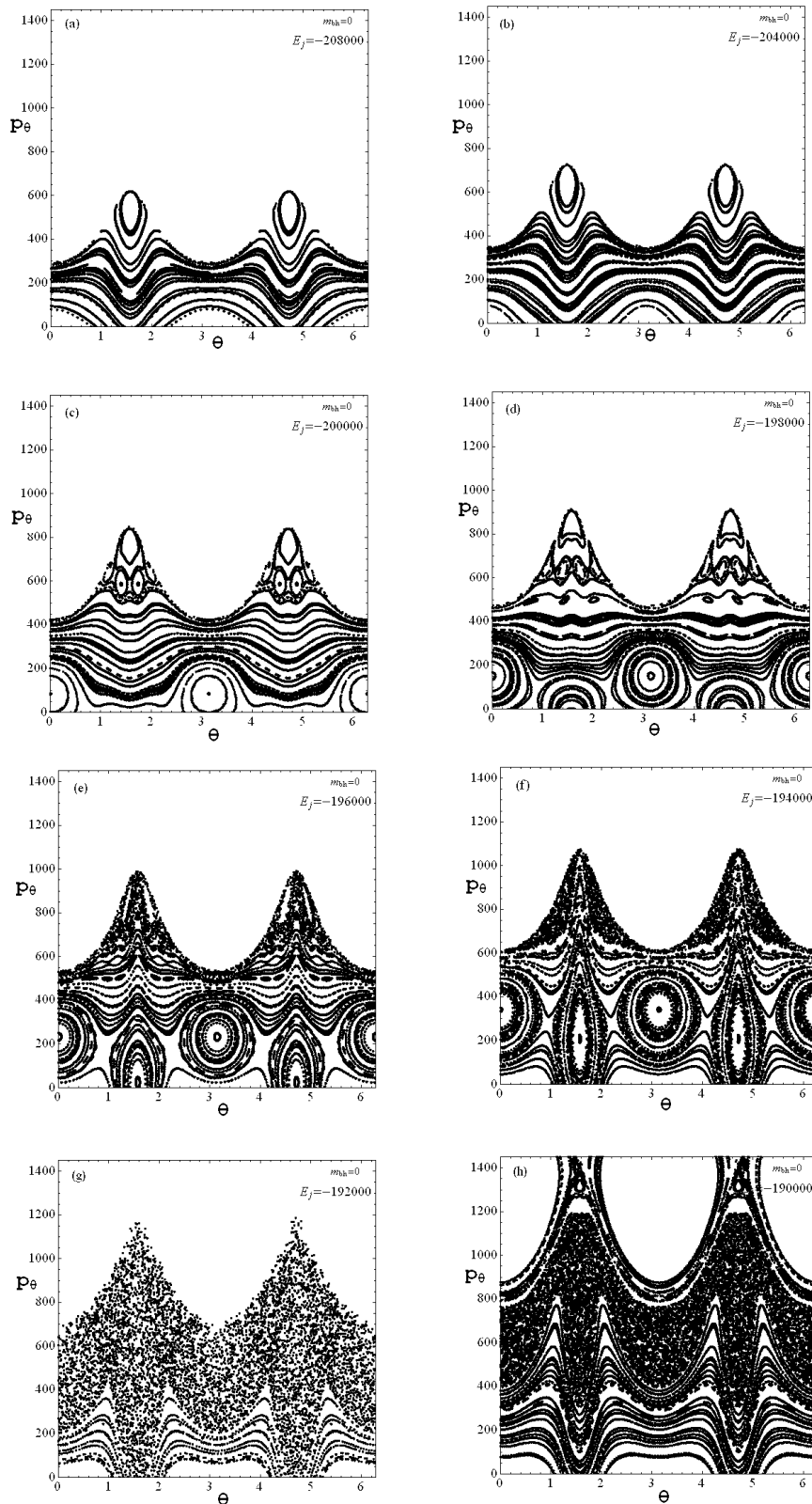
Με βάση τα παραπάνω επιλέξαμε τις αρχικές συνθήκες των τροχιών κατά τρόπο ώστε η αρχική στροφορμή τους στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς να είναι ίση με μηδέν. Με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται ότι οι τροχιές έχουν αυξημένη πιθανότητα να διέλθουν κοντά από το κέντρο. Οι αρχικές συνθήκες λαμβάνονται πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας $r = 0.1$ από το κέντρο του γαλαξία. Όλα τα σώματα έχουν αρχικά ταχύτητα μόνο στην ακτινική διεύθυνση.

Ολοκληρώσαμε συνολικά 200 τροχιές με την παραπάνω επιλογή αρχικών συνθηκών. Μερικές χαρακτηριστικές τροχιές του συστήματος για διαφορετική μάζα της μελανής οπής δίνονται στο σχήμα 3.2. Επιλύοντας τις εξισώσεις μεταβολών (3.13), υπολογίζουμε για τις παραπάνω τροχιές τον μέσο αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου χ μέχρι το χρόνο ολοκλήρωσης $t = 10^5$. Το σχήμα 3.3 δείχνει τον λογάριθμο του μέσου αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου ως συνάρτηση του λογαρίθμου της μάζας της μελανής οπής ($\log L - \log m$) για τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για όλες τις χρονικές στιγμές φαίνεται τα μεγέθη L και m να συνδέονται με νόμο δύναμης. Μάλιστα με την πάροδο του χρόνου ο εκθέτης του νόμου δύναμης πλησιάζει σταδιακά στην τιμή 0.5 οπότε παίρνουμε $\log \bar{\chi} \propto m^p$ με $p \simeq 0.5$ όπως και στον ελλειπτικό γαλαξία. Σημειώνουμε ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος του συστήματος (μέση περίοδος μιας τροχιάς) είναι της τάξης του 0.1. Επομένως στο σχήμα 3.3 οι τροχιές έχουν υπολογιστεί σε χρόνο από μερικές εκατοντάδες ως μερικές χιλιάδες περιόδους.

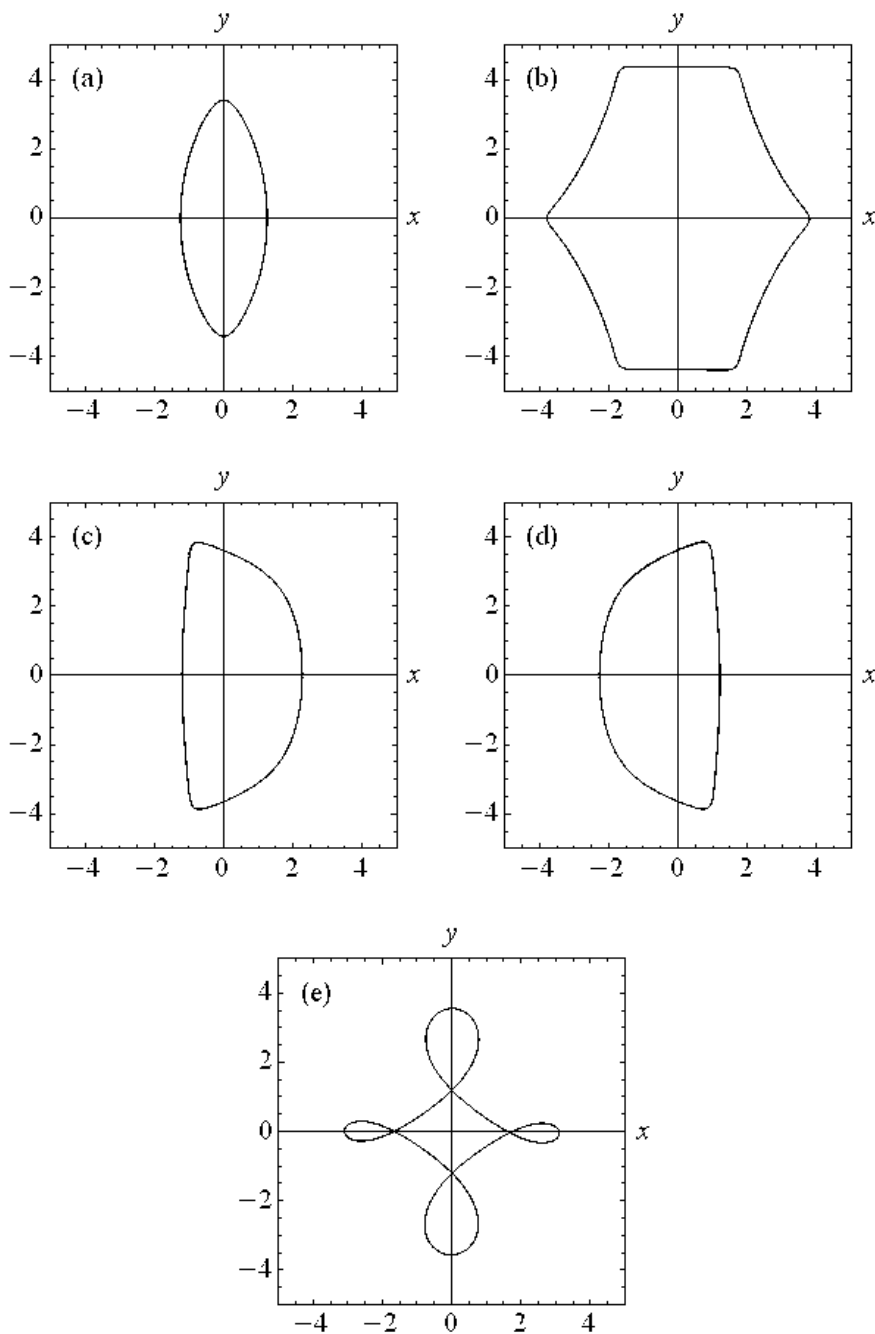
3.3 Ερμηνεία-Περιοδικές τροχιές και φασικά πορτρέτα

Η επίδραση της μελανής οπής στη δυναμική του γαλαξία συνολικά μπορεί να φανεί στα φασικά πορτρέτα των τομών Poincaré για διάφορες τιμές της ενέργειας και της μάζας της μελανής οπής. Η επιλογή τομής που κάνουμε είναι η (θ, p_θ) με $p_r = 0$ και $\dot{p}_r < 0$ (αποκεντρική τομή). Μια τομή υπολογίζεται λύνοντας πρώτα την εξίσωση $H(r, \theta, p_r = 0, p_\theta) = E_J$ ως προς την απόσταση r για διάφορα ζεύγη (θ, p_θ) . Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε τις αρχικές συνθήκες των τροχιών που αντιστοιχούν στην επιθυμητή ενέργεια. Εξελίσσοντας χρονικά τις τροχιές παίρνουμε την τομή Poincaré κάθε φορά που επαληθεύεται η συνθήκη $p_r = 0, \dot{p}_r < 0$. Η τομή (θ, p_θ) μας δίνει μια άμεση εμποπτεία των τροχιών στο χώρο των φάσεων (p_θ, θ) , αλλά και στο συνήθη θεσεογραφικό χώρο, καθότι η απόσταση r μεταβάλλεται γενικά μονότονα με τη στροφορμή p_θ ([134]).

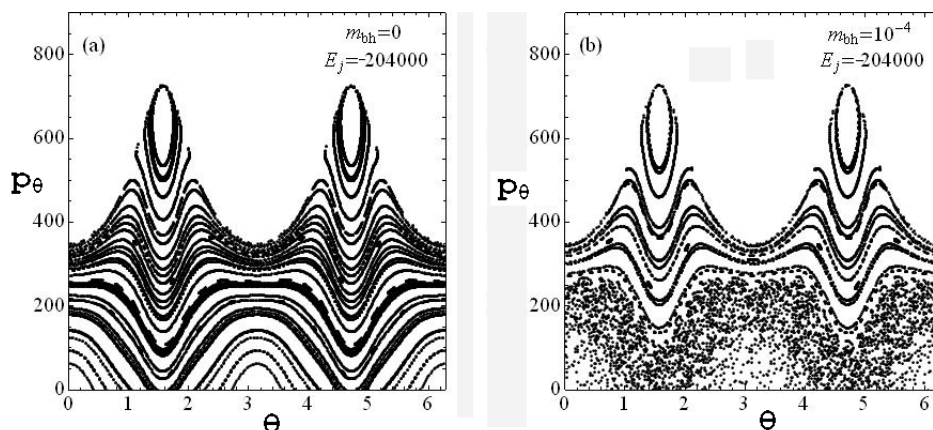
Οι τροχιές που μπορούν να δεχθούν την επίδραση της μελανής οπής, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι ημπεριοδικές τύπου σωλήνα γύρω από τις περιοδικές τροχιές που εμφανίζονται κυρίως στους συντονισμούς 2 : 1 και 4 : 1. Από τις τομές Poincaré (σχήμα 3.4) προκύπτει ότι οι συντονισμοί αυτοί βρίσκονται στο σύστημα σε ορισμένες ενεργειακές περιοχές. Έτσι παρατηρούμε ότι ο συντονισμός 2 : 1 υφίσταται για τροχιές με ενέργειες περίπου μέχρι -199000 . Η κεντρική περιοδική τροχιά του συντονισμού φαίνεται στο σχήμα 3.5α. Επειδή έχει δυο απόκεντρα για ένα πλήρη αζιμουθιακό κύκλο, αποτυπώνεται στην τομή Poincaré με δύο νησίδες ευστάθειας. Μετά την ενεργειακή ζώνη του συντονισμού 2 : 1 ξεκινάει η ζώνη του συντονισμού 4 : 1 από ενέργειες -199000 έως -193000 περίπου. Η αντίστοιχη περιοδική τροχιά έχει τέσσερα απόκεντρα ανά αζιμουθιακό κύκλο (σχήμα 3.5ε) και αποτυπώνεται στην τομή με τέσσερις νησίδες. Η ύπαρξη μικρότερων νησίδων στις ίδιες ενέργειες υποδηλώνει την ύπαρξη κι άλλων συντονισμών μεγαλύτερης τάξης που δεν έχουν όμως τόσο μεγάλη βαρύτητα. Για παράδειγμα οι νησίδες του συντονισμού 3:1, στον οποίο θα αναφερθούμε στη συνέ-



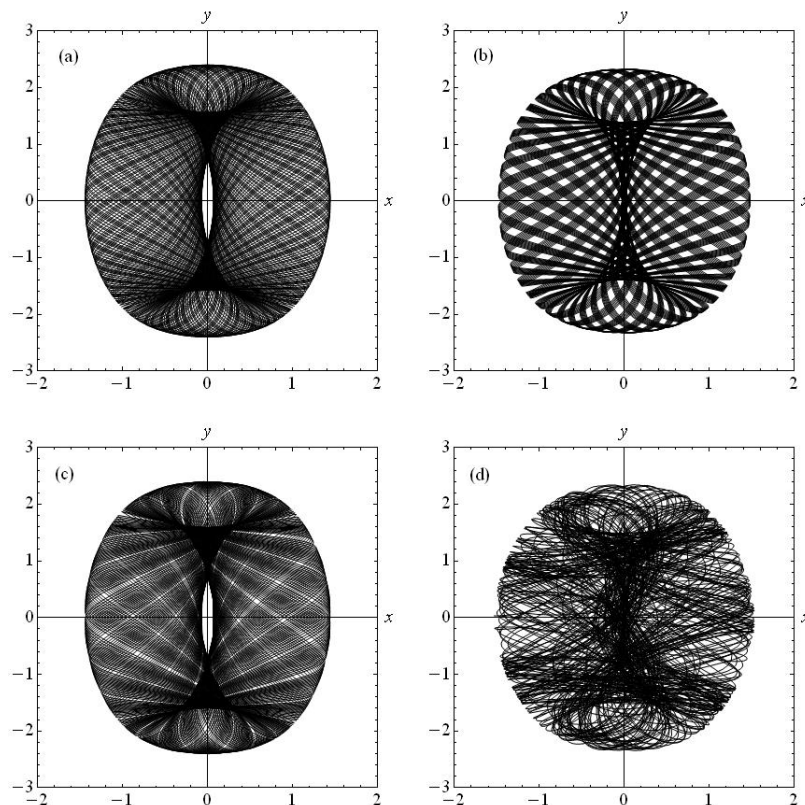
Σχήμα 3.4: Οι τομές Poincaré του δυναμικού (3.11) για διάφορες ενέργειες των τροχιών χωρίς μελανή οπή ($m_{bh} = 0$). Στην περιοχή ενεργειών μεταξύ -193000 και -199000 κυριαρχούν οι τροχιές γύρω από το συντονισμό $4 : 1$ ενώ για ενέργεια από -199000 και κάτω κυριαρχούν αυτές του συντονισμού $2 : 1$.



Σχήμα 3.5: (α) Κεντρική περιοδική τροχιά του συντονισμού $2 : 1$ (β) Κεντρική περιοδική τροχιά του συντονισμού $6 : 1$ (γ) Κεντρική περιοδική τροχιά του συντονισμού $3 : 1$ (δ) Η συμμετρική της προηγούμενης περίπτωσης (ε) Κεντρική περιοδική τροχιά του συντονισμού $4 : 1$

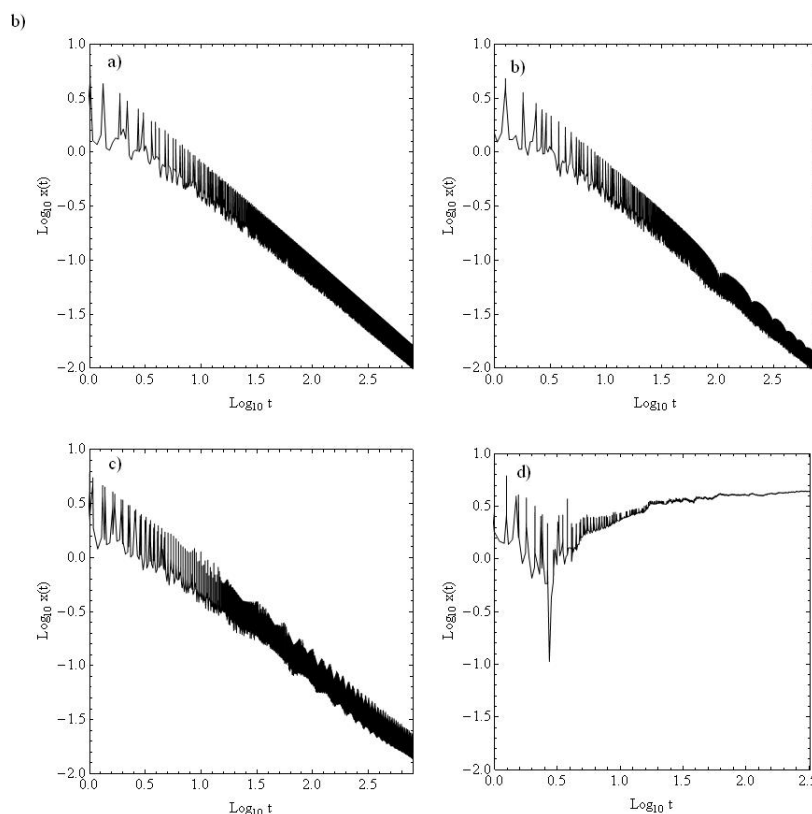


Σχήμα 3.6: Τομή Poincaré για ενέργεια -204000 στην περίπτωση μελανής οπής με μάζα (α) $m = 0$ και (β) $m = 10^{-4}$. Η παρουσία της μελανής οπής καταστρέφει ένα μέρος των νησίδων, στο κάτω μέρος του διαγράμματος, που δημιουργούν οι τροχιές γύρω από το συντονισμό $2 : 1$.



Σχήμα 3.7: (α) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -204000 γύρω από το συντονισμό $2 : 1$. Στην τομή Poincaré του σχήματος 3.6α η τροχιά αντιστοιχεί σε μία αμετάβλητη καμπύλη της νησίδας ευστάθειας του συντονισμού $2 : 1$, ευστάθειας που διατηρείται και μετά την προσθήκη της μελανής οπής (3.6β). (β) Ομοίως, για τροχιά της οποίας η αμετάβλητη καμπύλη καταστρέφεται μετά την προσθήκη της μελανής οπής. (γ) Η τροχιά του σχήματος (α) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά παραμένει οργανωμένη καθώς το εύρος της αμετάβλητης καμπύλης είναι σχετικά μικρό και η τροχιά δεν περνάει πολύ κοντά στη μελανή οπή. (δ) Η τροχιά του σχήματος (β) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά έχει γίνει χαοτική γιατί το εύρος της αντίστοιχης αμετάβλητης καμπύλης στην περίπτωση (β) επιτρέπει τη διέλευση της τροχιάς μέσα από την σφαίρα επιρροής της μελανής οπής.

χεια, αντιστοιχούν στις κενές περιοχές που φαίνεται να σχηματίζονται για ενέργεια $E = -196000$ (σχ. 3.4ε) στο ύψος $p_\theta \simeq 800$. Η αντίστοιχη περιοδική τροχιά έχει τρία απόκεντρα ανά αξιμουθιακό κύκλο (σχήμα 3.5γ, δ) και αποτυπώνεται στην τομή με τρεις (οριακά διακρινόμενες) νησίδες. Ακόμη μικρότερες είναι οι νησίδες γύρω από την περιοδική τροχιά 6:1 (σχήμα 3.5β) και έτσι είναι αδύνατον να τις διακρίνουμε στην τομή Poincaré με ενέργεια -192000 όπου εμφανίζεται αυτός ο συντονισμός (3.6β). Να παρατηρήσουμε ότι μετά την ενέργεια -192000, την ενέργεια δηλαδή που L_1 , υπάρχει

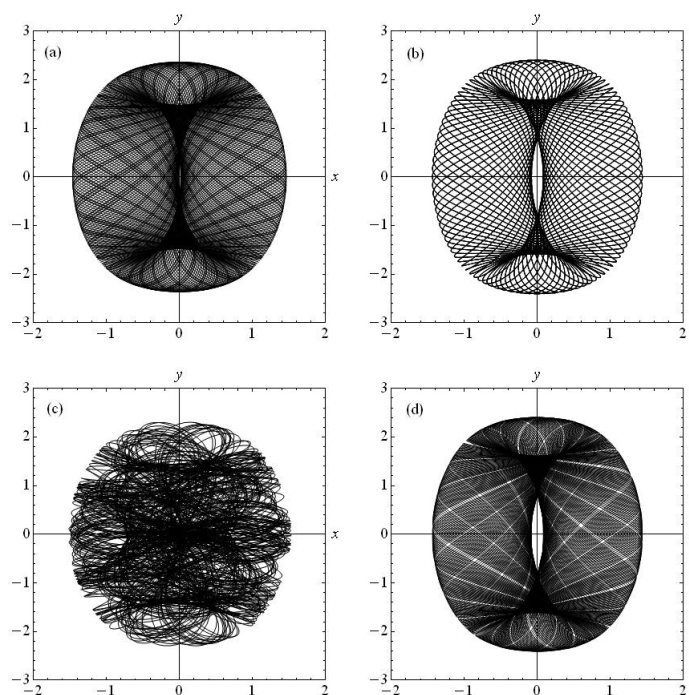


Σχήμα 3.8: Η χρονική εξέλιξη του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για τις τροχιές του σχήματος 3.7. Το διάγραμμα του Lyapunov πεπερασμένου χρόνου της κάθε τροχιάς βρίσκεται στην αντίστοιχη θέση. Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι η τροχιά του σχήματος 3.7α παραμένει οργανωμένη μετά την εισαγωγή της μελανής οπής, ενώ η τροχιά η τροχιά του σχήματος 3.7β μετατρέπεται σε χαοτική. Οι τιμές του χρόνου των διαγραμμάτων είναι κανονικοποιημένες ως προς την περίοδο $T_{per} = 0.12$ της κεντρικής περιοδικής τροχιάς (3.5α).

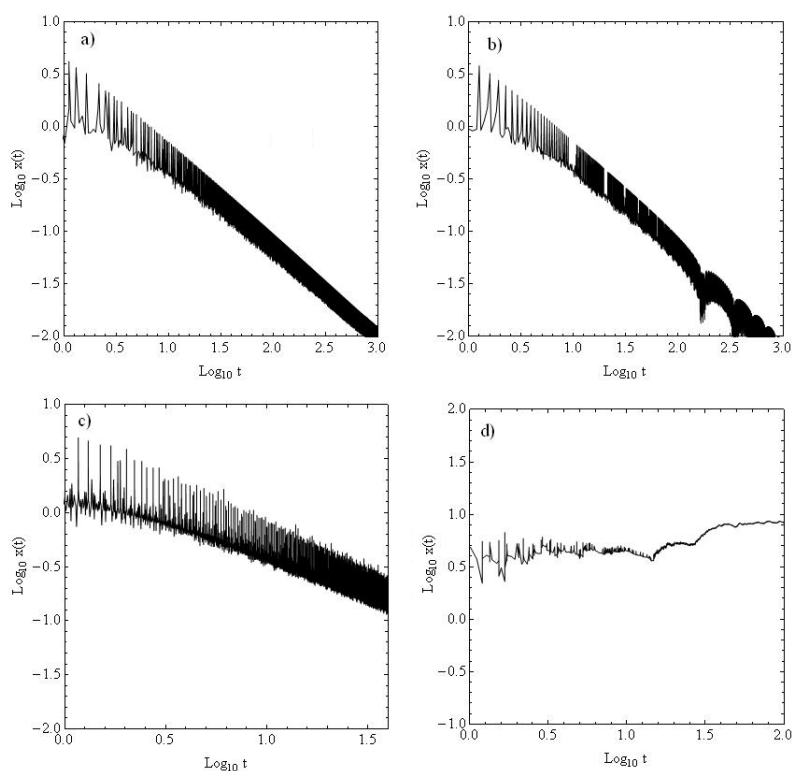
μα ενεργειακά απαγορευμένη στην οποία δεν μπορούν να βρεθούν οι τροχιές. Η απαγορευμένη αυτή περιοχή οφείλεται στο συντονισμό $\infty : 1$ της συμπεριστροφής. Για μεγάλες τιμές τις ενέργειας όπως π.χ στο σχήμα 3.4η ο φασικός χώρος μέσα και έξω από την περιοχή της συμπεριστροφής είναι συνδεδεμένος και οι χαοτικές τροχιές μπορούν να κινούνται και στις δύο περιοχές.

Αν και θα περίμενε κανείς να μην υπάρχει μεγάλος αριθμός τροχιών που να επηρεάζονται από την μελανή οπή, εντούτοις η επίδραση της μελανής οπής είναι σημαντική.

Στην περίπτωση του ραβδωτού γαλαξία, τροχιές τύπου σωλήνα μετατρέπονται με την προθήκη της μελανής οπής, σε χαοτικές. Ωστόσο, δεν είναι όλες οι τροχιές τύπου σωλήνα που συμμετέχουν σε αυτή τη διαδικασία. Μόνο για τις οργανωμένες τροχιές τύπου σωλήνα, που η μορφολογία της κεντρικής περιοδικής τροχιάς είναι κατάλληλη και που το εύρος των νησίδων ευστάθειας είναι αρκετά



Σχήμα 3.9: (α) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -216000 γύρω από το συντονισμό $2 : 1$. Στην τομή Poincaré του σχήματος 3.6α η τροχιά αντιστοιχεί σε αμετάβλητη καμπύλη μέσα στη νησίδα ευστάθειας του συντονισμού $2:1$, η οποία καταστρέφεται μετά την προσθήκη της μελανής οπής(3.6β). (β) Ομοίως, για τροχιά της οποίας η αμετάβλητη καμπύλη "επιβιώνει" μετά την προσθήκη της μελανής οπής. (γ) Η τροχιά του σχήματος (α) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά έχει γίνει χαοτική γιατί το εύρος της αντίστοιχης αμετάβλητης καμπύλης στην περίπτωση (α) επιτρέπει τη διέλευση της μέσα από την σφαίρα επιρροής της μελανής οπής. (δ) Η τροχιά του σχήματος (β) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά παραμένει οργανωμένη καθώς το εύρος της αντίστοιχης αμετάβλητης καμπύλης είναι σχετικά μικρό και η τροχιά δεν περνάει κοντά στη μελανή οπή.



Σχήμα 3.10: Η χρονική εξέλιξη του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για τις τροχιές του σχήματος 3.9. Το διάγραμμα του Lyapunov πεπερασμένου χρόνου της κάθε τροχιάς βρίσκεται στην αντίστοιχη θέση. Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι η τροχιά του σχήματος 3.9α παραμένει οργανωμένη μετά την εισαγωγή της μελανής οπής, ενώ η τροχιά η τροχιά του σχήματος 3.9β μετατρέπεται σε χαοτική. Οι τιμές του χρόνου των διαγραμμάτων είναι κανονικοποιημένες ως προς την περίοδο $T_{per} = 0.12$ της κεντρικής περιοδικής τροχιάς

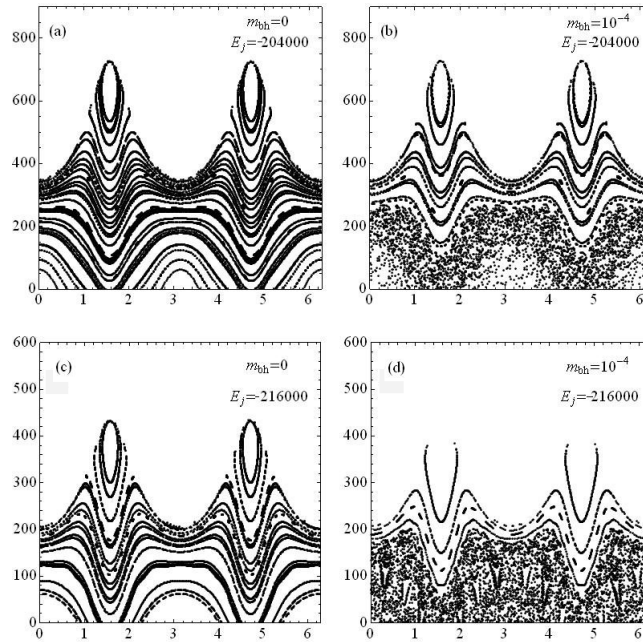
μεγάλο ώστε να διέρχονται αρκετά κοντά από το κέντρο του γαλαξία είναι δυνατόν η προσθήκη της μελανής οπής να τις μετατρέψει σε χαοτικές. Θα δείξουμε τώρα ότι στην περίπτωση που μία ημιπεριοδική τροχιά περνάει αρκετά κοντά από το κέντρο ώστε να μπαίνει στη σφαίρα επιρροής της μελανής οπής, η τροχιά μετατρέπεται σε χαοτική.

Στο σχήμα 3.6 απεικονίζεται η τομή Poincaré για ενέργεια $E_j = -204000$ στην περίπτωση που δεν έχουμε μελανή οπή στο κέντρο (3.6α) και στην περίπτωση που υπάρχει μελανή οπή μάζας $m = 10^{-4}$ (σχ. 3.6β). Όπως βλέπουμε η προσθήκη της μελανής οπής καταστρέφει μέρος αμετάβλητων καμπυλών των νησίδων που σχηματίζουν οι τροχιές σωλήνα γύρω από την περιοδική τροχιά x_1 . Στο σχήμα 3.7 έχουμε σχεδιάσει δύο τροχιές με αρχικές συνθήκες εκατέρωθεν της τελευταίας αμετάβλητης καμπύλης που παραμένει στην περιοχή της νησίδας 2:1 και μετά την προσθήκη της μελανής οπής ($m = 10^{-4}$). Η αρχική συνθήκη $(r, \theta, p_r, p_\theta) = (3.144, 1.566, 0, 138.2)$ που βρίσκεται στην οργανωμένη περιοχή του σχήματος 3.6β αναπαριστάται στο σχήμα 3.7α για την περίπτωση που δεν έχουμε μελανή οπή και στο σχήμα 3.7γ για την περίπτωση που υπάρχει μελανή οπή στο κέντρο του γαλαξία. Αντίστοιχα η αρχική συνθήκη $(r, \theta, p_r, p_\theta) = (3.053, 1.74, 0, 124.1)$ που βρίσκεται στην χαοτική περιοχή του σχήματος (3.6β) αναπαριστάται στα σχήματα 3.7β και 3.7δ. Από τον υπολογισμό του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για τις τροχιές αυτές (σχήμα 3.8) προκύπτει ότι η τροχιά που αντιστοιχεί στη νησίδα ευστάθειας που διατηρείται μετά την προσθήκη της μελανής οπής (σχ. 3.7α) παραμένει οργανωμένη, μετά την εισαγωγή της μελανής οπής (σχ.3.7γ) καθώς ο αριθμός Lyapunov πεπερασμένου χρόνου πέφτει με ένα νόμο $1/t$ (3.8γ). Αντίθετα, η τροχιά με αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν σε αμετάβλητη καμπύλη που καταστρέφεται μετά την προσθήκη της μελανής οπής (σχ.3.7β,δ) μετατρέπεται σε χαοτική, με τον αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου να σταθεροποιείται μετά από ορισμένο χρόνο (σχ. 3.8δ). Οι τιμές του χρόνου των διαγραμμάτων του σχήματος (3.8) είναι κανονικοποιημένες ως προς την περίοδο $T_{per} = 0.12$ της κεντρικής περιοδικής τροχιάς για το συντονισμό 2 προς 1 (σχ. 3.5α), οπότε αντιστοιχούν κατά προσέγγιση στον αριθμό των περιστροφών της τροχιάς γύρω από το κέντρο του γαλαξία.

Ο λόγος που η πρώτη τροχιά παραμένει οργανωμένη, παρά την προσθήκη της μελανής οπής είναι ότι ο σωλήνας τον οποίο καλύπτει η τροχιά αφήνει στο κέντρο του μία τρύπα της οποίας η ακτίνα είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα επιρροής της μελανής οπής. Πράγματι αν δούμε το διάγραμμα η ελάχιστη απόσταση από το κέντρο στην οποία πλησιάζει η τροχιά είναι περίπου 0.1 ενώ η ακτίνα επιρροής της μελανής οπής για $m = 10^{-4}$ είναι 0.046. Αντιθέτως στη δεύτερη περίπτωση ο σωλήνας έχει αρκετά μεγάλο εύρος με αποτέλεσμα σε κάποια σημεία της η τροχιά να διέρχεται πολύ κοντά από το κέντρο του γαλαξία. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά υφίσταται τη χαοτική σκέδαση της μελανής οπής.

Ακόμη πιο χαρακτηριστικά παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο στο σχήμα 3.9. Εδώ βρισκόμαστε σε ενέργεια -216000 και οι οργανωμένες τροχιές εκατέρωθεν της τελευταίας αμετάβλητης καμπύλης αφήνουν και οι δύο μια κενή περιοχή στο κέντρο τους. Στην πρώτη περίπτωση (σχ.3.9α, γ) η τροχιά περνάει σε απόσταση πολύ μικρότερη από τη ακτίνα επιρροής που αντιστοιχεί σε μελανή οπή μάζας $m = 10^{-4}$. Έτσι, με την προσθήκη της μελανής οπής η τροχιά γίνεται χαοτική, κάτι που φαίνεται τόσο από την αλλαγή της μορφής της τροχιάς στο θεσεογραφικό χώρο (σχ.3.9δ) όσο και από τον υπολογισμό του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου πριν και μετά την εισαγωγή της μελανής οπής (σχ. 3.10). Στην δεύτερη περίπτωση (σχ. 3.9 β,δ) η τροχιά πλησιάζει σε ελάχιστη απόσταση περίπου 0.1, η οποία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα της σφαίρας επιρροής της μελανής οπής για $m = 10^{-4}$ (0.046). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η τροχιά να παραμένει οργανωμένη μετά την προσθήκη της μελανής οπής, όπως προκύπτει από τον υπολογισμό του αντίστοιχου αριθμού Lyapunov πριν και μετά την προσθήκη της μελανής οπής (3.10β,δ). Και πάλι, οι τιμές του χρόνου των διαγραμμάτων του σχήματος (3.10) είναι κανονικοποιημένες ως προς την περίοδο $T_{per} = 0.12$

της κεντρικής περιοδικής τροχιάς.

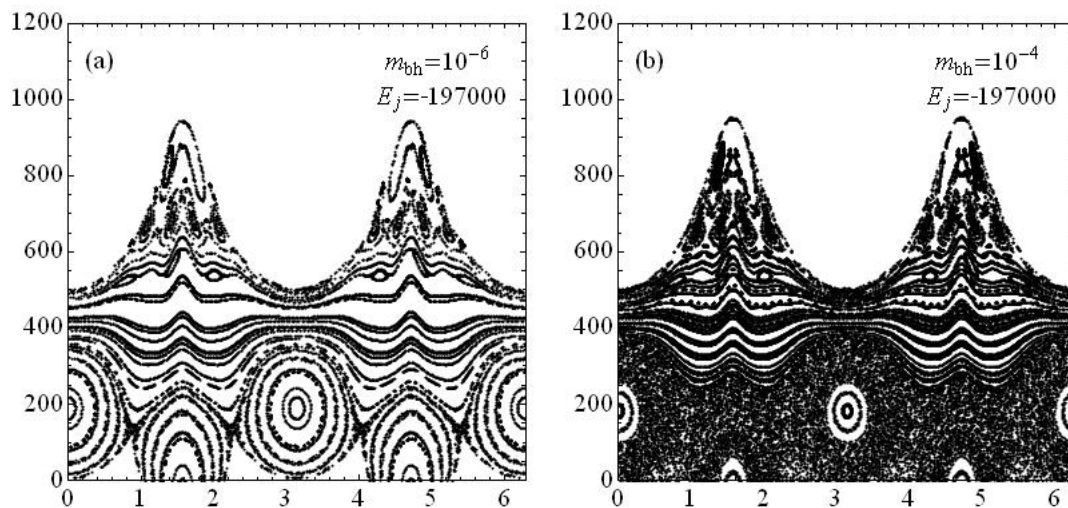


Σχήμα 3.11: (α) Τομή Poincaré για ενέργεια -204000 με μάζα μελανής οπής $m=0$. (β) Ομοίως, για $m = 10^{-4}$. (γ) Τομή Poincaré για ενέργεια -216000 με μάζα μελανής οπής $m=0$ (δ) Ομοίως, για $m = 10^{-4}$. Για τη μικρότερη ενέργεια (-216000) καταστρέφεται μεγαλύτερο ποσοστό της οργανωμένης περιοχής με την προσθήκη της μελανής οπής.

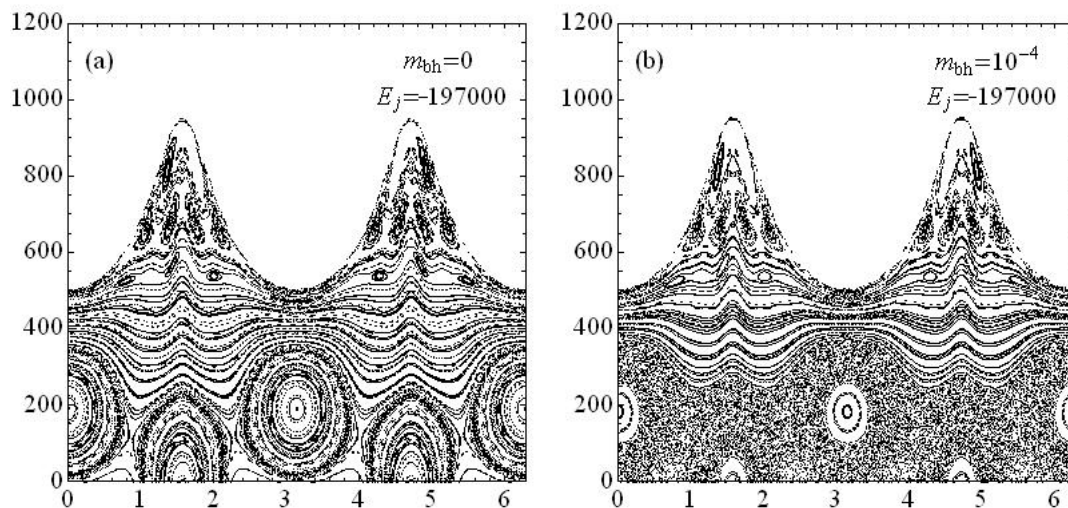
Ο βαθμός καταστροφής των νησίδων και το ποσοστό των οργανωμένων τροχιών που μετατρέπονται θα μετατραπούν σε χαοτικές με την προσθήκη της μελανής οπής εξαρτάται κάθε φορά από την ενέργεια των τροχιών, όπως βλέπουμε καθαρά στο σχήμα 3.11, αλλά και από την μάζα της μελανής οπής (σχήμα 3.12). Στο σχήμα 3.11 παρατηρούμε ότι το με την αύξηση της ενέργειας αυξάνεται το τμήμα του φασικού χώρου που από οργανωμένο γίνεται χαοτικό. Στο σχήμα 3.12 παρατηρούμε ότι με την αύξηση της μάζας της μελανής οπής αυξάνεται η περιοχή επιρροής της οπότε όλο και μεγαλύτερος αριθμός οργανωμένων τροχιών περνούν μέσα από αυτήν και μετατρέπονται σε χαοτικές με τον μηχανισμό που έχουμε ήδη εξηγήσει.

Παρόμοια είναι η κατάσταση για τις τροχιές γύρω από τον συντονισμό 4:1. Η ενεργειακή ζώνη του συντονισμού 4:1 είναι, όπως προαναφέραμε, μεταξύ των ενεργειών -199000 και -193000 . Ο συντονισμός είναι εμφανής στο σχήμα 3.13 όπου απεικονίζεται η τομή Poincaré για ενέργεια $E_j = -197000$ για τον γαλαξία είτε με είτε χωρίς τη μελανή οπή. Παρατηρούμε πάλι ότι ένα μέρος των οργανωμένων τροχιών μετατρέπονται σε χαοτικές με την προσθήκη της μελανής οπής. Οι αρχικές συνθήκες εκατέρωθεν της τελευταίας αναλλοίωτης καμπύλης δίνουν τις τροχιές του σχήματος 3.14. Η αρχική συνθήκη που βρίσκεται στην οργανωμένη περιοχή του σχήματος 3.13β κοντά στην τελευταία καμπύλη KAM αναπαρίσταται στο σχήμα 3.14α για την περίπτωση που δεν έχουμε μελανή οπή και στο σχήμα 3.14γ για την περίπτωση που υπάρχει μελανή οπή στο κέντρο του γαλαξία. Αντίστοιχα η αρχική συνθήκη που βρίσκεται στην χαοτική περιοχή του σχήματος 3.13β αναπαρίσταται στα σχήματα 3.14β και 3.14δ.

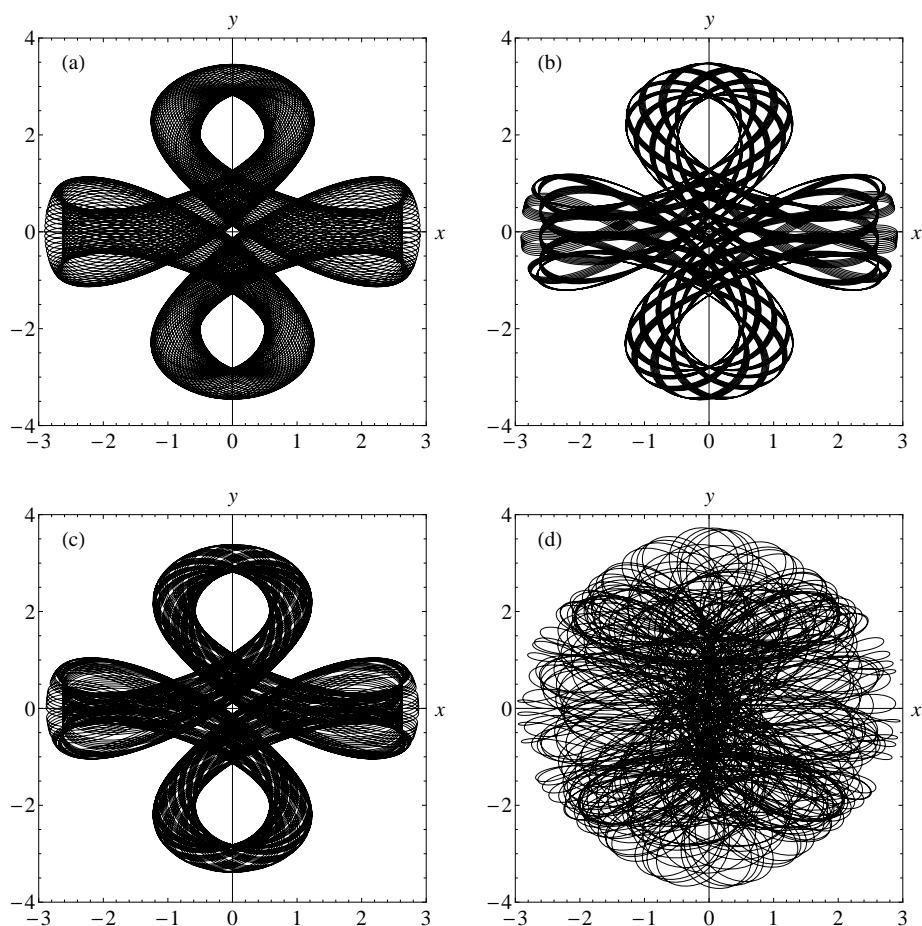
Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται για διαφορετικές τιμές της ενέργειας όπως μπορούμε να δούμε στα σχήματα 3.15 και 3.16. Έτσι για την ενέργεια -195000 έχουμε την τομή Poincaré του σχήμα-



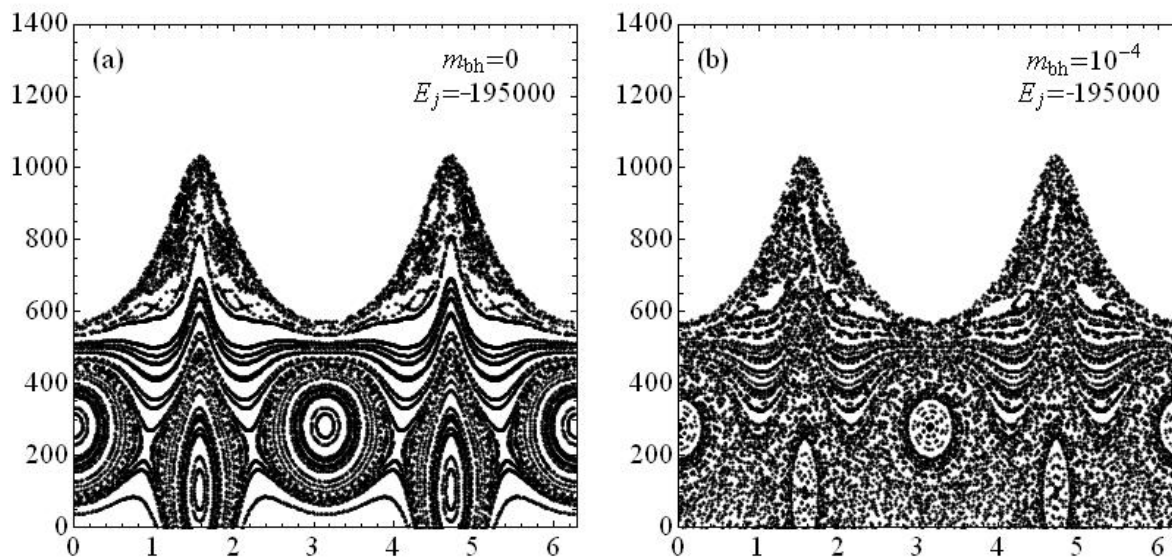
Σχήμα 3.12: (α) Τομή Poincaré για ενέργεια -197000 με μάζα μελανής οπής $m = 10^{-6}$. (β) Ομοίως, για $m = 10^{-4}$. Με την αύξηση της μάζας της μελανής οπής αυξάνεται το τμήμα του φασικού χώρου που από οργανωμένο γίνεται χαοτικό.



Σχήμα 3.13: Τομή Poincaré για ενέργεια -197000 στην περίπτωση μελανής οπής με μάζα (α) $m = 0$ και (β) $m = 10^{-4}$. Η παρουσία της μελανής οπής καταστρέφει ένα μέρος των νησίδων που δημιουργούν οι τροχιές γύρω από το συντονισμό 4:1.



Σχήμα 3.14: (α) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -197000 γύρω από το συντονισμό $4:1$. Στην τομή Poincaré του σχήματος 3.13α η τροχιά αντιστοιχεί σε μία αμετάβλητη καμπύλη εντός της νησίδας ευστάθειας του συντονισμού $4:1$ που διατηρείται και μετά την προσθήκη της μελανής οπής (3.13β). (β) Ομοίως, για τροχιά της οποίας η αμετάβλητη καμπύλη καταστρέφεται μετά την προσθήκη της μελανής οπής. (γ) Η τροχιά του σχήματος (α) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά παραμένει οργανωμένη καθώς το εύρος της νησίδας είναι μικρό και δεν περνάει κοντά στη μελανή οπή. (δ) Η τροχιά του σχήματος (β) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά έχει γίνει χαοτική γιατί το εύρος της νησίδας επιτρέπει τη διέλευση της μέσα από την σφαίρα επιρροής της μελανής οπής.



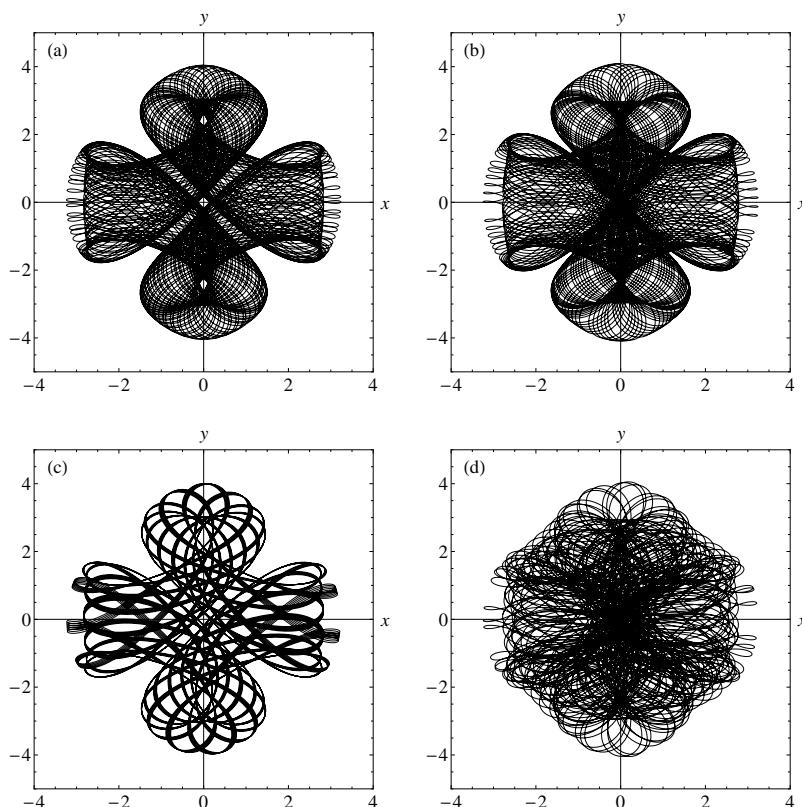
Σχήμα 3.15: Τομή Poincaré για ενέργεια -195000 στην περίπτωση μελανής οπής με μάζα (α) $m = 0$ και (β) $m = 10^{-4}$. Η παρουσία της μελανής οπής καταστρέφει ένα μέρος των νησίδων που δημιουργούν οι τροχιές γύρω από το συντονισμό $4:1$.

τος 3.15 όπου ο συντονισμός $4:1$ καλύπτει μεγάλο μέρος του φασικού χώρου. Η αρχική συνθήκη που βρίσκεται στην οργανωμένη περιοχή του σχήματος 3.15β κοντά στην τελευταία καμπύλη KAM αναπαριστάται στο σχήμα 3.16α για την περίπτωση που δεν έχουμε μελανή οπή και στο σχήμα 3.16γ για την περίπτωση που υπάρχει μελανή οπή στο κέντρο του γαλαξία. Αντίστοιχα η αρχική συνθήκη που βρίσκεται στην χαοτική περιοχή του σχήματος 3.15β αναπαριστάται στα σχήματα 3.16β και 3.16δ.

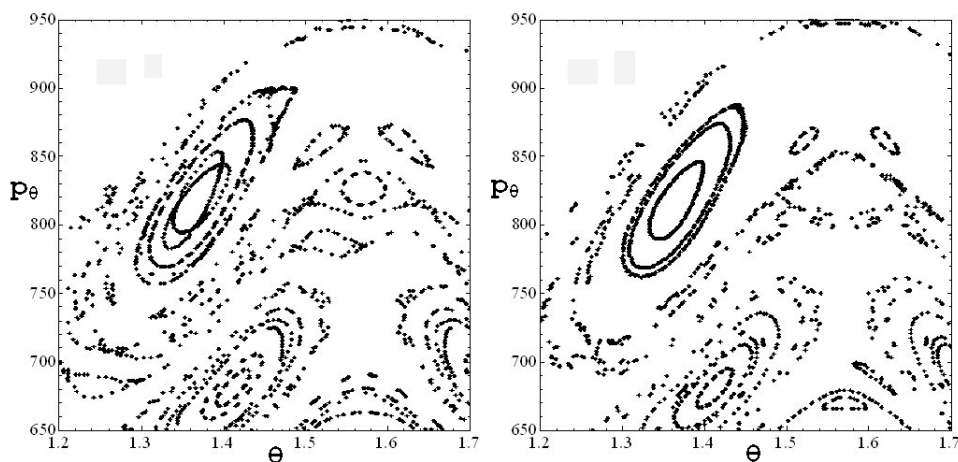
Όσον αφορά τους συντονισμούς $3:1$ και $6:1$, οι τροχιές που είναι παγιδευμένες γύρω από αυτούς αφενός δεν αποτελούν μεγάλο ποσοστό των τροχιών των αστερών μέσα στο γαλαξία και αφετέρου η μορφολογία τους είναι τέτοια ώστε δεν μπορούν να επηρεαστούν ιδιαίτερα από τη μελανή οπή στο κέντρο του γαλαξία.

Πράγματι οι περιοδικές τροχιές του συντονισμού $3:1$ (σχήμα 3.5γ,δ) εμφανίζονται σε ένα παράθυρο ενεργειών κοντά στην ενέργεια -197000 ([102]) και η μορφολογία τους είναι τέτοια που ακόμη και οι τροχιές που αντιστοιχούν στις πιο απομακρυσμένες καμπύλες KAM στις νησίδες δεν μπορούν να περάσουν κοντά από τη μελανή οπή. Τις νησίδες γύρω από το συντονισμό $3:1$ τις βλέπουμε επιλέγοντας να σχεδιάσουμε την περιοχή ενεργειών και γωνιών στην τομή του σχήματος 3.13 η οποία αντιστοιχεί στο συντονισμό $3:1$. Εστιάζοντας στην επιθυμητή περιοχή των μεταβλητών παίρνουμε την εικόνα του σχήματος 3.17 για τις περιπτώσεις χωρίς (3.17α) ή με μελανή οπή μάζας $m = 10^{-4}$ (3.17β). Οι ημιπεριοδικές τροχιές που αντιστοιχούν στην τελευταία αμετάβλητη καμπύλη των περιοδικών τροχιών του συντονισμού για τις δύο αυτές περιπτώσεις εμφανίζονται στο σχήμα 3.18.

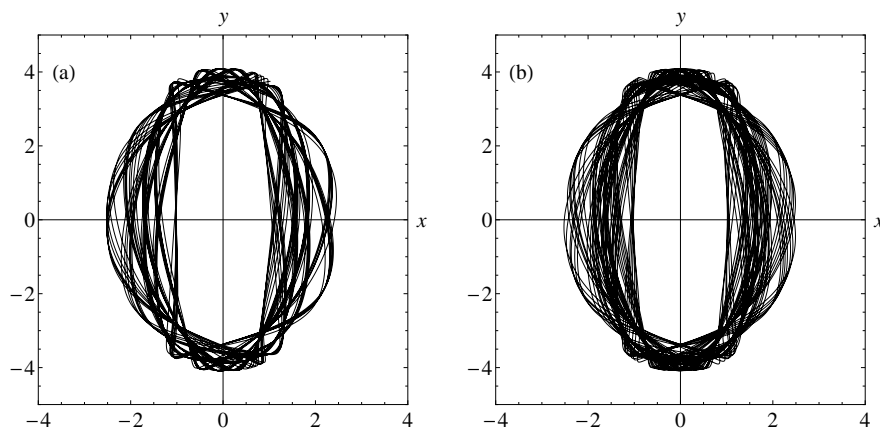
Παρόμοια κατάσταση έχουμε και για τις τροχιές του συντονισμού $6:1$. Η περιοδική τροχιά που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο συντονισμό φαίνεται στο σχήμα 3.5β. Η ενέργεια στην οποία εμφανίζεται ο συντονισμός είναι κοντά στην τιμή -191700 . Παίρνοντας την τομή Poincaré για την συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας (σχήμα 3.19) παρατηρούμε ότι ο συντονισμός $6:1$ δεν είναι εμφανής



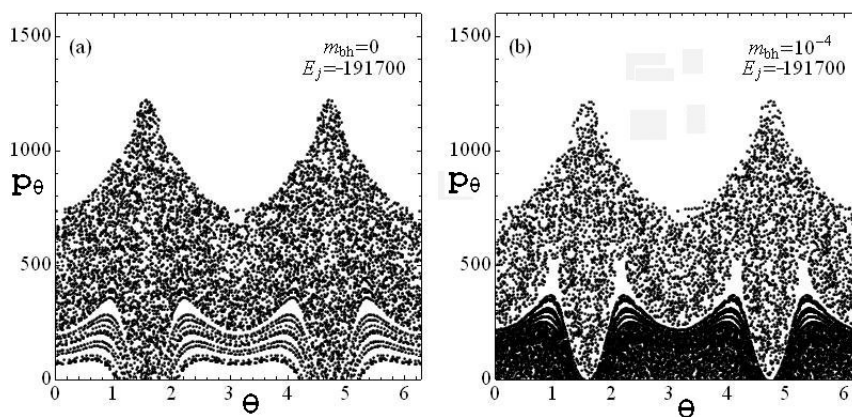
Σχήμα 3.16: (α) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -197000 γύρω από το συντονισμό $4:1$. Στην τομή Poincaré του σχήματος 3.13α η τροχιά αντιστοιχεί σε μία αμετάβλητη καμπύλη εντός της νησίδας ευστάθειας του συντονισμού $4:1$ που διατηρείται και μετά την προσθήκη της μελανής οπής (3.13β). (β) Ομοίως, για τροχιά της οποίας η αμετάβλητη καμπύλη καταστρέφεται μετά την προσθήκη της μελανής οπής. (γ) Η τροχιά του σχήματος (α) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά παραμένει οργανωμένη καθώς το εύρος της αντίστοιχης αμετάβλητης καμπύλης είναι μικρό και δεν περνάει κοντά στη μελανή οπή. (δ) Η τροχιά του σχήματος (β) μετά την προσθήκη της μελανής οπής. Η τροχιά έχει γίνει χαοτική γιατί το εύρος της αντίστοιχης αμετάβλητης καμπύλης στην περίπτωση (β) επιτρέπει τη διέλευση της μέσα από την σφαίρα επιρροής της μελανής οπής.



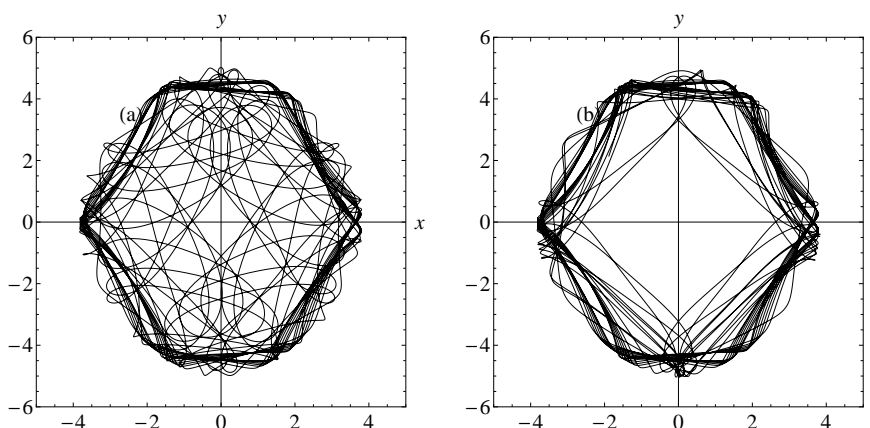
Σχήμα 3.17: (α) Ο φασικός χώρος στην περιοχή του συντονισμού 3 :1 χωρίς μελανή οπή. (β) Ομοίως, για μελανή οπή μάζας $m = 10^{-4}$. Με τη προσθήκη της μελανής οπής μικραίνει το εύρος της τελευταίας αμετάβλητης καμπύλης γύρω από το συντονισμό.



Σχήμα 3.18: (α) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -197000 γύρω από το συντονισμό 3 : 1 για γαλαξία χωρίς μελανή οπή. Στην τομή Poïncaré του σχήματος 3.17α η τροχιά αντιστοιχεί στην τελευταία αμετάβλητη καμπύλη στη νησίδα ευστάθειας. (β) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -197000 γύρω από το συντονισμό 3 : 1 στην περίπτωση που έχουμε μελανή οπή μάζας $m = 10^{-4}$. Στην τομή Poïncaré του σχήματος 3.17β η τροχιά αντιστοιχεί στην τελευταία αμετάβλητη καμπύλη στη νησίδα ευστάθειας του συντονισμού. Και στις δυο περιπτώσεις οι τροχιές διέρχονται σε μεγάλη απόσταση από το κέντρο του γαλαξία.



Σχήμα 3.19: Τομή Poincaré για ενέργεια -191700 (συντονισμός $6 : 1$) στην περίπτωση μελανής οπής με μάζα (α) $m = 0$ και (β) $m = 10^{-4}$. Ο συντονισμός δεν είναι εμφανής με γυμνό μάτι καθώς οι νησίδες ευστάθειας έχουν πολύ μικρό μέγεθος στη τομή (θ, p_θ) .



Σχήμα 3.20: (α) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -191700 γύρω από το συντονισμό $6 : 1$ για γαλαξία χωρίς μελανή οπή. (β) Τροχιά τύπου σωλήνα με ενέργεια -191700 γύρω από το συντονισμό $6 : 1$ στην περίπτωση που έχουμε μελανή οπή μάζας $m = 10^{-4}$. Και στις δυο περιπτώσεις οι τροχιές διέρχονται σε μεγάλη απόσταση από το κέντρο του γαλαξία.

με γυμνό μάτι καθώς οι νησίδες ευστάθειας έχουν πολύ μικρό μέγεθος στη τομή (θ, p_θ) . Ωστόσο, είναι φανερό ότι και οι πιο απομακρυσμένες τροχιές γύρω από την κεντρική περιοδική τροχιά του συντονισμού, λόγω της μορφολογίας τους, δεν μπορούν να προσεγγίσουν κοντά στη μελανή οπή (σχ.3.20).

Μέρος II

Σκέδαση από κόμβους

Κεφάλαιο 4

Σκέδαση από κβαντικούς στροβίλους- Κβαντική χαλάρωση

4.1 Γενικά

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε τη σκέδαση τροχιών από υπερμεγέθεις μελανές οπές που βρίσκονται στα κέντρα ελλειπτικών ή ραβδωτών γαλαξιών με τη βοήθεια του συνήθη χαμιλτονιανού φορμαλισμού. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε μια πολύ διαφορετική περίπτωση δυναμικού συστήματος που προκύπτει στη λεγόμενη προσέγγιση de Broglie-Bohm της κβαντικής μηχανικής. Όπως τονίστηκε στην εισαγωγή, τέτοια συστήματα παρουσιάζουν ενδιαφέρον καθώς εμφανίζουν χαοτικές σκεδάσεις από κινούμενους κόμβους (κβαντικούς στροβίλους). Επιπλέον, σε φορμαλιστικό επίπεδο, το πρόβλημα της κίνησης σε κβαντικούς στροβίλους βρίσκει εφαρμογές και σε άλλα προβλήματα της φυσικής, όπως η κίνηση σε υπεραγώγιμα ή υπέρευστα υλικά ([138], [123]), η μη γραμμική οπτική ([61]), τα συμπυκνώματα Bose-Einstein ([66]) κ.α.

Η εικόνα της κβαντικής μηχανικής κατά de Broglie-Bohm ([30], [9], [8], [65], [37]) είναι μια εκδοχή της κβαντικής μηχανικής βασισμένη σε “τροχιές” σωματιδίων. Θεωρούμε ότι τα σωματίδια κινούνται υπό την επίδραση όχι μόνο του πεδίου δυνάμεων, αλλά και του πεδίου *Schrödinger*. Οι “κβαντικές τροχιές” ιχνηλατούν το κβαντομηχανικό ρεύμα πιθανότητας:

$$\mathbf{j} \equiv (\psi_* \nabla \psi - \psi \nabla \psi_*) / 2m\hbar i. \quad (4.1)$$

Οι τροχιές de Broglie-Bohm είναι, επομένως, ισοδύναμες με την υδροδυναμική περιγραφή της κβαντομηχανικής (ροή Madelung, [85]).

Η κυματοσυνάρτηση ψ ικανοποιεί την εξίσωση *Schrödinger*

$$\left(-\frac{1}{2} \nabla^2 + V \right) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4.2)$$

όπου θέτουμε $m = \hbar = 1$. Η τροχιά του σωματιδίου προσδιορίζεται από την αρχική θέση του σωματιδίου και την εξίσωση :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \text{Im} \left(\frac{\nabla \psi}{\psi} \right). \quad (4.3)$$

Ισοδύναμα η κίνηση μπορεί να προσδιοριστεί αν στην εξίσωση του Νεύτωνα προστεθεί στο δυναμικό ένας νέος όρος:

$$U(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, t) \quad (4.4)$$

όπου $Q(\vec{r}, t)$ είναι το “κβαντικό δυναμικό”. Το κβαντικό δυναμικό προσδιορίζεται από την κυματοσυνάρτηση μέσω της σχέσης:

$$Q(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} \frac{\nabla^2 |\psi|}{|\psi|}. \quad (4.5)$$

Αποδεικνύεται ([85]) ότι η εξίσωση κίνησης (4.3) είναι συμβατή με τον κανόνα του Born, δηλαδή η κατανομή πιθανότητας για ένα σύνολο σωματιδίων που οδηγούνται από την ίδια κυματοσυνάρτηση ψ είναι $P(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$, εφόσον αρχικά τα σωματίδια είναι κατανεμημένα με την πιθανότητα $P(\vec{r}, 0) = |\psi(\vec{r}, 0)|^2$.

Οι τροχιές de Broglie-Bohm έχουν αποδειχθεί χρήσιμες στην εποπτική κατανόηση κβαντικών φαινομένων όπως το φαινόμενο της σήραγγας (quantum tunneling effect) ([64], [117], [84]), το πείραμα των δύο οπών (two slit experiment) ([105]), η βαλιστική μεταφορά μέσω κβαντικών αγωγών ([3], [5]), η μοριακή δυναμική ([60]), η δυναμική μη γραμμικών συστημάτων με κλασσικά εστιακά σημεία ή καυστικές ([141]), η σκέδαση από ατομικές επιφάνειες ([59, 112, 113]), κ.α.. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι το ζήτημα της εφαρμογής των τροχιών de Broglie-Bohm σε προβλήματα μέτρησης χρόνων σε κβαντικά φαινόμενα. Για το συγκεκριμένο ζήτημα έχει προκύψει τελευταία μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητική όσο και πειραματική σκοπιά ([97]). Το ζήτημα αυτό θα εξετάσουμε μεταξύ άλλων στο κεφάλαιο 5.

Στην εισαγωγή περιγράψαμε τον μηχανισμό με τον οποίο γεννάται το χάος σε διδιάστατα κβαντικά συστήματα όταν οι τροχιές περνάνε κοντά από τους κόμβους (nodal points), όπου έχουμε $\psi = 0$ ([39], [40], [20], [41]). Όπως είδαμε, δίπλα σε κάθε κόμβο υπάρχει πάντα ένα ασταθές υπερβολικό σημείο (X-point) όπου η ταχύτητα μηδενίζεται τοπικά. Ο συνδυασμός του κόμβου και του ασταθούς σημείου δίνει στο πεδίο ταχυτήτων την μορφή του σχήματος 1.10α. Σε κάθε υπερβολικό σημείο αντιστοιχούν δύο πολλαπλοότητες (manifolds), η ευσταθής και η ασταθής. Οι τροχιές που συναντούν ένα τέτοιο σύστημα επιταχύνονται κατά μήκος των ασταθών ασυμπτωτικών διευθύνσεων (τροχιές τύπου I, II βλ. κεφάλαιο 1 (σχήμα 1.10β)) και τελικά σκεδάζονται. Έχει διαπιστωθεί ότι οι σκεδάσεις αυτού του τύπου είναι ο κύριος παράγοντας εισαγωγής χάους στο σύστημα. Από την άλλη μεριά τροχιές που ποτέ δεν πλησιάζουν σε σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου είναι οργανωμένες. Τέτοιες τροχιές έχουν μελετηθεί εκτενώς στην εργασία [40].

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα της δημιουργίας χάους στα πλαίσια της θεωρίας de Broglie-Bohm ([36], [46], [101], [54], [33], [69], [52], [76] [137], [86], [25], [32] [47], [135], [136], [115]). Συγκεκριμένα μελετήσαμε το σύστημα του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και το σύστημα Hénon - Heiles. Και στις δύο περιπτώσεις, βρίσκουμε πρώτα τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μία τροχιά αποφεύγει τις κοντινές διελεύσεις από τους κινούμενους κόμβους, αποφεύγοντας έτσι την πηγή του χάους στο σύστημα.

Τέλος, διερευνούμε ένα σημαντικό από φυσικής άποψης θέμα στο πλαίσιο της θεωρίας de Broglie-Bohm και συγκεκριμένα την επίδραση τόσο της τάξης όσο και του χάους στο φαινόμενο της λεγόμενης “κβαντικής χαλάρωσης” (quantum relaxation) ([126], [128]), το οποίο βρίσκεται εφαρμογή σε μία πληθώρα φυσικών διεργασιών ([4], [24], [129]).

4.2 Κινούμενος κόμβος και χάος σε κβαντικό μοντέλο διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή

Για τη μελέτη της τάξης και του χάους με την παρουσία ενός κινούμενου κβαντικού στροβίλου χρησιμοποιούμε αρχικά το μοντέλο που προτάθηκε στην εργασία [40]. Η χαμιλτονιανή αντιστοιχεί

στο μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + (cy)^2) . \quad (4.6)$$

Θεωρούμε τις τροχιές de Broglie-Bohm όταν η κυματοσυνάρτηση δίνεται από την υπέρθεση της θεμελιώδους κατάστασης και των δύο πρώτων διεγερμένων καταστάσεων

$$\psi(x, y, t) = e^{-\frac{x^2+cy^2}{2} - i\frac{(1+c)t}{2}} (1 + axe^{-it} + bc^{1/2}xye^{-i(1+c)t}) \quad (4.7)$$

με πραγματικά πλάτη a, b και άρρητο λόγο συχνοτήτων $\omega_1 = 1, \omega_2 = c$. Οι εξισώσεις της κίνησης που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{a \sin t + bc^{1/2}y \sin(1+c)t}{G} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{bc^{1/2}x (ax \sin ct + \sin(1+c)t)}{G} \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου

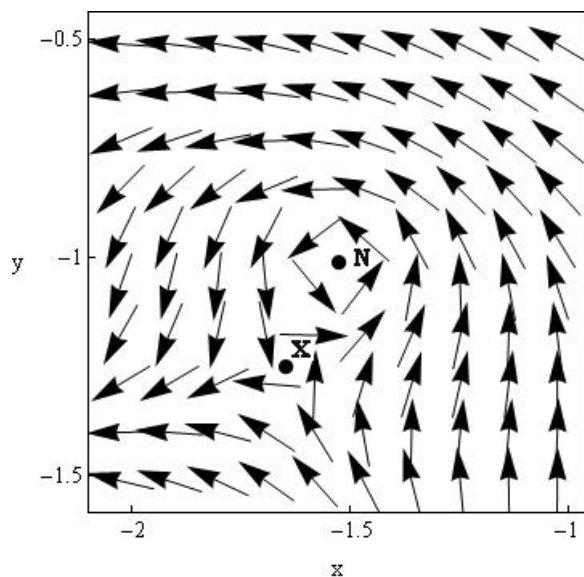
$$G = 1 + a^2x^2 + b^2cx^2y^2 + 2ax \cos t + 2bc^{1/2}xy \cos(1+c)t + 2abc^{1/2}x^2y \cos ct . \quad (4.9)$$

Η κυματοσυνάρτηση (4.7) έχει ένα σημείο απλού μηδενισμού $\psi(x, y, t) = 0$ που αποτελεί τον μοναδικό κινούμενο κόμβο του συστήματος. Οι συντεταγμένες του κόμβου είναι:

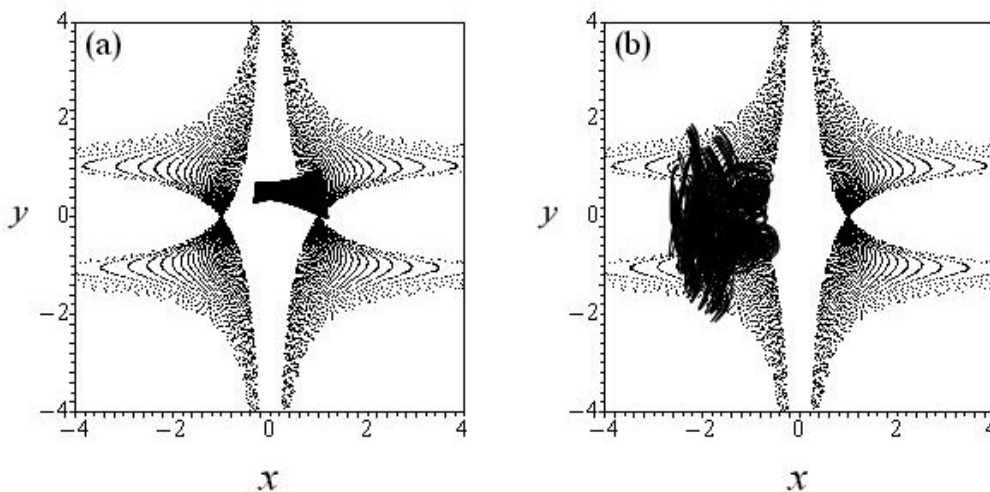
$$x_N = -\frac{\sin(1+c)t}{a \sin ct}, \quad y_N = -\frac{a \sin t}{bc^{1/2} \sin(1+c)t} . \quad (4.10)$$

Η μορφή του συμπλέγματος κόμβου-υπερβολικού σημείου καθώς και το πεδίο ταχυτήτων γύρω από αυτό, για μια τυχαία χρονική στιγμή ($t = 1$), φαίνεται στο σχήμα 4.1. Η ύπαρξη του κόμβου προκαλεί τη σκέδαση των τροχιών που τον συναντούν με αποτέλεσμα την μετατροπή τους σε χαοτικές. Οι τροχιές που δεν πλησιάζουν ποτέ το σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου είναι οργανωμένες. Τέτοιες τροχιές βρέθηκαν στην εργασία ([40]) τόσο αριθμητικά όσο και παίρνοντας αναλυτικά αναπτύγματα. Όπως δείχθηκε, το εάν μία τροχιά είναι οργανωμένη ή χαοτική εξαρτάται από το πόσο κοντά στον κόμβο μπορεί να πλησιάσει η τροχιά. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, σχεδόν συμμετρικές αρχικές συνθήκες μπορούν να οδηγήσουν σε τελείως διαφορετικές τροχιές (οργανωμένες ή χαοτικές), επειδή η επικάλυψη των αρχικών συνθηκών με την περιοχή των κομβικών γραμμών δεν εγγυάται ότι η τροχιά περνάει αρκετά κοντά (τόσο χωρικά όσο και χρονικά) στον κόμβο. Ένα τέτοιο παράδειγμα βλέπουμε στο σχήμα 4.2, όπου οι τροχιές που ξεκινούν στο επάνω και δεξιά τεταρτημόριο είναι οργανωμένες, παρόλο που οι αρχικές τους συνθήκες βρίσκονται σε μία περιοχή που συνυπάρχουν οι γραμμές των κόμβων (σχήμα 4.2α, περίπτωση $x_0 = y_0 = 1$), ενώ τροχιές που ξεκινούν στο κάτω αριστερά τεταρτημόριο επίσης πάνω στην περιοχή που υπάρχουν οι γραμμές των κόμβων είναι χαοτικές (σχήμα 4.2β, περίπτωση $x_0 = y_0 = -1$). Η εξέλιξη του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για τις τροχιές αυτές δίνονται στο σχήμα 4.3. Ο λόγος για αυτή τη διαφορά είναι ότι, ο κόμβος είναι πάντα μακριά από τον κινούμενο κόμβο στην πρώτη περίπτωση ($x_0 = y_0 = 1$), ενώ έρχεται αρκετές φορές κοντά στον κινούμενο κόμβο στη δεύτερη περίπτωση ($x_0 = y_0 = -1$).

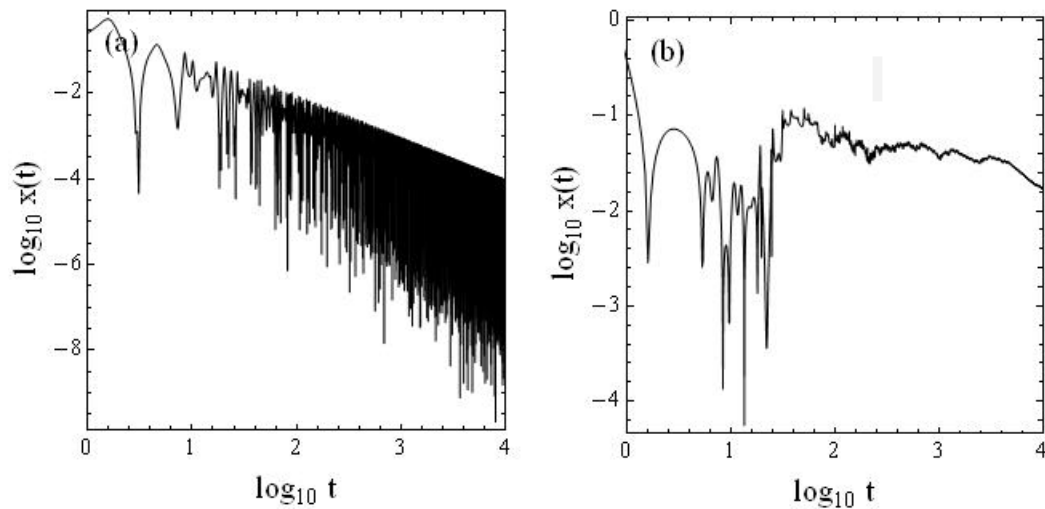
Η διαφορά μεταξύ της οργανωμένης περίπτωσης $x_0 = y_0 = 1$ και της χαοτικής περίπτωσης $x_0 = y_0 = -1$ φαίνεται στο σχήμα 4.4 όπου δίνουμε τα σημεία ($u = x_0 - x_N, v = y_0 - y_N$) όταν η απόσταση $d_N = \sqrt{u^2 + v^2}$ φτάνει σε ένα τοπικό ελάχιστο στο χρόνο. Σε αυτό το σχήμα ο κόμβος είναι στο σημείο $u_N = v_N = 0$. Βλέπουμε στην πρώτη περίπτωση, της οργανωμένης τροχιάς, ότι το τοπικό ελάχιστο της απόστασης d_N στο χρόνο ποτέ δεν πλησιάζει την τιμή 0, ενώ στη δεύτερη περίπτωση της χαοτικής τροχιάς, το d_N αρκετές φορές πλησιάζει στο μηδέν.



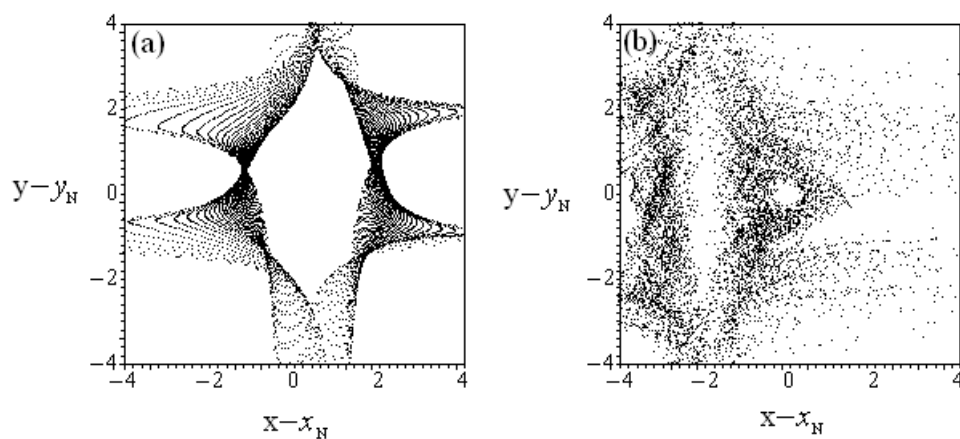
Σχήμα 4.1: Η μορφή του πεδίου ταχυτήτων γύρω από το σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου για την περίπτωση του συστήματος (4.7) με $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}/2$ τη χρονική στιγμή $t = 1$. Στο σχήμα διακρίνονται επίσης η θέση του κόμβου (N) και του υπερβολικού σημείου (X). Το σύστημα αναφοράς (x, y) κινείται με την ταχύτητα του κόμβου.



Σχήμα 4.2: Τροχιές de Broglie-Bohm στο μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή όταν η κυματοσυνάρτηση είναι υπέρθεση τριών ιδιοκαταστάσεων (σχέση (4.7)), με $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}/2$. (α) Μία οργανωμένη τροχιά με $x_0 = y_0 = 1$, και (β) μία χαοτική τροχιά με $x_0 = y_0 = -1$. Στο υπόβαθρο σημειώνονται οι γραμμές των κόμβων (nodal lines), δηλαδή οι λύσεις για τα x, y της εξίσωσης $\psi(x, y, t) = 0$.



Σχήμα 4.3: Η χρονική εξέλιξη του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για το σύστημα 4.7 (α) για την τροχιά του σχήματος 4.2α και (β) για την τροχιά του σχήματος 4.2β. Ο υπολογισμός έγινε για χρόνο $t = 10^4$.



Σχήμα 4.4: Η κατανομή των ποσοτήτων $x(t) - x_N(t)$, $y(t) - y_N(t)$, όπου $x(t), y(t)$ είναι οι συντεταγμένες των τροχιών και $x_N(t), y_N(t)$ είναι οι συντεταγμένες των κόμβων σε διάφορους χρόνους t , (α) για την οργανωμένη τροχιά, και (β) για την χαοτική τροχιά του σχήματος 4.2.

4.3 Οργανωμένες τροχιές μακριά από το κέντρο

Οι τροχιές που βρίσκονται μακριά από το κέντρο, περιορίζονται μακριά από τις κομβικές γραμμές, επομένως είναι οργανωμένες. Για τις τροχιές αυτές οι αρχικές συνθήκες x_0, y_0 είναι και οι δύο απολύτως μεγάλες. Θεωρώντας τις $1/x_0, 1/y_0$ ως μικρές ποσότητες θέτουμε

$$X(t) = \frac{1}{x_0}x(t), \quad Y(t) = \frac{1}{y_0}y(t). \quad (4.11)$$

Από τον υπολογισμό της θέσης της τροχιάς μέσω των εξισώσεων (4.8) σε προσέγγιση πρώτης τάξης ([22]) προκύπτει ότι $X(0) = Y(0) = 1$. Με την παραπάνω παραδοχή, οι τροχιές μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας μεθόδους θεωρίας διαταραχών. Στην εργασία ([22]), θεωρώντας ότι οι τροχιές κάνουν μόνο μικρές ταλαντώσεις γύρω από τις τιμές $X = Y = 1$, θέτουμε

$$X(t) = 1 + X_1(t) + X_2(t) + \dots, \quad Y(t) = 1 + Y_1(t) + Y_2(t) + \dots \quad (4.12)$$

στις οποίες απαιτούμε οι ποσότητες $X_j(t), Y_j(t)$ να περιέχουν μόνο όρους με συντελεστές $(x_0^k y_0^l)^{-1}$ που ικανοποιούν τις $k + l = j$, και $X_j(0) = Y_j(0) = 0$.

Με αντικατάσταση της (4.12) στην (4.8), όπου, επιπρόσθετα, $x = x_0 X, y = y_0 Y$, οι εξισώσεις κίνησης για τα X, Y διαχωρίζονται σε τάξεις ανάλογα με το j . Για την πρώτη και δεύτερη τάξη παίρνουμε

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{dY_1}{dt} = 0, \quad \frac{dX_2}{dt} = \frac{dY_2}{dt} = 0 \quad (4.13)$$

από τις οποίες επιλέγονται οι λύσεις $X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = 0$. Η τρίτη και η τέταρτη τάξη των εξισώσεων δίνουν

$$\frac{dX_3}{dt} = 0, \quad \frac{dY_3}{dt} = \frac{-a \sin ct}{bc^{1/2}y_0^3} \quad (4.14)$$

με λύσεις

$$X_3(t) = 0, \quad Y_3(t) = \frac{a(\cos ct - 1)}{bc^{3/2}y_0^3}, \quad (4.15)$$

και

$$\frac{dX_4}{dt} = \frac{-\sin(1+c)t}{bc^{1/2}x_0^3y_0}, \quad \frac{dY_4}{dt} = \frac{a^2 \sin 2ct}{b^2cy_0^4} - \frac{\sin(1+c)t}{bc^{1/2}x_0y_0^3} \quad (4.16)$$

με λύσεις

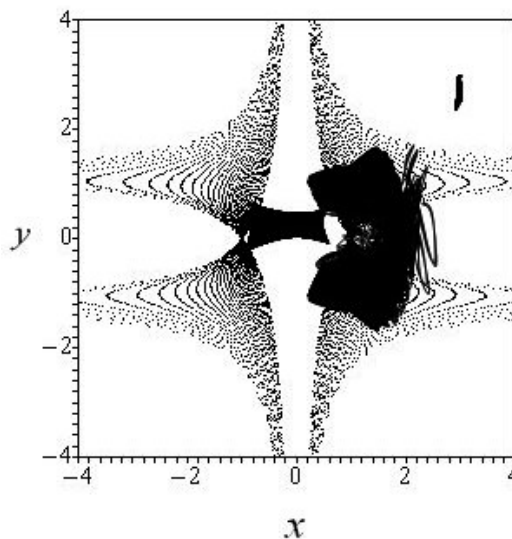
$$X_4 = \frac{\cos(1+c)t - 1}{bc^{1/2}(1+c)x_0^3y_0}, \quad Y_4 = \frac{-a^2(\cos 2ct - 1)}{2b^2c^2y_0^4} + \frac{\cos(1+c)t - 1}{bc^{1/2}(1+c)x_0y_0^3} \quad (4.17)$$

αντίστοιχα. Όροι ανώτερης τάξης μπορούν να βρεθούν με τον ίδιο τρόπο εφαρμόζοντας το αναδρομικό σχήμα.

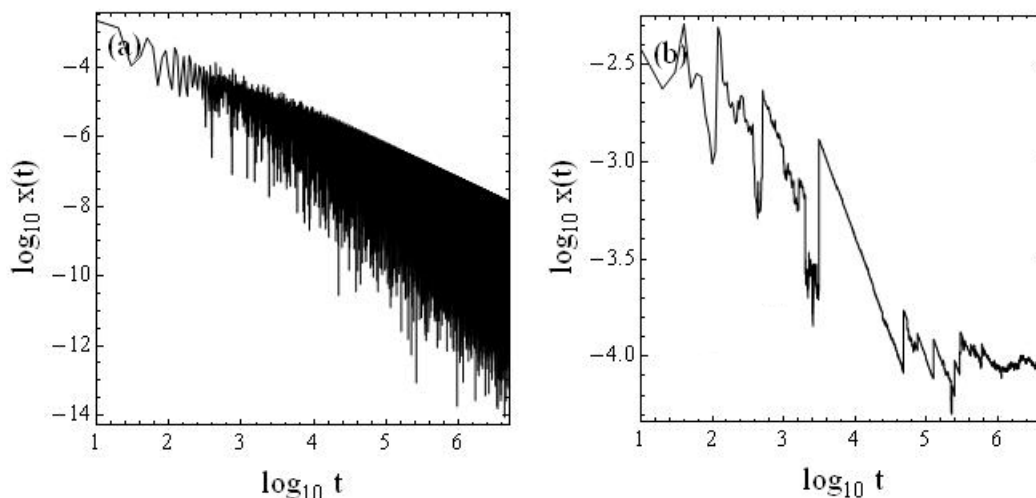
Ελέγξαμε την προσέγγιση των αριθμητικών τροχιών, όταν $a = b = 1$ και $c = \sqrt{2}/2$, από τα αναπτύγματα σειρών (4.12) υπολογισμένα μέχρι δέκατη πέμπτη τάξη μέσω αλγεβρικού υπολογιστικού προγράμματος. Το επίπεδο της προσέγγισης για διάφορες αρχικές συνθήκες x_0, y_0 , δίνεται στον πίνακα I, όπου αναγράφονται τα αναλυτικά μέγιστα και ελάχιστα των $x(t)$ και $y(t)$ όπως αυτά προκύπτουν από τα αναπτύγματα των σειρών για τάξεις αποκοπής $n = 4$ και $n = 15$. Αυτοί οι αριθμοί συγκρίνονται με τα όρια των τροχιών που βρίσκονται αριθμητικά. Σε όλες τις περιπτώσεις θέτουμε $a = b = 1, c = \sqrt{2}/2$. Για $x_0 = y_0 \geq 3$ η συμφωνία μεταξύ της 4ης και 15ης τάξης προσέγγισης με τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι πολύ καλή.

$x_0 = y_0$	4η προσέγγιση		15η προσέγγιση		αριθμητική	
	x_{min}^{max}	y_{min}^{max}	x_{min}^{max}	y_{min}^{max}	x_{min}^{max}	y_{min}^{max}
3.4	3.4	3.4	3.412	3.4	3.412	3.4
	3.365	3.074	3.354	2.996	3.353	2.994
3.2	3.2	3.2	3.215	3.2	3.216	3.2
	3.158	2.830	3.146	2.715	3.139	2.707
3.0	3.0	3.0	3.021	3.0	3.022	3.0
	2.948	2.576	2.920	2.398	2.914	2.366
2.8	2.8	2.8	2.830	2.8	2.869	2.8
	2.737	2.309	2.687	2.016	2.616	1.452

Πίνακας 4.1: Οι ελάχιστες και μέγιστες τιμές των x και y για μερικές οργανωμένες τροχιές μακριά από το κέντρο (αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0$ όπως αναγράφονται στην πρώτη στήλη), χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση σειρών (σχέση 4.12) τέταρτης, ή δέκατης πέμπτης τάξης, σε σύγκριση με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Η τελευταία τροχιά, για $x_0 = y_0 = 2.8$, είναι χαοτική. Έτσι η αναπαράσταση της με σειρές δεν είναι πλέον χρήσιμη.



Σχήμα 4.5: Μια οργανωμένη τροχιά στην εσωτερική οργανωμένη περιοχή (αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0 = 0.5$), μία χαοτική τροχιά ($x_0 = y_0 = 1.5$), και μία οργανωμένη τροχιά στην εξωτερική οργανωμένη περιοχή ($x_0 = y_0 = 3.0$) για το μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. Οι τροχιές είναι σχεδιασμένες πάνω από τις γραμμές των κόμβων.



Σχήμα 4.6: Η χρονική εξέλιξη του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για το σύστημα 4.7 (α) για μια τροχιά στην εξωτερική οργανωμένη περιοχή ($x_0 = y_0 = 3.0$) (β) για μια τροχιά λίγο μέσα από το όριο της εξωτερικής οργανωμένης περιοχής ($x_0 = y_0 = 2.8$). Ο υπολογισμός έγινε για χρόνο $t = 5 \times 10^6$.

Απ' την άλλη μεριά, για x_0, y_0 μικρότερα από $\simeq 2.9$ (αλλά όχι μικρότερα από 1) οι τροχιές έρχονται μέσα στην περιοχή των γραμμών των κόμβων (σχήμα 4.5) και οι τροχιές γίνονται χαοτικές. Πράγματι όπως μπορούμε να δούμε υπολογίζοντας τον αριθμό Lyapunov στο σχήμα 4.6, από τον υπολογισμό των αριθμών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0 = 3.0$ παραμένει οργανωμένη (4.6α), αντίθετα η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0 = 2.8$ είναι χαοτική (4.6β).

4.4 Οργανωμένες και χαοτικές τροχιές στο σύστημα Hénon - Heiles

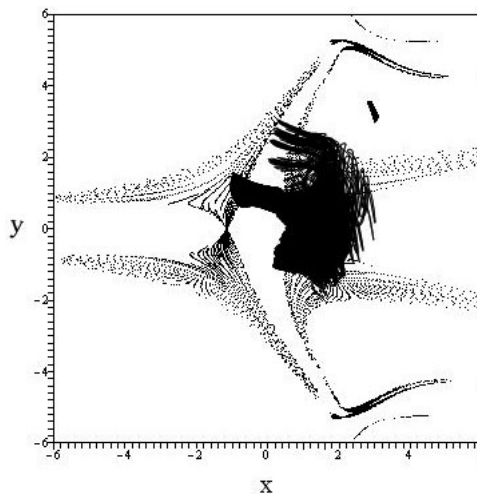
Τα κύρια χαρακτηριστικά των κβαντικών τροχιών στο σύστημα του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή διατηρούνται σε μεγάλη κλίμακα αν θεωρήσουμε διαταραχές αυτού του μοντέλου. Τέτοιες διαταραχές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη μοριακή δυναμική και την κβαντική θεωρία πεδίου.

Ως μία απλή μη γραμμική επέκταση του μοντέλου του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή θεωρούμε την χαμιλτονιανή Hénon - Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega_1^2 x^2) + \frac{1}{2}(p_y^2 + \omega_2^2 y^2) + \epsilon x(y^2 - \frac{1}{3}x^2). \quad (4.18)$$

Όπως και στην εργασία [39], θεωρούμε την περίπτωση $\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}/2, \epsilon = 0.1118034$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε στο παραπάνω μοντέλο την κυματοσυνάρτηση η οποία, κατ' αναλογία προς την κυματοσυνάρτηση (4.7) του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, είναι υπέρθεση της θεμελιώδους κατάστασης και των δύο πρώτων διεγερμένων καταστάσεων (με κβαντικούς αριθμούς (1,0) και (1,1)) εργαζόμαστε ως εξής: πρώτα υπολογίζουμε αριθμητικά τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις ενέργειας της χαμιλτονιανής (4.18), εκφράζοντας, για τις τελευταίες, τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή. Πιο συγκεκριμένα, πρώτα υπολογίζουμε αρχικά μια 200×200 αποκοπή του χαμιλτονιανού πίνακα που



Σχήμα 4.7: Ομοίως όπως στο σχήμα 4.5, αλλά για το μοντέλο Hénon – Heiles.

προκύπτει από τη χαμιλτονιανή (4.18) με στοιχεία

$$H_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(x, y) \hat{H} \phi_j(x, y) dx dy \quad (4.19)$$

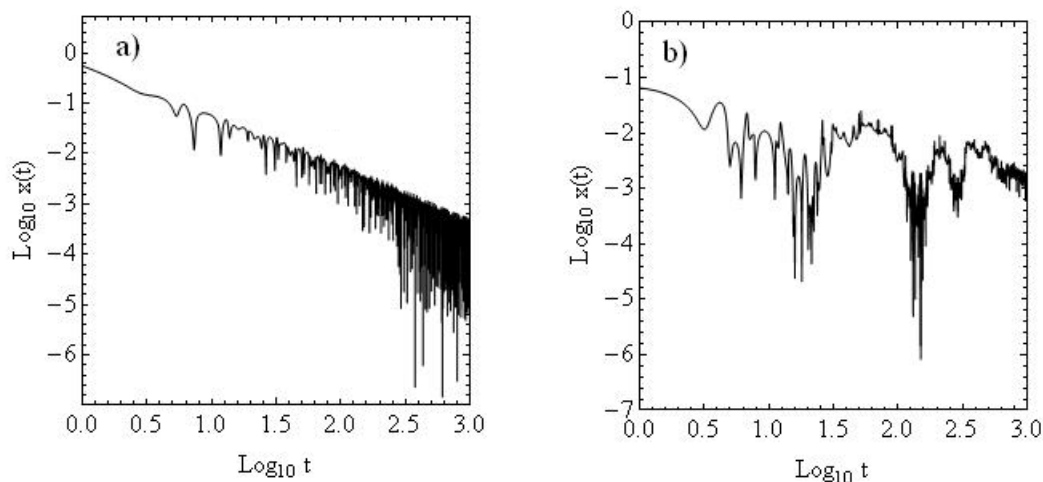
όπου \hat{H} είναι ο χαμιλτονιανός τελεστής που αντιστοιχεί στη (4.18) εκπεφρασμένος στην αναπαράσταση θέσης, ενώ η συνάρτηση $\phi_i(x, y)$ αντιστοιχεί στην i ιδιοκατάσταση ενέργειας του μοντέλου του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή σύμφωνα με μια καθορισμένη σύμβαση απαρίθμησης. Για τη σχέση του δείκτη i με τους κβαντικούς αριθμούς του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή (n, m) υιοθετούμε τη σύμβαση $i = m + 1 + (n + m)(n + m + 1)/2$. Έτσι η i ιδιοτιμή της χαμιλτονιανής (4.18) ικανοποιεί την $E_i = (n + 1/2) + (\sqrt{2}/2)(m + 1/2) + O(\epsilon)$. Διαγωνιοποιώντας τον συμμετρικό πίνακα \hat{H}_{tr} , με στοιχεία H_{ij} , $i, j = 1, 200$, βρίσκουμε της ιδιοτιμές E_i και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα $\Phi_i(x, y)$, που δίνονται από την σχέση

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{200} c_j^{(i)} \phi_j(x, y) \quad (4.20)$$

όπου $c_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, 200$ είναι τα στοιχεία της i στήλης του ορθογώνιου διαγώνιου πίνακα C που ικανοποιεί την σχέση $C \cdot H_{tr} \cdot C^{-1} = \text{diag}_{i=1}^{200}(E_i)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σχέση $i(n, m)$ είναι ένα προς ένα, για ϵ ικανοποιητικά μικρό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κβαντικούς αριθμούς στην i κατάσταση του συστήματος Hénon-Heiles μέσω των αντίστροφων συναρτήσεων $n(i)$, $m(i)$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διαδικασία, οι ιδιοκαταστάσεις και οι ιδιοτιμές έως $n, m = 2$ υπολογίζονται με ακρίβεια έξι σημαντικών ψηφίων. Επιπλέον, δηλώνουμε με $\Phi_{n,m}$ και $E_{n,m}$ την κατάσταση $\Phi_{i(n,m)}$ όπως δίνεται από την εξίσωση (4.20) και τη σχετική ιδιοτιμή $E_{i(n,m)}$ αντίστοιχα.

Προκειμένου τώρα να συγκρίνουμε τις τροχιές de Broglie-Bohm στον αρμονικό ταλαντωτή και στο σύστημα Hénon - Heiles, μελετούμε για το τελευταίο τις τροχιές που υπακούν στην κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x, y, t) = e^{-iE_{0,0}t} \Phi_{0,0}(x, y) + a e^{-iE_{1,0}t} \Phi_{1,0}(x, y) + b e^{-iE_{1,1}t} \Phi_{1,1}(x, y) . \quad (4.21)$$



Σχήμα 4.8: Η χρονική εξέλιξη του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για το σύστημα 4.21 (α) για την τροχιά του σχήματος 4.7 στην εσωτερική οργανωμένη περιοχή ($x_0 = y_0 = 0.5$) (β) για την τροχιά του σχήματος 4.7 στην κεντρική χαοτική περιοχή ($x_0 = y_0 = 1.5$). Ο υπολογισμός έγινε για χρόνο $t = 10^3$.

Όπως και στην περίπτωση του μοντέλου του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή υπολογίζουμε τις τροχιές του συστήματος για μια περίπτωση τιμών των πραγματικών παραμέτρων a, b . Στο σχήμα 4.7 βλέπουμε ένα παράδειγμα τριών τροχιών de Broglie-Bohm στο παραπάνω μοντέλο, δηλαδή: (i) μία εσωτερική οργανωμένη, (ii) μία χαοτική, και (iii) μία εξωτερική οργανωμένη τροχιά. Οι αντίστοιχοι αριθμοί Lyapunov για τις περιπτώσεις (i) και (ii) παρουσιάζονται στο σχήμα 4.8. Το σχήμα 4.7 ταιριάζει απόλυτα με το αντίστοιχο του μοντέλου του αρμονικού ταλαντωτή (σχήμα 4.5), που δείχνει ότι οι οργανωμένες τροχιές de Broglie-Bohm παραμένουν ακόμα και για διαταραγμένες χαμιλιτονιανές της μορφής (4.18). Σχεδιάζοντας τις γραμμές των κόμβων (αλυσίδες σημείων στο σχήμα 4.7), παρατηρούμε ότι αναπαριστούν, σε μεγάλο βαθμό, μία παραμόρφωση των γραμμών των κόμβων που εμφανίζονται στο σχετικό σχήμα (4.2) του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. Στην πραγματικότητα η μόνη παρατηρήσιμη διαφορά αφορά το δεξιό μέρος του τετραγώνου (x, y) στο σχήμα (4.7), για μεγάλες (θετικές ή αρνητικές) τιμές των y και $x > 0$. Συγκεκριμένα, ενώ οι γραμμές των κόμβων στο σχήμα 4.5 τείνουν σε μία ασύμπτωτη στο $x = 0$ για μεγάλο y , οι γραμμές των κόμβων στο σχήμα (4.7) σχηματίζουν δύο περίπου οριζόντιες ζώνες στο $y \approx \pm 4.5$. Αυτό όμως μπορεί να έχει επίδραση μόνο σε τροχιές μακριά από το κέντρο (δηλαδή αντιστοιχεί σε εκθετικά μικρή πιθανότητα), ενώ οι περισσότερες τροχιές, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.7), ακολουθούν τα ίδια χαρακτηριστικά όπως αυτά που είδαμε για το μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

4.5 Επίδρασεις στην κβαντική χαλάρωση

Η θεωρία της κβαντικής χαλάρωσης, ([126]), παρέχει μία επέκταση της συνήθους κβαντικής μηχανικής οδηγώντας σε ενδιαφέρουσες φυσικές συνέπειες τόσο για τα κβαντικά σωματίδια [126], [128], [39], [4], [124] όσο και για τα κβαντικά πεδία [24], [23]. Εν συντομία μπορούμε να πούμε ότι η θεωρία εξερευνά τις συνέπειες του να επιτρέπεται η δυνατότητα σε ένα σύνολο αρχικών συνθηκών τροχιών de Broglie-Bohm να έχουν μία αρχική πυκνότητα πιθανότητας ρ_0 που παρουσιάζει διακυ-

μάνσεις σε σχέση με τον κανόνα του Born $\rho_0 = |\psi_0|^2$, όπου ψ_0 είναι η αρχική κυματοσυνάρτηση. Το κύριο αποτέλεσμα, που ονομάζεται υποκβαντικό θεώρημα H ([126]), προβλέπει ότι η πυκνότητα ρ μπορεί να πλησιάσει πιο κοντά στο $|\psi|^2$ ασυμπτωτικά με την πάροδο του χρόνου (εάν αρχικά $\rho_0 \neq |\psi_0|^2$), εφόσον η αρχική κατάσταση ρ ικανοποιεί ορισμένες προϋποθέσεις που περιγράφονται λεπτομερώς στην αναφορά ([126]). Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις ο Valentini ορίζει τη συνάρτηση H

$$H = \int dq \bar{\rho} \ln(\bar{\rho}/|\psi|^2) \quad (4.22)$$

όπου το $\bar{\rho}$ είναι η μέση πυκνότητα των σωματιδίων που παράγονται μετά από την επιλογή της διαμέρισης του φυσικού χώρου σε ένα σύνολο κυψελίδων, και $|\psi|^2$ είναι η μέση τιμή του τετραγώνου του μέτρου της κυματοσυνάρτησης στις ίδιες κυψελίδες. Όπως μπορεί ναδειχθεί η H ικανοποιεί την ανισότητα $H(t) - H(0) \leq 0$. Τονίζουμε ότι αυτό δεν συνεπάγεται ότι το $H(t)$ είναι μία μονότονα φθίνουσα συνάρτηση στο χρόνο. Επιπλέον, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε καταστάσεις τέτοιες ώστε $H(t) \simeq 0$ ακόμη και αν το $\bar{\rho}$ διαφέρει σημαντικά από το $|\psi|^2$ από κυψελίδα σε κυψελίδα, εφόσον η υπολοκλήρωση ποσότητα στην (4.22) μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Όμως, οι προσομοιώσεις δείχνουν ότι η κβαντική χαλάρωση όντως συντελείται σε πολλές περιπτώσεις ([128], [39], [124]).

Στους υπολογισμούς που ακολουθούν, μελετούμε απευθείας την προσέγγιση του ρ στο $|\psi|^2$ με τη βοήθεια ενός εναλλακτικού δείκτη (όπως θα δούμε στη συνέχεια), συγκεκριμένα το ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς $|\rho - |\psi|^2|$ πάνω σε ολόκληρο το θεσεογραφικό χώρο.

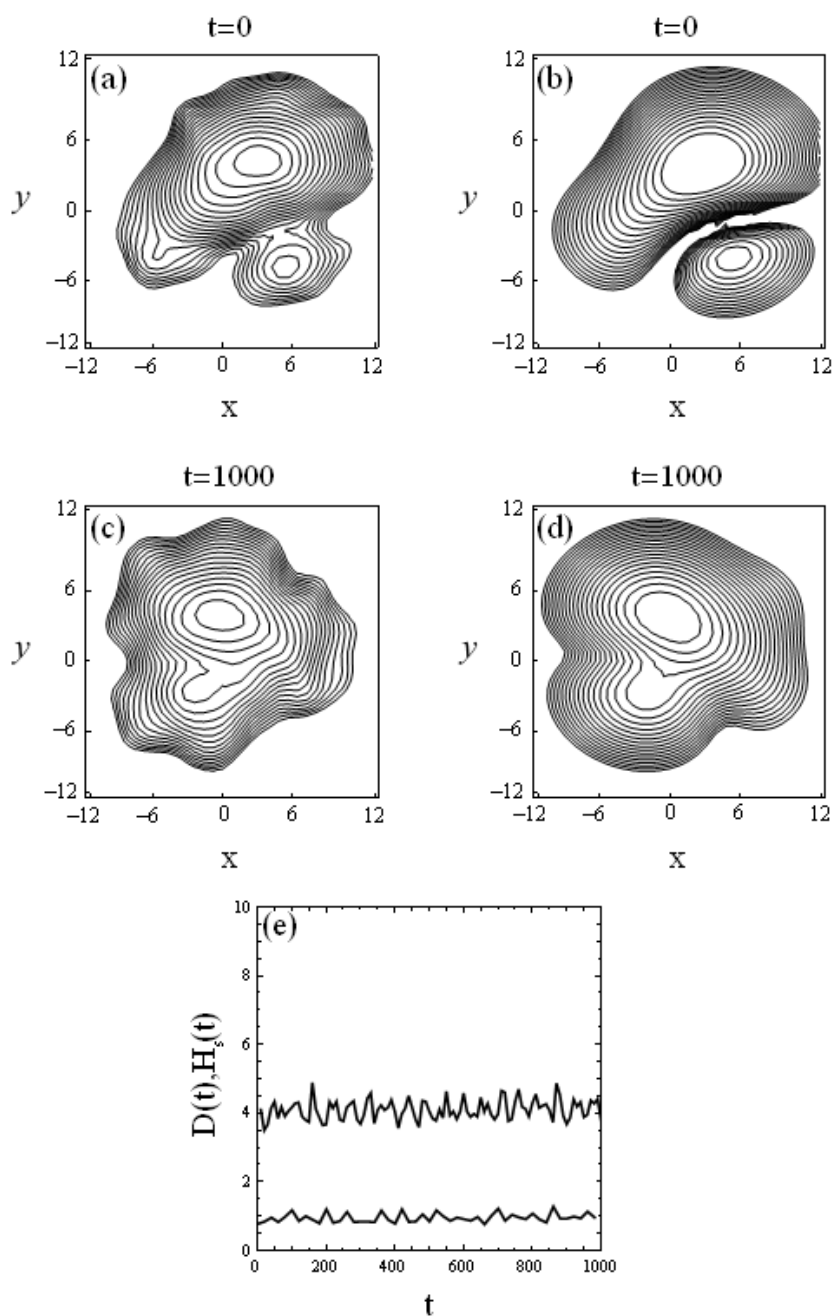
Αριθμητικές προσομοιώσεις του φαινομένου της κβαντικής χαλάρωσης αναφέρονται στις εργασίες [128], [39], και [124]. Σε όλες τις περιπτώσεις, βρέθηκε ότι αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει η κβαντική χαλάρωση είναι η ύπαρξη χαοτικών τροχιών. Απ' την άλλη μεριά, στην εργασία [39] παρατηρήθηκε ότι η ύπαρξη οργανωμένων κβαντικών τροχιών καταστέλλει το φαινόμενο της κβαντικής χαλάρωσης. Εδώ, μελετούμε το φαινόμενο με περισσότερη λεπτομέρεια, αλλά επίσης δίνουμε ένα παράδειγμα ενός μη αναμενόμενου αποτελέσματος, συγκεκριμένα ότι η κβαντική χαλάρωση μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να κατασταλεί από σύνολα χαοτικών και όχι οργανωμένων τροχιών.

Στα σχήματα 4.9, 4.10, 4.11 βλέπουμε το βασικό αποτέλεσμα. Το σχήμα 4.9 δείχνει πρώτα ένα δοκιμαστικό παράδειγμα, όπου υπολογίσαμε τις κβαντικές τροχιές 961 σωματιδίων ($=31 \times 31$) στο μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή (4.7), με $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}/2$. Οι αρχικές συνθήκες επιλέχθηκαν με τη βοήθεια του αλγόριθμου απόρριψης (rejection algorithm) (βλ. [109]) έτσι ώστε να αναπαράγουν μία αρχική κατανομή πυκνότητας $\rho_0 = |\psi_0|^2$. Ο αριθμός των σωματιδίων που πήραμε είναι σχετικά μικρός (της τάξης του 1000) επειδή ο υπολογισμός των τροχιών χρειάζεται να γίνει με μικρό βήμα, $\Delta t = 10^{-4}$, και είναι απαιτητικός σε υπολογιστική ισχύ. Αυτό είναι απαραίτητο προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι δεν θα έχουμε αλλοίωση των αποτελεσμάτων εξαιτίας αριθμητικών σφαλμάτων.

Παρά τον περιορισμό που έχουμε όσον αφορά τον αριθμό των θεωρούμενων σωματιδίων, μπορούμε να υπολογίσουμε μία ομαλή κατανομή πυκνότητας μέσω των τροχιών του υπάρχοντος συνόλου σωματιδίων μέσω της παρακάτω σχέσης ([39]):

$$P_s(x, y, t) = \sum_{i=1}^{961} A \exp \left[-\frac{(x - x_i(t))^2 + (y - y_i(t))^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.23)$$

όπου σ είναι ένα μήκος εξομάλυνσης, το οποίο θέτουμε $\sigma = 0.3$. Η σταθερά A υπολογίζεται έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $P_s(x, y, t)$ σε όλο το φυσικό χώρο να είναι ίσο με τη μονάδα.



Σχήμα 4.9: (α) Οι ισοψείς της πυκνότητας $P_s(x, y, t)$ σε κατάσταση ισορροπίας, όπου 961 σωματίδια έχουν αρχικές συνθήκες έτσι ώστε να αναπαραριστούν την κατανομή πιθανότητας $|\psi|^2$ που δίνεται από την (4.7) για $t = 0$. (β) Ισοψείς της ακριβούς πυκνότητας $\rho = |\psi|^2$ για $t = 0$. (γ) και (δ) Ομοίως όπως στα (α) και (β), αλλά για χρόνο $t = 1000$. Οι θέσεις των σωματιδίων πλέον δίνονται από τον υπολογισμό της χρονικής εξέλιξης των τροχιών τους. (ε) Χρονική εξέλιξη της διαφοράς πυκνότητας $D(t)$ (πάνω καμπύλη) και της συνάρτησης $H_s(t)$ (κάτω καμπύλη) στην ίδια προσομοίωση.

Τα σχήματα 4.9α,β δείχνουν μία σύγκριση των ισουψών της πυκνότητας $P_s(x, y, 0)$ (σχ. 4.9α) με την $|\psi(x, y, 0)|^2$ (σχ. 4.9β), όπου βλέπουμε ότι με αυτή την επιλογή αρχικών συνθηκών, η P_s προσεγγίζει πολύ καλά την πυκνότητα $|\psi(x, y, 0)|^2$. Ο βαθμός της ομοιότητας μπορεί να προκύψει υπολογίζοντας (στο χρόνο) την συνολική απόλυτη διαφορά πυκνοτήτων $D(t)$ του διαμερισμένου χώρου, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$D(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N |P_s(x_k, y_l, t) - |\psi(x_k, y_l, t)|^2| \quad (4.24)$$

όπου, όπως και στην [39], θέτουμε $N = 128$ και $x_k = -N/10 + k/5$, $y_l = N/10 + l/5$ στο άθροισμα (4.24). Η αρχική τιμή αυτής της ποσότητας για το παραπάνω δείγμα τροχιών προκύπτει ίση με $D(0) \simeq 4$. Όπως έχει δειχθεί [39], μία τέτοια τιμή είναι συμβατή με τη διαφορά λόγω του θορύβου Poisson της $P_s(0)$ από την $|\psi_0|^2$, δηλαδή οι δύο κατανομές είναι ίσες εντός του πλαισίου των στατιστικών διακυμάνσεων. Τώρα εφόσον η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας που προκύπτει από το σύνολο των τροχιών de Broglie-Bohm πρέπει να σέβεται την εξίσωση της συνέχειας, καθώς εξελίσσουμε τις τροχιές de Broglie-Bohm, πρέπει η ισότητα αυτή να διατηρείται σε κάθε χρονική στιγμή t . Αυτό είναι πράγματι που παρατηρούμε κοιτώντας τις ισουψείς των P_s και $|\psi|^2$ για διαφορετικά χρονικά στιγμιότυπα, όπως στα σχήματα 4.9γ,δ, όπου η σύγκριση αυτή είναι σχεδιασμένη για χρόνο $t=1000$. Η χρονική εξέλιξη του $D(t)$ έως χρόνο $t = 1000$ παριστάνεται στο σχήμα 4.9ε, όπου βλέπουμε ότι το $D(t)$ παραμένει σταθερό στο επίπεδο του στατιστικού θορύβου $D(t) \simeq 4$, επομένως δεν υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις της P_s από την $|\psi|^2$ κατά την διάρκεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης των τροχιών de Broglie-Bohm. Στο ίδιο σχήμα βλέπουμε επίσης τη συμπεριφορά της συνάρτησης

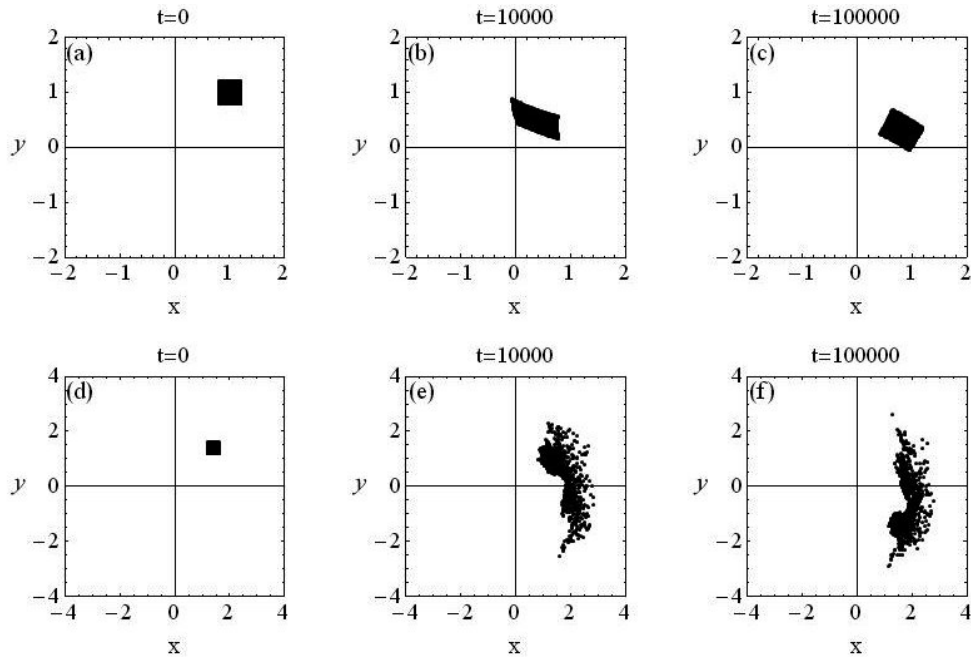
$$H_s(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N P_s(x_k, y_l, t) \log (P_s(x_k, y_l, t)/|\psi(x_k, y_l, t)|^2) \quad (4.25)$$

της οποίας ο ορισμός είναι ανάλογος προς τη συνάρτηση H του Valentini, υπολογίζεται ωστόσο σε μία κλίμακα χωρικής ανάλυσης της τάξης του $\sim \sigma$. Για την ακρίβεια, τόσο στο συγκεκριμένο όσο και στα επόμενα παραδείγματα που ακολουθούν, βρίσκουμε ότι οι δύο συναρτήσεις $D(t)$ και $H_s(t)$ έχουν μία όμοια συμπεριφορά στο χρόνο. Αυτό συμβαίνει διότι ο τρόπος που διαλέγουμε αρχικές συνθήκες, εντοπισμένες σε μικρά κελιά στο θεσεογραφικό χώρο, συνεπάγεται ότι η κύρια συνεισφορά στο άθροισμα (4.25) προέρχεται από τις κυψελίδες όπου έχουμε $P_s > |\psi|^2$ (λίγο μεγαλύτερο), απ' όπου

$$P_s \log(P_s/|\psi|^2) = P_s - |\psi|^2 + O[P_s(P_s/|\psi|^2) - 1]^2 .$$

Να τονίσουμε ότι, ενώ αυτός ο εναλλακτικός υπολογισμός βοηθάει να προσεγγίσουμε αριθμητικά την συμπεριφορά της συνάρτησης $H_s(t)$ στο χρόνο, ο πιο άμεσος τρόπος να υπολογίσουμε την εγγύτητα της ρ στην $|\psi|^2$ παρέχεται από την αριθμητική τιμή της $D(t)$.

Το σχήμα 4.10, δείχνει τί συμβαίνει στην περίπτωση κατά την οποία ξεκινήσουμε με αρχικές συνθήκες ώστε $P_s \neq |\psi|^2$. Τα σχήματα 4.10α,β,γ δείχνουν τις στιγμιαίες θέσεις για τις χρονικές $t = 0$ (σχήμα 4.10α), $t = 10000$ (σχήμα 4.10β) και $t = 100000$ (σχήμα 4.10γ), 961 τροχιών με αρχικές συνθήκες που έχουν ληφθεί σε ένα πλέγμα 31×31 στο τετράγωνο κουτί που εκτείνεται στην περιοχή $(0.9, 1.1) \times (0.9, 1.1)$, για το ίδιο μοντέλο, αρμονικού ταλαντωτή, όπως και στο σχήμα 4.9. Η κεντρική τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0 = 1$ είναι οργανωμένη (σχήμα 4.2α). Το ίδιο συμβαίνει και για τις υπόλοιπες τροχιές που την περιβάλλουν στο εσωτερικό αυτού του τετραγώνου. Στα σχήματα 4.10α,β,γ παρατηρούμε ότι οι τροχιές ταξιδεύουν όλες μαζί χωρίς να αναμειγνύονται καθόλου. Ως αποτέλεσμα, το τετράγωνο των αρχικών συνθηκών μετακινείται χωρίς να χάνει τη συνοχή του από τη μία περιοχή του χώρου στην άλλη, χωρίς να εμφανίζει καμία συστηματική

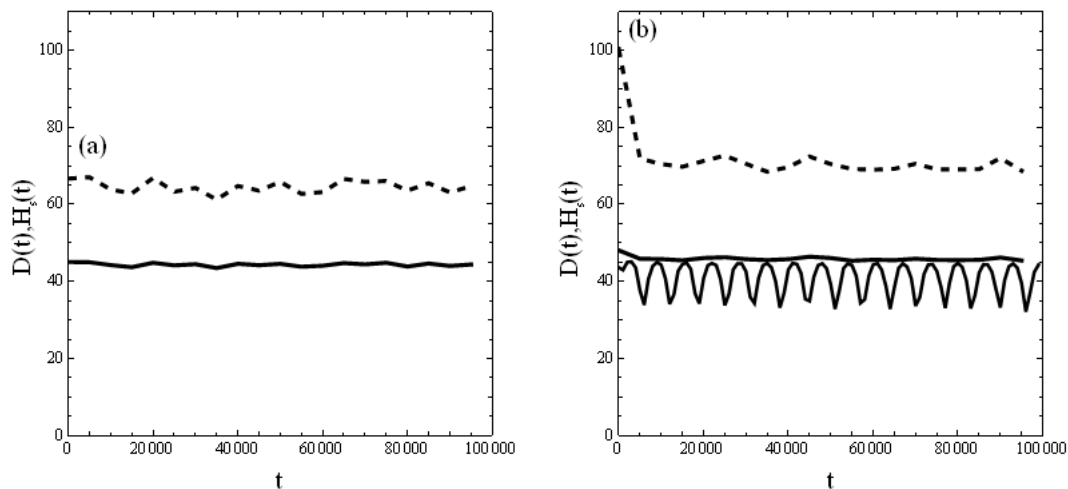


Σχήμα 4.10: (α) Οι αρχικές συνθήκες 961 σωματιδίων ενός “οργανωμένου” συνόλου κβαντικών τροχιών που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της επίδρασης του φαινομένου της χαλάρωσης (βλέπε κείμενο) στο μοντέλο (4.7). (β),(γ) οι θέσεις των ίδιων σωματιδίων τις χρονικές στιγμές $t = 10000$ και $t = 100000$ αντίστοιχα (δ),(ε),(στ). Όμοια με τα (α),(β),(γ), αλλά για ένα “χαοτικό” σύνολο τροχιών.

παραμόρφωση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Αυτή η συμπεριφορά οφείλεται στο ότι οι βασικές συχνότητες της κίνησης είναι οι ίδιες για όλες τις τροχιές, ($\omega_1 = 1$, και $\omega_2 = c$).

Τα σχήματα 4.10δ,ε,στ δείχνουν τώρα έναν παρόμοιο υπολογισμό 961 τροχιών με αρχικές συνθήκες μέσα στο τετράγωνο $(1.3,1.5) \times (1.3,1.5)$. Σε αυτήν την περίπτωση, η κεντρική τροχιά ($x_0 = y_0 = 1.4$), καθώς και οι τροχιές που την περιβάλλουν, είναι χαοτικές. Όπως μπορούμε να δούμε σε αυτή την περίπτωση οι τροχιές απλώνονται σε μία ευρεία περιοχή και των δυο πλευρών του άξονα x , όμως παραμένουν πάντα στο ίδιο ημιεπίπεδο (το δεξιό σε σχέση με το άξονα y), δηλαδή οι τροχιές δεν τέμνουν ποτέ τον y άξονα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο κεντρικό κενό που σχηματίζεται μεταξύ του εσωτερικού υπερβολοειδούς ορίου των γραμμών των κόμβων και στις δύο πλευρές του άξονα y (σχήμα 4.2). Υπολογίσαμε επιπλέον μερικές αντιπροσωπευτικές τροχιές για χρόνο $t = 10^5$, χρησιμοποιώντας σταθερό βήμα ($\Delta t = 10^{-4}$) αλλά και πάλι σε καμία περίπτωση οι τροχιές δεν έτμησαν τον άξονα y .

Το γεγονός ότι μπορούν να υπάρξουν χαοτικές τροχιές περιορισμένες σε ένα μόνο ημιεπίπεδο του διαθέσιμου χώρου συνεπάγεται ότι μπορούν να υπάρξουν περιορισμοί στην κβαντική χαλάρωση ακόμη και κάτω από μία χαοτική δυναμική de Broglie-Bohm. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.11, που συγκρίνεται η εξέλιξη του $D(t)$ (εξίσωση 4.24) για (α) το σύνολο των οργανωμένων τροχιών (πάνω πλαίσια του σχήματος 4.10), και (β) το σύνολο των χαοτικών τροχιών (κάτω πλαίσια στο σχήμα 4.10). Στην περίπτωση των οργανωμένων τροχιών (σχήμα 4.11α), βρίσκουμε ότι το $D(t)$ υποβάλλεται σε μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη μέση τιμή $D(t)=45$. Αυτό είναι συμβατό με το γεγονός ότι οι οργανωμένες τροχιές εμποδίζουν την κβαντική χαλάρωση. Όμως η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και στην περίπτωση των χαοτικών τροχιών, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.11β, εφόσον οι τροχιές ποτέ δεν φθάνουν στο ημιεπίπεδο $x < 0$.



Σχήμα 4.11: Η χρονική εξέλιξη των διαφορών πυκνότητας $D(t)$ (συνεχής καμπύλη) και της αδρής συνάρτησης $H_s(t)$ (διακεκομμένη καμπύλη) για το σύνολο (α) των πάνω πλαισίων και (β) των κάτω πλαισίων του σχήματος (4.10). Η κατώτερη ταλαντωτική καμπύλη στο (β) αναφέρεται σε έναν υπολογισμό του $D(t)$ που γίνεται μόνο στο δεξιό ημιπίεδο $x > 0$, και δηλώνεται με $\bar{D}(t)$.

Σε αυτή την περίπτωση επίσης η $D(t)$ υποβάλλεται σε μικρές ταλαντώσεις γύρω από την τιμή $D(t) \simeq 45$, και δεν τείνει στην τιμή $D(t)=0$ καθώς το t αυξάνεται. Αλλά πρέπει να τονιστεί ότι οι σημαντικές αποκλίσεις της P_s από την $|\psi|^2$ υπάρχουν ακόμη και όταν περιοριστούμε στο να υπολογίσουμε το άθροισμα (4.24) μόνο στο ημιπίεδο $x > 0$ (σε αυτή την περίπτωση κανονικοποιούμε και το P_s και το $|\psi|^2$ έτσι ώστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα και των δύο ποσοτήτων στο επίπεδο $x > 0$ να ισούται με τη μονάδα). Παρατηρούμε τώρα ότι η νέα καμπύλη (που υποδηλώνεται με $\bar{D}(t)$) υποβάλλεται σε ταλαντώσεις, που ξεκινούν από μία τιμή κοντά στο $\bar{D} = 45$ και πέφτει ορισμένες χρονικές στιγμές στην τιμή $\bar{D} = 35$. Η τάση αυτή αναστρέφεται με την πάροδο του χρόνου και έτσι πραγματοποιούνται πολλοί κύκλοι ανόδου και καθόδου του $\bar{D}(t)$, το οποίο όμως ποτέ δεν τείνει στο μηδέν.

Μια ποιοτική ερμηνεία αυτής της συμπεριφοράς μπορεί να δοθεί παρατηρώντας ότι η μορφή της κυματοσυνάρτησης (4.7) επιτρέπει μία επαναλαμβανόμενη μεταφορά πιθανότητας από το αριστερό στο δεξιό ημιπίεδο και αντιστρόφως. Το θεωρούμενο σύνολο χαοτικών τροχιών, δεν περιέχει καθόλου τροχιές που μπορούν να μεταφερθούν από το ένα ημιπίεδο στο άλλο. Επομένως, η μεταφορά αυτή μπορεί να επιτευχθεί μόνο από οργανωμένες τροχιές. Έτσι, παρά το γεγονός ότι έχουμε χαοτικές τροχιές, σε αυτό το παράδειγμα η P_s δεν μπορεί να προσεγγίσει το $|\psi|^2$ καθώς το t αυξάνεται.

4.6 Περαιτέρω παραδείγματα παρεμπόδισης της χαλάρωσης. Ποσοτικοί υπολογισμοί

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται στις προηγούμενες παραγράφους έχουν την ιδιαιτερότητα ότι οι χαοτικές τροχιές περιορίζονται σε μέρη του συνολικού διαθέσιμου χώρου. Όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλα παραδείγματα μικτής δυναμικής, όπου δηλαδή συνυπάρχουν οι

χαοτικές με τις οργανωμένες τροχιές και επομένως οι περιορισμοί δεν έχουν πλέον ισχύ. Μία τέτοια περίπτωση αφορά τις τροχιές de Broglie-Bohm στο μοντέλο της κυματοσυνάρτησης ([41]):

$$\psi(x, y, t) = e^{-\frac{x^2+cy^2}{2}} e^{-\frac{1+c}{2}it} \left[1 + a(x^2 - 1)e^{-2it} + bc^{1/2}xye^{-it} \right] \quad (4.26)$$

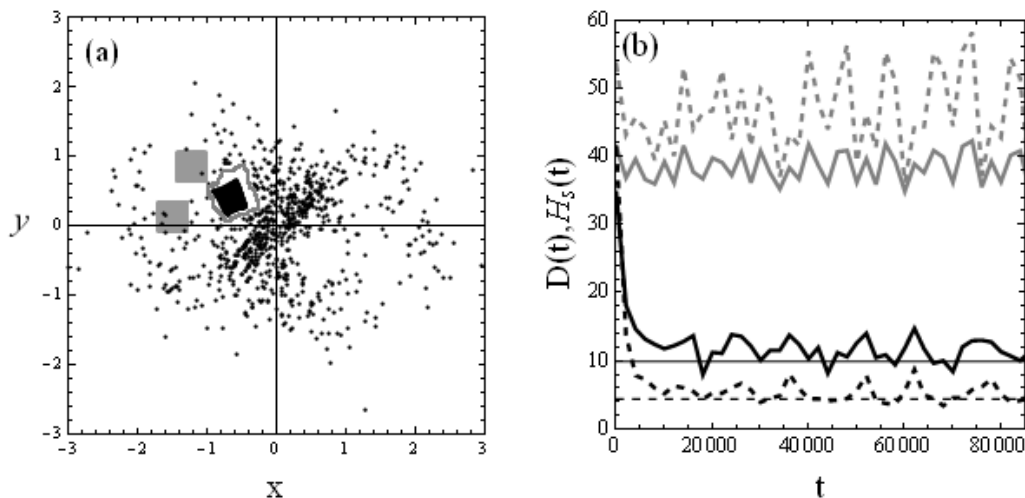
για a, b, c πραγματικούς. Στη συνέχεια, επιλέγουμε $a = 1.23, b = 1.15, c = \sqrt{2}/2$. Στην εργασία [41] εδείχθη ότι αυτό το μοντέλο περιέχει τόσο οργανωμένες όσο και χαοτικές τροχιές. Το σχήμα 4.12 δείχνει έναν υπολογισμό από δύο διακριτά σύνολα 961 τροχιών η καθεμία από τις οποίες λαμβάνεται στο εσωτερικό ενός τετραγώνου διαστάσεων 0.4×0.4 που το κέντρο του βρίσκεται στις θέσεις i) $x_0 = -1.5, y_0 = 0.1275$ και ii) $x_0 = -1.23, y_0 = 0.84$. Οι κεντρικές τιμές των περιπτώσεων i) και ii) αφορούν μία οργανωμένη και μία χαοτική τροχιά αντίστοιχα. Η βασική παρατήρηση αφορά το γεγονός ότι, όπως και στην περίπτωση των οργανωμένων τροχιών για τα μοντέλα των παραγράφων 4.2, 4.3 και 4.4, οι οργανωμένες τροχιές στο παρόν μοντέλο δεν υποβάλλονται σε ανάμιξη φάσεως, δηλαδή όλες κάνουν ημιπεριοδικές ταλαντώσεις με συχνότητες $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = c = \sqrt{2}/2$. Επιπλέον, το σύνορο της περιοχής που καταλαμβάνεται από τις οργανωμένες τροχιές δεν μπορεί να διαπεραστεί από τις χαοτικές τροχιές. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.12α που απεικονίζει τις αρχικές συνθήκες των οργανωμένων και χαοτικών τροχιών τη στιγμή $t = 0$, και τις εικόνες τους τη στιγμή $t = 10000$, δηλαδή μία χρονική στιγμή στην οποία οι χαοτικές τροχιές έχουν απλωθεί στο μεγαλύτερο μέρος του διαθέσιμου χώρου τους ενώ οι οργανωμένες τροχιές παραμένουν μέσα στο μαύρο κουτί.

Το σχήμα 4.12β δείχνει τη χρονική εξέλιξη των συναρτήσεων $D(t)$ και $H_s(t)$ για τα σύνολα (i) και (ii) αντίστοιχα. Στην περίπτωση του συνόλου (i) (οργανωμένες τροχιές), παρατηρούμε την ξεκάθαρη απόκλιση από τη χαλάρωση, δεδομένου ότι οι καμπύλες $D(t)$ και $H_s(t)$ σταθεροποιούνται σε τιμές πολύ μεγαλύτερες από τα επίπεδα θορύβου. Ωστόσο, στην περίπτωση των τροχιών του συνόλου (ii) (χαοτικές τροχιές), και οι δύο καμπύλες $D(t)$ και $H_s(t)$ πλησιάζουν μία οριακή μέση τιμή $D \simeq 12.3$, και $H_s \simeq 6.4$. Για την ακρίβεια, παρατηρούμε (σχήμα 4.12α) ότι οι χαοτικές τροχιές δεν διαπερνούν το όριο (κλειστή γκρι καμπύλη) που αντιστοιχεί στο σύνολο των οργανωμένων τροχιών, έτσι, ενώ το $|\psi|^2$ καλύπτει όλο το διαθέσιμο χώρο, η τιμή του $\rho(t)$ είναι κοντά στο μηδέν όλες τις χρονικές στιγμές εντός της περιοχής που περιορίζεται από αυτό το όριο. Υπολογίζοντας το ποσοστό της περιοχής που καλύπτεται από τις οργανωμένες τροχιές, σε σχέση με ολόκληρη την περιοχή που απλώνονται οι τροχιές, βρίσκουμε ότι οι τιμές που φτάνουν τα $D(t)$ και $H_s(t)$ για τις χαοτικές τροχιές, κατά μέσο όρο εμφανίζουν την αναμενόμενη διαφορά από τα όρια του θορύβου που δείχνει πλήρη χαλάρωση, οι οποίες σε αυτή την περίπτωση βρέθηκαν να είναι $D = 9.9$ και $H_s = 4.4$ αντίστοιχα.

Παρόμοια φαινόμενα βρίσκουμε αν θεωρήσουμε μια υπέρθεση τεσσάρων κυματοσυναρτήσεων

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= e^{-\frac{x^2+cy^2}{2}} e^{-\frac{1+c}{2}it} \\ &\times \left[1 + a(x^2 - 1)e^{-2it} + bc^{1/2}xye^{-i(1+c)t} + dxe^{-it} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

με $a = b = d = 1$, και $c = \sqrt{2}/2$ (σχήμα 4.13). Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση η περιοχή που καταλαμβάνεται από οργανωμένες τροχιές βρίσκεται αριθμητικά ότι είναι μεγαλύτερη από αυτή στην περίπτωση του μοντέλου της κυματοσυνάρτησης (4.26) η οποία είναι αποτέλεσμα υπέρθεσης ενός μικρότερου αριθμού ιδιοσυναρτήσεων. Γενικά, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιος προφανής κανόνας που να συσχετίζει την περιοχή που καταλαμβάνουν οι οργανωμένες τροχιές με τον αριθμό των υπερτιθέμενων ιδιοσυναρτήσεων.

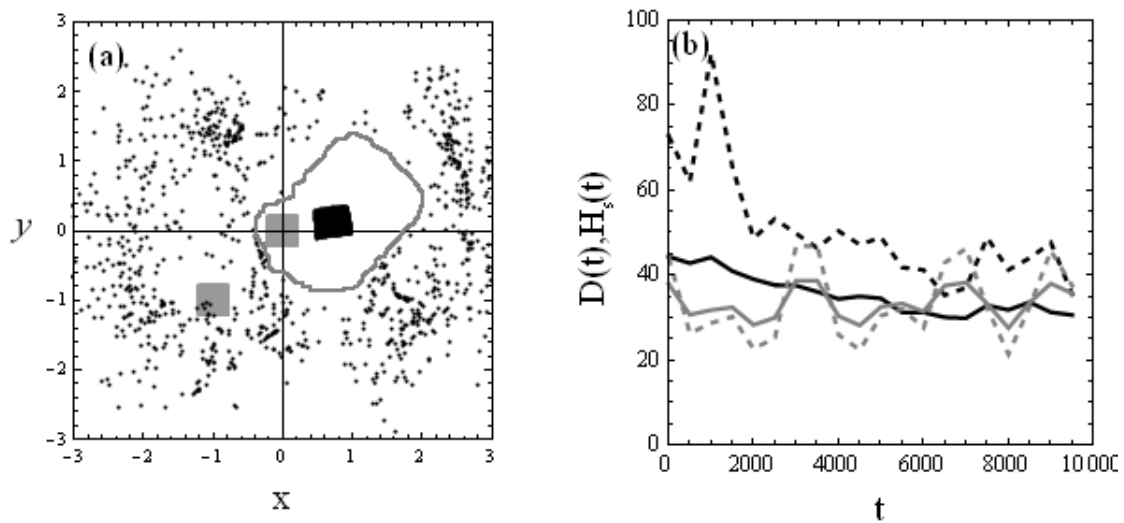


Σχήμα 4.12: (α) Τα γκριζα τετράγωνα κουτιά δείχνουν τις περιοχές αρχικών συνθηκών για ένα σύνολο από 961 τροχιές στο μοντέλο της κυματοσυνάρτησης (4.26), γύρω από τις τιμές (i) $x_0 = -1.5, y_0 = 0.1275$ (κάτω τετράγωνο) και (ii) $x_0 = -1.23, y_0 = 0.84$ (πάνω τετράγωνο). Το μαύρο κουτί περιέχει τις εικόνες των σημείων του πρώτου κουτιού, σε χρόνο $t = 10000$, ενώ τα διάσπαρτα σημεία είναι οι εικόνες των σημείων του δεύτερου κουτιού στον ίδιο χρόνο. Η κλειστή γκριζα καμπύλη δείχνει το προσεγγιστικό όριο της περιοχής των οργανωμένων τροχιών στον ίδιο χρόνο. (β) Η χρονική εξέλιξη των ποσοτήτων $D(t)$ (συνεχής), και $H_s(t)$ (διακεκομμένη) για τα σύνολα (i) (πάνω καμπύλες, γκρι, οργανωμένες τροχιές), και (ii) (κάτω καμπύλες, μαύρες, χαοτικές τροχιές). Η ευθεία συνεχής γραμμή δείχνει το μέσο επίπεδο θορύβου για το $D(t)$ όταν οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν την $\rho_0 = |\psi_0|^2$. Αντίστοιχα η διακεκομμένη ευθεία αναπαριστά το μέσο επίπεδο θορύβου για το $H_s(t)$ όταν οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν την $\rho_0 = |\psi_0|^2$. Η καμπύλη $D(t)$ για το σύνολο (ii) είναι κατά μέσο όρο πάνω από αυτό το επίπεδο κατά $\Delta D \simeq 2.4$, το οποίο είναι συμβατό με έναν υπολογισμό που λαμβάνει υπόψη την περιοχή που αφήνεται άδεια από τις χαοτικές τροχιές.

Σε συστήματα όπως ο διδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής (4.6) (με c ρητό), ή στην περίπτωση του τετράγωνου κουτιού που εξετάζεται στην [128], μπορεί να δειχθεί ότι η ακόλουθη ιδιότητα έχει ισχύ: ένας αυθαίρετος συνδυασμός ενός οποιουδήποτε αριθμού ιδιοσυναρτήσεων με πραγματικά πλάτη συνεπάγεται ότι όλες οι κινήσεις είναι περιοδικές (βλ. [21]). Σε τέτοια συστήματα, οι συναρτήσεις $D(t)$ και $H_s(t)$ (4.25) είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή έχουμε $D(T) = D(0)$ και $H_s(T) = H_s(0)$, όπου T είναι η περίοδος. Μονοδιάστατα περιοδικά μοντέλα εμφανίζουν την ίδια συμπεριφορά με αυτήν που παρουσιάζεται στην εργασία [127]. Μάλιστα, το κριτήριο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας έλεγχος για την ορθότητα των αριθμητικών ολοκληρώσεων, ελέγχοντας δηλαδή την περιοδικότητα των αριθμητικά υπολογισμένων συναρτήσεων $D(t)$ ή $H_s(t)$ σε ένα περιοδικό μοντέλο.

Εάν τώρα ο λόγος των συχνοτήτων c στη χαμιλτονιανή (4.6) είναι άρρητος, η $H(t)$ δεν έχει περιοδική συμπεριφορά. Όμως μπορούμε ακόμη να ορίσουμε προσεγγιστικές περιόδους θεωρώντας, για παράδειγμα, τις ρητές αποκοπές q_n/p_n της ακολουθίας συνεχών κλασμάτων για την αναπαράσταση του του λόγου συχνοτήτων $c = \omega_2/\omega_1$, (θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\omega_1 > \omega_2$) δηλαδή

$$\omega_2/\omega_1 = [a_1, a_2, a_3, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} . \quad (4.28)$$



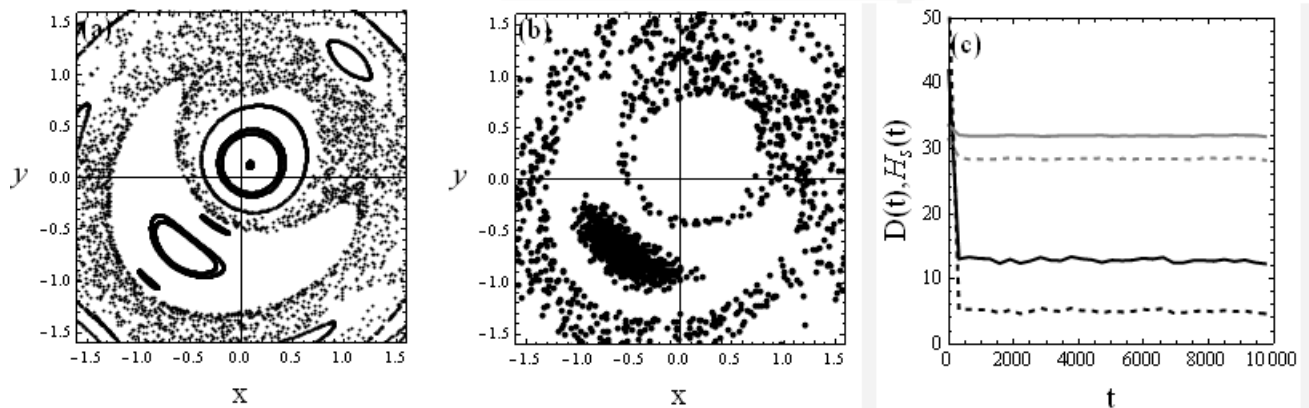
Σχήμα 4.13: Ομοίως όπως στο σχήμα 4.12, αλλά για μια υπέρθεση ιδιοσυναρτήσεων (σχέση (4.27)). Σε αυτή την περίπτωση τα αρχικά τετράγωνα κουτιά είναι κεντραρισμένα γύρω από τα (i) $x_0 = y_0 = 0$ (οργανωμένες τροχιές), και (ii) $x_0 = y_0 = -1.1$ (χαοτικές τροχιές). Στο (β) παρατηρούμε τις μεγάλες τιμές των $D(t)$ και $H_s(t)$ για το χαοτικό σύνολο, εξαιτίας του γεγονότος ότι οι χαοτικές τροχιές εξαιρούνται από μία μεγάλη περιοχή του φυσικού χώρου.

Η νιοστή ρητή αποκοπή, αντιστοιχεί στο ρητό αριθμό $q_n/p_n = [a_1, \dots, a_n]$, που ορίζει μια προσεγγιστική περίοδο $T_n \approx 2\pi p_n/\omega_1$. Επιπλέον, για ένα σύνολο από ζεύγη συχνοτήτων με άρρητο λόγο, μη μηδενικού μέτρου, ισχύει η ακόλουθη διοφαντική συνθήκη ([18]):

$$|q_n\omega_1 - p_n\omega_2| \approx \frac{\gamma}{q_n + p_n}$$

για μία θετική σταθερά γ . Απ' την άλλη μεριά, οι εξισώσεις κίνησης de Broglie-Bohm μπορούν να γραφούν ως συνδυασμοί περιττών τριγωνομετρικών συναρτήσεων με ορίσματα $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)t$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την $\omega_1 = p_n\omega_2/q_n + O[1/(q_n(q_n + p_n))]$ και αναπτύσσοντας τις εξισώσεις κίνησης βρίσκουμε ότι τις χρονικές στιγμές $T_n \approx 2\pi p_n/\omega_1$ όλες οι τροχιές επιστρέφουν πολύ κοντά στην αρχική τους θέση με μία ακρίβεια τάξης $O[2\pi/(p_n + q_n)]$. Εφόσον τα q_n, p_n αυξάνονται με το n , καταλήγουμε στο ότι οι τροχιές επανέρχονται αυθαίρετα κοντά στις αρχικές τους συνθήκες μετά από κάποιο συγκεκριμένο (και πολύ μεγάλο, εφόσον το n αυξάνεται) χρόνο. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ως το κβαντικό ανάλογο του κλασικού φαινομένου της επαναφοράς Poincaré (Poincaré recurrence).

Η ισότητα των συχνοτήτων για όλες τις οργανωμένες τροχιές είναι μία ιδιότητα των δυναμικών συστημάτων de Broglie-Bohm που δημιουργούνται από την υπέρθεση τριών ή περισσότερων ιδιοσυναρτήσεων με πραγματικό πλάτος. Απ' την άλλη μεριά, όταν τα υπερτιθέμενα πλάτη είναι μιγαδικά, και όχι πραγματικά, ένα καινούργιο χαρακτηριστικό μπορεί να εμφανιστεί. Συγκεκριμένα μπορούμε να κατασκευάσουμε συγκεκριμένους συνδυασμούς που οδηγούν σε μία χαμιλτονιανή αναπαράσταση των εξισώσεων κίνησης de Broglie-Bohm. Σε τέτοιες περιπτώσεις οι οργανωμένες τροχιές εξακολουθούν να εμφανίζουν ημιπεριοδικές ταλαντώσεις, αλλά οι συχνότητες δεν είναι σταθερές, δηλαδή δεν είναι ίδιες για όλες τις τροχιές. Ωστόσο, περιορισμοί στην χαλάρωση



Σχήμα 4.14: (α) Η στροβοσκοπική επιφάνεια τομής των τροχιών de Broglie-Bohm του μοντέλου (4.30) με $a = 0.17651$, $b = d = 1$, $\gamma_1 = 3.876968$, $\gamma_2 = 2.684916$, αναπαράγεται ολοκληρώνοντας μέχρι χρόνο $t = 5000$ κάθε μία από τις δεκαπέντε αρχικές συνθήκες που ελήφθησαν κατά μήκος της διαγωνίου $x = y$ το $x = y = -1.6$ στο $x = y = 1.6$. (β) Οι ολοκληρώσεις τη χρονική στιγμή $t = 2000\pi$, για ένα σύνολο 961 αρχικών συνθηκών σε ένα τετράγωνο κουτί 0.2×0.2 κεντραρισμένο στη θέση $x_0 = y_0 = -0.6$ (οργανωμένη) παραμένουν περιορισμένες στην κάτω αριστερά νησίδα ευστάθειας, ενώ οι ολοκληρώσεις των αρχικών συνθηκών που βρίσκονται σε ένα παρόμοιο κουτί στη θέση $x_0 = y_0 = 0.9$ (χαοτική) γεμίζουν μία χαοτική περιοχή. (γ) Η χρονική εξέλιξη του $D(t)$ (συνεχής καμπύλη) και $H_s(t)$ (διακεκομμένη γραμμή) για τις οργανωμένες (πάνω καμπύλες) και τις χαοτικές (κάτω καμπύλες) τροχιές του (β).

εξακολουθούν να υπάρχουν λόγω των νησίδων ευστάθειας στο φυσικό χώρο.

Ένα παράδειγμα αυτού του φαινομένου παρέχεται από το μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή που χρησιμοποιείται στην εργασία [135]. Η χαμιλτονιανή του μοντέλου δίνεται από τη σχέση:

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (4.29)$$

όπου η γωνιακή συχνότητα ω έχει τεθεί ίση με τη μονάδα. Οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας είναι $E_{n_x n_y} = n_x + n_y + 1$ και οι ιδιοσυναρτήσεις $\phi_{n_x n_y}(x, y) = \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)) H_{n_x}(x) H_{n_y}(y) / \sqrt{\pi 2^{n_x + n_y} n_x! n_y!}$ με $n_x = 0, 1, \dots, n_y = 0, 1, \dots$, όπου H_n είναι το νιοστό βαθμού πολυώνυμο Hermite.

Η κυματοσυνάρτηση που έχει επιλεγεί ως αρχική κατάσταση είναι ένας γενικός συνδυασμός των τριών πρώτων ιδιοκαταστάσεων της Χαμιλτονιανής:

$$\psi(x, y, t) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} (ae^{-it} + bxe^{-2it - \gamma_1} + dye^{-2it - \gamma_2}) \quad (4.30)$$

με $a = 0.17651$, $b = d = 1$, $\gamma_1 = 3.876968$, $\gamma_2 = 2.684916$. Η κυματοσυνάρτηση (4.30) αντιστοιχεί στην υπέρθεση των ιδιοκαταστάσεων ψ_{00} , ψ_{10} και ψ_{01} της χαμιλτονιανής (4.6) με $c = 1$. Σε αυτή την ειδική περίπτωση οι εξισώσεις κίνησης de Broglie-Bohm δίνονται από το χρονοεξαρτημένο χαμιλτονιανό μοντέλο (με περίοδο $T = 2\pi$),

$$H'(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \log(r) + r[\cos(\theta)y_v(t) - \sin(\theta)x_v(t)]. \quad (4.31)$$

Οι μεταβλητές (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), ενώ (x_v, y_v) είναι οι συντεταγμένες του κόμβου.

Εάν σχεδιάσουμε τα $x(t)$, $y(t)$ κατά μήκος συγκεκριμένων τροχιών για τις χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσια της περιόδου $t = 2\pi, 4\pi, \dots$, μπορούμε να δημιουργήσουμε στροβοσκοπικές τομές που αναπαριστούν τα τυπικά χαρακτηριστικά ενός χαμιλτονιανού συστήματος με μικτό χώρο φάσεων. Στο σχήμα 4.14α βλέπουμε αυτή τη δομή, όπου έχουμε την συνύπαρξη νησίδων ευστάθειας και πολύπλοκων περιοχών χάους.

Η βασική παρατήρηση σε σχέση με τη χαλάρωση είναι ότι οι οργανωμένες τροχιές δεν μπορούν να αποδράσουν από τα όρια των νησίδων ευστάθειας. Έτσι, αν ξεκινήσουμε με αρχικές συνθήκες αποκλειστικά στην περιοχή που καταλαμβάνει μία νησίδα ευστάθειας, η πυκνότητα $\bar{\rho}$ των σωματιδίων διατηρεί πάντοτε την τιμή $\bar{\rho}(t) = 0$ στη χαοτική περιοχή του φασικού χώρου, και αντιστρόφως, αρχικές συνθήκες στη χαοτική περιοχή οδηγούν σε $\bar{\rho}(t) = 0$ στο εσωτερικό των νησίδων. Το φαινόμενο αυτό μπορούμε να το δούμε στο σχήμα 4.14β. Οι συνέπειες του στην κβαντική χαλάρωση παρουσιάζονται στο σχήμα 4.14γ, όπου βλέπουμε πως και οι δύο ποσότητες $D(t)$ και $H_s(t)$ παραμένουν μακριά από το μηδέν για όλες τις χρονικές στιγμές t μέχρι χρόνο $t=10000$. Παρατηρούμε ότι οι οργανωμένες τροχιές στο εσωτερικό μιας νησίδας (όπως είναι η μεγάλη νησίδα στο κάτω αριστερά τμήμα του σχήματος 4.14α) εμφανίζουν μία τοπική ανάμιξη, η οποία οδηγεί σε μία ομοιόμορφη κατανομή όσον αφορά τις γωνίες μετά από ένα ικανοποιητικά μεγάλο χρονικό διάστημα. Ωστόσο, εκτός της περιοχής αυτής δεν υπάρχει η δυνατότητα διάχυσης τροχιών στο χρόνο.

Κεφάλαιο 5

Σκέδαση φορτισμένων σωματιδίων

5.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τη θεωρία των τροχιών de Broglie-Bohm σε ένα βασικό πρόβλημα σκέδασης, τη σκέδαση φορτισμένων σωματιδίων από πυρήνες ατόμων σε λεπτούς μεταλλικούς στόχους. Η σκέδαση Rutherford ([111], [57]) και η περίθλαση ηλεκτρονίων από μονοκρυστάλλους ([29]) ή πολυκρυστάλλους ([122]) είναι φαινόμενα αυτής της κατηγορίας με ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη διαφόρων φυσικών θεωριών. Η θεωρία de Broglie-Bohm για τη σκέδαση έχει αναπτυχθεί στις εργασίες ([26], [27], [28], [35]). Σε καμία όμως από τις εργασίες αυτές δεν μελετάται η μορφή των τροχιών, αλλά και το πώς από αυτές εξάγεται η εικόνα της περίθλασης. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, από τη μελέτη της αλληλεπίδρασης των τροχιών με τους **κβαντικούς στροβίλους** που αναπτύσσονται στην περιοχή της σκέδασης, προκύπτουν πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα τόσο για την μορφή των τροχιών όσο και την παραγωγή της εικόνας περίθλασης. Θα δώσουμε επίσης μια εφαρμογή για το πρόβλημα της μέτρησης του χρόνου σε κβαντικές διεργασίες.

Καθοριστικής σημασίας στη διαμόρφωση των τροχιών των σωματιδίων είναι η ύπαρξη των κόμβων στους οποίους έχουμε την ανάπτυξη των δομών κόμβου-υπερβολικού σημείου (nodal point -X point) για τις οποίες έχουμε ήδη μιλήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια οι κόμβοι προκαλούν την ανάκλαση των τροχιών στις διάφορες κατευθύνσεις, καθώς οι τροχιές ακολουθούν την ιδιοδιεύθυνση της ασταθούς πολλαπλότητας του υπερβολικού σημείου που βρίσκεται πλησίον του κάθε κόμβου.

5.2 Προσέγγιση επίπεδου προσπίπτοντος κύματος

5.2.1 Κυματοσυνάρτηση

Θεωρούμε σωματίδια μάζας m και φορτίου $Z_1 e$ τα οποία προσπίπτουν σε ένα στόχο που βρίσκεται στην αρχή του συστήματος αναφοράς. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες ορίζονται από τις μεταβλητές z (θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά), R (εγκάρσια απόσταση) και ϕ (αζιμουθιακή γωνία). Ορίζουμε επίσης καρτεσιανές συντεταγμένες, $x = R \cos \phi$, $y = R \sin \phi$, ή σφαιρικές συντεταγμένες, $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$, $z = r \cos \theta$.

Για τον υπολογισμό των τροχιών των σωματιδίων με βάση τις εξισώσεις κίνησης ($d\vec{r}/dt = Im(\vec{\nabla} \psi / \psi)$) επιλέγουμε αρχικά ένα μοντέλο της κυματοσυνάρτησης ψ . Οι λεπτομέρειες του μοντέλου αυτού βρίσκονται στο παράρτημα Β'. Περιληπτικά, θεωρούμε ότι το προσπίπτον κύμα είναι

επίπεδο με πεπερασμένο εύρος προς την εγκάρσια διεύθυνση πρόσπτωσης. Η κυματοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t) + \psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

όπου

$$\psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \left(\frac{D^2}{D^2 + i\hbar t/m} \right) e^{-\frac{R^2}{2(D^2 + i\hbar t/m)} + i(k_0 z - k_0^2 \hbar t/2m)} \quad (5.2)$$

και

$$\psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{D}{D^2 + i\hbar t/m} \right) \frac{Z_1 Z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{k_0^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{e^{i(k_0 r - \hbar k_0^2 t/2m)}}{r} S_{eff}(k_0; \mathbf{r}) \quad (5.3)$$

Όπως βλέπουμε η συνολική κυματοσυνάρτηση περιγράφεται από το άθροισμα της “εισερχόμενης” κυματοσυνάρτησης που αντιστοιχεί στη δέσμη των εισερχόμενων σωματιδίων $\psi_{ingoing}$ και της “εξερχόμενης” κυματοσυνάρτησης $\psi_{outgoing}$ που περιγράφει τα σωματίδια αφού αυτά σκεδαστούν. Η ποσότητα k_0 στις παραπάνω σχέσεις αντιστοιχεί στην κεντρική τιμή του κυματάριθμου της μονοενεργειακής δέσμης ($E = \hbar^2 k_0^2/2m$) του οποίου η διεύθυνση συμπίπτει με τη διεύθυνση της εισερχόμενης δέσμης. Η ποσότητα D εκφράζει ένα χαρακτηριστικό μήκος της δέσμης στην κάθετη διεύθυνση και ονομάζεται εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης (transverse quantum coherence length). Η ποσότητα $S_{eff}(k_0; \mathbf{r})$ ονομάζεται “ενεργός συνάρτηση Fraunhofer” (effective Fraunhofer function) ([94]), και εκφράζει το άθροισμα των συνεισφορών όλων των ατόμων του κρυστάλλου στην παραγωγή της “εξερχόμενης” κυματοσυνάρτησης.

Η συναρτησιακή μορφή της ενεργού συνάρτησης Fraunhofer καθορίζεται ως επί το πλείστον από την τιμή του γινομένου $k_0 a$, όπου a είναι απόσταση μεταξύ γειτονικών ατόμων στο στόχο. Υπάρχουν δύο όρια του γινομένου $k_0 a$ στα οποία επικεντρώνεται το ενδιαφέρον: *i*) Αν $k_0 a \sim 1$ η εικόνα περίθλασης έχει εμφανή μέγιστα και ελάχιστα. *ii*) Αν $k_0 a \gg 1$ το φαινόμενο της περίθλασης εξασθενεί και η εικόνα που παίρνουμε είναι ανάλογη με αυτή της σκέδασης Rutherford.

Στην περίπτωση *i*) ένας προσεγγιστικός ο υπολογισμός της συνάρτησης Fraunhofer (βλ. παράρτημα Β΄) οδηγεί στο μοντέλο ([31]):

$$S_{eff}(k_0, \theta) = S_{xy} \left[\sum_{q=0}^{q_{max}} e^{-\frac{1}{2} 4k_0^2 \sin^4(\theta/2) \sigma_a^2} \frac{2 \sin[k_0 d \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)/2]}{k_0 a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)} + (1 - e^{-\frac{1}{2} 4k_0^2 \sin^4(\theta/2) \sigma_a^2}) C_{diffuse} \sqrt{d/a} \right] \quad (5.4)$$

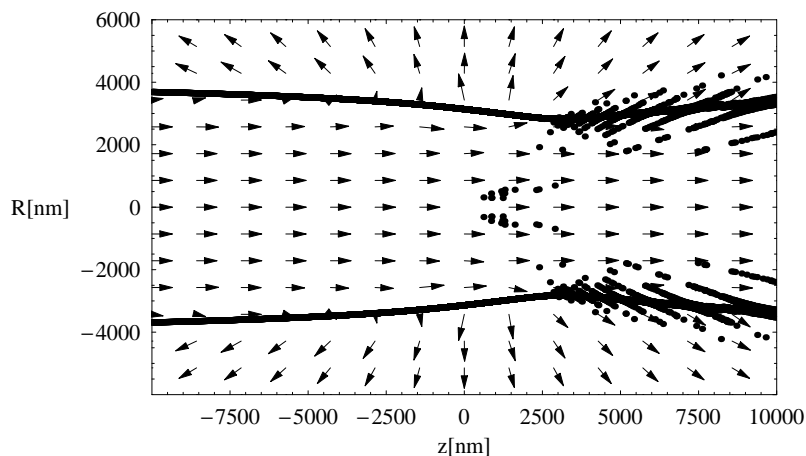
όπου d το πάχος του μεταλλικού φύλλου και θ_q οι λεγόμενες “γωνίες Bragg”, που δίνονται απ’ τη σχέση

$$\sin^2(\theta_q/2) = \frac{q\pi}{k_0 a}. \quad (5.5)$$

Τέλος η ποσότητα σ_a υπολογίζεται (βλ. παράρτημα Β΄) από την σχέση

$$\sigma_a = \frac{\Delta a}{2\sqrt{3}} \quad (5.6)$$

όπου η σταθερά Δa δίνει ένα μέτρο του μεγέθους των τυχαίων μετατοπίσεων των ατόμων του στόχου γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους, λόγω π.χ θερμικών φαινομένων κ.λ.π.. Οι S_{xy} και $C_{diffuse}$ είναι σταθερές των οποίων η τιμή καθορίζεται όπως εκτίθεται στο παράρτημα Β΄.



Σχήμα 5.1: Η δομή των κβαντομηχανικών ρευμάτων για το μοντέλο με τις ίδιες παραμέτρους όπως στο σχήμα 5.3

Αντίστοιχα για την περίπτωση (ii) όπου $k_0 a \gg 1$ βρίσκουμε (βλ. παράρτημα Β΄):

$$\langle |S_{eff}| \rangle \propto N_{\perp,eff} N_z^{1/2} \propto \frac{D d^{1/2}}{a^{3/2}} = C \rho^{1/2} D d^{1/2} , \quad (5.7)$$

όπου ρ είναι η αριθμητική πυκνότητα των ατόμων, και d το πάχος του φύλλου και C μία σταθερά αναλογίας της τάξης της μονάδας.

5.2.2 Διαχωριστική ζώνη-Ρεύματα ροής και κόμβοι για επίπεδο κύμα

Τα κβαντικά ρεύματα του μοντέλου μας καθορίζονται από τη σχέση

$$\mathbf{j} \equiv (\psi_* \nabla \psi - \psi \nabla \psi_*) / 2m\hbar i. \quad (5.8)$$

Η δομή των κβαντικών ρευμάτων στο χώρο κίνησης μπορεί να γίνει κατανοητή λαμβάνοντας υπόψη τα παρακάτω:

Διασπορά: Από την τιμή της μάζας των εισερχόμενων σωματιδίων και την τάξη μεγέθους του χρόνου που διαρκεί το φαινόμενο, προκύπτει ότι η τιμή της διασποράς της κυματοσυνάρτησης $\sigma_R(t)$ σε σχέση με το εγκάρσιο μήκος D καθόλη της διάρκεια της κίνησης του σωματιδίου είναι μικρότερη του D κατά πολλές τάξεις μεγέθους. Έτσι για όλους τους πρακτικούς λόγους μπορούμε να θέσουμε $\sigma_R(t) \simeq D$ ([31]).

Περιοχές υπερίσχυσης του εισερχόμενου και εξερχόμενου ρεύματος: Το εισερχόμενο και το εξερχόμενο κύμα γίνονται ίσα σε μέγεθος όταν $|\psi_{ingoing}| = |\psi_{outgoing}|$. Έτσι έχουμε (από τις εξισώσεις (5.2) και (5.3), θέτοντας $\sigma_R(t) \simeq D$, $S_{eff} \equiv S_{eff}(\theta)$)

$$R \exp\left(-\frac{R^2}{2D^2}\right) = \left(\frac{|Z_1 Z| e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{2k_0^2 \hbar^2} \frac{|S_{eff}(\theta)| \sin \theta}{\sin^2(\theta/2)}\right) \equiv G(\theta) . \quad (5.9)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (5.9) ως προς (r, θ) ορίζουν μία διαχωριστική γραμμή στο μεσημβρινό επίπεδο ($R, z = R \tan \theta$) η οποία οριοθετεί την περιοχή υπερίσχυσης της οριζόντιας εισερχόμενης ροής έναντι της περιοχής υπερίσχυσης της ακτινικά εξερχόμενης ροής. Η μετάβαση από τον ένα τύπο

ροής στον άλλο είναι απότομη. Το σχήμα 5.1 δείχνει με βέλη τα διανύσματα του κβαντικού ρεύματος σε διάφορα σημεία όταν η κυματοσυνάρτηση δίνεται από τις εξισώσεις (5.1)-(5.3). Οι χοντρές γραμμές δείχνουν τις θέσεις των δυο διαχωριστικών γραμμών (μία πάνω από τον άξονα z και η συμμετρική της κάτω από τον άξονα z). Όπως μπορούμε ξεκάθαρα να διακρίνουμε η μετάβαση της ροής από οριζόντια σε ακτινική γίνεται μέσα στη περιοχή της διαχωριστικής γραμμής. Από το σχήμα 5.1 βλέπουμε ότι οι διαχωριστικές γραμμές είναι περίπου οριζόντιες σε όλη σχεδόν την περιοχή που μας ενδιαφέρει (με το R_0 να μειώνεται ελαφρά καθώς κινούμαστε δεξιότερα στον άξονα z), με εξαίρεση μία περιοχή στο θετικό ημιεπίπεδο $z > 0$ όπου μερικές δομές με ακτινική περίπου μορφή κάνουν την εμφάνιση τους. Ένας προσεγγιστικός υπολογισμός της απόστασης της μεταβατικής ζώνης από τον άξονα z μπορεί να γίνει αντικαθιστώντας την $S_{eff}(\theta)$ στην σχέση (5.9) από τον υπολογισμό $S_{eff} \sim \rho^{1/2} D d^{1/2}$ της εξίσωσης (5.7), και αγνοώντας όλους τους τριγωνομετρικούς όρους που είναι της τάξης της μονάδας. Για τη ρίζα R_0 της εξίσωσης (5.9) με $R_0 > D$ βρίσκουμε προσεγγιστικά:

$$R_0 \approx \left[\sqrt{2Ln(C_0)} + \frac{1}{1 + \sqrt{2Ln(C_0)}} \right] D, \quad C_0 = \left(\frac{|Z_1 Z| e^2 m \rho^{1/2} d^{1/2}}{4\pi\epsilon_0 2k_0^2 \hbar^2} \right)^{-1}. \quad (5.10)$$

Η (5.10) προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton για μία επανάληψη με αρχική πρόβλεψη $R_0 = \sqrt{2Ln(C_0)}D$. Η εξίσωση (5.10) δίνει μία τάξη μεγέθους για το εύρος του σωλήνα ροής της εισερχόμενης δέσμης και εκφράζει το φυσικό γεγονός ότι η εισερχόμενη ροή πρέπει να κυριαρχεί σε μία περιοχή εύρους ανάλογου του μεγέθους του D .

Τα σημεία της μεταβατικής ζώνης που βλέπουμε στο σχήμα 5.1 αντιστοιχούν σε μία σάρωση της γωνίας θ με βήμα $\Delta\theta = 2\pi/1000$. Στην ανάλυση αυτή δεν είναι εμφανείς σημαντικές λεπτομέρειες της δομής της διαχωριστικής ζώνης που εμφανίζονται μόνο όταν κοιτάξουμε πολύ κοντά στις γωνίες Bragg. Πράγματι, όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.9), λύσεις υπάρχουν μόνο στις γωνίες όπου $G(\theta) < D\sqrt{\epsilon}$. Στην περίπτωση αυτή η δύο ρίζες $R_1(\theta) < D$ και $R_2(\theta) > D$ ορίζουν έναν χαμηλό και έναν ψηλότερο κλάδο για την διαχωριστική καμπύλη. Μόνο ο ψηλότερος κλάδος $R_2(\theta)$ είναι εμφανής στο σχήμα 5.1, καθώς για τις περισσότερες γωνίες θ ο χαμηλότερος κλάδος αντιστοιχεί σε τιμές της $R_1(\theta)$ μικρότερες από αυτές της $R_2(\theta)$ κατά πολλές τάξεις μεγέθους. Η εικόνα αυτή αλλάζει πολύ κοντά σε μία γωνία Bragg θ_q , όπου $R_1(\theta)$ γίνεται επίσης σημαντική. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μία περιοχή τιμών της γωνίας $\theta_a < \theta < \theta'_a$, που περιέχει την θ_q , τέτοια ώστε $G(\theta_q) > C(D)$ οπότε η εξίσωση (5.9) δεν έχει ρίζες σε αυτήν. Έτσι η εσωτερική διαχωριστική γραμμή $R_1(\theta)$ ενώνεται με την εξωτερική διαχωριστική γραμμή $R_2(\theta)$ στις γωνίες θ_a και θ'_a . Η διαχωριστική γραμμή στην περίπτωση αυτή παίρνει τη μορφή μιας λεπτής ζώνης (που στο εξής θα την ονομάζουμε κανάλι), κατά μήκος της οποίας η ροή είναι ακτινική (5.2γ). Για τη μορφή και τη σημασία των καναλιών ακτινικής ροής στις γωνίες Bragg και τη σχέση τους με τη σκέδαση των τροχιών από συμπλέγματα κόμβου-υπερβολικού σημείου θα αναφερθούμε και στη συνέχεια.

5.2.3 Κβαντικοί στρόβιλοι

Κατά μήκος της μεταβατικής ζώνης δημιουργείται ένα πλήθος κβαντικών κόμβων των οποίων η θέση αντιστοιχεί στο σύνολο των απλών μηδενισμών της κυματοσυνάρτησης ψ . Η συνθήκη $\psi = 0$, ή $\psi_{ingoing} = -\psi_{outgoing}$ συνεπάγεται επιπλέον της (5.9), μια συνθήκη για την ισότητα των φάσεων, η οποία παίρνει τη μορφή (αγνοώντας ξανά τους όρους $O(\hbar t/m)$)

$$k_0 R \tan(\theta/2) = 2\bar{q}\pi \quad \bar{q} \in \mathcal{Z}. \quad (5.11)$$

Για οποιαδήποτε τιμή της \bar{q} , μπορούμε να λύσουμε την (5.11) ως προς R , να αντικαταστήσουμε στην (5.9) και να λύσουμε αριθμητικά την τελευταία ως προς θ . Η διαδικασία αυτή προσδιορίζει πλήρως τις συντεταγμένες κάθε κόμβου. Ο αριθμός των διαφορετικών λύσεων σε οποιαδήποτε περιοχή $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ μπορεί να βρεθεί ως ακολούθως: αρχικά, υπολογίζουμε τη διαφορά $\bar{q}_{max} - \bar{q}_{min}$ όπου

$$\bar{q}_{min} = \left[\frac{k_0 R_{2,min} \tan(\theta_{min}/2)}{2\pi} \right]$$

$$\bar{q}_{max} = \left[\frac{k_0 R_{2,max} \tan(\theta_{max}/2)}{2\pi} \right]$$

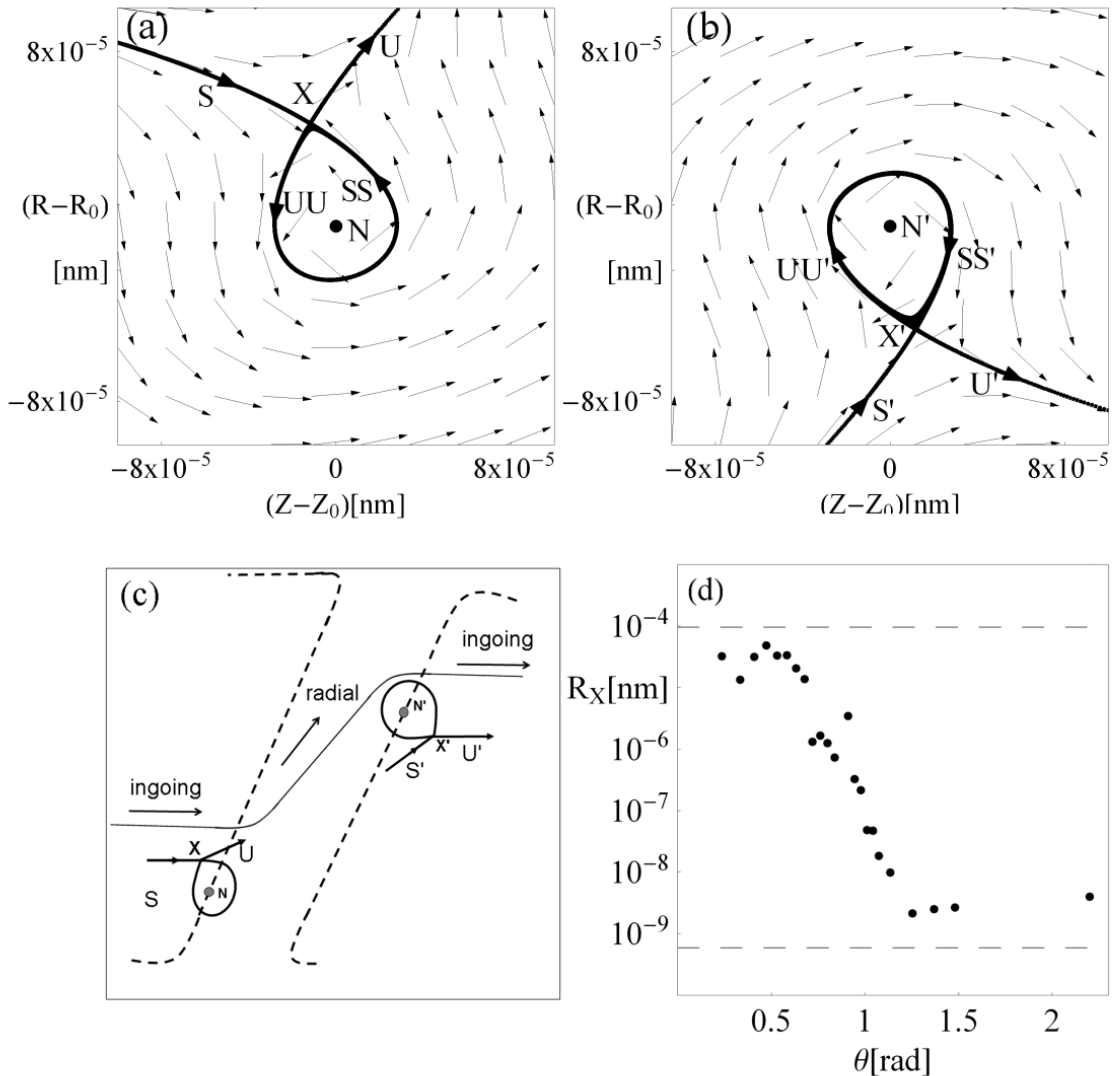
όπου $R_{2,min} \equiv R_2(\theta_{min})$, $R_{2,max} \equiv R_2(\theta_{max})$. Ο συνολικός αριθμός των κόμβων κατά μήκος της μεταβατικής ζώνης είναι τότε $\Delta\bar{q} = \bar{q}_{max} - \bar{q}_{min}$.

Καθώς και τα δύο εκ των $R_{2,min}$, $R_{2,max}$ ικανοποιούν την $R_{2,min}$ ή $R_{2,max} = O(D)$ έχουμε τον υπολογισμό $\Delta\bar{q} = O(k_0 D) = O(D\lambda_0^{-1})$, όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος των εισερχόμενων σωματιδίων. Χαρακτηριστικές τιμές κυμαίνονται μεταξύ $\Delta\bar{q} = 10^5 - 10^{12}$, οπότε οι κόμβοι σχηματίζουν μία πυκνή διάταξη σημείων που διατάσσονται πάνω στις διαχωριστικές επιφάνειες. Επιπλέον, η απόσταση μεταξύ γειτονικών κόμβων είναι ανάλογη του λ_0 , πράγμα αναμενόμενο, καθώς η απόσταση μεταξύ δύο μηδενισμών της κυματοσυνάρτησης είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την περίοδο των χωρικών ταλαντώσεων της κυματοσυνάρτησης, η οποία είναι λ_0 .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο κεφάλαιο 4, η τοπική μορφή της ροής σε μία μικρή περιοχή γύρω από τους κόμβους διαφέρει σημαντικά από τη γενική εικόνα της ροής που δίνεται στο σχήμα 5.1. Παραδείγματα της τοπικής ροής γύρω από τους κόμβους δίνονται στο σχήμα 5.2. Παρατηρούμε ξανά, τη δημιουργία συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου. Στο σχήμα 5.2, ο κεντρικός κόμβος βρίσκεται στην αριστερή (σχήμα 5.2α) και τη δεξιά πλευρά (σχήμα 5.2β) σε σχέση με το κύριο κανάλι της τέταρτης γωνίας Bragg. Παρατηρούμε ότι η κίνηση είναι περιστροφική κοντά στο κέντρο (κόμβος), ενώ τα διανύσματα του πεδίου ταχυτήτων σχηματίζουν βρόγχους πέρα από το σημείο όπου εμφανίζεται το υπερβολικό σημείο. Οι έντονες τελείες σε κάθε πλαίσιο δηλώνουν ποιες περιπτώσεις είναι οι θέσεις των στάσιμων σημείων όπως αυτές υπολογίζονται αναλυτικά με τον τρόπο που θα εξηγήσουμε στη συνέχεια.

Το υπερβολικό σημείο είναι το ασυμπτωτικό όριο, της κίνησης μπροστά και πίσω στο χρόνο, κατά μήκος των γραμμών της αντίστοιχης ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας. Στο σχήμα 5.2α, τροχιές κατά μήκος της ευσταθούς πολλαπλότητας φτάνουν στο υπερβολικό σημείο έχοντας σχεδόν οριζόντια διεύθυνση, ενώ τροχιές κατά μήκος της ασταθούς πολλαπλότητας απομακρύνονται από το υπερβολικό σημείο σε μία σχεδόν ακτινική διεύθυνση (προς τα πάνω και δεξιά). Όμως αυτές οι διευθύνσεις αντιστρέφονται στο σχήμα 5.2β. Αυτή η αντιστροφή μπορεί να γίνει κατανοητή με την βοήθεια της σχηματικής αναπαράστασης του σχήματος 5.2γ. Πράγματι, μπορούμε να δούμε ότι στην αριστερή πλευρά του καναλιού, οι τροχιές που διασχίζουν τη διαχωριστική επιφάνεια στρέφονται από οριζόντιες σε ακτινικές, έτσι η ευσταθής πολλαπλότητα οποιουδήποτε υπερβολικού σημείου είναι οριζόντια και η ασταθής πολλαπλότητα είναι ακτινική. Το αντίθετο συμβαίνει στα στάσιμα σημεία που βρίσκονται στη δεξιά πλευρά της μεταβατικής ζώνης. Χρησιμοποιώντας την ίδια ορολογία όπως στην εργασία [41], οι τροχιές που περνούν κοντά από ένα σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου μπορεί να είναι είτε τύπου I (σχηματίζοντας ένα ανοιχτό βρόγχο γύρω από τον κόμβο), ή τύπου II (υπερβολικές, πέρα από το υπερβολικό σημείο).

Λεπτομέρειες σε σχέση με το σχήμα του συμπλέγματος κόμβου-υπερβολικού σημείου μπορούν να βρεθούν αναπτύσσοντας την κυματοσυνάρτηση ψ καθώς επίσης και τις εξισώσεις de Broglie-Bohm της κίνησης σε μεταβλητές $u = z - z_0$, $v = R - R_0$ γύρω από έναν κόμβο (z_0, R_0). Το



Σχήμα 5.2: (α) Η μορφή της κβαντικής ροής γύρω από έναν κόμβο που βρίσκεται στην αριστερή διαχωριστική επιφάνεια του καναλιού που σχηματίζεται γύρω από τη γωνία Bragg θ_4 (βλ. [31]). Η ροή σχηματίζει ένα σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου. Η χοντρή τελεία υποδεικνύει τη θέση του υπερβολικού σημείου όπως αυτή υπολογίζεται από δευτέρας τάξεως αναλυτικούς υπολογισμούς. (β) Ομοίως με το (α) αλλά για έναν κόμβο τοποθετημένο στη δεξιά πλευρά του καναλιού της μεταβατικής ζώνης. (γ) Σχηματική αναπαράσταση της κβαντικής ροής κατά μήκος του καναλιού, μαζί με τις διευθύνσεις της ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας των στάσιμων σημείων που σχηματίζονται κοντά στους κόμβους τους. Η διακεκομμένη γραμμή αναπαριστά τη διαχωριστική επιφάνεια. (δ) Το μέγεθος των συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου, καθορίζεται από την απόσταση R_X από τον κόμβο στο υπερβολικό σημείο, σαν συνάρτηση του θ . Οι πάνω και κάτω διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην τάξη μεγέθους που προκύπτει από αναλυτικούς υπολογισμούς για το μέγεθος των συμπλεγμάτων, όπως δίνονται από τις εξισώσεις (5.19) και (5.21), στην περιοχή των γωνιών Bragg και στην περιοχή που κυριαρχεί η διάχυση αντίστοιχα.

ανάπτυγμα της ψ μέχρι όρους δεύτερης τάξης ως προς u, v , είναι αρκετό για να αποδοθούν τα κύρια χαρακτηριστικά της κίνησης. Πράγματι, με βάση τις εξισώσεις (5.2) και (5.3), η κυματοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$\psi = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{D}{D^2 + i\hbar t/m} \right) e^{-ik_0^2 \hbar t/2m} \right] \times \psi' \quad (5.12)$$

όπου

$$\psi' = e^{-\frac{R^2}{2(D^2 + i\hbar t/m)} + ik_0 z} - \frac{\bar{P} S_{eff}(\theta) e^{ik_0 r}}{\sin^2(\theta/2) r}, \quad (5.13)$$

\bar{P} είναι η σταθερά $\bar{P} = e^{i\delta} P = e^{i\delta} (|Z_1 Z| e^2 m) / (4\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2)$ και δ μία τυχαία φάση, η οποία σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις λαμβάνεται $\delta = \pi$. Ο συντελεστής μπροστά από ψ' στην (5.12) απλοποιείται στις εξισώσεις κίνησης, οι οποίες παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\psi'_* (\partial \psi' / \partial z) - \psi' (\partial \psi'_* / \partial z)}{\psi' \psi'_*}, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{\psi'_* (\partial \psi' / \partial R) - \psi' (\partial \psi'_* / \partial R)}{\psi' \psi'_*}. \quad (5.14)$$

Βασιζόμενοι στην εργασία [41], και παίρνοντας το ανάπτυγμα δεύτερης τάξης της ψ' γύρω από έναν κόμβο (z_0, R_0) . Η συνθήκη $\psi'(z_0, R_0) = 0$ δίνει

$$\bar{P} S_{eff}(\theta_0) = \frac{R_0^2 e^{-R_0^2/2D^2}}{2(r_0 + z_0)}, \quad e^{ik_0 z_0} = e^{ik_0 r_0}$$

όπου $r_0 = \sqrt{R_0^2 + z_0^2}$ και $\theta_0 = \tan^{-1}(R_0/z_0)$. Εισάγοντας αυτή την έκφραση στο ανάπτυγμα δεύτερης τάξης για το χρονοανεξάρτητο όριο

$$\begin{aligned} \psi'(u, v; z_0, R_0) &= (a_{10} + ib_{10})u + (a_{01} + ib_{01})v \\ &+ \frac{1}{2}(a_{20} + ib_{20})u^2 + \frac{1}{2}(a_{02} + ib_{02})v^2 + (a_{11} + ib_{11})uv + \dots, \end{aligned} \quad (5.15)$$

όπου $u = z - z_0, v = R - R_0$, βρίσκουμε τους ακόλουθους συντελεστές:

$$\begin{aligned} a_{10} + ib_{10} &= (\cos k_0 z_0 + i \sin k_0 z_0) e^{-R_0^2/2D^2} \times \left[\frac{R_0}{r_0^2 S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} - \frac{1}{r_0} + \frac{ik_0(r_0 - z_0)}{r_0} \right] \\ a_{01} + ib_{01} &= (\cos k_0 z_0 + i \sin k_0 z_0) e^{-R_0^2/2D^2} \times \left[-\frac{R_0}{D^2} - \frac{z_0}{r_0^2 S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} + \frac{r_0 + z_0}{r_0 R_0} - \frac{ik_0 R_0}{r_0} \right] \\ a_{20} + ib_{20} &= (\cos k_0 z_0 + i \sin k_0 z_0) e^{-R_0^2/2D^2} \times \left[-\frac{1}{r_0^2} - \frac{k_0^2 R_0^2}{r_0^2} + \frac{z_0}{r_0^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2R_0 z_0}{r_0^4} \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{d^2 S_{eff}}{d\theta_0^2} + \frac{2R_0}{r_0^3} \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} + \frac{ik_0}{r_0^3} \left(-R_0^2 - 2r_0 z_0 + \frac{2R_0 z_0}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} \right) \right] \\ a_{11} + ib_{11} &= (\cos k_0 z_0 + i \sin k_0 z_0) e^{-R_0^2/2D^2} \times \left[\frac{2R_0}{r_0^3} + \frac{k_0^2 R_0 z_0}{r_0^2} + \frac{z_0}{R_0 r_0^2} + \frac{z_0^2}{r_0^3 R_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z_0^2 - R_0^2}{r_0^4} \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{d^2 S_{eff}}{d\theta_0^2} - \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{2z_0}{r_0^3} \right) \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ik_0R_0}{D^2} + \frac{i(R_0^2 - z_0^2)k_0}{r_0^3} \left(\frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} - \frac{r_0}{R_0} \right) + \frac{2ik_0R_0z_0}{r_0^3} + \frac{ik_0z_0^3}{r_0^3R_0} \Big] \\
a_{02} + ib_{02} = & (\cos k_0z_0 + i \sin k_0z_0) e^{-R_0^2/2D^2} \times \left[-\frac{1}{D^2} + \frac{R_0^2}{D^4} - \frac{2}{r_0^2} - \frac{4z_0}{r_0^3} \right. \\
& - \frac{3z_0^2(r_0 + z_0)}{R_0^2r_0^3} + \frac{k_0^2R_0^2}{r_0^2} + \frac{2z_0(r_0 + z_0)}{R_0r_0^3} \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} + \frac{2R_0z_0}{r_0^4} \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{d^2S_{eff}}{d\theta_0^2} \\
& \left. + ik_0 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{2z_0}{r_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^3} \right) - \frac{2ik_0z_0R_0}{r_0^3} \frac{1}{S_{eff}(\theta_0)} \frac{dS_{eff}}{d\theta_0} \right]
\end{aligned}$$

Οι ποσότητες r_0, z_0, R_0 είναι όλες τάξης μεγέθους $O(D)$. Επιπλέον, εάν η γωνία θ_0 είναι κοντά σε μία γωνία Bragg (5.5), από τον ορισμό (Γ.15) για τον υπολογισμό των παραγώγων της $S_{eff}(\theta)$ έχουμε

$$\frac{dS_{eff}}{S_{eff}d\theta_0} \sim N_z k_0 a \sim k_0 d, \quad \frac{d^2S_{eff}}{S_{eff}d\theta_0^2} \sim N_z^2 k_0^2 a^2 \sim (k_0 d)^2.$$

Εφόσον $d/D \ll 1$, από τις παραπάνω εκφράσεις βρίσκουμε τους κυρίαρχους όρους για όλους τους συντελεστές a_{ij}, b_{ij} οι οποίοι είναι:

$$\begin{aligned}
a_{10} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[-\sin(k_0z_0)k_0(1 - \cos \theta_0) + O(k_0d/D) \right] \\
b_{10} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[\cos(k_0z_0)k_0(1 - \cos \theta_0) + O(k_0d/D) \right] \\
a_{01} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[\sin(k_0z_0)k_0 \sin \theta_0 + O(k_0d/D) \right] \\
b_{01} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[-\cos(k_0z_0)k_0 \sin \theta_0 + O(k_0d/D) \right] \\
a_{20} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[-\cos(k_0z_0) \frac{k_0^2}{2} \sin^2 \theta_0 + O(k_0^2d^2/D^2) \right] \\
b_{20} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[-\sin(k_0z_0) \frac{k_0^2}{2} \sin^2 \theta_0 + O(k_0^2d^2/D^2) \right] \\
a_{02} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[\cos(k_0z_0) \frac{k_0^2}{2} \sin^2 \theta_0 + O(k_0^2d^2/D^2) \right] \\
b_{02} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[\sin(k_0z_0) \frac{k_0^2}{2} \sin^2 \theta_0 + O(k_0^2d^2/D^2) \right] \\
a_{11} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[\cos(k_0z_0) \frac{k_0^2}{2} \sin 2\theta_0 + O(k_0^2d^2/D^2) \right] \\
b_{11} &= e^{-R_0^2/2D^2} \left[\sin(k_0z_0) \frac{k_0^2}{2} \sin 2\theta_0 + O(k_0^2d^2/D^2) \right]
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Οι ισότητες $a_{20} = -a_{02}$, και $b_{20} = -b_{02}$ προκύπτουν εξαιτίας του ότι η κυματοσυνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας ψ ([41]). Όμως καθώς ο εξερχόμενος όρος υπολογίζεται μέχρι τάξη $O(\sigma_{\perp}^2/k_0^2) = O(1/D^2k_0^2)$, οι παραπάνω ισότητες παραβιάζονται στην ίδια τάξη, οδηγώντας σε ένα σχετικά μικρό σφάλμα (της τάξης του 10^{-6} στους αριθμητικούς υπολογισμούς μας). Ακολουθώντας

το τυπολόγιο της εργασίας [41] (εξισώσεις (4) και (11) με ταχύτητες κόμβου $V_x = V_y = 0$), η θέση του υπερβολικού σημείου δίνεται από τις μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{aligned} 0 &= Av_X + B_1u_X^2 + C_1v_X^2 + D_1u_Xv_X \\ 0 &= -Au_X + B_2u_X^2 + C_2v_X^2 + D_2u_Xv_X \end{aligned} \quad (5.17)$$

όπου

$$A = a_{01}b_{10} - a_{10}b_{01}$$

και

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{a_{02}b_{10} - a_{10}b_{02}}{2}, \quad C_1 = \frac{a_{02}b_{10} - a_{10}b_{02} - 2a_{11}b_{01}}{2}, \quad D_1 = a_{02}b_{01} - a_{01}b_{02} \\ B_2 &= \frac{a_{01}b_{02} - a_{02}b_{01}}{2}, \quad C_2 = \frac{a_{01}b_{02} - a_{02}b_{01} - 2a_{11}b_{10}}{2}, \quad D_2 = a_{10}b_{02} - a_{02}b_{10} . \end{aligned}$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι τα γινόμενα των κυρίαρχων όρων των συντελεστών $a_{10}, b_{10}, a_{01}, b_{01}$ ακυρώνονται ακριβώς στο συντελεστή A (ενώ δεν ακυρώνονται στις άλλες περιπτώσεις). Ως αποτέλεσμα βρίσκουμε

$$A = O\left(\frac{k_0^2 d}{D}\right), \quad B_i = O(k_0^3), \quad C_i = O(k_0^3), \quad D_i = O(k_0^3), \quad i = 1, 2$$

απ' όπου, λόγω της (5.17) έχουμε

$$u_X = O\left(\frac{d}{Dk_0}\right), \quad v_X = O\left(\frac{d}{Dk_0}\right) . \quad (5.18)$$

Έτσι προκύπτει τελικά ότι το μέγεθος του συμπλέγματος κόμβου-υπερβολικού σημείου μπορεί να υπολογιστεί και είναι $R_X = (u_X^2 + v_X^2)^{1/2} = O(d/Dk_0)$, δηλαδή

$$R_X = O\left(\frac{d}{Dk_0}\right) \quad \text{στην περιοχή των γωνιών Bragg} . \quad (5.19)$$

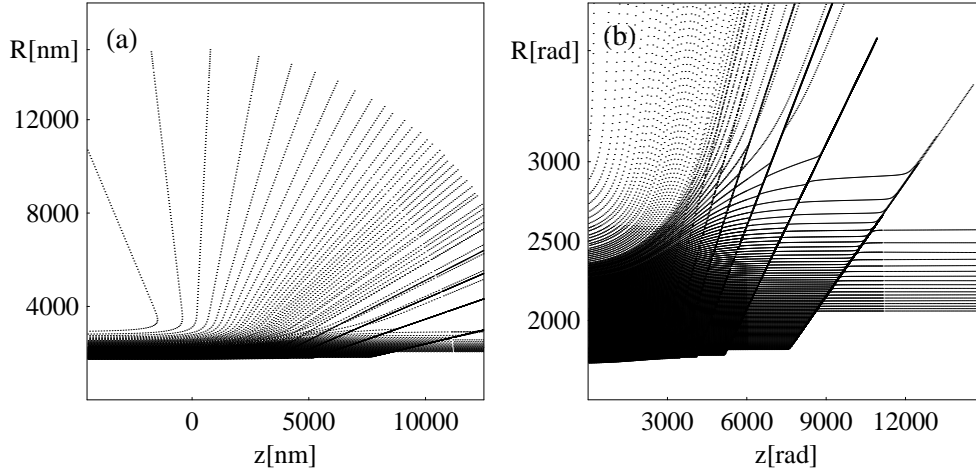
Απ' την άλλη μεριά, μακριά από τις γωνίες Bragg όλοι οι όροι με παραγώγους $dS_{eff}/d\theta_0, d^2S_{eff}/d\theta_0^2$ στις εξισώσεις υπολογισμού των a_{ij}, b_{ij} γίνονται αμελητέοι. Έτσι, έχουμε ακριβώς τους ίδιους κυρίαρχους όρους σε όλους τους συντελεστές a_{ij}, b_{ij} , αλλά στην επόμενη τάξη οι όροι είναι τάξης $O(1/D)$ για τους συντελεστές $a_{10}, b_{10}, a_{01}, b_{01}$, και $O(k_0/D)$ για τους συντελεστές $a_{20}, b_{20}, a_{11}, b_{11}, a_{02}, b_{02}$. Έτσι τελικά ο υπολογισμός των u_X, v_X απλοποιείται στον

$$u_X = O\left(\frac{1}{Dk_0^2}\right), \quad v_X = O\left(\frac{1}{Dk_0^2}\right) \quad (5.20)$$

που συνεπάγεται ότι $R_X = (u_X^2 + v_X^2)^{1/2} = O(1/Dk_0^2)$, δηλαδή

$$R_X = O\left(\frac{1}{Dk_0^2}\right) \quad \text{στην περιοχή "διάχυτης σκέδασης" (μακριά από τις γωνίες Bragg)} . \quad (5.21)$$

Το σχήμα 5.2δ δίνει τη μεταβολή του R_X με τη γωνία θ , που έχει εξαχθεί από τοπικούς αριθμητικούς υπολογισμούς του μεγέθους των συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου κατά μήκος της μεταβατικής ζώνης σε διάφορες γωνίες θ , ως συνάρτηση του θ . Παρατηρούμε ότι, το μέγεθος του συμπλέγματος μειώνεται εν γένει καθώς η γωνία αυξάνεται θ . Οι οριζόντιες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τους δυο ασυμπτωτικούς υπολογισμούς των εξισώσεων (5.19, 5.21). Παρατηρούμε ότι η μετάβαση από την περιοχή ισχύος του ενός υπολογισμού στον άλλου γίνεται κοντά στη γωνία $\theta \approx 0.8rad$ ([31]), αντιστοιχεί περίπου στη γωνία όπου γίνεται η μετάβαση από τη διάχυτη σκέδαση στην σκέδαση κατά μήκος των καναλιών ακτινικής ροής που ορίζονται από τις γωνίες Bragg.

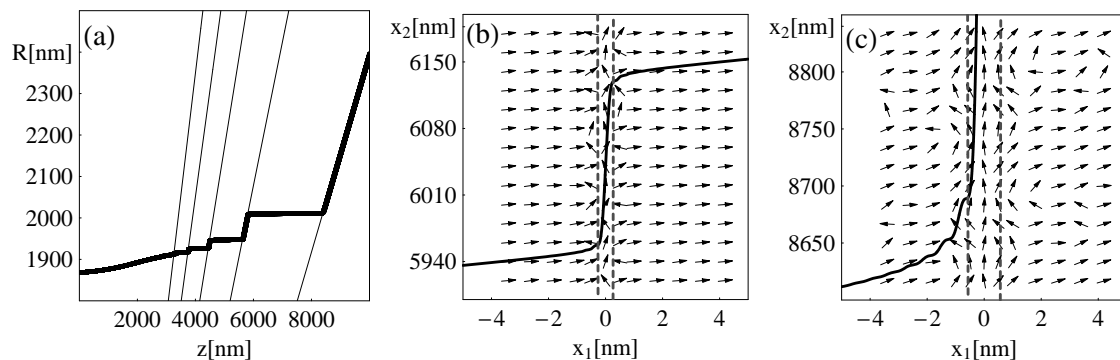


Σχήμα 5.3: (α) Ένα σμήνος τροχιών de Broglie-Bohm για μία περίπτωση ηλεκτρονίων ενέργειας 30KeV , η οποία αντιστοιχεί σε έναν κυματάριθμο $k_0 = 8.877 \times 10^{11}\text{m}^{-1}$ και τις ανάλογες παραμέτρους ενός πειράματος περίθλασης ηλεκτρονίων από φύλλο χρυσού ($Z = 79$, $a = 2.57 \times 10^{-10}\text{m}$, πάχος $d = 0.4 \times 10^{-6}\text{m}$). Οι σχετικιστικές διορθώσεις που εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων (οι οποίες είναι της τάξης του 6% για τη συγκεκριμένη ενέργεια) έχουν παραληφθεί για λόγους απλοποίησης των υπολογισμών. Το εγκάρσιο κβαντικό μήκος συνεκτικότητας έχει ληφθεί ίσο με $D = 1\mu\text{m}$ (αρχικές συνθήκες: $z_0 = -10^4\text{nm}$, R_0 στο διάστημα $1.5 \times 10^3\text{nm} \leq R_0 \leq 3.3 \times 10^3\text{nm}$). Το σχήμα δείχνει ένα δείγμα τροχιών που επιλέγησαν με βάση την τιμή του R_0 ώστε να κατανομούνται με βάση την συνάρτηση $\frac{\Delta N}{\Delta R} \propto 2\pi R e^{-R^2/D^2}$ που αντιστοιχεί στην κυματοσυνάρτηση της εισερχόμενης δέσμης ψ_{incoming} που δίνεται από την εξίσωση (5.2). (β) Εστίαση στην περιοχή του (α) όπου οι τροχιές αναγκάζονται να ακολουθήσουν μία περιθλαστική εικόνα διασχίζοντας τα κανάλια των διαδοχικών γωνιών Bragg. Η απότομες ανακλάσεις της τροχιάς που παρατηρούμε αντιστοιχούν σε γωνίες Bragg θ_q , $q = 1, \dots, 8$.

5.2.4 Τροχιές de Broglie-Bohm. Δημιουργία περιθλαστικής εικόνας

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου προκειμένου να ερμηνεύσουμε την μορφή των τροχιών de Broglie-Bohm για τα περιθλώμενα σωματίδια. Ο αριθμητικός υπολογισμός ενός συνόλου τέτοιων τροχιών παρουσιάζεται στο σχήμα 5.3α, όπου παριστάνονται οι τροχιές ηλεκτρονίων σε ένα πείραμα περίθλασης. Τα ηλεκτρόνια έχουν ενέργεια 30KeV , η οποία αντιστοιχεί σε έναν κυματάριθμο $k_0 = 8.877 \times 10^{11}\text{m}^{-1}$. Ο μεταλλικός στόχος θεωρούμε ότι είναι ένα φύλλο χρυσού ($Z = 79$, $a = 2.57 \times 10^{-10}\text{m}$), πάχους $d = 0.4 \times 10^{-6}\text{m}$. Ως αρχικές συνθήκες επιλέχθηκαν οι $z_0 = -10\mu\text{m}$, με το x_0 ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ $[1.5, 3.3]\mu\text{m}$, για 360 τροχιές. Στο σχήμα 5.3α βλέπουμε ένα δείγμα από τις τροχιές που επιλέχθηκαν έτσι ώστε να αναπαριστούν, για $t = 0$ την κατανομή $dN/dR \propto R e^{-R^2/D^2}$, με $D = 1\mu\text{m}$, που αντιστοιχεί στην κατανομή πιθανότητας με κυματοσυνάρτηση ίση με τον εισερχόμενο όρο ψ_{incoming} της εξίσωσης (5.2). Η αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών de Broglie-Bohm γίνεται με μεταβλητό βήμα μέγιστης τιμής $\Delta t = 0.1\pi\hbar/E$, όπου $E = 30\text{KeV}$ έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι το κομμάτι της τροχιάς που καλύπτεται σε ένα χρονικό βήμα είναι σημαντικά μικρότερο από το μήκος κύματος λ_0 . Το σχήμα 5.3β εστιάζει στην περιοχή όπου λαμβάνει χώρα η ανάκλαση των τροχιών.

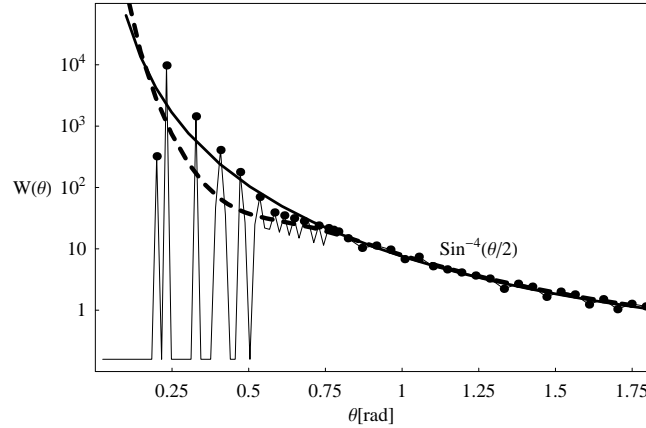
Η εικόνα που δίνεται στο σχήμα 5.3β δείχνει ξεκάθαρα ότι οι τροχιές που αρχίζουν κοντά στον άξονα z ακολουθούν αρχικά την γενική ροή που επιβάλλει το ψ_{incoming} , αλλά υποχρεώνονται σε απότομες αλλαγές πορείας όταν συναντούν οποιαδήποτε γωνία Bragg για την οποία ισχύει $\theta_b < 0.8\text{rad}$,



Σχήμα 5.4: (α) Μία τροχιά de Broglie-Bohm (έντονη συνεχής γραμμή) με αρχικές συνθήκες $(z_0, R_0) = (-10000\text{nm}, 1865\text{nm})$, η οποία βγαίνει από την πρώτη γωνία Bragg μετά από έναν αριθμό ορατών διαδοχικών συναντήσεων με τα κανάλια των γωνιών Bragg (συνεχείς γραμμές). (β) Η διάσχιση του καναλιού της δεύτερης γωνίας Bragg $\theta_2 = 0.33$ όπως αυτή δείχνει σε τοπικά στραμμένες συντεταγμένες $x_1 = z \cos(\pi/2 - \theta_2) - R \sin(\pi/2 - \theta_2)$, $x_2 = z \sin(\pi/2 - \theta_2) + R \cos(\pi/2 - \theta_2)$. Σημειώνεται η διαφορετική κλίμακα των αξόνων. Τα βέλη δείχνουν την τοπική διεύθυνση της ροής, η οποία αλλάζει απότομα σε μία στενή ζώνη κοντά στο $x_1 = 0$, που αντιστοιχεί σε γωνία θ ακριβώς ίση με τη γωνία Bragg. Οι παχιές κάθετες γραμμές δείχνουν τις θέσεις του εγγύτερου ζεύγους μηδενισμών εκατέρωθεν του μέγιστου της συνάντησης Fraunhofer κοντά στη γωνία $\theta = \theta_2$. (γ) Ομοίως όπως στο (β) αλλά για τη διάσχιση του καναλιού της πρώτης γωνίας Bragg $\theta_1 = 0.23$. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά ποτέ δεν φτάνει στο δεξιό σύνορο του καναλιού.

καθώς πάνω από τη γωνία αυτή κυριαρχεί η διάχυτη σκέδαση και η ενίσχυση στις γωνίες αυτές αποσβένονται από τον παράγοντα Debye-Waller. Τέτοιες ανακλάσεις οφείλονται στην είσοδο των τροχιών σε κανάλια ακτινικής ροής όπως αυτό του σχήματος 5.2γ. Το σχήμα 5.4α, δείχνει με λεπτομέρεια μία μόνο τέτοια τροχιά, η οποία υφίσταται πέντε διαδοχικές ανακλάσεις πριν βγει τελικά ακολουθώντας την ακτινική ροή του καναλιού που αντιστοιχεί στην πρώτη γωνία Bragg $\theta_1 = 0.23$. Μία σύγκριση των ανακλάσεων στις γωνίες θ_2 και θ_1 παρουσιάζεται στα πλαίσια (β) και (γ) του ίδιου σχήματος. Βλέπουμε καθαρά τα κανάλια της ακτινικής ροής να σχηματίζονται γύρω από κάθε γωνία Bragg. Οι έντονες γραμμές αντιστοιχούν στα τμήματα της γραμμής της μεταβατικής ζώνης που ορίζουν πρακτικά τα όρια των καναλιών σε κάθε περίπτωση. Η ανάκλαση μιας τροχιάς προκαλείται όταν αυτή συναντά τη διαχωριστική επιφάνεια, και οφείλεται στο ότι η τροχιά υποχρεωτικά ακολουθεί τη ροή γύρω από τα στάσιμα σημεία που υπάρχουν κατά μήκος της μεταβατικής ζώνης. Η ανάκλαση οδηγεί μία τροχιά στο να ακολουθήσει διαδρομή σχεδόν παράλληλη στην ακτινική διεύθυνση, σχηματίζοντας μία μικρή γωνία ως προς αυτήν εξαιτίας της συνεισφοράς στην εξίσωση κίνησης de Broglie-Bohm του όρου $\psi_{incoming}$, η οποία ωστόσο έχει μία μικρή μόνο επίδραση στην κίνηση μέσα στο κανάλι. Αυτό τελικά οδηγεί σε δύο διαφορετικές δυνατότητες για την κατάληξη μίας τροχιάς: *i*) η τροχιά διασχίζει ολόκληρο το κανάλι βγαίνοντας από την αντίθετη πλευρά από αυτήν της εισόδου, συνεχίζοντας την οριζόντια κίνηση της (σχήμα 5.4β), ή *ii*) η τροχιά συμπαρασύρεται από το κανάλι καθόλο το μήκος του, οπότε η τροχιά βγαίνει από την περιοχή της γωνίας Bragg που σχετίζεται με το συγκεκριμένο κανάλι.

Καθώς το $\psi_{incoming}$ είναι μεγαλύτερο κοντά στον z άξονα, οι τροχιές με αρχικές συνθήκες πιο χαμηλά στον z άξονα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να διασχίσουν περισσότερα κανάλια για να καταλήξουν τελικά είτε στην αρχική τους οριζόντια διεύθυνση έχοντας διασχίσει όλα τα κανάλια, είτε στην ακτινική διεύθυνση που αντιστοιχεί σε μία από τις πρώτες γωνίες Bragg. Αυτό οδηγεί τελικά σε μία διαστρωμάτωση των τροχιών όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.5: Αριθμητικό ιστόγραμμα της συνάρτησης $W(\theta)$ όπως ορίζεται στη σχέση (5.22) για τις τροχιές του σχήματος 5.3, όταν η θ λαμβάνεται ως ίση με την τοπική διεύθυνση της τροχιάς στο τελικό βήμα ολοκλήρωσης. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στο νόμο $\sin^{-4}(\theta/2)$ κανονικοποιημένο ώστε να συμπίπτει με τα αριθμητικά δεδομένα στη γωνία $\theta = 1\text{rad}$. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\text{Log}_{10}W_{\text{mod}}(\theta)$ όπου η $W_{\text{mod}}(\theta)$ έχει τροποποιηθεί ώστε να λαμβάνονται υπόψη και οι διακυμάνσεις της S_{eff} σε σχέση με τη γωνία θ .

Η εικόνα της περίθλασης προκύπτει όπως είδαμε από από τη συγκέντρωση τροχιών πάνω στις διευθύνσεις Bragg που αντιστοιχούν στα βασικά κανάλια ακτινικής ροής (σχήμα 5.4). Ο ρυθμός αντίχενωσης σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας σε μία γωνία θ μπορεί να υπολογιστεί από τις τροχιές του σχήματος 5.3 μέσω της εξίσωσης:

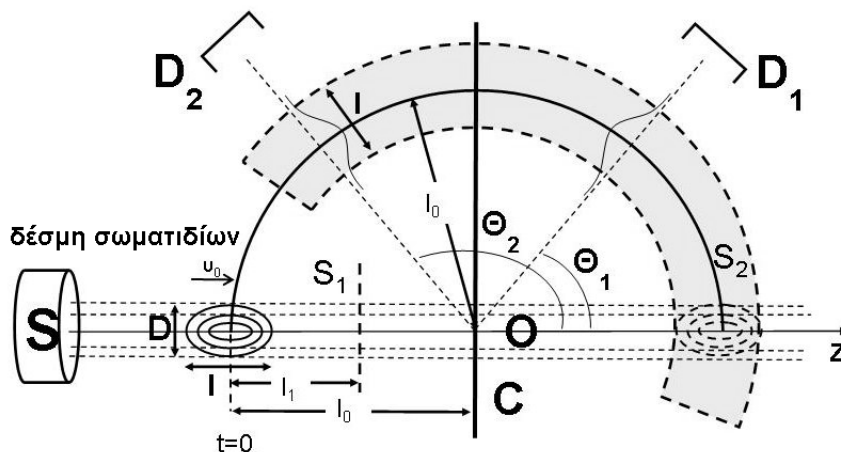
$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} \propto R_{\text{in}}(\theta) e^{-R_{\text{in}}^2(\theta)/D^2} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\Delta N_{\text{traj}}(\theta)}{\Delta \theta} \equiv W(\theta) \quad (5.22)$$

όπου $\Delta N_{\text{traj}}(\theta)$ είναι ο αριθμός των τροχιών που η τελική τους διεύθυνση ακτινικής κίνησης είναι κατά μήκος ενός γωνιαίου διαστήματος $\theta, \theta + \Delta\theta$, και $R_{\text{in}}(\theta)$ είναι η αρχική απόσταση από τον άξονα z μίας τροχιάς που καταλήγει σε μία γωνία θ . Ο παράγοντας $R_{\text{in}} e^{-R_{\text{in}}^2/D^2}$ αποδίδει το σωστό στατιστικό βάρος σε τροχιές με αρχικές συνθήκες σε οποιοδήποτε διάστημα $R_{\text{in}}, R_{\text{in}} + \Delta R_{\text{in}}$. Η μορφή της $W(\theta)$ για τις τροχιές του σχήματος 5.3α βρίσκεται στο σχήμα 5.5. Η συγκέντρωση των τροχιών στις γωνίες Bragg φαίνεται ξεκάθαρα στο αριστερό μέρος αυτού του σχήματος, ενώ το διάχυτο μέρος της περιθλώμενης ροής παράγει μία ομαλή μεταβολή για την $W(\theta)$ πέρα από τη γωνία $\theta_{\text{th}} \simeq 0.8\text{rad}$. Οι διακεκομμένες γραμμές στο ίδιο σχήμα δείχνουν το βαθμό προσέγγισης του γραφήματος της $W(\theta)$ σε σχέση με τον νόμο Rutherford $1/\sin^{-4}(\theta/2)$.

5.3 Προσέγγιση προσπίπτοντος κυματοπακέτου

Μία βελτίωση της έως τώρα μελέτης προκύπτει θεωρώντας ότι το κυματοπακέτο που αντιστοιχεί στα εισερχόμενα σωματίδια της δέσμης είναι πεπερασμένο τόσο κατά την εγκάρσια διεύθυνση όσο και κατά την διεύθυνση διάδοσης του. Στη συνέχεια εξετάζουμε τις ιδιότητες των κβαντικών στροβίλων και των τροχιών de Broglie-Bohm στην προσέγγιση αυτή, και δείχνουμε ότι ο περιορισμός του κυματοπακέτου και στις δύο διευθύνσεις έχει ορισμένες πολύ ενδιαφέρουσες νέες συνέπειες σε σχέση με την προηγούμενη προσέγγιση του επίπεδου κύματος.

5.3.1 Κυματοσυνάρτηση



Σχήμα 5.6: Σχηματική περιγραφή του προβλήματος προσέγγισης κυματοπακέτου. Η πηγή (S) εκπέμπει φορτισμένα σωματίδια που περιγράφονται από μία “εισερχόμενη” κυματοσυνάρτηση που έχει τη μορφή ενός κυματοπακέτου με διασπορά l στην διαμήκη διεύθυνση (ο άξονας z ταυτίζεται με τη διεύθυνση κίνησης της δέσμης προς το υλικό στόχο (C) που είναι τοποθετημένος στο κέντρο O του συστήματος αναφοράς), και D στην εγκάρσια διεύθυνση. Μετά την σκέδαση τους ορισμένα σωματίδια φτάνουν στους ανιχνευτές D_i που είναι τοποθετημένοι σε ίσες αποστάσεις από το κέντρο O και σε διάφορες γωνίες θ_i . Η κυματοσυνάρτηση θεωρούμε ότι έχει αξονική συμμετρία (γύρω από τον άξονα z), οπότε η εικόνα αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε επίπεδο συμμετρίας.

Θεωρούμε και πάλι μία κυλινδρική δέσμη σωματιδίων μάζας m και φορτίου $Z_1 e$ που προσπίπτει σε λεπτό μεταλλικό στόχο. Τοποθετούμε το κέντρο του στόχου (C) στην αρχή του συστήματος αναφοράς και χρησιμοποιούμε κυλινδρικές (z, R, ϕ) και σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) . Ο άξονας z είναι ο κύριος άξονας της δέσμης και το R δηλώνει την κάθετη απόσταση από τον άξονα z , ϕ είναι η αζιμουθιακή γωνία, $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$ και $\theta = \tan^{-1}(R/z)$ (5.6).

Με βάση την εργασία ([42]) στην περίπτωση αυτή παίρνουμε για την κυματοσυνάρτηση το μοντέλο:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{incoming}(\mathbf{r}, t) + \psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) \quad (5.23)$$

όπου

$$\psi_{incoming} = B(t) \exp \left(-\frac{R^2}{2(D^2 + \frac{i\hbar t}{m})} - \frac{(z + l_0 - \frac{\hbar k_0 t}{m})^2}{2(l^2 + \frac{i\hbar t}{m})} + ik_0 z \right) \quad (5.24)$$

με

$$B(t) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{D}{D^2 + i\hbar t/m} \right) \left(\frac{l}{l^2 + i\hbar t/m} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{i\hbar k_0^2 t}{2m} \right)$$

και

$$\psi_{outgoing} \approx \frac{B(t) Z_1 Z e^2 m}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} e^{ik_0 r} f(r, \theta) S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) \quad (5.25)$$

όπου η ποσότητα $S_{eff}(k_0; \mathbf{r}, t)$, είναι η συνάρτηση Fraunhofer. Η συνάρτηση $f(r, \theta)$ δίνεται από την

σχέση:

$$f(r, \theta) = k_0^{-2} \left[c_3 D \sin \theta + (c_3^2 \sin^2 \theta + r^2 - 2rc_4 D \sin \theta + c_4^2 D^2)^{1/2} - r \cos \theta \right]^{-1} \quad (5.26)$$

με $c_3 = 0.3$ και $c_4 = 0.8$ ([42]).

Ο υπολογισμός του $S_{eff}(k_0; \mathbf{r}, t)$ βρίσκεται στο παράρτημα Γ'. Στην περίπτωση που το μήκος συμφωνίας φάσης στη διεύθυνση διάδοσης l είναι μεγαλύτερο από το εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης D ($l \gg D \gg a$) βρίσκουμε ότι:

$$S_{eff} \sim Dd^{1/2}/a^{3/2} \exp[-(r + l_0 - v_0 t)^2 / (2(l^2 + i\hbar t/m))] \quad (5.27)$$

ενώ στην περίπτωση $D \gg l \gg a$ βρίσκουμε:

$$S_{eff} \approx (ld^{1/2}/a^{3/2}) \exp \frac{-(r + l_0 - v_0 t)^2}{2 \sin^2 \theta D^2}. \quad (5.28)$$

5.3.2 Διαχωριστική ζώνη-Ρεύματα ροής και κόμβοι για το κυματοπακέτο

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των τροχιών de Broglie-Bohm εστιάζοντας στην περίπτωση $l \gg D$.

Η μορφή των κβαντικών ρευμάτων $\mathbf{j} = (\hbar/2mi)(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$ διαμορφώνεται, όπως και στην περίπτωση του επίπεδου κύματος, από την αλληλεπίδραση του εισερχόμενου και του εξερχόμενου όρου της κυματοσυνάρτησης. Η βασική παρατήρηση είναι ότι ο εισερχόμενος όρος της κυματοσυνάρτησης εμφανίζει ένα εκθετικά πτωτικό προφίλ σε μεγάλες αποστάσεις από το στόχο (5.24), ενώ ο εξερχόμενος όρος επίσης μειώνεται με την απόσταση, αλλά με νόμο δύναμης $1/r$ (5.25). Έτσι, υπάρχει μία εσωτερική περιοχή της ροής όπου επικρατεί ο όρος $\psi_{ingoing}$, και μία εξωτερική περιοχή που επικρατεί ο όρος $\psi_{outgoing}$. Η διαχωριστική επιφάνεια είναι και πάλι το διαχωριστικό σύνορο αυτών των δύο περιοχών. Πιο αυστηρά, η διαχωριστική επιφάνεια ορίζεται ως ο (χρονικά εξελισσόμενος) γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου:

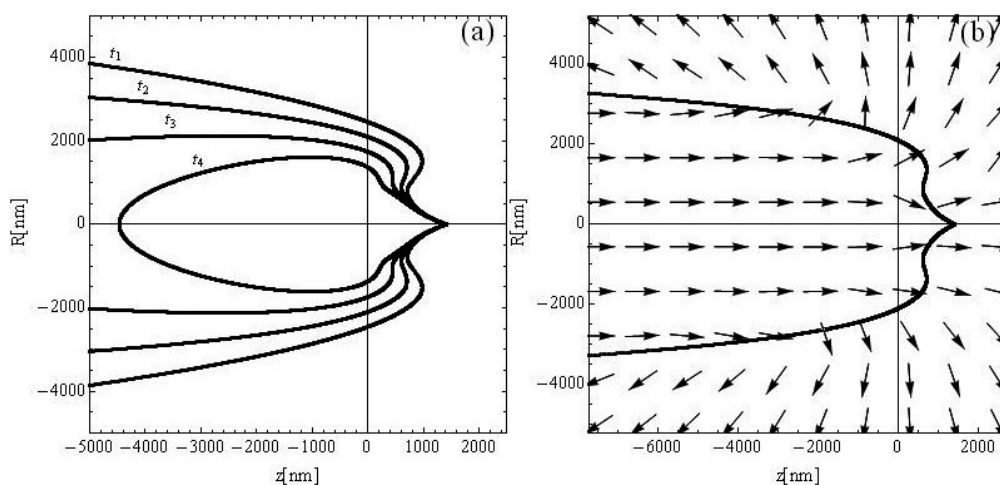
$$|\psi_{ingoing}| = |\psi_{outgoing}|. \quad (5.29)$$

Στην περίπτωση που η εξερχόμενη κυματοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση (5.25), η συνθήκη (5.29) παίρνει τη μορφή:

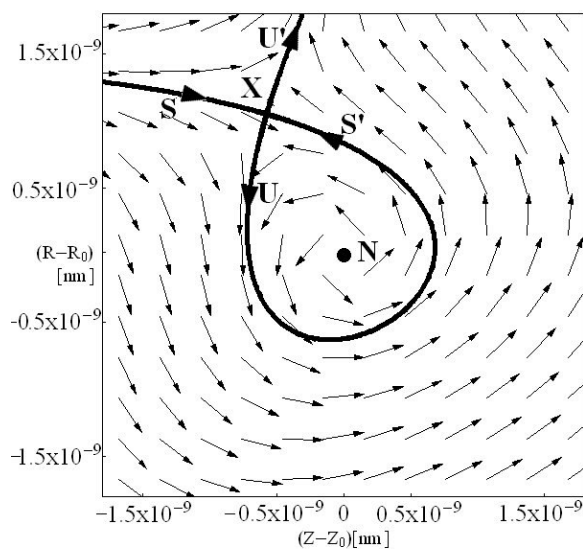
$$\exp \left(-\frac{R^2}{2D^2} - \frac{(z + l_0 - v_0 t)^2}{2l^2} \right) = \frac{-Z_1 Z e^2 m D}{2m\hbar^2 k_0^2} \frac{D}{\alpha} \sqrt{\frac{d}{a}} f(r, \theta) \exp \left(-\frac{(r + l_0 - v_0 t)^2}{2l^2} \right) \quad (5.30)$$

όπου χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις $D^2 + i\hbar t/m \simeq D^2$ και $l^2 + i\hbar t/m \simeq l^2$ (βλ. [42]).

Η χρονική εξέλιξη της μεταβατικής ζώνης στο επίπεδο (R, z) εξαρτάται από τη χρονική εξέλιξη των πλατών του εισερχόμενου και του εξερχόμενου κύματος σε κάθε σημείο του θεσεογραφικού χώρου. Σύμφωνα με την (5.25), το εξερχόμενο κύμα αντιστοιχεί σε ένα κυματοπακέτο με διασπορά l το οποίο παράγεται στο κέντρο σκέδασης για το χρονικό διάστημα $t_0 < t < t'_0$, με $t_0 = (l_0 - l)/v_0$, $t'_0 = (l_0 + l)/v_0$, το οποίο είναι το διάστημα όπου το κύριο μέρος του εισερχόμενου κυματοπακέτου (κινούμενο από αριστερά προς τα δεξιά στα σχήματα 5.6 και 5.7) ουσιαστικά επικαλύπτει την περιοχή που καταλαμβάνουν τα άτομα του στόχου ([94]). Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (5.25) και (5.27), μετά την εμφάνισή του το εξερχόμενο κύμα κινείται προς όλες τις διευθύνσεις ακτινικά διατηρώντας ουσιαστικά το κανονικό προφίλ του, ενώ το πλάτος του πέφτει σύμφωνα με τον νόμο r^{-1} .



Σχήμα 5.7: (α) Η μορφή της διαχωριστικής επιφάνειας για τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές $t_1 = 0$, $t_2 = 3l_0/(5v_0)$, $t_3 = 6l_0/(5v_0)$ και $t_4 = 9l_0/(5v_0)$ για το μοντέλο όπου η $\psi_{ingoing}$ δίνεται από την εξίσωση (5.24), η $\psi_{outgoing}$ δίνεται από την (5.25), και οι παράμετροι $Z_1 = -1$, $m = m_e$, $k_0 = 8.877 \times 10^2 \text{nm}^{-1}$ (αφορούν ηλεκτρόνια ενέργειας $E = 30 \text{KeV}$, ή μήκους κύματος $\lambda_0 = 7 \times 10^{-3} \text{nm}$), $D = 1000 \text{nm}$, $l = 10000 \text{nm}$ (που αντιστοιχούν σε εγκάρσιο και διαμήκες μήκος συμφωνίας φάσης $1 \mu\text{m}$ και $10 \mu\text{m}$ αντίστοιχα), $l_0 = 3l$, $Z = 79$ (χρυσός), $d = 420 \text{nm}$, $a = 0.257 \text{nm}$. (β) Η μορφή των κβαντικών ρευμάτων τη στιγμή $t = t_2$.



Σχήμα 5.8: Η μορφή της κβαντικής ροής τοπικά σε ένα σύμπλεγμα κόμβου- υπερβολικού σημείου γύρω από τον κόμβο (N) με συντεταγμένες $R = 1934.42 \text{nm}$, $z = 137.178 \text{nm}$ στο μοντέλο με παραμέτρους όπως αυτές του σχήματος 5.7 για τη στιγμή $t = l_0/v_0$. Η έντονη συνεχής γραμμή δείχνει τις ασταθείς (U, U') και ευσταθείς (S, S') ασυμπτωτικές πολλαπλότητες του υπερβολικού σημείου (X) που σχηματίζονται στιγμιαία στην κβαντική ροή.

Καθώς το εξερχόμενο κύμα κινείται προς τα έξω, πρώτα συναντά το εισερχόμενο κυματοπακέτο σε χρόνο περίπου t_0 . Η κίνηση προς τα έξω του εξερχόμενου κυματοπακέτου έχει ως αποτέλεσμα μια βαθμιαία προσέγγιση της μεταβατικής ζώνης προς τον άξονα z (σχήμα 5.7α, τα προβαλλόμενα στιγμιότυπα αντιστοιχούν σε χρόνους $t_1 = 0$, $t_2 = 3l_0/(5v_0) < t_0$, $t_0 < t_3 = 6l_0/(5v_0) < t'_0$). Καθώς, το εισερχόμενο κυματοπακέτο κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά στο σχήμα 5.6, το κέντρο του διασχίζει το στόχο σε χρόνο $t_2 = l_0/v_0$. Στη συνέχεια, το εισερχόμενο κύμα περνάει δεξιά του στόχου, δηλαδή το κύριο μέρος του περνάει σταδιακά στο ημιεπίπεδο $z > 0$. Σε μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή ($t_4 = 9l_0/(5v_0)$), το κέντρο του εξερχόμενου κυματοπακέτου έχει διανύσει απόσταση περίπου $\approx 2.5l$, και δεν υπάρχει πλέον αλληλεπικάλυψη ανάμεσα στο εισερχόμενο και εξερχόμενο κυματοπακέτο. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 5.7α, μία ουσιαστική αλλαγή λαμβάνει χώρα ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t_3 και t_4 . Συγκεκριμένα, η διαχωριστική επιφάνεια μετατρέπεται, από ένα ζεύγος ανοιχτών καμπυλών, μία σε κάθε πλευρά του άξονα $R = 0$, σε μία μοναδική κλειστή καμπύλη που τέμνει δύο φορές τον άξονα $R = 0$, στα σημεία $z > 0$ και $z < 0$. Λαμβάνοντας υπόψη την κυλινδρική συμμετρία γύρω από τον άξονα z , η μορφή της μεταβατικής ζώνης στο χώρο πριν την αλλαγή αυτή είναι σε μία κυλινδρική εκ περιστροφής επιφάνεια, ενώ στη συνέχεια μετατρέπεται σε ένα επιμηκυνμένο σφαιροειδές εκ περιστροφής. Αυτή η χρονικά εξελισσόμενη σε μορφολογία επιφάνεια αποτελεί το λεπτό όριο ανάμεσα στις περιοχές κυριαρχίας της αξονικής εισερχόμενης και της ακτινικά εξερχόμενης ροής, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7β για τη χρονική στιγμή $t = t_2$.

5.3.3 Κβαντικοί στρόβιλοι

Ο υπολογισμός της θέσης των κβαντικών στρόβιλων στο παραπάνω μοντέλο γίνεται όπως και στην περίπτωση της προσέγγισης του επίπεδου κύματος. Η εξίσωση (5.30) συμπληρώνεται από την ακόλουθη εξίσωση για τις φάσεις του εισερχόμενου και του εξερχόμενου κύματος

$$k_0 R \tan(\theta/2 - \pi) = 2\bar{q}\pi \quad \bar{q} \in \mathcal{Z} . \quad (5.31)$$

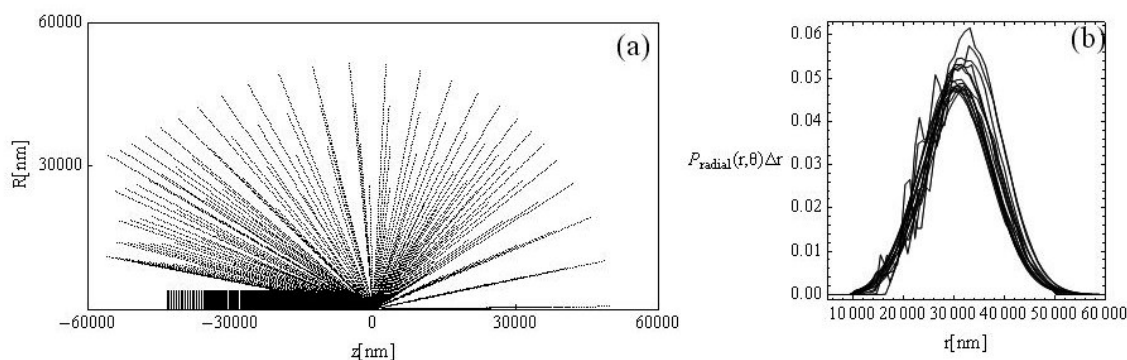
Η ταυτόχρονη λύση των (5.30) και (5.31) ορίζει τις θέσεις όλων των κόμβων όπου η συνολική κυματοσυνάρτηση (σχέση 5.23) γίνεται ίση με μηδέν. Οι λύσεις του συστήματος (5.30), (5.31) προσδιορίζονται αριθμητικά.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 5.8, και στην παρούσα περίπτωση γύρω από τους κόμβους η κβαντική ροή σχηματίζει κβαντικούς στρόβιλους με τους δύο αντίθετους κλάδους των ασταθών (U, U') και ευσταθών (S, S') πολλαπλοτήτων να αναφύονται από το υπερβολικό σημείο X. Όπως έχουμε δει, οι περισσότερες κβαντικές τροχιές αποφεύγουν τον κόμβο, σκεδαζόμενες παράλα αυτά κατά μήκος των ασυμπτωτικών διευθύνσεων των πολλαπλοτήτων των στάσιμων σημείων, και οδηγούμενες έτσι σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το σύμπλεγμα κόμβου-υπερβολικού σημείου.

Για τις παραμέτρους του μοντέλου που χρησιμοποιούνται στο σχήμα 5.7, το μέγεθος των κβαντικών κόμβων, που υπολογίζεται από την απόσταση R_X του κόμβου από το υπερβολικό σημείο, είναι της τάξης των $10^{-18}m$. Το μέγεθος των κόμβων στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι χρονοεξαρτώμενο. Όμως, στο διάστημα $t_2 \leq t \leq t_3$ όπου συμβαίνει κατά βάσιν η αλληλεπικάλυψη μεταξύ του εισερχόμενου και του εξερχόμενου κύματος, το R_X είναι περίπου σταθερό και δίνεται ξανά ως προς την τάξη μεγέθους από την σχέση (5.21) για την οποία έχουμε μιλήσει εκτενώς για το πως εξάγεται.

5.3.4 Τροχιές de Broglie-Bohm

Το σχήμα 5.9α δείχνει ένα σμήνος από 625 κβαντικές τροχιές για το μοντέλο με τις ίδιες παραμέτρους όπως αυτές του σχήματος 5.7. Οι αρχικές συνθήκες λαμβάνονται πάνω σε ένα ομοιόμορφο



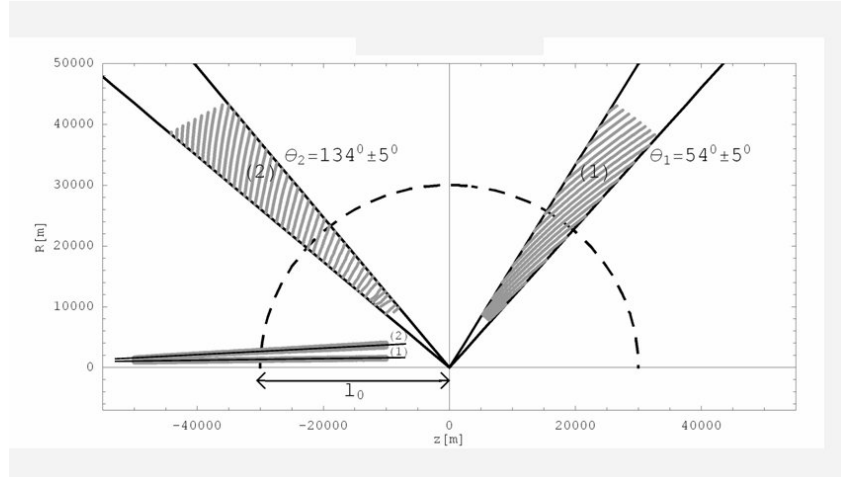
Σχήμα 5.9: (α) Ένα σμήνος από τροχιές de Broglie-Bohm για το ίδιο μοντέλο κυματοσυνάρτησης όπως αυτό του σχήματος 5.7. (β) Η τελική ακτινική κατανομή $P_{radial}(r; \theta_i)$ για δέκα διαφορετικές γωνίες $\theta_i = 20^\circ + i * 13^\circ$, $i = 1, 2, \dots, 10$. Η πολύ καλή σύμπτωση των επιμέρους γραφημάτων $P_{radial}(r; \theta_i)$ μεταξύ τους και με το εξερχόμενο θεωρητικό προφίλ (5.25) υποδηλώνει το βαθμό που οι αριθμητικά υπολογισμένες τροχιές σέβονται την εξίσωση της συνέχειας.

πλέγμα 25×25 με $-l_0 - 2l \leq z \leq -l_0 + 2l$ (όπου $l_0 = 3l$) και $D/10 \leq R \leq 3D$. Η ανάκλαση μίας τροχιάς συμβαίνει κατά την διάσχιση της μεταβατικής ζώνης. Η ροή ακολουθεί τη διεύθυνση που επιβάλλεται από τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις των πολλαπλοτήτων των στάσιμων σημείων που βρίσκονται κατά μήκος της μεταβατικής ζώνης.

Μία σημαντική δοκιμασία ελέγχου της ορθότητας των υπολογισμών γίνεται εξετάζοντας κατά πόσο οι πιθανότητες που συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες των τροχιών εξελίσσονται χρονικά σε συμφωνία με την κβαντομηχανική εξίσωση της συνέχειας. Για το σκοπό αυτό, θέτοντας $\psi \simeq \psi_{ingoing}$ για $t = 0$, η αρχική πιθανότητα ΔP ένα σωματίδιο να βρίσκεται εντός στοιχειώδους όγκου $\Delta V_0 = 2\pi R_0 \Delta R_0 \Delta z_0$ γύρω από το σημείο (z_0, R_0) δίνεται από τη σχέση $\Delta P = |\psi_{ingoing}(z_0, R_0, t = 0)|^2 \Delta V_0$. Έστω $(z_0, R_0) \rightarrow (r, \theta)$ η απεικόνιση που δίνει τη θέση (r, θ) σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2l_0/v_0$. Ο όγκος ΔV_0 απεικονίζεται τότε στον όγκο $\Delta V_t = \det|J(r, \theta; , z_0, R_0)| \Delta V_0$, όπου $J(r, \theta; , z_0, R_0)$ ο Ιακωβιανός πίνακας του 2×2 μετασχηματισμού $(z_0, R_0) \rightarrow (r, \theta)$. Ο υπολογισμός του Ιακωβιανού πίνακα γίνεται αριθμητικά, με την μέθοδο της παρεμβολής δεύτερης τάξης. Συγκεκριμένα προσεγγίζοντας τις συναρτήσεις $r(z_0, R_0)$ και $\theta(z_0, R_0)$ τοπικά από τις σχέσεις: $r = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(R - R_0) + A_3(z - z_0)(R - R_0)$, $\theta = B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(R - R_0) + B_3(z - z_0)(R - R_0)$, με βάση τα δεδομένα που προκύπτουν από την αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών με αρχικές συνθήκες πάνω στη διαμέριση που περιγράψαμε προηγούμενα, η μέθοδος της παρεμβολής μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων A_i, B_i . Οι σχέσεις αυτές, μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα $J(r, \theta; , z_0, R_0) = \Delta r \Delta \theta / \Delta R_0 \Delta z_0$ και τελικά τη συνάρτηση πιθανότητας $P_{radial}(r, \theta) = \mathcal{N}(\theta) |\psi_{in}(z_0, R_0, t = 0)|^2 R_0 J(r, \theta; , z_0, R_0)$, όπου z_0, R_0 είναι συναρτήσεις του (r, θ) και \mathcal{N} είναι μία σταθερά κανονικοποίησης.

Στο σχήμα 5.9β βλέπουμε τη μορφή της συνάρτησης πιθανότητας P_{radial} ως συνάρτηση του r , για δέκα διαφορετικές τιμές του θ στο διάστημα $20^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$. Το γεγονός ότι οι καμπύλες συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό, δείχνει ότι οι τροχιές που υπολογίσαμε σέβονται την εξίσωση της συνέχειας για την κβαντική ροή πιθανότητας. Πράγματι, η εξίσωση της συνέχειας επιβάλλει οι τροχιές να ανακαταναμηθούν στις διάφορες γωνίες θ έχοντας, ανεξάρτητα από το θ , το ίδιο ακτινικό προφίλ, όπως απορρέει από τον όρο $\psi_{outgoing}$ της κυματοσυνάρτησης (5.25). Η ιδιότητα αυτή ικανοποιεί-

ται και από τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης των τροχιών, καθώς τα γραφήματα $P_{radial}(r; \theta_i)$ του σχήματος 5.9β συμπίπτουν με το θεωρητικά προβλεπόμενο εξερχόμενο κανονικό προφίλ (5.25). Επομένως, ο αριθμητικός υπολογισμός είναι συμβιβαστός με τον έλεγχο της εξίσωσης της συνέχειας.



Σχήμα 5.10: Οι γκρίζες ζώνες (1) και (2) κάτω αριστερά αντιστοιχούν στις περιοχές των αρχικών συνθηκών για τις οποίες οι τροχιές de Broglie-Bohm καταλήγουν στις ζώνες γωνιών (1) $\theta = 54^\circ \pm 5^\circ$ και (2) $\theta = 134^\circ \pm 5^\circ$ αντίστοιχα, με το τέλος του αριθμητικού υπολογισμού.

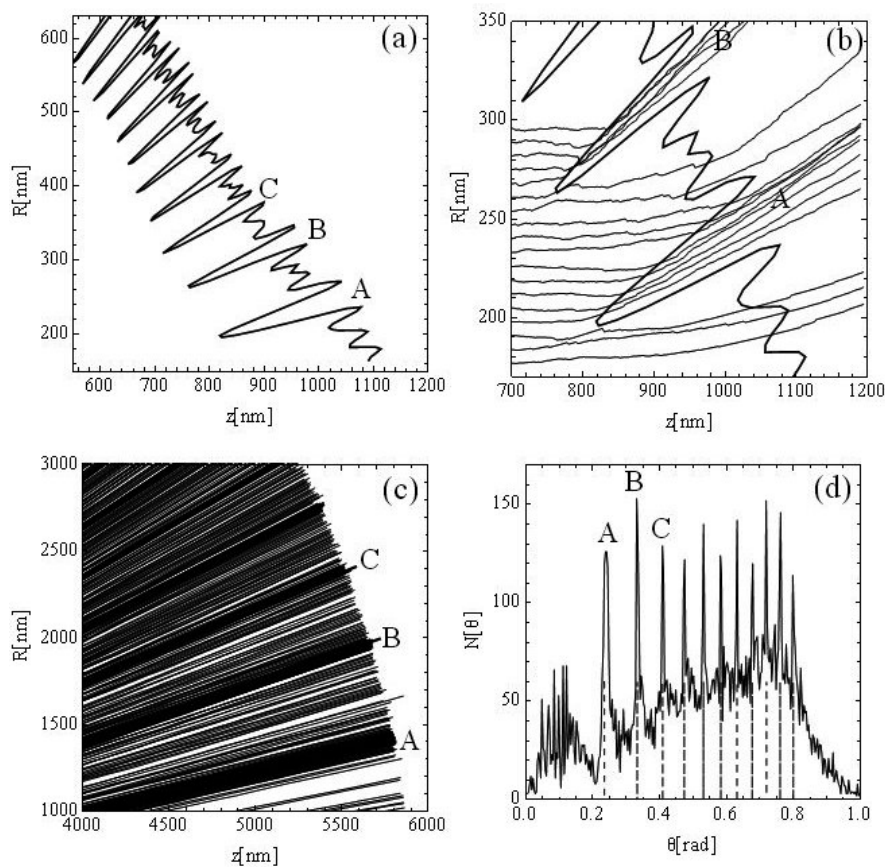
Κατά την ανάλυση που θα ακολουθεί επιθυμούμε να προσδιορίσουμε, ως συνάρτηση της γωνίας θ , την περιοχή των αρχικών συνθηκών στο επίπεδο (z_0, R_0) , για την οποία οι τροχιές de Broglie-Bohm σκεδάζονται σε μία περιοχή γωνιών γύρω από μια τελική τιμή της γωνίας θ . Ο προσδιορισμός αυτής της περιοχής γίνεται προσεγγίζοντας όλες τις τροχιές τμηματικά με ευθείες γραμμές. Συγκεκριμένα, από το σχήμα 5.9α είναι προφανές ότι όλες οι τροχιές μπορούν να θεωρηθούν ως σχεδόν ευθύγραμμες, δηλαδή οριζόντιες μέχρι του σημείου όπου οι τροχιές συναντούν τη διαχωριστική επιφάνεια, αλλά και ευθύγραμμες όταν φεύγουν ακτινικά προς τα έξω. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 5.7, η γενική κίνηση της μεταβατικής ζώνης, καθώς το t αυξάνεται, είναι προς τα κάτω. Αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε μια ακτίνα από το κέντρο και προς τα έξω κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γωνίας θ , η διαχωριστική επιφάνεια τέμνει την ακτίνα σε μία διαρκώς μειωνόμενη τιμή του r , που συμβολίζουμε με $r_s(t; \theta)$. Εφόσον όλες οι τροχιές είναι οριζόντιες πριν την συνάντηση, ισχύει ότι $R(t) = R_0$ για την κάθετη συνιστώσα της τροχιάς με αρχικές συνθήκες (z_0, R_0) . Έτσι, η συνάντηση της τροχιάς με τη διαχωριστική επιφάνεια γίνεται τη στιγμή $t = t_{coll}$ όπου $R(t_{coll}) = R_0 = r_s(t_{coll}; \theta) \sin \theta$. Η τελευταία συνθήκη καθορίζει τον χρόνο t_{coll} , ο οποίος είναι:

$$t_{coll} = \frac{z_0}{v_0} + \frac{R_0 \cot \theta}{v_0} . \quad (5.32)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.32) στην εξίσωση της διαχωριστικής επιφάνειας (5.30) με $R = R_0$ βρίσκουμε:

$$-\frac{R_0^2}{2D^2} + \frac{6R_0}{l g(\theta)} + \frac{2z_0 R_0}{l^2 g(\theta)} + \frac{2R_0^2}{l^2 \tan \theta g(\theta)} = \ln \frac{|CS_{eff}| g(\theta)}{2k_0^2 R_0} \quad (5.33)$$

όπου $g(\theta) = 2 \sin \theta / (1 - \cos \theta)$, $C = 2mZ_1 Z e^2 / 4\pi \epsilon_0 \hbar^2$, και $z_0 = R_0 / \tan \theta$. Η τελευταία εξίσωση



Σχήμα 5.11: (α) Η τοπική μορφή της μεταβατικής ζώνης $t = l_0/v_0$ μετά την συμπερίληψη των γωνιών Bragg θ_q ($\sin^2(\theta_q/2) = \frac{q\pi}{k_0 a}$) στην συνάρτηση Fraunhofer (οι πρώτες τρεις γωνίες σημειώνονται ως A, B, C). (β) Η ανάκλαση των τροχιών στα κανάλια ακτινικής ροής που σχηματίζονται γύρω από τις γωνίες Bragg A, B με τιμές $\theta_1 = 0.23\dots$ και $\theta_2 = 0.33\dots$ αντίστοιχα). (γ) Οι συγκέντρωση των σκεδαζόμενων τροχιών κοντά στις γωνίες Bragg σε μεγάλη κλίμακα. (δ) Η γωνιακή κατανομή των αριθμητικών τροχιών του (γ). Οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν την ακριβή θέση των γωνιών Bragg.

μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το R_0 ως συνάρτηση του z_0 . Έτσι έχουμε:

$$R_0 \simeq \frac{z_0}{l^2 g(\theta)/(4D^2) + 1/\tan \theta} + \frac{(3l + k_0^2 l^2)/e|CS_{eff}|}{l^2 g(\theta)/(4D^2) + 1/\tan \theta} \quad (5.34)$$

ή

$$R_0 \simeq \frac{4D^2}{l^2 g(\theta)} z_0 + \frac{4D^2(3 + k_0^2 l/(e|CS_{eff}|))}{l^2 g(\theta)} \quad (5.35)$$

Η σχέση (5.35) δίνει τη θέση όλων των αρχικών συνθηκών που καταλήγουν σε μία περιοχή γωνιών κοντά στη θ . Εάν θέσουμε $R_0 = R_c$ όταν $z_0 = z_c = -l_0$ και στο όριο που $l^2 g(\theta)/4D^2 \gg 1$ η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$R = R_c + \frac{4D^2(z + l_0)}{l^2 g(\theta)} \quad (5.36)$$

Για ένα πιο λεπτομερή υπολογισμό της τιμής του R_c μπορούμε να λύσουμε την (5.33) για $z = z_c = -l_0 = -3l$. Το σχήμα 5.10 δείχνει ευθείες αυτής της μορφής (μαύρες συνεχείς γραμμές) για τροχιές που καταλήγουν στις περιοχές δύο διαφορετικών γωνιών $\theta_1 = 54^\circ$, $\theta_2 = 134^\circ$ μαζί με τις τελικές θέσεις των σημείων σε χρόνο ($t = 2l_0/v_0$). Οι γκριζες γραμμές στην κάτω αριστερή πλευρά του σχήματος αποτελούνται από σημεία που δηλώνουν τις αρχικές συνθήκες που καταλήγουν στις συγκεκριμένες γωνίες. Όπως βλέπουμε οι αρχικές συνθήκες όπως προσδιορίζονται αριθμητικά συμπιπτουν πολύ ικανοποιητικά με τις αναλυτικές καμπύλες που δίνονται από τη σχέση (5.36).

5.3.5 Δημιουργία περιθλαστικής εικόνας

Όπως είδαμε πιο πριν η εξίσωση (5.25) παρέχει μία προσέγγιση της εξερχόμενης κυματοσυνάρτησης για όλες σχεδόν τις τιμές των παραμέτρων (k_0, θ, ϕ) εκτός από την περίπτωση εκείνων των συνδυασμών που οδηγούν στην εμφάνιση της περιθλαστικής εικόνας. Στην περίπτωση αυτή μετά τον υπολογισμό της συνάρτησης Fraunhofer κοντά στις γωνίες Bragg (σχέση Γ.17, παράρτημα Γ'), λαμβάνοντας υπόψη και τον όρο της διάχυσης η εξερχόμενη κυματοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$\psi_{outgoing} \simeq 2 \frac{B(t) Z_1 Z e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} (D/a^2) e^{-\frac{(r+l_0-v_0 t)^2}{2(t^2 + \frac{i\hbar t}{m})}} f(r, \theta) e^{ik_0 r} \left[1 + \sum_q U_q(r, \theta) e^{i\Phi_q(r, \theta)} \right] \quad (5.37)$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται πάνω σε όλες τις γωνίες Bragg, ενώ οι συναρτήσεις U_q και Φ_q δίνονται από τις σχέσεις:

$$U_q \sim \frac{2 \sin [k_0 r \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)/2]}{k_0 a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)}$$

$$\Phi_q \sim \tan^{-1} \left(\frac{1}{-3 + \frac{1}{2} r k_0 \sin^2 \theta_q (\theta - \theta_q)^2} \right). \quad (5.38)$$

Η τελευταία εξίσωση συνεπάγεται ότι σε γωνιακές αποστάσεις $|\theta - \theta_q| \sim \pi/(rk_0)^{1/2}$, τα σωματίδια πάνω στις τροχιές de Broglie-Bohm αποκτούν εγκάρσια ταχύτητα $v_t = (1/r)\partial\Phi_q/\partial\theta$ που δείχνει προς την κατεύθυνση της ευθείας γραμμής με κλίση ίση με $\tan \theta_q$, ενώ $v_t = 0$ ακριβώς σε γωνία $\theta = \theta_q$. Επιπλέον, η παρουσία των όρων που είναι σε συμφωνία φάσης στην S_{eff} προκαλεί μία τοπική παραμόρφωση της μεταβατικής ζώνης γύρω από τις γωνίες Bragg, όπως βλέπουμε στο σχήμα 5.11α. Παρατηρούμε ότι η διαχωριστική επιφάνεια έρχεται τοπικά πιο κοντά στο κέντρο την περιοχή των γωνιών Bragg, εφόσον το μέγεθος $\psi_{outgoing}$ τοπικά ενισχύεται εξαιτίας των τοπικών μεγίστων που παρουσιάζει η συνάρτηση U_q .

Το αποτέλεσμα της παραμόρφωσης της μεταβατικής ζώνης είναι ανάλογο με αυτό που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, η παραμόρφωση έχει ως αποτέλεσμα τον σχηματισμό τοπικών καναλιών ακτινικής ροής, όπου οι τροχιές de Broglie-Bohm σκεδάζονται κατά προτίμηση. Ένα παράδειγμα αυτής της συγκέντρωσης τροχιών έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 5.11β. Είναι φανερό ότι με την προσθήκη των όρων που είναι σε συμφωνία φάσης, προκαλείται μία μεταβολή της κατανομής των τροχιών, δημιουργώντας τοπικά μέγιστα στην πυκνότητας τους γύρω από τις γωνίες Bragg ($\theta_1 = 0.23\dots$, $\theta_2 = 0.33\dots$ στο σχήμα 5.11β). Το σχήμα 5.11γ παρουσιάζει αυτή τη συγκέντρωση σε μεγαλύτερη κλίμακα, ενώ το σχήμα 5.11δ δείχνει την γωνιακή κατανομή των τροχιών του σχήματος 5.11γ. Η κατανομή έχει εμφανή μέγιστα στις γωνίες $\theta = \theta_q$ (το πρώτο μέγιστο στη γωνία $\theta = 0.1$ δεν οφείλεται στο ότι εκεί βρίσκεται μία γωνία Bragg, αλλά οφείλεται στις τροχιές που εξακολουθούν να κινούνται οριζόντια, δηλαδή εντός της ζώνης του εισερχόμενου κυματοπακέτου).

Πρέπει να τονίσουμε ότι η διαμόρφωση της εξερχόμενης κυματοσυνάρτησης σύμφωνα με την εξίσωση (5.37) επηρεάζει το πεδίο ταχυτήτων των τροχιών μόνο κατά την εγκάρσια διεύθυνση, ενώ η ακτινική ροή όλων των τροχιών (όπως του σχήματος 5.11) πραγματοποιείται με σταθερή ταχύτητα $\hbar k_0/m$. Έτσι, η δημιουργία της εικόνας περίθλασης δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς των χρόνων άφιξης των σωματιδίων σε ανιχνευτές που είναι τοποθετημένοι σε σταθερή απόσταση από το κέντρο, ανεξάρτητα από τη γωνία θ , όπως θα δούμε εκτενέστερα στη συνέχεια.

5.4 Χρόνοι άφιξης

Η τροχιακή θεωρία de Broglie-Bohm δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανοτήτων των λεγόμενων **χρόνων άφιξης**, των σκεδαζόμενων σωματιδίων. Μεταξύ των διαφόρων προτάσεων που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, σχετικά με αυτό το θεμελιώδες για τη συνήθη κβαντική θεωρία ζήτημα (βλ. άρθρο επισκόπησης [96]), η θεωρία de Broglie-Bohm προσφέρει μια απλή απάντηση για τον ορισμό των πιθανοτήτων των χρόνων άφιξης. Η απάντηση αυτή ωστόσο είναι καταρχήν υποκειμένη σε πειραματικό έλεγχο. Στη συνέχεια θα προτείνουμε ένα είδος πειράματος ελέγχου των προβλέψεων της θεωρίας de Broglie-Bohm.

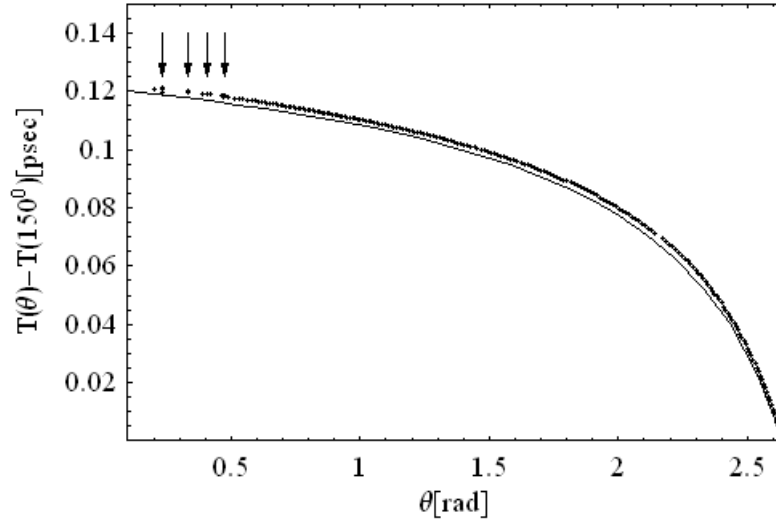
Οι μετρήσεις χρόνων απαιτούν την ύπαρξη δύο γεγονότων που λειτουργούν ως έναρξη και λήξη της διαδικασίας χρονικής μέτρησης.

Για τον ορισμό των χρόνων άφιξης των σωματιδίων στους ανιχνευτές, θεωρούμε ως εναρκτήριο γεγονός την προετοιμασία (preparation) του κυματοπακέτου σε μία συγκεκριμένη στιγμή $t = t_1$, η οποία μπορεί να τεθεί χάρην απλότητας $t_1 = 0$. Ως στιγμή λήξης θεωρούμε την ανίχνευση ενός σωματιδίου σε κάποιον από τους ανιχνευτές $t = t_2 > t_1$. Ο χρόνος άφιξης των σωματιδίων στον ανιχνευτή ορίζεται ως $t_{arrival} = t_2 - t_1$.

Για τον υπολογισμό των χρόνων άφιξης τόσο στην προσέγγιση του επίπεδου κύματος όσο και στην προσέγγιση του κυματοπακέτου πρέπει να λάβουμε υπόψη ένα γενικό χαρακτηριστικό της μορφής των τροχιών που συναντήσαμε σε όλες τις περιπτώσεις. Η μορφή των τροχιών είναι τέτοια που η ανάκλαση σε μεγάλες γωνίες γίνεται, για τις τροχιές που έχουν **μεγαλύτερη** κατακόρυφη απόσταση από τον κεντρικό άξονα του σωλήνα ροής. Σημειώνουμε ότι, στην περίπτωση των κλασικά σκεδαζόμενων σωματιδίων, οι μεγαλύτερες γωνίες σκέδασης αντιστοιχούν σε μικρότερες παραμέτρους κρούσης τόσο για ελκτικές όσο και για απωστικές δυνάμεις. Ένα ακόμη ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των κβαντικών τροχιών είναι ότι απωθούνται πάντα από το στόχο ανεξάρτητα από το πρόσημο των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Ως αποτέλεσμα, οι τροχιές των ηλεκτρονίων κάτω από την επίδραση ενός θετικά φορτισμένου πυρήνα απωθούνται πάντοτε από αυτόν κι έτσι δεν τέμνουν ποτέ τον άξονα z . Το φαινόμενο αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό παίρνοντας υπόψη ότι οι τροχιές Bohm δεν διαμορφώνονται μόνο από το κλασικό δυναμικό V αλλά και από το κβαντικό δυναμικό Q (4.5). Όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς κοντά στα σημεία ανάκλασης ισχύει $|\nabla Q| \gg |\nabla V|$. Επιπλέον, η μορφή του δυναμικού Q διαμορφώνεται πρακτικά μόνο από τον εξερχόμενο όρο της κυματοσυνάρτησης $\psi_{outgoing}$, ο οποίος έχει απωστική επίδραση σε όλες τις τροχιές.

Για την περίπτωση του επίπεδου κύματος, θεωρώντας ότι όλες οι τροχιές ξεκινούν από την ίδια οριζόντια απόσταση από το κέντρο, μπορούμε να μετρήσουμε το χρόνο άφιξης που απαιτείται, σύμφωνα με την συγκεκριμένη τροχιακή προσέγγιση, ώστε ένα σωματίδιο να φτάσει σε μία απόσταση από το κέντρο σε μία συγκεκριμένη γωνία θ μετά την ανάκλαση.

Κατά μήκος μιας από τις τροχιές του σχήματος 5.3α, το μέτρο της ταχύτητας μένει σχεδόν σταθερό $v \simeq \hbar k_0/m$ σε όλα τα οριζόντια και ακτινικά τμήματα της τροχιάς, και απλώς αλλάζει σε εξαιρετικά μικρά χρονικά διαστήματα όπου οι διάφορες ανακλάσεις που συζητήθηκαν χωριστά



Σχήμα 5.12: Η διαφορά $T(\theta) - T(150^\circ)$ των χρόνων άφιξης δύο σωματιδίων σε ανιχνευτές τοποθετημένους σε γωνίες θ και 150° αντίστοιχα και στην ίδια απόσταση από το κέντρο, για τις τροχιές de Broglie-Bohm του σχήματος 5.3α. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί σε έναν αναλυτικό υπολογισμό της εξίσωσης (5.41).

σε κάθε περίπτωση λαμβάνουν χώρα. Σε μία πρώτη προσέγγιση, ένας υπολογισμός της χρονικής διαφοράς των χρόνων άφιξης σε δυο διαφορετικές γωνίες θ_1 και θ_2 , μπορεί να γίνει θεωρώντας την κάθετη απόσταση της μεταβατικής ζώνης από τον άξονα z σταθερή και ίση με τον υπολογισμό $R \approx R_0$ με το R_0 να δίνεται από την (5.10). Δηλώνοντας με Δz_{in} μία σταθερή οριζόντια απόσταση από το αρχικό σημείο της τροχιάς (στα αριστερά) από το κέντρο, και με r_d την τελική απόσταση από το κέντρο, στην οποία το σωματίδιο ανιχνεύεται μετά την ανάκλαση, στην απλούστερη προσέγγιση η τροχιά θεωρείται οριζόντια μέχρι του σημείου που γίνεται η ανάκλαση στην εξωτερική διαχωριστική επιφάνεια και ακτινική από εκείνο το σημείο μέχρι την ανίχνευση του. Η συνολική απόσταση που έχει καλυφθεί είναι:

$$\Delta S(\theta) \approx \Delta z_{in} + r_d + \frac{R_0(\cos \theta - 1)}{\sin \theta} . \quad (5.39)$$

Εφόσον $(\cos \theta - 1)/\sin \theta$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της γωνίας θ , το μήκος $\Delta S(\theta)$ μειώνεται καθώς η γωνία θ αυξάνεται. Η χρονική διαφορά μεταξύ δύο τροχιών που ανακλώνται σε γωνίες θ_1 και θ_2 δίνεται από τη σχέση:

$$T(\theta_2) - T(\theta_1) \approx \frac{m}{\hbar k_0} R_0 \left(\frac{\cos \theta_2 - 1}{\sin \theta_2} - \frac{\cos \theta_1 - 1}{\sin \theta_1} \right) . \quad (5.40)$$

Το κύριο συμπέρασμα είναι ότι, εφόσον $R_0 \propto D$ (εξίσωση (5.10)), η χρονική διαφορά $T(\theta_2) - T(\theta_1)$ για δύο συγκεκριμένες γωνίες είναι ανάλογη με το εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης D .

Σε έναν πιο ακριβή υπολογισμό, η απόσταση $R_2(\theta)$ της εξωτερικής διαχωριστικής επιφάνειας αλλάζει επίσης με το θ , γενικά το $R_2(\theta)$ μειώνεται με την αύξηση του θ , τουλάχιστον στην περιοχή της διάχυτης σκέδασης (σχήμα 5.1). Παρόλα αυτά, η συνολική μεταβολή του $R_2(\theta)$ είναι της τάξης μεγέθους του 10% στην περιοχή γωνιών, όπως για παράδειγμα, $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 150^\circ$, ενώ ο παράγοντας $|(\cos \theta - 1)/\sin \theta|$ μεταβάλλεται κατά 370%. Έτσι, το $T(\theta)$ παραμένει μία φθίνουσα συνάρτηση

του θ . Στο σχήμα 5.12, βλέπουμε σχεδιασμένη τη διαφορά $T(\theta) - T(150^\circ)$ όπως υπολογίζεται αριθμητικά στην περίπτωση της περιθλασης που χρησιμοποιούμε τις τροχιές του σχήματος 5.3α. Σε αυτό το παράδειγμα, η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι $\sim 10^8 m/s$, ενώ το εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης $10^{-6} m$. Έτσι, οι χρονικές διαφορές $T(\theta) - T(150^\circ)$ οφείλουν να είναι κοντά στα $10^{-14} sec$, όπως πράγματι βλέπουμε στο σχήμα 5.12. Επιπλέον, είναι φανερό ότι η συγκέντρωση των τροχιών σε συγκεκριμένες γωνίες Bragg (οι πρώτες τέσσερις σημειώνονται με βέλη) δεν επιδρά ουσιαστικά στη μορφή της καμπύλης $T(\theta)$ σε σχέση με την μορφή που αυτή έχει στην περιοχή της διάχυτης σκέδασης (μεγάλα θ). Η λεπτή συνεχής γραμμή αναπαριστά μία προσομοίωση των αριθμητικών δεδομένων από μία πιο εξελιγμένη μορφή του μοντέλου της εξίσωσης (5.40), όπου επιπρόσθετα η αλλαγή του ύψους της μεταβατικής ζώνης έχει ληφθεί υπόψη με βάση τη σχέση:

$$T(\theta) - T(\theta_2) \approx \frac{m}{\hbar k_0} \left(\frac{(R_{0,2} + \lambda(\theta - \theta_2)(\cos \theta - 1))}{\sin \theta} - \frac{R_{0,2}(\cos \theta_2 - 1)}{\sin \theta_2} \right) \quad (5.41)$$

όπου λ είναι η μέση κλίση της διαχωριστικής καμπύλης κανονικοποιημένη στην τιμή της για το ζευγάρι $(\theta_1, \theta_2) = (30^\circ, 150^\circ)$ δηλαδή

$$\lambda = \frac{R_{0,2} - R_{0,1}}{\theta_2 - \theta_1}$$

με $R_{0,j}$, $j = 1, 2$ υπολογισμένη από το γενικό μοντέλο της εξίσωσης (5.10) αλλά για γωνίες θ_j , δηλαδή

$$R_{0,j} \approx \left[\sqrt{2Ln(C_{0,j})} + \frac{1}{1 + \sqrt{2Ln(C_{0,j})}} \right] D, \quad C_{0,j} = \left(\frac{0.5|Z_1 Z|e^2 m \rho^{1/2} d^{1/2}}{4\pi\epsilon_0 2k_0^2 \hbar^2 \tan(\theta_j/2)} \right)^{-1}.$$

Μια σημαντική παρατήρηση σε σχέση με τους προβλεπόμενους χρόνους $T(\theta_2) - T(\theta_1)$ που βρίσκουμε από την τροχιακή προσέγγιση της θεωρίας de Broglie-Bohm είναι ότι η χρονική διαφορά που προβλέπεται από την εξίσωση (5.41) έχει πολύ διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση με την κλασική προσέγγιση της σκέδασης Rutherford. Πράγματι, στην τελευταία ένα φορτισμένο σωματίδιο φορτίου $Z_1 e$ με μάζα m το οποίο πλησιάζει μία σταθερή ηλεκτρική πηγή με φορτίο $Z e$, η χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στην κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου γράφεται:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + k_{el} \frac{Z_1 Z e^2}{r} \quad (5.42)$$

όπου $k_{el} = 1/4\pi\epsilon_0$. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από αυτήν για το σκεδαζόμενο σωματίδιο δίνουν:

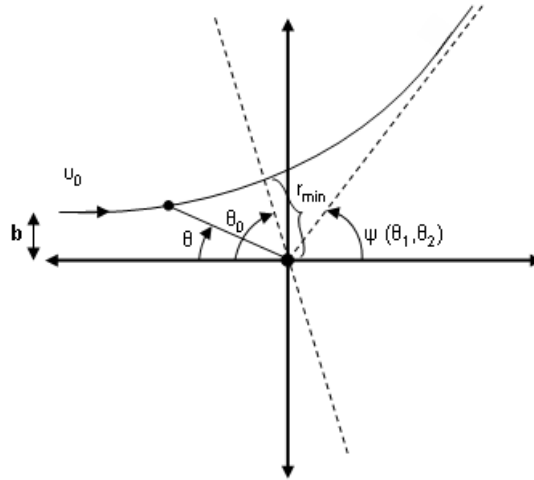
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -k_{el} \frac{Z_1 Z e^2 m}{C^2} \quad (5.43)$$

και

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{mr^2} \quad (5.44)$$

όπου $u = 1/r$. Η σταθερά $C = -mv_0 b$ αντιστοιχεί στη στροφορμή του σωματιδίου, ενώ v_0 είναι η αρχική του ταχύτητα τη στιγμή $t = -\infty$ και b η παράμετρος κρούσης. Η γενική λύση της εξίσωσης (5.43) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{1}{r} = d + a \cos(\theta - \theta_0) \quad (5.45)$$



Σχήμα 5.13: Σχηματική αναπαράσταση της σκέδασης σε απωστικό κεντρικό δυναμικό. Στη γωνία θ_0 έχουμε την ελάχιστη απόσταση από την πηγή του δυναμικού. Η γωνία θ αντιστοιχεί σε μια τυχαία θέση ενώ ψ είναι η γωνία σκέδασης.

που είναι και η εξίσωση της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες με $d = -k_{el} \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{C^2}$. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\theta = 0$ όταν $r \rightarrow \infty$ και πως για $\cos(\theta - \theta_0) = 1$ έχουμε την ελάχιστη απόσταση από το κέντρο σκέδασης μπορούμε να εξάγουμε τις σχέσεις υπολογισμού των σταθερών a και θ_0 , δηλαδή:

$$a = \sqrt{\frac{q^2}{b^4} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{b^2} \sqrt{q^2 + b^2} \quad (5.46)$$

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{d}{a}\right) \quad (5.47)$$

με $q = -k_{el} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv_0^2}$ ($q > 0$ αν $Z_1 > 0$ και $Z < 0$). Σημειώνουμε ότι η σταθερά q είναι ανεξάρτητη από την παράμετρο κρούσης b .

Επιπλέον με βάση τις σχέσεις για τα q και d και την (5.46) μπορούμε να γράψουμε:

$$d = q/b^2 \text{ και } a^2 - d^2 = 1/b^2. \quad (5.48)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.44) βρίσκουμε ότι:

$$T(\theta) = -2 \int_{\theta_0}^{\theta(r=r_{det})} \frac{r^2(\theta)}{v_0 b} d\theta. \quad (5.49)$$

όπου r_{det} είναι η απόσταση του ανιχνευτή των σωματιδίων. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.45) στην (5.49) βρίσκουμε το συνολικό χρόνο πτήσης του σωματιδίου ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$T(\theta) = \frac{2}{v_0 b} \left[\frac{-2d \tanh^{-1} \left[\frac{(d-a) \tan\left[\frac{(\theta-\theta_0)}{2}\right]}{\sqrt{a^2-b^2}} \right]}{(a^2-d^2)^{3/2}} - \frac{a \sin(\theta - \theta_0)}{(a^2-b^2)(d+a \cos(\theta - \theta_0))} \right] \quad (5.50)$$

Απ' την εξίσωση της τροχιάς (5.45) και θεωρώντας ως r την απόσταση του ανιχνευτή παίρνουμε

$$\cos(\theta - \theta_0) = (1/r - d)/a \quad \sin(\theta - \theta_0) = -\sqrt{1 - \left(\frac{1/r - d}{a}\right)^2} \quad (5.51)$$

καθώς η ποσότητα $\theta - \theta_0$ είναι πάντοτε αρνητική. Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες $\sin^2(\theta - \theta_0)/2 = (1 - \cos(\theta - \theta_0))/2$ και $\cos^2(\theta - \theta_0)/2 = (1 + \cos(\theta - \theta_0))/2$ έχουμε

$$\tan(\theta - \theta_0)/2 = -\sqrt{\frac{1 - \cos(\theta - \theta_0)}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}} = -\sqrt{\frac{a + d - 1/r}{a - d + 1/r}} < 0.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (5.50) προκύπτει ότι:

$$T(r) = \frac{2}{v_0 b} \left[\frac{-2d \tanh^{-1} \left[\sqrt{\frac{(a-d)(a+d-1/r)}{(a+d)(a-d+1/r)}} \right]}{(a^2 - d^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{a^2 - (1/r - d)^2}}{(a^2 - d^2)} r \right] \quad (5.52)$$

Εάν θέσουμε $y = \sqrt{\frac{(a-d)(a+d-1/r)}{(a+d)(a-d+1/r)}} = \sqrt{\frac{1-1/(r(a+d))}{1+1/(r(a-d))}}$ και επειδή το $1/r$ είναι μικρή ποσότητα, αγνοώντας τους όρους ανώτερης τάξης $O(1/r^2)$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1 - 1/(r(a+d))}{1 + 1/(r(a-d))}} = \frac{\sqrt{1 - 1/(r(a+d))}}{\sqrt{1 + 1/(r(a-d))}} \simeq \frac{1 - 1/(2r(a+d))}{1 + 1/(2r(a-d))} = \\ &= 1 - \frac{1}{2r(a+d)} - \frac{1}{2r(a-d)} = 1 - \frac{a}{r(a^2 - d^2)} \end{aligned}$$

Και μέσω της σχέσης (5.48) έχουμε τελικά:

$$y = 1 - \frac{ab^2}{r} \quad (5.53)$$

Εφόσον για την υπερβολική εφαπτομένη ισχύει:

$$\tanh^{-1} y = (1/2) \ln[(1+y)/(1-y)]$$

από την (5.53) παίρνουμε:

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2 - ab^2/r}{ab^2/r}\right) = \frac{1}{2} \ln(2r/ab^2 - 1) \simeq \frac{1}{2} \ln(2r/ab^2).$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος στη σχέση (5.52) για το $T(r)$ δίνεται πλέον από τη σχέση:

$$\frac{2}{v_0 b} \left[db^3 \ln\left(\frac{ab^2}{2r}\right) \right] = \frac{2}{v_0 q} \frac{db^3 \ln \sqrt{q^2 + b^2}}{2r}.$$

Ανάλογα, ο δεύτερος όρος του αθροίσματος στη σχέση (5.52) είναι:

$$\frac{2}{v_0 b} b^2 r \sqrt{a^2 - d^2 + \frac{2d}{r} - \frac{1}{r^2}} \simeq \frac{2br}{v_0} \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2d}{r}} = \frac{2r}{v_0} \sqrt{1 + \frac{2db^2}{r}} \simeq \frac{2r}{v_0} \left(1 + \frac{q}{r}\right) = \frac{2}{v_0} (r + q).$$

Καταλήξαμε μ' αυτό τον τρόπο στο ότι ο δεύτερος όρος είναι ανεξάρτητος του b και έτσι απαλείφεται όταν υπολογίσουμε τη χρονική διαφορά για δύο διαφορετικές γωνίες ανίχνευσης των σωματιδίων $T(\theta_2) - T(\theta_1)$ (δύο διαφορετικά b).

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τον πρώτο όρο για τον υπολογισμό των χρονικών διαφορών σε προσέγγιση πρώτης τάξης έχουμε:

$$T(\theta_2) - T(\theta_1) = \frac{2q}{v_0} \ln \sqrt{\frac{q^2 + b_2^2}{q^2 + b_1^2}} = \frac{2q}{v_0} \ln \sqrt{\frac{1 + \frac{b_2^2}{q^2}}{1 + \frac{b_1^2}{q^2}}} . \quad (5.54)$$

Στην τελευταία σχέση οι γωνίες θ_1 και θ_2 υπεισέρχονται μέσα από τις μεταβλητές b_1 και b_2 . Για να εκφράσουμε την διαφορά $T(\theta_2) - T(\theta_1)$ συναρτήσει των γωνιών θα χρησιμοποιήσουμε καταρχήν το σχήμα 5.13 όπου βλέπουμε ότι οι γωνίες θ_0 και ψ συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\psi = 2(\theta_\infty - \theta_0) - \pi \quad (5.55)$$

η οποία δίνει:

$$\psi/2 = (\theta_\infty - \theta_0) - \pi/2 \Rightarrow \cot\psi/2 = -\tan(\theta_\infty - \theta_0) \quad (5.56)$$

με $(\theta_\infty - \theta_0 < 0)$. Η εξίσωση της τροχιάς (5.45) για θ_∞ δίνει:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\theta_\infty - \theta_0) &= -d/a = -q/ab^2 \\ \sin(\theta_\infty - \theta_0) &= -\sqrt{1 - d^2/a^2} = -1/ab \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(\theta_\infty - \theta_0) = b/q$$

οπότε

$$\cot^2 \psi/2 = \tan^2(\theta_\infty - \theta_0) = b^2/q^2 . \quad (5.57)$$

Έτσι για την κλασική σκέδαση Rutherford, η τελική σχέση για τις χρονικές διαφορές δύο τροχιών που ανιχνεύονται σε διαφορετικές γωνίες είναι:

$$\Delta T = T(\theta_1) - T(\theta_2) \approx \frac{ZZ_1 e^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^3} \ln \left(\sqrt{\frac{1 + \cot^2(\theta_1/2)}{1 + \cot^2(\theta_2/2)}} \right) \quad (5.58)$$

Η ποσότητα q/v_0 είναι τάξης $O(1/v_0^3)$. Η χρονική διαφορά για δύο τροχιές με $b_1 > b_2$ είναι αρνητική για την περίπτωση που μελετήσαμε όπου τα δύο φορτία είναι ετερόσημα. Απ' την άλλη για απωστικές δυνάμεις (ομόσημα φορτία) η ποσότητα q είναι αρνητική. Έτσι η χρονική διαφορά $T(\theta_1) - T(\theta_2)$ είναι θετική για την ίδια σχέση των παραμέτρων $b_1 > b_2$.

Επομένως σύμφωνα με την κλασική θεωρία σκέδασης, η μέση χρονική διαφορά εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου v_0 , σύμφωνα με τον νόμο $\Delta T \sim [10^8 m sec^{-1}/v_0]^3$. Η διαφορά αυτή είναι τάξης μεγέθους $10^{-19} sec$ για ηλεκτρόνια που κινούνται με ταχύτητες $10^8 m/sec$. Αντίστοιχα, η τροχιακή θεωρία de Broglie-Bohm προβλέπει χρονικές διαφορές που εξαρτώνται από το v_0 καθώς και από το εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης D , δηλ. $\Delta T \sim [D/1\mu m][10^8 m sec^{-1}/v_0]10^{-13} sec$.

Συμπερασματικά, προτείνουμε ότι η πραγματοποίηση πειραμάτων χρονικών μετρήσεων σε φαινόμενα περίθλασης μπορεί να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση θεμελιωδών προβλημάτων της φυσικής, όπως ο ρόλος του χρόνου στην κβαντική μηχανική. Ειδικότερα, οι προβλέψεις της θεωρίας de Broglie-Bohm είναι εντός των τεχνικών δυνατοτήτων των σημερινών πειραματικών διατάξεων.

Για τον υπολογισμό των χρόνων άφιξης στην προσέγγιση του κυματοπακέτου η κίνηση όλων των σκεδαζόμενων σωματιδίων (σχήμα 5.9α) στην περιοχή πέρα από τη σφαίρα ακτίνας $2l_0$ γύρω

από το κέντρο, θεωρείται, όπως και πριν, εξολοκλήρου ακτινική με σταθερή ταχύτητα, καθώς παίρνοντας την $\psi \simeq \psi_{outgoing}$ (όπου το $\psi_{outgoing}$ δίνεται από την εξίσωση (5.25), οι εξισώσεις κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνουν $dr/dt = v_0 = \hbar k_0/m$, $d\theta/dt = 0$. Η τελευταία εξίσωση τροποποιείται όταν ληφθούν υπόψη οι όροι της περίθλασης στην S_{eff} . Ωστόσο, όπως και στην περίπτωση του επίπεδου κύματος, η τροποποίηση αυτή δεν επηρεάζει ουσιαστικά την κίνηση στην ακτινική διεύθυνση, η οποία είναι και η μόνη που παίζει ρόλο στην τελική κατανομή των χρόνων άφιξης ως συνάρτηση της γωνίας θ . Εξ' ορισμού η παραπάνω κατανομή δίνεται από τη σχέση

$$P_{arrival}(t) = \frac{\Delta N_{\theta, l_D}(t)}{\Delta t} \quad (5.59)$$

όπου $\Delta N_{\theta, l_D}(t)$ δηλώνει τον αριθμό των σωματιδίων που φτάνουν στον ανιχνευτή, κωνικού ανοίγματος $d\Omega_D = \sin\theta \Delta\theta_D \Delta\phi_D$ γύρω από τη γωνία θ , μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + \Delta t$. Εφόσον στην τροχιακή προσέγγιση όλα τα σωματίδια κινούνται με σταθερή ταχύτητα, έχουμε

$$\frac{\Delta N_{\theta, l_D}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta N_{\theta, l_D}(t)}{\Delta r} \frac{\Delta r}{\Delta t} = l_D^2 d\Omega_D \rho v_0 = l_D^2 d\Omega_D |\psi_{out}|^2 \frac{\hbar k_0}{m} .$$

Στην περίπτωση $l \gg D \gg a$, αντικαθιστώντας την (5.25) με το S_{eff} να δίνεται από τη σχέση (5.27) και κάνοντας την συνήθη προσέγγιση $l^2 \gg \hbar t/m$, $D^2 \gg \hbar t/m$ καταλήγουμε στην

$$P_{arrival}(t) \simeq P_0 e^{-\frac{(l_D + l_0 - v_0 t)^2}{t^2}} \quad (5.60)$$

όπου P_0 είναι μία σταθερά κανονικοποίησης. Ωστόσο, μέσω της (5.25) και της εξίσωσης που δίνει την συνάρτηση S_{eff} (5.28) στην περίπτωση που $D \gg l \gg a$ βρίσκουμε:

$$P_{arrival}(t, \theta) = P'_0 e^{-\frac{(l_D + l_0 - v_0 t)^2}{\sin^2 \theta D^2}} . \quad (5.61)$$

Το κύριο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι: είτε στην περίπτωση που έχουμε $l \gg D$ είτε στην περίπτωση που $D \gg l$, η κατανομή των χρόνων άφιξης είναι μία εντοπισμένη κανονική κατανομή γύρω από το μέσο χρόνο άφιξης $(l_D + l_0)/v_0$, της οποίας η διασπορά είναι πάντοτε τάξης $v_0^{-1} \times$ το μεγαλύτερο μεταξύ διαμήκους και εγκάρσιου μήκους συμφωνίας φάσης.

Η τελευταία παρατήρηση συνεπάγεται ότι η τροχιακή θεωρία μπορεί να δώσει θεωρητικές προβλέψεις για μεγέθη που σχετίζονται με την κατανομή των χρόνων άφιξης, τα οποία εξαρτώνται από δύο παραμέτρους της εισερχόμενης δέσμης, που είναι καταρχήν ελέγξιμες από κατάλληλη πειραματική διάταξη.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6.1 Γενικά

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε τις επιπτώσεις του φαινομένου της σκέδασης σε δυο διαφορετικές κατηγορίες δυναμικών συστημάτων. Στο πρώτο μέρος ασχοληθήκαμε με την σκέδαση αστερών από μελανή οπή που βρίσκεται στο κέντρο είτε ενός ελλειπτικού είτε ενός ραβδωτού γαλαξία. Η παρουσία μιας υπερμεγέθους μελανής οπής στο κέντρο ενός γαλαξία προκαλεί μια σειρά φαινομένων τα οποία έχουν μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό. Στην δική μας έρευνα βασικό μέλημα ήταν η συσχέτιση της μάζας της μελανής οπής με τους χαοτικούς δείκτες των τροχιών που σκεδάζονται από αυτήν.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας εξετάσαμε τις επιπτώσεις της σκέδασης τροχιών από κβαντικούς στροβίλους. Η ύπαρξη των κβαντικών στροβίλων προβλέπεται στα πλαίσια της τροχιακής θεωρίας των de Broglie-Bohm για τα κβαντικά συστήματα. Όπως εξηγήσαμε αναλυτικά οι κβαντικοί στροβίλοι συνοδεύονται από τα ίδια κοινά χαρακτηριστικά ανεξάρτητα από το είδος του κβαντικού συστήματος στο οποίο εμφανίζονται. Έτσι αρχικά εξετάσαμε πως η σκέδαση από τους κβαντικούς στροβίλους συμβάλλει στη δημιουργία χάους στο σύστημα του κβαντικού αναλόγου του αρμονικού ταλαντωτή και στο αντίστοιχο σύστημα Hénon-Heiles. Επιπλέον είδαμε πως οι σκεδάσεις αυτού του είδους σχετίζονται με το φαινόμενο της κβαντικής χαλάρωσης. Τέλος, μελετήσαμε το ρόλο της σκέδασης από κβαντικούς στροβίλους στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης μιας δέσμης φορτισμένων σωματιδίων με ένα λεπτό μεταλλικό στόχο. Όπως διαπιστώσαμε μέσω των σκεδάσεων με τους κβαντικούς στροβίλους μπορούν να εξηγηθούν πολλά από τα παρατηρούμενα φαινόμενα, όπως π.χ η εμφάνιση της περιθλαστικής εικόνας αλλά και να γίνουν προβλέψεις σχετικές με μετρήσεις χρόνου σε κβαντικές διεργασίες.

6.2 Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ελλειπτικών γαλαξιών

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας ασχοληθήκαμε με τη μελέτη της επίδρασης που έχει η εισαγωγή μιας μελανής οπής στο κέντρο ενός ελλειπτικού γαλαξία στη χαοτικότητα των τροχιών που διέρχονται κοντά στο κέντρο του γαλαξία. Συγκεκριμένα μελετήσαμε αριθμητικά και αναλυτικά το νόμο δύναμης $L \propto m^p$ που συνδέει το μέσο αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου L των τροχιών με την τιμή της μάζας m της κεντρικής μελανής οπής. Ο νόμος $L \propto m^p$ είχε αρχικά παρατηρηθεί σε μοντέλα προσομοιώσεων N-σωμάτων ([73]). Τα κύρια συμπεράσματα μας είναι τα ακόλουθα:

- 1) Με τη βοήθεια ενός απλού αναλυτικού μοντέλου για το δυναμικό ενός ελλειπτικού γαλαξία, που περιλαμβάνει αρμονικούς και τεταρτοβάθμιους όρους διαταραχής, στους οποίους έχει προστεθεί το εξομαλυνμένο δυναμικό μιας μελανής οπής, επιβεβαιώσαμε με λεπτομερή αριθμητικά πειράματα τη σχέση $L \propto m^p$, με $p \simeq 0.5$ για ένα σύνολο τροχιών με αρχικές συνθήκες που ελήφθησαν πάνω στην επιφάνεια μηδενικών ταχυτήτων. Η επιλογή των αρχικών συνθηκών έγινε έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε αρχικές τροχιές τύπου κουτιού (χωρίς τη μελανή οπή).
- 2) Δείξαμε ότι, ο νόμος $L \propto m^p$ δεν εμφανίζει μεγάλη ευαισθησία στην παράμετρο αναρμονικότητας του δυναμικού ε .
- 3) Από την κατανομή των σωμάτων για τις διάφορες τιμές της ποσότητας L προέκυψε ότι το σύνολο σχεδόν των τροχιών με αρχικές συνθήκες πάνω στη σφαίρα μηδενικών ταχυτήτων μετατρέπονται σε χαοτικές μετά την εισαγωγή της μελανής οπής με μάζα μεταξύ των τιμών $10^{-5} < m < 10^{-2}$ (κανονικοποιημένη ως προς τη μάζα του γαλαξία).
- 4) Υπολογίσαμε τυπικά ολοκληρώματα της κίνησης χωρίς τη μελανή οπή, και μελετήσαμε πως μεταπίπτουν χρονικά οι τιμές τους μετά την εισαγωγή της μελανής οπής. Μέσω της μελέτης αυτής ορίσαμε τη λεγόμενη “σφαίρα επιρροής της μελανής οπής”, δηλαδή την περιοχή ακτίνας r_m μέσα από την οποία κάθε τροχιά διαμορφώνεται σχεδόν αποκλειστικά από το δυναμικό της μελανής οπής. Επιπλέον υπολογίσαμε αριθμητικά τη σχέση ανάμεσα στην ακτίνα επιρροής της μελανής οπής r_m και τη μάζα της μελανής οπής m χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο που βασίζεται στη διατήρηση της στροφορμής πολύ κοντά στο κέντρο. Δείξαμε ότι οι ποσότητες r_m και m συνδέονται εμπειρικά με ένα νόμο δύναμης της μορφής $r_m \propto m^s$. Αριθμητικά βρίσκουμε $s \simeq 0.28$ ενώ μία απλή αναλυτική προσέγγιση δίνει $r_m \propto m^{1/3}$.
- 5) Η αριθμητική μελέτη των διακυμάνσεων $\Delta\Phi$ των τυπικών ολοκληρωμάτων έδειξε ότι το μέγεθος τους είναι γενικά ανάλογο με τη μάζα m της μελανής οπής και αντιστρόφως ανάλογο με την ελάχιστη απόσταση r_m στην οποία πλησιάζει η τροχιά την κεντρική μάζα, δηλαδή $\Delta\Phi \sim m/r_{min}$. Επιπλέον, δείξαμε ότι το μέγεθος των διακυμάνσεων των ολοκληρωμάτων δεν εξαρτάται αισθητά από την παράμετρο αναρμονικότητας ε του δυναμικού.
- 6) Βασιζόμενοι στο μοντέλο της σφαίρας επιρροής της μελανής οπής, υπολογίσαμε με αναλυτική προσέγγιση τον τοπικό αριθμό διαστολής a ως συνάρτηση της μάζας m και της ενέργειας E της τροχιάς. Βρήκαμε τη σχέση $a \propto m^{1/3}/E^{1/2}$ και διαπιστώσαμε τη συμφωνία της με αριθμητικά αποτελέσματα.
- 7) Δείξαμε ότι η γεωμετρία της περιοχής που καλύπτει μια τροχιά στο θεσεογραφικό χώρο σχετίζεται με τον αριθμό των επισκέψεων της τροχιάς στην σφαίρα επιρροής της μελανής οπής και κατ’επέκταση με τον αριθμό Lyapunov πεπερασμένου χρόνου που της αντιστοιχεί. Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι οι λεγόμενες “τριδιάστατες” τροχιές, δηλαδή οι τροχιές που “γεμίζουν” ομοίμορφα όλο το διαθέσιμο χώρο και στις τρεις διαστάσεις έχουν μια συχνότητα επισκέψεων στη σφαίρα r_m που δίνεται από τη σχέση $N_{vis} \propto m^{2/3}/E$, ενώ οι λεγόμενες “επίπεδες” τροχιές δηλαδή όσες παραμένουν κατά το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα σε μία περιοχή στην οποία μία από τις τρεις διαστάσεις είναι της τάξης μεγέθους της ακτίνας r_m έχουν μια συχνότητα επισκέψεων στη σφαίρα r_m που δίνεται από τη σχέση $N'_{vis} \propto m^{1/3}/E^{1/2}$. Οι θεωρητικές αυτές προβλέψεις επιβεβαιώθηκαν αριθμητικά βρίσκοντας την κατανομή του αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου των τροχιών στις διάφορες τιμές της ενέργειας.
- 8) Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα για το μοντέλο της ακτίνας επιρροής της μελανής οπής δώσαμε μια θεωρητική ερμηνεία του νόμου $L \propto m^p$. Συγκεκριμένα, μια θεωρητική εκτίμηση του μέσου αριθμού Lyapunov πεπερασμένου χρόνου προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη την αύξηση του τοπικού αριθμού διαστολής a κάθε φορά που μια τροχιά ενέργειας E διαπερνά τη σφαίρα επιρροής της μελανής οπής και το ποσοστό συνεισφοράς των “τριδιάστατων” και των “επίπεδων” τροχιών σε

αυτόν, προκύπτει ο θεωρητικός νόμος δύναμης της μορφής $L \propto m^{2/3-q}$ όπου το q κυμαίνεται από 0.1 έως 0.2 για τα θεωρούμενα κάτω και άνω όριο της μάζας της μελανής οπής. Έτσι, η διακύμανση του εκθέτη γύρω από την τιμή 0.5, και δίνει μια μέση τιμή κοντά στο 0.5 για όλο το εύρος των τιμών της μάζας της μελανής οπής ($10^{-5} < m < 10^{-2}$).

6.3 Επίδραση της κεντρικής μελανής οπής στο χάος των ραβδωτών γαλαξιών

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετήσαμε την ύπαρξη ενός νόμου $L \propto m^p$, αντίστοιχου όπως και στην περίπτωση των ελλειπτικών γαλαξιών, για τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό Lyapunov των τροχιών που διέρχονται κοντά από το κέντρο ενός ραβδωτού γαλαξία και τη μάζα της κεντρικής μελανής οπής. Η βασική διαφορά του ραβδωτού γαλαξία σε σχέση με τον ελλειπτικό είναι ότι εδώ δεν υπάρχουν τροχιές τύπου κουτιού που εξ' ορισμού περνούν κοντά στο κέντρο του γαλαξία. Παρόλα αυτά, και στην περίπτωση του ραβδωτού γαλαξία βρήκαμε τροχιές (άλλου τύπου) που μπορούν να διέλθουν αρκετά κοντά στη μελανή οπή ώστε να σκεδαστούν χαοτικά. Δείξαμε αριθμητικά ότι και για τις τροχιές αυτές ισχύει ο νόμος $L \propto m^p$. Πιο συγκεκριμένα:

1) Χρησιμοποιώντας το αναλυτικό μοντέλο των Kaufmann & Contopoulos (1996) για τον ραβδωτό γαλαξία NGC3992 επιβεβαιώσαμε αριθμητικά ότι για τροχιές με μηδενική αρχική στροφορμή και ενέργειες μικρότερες από την ενέργεια του L_1 ισχύει ότι $L \propto m^p$ με $p \simeq 0.5$.

2) Με τη βοήθεια των τομών Poincaré (θ, p_θ) με $p_r = 0$ και $\dot{p}_r < 0$ ελέγξαμε την επίδραση που έχει η εισαγωγή της μελανής οπής στη δυναμική του γαλαξία. Διαπιστώσαμε ότι ένας σημαντικός αριθμός ημιπεριοδικών τροχιών τύπου “σωλήνα”, ιδιαίτερα γύρω από τους βασικούς συντονισμούς 2:1 και 4:1, μετατρέπονται, μετά την προσθήκη της μελανής οπής, σε χαοτικές. Μελετώντας αριθμητικά τροχιές με κατάλληλα επιλεγμένες αρχικές συνθήκες, δείξαμε ότι για τη μετατροπή μιας τροχιάς από οργανωμένη σε χαοτική πρέπει το εύρος της νησίδας ευστάθειας, γύρω από το συντονισμό στον οποίο ανήκει η τροχιά να είναι τέτοιο ώστε να επιτρέπει τη διέλευση της μέσα από τη σφαίρα επιρροής της μελανής οπής.

3) Μελετήσαμε επίσης τροχιές σε συντονισμούς μικρότερου εύρους, όπως 3:1, 6:1, κ.λ.π.. Στην περίπτωση αυτή, οι ημιπεριοδικές τροχιές τύπου σωλήνα, έχουν μικρό πάχος γύρω από τις αντίστοιχες περιοδικές τροχιές. Τότε, δεν έχουμε διελεύσεις από το κέντρο, και μετά την προσθήκη της μελανής οπής ο ημιπεριοδικός χαρακτήρας των τροχιών διατηρείται.

6.4 Σκέδαση από κβαντικούς στροβίλους-Κβαντική χαλάρωση

Στο κεφάλαιο 4 μελετήσαμε δυναμικά συστήματα όπου το χάος προέρχεται από χαοτικές σκεδάσεις τροχιών από κινούμενους κόμβους. Ως παράδειγμα, εξετάσαμε το πρόβλημα της δημιουργίας χάους στα πλαίσια της θεωρίας de Broglie-Bohm στο σύστημα του διδιάστατου κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή και το κβαντικό σύστημα Hénon - Heiles. Και στις δύο περιπτώσεις, βρήκαμε πρώτα τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια τροχιά αποφεύγει τις κοντινές διελεύσεις από τους κινούμενους κόμβους, αποφεύγοντας έτσι την πηγή του χάους στο σύστημα. Τέλος, διερευνήσαμε την επίδραση τόσο της τάξης όσο και του χάους στο φαινόμενο της λεγόμενης “κβαντικής χαλάρωσης” Τα κύρια συμπεράσματα μας είναι τα ακόλουθα:

1) Δείξαμε, μέσω αριθμητικών υπολογισμών, ότι υπάρχουν τροχιές που αποφεύγουν να προσεγγίσουν τα κινούμενα κομβικά σημεία (κόμβοι), στην περίπτωση των τροχιών de Broglie-Bohm που

αντιστοιχούν στην υπέρθεση τριών ιδιοσυναρτήσεων στο μοντέλο του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. Εξαιτίας αυτού του φαινομένου, μπορούν να υπάρξουν οργανωμένες κβαντικές τροχιές που εκτείνονται χωρικά σε μία περιοχή που εμφανίζει αλληλεπικάλυψη με την περιοχή των γραμμών που σχηματίζουν οι θέσεις των κόμβων (κομβικές γραμμές).

2) Υπολογίσαμε αναπτύγματα σειρών για οργανωμένες τροχιές στο εξωτερικό της περιοχής που καλύπτεται από τις κομβικές γραμμές. Δώσαμε μια εκτίμηση της περιοχής ισχύος των σειρών, και την συγκρίναμε με τις αριθμητικές τροχιές.

3) Εξετάσαμε τις τροχιές de Broglie-Bohm στο σύστημα Hénon - Heiles, για κβαντικές καταστάσεις όμοιες με αυτές του αρμονικού ταλαντωτή. Οι δύο περιπτώσεις συμφωνούν ποιοτικά όσον αφορά το εύρος της περιοχής και τις αρχικές συνθήκες που οδηγούν σε οργανωμένες τροχιές. Στην περίπτωση του μοντέλου Hénon - Heiles, όμως, οι κομβικές γραμμές αναπτύσσουν νέες γραμμές που οδηγούν σε περισσότερες χαοτικές τροχιές.

4) Μελετήσαμε την επίδραση της τάξης και του χάους στο φαινόμενο της κβαντικής χαλάρωσης, δηλαδή την προσέγγιση με την πάροδο του χρόνου μίας χωρικής κατανομής ρ σωματιδίων που ακολουθούν κβαντικές τροχιές στον κανόνα του Bohr $\rho = |\psi|^2$, ακόμη κι αν αρχικά έχουμε $\rho_0 \neq |\psi_0|^2$. Σε προηγούμενες εργασίες, είχε βρεθεί ότι το χάος παρέχει εν γένει το δυναμικό υπόβαθρο που προκαλεί την “κβαντική χαλάρωση”. Δείξαμε, ωστόσο, περιπτώσεις όπου η χαλάρωση μπορεί να περιοριστεί όταν πάρουμε σύνολα όχι μόνο οργανωμένων αλλά και χαοτικών τροχιών. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της ύπαρξης περιορισμών στο εύρος όπου οι χαοτικές τροχιές μπορούν να αναμειχθούν στο φυσικό χώρο. Για την ποσοτικοποίηση της επίδρασης της χαλάρωσης υπολογίσαμε δύο ποσότητες, συγκεκριμένα την διαφορά πυκνότητας $D(t)$ και τη λεγόμενη “αδρομερή συνάρτηση” $H_s(t)$ πάνω σε μία εξομαλυνμένη πυκνότητα σωματιδίων P_s . Δείξαμε ότι και οι δύο ποσότητες εμφανίζουν μία παρόμοια χρονική συμπεριφορά.

5) Εξετάσαμε μερικές περιπτώσεις μοντέλων υπέρθεσης ενός μικρού αριθμού (τριών ή τεσσάρων) ιδιοσυναρτήσεων και βρήκαμε ότι η ύπαρξη τάξης σε τέτοια μοντέλα είναι γενική. Εξετάσαμε επίσης την περίπτωση υπέρθεσης ιδιοσυναρτήσεων με μιγαδικά πλάτη, και δείξαμε πως η εμφάνιση νησίδων ευστάθειας σε μια χαμιλτονιανή αναπαράσταση των εξισώσεων κίνησης στην περίπτωση αυτή παρεμποδίζει την κβαντική χαλάρωση. Ο βαθμός γενικότητας των παραπάνω φαινομένων είναι θέμα προς περαιτέρω έρευνα.

6.5 Σκέδαση φορτισμένων σωματιδίων

Στο 5ο κεφάλαιο μελετήσαμε την εμφάνιση κόμβων στο φαινόμενο της περίθλασης φορτισμένων σωματιδίων από μεταλλικά φύλλα από την σκοπιά της τροχιακής θεωρίας των de Broglie-Bohm και το ρόλο που έχει η σκέδαση από τους κόμβους στην περίπτωση αυτή. Τα κύρια συμπεράσματα μας είναι τα ακόλουθα:

1) Παραγάγαμε ένα μοντέλο για την κυματοσυνάρτηση των περιθλώμενων σωματιδίων το οποίο μας επιτρέπει τον αναλυτικό προσδιορισμό των εξισώσεων κίνησης de Broglie-Bohm. Με βάση αυτές, πραγματοποιήσαμε αριθμητικό υπολογισμό των τροχιών των σωματιδίων και των κβαντομηχανικών ρευμάτων που προκύπτουν από το θεωρούμενο μοντέλο.

2) Διαπιστώσαμε ότι η γενική μορφή των ρευμάτων καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από την ύπαρξη μία δομής που ονομάζεται *διαχωριστική επιφάνεια*, η οποία αποτελεί το σύνορο ανάμεσα στην εισερχόμενη ροή που αντιστοιχεί στην δέσμη των εισερχόμενων σωματιδίων και περιβάλλει τον άξονα συμμετρίας της προσπίπτουσας δέσμης, και στην εξερχόμενη ροή που απομακρύνεται ακτινικά από το κέντρο σκέδασης. Επιπλέον, δώσαμε την αναλυτική έκφραση για την διαχωριστική επιφάνεια

συναρτήσει των φυσικών παραμέτρων του μοντέλου. Προκύπτει ότι, η διαχωριστική επιφάνεια σχηματίζει λεπτά κανάλια ακτινικής ροής κοντά στις γωνίες Bragg της περίθλασης. Αυτά τα κανάλια είναι υπεύθυνα για την συγκέντρωση των τροχιών στις διευθύνσεις των γωνιών Bragg.

3) Η ανάκλαση των κβαντικών τροχιών οφείλεται στην αλληλεπίδραση με τα συμπλέγματα κόμβου-υπερβολικού σημείου που σχηματίζονται κατά μήκος της διαχωριστικής επιφάνειας. Η μορφή της ροής γύρω από τα αυτά περιγράφεται αναλυτικά και είναι αντίστοιχη με αυτή προηγούμενων εργασιών ([40], [19], [41]). Συγκεκριμένα, η ευσταθής και ασταθής πολλαπλότητα του στάσιμου σημείου αναγκάζει τις τροχιές των σωματιδίων να κινηθούν σε συγκεκριμένες διευθύνσεις. Το μέγεθος των κόμβων υπολογίστηκε αναλυτικά στις περιοχές κοντά ή μακριά από τις γωνίες Bragg. Όπως δείξαμε, τα αναλυτικά αποτελέσματα συμπίπτουν με τον αριθμητικό υπολογισμό για το μέγεθος των συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου, το οποίο βρέθηκε να είναι μερικές τάξεις μεγαλύτερο στην περιοχή των γωνιών Bragg σε σχέση με την περιοχή μακριά από τις γωνίες Bragg. 4) Οι τροχιές de Broglie-Bohm υπολογίστηκαν αριθμητικά και μελετήσαμε λεπτομερώς την πορεία τους κατά την διάσχιση των καναλιών της διαχωριστικής επιφάνειας που αντιστοιχούν σε διαδοχικές γωνίες Bragg. Έτσι εξηγήθηκε η εικόνα περίθλασης με όρους κβαντικών τροχιών. Οι κβαντικές τροχιές εμφανίζουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά από αυτή των κλασικών τροχιών στο πρόβλημα της σκέδασης. Μια από τις βασικότερες διαφορές, είναι ότι οι τροχιές, με τη μεγαλύτερη αρχική απόσταση $R(0)$ από τον άξονα z , δηλαδή μεγαλύτερη παράμετρο κρούσης, σκεδάζονται σε μεγαλύτερες γωνίες θ .

5) Στο ίδιο πρόβλημα, μελετήσαμε επίσης τη σκέδαση τροχιών από κόμβους σε ένα μοντέλο που αντιστοιχεί σε μία προσέγγιση κυματοπακέτου. Μελετήσαμε τη δομή των κβαντικών ρευμάτων για το παραπάνω μοντέλο και δώσαμε θεωρητικούς υπολογισμούς για την μορφή και και την χρονική εξέλιξη της διαχωριστικής επιφάνειας. Επίσης δείξαμε πως και στην περίπτωση αυτή η διαχωριστική επιφάνεια σχηματίζει κανάλια σε κάθε γωνία Bragg, και οδηγεί σε συγκέντρωση των τροχιών σε συγκεκριμένες διευθύνσεις δημιουργώντας έτσι την εικόνα της περίθλασης.

6) Η ανάκλαση των τροχιών οφείλεται και πάλι όπως δείξαμε στην αλληλεπίδραση τους με τους κβαντικούς στροβίλους που σχηματίζονται γύρω από κάθε κόμβο. Δώσαμε παραδείγματα σχηματισμού δομής κόμβου-υπερβολικού σημείου, και υπολογίσαμε τη μορφή της ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας που με τη σειρά τους καθορίζουν τις διευθύνσεις προσέγγισης και απομάκρυνσης από το υπερβολικό σημείο.

7) Υπολογίσαμε την κατανομή πιθανοτήτων των χρόνων άφιξης σωματιδίων που ανιχνεύονται σε διάφορες γωνίες σκέδασης σε σχέση με το στόχο. Αντίθετα με την κλασική συμπεριφορά, τα σωματίδια που σκεδάζονται σε μεγαλύτερες γωνίες έχουν μικρότερο χρόνο άφιξης. Σε όλες τις περιπτώσεις, η διασπορά των χρόνων άφιξης καταλήγει να είναι $\sigma_t \sim v_0^{-1} \times \max l, D$, όπου v_0 είναι η μέση ταχύτητα των σωματιδίων. Προτείνουμε μια πειραματική αρχή προκειμένου να ελεγχθούν παρόμοιες προβλέψεις.

6.6 Γενικά συμπεράσματα και νέες ερευνητικές κατευθύνσεις

Ως γενική σύνοψη, στη παρούσα διατριβή ασχοληθήκαμε με δυο διαφορετικές κατηγορίες δυναμικών συστημάτων. Στο πρώτο μέρος μελετήσαμε δύο διαφορετικά αστρικά συστήματα και στο δεύτερο μέρος μερικές περιπτώσεις χαρακτηριστικών κβαντικών συστημάτων. Κοινός παρονομαστής και στις δύο κατηγορίες συστημάτων είναι η σκέδαση των θεωρούμενων τροχιών των σωμάτων που ανήκουν σε αυτά. Παρά την μεγάλη διαφορά στην τάξη μεγέθους, τη φύση αυτών των συστημάτων αλλά και τον φορμαλισμό στον οποίο βασίζεται η δυναμική τους περιγραφή, κατά τη μελέτη

τους διαπιστώσαμε πολλά παρόμοια χαρακτηριστικά που οφείλονται κυρίως στον κοινό χαρακτήρα του φαινομένου της σκέδασης. Έτσι είδαμε πώς μέσω των σκεδάσεων εισάγεται το χάος σε αυτού του είδους τα δυναμικά συστήματα και με ποιο τρόπο αυτές επηρεάζουν τη συνολική τους δυναμική εξέλιξη. Με τη βοήθεια αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων, υπολογίσαμε τα ποσοτικά χαρακτηριστικά του χάους σε σχέση με τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος για την κάθε περίπτωση.

Για την πραγματοποίηση των υπολογισμών χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές περιπτώσεις κοινές μέθοδοι και θεωρητικές έννοιες που προσαρμόστηκαν ανάλογα στην κάθε περίπτωση. Αυτό είναι ως ένα βαθμό αναμενόμενο από τη στιγμή που και για κβαντικά συστήματα βασιστήκαμε σε μια τροχιακή προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη θεωρία de Broglie-Bohm. Για παράδειγμα στην περίπτωση του ελλειπτικού γαλαξία χρειάστηκε να υπολογίσουμε τα τυπικά ολοκληρώματα για τις τροχιές προκειμένου να θεμελιώσουμε την ορθότητα του μοντέλου της “σφαίρας επιρροής της μελανής οπής”. Αντίστοιχα στα κβαντικά συστήματα κάναμε σε πολλές περιπτώσεις χρήση των αναπτυγμάτων σε σειρές όπως π.χ στην περίπτωση της σκέδασης δέσμης φορτισμένων σωματιδίων όπου για να βρούμε το μοντέλο της κυματοσυνάρτησης βασιστήκαμε στην προσέγγιση Born, ενώ επίσης χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα της κυματοσυνάρτησης προκειμένου να υπολογίσουμε το μέγεθος των συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου. Ένα ακόμη παράδειγμα μεθοδολογικής ομοιότητας στην μελέτη του χάους για τα παραπάνω φυσικά συστήματα είναι πως τόσο στη σκέδαση από τη μελανή οπή όσο και στη σκέδαση από τους κβαντικούς στροβίλους προσεγγίσαμε το πρόβλημα μέσω ενός πιο απλού μοντέλου που μας επέτρεψε την αναλυτική περιγραφή της σκέδασης διατηρώντας ταυτόχρονα τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά του φαινομένου. Έτσι στην περίπτωση του γαλαξία θεωρήσαμε το μοντέλο της “σφαίρας επιρροής της μελανής οπής” όπου δεχθήκαμε ότι η κίνηση μέσα στη σφαίρα γίνεται υπό την επίδραση μόνο του δυναμικού της μελανής οπής αγνοώντας το δυναμικό του γαλαξία. Αντίστοιχα στην περίπτωση της σκέδασης από κβαντικούς στροβίλους για την αναλυτική περιγραφή εργαστήκαμε στο σύστημα αναφοράς του κινούμενου κόμβου όπου το σύστημα εξισώσεων κίνησης μπορεί να θεωρηθεί με μικρό σφάλμα ως αυτόνομο.

Πέρα από τις ομοιότητες που προαναφέραμε, μπορούμε να εντοπίσουμε ωστόσο και ορισμένες χαρακτηριστικές διαφορές μεταξύ των υπό μελέτη συστημάτων. Πέρα από τη βασική διαφορά στην κλίμακα μεγέθους διαπιστώσαμε επίσης διαφορές στο ποσοστό του χάους ανάλογα με την περίπτωση. Έτσι, είδαμε ότι στην σκέδαση από τη μελανή οπή το χάος κυριαρχεί στη δυναμική του συστήματος καθώς η περιοχή στην οποία εκτείνεται η επιρροή της είναι σημαντική σε σχέση με το συνολικό μέγεθος του συστήματος. Λιγότερο χάος εμφανίζεται στην περίπτωση της σκέδασης από κινούμενους κόμβους στο μοντέλο του κβαντικού αναλόγου του αρμονικού ταλαντωτή και του συστήματος Hénon-Heiles καθώς η κίνηση των συμπλεγμάτων κόμβου-υπερβολικού σημείου στο χώρο και το μέγεθός τους είναι τέτοιο που επιτρέπει την ύπαρξη σημαντικού ποσοστού οργανωμένης συμπεριφοράς. Ακόμη λιγότερο είδαμε ότι είναι το χάος στην περίπτωση της σκέδασης της δέσμης φορτισμένων σωματιδίων, όπου οι κόμβοι έχουν πολύ μικρό μέγεθος σχέση με αυτό του συνολικού συστήματος. Ανεξάρτητα από το ποσοστό του χάους σε καθένα από τα παραπάνω συστήματα είδαμε ότι οι σκεδάσεις έχουν εξίσου σημαντική συνεισφορά στην διαμόρφωση των τροχιών του συστήματος. Έτσι ακόμη και στην τελευταία περίπτωση που το χάος είναι ελάχιστο, το συνολικό προφίλ των τροχιών καθορίζεται από τις σκεδάσεις με τα συμπλέγματα κόμβου-υπερβολικού σημείου.

Σαν γενική διαπίστωση θα μπορούσαμε να πούμε ότι για την ανάλυση των μη γραμμικών συστημάτων, όπως αυτά που μελετήσαμε, υπάρχουν κοινά “εργαλεία” που βοηθούν στη διερεύνηση τους όπως για παράδειγμα η μέθοδος των σειρών, η γραμμική ανάλυση, οι δείκτες χαοτικότητας, οι τομές Poincaré κ.λ.π.. Σε κάθε περίπτωση όμως η καλύτερη μέθοδος προσέγγισης του προβλήματος δεν είναι πάντοτε η ίδια. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την περίπτωση της μελέτης για τον

ελλειπτικό γαλαξία στο κεφάλαιο 2, όπου αρχικά προσπαθήσαμε να υπολογίσουμε τους χαοτικούς δείκτες με τη γραμμική ανάλυση γύρω από τις κεντρικές περιοδικές τροχιές χωρίς όμως ιδιαίτερα αποτελέσματα.

Τέλος θα μπορούσαμε να αναφέρουμε κάποιες νέες ερευνητικές κατευθύνσεις που προκύπτουν από την παρούσα εργασία.

1) Η μέθοδος που αναπτύξαμε για την μελέτη τη σκέδασης από τη μελανή οπή θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε άλλου είδους αστρικά συστήματα όπως για παράδειγμα αστρικά σμήνη ή αστεροειδής σε πλανητικά συστήματα.

2) Όσα είδαμε σχετικά με τη δυναμική συμπεριφορά των τροχιών γύρω από μια μελανή οπή πιθανότατα συσχετίζονται με τον εμπειρικό νόμο μεταξύ της μάζας της μελανής οπής και της κεντρική διασπορά ταχυτήτων στους κανονικούς ελλειπτικούς γαλαξίες ($M - \sigma$). Ο νόμος αυτός, γνωστός και ως νόμος Faber-Jackson για τις μελανές οπές, θεωρείται από τους περισσότερους ως αποτέλεσμα της διαδικασίας σχηματισμού της μελανής οπής στο κέντρο ενός ελλειπτικού γαλαξία. Ο τρόπος αυτός προσέγγισης του προβλήματος δεν έχει δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα μέχρι σήμερα. Θα ήταν ενδιαφέρον να αναζητηθεί η ερμηνεία του νόμου στα πλαίσια της δυναμικής επίδρασης που ασκεί η μελανή επιρροή στους αστέρες που βρίσκονται στην σφαίρα επιρροής της.

3) Είδαμε ότι ο αριθμός Lyapunov είναι ένας σημαντικός παράγοντας που σχετίζεται με την αέναη εξέλιξη των γαλαξιών. Ο άλλος σημαντικός παράγοντας είναι το ποσοστό των τροχιών που από τύπου κουτιού γίνονται χαοτικές. Έχοντας στη διάθεση μας και το μοντέλο της “σφαίρας επιρροής της μελανής οπής” θα μπορούσαμε σε μία πιθανή μελέτη να υπολογίσουμε το ποσοστό των τροχιών που μετατρέπονται σε χαοτικές, για μια δεδομένη αρχική κατανομή (τριαξονικότητα), σε σχέση με την μάζα της μελανής οπής και τις υπόλοιπες φυσικές παραμέτρους του συστήματος, οπότε να βρούμε συνολικά την ενεργό χαοτική ορμή του.

4) Στην περίπτωση των ραβδωτών γαλαξιών έχει διαπιστωθεί από μοντέλα προσομοιώσεων N-σωμάτων ότι η δημιουργία μελανής οπής στο κέντρο τους οδηγεί σταδιακά στην καταστροφή της ράβδου. Με βάση τα όσα αναφέραμε θα μπορούσε να γίνει μια αντίστοιχη μελέτη για τη συσχέτιση της χρονικής κλίμακας διάλυσης της ράβδου σε σχέση με τον δείκτη της χαοτικής.

5) Στο 4ο κεφάλαιο είδαμε ορισμένα παραδείγματα περιπτώσεων όπου η ύπαρξη τάξης παρεμποδίζει το φαινόμενο της κβαντικής χαλάρωσης. Μια πιθανή προοπτική για περαιτέρω έρευνα θα ήταν η προσπάθεια γενίκευσης αυτών των αποτελεσμάτων.

6) Εκτός από τη μελέτη του φαινομένου της σκέδασης φορτισμένων σωματιδίων από πυρήνες ατόμων και της κβαντικής χαλάρωσης θα είχε ενδιαφέρον να δει κανείς την εφαρμογή της τροχιακής προσέγγισης της κβαντικής μηχανικής στην περίπτωση του φαινομένου της σύραγγας (tunneling effect) και να συγκρίνει καταρχήν τα αποτελέσματα με αυτά της συνήθους κβαντικής θεωρίας.

7) Κατά μελέτη του φαινομένου της σκέδασης φορτισμένων σωματιδίου από μεταλλικούς στόχους περιγράψαμε μια πειραματική αρχή στην οποία θα μπορούσε να βασιστεί ένα πείραμα για τη μέτρηση των χρόνων άφιξης των φορτισμένων σωματιδίων στις διαφορετικές γωνίες σκέδασης. Το ίδιο πείραμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση του εγκάρσιου μήκους συμφωνίας φάσης της σκεδαζόμενης δέσμης σωματιδίων.

Παράρτημα

Παράρτημα Α΄

Οι συντελεστές των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων

Το δυναμικό μιας διδιάστατης ράβδου τύπου Ferrers σε καρτεσιανές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, γράφεται:

$$V_{bar}(x, y) = -\frac{105M_b}{96} \left(3(2W_{110}x^2y^2 - W_{120}x^4y^2 - W_{210}x^2y^4 - W_{100}y^2 + W_{020}x^4 + W_{200}y^4 - W_{010}x^2) \right. \\ \left. + W_{000} - W_{030}x^6 - W_{300}y^6 \right)$$

όπου

$$W_{000} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\phi, k), \quad W_{100} = \frac{2}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - c^2}} [F(\phi, k) - E(\phi, k)], \\ W_{001} = \frac{2}{b^2 - c^2} \sqrt{\frac{b^2 + l}{(a^2 + l)(c^2 + l)}} - \frac{2}{(b^2 - c^2)\sqrt{a^2 - c^2}} E(\phi, k), \\ W_{010} = \frac{2}{\Delta} - W_{100} - W_{001}, \quad W_{110} = \frac{W_{010} - W_{100}}{a^2 - b^2}, \quad W_{011} = \frac{W_{001} - W_{010}}{b^2 - c^2}, \\ W_{101} = -\frac{W_{100} - W_{001}}{a^2 - c^2}, \quad W_{200} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\Delta(a^2 + l)} - W_{110} - W_{101} \right), \\ W_{020} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\Delta(b^2 + l)} - W_{011} - W_{110} \right), \quad W_{120} = \frac{W_{020} - W_{110}}{a^2 - b^2}, \\ W_{201} = -\frac{W_{200} - W_{101}}{a^2 - c^2}, \quad W_{210} = \frac{W_{110} - W_{200}}{a^2 - b^2}, \quad W_{021} = \frac{W_{011} - W_{020}}{b^2 - c^2}, \\ W_{300} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{\Delta(a^2 + l)^2} - W_{210} - W_{201} \right), \quad W_{030} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{\Delta(b^2 + l)^2} - W_{021} - W_{120} \right),$$

και

$$\phi = \arcsin \left(\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + l}} \right), \quad \Delta = \sqrt{(a^2 + l)(b^2 + l)(c^2 + l)}, \quad k = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

με

$$l = 0 \quad \text{αν} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \leq 1$$
$$l = \frac{1}{2} \left(-(a^2 + b^2) + r^2 + \sqrt{[-(a^2 + b^2) + r^2]^2 + 4[-a^2b^2 + a^2x^2 + b^2y^2]} \right) \quad \text{αν} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} > 1$$

Οι συναρτήσεις $F(\phi, k)$, $E(\phi, k)$ είναι οι ελλειπτικές συναρτήσεις πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Παράρτημα Β΄

Υπολογισμός κυματοσυνάρτησης στην προσέγγιση επίπεδου κύματος

Θεωρούμε σωματίδια που αλληλεπιδρούν με τον φορτισμένο πυρήνα των ατόμων του στόχου μέσω ηλεκτροστατικών δυνάμεων. Ως ένα απλό μοντέλο αλληλεπίδρασης υιοθετούμε ένα δυναμικό Coulomb με “προάσπιση”:

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z e^2 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|/r_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (\text{B'.1})$$

(ϵ_0 = διηλεκτρική σταθερά του κενού), όπου Z είναι το φορτίο του πυρήνα, \mathbf{r}_j είναι η θέση του j th ατόμου στο πλέγμα και r_0 είναι μία σταθερά που αντιπροσωπεύει την ακτίνα προάσπισης, της οποίας η τιμή είναι της τάξης μεγέθους του ατόμου. Το συνολικό δυναμικό είναι το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (\text{B'.2})$$

Η κυματοσυνάρτηση ψ του προσπίπτοντος σωματιδίου μπορεί να αναλυθεί σε ιδιοσυναρτήσεις ϕ που είναι λύσεις της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης *Schrödinger*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_j) \phi = E \phi \quad (\text{B'.3})$$

όπου ϕ είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε ενέργεια $E > 0$ του εισερχόμενου σωματιδίου.

Για τη λύση της (B'.3), χρησιμοποιούμε την προσέγγιση Born. Η ϕ αναπτύσσεται ως

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots \quad (\text{B'.4})$$

όπου $\phi_0 = O(1)$, $\phi_1 = O(V)$, $\phi_2 = O(V^2)$ κ.λ.π.. Το ανάπτυγμα έχει ισχύ σε όλες τις περιοχές του χώρου όπου $V \ll E$.

Η μηδενικής τάξης εξίσωση γράφεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_0 = E \phi_0 \quad (\text{B'.5})$$

Η (B'.5) δίνει ένα εκφυλισμένο σύνολο λύσεων $\phi_{0,\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, για όλα τα κυματανύσματα \mathbf{k} που ικανοποιούν την $k \equiv |\mathbf{k}| = (2mE)^{1/2}/\hbar$. Επιλέγοντας μία από αυτές τις λύσεις, η πρώτη τάξης διόρθωση βρίσκεται λύνοντας την

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_{1,\mathbf{k}} + V\phi_{0,\mathbf{k}} = E\phi_{1,\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\phi_{1,\mathbf{k}}, \quad (\text{B'.6})$$

όπου

$$\phi_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{all\ space} d^3\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z e^2 e^{-|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j|/r_0}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j|} \right). \quad (\text{B'.7})$$

Η ολοκλήρωση μπορεί να περιοριστεί με μικρό σφάλμα, στην ένωση όλων των σφαιρών που ικανοποιούν την συνθήκη $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j| < \mu r_0$, (μ είναι ένας μικρός παράγοντας της τάξης της μονάδος). Επιπλέον, ενδιαφερόμαστε για την μορφή της συνάρτησης $\phi_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ στις θέσεις \mathbf{r} που ικανοποιούν την $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \equiv r \gg r_0$. Έτσι, κάνουμε την προσέγγιση

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} e^{ik(r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')} \quad (\text{όπου } \mathbf{n} \text{ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του } \mathbf{r})$$

(όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του \mathbf{r}) σε όρους του οποίου η εξίσωση (B'.7) παίρνει τη μορφή

$$\phi_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{r}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \left(\sum_{j=1}^N \frac{Z_1 Z e^2 \exp(-|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j|/r_0)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j|} \right)$$

ή

$$\phi_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \approx -\frac{Z_1 Z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{r}_j} \right) \int d^3\mathbf{y} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{y}} \frac{e^{-y/r_0}}{y} \quad (\text{B'.8})$$

όπου $\mathbf{k}_n = k\mathbf{n}$. Εφόσον

$$\int_{all\ space} d^3\mathbf{y} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{y}} \frac{e^{-y/r_0}}{y} = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_n|^2 + 1/r_0^2} = \frac{4\pi}{4k^2 \sin^2(\theta/2) + 1/r_0^2}$$

η τελική μορφή των ιδιοσυναρτήσεων ϕ της (B'.3) είναι

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{Z_1 Z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{r}_j} \right) \frac{1}{2k^2 \sin^2(\theta/2) + 1/2r_0^2}. \quad (\text{B'.9})$$

Οι χρονοεξαρτημένες ιδιοσυναρτήσεις είναι $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\hbar k^2 t/2m)\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. Η εξίσωση (B'.9) συμπεριλαμβάνει τον όρο της συνάρτησης Fraunhofer $\left(\sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{r}_j} \right)$ συναρτήσει του οποίου μπορεί να εκφραστεί οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση - λύση του προβλήματος.

Για τον εισερχόμενο όρο της κυματοσυνάρτησης υιοθετούμε μια υπέρθεση ιδιοσυναρτήσεων

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \tilde{c}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B'.10})$$

με κατάλληλους συντελεστές Fourier $\tilde{c}(\mathbf{k})$. Οι συντελεστές $\tilde{c}(\mathbf{k})$ επιλέγονται έτσι ώστε η κυματοσυνάρτηση της εισερχόμενης δέσμης στο χρόνο $t = 0$ να αντιστοιχεί σε επίπεδο κύμα κατά μήκος του άξονα z , διαμορφωμένο με ένα κανονικό προφίλ στην κάθετη διεύθυνση

$$\psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \times \exp\left(-\frac{R^2}{2D^2} + i(k_0 z)\right). \quad (\text{B'.11})$$

Θεωρώντας ότι τα σωματίδια είναι μονοενεργειακά, το k_0 αναπαριστά την (θεωρούμενη ως μοναδική) τιμή του κυματάρθρου στην κατεύθυνση z οι συντελεστές $\tilde{c}(\mathbf{k})$ δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{r} \psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t = 0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}\sigma_{\perp}} \exp\left(-\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\sigma_{\perp}^2}\right) \delta(k_z - k_0) \end{aligned} \quad (\text{B'.12})$$

όπου $\sigma_{\perp} = D^{-1}$. Αντικαθιστώντας την (B'.12) στην (B'.10), και χρησιμοποιώντας την (B'.9), η κυματοσυνάρτηση σε κάθε χρονική στιγμή t γράφεται:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t) + \psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B'.13})$$

όπου

$$\psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\pi^{1/2}\sigma_{\perp}} e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\sigma_{\perp}^2}} \delta(k_z - k_0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \hbar k^2 t/2m)} \quad (\text{B'.14})$$

και

$$\begin{aligned} \psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{Z_1 Z e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{2 \sin^2(\theta/2)} \\ &\times \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\sigma_{\perp}} e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\sigma_{\perp}^2} - \frac{i\hbar k^2 t}{2m}} \delta(k_z - k_0) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{r}_j} \right) \frac{1}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B'.15})$$

Στην τελευταία έκφραση έχουμε αγνοήσει για απλότητα τον όρο $1/r_0^2$ που εμφανίζεται στον παρονομαστή, πράγμα που ισχύει όσο η τιμή του k_0 είναι μεγαλύτερη από το $1/r_0$ κατά μία ή περισσότερες τάξεις μεγέθους.

Από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην σχέση (B'.14) παίρνουμε για τον εισερχόμενο όρο:

$$\psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \left(\frac{D^2}{D^2 + i\hbar t/m} \right) e^{-\frac{R^2}{2(D^2 + i\hbar t/m)} + i(k_0 z - k_0^2 \hbar t/2m)}. \quad (\text{B'.16})$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (B'.15) αναπτύσσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα σε δυνάμεις του $(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}/k_0 = O(\sigma_{\perp}/k_0)$. Ξεκινώντας από την εξίσωση (B'.15), η εξερχόμενη κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} \psi_{outgoing} &= \frac{P}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \frac{\tilde{c}(\mathbf{k})}{2k^2} \frac{e^{i(kr - \hbar k^2 t/2m)}}{r \sin^2(\theta/2)} \sum_{j=1}^N e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{r}_j} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{P}{2r \sin^2(\theta/2)} \times \\ &\sum_{j=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z \tilde{c}(\mathbf{k}) e^{i(kr - \hbar k^2 t/2m)} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_n)\cdot\mathbf{r}_j} \frac{1}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B'.17})$$

όπου

$$P = \left(-\frac{m}{\hbar^2}\right) \frac{Z_1 Z e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad \mathbf{n} \equiv (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) .$$

Οι συντελεστές Fourier $\tilde{c}(\mathbf{k}) = (\pi^{1/2}\sigma_\perp)^{-1} e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2\sigma_\perp^2}} \delta(k_z - k_0)$ έχουν οριστεί στην εξίσωση (B'.12). Τα αθροίσματα στην (B'.15) αντιστοιχούν σε κάθε άτομο $j = 1, \dots, N$ του περιθλώντος κρυστάλλου. Για το τριπλό ολοκλήρωμα στο τελευταίο άθροισμα έχουμε

$$I_j \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z \tilde{c}(\mathbf{k}) e^{i(kr - \hbar k^2 t/2m)} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{r}_j} \frac{1}{k^2} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \left(\frac{1}{\pi^{1/2}\sigma_\perp} \frac{e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2\sigma_\perp^2} - \frac{i\hbar(k_x^2+k_y^2+k_0^2)t}{2m} + i[(k_x x_j + k_y y_j + k_0 z_j) - (k_x^2+k_y^2+k_0^2)^{1/2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j - r)]}}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2} \right) .$$

Εξαιτίας του εκθετικού παράγοντα $e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2\sigma_\perp^2}}$, η συνεισφορά στο συνολικό ολοκλήρωμα προέρχεται κυρίως από τις τιμές των k_x, k_y σε ένα δίσκο γύρω από το $(0, 0)$, ακτίνας ίσης με μερικές φορές το σ_\perp . Για $\sigma_\perp \ll k_0$ έχουμε την προσέγγιση

$$I_j = \frac{e^{i[k_0(z_j - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j + r) - \hbar k_0^2 t/2m]}}{k_0^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{1}{\pi^{1/2}\sigma_\perp} e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2\sigma_\perp^2}} e^{i[(k_x x_j + k_y y_j) - \hbar(k_x^2+k_y^2)t/2m]} \right]$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{\sigma_\perp^2}{k_0^2}\right) \right) .$$

ή

$$I_j = \frac{e^{i(k_0 r - \hbar k_0^2 t/2m)}}{\pi^{1/2} k_0^2} \times \exp\left(ik_0(2z_j \sin^2(\theta/2) - x_j \sin\theta \cos\phi - y_j \sin\theta \sin\phi)\right)$$

$$\times \left(\frac{2\pi D}{D^2 + i\hbar t/m}\right) \exp\left(-\frac{x_j^2 + y_j^2}{2(D^2 + i\hbar t/m)}\right) \quad (\text{B'.18})$$

επειδή $\sigma_\perp = D^{-1}$. Με αντικατάσταση της έκφρασης (B'.18) για το τριπλό ολοκλήρωμα I_j που εμφανίζεται στην σχέση (B'.15) έχουμε τελικά:

$$\psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{D}{D^2 + i\hbar t/m}\right) \frac{Z_1 Z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{k_0^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{e^{i(k_0 r - \hbar k_0^2 t/2m)}}{r} S_{eff}(k_0; \mathbf{r}) . \quad (\text{B'.19})$$

όπου $S_{eff}(k_0; \mathbf{r})$

$$S_{eff}(k_0; \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \left[\exp\left(-\frac{x_j^2 + y_j^2}{2(D^2 + i\hbar t/m)}\right) \right.$$

$$\left. \times \exp\left(ik_0(2z_j \sin^2(\theta/2) - x_j \sin\theta \cos\phi - y_j \sin\theta \sin\phi)\right) \right] . \quad (\text{B'.20})$$

είναι η “ενεργός συνάρτηση Fraunhofer”.

B'.1 Συνάρτηση Fraunhofer στην προσέγγιση επίπεδου κύματος

Για τον υπολογισμό της $S_{eff}(k_0; \mathbf{r})$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: *i*) $k_0 a \sim 1$ και *ii*) $k_0 a \gg 1$.

B'.1.1 $k_0 a \sim 1$

Θεωρούμε την απλούστερη δυνατή διάταξη πυρήνων στο μεταλλικό φύλλο δηλαδή ένα κυβικό πλέγμα. Προκειμένου να λάβουμε υπόψη τυχαίες διακυμάνσεις λόγω, π.χ θερμικού θορύβου, διαταράσσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες θέσης κάθε πυρήνα με ένα τυχαίο αριθμό με ομοιόμορφη κατανομή μέσα στο διάστημα $[-\Delta a/2, \Delta a/2]$, όπου $\Delta a \ll a$. Οι θέσεις των πυρήνων είναι:

$$\mathbf{r}_j = (n_x, n_y, n_z)a + \Delta a \mathbf{u}_j(t), \quad (\text{B'.21})$$

$$(n_x, n_y, n_z) \in \left(-\frac{N_\perp}{2}, \frac{N_\perp}{2}\right) \times \left(-\frac{N_\perp}{2}, \frac{N_\perp}{2}\right) \times \left(-\frac{N_z}{2}, \frac{N_z}{2}\right)$$

όπου οι μεταβλητές $\mathbf{u}_j \equiv (u_{j,x}, u_{j,y}, u_{j,z})$ λαμβάνονται από μία τυχαία γεννήτρια με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-0.5, 0.5]$. Ο αριθμός των ατόμων N_z στη διεύθυνση του άξονα z είναι $N_z = [d/a]$. Απ' την άλλη, ο αριθμός των ατόμων N_\perp που πρέπει να συμπεριληφθούν στον υπολογισμό σε οποιαδήποτε κάθετη διεύθυνση προσδιορίζεται από την τιμή του D . Από τον εκθετικό παράγοντα της εξίσωσης (B'.20) βρίσκουμε, $N_\perp \sim D/a$. Ένας πιο ακριβής υπολογισμός της τιμής του N_\perp , γίνεται αριθμητικά με τον τρόπο που θα δείξουμε στη συνέχεια.

Θεωρώντας το N_\perp γνωστό, και προσεγγίζοντας τον εκθετικό συντελεστή στην εξίσωση (B'.20) με ≈ 1 για όλα τα $|n_x| < N_\perp/2$ ή $|n_y| < N_\perp/2$, η τιμή της συνάρτησης Fraunhofer μπορεί να προσδιοριστεί από την

$$S_{eff}(k_0; \mathbf{r}) \approx \sum_{n_z/2=-N_z/2}^{N_z} e^{2ik_0(n_z a + \Delta a u_{nz}) \sin^2(\theta/2)} \times \sum_{n_x=-N_\perp/2}^{N_\perp/2} \sum_{n_y=-N_\perp/2}^{N_\perp/2} e^{-(n_x a + \Delta a u_{nx}) \sin \theta \cos \phi - (n_y a + \Delta a u_{ny}) \sin \theta \sin \phi} . \quad (\text{B'.22})$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (B'.22), η συνάρτηση Fraunhofer εξαρτάται και από τις δύο γωνίες θ και ϕ . Όμως, μπορούμε ήδη να καταλήξουμε σε ένα αξιωματικό μοντέλο (ανεξάρτητο του ϕ), από την (B'.22) τυχαιοποιώντας την τιμή του ϕ σε ομάδες όρων του αθροίσματος στην (B'.22), μια διαδικασία που μιμείται την κατάσταση που εμφανίζεται στα πολυκρυσταλλικά υλικά. Εφόσον το ϕ εμφανίζεται μόνο στο διπλό άθροισμα του δεξιού μέλους της (B'.22), η μέση τιμή του αθροίσματος S_{xy} είναι της τάξης του N_\perp . Αντικαθιστώντας το S_{xy} στη θέση του διπλού αθροίσματος η εξίσωση (B'.22) απλοποιείται παίρνοντας τη μορφή

$$S_{eff}(\theta) \approx S_{xy} \sum_{n_z=-N_z/2}^{N_z/2} \exp(i2k_0(n_z a + \Delta a u_{nz}) \sin^2(\theta/2)) \quad (\text{B'.23})$$

όπου η u_{nz} είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-0.5, 0.5]$. Οι διαδοχικές γωνίες Bragg θ_q $q = 0, 1, 2, \dots$ ορίζονται από την σχέση

$$\sin^2(\theta_q/2) = \frac{q\pi}{k_0 a} . \quad (\text{B'.24})$$

Εάν μηδενίσουμε το θόρυβο ($u_{n_z} = 0$), η μορφή του S_{eff} κοντά σε μία γωνία θ_q εξάγεται από το μικρότερης τάξης ανάπτυγμα της (B'.24) ως προς το $(\theta - \theta_q)$:

$$S_{q,eff}(\theta) \approx S_{xy} \sum_{n_z=-N_z/2}^{N_z/2} e^{ik_0 n_z a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)} \approx S_{xy} \int_{n_z=-N_z/2}^{N_z/2} e^{ik_0 n_z a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)} dn_z$$

ή

$$S_{q,eff}(\theta) \approx S_{xy} \frac{2 \sin [k_0 N_z a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)/2]}{k_0 a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)}. \quad (B'.25)$$

Η μέγιστη τιμή του $S_{q,eff}(\theta)$ προκύπτει για $\theta = \theta_q$ όπου $S_{q,eff}(\theta_q) = S_{xy} N_z$, όπου το εύρος του γραφήματος της $S_{q,eff}(\theta)$ γύρω από το κεντρικό μέγιστο δίνεται από την απόσταση που χωρίζει τους δύο κοντινότερους μηδενισμούς

$$\Delta\theta_q = \frac{2\pi}{k_0 N_z a \sin(\theta_q)}. \quad (B'.26)$$

Λαμβάνοντας υπόψη το θόρυβο, η απόσβεση των μεγίστων μπορεί να περιγραφεί από ένα παράγοντα Debye-Waller ([103]), μετατρέποντας την (B'.25) στην

$$S_{q,eff}(\theta) \approx S_{xy} \exp\left(-\frac{1}{2}4k_0^2 \sin^4(\theta/2)\sigma_a^2\right) \frac{2 \sin [k_0 N_z a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)/2]}{k_0 a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)} \quad (B'.27)$$

(επί μια τυχαία φάση $e^{i\delta}$; η οποία σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις λαμβάνεται $\delta = \pi$). Η διασπορά σ_a είναι ίση με το $\Delta a \times$ τη διασπορά του u_{n_z} γύρω από το μέσο $\langle u_{n_z} \rangle = 0$, ή

$$\sigma_a = \frac{\Delta a}{2\sqrt{3}}. \quad (B'.28)$$

Η εξίσωση (B'.27) δίνει την μορφή της συνάρτησης Fraunhofer τοπικά, πολύ κοντά στις γωνίες Bragg. Η συνολική σύμφωνη συνεισφορά στη συνάρτηση Fraunhofer είναι το άθροισμα των όρων όπως ο (B'.27) πάνω σε όλες τις γωνίες Bragg:

$$S_{coherent}(\theta) \approx S_{xy} \sum_{q=0}^{q_{max}} \exp\left(-\frac{1}{2}4k_0^2 \sin^4(\theta/2)\sigma_a^2\right) \frac{2 \sin [k_0 N_z a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)/2]}{k_0 a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)} \quad (B'.29)$$

όπου q_{max} είναι ο συνολικός αριθμός των γωνιών Bragg. Σε αυτό πρέπει να προσθέσουμε τον όρο διάχυσης που προέρχεται από το άθροισμα τυχαίων φάσεων μακριά από τις γωνίες Bragg $S_{diffuse} \sim N_z^{1/2}$, σταθμισμένο από τον παράγοντα Debye-Waller $(1 - e^{-\frac{1}{2}4k_0^2 \sin^4(\theta/2)\sigma_a^2})$. Έτσι, ένα τελικό μοντέλο για την συνάρτηση Fraunhofer γράφεται:

$$S_{eff}(\theta) = S_{xy} \left[\sum_{q=0}^{q_{max}} e^{-\frac{1}{2}4k_0^2 \sin^4(\theta/2)\sigma_a^2} \frac{2 \sin [k_0 N_z a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)/2]}{k_0 a \sin(\theta_q)(\theta - \theta_q)} + (1 - e^{-\frac{1}{2}4k_0^2 \sin^4(\theta/2)\sigma_a^2}) C_{diffuse} \sqrt{N_z} \right] \quad (B'.30)$$

όπου $C_{diffuse}$ είναι μία $O(1)$ σταθερά προσαρμογής (fitting constant) η οποία ρυθμίζει την καλύτερη δυνατή σύμπτωση της σχέσης (B'.30) στην αριθμητικά υπολογισμένη συνάρτηση Fraunhofer. Από την (B'.30), προκύπτει ότι η απόσβεση των μεγίστων για τιμές των παραμέτρων όπως στο κεφάλαιο 5 συντελείται σε μια γωνία $\theta_{th} \simeq 0.8rad$, πέραν της οποίας, ο δεύτερος όρος της (B'.30) γίνεται μεγαλύτερος από τον πρώτο όρο.

B'.1.2 $k_0a \gg 1$

Για την δεύτερη οριακή περίπτωση $k_0a \gg 1$ ο παράγοντας *Debye – Waller* της εξίσωσης (B'.30) τείνει στη μονάδα με εξαίρεση τις αγνοήσιμα μικρές γωνίες θ . Έτσι, η εξίσωση (B'.30) γράφεται στην απλή μορφή $S_{eff} \rightarrow N_z^{1/2} S_{xy} = const$. Δηλώνοντας ως $N_{\perp,eff}$ την τιμή του N_{\perp} πέρα από την οποία S_{xy} σταθεροποιείται, έχουμε τον υπολογισμό $|S_{eff}| \sim N_{eff}^{1/2}$ όπου $N_{eff} = N_z N_{\perp,eff}^2$. Απ' την άλλη, αν ρ είναι η αριθμητική πυκνότητα των ατόμων, και d το πάχος του φύλλου, έχουμε $a \propto \rho^{-1/3}$, $N_z = d/a$, $N_{\perp,eff} \propto D/a$. Έτσι

$$\langle |S_{eff}| \rangle \propto N_{\perp,eff} N_z^{1/2} \propto \frac{Dd^{1/2}}{a^{3/2}} = C\rho^{1/2} Dd^{1/2} , \quad (B'.31)$$

όπου C είναι μία σταθερά αναλογίας τάξης $O(1)$.

Παράρτημα Γ'

Συνάρτηση Fraunhofer στην προσέγγιση κυματοπακέτου

Θεωρούμε πάλι ότι δυναμικό αλληλεπίδρασης των σωματιδίων με το δίνεται από τη σχέση (B'.2). Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Born βρίσκουμε μία προσεγγιστική φόρμουλα για το $\phi_{\mathbf{k}}$, η οποία γράφεται

$$\phi_{\mathbf{k}} = \phi_{0,\mathbf{k}} + \phi_{1,\mathbf{k}} + \phi_{2,\mathbf{k}} + \dots \quad (\Gamma'.1)$$

Για τον υπολογισμό μας είναι αρκετοί οι δύο πρώτοι όροι της $\phi_{\mathbf{k}} \simeq$. Ο προσδιορισμός τους μπορεί να γίνει μέσω της σχέσης:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_{n,\mathbf{k}} + V \phi_{n-1,\mathbf{k}} = E \phi_{n,\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \phi_{n,\mathbf{k}} \quad (\Gamma'.2)$$

Από την (Γ'.2) για $n = 1$ βρίσκουμε:

$$\phi_{1,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{all\ space} d^3\mathbf{r}' \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z e^2 e^{-|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j|/r_0}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j|} \right) \quad (\Gamma'.3)$$

Το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (Γ'.3) μπορεί να υπολογιστεί μέσω των συνήθων προσεγγίσεων της θεωρίας σκέδασης:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{Z_1 Z e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| (2k^2 \sin^2(\Delta\theta_j/2) + 1/2r_0^2)} \right) \quad (\Gamma'.4)$$

όπου $\Delta\theta_j$ υποδηλώνει τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{k} και $\mathbf{r}-\mathbf{r}_j$.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (Γ'.4) στην εξίσωση (B'.10) έχουμε

$$\psi(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \int d^3\mathbf{k} \tilde{c}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\hbar k^2 t/2m} \right. \\ \left. - \frac{Z_1 Z e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \int d^3\mathbf{k} \tilde{c}(\mathbf{k}) \left(\sum_{j=1}^N \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| (2k^2 \sin^2(\Delta\theta_j/2) + 1/2r_0^2)} \right) e^{-i\hbar k^2 t/2m} \right\} \quad (\Gamma'.5)$$

Οι συντελεστές $\tilde{c}(\mathbf{k})$ προσδιορίζονται από το μετασχηματισμό Fourier της αρχικής κυματοσυνάρτησης $\psi(\mathbf{r}, t = 0)$. Στην προσέγγιση κυματοπακέτου, η αρχική κυματοσυνάρτηση είναι εντοπισμένη γύρω από την πηγή, και επομένως μακριά από το στόχο. Ως εκ τούτου $\psi(\mathbf{r}, t = 0) \simeq \psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t = 0)$, όπου το $\psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t = 0)$ είναι ένα κυματοπακέτο που κινείται στην διεύθυνση του άξονα z προς τον στόχο με ταχύτητα v_0 . Ένα γκαουσιανό κυματοπακέτο αυτής της μορφής αντιστοιχεί (στο χώρο των ορμών) στην επιλογή

$$\tilde{c}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi^{1/2}\sigma_{\perp}} \frac{1}{\pi^{1/4}\sigma_{\parallel}^{1/2}} \exp\left(-\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\sigma_{\perp}^2}\right) \exp\left(-\frac{(k_z - k_0)^2}{2\sigma_{\parallel}^2} - ik_z z_0\right). \quad (\Gamma'.6)$$

Στην (Γ'.6), (k_x, k_y, k_z) είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του \mathbf{k} , $z_0 = -l_0$ είναι η αρχική θέση του κέντρου του κυματοπακέτου κατά μήκος του άξονα z , και $k_0 = mv_0/\hbar$. Οι ποσότητες $\sigma_{\parallel}, \sigma_{\perp}$ είναι η διαμήκης και εγκάρσια διασπορά του κυματοπακέτου στο χώρο των ορμών. Αυτές αντιστοιχούν σε διασπορές στο χώρο των θέσεων $l = \sigma_{\parallel}^{-1}$ και $D = \sigma_{\perp}^{-1}$. Η εξίσωση (Γ'.5) παίρνει τώρα τη μορφή:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{ingoing}(\mathbf{r}, t) + \psi_{outgoing}(\mathbf{r}, t) \quad (\Gamma'.7)$$

όπου

$$\psi_{ingoing} = B(t) \exp\left(-\frac{R^2}{2(D^2 + \frac{i\hbar t}{m})} - \frac{(z + l_0 - \frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2(l^2 + \frac{i\hbar t}{m})} + ik_0 z\right) \quad (\Gamma'.8)$$

με

$$B(t) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{D}{D^2 + i\hbar t/m}\right) \left(\frac{l}{l^2 + i\hbar t/m}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{i\hbar k_0^2}{2m}t\right).$$

Η συνάρτηση $\psi_{outgoing}$ αντιστοιχεί στο δεύτερο ολοκλήρωμα στην εξίσωση (Γ'.5). Μια αναλυτική έκφραση γι' αυτή τη συνάρτηση μπορεί να βρεθεί μόνο υιοθετώντας μερικές ακόμη προσεγγίσεις. Πρώτον, θεωρούμε ταχέως κινούμενα κυματοπακέτα, για τα οποία ισχύει $k_0 \gg \max(\sigma_{\perp}, \sigma_{\parallel})$ καθώς επίσης και $k_0 \gg 1/r_0$. Έτσι, στον παρανομαστή του δεύτερου ολοκληρώματος της σχέσης (Γ'.5): *i*) ο όρος $1/2r_0^2$ μπορεί να αγνοηθεί και *ii*) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $1/k^2 \simeq 1/k_0^2$. Δεύτερον, σε όλες τις αποστάσεις $r \gg r_j$ μπορούμε να θεωρούμε ότι οι γωνίες $\Delta\theta_j$ είναι περίπου ίσες μεταξύ τους και ίσες με την γωνία θ (η οποία είναι ίση με τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{r} και $\mathbf{k}_0 = (0, 0, k_0)$). Τέλος, θέτουμε $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \approx r - \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + r_j^2/(2r)$ στο εκθετικό μέρος της (Γ'.5), όπου $\mathbf{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ (αυτό είναι απαραίτητο προκειμένου να διατηρήσουμε όλους τους όρους που η φάση τους έχει ουσιωδώς μη μηδενική τιμή), ενώ θέτουμε $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \approx r$ στον παρονομαστή των ολοκληρωμάτων (Γ'.5). Χρησιμοποιώντας αυτές τις προσεγγίσεις, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \psi_{outgoing} &\approx B(t) \frac{Z_1 Z e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 2k_0^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \\ &\times \sum_{j=1}^N \left[\exp(ik_0[-\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + r_j^2/(2r)]) \right. \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{R_j^2}{2(D^2 + \frac{i\hbar t}{m})} - \frac{(r + l_0 - v_0 t - \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + \frac{r_j^2}{2r})^2}{2(l^2 + \frac{i\hbar t}{m})}\right) \right] \end{aligned} \quad (\Gamma'.9)$$

όπου $v_0 = \hbar k_0/m$ αναπαριστά τη μέση ταχύτητα ενός σωματιδίου με κυμαριθμό k_0 .

Η ποσότητα $S_{eff}(k_0; \mathbf{r})$ σε αναλογία με το όριο περίθλασης μακρινού πεδίου στην κυματική οπτική ([44]) δίνεται από τη σχέση:

$$S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N \left[\exp(ik_0(-\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + r_j^2/(2r))) \exp\left(-\frac{R_j^2}{2(D^2 + \frac{i\hbar t}{m})} - \frac{(r + l_0 - v_0 t - \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + \frac{r_j^2}{2r})^2}{2(l^2 + \frac{i\hbar t}{m})}\right)\right] \quad (\Gamma'.10)$$

Θεωρώντας και πάλι το απλούστερο δυνατό παράδειγμα κυβικής κρυσταλλικής δομής του στόχου που περιγράψαμε στο παράρτημα Γ' και διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις: (i) την περίπτωση που το μήκος συμφωνίας φάσης στη διεύθυνση διάδοσης l είναι μεγαλύτερο από το εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης D ($l \gg D \gg a$) και (ii) την περίπτωση που το μήκος συμφωνίας φάσης στη διεύθυνση διάδοσης l είναι μικρότερο από το εγκάρσιο μήκος συμφωνίας φάσης D ($D \gg l \gg a$).

Γ'.1 $l \gg D \gg a$

Όταν $l \gg D$, ένα απλό μοντέλο του αθροίσματος στην εξίσωση (Γ'.10) είναι δυνατό να παραχθεί για όλες τις αποστάσεις όπου $r > D$. Αγνοώντας πρώτα τις διακυμάνσεις των θέσεων στην κρυσταλλική αλυσίδα (Β'.21) (δηλαδή θέτοντας $\Delta a = 0$), έχουμε $r \gg |-\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + \frac{r_j^2}{2r}|$ απ' όπου προκύπτει ότι

$$S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) \approx \exp\left(-\frac{(r + l_0 - v_0 t)^2}{2(l^2 + i\hbar t/m)}\right) \times \sum_{n_x=-N_\perp/2}^{N_\perp/2} \sum_{n_y=-N_\perp/2}^{N_\perp/2} \exp\left(ik_0\left[-an_x \sin \theta \cos \phi - an_y \sin \theta \sin \phi + \frac{n_x^2 a^2 + n_y^2 a^2}{2r}\right]\right) \times \sum_{n_z=-N_z/2}^{N_z/2} \exp\left(ik_0\left[(1 - \cos \theta)n_z a + \frac{n_z^2 a^2}{2r}\right]\right) \quad (\Gamma'.11)$$

Για μία τυχαία επιλογή των k_0, θ, ϕ , ο συνολικός αριθμός των ατόμων που συνεισφέρουν στο άθροισμα της εξίσωσης (Γ'.11) είναι τάξης μεγέθους $N \sim N_\perp^2 N_z = D^2 d/a^3$. Επιπλέον, οι τριγωνομετρικοί παράγοντες δίνουν μία τυχαία διαφορά φάσεων. Έτσι το συνολικό άθροισμα είναι τάξης $N^{1/2}$, δηλαδή

$$S_{eff} \sim Dd^{1/2}/a^{3/2} \exp[-(r + l_0 - v_0 t)^2/(2(l^2 + i\hbar t/m))] \quad .$$

που θα ονομάζεται, από εδώ και στο εξής, “όρος διάχυσης” της συνάρτησης Fraunhofer. Χρησιμοποιώντας αυτό τον όρο ο ξεπεραζόμενος όρος της κυματοσυνάρτησης γράφεται τελικά

$$\psi_{outgoing} \simeq \frac{B(t)Z_1 Z e^2 m D d^{1/2} \rho^{3/2}}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} \exp\left(-\frac{(r + l_0 - v_0 t)^2}{2(l^2 + \frac{i\hbar t}{m})}\right) f(r, \theta) e^{ik_0 r} \quad (\Gamma'.12)$$

όπου $\rho = a^{-3}$ είναι η αριθμητική πυκνότητα των ατόμων στο στόχο.

Το μοντέλο αυτό πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα (Γ'.12) κοντά σε συγκεκριμένες τιμές γωνιών καθώς εκεί οι φάσεις του αθροίσματος στην σχέση (Γ'.11) προστίθενται ενισχυτικά. Η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί στη συνέχεια.

Γ'.1.1 $l \gg D \gg a$ κοντά στις γωνίες Bragg

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου οι εμφάνιση των γωνιών Bragg οδηγεί σε αξιωματική περιθλαστική εικόνα. Το διπλό άθροισμα για τα n_x, n_y στην εξίσωση (Γ'.10) θεωρείται ως ένα άθροισμα όρων με τυχαίες φάσεις, ενώ επιτρέπουμε την άθροιση σε συμφωνία φάσης των όρων στο δεύτερο άθροισμα της (Γ'.10). Έχουμε τότε:

$$S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) \simeq (D/a) e^{-\frac{(r+l_0-v_0t)^2}{2(i^2+\frac{\hbar t}{m})}} \sum_{j=1}^N e^{ik_0(-\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} + z_j + z_j^2/(2r))} . \quad (\Gamma'.13)$$

Στο άθροισμα στο δεξιό μέλος της (Γ'.13), η συνεισφορά προέρχεται κύρια από τα άτομα των οποίων η συνιστώσα z ικανοποιεί τη συνθήκη $k_0 z_j^2/2r < 1$. Οι όροι σε συμφωνία φάσης εμφανίζονται στις γωνίες Bragg

$$\sin^2(\theta_q/2) = \frac{q\pi}{k_0 a}, \quad q = 1, 2, \dots, q_{max} . \quad (\Gamma'.14)$$

Αναπτύσσοντας τους όρους στη φάση της S_{eff} που εξαρτώνται από τη γωνία θ γύρω από τη γωνία Bragg παίρνουμε

$$S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) \sim (D/a) \sum_{n_z=-n_{z_0}}^{n_{z_0}} (D/a) e^{ik_0[\sin \theta_q(\theta-\theta_q)n_z a + \frac{n_z^2 a^2}{2r}]} \quad (\Gamma'.15)$$

όπου $n_{z_0} = [(1/a)(\frac{r}{k_0})^{1/2}]$. Εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία του πλέγματος του φύλλου στην διεύθυνση z το άθροισμα στην εξίσωση (Γ'.15) μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) \sim 2(D/a)(1/a) \left[\int_0^{u_{max}} du e^{\frac{ik_0 u^2}{2r}} - \frac{1}{2} \int_0^{u_{max}} du e^{\frac{ik_0 u^2}{2r}} k_0^2 \sin^2 \theta_q (\theta - \theta_q)^2 u^2 \right] \quad (\Gamma'.16)$$

όπου $u_{max} \sim (r/k_0)^{1/2}$. Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης σφάλματος. Μία ποιοτική προσέγγιση της συμπεριφοράς του μπορεί να γίνει με την βοήθεια της $e^{\frac{ik_0 u^2}{2r}} \simeq 1 + \frac{ik_0 u^2}{2r}$, σύμφωνα με την οποία προκύπτει ότι $\int_0^{u_{max}} du e^{\frac{ik_0 u^2}{2r}} \simeq e^{\frac{ik_0 u_{max}^2}{2r}} (u_{max} - \frac{1}{3} \frac{ik_0}{r} u_{max}^3)$ και $\int_0^{u_{max}} du e^{\frac{ik_0 u^2}{2r}} u^2 = -\frac{1}{3} u_{max}^3 e^{\frac{ik_0 u_{max}^2}{2r}}$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (Γ'.16) βρίσκουμε

$$S_{eff}(k_0, \mathbf{r}, t) \sim 2(D/a)(1/a) e^{\frac{ik_0 u_{max}^2}{2r}} \left[u_{max} - \frac{1}{3} \frac{ik_0}{r} u_{max}^3 + \frac{1}{2} k_0^2 \sin^2 \theta_q (\theta - \theta_q)^2 u_{max}^3 \right] . \quad (\Gamma'.17)$$

Γ'.2 $D \gg l \gg a$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μεσημβρινό επίπεδο θέτοντας $\phi = 0$. Ορίζουμε $\xi = r + l_0 - v_0 t$ και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $u = -x \sin \theta + (x^2 + y^2)/(2r)$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Θεωρώντας ξανά μία τυχαία επιλογή του k_0, θ , και αγνοώντας την ποσότητα $i\hbar t/m$, για μια δοσμένη τιμή του ξ το άθροισμα για τα διάφορα n_x, n_y στην εξίσωση (Γ'.10) μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα στην περιοχή τιμών των (n_x, n_y) τέτοιο ώστε τα $u(n_x, n_y)$ να ανήκουν σε μία σφαίρα ακτίνας l γύρω από το ξ . Ο συνολικός επομένως αριθμός των ατόμων που συνεισφέρουν σε αυτό το άθροισμα είναι $N \sim l^2 d/a^3$. Αν i θεωρήσουμε το άθροισμα των φάσεων σαν άθροισμα τυχαίων αριθμών (προκύπτοντας ένα συνολικό μέγεθος $\sim N^{1/2}$), και

ii) αντικαταστήσουμε το δεύτερο εκθετικό όρο στην (Γ'.10) με μία συνάρτηση δέλτα γύρω από το ξ , βρίσκουμε ότι $S_{eff} \approx (ld^{1/2}/a^{3/2})I$, όπου

$$I = \int \int J(u, R) e^{-R^2/2D^2} \delta(u + \xi) du dR \quad (\Gamma'.18)$$

και $J(u, R)$ είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα του μετασχηματισμού $(x, y) \rightarrow (u, R)$. Μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$I = \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{e^{-R^2/2D^2}}{\sin \theta \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{R}{2r} + \frac{\xi}{R} \right)^2}} dR \quad (\Gamma'.19)$$

όπου $R_{min} = |r(\sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta - 2\xi/r})|$, $R_{max} = r(\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta - 2\xi/r})$. Η εξίσωση (Γ'.19) παράγει μη μηδενικές τιμές για το ολοκλήρωμα I κάτω από μία ακτίνα αποκοπής $r < (v_0 t - l_0)/(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta)$. Παρόλα αυτά η ασυμπτωτική συμπεριφορά του I όταν το r είναι μεγάλο βρίσκεται παρατηρώντας ότι $R_{min} \approx \xi/\sin \theta$ και $R_{max} \rightarrow \infty$ σε αυτό το όριο. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$I \sim \exp \left(-\frac{(r + l_0 - v_0 t)^2}{2 \sin^2 \theta D^2} \right) . \quad (\Gamma'.20)$$

Παράρτημα Δ΄

Δημοσιεύσεις

Εργασίες που προέκυψαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής:

1. Delis N., Efthymiopoulos C., Contopoulos G.: 2012, Quantum vortices and trajectories in particle diffraction, *Int. Jour. of Bif. and Chaos*, vol. 22, No. 9, p.1250214
2. Contopoulos G., Delis N., Efthymiopoulos C.: 2012, Order in de Broglie-Bohm quantum mechanics, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, issue 16
3. Efthymiopoulos C., Delis N., Contopoulos G.: 2012, Wavepacket approach to particle diffraction by thin targets: Quantum trajectories and arrival times, *Annals of Physics*, vol. 327, issue 2, p. 438-460
4. Delis N., Efthymiopoulos C., Kalapotharakos C.: 2014, Power-law dependence of Lyapunov exponents on the central mass in galaxies, Submitted

Ομιλίες σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια:

1. The 11th Hellenic Astronomical Conference, “The power-law scaling of Lyapunov exponents with the central mass in galaxies”, Athens, Greece, 8-12 September 2013

Εργασίες σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια:

1. Delis N., Efthymiopoulos C., Contopoulos G.: 2010, Quantum Vortices and non linear quantum trajectories in particle diffraction, “International Conference in Nonlinear Dynamics and Complexity: Theory, Methods and Applications”, Thessaloniki, Greece, 12-16 July 2010

Βιβλιογραφία

- [1] Arnold V.I. : 1978, *Mathematical methods of classical mechanics*, Berlin, Springer
- [2] Arnold V.I.: 1989, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York
- [3] Beenakker C.W., and van Houten H.: 1991, *Solid State Phys.*, vol 44, 1
- [4] Bennett A.: 2010, *J. Phys. A*, vol 43, 5304
- [5] Berggren K.F., Sadreev A.F., and Starikov A.A.: 2001, *Nanotechnology*, vol. 12, 562
- [6] Birkhoff G.D.: 1927, *Dynamical Systems*, The American Mathematical Society Colloquium Publications
- [7] Block L.S., Coppel W. A.: 1992, *Dynamics in one dimension*, Springer-Verlag
- [8] Bohm D. and Hiley B.J.: 1993, *The Undivided Universe*, Routledge, London
- [9] Bohm D.: 1952, Reply to a Criticism of a Causal Re-Interpretation of the Quantum Theory, *Physical Review*, vol. 87, Issue 2 389-390
- [10] Bohm D.: 1952, A Collective Description of Electron Interactions: II. Collective vs Individual Particle Aspects of the Interactions, *Physical Review*, vol. 85, Issue 2, p. 338-353
- [11] Chirikov B. V.: 1979, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Physics Reports*, vol. 52, p. 263-379
- [12] Contopoulos G.: 1960, A third Integral of Motion in a Galaxy, *Zeitschrift für Astrophysik*, vol. 49, p.273
- [13] Contopoulos G.: 1965, The "third" Integral in the Restricted Three-Body Problem, *Astrophysical Journal*, vol. 142, p.802
- [14] Contopoulos G.: 1966, in Henon M. and Nahon, F.(eds), "Les Nouvelles Methodes de la Dynamique Stellaire", *Bull. Astron. (3)*, vol. 2, p.223
- [15] Contopoulos G.: 1967, Resonance phenomena and non-applicability of the third integral, *Les methodes de la Dynamique Stellaire*, p. 223
- [16] Contopoulos G., Papayannopoulos, T.: 1981, Orbits in weak and strong bars, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 92, no. 1-2, Dec. 1980, p. 33-46
- [17] Contopoulos G., Voglis N., Kalapotharakos C.: 2002, Order and Chaos in Self-Consistent Galactic Models, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 83, p. 191

- [18] Contopoulos G.: 2002, *Order and Chaos in dynamical astronomy*, Springer, Berlin
- [19] Contopoulos G., Efthymiopoulos C.: 2008, Ordered and chaotic Bohmian trajectories, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 102, issue 1-3, p. 219-239
- [20] Contopoulos G., and Efthymiopoulos, C.:2008, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 102, p. 219
- [21] Contopoulos G., Efthymiopoulos, C., and Harsoula, M.: 2008, *Nonlin. Phenomena Com. Sys.*, vol. 11, p. 107
- [22] Contopoulos G., Delis N., Efthymiopoulos C.: 2012, Order in de Broglie-Bohm quantum mechanics, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, issue 16
- [23] Colin S.: 2011, *arXiv1108.5496*
- [24] Colin S., and Struyve W.: 2010, *New J. Phys.*, vol. 12, p. 3008
- [25] Cushing J.T.: 2000, *Philosophy of Science* 67, S432
- [26] Daumer M.: 1996, in Cushing J.T., Fine A. and Goldstein S. (Eds) *Bohmian Mechanics and Quantum Theory: An Appraisal*, Boston Study Phil. Sci. vol. 84
- [27] Daumer M., Dürr, D., Goldstein, S., and Zanghi, N: 1996, *Lett. Math. Phys.*, vol. 38, p. 103
- [28] Daumer M., Dürr D., Goldstein S., and Zanghi N.: 1996, *J. Stat. Phys.*, vol. 88, p. 967
- [29] Davisson C., and Germer L.H.: 1927, *Phys. Rev.*, vol. 30, p. 705
- [30] de Broglie L.: 1928, in: J. Bordet (ed) *Electrons et Photons: Rapports et Discussions du Cinquième Conseil de Physique*, Gauthier-Villars, Paris
- [31] Delis N., Efthymiopoulos C., Contopoulos G.: 2012, Quantum vortices and trajectories in particle diffraction, *Int. Jour. of Bif. and Chaos*, vol. 22, No. 9, p.1250214
- [32] de Sales J.A., and Florencio J.: 2003, *Phys. Rev. E*, vol. 67, 016216
- [33] Dewdney C., and Malik Z.: 1996, *Phys. Lett. A*, vol. 220, p. 183
- [34] Dürr D., Goldstein S., and Zanghi N.: 1992, *J. Stat. Phys.*, vol. 68, p. 259
- [35] Dürr D., Goldstein S., Teufel S., and Zanghi, N.: 2000, *Physica A*, vol. 279, p. 416
- [36] Durr D., Goldstein, S. and Zanghi, N.: 1992, *J. Stat. Phys.*, vol. 68, p. 259
- [37] Dürr D. and Teufel S.: 2009, *Bohmian mechanics: the physics and mathematics of quantum theory*, Springer
- [38] Efthymiopoulos C., Giorgilli, A., and Contopoulos G.: 2004, *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 37, p. 10831
- [39] Efthymiopoulos C., and Contopoulos, G.: 2006, *J. Phys. A*, vol.39, p. 1819
- [40] Efthymiopoulos C., Kalapotharakos C., Contopoulos G.: 2007, Nodal points and the transition from ordered to chaotic Bohmian trajectories, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, issue 43, p. 12945-12972

- [41] Efthymiopoulos C., Kalapotharakos C., Contopoulos G.: 2009, Origin of chaos near critical points of quantum flow, *Physical Review E*, vol. 79, issue 3, id. 036203
- [42] Efthymiopoulos C., Delis N., Contopoulos G.: 2012, Wavepacket approach to particle diffraction by thin targets: Quantum trajectories and arrival times, *Annals of Physics*, vol. 327, issue 2, p. 438-460
- [43] Efthymiopoulos C.: 2012, *Canonical Perturbation Theory: La Plata Lectures Notes*, Third La Plata International School on Astronomy and Geophysics: Chaos, diffusion and non-integrability in Hamiltonian Systems, Applications to Astronomy
- [44] Eersoy, O.K.: 2007, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*, J. Willey and Sons, New Jersey
- [45] Faber S. M., Tremaine S., Ajhar E.A., Byun Y., Dressler A., Gebhardt K., Grillmair C., Kormendy J., Lauer T. R., Richstone D.: 1997, The Centers of Early-Type Galaxies with HST. IV. Central Parameter Relations, *Astronomical Journal*, vol. 114, p. 1771
- [46] Faisal F.H.M., and Schwengelbeck U.: 1995, Nodal points and the transition from ordered to chaotic Bohmian trajectories, *Phys. Lett. A*, vol. 207, p. 31
- [47] Falsaperla P. and Fonte G.: 2003, *Phys. Lett. A*, vol. 316, p. 382
- [48] Ferrers N.M., 1877, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, vol. 14, 1
- [49] Ferrarese L., van den Bosch F., Ford H., Jaffe W., O'Connell R.: 1994, Hubble Space Telescope photometry of the central regions of Virgo cluster elliptical galaxies. 3: Brightness profiles AJ, *The Astronomical Journal* (ISSN 0004-6256), vol. 108, no. 5, p. 1598-1609
- [50] Ferrarese L., Ford H.C.: 2005, Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei: Past, Present and Future Research, *Space Science Reviews*, vol. 116, issue 3-4, p. 523-624
- [51] Fridman T., Merritt D.: 1997, Periodic Orbits in Triaxial Galaxies with Weak Cusps, *The Astronomical Journal*, vol. 114, p. 1479
- [52] Frisk H.: 1997, *Phys. Lett. A*, vol. 227, p. 139
- [53] Froeschlé Cl.; Gonczi R.; Lega E.: 1997, The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt, *Planetary and Space Science*, vol. 45, p. 881-886
- [54] Garcia de Polavieja, G.: 1996, *Phys. Rev. A*, vol. 53, p. 2059
- [55] Gebhardt K., Richstone D., Edward A., Lauer R., Yong-Ik, Kormendy J., Dressler A., Faber S. M., Grillmair C., Tremaine S.: 1996, The Centers of Early-Type Galaxies With HST. III. Non-Parametric Recovery of Stellar Luminosity Distribution, *Astronomical Journal*, vol. 112, p. 105
- [56] Gebhardt K., Richstone D., Kormendy J., Lauer T. R., Ajhar E. A., Bender R., Dressler A., Faber S. M., Grillmair C., Magorrian J., Tremaine S.: 2000, Axisymmetric, Three-Integral Models of Galaxies: A Massive Black Hole in NGC 3379, *The Astronomical Journal*, vol. 119, issue 3, p. 1157-1171
- [57] Geiger H., and Marsden E.: 1913, *Phil. Mag.*, vol. 25, p. 604

- [58] Gerhard O. E., Binney J.: 1985, Triaxial galaxies containing massive black holes or central density cusps, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (ISSN 0035-8711), vol. 216, Sept. 15, 1985, p. 467-502
- [59] Gindensperger E., Meier, C., and Beswick J.A.: 2002, *J. Chem. Phys.*, vol. 116, p. 10051
- [60] Gindensperger E.: 2003, Ph.D Dissertation Université Toulouse III
- [61] Goetsch P., Graham R.: 1993, Quantum trajectories for nonlinear optical processes, *Annalen der Physik*, vol. 505, issue 8, p.706-719
- [62] Goldstein H., Poole Ch., Safko Jh.: 2002, *Classical Mechanics*, Addison Wesley
- [63] Guckenheimer J., Holmes P.: 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York
- [64] Hirschfelder J., Goebel, C.J., and Bruch, L.W.: 1974, *J. Chem. Phys.*, vol. 61, p. 5456
- [65] Holland P.: 1993, *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge
- [66] Holland M., Williams J., Cooper, J.: 1997, Kinetic evolution obtained from simulated trajectories, *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, vol.55, issue 5, p. 3670-3677
- [67] Holley-Bockelmann K., Mihos J. C., Sigurdsson S., and Hernquist L.: 2001, Models of Cuspy Triaxial Galaxies, *Astrophys. J.* vol. 549, issue 862 p. 149.
- [68] Holley-Bockelmann, K., Mihos J. C., Sigurdsson S., Hernquist L., and Norman C.: 2002, The Evolution of Cuspy Triaxial Galaxies Harboring Central Black Holes, *Astrophys. J.*, vol. 567, p. 817
- [69] Iacomelli G., and Pettini M.: 1996, *Phys. Lett. A*, vol. 212, p. 29
- [70] Jesseit R., Naab T., Burkert A.: 2005, Orbital structure of collisionless merger remnants: on the origin of photometric and kinematic properties of elliptical and S0 galaxies *MNRAS*, vol. 360, p. 1185.
- [71] Kalapotharakos C., Voglis N., Contopoulos G.: 2004, Chaos and secular evolution of triaxial N-body galactic models due to an imposed central mass, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 428, p. 905
- [72] Kalapotharakos C., Voglis N., 2005, Global Dynamics in Self-Consistent Models of Elliptical Galaxies, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 92, p. 157
- [73] Kalapotharakos C.: 2008, The rate of secular evolution in elliptical galaxies with central masses, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 389, issue 4, p. 1709-1721
- [74] Kandrup H., Sideris I.: 2002, Chaos in cuspy triaxial galaxies with a supermassive black hole: a simple toy model, *Astrophysical Journal*, vol.471, p.82
- [75] Kaufmann D. E., Contopoulos G.: 1996, Self-consistent models of barred spiral galaxies., *Astronomy and Astrophysics*, vol.309, p. 381-402
- [76] Konkel S., and Makowski A.J.: 1998, Regular and Chaotic causal trajectories for the Bohm potential in a restricted space, *Phys. Lett. A*, vol. 238, p. 95

- [77] Kormendy J., Richstone D.: 1995, Inward Bound—The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 33, p. 581
- [78] Kormendy J., Bender R., Magorrian J., Tremaine S., Gebhardt K., Richstone D., Dressler A., Faber S. M., Grillmair C., Lauer T. R.: 1997, Spectroscopic Evidence for a Supermassive Black Hole in NCG 4486B, *Astrophysical Journal Letters*, vol.482, p. L139
- [79] Kormendy J., Bender R., Evans A. S., Richstone D.: 1998, The Mass Distribution in the Elliptical Galaxy NGC 3377: Evidence for a $2 \times 10^8 M_{\odot}$ Black Hole, *The Astronomical Journal*, vol. 115, issue 5, p. 1823-1839
- [80] Lauer T. R., Ajhar E. A., Byun Y.-I., Dressler A., Faber S. M., Grillmair C., Kormendy J., Richstone D., Tremaine S.: 1995, The Centers of Early-Type Galaxies with HST.I.An Observational Survey, *Astronomical Journal*, vol.110, p. 2622
- [81] Li T. Y., Yorke J. A.: 1975, Period Three Implies Chaos, *Am. Math. Monthly*, vol. 82, p. 985-992
- [82] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.: 1983, Regular and stochastic motion, *Applied Mathematical Sciences*, Springer, New York
- [83] Luciano A. Darriba, Nicola's P. Maffione, Pablo M. Cincotta, Claudia M. Giordano: 2012, Comparative study of variational chaos indicators and ODEs' numerical integrators, arXiv:1205.0875v3
- [84] Loprore C.L. and Wyatt R.E.: 1999, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, p. 5190
- [85] Madelung E.: 1926, *Z. Phys.*, vol. 40, p. 332
- [86] Makowski A.J., Peplowski P., and Dembinski S.T.: 2000, *Phys. Lett. A*, vol. 266, p. 241
- [87] Merritt D., Valluri M.: 1996, Chaos and Mixing in Triaxial Stellar Systems, *Astrophysical Journal*, vol. 471, p.82
- [88] Merritt D., Fridman T.: 1996, Triaxial Galaxies with Cusps, *Astrophysical Journal*, vol.460, p.136
- [89] Merritt D., Valluri M.: 1998, Self-consistent gravitational chaos, Long-range Correlations in Astrophysical Systems, Edited by J. Robert Buchler, James W. Duffy, and Henry E. Kandrup. *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 848, p.48-61
- [90] Merritt D.: 1999, Resonant Orbits in Triaxial Potentials, *Proc. Astr. Soc. Pac.*111(756), 129. 314, 316, 336, 352.
- [91] Merritt D., Valluri M.: 1999, Resonant Orbits in Triaxial Galaxies, *The Astronomical Journal*, vol. 118, issue 3, p. 1177-1189
- [92] Merritt D., Quinlan D.: 1998, Dynamical Evolution of Elliptical Galaxies with Central Singularities, *The Astrophysical Journal*, vol. 509, issue 2, p. 933-933
- [93] Merritt D., Vasiliev, E.: 2011, Orbits Around Black Holes in Triaxial Nuclei, *The Astrophysical Journal*, vol. 726, issue 2, article id. 61, p.20
- [94] Messiah A.: 1962, *Quantum Mechanics*, Interscience, N.Y., Dover Reprint 1999

- [95] Mestre M. F., Cincotta P. M., Giordano C. M.: 2011, Analytical relation between two chaos indicators: FLI and MEGNO, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 414, issue 1, p. L100-L103
- [96] Muga J.G., Leavens C. R.: 2000, *Phys. Reports*, vol. 338, p. 353-438
- [97] Muga J.G., Sala Mayato R., and Egusquiza I.L.: 2002, *Lect. Notes Phys.*, vol. 72, 1
- [98] Muzzio J. C., Carpintero D., Wachlin F. C.: 2005, Spatial Structure of Regular and Chaotic Orbits in A Self-Consistent Triaxial Stellar System, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 91, p. 173
- [99] Muzzio J.: 2006, Regular and chaotic orbits in a self-consistent triaxial stellar system with slow figure rotation, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 96, p. 85
- [100] Noid D. W., Koszykowski M. L., Marcus R. A.: 1977, Semiclassical calculation of bound states in multidimensional systems with Fermi resonance, *Journal of Chemical Physics*, vol. 67, issue 2, p. 404-408
- [101] Parmenter R.H. and Valentine R.W.: 1995, *Phys. Lett. A*, vol. 201, 1
- [102] Patsis P. A., Efthymiopoulos C., Contopoulos G., Voglis N.: 1997, Dynamical spectra of barred galaxies, *Astronomy and Astrophysics*, vol.326, p.493-500
- [103] Peng, L.M.: 2005, *J. El. Micr.*, vol. 54, 199
- [104] Perko L.: 1991, *Differential equations, Nonlinear Differentiable dynamical systems*, Springer-Verlag, New York
- [105] Philippidis C., Dewdney C. and Hiley B.: 1979, *Nuovo Cimento B*, vol. 52, p. 15
- [106] Poincaré H.: 2002, *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste*, Gauthier Villars, Paris, I (1892), II (1893), III (1899, Dover Edition (1957))
- [107] Poon M. Y., & Merritt D.: 2002, Triaxial Black Hole Nuclei, *ApJ*, vol. 568, p. 89
- [108] Poon M. Y., & Merritt D.: 2004, A Self-Consistent Study of Triaxial Black Hole Nuclei, *ApJ*, vol. 606, p. 774
- [109] Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, and Flannery BP: 1986, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, New York.
- [110] Rosenbluth M., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavsky G. M., 1966, Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities, *Nuclear Fusion*, vol. 6, p. 297-300
- [111] Rutherford E.: 1911, *Phil. Mag.*, vol. 21, p. 669
- [112] Sanz A.S., Borondo F., and Miret-Artés, S.: 2004, *J. Chem. Phys.*, vol. 120, p. 8794
- [113] Sanz A.S., Borondo F., and Miret-Artés, S: 2004, *Phys. Rev. B.*, vol. 69, p. 115413
- [114] Sándor Z., Érdi B., Széll A., Funk B.: 2004, The Relative Lyapunov Indicator: An Efficient Method of Chaos Detection, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 90, issue 1, p. 127-138
- [115] Schlegel K.G., and Forster S.: 2008, *Phys. Lett. A*, vol. 372, p. 3620

- [116] Schwarzschild M.: 1993, Self-consistent models for galactic halos, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 82, issue 1, p. 61-81
- [117] Skodje R.T., Rohrs H.W., and VanBuskirk J.: 1989, *Phys. Rev. A*, vol. 40, p. 2894
- [118] Skokos Ch., 2001, Smaller alignment index (SALI): a new indicator distinguishing between ordered and chaotic motion, 5th Hellenic Astronomical Conference, held 20-22 September, 2001 in Crete, Greece
- [119] Skokos Ch., Bountis T. C., Antonopoulos Ch.: 2007, Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems: The Generalized Alignment Index (GALI) method, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 231, issue 1, p. 30-54
- [120] Statler Th.: 1987, Self-consistent models of perfect triaxial galaxies, *Astrophysical Journal, Part 1* (ISSN 0004-637X), vol. 321, Oct. 1, 1987, p. 113-152
- [121] Schwarzschild M: 1979, A numerical model for a triaxial stellar system in dynamical equilibrium, *Astrophysical Journal, Part 1*, vol. 232, Aug. 15, 1979, p. 236-247
- [122] Thomson G.P.: 1928, *Proc. R. Soc. London A*, vol. 117, p. 600
- [123] Thompson L., Stamp P. C. E.: 1997, Quantum Dynamics of a Bose Superfluid Vortex, *Physical Review Letters*, vol. 108, issue 18, id. 184501
- [124] Towler M.D., Russell N.J., and Valentini A: 2011, arXiv1103.1589T.
- [125] Valentini A., and Westman H.: 2005, *Proc. R. Soc. A*, vol. 461, p. 253
- [126] Valentini A.: 1991a, *Phys. Lett.*, vol. 156, p. 5
Valentini A.: 1991b, *Phys. Lett.*, vol. 158, p. 1
- [127] Valentini A.: 2001, Hidden variables, Statistical Mechanics, and the Early Universe, ArXiv: quant-ph/0104067v1.
- [128] Valentini A. and Westman H.: 2005, *Proc. R. Soc. A*, vol. 461, p. 253
- [129] Valentini A.: 2010, *Phys. Rev. D*, vol. 82, id. 063513. 253
- [130] van der Marel R. P., de Zeeuw P. T., Rix H.-W.: 1997, Improved Evidence for a Black Hole in M32 from HST/FOS Spectra. I. Observations, *Astrophysical Journal*, vol. 488, p.119
- [131] Voglis N., Contopoulos G. J.: 1994, Invariant spectra of orbits in dynamical systems, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 27, issue 14, p. 4899-4909
- [132] Voglis N., Kalapotharakos C., Stavropoulos I.: 2002, Mass components in ordered and in chaotic motion in galactic N-body models, *MNRAS*, vol. 337, p. 619
- [133] Voglis N., Stavropoulos I., Kalapotharakos C.: 2006, Chaotic motion and spiral structure in self-consistent models of rotating galaxies, *MNRAS*, vol. 372, p. 901
- [134] Voglis N., Tsoutsis P., Efthymiopoulos C.: 2006, Invariant manifolds, phase correlations of chaotic orbits and the spiral structure of galaxies, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 373, issue 1, p. 280-294

-
- [135] Wisniacki D.A., and Pujals E.R.: 2005, *Europhys. Lett.*, vol. 71, p. 159
- [136] Wisniacki D.A., Pujals E.R., and Borondo F.: 2007, *J. Phys. A.* vol. 40, id. 14353
- [137] Wu H., and Sprung D.W.L.: 1999, *Phys. Lett. A*, vol. 261, p. 150
- [138] Wyatt R.E.: 2005, *Quantum Dynamics with Trajectories: Introduction to Quantum Hydrodynamics*, Springer, New York (2005)
- [139] Young P., J.: 1977, Stellar density cusp around a massive black hole, *Astrophysical Journal*, Part 1, vol. 217, p. 287-295
- [140] Young P., J.: 1980, Numerical models of star clusters with a central black hole. I - Adiabatic models, *Astrophysical Journal*, Part 1, vol. 242, Dec. 15, 1980, p. 1232-1237
- [141] Zhao Y., Makri N.: 2003, Bohmian versus semiclassical description of interference phenomena *J. Chem. Phys.*, vol. 242, p. 1232