ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Νικόλαος Ι. Κατζουράκης

Πανεπιστήμιο Αθηνών, τμήμα Μαθηματικών

Ιούλιος 2011

Διδακτορική Διατριβή που κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών στο Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών στις 19 Ιουλίου 2011 για την ολοκλήρωση των υποχρεώσεων απόκτησης του

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ (Ph.D.)

στα

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιβλέπων: Ν. Αλικάκος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η Διδακτορική Διατριβή χρηματοδοτήθηκε από το πρόγραμμα "ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ ΙΙ - Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας"

Σύστημα στοιχειοθεσίας GreekTeX

Αφιερωμένο στις γυναίκες τις ζωής μου...

Ευχαριστείες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή που αποτελείται από τους Νίκο Αλικάκο, Γιάννη Στρατή και Βασίλη Δουγαλή. Ειδικότερα, οφείλω ευγνωμοσύνη στον Επιβλέποντα Καθηγητή μου Νίκο Αλικάκο για την πολύτιμη υποστήριξη και τη βοήθειά του όλα αυτά τα χρόνια της συνεργασίας μας. Κατέβαλε τεράστια προσπάθεια να με διδάξει Μαθηματικά καθώς και πράγματα που μόνο ένας πατέρας θα δίδασκε στον γιο του. Σε αυτόν οφείλω την μαθηματική μου ταυτότητα.

Επίσης, οφείλω ένα τεράστιο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και ειδικά στην μητέρα μου η οποία με μεγάλωσε με δυσκολίες μέχρι να φτάσω αυτό που είμαι σήμερα.

Βεβαίως, ευχαριστώ την αρραβωνιαστικιά μου για την υποστήριξή της τα τελευταία 7 χρόνια της κοινής μας ζωής.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους L. Ambrorio, P. Bates, B. Dacorogna, L.C. Evans, A. Freire, F. Otto και C. Wang για τις συμβουλές και τις συστάσεις που μου έδωσαν σε διάφορα θέματα πάνω στις σχετικές εργασίες που προέκυψαν από αυτή τη διατριβή.

Περιεχόμενα

1 ΕΤΕΡΟΚΛΙΝΙΚΑ ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΧΥΣΗΣ 11

1.1 ΤΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12

1.2 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΕΣ ΣΑΝ ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 16

1.3 ΤΑ ΤΟΠΙΚΑ ΛΗΜΜΑΤΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ 21

1.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΩΝ 27

1.5 ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΛΗΜΜΑΤΩΝ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ - ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ 29

1.6 ΑΡΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ 38

2 ΑΡΧΕΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΓΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΕΣ ΜΗ-ΚΥΡΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ 40

2.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ 42

2.2 ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ 52

2.2.1 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΜΕΣΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 53

2.2.2 Η ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΟΛΑ ΤΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ 56

3 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΔΕ ARONSSON ΓΙΑ ΟΜΑΛΟΥΣ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΕΣ ΜΕΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ 62

4 ΘΕΩΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ ΕΠΑΦΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 70

4.1 ΠΟΛΥΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ 71

4.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ 71

4.1.2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ 72

4.1.3 ΤΑΝΥΣΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ . . 74

4.2 ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΔΕ 78

4.3 ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 83

4.4 ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ JET ΕΠΑΦΗΣ 88

4.5 ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΜΔΕ HAMILTON-JACOBI 97
4.6 Η ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΔΟΜΗ ΤΩΝ JET ΕΠΑΦΗΣ 99
4.7 Η ΑΡΧΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΤΗΣ ΕΠΑΦΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 114
4.8 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 124
4.8.1 ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ∞-ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗΣ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ ΤΗΣ ΜΔΕ ΕΙΚΟΝΑΣ 124
4.8.2 ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ $C^{1,\frac{1}{2}+}(\mathbb{R}^n)^N$ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΚΟΝΑΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ ΤΗΣ ∞-ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗΣ 134

5 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΙΞΩΔΟΥΣ ΤΗΣ ΜΔΕ ARONSSON 141
5.1 ΕΝΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΥΣΗΣ 148

6 ΜΙΑ ΣΥΝΕΧΗΣ ΠΟΥΘΕΝΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ 150

Εισαγωγή

Η Διδακτορική Διατριβή αποτελείται από 6 Μέρη και 2 Θεματικές Ενότητες. Η 1η Ενότητα αποτελείται από 2 Μέρη σχετικά με τον Λογισμό Μεταβολών και το σύστημα ΜΔΕ Euler-Lagrange.

Στο 1ο Μέρος ασχολούμαστε με την ύπαρξη λύσης (U, c) με $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ και $c > 0$ του προβλήματος Ετεροκλινικών Οδευόντων κυμάτων

$$\begin{cases} U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x \\ U(\pm\infty) = a^{\pm} \end{cases} \tag{0.1}$$

όπου $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ένα δυναμικό και a^+, a^- δύο ελάχιστά του σε διαφορετικά βάθη. Το (0.1) προκύπτει από την αναζήτηση λύσεων μορφής $U(z - ct) = u(z, t)$ στο μη-γραμμικό σύστημα διάχυσης μορφής κλίσης

$$u_t \;=\; u_{zz} - \nabla W(u), \quad u \,:\, \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^N. \tag{0.2}$$

Το πρόβλημα (0.1) παρουσιάζει πολλές δυσκολίες: είναι διανυσματικό και δεν εφαρμόζεται η κλασική Αρχή Μεγίστου, το σχετικό συναρτησιακό Δράσης με βάρος

$$E_c(U) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \big|\dot{U}(x)\big|^2 + W(U(x)) \right\} e^{cx} dx \tag{0.3}$$

παρουσιάζει έλλειψη συμπάγειας και κάτω φράγματος, πρέπει να χαρακτηρισθεί μεταβολικά το c και να βρεθούν οι κατάλληλες υποθέσεις γιατί επιπρόσθετα ελάχιστα του W εμποδίζουν την ύπαρξη. Εφαρμόζουμε μεθόδους ελαχιστοποίησης με περιορισμό που τελικά άρεται και επιπλέον δείχνουμε ότι $E_c(U) = 0$.

Στο 2ο Μέρος ασχολούμαστε με την εξαγωγή Αρχών Μεγίστου που ικανοποιούν οι Προσεγγιστικοί Ελαχιστοποιητές $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ του γενικού συναρτησιακού

$$E(u, \Omega) \;:=\; \int_{\Omega} H\big(x, u(x), Du(x)\big)\, dx. \tag{0.4}$$

Το βασικό αποτέλεσμα εδώ είναι κατάλληλες ασθενείς εκδοχές της Ιδιότητα Κυρτής Θήκης

$$u(\Omega) \;\subseteq\; \overline{\mathrm{co}}\,\big(u(\partial\Omega)\big). \tag{0.5}$$

Το (0.5) είναι γνωστό σε πολλές περιπτώσεις και χρησιμεύει σε ερωτήματα ομαλότητας και ύπαρξης. Η βασική πρόοδος σε σχέση με την βιβλιογραφία είναι ότι εξάγεται χωρίς υποθέσεις κυρτότητας και χωρίς εξάρτηση της H από το

$|Du|$. Προς τούτο εισάγεται μια μέθοδος προσέγγισης των απεικονίσεων προβολής στα κυρτά που δεν απαιτεί ασθενή κάτω ημισυνέχεια. Τα αποτελέσματα κληροδοτούνται στις Λύσεις Χαλάρωσης στην περίπτωση μη-ύπαρξης ελαχιστοποιητών και στις ελαχιστοποιούσες λύσεις των ΜΔΕ Euler-Lagrange.

Η 2η Θεματική Ενότητα της Διατριβής αποτελείται από 4 Μέρη σχετικά με τον Λογισμό Μεταβολών στον L^∞ και τα πλήρως μη-γραμμικά συστήματα.

Στο 3ο Μέρος ασχολούμαστε με τα κεντρικά αντικείμενα του Λογισμού Μεταβολών στον L^∞. Αποδεικνύουμε ότι οι ομαλοί Απόλυτοι (δηλ. τοπικοί) Ελαχιστοποιητές $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ του μεγιστικού συναρτησιακού

$$E_\infty(u,\Omega) \ = \ \underset{x\in\Omega}{\text{ess sup}}\ H\big(x,u(x),Du(x)\big), \tag{0.6}$$

διέπονται από ένα αντίστοιχο "Euler-Lagrange" σύστημα ΜΔΕ, το σύστημα Aronsson

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[u] \ = &\Big(H_P(\_,u,Du)\otimes H_P(\_,u,Du)\Big) : D^2u \ + \\ &+ \ H_P(\_,u,Du)\Big(H_\eta(\_,u,Du)+H_x(\_,u,Du)\Big) \ = \ 0.\end{aligned} \tag{0.7}$$

Ειδική σημαντική περίπτωση αποτελεί το σύστημα της ∞-Λαπλασιανής

$$\Delta_\infty u \ = \ Du\otimes Du : D^2u \ = \ 0 \tag{0.8}$$

που αντιστοιχεί στο $E_\infty(u,\Omega) = \|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$. Οι (0.7), (0.8) δεν έχουν μελετηθεί για $N > 1$. Βασικές δυσκολίες είναι ότι το συναρτησιακό (0.6) δεν είναι προσθετικό μέτρο, δεν είναι Gateaux παραγωγίσιμο και κατά κανόνα οι "λύσεις" των (0.7) (0.8) δεν είναι παραγωγίσιμες.

Στο 4ο Μέρος εισάγουμε μια συστηματική θεωρία μη-διαφορισίμων λύσεων που εφαρμόζεται σε πλήρως μη-γραμμικά συστήματα ΜΔΕ 1ης και 2ης τάξης

$$F(\_,u,Du,D^2u) \ = \ 0, \quad u \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N, \tag{0.9}$$

η οποία επεκτείνει την θεωρία των Λύσεων Ιξώδους στη γενική διανυσματική περίπτωση. Βασική συνεισφορά είναι η ανακάλυψη μιας Αρχής Ακροτάτου για διανυσματικές συναρτήσεις, της "Αρχής της Επαφής". Αυτή επεκτείνει μοναδικά τα min και max σε πολλές διαστάσεις και ικανοποιεί έναν "λογισμό Αρχής Μεγίστου". Η Επαφή οδηγεί σε μια θεωρία ΜΔΕ, αυτή των Λύσεων Επαφής η οποία διατηρεί πολλές από τις ιδιότητες του βαθμωτού αναλόγου των Λύσεων Ιξώδους, όπως εύκολα περάσματα σε όρια. Παρόλα αυτά, νέα διανυσματικά φαινόμενα εμφανίζονται. Για παράδειγμα, λόγω "συστροφής" των διανυσματικών συναρτήσεων η Αρχή Ακροτάτου αναγκαστικά είναι συναρτησιακή και όχι σημειακή. Επίσης, διαθέτει τάξη και απλή συνέχεια των εμπλεκομένων συναρτήσεων δεν αρκεί. Ειδικότερα, "Επαφή 1ης τάξης" επιτρέπει να εξάγουμε "ισότητα για την κλίση" και "Επαφή 2ης τάξης" επιτρέπει να εξάγουμε "ανισότητα για την Εσσιανή". Ακόμη, η τάξη της "Επαφής" επιβάλλει ότι πρέπει να προϋπάρχει μια Μερική Ομαλότητα και "το 1/2 της τάξης παραγώγων του (0.9) μπορεί να ερμηνευθεί ασθενώς, το υπόλοιπο 1/2 πρέπει να προϋπάρχει κλασικά".

Βασικό πεδίο εφαρμογής των Λύσεων Επαφής είναι το σύστημα Aronsson (0.7), η ∞-Λαπλασιανή (0.8), οι βαθμωτές ΜΔΕ Hamilton-Jacobi

$$H(\_, u, Du) \;=\; 0 \tag{0.10}$$

με διανυσματικές λύσεις $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ και ειδικά η ΜΔΕ Εικόνας $|Du|^2 = 1$. Ειδικά για τα συστήματα (0.7) και (0.8) -χρησιμοποιώντας το 6ο Μέρος της Διατριβής- υπάρχουν όπως αποδεικνύουμε ιδιάζουσες "λύσεις" οι οποίες δεν μπορούν να ερμηνευθούν αυστηρά από τις υπάρχουσες θεωρίες ΜΔΕ: γενικά δεν υπάρχουν ούτε κλασικές, ούτε ισχυρές (σχεδόν παντού), ούτε ασθενείς, ούτε μετρο-θεωρητικές, ούτε κατανομικές λύσεις. Στην βαθμωτή περίπτωση $N = 1$ η θεωρία των Λύσεων Ιξώδους έχει λύσει το αντίστοιχο πρόβλημα.

Σαν εφαρμογή, προσδιορίζουμε τις Θεμελιώδεις Λύσεις της διανυσματικής Δ_∞ οι οποίες είναι "γενικεύμενοι κώνοι" και αποτελούν μη-κλασικές Λύσεις Επαφής της ΜΔΕ Εικόνας. Επίσης, κατασκευάζουμε μια κλάση $C^{1,\frac{1}{2}+}$ αλλά πουθενά 2 φορές παραγωγισίμων ∞-Αρμονικών διανυσματικών συναρτήσεων με Εσσιανές γνήσιες κατανομές.

Στο 5ο Μέρος ασχολούμαστε με την βαθμωτή εξίσωση Aronsson

$$H_p(Du) \otimes H_p(Du) : D^2 u \;=\; 0 \tag{0.11}$$

για $H \in C^1(\mathbb{R}^n)$ και $n \geq 2$. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη αναλυτικά εκπεφρασμένων εξαιρετικά ιδιαζόντων Λύσεων Ιξώδους, όταν η γνήσια σταθμική κυρτότητα της H αποτυγχάνει. Η ύπαρξή τους δίνει νέα πληροφορία στο γνωστό ανοικτό Πρόβλημα C^1-Ομαλότητας των Λύσεων Ιξώδους της (0.11) στις διαστάσεις $n > 2$. Και εδώ χρησιμοποιείται το 6ο Μέρος.

Στο 6ο Μέρος ασχολούμαστε με την κατασκευή μιας ιδιάζουσας συνεχούς συνάρτησης. Πολλές τέτοιες είναι γνωστές στην βιβλιογραφία. Η συγκεκριμένη έχει ειδικές ιδιότητες και προσφέρεται για την κατασκευή αντιπαραδειγμάτων σε προβλήματα ομαλότητας στις ΜΔΕ. Είναι Hölder συνεχής αλλά πουθενά βελτιώσιμη με καλύτερο Hölder εκθέτη, πουθενά παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι ιδιάζουσα κατανομή πρώτης τάξης που δεν υλοποιείται από κάποιο μέτρο.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ I

1 ΕΤΕΡΟΚΛΙΝΙΚΑ ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Έστω $W \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ένα δυναμικό και a^+, a^- δύο τοπικά ελάχιστα σε διαφορετικά βάθη με $W(a^+) = 0$, $W(a^-) < 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα ύπαρξης λύσης (U, c) στο

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x \\ U(\pm\infty) = a^{\pm} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

όπου $c > 0$ και $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι $[C^2(\mathbb{R})]^N$ και συνδέει τα $a^{\pm}$, σε διάσταση $N \geq 1$. Οι λύσεις του (1.1) είναι γνωστές σαν *Ετεροκλινικά Οδεύοντα Κύματα*. Είναι ειδικές λύσεις της μορφής $U(z - ct) = u(z, t)$ στο σύστημα διάχυσης με μορφή κλίσης:

$$u_t = u_{zz} - \nabla W(u)\ , \quad u = u(z,t) : \ \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

και επιπρόσεθετα ετεροκλινικές τροχιές του συστήματος $U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x$. Από πλευράς Φυσικής, το (1.1) είναι ο Νόμος του Νεύτωνα με δύναμη $-\nabla(-W)$ λόγω του δυναμικού $-W$ και τριβή $-cU_x$. Σε αυτό το πλαίσιο, η $U(x)$ αναπαριστά μια τροχιά που συνδέει 2 τοπικά μέγιστα σε διαφορετικό ύψος ασυμπτωτικά στο χρόνο. Το (1.1) με $c = 0$ είναι η ειδική περίπτωση του στάσιμου κύματος. Ανάγεται στο $U_{xx} = \nabla W(U)$ για ένα δυναμικό με ελάχιστα στο ίδιο ύψος. Η περίπτωση $N > 1$ έχει μελετηθεί από τους Sternberg [St], Alikakos-Fusco [A-F] και Alikakos, Betelú, Chen [A-Be-C].

Η περίπτωση $N = 1$ και $c > 0$ του (1.1) είναι καθιερωμένη. Στην διανυσματική περίπτωση $N > 1$ και $c \neq 0$ του (1.1) αρχές μεγίστου και σύγκρισης δεν είναι διαθέσιμες και μόνο ειδικά συστήματα έχουν μελετηθεί (δες [V]).

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε την ύπαρξη οδευόντων κυμάτων για ένα δυναμικό κάτω από ασθενείς υποθέσεις που επιτρέπουν την ύπαρξη πολλών ελαχίστων επιβάλλοντας γεωμετρκές υποθέσεις μόνο για τα σταθμικά σύνολα του δυναμικού που περικλείουν τα ελάχιστα. Η προσέγγισή μας είναι μεταβολική: εισάγουμε ένα συναρτησιακό δράσης με βάρος (μια ιδέα των Fife-McLeod) για τα βρούμε τις λύσεις του (1.1) σαν τοπικούς ελαχιστοποιητές του

$$E_c(U) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \big|U_x\big|^2 + W(U) \right\} e^{cx} dx \tag{1.3}$$

στον χώρο *Fréchet* διανυσματικών συναρτήσεων $[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N$, χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους για να παρακάμπψουμε την έλλειψη φραγμάτων και συμπάγειας. Δείχνουμε ότι ελαχιστοποιώντα οδεύοντα κύματα (U, c) χααχτηρίζονται από $E_c(U)=0$ και προκύπτουν σαν λύσεις του

$$E_c(U)=\inf\ \Big\{E_c(V):\ V\in[H^1_{\rm loc}(\mathbb{R})]^N,\ V(\pm\infty)=a^\pm\Big\}\,,\qquad E_c(U)=0. \tag{1.4}$$

Ένας υπολογισμός δείχνει ότι τοπικοί ελαχιστοποιητές του E_c αντιστοιχούν σε ασθενείς λύσεις του (1.1). Θέλουμε να κατασκευάσουμε λύσεις της $U_{xx}-\nabla W(U)=-c\ U_x$, τέτοιες ώστε $U(\pm\infty)=a^\pm$ ελαχιστοποιώντας το (1.3) στον κατάλληλο χώρο. Αυτό δεν μπορεί να γίνει με την Ευθεία Μέθοδο, αφού κανένας εύλογος για το πρόβλημα χώρος δεν δείχνει να έχει συμπάγεια υπεράνω του $\mathbb{R}$ και η ασυμπτοτική συμπεριφορά δεν μπορεί να εγγυηθεί.

Επιπλέον, το (1.3) δεν είναι φραγμένο από κάτω και δεν είναι αναλλοίωτο σε μεταφορές: $E_c\big(U(\cdot-\delta)\big)=e^{c\delta}E_c(U)$. Συνεπώς, μια ελαχιστοποιούσα ακολουθία μπορεί να συγκλίνει στα $a^\pm$, όπου $E_c(a^+)=0$, $E_c(a^-)=-\infty$.

Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα λύνοντας ένα πρόβλημα με περιορισμό, ακολουθώντας τους Alikakos, Fusco [A-F]: σταθεροποιούμε $c,L>0$ και ελαχιστοποιούμε το E_c άμεσα στο επιτρεπτό σύνολο των $[H^1_{\rm loc}(\mathbb{R})]^N$ συναρτήσεων με γραφήματα στους κυλίνδρους $(-\infty,-L]\times\mathbb{B}(a^-,r_0)$ και $[L,+\infty)\times\mathbb{B}(a^+,r_0)$. Ι ελαχιστοποίηση οδειγεί σε 2-παραμετρική οικογένεια λύσεων $c,L>0$. Τότε το L αυξάνεται μέχρι να βρούμε λύση που δεν υκανοποιεί τον περιορισμό για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου $c=c^*>0$.

Αυτός ο μηχανισμός συμπαγοποιεί το πρόβλημα και μας επιτρέπει να βρούμε μια κατά τμήματα λύση του (1.1), εκτός το πολύ από τα στόμια των κυλίνδρων $\{\pm L\}\times\partial\big(\mathbb{B}(a^\pm,r_0)\big)$ που συγκλίνουν ασυμπτωτικά στα $a^\pm$, για κάθε $c>0$. Στην υπόλοιπη απόδειξη δείχνουμε ότι ο περιρισμός δεν υλοποιείται για συγκεκριμένο $c^*>0$ και μεγάλο L.

Το c στο μεγαλύερο μέρος της απόδειξης είναι μια σταθερά. Το κατάλληλο $c=c^*$ που εγγυάται ύπαρξη ικανοποιεί $E_{c^*}(U_L)=0$ για μεγάλο $L\geq L^*$. Αυτό είναι απαραίτητο γιατί η αναλλοιώτητα στις μεταφορές του (1.3) δίνει ότι η μόνη πεπερασμένη ελάχιστη τιμή του E_c είναι το μηδέν.

1.1 ΤΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Λήμμα 1.1 *Έστω ότι μια λύση (U,c) του προβλήματος (1.1) υπάρχει και ικανοποιεί $U_x(\pm\infty)=0$ ακολουθιακά. Τότε:*

$$W^-(a^-)\ =\ c\int_{\mathbb{R}}\big|U_x\big|^2dx\qquad\&\qquad c\big(a^+-a^-\big)\ =\ \int_{\mathbb{R}}\nabla W\big(U\big)dx.$$

Απόδειξη του 1.1. Η εξίσωση δίνει $-U_{xx} \cdot U_x + \nabla W(U) \cdot U_x = c\big|U_x\big|^2$. Άρα

$$\begin{aligned} c\int_{\mathbb{R}} \big|U_x\big|^2 dx &= -\int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{2}\big|U_x\big|^2\big)_x dx + \int_{\mathbb{R}} \big(W(U)\big)_x dx \\ &= \pm 0 + W(U(+\infty)) - W(U(-\infty)) \\ &= -W(a^-). \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \nabla W\big(U\big) dx &= \int_{\mathbb{R}} \Big(U_{xx} + cU_x\Big) dx \\ &= 0 - 0 + c\big(a^+ - a^-\big). \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 1.1, αν $U(\pm\infty) = a^\pm$ και $W(a^+) = 0 > W(a^-)$, τότε $c > 0$.
□
Παίρνουμε $L > 0$ και $r_0 > 0$ μικρό, ώστε $W(u) \geq 0$ για $|a^+ - u| \leq r_0$ και $W(u) < 0$ για $|a^- - u| \leq r_0$. Θέτουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_L^+ &:= \Big\{U \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N \ : \ |U(x) - a^+| \leq r_0, \ x \geq +L\Big\}, \\ \mathcal{X}_L^- &:= \Big\{U \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N \ : \ |U(x) - a^-| \leq r_0, \ x \leq -L\Big\}, \end{aligned}$$

και $\mathcal{X}_L := X_L^+ \bigcap \mathcal{X}_L^-$

Θεώρημα 1.2 *Έστω W ένα $C^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ δυναμικό και $a^\pm$ 2 ελάχιστα, με $W(a^-) < 0 = W(a^+)$ και a^- το ολικό. Υποθέτουμε ότι $W^{-1}\big([W(a^-), 0]\big)$ είναι συμπαγές στον $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $L > 0$, $c > 0$, το πρόβλημα*

$$E_c(U_L) = \inf_{\mathcal{X}_L} \big\{E_c\big\}$$

έχει λύση U_L στον $\mathcal{X}_L \subseteq [H^1_{loc}(\mathbb{R}, e^{cId})]^N$.

Απόδειξη του 1.2. Πρώτα δείχνουμε ότι $\mathcal{X}_L \neq \emptyset$ και $-\infty < \inf_{\mathcal{X}_L}\big\{E_c\big\} < \infty$.

Ισχυρισμός 1.3 *Υπάρχει $U_{aff} \in \mathcal{X}_L \bigcap [W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})]^N$ ώστε*

$$-\infty < -\frac{e^{cL}W^-(a^-)}{c} \leq \inf_{\mathcal{X}_L} \big\{E_c\big\} \leq E_c(U_{aff}) < \infty.$$

Απόδειξη του 1.3. Θέτουμε

$$U_{aff}(x) \ := \ a^-\chi_{(-\infty,-1)} \ + \ \left(\frac{1-x}{2}a^- + \frac{1+x}{2}a^+\right) \ \chi_{[-1,1]} \ + \ a^+\chi_{(1,\infty)}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} E_c(U_{aff}) \ &= \int_{-\infty}^{-1}(0+W(a^-))e^{cx}dx \ + \int_1^{\infty}(0+W(a^+))e^{cx}dx \\ &\quad + \ \int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2}\Big|\frac{a^+-a^-}{2}\Big|^2 + W\left(\frac{1-x}{2}a^- + \frac{1+x}{2}a^+\right)\right\}e^{cx}dx \\ &\leq \int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2}\Big|\frac{a^+-a^-}{2}\Big|^2 \ + \ W^+\left(\frac{1-x}{2}a^- + \frac{1+x}{2}a^+\right)\right\}e^{cx}dx \\ &\quad + \ \frac{1}{c}e^{-c}W(a^-). \end{aligned}$$

Θέτωντας $E_c^+(U) := \int_{\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}|U_x|^2 + W^+\big(U\big)\right\}e^{cx}dx$, έχουμε

$$E_c(U_{aff}) \ \leq \ -e^{-c}\frac{W^-(a^-)}{c} \ + \ e^cE_0^+(U_{aff}). \tag{1.5}$$

Λαμβάνουμε το άνω φράγμα $\sup_{L\geq 1}\inf_{\mathcal{X}_L}\big\{E_c\big\} \leq \sup_{L\geq 1}E_c(U_{aff}) < \infty$. Αν η U ανήκει στο $\mathcal{X}_L$, έχουμε $W^-(U(x)) = 0$ για $x \geq L$ και $W^+(U(x)) = 0$ για $x \leq -L$. Άρα

$$\begin{aligned} E_c(U) = & \ \int_{\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}\big|U_x\big|^2 + W\big(U\big)\right\}e^{cx}dx \\ = & \ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|U_x|^2e^{cx}dx \ + \int_{\mathbb{R}}W^+(U)e^{cx}dx \ - \int_{\mathbb{R}}W^-(U)e^{cx}dx \\ \geq & \ - \int_{\mathbb{R}}W^-(U)e^{cx}dx \\ \geq & \ - W^-(a^-)\int_{-\infty}^{L}e^{cx}dx \ = \ -\frac{W^-(a^-)}{c}e^{cL}. \end{aligned}$$

□

Από C^2 ομαλότητα των λύσεων του (1.1), έχουμε $\inf \mathcal{X}_L\big[E_c\big] < E_c(U_{aff})$. Έστω $\{U_L^n\}_{n\geq 1}$ ελαχιστοποιούσα ακολουθία στον $[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N$ ώστε $E_c(U_L^n) \longrightarrow \inf_{\mathcal{X}_L}\big\{E_c\big\}$, για $n \to \infty$. Έχουμε

$$\big|U_L^n(x)\big| \ \leq \ \max\big\{|a^+|, |a^-|\big\} \ + \ r_0\,, \qquad x \in \ (-\infty, -L] \cup [L, \infty).$$

Ισχυρισμός 1.4 *Υπάρχει* $C = C(c, L, W) > 0$ *ώστε*

$$\sup_{n\geq 1} \left\|(U_L^n)_x\right\|_{[L^2(\mathbb{R}, e^{cId})]^N} \ \leq \ C \ , \quad \sup_{n\geq 1} \left\|U_L^n\right\|_{[L^\infty(\mathbb{R})]^N} \ \leq \ C.$$

Απόδειξη του 1.4. Για $x \in [-L, L]$, έχουμε

$$\begin{aligned} |U_L^n(x)| \ &\leq \ |U_L^n(-L)| \ + \ \int_{-L}^{x} \left|(U_L^n)_t\right| e^{\frac{ct}{2}} e^{\frac{-ct}{2}} dt \\ &\leq \max\left\{|a^+|, |a^-|\right\} \ + \ r_0 \ + \ \left(\int_{-L}^{L} e^{-ct} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-L}^{x} \left|(U_L^n)_t\right|^2 e^{ct} dt\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|(U_L^n)_x\right|^2 e^{cx} dx \ &\leq \ E_c(U_{aff}) \ - \ \int_{\mathbb{R}} W(U_L^n) e^{cx} dx \\ &\leq \ E_c(U_{aff}) - \int_{\mathbb{R}} W^+(U_L^n) e^{cx} dx \ + \ \int_{\mathbb{R}} W^-(U_L^n) e^{cx} dx \\ &\leq \ E_c(U_{aff}) \ + \ \int_{-\infty}^{L} W^-(U_L^n) e^{cx} dx \\ &\leq \ E_c(U_{aff}) \ + \ \frac{W^-(a^-)}{c} e^{cL}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{1}{2}\left\|(U_L^n)_x\right\|^2_{[L^2(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N} \ \leq \ \frac{W^-(a^-)}{c} e^{cL} \ + \ E_c(U_{aff}).$$

Επειδη $\left|U_L^n(x)\right| \leq \max\left\{|a^+|, |a^-|\right\} + r_0$ for $x \in (-\infty, -L] \bigcup [L, \infty)$, λαμβάνουμε

$$\left\|U_L^n\right\|_{[L^\infty(\mathbb{R})]^N} \ \leq \ \max\left\{|a^+|, |a^-|\right\} + r_0 + \left(\frac{e^{cL} - e^{-cL}}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|(U_L^n)_x\right\|_{[L^2(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N}.$$

□ Τώρα προχωρούμε στην ύπαρξη του ελαχιστοιητή. Η $(U_L^n)_1^\infty$ είναι φραγμένη στον $[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N$, με παραγώγους φραγμένες στον $[L^2(\mathbb{R}, e^{cId})]^N$:

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_{n\geq 1}\left\|U_L^n\right\|_{\left(H^1(I, e^{cId})\right]^N} \ &\leq \ C(c, L, W, I) \ \text{ for all } I \subset\subset \mathbb{R}, \\ \sup\nolimits_{n\geq 1}\left\|(U_L^n)_x\right\|_{[L^2(\mathbb{R}, e^{cId})]^N} \ &\leq \ C(c, L, W). \end{aligned}$$

Από στάνταρ επιχειρήματα συμπάγειας, $U_L \in [H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N$ ώστε κατά μήκος μιας υπακολουθίας $U_L^n \longrightarrow U_L$ για $n \to \infty$ ασθενώς στον $[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N$

και $U_L^n \longrightarrow U_L$ στον $[L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N$ και σ.π. στο $\mathbb{R}$. Από ασθενή κάτω ημισυνέχεια και το λήμμα του Fatou, έχουμε $W(U_L^n) + W^-(a^-)\chi_{(-\infty,L]} \geq 0$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|(U_L)_x|^2 e^{cx} dx \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|(U_L^n)_x|^2 e^{cx} dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \Big\{ W(U_L) + W^-(a^-)\chi_{(-\infty,L]} \Big\} e^{cx} dx \leq$$
$$\leq \ \liminf_{n\to\infty} \ \int_{\mathbb{R}} \Big\{ W(U_L^n) + W^-(a^-)\chi_{(-\infty,L]} \Big\} e^{cx} dx.$$

Αρα

$$-\frac{e^{cL}W^-(a^-)}{c} \ \leq \ E_c(U_L) \ \leq \ \lim_{n\to\infty} E_c(U_L^n)$$
$$\leq \ -e^{-c}\frac{W^-(a^-)}{c} \ + \ e^c E_0^+(U_{aff}).$$

□

1.2 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΕΣ ΣΑΝ ΤΜΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Εισάγουμε την ακόλουθη υπόθεση μονοτονικότητας

1. Υπάρχει $R_0 > 0$ ώστε η απεικόνιση $r \mapsto W(a^\pm + r\xi)$ έχει γνήσια θετική παράγωγο για κάθε $r \in (0, R_0)$ και $\xi \in \mathbb{R}^N, |\xi| = 1$.

Υποθέτουμε ότι $r_0 < R_0$, άρα η $\mathbb{B}(a^\pm, r_0)$ είναι στην περιοχή μονοτονικότητας. Από τις πολικές συντεταγμένες για την U στον $[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N$ έχουμε $U^\pm(x) := a^\pm + \rho^\pm(x) n^\pm(x)$. Τότε $|(U^\pm)_x|^2 = ((\rho^\pm)_x)^2 + (\rho^\pm)^2 |n_x^\pm|^2$. Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, έχουμε

$$\int_I \big|U_x\big|^2 e^{cx} dx = \int_{I \bigcap \{\rho^\pm > 0\}} \Big\{ (\rho_x^\pm)^2 + (\rho^\pm)^2 |n_x^\pm|^2 \Big\} e^{cx} dx,$$

αφού επειδή $[H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N \hookrightarrow [C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N$ έχουμε $|U_x| = 0$ σ.π. στα σύνολα $U^{-1}(\{a^\pm\})$. Αν $\mu < \nu$ στο $\mathbb{R}$, θέτουμε

$$E_c\big(U, (\mu,\nu)\big) := \int_\mu^\nu \Big\{ \frac{1}{2}\big|U_x\big|^2 + W(U) \Big\} e^{cx} dx.$$

Λήμμα 1.5 *Έστω ότι το W ικανοποιεί την (1) και $c > 0$. Έστω $a \in \{a^+, a^-\}$ και $U \in [H^1(\mu,\nu)]^N$ με $U = a + \rho n$ και υποθέστε ότι*
(i) $0 < \rho(\mu) = \rho(\nu) = r \leq R_0$ (R_0 όπως στην (1)),
(ii) $r \leq \rho(x) \leq R_0$, για όλα τα $x \in (\mu,\nu)$.
Τότε υπάρχει $\widetilde{U} \in [H^1(\mu,\nu)]^N$, $\widetilde{U} = a + \widetilde{\rho} n$, ώστε $U(\mu) = \widetilde{U}(\mu)$, $U(\nu) = \widetilde{U}(\nu)$ και $\widetilde{\rho}(x) < r$, για $x \in (\mu,\nu)$ ενώ

$$E_c(\widetilde{U}, (\mu,\nu)) \; < \; E_c(U, (\mu,\nu)).$$

Απόδειξη του 1.5 Προφανής. □

Πρόταση 1.6 *Οι ελαχιστποιητές U_L ικανοποιούν*

$$-\big(\rho_L^{\pm}\big)_{xx} - c\big(\rho_L^{\pm}\big)_x + \rho_L^{\pm}\big|(n_L^{\pm})_x\big|^2 + \nabla W\big(a^{\pm} + \rho_L^{\pm} n_L^{\pm}\big) \cdot n_L^{\pm} \leq 0,$$

ασθενώς στον $H^1_{loc}\big((L,\infty)\bigcap\{\rho_L^+ > 0\}\big)$ και στον $H^1_{loc}\big((-\infty,-L)\bigcap\{\rho_L^- > 0\}\big)$. Αν επιπλέον το W ικανοποιεί την (1), έχουμε

$$\big(\rho_L^{\pm}\big)_{xx} + c\big(\rho_L^{\pm}\big)_x \geq 0.$$

Απόδειξη του 1.6. Θεωρούμε μόνο την περίπτωση $a = a^-$. Θέτουμε $\phi(x) := \theta(x) n_L^-(x)$, με $\theta \in C_c^\infty(-\infty,-L)$ και θεωρούμε μεταβολές

$$U_L^\varepsilon(x) := U_L(x) - \varepsilon\phi(x) = a^- + \big(\rho_L^-(x) - \varepsilon\theta(x)\big) n_L^-(x)$$

που ικανοποιούν τον περιορισμό για μικρό $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\phi]$. Έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big(E_c(U_L^\varepsilon) - E_c(U_L)\Big)\Big] \geq 0.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} E_c(U_L^\varepsilon) \; &= \; \int_{-\infty}^{-L} \left\{ \frac{1}{2}\big((\rho_L^-)_x - \varepsilon\theta_x\big)^2 \; + \; \frac{1}{2}\big(\rho_L^- - \varepsilon\theta\big)^2 \big|(n_L^-)_x\big|^2 \right. \\ &\quad \left. + \; W\big(a^- + (\rho_L^- - \varepsilon\theta) n_L^-\big) \right\} e^{cx} dx \\ &\quad + \; \int_{-L}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}\big|(U_L)_x\big|^2 + W(U_L) \right\} e^{cx} dx. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας πλευρική $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0^+}$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{-L} \Big\{ -(\rho_L^-)_x (\theta_x e^{cx}) - \Big[\rho_L^- \big|(n_L^-)_x\big|^2 + \nabla W\big(a^- + \rho_L^- n_L^-\big) \cdot n_L^-\Big](\theta e^{cx}) \Big\} \, dx \; \geq \; 0.$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{-L}\left\{\big(\rho_L^-\big)_x\big(\theta e^{cx}\big)_x+\Big[\rho_L^-\big|(n_L^-)_x\big|^2-\nabla W\big(a^-+\rho_L^- n_L^-\big)\cdot n_L^-\Big](\theta e^{cx})\right\}dx\ \leq\ 0.$$

Τελειώσαμε, γιατί ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{e^{c\mathrm{Id}}}$ είναι ισομορφισμός στον υποχώρο $C_c^\infty\big(-\infty,-L\big)$ του $H^1_{\mathrm{loc}}\big(-\infty,-L\big)$. ☐

Πρόταση 1.7 *Αν το W ικανοποιεί την (1), τότε*
a) Αν $x_L^+ := \inf\big\{t\in\mathbb{R} : \rho_L^+ \leq r_0$ on $[t,+\infty)\big\}$, τότε $\rho_L^+ < r_0$ στο $(x_L^+,+\infty)$.
b) Αν $x_L^- := \sup\big\{t\in\mathbb{R} : \rho_L^- \leq r_0$ on $(-\infty,t]\big\}$, τότε $\rho_L^- < r_0$ στο $(-\infty,x_L^-)$.

Απόδειξη του 1.7. Έπεται από την ισχυρή Αρχή Μεγίστου για την εξίσωση $\rho_{xx}+c\rho_x\geq 0$ στο εσωτερικό των κυλίνδρων. ☐

Πρόταση 1.8 *Όλα τα U_L λύνουν την $U_{xx}-\nabla W(U)=-c\,U_x$ στον $[C^2_{loc}(\mathbb{R}\setminus\{x_L^\pm\})]^N\bigcap[C^0(\mathbb{R})]^N$. Ανήκουν στον $[C^2_{loc}(\mathbb{R})]^N$ εκτός ενδεχομένως από τα σημεία $x_L^\pm=\pm L$.*

Απόδειξη του 1.8 Έπεται λαμβάνοντας τοπικές μεταβολές εντός των κυλίνδρων. ☐

Παρατήρηση 1.9 *Έχουμε τις ταυτότητες*

$$(\rho)_{xx}\ +\ c(\rho)_x\ =\ \rho|n_x|^2\ +\ \nabla W(a^\pm+\rho n)\cdot n. \tag{1.6}$$

και

$$c\int_\mu^\nu\big|U_x\big|^2dx=\left(W(U)-\frac{\big|U_x\big|^2}{2}\right)\Bigg|_\mu^\nu, \tag{1.7}$$

στα διαστήματα όπου η U λύνει την $U_{xx}-\nabla W(U)=-c\,U_x$.

Πρόταση 1.10 *Αν το W ικανοποιεί την (1), τότε $U_L(x)\longrightarrow a^\pm$ για $x\to\pm\infty$ και $(U_L)_x(\pm\infty)=0$ ακολουθιακά.*

Απόδειξη του 1.10. Για απλότητα πετάμε τους δείκτες $\pm, L$ της ρ.

Ισχυρισμός 1.11 *Οι πολικές ακτίνες είναι μονότονες εντός των κυλίνδρων.*

Απόδειξη του Από το Λήμμα 1.5 η ρ δεν μπορεί να είναι σταθερή σε κανένα διάστημα στα $(-\infty, x_L^-)$ (x_L^+, ∞). Άρα, το σύνολο $A := \{\rho_x = 0\}$ είναι αρθμήσιμο. Αφού η ρ λύνει την $\rho_{xx} + c\rho_x \geq 0$, η Αρχή Μεγίστου δίνει ότι το A δεν περιέχει μέγιστα. Επιπλέον, το A δεν μπορεί να περιέχει ελάχιστα. Άρα, η ρ είναι τελικά μονότονη.

□

Έστω τώρα r^* το όριο της ρ. Στο $+\infty$ έχουμε $r^* = 0$, αφού

$$\begin{aligned}\int_L^{\infty} W^+(U_L)e^{cx}dx \ &\leq\ E_c(U_{aff}) \ + \ \int_{-\infty}^{L} W^-(U_L)e^{cx}dx\\ &\leq\ E_c(U_{aff}) \ + \ \frac{W^-(a^-)e^{cL}}{c} \ < \ \infty.\end{aligned}$$

Για το $-\infty$, έχουμε

Ισχυρισμός 1.12 *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $[t, t+1] \subseteq (-\infty, x_L^-)$, έχουμε*

$$0 \ \leq \ \min_{\substack{t \leq s \leq t+1\\ |\xi|=1}} \Big[\nabla W\big(a^- + \rho(s)\xi\big)\cdot \xi\Big] \ \leq \ \rho_x(t+1)e^c \ - \ \rho_x(t). \tag{1.8}$$

Απόδειξη του Πράγματι, αφού η $U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x$ ικανοποιείται από την U_L στο $(-\infty, x_L^-)$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1} \big(\rho_x e^{cx}\big)_x dx \ &= \ \int_t^{t+1} e^{cx}\Big(\nabla W(a^- + \rho n)\cdot n + \rho\big|n_x\big|^2\Big)dx\\ &\geq \ e^{ct}\int_t^{t+1} \Big(\nabla W(a^- + \rho n)\cdot n + \rho\big|n_x\big|^2\Big)dx\\ &\geq \ e^{ct}\int_t^{t+1} \nabla W(a^- + \rho n)\cdot n \ dx\\ &\geq \ e^{ct}\min_{s\in[t,t+1]}\Big[\nabla W(a^- + \rho(s)n(s))\cdot n(s)\Big]\\ &\geq \ e^{ct}\min_{\substack{t \leq s \leq t+1\\ |\xi|=1}}\Big[\nabla W\big(a^- + \rho(s)\xi\big)\cdot \xi\Big].\end{aligned}$$

Από την (1), παίρνουμε την (1.8).
Εφόσον το όριο της ρ στο $-\infty$ υπάρχει, υπάρχει $x_n \longrightarrow -\infty$ ώστε $\rho_x(x_n) \longrightarrow 0$. Υποθέτουμε ότι τελικά $\rho_x \geq 0$. Θέτοντας $t := x_n - 1$, έχουμε

$$0 \ \leq \ \min_{|\xi|=1}\Big[\nabla W\big(a^- + \rho(x_n - 1)\xi\big)\cdot \xi\Big] \ \leq \ \rho_x(x_n)e^c.$$

Στο όριο λαμβάνουμε $\nabla W\big(a^- + r^*\xi\big)\cdot\xi = 0$ για κάποιο ξ. Άρα $r^* = 0$. Όμοια, αν $\rho_x \leq 0$, θέτουμε $t := x_n$ και τότε

$$0 \;\leq\; \min_{|\xi|=1}\Big[\nabla W\big(a^- + \rho(x_n)\xi\big)\cdot\xi\Big] \;\leq\; \big|\rho_x(x_n)\big|$$

και για $n \longrightarrow \infty$ έπεται ότι $r^* = 0$.

Από την ταυτότητα

$$\big|U_x\big|^2 \;+\; \rho\nabla W(U)\cdot n \;=\; \frac{1}{2}\Big[(\rho^2)_{xx} \;+ c\,(\rho^2)_x\Big] \tag{1.9}$$

και το ότι η ρ^2 είναι μονότονη και έχει όριο στο $-\infty$, έχουμε $(\rho^2)_x \geq 0$ και $\xi_n \longrightarrow -\infty$ ώστε $(\rho^2)_x(\xi_n) \longrightarrow 0$. Από την (1.9) και την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; \int_{\xi_n-1}^{\xi_n}\big|U_x\big|^2dx \;&\leq\; \frac{1}{2}\Big[(\rho^2)_x(\xi_n) - (\rho^2)_x(\xi_n - 1)\Big] \;+\frac{c}{2}\Big[\rho^2(\xi_n) - \rho^2(\xi_n - 1)\Big] \\ &\leq\; \frac{1}{2}\Big[(\rho^2)_x(\xi_n) \;+\; c\,\rho^2(\xi_n)\Big] \;\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

για $n \longrightarrow \infty$. $\square$ $\square$

Πρόταση 1.13 *Οι μονόπλευρες $(U_L)_x(\pm L^\pm)$ της U_L υπάρχουν και*

$$\begin{aligned} c\int_{\mathbb{R}}\big|(U_L)_x\big|^2dx \;=\; W^-(a^-) \;&+\; \frac{1}{2}\Big(\big|(U_L)_x(-L^+)\big|^2 - \big|(U_L)_x(-L^-)\big|^2\Big) \\ &+\; \frac{1}{2}\Big(\big|(U_L)_x(+L^+)\big|^2 - \big|(U_L)_x(+L^-)\big|^2\Big). \end{aligned}$$

Επιπλέον, $(U_L)_x \in [L^2(\mathbb{R})]^N$.

Απόδειξη του 1.13. Εφαρμόζοντας την (1.7) στα $(-\infty, -L-\varepsilon)$, $(-L+\varepsilon, L-\delta)$ και $(L+\delta, \infty)$ για $\varepsilon, \delta > 0$ μικρά, από την 1.10 και την ανισότητα

Hölder, έχουμε

$$\big|(U_L)_x(-L-\varepsilon)\big| \le \sqrt{2}\Big(W(U_L(-L-\varepsilon)) \;+\; W^-(a^-)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\big|(U_L)_x(-L+\varepsilon)\big| \le \sqrt{2}\Bigg(ce^{c(L-\varepsilon)}\int_{-L+\varepsilon}^{L-\delta}\big|(U_L)_x\big|^2 e^{cx}dx \;-\; W(U_L(+L-\delta)) \\ \;+\; W(U_L(-L+\varepsilon)) \;+\; \frac{1}{2}\big|(U_L)_x(+L-\delta)\big|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

$$\big|(U_L)_x(+L-\delta)\big| \le \sqrt{2}\Bigg(W(U_L(L-\delta)) - W(U_L(-L+\varepsilon)) + \frac{1}{2}\big|(U_L)_x(-L+\varepsilon)\big|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

$$\big|(U_L)_x(+L+\delta)\big| \le \sqrt{2}\Bigg(ce^{-c(L+\delta)}\int_{L+\delta}^{\infty}\big|(U_L)_x\big|^2 e^{cx}dx \;+\; W(U_L(L+\delta))\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Επιτρέποντας $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ και $\delta \longrightarrow 0^+$ το ζητούμενο έπεται. $\square$

1.3 ΤΑ ΤΟΠΙΚΑ ΛΗΜΜΑΤΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Οι κανονικές συντεταγμένες (p,d) του $\mathbb{R}^N$ ως προς ένα C^2 κυρτό σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^N$ δίνονται από

$$u \;=:\; p \;+\; dn \tag{1.10}$$

όπου p η προβολή στο $\mathcal{C}$, $0 \in \mathcal{C}$, d η προσημασμένη απόσταση $\partial\mathcal{C}$ και n το μοναδιαίο κάθετο του $\partial\mathcal{C}$. Το σύνορο παραμετρείται από συντεταγμένες

$$\mathbb{R}^{N-1} \ni s \;=\; (s_1,...,s_{N-1}) \;\mapsto\; p(s_1,...,s_{N-1}) \in \partial\mathcal{C}.$$

Υποθέτουμε ότι το

$$\frac{\partial p}{\partial s_i} \;=\; \vec{t_i}\;, \qquad i=1,...,N-1, \tag{1.11}$$

είναι ορθοκανονικό πλαίσιο στον εφαπτόμενο χώρο στο p. Άρα

$$\frac{\partial n}{\partial s_i} \;=\; \kappa_i\vec{t_i}, \quad \kappa_i = \kappa_i(s) \text{ η i-οστή κύρια καμπυλότητα στο } \partial\mathcal{C}. \tag{1.12}$$

Οι συντεταγμένες (p,d) ορίζονται για $-d_0 \le d$ αν $d_0\kappa_i \le 1$, $i=1,...,N-1$ ([G-T]). Ο προσανατολισμός είναι τέτοιος ώστε $\kappa_i \ge 0$. Έχουμε

$$U(x) \;=\; p(x) \;+\; d(x)n(x), \tag{1.13}$$

ενώ $p(x) = p(s(x))$, $n(x) = n(s(x))$. Από την (1.13),

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{p}(x) + \dot{d}(x)n(x) + d(x)\dot{n}(x) \\ &= \vec{t_i}\dot{s}_i + \dot{d}n + d\kappa_i\vec{t_i}\dot{s}_i. \end{aligned}$$

Άρα

$$|\dot{U}(x)|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2(1+\kappa_i d(x))^2 + (\dot{d}(x))^2. \tag{1.14}$$

Έστω τώρα $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{R}^N$ κυρτό και

$$W_u \cdot n \geq \frac{c_0}{2} > 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{C}', \tag{1.15}$$

με $W \in C^1(\mathbb{R}^N)$ και (p, d) τις κανονικές συντεταγμένες του $\partial\mathcal{C}'$. Από C^1 ομαλότητα του W και την (1.15), υπάρχει $\bar{d} > 0$ ώστε

$$d \longmapsto W(p+dn) \quad \text{αύξουσα στο } -\bar{d} \leq d \leq \bar{d}. \tag{1.16}$$

Λήμμα 1.14 *Έστω $x_1 < x_2$ στο $\mathbb{R}$ και $U \in [H^1(x_1,x_2)]^N$ ώστε*
(i) $d(x_1) = d(x_2) = 0$,
(ii) $0 \leq d(x) \leq \bar{d}$, $x \in (x_1, x_2)$.
Αν η (1.15) και η (1.16) ικανοποιούνται, τότε υπάρχει $\tilde{U} \in [H^1(x_1,x_2)]^N$ ώστε:

$$\tilde{U}(x_1) = U(x_1), \quad \tilde{U}(x_2) = U(x_2), \tag{1.17}$$

$$-\bar{d} \leq \tilde{d}(x) < 0, \text{ for } x \in (x_1, x_2), \tag{1.18}$$

$$E_\mu(\tilde{U}, (x_1,x_2)) < E_\mu(U, (x_1,x_2)), \tag{1.19}$$

με $\tilde{U}(x) = \tilde{p}(x) + \tilde{d}(x)n(x)$ και

$$E_\mu(U, (x_1,x_2)) := \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}|\dot{U}(x)|^2 + W(U(x))\right) d\mu(x) \tag{1.20}$$

όπου μ ένα θετικό μέτρο Radon στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη του 1.14 Έστω $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\phi(0) = \phi(1) = 0$, $\phi(\sigma) > 0$ για $\sigma \in (0,1)$. Για μικρό $\varepsilon \geq 0$ ορίζουμε

$$\widetilde{U}^\varepsilon(x) := p(x) - \varepsilon\phi\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)n(x), \quad x \in [x_1, x_2], \tag{1.21}$$

όπου $U(x) = p(x) + d(x)n(x)$. Από την (1.14), έχουμε

$$|\dot{U}(x)|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2(x) \;+\; d^2 \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i^2 \dot{s}_i^2(x) \;+\; 2d \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i \dot{s}_i^2(x) \;+\; \dot{d}^2(x). \tag{1.22}$$

Επίσης

$$|\dot{\tilde{U}}^\varepsilon|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2 \;+\; \varepsilon^2 \phi^2 \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i^2 \dot{s}_i^2 \;-\; 2\varepsilon\phi \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i \dot{s}_i^2 \;+\; \varepsilon^2 \frac{\phi'^2}{(x_2 - x_1)^2}. \tag{1.23}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
E_\mu(\tilde{U}^\varepsilon, (x_1, x_2)) \;&=\; E_\mu(\tilde{U}^0, (x_1, x_2)) \\
&\quad -\; \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \phi \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i \dot{s}_i^2 d\mu \;+\; \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \phi^2 \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i^2 \dot{s}_i^2 d\mu \qquad (1.24) \\
&\quad -\; \int_{x_1}^{x_2} \Big(W(p) \;-\; W(p - \varepsilon\phi n) \Big) d\mu \\
&\quad +\; \frac{\varepsilon^2}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \phi'^2 d\mu.
\end{aligned}$$

Από την (1.16), έχουμε

$$E_\mu(\tilde{U}^0, (x_1, x_2)) \;\leq\; E_\mu(U, (x_1, x_2)). \tag{1.25}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
&-\; \int_{x_1}^{x_2} \Big(W(p) - W(p - \varepsilon\phi n) \Big) d\mu \;+\; \frac{\varepsilon^2}{2(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \phi'^2 d\mu \\
&\quad = \;-\; \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_0^1 \frac{d}{d\tau}(W(p - \varepsilon\tau\phi n)) d\tau \right) d\mu \\
&\qquad +\; \frac{\varepsilon^2}{2(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \phi'^2 d\mu \qquad (1.26) \\
&\quad = \;-\, \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_0^1 W_u(p - \varepsilon\tau\phi n) \cdot \phi n \right) d\tau d\mu \\
&\qquad +\; \frac{\varepsilon^2}{2(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \phi'^2 d\mu \\
&\quad \overset{(1.15)}{<} \;-\, C\varepsilon \;+\; \frac{\varepsilon^2}{2(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \phi'^2 d\mu \;<\; 0,
\end{aligned}$$

Για $C>0$ και $\varepsilon>0$. Τελικά

$$-\ \varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\phi\sum_{i=1}^{N-1}\kappa_i\dot{s}_i^2 d\mu\ +\ \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_1}^{x_2}\phi\sum_{i=1}^{N-1}\kappa_i^2\dot{s}_i^2 d\mu\le\ 0, \tag{1.27}$$

για μικρό $\varepsilon>0$. Το Λήμμα έπεται για $\tilde{U}:=\tilde{U}^{\varepsilon}$, $0<\varepsilon<<1$. □

Υποθέσεις

(H1) $W:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$, C^2, με δύο ελάχιστα.

(H2) $\{u|W(u)\le 0\}=:\mathcal{C}_0^-\cup\{a^+\}$, $\mathcal{C}_0^-$ συμπαγές, κυρτό.

(H3) (i) $W_u\cdot n\ge c_0>0$ στο $\partial\mathcal{C}_0^-=:\{W=0\}_{(-)}$, n το εξωτερικό κάθετο στο $\partial\mathcal{C}_0^-$.
(ii) $W_{uu}\ge c_0 I$ on $\{W=0\}_{(-)}$.

Παρατήρηση 1.15 *a) Από C^2 ομαλότητα, υπάρχει $b>0$ ώστε*

$$W_{uu}\ \le\ bI,\quad \textit{on}\ \{u|W(u)\le 0\}. \tag{1.28}$$

b) Η (H3) συνεπάγεται $\{u|W(u)=\beta\}$ για $0<\beta<<1$ ότι

$$\{W=\beta\}_{(-)}\quad \textit{and}\quad \{W=\beta\}_{(+)}, \tag{1.29}$$

με $\{W=\beta\}_{(-)}$ κυρτό και περιέχοντας το a^-. Επειδή $\beta<0$ ($|\beta|<<1$), το $\{u|W(u)=\beta\}$ έχει 2 συνιστώσες. Άρα

$$W_u\cdot n\ \ge\ \frac{c_0}{2}\quad \textit{on}\ \{W=\beta\}_{(-)},\ \alpha_0\le\beta\le\alpha_0. \tag{1.30}$$

Λαμβάνουμε $\alpha\in(0,\alpha_0)$ και επιπλέον

$$0\ <\ \alpha\ <\frac{c_0}{4}\lambda\ =:\ \bar{a}_0, \tag{1.31}$$

όπου

$$0\ \le\ \lambda\ \le\ \frac{c_0}{2b}\ ,\ \ 0\ <\ \lambda\ \le\ d_0,\ \ \lambda\ <\ \frac{1}{\max\{\kappa_1,...,\kappa_{N-1}\}}, \tag{1.32}$$

με b όπως στην (1.28),

$$d_0\ =\ \mathrm{dist}\Big(\{W=\alpha_0\}_{(-)},\{W=-\alpha_0\}_{(-)}\Big), \tag{1.33}$$

και $\kappa_1,...,\kappa_{N-1}$ τις κύριες καμπυλότητες. Επίσης

$$W(p\ -\ \lambda n(p))\ <\ 0,\quad \text{for}\ p\in\{W=\alpha\}_{(-)}. \tag{1.34}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
W(p) \ - \ W(p-\lambda n) \ &= \ -\int_0^\lambda \frac{d}{dt}[W(p-tn)]dt \\
&= \ \int_0^\lambda (W_u(p-tn) - W_u(p) + W_u(p))\cdot n \ dt \\
&= \ \int_0^\lambda W_u(p)\cdot n dt \ - \ \int_0^\lambda \int_t^0 \frac{d}{ds}(W_u(p-sn)ds)\cdot n \ dt \\
&= \ \int_0^\lambda W_u(p)\cdot n dt \ - \ \int_0^\lambda \int_0^t W_{uu}(p-sn)n\cdot n \ dsdt \\
&\geq \ \frac{c_0}{2}\lambda \ - \ \frac{b}{2}\lambda^2 \qquad ((1.28),(1.30)) \\
&\geq \ \frac{c_0}{4}\lambda \qquad \Big(\lambda \leq \frac{c_0}{2b}\Big).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$W(p) - \frac{c_0}{4}\lambda \ \geq \ W(p-\lambda n) \tag{1.35}$$

Άρα

$$0 \ > \ \alpha \ - \ \frac{c_0}{4}\lambda \ \geq \ W(p-\lambda n). \tag{1.36}$$

Λήμμα 1.16 *Έστω $\mathcal{C}$ η συνιστώσα του $\{u|W(u) \geq \alpha\}$ με $\partial\mathcal{C} = \{W = \alpha\}_{(-)}$. Έστω (p,d) οι κανονικές συντεταγμένες ως προς το $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι οι (H1), (H2), (H3) ισχύουν. Έστω ότι $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ και $U \in [H^1(x_1,x_2)]^N$ ώστε*
(i) $d(x_1) = d(x_2) = 0$,
(ii) $d(x_0) \geq 0$, για κάποιο $x_0 \in (x_1,x_2)$.
Τότε υπάρχει $\tilde{U} \in [H^1(x_1,x_2)]^N$ με ιδιότητες

$$\tilde{U}(x_1) \ = \ U(x_1) \ , \ \ \tilde{U}(x_2) \ = \ U(x_2), \tag{1.37}$$

όπου $-d_0 \leq \tilde{d}(x) < 0$ για $x \in (x_1,x_2)$ και

$$E_\mu(\tilde{U},(x_1,x_2)) \ < \ E_\mu(U,(x_1,x_2)), \tag{1.38}$$

όπου $\tilde{U}(x) = \tilde{p}(x) + \tilde{d}(x)n(x)$.

Απόδειξη του 1.16 Έστω

$$\rho_M \ := \ \max_{x\in[x_1,x_2]} d(x). \tag{1.39}$$

Υποθέτουμε ότι $d(x_0) = \rho_M$. πρώτα αναλύουμε την περίπτωση $d(x_0) = \rho_M = 0$. Τότε $d(x) < 0$ για κάποιο $x \in (x_1, x_0)$ $(x \in (x_0, x_2))$, αφού αλλιώς από το Λήμμα 1.14 έχουμε αντίφαση στην ελαχιστικότητα. Από αυτό και τη συνέχεια της U έπεται η ύπαρξη $\hat{x}_1 \in (x_1, x_0)$, $\hat{x}_2 \in (x_0, x_2)$, $-\frac{d_0}{2} < \hat{d} < 0$, ώστε $d(\hat{x}_1) = d(\hat{x}_2) = \hat{d}$ και $\hat{d} < d(x) < 0$, για $x \in (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Θεωρούμε την παράλληλη υπερεπιφάνεια της $\partial\mathcal{C}$, παραμετρημένη από $p + \hat{d}n(p)$, $p \in \partial\mathcal{C}$ και την συμβολίζουμε με $\partial\mathcal{C}'$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1.14 στο $\partial\mathcal{C}'$ και λαμβάνουμε $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$. Άρα το Λήμμα αληθεύει για $\rho_M = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $\rho_M > 0$. Αν $0 < \rho_M \leq d_0$, εφαρμόζουμε πάλι το Λήμμα 1.14 στο I_0 και στο $\{x \in (x_1, x_2) | d(x) > 0\}$. Μένει η περίπτωση $\rho_M > d_0$. Ταυτίζουμε το (x_1, x_2) με τοI_0. Έστω $h : [0, d_0] \longrightarrow [-\lambda, 0]$, $h(\sigma) = -\lambda\frac{\sigma}{d_0}$, τότε $h(0) = 0$, $h(d_0) = -\lambda$. Θέτουμε

$$\tilde{U}(x) \ := \left\{ \begin{array}{lll} p(x) \ + \ h(d(x))n(x), & \text{for } x \in [x_1, x_2], \ d(x) < d_0 \\ p(x) \ - \ \lambda n(x), & \text{for } x \in [x_1, x_2], \ d(x) \geq d_0, \end{array} \right. \tag{1.40}$$

$\tilde{U}(x_1) = U(x_1)$, $\tilde{U}(x_2) = U(x_2)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |\dot{U}(x)|^2 \ &= \ \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2 (1 + \kappa_i d(x))^2 \ + \ \dot{d}^2(x) \\ &\geq \ \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2 (1 + \kappa_i h)^2 \ + \ (h'(d))^2 \dot{d}^2(x) \\ &= \ |\dot{\tilde{U}}(x)|^2, \end{aligned}$$

όταν $d(x) < d_0$, ενώ για $d(x) \geq d_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\dot{U}(x)|^2 \ &= \ \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2 (1 + \kappa_i d(x))^2 \ + \ \dot{d}^2(x) \\ &\geq \ \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2 (1 + \kappa_i d(x))^2 \\ &> \ \sum_{i=1}^{N-1} \dot{s}_i^2 (1 - \lambda \kappa_i)^2 \\ &= \ |\dot{\tilde{U}}(x)|^2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_{x_1}^{x_2} |\dot{\tilde{U}}(x)|^2 d\mu(x) \ < \ \int_{x_1}^{x_2} |\dot{U}(x)|^2 d\mu(x). \tag{1.41}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} W(\tilde{U}(x)) &= W(p(x) \;+\; h(d(x))n(x)) \\ &= W\Big(p(x) \;-\; \frac{\lambda d(x)}{d_0} n(x)\Big) \\ &\leq W(p(x) \;+\; d(x)n(x)) \quad (\text{by}(1.30)) \\ &= W(U(x)), \end{aligned}$$

όταν $d(x) < d_0$, ενώ για $d(x) \geq d_0$ έχουμε

$$W(\tilde{U}(x)) \;\leq\; 0 \;\leq\; W(U(x)). \tag{1.42}$$

Τελικά

$$\int_{x_1}^{x_2} W(\tilde{U}(x))d\mu(x) \;<\; \int_{x_1}^{x_2} W(U(x))d\mu(x). \tag{1.43}$$

Άρα

$$E_\mu(\tilde{U},(x_1,x_2)) \;<\; E_\mu(U,(x_1,x_2)). \tag{1.44}$$

□

1.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΩΝ

Λήμμα 1.17 *Κάθε λύση της $U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x$ στον $[C^2(\mu,\nu)]^N$ ικανοποιεί:*

$$E_c(U,(\mu,\nu)) = \int_\mu^\nu \Big\{\frac{1}{2}\big|U_x\big|^2 + W(U)\Big\}e^{cx}dx \;=\; \left\{\frac{e^{cx}}{c}\left(W(U) - \frac{\big|U_x\big|^2}{2}\right)\right\}\bigg|_\mu^\nu .$$

Απόδειξη του 1.17. Η $U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x$ δίνει $-U_{xx}\cdot U_x + \nabla W(U)\cdot U_x = c\big|U_x\big|^2$, άρα

$$\left(\frac{1}{2}\big|U_x\big|^2 - W(U)\right)_x \;=\; -c\big|U_x\big|^2.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left\{\frac{e^{cx}}{2}\big|U_x\big|^2\right\}\Big|_\mu^\nu \;-\; \frac{c}{2}\int_\mu^\nu \big|U_x\big|^2 e^{cx}dx \;-\; \Big(e^{cx}W(U)\Big)\Big|_\mu^\nu \;+\; c\int_\mu^\nu W(U)e^{cx}dx \\ = \; -c\int_\mu^\nu \big|U_x\big|^2 e^{cx}dx. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 1.18 *Οι ελαχιστοποιητές U_L ικανοποιούν*

$$
E_c(U_L) \;=\; \left.\begin{aligned} &\lim_{\omega\to\infty} \frac{e^{c\omega}}{c}\left(W(U_L(\omega)) - \frac{\left|(U_L)_x(\omega)\right|^2}{2}\right) \\ &+ \frac{e^{+cL}}{2c}\left(\left|(U_L)_x(+L^+)\right|^2 - \left|(U_L)_x(+L^-)\right|^2\right) \\ &+ \frac{e^{-cL}}{2c}\left(\left|(U_L)_x(-L^+)\right|^2 - \left|(U_L)_x(-L^-)\right|^2\right). \end{aligned}\right\} =: \; e_c(U_L)
$$

Το άθροισμα $e_c(U_L)$ είναι το "σφάλμα" που μηδενίζεται αν $U_L \in [C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N$.

Απόδειξη του 1.18. Επειδή $E_c(U_L) = \lim_{\omega\to\infty} E_c(U_L,(-\infty,\omega))$, από το Λήμμα 1.17 στα $(-\infty,-L)$, $(-L,L)$, (L,ω) και $\omega \longrightarrow \infty$, το ζητούμενο έπεται. □

Λήμμα 1.19 *Οι ελαχιστοποιητές U_L ικανοποιούν*

$$
\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{e^{c\omega}}{c}\left(W(U_L(\omega)) - \frac{\left|(U_L)_x(\omega)\right|^2}{2}\right)\right] = 0.
$$

Απόδειξη του 1.19. Από την (1.7) για $\mu = \omega$, $\nu = \infty$ και την Πρόταση 1.10, έχουμε

$$
0 \;\le\; c\int_\omega^\infty \left|(U_L)_x\right|^2 dx \;=\; \frac{\left|(U_L)_x(\omega)\right|^2}{2} \;-\; W(U_L(\omega)).
$$

Τότε

$$
\begin{aligned} 0 \;\le\; \frac{e^{c\omega}}{c}\left(\frac{\left|(U_L)_x(\omega)\right|^2}{2} \;-\; W(U_L(\omega))\right) \;&=\; e^{c\omega}\int_\omega^\infty \left|(U_L)_x\right|^2 dx \\ &\le\; \int_\omega^\infty \left|(U_L)_x\right|^2 e^{cx} dx. \end{aligned}
$$

Από την Πρόταση 1.13, έχουμε $(U_L)_x \in [L^2(\mathbb{R}, e^{c\mathrm{Id}})]^N$. □

Πόρισμα 1.20 *Έχουμε $E_c(U_L) = e_c(U_L)$, με $e_c(U_L)$. Επιπλέον, $E_c(U_L) = 0$ αν $U_L \in [C^2_{loc}(\mathbb{R})]^N$.*

1.5 ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΛΗΜΜΑΤΩΝ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ - ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Εισάγουμε τις υποθέσεις για το δυναμικό:

1. Το W είναι $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, τα $a^{\pm}$ είναι ελάχιστα, $W(a^-) < 0 = W(a^+)$ και $\min_{\mathbb{R}^N}\{W\} = W(a^-)$. Επιπλέον υπάρχει $\alpha_0 > 0$ ώστε αν $\alpha \in (0, \alpha_0]$, να έχουμε $W^{-1}(\{\alpha\}) = \partial\mathcal{C}^-_\alpha \cup \partial\mathcal{C}^+_\alpha$, $\{u \in \mathbb{R}^N | W \leq \alpha\} = \mathcal{C}^-_\alpha \cup \mathcal{C}^+_\alpha$, όπου τα $\mathcal{C}^-_\alpha, \mathcal{C}^+_\alpha$ είναι ξένα, συμπαγή, κυρτά με C^2 σύνορα και περιέχουν τα $a^{\pm}$. Επιπλέον, $W_u \cdot n \geq c_0 > 0$ στο $\partial\mathcal{C}^-_0$ και $W_{uu} \geq c_0 I$ στο $\partial\mathcal{C}^-_0$.

2. Η $r \mapsto W(a^- + r\xi)$ έχει γνήσια θετική παράγωγο για $a^- + r\xi \in \mathcal{C}^-_\alpha$, $|\xi| = 1$, $r > 0$.

Ορισμός 1.21 *Για $\alpha \in (0, \bar{\alpha}_0]$ και $L \geq 1$, θέτουμε*

$$\begin{aligned} \lambda^-_L &:= \sup\big\{x \in \mathbb{R} \ : \ |U_L(x) - a^-| = r_0\big\}, \\ \lambda^+_L &:= \inf\big\{x \in \mathbb{R} \ : \ |U_L(x) - a^+| = r_0\big\}, \\ \lambda^{\alpha-}_L &:= \sup\big\{x \in \mathbb{R} \ : \ U_L(x) \in \partial(\mathcal{C}^-_\alpha)\big\}. \end{aligned}$$

Πρόταση 1.22 *Υποθέτουμε ότι το W ικανοποιεί την (1) και την (1), α είναι όπως στον Ορισμό 1.21. Για κάθε $L \geq 1$, έχουμε*
(I) Το U_L εξέρχεται από το $\mathcal{C}^-_\alpha$ ακριβώς όταν $x = \lambda^{\alpha-}_L$, δηλ.

$$x \in (-\infty, \lambda^{\alpha-}_L] \quad \Longrightarrow \quad W(U_L(x)) \leq \alpha.$$

(II) Η εικόνα $U_L(\mathbb{R})$ περιορισμένη στο $\mathbb{R}^N \setminus (\mathcal{C}^-_\alpha \bigcup \mathbb{B}(a^+, r_0))$ έχει μια συνεκτική συνιστώσα και

$$W(U_L(x)) \geq \alpha \text{ for } x \in [\lambda^{\alpha-}_L, \lambda^+_L].$$

(III) Η εικόνα $U_L(\mathbb{R})$ περιορισμένη στο $\mathcal{C}^-_\alpha \bigcup \mathbb{B}(a^+, r_0)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες και

$$W(U_L(x)) \leq \alpha \text{ για κάποιο } x \in \mathbb{R} \text{ τότε είτε } \ x \in (-\infty, \lambda^\alpha_L], \text{ είτε } \ x \in [\lambda^+_L, +\infty).$$

(IV) Τα $\lambda^{\pm}_L$ είναι καλά ορισμένα σαν τους μοναδικούς χρόνους όπου διασχίζονται οι σφαίρες $\partial(\mathbb{B}(a^{\pm}, r_0))$.
(V) Οι πολικες ακτίνες $\rho^{\pm}_L = \big|U_L - a^{\pm}\big|$ είναι γνήσια μονότοτονες στα $[\lambda^+_L, +\infty)$, $(-\infty, \lambda^{\alpha-}_L]$ αντίστοιχα.

Απόδειξη του 1.22. 1. Θεωρούμε πρώτα το λ_L^-. Έπεται άμεσα από το Λήμμα 3.4 στο [A-F].
2. Για το $\lambda_L^{\alpha-}$, εφαρμόζοντας το 1.16, έχουμε μοναδική τομή του U_L με το $\partial\mathcal{C}_a^-$.
3. Για το λ_L^+ υποθέτουμε προς αντίφαση ότι το U_L τέμνει το $\partial\mathbb{B}(a^+, r_0)$ τουλάχιστον 2 φορές. Τότε υπάρχουν $x_1 < x_2$ ώστε $U_L(x_i) \in \partial\mathbb{B}(a^+, r_0)$, $i = 1, 2$ και $U_L(x_i) \notin \mathbb{B}(a^+, r_0)$, $x_1 < x < x_2$. Από το 2., το U_L δεν μπορεί να τέμνει το $\partial\mathcal{C}_\alpha^-$ για εκείνα τα x. Από το Λήμμα 3.4 στο [A-F] έπεται η αντίφαση.
4. Τα παραπάνω δίνουν ότι το $U_L(x)$ δεν μπορεί να βγει από το $\mathcal{C}_\alpha^-$ πριν το $x = \lambda_L^{\alpha-}$ και δεν μπορεί να μπει στο $\mathbb{B}(a^+, r_0)$ πριν από $x = \lambda_L^+$. Συνεπώς έχουμε έλεγχο στις περιοχές μονοτονικότητας, που δίνει τα L^∞ φράγματα

$$\left\|\rho_L^-\right\|_{L^\infty(-\infty,\lambda_L^{\alpha-})} \;\le\; \max_{u\in\mathcal{C}_\alpha^-}\left|u - a^-\right| \;\;,\;\; \left\|\rho_L^+\right\|_{L^\infty(\lambda_L^+,\infty)} \;\le\; r_0.$$

Το Λήμμα 1.5 και η ισχυρη Αρχή Μεγίστου μπορούν να εφαρμοστούν δίνοντας το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.23 *Αν $dist(\mathcal{C}_\alpha^-, \mathbb{B}(a^+, r_0)) =: d_\alpha$, τότε για $\alpha \in [0, \bar{\alpha}_0]$ και $L \ge 1$, έχουμε*

$$E_c(U_L) \;\ge\; -\frac{W^-(a^-)}{c}e^{c\lambda_L^{0-}} \;+\; \frac{\alpha}{c}\Big[e^{c\lambda_L^+} - e^{c\lambda_L^{\alpha-}}\Big] \;+\; \frac{c\, d_\alpha^2}{2\big(e^{-c\lambda_L^{\alpha-}} - e^{-c\lambda_L^+}\big)}.$$

Απόδειξη του 1.23. Έχουμε

$$E_c(U_L) = \; -\int_{-\infty}^{\lambda_L^{0-}} W^-(U_L)e^{cx}dx + \int_{\lambda_L^{0-}}^{\infty} W^+(U_L)e^{cx}dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|(U_L)_x\right|^2 e^{cx}dx.$$

Επειδή $W(U_L) \ge \alpha$ στο $[\lambda_L^{\alpha-}, \lambda_L^+]$ και$W^-(U_L) \le W^-(a^-)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\lambda_L^{0-}} W^-(U_L)e^{cx}dx \;&\le\; W^-(a^-)\int_{-\infty}^{\lambda_L^{0-}} e^{cx}dx\\ &=\; \frac{W^-(a^-)}{c}e^{c\lambda_L^{0-}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_L^{0-}}^{\infty} W^+(U_L)e^{cx}dx \;&\ge\; \int_{\lambda_L^{\alpha-}}^{\lambda_L^+} W^+(U_L)e^{cx}dx\\ &\ge\; \alpha\int_{\lambda_L^{\alpha-}}^{\lambda_L^+} e^{cx}dx \;=\; \frac{\alpha}{c}\Big[e^{c\lambda_L^+} - e^{c\lambda_L^{\alpha-}}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\alpha \ \le\ \big|U_L(\lambda_L^{\alpha-}) - U_L(\lambda_L^{+})\big| \ &\le\ \int_{\lambda_L^{\alpha-}}^{\lambda_L^{+}} \big|(U_L)_x\big| dx \\ &\le\ \left(\int_{\lambda_L^{\alpha-}}^{\lambda_L^{+}} e^{-cx}dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\lambda_L^{\alpha-}}^{\lambda_L^{+}} \big|(U_L)_x\big|^2 e^{cx}dx\right)^{\frac12}. \end{aligned}$$

Άρα

$$d_\alpha^2 \ \le\ \left(\frac{e^{-c\lambda_L^{\alpha-}} - e^{-c\lambda_L^{+}}}{c}\right)\int_{\mathbb{R}} \big|(U_L)_x\big|^2 e^{cx}dx.$$

□

Η ταχύτητα του Οδεύοντος Κύματος. Τα αποτελέσματα μέχρι στιγμής ισχύουν για αυθαίρετο $c > 0$. Το κατάλληλο $c = c^*$ που εγγυάται ύπαρξη πρέπει να είναι πολύ συγκεκριμένο: Από την Πρόταση 1.13,

$$\begin{aligned} \Big(\big|(U_L)_x(+L^+)\big|^2 - \big|(U_L)_x(+L^-)\big|^2\Big) + \Big(\big|(U_L)_x(-L^+)\big|^2 - \big|(U_L)_x(-L^-)\big|^2\Big)& \\ + 2W^-(a^-) =\ & 2c\int_{\mathbb{R}} \big|(U_L)_x\big|^2 dx \\ \ge\ & 2c\int_{-L}^{L} \big|(U_L)_x\big|^2 dx \\ \ge\ & \frac{c\big|U_L(+L) - U_L(-L)\big|^2}{L} \\ \ge\ & \frac{c}{L}\Big(|a^+ - a^-| - 2r_0\Big)^2, \end{aligned}$$

και άρα αν $c \longrightarrow +\infty$ δεν μπορούμε να συγκολλήσουμε τις λύσεις για κανένα $L < \infty$. Επίσης, από το Πόρισμα 1.20 και την (1.5), έχουμε

$$\begin{aligned} e^{cL}\Big(\big|(U_L)_x(L^+)\big|^2 - \big|(U_L)_x(L^-)\big|^2\Big) + e^{-cL}\Big(\big|(U_L)_x(-L^+)\big|^2 - \big|(U_L)_x(-L^-)\big|^2\Big)& \\ =\ & 2cE_c(U_L) \\ \le\ & 2cE_c(U_{aff}) \\ \le\ & -2e^{-c}W^-(a^-) + 2ce^{c}\big(E_0^+(U_{aff})\big), \end{aligned}$$

δεν μπορούμε να συγκολλήσουμε τις λύσεις αν $c \longrightarrow 0^+$. Το κατάλληλο $c = c^*$ είναι εκείνο όπου για μεγάλο $L > L^* \ge 1$, $E_c(U_L) = 0$. Η $U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x$ είναι αναλλοίωτη σε μεταφορές, ενώ η (1.3) δεν είναι. Μετατοπίσεις $U(\cdot - \delta)$, $\delta \neq 0$ λύσεων προκύπτουν σαν ελαχιστοποιητές μετατοπισμένων $e^{c\delta}E_c$, αλλά και τα 2 κύματα πρέπει να έχουν την ίδια μηδενική ενέργεια $E_c(U(\cdot - \delta)) = E_c(U) = 0$.

Παρατήρηση 1.24 *Για σταθερό $c > 0$, η απεικόνιση $L \longmapsto E_c(U_L) : [1, \infty) \longrightarrow \big(-\infty, E_c(U_{aff})\big]$ είναι αύξουσα ως προς L.*

Θέτουμε
$$R^{\alpha}_{\max} := \max_{u \in \partial \mathcal{C}^-_{\alpha}} \big|u - a^-\big|.$$

Λήμμα 1.25 *Αν το W ικανοποιεί την (1), υπάρχει $w^* > 0$ ώστε αν $\alpha \in [0, \bar{\alpha}_0]$,*
$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha -}_L - \lambda^-_L \leq \ & \frac{1}{w^*}\left\{cR^{\alpha}_{\max} + \Big[\big(cR^{\alpha}_{\max}\big)^2 + 2w^*\big|R^{\alpha}_{\max} - r_0\big|\Big]^{\frac{1}{2}}\right\} \\ =: \ & \Lambda_{\alpha,-}. \end{aligned} \tag{1.45}$$
Σαν w^* μπορούμε να πάρουμε
$$w^* \ := \min_{\substack{r_0 \leq r \leq R^{\alpha}_{\max} \\ |\xi| = 1}} \left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=r} W(a^- + t\xi)\right].$$

Απόδειξη του 1.25. Γράφοντας την $U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x$ σε πολικές $U_L = a^- + \rho^-_L n^-_L$, λαμβάνουμε (1.6). Από την (1) στο $[\lambda^-_L, \lambda^{\alpha-}_L] \subseteq [-L, L]$, εκτιμούμε
$$\begin{aligned} (\rho^-_L)_{xx} + c(\rho^-_L)_x \ &\geq \ \nabla W(a^- + \rho^-_L n) \cdot n^-_L \\ &= \ \frac{d}{dt}\Big|_{t=\rho^-_L} W(a^- + t n^-_L) \\ &\geq \min_{\substack{r_0 \leq r \leq R^{\alpha}_{\max} \\ |\xi| = 1}} \left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=r} W(a^- + t\xi)\right] \ =: \ w^* \ > \ 0. \end{aligned}$$

Τότε
$$(\rho^-_L)_x + c\rho^-_L \ \geq \ w^*(x - \lambda^-_L) \ + \ \Big\{c\rho^-_L(\lambda^-_L) \ + \ (\rho^-_L)_x\big((\lambda^-_L)^+\big)\Big\}.$$
Λόγω της Πρότασης 1.22, έχουμε $\{\ .\ \} \geq 0$. Άρα
$$\int_{\lambda^-_L}^x (\rho^-_L)_z(z)dz \ + \ c\int_{\lambda^-_L}^x (\rho^-_L)(z)dz \ \geq \ w^* \int_{\lambda^-_L}^x (z - \lambda^-_L)dz.$$
Θέτουμε $x := \lambda^{\alpha-}_L$. Τότε
$$\frac{\big|R^{\alpha}_{\max} - r_0\big|}{\lambda^{\alpha-}_L - \lambda^-_L} \ + \ \frac{c}{\lambda^{\alpha-}_L - \lambda^-_L}\left(\int_{\lambda^-_L}^x (\rho^-_L)(z)dz\right) \ \geq \ \frac{w^*}{2}\big[\lambda^{\alpha-}_L - \lambda^-_L\big].$$

Θέτωντας $\lambda_L^{\alpha-} - \lambda_L^- =: x$ και συγκρίνοντας με τις λύσεις της $\frac{w^*}{2}x^2 - (cR^\alpha_{\max})x - \big|R^\alpha_{\max} - r_0\big| \leq 0$ έχουμε

$$\frac{w^*}{2}\big[\lambda_L^{\alpha-} - \lambda_L^-\big] \ \leq \ \frac{\big|R^\alpha_{\max} - r_0\big|}{\lambda_L^{\alpha-} - \lambda_L^-} \ + \ cR^\alpha_{\max}$$

που δίνει την (1.45). □

Λήμμα 1.26 *Για όλα τα $\alpha \in (0, \bar{\alpha}_0]$, έχουμε:*

$$E_c(U_L) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_L^+ - \lambda_L^{\alpha-} \ \leq \ \frac{1}{c}\ln\left(1 + \frac{W^-(a^-)}{\alpha}\right) \ =: \ \Lambda_{\alpha,+}. \quad (1.46)$$

Απόδειξη του 1.26. Έπεται από το Λήμμα 1.23:

$$\begin{aligned} 0 \ &\geq \ E_c(U_L) \\ &\geq \ e^{c\lambda_L^{\alpha-}}\left\{ - \frac{W^-(a^-)}{c} \ + \ \frac{\alpha}{c}\Big(e^{c(\lambda_L^+ - \lambda_L^{\alpha-})} - 1\Big) \ + \ \frac{c\ d_\alpha^2}{2\big(1 - e^{-c(\lambda_L^+ - \lambda_L^{\alpha-})}\big)}\right\} \\ &\geq \ \frac{e^{c\lambda_L^{\alpha-}}\alpha}{c}\Big\{ - \Big(\frac{W^-(a^-)}{\alpha} \ + \ 1\Big) \ + \ e^{c(\lambda_L^+ - \lambda_L^{\alpha-})}\Big\}. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1.27 *Τα μήκη $\big[\lambda_L^-, \lambda_L^+\big]$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα για $E_c(U_L) \leq 0$.*

Απόδειξη του 1.27. Από τα Λήμματα 1.25 και 1.26, έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_L^+ - \lambda_L^- \ &= \ \big(\lambda_L^+ - \lambda_L^{\alpha-}\big) \ + \ \big(\lambda_L^{\alpha-} - \lambda_L^-\big) \\ &\leq \ \Lambda_{\alpha,+} \ + \ \Lambda_{\alpha,-} \\ &=: \ \Lambda \ < \ \infty, \end{aligned} \quad (1.47)$$

δεδομένου ότι $E_c(U_L) \leq 0$. □

Πρόταση 1.28 *Υπάρχουν $c^* > 0$ και $L^* \geq 1$ ώστε για όλα τα $L \geq L^*$,*

$$E_{c^*}(U_L) \ = \ \inf_{\mathcal{X}_L}\,[E_{c^*}] \ = \ 0.$$

Για την απόδειξη της Πρότασης έχουμε τα εξής:

Λήμμα 1.29 *Για κάθε $L \geq 1$ και $V \in \mathcal{X}_L$, σταθερά, η $c \longmapsto E_c(V)$ είναι συνεχής στο $F := \{c > 0 : |E_c(V)| < \infty\}$.*

Απόδειξη του 1.29. Έστω $c_m \longrightarrow c_\infty > 0$ για $m \longrightarrow \infty$. Αφού $V \in \mathcal{X}_L$, έχουμε $W(V) = W^+(V) \geq 0$ στο $[L, \infty)$ και συνεπώς για κάθε $c \in F$,

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ \int_L^\infty \left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{cx} dx \\
&= \ E_c(V) \ - \ \int_{-\infty}^L \left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{cx} dx \\
&\leq \ E_c(V) \ + \ \sup_{(-\infty, L]} |W(V)| \int_{-\infty}^L e^{cx} dx \\
&< \ \infty.
\end{aligned}$$

Άρα για m μεγάλο, στο $(L, +\infty)$ έχουμε

$$\left| \left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{c_m Id} \right| \ \leq \ 2\left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{c_\infty Id} \ \in L^1(L, +\infty).$$

Αν $c \in F$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^L \left| \frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V) \right| e^{cx} dx \ &\leq \ \int_{-\infty}^L \left(\left\{ \frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V) \right\} + \ 2|W(V)| \right) e^{cx} dx \\
&\leq \ E_c(V) \ + \ 2 \sup_{(-\infty, L]} |W(V)| \int_{-\infty}^L e^{cx} dx \\
&< \ \infty.
\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε m μεγάλο ώστε $c_m \leq \frac{3}{2} c_\infty$, έχουμε $e^{c_m x} \leq e^{c_\infty L} e^{\frac{c_\infty}{2} x}$ για όλα τα $x \leq L$. Άρα στο $(-\infty, L)$ έχουμε

$$\left| \left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{c_m Id} \right| \ \leq \ e^{c_\infty L} \left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{\frac{c_\infty}{2} Id} \ \in L^1(-\infty, L).$$

Καθώς $\left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{c_m Id} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}|V_x|^2 + W(V)\right) e^{c_\infty Id}$ για $m \longrightarrow \infty$, το Λήμμα έπεται από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης στα $(-\infty, L)$ και $(L, +\infty)$. $\square$

Προσωρινά συμβολίζουμε το U_L με $U_{L,c}$. Ακολουθώντας μια ιδέα του Heinze [Hei], θέτουμε

$$C \ := \ \Big\{ c > 0 \ \Big| \ \exists \ L \geq 1 \ : \ E_c(U_{L,c}) < 0 \Big\}. \tag{1.48}$$

Λήμμα 1.30 *Το σύνολο (1.48) είναι ανοικτό, μη-κενό και επιπλέον ισχύει* $\sup\ C \leq \sqrt{2W^-(a^-)}{d_0}^{-1}$.

Απόδειξη του 1.30. Παρατηρώντας ότι το C ισούται με

$$\Big\{c>0 \;\Big|\; \exists\ L\geq 1 \ \&\ \exists\ V\in \mathcal{X}_L : E_c(V)<0\Big\},$$

το Λήμμα 1.29 δίνει την ανοικτότητα. Από το φράγμα (1.5), έχουμε $f(c) \geq E_c(U_{\text{aff}})$, όπου

$$f(c) := e^{-c}\left(-\frac{1}{c}W^-(a^-) + e^{2c}E_0^+(U_{\text{aff}})\right).$$

Επιπλέον η εξίσωση $f(c)=0$ έχει μοναδική λύση $c_0>0$. Άρα, $(0,c_0)\subseteq C \neq \emptyset$. Επιπλέον από το Λήμμα 1.23, για $c\in C$ έχουμε

$$0\ >E_c(V)\ \geq\ E_c(U_L)\ \geq\ e^{c\lambda_L^{\alpha -}}\left[-\ \frac{W^-(a^-)}{c}\ +\ \frac{c\ d_\alpha^2}{2\big(1-e^{-c(\lambda_L^+-\lambda_L^{\alpha -})}\big)}\right].$$

που δίνει ότι $0\geq c^2d_\alpha^2 - 2W^-(a^-)$. Καθώς $\alpha \longrightarrow 0^+$, λαμβάνουμε

$$0<c_0\ \leq\ \sup C\ \leq\ \sqrt{2W^-(a^-)}{d_0}^{-1}.$$

□

Λήμμα 1.31 *Υποθέτουμε ότι* $L\geq 1$ *και έχουμε μια ακολουθία* $C\ni c_m \longrightarrow c_\infty$ *για* $m\longrightarrow\infty$, $c_\infty>0$. *Τότε υπάρχει* $c_{m,k}\longrightarrow c_\infty$ *ώστε*

$$E_{c_{m,k}}(U_{L,c_{m,k}})\ \longrightarrow\ E_{c_\infty}(U_{L,c_\infty}),\quad as\quad k\longrightarrow\infty.$$

Απόδειξη του 1.31. Σταθεροποιούμε $\varepsilon>0$ και επιλέγουμε $V\in\mathcal{X}_L$ ώστε $E_{c_\infty}(V)-\varepsilon \leq E_{c_\infty}(U_{L,c_\infty}) \leq E_{c_\infty}(V)$. Αφού $c_m \longrightarrow c_\infty$, από το Λήμμα 1.29, επιλέγουμε $m(\varepsilon)\in N$ μεγάλο ώστε $|E_{c_\infty}(V)-E_{c_m}(V)|\leq\varepsilon$ για όλα τα $m\geq m(\varepsilon)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E_{c_m}(U_{L,c_m})\ &\leq\ E_{c_m}(V)\\ &\leq\ E_{c_\infty}(V)\ +\varepsilon\\ &\leq\ E_{c_\infty}(U_{L,c_\infty})\ +2\varepsilon, \end{aligned}$$

που δίνει

$$\limsup_{m\to\infty}\ E_{c_m}(U_{L,c_m})\ \leq\ E_{c_\infty}(U_{L,c_\infty}). \tag{1.49}$$

Επιχειρηματολογώντας όπως στο 1.2, υπάρχει $c_{m,k} \longrightarrow c_\infty$ ώστε $U_{L,c_{m,k}} \longrightarrow \overline{U}$ στον $[C^0_{\rm loc}(\mathbb{R})]^N$ και $U_{L,c_{m,k}} \longrightarrow \overline{U}$ ασθενώς στον $[H^1_{\rm loc}(\mathbb{R})]^N$, για $k \longrightarrow \infty$. Απο ασθενή κάτω ημισυνέχεια της L^2 νόρμας, έχουμε

$$\liminf_{k\to\infty}\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(U_{L,c_{m,k}})_x|^2 e^{c_{m,k}x}dx\ \geq\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(U_{L,c_\infty})_x|^2 e^{c_\infty x}dx.$$

Επίσης,

$$W(U_{L,c_{m,k}})e^{c_{m,k}Id} \geq -\big(e^{c_\infty L}W^-(a^-)\big)e^{\frac{c_\infty}{2}Id}\chi_{(-\infty,L]}$$

που είναι $L^1(\mathbb{R})$ συνάρτηση. Συνεπώς, το Λήμμα του Fatou δίνει

$$\liminf_{k\to\infty}\ \int_{\mathbb{R}} W(U_{L,c_{m,k}})e^{c_{m,k}x}dx\ \geq\ \int_{\mathbb{R}} W(U_{L,c_\infty})e^{c_\infty x}dx.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\liminf_{k\to\infty}\ E_{c_{m,k}}(U_{L,c_{m,k}})\ \geq\ E_{c_\infty}(\overline{U})\ \geq\ E_{c_\infty}(U_{L,c_\infty}). \tag{1.50}$$

Από τις (1.49) και (1.50) τελειώσαμε. □

Λήμμα 1.32 *Αν $c^* := \sup\ C$, τότε $E_{c^*}(U_{L,c^*}) = 0$ για όλα τα $L \geq \Lambda$.*

Απόδειξη του 1.32. Από το (1.48), υπάρχει $C \ni c_m \longrightarrow c^*$ για $m \longrightarrow \infty$ ώστε $E_{c_m}(U_{L_m,c_m}) < 0$. Από το φράγμα (1.47) έχουμε

$$\lambda^+_{L_m} - \lambda^-_{L_m}\ \leq\ \Lambda$$

ομοιόμορφα για $m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον αφού $E_{c_m}(U_{L_m,c_m}) < 0$, αναγκαστικά $\lambda^+_{L_m} = L_m$, γιατί αλλιώς μετατόπιση του U_{L_m,c_m} οδηγεί σε αντίφαση. Επειδή $U_{L_m,c_m}(\cdot + L_m) \in \mathcal{X}_\Lambda$, έχουμε

$$\begin{aligned} E_{c_m}(U_{\Lambda,c_m})\ &\leq\ E_{c_m}(U_{L_m,c_m}(\cdot + L_m)) \\ &=\ e^{-c_m L_m}E_{c_m}(U_{L_m,c_m}) \\ &<\ 0. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 1.31, περνώντας στο όριο $m \longrightarrow \infty$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} E_{c^*}(U_{\Lambda,c^*})\ &=\ \lim_{m\to\infty}\ E_{c_m}(U_{\Lambda,c_m}) \\ &\leq\ 0. \end{aligned}$$

Αφού $c^* = \sup\ C$ και το C είναι ανοικτό, $c^* \notin C$ και άρα $E_{c^*}(U_{\Lambda,c^*}) \geq 0$. Από την Παρατήρηση 1.24 και την (1.48), καταλήγουμε ότι $E_{c^*}(U_{L,c^*}) = 0$ για όλα τα $L \geq \Lambda$. □

Απόδειξη του 1.28. Από τα Λήμματα 1.29, 1.30, 1.31 και 1.32, η Πρόταση 1.28 έπεται, με $c^* = \sup C$, $L^* = \Lambda$. □

Το c^* είναι η μοναδική εφικτή ταχύτητα οδεύοντος κύματος:

Πρόταση 1.33 *Έστω ότι υπάρχει ελαχιστοποιούσα λύση (U, c) του (1.1). Τότε, υπάρχει μοναδικό c_* ώστε το (U, c_*) να λύνει το (1.1).*

Απόδειξη του 1.33. Έστω (U_1, c_1^*), (U_2, c_2^*) 2 λύσεις του (1.1) με $0 < c_1^* < c_2^*$ και πιθανώς $U_1 = U_2$. Από το 1.17 έχουμε

$$\frac{|U_x|^2}{2} + W(U) \; = \; e^{-cx}\left(\frac{e^{cx}}{c}\left[W(U) - \frac{|U_x|^2}{2}\right]\right)_x .$$

Θέτουμε $c := c_2^*$, $U := U_2^*$ και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}\left(\frac{|(U_2)_x|^2}{2} + W(U_2)\right)dx \; &= \; \left(\frac{e^{c_1^* x}}{c_2^*}\left[W(U_2) - \frac{|(U_2^*)_x|^2}{2}\right]\right)\Bigg|_{-t}^{t} \\ &\quad - (c_1^* - c_2^*)\int_{-t}^{t} \frac{e^{c_1^* x}}{c_2^*}\left[W(U_2) - \frac{|(U_2)_x|^2}{2}\right]dx.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\left(e^{c_1^* x}\left[W(U_2) - \frac{|(U_2^*)_x|^2}{2}\right]\right)\Bigg|_{-t}^{t} \; &= \; c_2^*\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}\left(\frac{|(U_2)_x|^2}{2} + W(U_2)\right)dx \\ &\quad + \; c_1^*\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}\left[W(U_2) - \frac{|(U_2)_x|^2}{2}\right]dx \\ &\quad - \; c_2^*\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}\left[W(U_2) - \frac{|(U_2)_x|^2}{2}\right]dx \\ &= \; c_2^*\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}|(U_2)_x|^2 dx \\ &\quad - \; c_1^*\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}\frac{|(U_2)_x|^2}{2}dx \\ &\quad + \; c_1^*\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}W(U_2)dx \\ &= \; (c_2^* - c_1^*)\int_{-t}^{t} e^{c_1^* x}|(U_2)_x|^2 dx \\ &\quad + \; c_1^* E_{c_1^*}\big(U_2, (-t, t)\big).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} c_1^* E_{c_1^*}\big(U_2,(-t,t)\big) &= (c_1^*-c_2^*)\int_{-t}^{t} |(U_2)_x|^2 e^{c_1^* x} dx \\ &\quad + \left(e^{c_1^* x}\left[W(U_2)-\frac{|(U_2)_x|^2}{2}\right]\right)\Big|_{-t}^{t}. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 1.10, $(U_2)_x \longrightarrow 0$ για $t \to \pm\infty$ ακολουθιακά. Αφού $E_{c_2^*}(U_2)=0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\{\frac{|(U_2)_x|^2}{2} + W^+(U_2)\right\} e^{c_2^* x} dx &= \int_{\mathbb{R}} W^-(U_2) e^{c_2^* x} dx \\ &\le W^-(a^-)\frac{e^{c_2^* L_2^*}}{c_2^*} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

όπου L_2^* είναι σταθερά όπως στην Πρόταση 1.28. Άρα, αφού $c_1^* < c_2^*$, για $t \to \infty$ λαμβάνουμε

$$c_1^* E_{c_1^*}(U_2) = (c_1^*-c_2^*)\int_{\mathbb{R}} |(U_2)_x|^2 e^{c_1^* x} dx < 0.$$

Αυτό όμως αντίκειται στο ότι $c_1^* E_{c_1^*}(U_2) \ge 0$. $\square$

Μεταβολικός Χαρακτηρισμός Οδεύοντων Κυμάτων

Συμπερασματικα, λύσεις (U,c) του συστήματος

$$E_c(U) = \inf\left\{E_c(V):\ V\in [H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N,\ V(\pm\infty)=a^\pm\right\}, \qquad E_c(U)=0,$$

είναι ετεροκλινικά οδεύοντα κύματα και λύνουν το

$$\begin{cases} U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x \\ U(\pm\infty) = a^\pm. \end{cases}$$

1.6 ΑΡΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ

Εδώ αποδεικνύουμε ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα (1.1).

Θεώρημα 1.34 (Ύπαρξη) *Υποθέτουμε ότι το δυναμικό W ικανοποιεί την (1) και τις (1),(2). Τότε, υπάρχει οδεύον κύμα $(U,c)\in[C^2(\mathbb{R})]^N\times(0,+\infty)$ που ικανοποιεί*

$$\begin{cases} U_{xx} - \nabla W(U) = -c\, U_x \\ U(\pm\infty) = a^\pm. \end{cases}$$

Η ταχύτητα c ισούται με c^* στην Πρόταση 1.28 που είναι μοναδικό. Ειδικά, $E_{c^*}(U) = 0$.

Απόδειξη του 1.34. Από την 1.28, έχουμε $E_{c^*}(U_{L,c^*}) = 0$, για όλα τα $L \geq L^*$. Από το 1.27, αν επιλέξουμε $L > \Lambda$ λαμβάνουμε ελαχιστοποιητή $U := U_L$ του E_c με $c = c^*$ και $E_c(U) = 0$. Συνεπώς, κάποια μετατόπιση $U(\cdot - \delta)$ δεν υλοποιεί τον περιορισμό και άρα λύνει το (1.1). □

Τώρα εξάγουμε φράγματα για το c^*. Παίρνουμε $t > 0$ και θεωρούμε την $[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})]^N$ συνάρτηση

$$U^t_{aff}(x) \ := \ a^- \chi_{(-\infty,-t)} \ + \ \left(\frac{t-x}{2t}a^- + \frac{t+x}{2t}a^+\right) \chi_{[-t,t]} \ + \ a^+\chi_{(t,\infty)}. \tag{1.51}$$

Πρόταση 1.35 *Υπάρχουν $0 < c_{\min} < c_{\max} < \infty$ ώστε*

$$c_{\min} \ \leq \ c^* \ \leq \ c_{\max}.$$

Επιπλέον, αν $d_0 := \lim_{\alpha\to 0^+} d_\alpha$, τότε

$$c_{\max} \ = \ \frac{\sqrt{2W^-(a^-)}}{d_0},$$

$$c_{\min} \ = \ \sup_{t>0}\frac{W^-(a^-)}{e^{2tc_{\max}}}\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{\left|a^+ - a^-\right|}{2t}\right\}^2 + \int_{-t}^{t} W^+\Big(\frac{t-x}{2t}a^- + \frac{t+x}{2t}a^+\Big)dx\right)^{-1}.$$

Απόδειξη του 1.35. Το άνω φράγμα έπεται από τα Λήμματα 1.30 και 1.32. Για το κάτω φράγμα, χρησιμοποιούμε την (1.51) και παίρνουμε $t = L$. Έχουμε τότε $0 = E_c(U_t) \leq E_c(U^t_{aff})$ και άρα

$$0 \ \leq \ -e^{-ct}\frac{W^-(a^-)}{c} + e^{ct}\int_{-t}^{t}\left\{\frac{1}{2}\left|\frac{a^+ - a^-}{2t}\right|^2 + W^+\Big(\frac{t-x}{2t}a^- + \frac{t+x}{2t}a^+\Big)\right\}dx.$$

Συνεπώς, αν $t > 0$,

$$c \ \geq \ \frac{W^-(a^-)}{e^{2ct}}\left(\int_{-t}^{t}\left\{\frac{1}{2}\left|\frac{a^+ - a^-}{2t}\right|^2 + W^+\Big(\frac{t-x}{2t}a^- + \frac{t+x}{2t}a^+\Big)\right\}dx\right)^{-1}.$$

Μεγιστοποιώντας ως προς t, τελειώσαμε. □

2 ΑΡΧΕΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΓΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΕΣ ΜΗ-ΚΥΡΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ

Έστω $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση Καραθεοδωρή με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Σε αυτό το κεφάλαιο μας απασχολεί η εξαγωγή αρχών μεγίστου που εφαρμόζονται σε *Προσεγγιστικούς Ελαχιστοποιητές* του συναρτησιακού

$$E(u,\Omega) \ := \ \int_\Omega H\big(x,u(x),Du(x)\big)\,dx \tag{2.1}$$

τοποθετημένου στον $[W^{1,q}_g(\Omega)]^N$, $q \geq 1$ με συνοριακές τιμές $g \in [W^{1,q}(\Omega)]^N$. Μια συνάρτηση $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ θα λέγεται *α-Ελαχιστοποιητής* του (2.1) αν γαι κάποιο $\alpha \geq 0$ και όλες τις $\phi \in [W^{1,q}_0(\Omega)]^N$

$$E(u,\Omega) \ \leq \ E(u+\phi,\Omega) \ + \ \alpha. \tag{2.2}$$

Ελαχιστοποιούσες οικογένειες $\{u_\alpha\}_{\alpha>0}$ αντιστοιχούν σε ελαχιστοποιούσες ακολουθίες για $\alpha \to 0$ του μεταβολικού προβλήματος

$$E(u,\Omega) \ = \ \inf_{[W^{1,q}_g(\Omega)]^N} E \tag{2.3}$$

και 0-Ελαχιστοποιητές αντιστοιχούν σε λύσεις του (2.3). Η οπτική γωνία Αρχής Μεγίστου στην διανυσματική περίπτωση βασίζεται στην παρατήρηση ότι οι ανισότητες $\sup_\Omega u \leq \max_{\partial\Omega} u$, $\inf_\Omega u \geq \min_{\partial\Omega} u$ όταν $N = 1$ γράφονται ως $u(\Omega) \subseteq \big[\min_{\partial\Omega} u,\ \max_{\partial\Omega} u\big]$. Όταν $N \geq 1$, η κατάλληλη διανυσματική επέκταση στην διανυσματική περίπτωση είναι η λεγόμενη *Ιδιότητα Κυρτής Θήκης*

$$u(\Omega) \ \subseteq \ \overline{\mathrm{co}}\,\big(u(\partial\Omega)\big) \tag{2.4}$$

η οποία λέει ότι *η εικόνα περιέχεται στην κυρτή θήκη της συνοριακής τιμής.*

Αρχές Μεγίστου είτε σαν φράγματα σε νόρμα είτε στη μορφή (2.4) για το συναρτησιακό (2.1) και το αντίστοιχο σύστημα Euler-Lagrange ΜΔΕ αποτελούν ένα καλά ανεπτυγμένο θέμα και παρέχουν a priori τοπικοποίηση και φράγματα, απαραίτητα για περεταίρω διερεύνηση ερωτημάτων ύπαρξης και ομαλότητας. Ενδεικτεικά αναφέρουμε τις εργασίες των Alexander-Ghomi [AG], Bildhauer-Fuchs [BF1], [BF2], Colding-Minicozzi II [CM], D'Ottavio-Leonetti-Musciano [DLM], Leo-netti [L1], [L2], Leonetti-Siepe [LS] και Osserman [O1], [O2].

Εδώ εξάγουμε κατάλληλες εκδοχές της Ιδιότητας Κυρτής Θήκης (2.4) για προσεγγιστικούς ελαχιστοποιητές του (2.1). ΤΑ αποτελέσματα κληροδοτούνται στις Λύσεις Χαλάρωσης του (2.3) καθώς και στις ελαχιστοποιούσες λύσεις των Euler-Lagrange ΜΔΕ, αν υπάρχουν.

Η βασική πρόοδος σε σχέση με παρόμοια γνωστά αποτελέσματα στην βιβλιογραφία είναι ότι δεν υποθέτουμε σχεδόν-κυρτότητα της H ως προς την κλίση και ειδικότερα δεν υποθέτουμε εξάρτηση από το μήκος της κλίσης. Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας μια μη-γραμμική τεχνική προσέγγισης η οποία θεσπίζει την (2.4) χωρίς να χρισιμοποιεί την κάτω ημι-συνέχεια του (2.1). Τα ουσιαστικά συστατικά είναι η *κατασκευή συστηματικών προσεγγίσεων της προβολής στα κυρτά που αποτελείται από συνθέσεις ανακλάσεων μόνο* και κάποια (σχεδον) *αναλλοιώτητα της* $P \mapsto H(x, \eta, P)$ *κάτω από την ορθογώνια ομάδα του* $\mathbb{R}^N$. Η τελευταία ικανοποιείται αυτόματα αν $H = H(x, \eta, |P|)$.

Οι προσεγγίσεις της προβολής από ανακλάσεις, οι "Απεικονίσεις Αναδίπλωσης", χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουμε κατάλληλες συναρτήσεις σύγκρισης. Χονδρικά, προβάλλοντας τον ελαχιστοποιητή στην κυρτή θήκη των συνοριακών τιμών του θα προέκυπτε μετασχηματισμός που μειώνει την ενέργεια. Όμως, απουσία κυρτότητας μπορεί να *μην* μειώσουμε την ενέργεια. Λαμβάνουμε τους μετασχηματισμούς μας σαν κατά τμήματα ισομετρίες που διατηρούν την ενέργεια και συγκλίνουν στην προβολή.

Ένα λεπτό σημείο της μη-κυρτής περίπτωσης είναι ότι μπορούμε να ισχυριστούμε μια εκδοχή της (2.4) μόνο το πολύ για έναν τοπικό ελαχιστοποιητή από όλους όσους υπάρχουν. Αυτό επιτρέπει την χρήση της (2.4) σαν Αρχή Επιλογής κατά τους Dacorogna-Ferriero [DF] για να εξαιρέσουμε αφύσικες λύσεις. Επιπλέον, η μέθοδος προσέγγισής μας είναι αρκετά γενική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αλλού. Για αυτό, το κεφάλαιο 2.1 που είναι αφιερωμένο στην κατασκευή των προσεγγίσεων είναι ανεξάρτητο από το κεφάλαιο 2.2 όπου οι προσεγγίσεις σχησιμοποιούνται για να εξάγουμε τις αρχές μεγίστου. Επίσης, τα αποτελέσματα θα μπορούσαν εν δυνάμει να είναι χρήσιμα σε μη κυρτά προβλήματα της Θεωρίας Ελαστικότητας [B].

Οι βασικές ιδέες αυτού του κεφαλαίου προέκυψαν στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος [AK] που είναι το πρώτο μέρος της Διατριβής αυτής. Η επιλογή διατύπωσης των αποτελεσμάτων για προσεγγιστικούς ελαχιστοποιητές είναι ουσιώδης. Απουσία κυρτότητας, η ύπαρξη ελαχιστοποιητών δεν αναμένεται. Επιπλέον, οι προσεγγιστικοί ελαχιστοποιητές ικανοποιούν μια ιδιότητα τοπικότητας που δεν ικανοποιείται από παρόμοιες έννοιες "σχεδόν" ελαχιστοποιητών, όπως τους Q-ελαχιστοποιητές ή τους ω-ελαχιστοποιητές (Giusti [Gi], Dacorogna [D1]). Αυτή η ιδιότητα είναι ουσιώδης και οφείλεται στο ότι η απόκλιση από την ελαχιστοποιητικότητα θεωρείται προσθετικά.

2.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ

Ξεκινάμε με μερικά εισαγωγικά. Στα παρακάτω, οι Sobolev συναρτήσεις θα ταυτίζονται με τους ακριβείς αναπαραστάτες τους. Η Ορθογώνια Ομάδα του $\mathbb{R}^N$ θα συμβολίζεται με $O(N,\mathbb{R})$ και η αφφινική Ορθογώνια Ομάδα του $\mathbb{R}^N$ με $AO(N,\mathbb{R})$.

Έστω $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ διάνυσμα στην μοναδιαία σφαίρα. Το ξ ορίζει υπερεπίπεδο $H_\xi := (\mathrm{span}[\xi])^\perp \subseteq \mathbb{R}^N$ και ανάκλαση $R_\xi \in \mathrm{O(N,\mathbb{R})}$ ως προς το H_ξ, που δίνεται από $R_\xi u := u - 2(u\cdot\xi)\xi$. Εδώ, "$\cdot$" δηλώνει εσωτερικό γινόμενο. Αν $u_0 \in \mathbb{R}^N$, η αφφινική ανάκλαση ως προς το $H_\xi + u_0$ δίνεται από $u \mapsto u - 2\big((u-u_0)\cdot\xi\big)\xi = R_\xi u + 2(u_0\cdot\xi)\xi$.

Έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^N$ συμπαγές και κυρτό. Θα γράφουμε $\xi = \hat{u}$ για το εξωτερικό κάθετο του υπερεπιπέδου στήριξης $H_{\hat{u}} + u$ στο u, αλλά εκτός παρά αν το $\partial\mathcal{C}$ είναι ομαλό, η $u \mapsto \hat{u}$ είναι πλειονότιμη και ορίζει τον κάθετο κώνο. Για κάθε $u \in \partial\mathcal{C}$, η $\hat{u}$ ορίζει ανάκλαση $w \mapsto R_{\hat{u}}w + 2(u\cdot\hat{u})\hat{u}$ στην $\mathrm{AO(N,\mathbb{R})}$ ως προς το $H_{\hat{u}} + u$.

Το ακόλουθο είναι το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου. Λέει ότι για κάθε συμπαγές κυρτό, υπάρχει ακολουθία ασθενών* προσεγγίσεων στον χώρο $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$ της προβολής στο κυρτό που γεννάται μόνον από ανακλάσεις.

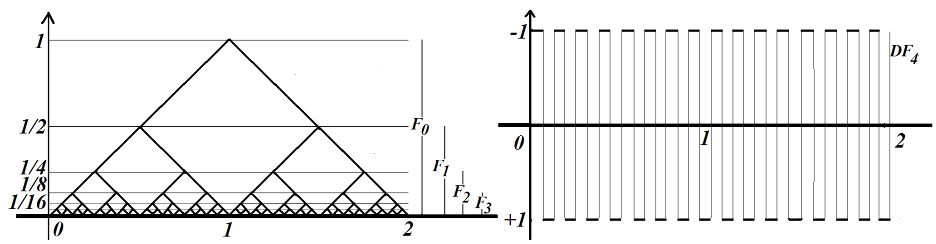
Θεώρημα 2.1 (Προσέγγιση της Προβολής από Ανακλάσεις) *Έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^N$ συμπαγές κυρτό με μη-κενό εσωτερικό και $0 \in int(\mathcal{C})$. Έστω επίσης $\mathcal{P}^{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{C}$ η προβολή σε αυτό.*
Τότε, υπάρχει ακολουθία τοπικά Lipschitz απεικονίσεων $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$, που ικανοποιεί:
(i) Κάθε $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m$ είναι τμηματικά ίση με πεπερασμένες διαδοχικές συνθέσεις αφφινικών ανακλάσεων. Ειδικά, για σ.χ. $u \in \mathbb{R}^N$, υπάρχει $R \in O(N,\mathbb{R})$ ώστε $D\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m(u) = R$.
(ii) Κάθε $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m$ ισούται με την ταυτοτική στο $\mathcal{C}$ και απεικονίζει την m-διόγκωση του $\mathcal{C}$ εντός της $(1+\frac{1}{m})$-διόγκωσης του $\mathcal{C}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m(E) &=& E, \quad E \subseteq \mathcal{C}, \\ \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m(m\mathcal{C}) &\subseteq& \left(1+\dfrac{1}{m}\right)\mathcal{C}. \end{array}\right. \tag{2.5}$$

(iii) Η ακολουθία $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m$ είναι τοπικά ομοιόμορφη προσέγγιση της προβολής στο $\mathcal{C}$; επιπλέον, ισχύει $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m \overset{*}{\longrightarrow} \mathcal{P}^{\mathcal{C}}$ ασθενώς στον $[W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)]^N$, για $m \to \infty$.*

Οι συναρτήσεις $\{\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ του Θεωρήματος 2.1 θα αποκαλούνται *Απεικονίσεις Αναδίπλωσης του $\mathcal{C}$*.

Παράδειγμα 2.2 *Ένα στοιχειώδες παράδειγμα απεικονίσεων αναδίπλωσης στην βαθμωτή περίπτωση δίνεται από* $\mathcal{F}_0(u) := u\chi_{(0,1)}(u) + (2-u)\chi_{(1,2)}(u)$ *and* $\mathcal{F}_{m+1} := \mathcal{F}_m\chi_{\{\mathcal{F}_m<2^{-(m+1)}\}}+(2^{-m}-\mathcal{F}_m)\chi_{\{\mathcal{F}_m>2^{-(m+1)}\}}$, *στον* $W^{1,\infty}(0,2)$. *Έχουμε ότι* $\|\mathcal{F}_m\|_{W^{1,\infty}(0,2)} \leq 1$ *και επειδή* $\|\mathcal{F}_m\|_{L^\infty(0,2)} \leq 2^{-m-1}$, *το ασθενές* όριο είναι μηδέν. Συνεπώς,* $\mathcal{F}_m \overset{*}{\longrightarrow} 0$ *στον* $W^{1,\infty}(0,2)$, *που δίνει* $\mathcal{F}_m \longrightarrow 0$ *στον* $L^\infty(0,2)$. *Η ακολουθία* $\mathcal{F}_m$ *προσεγγίζει την προβολή* $\mathcal{P}^0$ *στο* $\{0\}$, *που είναι η μηδενική απεικόνιση.*



Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια βοηθητική έννοια για την κυρτότητα η οποία διορθώνει την έλλειψη ομαλότητας. Στο τέλος καθαιρείται με προσέγγιση.

Έστω $\mathcal{C}$ ένα *πολύεδρο*, δηλ. ένα συμπαγές σύνολο της μορφής $\bigcap\big\{H_j^- : 1 \leq j \leq K\big\}$ που γεννάται από κλεστούς ημιχώρους H_j^- οι οποίοι ορίζονται από υπερεπίπεδα $H_j = (\mathrm{span}[\xi_i])^\perp + u_i$. Για κάθε H_i, το ξ_i το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο του ημιχώρου H_i^-, ενώ το υπερπεπίπεδο περνάει από το u_i.

Ένα πολύεδρο $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^N$ θα λέγεται **αμβλύ**, αν οι πλευρές που το ορίζουν H_j^* συναντώνται σε αμβλύες γωνίες $\geq \dfrac{\pi}{2}$, δηλ., όταν για $i,j \in \{1,...,K\}$ έχουμε

$$H_i^* \cap H_j^* \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \xi_i \cdot \xi_j \leq 1. \tag{2.6}$$

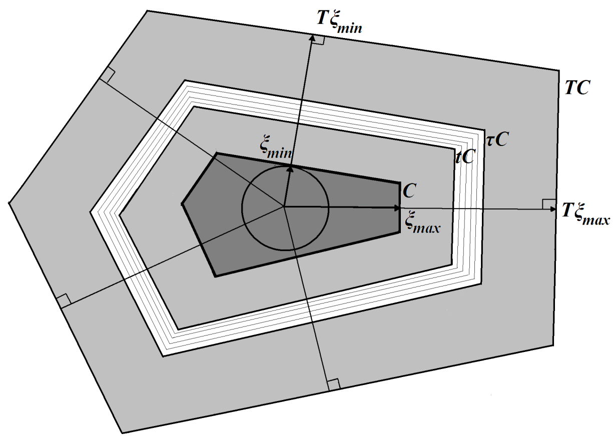
Απόδειξη του 2.1. Αφού το $\mathcal{C}$ είναι σταθερό, καθαιρούμε τον δείκτη "$\mathcal{C}$". Θα αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη μιας $\mathcal{F}_m$ για αμβλύα πολύεδρα που ικανοποιούν την (2.6) και μετά θα εξάγουμε το γενικό αποτέλεσμα με προσέγγιση. Προς τούτο, έστω $\mathcal{C} = \bigcap\{H_j^- : 1 \leq j \leq K\}$ με $K \geq N+1$ και $H_j = u_j + (\mathrm{span}[\xi_j])^\perp$ με την (2.6) να ικανοποιείται H_i^*. Σταθεροποιούμε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, $\mathcal{C} \subseteq \big(1+\frac{1}{m}\big)\mathcal{C}$ και αφού $\big(1+\frac{1}{m}\big)H_j = \big(1+\frac{1}{m}\big)u_j + (\mathrm{span}[\xi_j])^\perp$, έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\mathcal{C} \;=\; \bigcap\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)H_j^- : 1 \leq j \leq K\right\}. \tag{2.7}$$

Επιλέγουμε $\xi_{\min}$ στο $\partial\mathcal{C}$ και $\xi_{\max}$ on $\bigcup\{H_j : 1 \leq j \leq K\}$ ώστε

$$|\xi_{\min}| \;=\; \min_{1\leq j\leq K}\left(\min_{u\in H_j}\;|u|\right), \tag{2.8}$$

$$|\xi_{\max}| \;=\; \max_{1\leq j\leq K}\left(\min_{u\in H_j}\;|u|\right). \tag{2.9}$$



Τα $\xi_{\min}$ και $\xi_{\max}$ πάντα υπάρχουν και είναι κάθετα στα $\bigcup\{H_j : 1 \leq j \leq K\}$, αλλά πιθενώς δεν είναι μοναδικά και ενδεχομένως $|\xi_{\min}| = |\xi_{\max}|$. Θέτουμε $T := m$. Η διόγκωση $u \mapsto Tu$ απεικονίζει $\mathcal{C}$ επί του $T\mathcal{C}$. Σταθεροποιούμε $t, \tau > 0$ με $1 < t < \tau \leq T$, ώστε

$$t \;=\; \frac{\tau\;|\xi_{\max}| \;+\; |\xi_{\min}|}{|\xi_{\min}| \;+\; |\xi_{\max}|}. \tag{2.10}$$

Από τις (2.8) και (2.9), η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των πλευρών των $\partial\mathcal{C}$ και $\partial(t\mathcal{C})$ υλοποιείται κατά μήκος του $\xi_{\min}$, ενώ η μέγιστη μεταξύ των πλευρών των $\partial(\tau\mathcal{C})$ και $\partial(t\mathcal{C})$ κατά μήκος της $\xi_{\max}$ διεύθυνσης. Άρα, η (2.10) αναδαιτυπωμένη λέει $|(t-1)\xi_{\min}| = |(\tau - t)\xi_{\max}|$, ή

$$\min_{1\leq j\leq K}\left(\min_{u\in H_j}\;|tu-u|\right) \;=\; \max_{1\leq j\leq K}\left(\min_{u\in H_j}\;|\tau u - tu|\right). \tag{2.11}$$

Σταθεροποιούμε $s \in [1, T]$ και $j \in \{1, ..., K\}$. Η αφφινική ανάκλαση $R^s_j \in \mathrm{AO}(\mathrm{N}, \mathbb{R})$ ως προς το sH_j δίνεται από $R^s_j(u) = R_{\xi_j}u + 2s(u_j \cdot \xi_j)\xi_j$, $R_{\xi_j} \in O(N, \mathbb{R})$. Για κάθε $s \in [1, T]$ και $j \in \{1, ..., K\}$, ορίζουμε

$$\mathcal{F}^s_j(u) \;:=\; \left\{\begin{array}{ll} u\;, & u \in sH^-_j \\ R^s_j(u)\;, & u \notin sH^-_j \end{array}\right., \qquad \mathcal{F}^s_j \;:\; \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \tag{2.12}$$

και

$$\mathcal{F}^s \ := \ \mathcal{F}^s_K \circ \cdots \circ \mathcal{F}^s_1, \qquad \mathcal{F}^s \ : \ \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N. \tag{2.13}$$

Η $\mathcal{F}^s$ ισούται με την ταυτοτική του $s\mathcal{C}$ και για σ.χ. $u \in \mathbb{R}^N$, υπάρχει $R \in O(N, \mathbb{R})$ ώστε $D\mathcal{F}^s(u) = Ru$. Άρα, $|D\mathcal{F}^s| = 1$ a.e. on $\mathbb{R}^N$.

Ισχυρισμός 2.3 *Υποθέτουμε ότι t, τ είναι στο $[1, T]$ και ικανοποιούν την (2.10). Τότε για κάθε $j = 1, ..., K$, έχουμε*

$$\mathcal{F}^t_j\Big(\tau\mathcal{C} \setminus int(tH^-_j)\Big) \ \subseteq \ \tau\mathcal{C} \cap \Big(tH^-_j \setminus int(H^-_j)\Big). \tag{2.14}$$

Απόδειξη του 2.3. Πρώτα, από την (2.10), έχουμε

$$\mathrm{dist}(\tau H^-_j, tH^-_j) \leq \mathrm{dist}(tH^-_j, H^-_j), \tag{2.15}$$

για $j = 1, .., K$. Άρα, η $\mathcal{F}^t_j$ απεικονίζει την ζώνη $\tau H^-_j \setminus \mathrm{int}(tH^-_j)$ στην ζώνη $tH^-_j \setminus \mathrm{int}(H^-_j)$. Κανονικοποιούμε τα πράγματα ως προς ένα στοιχείο της AO(N, $\mathbb{R}$) σε $\xi_j = e_N$, $tH_j = \{u_N = 0\}$. Έστω $v = (v', v_N)$ στο $\tau\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(tH^-_j)$. Τότε, έχουμε $R^t_j(v) = (v', -v_N)$ και η $R^t_j(v)$ ανήκει στο

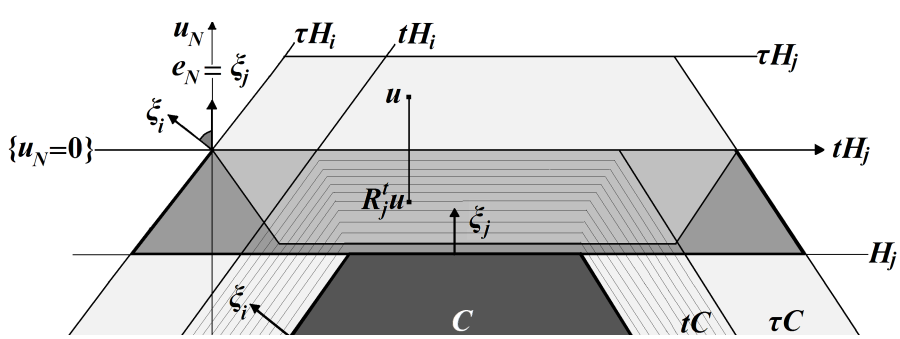
$$tH^-_j \setminus \mathrm{int}(H^-_j) = \{v \in \mathbb{R}^N : (1-t)|u_j| \leq v_N \leq 0\}. \tag{2.16}$$

Λόγω αμβλύτητας, αρκεί να δείξουμε ότι $R^t_j(v)$ είναι εντός

$$\bigcap \{\tau H^-_i : i \neq j, H^*_i \cap H^*_j \neq \emptyset\}, \tag{2.17}$$

για όλες τις γειτονικές πλευρές H^*_i του H^*_j. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο H^*_i. Τότε, $\tau H_i = (\mathrm{span}[\xi_i])^\perp + \tau u_i$ και με μια περαιτέρω μεταφορά υποθέτουμε $u_i = 0$ (φυσικά, τα υπόλοιπα σημεία $\{u_l : l \neq i\}$ αλλάζουν, αλλά αυτό δεν επειρεάζει το επιχείρημα). Έτσι,

$$\begin{aligned} \tau H_i &= \{z \in \mathbb{R}^N \ : \ z \cdot \xi_i = 0\}, \\ \tau H^-_i &= \{z \in \mathbb{R}^N \ : \ z \cdot \xi_i \leq 0\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$



Αφού $v \in \tau\mathcal{C}$ και

$$\tau\mathcal{C} = \bigcap\{\tau H_j^- : 1 \leq j \leq K\} \subseteq \tau H_i^-, \tag{2.19}$$

παίρνουμε ότι $v \cdot \xi_i \leq 0$ και γράφοντας $v = (v', v_N)$ και $\xi_i = (\xi_i', \xi_N')$ και συμβολίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα του $\mathbb{R}^N$ και του $\mathbb{R}^{N-1}$ με "·", έχουμε

$$\begin{aligned} u' \cdot \xi_i' &= -v_N' \xi_{iN}' + v \cdot \xi_i \\ &= -(v \cdot e_N)(\xi_i \cdot e_N) + v \cdot \xi_i \\ &\leq -(v \cdot e_N)(\xi_i \cdot e_N). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Συνεπώς, επειδή $v_N \geq 0$ και η αμβλύτητα δίνει $0 \leq \xi_i \cdot e_N \leq 1$ για όλα τα $i \neq j$, έχουμε

$$\begin{aligned} R_j^t(v) \cdot \xi_i &= v' \cdot \xi_i' + (-v_N)\xi_N' \\ &= v' \cdot \xi_i' - (v \cdot e_N)(\xi_i \cdot e_N) \\ &\leq -2(v \cdot e_N)(\xi_i \cdot e_N) \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Άρα, αν $v \in \tau\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(tH_j^-)$, έχουμε $\mathcal{F}_j^t(v) \in \tau H_i^-$ για όλα τα $i \neq j$ για τα οποία $H_i^* \cap H_j^* \neq \emptyset$. $\square$

Ισχυρισμός 2.4 *Υποθέτουμε ότι τα t, τ είναι στο $[1, T]$ και ικανοποιούν την (2.10). Τότε*

$$\begin{cases} (i) \;\; \mathcal{F}^t\big(\tau\mathcal{C} \setminus int(t\mathcal{C})\big) \;\subseteq\; t\mathcal{C} \setminus int(\mathcal{C}), \\ (ii) \;\; \mathcal{F}^t\big(t\mathcal{C}\big) \;=\; t\mathcal{C}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Απόδειξη του 2.4. Έστω $u \in \tau\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(t\mathcal{C})$ σταθερό σημείο. Πρώτα δείχνουμε ότι $\mathcal{F}^t(u) \notin \mathrm{int}(\mathcal{C})$. Έστω $k \in \{1, ..., K\}$ ο 1ος δεικτης για τον οποίο $u \in \tau\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(tH_k^-)$. Από την (2.12), όλες οι $\mathcal{F}_1^t$,,...,$\mathcal{F}_{k-1}^t$ αφήνουν το u αναλλοίωτο, αφού $\mathcal{F}^t(u) = \mathcal{F}_K^t(...\mathcal{F}_k^t(u))$. Από τον Ισχυρισμό 2.3,

$$\mathcal{F}_k^t(u) \;\in\; \tau\mathcal{C} \cap \big(tH_k^- \setminus \mathrm{int}(H_k^-)\big) \tag{2.23}$$

και ειδικά $\mathcal{F}^t(u) \notin \mathrm{int}(\mathcal{C})$. Έστω $l \geq k+1$ ο επόμενος δείκτης για τον οποίο

$$\mathcal{F}_k^t(u) \;\in\; \tau\mathcal{C} \cap \big(tH_k^- \setminus \mathrm{int}(H_k^-)\big) \setminus \mathrm{int}(tH_l^-). \tag{2.24}$$

Για όλους τους ενδιάμεσους $k+1 \leq i < l$, η $\mathcal{F}_i^t$ αφήνει το $\mathcal{F}_k^t(u)$ αναλλοίωτο και άρα

$$\mathcal{F}_l^t\big(\mathcal{F}_{l-1}^t ... \mathcal{F}_i^t ... (\mathcal{F}_k^t(u))\big) \;=\; \mathcal{F}_l^t(\mathcal{F}_k^t(u)). \tag{2.25}$$

Από τον Ισχυρισμό 2.3, έχουμε

$$\mathcal{F}_l^t(\mathcal{F}_k^t(u)) \ \in \ tH_l^- \setminus \mathrm{int}(H_l^-), \tag{2.26}$$

και άρα $\mathcal{F}_l^t(\mathcal{F}_k^t(u)) \notin \mathrm{int}(\mathcal{C})$. Εν όψει της (2.13), συνεχίζοντας ως το K λαμβάνουμε $\mathcal{F}^t(u) \notin \mathrm{int}(\mathcal{C})$.
Τώρα δείχνουμε ότι $\mathcal{F}^t(u) \in \mathrm{int}(t\mathcal{C})$. Έστω πάλι $k \in \{1, ..., K\}$ ο 1ος δείκτης για τον οποίο $u \in \tau\mathcal{C} \setminus tH_k^-$. Τότε, $\mathcal{F}^t(u) = \mathcal{F}_K^t(...\mathcal{F}_k^t(u))$. Έστω H_l^*, $l \geq k+1$, να είναι η 1η στη σειρά γειτονική πλευρά της H_k^*. Από τον Ισχυρισμό 2.3,

$$\mathcal{F}_k^t(u) \ \in \ \tau\mathcal{C} \cap \big(tH_k^- \setminus \mathrm{int}(H_k^-)\big). \tag{2.27}$$

Αν $\mathcal{F}_k^t(u) \in tH_l^- \cap \tau\mathcal{C}$, προχωρούμε στην επόμενη. Διαφορετικά, αν $\mathcal{F}_k^t(u) \in \tau\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(tH_l^-)$, το ίδιο επειχήρημα όπως στην απόδειξη του Ισχυρισμό 2.3 με tH_k στη θέση του tH_j και tH_l στη θέση του τH_i δείχνει ότι

$$\mathcal{F}_l^t(\mathcal{F}_k^t(u)) \ \in \ \big(tH_k^- \setminus \mathrm{int}(H_k^-)\big) \cap \big(tH_l^- \setminus \mathrm{int}(H_l^-)\big). \tag{2.28}$$

Εν όψει της (2.13), συνεχίζοντας ως το K έχουμε

$$\mathcal{F}^t(u) \ \in \ \bigcap \big\{ tH_j^- \setminus \mathrm{int}(H_j^-) \ : \ 1 \leq j \leq K \big\} \tag{2.29}$$

και άρα $\mathcal{F}^t(u) \in t\mathcal{C}$.
(ii) έπεται από τις (2.12) και (2.13). □

Τώρα επαναλαμβάνουμε τον Ισχυρισμό 2.4. Ορίζουμε αναδρομικά:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_0 & := & T \\ t_{k+1} & := & \dfrac{t_k \ |\xi_{\max}| \ + \ |\xi_{\min}|}{|\xi_{\min}| \ + \ |\xi_{\max}|}. \end{array} \right. \tag{2.30}$$

Ισχυρισμός 2.5 *Η ακολουθία $(t_k)_1^\infty$ οριζόμενη από τις (2.30) φθίνει γνήσια στο 1^+ για $k \to \infty$, και*

$$t_k \ = \ \left(\frac{|\xi_{\max}|}{|\xi_{\max}| + |\xi_{\min}|}\right)^k T \ + \ \left(\frac{|\xi_{\min}|}{|\xi_{\max}| + |\xi_{\min}|}\right) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{|\xi_{\max}|}{|\xi_{\max}| + |\xi_{\min}|}\right)^j, \tag{2.31}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη του 2.5. Έπεται με επαγωγή και την γεωμετρική σειρά. □

Για $m \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $k(m) \in \mathbb{N}$ ώστε $t_{k(m)} < 1 + \frac{1}{m}$. Τότε, $t_{k(m)}\mathcal{C} \subseteq \left(1 + \frac{1}{m}\right)\mathcal{C}$. Ορίζουμε:

$$\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} \ := \ \mathcal{F}^{t_{k(m)}} \circ \cdots \circ \mathcal{F}^{t_1}. \tag{2.32}$$

Ισχυρισμός 2.6 *Η απεικόνιση αναδίπλωσης $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ που δίνεται από τις (2.12), (2.13), (2.32) είναι στον $[W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)]^N$, τμηματικά ίση με συνθέσεις αφφινικών ανακλάσεων και ικανοποιεί την (2.5) για κάθε $m \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη του 2.6. Από τους Ισχυρισμούς 2.4, 2.5, για κάθε $k = 1, 2, ...$ έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{F}^{t_k}\big(t_{k-1}\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(t_k\mathcal{C})\big) & \subseteq & t_k\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}), \\ \mathcal{F}^{t_k}\big(t_k\mathcal{C}\big) & = & t_k\mathcal{C}. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

Από τις (2.12), (2.13), (2.32), έπεται άμεσα ότι η $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m$ αφήνει το $\mathcal{C}$ αναλλοίωτο; συνεπώς, $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m(E) = E$ για κάθε $E \subseteq \mathcal{C}$. Οι υπόλοιπες ιδιότητες της $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m$ έπεται από κατασκευής, άρα αρκεί να θεσπίσουμε την (2.5). Προς τούτο, χρησιμοποιώντας ότι $m = T = t_0$, λαμβάνουμε

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m(m\mathcal{C}) & \subseteq & \mathcal{F}^{t_{k(m)}}\big(...\mathcal{F}^{t_1}(t_0\mathcal{C})\big) \\ & \subseteq & \mathcal{F}^{t_{k(m)}}\big(...\mathcal{F}^{t_2}(t_1\mathcal{C})\big) \\ & \subseteq & \mathcal{F}^{t_{k(m)}}\big(...\mathcal{F}^{t_3}(t_2\mathcal{C})\big) \\ & \subseteq & ... \\ & \subseteq & t_{k(m)}\mathcal{C} \\ & \subseteq & \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)\mathcal{C}. \end{array} \tag{2.34}$$

Τώρα, αφού $T\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}) = t_0\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})$, χρησιμοποιώντας τις (2.12), (2.13), (2.32) έχουμε

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{t_1}(m\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}) & \subseteq & \mathcal{F}^{t_1}\big(t_0\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big) \\ & = & \mathcal{F}^{t_1}\Big(\big[(t_0\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})) \cap \mathrm{int}(t_1\mathcal{C})\big] \\ & & \cup \big[(t_0\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})) \setminus \mathrm{int}(t_1\mathcal{C})\big]\Big) \\ & \subseteq & \big(t_1\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big) \cup \mathcal{F}^{t_1}\big(t_0\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(t_1\mathcal{C})\big) \\ & \subseteq & \big(t_1\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big) \cup \big(t_1\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big) \\ & = & t_1\mathcal{C} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}), \end{array} \tag{2.35}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{t_2}\big(\mathcal{F}^{t_1}(m\mathcal{C}\setminus\mathcal{C})\big) \;&\subseteq\; \mathcal{F}^{t_2}\big(t_1\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big)\\
&=\; \mathcal{F}^{t_2}\Big(\big[(t_1\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}))\cap \mathrm{int}(t_2\mathcal{C})\big]\\
&\qquad \cup \big[(t_1\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}))\setminus \mathrm{int}(t_2\mathcal{C})\big]\Big) \qquad (2.36)\\
&\subseteq\; \big(t_2\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big)\cup \mathcal{F}^{t_2}\big(t_1\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(t_2\mathcal{C})\big)\\
&\subseteq\; \big(t_2\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big)\cup \big(t_2\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\big)\\
&=\; t_2\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}),\\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mathcal{C}}_m(m\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}) \;&=\; \mathcal{F}^{t_{k(m)}}\big(...\mathcal{F}^{t_1}(m\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}))\big)\\
&\subseteq\; ...\\
&\subseteq\; t_{k(m)}\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}) \qquad (2.37)\\
&\subseteq\; \left(1+\frac{1}{m}\right)\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\\
&\subseteq\; \left(1+\frac{1}{m}\right)\mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Ο Ισχυρισμός 2.6 θεσπίστηκε. □

Ως τώρα, θεσπισαμε τις (i) and (ii) του Θεώρημα 2.1 κάτω από την υπόθεση ότι το $\mathcal{C}$ είναι αμβλύ πολύεδρο. Τώρα καταργούμε αυτή την υπόθεση.

Ισχυρισμός 2.7 *Τα (i) και (ii) του Θεωρήματος 2.1 ισχύουν για γενικό συμπαγές κυρτό $\mathcal{C}$ με $0\in int(\mathcal{C})$.*

Απόδειξη του 2.7. Έστω $(\mathcal{C}_k)_{k=1}^{\infty}$ μια φθίνουσα ακολουθία από C^1 συμπαγή κυρτά που προσεγγίζει το $\mathcal{C}$ εξωτερικά:

$$\mathcal{C}_1 \;\supseteq\; \mathcal{C}_2 \;\supseteq\; ... \;\supseteq\; \mathcal{C}_k \supseteq\; ... \;\supseteq\; \mathcal{C}. \qquad (2.38)$$

Σταθεροποιούμε $k\in\mathbb{N}$. Αφού το $\mathcal{C}_k$ είναι C^1, αν $p,q\in\partial\mathcal{C}$ και $\hat{p}$, $\hat{q}$ είναι τα εξωτερικά μοναδιαία στα p,q, ομαλότητα και συμπάγεια συνεπάγονται την ύπαρξη $\omega\in C^0[0,\infty)$ με $\omega(0)=0$ ώστε

$$\big|\hat{p}-\hat{q}\big| \;\le\; \omega(|p-q|). \qquad (2.39)$$

Από την (2.39),

$$\begin{aligned}\left|1 - \cos(Angl(\hat{p},\hat{q}))\right| &= \left|\frac{1}{2}\big(|\hat{p}|^2+|\hat{q}|^2\big) - |\hat{p}||\hat{q}|\cos(Angl(\hat{p},\hat{q}))\right| \\ &= \frac{1}{2}\left||\hat{p}|^2+|\hat{q}|^2 - 2(\hat{p}\cdot\hat{q})\right| \qquad (2.40)\\ &= \frac{1}{2}\left|\hat{p}-\hat{q}\right|^2 \\ &\le \frac{1}{2}\omega^2(|p-q|).\end{aligned}$$

Άρα, από την (2.40), αν p είναι κοντά στο q, τα εφαπτόμενα υπερεπίπεδα συναντώνται σε αμβλύες γωνίες. Από την (2.40), κάθε συμπαγές κυρτό $\mathcal{C}_k$ προσεγγίζεται εξωτερικά από ακολουθία $(\mathcal{C}_{k,l})_{l=1}^{\infty}$ αμβλύων πολυέδρων, που γεννώνται από εφαπτόμενα υπερεπίπεδα:

$$\mathcal{C}_{k,1} \supseteq \mathcal{C}_{k,2} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{C}_{k,l} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{C}_k. \qquad (2.41)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι l είναι το πλήθος των πλευρών του πολυέδρου $\mathcal{C}_{k,l}$. Αν $m \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την απεικόνιση αναδίπλωσης $\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}$ του $\mathcal{C}$ σαν την $l(m)$-απεικόνιση αναδίπλωσης του πολυέδρου $\mathcal{C}_{k(m),l(m)}$ για κάποια $k(m)$, $l(m) \in \mathbb{N}$ Αρκετά μεγάλα:

$$\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} := \mathcal{F}_{l(m)}^{\mathcal{C}_{k(m),l(m)}}. \qquad (2.42)$$

Από τα προηγούμενα, τέτοια $k(m)$, $l(m)$ υπάρχουν και η $\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ έχει τις ιδιότητες των (i) και (ii). $\square$

Ολοκληρώνουμε το Θεώρημα 2.1 θεσπίζοντας την (iii).

Ισχυρισμός 2.8 *Υπάρχουν υπακολουθίες $(k(m))_{m=1}^{\infty}$, $(l(m))_{m=1}^{\infty}$ ώστε η απεικόνιση αναδίπλωσης του $\mathcal{C}$ που δίνεται από τις (2.12), (2.13), (2.32) και (2.42) ικανοποιεί $\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} \overset{*}{\longrightarrow} \mathcal{P}^{\mathcal{C}}$ ασθενώς* στον $[W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)]^N$, κατά μήκος υπακολουθίας για $m \to \infty$.*

Απόδειξη του 2.8. Από τους Ισχυρισμούς 2.3 - 2.7, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $j \le m$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}(j\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}) &\subseteq \left(1+\frac{1}{m}\right)\mathcal{C}\setminus \mathrm{int}(\mathcal{C}), &(2.43)\\ \mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}(E) &= E, \quad E\subseteq \mathcal{C}, &(2.44)\\ \left|D\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}\right| &= 1, \text{ a.e. on } \mathbb{R}^N. &(2.45)\end{aligned}$$

Άρα, από τις (2.43) - (2.45) έχουμε

$$\left\|\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})} \;\leq\; 2\,\mathrm{diam}(\mathcal{C}), \tag{2.46}$$
$$\left\|D\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \;\leq\; 1, \tag{2.47}$$

για κάθε $j \leq m$ και $m \in \mathbb{N}$. Από τις (2.46), (2.47), την ασθενή* συμπάγεια του $[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)]^N$ και την τοπική συμπάγεια της εμφύτευσης $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \subset\subset L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, εξάγουμε υπακολουθία της $\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}$ ώστε, για κάποια συνάρτηση $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}$ στον $[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)]^N$

$$\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} \;\longrightarrow\; \mathcal{F}^{\mathcal{C}}, \text{ in } [L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)]^N, \tag{2.48}$$
$$D\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} \;\overset{*}{\rightharpoonup}\; D\mathcal{F}^{\mathcal{C}}, \text{ in } [L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)]^{N\times N}, \tag{2.49}$$

καθώς $m \to \infty$. Περνώντας στο τοπικά ομοιόμορφο όριο στις (2.43) και (2.44) και παίρνοντας μετά $j \to \infty$,λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}^{\mathcal{C}}\big(\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{C}\big) \;\subseteq\; \partial\mathcal{C}, \tag{2.50}$$
$$\mathcal{F}^{\mathcal{C}}(E) \;=\; E, \quad E \subseteq \mathcal{C}. \tag{2.51}$$

Ολοκληρώνουμε το Θεώρημα 2.1 θεσπίζοντας ότι για κατάλληλη επιλογή των $k(m)$ και $l(m)$, το όριο $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}$ συμπίπτει με την προβολή $\mathcal{P}^{\mathcal{C}}$ στο $\mathcal{C}$. Σταθεροποιούμε $j, m \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Έστω $\mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}}$ η προβολή στο $\mathcal{C}_{k(m)}$. Θεωρούμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}^{\mathcal{C}} - \mathcal{P}^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})} \;\leq\; & \left\|\mathcal{F}^{\mathcal{C}} - \mathcal{F}_m^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})} \;+\; \left\|\mathcal{F}_m^{\mathcal{C}} - \mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})} \\ & +\; \left\|\mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}} - \mathcal{P}^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Από την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}} - \mathcal{P}^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})} \leq\; \max\Big\{ &|p - p_m| \;: p \in \partial\mathcal{C},\; p_m \in \mathcal{C}_{k(m)}, \\ & [p, p_m] \subseteq \mathcal{C}_{k(m)} \setminus \mathrm{int}(\mathcal{C})\Big\}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

αν $k(m)$ είναι αρκετά μεγάλο, τότε

$$\left\|\mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}} - \mathcal{P}^{\mathcal{C}}\right\|_{L^\infty(j\mathcal{C})} \;\leq\; \varepsilon. \tag{2.54}$$

Θεωρείστε τώρα την ακολουθία $\big(\mathcal{F}_l^{\mathcal{C}_{k(m),l}}\big)_{l=1}^{\infty}$ που γεννάται από το $\mathcal{C}_{k(m),l}$ και προσεγγίζει το $\mathcal{C}_{k(m)}$. Η ακολουθία $\big(\mathcal{F}_l^{\mathcal{C}_{k(m),l}}\big)_{l=1}^{\infty}$ ικανοποιεί τις (2.46), (2.47) και λόγω συμπάγειας έχει τοπικά ομοιόμορφο όριο $\mathcal{F}^{\mathcal{C}_{k(m)}} \in [L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)]^N$:

$$\mathcal{F}_l^{\mathcal{C}_{k(m),l}} \;\longrightarrow\; \mathcal{F}^{\mathcal{C}_{k(m)}} \tag{2.55}$$

αν $[L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)]^N$ για $l \to \infty$, κατά μήκος υπακολουθίας. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{F}^{\mathcal{C}_{k(m)}} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}}$. Προς τούτο, παρατηρήστε ότι το σύνορο του $\mathcal{C}_{k(m),l}$ αποτελείται από εφαπτόμενα υπερεπίπεδα του C^1 κυρτού $\mathcal{C}_{k(m)}$ και l είναι ο αριθμός των πλευρών. Άρα, υπάρχει πυκνή ακολουθία $(u_i)_1^{\infty} \subseteq \partial\mathcal{C}_{k(m)}$, αντίστοιχη ακολουθία καθέτων εξωτερικών διανυσμάτων $(\hat{u}_i)_1^{\infty}$ και μια γνήσια αύξουσα $\sigma \in C^0[0,\infty)$ με $\sigma(0) = 0$ ώστε

$$\mathcal{F}_l^{\mathcal{C}_{k(m),l}}\big(u_i \ + \ t\hat{u}_i\big) \ = \ u_i \ + \ \sigma\big(2^{-l}\big)\hat{u}_i \tag{2.56}$$

για κάθε $i \leq l$ και $t \in [0, \sigma(l)]$. Εφόσον οι ημιευθείες

$$D \ := \ \bigcup_{i=1}^{\infty}\Big(u_i \ + \ \big\{t\hat{u}_i : t \geq 0\big\}\Big) \tag{2.57}$$

είναι πυκνές στον $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{C}$, περνώντας στο όριο στην (2.56) για $l \to \infty$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\mathcal{C}_{k(m)}}\big(u_i \ + \ t\hat{u}_i\big) \ &= \ u_i \\ &= \ \mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}}\big(u_i \ + \ t\hat{u}_i\big), \end{aligned} \tag{2.58}$$

για όλα τα $i \in \mathbb{N}$ και όλα τα $t \in [0, +\infty)$. Συνεπώς, $\mathcal{F}^{\mathcal{C}_{k(m)}} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}}$ στο πυκνό D. Ισότητα στο $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{C}$ έπεται από συνέχεια. Άρα, από την (2.55) μπορούμε να επιλέξουμε $l(m) \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\big\|\mathcal{F}_{l(m)}^{\mathcal{C}_{k(m),l(m)}} - \mathcal{P}^{\mathcal{C}_{k(m)}}\big\|_{L^{\infty}(j\mathcal{C})} \ \leq \ \varepsilon. \tag{2.59}$$

Τελικά, από τις (2.48) και (2.42), μπορούμε να αυξήσουμε το $l(m)$ περαιτέρω ώστε

$$\big\|\mathcal{F}_{l(m)}^{\mathcal{C}_{k(m),l(m)}} - \mathcal{F}^{\mathcal{C}}\big\|_{L^{\infty}(j\mathcal{C})} \ \leq \ \varepsilon. \tag{2.60}$$

Από τις (2.52), (2.54), (2.59) και (2.60), το επιθυμητό αποτέλεσμα $\mathcal{F}^{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{P}^{\mathcal{C}}$ έπεται από το ότι τα $\varepsilon > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ είναι αυθαίρετα. $\square$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 είναι πλήρης. $\square$

2.2 ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο εξάγουμε τις αρχές μεγίστου για προσεγγιστικούς ελαχιστοποιητές μη-κυρτών συναρτησιακών, με την έννοια της Ιδιότητας Κυρτής Θήκης. Εξάγονται χρησιμοποιώντας τις Απεικονίσεις Αναδίπλωσης του Θεωρήματος 2.1 για να κατασκευάσουμε κατάλληλες συναρτήσεις σύγκρισης που παρακάμπτουν την έλλειψη ασθενούς κάτω ημισυνέχειας.

Πριν προχωρήσουμε τα κεντρικά αποτελέσματα, πρέπει να ερμηνεύσουμε τα "$u(\Omega)$" και "$u(\partial\Omega)$" με ασθενή τρόπο που να έχει έννοια για απλά μετρήσιμες συναρτήσεις. Έστω $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ μια μετρίσιμη συνάρτηση οριζόμενη στο ανοικτό Ω και έστω $A, K \subseteq \overline{\Omega}$ επίσης μετρίσιμα. Έστω επίσης $|\_|$ το μέτρο Lebesgue σε κάθε διάσταση. Αν $|A| > 0$, η *ουσιώδης εικόνα* $u(A)$ είναι το κλειστό σύνολο

$$u(A) \ := \ \left\{\eta \in \mathbb{R}^N \ \middle| \ \operatorname*{ess\,inf}_{x\in A} |u(x) - \eta| = 0\right\}. \tag{2.61}$$

Αν $|K| = 0$, η (2.61) δεν έχει άμεσο νόημα για το K. Έτσι, ορίζουμε

$$u(K) \ := \ \bigcap \left\{u(A) \ \middle| \ A \supseteq K, \ |A| > 0\right\}. \tag{2.62}$$

Τέλος, αν $S \subseteq \mathbb{R}^N$, συμβολίζουμε την ανοικτή ε-περιοχή του S με

$$S^\varepsilon \ := \ \big\{\eta \in \mathbb{R}^N \ \big| \ |\eta - s| < \varepsilon, \ s \in S\big\}. \tag{2.63}$$

2.2.1 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΜΕΣΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε πρώτα την απλούστερη περίπτωση

$$E(u, \Omega) \ = \ \int_\Omega H\big(x, Du(x)\big)dx. \tag{2.64}$$

Υποθέσεις για το συναρτησιακό (2.64). Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα: έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $H : \Omega \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια απεικόνιση Καραθεοδωρή ώστε

1. *Η $H(x, \_)$ είναι σχεδόν αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της Ορθογώνιας Ομάδας*: υπάρχουν $a \in L^1(\Omega)$ ώστε για σ.ό. τα $x \in \Omega$, όλα τα $O \in O(N, \mathbb{R})$ και $P \in \mathbb{R}^{N\times n}$, έχουμε

$$\big|H(x, P) \ - \ H(x, OP)\big| \ \le \ a(x).$$

2. *Η $H(x, \_)$ είναι q-αύξησης*: υπάρχουν $C > 0$, $q \ge 1$ και $b \in L^1(\Omega)$ ώστε

$$-b(x) \ \le \ H(x, P) \ \le \ C\,|P|^q \ + \ b(x).$$

Παρατήρηση 2.9 *Η υπόθεση* (2) *είναι μάλλον καθιερωμένη. Η υπόθεση* (1) *ικανοποιείται πάντα όταν η $H(x, \_)$ είναι αναλλίωτη από την $O(N, \mathbb{R})$, όπου* *τότε* $a \equiv 0$*. Ειδικότερα, αυτό ισχύει πάντα στην συχνή περίπτωση όπου η* H *εξαρτάται από το* P *ως εξής:* $H = H(x, |P|)$.

Στη βαθμωτή περίπτωση όπου $N = 1$*, η υπόθεση* (1) *επιβάλλει*

$$\big|H(x,P)\ -\ H(x,-P)\big|\ \leq\ a(x), \tag{2.65}$$

που σημαίνει ότι η $H(x,\_)$ *είναι σχεδόν άρτια. Ακόμα και στην βαθμωτή περίπτωση, η αρτιότητα που προκύπτει για* $a \equiv 0$ *και επιβάλλει* $H(x,P) = H(x,-P)$*, είναι πολύ ασθενέστερη από την συνήθη υπόθεση να είναι ακτινικά συμμετρική, δηλ.* $H = H(x,|P|)$.

Επισημαίνουμε ότι η υπόθεση $H = H(x,|P|)$ *μαζί με την μονοτονικότητα της* $t \mapsto H(x,t)$ *είναι καθιερωμένη υπόθεση στην βιβλιογραφία για την εξαγωγή της Ιδιότητας Κυρτής Θήκης. Σε αυτή την δουλειά την χαλαρώνουμε ουσιαστικά και ειδικότερα προσπερνάμε την σχεδόν-κυρτότητα.*

Θεώρημα 2.10 (Αρχή Αναδίπλωσης I) *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό σύνολο και* $H : \Omega \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *συνάρτηση Καραθεοδωρή που ικανοποιεί τις* (1) *και* (2)*. Τότε, για κάθε* $\alpha > 0$ *και* $g \in [W^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^N$ *υπάρχει* $(\alpha + \|a\|_{L^1(\Omega)})$*-ελαχιστοποιητής* u *του συναρτησιακού* (2.64) *στον* $[W^{1,q}_g(\Omega)]^N$ *που ικανοποιεί*

$$u(\Omega)\ \subseteq\ \overline{co}\left(u(\partial\Omega)^\alpha\right). \tag{2.66}$$

Από το Θεώρημα 2.10 άμεσα έπεται το ακόλουθο

Πόρισμα 2.11 *Στο πλαίσιο του Θεωρήματος 2.10, αν επιπλέον η* H *είναι αναλλοίωτη κάτω από την* $O(N,\mathbb{R})$*, δηλαδή* $a \equiv 0$ *στην υπόθεση* (1)*, τότε υπάρχει ελαχιστοποιούσα οικογένεια* $\{u_\alpha\}_{\alpha>0}$ *του προβλήματος* (2.3) *που ασυμπτωτικά ικανοποιεί την ιδιότητα κυρτής θήκης καθώς* $\alpha \to 0$:

$$u_\alpha(\Omega)\ \subseteq\ \overline{co}\left(u_\alpha(\partial\Omega)^\alpha\right). \tag{2.67}$$

Παρατήρηση 2.12 *Χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα (π.χ. Dacorogna [D1], [D3]), η* (2.67) *κληρονομείται από τις* Λύσεις Χαλάρωσης του (2.3) *και από τις* ελαχιστοποιούσες λύσεις του συστήματος ΜΔΕ Euler-Lagrange, *όταν αυτά υπάρχουν.*

Παρατήρηση 2.13 *Ελλείψει ασθενούς κάτω ημισυνέχειας, οι* (2.66) *και* (2.67) *αποτελούν* όλα *όσα μπορούμε να ισχυριστούμε, αφού δεν μπορούμε να περάσουμε στο όριο* $\alpha \to 0$ *για να την βελτιστοποιήσουμε. Επιπλέον, αν η* H *δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της Ορθογώνιας Ομάδας, τότε η Ιδιότητα Κυρτής Θήκης ικανοποιείται από προσεγγιστικό ελαχιστοποιητή σε* ανώτερο ενεργειακό επίπεδο, *αυξημένο κατά την ποσότητα "*$\|a\|_{L^1(\Omega)}$*" απόκλισης της* H *από την αναλλοιώτητα.*

Απόδειξη του 2.10. Σταθεροποιούμε $\alpha > 0$. Κάτω από την υπόθεση L^1-φράγματος της (2), ελαχιστοποιούσες ακολουθίες του προβλήματος (2.3) είναι ισοδύναμες με οικογένειες προσεγγιστικών ελαχιστοποιητών καθώς $\alpha \to 0$. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε $\frac{\alpha}{2}$-ελαχιστοποιητή $v \in [W^{1,q}_g(\Omega)]^N$ του (2.64). Θεωρούμε την $\frac{\alpha}{2}$-περιοχή του $u(\partial\Omega)$ και θέτουμε

$$\mathcal{C} \ := \ \overline{\mathrm{co}}\left(u(\partial\Omega)^{\alpha/2}\right). \tag{2.68}$$

Αφού $u - g \in [W^{1,q}_0(\Omega)]^N$ και $g \in [L^\infty(\Omega)]^N$, από τις (2.61) και (2.62), το $\mathcal{C}$ είναι συμπαγές κυρτό του $\mathbb{R}^N$ με μη-κενό εσωτερικό. Με μια μεταφορά, υποθέτουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(\mathcal{C})$. Έστω $\mathcal{F}_m$, $m \in \mathbb{N}$, οι Απεικονίσεις Αναδίπλωσης του Θεωρήματος 2.1 του $\mathcal{C}$. Έστω επίσης v^m η αποκοπή του v η εικόνα τηε οποίας περιέχεται στην μεγαλήτερη μπάλα εντός της m-διόγκωσης $m\,\mathcal{C}$ του $\mathcal{C}$:

$$v^m \ := \ v\,\chi_{\{|v|\leq R(m)\}} \ + \ \frac{v}{|v|}\,\chi_{\{|v|>R(m)\}}, \tag{2.69}$$

$$R(m) \ := \ \max\Big\{ R \in \mathbb{N} \ \Big| \ v\big(\{|v| \leq R\}\big) \ \subseteq \ m\,\mathcal{C} \Big\}. \tag{2.70}$$

Τότε, $v^m \to v$ στον $[W^{1,q}(\Omega)]^N$ και $Dv^m \to Dv$ σ.π. στο Ω επίσης, κατά μήκος μιας υπακολουθίας καθώς $m \to \infty$. Επιπλέον, από το Θεώρημα 2.1, ο μετασχηματισμός $\mathcal{F}_m \circ v^m$ είναι καλά ορισμένος και περιέχεται στον $[W^{1,q}(\Omega)]^N$. Επιπλέον, για $m = m(\alpha)$ μεγάλο, εν όψει της (2.5) ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(\Omega) \ &\subseteq \ \left(1 + \frac{1}{m}\right)\mathcal{C} \\
&\subseteq \ \mathcal{C}^{\alpha/2} \\
&= \ \overline{\mathrm{co}}\left(u(\partial\Omega)^{\alpha/2}\right)^{\alpha/2} \\
&= \ \overline{\mathrm{co}}\left(u(\partial\Omega)^{\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Από την (2.5), η $\mathcal{F}_m$ αφήνει το $\mathcal{C}$ αναλλοίωτο. Συνεπώς, από τις (2.61), (2.62) και (2.68) λαμβάνουμε

$$v(\partial\Omega) \ = \ \big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(\partial\Omega). \tag{2.72}$$

Συνεπώς, $\mathcal{F}_m \circ v^m \in [W^{1,q}_g(\Omega)]^N$ και από τις (2.71) και (2.72) έχουμε

$$\big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(\Omega) \ \subseteq \ \overline{\mathrm{co}}\,\big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(\partial\Omega). \tag{2.73}$$

Από την υπόθεση (2) και αφού $|Dv^m| \leq 2|Dv|$ για m μεγάλο, λαμβάνουμε

$$\Big| H\big(x, Dv^m(x)\big) \Big| \ \leq \ 2^q C\,|Dv(x)|^q \ + \ b(x), \tag{2.74}$$

για σ.κ. $x \in \Omega$. Άρα, αφού $Dv^m \to Dv$ σ.π. για $m \to \infty$, το Θεώρημα Κυριαρχημενής Σύγκλισης δίνει

$$\int_\Omega H\big(x, Dv^m(x)\big)dx \;\longrightarrow\; \int_\Omega H\big(x, Dv(x)\big)dx, \tag{2.75}$$

για $m \to \infty$. Από το Θεώρημα 2.1, για σ.κ. $x \in \Omega$, έχουμε ότι $D\mathcal{F}_m\big(v^m(x)\big) \in O(N, \mathbb{R})$. Άρα, χρησιμοποιώντας το φράγμα της (1) και την (2.75), έχουμε

$$\begin{aligned} E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m, \Omega\big) &= \int_\Omega H\big(x, D(\mathcal{F}_m \circ v^m)(x)\big)dx \\ &= \int_\Omega H\big(x, D\mathcal{F}_m(v^m(x))\, Dv^m(x)\big)dx \\ &\leq \int_\Omega H\big(x, Dv^m(x)\big)dx \;+\; \int_\Omega a(x)\,dx \\ &\leq \int_\Omega H\big(x, Dv(x)\big)dx \;+\frac{\alpha}{2} \;+\; \|a\|_{L^1(\Omega)} \\ &= E(v,\Omega) \;+\frac{\alpha}{2} \;+\; \|a\|_{L^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.76}$$

για $m = m(\alpha)$ αρκετά μεγάλο. Αφού το v είναι $\frac{\alpha}{2}$-ελαχιστοποιητής του (2.64) και $v - \mathcal{F}_m \circ v^m \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$, επιλέγοντας $\psi \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$ τυχαία και θέτοντας

$$\phi \;:=\; \psi - v + \mathcal{F}_m \circ v^m, \tag{2.77}$$

έχουμε ότι $\phi \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E\big(v, \Omega\big) &\leq E(v+\phi, \Omega) \;+\frac{\alpha}{2} \\ &= E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m + \psi, \Omega\big) \;+\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Από τις (2.76) και (2.78), για κάθε $\alpha > 0$, η $u := \mathcal{F}_m \circ v^m$ είναι $(\alpha + \|a\|_{L^1(\Omega)})$-ελαχιστοποιητής που λόγω της (2.73) ικανοποιεί την (2.66). □

2.2.2 Η ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΟΛΑ ΤΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ

Θεωρούμε τώρα την γενική περίπτωση

$$E(u, \Omega) \;=\; \int_\Omega H\big(x, u(x), Du(x)\big)dx. \tag{2.79}$$

Υποθέσεις για το συναρτησιακό (2.79). Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα: έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή ώστε

1. *Η $H(x,\eta,\_)$ είναι σχεδόν αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της Ορθογώνιας Ομάδας, τοπικά ομοιόμορφα ως προς η*: για κάθε $R>0$, υπάρχει $a=a_R\in L^1(\Omega)$ ώστε για σ.χ. $x\in\Omega$, όλα τα $|\eta|\le R$, όλα τα $O\in O(N,\mathbb{R})$ και όλα τα $P\in\mathbb{R}^{N\times n}$, έχουμε

$$\big|H(x,\eta,P)\ -\ H(x,\eta,OP)\big|\ \le\ a(x).$$

2. *Η $H(x,\eta,\_)$ είναι q-αύξησης*: υπάρχουν $C>0$, $q\ge 1$, $b\in L^1(\Omega)$ και $d:\Omega\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή ώστε

$$-b(x)\ \le\ H(x,\eta,P)\ \le\ C\,|P|^q\ +\ d(x,\eta).$$

3. *Υπάρχει κυρτό ώστε οι τιμές της $H(x,\_,P)$ εξωτερικά να ξεπερνούν αυτές του συνόρου*: υπάρχουν $l\in L^1(\Omega)$ και $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^N$ συμπαγές κυρτό με $0\in\mathrm{int}(\mathcal{C})$ ώστε

$$\max_{\eta\in\partial\mathcal{C}}H(x,\eta,P)\ \le\ \inf_{\eta\in\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{C}}H(x,\eta,P)\ +\ l(x),$$

για σ.ό. τα $x\in\Omega$ και όλα τα $P\in\mathbb{R}^{N\times n}$.

Παρατήρηση 2.14 *Οι υποθέσεις (1) και (2) είναι ανάλογες εκείνων του (2.64). Η υπόθεση (3) λέει ότι υπάρχει κυρτό $\mathcal{C}$ ώστε η $H(x,\_,P)$ να έχει τιμές στον $\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{C}$ που σχεδόν ξεπερνούν εκείνες στο $\partial\mathcal{C}$. Η μη-αρνητική συνάρτηση l αναπαριστά την απόκλιση της $H(x,\_,P)\big|_{\mathcal{C}}$ από το να είναι σταθερή. Αν $l\equiv 0$, τότε το "σχεδόν" μπορεί να παραλειφθεί. Η υπόθεση (3) είναι ασθενέστερη από την υπόθεση το $\mathcal{C}$ να είναι σύνολο στάθμης, αφού οι τιμές εσωτερικά του $\mathcal{C}$ μπορεί να ξεπερνούν αυτές του συνόρου.*

Θεώρημα 2.15 (Αρχή Αναδίπλωσης ΙΙ) *Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $H:\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση Καραθεοδωρή που ικανοποιεί τις υποθέσεις (1), (2) και (3). Τότε, για κάθε $\alpha>0$ και κάθε $g\in[W^{1,q}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)]^N$ υπάρχει ένας $(\alpha+\|a+l\|_{L^1(\Omega)})$-ελαχιστοποιητής u του συναρτησιακού (2.79) στον $[W^{1,q}_g(\Omega)]^N$ που ικανοποιεί*

$$u(\partial\Omega)\ \subset\ \mathcal{C}\ \implies\ u(\Omega)\ \subseteq\ \mathcal{C}^\alpha. \tag{2.80}$$

Από το Θεώρημα 2.15 άμεσα έπεται το ακόλουθο

Πόρισμα 2.16 *Στο πλαίσιο του Θεωρήματος 2.15, αν επιπλέον $a=l\equiv 0$ στις υποθέσεις (1) και (3), τότε υπάρχει ελαχιστοποιούσα οικογένεια $\{u_\alpha\}_{\alpha>0}$ του (2.3) που καθώς $\alpha\to 0$ ικανοποιεί ότι*

$$u_\alpha(\partial\Omega)\ \subset\ \mathcal{C}\ \implies\ u_\alpha(\Omega)\ \subseteq\ \mathcal{C}^\alpha. \tag{2.81}$$

Παρατήρηση 2.17 *Ένα επιχείρημα ανάλογο της Παρατήρησης 2.12 εφαρμόζεται και εδώ επίσης. Άλλη μια φορά παρατηρούμε ότι αν $a \not\equiv 0$ ή $l \not\equiv 0$, υπάρχει αύξηση στην ενέργεια του προσεγγιστικού ελαχιστοποιητή.*

Παρατήρηση 2.18 *Η υπόθεση γνησιότητας "$u(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}$" των (2.80) και (2.81) μπορεί να χαλαρώσει σε "$u(\partial\Omega) \subseteq \mathcal{C}$" by με την επιπλέον υπόθεση ότι η $\eta \mapsto H(x,\eta,P)$* έχει μέτρα συνέχειας στα συμπαγή που εξαρτώνται ομοιόμορφα από τα $(x,P) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N\times n}$. *Αυτή είναι μια ασθενής υπόθεση που ικανοποιείται πάντα στην αποζευγμένη περίπτωση $H(x,\eta,P) = A(x,P) + W(\eta)$, με καθιερωμένο παράδειγμα το* Συναρτησιακό Δράσης $E(u,\Omega) = \int_\Omega [\frac{1}{2}|Du(x)|^2 + W(u(x))]dx$.

Απόδειξη του 2.15. Σταθεροποιούμε $\alpha > 0$ και έστω $v \in [W^{1,q}_g(\Omega)]^N$ ένας $\frac{\alpha}{2}$-ελαχιστοποιητής του (2.79) που ικανοποιεί $v(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}$. Συμβολίζουμε τις Απεικονίσεις Αναδίπλωσης του $\mathcal{C}$ που δίνονται από το Θεώρημα 2.1 με $\mathcal{F}_m$, $m \in \mathbb{N}$. Έστω $\mathcal{P}$ η προβολή επί του $\mathcal{C}$. Έστω τέλος v^m η αποκοπή του v που δίνεται από τις (2.69) και (2.70). Τότε, η $\mathcal{F}_m \circ v^m$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση του $[W^{1,q}(\Omega)]^N$. Από την υπόθεση (3), το $\mathcal{C}$ είναι συμπαγές. Από τις (2.61) και (2.62), το $v(\partial\Omega)$ είναι κλειστό και επειδή $v(\partial\Omega) \subset \mathcal{C}$, υπάρχει ανοικτή περιοχή του $v(\partial\Omega)$ εντός του $\mathcal{C}$. Άρα, η $\mathcal{F}_m$ αφήνει τις συνοριακές τιμές αναλλοίωτες και έτσι

$$\big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(\partial\Omega) \; = \; v(\partial\Omega). \tag{2.82}$$

Συνεπώς, έχουμε $\mathcal{F}_m \circ v^m \in [W^{1,q}_g(\Omega)]^N$. Πάλι από το Θεώρημα 2.1, για $m = m(\alpha)$ μεγάλο έχουμε

$$\big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(\Omega) \; \subseteq \; \mathcal{C}^\alpha. \tag{2.83}$$

Από τις (2.69), (2.70) και το Θ. 2.1, λαμβάνουμε

$$Dv^m \; \longrightarrow \; Dv, \tag{2.84}$$
$$\mathcal{F}_m \circ v^m \; \longrightarrow \; \mathcal{P} \circ v, \tag{2.85}$$

σ.π. στο Ω, και οι 2 κατά μήκος κοινής υπακολουθίας $m \to \infty$. Αξιοποιώντας τα

$$\big|\mathcal{F}_m \circ v^m\big| \; \leq \; 2\,\mathrm{diam}(\mathcal{C}), \tag{2.86}$$
$$\big|\mathcal{P} \circ v\big| \; \leq \; \mathrm{diam}(\mathcal{C}), \tag{2.87}$$
$$|Dv^m| \; \leq \; 2\,|Dv|, \tag{2.88}$$

που ισχύουν για μεγάλο m, από το φράγμα της (2) και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έπεται

$$\int_\Omega H\Big(x, \mathcal{F}_m\big(v^m(x)\big), Dv^m(x)\Big)dx \ \longrightarrow\ \int_\Omega H\Big(x, \mathcal{P}\big(v(x)\big), Dv(x)\Big)dx, \tag{2.89}$$

για $m \to \infty$. Τώρα εφαρμόζουμε την

$$\begin{aligned} E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m, \Omega\big) \ &= \ \int_\Omega H\Big(x, \big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(x), D\big(\mathcal{F}_m \circ v^m\big)(x)\Big)dx \\ &= \ \int_\Omega H\Big(x, \mathcal{F}_m\big(v^m(x)\big), D\mathcal{F}_m\big(v^m(x)\big)\, Dv^m(x)\Big)dx \end{aligned} \tag{2.90}$$

για να εκτιμήσουμε την ενέργεια $E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m, \Omega\big)$. Από το Θ. 2.1, για σ.κ. $x \in \Omega$, έχουμε $D\mathcal{F}_m\big(v^m(x)\big) \in O(N, \mathbb{R})$. Αξιοποιούμε τις (2.89) και (1) όπου σαν R παίρνουμε

$$R \ := \ 2\,\mathrm{diam}(\mathcal{C}) \tag{2.91}$$

με $a = a_R$. Τότε η (2.90) δίνει

$$\begin{aligned} E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m, \Omega\big) \ &\leq \ \int_\Omega H\Big(x, \mathcal{F}_m\big(v^m(x)\big), Dv^m(x)\Big)dx \\ &\quad + \ \int_\Omega a(x)\, dx \\ &\leq \ \int_\Omega H\Big(x, \mathcal{P}(v(x)), Dv(x)\Big)dx \ + \frac{\alpha}{2} \\ &\quad + \ \|a\|_{L^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.92}$$

για $m = m(\alpha)$ αρκετά μεγάλο. Από την (3), σ.π. στο

$$\{v \notin \mathcal{C}\} \ := \ \Big\{x \in \Omega \ \Big|\ v(x) \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{C}\Big\} \ \subseteq \ \Omega \tag{2.93}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} H\big(\_, \mathcal{P} \circ v, Dv\big) \ &\leq \ \max_{\eta \in \partial\mathcal{C}} H\big(\_, \eta, Dv\big) \\ &\leq \ \inf_{\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{C}} H\big(\_, \eta, Dv\big) \ + \ l \\ &\leq \ H\big(\_, v, Dv\big) \ + \ l. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Τετριμμένα, σ.π. στο $\{v \in \mathcal{C}\}$ έχουμε

$$H\big(\_, \mathcal{P} \circ v, Dv\big) \ = \ H\big(\_, v, Dv\big). \tag{2.95}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.94) και (2.95), η εκτίμηση (2.92) δίνει

$$\begin{aligned} E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m, \Omega\big) \ &\leq\ \int_{\{v \notin \mathcal{C}\}} H\Big(x, \mathcal{P}(v(x)), Dv(x)\Big)dx \\ &\quad + \int_{\{v \in \mathcal{C}\}} H\Big(x, \mathcal{P}(v(x)), Dv(x)\Big)dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\ +\ \|a\|_{L^1(\Omega)} \qquad (2.96) \\ &\leq\ \int_{\{v \notin \mathcal{C}\}} H\Big(x, v(x), Dv(x)\Big)dx\ +\ \int_\Omega l(x)dx \\ &\quad + \int_{\{v \in \mathcal{C}\}} H\Big(x, v(x), Dv(x)\Big)dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\ +\ \|a\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Άρα, από την (2.96) έχουμε

$$\begin{aligned} E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m, \Omega\big) \ &\leq\ \int_\Omega H\Big(x, v(x), Dv(x)\Big)dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\ +\ \|a\|_{L^1(\Omega)}\ +\ \|l\|_{L^1(\Omega)} \qquad (2.97) \\ &=\ E(v, \Omega)\ + \frac{\alpha}{2}\ +\ \|a + l\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αφού το v είναι $\frac{\alpha}{2}$-ελαχιστοποιητής του (2.79) και $v - \mathcal{F}_m \circ v^m \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$, επιλέγοντας $\psi \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$ τυχαία και θέτοντας

$$\phi\ :=\ \psi - v + \mathcal{F}_m \circ v^m, \qquad (2.98)$$

παίρνουμε ότι $\phi \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$. Άρα,

$$\begin{aligned} E\big(v, \Omega\big)\ &\leq\ E(v + \phi, \Omega)\ +\ \frac{\alpha}{2} \\ &=\ E\big(\mathcal{F}_m \circ v^m + \psi, \Omega\big)\ +\ \frac{\alpha}{2}. \qquad (2.99) \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τις (2.97), (2.99) και (2.83), για κάθε $\alpha > 0$ η $u := \mathcal{F}_m \circ v^m$ είναι $(\alpha + \|a + l\|_{L^1(\Omega)})$-ελαχιστοποιητής που ικανοποιεί την (2.80). Το Θεώρημα 2.15 έπεται. $\square$

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

3 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΔΕ ARONSSON ΓΙΑ ΟΜΑΛΟΥΣ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΤΕΣ ΜΕΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ

Έστω H μια μη-αρνητική συνάρτηση στον $C^1(\mathbb{R}^{N\times n}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^n)$. Η διανυσματική συνάρτηση $u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^N$ είναι *Απόλυτος Ελαχιστοποιητής* του *μεγιστικού συναρτησιακού*

$$E_\infty(u,\Omega)\ :=\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} H\big(Du(x),u(x),(x)\big),\quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

αν η u είναι τοπικά Lipschitz στον $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)^N$ και για όλα τα φραγμένα ανοικτά $\Omega\subset\subset R^n$ και όλες τις $g\in W^{1,\infty}_0(\Omega)^N$ έχουμε

$$E_\infty(u,\Omega)\ \le\ E_\infty(u+g,\Omega). \tag{3.2}$$

Συναρτησιακά της μορφής (3.1) πλαισιωμένα από την έννοια ελαχιστικότητας (3.2) αποτελούν το κεντρικό αντικείμενο του *Λογισμού Μεταβολών στον χώρο* L^∞, εν αντιθέσει με τον κλασικό Λογισμό Μεταβολών στον L^1. Η περιοχή ξεκίνησε από τον Aronsson στα [A1] - [A5] την δεκαετία του '60, που μελέτησε το γεωμετρικό πρόβημα των *Βέλτιστων Lipschitz Επεκτάσεων* δεδομένης συνάρτησης και εμπλέκει το συναρτησιακό

$$\mathrm{Lip}(u,K)\ =\ \sup_{x,y\in K,x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \tag{3.3}$$

συζευγμένο με την έννοια ελαχιστικότητας $\mathrm{Lip}(u,\Omega)=\mathrm{Lip}(u,\partial\Omega)$ για όλα τα $\Omega\subset\subset R^n$. Η βαθμωτή περίπτωση $N=1$ έχει διεξοδικά μελετηθεί από τότε, αφού L^∞ μεταβολικά προβλήματα προκύπτουν σε πλειάδα περιπτώσεων, ειδικά όταν η ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής δεν οδηγεί σε ρεαλιστικό μοντέλο καθώς και αλλού (δες [BEJ]).

Οι Απόλυτοι Ελαχιστοποιητές του (3.1) σχετίζονται με ένα "Euler-Lagrange" σύστημα ΜΔΕ 2ης τάξης, το *σύστημα Aronsson ΜΔΕ*. Αν $u\in C^2(\mathbb{R}^n)^N$, μπορεί να γραφτεί σε συνεπτυγμένη μορφή σαν

$$\mathcal{A}[u]\ :=\ H_P(Du,u,\_)D\big(H(Du,u,\_)\big)\ =\ 0. \tag{3.4}$$

Έδω η H έχει ορίσματα $H(P,\eta,x)$, οι δείκτες H_P, H_η, H_x δηλώνουν παραγώγους D_PH, $D_\eta H$, D_xH, και τα P,η,x έχουν συνιστώσες $P_{\alpha i}$, η_β, x_j με δείκτες να διατρέχουν ως $1\le i,j\le n$, $1\le\alpha,\beta\le N$. Αναπτύσσοντας στην (3.4) τις παραγώγους της u που τις βλέπουμε σαν απεικονίσεις

$Du : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times n}$, $D^2u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times n^2}$ με συνιστώσες $D_i u_\alpha, D^2_{ij}u_\beta$, κλπ, το σύστημα ΜΔΕ Aronsson αναπτύσσεται σε

$$\begin{aligned}\Big(H_{P_{\alpha i}}(Du,u,\_)\,H_{P_{\beta j}}(Du,u,\_)\Big)\,D^2_{ij}u_\beta\\ +\Big(\ H_{P_{\alpha i}}(Du,u,\_)\,H_{\eta_\beta}(Du,u,\_)D_i u_\beta\\ +\ H_{P_{\alpha i}}(Du,u,\_)\,H_{x_i}(Du,u,\_)\Big)\ =\ 0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

όπου η σύμβαση άθροισης σχησιμοποιείται. Το (3.5) είναι ένα σχεδόν-γραμμικό σύστημα ΜΔΕ 2ης τάξης. Η ειδική περίπτωση $H(P,\eta,x) = \frac{1}{2}|P|^2 = \frac{1}{2}P_{\alpha i}P_{\alpha i}$ στην (3.1) δίνει $E_\infty(u,\Omega) = \frac{1}{2}\|Du\|^2_{L^\infty(\Omega)}$ που σχετίζεται άμεσα με το (3.3) και οδηγεί στο σημαντικό σύστημα ΜΔΕ της ∞-*Λαπλασιανής*

$$\Delta_\infty u\ :=\ Du\,D\Big(\frac{1}{2}|Du|^2\Big)\ =\ 0, \tag{3.6}$$

Σε ανηγμένη μορφή δεικτών, το σύστημα της ∞-Λαπλασιανής γράφεται ως

$$D_i u_\alpha\,D_j u_\beta\,D^2_{ij}u_\beta\ =\ 0. \tag{3.7}$$

Μια βασική δυσκολία που σχετίζεται με τη μελέτη των (3.4) και (3.6) είναι ότι διαθέτουν μη διαφορίσιμες "λύσεις". Αυτό είχε παρατηρηθεί από τον Aronsson στα [A6], [A7] και η θεωρία έμεινε ανενεργή ως τη δεκαετία του '90, όπου εφαρμογή των Λύσεων Ιξώδους των Crandall, Ishii και Lions επέτρεψε τη μελέτη των γενικα ιδιαζόντων λύσεων της βαθμωτής ΜΔΕ $\mathcal{A}[u] = 0$ για $N = 1$, όπως αυτές του προτελευταίου μέρους της Διατριβής. Στο βαθμωτό πλαίσιο $N = 1$ αλλά στην πλήρη γενικότητα της H όπως στην (3.1), οι Barron, Jensen και Wang [BJW1] απέδειξαν ότι οι τοπικοί ελαχιστοποιητές είναι Λύσεις Ιξώδους της ΜΔΕ Aronsson. Μετέπειτα, το αποτέλεσμα βελτιώθηκε από τους Crandall [C1] και Crandall, Wang και Yu [CWY]. Σχετικά αποτελέσματα στη γενικότητα των ομάδων Carnot-Carathéodory εμφανίζονται στα [BC] και [WY].

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε την πλήρη διανυσματική περίπτωση των (3.1) και (3.4) και αποδεικνύουμε ότι Απόλυτοι Ελαχιστοποιητές είναι λύσεις του συστήματος ΜΔΕ Aronsson, *κάτω από την επιπρόσθετη υπόθεση ότι είναι στον $C^2(\mathbb{R}^n)^N$ και όχι μόνο τοπικά Lipschitz*:

Θεώρημα 3.1 (Οι Απ.Ελαχ. σαν λύσεις συστήματος ΜΔΕ Aronsson) *Έστω $H \in C^1(\mathbb{R}^{N\times n}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^n)$, $H \geq 0$. Αν $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι Απόλυτος Ελαχιστοποιητής του μεγιστικού συναρτησιακού (3.1) ικανοποιώντας την (3.2) και επιπλέον $u \in C^2(\mathbb{R}^n)^N$, τότε η u λύνει το σύστημα ΜΔΕ Aronsson (3.4), (3.5).*

Ειδικότερα, παρέχουμε μια αυστηρή απόδειξη ενός θεωρήματος παρόμοιο του 3.1 που εμφανίζεται στην εργασία [BJW2] των Barron, Jensen και Wang που είχε μόνο *σκιαγραφηθεί τυπικά*.

Η πλήρης διανυσματική περίπτωση των (3.4), (3.5) δεν έχει μελετηθεί. Η βασική δυσκολία πηγάζει από την ύπαρξη ιδιαζόντων "λύσεων" της (3.5) και την έλλειψη μιας συστηματικής θεωρίας για να μελετήσουμε συστήματα σαν το (3.5) που να επιτρέπει την "ασθενή" ερμηνεία τέτοιων "λύσεων". Παρόλο που στην βαθμωτή περίπτωση κάποιος εκφυλισμός της H είναι αναγκαίος ώστε να εμφανιστούν ιδιάζουσες λύσεις της (3.4) (δες το προτελευταίο μέρος της Διατριβής) που *δεν* εμφανίζονται για την Δ_∞, η διανυσματική περίπτωση είναι πιο ιντριγκώδης και *υπάρχουν εξαιρετικά ιδιάζουσες πουθενά 2 φορές παραγωγίσιμες ∞-Αρμονικές συναρτήσεις ακόμα και όταν $n = 1$*: αν K είναι μια αρκετά ιδιάζουσα συνάρτηση του $C^0(\mathbb{R})$ (όπως αυτή του τελευταίου μέρους της διατριβής), η επίπεδη καμπύλη $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$u(t) \ := \ \int_0^t \big(\cos\big(K(s)\big), \sin\big(K(s)\big)\big)^\top ds \tag{3.8}$$

είναι μια $C^1(\mathbb{R})^2$ λύση της *ΜΔΕ Εικόνας*, δηλαδή ικανοποιεί

$$|Du|^2 \ = \ 1 \tag{3.9}$$

και είναι "∞-Αρμονική συνάρτηση", αφού λύνει το συνεπτυγμένο σύστημα (3.6), αλλά όχι το (3.7) αφού η D^2u δεν υπάρχει *πουθενά* και μπορεί να υλοποιηθεί μόνο σαν ιδιάζουσα κατανομή 1ης τάξης.

Εν όψει των παραπάνω, το Θεώρημα 3.1 ως έχει είναι περιορισμένης εφαρμοσιμότητας. Παρόλα αυτά, στο επόμενο μέρος της διατριβής προτείνεται μια Θεωρία μη-διαφορισίμων λύσεων που εφαρμόζεται σε πλήρως μη-γραμμικά ελλειπτικά συστήματα ΜΔΕ και επεκτείνει την Θεωρία των Λύσεων Ιξώδους στη γενική διανυσματική περίπτωση. Σε αυτό το νέο πλαίσιο εργασίας, είναι εφικτό να εξαχθούν αποτελέσματα ανάλογα των [BJW1], [C2] και [CWY] και αυτό είναι εν εξελίξει. Παρόλα αυτά, η ομαλή περίπτωση είναι πιο διαφωτιστική γιατί απακαλύπτει την ουσία παρακάμπτοντας τις περιπλοκές λόγω έλλειψης ομαλότητας. Επιπλέον, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1 δεν απαιτούν την σταθμική κυρτότητα της $P \mapsto H(P, \_, \_)$.

Απόδειξη του 3.1. Τα επιχειρήματα ακολουθούν μια ιδέα του R. Jensen από την βαθμωτή ΜΔΕ ∞-Λαπλασιανή $\Delta_\infty u = 0$ για $N = 1$ και αντίστοιχη $H(P, \eta, x) = \frac{1}{2}|P|^2$, που εμφανίζεται στην εργασία [J1]. Η ιδέα είναι να εξάγουμε την (3.4) από την (3.2) εισάγοντας μια κατάλληλη δοκιμαστική συνάρτηση για την u και προκύπτει ότι μια τετραγωνική μεταβολή αρκεί.

Σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon, \delta \in (0,1)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ με $|\xi| = 1$ και θεωρούμε την

$$g(z) \ := \ \frac{\delta}{2}\big(\varepsilon^2 - |z-x|^2\big)\xi. \tag{3.10}$$

Τότε, η $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι λεία και μηδενίζεται στο σύνορο της ε-μπάλας περί το x:

$$g \in W_0^{1,\infty}(\mathbb{B}_\varepsilon(x))^N \cap C^2(\mathbb{R}^n)^N. \tag{3.11}$$

Θέτοντας σαν w την ακόλουθη μεταβολή της u

$$w \ := \ u \ + \ g, \tag{3.12}$$

υπολογίζουμε (δ_{ij} είναι το "δ" του Kronecker):

$$w_\alpha(x) \ = \ u_\alpha(x) \ + \ \frac{\delta\varepsilon^2}{2}\xi_\alpha, \tag{3.13}$$

$$D_i w_\alpha(z) \ = \ D_i u_\alpha(z) \ - \ \delta\xi_\alpha(z-x)_i, \tag{3.14}$$

$$D^2_{ij} w_\alpha(z) \ = \ D^2_{ij} u_\alpha(z) \ - \delta\xi_\alpha\delta_{ij}, \tag{3.15}$$

$$|g| \ = \ (g_\alpha\, g_\alpha)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ 1, \ \text{on } \mathbb{B}_\varepsilon(x), \tag{3.16}$$

$$|Dg| \ = \ (D_i g_\alpha\, D_i g_\alpha)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ 1, \ \text{on } \mathbb{B}_\varepsilon(x), \tag{3.17}$$

όπου $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq N$. Αφού $u \in C^2(\mathbb{R}^n)^N$ και η H είναι C^1, η

$$H(Du, u, \_) \ : \ z \mapsto H\big(Du(z), u(z), z\big) \tag{3.18}$$

είναι $C^1(\mathbb{R}^n)$. Από το Θεώρημα Taylor, υπάρχει $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^n)$ με $\sigma(z-x) = o(1)$ για $z \to x$ ώστε

$$\begin{aligned} H(Du, u, \_)(z) \ &= H(Du, u, \_)(x) \\ &+ \ D\big(H(Du, u, \_)\big)(x)(z-x) \\ &+ \ \sigma(z-x)|z-x|. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ξανά από το Θεώρημα Taylor για την

$$H(Dw, u, \_) \ : \ z \mapsto H\big(Dw(z), u(z), z\big), \tag{3.20}$$

υπάρχει $\tau \in C^1(\mathbb{R}^n)$ με $\tau(z-x) = o(1)$ για $z \to x$ ώστε

$$\begin{aligned} H(Dw, u, \_)(z) \ &= H(Dw, u, \_)(x) \\ &+ \ D\big(H(Dw, u, \_)\big)(x)(z-x) \\ &+ \ \tau(z-x)|z-x|. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (3.21) και την ταυτότητα

$$\begin{aligned} H(Dw,w,\_)(z) \ &= H(Dw,u,\_)(z) \\ &+ \ \big[H(Dw,w,\_) - H(Dw,u,\_)\big](z), \end{aligned} \tag{3.22}$$

για να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} H\big(Dw(z),w(z),(z)\big) \ &= H\big(Dw(x),u(x),(x)\big) \\ &+ \ H_{P_{\alpha i}}\big(Dw(x),u(x),(x)\big)\, D^2_{ij}w_\alpha(x)\,(z-x)_j \\ &+ \ H_{\eta_\alpha}\big(Dw(x),u(x),(x)\big)\, D_j u_\alpha(x)\,(z-x)_j \\ &+ \ \tau(z-x)|z-x| \\ &+ \ \big[H(Dw,w,\_) - H(Dw,u,\_)\big](z). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Άρα, από την (3.23) και εν όψει των (3.13), (3.14) και (3.15), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} H\big(Dw(z),w(z),(z)\big) \ &= H\big(Du(x),u(x),(x)\big)) \\ &+ \ H_{P_{\alpha i}}\big(Du(x),u(x),(x)\big))\, D^2_{ij}u_\alpha(x)\,(z-x)_j \\ &- \ \delta\,\xi_\alpha\, H_{P_{\alpha i}}\big(Du(x),u(x),(x)\big)\,(z-x)_i \\ &+ \ H_{\eta_\alpha}\big(Du(x),u(x),(x)\big)\, D_j u_\alpha(x)\,(z-x)_j \\ &+ \ \tau(z-x)|z-x| \\ &+ \ \big[H(Dw,w,\_) - H(Dw,u,\_)\big](z). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Άρα, η (3.24) δίνει

$$\begin{aligned} H(Dw,w,\_)(z) \ &= H(Du,u,\_)(x) \\ &+ \ D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\,(z-x) \\ &- \ \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\,(z-x) \\ &+ \ \tau(z-x)|z-x| \\ &+ \ \big[H(Dw,w,\_) - H(Dw,u,\_)\big](z). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Από τις (3.10), (3.11), (3.12), έχουμε

$$|w-u| \ \leq \ \frac{\delta\varepsilon^2}{2}, \quad \text{on} \ \ \mathbb{B}_\varepsilon(x). \tag{3.26}$$

Αφού η H είναι C^1, η (3.26) δίνει

$$\Big|H(Dw,w,\_) - H(Dw,u,\_)\Big| \ \leq \ M\frac{\delta\varepsilon^2}{2}, \quad \text{on} \ \ \mathbb{B}_\varepsilon(x). \tag{3.27}$$

με $M>0$ σταθερά ανεξάρτητη των ε,δ όπου εν όψει των (3.16), (3.17) μπορεί να παρθεί ως

$$\begin{aligned} M \ := \ \sup\Big\{|H_\eta| \ : \mathbb{B}_R(0)\times\mathbb{B}_r(0)\times\mathbb{B}_1(x), & \\ r := 1+\|u\|_{L^\infty(\mathbb{B}_1(x))} & \\ R := 1+\|Du\|_{L^\infty(\mathbb{B}_1(x))}\Big\}. & \end{aligned} \tag{3.28}$$

Τώρα εκτιμούμε ενέργειες. Από τις (3.1) και (3.21), έχουμε

$$\begin{aligned} E_\infty(u,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \ &= \operatorname{ess}\sup_{\mathbb{B}_e(x)} H(Du,u,\_) \\ &= H(Du,u,\_)(x) \\ &\quad + \max_{\{|z-x|\leq\varepsilon\}}\Big[D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)(z-x) \\ &\qquad\qquad + \ \sigma(z-x)|z-x|\Big] \end{aligned} \tag{3.29}$$

που δίνει

$$\begin{aligned} E_\infty(u,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \ &\geq H(Du,u,\_)(x) \\ &\quad + \max_{\{|z-x|\leq\varepsilon\}}\Big[D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)(z-x)\Big] \\ &\quad - \max_{\{|z-x|\leq\varepsilon\}}|\sigma(z-x)|\,|z-x|. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Το 1ο μέγιστο στην (3.30) υλοποιείται στο

$$z_\varepsilon \ := \ x \ + \ \varepsilon\,\mathrm{sgn}\Big(D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\Big) \tag{3.31}$$

ενώ το 2ο είναι μια ποσότητα $o(\varepsilon)$ για $\varepsilon\to 0$. Άρα, η (3.30) δίνει

$$E_\infty(u,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \ \geq \ H(Du,u,\_)(x) \ + \ \varepsilon\left|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\right| \ + \ o(\varepsilon). \tag{3.32}$$

Τώρα, από τις (3.1) και (3.25) έχουμε

$$\begin{aligned} E_\infty(w,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \ &= \operatorname{ess}\sup_{\mathbb{B}_e(x)} H(Dw,w,\_) \\ &= H(Du,u,\_)(x) \\ &\quad + \max_{\{|z-x|\leq\varepsilon\}}\Big[\Big(D\big(H(Du,u,\_)\big) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)\Big)(x)(z-x) \\ &\qquad\qquad + \ \tau(z-x)|z-x| \\ &\qquad\qquad + \ \big[H(Dw,w,\_)-H(Dw,u,\_)\big](z)\Big]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Αξιοποιώντας την (3.27), η (3.33) δίνει

$$
\begin{aligned}
E_\infty(w,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \ \leq\ & H(Du,u,\_)(x) \\
&+ \max_{\{|z-x|\leq\varepsilon\}} \Big[\Big(D\big(H(Du,u,\_)\big) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)\Big)(x)(z-x)\Big] \\
&+ \max_{\{|z-x|\leq\varepsilon\}} |\tau(z-x)|\,|z-x| \\
&+\ M\delta\varepsilon^2.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Το 1ο μέγιστο στην (3.34) υλοποιείται στο

$$
z_{\varepsilon,\delta,\xi}\ :=\ x\ +\ \varepsilon\,\mathrm{sgn}\Big(D\big(H(Du,u,\_)\big)(x) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\Big), \tag{3.35}
$$

ενώ το 2ο είναι μια ποσότητα $o(\varepsilon)$ για $\varepsilon \to 0$. Άρα, η (3.34) δίνει

$$
\begin{aligned}
E_\infty(w,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \ \leq\ & H(Du,u,\_)(x) \\
&+\ \varepsilon\Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\Big| \\
&+\ o(\varepsilon)\ +\ M\delta\varepsilon^2.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Από τις εκτιμήσεις ενέργειων (3.32), (3.36) and Απόλυτη Ελαχιστικότητα της u (δες την (3.2)), εν όψει της (3.12) έχουμε

$$
\begin{aligned}
0\ \leq\ & E_\infty(w,\mathbb{B}_\varepsilon(x))\ -\ E_\infty(u,\mathbb{B}_\varepsilon(x)) \\
\leq\ & H(Du,u,\_)(x) \\
&+\ \varepsilon\Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\Big| \\
&+\ o(\varepsilon)\ +\ M\delta\varepsilon^2 \\
&-\ H(Du,u,\_)(x)\ -\ \varepsilon\Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\Big|\ +\ o(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Από την (3.37) λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
0\ \leq\ & \Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\Big| \\
&-\ \Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\Big|\ +\ o(1)\ +\ M\delta\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

για $\varepsilon \to 0$. Πέρασμα στο όριο $\varepsilon \to 0$ δίνει

$$
\begin{aligned}
0\ \leq\ & \Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x) - \delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\Big| \\
&-\ \Big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\Big|.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Αν $D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)=0$, τότε λόγω της (3.4), οι Απόλυτοι Ελαχιστοποιητές u λύνουν στο x την

$$\mathcal{A}[u](x) \ = \ 0. \tag{3.40}$$

Από την άλλη, αν $D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\neq 0$, η

$$p \ \mapsto \ \big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)+p\,\big| \ - \ \big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\big| \tag{3.41}$$

είναι C^1 κοντά στην αρχή του $\mathbb{R}^n$. Από το ανάπτυγμα Taylor της (3.41) στο $0\in\mathbb{R}^n$ εφαρμοσμένο στο

$$p \ := \ -\delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x), \tag{3.42}$$

η ανισότητα (3.39) δίνει

$$\begin{split} 0 \ \leq \ & \left(\frac{D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)}{\big|D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\big|}\right)^{\!\top}\Big(-\,\delta\,\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\Big) \\ & + \ o\Big(\delta\,\big|\xi^\top H_P(Du,u,\_)(x)\big|\Big), \end{split} \tag{3.43}$$

για $\delta\to 0$. Από την (3.43) εξάγουμε

$$\delta\,\xi^\top\Big(H_P(Du,u,\_)\big)D\big(H(Du,u,\_)\big)(x)\Big) \ \leq \ o(\delta), \tag{3.44}$$

για $\delta\to 0$. Πέρασμα στο όριο $\delta\to 0$ δίνει λόγω της (3.4) την

$$\xi^\top\big(\mathcal{A}[u](x)\big) \ \leq \ 0. \tag{3.45}$$

Αφού το $\xi\in\mathbb{R}^N$ είναι αυθαίρετη κατεύθυνση και το $x\in\mathbb{R}^n$ είναι τυχαίο σημείο, οι Απόλυτοι Ελαχιστοποιητές $u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^N$ είναι λύσεις του συστήματος ΜΔΕ Aronsson και το αποτέλεσμα έπεται. $\square$

4 ΘΕΩΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ ΕΠΑΦΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε μια θεωρία μη-διαφορισίμων λύσεων για πλήρως μη-γραμμικά συστήματα ΜΔΕ 1ης και 2ης τάξης

$$F(\cdot, u, Du, D^2u) \ = \ 0, \quad u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

που επεκτείνει την θεωρία των Λύσεων Ιξώδους στη γενική διανυσματική περίπτωση. Το στοιχείο-κλείδι που επέτρεψε αυτή την επέκταση (η οποία είχε επιτευχθεί μόνο για ειδικά μονότονα ή ασθενώς συζευγμένα συστήματα) είναι η ανακάλυψη μιας Αρχής Ακροτάτου για διανυσματικές συναρτήσεις, αυτή της "Αρχής της Επαφής". Η "Επαφή" επεκτείνει τα min και max στον $\mathbb{R}^N$ και ικανοποιεί έναν "λογισμό Αρχής Μεγίστου". Οδηγούμαστε έτσι σε μια θεωρία ΜΔΕ, αυτή των Λύσεων Επαφής η οποία διατηρεί την τεχνοτροπία του βαθμωτού αναλόγου των Λύσεων Ιξώδους. Βέβαια, νέα διανυσματικά φαινόμενα εμφανίζονται. Για παράδειγμα, λόγω ενδεχόμενης "συστροφής" των συναρτήσεων η Αρχή Ακροτάτου αναγκαστικά είναι συναρτησιακή και όχι σημειακή. Επίσης, διαθέτει τάξη και απλή συνέχεια των εμπλεκομένων συναρτήσεων δεν αρκεί. Ειδικότερα, "Επαφή 1ης τάξης" επιτρέπει να εξάγουμε "ισότητα για την κλίση" και "Επαφή 2ης τάξης" επιτρέπει να εξάγουμε "ανισότητα για την Εσσιανή". Επίσης, η τάξη της "Επαφής" επιβάλλει μια a priori Μερική Ομαλότητα και "το 1/2 της τάξης παραγώγων του (4.1) μπορεί να ερμηνευθεί ασθενώς, το υπόλοιπο 1/2 πρέπει να προϋπάρχει κλασικά".

Βασικό πεδίο εφαρμογής των Λύσεων Επαφής είναι το σύστημα Aronsson (0.7), η ∞-Λαπλασιανή (0.8), οι βαθμωτές ΜΔΕ Hamilton-Jacobi με διανυσματικές λύσεις και ειδικά η ΜΔΕ Εικόνας $|Du|^2 = 1$. Ειδικά για τα συστήματα (0.7) και (0.8) υπάρχουν όπως αποδεικνύουμε ιδιάζουσες "λύσεις" οι οποίες δεν μπορούν να ερμηνευθούν αυστηρά από τις υπάρχουσες θεωρίες ΜΔΕ και να μελετηθούν αποτελεσματικά: γενικά δεν υπάρχουν ούτε κλασικές, ούτε ισχυρές, ούτε ασθενείς, ούτε μετρο-θεωρητικές, ούτε κατανομικές λύσεις.

Σαν μια πρώτη εφαρμογή, καθορίζουμε τις Θεμελιώδεις Λύσεις της ∞-Λαπλασιανής και αποδεικνυούμε ότι είναι μη-κλασικές Λύσεις Επαφής της ΜΔΕ Εικόνας. Επίσης, κατασκευάζουμε μια κλάση $C^{1,\frac{1}{2}+}$ ∞-Αρμονικών διανυσματικών συναρτήσεων με πουθενά βελτιώσιμη ομαλότητα.

4.1 ΠΟΛΥΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

4.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Έστω $n, N \in N$. Στα παρακάτω, με $\mathbb{R}^n$ θα συμβολίζουμε το $\mathbb{R}^{n\times 1}$ εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο $a \cdot b := a^\top b$ και ο $\mathbb{R}^{N\times n}$ θα είναι ο χώρος των $N \times n$ πινάκων με εσωτερικό γινόμενο $P : Q := tr(P^\top Q)$. Οι νόρμες είναι πάντα οι Ευκλείδειες $|a| = \sqrt{a \cdot a}$, $|P| = \sqrt{P : P}$. Η μπάλα του$\mathbb{R}^n$ με κέντρο στο x θα συμβολίζεται με $\mathbb{B}^n(x)$ και οι αντίστοιχες σφαίρες με $\mathbb{S}^{n-1}(x)$. Αν $x = 0$, τότε οι $\mathbb{B}^n(0)$, $\mathbb{S}^{n-1}(0)$ θα συμβολίζονται με $\mathbb{B}^n$, $\mathbb{S}^{n-1}$. Για $a \in \mathbb{R}^n$, θέτουμε $\mathrm{sgn}(a) := a/|a|$ αν $a \neq 0$ και $\mathrm{sgn}(0) := 0$. Η σύμβαση άθροισης θα χρησιμοποιείται και οι ελεύθεροι επαναλαμβανόμενοι δείκτες θα καταδεικνύονται με $(\hat{.})$. Τα γράμματα n, N θα είναι πάντα οι διαστάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^N$; Ελληνικά α, β, γ,... θα τρέχουν από 1 ως N και λατινικά i, j, k,... από 1 ως n. Συμβολίζουμε το χώρο των γραμμικών απεικονίσεων $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\Xi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times n}$ με $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^{N\times n} \otimes \mathbb{R}^{N\times n}$ αντίστοιχα. Τα αντίστοιχα τανυστικά γινόμενα είναι

$$\otimes \; : \; \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n, \qquad e_\alpha^\top([\xi \otimes w]e_i) \; := \; \xi_\alpha w_i, \tag{4.2}$$

$$\otimes \; : \; \mathbb{R}^{N\times n} \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times n} \times \mathbb{R}^{N\times n}, \quad e_{\alpha i} : ([\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q}]e_{\beta j}) \; := \; \mathrm{P}_{\alpha i}\mathrm{Q}_{\beta j}. \tag{4.3}$$

Τότε, $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n = \mathrm{span}[\{e_\alpha \otimes e_i | \alpha, i\}]$ και $\mathbb{R}^{N\times n} \otimes \mathbb{R}^{N\times n} = \mathrm{span}[\{e_{\alpha i} \otimes e_{\beta j} | \alpha, \beta, i, j\}]$ όπου $e_{\alpha i} = e_\alpha \otimes e_i$. Οι χώροι συμμετρικών απεικονίσεων υπεράνω του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^{N\times n}$ είναι οι

$$\mathbb{S}(n) \; := \; \Big\{ A = A_{ij} e_i \otimes e_j \; \Big| \; A_{ij} = A_{ji} \in \mathbb{R} \Big\}, \tag{4.4}$$

$$\mathbb{S}(N \times n) \; := \; \Big\{ \Xi = \Xi_{\alpha i \beta j} e_{\alpha i} \otimes e_{\beta j} \; \Big| \; \Xi_{\alpha i \beta j} = \Xi_{\beta j \alpha i} \; \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{4.5}$$

Το φυσικό εσωτερικό γινόμενο $\mathbb{S}(N \times n)$ που επάγεται από $\mathbb{R}^{N\times n} \otimes \mathbb{R}^{N\times n}$ δίνεται από $\Xi : H := \Xi_{\alpha i \beta j} H_{\alpha i \beta j}$. Θετικές συμμετρικές απεικονίσεις $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ θα συμβολίζονται με $\mathbb{S}^+(n)$.

Έστω τώρα $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Η κλίση Du και η Εσσιανή D^2u θεωρούνται σαν απεικονίσεις

$$Du \; = \; (D_i u_\alpha) e_\alpha \otimes e_i \quad : \; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n, \tag{4.6}$$

$$D^2u \; = \; (D^2_{ij} u_\alpha) e_\alpha \otimes e_{ij} \quad : \; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n). \tag{4.7}$$

Τέλος, έστω $k \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Οι τοπικοι χώροι Sobolev συναρτήσεων $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ θα συμβολίζονται με $W^{k;q}_{loc}(\Omega)^N$ και οι τοπικοί C^k χώροι με $C^k(\Omega)^N$. Έστω $0 \leq \alpha \leq 1$. Οι C^{k-1} συναρτήσεις με Hölder και Lipschitz k-τάξης παραγώγους θα συμβολίζονται με $C^{k,\alpha}(\Omega)^N$ και $C^{k,1}(\Omega)^N$. Θα χρειαστεί να επεκταθούμε στην κλάση των $C^{k,\alpha+}(\Omega)^N$ χώρων. Αν $k=0$, ο $C^{0,\alpha+}(\Omega)^N$ ορίζεται από

$$C^{0,\alpha+}(\Omega)^N \; := \; \Big\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \;\Big|\; \forall\ \Omega' \subset\subset \Omega,\ \exists \omega \in C^0[0,\infty),\ \nearrow,\ \omega(0)=0 : \big|u(x)-u(y)\big| \;\leq\; \omega(|x-y|)|x-y|^\alpha,\ x,y \in \Omega \Big\}. \tag{4.8}$$

Τυπικά, θέτουμε $C^{\alpha+}(\Omega)^N := C^{0,\alpha+}(\Omega)^N$. Ο χώρος $C^{k,\alpha+}(\Omega)^N$ για $k>1$ ορίζεται παρόμοια. Οι χώροι $C^{k,\alpha+}$ ικανοποιούν $C^0 = C^{0+}$, $C^{k,0+} = C^k$ και$C^{k,\alpha+\varepsilon} \subseteq C^{k,\alpha+}$ για όλα τα $\varepsilon > 0$.

4.1.2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Το *Συμμετρικοποιημένα τανυστικό γινόμενο* είναι η πράξη

$$\vee \;:\; \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{S}(N) \;:\; a \vee b \;:=\; \frac{1}{2}\big(a \otimes b + b \otimes a\big). \tag{4.9}$$

Προφανως, $a \vee b = b \vee a$ και $a \vee a = a \otimes a$. Επίσης,

$$(a \vee b) : (w \otimes w) = (a \otimes b) : (w \otimes w) = (w^\top a)(w^\top b), \tag{4.10}$$

$$|a \otimes b|^2 = |a|^2 |b|^2, \tag{4.11}$$

$$|a \vee b|^2 = \frac{1}{2}\left(|a|^2|b|^2 + (a^\top b)^2\right). \tag{4.12}$$

Θα χρειαστούμε και τα ακόλουθα τανυστικά γινόμενα. Αν $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$, θεωρούμε τα $\xi \otimes \mathrm{P}$, $\mathrm{P} \otimes \xi$ δυικά σαν απεικονίσεις

$$\xi \otimes \mathrm{P} \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N, \quad (\xi \otimes \mathrm{P})(w) := \xi \otimes (\mathrm{P}w), \tag{4.13}$$

$$\mathrm{P} \otimes \xi \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N, \quad (\mathrm{P} \otimes \xi)(w) := (\mathrm{P}w) \otimes \xi. \tag{4.14}$$

Ορίζουμε

$$\xi \vee \mathrm{P} \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}(N), \quad \xi \vee \mathrm{P} := \frac{1}{2}\big(\xi \otimes \mathrm{P} + \mathrm{P} \otimes \xi\big). \tag{4.15}$$

Προφανώς, $\xi \vee \mathrm{P} = \mathrm{P} \vee \xi$. Παρόμοια, αν $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\alpha ij} e_\alpha \otimes e_{ij}$ ανήκει στο $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$ με $e_{ij} := e_i \otimes e_j$, εισάγωντας τον τελεστή *Συστολής*

$$\big(\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)\big) \times \big(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n\big) \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{X} : A \;:=\; (\mathbf{X}_{\alpha ij} A_{ij}) e_\alpha, \tag{4.16}$$

ορίζουμε

$$\xi \otimes \mathbf{X} \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N, \quad (\xi \otimes \mathbf{X})(v,w) := \xi \otimes (\mathbf{X} : v \otimes w), \tag{4.17}$$

$$\mathbf{X} \otimes \xi \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N, \quad (\mathbf{X} \otimes \xi)(v,w) := (\mathbf{X} : v \otimes w) \otimes \xi. \tag{4.18}$$

Επίσης, θέτουμε

$$\xi \vee \mathbf{X} \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}(N), \quad \xi \vee \mathbf{X} := \frac{1}{2}\big(\xi \otimes \mathbf{X} + \mathbf{X} \otimes \xi\big). \tag{4.19}$$

Ισχύει ότι $\xi \vee \mathbf{X} = \mathbf{X} \vee \xi$. Επιπλέον, αφού $\mathbf{X}_{\alpha ij} = \mathbf{X}_{\alpha ji}$, ο τανυστής $\xi \vee \mathbf{X}$ ανήκει στο $\mathbb{S}(N \times n)$: όντως,

$$\begin{aligned}
(\xi \vee \mathbf{X})_{\alpha i \beta j} \;&:=\; (e_\alpha \otimes e_\beta) : \big((\xi \vee \mathbf{X})(e_i, e_j)\big) \\
&=\; \frac{1}{2}(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta ij} + \xi_\beta X_{\alpha ij}) \\
&=\; \frac{1}{2}(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta ji} + \xi_\beta X_{\alpha ji}) \\
&=\; (\xi \vee \mathbf{X})_{\beta j \alpha i}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Λήμμα 4.1 *Έστω $R \in \mathbb{R}^N$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Τότε το φάσμα $\sigma(\xi \vee R)$ του τανυστή $\xi \vee R \in \mathbb{S}(N)$ αποτελείται από το πολύ 3 ιδιοτιμές $\lambda^- \leq 0 \leq \lambda^+$, τις*

$$\sigma(\xi \vee R) \;=\; \left\{ -\frac{1}{2}\Big(|R| - \xi^\top R\Big),\; 0,\; \frac{1}{2}\big(|R| + \xi^\top R\big) \right\}. \tag{4.21}$$

Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι

$$N\big(\xi \vee R \;-\; \lambda I\big) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \;\; span[\{\xi - sgn(R)\}], & \lambda = \lambda^-, \\ (span[\{\xi, R\}])^\perp, & \lambda = 0, \\ \;\; span[\{\xi + sgn(R)\}], & \lambda = \lambda^+. \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Απόδειξη του 4.1. Παρατηρούμε ότι $N\big(\xi \vee R\big) = (\mathrm{span}[\{\xi, R\}])^\perp$: πράγματι, αν $\eta \in \mathbb{R}^N$, έχουμε

$$(\xi \vee R)\eta \;=\; \left(\frac{R^\top \eta}{2}\right)\xi \;+\; \left(\frac{\xi^\top \eta}{2}\right) R. \tag{4.23}$$

Άρα, το η είναι κάθετο στο ξ και στο R ανν $(\xi \vee R)\eta = 0$. Άρα, ο $\xi \vee R$ έχεο το πολύ 3 ιδοιτιμές λ^-,0, λ^+ και

$$N\big(\xi \vee R \;-\; \lambda^- I\big) \oplus N\big(\xi \vee R \;-\; \lambda^+ I\big) \;=\; \mathrm{span}[\{\xi, R\}]. \tag{4.24}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.23) ελέγχουμε απευθείας ότι αν $R \neq 0$, τότς

$$(\xi \vee R)\left(\xi \pm \frac{R}{|R|}\right) \ = \ \lambda^{\pm}\left(\xi \pm \frac{R}{|R|}\right) \tag{4.25}$$

με $\lambda^{\pm}$ όπως στην (4.21). □

4.1.3 ΤΑΝΥΣΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Έστω $\Xi \in \mathbb{S}(N \times n)$. Ο χώρος αυτός έχει φυσική διάταξη, την

$$\Xi \ \geq \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Xi : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \ \geq \ 0, \ \mathrm{P} \in \mathbb{R}^{N \times n}. \tag{4.26}$$

Τώρα εισάγουμε μια άλλη μερική διάταξη στον $\mathbb{S}(N \times n)$.

Ορισμός 4.2 (Ανισότητα Τάξης-1) *Έστω $\Xi \in \mathbb{S}(N \times n)$. Ο Ξ είναι θετικός τάξης-1 στον $\mathbb{S}(N \times n)$ αν η τετραγωνική μορφή $P \longmapsto \Xi : P \otimes P$ είναι κυρτή τάξης-1 στον $\mathbb{R}^{N \times n}$, δηλ.*

$$\eta \in \mathbb{R}^N, \ w \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad \Xi : (\eta \otimes w) \otimes (\eta \otimes w) \ \geq \ 0. \tag{4.27}$$

Τότε γράφουμε $\Xi \geq_{\otimes} 0$.

Ως συνήθως, ορίζουμε $\Xi \leq_{\otimes} 0 \Longleftrightarrow -\Xi \geq_{\otimes} 0$ και $\Xi \leq_{\otimes} \Theta \Longleftrightarrow \Xi - \Theta \leq_{\otimes} 0$. Η τετραγωνική μορφή $\mathrm{P} \longmapsto \Xi : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$ είναι κυρτή τάξης-1 όταν η

$$t \ \mapsto \ \Xi : \big(\mathrm{P} + t(\eta \otimes w)\big) \otimes \big(\mathrm{P} + t(\eta \otimes w)\big) \tag{4.28}$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ για όλα τα P, η, w. Η θετικότητα τάξης-1 "$\leq_{\otimes}$" ορίζει μερική διάταξη στον υπόχωρο $\mathbb{S}(N, n)$ του $\mathbb{S}(N \times n)$ *χωριστά συμμετρικών τανυστών*:

$$\mathbb{S}(N, n) \ := \ \Big\{ \Xi = \Xi_{\alpha i \beta j} e_{\alpha i} \otimes e_{\beta j} \ \Big| \ \Xi_{\alpha i \beta j} = \Xi_{\beta j \alpha i} = \Xi_{\beta i \alpha j} \Big\}. \tag{4.29}$$

Λήμμα 4.3 *Έστω Ξ, H, $\Theta \in \mathbb{S}(N \times n)$. Τότε,*
(i) $\Xi \leq_{\otimes} \Xi$.
(ii) $\Xi \leq_{\otimes} \Theta$, $\Theta \leq_{\otimes} H \Longrightarrow \Xi \leq_{\otimes} H$.
(iii) Αν $0 \leq_{\otimes} \Xi \leq_{\otimes} 0$, *τότε*

$$\big(\Xi_{\alpha i \beta j} \ + \ \Xi_{\beta j \alpha i}\big) e_{\alpha i} \otimes e_{\beta j} \ = \ 0. \tag{4.30}$$

Απόδειξη του 4.3. Οι (i) και (ii) είναι τετριμμένες. Για την (iii), έστω $\xi \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}^n$. Εξ υποθέσεως, $0 \leq \Xi : (\xi \otimes w) \otimes (\xi \otimes w) \leq 0$. Άρα

$$\begin{aligned} 0 &= \Xi : (\xi \otimes w) \otimes (\xi \otimes w) \\ &= \Xi_{\alpha i \beta j} \xi_\alpha w_i \xi_\beta w_j \\ &= (\xi_\alpha \Xi_{\alpha i \beta j} \xi_\beta) w_i w_j. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Θέτοντας $\xi^\top \Xi \xi := (\xi_\alpha \Xi_{\alpha i \beta j} \xi_\beta) e_i \otimes e_j$, η (4.31) λέει

$$(\xi^\top \Xi \xi) : w \otimes w \; = \; 0, \;\; w \in \mathbb{R}^n \tag{4.32}$$

και επιπλέον έχουμε $\xi^\top \Xi \xi \in \mathbb{S}(n)$:

$$\begin{aligned} (\xi^\top \Xi \xi)_{ij} &= \xi_\alpha \Xi_{\alpha i \beta j} \xi_\beta \\ &= \xi_\beta \Xi_{\beta j \alpha i} \xi_\alpha \\ &= (\xi^\top \Xi \xi)_{ji}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Άρα, η (4.32) δίνει ότι για $i, j \in \{1, ..., n\}$ και $\xi \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$\xi_\alpha \Xi_{\alpha i \beta j}\, \xi_\beta = 0. \tag{4.34}$$

Εναλλάσσοντας στην (4.34) i και j και χρησιμοποιώντας ότι $\Xi_{\alpha i \beta j} = \Xi_{\beta j \alpha i}$, έχουμε

$$\xi_\alpha \Xi_{\beta i \alpha j}\, \xi_\beta \; = \; 0. \tag{4.35}$$

Από τις (4.34), (4.35), για όλα τα i, j έχουμε

$$\xi_\alpha \left[\frac{1}{2} \big(\Xi_{\alpha i \beta j} \; + \; \Xi_{\beta i \alpha j} \big) \right] \xi_\beta \; = \; 0. \tag{4.36}$$

Αφού $\frac{1}{2} \big(\Xi_{\alpha i \beta j} \; + \; \Xi_{\beta i \alpha j} \big) e_\alpha \otimes e_\beta \in \mathbb{S}(N)$, λαμβάνουμε την (4.30). $\square$

Προφανώς, ο $\mathbb{S}(N, n)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{S}(N \times n)$ και μπορεί να εφορδιαστρί και με τις 2 ανισότητες "$\leq$" και "$\leq_\otimes$". Η "$\leq$" είναι ισχυρότερη της "$\leq_\otimes$", αφού

$$\Xi \; \geq \; 0 \text{ in } \mathbb{S}(N, n) \quad \Longrightarrow \quad \Xi \; \geq_\otimes 0 \text{ in } \mathbb{S}(N, n). \tag{4.37}$$

Το ακόλουθο παράδειγμα επίβεβαιώνει ότι η θετικότητα τάξης-1 είναι γνήσια αασθενέστερη.

Παράδειγμα 4.4 *Υπάρχει τανυστής θετικός τάξης-1* $\Xi \in \mathbb{S}(2,2)$ *μη-θετικός: έστω* $A > 0$, $m \geq 2$, $k \geq m$ *και ορίζουμε* Ξ *θέτοντας* $\Xi_{1111} := mA$, $\Xi_{2222} := mA$, $\Xi_{1122} = \Xi_{2112} = \Xi_{2211} = \Xi_{1221} := -A$, $\Xi_{ijkl} := 0$, *αλλιώς. Επιλέγουμε* $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *θέτοντας* $P_{11} = P_{22} := 1$, $P_{12} = P_{21} := k$. *Αν* ξ, $\eta \in \mathbb{R}^2$ *είναι αυθαίρετα και* $*$ *δηλώνει στοιχεία που αφανίζονται, έχουμε*

$$
\begin{aligned}
\Xi : (\xi \otimes \eta) \otimes (\xi \otimes \eta) \ =& \\
& \begin{bmatrix} mA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mA \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \xi_1\eta_1\xi_1\eta_1 & * & * & * \\ * & \xi_1\eta_1\xi_2\eta_2 & \xi_1\eta_2\xi_2\eta_1 & * \\ * & \xi_2\eta_1\xi_1\eta_2 & \xi_2\eta_2\xi_1\eta_1 & * \\ * & * & * & \xi_2\eta_2\xi_2\eta_2 \end{bmatrix} \\
&= mA\big[(\xi_1\eta_1)^2 \ + \ (\xi_2\eta_2)^2\big] \ - \ 4A(\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2) \qquad (4.38) \\
&\geq 2A(\xi_1\eta_1 \ - \ \xi_2\eta_2)^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

ενώ,

$$
\begin{aligned}
\Xi : P \otimes P \ &= \begin{bmatrix} mA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mA \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & k & k & k^2 \\ k & 1 & k^2 & k \\ k & k^2 & 1 & k \\ k^2 & k & k & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2A\big[m \ - \ (1+k^2)\big] \qquad (4.39) \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Πρόταση 4.5 (Κατευθυνόμενες Μερικές Διατάξεις) *(i) Έστω* $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ *και* $v, w \in \mathbb{R}^N$. *Τότε*

$$
\begin{aligned}
\xi \vee v \leq 0 \ \ in\ \mathbb{S}(N) \quad &\Longleftrightarrow \quad v \ = \ (\xi^\top v)\xi, \ \ \xi^\top v \ \leq \ 0 \qquad (4.40) \\
&\Longleftrightarrow \quad v \ = \ -|v|\xi.
\end{aligned}
$$

(ii) Έστω $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ *και* $P \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$. *Τότε,*

$$
\begin{aligned}
\xi \vee P \leq 0 \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}(N) \quad &\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad \xi \vee (Pw) \leq 0 \ in\ \mathbb{S}(N), \ w \in \mathbb{R}^n, \qquad (4.41) \\
&\Longleftrightarrow \quad P \ = \ \xi \otimes (\xi^\top P), \ \ \xi^\top (P(\,.\,)) \leq 0.
\end{aligned}
$$

(iii) Έστω $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ *και* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$. *Τότε,*

$$
\begin{aligned}
\xi \vee \mathbf{X} \leq 0 \ \ in\ \mathbb{S}(N\times n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{X} \ = \ \xi \otimes (\xi^\top \mathbf{X}), \ \ \xi^\top \mathbf{X} \leq 0 \ \ in\ \mathbb{S}(n), \qquad (4.42) \\
&\Longleftrightarrow \quad \xi \vee \mathbf{X} \leq_\otimes 0 \ \ in\ \mathbb{S}(N,n).
\end{aligned}
$$

Ειδικότερα, οι διατάξεις $\leq$ και $\leq_\otimes$ συμπίπτουν στον χώρο

$$\mathbb{R}^N \vee \big(\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)\big) \ := \ \Big\{\eta \vee \mathbf{X} \ \Big| \ \eta \in \mathbb{R}^N, \ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)\Big\} \tag{4.43}$$

που είναι υπόχωρος του (4.29).

Απόδειξη του 4.5. (i) Από το 4.1, $\xi \vee v \leq 0$ στον $\mathbb{S}(N)$ ανν $\max \sigma(\xi \vee v) \leq 0$, άρα ανν $\frac{1}{2}(|v| + \xi^\top v) = 0$, δηλ. $v = -|v|\xi$. Το τελευταίο ισοδυναμεί με $v = (\xi^\top v)\xi$ ενώ $\xi^\top v \leq 0$.
(ii) Εφαρμόστε το (i) στο $v := \mathrm{P}w$ και παρατηρείστε ότι $\mathrm{P}w = \big(\xi^\top(\mathrm{P}w)\big)\xi = \big(\xi \otimes (\xi^\top \mathrm{P})\big)w$.
(iii) Η συνεπαγωγή $\xi \vee \mathbf{X} \leq 0 \Longrightarrow \xi \vee \mathbf{X} \leq_\otimes 0$ είναι προφανής. Αντίστροφα, έστω $\xi \vee \mathbf{X} \leq_\otimes 0$ και έστω $\eta \in \mathbb{R}^N$ and $w \in \mathbb{R}^n$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \ &\geq \ (\xi \vee \mathbf{X}) : (\eta \otimes w) \otimes (\eta \otimes w) \\ &= \ \frac{1}{2}\Big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta ij} \ + \ \xi_\beta \mathbf{X}_{\alpha ij}\Big)\eta_\alpha w_i \eta_\beta w_j \\ &= \ \frac{1}{2}\left[\big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta ij} w_i w_j\big) \ + \ \big(\xi_\beta \mathbf{X}_{\alpha ij} w_i w_j\big)\right]\eta_\alpha \eta_\beta \\ &= \ (\xi \vee \mathbf{X} : w \otimes w) : \eta \otimes \eta. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Από την (4.44), παίρνουμε $\xi \vee (\mathbf{X} : w \otimes w) \leq 0$ στον $\mathbb{S}(N)$. Άρα, από την (i) έχουμε

$$\mathbf{X} : w \otimes w = [\xi^\top(\mathbf{X} : w \otimes w)]\xi \tag{4.45}$$

και $\xi^\top(\mathbf{X} : w \otimes w) \leq 0$. Οι ταυτότητες

$$\xi^\top(\mathbf{X} : w \otimes w) \ = \ (\xi^\top \mathbf{X}) : w \otimes w, \tag{4.46}$$

$$\big(\mathbf{X} \ - \ \xi \otimes (\xi^\top \mathbf{X})\big) : w \otimes w \ = \ 0, \tag{4.47}$$

συνεπάγονται την ζητούμενη διάσπαση. Τέλος, υποθέτωντας ότι $\mathbf{X} = \xi \otimes (\xi^\top \mathbf{X})$ και $\xi^\top \mathbf{X} \leq 0$, αν $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{N \times n}$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\xi \vee \mathbf{X}) : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \ &= \ \big(\xi \vee \xi \otimes (\xi^\top \mathbf{X})\big) : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \\ &= \ \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \mathbf{X}_{\gamma ij} \mathrm{P}_{\alpha i} \mathrm{P}_{\beta j} \\ &= \ (\xi_\gamma \mathbf{X}_{\gamma ij})(\xi_\alpha \mathrm{P}_{\alpha i})(\xi_\beta \mathrm{P}_{\beta j}) \\ &= \ (\xi^\top \mathbf{X}) : (\xi^\top \mathrm{P}) \otimes (\xi^\top \mathrm{P}) \\ &\leq \ 0, \end{aligned} \tag{4.48}$$

αφού $\xi^\top \mathbf{X} \leq 0$ στον $\mathbb{S}(n)$. Άρα, $\xi \vee \mathbf{X} \leq 0$. $\square$

4.2 ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΔΕ

Εδώ εισάγουμε μια θεωρία μη-διαφορισίμων λύσεων που εφαρμόζεται σε μη-γραμμικά συστήματα της μορφής

$$F\big(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\big) \;=\; 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.49}$$

όπου το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ και

$$F \quad : \quad \Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)) \longrightarrow \mathbb{R}^N. \tag{4.50}$$

Τα ορίσματα της F θα είναι $F = F\big(x, \eta, \mathrm{P}, \mathbf{X}\big)$. Οι μόνες υποθέσεις για την F θα είναι συνέχεια και μια κατάλληλη έννοια ελλειπτικότητας, απαραίτητη για την συμβιβαστότητα "ασθενών" και κλασικών λύσεων. Η παρούσα έννοια λύσης επιτρέπει να ερμηνεύσουμε απλά συνεχείς συναρτήσεις σαν λύσεις πλήρως μη-γραμμικών συστημάτων σαν το (4.49).

Ορισμός 4.6 (Jet Επαφής) *Έστω $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{O}$, $u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.*
*Το ξ-*Jet Επαφής 1ης τάξης της *u στο x είναι το σύνολο γενικευμένων σημειακών παραγώγων*

$$\begin{aligned} J^{1,\xi}u(x) \;:=\; \Big\{ \; P \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n \;\Big|\; & \\ & \xi \vee \Big[u(z) - u(x) - P(z-x)\Big] \leq o(|z-x|) \\ & \text{στον } \mathbb{S}(N), \;\; \text{για } \mathcal{O} \ni z \to x \; \Big\}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

*Το ξ-*Jet Επαφής 2ης τάξης της *u στο x είναι το σύνολο γενικευμένων σημειακών παραγώγων*

$$\begin{aligned} J^{2,\xi}u(x) \;:=\; \Bigg\{ \; (P, \mathbf{X}) \in (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)) \;\Bigg| & \\ \xi \vee \Big[u(z) - u(x) - P(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x)\Big] \leq o(|z-x|^2) & \\ \text{στον } \mathbb{S}(N), \;\; \text{για } \mathcal{O} \ni z \to x \; \Bigg\}. & \end{aligned} \tag{4.52}$$

Το νόημα του "$o(1)$" στις (4.51), (4.52) είναι ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $T : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}(N)$ ώστε $|T(z)| \to 0$ για $\mathcal{O} \ni z \to x$. Το νόημα των υπολοίπων συμβόλων δίνεται από τις (4.9)-(4.19). Αν $x \in \mathcal{O}$ και $\mathcal{O}$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$, τότε το "$\mathcal{O} \ni$" που σημαίνει "σύγκλιση στο $\mathcal{O}$" είναι περιττό.

Στην βαθμωτή περίπτωση για $N = 1$, έχουμε $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$ και τα $J^{1,\xi}$, $J^{2,\xi}$ ανάγονται στα $J^{1,\pm 1} \equiv J^{1,\pm}$ and $J^{2,\pm 1} \equiv J^{2,\pm}$. Συνεπώς, τα Jet επαφής ανάγονται στα βαθμωτά ημι-jets της θεωριάς των Λύσεων Ιξώδους [CIL]: πράγματι, $(\pm 1) \vee a = (\pm 1) \otimes a = \pm a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ αφού $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$, ενώ οι ανισότητες (4.51) και (4.52) ανάγονται στις "$\leq$" στο $\mathbb{S}(1) = \mathbb{R}$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας ": $(\xi \otimes \xi)$" στην (4.51) και στην (4.52) εξάγουμε ότι η "βαθμωτή" ξ-προβολή $\xi^\top u$ της u κατά μήκος του $\mathrm{span}[\xi] \subseteq \mathbb{R}^N$ είναι υπό-παραγωγίσιμη στο $z = x$ και

$$\xi^\top \mathrm{P} \;\in\; J^{1,\pm}(\xi^\top u)(x)\,, \qquad (\xi^\top \mathrm{P}, \xi^\top \mathbf{X}) \;\in\; J^{2,\pm}(\xi^\top u)(x). \tag{4.53}$$

Ορισμός 4.7 (Λύσεις Επαφής Συστημάτων ΜΔΕ 1ης τάξης) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και*

$$F \in C^0\big(\Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n)\big)^N. \tag{4.54}$$

Τότε, η συνεχής $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι Λύση Επαφής του συστήματος ΜΔΕ 1ης τάξης

$$F\big(x, u(x), Du(x)\big) \;=\; 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.55}$$

όταν

$$P \in J^{1,\xi}u(x) \quad\Longrightarrow\quad \xi^\top F\big(x, u(x), P\big) \;\geq\; 0, \tag{4.56}$$

για όλα τα $x \in \Omega$ και όλες τις διευθύνσεις $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Ορισμός 4.8 (Λύσεις Επαφής Συστημάτων ΜΔΕ 2ης τάξης) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και*

$$F \in C^0\big(\Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n))\big)^N. \tag{4.57}$$

Τότε, η συνεχής $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι Λύση Επαφής του συστήματος ΜΔΕ 2ης τάξης

$$F\big(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\big) \;=\; 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.58}$$

όταν

$$(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x) \quad\Longrightarrow\quad \xi^\top F\big(x, u(x), P, \mathbf{X}\big) \;\geq\; 0, \tag{4.59}$$

για όλα τα $x \in \Omega$ και όλες τις διευθύνσεις $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Αν $N=1$, οι (4.56), (4.59) ανάγονται στις

$$p\in J^{1,+}u(x) \implies F\big(x,u(x),p\big) \geq 0, \tag{4.60}$$
$$p\in J^{1,-}u(x) \implies F\big(x,u(x),p\big) \leq 0, \tag{4.61}$$

και στις

$$(p,X)\in J^{2,+}u(x) \implies F\big(x,u(x),p,X\big) \geq 0, \tag{4.62}$$
$$(p,X)\in J^{2,-}u(x) \implies F\big(x,u(x),p,X\big) \leq 0. \tag{4.63}$$

Συνεπώς, οι Λύσεις Επαφής ανάγονται για $N=1$ στις Λύσεις Ιξώδους.

Τα νέα ανικείμενα $J^{1,\xi}$, $J^{2,\xi}$ μελετούνται διεξοδικά αργότερα στα κεφάλαια 4.4 και 4.6. Τώρα εξετάζουμε ένα παράδειγμα για να καταδείξουμε τον τρόπο εργασίας.

Παράδειγμα 4.9 (Δες [CIL]) *Έστω $u:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^N$ τέτοια ώστε*

$$u(z) := -Az\chi_{(-\infty,0]}(z) + \left(Bz+\frac{C}{2}z^2\right)\chi_{(0,+\infty)}(z), \tag{4.64}$$

με $A,B,C\in\mathbb{R}^N$, $A+B\neq 0$. Προφανώς, $u\in C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap C^{0,1}(\mathbb{R})^N$. Τα Jet επαφής της u στο μηδέν είναι

$$J^{1,\xi}u(0) = \begin{cases} \emptyset, & \xi\neq\frac{A+B}{|A+B|}, \\ \left\{\frac{B-A}{2}+t\frac{B+A}{2} \ : \ t\in[-1,+1]\right\}, & \xi=\frac{A+B}{|A+B|}, \end{cases} \tag{4.65}$$

και

$$J^{2,\xi}u(0) = \begin{cases} \emptyset, & \xi\neq\frac{A+B}{|A+B|}, \\ \left\{\left(\frac{B-A}{2}+t\frac{B+A}{2},\mathbf{X}\right) \ : \ (t,\mathbf{X})\in S\right\}, & \xi=\frac{A+B}{|A+B|}, \end{cases} \tag{4.66}$$

όπου

$$\begin{aligned} S := &\Big((-1,+1)\times\mathbb{R}^N\Big)\cup\Big(\{-1\}\times\{C-s(A+B):s\geq 0\}\Big) \\ &\cup\Big(\{+1\}\times\{-s(A+B):s\geq 0\}\Big). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Αποδεικνύουμε την (4.65). Αν $t\in[-1,+1]$ είναι σταθερό και $P=\frac{B-A}{2}+$

$t\frac{B+A}{2}$, *εφαρμόζοντας ότι* $1 = \chi_{(-\infty,0]} + \chi_{(0,+\infty)}$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} T_1(z) \ :=\ & -(A+B)\vee\Bigg[-Az\chi_{(-\infty,0]}(z) + \left(Bz + \frac{C}{2}\right)\chi_{(0,+\infty)}(z) \\ & - \left(\frac{B-A}{2} + t\frac{B+A}{2}\right) z\Bigg] \\ =\ & -(A+B)\vee\Bigg[\left(-A - \frac{B-A}{2} + t\frac{B+A}{2}\right) z\chi_{(-\infty,0]}(z) \\ & + \ \left(B - \frac{B-A}{2} + t\frac{B+A}{2}\right) z\chi_{(0,+\infty)}(z) \ + \ \frac{C}{2}z^2\chi_{(0,+\infty)}(z) \qquad (4.68) \\ =\ & -(A+B)\otimes(A+B)\frac{|z|}{2}\Big((1-t)\chi_{(-\infty,0]}(z) + (1+t)\chi_{(0,+\infty)}(z)\Big) \\ & - \ (A+B)\vee C\frac{z^2}{2}\chi_{(0,+\infty)}(z) \\ \leq\ & o(|z|), \end{aligned}$$

για $z \to 0$. *Άρα*, $P \in J^{1,-\frac{A+B}{|A+B|}}u(0)$. *Αντίστροφα, αν* $P \in J^{1,\xi}u(0)$, *τότε για* $z = \varepsilon w$ *με* $\varepsilon > 0$ *και* $w \in \mathbb{S}^0 = \{-1,+1\}$, *έχουμε*

$$-\xi\vee\Big[-Aw\chi_{(-\infty,0]}(w) + \left(Bw + \frac{\varepsilon C}{2}\right)\chi_{(0,+\infty)}(w) - Pw\Big] \ \leq\ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (4.69)$$

για $\varepsilon \to 0^+$. *Θέτοντας* $w = \pm 1$, *έχουμε*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi\vee\big[A+P\big] & \leq & o(1), \\ \xi\vee\big[B+\frac{\varepsilon}{2}-P\big] & \leq & o(1), \end{array}\right. \quad (4.70)$$

για $\varepsilon \to 0^+$. *Άρα*,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi\vee\big[A+P\big] & \leq & 0, \\ \xi\vee\big[B-P\big] & \leq & 0. \end{array}\right. \quad (4.71)$$

Από την (4.71) *λαμβάνουμε* $\xi\vee[A+B] \leq 0$ *και από την* *4.5*, *εξάγουμε* $\xi = -\frac{A+B}{|A+B|}$. *Πάλι από την* *4.5* *αλλά και την* (4.71), *έχουμε*

$$\left\{\begin{array}{lcl} A+P & = & [\xi^\top(A+P)]\xi, \quad \xi^\top(A+P) \ \leq\ 0, \\ B-P & = & [\xi^\top(B-P)]\xi, \quad \xi^\top(B-P) \ \leq\ 0. \end{array}\right. \quad (4.72)$$

Από την (4.72), *έχουμε*

$$P \ =\ \frac{B-A}{2} \ +\ \left[\xi^\top\left(P - \frac{B-A}{2}\right)\right]\xi \quad (4.73)$$

και επιπλέον $\xi^\top B \leq \xi^\top P \leq -\xi^\top A$, *δηλ.*

$$\xi^\top \left(B - \frac{B-A}{2}\right) \leq \xi^\top \left(P - \frac{B-A}{2}\right) \leq \xi^\top \left(-A - \frac{B-A}{2}\right). \tag{4.74}$$

Αφού $\xi^\top(A+B) = |A+B|$, *ξαναγράφουμε την* (4.74) *ως*

$$-\frac{|A+B|}{2} \leq \xi^\top \left(P - \frac{B-A}{2}\right) \leq +\frac{|A+B|}{2}. \tag{4.75}$$

Από τις (4.73) *και* (4.75), *η* (4.65) *έπεται.*

Τώρα αποδεικνύουμε την (4.66). *Έστω* $(P, \mathbf{X}) \in J^{1,\xi}u(0) \times \mathbb{R}^N$. *Τότε από την* (4.68), $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(0)$ *ανν* $\xi = -\frac{A+B}{|A+B|}$ *και*

$$\begin{aligned} T_2(z) \;:=\; & -(A+B)\otimes(A+B)\frac{|z|}{2}\Big((1-t)\chi_{(-\infty,0]}(z) + (1+t)\chi_{(0,+\infty)}(z)\Big) \\ & +\; (A+B)\vee \mathbf{X}\frac{z^2}{2} \\ \leq\; & o(|z|^2), \end{aligned} \tag{4.76}$$

για $z \to 0$. *Έστω* $\eta \in \mathbb{R}^N$ *σταθερό. Αν* $\eta \perp A+B$, *τότε* $T_2(z) : \eta\otimes\eta = 0$. *Αν* $\eta \not\perp A+B$, *τότε η* (4.76) *δίνει*

$$\begin{aligned} (A+B)\vee\big[\mathbf{X} - C\chi_{(0,\infty)}(z)\big] : \eta\otimes\eta \;\leq\; & o(1) \\ +\; & \frac{1}{|z|}[\eta^\top(A+B)^2\Big((1-t)\chi_{(-\infty,0]}(z) + (1+t)\chi_{(0,+\infty)}(z)\Big), \end{aligned} \tag{4.77}$$

για $z \to 0$. *Από την* (4.77)*εξάγουμε ότι αν* $-1 < t < 1$ *δεν υπάρχει άνω γράγμα για το* $(A+B)\vee\mathbf{X} : \eta\otimes\eta$, *καθώς* $z \to 0$; *άρα,* $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(0)$ *για κάθε* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$. *Αν* $t = -1$, *θέτουμε* $z = \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$, $w \in \{-1, +1\}$ *στην* (4.77) *για να πάρουμε*

$$\left\{ \begin{aligned} & (A+B)\vee[\mathbf{X} - C] : \eta\otimes\eta \;\leq\; o(1), \\ & (A+B)\vee\mathbf{X} : \eta\otimes\eta \;\leq\; o(1) \;+\; \frac{1}{\varepsilon}[\eta^\top(A+B)^2, \end{aligned} \right. \tag{4.78}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. *Άρα,* (4.78) *και η* 4.5 *δίνει*

$$\mathbf{X} \;=\; C - s(A+B), \quad s \geq 0. \tag{4.79}$$

Αντίστροφα, αν $\mathbf{X}$ *είναι όπως στην* (4.79)*, τότε για* $\eta \not\perp A+B$*, έχουμε*

$$
\begin{aligned}
(A+B)\vee\big[\mathbf{X}-C\chi_{(0,\infty)}(z)\big]:\eta\otimes\eta \;&=\; \Big(-s(A+B)\otimes(A+B)\,+\\
&\quad +\;(A+B)\vee C[1-\chi_{(0,+\infty)}(z)]\Big):\eta\otimes\eta\\
&\le\; \big[(A+B)\vee C\chi_{(-\infty,0]}(z)\big]:\eta\otimes\eta \qquad (4.80)\\
&\le\; [\eta^\top(A+B)]^2\frac{|C||\eta|}{|\eta^\top(A+B)|}\chi_{(-\infty,0]}(z)\\
&\le\; [\eta^\top(A+B)]^2\frac{2}{|z|}\chi_{(-\infty,0]}(z),
\end{aligned}
$$

για $z\to 0$*. Αλλά η* (4.80) *δίνει* (4.77)*. Ο υπολογισμός για* $t=+1$ *είναι παρόμοιος. Άρα, η* (4.66) *έπεται.*

4.3 ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Εδώ εισάγουμε την κατάλληλη έννοια ελλειπτικότητας που εγγυάται την συμβιβαστότητα των Λύσεων Επαφής και των Κλασικών Λύσεων.

Ορισμός 4.10 (Εκφυλισμένη Ελλειπτικότητα) *Έστω* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $u\in C^2(\Omega)^N$*. Το σύστημα των ΜΔΕ*

$$F\big(x,u(x),Du(x),D^2u(x)\big)\;=\;0,\quad x\in\Omega, \qquad (4.81)$$

λέγεται Εκφυλισμένα Ελλειπτικό *αν για όλα τα* $(x,\eta,P)\in\Omega\times\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^n)$ *η απεικόνιση* $F(x,\eta,P,\,.\,):\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{S}(n)\longrightarrow\mathbb{R}^N$ *είναι μονότονη με την έννοια ότι*

$$\Big[F\big(x,\eta,P,\mathbf{X}\big)\;-\;F\big(x,\eta,P,\mathbf{Y}\big)\Big]^\top(\mathbf{X}\;-\mathbf{Y})\;\ge\;0, \qquad (4.82)$$

στον $\mathbb{S}(n)$*, για όλα τα* $\mathbf{X},\,\mathbf{Y}\in\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{S}(n)$*.*

Η ανισότητα (4.82) σημαίνει

$$\Big[F\big(x,\eta,\mathrm{P},\mathbf{X}\big)\;-\;F\big(x,\eta,\mathrm{P},\mathbf{Y}\big)\Big]^\top\big[(\mathbf{X}\;-\mathbf{Y}):w\otimes w\big]\;\ge\;0, \qquad (4.83)$$

για κάθε $w\in\mathbb{R}^n$. Περιορίζοντας την(4.82) στις βαθμωτές περίπτωσεις $N=1, n\ge 1$ ή $n=1, N\ge 1$, βρίσκουμε γνωστές έννοιες ελλειπτικότητας όπου η (4.82) ενοποιεί στην γενική περίπτωση $n,N\ge 1$. Αν $N=1, n\ge 1$ τότε η (4.82) ανάγεται στην γνώστη έννοια ελλειπτικότητας των Λύσεων Ιξώδους ([CIL])

$$\mathbf{X} \leq \mathbf{Y} \implies F\big(x,\eta,\mathrm{P},\mathbf{X}\big) \ \leq \ F\big(x,\eta,\mathrm{P},\mathbf{Y}\big) \tag{4.84}$$

(ως προς μια αλλαγή προσήμου). Αν $n=1, N \geq 1$ τότε η (4.82) ανάγεται στην καθιερωμένη μονοτονικότητα απεικονίσεων $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$:

$$\Big[F\big(x,\eta,\mathrm{P},\mathbf{X}\big) \ - \ F\big(x,\eta,\mathrm{P},\mathbf{Y}\big)\Big]^\top (\mathbf{X} \ - \mathbf{Y}) \ \geq \ 0, \tag{4.85}$$

για κάθε $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N$. Τώρα εξάγουμε μια αναδιατύπωση του Ορισμού 4.10 που θα επιτρέψει την κατασκευή μη-τετριμμένων διανυσματικών παραδειγμάτων.

Λήμμα 4.11 *Έστω $G : \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Για όλα τα $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$, έχουμε

$$\big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big]^\top (\mathbf{X} \ - \mathbf{Y}) \ \geq \ 0, \tag{4.86}$$

στον $\mathbb{S}(n)$.
(ii) Για όλες τις κατευθύνσεις $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και όλα τα $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$, έχουμε

$$\xi \vee (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y}) \ \leq 0 \ \ \textit{in} \ \ \mathbb{S}(N \times n) \quad \implies \quad \xi^\top \big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big] \ \leq \ 0. \tag{4.87}$$

Απόδειξη του 4.11. Από την Πρόταση 4.5, η (4.87) είναι ισοδύναμη με

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y} \ = \ \xi \otimes \xi^\top (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y}), \\ \xi^\top (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y}) \leq 0, \ \ \text{in} \ \ \mathbb{S}(n) \end{array}\right\} \implies \xi^\top \big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big] \leq 0. \tag{4.88}$$

Υποθέτωντας την (4.88), έχουμε

$$\xi^\top (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y}) \leq 0, \ \ \text{in} \ \ \mathbb{S}(n), \tag{4.89}$$

$$\xi^\top \big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big] \leq 0, \tag{4.90}$$

που δίνει

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \Big(\xi^\top \big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big]\Big) \Big(\xi^\top (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y})\Big) \\ &= \ \xi^\top \big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big]^\top \Big[\xi \otimes \xi^\top (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y})\Big]. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Άρα, παίρνουμε την (4.87). Αντίστροφα, υποθέτωντας την (4.87) και ότι $\xi \vee (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \leq 0$ στον $\mathbb{S}(N \times n)$, από την Πρόταση 4.5 έχουμε $\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \xi \otimes \xi^\top (\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ και άρα

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big]^\top (\mathbf{X} \ - \mathbf{Y}) \\ &= \ \big(\big[G(\mathbf{X}) \ - \ G(\mathbf{Y})\big]^\top \xi\big) \big(\xi^\top (\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y})\big), \end{aligned} \tag{4.92}$$

στον $\mathbb{S}(n)$. Αφού $\xi^\top(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \leq 0$, καταλήγουμε $\xi^\top G(\mathbf{X}) \leq \xi^\top G(\mathbf{Y})$. $\square$

Μια ειδική σημαντική κλάση συστημάτων ΜΔΕ στα οποία η θεωρία εφαρμόζεται είναι τα σχεδόν-γραμμικά συστήματα 2ης τάξης σε μορφή μη-απόκλισης. Έστω $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ και

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}(x,\eta,\mathrm{P}) \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times n} \otimes \mathbb{R}^{N\times n}, \qquad (4.93)\\ B &= B(x,\eta,\mathrm{P}) \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^N. \qquad (4.94) \end{aligned}$$

Η γενική μορφή αυτών είναι

$$\mathbf{A}_{\alpha i\beta j}\big(x,u(x),Du(x)\big)D^2_{ij}u_\beta(x) \ + \ B_\alpha\big(x,u(x),Du(x)\big) \ = \ 0. \qquad (4.95)$$

Εισάγοντας τον τελεστή *συστολής*(δες (4.16))

$$\big(\mathbb{R}^{N\times n}\otimes\mathbb{R}^{N\times n}\big)\times\big(\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{S}(n)\big) \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \Xi : \mathbf{X} \ := \ (\Xi_{\alpha i\beta j}\mathbf{X}_{\beta ij})e_\alpha, \qquad (4.96)$$

το (4.95) συμπτύσεται στο

$$\mathbf{A}\big(x,u,Du\big) : D^2u \ + \ B\big(x,u,Du\big) \ = \ 0. \qquad (4.97)$$

Τώρα δείχνουμε ότι στην σχεδόν-γραμμική περίπτωση του (4.97) η εκφυλισμένη ελλειπτικότητα ισοδυναμεί με θετικότητα τάξης-1 για τον $\mathbf{A}$.

Λήμμα 4.12 *Έστω ότι $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times n}\otimes\mathbb{R}^{N\times n}$. Τότε η γραμμική απεικόνιση $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} : \mathbf{A}$ από τον $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$ στον $\mathbb{R}^N$ είναι μονότονη ανν $\mathbf{A} \geq_\otimes 0$.*

Απόδειξη του 4.12. Η μονοτονικότητα του $\mathbf{A}$ δίνει $\big[\mathbf{A}:\mathbf{X}\big]^\top\mathbf{X} \geq 0$ στον $\mathbb{S}(n)$. Έστω $\eta \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}^n$ και θέτουμε $\mathbf{X} := \eta\otimes w\otimes w$. Τότε,

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \big[\mathbf{A} : (\eta\otimes w\otimes w)^\top(\eta\otimes w\otimes w)\big] : w\otimes w \\ &= \mathbf{A}_{\alpha i\beta j} : \eta_\beta w_i w_j \, \eta_\alpha w_k w_l \, w_k w_l \qquad (4.98)\\ &= \mathbf{A}_{\alpha i\beta j} : (\eta_\alpha w_i)(\eta_\beta w_j)(w_k w_k)^2 \\ &= |w|^4\, \mathbf{A} : (\eta\otimes w)\otimes(\eta\otimes w). \end{aligned}$$

Άρα, $\mathbf{A} \geq_\otimes 0$. Αντίστροφα, αν $\mathbf{A} : (\eta\otimes w)\otimes(\eta\otimes w)$ για κάθε $\eta\in\mathbb{R}^N$ και όλα τα $w\in\mathbb{R}^n$, υποθέτουμε ότι $\xi\vee\mathbf{X} \geq 0$ στον $\mathbb{S}(N\times n)$ για κάποιο $\xi\in\mathbb{R}^N$. Τότε, από την Πρόταση 4.5 έχουμε $\mathbf{X} = \xi\otimes X$ όπου $X := \xi^\top\mathbf{X} \geq 0$ στον $\mathbb{S}(n)$. Αν $X^{1/2}$ έιναι η ρίζα του X, έχουμε $X_{ij} = X^{1/2}_{ik}X^{1/2}_{jk}$. Άρα, ο X είναι άθροισμα θετικών πινάκων $w^{(k)} \otimes w^{(k)}$ με $w^{(k)} := X^{1/2}_{ik} e_i \in \mathbb{R}^n$. Άρα,

$$\begin{aligned} \xi^\top \big(\mathbf{A} : \mathbf{X}\big) \;&= \xi_\alpha \mathbf{A}_{\alpha i \beta j} \xi_\beta X_{ij} \\ &= \xi_\alpha \mathbf{A}_{\alpha i \beta j}\, \xi_\alpha \xi_\beta\, w^{(k)}_i w^{(k)}_j \\ &= \mathbf{A}_{\alpha i \beta j} (\xi_\alpha w^{(k)}_i)(\xi_\beta \otimes w^{(k)}_j) \\ &= \mathbf{A} : (\xi \otimes w^{(k)}) \otimes (\xi \otimes w^{(k)}) \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{4.99}$$

λόγω της θετικότητας τάξης-1. Εν όψει του Λήματος 4.11, η $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} : \mathbf{X}$ είναι μονότονη. $\square$

Παράδειγμα 4.13 *Επιλέγοντας $A = 1$ και $m = 2$ στον τανυστή Ξ του παραδείγματος 4.4, το 2×2 σύστημα ΜΔΕ*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} +D^2_{xx} u \;-\; D^2_{xy} v &=& f(x, y; u, v; Du, Dv) \\ -D^2_{yx} u \;+\; D^2_{yy} v &=& g(x, y; u, v; Du, Dv) \end{array} \right. \tag{4.100}$$

είναι εκφυλισμένα ελλειπτικό.

Παράδειγμα 4.14 (Σύστημα Aronsson, ∞-Λαπλασιανή) *Θεωρούμε $H \in C^1\big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n)\big)$. Συμβολίζουμε τα ορίσματα της H με (x, η, P) και οι δείκτες H_P, H_η, H_x συμβολίζουν παραγώγους. Το σύστημα ΜΔΕ Aronsson ορίζεται για $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ στον $C^2(\mathbb{R}^n)^N$ ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[u] \;=\; & \Big(H_P(\_, u, Du) \otimes H_P(\_, u, Du)\Big) : D^2 u \;+ \\ & +\; H_P(\_, u, Du)\Big(H_\eta(\_, u, Du) \;+\; H_x(\_, u, Du)\Big) \;=\; 0 \end{aligned} \tag{4.101}$$

και είναι εκφυλισμένο ελλειπτικό. Η (4.101) λέει

$$\begin{aligned} &\Big(H_{P_{\alpha i}}(\_, u, Du)\, H_{P_{\beta j}}(\_, u, Du)\Big)\, D^2_{ij} u_\beta \\ &\quad + \Big(\; H_{P_{\alpha i}}(\_, u, Du)\, H_{\eta_\beta}(\_, u, Du) D_i u_\beta \\ &\qquad +\; H_{P_{\alpha i}}(\_, u, Du)\, H_{x_i}(\_, u, Du)\Big) \;=\; 0. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Το πιο ενδιαφέρον παράδειγμα προκύπτει για $H(x, \eta, P) := \frac{1}{2} P : P = \frac{1}{2}|P|^2$ και οδηγεί στην ∞-Λαπλασιανή

$$\Delta_\infty u \;:=\; Du \otimes Du : D^2 u \;=\; 0 \tag{4.103}$$

που γράφεται ως

$$D_i u_\alpha\, D_j u_\beta\, D^2_{ij} u_\beta \;=\; 0. \tag{4.104}$$

Τώρα θα κατασκευάσουμε κλάσεις πλήρων μη-γραμμικών συστημάτων ΜΔΕ που ικανοποιούν τον Ορισμό 4.10. Έστω $\mathbf{X} = e_\alpha \otimes X_\alpha \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$. Αν συμβολίσουμε το φάσμα κάθε X_α με $\sigma(X_\alpha) = \{\lambda_1(X_\alpha), ..., \lambda_n(X_\alpha)\}$ και διατάξουμε τις ιδιοτιμές ως $\lambda_p(X_\alpha) \leq \lambda_{p+1}(X_\alpha)$, θα συμβολίζουμε το διάνυσμα p-ιδιοτιμών του $\mathbf{X}$ με $\vec{\lambda}_p(\mathbf{X}) := \lambda_p(X_\alpha)e_\alpha$. Τότε, έχουμε

Λήμμα 4.15 *Για κάθε $p = 1, 2, ..., n$, το διάνυσμα p-ιδιοτιμών*

$$\vec{\lambda}_p \ : \ \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{X} \mapsto \vec{\lambda}_p(\mathbf{X}) = \lambda_p(X_\alpha)e_\alpha \tag{4.105}$$

είναι μονότονο:

$$\big[\vec{\lambda}_p(\mathbf{X}) - \vec{\lambda}_p(\mathbf{Y})\big]^\top \big(\mathbf{X} - \mathbf{Y}\big) \geq 0, \quad in \ \ \mathbb{S}(n). \tag{4.106}$$

Απόδειξη του 4.15. Έστω $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και υποθέτουμε ότι $\xi \vee \big(\mathbf{X} - \mathbf{Y}\big) \leq 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ \xi \vee \big(\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y}\big) : (e_{\hat\alpha} \otimes w) \otimes (e_{\hat\alpha} \otimes w) \\
&= \ \frac{1}{2}\Big[\xi_\alpha\big(\mathbf{X} \ - \ \mathbf{Y}\big)_{\beta ij} \ + \ \xi_\beta\big(\mathbf{X} - \mathbf{Y}\big)_{\alpha ij}\Big]\delta_{\alpha\hat\alpha}w_i\delta_{\beta\hat\alpha}w_j \\
&= \ \xi_{\hat\alpha}\big(\mathbf{X} - \mathbf{Y}\big)_{\hat\alpha ij}w_iw_j \\
&= \ \xi_{\hat\alpha}(X - Y)_{\hat\alpha} : w \otimes w,
\end{aligned} \tag{4.107}$$

για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$ και σταθερό ελεύθερο δείκτη $\hat\alpha \in \{1, ..., N\}$. Συνεπώς, λαμβάνουμε $\xi_{\hat\alpha}X_{\hat\alpha} \leq \xi_{\hat\alpha}Y_{\hat\alpha}$ στον $\mathbb{S}(n)$. Αφού η συνάρτηση λ_p-ιδιοτιμών

$$\xi_{\hat\alpha}X_{\hat\alpha} \longmapsto \lambda_p(\xi_{\hat\alpha}X_{\hat\alpha}) \ = \ \xi_{\hat\alpha}\lambda_p(X_{\hat\alpha}) \tag{4.108}$$

είναι μονότονη στον $\mathbb{S}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$, λαμβάνουμε $\xi_{\hat\alpha}\big(\lambda_p(X_{\hat\alpha}) - \lambda_p(Y_{\hat\alpha})\big) \leq 0$, για κάθε σταθερό δείκτη $\hat\alpha \in \{1, ..., N\}$. Αθροίζοντας ως προς $\hat\alpha$, έχουμε $\xi^\top\big(\vec{\lambda}_p(\mathbf{X}) - \vec{\lambda}_p(\mathbf{Y})\big) \leq 0$. Από το Λήμμα 4.12, η (4.106) έπεται. □

Παράδειγμα 4.16 (Πλήρως Μη-Γραμμικά Ελλειπτικά Συστήματα) *Από το Λήμμα 4.15 έπεται ότι η*

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^N \tag{4.109}$$

με $l_j \mapsto G(x, \eta, P; l_1, ..., l_j, ..., l_n) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι μονότονη, και άρα το σύστημα ΜΔΕ

$$G\big(x, u, Du, \vec{\lambda}_1(D^2u), ..., \vec{\lambda}_n(D^2u)\big) \ = \ 0, \tag{4.110}$$

είναι εκφυλισμένα ελλειπτικό. Παρόμοια με το αντίστοιχο παράδειγμα στην εργασία [CIL], μπορούμε να δώσουμε πολυάριθμα αναλυτικά παραδείγματα. Συγκεκριμένα, αν η $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *είναι κυρτή, για*

$$F(x,\eta,P,\mathbf{X}) \ := \ DV\big(\vec{\lambda}_1(\mathbf{X}) + \cdots + \vec{\lambda}_n(\mathbf{X})\big) \ - \ H(x,\eta,P), \qquad (4.111)$$

το σύστημα

$$DV\big(\Delta u\big) \ = \ H(x,u,Du) \qquad (4.112)$$

είναι εκφυλισμένα ελλειπτικό.

4.4 ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ JET ΕΠΑΦΗΣ

Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι ότι οι Λύσεις Επαφής και οι κλασικές λύσεις είναι πλήρως συμβιβαστές για πλήρως μη-γραμμικά ελλειπτικά συστήματα ΜΔΕ 2ης τάξης τα οποία είναι εκφυλισμένα ελλειπτικά.

Θεώρημα 4.17 (Συμβιβαστότητα) *Έστω* $F \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)))^N$ *με* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό. Αν η* $u \in C^0(\Omega)^N$ *είναι Λύση Επαφής του συστήματος ΜΔΕ*

$$F\big(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\big) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (4.113)$$

τότε η u λύνει το (4.113) σημειακά στα σημεία όπου έχουμε 2 φορές παραγωγισιμότητα. Αντίστροφα, αν το (4.113) είναι εκφυλισμένα ελλειπτικό, δηλ.

$$\Big[F\big(x,\eta,P,\mathbf{X}\big) \ - \ F\big(x,\eta,P,\mathbf{Y}\big)\Big]^\top(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \ \geq \ 0 \qquad (4.114)$$

στον $\mathbb{S}(n)$, *για κάθε* $(x,\eta,P) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{X},\ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$, *τότε 2 φορές παραγωγίσιμες λύσεις του (4.113) είναι Λύσεις Επαφής.*

Η απόδειξη στηρίζεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα που εξετάζει τα J^1, J^2 και συσχετίζει τις ασθενείς σημειακές παραγώγους $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$ με τις κλασικές.

Θεώρημα 4.18 *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό,* $u \in C^0(\Omega)^N$ *και* $x \in \Omega$.
(a) Αν υπάρχει μία κατεύθυνση $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ *ώστε και τα δύο* $J^{1,\pm\xi}u(x)$ *να είναι μη-κενά, τότε η u είναι πραγωγίσιμη στο x και τα Jet* $J^{1,\pm\xi}u(x)$ *είναι μονοσύνολα:*

$$J^{1,\pm\xi}u(x) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad J^{1,\xi}u(x) = J^{1,-\xi}u(x) = \big\{Du(x)\big\}. \qquad (4.115)$$

(b) Αν η u είναι παργωγίσιμη στο x, τότε για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ τα Jet $J^{1,\xi}u(x)$ είναι μη-κενά και

$$J^{1,\xi}u(x) = \big\{Du(x)\big\}. \tag{4.116}$$

(c) Αν η u είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο x, για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ τα Jet $J^{2,\xi}u(x)$ είναι μη-κενά, περιέχουν το $(Du(x), D^2u(x))$ και

$$\begin{aligned} J^{2,\xi}u(x) &= \left\{ (Du(x),\mathbf{X})\Big|\ \mathbf{X}\ :\ \xi \vee \big[D^2u(x)-\mathbf{X}\big] \leq_{\otimes} 0 \ \textit{στο}\ \mathbb{S}(N,n) \right\} \\ &= \left\{ (Du(x),\mathbf{X})\Big|\ \mathbf{X}\ :\ \xi \vee \big[D^2u(x)-\mathbf{X}\big] \leq 0 \ \textit{στο}\ \mathbb{S}(N\times n) \right\} \\ &= \left\{ (Du(x),\mathbf{X})\Big|\ \mathbf{X}\ :\ \xi^\top \big[D^2u(x)-\mathbf{X}\big] \leq 0 \ \textit{στο}\ \mathbb{S}(n) \quad \textit{και} \right. \\ &\qquad\qquad \left. D^2u(x)-\mathbf{X} \ =\ \xi\otimes\xi^\top\big[D^2u(x)-\mathbf{X}\big] \right\}. \end{aligned} \tag{4.117}$$

(d) Αν η u είναι παραγωγίσιμη στο x, όποτε $(Du(x),\mathbf{X}^\pm) \in J^{2,\pm\xi}u(x) \neq \emptyset$, έχουμε $\xi \vee \big[\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big] \leq_{\otimes} 0$ στον $\mathbb{S}(N,n)$, δηλ.

$$\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+ \ =\ \xi\otimes\xi^\top\big[\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big], \quad \xi^\top\big[\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big] \leq 0 \ \ \textit{in}\ \mathbb{S}(n). \tag{4.118}$$

Απόδειξη του 4.18. (a) Έστω $\mathrm{P}^\pm \in J^{1,\pm\xi}u(x) \neq \emptyset$. Τότε, από την (4.51), αν $\eta \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$+\xi \vee \big[u(z)-u(x)-\mathrm{P}^+(z-x)\big] : \eta\otimes\eta \ \leq\ o(|z-x|), \tag{4.119}$$
$$-\xi \vee \big[u(z)-u(x)-\mathrm{P}^-(z-x)\big] : \eta\otimes\eta \ \leq\ o(|z-x|), \tag{4.120}$$

όπου το "$o(1)$" υλοποιείται από το $T(z-x) : \eta\otimes\eta$. Θέτουμε $z := x+\varepsilon w$, όπου $\varepsilon > 0$ με $w \in \mathbb{R}^n$ και προσθέτουμε τις (4.119), (4.120) για να πάρουμε

$$\xi \vee \big[(\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)w\big] : \eta\otimes\eta \ \leq\ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{4.121}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Περνώντας στο όριο στην (4.121) και αντικαθιστώντας το w με $-w$, λαμβάνουμε $\xi \vee \big[(\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)w\big] : \eta\otimes\eta = 0$. Από την Πρόταση 4.5, έχουμε ότι η

$$\xi \vee (\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-) \ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}(N) \tag{4.122}$$

είναι η μηδενική απεικόνιση. Από το Λήμμα 4.1, το μηδέν είναι η μοναδική ιδιοτιμή της $\xi \vee (\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)$, δηλ., $\sigma\big(\xi \vee (\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)\big) = \{0\}$. Άρα,

$$\big|(\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)w\big| \ = \ \pm \xi^\top \big((\mathrm{P}^+ - \mathrm{P}^-)w\big) \ = \ 0, \tag{4.123}$$

για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$. Άρα, $\mathrm{P}^+ = \mathrm{P}^-$. Συμβολίζουμε την κοινή τιμή τους με P. Τότε, από τις (4.119), (4.120) έχουμε

$$\xi \vee \big[u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)\big] : \eta \otimes \eta \ = \ o(|z-x|), \tag{4.124}$$

για $z \to x$. Εφόσον η *αριθμητική ακτίνα* (δες [Lax])

$$\|A\| \ := \ \max_{\eta \in \mathbb{S}^{N-1}} \big|A : \eta \otimes \eta\big| \tag{4.125}$$

είναι νόρμα $\mathbb{S}(N)$ ισοδύναμη με την $|A| = \sqrt{A : A}$ που επάγεται από τον $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N$, η (4.124) δίνει για $z \to x$, ότι

$$\begin{aligned} o(1) \ &= \ \max_{\eta \in \mathbb{S}^{N-1}} \left| \xi \vee \left[\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right] : \eta \otimes \eta \ \right| \\ &= \ \left\| \xi \vee \left[\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right] \right\| \\ &\geq \ \frac{1}{C} \left| \xi \vee \left[\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right] \right|, \end{aligned} \tag{4.126}$$

για κάποιο $C > 0$. Από την (4.12), η (4.126) δίνει

$$\begin{aligned} o(1) \ &\geq \ \frac{1}{C^2} \left| \xi \vee \left[\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right] \right|^2 \\ &= \ \frac{1}{2C^2} \left\{ \left| \frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right|^2 \ + \right. \\ &\qquad \left. + \ \left[\xi^\top \left(\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right) \right]^2 \right\} \\ &\geq \ \frac{1}{2C^2} \left| \frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|} \right|^2, \end{aligned} \tag{4.127}$$

για $z \to x$. Συνεπώς, έχουμε $\mathrm{P} = Du(x)$ και $J^{1,\xi}u(x) = \big\{Du(x)\big\}$.

(b) Αν η u είναι παραγωγίσιμη στο x, εφαρμόζοντας $\xi \vee (\ .\ )$ στο ανάπτυγμα Taylor

$$u(z) - u(x) - Du(x)(z-x) \ = \ o(|z-x|), \tag{4.128}$$

που ισχύει για $z \to x$, βρίσκουμε $\big\{Du(x)\big\} \subseteq J^{1,\xi}u(x)$, για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Αφού $J^{1,\pm\xi}u(x) \neq \emptyset$, εφαρμογή του (a) δίνει $J^{1,\xi}u(x) = \big\{Du(x)\big\}$.

(c) Οι δύο τελευταίες ανισότητες της (4.117) έπονται από την Πρόταση 4.5, αφού ανισότητα στον $\mathbb{S}(N \times n)$, ανισότητα τάξης-1 στον $\mathbb{S}(N, n)$ και διασπάσεις τάξης-1 $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$ με ανισότητα στον $\mathbb{S}(n)$ είναι ισοδύναμες για τανυστές της μορφής $\xi \vee \mathbf{X}$ με $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε την πρώτη. Έστω $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Από την (4.52)

$$\begin{aligned} \xi \vee \big[u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)\big] \leq \ & \frac{1}{2}\xi \vee \big[\mathbf{X} : (z-x)\otimes(z-x)\big] \\ & + o(|z-x|^2), \\ = \ & o(|z-x|), \end{aligned} \tag{4.129}$$

για $z \to x$. Άρα, το (a) δίνει $\mathrm{P} = Du(x)$ όποτε $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$ και η u είναι παραγωγίσιμη. Εφαρμόζοντας $\xi \vee (\ .\ )$ στο ανάπτυγμα Taylor

$$u(z)-u(x)-Du(x)(z-x)-\frac{1}{2}D^2u(x) : (z-x)\otimes(z-x) = o(|z-x|^2), \tag{4.130}$$

που ισχύει για $z \to x$, βρίσκουμε $(Du(x), D^2u(x)) \in J^{2,\xi}u(x)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Άρα, $J^{2,\pm\xi}u(x) \neq \emptyset$ για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Σταθεροποιούμε ένα ξ και επιλέγουμε ζεύγος $\mathbf{X}^{\pm} \in J^{2,\pm\xi}u(x)$. Από την (4.52),

$$-\xi \vee \Big[u(z) - u(x) - Du(x)(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X}^- : (z-x)\otimes(z-x)\Big] \ \leq \ o(|z-x|^2), \tag{4.131}$$

$$+\xi \vee \Big[u(z) - u(x) - Du(x)(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X}^+ : (z-x)\otimes(z-x)\Big] \ \leq \ o(|z-x|^2), \tag{4.132}$$

για $z \to x$, στον $\mathbb{S}(n)$. Θέτουμε $z := x + \varepsilon w$ $\varepsilon > 0$, $w \in \mathbb{R}^n$ και προσθέτουμε τις (4.131), (4.132):

$$\xi \vee \Big[\big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big) : w \otimes w\Big] : \eta \otimes \eta \ \leq \ \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, \tag{4.133}$$

για $\varepsilon \to 0^+$, για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^N$. Περνώντας στο όριο στην (4.133) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & \xi \vee \Big[\big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big) : w \otimes w\Big] : \eta \otimes \eta \\ \leq \ & \frac{1}{2}\xi_\alpha\big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big)_{\beta ij} w_i w_j \eta_\alpha \eta_\beta \ + \ \frac{1}{2}\xi_\beta\big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big)_{\alpha ij} w_i w_j \eta_\alpha \eta_\beta \\ \leq \ & \frac{1}{2}\Big[\xi_\alpha\big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big)_{\beta ij} \ + \ \xi_\beta\big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big)_{\alpha ij}\Big] (\eta_\alpha w_i)(\eta_\beta w_j) \\ = \ & \Big[\xi \vee \big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big)\Big] : (\eta \otimes w) \otimes (\eta \otimes w), \end{aligned} \tag{4.134}$$

για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}^n$. Άρα, από τον Ορισμό 4.2, ο $\xi \vee \big(\mathbf{X}^- - \mathbf{X}^+\big)$ είναι αρνητικός τάξης-1 στον $\mathbb{S}(N,n)$. Αφού το $(Du(x), D^2u(x))$ ανήκει στο $J^{2,\xi}u(x)$, επιλέγοντας $\mathbf{X}^- := D^2u(x)$, $\mathbf{X}^+ := \mathbf{X}$, έχουμε

$$J^{2,\xi}u(x) \ \subseteq \ \left\{ (Du(x), \mathbf{X}) \Big| \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n) \ : \ \xi \vee \big[D^2u(x) - \mathbf{X}\big] \leq_{\otimes} 0 \right\}. \tag{4.135}$$

Για την αντίστροφη έγκλειση, υποθέτουμε $\xi \vee \big[D^2u(x) - \mathbf{X}\big] \leq_{\otimes} 0$. Εφαρμόζοντας $\xi \vee (\ .\ )$ στην (4.130), έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi \vee \Big[u(z) - u(x) - Du(x)(z-x)\Big] &: \eta \otimes \eta \\
&= \ \frac{1}{2}\big[\xi \vee D^2u(x)\big] : \big(\eta \otimes (z-x)\big) \otimes \big(\eta \otimes (z-x)\big) \ + \ o(|z-x|^2) \qquad (4.136)\\
&\leq \ \frac{1}{2}\big[\xi \vee \mathbf{X}\big] : \big(\eta \otimes (z-x)\big) \otimes \big(\eta \otimes (z-x)\big) \ + \ o(|z-x|^2),
\end{aligned}$$

για $z \to x$. Από την (4.136),

$$\xi \vee \Big[u(z) - u(x) - Du(x)(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x)\Big] \ \leq \ o(|z-x|^2), \tag{4.137}$$

για $z \to x$, στον $\mathbb{S}(N)$. Άρα, $(Du(x), \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$.

(d) Αποδείχθη έμμεσα στις (4.131) - (4.134). $\square$

Τώρα αποδεικνύουμε την συμβιβαστότητα κλασικών λύσεων και Λύσεων Επαφής.

Απόδειξη του 4.17. Αν η $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι λύση επαφής του (4.113), τότε λόγω του Θεωρήματος 4.18, αν η u είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x \in \Omega$ έχουμε $(Du(x), D^2u(x)) \in J^{2,\pm\xi}u(x)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Άρα, από τον Ορισμό 4.8,

$$0 \ \leq \ \xi^\top F\big(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\big) \ \leq \ 0, \tag{4.138}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Αφού το ξ είναι τυχαίο, η u λύνει το σύστημα σημειακά στο x. Αντίστροφα, έστω ότι η u είναι 2 φορές παραγωγίσιμη λύση του (4.113) και το (4.113) είναι εκφυλισμένα ελλειπτικό ικανοποιώντας την (4.114). Τότε, αν $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\pm\xi}u(x)$, από το Θεώρημα 4.18 έχουμε $\mathrm{P} = Du(x)$ και επιπλέον $\xi \vee \big[D^2u(x) - \mathbf{X}\big] \leq 0$ στον $\mathbb{S}(N \times n)$. Από το Λήμμα 4.3 και τον Ορισμό 4.8,

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \xi^\top F\big(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\big) \\
&\leq \ \xi^\top F\big(x, u(x), Du(x), \mathbf{X}\big) \qquad (4.139)\\
&= \ \xi^\top F\big(x, u(x), \mathrm{P}, \mathbf{X}\big),
\end{aligned}$$

όποτε $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Άρα, η (4.139) συνεπάγεται ότι η u είναι Λύση Επαφής του συστήματος ΜΔΕ (4.113). $\square$

Το ακόλουθο είναι ένα βαθμωτό λήμμα που θα δώσει αναδιατυπώσεις των J^1, J^2.

Λήμμα 4.19 *Έστω $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ τοπικά συμπαγές, $x \in \mathcal{O}$ και $T : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{S}(N)$ συνεχής με $|T(z)| \to 0$ για $\mathcal{O} \ni z \to x$. Τότε, υπάρχει αύξουσα $\tau \in C^2(0, +\infty)$ με $\tau(0^+) = 0$ ώστε*

$$T(z) \ \leq \ \tau(|z-x|)\, I \tag{4.140}$$

στον $\mathbb{S}(N)$, για $\mathcal{O} \ni z \to x$.

Απόδειξη του 4.19. Έστω $\eta \in \mathbb{S}^{N-1}$. Από την (4.125),

$$\begin{aligned} T(z) : \eta \otimes \eta \ &\leq \ \max_{\eta \in \mathbb{S}^{N-1}} \big| T(z) : \eta \otimes \eta \big| \\ &= \ \|T(z)\| \\ &= \ \|T(z)\| |\eta|^2 \\ &= \ \big(\|T(z)\| I\big) : \eta \otimes \eta, \end{aligned} \tag{4.141}$$

για κάθε $\eta \in \mathbb{S}^{N-1}$. Άρα, η (4.141) λέει $T(z) \leq \|T(z)\| I$ στον $\mathbb{S}(N)$. Ομαλοποιούμε την $\|T(\,.\,)\|$ ακολουθώντας μια ιδέα του [MR]: θέτουμε

$$\tau(\rho) \ := \ \frac{1}{2\rho^2} \int_0^{4\rho} \int_0^r \sup_{y \in \mathbb{B}_t(x) \cap \mathcal{O}} \|T(y)\| \, dt \, dr \tag{4.142}$$

και παρατηρούμε ότι οι τ και $D\tau$ είναι κυρτές στο $\mathbb{R}$. Από εκτιμήσεις κάτω φραγμάτων στην (4.142) για $z \in \mathcal{O} \setminus \{x\}$ στα διαστήματα $(2|z-x|, 4|z-x|)$ και $(|z-x|, 2|z-x|)$, έχουμε

$$\tau(|z-x|) \ \geq \ \sup_{y \in \mathbb{B}_{|z-x|}(x) \cap \mathcal{O}} \|T(y)\| \ \geq \ \|T(z)\|. \tag{4.143}$$

Επιπλέον, από εκτιμήσεις από πάνω και τοπική συμπάγεια του $\mathcal{O}$

$$\tau(|z-x|) \ \leq \ 8 \overline{\max_{y \in \mathbb{B}_{4|z-x|}(x) \cap \mathcal{O}}} \|T(y)\| \ = \ o(1), \tag{4.144}$$

για $\mathcal{O} \ni z \to x$. $\square$

Τώρα εξάγουμε ισοδύναμες διατυπώσεις των Jet. Θα ασχοληθούμε μόνο με το J^2. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για το J^1, με τις προφανείς τροποποιήσεις.

Θεώρημα 4.20 (Ισοδύναμες διατυπώσεις των Jet Επαφής) *Έστω $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ με $\mathcal{O}$ τοπικά συμπαγές, $x \in \mathcal{O}$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $(P, \mathbf{X}) \in (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n))$. Θέτουμε*

$$Q(z) \ := \ u(x) \ + \ P(z-x) \ + \ \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x). \tag{4.145}$$

Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) $(P, X) \in J^{2,\xi}u(x)$.
(b) Υπάρχει $\tau \in C^2(0,\infty)$ αύξουσα με $\tau(0^+) = 0$ ώστε

$$\xi \vee [u \ - \ Q]\,(z) \leq \ \tau(|z-x|)|z-x|^2 I \tag{4.146}$$

στον $\mathbb{S}(N)$, για $\mathcal{O} \ni z \rightarrow x$.
(c) Έχουμε

$$\overline{\lim_{\mathcal{O}\ni z \to x}} \max_{\eta \in \mathbb{S}^{N-1}} \left(\xi \vee \left[\frac{(u \ - \ Q)(z)}{|z-x|^2} \right] \right) : \eta \otimes \eta \ \leq \ 0. \tag{4.147}$$

(d) Έχουμε

$$\max \sigma\Big(\xi \vee [u \ - \ Q]\Big)(z) \ = \ o(|z-x|^2) \tag{4.148}$$

για $\mathcal{O} \ni z \rightarrow x$.
(e) Έχουμε

$$\big[|u-Q| + \xi^\top(u-Q)\big](z) \ = \ o(|z-x|^2) \tag{4.149}$$

για $\mathcal{O} \ni z \rightarrow x$.

Πριν την απόδειξη, περιοριζόμαστε στο $N = 1$ και εξάγουμε γνωστές ιδιότητες των ημι-jet $J^{2,\pm}$.

Πόρισμα 4.21 *Αν $N = 1$ στο Θ. 4.20, έχουμε $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \{-1, +1\}$ και η $Q(z)$ δίνεται από (4.145), τότε οι (4.146) - (4.149) ανάγονται για $\xi = \pm 1$ σε γνωστές ιδιότητες των $J^{2,\pm}$. Εφόσον το θετικό μέρος του $a \in \mathbb{R}$ δίνεται από $a^+ = \max\{a, 0\} = \frac{1}{2}\big(|a| + a\big)$, αν το $\mathcal{O}$ είναι ανοικτό, 2 φορές παραγωγισιμότητα της μέγιστης ιδιοτιμής $\max \sigma\big(\xi \vee [u-Q]\big)$ του συμμετρικοποιημένου τανυστικού γινομένου ανάγεται σε παραγωγισιμότητα του $(u-Q)^+$.*

Απόδειξη του 4.20. Έστω J_1, J_2, J_3, J_4 τα σύνολα τα οποία περιέχουν τα $(\mathrm{P}, \mathbf{X})$ που έχουν τις ιδιότητες των (b) - (e). Θα δείξουμε ότι $J^{2,\xi}u(x) = J_1$, $J_1 = J_2$, $J_2 = J_3$ και $J_3 = J_4$. Για σταθερό $(\mathrm{P}, \mathbf{X})$, θέτουμε

$$R(z-z) \ := \ \frac{[u \ - \ Q](z)}{|z-x|^2}, \tag{4.150}$$

με $Q(z)$ όπως στην (4.145).

Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Τότε, από το Λήμμα 4.19 και τον Ορισμό 4.6 υπάρχει τ με ιδιότητες όπως στο λήμμα ώστε

$$\xi \vee R(z-x) \ \leq \ \tau(|z-x|)\, I \tag{4.151}$$

στον $\mathbb{S}(N)$, για $\mathcal{O} \ni z \to x$. Άρα, $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J_1$. Το αντίστροφο είναι προφανές, άρα $J^{2,\xi}u(x) = J_1$. Έστω τώρα $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J_1$. Τότε, εφαρμόζοντας την (4.146),

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \max_{\eta\in\mathbb{S}^{N-1}} \Big\{ \big(\xi \vee R(z-x) \ - \ \tau(|z-x|)I\big) : \eta\otimes\eta \Big\} \\ &= \ \max_{\eta\in\mathbb{S}^{N-1}} \Big\{ [\xi \vee R(z-x)] : \eta\otimes\eta \ - \ \tau(|z-x|) \Big\} \\ &= \ \max_{\eta\in\mathbb{S}^{N-1}} \Big\{ [\xi \vee R(z-x)] : \eta\otimes\eta \Big\} \ - \ \tau(|z-x|). \end{aligned} \tag{4.152}$$

Άρα, η (4.152) δίνει

$$\begin{aligned} \max_{\eta\in\mathbb{S}^{N-1}} \Big\{ [\xi \vee R(z-x)] : \eta\otimes\eta \Big\} \ &\leq \ \tau(|z-x|) \\ &= \ o(1), \end{aligned} \tag{4.153}$$

για $\mathcal{O} \ni z \to x$. Άρα, $J_1 \subseteq J_2$. Αμτίστροφα, έστω $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J_2$. Τότε, από το Λήμμα 4.19 εφαρμοσμένο στην $o(1)$-συνάρτηση που υλοποιεί το $\overline{\lim}_{\mathcal{O}\ni z\to z}$ στην (4.147) για $N=1$, υπάρχει $\tau \in C^2(0,\infty)$ αύξουσα ώστε η (4.153) να ισχύει. Αλλά τότε, από την (4.152) έχουμε $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J_1$. Άρα, $J_1 = J_2$. Τώρα παρατηρούμε ότι $J_2 = J_3$: όντως, από το Λήμμα 4.1, έχουμε $\max \sigma\big(\xi \vee [u-Q]\big) \geq 0$ και τότε

$$\max \sigma(\xi \vee R) \ = \ \max_{\eta\in\mathbb{S}^{N-1}} \Big\{ [\xi \vee R] : \eta\otimes\eta \Big\}. \tag{4.154}$$

Τέλος, από το Λήμμα 4.1 έχουμε

$$\max \sigma\big(\xi \vee [u-Q]\big) \ = \ \frac{1}{2}\big(|u-Q| + \xi^\top(u-Q)\big). \tag{4.155}$$

Άρα, $J_3 = J_4$. $\square$

Οι ακόλουθες απλές ιδιότητες των $J^{1,\xi}$, $J^{2,\xi}$ είναι κατ' αναλογία με τα βαθμωτά ανάλογα $J^{1,\pm}$, $J^{2,\pm}$ και έπονται από το Θ. 4.20.

Πρόταση 4.22 *Έστω $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ τοπικά συμπαγές, $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ συνεχής, $x \in \mathcal{O}$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Τότε:*
(a) Τα $J^{1,\xi}u(x)$, $J^{2,\xi}u(x)$ είναι κυρτά σύνολα στους $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$ αντίστοιχα.
(b) Το $J^{1,\xi}u(x)$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$. Για κάθε $P \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$, η φέτα

$$\Big\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n) \ \big| \ (P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x) \Big\} \tag{4.156}$$

είναι κλειστή στον $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n)$.
(c) Αν $J^{2,\xi}u(x) \neq \emptyset$, τότε έχει άπειρη διάμετρο: $diam\big(J^{2,\xi}u(x)\big) = \infty$. Επιπλέον, περιέχει μια ημιευθεία:

$$(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x) \quad \Longrightarrow \quad (P, \mathbf{X} + t\xi \otimes I) \in J^{2,\xi}u(x), \tag{4.157}$$

για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη του 4.22. Το (a) είναι προφανές. Για το (b), αρκεί να δείξουμε ότι το (4.156) είναι κλειστό. Έστω $(P, \mathbf{X}_m) \in J^{2,\xi}u(x)$ και $\mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{X}_\infty$ για $m \to \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|\mathbf{X}_{m(\varepsilon)} - \mathbf{X}_\infty| \leq \varepsilon$. Από το Θ. 4.20, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in \overline{\mathbb{B}_\delta(x)} \cap \mathcal{O}} \max_{\eta \in \mathbb{S}^{N-1}} & \left(\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X}_\infty : (z-x) \otimes (z-x)}{|z-x|^2} \right) : \eta \otimes \eta \\
& \leq \varepsilon \ + \sup_{z \in \overline{\mathbb{B}_\delta(x)} \cap \mathcal{O}} \max_{\eta \in \mathbb{S}^{N-1}} \left(\left[\frac{u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x)}{|z-x|^2} \right.\right. \\
& \qquad \left.\left. - \ \frac{\frac{1}{2}\mathbf{X}_{m(\varepsilon)} : (z-x) \otimes (z-x)}{|z-x|^2} \right] : \eta \otimes \eta \right) \\
& \leq \ \varepsilon \ + \ o(1),
\end{aligned} \tag{4.158}$$

για $\delta \to 0^+$. Περνώντας στο όριο $\delta \to 0^+$ στην (4.158) και μετά στο όριο $\varepsilon \to 0^+$, βρίσκουμε $(P, \mathbf{X}_\infty) \in J^{2,\xi}u(x)$, λόγω του Θεωρήματος 4.20. Τέλος, για κάθε $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\big[\xi \vee \big(\mathbf{X} \ + \ t\xi \otimes I\big)\big] : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \ &= \ \xi \vee \mathbf{X} : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \ + \ tI : (\xi^\top \mathrm{P}) \otimes (\xi^\top \mathrm{P}) \\
&= \ \xi \vee \mathbf{X} : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P} \ + \ t\big|\xi^\top \mathrm{P}\big|^2 \\
&\geq \ \xi \vee \mathbf{X} : \mathrm{P} \otimes \mathrm{P},
\end{aligned} \tag{4.159}$$

και η (4.157) έπεται επιλέγοντας $\mathrm{P} := \eta \otimes (z-x)$ στην (4.159), με $\eta \in \mathbb{R}^N$ τυχαίο. $\square$

Το Λήμμα 4.36 στην παράγραφο 4.6 συμπληρώνει την Πρόταση 4.22 δείχνοντας πότε μπορούμε να τροποποιήσουμε το Jet $J^{2,\xi}$ κατά μήκος κατευθύνσεων καθέτων στο ξ, δηλαδή πότε μπορούμε να προσθέσουμε στο $(\mathrm{P},\mathbf{X})$ στοιχεία της μορφής $(0,\eta\otimes I)$ για $\eta \perp \xi$.

4.5 ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΜΔΕ HAMILTON-JACOBI

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό με $H \in C^0\big(\Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n)\big)$. Η βαθμωτή ΜΔΕ Hamilton-Jacobi

$$H\big(x,u(x),Du(x)\big) \ = \ 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.160}$$

που επιδέχεται διανυσματικές λύσεις $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ μπορεί πάντα να θεωρηθεί σαν σύστημα 1ης τάξης $\hat{H}\big(x,u(x),Du(x)\big) = 0$ με μια απειρία δυνατών επεκτάσεων της H σε $\hat{H} : \Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Το ίδιο ισχύει για συστήματα 1ης τάξης (4.160) αν η H έχει τιμές στον $\mathbb{R}^k$ με $k < N$. Άρα, Λύσεις Επαφής πάντα ορίζονται για την (4.160) από το Ορισμό 4.7 για την $\hat{H}$, αν και δεν δείχνει να υπάρχει ένας “κανονικός” τρόπος ανεξάρτητα επεκτάσεων. Η βαθμωτή περίπτωση όμως, είναι διαστατικά σε πλεονεκτική θέση αφού υπάρχει φυσικός τρόπος να οριστούν Λύσεις Επαφής για την ΜΔΕ (4.160). Δίνουμε κίνητρο για τον ορισμό χρησιμοποιώντας την μέθοδο “μηδενιζόμενου ιξώδους”.

Έστω $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ σταθερό, $\varepsilon > 0$ και $u(=u_\varepsilon) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ μια κλασική λύση της ΜΔΕ

$$\varepsilon^2 \Delta\big(\xi^\top u(x)\big) \ + \ H\big(x,u(x),Du(x)\big) \ = \ 0 \tag{4.161}$$

στον $C^2(\Omega)^N$. Υποθέτουμε ότι $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Τότε, Από το Θεώρημα 4.20 έχουμε $\mathrm{P} = Du(x)$ και $\xi^\top D^2u(x) \leq \xi^\top \mathbf{X}$ στον $\mathbb{S}(n)$. Αφού η u λύνει την ΜΔΕ (4.161), έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \varepsilon^2 \Delta\big(\xi^\top u(x)\big) \ + \ H\big(x,u(x),Du(x)\big) \\ &= \ \varepsilon^2 \mathrm{tr}\big(D^2(\xi^\top u)(x)\big) \ + \ H\big(x,u(x),\mathrm{P}\big) \\ &\leq \ \varepsilon^2 \mathrm{tr}\big(\xi^\top \mathbf{X})\big) \ + \ H\big(x,u(x),\mathrm{P}\big). \end{aligned} \tag{4.162}$$

Καθώς $\varepsilon \to 0^+$, βρίσκουμε $H\big(x,u(x),\mathrm{P}\big) \geq 0$. Όμοια, αν $(\mathrm{P},\mathbf{X}) \in J^{2,-\xi}u(x)$, τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^2 \Delta\big(\xi^\top u(x)\big) \,+\, H\big(x, u(x), Du(x)\big) \\ &= -\varepsilon^2 \mathrm{tr}\big(-D^2(\xi^\top u)(x)\big) \,+\, H\big(x, u(x), \mathrm{P}\big) \\ &\geq -\varepsilon^2 \mathrm{tr}\big(-\xi^\top \mathbf{X})\big) \,+\, H\big(x, u(x), \mathrm{P}\big), \end{aligned} \tag{4.163}$$

που δίνει $H\big(x, u(x), \mathrm{P}\big) \leq 0$ για $\varepsilon \to 0^+$. Συνεπώς, οδηγούμαστε στον ακόλουθο

Ορισμός 4.23 (Λύσεις Επαφής) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $H \in C^0\big(\Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n)\big)$ και υποθέτουμε ότι κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος $L \subseteq \mathbb{R}^N$ έχει προσανατολιστεί. Έστω επίσης $L^\pm \in \mathbb{S}^{N-1} \cap L$ τα μοναδιαία διανύσματα του L.*

Τότε, η $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι Λύση Επαφής της ΜΔΕ Hamilton-Jacobi

$$H\big(x, u(x), Du(x)\big) \;=\; 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.164}$$

αν $u \in C^0(\Omega)^N$ και

$$P \in J^{1,L^+} u(x) \quad \Longrightarrow \quad H\big(x, u(x), P\big) \geq 0, \tag{4.165}$$

$$P \in J^{1,L^-} u(x) \quad \Longrightarrow \quad H\big(x, u(x), P\big) \leq 0, \tag{4.166}$$

για κάθε $x \in \Omega$ και κάθε μονοδιάστατο υπόχωρο $L \subseteq \mathbb{R}^N$.

Η επιλογή προσανατολισμού είναι άσχετη και αντιστοιχεί στην επιλογή σύμβασης στις ανισότητες (4.165), (4.166). Η ουσία είναι ότι το $H\big(x, u(x), P\big)$ *δεν πρέπει να αλλάγει πρόσημο όταν το P κινείται εντός του Jet.* Αυτό είναι συμβιβαστό με τις Λύσεις Ιξώδους. Η διατύπωση μέσω "υποχώρων L" Αντί για "κατευθύνσεις ξ" εν αντιθέσει με τους Ορισμούς 4.7, 4.8 αντιμετωπίζει τη σύγχιση που προκαλεί η αντικατάσταση του $+\xi$ με $-\xi$ στις (4.162), (4.163).

Εισάγουμε τώρα έναν "κανονικό" προσανατολισμό που χρησιμοποιεί τις εγκλείσεις των σφαιρών $\mathbb{S}^0 \subseteq \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{S}^2 \subseteq \ldots$ και οδηγεί σε ορισμό συμβιβαστό με τυχόν διαστατικές αναγωγές. Έστω $\mathbb{S}^m_\pm$ τα ημισφαίρια $\{w \in \mathbb{S}^m | w^\top e_{m+1} \gtrless 0\}$ της m-σφαίρας. Ορίζουμε τον προσανατολισμό επαγωγικά: Προσανατολίζουμε την $\mathbb{S}^0$ αντιστοιχώντας $(+)$ στο $\mathbb{S}^0_+ = \{+1\}$ και $(-)$ στο $\mathbb{S}^0_- = \{-1\}$. Υποθέτωντας ότι η $\mathbb{S}^m$ έχει προσανατολιστεί, προσανατολίζουμε την $\mathbb{S}^{m+1}$ χρησιμοποιώντας την διάσπαση

$$\mathbb{S}^{m+1} \;=\; \mathbb{S}^{m+1}_+ \cup \mathbb{S}^{m+1}_- \cup \big(\mathbb{S}^m \times \{0\}\big) \tag{4.167}$$

και αντιστοιχώντας $(-)$ στην $\mathbb{S}^{m+1}_-$ και $(+)$ στην $\mathbb{S}^{m+1}_+$.

Τώρα αναδιατυπώνουμε τον Ορισμό 4.23 βολικά με βάση τον παραπάνω ορισμό. Θέτουμε

$$\mathbb{S}^{N-1,+} := \big(\mathbb{S}^0_+ \times \{0\}\big) \cup \ \ldots \ \big(\mathbb{S}^{N-2}_+ \times \{0\}\big) \cup \mathbb{S}^{N-2}_+, \tag{4.168}$$

$$\mathbb{S}^{N-1,-} := -\mathbb{S}^{N-1,+}. \tag{4.169}$$

και επίσης για $x \in \Omega$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, θέτουμε

$$J^{1,\xi^+}u(x) := \left\{ \begin{array}{ll} J^{1,\xi}u(x), & \xi \in \mathbb{S}^{N-1,+}, \\ \emptyset, & \xi \in \mathbb{S}^{N-1,-}, \end{array} \right. \tag{4.170}$$

και

$$J^{1,\xi^-}u(x) := \left\{ \begin{array}{ll} J^{1,\xi}u(x), & \xi \in \mathbb{S}^{N-1,-}, \\ \emptyset, & \xi \in \mathbb{S}^{N-1,+}. \end{array} \right. \tag{4.171}$$

Ορισμός 4.24 (Προσανατολισμένες Λύσεις Επαφής) *Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $H \in C^0\big(\Omega \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n)\big)$.*

Τότε, η $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι Λύση Επαφής της ΜΔΕ Hamilton-Jacobi

$$H\big(x, u(x), Du(x)\big) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.172}$$

αν $u \in C^0(\Omega)^N$ και

$$P \in J^{1,\xi^+}u(x) \implies H\big(x, u(x), P\big) \geq 0, \tag{4.173}$$

$$P \in J^{1,\xi^-}u(x) \implies H\big(x, u(x), P\big) \leq 0, \tag{4.174}$$

για κάθε $x \in \Omega$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Παράδειγμα 4.25 *Ένα σημαντικό παράδειγμα ΜΔΕ Hamilton-Jacobi είναι η* εξίσωση Εικόνας *με διανυσματικές λύσεις*

$$\big|Du\big|^2 - 1 = 0, \tag{4.175}$$

όπου $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ και $|\,.\,|$ η Ευκλείδεια νόρμα πινάκων στον $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{N\times n}$.

4.6 Η ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΔΟΜΗ ΤΩΝ JET ΕΠΑΦΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη δομή των Jet Επαφής σε βάθος και αναλύουμε την τοπική δομή των διανυσματικών συναρήσεων γύρω από ένα σημείο όπου ένα Jet είναι μη-κενό. Το βασικό εργαλείο είναι το Λήμμα 4.26, που δίνει μια αναπαράσταση του φάσματος των συμμετρικοποιημένων τανυστικών γινομένων, βασικό συστατικό των Jet. Τα κεντρικά αποτελέσματα είναι τα Θεωρήματα 4.28 και 4.29, που αναδιατυπώνουν τους ορισμούς των $J^{1,\xi}u$ και $J^{2,\xi}u$ μέσω μιασ *βαθμωτής ανισότητας* που συνδέει την ξ-προβολή $\xi^\top u$ και την ορθογώνια προβολή της u στο υπερεπίπεδο $\big(\mathrm{span}[\xi]\big)^\perp$. Η ανισότητα εκφράζει τα $J^{1,\xi}u$ και $J^{2,\xi}u$ σαν την γωστή από τις Λύσεις Ιξώδους *1ης και 2ης τάξης ημι-παραγωγισιμότητα* για την ξ-προβολή $\xi^\top u$, συν μια νέα *ιδιότητα μερικής ομαλότητας* για το νέο ορθογώνιο μέρος της u. Ειδικά, το ορθογώνιο μέρος της u πρέπει να είναι ταχύτερο από την τετραγωνική ρίζα αν $J^{1,\xi}u \neq \emptyset$ και πρεπει να είναι παραγωγίσιμο αν $J^{2,\xi}u \neq \emptyset$.

Σαν πόρισμα, εξάγουμε ότι εμπόδια που εμφανίζονται στην διανυσματική περίπτωση αναγκάζουν την J^1-θεωρία να απαιτεί a priori Hölder ομαλότητα $C^{\frac{1}{2}}$ και την J^2-θεωρία a priori Lipschitz ομαλότητα $C^{0,1}$ (Πορίσματα 4.30, 4.31). Στην βαθμωτή περίπτωση όλα τα εμπόδια εξαφανίζονται και η ειδική θεωρία των ημι-Jet $J^{2,\pm}$ εφαρμόζεται επιτυχώς σε απλά C^0 συναρτήσεις. Χονδρικά, στην διανυσματική περίπτωση μόνο "1/2" της τάξης των παραγώγων μπορεί να ερμηνευθεί ασθενώς, το υπόλοιπο "1/2" πρέπει να προϋπάρχει κλασικά.

Έστω $R \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και θα συμβολίζουμε την ορθογώνια προβολή $\big(\mathrm{span}[\xi]\big)^\perp$ με $\xi^\perp$:

$$\xi^\perp \;:=\; I - \xi \otimes \xi \quad : \quad \mathbb{R}^N \longrightarrow \big(\mathrm{span}[\xi]\big)^\perp \subseteq \mathbb{R}^N. \tag{4.176}$$

Από το Λήμμα 4.1, ο $\xi \vee R$ είναι συμμετρικός τανυστής τάξης-2 του $\mathbb{S}(N)$. Αφού ο $\xi \vee R$ έχει το πολύ 2 μη-μηδενικές ιδιοτιμές με $\max \sigma(\xi \vee R) = -\min \sigma(-\xi \vee R)$, αρκεί να θεωρήσουμε μόνο την μέγιστη από αυτές.

Λήμμα 4.26 (Αναπαράσταση του Φάσματος του τανυστή $\xi \vee R$) *Έχουμε την ταυτότητα*

$$\max \sigma(\xi \vee R) \;=\; \big(\xi^\top R\big)^+ \;+\; \frac{|R|}{4}\Big|sgn(R) - s(R)\xi\Big|^2, \tag{4.177}$$

όπου

$$s(R) \;:=\; 2\big(sgn(\xi^\top R)\big)^+ \;-\; 1, \tag{4.178}$$

καθώς και τον μεταβολικό χαρακτηρισμό

$$\max \sigma(\xi \vee R) \;=\; \max\big\{\xi^\top R, 0\big\} \;+\; \frac{|R|}{4}\min\Big|sgn(R) \pm \xi\Big|^2, \tag{4.179}$$

για κάθε $R \in \mathbb{R}^N$.

Απόδειξη του 4.26. Παρατηρώντας ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} 2\big(\mathrm{sgn}(a)\big)^{+} \; - \; 1 \; &= \; 2\Big[\frac{1}{2}\big(|\mathrm{sgn}(a)| + \mathrm{sgn}(a)\big)\Big] \; - \; 1 \\ &= \begin{cases} +1, & \text{if } a > 0 \\ -1, & \text{if } a \leq 0 \end{cases} \\ &= \big(\chi_{(0,\infty)} \; - \; \chi_{(-\infty,0]}\big)(a), \end{aligned} \tag{4.180}$$

λαμβάνουμε την

$$s(R) = \big(\chi_{(0,\infty)} - \chi_{(-\infty,0)}\big)(\xi^{\top}R). \tag{4.181}$$

Υποθέτουμε ότι $R \neq 0$, αφού η (4.177) είναι τετριμμένη για $R = 0$. Έστω $l(R)$ το δεξί μέλος της (4.177). Τότε

$$\begin{aligned} l(R) \; &= \; (\xi^{\top}R)^{+} \; + \; \frac{|R|}{4}\left|\frac{R}{|R|} - \xi\big(\chi_{(0,\infty)} \; - \; \chi_{(-\infty,0]}\big)(\xi^{\top}R)\right|^{2} \\ &= \; \frac{\big|\xi^{\top}R\big| + \xi^{\top}R}{2} \; + \; \frac{|R|}{4}\Bigg(1^{2} + \big|\big(\chi_{(0,\infty)} \; - \; \chi_{(-\infty,0]}\big)(\xi^{\top}R)\big|^{2} \\ &\qquad - 2\frac{\xi^{\top}R}{|R|}\big(\chi_{(0,\infty)} \; - \; \chi_{(-\infty,0]}\big)(\xi^{\top}R)\Bigg). \end{aligned} \tag{4.182}$$

Άρα,

$$l(R) \; = \; \frac{\big|\xi^{\top}R\big| + \xi^{\top}R}{2} \; + \; \frac{|R|}{2}\left(1 - \frac{\xi^{\top}R}{|R|}\big(\chi_{(0,\infty)} \; - \; \chi_{(-\infty,0]}\big)(\xi^{\top}R)\right). \tag{4.183}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} l(R) \; &= \; \frac{1}{2}\Big[\big|\xi^{\top}R\big| + \xi^{\top}R \; + \; |R| \; - \xi^{\top}R\big(\chi_{(0,\infty)} \; - \; \chi_{(-\infty,0]}\big)(\xi^{\top}R)\Big] \\ &= \; \frac{1}{2}\Big[\big|\xi^{\top}R\big| \; + \; |R| \; + 2\xi^{\top}R\chi_{(-\infty,0]}(\xi^{\top}R)\Big], \end{aligned} \tag{4.184}$$

που δίνει

$$\begin{aligned} l(R) \; &= \; \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big[\big|\xi^{\top}R\big| \; + \; |R| \; + 2\xi^{\top}R\Big], & \text{if } \xi^{\top}R \leq 0, \\ \dfrac{1}{2}\Big[\big|\xi^{\top}R\big| \; + \; |R|\Big], & \text{if } \xi^{\top}R > 0, \end{cases} \\ &= \; \max \sigma(\xi \vee R), \end{aligned} \tag{4.185}$$

με την τελευταία ισότητα πόρισμα του Λήματος 4.1. Η (4.177) έπεται. Τώρα δείχνουμε την (4.179). Η ταυτότητα

$$\frac{|R|}{4}\min\Big|\mathrm{sgn}(R)-\xi\Big|^2 \;=\; \frac{|R|}{4}\min\Big|\mathrm{sgn}(R)+\xi\Big|^2 \;-\; \xi^\top R \tag{4.186}$$

δίνει

$$\begin{aligned}\frac{|R|}{4}\min\Big|\mathrm{sgn}(R)\pm\xi\Big|^2 \;&=\; \begin{cases}\dfrac{|R|}{4}\min\Big|\mathrm{sgn}(R)+\xi\Big|^2, & \text{if } \xi^\top R\le 0,\\[2mm] \dfrac{|R|}{4}\min\Big|\mathrm{sgn}(R)-\xi\Big|^2, & \text{if } \xi^\top R> 0,\end{cases}\\ &=\; \frac{|R|}{4}\left|\frac{R}{|R|}-\xi\big(\chi_{(0,\infty)} \;-\; \chi_{(-\infty,0]}\big)(\xi^\top R)\right|^2 \qquad (4.187)\\ &=\; \frac{|R|}{4}\Big|\mathrm{sgn}(R)-s(R)\xi\Big|^2.\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις (4.177) και (4.187), η (4.179) έπεται. $\square$

Παρατήρηση 4.27 *Η στοιχειώδης απόδειξη του Λήματος 4.26 αποκρύπτει ότι οι εκφράσεις (4.177) και (4.179) μπορούν να εξαχθούν συναρμόζοντας αναπτύγματα Taylor στους* $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ *για την* $R\mapsto \max\sigma(\xi\vee R)$ *που είναι* $C^2(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ *στους ημιχώρους* $\big\{R\in\mathbb{R}^N:\xi^\top R<0\big\}$ *και* $\big\{R\in\mathbb{R}^N:\xi^\top R>0\big\}$.

Τώρα παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα του κεφαλαίου, μια βαθμωτή ανισότητα που συνδέει τα $\xi^\top u$ και $\xi^\perp u$, ισοδύναμη με τον αρχικό ορισμό των Jet Επαφής. Θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $\mathcal{O}=\mathbb{R}^n$. Η περίπτωση $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^n$ αντιμετωπίζεται με τετριμμένες τροποποιήσεις των επιχειρημάτων.

Για την περίπτωση των Jet 1ης τάξης, έχουμε

Θεώρημα 4.28 (Βαθύτερη Δομή των Jet Επαφής) *Έστω* $u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^N$ *στον* $C^0(\mathbb{R}^n)^N$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{S}^{N-1}$ *και* $P\in\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^n$. *Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $P\in J^{1,\xi}u(x)$.

(ii) Υπάρχει αύξουσα $\sigma\in C^1(0,\infty)$ *με* $\sigma(0^+)=0$, *ώστε*

$$\xi^\top\Big(u(z)-u(x)-P(z-x)\Big) \;\le\; -\,\frac{\Big|\xi^\perp\big(u(z)-u(x)-P(z-x)\big)\Big|^2}{\sigma(|z-x|)|z-x|} \;+\; \sigma(|z-x|)|z-x|, \tag{4.188}$$

για $z\to x$.

Για την περίπτωση των Jet 2ης τάξης, έχουμε

Θεώρημα 4.29 (Βαθύτερη Δομή των Jet Επαφής) *Έστω $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ στον $C^0(\mathbb{R}^n)^N$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $(P, \mathbf{X}) \in (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n))$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*
(i) $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$.
(ii) Υπάρχει αύξουσα $\sigma \in C^2(0, \infty)$ με $\sigma(0^+) = 0$, ώστε

$$\begin{aligned} \xi^\top \Big(u(z) - u(x) - P(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x)\Big) \\ \le\ -\ \frac{\Big|\xi^\perp \Big(u(z) - u(x) - P(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x)\Big)\Big|^2}{\sigma(|z-x|)|z-x|^2} \\ +\ \sigma(|z-x|)|z-x|^2, \end{aligned} \tag{4.189}$$

για $z \to x$.

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (4.188) και (4.189) (αντί αυτές του Ορισμού 4.6), βρίσκουμε ότι απλή συνέχεια γενικά δεν αρκεί και *κάποια* ομαλότητα πρέπει να υπάρχει:

Πόρισμα 4.30 (Η Μερική Ομαλότητα που επιβάλλουν τα Jet Επαφής) *Θεωρούμε $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ συνεχή, $x \in \mathbb{R}^n$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Τότε:*

1. *Αν $P \in J^{1,\xi}u(x)$, η ορθογώνια προβολή $\xi^\perp u$ στο υπερεπίπεδο είναι $\frac{1}{2}$-κλασματικά παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Αν $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$, η ορθογώνια προβολή $\xi^\perp u$ στο υπερεπίπεδο είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$ και $D(\xi^\perp u)(x) = \xi^\perp P$.*

3. *Αν η u είναι παραγωγίσιμη στο x και $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$, τότε η ορθογώνια προβολή $\xi^\perp u$ στο υπερεπίπεδο είναι $\frac{3}{2}$-κλασματικά παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$.*

4. *Αν η $\xi^\top u$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο x και $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$, τότε η ορθογώνια προβολή $\xi^\perp u$ στο υπερεπίπεδο είναι επίσης 2 φορές παραγωγίσιμη με $D(\xi^\perp u)(x) = \xi^\perp P$ και $D^2(\xi^\perp u)(x) = \xi^\perp \mathbf{X}$.*

   Άρα η u είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη του 4.30. Θα δείξουμε μόνο το (2), τα άλλα είναι παρόμοια. Έστω $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Ξαναγράφουμε την (4.189) ως

$$
\begin{aligned}
&\left|\xi^{\perp}\Big(u(z)-u(x)-\mathrm{P}(z-x)-\frac{1}{2}\mathbf{X}:(z-x)\otimes(z-x)\Big)\right| \leq \\
&\qquad \leq\ \sigma(|z-x|)^{\frac{1}{2}}|z-x|\Bigg(\xi^{\top}\Big(u(z)-u(x)-\mathrm{P}(z-x) \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2}\mathbf{X}:(z-x)\otimes(z-x)\Big)+\ \sigma(|z-x|)|z-x|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{4.190}
$$

που δίνει

$$
\begin{aligned}
\left|\xi^{\perp}\Big(u(z)-u(x)-\mathrm{P}(z-x)-\frac{1}{2}\mathbf{X}:(z-x)\otimes(z-x)\Big)\right| &=\ o(|z-x|)\Big(o(1) \\
&\qquad +\ o(|z-x|^2)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&=\ o(|z-x|),
\end{aligned}
\tag{4.191}
$$

για $z \to x$. Άρα

$$
\begin{aligned}
\left|\xi^{\perp}\big(u(z)-u(x)-\mathrm{P}(z-x)\big)\right| &\leq\ o(|z-x|)\ +\ \frac{1}{2}\left|\big(\xi^{\perp}\mathbf{X}\big):(z-x)\otimes(z-x)\right| \\
&=\ o(|z-x|)\ +\ O(|z-x|^2) \\
&=\ o(|z-x|),
\end{aligned}
\tag{4.192}
$$

για $z \to x$. Άρα, $D\big(\xi^{\perp}u\big)(x) = \xi^{\perp}\mathrm{P}$. $\square$

Σαν συνέπεια των παραπάνω, η ύπαρξη παντού συνεχών και πουθενά διαφορισίμων συναρτήσεων (όπως και πουθενά βελτιώσιμων Hölder συνεχών συναρτήσεων, δες το τελευταίο μέρος της Διατριβής) δίνει το ακόλουθο

Πόρισμα 4.31 *Υπάρχει* $u \in (C^0 \setminus C^{\frac{1}{2}})(\mathbb{R}^n)^N$ *ώστε*

$$
\Big\{x \in \mathbb{R}^n\ \big|\ \forall\ \xi \in \mathbb{S}^{N-1} : J^{1,\xi}u(x) \neq \emptyset \text{ ή } J^{1,-\xi}u(x) \neq \emptyset\Big\}\ =\ \emptyset. \tag{4.193}
$$

Όμοια, υπάρχει $u \in (C^0 \setminus C^{0,1})(\mathbb{R}^n)^N$ *ώστε*

$$
\Big\{x \in \mathbb{R}^n\ \big|\ \forall\ \xi \in \mathbb{S}^{N-1} : J^{2,\xi}u(x) \neq \emptyset \text{ ή } J^{2,-\xi}u(x) \neq \emptyset\Big\}\ =\ \emptyset. \tag{4.194}
$$

Συνεπώς, λόγω του αρνητικού αποτελέσματος του Πορίσματος 4.31, η J^1-θεωρία έχει νόημα στον χώρο Hölder $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)^N$ και η J^2-θεωρία έχει νόημα στον χώρο Lipschitz $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)^N$.

Το ακόλουθο είναι το 1ο βήμα στην κατανόηση της βαθύτερης δομής των J^1, J^2. Για απλότητα, κανονικοποιούμε τα πράγματα στο μηδέν. Για $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n))$, θέτουμε

$$R(w) \;:=\; u(w+x) - u(x) - \mathrm{P}w - \frac{1}{2}\mathbf{X} : w \otimes w. \tag{4.195}$$

Τότε, έχουμε ότι $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $R(0) = 0$ και $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$ ανν $0 \in J^{2,\xi}R(0)$. Παρόμοια και για το J^1.

Θεώρημα 4.32 (Περαιτέρω Ισοδύναμες διατυπώσεις των Jet Επαφής) *Έστω $R : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $0 \in \mathcal{O}$, $R(0) = 0$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $p \in \{1, 2\}$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $0 \in J^{p,\xi}R(0)$, *δηλ.*, $\max \sigma(\xi \vee R(z)) \leq o(|z|^p)$, *για* $\mathcal{O} \ni z \to 0$.
(ii)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi^\top R(z) & \leq & o(|z|^p),\ \text{για } \mathcal{O} \ni z \to 0, \\ \dfrac{\left|\xi^\perp R(z)\right|^2}{|R(z)|} & = & o(|z|^p),\ \text{για } \mathcal{O} \ni z \to 0. \end{array} \right. \tag{4.196}$$

(iii) Υπάρχουν $\rho : \mathcal{O} \longrightarrow \big(span[\xi]\big)^\perp \subseteq \mathbb{R}^N$ *και* $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow [0, \infty)$ *που ικανοποιούν* $\lim\limits_{z \to 0}|\rho(z)|^2/|z|^p = 0$ *και* $\lim\limits_{z \to 0}|\sigma(z)|/|z|^p = 0$ *ώστε*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \xi^\top R & \leq & \sigma, & \text{στο } \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \xi^\perp R & = & \rho\sqrt{\frac{1}{2}|\rho|^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}|\rho|^2\right)^2 + \left|\xi^\top R\right|^2}}, & \text{στο } \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{4.197}$$

(iv) Αν θέσουμε $T := \big\{|\xi^\perp R| \leq |\xi^\top R|\big\} \subseteq \mathcal{O}$, *τότε*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{rcl} \xi^\top R(z) & \leq & o(|z|^p), \\ \dfrac{\left|\xi^\perp R(z)\right|^2}{\left|\xi^\top R(z)\right|} & = & o(|z|^p), \end{array} \right\} \ \text{για } \mathcal{O} \cap T \ni z \to 0, \\ \qquad |R(z)| \ = \ o(|z|^p), \qquad \text{για } \mathcal{O} \setminus T \ni z \to 0. \end{array} \right. \tag{4.198}$$

Πόρισμα 4.33 *Όταν $N = 1$, τότε $\xi^\perp \equiv 0$ και οι (4.196), (4.197), (4.198) ανάγονται στην γνωστή ανισότητα κατά μήκος του span$[\xi] \cong \mathbb{R}$ που συμπίπτει με αυτή των ημι-jet $J^{1,\pm}$, $J^{2,\pm}$ (δες (4.60) - (4.63) και [CIL]).*

Απόδειξη του 4.32. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι η (i) ισοδυναμεί με την (ii). Υποθέτωντας την (i), από την (4.177), έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^\top R(z) \ \leq \ o(|z|^p), \\ |R(z)|\big|\mathrm{sgn}(R(z)) - s(R)\xi\big|^2 \ = \ o(|z|^p), \end{array}\right. \tag{4.199}$$

για $\mathcal{O} \ni z \to 0$, όπου $s(R)$ όπως στην (4.178). Από την (4.199), στο $\{R \neq 0\} \cap \mathcal{O}$ έχουμε

$$\left| \frac{R - |R|\left[2\big(\mathrm{sgn}(\xi^\top R)\big)^+ - 1\right]\xi}{|R|^{\frac{1}{2}}} \right| \ \leq \ o(|z|^p), \tag{4.200}$$

για $\{R \neq 0\} \cap \mathcal{O} \ni z \to 0$. Από την (4.200), υπάρχει $r : \{R \neq 0\} \cap \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ με $\lim\limits_{z\to 0}|r(z)| = 0$ ώστε

$$\Big(R - |R|\left[2\big(\mathrm{sgn}(\xi^\top R)\big)^+ - 1\right]\xi\Big)(z) \ = \ r(z)|z|^{\frac{p}{2}}|R(z)|^{\frac{1}{2}}, \tag{4.201}$$

στο $\{R \neq 0\} \cap \mathcal{O}$. Η (4.201) τετριμμένα επεκτείνεται στο $\{R = 0\}$ παίρνοντας $r \equiv 0$ εκεί. Άρα, η (4.201) επεκτείνεται στο $\mathcal{O}$. Προβάλλοντας την (4.201) στο $\big(\mathrm{span}[\xi]\big)^\perp \subseteq \mathbb{R}^N$, έχουμε

$$\xi^\perp R(z) \ = \ (\xi^\perp r)(z)|z|^{\frac{p}{2}}|R(z)|^{\frac{1}{2}}, \tag{4.202}$$

στο $\mathcal{O}$. Θέτουμε $\rho(z) := (\xi^\perp r)(z)|z|^{\frac{p}{2}}$. Τότε, από την (4.202), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\big|\xi^\perp R(z)\big|^2}{|R(z)|} \ &= \ |\rho(z)|^2 \\ &= \ o(|z|^p), \end{aligned} \tag{4.203}$$

για $\mathcal{O} \ni z \to 0$. Από τις (4.199) και (4.203), η (ii) έπεται.

Ατίστροφα, υποθέτουμε την (ii). Αφού $\xi \vee R(z) = 0 \leq o(|z|^p)$ στο $\mathcal{O} \cap \{R = 0\}$, αρκεί να ελέγξουμε ότι $\max \sigma(\xi \vee R(z)) \leq o(|z|^p)$ για $\mathcal{O} \cap \{R \neq 0\} \ni z \to$

0. Αν $s(R)$ είναι όπως στην (4.178), από την (4.183) υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{|R|}{4}\Big|\mathrm{sgn}(R)-s(R)\xi\Big|^2 &= \frac{1}{4|R|}\Big|R-s(R)|R|\xi\Big|^2\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{4|R|}\Big|R-|R|\xi\Big|^2, \text{ on } \mathcal{O}\cap\{\xi^\top R>0\}\cap\{R\neq 0\},\\ \dfrac{1}{4|R|}\Big|R+|R|\xi\Big|^2, \text{ on } \mathcal{O}\cap\{\xi^\top R\leq 0\}\cap\{R\neq 0\},\end{cases} \qquad (4.204)\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\big(|R|-\xi^\top R\big), \text{ on } \mathcal{O}\cap\{\xi^\top R>0\},\\ \dfrac{1}{2}\big(|R|-\xi^\top R\big), \text{ on } \mathcal{O}\cap\{\xi^\top R\leq 0\}\cap\{R\neq 0\}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Από την (4.182) και επειδή $\xi^\perp = I-\xi\otimes\xi$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\big(|R(z)|-\xi^\top R(z)\big)\big(|R(z)|+\xi^\top R(z)\big) &= |R(z)|^2-|\xi^\top R(z)|^2\\
&= |\xi^\perp R(z)|^2 \qquad (4.205)\\
&= o\big(|z|^p|R(z)|\big),
\end{aligned}
$$

για $\mathcal{O}\ni z\to 0$. Αφού στο $\mathcal{O}\cap\{\xi^\top R>0\}$ έχουμε $1\leq\big(|R|+\xi^\top R\big)/|R|$ και στο $\mathcal{O}\cap\{\xi^\top R\leq 0\}\cap\{R\neq 0\}$ έχουμε $1\leq\big(|R|-\xi^\top R\big)/|R|$, από τις (4.204) και (4.205) βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{|R|}{4}\Big|\mathrm{sgn}(R)-s(R)\xi\Big|^2 &\leq \frac{1}{2}\Big(|R(z)|^2-|\xi^\top R(z)|^2\Big) \qquad (4.206)\\
&= o(|z|^p),
\end{aligned}
$$

για $\mathcal{O}\ni z\to 0$. Άρα, οι (4.196), (4.206) συνεπάγονται την (4.199), που ισοδυναμεί με την (i).

Τώρα αποδεικνύουμε την ισοδυναμία των (ii) και (iii). Υποθέτοντας την(ii), λόγω της (4.196) μπορούμε να ορίσουμε

$$
\begin{cases} \sigma := \big(\xi^\top R\big)^+,\\ \rho := \left(\dfrac{\xi^\perp R}{|R|^{\frac{1}{2}}}\right)\chi_{\{R\neq 0\}\cap\mathcal{O}}. \end{cases} \qquad (4.207)
$$

Άρα, οι σ, ρ έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες και από τις (4.207), έχουμε

$$
\begin{aligned}
|R||\rho|^2 &= |\xi^\perp R|^2 \qquad (4.208)\\
&= |R|^2 - |\xi^\top R|^2.
\end{aligned}
$$

Από την (4.208), η $|R|$ είναι η θετική λύση της $t^2 - |\rho|^2 t - |\xi^\top R|^2 = 0$. Άρα,

$$|R| \;=\; \frac{1}{2}|\rho|^2 \;+\; \sqrt{\left(\frac{1}{2}|\rho|^2\right)^2 \;+\; |\xi^\top R|^2}. \tag{4.209}$$

Συνεπώς, οι (4.207), (4.209) συνεπάγονται την (4.197). Αντίστροφα, υποθέτοντας την (iii) και θέτοντας

$$S \;:=\; \frac{1}{2}|\rho|^2 \;+\; \sqrt{\left(\frac{1}{2}|\rho|^2\right)^2 \;+\; |\xi^\top R|^2}, \tag{4.210}$$

τότε η S λύνει την $t^2 - |\rho|^2 t - |\xi^\top R|^2 = 0$. Άρα, από την (4.210) και λόγω καθετότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} S^2 \;&=\; |\xi^\top R|^2 \;+\; |\rho|^2 S \\ &=\; \Big(|R|^2 \;-\; |\xi^\perp R|^2\Big) \;+\; |\rho|^2 S \\ &=\; \Big(|R|^2 \;-\; |\xi^\perp R|^2\Big) \;+\; |\xi^\perp R|^2 \\ &=\; |R|^2. \end{aligned} \tag{4.211}$$

Άρα, $S = |R|$ και συνεπώς η (4.197) συνεπάγεται την (4.196).

Τελειώνουμε αποδεικνύοντας ότι η (iv) ισοδυναμεί με την (ii). Προς τούτο, διασπάμε τον $\mathbb{R}^N$ ως $\mathrm{span}[\xi] \oplus \big(\mathrm{span}[\xi]\big)^\perp$ και τον εφοδιάζουμε με τη νόρμα $\|R\| := \max\big\{|\xi^\top R|, |\xi^\perp R|\big\}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{|\xi^\perp R|}{\|R\|} \;&=\; \frac{|\xi^\perp R|^2}{\max\big\{|\xi^\top R|, |\xi^\perp R|\big\}} \\ &=\; \min\left\{\frac{|\xi^\perp R|^2}{|\xi^\top R|}, |\xi^\perp R|\right\} \\ &=\; \frac{|\xi^\perp R|^2}{|\xi^\top R|}\chi_{\mathcal{O}\cap T} \;+\; |\xi^\perp R|\chi_{\mathcal{O}\setminus T}. \end{aligned} \tag{4.212}$$

Από την (4.212) και την ισοδυναμία νορμών στον $\mathbb{R}^N$, η (4.196) ισοδυναμεί με την

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad\quad \xi^\top R(z) \;\leq\; o(|z|^p), \quad \text{για } \mathcal{O} \ni z \to 0, \\ \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{|\xi^\perp R(z)|^2}{|\xi^\top R(z)|} &=& o(|z|^p), \quad \text{για } \mathcal{O}\cap T \ni z \to 0, \\ |\xi^\perp R(z)|^2 &=& o(|z|^p), \quad \text{για } \mathcal{O}\setminus T \ni z \to 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{4.213}$$

Αφού στο $\mathcal{O}\setminus T$ έχουμε $|\xi^\top R(z)| < |\xi^\perp R(z)| = o(|z|^p)$ για $\mathcal{O}\setminus T \ni z \to 0$, η (4.213) ισουναμεί με την (4.198). $\square$

Απόδειξη του 4.28 και του 4.29. Κανονικοποιώντας όπως στην (4.195), αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

Ισχυρισμός 4.34 *Αν $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι $C^0(\mathbb{R}^n)^N$ και $R(0) = 0$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, $p \in \{1, 2\}$, τότε*

$$0 \in J^{p,\xi}R(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \xi^\top R(w) - \sigma(|w|)|w|^p \ \leq \ -\frac{\left|\xi^\perp R(w)\right|^2}{\sigma(|w|)|w|^p} \tag{4.214}$$

για $w \to 0$, για κάποια $\sigma \in C^p(0,\infty)$ αύξουσα με $\sigma(0^+) = 0$.

Ο Ισχυρισμός 4.34 θα θεσπίσει τα Θεωρήματα 4.28 και 4.29.

Προς τούτο, υποθέτουμε ότι $0 \in J^{p,\xi}R(0)$. Τότε, από το Θεώρημα 4.20 (και το ανάλογο για το J^1), υπάρχει $\rho \in C^p(0,\infty)$ αυξουσα με $0 \leq \rho(w) = o(|w|^p)$ για $w \to 0$ ώστε

$$\xi \vee R(w) \ \leq \ \rho(w) I, \tag{4.215}$$

στον $\mathbb{S}(N)$, κοντά στο $0 \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\{\xi_1, .., \xi_{N-1}\}$ μια ορθοκανονική βάση του υπερεπεπιπέδου $\left(\mathrm{span}[\xi]\right)^\perp \subseteq \mathbb{R}^N$. Τότε, ο ταυτοτικός I και η R έχουν την ακόλουθη αναπαράσταση στις συντεταγμένες αυτές $\{\xi; \xi_1, .., \xi_{N-1}\}$ του $\mathbb{R}^N$:

$$I \ = \ \xi \otimes \xi \ + \ \sum_{\alpha=1}^{N-1} \xi_\alpha \otimes \xi_\alpha, \tag{4.216}$$

$$R \ = \ (\xi^\top R)\xi \ + \ \sum_{\alpha=1}^{N-1} ({\xi_\alpha}^\top R)\xi_\alpha. \tag{4.217}$$

Αντικαθιστώντας την (4.216) και την (4.217) στην (4.215), έχουμε

$$\xi \left[(\xi^\top R)\xi \ + \ \sum_{\alpha=1}^{N-1} ({\xi_\alpha}^\top R)\xi_\alpha\right] \ \leq \ \rho\, \xi \otimes \xi \ + \ \rho \sum_{\alpha=1}^{N-1} \xi_\alpha \otimes \xi_\alpha, \tag{4.218}$$

στον $\mathbb{S}(N)$, κοντά στο $0 \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας “: $\xi \otimes \xi$” στην (4.218) λόγω ορθοκανονικότητας έχουμε

$$- \ \xi^\top R \ + \ \rho \ \geq \ 0, \tag{4.219}$$

κοντά στο $0 \in \mathbb{R}^n$. Έστω τώρα $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $\beta \in \{1, ..., N-1\}$ σταθερά και εφαρμόζουμε ξανά ": $(t\xi_\beta + \xi) \otimes (t\xi_\beta + \xi)$" στην (4.218) για να βρούμε

$$
\begin{aligned}
|\xi|^2 \xi^\top R \ + \ \sum_{\alpha=1}^{N-1} (\xi_\alpha{}^\top R)\big(\xi_\alpha^\top (t\xi_\beta + \xi)\big)\big(\xi^\top (t\xi_\beta + \xi)\big) \\
\leq \ \rho|\xi|^2 \ + \ \rho \sum_{\alpha=1}^{N-1} \big(\xi_\alpha^\top (t\xi_\beta + \xi)\big)^2.
\end{aligned}
\tag{4.220}
$$

Λόγω ορθοκανονικότητας, έχουμε

$$
t\,\xi_\beta^\top R \ \leq \ \rho t^2 \ + \ \rho \ - \ \xi^\top R. \tag{4.221}
$$

Η εναλλαγή t και $-t$ στην (4.221) δίνει

$$
\big|\xi_\beta^\top R\big| \ \leq \ \rho t \ + \ \frac{\rho \ - \ \xi^\top R}{t} \tag{4.222}
$$

και η συγκεκριμένη επιλογή $t := \left(\dfrac{\rho - \xi^\top R}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ στην (4.222) δίνει

$$
\big|\xi_\beta^\top R\big|^2 \ \leq \ 4\rho\big(\rho \ - \ \xi^\top R\big). \tag{4.223}
$$

Αθροίζοντας ως προς β, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\big|\xi^\perp R\big|^2 \ &= \ \sum_{\beta=1}^{N-1} \big|\xi_\beta^\top R\big|^2 \\
&\leq \ 4(N-1)\rho\big(\rho \ - \ \xi^\top R\big) \\
&\leq \ 4(N-1)\rho\big(- \ \xi^\top R \ + \ 4(N-1)\rho\big).
\end{aligned}
\tag{4.224}
$$

Άρα, η (4.224) δίνει την κατεύθυνση "$\Longrightarrow$" του Ισχυρισμού 4.34 με $\sigma(w) := 4(N-1)\dfrac{\rho(|w|)}{|w|^p}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε την ισχύ της ανισότητας στην (4.214) για μια τέτοια σ και θέτουμε $\rho(w) := \sigma(|w|)|w|^p$. Τότε,

$$
\big|\xi^\perp R\big|^2 \ \leq \ \rho\big(- \ \xi^\top R \ + \ \rho\big), \tag{4.225}
$$

γύρω από το $0 \in \mathbb{R}^n$. Αφού $\rho > 0$ κοντά στο μηδέν, η (4.225) δίνει

$$
\begin{aligned}
\xi^\top R \ &\leq \ \rho(w) \\
&= o(|w|^p),
\end{aligned}
\tag{4.226}
$$

για $w \to 0$. Θέτοντας

$$\begin{aligned} T &:= \big\{ |\xi^\perp R| \le |\xi^\top R| \big\} \subseteq \mathbb{R}^n, && (4.227)\\ \mathcal{O} &:= \big\{ |\xi^\top R| > \rho \big\} \subseteq \mathbb{R}^n, && (4.228) \end{aligned}$$

η (4.225) δίνει στο $\mathcal{O} \cap T$ ότι

$$\begin{aligned} \frac{|\xi^\perp R|^2}{|\xi^\top R|}(w) &= \frac{\rho(w)\big(-\ \xi^\top R(w)\ +\ \rho(w)\big)}{|\xi^\top R(w)|} \\ &\le \rho(w)\ +\ \frac{\rho^2(w)}{|\xi^\top R(w)|} \\ &\le 2\rho(w) \\ &= o(|w|^p), \end{aligned} \tag{4.229}$$

για $\mathcal{O} \cap T \ni w \to 0$. Άρα, από την συνεπαγωγή (iv) $\Longrightarrow$ (i) του Θεωρήματος 4.32, έχουμε

$$\max \sigma\big(\xi \vee R(w)\big)\ \le\ o(|w|^p), \tag{4.230}$$

για $\mathcal{O} \cap T \ni w \to 0$. Από την άλλη, στο $\mathcal{O} \setminus T$ έχουμε $|\xi^\top R| \le \rho$ και επίσης $|\xi^\perp R| \le |\xi^\top R|$, άρα από το Λήμμα 4.1 έχουμε

$$\begin{aligned} \max \sigma\big(\xi \vee R(w)\big) &= \frac{1}{2}\Big(|R(w)|\ +\ \xi^\top R(w)\Big) \\ &\le |R(w)| \\ &= \Big(|\xi^\top R|^2\ +\ |\xi^\perp R|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \big(\rho^2(w)\ +\ \rho^2(w)\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\rho(w) \\ &= o(|w|^p), \end{aligned} \tag{4.231}$$

για $\mathcal{O} \setminus T \ni w \to 0$. Από την (4.230) και την (4.231) εξάγουμε

$$\max \sigma\big(\xi \vee R(w)\big)\ \le\ o(|w|^p), \tag{4.232}$$

για $T \ni w \to 0$. Τώρα, στο $\mathbb{R}^n \setminus T = \big\{ |\xi^\top R| < |\xi^\perp R| \big\}$, έχουμε από την (4.225) ότι

$$\begin{aligned} |\xi^\perp R|^2 &\le \rho\big(-\ \xi^\top R\ +\ \rho\big) \\ &\le \rho|\xi^\top R|\ +\ \rho^2 \\ &\le \rho|\xi^\perp R|\ +\ \rho^2. \end{aligned} \tag{4.233}$$

Άρα,

$$\left|\xi^{\perp} R\right|^{2} \;-\; \rho\left|\xi^{\perp} R\right| \;-\; \rho^{2} \;\leq\; 0 \tag{4.234}$$

και συγκρίνοντας την $\left|\xi^{\perp} R\right|$ με τις λύσεις του $t^2 - \rho t - \rho^2 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\xi^{\perp} R(w)\right|^{2} \leq\; & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\rho(w) \\ =\; & o(|w|^p), \end{aligned} \tag{4.235}$$

για $\mathbb{R}^n \setminus T \ni w \to 0$. Άρα, ξανά από το Λήμμα 4.1, έχουμε

$$\begin{aligned} \max \sigma\big(\xi \vee R(w)\big) \;&=\; \frac{1}{2}\Big(|R(w)| \;+\; \xi^{\top} R(w)\Big) \\ &\leq\; |R(w)| \\ &=\; \Big(\left|\xi^{\top} R\right|^{2} \;+\; \left|\xi^{\perp} R\right|^{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq\; \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\rho(w) \\ &=\; o(|w|^p), \end{aligned} \tag{4.236}$$

για $\mathbb{R}^n \setminus T \ni w \to 0$. Από τις (4.232) και (4.236) εξάγουμε ότι $\max \sigma\big(\xi \vee R(w)\big) \leq o(|w|^p)$ για $w \to 0$. Από το Θεώρημα 4.32, καταλήγουμε ότι $0 \in J^{p,\xi}R(0)$. Συνεπώς, ο Ισχυρισμός 4.34 και άρα τα Θεωρήματα 4.28 και 4.29 έπονται. □

Χρησιμοποιώντας τον Ισχυρισμό 4.34, πλαισιώνουμε το Θεώρημα 4.32 με έναν περαιτέρω χαρακτηρισμό του $J^{p,\xi}$.

Πόρισμα 4.35 *Στο πλαίσιο του Θεωρήματος 4.32, έχουμε*

$$0 \in J^{p,\xi}R(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\xi^{\top} R \;+\; \sqrt{(\xi^{\top} R)^2 \;+\; 4|\xi^{\perp} R|^2}\right)(w) \;=\; o(|w|^p), \tag{4.237}$$

για $\mathcal{O} \ni w \to 0$.

Απόδειξη του 4.35. Από τον Ισχυρισμό 4.34, έχουμε ότι $0 \in J^{p,\xi}R(0)$ ανν

$$\xi^{\top} R - \rho \;\leq\; -\,\frac{\left|\xi^{\perp} R(w)\right|^{2}}{\rho} \tag{4.238}$$

για κάποια $\rho \in C^p(0,\infty)$ αύξουσα με $0 \leq \rho(w) = o(|w|^p)$ για $\mathcal{O} \ni w \to 0$. Ξαναγράφουμε την (4.238) ως

$$\rho^2 \;-\; \big(\xi^{\top} R\big)\rho \;-\; \left|\xi^{\perp} R(w)\right|^{2} \;\leq\; 0. \tag{4.239}$$

Από στοιχειώδη Άλγεβρα και αφού $\rho \geq 0$, η (4.239) ισοδυναμεί με

$$\rho \;\geq\; \frac{1}{2}\left(\xi^\top R \;+\; \sqrt{(\xi^\top R)^2 \;+\; 4|\xi^\perp R|^2}\right), \tag{4.240}$$

στο $\mathcal{O}$. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα πιστοποιεί ότι η ορθογώνια προβολή $\xi^\perp$ ενός ξ-Jet είναι πολύ "άκαμπτη" και εκτός αν η συνάρτηση *δεν* είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, δεν μπορούμε να το μεταβάλουμε.

Λήμμα 4.36 (Ορθογώνιες $\xi^\perp$ τροποποιήσεις του $J^{2,\xi}$) *Αν $u \in C^0(\mathbb{R}^n)^N$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, $\eta \in \mathbb{S}^{N-1} \cap (span[\xi])^\perp$ κάθετο στο ξ και $A \in \mathbb{S}^+(n)$, τότε για $(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$ έχουμε*

$$\left(\eta^\top P,\, \eta^\top \mathbf{X} - \frac{1}{2}A\right) \in J^{2,+}(\eta^\top u)(x) \quad \Longrightarrow \quad (P, \mathbf{X} - \eta \otimes A) \in J^{2,\xi}u(x). \tag{4.241}$$

Το Λήμμα 4.36 λέει ότι μπορούμε να μεταβάλουμε το ξ-Jet $(\mathrm{P}, \mathbf{X})$ προσθέτοντας στοιχείο της μορφής $(0, -\eta \otimes A)$ με $A \geq 0$ κατά μήκος της η στο κάθετο υπερεπίπεδο $(\mathrm{span}[\xi])^\perp$ αν μπορούμε να αφαιρέσουμε το στοιχείο $\big(0, \frac{1}{2}A\big)$ από το ημι-jet $J^{2,+}$ της προβολής $\eta^\top u$.

Απόδειξη του 4.36. Θέτουμε

$$Q_{\mathrm{P},X}(z) \;:=\; u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x) - \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x). \tag{4.242}$$

Εφαρμόζοντας ότι $\eta \perp \xi$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\xi^\perp\Big(u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x) - \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \eta \otimes A) : (z-x)\otimes(z-x)\Big)\right|^2 \\
&\quad= \left|\xi^\perp\Big(u(z) - Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big)\right|^2 \;+\; \frac{1}{4}\big|A : (z-x)\otimes(z-x)\big|^2 \\
&\qquad+\; \big(A : (z-x)\otimes(z-x)\big)\,\eta^\top\Big(u(z) - Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big) \\
&\quad\leq o(|z-x|^2)\Big[-\xi^\top\Big(u(z) - Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big) \;+\; o(|z-x|^2)\Big] \\
&\qquad+\; \big(A : (z-x)\otimes(z-x)\big)\Big[\frac{A}{4} : (z-x)\otimes(z-x) \\
&\qquad\qquad+\; \eta^\top\Big(u(z) - Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big)\Big] \\
&\quad\leq o(|z-x|^2)\Big[-\xi^\top\Big(u(z) - Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big) \;+\; o(|z-x|^2)\Big] \\
&\qquad+\; \|A\||z-x|^2\Big[\eta^\top\Big(u(z) - u(x) - \mathrm{P}(z-x) \\
&\qquad\qquad- \frac{1}{2}\Big(\mathbf{X} - \frac{\eta}{2}\otimes A\Big) : (z-x)\otimes(z-x)\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{4.243}$$

για $z \to x$. Άρα, ο 1ος όρος της (4.243) εκτιμάται από

$$\begin{aligned}
&\le o(|z-x|^2)\Big[-\xi^\top\Big(u(z)-Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big) \ + \ o(|z-x|^2)\Big]\\
&\quad + \ \|A\||z-x|^2\Big[(\eta^\top u)(z)-(\eta^\top u)(x)-(\eta^\top \mathrm{P})(z-x)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2}\Big(\eta^\top \mathbf{X}-\frac{1}{2}A\Big):(z-x)\otimes(z-x)\Big] \qquad (4.244)\\
&\le o(|z-x|^2)\Big[-\xi^\top\Big(u(z)-Q_{\mathrm{P},X}(z)\Big) \ + \ o(|z-x|^2)\Big] \ + \ o(|z-x|^4),
\end{aligned}$$

για $z \to x$. Αυξάνοντας τις $o(1)$ συναρτήσεις που εμφανίζονται στους προσθετέους, ενσωματώνουμε τον $o(|z-x|^4)$ όρο στον 1ο προσθετέο και βρίσκουμε ότι $(\mathrm{P}, \mathbf{X}-\eta\otimes A) \in J^{2,\xi}u(x)$. $\square$

4.7 Η ΑΡΧΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΤΗΣ ΕΠΑΦΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ως τώρα, τα βασικά αντικείμενα μελέτης της παρούσας θεωρίας ΜΔΕ ήταν τα Jet Επαφής, σύνολα σημειακών ασθενών παραγώγων μη-διαφορισίμων συναρτήσεων. Τα Jet εισάγουν με έναν μη τετριμμένο έμμεσο τρόπο μια έννοια ακροτάτου για διανυσματικές συναρτήσεις που τώρα θα διερευνήσουμε. Αυτή η νέα έννοια επεκτείνει τα βαθμωτά ακρότατα min και max, μαζί με τον "Λογισμό Αρχής Μεγίστου" ($Du = 0$ και $D^2u \le 0$ στα μέγιστα της u). Αυτή η έννοια ακροτάτου, αν και έχει απλή διατύπωση, δεν είναι καθόλου προφανές γιατί είναι φυσιολογική και εύλογη, ενώ ο "Λογισμός Αρχής Μεγίστου" που φέρουν είναι δύσκολο να εκτιμηθεί χωρίς γνώση της τεχνολογία των Jet.

Συνεπώς, βασίσαμε την θεωρία των Λύσεων Επαφής στα Jet παρά στα Ακρότατα, γιατί τα Jet είναι πιο "φυσιολογικά" λόγω της τυπικής ομοιότητας με τα βαθμωτά ανάλογά τους.

Ξεκινάμε παρουσιάζοντας μια ειδικότερη έννοια ακροτάτου, για να δώσουμε κίνητρο για την γενική έννοια. Έστω $C_{L,x}$ ο κώνοςμε κορυφή στο $x \in \mathbb{R}^n$ και κλίση $L > 0$, δηλ. $C_{L,x}(z) := L|z-x|$. Αν οι δείκτες L, x είναι είτε ξεκάθαροι είτε δεν χρησιμοποιούνται άμεσα, θα παραλείπονται και οι κώνοι θα συμβόλίζονται απλά με "C". Αν $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, συμβολίζουμε την προβολη $I - \xi\otimes\xi$ στο υπερεπίπεδο $\big(\mathrm{span}[\xi]\big)^\perp \subseteq \mathbb{R}^N$ με $\xi^\perp$.

Ορισμός 4.37 (Σημεία Επαφής) *Έστω $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ τοπικά φραγμένη, $x \in \mathcal{O}$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $p \in \mathbb{N}$. Τότε, η u έχει* Σημείο Επαφής p-τάξης στο x εντός του $\mathcal{O}$ κατά μήκος του ξ *όταν για κάθε C_x, έχουμε*

$$\left|\xi^\perp(u-u(x))\right|^2 \ \le \ {C_x}^p\left[-\xi^\top(u-u(x))\right], \qquad (4.245)$$

σε μια περιοχή του x στο $\mathcal{O}$.

Όταν το $\mathcal{O}$ είναι ανοικτό, το "εντός του $\mathcal{O}$" θα παραλείπεται.

Ορισμός 4.38 (Ακρότατα Σημεία) *Ένα σημείο $x \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ θα λέγεται* Ακρότατο Σήμειο *της τοπικά φραγμένης $u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ αν υπάρχουν $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $p \in \mathbb{N}$ ώστε η u να έχει Σημείο Επαφής p-τάξης στο x κατά μήκος του ξ.*

Από τον Ορισμό 4.37, αν η u έχει σημείο επαφής στο x, η ξ-προβολή $\xi^\top u$ της u έχει τοπικό μέγιστο στο x:

$$\xi^\top\big(u(z) - u(x)\big) \ \leq \ 0, \tag{4.246}$$

για $z \in \mathcal{O}$, $|z - x| < r$ για κάποιο $r > 0$. Επιπλέον, η $\xi^\perp$-προβολή $\xi^\perp u$ της u έχει σημείο σηνέχειας στο x, με μέτρο συνέχειας ταχύτερο από την $\frac{p}{2}$-ρίζα: για κάθε $L > 0$, υπάρχει $r = r(L) > 0$ ώστε

$$\begin{aligned} \Big|\xi^\perp\big(u(z) - u(x)\big)\Big| \ &\leq \ L^{\frac{1}{2}}\big(-\xi^\top\big(u(z) - u(x)\big)\big)^{\frac{1}{2}}|z - x|^{\frac{p}{2}}, \\ &\leq \ L^{\frac{1}{2}}\Big(2\sup_{\mathcal{O}}|u|\Big)^{\frac{1}{2}}|z - x|^{\frac{p}{2}} \end{aligned} \tag{4.247}$$

για $z \in \mathcal{O}$, $|z - x| < r$. Οι ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι $p = 1, 2$ και αντιστοιχούν στα J^1 και J^2. Όταν $p = 1$, η $\xi^\perp u$ πρέπει να έχει στο x σημείο συνέχειας τουλάχιστον $C^{\frac{1}{2}}$ και όταν $p = 2$, η $\xi^\perp u$ πρέπει να έχει σημείο συνέχειας τουλάχιστον $C^{0,1}$. Αρα, αν το $\mathcal{O}$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$ και $p = 1, 2$, από την (4.247) η $\xi^\perp u$ πρέπει να είναι $\frac{1}{2}$-παραγωγίσιμη και μια φορά παραγωγίσιμη στο $z = x$ αντίστοιχα:

$$\lim_{z \to x} \frac{\Big|\xi^\perp\big(u(z) - u(x)\big)\Big|}{|z - x|^{\frac{p}{2}}} \ = \ 0. \tag{4.248}$$

Όταν $N = 1$, έχουμε $\xi^\perp \equiv 0$ και η (4.245) ανάγεται σε min ή max της u: όντως, αφού $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$, η (4.245) λέει ότι είτε $u \geq u(x)$ είτε $u \leq u(x)$ γύρω από το x στο $\mathcal{O}$.

Γενικά, η (4.245) συνδέει ένα βαθμωτό ακρότατο στην ξ-κατεύθυνση συν μια συνθήκη μερικής ομαλότητας στο κάθετο υπερεπίπεδο.

Μια ιντριγκώδης ιδιότητα των διανυσματικών ακροτάτων και επίσης πηγή δυσκολίας είναι ότι έχουν *τάξη*. Όταν $N = 1$, τότε τα βαθμωτά ακτρότατα ικανοποιούν την (4.245) για *καθε* $p \in \mathbb{N}$, συμπεριλαμβανομένου του μηδενός.

Άρα, τα min και max πάντα έχουν κάθε τάξη, ανεξάρτητα ομαλότητας της συνάρτησης. Η έννοια της τάξης χονδρικά εμπλέκεται ως εξής: *αν έχουμε "Ακρότατο 1ης τάξης", τότε μπορούμε να αποφανθούμε μόνο "μηδενισμό για την κλίση" ανεξάρτητα περαιτέρω ομαλότητας της συνάρτησης. Χρειάζεται "Ακρότατο 2ης τάξης" για να αποφανθούμε σχετικά με την "ανισότητα για την Εσσιανή".*

Δυστυχώς, αν και τα Ακρότατα Σημεία επεκτείνουν τα min και max σχετικά φυσιολογικά, παρουσιάζουν μια παθολογία που τα καθιστά ακατάλληλα για κεντρική έννοια: μπορεί να μην υπάρχουν *πουθενά* ούτε για C^∞ συναρτήσεις περιορισμένες σε συμπαγή. Πράγματι, από το Θεώρημα 4.45 που έπεται, κάθε καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $u \in C^\infty[0,1]^N$ ικανοποιεί $|Du| \equiv 1 \neq 0$ στο $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ και άρα δεν μπορεί να έχει ακρότατα, ούτε καν 1ης τάξης. Από την άλλη, οι (ημι-)συνεχείς βαθμωτές συναρτήσεις υλοποιούν πάντα τα ακρότατά τους σε συμπαγή σύνολα.

Θεραπεύουμε αυτό το εννοχλητικό φαινόμενο χαλαρώνοντας την έννοια του ακροτάτου σε μια ευέλικτη *συναρτησιακή* έννοια "Ακρότατης Συνάρτησης" που σέβεται την πιθανή "συστροφή" των διανυσματικών συναρτήσεων.

Ορισμός 4.39 (Συναρτήσεις Επαφής) *Έστω $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ τοπικά φραγμένη, $x \in \mathcal{O}$, $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $p \in \mathbb{N}$. Τότε, η* συνάρτηση $\psi \in C^p(\mathbb{R}^n)^N$ είναι ξ-Συνάρτηση Επαφής της u στο x p-τάξης εντός του $\mathcal{O}$ *αν $\psi(x) = u(x)$ και για κάθε κώνο C με κορυφή στο x, έχουμε*

$$\left|\xi^\perp(u-\psi)\right|^2 \ \leq \ C^p\big[-\xi^\top(u-\psi)\big], \tag{4.249}$$

σε μια περιοχή του x στο $\mathcal{O}$.

Και εδώ, αν το $\mathcal{O}$ είναι ανοικτό, το "εντός του $\mathcal{O}$" θα παραλείπεται.

Ορισμός 4.40 (Ακρότατες Συναρτήσεις) *Μια συνάρτηση $\psi \in C^p(\mathbb{R}^n)^N$ θα λέγεται* Ακρότατη Συνάρτηση *της τοπικά φραγμένης $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ στο $x \in \mathcal{O}$ αν υπάρχει κατεύθυνση $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ και $p \in \mathbb{N}$ ώστε η ψ να είναι ξ-Συνάρτηση Επαφής of u στο x p-τάξης εντός του $\mathcal{O}$.*

Άρα, η ψ είναι ακρότατη συνάρτηση αν η $u-\psi$ έχει μηδενιζόμενο ακρότατο σημείο. Συγκρίνοντας τις (4.245) και (4.249), βλέπουμε ότι τα ακρότατα σημεία αντιστοιχούν στην ειδική περίπτωση σταθερών $\psi \equiv u(x)$ στον $\mathbb{R}^n$.

Πρωτού αποδείξουμε ότι η Επαφή είναι η κατάλληλη έννοια ακροτάτου στην διανυσματική περίπτωση, θα δείξουμε την ισοδυναμία των Jets και των Ακροτάτων. Θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $p = 2$ και $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. Η περίπτωση του J^1 και γενικού $\mathcal{O}$ αντιμετωπίζεται με απλές τροποποιήσεις.

Για $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, θέτουμε

$$D^{2,\xi}u(x) := \left\{ \big(D\psi(x), D^2\psi(x)\big) \,\middle|\, \begin{array}{l} \psi \in C^2(\mathbb{R}^n)^N,\ \psi(x) = u(x)\ \&\ \forall\ C = C_x, \\ \big|\xi^\perp(u-\psi)\big|^2 \leq C^p\big[-\xi^\top(u-\psi)\big], \text{περί το } x \end{array} \right\}. \tag{4.250}$$

Θεώρημα 4.41 (Ισοδυναμία Συναρτήσεων Επαφής και Jet Επαφής) *Αν η $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι στον $C^0(\mathbb{R}^n)^N$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, τότε*

$$D^{2,\xi}u(x) \;=\; J^{2,\xi}u(x). \tag{4.251}$$

Δηλαδή, τα Jet Επαφής συμπίπτουν με τις παραγώγους των Συναρτήσεων Επαφής.

Η απόδειξη βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα, που χονδρικά λέει ότι μπορούμε πάντα να απορροφήσουμε το υπόλοιπο Taylor 2ης τάξης μιας Συνάρτησης Επαφής στην ξ-προβολή της:

Λήμμα 4.42 *Έστω $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)^N$ μια ξ-Συνάρτηση Επαφής 2η τάξης της τοπικά φραγμένης $u : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ στο x.*

Τότε υπάρχει ξ-Συνάρτηση Επαφής $\hat{\psi}$ της u στο x στον $C^2(\mathbb{R}^n)^N$ ώστε $\psi = \hat{\psi}$ ως 2η τάξη στο x (δηλ., $\psi(x) = \hat{\psi}(x)$, $D\psi(x) = D\hat{\psi}(x)$ και $D^2\psi(x) = D^2\hat{\psi}(x)$) ενώ η $\xi^\perp$-προβολή του Taylor υπολοίπου 2ης τάξης $\hat{\psi}$ μηδενίζεται.

Απόδειξη του 4.42. Έστω $T_{2,x}$ και $R_{2,x}$ οι τελεστές 2ης τάξης Taylor πολυωνύμου και Taylor υπολοίπου στο x αντίστοιχα. Τότε, από την (4.249), έχουμε

$$\Big|\xi^\perp\big(u - T_{2,x}\psi - R_{2,x}\psi\big)\Big|^2 \;\leq\; {C_x}^2\Big[-\xi^\top\big(u - T_{2,x}\psi - R_{2,x}\psi\big)\Big] \tag{4.252}$$

σε περιοχή του x στο $\mathcal{O}$. Από το Λ. 4.11 για $N = 1$, υπάρχει $\rho \in C^2(0,\infty)$ με $0 \leq \rho(z) \leq o(|z-x|^2)$ για $\mathcal{O} \ni z \to x$ και τέτοια ώστε $\rho \geq \xi^\top R_{2,x}\psi$ και

$$\Big|\xi^\perp\big(u - T_{2,x}\psi\big) - \xi^\perp R_{2,x}\psi\Big|^2 \;\leq\; \rho\Big[-\xi^\top\big(u - T_{2,x}\psi\big) \;+\; \rho\Big], \tag{4.253}$$

γύρω από το x στο $\mathcal{O}$. Από την (4.253), έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|\xi^{\perp}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big|^2 \ &\leq \ \rho\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big) \ + \ \rho\Big] \ - \ \big|\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big|^2 \\ &\quad + \ \Big(\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big)^{\top}\Big(\xi^{\top}\big(\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big)\Big) \\ &= \ \rho\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big) \ + \ \rho\Big] \ - \ \big|\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big|^2 \\ &\quad + \ 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big)^{\top}\Big(\sqrt{2}\xi^{\top}\big(\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big)\Big) \\ &\leq \ \rho\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big) \ + \ \rho\Big] \ - \ \big|\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big|^2 \\ &\quad + \ \frac{1}{2}\Big|\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big|^2 \ + \ 2\Big|\xi^{\top}\big(\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big)\Big|^2.\end{aligned} \tag{4.254}$$

Τότε, από την (4.254), έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|\xi^{\perp}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big|^2 \ &\leq \ 2\rho\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big) \ + \ \rho\Big] \ + \ 2\big|\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big|^2 \\ &\leq \ 2\rho\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big) \ + \ 2\rho\Big] \ + \ 2\big|\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big|^2 \\ &= \ 2\rho\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big] \ + \ \Big\{4\rho^2 \ + \ 2\big|\xi^{\perp}R_{2,x}\psi\big|^2\Big\} \\ &\leq \ 2\big(\rho + |\xi^{\perp}R_{2,x}\psi|\big)\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big)\Big] \\ &\quad + \ \Big(2\big(\rho + |\xi^{\perp}R_{2,x}\psi|\big)\Big)^2 \\ &= \ 2\big(\rho + |\xi^{\perp}R_{2,x}\psi|\big)\Big[-\xi^{\top}\big(u - T_{2,x}\psi\big) + 2\big(\rho + |\xi^{\perp}R_{2,x}\psi|\big)\Big],\end{aligned} \tag{4.255}$$

γύρω από το x στην $\mathcal{O}$. Από την (4.255), το Λ. έπεται ορίζοντας $\hat{\psi}$ από

$$\hat{\psi} \ := \ T_{2,x}\psi \ + \ 2\big(\rho + |\xi^{\perp}R_{2,x}\psi|\big)\xi, \tag{4.256}$$

αφού από κατασκευής $\psi(x) = \hat{\psi}(x)$, $D\psi(x) = D\hat{\psi}(x)$, $D^2\psi(x) = D^2\hat{\psi}(x))$ ενώ $\xi^{\perp}R_{2,x}\hat{\psi} \equiv 0$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\xi^{\top}R_{2,x}\hat{\psi} \ &= \ 2\big(\rho \ + \ |\xi^{\perp}R_{2,x}\psi|\big) \\ &\geq \ \xi^{\top}R_{2,x}\psi.\end{aligned} \tag{4.257}$$

Άρα, από τις (4.255) και (4.256) έχουμε

$$\big|\xi^{\perp}(u - \hat{\psi})\big|^2 \ \leq \ \xi^{\top}R_{2,x}\hat{\psi}\big[-\xi^{\top}(u - \hat{\psi})\big], \tag{4.258}$$

και αφού $0 \le \xi^\top R_{2,x}\hat{\psi}(z) \le o(|z-x|^2)$ για $\mathcal{O} \ni z \to x$, για κάθε κώνο C με κορυφή στο x, υπάρχει περιοχή του x στο $\mathcal{O}$ ώστε, εκεί πάνω

$$\big|\xi^\perp(u-\hat{\psi})\big|^2 \ \le\ C^2\big[-\xi^\top(u-\hat{\psi})\big], \tag{4.259}$$

όπως ισχυριστήκαμε. $\square$

Τώρα αποδεικνύουμε το Θεώρημα 4.41.

Απόδειξη του 4.41. Έστω ψ μια ξ-Συνάρτηση Επαφής 2ης τάξης της u στο x. Από το Λήμμα 4.42, υπάρχει ξ-Συνάρτηση Επαφής $\hat{\psi}$ της u στο x ώστε $\hat{\psi} = \psi$ ως 2η τάξη στο x και επιπλέον $\xi^\perp R_{2,x}\hat{\psi} \equiv 0$. Από την (4.249), για κάθε $L > 0$, υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$\begin{aligned}\bigg|\xi^\perp\Big(u(z)-u(x)-&D\psi(x)(z-x)-\frac{1}{2}D^2\psi(x):(z-x)\otimes(z-x)\Big)\bigg|^2\\ &\le\ L^2|z-x|^2\bigg[-\xi^\top\Big(u(z)-u(x)-D\psi(x)(z-x)\\ &\qquad -\frac{1}{2}D^2\psi(x):(z-x)\otimes(z-x)\Big)\ +\ \xi^\top R_{2,x}\hat{\psi}(z)\bigg],\end{aligned} \tag{4.260}$$

όποτε $|z-x| \le r$. Από το Λήμμα 4.19 για $N=1$, υπάρχει αύξουσα $\sigma \in C^2(0,\infty)$ ώστε $0 \le \sigma(t) = o(1)$ για $t \to 0^+$ η οποία

$$\sigma(|z-x|)|z-x|^2 \ \ge\ \xi^\top R_{2,x}\hat{\psi}(z) \tag{4.261}$$

για $z \to x$, και

$$\begin{aligned}\bigg|\xi^\perp\Big(u(z)-u(x)-&D\psi(x)(z-x)-\frac{1}{2}D^2\psi(x):(z-x)\otimes(z-x)\Big)\bigg|^2\\ &\le\ \sigma(|z-x|)|z-x|^2\bigg[-\xi^\top\Big(u(z)-u(x)-D\psi(x)(z-x)\\ &\qquad -\frac{1}{2}D^2\psi(x):(z-x)\otimes(z-x)\Big)\ +\ \sigma(|z-x|)|z-x|^2\bigg],\end{aligned} \tag{4.262}$$

για $z \to x$. Από το Θεώρημα 4.29, η (4.262) δίνει ότι $\big(D\psi(x), D^2\psi(x)\big) \in J^{2,\xi}u(x)$. Αντίστροφα, έστω $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Ξανά από το Θεώρημα 4.29, αν σ είναι όπως στη διατύπωση, η

$$\psi(z) \ := \ u(x)+\mathrm{P}(z-x)+\frac{1}{2}\mathbf{X}:(z-x)\otimes(z-x)+\sigma(|z-x|)|z-x|^2\xi \quad (4.263)$$

ικανοποιεί $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)^N$, $\psi(x)=u(x)$ και

$$\big|\xi^\perp(u-\psi)\big|^2 \ \leq \ \sigma(|z-x|)|z-x|^2\big[-\xi^\top(u-\psi)\big], \quad (4.264)$$

για $z \to x$. Άρα, για κάθε κώνο C, υπάρχει περιοχή περί το x ώστε εκεί πάνω

$$\big|\xi^\perp(u-\psi)\big|^2 \ \leq \ C^2\big[-\xi^\top(u-\psi)\big]. \quad (4.265)$$

Άρα, η ψ είναι ξ-Συνάρτηση Επαφής της u 2ης τάξης στο x. $\square$

Εν όψει του Θεωρήματος 4.41, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τους Ορισμούς 4.7, 4.8 ως εξής:

Ορισμός 4.43 (Λύσεις Επαφής Συστημάτων ΜΔΕ 1ης τάξης) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $F \in C^0\big(\Omega\times\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^n)\big)^N$. Τότε, η $u \in C^0(\Omega)^N$ είναι* Λύση Επαφής του συστήματος ΜΔΕ 1ης τάξης

$$F\big(x,u(x),Du(x)\big) \ = \ 0, \quad x\in\Omega, \quad (4.266)$$

όταν για κάθε ξ-Συνάρτηση Επαφής $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)^N$ της u στο x έχουμε

$$\xi^\top F\big(x,\psi(x),D\psi(x)\big) \ \geq \ 0, \quad (4.267)$$

για κάθε $x \in \Omega$ και όλα τα $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Ορισμός 4.44 (Λύσεις Επαφής Συστημάτων ΜΔΕ 2ης τάξης) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $F \in C^0\big(\Omega\times\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^n)\times(\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{S}(n))\big)^N$. Τότε, η $u \in C^0(\Omega)^N$ είναι* Λύση Επαφής του συστήματος ΜΔΕ 2ης τάξης

$$F\big(x,u(x),Du(x),D^2u(x)\big) \ = \ 0, \quad x\in\Omega, \quad (4.268)$$

όταν για κάθε ξ-Συνάρτηση Επαφής $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)^N$ της u στο x έχουμε

$$\xi^\top F\big(x,\psi(x),D\psi(x),D^2\psi(x)\big) \ \geq \ 0, \quad (4.269)$$

για κάθε $x \in \Omega$ και όλα τα $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Συνεπώς, οι ακρότατες συναρτήσεις παίζουν το ρόλο των συναρτήσεων δοκιμής για το σύστημα των ΜΔΕ (δες [CIL]).

Συνεχίζουμε με τον "Λογισμό Αρχής Μεγίστου" που χαρακτηρίζει τη σχέση ακροτάτου της Επαφής.

Θεώρημα 4.45 (Λογισμός της Αρχής της Επαφής) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $x \in \Omega$ και έστω $u \in C^0(\Omega)^N$ 2 φορές παραγωγίσιμη στο $x \in \Omega$. Έστω επίσης $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)^N$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.*

Θεωρείστε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:
(i) Η ψ είναι ξ-Συνάρτηση Επαφής 2ης τάξης της u στο $x \in \Omega$.
(ii) Έχουμε

$$D\big(u-\psi\big)(x) \ = \ 0 \ \ \text{στον} \ \ \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n, \tag{4.270}$$
$$\xi \vee D^2\big(u-\psi\big)(x) \ \leq_{\otimes} 0 \ \ \text{στον} \ \ \mathbb{S}(N,n). \tag{4.271}$$

Τότε, ο (i) συνεπάγεται τον (ii). Επίσης, ο (ii) συνεπάγεται τον (i) αν επιπρόσθετα της (4.271) έχουμε $\xi^\top D^2\big(u-\psi\big)(x) < 0$ γνήσια στον $\mathbb{S}(n)$.

Τετριμμένες τροποποιήσεις στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.45 δίνουν το ακόλουθο

Πόρισμα 4.46 (Επαφή 1ης Τάξης) *Στο πλαίσιο του Θεωρήματος 4.45, αν η u είναι φορά παραγωγίσιμη, τότε η $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)^N$ είναι ακρότατη συνάρτηση 1ης τάξης της u στο x ανν $D\big(u-\psi\big)(x) = 0$.*

Το Θεώρημα 4.45 έχει ήδη αποδειχθεί έμμεσα, στη γλώσσα των Jet Επαφής. Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 4.41 και 4.20 μπορούμε να αφαιρέσουμε μέρος του καλύματος. Για λόγους απλότητας, παρέχουμε τώρα μια άμεση απόδειξη χωρίς Jet.

Απόδειξη του 4.45. Υποθέτουμε τον (i). Τότε, από τον (4.249), έχουμε $\big(u-\psi\big)(x) = 0$ και για κάθε $L > 0$ υπάρχει $r > 0$ ώστε όταν $|z-x| \leq r$,

$$\big|\xi^\perp(u-\psi)\big|^2 \ \leq \ L^2|z-x|^2\big[-\xi^\top(u-\psi)\big]. \tag{4.272}$$

Από την (4.272), έχουμε

$$\xi^\top\big(u-\psi\big)(z) \ \leq \ 0 \tag{4.273}$$

για $|z-x| \leq r$. Άρα, η $\xi^\top(u-\psi)$ έχει μηδενιζόμενο τοπικό μέγιστο στο $z = x$. Έχουμε

$$D\big(\xi^\top(u-\psi)\big)(x) \ = \ 0, \tag{4.274}$$
$$D^2\big(\xi^\top(u-\psi)\big)(x) \ \leq \ 0. \tag{4.275}$$

Από την (4.272),

$$\big|\xi^\perp\big(u-\psi\big)(z)\big| \ = \ o(|z-x|), \tag{4.276}$$

για $z \to x$. Άρα, η (4.276) δίνει $D\big(\xi^\perp(u-\psi)\big)(x) = 0$. Από την (4.276) και την

$$D(u-\psi)(x) \ = \ D\big(\xi^\perp(u-\psi)\big)(x) \ + \ \xi \otimes D\big(\xi^\top(u-\psi)\big)(x), \tag{4.277}$$

έχουμε $D\big(u-\psi\big)(x) = 0$. Αλλά η (4.272) δίνει

$$\begin{aligned} &\left|\xi^\perp\left(\frac{1}{2}D^2(u-\psi)(x) : (z-x)\otimes(z-x) + o(|z-x|^2)\right)\right|^2 \\ &\quad \le \ o(|z-x|^2)\left[-\xi^\top\left(\frac{1}{2}D^2(u-\psi)(x) : (z-x)\otimes(z-x) + o(|z-x|^2)\right)\right], \end{aligned} \tag{4.278}$$

για $z \to x$. Θέτουμε $z := x + \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$ και $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ για να βρούμε

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}D^2\big(\xi^\perp(u-\psi)\big)(x) : w\otimes w \ + \ \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right|^2 \\ &\qquad\qquad \le \ \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}\Big\|D^2\big(\xi^\top(u-\psi)\big)(x)\Big\| \ + \ \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right), \end{aligned} \tag{4.279}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Πέρασμα στο όριο στην (4.279) δίνει $D^2\big(\xi^\perp(u-\psi)\big)(x) = 0$. Τότε, από την

$$D^2(u-\psi)(x) \ = \ D^2\big(\xi^\perp(u-\psi)\big)(x) \ + \ \xi \otimes D^2\big(\xi^\top(u-\psi)\big)(x) \tag{4.280}$$

έχουμε

$$D^2(u-\psi)(x) \ = \ \xi \otimes \xi^\top\big(D^2(u-\psi)(x)\big) \tag{4.281}$$

και από την Πρόταση 4.5 για την (4.281) και την (4.275) έχουμε $\xi \vee D^2\big(u-\psi\big)(x) \le_\otimes 0$ με την ανισότητα τάξης-1 στον $\mathbb{S}(N,n)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε την (ii) και ότι $\xi^\top D^2\big(u-\psi\big)(x) < 0$ γνήσια στην $\mathbb{S}(n)$. Τότε, από την (4.271) και την Πρόταση 4.5 παίρνουμε

$$D^2(u-\psi)(x) \ = \ \xi \otimes \xi^\top\big(D^2(u-\psi)(x)\big) \tag{4.282}$$

$$\xi^\top\big(D^2(u-\psi)(x)\big) \ \le \ -aI, \ \text{στον } \mathbb{S}(n), \tag{4.283}$$

για κάποιο $a > 0$. Από τις (4.270), (4.282) και (4.249),

$$\begin{aligned}
\Big|\xi^{\perp}(u-\psi)(z)\Big|^2 &= \bigg|\xi^{\perp}\bigg((u-\psi)(x) + D(u-\psi)(x)(z-x) \\
&\qquad + \frac{1}{2}D^2(u-\psi)(x) : (z-x)\otimes(z-x) + o(|z-x|^2)\bigg)\bigg|^2 \qquad (4.284)\\
&= \big|o(|z-x|^2)\big|^2 \\
&= o(|z-x|^2)|z-x|^2,
\end{aligned}$$

για $z \to x$. Επιπλέον, από την (4.283),

$$\begin{aligned}
-\xi^{\top}(u-\psi)(z) &= -\xi^{\top}\bigg((u-\psi)(x) + D(u-\psi)(x)(z-x) \\
&\qquad + \frac{1}{2}D^2(u-\psi)(x) : (z-x)\otimes(z-x) + o(|z-x|^2)\bigg) \\
&= -\frac{1}{2}\xi^{\top}D^2(u-\psi)(x) : (z-x)\otimes(z-x) \ + \ o(|z-x|^2) \qquad (4.285)\\
&\geq \frac{a}{2}|z-x|^2 \ + \ o(|z-x|^2) \\
&= \Big(\frac{a}{2} - o(1)\Big)\,|z-x|^2 \\
&\geq \frac{a}{4}|z-x|^2,
\end{aligned}$$

για $z \to x$. Από τις (4.284) και (4.285),για κάθε $L > 0$, υπάρχει $r > 0$ μικρό ώστε αν $|z-x| \leq r$, τότε

$$\begin{aligned}
\Big|\xi^{\perp}(u-\psi)(z)\Big|^2 &\leq \frac{aL^2}{4}|z-x|^4 \\
&= L^2|z-x|^2\left(\frac{a}{4}|z-x|^2\right) \qquad (4.286)\\
&\leq L^2|z-x|^2\Big(-\xi^{\top}(u-\psi)(z)\Big),
\end{aligned}$$

οπώς ισχυριστήκαμε. $\square$

Στην πορεία της απόδειξης του Θεωρήματος 4.45 αποδείξαμε το ακόλουθο

Πόρισμα 4.47 (Διασπάσεις Τάξης-1) *Στο Πλαίσιο του Θεωρήματος 4.45, αν η ψ είναι ξ-Συνάρτηση Επαφής 2ης τάξης της u στο x, τότε έχουμε τις διασπάσεις τάξης-1*

$$D(u-\psi)(x) \;=\; \xi\otimes\xi^\top\big(D(u-\psi)(x)\big) \tag{4.287}$$
$$D^2(u-\psi)(x) \;=\; \xi\otimes\xi^\top\big(D^2(u-\psi)(x)\big) \tag{4.288}$$

και επίσης

$$\xi^\top\big(D(u-\psi)(x)\big) \;=\; 0, \quad in \;\; \mathbb{R}^n, \tag{4.289}$$
$$\xi^\top\big(D^2(u-\psi)(x)\big) \;\leq\; 0, \quad in \;\; \mathbb{S}(n). \tag{4.290}$$

Αντίστροφα, αν οι (4.287) - (4.290) ισχύουν, τότε η ψ είναι ξ-Συνάρτηση Επαφής 2ης τάξης της u στο x αν η ανισότητα στην (4.290) είναι γνήσια.

4.8 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.8.1 ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ∞-ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗΣ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ ΤΗΣ ΜΔΕ ΕΙΚΟΝΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο καθορίζουμε τις θεμελιώδεις λύσεις του διανυσματικού τελεστή της ∞-Λαπλασιανής (δες (4.103))

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \;&: C^2(\mathbb{R}^n)^N \longrightarrow C^0(\mathbb{R}^n)^N \\ \Delta_\infty u \;&:=\; Du\otimes Du : D^2u, \end{aligned} \tag{4.291}$$

δηλαδή, εκείνες τις ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ που είναι C^2 μακριά από το μηδέν και ∞-Αρμονικές εκεί. Έπειτα αποδεικνύουμε ότι αυτές οι συναρτήσεις οι οποίες είναι "γενικευμένοι κώνοι", είναι Λύσεις Επαφής της ΜΔΕ *Εικόνας* (δες το Παράδειγμα 4.25)

$$\big|Du\big|^2 - 1 \;=\; 0. \tag{4.292}$$

Οι λύσεις είναι μη-κλασικές, ώντας απλά Lipschitz συνεχείς και η έννοια των Λύσεων Επαφής γίνεται ουσιώδης. Τα αποτελέσματα μας επακτείνουν γνωστές ιδιότητες της βαθμωτής Δ_∞: οι συνήθεις κώνοι είναι οι θεμελιώδεις λύσεις της τελεστή Δ_∞ όταν $N=1$ και είναι Λύσεις Ιξώδους της εξίσωσης Εικόνας (δες [CIL], [C]).

Στην βαθμωτή περίπτωση $N=1$ η ∞-Αρμονικότητα χαρακτηρίζεται μέσω "Σύγκρισης με τους Κώνους" (δες [CEG]). Στη γενική διανυσματική περίπτωση το αντίστοιχο αποτέλεσμα είναι εν εξελίξει.

Θεώρημα 4.48 (Θεμελιώδεις Λύσεις της Δ_∞) *Έστω $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^N$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Η Φ είναι ακτινικά συμμετρική και $\Delta_\infty \Phi = 0$ στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(ii) Υπάρχουν $L > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$ και $\nu \in C^1(0,\infty)^N$ με $|\nu| \equiv 1$ μια C^1 καμπύλη στην μοναδιαία σφαίρα ώστε

$$\Phi(z) \;=\; u_0 \;+\; L\int_0^{|z|} \nu(t)dt, \tag{4.293}$$

για $z \in \mathbb{R}^n$.

Αν είτε η (i) είτε η (ii) ισχύουν, η Φ επεκτείνεται σε Lipschitz συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 4.49 *Αν $N = 1$, τότε αναγκαστικά η ν είναι σταθερή: $\nu \equiv \pm 1$ στο $(0,\infty)$. Άρα, οι ακτινικά συμμετρικές ∞-Αρμονικές συναρτήσεις συμπίπτουν με τους κώνους: $\Phi(x) = u_0 \pm L|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Οι συναρτήσεις της μορφής (4.293) αποτελούν τους γενικεύμενους "κώνους" της διανυσματικής περίπτωσης.

Ορισμός 4.50 (ΑΣΕ) *Έστω $L > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $\nu \in C^0(0,\infty)^N$ με $|\nu| \equiv 1$ μια συνεχής καμπύλη στην μοναδιαία σφαίρα. Οι συναρτήσεις της μορφής*

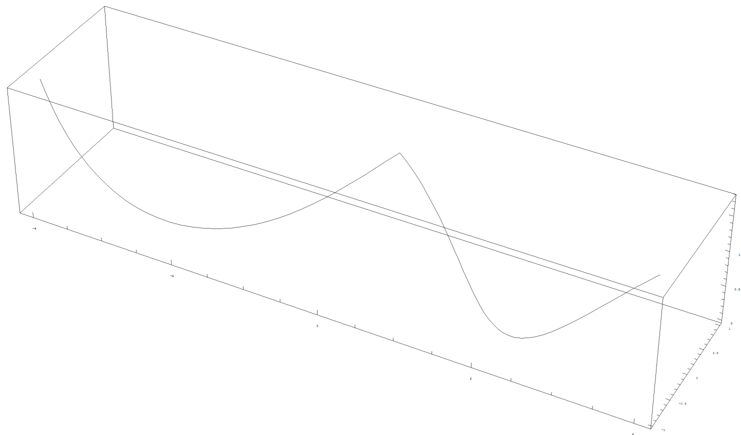
$$u \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad u(z) \;:=\; u_0 \;+\; L\int_0^{|z-x|} \nu(t)dt, \tag{4.294}$$

θα λέγονται Ακτινικές Συναρτήσεις Εικόνας (ΑΣΕ).

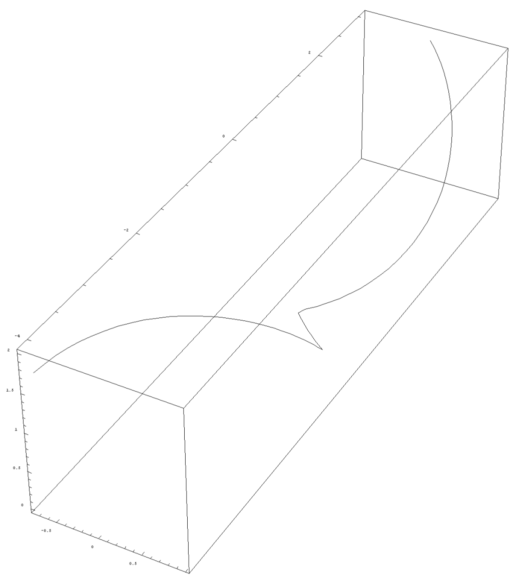
Παράδειγμα 4.51 *Το απλούστερο παράδειγμα ΑΣΕ είναι το*

$$u \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad u(z) \;:=\; \Big(\sin(|z|), 1 - \cos(|z|)\Big)^\top. \tag{4.295}$$

Είναι ένας "συστραμένος" μονοδιάστατος κώνος με "κορυφή" στο μηδέν, που προκύπτει από την (4.294) για $L = 1$, $u_0 = 0$, $x = 0$ και παραμετρώντας τον κύκλο $\mathbb{S}^1$ από την $\nu(t) = \big(\cos t, \sin t\big)^\top$.



Προσωμοίωση 1 της ΑΣΕ (4.295).



Προσωμοίωση 2 της ΑΣΕ (4.295).

Εν όψει του Ορισμού 4.50, το θεώρημα 4.48 λέει ότι οι θεμελιώδεις λύσεις της Δ_∞ είναι ακριβώς οι ΑΣΕ με C^1 καμπύλη ν. Όπως ο χαρακτηρισμός "εικόνας" υποδεικνύει, οι ΑΣΕ είναι κλασικές λύσεις της ΜΔΕ $|Du|^2 - L^2 = 0$ στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Όντως, από την (4.294), αν $z \neq x$ έχουμε

$$Du(z) \ = \ L\nu(|z-x|) \otimes \frac{z-x}{|z-x|} \tag{4.296}$$

και άρα $|Du(z)| = L$.

Απόδειξη του 4.48. Υποθέτουμε ότι η (i) ισχύει. Τότε υπάρχει $\Psi \in C^2(0,\infty)^N$ τέτοια ώστε $\Phi(x) = \Psi(|x|)$ and $\Delta_\infty \Phi(x) = 0$, για $x \neq 0$. Υπολογίζοντας, έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \Phi(x) &= \dot{\Psi}_\alpha(|x|)\dot{\Psi}_\beta(|x|)\ddot{\Psi}_\beta(|x|)e_\alpha \\ &= \dot{\Psi}(|x|)\Big(\dot{\Psi}(|x|)^\top \ddot{\Psi}(|x|)\Big) \\ &= \dot{\Psi}(|x|)\otimes\dot{\Psi}(|x|) : \ddot{\Psi}(|x|) \end{aligned} \tag{4.297}$$

όπου $(\dot{\ })$ δηλώνει συνήθη παράγωγο. Άρα,

$$\Delta_\infty \Phi(x) = \dot{\Psi}(|x|)\frac{d}{dt}\Big|_{t=|x|}\left(\frac{1}{2}\big|\dot{\Psi}(t)\big|^2\right). \tag{4.298}$$

Θέτουμε

$$I^+ = \big\{t>0 \ :\ \big|\dot{\Psi}(t)\big|>0\big\}, \tag{4.299}$$

$$I^0 = \big\{t>0 \ :\ \big|\dot{\Psi}(t)\big|=0\big\}. \tag{4.300}$$

Από τις (4.298), (4.299) και την υπόθεση $\Delta_\infty\Phi(x)=0$, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t^+}\left(\frac{1}{2}\big|\dot{\Psi}(t)\big|^2\right) = 0 \tag{4.301}$$

για κάθε $t^+ \in I^+$. Άρα, η (4.301) δίνει ότι η $\big|\dot{\Psi}\big|$ είναι τμηματικά σταθερή συνάρτηση, σταθερή σε κάθε υποδιάστημα του I^+. Αλλά η $\dot{\Psi}$ είναι $C^1(0,\infty)^N$. Άρα, αν $(t_m)_1^\infty$ είναι μια ακολουθία σε μια συνεκτική συνιστώσα του I^+ που προσεγγίζει συνοριακό σημείο του $t_\infty \in \partial I^+ \subseteq I^0$ για $m\to\infty$, τότε

$$\big|\dot{\Psi}(t_m)\big| = \text{const.} \longrightarrow \big|\dot{\Psi}(t_\infty)\big| = 0, \tag{4.302}$$

για $m\to\infty$. Συνεπώς, αν $\dot{\Psi}\not\equiv 0$, αναγκαστικά $I^0=\emptyset$. Υποθέτωντας την 2η εναλλακτική, υπάρχει $L>0$ ώστε $\big|\dot{\Psi}\big|=L$ στο $(0,\infty)$. Αν $0<t\leq s$, η εκτίμηση

$$\big|\Psi(t) - \Psi(s)\big| \leq \left(\max_{[t,s]}\big|\dot{\Psi}\big|\right)|t-s| \tag{4.303}$$

δίνει ότι το $\Psi(0)$ υπάρχει. Θέτουμε

$$\nu(t) := \frac{1}{L}\dot{\Psi}(t). \tag{4.304}$$

Η $\nu : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ είναι C^1. Ολοκληρώνοντας την (4.304), υπάρχει $u_0\in\mathbb{R}^N$ ώστε $u_0=\Psi(0)=\Phi(0)$ και

$$\Psi(t) = u_0 + L\int_0^t \nu(s)ds, \quad t>0. \tag{4.305}$$

Αφού $\Phi(x) = \Psi(|x|)$, η (ii) έπεται από την (4.305). Επιπλέον, $\Phi \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)^N$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή (ii) $\Longrightarrow$ (i) έπεται με υπολογισμό. $\square$

Τα επιχειρήματα στην απόδειξη συνεπάγεται το ακόλουθο

Πόρισμα 4.52 (Δες [A4], [J2], [E]) *Μια μη-σταθερή ∞-Αρμονική καμπύλη $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ που είναι C^2 δεν έχει κρίσιμα σημεία.*

Για να αποδείξουμε ότι οι ΑΣΕ είναι Λύσεις Επαφής της ΜΔΕ Εικόνας, υπολογίζουμε τα Jet Επαφής τους ώστε να ελέγξουμε τον Ορισμό 4.24.

Πρόταση 4.53 *Έστω $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ η ΑΣΕ της (4.294). Τότε*
(i) Αν το $\nu(0^+) := \lim_{t\to 0^+} \nu(t)$ υπάρχει, τότε

$$J^{1,\xi}u(z) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ L\nu(|z-x|) \otimes \dfrac{z-x}{|z-x|} \right\}, & \textit{if } z \neq x,\ \xi \in \mathbb{S}^{N-1}, \\[2ex] \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset, & \textit{if } z = x,\ \xi \neq -\nu(0^+), \\ L\nu(0^+) \otimes \overline{\mathbb{B}^n}, & \textit{if } z = x,\ \xi = -\nu(0^+). \end{array} \right. & \end{array} \right. \tag{4.306}$$

(ii) Αν $J^- := J^{1,-\nu(0^+)}_{[0,\infty)}\nu(0^+) \neq \emptyset$, τότε

$$\begin{aligned} \Big[\big(L\nu(0^+) \otimes \overline{\mathbb{B}^n} \big) \times \big(\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n) \big) \Big] \bigcup \Big[\big(L\nu(0^+) \otimes \mathbb{S}^{n-1} \big) & \\ \times \big(-\nu(0^+) \otimes \mathbb{S}^+(n) + LJ^- \otimes I \big) \Big] \;\subseteq\; & J^{2,-\nu(0^+)}u(x) \end{aligned} \tag{4.307}$$

(iii) Αν το $\dot{\nu}(0^+) := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[\nu(t) - \nu(0^+)]$ υπάρχει, τότε

$$J^{2,\xi}u(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset, & \textit{if } \xi \neq -\nu(0^+), \\[2ex] \Big[\big(L\nu(0^+) \otimes \overline{\mathbb{B}^n} \big) \times \big(\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{S}(n) \big) \Big] & \\ \bigcup \Big[\big(L\nu(0^+) \otimes \mathbb{S}^{n-1} \big) \times \big(-\nu(0^+) & \\ \quad \otimes \mathbb{S}^+(n) + L\dot{\nu}(0^+) \otimes I \big) \Big], & \textit{if } \xi = -\nu(0^+). \end{array} \right. \tag{4.308}$$

(iv) Αν $\nu \in C^{0,1}(0,\infty)^N$, τότε $u \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)^N$ και άρα $J^{2,\xi}u(z) \ni \{Du(z), D^2u(z)\}$ για σ.ό. τα $z \in \mathbb{R}^n$.

Αναβάλουμε την απόδειξη της Πρότασης 4.53 για το τέλος της παραγράφου.

Παρατήρηση 4.54 *Αν το $\nu(0^+)$ υπάρχει, τότε οι ΑΣΕ είναι ως 1η τάξη διανυσματικοί κώνοι με κορυφή στο x κατά μήκος του ξ: αφού $\nu(t) = \nu(0^+) + o(1)$ για $t \to 0^+$, από την (4.294) έχουμε*

$$
\begin{aligned}
u(z) \ &= \ u_0 \ + \ L\int_0^{|z-x|}\Big(\nu(0^+) \ + \ o(1)\Big)dt \\
&= \ u_0 \ + \ L\nu(0^+) \ + \ o(|z-x|),
\end{aligned}
\tag{4.309}
$$

για $z \to x$. Όμοια, αν το $\dot{\nu}(0^+)$ υπάρχει, υπάρχει ένας τετραγωνικός όρος "κάθετος στον κώνο": αφού $\nu(t) = \nu(0^+) + \dot{\nu}(0^+)t + o(t)$ για $t \to 0^+$, από την (4.294) έχουμε

$$
u(z) \ = \ u_0 \ + \ L\nu(0^+) \ + \ \frac{L}{2}\dot{\nu}(0^+)|z-x|^2 \ + \ o(|z-x|^2), \tag{4.310}
$$

για $z \to x$.

Τώρα, εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.53 και τον Ορισμό 4.24 για να θεσπίσουμε ότι όλες οι ΑΣΕ (και εν όψει του Θεωρήματος 4.48 οι Θεμελιώδεις λύσεις της Δ_∞) είναι Λύσεις Επαφής της ΜΔΕ Εικόνας.

Θεώρημα 4.55 (Οι ΑΣΕ είναι Συναρτήσεις Εικόνας) *Θεωρούμε την $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ του Ορισμού 4.50 και έστω ότι το $\nu(0^+)$ υπάρχει.*

(i) Αν το $\nu(0^+)$ είναι θετικά προσανατολισμένο, δηλ. όταν $\nu(0^+) \in \mathbb{S}^{N-1,+}$ (δες την (4.168)), τότε η u είναι Λύση Επαφής της

$$
H(Du) \ := \ \big|Du\big|^2 \ - \ 1 \ = \ 0. \tag{4.311}
$$

(ii) Αν το $\nu(0^+)$ είναι αρνητικά προσανατολισμένο, δηλ. όταν $\nu(0^+) \in \mathbb{S}^{N-1,-}$ (δες (4.169)), τότε η u είναι Λύση Επαφής της

$$
-\,H(Du) \ = \ 0 \tag{4.312}
$$

και η $-u$ είναι Λύση Επαφής της $H(Du) = 0$.

Απόδειξη του 4.55 (i) Από τις (4.296) και (4.306), αρκεί να ελέγξουμε τον Ορισμό 4.24 στο σημείο μη-παραγωγισιμότητας $z = x$. Αν $\xi \neq -\nu(0^+)$, τότε $J^{1,\xi}u(x) = \emptyset$. Αν $\xi = -\nu(0^+)$, τότε $J^{1,-\nu(0^+)}u(x) = L\nu(0^+) \otimes \overline{\mathbb{B}^n}$. Έστω

$\mathrm{P} \in J^{1,-\nu(0^+)}u(x)$. Άρα, $\mathrm{P} = L\nu(0^+)\otimes p$, για κάποιο p με $|p| \leq 1$. Αν $\nu(0^+) \in \mathbb{S}^{N-1,+}$, τότε $-\nu(0^+) \in \mathbb{S}^{N-1,-}$ και συνεπώς αν $\mathrm{P} \in J^{1,(-\nu(0^+))^+}u(x)$, έχουμε

$$\begin{aligned} H(\mathrm{P}) \ &= \ \big|L\nu(0^+) \otimes p\big|^2 \ - \ L^2 \\ &= \ L^2|p| \ - \ L^2 \\ &\leq \ 0. \end{aligned} \tag{4.313}$$

Άρα, η u είναι Λύση Επαφής της $H(Du) = 0$. Η (ii) είναι παρόμοια. □

Παρατήρηση 4.56 *Παρατηρήστε το ενδιαφέρον γεγονός ότι οι εξισώσεις $H(Du) = 0$ και $-H(Du) = 0$* δεν είναι ισοδύναμες *στο πλαίσιο των μη-διαφορίσιμων Λύσεων Επαφής.*

Αυτό το φαινόμενο εμφανίζεται και στην βαθμωτή περίπτωση των Λύσεων Ιξώδους και χονδρικά είναι η αιτία που έχουμε τις επιθυμητές ιδιότητες μοναδικότητας, διαχωρίζοντας την "καλή" λύση ιξώδους μεταξύ των πολλών ισχυρών σ.π. λύσεων (δες [CIL]).

Απόδειξη του 4.53. (i) Αφού από την (4.294) η u είναι C^1 εκτός της αρχής, από το Θεώρημα 4.20 και την (4.296), το πρώτο μέρος της (4.306) έπεται. Έστω τώρα $\mathrm{P} \in J^{1,\xi}u(x)$. Τότε

$$\xi \vee \left[L \int_0^{|z-x|} \nu(t)dt \ - \ \mathrm{P}(z-x) \right] \ \leq \ o(|z-x|), \tag{4.314}$$

για $z \to x$. Θέτουμε $z := x + \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$, $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ στην (4.314) για να πάρουμε

$$\xi \vee \left[L \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \nu(t)dt \ - \ \mathrm{P}w \right] \ \leq \ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{4.315}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Αφού το $\nu(0^+)$ υπάρχει, περνώντας στο όριο στην (4.315) έχουμε

$$\xi \vee \left[L\nu(0^+) \ - \ \mathrm{P}w \right] \ \leq \ 0, \tag{4.316}$$

στον $\mathbb{S}(n)$. Αντικαθιστώντας το w με $-w$ στην (4.316) παίρνουμε $\xi \vee \nu(0^+) \leq 0$. Από την Πρόταση 4.5, εξάγουμε $\xi = -\nu(0^+)$. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του ξ στην (4.316), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{P}w \ - \ L\nu(0^+) \ &= \ \Big[\nu(0^+)^\top\big(\mathrm{P}w \ - \ L\nu(0^+)\big)\Big]\nu(0^+) \\ &= \ \Big[\nu(0^+) \otimes \big(\nu(0^+)^\top \mathrm{P}\big)\Big]w \ - \ L\nu(0^+). \end{aligned} \tag{4.317}$$

Από την (4.317), βρίσκουμε $\mathrm{P} = \nu(0^+) \otimes p$ για κάποιο $p \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, αφου

$$0 \ \le \ \nu(0^+)^\top \big(\mathrm{P}w \ - \ L\nu(0^+)\big) \ = \ p^\top w \ - \ L, \tag{4.318}$$

έχουμε $|p| = \max\{p^\top w : w \in \mathbb{S}^{n-1}\} \le L$. Άρα $J^{1,\xi}u(x) \neq \emptyset$ μόνο για $\xi = -\nu(0^+)$ και $J^{1,-\nu(0^+)}u(x) \subseteq L\nu(0^+) \otimes \overline{\mathbb{B}^n}$. Αντίστροφα, αν $\xi = -\nu(0^+)$ και $\mathrm{P} = L\nu(0^+) \otimes p$ για κάποιο $p \in \overline{\mathbb{B}^n}$, τότε

$$\begin{aligned}
&-\nu(0^+) \vee \left[L \int_0^{|z-x|} \nu(t)dt \ - \ \big(L\nu(0^+) \otimes p\big)(z-x) \right] \\
&\quad = \ -\nu(0^+) \vee \left[L \frac{1}{|z-x|} \int_0^{|z-x|} \nu(t)dt - L\nu(0^+)\big(p^\top \mathrm{sgn}\, \nu(z-x)\big) \right] |z-x| \\
&\quad = \ -\nu(0^+) \vee \left[L\Big(\nu(0^+) \ + \ o(1)\Big) - L\nu(0^+)\big(p^\top \mathrm{sgn}\, \nu(z-x)\big) \right] |z-x| \\
&\quad \le \ \big(|p| - 1\big)\nu(0^+) \otimes \nu(0^+) \ + \ o(|z-x|) \\
&\quad \le \ o(|z-x|),
\end{aligned} \tag{4.319}$$

για $z \to x$, στον $\mathbb{S}(n)$. Άρα, από την (4.319) λαμβάνουμε $L\nu(0^+) \otimes \overline{\mathbb{B}^n} \subseteq J^{1,-\nu(0^+)}u(x)$ και η (4.306) έπεται.

(ii) Έστω $q \in J^-$. Τότε, από τον Ορισμό 4.6, έχουμε

$$-\,\nu(0^+) \vee \big[\nu(t) \ - \ \nu(0^+) \ - \ qt\big] \ \le \ o(t), \tag{4.320}$$

για $t \to 0^+$. Ολοκληρώνοντας την (4.320) στο $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$-\,\nu(0^+) \vee \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \nu(t)dt \ - \ \nu(0^+) \ - \ q\frac{\varepsilon}{2} \right] \ \le \ o(\varepsilon), \tag{4.321}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Σταθεροποιούμε $(p, \mathbf{X}) \in \overline{\mathbb{B}^n} \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{S}(n))$ και θέτουμε

$$\begin{aligned}
T_2(z-x) \ := \ -\nu(0^+) \vee \Big[& u(z) - u(x) - L\nu(0^+) \otimes p(z-x) \\
& - \frac{1}{2}\mathbf{X} : (z-x) \otimes (z-x) \Big].
\end{aligned} \tag{4.322}$$

Εφαρμόζοντας την (4.321), η (4.322) εκτιμάται ως

$$
\begin{aligned}
T_2(z-x) \;&=\; -L\nu(0^+)\vee\left[\int_0^{|z-x|}\nu(t)dt \;-\; \nu(0^+)p^\top \mathrm{sgn}\,\nu(z-x)\right]|z-x| \\
&\qquad +\;\frac{1}{2}\nu(0^+)\vee\mathbf{X}:(z-x)\otimes(z-x) \qquad (4.323)\\
&\le\; o(|z-x|^2)\;+\;L\big(|p|-1\big)\nu(0^+)\otimes\nu(0^+)|z-x| \\
&\qquad +\;\frac{1}{2}\nu(0^+)\vee\big[\mathbf{X}\;-\;Lq\otimes I\big]:(z-x)\otimes(z-x),
\end{aligned}
$$

για $z\to x$, στον $\mathbb{S}(n)$. Υποθέτουμε τώρα ότι το $\mathbf{X}$ είναι της μορφής

$$
\mathbf{X}\;=\;Lq\otimes I\;-\;\nu(0^+)\otimes X, \tag{4.324}
$$

για κάποιο $X\in\mathbb{S}^+(n)$. Αν $|q|=1$, από την (4.323) έχουμε

$$
\begin{aligned}
T_2(z-x)\;&\le\;o(|z-x|^2)\;-\;\frac{1}{2}\Big(X:(z-x)\otimes(z-x)\Big)\nu(0^+)\otimes\nu(0^+)\\
&\le\;o(|z-x|^2), \qquad (4.325)
\end{aligned}
$$

για $z\to x$. Έστω τώρα $|q|<1$. Τότε για κάθε $\eta\in\mathbb{S}^{N-1}$, η (4.323) δίνει

$$
\begin{aligned}
T_2(z-x):\eta\otimes\eta\;&\le\;o(|z-x|^2)\;-\;L\big(\eta^\top\nu(0^+)\big)^2\big(1-|p|\big)|z-x| \qquad (4.326)\\
&\qquad +\frac{1}{2}\big(\eta^\top\nu(0^+)\big)\Big(\eta^\top\big[\mathbf{X}\;-\;Lq\otimes I\big]:(z-x)\otimes(z-x)\Big),
\end{aligned}
$$

για $z\to x$. Επιλέγουμε $\eta=\eta(z)$ ως το ιδιοδιάνυσμα του $T_2(z-x)$ που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή $\max\sigma\big(T_2(z-x)\big)$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\max\sigma\big(T_2(z-x)\big)\;&=\;\max_{\eta\in\mathbb{S}^{N-1}}T_2(z-x):\eta\otimes\eta\\
&=\;T_2(z-x):\eta(z)\otimes\eta(z)\\
&\le\;o(|z-x|^2)\;-\;L\big(\eta(z)^\top\nu(0^+)\big)^2\big(1-|p|\big)|z-x|\\
&\qquad +\frac{1}{2}\big(\eta(z)^\top\nu(0^+)\big)\Big(\eta(z)^\top\big[\mathbf{X}-Lq\otimes I\big]:(z-x)\otimes(z-x)\Big) \qquad (4.327)\\
&\le\;o(|z-x|^2)\;+\;\frac{1}{2}\big|\eta(z)^\top\nu(0^+)\big|\Bigg\{\big|\mathbf{X}\;-\;Lq\otimes I\big|z-x|\\
&\qquad\qquad -\;2L\big(1-|p|\big)\big|\eta(z)^\top\nu(0^+)\big|\Bigg\},
\end{aligned}
$$

για $z \to x$. Θέτουμε

$$\Omega \;:=\; \Big\{ z \in \mathbb{R}^n \;:\; \big|\mathbf{X} - Lq\otimes I\big||z-x| \;<\; 2L\big(1-|p|\big)\big|\eta(z)^\top \nu(0^+)\big|. \Big\}. \tag{4.328}$$

Τότε, έχουμε $\max \sigma\big(T_2(z-x)\big) \le\; o(|z-x|^2)$, as $\Omega \ni z \to x$. Από την άλλη, στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni z \to x$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\max \sigma\big(T_2(z-x)\big) \;&\le\; o(|z-x|^2) \;+\frac{1}{2}\big|\mathbf{X} \;-\; Lq\otimes I\big|\big|\eta(z)^\top \nu(0^+)\big||z-x|^2 \\
&\le\; o(|z-x|^2) \\
&\quad\; +\; \frac{1}{2}\big|\mathbf{X} \;-\; Lq\otimes I\big| \left(\frac{\big|\mathbf{X} \;-\; Lq\otimes I\big|}{2L\big(1-|p|\big)}|z-x| \right) |z-x|^2 \\
&=\; o(|z-x|^2) \;+\; \frac{\big|\mathbf{X} \;-\; Lq\otimes I\big|^2}{4L\big(1-|p|\big)}|z-x|^3 \\
&=\; o(|z-x|^2).
\end{aligned} \tag{4.329}$$

Άρα, η (4.307) έπεται χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.20.

(iii) Έστω $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Τότε $\mathrm{P} \in J^{1,\xi}u(x)$. Άρα, $\xi = -\nu(0^+)$ και $\mathrm{P} = L\nu(0^+) \otimes p$ για κάποιο $p \in \overline{\mathbb{B}^n}$. Θέτουμε $z := x + \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$, $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ στην (4.322) για να βρουμε

$$\begin{aligned}
-L\nu(0^+) \vee \left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \nu(t)dt \;-\; \nu(0^+)\big(p^\top w\big) \right] \varepsilon \\
+\; \frac{\varepsilon^2}{2}\nu(0^+) \vee \big[\mathbf{X} : w\otimes w\big] \;\le\; o(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{4.330}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Αφού το $\dot\nu(0^+)$ υπάρχει, έχουμε $\nu(t) = \nu(0^+) + \dot\nu(0^+)t + o(t)$ για $t \to 0^+$. Ολοκληρώνοντας στο $[0, \varepsilon]$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \nu(t)dt \;=\; \nu(0^+) \;+\; \dot\nu(0^+)\frac{\varepsilon}{2} \;+\; o(\varepsilon), \tag{4.331}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Από τις (4.331), έχουμε

$$\begin{aligned}
-L\nu(0^+) \vee \big[\mathbf{X} - L\dot\nu(0^+) \otimes I\big] : w\otimes w \;\le\; \frac{L}{\varepsilon}(1 - p^\top w)\nu(0^+) \otimes \nu(0^+) \\
+\; \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},
\end{aligned} \tag{4.332}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Αν $|p| = 1$, επιλέγουμε $w := p$ και σταθεροποιούμε $\eta \in \mathbb{S}^{N-1}$. Τότε

$$\nu(0^+) \vee \big[\mathbf{X} - L\dot{\nu}(0^+) \otimes I\big] : (\eta \otimes w) \otimes (\eta \otimes w) \ \le\ o(1), \tag{4.333}$$

για $\varepsilon \to 0^+$ και περνώντας στο όριο στην (4.333), λαμβάνουμε

$$\nu(0^+) \vee \big[\mathbf{X} - L\dot{\nu}(0^+) \otimes I\big] \ \le_{\otimes}\ 0, \tag{4.334}$$

στον $\mathbb{S}(N, n)$. Αφού το $\dot{\nu}(0^+)$ είναι κάθετο στο $\nu(0^+)$, εφαρμογή της Πρότασης 4.5 στην (4.334) δίνει

$$\mathbf{X} \ =\ L\dot{\nu}(0^+) \otimes I \ -\ \nu(0^+) \otimes X, \tag{4.335}$$

για κάποιο $X \ge 0$ στον $\mathbb{S}(n)$. Άρα, η (4.308) έπεται χρησιμοποιώντας τις (4.335), (4.307) και ότι αν το $\dot{\nu}(0^+)$ υπάρχει, το μονόπλευρο Jet ικανοποιεί

$$J^{1,-\nu(0^+)}_{[0,\infty)}\nu(0^+) \ \subseteq\ \dot{\nu}(0^+) \ -\ \nu(0^+)[0, \infty) \tag{4.336}$$

όπως εύκολα ελέγχεται από τους ορισμούς και την Πρόταση 4.5.

Τέλος, για το (iv) εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rademacher και το Θεώρημα 4.18(c). □

4.8.2 ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ $C^{1,\frac{1}{2}+}(\mathbb{R}^n)^N$ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΚΟΝΑΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΦΗΣ ΤΗΣ ∞-ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗΣ

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε μια κλάση ∞-Αρμονικών διανυσματικών συναρτήσεων που προκύπτουν σαν κλασικές λύσεις της ΜΔΕ Εικόνας. Αυτές οι ∞-Αρμονικές συναρτήσεις μπορεί να είναι αρκετά ιδιάζουσες ώστε να μην διαθέτουν Εσσιανές *πουθενά* και οι 2ες παράγωγοι να υλοποιούνται μόνο από γνήσιες κατανομές 1ης τάξης. Αφού η ∞-Λαπλασιανή (4.103) είναι μη-γραμμικό σύστημα 2ης τάξης και δεν είναι σε μορφή απόκλισης, *κλασικές, ισχυρές σ.π., ασθενείς, μετρο-θεωρητικές και κατανομικές λύσεις γενικα δεν υπάρχουν* (δες Παρατήρηση 4.59). Η Θεωρία των Λύσεων Επαφής αποτελεί έναν συστηματικό γενικό πλαίσιο για να ερμηνεύσουμε τις ιδιάζουσες λύσεις και να τις μελετήσουμε αυστηρά με αποτελεσματικές μεθόδους παρόμοιες με αυτές της βαθμωτής περίπτωσης των Λύσεων Ιξώδους.

Έστω $\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ μια C^2 καμπύλη στην σφαίρα, $K \in C^0(\mathbb{R})$ μια συνεχής συνάρτηση και $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ μια σταθερή κατεύθυνση. Τότε, η έκφραση

$$u(x) \ :=\ \int_0^{w^\top x} \nu\big(K(t)\big)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.337}$$

ορίζει μια C^1 συνάρτηση Εικόνας $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Πράγματι, παραγωγίζοντας την (4.337), παίρνουμε

$$Du(x) \;=\; \nu\big(K(w^\top x)\big) \otimes w \tag{4.338}$$

και άρα, από την (4.292), έχουμε

$$\begin{aligned} \big|Du(x)\big|^2 \;&=\; \big|\nu\big(K(w^\top x)\big) \otimes w\big|^2 \\ &=\; \big|\nu\big(K(w^\top x)\big)\big|^2 |w|^2 \\ &=\; 1. \end{aligned} \tag{4.339}$$

Από τις (4.103) και (4.291), βλέπουμε ότι όταν εφαρμόζεται σε C^2 συναρτήσεις, η ∞-Λαπλασιανή συμπτύσσσεται σε

$$\Delta_\infty u \;=\; Du\, D\left(\frac{1}{2}\big|Du\big|^2\right). \tag{4.340}$$

Άρα, είναι προφανές ότι οι κλασικές λύσεις της ΜΔΕ Εικόνας "οφείλουν" να είναι "λύσεις" της $\Delta_\infty u = 0$. Αυτό είναι όντως αληθές στην βαθμωτή περίπτωση: παντού παραγωγίσιμες Lipschitz συνεχείς (και άρα C^1) συναρτήσεις Εικόνας είναι λύσεις Ιξώδους της ΜΔΕ ∞-Λαπλασιανή (δες [CEG], [C]). Όμως, η ανηγμένη ∞-Λαπλασιανή (4.103) και η συνεπτυγμένη ∞-Λαπλασιανή (4.340) *δεν* είναι ισοδύναμες για μη-C^2 συναρτήσεις. Για να μελετήσουμε τις λύσεις του συστήματος ∞-Λαπλασιανή αυστηρά και αποτελεσματικά, εφαρμόζουμε τις

Ορισμός 4.57 (Λύσεις Επαφής της Δ_∞, δες Ορισμό 4.6) *Η συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ είναι Λύση Επαφής της ∞-Λαπλασιανής*

$$\Delta_\infty u \;=\; Du \otimes Du : D^2 u \;=\; 0 \tag{4.341}$$

αν $u \in C^0(\mathbb{R}^n)^N$ και

$$(P, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi} u(x) \quad \Longrightarrow \quad \xi^\top \big(P \otimes P : \mathbf{X}\big) \;\geq\; 0, \tag{4.342}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Σε τέτοια περίπτωση, η u θα λέγεται ∞-Αρμονική (με την έννοια της Επαφής).

Θεώρημα 4.58 (Μια Οικογένεια $C^{1,\frac{1}{2}+}$ ∞-Αρμονικών Συναρτήσεων) *Έστω $\nu \in C^{1,1}(\mathbb{R})^N$ με $|\nu| \equiv 1$ μια καμπύλη στη μοναδιαία σφαίρα, $K \in$*

$C^{\frac{1}{2}+}(\mathbb{R})$ *μια Hölder συνεχής συνάρτηση και* $w \in \mathbb{S}^{N-1}$. *Τότε, η συνάρτηση Εικόνας*

$$u(x) \ = \ \int_0^{w^\top x} \nu\big(K(t)\big)dt, \qquad u \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N, \tag{4.343}$$

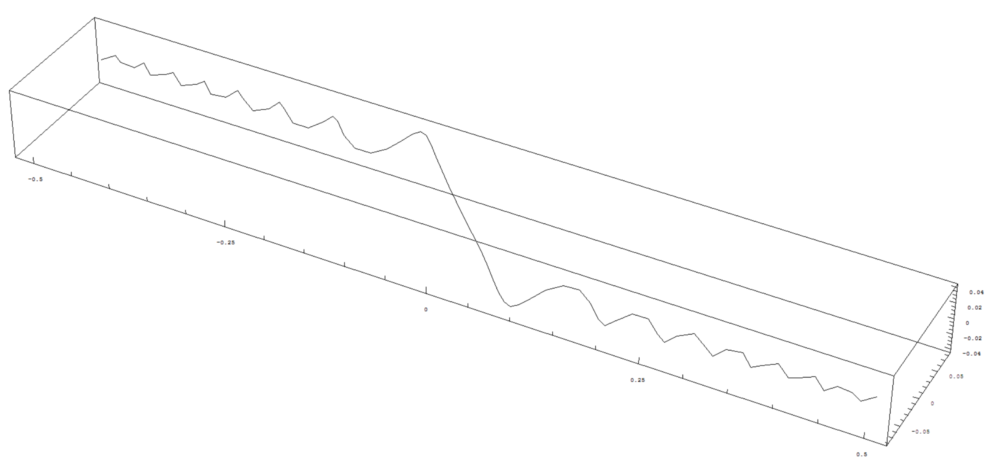
ορίζει μια $C^{1,\frac{1}{2}+}(\mathbb{R}^n)^N$ *Λύση Επαφής της* ∞*-Λαπλασιανής*

$$\Delta_\infty u \ = \ Du \otimes Du : D^2 u \ = \ 0. \tag{4.344}$$

Παρατήρηση 4.59 *Η ιδιάζουσα συνάρτηση* K *του τελευταίου μέρους της Διατριβής ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος 4.58 αλλά είναι πουθενά παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι γνήσια κατανομή 1ης τάξης. Επιπλέον, όποιο* $\alpha > \frac{1}{2}$ *και αν επιλέξουμε σαν Hölder εκθέτη, η ομαλότητά της δεν βελτιώνεται σε κανένα* $\beta > \alpha$ *και ειδικότερα δεν είναι πουθενά ούτε Lipschitz ούτε παραγωγίσιμη.*

Σαν αποτέλεσμα, έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 4.60 *Όταν* $N > 1$, *υπάρχουν* ∞*-Αρμονικές συναρτήσεις στον* $C^{1,\frac{1}{2}+}(\mathbb{R}^n)^N$ *σημειακά πουθενά 2 φορές παραγωγίσιμες με Εσσιανές γνήσιες κατανομές που δεν υλοποιούνται από μέτρα Radon. Επιπλέον, ο Hölder εκθέτης τους δεν βελτιώνεται και για κάθε* $\alpha > \frac{1}{2}$ *Hölder εκθέτη, η* $C^{1,\alpha}$ *ομαλότητά τους δεν βελτιώνεται σε κανένα* $\beta > \alpha$.



Προσωμοίωση της ∞-Αρμονικής καμπύλης $u(x) = \int_0^x \Big(\cos\big(400\cos(t)\big), \sin\big(400\cos(t)\big)\Big)^\top dt$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα θέτει όρια στο τι μπορεί να είναι αλήθεια όσον αφορά το Πρόβλημα Ομαλότητας για τον διανυσματικό τελεστή Δ_∞. Στην βαθμωτή περίπτωση είναι γνωστό ότι υπάρχουν $C^{1,\frac{1}{3}}$ λύσεις ιξώδους στο επίπεδο και αυτό επίσης θέτει όρια στο ακόμα ανοικτό αυτό πρόβλημα (για $n > 2$, δες και το επόμενο μέρος της Διατριβής). Αν $N = 1$, τότε $\nu \equiv \pm 1$ και από την (4.343) έχουμε $u(x) = \pm w^\top x$. Άρα, στην βαθμωτή περίπτωση οι ιδιάζουσες ∞-Αρμονικές συναρτήσεις μας εκφυλίζονται σε *γραμμικές* συναρτήσεις.

Στην πορεία της απόδειξης θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα ανεξάρτητου ενδιαφέροντος το οποίο λέει χονδρικά λέει ότι η $F \circ g$ έχει παράγωγο, όταν η F έχει 2 παραγώγους και η g κάτι παραπάνω από 1/2 παράγωγο.

Αν $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow R^N$, έστω $D_h g$ ο τελεστής *πηλίκου διαφορών*:

$$\big(D^i_h g\big)(x) \ := \frac{g(x + h\, e_i) \ - \ g(x)}{h} \ \in \ \mathbb{R}^N, \tag{4.345}$$

$$\big(D_h g\big)(x) \ := \big(D^i_h g\big)(x) \otimes e_i \qquad \in \ \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n. \tag{4.346}$$

Λήμμα 4.61 *Υποθέτουμε ότι $0 < \alpha, \beta \leq 1$ και έστω $F \in C^{1,\beta}(\mathbb{R}^n)^m$, $g \in C^{\alpha+}(\mathbb{R}^n)^m$ με $\alpha(1+\beta) \geq 1$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε*

$$D\big(F \circ g\big)(x) \ = \ \lim_{h \to 0} \Big[DF\big(g(x)\big)^\top \big(D_h g\big)(x) \Big], \tag{4.347}$$

όποτε το όριο υπάρχει.

Ειδικά, αν $g(x) \in \{DF = 0\}$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$, τότε η $F \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x με $D\big(F \circ g\big)(x) = 0$, ανεξάρτητα ομαλότητας της g.

Η βέλτιστη περίπτωση ελάχιστης ομαλότητας της $F \circ g$ προκύπτει όταν $F \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n)^m$ και $g \in C^{\frac{1}{2}+}(\mathbb{R}^n)^m$.

Απόδειξη του 4.61. Εξ' υποθέσεως, αν $y \in \mathbb{R}^m$ και $|z - y| \leq 1$, υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$|F(z) - F(y) - DF(y)^\top (z - y)| \ \leq \ C|z - y|^{1+\beta}. \tag{4.348}$$

Σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, ..., n\}$ και $h \neq 0$ και θέτουμε $y := g(x)$, $z := g(x + he_i)$. Τότε, από την (4.348) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\big(F \circ g\big)(x + he_i) - \big(F \circ g\big)(x)}{h} \ - \ DF\big(g(x)\big)^\top \left(\frac{g(x + he_i) \ - \ g(x)}{h} \right) \right| \\
&\qquad \leq \ C \frac{1}{|h|} \big| g(x + he_i) - g(x) \big|^{1+\beta} \\
&\qquad \leq \ C \frac{1}{|h|} \omega(|h|)^{1+\beta} |h|^{\alpha(1+\beta)}
\end{aligned} \tag{4.349}$$

για $h \to 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}\Big|D_h\big(F\circ g\big)(x) \;-\; DF\big(g(x)\big)\big(D_h g\big)(x)\Big| &\leq C\omega(|h|)^{1+\beta}\\ &=\; o(1),\end{aligned} \tag{4.350}$$

για $h \to 0$. □

Απόδειξη του 4.58. Υποθέτουμε ότι $(\mathrm{P}, \mathbf{X}) \in J^{2,\xi}u(x)$. Τότε από την (4.338) και το Θεώρημα 4.20, έχουμε $\mathrm{P} = Du(x) = \nu\big(K(w^\top x)\big)\otimes w$. Από τον Ορισμό 4.6 και αφού $\xi \vee \mathbf{X} \in \mathbb{S}(N\times n)$, για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$\begin{aligned}\xi \vee \big[u(z)-u(x)-Du(x)(z-x)\big] &: \eta\otimes\eta\\ &\leq\; \frac{1}{2}\big[\xi\vee\mathbf{X} : (z-x)\otimes(z-x)\big] : \eta\otimes\eta \;+\; o(|z-x|^2) \qquad (4.351)\\ &=\; \frac{1}{2}\big[\xi\vee\mathbf{X}\big] : \big(\eta\otimes(z-x)\big)\otimes\big(\eta\otimes(z-x)\big) \;+\; o(|z-x|^2),\end{aligned}$$

για $z\to x$. Θέτουμε $z := x \pm \varepsilon w$ για $\varepsilon\in\mathbb{R}$ και $\eta := \nu\big(K(w^\top x)\big)$ στην (4.351) για να πάρουμε

$$\begin{aligned}\left(\xi\vee\int_{w^\top x}^{w^\top x\pm\varepsilon}\nu\big(K(t)\big)dt \;\mp\; \varepsilon\,\nu\big(K(w^\top x)\big)\right) &: \nu\big(K(w^\top x)\big)\otimes\nu\big(K(w^\top x)\big)\\ &\leq\; \frac{\varepsilon^2}{2}\big[\xi\vee\mathbf{X} : w\otimes w\big] : \nu\big(K(w^\top x)\big)\otimes\nu\big(K(w^\top x)\big) \;+\; o(\varepsilon^2)\\ &=\; \frac{\varepsilon^2}{2}\big[\xi\vee\mathbf{X}\big] : \Big(\nu\big(K(w^\top x)\big)\otimes w\Big)\otimes\Big(\nu\big(K(w^\top x)\big)\otimes w\Big) + o(\varepsilon^2) \qquad (4.352)\\ &=\; \frac{\varepsilon^2}{2}\big[\xi\vee\mathbf{X}\big] : Du(x)\otimes Du(x) \;+\; o(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

για $\varepsilon\to 0$. Προσθέτωντας τις 2 ανισότητες που αποτελούν την (4.352), έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon^2}{2}\big[\xi\vee\mathbf{X}\big] &: Du(x)\otimes Du(x) \;+\; o(\varepsilon^2)\\ &\geq\; \xi\vee\left(\int_{w^\top x}^{w^\top x+\varepsilon}\nu\big(K(t)\big)dt \;+\; \int_{w^\top x}^{w^\top x-\varepsilon}\nu\big(K(t)\big)dt\right) \qquad (4.353)\\ &\quad : \nu\big(K(w^\top x)\big)\otimes\nu\big(K(w^\top x)\big)\\ &=:\; f(\varepsilon),\end{aligned}$$

για $\varepsilon\to 0$.

Ισχυρισμός 4.62 *Η f στην (4.353) είναι $C^1(\mathbb{R})$ και ικανοποιεί $f''(0) = f'(0) = f(0) = 0$.*

Απόδειξη του 4.62. Από την (4.353), έχουμε

$$f'(\varepsilon) \;=\; \Big(\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top \xi\Big)\Bigg(\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top\Big[\nu\big(K(w^\top x{+}\varepsilon)\big) - \nu\big(K(w^\top x{-}\varepsilon)\big)\Big]\Bigg). \tag{4.354}$$

Προφανώς, $f'(0) = f(0) = 0$. Θα δείξουμε ότι $f''(0) = 0$ εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.61 για

$$\begin{aligned} n \;=\; m \;=\; 1,\; N \;\geq\; 1, \alpha = \frac{1}{2},\; \beta = 1, \qquad & (4.355)\\ F(t) \;:=\; \Big(\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top \xi\Big)\Big[\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top \nu(t)\Big], \qquad & (4.356)\\ g^{\pm}(\varepsilon) \;:=\; K(w^\top x \pm \varepsilon). \qquad & (4.357)\end{aligned}$$

Πράγματι, από τις (4.354) - (4.357), έχουμε

$$f'(\varepsilon) \;=\; \big(F\circ g^+\big)(\varepsilon) \;-\big(F\circ g^-\big)(\varepsilon) \tag{4.358}$$

και τότε από τις (4.347), (4.354) έχουμε

$$\begin{aligned} \big(F\circ g^{\pm}\big)'(0) \;&=\; \lim_{h\to 0} \dot F\big(g^{\pm}(0)\big)\left(\frac{g^{\pm}(h) \;-\; g^{\pm}(0)}{h}\right)\\ &=\; \lim_{h\to 0} \Big(\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top \xi\Big)\Big[\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top \dot\nu\big(K(w^\top x)\big)\Big]\cdot\\ &\quad\cdot\left[\frac{K(w^\top x \pm h) \;-\; K(w^\top x)}{h}\right] \qquad (4.359)\\ &=\; \lim_{h\to 0} \Big(\nu\big(K(w^\top x)\big)^\top \xi\Big)\frac{d}{dt}\bigg|_{t=K(w^\top x)}\left(\frac{1}{2}|\nu(t)|^2\right)\cdot\\ &\quad\cdot\left[\frac{K(w^\top x \pm h) \;-\; K(w^\top x)}{h}\right]\\ &=\; 0.\end{aligned}$$

Από τις (4.358) και (4.359), βρίσκουμε ότι $f''(0) = 0$. $\square$

Από τον Ισχυρισμό 4.62, έχουμε

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) \;&=\; f(0) \;+\; f'(0)\varepsilon \;+\; \frac{1}{2}f''(0)\varepsilon^2 \;+\; o(\varepsilon^2)\\ &=\; o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{4.360}$$

για $\varepsilon \to 0$. Άρα, από την (4.360), διαιρώντας την (4.353) με ε^2 και περνώντας στο όριο $\varepsilon \to 0$, βρίσκουμε

$$\big(\xi \vee \mathbf{X}\big) : Du(x) \otimes Du(x) \ \geq \ 0. \tag{4.361}$$

Από την ταυτότητα

$$\begin{aligned}
\xi^\top \big(\mathbf{A} : \mathbf{X}\big) \ &= \xi_\alpha \big(\mathbf{A}_{\alpha i \beta j} \mathbf{X}_{\beta i j}\big) \\
&= \mathbf{A}_{\alpha i \beta j} \left(\frac{1}{2}\big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta i j}\big) \ + \ \frac{1}{2}\big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta i j}\big)\right) \\
&= \mathbf{A}_{\alpha i \beta j} \left(\frac{1}{2}\big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta i j}\big)\right) \ + \ \mathbf{A}_{\beta j \alpha i} \left(\frac{1}{2}\big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta j i}\big)\right) \\
&= \mathbf{A}_{\alpha i \beta j} \left(\frac{1}{2}\big(\xi_\alpha \mathbf{X}_{\beta i j} \ + \ \xi_\beta \mathbf{X}_{\alpha i j}\big)\right) \\
&= \mathbf{A} : (\xi \vee \mathbf{X})
\end{aligned} \tag{4.362}$$

(όπου το τελευταίο “:” είναι το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{S}(N \times n)$) με $\mathbf{A} := Du(x) \otimes Du(x) \in \mathbb{R}^{N \times n} \otimes \mathbb{R}^{N \times n}$, ξαναγράφουμε την (4.361) ως

$$\xi^\top \big(Du(x) \otimes Du(x) : \mathbf{X}\big) \ \geq \ 0, \tag{4.363}$$

όποτε $(Du(x), \mathbf{X}) \in J^{2,\xi} u(x)$. Άρα, η u είναι ∞-Αρμονική συνάρτηση και το Θεώρημα έπεται. $\square$

5 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΙΞΩΔΟΥΣ ΤΗΣ ΜΔΕ ARONSSON

Έστω $H \in C^1(\mathbb{R}^n)$ και $n \geq 2$. Σε αυτό το κεφάλαιο συζητάμε πτυχές του Προβλήματος C^1 Ομαλότητας Λύσεων Ιξώδους της ΜΔΕ Aronsson, που ορίζεται σε ομαλές $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ από

$$\mathcal{A}[u] \ := D^2u : H_p(Du) \otimes H_p(Du) \ = \ 0. \tag{5.1}$$

Εδώ, ο $\mathcal{A}[u]$ ερμηνεύεται ως $\sum_{i,j=1}^{n} D^2_{ij}u\, H_{p_i}(Du)\, H_{p_j}(Du)$ και $H_{p_i} = D_{p_i}H$. Η (5.1) ορίζει μια σχεδόν-γραμμική εξαιρετικά εκφυλισμένη ΜΔΕ 2ης τάξης. Προκύπτει σε L^∞ ματαβολικά προβλήματα του μεγιστικού συναρτησιακού $E_\infty(u,\Omega) := \|H(Du)\|_{L^\infty(\Omega)}$, καθώς και σε άλλα πλαίσια (Barron-Evans-Jensen [BEJ]). Όταν $H(p) = \frac{1}{2}|p|^2$, η (5.1) ανάγεται στην ∞-Λαπλασιανή:

$$\Delta_\infty u \ := \ D^2u : Du \otimes Du \ = \ 0. \tag{5.2}$$

Κάτω από εύλογες υποθέσεις κυρτότητας, πιεστικότητας και ομαλότητας της H, υπάρχει μοναδική συνεχής λύση ιξώδους δεδομένων Lipschitz συνοριακών τιμών, ερμηνευμένων με την έννοια ιξώδους των Crandall-Ishii-Lions [CIL]. Επιπλέον, κλαθε λύση ιξώδους της (5.1) είναι Lipschitz συνεχής. Το Πρόβλημα C^1 Ομαλότητας για την (5.1) παραμένει ανοικτό. Οι Wang και Yu [?] απέδειξαν ότι όταν $n = 2$, η H είναι $C^2(\mathbb{R}^2)$ με $H \geq H(0) = 0$ και είναι ομοιόμορφα κυρτή (δηλ. υπάρχει $a > 0$ ώστε $H_{pp} \geq aI$), τότε συνεχείς λύσεις ιξώδους της (5.1) στο ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι στον $C^1(\Omega)$. Όταν $n > 2$, οι λύσεις ιξώδους είναι γραμμικά προσεγγίσιμες με την έννοια των De Pauw-Koeller [?], έχοντας προσεγγιστικές παραγώγους. Ειδικά για την Δ_∞ και για $n = 2$, οι λύσεις είναι $C^{1+\alpha}$ (Savin [S], Evans-Savin [ES]). Πρόσφατα, οι Evans και Smart απέδειξαν παντού παραγωγισιμότητα των ∞-Αρμονικών συναρτήσεων [ESm].

Εδώ αποδεικνύουμε ότι όταν κάποιο σταθμικό σύνολο $\{H = c\}$ της H περιέχει ευθύγραμμο τμήμα, υπάρχει μια λύση ιξώδους της (5.1) σε όλο το χώρο που δίνεται σαν επαλληλία ενός γραμμικού μέρους και ενός Lipschitz συνεχούς παντού παραγωγίσιμου μέρους. Το τελευταίο μπορεί να *μην* είναι C^1. Επιπλέον, μπορεί να είναι πουθενά 2 φορές παραγωγίσιμο και η Εσσιανή να είναι γνήσια κατανομή 1ης τάξης που δεν υλοποιείται από μέτρο Radon, όπως δείχνουμε με ένα παράδειγμα.

Σημειώνουμε ότι η *μόνη* μας υπόθεση είναι η H να είναι σταθερή κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, αλλά αυθαίρετη κατά τα άλλα. Αυτό αρκεί για να εμφανιστούν αυτές οι λύσεις. Στην πραγματικότητα, προκύπτουν σαν παντού παραγωγίσιμες λύσεις της ΜΔΕ Hamilton-Jacobi

$$H(Du) \;=\; c. \tag{5.3}$$

Για να έχουμε μια άμεση και αυτοτελή απόδειξη, εργαζόμαστε με την ΜΔΕ 2ης τάξης (5.1) αγνοώντας την σχέση λύσεων ιξώδους της (5.1) και διαφορισίμων λύσεων της (5.3). Απλά σημειώνουμε ότι στο κλασικό C^2 πλαίσιο, η ταυτότητα

$$D^2u : H_p(Du) \otimes H_p(Du) \;=\; H_p(Du)^\top D\big(H(Du)\big) \tag{5.4}$$

αρκεί για να εξάγουμε $\mathcal{A}[u] = 0$, όποτε $H(Du) = c$. Το αποτέλεσμά μας είναι το εξής

Θεώρημα 5.1 (Αναλυτικές Λύσεις της ΜΔΕ Aronsson) *Υποθέτουμε ότι $H \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ και υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα $[p', p''] \subseteq \mathbb{R}^n$ κατά μήκος του οποίου η H είναι σταθερή. Τότε, για κάθε παντού παραγωγίσιμη Lipschitz συνάρτηση $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί $\|f'\|_{C^0(\mathbb{R})} < 1$, η έκφραση*

$$u(x) \;:=\; \left[\frac{p'' + p'}{2}\right]^\top x \;+\; f\left(\left[\frac{p'' - p'}{2}\right]^\top x\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.5}$$

ορίζει μια λύση ιξώδους $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ σε όλο το χώρο της ΜΔΕ Aronsson

$$D^2u : H_p(Du) \otimes H_p(Du) \;=\; 0.$$

Εξάγουμε ότι η ύπαρξη των μη-C^1 λύσεων της (5.5) συνεπάγεται το ακόλουθο

Πόρισμα 5.2 *Η γνήσια σταθμική κυρτότητα της H είναι απαραίτητη για την C^1 ομαλότητα των λύσεων ιξώδους της ΜΔΕ Aronsson σε κάθε διάσταση $n \geq 2$.*

Ειδικότερα, η υπόθεση γνήσιας ομοιόμορφης κυρτότητας των Wang και Yu [WY] δεν μπορεί να χαλαρώσει σε απλή κυρτότητα, εκτός αν υποτεθεί επιπρόσθετα γνήσια σταθμική κυρτότητα.

Παρατηρούμε ότι η C^1 ομαλότητα των λύσεων δεν είναι θέμα ομαλότητας της H. Οι ιδιάζουσες λύσεις (5.5) επιμένουν και όταν $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Η ευαίσθητη εξάρτηση της ομαλότητας των λύσεων από την κυρτότητα της H είναι αποτέλεσμα του γεωμετρικού εκφυλισμου της ΜΔΕ που μπορεί να εκφραστεί από την συνθήκη καθετότητας

$$\mathcal{A}[u] \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; H_p(Du) \perp D\big(H(Du)\big). \tag{5.6}$$

Είναι ενδιαφέρον ότι οι ιδιάζουσες λύσεις επιμένουν ακόμη και για αυθαίρετα μικρά τμήματα, όσο αυτά δεν εκφυλίζονται σε σημείο.
Υπενθυμίζουμε από την εργασία των Crandall-Ishii-Lions [CIL] τον ορισμό των Λύσεων Ιξώδους για την περίπτωση της ΜΔΕ (5.1). Έστω $\mathbb{S}(n)$ οι πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες στον $\mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Το *super-jet* 2ης τάξης $J^{2,+}u(x)$ της u στο x είναι το σύνολο γενικευμένων παραγώγων

$$\begin{aligned} J^{2,+}u(x) \ &:= \ \Big\{(p,X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}(n) \ \Big| \ \text{ as } \ z \to x, \\ &u(z) \ \leq \ u(x) + p^\top(z-x) + \frac{1}{2}X : (z-x)\otimes(z-x) + o\left(|z-x|^2\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Το *sub-jet* 2ης τάξης $J^{2,-}u(x)$ της u στο x ορίζεται αντιστρέφοντας την ανισότητα στο (5.7):

$$\begin{aligned} J^{2,-}u(x) \ &:= \ \Big\{(p,X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}(n) \ \Big| \ \text{ as } \ z \to x, \\ &u(z) \ \geq \ u(x) + p^\top(z-x) + \frac{1}{2}X : (z-x)\otimes(z-x) + o\left(|z-x|^2\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Μια συνάρτηση $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ είναι *υπολύση ιξώδους* της ΜΔΕ Aronsson (5.1) αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(p,X) \in J^{2,+}u(x) \quad \Longrightarrow \quad X : H_p(p)\otimes H_p(p) \ \geq \ 0. \tag{5.9}$$

Παρόμοια, η $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ είναι *υπερλύση ιξώδους* της (5.1) αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(p,X) \in J^{2,-}u(x) \quad \Longrightarrow \quad X : H_p(p)\otimes H_p(p) \ \leq \ 0. \tag{5.10}$$

Μια *λύση ιξώδους* ορίζεται σαν μια συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα υπολύση και υπερλύση ιξώδους της (5.1).

Λήμμα 5.3 *Έστω ότι η u δίνεται από την* (5.5)*. Τότε:*

$$Du(\mathbb{R}^n) \ \subseteq \ [p', p''], \tag{5.11}$$

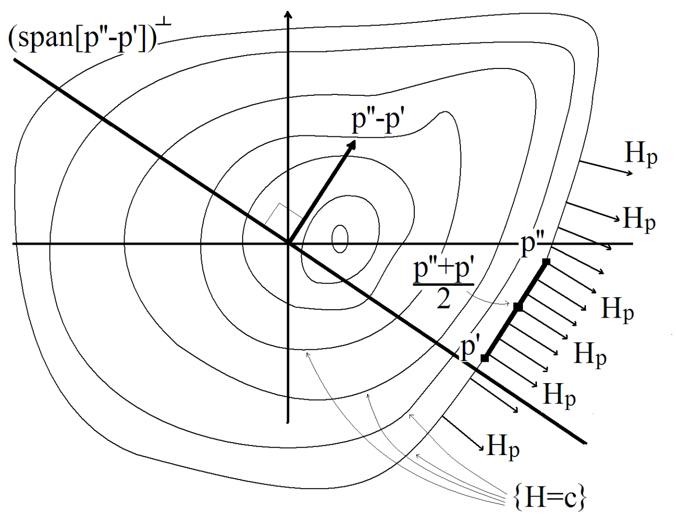
$$H_p\big(Du(\mathbb{R}^n)\big) \ \subseteq \ \big(span[p''-p']\big)^\perp. \tag{5.12}$$

Απόδειξη του 5.3. Εφόσον η f είναι Lipschitz και παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, το ίδιο ισχύει για την u στον $\mathbb{R}^n$. Παραγωγίζοντας την (5.5), για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$Du(x) \ = \ \frac{p''+p'}{2} \ + \ \frac{1}{2}\, f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^\top x\right)(p''-p'). \tag{5.13}$$

Ξαναγράφουμε την (5.13) ως

$$\begin{aligned} Du(x) \ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \ f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top} x\right)\right\} p' \\ &\quad + \left(1-\frac{1}{2}\left\{1- \ f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top} x\right)\right\}\right) p''. \end{aligned} \tag{5.14}$$



Εφόσον εξ' υποθέσεως $\|f'\|_{C^0(\mathbb{R})} < 1$, έχουμε

$$\left| f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top} x\right)\right| \leq \ \|f'\|_{C^0(\mathbb{R})} \ < \ 1 \tag{5.15}$$

και άρα

$$0 \ < \ \frac{1}{2}\left\{1 - \ f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top} x\right)\right\} \ < \ 1. \tag{5.16}$$

Από τις (5.14) και (5.16) παίρνουμε ότι το $Du(x)$ είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γνήσιος κυρτός συνδιασμός των p' και p''. Άρα, αφού

$$[p',p''] \ = \ \big\{tp'' + (1-t)p' \ : \ t \in [0,1]\big\}, \tag{5.17}$$

η (5.11) έπεται. Τώρα, αφού η H είναι σταθερή στο $[p',p'']$, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε, για κάθε $t \in [0,1]$

$$H\big(tp'' + (1-t)p'\big) \ = \ c. \tag{5.18}$$

Αφού $H \in C^1(\mathbb{R}^n)$, παραγωγίζοντας την (5.18) για $0<t<1$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}\Big(H\big(tp''+(1-t)p'\big)\Big) \;=\; (p''-p')^\top H_p\big(tp''+(1-t)p'\big). \tag{5.19}$$

Από τις (5.19), (5.18), παίρνουμε

$$(p''-p')^\top H_p(\bar p) \;=\; 0, \tag{5.20}$$

για κάθε $\bar p \in (p',p'') = \big\{tp''+(1-t)p' : t\in(0,1)\big\}$. Αφού από γνησιότητα το $Du(x)$ δεν αγγίζει τα άκρα p', p'' του τμήματος και είναι γνήσια στο εσωτερικό, έχουμε

$$Du(\mathbb{R}^n) \;\subseteq\; (p',p''). \tag{5.21}$$

Άρα, από τις (5.20) και (5.21), παίρνουμε την (5.12) και το λήμμα έπεται. $\square$

Το ακόλουθο λήμμα είναι άσχετο με την υπόλοιπη απόδειξη, αλλά δίνει ισχυρό κίνητρο για τα επιχειρήματα που έπονται. Θεσπίζει το αποτέλεσμα στην περίπτωση 2 φορές παραγωγισίμων λύσεων (5.5) της ΜΔΕ.

Λήμμα 5.4 *Αν η f'' υπάρχει στο $\mathbb{R}$, τότε η (5.5) ορίζει μια 2 φορές παραγωγίσιμη λύση της ΜΔΕ Aronsson (5.1).*

Απόδειξη του 5.4. Από την (5.5) και την υπόθεση, η Εσσιανή $D^2u(x)$ υπάρχει για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και παραγωγίζοντας την (5.13) έχουμε

$$D^2u(x) \;=\; \frac14\, f''\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^\top x\right)(p''-p')\otimes(p''-p'). \tag{5.22}$$

Υπολογίζουμε, σχησιμοποιώντας τις (5.11), (5.12), (5.6), (5.22) και (5.1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[u](x) \;&= D^2u(x) : H_p\big(Du(x)\big)\otimes H_p\big(Du(x)\big)\\
&= \frac14\, f''\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^\top x\right)(p''-p')\otimes(p''-p') :\\
&\quad : H_p\left(\frac{p''+p'}{2} \;+\; \frac12\, f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^\top x\right)(p''-p')\right)\otimes\\
&\quad \otimes H_p\left(\frac{p''+p'}{2} \;+\; \frac12\, f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^\top x\right)(p''-p')\right).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας το Λ. 5.3, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[u](x) \ &= \ \left\{ (p''-p')^\top H_p \left(\frac{p''+p'}{2} + \frac{1}{2} f' \left(\left[\frac{p''-p'}{2} \right]^\top x \right) (p''-p') \right) \right\}^2 \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{4} f'' \left(\left[\frac{p''-p'}{2} \right]^\top x \right) \qquad (5.24) \\ &= 0, \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Άρα, η u λύνει την (5.1) επειδή η Εσσιανή της D^2u είναι κάθετη στον τάξης-1 πίνακα $H_p(Du) \otimes H_p(Du)$ στο εσωτερικό γινόμενο του χώρου των συμμετρικών πινάκων.

Επιστρέφουμε τώρα στην γενική περίπτωση αυθαίρετης $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$. Το επόμενο Λήμμα διατείνεται ότι η συμμετρία της u κατά μήκος του $\big(\mathrm{span}[p''-p']\big)^\perp$ ανακλάται και στα Jet της $J^{2,\pm}u$.

Λήμμα 5.5 *Αν η u είναι όπως στην (5.5), για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$h \in \big(span[p''-p']\big)^\perp \quad \Longrightarrow \quad J^{2,\pm}u(x) \ = \ J^{2,\pm}u(x+h). \qquad (5.25)$$

Απόδειξη του 5.5. Αρκεί να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση του $J^{2,+}u(x)$ και να δείξουμε μόνο ότι

$$J^{2,\pm}u(x) \ \subseteq \ J^{2,\pm}u(x+h). \qquad (5.26)$$

Πράγματι, αν η (5.26) ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ και τα $h \perp p''-p'$, αντικαθιστώντας το x με $x-h$ και το h με $-h$ παίρνουμε

$$J^{2,\pm}u(x) \ \supseteq \ J^{2,\pm}u(x+h). \qquad (5.27)$$

Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $J^{2,+}u(x) \neq \emptyset$, ειδάλλως η (5.26) έπεται τετριμμένα. Αφού η u είναι παντού παραγωγίσιμη, έχουμε $u(z) = u(x) + Du(x)^\top(z-x) + o(|z-x|)$ για $z \to x$. Άρα, από την (5.7), αν $(p,X) \in J^{2,+}u(x)$, τότε

$$p \ = \ Du(x). \qquad (5.28)$$

Υποθέτουμε ότι $(Du(x),X) \in J^{2,+}u(x)$. Τότε,

$$u(z) \ \leq \ u(x) \ + \ Du(x)^\top(z-x) + \ \frac{1}{2}X : (z-x) \otimes (z-x) + o\left(|z-x|^2\right), \qquad (5.29)$$

για $z \to x$ στον $\mathbb{R}^n$.
Έστω τώρα h σταθερό στο $\big(\mathrm{span}[p''-p']\big)^{\perp}$ και θέτουμε $y := z + h$ στην (5.29). Τότε,

$$
\begin{aligned}
u(y-h) \ - \ u(x) \ \leq \ & Du(x)^{\top}\big(y-(x+h)\big) \\
& + \frac{1}{2}X : \big(y-(x+h)\big)\otimes\big(y-(x+h)\big) \\
& + o\left(\big|y-(x+h)\big|^2\right).
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

Αφού $h \in \big(\mathrm{span}[p''-p']\big)^{\perp}$, έχουμε $(p''-p')^{\top}h = 0$ και άρα η (5.5) δίνει

$$
\begin{aligned}
u(y-h) \ - \ u(x) \ = \ & \frac{p''+p'}{2}(y-h) \ + \ f\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}(y-h)\right) \\
& - \ \frac{p''+p'}{2}x \ - \ f\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}x\right) \\
= \ & \frac{p''+p'}{2}y \ + \ f\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}y\right) \\
& - \ \frac{p''+p'}{2}(x+h) \ - \ f\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}(x+h)\right) \\
= \ & u(y) \ - \ u(x+h).
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Αντικαθιστώντας την (5.31) στην (5.30), έχουμε

$$
\begin{aligned}
u(y) \ \leq \ \ u(x+h) \ + \ & Du(x)^{\top}\big(z-(x+h)\big) \\
+ \ & \frac{1}{2}X : \big(y-(x+h)\big)\otimes\big(y-(x+h)\big) \\
+ \ & o\left(\big|y-(x+h)\big|^2\right),
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

για $y \to x+h$. Αλά η (5.32) λέει ότι $(Du(x), X) \in J^{2,+}u(x+h)$. Επιπλέον, έχουμε $(Du(x), X) = (Du(x+h), X)$ αφού για $h \in \big(\mathrm{span}[p''-p']\big)^{\perp}$, η (5.13) δίνει

$$
\begin{aligned}
Du(x) \ = \ & \frac{p''+p'}{2} \ + \ \frac{1}{2}\,f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}x + \left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}h\right)(p''-p') \\
= \ & \frac{p''+p'}{2} \ + \ \frac{1}{2}\,f'\left(\left[\frac{p''-p'}{2}\right]^{\top}(x+h)\right)(p''-p') \\
= \ & Du(x+h).
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Άρα, καταλήγουμε ότι $J^{2,\pm}u(x) \subseteq J^{2,\pm}u(x+h)$. □

Απόδειξη του 5.1. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $(Du(x), X) \in J^{2,+}u(x)$ και σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και $\xi \in \big(\mathrm{span}[p''-p']\big)^{\perp}$. Θέτοντας $z := x + \varepsilon\xi$ στην (5.7), έχουμε

$$u(x+\varepsilon\xi) \;-\; u(x) \;\leq \varepsilon Du(x)^{\top}\xi \;+\; \frac{\varepsilon^2}{2}X : \xi\otimes\xi \;+\; o(\varepsilon^2). \tag{5.34}$$

Από το Λήμμα (4.11) έχουμε ότι $J^{2,+}u(x+\varepsilon\xi) = J^{2,+}u(x) \neq \emptyset$. Άρα, από την (5.7),

$$\begin{aligned} u(z) \;-\; u(x+\varepsilon\xi) \;\leq\; & Du(x+\varepsilon\xi)^{\top}\big(z-(x+\varepsilon\xi)\big) \\ & +\; \frac{1}{2}X : \big(z-(x+\varepsilon\xi)\big)\otimes\big(z-(x+\varepsilon\xi)\big) \\ & +\; o\Big(\big|z-(x+\varepsilon\xi)\big|^2\Big), \end{aligned} \tag{5.35}$$

για $z \to x+\varepsilon\xi$. Θέτοντας $z := x$ στην (5.37) και προσθέτοντας τις (5.34) και (5.37), λαμβάνουμε

$$\varepsilon\Big(Du(x+\varepsilon\xi) \;-\; Du(x)\Big)^{\top}\xi \;\leq \varepsilon^2\left(\frac{X+X}{2}\right) : \xi\otimes\xi \;+\; o(\varepsilon^2). \tag{5.36}$$

Αφού $\xi \in \big(\mathrm{span}[p''-p']\big)^{\perp}$, έχουμε από την (5.33) ότι $Du(x+\varepsilon\xi) - Du(x) = 0$. Άρα, παίρνουμε

$$X : \xi\otimes\xi \;\geq\; o(1), \tag{5.37}$$

για $\varepsilon \to 0^+$. Από το Λήμμα 5.3, μπορούμε να επιλέξουμε

$$\xi \;:=\; H_p\big(Du(x)\big) \tag{5.38}$$

και αντικαθιστώντας την (5.38) στην (5.37) και περνώντας στο όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$, καταλήγουμε

$$X : H_p\big(Du(x)\big)\otimes H_p\big(Du(x)\big) \;\geq\; 0. \tag{5.39}$$

Συνεπώς, η u είναι υπερλύση ιξώδους της ΜΔΕ (5.1). Η ιδιότητα υπολύσης έπεται παρόμοια και άρα το Θεώρημα είναι πλήρες. □

5.1 ΕΝΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΥΣΗΣ

Στο τελευταίο μέρος της Δατριβής εισάγεται μια ιδιάζουσα συνάρτηση $K : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ που είναι $C^{0+\alpha}$ Hölder συνεχής για κάθε $0 < \alpha < 1$ αλλά σημειακά πουθενά βελτιώσιμη σε καλύτερο εκθέτη και πουθενά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, η παράγωγος της K είναι ιδιάζουσα κατανομή 1ης τάξης, που δεν υλοποιείται από κάποιο μέτρο Radon. Η K δίνεται από

$$K(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha\mu k}\phi(2^{\mu k}x), \tag{5.40}$$

όπου $\mu \in \mathbb{N}$ με $\mu > 1/(1-\alpha)$ και ϕ μια πριονωτή συνάρτηση, που δίνεται από $\phi(x) := |x|$ για $x \in [-1,1]$ και επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $\phi(x+2) := \phi(x)$. Κάτω από τις υποθέσεις για την H του Θεωρήματος 5.1, μια ιδιάζουσα λύση της ΜΔΕ Aronsson δίνεται από την (5.5), λαμβάνοντας σαν f την Lipschitz συνάρτηση

$$f(t) \;:=\; \int_0^t \big(\chi_{(-\infty,0]}(s) - \chi_{(0,+\infty)}(s)\big)K(s)ds. \tag{5.41}$$

Συνεπώς, έχουμε μια $C^{0,1}$ παντού μια φορά παραγωγίσιμη μη-C^1 λύση ιξώδους, που επιπλέον είναι πουθενά 2 φορές παραγωγίσιμη με Εσσιανή γνήσια κατανομή 1ης τάξης.

6 ΜΙΑ ΣΥΝΕΧΗΣ ΠΟΥΘΕΝΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω $\alpha \in (0,1)$ και $\nu \in \mathbb{N}$ σταθερές παράμετροι. Ορίζουμε την συνάρτηση $K_{\alpha,\nu} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ από

$$K_{\alpha,\nu}(x) \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2\alpha\nu k}\phi(2^{2\nu k}x), \tag{6.1}$$

όπου ϕ μια πριονωτή συνάρτηση, που δίνεται από $\phi(x) := |x|$ όταν $x \in [-1,1]$ και την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $\phi(x+2) := \phi(x)$. Αναλυτικά,

$$\phi(x) \ = \ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \big|x - 2i\big|\chi_{(i-1,i+1]}(x). \tag{6.2}$$

Οι (6.1), (6.2) εισάγουν μια παραμετρική οικογένεια τοπικα Hölder συναρτήσεων $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ που δεν είναι παραγωγίσιμες σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$. Τα πρώτα παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων δόθηκαν από τους Weierstrass, Bolzano και Cellérier και έχουν ακολουθήσει πολυάριθμα παραδείγματα συνεχών ιδιαζόντων συναρτήσεων. Το παράδειγμα μας $K_{\alpha,\nu}$ είναι μια παραλλάγη της συνάρτησης Knopp [Kn] (δες [B-D] και [C]) και σχετιζεται με πολλά παραδείγματα στην βιβλιογραφία, όπως τις Takagi-Van der Waerden και McCarthy συναρτήσεις [M].

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι συνεχείς πουθενά παραγωγίσιμες συναρτήσεις ακόμα έλκουν μαθηματικό ενδιαφέρον. Πρόσφατα, οι Allart-Kawamura [Al-K] χαρακτήρισαν τα σύνολα στα οποία υπάρχουν "άπειρες παράγωγοι" της συνάρτησης Takagi, ενώ ο Lewis [L] μελετά πιθανο-θεωρητικές πτυχές της συνάρτησης Katsuura. Για μια διεξοδική ανασκόπηση γνωστών αποτελεσμάτων, αναφερόμαστε στον Thim [T].

Εδώ εξάγουμε κατάλληλες εκτιμήσεις που θεσπίζουν ότι η $K_{\alpha,\nu}$ είναι στον χώρο Hölder $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, αλλά αν το ν είναι αρκετά μεγάλο ($2\nu > 1/(1-\alpha)$) η σημειακή παράγωγος δεν υπάρχει πουθενά γιατί τα πηλίκα διαφορών εκρήγνυνται κατά μήκος μιας ακολουθίας. Επιπλέον, με ένα κάτω φράγμα στις ημινόρμες ολικής κύμανσης κατάλληλων πηλίκων διαφορών και ένα μετρο-θρωρητικό επιχείρημα, εξάγουμε ότι η κατανομική παράγωγος $DK_{\alpha,\nu}$ στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ είναι γνήσια κατανομή 1ης τάξης και δεν μπορεί να υλοποιηθεί με ολοκλήρωση ενός μέτρου Radon στον $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R})$. Άρα, για κάθε $\alpha \in (0,1)$ και ν μεγάλο, η $C^{0,\alpha}$-συνάρτηση $K_{\alpha,\nu}$ δεν είναι ποτέ BV ανεξαρτήτων πόσο "κοντά" είναι στον χώρο Lipschitz $C^{0,1}(\mathbb{R})$.

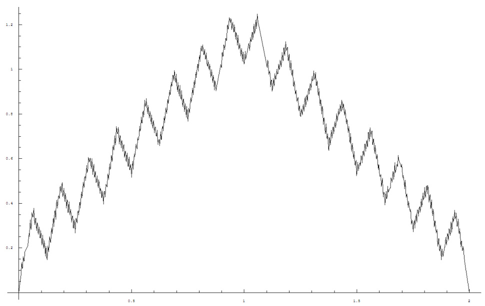


Fig. 1: Προσωμοίωση της $K_{\alpha,\nu}$ στο $(0,2)$ με $\nu = 2$, $\alpha = 1/2$ (50 όροι, Mathematica)

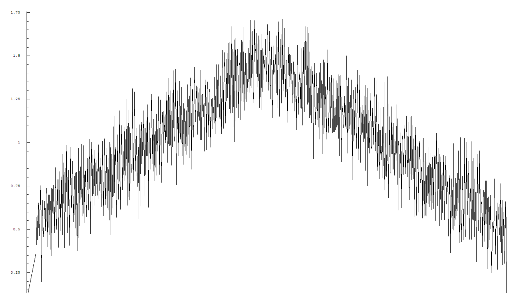


Fig. 2: Προσωμοίωση της $K_{\alpha,\nu}$ στο $(0,2)$ με $\nu = 4$, $\alpha = 1/8$ (50 όροι, Mathematica)

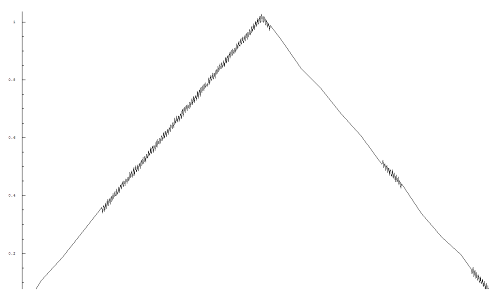


Fig. 3: Προσωμοίωση της $K_{\alpha,\nu}$ στο $(0,2)$ με $\nu = 4$, $\alpha = 5/8$ (50 όροι, Mathematica)

Η αναγκαιότητα να κατασκευαστεί η ιδιάζουσα συνάρτηση $K_{\alpha,\nu}$ προκύπτει από τη θεωρία των μη-γραμμικών ΜΔΕ, ειδικά τη θεωρία ομαλότητας εκφυλισμένων ΜΔΕ και συστημάτων 2ης τάξης με αντιπροσωπευτικό παράδειγμα την ∞-Λαπλασιανή

$$\Delta_\infty u \ := \ D^2u : Du \otimes Du \ = \ 0, \quad u \ : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6.3}$$

(δηλ. $\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^n D^2_{ij} u D_i u D_j u$), και την πιο γενική ΜΔΕ Aronsson

$$\mathcal{A}[u] \ := \ D^2u : H_p(Du) \otimes H_p(Du) \ = \ 0, \tag{6.4}$$

για $H \in C^1(\mathbb{R}^n)$ με $H_p(p) := DH(p)^\top$. Στα [A6] και [A7], ο Aronsson κατασκεύασε ιδιάζουσες λύσεις της $\Delta_\infty u = 0$, ενώ το γενικό πρόβλημα C^1 ομαλότητας για την Δ_∞ είναι ανοικτό, εκτός από την διάσταση $n = 2$ ([ES], [WY], [C2]). Το παράδειγμά μας $K_{\alpha,\nu}$ χρησιμοποιείται στα προηγούμενα μέρη της διατριβής για να κατασκευαστούν ιδιάζουσες λύσεις των $\mathcal{A}[u] = 0$ και $\Delta_\infty u = 0$.

Το ακόλουθο θεώρημα συγκεντρώνει τις ιδιότητες της $K_{\alpha,\nu}$. Για τις μετροθεωρητικές έννοιες που εμφανίζονται, αναφερόμαστε στους Evans και Gariepy [EG].

Θεώρημα 6.1 *(i) Η συνάρτηση $K_{\alpha,\nu}$ ανήκει στον $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Επιλέον, έχουμε $0 \leq K_{\alpha,\nu} \leq 1/(1-2^{-2\nu\alpha})$ και αν $M \geq 1$, $x, y \in [-M, +M] \subseteq \mathbb{R}$, τότε*

$$\big|K_{\alpha,\nu}(x) - K_{\alpha,\nu}(y)\big| \ \leq\ C(M,\alpha,\nu)\ |x-y|^\alpha, \tag{6.5}$$

όπου

$$C(M,\alpha,\nu) \ :=\ \big(\max\{M, 2^{2\nu}\}\big)^{1-\alpha}\left[\frac{1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1} + \frac{2}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right]. \tag{6.6}$$

(ii) Αν $\alpha \in (0,1)$ και $2\nu > 1/(1-\alpha)$, τότε η $K_{\alpha,\nu}$ είναι πουθενά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επιλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\left|\frac{K_{\alpha,\nu}(x + t_m(x)) - K_{\alpha,\nu}(x)}{t_m(x)}\right| \ \geq\ \ K(m,\nu,\alpha), \tag{6.7}$$

όπου

$$K(m,\nu,\alpha) \ :=\ \frac{\big(2^{2\nu(1-\alpha)}-2\big)\big(2^{2\nu(1-\alpha)}\big)^m \ +\ 1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1} \tag{6.8}$$

και η $t_m : \mathbb{R} \longrightarrow \{\pm 2^{-2\nu m-1}\}$ είναι η συνάρτηση βήματος

$$t_m(x) \ :=\ 2^{-2\nu m-1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big[\chi_{(i,i+\frac{1}{2}]}\big(2^{2\nu m}x\big) \ -\ \chi_{(i+\frac{1}{2},i+1]}\big(2^{2\nu m}x\big)\Big]. \tag{6.9}$$

(iii) Αν $\alpha \in (0,1)$ και $2\nu > 1/(1-\alpha)$, τότε η κατανομική παράγωγος $DK_{\alpha,\nu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ δεν υπάρχει σαν τοπικά πεπερασμένο μέτρο Radon. Επιπλέον, για κάθε $M \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{1}{2M}\int_{-M}^{+M}\left|\frac{K_{\alpha,\nu}(x+2^{-2\nu m-1}) - K_{\alpha,\nu}(x)}{2^{-2\nu m-1}}\right| dx \ \geq\ \ \frac{1}{4}K(m,\nu,\alpha). \tag{6.10}$$

Ειδικά, περνώντας στο όριο $m \to \infty$ στις (6.7) και (6.10), έχουμε το

Πόρισμα 6.2 *Στο πλάισιο του Θεωρήματος 6.1, για κάθε $\alpha \in (0,1)$, $2\nu > 1/(1-\alpha)$ με $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ και $M \geq 1$, έχουμε*

$$\limsup_{t \to 0} \left| \frac{K_{\alpha,\nu}(x+t) - K_{\alpha,\nu}(x)}{t} \right| \;=\; +\infty. \tag{6.11}$$

και

$$\limsup_{t \to 0} \frac{1}{2M} \int_{-M}^{+M} \left| \frac{K_{\alpha,\nu}(x+t) - K_{\alpha,\nu}(x)}{t} \right| dx \;=\; +\infty \tag{6.12}$$

και συνεπώς τα πηλίκα διαφορών είναι μη-φραγμένα σημειακά και στις L^1 ημινόρμες $\|.\|_{L^1(-M,M)}$, $M \geq 1$.

Απόδειξη του 6.1 (i) Ξεκινάμε παρατηρώντας ότι η (6.2) δίνει $|\phi| \leq 1$ και άρα το φράγμα

$$0 \;\leq\; K_{\alpha,\nu} \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-2\alpha\nu}\right)^k \;=\; \frac{1}{1 - 2^{-2\nu\alpha}}. \tag{6.13}$$

Έστω τώρα $p, q \in \mathbb{N}$ με $p < q$ και $x \in \mathbb{R}$. Ξανά από την (6.2), έχουμε

$$\left| \sum_{k=0}^{q} 2^{-2\alpha\nu k} \phi(2^{2\nu k}x) - \sum_{k=0}^{p} 2^{-2\alpha\nu k} \phi(2^{2\nu k}x) \right| \;\leq\; \sum_{k=p+1}^{q} \left(2^{-2\alpha\nu}\right)^k, \tag{6.14}$$

που τείνει στο 0 για $p, q \longrightarrow \infty$. Από την (6.14), η (6.1) ορίζει συνεχή συνάρτηση: $K_{\alpha,\nu} \in C^0(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας μια ιδέα εμπνευσμένη από το [B-K], σταθεροποιούμε x, y στο $\mathbb{R}$ με $x \neq y$ και επιλέγουμε $t \geq 1$ και $p \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|x|,\ |y| \;\leq\; 2^{2\nu - 1} t \tag{6.15}$$

και

$$\frac{t}{2^{2\nu p}} \;\leq\; |y - x| \;\leq\; \frac{t}{2^{2\nu(p-1)}}. \tag{6.16}$$

Αφού από την (6.2) η ϕ είναι μη-επεκτατική, δηλ. $|\phi(t) - \phi(s)| \leq |t - s|$ και επίσης $|\phi| \leq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\left|K_{\alpha,\nu}(x) - K_{\alpha,\nu}(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}} \;\leq |x-y|^{-\alpha} \Bigg[& \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-2\alpha\nu k} \left|\phi(2^{\nu k}x) - \phi(2^{\nu k}y)\right| \\ & + \; 2\sum_{k=p}^{\infty} 2^{-2\alpha\nu k} \Bigg], \end{aligned} \tag{6.17}$$

και άρα

$$\frac{\big|K_{\alpha,\nu}(x)-K_{\alpha,\nu}(y)\big|}{|x-y|^{\alpha}} \ \le\ |x-y|^{-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{p-1}2^{2\nu k(1-\alpha)}|x-y|\ +\ 2\sum_{k=p}^{\infty}2^{-2\alpha\nu k}\right].$$

Συνεπώς, από τις (6.16) και (6.18),

$$\begin{aligned}\frac{\big|K_{\alpha,\nu}(x)-K_{\alpha,\nu}(y)\big|}{|x-y|^{\alpha}} &\le |x-y|^{-\alpha}\left[\sum_{k=0}^{p-1}2^{2\nu k(1-\alpha)}|x-y|\ +2\frac{2^{-2\nu\alpha p}}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right]\\ &= |x-y|^{-\alpha}\left[\frac{2^{2\nu p(1-\alpha)}-1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}|x-y|\ +2\frac{2^{-2\nu\alpha p}}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right] \qquad (6.18)\\ &\le |x-y|^{-\alpha}\left[\frac{2^{2\nu p(1-\alpha)}-1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}|x-y|\right.\\ &\qquad\left.+2\frac{2^{-2\nu\alpha p}}{1-2^{-2\nu\alpha}}\frac{2^{2\nu p}}{t}|x-y|\right]\\ &= |x-y|^{1-\alpha}\left[\frac{2^{2\nu p(1-\alpha)}-1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}\ +2\frac{2^{2\nu p(1-\alpha)}}{t(1-2^{-2\nu\alpha})}\right]\\ &\le |x-y|^{1-\alpha}\left[\frac{2^{2\nu p(1-\alpha)}-1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}\ +2\frac{2^{2\nu p(1-\alpha)}}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right].\end{aligned}$$

Ξανά από την (6.16), η (6.18) δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\big|K_{\alpha,\nu}(x)-K_{\alpha,\nu}(y)\big|}{|x-y|^{\alpha}} &\le \left(t2^{-2\nu(p-1)}\right)^{1-\alpha}2^{2\nu p(1-\alpha)}\left[\frac{1-2^{-2\nu p(1-\alpha)}}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}+\frac{2}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right]\\ &= t^{1-\alpha}2^{2\nu(1-\alpha)}\left[\frac{1-2^{-2\nu p(1-\alpha)}}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}\ +\frac{2}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right] \qquad (6.19)\\ &\le t^{1-\alpha}2^{2\nu(1-\alpha)}\left[\frac{1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}\ +\frac{2}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right].\end{aligned}$$

Από την (6.15), έχουμε $t\ge\max\{1,2^{1-2\nu}|x|,2^{1-2\nu}|y|\}$. Ελαχιστοποιώντας την (6.19) ως προς όλα τα t, παίρνουμε

$$\frac{\big|K_{\alpha,\nu}(x)-K_{\alpha,\nu}(y)\big|}{|x-y|^{\alpha}} \ \le\ \left(\max\{|x|,|y|,2^{2\nu}\}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1}+\frac{2}{1-2^{-2\nu\alpha}}\right]. \qquad (6.20)$$

Η (6.20) οδηγεί άμεσα στις (6.5) και (6.6).

(ii) Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}$. Έστω $t_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση βήματος της (6.9), που την ξαναγράφουμε ως

$$t_m(x) \ = \left\{ \begin{array}{ll} +2^{-2\nu m-1}, & i2^{-2\nu m} < \ x \ \leq i2^{-2\nu m} + 2^{-2\nu m-1}, \ i \in \mathbf{Z}, \\ -2^{-2\nu m-1}, & i2^{-2\nu m} + 2^{-2\nu m-1} < \ x \ \leq i2^{-2\nu m} + 2^{-2\nu m}, \ \ i \in \mathbf{Z}. \end{array} \right. \tag{6.21}$$

Παρατηρούμε ότι αφού $|t_m(x)| = \frac{1}{2}2^{-2\nu m}$ και

$$\left| 2^{2\nu m}(x + t_m(x)) \ - \ 2^{2\nu m}x \right| \ = \ \frac{1}{2}, \tag{6.22}$$

η t_m ορίζεται έτσι ώστε κανένας ακέραιος να μην βρίσκεται μεταξύ των $2^{2\nu m}x$ και $2^{2\nu m}(x + t_m(x))$. Από την (6.1), εκτιμούμε από κάτω το $|\big(K_{\alpha,\nu}(x + t_m(x)) - K_{\alpha,\nu}(x)\big)/t_m(x)|$ ως

$$\begin{aligned} \left| \frac{K_{\alpha,\nu}(x + t_m(x)) - K_{\alpha,\nu}(x)}{t_m(x)} \right| \ \geq & \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-2\alpha\nu k} \frac{\phi(2^{2\nu k}(x + t_m(x))) - \phi(2^{2\nu k}x)}{t_m(x)} \right. \\ & \left. + \, 2^{-2\alpha\nu m} \frac{\phi(2^{2\nu m}(x + t_m(x))) - \phi(2^{2\nu m}x)}{t_m(x)} \right| \\ & - \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2\alpha\nu k} \left| \frac{\phi(2^{2\nu k}(x + t_m(x))) - \phi(2^{2\nu k}x)}{t_m(x)} \right|. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Θα εξάγουμε την εκτίμηση (6.7) εκτιμώντας κάθε όρο της (6.23) χωριστά. Κατ'αρχήν, το άθροισμα $\sum_{k=m+1}^{\infty}$ στην (6.23) μηδενίζεται, Αφού από την (6.2) η ϕ είναι 2-περιδική: πράγματι, για $k \geq m+1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(2^{2\nu k}(x + t_m(x))) - \phi(2^{2\nu k}x) \ &= \ \phi\big(2^{2\nu k}x \pm 2^{2\nu(k-m)-1}\big) \ - \ \phi\big(2^{2\nu k}x\big) \\ &= \ \phi\big(2^{2\nu k}x \pm 2\, 2^{2(\nu(k-m)-1)}\big) \ - \ \phi\big(2^{2\nu k}x\big) \\ &= \ 0, \end{aligned} \tag{6.24}$$

με την τελευταία ισότητα να είναι προφανή αφού $2^{2(\nu(k-m)-1)} \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, το άθροισμα $\sum_{k=0}^{m-1}$ στην (6.23) εκτιμάται ως

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2\alpha\nu k} \cdot \frac{\big|\phi(2^{2\nu k}(x+t_m(x))) - \phi(2^{2\nu k}x)\big|}{|t_m(x)|} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2\alpha\nu k} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\big|2^{2\nu k}(x+t_m(x)) - 2^{2\nu k}x\big|}{|t_m(x)|} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2\nu(1-\alpha)k} \qquad (6.25) \\ &= \frac{1-2^{2\nu(1-\alpha)m}}{1-2^{2\nu(1-\alpha)}}.\end{aligned}$$

Τέλος, από τον ορισμό της t_m και το γεγονός ότι η ϕ τμηματικά αφφινική με κλίση 1, ο μεσαίος όρος της (6.23) δίνει

$$\begin{aligned}\left|2^{-2\alpha\nu m}\left(\frac{\phi(2^{2\nu m}(x+t_m(x))) - \phi(2^{2\nu m}x)}{t_m(x)}\right)\right| &= 2^{-2\alpha\nu m} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\big|2^{2\nu m}(x+t_m(x)) - 2^{2\nu m}x\big|}{|t_m(x)|} \qquad (6.26) \\ &= 2^{2\nu(1-\alpha)m}.\end{aligned}$$

Από τις (6.24), (6.25) και (6.26), η (6.23) δίνει

$$\begin{aligned}\left|\frac{K_{\alpha,\nu}(x+t_m(x)) - K_{\alpha,\nu}(x)}{t_m(x)}\right| &\geq 2^{2\nu(1-\alpha)m} - \frac{1-2^{2\nu(1-\alpha)m}}{1-2^{2\nu(1-\alpha)}} \qquad (6.27) \\ &= \frac{\big(2^{2\nu(1-\alpha)}-2\big)\big(2^{2\nu(1-\alpha)}\big)^m + 1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1},\end{aligned}$$

που άμεσα οδηγεί στις (6.7) και (6.8).

(iii) Έστω $M \geq 1$. Πρώτα εξάγουμε την εκτίμηση (6.10) και μετά την αξιοποιούμε για να δείξουμε ότι η κατανομική παράγωγος $DK_{\alpha,\nu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ δεν υπάρχει σαν μέτρο Radon. Σταθεροποιούμε $m \in \mathbb{N}$ και θέτουμε

$$E_m := \big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; t_m(x) > 0\big\}. \qquad (6.28)$$

Από την (6.9), η t_m είναι Borel μετρήσιμη και άρα το E_m είναι Borel. Θέτουμε

$$D_t K_{\alpha,\nu}(x) := \frac{K_{\alpha,\nu}(x+t) - K_{\alpha,\nu}(x)}{t}. \qquad (6.29)$$

Ολοκληρώνοντας την (6.27) στο $(-\frac{M}{2}, \frac{M}{2})$, έχουμε

$$\begin{aligned} M\frac{(2^{2\nu(1-\alpha)}-2)[2^{2\nu(1-\alpha)}]^m \ + \ 1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1} \ &\leq \ \int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} |D_{t_m}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx \\ &= \ \int_{(-\frac{M}{2},\frac{M}{2})\cap E_m} |D_{t_m}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx \qquad (6.30) \\ &\quad + \int_{(-\frac{M}{2},\frac{M}{2})\setminus E_m} |D_{t_m}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Άρα, από τις (6.28) και (6.21), η (6.30) δίνει

$$\begin{aligned} M\frac{(2^{2\nu(1-\alpha)}-2)[2^{2\nu(1-\alpha)}]^m \ + \ 1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1} \ &\leq \ \int_{(-\frac{M}{2},\frac{M}{2})\cap E_m} |D_{2^{-2\nu m-1}}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx \\ &\qquad\qquad (6.31) \\ &\quad + \int_{(-\frac{M}{2},\frac{M}{2})\setminus E_m} |D_{-2^{-2\nu m-1}}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Με αλλαγή μεταβλητής στο 2ο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{(2^{2\nu(1-\alpha)}-2)[2^{2\nu(1-\alpha)}]^m \ + \ 1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1} \ &\leq \ \frac{1}{M}\Bigg[\int_{(-\frac{M}{2},\frac{M}{2})\cap E_m} |D_{2^{-2\nu m-1}}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx \\ &\qquad\qquad (6.32) \\ &\quad + \int_{((-\frac{M}{2},\frac{M}{2})\setminus E_m)-2^{-2\nu m-1}} |D_{2^{-2\nu m-1}}K_{\alpha,\nu}(x)|\,dx\Bigg]. \end{aligned}$$

Άρα, αφού $M \geq 1$ και $2^{-2\nu m-1} \leq \frac{1}{2}$, καταλήγουμε

$$\frac{(2^{2\nu(1-\alpha)}-2)[2^{2\nu(1-\alpha)}]^m \ + \ 1}{2^{2\nu(1-\alpha)}-1} \ \leq \ \frac{2}{M}\int_{-M}^{M}\left|\frac{K_{\alpha,\nu}(x+2^{-2\nu m-1})-K_{\alpha,\nu}(x)}{2^{-2\nu m-1}}\right| dx \tag{6.33}$$

και η (6.33) άμεσα δίνει την (6.10).

Σταθεροποιούμε τώρα $\nu > 1/(2(1-\alpha))$ και προς αντίφαση υποθέτουμε ότι η $DK_{\alpha,\nu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ είναι ένα τοπικά πεπερασμένο μέτρο Radon στο $\mathbb{R}$, δηλ. $DK_{\alpha,\nu} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R})$. Αφού $K_{\alpha,\nu} \in C^0(\mathbb{R})$ και $C^0(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, η $K_{\alpha,\nu}$ έχει τοπικά πεπερασμένη κύμανση: $K_{\alpha,\nu} \in BV_{loc}(\mathbb{R})$. Σταθεροποιούμε μια συμπαγώς φερόμενη $\psi \in C^1_c(\mathbb{R})$ και συμβολίζουμε με D_t τον τελεστή του πηλίκου διαφορών, δηλ. $D_t f(x) := \frac{1}{t}[f(x+t)-f(x)]$, όταν$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Λόγω ομαλότητας της ψ, έχουμε $D_t\psi \longrightarrow D\psi$ για $t \to 0$, παντού στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$K_{\alpha,\nu}(x)D_t\psi(x) \longrightarrow K_{\alpha,\nu}(x)D\psi(x), \quad \text{as } t \to 0, \tag{6.34}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και την

$$\big|(D_t\psi \ - \ D\psi)K_{\alpha,\nu}\big| \ \leq \ 2\|D\psi\|_{C^0(\mathbb{R})}\|K_{\alpha,\nu}\|_{C^0(\mathbb{R})}\chi_{\overline{\{\psi\neq 0\}}} \tag{6.35}$$

έχουμε

$$K_{\alpha,\nu}D_t\psi \longrightarrow K_{\alpha,\nu}D\psi, \ \ \text{in } L^1(\mathbb{R}), \ \ \text{as } t \to 0. \tag{6.36}$$

Έστω "$\llcorner$" ο περιορισμός των μέτρων και $\mathcal{L}$ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Από την (6.36), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi \ d[DK_{\alpha,\nu}] \ &= \ -\int_{\mathbb{R}} K_{\alpha,\nu}(x)D\psi(x)dx \\ &= \ -\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} K_{\alpha,\nu}(x)D_{-t}\psi(x)dx \\ &= \ \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} D_tK_{\alpha,\nu}(x)\psi(x)dx \\ &= \ \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} \psi D_tK_{\alpha,\nu}d\mathcal{L}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Η 3η ανισότητα στην (6.37) προκύπτει με αλλαγή μεταβλητών στο ολκλήρωμα. Αφού η ψ είναι τυχαία, η (6.37) λέει

$$\mathcal{L}\llcorner D_tK_{\alpha,\nu} \ \overset{*}{\rightharpoonup} \ DK_{\alpha,\nu} \ \ \text{weakly* in } \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}), \ \ \text{as } t \to 0. \tag{6.38}$$

Η ασθενης* σύγκλιση $t \to 0$ στο χώρο των μέτρων Radon ερμηνεύεται σαν ακολουθιακή σύγκλιση. Από γνωστή θεωρία δυικότητας, έχουμε $\mathcal{M}(-M,M) = \big(C^0_c(-M,M)\big)^*$ για κάθε $M \geq 1$, όπου ο $C^0_c(-M,M)$ συμβολίζει τις συμπαγώς φερόμενες συναρτήσεις και ο $\mathcal{M}(-M,M)$ τα πεπερασμένα μέτρα Radon στο $(-M,M)$. Επιπλέον, από την ασθενή* συμπάγεια του $\mathcal{M}(-M,M)$, τα πηλίκα διαφορών $D_tK_{\alpha,\nu}$ πρέπει να είναι φραγμένα στην L^1-νόρμα κατά μήκος απειροστικής ακολουθίας $s_m \to 0$ για $m \to \infty$:

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_{-M}^{M}|D_{s_m}K_{\alpha,\nu}(x)|dx \ < \ \infty. \tag{6.39}$$

Επιλέγοντας $s_m := 2^{-2\nu m-1}$, η (6.39) αντίκειται στις (6.10) και (6.12) για $m \to \infty$ και το θεώρημα έπεται. $\square$

Βιβλιογραφία

[A-Ba-C] N. Alikakos, P. Bates, X. Chen, *Periodic travelling waves and oscillating patterns in multidimensional domains*, Transactions of the A.M.S., Vol. 351, Nr 7, (1999), 2777-2805.

[A-Be-C] N. Alikakos, S. Betelú, X. Chen, *Explicit Stationary Solutions in Multiple Well Dynamics and Non-uniqueness of Interfacial Energy Densities*, Euro. Jnl. of Applied Math. (2006), 17, 525-556.

[A-F] N. Alikakos, G. Fusco, *On the connection problem for potentials with several global minima*, Ind. J. of Math, Vol. 57, No. 4, 1871 - 1906, (2008).

[AK] N. Alikakos, N. Katzourakis, *Heteroclinic Travelling Waves of Gradient Diffusion Systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 1365 - 1397.

[AG] S. Alexander, M. Ghomi, *The convex hull property and topology of hypersurfaces with nonnegative curvature*, Advances in Mathematics Volume 180, Issue 1, 2003, 324 - 354.

[Al-K] P. C. Allart, K. Kawamura, *The improper infinite derivatives of Takagiõs nowhere-differentiable function*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010) 656 - 665.

[A1] G. Aronsson, *Minimization problems for the functional* $sup_x F(x, f(x), f'(x))$, Arkiv für Mat. 6 (1965), 33 - 53.

[A2] G. Aronsson, *Minimization problems for the functional* $sup_x F(x, f(x), f'(x))$ *II*, Arkiv für Mat. 6 (1966), 409 - 431.

[A3] G. Aronsson, *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Arkiv für Mat. 6 (1967), 551 - 561.

[A4] G. Aronsson, *On the partial differential equation* $u^2 x u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u^2 y u_{yy} = 0$, Arkiv für Mat. 7 (1968), 395 - 425.

[A5] G. Aronsson, *Minimization problems for the functional* $sup_x F(x, f(x), f'(x))$ *III*, Arkiv für Mat. (1969), 509 - 512.

[A6] G. Aronsson, *On Certain Singular Solutions of the Partial Differential Equation* $u^2 x u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u^2 y u_{yy} = 0$, Manuscripta Math. 47 (1984), no 1-3, 133 - 151.

[A7] G. Aronsson, *Construction of Singular Solutions to the p-Harmonic Equation and its Limit Equation for* $p = \infty$, Manuscripta Math. 56 (1986), 135 - 158.

[BEJ] E. N. Barron, L. C. Evans, R. Jensen, *The Infinity Laplacian, Aronssonős Equation and their Generalizations*, Transactions of the AMS, Vol. 360, Nr 1, Jan 2008.

[BJW1] E. N. Barron, R. Jensen and C. Wang, *The Euler equation and absolute minimizers of* L^∞ *functionals*, Arch. Rational Mech. Analysis 157 (2001), 255 - 283.

[BJW2] E. N. Barron, R. Jensen and C. Wang, *Lower Semicontinuity of* L^∞ *Functionals* Ann. I. H. Poincaré ΰ AN 18, 4 (2001) 495 - 517.

[B-E-J] E. N. Barron, L. C. Evans, R. Jensen, *The Infinity Laplacian, Aronssonős Equation and their Generalizations*, Transactions of the AMS, Vol. 360, Nr 1, Jan 2008, electr/ly published on July 25, 2007.

[B-D] A. Bauche, S. Dubuc, *A Unified approach for nondifferentiable functions*, J. Math. Anal. Appl. 182 (1994) 134 - 142.

[B] T. Bhattacharya, *On the Behaviour of* ∞*-Harmonic Functions Near Isolated Points*, Nonlinear Analysis 58, 333 - 349, (2004).

[BC] T. Bieske, L. Capogna, *The Aronsson-Euler equation for absolutely minimizing extensions with respect to Carnot-Carathéodory metrics*, Transactions of the AMS, Volume 357, Number 2, Pages 795 - 823.

[BF1] M. Bildhauer, M. Fuchs, *Partial regularity for a class of anisotropic variational integrals with convex hull property*, Asymptotic Analysis 32 (2002) 293 - 315.

[BF2] M. Bildhauer, M. Fuchs, *A geometric maximum principle for variational problems in spaces of vector valued functions of bounded variation*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2010, 385, 5 - 17.

[B-K] J. B. Brown, G. Kozlowski, *Smooth Interpolation, Hölder Continuity, and the Takagiΰvan der Waerden Function*, Amer. Math. Monthly, 110 (2003) 142 - 147.

[CDP] T. Champion, L. De Pascale, *Principles of Comparison with Distance Functions for Absolute Minimizers*, J. Convex Anal. 14 (2007), no. 3, pp. 515 - 541.

[C] F. S. Cater, *Remarks on a Function without Unilateral Derivatives*, J. Math. Anal. Appl. 182 (1994) 718 - 721.

[C] M. G. Crandall *A Visit with the ∞-Laplacian*, in *Calculus of Variations and Non-Linear Partial Differential Equations*, Springer Lecture notes in Mathematics 1927, CIME, Cetraro Italy 2005.

[CEG] M. G. Crandall, L. C. Evans, R. Gariepy, *Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian*, Calc. Var. 13, 123 - 139 (2001).

[CEL] M. G. Crandall, L. C. Evans, P. L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 487 - 502.

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, *User's Guide to Viscosity Solutions of 2nd Order Partial Differential Equations*, Bulletin of the AMS, Vol. 27, Nr 1, Pages 1 - 67, 1992.

[CL] M. G. Crandall, P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1 - 42.

[C1] M. G. Crandall *An efficient derivation of the Aronsson equation*, Arch. Rational Mech. Anal., 167 (2003) 271 - 279.

[C2] M. G. Crandall *A visit with the ∞-Laplacian*, in *Calculus of Variations and Non-Linear Partial Differential Equations*, Springer Lecture notes in Mathematics 1927, CIME, Cetraro Italy 2005.

[CWY] M. G. Crandall, C. Wang, Y. Yu, *Derivation of the Aronsson Equation for C^1 Hamiltonians*, Transactions of the AMS, Volume 361, Number 1, January 2009, Pages 103 - 124.

[CM] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II, *An excursion into geometric analysis*, Surv. Differ. Geom., IX, Int. Press, Somerville, MA, (2004).

[D1] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Applied Mathematical Sciences 78, Springer - Verlag, 2008 edition.

[D2] B. Dacorogna, *Some geometric and algebraic properties of various types of convex hulls*, in "Nonsmooth mechanics and Analysis: Theoretical and Numerical advances", Advances in Mechanics and Mathematics, Springer, (2006), 25 - 34.

[D3] B. Dacorogna, *Non convex problems of the calculus of variations and differential inclusions*, in Handbook of Differential Equations (Stationary PDEs) Volume 2, Elsevier, North Holland, 2 (2005), 57 - 126.

[DF] B. Dacorogna, A. Ferriero, *Regularity and Selecting Principles for Implicit Ordinary Differential Equations*, Disc. Cont. Dynamical Systems, B, 11 (2009), 87 - 101.

[DPR] B. Dacorogna, G. Pisante, A. M. Ribeiro, *On non quasiconvex problems of the calculus of variations*; Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A 13 (2005), 961 - 983.

[DPK] T. De Pauw, A. Koeller, *Linearly Approximatable Functions*, Proc. of the AMS, April 2009, 1347 - 1356, electr. published on Oct. 6, 2008.

[DLM] D'Ottavio, A., Leonetti, F., Musciano, C., *Maximum principle for vector valued mappings minimizing variational integrals*, Atti Sem. Mat. Fis. Uni. Modena XLVI (1998), 677 - 683.

[DC] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice- Hall, 1976 (25th printing).

[Ev] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, A.M.S., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 19, 1998.

[E] L.C. Evans, *Estimates for Smooth Absolutely Minimizing Lipschitz Extensions*, Electr. Journal of Diff. Equations, No. 03, pp. 1 - 9, Vol. 1993 (1993).

[EG] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Studies in Advanced Mathematics, 1992.

[ES] L. C. Evans, O. Savin, $C^{1,\alpha}$ *Regularity for Infinity Harmonic Functions in Two Dimensions*, Calc. Var. 32, 325 - 347, (2008).

[ESm] L. C. Evans, C. K. Smart, *Everywhere differentiability of Infinity Harmonic Functions*, preprint.

[F] P. Fife, *Long time behavior of solutions of bistable nonlinear diffusion equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 70 (1979), 31-46.

[F-McL] P. Fife, J. B. McLeod, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), 335-361.

[F-McL2] P. Fife, J. B. McLeod, *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*, Arch. Rat. Mech. Anal. 75 (1981), 281-314.

[Fr] L. E. Fraenkel, *An Introduction to Maximum Principles and Symmetry in Elliptic Problems*, Cambridge Tracts in Mathematics 128, 2000.

[G-R] T. Gallay, E. Risler, *A variational proof of global stability for bistable travelling waves*, Diff. and Int. Equations 20 (2007) 901-926.

[G-H-L] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1993, 2nd printing.

[Ga] F. Gazzola, *Existence of Minima for Nonconvex Functionals in Spaces of Functions Depending on the Distance from the Boundary*, Arch. Rational Mech. Anal. 150 (1999) 57 - 76.

[G-T] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differenial Equations of Second Order*, Springer, 1998, revised 3nd edition.

[Gi] E. Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, World Sceintific, 2005.

[GWY] R. Gariepy, Ch. Wang, Y. Yu, *Generalized Cone Comparison Principle for Viscosity Solutions of the Aronsson Equation and Absolute Minimizers*, Communications in PDE, 31, 1027 - 1046, 2006.

[Hei] S. Heinze, *Travelling Waves for Semilinear Parabolic Partial Differential Equations in Cylindrical Domains*, PhD thesis, Heidelberg University, 1988.

[H-P-S] S. Heinze, G. Papanicolaou, A. Stevens *Variational principles for propagation speeds in inhomogeneous media* SIAM J. of Appl. Math. (2001), Vol. 62, No. 1, 129-148.

[He] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, 1981.

[IK] H. Ishii, S. Koike, *Viscosity solutions of Monotone Systems of Second-Order Elliptic PDEs*, Commun. in Partial Differential Equations, 16(6 & 7), 1095 - 1128, (1991).

[IL] H. Ishii, P. L. Lions, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Differential Equations 83 (1990), 26 - 78.

[J-N] R. Jain, B. R. Nagaraj, *$C^{1,1/3}$ Regularity in the Dirichlet Problem for Δ_∞*, Calc. Var. 32, 325 - 347, (2008). Computer and Mathematics with Applications 53, 277 - 394 (2007). preparation.

[J1] R. Jensen, *The Maximum Principle for Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second Order Partial Differenial Equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 101, Nr 1, 1988.

[J2] R. Jensen, *Uniqueness of Lipschitz extensions minimizing the sup-norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Analysis 123 (1993), 51-74.

[JWY] R. Jensen, C. Wang, Y. Yu, *Uniqueness and Nonuniqueness of Viscosity Solutions to Aronsson's Equation*, Arch. Rational Mech. Analysis, (DOI) 10.2007/10.1007/s00205-007-0093-1.

[K1] N. I. Katzourakis, *A Hölder Continuous Nowhere Differentiable Function with Derivative Singular Distribution*, preprint, 2010.

[K2] N. I. Katzourakis, *Explicit Singular Viscosity Solutions of the Aronsson Equation*, preprint, 2010.

[K3] N. I. Katzourakis, *Derivation of the Aronsson System of PDEs for Regular Absolute Minimizers*, preprint, 2011.

[K4] N. I. Katzourakis, *Maximimum Principles for Vectorial Approximate Minimizers of Nonconvex Functionals*, preprint, 2011.

[K5] N. I. Katzourakis, *Contact Solutions for Nonlnear Systems of Partial Differential Equations*, manuscript, 2011.

[Kn] K. Knopp, *Ein einfaches Verfahren zur Bilüng stetiger nirgends differenziebarer functionen*, Math. Z. 2 (1918), 1 - 26.

[K-S] A. Kufner, A.-M. Sändig, *Some Application of Weighted Sobolev Spaces*, Leipzig, Teubner-Texte zur Mathematik, 1987.

[Lax] P. D. Lax, *Linear Algbra and its Applications*, Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, 2nd Edition, 2007.

[L] T. M. Lewis, *A probabilistic property of Katsuuraŏs continuous nowhere differentiable function*, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009) 224 - 231.

[L1] F. Leonetti, *Maximum principle for vector-valued minimizers of some integral functionals*, Boll. Un. Mat. Ital. 5-A (1991), 51 - 56.

[L2] F. Leonetti, *Maximum principle for functionals depending on minors of the jacobian matrix of vector-valued mappings*, Centre for Mathematical Analysis, Australian National Univ., Research Report n.20, 1990.

[LS] F. Leonetti, F. Siepe, *Maximum Principle for Vector Valued Minimizers*, Journal of Convex Analysis 12 (2005) 267 - 278.

[L] P. L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Math. 69, Pitman, London, 1982.

[LMN] M. Lucia, C. Muratov and M. Novaga, E*xistence of traveling wave solutions for Ginzburg-Landau-type problems in infinite cylinders*, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 188, n 3, 475-508, 2008.

[MR] K. S. Mallikarjuna Rao, *An Introduction to the Theory of Viscosity Solutions*, notes based lectures given at the "Instructional School on Modern Theory of PDE", May 27 - June 23, 2007, at the Department of Mathematics, IIT Bombay, Mumbai 400 076.

[MP] P. Marcellini, G. Papi, *Nonlinear elliptic systems with general growth*, J. Differential Equations 221 (2006) 412 - 443.

[M] J. McCarthy, *An everywhere continuous nowhere differentiable function*, Amer. Math. Monthly 60 (1953), 709.

[O1] R. Osserman, *The Convex Hull Property of Immersed Manifolds*, J. Diff. Geom. 6 (1971), 267 - 270.

[O2] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, 2nd edition, Dover, New York, 1986.

[PS] P. Pucci, J. Serrin, *The Maximum Principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Applications 73, Birkhäuser, 2007.

[R] E. Risler, *Global convergence towards travelling fronts in nonlinear parabolic systems with a gradient structure*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, Vol. 25, Issue 2, 381-424 (2008).

[S] O. Savin, C^1 *Regularity for Infinity Harmonic Functions in Two Dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. 176, 351 - 361, (2005).

[Stef] V. Stefanopoulos, *Heteroclinic connections for multiple-well potentials: the anisotropic case*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 138A, 1313ů1330, 2008.

[St] P. Sternberg, *Vector valued local minimizers of nonconvex variational problems*, Rocky Mountain J. of Math., 21, (1991), no. 2, 799-807.

[T] J. Thim, *Continuous nowhere differentiable functions*, Masterős thesis, Luleε University of Technology, December 2003, available at http://epubl.ltu.se/1402-1617/2003/320/index-en.html.

[V] A. Volpert, V. Volpert, V. Volpert, *Travelling wave solutions of parabolic systems*, A.M.S., Translations of Mathematical Monographs Vol. 140, 2000 reprint.

[WY] C. Wang, Y. Yu C^1 *Regularity of the Aronsson Equation in* $\mathbb{R}^2$, Ann. Inst. H. Poincaré, AN 25, 659 - 678, (2008).

[WY] C. Wang, Y. Yu, *Aronsson's equation on Carnot-Carathéodory spaces*, Illinois Journal of Mathematics, Vol. 52, No. 3, 2008, 757 - 772.

[Y] Y. Yu, L^∞ *Variational Problems and Aronsson Equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 182, 153 - 180, (2006).