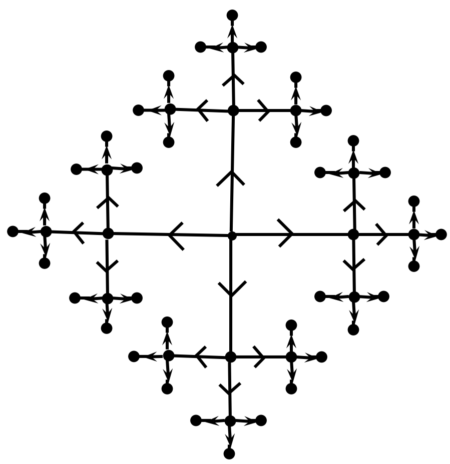
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Περί της τομής πεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων μίας ομάδας

Η ιδιότητα του Howson σε HNN-επεκτάσεις και Αμαλγάματα



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτης Α. Παραμαντζόγλου

Επιβλέπων : Δημήτριος Α. Βάρσος, Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ 2013

" Αιτεῖτε, καὶ δοθήσεται υμῖν,
ζητεῖτε, καὶ ευρήσετε,
κρούετε, καὶ ανοιγήσεται υμῖν
πᾶς γὰρ ο αιτῶν λαμβάνει καὶ ο ζητῶν ευρίσκει
καὶ τῶ κρούοντι ανοιγήσεται."

Κατά Ματθαίον (ζ′, 7-8)

στον πατέρα μου Αντώνιο και στην μνήμη της μητέρας μου Γιολάντας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου τον επιβλέποντά μου, Καθηγήτη κ. Δημήτριο Βάρσο, για το πολύ ενδιαφέρον θέμα που μου υπέδειξε, τις πάντοτε εύστοχες παρατηρήσεις του, την υπομονή του και τον πολύ χρόνο που αφιέρωσε ώστε να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία.
Επίσης πολύ θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κ. Ολυμπία Ταλέλλη και τον Καθηγητή κ. Ευάγγελο Ράπτη για την τιμή που μου έκαναν να μετάσχουν, από την έναρξη της διατριβής αυτής, στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.
Ακόμη ευχαριστώ πολύ και τους Καθηγητές κ. Δημήτριο Δεριζιώτη, κ. Ιωάννη Εμμανουήλ, κ. Βασίλειο Μεταφτσή και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Μιχαήλ Συκιώτη, διότι δεχτήκανε να μετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή.
Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Παπάζογλου για την εξαμηνιαία υποτροφία, κατά το χειμερινό εξάμηνο 2007-2008, καθώς και για την πολύτιμη βοήθειά του στην εύρεση βιβλιογραφίας και πηγών.
Θα ήθελα στη συνέχεια να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε κάποιους ανθρώπους που συνάντησα στα μαθητικά ή φοιτητικά μου χρόνια.
Κατ΄ αρχάς θα ήθελα να ευχαριστώ την Καθηγήτρια κ. Μαρία Φραγκουλοπούλου, διότι της οφείλω το γεγονός ότι συνέχησα τις μεταπτυχιακές μου σπουδές στα Θεωρητικά Μαθηματικά. Την ευχαριστώ πολύ για το ήθος της και το ενδιαφέρον που έδειξε.
Επίσης θα ήθελα να ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Βασίλειο Νεστορίδη διότι η επιρροή του (κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών) στον τρόπο που βλέπω τα Μαθηματικά, λόγω του μαθήματος και της προσωπικότητάς του, μπορουμε να πούμε ότι υπήρξε καθολική (universal).
Την απόφαση να προτιμήσω το Τμήμα Μαθηματικών στις πανελλήνιες εξετάσεις την οφείλω κυρίως στον καθηγητή μου στο φροντιστήριο κ. Θεόδωρο Τζουβάρα. Αυτό συνέβη όχι επειδή με έπεισε με λογικά επιχειρήματα ότι το Μαθηματικό είναι μία καλή σχολή, αλλά γιατί δεν έπληξα μ-σχεδόν ποτέ στο μάθημά του!
Αυτή η εργασία δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί αν δεν είχα την εξαιρετική τεχνική στήριξη του παιδικού μου φίλου και συναδέλφου Αναστάσιου Κίκιλη. Σημαντική ήταν και η βοήθεια που είχα στην αγγλική γλώσσα από την επίσης φίλη και συνάδελφο Ευμορφία Ρούσσου, την οποία ευχαριστώ και για την δακτυλογράφηση της διπλωματικής μου εργασίας.
Τέλος ευχαριστώ θερμά όλους τους συγγενείς, φίλους και συναδέλφους για την στήριξη που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια.
Αυτή η εργασία δεν θα είχε ολοκληρωθεί αν δεν είχα την στήριξη των γονέων μου Αντωνίου και Γιολάντας, από τα παιδικά μου χρόνια μέχρι σήμερα, γι′ αυτό και είναι αφιερωμένη σ′ αυτούς. Στον πατέρα μου εξ′ άλλου οφείλω και το μεγαλύτερο μέρος της υλικής στήριξης για την εκπόνησή της.

Παναγιώτης

Περιεχομενα

1.	Εισαγωγή	6
2.	Προκαταρτικά	10
3.	Η τομή επεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων μιας ελεύθερης ομάδας	22
4.	Η Howson ιδιότητα στις ομάδες	31
5.	Αμαλγάματα και HNN-επεκτάσεις	37
6.	Εφαρμογές	57
7.	Ανοιχτά ερωτήματα	63
Αναφορές		66

1. Εισαγωγη

Μία ομάδα G έχει την ιδιότητα του Howson (ή είναι μία Howson ομάδα) αν η τομή κάθε δύο πεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων της είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Η ιδιότητα αυτή είναι "φυσιολογική" σε κάποιες κατηγορίες ομάδων, όπως οι πεπερασμένες, οι αβελιανές, οι μηδενοδύναμες και οι πολυκυκλικές. Την πρώτη σημαντική παρατήρηση (1954, [31]) έκανε ο Albert Howson (γι΄ αυτό και οι ομάδες αυτές πήραν το ονομά του) που απέδειξε ότι και οι ελεύθερες ομάδες έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Ταυτόχρονα έδειξε ότι αν U, V είναι υποομάδες μίας ελεύθερης ομάδας $\mathbb{F}$ με m, n ελεύθερους γεννήτορες αντιστοίχως, τότε η τομή τους $U \cap V$ δεν μπορεί να έχει πάνω από $2mn - m - n + 1$ ελεύθερους γεννήτορες.

Τα επόμενα χρόνια η έρευνα κινείται κυρίως προς δύο κατευθύνσεις. Να βρεθούν ποιες άλλες κατηγορίες ομάδων έχουν την Howson ιδιότητα αλλά και να βελτιωθεί το ανωτέρω φράγμα στην περίπτωση των ελευθέρων ομάδων. Στη δεύτερη κατεύθυνση έχουμε την διατύπωση της εικασίας, από την Hanna Neumann (1956-1957, [49]-[50]), ότι το πλήθος των γεννητόρων της τομής δεν υπερβαίνει τους $mn - m - n + 2$ ελεύθερους γεννήτορες, αλλά και της ενισχυμένης εικασίας (βλέπε Κεφάλαιο 3-"Μία ιστορική αναδρομή"), από τον Walter Neumann (1989, [51]). Πρόσφατα (2012, [42]) ο Igor Mineyev απέδειξε και τις δύο εικασίες.

Αυτό που μας απασχολεί σε αυτήν την εργασία, δεδομένου ότι υποομάδες ομάδων Howson είναι και αυτές Howson, είναι η πρώτη κατεύθυνση. Μετά το αποτέλεσμα του Howson ακολουθήσανε αρκετές γενικεύσεις. Ο Benjamin Baumslag έδειξε (1966, [9]) ότι η κλάση των Howson ομάδων είναι κλειστή κάτω από ελεύθερα γινόμενα. Επίσης οι Abraham Karrass και Donald Solitar έδειξαν (1970-1971, [36]-[37]) ότι τα αμαλγαματοποιημένα ελεύθερα γινόμενα Howson ομάδων με πεπερασμένο αμάγαλμα καθώς και οι HNN-επεκτάσεις Howson ομάδων με πεπερασμένες συνδεόμενες ομάδες διατηρούν την ιδιότητα του Howson.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω αποτελέσματα ο David Moldavanskii αποδεικνύει (1968, [45]) ότι το ευθύ γινόμενο δύο Howson ομάδων δεν διατηρεί υποχρεωτικά την Howson ιδιότητα. Συγκεκριμένα η ομάδα $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ (όπου $\mathbb{F}_2$ είναι η ελεύθερη ομάδα διάστασης 2 και $\mathbb{Z}$ η άπειρη κυκλική ομάδα) δεν έχει την Howson ιδιότητα. Επεκτείνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα, οι Robert Burns και Andrew Brunner αποδεικνύουν (1979, [18]) ότι καμία επέκταση μίας ελεύθερης ομάδας διαστάσεως $n \geq 2$ δια μέσου μίας άπειρης κυκλικής ομάδας δεν κατέχει την Howson ιδιότητα.

Υπάρχουν κλάσεις ομάδων που έχουν την Howson ιδιότητα, όπως π.χ. οι Fuchsian ομάδες (Leon Greenberg-1960, [27]) ή οι ομάδες όρια (βλέπε [34, 22, 38]). Υπάρχουν κλάσεις ομάδων που δεν έχουν την Howson ιδιότητα, όπως π.χ. τα στεφανιαία γινόμενα κυκλικών ομάδων (Alexander Kirkinskii-1981, [39]) ή κάποια πηλίκα υπερβολικών ομάδων (Ilya Kapovich-1997, [32]). Τέλος υπάρχουν και κλάσεις ομάδων για τις οποίες γνωρίζουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να έχουν την Howson ιδιότητα, όπως π.χ. οι πεπερασμένα παραγόμενες μεταβελιανές ομάδες (Alexander Kirkinskii-1981, [39]) ή οι ομάδες που είναι μηδενοδύναμες δια μέσου αβελιανής ομάδας και ικανοποιούν την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες (Patrizia Longobardi, Mercede Maj-1986, [40]).

Ένα από τα βασικά ερωτήματα που προκύπτουν είναι το παρακάτω. Έστω K, L ομάδες Howson, κάτω από ποιες συνθήκες οι ομάδες $K *_A L$ και $\langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$ διατηρούν την ιδιότητα του Howson; Ικανές συνθήκες έδωσαν οι Robert Burns (1972-1973, [16]-[17]) και Daniel Cohen (1976, [20]). Βασική προϋπόθεση εδώ, για να διατηρείται η ιδιότητα του Howson, είναι οι συνδεόμενες υποομάδες A και B να ανήκουν στην κλάση των Burns υποομάδων (βλέπε Ορισμό 5.1). Αν οι συνδεόμενες υποομάδες είναι πεπερασμένες τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι ανήκουν στην κλάση των Burns υποομάδων, επομένως τα αποτελέσματα των Burns και Cohen επεκτείνουν αυτά των Karrass και Solitar.

O Robert Burns διαπιστώνει (1972, [16]) ότι οι μεγιστικές κυκλικές υποομάδες των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων ομάδων είναι επίσης Burns υποομάδες. Επιπλέον ο Ilya Kapovich περιγράφει (1997, [32]) μία ευρεία κλάση ομάδων (στις οποίες περιλαμβάνονται όλες οι πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες ομάδες και οι θεμελιώδεις ομάδες των κλειστών υπερβολικών επιφανειών) στην οποία οι μεγιστικές κυκλικές υποομάδες είναι Burns. Από την άλλη μεριά, οι μεγιστικές κυκλικές υποομάδες των ελευθέρων αβελιανών ομάδων δεν είναι Burns υποομάδες. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε ότι το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο $\langle a \rangle \times \langle c \rangle *_{\langle c \rangle} \langle c \rangle \times \langle b \rangle$ είναι ισόμορφο με την ομάδα $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, η οποία δεν είναι Howson. Ταυτόχρονα ο David Moldavanskii έχει αποδείξει (1968, [45]) ότι η HNN-επέκταση $\langle t, a \mid t^{-1}at = a^l \rangle$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ είναι μία Howson ομάδα, αν και η συνδεόμενη υποομάδα $\langle a^l \rangle$ δεν είναι Burns υποομάδα της $\langle a \rangle$, όπως παρατήρησε (1976, [20]) και ο Daniel Cohen, ταυτόχρονα με την διατύπωση του Θεωρήματός του.

Γενικά παρουσιάζονται δύο προβλήματα στο αποτέλεσμα των Burns και Cohen. Δεν είναι εύκολο να ελέγξουμε αν μία συνδεόμενη υποομάδα σε ένα αμαγαλματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο ή σε μία HNN-επέκταση είναι Burns. Οι συνθήκες που δίνει το Θεώρημα είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Έτσι το ερώτημα κάτω από ποιές συνθήκες οι ομάδες $K *_A L$ και $\langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$ (K, L ομάδες Howson) διατηρούν την ιδιότητα του Howson, παραμένει ανοιχτό.

Στην εργασία αυτή απαντάμε μερικώς στο παραπάνω ερώτημα. Τα βασικά αποτελέσματα αυτής της διατριβής είναι τα παρακάτω.

Πρόταση 1: (Πρόταση 5.1) Έστω $k, l \in \mathbb{Z}$. Τότε η Baumslag-Solitar ομάδα

$$B(k,l) = \langle t, a \mid t^{-1}a^k t = a^l \rangle$$

έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα k και l ισούται με ± 1.

Το παραπάνω αποτέλεσμα προϋπήρχε με άλλη απόδειξη από τον Vladimir Bezverkhnii (1998, [12]*).*

Θεώρημα 1: (Θεώρημα 5.4) Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν $A = B = K$ ή $A = K > B$ και η G ικανοποιεί τις συνθήκες:
(α) Για κάθε μη πολυκυκλική υποομάδα $\langle t^m, k' \rangle$ όπου $m \geq 1$, $k' \in K$ και για κάθε $k \in K$ έχουμε ότι $\langle t^m, k' \rangle \cap \langle k \rangle \neq 1$.
(β) Υπάρχει μία μη πολυκυκλική υποομάδα $H = \langle t, k_1 \rangle$, όπου $k_1 \in K - B$, τέτοια ώστε $H \leqslant_f G$.

Πόρισμα 1: (Πόρισμα 5.7) Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου $K = K_1 \times K_2$ τέτοια ώστε K_1 πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα και K_2 πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν είτε οι συνδεόμενες υποομάδες είναι πεπερασμένες ή $A = B = K$ ή $A = K > B$ και η G ικανοποιεί τις συνθήκες:
(α') Για κάθε μη πολυκυκλική υποομάδα $\langle t^m, k' \rangle$ όπου $m \geq 1$, $k' \in K$ και για κάθε $k \in K$ απείρου τάξεως έχουμε ότι $\langle t^m, k' \rangle \cap \langle k \rangle \neq 1$.

και (β) του Θεωρήματος 1.

Δηλαδή δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η HNN-επέκταση $\langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$ *να διατηρεί την ιδιότητα του Howson, στην ειδική περίπτωση όπου η* K *είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα.*

Θεώρημα 2: (Πόρισμα 5.8) Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη και άπειρη μηδενοδύναμη ομάδα και A, B μη τετριμμένες άπειρες γνήσιες υποομάδες της K. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα.

Παραμένει ανοιχτό το ερώτημα (βλέπε Ερώτημα 1 από το Κεφάλαιο 7-"Ανοιχτά Ερωτήματα") τι γίνεται όταν έχουμε μία αύξουσα HNN-επέκταση με ομάδα βάσης μία πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα. Ένα μερικό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω.

Πρόταση 2: (Πρόταση 5.4) Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}Kt = B \rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα και B μία γνήσια υποομάδα της K. Υποθέτουμε ακόμα ότι η G ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της είναι πολυκυκλική ή πεπερασμένου δείκτη στην G.

Επίσης δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο $K *_A L$ *να διατηρεί την ιδιότητα του Howson, στην ειδική περίπτωση όπου οι* K, L *είναι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες.*

Θεώρημα 3: (Πόρισμα 5.9) Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων αβελιανών ομάδων K, L. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν $G = K * L$ ή $|K : A| = |L : A| = 2$.

Πόρισμα 2: (Πόρισμα 5.10) Έστω $K = K_1 \times K_2$ και $L = L_1 \times L_2$, όπου K_1, L_1 πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες αβελιανές ομάδες και K_2, L_2 πεπερασμένες αβελιανές ομάδες. Τότε η ομάδα $G = K *_A L$ έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν η A είναι πεπερασμένη ή $|K : A| = |L : A| = 2$.

Χρησιμοποιώντας ίδιες αποδεικτικές μεθόδους μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στην περίπττωση όπου οι K, L *είναι πεπερασμένα παραγόμενες μηδενοδύναμες ομάδες.*

Θεώρημα 4: (Πόρισμα 5.11) Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων μηδενοδυνάμων ομάδων K, L. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν η A είναι πεπερασμένη ή $|K : A| = |L : A| = 2$.

Τέλος όταν οι K, L *είναι πολυκυκλικές ομάδες τα επιχειρήματα αυτά μας δίνουν τις ίδιες ικανές συνθήκες ώστε το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενό τους να είναι Howson ομάδα. Παραμένει ανοιχτό το ερώτημα αν οι συνθήκες αυτές είναι και* *αναγκαίες. Επίσης δεν γνωρίζουμε παράδειγμα Howson ομάδας που να είναι αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο πολυκυκλικών ομάδων με $|K : A| \geq 3$ και $|L : A| \geq 2$.*

Πρόταση 3: (Θεώρημα 5.5) Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πολυκυκλικών ομάδων K, L. Αν η A είναι πεπερασμένη ή $|K : A| = |L : A| = 2$ τότε η G έχει την Howson ιδιότητα.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτουν Παραδείγματα ομάδων που είναι Howson αν και δεν ικανοποιούν τις συνθήκες των Burns και Cohen (Παραδείγματα 2 και 3). Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι τι γίνεται όταν οι K, L είναι πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες ομάδες. Πρόσφατα ο David Moldavanskii έδειξε (2010, [46]) ότι καμία αύξουσα HNN-επέκταση πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων ομάδων δεν είναι Howson. Σε πολύ ειδικές περιπτώσεις μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα αυτό (βλέπε Λήμματα 5.9, 5.10 και 5.11). Επίσης γνωρίζουμε από παλιότερα αποτελέσματα (βλέπε [16], [18] και [32]) περιπτώσεις που τέτοιες ομάδες είναι Howson διότι ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες των Burns και Cohen. Ωστόσο η γενική περίπτωση του προβλήματος παραμένει ανοιχτή.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής :

Στο 2ο Κεφάλαιο παραθέτουμε τους Ορισμούς και τα Θεωρήματα που χρειάζονται για τις αποδείξεις.

Στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε το Θεώρημα του Howson με σύγχρονη προσέγγιση καθώς και μία εκδοχή της απόδειξης της απλής και της ενισχυμένης εικασίας των Neumann μόνο με χρήση της Θεωρίας των Bass και Serre.

Στο 4ο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε γνωστές κλάσεις ομάδων για τις οποίες γνωρίζουμε αν έχουν ή δεν έχουν την Howson ιδιότητα.

Στο 5ο Κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στην κλάση των αμαγαλμάτων και των HNN-επεκτάσεων που έχουν ή δεν έχουν την Howson ιδιότητα. Στην αρχή παρουσιάζουμε τα μέχρι τώρα γνωστά αποτελέσματα, κυρίως το Θεώρημα των Burns και Cohen. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα καινούργια αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, σε ειδικές περιπτώσεις δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε τα αμαλγάματα και οι HNN-επεκτάσεις Howson ομάδων να έχουν την Howson ιδιότητα καθώς και κάποια μερικά αποτελέσματα.

Στο 6ο Κεφάλαιο δίνουμε κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 1. Συγκεκριμένα προκύπτουν κλάσεις και απλά παραδείγματα ομάδων με ή χωρίς την ιδιότητα του Howson.

Στο 7ο Κεφάλαιο παραθέτουμε ανοιχτά ερωτήματα και εικασίες που προέκυψαν από την μελέτη της Howson ιδιότητας στις ομάδες.

Ορισμός 2.1. Ένα **γράφημα** X αποτελείται από την ξένη ένωση ενός συνόλου κορυφών $X^0 \neq \emptyset$ και ενός συνόλου ακμών X^1 και δύο απεικονίσεις

$$X^1 \to X^0 \times X^0,\ e \mapsto (\alpha(e), \omega(e))$$

και

$$X^1 \to X^1,\ e \mapsto \overline{e}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες :
Για κάθε $e \in X^1$ έχουμε $\overline{\overline{e}} = e$, $\overline{e} \neq e$ και $\alpha(e) = \omega(\overline{e})$.
Η $\alpha(e)$ ονομάζεται **αρχική κορυφή** της ακμής e, η $\omega(e)$ **τελική κορυφή** της e και η ακμή $\overline{e}$ **αντίστροφη** της e. Το ζεύγος $(e, \overline{e})$ λέγεται **γεωμετρική ακμή**.

Ορισμός 2.2. Ένας **προσανατολισμός** σε ένα γράφημα X είναι ένα υποσύνολο X^1_+ του X^1 τέτοιο ώστε να ισχύει $X^1 = X^1_+ \coprod \overline{X^1_+}$.

Ορισμός 2.3. Ένας **μορφισμός γραφημάτων** $\phi : X \to Y$ είναι ένα ζεύγος απεικονίσεων

$$\phi^0 : X^0 \to Y^0,\ \phi^1 : X^1 \to Y^1$$

οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες

$$\phi^0(\alpha(e)) = \alpha(\phi^1(e)),\ \phi^0(\omega(e)) = \omega(\phi^1(e)),$$

για κάθε $e \in X$. Χρησιμοποιούμε τις έννοιες **ισομορφισμός** και **αυτομορφισμός γραφημάτων** με φυσικό τρόπο.

Ορισμός 2.4. Έστω X γράφημα. Για κάθε κορυφή $v \in X^0$ ορίζουμε ως **αστέρι της κορυφής v** :

$$star(v) = \{e \in X^1_+ \mid \alpha(e) = v\} \cup \{e \in X^1_+ \mid \omega(e) = v\}.$$

Αν $|star(v)| > 2$ η κορυφή v του γραφήματος λέγεται **σημείο διακλάδωσης**, ενώ αν $|star(v)| = 1$ τότε η κορυφή v λέγεται **ακραίο σημείο**. Γενικά ο πληθάριθμος $|star(v)|$ ονομάζεται **τοπολογική τάξη** της κορυφής v στο γράφημα.

Ορισμός 2.5. Μία ομάδα G **δρα στο γράφημα** X (γράφουμε $G \curvearrowright X$) αν υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\rho : G \to AutX : g \mapsto \rho(g)$$

με

$$gv := \rho(g)(v),\ ge := \rho(g)(e)$$

όπου $\{v, gv\} \subseteq X^0$ και $\{e, ge\} \subseteq X^1$. Αν για κάθε $g \in G$ και κάθε $e \in X^1$ έχουμε ότι $ge \neq \overline{e}$ θα λέμε ότι η G **δρα χωρίς αντιστροφές**. Το σύνολο των G-τροχιών της δράσης συμβολίζεται με $G \setminus X := \{Gx \mid x \in X\}$.

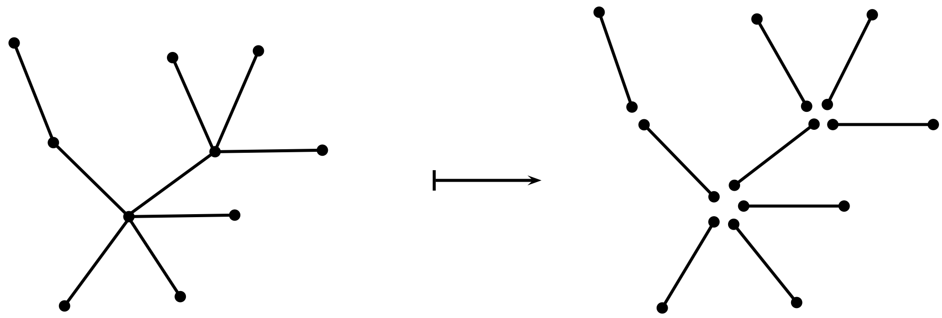
Ορισμός 2.6. Ένα υποσύνολο ενός γραφήματος που αποτελεί γράφημα με τους περιορισμούς των αρχικών απεικονίσεων ονομάζεται **υπογράφημα**. Ένα υπογράφημα του οποίου οι ακμές $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ έχουν την ιδιότητα $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$, όπου $1 \leq i \leq n-1$, λέγεται **πεπερασμένο μονοπάτι** (γράφουμε $e_1 e_2 ... e_n$). Η κορυφή $\alpha(e_1)$ ονομάζεται **αρχή** του (πεπερασμένου) μονοπατιού ενώ η κορυφή $\omega(e_n)$ ονομάζεται **τέλος** του (πεπερασμένου) μονοπατιού. Ένα μονοπάτι που δεν περιέχει παλινδρομήσεις, δηλαδή ισχύει $e_{i+1} \neq \overline{e_i}$ για κάθε δύο γειτονικές ακμές, ονομάζεται **ανηγμένο μονοπάτι**. Ένα ανηγμένο μονοπάτι χωρίς τέλος ονομάζεται **άπειρο μονοπάτι** (γράφουμε $e_1 e_2 ... e_n ...$). Ένα ανηγμένο μονοπάτι χωρίς αρχή και τέλος ονομάζεται **διπλά άπειρο μονοπάτι** (γράφουμε $...e_{-n}...e_{-2}e_{-1}e_0e_1e_2...$ $e_n...$). Ένα πεπερασμένο ανηγμένο μονοπάτι $e_1e_2...e_n$ με την ιδιότητα $\omega(e_n) = \alpha(e_1)$ λέγεται **κύκλος** μήκους n. Ένας κύκλος μήκους 1 λέγεται **βρόχος**.

Ορισμός 2.7. Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν κάθε δύο κορυφές του συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Τα μεγιστικά συνεκτικά υπογραφήματα λέγονται **συνεκτικές συνιστώσες** του γραφήματος.

Ορισμός 2.8. Ένα **δένδρο** είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους. Ένα μη συνεκτικό γράφημα του οποίου κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι δένδρο λέγεται **δάσος**.

Λήμμα 2.1. *(Howson, Λήμμα 2.2,* [31]*) Έστω T ένα πεπερασμένο δένδρο με n ακραία σημεία. Αν το T έχει σημεία διακλάδωσης $p_1, p_2, ..., p_s$, με τοπολογικές τάξεις $n_1, n_2, ..., n_s$ αντιστοίχως, τότε $n = 2 + \sum_{i=1}^{s}(n_i - 2)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το T έχει m το πλήθος γεωμετρικές ακμές και $m+1$ το πλήθος κορυφές. Έστω r το πλήθος των κορυφών του T με τοπολογική τάξη 2, ισχύει $m + 1 = n + r + s$.
Διασπάμε το δένδρο σε m το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες (όπως π.χ. στην Εικόνα 1). Τώρα το πλήθος των ακραίων σημείων γίνεται $n + 2r + \sum_{i=1}^{s} n_i$.



[Εικόνα 1 : Η διάσπαση του T σε e συνεκτικές συνιστώσες]

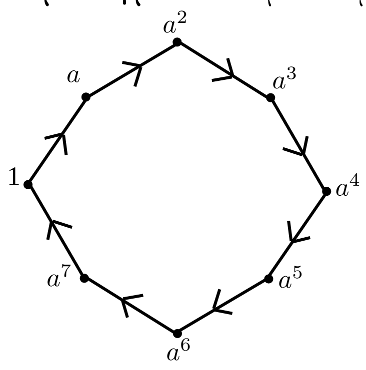
Κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει 2 ακραία σημεία, άρα από τα παραπάνω έχουμε :

$$n + 2r + \sum_{i=1}^{s} n_i = 2m = 2(n + r + s - 1)$$

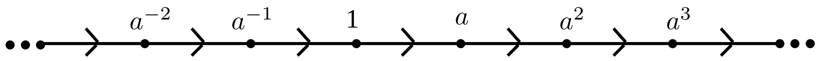
$$\Rightarrow n = 2 + \sum_{i=1}^{s}(n_i - 2).$$

□

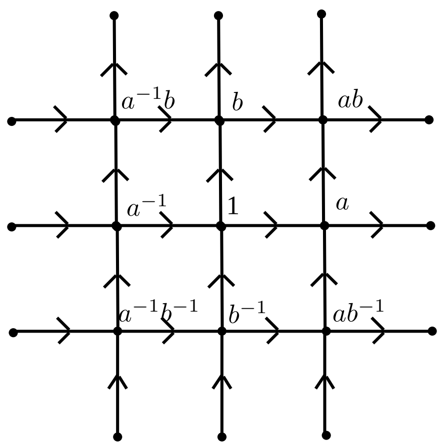
Παραδείγματα : Παραθέτουμε μερικές απλές περιπτώσεις Cayley γραφημάτων.



[*Εικόνα* 2 : $\Gamma(\mathbb{Z}_8, \{a\})$]



[*Εικόνα* 3 : $\Gamma(\mathbb{Z}, \{a\})$]



[*Εικόνα* 4 : $\Gamma(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{a, b\})$]

Ορισμός 2.9. Έστω G μία ομάδα και S ένα υποσύνολο της G. Ορίζουμε το **γραφημα Cayley** $\Gamma(G,S)(=X)$ να είναι το προσανατολισμένο γράφημα με κορυφές $X^0 = G$ και (προσανατολισμένες) ακμές $X^1_+ = G \times S$, με $\alpha(g,s) = g$ και $\omega(g,s) = gs$ για κάθε ακμή $(g,s) \in G \times S$. Προφανώς το γράφημα Cayley $\Gamma(G,S)$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το S είναι σύνολο γεννητόρων της G.
Έστω ότι η G έχει την παράσταση $G = \langle\, S \mid R \,\rangle$, τότε γνωρίζουμε ότι αν $K = \langle\, R \,\rangle^{F(S)}$, ισχύει $G = F(S) \diagup K$ και ορίζεται ο φυσικός επιμορφισμός

$$F(S) \twoheadrightarrow G : w \mapsto \overline{w} = wK.$$

Ορίζουμε το **S-μήκος** ενός στοιχείου $g \in G$ ως εξής

$$l_S(g) = min\{\ l(w) \mid w \in F(S),\ g = \overline{w}\ \}.$$

Επίσης αν $g, g' \in G$ τότε η d_S, με $d_S(g,g') = l_S(g^{-1}g')$, είναι η αντίστοιχη μετρική στον χώρο $\Gamma(G,S)$.

Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε τοπολογικούς χώρους θεωρούμε ότι έχουν καλές ιδιότητες, δηλαδή είναι Hausdorff και συνεκτικοί κατά τόξα.

Ορισμός 2.10. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f_0, f_1 : X \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις. Λέμε ότι οι f_0, f_1 είναι **ομοτοπικές** αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : X \times [0,1] \to Y$ με $F(x,0) = f_0(x)$ και $F(x,1) = f_1(x)$. Η F τότε είναι μία **ομοτοπία** που ενώνει τις f_0, f_1. Γράφουμε $f_0 \simeq f_1$ και $f_t = F(x,t)$. Η σχέση " $\simeq$ " είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Η $f : X \to Y$ είναι μία **ομοτοπική ισοδυναμία** αν υπάρχει $g : Y \to X$ τέτοια ώστε $f \circ g \simeq 1_Y$ και $g \circ f \simeq 1_X$. Τότε οι τοπολογικοί χώροι X, Y είναι **ομοτοπικά ισοδύναμοι**.

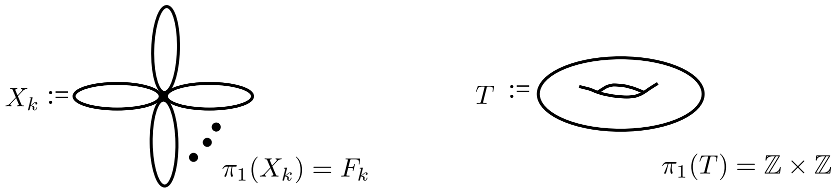
Ορισμός 2.11. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα **(τοπολογικό) μονοπάτι** στον X είναι μία συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$. Μία οικογένεια μονοπατιών $\{f_t, t \in [0,1]\}$ ονομάζεται **ομοτοπία μονοπατιών** στον X όταν :
(1) τα άκρα $f_t(0), f_t(1)$ είναι ανεξάρτητα από το t.
(2) υπάρχει μία ομοτοπία $F : [0,1] \times [0,1] \to X : (s,t) \mapsto f_t(s)$.
Λέμε ότι τα μονοπάτια f_0, f_1 συνδέονται με την ομοτοπία μονοπατιών f_t και γράφουμε $f_0 \simeq f_1$.
Η σχέση ομοτοπίας είναι σχέση ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του f με $[f]$.

Ορισμός 2.12. Έστω $f, g : [0,1] \to X$ μονοπάτια τέτοια ώστε $f(1) = g(0)$, τότε ορίζουμε το **γινόμενο** $\mathbf{f \cdot g}$ ως εξής

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Το γινόμενο είναι καλά ορισμένο και στις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή ισχύει $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$.

Ορισμός 2.13 (τοπολογικός ορισμός θεμελιώδους ομάδας)**.** ([30], [3]) Έστω X τοπολογικός χώρος και $f : [0,1] \to X$ μονοπάτι με $f(0) = f(1) = x_0$, τότε το μονοπάτι λέγεται **βρόχος** και το x_0 **σημείο αναφοράς**. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας (ως προς την ομοτοπία) των βρόχων με σημείο αναφοράς το x_0 αποτελεί ομάδα με πράξη την $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ (όπου f, g βρόχοι) και λέγεται **θεμελιώδης ομάδα**. Συμβολίζεται με $\pi_1(X, x_0)$ (ή πιο απλά με $\pi_1(X)$) και τα στοιχεία της με $[f]$.



[Εικόνα 5 : Παραδείγματα θεμελιωδών ομάδων τοπολογικών χώρων]

Ορισμός 2.14. ([23]) Ένα **γράφημα ομάδων** $(\mathcal{G}, Y)$ αποτελείται από ένα προσανατολισμένο γράφημα Y, όπου σε κάθε $y \in Y$ αντιστοιχεί μία ομάδα $\mathcal{G}(y)$ και σε κάθε ακμή e του Y δύο μονομορφισμοί ομάδων

$$\alpha_e : \mathcal{G}(e) \mapsto \mathcal{G}(\alpha(e)),\ \omega_e : \mathcal{G}(e) \mapsto \mathcal{G}(\omega(e)).$$

Οι ομάδες $\mathcal{G}(e), \mathcal{G}(v)$ ονομάζονται **ομάδες ακμών** και **ομάδες κορυφών** του $\mathcal{G}$, αντιστοίχως. Επίσης ισχύει ότι $\mathcal{G}(\overline{e}) = \mathcal{G}(e)$. Αν $\mathcal{G} = \mathcal{I}$ είναι το γράφημα ομάδων με $\mathcal{I}(v) = 1$ για κάθε $v \in Y^0$, τότε αυτό λέγεται **τετριμμένο**.

Ορισμός 2.15. ([58]) Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα συνεκτικό γράφημα ομάδων και $F(\mathcal{G}, Y)$ η ομάδα που παράγεται από τις ομάδες $\mathcal{G}(v)$, $v \in Y^0$, και τις ακμές $e \in Y^1$, με τις εξής σχέσεις:

$$\overline{e} = e^{-1},\ e^{-1}\alpha_e(g)e = \omega_e(g),$$

για κάθε $e \in Y^1$, $g \in \mathcal{G}(e)$. Πιο συγκεκριμένα, έστω Γ το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων κορυφής $\mathcal{G}(v)$ και της ελεύθερης ομάδας με ελεύθερους γεννήτορες τις ακμές του Y. Η ομάδα $F(\mathcal{G}, Y)$ ορίζεται ως το πηλίκο της Γ προς την κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $\{\ e\overline{e},\ e^{-1}\alpha_e(g)e(\omega_e(g))^{-1}$, για κάθε $e \in Y^1$, $g \in \mathcal{G}(e)\ \}$. Έστω τώρα $c = e_1 e_2 ... e_n$ ένα μονοπάτι στο Y και $\mu = (g_{v_0}, g_{v_1}, ..., g_{v_n})$ μία ακολουθία από στοιχεία των ομάδων $\mathcal{G}(v_i)(i = 0, 1, ..., n)$, έτσι ώστε να ισχύει $\omega(e_i) = v_i = \alpha(e_{i+1})$. Τότε ένα στοιχείο $|c,\ \mu|$ της $F(\mathcal{G}, Y)$ θα έχει την μορφή $|c,\ \mu| = g_{v_0} e_1 g_{v_1} e_2 g_{v_2} \cdots e_n g_{v_n}$.
Θα δωθούν δύο ορισμοί της θεμελιώδους ομάδας ενός γραφήματος ομάδων $(\mathcal{G}, Y)$.
1. Έστω $T(Y)$ ένα μεγιστικό δένδρο του Y. Η **θεμελιώδης ομάδα** $\pi_1(\mathcal{G}, T(Y))$ είναι το πηλίκο της $F(\mathcal{G}, Y)$ προς την κανονική υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $e \in T(Y)^1$. Τώρα αν g_y είναι η εικόνα του y στην $\pi_1(\mathcal{G}, T(Y))$, η ομάδα $\pi_1(\mathcal{G}, T(Y))$ θα παράγεται από τις ομάδες $\mathcal{G}(v)(v \in Y^0)$ και τα στοιχεία $g_e(e \in Y^1)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$g_e{}^{-1}\alpha_e(g)g_e = \omega_e(g),\ g_{\overline{e}} = g_e{}^{-1},\ g \in \mathcal{G}(e)$$

και

$$g_e = 1,\ e \in T(Y)^1.$$

Αν το Y είναι δένδρο τότε η θεμελιώδης ομάδα λέγεται **δενδρικό γινόμενο**. Το δενδρικό γινόμενο είναι το ελεύθερο γινόμενο με αμάγαλμα

$$G = \prod *(\mathcal{G}(v_i) \mid \alpha_{e_j}(\mathcal{G}(e_j)) = \omega_{e_j}(\mathcal{G}(e_j))).$$

2. Έστω v_0 μία κορυφή του Y. Ορίζουμε ως **θεμελιώδη ομάδα** $\pi_1(\mathcal{G}, Y, v_0)$ να είναι η υποομάδα της $F(\mathcal{G}, Y)$ που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $|c,\ \mu|$, όπου c είναι ένας κύκλος με αρχική και τελική κορυφή την v_0. Προφανώς εάν $\mathcal{G} = \mathcal{I}$ είναι το τετριμμένο γράφημα ομάδων, τότε η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathcal{I}, Y, v_0)$ ταυτίζεται με την θεμελιώδη ομάδα (με την συνήθη τοπολογική έννοια) $\pi_1(Y, v_0)$.

Θεώρημα Δομής των Bass-Serre. ([58], [23]) Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ ένα συνεκτικό γράφημα ομάδων και $T(Y)$ ένα μεγιστικό υποδένδρο του Y. Το **σύνηθες γράφημα** T του $\mathcal{G}$ ως προς το $T(Y)$, είναι το γράφημα με

$$T^0 = \coprod_{v \in Y^0} \pi_1(\mathcal{G}, T(Y)) \diagup \mathcal{G}(v),\ T^1 = \coprod_{e \in Y^1} \pi_1(\mathcal{G}, T(Y)) \diagup \mathcal{G}(e),$$

όπου οι επαγόμενες απεικονίσεις άκρων δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha(g\mathcal{G}(e)) = g\mathcal{G}(\alpha(e)),\ \omega(g\mathcal{G}(e)) = gg_e\mathcal{G}(\omega(e)),$$

για κάθε $g \in \pi_1(\mathcal{G}, T(Y))$ και $e \in Y^1$. Αποδεικνύεται ότι το T είναι δένδρο και η $G = \pi_1(\mathcal{G}, T(Y))$ δρα στο δένδρο T με φυσικό τρόπο ώστε να ισχύει

$$\pi_1(\mathcal{G}, T(Y)) \setminus T \simeq Y.$$

Επειδή το T είναι δένδρο, στη συνέχεια θα το αναφέρουμε ως **σύνηθες δένδρο**. Αντιστρόφως, έστω ότι η ομάδα G δρα σε ένα δένδρο T. Τότε υπάρχει ένα γράφημα ομάδων $\mathcal{G} : G \setminus T \to O\mu\acute{\alpha}\delta\epsilon\varsigma$, με $\mathcal{G}(y) = Stab_G(y)$ για κάθε $y \in G \setminus T$. Επίσης ισχύει ότι

$$\pi_1(\mathcal{G}, T(G \setminus T)) = G.$$

Στην ειδική περίπτωση που το γράφημα Y είναι μία ακμή με διαφορετικά άκρα, έχουμε ότι η G είναι ελεύθερο γινόμενο με αμάγαλμα, περισσότερες ιδιότητες για το αντίστοιχο σύνηθες δένδρο θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 5. Ομοίως αν το γράφημα Y είναι βρόχος, έχουμε ότι η G είναι μία HNN επέκταση, περισσότερες ιδιότητες για το αντίστοιχο σύνηθες δένδρο θα συναντήσουμε επίσης στο Κεφάλαιο 5.

Ορισμός 2.16. Μια HNN-επέκταση $G = K(\varphi) = \langle\, t, K \mid t^{-1}Kt = \varphi(K)\, \rangle$ λέγεται **αύξουσα** όταν ο μονομορφισμός φ της K δεν είναι "επί ".

Ορισμός 2.17. Έστω $F = F(S)$ ελεύθερη ομάδα με βάση S και X ένα συνεκτικό γράφημα. Μία **επισύναψη ετικετών** στις ακμές του X είναι μία απεικόνιση

$$s : X^1 \to S \cup S^{-1} : e \mapsto s(e),$$

τέτοια ώστε να ισχύει $s(\overline{e}) = (s(e))^{-1}$. Η **ετικέτα** ενός μονοπατιού $c = e_1e_2...e_k$ στο X είναι το γινόμενο $s(c) = s(e_1)s(e_2)...s(e_k)$ στην $F(S)$. Η ετικέτα ενός εκφυλισμένου μονοπατιού είναι το ταυτοτικό στοιχείο. Αν ορίζεται το γινόμενο των μονοπατιών c_1 και c_2 ισχύει ότι $s(c_1 \cdot c_2) = s(c_1)s(c_2)$. Αποδεικνύεται ότι οι ετικέτες των ομοτοπικών μονοπατιών συμπίπτουν.

Ορισμός 2.18. ([14]) Έστω s μία επισύναψη ετικετών, τότε παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\mathbf{s}$ με

$$\mathbf{s} : \pi_1(X, x) \to F(S) : [p] \mapsto s(p)$$

είναι ομομορφισμός. Η εικόνα $\mathbf{s}(\pi_1(X, x))$ λέγεται **s-θεμελιώδης ομάδα** του γραφήματος X.

Ορισμός 2.19. ([14]) Ένα συνεκτικό γράφημα X με σημείο αναφοράς την κορυφή x και μία επισύναψη ετικετών $s : X^1 \to S \cup S^{-1}$ λέγεται **S-γράφημα** αν η επισύναψη ετικετών απεικονίζει το αστέρι κάθε κορυφής του X 1-1 και επί στο $S \cup S^{-1}$. Αν το X είναι S-γράφημα, η απεικόνιση $\mathbf{s} : \pi_1(X, x) \to F(S)$ αποδεικνύεται ότι είναι μονομορφισμός. Δύο S-γραφήματα X_1, X_2, θα τα ονομάζουμε **S-ισόμορφα** αν υπάρχει ένας ισομορφισμός γραφημάτων $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$ που διατηρεί τις ετικέτες των ακμών, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "s_1"] \arrow[d, "\phi"'] & & F(S) \\ X_2 \arrow[urr, "s_2"'] & & \end{tikzcd}$$
.

Ορισμός 2.20. Ο **πυρήνας ενός συνεκτικού γραφήματος** (X, x) είναι το υπογράφημα που περιέχει όλα τα ανηγμένα μονοπάτια από το x στο x (τον συμβολίζουμε με $C(X, x)$). Αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας $C(X, x)$ ταυτίζεται με το μικρότερο υπογράφημα C του X που περιέχει το x για το οποίο υπάρχει ένα σύνολο $\{T_i | i \in I\}$ ξένων υποδένδρων τέτοιων ώστε $X = C \cup (\cup_{i \in I} T_i)$ και $C \cap T_i$ είναι μία κορυφή που εξαρτάται από το i.

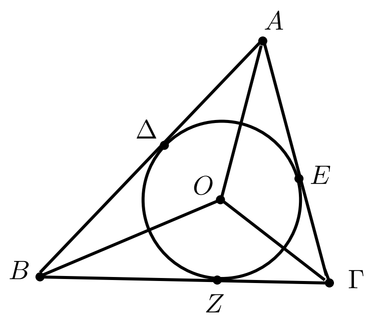
Ορισμός 2.21. ([28], [26], [5], [52]) Έστω (M, d) μετρικός χώρος και Δ ένα γεωδαισιακό τρίγωνο στον M, με κορυφές x, y, z και πλευρές $[x, y], [x, z], [y, z]$. Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν μοναδικά σημεία p, q, r, των τριών πλευρών του αντιστοίχως, τέτοια ώστε

$$d(x, p) = d(x, q),\ d(z, q) = d(z, r) \ \kappa\alpha\iota\ d(y, p) = d(y, r).$$

Έστω $\delta \geq 0$. Ένα γεωδεσιακό τρίγωνο Δ στον μετρικό χώρο M ονομάζεται $\delta -$ **λεπτό** όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη :

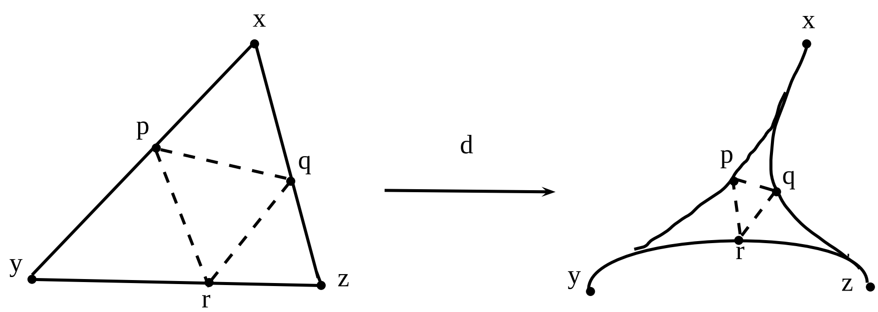
Για κάθε δύο σημεία $a \in [x, y]$ και $b \in [x, z]$ τέτοια ώστε $d(x, a) = d(x, b) \leq d(x, p) = d(x, q)$ έχουμε ότι $d(a, b) \leq \delta$ (καθώς και οι συμμετρικές συνθήκες για τα y και z).

Παραδείγμα : (Θεώρημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας) Γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου. Έστω $\delta = max\{(\Delta E), (EZ), (Z\Delta)\}$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι δ-λεπτό.



[Εικόνα 6 : Εγγεγραμμένος κύκλος σε τρίγωνο στον Ευκλείδειο χώρο]

Ορισμός 2.22. ([28], [26], [5], [52])
Μία ομάδα G ονομάζεται **υπερβολική** αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο X που την παράγει, υπάρχει ένα $\delta \geq 0$ τέτοιο ώστε όλα τα γεωδαισιακά τρίγωνα στον χώρο $(\Gamma(G, X), d_X)$ να είναι δ-λεπτά.



[Εικόνα 7 : δ-λεπτό τρίγωνο στο Cayley γράφημα υπερβολικής ομάδας]

Παραδείγματα : (1): Όλες οι πεπερασμένες ομάδες είναι υπερβολικές.
(2): Οι ελεύθερες ομάδες είναι υπερβολικές (όλα τα γεωδαισιακά τους τρίγωνα είναι 0-λεπτά).
(3): Η ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ είναι υπερβολική.
(4): Η ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ δεν είναι υπερβολική (δεν υπάρχει σταθερό δ ώστε τα γεωδαισιακά της τρίγωνα να είναι δ-λεπτά-Εικόνα 4).
(5): Η ομάδα $F_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι υπερβολική, διότι περιέχει ως υποομάδα την $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (βλέπε [4], σελ. 93).
(6): Όπως θα δούμε στην Πρόταση 5.1, όταν $m \geq 2$ και $n \geq 3$, οι Baumslag-Solitar ομάδες

$$B(m, n) = \langle\, t, a \mid t^{-1} a^m t = a^n \,\rangle$$

περιέχουν ως υποομάδα την $F_2 \times \mathbb{Z}$, επομένως δεν είναι υπερβολικές.
(7): Η ομάδα $B(1, 2) = \langle\, t, a \mid t^{-1} a t = a^2 \,\rangle$ δεν είναι υπερβολική (βλέπε [4], σελ. 66).

Ορισμός 2.23. Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, X ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της και $A \leq G$. Η A θα λέμε ότι είναι **οιωνεί-κυρτή** ($quasi-convex$) στην G αν μία από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες ικανοποιείται :
(1) Υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε κάθε γεωδεσιακή $[a_1, a_2]$ στον $\Gamma(G, X)$ που ενώνει δύο σημεία της A περιέχεται στην ϵ-γειτονιά της A.
(2) Η A είναι πεπερασμένα παραγόμενη και για κάθε άλλο πεπερασμένο σύνολο Y που την παράγει, υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$d_Y(a_1, a_2) \leq K(d_X(a_1, a_2))$$

για κάθε $a_1, a_2 \in A$.

Πρόταση 2.1. *(Short, Πρόταση 1, [59]) Υποθέτουμε ότι η ομάδα G παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο S και έστω $A \leq G$. Αν η A είναι οιωνεί-κυρτή στην G τότε η A είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Απόδειξη. Έστω $h \in A$ και $w = a_1 ... a_n$, $a_i \in S \cup S^{-1}$, ένα γεωδεσιακό μονοπάτι στο $\Gamma(G, S)$ από το 1 στο h. Από την υπόθεση υπάρχει μία σταθερά $\epsilon \geq 0$ τέτοια ώστε κάθε κορυφή του μονοπατιού w να βρίσκεται σε απόσταση το πολύ ϵ από μία κορυφή της A. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν λέξεις $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ με $l_S(\gamma_j) \leq \epsilon$, τέτοιες ώστε τα μονοπάτια $a_1 ... a_j \gamma_j$ να αρχίζουν από το 1 και να καταλήγουν σε μία κορυφή της A. Ξαναγράφουμε την λέξη w ως εξής

$$(\gamma_0^{-1} a_1 \gamma_1)(\gamma_1^{-1} a_2 \gamma_2)...(\gamma_{n-1}^{-1} a_n \gamma_n)$$

όπου $\gamma_0 = \gamma_n$ είναι η κενή λέξη. Κάθε λέξη $\{\gamma_i^{-1} a_{i+1} \gamma_{i+1}\}$ έχει μήκος το πολύ $2\epsilon + 1$ και αναπαριστά ένα στοιχείο της A. Είναι τώρα προφανές ότι

$$A = \langle\ g \in A \mid g = \overline{v},\ l_S(v) \leq 2\epsilon + 1\ \rangle.$$

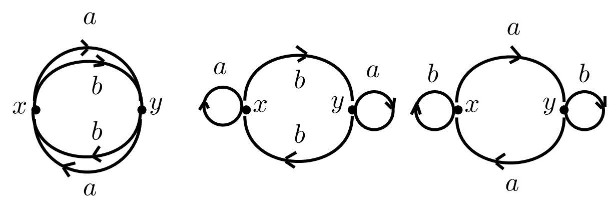
□

Πρόταση 2.2. *(βλέπε [5]) Έστω G υπερβολική ομάδα.*
(1) Αν η A είναι οιωνεί-κυρτή υποομάδα της G τότε η A είναι υπερβολική ομάδα (επίσης η A είναι και πεπερασμένα παριστώμενη).
(2) Αν η C είναι κυκλική ή πεπερασμένη υποομάδα της G τότε η C είναι οιωνεί-κυρτή στην G.
(3) Αν $A \leq B \leq G$ και $|B : A| < \infty$ τότε η A είναι οιωνεί-κυρτή στην G αν και μόνο αν η B είναι οιωνεί-κυρτή στην G.
(4) Αν η A είναι οιωνεί-κυρτή στην G και X, Y πεπερασμένα σύνολα που την παράγουν τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε d_Y-γεωδεσιακή λέξη W, για κάθε d_X-γεωδεσιακή λέξη w με $\overline{w} = \overline{W}$ και κάθε αρχικό τμήμα u της w υπάρχει ένα αρχικό τμήμα U της W τέτοιο ώστε $d_X(\overline{u}, \overline{U}) \leq \epsilon$ (όπου $\overline{w}, \overline{W}, \overline{u}$ και $\overline{U}$ τα αντίστοιχα στοιχεία της G).

Ορισμός 2.24. Έστω G μία υπερβολική ομάδα. Θα λέμε ότι η G ανήκει στην **κατηγορία Q** αν όλες οι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της είναι οιωνεί-κυρτές.

Θεώρημα 2.1. *(Θεώρημα του Schreier, [56]) Έστω F ελεύθερη ομάδα και H μία υποομάδα της. Τότε η H είναι ελεύθερη και επιπλέον αν $rankF = n$ και $|F : H| = m$ τότε $rankH = nm + 1 - m$.*

Πρόταση 2.3. *(βλέπε Πρόταση 21.3 στο [14])*
(1) Έστω $F(S)$ ελεύθερη ομάδα. Για κάθε υποομάδα H της $F(S)$ υπάρχει μοναδικό S-γράφημα, υπό S-ισομορφισμούς, με **s***-θεμελιώδη ομάδα την H.*
(2) Ο δείκτης $|F(S) : H|$ ισούται με το πλήθος των κορυφών του S-γραφήματος που αντιστοιχεί στην H.



$< b^2, a^2, ab >$ $\quad$ $< a, b^2, bab^{-1} >$ $\quad$ $< b, a^2, aba^{-1} >$

[Εικόνα 8 : Τα S-γραφήματα των υποομάδων δείκτου 2 της $F(a, b)$]

Θεώρημα 2.2. *(βλέπε Θεώρημα 22.5 στο [14]) Έστω F μία ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης διάστασης και N μία μη τετριμμένη κανονική υποομάδα της F. Τότε ο δείκτης της N στην F είναι πεπερασμένος αν και μόνο αν η ομάδα N είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Πρόταση 2.4. *(βλέπε Πρόταση I.3.10 στο [41]) Έστω F ελεύθερη ομάδα, A ένα πεπερασμένο υποσύνολο της F και H μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της F τέτοια ώστε $H \cap A = \emptyset$. Τότε η H είναι ένας ελεύθερος παράγοντας μίας υποομάδας G, πεπερασμένου δείκτου στην F και τέτοιας ώστε $G \cap A = \emptyset$.*

Θεώρημα 2.3. *(Θεώρημα Υποομάδων του Kurosh, βλέπε 6.3.1 στο* [55]*) Έστω* $\{G_i,\, i \in I\}$ *ένα σύνολο ομάδων και* $G = *_{i\in I} G_i$*. Αν* H *είναι μία υποομάδα της* G *τότε :*

$$H = H_0 * (*_{i\in I} H \cap d_i G_i {d_i}^{-1}),$$

όπου H_0 *είναι μία ελεύθερη ομάδα ,* d_i *ανήκει σε ένα σύνολο αντιπροσώπων του* $(H,\, G_i)$*-διπλού συμπλόκου και* $i \in I$*. Επιπλέον, αν* $|G : H| = m$ *τότε* $rank H_0 = \sum_{i\in I}(m - m_i) + 1 - m$*, όπου* m_i *είναι το πλήθος των* $(H,\, G_i)$*-διπλών συμπλόκων στην* G*.*

Έστω $G = A *_U B$ ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάγαλμα και H μία υποομάδα της G. Στις εργασίες [36] και [19] αποδεικνύεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε το παρακάτω σύστημα.
Μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο $\{D_a\}$ από αντιπροσώπους των (H, A)-διπλών συμπλόκων στην G και στη συνέχεια, για κάθε a, ένα σύνολο $\{E_u\}$ από αντιπροσώπους των $({D_a}^{-1} H D_a \cap A, U)$-διπλών συμπλόκων στην A, έτσι ώστε το $\{D_\alpha E_u\}$ να είναι ταυτόχρονα ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, U)-διπλών συμπλόκων στην G. Ομοίως και ένα σύνολο $\{D_\beta\}$ για τα (H, B)-διπλά σύμπλοκα στην G και στη συνέχεια, για κάθε β, ένα σύνολο $\{E_v\}$ για τα $({D_\beta}^{-1} H D_\beta \cap B, U)$-διπλά σύμπλοκα στην B, έτσι ώστε το $\{D_\beta E_v\}$ να είναι ταυτόχρονα ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, U)-διπλών συμπλόκων στην G.
Αυτή η συλλογή των συνόλων $\{D_a\}$, $\{D_\beta\}$ καθώς και των αντιστοίχων τους $\{E_u\}$, $\{E_v\}$ ονομάζεται $\mathbf{semi-cress}$ (ημι-**Σ**υμβατό **Κ**ανονικό **Ε**πεκτατό **Σ**ύστημα του Schreier) για την υποομάδα H του ελευθέρου γινομένου με αμάγαλμα G.
Ορίζουμε τα στοιχεία

$$t_{\beta v} := D_\beta E_v (D_a E_u P)^{-1} \in H$$

όπου $D_\beta E_v \in H D_a E_u P$, με $P \in U$.

Θεώρημα 2.4. *(Θεώρημα 3,*[19]*) Έστω* $G = A *_U B$ *ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάγαλμα και* H *μία υποομάδα της* G*. Κατασκευάζουμε ένα semi-cress και έστω* $t_{\beta v}$ *τα στοιχεία της* H *που ορίσαμε παραπάνω.*
Τότε η H *παράγεται από όλα τα* $t_{\beta v}$ *μαζί με όλες τις υποομάδες* $H \cap D_a A {D_a}^{-1}$ *και* $H \cap D_\beta A {D_\beta}^{-1}$*. Επιπλέον ισχύουν τα εξής :*
α) Τα στοιχεία $t_{\beta v}$ *που είναι διαφορετικά της μονάδας* e *αποτελούν μία βάση μίας ελεύθερης υποομάδας της* H*.*
β) Η ομάδα K *που παράγεται από όλες τις υποομάδες* $H \cap D_a A {D_a}^{-1}$ *και* $H \cap D_\beta A {D_\beta}^{-1}$ *είναι το δενδρικό γινόμενο αυτών των ομάδων. Δύο ομάδες κορυφών είναι γειτονικές στο αντίστοιχο δένδρο ομάδων αν* $D_a = D_\beta = 1$ *ή αν* $D_a = D_\beta b$ *ή* $D_\beta = D_a a$ *για κάποιο* $b \in B$ *ή* $a \in A$*. Οι ομάδες ακμών του δένδρου ομάδων είναι της μορφής* $H \cap DUD^{-1}$ *όπου το* D *είναι το μεγαλύτερου μήκους από τα στοιχεία* D_a *και* D_β*.*
γ) Η ομάδα H *έχει την εξής παράσταση :*

$$H = \langle K, t_{\beta v} | t_{\beta v} (H \cap D_a E_u U {E_u}^{-1} {D_a}^{-1}) {t_{\beta v}}^{-1} = H \cap D_\beta E_v U {E_v}^{-1} {D_\beta}^{-1} \rangle.$$

Η ελεύθερη υποομάδα της H *που παράγεται από τα στοιχεία* $\{t_{\beta v}\}$ *θα ονομάζεται* ***ελεύθερο μέρος*** *της* H*.*

Έστω $G = \langle A, x_i | {x_i}^{-1} U_i x_i = U_{-i} \rangle$ μία HNN ομάδα και H μία υποομάδα της G. Μπορούμε πάλι (βλέπε [19]) να επιλέξουμε ένα σύνολο $\{D_a\}$ από αντιπροσώπους των (H, A)-διπλών συμπλόκων στην G (από το οποίο προκύπτει και ένα σύνολο $\{D_b\}$ από αντιπροσώπους των $(H, x_i^{\pm 1} A)$-διπλών συμπλόκων στην G) και στη συνέχεια, για κάθε a και i, σύνολα $\{E_{iu}\}$ και $\{E_{iv}\}$ από αντιπροσώπους των $({D_a}^{-1}HD_a \cap A, U_i)$- και $({D_a}^{-1}HD_a \cap A, U_{-i})$-διπλών συμπλόκων στην A, έτσι ώστε το $\{D_aE_{iu}\}$ να είναι ταυτόχρονα ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, U_i)-διπλών συμπλόκων στην G (και το $\{D_bE_{iv}\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων των (H, U_{-i})-διπλών συμπλόκων στην G). Αυτή η συλλογή των συνόλων $\{D_a\}$ μαζί με τα αντίστοιχά τους $\{E_{iu}\}$, $\{E_{iv}\}$ ονομάζεται **semi – cress** για την υποομάδα H της HNN ομάδας G. Ορίζουμε τα στοιχεία

$$t_{aiu} := D_aE_{iu}x_i(D_\beta E_{iv}P)^{-1} \in H$$

όπου $D_aE_{iu}x_i \in HD_\beta E_{iv}P$, με $P \in U_{-i}$.

Θεώρημα 2.5. *(Θεώρημα 4, [19]) Έστω $G = \langle A, x_i | {x_i}^{-1}U_ix_i = U_{-i}\rangle$ είναι μία HNN ομάδα και H μία υποομάδα της G. Κατασκευάζουμε ένα semi-cress και έστω t_{aiu} τα στοιχεία της H που ορίσαμε παραπάνω.*
Τότε η H παράγεται από όλα τα t_{aiu} μαζί με όλες τις υποομάδες $H \cap D_aA{D_a}^{-1}$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής :
α) Τα στοιχεία t_{aiu} που είναι διαφορετικά της μονάδας e αποτελούν μία βάση μίας ελεύθερης υποομάδας της H.
β) Η ομάδα K που παράγεται από όλες τις υποομάδες $H \cap D_aA{D_a}^{-1}$ είναι το δενδρικό γινόμενο αυτών των ομάδων. Δύο ομάδες κορυφών είναι γειτονικές στο αντίστοιχο δένδρο ομάδων αν τα αντίστοιχα D_a και D_b (όπου το D_b είναι μικρότερου μήκους από το D_a) ικανοποιούν τις σχέσεις $D_a = D_bE_{iu}x_i$ ή $D_b = D_aE_{iv}{x_i}^{-1}$. Οι ομάδες ακμών του δένδρου ομάδων είναι της μορφής $H \cap D_aU_i{D_a}^{-1}$ ή $H \cap D_aU_{-i}{D_a}^{-1}$.
γ) Η ομάδα H έχει την εξής παράσταση :

$$H = \langle K, t_{aiu} | {t_{aiu}}^{-1}(H \cap D_aE_{iu}U_i{E_{iu}}^{-1}{D_a}^{-1})t_{aiu} = H \cap D_bE_{iv}U_{-i}{E_{iv}}^{-1}{D_b}^{-1}\rangle.$$

*Η ελεύθερη υποομάδα της H που παράγεται από τα στοιχεία $\{t_{aiu}\}$ θα ονομάζεται **ελεύθερο μέρος** της H.*

Ορισμός 2.25. Έστω $G = A *_U B$ ελεύθερο γινόμενο με αμάγαλμα. Ένα σύνολο στοιχείων της G θα λέγεται **διπλά ακραίο** αν περιέχει δύο στοιχεία της μορφής $g_1 = u_1a_1b_1...a_nb_n$, όπου $b_n \notin A$, και $g_2 = u_2a'_1b'_1a'_2...b'_{m-1}a'_m$, όπου $a'_m \notin B$ ($a_i, a'_j \in A, b_i, b'_j \in B, u_1, u_2 \in U$).
Έστω τώρα $G = \langle A, t | t^{-1}U_{-1}t = U_1\rangle$ μία HNN επέκταση. Ένα σύνολο στοιχείων της G θα λέγεται **διπλά ακραίο** (για HNN επέκταση) αν περιέχει δύο στοιχεία της μορφής $g_1 = u_1a_1t^{\epsilon_1}...a_{n-1}t^{\epsilon_n}a_n$ και $g_2 = u_2a'_1t^{\epsilon'_1}...a'_mt^{\epsilon'_m}$, όπου $\epsilon_i, \epsilon'_j = \pm 1$ ($a_i, a'_j \in A, u_1, u_2 \in U$).

Λήμμα 2.2. *(Λήμμα 8, [36]) Έστω $G = A *_U B$ ελεύθερο γινόμενο με αμάγαλμα και $H \leq G$. Το πλήθος των διπλά ακραίων (H, U)-συμπλόκων στην G είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν το ελεύθερο μέρος της H είναι πεπερασμένα παραγόμενο και το αντίστοιχο δενδρικό γινόμενο K (της H) έχει πεπερασμένες κορυφές.*

Ορισμός 2.26. Έστω G μία ομάδα που δρα χωρίς αντιστροφές σε ένα δένδρο T. Επιλέγουμε μία κορυφή P του T ως σημείο αναφοράς. Για κάθε ακμή e του T ορίζουμε έναν προσανατολισμό τέτοιον ώστε η αρχή της ακμής $\alpha(e)$ να είναι η κορυφή που βρίσκεται πιο κοντά στο P. Ένα στοιχείο $g \in G$ λέγεται **αρνητικό** για την ακμή e, αν ο προσανατολισμός των e και ge είναι αντίθετος, δηλαδή $\alpha(ge) = g(\omega(e))$ και $\omega(ge) = g(\alpha(e))$. Μία G-τροχιά μίας ακμής e λέγεται **αντιστρεπτή** αν υπάρχει ένα αρνητικό στοιχείο $g \in G$ για την ακμή e.

Λήμμα 2.3. *(Λήμμα 2, [19]) Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα που δρα χωρίς αντιστροφές σε ένα δένδρο T. Τότε η G έχει πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές τροχιές. Αν επιπλέον κάθε ακμή έχει πεπερασμένα παραγόμενη σταθεροποιούσα τότε κάθε κορυφή έχει πεπερασμένα παραγόμενη σταθεροποιούσα. Αντίστροφα, αν η G έχει πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές τροχιές και κάθε κορυφή έχει πεπερασμένα παραγόμενη σταθεροποιούσα τότε η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Ορισμός 2.27. ([55]) Μία ομάδα G λέμε ότι ικανοποιεί την **μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες**, αν για κάθε κανονική υποομάδα της K, κάθε αύξουσα σειρά κανονικών υποομάδων της G

$$K = K_0 < K_1 < \dots$$

τερματίζει.

Ορισμός 2.28. ([38]) Μία ομάδα G λέγεται **πλήρως προσεγγιστικά ελεύθερη** αν για κάθε πεπερασμένο το πλήθος μη τετριμμένα στοιχεία $g_1, g_2, \dots, g_n$ της G υπάρχει ένας ομομορφισμός :

$$\phi : G \to F : g_i \mapsto \phi(g_i) \neq 1,$$

όπου F ελεύθερη ομάδα και $i = 1, 2, \dots, n$.
Από τον Sela έχουν οριστεί οι ομάδες όρια (βλέπε [57]). Έχει αποδειχθεί (βλέπε Θεώρημα 4.6 στο [57]) ότι στην κλάση των πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων, μία **ομάδα όριο** ταυτίζεται με μία πλήρως προσεγγιστικά ελεύθερη ομάδα.

Ορισμός 2.29. Μία υποομάδα H μίας ομάδας G θα λέμε ότι είναι **δυσκανονική** στην G αν για κάθε $g \in G - H$ ισχύει $g^{-1}Hg \cap H = 1$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μία απλή περιγραφή της ελεύθερης $\mathbb{Z}$[t]-ομάδας του Lyndon $F^{\mathbb{Z}[t]}$.

Ορισμός 2.30. ([47]) Έστω $F = F_2$ ελεύθερη ομάδα και $\mathbb{Z}[t]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Έστω ότι υπάρχει μία άπειρη αύξουσα αλυσίδα από υποομάδες

$$G_0 = F \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots$$

τέτοια ώστε για κάθε $i \geq 0$ έχουμε $G_{i+1} = G_i *_C A$, όπου C είναι μία μεγιστική (ελεύθερη) αβελιανή (πεπερασμένης διάστασης) δυσκανονική υποομάδα της G_i και όπου $A = C \times B$ είναι μία ελεύθερη αβελιανή ομάδα πεπερασμένης διάστασης.
Τότε η $G = \cup_{i=1}^{\infty} G_i$ ονομάζεται **ελεύθερη $\mathbb{Z}$[t]-ομάδα του Lyndon** $F^{\mathbb{Z}[t]}$.

Θεώρημα 2.6. *(Θεωρήματα 1 και 2, [38]) Έστω G πεπερασμένα παριστώμενη πλήρως προσεγγιστικά ελεύθερη ομάδα. Τότε υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία κεντρικών επεκτάσεων*

$$F = G_0 < G_1 < \dots < G_n,$$

όπου $G_{i+1} = G_i *_{C_{G_i}(u_i)} \mathbb{Z}$ και μία εμφύτευση $\psi : G \to G_n \leq F^{\mathbb{Z}[t]}$.

Πόρισμα 2.1. *Κάθε ομάδα όριο εμφυτεύεται στην ελεύθερη $\mathbb{Z}[t]$-ομάδα του Lyndon $F^{\mathbb{Z}[t]}$.*

Ορισμός 3.1. Έστω $F = F(S)$ ελεύθερη ομάδα με βάση S και (X, x), (Y, y) δύο S-γραφήματα. Ορίζουμε ως **γινόμενο των S-γραφημάτων** (X, x) και (Y, y) να είναι το παρακάτω S-γραφήματα (Z, z) με :

$$Z^0 = X^0 \times Y^0,\ z = (x, y),$$
$$Z^1 = \{(e, e')|(e, e') \in X^1 \times Y^1,\ s(e) = s(e')\},$$

και

$$\alpha((e, e')) = (\alpha(e),\ \alpha(e')), \omega((e, e')) = (\omega(e),\ \omega(e')),$$
$$\overline{(e, e')} = (\overline{e},\ \overline{e'}), s((e, e')) = s(e),$$

για κάθε $(e, e') \in Z^1$.

Θεώρημα 3.1. *(βλέπε [14]) Έστω $F = F(S)$ ελεύθερη ομάδα με βάση S. Έστω τώρα H, K υποομάδες της F και (X, x), (Y, y) τα αντίστοιχα S-γραφήματα με* **s**-*θεμελιώδεις ομάδες H, K. Έστω (Z, z) το γινόμενο των S-γραφημάτων (X, x) και (Y, y) και $\widetilde{Z}$ μία συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος Z που περιέχει την κορυφή z. Τότε το $(\widetilde{Z}, z)$ είναι ένα S-γράφημα με* **s**-*θεμελιώδη ομάδα $H \cap K$.*

Απόδειξη. Προφανώς το $(\widetilde{Z}, z)$ είναι ένα S-γράφημα. Έστω

$$p = (e_1, e_1')(e_2, e_2')...(e_k, e_k')$$

είναι ένα αυθαίρετο κλειστό μονοπάτι στο γράφημα $\widetilde{Z}$ που ξεκινάει από την κορυφή z. Τότε $e_1 e_2 ... e_k$ και $e_1' e_2' ... e_k'$ είναι κλειστά μονοπάτια στα γραφήματα X και Y με αρχικές κορυφές x και y αντίστοιχα. Οι ετικέτες τους ισούνται με $s(p)$. Επομένως $s(p) \in H \cap K$. Αντιστρόφως αν $g \in H \cap K$, τότε υπάρχει κλειστό μονοπάτι p στο γράφημα $\widetilde{Z}$ με αρχική κορυφή z και ετικέτα g. □

Θεώρημα 3.2. *(βλέπε [41], [14]) Η τομή δύο πεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων μιας ελεύθερης ομάδας είναι πεπερασμένα παραγόμενη*

Απόδειξη 1η. Έστω F μία ελεύθερη ομάδα και H, K είναι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της. Από την Πρόταση 2.4 υπάρχουν $H' = H * U$ και $K' = K * V$ πεπερασμένου δείκτου στην F. Από το Θεώρημα 2.3 έχουμε ότι :

$$H' \cap K' = (H \cap K') * L \leqslant H',\ H \cap K' = (H \cap K) * M \leqslant K'$$

και επομένως

$$H' \cap K' = (H \cap K) * M * L.$$

Επειδή οι H', K' είναι πεπερασμένου δείκτη στην F τότε και η $H' \cap K'$ θα είναι πεπερασμένου δείκτη στην F. Άρα από το Θεώρημα 2.1 έχουμε $rank(H' \cap K') < \infty$ και συνεπώς $rank(H \cap K) < \infty$.

□

Απόδειξη 2η-Αλγεβροτοπολογική προσέγγιση. Έστω F μία ελεύθερη ομάδα με βάση S και H, K είναι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της με αντίστοιχα S-γραφήματα (X, x), (Y, y). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το S είναι πεπερασμένο λαμβάνοντας την ομάδα $\langle H, K \rangle$ στη θέση της F. Μία υποομάδα H της F είναι πεπερασμένα παραγόμενη αν και μόνο αν ο πυρήνας $C(X, x)$ του αντιστοίχου S-γραφήματος είναι πεπερασμένος. Άρα από Θεώρημα 3.1 αρκεί να δείξουμε ότι το $C(\widetilde{Z}, z)$ είναι υπογράφημα του $C(X, x) \times C(Y, y)$. Πράγματι, έστω

$$(e_1, e_1')(e_2, e_2')...(e_k, e_k')$$

ένα ανάγωγο μονοπάτι στο γράφημα $\widetilde{Z}$ από το z στο z. Τότε

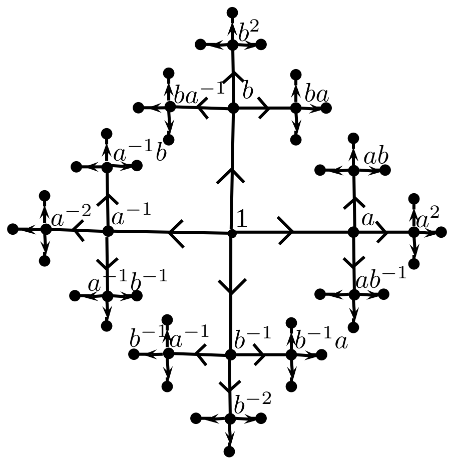
$$s((e_i, e'_i)) \neq s(\overline{(e_{i+1}, e'_{i+1})}),$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., k-1$. Επομένως $s(e_i) \neq s(\overline{e_{i+1}})$ και $s(e'_i) \neq s(\overline{e'_{i+1}})$. Συνεπώς τα $e_1 e_2 ... e_k$ και $e'_1 e'_2 ... e'_k$ είναι ανάγωγα μονοπάτια από το x στο x και από το y στο y στα γραφήματα X και Y αντίστοιχα. $\square$

Έστω $F(a,b)$ ομάδα ελεύθερα παραγόμενη από τους γεννήτορες $\{a, b\}$. Αν

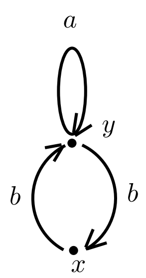
$$T(F(a,b)) := \Gamma(F(a,b), \{a,b\})$$

είναι το αντίστοιχο γράφημα Cayley της ομάδας, γνωρίζουμε ότι αυτό είναι δένδρο.

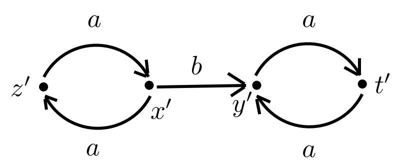


[Εικόνα 9 : το γράφημα Cayley της ομάδας $F(a,b)$]

Παράδειγμα 1. Έστω $H = \langle\, bab^{-1}, b^2 \,\rangle$ και $K = \langle\, a^2, ba^2b^{-1} \,\rangle$ δύο υποομάδες της $F(a,b)$. Τότε η τομή τους $H \cap K$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, παράγεται από το στοιχείο $\{ba^2b^{-1}\}$. Πράγματι, τα αντίστοιχα S-γραφήματα με s-θεμελιώδεις ομάδες H, K είναι τα παρακάτω

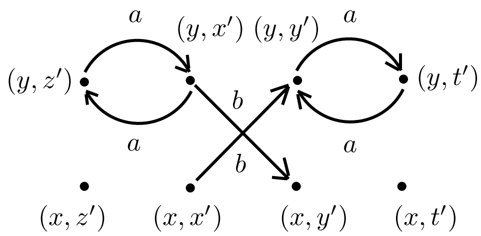


$S - \textit{γράφημα της } H$

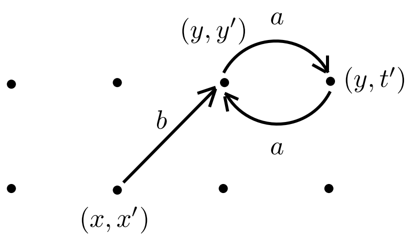


$S - \textit{γράφημα της } K$

Επομένως το S-γραφήμα της τομή τους $H \cap K$ θα είναι το εξής



γινόμενο $S-$ *γραφημάτων των* H *και* K



$S-$ *γράφημα της* $H\cap K$

Ορισμός 3.2. Έστω $H\leqslant F(a,b)$. Ορίζουμε $T(H)$ να είναι το ελάχιστο υποδένδρο του $T(F(a,b))$ που περιέχει όλες τις κορυφές που αναπαριστούν τα στοιχεία της H.

Ορισμός 3.3. Ένα στοιχείο $f\in F(a,b)$ λέγεται **σημείο διακλάδωσης** ως προς την H ($H\leqslant F(a,b)$), αν υπάρχουν διακριτά στοιχεία u_1, $u_2\in F(a,b)$ τέτοια ώστε fu_1, $fu_2\in H$, όπου fu_1, $fu_2\neq e$, και $[e,f]$ να είναι το κοινό τμήμα των μονοπατιών $[e,fu_1]$ και $[e,fu_2]$.

Ορισμός 3.4. Δύο σημεία διακλάδωσης ως προς H, έστω f_1, f_2, είναι **ισοδύναμα modulo H** αν $f_1{f_2}^{-1}\in H$ (γράφουμε $f_1\equiv f_2(H)$).

Ορισμός 3.5. Αν f είναι ένα σημείο διακλάδωσης ως προς H, τότε ορίζουμε την **πολλαπλότητά** του ως προς H να είναι η τοπολογική του τάξη στο $T(H)$ μείον 1 αν $f\in H$ ή διαφορετικά η τοπολογική του τάξη στο $T(H)$ μείον 2.

Παρατηρήσεις. Έστω $H\leqslant F(a,b)$. Από Θεώρημα 2.1 η H είναι ελεύθερη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η H παράγεται από ένα σύνολο γεννητόρων B το οποίο έχει την Nielsen ιδιότητα ως προς το $A=\{a,b\}$ ([41], σελ.6). Έστω T είναι το ελάχιστο υποδένδρο του $T(H)$ που περιέχει το e, τα στοιχεία του B καθώς και τα αντίστροφά τους. Αν τα x_1, x_2 είναι σημεία διακλάδωσης ως προς την H και $x_1\equiv x_2(H)$, τότε τα x_1 και x_2 έχουν την ίδια πολλαπλότητα ως προς H. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν m είναι ένα σημείο διακλάδωσης του T ή $m=e$ τότε η τοπολογική τάξη του m στο T είναι ίση με την τοπολογική του τάξη στο $T(H)$ (Λήμμα 3.2, [31]).
Έστω τώρα M το σύνολο των σημείων διακλάδωσης του T. Αν το e δεν είναι ακραίο σημείο το συμπεριλαμβάνουμε στο M. Μπορούμε να δούμε ότι τα στοιχεία του M δεν είναι ισοδύναμα (mod H) και ότι κάθε σημείο διακλάδωσης ως προς H είναι ισοδύναμο με ένα στοιχείο του M (για λεπτομέρειες βλέπε Λήμματα 3.3 και 3.4 του [31]).

Ορισμός 3.6. Έστω $H\leqslant F(a,b)$. Ορίζουμε ως $E(H)$ το άθροισμα των πολλαπλοτήτων όλων των ισοδυνάμων κλάσεων των σημείων διακλάδωσης ως προς H.

Θεώρημα 3.3. *(Howson, Θεώρημα 3.5, [31]) Άν η H είναι μία υποομάδα της $F(a,b)$ με άπειρο πλήθος γεννητόρων, τότε $E(H)=\infty$. Αν η H έχει n γεννήτορες, τότε $E(H)=2n-1$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο B που παράγει την H είναι άπειρο. Τότε το δένδρο T θα έχει άπειρα ακραία σημεία και επομένως άπειρο πλήθος μη ισοδυνάμων σημείων διακλάδωσης, δηλαδή $E(H)=\infty$.
Έστω τώρα $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$. Τότε το T έχει $2n$ ή $2n+1$ ακραία σημεία, ανάλογα αν σε αυτά συμπεριλαμβάνεται ή όχι το e. Έστω $p_1,p_2,...,p_s$ τα σημεία διακλάδωσης του T με τοπολογικές τάξεις $n_1,n_2,...,n_s$ αντιστοίχως.
Εάν το e είναι ακραίο σημείο, από το Λήμμα 2.1 έχουμε

$$E(H)=\sum_{i=1}^{s}(n_i-2)=(2n+1)-2=2n-1.$$

Αν το e δεν είναι ακραίο σημείο και έχει τοπολογική τάξη 2, άρα πολλαπλότητα 1, τότε πάλι

$$E(H)=\sum_{i=1}^{s}(n_i-2)+1=(2n)-2+1=2n-1.$$

Τέλος αν το e είναι σημείο διακλάδωσης, έχουμε

$$E(H)=\sum_{i=1}^{s-1}(n_i-2)+n_s-1=\sum_{i=1}^{s}(n_i-2)+1=2n-1.$$

□

Λήμμα 3.1. *(Howson, Λήμμα 3.6, [31]) Έστω H και K δύο υποομάδες της ελεύθερης ομάδας $F(a,b)$. Αν f είναι ένα σημείο διακλάδωσης ως προς την $H\cap K$ τότε είναι ένα σημείο διακλάδωσης ως προς τις H και K. Ταυτόχρονα η πολλαπλότητά του ως προς την $H\cap K$ δεν υπερβαίνει αυτές ως προς τις H και K. Επιπλέον αν f_1, f_2 είναι σημεία διακλάδωσης ως προς την $H\cap K$ τέτοια ώστε $f_1\equiv f_2(H)$ και $f_1\equiv f_2(K)$ τότε $f_1\equiv f_2(H\cap K)$.*

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος του Λήμματος είναι προφανές αφού

$$T(H\cap K)\subseteq T(H)\cap T(K).$$

Τώρα αν f_1, f_2 είναι σημεία διακλάδωσης ως προς την $H\cap K$, τέτοια ώστε

$$f_1\equiv f_2(H)\Leftrightarrow f_1{f_2}^{-1}\in H$$

και

$$f_1\equiv f_2(K)\Leftrightarrow f_1{f_2}^{-1}\in K,$$

συνεπάγεται ότι $f_1{f_2}^{-1}\in H\cap K$, δηλαδή $f_1\equiv f_2(H\cap K)$. □

Λήμμα 3.2. *(Howson, Λήμμα 3.7, [31]) Αν H και K είναι δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της ελεύθερης ομάδας $F(a,b)$, τότε $E(H\cap K)\leq E(H)\cdot E(K)$.*

Απόδειξη. Έστω H_1, H_2, ..., H_r και K_1, K_2, ..., K_s οι κλάσεις ισοδυναμίας των σημείων διακλάδωσης στα $T(H)$ και $T(K)$ αντίστοιχα. Αν με $m(H_i)$ και $m(K_j)$ συμβολίσουμε τις αντίστοιχες πολλαπλότητες έχουμε

$$E(H)=\sum_{i=1}^{r}m(H_i)$$

και

$$E(K) = \sum_{i=1}^{s} m(K_j).$$

Έστω W μία κλάση ισοδυναμίας σημείων διακλάδωσης στο $T(H \cap K)$ και $f \in W$. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι υπάρχει ζεύγος (i, j) τέτοιο ώστε $f \in H_i \cap K_j$ και δύο κλάσεις ισοδυναμίας δεν μπορεί να σχετίζονται με το ίδιο ζεύγος. Υπάρχει επομένως μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας και των ζευγών (i, j). Τελικά πάλι από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι

$$m(W) \leq min((m(H_i), m(K_j)) \Rightarrow m(W) \leq m(H_i) \cdot m(K_j)$$

$$\Rightarrow E(H \cap K) = \sum m(W) \leq \sum_i \sum_j m(H_i) \cdot m(K_j) = E(H) \cdot E(K).$$

□

Θεώρημα 3.4. *(Θεώρημα του Howson, [31]) Έστω F μία ελεύθερη ομάδα. Αν H και K είναι δύο υποομάδες της F, με $rankH = m$ και $rankK = n$ αντιστοίχως, τότε $rank(H \cap K) \leq 2mn - m - n - 1$.*

Απόδειξη. Έστω $L = \langle H, K \rangle$, τότε η L έχει πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων και μπορεί να εμφυτευθεί στην $F(a, b)$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι H, K είναι υποομάδες της $F(a, b)$. Επειδή η H έχει m ελεύθερους γεννήτορες ισχύει $E(H) = 2m - 1$. Ομοίως $E(K) = 2n - 1$. Επομένως από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε

$$E(H \cap K) \leq (2m - 1) \cdot (2n - 1).$$

Άρα από Θεώρημα 3.3 η $H \cap K$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Επιπλέον αν το πλήθος των ελεύθερων γεννητόρων της $H \cap K$ είναι N, τότε $E(H \cap K) = 2N - 1$. Τελικά $N \leq 2mn - m - n + 1$. □

Μία ιστορική αναδρομή. Από το Θεώρημα του Albert Howson([31], 1954) προκύπτει ότι σε μία ελεύθερη ομάδα F για την τομή $H \cap K$, δύο πεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων H, K διαστάσεως m και n αντιστοίχως, ισχύει

$$rank(H \cap K) \leq 2mn - m - n - 1.$$

Ταυτόχρονα στην ίδια εργασία ο Howson δίνει το εξής παράδειγμα :
Έστω $F = F(a, b)$, $H = \langle a^{m-1}, b \rangle^F$ και $K = \langle a, b^{n-1} \rangle^F$, όπου $n, m \geq 2$.
Επειδή $|F : H| = m - 1$, από το Θεώρημα 2.1 έχουμε ότι $rankH = m$. Ομοίως $rankK = n$. Τώρα επειδή

$$H/(H \cap K) \simeq HK/K = F/K$$

έχουμε ότι $|H : H \cap K| = n - 1$. Άρα πάλι από το Θεώρημα 2.1 προκύπτει ότι

$$rank(H \cap K) = mn - m - n + 2$$

ή

$$rank(H \cap K) - 1 = (m - 1) \cdot (n - 1) = (rankH - 1) \cdot (rankK - 1).$$

Έτσι ο Howson διατυπώνει την σκέψη ότι το φράγμα του Θεωρήματός του ενδέχεται να βελτιώνεται, αλλά όχι πιο κάτω από τον αριθμό $mn - m - n + 2$.
Λίγο αργότερα η Hanna Neumann ([49]-[50], 1956-1957) αποδεικνύει ότι

$$(rank(H \cap K) - 1) \leq 2(rankH - 1) \cdot (rankK - 1)$$

και διατυπώνει την γνωστή ως **εικασία της Hanna Neumann** :

$$(rank(H \cap K) - 1) \leq (rankH - 1) \cdot (rankK - 1).$$

Τα επόμενα χρόνια γίνεται προσπάθεια να αποδειχθεί η εικασία και έχουμε μερικά αποτελέσματα κυρίως από τον Robert Burns ([15], 1971) που βελτιώνει το φράγμα. Το 1989 ο Walter Neumann διατυπώνει μία πιο ισχυρή εικασία γνωστή ως η **ενισχυμένη εικασία της Hanna Neumann** :

$$\sum_{x\in H\backslash F/K}(rank(x^{-1}Hx\cap K)-1)\leq (rankH-1)\cdot(rankK-1).$$

Τα μερικά αποτελέσματα συνεχίζονται με κατεύθυνση και προς την ενισχυμένη εικασία (*Gábor* Tardos (1992,1996), Warren Dicks (1994), Dicks-Formanek (2001), Meakin-Weil (2002) , Khan (2002), Kent (2009), ...).
Γενικότερα με τις τομές υποομάδων των ελευθέρων ομάδων έχει ασχοληθεί πλήθος σύγχρονων Μαθηματικών (με αλφαβητική σειρά : Arzhantseva, Everett, Gersten, Imrich, Ivanov, Louder, Nickolas, Servatius, Stallings, Wise ...).
Τον Μάιο του 2011 ο Igor Mineyev δημοσιεύει μία απόδειξη της ενισχυμένης εικασίας που περιλαμβάνει Hilbert πρότυπα και την Murray-von Neumann-διάσταση ([42]) και κάποια Θεωρία Γραφημάτων. Παράλληλα, μία διαφορετική απόδειξη της ενισχυμένης εικασίας επιχειρεί ο Joel Friedman, την οποία θα ολοκληρώσει αργότερα μαζί με τον Warren Dicks (βλέπε [25]). Μετά από συζήτηση με τον Warren Dicks, ο Mineyev δίνει μία 2η απόδειξη ([43]) πολύ πιο σύντομη και βασισμένη αποκλειστικά στην Θεωρία των Bass-Serre. Στην συνέχεια παραθέτουμε την τελευταία αυτή εκδοχή της Απόδειξης, όπως παρουσιάστηκε πρόσφατα από τους Yago *Antolín* Pichel ([8]) και Warren Dicks ([24]).

Έστω $F = F(a,b)$. Αν Y γράφημα, συμβολίζουμε με $T(Y)$ κάποιο μεγιστικό υποδένδρο του Y. Θέτουμε

$$r(Y)=|Y^1|-|T(Y)^1|\geq 0,$$

$$\chi(Y)=|Y^0|-|Y^1|=1-r(Y)\leq 1$$

και

$$\overline{r}(Y)=max(0,r(Y)-1)=max(0,-\chi(Y)).$$

Παρατηρούμε ότι τα $r,\chi,\overline{r}$ είναι αναλλοίωτα κάτω από μία ομοτοπική ισοδυναμία. Αν v_0 κορυφή του Y και $G=\pi_1(Y,v_0)=\pi_1(Y)$, ορίζουμε $r(G)(=rank(G))=r(Y),\chi(G)=\chi(Y)$ και $\overline{r}(G)=\overline{r}(Y)$.

Ορισμός 3.7. Έστω $(\mathcal{G},Y)$ γράφημα ελευθέρων ομάδων και $G=\pi_1(\mathcal{G},T(Y))$. Ορίζουμε την **χαρακτηριστική Euler** (στα γραφήματα ελευθέρων ομάδων) ως εξής

$$\chi(G)=\Sigma_{v\in Y^0}\chi(\mathcal{G}(v))-\Sigma_{e\in Y^1}\chi(\mathcal{G}(e)).$$

Έστω $T=\Gamma(F(a,b),\{a,b\})$, τότε το T είναι ένα δένδρο στο οποίο η F δρα ελεύθερα. Για κάθε $G\leq F$ ορίζουμε ως T_G να είναι το μικρότερο G-υποδένδρο του T. Τότε $\pi_1(G\setminus T_G)=G$ και συγκεκριμένα $r(G)=r(G\setminus T_G)$.
Για κάθε $H\leq G$ υπάρχουν φυσικοί εγκλεισμοί $T_H\to T_G$ που επάγουν τις 1-1 απεικονίσεις $H\setminus T_H\to G\setminus T_G$.
Έστω $H=\langle bab^{-1},b^2\rangle$, $K=\langle a^2,ba^2b^{-1}\rangle$ οι υποομάδες του Παραδείγματος 1.

Παρατηρούμε ότι στο γινόμενο των S-γραφημάτων των υποομάδων H και K, κάθε συνεκτική συνιστώσα αντιστοιχεί στο S-γράφημα μιας υποομάδας $H^x \cap K$, όπου $x \in H \setminus F/K$. Έχουμε ότι υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση

$$\theta : (H \cap K) \setminus T_{H \cap K} \to H \setminus T_H \times K \setminus T_K.$$

Η θ επεκτείνεται σε μία φυσική 1-1 απεικόνιση

$$\overline{\theta} : \bigcup_{x \in H \setminus F/K} (H^x \cap K) \setminus T_{H^x \cap K} \to H \setminus T_H \times K \setminus T_K$$

και συνεπώς το $\sum_{x \in H \setminus F/K} \overline{r}(H^x \cap K)$ είναι φραγμένο.

Η ιδέα της Απόδειξης είναι ότι για όλες τις υποομάδες $G \leq F$ υπάρχει ένα (καλά ορισμένο, μοναδικό) G-δένδρο $\mathcal{T}_G$, έτσι ώστε να υπάρχουν 1-1 απεικονίσεις

$$\overline{\theta} : \bigcup_{x \in H \setminus F/K} (H^x \cap K) \setminus \mathcal{T}_{H^x \cap K} \to H \setminus \mathcal{T}_H \times K \setminus \mathcal{T}_K$$

και να ισχύει

$$\overline{r}(G) = |G \setminus \mathcal{T}_G^1|.$$

Τότε από το γεγονός ότι οι απεικονίσεις $\overline{\theta}$ είναι 1-1 συνεπάγεται ότι

$$\sum_{x \in H \setminus F/K} \overline{r}(H^x \cap K) = \sum_{x \in H \setminus F/K} |(H^x \cap K) \setminus \mathcal{T}^1_{H^x \cap K}| \leq |H \setminus \mathcal{T}^1_H| \cdot |K \setminus \mathcal{T}^1_K| = \overline{r}(H) \cdot \overline{r}(K).$$

Θεώρημα 3.5 (δένδρα του Dicks). *Τέτοια δένδρα υπάρχουν.*

Απόδειξη. Έστω $T = \Gamma(F(a,b), \{a,b\})$, με $T^0 = F$ και $T^1 = F \times \{a,b\}$. Ταξινομούμε τις ακμές του T λεξικογραφικά (η F έχει μία φυσική λεξικογραφική διάταξη) θέτοντας μια ολική διάταξη στις ακμές $\{a,b\}$. Αυτή η λεξικογραφική διάταξη είναι F-αριστερά αναλλοίωτη και τη συμβολίζουμε με " $<$ ".

Έστω $G \leq F$. Μία ακμή $e \in T_G^1$ θα λέγεται **G-γέφυρα** αν υπάρχει κάποιο (ανηγμένο) διπλά άπειρο μονοπάτι στο T_G στο οποίο η e είναι η $<$-μεγαλύτερη ακμή. Έστω $\mathbf{B(G)}$ το σύνολο όλων των G-γεφυρών στο T_G. Σημειώνουμε ότι το $B(G)$ είναι ένα ελεύθερο G-σύνολο. Μία συνεκτική συνιστώσα του $T - B(G)$ θα λέγεται **G-νησί**. Συμβολίζουμε με $\mathbf{I(G)}$ το σύνολο όλων των G-νησιών. Το $I(G)$ είναι ένα G-σύνολο.

Για κάθε $G \leq F$ ορίζουμε ως $\mathcal{T}_{\mathbf{G}}$ να είναι το G-δένδρο με $\mathcal{T}_G^1 = B(G)$ και $\mathcal{T}_G^0 = I(G)$. Επειδή για κάθε $H \leq G$ ισχύει $T_H \subseteq T_G$, κάθε H-γέφυρα είναι και μία G-γέφυρα. Άρα ο εγκλεισμός $T_H \subseteq T_G$ επάγει μία 1-1 H-απεικόνιση $\mathcal{T}_H \to \mathcal{T}_G$, η οποία με τη σειρά της επάγει μία απεικόνιση $H \setminus \mathcal{T}_H \to G \setminus \mathcal{T}_G$. Πιο γενικά τώρα, η 1-1 απεικόνιση

$$\overline{\theta} : \bigcup_{x \in H \setminus F/K} (H^x \cap K) \setminus T_{H^x \cap K} \to H \setminus T_H \times K \setminus T_K$$

θα επάγει μία 1-1 απεικόνιση

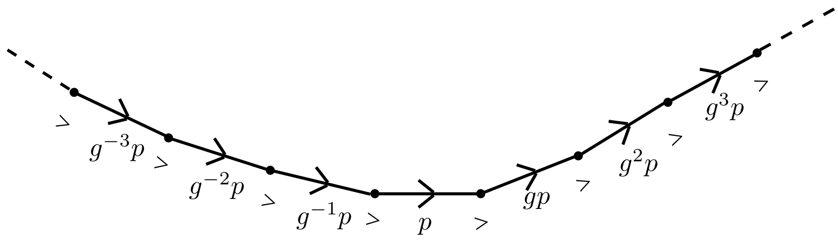
$$\overline{\theta} : \bigcup_{x \in H \setminus F/K} (H^x \cap K) \setminus \mathcal{T}_{H^x \cap K} \to H \setminus \mathcal{T}_H \times K \setminus \mathcal{T}_K.$$

Για να αποδείξουμε την ενισχυμένη εικασία αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{r}(G) = |G \setminus B(G)|$.

Αν $G = \{1\}$, το T_G θα είναι μία κορυφή και άρα το $B(G)$ είναι κενό. Επομένως και το $\mathcal{T}_G$ είναι μία κορυφή και

$$\overline{r}(G) = 0 = |G \setminus B(G)|.$$

Έστω $G =< g >$, όπου $g \in F - \{1\}$. Τότε το T_G είναι απλώς ο άξονας του g (γράφουμε $axis(g) = T_{<g>}$).



$axis(g)$

[Εικόνα 10 : Ο άξονας του στοιχείου g]

Θα δείξουμε ότι αν $G =< g >$ τότε δεν υπάρχει καμμία G-γέφυρα. Πράγματι, τότε το T_G είναι το μόνο διπλά άπειρο μονοπάτι. Έστω v είναι κάποια κορυφή στο T_G και p το μονοπάτι που ενώνει τις v και gv. Έστω $e = max(p)$, η $<$-μεγαλύτερη ακμή στο p. Αν $e > ge$, τότε

$$... > max(g^{-1}p) > max(p) > max(gp) > ...$$

και συνεπώς δεν υπάρχει καμμία G-γέφυρα. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\mathcal{T}_G = \nu\eta\sigma\acute{\iota}.$$

Τώρα σε μία μη τετριμμένη περίπτωση προκύπτουν κάποια ζητήματα. Προηγουμένως είχαμε $r(G) = r(G \setminus T_G)$. Στην περίπτωση όμως των δένδρων $\mathcal{T}_G$ πρέπει να δείξουμε ότι η G δρα ελεύθερα στο $\mathcal{T}_G$ και πως το $G \setminus \mathcal{T}_G$ σχετίζεται με το $r(G)$.

Έστω $(\mathcal{G}, Y)$ το γράφημα ομάδων της G σχετικό με την δράση της στο $\mathcal{T}_G$, τότε οι ομάδες κορυφών $\mathcal{G}(v_i)$ θα είναι οι σταθεροποιούσες των G-νησιών ($v_i \in I(G)$) ενώ για κάθε ομάδα ακμής θα ισχύει $\mathcal{G}(e) = \{1\}$. Θυμίζουμε ότι $\chi(\{1\}) = 1$. Έχουμε επομένως από τον ορισμό της χαρακτηριστικής Euler στα γραφήματα ομάδων ότι

$$\chi(G) = \Sigma_{v_i \in G \setminus I(G)} \chi(\mathcal{G}(v_i)) - |G \setminus B(G)|.$$

Τώρα επειδή $\overline{r}(G) = -\chi(G)$, αρκεί να δείξουμε ότι $\Sigma_{v_i \in G \setminus l(G)} \chi(\mathcal{G}(v_i)) = 0$.
Θα δείξουμε ότι είτε $\chi(\mathcal{G}(v_i)) \geq 0$ και $\overline{r}(G) = \infty$. Άρα

$$\overline{r}(G) \leq -\chi(G) \leq |G \setminus B(G)|$$

και έχουμε το ζητούμενο.
Είτε $\chi(\mathcal{G}(v_i)) = 0$, αν η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, άρα

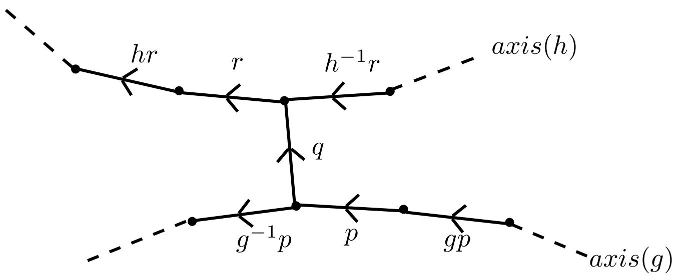
$$\overline{r}(G) = -\chi(G) = |G \setminus B(G)|.$$

Οι δύο αυτές περιπτώσεις καλύπτονται από τα παρακάτω Θεωρήματα 3.6 και 3.7. Πράγματι έχουμε ότι αν $\overline{r}(G) \neq \{0,\infty\}$, τότε τα νησιά έχουν μη τετριμμένες σταθεροποιούσες. Άρα $r(\mathcal{G}(v_i)) = 1$ και τότε $\chi(\mathcal{G}(v_i)) = 0$. Τώρα από την χαρακτηριστική Euler για τα γραφήματα ομάδων έχουμε $\overline{r}(G) = |G \setminus \mathcal{T}_G^1|$.

□

Θεώρημα 3.6. *Αν $r(G) \geq 2$ τότε το $B(G)$ είναι μη κενό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα $g, h \in G$ παράγουν μία ελεύθερη ομάδα διάστασης 2.



[Εικόνα 11 : Μία G-γέφυρα στο σύνηθες δένδρο της G, όταν $r(G) \geq 2$]

Αντικαθιστώντας (αν είναι απαραίτητο) τα $\{g,p\}$ με $\{g^{-1}, g^{-1}p^{-1}\}$ αντιστοίχως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $<$-μεγαλύτερη ακμή e του p ικανοποιεί την σχέση $e > ge$. Τότε το (ανηγμένο) διπλά άπειρο μονοπάτι

$$\cdots g^2p \cdot gp \cdot p \cdot q \cdot r \cdot hr \cdot h^2r \cdots$$

έχει την $<$-μεγαλύτερη ακμή στο τμήμα του μονοπατιού $(p \cdot q \cdot r)$. □

Θεώρημα 3.7. *Αν η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε οι σταθεροποιούσες των νησιών είναι μη τετριμμένες.*

Απόδειξη. Επειδή η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, έχουμε ότι $|G \backslash T_G^1| < \infty$. Τώρα έστω I είναι ένα νησί και δI το σύνολο όλων των γεφυρών του T_G που τέμνονται με το I^0.

Εάν $0 < |\delta I| < \infty$, τότε υπάρχει γέφυρα $e = min(\delta I)$. Επομένως υπάρχει διπλά άπειρο μονοπάτι p του T_G με $max(p) = min(\delta I)$, δηλαδή $|p \cap \delta I| = 1$. Άρα μία από τις δύο άπειρες συνιστώσες του μονοπατιού ανήκει στο νησί I. Τότε $|I^1| = \infty > |G \backslash T_G^1|$. Άρα υπάρχουν $d, e \in I^1$ τέτοια ώστε $d \neq e$ και $Gd = Ge$. Δηλαδή υπάρχει $(1 \neq)g \in G$ τέτοιο ώστε $gd = e$ και συνεπώς $e \in gI^1 \cap I^1$. Τελικά $gI = I$, δηλαδή $g \in \mathcal{G}(v_I)$ και συνεπώς $\mathcal{G}(v_I) \neq \{1\}$.

Εάν $|\delta I| = \infty$, τότε για κάθε γέφυρα υπάρχει κορυφή της (αρχική ή τελική) που ανήκει στο νησί I. Επειδή $|\delta I| = \infty > |\{\alpha, \omega\} \times (G \setminus T_G^1)|$, υπάρχουν γέφυρες d, e τέτοιες ώστε $d \neq e$, $\alpha(d) = \alpha(e) \in I^0$ και $Gd = Ge$. Τελικά υπάρχει $(1 \neq)g \in G$ με $g\alpha(d)(\in gI^0) = \alpha(gd) = \alpha(e) \in I^0$ και όπως παραπάνω έχουμε $\mathcal{G}(v_I) \neq \{1\}$.

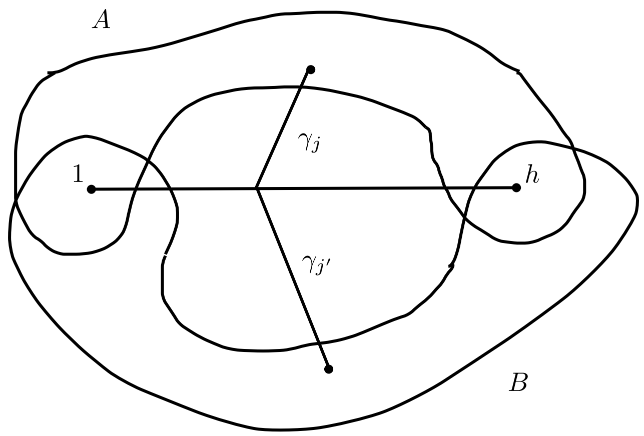
□

4. Η Howson ιδιοτητα στις ομαδες

Ορισμός 4.1. Έστω G μία ομάδα. Αν για κάθε δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της H, K ισχύει ότι η $H \cap K$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη τότε η ομάδα G λέμε ότι **έχει την Howson ιδιότητα** ή απλά ότι είναι μία **Howson ομάδα**.

Παρατηρήσεις. Οι παρακάτω κλάσεις ομάδων έχουν την Howson ιδιότητα :
(1) Πεπερασμένες ομάδες.
(2) Αβελιανές ομάδες.
(3) Μηδενοδύναμες ομάδες ([10]).
(4) Πολυκυκλικές ομάδες ([10]).
(5) Ελεύθερες ομάδες (από τα Θεωρήματα 3.2 και 3.4).
(6) Οι Fuchsian ομάδες ([27]) (δηλαδή οι διακριτές υποομάδες της $PSL(2, \mathbb{R})$ - η ομάδα όλων των 2×2 πινάκων με στοιχεία από τους πραγματικούς αριθμούς και ορίζουσα $+1$).
(7) Οι Kleinian ομάδες δευτέρου είδους ([6], [60]) (Οι ομάδες του Klein είναι οι διακριτές υποομάδες της $PSL(2, \mathbb{C})$).

Πρόταση 4.1. *(Short, Πρόταση 2, [59])*
Έστω $G = < S >$ μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Αν A, B είναι υποομάδες της G οι οποίες είναι οιωνεί-κυρτές τότε και η $A \cap B$ θα είναι οιωνεί-κυρτή.



[Εικόνα 12 : Η τομή των οιωνεί-κυρτών υποομάδων A και B.]

Απόδειξη. Έστω A, B οιωνεί-κυρτές υποομάδες της G και ϵ_A, ϵ_B είναι οι αντίστοιχες σταθερές. Τώρα έστω $w = a_1 ... a_n$, $a_i \in S \cup S^{-1}$, είναι η ανηγμένη λέξη για ένα στοιχείο $h \in A \cap B$. Για κάθε j υπάρχουν λέξεις γ_j, γ'_j με $l_S(\gamma_j) \leq \epsilon_A$, $l_S(\gamma'_j) \leq \epsilon_B$ τέτοιες ώστε η $(a_1 ... a_j \gamma_j)$ αναπαριστά ένα στοιχείο της A και η $(a_1 ... a_j \gamma'_j)$ αναπαριστά ένα στοιχείο της B. Σημειώνουμε ότι η $(\gamma_j^{-1} a_{j+1} ... a_n)$ επίσης αναπαριστά ένα στοιχείο της A και η $({\gamma'_j}^{-1} a_{j+1} ... a_n)$ αναπαριστά ένα στοιχείο της B.
Έστω N το πλήθος των διακριτών τέτοιων ζευγών $(\gamma_j, \gamma'_j) \in \Gamma(G, S) \times \Gamma(G, S)$. Αν $l_S(w) > N$, τότε για κάποια $1 \leq i < j < N$ θα έχουμε $\gamma_i = \gamma_j$ και $\gamma'_i = \gamma'_j$. Τότε έχουμε

$$(a_1 ... a_i \gamma_i)(\gamma_j^{-1} a_{j+1} ... a_n) = a_1 ... a_i a_{j+1} ... a_n = (a_1 ... a_i \gamma'_i)({\gamma'_j}^{-1} a_{j+1} ... a_n)$$

το οποίο είναι στοιχείο της $A \cap B$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε μία λέξη μήκους μικρότερου από N και βλέπουμε ότι η $A \cap B$ είναι οιωνεί-κυρτή με σταθερά το N.

□

Θυμίζουμε ότι μία υπερβολική ομάδα G ανήκει στην κατηγορία Q αν όλες οι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της είναι οιωνεί-κυρτές.

Πόρισμα 4.1. *Κάθε ομάδα από την κατηγορία Q έχει την Howson ιδιότητα.*

Πόρισμα 4.2. *Κάθε ελεύθερη ομάδα F έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη 4η-Γεωμετρική προσέγγιση. Θα δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα μίας ελεύθερης ομάδας $F = F(S)$ είναι οιωνεί-κυρτή.
Πράγματι, έστω $A = \langle\, a_1, ..., a_k \,\rangle$ μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της F. Ο εγκλεισμός $A \leq F$ επάγει μία απεικόνιση

$$\alpha : A \to F : a_j \mapsto \alpha(a_j)$$

όπου $\alpha(a_j)$ είναι η αντίστοιχη ανάγωγη λέξη της F. Τώρα χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το S είναι πεπερασμένο, διότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το S με ένα πεπερασμένο σύνολο που θα παράγει τα στοιχεία του συνόλου $\{a_1, ..., a_k\}$.
Έστω $v = b_1...b_m$ ($b_i \in \{a_1, ..., a_k\}$) το ανηγμένο μονοπάτι στο $T = \Gamma(F(S), \{S\})$ με $\overline{v} = h \in A$ και $\alpha(v) = \alpha(b_1)...\alpha(b_m)$ το αντίστοιχο μονοπάτι με ακμές από το S. Το μονοπάτι $\alpha(v)$ περιέχεται στο v (και συγκεκριμένα στην εικόνα του v στο T). Επίσης κάθε σημείο του $\alpha(v)$ απέχει το πολύ

$$\epsilon = \frac{1}{2} max_j\{l_S(a_j)\}$$

από κάποια κορυφή της A. Δηλαδή η A είναι οιωνεί-κυρτή.
Άρα κάθε ελεύθερη ομάδα ανήκει στην κατηγορία Q και επομένως από το Πόρισμα 4.1 έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.1. *(Kharlampovich-Myasnikov-Remeslennikov-Serbin, Πόριμα 3,* [38]*)*
Η ομάδα $F^{\mathbb{Z}[t]}$ έχει την Howson ιδιότητα.

Πόρισμα 4.3. *Μία πλήρως προσεγγιστικά ελεύθερη ομάδα G έχει πάντοτε την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Άμεσο από τα Θεωρήματα 2.6 και 4.1. □

Πόρισμα 4.4. *Οι ομάδες όρια έχουν πάντοτε την Howson ιδιότητα.*

Λήμμα 4.1. *(Kirkinskii, Λήμμα 4,* [39]*)*
Η Howson ιδιότητα μεταφέρεται σε πεπερασμένες επεκτάσεις.

Απόδειξη. Έστω H ομάδα με την Howson ιδιότητα, η οποία είναι υποομάδα της G με $|G : H| < \infty$. Υποθέτουμε ότι G_1 και G_2 είναι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της G. Τότε οι $G_1 \cap H$ και $G_2 \cap H$ έχουν πεπερασμένους δείκτες στις G_1 και G_2, αντιστοίχως. Επομένως, είναι πεπερασμένα παραγόμενες. Συνεπώς η

$$(G_1 \cap H) \cap (G_2 \cap H) = G_1 \cap G_2 \cap H$$

είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα. Επειδή $|G_1 \cap G_2 : G_1 \cap G_2 \cap H| < \infty$, έπεται ότι και η $G_1 \cap G_2$ θα είναι πεπερασμένα παραγόμενη. □

Λήμμα 4.2. *(Kirkinskii, Λήμμα 5,* [39]*)*
Έστω K μία πεπερασένα παραγόμενη κανονική υποομάδα της G. Τότε η Howson ιδιότητα μεταφέρεται από την ομάδα G στο πηλίκο G/K. Αν $|K| < \infty$, η Howson ιδιότητα μεταφέρεται από το πηλίκο G/K στην G.

Απόδειξη. Έστω $\psi : G \to G/K$ ο φυσικός επιμορφισμός. Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη εικόνα μίας πεπερασμένα παραγόμενης υποομάδας είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα.
Έστω G μία ομάδα με την Howson ιδιότητα και H_1, H_2 δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της G/K. Τότε η $\psi^{-1}(H_1) \cap \psi^{-1}(H_2) = \psi^{-1}(H_1 \cap H_2)$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Άρα και η $H_1 \cap H_2$ θα είναι πεπερασμένα παραγόμενη.
Τώρα έστω ότι η G/K έχει την Howson ιδιότητα , $|K| < \infty$ και H_1, H_2 είναι δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της G. Τότε η $\psi(H_1) \cap \psi(H_2)$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της G/K. Άρα η υποομάδα

$$\psi^{-1}(\psi(H_1) \cap \psi(H_2)) = \psi^{-1}(\psi(H_1)) \cap \psi^{-1}(\psi(H_2)) = H_1K \cap H_2K$$

είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενη. Αλλά είναι προφανές ότι $|H_1K : H_1| < \infty$ και $|H_2K : H_2| < \infty$, επομένως έπεται εύκολα ότι $|(H_1K \cap H_2K) : (H_1 \cap H_2)| < \infty$. Συνεπώς και η $H_1 \cap H_2$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα. □

Ισχύει το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο μας δίνει μία κατηγορία ομάδων που δεν είναι Howson.

Θεώρημα 4.2. *(Burns-Brunner, Θεώρημα 1,* [18]*)*
Καμία επέκταση μίας ελεύθερης ομάδας, πεπερασμένης διάστασης $n \geq 2$, διαμέσου μίας άπειρης κυκλικής ομάδας δεν είναι Howson.

Μία μερική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος, η ομάδα $F_2 \times \mathbb{Z}$, είναι το πρώτο ισχυρό παράδειγμα ομάδας που δεν είναι Howson και οφείλεται στον Moldavanskii.

Λήμμα 4.3. *(Moldavanskii,* [45]*) Η ομάδα $F_2 \times \mathbb{Z}$ δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω $F_2 = F(x, y)$ και $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Για τις υποομάδες $L = \langle x, y \rangle$ και $M = \langle x, yt \rangle$ της $F_2 \times \mathbb{Z}$, που είναι πεπερασμένα παραγόμενες, θα δείξουμε ότι

$$L \cap M = \langle y^i x y^{-i} | i \in \mathbb{Z} \rangle$$

η οποία είναι απείρως παραγόμενη.
Πράγματι έχουμε ότι $y^i x y^{-i} = (yt)^i x (yt)^{-i} \in L \cap M$. Αντιστρόφως αν $g \in L \cap M$ τότε

$$g = x^{k_1}(yt)^{l_1} \cdots x^{k_n}(yt)^{l_n} = x^{k_1}y^{l_1} \cdots x^{k_n}y^{l_n}t^{l_1+\ldots+l_n} \in L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_n = -l_1 - \ldots - l_{n-1} \Rightarrow g = \prod_{i=1}^{n} y^{s_i} x^{k_i} y^{-s_i},$$

όπου $s_1 = 0$ και $s_i = l_1 + \ldots + l_{i-1}$. Τελικά $g \in \langle y^i x y^{-i} | i \in \mathbb{Z} \rangle$. □

Πόρισμα 4.5. *(Cossey-Dey-Meskin,* [21]*) Η ομάδα*

$$G = \langle\, t, a, b \;\mid\; t^{-1}at = b^{-1} \;,\; t^{-1}bt = b^2ab \,\rangle$$

δεν έχει την Howson ιδιότητα.

Πρόσφατα ο Moldavanskii, γενικεύοντας το αποτέλεσμα των Burns και Brunner, έδειξε το παρακάτω Θεώρημα :

Θεώρημα 4.3. *(Moldavanskii, Θεώρημα 1,* [46]*)*
Έστω K μία μη-κυκλική πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα. Τότε καμία αύξουσα HNN-επέκταση $G = K(\varphi) = \langle\, t, K \mid t^{-1}Kt = \varphi(K)\,\rangle$ δεν είναι Howson.

Απόδειξη. Σκιαγραφούμε την ιδέα της Απόδειξης. Μπορούμε να επιλέξουμε H μη τετριμμένη υποομάδα της K τέτοια ώστε να ισχύει $K \geq H * (t^{-1}Kt)$. Αποδεικνύεται ότι :

$$\langle\, t, H\,\rangle \cap K = \langle\, t^{-n}Ht^n, n \geq 0\,\rangle = *_{n\in\mathbb{N}}\{t^{-n}Ht^n\}.$$

Επομένως η ομάδα $\langle\, t^{-n}Ht^n, n \geq 0\,\rangle$ είναι απείρως παραγόμενη και άρα έχουμε ότι η G δεν είναι Howson. □

Πρόταση 4.2. *(Kirkinskii, Λήμμα 3,* [39]*)*
Κανένα στεφανιαίο γινόμενο

$$< a > \wr < b > = < a, b \mid [a, b^{-n}ab^n] = 1, n \in \mathbb{Z} >,$$

με $\mid b \mid = \infty$, δεν έχει την Howson ιδιότητα.

Θεώρημα 4.4. *(Kapovich, Θεώρημα 3.1,* [32]*)*
Έστω G μία υποομάδα μίας ελευθέρας στρέψεως υπερβολικής ομάδας G_1, K μία πεπερασμένα παραγόμενη άπειρη ομάδα και Q ομάδα που περιέχει στοιχείο απείρου τάξεως. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η εξής βραχεία ακριβής ακολουθία

$$1 \to K \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q \to 1.$$

Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K \leq G$. Έστω s ένα στοιχείο της G το οποίο προβάλλεται σε ένα στοιχείο απείρου τάξεως στην Q. Από υπόθεση έχουμε ότι η K περιέχει ένα στοιχείο f απείρου τάξεως. Προφανώς το f δεν μετατίθεται με το s επειδή διαφορετικά κάποια δύναμη του s θα ανήκε σε μία κυκλική υποομάδα παραγόμενη από το f (βλέπε [5]), το οποίο αντιτίθεται με την επιλογή του s. Τότε (από το Θεώρημα 5.3.E του [28]) υπάρχει κάποια δύναμη $t = s^n, n \neq 0$ του s και κάποια δύναμη $k = f^m, m \neq 0$ του f τέτοιες ώστε $< t, k > \simeq F_2 \leq G$. Θέτουμε $H = < t, k >$.
Ισχυριζόμαστε ότι η $H_0 = H \cap K$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Πράγματι, αν $k_i = t^{-i}kt^i, i \neq 0$ και $k_0 = k$ τότε $< k_i, i \in \mathbb{Z} > \subset H_0$. Από την άλλη πλευρά αν $w(t,k) \in H_0$ τότε το άθροισμα των εκθετών του t στην w θα ισούται με 0. Έτσι η $w(t,k)$ μπορεί να ξαναγραφεί ως λέξη πάνω στα $\{k_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Επομένως $H_0 = < k_i, i \in \mathbb{Z} >$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η H_0 είναι ελεύθερη στους γεννήτορες $\{k_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Πράγματι, αν $r(k_{-N}, ..., k_N)$ είναι μία μη τετριμμένη σχέση μεταξύ αυτών των γεννητόρων τότε αυτό μεταφράζεται σε μη τετριμμένες σχέσεις μεταξύ των t και k. Αυτό είναι αδύνατο επειδή η H είναι ελεύθερη στα $\{t, k\}$. Άρα η $H_0 = H \cap K$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη και συνεπώς η G δεν έχει την Howson ιδιότητα. □

Πρόταση 4.3. *(Kapovich, Θεώρημα 3.1,* [33]*)*
Η ελευθέρας στρέψεως one-relator υπερβολική ομάδα

$$G = \langle\, t, a \mid at^{-1}ata^2t^{-2}a^{-1}t^2 = 1\,\rangle$$
$$\simeq \langle\, t, a_0, a_1 \mid t^{-1}a_0t = a_1, t^{-1}a_1t = a_0a_1{a_0}^2\,\rangle$$

δεν έχει την Howson ιδιότητα (όπου $a_0 = a$, $a_1 = t^{-1}at$ και $a_2 = t^{-2}at^2$).

Απόδειξη 1η. Έστω $H = F(a_0, a_1)$ και $K = \langle a_0^3, t\rangle$. Η ιδέα της πρωτότυπης απόδειξης του Kapovich είναι να δείξουμε ότι η τομή $H \cap K$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Ορίζουμε τον παρακάτω ενδομορφισμό

$$\phi : F(a_0, a_1) \to F(a_0, a_1) : a_0 \mapsto a_1,\ a_1 \mapsto a_0 a_1 a_0^2.$$

Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ θέτουμε $x_n = t^{-n} a_0^3 t^n = \phi^n(a_0^3)$. Αποδεικνύεται ότι

$$H \cap K = \langle x_0, x_1, x_2, ...\rangle.$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η $\langle x_0, x_1, x_2, ...\rangle$ είναι μία ελεύθερη ομάδα με βάση $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Τελικά η $H \cap K$ είναι μία απείρως παραγόμενη ελεύθερη ομάδα. □

Απόδειξη 2η. Αν λάβουμε υπ' όψιν το πρόσφατο αποτελέσμα του Moldavanskii, είναι άμεσο ότι η ομάδα αυτή δεν είναι Howson. Πράγματι, επειδή η ομάδα G γράφεται ως αύξουσα HNN-επέκταση

$$G =< t, F_2 \mid t^{-1} F_2 t = \varphi(F_2) >$$

από το Θεωρήμα 4.3 έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 4.2. Έστω $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ κατηγορίες ομάδων. Μία ομάδα G θα λέγεται $\mathcal{P}$ **δια μέσου της** $\mathcal{Q}$ αν υπάρχει υποομάδα $K \lhd G$, με $K \in \mathcal{P}$, τέτοια ώστε $G/K \in \mathcal{Q}$.

Θεώρημα 4.5. *(Kirkinskii, Θεώρημα 1,* [39]*)*
Έστω G είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή δια μέσου πολυκυκλικής ομάδας. Τότε η G θα έχει άπειρη διάσταση αν και μόνο αν έχει μία υποομάδα ισόμορφη με το στεφανιαίο γινόμενο μίας κυκλικής ομάδας με μία άπειρη κυκλική ομάδα.

Λήμμα 4.4. *(Kirkinskii, Λήμμα 6,* [39]*)*
Έστω G μία Howson ομάδα και A μία αβελιανή κανονική υποομάδα της G. Έστω $a \in A$, $t \in G - A$ και η $H = \langle t, a\rangle$ δεν είναι πολυκυκλική. Τότε κάποια δύναμη κάθε στοιχείου $b \in A$ θα ανήκει στην H.

Έστω G είναι μία ομάδα και $f(t) = s_n t^n + s_{n-1} t^{n-1} + ... + s_1 t + s_0 \in \mathbb{Z}[t]$. Αν $k \in G$ ορίζουμε $k^{f(t)} = t^{-n} k^{s_n} t^n \cdot \dots \cdot t^{-1} k^{s_1} t \cdot k^{s_0}$. Τώρα για κάθε $k \in G$ και κάθε πολυώνυμο f, με ακέραιους συντελεστές, η κλάση ομάδων :

$$G_f = \langle t, k \mid [k, k^{t^i}] = 1,\ i \in \mathbb{Z};\ k^{f(t)} = 1\rangle,$$

παίζει έναν σημαντικό ρόλο στα παρακάτω αποτελέσματα.

Λήμμα 4.5. *(Kirkinskii, Λήμματα 7. και 8.,* [39]*)*
(1) *Η ομάδα G_f είναι πολυκυκλική αν και μόνο αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των συντελεστών και ο σταθερός όρος του πολυωνύμου f είναι ίσοι με ± 1.*
(2) *Η ομάδα G_f είναι ελευθέρας στρέψεως αν και μόνο αν το f είναι πρωτεύον, δηλαδή ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών του είναι το 1.*
(3) *Έστω $G = \langle t, k\rangle$ είναι μία ελευθέρας στρέψεως ομάδα πεπερασμένης διάστασης τέτοια ώστε η $\langle k\rangle^G$ είναι αβελιανή και $G/\langle k\rangle^G \simeq \mathbb{Z}$. Τότε υπάρχει ένα $f \in \mathbb{Z}[t]$ τέτοιο ώστε $G \simeq G_f$.*

Θεώρημα 4.6. *(Kirkinskii, Θεώρημα 2,* [39]*)*
Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη μη πολυκυκλική μεταβελιανή ομάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(1) *Η ομάδα G έχει την Howson ιδιότητα.*

(2) *Οι πεπερασμένα παραγόμενες μη πολυκυκλικές υποομάδες της G έχουν πεπερασμένους δείκτες.*

(3) *Η G έχει μια σειρά $1 \leqslant N \lhd H \leqslant G$, όπου $|N| < \infty$, $|G : H| < \infty$ και*

$$H/N \simeq G_f = \langle\, t,\, k \mid [k, k^{t^i}] = 1,\, i \in \mathbb{Z};\, k^{f(t)} = 1 \,\rangle,$$

όπου f είναι ένα πολυώνυμο (με ακέραιους συντελεστές) βαθμού $m > 0$ το οποίο είναι ανάγωγο ως προς $\mathbb{Z}$ και επιπλέον το πολυώνυμο $f(t)$ δεν διαιρεί κάποιο πολυώνυμο βαθμού $m-1$ στο t^n για κάθε n.

Θεώρημα 4.7. *(Longobardi-Maj, Θεώρημα A, [40])*
Έστω G μία μηδενοδύναμη δια μέσου αβελιανής ομάδας που ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(1) *Η ομάδα G έχει την Howson ιδιότητα.*

(2) *Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της G είναι πολυκυκλική ή πεπερασμένου δείκτη στην G.*

(3) *Η G'' είναι πολυκυκλική και η G/G'' είναι Howson.*

Θεώρημα 4.8. *(Longobardi-Maj, Θεώρημα B, [40])*
Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη επιλύσιμη ομάδα. Τότε η A/B έχει την Howson ιδιότητα, για κάθε $B \lhd A \leq G$, αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της G είναι πολυκυκλική ή πεπερασμένου δείκτη στην G.

5. Αμαλγαματα και HNN-επεκτασεις

Έστω A και B ομάδες που έχουν την ιδιότητα του Howson. Γεννιούνται τώρα τα εξής ερωτήματα :
(α) Για ποιές υποομάδες U της A, η ομάδα $G = A *_U B$ έχει την Howson ιδιότητα ;
(β) Για ποιές υποομάδες U και V της A, η ομάδα $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ έχει την Howson ιδιότητα ;

Μία μερική απάντηση δόθηκε από τους Burns και Cohen ([16] , [17], [19], [20]), με την βοήθεια μίας κλάσης υποομάδων U μίας ομάδας A που όρισε ο πρώτος.

Ορισμός 5.1. Έστω A ομάδα. Μία υποομάδα U της A ονομάζεται **Burns υποομάδα** αν έχει ένα σύνολο αριστερών αντιπροσώπων T, με $e \in T$, το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :
(α) Υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F της U τέτοιο ώστε $U(T - \{e\}) \subseteq TF$.
(β) Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα H της A και κάθε στοιχείο $a \in A$ υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F_1 της U τέτοιο ώστε $aH \subseteq TF_1(H \cap U)$.

Οι υποομάδες Burns είναι μία ιδιόμορφη κατηγορία υποομάδων. Παρακάτω ακολουθούν μερικά παραδείγματα. Στη συνέχεια, για να μην γίνεται σύγχυση, θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}$ τις ελεύθερες ομάδες και με F τα πεπερασμένα σύνολα .

Παρατηρήσεις. (1) Έστω A μία ομάδα. Κάθε πεπερασμένη υποομάδα U της A είναι Burns υποομάδα της A.
Πράγματι, έστω ότι έχουμε $U = F_2$, όπου F_2 είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Τότε ισχύει $U(T - \{e\}) \subseteq A = TU (= TF_2)$, άρα ικανοποιείται η συνθήκη α) του Ορισμού 5.1. Επίσης αν $a \in A$ και H είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της A, τότε $aH \subseteq A = TU = TF_1(H \cap U)$, όπου $F_1 \subseteq F_2$, συνεπώς ικανοποιείται και η συνθήκη β). Τελικά η U είναι μία Burns υποομάδα της A.
(2) Από την συνθήκη α) του Ορισμου 5.1 προκύπτει ότι για κάθε $a \notin U$ η τομή $U \cap aUa^{-1}$ είναι πεπερασμένη.
Πράγματι έστω $u \in U \cap aUa^{-1}$, τότε $u = ava^{-1}$ όπου $v \in U$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \in T - \{e\}$, τότε επειδή $av = ua \in TF$, έχουμε ότι $v \in F$ και άρα το ζητούμενο.
(3) Από την συνθήκη β) του Ορισμου 5.1 προκύπτει ότι για κάθε δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες H, K της A, η τομή ενός (H, U)-διπλού συμπλόκου και ενός (K, U)-διπλού συμπλόκου περιέχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος $(H \cap K, U)$-διπλά σύμπλοκα.
Πράγματι, αντικαθιστώντας τις H, K με τις $g^{-1}Hg, g^{-1}Kg$ όπου χρειάζεται, αρκεί μόνο να θεωρήσουμε την τομή $HU \cap KU$. Έστω $k = hu$, όπου $h \in H, k \in K$ και $u \in U$. Υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα F_1, F_2 της U με $H \subseteq TF_1(H \cap U)$ και $K \subseteq TF_2(K \cap U)$. Τότε $u \in (H \cap U)F_3(K \cap U)$ όπου $F_3 = {F_1}^{-1}F_2$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο της U. Δηλαδή έχουμε $u = vcw$, όπου $v \in H \cap U, w \in K \cap U$ και $c \in F_3$. Τότε το $(H \cap K, U)$-διπλό σύμπλοκο που περιέχει το $k = hu$ θα περιέχει επίσης και το $kw^{-1} = hvc$ το οποίο είναι ένα στοιχείο του $K \cap Hc$. Τώρα το $K \cap Hc$ είναι ένα δεξιό $H \cap K$-σύμπλοκο. Άρα κάθε $(H \cap K, U)$-διπλό σύμπλοκο που περιέχεται στο $HU \cap KU$ περιέχει ένα στοιχείο από πεπερασμένα το πλήθος $H \cap K$-σύμπλοκα, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Θεώρημα 5.1. *(Kapovich, Θεώρημα 0.2,* [32]*)*
Έστω G ελευθέρας στρέψεως ομάδα της κατηγορίας Q και $U = \langle u \rangle$ μεγιστική κυκλική υποομάδα της G. Τότε η U είναι μία Burns υποομάδα της G.

Πόρισμα 5.1. *(Burns, Θεώρημα 6.1,* [16]*)*
Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{F}(S)$ μία ελεύθερη ομάδα και U μεγιστική κυκλική υποομάδα της $\mathbb{F}$. Τότε η U είναι μία Burns υποομάδα της $\mathbb{F}$.

Λήμμα 5.1. *(Cohen, Λήμμα 1,* [20]*) Έστω H μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της A και U μία Burns υποομάδα της A. Τότε η τομή ενός (H, U)-διπλού συμπλόκου και ενός (H, aUa^{-1})-διπλού συμπλόκου, όπου $a \notin U$, περιέχει μόνο πεπερασμένο το πλήθος δεξιά H-σύμπλοκα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για την τομή $HU \cap HaUa^{-1}$. Επιλέγουμε ένα στοιχείο $hu = ava^{-1}$ σε κάποιο δεξιό H-σύμπλοκο, όπου $h \in H$ και $u, v \in U$.
Έστω U μία Burns υποομάδα της A. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F_1 της U με $a^{-1}H \subseteq TF_1(H \cap U)$ και ένα πεπερασμένο υποσύνολο F_2 της U με $Ua^{-1} \subseteq TF_2$. Επειδή $a^{-1}hu = va^{-1} \in TF_1(H \cap U)u \cap TF_2$ μπορούμε να γράψουμε $u = kc$, όπου $k \in H \cap U$ και c βρίσκεται σ' ένα πεπερασμένο σύνολο ${F_1}^{-1}F_2$. Τότε το δεξιό H-σύμπλοκο περιέχει το $hu = hkc$, επομένως περιέχει και το c, και άρα είναι ένα από πεπερασμένο το πλήθος σύμπλοκα. □

Λήμμα 5.2. *(Cohen, Λήμμα 2,* [20]*) Έστω U μία Burns υποομάδα της A και V μία υποομάδα της A τέτοια ώστε να υπάρχει ένα υποσύνολο F_1 της U με $V(T - \{e\}) \subseteq TF_1$. Έστω H και K είναι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της A και $c, d \in A$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο X της U τέτοιο ώστε αν το $u \in U$ ικανοποιεί τη σχέση $chu = vdk$, για κάποια $h \in H$, $k \in K$ και $v \in V$ με $dk \notin U$, τότε $u \in (H \cap U)X(K \cap U)$.*

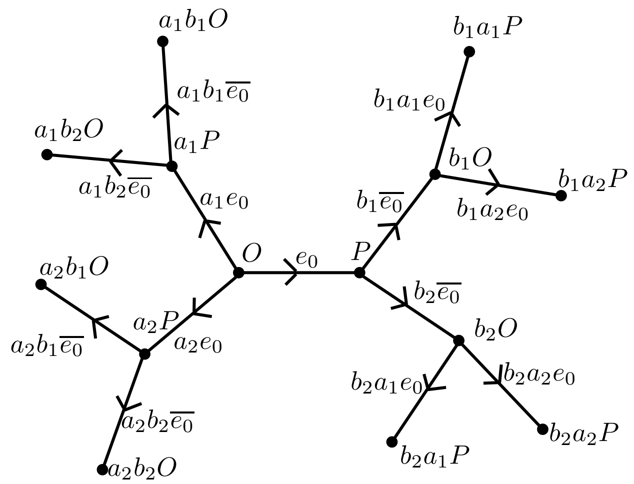
Απόδειξη. Υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F_2 της U τέτοιο ώστε

$$dk \in TF_2(K \cap U).$$

Επειδή $dk \notin U$, έχουμε $vdk \in TF_1F_2(K \cap U)$. Υπάρχει επίσης ένα πεπερασμένο υποσύνολο F_3 της U, τέτοιο ώστε $ch \in TF_3(H \cap U)$. Τότε

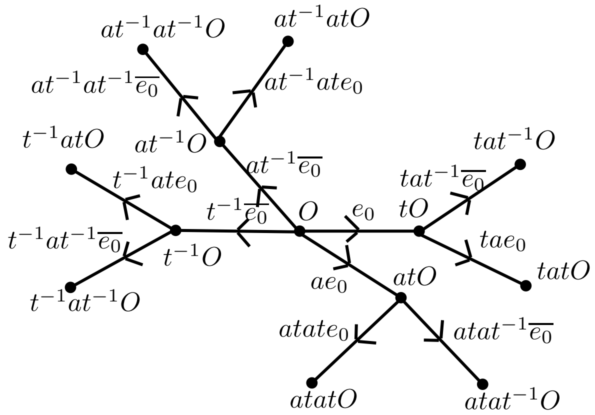
$$chu = vdk \in TF_3(H \cap U)u \cap TF_1F_2(K \cap U),$$

και επομένως $u \in (H \cap U){F_3}^{-1}F_1F_2(K \cap U)$. □



[Εικόνα 13 : Το σύνηθες δένδρο T στο οποίο δρα η $G = A *_U B$]

Το σύνηθες δένδρο. Έστω $G = A *_U B$ και η G δρα χωρίς αντιστροφές στο σύνηθες δένδρο T. Υπάρχει μία ακμή e_0(η αρχική ακμή), με $\alpha(e_0) = O$ και $\omega(e_0) = P$, της οποίας η σταθεροποιούσα είναι η ομάδα U. Οι σταθεροποιούσες των κορυφών O, P είναι οι ομάδες A, B αντιστοίχως. Επιλέγουμε έναν προσανατολισμό, για κάθε ακμή e του δένδρου η αρχή της ακμής $\alpha(e)$ θα είναι η κορυφή που βρίσκεται πιο κοντά στην κορυφή O. Υπάρχουν μία G-τροχιά ακμών και δύο G-τροχιές κορυφών, που αντιστοιχούν στην e_0 και τις κορυφές O, P. Αν e είναι μία ακμή με κορυφή την O τότε $e \in Ae_0$.



[Εικόνα 14 : Το σύνηθες δένδρο T στο οποίο δρα η $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$]

Έστω $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ και η G δρα χωρίς αντιστροφές στο συνήθες δένδρο T. Υπάρχει μία ακμή e_0 (η αρχική ακμή), με $\alpha(e_0) = O$ και $\omega(e_0) = tO$, της οποίας η σταθεροποιούσα είναι η ομάδα U και μία δεύτερη ακμή $t^{-1}e_0$, όπου $\alpha(t^{-1}e_0) = O$ και $\omega(t^{-1}e_0) = t^{-1}O$, με σταθεροποιούσα την V. Η σταθεροποιούσα της κορυφής O είναι η ομάδα A. Επιλέγουμε έναν προσανατολισμό, για κάθε ακμή e του δένδρου η αρχή της ακμής $\alpha(e)$ θα είναι η κορυφή που βρίσκεται πιο κοντά στην κορυφή O. Υπάρχουν μία G-τροχιά ακμών και μία G-τροχιά κορυφών, που αντιστοιχούν στην ακμή e_0 και την κορυφή O. Αν e είναι μία ακμή με κορυφή την O τότε $e \in Ae_0$ ή $e \in At^{-1}e_0$ (όχι και τα δύο ταυτοχρόνως).

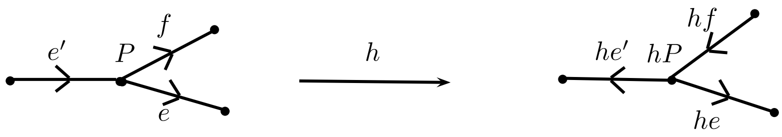
Παρατηρήσεις. Σε κάθε περίπτωση αν η e έχει κορυφή την O και f είναι μία ακμή με $f \in Ae$, τότε κάθε $h \in G$ με $f = he$ θα πρέπει να ανήκει στην A. Πράγματι, έστω $f = ae$ με $a \in A$. Τότε έχουμε $a^{-1}he = e$ και επειδή η G δρα χωρίς αντιστροφες θα πρέπει να ισχύει $a^{-1}hO = O$, δηλαδή $a^{-1}h \in A$.
Ομοίως αν η e είναι μία ακμή με κορυφή την P και $he = e_0$ με $hP = O$ για κάποιο $h \in G$, τότε για κάθε g με $ge = e_0$ θα ισχύει $gP = O$.

Ορισμός 5.2. Έστω $G = A *_U B$ ή $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ και T το σύνηθες δένδρο στο οποίο δρα η G. Μία ακμή e του T θα λέγεται **ειδική** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :
(α) Η αρχική κορυφή της e βρίσκεται στην τροχιά GO, αλλά δεν είναι το O.
(β) Αν P είναι η αρχική κορυφή του e, και e' η μοναδική ακμή με $\omega(e') = P$, τότε

$e \in (stabP)e'$.
Αν $P \neq O$, τότε η συνθήκη α) ισχύει πάντοτε στην ομάδα $\langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$, ενώ η συνθήκη β) ισχύει πάντοτε για την ομάδα $A *_U B$.

Λήμμα 5.3. *(Cohen, Λήμμα 3, [20]) Έστω G η ομάδα $A *_U B$ ή η ομάδα $\langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$, T το σύνηθες δένδρο στο οποίο δρα η G και H μία υποομάδα της G. Εάν μόνο πεπερασμένο το πλήθος από αντιστρεπτές H-τροχιές περιέχουν μία ειδική ακμή, τότε υπάρχουν μόνο πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές H-τροχιές.*

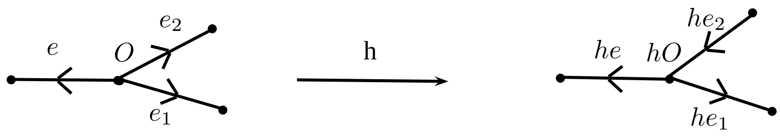
Απόδειξη. Έστω G η ομάδα $A *_U B$. Αν μία αντιστρεπτή H-τροχιά περιέχει μία ακμή e τέτοια ώστε $\alpha(e) \in GO - O$, τότε αυτή είναι ειδική. Υποθέτουμε ότι μία αντιστρεπτή H-τροχιά περιέχει μία ακμή e_1 με $\alpha(e_1) = O$ και έστω h αρνητικό στοιχείο για την e_1. Τότε αν $e \neq e_1$ είναι μία ακμή με $\alpha(e) = O$, τότε η He περιέχει την he, η οποία θα είναι ειδική επειδή η he_1 είναι η μόνη ακμή με $\omega(he_1) = hO (= \alpha(he))$. Άρα κάθε αντιστρεπτή H-τροχιά εκτός ίσως από την He_1 θα περιέχει μία ειδική ακμή.
Έστω τώρα G η ομάδα $\langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$. Σταθεροποιούμε μία κορυφή $P (\neq O)$. Πρώτα θα δείξουμε ότι μόνο πεπερασμένες το πλήθος αντιστρεπτές H-τροχιές περιέχουν μία ακμή e με $\alpha(e) = P$ και τέτοιες ώστε κάθε άλλη ακμή f με αρχική κορυφή το P ανήκει επίσης σε μία αντιστρεπτή H-τροχιά.



Πράγματι, παρατηρούμε ότι είτε $f \in (stabP)e$ ή $e \in (stabP)e'$ ή $f \in (stabP)e'$. Στην πρώτη περίπτωση διαλέγουμε $h \in H$ τέτοιο ώστε η hf να έχει τελική κορυφή την hP. Έχουμε

$$e = kf (k \in stabP) \Rightarrow he = hkf = (hkh^{-1})hf \in (stabhP)hf$$

και επομένως η ακμή he είναι ειδική, άρα η e βρίσκεται σε μία από πεπερασμένες το πλήθος τροχιές. Το ίδιο ισχύει και στην δεύτερη περίπτωση, επειδή η e είναι ειδική.
Στην τρίτη περίπτωση η f είναι ειδική, άρα θα ανήκει σε μία από τις πεπερασμένες τροχιές, συνεπώς και η P (η οποία είναι ένα άκρο της f). Σε κάθε τροχιά διαλέγουμε μία κορυφή $P_i \neq O$ και διαλέγουμε μία ακμή e_i με $\alpha(e_i) = P_i$ όπου η e_i ανήκει σε μία αντιστρεπτή τροχιά και $e_i \notin (stabP_i)e_i'$. Έστω $P_i = hP$. Τότε είτε $he = e_i'$, είτε $\alpha(he) = P_i$ και $he \in (stabP_i)e_i'$ ή $he \in (stabP_i)e_i$. Έτσι είτε $he = e_i'$ ή he είναι ειδική ή (όπως στην πρώτη περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου) η he μπορεί να δειχθεί ότι ανήκει σε μία από τις πεπερασμένες τροχιές.



Επίσης μόνο πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές τροχιές περιέχουν μία ακμή με αρχική κορυφή την O. Έστω e_1, e_2, και e ακμές που ανήκουν σε διαφορετικές αντιστρεπτές τροχιές με αρχική κορυφή την O. Έστω επίσης h αρνητικό για την e_2. Τότε $\omega(he_2) = hO$, άρα $hO \neq O$, και οι he και he_1 έχουν κοινή αρχική κορυφή την hO.

Επομένως η he είναι μία από τις ακμές που θεωρήσαμε προηγουμένως. Επιλέγοντας (το πολύ) δύο κατάλληλες ακμές από κάθε μία από τις πεπερασμένες τροχιές που θεωρήσαμε, μπορούμε να πετύχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο X, τέτοιο ώστε αν η e ανήκει σε μία τέτοια τροχιά να υπάρχει ένα h θετικό για την e με $he \in X$. Έστω Y είναι το πεπερασμένο σύνολο που περιέχει όλες τις ακμές των αναγώγων μονοπατιών από την O στις ακμές του X. Θα δείξουμε ότι κάθε αντιστρεπτή τροχιά συναντά το Y.

Σημειώνουμε ότι αν η e ανήκει σε μία αντιστρεπτή τροχιά τότε είτε $e \in HX$ ή υπάρχει μία ακμή f, με $\alpha(f) = \omega(e)$, σε μία αντιστρεπτή τροχιά. Π.χ. αν $\omega(e) = Q$ επιλέγουμε h αρνητικό για την e, τέτοιο ώστε $\alpha(he) = hQ$. Αν $hQ = O$ τότε $he \in HX$. Διαφορετικά λαμβάνουμε ακμή f τέτοια ώστε $\omega(hf) = hQ$.

Άρα αν μία ακμή e_1 ανήκει σε μία αντιστρεπτή τροχιά, υπάρχει είτε μία άπειρη ακολουθία από ακμές $\{e_1, e_2, ...\}$, ώστε όλες να ανήκουν σε μία αντιστρεπτή τροχιά, καμία στο σύνολο τροχιών HX, με $\alpha(e_i) = P_{i-1}$ και $\omega(e_i) = P_i$, για κάθε i, είτε υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία από ακμές $\{e_1, ..., e_n\}$, κάθε μία σε μία αντιστρεπτή τροχιά, με $\alpha(e_i) = P_{i-1}$ και $\omega(e_i) = P_i$, αλλά με $e_n \in HX$.

Στην πρώτη περίπτωση διαλέγουμε h τέτοιο ώστε $\omega(he_1) = hP_0$. Δεν μπορούμε να έχουμε $\omega(he_i) = hP_{i-1}$ για κάθε i, άρα μπορούμε να επιλέξουμε r τέτοιο ώστε $\omega(he_r) = hP_{r-1}$ αλλά με $\omega(he_{r+1}) \neq hP_r$. Τότε οι ακμές he_r και he_{r+1} θα έχουν κοινή αρχική κορυφή την hP_r. Τότε από τα παραπάνω έχουμε ότι $e_r \in HX$. Αυτό αντιτίθεται στον ορισμό της ακολουθίας, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Στην δεύτερη περίπτωση λαμβάνουμε n ελάχιστο. Επιλέγουμε h με $he_n \in X$ και $\omega(he_n) = hP_n$. Αν $\omega(he_i) = hP_i$ για κάθε i, από τον ορισμό του Y, έχουμε $he_1 \in Y$. Διαφορετικά μπορούμε να διαλέξουμε r τέτοιο ώστε $\omega(he_r) = hP_r$ ενώ $\omega(he_{r-1}) = hP_{r-2}$. Τότε οι he_r και he_{r-1} έχουν κοινή αρχική κορυφή την hP_{r-1}. Από τον ορισμό του X έχουμε $he_{r-1} \in HX$. Επειδή αυτο αντιτίθεται με την ελαχιστότητα του n, καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα έχουμε $he_1 \in Y$ και τελικά $e_1 \in HY$. □

Θεώρημα 5.2. *(Θεώρημα των Burns και Cohen, [20]) Έστω A και B ομάδες Howson. Τότε ισχύουν τα εξής :*
(α) Η ομάδα $G = A *_U B$ είναι Howson αν η U είναι μία Burns υποομάδα της A και η $H \cap U$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα H της G.
(β) Η ομάδα $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V\rangle$ είναι Howson αν οι ομάδες U και V είναι Burns υποομάδες της A και η $H \cap U$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα H της G.

Απόδειξη. Τα (α) και (β) μπορούν να αποδειχθούν ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση την δράση της G στο σύνηθες δένδρο T. Έστω H και K δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της G. Από το Λήμμα 2.3 υπάρχουν μόνο πεπερασμένες το πλήθος αντιστρεπτές H- και K-τροχιές και οι υποομάδες $H \cap stabP$ και $K \cap stabP$ είναι πεπερασμένες παραγόμενες για κάθε κορυφή P του T. Τώρα επειδή για κάθε κορυφή P του T οι σταθεροποιούσες $stabP = g^{-1}Ag$ (ή $g^{-1}Bg$), όπου $g \in G$, είναι ομάδες Howson, έχουμε ότι και η $H \cap K \cap stabP$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Άρα από το αντίστροφο του Λήμματος 2.3 αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές $(H \cap K)$-τροχιές. Τελικά από το Λήμμα 5.3, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακμή f μόνο πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές $(H \cap K)$-τροχιές στην $Hf \cap Kf$ θα περιέχουν μία ειδική ακμή.

Έστω e μία ειδική ακμή σε μία αντιστρεπτή $(H \cap K)$-τροχιά στην $Hf \cap Kf$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $g \in G$ με $gO = P = \alpha(e)$ και $ge_0 = e$. Αυτό μπορεί να υποτεθεί για το αμάγαλμα ενώ για την HNN ομάδα αν αυτό δεν ισχύει μπορούμε να βρούμε $g \in G$ με $gO = P = \alpha(e)$ και $gt^{-1}e_0 = e$. Για την τελευταία περίπτωση απλώς αντικαθιστούμε τις e_0 και U με τις $t^{-1}e_0$ και V αντιστοίχως στην υπόλοιπη απόδειξη.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε (αντικαθιστώντας την f με μία άλλη ακμή, για παράδειγμα με την ίδια την e, αν χρειαστεί) ότι μπορούμε να βρούμε $g_1 \in G$ με $g_1 e_0 = f$ και $g_1 O = \alpha(f)$. Τότε μπορούμε να λάβουμε $f = e_0$. Αν αυτό δεν ισχύει απλώς αντικαθιστούμε τις A και U με τις A^{g_1} και U^{g_1} αντιστοίχως χωρίς άλλες αλλαγές.

Επειδή υπάρχουν μόνο πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές H-τροχιές, οι ακμές με αρχική κορυφή την O που ανήκουν σε μία αντίστρεπτη H-τροχιά θα ανήκουν σε πεπερασμένο το πλήθος $(H \cap A)$-τροχιές. Άρα υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο C της A τέτοιο ώστε όλες αυτές οι ακμές της Ae_0 να ανήκουν στην $(H \cap A)Ce_0$. Ομοίως υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο D της A τέτοιο ώστε κάθε ακμή της Ae_0, που βρίσκεται σε μία αντιστρεπτή K-τροχιά, να ανήκει στην $(K \cap A)De_0$.

Τώρα θεωρούμε μία ειδική ακμή e με $e = he_0 = ke_0$, όπου $h \in H$, $k \in K$, και έστω e' η ακμή με $\omega(e') = P = \alpha(e)$. Από την Παρατήρηση πριν τον Ορισμό 5.2 έχουμε ότι $hO = P = kO$. Επίσης $k = hu$ για κάποιο $u \in U$.

Αν το g είναι αρνητικό για την e, τότε $\omega(ge) = gP$ και $\alpha(ge') = gP$, επομένως το g είναι αρνητικό και για την e'. Άρα η e' ανήκει σε μία αντιστρεπτή $(H \cap K)$-τροχιά. Επειδή η e είναι ειδική έχουμε ότι $e' \in (stabP)e$ και επομένως $h^{-1}e' \in Ae_0$. Άρα $h^{-1}e' = yce_0$, για κάποια $y \in H \cap A$, $c \in C$. Ομοίως $k^{-1}e' = zde_0$ για κάποια $z \in K \cap A$, $d \in D$.

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $uzde_0 = yce_0$, άρα $uzd = ycw$ για κάποιο $w \in U$. Αυτή η ισότητα μπορεί να γραφεί ως $c^{-1}y^{-1}u = wd^{-1}z^{-1}$. Επίσης $zd \notin U$ επειδή $k^{-1}e' \neq e_0 = k^{-1}e$. Συνεπώς από το Λήμμα 5.2 υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο S της U τέτοιο ώστε $u \in (H \cap U)S(K \cap U)$ για όλες τις επιλογές των ειδικών ακμών e στην $He_0 \cap Ke_0$.

Επιλέγοντας κατάλληλα $h' \in hU$, $k' \in kU$, μπορούμε να γράψουμε ότι $e = h'e_0 = k'e_0$, με $k' \in h'S$. Αν μία άλλη ακμή e_1 αντιστοιχεί στο ίδιο στοιχείο του S, έστω $e_1 = h_1'e_0 = k_1'e_0$, τότε $e_1 \in (H \cap K)e$, επειδή $k_1'k^{-1} = h_1'h^{-1} \in H \cap K$. Έτσι οι ειδικές ακμές στην $He_0 \cap Ke_0$ θα ανήκουν σε πεπερασμένο το πλήθος αντιστρεπτές $(H \cap K)$-τροχιές, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Το παραπάνω Θεώρημα των Burns και Cohen μας δίνει ικανές συνθήκες, ώστε ένα αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο ή μια HNN επέκταση (Howson ομάδων) να έχουν την Howson ιδιότητα. Αυτές οι συνθήκες σχετίζονται με μία ειδική κατηγορία υποομάδων, τις Burns υποομάδες. Τέτοιες υποομάδες είναι όλες οι πεπερασμένες υποομάδες (Παρατήρηση (1» και οι μεγιστικές κυκλικές υποομάδες μίας ελευθέρας στρέψεως ομάδας της κατηγορίας Q (Θεώρημα 5.1). Από αυτές τις παρατηρήσεις προκύπτουν τα παρακάτω Πορίσματα. Να σημειωθεί ότι είναι αρκετά δύσκολο να αποφανθούμε αν μία υποομάδα είναι Burns.

Πόρισμα 5.2. *Έστω A και B ομάδες Howson και U μία πεπερασμένη υποομάδα της A. Τότε οι ομάδες $G = A *_U B$ και $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ είναι ομάδες Howson.*

Πόρισμα 5.3. *Η κατηγορία των Howson ομάδων είναι κλειστή στα γενικευμένα αμαλγάματα και τις HNN-επεκτάσεις με πεπερασμένες συνδεόμενες ομάδες.*

Πόρισμα 5.4. *Έστω A ελευθέρας στρέψεως ομάδα της κατηγορίας Q, B ομάδα Howson και U, V δύο μεγιστικές κυκλικές υποομάδες της A. Τότε οι ομάδες $G = A *_U B$ και $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V\rangle$ είναι ομάδες Howson.*

Πόρισμα 5.5. *Έστω $\mathbb{F}$ ελεύθερη ομάδα, B ομάδα Howson και U μία μεγιστική κυκλική υποομάδα της $\mathbb{F}$. Τότε η ομάδα $G = \mathbb{F} *_U B$ είναι Howson.*

Ταυτόχρονα εύκολα βλέπουμε ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος των Burns και Cohen δεν είναι αναγκαίες, όπως φαίνεται και από το Θεώρημα 5.3. Ήδη ο Burns παρατηρεί (βλέπε την Παρατήρηση μετά το Λήμμα 3.1 στο [17]) ότι η συνθήκη του (στίς HNN-ομάδες) μπορεί να αντικατασταθεί με την υπόθεση ότι, για όλες τις πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες H, K της $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V\rangle$, κάθε τομή ενός (H, A)-συμπλόκου με ένα (K, A)-σύμπλοκο περιέχει μόνο πεπερασμένο το πλήθος διπλά ακραία $(H \cap K, A)$-σύμπλοκα. Το πρώτο τέτοιο αντιπαράδειγμα υπάρχει σε εργασία του Moldavanskii ([45]).

Θεώρημα 5.3. *(Burns-Brunner, Θεώρημα, 2, [18]) Έστω $\mathbb{F}$ ελεύθερη ομάδα και U μία μεγιστική κυκλική υποομάδα της $\mathbb{F}$. Τότε η ομάδα $G = \langle t, \mathbb{F} \mid t^{-1}Ut = V \rangle$ είναι Howson.*

Οι Baumslag-Solitar ομάδες.

Θα εξετάσουμε πότε μία Baumslag-Solitar ομάδα έχει την Howson ιδιότητα. Παρατηρούμε ότι οι Buns-Cohen συνθήκες δεν είναι αναγκαίες.

Λήμμα 5.4. *(Moldavanskii, [45]) Οι Baumslag-Solitar ομάδες*

$$B(1, l) = \langle t, a \mid t^{-1}at = a^l \rangle$$

έχουν την Howson ιδιότητα, για κάθε $l \in \mathbb{Z}$. Ταυτόχρονα οι υποομάδες

$$\{\langle a^l \rangle, |l| \geq 2\}$$

δεν είναι Burns υποομάδες της $\langle a \rangle$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η $B(1, l)$ είναι μία μη πολυκυκλική ομάδα. Πράγματι έχουμε ότι

$$B(1, l) \geq \langle a, tat^{-1}, t^2at^{-2}, \dots \rangle,$$

η οποία είναι απείρως παραγόμενη. Επίσης η $B(1, l)$ είναι μεταβελιανή. Έστω $A = \langle a \rangle^{B(1,l)}$, τότε η A είναι αβελιανή διότι

$$t^m a^p t^{-m} \cdot t^n a^q t^{-n} = t^m a^p \cdot t^{n-m} a^q t^{m-n} \cdot t^{-m} = t^m \cdot t^{n-m} a^q t^{m-n} \cdot a^p t^{-m} =$$
$$= t^n a^q t^{-n} \cdot t^m a^p t^{-m}$$

όπου $p, q \in \mathbb{Z}$ και m, n θετικοί ακέραιοι με $m \geq n$. Τελικά η $B(1, l)$ έχει μία αβελιανή σειρά $B(1, l) \rhd A \rhd 1$.
Ισχύει ότι

$$B(1, l) \simeq G_f = \langle t, a \mid [a, a^{t^i}] = 1, i \in \mathbb{Z}; a^{t-l} = 1 \rangle$$

όπου $f(t) = t - l$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού 1. Άρα από το Θεώρημα 4.6 η ομάδα $B(1, l)$ έχει την Howson ιδιότητα.

Τώρα μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι για κάθε l με $|l| \geq 2$, η $\langle a^l \rangle$ δεν είναι μία Burns υποομάδα της $\langle a \rangle$. Πράγματι, έστω $T = [\langle a \rangle : \langle a^l \rangle] = \{1, a, ..., a^{l-1}\}$ το (πεπερασμένο) σύνολο των αριστερών αντιπροσώπων. Επομένως δεν είναι δυνατόν για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο F της $\langle a \rangle$ να ισχύει

$$\langle a \rangle (T - \{1\}) \subseteq TF.$$

□

Λήμμα 5.5. *(Karrass-Solitar,* [35]*) Η Baumslag-Solitar ομάδα*

$$B(2,2) = \langle\, t, a \mid t^{-1}a^2t = a^2 \,\rangle$$

δεν έχει την Howson ιδιότητα.

Απόδειξη. Θέτουμε $H = \langle t, a^{-1}ta \rangle$. Επειδή κάθε μη κενή ανάγωγη λέξη $w = w(t, a^{-1}ta)$ είναι μη τετριμμένη, η H είναι μία ελεύθερη ομάδα διάστασης 2. Επιπλέον, $H \lhd G$ επειδή

$$ata^{-1} = a^{-1}(a^2ta^{-2})a = a^{-1}ta.$$

Ομοίως η $L = \langle at, ta \rangle$ είναι μία ελεύθερη ομάδα διάστασης 2 και $L \lhd G$. Επομένως η υποομάδα $H \cap L$ είναι κανονική στην H και μη τετριμμένη, αφού $t^{-1}a^{-1}ta \in H \cap L$. Παρατηρούμε ότι η $H \cap L$ έχει άπειρο δείκτη στην H. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τον επίμορφισμο

$$\psi : B(2,2) \to \mathbb{Z} : t \mapsto 1, a \mapsto -1$$

έχουμε ότι $\psi(H) = \mathbb{Z}$ και $\psi(L) = 0$. Συνεπώς από το Θεώρημα 2.2 η ομάδα $H \cap L$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. □

Λήμμα 5.6. *Αν $k, l \geq 2$ τότε οι Baumslag-Solitar ομάδες*

$$B(k,l) = \langle\, t, a \mid t^{-1}a^kt = a^l \,\rangle$$

δεν έχουν την Howson ιδιότητα.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.5 η ομάδα $B(2,2)$ δεν έχει την Howson ιδιότητα. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k \geq 2$ και $l \geq 3$. Παρατηρούμε ότι η υποομάδα $H = \langle\, a, t^{-1}at \mid (t^{-1}at)^k = a^l \,\rangle$ της $B(k,l)$ είναι ένα αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο το οποίο περιέχει ελεύθερες υποομάδες. Πράγματι

$$H = \langle\, a, t^{-1}at \mid (t^{-1}at)^k = a^l \,\rangle \simeq \langle\, b, a \mid b^k = a^l \,\rangle,$$

όπου $b = t^{-1}at$. Τώρα έστω $x = (ba)^3$ και $y = (ba^2)^2$. Για την τυχαία μη τετριμμένη ανάγωγη λέξη $w(x,y)$ μπορούμε να δείξουμε ότι

$$w((ba)^3, (ba^2)^2) \notin h^{-1}\langle\, b \,\rangle h,\ h^{-1}\langle\, a \,\rangle h,$$

για κάθε $h \in H$. Πρώτα κοιτάζουμε ποιές διαγραφές γραμμάτων είναι πιθανόν να γίνουν στις συλλαβές μήκους 2 της λέξης $w(x,y)$ αν αντικαταστήσουμε τα x και y με $(ba)^3$ και $(ba^2)^2$. Σε κάθε μία από τις συλλαβές $x^2, y^2, xy, yx, xy^{-1}$ και $x^{-1}y$ έχουμε ότι το πολύ δύο ζεύγη γραμμάτων a, a^{-1}, b, b^{-1} μπορούν να διαγραφούν. Επομένως μετά τις διαγραφές λαμβάνουμε μία μη κενή λέξη w με εκθέτες για τα a και b από τα σύνολα $\{-2,-1,1,2\}$ και $\{-1,1\}$ αντιστοίχως. Επειδή κανένα συζυγές (στην H) των λέξεων $x^2, y^2, xy, yx, xy^{-1}, x^{-1}y$ δεν συναντάει τις υποομάδες $\langle\, b \,\rangle$, $\langle\, a \,\rangle$ έχουμε ότι για την τυχαία μη τετριμμένη ανάγωγη λέξη $w(x,y)$ ισχύει

$$hwh^{-1} \notin \langle\, b \,\rangle, \langle\, a \,\rangle \Leftrightarrow w \notin h^{-1}\langle\, b \,\rangle h,\ h^{-1}\langle\, a \,\rangle h,$$

για κάθε $h \in H$. Άρα η υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία x και y δεν συναντά κανένα συζυγές των κυκλικών υποομάδων $\langle\, b \,\rangle$, $\langle\, a \,\rangle$ και συνεπώς από το Θεώρημα 2.4 έχουμε ότι $< x, y > \simeq \mathbb{F}_2$. Επειδή η υποομάδα $\langle\, b^k \,\rangle$ είναι το κέντρο της H προκύπτει ότι $\langle\, x, y, b^k \,\rangle = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. Δηλαδή η ομάδα $B(k,l)$ περιέχει μία υποομάδα που δεν είναι Howson, άρα ούτε αυτή είναι Howson.
Η ειδική περίπτωση, όπου $k = 2$ και $l = 3$, είναι η Άσκηση 23.8 στο [14]. □

Πρόταση 5.1. *Έστω $k, l \in \mathbb{Z}$. Τότε η Baumslag-Solitar ομάδα*

$$B(k,l) = \langle\, t, a \mid t^{-1}a^k t = a^l \,\rangle$$

έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα k και l ισούται με ± 1.

Απόδειξη. Αν το k (ή το l) είναι ίσο με 1 έπεται από το Λήμμα 5.4 ότι η $B(1,l) = \langle\, t, a \mid t^{-1}at = a^l \,\rangle$ έχει την Howson ιδιότητα. Όταν $|k|$ ή $|l| \geq 3$ και $kl > 0$ έπεται άμεσα από το Λήμμα 5.6 (αντικαθιστώντας, αν χρειαστεί, το στοιχείο a με το a^{-1}) ότι η ομάδα $B(k,l)$ δεν είναι Howson. Αν $kl < 0$ τότε εργαζόμενοι όπως στην Απόδειξη του Λήμματος 5.6 βλέπουμε ότι η υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $x = (ba^{-1})^3$ και $y = (ba^{-2})^2$ είναι ελεύθερη. Άρα η ομάδα $B(k,l)$ περιέχει την υποομάδα $\langle\, x, y, b^k \,\rangle = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$, η οποία δεν είναι Howson.
Τελικά για την ειδική περίπτωση όπου $k = -l$ και $|k| = |l| = 2$ έχουμε ότι

$$B(2,-2) = \langle\, t\,, a \mid t^{-1}a^2 t = a^{-2} \,\rangle$$

και ότι η υποομάδα της $\langle\, t^2, a^{-1}t^2 a \,\rangle$ είναι ελεύθερη. Επομένως,

$$B(2,-2) \geq H = \langle\, t^2, a^{-1}t^2 a, a^2 \mid t^2 a^2 = a^2 t^2, a^{-1}t^2 a \cdot a^2 = a^2 \cdot a^{-1} t^2 a \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$$

και η ομάδα $B(2,-2)$ δεν είναι Howson. □

Έστω K, L δύο πεπερασμένα παραγόμενες μηδενοδύναμες ομάδες, με περιοδικό μέρος ή χωρίς. Εξετάζουμε πότε μία HNN-επέκταση $G = \langle\, t, K \mid t^{-1}At = B \,\rangle$ και πότε ένα αμάγαλμα $G = K *_A L$ έχουν την Howson ιδιότητα.

Οι HNN-επεκτάσεις των μηδενοδυνάμων ομάδων.

Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}Kt = K \rangle$, όπου K μία πολυκυκλική ομάδα που έχει την παρακάτω πολυκυκλική σειρά

$$K = K_n \rhd K_{n-1} \rhd \ldots \rhd K_1 \rhd K_0 = 1$$

μήκους n. Τότε η G έχει την παρακάτω πολυκυκλική σειρά

$$G \rhd K_n \rhd K_{n-1} \rhd \ldots \rhd K_1 \rhd K_0 = 1$$

μήκους $n+1$. Άρα από το Θεώρημα 4.8 η ομάδα G θα έχει την Howson ιδιότητα. Επομένως στη συνέχεια θεωρούμε ότι μία τουλάχιστον από τις A και B είναι γνήσια υποομάδα της K.

Πρόταση 5.2. *Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}Kt = B \rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα και B μία γνήσια υποομάδα της K. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :*
(α) Για κάθε μη πολυκυκλική υποομάδα $\langle\, t^m, k' \,\rangle$ όπου $m \geq 1$, $k' \in K$ και για κάθε $k \in K$ έχουμε ότι $\langle\, t^m, k' \,\rangle \cap \langle\, k \,\rangle \neq 1$.
(β) Υπάρχει μία μη πολυκυκλική υποομάδα $H = \langle\, t, k_1 \,\rangle$, όπου $k_1 \in K - B$, τέτοια ώστε $H \leqslant_f G$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική θήκη $A = K^G$ της K. Μπορούμε να δούμε ότι δύο τυχαία στοιχεία της A μετατίθενται. Για παράδειγμα, αν $t^m k_1 t^{-m}$, $t^n k_2 t^{-n} \in A$, όπου $k_i \in K - B$ και m, n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε $t^m k_1 t^{-m} \cdot t^n k_2 t^{-n} = t^n k_2 t^{-n} \cdot$

$t^m k_1 t^{-m}$. Άρα η A είναι μία απείρως παραγόμενη αβελιανή υποομάδα της G, η οποία είναι μεταβελιανή επειδή έχει την αβελιανή σειρά

$$G \rhd A \rhd 1.$$

Ταυτόχρονα η G είναι μία μη πολυκυκλική ομάδα, αφού περιέχει την απείρως παραγόμενη υποομάδα A.
Υποθέτουμε ότι η G είναι μία Howson ομάδα και για κάποια $m \geq 1$, $k' \in K$ η υποομάδα $\langle\, t^m,\, k' \,\rangle$ είναι μη πολυκυκλική. Για την αβελιανή υποομάδα $A = K^G \lhd G$, από το Λήμμα 4.4, έχουμε ότι $\langle\, t^m, k' \,\rangle \cap \langle\, k \,\rangle \neq 1$ για κάθε $k \in K \leqslant A$. Τώρα, επειδή $B \gneqq K$ και $B \simeq K$, υπάρχει μία βάση $\langle\, k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n \,\rangle$ της K και θετικοί ακέραιοι ξ_i τέτοιοι ώστε $B = \langle\, k_1^{\xi_1},\, k_2^{\xi_2},\, \ldots,\, k_n^{\xi_n} \,\rangle$ και τουλάχιστον για έναν από τους ξ_i να ισχύει $\xi_i > 1$. Αν υποθέσουμε ότι $\xi_1 \geq 2$ τότε η $H = \langle\, t, k_1 \,\rangle$ είναι μη πολυκυκλική υποομάδα τότε από το Θεώρημα 4.6 έχουμε ότι $H \leqslant_f G$.
Τώρα υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (α) και (β) ικανοποιούνται. Τότε από την (β) υπάρχει μία μη πολυκυκλική υποομάδα $H = \langle\, t, k_1 \,\rangle$, $k_1 \in K - B$, πεπερασμένου δείκτη στην G. Η ομάδα H είναι μία ελευθέρας στρέψεως ομάδα πεπερασμένης διάστασης (βλέπε Θεώρημα 4.5) και για την αβελιανή ομάδα $\langle\, k_1 \,\rangle^H$ έχουμε ότι $H/\langle\, k_1 \,\rangle^H \simeq \langle\, t \,\rangle$. Άρα από το Λήμμα 4.5(3) υπάρχει ένα $f \in \mathbb{Z}[t]$ τέτοιο ώστε

$$H \simeq H_f = \langle\, t,\, k_1 \mid [k_1, k_1^{t^i}] = 1,\, i \in \mathbb{Z};\, k_1^{f(t)} = 1 \,\rangle.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το f είναι ένα $\mathbb{Z}$-ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού $n \geq 0$. Πράγματι, επειδή η H_f είναι ελευθέρας στρέψεως ομάδα, έπεται από το Λήμμα 4.5(2) ότι το f είναι πρωτεύον. Επίσης αν $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\langle\, t, k_1^{f_1(t)} \,\rangle \simeq \langle\, t, k' \,\rangle$ είναι πάλι μη πολυκλυκλική και άρα υπάρχει ένας ακέραιος l με $k_1^l \in \langle\, t, k' \,\rangle$ από την συνθήκη (α). Άρα $k_1^l = k_1^{f_1(t)g(t)}$ για ένα πολυώνυμο $g(t)$. Αλλά τότε $f(t) \mid f_1(t)g(t) - l$ και επομένως $f_1(t) \mid f_1(t)g(t) - l$. Συνεπώς ισχύει $f_1(t) \mid l$, δηλαδή το $f_1(t)$ είναι σταθερό.
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το f είναι ανάγωγο και διαιρεί το πολυώνυμο $c_{n-1}t^{r(n-1)} + \cdots + c_1 t^r + c_0$ για ένα θετικό ακέραιο r. Προφανώς αυτό το πολυώνυμο μπορεί να θεωρηθεί ανάγωγο ως προς το t^r και επιπροσθέτως τα c_{n-1} και c_0 δεν είναι ίσα με 1 κατά απόλυτη τιμή. Άρα η $\langle\, t^r,\, k_1 \,\rangle$ δεν είναι πολυκυκλική. Λόγω της συνθήκης α) υπάρχει ένας ακέραιος e_j τέτοιος ώστε $(k_1^{t^j})^{e_j} = k_1^{f_j(t^r)}$ για καθορισμένα πολυώνυμα $f_1, f_2, ..., f_{n-1}$. Χρησιμοποιώντας την ισότητα $k_1^{c_{n-1}t^{r(n-1)} + \cdots + c_1 t^r + c_0} = 1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $f_1, f_2, ..., f_{n-1}$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $n-2$. Όμως τα $k_1,\, k_1^t,\, ...,\, k_1^{t^{n-1}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα τα $k_1,\, k_1^{f_1(t^r)},\, ...,\, k_1^{f_{n-1}(t^r)}$ πρέπει να είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα, το οποίο είναι αδύνατο επειδή κάθε ένα από αυτά είναι βαθμού το πολύ $n-2$. Επομένως από το Θεώρημα 4.6 έχουμε ότι η υποομάδα H_f είναι μία Howson ομάδα. Ταυτόχρονα από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $|G : H_f| < \infty$. Τελικά το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 4.1, διότι γνωρίζουμε ότι οι πεπερασμένες επεκτάσεις μίας Howson ομάδας είναι Howson. $\square$

Λήμμα 5.7. *Η ομάδα* $G = \langle\, t, a, b \mid t^{-1}at = b, ab = ba \,\rangle$ *δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιόντας έναν κατάλληλο μετασχηματισμό για την ομάδα G, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G &= \langle\, t,\, a,\, b \mid t^{-1}at = b,\, ab = ba \,\rangle \\ &= \langle\, t,\, a,\, b,\, x \mid t^{-1}at = b, ab = ba,\, x = ab^{-1} \,\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle\, t,\, a,\, b,\, x \mid t^{-1}ata^{-1} \,=\, ba^{-1},\, b^{-1}a \,=\, ab^{-1},\, x \,=\, ab^{-1} \,\rangle$$
$$= \langle\, t,\, a,\, x \mid t^{-1}ata^{-1} \,=\, x^{-1}, xa \,=\, ax \,\rangle \,=\, \langle\, t,\, x \,\rangle \rtimes \langle\, a \,\rangle.$$

Επειδή $\langle\, t,\, x \,\rangle \cap g^{-1}\langle\, a \,\rangle g \,=\, 1$ για κάθε $g \in G$, από το Θεώρημα 2.5 έχουμε ότι $\langle\, t, x \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Τελικά από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι καμία επέκταση της $\mathbb{F}_2$ από μία άπειρη κυκλική ομάδα δεν είναι Howson. $\square$

Λήμμα 5.8. *Έστω K μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα και A, B ισόμορφες υποομάδες της K υπό τον ισομορφισμό φ. Υποθέτουμε ότι ο δείκτης της $A \cap B$ στην A (και στην B) είναι άπειρος. Έστω $G = \langle\, t, K \mid t^{-1}At = B,\, \varphi \,\rangle$ η αντίστοιχη HNN-επέκταση, τότε αυτή δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$D = \{x \in K \mid \forall\, n \in \mathbb{Z}\; \exists\, l = l(n) \in \mathbb{N} : t^{-n}x^l t^n \in K\} \leqslant K.$$

Αυτή η ομάδα είναι απομονωμένη, με την έννοια ότι αν $k^m \in D$ για κάποια $k \in K$ και $m > 0$, τότε $k \in D$. Άρα η D είναι ευθύς παράγοντας της K. Επίσης περιέχεται στην απομονωμένη κλειστή θήκη της $A \cap B$.

Επειδή η τομή $A \cap B$ είναι απείρου δείκτη στην A (αλλά και στην B), μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο $a \in A$ τέτοιο ώστε $\langle\, a \,\rangle \cap D \,=\, 1$ (καθώς και ένα στοιχείο $b \in B$ τέτοιο ώστε $\langle\, b \,\rangle \cap D \,=\, 1$). Αυτό μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $\varphi^n(a) \in A$ και $\varphi^{-n}(a) \in B$, ενώ $\langle\, \varphi^{n+1}(a) \,\rangle \cap A \,=\, 1$ και $\langle\, \varphi^{-n-1}(a) \,\rangle \cap B \,=\, 1$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$G \geqslant H \,=\, \langle\, t^{2n+2}, a, b \mid t^{-2n-2}at^{2n+2} = b, ab = ba \,\rangle$$

και από το Λήμμα 5.7 η G δεν είναι Howson. $\square$

Πρόταση 5.3. *Έστω $G \,=\, \langle\, t,\, K \mid t^{-1}At \,=\, B \,\rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα και A, B μη-τετριμμένες γνήσιες υποομάδες της K. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο δείκτης της $A \cap B$ στην A (και στην B) είναι άπειρος. Τότε από το Λήμμα 5.8 έχουμε ότι η G δεν έχει την Howson ιδιότητα. Τώρα σε διαφορετική περίπτωση θα δείξουμε ότι $G \geqslant \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις. Εάν $|K : B| \geq 3$ (ή $|K : A| \geq 3$) θέτουμε $x \,=\, (t^{-1}k_1tk_2)^3$ και $y \,=\, (t^{-1}k_1tk_3)^3$, όπου $k_1 \in K - A$ και $k_2, k_3 \in K - B$ τέτοια ώστε $k_2B \neq k_3B$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ομάδα $\langle\, x,\, y \,\rangle$ έχει τετριμμένη τομή με κάθε συζυγές της K, άρα είναι μία ελεύθερη ομάδα διάστασης 2 ($\langle\, x,\, y \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$). Επίσης για κάθε $b \in B$ υπάρχει ένα $a \in A < K$ τέτοιο ώστε $b \,=\, t^{-1}at$. Τότε το b μετατίθεται με τα στοιχεία $t^{-1}k_1t,\, k_2,\, k_3$. Άρα το b ανήκει στην κεντροποιούσα της $\langle\, x,\, y \,\rangle$ και $\langle\, x,\, y \,\rangle \cap \langle\, b \,\rangle = 1$. Επομένως $\langle\, x,\, y,\, b \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$.

Εάν $|K : A| = |K : B| = 2$ θέτουμε $x \,=\, (t^{-1}k_1tk_2)^3$ και $y \,=\, (t^{-2}k_1t^2k_2)^2$, όπου $k_1 \in K - A$ και $k_2 \in K - B$. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε συζυγές της ομάδας βάσης K τέμνει την $\langle\, x,\, y \,\rangle$ τετριμμένα, επομένως $\langle\, x,\, y \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Τώρα έστω $a \in A$, από την υπόθεσή μας υπάρχει $\xi \geq 0 : (t^{-1}at)^\xi \in A \cap B$. Για το $b \,=\, t^{-1}(t^{-1}at)^\xi t \in B < K$ παρατηρούμε ότι το b μετατίθεται με τα στοιχεία $t^{-1}k_1t, t^{-2}k_1t^2, k_2$. Αυτό συνεπάγεται ότι το b μετατίθεται με τα x και y. Δηλαδή $\langle\, x,\, y,\, b \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. Συνεπώς η G περιέχει την $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ και άρα δεν είναι Howson. $\square$

Πόρισμα 5.6. *Έστω $G = \langle\, t, K \mid t^{-1}At = B \,\rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Αν για τον ισομορφισμό*

$$\varphi : A \to B : a \mapsto t^{-1}at$$

και για κάθε $a \in A$ έχουμε $\langle\, a \,\rangle \cap \langle\, \varphi(a) \,\rangle \neq 1$ τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν

$$G \simeq B(1,l)\ ,\ l \in \mathbb{Z}$$

ή

$$G \simeq \langle\, t, \langle\, k_1 \,\rangle \times ... \times \langle\, k_n \,\rangle \mid t^{-1}k_i t = k_i^{\pm 1} \quad , i \in \{1,...,n\} \,\rangle.$$

Απόδειξη. Επειδή η K είναι ελεύθερη αβελιανή, υπάρχει μία βάση $\{k_1,...,k_n\}$ τέτοια ώστε $K = \langle\, k_1,...,k_n \,\rangle$ και $A = \langle\, {k_1}^{l_1},...,{k_m}^{l_m} \,\rangle$, όπου $m \leq n$ και $l_i \in \mathbb{Z}$. Επομένως για τον ισομορφισμό $\varphi : A \to B$ έχουμε ότι $\varphi({k_i}^{l_i}) = {k_1}^{r_{i1}}{k_2}^{r_{i2}}...{k_n}^{r_{in}}$, $1 \leq i \leq m$. Ωστόσο από την υπόθεση έχουμε ότι $\langle\, {k_i}^{l_i} \,\rangle \cap \langle\, {k_1}^{r_{i1}}{k_2}^{r_{i2}}...{k_n}^{r_{in}} \,\rangle \neq 1$, άρα υπάρχουν $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $({k_1}^{r_{i1}}{k_2}^{r_{i2}}...{k_n}^{r_{in}})^{a_i} = {k_i}^{l_i b_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Αυτό σημαίνει ότι $r_{ii}a_i = l_i b_i$ και $r_{i1} = r_{i2} = ... = r_{ii-1} = r_{ii+1} = ... = r_{in} = 0$, για κάθε $i \in \{1,...,m\}$. Δηλαδή η ομάδα G έχει την μορφή

$$G = \langle\, t, \langle\, k_1 \,\rangle \times ... \times \langle\, k_n \,\rangle \mid t^{-1}{k_i}^{l_i}t = {k_i}^{r_i} \quad , 1 \leq i \leq m \leq n \,\rangle.$$

Συνεπώς από τις Προτάσεις 5.1 , 5.2 και 5.3 έχουμε το ζητούμενο. □

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, δηλαδή τις Προτάσεις 5.2 και 5.3, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα :

Θεώρημα 5.4. *Έστω $G = \langle\, t, K \mid t^{-1}At = B \,\rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν $A = B = K$ ή $A = K > B$ και η G ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β) της Πρότασης 5.2.*

Πόρισμα 5.7. *Έστω $G = \langle t,\, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου $K = K_1 \times K_2$ τέτοια ώστε K_1 πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα και K_2 πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν είτε οι συνδεόμενες υποομάδες είναι πεπερασμένες ή $A = B = K$ ή $A = K > B$ και η G ικανοποιεί τις συνθήκες :*
(α') Για κάθε μη πολυκυκλική υποομάδα $\langle\, t^m, k' \,\rangle$ όπου $m \geq 1$, $k' \in K$ και για κάθε $k \in K$ απείρου τάξεως έχουμε ότι $\langle\, t^m, k' \,\rangle \cap \langle\, k \,\rangle \neq 1$.
και (β) της Πρότασης 5.2.

Απόδειξη. Αν οι συνδεόμενες υποομάδες A, B είναι πεπερασμένες τότε από το Πόρισμα 5.2 η ομάδα G έχει την Howson ιδιότητα. Διαφορετικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι A, B περιέχουν στοιχεία απείρου τάξεως.
Αν ισχύει $A = B = K$ τότε η ομάδα G είναι πολυκυκλική και επομένως θα έχει πάλι την Howson ιδιότητα.
Στην περίπτωση όπου $A = K = K_1 \times K_2$ και B είναι μία γνήσια υποομάδα της K τότε $B = B_1 \times K_2$. Υποθέτουμε ότι η G είναι μία Howson ομάδα, τότε για την κανονική αβελιανή υποομάδα K^G, για τα k, $k' \in K \leq K^G$ (στοιχεία απείρου τάξεως) και το $t^m \in G - K^G$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.4 και η συνθήκη (α') έπεται. Τώρα κάθε στοιχείο $k_1 \in K - B$ έχει άπειρη τάξη, άρα η υποομάδα $H = \langle\, t, k_1 \,\rangle$ όπως στην Απόδειξη της Πρότασης 5.2 είναι μία μη πολυκυκλική ομάδα. Τότε η συνθήκη (β) προκύπτει από το Θεώρημα 4.6.
Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (α') και (β) ικανοποιούνται. Τότε από την (β) υπάρχει μία μη πολυκυκλική υποομάδα $H = \langle\, t, k_1 \,\rangle$, $k_1 \in K - B$, πεπερασμένου δείκτη στην G. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια επιχειρήματα όπως στην Απόδειξη της Πρότασης 5.2 και να δείξουμε ότι η G έχει την Howson ιδιότητα.

Υποθέτουμε ότι οι A, B είναι γνήσιες υποομάδες της K. Αν ο δείκτης της $A \cap B$ στην A είναι άπειρος, χρησιμοποιούμε την κλειστή υποομάδα της K

$$D = \{x \in K \mid \forall\ n \in \mathbb{Z}\ \exists\ l = l(n) \in \mathbb{N} : t^{-n}x^l t^n \in K\}.$$

Σημειώνουμε ότι $D = D_1 \times K_2$, όπου η D_1 είναι ελευθέρας στρέψεως. Επίσης οι $K = D \times L$ και L περιέχουν στοιχεία απείρου τάξεως. Επομένως είναι εύκολο να δείξουμε ότι η G δεν έχει την Howson ιδιότητα όπως στην Απόδειξη του Λήμματος 5.8. Τέλος υποθέτουμε ότι ο δείκτης της $A \cap B$ στην A είναι πεπερασμένος. Τότε, επειδή μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο απείρου τάξεως στην A, είναι εύκολο να δούμε, χρησιμοποιώνας τα επιχειρήματα της Απόδειξης της Πρότασης 5.3, ότι η G δεν είναι Howson ομάδα. $\square$

Πρόταση 5.4. *Έστω $G = \langle\, t, K \mid t^{-1}Kt = B \,\rangle$, όπου η K μία πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα και B μία γνήσια υποομάδα της K. Υποθέτουμε ακόμα ότι η G ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της είναι πολυκυκλική ή πεπερασμένου δείκτη στην G.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η G είναι μηδενοδύναμη δια μέσου κυκλικής ομάδας. Έστω

$$K = \gamma_1 K \geq [K, K] = \gamma_2 K \geq \ldots \geq \gamma_c K \geq \gamma_{c+1} K = 1$$

η κατωτέρα κεντρική σειρά της K. Για κάθε i λαμβάνουμε την κανονική θήκη $(\gamma_i K)^G$ της $\gamma_i K$. Θα δείξουμε ότι $\gamma_i(K^G) \leq (\gamma_i K)^G$ για κάθε i.
Έστω $i = 3$ και $t^m k_1 t^{-m}$, $t^n k_2 t^{-n}$, $t^r k_3 t^{-r}$ αυθαίρετα στοιχεία της K^G, όπου $k_j \in K - B$ ($j \in \{1, 2, 3\}$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι m, n, r είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $r > n > m$. Τότε έχουμε ότι

$$[[t^m k_1 t^{-m}, t^n k_2 t^{-n}], t^r k_3 t^{-r}] = [t^m k_1 t^{n-m} k_2 t^{m-n} k_1^{-1} t^{n-m} k_2^{-1} t^{-n}, t^r k_3 t^{-r}] =$$
$$[t^n t^{m-n} k_1 t^{n-m} k_2 t^{m-n} k_1^{-1} t^{n-m} k_2^{-1} t^{-n}, t^r k_3 t^{-r}] =$$
$$[t^n \overline{k_1} k_2 \overline{k_1}^{-1} k_2^{-1} t^{-n}, t^r k_3 t^{-r}] = [t^n [\overline{k_1}, k_2] t^{-n}, t^r k_3 t^{-r}] =$$
$$t^n [\overline{k_1}, k_2] t^{r-n} k_3 t^{n-r} [\overline{k_1}, k_2]^{-1} t^{r-n} k_3 t^{-r} =$$
$$t^r t^{n-r} [\overline{k_1}, k_2] t^{r-n} k_3 t^{n-r} [\overline{k_1}, k_2]^{-1} t^{r-n} k_3 t^{-r} = t^r [\overline{[\overline{k_1}, k_2]}, k_3] t^{-r}.$$

Επομένως δείξαμε ότι $\gamma_3(K^G) \leq (\gamma_3 K)^G$. Είναι εύκολο τώρα να δείξουμε επαγωγικά ότι

$$\gamma_{c+1}(K^G) \leq (\gamma_{c+1} K)^G = 1.$$

Άρα η K^G είναι μία μηδενοδύναμη ομάδα και $G/K^G \simeq \langle\, t \,\rangle$. Τότε από το Θεώρημα 4.7 έχουμε το αποτέλεσμα. $\square$

Παρατηρήσεις. Υπάρχουν κλάσεις ομάδων που ανήκουν στις αύξουσες HNN-επεκτάσεις πεπερασμένα παραγόμενων μηδενοδυνάμων ομάδων που ικανοποιούν την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες. Για παράδειγμα αν η K είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη αβελιανή ομάδα, τότε η G είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη μεταβελιανή ομάδα. Άρα η G ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες (βλέπε Θεώρημα 1, [11]).

Πρόταση 5.5. *Έστω $G = \langle\, t,\, K \mid t^{-1}At = B \,\rangle$, όπου K μία ελευθέρας στρέψεως πολυκυκλική ομάδα και ζK το κέντρο της. Έστω $|K : A| \geq 3$, $|K : B| \geq 2$ και $\zeta K \neq 1$. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα αν*
(α) $\zeta K \nleq A \cap B$ ή
(β) Υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$, $z_b \in \zeta K \cap B$ τέτοια ώστε $t^{-n} z_a t^n = z_b$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\zeta K \nleq A \cap B$. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.
(1) $\zeta K \cap A \neq 1$, $\zeta K \cap B \neq 1$ και $\zeta K \cap A \cap B = 1$.
Τότε υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$, $z_b \in \zeta K \cap B$ τέτοια ώστε $\langle z_a \rangle \cap B = 1$, $\langle z_b \rangle \cap A = 1$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ομάδα $\langle t^{-1} z_b t, z_a \rangle$ είναι ελεύθερη επειδή κάθε ανάγωγη λέξη πάνω στους γεννήτορες $\{t^{-1} z_b t, z_a\}$ ισούται με 1. Επίσης το z_b μετατίθεται με τα στοιχεία $t^{-1} z_b t, z_a$ και τέμνει την ελεύθερη ομάδα τετριμμένα, δηλαδή $\langle z_b \rangle \cap \langle t^{-1} z_b t, z_a \rangle = 1$. Άρα η $G \geq \langle t^{-1} z_b t, z_a \rangle \times \langle z_b \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(2) $\zeta K \cap A \neq 1$ και $\zeta K \cap B = 1$.
Τότε παρατηρούμε ότι υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$ και $k_1, k_2 \in K - A$ με $k_1 \notin k_2 A$ τέτοια ώστε $\langle (t^{-1} k_1 t z_a)^3, (t^{-1} k_2 t z_a)^3 \rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Επίσης αν $\overline{b} = t^{-1} z_a t \in t^{-1}(\zeta K \cap A) t$ έχουμε ότι η $G \geq \langle (t^{-1} k_1 t z_a)^3, (t^{-1} k_2 t z_a)^3 \rangle \times \langle \overline{b} \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(3) $\zeta K \cap B \neq 1$ και $\zeta K \cap A = 1$.
Τότε μπορούμε να δούμε ότι υπάρχουν $z_b \in \zeta K \cap B$ και $k_3 \in K - B$ τέτοια ώστε

$$\langle (t^{-1} z_b t k_3)^3, (t^{-2} z_b t^2 k_3)^2 \rangle \simeq \mathbb{F}_2.$$

Αν $z_b = t^{-1} \overline{a} t = t^{-2} a t^2$ ($\overline{a} \in t(\zeta K \cap B) t^{-1}$, $a \in A$) έχουμε ότι
η $G \geq \langle (t^{-1} z_b t k_3)^3, (t^{-2} z_b t^2 k_3)^2 \rangle \times \langle z_b \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
Αν $z_b = t^{-1} \overline{a} t$ ($\overline{a} \in t(\zeta K \cap B) t^{-1}$) και $\langle \overline{a} \rangle \cap B = 1$, τότε
η $G \geq \langle\, t, z_b, \overline{a} \mid t^{-1} \overline{a} t = z_b, \overline{a} \cdot z_b = z_b \cdot \overline{a} \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \rtimes \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(4) $\zeta K \cap A = \zeta K \cap B = 1$.
Τότε αν $b \in B$ και $z \in \zeta K$, έχουμε όπως και στην περίπτωση (1) ότι η $\langle t^{-1} z t, z \rangle$ είναι μία ελεύθερη ομάδα διάστασης 2. Άρα η $G \geq \langle t^{-1} z t, z \rangle \times \langle b \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(5) $\zeta K \cap A \cap B \neq 1$. Έχουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.
(5.i) $|\zeta K \cap A : \zeta K \cap A \cap B| \geq 2$.
Τότε υπάρχουν $z_a \in (\zeta K \cap A) - B$, $k_1, k_2 \in K - A$ με $k_1 \notin k_2 A$, τέτοια ώστε

$$G \geq \langle (t^{-1} k_1 t z_a)^3, (t^{-1} k_2 t z_a)^3 \rangle \times \langle t^{-1} z_a t \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$$

και άρα η G δεν είναι Howson.
(5.ii) $\zeta K \cap A = \zeta K \cap A \cap B$, δηλαδή $\zeta K \cap A \leq B$ και έστω $\zeta K \nleq B$.
Τότε υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$, $z \in \zeta K$ (με $z \notin A, B$), $k_1, k_2 \in K - A$ (με $k_1 \notin k_2 A$) και η $G \geq \langle (t^{-1} k_1 t z)^3, (t^{-1} k_2 t z)^3 \rangle \times \langle t^{-1} z_a t \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(5.iii) $\zeta K \cap A \cap B = \zeta K \cap A < \zeta K \cap B = \zeta K$.
Τότε υπάρχουν $z \in \zeta K = \zeta K \cap B$, με $z \notin A$, και $k_1, k_2 \in K - B$, με $k_1 \notin k_2 B$ (αν $|K : B| > 2$), και έστω

$$H_1 = \langle (t^{-1} z t k_1)^3, (t^{-2} z t^2 k_1)^2 \rangle \simeq \mathbb{F}_2$$
$$H_2 = \langle (t^{-1} z t k_1)^3, (t^{-1} z t k_2)^3 \rangle \simeq \mathbb{F}_2$$

Αν $|K : B| = 2 < \infty$ (και άρα $|A : A \cap B| < \infty$) έχουμε ότι υπάρχει $l > 0$ με $z^l = t^{-1} a^l t = t^{-2} a' t^2$ (για κάποιο $a' \in A$) και η $G \geq H_1 \times \langle z^l \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
Αν $|K : B| > 2$, τότε η $G \geq H_2 \times \langle z \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(5.iv) $\zeta K \cap A \cap B = \zeta K \cap A = \zeta K \cap B = \zeta K$.
Τότε $\zeta K \leq A \cap B$, το οποίο είναι άτοπο, λόγω της υπόθεσης.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$, $z_b \in \zeta K \cap B$ τέτοια ώστε $t^{-n} z_a t^n = z_b$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Θέτουμε $x = (t^n k_3 t^{-n} k_1)^3$ και $y = (t^n k_3 t^{-n} k_2)^3$, όπου $k_1, k_2 \in K - A$ με $k_1 \notin k_2 A$ και $k_3 \in K - B$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η $G \geq \langle x, y \rangle \times \langle z_a \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν έχει την Howson ιδιότητα. $\square$

Πρόταση 5.6. *Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου K μία ελευθέρας στρέψεως πολυκυκλική ομάδα και ζK το κέντρο της. Έστω $|K : A| = |K : B| = 2$ και $\zeta K \neq 1$. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα αν*
(α) $\zeta K \nleq A \cap B$, ή
(β) Υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$, $z_b \in \zeta K \cap B \cap A$ και $z_c \in \zeta K \cap B$ τέτοια ώστε $t^{-m-n} z_a t^{m+n} = t^{-n} z_b t^n = z_c$ για κάποια $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\zeta K \nleq A \cap B$, για παράδειγμα $\zeta K \nleq A$. Τότε υπάρχουν $z \in \zeta K - A$ και $k_1 \in K - B$ τέτοια ώστε $H = \langle\, (t^{-1}ztk_1)^3, (t^{-2}zt^2k_1)^2 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Αν υπάρχουν $z' \in \zeta K$, $a, a' \in A$ τέτοια ώστε $z' = t^{-1}at = t^{-2}a't^2$, τότε η $G \geq H \times \langle z' \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson. Διαφορετικά έχουμε ότι $\zeta K \cap B = 1$ ή $|K : B| \geq 3$ και άρα από την Πρόταση 5.5 έχουμε το αποτέλεσμα.
(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $z_a \in \zeta K \cap A$, $z_b \in \zeta K \cap B \cap A$ και $z_c \in \zeta K \cap B$ τέτοια ώστε $t^{-m-n} z_a t^{m+n} = t^{-n} z_b t^n = z_c$ για κάποιους θετικούς ακεραίους m, n. Έστω ακόμη ότι $k_1 \in K - A$ και $k_3 \in K - B$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η
$G \geq \langle (t^n k_3 t^{-n} k_1)^3, (t^{m+n} k_3 t^{-m-n} k_1)^2 \rangle \times \langle z_a \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson. □

Πρόταση 5.7. *Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου K μία πεπεραμένα παραγόμενη ελευθέρας στρέψεως μηδενοδύναμη ομάδα και ζK το κέντρο της. Έστω A, B μη τετριμμένες γνήσιες υποομάδες της K. Αν $\zeta K \leq A \cap B$ τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Επειδή οι A, B είναι μη τετριμμένες γνήσιες υποομάδες της K υπάρχουν $k_1 \in K - A$, $k_2 \in K - B$ τέτοια ώστε $H = \langle\, (t^{-1}k_1tk_2)^3, (t^{-2}k_1t^2k_2)^2 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Έχουμε επίσης ότι υπάρχουν $z_{ab} \in \zeta K$, $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b = t^{-1}z_{ab}t = t^{-2}at^2$. Θεωρούμε την ανωτέρα κεντρική σειρά της μηδενοδύναμης ομάδας K :

$$K = \zeta_c K \geq \zeta_{c-1} K \geq ... \geq \zeta_1 K = \zeta K \geq \zeta_0 K = 1.$$

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.
(1) $|A : A \cap B| < \infty$ και $|A \cap B : \zeta K| < \infty$.
Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι l, m, n τέτοιοι ώστε

$$z_{ab}^l = t^{-1}a^lt = t^{-2}a't^2 \Rightarrow$$
$$z_{ab}^{lm} = t^{-1}a^{lm}t = t^{-2}(a')^mt^2 = t^{-3}a''t^3 \Rightarrow$$
$$z' = z_{ab}^{lmn} = t^{-1}z''t = t^{-1}a^{lmn}t = t^{-2}z'''t^2 = t^{-2}(a')^{lm}t^2,$$

όπου $z', z'', z''' \in \zeta K$ και $a', a'' \in A$. Άρα η $G \geq H \times \langle z' \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
(2) $|A : A \cap B| = \infty$ και $|A \cap B : \zeta K| < \infty$.
Αν υπάρχουν στοιχεία $a_1, a_2, a_3 \in A \cap B$ τέτοια ώστε

$$b = t^{-1}a_1t = t^{-2}a_2t^2 = t^{-3}a_3t^3 = t^{-4}at^4,$$

όπου $a \in A$ και $b \in B$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία $z_1, z_2, z_3 \in \zeta K$ τέτοια ώστε $z_1 = t^{-1}z_2t = t^{-2}z_3t^2$. Άρα η $G \geq H \times \langle z_1 \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
Διαφορετικά υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$, με $\langle a \rangle \cap B = 1$ και $\langle b \rangle \cap A = 1$, τέτοια ώστε $b = t^{-3}at^3$. Επίσης υπάρχει θετικός ακέραιος n, όπου $1 \leq n \leq c-1$, τέτοιος ώστε $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = z_n \in \zeta_n K$. Λαμβάνουμε την υποομάδα της G :

$$H_1 = \langle\, t^3, a \mid t^{-3}at^3 = b, ab = z_nba,\ z_n \in \zeta_n K,\ 1 \leq n \leq c-1 \,\rangle.$$

Θέτουμε $x = ba^{-1}$, τότε $z_n = [a, b] = [a, x] \in \zeta_n K$ και αν θ είναι ο εσωτερικός αυτομορφισμός της G που επάγεται από το a, παρατηρούμε ότι

$$\theta(t^3) = at^3a^{-1} = t^3x,$$

$$\theta(x) = axa^{-1} = [a, x]x = z_n x,$$
$$\theta(z_n) = az_n a^{-1} = [a, z_n]z_n = z_{n-1}z_n,$$
$$..$$
$$\theta(z_2) = az_2a^{-1} = [a, z_2]z_2 = z_1z_2,$$
$$\theta(z_1) = az_1a^{-1} = z_1,$$

όπου $z_i = [a, z_{i+1}] \in \zeta_i K$, για $1 \leq i \leq n-1$. Ο περιορισμός της θ στην $H_2 = \langle t^3, x, z_1, z_2..., z_n\rangle$ είναι ένας αυτομορφισμός της H_2. Θεωρούμε τις υποομάδες της H_1, $L = \langle a, t^{-3}xt^3\rangle$ και H_2. Τότε η τομή

$$L \cap H_2 = \langle \theta^i(t^{-3}xt^3) \mid i = 0, \pm1, ...\rangle$$

είναι απείρως παραγόμενη. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε το x με το ba^{-1} τότε

$$\langle \theta^i(t^{-3}xt^3) \mid i = 0, \pm1, ...\rangle = \langle a^i t^{-3}(ba^{-1})t^3a^{-i} \mid i = 0, \pm1, 0...\rangle.$$

Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι η $L \cap H_2$ είναι απείρως παραγόμενη, επειδή $a^i \notin B$ για κάθε ακέραιο i και $ba^{-1} \notin A$. Αυτό συνεπάγεται ότι η H_1 δεν έχει την Howson ιδιότητα. Άρα η G δεν είναι Howson.

(3) $|A : A \cap B| < \infty$ και $|A \cap B : \zeta K| = \infty$.
Αν υπάρχουν $a \in A - B$ και $b \in B - A$ τότε για κάθε θετικό ακέραιο k θεωρούμε τις υποομάδες

$$H_k = \langle\, (t^{-k}bt^k a)^3, (t^{-2k}bt^{2k}a)^2 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2.$$

Επειδή $|A : A \cap B| < \infty$ μπορούμε να βρούμε για κάθε θετικό ακέραιο n στοιχεία

$$ab_1, ab_2, ..., ab_n \in A \cap B,$$

με $ab_j \in \zeta K$ για κάποιο $1 \leq j \leq n$, τέτοια ώστε :

$$b = t^{-1}ab_nt = t^{-2}ab_{n-1}t^2 = ... = t^{-n}ab_1t^n = a.$$

Αν υπάρχει $ab_i \in A \cap B$ και k θετικός ακέραιος με την ιδιότητα $t^{-k}ab_it^k = ab_i$. Τότε $t^{-k}ab_jt^k = ab_j$ ($ab_j \in \zeta K$) και $G \geq H_k \times \langle\, ab_j \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. Άρα η G δεν έχει την Howson ιδιότητα. Διαφορετικά υπάρχουν στοιχεία $ab_1, ab_2, ..., ab_k \in A \cap B$, όπου $2 \leq k \leq c$, τέτοια ώστε $z_1 = [ab_1, [ab_2, [..., [ab_{k-1}, ab_k]] \in \zeta K$ και $t^{-2}z_1t^2 = t^{-1}z_2t = z_3$, με $z_2, z_3 \in \zeta K$. Άρα η $G \geq H_1 \times \langle\, z_3 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson.
Στην ειδική περίπτωση όπου $A = t^{-1}At = B$ έχουμε ότι :

$$G = \langle\, t, K \mid t^{-1}At = A \,\rangle \simeq K *_A \langle\, t, A \mid t^{-1}At = A \,\rangle.$$

Αν υπάρχουν $z \in \zeta K$ και k θετικός ακέραιος, τέτοια ώστε το t^k να μετατίθεται με το z, τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η G δεν είναι Howson (βλέπε παρακάτω την απόδειξη του Θεωρήματος 5.6). Διαφορετικά μπορούμε να δείξουμε όπως παραπάνω ότι υπάρχουν $z_1, z_2, z_3 \in \zeta K$ τέτοια ώστε $t^{-2}z_1t^2 = t^{-1}z_2t = z_3$ και άρα η $G \geq H \times \langle\, z_3 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ δεν είναι Howson (όπου $H = \langle\, (t^{-1}k_1tk_2)^3, (t^{-2}k_1t^2k_2)^2 \,\rangle$ και $k_1 \in K - A$, $k_2 \in K - B$).
Τώρα στην περίπτωση όπου $A = t^{-1}At \leq B$ έχουμε παρομοίως ότι η G δεν είναι Howson.
(4) $|A : A \cap B| = \infty$ και $|A \cap B : \zeta K| = \infty$.
Εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα όπως παραπάνω είναι εύκολο να δούμε ότι η G δεν είναι Howson. $\square$

Πόρισμα 5.8. *Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}At = B \rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγώμενη και άπειρη μηδενοδύναμη ομάδα και A, B μη τετριμμένες άπειρες γνήσιες υποομάδες της K. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Με μία μικρή παραλλαγή στις αποδείξεις των Προτάσεων 5.1, 5.3 και 4.3 έχουμε το αποτέλεσμα. Πράγματι, έστω C μία υποομάδα της K, αν αντικαταστήσουμε τις συνθήκες $\{\zeta K \cap C = 1\}$ και $\{c \in C\}$, με τις $\{\zeta K \cap C$ πεπερασμένη $\}$ και $\{c$ στοιχείο απείρου τάξεως στην $C\}$ αντιστοίχως, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια επιχειρήματα. □

Τα αμαλγαματοποιημένα ελεύθερα γινόμενα των μηδενοδυνάμων ομάδων.

Θεώρημα 5.5. *Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πολυκυκλικών ομάδων K, L. Αν η A είναι πεπερασμένη ή $|K : A| = |L : A| = 2$ τότε η G έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη 1η. Αν η A είναι πεπερασμένη από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η ομάδα $G = K *_A L$ έχει την Howson ιδιότητα. Υποθέτουμε ότι $|K : A| = |L : A| = 2$ και ότι τα $\{1, k\}$ και $\{1, l\}$ είναι συστήματα αριστερών αντιπροσώπων για την A στις K και L αντιστοίχως. Τότε, σε κανονική μορφή, κάθε στοιχείο της G έχει μία από τις παρακάτω μορφές :

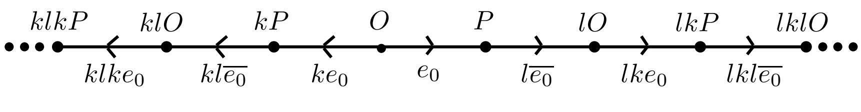
(1) $g = klkl...kla = (kl)^n a$
ή
(2) $g = lklk...klka = (lk)^n a$
ή
(3) $g = klkl...klka = (kl)^n ka$
ή
(4) $g = lklk...lkla = (lk)^n la$

όπου $a \in A$ και $n \geq 0$.

Έστω τώρα H_1, H_2 είναι δύο πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της G. Θα δείξουμε ότι η τομή $H = H_1 \cap H_2$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενη. Είναι προφανές ότι η H περιέχει στοιχεία τύπου 1. αν και μόνο αν περιέχει στοιχεία τύπου 2. Αν η υποομάδα H περιέχει στοιχεία μόνο τύπου 1. (και 2.), τότε θα περιέχεται στην ομάδα $M = \langle kl \rangle \cdot A$. Τώρα επειδή η A είναι μία πολυκυκλική ομάδα έπεται ότι είναι και η M πολυκυκλική και άρα η H είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Αν η υποομάδα H περιέχει στοιχεία μόνο τύπου 3. (ομοίως και αν περιέχει στοιχεία μόνο τύπου 4.), τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

(α) Όλα τα στοιχεία της H είναι τύπου $g = (kl)^n ka$, $a \in A$ με το ίδιο n για κάθε στοιχείο της H. Στην περίπτωση αυτή είναι εύκολο να δούμε ότι ο δείκτης της $A \cap H$ στην H είναι ίσος με το 2, επομένως η H θα είναι πεπερασμένα παραγόμενη.
(β) Υπάρχουν δύο στοιχεία $g_1 = (kl)^n ka_1$ και $g_2 = (kl)^m ka_2$ στην H με $n > m$. Τότε $g_1 \cdot g_2 = (kl)^{n-m} a$, με $a \in A$, είναι ένα στοιχείο της H τύπου 1., γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η H περιέχει στοιχεία μόνο τύπου 3.



[Εικόνα 15 : Το σύνηθες δένδρο που δρα η $K *_A L$ όταν $|K : A| = |L : A| = 2$]

Αν η υποομάδα H περιέχει στοιχεία τύπου 1. και τύπου 3. (ή τύπου 4.), τότε αυτή δρα στο σύνηθες δένδρο T της G, το οποίο είναι ένα διπλά άπειρο μονοπάτι με κορυφές τα σύμπλοκα των O και P (με σταθεροποιούσες τις K και L αντιστοίχως). Έστω e_0 η βασική ακμή με $\alpha(e_0) = O$ και $\omega(e_0) = P$. Σταθεροποιούμε την κορυφή O και θεωρούμε τον προσανατολισμό "έξω από την O". Έστω τώρα ένα στοιχείο $g = (kl)^m a$ τύπου 1. με m ελάχιστο. Αυτό το στοιχείο είναι αρνητικό, επειδή έχουμε ότι $\alpha(ge_0) = g(\omega(e_0))$ και $\omega(ge_0) = g(\alpha(e_0))$. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχουν το πολύ m αντιστρεπτές H-τροχιές ακμών του συνήθους δένδρου T. Επιπλέον οι υποομάδες $H \cap g^{-1}Kg$ και $H \cap g^{-1}Lg$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες για κάθε $g \in G$ και άρα από το Θεώρημα 2.4 και το Λήμμα 2.3, έχουμε ότι η H είναι πεπερασμένα παραγόμενη.
Τέλος, αν η υποομάδα H περιέχει στοιχεία τύπου 3., έστω $g_1 = (kl)^n k a_1$, και τύπου 4., έστω $g_2 = (lk)^m l a_2$, τότε υπάρχει πάντα ένα στοιχείο $g = g_1 \cdot g_2 = (kl)^{n+m+1} a$ τύπου 1.
Άρα σε αυτήν την περίπτωση η G είναι Howson. □

Απόδειξη 2η. Αν η A είναι πεπερασμένη από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η ομάδα $G = K *_A L$ έχει την Howson ιδιότητα. Υποθέτουμε ότι $|K : A| = |L : A| = 2$ και ότι τα $\{1, k\}$ και $\{1, l\}$ είναι συστήματα αριστερών αντιπροσώπων για την A στις K και L αντιστοίχως. Τότε παρατηρούμε ότι η G είναι μία πολυκυκλική ομάδα και επομένως μία Howson ομάδα. Πράγματι, έχουμε ότι η A είναι μία κανονική υποομάδα της G και το πηλίκο G/A είναι η άπειρη διεδρική ομάδα, δηλαδή

$$G/A \simeq \langle\, k \mid k^2 = 1 \,\rangle * \langle\, l \mid l^2 = 1 \,\rangle.$$

Αλλά η άπειρη διεδρική ομάδα είναι μία πολυκυκλική ομάδα επειδή είναι ισόμορφη με το ημιευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$. Επειδή η κλάση των πολυκυκλικών ομάδων είναι κλειστή ως προς τις επεκτάσεις, έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.6. *Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων μηδενοδυνάμων ομάδων K, L. Αν $|K : A| \geq 3$, $|L : A| \geq 2$ και η A είναι μία άπειρη υποομάδα, τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα.*

Απόδειξη. Αν οι K, L είναι πεπερασμένα παραγόμενες (και άπειρες) μηδενοδύναμες ομάδες τότε είναι γνωστό ότι καθένα από τα κέντρα τους ζK, ζL περιέχει ένα στοιχείο απείρου τάξεως (βλέπε [55], σ.138). Τώρα επειδή $|K : A| \geq 3$ και $|L : A| \geq 2$ η G περιέχει μη κυκλικές ελεύθερες υποομάδες. Για παράδειγμα, για $l \in L - A$ και $k_1, k_2 \in K - A$, με $k_1 A \neq k_2 A$, τα στοιχεία $x = (l \cdot k_1)^3$ και $y = (l \cdot k_2)^3$ παράγουν μία ελεύθερη ομάδα διάστασης 2, επειδή κάθε συζυγές ενός παράγοντα στο αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο, K ή L, τέμνει την $\langle\, x, y \,\rangle$ τετριμμένα (Θεώρημα 3, [19]).
Αν η $\zeta K \cap \zeta L$ περιέχει ένα στοιχείο απείρου τάξεως, για παράδειγμα $z_a \in A \cap \zeta K \cap \zeta L$, τότε $\langle\, x, y, z_a \,\rangle \simeq \langle\, x, y \,\rangle \times \langle\, z_a \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. Άρα σε αυτήν την περίπτωση η G δεν είναι Howson.
Αν η $\zeta K \cap \zeta L$ είναι πεπερασμένη, τότε υπάρχουν στοιχεία $z_k \in \zeta K - A$, $z_l \in \zeta L - A$ και $a \in A$, όλα απείρου τάξεως (βλέπε [10], σ.2), τέτοια ώστε, η υποομάδα της G, $\langle\, z_k \,\rangle \times \langle\, a \,\rangle *_{\langle a \rangle} \langle\, a \,\rangle \times \langle\, z_l \,\rangle$ να είνα ισόμορφη με την $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$. Άρα συμπεραίνουμε ότι η G δεν είναι Howson. □

Πόρισμα 5.9. *Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων αβελιανών ομάδων K, L. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν $G = K * L$ ή $|K : A| = |L : A| = 2$.*

Πόρισμα 5.10. *Έστω $K = K_1 \times K_2$ και $L = L_1 \times L_2$, όπου K_1, L_1 πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες αβελιανές ομάδες και K_2, L_2 πεπερασμένες αβελιανές ομάδες. Το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο $G = K *_A L$ έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν η A είναι πεπερασμένη ή $|K : A| = |L : A| = 2$.*

Απόδειξη. Αν η A είναι πεπερασμένη τότε από το Πόρισμα 5.2 έχουμε ότι η ομάδα G έχει την Howson ιδιότητα. Διαφορετικά η αμαγαλματοποιημένη υποομάδα A περιέχει ένα στοιχείο απείρου τάξεως και έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.11. *Έστω $G = K *_A L$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων μηδενοδυνάμων ομάδων K, L. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν η A είναι πεπερασμένη ή $|K : A| = |L : A| = 2$.*

Όπως είχαμε αναφέρει το Θεώρημα των Burns και Cohen δίνει ικανές αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες, ώστε ένα αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο ή μια HNN επέκταση (Howson ομάδων) να έχουν την Howson ιδιότητα. Στα προηγούμενα Θεωρήματα είναι εύκολο να δούμε ότι έχουμε κατηγορίες HNN-επεκτάσεων και ελευθέρων γινομένων με αμάγαλμα όπου η ομάδα G είναι Howson αν και δεν πληρεί τις συνθήκες των Burns και Cohen.

Παράδειγμα 2. Έστω $G = \langle\, t, K \mid t^{-1}Kt = B \,\rangle$, όπου K μία πεπερασμένα παραγόμενη και άπειρη μηδενοδύναμη ομάδα και B μία γνήσια υποομάδα της K. Υποθέτουμε ακόμα ότι η G ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες. Αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της G είναι πολυκυκλική ή πεπερασμένου δείκτη σε αυτήν, τότε η G είναι Howson ομάδα αν και η B δεν είναι Burns υποομάδα της K.

Απόδειξη. Έστω $T = \{1, k_1, k_2, ..., k_i, ...\}$ ένα σύστημα αριστερών αντιπροσώπων της B στην K. Ας υποθέσουμε ότι η B είναι Burns υποομάδα της K. Τότε αν $b \in B$ στοιχείο απείρου τάξεως και $F \subseteq B$ ένα πεπερασμένο σύνολο, έχουμε

$$\langle\, b \,\rangle(T - \{\, 1 \,\}) \subseteq TF.$$

Δηλαδή υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n, m, στοιχεία $k_i, k_j, k_l \in T$ και $f \in F$ τέτοια ώστε $b^m k_i = k_j f$ και $b^n k_i = k_l f$. Τότε $b^{-m} k_j = b^{-n} k_l \Rightarrow k_j = b^{m-n} k_l \Rightarrow k_l = k_j \Rightarrow b^m = b^n$, ενώ το b είναι στοιχείο απείρου τάξεως. Συνεπώς η B δεν είναι Burns υποομάδα της K. □

Παράδειγμα 3. Έστω $G = K *_A L$, όπου K, L πολυκυκλικές ομάδες και $|K : A| = |L : A| = 2$. Αν η A περιέχει ένα στοιχείο απείρου τάξεως, τότε η G είναι Howson αν και η A δεν είναι Burns υποομάδα της K.

Απόδειξη. Κάθε σύστημα αριστερών αντιπροσώπων T της A στην K έχει δύο στοιχεία. Επομένως δεν είναι δυνατόν για οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο F της A να έχουμε

$$A(T - \{\, 1 \,\}) \subseteq TF.$$

Συνεπώς η A δεν είναι Burns υποομάδα της K. □

Η ελεύθερη ομάδα ως ομάδα βάσης σε HNN-επεκτάσεις και αμαλγάματα.

Έστω $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ $(n, m \geq 2)$ δύο πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες ομάδες. Εξετάζουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις όπου μία HNN-επέκταση $G = \langle\, t, \mathbb{F}_n \mid t^{-1}At = B \,\rangle$ ή ένα αμάγαλμα $G = \mathbb{F}_n *_A \mathbb{F}_m$ δεν έχουν την Howson ιδιότητα.

Λήμμα 5.9. *Έστω $G = \mathbb{F}_n *_{\langle\, u^k\, = v^l\, \rangle} \mathbb{F}_m$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων ομάδων $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ $(n, m \geq 2)$. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα όταν $k \geq 2$ και $l \geq 3$ (ή αντιστρόφως).*

Απόδειξη. Έστω ότι $k \geq 2$ και $l \geq 3$. Παρατηρούμε ότι η G περιέχει την ελεύθερη υποομάδα $H = \langle\, (uv)^3, (uv^2)^3 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Επίσης το u^k μετατίθεται με τα στοιχεία $\{(uv)^3, (uv^2)^3\}$ και η $\langle\, u^k \,\rangle$ τέμνει την ελεύθερη ομάδα τετριμμένα, δηλαδή

$$G \geq \langle\, (uv)^3, (uv^2)^3 \,\rangle \times \langle\, u^k \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$$

και συνεπώς η G δεν είναι Howson. □

Λήμμα 5.10. *Έστω $G = \langle\, t, \mathbb{F}_n \mid t^{-1}u^k t = v^l \,\rangle$, όπου $\mathbb{F}_n$ μία πεπεραμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα διαστάσεως $n \geq 2$. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα όταν $k \geq 2$ και $l \geq 3$ (ή αντιστρόφως).*

Απόδειξη. Έστω ότι $k \geq 2$ και $l \geq 3$. Παρατηρούμε ότι η G περιέχει την ελεύθερη υποομάδα $H = \langle\, (t^{-1}utv)^3, (t^{-1}utv^2)^3 \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2$. Επίσης το v^l μετατίθεται με τα στοιχεία $\{(t^{-1}utv)^3, (t^{-1}utv^2)^3\}$ και η $\langle\, v^l \,\rangle$ τέμνει την ελεύθερη ομάδα τετριμμένα, δηλαδή

$$G \geq \langle\, (t^{-1}utv)^3, (t^{-1}utv^2)^3 \,\rangle \times \langle\, v^l \,\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$$

και συνεπώς η G δεν είναι Howson. □

Έστω $G = \langle\, t, \mathbb{F}_n \mid t^{-1}\mathbb{F}_n t = \mathbb{F}_n \,\rangle$, τότε η G είναι επέκταση μίας ελεύθερης ομάδας διάστασης $n \geq 2$, διαμέσου της άπειρης κυκλικής ομάδας $\langle\, t \,\rangle$. Επομένως, από το Θεώρημα 4.2, η G δεν είναι Howson. Γενικότερα από το Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι, αν η H είναι γνήσια υποομάδα της $\mathbb{F}_n$ $(n \geq 2)$, τότε η $G = \langle\, t, \mathbb{F}_n \mid t^{-1}\mathbb{F}_n t = H \,\rangle$ δεν είναι Howson.

Λήμμα 5.11. *Έστω $G = \mathbb{F}_n *_A \mathbb{F}_m$ το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων ομάδων $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ $(n, m \geq 2)$. Τότε η G δεν έχει την Howson ιδιότητα όταν $|\mathbb{F}_n : A| = |\mathbb{F}_m : A| = 2$.*

Απόδειξη. Έστω $\{\, 1,\, k \,\}$ και $\{\, 1,\, l \,\}$ τα συστήματα αριστερών αντιπροσώπων για την A στις $\mathbb{F}_n$ και $\mathbb{F}_m$ αντιστοίχως. Τότε παρατηρούμε ότι η A είναι ελεύθερη ομάδα διάστασης $2n - 1$ (από το Θεώρημα 2.1). Τώρα η G περιέχει την υποομάδα $M = \langle\, kl \,\rangle \cdot A$, η οποία είναι επέκταση μίας ελεύθερης ομάδας διάστασης $2n - 1$, διαμέσου της άπειρης κυκλικής ομάδας $\langle\, kl \,\rangle$. Επομένως, από το Θεώρημα 4.2, η G δεν είναι Howson. □

Πρόταση 6.1. *Έστω*

$$G = \langle\, t,\, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1t \,=\, {k_1}^{a_1}{k_2}^{b_1},\, t^{-1}k_2t \,=\, {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2},\, k_1\cdot k_2 \,=\, k_2\cdot k_1 \,\rangle$$

όπου $B = t^{-1}Kt$ *μία γνήσια υποομάδα της* $K = \langle\, k_1 \,\rangle \times \langle\, k_2 \,\rangle$ *και* $a_i,\, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = \{\,1,\, 2\,\}$. *Επειδή η υποομάδα* B *είναι μία γνήσια υποομάδα της* K *μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $k_1 \notin B$.

Έστω $l = \frac{|b_1|}{\mu\kappa\delta(b_1,b_2)}$, *τότε η υποομάδα* $H = \langle\, t, k_1 \,\rangle$ *είναι πεπερασμένου δείκτη στην* G *αν και μόνο αν είτε* $l = 1$ *ή υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $j \in \{\,1,\, 2,\, ...,\, l-1\,\}$ *υπάρχει* $r_j \leq n$, *τέτοιο ώστε* $l \mid jb_2^{r_j} - j$.

Απόδειξη. Από την σχέση $t^{-1}k_1t = {k_1}^{a_1}{k_2}^{b_1}$ έχουμε ότι $k_2^{b_1} \in H$. Επομένως, επειδή $b_2\cdot l = \mid b_1 \mid \cdot \frac{b_2}{\mu\kappa\delta(b_1,b_2)}$ και εξ' αιτίας της σχέσης $t^{-1}k_2t = {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2}$, προκύπτει ότι $k_2^l = t({k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2})^l t^{-1} \in H$ όπου l είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος με αυτήν την ιδιότητα.

Άρα όλα τα αριστερά σύμπλοκα της H στην G είναι τα εξής :

$$k_2H,\, {k_2}^2H,\, ...,\, {k_2}^{l-1}H$$
$$tk_2H,\, t{k_2}^2H,\, ...,\, t{k_2}^{l-1}H$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$t^nk_2H,\, t^n{k_2}^2H,\, ...,\, t^n{k_2}^{l-1}H$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Υποθέτουμε ότι η υποομάδα H είναι πεπερασμένου δείκτη στην G, τότε στον παραπάνω πίνακα σε κάθε στήλη j, όπου $j \in \{\,1,\, 2,\, ...,\, l-1\,\}$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο σύμπλοκα $t^r{k_2}^jH$ και $t^s{k_2}^jH$ τα οποία είναι ίσα για $r \neq s$, αυτό σημαίνει ότι $t^{r-s}k_2^jH = k_2^jH$. Άρα ${k_2}^{jb_2{}^{r-s}-j} \in H$ το οποίο συνεπάγεται ότι $l \mid jb_2^{r-s} - j$. Αντιστρόφως, αν για κάθε $j \in \{\,1,\, 2,\, ...,\, l-1\,\}$ υπάρχουν $r_j \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $l \mid jb_2^{r_j} - j$, τότε $t^{r_j}k_2^jH = k_2^jH$. Συνεπώς σε κάθε στήλη υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος σύμπλοκα και η υποομάδα H είναι πεπερασμένου δείκτη στην G. $\square$

Παρατηρήσεις. Έστω

$$G \,=\, \langle\, t,\, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1t \,=\, k_2,\, t^{-1}k_2t \,=\, {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2},\ k_1\cdot k_2 \,=\, k_2\cdot k_1 \,\rangle\,.$$

Ο ισομορφισμός φ που επάγεται από το t ορίζεται μέσω του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ και οι δυνάμεις του φ μέσω αυτών του πίνακα A. Έστω $c_0 = 0,\, c_1 = 1,\, c_2 = a_2,\, c_3 = b_2$. Αν για κάθε $m \geq 1$ ισχύει $A^m = \begin{pmatrix} c_{2m-2} & c_{2m-1} \\ c_{2m} & c_{2m+1} \end{pmatrix}$, τότε

$A^{m+1} = \begin{pmatrix} c_{2(m+1)-2} & c_{2(m+1)-1} \\ c_{2(m+1)} & c_{2(m+1)+1} \end{pmatrix} = A^m\cdot A =$
$\begin{pmatrix} c_{2m-2} & c_{2m-1} \\ c_{2m} & c_{2m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2c_{2m-1} & b_2c_{2m-1} + c_{2m-2} \\ a_2c_{2m+1} & b_2c_{2m+1} + c_{2m} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} c_{2m} & c_{2m+1} \\ a_2c_{2m+1} & b_2c_{2m+1} + c_{2m} \end{pmatrix}.$

Επομένως για την ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι

$$c_{2(m+1)-2} \,=\, a_2c_{2m-1}$$

$$\begin{aligned} c_{2(m+1)-1} &= c_{2m-2} + b_2 c_{2m-1} \\ c_{2(m+1)} &= a_2 c_{2m+1} \\ c_{2(m+1)+1} &= c_{2m} + b_2 c_{2m+1} \end{aligned}$$

για κάθε $m \geq 1$.

Πρόταση 6.2. *Έστω*

$$G = \langle t,\, k_1,\; k_2 \mid t^{-1}k_1 t \,=\, k_2,\, t^{-1}k_2 t \,=\, {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2},\; k_1 \cdot k_2 \,=\, k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

όπου $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ και $\mid a_2 \mid > 1$. Τότε η G ικανοποιεί την συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2 αν και μόνο αν $c_{2m+1} \neq 0$ για κάθε $m \geq 1$ και, είτε $a_2 < -(\frac{b_2}{2})^2$ ή το $b_2^2 + 4a_2$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η G ικανοποιεί την συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2. Αν $c_{2m+1} = 0$ για κάποιο $m \geq 1$, τότε για τον πίνακα A έχουμε ότι $A^{m+1} = \begin{pmatrix} c_{2m} & 0 \\ 0 & c_{2m} \end{pmatrix}$. Έστω $k' = {k_1}^r {k_2}^s$ ένα μη τετριμμένο στοιχείο της K. Για την υποομάδα $H = \langle t^{m+1},\, k' \rangle$ έχουμε ότι

$$H = \langle t^{m+1},\, k' \mid t^{-(m+1)} {k_1}^r {k_2}^s t^{m+1} \,=\, ({k_1}^r {k_2}^s)^{c_{2m}} \rangle.$$

Επειδή $\mid c_{2m} \mid \neq 1$ ($\mid a_2 \mid \neq 1$), έχουμε ότι η ομάδα H δεν είναι πολυκυκλική. Τότε έχουμε ότι $H \cap \langle k_i \rangle = 1$ για κάποιο από τα $i = 1,\, 2$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την συνθήκη (α). Επομένως ισχύει ότι $c_{2m+1} \neq 0$ για κάθε $m \geq 1$.

Τώρα επειδή

$$t^{-m} {k_1}^r {k_2}^s t^m = {k_1}^{rc_{2m-2}+sa_2c_{2m-1}} {k_2}^{rc_{2m-1}+s(b_2c_{2m-1}+c_{2m-2})} \in \langle t^m, {k_1}^r {k_2}^s \rangle$$

είναι εύκολο να δούμε ότι

$${k_1}^{c_{2m-1}(s^2a_2 - rsb_2 - r^2)} \quad , \quad {k_2}^{c_{2m-1}(r^2+rsb_2-s^2a_2)} \in \langle t^m, {k_1}^r {k_2}^s \rangle$$

όπου $c_{2m-1} \neq 0$.

Αν υπάρχουν ακέραιοι r και s τέτοιοι ώστε $r^2 + rsb_2 - s^2 a_2 = 0$ τότε η υποομάδα $\langle t, {k_1}^r {k_2}^s \mid t^{-1}({k_1}^r {k_2}^s)^r t = ({k_1}^r {k_2}^s)^{sa_2} \rangle$ δεν είναι πολυκυκλική και η τομή της με την υποομάδα $\langle k_i \rangle$ είναι τετριμμένη, για κάθε $i = 1,\, 2$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι $r^2 + rsb_2 - s^2 a_2 \neq 0$ για όλους τους ακεραίους r και s. Αυτό σημαίνει (αν η τελευταία σχέση θεωρηθεί ως δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς r) ότι έχουμε είτε την ανισότητα $\Delta(r) = s^2(b_2^2 + 4a_2) < 0$, δηλάδή $a_2 < -(\frac{b_2}{2})^2$ ή (στην περίπτωση όπου $a_2 \geq -(\frac{b_2}{2})^2$) τον περιορισμό $b_2^2 + 4a_2 \neq z^2$ για κάθε ακέραιο z.

Αντιστρόφως, είναι εύκολο να δούμε ότι αν έχουμε $c_{2m+1} \neq 0$ για κάθε $m \geq 1$ και είτε $a_2 < -(\frac{b_2}{2})^2$ ή το $b_2^2 + 4a_2$ δεν είναι τετράγωνο ενός ακεραίου, τότε η συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2 ικανοποιείται. □

Πρόταση 6.3. *Έστω*

$$G = \langle t,\, k_1,\; k_2 \mid t^{-1}k_1 t \,=\, {k_1}^{a_1}{k_2}^{b_1},\, t^{-1}k_2 t \,=\, {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2},\, k_1 \cdot k_2 \,=\, k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

όπου $B = t^{-1}Kt$ μία γνήσια υποομάδα της $K = \langle k_1 \rangle \times \langle k_2 \rangle$ και $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = \{1, 2\}$.
Τότε η G ικανοποιεί την συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2 αν και μόνο αν ο πίνακας $A^n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^n$ δεν έχει ακέραιες ιδιοτιμές για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 0$.

Απόδειξη. Έστω G η HNN-επέκταση της υπόθεσης. Ο ισομορφισμός φ που επάγεται από το t ορίζεται μέσω του πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ και οι δυνάμεις του φ μέσω αυτών του πίνακα A.
Έστω $k' = {k_1}^r {k_2}^s \in K - B$, $k \in K$ αυθαίρετα στοιχεία και $\langle\, t^n, {k_1}^r {k_2}^s \,\rangle$ υποομάδα της G. Επειδή οι ομάδες $\{\ \langle\, t^n, k' \,\rangle\ ,\ k' \in K - B\ \}$ είναι όλες οι δυνατές μη πολυκυκλικές υποομάδες (για κάθε ακέραιο $n \geq 1$) της συνθήκης α) της Πρότασης 5.2 , αυτή θα ισχύει αν και μόνο αν $\langle\, t^n, {k_1}^r {k_2}^s \,\rangle \cap \langle\, k \,\rangle \neq 1$, για κάθε $n \geq 1$. Δηλαδή αν και μόνο αν τα $t^{-n} {k_1}^r {k_2}^s t^n, {k_1}^r k_2^s$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Τώρα επειδή ο πίνακας A είναι 2×2 αυτό θα συμβαίνει όταν ο A^n δεν έχει ακέραιες ιδιοτιμές για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.

$\square$

Πρόταση 6.4. *Έστω*

$$G = \langle\, t,\, k_1,\ k_2 \mid t^{-1} k_1 t\ =\ {k_1}^{a_1} {k_2}^{b_1},\, t^{-1} k_2 t\ =\ {k_1}^{a_2} {k_2}^{b_2},\, k_1 \cdot k_2\ =\ k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

όπου $B\ =\ t^{-1} K t$ *γνήσια υποομάδα της* $K\ =\ \langle\, k_1 \,\rangle \times \langle\, k_2 \,\rangle$ *και* $a_i, b_i \in \mathbb{Z},\ \ i\ = \{\, 1, 2 \,\}$.
Τότε η G *ικανοποιεί την συνθήκη* (α) *της Πρότασης 5.2 αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :*
(1) το $|(a_1 + b_2)^2 - 4 \cdot detA|$ *δεν είναι τετράγωνο ακεραίου και*
(2) $(a_1 + b_2)^2 \neq l \cdot detA$, *για κάθε ακέραιο* l.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.3 αρκεί να εξετάσουμε πότε ο A^n έχει ακέραιες ιδιοτιμές για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Γνωρίζουμε ότι λ είναι ιδιοτομή του πίνακα A αν και μόνο αν η λ^n είναι ιδιοτιμή του A^n.
Τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, είναι το

$$\varphi(\chi) = \chi^2 - (a_1 + b_2)\chi + detA.$$

Αυτό έχει ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4detA}}{2}$$

οι οποίες είναι ακέραιες αν και μόνο αν το $(a_1 + b_2)^2 - 4detA (> 0)$ είναι τέλειο τετράγωνο.
Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $(a_1 + b_2)^2 - 4detA > 0$ και το $(a_1 + b_2)^2 - 4detA$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Εργαζόμαστε επαγωγικά.
Εξετάζουμε αν τα $\lambda_{1,2}^2$ είναι ακέραιοι αριθμοί. Έχουμε

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{2(a_1 + b_2)^2 - 4detA \pm 2(a_1 + b_2)\sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4detA}}{4}.$$

Άρα τα $\lambda_{1,2}^2$ είναι ακέραιοι όταν $(a_1 + b_2) = 0$ ή το $(a_1 + b_2)^2 - 4detA$ είναι τέλειο τετράγωνο.
Για αυθαίρετο n εξετάζουμε αν τα $\lambda_{1,2}^n$ είναι ακέραιοι αριθμοί. Έχουμε

$$\lambda_{1,2}^n = \frac{1}{2^n}(\binom{\mathrm{n}}{0}(a_1 + b_2)^n \pm \binom{\mathrm{n}}{1}(a_1 + b_2)^{n-1}\sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4detA} + \ldots$$

$$+(\ \acute{\eta} \pm\ )\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}}(\sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4detA})^n) =$$

$$= \frac{1}{2^n}(\binom{n}{0}(a_1+b_2)^n + \binom{n}{2}(a_1+b_2)^{n-2}((a_1+b_2)^2 - 4detA) + ...$$

$\pm \binom{n}{1}(a_1+b_2)^{n-1}\sqrt{(a_1+b_2)^2 - 4detA} \pm \binom{n}{3}(a_1+b_2)^{n-3}(\sqrt{(a_1+b_2)^2 - 4detA})^3 \pm ...).$

Θέτουμε

$$\omega = \frac{(a_1+b_2)^2}{detA}.$$

Επομένως τα $\lambda_{1,2}^n$ είναι ακέραιοι όταν μηδενίζεται το

$$P(\omega) = \frac{1}{detA^{[\frac{n-1}{2}]}}(\binom{n}{1}(a_1+b_2)^{n-1} + \binom{n}{3}(a_1+b_2)^{n-3}((a_1+b_2)^2 - 4detA) + ...).$$

Τώρα για τις δυνατές ρητές ρίζες $\rho = \frac{p}{q}$ του $P(\omega)$ θα ισχύει ότι το p διαιρεί τον σταθερό όρο και το q διαιρεί τον συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου.

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

(α) Αν $n = 2k$ τότε έχουμε ότι

$$P(\omega) = (a_1+b_2)\cdot(\binom{n}{1}\omega^{k-1} + \binom{n}{3}(\omega^{k-1} - 4\omega^{k-2}) + ... + \binom{n}{n-1}(\omega^{k-1} - ... + (-4)^{k-1}).$$

Άρα στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε για σταθερό όρο το $n \cdot (-4)^{k-1}$ και για συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου το άθροισμα

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1} =$$

$$(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}) + (\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}) + ... + (\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}) = 2^{n-1} = 2\cdot 4^{k-1}.$$

Άρα οι πιθανές ρίζες του $P(\omega)$ είναι οι διαιρέτες του k, δηλαδή τα $\lambda_{1,2}^n$ είναι πιθανώς ακέραιοι μόνο όταν $(a_1+b_2)^2 = l \cdot detA$ όπου l διαιρέτης του k.

(β) Αν $n = 2k+1$ τότε έχουμε ότι

$$P(\omega) = \binom{n}{1}\omega^k + \binom{n}{3}(\omega^k - 4\omega^{k-1}) + ... + (\omega^k - ... + (-4)^k).$$

Άρα στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε για σταθερό όρο το $(-4)^k$ και για συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου το άθροισμα

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} = (\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + ... + \binom{n-1}{n-2}) + 1 = (2^{n-1} - 1) + 1 = 4^k.$$

Άρα οι πιθανές ρίζες του $P(\omega)$ είναι οι διαιρέτες του 1, δηλαδή τα $\lambda_{1,2}^n$ είναι πιθανώς ακέραιοι μόνο όταν $(a_1+b_2)^2 = \pm detA$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι αν $(a_1+b_2)^2 - 4detA > 0$ και το $(a_1+b_2)^2 - 4detA$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο:

τα $\lambda_{1,2}^n$ δεν είναι ακέραιοι για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ όταν $(a_1+b_2)^2 \neq l \cdot detA$, για κάθε ακέραιο l.

Τώρα υποθέτουμε ότι $(a_1+b_2)^2 - 4detA < 0$. Εργαζόμαστε ανάλογα διακρίνοντας δύο περιπτώσεις. Αν το $|(a_1+b_2)^2 - 4detA|$ είναι τέλειο τετράγωνο προκύπτει μιγάδικος αριθμός, ο οποίος είναι ακέραιος αν και μόνο αν το φανταστικό του μέρος είναι 0. Επίσης αν το το $|(a_1+b_2)^2 - 4detA|$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο λαμβάνουμε το ανάλογο (με τα παραπάνω) αποτέλεσμα. Πάντως και οι δύο περιπτώσεις ανάγονται στο προηγούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Πόρισμα 6.1. *Έστω*

$$G = \langle\, t,\, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1t \,=\, {k_1}^{a_1}{k_2}^{b_1},\ t^{-1}k_2t \,=\, {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2},\ k_1 \cdot k_2 \,=\, k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

όπου $B \;=\; t^{-1}Kt$ *μία γνήσια υποομάδα της* $K \;=\; \langle\, k_1 \,\rangle \times \langle\, k_2 \,\rangle$ *και* $a_i,\, b_i \,\in\, \mathbb{Z}$, $i \,=\, \{\, 1,\, 2 \,\}$. *Έστω* $k_1 \,\notin\, B$ *και* $l \,=\, \frac{|b_1|}{\mu\kappa\delta(b_1,b_2)}$.
Τότε η G *είναι Howson αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες*
(α) *το* $|(a_1+b_2)^2 - 4\cdot detA|$ *δεν είναι τετράγωνο ακεραίου και* $(a_1+b_2)^2 \neq m\cdot detA$, *για κάθε ακέραιο* m.
(β) $l \,=\, 1$ *ή υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $j \in \{\, 1,\, 2,\, ...,\, l-1 \,\}$ *υπάρχει* $r_j \,\leq\, n$, *τέτοιο ώστε* $l \mid jb_2^{r_j} - j$.

Πρόταση 6.5. *Έστω*

$$G = \langle\, t, \langle\, k_1 \,\rangle \times \langle\, k_2 \,\rangle ... \times \langle\, k_n \,\rangle \mid t^{-1}k_it = \,{k_1}^{a_{i1}}{k_2}^{a_{i2}}...{k_n}^{a_{in}} \quad, a_{ij} \in \mathbb{Z} \quad, 1 \leq i, j \leq n \,\rangle$$

όπου $B \,=\, t^{-1}Kt$ *μία γνήσια υποομάδα της* $K \,=\, \langle\, k_1 \,\rangle \times \langle\, k_2 \,\rangle ... \times \langle\, k_n \,\rangle$.
Τότε αν η G *ικανοποιεί την συνθήκη* (α) *της Πρότασης 5.2 τότε για κάθε θετικό ακέραιο* $m \geq 0$ *ο πίνακας*

$$A^m \,=\, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}^m$$

δεν είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη. Έστω G η HNN-επέκταση της υπόθεσης. Ο ισομορφισμός φ που επάγεται από το t ορίζεται μέσω του πίνακα A και οι δυνάμεις του φ μέσω αυτών του πίνακα. Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2. Έστω ότι για κάποιο $m \geq 1$ ο πίνακας A^m είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$. Επειδή η K είναι ελεύθερη αβελιανή, υπάρχει μία βάση $\{k_1, k_2, ..., k_l, k_{l+1}, ..., k_n\}$ της K, τέτοια ώστε ο περιορισμός του φ στην υποομάδα $H_1 = \langle\, k_1 \,\rangle \times \langle\, k_2 \,\rangle ... \times \langle\, k_n \,\rangle$ $(l < n)$ είναι ένας ενδομορφισμός (δηλαδή η H_1 είναι φ-αναλλοίωτη). Αν υπάρχει $k_j \in K - B$, όπου $1 \leq j \leq l$, τότε $\langle\, t^m, k_j \,\rangle\ \cap \langle\, k_{l+1} \,\rangle = 1$ για την μη πολυκυκλική υποομάδα $\langle\, t^m, k_j \,\rangle$ της G, το οποίο είναι άτοπο. Διαφορετικά ο περιορισμός της φ στην υποομάδα H_1 είναι ένας αυτομορφισμός. Τότε υπάρχει $k_j \in K - B$, όπου $l+1 \leq j \leq n$, τέτοιο ώστε $\langle\, t^m, k_j \,\rangle\ \cap \langle\, k_1 \,\rangle = 1$, το οποίο είναι πάλι άτοπο.
Έστω ότι δεν ισχύει η συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2. Τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}^*$, $k' \in K - B$ και $k \in K$ τέτοια ώστε $\langle\, t^m, k' \,\rangle \cap \langle\, k \,\rangle = 1$, δηλαδή $rank(\langle\, t^m, k' \,\rangle \cap K) \,\leq n-1$, άρα ο πίνακας A^m είναι της μορφής $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$.

□

Παράδειγμα 4. Έστω

$$G \,=\, \langle\, t, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1t \,=\, {k_1}^{a_1}{k_2}^{b_1}, t^{-1}k_2t = {k_1}^{a_2}{k_2}^{b_2},\ k_1 \cdot k_2 \,=\, k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

όπου $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $\quad i \,=\, 1,\, 2$. Αν $a_1 + a_2 \,=\, b_1 + b_2 \,=\, l$ με $|l| \geq 2$, τότε η G δεν είναι Howson.

Απόδειξη. Για την μη πολυκυκλική υποομάδα $H \,=\, \langle\, t,\, k_1k_2 \mid t^{-1}k_1k_2t \,=\, (k_1k_2)^l \,\rangle$ ισχύει ότι $H \cap \langle\, k_1 \,\rangle \,=\, 1$. Άρα το απότέλεσμα έπεται από την Πρόταση 5.2. □

Παράδειγμα 5. Έστω

$$G = \langle\, t, \langle\, k_1 \,\rangle \times ... \times \langle\, k_n \,\rangle \mid t^{-1}{k_i}^{l_i} t = {k_j}^{r_j} \quad , i \neq j \quad , 1 \leq i, j \leq m \leq n \,\rangle$$

όπου l_i, $r_j \in \mathbb{Z}$. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν $m = n$ και $|l_i| = |r_j| = 1$ για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$.

Απόδειξη. Έστω $A = \langle\, {k_1}^{l_1}, ..., {k_m}^{l_m} \,\rangle$ και $B = \langle\, {k_{j_1}}^{r_1}, ..., {k_{j_m}}^{r_m} \,\rangle$. Αν οι A, B είναι γνήσιες υποομάδες της K τότε η G δεν είναι Howson από την Πρόταση 5.3. Αν $B = K$ και $A \neq K$ τότε $m = n$ και υπάρχει $|l_i| > 1$, για κάποιο $i \in \{1, ..., n\}$. Παρατηρούμε ότι η μη πολυκυκλική υποομάδα $\langle\, t^s, k_i \mid t^s k_i t^{-s} = {k_i}^{l_i q} \,\rangle$ (όπου $s \leq n$ και $q \in \mathbb{Z}$) έχει τετριμμένη τομή με την $\langle\, k_j \,\rangle$ για κάθε $j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\}$. Άρα η G είναι Howson από την Πρόταση 5.2. Τελικά η G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν $A = K = B$. □

Ακολουθούν τρία αριθμητικά παραδείγματα

Παράδειγμα 6. Η ομάδα

$$G = \langle\, t, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1 t = {k_1}^{1222}{k_2}^{1254}, t^{-1}k_2 t = {k_1}^{355}{k_2}^{323},\ k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

δεν είναι Howson.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1222 + 355 = 1254 + 323 = 1577$, επομένως εφαρμόζουμε το επιχείρημα του Παραδείγματος 4 □

Παράδειγμα 7. Η ομάδα

$$G = \langle\, t, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1 t = k_1{k_2}^{1821}, t^{-1}k_2 t = {k_1}^2{k_2}^{1214},\ k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

είναι Howson.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ισχύει η συνθήκη α) της Πρότασης 5.2 και για το $k_1 \notin t^{-1}Kt = B$ έχουμε ότι $l = \frac{1821}{\mu\kappa\delta(1821,1214)} = \frac{1821}{607} = 3$ και για κάθε $j = \{1, 2\}$ ισχύει ότι

$$3 \mid 1 \cdot (1214^2 - 1) \quad \kappa\alpha\iota \quad 3 \mid 2 \cdot (1214^2 - 1).$$

Συνεπώς από την Πρόταση 6.1 η ομάδα G είναι Howson. □

Παράδειγμα 8. Η ομάδα

$$G = \langle\, t, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1 t = {k_1}^{330}{k_2}^{1186}, t^{-1}k_2 t = {k_1}^{1714}{k_2}^{1779},\ k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

είναι Howson.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $detA = -1445734$, $(a_1 + b_2)^2 = 4447881$ και άρα από την Πρόταση 6.4 ικανοποιείται η συνθήκη (α) της Πρότασης 5.2. Τώρα για το $k_1 \notin t^{-1}Kt = B$ έχουμε ότι $l = \frac{1186}{\mu\kappa\delta(1186,1779)} = \frac{1186}{593} = 2$ και για $j = \{1\}$ ισχύει ότι

$$2 \;\mid 1 \cdot (1779 - 1).$$

Συνεπώς από το Πόρισμα 6.1 η ομάδα G είναι Howson. □

Άσκηση : Η ομάδα

$$G = \langle\, t, k_1,\ k_2 \mid t^{-1}k_1 t = k_2, t^{-1}k_2 t = {k_1}^{1941}{k_2}^{1940},\ k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 \,\rangle$$

έχει την Howson ιδιότητα ;

7. Ανοιχτα ερωτηματα

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5, αν θέλουμε να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό για τις HNN-επεκτάσεις με ομάδα βάσης μία πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα που έχουν την Howson ιδιότητα, απομένει να απαντηθεί η ακόλουθη ερώτηση :

Ερώτημα 1. Έστω $G = \langle t, K \mid t^{-1}Kt = B \rangle$ μία αύξουσα HNN-επέκταση, όπου K είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα.
(α) Μπορούμε να αποφανθουμε αν η G ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες (βλέπε Προταση 5.4) ;
(β) Αν η G δεν ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες, υπάρχει ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ομάδα G να είναι Howson ;

Επειδή είναι γνωστό ότι οι πεπερασμένα παριστώμενες ομάδες οι οποίες είναι μηδενοδύναμες δια μέσου κυκλικής ομάδας μπορούν να παρασταθούν ως αύξουσες HNN-επεκτάσεις πεπερασμένα παραγόμενων μηδενοδυνάμων ομάδων (βλέπε [13]), αρκεί να απαντήσουμε, στην ισοδύναμη με την 1, παρακάτω ερώτηση :

Ερώτημα 2. Έστω G είναι μία πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα η οποία είναι μηδενοδύναμη δια μέσου κυκλικής ομάδας.
(α) Μπορούμε να αποφανθουμε αν η G ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες ;
(β) Αν η G δεν ικανοποιεί την μεγιστική συνθήκη στις κανονικές υποομάδες, υπάρχει ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ομάδα G να είναι Howson ;

Από την μελέτη μας στην ιδιότητα του Howson γεννιούνται δύο φυσικά ερωτήματα. Μπορούμε να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 σε αμαλγάματα και HNN-επεκτάσεις με ομάδες βάσης πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες ή πολυκυκλικές ομάδες ;

Ερώτημα 3. Έστω A, B πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες ομάδες. Υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες (για τις υποομάδες U και V της A) ώστε :
(α) η ομάδα $G = A *_U B$ να έχει την Howson ιδιότητα ;
(β) η ομάδα $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ να έχει την Howson ιδιότητα ;

Το κρίσιμο σημείο σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι από υπόθεση έχουμε ότι $\zeta A = \zeta B = 1$. Παράλληλα επειδή οι ελεύθερες ομάδες ανήκουν σε μία μεγαλύτερη κατηγορία (την κατηγορία Q) που έχει την Howson ιδιότητα (βλέπε Ορισμό 2.24 και Πόρισμα 4.1) μπορούμε να διατυπώσουμε και το παρακάτω :

Ερώτημα 3α. Έστω A, B ομάδες που ανήκουν στην κατηγορία Q. Υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες (για τις υποομάδες U και V της A) ώστε :
(α) η ομάδα $G = A *_U B$ να έχει την Howson ιδιότητα ;
(β) η ομάδα $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ να έχει την Howson ιδιότητα ;

Τώρα για να απαντήσουμε στα παραπάνω Ερωτήματα, πρώτα θα πρέπει να δώσουμε απάντηση στις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις :

Ερώτημα 4. Έστω $G = \mathbb{F}_n *_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_m$ είναι το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων ομάδων $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ $(n, m \geq 2)$. Πότε η G έχει την Howson ιδιότητα ;

Από το Λήμμα 5.9 και το Πόρισμα 5.5 προκύπτει ότι για να απαντήσουμε στο Ερώτημα 4, αρκεί να απαντήσουμε στο παρακάτω :

Ερώτημα 4′. Έστω $G = \mathbb{F}_n *_{\langle u^2 = v^2 \rangle} \mathbb{F}_m$ είναι το αμαλγαματοποιημένο ελεύθερο γινόμενο των πεπερασμένα παραγόμενων ελευθέρων ομάδων $\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m$ $(n, m \geq 2)$. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα ;

Ερώτημα 5. Έστω $G = \langle\, t, \mathbb{F}_n \mid t^{-1}u^k t = v^l \,\rangle$, όπου $\mathbb{F}_n$ είναι μία πεπεραμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα διαστάσεως $n \geq 2$ και τα u, v είναι απομονωμένα στοιχεία. Πότε η G έχει την Howson ιδιότητα ;

Από το Λήμμα 5.10 και το Θεώρημα 5.3 προκύπτει ότι για να απαντήσουμε στο Ερώτημα 5, αρκεί να απαντήσουμε στο παρακάτω :

Ερώτημα 5′. Έστω $G = \langle\, t, \mathbb{F}_n \mid t^{-1}u^2 t = v^2 \,\rangle$, όπου $\mathbb{F}_n$ είναι μία πεπεραμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα διαστάσεως $n \geq 2$ και τα u, v είναι απομονωμένα στοιχεία. Τότε η G έχει την Howson ιδιότητα ;

Ερώτημα 6. Έστω A, B πολυκυκλικές ομάδες. Υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες (για τις υποομάδες U και V της A) ώστε :
(α) η ομάδα $G = A *_U B$ να έχει την Howson ιδιότητα ;
(β) η ομάδα $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ να έχει την Howson ιδιότητα ;

Η περίπτωση αυτή είναι μία γενίκευση της Πρότασης 5.4 και των Πορισμάτων 5.8 και 5.11.

Επειδή οι κλάσεις των ελευθέρων (ή Q-ομάδων) και των πολυκυκλικών ομάδων καλύπτουν "σχεδόν" όλες τις Howson ομάδες, αν απαντήσουμε στα Ερωτήματα 3 και 6 πιθανώς να μπορέσουμε να δώσουμε και οριστική απάντηση στο παρακάτω :

Ερώτημα 7. Έστω A, B ομάδες που έχουν την ιδιότητα του Howson. Υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες (για τις υποομάδες U και V της A) ώστε :
(α) η ομάδα $G = A *_U B$ να έχει την Howson ιδιότητα ;
(β) η ομάδα $G = \langle A, t | t^{-1}Ut = V \rangle$ να έχει την Howson ιδιότητα ;

Επειδή η κλάση Q περιέχεται στην κλάση των υπερβολικών ομάδων, παραθέτουμε κάποιες ενδιαφέρουσες εικασίες από σχετικά άρθρα.

Εικασία 1. [Swarup, [61]] Μία πεπερασμένα παριστώμενη υποομάδα K μίας υπερβολικής ομάδας G δεν είναι οιωνεί-κυρτή στην G αν και μόνο αν είναι απείρου δείκτη στην εικονική της κεντροποιούσα

$$N_K = \{g \in G \mid |K : K \cap gKg^{-1}| < \infty, |gKg^{-1} : K \cap gKg^{-1}| < \infty\}.$$

Εικασία 2. [Kapovich, [32]] Μία ελευθέρας στρέψεως υπερβολική ομάδα G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν ανήκει στην κατηγορία Q.

Εικασία 3. [Kapovich, [33]] Μία υπερβολική ομάδα μίας σχέσης (one-relator) G έχει την Howson ιδιότητα αν και μόνο αν ανήκει στην κατηγορία Q.

Αναφορές

[1] Ηλίας Αργυρόπουλος, Παναγιώτης Βλάμος, Γεώργιος Κατσούλης, Στυλιανός Μαρκάτης και Πολυχρόνης Σιδέρης, *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Ανάδοχος : Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα (2001), 1-352.

[2] Δημήτριος Βάρσος, *Σημειώσεις Άλγεβρας I*(Μεταπτυχιακό Μάθημα), χειμερικό εξάμηνο, Αθήνα (2002-2003).

[3] Παναγιώτης Παπάζογλου, *Σημειώσεις Αλγεβρικής Τοπολογίας*(Μεταπτυχιακό Μάθημα), εαρινό εξάμηνο, Αθήνα (2004).

[4] Μαρία Τσετσέκου, *Μελέτη Υπερβολικών Ομάδων*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών, Σάμος (2006), 1-118.

[5] Juan M. Alonso, Thomas Brady, Daryl Cooper, Vincent Ferlini, Martin Lustig, Michael L. Mihalik, Michael Shapiro and Hamish Short, *Notes on hyperbolic groups* [Group theory from a geometric viewpoint], Proc. ICTP. Trieste, World Scientific, Singapore (1991), 3-63.

[6] James W. Anderson, *On The Finitely Generated Intersection Property For Kleinian Groups*, Complex Variables Theory Appl. **17** (1991), no. 1-2, 111-112.

[7] Stylianos Andreadakis, Evangelos Raptis and Dimitrios Varsos, *A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated abelian groups*, Arch. Math. **50** (1988), 495-501.

[8] Yago *Antolín* Pichel, *Dicks' simplification of Mineyev' s proof of the Strengthened Hanna Neumann Conjecture*, Recent advances in Geometric Group Theory, Workshop in the University of Southampton, UK June 29th-July 1st, 2011.

[9] Benjamin Baumslag, *Intersections of finitely generated subgroups in free products*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 673-679.

[10] Gilbert Baumslag, *Lecture notes on nilpotent groups*, CBMS Regional Conference, American Mathematical Society (1971), 1-73.

[11] Gilbert Baumslag, *Some Reflections on Finitely Generated Metabelian Groups*, Contemp. Math. **109** (1990), 1-9.

[12] Vladimir N. Bezverkhnii, *On the intersection of subgroups in HNN groups*(Russian), Fundam. Prikl. Mat. **4** (No 1) (1998), 199-222.

[13] R. Bieri and R. Strebel, *Almost finitely presented soluble groups*, Comm. Math. Helv. **53** (1978), 258-278.

[14] Oleg Bogopolski, *Introduction to Group Theory*, European Mathematical Society (2008) [Originallly published by Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk (2002)], 1-177.

[15] Robert G. Burns, *On the intersection of finitely generated subgroups of a free group*, Math. Z. **119** (1971), 121-130.

[16] Robert G. Burns, *On finitely generated subgroups of an amalgamated product of two subgroups*, Tsans. Amer. Math. Soc. **169** (1972), 293-306.

[17] Robert G. Burns, *Finitely generated subgroups of HNN groups*, Canad. J. Math. **25** (1973), 1103-1112.

[18] Robert G. Burns and Andrew M. Brunner, *Two remarks on the group property of Howson*, Algebra i Logika **18** (No. 5) (1979), 513-522.

[19] Daniel E. Cohen, *Subgroups of HNN groups*, J. Austral. Math. Soc. **17** (1974), 394-405.

[20] Daniel E. Cohen, *Finitely generated subgroups of amalgamated free products and HNN groups*, J. Austral. Math. Soc. **22** (Series A) (1976), 274-281.

[21] John Cossey, Ian M. S. Dey, Stephen Meskin, *Subgroups of knot groups*, Math. Z. **121** (1971), 99-103.

[22] François Dahmani, *Combination of convergence groups*, Geom. and Topol. **7** (2003), 933-963.

[23] Warren Dicks, *Groups, Trees and Projective Modules*, Springer-Verlag (1980), 1-126.

[24] Warren Dicks, *Two-page (05.06.2012) reworking of the one-page (17.05.2011) email from Warren Dicks to Igor Mineyev simplifying the latter's brilliant, Hilbert-module theoretic, twenty-page (07.05.2011) proof of the strengthened Hanna Neumann conjecture.*, mat.uab.es/ dicks/pub.html.

[25] Warren Dicks, *Joel Friedman's proof of the strengthened Hanna Neumann conjecture*, preprint, 23 October 2012, 13 pages.

[26] Etienne Ghys and Pierre de la Harpe (Editors), *Sur les Groupes Hyperboliques d' après Mikhael Gromov*(French), *Birkhäuser* Boston (1990), 1-285.

[27] Leon Greenberg, *Discrete groups of motions*, Canad. J. Math. **12**, (1960), 415-426.

[28] Mikhael Gromov, *Hyperbolic Groups*[Essays in group theory],(ed. S. M. Gersten), MSRI Publ. **8**, Springer,(1987), 75-263.

[29] Pierre de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago Lectures in Mathematics, (2000), 1-310.

[30] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002), 1-544.

[31] Albert G. Howson, *On the intersection of finitely generated free groups*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 428-434.

[32] Ilya Kapovich, *Amalgamated products and the Howson property*, Canad. J. Math. **40** (No 3) (1997), 330-340.

[33] Ilya Kapovich, *Howson property and one-relator groups*, Comm. in Algebra **27** (No 3) (1999), 1057-1072.

[34] Ilya Kapovich, *The subgroup properties of fully residually free groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (no. 1) (2002), 335-362; and an ERRATUM , Trans. Amer. Math. Soc. **355** (no. 3) (2003), 1295-1296.

[35] Abraham Karrass and Donald Solitar, *On the failure of the Howson property for a group with a single defining relator*, Math. Z. **108** (1969), 235-236.

[36] Abraham Karrass and Donald Solitar, *The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **150** (1970), 227-255.

[37] Abraham Karrass and Donald Solitar, *Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation*, Canad. J. Math. **23** (1971), 627-643.

[38] Olga G. Kharlampovich, Alexei G. Myasnikov, Vladimir N. Remeslennikov and Denis E. Serbin, *Subgroups of fully residually free groups : algorithmic problems*, Contemp. Math. **360** (2004), 63-101.

[39] Alexander S. Kirkinskii, *Intersections of finitely generated subgroups in metabelian groups*, Algebra i Logika **20** (No. 1) (1981), 37-54.

[40] Patrizia Longobardi and Mercede Maj, *Finitely generated subgroups of some solvable groups* [Sui sottogruppi finitamente generabili di alcuni gruppi risolubili(Italian)], Ann. Mat. Pura Appl. (4) **143** (1986), 373-383.

[41] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag (1977), 1-339.

[42] Igor Mineyev, *Submultiplicativity and the Hanna Neumann Conjecture*, Ann. of Math. **175** (2012), 393-414.

[43] Igor Mineyev, *Groups, graphs, and the Hanna Neumann Conjecture*, J. Topol. Anal. **4** (2012), no. 1, 1-12.

[44] Igor Mineyev, *The Hanna Neumann Conjecture*, UIUC, math.columbia.edu/ walterfest/ abstracts/ Mineyev-Walterfest.pdf (2011), 1-23.

[45] David I. Moldavanskii, *The intersection of finitely generated subgroups*, (Russian) Sibirsk. Math. Zh. **9** (1968), 1422-1426 [English translation in Siberian. Math. J. **9** (1969), 1066-1069)].

[46] David I. Moldavanskii, *On the Howson property of descending HNN-extensions of groups* [Translation from Russian of the paper published in Chebyshevskii sbornik (Publishers of Tula State Pedagogic University), Vol.**11**, issue 3 (35), 2010, 103 - 110], 15 August 2012, 6 pages, arXiv:1208.3075v1.

[47] Alexei G. Myasnikov and Vladimir N. Remeslennikov, *Exponential groups, II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups*, Internat. J. Algebra Comput. **6** (1996), no. 6, 687-711.

[48] Alexei G. Myasnikov, Vladimir N. Remeslennikov and Denis E. Serbin, *Regular Free Length Functions on Lyndon's Free* $\mathbb{Z}[t]$*-group* $F^{\mathbb{Z}[t]}$, Contemp. Math. **378** (2005), 37-77.

[49] Hanna Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups*, Publ. Math. Debrecen **4** (1956), 186-189.

[50] Hanna Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups.Addendum*, Publ. Math. Debrecen **5** (1957), 128.

[51] Walter D. Neumann, *On intersections of finitely generated subgroups of free groups*, Groups-Canberra (1989), 161-170, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1456**, Springer, Berlin, (1990).

[52] Panagiotis Papazoglou, *Notes in Geometric Group Theory* (2011), 1-56.

[53] Panagiotis A. Paramantzoglou, *On the Howson property of HNN-extensions with abelian base group and Amalgamated free products of abelian groups*, Arch. Math. **98** (2012), 115-128.

[54] Panagiotis A. Paramantzoglou, *On the Howson property of HNN-extensions with nilpotent base group and Amalgamated free products of nilpotent groups*, to appear in Comm. in Algebra.

[55] Derek J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, Second Edition (1996), 1-499.

[56] Otto Schreier, *Die Untergruppen der freien Gruppen* , Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. **5** (1927), 161-183.

[57] Zlil Sela, *Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. **93** (2001), 31-105.

[58] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer-Verlag (1980), 1-142 [Title of the French Original Edition : Arbres, Amalgames, SL_2. Astérisque no. **46**, Soc. Math. France, (1977)].

[59] Hamish Short, *Quasiconvexity and a Theorem of Howson's* [Group theory from a geometric viewpoint], Proc. ICTP. Trieste, World Scientific, Singapore (1991), 168-176.

[60] Teruhiko Soma, 3-*manifold groups with the finitely generated intersection property*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 2, 761-769.

[61] Gadde A. Swarup, *Geometric finiteness and rationality*, J. Pure Appl. Algebra **86** (1993), 327-333.