

Προβλήματα στη Modular Θεωρία Αναπαραστάσεων
Αλγεβρικών Ομάδων και Θεωρία Αναλλοίωτων

Γερανιός Χαράλαμπος

Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής
Μαλιάκας Μιχάλης

ΑΘΗΝΑ 2011

Εξεταστική επιτροπή

1. Μιχάλης Μαλιάκας, Καθηγητής (Επιβλέπων)
2. Χρήστος Αθανασιάδης, Καθηγητής
3. Ιωάννης Εμμανουήλ, Αναπλ. Καθηγητής
4. Δημήτρης Βάρσος, Καθηγητής
5. Δημήτρης Δεριζιώτης, Καθηγητής
6. Παναγιώτης Παπάζογλου, Καθηγητής
7. Ολυμπία Ταλέλλη, Καθηγήτρια

Ευχαριστώ πολύ τον Μιχάλη Μαλιάκα για την καθοδήγηση του και την πολύτιμη μαθηματική και όχι μόνο, βοήθεια του. Επίσης τον ευχαριστώ για τη φιλία του.

Ευχαριστώ πολύ τον Steve Donkin που διέυρνε τους μαθηματικούς μου ορίζοντες τον τελευταίο χρόνο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ.κ. Χρήστο Αθανασιάδη και Ιωάννη Εμμανουήλ που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή, καθώς επίσης και τους κ.κ. Δημήτρη Βάρσο, Δημήτρη Δεριζιώτη, Παναγιώτη Παπάζογλου και κ. Ολυμπία Ταλέλλη για την συμμετοχή τους στην επταμελή εξεταστική επιτροπή.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου για την στήριξη της όλα αυτά τα χρόνια, τον φύλακα άγγελο μου Αγγελική για την αγάπη της και όλους τους φίλους μου.

Περιεχόμενα

1	Βασικές Έννοιες	5
1.1	induced πρότυπα.	5
1.2	Χαρακτήρες των G -πρότυπων.	7
1.3	Πολυωνυμικές αναπαραστάσεις της GL_n	8
2	Τα Schur-πρότυπα	9
2.1	Τα Schur-πρότυπα της GL_n	9
2.2	Τα Schur-πρότυπα της Sp_n	13
2.3	Τα Schur-πρότυπα της SO_n	14
3	Η πολλαπλότητα των nullforms.	17
3.1	Η πολλαπλότητα των nullforms, $X(G_1, G_2)$	17
3.2	Ο πυρήνας της απεικόνισης π	20
3.3	Αναλλοιώτες	22
4	G-αναλλοιώτα ιδεώδη της άλγεβρας $A(G_1, G_2)$.	24
4.1	Αναλλοιώτα ιδεώδη.	24
5	Η ανάλυση του γινομένου $M_\lambda M_\tau$	29
5.1	Ο Κανόνας Littlewood-Richardson.	29
5.2	Η ανάλυση του γινομένου $M_\lambda M_\tau$ σε ανάγωγα G -πρότυπα.	35
6	Πρώτα και Πρωταρχικά G-ιδεώδη	38
6.1	Πρώτα G -ιδεώδη	38
6.2	Πρωταρχικά G -ιδεώδη και Πρωταρχικές Αναλύσεις.	39

Εισαγωγή

Στη διατριβή αυτή μελετάμε προβλήματα της Θεωρίας Αναπαραστάσεων των κλασικών αλγεβρικών ομάδων $GL_n(k)$, $Sp_n(k)$ και $SO_n(k)$ υπεράνω ενός άπειρου σώματος k . Συγκεκριμένα, έστω G_1, G_2 ομάδες όπως πριν και k ένα άπειρο σώμα. Θεωρούμε ότι η χαρακτηριστική του k είναι διάφορη του 2 όταν κάποια από τις ομάδες είναι η ειδική ορθογώνια. Έστω $X(G_1, G_2)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα των $n \times m$ πινάκων M πάνω από το k έτσι ώστε

$$M^t J_{G_1} M = 0 \text{ και } M J_{G_2} M^t = 0,$$

όπου J_{G_i} είναι ο πίνακας που ορίζει την ομάδα G_i . Στην περίπτωση που G_i είναι η ομάδα των αντιστρεψίμων πινάκων, θεωρούμε $J_{G_i} = 0$.

Η πολλαπλότητα $X(G_1, G_2)$ συνήθως αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως η πολλαπλότητα των nullforms που αντιστοιχεί στην ομάδα $G_1 \times G_2$. Η ομάδα $G_1 \times G_2$ δρα πάνω στο $X(G_1, G_2)$ ως $(A, B) \cdot M = AMB^{-1}$, όπου $A \in G_1, B \in G_2$ και $M \in X(G_1, G_2)$. Η δράση αυτή επάγει μια δράση στο δακτύλιο συντεταγμένων της $X(G_1, G_2)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $A(G_1, G_2)$. Στην ειδική περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$ έχουμε ότι ο δακτύλιος $A(G_1, G_2)$ ταυτίζεται με τον πολυωνυμικό δακτύλιο πάνω σε nm μεταβλητές. Στα παρακάτω, θεωρούμε τα $G = G_1 \times G_2$ -αναλλοίωτα ιδεώδη του δακτυλίου $A(G_1, G_2)$ και δίνουμε μια διάσπαση των ιδεωδών αυτών σε ανάγωγα G -πρότυπα, όταν k είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Η περιγραφή αυτή είναι ενιαία και δεν εξαρτάται από τις ομάδες αλλά από τις τάξεις τους. Ακόμα βρίσκουμε μία διάσπαση του γινομένου δύο αναγώγων προτύπων του δακτυλίου $A(G_1, G_2)$ σε ανάγωγα πρότυπα. Και σε αυτή την περίπτωση η περιγραφή είναι ενιαία. Τέλος χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις λαμβάνουμε πορίσματα για τα πρώτα και τα πρωταρχικά ιδεώδη του $A(G_1, G_2)$. Όλα τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται δημοσιευμένα στην εργασία του συγγραφέα H. Geranios, *On Invariant Ideals associated to Classical Groups*, Journal of Algebra 324, 269-281 (2010). Για την ειδική περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$ και άρα $A(G_1, G_2)$ είναι ο πολυωνυμικός δακτύλιος πάνω σε $n \times m$ μεταβλητές τα ιδεώδη αυτά μελετήθηκαν πρώτα από τους C. DeConcini, D. Eisenbud και C. Procesi στο [2]. Συγκεκριμένα αυτοί περιγράφουν ποια είναι τα G -αναλλοίωτα ιδεώδη και βρίσκουν μια διάσπαση τους σε ανάγωγα

G -πρότυπα. Αργότερα η E. Strickland στο [16] βρίσκει αντίστοιχα αποτελέσματα για την ειδική περίπτωση όπου $G_1 = Sp_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$.

Δίνουμε τώρα μια σύντομη περίληψη των κεφαλαίων της παρούσας διατριβής.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε βασικούς ορισμούς και περιγράφουμε τα θεμελιώδη πορίσματα της θεωρίας αναπαραστάσεων αλγεβρικών ομάδων. Ανάμεσα σε αυτά ορίζουμε τα induced-πρότυπα μιας split και reductive αλγεβρικής ομάδας G , $\text{ind}_B^G(\lambda)$, για $\lambda \in X_+(T)$, dominant weight. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία απόδειξη ότι το σύνολο $\{\text{ind}_B^G(\lambda) | \lambda \in X_+(T)\}$ αποτελεί ένα πλήρες σύνολο μη ισόμορφων αναγώγων προτύπων της G όταν το k είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής 0.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε τα induced-πρότυπα των ομάδων $GL_n(k)$, $Sp_{2n}(k)$ και $SO_{2n+1}(k)$ με γεννήτορες και σχέσεις. Συγκεκριμένα ορίζουμε για κάθε περίπτωση τα Schur-πρότυπα που αντιστοιχούν στις ομάδες αυτές όπως αυτά ορίζονται στα [1], [12], [14] αντίστοιχα και αποδεικνύουμε ότι αποτελούν induced-πρότυπα. Θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής με $\nabla_{G_i}(\lambda)$ το Schur-πρότυπο της ομάδας G που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ .

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε την πολλαπλότητα των nullforms $X(G_1, G_2)$ και τον αντίστοιχο δακτύλιο συντεταγμένων της. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το βασικό θεώρημα ότι ο δακτύλιος $A(G_1, G_2)$ έχει good filtration ως $G_1 \times G_2$ -πρότυπο και άρα στην περίπτωση όπου k είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής 0 έχουμε ότι, αν $G_1 \neq GL_n(k)$

$$A(G_1, G_2) = \sum_{\lambda_1 \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}} \nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda)$$

και για $G_1 = GL_n(k)$

$$A(GL_n(k), G_2) = \sum_{\lambda_1 \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}} L_\lambda(V^*) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda).$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν γνωστό από τους C. DeConcini, D. Eisenbud και C. Procesi για την ειδική περίπτωση της ομάδας $GL_n(k) \times GL_m(k)$. Μία διαφορετική απόδειξη δόθηκε από τους K. Akin, D. A. Buchsbaum και J. Weyman στο [1] λίγο καιρό αργότερα. Η γενική απόδειξη δόθηκε από τον M. Μαλιάκα στο [11].

Σταθεροποιούμε τώρα k ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Έστω M_λ το ανάγωγο πρότυπο του $A(G_1, G_2)$ και I_λ το G -αναλλοίωτο ιδεώδες που παράγεται από το M_λ . Στο τέταρτο κεφάλαιο αποδεικνύουμε το πρώτο αποτέλεσμα μας που είναι η ανάλυση του ιδεώδους I_λ σε ανάγωγα G -πρότυπα. Συγκεκριμένα έχουμε

$$I_\lambda = \sum_{\lambda \subseteq \mu} M_\mu.$$

Η σχέση αυτή επαληθεύεται για κάθε ζεύγος ομάδων $G_1 \times G_2$.

Στη συνέχεια στο πέμπτο κεφάλαιο βρίσκουμε μία διάσπαση του γινομένου δύο αναγώγων προτύπων M_μ και M_τ του δακτυλίου $A(G_1, G_2)$ σε ανάγωγα G -πρότυπα. Το πρόβλημα αυτό τέθηκε από τους C. DeConcini, D. Eisenbud και C. Procesi στο [2] για την ειδική περίπτωση της ομάδας $G = GL_n \times GL_m$ και λύθηκε για την περίπτωση αυτή από την K. Whitehead στη διδακτορική της διατριβή [17]. Στο κεφάλαιο 5 δίνουμε μία απάντηση στο πρόβλημα αυτό για οποιαδήποτε ομάδα $G_1 \times G_2$ όπου G_i μία από τις προηγούμενες κλασικές ομάδες. Η απάντηση είναι ίδια για όλα τα ζεύγη ομάδων και εξαρτάται αποκλειστικά από τις τάξεις τους.

Στο τελευταίο και έκτο κεφάλαιο της διατριβής περιγράφουμε τα πρώτα και τα πρωταρχικά G -ιδεώδη του $A(G_1, G_2)$ χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα θεωρήματα που αποδείξαμε.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τις βασικές έννοιες στη θεωρία αναπαράστασεων αλγεβρικών ομάδων, των induced προτύπων μιας αλγεβρικής ομάδας G πάνω από ένα άπειρο σώμα k . Έπισης θα ορίσουμε την έννοια του χαρακτήρα ενός G -προτύπου. Τέλος θα δούμε ότι στην περίπτωση που το σώμα k έχει χαρακτηριστική μηδέν τα induced πρότυπα αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναγώγων προτύπων για την ομάδα G . Οι ομάδες που θα μας απασχολήσουν στα παρακάτω είναι η ομάδα των $n \times n$ -αντιστρεψίμων πινάκων, GL_n , και δύο υποομάδες της, η συμπλεκτική Sp_n και η ειδική ορθογώνια SO_n . Θα ορίσουμε τις παραπάνω έννοιες ειδικά για τις ομάδες αυτές. Βέβαια όλα τα παρακάτω μπορούν να οριστούν για οποιαδήποτε reductive και split αλγεβρική ομάδα G και να πάρουμε αντίστοιχα πορίσματα με αυτές τις ειδικές περιπτώσεις. Για μια αναλυτική περιγραφή της γενικής θεωρίας ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [8].

1.1 induced πρότυπα.

Έστω $G = GL_n(k)$, η ομάδα των $n \times n$ -αντιστρεψίμων πινάκων πάνω από ένα άπειρο σώμα k . Θεωρούμε $T_n(k) = \{diag(t_1, \dots, t_n) | t_i \neq 0\}$ την υποομάδα των διαγωνίων πινάκων της $GL_n(k)$. Η ομάδα αυτή αποτελεί ένα μέγιστο torus για την $GL_n(k)$. Ορίζουμε $T_{Sp_n}(k) = T_n(k) \cap Sp_n(k)$ και $T_{SO_n}(k) = T_n(k) \cap SO_n(k)$. Συγκεκριμένα, έστω $Sp_{2n}(k)$ η συμπλεκτική ομάδα τάξης n . Τότε $T_{Sp_{2n}}(k) = \{diag(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}) | t_i \neq 0\}$. Για την ειδική ορθογώνια ομάδα τάξης n , $SO_{2n}(k)$, έχουμε $T_{SO_{2n}}(k) = \{diag(t_1, \dots, t_n, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}) | t_i \neq 0\}$, ενώ για την $SO_{2n+1}(k)$ έχουμε ότι $T_{SO_{2n+1}}(k) = \{diag(t_1, \dots, t_n, 1, t_n^{-1}, \dots, t_1^{-1}) | t_i \neq 0\}$.

Με $\epsilon_i : T_n(k) \rightarrow k$ θα συμβολίζουμε την απεικόνιση που απεικονίζει τον διαγώνιο πίνακα $T_n(k)$ στην (i, i) -θέση του. Συμβολίζουμε τις αντίστοιχες απεικονίσεις για τις περιπτώσεις των $Sp_n(k)$ και $SO_n(k)$ επίσης με ϵ_i . Για $G = GL_n(k), Sp_{2n}(k), SO_{2n}(k)$ και $SO_{2n+1}(k)$ η χαρακτηριστική ομάδα $X(T_G) = \{\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \dots + \lambda_n \epsilon_n | \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα τάξης n . Δίνου-

με τώρα μία περιγραφή των συνόλων των root systems Φ και simple roots Δ για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, καθώς και των αντίστοιχων συστημάτων των positive roots Φ^+ και dominant weights $X_+(T)$.

Για τους ορισμούς των συστημάτων αυτών και τις ιδιότητες τους ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [7, Κεφάλαιο 3].

- $GL_n(k)$.
 - $\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j | 1 \leq i \neq j \leq n\}$
 - $\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$
 - $\Phi^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\}$
 - $X_+(T) = \{\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \dots + \lambda_n \epsilon_n | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n\}$
- $Sp_{2n}(k)$.
 - $\Phi = \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2\epsilon_i | 1 \leq i \leq n\}$
 - $\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{2\epsilon_n\}$
 - $\Phi^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2\epsilon_i | 1 \leq i \leq n\}$
 - $X_+(T) = \{\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \dots + \lambda_n \epsilon_n | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$
- $SO_{2n+1}(k)$.
 - $\Phi = \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm \epsilon_i | 1 \leq i \leq n\}$
 - $\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\epsilon_n\}$
 - $\Phi^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\epsilon_i | 1 \leq i \leq n\}$
 - $X_+(T) = \{\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \dots + \lambda_n \epsilon_n | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$
- $SO_{2n}(k)$.
 - $\Phi = \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm \epsilon_i | 1 \leq i \leq n\}$
 - $\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\epsilon_{n-1} + \epsilon_n\}$
 - $\Phi^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\}$
 - $X_+(T) = \{\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \dots + \lambda_n \epsilon_n | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0\}$.

Για κάθε $\lambda \in X(T)$ συμβολίζουμε με k_λ το μονοδιάστατο T -πρότυπο στο οποίο η ομάδα T δρα με weight λ . Θεωρούμε B την Borel υποομάδα της G που αποτελείται από τους κάτω τριγωνικούς πίνακες που περιέχονται στη G . Τότε το k_λ γίνεται ένα B -πρότυπο με την επαγόμενη δράση. Συμβολίζουμε με $\nabla_G(\lambda)$ το induced πρότυπο $\text{ind}_B^G(\lambda) = \{f \in k[G] \mid f(bg) = \lambda(b)f(g), \text{ για κάθε } b \in B \text{ και } g \in G\}$, όπου $k[G]$ είναι ο δακτύλιος συντεταγμένων της G . Για κάθε $\lambda \in X(T)$ το G -πρότυπο $\nabla(\lambda)$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Μάλιστα $\nabla(\lambda) \neq 0$ αν και μόνο αν $\lambda \in X_+(T)$. Το G -socle των προτύπων $\nabla(\lambda)$ είναι απλό G -πρότυπο και το σύνολο $\{\text{soc}\nabla(\lambda), \lambda \in X_+(T)\}$ αποτελεί ένα πλήρες σύνολο αναγώγων και μη ισόμορφων ανα δύο G -προτύπων. Το τελευταίο θεώρημα αποτελεί ένα απο τα βασικότερα θεωρήματα της θεωρίας αναπαραστάσεων. Για όλα τα παραπάνω ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [8, 2.1-2.6].

Έστω τώρα ότι k είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Τότε τα induced-πρότυπα συμπίπτουν με το socle τους. Δηλαδή το σύνολο $\{\nabla(\lambda) \mid \lambda \in X_+(T)\}$ αποτελεί ένα πλήρες σύνολο αναγώγων G -προτύπων μη ισόμορφων ανα δύο. [8, Πορίσμα 5.6 (4)].

Ακόμα κάθε G -πρότυπο M είναι ημιαπλό, δηλαδή γράφεται ως ευθύ άθροισμα αναγώγων προτύπων. [8, Πορίσμα 5.6 (6)].

1.2 Χαρακτήρες των G -προτύπων.

Έστω M ένα G -πρότυπο. Βλέπουμε το M ως T -πρότυπο και έχουμε ότι $M = \bigoplus_{\lambda \in X(T)} M_\lambda$. Δηλαδή το M γράφεται ως ευθύ άθροισμα των weight spaces του. Σε κάθε k_λ αντιστοιχούμε το στοιχείο βάσης του δακτυλίου $\mathbb{Z}[X(T)]$, $e(\lambda)$, και ορίζουμε το formal χαρακτήρα του M ως

$$\text{ch}M = \sum_{\lambda \in X(T)} \dim M_\lambda e(\lambda).$$

Μάλιστα η Weyl ομάδα W που αντιστοιχεί στην ομάδα G δρά πάνω στο σύνολο $X(T)$ και είναι εύκολο να αποδείξει κάποιος ότι για κάθε G -πρότυπο M

$$\text{ch}M \in \mathbb{Z}[X(T)]^W.$$

Για τα αποτελέσματα αυτά ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [8, 1.19].

Πρόταση 1.2.1. *Οι χαρακτήρες των αναγώγων προτύπων $L(\lambda)$ της ομάδας G , $\text{ch}L(\lambda)$, για $\lambda \in X_+(T)$ αποτελούν βάση του δακτυλίου $\mathbb{Z}[X(T)]^W$.*

Απόδειξη. [8, Λήμμα 5.8]. □

1.3 Πολυωνυμικές αναπαραστάσεις της GL_n .

Έστω V ένας k -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μία απεικόνιση $f : GL(V) \rightarrow k$ θα ονομάζεται πολυωνυμική αν είναι περιορισμός μίας πολυωνυμικής απεικόνισης $\tilde{f} \in k[\text{End}(V)]$. Θα ονομάζεται ρητή αν η απεικόνιση $\det^r \cdot f$ είναι πολυωνυμική για κάποιο $r \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.3.1. Μία αναπαράσταση $\rho : GL(V) \rightarrow GL_m$ θα ονομάζεται πολυωνυμική αναπαράσταση αν τα στοιχεία $\rho_{ij}(g)$ του πίνακα $\rho(g)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις της $GL(V)$. Θα ονομάζεται ρητή αν είναι ρητές συναρτήσεις.

Παραδείγματα 1.3.2. 1. Το φυσικό $GL_n(k)$ -πρότυπο E είναι πολυωνυμική αναπαράσταση.

2. Το αντίστροφο της ορίζουσας $(\det)^{-1} : GL_n(k) \rightarrow k$ αποτελεί μια ρητή αναπαράσταση.

Θέλουμε να επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό για τυχαία υποομάδα $G \subset GL(V)$. Μία απεικόνιση $f : G \rightarrow k$ θα ονομάζεται ρητή (αντ. πολυωνυμική) αν είναι περιορισμός μιας ρητής (αντ. πολυωνυμικής) απεικόνισης της $GL(V)$. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε πολυωνυμικές και ρητές αναπαραστάσεις για την ομάδα $G \subset GL(V)$ όπως πριν.

Παρατήρηση 1.3.3. Προφανώς αν $G \subset SL(V)$, τότε όλες οι αναπαραστάσεις της G είναι πολυωνυμικές.

Κεφάλαιο 2

Τα Schur-πρότυπα

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τα induced-πρότυπα της κατηγορίας των πολυωνυμικών αναπαραστάσεων της GL_n με γεννήτορες και σχέσεις και θα βρούμε μία βάση των προτύπων αυτών. Το ίδιο θα κάνουμε στη συνέχεια για τα induced-πρότυπα της συμπλεκτικής ομάδας Sp_{2n} και της ειδικής ορθογώνιας SO_{2n+1} . Για την περιγραφή των προτύπων αυτών θα χρειαστούμε στοιχεία από την πλειογραμμική άλγεβρα, όπως οι εξωτερικές δυνάμεις $\Lambda^q V$ και οι συμμετρικές δυνάμεις $S^q V$. Τον ορισμό της διαγωνοποίησης της εξωτερικής άλγεβρας ΛV και της συμμετρικής άλγεβρας SV . Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [15] για μια αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών.

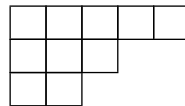
2.1 Τα Schur-πρότυπα της GL_n

Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε με \mathbb{N} το σύνολο των φυσικών αριθμών (μη-αρνητικοί ακέραιοι) και με \mathbb{N}^∞ το σύνολο των ακολουθιών (a_1, a_2, \dots) με $a_i \in \mathbb{N}$ και $a_i \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος i . Αν συμβολίσουμε με \mathbb{N}^p τα p -διανυσματα (a_1, \dots, a_p) , $a_i \in \mathbb{N}$ τότε προφανώς τα στοιχεία αυτά μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία του \mathbb{N}^∞ συμπληρώνοντας τις υπόλοιπες θέσεις με μηδενικά.

Ορισμός 2.1.1. Μία διαμέριση είναι ένα στοιχείο $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$ με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$.

Ονομάζουμε *βάρος της διαμέρισης* λ το άθροισμα των όρων της, $\sum \lambda_i$, και το συμβολίζουμε με $|\lambda|$. Αν $|\lambda| = n$ θα λέμε ότι το λ είναι διαμέριση του n . Τέλος το μέγιστο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων της διαμέρισης λ ονομάζεται *μήκος της* λ και συμβολίζεται με $\ell(\lambda)$.

Ορισμός 2.1.2. Ένα Young διάγραμμα είναι ένα σύνολο από κουτιά της μορφής:



με την ιδιότητα κάθε γραμμή του διαγράμματος να έχει μεγαλύτερο είτε ίσο το πλήθος κουτιά απο την επόμενη.

Παρατηρήσεις: 1. Αν θεωρήσουμε Y ένα *Young* διάγραμμα και αριθμίσουμε με λ_i να είναι το πλήθος των κουτιών που υπάρχουν στην i γραμμή του Y , τότε η ακολουθία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ αποτελεί μία διαμέριση βάρους το πλήθος των κουτιών του Y και μήκους το πλήθος των γραμμών του. Επίσης σε κάθε διαμέριση λ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μοναδικά ένα *Young* διάγραμμα αντιστρέφοντας την προηγούμενη διαδικασία.

2. Χρησιμοποιώντας τα *Young* διαγράμματα παρατηρούμε ότι: Έστω λ μία διαμέριση και Y_λ το αντίστοιχο διάγραμμα *Young*. Θεωρούμε το διάγραμμα $Y_{\tilde{\lambda}}$ που έχει σειρές τις στήλες του Y_λ . Τότε το $Y_{\tilde{\lambda}}$ είναι ένα νέο *Young* διάγραμμα. Η διαμέριση $\tilde{\lambda}$ που αντιστοιχεί σε αυτό ονομάζεται συζυγής διαμέριση της λ και έχει ίδιο βάρος με τη λ .

Έστω τώρα F ένα ελεύθερο R -προτύπο πεπερασμένης διάστασης, (όπου R μεταθετικός δακτύλιος) και $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{N}^\infty$ θα συμβολίζουμε με:

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda F &\equiv \Lambda^{\lambda_1} F \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_q} F \\ S_\lambda F &\equiv S_{\lambda_1} F \otimes \dots \otimes S_{\lambda_q} F\end{aligned}$$

όπου $\Lambda^{\lambda_i} F, S_{\lambda_i} F$ είναι οι εξωτερικές και οι συμμετρικές δυνάμεις του F αντίστοιχα.

Ορίζουμε τώρα για καθε διαμεριση λ ένα R -ομομορφισμό, $d_\lambda : \Lambda_\lambda F \rightarrow S_{\tilde{\lambda}} F$.

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ μία διαμέριση με $\lambda_1 = t$. Θεωρούμε τον $t \times t$ πίνακα $(a_{ij})_{i,j}$ με $a_{ij} = 1$ αν $1 \leq j \leq \lambda_i$ και $\lambda_i \geq 1$ και $a_{ij} = 0$ διαφορετικά, $\forall i, j \in \{1, \dots, t\}$.

Παράδειγμα 2.1.3. Για $\lambda = (3, 2) \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Για $\{x_1, \dots, x_n\}$, βάση του ελεύθερου R -προτύπου F και $I = a_1 < \dots < a_s$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $\{1, \dots, n\}$, τότε με x_I θα συμβολίζουμε το στοιχείο $x_{a_1} \wedge \dots \wedge x_{a_s} \in \Lambda^s F$. Το σύνολο $\{x_I : I = a_1 < \dots < a_s, a_i \in \{1, \dots, n\}\}$ αποτελεί βάση του $\Lambda^s F$.

Θεωρούμε την διαγωνοποίηση $\Delta_i : \Lambda^{\lambda_i} F \rightarrow F \otimes \dots \otimes F$ του $\Lambda^{\lambda_i} F$ με

$$\Delta_i(x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_{\lambda_i}}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{\lambda_i} \\ \sigma(j_1) < \dots < \sigma(j_{\lambda_i})}} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(j_1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(j_{\lambda_i})},$$

όπου $x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_{\lambda_i}}$ είναι ένα στοιχείο της βάσης του $\Lambda^{\lambda_i} F$ και έστω Δ ο R -ομομορφισμός

$$\Lambda_\lambda F \xrightarrow{\Delta_1 \otimes \cdots \otimes \Delta_k} \Lambda^{a_{11}} F \otimes \cdots \otimes \Lambda^{a_{1\lambda_1}} F \otimes \Lambda^{a_{21}} F \otimes \cdots \otimes \Lambda^{a_{q\lambda_q}} F,$$

αφού $a_{ij} = 0$ ή 1 τότε έχουμε ότι

$$\Lambda^{a_{11}} F \otimes \cdots \otimes \Lambda^{a_{1\lambda_1}} F \otimes \Lambda^{a_{21}} F \otimes \cdots \otimes \Lambda^{a_{q\lambda_q}} F = S_{a_{11}} F \otimes \cdots \otimes S_{a_{1\lambda_1}} F \otimes S_{a_{21}} F \otimes \cdots,$$

Έστω τώρα ο R -ισομορφισμός που μεταθέτει τους όρους του ταυτιστικού γινομένου ως εξής: $\Phi : S_{a_{11}} F \otimes \cdots \otimes S_{a_{1\lambda_1}} F \otimes S_{a_{21}} F \otimes \cdots \otimes S_{a_{q\lambda_q}} F \rightarrow S_{a_{11}} F \otimes S_{a_{21}} F \otimes S_{a_{q1}} F \otimes S_{a_{12}} F \otimes \cdots$. Παρατηρούμε ότι $\sum_{i=1}^q a_{ij} = \tilde{\lambda}_j$ και θεωρούμε τέλος τον R -ομομορφισμό m με

$$S_{a_{11}} F \otimes S_{a_{21}} F \otimes \cdots \otimes S_{a_{qt}} F \xrightarrow{m_1 \otimes \cdots \otimes m_t} S_{\tilde{\lambda}_1} F \otimes \cdots \otimes S_{\tilde{\lambda}_t} F = S_{\tilde{\lambda}},$$

όπου $m_k : F \otimes \cdots \otimes F \rightarrow S_k F, f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \mapsto f_1 \cdots f_k$. Ορίζουμε $d_\lambda = m \circ \Phi \circ \Delta$. Αυτό που κάνουμε δηλαδή είναι να διαγωνοποιούμε ως προς τις γραμμές του *Young* διαγράμματος της λ και να πολλαπλασιάζουμε ως προς τις στήλες.

Παράδειγμα 2.1.4. Για $\lambda = (3, 2)$ έχουμε: $\Lambda_\lambda = \Lambda^3 F \otimes \Lambda^2 F \xrightarrow{\Delta} F^{(1)} \otimes F^{(2)} \otimes F^{(3)} \otimes F^{(4)} \otimes F^{(5)} \xrightarrow{\Phi} F^{(1)} \otimes F^{(4)} \otimes F^{(2)} \otimes F^{(5)} \otimes F^{(3)} \xrightarrow{m} S_2 F \otimes S_2 F \otimes F$.

Ορισμός 2.1.5. Η εικόνα $d_\lambda(\Lambda_\lambda F) \leq S_{\tilde{\lambda}} F$ ονομάζεται *Schur-πρότυπο* του F ως προς τη διαμέριση λ και συμβολίζεται με $L_\lambda F$.

Ορισμός 2.1.6. Έστω S ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, λ διαμέριση και Y_λ το *Young*-διάγραμμα που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ . Ένα *tableau* T σχήματος λ με τιμές στο S είναι μία συμπλήρωση των κουτιών του Y_λ με στοιχεία από το S . Θα συμβολίζουμε με $T(i, j)$ το στοιχείο που βρίσκεται στην i -γραμμή και στη j -στήλη του *tableau* T .

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των *tableaux* σχήματος λ και τιμές στο S με $Tab_\lambda(S)$. Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την βάση του $\Lambda_\lambda F$ μέσω της χρήσης των *tableaux*. Μπορούμε να επιλέξουμε για S τη βάση του F , $S = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ μία βάση του ελεύθερου R -πρότυπου F και $I = a_1 < \cdots < a_s$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $\{1, \dots, n\}$, τότε με x_I θα συμβολίζουμε το στοιχείο $x_{a_1} \wedge \cdots \wedge x_{a_s} \in \Lambda^s F$. Το σύνολο $\{x_I : I = a_1 < \cdots < a_s, a_i \in \{1, \dots, n\}\}$ αποτελεί βάση του $\Lambda^s F$. Έστω λ διαμέριση τότε έχουμε ότι μία βάση του $\Lambda_\lambda F$ είναι το σύνολο $\{x_{I_1} \otimes \cdots \otimes x_{I_q}\}$, όπου I_i γνησίως αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $\{1, \dots, n\}$. Συνεπώς τα στοιχεία $d_\lambda(x_{I_1} \otimes \cdots \otimes x_{I_q})$ παράγουν το $L_\lambda F$.

Έστω $x = x_{I_1} \otimes \cdots \otimes x_{I_q}$ ένα στοιχείο της βάσης του $\Lambda_\lambda F$ τότε το T_x με $T_x(i, j) = x_{a_{i,j}}$ όπου $I_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_{\lambda_i}})$ είναι ένα *tableau*. Για παράδειγμα:

Για $\lambda = (4, 3, 2)$ το αντίστοιχο Young-διάγραμμα έχει τη μορφή $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$ και αν επιλέξουμε $x = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \otimes x_1 \wedge x_2 \wedge x_4 \otimes x_1 \wedge x_4$ τότε το T_x έχει τη μορφή

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Αντίστροφα αν T είναι ένα tableau τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το στοιχείο του $\Lambda_\lambda F$, $x_T = x_{I_1} \otimes \cdots \otimes x_{I_q}$, όπου $x_{I_j} = x_{T(j,1)} \wedge \cdots \wedge x_{T(j,\lambda_j)}$. Βέβαια το στοιχείο αυτό δεν είναι απαραίτητα στοιχείο της βάσης του $\Lambda_\lambda F$, για παράδειγμα το $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ αντιστοιχεί στο μηδέν. Αυτό μας οδηγεί στο να δώσουμε τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 2.1.7. Ένα tableau $T \in \text{tab}_\lambda(S)$ ονομάζεται *row standard* αν τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε γραμμή του T αυξάνουν αυστηρά προς τα δεξιά, δηλαδή για κάθε i ισχύει $T(i, 1) < \cdots < T(i, \lambda_i)$, ενώ *column standard* αν τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη του T αυξάνουν ασθενώς προς τα κάτω, δηλαδή $T(i, j) \leq T(i + 1, j)$. Τέλος το Tableau T θα ονομάζεται *standard* αν ικανοποιεί και τις δύο προηγούμενες συνθήκες, δηλαδή είναι ταυτόχρονα *row* και *column standard*.

Οπότε σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς έχουμε ότι σε κάθε στοιχείο της βάσης του $\Lambda_\lambda F$ αντιστοιχούμε ένα *row standard tableau* και αντίστροφα κάθε *row standard tableau* μας δίνει ένα στοιχείο της βάσης του $\Lambda_\lambda F$. Επομένως η βάση του $\Lambda_\lambda F$ είναι το σύνολο $\{x_T | T \text{ row standard}\}$ και άρα το σύνολο $\{d_\lambda(x_T) | T \text{ row standard}\}$ παράγει το R -πρότυπο $L_\lambda F$.

Θεώρημα 2.1.8. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ μια διαμέριση και F ένα ελεύθερο R -πρότυπο με διατεταγμένη βάση την $\{x_1, \dots, x_n\}$. Τότε το σύνολο $\{d_\lambda(X_T) | T \text{ standard - tableau} \in \text{Tab}_\lambda\{x_1, \dots, x_n\}\}$ αποτελεί βάση του R -πρότυπου $L_\lambda(F)$.

Απόδειξη. [1, Θεώρημα II 2.16.] □

Μεχρι το τέλος του κεφαλαίου σταθεροποιούμε k να είναι ένα άπειρο σώμα. Θεωρούμε $G = GL_n(k)$ την ομάδα των $n \times n$ -αντιστρεψίμων πινάκων. Έστω V το φυσικό $GL_n(k)$ -πρότυπο. Οι διανυσματικοί χώροι $\Lambda^a V$ και $S_\beta V$ είναι πολυωνυμικές αναπαραστάσεις της $GL_n(k)$, με τις προφανείς δράσεις, και φυσικά οι αντίστοιχες απεικονίσεις, διαγωνοποίηση Δ και πολλαπλασιασμός m αποτελούν $GL_n(k)$ -ομομορφισμούς. Συνεπώς η απεικόνιση $d_\lambda : \Lambda_\lambda V \rightarrow S_\lambda V$ είναι G -ομομορφισμός και άρα η εικόνα της $\text{im}(d_\lambda) = L_\lambda V$ αποτελεί G -υποπρότυπο του $S_\lambda V$.

Πρόταση 2.1.9. Έστω λ διαμέριση με $\lambda_1 \leq n$. Το Schur-πρότυπο που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ είναι induced πρότυπο της $GL_n(k)$ και έχουμε τον ισομορφισμό $L_\lambda V \cong \nabla(\lambda^t)$.

όπου $2t \leq \lambda_1, v_1 \in \Lambda^{\lambda_1 - 2t}V, v_i \in \Lambda^{\lambda_i}V (i \neq 1)$.

Εύκολα βλέπουμε (χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που ορίζουν την ομάδα Sp_n) ότι το Z_λ είναι G -υποπρότυπο του $L_\lambda V$.

Ορισμός 2.2.1. Ονομάζουμε το πηλίκο $L_\lambda V/Z_\lambda$, *Schur-πρότυπο της $Sp_n(k)$* που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ .

Πρόταση 2.2.2. Υπάρχει μια ακριβής ακολουθία G -προτύπων

$$0 \rightarrow Z_\lambda \rightarrow L_\lambda V \rightarrow \nabla_G(\lambda^t) \rightarrow 0$$

Απόδειξη. [12, Θεώρημα 2.2(u)]. □

Συνεπώς τα Schur-πρότυπα της $Sp_n(k)$ είναι induced-πρότυπα. Θα περιγράψουμε τώρα μια βάση των προτύπων αυτών όπως αυτή δίνεται στο [12].

Θεωρούμε λ μια διαμέριση με $\lambda_1 \leq n'$ και $L_\lambda V/Z_\lambda$ το αντίστοιχο *Schur-πρότυπο της $Sp_n(k)$* .

Διατάσσουμε την βάση του V ως

$$x_1 < x_{\bar{1}} < \dots < x_n < x_{\bar{n}}.$$

Έστω T ένα *tableau* σχήματος λ με στοιχεία από την βάση του V . Το T θα ονομάζεται *symplectic tableau* αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. Το T είναι *standard* (ως GL_n -*tableau*),
2. Τα στοιχεία της i -στήλης είναι $\geq x_i$, για κάθε i .

Πρόταση 2.2.3. Για λ διαμέριση με $\lambda_1 \leq n'$ τα *symplectic tableaux* σχήματος λ αποτελούν μία βάση του Schur-πρότυπου $L_\lambda V/Z_\lambda$.

Απόδειξη. [13, Θεώρημα 2]. □

Πρόταση 2.2.4. Το σύνολο $\{L_\lambda V/Z_\lambda | \lambda_1 \leq n'\}$ αποτελεί ένα πλήρες σύνολο αναγωγών $Sp_n(\mathbb{C})$ -προτύπων, μη-ισόμορφων ανα δύο.

Απόδειξη. [8, Πρόσμμα 5.6 (4)]. □

2.3 Τα Schur-πρότυπα της SO_n

Έστω $G = SO_n(k)$ η ορθογώνια ομάδα υπεράνω ενός άπειρου σώματος k . Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε τα Schur-πρότυπα για SO_n . Όπως και στην περίπτωση της GL_n μπορούμε να ορίσουμε τα πρότυπα αυτά υπεράνω ενός οποιουδήποτε μεταθετικού δακτυλίου.

Πρόταση 2.3.3. Το σύνολο $\{L_\lambda V/Z_\lambda \mid \lambda_1 \leq n'\}$ αποτελεί ένα πλήρες σύνολο αναγώγων $SO_n(\mathbb{C})$ -προτύπων, μη-ισόμορφων ανά δύο.

Απόδειξη. [8, Πρόρισμα 5.6 (4)]. □

Για την περίπτωση της $G = SO_{2n'}(k)$ δεν είναι γενικά γνωστή η περιγραφή των induced-προτύπων με γεννήτορες και σχέσεις για όλα τα induced πρότυπα που αντιστοιχούν στα *dominant weights*. Στην περίπτωση όμως όπου το λ είναι μια διαμέριση με $\lambda_1 < n'$ η περιγραφή των $\nabla_G(\lambda^t)$ ταυτίζεται με την περίπτωση της περιτής ειδικής ορθογώνιας $SO_{2n'+1}$ αλλάζοντας μόνο το $2n' + 1$ με $2n'$ στην προηγούμενη πρόταση, [14, Πρόρισμα 3.10].

Φυσικά το σύνολο $\{L_\lambda V/Z_\lambda \mid \lambda_1 < n'\}$ αποτελεί ένα σύνολο αναγώγων $SO_n(\mathbb{C})$ -προτύπων (οχι πλήρες).

Κεφάλαιο 3

Η πολλαπλότητα των nullforms.

3.1 Η πολλαπλότητα των nullforms, $X(G_1, G_2)$.

Στο κεφάλαιο αυτο θα ορίσουμε την πολλαπλότητα των nullforms, $X(G_1, G_2)$, όπου G_1 είναι μία από τις κλασσικές αλγεβρικές ομάδες $GL_n(k), Sp_n(k)$ (n άρτιο), $SO_n(k)$ ($n = 2n' + 1$) (και $G_2 = GL_m(k), Sp_m(k), SO_m(k)$ αντίστοιχα) υπεράνω ενός άπειρου σώματος k και μελετάμε τις βασικές ιδιότητες της πολλαπλότητας αυτής.

Έστω G_1, G_2 ομάδες όπως πριν και k ένα άπειρο σώμα. Θεωρούμε ότι η χαρακτηριστική του k είναι διάφορη του 2 όταν κάποια από τις ομάδες είναι η ειδική ορθογώνια. Έστω $X(G_1, G_2)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα των $n \times m$ πινάκων M πάνω από το k έτσι ώστε

$$M^t J_{G_1} M = 0 \text{ και } M J_{G_2} M^t = 0,$$

όπου J_{G_i} είναι ο πίνακας που ορίζει την ομάδα G_i . Στην περίπτωση που G_i είναι η ομάδα των αντιστρεψίμων πινάκων, θεωρούμε $J_{G_i} = 0$.

Η πολλαπλότητα $X(G_1, G_2)$ συνήθως αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως η πολλαπλότητα των nullforms που αντιστοιχεί στην ομάδα $G_1 \times G_2$. Η ομάδα $G_1 \times G_2$ δρα πάνω στο $X(G_1, G_2)$ ως $(A, B) \cdot M = AMB^{-1}$, όπου $A \in G_1, B \in G_2$ και $M \in X(G_1, G_2)$. Η δράση αυτή επάγει μια δράση στο δακτύλιο συντεταγμένων της $X(G_1, G_2)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $A(G_1, G_2)$. Στην ειδική περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$ έχουμε ότι ο δακτύλιος $A(G_1, G_2)$ ταυτίζεται με τον πολυωνυμικό δακτύλιο πάνω σε nm μεταβλητές.

Ορισμός 3.1.1. Έστω G μια αλγεβρική ομάδα. Θα λέμε ότι ένα G -πρότυπο V έχει *good filtration* αν υπάρχει μια ακολουθία υποπροτύπων του V της μορφής

$$0 = V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V_1 \subseteq V_0 = V,$$

έτσι ώστε για κάθε i , $V_i/V_{i+1} \cong \nabla(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in X_+(T)$ ή θ .

Κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι η απόδειξη ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων $A(G_1, G_2)$ έχει *good filtration* ως $G_1 \times G_2$ -πρότυπο.

Για την περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$, $G_2 = GL_m(k)$ η απόδειξη δόθηκε πρώτα απο τους C. DeConcini, D. Eisenbud και C. Procesi στο [2]. Μια διαφορετική απόδειξη δίνεται απο τους K. Akin, D. A. Buchsbaum και J. Weyman στο [1] την οποία περιγράφουμε παρακάτω.

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με $\nabla_G(\lambda)$ το Schur-πρότυπο της ομάδας G που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ . Έχουμε δηλαδή για παράδειγμα ότι $\nabla_{GL_n}(\lambda) \equiv L_\lambda(V)$. Ο συμβολισμός αυτός ίσως προκαλέσει κάποια σύγχυση διότι με το σύμβολο $\nabla(\lambda)$ αναφερόμασταν στο προηγούμενο κεφάλαιο στο induced-πρότυπο που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ και όπως είδαμε στην πρόταση 2.19 το Schur-πρότυπο $L_\lambda(V)$ είναι ισόμορφο με το induced-πρότυπο $\nabla(\lambda^t)$ που αντιστοιχεί στη συζυγή διαμέριση της λ και όχι με αυτό που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ . Το ίδιο και για τις ομάδες Sp_n και SO_n . Χρησιμοποιούμε λοιπόν το παραπάνω σύμβολο καθαρά ως θέμα συμβολισμού έχοντας πάντα στο μυαλό μας ότι δεν σημαίνει ποια το induced-πρότυπο αλλά το Schur-πρότυπο που αντιστοιχεί στη διαμέριση της λ .

Έστω V, W τα φυσικά $GL_n(k), GL_m(k)$ -πρότυπα αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με V^* το δυικό χώρο του V , το οποίο είναι ένα $GL_n(k)$ -πρότυπο. Θεωρούμε $\{x_1, \dots, x_n\}$ μια βάση του V και $\{y_1, \dots, y_m\}$ μια βάση του W . Έστω $M(n, m)$ η πολλαπλότητα των $n \times m$ πινάκων πάνω απο το k . Η ομάδα $GL_n(k) \times GL_m(k)$ δρα στο $M(n, m)$ μέσω της $(A, B) \cdot M = AMB^{-1}$, όπου $A \in GL_n(k), B \in GL_m(k)$ και $M \in M(n, m)$. Η αντίστοιχη άλγεβρα συντεταγμένων είναι η πολυωνυμική άλγεβρα πάνω στις συναρτήσεις c_{ij} , όπου $c_{ij} : M(n, m) \rightarrow k$ απεικονίζει τον πίνακα στην (i, j) συντεταγμένη του, οπότε $k[M(n, m)] = k[c_{ij}]$. Συνεπώς $k[c_{ij}]$ είναι ένα $GL_n(k) \times GL_m(k)$ -πρότυπο το οποίο είναι ισόμορφο με την άλγεβρα $S(V^* \otimes W)$, όπου ο ισομορφισμός περιγράφεται ως προς τη βάση του $V^* \otimes W$, μέσω της απεικόνισης,

$$S(V^* \otimes W) \longrightarrow k[x_{ij}].$$

$$x_i^* \otimes y_j \longrightarrow c_{ij}$$

Δείχνουμε ότι η συμμετρική άλγεβρα $S(V \otimes W)$, η ακόμα καλύτερα ότι κάθε συμμετρική δύναμη $S_d(V \otimes W)$ έχει *good filtration* ως $G = GL_n(k) \times GL_m(k)$ -πρότυπο.

Για $d \in \mathbb{N}$, έστω λ μία διαμέριση του d . ορίζουμε την G -απεικόνιση,

$$\phi_\lambda : \Lambda^\lambda V \otimes \Lambda^\lambda W \rightarrow S_d(V \otimes W),$$

$$\phi_\lambda(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{\lambda_1}} \otimes \cdots \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_{\lambda_r}} \otimes y_{i_1} \wedge \cdots \wedge y_{i_{\lambda_1}} \otimes \cdots \otimes y_{j_1} \wedge \cdots \wedge y_{j_{\lambda_r}}) =$$

$$\begin{vmatrix} x_{i_1} \otimes y_{i_1} & \cdots & x_{i_1} \otimes y_{i_{\lambda_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_{\lambda_1}} \otimes y_{i_1} & \cdots & x_{i_{\lambda_1}} \otimes y_{i_{\lambda_1}} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} x_{j_1} \otimes y_{j_1} & \cdots & x_{j_1} \otimes y_{j_{\lambda_r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{j_{\lambda_r}} \otimes y_{j_1} & \cdots & x_{j_{\lambda_r}} \otimes y_{j_{\lambda_r}} \end{vmatrix}.$$

Διατάσσουμε τις διαμερίσεις του d λεξικογραφικά, δηλαδή $\lambda \geq \mu$ αν $\lambda_i > \mu_i$ στην πρώτη θέση i όπου οι δύο διαμερίσεις διαφέρουν.

Ορίζουμε τα G -υποπρότυπα του $S_d(V \otimes W)$ $M^\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} \text{im} \phi_\mu$ και $\dot{M}^\lambda = \sum_{\mu > \lambda} \text{im} \phi_\mu$. Οπότε παίρνουμε μια ακολουθία G -προτύπων της μορφής

$$0 \subseteq M^{(d)} \subseteq M^{(d-1,1)} \subseteq \cdots \subseteq M^{(1^d)} = S_d(V \otimes W).$$

Θεώρημα 3.1.2. Έστω λ μία διαμέριση του d , με $\lambda_1 \leq \min\{n, m\}$. Η απεικόνιση ϕ_λ επάγει έναν G -ισομορφισμό:

$$\tilde{\phi}_\lambda : \nabla_{GL_n}(\lambda) \otimes \nabla_{GL_m}(\lambda) \rightarrow M^\lambda / \dot{M}^\lambda.$$

Απόδειξη. [1, Θεώρημα III. 1.4]. □

Έστω τώρα d_{ij} οι περιορισμοί των c_{ij} στην πολλαπλότητα $X(G_1, G_2)$. Οπότε ο $A(G_1, G_2)$ είναι η k -αλγεβρα που παράγεται από όλες τις συναρτήσεις d_{ij} , $A(G_1, G_2) = k[d_{ij}]$.

Έστω $G_1 \neq GL_n(k)$, ορίζουμε την απεικόνιση $\varepsilon_i(G_1) \in \{\pm 1\}$ ως εξής: $\varepsilon_i(SO_{2n'+1}(k)) = 1$ για $i = 1, \dots, 2n'+1$ και $\varepsilon_i(Sp_{2n'}(k)) = 1$ για $i = 1, \dots, n'$ και $\varepsilon_i(Sp_{2n'}(k)) = -1$ για $i = n'+1, \dots, 2n'$. Χρησιμοποιώντας τη διγραμμική μορφή της G_1 εύκολα παίρνουμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 3.1.3. Έστω $G_1 \neq GL_n(k)$, Υπάρχει ένας ισομορφισμός G_1 -προτύπων $V \rightarrow V^*$ που απεικονίζει το $x_i \mapsto \varepsilon_i(G_1)x_i^*$, όπου $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ η δυική βάση του V για $1 \leq i \leq n$ και $\bar{i} = n+1-i$.

Έστω $G_1 \neq GL_n(k)$. Απο την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε έναν ισομορφισμό $G_1 \times G_2$ -προτύπων, $S(V \otimes W) \cong S(V^* \otimes W) \cong k[c_{ij}]$. Έστω $k[c_{ij}] \rightarrow k[d_{ij}]$, η απεικόνιση $c_{ij} \mapsto d_{ij}$ και π η σύνθεση $S(V \otimes W) \cong S(V^* \otimes W) \cong k[c_{ij}] \rightarrow k[d_{ij}]$. Συνεπώς έχουμε,

Πρόταση 3.1.4. Έστω $G_1 \neq GL_n(k)$. Ο $G_1 \times G_2$ -επιμορφισμός $\pi : S(V \otimes W) \rightarrow A(G_1, G_2)$ είναι ομομορφισμός διαβαθμισμένων k -αλγεβρών με, $\pi(x_i \otimes y_j) = \varepsilon_i(G_1)d_{\bar{i}j}$.

Έστω τώρα $N^\lambda = \pi(M^\lambda)$ και $\dot{N}^\lambda = \pi(\dot{M}^\lambda)$, όπου $\pi : S(V \otimes W) \rightarrow k[d_{ij}]$, είναι η απεικόνιση της προηγούμενης πρότασης. Αφου π είναι ένας ομομορφισμός

διαβαθμισμένων αλγεβρών παίρνουμε ένα $G_1 \times G_2$ -filtration ($G_1 \neq GL_n(k)$) του $A_d(G_1, G_2)$, $(0) \subseteq N^{(d)} \subseteq N^{(d-1,1)} \subseteq \dots \subseteq N^{(1^d)} = A_d(G_1, G_2)$. Έστω $\psi_\lambda = \pi \circ \phi_\lambda : \Lambda^\lambda V \otimes \Lambda^\lambda W \rightarrow A_d(G_1, G_2)$, όπου ϕ_λ είναι η απεικόνιση που ορίσαμε στην αρχή της παραγράφου. Απο το [11, Θεώρημα 3.1.1] έχουμε,

Θεώρημα 3.1.5. Έστω λ μία διαμέριση του d , με $\lambda_1 \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}$. Η απεικόνιση ψ_λ επάγει ένα G -ισομορφισμό:

$$\tilde{\psi}_\lambda : \nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda) \rightarrow N^\lambda / \dot{N}^\lambda. \square$$

Παρατήρηση 3.1.6. Για την περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$, πρέπει να αντικαταστήσουμε την απεικόνιση $\pi : S(V \otimes W) \rightarrow k[d_{ij}]$, με την $\pi : S(V^* \otimes W) \rightarrow k[d_{ij}]$, (και x_i με x_i^*). Τότε για κάθε διαμέριση $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ του d η απεικόνιση $\psi_\lambda = \pi \circ \phi_\lambda : \Lambda^\lambda V^* \otimes \Lambda^\lambda W \rightarrow A_d(G_1, G_2)$, επάγει ένα $GL_n(k) \times G_2$ -ισομορφισμό:

$$\tilde{\psi}_\lambda : L_\lambda(V^*) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda) \rightarrow N^\lambda / \dot{N}^\lambda,$$

Λήμμα 3.1.7. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ μία διαμέριση με $\lambda_1 \leq n$. Τότε υπάρχει ένας $GL_n(k)$ -ισομορφισμός

$$L_\lambda(V^*) \cong \text{ind}_B^{GL_n(k)}((\lambda^*)^t),$$

όπου λ^* είναι το στοιχείο του $X_{GL_n}(T)$, $\lambda^* = (-\lambda_r, \dots, -\lambda_1)$.

Απόδειξη. [11, 3.3.1]. □

Από την Παρατήρηση 3.1.6 και το προηγούμενο Λήμμα παίρνουμε άμεσα ότι και ο δακτύλιος $A(GL_n(k), G_2)$ έχει good filtration.

Παρατήρηση 3.1.8. Στην περίπτωση όπου το σώμα k έχει χαρακτηριστική μηδέν τότε φυσικά ο δακτύλιος $A(G_1, G_2)$ διασπάται σε ανάγωγα πρότυπα, τα οποία είναι ακριβώς αυτά που εμφανίζονται ως όροι του good filtration.

3.2 Ο πυρήνας της απεικόνισης π

Στην προηγούμενη παράγραφο Πρόταση 3.14 ορίσαμε τον G -επιμορφισμό $\pi : S(V \otimes W) \rightarrow A(G_1, G_2)$. Παρακάτω βρισκουμε τον πυρήνα αυτής της απεικόνισης, ο προσδιορισμός του οποίου θα παίξει σημαντικό ρόλο στις αποδείξεις των κυρίων θεωρημάτων μας.

Ορίζουμε πρώτα τα ομογενή πολυώνυμα βαθμού 2 μέσα στη συμμετρική άλγεβρα, $S(V \otimes W)$.

- Έστω $n = 2n'$. Θεωρούμε

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n'} ((x_k \otimes y_i)(x_{\bar{k}} \otimes y_j) - (x_{\bar{k}} \otimes y_i)(x_k \otimes y_j)), 1 \leq i, j \leq m$$

- και

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^n (x_k \otimes y_i)(x_{\bar{k}} \otimes y_j), 1 \leq i, j \leq m$$

- Έστω $m = 2m'$. Θεωρούμε

$$p'_{ij} = \sum_{k=1}^{m'} ((x_i \otimes y_k)(x_j \otimes y_{\bar{k}}) - (x_i \otimes y_{\bar{k}})(x_j \otimes y_k)), 1 \leq i, j \leq n$$

- και

$$q'_{ij} = \sum_{k=1}^m (x_i \otimes y_k)(x_j \otimes y_{\bar{k}}), 1 \leq i, j \leq n$$

Τώρα ορίζουμε τα σύνολα $BI(G_i)$ ως εξής:

$$BI(G_1) = \begin{cases} \emptyset, & \text{όταν } G_1 = GL_n(k) \\ \{p_{ij} | 1 \leq i < j \leq m\}, & \text{όταν } G_1 = Sp_{2m'}(k) \\ \{q_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq m\}, & \text{όταν } G_1 = SO_n(k) \end{cases}$$

$$BI(G_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{όταν } G_1 = GL_m(k) \\ \{p'_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}, & \text{όταν } G_1 = Sp_{2m'}(k) \\ \{q'_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq n\}, & \text{όταν } G_1 = SO_m(k). \end{cases}$$

Έστω $I(G_i)$ το ιδεώδες της $S(V \otimes W)$ που παράγεται από τα $BI(G_i)$, και έστω $I(G_1, G_2)$ το ιδεώδες της $S(V \otimes W)$ που παράγεται από την ένωση των συνόλων $BI(G_1) \cup BI(G_2)$. Για $G_1 \neq GL_n(k)$ εύκολα βλέπουμε ότι η εικόνα του συνόλου $BI(G_1) \cup BI(G_2)$ μέσω της απεικόνισης $S(V \otimes W) \cong S(V^* \otimes W) \cong k[c_{ij}]$ είναι ακριβώς τα πολυώνυμα που ορίζουν την πολλαπλότητα $X(G_1, G_2)$. Αρα έχουμε ότι (βλ. επίσης [11, 3.3.5, σελ.639] και [11, Παρατήρηση 3.4.1]) ότι $I(G_1, G_2) \subseteq \ker \pi_{(G_1, G_2)}$. Ακόμα το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για την περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$, αντικαθιστώντας την απεικόνιση π με την $S(V^* \otimes W) \rightarrow k[d_{ij}]$ χρησιμοποιώντας το *good filtration* του $S(V^* \otimes W)$ και αντικαθιστώντας τα x_i με τα x_i^* . Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι το ιδεώδες που παράγεται από αυτά τα πολυώνυμα συνιστά όλο τον πυρήνα της π .

Πρόταση 3.2.1. $I(G_1, G_2) = \ker \pi_{(G_1, G_2)}$.

Απόδειξη. Δίνουμε μια απόδειξη για την περίπτωση όπου $G_1 \times G_2 = Sp_n(k) \times SO_m(k)$, οι αποδείξεις για τις άλλες περιπτώσεις είναι ταυτόσημες με αυτή. Από το Θεώρημα 3.1.5 έχουμε ένα ισομορφισμό k -διανυσματικών χώρων

$$A(Sp_n(k), SO_m(k)) \cong S(V \otimes W) / \ker \pi \cong \sum_{\lambda} \nabla_{Sp_n(k)}(\lambda) \otimes \nabla_{SO_m(k)}(\lambda).$$

Έστω $f \in \ker \pi$, τότε η εικόνα του f κάτω από τον προηγούμενο ισομορφισμό βρίσκεται μέσα στο $\Sigma_\lambda(Z_\lambda \otimes \nabla_{GL_m(k)}(\lambda) + \nabla_{GL_n(k)}(\lambda) \otimes Z'_\lambda)$, όπου Z_λ είναι το $Sp_n(k)$ -υποπρότυπο του $\nabla_{GL_m(k)}(\lambda)$, που ορίστηκε στην Πρόταση 2.2.2 και Z'_λ το $SO_m(k)$ -υποπρότυπο του $\nabla_{GL_m(k)}(\lambda)$, που ορίστηκε στην Πρόταση 2.3.2. Τώρα από το Λήμμα [11, Λήμμα 3.2.3] η εικόνα του $Sp_n(k) \times SO_m(k)$ -πρωτύπου $\Sigma_\lambda(Z_\lambda \otimes \nabla_{GL_m(k)}(\lambda) + \nabla_{GL_n(k)}(\lambda) \otimes Z'_\lambda)$, μέσα στην άλγεβρα $S(V \otimes W)$, περιέχεται στο ιδεώδες $I(Sp_n(k), SO_m(k))$. Οπότε $f \in I(Sp_n(k), SO_m(k))$. \square

3.3 Αναλλοίωτες

Παρόλο που δεν θα χρειαστούμε τη θεωρία των αναλλοίωτων και τα παρακάτω αποτελέσματα για την απόδειξη των κυρίων θεωρημάτων μας, κρίνουμε απαραίτητο να περιγράψουμε το 1^0 Θεμελιώδες Πρόβλημα της Θεωρίας Αναλλοίωτων και να δώσουμε μια απάντηση σε αυτό για τις περιπτώσεις των ομάδων $G = SL_n(k), Sp_n(k)$ και $SO_n(k)$ όπως αυτή δίνεται στο [11, 4, Θεώρημα 4.2.1], χρησιμοποιώντας την πολλαπλότητα των nullforms $X(G_1, G_2)$.

Έστω G μια αλγεβρική ομάδα και W μια ρητή αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της G . Συμολίζουμε με $k[W]$ την άλγεβρα των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f : W \rightarrow k$. Η δράση της G στο W επάγει μια δράση στην άλγεβρα $k[W]$. Ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα είναι ότι η άλγεβρα των αναλλοίωτων $k[W]^G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Είναι φυσικό λοιπόν να αναζητήσουμε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων για κάθε περίπτωση. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται συνήθως ως το 1^0 Θεμελιώδες Πρόβλημα της Θεωρίας Αναλλοίωτων. Η απάντηση του προβλήματος είναι γνωστή μόνο για λίγες περιπτώσεις. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε αναλυτικά τις περιπτώσεις όπου έχει δοθεί λύση στο πρόβλημα αυτό έως σήμερα.

	G	R	
1	$SL(n, k)$	$k[nV]$	Igusa (1954)
2	$GL(n, k)$	$k[nV \oplus mV^*]$	Procesi (1976)
3	$SO(n, k), Sp(n, k)$	$k[nV]$	DeConcini, Procesi (1976)
4	$GL(n, k), SO(n, k)$ και $Sp(n, k)$	$End(V^{\otimes r})$	Procesi (1976)
5	$G(2)$	$k[n\mathbb{C}^7]$	Swartz (1988)
6	$Spin(7, \mathbb{C})$	$k[n\mathbb{C}^8]$	Swartz(1988)
7	$SL_2(\mathbb{C})$	$k[W],$ $W = S_3(\mathbb{C}^2).$	Swartz (1987)

Στις πρώτες 4 περιπτώσεις το k είναι τυχαίο άπειρο σώμα, ενώ για τις περιπτώσεις 5,6,7 το k είναι σώμα χαρακτηριστικής 0.

Θα πειράξουμε τώρα μία απόδειξη του πρώτου θεωρήματος της θεωρίας αναλλοίωτων για τις ομάδες $G = SL_n(k), Sp_n(k)$ και $SO_n(k)$ όπως αυτή δίνεται

στο [11, 4, Θεώρημα 4.2.1], χρησιμοποιώντας την πολλαπλότητα των nullforms $X(G_1, G_2)$.

Έστω $X(G_1, G_2)$ η πολλαπλότητα των nullforms όπου $G_1 = GL_n(k), Sp_n(k)$ ή $SO_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$. Έστω $H \subseteq GL_m(k)$ μία από τις ομάδες $SL_m(k), Sp_m(k)$ και $SO_m(k)$. Συμβολίζουμε με $A(G_1, G_2)^{1 \times H}$ την άλγεβρα των αναλλοιώτων του $A(G_1, G_2)$ κάτω από τη δράση της ομάδας $1 \times H$. Αντιστοιχούμε τώρα στην H ένα υποσύνολο του δακτυλίου $A(G_1, G_2) = k[d_{ij}]$, C_H το οποίο θα αποτελέσει και το σύνολο γεννητόρων του $A(G_1, G_2)^{1 \times H}$.

Χρειαζόμαστε τους εξής συμβολισμούς. Συμβολίζουμε με $[i_1, \dots, i_t | j_1, \dots, j_t]$ την $t \times t$ ελλάσωνα υποορίζουσα του $n \times m$ πίνακα (d_{ij}) που αντιστοιχεί στις i_1, \dots, i_t σειρές και j_1, \dots, j_t στήλες. Γράφουμε απλά $[i_1, \dots, i_m]$ για την περίπτωση $[i_1, \dots, i_m | 1, \dots, m]$.

- Ορισμός 3.3.1.**
1. Για $H = SL_m(k)$, θεωρούμε $C_H = \{[i_1, \dots, i_m] | 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$ (Αν $m > n, C_H = \emptyset$)
 2. Για $H = Sp_m(k), m = 2m'$, θεωρούμε $C_H = \{a_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$ όπου $a_{ij} = \sum_{k=1}^{m'} (d_{ik}d_{j\bar{k}} - d_{i\bar{k}}d_{jk})$.
 3. Για $H = SO_m(k)$, θεωρούμε $C_H = \{b_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{[i_1, \dots, i_m] | 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$ όπου $b_{ij} = \sum_{k=1}^m d_{ik}d_{j\bar{k}}$.

Παρατήρηση 3.3.2. Τα πολυώνυμα a_{ij} και b_{ij} που ορίστηκαν παραπάνω είναι οι εικόνες των πολυωνύμων p'_{ij} και q'_{ij} (της προηγούμενης παραγράφου) μέσω της απεικόνισης π .

Θεώρημα 3.3.3. Έστω k τυχαίο άπειρο σώμα (χαρακτηριστικής $\neq 2$ αν $G_1 = SO_n(k)$). Υποθέτουμε ότι $m' > n$ αν $G_1 = SO_{2m'}(k)$. Η k -άλγεβρα των αναλλοιώτων $A(G_1, G_2)^{1 \times H}$ παράγεται από το σύνολο C_H .

Απόδειξη. [11, 4, Θεώρημα 4.2.1]. □

Παρατήρηση 3.3.4. Στην ειδική περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$ και άρα $A(G_1, G_2)$ είναι ο πολυωνυμικός δακτύλιος πάνω σε $n \times m$ μεταβλητές το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει μια πλήρη απάντηση του πρώτου προβλήματος της θεωρίας αναλλοιώτων για τις ομάδες αυτές.

Κεφάλαιο 4

G -αναλλοίωτα ιδεώδη της άλγεβρας $A(G_1, G_2)$.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε το πρώτο βασικό αποτέλεσμα μας. Απο εδώ και στο εξής σταθεροποιούμε το k να είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η μελέτη των $G = G_1 \times G_2$ -αναλλοίωτων ιδεωδών της άλγεβρας $A(G_1, G_2)$. Για την ειδική περίπτωση όπου $G_1 = GL_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$ και άρα $A(G_1, G_2)$ είναι ο πολυωνυμικός δακτύλιος πάνω σε $n \times m$ μεταβλητές τα ιδεώδη αυτά μελετήθηκαν από τους C. DeConcini, D. Eisenbud και C. Procesi στο [2]. Συγκεκριμένα αυτοί περιγράφουν ποια είναι τα G -αναλλοίωτα ιδεώδη και βρίσκουν μια διάσπαση τους σε ανάγωγα G -πρότυπα. Αργότερα η E. Strickland στο [16] βρίσκει αντίστοιχα αποτελέσματα για την ειδική περίπτωση όπου $G_1 = Sp_n(k)$ και $G_2 = GL_m(k)$. Στα παρακάτω περιγράφουμε τα G -αναλλοίωτα ιδεώδη και δίνουμε μια απόδειξη για το πως διασπώνται σε ανάγωγα πρότυπα, για οποιοδήποτε ζεύγος ομάδων $G_1 \times G_2$ γενικεύοντας έτσι τα αποτελέσματα των προηγούμενων άρθρων, χρησιμοποιώντας έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης από αυτούς. Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται στο [5].

4.1 Αναλλοίωτα ιδεώδη.

Έχουμε αποδείξει ότι το ομογενές κομμάτι βαθμού d της άλγεβρας $A(G_1, G_2)$ έχει good filtration ως G -πρότυπο με όρους $\nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda)$, για λ διαμέριση του d , με $\lambda_1 \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}$. Φυσικά στην περίπτωση όπου $G_1 = GL_n$ ο αναγνώστης πρέπει να έχει στο μυαλό του ότι το $\nabla_{G_1}(\lambda)$ πρέπει να αντικατασταθεί με το $L_\lambda(V^*)$. Αφού τώρα το k είναι σώμα χαρακτηριστικής 0 έχουμε ότι για κάθε d το $A_d(G_1, G_2)$ διασπάται σε ανάγωγα πρότυπα ως:

$$A_d(G_1, G_2) = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda_1 \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}}} \nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda).$$

Έστω $M_\lambda \subseteq A(G_1, G_2)$ το $G_1 \times G_2$ -πρότυπο που είναι ισόμορφο με το ανάγωγο $\nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda)$, και έστω I_λ το ιδεώδες της $A(G_1, G_2)$ που παράγεται από το M_λ . Από τον ορισμό του I_λ , άμεσα παίρνουμε ότι κάθε G -αναλλοίωτο ιδεώδες είναι άθροισμα ιδεωδών της μορφής I_λ .

Για την απόδειξη του κύριου θεωρήματος του παρόντος κεφαλαίου θα χρειαστούμε ένα διαφορετικό χαρακτηρισμό των Schur προτύπων της ομάδας $GL_n(k)$. Οι παρακάτω ορισμοί και Λήμματα βρίσκονται στην εργασία [1].

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ μια διαμέριση με δύο σειρές και $\Lambda_\lambda V = \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V$. Για $1 \leq t \leq \lambda_2$, ορίζουμε την απεικόνιση $\square_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(t)} : \Lambda^{\lambda_1+t} V \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} V \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V$, ως $\square_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(t)}(a \otimes b) = \sum a_i^1 \otimes a_i^2 \wedge b$, όπου $\sum a_i^1 \otimes a_i^2$ είναι η εικόνα του a μέσω της διαγωνοποίησης $\Delta : \Lambda^{\lambda_1+t} V \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^t V$. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $\square_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ να είναι το άθροισμα των απεικονίσεων, $\square_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \sum_{t=1}^{\lambda_2} \square_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(t)} : \sum_{t=1}^{\lambda_2} (\Lambda^{\lambda_1+t} V \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} V \rightarrow \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V)$. Γενικά έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ μία διαμέριση. Για κάθε $i = 1, \dots, r-1$ παίρνουμε την διαμέριση $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ και την απεικόνιση $1_1 \otimes \dots \otimes \square_{(\lambda_i, \lambda_{i+1})} \otimes 1_{i+2} \otimes \dots \otimes 1_r$ στο $\Lambda^{\lambda_1} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_i} V \otimes \Lambda^{\lambda_{i+1}} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_r} V$, όπου 1_j είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις $\Lambda^{\lambda_j} V$ για $j \neq i, i+1$. Ορίζουμε \square_λ ως, $\square_\lambda = \sum_{i=1}^{r-1} 1_1 \otimes \dots \otimes \square_{(\lambda_i, \lambda_{i+1})} \otimes 1_{i+2} \otimes \dots \otimes 1_r$. Από το [1, Θεώρημα II.2.16] έχουμε

Λήμμα 4.1.1. *Το Schur πρότυπο $\nabla_{GL_n}(\lambda)$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ είναι ο συμπυρήνας της απεικόνισης \square_λ , δηλαδή $\nabla_{GL_n}(\lambda) \cong \Lambda_\lambda V / \text{im} \square_\lambda$.*

Έστω τώρα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ διαμέριση με δύο σειρές. Για κάθε $1 \leq t \leq \lambda_2$, ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{\square}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(t)} : \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V \rightarrow \Lambda^{\lambda_1+t} V \otimes \Lambda^{\lambda_2-t}$, ως $\tilde{\square}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{(t)}(a \otimes b) = \sum_i a \wedge b_i^1 \otimes b_i^2$, για $a \otimes b \in \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V$, όπου $\sum_i b_i^1 \otimes b_i^2$ είναι η εικόνα του b μέσω της διαγωνοποίησης $\Delta : \Lambda^{\lambda_2} V \rightarrow \Lambda^t V \otimes \Lambda^{\lambda_2-t} V$. Όμοια με την \square_λ μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{\square}_\lambda$ πάνω στο $\Lambda_\lambda V$.

Έστω $x \in \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_i+t} V \otimes \Lambda^{\lambda_{i+1}-t} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_r} V$ και $y \in \Lambda^{\lambda_1} W \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_i} W \otimes \Lambda^{\lambda_{i+1}} W \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_r} W$, και ϕ_λ η $GL_n \times GL_m$ -απεικόνιση που ορίστηκε στην παράγραφο 3.1. Από το [1, Πρόταση 1.8] παίρνουμε,

Λήμμα 4.1.2. $\phi_\lambda(\square_\lambda(x), y) = \phi_{\lambda'}(x, \tilde{\square}_\lambda(y))$, όπου $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \dots, \lambda_r)$.

Τέλος θα λέμε ότι μία διαμέριση $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ περιέχεται μέσα σε μία διαμέριση $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ και θα συμβολίζουμε με $\lambda \subseteq \mu$ αν $\lambda_i \leq \mu_i$ για κάθε $1 \leq i \leq r$.

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω λ μία διαμέριση, και I_λ το ιδεώδες του $A(G_1, G_2)$ που παράγεται από το ανάγωγο G -πρότυπο M_λ , $I_\lambda = \langle M_\lambda \rangle$, τότε το I_λ έχει*

μια διάσπαση σε ανάγωγα G -πρότυπα ω_S ,

$$I_\lambda = \sum_{\mu \supseteq \lambda} M_\mu.$$

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη λεπτομερώς για την ομάδα $Sp_n \times SO_m$ όπου $n = 2n'$ και $m = 2m' + 1$. Οι αποδείξεις για τις άλλες περιπτώσεις είναι πανομοιότυπες με αυτήν εδώ διαφέροντας μόνο σε ελάχιστες λεπτομέρειες. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν $\lambda \subseteq \mu$ τότε $M_\mu \subset I_\lambda$. Για να το κάνουμε αυτοχρειαζόμαστε μία νέα περιγραφή του M_λ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \nabla_{GL_n}(\lambda) \rightarrow S_d(V \otimes W),$$

$$f(d_\lambda(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{\lambda_1}} \otimes \cdots \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_{\lambda_r}})) =$$

$$\begin{vmatrix} x_{i_1} \otimes y_1 & \cdots & x_{i_1} \otimes y_{\lambda_1} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{i_{\lambda_1}} \otimes y_1 & \cdots & x_{i_{\lambda_1}} \otimes y_{\lambda_1} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} x_{j_1} \otimes y_1 & \cdots & x_{j_1} \otimes y_{\lambda_r} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{j_{\lambda_r}} \otimes y_1 & \cdots & x_{j_{\lambda_r}} \otimes y_{\lambda_r} \end{vmatrix}.$$

Μπορούμε να σκεφτούμε αυτή την απεικόνιση ως την \tilde{f}_λ , όπου έχουμε σταθεροποιήσει το κανονικό tableau σχήματος λ , C_λ , στο δεξί μέρος. Από τα Λήμματα 4.1.1 και 4.1.2 έπεται άμεσα ότι η f είναι καλά ορισμένη, και ασφαλώς είναι GL_n -ομομορφισμός. Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι μη μηδενική απεικόνιση και αφού $\nabla_{GL_n}(\lambda)$ είναι ανάγωγο GL_n -πρότυπο, η f αποτελεί ένα GL_n -μονομορφισμό. Προφανώς $f(\nabla_{GL_n}(\lambda)) \subseteq M^\lambda$. Έστω $\pi : S(V \otimes W) \rightarrow k[d_{ij}]$, η απεικόνιση που ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{f} : \nabla_{Sp_n}(\lambda) \rightarrow k_d[d_{ij}]$, ως $\tilde{f} = \pi \circ f$.

Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι η f είναι ένας καλά ορισμένος Sp_n -ομομορφισμός. Έχουμε $\nabla_{Sp_n}(\lambda) \cong \nabla_{GL_n}(\lambda)/Z_\lambda$, όπου Z_λ είναι ο υπόχωρος του $\nabla_{GL_n}(\lambda)$ που παράγεται πάνω από το k από όλα τα στοιχεία της μορφής,

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n'} d_\lambda V(x_{i_1} x_{i_1}^{-1} \cdots x_{i_t} x_{i_t}^{-1} v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)$$

με $2t \leq \lambda_1, v_1 \in \Lambda^{\lambda_1 - 2t} V, v_i \in \Lambda^{\lambda_i} V (i \neq 1)$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 στο [11] αποδεικνύεται ότι αν $z \in \Lambda^\lambda V \otimes \Lambda^\lambda W$, είναι της μορφής $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n'} x_{i_1} x_{i_1}^{-1} \cdots x_{i_t} x_{i_t}^{-1} v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_r$, τότε $\phi_\lambda(z) \in I(Sp_n, SO_m) = \ker \pi$. Άρα η \tilde{f} είναι καλά ορισμένη, και φυσικά Sp_n -ομομορφισμός.

Δίχνουμε τώρα ότι η \tilde{f} είναι μη μηδενική απεικόνιση.

Ορίζουμε το κανονικό tableau σχήματος λ να είναι το standart tableau με στοιχεία:

$$C_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \lambda_1 \\ \hline 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \lambda_2 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_r \\ \hline \end{array} .$$

Θεωρούμε την εικόνα του κανονικού tableau C_λ μέσω της f .

$$f(d_\lambda(C_\lambda)) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_1 \otimes y_1 & \dots & x_1 \otimes y_{\lambda_1} & \dots & x_1 \otimes y_1 & \dots & x_1 \otimes y_{\lambda_r} \\ \dots & & & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ x_{\lambda_1} \otimes y_1 & \dots & x_{\lambda_1} \otimes y_{\lambda_1} & \dots & x_{\lambda_r} \otimes y_1 & \dots & x_{\lambda_r} \otimes y_{\lambda_r} \end{array} \right] .$$

Παρατηρούμε ότι για όλα τα x_i, y_j , που εμφανίζονται στην εικόνα αυτή, έχουμε $i, j \leq \lambda_1 \leq \min\{n', m'\}$. Οπότε από την Πρόταση 3.2.1 $f(d_\lambda(C_\lambda))$ δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στο ιδεώδες $I(Sp_n, SO_m)$, που παράγεται από τα $\{p_{ij}, q'_{ij}\}$. Συνεπώς $\tilde{f}(d_\lambda(C_\lambda) + Z_\lambda) \neq 0$. Τώρα από την στιγμή που $\nabla_{Sp_n}(\lambda)$ είναι ανάγωγο Sp_n -πρότυπο, \tilde{f} είναι μονομορφισμός.

Ισχυρισμός 1. $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda)) \subseteq M_\lambda$.

Απόδειξη. Προφανώς $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda)) \subseteq N^\lambda$. Έστω $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda)) \not\subseteq M_\lambda$, τότε η προβολή $N^\lambda = M_\lambda \oplus \dot{N}^\lambda \rightarrow \dot{N}^\lambda$, επάγει μία μη μηδενική Sp_n -απεικόνιση $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda)) \rightarrow \dot{N}^\lambda$. Επειδή $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda))$ είναι ανάγωγο Sp_n -πρότυπο, αυτή η απεικόνιση είναι 1-1. Άρα $\nabla_{Sp_n}(\lambda)$ είναι ανάγωγος παράγοντας του \dot{N}^λ . Όμως το \dot{N}^λ ως G -πρότυπο, είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων προτύπων της μορφής $M_{\lambda'} \cong \nabla_{Sp_n}(\lambda') \otimes \nabla_{SO_m}(\lambda')$, με $\lambda' > \lambda$ στην λεξικογραφική διάταξη. Οπότε έχουμε ότι \dot{N}^λ ως Sp_n -πρότυπο είναι άθροισμα από αντίγραφα της μορφής $\nabla_{Sp_n}(\lambda')$ με $\lambda' > \lambda$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το $\nabla_{Sp_n}(\lambda)$ είναι ανάγωγος παράγοντας του \dot{N}^λ . Συνεπώς έχουμε $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda)) \subseteq M_\lambda$. □

Τώρα αφού M_λ είναι ανάγωγο G -πρότυπο, έχουμε ότι $M_\lambda = G \cdot \tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda))$. Μάλιστα $M_\lambda = G \cdot \tilde{f}(C_\lambda)$, όπου $C_\lambda (= d_\lambda(C_\lambda) + Z_\lambda)$ είναι το κανονικό tableau σχήματος λ . Σταθεροποιούμε τώρα το ανάγωγο G -πρότυπο M_μ , με $\lambda \subseteq \mu$. Τότε, από τον *Ισχυρισμό 1*, έχουμε ότι $M_\mu = G \cdot \tilde{f}(C_\mu)$. Οπότε για να αποδείξουμε ότι $M_\mu \subset I_\lambda$, αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{f}(C_\mu) \in I_\lambda$. Είναι αρκετό να χειριστούμε την περίπτωση όπου μ, λ διαφέρουν μόνο σε ένα κουτί διότι αν τ διαφέρει από την λ π.χ. κατά δύο κουτιά, τότε θα έχουμε ότι $I_\tau \subset I_\mu$ όπου τ διαφέρει κατά ένα κουτί από κάποιο μ , το οποίο διαφέρει κατά ένα κουτί από το λ .

Οπότε $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_r)$ και $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_r)$. Άρα

$$\tilde{f}(C_\mu) = \begin{vmatrix} d_{\overline{11}} & \cdots & d_{\overline{1\lambda_1}} \\ \cdots & & \cdots \\ d_{\overline{\lambda_1 1}} & \cdots & d_{\overline{\lambda_1 \lambda_1}} \end{vmatrix} \cdots \underbrace{\begin{vmatrix} d_{\overline{11}} & \cdots & d_{\overline{1\lambda_i+1}} \\ \cdots & & \cdots \\ d_{\overline{\lambda_i+1 1}} & \cdots & d_{\overline{\lambda_i+1 \lambda_i+1}} \end{vmatrix}}_i \cdots$$

Η μοναδική διαφορά μεταξύ των $\tilde{f}(C_\lambda)$ και $\tilde{f}(C_\mu)$ βρίσκεται στην i -θέση. Οπότε εστιάζουμε την προσοχή μας στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} d_{\overline{11}} & \cdots & d_{\overline{1\lambda_i+1}} \\ \cdots & & \cdots \\ d_{\overline{\lambda_i+1 1}} & \cdots & d_{\overline{\lambda_i+1 \lambda_i+1}} \end{vmatrix}$$

και εφαρμόζουμε Laplace expansion ως προς την τελευταία στήλη. Το αποτέλεσμα είναι ένα άθροισμα από γινόμενα μονωνύμων βαθμού 1 του $k[d_{ij}]$ και στοιχεία του $\tilde{f}(\nabla_{Sp_n}(\lambda))$. Τώρα αφού I_λ είναι ιδεώδες έχουμε $\tilde{f}(C_\mu) \in I_\lambda$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $I_\lambda \subseteq \sum_{\mu \supseteq \lambda} M_\mu$. Αρκεί να δείξουμε ότι $d_{ij} M_\lambda \subseteq \sum_{\mu \supseteq \lambda} M_\mu, \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Παρατηρούμε ότι $k\{d_{ij}\} = M_{(1)}$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $M_\lambda M_{(1)}$ περιέχεται στο $\sum_{\mu \supseteq \lambda} M_\mu$. Ότι $M_\lambda M_{(1)}$ περιέχεται στο $\sum_{\mu \supseteq \lambda} M_\mu$ έπεται άμεσα από το Θεώρημα 5.2.3 της επόμενης παραγράφου. Οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Πόρισμα 4.1.4. • Ένα G -υποπρότυπο $\sum_{\lambda \in T} M_\lambda$ του $A(G_1, G_2)$ είναι ιδεώδες αν και μόνο αν για $\lambda \in T$ και $\lambda \subseteq \mu$ ισχύει $\mu \in T$.

- $I_\lambda \subseteq I_\mu$ αν και μόνο αν $\mu \subseteq \lambda$.

Κεφάλαιο 5

Η ανάλυση του γινομένου $M_\lambda M_\tau$

Έστω k ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Έστω $M_\lambda M_\tau$ το γινόμενο των αναγώγων προτύπων M_λ, M_τ μέσα στην άλγεβρα $A(G_1, G_2)$. Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε μια ανάλυση του γινομένου αυτού σε ανάγωγα $G = G_1 \times G_2$ πρότυπα για κάθε ομάδα $G_1 \times G_2$, όπου G_1 είναι μία από τις GL_n, Sp_n (n άρτιο) ή SO_n (n περιττό) και G_2 μία από τις GL_m, Sp_m (m άρτιο) ή SO_m (m περιττό).

Το πρόβλημα της διάσπασης του γινομένου $M_\lambda M_\tau$ σε ανάγωγα G -πρότυπα προτάθηκε πρώτα από τους C. DeConcini, D.Eisenbud and C.Procesi στο [2] για την ειδική περίπτωση της $GL_n \times GL_m$ και λύθηκε από την Whitehead για την περίπτωση αυτή στο [17].

5.1 Ο Κανόνας Littlewood-Richardson.

Ορισμός 5.1.1. Μια ακολουθία θετικών ακεραίων θα ονομάζεται λέξη του *Yamanouchi* αν για κάθε k το σύνολο των k πρώτων στοιχείων της ακολουθίας περιέχει τουλάχιστον τόσα i οσα και j για $i < j$.

Παράδειγμα 5.1.2. Η ακολουθία 11213 είναι μια λέξη του *Yamanouchi*, ενώ η ακολουθία 1223 δεν είναι.

Ορισμός 5.1.3. Ένα *skew*-διάγραμμα είναι το διάγραμμα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από ένα *Young*-διάγραμμα ένα μικρότερο *Young*-διάγραμμα που περιέχεται σε αυτό.

Αντίστοιχα με τα *Young*-διαγράμματα έχουμε τους ορισμούς των *skew tableaux* και τότε αυτά είναι *standard* κλπ.

Ορισμός 5.1.4. Ένα *tableau* (ή *skew-tableau*) θα λέμε ότι σχηματίζει μία λέξη του *Yamanouchi* αν, τα στοιχεία του όταν παρατεθούν διβάζοντας τις στήλες από κάτω προς τα πάνω και από αριστερά προς τα δεξιά, σχηματίζουν μια λέξη του *Yamanouchi*.

Παράδειγμα 5.1.5. $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ σχηματίζει τη λέξη 121213, που είναι λέξη του Yamanouchi.

Έστω τώρα U ένα skew-tableau σχήματος λ/μ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. U είναι standard,
2. U σχηματίζει μια λέξη του Yamanouchi και
3. $C(U) = C(C_\tau)$ για μια διαμέριση τ έτσι ώστε $|\lambda| = |\mu| + |\tau|$

όπου με $C(T)$ συμβολίζουμε το περιεχόμενο του T και C_τ είναι φυσικά το κανονικό tableau σχήματος τ .

Ονομάζουμε διάσπαση του tableau T_λ , σχήματος λ , μέσω του U τα tableaux T_μ και T_τ τα οποία προκύπτουν σύμφωνα με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

1. Τα στοιχεία του T_λ που αντιστοιχούν στο $\mu \subseteq \lambda$ σχηματίζουν το tableau T_μ .
2. Κάθε στοιχείο του T_λ που βρίσκεται στο λ/μ τοποθετείτε σε διάγραμμα σχήματος τ σύμφωνα με το αντίστοιχο στοιχείο του U ως εξής: Αν το στοιχείο του U είναι το i και αυτό είναι το j -στο i στη λέξη του Yamanouchi, τοποθετούμε το στοιχείο του T_λ στην i -στη στήλη και j -στη σειρά του διαγράμματος σχήματος τ . Οπότε, τα στοιχεία του U καθορίζουν τις στήλες και η σειρά εμφάνισής τους στη λέξη του Yamanouchi καθορίζει τις σειρές στις οποίες τα στοιχεία του T_λ θα μετακινηθούν.

Παράδειγμα 5.1.6. Έστω $U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$, $\lambda = (4, 3, 2)$, $\mu = (2, 1)$ και $\tau = (3, 2, 1)$.

Τότε το tableau $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 6 & \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array}$ διασπάται μέσω του U στα $T_\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$ και

$T_\tau = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$.

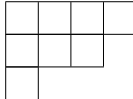
Αν το T_λ είναι standard, τότε προφανώς το T_μ είναι επίσης standard. Γενικά όμως δεν μπορούμε να κάνουμε τέτοιους ισχυρισμούς για το T_τ . Αν όμως T_λ είναι το κανονικό tableau, C_λ , τότε έχουμε,


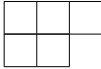
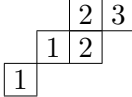
Λήμμα 5.1.7. Αν $T_\lambda = C_\lambda$, τότε T_λ διασπάται μέσω του U στο C_μ και T_τ , όπου T_τ είναι *standard*.

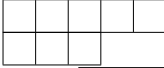

Απόδειξη. [17, Λήμμα 5.4]. □

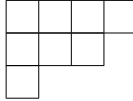

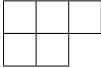
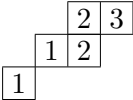
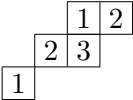
Έστω $D(\mu, \tau)$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων, λ , έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένα *standard skew tableau*, U , σχήματος λ/μ με $C(U) = C(C_\tau)$ το οποίο σχηματίζει μια λέξη του Yamanouchi. Για κάθε $\lambda \in D(\mu, \tau)$ έστω $a(\lambda, \mu, \tau)$ το πλήθος των διαφορετικών *skew tableau*, U , που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα που δείχνουν ξεκάθαρα το νόημα αυτών των συμβολισμών.

Παράδειγματα 5.1.8. • Η διαμέριση $\lambda =$  προκύπτει από τις

διαμερίσεις $\mu =$  και $\tau =$  μέσω του $U =$ .

Επίσης η $\lambda =$  προκύπτει από τα ίδια σχήματα μ και τ αλλά μέσω του $U =$ .

• Η διαμέριση $\lambda =$  προκύπτει από τις διαμερίσεις $\mu =$  και $\tau =$  τουλάχιστον δύο φορές μέσω των σχημάτων $U_1 =$  και $U_2 =$ .

Με αυτό τον συμβολισμό, ο κανόνας Littlewood-Richardson διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 5.1.9. Έστω $\nabla_{GL_n}(\mu), \nabla_{GL_n}(\tau)$, τα Schur-πρότυπα της GL_n , που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις μ, τ αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\nabla_{GL_n}(\mu) \otimes \nabla_{GL_n}(\tau) \cong \sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} a(\lambda, \mu, \tau) \nabla_{GL_n}(\lambda). \quad \square$$

Απόδειξη. [1, Θεώρημα IV 2.1] □

Παρατήρηση 5.1.10. Οι αριθμοί $a(\lambda, \mu, \tau)$ ονομάζονται *Littlewood-Richardson συντελεστές*. Πέρα από την περιγραφή που δόθηκε πιο πάνω υπάρχουν πολλές ισοδύναμες εκφράσεις για το τι 'μετρώνε' οι αριθμοί αυτοί. Για μία αναλυτική περιγραφή των *Littlewood-Richardson-συντελεστών* ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [4].

Θέλουμε να βρούμε αντίστοιχους κανόνες σαν αυτόν του Littlewood-Richardson για τις ομάδες Sp_n και SO_n . Οι εκφράσεις των γινομένων των Schur-προτύπων αυτών των ομάδων θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στην εύρεση της ανάλυσης του γινομένου $M_\lambda M_\tau$ σε ανάγωγα G -πρότυπα.

Πριν αποδείξουμε αυτές τις ταυτότητες είναι αναγκαίο να δούμε μια αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων των K. Koike και I. Terada για τις εκφράσεις των γενικευμένων χαρακτήρων της Sp και SO ως προς τους γενικευμένους χαρακτήρες της GL .

Έστω Λ ο δακτύλιος των συμμετρικών συναρτήσεων πάνω σε άπειρες αριθμήσιμες το πλήθος μεταβλητές. Θεωρούμε το γενικευμένο χαρακτήρα της GL που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ όπως αυτός ορίζεται στο [10][3.Schur functions]. Συγκεκριμένα είναι γνωστό για την GL_n ότι ο χαρακτήρας του Schur-πρότυπου, $L_\lambda V$, που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ με $\lambda_1 \leq n$ είναι το Schur-πολυώνυμο $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ πάνω σε n το πλήθος μεταβλητές. Για κάθε διμέριση λ τα πολυώνυμα $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ ορίζουν ένα μοναδικό στοιχείο $s_\lambda \in \Lambda$, καθώς το $n \rightarrow \infty$, το οποίο θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής ως $\chi_{GL}(\lambda)$ και θα το ονομάζουμε γενικευμένο χαρακτήρα της GL ως προς τη διαμέριση λ .

Ορμόμενοι από τον ορισμό του Macdonald οι K. Koike και I. Terada ορίζουν στο [9] τους γενικευμένους χαρακτήρες για τις ομάδες Sp και SO αντίστοιχα. Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα τους είναι ότι οι γενικευμένοι χαρακτήρες $\{\chi_{GL}(\lambda)\}$, $\{\chi_{Sp}(\lambda)\}$ και $\{\chi_{SO}(\lambda)\}$ όπου το λ διατρέχει όλες τις διαμερίσεις αποτελούν βάση του δακτυλίου των συμμετρικών συναρτήσεων. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τον γενικευμένο χαρακτήρα που αντιστοιχεί στην διαμέριση λ μιας ομάδας σαν \mathbb{Z} -γραμμικό συνδυασμό των γενικευμένων χαρακτήρων της άλλης ομάδας και αντίστροφα.

Το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα του ίδιου άρθρου [9, Θεώρημα 2.3.1] περιγράφει μερικές ιδιότητες των συντελεστών στις εκφράσεις των γενικευμένων χαρακτήρων της μιας ομάδας ως προς της άλλης. Συγκεκριμένα έχουμε

Λήμμα 5.1.11. *Για τους γενικευμένους χαρακτήρες των ομάδων GL , Sp και SO έχουμε,*

- $\chi_{Sp}(\lambda) = \sum_{\mu} c_{\mu\lambda} \chi_{GL}(\mu)$ και

- $\chi_{SO}(\lambda) = \sum_{\mu} b_{\mu\lambda} \chi_{GL}(\mu)$

με $c_{\lambda\lambda} = b_{\lambda\lambda} = 1$ και $c_{\mu\lambda} = b_{\mu\lambda} = 0$ για $|\mu| \geq |\lambda|$.

Ακόμα

- $\chi_{GL}(\lambda) = \sum_{\mu} c'_{\mu\lambda} \chi_{Sp}(\mu)$ και

- $\chi_{GL}(\lambda) = \sum_{\mu} b'_{\mu\lambda} \chi_{SO}(\mu)$

με $c'_{\mu\lambda}, b'_{\mu\lambda} \geq 0$, $c'_{\lambda\lambda} = b'_{\lambda\lambda} = 1$ και $c'_{\mu\lambda} = b'_{\mu\lambda} = 0$ για $|\mu| \geq |\lambda|$. \square

Χρειαζόμαστε ακόμα ένα αποτέλεσμα των K. Koike και I. Terada πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των γινομένων των Schur προτύπων. Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi_n : \Lambda \rightarrow \Lambda_n$ τη φυσική προβολή του Λ στο δακτύλιο των συμμετρικών πολυωνύμων σε n -μεταβλητές. Ο Λ_n έχει όπως έχουμε πεί ως βάση τους χαρακτήρες των Schur-προτύπων της GL_n . Θεωρούμε τώρα $R(Sp_{2n})$ και $R(SO_n)$ τους χώρους των χαρακτήρων της Sp_{2n} και SO_n αντίστοιχα. Ορίζουμε τώρα τους ομομορφισμούς δακτυλίων:

$$\pi_{Sp_{2n}} : \Lambda \rightarrow R(Sp_{2n}) \text{ με,}$$

$$\pi_{Sp_{2n}} : \Lambda \xrightarrow[\text{proj.map}]{\pi_{2n}} \Lambda_{2n} \xrightarrow[\text{res.map}]{r} R(Sp_{2n})$$

και $\pi_{SO_n} : \Lambda \rightarrow R(SO_n)$ με,

$$\pi_{SO_n} : \Lambda \xrightarrow[\text{proj.map}]{\pi_n} \Lambda_n \xrightarrow[\text{res.map}]{r} R(SO_n)$$

Σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς έχουμε το λήμμα

Λήμμα 5.1.12. Έστω λ διαμέριση και $\chi_{Sp}(\lambda)$, $\chi_{SO}(\lambda)$ οι γενικευμένοι χαρακτήρες των ομάδων Sp και SO που αντιστοιχούν στη διαμέριση λ , τότε,

- $\pi_{Sp_{2n}}(\chi_{Sp}(\lambda)) = \begin{cases} \chi_{Sp_{2n}}(\lambda) & \text{αν } \lambda_1 \leq n, \\ \pm \chi_{Sp_{2n}}(\mu) & \text{με } |\mu| < |\lambda| \text{ και } \mu_1 \leq n, \text{ αν } \lambda_1 > n. \end{cases}$
- $\pi_{SO_{2n+1}}(\chi_{SO}(\lambda)) = \begin{cases} \chi_{SO_{2n+1}}(\lambda) & \text{αν } \lambda_1 \leq n, \\ \pm \chi_{SO_{2n+1}}(\mu) & \text{με } |\mu| < |\lambda| \text{ και } \mu_1 \leq n, \text{ αν } \lambda_1 > n. \end{cases}$

Απόδειξη. [9, Πρόταση 2.4.1] □

Πρόταση 5.1.13. Έστω $\nabla_{Sp_{2n'}}(\mu)$, $\nabla_{Sp_{2n'}}(\tau)$, τα Schur-πρότυπα της $Sp_{2n'}$, που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις μ, τ αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\nabla_{Sp_{2n'}}(\mu) \otimes \nabla_{Sp_{2n'}}(\tau) \cong \sum_{\substack{\lambda \in D(\mu, \tau) \\ \lambda_1 \leq n'}} a(\lambda, \mu, \tau) \nabla_{Sp_{2n'}}(\lambda) + \sum_{\substack{|\kappa| < |\tau| + |\mu| \\ \kappa_1 \leq n'}} b_\kappa \nabla_{Sp_{2n'}}(\kappa),$$

οπου $a(\lambda, \mu, \tau)$ είναι οι ακέραιοι που ορίστηκαν πριν από την πρόταση 4.1.7 και $b_k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω $\chi_{Sp}(\mu)$, $\chi_{Sp}(\tau)$ οι γενικευμένοι χαρακτήρες που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις μ και τ . Υπολογίζουμε το γινόμενο $\chi_{Sp}(\mu) \cdot \chi_{Sp}(\tau)$.

Από το Λήμμα 5.1.11 μπορούμε να εκφράσουμε το $\chi_{Sp}(\mu)$ ως \mathbf{Z} -γραμμικούς συνδυασμούς των γενικευμένων χαρακτήρων της GL , στη μορφή

$\chi_{Sp}(\mu) = \sum_{\sigma} a_{\sigma\mu} \chi_{GL}(\sigma)$, όπου $a_{\sigma\sigma} = 1$, και αν $|\sigma| \geq |\mu|$ και $\mu \neq \sigma$, τότε $a_{\sigma\mu} = 0$. Άρα για $\chi_{Sp}(\mu) = \chi_{GL}(\mu) + \sum_{|\sigma| < |\mu|} a_{\sigma\mu} \chi_{GL}(\sigma)$ και $\chi_{Sp}(\tau) = \chi_{GL}(\tau) + \sum_{|\rho| < |\tau|} a_{\tau\rho} \chi_{GL}(\rho)$, παίρνουμε

$\chi_{Sp}(\mu) \cdot \chi_{Sp}(\tau) = (\chi_{GL}(\mu) + \sum_{|\sigma| < |\mu|} a_{\sigma\mu} \chi_{GL}(\sigma)) (\chi_{GL}(\tau) + \sum_{|\rho| < |\tau|} a_{\tau\rho} \chi_{GL}(\rho))$.
 Τώρα για οποιοδήποτε γινόμενο $\chi_{GL}(\sigma) \cdot \chi_{GL}(\rho)$ με $\sigma \neq \mu$ και $\rho \neq \tau$ οι συναρτήσεις $\chi_{GL}(\xi)$ που προκύπτουν έχουν $|\xi| < |\mu| + |\tau|$ (*).

Απο την άλλη $\chi_{GL}(\mu) \cdot \chi_{GL}(\tau) = \sum_{\nu \in D(\mu, \tau)} a(\nu, \mu, \tau) \chi_{GL}(\nu)$. Για κάθε ν έχουμε

$\chi_{GL}(\nu) = \sum_{\xi} b_{\xi\nu} \chi_{Sp}(\xi)$ με $b_{\nu\nu} = 1$ και $b_{\xi\nu} = 0$ για $|\xi| > |\nu| = |\mu| + |\tau|$. (**)
 Συνοψίζοντας τα έως τώρα ευρήματα μας, από τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε

$\chi_{Sp}(\mu) \cdot \chi_{Sp}(\tau) = \sum_{\nu \in D(\mu, \tau)} a(\nu, \mu, \tau) \chi_{Sp}(\nu) + \gamma_{\xi} \sum_{|\xi| < |\mu| + |\tau|} \chi_{Sp}(\xi)$, όπου $\gamma_{\xi} \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζουμε τώρα και στα δύο μέρη της τελευταίας ισότητας την συνάρτηση $\pi_{Sp_{2n'}}$. Αφού $\mu_1 \leq n'$ και $\tau_1 \leq n'$ $\pi_{Sp_{2n'}}(\chi_{Sp}(\mu)) = \chi_{Sp_{2n'}}(\mu)$ και $\pi_{Sp_{2n'}}(\chi_{Sp}(\tau)) = \chi_{Sp_{2n'}}(\tau)$.

Τώρα για το δεξί μέλος έχουμε:

Αν το ν έχει $\nu'_1 \leq n'$ τότε απο το Λήμμα 5.1.12 έχουμε $\pi_{Sp_{2n'}}(\chi_{Sp}(\nu)) = \chi_{Sp_{2n'}}(\nu)$. Αν όχι τότε $\pi_{Sp_{2n'}}(\chi_{Sp}(\nu)) = \pm \chi_{Sp_{2n'}}(\kappa)$ με $|\kappa| < |\nu|$. Ομοίως και για τα $\chi_{Sp}(\xi)$. Συγεντρώνοντας όλα τα αποτελέσματα παίρνουμε την τελική μορφή της ισότητας:

$$\chi_{Sp_{2n'}}(\mu) \cdot \chi_{Sp_{2n'}}(\tau) = \sum_{\nu \in D(\mu, \tau) \nu_1 \leq n'} a(\nu, \mu, \tau) \chi_{Sp}(\nu) + b_{\kappa} \sum_{|\kappa| < |\mu| + |\tau|} \chi_{Sp_{2n'}}(\kappa),$$

όπου $b_{\kappa} \in \mathbb{Z}$.

Τώρα απο την στιγμή που η συνάρτηση $\chi_{Sp_{2n'}}(\mu) \cdot \chi_{Sp_{2n'}}(\tau)$ είναι ο χαρακτήρας του τανυστικού γινομένου τότε θα γράφεται ως θετικός γραμμικός συνδυασμός των χαρακτήρων $\chi_{Sp_{2n'}}(\lambda)$ της $Sp_{2n'}$. Συνεπώς οτιδήποτε διαγραφές θα συμβούν στην απο πάνω σχέση θα συμβούν στο κομμάτι $\sum_{|\kappa| < |\mu| + |\tau|} \chi_{Sp_{2n'}}(\kappa)$. Άρα μπορούμε να πούμε οτι μετα απο τις διαγραφές αυτές θα έχουμε

$$\chi_{Sp_{2n'}}(\mu) \cdot \chi_{Sp_{2n'}}(\tau) = \sum_{\nu \in D(\mu, \tau) \nu_1 \leq n'} a(\nu, \mu, \tau) \chi_{Sp}(\nu) + b_{\kappa} \sum_{|\kappa| < |\mu| + |\tau|} \chi_{Sp_{2n'}}(\kappa),$$

όπου $b_{\kappa} \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 5.1.14. Έστω $\nabla_G(\mu), \nabla_G(\tau)$, τα Schur-πρότυπα της $G = SO_{2m'+1}$, που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις μ, τ αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\nabla_G(\mu) \otimes \nabla_G(\tau) \cong \sum_{\substack{\lambda \in D(\mu, \tau) \\ \lambda_1 \leq m}} a(\lambda, \mu, \tau) \nabla_G(\lambda) + \sum_{\substack{|\kappa| < |\tau| + |\mu| \\ k_1 \leq m}} \gamma_{\kappa} \nabla_G(\kappa),$$

όπου $a(\lambda, \mu, \tau)$ είναι οι συντελεστές Littlewood-Richardson και $b_k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή για την περίπτωση της συμπλεκτικής ομάδας, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των χαρακτήρων της SO ως \mathbb{Z} -γραμμικούς συνδυασμούς των χαρακτήρων της GL όπως περιγράφονται στα Λήμματα 5.1.11 και 5.1.12. □

5.2 Η ανάλυση του γινομένου $M_\lambda M_\tau$ σε ανάγωγα G -πρότυπα.

Το επόμενο Λήμμα αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα της διδακτορικής διατριβής της K.Whitehead, [17]. Μας πληροφορεί ότι στην ειδική περίπτωση της ομάδας $GL_n \times GL_m$ το Schur-πρότυπο $\nabla_{GL_n}(\lambda)$ εμφυτεύεται στο γινόμενο των αναγώγων προτύπων $\tilde{M}_\mu \tilde{M}_\tau$ της συμμετρικής άλγεβρας $S(V \otimes W)$, για $\lambda \in D(\mu, \tau)$.

Λήμμα 5.2.1. Έστω λ διαμέριση, με $\lambda_1 \leq \{n, m\}$ και $\lambda \in D(\mu, \tau)$, τότε υπάρχει ένας GL_n -μονομορφισμός

$$\Phi_\lambda : \nabla_{GL_n}(\lambda) \rightarrow \tilde{M}_\mu \tilde{M}_\tau,$$

όπου $\tilde{M}_\mu \subseteq S(V \otimes W)$, $\tilde{M}_\mu \cong \nabla_{GL_n}(\mu) \otimes \nabla_{GL_m}(\mu)$. (αντίστοιχα για το \tilde{M}_τ .)

Απόδειξη. [17, Θεώρημα 6.1]. \square

Τώρα, η εικόνα του $\nabla_{GL_n}(\lambda)$ μέσα στο $S(V \otimes W)$ περιέχεται μέσα στο \tilde{M}_λ και μόνο σε αυτό. Επειδή \tilde{M}_λ είναι ανάγωγο $GL_n \times GL_m$ -πρότυπο παίρνουμε ότι $M_\lambda = G \cdot \nabla_{GL_n}(\lambda)$. Άρα $\tilde{M}_\lambda \subseteq \tilde{M}_\mu \tilde{M}_\tau$.

Γενικεύουμε το αποτέλεσμα αυτό για κάθε ομάδα $G_1 \times G_2$.

Λήμμα 5.2.2. Έστω λ διαμέριση, με $\lambda_1 \leq \{rkG_1, rkG_2\}$ και $\lambda \in D(\mu, \tau)$, τότε το ανάγωγο G_1 -πρότυπο $\nabla_{G_1}(\lambda)$, εμφανίζεται στην ανάλυση του $M_\mu M_\tau$, σε ανάγωγα G_1 -πρότυπα, όπου $M_\mu \subseteq A(G_1, G_2)$, $M_\mu \cong \nabla_{G_1}(\mu) \otimes \nabla_{G_2}(\mu)$ (αντίστοιχα για το M_τ).

Απόδειξη. Αυτό αποτελεί άμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.1.5 και του προηγούμενου Λήμματος. Για παράδειγμα κοιτάμε την περίπτωση της ομάδας $Sp_n \times SO_m$. Γνωρίζουμε ότι $\nabla_{Sp_n}(\lambda) = \nabla_{GL_n}(\lambda)/Z_\lambda$. Απο το Θεώρημα 3.1.5 έχουμε ότι $A(G_1, G_2) \cong S(V \otimes W)/I(G_1, G_2)$, διασπάται ως $G_1 \times G_2$ -πρότυπο ως $A(G_1, G_2) \cong \sum_\lambda \nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda)$. Αφού τώρα το $\nabla_{GL_n}(\lambda)$ εμφανίζεται στο γινόμενο $\tilde{M}_\mu \tilde{M}_\tau \subseteq S(V \otimes W)$ τότε ασφαλώς το $\nabla_{G_1}(\lambda)$ θα εμφανίζεται στο $M_\mu M_\tau \subseteq A(G_1, G_2)$. \square

Θεώρημα 5.2.3. Έστω G_1 μια από τις ομάδες $GL_n, Sp_{2n'}, SO_{2n'+1}$ (αντι- G_2 μια από τις $GL_m, Sp_{2m'}, SO_{2m'+1}$), μ, τ , και M_μ, M_τ τα ανάγωγα G -πρότυπα του δακτυλίου $A(G_1, G_2)$ που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις μ, τ . Τότε έχουμε

$$M_\mu M_\tau = \sum_{\substack{\lambda \in D(\mu, \tau) \\ \lambda_1 \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}}} M_\lambda$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} M_\lambda \subseteq M_\mu M_\tau$ προκύπτει από το Λήμμα 5.2.2. Για παράδειγμα το αποδεικνύουμε για την ομάδα $Sp_{2n'} \times SO_{2m'+1}$. Από το Λήμμα 5.2.2 για $\lambda \in D(\mu, \tau)$, έχουμε $\nabla_{Sp_{2n'}}(\lambda) \subseteq M_\mu M_\tau$. Τώρα αφού $\nabla_{Sp_{2n'}}(\lambda) \subseteq M_\lambda$ και M_λ είναι ανάγωγο $Sp_{2n'} \times SO_{2m'+1}$ -πρότυπο που παράγεται από το $\nabla_{Sp_{2n'}}(\lambda)$, έχουμε $M_\lambda \subseteq M_\mu M_\tau$.

Για την άλλη πλευρά. Σκεφτόμαστε ξανά την ομάδα $G = G_1 \times G_2 = Sp_{2n'} \times SO_{2m'+1}$. Αρχικά, αφού G είναι linearly reductive ομάδα, ο πολλαπλασιασμός $m : M_\mu \otimes M_\tau \rightarrow M_\mu M_\tau$, διασπάται. Οπότε υπάρχει ένας G -μονομορφισμός, $i : M_\mu M_\tau \rightarrow M_\mu \otimes M_\tau$. Έστω τώρα το διάγραμμα:

$$\begin{array}{c} M_\mu M_\tau \\ \downarrow i \\ M_\mu \otimes M_\tau \\ \downarrow \cong \\ (\nabla_{G_1}(\mu) \otimes \nabla_{G_2}(\mu)) \otimes (\nabla_{G_1}(\tau) \otimes \nabla_{G_2}(\tau)) \\ \downarrow \cong \\ \nabla_{G_1}(\mu) \otimes \nabla_{G_1}(\tau) \otimes \nabla_{G_2}(\mu) \otimes \nabla_{G_2}(\tau) \end{array}$$

Από τα Λήμματα 5.1.13 και 5.1.14 η τελευταία γραμμή του διαγράμματος είναι ισόμορφη με

$(\sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} a(\lambda, \mu, \tau) \nabla_{G_1}(\lambda) + \sum_{|\kappa| < |\tau| + |\mu|} b_\kappa \nabla_{G_1}(\kappa)) \otimes (\sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} a(\lambda, \mu, \tau) \nabla_{G_2}(\lambda) + \sum_{|\kappa| < |\tau| + |\mu|} \gamma_\kappa \nabla_{G_2}(\kappa))$, το οποίο είναι ισόμορφο με

$$\sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} a^2(\lambda, \mu, \tau) \nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda) + (\text{όλους τους άλλους συνδυασμούς}).$$

Έστω $M_\sigma \subseteq M_\mu M_\tau$. Τότε M_σ πρέπει να έχει μια εικόνα στο τελευταίο άθροισμα. Τώρα από την ομογένεια των βαθμών των πολυωνύμων παίρνουμε $|\sigma| = |\mu| + |\tau|$. Ξέρουμε ότι $M_\sigma \cong \nabla_{G_1}(\sigma) \otimes \nabla_{G_2}(\sigma)$, άρα M_σ μπορεί μόνο να εμφανίζεται στο άθροισμα $\sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} a^2(\lambda, \mu, \tau) \nabla_{G_1}(\lambda) \otimes \nabla_{G_2}(\lambda)$, άρα $\sigma \in D(\mu, \tau)$. Οπότε $M_\mu M_\tau \subseteq \sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} M_\lambda$. \square

Πόρισμα 5.2.4. Έστω I_μ, I_τ τα G -ιδεώδη που παράγονται από τα ανάγωγα G -πρότυπα M_μ και M_τ αντίστοιχα. Τότε

$$I_\mu I_\tau \cong \sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} I_\lambda.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in D(\mu, \tau)$, τότε $M_\lambda \subseteq M_\mu M_\tau \subseteq I_\mu I_\tau$. Αφού τώρα I_λ παράγεται από το M_λ έχουμε $I_\lambda \subseteq I_\mu I_\tau$.

Αντίστροφα, έστω $x \in I_\mu I_\tau$, τότε $x = \sum a_i b_i$ όπου $a_i \in I_\mu$ και $b_i \in I_\tau$. Αφού I_μ παράγεται από το M_μ , για κάθε i , $a_i = \sum p_{ij} s_j$ όπου $s_j \in M_\mu$ και

$p_{ij} \in A(G_1, G_2)$. Όμοια $b_i = \sum q_{ik} t_k$ όπου $t_k \in M_\tau$ και $q_{ik} \in A(G_1, G_2)$. Τότε $x = \sum \sum \sum p_{ij} q_{ik} s_j t_k \in A(G_1, G_2) M_\mu M_\tau = A(G_1, G_2) \sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} M_\lambda = \sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} I_\lambda$.
 Συνεπώς

$$I_\mu I_\tau \cong \sum_{\lambda \in D(\mu, \tau)} I_\lambda.$$

□

Κεφάλαιο 6

Πρώτα και Πρωταρχικά G -ιδεώδη

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε μερικά κύρια πορίσματα των βασικών θεωρημάτων που αποδείξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα περιγράφουμε ποια είναι τα πρώτα και τα πρωταρχικά G -αναλλοίωτα ιδεώδη του δακτυλίου $A(G_1, G_2)$. Ακόμα δίνουμε τη μορφή της πρωταρχικής διάσπασης ενός G -αναλλοίωτου ιδεώδους.

6.1 Πρώτα G -ιδεώδη

Πρόταση 6.1.1. Έστω I_λ , το G -αναλλοίωτο ιδεώδες που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ . Τότε το I_λ είναι πρώτο αν και μόνο αν $\lambda = (k)$, όπου $k \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}$, δηλαδή αποτελεί διαμέριση μιας γραμμής με μήκος το πολύ $\min\{rkG_1, rkG_2\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\lambda = (k)$. Είναι γνωστό ότι για την περίπτωση όπου $G = GL_n \times GL_m$ τα ιδεώδη $I_{(k)}$ με $k \leq \min\{n, m\}$ είναι πρώτα ιδεώδη του $S(V \otimes W)$ [2, Θεώρημα 5.2]. Έστω τώρα $G = G_1 \times G_2$ και $I_{(k)}$ το G -αναλλοίωτο ιδεώδες του $A(G_1, G_2)$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση (k) με $k \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $G_1 \times G_2$ -επιμορφισμός $\pi : S(V \otimes W) \rightarrow A(G_1, G_2)$ απεικονίζει το $GL_n \times GL_m$ -αναλλοίωτο ιδεώδες που αντιστοιχεί στην διαμέριση (k) επιμορφικά στο $I_{(k)}$ έπεται άμεσα ότι το $I_{(k)}$ είναι πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου $A(G_1, G_2)$.

Αντίστροφα, γνωρίζουμε ότι $M_\lambda = G \cdot f(C_\lambda)$. Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq (k)$, δηλαδή $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, $s \geq 2$. Έστω $\lambda' = (\lambda_1)$ και $\lambda'' = (\lambda_2, \dots, \lambda_s)$. Αφού $\lambda \not\subseteq \lambda'$ και $\lambda \not\subseteq \lambda''$ τότε τα στοιχεία $\tilde{f}(C_{\lambda'})$, $\tilde{f}(C_{\lambda''})$ δεν βρίσκονται μέσα στο I_λ , διότι διαφορετικά τα ιδεώδη, που παράγονται ως G -πρότυπα από αυτά τα στοιχεία, $I_{\lambda'}$ και $I_{\lambda''}$, θα περιέχονταν μέσα στο I_λ και αυτό θα αντέκρουε το πόρισμα Πόρισμα 4.1.4. Από την άλλη όμως $\tilde{f}(C_\lambda) = \tilde{f}(C_{\lambda'})\tilde{f}(C_{\lambda''}) \in I_\lambda$. Άρα το I_λ δεν είναι πρώτο ιδεώδες. \square

Πόρισμα 6.1.2. Έστω I ένα G -αναλοίωτο ιδεώδες του $A(G_1, G_2)$. Τότε το I είναι πρώτο, αν και μόνο αν $I = I_{(k)}$, με $k \leq \min\{rkG_1, rkG_2\}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αποτελεί απλή εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε G -αναλοίωτο ιδεώδες I γράφεται ως άθροισμα ιδεωδών I_σ .

□

6.2 Πρωταρχικά G -ιδεώδη και Πρωταρχικές Ανάλυσεις.

Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε ότι τα μοναδικά πρώτα G -ιδεώδη είναι τα I_λ όπου λ είναι διαμέριση με μία γραμμή μήκους το πολύ $\min\{rkG_1, rkG_2\}$. Έυκολα μπορεί κάποιος να δει ότι σε ένα μεταθετικό δακτύλιο R αν I είναι πρωταρχικό ιδεώδες τότε το ριζικό του, \sqrt{I} είναι πρώτο ιδεώδες. Άρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον εξής ορισμό,

Ορισμός 6.2.1. Ένα G -ιδεώδες I θα ονομάζεται $I_{(k)}$ -πρωταρχικό αν είναι πρωταρχικό δηλαδή για $xy \in I$ τότε $x \in I$ ή $y^n \in I$ και $\sqrt{I} = I_k$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε G -ιδεώδες I μπορεί να γραφεί στη μορφή $\sum I_\sigma$, όπου σ διαμερίσεις. Θα ονομάζουμε την ανάλυση του ιδεώδους αυτή ανάγωγη αν τα I_σ που παρουσιάζονται δεν περιέχεται το ένα μέσα στο άλλο.

Πρόταση 6.2.2. Έστω I ένα G -αναλοίωτο ιδεώδες γραμμένο σε ανάγωγη ανάλυση ως $I = \sum_{\sigma \in S} I_\sigma$, τότε το I είναι I_k -πρωταρχικό αν και μόνο αν

1. για κάποιο $\sigma_0 \in S$, $\sigma_0 = (k, k, \dots, k)$ δηλαδή έχει σχήμα ορθογωνίου με κάθε σειρά μήκους k ,
2. αν $\sigma \in S$ και $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_t)$ τότε $\sigma_i \geq k$, δηλαδή όλες οι γραμμές της διαμέρισης σ έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του k .

Απόδειξη. Έστω ότι ικανοποιούνται τα (1) και (2) της πρότασης. Τότε για κάθε $\sigma \in S$ έχουμε $(k) \subseteq \sigma$ και άρα $I_\sigma \subseteq I_{(k)}$. Άρα $I \subseteq I_{(k)}$ και $\sqrt{I} \subseteq I_{(k)}$. Τώρα αν $\sigma_0 = (k^t)$ έχουμε ότι $(\tilde{f}(C_{(k)}))^t = \tilde{f}(C_{\sigma_0})$. Τώρα το ανάγωγο G -πρότυπο M_{σ_0} παράγεται από το $\tilde{f}(C_{\sigma_0})$ και άρα $\tilde{f}(C_{(k)}) \in I_{\sigma_0}$. Συνεπώς $I_{(k)} \subseteq \sqrt{I}$. Άρα $I_{(k)} = \sqrt{I}$.

Έστω ότι $I = \sum_{\sigma \in S} I_\sigma$, $I_{(k)}$ -πρωταρχικό. Έστω ότι το ελάχιστο μήκος γραμμής σε κάθε $\sigma \in S$ είναι j . Τότε αφού το I είναι γραμμένο σε ανάγωγη μορφή για $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_t, j)$ έχουμε $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_t) \notin S$. Άρα $\tilde{f}(C_{\sigma'}) \notin I$. Αφού όμως $\tilde{f}(C_{\sigma'})\tilde{f}(C_j) \in I$ και I είναι πρωταρχικό τότε $(\tilde{f}(C_j))^n \in I$ για κάποιο n . Συνεπώς $I_{(j)} \subseteq I_{(k)} = \sqrt{I}$. Άρα $k \leq j$ και έτσι παίρνουμε την (2).

Για το (1) σκεφτόμαστε ως εξής. Αφού $\sqrt{I} = I_{(k)}$ έχουμε ότι θα υπάρχει n έτσι ώστε $(\tilde{f}(C_{(k)}))^n = (\tilde{f}(C_{(k^n)})) \in I$. Δηλαδή $I_{(k^n)} \subseteq I$. Έυκολα βλέπουμε

σχεφτόμενοι τα διαγράμματα και το πόρισμα $I_\lambda \subseteq I_\mu$ αν και μόνο αν $\mu \subseteq \lambda$ ότι $I_{(k^n)} \subseteq I_{\sigma_0}$ για κάποιο $\sigma_0 \in S$. Άρα $\sigma_0 \subseteq (k^n)$. Τώρα αφού κάθε γραμμή του σ_0 έχει μήκος τουλάχιστον k παίρνουμε ότι $\sigma_0 = (k^t)$ για κάποιο t . \square

Πόρισμα 6.2.3. Ένα G -ιδεώδες I_σ είναι πρωταρχικό αν και μόνο αν σ είναι ορθογώνιο.

Πόρισμα 6.2.4. Έστω $n_1 > n_2 > \dots > n_k$ τα διακεκριμένα μήκη των σειρών ενός διαγράμματος σ και $\sigma^{(i)}$ το μεγαλύτερο ορθογώνιο διάγραμμα με σειρές μήκους n_i που περιέχει στο σ . Τότε

$$I_\sigma = I_{\sigma^{(1)}} \cap \dots \cap I_{\sigma^{(k)}},$$

είναι μια ανάγωγη πρωταρχική διάσπαση του I_σ .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη που δίνεται στο [2, Πόρισμα 5.4], για την περίπτωση της $G = GL_n \times GL_m$. \square

Βιβλιογραφία

- [1] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, *Schur Functors and Schur Complexes*, Advances in mathematics 44, 207-298 (1982)
- [2] C. DeConcini, D.Eisenbud and C.Procesi, *Young Diagrams and Determinantal Varieties*, Inventiones math. 56, 129-165 (1980)
- [3] S. Donkin, *Finite Resolutions of Modules for Reductive Algebraic Groups*, Journal of Algebra 101,473-488 (1986)
- [4] W. Fulton, *Young Tableaux*, Cambridge University press (1997)
- [5] H. Geranios, *On Invariant Ideals associated to Classical Groups*, Journal of Algebra 324, 269-281 (2010).
- [6] G.A. Green, *Polynomial representations of GL_n* , (Lecture Notes in Math. 830) 1980 (Springer).
- [7] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebra and Representation Theory*, Springer (1972)
- [8] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, second ed., Math. Surveys Monogr., vol 107, Amer. Math. soc., 2003.
- [9] K.Koike and I.Terada, *Young Diagrammatic Methods for the Representation Theory of the classical Groups of Type B_n, C_n, D_n* , Journal of Algebra vol.107, 466-511 (1987)
- [10] I. G. Macdonald, *symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition Oxford Mathematical Monographs, (1995)
- [11] M. Maliakas, *Cauchy decompositions and invariants*, Math. Z. 235, 629-650 (2000)
- [12] M. Maliakas, *Schur functors for the symplectic groups*, Commun. in Algebra, 19, 297-324 (1991)
- [13] M. Maliakas, *A Note on the Straightening Law for the Symplectic Group*, Linear and Multilinear Algebra, 33, 131-136 (1993)

- [14] M. Maliakas, *On induced modules and tableaux for the special orthogonal groups*, Linear and multilinear Algebra, 38, 283-294 (1995)
- [15] D.G. Northcott F.R.S, *Multilinear algebra*, Cambridge University press (1984)
- [16] E.Strickland, *The Symplectic Group and Determinants*, Journal of Algebra 66, 511-533 (1980)
- [17] K. Whitehead, *Thesis, University of Minnesota. (1982)*