Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ- ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΘΑΝΑΣΙΑΣ ΜΑΝΟΥ

Αθήνα
2014

Στον Οδυσσέα και τον Θανάση

Με την ολοκλήρωση της διδακτορικής διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντά μου, αναπληρωτή καθηγητή κ. Α. Οικονόμου για την καθοδήγησή του. Με τη μεθοδικότητα και τη μεταδοτικότητά του καθώς και με την ενθάρρυνση και την υποστήριξη που απλόχερα μου παρείχε, έκανε την εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής μια πολύτιμη και ευχάριστη εμπειρία.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Κ. Μηλολιδάκη και τον καθηγητή κ. Α. Μπουρνέτα που συμμετείχαν στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή για τη στήριξή τους και τις γνώσεις που μου μετέδωσαν σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Επιπλέον, ευχαριστώ τους καθηγητές κ. Ε. Μαγείρου και κ. Χ. Παπαγεωργίου, καθώς και τους αναπληρωτές καθηγητές κ. Ε. Κυριακίδη και κ. Δ. Φακίνο που μου έκαναν την τιμή να συμμετέχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή της διδακτορικής διατριβής μου. Ευχαριστώ, επίσης, το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική ενίσχυση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνοδοιπόρο μου στη ζωή και τις σπουδές, Οδυσσέα. Τον ευχαριστώ για την αγάπη και την στήριξή του όλα αυτά τα χρόνια. Ευχαριστώ, ακόμη, τις οικογένειές μας για τη στήριξη, τη βοήθεια και την κατανόησή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μας και τον γιό μας, Θανάση, που κάνει πιο ευτυχισμένη την κάθε μας μέρα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ουρές αναμονής

Ένα σημαντικό μέρος της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι αφιερωμένο στη μελέτη των ουρών αναμονής (συστημάτων εξυπηρέτησης). Ως ουρά αναμονής ορίζεται κάθε σύστημα που παρέχει εξυπηρέτηση σε πελάτες που φθάνουν σε αυτό. Συνεπώς, ως ουρές αναμονής μπορούν να περιγραφούν και να μελετηθούν συστήματα όπως ένας σταθμός του μετρό, μια τράπεζα, μια αποθήκη, ένα τηλεφωνικό κέντρο και έτσι η θεωρία ουρών βρίσκει εφαρμογές στις μεταφορές, στη βιομηχανία, στις τηλεπικοινωνίες και αλλού. Κάθε τέτοιο σύστημα διαθέτει έναν ή περισσότερους υπηρέτες και έναν χώρο αναμονής με άπειρη ή περιορισμένη χωρητικότητα, όπου περιμένουν οι πελάτες που δε μπορούν να εξυπηρετηθούν άμεσα. Στη γενική περίπτωση, σε μια ουρά αναμονής υπάρχει τυχαιότητα τόσο στους χρόνους των αφίξεων των διαδοχικών πελατών όσο και στους χρόνους εξυπηρέτησης κάθε πελάτη. Λόγω αυτής της τυχαιότητας, κάθε σύστημα εξυπηρέτησης για να περιγραφεί και να μελετηθεί πρέπει να παρασταθεί με κάποια κατάλληλα ορισμένη στοχαστική διαδικασία.

Τα κύρια χαρακτηριστικά κάθε ουράς αναμονής είναι η διαδικασία αφίξεων, ο μηχανισμός εξυπηρέτησης και η πειθαρχία ουράς.

Η διαδικασία αφίξεων

Αυτή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο καταφθάνουν οι διαδοχικοί πελάτες στο σύστημα και ορίζεται από την κατανομή των χρονικών στιγμών των αντίστοιχων αφίξεων ή ισοδύναμα από τη στοχαστική εξάρτηση των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων. Οι κυριότερες περιπτώσεις είναι: η Poisson διαδικασία αφίξεων, η σταθερή διαδικασία αφίξεων και η ανανεωτική διαδικασία αφίξεων.

Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης

Αυτός ορίζεται από τον αριθμό των υπηρετών που λειτουργούν παράλληλα και από την κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης. Υποθέτουμε ότι οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γενική κατανομή και πεπερασμένη μέση τιμή. Οι κυριότερες ειδικές περιπτώσεις προκύπτουν όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή, Erlang κατανομή, υπερεκθετική κατανομή καθώς και όταν έχουμε σταθερούς χρόνους εξυπηρέτησης.

Η πειθαρχία ουράς

Αυτή αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται οι πελάτες που βρίσκονται στον χώρο αναμονής για να εξυπηρετηθούν. Η συνήθης πειθαρχία ουράς είναι η FCFS (First-Come-First-Served), όπου κάθε πελάτης εξυπηρετείται σύμφωνα με τη σειρά που φθάνει στο σύστημα. Άλλες σημαντικές πειθαρχίες ουράς είναι η LCFS (Last-Come-First-Served), όπου κάθε φορά που ο υπηρέτης είναι ελεύθερος, επιλέγει για εξυπηρέτηση τον πελάτη που αφίχθηκε πιο πρόσφατα και η SIRO (Service-In-Random-Order), όπου η επιλογή για εξυπηρέτηση γίνεται εντελώς τυχαία. Υπάρχουν ακόμη πειθαρχίες ουράς που λαμβάνουν υπόψη τους συγκεκριμένους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών που περιμένουν και πειθαρχίες που θέτουν προτεραιότητες για συγκεκριμένους τύπους πελατών. Οι τελευταίες διακρίνονται σε διακόπτουσες (την παρούσα εξυπηρέτηση) και μη-διακόπτουσες. Οι διακόπτουσες διακρίνονται σε συντηρητικές με την έννοια ότι δεν επιφέρουν απώλεια του χρόνου εξυπηρέτησης και σε μη-συντηρητικές.

Το πρώτο άρθρο πάνω στις ουρές αναμονής ήταν του Δανού μηχανικού Erlang (1909). O Kendall (1953) εισήγαγε πρώτος τον συμβολισμό A/B/c, τον οποίο χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα για την περιγραφή μιας ουράς. Η έννοια της υπαναχώρησης (reneging) εισήχθη από τον Palm (1938) και ανακαλύφθηκε εκ νέου και πήρε το όνομά της από τον Haight (1958). Ο ίδιος εισήγαγε τις έννοιες της αποχώρησης (balking) και των παράλληλων ουρών (parallel queues). O Cohen (1957) φαίνεται να είναι ο πρώτος που μελέτησε ουρές με επαναπροσπάθειες (retrial queues). 0 Little (1961) δημοσιεύσε την απόδειξη του ομώνυμου Θεωρήματός του, ενώ ο Wolff (1982) ονόμασε, διέδωσε κι έδωσε μια αυστηρή απόδειξη για την ιδιότητα PASTA, παρόλο που αυτή ήταν ήδη γνωστή (βλέπε Cooper, 1981).

Οι Yechiali και Naor (1971) και ο Neuts (1971) ασχολήθηκαν πρώτοι με συστήματα εξυπηρέτησης σε τυχαίο περιβάλλον, δηλαδή με συστήματα στα οποία οι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρετήσεων δεν είναι σταθεροί αλλά εξαρτώνται από την κατάσταση κάποιας εξωτερικής διαδικασίας. Ακόμη και στα πιο απλά συστήματα εξυπηρέτησης σε τυχαίο περιβάλλον είναι πολύ δύσκολο να δωθεί η στάσιμη κατανομή σε κλειστή αναλυτική μορφή. Συνήθως στις εργασίες, γίνεται χρήση πιθανογεννητριών και πινακοαναλυτικών μεθόδων για να προσδιορισθεί η στάσιμη κατανομή. Οι κυριότερες πινακοαναλυτικές μέθοδοι παρουσιάζονται στα συγγράμματα των Neuts (1999) και Latouche και Ramaswami (1999).

Σε κάποια συστήματα, οι διαδικασίες αφίξεων και εξυπηρετήσεων είναι πολύ ταχύτερες από τις υπόλοιπες διαδικασίες (π.χ. ενεργοποίησεις, απενεργοποιήσεις υπηρετών, αλλαγές ταχύτητας εξυπηρέτησης κ.λ.π.). Έτσι, σε αυτά μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουμε συνεχή ροή εισόδου και εξόδου και μοντελοποιούνται σαν συστήματα εξυπηρέτησης ρευστού. Τέτοια συστήματα μελετήθηκαν από τους Kosten (1974a,b), Kosten και Vrieze (1975), Anick, Mitra και Sondhi (1982), Asmussen (1995), Karandikar και Kulkarni (1995), Kurkarni και Rolski (1994) και άλλους.

Αρχικά, η μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης επικεντρωνόταν στον προσδιορισμό κάποιων μέτρων απόδοσης, όπως το μέσο μήκος ουράς, ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα κ.α. Σε αυτές τις μελέτες η συμπεριφορά του πελάτη ήταν παθητική με την έννοια ότι αυτή δεν επηρεαζόταν από την ποιότητα της εξυπηρέτησης. Αργότερα, έγινε αντιληπτό ότι θα ήταν πιο ρεαλιστικό να υποτεθεί ότι η συμπεριφορά ενός πελάτη εξαρτάται από τη συμπεριφορά του υπηρέτη και των υπόλοιπων πελατών. Έτσι, η τελική κατάσταση του συστήματος είναι η κατάσταση ισορροπίας στο παιχνίδι που προκύπτει μεταξύ των παραπάνω. Ο πρώτος που μελέτησε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε μια ουρά αναμονής ήταν ο Naor (1969), ο οποίος θεώρησε την M/M/1 ουρά υποθέτωντας ότι οι πελάτες αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν, γνωρίζοντας τον αριθμό των πελατών στο σύστημα κατά την άφιξή τους. Ο Naor για να μοντελοποιήσει την επιθυμία των πελατών για εξυπηρέτηση και την απροθυμία τους να περιμένουν στην ουρά για μεγάλο χρονικό διάστημα, εισήγαγε μια γραμμική δομή αμοιβής - κόστους στο σύστημα. Έτσι, κάθε πελάτης υπολογίζει το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του ως τη διαφορά του αναμενόμενου κόστους λόγω παραμονής στο σύστημα από την αμοιβή του λόγω εξυπηρέτησης και αποφασίζει αν θα εισέλθει σε αυτό ή θα αποχωρήσει δίχως να εξυπηρετηθεί.

Με την εισαγωγή μιας δομής αμοιβής - κόστους στο σύστημα (τιμολογώντας την ουρά) και της δυνατότητας των πελατών να λαμβάνουν αποφάσεις, προκύπτει ένα σύστημα στο οποίο η συμπεριφορά ενός πελάτη εξαρτάται από τη συμπεριφορά των υπόλοιπων πελατών και τις παραμέτρους του συστήματος, οι οποίες μπορεί να θεωρηθεί ότι ρυθμίζονται από τον κεντρικό διαχειριστή του συστήματος. Για την αρχική ανάλυση, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι πελάτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους με σκοπό τη μεγιστοποίηση του ατομικού τους κέρδους ή του κοινωνικού κέρδους. Στην πρώτη περίπτωση, η συμπεριφορά των πελατών προσδιορίζεται ως το σημείο ισορροπίας στο παιχνίδι μεταξύ των πελατών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση προκύπτει από την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Σε δεύτερο επίπεδο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο διαχειριστής του συστήματος, γνωρίζοντας τη συμπεριφορά των πελατών, λαμβάνει αποφάσεις για τις παραμέτρους του συστήματος με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κοινωνικού ή ατομικού του κέρδους. Σε κάθε περίπτωση η συμπεριφορά προσδιορίζεται ως η λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

Μετά τον Naor, οι Edelson και Hildebrand (1975) συνέχισαν τη μελέτη της συμπεριφοράς των πελατών στη M/M/1 ουρά. Σε αυτή την εργασία μελετάται η μη παρατηρήσιμη περίπτωση, δηλαδή θεωρείται ότι οι πελάτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους χωρίς να γνωρίζουν τον αριθμό των παρόντων πελατών στο σύστημα κατά την άφιξή τους. Συγκρίνοντας αυτές τις δύο αρχικές εργασίες, παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά των πελατών επηρεάζεται από το επίπεδο πληροφόρησης που τους παρέχεται. Το ίδιο συμβαίνει και με τη συμπεριφορά του διαχειριστή.

Τα χρόνια που ακολούθησαν, πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με την οικονομική ανάλυση της συμπεριφοράς των πελατών σε επεκτάσεις/τροποποιήσεις της M/M/1 ουράς, όπως οι Hassin και Haviv (1997), Burnetas και Economou (2007), Hassin (2007), Economou και Kanta (2008a,2008b), Sun et al. (2010) κ.α. Τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε συστήματα με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης μελέτησαν οι Altman και Hassin (2002), Economou, Gomez-Corral και Kanta (2011) και ο Kerner (2011). Στα βιβλία των Hassin και Haviv (2003) και Stidham (2009) συνοψίζονται οι βασικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις και σημαντικά αποτελέσματα από αυτή την περιοχή.

1.2 Παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο

Σκοπός της διατριβής είναι η οικονομική ανάλυση της συμπεριφοράς των πελατών όταν, φτάνοντας στην ουρά, έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν αν θα εισέλθουν σε αυτήν ή θα αποχωρήσουν. Θεωρούμε ότι οι πελάτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν το ατομικό ή κοινωνικό όφελος, βασιζόμενοι σε μια δομή αμοιβής - κόστους που έχει εισαχθεί. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι κάθε πελάτης λαμβάνει R χρηματικές μονάδες όταν ολοκληρώνεται η εξυπηρέτησή του και έχει κόστος K χρηματικές μονάδες ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Έτσι, το κέρδος του ποσοτικοποιεί την επιθυμία του να εξυπηρετηθεί, ενώ το κόστος την απροθυμία να περιμένει στην ουρά για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Στην περίπτωση που ο πελάτης λαμβάνει την απόφασή του με γνώμονα τη μεγιστοποίηση του ατομικού του όφελους, λειτουργεί ως εξής: υπολογίζει το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του αν μπει στην ουρά και στην περίπτωση που αυτό είναι μη αρνητικό μπαίνει, αλλιώς αποχωρεί. Όμως, το αναμενόμενο κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη εξαρτάται από τις αποφάσεις των υπόλοιπων πελατών. Για παράδειγμα, σε μια ουρά με πειθαρχία $FCFS$, η απόφαση των υπόλοιπων πελατών να μπουν αυξάνει τον μέσο χρόνο αναμονής του συγκεκριμένου πελάτη, συνεπώς μειώνει το αναμενόμενο κέρδος του. Επίσης, σε έναν σταθμό ενός μέσου μαζικής μεταφοράς, όπου το μεταφορικό μέσο έχει περιορισμένη χωρητικότητα, η απόφαση των υπόλοιπων πελατών να εισέλθουν, μειώνει την πιθανότητα να εξυπηρετηθεί ο συγκεκριμένος πελάτης καθώς είναι πιο πιθανό η χωρητικότητα του μέσου να μην είναι αρκετή ώστε να τον εξυπηρετήσει. Τελικά, κάθε πελάτης λαμβάνοντας υπόψη τις αποφάσεις των άλλων πελατών, αποφασίζει με στόχο τη μεγιστοποίηση του ατομικού του οφέλους. Συνεπώς, η κατάσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ των πελατών. Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μερικές έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων που είναι απαραίτητες για την περαιτέρω ανάλυση. Θα παρουσιάσουμε το κλασικό πλαίσιο για παιχνίδια με πεπερασμένο αριθμό παικτών χωρίς συνεργασία.

Ορισμός 1.2.1. (Καθαρή Στρατηγική, Μικτή Στρατηγική, Στρατηγική Κατάσταση (Pure Strategy, Mixed Strategy, Strategy profile)). *Έστω $N = \{1, 2, ..., n\}$ ένα σύνολο παικτών και A_i το σύνολο των ενεργειών για τον παίκτη $i \in N$. Καθαρή στρατηγική του παίκτη i ονομάζουμε κάθε ενέργεια από το A_i. Μικτή στρατηγική του* *παίκτη i ονομάζουμε κάθε κατανομή πιθανότητας πάνω στον χώρο των στρατηγικών του A_i. Το σύνολο των μικτών στρατηγικών του παίκτη i το συμβολίζουμε με S_i. Στρατηγική κατάσταση ονομάζουμε ένα διάνυσμα $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ το οποίο καθορίζει μια στρατηγική $s_i \in S_i$ για κάθε παίκτη. Το σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων συμβολίζεται με S.*

Ορισμός 1.2.2. (Παιχνίδι Χωρίς Συνεργασία (Non Cooperative Game)). *Ένα παιχνίδι χωρίς συνεργασία αποτελείται από τα εξής: (i)Ένα πεπερασμένο σύνολο $N = \{1, 2, ..., n\}$ που αντιπροσωπεύει τους παίκτες. (ii) Για κάθε παίκτη $i \in N$, ένα σύνολο A_i που αντιπροσωπεύει τις στρατηγικές του. (iii) Για κάθε παίκτη $i \in N$, μια πραγματική συνάρτηση $F_i(s)$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων, που αντιπροσωπεύει την πληρωμή του παίκτη i για κάθε στρατηγική κατάσταση s. Η συνάρτηση F_i ονομάζεται συνάρτηση πληρωμής του παίκτη i.*

Παρατήρηση 1.2.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πληρωμής $F_i(s)$ είναι γραμμική ως προς s_i, $i \in N$. Δηλαδή, αν s_{-i} είναι μια στρατηγική κατάσταση για το σύνολο των παικτών $N \setminus \{i\}$ και η s_i είναι μια μίξη των στρατηγικών s_i^1 και s_i^2 με πιθανότητες α και $1 - \alpha$ αντίστοιχα, τότε*

$$F_i(s_i, s_{-i}) = \alpha F_i(s_i^1, s_{-i}) + (1 - \alpha) F_i(s_i^2, s_{-i}).$$

Ορισμός 1.2.3. (Ασθενής Κυριαρχία (Weak Dominance)). *Μια στρατηγική s_i^1 θα λέμε ότι κυριαρχεί ασθενώς επί μιας στρατηγικής s_i^2, αν ισχύει*

$$F_i(s_i^1, s_{-i}) \geq F_i(s_i^2, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$$

και η ανισότητα ισχύει αυστηρά για τουλάχιστον μία στρατηγική $s_{-i} \in \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$. Μια στρατηγική s_i θα λέμε ότι είναι ασθενώς κυριαρχούσα αν κυριαρχεί ασθενώς επί όλων των άλλων στρατηγικών στο S_i.

Ορισμός 1.2.4. (Βέλτιστη Απάντηση (Best Response)). *Θα λέμε ότι η στρατηγική s_i^* του παίκτη i αποτελεί βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική κατάσταση s αν η πληρωμή του παίκτη i μεγιστοποιείται όταν αυτός επιλέξει τη στρατηγική s_i^* και οι υπόλοιποι λειτουργήσουν σύμφωνα με τη στρατηγική s. Δηλαδή, αν*

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} F_i(s_i, s_{-i}).$$

Ορισμός 1.2.5. (Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας ή Σημείο Nash (Nash equilibrium)). *Μια στρατηγική κατάσταση $s^e \in S$ ονομάζεται σημείο στρατηγικής ισορροπίας (ΣΣΙ) ή σημείο Nash αν η στρατηγική s_i^e που ακολουθεί ο παίκτης i, για κάθε $i \in N$, είναι βέλτιστη απάντηση στην s^e. Δηλαδή,*

$$s^e \; \Sigma\Sigma I \; \Leftrightarrow F_i(s_i^e, s_{-i}^e) \geq F_i(s_i, s_{-i}^e), \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in N.$$

Στα συστήματα τα οποία θα εξετάσουμε στην παρούσα διατριβή θα υποθέσουμε ότι έχουμε άπειρους πελάτες όμοιους μεταξύ τους. Συνεπώς, τα προβλήματα θα αντιμετωπιστούν ως συμμετρικά παιχνίδια μεταξύ των παικτών-πελατών. Θα συμβολίσουμε με S το κοινό σύνολο των στρατηγικών τους και με F τη συνάρτηση πληρωμής, δηλαδή $F(s_1, s_2)$ είναι η πληρωμή ενός πελάτη όταν αυτός επιλέγει τη στρατηγική $s_1 \in S$ ενώ όλοι οι υπόλοιποι τη στρατηγική $s_2 \in S$. Στην περίπτωση αυτή θα αναζητήσουμε συμμετρικά ΣΣΙ. Ο ορισμός των συμμετρικών ΣΣΙ είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 1.2.6. (Συμμετρικό Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας ή Συμμετρικό Σημείο Nash (Symmetric Nash Equilibrium)). *Μια στρατηγική $s^e \in S$ ονομάζεται συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας ή συμμετρικό σημείο Nash αν αποτελεί βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, δηλαδή*

$$F(s^e, s^e) \geq F(s, s^e), \quad \forall s \in S.$$

Στη συνέχεια της διατριβής όταν λέμε σημείο στρατηγικής ισορροπίας ή στρατηγική ισορροπίας θα εννοούμε συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας. Επίσης, όταν λέμε κυριαρχούσα στρατηγική θα εννοούμε ασθενώς κυριαρχούσα στρατηγική. Πρέπει ακόμη να τονιστεί ότι δεν υπάρχει πάντα ΣΣΙ και όταν υπάρχει μπορεί να μην είναι μοναδικό.

Ένα συμμετρικό ΣΣΙ είναι μια στρατηγική που αποτελεί βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Μπορεί όμως να μην είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση. Ας υποθέσουμε ότι η s^e είναι ΣΣΙ και ότι υπάρχει άλλη μια βέλτιστη απάντηση στην s^e, η $s^* \neq s^e$, η οποία είναι αυστηρά καλύτερη απάντηση στον εαυτό της από την s^e. Τότε οι πελάτες ξεκινώντας από την s^e, μπορούν να παρεκλίνουν στην s^* και να παραμείνουν για πάντα σε αυτή. Αν όμως δεν υπάρχει τέτοια στρατηγική s^*, οι πελάτες θα παραμείνουν για πάντα στην s^e. Μια τέτοια στρατηγική s^e λέγεται εξελικτικά ευσταθής στρατηγική. Αυστηρότερα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.2.7. (Εξελικτικά Ευσταθής Στρατηγική - ΕΕΣ (Evolutionary Stable Strategy - ESS)). *Μια στρατηγική κατάσταση $s^e \in S$ ονομάζεται εξελικτικά ευσταθής στρατηγική (ΕΕΣ) αν είναι συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας και για κάθε $s^* \in S$ με $F(s^e, s^e) = F(s^*, s^e)$, ισχύει $F(s^e, s^*) > F(s^*, s^*)$.*

Ένας χαρακτηρισμός που μπορεί να προκύψει για τη συμπεριφορά των πελατών σε μια ουρά αναμονής είναι αν αυτή είναι ''σύμφωνα με το πλήθος '' ή ''αντίθετα με το πλήθος ''. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.8. (Σύμφωνα με Το Πλήθος - ΣΤΠ, Αντίθετα με Το Πλήθος - ΑΤΠ (Follow The Crowd - FTC, Avoid The Crowd - ATC)). *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων S είναι γραμμικά διατεταγμένο και για κάθε $y \in S$ υπάρχει βέλτιστη απάντηση*

$$x(y) = \arg\max_{x \in S} F(x, y),$$

όπου $x(y)$ είναι μια συνεχής και μονότονη συνάρτηση. Αν η $x(y)$ είναι αύξουσα, το μοντέλο είναι τύπου Σύμφωνα-με-Το-Πλήθος (ΣΤΠ), ενώ όταν είναι φθίνουσα είναι τύπου Αντίθετα-με-Το-Πλήθος (ΑΤΠ).

Ένα ΣΣΙ y ικανοποιεί τη σχέση $x(y) = y$, δηλαδή είναι σταθερό σημείο της συνάρτησης x. Έτσι, είναι πολύ σημαντικό να χαρακτηριστεί ένα μοντέλο ως ΑΤΠ ή ΣΤΠ καθώς στην πρώτη περίπτωση έχουμε το πολύ ένα ΣΣΙ, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι δυνατόν να εμφανισθούν πολλά ΣΣΙ.

Συχνά στα συστήματα τα οποία μελετάμε, οι πελάτες πριν λάβουν την απόφασή τους, παίρνουν κάποια πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος. Στην περίπτωση που η πληροφορία αντιστοιχεί σε κάποιο μέγεθος που παίρνει μη αρνητικές τιμές, π.χ. το μήκος της ουράς, έχει νόημα να αναζητούμε τις στρατηγικές ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου. Δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.2.9. (Καθαρή Στρατηγική Κατωφλίου (Pure Threshold Strategy)). *Μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι x, υπαγορεύει να εισέλθει ο πελάτης στο σύστημα αν η παρατήρησή του είναι μικρότερη του x και να αποχωρήσει αν η παρατήρησή του είναι μεγαλύτερη ή ίση του x.*

Ορισμός 1.2.10. (Μικτή Στρατηγική Κατωφλίου (Mixed Threshold Strategy)). *Μια μικτή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι x και πιθανότητα εισόδου p, υπαγορεύει να εισέλθει ο πελάτης στο σύστημα αν η παρατήρησή του είναι μικρότερη του x, να εισέλθει με πιθανότητα p αν η παρατηρησή του είναι x και να αποχωρήσει αν η παρατήρησή του είναι μεγαλύτερη του x.*

Ορισμός 1.2.11. (Αντίστροφη Καθαρή Στρατηγική Κατωφλίου (Reversed Pure Threshold Strategy)). *Μια αντίστροφη καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι x, υπαγορεύει να μην εισέλθει ο πελάτης στο σύστημα αν η παρατήρησή του είναι μικρότερη του x και να εισέλθει αν η παρατήρησή του είναι μεγαλύτερη ή ίση του x.*

Ορισμός 1.2.12. (Αντίστροφη Μικτή Στρατηγική Κατωφλίου (Reversed Mixed Threshold Strategy)). *Μια αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι x και πιθανότητα εισόδου p, υπαγορεύει να αποχωρήσει ο πελάτης από το σύστημα αν η παρατήρησή του είναι μικρότερη του x, να εισέλθει με πιθανότητα p αν η παρατηρησή του είναι x και να εισέλθει αν η παρατήρησή του είναι μεγαλύτερη του x.*

1.3 Δομή της διατριβής

Στην παρούσα διατριβή αναλύουμε τη συμπεριφορά των πελατών σε τρία διαφορετικά συστήματα εξυπηρέτησης. Σε κάθε σύστημα εισάγουμε μια δομή αμοιβής - κόστους και εξετάζουμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών ως προς το δίλημμα εισόδου - αποχώρησης, δεδομένης κάποιας παρεχόμενης πληροφόρησης. Τα τρία αυτά συστήματα έχουν τελείως διαφορετική δομή, συνεπώς για να μελετηθούν χρησιμοποιήσαμε διαφορετικές τεχνικές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε ένα σύστημα με ολικές εξυπηρετήσεις, το οποίο λειτουργεί σε εναλλασσόμενο περιβάλλον. Ο πελάτης κατά την άφιξή του και πριν λάβει την απόφασή του, παίρνει ή δεν παίρνει κάποια πληροφορία για το μήκος της ουράς και/ή την κατάσταση του περιβάλλοντος. Προκύπτουν έτσι τέσσερα επίπεδα πληροφόρησης. Στην περίπτωση που ο πελάτης δεν παίρνει καμία πληροφορία αναφερόμαστε σε ένα πλήρως μη παρατηρήσιμο σύστημα, ενώ στην περίπτωση που του ανακοινώνεται το μήκος ουράς και η κατάσταση του περιβάλλοντος έχουμε ένα πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα. Τα υπόλοιπα δύο επίπεδα πληροφόρησης τα κάλουμε επίπεδα μερικής πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, αν ο πελάτης παρατηρεί μόνο το μήκος ουράς κατά την άφιξή του, το σύστημα λέγεται μερικώς παρατηρήσιμο, ενώ αν παρατηρεί μόνο την κατάσταση του περιβάλλοντος καλείται μερικώς μη παρατηρήσιμο. Για κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα πληροφόρησης, προσδιορίζουμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο θεωρούμε ένα σύστημα με ολικές εξυπηρετήσεις το οποίο είναι μη-Μαρκοβιανό και μοντελοποιεί έναν σταθμό ενός μέσου μαζικής μεταφοράς. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι ο υπηρέτης, ο οποίος είναι το μέσο μαζικής μεταφοράς, φθάνει στον σταθμό σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με γενικούς χρόνους ανανέωσης. Η χωρητικότητα του μέσου τις στιγμές άφιξής του στον σταθμό δίνεται από μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Όταν ένα μέσο με χωρητικότητα k φθάνει στον σταθμό, εξυπηρετεί το πολύ k πελάτες και οι πελάτες που δεν εξυπηρετήθηκαν εγκαταλείπουν το σύστημα. Σε αυτό το σύστημα μελετάμε τη συμπεριφορά των πελατών κάτω από δύο επίπεδα πληροφόρησης. Το πρώτο είναι το παρατηρήσιμο σύστημα όπου οι αφικνούμενοι πελάτες παρατηρούν το μήκος ουράς πριν πάρουν την απόφασή τους. Το δεύτερο είναι το μη παρατηρήσιμο σύστημα όπου οι πελάτες αποφασίζουν χωρίς να πάρουν καμία πληροφορία. Κάτω από αυτά τα δύο επίπεδα πληροφόρησης, προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών. Επιπλέον, στη Μαρκοβιανή περίπτωση, λύνουμε και το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης. Τέλος, κάνοντας κάποιες επιπλέον υποθέσεις για τους ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας και χαρακτηρίζουμε τη συμπεριφορά των πελατών ως ΣΤΠ ή ΑΤΠ.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού το οποίο λειτουργεί σε εναλλασσόμενο περιβάλλον. Το περιβάλλον αυτό επηρεάζει τον ρυθμό εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το σύστημα εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων γρήγορης και αργής εξυπηρέτησης. Θεωρούμε ότι οι πελάτες - μονάδες κατά την άφιξή τους και πριν πάρουν την απόφασή τους παρατηρούν την ποσότητα του ρευστού ενώ μπορεί να παρατηρούν ή να μην παρατηρούν την κατάσταση του περιβάλλοντος. Μελετάμε δηλαδή την πλήρως και τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος. Και στις δύο περιπτώσεις αποδεικνύουμε την ύπαρξη στρατηγικών ισορροπίας μέσα σε κατάλληλες κλάσεις στρατηγικών και δίνουμε τη συνάρτηση αναμενόμενου κοινωνικού κέρδους ανά χρονική μονάδα.

Κεφάλαιο 2

Σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον

2.1 Εισαγωγή

Τα συστήματα εξυπηρέτησης με ομαδικές εξυπηρετήσεις χρησιμοποιούνται συχνά για να αναπαραστήσουν τις επισκέψεις ενός μέσου μεταφοράς σε έναν συγκεκριμένο σταθμό. Αυτό επιτρέπει τη μέτρηση του συνωστισμού στον σταθμό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθούν μέτρα ώστε να ελεγχθεί ο συνωστισμός αυτός, (π.χ. ρυθμίζοντας τη συχνότητα των επισκέψεων του μέσου μεταφοράς) με σκοπό η ποιότητα της εξυπηρέτησης να διατηρηθεί σε αποδεκτά επίπεδα. Η χωρητικότητα του μέσου συνήθως θεωρείται απεριόριστη. Αυτό είναι δικαιολογημένο, καθώς στις περισσότερες εφαρμογές η χωρητικότητα του μέσου επιλέγεται αρκετά μεγάλη, ώστε να γίνει εξαιρετικά μικρή η πιθανότητα κάποιοι πελάτες να μη μπορέσουν να εξυπηρετηθούν. Επιπλέον, οι πελάτες που δε μπορούν να εξυπηρετηθούν σε μια επίσκεψη του μέσου δεν είναι συνήθως πρόθυμοι να περιμένουν για την επόμενη επίσκεψή του και εγκαταλείπουν το σύστημα. Έτσι, είναι ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται τις στιγμές που το μέσο επισκέπτεται τον σταθμό. Τέτοια συστήματα καλούνται στοχαστικά συστήματα (άμεσων) ολικών εξυπηρετήσεων (stochastic clearing systems).

Τα στοχαστικά συστήματα ολικών εξυπηρετήσεων έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (βλέπε π.χ. Stidham (1974), Serfozo και Stidham (1978), Artalejo και Gomez-Corral (1998) και Yang, Kim και Chae (2002)). Επίσης, έχουν μελετηθεί στο πλαίσιο των στοχαστικών συστημάτων που υπόκεινται σε (ολικές) καταστροφές, όπου υποτίθεται ότι όταν ένα καταστροφικό γεγονός συμβαίνει, απομακρύνονται όλοι οι πελάτες/μονάδες από το σύστημα/πληθυσμό (βλέπε π.χ. Kyriakidis (1994), Economou και Fakinos (2003, 2008), Stirzaker (2006, 2007) και Gani και Swift (2007)). Στην πλειονότητα αυτών των εργασιών το ενδιαφέρον των ερευνητών εστιάζεται στη μεταβατική και/ή τη στάσιμη κατανομή της διαδικασίας που μελετάται. Όμως, υπάρχουν και εργασίες που αφορούν το βέλτιστο έλεγχο αυτών των συστημάτων. Στις εργασίες αυτές, ο σκοπός είναι να προσδιορισθούν βέλτιστες πολιτικές για τον κεντρικό διαχειριστή. Συγκεκριμένα, προσδιορίζονται η βέλτιστη συχνότητα απομάκρυνσης των πελατών από το σύστημα (βλέπε π.χ. Stidham (1977), Kim και Seila (1993), Economou (2003), Kyriakidis και Dimitrakos (2005)). Όμως, από όσο γνωρίζουμε, δεν υπάρχουν οικονομικές μελέτες που να αφορούν τη συμπεριφορά των πελατών όταν αυτοί έχουν τη δυνατότητα να παίρνουν αποφάσεις με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο κέρδος τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε ένα σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον. Η συμπεριφορά των πελατών σε στοχαστικά συστήματα ολικών εξυπηρετήσεων, τα οποία μοντελοποιούν σταθμούς κάποιων μέσων μεταφοράς, είναι σημαντική και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη αν κάποιος θέλει να έχει μια αξιόπιστη αναπαράσταση για το τι συμβαίνει σε αυτά τα συστήματα. Όμως, τέτοια συστήματα συνήθως εξελίσσονται σε τυχαίο περιβάλλον. Έτσι, σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε ένα σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων το οποίο λειτουργεί σε εναλλασσόμενο τυχαίο περιβάλλον. Θα προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών κάτω από διάφορα επίπεδα πληροφορίας, καθώς ένας αφικνούμενος πελάτης μπορεί να παρατηρεί ή να μην παρατηρεί τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και/ή την κατάσταση του περιβάλλοντας, πριν πάρει την απόφασή του για το αν θα εισέλθει ή θα αποχωρήσει.

Η συνέχεια του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής: Στην ενότητα 2.2, περιγράφουμε το μοντέλο ως στοχαστικό σύστημα, τη δομή αμοιβής - κόστους και το πλαίσιο για τις αποφάσεις, δηλαδή τις διάφορες περιπτώσεις ως προς την παρεχόμενη πληροφόρηση. Στην ενότητα 2.3, μελετάμε τις περιπτώσεις όπου οι στρατηγικές των υπόλοιπων πελατών δεν επηρεάζουν το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη. Αυτές είναι οι μη παρατηρήσιμες περιπτώσεις , όπου ο πελάτης δεν παρατηρεί τον αριθμό των πελατών στο σύστημα πριν πάρει την απόφασή του και η πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου παρατηρεί τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και την κατάσταση του περιβάλλοντος. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, δείχνουμε ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη εξαρτάται μόνο από τη στρατηγική του και όχι από τις στρατηγικές που ακολουθούν όλοι οι υπόλοιποι πελάτες, γεγονός που συνεπάγεται την ύπαρξη κυριαρχουσών στρατηγικών. Αυτό είναι ένα ειδικό χαρακτηριστικό του συστήματος που σχετίζεται με τον μηχανισμό των ολικών εξυπηρετήσεων. Στις ενότητες 2.4 και 2.5 μελετάμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι πελάτες κατά την άφιξή τους πληροφορούνται για τον αριθμό των παρόντων πελατών στο σύστημα, αλλά όχι για την κατάσταση του περιβάλλοντος. Σε αυτήν την περίπτωση, η παρουσία πελατών που περιμένουν στο σύστημα δεν επάγει κάποιο κόστος για έναν συγκεκριμένο πελάτη, αλλά του δίνει ένα σήμα για τον ρυθμό εξυπηρέτησης. Ανάλογα με τις παραμέτρους του συστήματος, ένας μεγάλος αριθμός παρόντων πελατών μπορεί να αυξάνει ή να μειώνει τη δεσμευμένη πιθανότητα να είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης ο πιο αργός. Σχετικά με την ακολουθούμενη μεθοδολογία, πρώτα υπολογίζουμε τη στάσιμη κατανομή του συστήματος, όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου ή αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου. Έπειτα υπολογίζουμε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός αφικνούμενου πελάτη ο οποίος αποφασίζει να εισέλθει, δεδομένου ότι παρατηρεί n πελάτες και οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου ή μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου. Στην ενότητα 2.5, ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας και χαρακτηρίζουμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου. Η βασική συνεισφορά αυτής της μελέτης είναι ένας αλγόριθμος που υπολογίζει αποτελεσματικά όλες τις στρατηγικές ισορροπίας. Στην ενότητα 2.6, δίνεται μια ανασκόπηση των αποτελεσμάτων και συζητάμε τις έννοιες Σύμφωνα-με-Το-Πλήθος και Αντίθετα-με-Το-Πλήθος γι΄ αυτό το μοντέλο, καθώς επίσης και το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης.

2.2 Το μοντέλο

Θεωρούμε έναν σταθμό ενός μέσου μεταφοράς με άπειρη χωρητικότητα. Υποθέτουμε ότι το σύστημα λειτουργεί σε εναλλασσόμενο περιβάλλον. Το περιβάλλον δίνεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{E(t)\}$, με χώρο καταστάσεων $S^E = \{1, 2\}$ και ρυθμούς μετάβασης $q_{ee'}$, για $e \neq e'$. Όταν το περιβάλλον είναι στην κατάσταση e, οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_e, ενώ το μεταφορικό μέσο επισκέπτεται τον σταθμό σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό μ_e. Οι δυο διαδικασίες Poisson είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Όταν το μέσο μεταφοράς φθάνει στον σταθμό, όλοι οι παρόντες πελάτες εξυπηρετούνται άμεσα και φεύγουν από τον σταθμό. Έτσι, έχουμε ένα σύστημα (άμεσων) ολικών εξυπηρετήσεων.

Για την περιγραφή του συστήματος τη στιγμή t θεωρούμε το ζεύγος $(N(t), E(t))$, όπου η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ δίνει τον αριθμό των πελατών στον σταθμό και η $E(t)$ δίνει την κατάσταση του περιβάλλοντος. Τότε, η στοχαστική διαδικασία $\{(N(t), E(t)) : t \geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S^{N,E} = \{(n, e) : \ n \geq 0, \ e = 1, 2\}$ και με μη μηδενικούς ρυθμούς μετάβασης όπως φαίνονται παρακάτω:

$$q_{(n,e)(n+1,e)} = \lambda_e, \ n \geq 0, \ e = 1, 2, \tag{2.1}$$

$$q_{(n,e)(0,e)} = \mu_e, \ n \geq 1, \ e = 1, 2, \tag{2.2}$$

$$q_{(n,1)(n,2)} = q_{12}, \ n \geq 0, \tag{2.3}$$

$$q_{(n,2)(n,1)} = q_{21}, \ n \geq 0. \tag{2.4}$$

Ορίζουμε $\rho_e = \frac{\lambda_e}{\mu_e}$, $e = 1, 2$. Η ποσότητα ρ_e μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο συνωστισμού του συστήματος όταν το περιβάλλον είναι στην κατάσταση e, διότι εκφράζει τον μέσο αριθμό των πελατών που φθάνουν στο σύστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς (δεδομένου ότι το περιβάλλον παραμένει στην κατάσταση e).

Εξετάζουμε αυτό το σύστημα με σκοπό να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά των πελατών, όταν αυτοί έχουν τη δυνατότητα να αποφασίσουν αν θα εισέλθουν στο σταθμό ή θα αποχωρήσουν χωρίς να εξυπηρετηθούν. Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης λαμβάνει αμοιβή R χρηματικών μονάδων για την εξυπηρέτησή του και έχει κόστος K χρηματικών μονάδων ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο και επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο κέρδος τους. Τέλος, υποθέτουμε ότι οι αποφάσεις τους είναι αμετάκλητες, υπό την έννοια ότι υπαναχωρήσεις εισερχομένων πελατών και επαναπροσπάθειες αποχωρούντων πελατών δεν επιτρέπονται.

Στις επόμενες ενότητες θα προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών. Θεωρούμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις ως προς την πληροφορία που λαμβάνουν οι πελάτες κατά την άφιξή τους στον σταθμό, πριν πάρουν την απόφασή τους:

- Πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες δεν παρατηρούν την $N(t)$, ούτε την $E(t)$.
- Μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες δεν παρατηρούν την $N(t)$, ενώ παρατηρούν την $E(t)$.
- Πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες παρατηρούν την $N(t)$ και την $E(t)$.
- Μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες παρατηρούν την $N(t)$, αλλά δεν παρατηρούν την $E(t)$.

Από μεθοδολογικής άποψης, οι τρεις πρώτες περιπτώσεις είναι παρόμοιες και οδηγούν σε κυριαρχούσες στρατηγικές. Έτσι, τις μελετάμε όλες στην ενότητα 2.3. Η μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση, η οποία είναι η πιο ενδιαφέρουσα και απαιτητική από πλευράς μεθοδολογίας αντιμετωπίζεται στις ενότητες 2.4 και 2.5.

2.3 Οι μη παρατηρήσιμες και η πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση: Κυριαρχούσες στρατηγικές

Έστω S_e ο χρόνος μέχρι την επόμενη επίσκεψη του μέσου μεταφοράς, δεδομένου ότι το περιβάλλον βρίσκεται στην κατάσταση e. Η τυχαία μεταβλητή S_e είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα, εξαιτίας του μηχανισμού των ολικών εξυπηρετήσεων των πελατών στις στιγμές άφιξης του μέσου στον σταθμό και της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής. Εφαρμόζοντας ανάλυση πρώτου βήματος, δεσμεύοντας ως προς την επόμενη μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(N(t), E(t))\}$, η οποία είναι είτε επίσκεψη του μέσου μεταφοράς είτε αλλαγή του περιβάλλοντος, καταλήγουμε στις επόμενες εξισώσεις

$$E[S_1] = \frac{1}{\mu_1 + q_{12}} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + q_{12}} \cdot 0 + \frac{q_{12}}{\mu_1 + q_{12}} \cdot E[S_2], \tag{2.5}$$

$$E[S_2] = \frac{1}{\mu_2 + q_{21}} + \frac{\mu_2}{\mu_2 + q_{21}} \cdot 0 + \frac{q_{21}}{\mu_2 + q_{21}} \cdot E[S_1]. \tag{2.6}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.5)-(2.6) δίνει

$$E[S_1] = \frac{\mu_2 + q_{21} + q_{12}}{\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12}}, \tag{2.7}$$

$$E[S_2] = \frac{\mu_1 + q_{21} + q_{12}}{\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12}}. \tag{2.8}$$

2.3.1 Η πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών στην πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Μια στρατηγική στην πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση προσδιορίζεται από μια πιθανότητα εισόδου q. Η περίπτωση $q = 0$ αντιστοιχεί στην καθαρή στρατηγική ''να αποχωρήσεις '' ενώ η περίπτωση $q = 1$ αντιστοιχεί στην καθαρή στρατηγική ''να εισέλθεις ''. Οποιαδήποτε τιμή $q \in (0, 1)$ αντιστοιχεί σε μια μικτή στρατηγική ''να εισέλθεις με πιθανότητα q ή να αποχωρήσεις με πιθανότητα $1 - q$''. Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 2.3.1.

Θεώρημα 2.3.1. *Στην πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, υπάρχει πάντα μια κυριαρχούσα στρατηγική. Οι κυριαρχούσες στρατηγικές εξαρτώνται από τη σχέση του λόγου $\frac{R}{K}$ με την τιμή*

$$V_{fu} = \frac{\lambda_1 q_{21}\mu_2 + \lambda_2 q_{12}\mu_1}{(\lambda_1 q_{21} + \lambda_2 q_{12})(\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12})} + \frac{q_{21} + q_{12}}{\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12}}. \tag{2.9}$$

Έχουμε τρεις περιπτώσεις που φαίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα 2.1.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια συγκεκριμένη στρατηγική και θεωρούμε έναν πελάτη κατά τη στιγμή αφιξής του. Η πιθανότητα να βρεί ο πελάτης αυτός το περιβάλλον στην κατάσταση e είναι

$$p_{E-arrival}(e) = \frac{\lambda_e p_E(e)}{\lambda_1 p_E(1) + \lambda_2 p_E(2)}, \tag{2.10}$$

Τιμή του $\frac{R}{K}$	$\frac{R}{K} < V_{fu}$	$\frac{R}{K} = V_{fu}$	$\frac{R}{K} > V_{fu}$
Κυριαρχούσες στρατηγικές	0	$q \in [0,1]$	1

Πίνακας 2.1: Κυριαρχούσες στρατηγικές στην πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση

όπου $(p_E(e), e = 1,2)$ είναι η στάσιμη κατανομή του περιβάλλοντος η οποία δίνεται από τις σχέσεις

$$p_E(1) = \frac{q_{21}}{q_{21}+q_{12}}, \tag{2.11}$$

$$p_E(2) = \frac{q_{12}}{q_{21}+q_{12}}. \tag{2.12}$$

Έτσι, το αναμενόμενο όφελος του συγκεκριμένου πελάτη, αν αποφασίσει να εισέλθει, δίνεται από τη σχέση

$$S_{fu} = \sum_{e=1}^{2} p_{E-arrival}(e)(R - KE[S_e]), \tag{2.13}$$

όπου οι $E[S_e]$ δίνονται από τις σχέσεις (2.7)-(2.8). Αντικαθιστώντας τις (2.11)-(2.12) στη (2.10) και έπειτα τη (2.10) στη (2.13) παίρνουμε

$$\begin{aligned} S_{fu} &= R - K\,\frac{\lambda_1 q_{21} E[S_1] + \lambda_2 q_{12} E[S_2]}{\lambda_1 q_{21} + \lambda_2 q_{12}} \\ &= R - K\left(\frac{\lambda_1 q_{21}\mu_2 + \lambda_2 q_{12}\mu_1}{(\lambda_1 q_{21} + \lambda_2 q_{12})(\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12})} + \frac{q_{21}+q_{12}}{\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12}}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν $S_{fu} > 0$, να αποχωρήσει αν $S_{fu} < 0$ και είναι αδιάφορος ως προς το να εισέλθει ή να αποχωρήσει αν $S_{fu} = 0$. Λύνοντας τις συνθήκες ως προς $\frac{R}{K}$, καταλήγουμε στις τρεις περιπτώσεις του πίνακα 2.1. ■

2.3.2 Η μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας στη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Μια γενική στρατηγική στη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση δίνεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος πιθανοτήτων εισόδου (q_1, q_2), όπου q_e είναι η πιθανότητα εισόδου ενός πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει το περιβάλλον στην κατάσταση e, $e = 1, 2$. Έχουμε το παρακάτω Θεώρημα 2.3.2.

Θεώρημα 2.3.2. *Στη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, υπάρχει πάντα μια κυριαρχούσα στρατηγική. Οι κυριαρχούσες στρατηγικές εξαρτώνται από τη σχέση του λόγου $\frac{R}{K}$ με τις τιμές*

$$V_{au}^{min} = \frac{\min(\mu_1, \mu_2) + q_{21} + q_{12}}{\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12}}, \; V_{au}^{max} = \frac{\max(\mu_1, \mu_2) + q_{21} + q_{12}}{\mu_1\mu_2 + \mu_1 q_{21} + \mu_2 q_{12}}. \tag{2.15}$$

Αν $\mu_1 \neq \mu_2$, τότε $V_{au}^{min} < V_{au}^{max}$ και έχουμε τις πέντε περιπτώσεις που φαίνονται συνοπτικά στον Πίνακα 2.2.

Τιμή του $\frac{R}{K}$	$\frac{R}{K} < V_{au}^{min}$	$\frac{R}{K} = V_{au}^{min}$	$V_{au}^{min} < \frac{R}{K} < V_{au}^{max}$	$\frac{R}{K} = V_{au}^{max}$	$\frac{R}{K} > V_{au}^{max}$
Κυριαρχούσες στρατηγικές, όταν $\mu_1 < \mu_2$	$(0,0)$	$(0,q_2)$, $q_2 \in [0,1]$	$(0,1)$	$(q_1,1)$, $q_1 \in [0,1]$	$(1,1)$
Κυριαρχούσες στρατηγικές, όταν $\mu_1 > \mu_2$	$(0,0)$	$(q_1,0)$, $q_1 \in [0,1]$	$(1,0)$	$(1,q_2)$, $q_2 \in [0,1]$	$(1,1)$

Πίνακας 2.2: Κυριαρχούσες στρατηγικές στη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση, όταν $\mu_1 \neq \mu_2$

Αν $\mu_1 = \mu_2$, τότε $V_{au}^{min} = V_{au}^{max}$. Έστω V_{au} η κοινή τιμή των V_{au}^{min} και V_{au}^{max}. Έχουμε τρεις περιπτώσεις που φαίνονται συνοπτικά στον Πίνακα 2.3.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν πελάτη ο οποίος παρατηρεί την κατάσταση του περιβάλλοντος τη στιγμή της άφιξής του. Αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα δεδομένου ότι η κατάσταση του περιβάλλοντος είναι e, τότε το αναμενόμενο όφελός του θα είναι

$$S_{au}(e) = R - KE[S_e], \tag{2.16}$$

όπου οι ποσότητες $E[S_e]$ δίνονται από τις σχέσεις (2.7)-(2.8). Ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν $S_{au}(e) > 0$, το οποίο ισοδύναμα γράφεται $\frac{R}{K} > E[S_e]$. Ομοίως, προτιμά να αποχωρήσει αν $\frac{R}{K} < E[S_e]$ και είναι αδιάφορος ως προς το αν θα εισέλθει ή θα αποχωρήσει αν $\frac{R}{K} = E[S_e]$. Παίρνοντας τις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν ως προς τη διάταξη των $\frac{R}{K}$, $E[S_1]$ και $E[S_2]$, καταλήγουμε στις στρατηγικές που φαίνονται στο Θεώρημα 2.3.2. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι στρατηγικές που υπαγορεύονται στο Θεώρημα 2.3.2 είναι κυριαρχούσες, εφόσον δεν εξαρτώνται από τις στρατηγικές που

Τιμή του $\frac{R}{K}$	$\frac{R}{K} < V_{au}$	$\frac{R}{K} = V_{au}$	$\frac{R}{K} > V_{au}$
Κυριαρχούσες στρατηγικές, όταν $\mu_1 = \mu_2$	$(0,0)$	(q_1, q_2), $q_1, q_2 \in [0,1]$	$(1,1)$

Πίνακας 2.3: Κυριαρχούσες στρατηγικές στη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση, όταν $\mu_1 = \mu_2$

επιλέγουν οι άλλοι πελάτες, δηλαδή είναι βέλτιστες απαντήσεις σε κάθε στρατηγική των άλλων πελατών. ■

2.3.3 Η πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση

Όσον αφορά τη πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι αφικνούμενοι πελάτες παρατηρούν τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και την κατάσταση του περιβάλλοντος, η κατάσταση είναι όμοια με τη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Αυτό συμβαίνει επειδή ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη, δεδομένου ότι βρίσκει n πελάτες σε αυτό και το περιβάλλον είναι στην κατάσταση e δεν εξαρτάται από το n. Συνεπώς, αν η κατάσταση του περιβάλλοντος κατά την άφιξη του πελάτη είναι η e, τότε η πληροφορία για τον αριθμό των πελατών είναι περιττή και δε χρησιμοποιείται από τους πελάτες. Έτσι, καταλήγουμε στις κυριαρχούσες στρατηγικές που δίνονται στο Θεώρημα 2.3.2.

2.4 Η μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση: Προκαταρκτικά αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες κατά την άφιξή τους και πριν αποφασίσουν αν θα εισέλθουν ή θα αποχωρήσουν, παρατηρούν τον αριθμό των πελατών στο σύστημα αλλά όχι την κατάσταση του περιβάλλοντος. Έτσι, μια γενική στρατηγική σε αυτήν την περίπτωση προσδιορίζεται από ένα διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, όπου θ_i είναι η πιθανότητα εισόδου ενός πελάτη που βλέπει i πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του (εξαιρουμένου του εαυτού του).

Υποθέτουμε ότι ένας πελάτης βρίσκει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του. Παρόλο που ο μέσος χρόνος παραμονής του στο σύστημα δεν εξαρτάται από το n, η πληροφορία για το n επηρεάζει τις πιθανότητες να βρει το περιβάλλον στην κατάσταση 1 ή 2. Διαισθητικά περιμένουμε ότι υπάρχουν 2 περιπτώσεις: Είτε η κατάσταση περιβάλλοντος ''αργής εξυπηρέτησης '' e με $\mu_e = \min(\mu_1, \mu_2)$ ταυτίζεται με την κατάσταση περιβάλλοντος ''υψηλού συνωστισμού'' e' με $\rho_{e'} = \max(\rho_1, \rho_2)$ ή ταυτίζεται με την κατάσταση περιβάλλοντος ''χαμηλού συνωστισμού'' e'' με $\rho_{e''} = \min(\rho_1, \rho_2)$. Στην πρώτη περίπτωση, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των πελατών n που βρίσκει στο σύστημα ένας πελάτης, τόσο πιθανότερο είναι το περιβάλλον να βρίσκεται στην κατάσταση ''αργής εξυπηρέτησης ''. Επομένως, ο πελάτης γίνεται λιγότερο πρόθυμος να εισέλθει στο σύστημα καθώς το n αυξάνεται. Οπότε, περιμένουμε ότι ο πελάτης θα προτιμήσει να εισέλθει στο σύστημα, αν ο αριθμός n των παρόντων πελατών είναι κάτω από ένα κατώφλι, δηλαδή θα ακολουθήσει μια στρατηγική κατωφλίου. Αντιθέτως, στη δεύτερη περίπτωση η κατάσταση είναι αντεστραμμένη. Έτσι, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός n των παρόντων πελατών στο σύστημα που βρίσκει ένας συγκεκριμένος πελάτης, τόσο πιο πιθανό είναι το περιβάλλον να βρίσκεται στην κατάσταση ''γρήγορης εξυπηρέτησης ''. Επομένως, περιμένουμε ο συγκεκριμένος πελάτης να προτιμήσει να εισέλθει, αν ο αριθμός των πελατών n ξεπερνά ένα συγκεκριμένο κατώφλι, δηλαδή να ακολουθήσει μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου. Για τους παραπάνω λόγους, θα περιορίσουμε την έρευνά μας σε στρατηγικές ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου. Όπως θα δούμε αυτές οι κλάσεις είναι αρκετά πλούσιες ώστε να διασφαλίσουν την ύπαρξη στρατηγικών ισορροπίας για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων του μοντέλου.

Ορισμός 2.4.1. *Μια στρατηγική $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, όπου θ_i είναι η πιθανότητα εισόδου ενός πελάτη που βλέπει i πελάτες κατά την άφιξή του (εξαιρουμένου του εαυτού του)* *ονομάζεται μικτή στρατηγική κατωφλίου, αν υπάρχουν* $n_0 \in \{0, 1, \ldots\}$ *και* $\theta \in [0, 1]$ *τέτοια ώστε* $\theta_i = 1$, *για* $i < n_0$, $\theta_{n_0} = \theta$ *και* $\theta_i = 0$, *για* $i > n_0$. *Θα αναφερόμαστε σε μια τέτοια στρατηγική ως* (n_0, θ)*-μικτή στρατηγική κατωφλίου (συμβολικά στρατηγική* $\lceil n_0, \theta \rceil$*) και αυτή υπαγορεύει να εισέλθεις αν βρεις λιγότερους απο* n_0 *πελάτες, να εισέλθεις με πιθανότητα* θ *αν βρεις ακριβώς* n_0 *πελάτες και να αποχωρήσεις αν βρεις περισσότερους από* n_0 *πελάτες.*

Στην $(n_0, 0)$*-μικτή στρατηγική κατωφλίου, η οποία υπαγορεύει να εισέλθεις αν βρεις λιγότερους από* n_0 *πελάτες και να αποχωρήσεις αλλιώς, θα αναφερόμαστε ως* n_0*-καθαρή στρατηγική κατωφλίου (συμβολικά στρατηγική* $\lceil n_0 \rceil$*).*

Μια στρατηγική $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$ *ονομάζεται αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου, αν υπάρχουν* $n_0 \in \{0, 1, \ldots\}$ *και* $\theta \in [0, 1]$ *τέτοια ώστε* $\theta_i = 0$, *για* $i < n_0$, $\theta_{n_0} = \theta$ *και* $\theta_i = 1$, *για* $i > n_0$. *Θα αναφερόμαστε σε μια τέτοια στρατηγική ως* (n_0, θ)*-αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου (συμβολικά στρατηγική* $\lfloor n_0, \theta \rfloor$*) και αυτή υπαγορεύει να αποχωρήσεις αν βρεις λιγότερους απο* n_0 *πελάτες, να εισέλθεις με πιθανότητα* θ *αν βρεις ακριβώς* n_0 *πελάτες και να εισέλθεις αν βρεις περισσότερους από* n_0 *πελάτες.*

Στην $(n_0, 1)$*-αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου, η οποία υπαγορεύει να εισέλθεις αν βρεις τουλάχιστον* n_0 *πελάτες και να αποχωρήσεις αλλιώς, θα αναφερόμαστε ως* n_0*-αντίστροφη καθαρή στρατηγική κατωφλίου (συμβολικά στρατηγική* $\lfloor n_0 \rfloor$*).*

Η στρατηγική η οποία υπαγορεύει να εισέλθεις σε κάθε περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί στρατηγική κατωφλίου και αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου (συμβολικά στρατηγική $\lceil \infty \rceil$ *ή* $\lfloor 0 \rfloor$*). Το ίδιο ισχύει και για τη στρατηγική η οποία υπαγορεύει να αποχωρήσεις σε κάθε περίπτωση (συμβολικά στρατηγική* $\lceil 0 \rceil$ *ή* $\lfloor \infty \rfloor$*).*

2.4.1 Στάσιμες κατανομές

Σε αυτήν την παράγραφο, θα προσδιορίσουμε τη στάσιμη κατανομή του συστήματος, όταν οι πελάτες ακολουθούν κάποια στρατηγική από αυτές που περιγράφονται στον Ορισμό 2.4.1. Θα ξεκινήσουμε προσδιορίζοντας τη στάσιμη κατανομή στο αρχικό σύστημα όπου όλοι οι πελάτες αποφασίζουν να εισέλθουν. Το αποτέλεσμα διατυπώνεται στην Πρόταση 2.4.1.

Πρόταση 2.4.1. *Θεωρούμε το σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου όλοι οι πελάτες εισέρχονται. Η στάσιμη κατανομή* $(p(n, e))$ *δίνεται από* *τις σχέσεις*

$$p(n,1) = A_1\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n + B_1\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n, \quad n \geq 0, \tag{2.17}$$

$$p(n,2) = A_2\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n + B_2\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n, \quad n \geq 0, \tag{2.18}$$

όπου

$$A_1 = \frac{(\mu_1\lambda_2 z_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2 q_{12} + \mu_1 q_{21})p_E(1)}{\sqrt{\Delta}(1-z_1)}, \tag{2.19}$$

$$B_1 = -\frac{(\mu_1\lambda_2 z_2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2 q_{12} + \mu_1 q_{21})p_E(1)}{\sqrt{\Delta}(1-z_2)}, \tag{2.20}$$

$$A_2 = \frac{(\mu_2\lambda_1 z_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2 q_{12} + \mu_1 q_{21})p_E(2)}{\sqrt{\Delta}(1-z_1)}, \tag{2.21}$$

$$B_2 = -\frac{(\mu_2\lambda_1 z_2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2 q_{12} + \mu_1 q_{21})p_E(2)}{\sqrt{\Delta}(1-z_2)}, \tag{2.22}$$

$$\Delta = [\lambda_2(\mu_1 + q_{12}) - \lambda_1(\mu_2 + q_{21})]^2 + 4\lambda_1\lambda_2 q_{12} q_{21}, \tag{2.23}$$

$$z_{1,2} = \frac{-\lambda_1(\mu_2 + q_{21}) - \lambda_2(\mu_1 + q_{12}) \pm \sqrt{\Delta}}{2\lambda_1\lambda_2} \tag{2.24}$$

και $p_E(1)$, $p_E(2)$ *είναι οι στάσιμες πιθανότητες της* $\{E(t)\}$ *που δίνονται από τις σχέσεις* (2.11)-(2.12).

Απόδειξη. Για τον προσδιορισμό της στάσιμης κατανομής, παρατηρούμε ότι το σύστημα περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S^{N,E} = \{(n,e) : n \geq 0,\ e = 1,\ 2\}$ και μη μηδενικούς ρυθμούς μετάβασης που δίνονται από τις σχέσεις (2.1)-(2.4). Η στάσιμη κατανομή $(p(n,e) : (n,e) \in S^{N,E})$ είναι η μοναδική θετική κανονικοποιημένη λύση του ακόλουθου συστήματος εξισώσεων ισορροπίας:

$$(\lambda_1 + \mu_1 + q_{12})p(0,1) = q_{21}p(0,2) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_1 p(n,1), \tag{2.25}$$

$$(\lambda_1 + \mu_1 + q_{12})p(n,1) = q_{21}p(n,2) + \lambda_1 p(n-1,1), \quad n \geq 1, \tag{2.26}$$

$$(\lambda_2 + \mu_2 + q_{21})p(0,2) = q_{12}p(0,1) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_2 p(n,2), \tag{2.27}$$

$$(\lambda_2 + \mu_2 + q_{21})p(n,2) = q_{12}p(n,1) + \lambda_2 p(n-1,2), \quad n \geq 1, \tag{2.28}$$

όπου στις (2.25) και (2.27) έχουμε συμπεριλάβει τις ψευδομεταβάσεις από την κατάσταση $(0,e)$ στη $(0,e)$, $e=1,2$, με ρυθμό μ_e, που αντιστοιχούν στις επισκέψεις του μέσου σε άδειο σταθμό. Παρατηρούμε ακόμη ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι πάντα θετικά επαναληπτική καθώς ο μηχανισμός ολικών εξυπηρετήσεων διασφαλίζει ότι ξεκινώντας από την κατάσταση $(0,1)$, η διαδικασία θα επιστρέψει σε αυτή με πιθανότητα 1 και ο αντίστοιχος μέσος χρόνος θα είναι πεπερασμένος.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στάσιμες πιθανότητες, χρησιμοποιώντας πιθανογεννήτριες. Έτσι, ορίζουμε τις μερικές πιθανογεννήτριες της στάσιμης κατανομής ως

$$G_e(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,e)z^n, \quad |z|\leq 1, \quad e=1,2. \tag{2.29}$$

και παρατηρούμε ότι $G_1(1)=p_E(1)$ και $G_2(1)=p_E(2)$, όπου οι $p_E(1)$ και $p_E(2)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.11)-(2.12). Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (2.26) με z^n, $n\geq 1$, και προσθέτοντάς τες στην (2.25), παίρνουμε μετά από απλές πράξεις μια εξίσωση γραμμική ως προς $G_1(z)$ και $G_2(z)$. Ομοίως, οι εξισώσεις (2.27) και (2.28), $n\geq 1$, δίνουν άλλη μια εξίσωση γραμμική ως προς $G_1(z)$ και $G_2(z)$. Λύνοντας το σύστημα αυτών των εξισώσεων βρίσκουμε τις $G_1(z)$ και $G_2(z)$. Οι $G_1(z)$ και $G_2(z)$ είναι ρητές συναρτήσεις του z με γνωστούς συντελεστές, εκφραζομένους ως προς τις παραμέτρους του μοντέλου. Κάνοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα και έπειτα γράφοντας τα απλά κλάσματα ως δυναμοσειρές του z, παίρνουμε τις εξισώσεις (2.17) και (2.18). Πράγματι, με απλή αντικατάσταση, μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι $p(n,1)$ και $p(n,2)$ που δίνονται από τις (2.17) και (2.18) ικανοποιούν την (2.26). Αθροίζοντας, μπορούμε ακόμη να ελέγξουμε ότι οι $p(n,1)$ και $p(n,2)$ που δίνονται από τις (2.17) και (2.18) ικανοποιούν την (2.25). Ομοίως, μπορούμε να ελέγξουμε ότι ικανοποιούν τις (2.28) και (2.27). ■

Τώρα θα υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή του συστήματος όταν οι πελάτες ακολουθούν μια μικτή στρατηγική κατωφλίου. Έχουμε την ακόλουθη Πρόταση 2.4.2.

Πρόταση 2.4.2. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με τη μικτή στρατηγική κατωφλίου* $\lceil n_0,\theta\rceil$. *Η στάσιμη κατανομή*

$(p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil))$ *αυτού του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned}
p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil) &= p(n,e), \quad 0\le n\le n_0-1, \quad e=1,2, && (2.30)\\
p_{ao}(n_0,e;\lceil n_0,\theta\rceil) &= \sum_{n=n_0}^{\infty}(1-\theta)^{n-n_0}p(n,e), \quad e=1,2, && (2.31)\\
p_{ao}(n_0+1,e;\lceil n_0,\theta\rceil) &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty}[1-(1-\theta)^{n-n_0}]p(n,e), \quad e=1,2, && (2.32)\\
p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil) &= 0, \quad n\ge n_0+2, \quad e=1,2, && (2.33)
\end{aligned}$$

όπου οι $p(n,e)$ *δίνονται από τις* (2.17)-(2.18).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν τη μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0,\theta\rceil$. Τότε η εξέλιξη του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου η οποία απορροφάται με πιθανότητα 1 στην κλειστή και θετικά επαναληπτική κλάση καταστάσεων $S_{ao}^{N,E}(\lceil n_0,\theta\rceil)=\{(n,e):\ 0\le n\le n_0+1,\ e=1,2\}$. Χάριν συντομίας, στην υπόλοιπη απόδειξη θα παραλείψουμε τον συμβολισμό που αφορά τη στρατηγική $\lceil n_0,\theta\rceil$. Έτσι, θα αναφερόμαστε στις στάσιμες πιθανότητες $p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil)$ ως $p_{ao}(n,e)$.

Εφόσον η Μαρκοβιανή αλυσίδα τελικά απορροφάται στο $S_{ao}^{N,E}(\lceil n_0,\theta\rceil)$, παίρνουμε αμέσως τη σχέση (2.33). Το διάνυσμα των στάσιμων πιθανοτήτων $(p_{ao}(n,e):(n,e)\in S_{ao}^{N,E}(\lceil n_0,\theta\rceil))$ προκύπτει ως η μοναδική θετική κανονικοποιημένη λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας

$$\begin{aligned}
(\lambda_1+\mu_1+q_{12})p_{ao}(0,1) &= q_{21}p_{ao}(0,2)+\sum_{n=0}^{n_0+1}\mu_1 p_{ao}(n,1), && (2.34)\\
(\lambda_1+\mu_1+q_{12})p_{ao}(n,1) &= q_{21}p_{ao}(n,2)+\lambda_1 p_{ao}(n-1,1),\ 1\le n\le n_0-1, && (2.35)\\
(\lambda_1\theta+\mu_1+q_{12})p_{ao}(n_0,1) &= q_{21}p_{ao}(n_0,2)+\lambda_1 p_{ao}(n_0-1,1), && (2.36)\\
(\mu_1+q_{12})p_{ao}(n_0+1,1) &= q_{21}p_{ao}(n_0+1,2)+\lambda_1\theta p_{ao}(n_0,1), && (2.37)\\
(\lambda_2+\mu_2+q_{21})p_{ao}(0,2) &= q_{12}p_{ao}(0,1)+\sum_{n=0}^{n_0+1}\mu_2 p_{ao}(n,2), && (2.38)\\
(\lambda_2+\mu_2+q_{21})p_{ao}(n,2) &= q_{12}p_{ao}(n,1)+\lambda_2 p_{ao}(n-1,2),\ 1\le n\le n_0-1, && (2.39)\\
(\lambda_2\theta+\mu_2+q_{21})p_{ao}(n_0,2) &= q_{12}p_{ao}(n_0,1)+\lambda_2 p_{ao}(n_0-1,2), && (2.40)\\
(\mu_2+q_{21})p_{ao}(n_0+1,2) &= q_{12}p_{ao}(n_0+1,1)+\lambda_2\theta p_{ao}(n_0,2), && (2.41)
\end{aligned}$$

όπου στις εξισώσεις (2.34) και (2.38) έχουμε συμπεριλάβει τις ψευδομεταβάσεις από την κατάσταση $(0, e)$ στη $(0, e)$, $e = 1, 2$, με ρυθμό μ_e, που αντιστοιχούν στις επισκέψεις του μέσου σε άδειο σταθμό.

Για να καταλήξουμε στις σχέσεις (2.30)-(2.33) για τις στάσιμες πιθανότητες, μπορούμε ξανά να χρησιμοποιήσουμε πιθανογεννήτριες, όπως περιγράψαμε σύντομα στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.1. Όμως, είναι εύκολο να ελεγχθεί με απλή αντικατάσταση ότι οι στάσιμες πιθανότητες που δίνονται από τις σχέσεις (2.30)-(2.33), ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.34)-(2.41) (χρησιμοποιώντας απλές αθροίσεις προκύπτουν οι (2.34) και (2.38)). ∎

Τώρα μπορούμε εύκολα να συνάγουμε τα Πορίσματα 2.4.1 και 2.4.2.

Πόρισμα 2.4.1. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με την καθαρή στρατηγική κατωφλίου* $\lceil n_0 \rceil$. *Τότε, η στάσιμη κατανομή* $(p_{ao}(n, e; \lceil n_0 \rceil))$ *του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις*

$$p_{ao}(n, e; \lceil n_0 \rceil) = p(n, e), \quad 0 \leq n \leq n_0 - 1, \quad e = 1, 2, \tag{2.42}$$

$$p_{ao}(n_0, e; \lceil n_0 \rceil) = \sum_{n=n_0}^{\infty} p(n, e), \quad e = 1, 2, \tag{2.43}$$

$$p_{ao}(n, e; \lceil n_0 \rceil) = 0, \quad n \geq n_0 + 1, \quad e = 1, 2, \tag{2.44}$$

όπου οι $p(n, e)$ *δίνονται από τις σχέσεις* (2.17)-(2.18).

Πόρισμα 2.4.2. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες αποχωρούν πάντα. Τότε, η στάσιμη κατανομή* $(p_{ao}(n, e; \lceil 0 \rceil))$ *του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις*

$$p_{ao}(0, e; \lceil 0 \rceil) = p_E(e), \quad e = 1, 2, \tag{2.45}$$

$$p_{ao}(n, e; \lceil 0 \rceil) = 0, \quad n \geq 1, \quad e = 1, 2, \tag{2.46}$$

όπου οι $p_E(e)$, $e = 1, 2$ *δίνονται από τις σχέσεις* (2.11)-(2.12).

Τώρα, θα υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή του συστήματος όταν οι πελάτες ακολουθούν μια αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lfloor n_0, \theta \rfloor$.

Παρατήρηση 2.4.1. *Υπό τη στρατηγική $\lfloor n_0, \theta \rfloor$ με $n_0 \geq 1$, οι πελάτες αποχωρούν όταν βρίσκουν το σύστημα άδειο. Έτσι, η στάσιμη κατανομή του συστήματος είναι αυτή που δίνεται στο Πόρισμα 2.4.2.*

Μένει να δούμε τι συμβαίνει όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lfloor 0, \theta \rfloor$.

Πρόταση 2.4.3. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με τη στρατηγική $\lfloor 0, \theta \rfloor$. Για $\theta = 0$, η στάσιμη κατανομή $(p_{ao}(n, e; \lfloor 0, 0 \rfloor))$ του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις*

$$p_{ao}(0, e; \lfloor 0, 0 \rfloor) = p_E(e), \quad e = 1, 2, \tag{2.47}$$

$$p_{ao}(n, e; \lfloor 0, 0 \rfloor) = 0, \quad n \geq 1, \quad e = 1, 2, \tag{2.48}$$

όπου οι $p_E(e)$, $e = 1, 2$ δίνονται από τις σχέσεις (2.11)-(2.12).

Για $\theta \in (0, 1)$, η στάσιμη κατανομή $(p_{ao}(n, e; \lfloor 0, \theta \rfloor))$ του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$p_{ao}(0, e; \lfloor 0, \theta \rfloor) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\theta)^n p(n, e), \quad e = 1, 2, \tag{2.49}$$

$$p_{ao}(n, e; \lfloor 0, \theta \rfloor) = \theta \sum_{i=n}^{\infty} (1-\theta)^{i-n} p(i, e), \quad n \geq 1, \quad e = 1, 2, \tag{2.50}$$

όπου οι $p(n, e)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.17)-(2.18).

Για $\theta = 1$, η στάσιμη κατανομή $(p_{ao}(n, e; \lfloor 0, 1 \rfloor))$ του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$p_{ao}(n, e; \lfloor 0, 1 \rfloor) = p(n, e), \quad n \geq 0, \quad e = 1, 2, \tag{2.51}$$

όπου οι $p(n, e)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.17)-(2.18).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.3 για $\theta = 0$ είναι άμεση, καθώς σε αυτήν την περίπτωση οι πελάτες αποχωρούν όποτε φθάνουν σε άδειο σύστημα. Έτσι, κάτω από αυτήν την στρατηγική η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου απορροφάται με πιθανότητα 1 στο υποσύνολο $\{(0, 1), (0, 2)\}$ του χώρου καταστάσεων και η στάσιμη κατανομή είναι αυτή που δίνεται από τις σχέσεις (2.45) και (2.46) του Πορίσματος 2.4.2. Στην περίπτωση που $\theta = 1$, οι πελάτες πάντα μπαίνουν στο σύστημα, οπότε εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.4.1. Έτσι, η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι για $\theta \in (0,1)$. Τότε, η απόδειξη της Πρότασης 2.4.3 γίνεται χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με τις αποδείξεις των Προτάσεων 2.4.1 και 2.4.2. Για αυτό τον λόγο, για χάριν συντομίας, παραλείπεται.

2.4.2 Συναρτήσεις αναμενόμενου καθαρού κέρδους

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα της παραγράφου 2.4.1, μπορούμε να υπολογίσουμε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη ο οποίος παρατηρεί n πελάτες κατά την άφιξή του και εισέρχεται στο σύστημα. Φυσικά, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του εξαρτάται από τη στρατηγική που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες. Έτσι, ανάλογα αν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου ή μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου, έχουμε τις διάφορες περιπτώσεις για το αναμενόμενο καθαρό κέρδος, που δίνονται στις Προτάσεις 2.4.4–2.4.6 και το Πόρισμα 2.4.3.

Πρόταση 2.4.4. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου όλοι οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος $S_{ao}(n;\lceil\infty\rceil) \equiv S_{ao}(n;\lfloor 0\rfloor)$ ενός πελάτη ο οποίος παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπει, δίνεται ως*

$$S_{ao}(n;\lceil\infty\rceil) \equiv S_{ao}(n;\lfloor 0\rfloor) \;=\; R - K\frac{A\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n}{D\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n + E\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n}, \quad n \geq 0, \tag{2.52}$$

όπου

$$A = \lambda_1 A_1 E[S_1] + \lambda_2 A_2 E[S_2], \tag{2.53}$$

$$B = \lambda_1 B_1 E[S_1] + \lambda_2 B_2 E[S_2], \tag{2.54}$$

$$D = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \tag{2.55}$$

$$E = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \tag{2.56}$$

και οι $E[S_1]$, $E[S_2]$, A_1, B_1, A_2, B_2, z_1, z_2 δίνονται από τις σχέσεις (2.7)-(2.8), (2.19)-(2.22) *και* (2.24).

Απόδειξη. Ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη ο οποίος βρίσκει n πελάτες και αποφασίζει να μπει, δίνεται ως

$$p^-_{ao}(1|n;\lceil\infty\rceil)E[S_1] + p^-_{ao}(2|n;\lceil\infty\rceil)E[S_2], \tag{2.57}$$

όπου $p_{ao}^{-}(e|n;\lceil\infty\rceil)$, $e=1,2$, είναι η πιθανότητα ο αφικνούμενος πελάτης να βρει το περιβάλλον στην κατάσταση e, δεδομένου ότι παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil\infty\rceil$. Οι δεσμευμένες πιθανότητες $p_{ao}^{-}(e|n;\lceil\infty\rceil)$ δίνονται ως

$$p_{ao}^{-}(e|n;\lceil\infty\rceil)=\frac{\lambda_e p(n,e)}{\lambda_1 p(n,1)+\lambda_2 p(n,2)},\ e=1,2, \tag{2.58}$$

όπου οι $p(n,e)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.17)-(2.18). Έτσι, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη που αποφασίζει να μπει, είναι

$$S_{ao}(n;\lceil\infty\rceil)\equiv S_{ao}(n;\lfloor 0\rfloor)=R-K[p_{ao}^{-}(1|n;\lceil\infty\rceil)E[S_1]+p_{ao}^{-}(2|n;\lceil\infty\rceil)E[S_2]]. \tag{2.59}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.17)-(2.18) στη (2.58) και ακολούθως στη (2.59) προκύπτει η (2.52). ■

Πρόταση 2.4.5. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με τη μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0,\theta\rceil$. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος $S_{ao}(n;\lceil n_0,\theta\rceil)$ ενός πελάτη ο οποίος παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπεί, δίνεται ως*

$$S_{ao}(n;\lceil n_0,\theta\rceil) = R-K\frac{A\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n+B\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n}{D\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n+E\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n},\quad 0\le n\le n_0-1, \tag{2.60}$$

$$S_{ao}(n_0;\lceil n_0,\theta\rceil) = R-K\frac{\sum_{i=n_0}^{\infty}(1-\theta)^{i-n_0}\left[A\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^i+B\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^i\right]}{\sum_{i=n_0}^{\infty}(1-\theta)^{i-n_0}\left[D\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^i+E\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^i\right]}, \tag{2.61}$$

$$S_{ao}(n_0+1;\lceil n_0,\theta\rceil) = R-K\frac{\sum_{i=n_0+1}^{\infty}[1-(1-\theta)^{i-n_0}]\left[A\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^i+B\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^i\right]}{\sum_{i=n_0+1}^{\infty}[1-(1-\theta)^{i-n_0}]\left[D\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^i+E\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^i\right]}, \tag{2.62}$$

όπου οι $A,\ B,\ D,\ E,\ z_1,\ z_2$ δίνονται από τις σχέσεις (2.53)-(2.56) και (2.24).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με τη μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0,\theta\rceil$. Τότε, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη ο οποίος βρίσκει n πελάτες και αποφασίζει να μπει, δίνεται ως

$$p_{ao}^{-}(1|n;\lceil n_0,\theta\rceil)E[S_1]+p_{ao}^{-}(2|n;\lceil n_0,\theta\rceil)E[S_2], \tag{2.63}$$

όπου $p^-_{ao}(e|n;\lceil n_0,\theta\rceil)$, $e=1,2$, είναι η πιθανότητα ο αφικνούμενος πελάτης να βρει το περιβάλλον στην κατάσταση e, δεδομένου ότι παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil n_0,\theta\rceil$. Οι δεσμευμένες πιθανότητες $p^-_{ao}(e|n;\lceil n_0,\theta\rceil)$ δίνονται ως

$$p^-_{ao}(e|n;\lceil n_0,\theta\rceil)=\frac{\lambda_e p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil)}{\lambda_1 p_{ao}(n,1;\lceil n_0,\theta\rceil)+\lambda_2 p_{ao}(n,2;\lceil n_0,\theta\rceil)},\ e=1,2, \tag{2.64}$$

όπου οι $p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.30)-(2.32). Έτσι, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη που αποφασίζει να μπει, είναι

$$S_{ao}(n;\lceil n_0,\theta\rceil)=R-K[p^-_{ao}(1|n;\lceil n_0,\theta\rceil)E[S_1]+p^-_{ao}(2|n;\lceil n_0,\theta\rceil)E[S_2]]. \tag{2.65}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.30)-(2.32) που δίνουν τις $p_{ao}(n,e;\lceil n_0,\theta\rceil)$ παίρνουμε τις (2.60)-(2.62). ∎

Στην περίπτωση που οι πελάτες ακολουθούν την καθαρή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0\rceil$, παίρνουμε το Πόρισμα 2.4.3.

Πόρισμα 2.4.3. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με τη καθαρή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0\rceil$. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος $S_{ao}(n;\lceil n_0\rceil)$ ενός πελάτη ο οποίος παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπει, δίνεται ως*

$$S_{ao}(n;\lceil n_0\rceil) = R-K\frac{A\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n+B\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n}{D\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^n+E\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^n},\quad 0\le n\le n_0-1, \tag{2.66}$$

$$S_{ao}(n_0;\lceil n_0\rceil) = R-K\frac{\sum_{i=n_0}^{\infty}\left[A\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^i+B\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^i\right]}{\sum_{i=n_0}^{\infty}\left[D\left(\frac{1}{1-z_1}\right)^i+E\left(\frac{1}{1-z_2}\right)^i\right]}, \tag{2.67}$$

όπου οι A, B, D, E, z_1, z_2 δίνονται από τις σχέσεις (2.53)-(2.56) *και* (2.24).

Παρατήρηση 2.4.2. *Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2.4.3 για $n_0=0$ παίρνουμε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος $S_{ao}(0;\lceil 0\rceil)\equiv S_{ao}(0;\lfloor\infty\rfloor)$ ενός πελάτη ο οποίος αποφασίζει να μπει όταν οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική ''πάντα να αποχωρείς''.*

Όταν οι πελάτες ακολουθούν μια αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lfloor 0, \theta \rfloor$, με $\theta \in (0,1)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια επιχειρήματα με τις Προτάσεις 2.4.4 και 2.4.5, και τη στάσιμη κατανομή που δίνεται από τις (2.49)-(2.50). Τότε, παίρνουμε την ακόλουθη Πρόταση 2.4.6.

Πρόταση 2.4.6. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα σύμφωνα με την αντίστροφη μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lfloor 0, \theta \rfloor$ για κάποιο $\theta \in (0,1)$. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος $S_{ao}(n; \lfloor 0, \theta \rfloor)$ ενός πελάτη ο οποίος παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπει, δίνεται ως*

$$S_{ao}(n; \lfloor 0, \theta \rfloor) = R - K \frac{\sum_{i=n}^{\infty} (1-\theta)^{i-n} \left[A \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^i + B \left(\frac{1}{1-z_2} \right)^i \right]}{\sum_{i=n}^{\infty} (1-\theta)^{i-n} \left[D \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^i + E \left(\frac{1}{1-z_2} \right)^i \right]}, n \geq 0, \quad (2.68)$$

όπου οι $A,\ B,\ D,\ E,\ z_1,\ z_2$ δίνονται από τις σχέσεις (2.53)-(2.56) *και* (2.24).

Για να εκφράσουμε τις σχέσεις για το αναμενόμενο καθαρό κέρδος που δίνονται στις Προτάσεις 2.4.4–2.4.6 και το Πόρισμα 2.4.3 με ενιαίο τρόπο ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} F(n,\theta) &= \sum_{i=n}^{\infty} (1-\theta)^{i-n} \left[(RD - KA) \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^i + (RE - KB) \left(\frac{1}{1-z_2} \right)^i \right], \quad (2.69) \\ G(n,\theta) &= \sum_{i=n}^{\infty} (1-\theta)^{i-n} \left[D \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^i + E \left(\frac{1}{1-z_2} \right)^i \right],\ n \geq 0,\ \theta \in [0,1], \quad (2.70) \\ H^U(n) &= \frac{F(n,1)}{G(n,1)}, \quad H^L(n) = \frac{F(n,0)}{G(n,0)},\ n \geq 0. \quad (2.71) \end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
S_{ao}(n;\lceil\infty\rceil) \equiv S_{ao}(n;\lfloor 0\rfloor) &= \frac{F(n,1)}{G(n,1)} = H^U(n),\ n \geq 0, && (2.72)\\
S_{ao}(n;\lceil n_0,\theta\rceil) &= \frac{F(n,1)}{G(n,1)} = H^U(n),\ 0 \leq n \leq n_0-1, && (2.73)\\
S_{ao}(n_0;\lceil n_0,\theta\rceil) &= \frac{F(n_0,\theta)}{G(n_0,\theta)}, && (2.74)\\
S_{ao}(n_0+1;\lceil n_0,\theta\rceil) &= \frac{F(n_0,0)-F(n_0,\theta)}{G(n_0,0)-G(n_0,\theta)}, && (2.75)\\
S_{ao}(n;\lceil n_0\rceil) &= \frac{F(n,1)}{G(n,1)} = H^U(n),\ 0 \leq n \leq n_0-1, && (2.76)\\
S_{ao}(n_0;\lceil n_0\rceil) &= \frac{F(n_0,0)}{G(n_0,0)} = H^L(n_0), && (2.77)\\
S_{ao}(0;\lceil 0\rceil) \equiv S_{ao}(0;\lfloor\infty\rfloor) &= \frac{F(0,0)}{G(0,0)} = H^L(0), && (2.78)\\
S_{ao}(n;\lfloor 0,\theta\rfloor) &= \frac{F(n,\theta)}{G(n,\theta)},\ n \geq 0. && (2.79)
\end{aligned}$$

2.5 Η μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση: Στρατηγικές ισορροπίας

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει στην αρχή της ενότητας 2.4, φαίνεται λογικό οι πελάτες να ακολουθούν στρατηγικές κατωφλίου όταν η κατάσταση περιβάλλοντος ‘‘γρήγορης εξυπηρέτησης ’’ ταυτίζεται με την κατάσταση περιβάλλοντος ‘‘χαμηλού συνωστισμού’’, δηλαδή όταν $(\mu_1-\mu_2)(\rho_1-\rho_2)<0$. Αντιθέτως, οι πελάτες ακολουθούν αντίστροφες στρατηγικές κατωφλίου όταν η κατάσταση περιβάλλοντος ‘‘γρήγορης εξυπηρέτησης ’’ ταυτίζεται με την κατάσταση περιβάλλοντος ‘‘υψηλού συνωστισμού’’, δηλαδή όταν η αντίστροφη ανισότητα ισχύει. Η διαισθητική αυτή παρατήρηση σχετίζεται με τη μονοτονία της $H^U(n)$ η οποία παίζει κυρίαρχο ρόλο στην παρακάτω ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση 2.5.1.

Πρόταση 2.5.1. *Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:*

$$H^U(n) \text{ γνησίως φθίνουσα} \Leftrightarrow AE - BD > 0 \Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0. \quad (2.80)$$

$$H^U(n) \text{ σταθερή} \Leftrightarrow AE - BD = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 \text{ ή } \rho_1 = \rho_2. \quad (2.81)$$

$$H^U(n) \text{ γνησίως αύξουσα} \Leftrightarrow AE - BD < 0 \Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) > 0. \quad (2.82)$$

Η απόδειξη της πρότασης παραλείπεται, καθώς η πρώτη περίπτωση προκύπτει εύκολα μετά από απλές πράξεις. Έτσι, ξεκινώντας από τη σχέση $H^U(n+1) - H^U(n) < 0$ οδηγούμαστε στη $AE - BD > 0$ και τη $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0$, μέσα από διαδοχικές ισοδυναμίες. Οι άλλες δύο περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως. Επιπλέον, η μονοτονία της συνάρτησης $\frac{F(n,\theta)}{G(n,\theta)}$ ως προς θ εξαρτάται από το πρόσημο της ποσότητας $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2)$. Συγκεκριμένα, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση 2.5.2.

Πρόταση 2.5.2. *Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:*

$$\frac{F(n,\theta)}{G(n,\theta)} \text{ είναι γνησίως αύξουσα ως προς } \theta \Leftrightarrow AE - BD > 0 \Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0. \quad (2.83)$$

$$\frac{F(n,\theta)}{G(n,\theta)} \text{ είναι σταθερή ως προς } \theta \Leftrightarrow AE - BD = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 \text{ ή } \rho_1 = \rho_2. \quad (2.84)$$

$$\frac{F(n,\theta)}{G(n,\theta)} \text{ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς } \theta \Leftrightarrow AE - BD < 0 \Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) > 0. \quad (2.85)$$

Η απόδειξη αυτής της πρότασης παραλείπεται, καθώς το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις. Τώρα, δίνουμε κάποιες ιδιότητες των $F(n,\theta)$, $G(n,\theta)$ και $H^U(n)$, $H^L(n)$ τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Η απόδειξή τους προκύπτει άμεσα από τον ορισμό τους.

Λήμμα 2.5.1. *Οι συναρτήσεις $F(n,\theta)$, $G(n,\theta)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$F(n,\theta)=\sum_{i=n}^{\infty}(1-\theta)^{i-n}F(i,1)=F(n,1)+(1-\theta)F(n+1,\theta),\ n\geq 0,\ \theta\in[0,1], \tag{2.86}$$

$$G(n,\theta)=\sum_{i=n}^{\infty}(1-\theta)^{i-n}G(i,1)=G(n,1)+(1-\theta)G(n+1,\theta),\ n\geq 0,\ \theta\in[0,1], \tag{2.87}$$

$$G(n,\theta)>0,\ n\geq 0,\ \theta\in[0,1], \tag{2.88}$$

$$G(n,\theta)\ \textit{είναι γνησίως φθίνουσα ως προς}\ \theta\ \textit{για κάθε}\ n\geq 0. \tag{2.89}$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες (2.88) και (2.89) για την $G(n,\theta)$ διασφαλίζουν ότι όλοι οι παρονομαστές στις (2.72)-(2.79) είναι θετικοί.

Η διαισθητική ανάλυση στην αρχή της ενότητας 2.4 σε συνδυασμό με τις Προτάσεις 2.5.1 και 2.5.2 μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πρέπει να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας θεωρώντας ξεχωριστά τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο (αρνητικό, θετικό ή μηδέν) της $(\mu_1-\mu_2)(\rho_1-\rho_2)$.

2.5.1 Περίπτωση Α: $(\mu_1-\mu_2)(\rho_1-\rho_2)<0$

Στην περίπτωση Α, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου. Επιπλέον, θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο για να βρίσκουμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου. Αρχικά, θα ορίσουμε κάποιες ποσότητες που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Ορισμός 2.5.1. *Υποθέτουμε ότι*

$$(\mu_1-\mu_2)(\rho_1-\rho_2)<0. \tag{2.90}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} n_U &= \inf\{n\geq 0: F(n,1)<0\}, && (2.91)\\ n_L &= \inf\{n\geq 0: F(n,0)\leq 0\}, && (2.92)\\ n_U^- &= \inf\{n\geq 0: F(n,1)\leq 0\}, && (2.93)\\ n_L^+ &= \inf\{n\geq 0: F(n,0)<0\}. && (2.94)\end{aligned}$$

Έτσι, οι ποσότητες n_U, n_L, n_U^- και n_L^+ έχουν ορισμένες ιδιότητες που συνοψίζονται στο παρακάτω Λήμμα 2.5.2.

Λήμμα 2.5.2. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η* (2.90). *Τότε, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $H^U(0) < 0$.

Τότε

$$n_U = n_L = n_U^- = n_L^+ = 0, \tag{2.95}$$

$$F(n,\theta) < 0, \quad n \geq 0, \quad \theta \in [0,1], \tag{2.96}$$

$$F(n,0) - F(n,\theta) < 0, \quad n \geq 0, \quad \theta \in (0,1]. \tag{2.97}$$

Περίπτωση II: $H^U(0) \geq 0$ *και* $\lim_{n\to\infty} H^U(n) < 0$.

Τότε

$$1 \leq n_U < \infty, \tag{2.98}$$

$$F(n,1) > 0, \quad 0 \leq n \leq n_U - 2, \tag{2.99}$$

$$F(n_U - 1, 1) \geq 0, \tag{2.100}$$

$$F(n,1) < 0, \quad n \geq n_U. \tag{2.101}$$

και

$$0 \leq n_L \leq n_U, \tag{2.102}$$

$$F(n,0) > 0, \quad 0 \leq n \leq n_L - 1, \tag{2.103}$$

$$F(n_L, 0) \leq 0, \tag{2.104}$$

$$F(n,0) < 0, \quad n \geq n_L + 1. \tag{2.105}$$

Επιπλέον,

$$n_L^+ = \begin{cases} n_L, & \text{αν } F(n_L,0) < 0 \\ n_L + 1, & \text{αν } F(n_L,0) = 0, \end{cases} \tag{2.106}$$

$$n_U^- = \begin{cases} n_U, & \text{αν } F(n_U - 1,1) > 0 \\ n_U - 1, & \text{αν } F(n_U - 1,1) = 0. \end{cases} \tag{2.107}$$

Για κάθε $n_0 \in \{n_L^+, \ldots, n_U^- - 1\}$, υπάρχει μια μοναδική λύση $\theta(n_0) \in (0,1)$ της εξίσωσης $F(n_0, \theta) = 0$ ως προς θ, δηλαδή

$$F(n_0, \theta(n_0)) = 0, \; n_L^+ \le n \le n_U^- - 1. \tag{2.108}$$

Περίπτωση III: $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \ge 0$.

Τότε

$$n_U = n_L = n_U^- = n_L^+ = \infty, \tag{2.109}$$

$$F(n, \theta) > 0, \quad n \ge 0, \quad \theta \in [0,1], \tag{2.110}$$

$$F(n, 0) - F(n, \theta) > 0, \quad n \ge 0, \quad \theta \in (0,1]. \tag{2.111}$$

Απόδειξη. Στην Περίπτωση I, η συνθήκη $H^U(0) < 0$ σε συνδυασμό με τη μονοτονία της $H^U(n)$ (λόγω της (2.80)) δίνει ότι $H^U(n) < 0, \; n \ge 0$. Τότε, έχουμε ότι $F(n,1) < 0, \; n \ge 0$ και έτσι $F(n,\theta) = \sum_{i=n}^{\infty} (1-\theta)^{i-n} F(i,1) < 0, \; n \ge 0, \; \theta \in [0,1]$ και $F(n,0) - F(n,\theta) = \sum_{i=n}^{\infty} [1 - (1-\theta)^{i-n}] F(i,1) < 0, \; n \ge 0, \; \theta \in (0,1]$.

Στην περίπτωση II, οι συνθήκες $H^U(0) \ge 0$ και $\lim_{n\to\infty} H^U(n) < 0$, σε συνδυασμό με τη συνθήκη (2.80) για τη μονοτονία της $H^U(n)$ δίνουν τις (2.98)-(2.101).

Από τη σχέση (2.101) συμπεραίνουμε ότι $F(n_U, 0) = \sum_{i=n_U}^{\infty} F(i,1) < 0$ και έτσι προκύπτει η (2.102). Παρατηρούμε ακόμη ότι από τον ορισμό της n_L παίρνουμε αμέσως τις (2.103)-(2.104). Επιπλέον, έχουμε ότι $F(n,0) = \sum_{i=n}^{\infty} F(i,1) < 0$, για $n \ge n_U$. Για n με $n_L + 1 \le n \le n_U - 1$ έχουμε επίσης ότι $F(n,0) < 0$. Πράγματι, υποθέτοντας ότι υπάρχει n με $n_L + 1 \le n \le n_U - 1$ τέτοιο ώστε $F(n,0) \ge 0$, θα είχαμε ότι $F(n-1,0) = F(n-1,1) + F(n,0) > 0$ και επαγωγικά θα προέκυπτε ότι $F(n_L,0) > 0$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της (2.104). Έτσι, $F(n,0) < 0$, για όλα τα $n \ge n_L + 1$ και προκύπτει η (2.105).

Οι σχέσεις (2.106) και (2.107) προκύπτουν άμεσα από τις (2.99)-(2.101) και (2.103)-(2.105) αντίστοιχα. Θεωρούμε, τώρα, ένα $n_0 \in \{n_L^+, \ldots, n_U^- - 1\}$. Τότε, έχουμε ότι $\frac{F(n_0,1)}{G(n_0,1)} > 0$ (εφόσον $n_0 \le n_U^- - 1$ - βλέπε (2.99)) και $\frac{F(n_0,0)}{G(n_0,0)} < 0$ (εφόσον $n_0 \ge n_L^+$ - βλέπε (2.105)-(2.106)). Από τη συνθήκη (2.83), έχουμε ότι η $\frac{F(n_0,\theta)}{G(n_0,\theta)}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ως προς θ, όπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει μια μοναδική λύση $\theta(n_0) \in (0,1)$ της εξίσωσης $\frac{F(n_0,\theta)}{G(n_0,\theta)} = 0$. Έτσι, παίρνουμε την (2.108).

Στην Περίπτωση III, η συνθήκη $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \geq 0$ σε συνδυασμό με τη συνθήκη (2.80) για τη μονοτονία της $H^U(n)$ δίνει ότι $H^U(n) > 0$, $n \geq 0$, από όπου προκύπτει ότι $F(n,1) > 0$, $n \geq 0$ και $F(n,\theta) = \sum_{i=n}^{\infty}(1-\theta)^{i-n}F(i,1) > 0$, για $n \geq 0$ και $\theta \in [0,1]$. Επιπλέον, $F(n,0) - F(n,\theta) = \sum_{i=n}^{\infty}[1-(1-\theta)^{i-n}]F(i,1) > 0$, $n \geq 0$, $\theta \in (0,1]$. Έτσι, παίρνουμε τις (2.109)-(2.111). ∎

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5.2 θα αποδείξουμε την ύπαρξη στρατηγικών ισορροπίας τύπου κατωφλίου, όταν ισχύει η (2.90). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στο επόμενο Θεώρημα 2.5.1.

Θεώρημα 2.5.1. *Στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου ισχύει η συνθήκη* (2.90)*, υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου. Συγκεκριμένα, για τις τρεις περιπτώσεις του Λήμματος 2.5.2 έχουμε:*

Περίπτωση I: $H^U(0) < 0$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου, η στρατηγική $\lceil 0 \rceil$ *(''πάντα να αποχωρείς '').*

Περίπτωση II: $H^U(0) \geq 0$ *και* $\lim_{n\to\infty} H^U(n) < 0$.

Τότε, υπάρχει πάντα μια στρατηγική ισορροπίας μέσα στην κλάση των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου. Επιπλέον, οι στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κλάση των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου είναι όλες οι στρατηγικές $\lceil n_0 \rceil$ *με* $n_0 = n_L, n_L+1, \ldots, n_U$*. Ακόμη, οι στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κλάση των μικτών στρατηγικών κατωφλίου είναι οι στρατηγικές* $\lceil n_0, \theta(n_0) \rceil$*, όπου* $n_0 \in \{n_L^+, \ldots, n_U^- - 1\}$ *και* $\theta(n_0)$ *είναι η μοναδική λύση της* $F(n_0,\theta) = 0$ *ως προς* θ *στο* $(0,1)$.

Περίπτωση III: $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \geq 0$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου, η στρατηγική $\lceil \infty \rceil$ *(''πάντα να μπαίνεις '').*

Απόδειξη. Περίπτωση I: Θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη τη στιγμή της άφιξής του και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$, για κάποιο $n_0 \geq 0$. Η ανισότητα (2.96) και οι σχέσεις (2.76) και (2.77) δίνουν ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του πελάτη, όταν βρίσκει n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπει είναι, $S_{ao}(n; \lceil n_0 \rceil) < 0$, για $0 \leq n \leq n_0$. Έτσι, πάντα προτιμά να αποχωρεί και η βέλτιστη απάντησή του απέναντι στη στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$ είναι η στρατηγική $\lceil 0 \rceil$.

Τώρα υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$, για κάποιο $n_0 \geq 0$ και $\theta_0 \in (0, 1)$. Τότε, αν ο πελάτης βρει n πελάτες κατά την άφιξή του και αποφασίσει να μπει, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του θα είναι $S_{ao}(n; \lceil n_0, \theta_0 \rceil) < 0$ για $0 \leq n \leq n_0 + 1$, από τις (2.96)-(2.97) και τις (2.73)-(2.75). Έτσι, ο πελάτης είναι πάντα απρόθυμος να μπει και η βέλτιστη απάντησή του απέναντι στη στρατηγική $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ είναι η στρατηγική $\lceil 0 \rceil$.

Αν όλοι οι πελάτες ακολουθήσουν τη στρατηγική $\lceil \infty \rceil$, οι (2.96) και (2.72) δίνουν ότι $S_{ao}(n; \lceil \infty \rceil) < 0$ για $n \geq 0$. Πάλι, λόγω του αρνητικού αναμενόμενου καθαρού κέρδους, είναι προτιμότερο για τον πελάτη να αποχωρήσει. Οπότε, η βέλτιστη απάντησή του απέναντι στη στρατηγική $\lceil \infty \rceil$ είναι η στρατηγική $\lceil 0 \rceil$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η μόνη στρατηγική που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της μέσα στην κλάση των (καθαρών και μικτών) στρατηγικών κατωφλίου είναι η $\lceil 0 \rceil$.

Περίπτωση ΙΙ: Θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη και υποθέτουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$, για κάποιο $n_0 \leq n_L - 1$. Αν ο πελάτης βρει n_0 πελάτες στο σύστημα και αποφασίσει να μπει, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του θα είναι $S_{ao}(n_0; \lceil n_0 \rceil) > 0$, από τις (2.103) και (2.77). Αυτό σημαίνει ότι όταν δει n_0 πελάτες, θα είναι πρόθυμος να μπει. Έτσι, η στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$ δε μπορεί να είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Οπότε, μια τέτοια στρατηγική δεν είναι στρατηγική ισορροπίας.

Θεωρούμε, τώρα, έναν αφικνούμενο πελάτη και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$, για κάποιο $n_0 \geq n_U + 1$. Χρησιμοποιώντας τις (2.76) και (2.101), έχουμε ότι $S_{ao}(n; \lceil n_0 \rceil) < 0$, για $n_U \leq n \leq n_0 - 1$. Αυτό σημαίνει ότι όταν ο πελάτης βρίσκει n πελάτες στο σύστημα, με $n_U \leq n \leq n_0 - 1$, δεν είναι πρόθυμος να μπει. Έτσι, η στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$ δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας. Συνεπώς, η ερευνά μας για στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κλάση των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου θα περιοριστεί στις στρατηγικές $\lceil n_0 \rceil$ με $n_L \leq n_0 \leq n_U$.

Θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη και υποθέτουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$, για κάποιο n_0 με $n_L \leq n_0 \leq n_U$. Από τις (2.76), (2.77), (2.99), (2.100), (2.104) και (2.105), έχουμε ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του και αποφασίζει να μπει είναι $S_{ao}(n; \lceil n_0 \rceil) \geq 0$, για $0 \leq n \leq n_0 - 1$ και $S_{ao}(n_0; \lceil n_0 \rceil) \leq 0$. 'Ετσι, η στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Επομένως, όλες αυτές οι στρατηγικές είναι στρατηγικές ισορροπίας.

Για να ολοκληρώσουμε την έρευνά μας για στρατηγικές ισορροπίας στην κλάση των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου, πρέπει να εξετάσουμε τη στρατηγική $\lceil \infty \rceil$. Αυτή δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας, καθώς οι (2.72) και (2.101) δίνουν ότι $S_{ao}(n; \lceil \infty \rceil) < 0$, για $n \geq n_U$, το οποίο σημαίνει ότι δεν είναι βέλτιστο για τον πελάτη να μπει στο σύστημα όταν βλέπει n πελάτες, για κάποιο $n \geq n_U$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι οι στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κλάση των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου είναι οι στρατηγικές $\lceil n_0 \rceil$ με $n_L \leq n_0 \leq n_U$.

Τώρα, θα αναζητήσουμε στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κλάση των γνησίως μικτών στρατηγικών κατωφλίου, δηλαδή ανάμεσα στις στρατηγικές $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ με $\theta_0 \in (0,1)$. Μια μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις $F(n,1) \geq 0$, για $0 \leq n \leq n_0 - 1$, $F(n_0, \theta_0) = 0$ και $F(n_0, 0) - F(n_0, \theta_0) \leq 0$ (βλέπε (2.73)-(2.75)). Έτσι, η στρατηγική $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν η στρατηγική $\lceil n_0 \rceil$ είναι στρατηγική ισορροπίας (βλέπε (2.73)-(2.75) σε συνδυασμό με (2.76)-(2.77)). Συνεπώς, πρέπει να περιορίσουμε την έρευνά μας για στρατηγικές ισορροπίας στις στρατηγικές $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ με $n_0 = n_L, n_L + 1, \ldots, n_U$.

Αν $F(n_L, 0) = 0$, τότε δεν υπάρχει $\theta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $F(n_L, \theta) = 0$, καθώς η $\frac{F(n,\theta)}{G(n,\theta)}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι, η στρατηγική $\lceil n_L, \theta \rceil$ δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας για κανένα $\theta \in (0,1)$. Ομοίως, αν $F(n_U - 1, 1) = 0$, τότε η στρατηγική $\lceil n_U - 1, \theta \rceil$ δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας για κανένα $\theta \in (0,1)$. Επιπλέον, η στρατηγική $\lceil n_U, \theta \rceil$ δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας για κανένα $\theta \in (0,1)$, καθώς $F(n_U, \theta) < 0$, $\theta \in (0,1)$. Έτσι, μια στρατηγική $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ με $\theta \in (0,1)$ μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας μόνο αν $n_L^+ \leq n_0 \leq n_U^- - 1$.

Τώρα, για κάθε $n_0 \in \{n_L^+, \ldots, n_U^- - 1\}$, η μόνη στρατηγική $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ που μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας είναι αυτή για την οποία ισχύει $\theta_0 = \theta(n_0)$, καθώς

$F(n_0, \theta(n_0)) = 0$. Πράγματι, αν όλοι οι πελάτες ακολουθήσουν τη στρατηγική $\lceil n_0, \theta(n_0) \rceil$, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη, που βρίσκει n άλλους πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπει, είναι $S_{ao}(n; \lceil n_0, \theta(n_0) \rceil) > 0$, για $0 \le n \le n_0 - 1$, $S_{ao}(n_0; \lceil n_0, \theta(n_0) \rceil) = 0$ και $S_{ao}(n_0 + 1; \lceil n_0, \theta(n_0) \rceil) < 0$, από τις (2.99), (2.105) και (2.108). Έτσι, η στρατηγική $\lceil n_0, \theta(n_0) \rceil$ είναι στρατηγική ισορροπίας.

Περίπτωση III: Εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα όπως στην περίπτωση I, βρίσκουμε ότι όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0 \rceil$ ή μια μικτή στρατηγική κατωφλίου $\lceil n_0, \theta_0 \rceil$ το αναμενόμενο καθαρό κέρδος είναι πάντα θετικό. Έτσι, η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι να μπαίνει πάντα στο σύστημα. Επομένως, η μόνη στρατηγική που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της μέσα στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου είναι η στρατηγική $\lceil \infty \rceil$. ■

Παρατηρούμε ότι παρόλο που υπάρχουν πάντα στρατηγικές ισορροπίας που ανήκουν στην κλάση των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου, είναι πιθανό να μην υπάρχουν στρατηγικές ισορροπίας που ανήκουν στην κλάση των γνησίως μικτών στρατηγικών κατωφλίου. Αυτό συμβαίνει αν $n_U^- - 1 < n_L^+$.

2.5.2 Περίπτωση Β: $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) > 0$

Στην περίπτωση Β, ψάχνουμε για στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κλάση των αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου. Θα εξαιρέσουμε τις στρατηγικές $\lfloor n_0 \rfloor$ και $\lfloor n_0, \theta_0 \rfloor$ με $n_0 \ge 1$. Πράγματι, όλες αυτές οι στρατηγικές υπαγορεύουν να αποχωρεί ο πελάτης, όταν βλέπει το σύστημα άδειο κατά την άφιξή του. Έτσι, κάτω από μια τέτοια στρατηγική, το σύστημα παραμένει συνεχώς άδειο, μετά από την ολοκλήρωση της πρώτης εξυπηρέτησης. Συνεπώς, στη στάσιμη κατάσταση, αυτές οι στρατηγικές είναι ισοδύναμες με τη στρατηγική ‘‘πάντα να αποχωρείς ’’ (στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$). Οπότε, ψάχνουμε για στρατηγικές ισορροπίας μέσα στο σύνολο $\mathcal{S}_{r-t} = \{\lfloor 0 \rfloor,\ \lfloor \infty \rfloor\} \cup \{\lfloor 0, \theta_0 \rfloor : \theta_0 \in (0,1)\}$. Αρχικά ορίζουμε ορισμένες ποσότητες που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 2.5.2. *Υποθέτουμε ότι*

$$(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) > 0. \tag{2.112}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} m_U &= \inf\{n \geq 0 : F(n,1) > 0\}, && (2.113)\\ m_L &= \inf\{n \geq 0 : F(n,0) \geq 0\}, && (2.114)\\ m_U^- &= \inf\{n \geq 0 : F(n,1) \geq 0\}, && (2.115)\\ m_L^+ &= \inf\{n \geq 0 : F(n,0) > 0\}. && (2.116)\end{aligned}$$

Τότε, οι ποσότητες m_U, m_L, m_U^- και m_L^+ έχουν ορισμένες ιδιότητες που συνοψίζονται στο παρακάτω Λήμμα 2.5.3.

Λήμμα 2.5.3. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η* (2.112). *Τότε, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $H^U(0) > 0$.

Τότε

$$m_U = m_L = m_U^- = m_L^+ = 0, \quad (2.117)$$

$$F(n,\theta) > 0, \quad n \geq 0, \quad \theta \in [0,1]. \quad (2.118)$$

Περίπτωση II: $H^U(0) \leq 0$ *και* $\lim_{n\to\infty} H^U(n) > 0$.

Τότε

$$\begin{aligned} &1 \leq m_U < \infty, && (2.119)\\ &F(n,1) < 0, \quad 0 \leq n \leq m_U - 2, && (2.120)\\ &F(m_U - 1, 1) \leq 0, && (2.121)\\ &F(n,1) > 0, \quad n \geq m_U. && (2.122)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} &0 \leq m_L \leq m_U, && (2.123)\\ &F(n,0) < 0, \quad 0 \leq n \leq m_L - 1, && (2.124)\\ &F(m_L, 0) \geq 0, && (2.125)\\ &F(n,0) > 0, \quad n \geq m_L + 1. && (2.126)\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$m_L^+ = \begin{cases} m_L, & \text{αν } F(m_L, 0) > 0 \\ m_L + 1, & \text{αν } F(m_L, 0) = 0, \end{cases} \tag{2.127}$$

$$m_U^- = \begin{cases} m_U, & \text{αν } F(m_U - 1, 1) < 0 \\ m_U - 1, & \text{αν } F(m_U - 1, 1) = 0. \end{cases} \tag{2.128}$$

Αν $m_L^+ = 0$ *και* $m_U^- \geq 1$, *τότε υπάρχει ένα μοναδικό* $\theta(0) \in (0, 1)$ *τέτοιο ώστε*

$$F(0, \theta(0)) = 0, \tag{2.129}$$

$$F(n, \theta(0)) > 0, \ n \geq 1. \tag{2.130}$$

Περίπτωση III: $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \leq 0$.

Τότε

$$m_U = m_L = m_U^- = m_L^+ = \infty, \tag{2.131}$$

$$F(n, \theta) < 0, \ n \geq 0, \ \theta \in [0, 1]. \tag{2.132}$$

Παραλείπουμε την απόδειξη του Λήμματος 2.5.3 καθώς είναι εντελώς ανάλογη με την απόδειξη του Λήμματος 2.5.2. Τώρα, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι υπάρχει πάντα μοναδική στρατηγική ισορροπίας μέσα στην κλάση των αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου, όταν ισχύει η (2.112). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στο Θεώρημα 2.5.2. Οι στρατηγικές ισορροπίας που βρίσκουμε είναι μοναδικές μέσα στο υποσύνολο $\mathcal{S}_{r-t} = \{\lfloor 0 \rfloor, \ \lfloor \infty \rfloor\} \cup \{\lfloor 0, \theta_0 \rfloor : \theta_0 \in (0, 1)\}$ των αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου.

Θεώρημα 2.5.2. *Στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου ισχύει η συνθήκη (2.112), υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου. Συγκεκριμένα, για τις τρεις περιπτώσεις του Λήμματος 2.5.3 έχουμε:*

Περίπτωση I: $H^U(0) > 0$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου, η στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$ *(''πάντα να μπαίνεις '').*

Περίπτωση II: $H^U(0) \leq 0$ *και* $\lim_{n\to\infty} H^U(n) > 0$.

Αν $m_U^- = 0$, *τότε η στρατηγική* $\lfloor 0 \rfloor$ *("πάντα να μπαίνεις ") είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου. Αν* $m_L^+ \geq 1$, *τότε η στρατηγική* $\lfloor \infty \rfloor$ *("πάντα να αποχωρείς ") είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου. Αλλιώς, η στρατηγική* $\lfloor 0, \theta(0) \rfloor$ *είναι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου.*

Περίπτωση III: $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \leq 0$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου, η στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$ *("πάντα να αποχωρείς ").*

Απόδειξη. Περίπτωση I: Θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη κατά τη στιγμή άφιξής του και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$. Η ανισότητα (2.118) και η σχέση (2.72) δίνουν ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, όταν βρίσκει n πελάτες και αποφασίζει να μπει είναι $S_{ao}(n; \lfloor 0 \rfloor) > 0$, για $n \geq 0$. Έτσι, πάντα προτιμά να μπαίνει. Οπότε, η βέλτιστη απάντησή του απέναντι στη στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$ είναι η ίδια η στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$.

Ομοίως, θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lfloor 0, \theta_0 \rfloor$, για κάποιο $\theta_0 \in (0,1)$. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του πελάτη, που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του και αποφασίζει να μπει, είναι $S_{ao}(n; \lfloor 0, \theta_0 \rfloor) > 0$, για $n \geq 0$ λόγω των (2.118) και (2.79). Έτσι, ο πελάτης είναι πάντα πρόθυμος να μπει και η στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$ είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική $\lfloor 0, \theta_0 \rfloor$.

Αν όλοι οι πελάτες ακολουθήσουν τη στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$, οι (2.118) και (2.78) δίνουν ότι $S_{ao}(0; \lfloor \infty \rfloor) > 0$, συνεπώς ο πελάτης προτιμά να μπει. Έτσι, έχουμε πάλι ότι η στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$ είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$. Οπότε η μόνη αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της είναι η στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$.

Περίπτωση II: Υποθέτουμε ότι $m_U^- = 0$. Τότε $F(0,1) = 0$ και $m_U = 1$. Θεωρούμε τώρα έναν πελάτη τη στιγμή της άφιξής του και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$. Η ανισότητα (2.122) και η σχέση (2.72) δίνουν ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, όταν βρίσκει n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να μπει είναι $S_{ao}(n; \lfloor 0 \rfloor) \geq 0$, για $n \geq 0$. Έτσι, η στρατηγική $\lfloor 0 \rfloor$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $m_L^+ \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $F(0,0) \leq 0$. Αν θεωρήσουμε έναν αφικνούμενο πελάτη και υποθέσουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$, τότε ο πελάτης, αν βρει 0 πελάτες στο σύστημα και αποφασίσει να μπει, θα έχει αναμενόμενο καθαρό κέρδος $S_{ao}(0; \lfloor \infty \rfloor) \leq 0$, λόγω της (2.78). Έτσι, η στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, δηλαδή είναι στρατηγική ισορροπίας. Αλλιώς, θα έχουμε $m_L^+ = 0$. Θεωρούμε πάλι έναν πελάτη και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\lfloor 0, \theta(0) \rfloor$. Τότε, αν ο πελάτης βρει n πελάτες κατά την άφιξή του και αποφασίσει να μπει, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του θα είναι είτε $S_{ao}(0; \lfloor 0, \theta(0) \rfloor) = 0$, αν $n = 0$, ή $S_{ao}(n; \lfloor 0, \theta(0) \rfloor) > 0$, αν $n \geq 1$, λόγω των (2.129)-(2.130) και (2.79). Έτσι, η στρατηγική $\lfloor 0, \theta(0) \rfloor$ είναι στρατηγική ισορροπίας.

Περίπτωση ΙΙΙ: Ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα με την περίπτωση Ι, τώρα συμπεραίνουμε ότι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος είναι αρνητικό. Έτσι, η βέλτιστη απάντηση απέναντι σε κάθε αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου είναι η στρατηγική $\lfloor \infty \rfloor$. Συνεπώς, η μόνη αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου που είναι στρατηγική ισορροπίας είναι η $\lfloor \infty \rfloor$.
■

2.5.3 Περίπτωση Γ: $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) = 0$

Στην περίπτωση Γ έχουμε $\mu_1 = \mu_2$ ή $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$. Έτσι, η διάκριση των καταστάσεων του περιβάλλοντος σε ‘‘γρήγορης εξυπηρέτησης ’’ και ‘‘αργής εξυπηρέτησης ’’ δεν έχει νόημα ή η διάκρισή τους σε ‘‘υψηλού συνωστισμού ’’ και ‘‘χαμηλού συνωστισμού’’ δεν έχει νόημα. Συνεπώς, η πληροφορία για τον αριθμό των πελατών στο σύστημα, δεν επηρεάζει την απόφαση του αφικνούμενου πελάτη. Μπορούμε να κάνουμε μια ανάλυση παρόμοια με αυτές των άλλων δυο περιπτώσεων και έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 2.5.3.

Θεώρημα 2.5.3. *Στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου*

$$\mu_1 = \mu_2 \text{ ή } \rho_1 = \rho_2, \tag{2.133}$$

υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου. Συγκεκριμένα, έχουμε τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση I: $H^U(0) < 0$.

Τότε, η μοναδική στρατηγική ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου, είναι η στρατηγική $\lceil 0 \rceil \equiv \lfloor \infty \rfloor$ *("πάντα να αποχωρείς").*

Περίπτωση II: $H^U(0) = 0$.

Τότε, κάθε στρατηγική μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου είναι στρατηγική ισορροπίας.

Περίπτωση III: $H^U(n) > 0$.

Τότε, η μοναδική στρατηγική ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου, είναι η στρατηγική $\lceil \infty \rceil \equiv \lfloor 0 \rfloor$ *("πάντα να μπαίνεις").*

2.6 Ανασκόπηση και συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρήσαμε το πρόβλημα της ανάλυσης της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών, σε ένα σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων σε εναλλασσόμενο περιβάλλον, όπου οι πελάτες αποφασίζουν κατά την άφιξή τους, αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν. Διακρίναμε τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το επίπεδο πληροφόρησης που δίνεται στον αφικνούμενο πελάτη και προσδιορίσαμε τις στρατηγικές ισορροπίας σε κάθε περίπτωση. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε περίπτωση προσδιορίσαμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας μέσα στην κατάλληλη κλάση στρατηγικών. Επιπλέον, στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση, η οποία είναι η πιο ενδιαφέρουσα, τα Θεωρήματα 2.5.1, 2.5.2 και 2.5.3 δείχνουν ότι οι στρατηγικές ισορροπίας μέσα στις κλάσεις των στρατηγικών κατωφλίου και αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου χαρακτηρίζονται πλήρως από τα πρόσημα των ποσοτήτων $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2)$, $H^U(n)$, $\lim_{n\to\infty} H^U(n)$ και $H^L(n)$. Έτσι, μπορούμε εύκολα να συνδυάσουμε αυτά τα Θεωρήματα και να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο που να προσδιορίζει τις στρατηγικές ισορροπίας.

Παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο σε μορφή ψευδοκώδικα στην εικόνα 1. Η εικόνα 2 δείχνει σχηματικά τις διάφορες περιπτώσεις I,II,III όταν $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0$.

Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα αποτελέσματα στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση είναι ποιοτικώς διαφορετικά για τις δύο περιπτώσεις A και B, όπου η ποσότητα $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2)$ είναι αρνητική και θετική αντίστοιχα. Πράγματι, στην περίπτωση A, υπάρχει ένα διάστημα από κατώφλια που συνιστούν στρατηγικές ισορροπίας. Αντιθέτως, στην περίπτωση B, υπάρχει μια μοναδική αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου που είναι στρατηγική ισορροπίας. Αυτές οι παρατηρήσεις αντιστοιχούν στις συμπεριφορές Σύμφωνα-με-το-Πλήθος (ΣΤΠ) και Αντίθετα-με-το-Πλήθος (ΑΤΠ). Πράγματι, στην περίπτωση A, όπου $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0$ έχουμε ότι η κατάσταση περιβάλλοντος ''γρήγορης εξυπηρέτησης '' συμπίπτει με την κατάσταση περιβάλλοντος ''χαμηλού συνωστισμού''. Τότε, αν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο στρατηγικές κατωφλίου με κατώφλια n και $n+1$, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Αν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n και ένας αφικνούμενος πελάτης παρατηρήσει n πελάτες στο σύστημα, τότε συμπεραίνει ότι τουλάχιστον n πελάτες έφθασαν μετά την τελευταία εξυπηρέτηση. Αν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $n+1$ και ο αφικνούμενος πελάτης παρατηρήσει n πελάτες, τότε συμπεραίνει ότι ακριβώς n πελάτες έφθασαν μετά την τελευταία εξυπηρέτηση. Έτσι, στη δεύτερη περίπτωση, ο αφικνούμενος πελάτης έχει την αίσθηση ότι στο σύστημα υπάρχει λιγότερος συνωστισμός και για αυτόν τον λόγο το περιβάλλον είναι πιθανότερο να είναι στην κατάσταση ''γρήγορης εξυπηρέτησης ''. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι ο αφικνούμενος πελάτης είναι πιο πρόθυμος να εισέλθει στο σύστημα. Έτσι, όσο οι πελάτες υιοθετούν στρατηγικές με μεγαλύτερα κατώφλια, ένας αφικνούμενος πελάτης τους ακολουθεί υιοθετώντας και αυτός στρατηγικές με μεγαλύτερα κατώφλια και έτσι έχουμε την περίπτωση ΣΤΠ.

Στην περίπτωση B, όπου $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) > 0$, έχουμε ότι η κατάσταση περιβάλλοντος ''αργής εξυπηρέτησης '' ταυτίζεται με την κατάσταση περιβάλλοντος ''χαμηλού συνωστισμού''. Ο συνήθης ορισμός της συμπεριφοράς ΑΤΠ δε μπορεί να εφαρμοσθεί εδώ, διότι έχουμε αντίστροφες στρατηγικές κατωφλίου αντί για στρατηγικές κατωφλίου. Επιπλέον, υπό μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου $\lfloor n, \theta \rfloor$ με $n \geq 1$, το σύστημα παραμένει συνεχώς άδειο μετά την πρώτη επίσκεψη του μέσου μεταφοράς και έτσι έχουμε εξαιρέσει αυτές τις στρατηγικές στην έρευνά μας για στρατηγικές ισορροπίας. Έτσι, στην περίπτωση B, θα περιορίσουμε τη συζήτησή μας για το φαινόμενο ΑΤΠ στην κλάση των στρατηγικών $\{\lfloor 0, \theta \rfloor : \theta \in [0,1]\}$, όπως έχουμε ήδη κάνει στην παράγραφο 2.5.2. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου $\lfloor n, \theta \rfloor$ και έπειτα μετακινούνται σε μια άλλη αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου $\lfloor n, \theta' \rfloor$ με $\theta' > \theta$. Θεωρούμε τώρα έναν αφικνούμενο πελάτη ο οποίος βρίσκει 0 πελάτες στο σύστημα. Γνωρίζοντας τις στρατηγικές των άλλων πελατών, ο αφικνούμενος πελάτης έχει την αίσθηση ότι το περιβάλλον βρίσκεται σε κατάσταση χαμηλότερου συνωστισμού στη δεύτερη περίπτωση, όπου οι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα θ'. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες είναι πιο πρόθυμοι να μπουν στο σύστημα από ότι στην πρώτη περίπτωση (εφόσον $\theta' > \theta$) και έτσι η πληροφορία για άδειο σύστημα σημαίνει ότι το περιβάλλον είναι πιο πιθανό να βρίσκεται σε κατάσταση χαμηλότερου συνωστισμού. Έτσι, ο πελάτης γίνεται λιγότερο πρόθυμος να εισέλθει, καθώς η κατάσταση περιβάλλοντος ''χαμηλού συνωστισμού'' ταυτίζεται με την κατάσταση περιβάλλοντος ''αργής εξυπηρέτησης ''. Έτσι, όταν οι άλλοι πελάτες αυξάνουν την πιθανότητα εισόδου τους, ο συγκεκριμένος πελάτης τείνει να μειώσει την πιθανότητα εισόδου του, δηλαδή έχουμε συμπεριφορά ΑΤΠ.

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρωθήκαμε στην εύρεση στρατηγικών ισορροπίας. Από την άλλη μεριά, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου ένας κεντρικός διαχειριστής χρησιμοποιεί στρατηγικές οι οποίες μεγιστοποιούν το κοινωνικό κέρδος, στις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν για το επίπεδο πληροφόρησης. Είναι εύκολο να δούμε ότι στην πλήρως μη παρατηρήσιμη, στην πλήρως παρατηρήσιμη και στη μερικώς μη παρατηρήσιμη περίπτωση οι στρατηγικές που μεγιστοποιούν το κοινωνικό όφελος είναι οι στρατηγικές ισορροπίας. Αυτή η ταύτιση μεταξύ των στρατηγικών ισορροπίας και των κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών μπορεί να εξηγηθεί μέσω των ολικών εξυπηρετήσεων. Εφόσον όλοι οι παρόντες πελάτες εξυπηρετούνται τις στιγμές που ολοκληρώνεται η εξυπηρέτηση, κάθε πελάτης που αποφασίζει να εισέλθει δεν προκαλεί θετικές ούτε αρνητικές επιδράσεις (εξωτερικότητες, externalities) σε άλλους πελάτες. Στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση οι στρατηγικές ισορροπίας και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ταυτίζονται εκτός από την περίπτωση που η $H^U(n)$ είναι γνησίως φθίνουσα, $H^U(0) \geq 0$ και $\lim_{n\to\infty} H^U(n) < 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η $\lceil n_U \rceil$, η οποία είναι επίσης και στρατηγική ισορροπίας.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

IF $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0$ THEN

  IF $H^U(0) < 0$ THEN "EQUILIBRIUM THRESHOLD STRATEGIES: $\lceil 0 \rceil$."

  ELSEIF $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \geq 0$ THEN "EQUILIBRIUM THRESHOLD STRATEGIES: $\lceil \infty \rceil$."

  ELSE

    % *Compute* n_U : $n_U = \inf\{n \geq 0 : F(n,1) < 0\}$

    $n_U = 0$

    WHILE $F(n_U, 1) \geq 0$ DO

      $n_U = n_U + 1$

    ENDWHILE

    % *Compute* n_L : $n_L = \inf\{n \geq 0 : F(n,0) \leq 0\}$

    $n_L = n_U$

    WHILE $F(n_L - 1, 0) \leq 0$ DO

      $n_L = n_L - 1$

    ENDWHILE

    % *Compute* n_U^- : $n_U^- = \inf\{n \geq 0 : F(n,1) \leq 0\}$

    IF $F(n_U - 1, 1) > 0$ THEN

      $n_U^- = n_U$

    ELSE

      $n_U^- = n_U - 1$

    ENDIF

    % *Compute* n_L^+ : $n_L^+ = \inf\{n \geq 0 : F(n,0) < 0\}$

    IF $F(n_L, 0) < 0$ THEN

      $n_L^+ = n_L$

    ELSE

      $n_L^+ = n_L + 1$

    ENDIF

    "EQUILIBRIUM THRESHOLD STRATEGIES: $\lceil n_0 \rceil$, $n_0 = n_L, n_L + 1, ..., n_U$."

    IF $n_L^+ \leq n_U^- - 1$ THEN

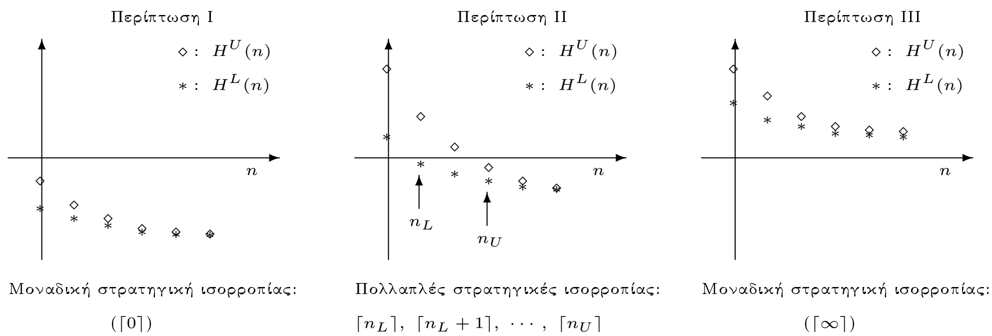
      FOR $n_0 = n_L^+ : n_U^- - 1$

        COMPUTE $\theta(n_0) : F(n_0, \theta(n_0)) = 0$

      ENDFOR

"Equilibrium mixed threshold strategies: $\lceil n_0, \theta(n_0) \rceil$, $n_0 \in \{n_L^+, ..., n_U^- - 1\}$."
endif
endif
elseif $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) > 0$ then
if $H^U(0) > 0$ then "Equilibrium reverse-threshold strategies: $\lfloor 0 \rfloor$."
elseif $\lim_{n\to\infty} H^U(n) \leq 0$ then "Equilibrium reverse-threshold strategies: $\lfloor \infty \rfloor$."
else
if $F(0,1) = 0$ then "Equilibrium reverse-threshold strategies: $\lfloor 0 \rfloor$."
elseif $F(0,0) \leq 0$ then "Equilibrium reverse-threshold strategies: $\lfloor \infty \rfloor$."
else
Compute $\theta(0) : F(0, \theta(0)) = 0$
"Equilibrium reverse-threshold strategies: $\lfloor 0, \theta(0) \rfloor$."
endif
endif
else
if $H^U(0) > 0$ then "Equilibrium threshold strategies: $\lceil 0 \rceil$."
elseif $H^U(0) < 0$ then "Equilibrium threshold strategies: $\lceil \infty \rceil$."
else "Equilibrium threshold strategies:$\lceil n \rceil$, $n \geq 0$."
endif
endif

Εικόνα 1: Υπολογισμός στρατηγικών ισορροπίας τύπου κατωφλίου και αντίστροφου κατωφλίου



Εικόνα 2: Περίπτωση Α - $(\mu_1 - \mu_2)(\rho_1 - \rho_2) < 0$ - Στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου

Κεφάλαιο 3

Μέσο μεταφοράς με γενικούς χρόνους επίσκεψης

3.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να μελετήσουμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών που φθάνουν σε έναν σταθμό ενός μέσου μεταφοράς και αντιμετωπίζουν το δίλημμα να περιμένουν το επόμενο μέσο μεταφοράς ή να αποχωρήσουν. Ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει έναν μικρό αριθμό πελατών στο σύστημα τείνει να πιστέψει ότι ο χρόνος αναμονής για το επόμενο μέσο μεταφοράς θα είναι μεγάλος. Πράγματι, η παρουσία λίγων πελατών δίνει ένα σήμα ότι η προηγούμενη επίσκεψη του μέσου συνέβη πρόσφατα και έτσι, κάτω από κάποιες φυσιολογικές συνθήκες, ο χρόνος μέχρι την επόμενη επίσκεψη θα είναι μεγάλος. Από την άλλη μεριά, η παρουσία λίγων πελατών σημαίνει ότι είναι πολύ πιθανό το επόμενο μέσο μεταφοράς να έχει αρκετό χώρο για να τον εξυπηρετήσει (υποθέτοντας ότι το μέσο μεταφοράς δέχεται τους πελάτες με FCFS πειθαρχία μέχρι να εξαντληθεί η χωρητικότητά του). Αντιθέτως, ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει αρκετούς πελάτες στο σύστημα περιμένει ότι ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη του μέσου θα είναι σχετικά μικρός, αλλά έχει μεγάλο κίνδυνο να μην εξυπηρετηθεί από αυτό. Έτσι, δεν είναι ξεκάθαρο ποιά απόφαση είναι προτιμότερο να πάρει ένας αφικνούμενος πελάτης, να περιμένει ή να αποχωρήσει, δεδομένου του αριθμού των πελατών που βρίσκει στο σύστημα. Καθώς οι πελάτες επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν το ατομικό τους όφελος, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι υπόλοιποι πελάτες έχουν τον ίδιο σκοπό, αυτή η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παιχνίδι μεταξύ των πελατών.

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε ένα σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων που παριστάνει έναν σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Το μοντέλο αυτό είναι αρκετά διαφορετικό από αυτά που υπάρχουν στη μέχρι σήμερα βιβλιογραφία ως προς δύο χαρακτηριστικά. Πρώτον, υποθέτουμε ότι το μέσο μεταφοράς έχει μεταβαλλόμενη χωρητικότητα στις διαδοχικές επισκέψεις του, η οποία μοντελοποιείται μέσω μιας ακολουθίας ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Αυτό είναι πιο ρεαλιστικό, καθώς η χωρητικότητα του μέσου κατά την άφιξή του στον συγκεκριμένο σταθμό είναι ο ελεύθερος χώρος του, ο οποίος εξαρτάται από τις επισκέψεις του στους άλλους σταθμούς του δρομολογίου του. Δεύτερον, υποθέτουμε ότι οι επισκέψεις του μέσου στον σταθμό συμβαίνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, γεγονός που επιτρέπει να αναπαραστήσουμε πιο εφαρμόσιμα μοντέλα. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι οι περισσότερες μελέτες στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης υιοθέτουν κάποιο Μαρκοβιανό πλαίσιο. Αντίθετα, αποτελέσματα για τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε συστήματα με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης είναι πολύ σπάνια (βλέπε π.χ. Altman και Hassin (2002), Economou, Gomez-Corral και Kanta (2011) και Kerner (2011)). Από τεχνικής άποψης, η άρση της Μαρκοβιανής υπόθεσης στην παρούσα μελέτη κάνει την ανάλυση μη-τετριμμένη και πιο ενδιαφέρουσα. Επιπλέον, οι ερμηνείες είναι πολύ πιο διεισδυτικές σε σχέση με τη Μαρκοβιανή περίπτωση. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι, Σύμφωνα-με-Το-Πλήθος (ΣΤΠ), Αντίθετα-με-Το-Πλήθος (ΑΤΠ) ή μικτού τύπου στρατηγικές συμπεριφορές πελατών μπορούν να παρατηρηθούν, ανάλογα με το είδος των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων του μέσου και των κατανομών της χωρητικότητας. Αντιθέτως, στη Μαρκοβιανή περίπτωση, η ανάλυση του παρατηρήσιμου μοντέλου είναι τετριμμένη: Η συνάρτηση αναμενόμενου καθαρού κέρδους ενός συγκεκριμένου πελάτη δεν εξαρτάται από τη στρατηγική των άλλων πελατών και υπάρχουν κυριαρχούσες στρατηγικές.

Η βασική συνεισφορά του κεφαλαίου αυτού συνοψίζεται στα παρακάτω:

- Η ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε παρατηρήσιμα συστήματα εξυπηρέτησης με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης είναι σχετικά νέο εγχείρημα. Πράγματι, οι μόνες εργασίες που γνωρίζουμε ότι πραγματεύονται αυτό το πρόβλημα είναι των Altman και Hassin (2002) και Kerner (2011). Όσον αφορά τα συστήματα ολικών εξυπηρετήσεων, απ΄ ό,τι γνωρίζουμε, αυτή η εργασία είναι η πρώτη που υποθέτει γενικούς ενδιάμεσους χρόνους επισκέψεων του μέσου. Η βασική δυσκολία σε αυτού του είδους τα προβλήματα έγκειται στον υπολογισμό των δεσμευμένων κατανομών του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης κατά τη στιγμή άφιξης ενός συγκεκριμένου πελάτη, δεδομένης της κατάστασης του συστήματος και της στρατηγικής που ακολουθείται από τους υπόλοιπους πελάτες. Ο Kerner (2008) έδωσε μια αναλυτική προσέγγιση για τον υπολογισμό αυτών των κατανομών η οποία βασίζεται στον υπολογισμό της από κοινού στάσιμης συνάρτησης πιθανότητας - πυκνότητας πιθανότητας του μήκους ουράς και του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης χρησιμοποιώντας την τεχνική των πρόσθετων μεταβλητών (supplementary variables technique).

  Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε μια νέα εναλλακτική προσέγγιση μέσω της οποίας προκύπτουν αναδρομικές σχέσεις για τις τυχαίες μεταβλητές που δίνουν τους χρόνους αναμονής των πελατών που βρίσκουν n και $n-1$ πελάτες στο σύστημα. Αυτή η προσέγγιση είναι πιθανοθεωρητική και βασίζεται σε επιχειρήματα που συγκρίνουν τους χρόνους αναμονής ενός πελάτη που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα και ενός πελάτη που βρίσκει $n-1$ πελάτες, για μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση της υποκείμενης στοχαστικής διαδικασίας. Αυτή η νέα προσέγγιση φαίνεται να έχει τρία πλεονεκτήματα: Πρώτον, είναι άμεση και σύντομη, καθώς δεν απαιτεί τον υπολογισμό της από κοινού στάσιμης συνάρτησης πιθανότητας -πυκνότητας πιθανότητας του μήκους ουράς και του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης. Δεύτερον, δεν υποθέτει την ύπαρξη πυκνότητας πιθανότητας για τους χρόνους εξυπηρέτησης, και επομένως μπορεί να εφαρμοστεί σε διακριτές/μικτές κατανομές χρόνων εξυπηρέτησης. Τρίτον, μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες κλειστότητας κάποιων στοχαστικών διατάξεων για να αποδείξουμε αυστηρά τη μονοτονία των βέλτιστων απαντήσεων και τη μοναδικότητα των στρατηγικών ισορροπίας για κάποιες κλάσεις κατανομών των χρόνων εξυπηρέτησης.

- Όσον αφορά τη μοντελοποίηση, θεωρούμε ένα αρκετά γενικό μοντέλο του σταθμού ενός μέσου μεταφοράς με μη-Μαρκοβιανούς ενδιάμεσους χρόνους επισκέψεων και τυχαία χωρητικότητα και δείχνουμε πώς μπορούμε να μελετήσουμε τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε αυτό το μοντέλο. Αυτό το μοντέλο αντιστοιχεί σε ένα σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης, στο οποίο όλοι οι πελάτες εξυπηρετούνται ταυτόχρονα. Μέχρι τώρα, η ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε παρατηρήσιμα συστήματα εξυπηρέτησης με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης έχει διεξαχθεί στο πλαίσιο μιας $M/G/1$ ουράς το οποίο είναι ουσιωδώς διαφορετικό, καθώς οι πελάτες σε αυτήν εξυπηρετούνται διαδοχικά (ένας ένας).

- Όσον αφορά τη τεχνική, υπολογίζουμε την κατανομή του αριθμού των παρόντων πελατών σε στάσιμη κατάσταση κάτω από οποιαδήποτε στρατηγική των πελατών με μια σύντομη και άμεση μέθοδο, χρησιμοποιώντας τον νόμο του Little και την ιδιότητα PASTA.

- Στη Μαρκοβιανή περίπτωση, προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι οι στρατηγικές ισορροπίας και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές συμπίπτουν στην παρατηρήσιμη περίπτωση. Στη βιβλιογραφία, η ταύτιση των στρατηγικών ισορροπίας και των κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών συναντάται σε περιπτώσεις όπου οι πελάτες δεν προκαλούν αρνητικές ούτε θετικές επιδράσεις σε άλλους πελάτες. Εδώ, δίνουμε ένα σπάνιο παράδειγμα, όπου οι πελάτες προκαλούν αρνητικές επιδράσεις σε άλλους πελάτες, άλλα οι στρατηγικές ισορροπίας και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει διότι οι συνολικές αρνητικές επιδράσεις στους άλλους πελάτες είναι πάντα μικρότερες από το θετικό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει.

- Χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις για τις τυχαίες μεταβλητές που δίνουν τους χρόνους αναμονής των πελατών που βρίσκουν n και $n-1$ πελάτες στο σύστημα και τις ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων κατανομών φθίνουσας μέσης υπολειπόμενης ζωής (decreasing mean residual life (DMRL)) και αύξουσας μέσης υπολειπόμενης ζωής (increasing mean residual life (IMRL)), αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες και τη μοναδικότητα των στρατηγικών ισορροπίας, κάτω από φυσιολογικές υποθέσεις για την κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης (ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων). Αυτό επίσης μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε τη συμπεριφορά των πελατών ως ΣΤΠ ή ΑΤΠ.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής: Στην ενότητα 3.2, περιγράφουμε το μοντέλο, τη δομή αμοιβής - κόστους και τα πλαίσια πληροφόρησης και αποφάσεων.
Στην ενότητα 3.3, κάνουμε τους βασικούς υπολογισμούς που χρειάζονται για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών στην παρατηρήσιμη περίπτωση, χρησιμοποιώντας πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα. Έπειτα, κάνουμε τους ίδιους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας αναλυτικά επιχειρήματα, καθώς οι δύο προσεγγίσεις είναι τελείως διαφορετικές. Ακολούθως, στην ενότητα 3.4, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής για να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας στην παρατηρήσιμη περίπτωση. Η ανάλυση της μη παρατηρήσιμης περίπτωσης διεξάγεται στην ενότητα 3.5. Κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όπου η ανάλυση μπορεί να προχωρήσει παραπάνω, δίνονται στις ενότητες 3.6 και 3.7. Τέλος, κλείνουμε με τις ενότητες 3.8 και 3.9, όπου παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα κάποιων αριθμητικών πειραμάτων, σχολιάζουμε τα θεωρητικά αποτελέ-σματα και αναδεικύουμε κάποια ανοικτά θέματα.

3.2 Το μοντέλο

Θεωρούμε έναν σταθμό ενός μέσου μεταφοράς με άπειρη χωρητικότητα, όπου οι πελάτες (επιβάτες) φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{P(t)\}$ με ρυθμό λ. Έστω $I_1,\ I_2, \ldots$ οι διαδοχικοί ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των πελατών. Ένα μέσο μεταφοράς επισκέπτεται τον σταθμό σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία $\{M(t)\}$. Οι χρόνοι $X_1,\ X_2, \ldots$ μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς ακολουθούν μια απολύτως συνεχή κατανομή με πεπερασμένες ροπές, συνάρτηση κατανομής $F(x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes (LST) $\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές χωρητικότητες

$C_1, C_2, \ldots$ του μέσου μεταφοράς τις στιγμές που επισκέπτεται τον σταθμό είναι διακριτές, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες ροπές, συνάρτηση πιθανότητας $(g_k : k = 1, 2, \ldots)$ και πιθανογεννήτρια συνάρτηση (PGF) $G(z)$. Όταν ένα μέσο μεταφοράς με χωρητικότητα k επισκέπτεται τον σταθμό, εξυπηρετεί το πολύ k πελάτες ακαριαία και οι πελάτες που δε μπορούν να εξυπηρετηθούν, εγκαταλείπουν το σύστημα. Με άλλα λόγια, το μέσο μεταφοράς εξυπηρετεί όλους τους παρόντες πελάτες, αν το πλήθος τους δεν ξεπερνά τη χωρητικότητά του. Αλλιώς, εξυπηρετεί τόσους πελάτες όση η χωρητικότητά του. Σε κάθε περίπτωση ο σταθμός αδειάζει μετά από κάθε επίσκεψη του μέσου μεταφοράς. Τέλος, υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των πελατών, οι ενδιάμεσοι χρόνοι επισκέψεων και οι διαδοχικές χωρητικότητες του μέσου μεταφοράς είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές.

Η κατάσταση του σταθμού τη στιγμή t μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών $(N(t), R(t))$, όπου η $N(t)$ δίνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και η $R(t)$ δίνει τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης (δηλαδή τον χρόνο μέχρι την επόμενη επίσκεψη του μέσου μεταφοράς). Η στοχαστική διαδικασία $\{(N(t), R(t)) : t \geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n, r) : n \in \mathbb{N}, r \in [0, +\infty)\}$.

Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά των πελατών, όταν αυτοί έχουν τη δυνατότητα να αποφασίσουν αν θα εισέλθουν στον σταθμό ή θα αποχωρήσουν χωρίς να εξυπηρετηθούν. Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης λαμβάνει αμοιβή R χρηματικών μονάδων αν εξυπηρετηθεί (δηλαδή αν εισέλθει στο σύστημα και το επόμενο μέσο τον εξυπηρετήσει) και έχει κόστος K χρηματικών μονάδων ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο και επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο κέρδος τους. Τέλος, υποθέτουμε ότι οι αποφάσεις τους είναι αμετάκλητες, υπό την έννοια ότι υπαναχωρήσεις εισερχομένων πελατών και επαναπροσπάθειες αποχωρούντων πελατών δεν επιτρέπονται. Εφόσον υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες είναι όμοιοι, αυτή η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ των παικτών.

Στις επόμενες ενότητες θα προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες δεν έχουν πληροφόρηση για την $R(t)$, αλλά μπορεί να έχουν πληροφόρηση για την $N(t)$. Έτσι, προκύπτουν δύο περιπτώσεις ως προς την πληροφόρηση που λαμβάνουν οι πελάτες κατά την άφιξή τους, πριν πάρουν τις αποφάσεις τους:

- Παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες παρατηρούν την $N(t)$,
- Μη παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες δεν παρατηρούν την $N(t)$.

Στην παρατηρήσιμη περίπτωση, ένας αφικνούμενος πελάτης βασίζει την απόφασή του στον αριθμό των παρόντων πελατών $N(t)$, ο οποίος λειτουργεί σαν ένα σήμα για τον χρόνο που πέρασε από την τελευταία εξυπηρέτηση (όπως στις εργασίες των Whitt (1986), Altman και Hassin (2002), Haviv και Kerner (2007) και Kerner (2011)). Μελετάμε την παρατηρήσιμη περίπτωση στις ενότητες 3.3 και 3.4, ενώ η ενότητα 3.5 είναι αφιερωμένη στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση.

3.3 Η παρατηρήσιμη περίπτωση: Προκαταρκτικά αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματός μας. Σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες κατά την άφιξή τους και πριν λάβουν την απόφαση αν θα εισέλθουν ή θα αποχωρήσουν, παρατηρούν τον αριθμό των παρόντων πελατών στο σύστημα. Έτσι, μια στρατηγική εισόδου δίνεται από ένα διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, όπου q_i είναι η πιθανότητα εισόδου ενός πελάτη που βρίσκει i πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του (εξαιρουμένου του εαυτού του). Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{q}_n$ το διάνυσμα $(q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, που περιλαμβάνει τις $n+1$ πρώτες συνιστώσες του $\boldsymbol{q}$. Έτσι, το διάνυσμα $\boldsymbol{q}_n$ περιγράφει τη στρατηγική συμπεριφορά του πελάτη όταν αυτός βλέπει μέχρι και n παρόντες πελάτες.

Το πρώτο βήμα στη μελέτη των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών είναι η εύρεση της βέλτιστης απάντησης ενός συγκεκριμένου πελάτη σε μια δεδομένη στρατηγική των άλλων πελατών. Όμως, για τον προσδιορισμό της βέλτιστης απάντησης ενός πελάτη σε μια στρατηγική $\boldsymbol{q}$ που ακολουθείται από τους άλλους πελάτες, είναι πρώτα απαραίτητο να υπολογιστεί ο δεσμευμένος μέσος χρόνος αναμονής του, δεδομένου ότι βρίσκει n παρόντες πελάτες στο σύστημα, για όλες τις δυνατές τιμές του n. Φυσικά ένας τέτοιος δεσμευμένος μέσος χρόνος αναμονής εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών n και τη στρατηγική $\boldsymbol{q}$. Ακόμη, η μελέτη της συνάρτησης κοινωνικού κέρδους ανά χρονική μονάδα, υπό μια στρατηγική $\boldsymbol{q}$ των πελατών, απαιτεί τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε τυχαίες στιγμές, δεδομένου ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q}$.

Σε αυτήν την ενότητα, υπολογίζουμε τους δεσμευμένους μέσους χρόνους αναμονής ενός πελάτη και τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα, χρησιμοποιώντας αρχικά μια πιθανοθεωρητική προσέγγιση. Τα αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν εναλλακτικά χρησιμοποιώντας την αναλυτική προσέγγιση που εισήγαγε ο Kerner (2008), ο οποίος προσδιόρισε τη δεσμευμένη κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης σε μια $M_n/G/1$ ουρά. Καθώς η τελευταία προσέγγιση είναι εντελώς διαφορετική και παρουσιάζει ξεχωριστό ενδιαφέρον, παρουσιάζουμε έπειτα πως προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα χρησιμοποιώντας και αυτήν τη μέθοδο.

Έστω $R_{\boldsymbol{q}}(t)$ ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης τη στιγμή t, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q}$, και $R_{\boldsymbol{q}}$ η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή σε στάσιμη κατάσταση. Επιπλέον, έστω $R_{n,\boldsymbol{q}}$ ο δεσμευμένος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης σε στάσιμη κατάσταση (σε τυχαίες στιγμές), δεδομένου ότι υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q}$. Ακόμη, θεωρούμε τον δεσμευμένο υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης σε στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν n πελάτες στο σύστημα και σε στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζουν να εισέλθουν. Συμβολίζουμε αυτές τις τυχαίες μεταβλητές σε στάσιμη κατάσταση με $R^a_{n,\boldsymbol{q}}$ και $R^j_{n,\boldsymbol{q}}$ αντίστοιχα. Ομοίως, έστω $N_{\boldsymbol{q}}(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t, δεδομένου ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\boldsymbol{q}$ και $N_{\boldsymbol{q}}$, $N^a_{\boldsymbol{q}}$ και $N^j_{\boldsymbol{q}}$ οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές σε τυχαίες στιγμές, σε στιγμές αφίξεων πελατών και σε στιγμές αφίξεων πελατών που αποφασίζουν να εισέλθουν, σε στάσιμη κατάσταση.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ και συμβολίζουμε με $\bar{n}(\boldsymbol{q})$ τον πρώτο δείκτη για τον οποίο το q_n γίνεται 0, δηλαδή

$$\bar{n}(\boldsymbol{q}) = \inf\{n \geq 0 : q_i > 0 \text{ για } i < n \text{ και } q_n = 0\}. \tag{3.1}$$

Τότε, η $R^j_{\bar{n}(\boldsymbol{q}),\boldsymbol{q}}$ δεν ορίζεται, καθώς, όποτε $N_{\boldsymbol{q}} = \bar{n}(\boldsymbol{q})$, δεν υπάρχουν αφίξεις πελατών που να εισέρχονται στο σύστημα. Αντιθέτως, οι $R_{\bar{n}(\boldsymbol{q}),\boldsymbol{q}}$ και $R^a_{\bar{n}(\boldsymbol{q}),\boldsymbol{q}}$ ορίζονται, καθώς είναι πιθανό να παρατηρηθούν $\bar{n}(\boldsymbol{q})$ πελάτες σε μια τυχαία στιγμή ή σε μια στιγμή άφιξης πελάτη, υπό τη στρατηγική $\boldsymbol{q}$. Παρατηρούμε ακόμη ότι για $n > \bar{n}(\boldsymbol{q})$, οι $R^j_{n,\boldsymbol{q}}$, $R^a_{n,\boldsymbol{q}}$ και

$R_{n,\boldsymbol{q}}$ δεν ορίζονται, καθώς το σύστημα δε μπορεί ποτέ να έχει περισσότερους από $\bar{n}(\boldsymbol{q})$ πελάτες. Τώρα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι $R^j_{n,\boldsymbol{q}}$, $R^a_{n,\boldsymbol{q}}$ και $R_{n,\boldsymbol{q}}$ είναι ισόνομες, όταν αυτές ορίζονται, δηλαδή

$$R_{n,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} R^a_{n,\boldsymbol{q}},\ 0 \leq n \leq \bar{n}(\boldsymbol{q}), \tag{3.2}$$

$$R_{n,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} R^j_{n,\boldsymbol{q}},\ 0 \leq n < \bar{n}(\boldsymbol{q}). \tag{3.3}$$

Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $\{P(t),\ t \geq 0\}$ τη διαδικασία Poisson, με ρυθμό λ, των αφίξεων των πελατών στο σύστημα, έχουμε ότι οι $\{P(t+u) - P(t),\ u \geq 0\}$ και $\{(N_{\boldsymbol{q}}(u), R_{\boldsymbol{q}}(u)),\ 0 \leq u \leq t\}$ είναι ανεξάρτητες. Έτσι, η υπόθεση έλλειψης προβλεψιμότητας (lack of anticipation assumption) ικανοποιείται και η ιδιότητα PASTA εφαρμόζεται (βλέπε π.χ. Tijms (1994) ενότητα 1.7), οπότε παίρνουμε την (3.2). Για την (3.3), έστω $\{P_n(t),\ t \geq 0\}$ οι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς λq_n, $n = 0, 1, \ldots, \bar{n}(\boldsymbol{q})-1$. Μπορούμε να σκεφτόμαστε τις $\{P_n(t),\ t \geq 0\}$ σαν τις διαδικασίες που δίνουν τις αφίξεις των πελατών που εισέρχονται στον σταθμό, όταν $N_{\boldsymbol{q}}(t) = n$. Έχουμε ότι οι $\{P_n(t+u) - P_n(t),\ u \geq 0\}$ και $\{(N_{\boldsymbol{q}}(u), R_{\boldsymbol{q}}(u)),\ 0 \leq u \leq t\}$ είναι ανεξάρτητες για $n = 0, 1, \ldots, \bar{n}(\boldsymbol{q})-1$. Πάλι, η υπόθεση έλλειψης προβλεψιμότητας ικανοποιείται και παίρνουμε την (3.3), εφαρμόζοντας τη δεσμευμένη ιδιότητα PASTA των van Doorn και Regterschot (1988) (τα ίδια επιχειρήματα χρησιμοποιούνται και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2 στην εργασία του Kerner (2008)).

Εφόσον, οι $R_{n,\boldsymbol{q}}, R^a_{n,\boldsymbol{q}}$ και $R^j_{n,\boldsymbol{q}}$ είναι ισόνομες, όταν αυτές ορίζονται, μπορούμε να προσδιορίσουμε την κοινή τους κατανομή μελετώντας μόνο μία από αυτές. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν την κατανομή ως δεσμευμένη (στάσιμη) κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης, δεδομένου ότι υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

Πρόταση 3.3.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. Τότε, η $R_{n,\boldsymbol{q}}$ εκφράζεται αναδρομικά ως προς την $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$ (για $n = 0$ η $R_{n,\boldsymbol{q}}$ εκφράζεται ως προς την τυχαία μεταβλητή X που δίνει τον χρόνο εξυπηρέτησης, καθώς η $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$ δεν ορίζεται). Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.*

Περίπτωση 1: $0 = n = \bar{n}(\boldsymbol{q})$. *Έστω $R(X)$ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης μιας ανανεωτικής δια-*

δικασίας με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή X, τους ενδιάμεσους χρόνους επισκέψεων του μέσου μεταφοράς. Τότε, η κατανομή του δεσμευμένου υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης $R_{n,\boldsymbol{q}} = R_{0,\boldsymbol{q}}$ συμπίπτει με την κατανομή της $R(X)$. Δηλαδή, έχουμε

$$R_{n,\boldsymbol{q}} = R_{0,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} R(X),\ 0 = n = \bar{n}(\boldsymbol{q}). \tag{3.4}$$

Περίπτωση 2: $0 = n < \bar{n}(\boldsymbol{q})$. *Έστω X και $T_{\lambda_{q_0}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου η X ακολουθεί την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων του μεσου μεταφοράς και η $T_{\lambda q_0}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λq_0. Τότε, η κατανομή του δεσμευμένου υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης $R_{n,\boldsymbol{q}} = R_{0,\boldsymbol{q}}$ συμπίπτει με τη δεσμευμένη κατανομή της διαφοράς $X - T_{\lambda q_0}$, δεδομένου ότι $X \geq T_{\lambda q_0}$. Δηλαδή, έχουμε*

$$R_{n,\boldsymbol{q}} = R_{0,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} (X - T_{\lambda q_0} | X \geq T_{\lambda q_0}),\ 0 = n < \bar{n}(\boldsymbol{q}). \tag{3.5}$$

Περίπτωση 3: $1 \leq n = \bar{n}(\boldsymbol{q})$. *Έστω $R(R_{n-1,\boldsymbol{q}})$ η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης μιας ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης που ακολουθούν την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$. Τότε, η κατανομή του δεσμευμένου υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης $R_{n,\boldsymbol{q}}$ συμπίπτει με την κατανομή της $R(R_{n-1,\boldsymbol{q}})$. Δηλαδή, έχουμε*

$$R_{n,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} R(R_{n-1,\boldsymbol{q}}),\ 1 \leq n = \bar{n}(\boldsymbol{q}). \tag{3.6}$$

Περίπτωση 4: $1 \leq n < \bar{n}(\boldsymbol{q})$. *Έστω $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$ και $T_{\lambda q_n}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου η $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$ ακολουθεί την κατανομή του δεσμευμένου υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης, δεδομένου ότι υπάρχουν $n-1$ πελάτες στο σύστημα και η $T_{\lambda q_n}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λq_n. Τότε, η κατανομή του δεσμευμένου υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης $R_{n,\boldsymbol{q}}$ συμπίπτει με τη δεσμευμένη κατανομή της διαφοράς $R_{n-1,\boldsymbol{q}} - T_{\lambda q_n}$, δεδομένου ότι $R_{n-1,\boldsymbol{q}} \geq T_{\lambda q_n}$. Δηλαδή, έχουμε*

$$R_{n,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} (R_{n-1,\boldsymbol{q}} - T_{\lambda q_n} | R_{n-1,\boldsymbol{q}} \geq T_{\lambda q_n}),\ 1 \leq n < \bar{n}(\boldsymbol{q}). \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ με $\bar{n}(\boldsymbol{q}) = 0$. Τότε κανένας πελάτης δεν εισέρχεται στο σύστημα. Θεωρούμε τώρα έναν συγκεκριμένο πελάτη ο οποίος φθάνει στο σύστημα. Αυτός ο πελάτης θα δει υποχρεωτικά $n = 0$ πελάτες σε αυτό και, λόγω της ιδιότητας PASTA, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησής του ταυτίζεται με τον υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης της ανανεωτικής διαδικασίας που δίνει τις επισκέψεις του μεταφορικού μέσου στον σταθμό. Έτσι, παίρνουμε την (3.4).

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ με $\bar{n}(\boldsymbol{q}) \geq 1$. Θεωρούμε το σύστημα αμέσως μετά από μια επίσκεψη του μεταφορικού μέσου. Τότε, ο σταθμός είναι άδειος και ο χρόνος μέχρι την άφιξη του πρώτου πελάτη που θα αποφασίσει να εισέλθει είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο λq_0. Συμβολίζουμε αυτόν τον χρόνο με $T_{\lambda q_0}$. Τότε, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης αυτού του πελάτη θα είναι ο ενδιάμεσος χρόνος επισκέψεων X του μεταφορικού μέσου μείον $T_{\lambda q_0}$, δεδομένου ότι ο ενδιάμεσος χρόνος επισκέψεων X υπερβαίνει τον $T_{\lambda q_0}$ (έτσι ώστε να υπάρχει τέτοιος πελάτης). Έτσι, παίρνουμε την (3.5).

Περίπτωση 3: Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ με $\bar{n}(\boldsymbol{q}) \geq 1$. Τότε, αφίξεις πελατών που βρίσκουν στο σύστημα $n = \bar{n}(\boldsymbol{q})$ πελάτες και έτσι δε μπαίνουν (εφόσον $q_n = 0$ από τον ορισμό της ποσότητας $\bar{n}(\boldsymbol{q})$) συμβαίνουν μόνο κατά τη διάρκεια των υπολειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκουν $n-1$ πελάτες στο σύστημα και αποφασίζουν να εισέλθουν. ''Ενώνοντας '' όλα τα χρονικά διαστήματα που αντιστοιχούν σε υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης πελατών που βρίσκουν $n-1$ πελάτες στο σύστημα και αποφασίζουν να εισέλθουν, κατασκευάζουμε την ανανεωτική διαδικασία $\{\hat{M}(t)\}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αφίξεις πελατών που βρίσκουν στο σύστημα n πελάτες συμβαίνουν μόνο κατά τη διάρκεια των χρονικών διαστημάτων της $\{\hat{M}(t)\}$ και αποτελούν μια διαδικασία Poisson. Ετσι, λόγω της ιδιότητας PASTA, ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης ενός πελάτη που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του συμπίπτει με τον υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης σε μια τυχαία στιγμή της ανανεωτικής διαδικασίας $\{\hat{M}(t)\}$. Όμως, η διαδικασία $\{\hat{M}(t)\}$ έχει ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης που ακολουθούν την κατανομή της $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$. Έτσι, καταλήγουμε στην (3.6).

Περίπτωση 4: Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ με $\bar{n}(\boldsymbol{q}) \geq 2$ και θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη ο οποίος βρίσκει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του, με $1 \leq n < \bar{n}(\boldsymbol{q})$ και αποφασίζει να μπει στο σύστημα. Τότε, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησής του $R_{n,\boldsymbol{q}}$ είναι ίσος με τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης του πελάτη που μπήκε στο σύστημα ακριβώς πριν από αυτόν μείον τον χρόνο μεταξύ των δύο αφίξεων, δεδομένου ότι το μέσο μεταφοράς δεν επισκέφθηκε τον σταθμό κατά τη διάρκεια του ενδιάμεσου χρόνου αφίξεων. Παρατηρούμε ότι ο πελάτης που μπήκε στο σύστημα ακριβώς πριν από τον πελάτη που θεωρήσαμε αρχικά βρήκε $n-1$ πελάτες κατά την άφιξή του και ότι ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των δύο αφίξεων είναι μια εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή $T_{\lambda q_n}$ με παράμετρο λq_n, ανεξάρτητη της $R_{n-1,\boldsymbol{q}}$. Έτσι, παίρνουμε την (3.7).

■

Για να συνάγουμε από το αναδρομικό σχήμα (3.4)-(3.7) για τις τυχαίες μεταβλητές $R_{n,\boldsymbol{q}}$ ένα σχήμα για τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα 3.3.1.

Λήμμα 3.3.1. *Έστω T_1, T_2 και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου οι T_1 και T_2 είναι εκθετικά κατανεμημένες με παραμέτρους λ_1 και λ_2, αντίστοιχα, και Y είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με LST $\tilde{F}_Y(s)$. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις.*

$$\Pr[Y \leq T_1] = \tilde{F}_Y(\lambda_1), \tag{3.8}$$

$$\Pr[Y \leq T_1 + T_2] = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\tilde{F}_Y(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\tilde{F}_Y(\lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2, \tag{3.9}$$

$$\Pr[Y \leq T_1 + T_2] = \tilde{F}_Y(\lambda_1) - \lambda_1 \tilde{F}'_Y(\lambda_1),\ \lambda_1 = \lambda_2. \tag{3.10}$$

Απόδειξη. Έστω $F_Y(y)$ η συνάρτηση κατανομής της Y. Θεωρώντας το αριστερό μέλος της (3.8) και δεσμεύοντας ως προς Y, παίρνουμε

$$\Pr[Y \leq T_1] = \int_0^\infty \Pr[T_1 \geq y] dF_Y(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 y} dF_Y(y) = \tilde{F}_Y(\lambda_1).$$

Οι σχέσεις (3.9) και (3.10) αποδεικνύονται ομοίως, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
\Pr[T_1 + T_2 \geq y] &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 y} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 y},\ y \geq 0,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2, \\
\Pr[T_1 + T_2 \geq y] &= e^{-\lambda_1 y} + \lambda_1 y e^{-\lambda_1 y},\ y \geq 0,\ \ \lambda_1 = \lambda_2,
\end{aligned}$$

αντίστοιχα. ■

Στην επόμενη Πρόταση 3.3.2 δίνουμε ένα αναδρομικό σχήμα για τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes των δεσμευμένων υπολειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης.

Πρόταση 3.3.2. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. *Τότε, οι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes* $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = E[e^{-sR_{n,q}}]$ *των δεσμευμένων υπολειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης δίνονται από το αναδρομικό σχήμα*

$$\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{-(1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s))}{s\tilde{F}'_{n-1,\boldsymbol{q}}(0)}, \ 1 \leq n = \bar{n}(\boldsymbol{q}), \tag{3.11}$$

$$\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\lambda q_n(\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n) - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s))}{(s-\lambda q_n)(1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n))}, \ 1 \leq n < \bar{n}(\boldsymbol{q}), \ s \neq \lambda q_n, \tag{3.12}$$

$$\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n) = \frac{-\lambda q_n \tilde{F}'_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)}{1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)}, \ 1 \leq n < \bar{n}(\boldsymbol{q}), \tag{3.13}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{-(1-\tilde{F}(s))}{s\tilde{F}'(0)}, \ \bar{n}(\boldsymbol{q}) = 0, \tag{3.14}$$

$$\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\lambda q_0(\tilde{F}(\lambda q_0) - \tilde{F}(s))}{(s-\lambda q_0)(1-\tilde{F}(\lambda q_0))}, \ \bar{n}(\boldsymbol{q}) > 0, \ s \neq \lambda q_0, \tag{3.15}$$

$$\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(\lambda q_0) = \frac{-\lambda q_0 \tilde{F}'(\lambda q_0)}{1-\tilde{F}(\lambda q_0)}, \ \bar{n}(\boldsymbol{q}) > 0. \tag{3.16}$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι αν ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης μιας ανανεωτικής διαδικασίας είναι $\tilde{F}_Y(s)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της στάσιμης κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης $\tilde{F}_{R(Y)}(s)$ δίνεται από την

$$\tilde{F}_{R(Y)}(s) = \frac{-(1-\tilde{F}_Y(s))}{s\tilde{F}'_Y(0)}. \tag{3.17}$$

Έτσι, οι (3.4) και (3.6) δίνουν άμεσα τις (3.14) και (3.11). Τώρα, έστω T_s μια εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο s. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (3.8) και

(3.7) έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) &= \Pr[T_s \geq R_{n,\boldsymbol{q}}] \\
&= \Pr[T_s \geq R_{n-1,\boldsymbol{q}} - T_{\lambda q_n} | R_{n-1,\boldsymbol{q}} \geq T_{\lambda q_n}] \\
&= \frac{\Pr[R_{n-1,\boldsymbol{q}} \leq T_{\lambda q_n} + T_s] - \Pr[R_{n-1,\boldsymbol{q}} < T_{\lambda q_n}]}{\Pr[R_{n-1,\boldsymbol{q}} \geq T_{\lambda q_n}]}. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Αν $s \neq \lambda q_n$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (3.8) και (3.9) στην (3.18) και να πάρουμε την

$$\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\frac{\lambda q_n}{\lambda q_n - s}\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s) + \frac{s}{s-\lambda q_n}\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n) - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)}{1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)},$$

η οποία καταλήγει, μετά από κάποιες απλοποιήσεις, στην (3.12). Από την άλλη μεριά, αν $s = \lambda q_n$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (3.8) και (3.10) στην (3.18) και να πάρουμε την

$$\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n) - \lambda q_n \tilde{F}'_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n) - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)}{1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)},$$

η οποία δίνει την (3.13). Οι εξισώσεις (3.15) και (3.16) αποδεικνύονται όμοια ξεκινώντας από την (3.5) και χρησιμοποιώντας τις (3.8)-(3.10). ■

Παρατήρηση 3.3.1. *Από τις (3.14)-(3.16), έχουμε ότι ο $\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s)$ εξαρτάται από το $\boldsymbol{q}$ μόνο μέσω του q_0. Έτσι, μπορούμε να γράφουμε $\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \tilde{F}_{0,q_0}(s)$. Επίσης, για $n \geq 1$, οι σχέσεις (3.11)-(3.13) δείχνουν ότι ο $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s)$ είναι συνάρτηση του $\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s)$ και της q_n. Επαγωγικά, προκύπτει ότι ο $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s)$ εξαρτάται από το $\boldsymbol{q}$ μόνο μέσω του $\boldsymbol{q}_n$ και μπορούμε να γράφουμε $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}_n}(s)$. Ακόμη, μπορούμε να γράφουμε $R_{n,\boldsymbol{q}_n}$ αντί για $R_{n,\boldsymbol{q}}$.*

Παρατηρούμε επίσης ότι η (3.11) μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση της (3.12). Πράγματι, παίρνοντας το όριο στο δεξί μέλος της (3.12) καθώς $q_n \to 0^+$ καταλήγουμε στην (3.11). Ομοίως, παίρνοντας το όριο στο δεξί μέλος της (3.15) καθώς $q_0 \to 0^+$ καταλήγουμε στην (3.14).

Τώρα, παραγωγίζοντας τις (3.11)-(3.12) και (3.14)-(3.15) ως προς s και θέτοντας $s = 0$, παίρνουμε αναδρομικές σχέσεις για τους αναμενόμενους δεσμευμένους υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης. Δίνουμε το αποτέλεσμα στο Πόρισμα 3.3.1.

Πόρισμα 3.3.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. *Για τους αναμενόμενους δεσμευμένους υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης,* $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$, *έχουμε το ακόλουθο αναδρομικό σχήμα*

$$\begin{aligned} E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}] &= \frac{E[R^2_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]}{2E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]},\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n-1,\ q_n = 0,\ n \geq 1, && (3.19) \\ E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}] &= \frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]}{1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}(\lambda q_n)} - \frac{1}{\lambda q_n},\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n,\ n \geq 1, && (3.20) \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} E[R_{0,q_0}] &= \frac{E[X^2]}{2E[X]},\ q_0 = 0, && (3.21) \\ E[R_{0,q_0}] &= \frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda q_0)} - \frac{1}{\lambda q_0},\ q_0 \neq 0. && (3.22) \end{aligned}$$

Τώρα θα προσδιορίσουμε τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. Ξεκινάμε με την Πρόταση 3.3.3, όπου δίνουμε κάποιους αναδρομικούς τύπους για τις στάσιμες πιθανότητες.

Πρόταση 3.3.3. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. *Τότε, οι στάσιμες πιθανότητες* $\pi_{n,\boldsymbol{q}} = \Pr[N_{\boldsymbol{q}} = n]$, $n \geq 0$, *του αριθμού των πελατών στο σύστημα, δίνονται από το αναδρομικό σχήμα*

$$\pi_{n,\boldsymbol{q}} = \lambda q_{n-1} E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]\pi_{n-1,\boldsymbol{q}},\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n-1,\ q_n = 0,\ n \geq 1, \tag{3.23}$$

$$\pi_{n,\boldsymbol{q}} = \frac{q_{n-1}(1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}(\lambda q_n))}{q_n}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}},\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n,\ n \geq 1, \tag{3.24}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\pi_{0,\boldsymbol{q}} = 1,\ q_0 = 0, \tag{3.25}$$

$$\pi_{0,\boldsymbol{q}} = \frac{1-\tilde{F}(\lambda q_0)}{\lambda q_0 E[X]},\ q_0 \neq 0. \tag{3.26}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τις (3.23)-(3.26) εφαρμόζοντας τον νόμο του Little στην n-οστή θέση αναμονής του συστήματός μας. Συμβολίζουμε με $N_{\boldsymbol{q}}^{(n)}$ τον στάσιμο αριθμό των πελατών στην n-οστή θέση αναμονής, με $\lambda_{\boldsymbol{q}}^{(n)}$ τον ρυθμό άφιξης των πελατών στην n-οστή θέση αναμονής και με $S_{\boldsymbol{q}}^{(n)}$ τον χρόνο αναμονής ενός πελάτη στην n-οστή θέση αναμονής. Έχουμε ότι

$$E[N_{\boldsymbol{q}}^{(n)}] = \sum_{j=n}^{\infty} \pi_{j,\boldsymbol{q}}, \tag{3.27}$$

$$\lambda_{\boldsymbol{q}}^{(n)} = \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}}, \tag{3.28}$$

$$E[S_{\boldsymbol{q}}^{(n)}] = E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]. \tag{3.29}$$

Πράγματι, η n-οστή θέση αναμονής είναι κατειλημμένη αν και μόνο αν υπάρχουν τουλάχιστον n πελάτες στο σύστημα και έτσι παίρνουμε την (3.27). Επιπλέον, αφίξεις στην n-οστή θέση αναμονής συμβαίνουν μόνο όταν υπάρχουν $n-1$ πελάτες στο σύστημα και τότε ο ρυθμός άφιξης είναι λq_{n-1}. Έτσι, το ποσοστό του χρόνου που φθάνουν πελάτες στην n-οστή θέση αναμονής είναι $\pi_{n-1,\boldsymbol{q}}$ και ο ρυθμός άφιξης $\lambda_{\boldsymbol{q}}^{(n)}$ δίνεται από τη σχέση (3.28). Επίσης, ένας πελάτης που μπαίνει στην n-οστή θέση αναμονής έχει δει κατά την άφιξή του $n-1$ πελάτες στο σύστημα. Συνεπώς, ο χρόνος παραμονής του στην n-οστή θέση είναι ο δεσμευμένος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης, δεδομένου ότι υπάρχουν $n-1$ πελάτες στο σύστημα και έτσι παίρνουμε την (3.29). Εφαρμόζοντας τον νόμο του Little παίρνουμε

$$\sum_{j=n}^{\infty} \pi_{j,\boldsymbol{q}} = \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}} E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]. \tag{3.30}$$

Θεωρώντας την (3.30) για $n=1$ και λύνοντας ως προς $\pi_{0,\boldsymbol{q}}$ παίρνουμε

$$\pi_{0,\boldsymbol{q}} = \frac{1}{1+\lambda q_0 E[R_{0,q_0}]}. \tag{3.31}$$

Για $q_0 = 0$ παίρνουμε αμέσως την (3.25). Για $q_0 \neq 0$ αντικαθιστούμε $E[R_{0,q_0}]$ από την (3.22) και παίρνουμε την (3.26). Τώρα, για $n \geq 1$, αφαιρούμε την (3.30) για $n+1$, από την (3.30) για n και έχουμε

$$\pi_{n,\boldsymbol{q}} = \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}}E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}] - \lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}}E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]. \tag{3.32}$$

Λύνοντας ως προς $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$, παίρνουμε

$$\pi_{n,\boldsymbol{q}} = \frac{\lambda q_{n-1}E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]}{1+\lambda q_n E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}},\ n \geq 1. \tag{3.33}$$

Για $q_n = 0$ καταλήγουμε στην (3.23). Για $q_n \neq 0$, αντικαθιστώντας την (3.20) στην (3.33) προκύπτει η (3.24). ■

Χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις της Πρότασης 3.3.3, παίρνουμε τους τύπους που δίνουν τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Συγκεκριμένα, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση 3.3.4.

Πρόταση 3.3.4. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. *Τότε, οι στάσιμες πιθανότητες* $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$ *δίνονται από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned}
\pi_{0,\boldsymbol{q}} &= 1,\ q_0 = 0, && (3.34)\\
\pi_{n,\boldsymbol{q}} &= \frac{(1-\tilde{F}(\lambda q_0))E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]}{E[X]}\prod_{i=1}^{n-1}(1-\tilde{F}_{i-1,\boldsymbol{q}_{i-1}}(\lambda q_i)),\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n-1,\\
&\qquad q_n = 0, && (3.35)\\
\pi_{n,\boldsymbol{q}} &= \frac{1-\tilde{F}(\lambda q_0)}{\lambda q_n E[X]}\prod_{i=1}^{n}(1-\tilde{F}_{i-1,\boldsymbol{q}_{i-1}}(\lambda q_i)),\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n, && (3.36)\\
\pi_{n,\boldsymbol{q}} &= 0,\ \ \textit{αν } q_i = 0 \textit{ για κάποιο } i \leq n-1. && (3.37)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.3.2. *Λόγω των* (3.35)-(3.37) *είναι προφανές ότι η* $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$ *εξερτάται από το* $\boldsymbol{q}$ *μόνο μέσω της* $\boldsymbol{q}_n$. *Έτσι, μπορούμε να γράφουμε* $\pi_{n,\boldsymbol{q}_n}$ *αντί για* $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$.

Τώρα, θα αποδείξουμε ξανά τις Προτάσεις 3.3.2 και 3.3.3 χρησιμοποιώντας την αναλυτική προσέγγιση που εισήγαγε ο Kerner (2008). Η βασική ιδέα είναι η λεγόμενη τεχνική των πρόσθετων μεταβλητών (supplementary variables technique), δηλαδή η μελέτη της από κοινού κατανομής της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{(N(t), R(t)), t \geq 0\}$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η δεύτερη τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής, έτσι θεωρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p_t(n, r; \boldsymbol{q}) = \lim_{dr \to 0^+} \frac{\Pr[N_{\boldsymbol{q}}(t) = n, R_{\boldsymbol{q}}(t) \in (r, r+dr]]}{dr},\ n \geq 0,\ r \geq 0,$$

όπου $p_t(n, r; \boldsymbol{q})$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας να έχουμε n πελάτες στο σύστημα και υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης r τη στιγμή t, όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\boldsymbol{q}$. Θεωρούμε ακόμη τις ποσότητες

$$\begin{aligned} p(n, r; \boldsymbol{q}) &= \lim_{t \to 0} p_t(n, r; \boldsymbol{q}),\ n \geq 0,\ r \geq 0, \\ \tilde{P}_{n,\boldsymbol{q}}(s) &= \int_0^\infty e^{-sr} p(n, r; \boldsymbol{q}) dr,\ n \geq 0, \end{aligned}$$

που δίνουν τη στάσιμη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes της $p_t(n, r; \boldsymbol{q})$. Τότε, οι μετασχηματισμοι Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s)$ και οι στάσιμες πιθανότητες $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$ που ορίζονται στις Προτάσεις 3.3.2 και 3.3.3 δίνονται από τις σχέσεις

$$\pi_{n,\boldsymbol{q}} = \int_0^\infty p(n, r; \boldsymbol{q}) dr = \tilde{P}_{n,\boldsymbol{q}}(0),\ n \geq 0, \tag{3.38}$$

$$\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\tilde{P}_{n,\boldsymbol{q}}(s)}{\pi_{n,\boldsymbol{q}}},\ n \geq 0. \tag{3.39}$$

Έτσι, έχουμε το επόμενο Λήμμα 3.3.2.

Λήμμα 3.3.2. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. Τότε, η στάσιμη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(p(n, r; \boldsymbol{q}),\ n \geq 0,\ r \geq 0)$ ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως προς r.*

$$p'(0, r; \boldsymbol{q}) = \lambda q_0 p(0, r; \boldsymbol{q}) - \frac{1}{E[X]} f(r),\ r \geq 0, \tag{3.40}$$

$$p'(n, r; \boldsymbol{q}) = \lambda q_n p(n, r; \boldsymbol{q}) - \lambda q_{n-1} p(n-1, r; \boldsymbol{q}),\ r \geq 0,\ n \geq 1. \tag{3.41}$$

Απόδειξη. Εξετάζοντας την εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου $\{(N_{\boldsymbol{q}}(t), R_{\boldsymbol{q}}(t)), t \geq 0\}$ σε ένα διάστημα $[t, t+dt]$, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$p_{t+dt}(0, r; \boldsymbol{q}) = p_t(0, r+dt; \boldsymbol{q})(1 - \lambda q_0 dt) + \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n, 0; \boldsymbol{q}) f(r) dt + o(dt), \tag{3.42}$$

$$p_{t+dt}(n, r; \boldsymbol{q}) = p_t(n-1, r+dt; \boldsymbol{q})\lambda q_{n-1} dt + p_t(n, r+dt; \boldsymbol{q})(1 - \lambda q_n dt) + o(dt), \quad n \geq 1, \tag{3.43}$$

για $dt \to 0^+$.

Παίρνοντας το όριο καθώς $t \to \infty$ οι (3.42) και (3.43) δίνουν

$$p(0, r; \boldsymbol{q}) = p(0, r+dt; \boldsymbol{q})(1 - \lambda q_0 dt) + \sum_{n=0}^{\infty} p(n, 0; \boldsymbol{q}) f(r) dt + o(dt), \tag{3.44}$$

$$p(n, r; \boldsymbol{q}) = p(n-1, r+dt; \boldsymbol{q})\lambda q_{n-1} dt + p(n, r+dt; \boldsymbol{q})(1 - \lambda q_n dt) + o(dt), \; n \geq 1, \tag{3.45}$$

για $dt \to 0^+$.

Αναδιατάσσοντας τους όρους της (3.44) και διαιρώντας με dt παίρνουμε

$$\frac{p(0, r+dt; \boldsymbol{q}) - p(0, r; \boldsymbol{q})}{dt} = \lambda q_0 p(0, r+dt; \boldsymbol{q}) - \sum_{n=0}^{\infty} p(n, 0; \boldsymbol{q}) f(r) + \frac{o(dt)}{dt}. \tag{3.46}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $dt \to 0^+$, η (3.46) δίνει

$$p'(0, r; \boldsymbol{q}) = \lambda q_0 p(0, r; \boldsymbol{q}) - f(r) \sum_{n=0}^{\infty} p(n, 0; \boldsymbol{q}), \; r \geq 0. \tag{3.47}$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n, r; \boldsymbol{q}) = f_R(r) = \frac{1 - F(r)}{E[X]}, \; r \geq 0, \tag{3.48}$$

η πυκνότητα πιθανότητας της στάσιμης κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης στο r. Συγκεκριμένα, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n, 0; \boldsymbol{q}) = 1/E[X]$, οπότε η (3.47) δίνει την (3.40).

Ομοίως, αναδιατάσσοντας τους όρους της (3.45), διαιρώντας με dt και παίρνοντας το όριο καθώς $dt \to 0^+$ καταλήγουμε στην (3.41). ■

Τώρα, μπορούμε να δώσουμε την αναλυτική απόδειξη για την Πρόταση 3.3.3, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.2.

Πρόταση 3.3.3 - Αναλυτική απόδειξη. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της (3.41) παίρνουμε τη σχέση

$$\int_0^\infty p'(n,r;\boldsymbol{q})dr = \int_0^\infty \lambda q_n p(n,r;\boldsymbol{q})dr - \int_0^\infty \lambda q_{n-1} p(n-1,r;\boldsymbol{q})dr,\ n \geq 1, \tag{3.49}$$

η οποία δίνει την

$$-p(n,0;\boldsymbol{q}) = \lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}} - \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}},\ n \geq 1. \tag{3.50}$$

Αθροίζοντας την (3.50), για $n \geq 1$, και χρησιμοποιώντας την (3.48), καταλήγουμε στην

$$p(0,0;\boldsymbol{q}) = \frac{1}{E[X]} - \lambda q_0 \pi_{0,\boldsymbol{q}}. \tag{3.51}$$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.41) με $e^{-\lambda q_n r}$ και αναδιατάσσοντας τους όρους παίρνουμε

$$(e^{-\lambda q_n r} p(n,r;\boldsymbol{q}))' = -\lambda q_{n-1} e^{-\lambda q_n r} p(n-1,r;\boldsymbol{q}),\ n \geq 1,\ r \geq 0. \tag{3.52}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.52), παίρνουμε την σχέση

$$\int_0^\infty (e^{-\lambda q_n r} p(n,r;\boldsymbol{q}))' dr = -\lambda q_{n-1} \int_0^\infty e^{-\lambda q_n r} p(n-1,r;\boldsymbol{q})dr,\ n \geq 1,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$-p(n,0;\boldsymbol{q})) = -\lambda q_{n-1} \tilde{P}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n),\ n \geq 1. \tag{3.53}$$

Αντικαθιστώντας την (3.50) στην (3.53) έχουμε

$$\lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}} - \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}} = -\lambda q_{n-1} \tilde{P}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n),\ n \geq 1$$

η οποία δίνει

$$\lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}} = \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}}(1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)),\ n \geq 1. \tag{3.54}$$

Επιλύοντας την (3.54) ως προς $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$ καταλήγουμε στην (3.24), για $q_n \neq 0$. Παίρνοντας το όριο στην (3.24), καθώς $q_n \to 0$, καταλήγουμε στην (3.23).

Για να αποδείξουμε τις αρχικές συνθήκες (3.26) και (3.25) του αναδρομικού σχήματος, χρησιμοποιούμε παρόμοια επιχειρήματα. Συγκεκριμένα, ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας την (3.40) με $e^{-\lambda q_0 r}$ και αναδιατάσσοντας τους όρους ώστε να καταλήξουμε στην

$$(e^{-\lambda q_0 r}p(0,r;\boldsymbol{q}))' = -\frac{1}{E[X]}e^{-\lambda q_0 r}f(r),\ r \geq 0. \tag{3.55}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.55) παίρνουμε

$$\begin{aligned} -p(0,0;\boldsymbol{q}) = \int_0^\infty (e^{-\lambda q_0 r}p(0,r;\boldsymbol{q}))'dr &= -\frac{1}{E[X]}\int_0^\infty e^{-\lambda q_0 r}f(r)dr \\ &= -\frac{1}{E[X]}\tilde{F}(\lambda q_0). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.51) και (3.56), συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda q_0 \pi_{0,\boldsymbol{q}} - \frac{1}{E[X]} = -\frac{1}{E[X]}\tilde{F}(\lambda q_0). \tag{3.57}$$

Επιλύοντας την (3.57) ως προς $\pi_{0,\boldsymbol{q}}$ καταλήγουμε στην (3.26), για $q_0 \neq 0$. Παίρνοντας το όριο της (3.26), καθώς $q_0 \to 0$, καταλήγουμε στην (3.25). ∎

Τώρα, μπορούμε να δώσουμε την εναλλακτική απόδειξη για την Πρόταση 3.3.2

Πρόταση 3.3.2 - Αναλυτική απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.41) με e^{-sr} και ολοκληρώνοντας ως προς r παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sr}p'(n,r;\boldsymbol{q})dr = \lambda q_n \int_0^\infty e^{-sr}p(n,r;\boldsymbol{q})dr - \lambda q_{n-1}\int_0^\infty e^{-sr}p(n-1,r;\boldsymbol{q})dr,\quad n \geq 1,$$

ή

$$-p(n,0;\boldsymbol{q}) + s\tilde{P}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \lambda q_n \tilde{P}_{n,\boldsymbol{q}}(s) - \lambda q_{n-1}\tilde{P}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s),\ n \geq 1. \tag{3.58}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.50), (3.39) στην (3.58) έχουμε

$$\lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}} - \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}} + s\pi_{n,\boldsymbol{q}}\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}}\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) - \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}}\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s), \quad n \geq 1,$$

ή

$$(s - \lambda q_n)\pi_{n,\boldsymbol{q}}\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = -\lambda q_n \pi_{n,\boldsymbol{q}} + \lambda q_{n-1}\pi_{n-1,\boldsymbol{q}}(1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s)), \quad n \geq 1. \tag{3.59}$$

Για $q_n \neq 0$, η (3.59), χρησιμοποιώντας την (3.54), δίνει την

$$(s - \lambda q_n)\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \lambda q_n \frac{\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n) - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s)}{1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(\lambda q_n)}, \ n \geq 1. \tag{3.60}$$

Αν $\lambda q_n \neq s$, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι από την (3.60) προκύπτει η (3.12). Παίρνοντας το όριο της (3.12), καθώς $s \to \lambda q_n$, προκύπτει η (3.13). Από την άλλη μεριά, αν $q_n = 0$, η σχέση (3.59), χρησιμοποιώντας την (3.23), δίνει την

$$s\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}}(s)}{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}}]}, n \geq 1,$$

η οποία συνεπάγεται την (3.11).

Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα καταλήγουμε στις αρχικές συνθήκες (3.14)-(3.16). Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.40) με e^{-sr} και ολοκληρώνοντας ως προς r παίρνουμε

$$-p(0,0;\boldsymbol{q}) + s\tilde{P}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \lambda q_0 \tilde{P}_{0,\boldsymbol{q}}(s) - \frac{1}{E[X]}\tilde{F}(s). \tag{3.61}$$

Αντικαθιστώντας την (3.51) στην (3.61), έχουμε

$$-\frac{1}{E[X]} + \lambda q_0 \pi_{0,\boldsymbol{q}} + s\tilde{P}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \lambda q_0 \tilde{P}_{0,\boldsymbol{q}}(s) - \frac{1}{E[X]}\tilde{F}(s). \tag{3.62}$$

Από τις (3.57) και (3.62), προκύπτει

$$(s - \lambda q_0)\pi_{0,\boldsymbol{q}}\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\tilde{F}(\lambda q_0) - \tilde{F}(s)}{E[X]}. \tag{3.63}$$

Αν $q_0 \neq 0$, η σχέση (3.63), χρησιμοποιώντας την (3.57), δίνει την

$$(s - \lambda q_0)\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \lambda q_0 \frac{\tilde{F}(\lambda q_0) - \tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(\lambda q_0)}. \tag{3.64}$$

Αν $\lambda q_0 \neq s$, από την (3.64) παίρνουμε την (3.15). Αλλιώς, παίρνοντας το όριο της (3.15) καθώς $s \to \lambda q_0$, καταλήγουμε στην (3.16). Τώρα, αν $q_0 = 0$, η σχέση (3.63), χρησιμοποιώντας την (3.25), δίνει την

$$s\tilde{F}_{0,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{1 - \tilde{F}(s)}{E[X]}, \tag{3.65}$$

από την οποία καταλήγουμε στην (3.14). ■

3.4 Η παρατηρήσιμη περίπτωση: Στρατηγικές ισορροπίας

Σε αυτήν την ενότητα θα προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας για την παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι μια στρατηγική λέγεται στρατηγική ισορροπίας αν είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Έτσι, προκειμένου να βρούμε τις βέλτιστες απαντήσεις ενός πελάτη σε μια στρατηγική των άλλων πελάτών πρέπει να υπολογίσουμε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. Έτσι, ξεκινάμε τη μελέτη μας με τον προσδιορισμό των συναρτήσεων αναμενόμενου καθαρού κέρδους.

Πρόταση 3.4.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$. *Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος* $S_n^{obs}(\boldsymbol{q})$ *ενός αφικνούμενου πελάτη, ο οποίος βρίσκει* n *πελάτες στο σύστημα και* *αποφασίζει να μπει, δίνεται από τις σχέσεις*

$$S_0^{obs}(\boldsymbol{q}) = R - K\frac{E[X^2]}{2E[X]},\ q_0 = 0, \tag{3.66}$$

$$S_0^{obs}(\boldsymbol{q}) = R - K\left[\frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda q_0)} - \frac{1}{\lambda q_0}\right],\ q_0 \neq 0, \tag{3.67}$$

$$S_n^{obs}(\boldsymbol{q}) = R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{E[R^2_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]}{2E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]},\ q_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq n-1,\ q_n = 0,\ n \geq 1, \tag{3.68}$$

$$S_n^{obs}(\boldsymbol{q}) = R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\left[\frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}]}{1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}}(\lambda q_n)} - \frac{1}{\lambda q_n}\right], q_i \neq 0, 0 \leq i \leq n, n \geq 1. \tag{3.69}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ και θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη ο οποίος βρίσκει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του και αποφασίζει να μπει. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του θα ισούται με τη διαφορά της αναμενόμενης αμοιβής του από την εξυπηρέτηση και του αναμενόμενου κόστους του από την αναμονή. Έτσι, έχουμε

$$S_n^{obs}(\boldsymbol{q}) = RP_n^{obs} - KE[R_{n,\boldsymbol{q}_n}], \tag{3.70}$$

όπου P_n^{obs} είναι η πιθανότητα ο συγκεκριμένος πελάτης να εξυπηρετηθεί, δεδομένου ότι υπάρχουν n πελάτες μπροστά από αυτόν. Έχουμε προφανώς ότι

$$P_n^{obs} = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k, \tag{3.71}$$

καθώς ένας πελάτης που καταλαμβάνει την $n+1$-οστή θέση αναμονής του σταθμού θα εξυπηρετηθεί από το επόμενο μέσο μεταφοράς, μόνο αν η χωρητικότητα του είναι τουλάχιστον $n+1$. Αντικαθιστώντας την (3.71) και τις σχέσεις για τον $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$ από το Πόρισμα 3.3.1 στην (3.70) παίρνουμε αμέσως τις σχέσεις (3.66)-(3.69). ∎

Παρατήρηση 3.4.1. *Είναι φανερό ότι το $S_n^{obs}(\boldsymbol{q})$ εξαρτάται από το $\boldsymbol{q}$ μόνο μέσω του $\boldsymbol{q}_n$. Έτσι, μπορούμε να γράφουμε $S_n^{obs}(\boldsymbol{q}) = S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_n)$.*

Παρατήρηση 3.4.2. *Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Hospital, μπορούμε να αποδείξουμε ότι* $\lim_{q_n \to 0} S_n^{obs}(q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n) = S_n^{obs}(q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, 0)$ *και ότι* $\lim_{q_0 \to 0} S_0^{obs}(q_0) = S_0^{obs}(0)$. *Οπότε, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι οι συναρτήσεις* $S_n^{obs}(\boldsymbol{q})$ *είναι συνεχείς.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας $\boldsymbol{q}^e = (q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots)$ των πελατών. Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι οι πιθανότητες ισορροπίας εισόδου q_n^e μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά, χρησιμοποιώντας μια ιδέα του Kerner (2011). Στο Θεώρημα 3.4.1 προσδιορίζουμε όλες τις πιθανότητες ισορροπίας εισόδου q_0^e. Ακολούθως, στο Θεώρημα 3.4.2, υποθέτοντας ότι έχουμε υπολογίσει το διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου ισορροπίας $\boldsymbol{q}_{n-1}^e$, για κάποιο $n \geq 1$, προσδιορίζουμε όλες τις πιθανότητες ισορροπίας εισόδου q_n^e.

Θεώρημα 3.4.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υπάρχει τουλάχιστον μία πιθανότητα ισορροπίας* q_0^e *για την είσοδο όταν το σύστημα είναι κενό. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $\frac{R}{K} \leq \frac{E[X^2]}{2E[X]}$.

Τότε, η 0 *είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου* q_0^e.

Περίπτωση II: $\frac{E[X^2]}{2E[X]} < \frac{R}{K} < \frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$.

Τότε, η εξίσωση $\frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda x)} - \frac{1}{\lambda x} = \frac{R}{K}$ *έχει λύση στο* $(0,1)$. *Κάθε τέτοια λύση είναι πιθανότητα ισορροπίας εισόδου* q_0^e.

Περίπτωση III: $\frac{R}{K} \geq \frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$.

Τότε, η 1 *είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου* q_0^e.

Απόδειξη. Περίπτωση I: Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες αποχωρούν και θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη τη στιγμή της άφιξής του. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, αν αποφασίσει να μπει, είναι $S_0^{obs}(0) = R - K\frac{E[X^2]}{2E[X]} \leq 0$. Έτσι, μια βέλτιστη απάντηση είναι να αποχωρήσει. Οπότε, η 0 είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_0^e.

Περίπτωση II: Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι $S_0^{obs}(0) > 0$ και $S_0^{obs}(1) < 0$. Εφόσον η $S_0^{obs}(q_0)$ είναι συνεχής ως προς q_0, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα x, τέτοιο ώστε $0 < x < 1$ και $S_0^{obs}(x) = 0$. Αν οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα x, όταν είναι άδειο, τότε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη, που βρίσκει το σύστημα άδειο τη στιγμή της άφιξής του και αποφασίζει να μπει, είναι $S_0^{obs}(x) = 0$. Έτσι, είναι αδιάφορος ως προς το να μπει ή να αποχωρήσει. Δηλαδή, η x είναι μια βέλτιστη απάντηση. Γενικότερα, κάθε λύση $x \in (0,1)$ της εξίσωσης $S_0^{obs}(x) = 0$ (η οποία γράφεται ισοδύναμα ως $\frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda x)} - \frac{1}{\lambda x} = \frac{R}{K}$) είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_0^e.

Περίπτωση III: Τώρα, θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη, ο οποίος βρίσκει το σύστημα άδειο κατά την άφιξή του, και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα όταν το βρίσκουν άδειο. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του πελάτη, αν αποφασίσει να εισέλθει, είναι $S_0^{obs}(1) = R - K\left[\frac{E[X]}{1-\tilde{F}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}\right] \geq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η βέλτιστη απάντησή του είναι να εισέλθει στο σύστημα. Έτσι, η 1 είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_0^e. ■

Θεώρημα 3.4.2. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υποθέτοντας ότι είναι γνωστό ένα διάνυσμα πιθανοτήτων ισορροπίας εισόδου* $\boldsymbol{q}_{n-1}^e$ *, υπάρχει τουλάχιστον μία πιθανότητα ισορροπίας* q_n^e *για την είσοδο όταν στο σύστημα υπάρχουν* n *πελάτες. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $\frac{R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k}{K} \leq \frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}^2]}{2E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}]}$.

Τότε, η 0 *είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου* q_n^e.

Περίπτωση II: $\frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}^2]}{2E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}]} < \frac{R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k}{K} < \frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}]}{1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$.

Τότε, η εξίσωση $\frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}]}{1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}(\lambda x)} - \frac{1}{\lambda x} = \frac{R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k}{K}$ *έχει λύση στο* $(0,1)$. *Κάθε τέτοια λύση είναι πιθανότητα ισορροπίας εισόδου* q_n^e.

Περίπτωση III: $\frac{R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k}{K} \geq \frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}]}{1-\tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}_{n-1}^e}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda}$.

Τότε, η 1 *είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου* q_n^e.

Απόδειξη. Περίπτωση I: Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\boldsymbol{q}^e$ με αρχικό μέρος $(\boldsymbol{q}_{n-1}^e, 0) = (q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, 0)$ και θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη, που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, αν αποφασίσει να μπει, είναι

$$S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, 0) = R \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K \frac{E[R^2_{n-1,\boldsymbol{q}^e_{n-1}}]}{2E[R_{n-1,\boldsymbol{q}^e_{n-1}}]} \leq 0.$$

Έτσι, μια βέλτιστη απάντηση είναι να αποχωρήσει. Οπότε, η 0 είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_n^e.

Περίπτωση ΙΙ: Τώρα, έχουμε ότι $S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, 0) > 0$ και $S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, 1) < 0$. Εφόσον η $S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, q_n)$ είναι συνεχής ως προς q_n, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano και προκύπτει ότι υπάρχει ένα $x \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, x) = 0$. Αν οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με τη στρατηγική $\boldsymbol{q}^e$ με αρχικό μέρος $(\boldsymbol{q}^e_{n-1}, x)$, τότε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη, ο οποίος βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του και αποφασίζει να μπει, είναι $S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, x) = 0$. Έτσι, ο πελάτης είναι αδιάφορος ως προς το να εισέλθει ή να αποχωρήσει. Οπότε, η x είναι μια βέλτιστη απάντηση, δηλαδή είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_n^e.

Περίπτωση ΙΙΙ: Θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη τη στιγμή της άφιξής του, ο οποίος βρίσκει n πελάτες, και υποθέτουμε ότι οι άλλοι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με τη στρατηγική $\boldsymbol{q}^e$ με αρχικό μέρος $(\boldsymbol{q}^e_{n-1}, 1)$. Τότε, το αναμενόμενο κέρδος του πελάτη, αν αποφασίσει να εισέλθει, είναι

$$S_n^{obs}(q_0^e, q_1^e, q_2^e, \ldots, q_{n-1}^e, 1) = R \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K \left[\frac{E[R_{n-1,\boldsymbol{q}^e_{n-1}}]}{1 - \tilde{F}_{n-1,\boldsymbol{q}^e_{n-1}}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right] \geq 0.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, μια βέλτιστη απάντηση του πελάτη είναι να εισέλθει. Έτσι, η 1 είναι μια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_n^e. ∎

Τώρα, θα θεωρήσουμε το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης.

Παρατήρηση 3.4.3. *Στην παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$*, το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική* *μονάδα δίνεται από τη σχέση*

$$S_{soc}^{obs}(\boldsymbol{q}) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,\boldsymbol{q}} q_n S_n^{obs}(\boldsymbol{q}) \tag{3.72}$$

$$= R\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,\boldsymbol{q}} q_n \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - KE[N_{\boldsymbol{q}}]. \tag{3.73}$$

Η πολυπλοκότητα των όρων $\pi_{n,\boldsymbol{q}}$ *και* $E[N_{\boldsymbol{q}}] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n,\boldsymbol{q}}$ *δεν επιτρέπει τον προσδιορισμό της στρατηγικής* $\boldsymbol{q}$ *που μεγιστοποιεί το* $S_{obs}^{soc}(\boldsymbol{q})$ *σε κλειστή αναλυτική μορφή. Όμως, στην ενότητα 3.6, προσδιορίζουμε την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική στην περίπτωση που οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς ακολουθούν την εκθετική κατανομή.*

3.5 Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματός μας. Αρχικά, υπολογίζουμε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη, αν αποφασίσει να μπει, και έπειτα προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας. Μια στρατηγική σε αυτήν την περίπτωση προσδιορίζεται από μια πιθανότητα εισόδου q. Στην Πρόταση 3.5.1 δίνουμε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη που αποφασίζει να μπει στο σύστημα.

Πρόταση 3.5.1. *Θεωρούμε τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική* q. *Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος* $S^{un}(q)$ *ενός αφικνούμενου πελάτη, ο οποίος αποφασίζει να μπει, δίνεται από τις σχέσεις*

$$S^{un}(q) = R\frac{E[C1\{C \leq I_q\} + I_q 1\{C > I_q\}]}{\lambda q E[X]} - K\frac{E[X^2]}{2E[X]} \tag{3.74}$$

$$= R\left[\sum_{k=1}^{\infty} g_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda q t}\frac{(\lambda q t)^j}{j!}\frac{1-F(t)}{E[X]}dt\right] - K\frac{E[X^2]}{2E[X]}, \tag{3.75}$$

όπου οι C, X *και* I_q *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η* C *είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας* $(g_k : k = 1, 2, \ldots)$ *(τη συνάρτηση πιθανότητας της χωρητικότητας του μέσου μεταφοράς), η* X *είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή* *με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ (τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης) και η I_q είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$\Pr[I_q = i] = \int_0^\infty e^{-\lambda qx} \frac{(\lambda qx)^i}{i!} dF(x),\ i \geq 0. \tag{3.76}$$

Η συνάρτηση $S^{un}(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q και επομένως οι πελάτες υιοθετούν συμπεριφορά ΑΤΠ.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q και θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη που αποφασίζει να μπει. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του δίνεται από τη σχέση

$$S^{un}(q) \quad = \quad RP^{un}(q) - KE[R^{un}], \tag{3.77}$$

όπου $P^{un}(q)$ είναι η πιθανότητα ο συγκεκριμένος πελάτης να εξυπηρετηθεί, δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q και R^{un} είναι ο χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα, ο οποίος συμπίπτει με τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης τη στιγμή της άφιξής του. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα PASTA, προκύπτει ότι αυτός είναι ίσος με τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης μια τυχαία στιγμή. Έτσι,

$$E[R^{un}] \quad = \quad \frac{E[X^2]}{2E[X]}, \tag{3.78}$$

όπου ο X παριστάνει τον χρόνο εξυπηρέτησης. Τώρα, λόγω της αναγεννητικής φύσης της διαδικασίας, το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί και έτσι η πιθανότητα $P^{un}(q)$ ισούται με τον λόγο του αναμενόμενου αριθμού των πελατών που εξυπηρετούνται σε έναν κύκλο εξυπηρέτησης προς τον αναμενόμενο αριθμό πελατών που φθάνουν σε έναν κύκλο εξυπηρέτησης.

Ο αριθμός πελατών που εξυπηρετείται σε έναν κύκλο εξυπηρέτησης ισούται με την χωρητικότητα του μέσου μεταφοράς, αν ο αριθμός των πελατών που εισήλθαν στον σταθμό ξεπερνά τη χωρητικότητα του μέσου C. Αλλιώς, ισούται με τον αριθμό των πελατών που εισήλθαν στον σταθμό. Συμβολίζοντας με I_q τον αριθμό των πελατών που αποφασίζουν να εισέλθουν σε έναν κύκλο εξυπηρέτησης, έχουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της I_q δίνεται από την (3.76), καθώς η δεσμευμένη κατανομή της I_q δεδομένου ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι x είναι Poisson με ρυθμό λqx. Τώρα, είναι σαφές ότι ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται σε έναν κύκλο εξυπηρέτησης ισούται με $E[C1\{C \leq I_q\} + I_q 1\{C > I_q\}]$. Επίσης, ο αναμενόμενος αριθμός των αφικνούμενων πελατών που αποφασίζουν να μπούν στο σύστημα σε έναν κύκλο εξυπηρέτησης είναι $E[I_q] = \lambda q E[X]$. Έτσι,

$$P^{un}(q) \quad = \quad \frac{E[C1\{C \leq I_q\} + I1\{C > I_q\}]}{\lambda q E[X]}. \tag{3.79}$$

Αντικαθιστώντας την (3.78) και την (3.79) στην (3.77), παίρνουμε την (3.74). Χρησιμοποιώντας την (3.79) και δεσμεύοντας διαδοχικά ως προς X, I_q και C παίρνουμε

$$P^{un}(q) \quad = \quad \frac{\int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda q u} \frac{(\lambda q u)^i}{i!} \sum_{k=1}^\infty g_k \min(k, i) dF(u)}{\lambda q E[X]}. \tag{3.80}$$

Μετά από πράξεις, η (3.80) δίνει την

$$P^{un}(q) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty e^{-\lambda q t} \frac{(\lambda q t)^j}{j!} \frac{1 - F(t)}{E[X]} dt. \tag{3.81}$$

Αντικαθιστώντας την (3.78) και την (3.81) στην (3.77) καταλήγουμε στην (3.75).

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι

$$\frac{d\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda q t} \frac{(\lambda q t)^j}{j!}\right)}{dq} \quad = \quad -\lambda t e^{-\lambda q t} \frac{(\lambda q t)^{k-1}}{(k-1)!} < 0.$$

Οπότε, παραγωγίζοντας την (3.75) ως προς q, έχουμε

$$\frac{dS^{un}(q)}{dq} \quad = \quad R \sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_0^\infty \left(-\lambda t e^{-\lambda q t} \frac{(\lambda q t)^{k-1}}{(k-1)!}\right) \frac{1 - F(t)}{E[X]} dt < 0.$$

Έτσι, η $S^{un}(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q. ■

Παρατήρηση 3.5.1. *Η σχέση (3.81) μπορεί να αποδειχθεί εναλλακτικά παρατηρώντας ότι $P^{un}(q) = \Pr[N_q^j < C]$, όπου η N_q^j ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε στιγμές αφίξεων πελατών που μπαίνουν στο σύστημα, δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q, και η C ακολουθεί την κατανομή (g_k) της χωρητικότητας του μέσου. Πράγματι, ένας αφικνούμενος πελάτης* *εξυπηρετείται, αν και μόνο αν η χωρητικότητα του επόμενου μέσου μεταφοράς ξεπερνά τον αριθμό των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα PASTA, έχουμε ότι ο χρόνος που πέρασε από την τελευταία επισκέψη του μεταφορικού μέσου μέχρι την άφιξη ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή της ηλικίας της ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους κατανεμημένους σύμφωνα με την* $F(t)$. *Έτσι, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς του είναι* $(1-F(t))/E[X]$, $t \geq 0$. *Τώρα, δεσμεύοντας, έχουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της* N_q^j *δίνεται από την*

$$\Pr[N_q^j = i] = \int_0^\infty e^{-\lambda qx} \frac{(\lambda qx)^i}{i!} \frac{1-F(x)}{E[X]} dx, \ i \geq 0 \tag{3.82}$$

και καταλήγουμε εύκολα στην (3.81).

Τώρα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 3.5.1.

Θεώρημα 3.5.1. *Θεωρούμε τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $\frac{R}{K} \leq \frac{E[X^2]}{2E[X]}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας η οποία υπαγορεύει να αποχωρείς. Επιπλέον, είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Περίπτωση II: $\frac{E[X^2]}{2E[X]} < \frac{R}{K} < \frac{\frac{E[X^2]}{2E[X]}}{\sum_{k=1}^\infty g_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \frac{1-F(t)}{E[X]} dt}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας η οποία υπαγορεύει να μπαίνεις με πιθανότητα q_e, *όπου η* q_e *είναι η μοναδική ρίζα της* $S^{un}(q)$ *στο* $(0,1)$.

Περίπτωση III: $\frac{R}{K} \geq \frac{\frac{E[X^2]}{2E[X]}}{\sum_{k=1}^\infty g_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \frac{1-F(t)}{E[X]} dt}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας η οποία υπαγορεύει να μπαίνεις. Επιπλέον, είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Απόδειξη. Περίπτωση I: Θεωρούμε έναν συγκεκριμένο πελάτη κατά την άφιξή του και υποθέτουμε ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q. Αν $q = 0$, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του συγκεκριμένου πελάτη, αν αποφασίσει να εισέλθει είναι $S^{un}(0) = R - K\frac{E[X^2]}{2E[X]} \leq 0$. Επιπλέον, λόγω της μονοτονίας της $S^{un}(q)$, έχουμε ότι $S^{un}(q) < 0,\ q \in (0,1]$. Έτσι, η βέλτιστη απάντηση του πελάτη, σε οποιαδήποτε στρατηγική των άλλων πελατών, είναι να αποχωρήσει. Οπότε, η μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική είναι να αποχωρείς.

Περίπτωση II: Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι $S^{un}(0) > 0$, ενώ $S^{un}(1) < 0$. Έτσι, από το Θεώρημα Bolzano και τη μονοτονία της $S^{un}(q)$, έχουμε ότι η $S^{un}(q)$ έχει μοναδική ρίζα $q^e \in (0,1)$. Τώρα, αν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q, με $q \in [0, q^e)$, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη είναι θετικό, έτσι η βέλτιστη απάντησή του είναι να εισέλθει στο σύστημα. Οπότε, καμία στρατηγική $q \in [0, q^e)$ δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας. Ομοίως για κάθε $q \in (q^e, 1]$, η μόνη βέλτιστη απάντηση είναι να αποχωρείς και έτσι μια τέτοια στρατηγική q δε μπορεί να είναι στρατηγική ισορροπίας. Τέλος, αν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q^e, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του συγκεκριμένου πελάτη είναι $S^{un}(q^e) = 0$, οπότε είναι αδιάφορος ως προς το να αποχωρήσει ή να εισέλθει. Ειδικότερα, η στρατηγική q^e είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι η q^e αποτελεί τη μοναδική στρατηγική ισορροπίας.

Περίπτωση III: Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική που υπαγορεύει να μπαίνεις, $q = 1$. Τότε, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη, αν αποφασίσει να εισέλθει, είναι

$$S^{un}(1) = R\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\frac{1-F(t)}{E[X]}dt\right) - K\frac{E[X^2]}{2E[X]} \geq 0.$$

Επιπλέον, η μονοτονία της $S^{un}(q)$ δίνει ότι $S^{un}(q) > 0,\ q \in [0,1)$. Έτσι, αν $q \in [0,1)$, η βέλτιστη απάντηση ενός συγκεκριμένου πελάτη είναι να εισέλθει. Οπότε, η βέλτιστη απάντηση του πελάτη, απέναντι σε οποιαδήποτε στρατηγική των άλλων, είναι να εισέλθει. Επομένως, η στρατηγική που υπαγορεύει να μπαίνεις είναι η μοναδική κυριαρχούσα στρατηγική. ■

Για το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης έχουμε την ακόλουθη Παρατήρηση 3.5.2.

Παρατήρηση 3.5.2. *Στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια στρατηγική q, το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση*

$$S^{un}_{soc}(q) = \lambda q S^{un}(q) = \lambda q(RP^{un}(q) - KE[R^{un}]), \tag{3.83}$$

όπου οι $P^{un}(q)$ και $E[R^{un}]$ δίνονται από την (3.81) και την (3.78) αντίστοιχα. Η πολυπλοκότητα της $P^{un}(q)$ ως συνάρτησης του q δεν επιτρέπει τον αναλυτικό υπολογισμό της στρατηγικής q που μεγιστοποιεί το $S^{un}_{soc}(q)$. Όμως, στην ενότητα 3.6 προσδιορίζουμε την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική στην περίπτωση που οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

3.6 Η εκθετική περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε λεπτομερώς την ειδική περίπτωση που η κατανομή $F(x)$ είναι εκθετική, δηλαδή οι επισκέψεις του μέσου στον σταθμό συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, για $x > 0$. Σε αυτή την ειδική περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές και στις δύο περιπτώσεις που προκύπτουν ως προς την πληροφόρηση (την παρατηρήσιμη και τη μη παρατηρήσιμη).

Αρχικά, μελετάμε την παρατηρήσιμη περίπτωση. Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι δεσμευμένοι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης $R_{n,\boldsymbol{q}}$ είναι όλοι εκθετικά κατανεμημένοι. Έτσι, $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \tilde{F}(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$ και $E[R_{n,\boldsymbol{q}}] = E[X] = \frac{1}{\mu}$. Χρησιμοποιώντας τις (3.70) και (3.71), μπορούμε να δούμε εύκολα ότι η συνάρτηση αναμενόμενου καθαρού κέρδους $S^{obs}_n(\boldsymbol{q})$ παίρνει τη μορφή

$$S^{obs}_n(\boldsymbol{q}) = R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{1}{\mu}. \tag{3.84}$$

Έτσι, παρατητούμε ότι η $S^{obs}_n(\boldsymbol{q})$ είναι φθίνουσα ως προς n και δεν εξαρτάται από το $\boldsymbol{q}$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει πάντα μια κυριαρχούσα στρατηγική. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 3.6.1.

Θεώρημα 3.6.1. *Θεωρούμε την εκθετική παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υπάρχει κυριαρχούσα στρατηγική που υπαγορεύει να μπεις αν δεις λιγότερους από n^e πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή σου, όπου η n^e δίνεται από τη σχέση*

$$n^e = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : R \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{1}{\mu} < 0\}. \tag{3.85}$$

Τώρα, προχωράμε στη μελέτη του προβλήματος κοινωνικής βελτιστοποίησης. Πάλι, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, αντικαθιστώντας την $\tilde{F}_{n,\boldsymbol{q}}(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$ και την $E[R_{n,\boldsymbol{q}}] = \frac{1}{\mu}$ στην Πρόταση 3.3.4 παίρνουμε

$$\pi_{n,\boldsymbol{q}} = (1-\rho_n)\prod_{i=0}^{n-1}\rho_i,\ n \geq 0, \tag{3.86}$$

όπου

$$\rho_i = \frac{\lambda q_i}{\mu + \lambda q_i},\ i \geq 0. \tag{3.87}$$

Τότε, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$E[N_{\boldsymbol{q}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_0\rho_1\cdots\rho_n, \tag{3.88}$$

Αντικαθιστώντας την (3.86) και την (3.88) στην (3.73) προκύπτει η

$$S_{soc}^{obs}(\boldsymbol{q}) \;\; = \;\; \mu\sum_{n=0}^{\infty}\rho_0\rho_1\cdots\rho_n\left[R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{1}{\mu}\right]. \tag{3.89}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $\boldsymbol{q}$ η οποία μεγιστοποιεί το δεξί μέλος της (3.89). Έτσι, για $n \geq 0$, παρατηρούμε ότι η ρ_n είναι αύξουσα ως προς q_n και δεν εξαρτάται από τις q_i, $i \neq n$. Παρατηρούμε ακόμη ότι η ποσότητα $R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{1}{\mu}$ είναι φθίνουσα ως προς n, οπότε $R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{1}{\mu} \geq 0$ για $n < n^e - 1$, ενώ $R\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k - K\frac{1}{\mu} < 0$ για $n \geq n^e$. Τώρα, είναι σαφές ότι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $\boldsymbol{q}$ πρέπει να δίνει τον μεγαλύτερο δυνατό συντελεστή $\rho_0\rho_1\cdots\rho_n$ σε κάθε $n < n^e - 1$ και $\rho_0\rho_1\cdots\rho_n = 0$ για $n \geq n^e$. Αυτό επιτυγχάνεται όταν $q_i = 1$, για $n < n^e - 1$, και $q_i = 0$, για $n \geq n^e$. Έτσι, έχουμε το επόμενο Θεώρημα 3.6.2.

Θεώρημα 3.6.2. *Θεωρούμε την εκθετική παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υπάρχει μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική που υπαγορεύει να μπεις αν δεις λιγότερους από n^{soc} πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή σου, όπου η n^{soc} δίνεται από τη σχέση* (3.85).

Είναι ενδιαφέρον να τονιστεί ότι το Θεώρημα 3.6.2 δείχνει ότι η στρατηγική ισορροπίας και η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική ταυτίζονται όταν έχουμε εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης.

Τώρα, θεωρούμε τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις, μπορούμε να δούμε ότι η (3.75) ανάγεται στη σχέση

$$S^{un}(q) \quad = \quad R\left[1-\sum_{k=1}^{\infty} g_k\left(\frac{\lambda q}{\lambda q+\mu}\right)^k\right] - K\frac{1}{\mu} = R[1-G(\frac{\lambda q}{\lambda q+\mu})] - \frac{K}{\mu}. \tag{3.90}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.5.1 και τη σχέση (3.90), καταλήγουμε στο επόμενο Θεώρημα 3.6.3.

Θεώρημα 3.6.3. *Θεωρούμε την εκθετική μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $\frac{R}{K} \leq \frac{1}{\mu}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας η οποία υπαγορεύει να αποχωρείς. Επιπλέον, είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Περίπτωση II: $\frac{1}{\mu} < \frac{R}{K} < \frac{1}{\mu[1-G\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)]}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας η οποία υπαγορεύει να μπαίνεις με πιθανότητα q^e, όπου η q^e δίνεται από τη σχέση

$$q^e = \frac{\mu G^{-1}(1-\frac{K}{R\mu})}{\lambda[1-G^{-1}(1-\frac{K}{R\mu})]}. \tag{3.91}$$

Περίπτωση III: $\frac{R}{K} \geq \frac{1}{\mu[1-G\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)]}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας η οποία υπαγορεύει να μπαίνεις. Επιπλέον, είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Τώρα, θεωρούμε το πρόβλημα κοινωνικής βελτιστοποίησης για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Χρησιμοποιώντας την (3.83) και την (3.90), το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα, όταν οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q, δίνεται από τη σχέση

$$S_{soc}^{un}(q) = \lambda q \left[R \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu} \right)^k \right) - K \frac{1}{\mu} \right] = \lambda q \left[R[1 - G(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu})] - \frac{K}{\mu} \right]. \tag{3.92}$$

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική για την εκθετική μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 3.6.4.

Θεώρημα 3.6.4. *Θεωρούμε την εκθετική μη παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Τότε, υπάρχει μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική. Συγκεκριμένα, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

Περίπτωση I: $\frac{R}{K} \leq \frac{1}{\mu}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική η οποία υπαγορεύει να αποχωρείς.

Περίπτωση II: $\frac{1}{\mu} < \frac{R}{K} < \frac{1}{\mu[1 - G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}) - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} G'(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})]}$

Τότε, υπάρχει μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική η οποία υπαγορεύει να μπαίνεις με πιθανότητα q^{soc}, όπου η q^{soc} είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$$G(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}) + \frac{\lambda q \mu}{(\lambda q + \mu)^2} G'(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}) = 1 - \frac{K}{\mu R} \tag{3.93}$$

στο $(0, 1)$.

Περίπτωση III: $\frac{R}{K} \geq \frac{1}{\mu[1 - G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}) - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} G'(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})]}$.

Τότε, υπάρχει μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική η οποία υπαγορεύει να μπαίνεις.

Απόδειξη. Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $S_{soc}^{un}(q)$ ως προς q είναι

$$\begin{aligned} \frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq} &= \lambda \left[R - \frac{K}{\mu} \right] - \lambda R \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(1 + \frac{k\mu}{\lambda q + \mu} \right) \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu} \right)^k \\ &= \lambda \left[R - \frac{K}{\mu} \right] - \lambda R \left[G(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}) + \frac{\lambda q \mu}{(\lambda q + \mu)^2} G'(\frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}) \right] \end{aligned} \tag{3.94}$$

και

$$\frac{d^2 S_{soc}^{un}(q)}{dq^2} = \lambda R \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{k\mu\lambda}{(\lambda q+\mu)^2} \left(\frac{\lambda q}{\lambda q+\mu}\right)^{k-1} \frac{[-(k+1)\mu]}{\lambda q+\mu}. \tag{3.95}$$

Είναι προφανές από την (3.95) ότι $\frac{d^2 S_{soc}^{un}(q)}{dq^2} < 0$, για $q \in [0,1]$, δηλαδή η $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς q. Επιπλέον,

$$\left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=0} = \lambda\left[R - \frac{K}{\mu}\right] \tag{3.96}$$

και

$$\left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=1} = \lambda\left[R - \frac{K}{\mu}\right] - \lambda R\left[G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}) + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} G'(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})\right]. \tag{3.97}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε αυτές τις ποσότητες σε συνδυασμό με τη μονοτονία της $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}$ για να προσδιορίσουμε τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές στις τρεις περιπτώσεις του θεωρήματος.

Περίπτωση I: Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε, $\left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=0} \leq 0$. Έτσι, η μονοτονία της $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}$ δίνει ότι $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq} < 0$, για $q \in (0,1]$. Τότε, η $S_{soc}^{un}(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $q \in [0,1]$. Έτσι, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι να αποχωρείς.

Περίπτωση II: Τώρα, η ανισότητα $\left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=1} < 0 < \left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=0}$ ισχύει και από την μονοτονία της $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}$ προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική $q^{soc} \in (0,1)$, τέτοια ώστε $\left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=q^{soc}} = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι η q^{soc} η οποία είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (3.93) στο $(0,1)$.

Περίπτωση III: Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι $\left[\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}\right]_{q=1} \geq 0$. Τότε, η μονοτονία της $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq}$ δίνει ότι $\frac{dS_{soc}^{un}(q)}{dq} > 0$ για κάθε $q \in [0,1)$. Έτσι, η $S_{soc}^{un}(q)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $q \in [0,1]$ και η μοναδική κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική υπαγορεύει να εισέλθεις. ∎

Τώρα, θα προχωρήσουμε στη σύγκριση της στρατηγικής ισορροπίας με την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική στην εκθετική μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Θεωρώντας τις διάφορες περιπτώσεις των Θεωρημάτων 3.6.3 και 3.6.4, έχουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση I: $\frac{R}{K} \leq \frac{1}{\mu}$.

Περίπτωση II: $\frac{1}{\mu} < \frac{R}{K} < \frac{1}{\mu[1-G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})]}$.

Περίπτωση III: $\frac{1}{\mu[1-G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})]} \leq \frac{R}{K} < \frac{1}{\mu[1-G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})-\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}G'(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})]}$.

Περίπτωση IV: $\frac{R}{K} \geq \frac{1}{\mu[1-G(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})-\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}G'(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})]}$.

Στην Περίπτωση I, έχουμε ότι $q^e = q^{soc} = 0$. Στην Περίπτωση II, έχουμε ότι η q^e είναι η μοναδική ρίζα της $S^{un}(q)$ στο $(0,1)$ και η q^{soc} είναι η μοναδική ρίζα της $\frac{dS^{un}_{soc}(q)}{dq}$ στο $(0,1)$. Αλλά, από την (3.94), έχουμε ότι

$$\left[\frac{dS^{un}_{soc}(q)}{dq}\right]_{q=q^e} = -\lambda R \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{k\mu}{\lambda q^e + \mu} \left(\frac{\lambda q^e}{\lambda q^e + \mu}\right)^k < 0.$$

Εφόσον, η $\frac{dS^{un}_{soc}(q)}{dq}$ είναι φθίνουσα ως προς q και $\left[\frac{dS^{un}_{soc}(q)}{dq}\right]_{q=q^e} < 0$, ενώ $\left[\frac{dS^{un}_{soc}(q)}{dq}\right]_{q=q^{soc}} = 0$, έχουμε ότι $q^e > q^{soc}$. Στην Περίπτωση III, έχουμε ότι $q^e = 1$, ενώ $q^{soc} \in (0,1)$. Στην Περίπτωση IV, έχουμε ότι $q^e = q^{soc} = 1$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$q^{soc} \leq q^e,$$

δηλαδή όταν οι πελάτες παίρνουν την απόφασή τους με γνώμονα την ατομική βελτιστοποίηση, είναι πιο πρόθυμοι να μπουν στο σύστημα από το κοινωνικά βέλτιστο. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι στρατηγικές ισορροπίας και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ταυτίζονται.

Τώρα, θα δώσουμε μια διαισθητική αιτιολόγηση των παραπάνω αποτελεσμάτων. Στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση, οι στρατηγικές των πελατών δεν επηρεάζουν τον μέσο χρόνο παραμονής ενός συγκεκριμένου πελάτη, αλλά επηρεάζουν την πιθανότητά του να εξυπηρετηθεί. Συγκεκριμένα, καθώς το q αυξάνεται, η πιθανότητα ενός πελάτη να εξυπηρετηθεί μειώνεται. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση οι πελάτες που αποφασίζουν να εισέλθουν προκαλούν αρνητικές επιδράσεις στους μελλοντικούς πελάτες. Αυτό δικαιολογεί την ανισότητα $q^e \geq q^{soc}$. Οι πελάτες αγνοούν τις αρνητικές επιδράσεις που προκαλεί η απόφασή τους να μπουν στους άλλους πελάτες και τείνουν να χρησιμοποιούν υπερβολικά το σύστημα. Αντιθέτως, στην παρατηρήσιμη περίπτωση, η απόφαση ενός συγκεκριμένου πελάτη να εισέλθει επηρεάζει αρνητικά τους μελλοντικούς πελάτες, αλλά αυτές οι αρνητικές επιδράσεις φαίνεται εύκολα ότι είναι μικρότερες από το θετικό όφελος για τον συγκεκριμένο πελάτη, για κάθε $n < n^e$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική υπαγορεύει στον συγκεκριμένο πελάτη να αποχωρήσει για κάποιο $n < n^e$. Τότε το μήκος ουράς δε θα ξεπεράσει ποτέ το n. Αλλά αυτό δε μπορεί να είναι βέλτιστο, διότι αν ο πελάτης που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση n μπει, τότε έχει θετικό αναμενόμενο καθαρό κέρδος και έτσι το κοινωνικό όφελος αυξάνεται. Εδώ, πρέπει να σημειώσουμε τη διαφορά μεταξύ αυτού του μοντέλου και του μοντέλου του Naor (1969). Εκεί, οι αρνητικές επιδράσεις μπορεί να ξεπεράσουν την οφέλεια του συγκεκριμένου πελάτη. Στο μοντέλο του Naor η απόφαση ενός πελάτη να αποχωρήσει συνεπάγεται οι μελλοντικοί πελάτες να βρουν την ουρά με μικρότερο μήκος και να έχουν μεγαλύτερο όφελος, ενώ εδώ αν ένας συγκεκριμένος πελάτης αποχωρήσει, οι μελλοντικοί πελάτες (του ίδιου κύκλου εξυπηρέτησης) δε θα ωφεληθούν από μια μικρότερη ουρά. Έτσι, οι στρατηγικές ισορροπίας και οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ταυτίζονται.

3.7 Συνθήκες που επάγουν συμπεριφορές ΑΤΠ ή ΣΤΠ

Τα Θεωρήματα 3.4.1 και 3.4.2 εξασφαλίζουν την ύπαρξη αλλά όχι τη μοναδικότητα των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών. Πράγματι, ανάλογα με την κατανομή $F(x)$ και τη συνάρτηση πιθανότητας $(g_k : k = 1, 2, \ldots)$, μπορούν να υπάρχουν πάνω από μια στρατηγικές ισορροπίας. Παρακάτω, δίνουμε κάποιες ικανές συνθήκες για τη μοναδικότητα των στρατηγικών ισορροπίας. Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται, όταν η κατανομή $F(x)$ ανήκει στην κλάση των κατανομών DMRL (Decreasing Mean Residual Life) που εμφανίζονται συχνά στη βιβλιογραφία, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της θεωρίας αξιοπιστίας. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν για τις κατανομές που ανήκουν στην ''δυϊκή'' κλάση των IMRL (Increasing Mean Residual Life). Όμως, οι τελευταίες κατανομές δεν εμφανίζονται συχνά σε πραγματικές καταστάσεις. Έτσι, παρουσιάζουμε συνοπτικά μόνο τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο τέλος της ενότητας.

Ορισμός 3.7.1. (Κατανομές DMRL-IMRL). *Μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι έχει κατανομή DMRL (Decreasing Mean Residual Life) (αντίστοιχα IMRL (Increasing Mean Residual Life)), αν η συνάρτηση $E[X-x|X \geq x]$ είναι φθίνουσα (αντίστοιχα αύξουσα) ως προς x, για $x \geq 0$. Όταν η μονοτονία είναι γνήσια, λέμε ότι η X έχει κατανομή γνησίως DMRL (αντίστοιχα IMRL).*

Οι κλάσεις των κατανομών DMRL και IMRL έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία, καθώς αποδίδουν-μοντελοποιούν φυσικές έννοιες γήρανσης (βλέπε π.χ. Shaked και Shanthikumar (2007)). Στο πλαίσιο του θεωρούμενου μέσου μεταφοράς, φαίνεται πιο ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι η $F(x)$ ακολουθεί κατανομή DMRL. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, όσο περισσότερος χρόνος έχει περάσει από την τελευταία επίσκεψη του μέσου, τόσο μικρότερος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την επόμενη επίσκεψη. Αντίθετα οι κατανομές IMRL μοντελοποιούν μια κατάσταση ασύμβατη με τη διαίσθησή μας, στην οποία όσο περισσότερος χρόνος έχει περάσει από την προηγούμενη επίσκεψη του μέσου, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την επόμενη επίσκεψη.

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι αν η X είναι DMRL, τότε η συνάρτηση αναμενόμενου καθαρού κέρδους $S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_n)$ είναι φθίνουσα ως προς q_n, το οποίο συνεπάγεται τη μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας. Για να αποδείξουμε τη μονοτονία, θα χρειαστούμε τα ακόλουθα Λήμματα 3.7.1 και 3.7.2.

Λήμμα 3.7.1. *Έστω X μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή με κατανομή DMRL και T_λ εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με ρυθμό λ, ανεξάρτητη του X. Τότε, η δεσμευμένη κατανομή της $X-T_\lambda$, δεδομένου ότι $X \geq T_\lambda$ έχει επίσης κατανομή DMRL.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$E[X-x|x \geq x] = \frac{\int_x^\infty \bar{F}_X(t)dt}{\bar{F}_X(x)}, \tag{3.98}$$

όπου η $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ συμβολίζει την κατανομή επιβίωσης της X. Τότε, είναι εύκολο να δούμε ότι η ιδιότητα DMRL της X είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\frac{\int_y^\infty \bar{F}_Y(t)dt}{\bar{F}_Y(y)} \geq \frac{\int_y^\infty \bar{F}_X(t)dt}{\bar{F}_X(y)}, \qquad \text{για } y \geq 0,\ Y = X+\omega,\ \omega \geq 0, \tag{3.99}$$

ή με τη συνθήκη

$$\frac{\int_y^\infty \bar{F}_Y(t)dt}{\int_y^\infty \bar{F}_X(t)dt} \text{ αύξουσα ως προς } y, \qquad \text{για } y \geq 0,\ Y = X+\omega,\ \omega \geq 0. \quad (3.100)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.99) και (3.100), παίρνουμε ακόμη ότι η ιδιότητα DMRL της X συνεπάγεται ότι

$$\frac{\bar{F}_Y(s)}{\bar{F}_X(s)} \leq \frac{\int_t^\infty \bar{F}_Y(u)du}{\int_t^\infty \bar{F}_X(u)du}, \qquad \text{για } s \leq t,\ Y = X+\omega,\ \omega \geq 0. \quad (3.101)$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της $X - T_\lambda$, δεδομένου ότι $X \geq T_\lambda$, είναι DMRL. Λόγω της (3.100), αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\frac{\int_y^\infty \bar{F}_{Y-T_\lambda}(t)dt}{\int_y^\infty \bar{F}_{X-T_\lambda}(t)dt} \text{ είναι αύξουσα ως προς } y, \quad \text{για } y \geq 0,\ Y = X+\omega,\ \omega \geq 0, \quad (3.102)$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\int_s^\infty \bar{F}_{X-T_\lambda}(y)dy \int_t^\infty \bar{F}_{Y-T_\lambda}(y)dy \quad - \quad \int_t^\infty \bar{F}_{X-T_\lambda}(y)dy \int_s^\infty \bar{F}_{Y-T_\lambda}(y)dy \geq 0,$$
$$s \leq t,\ Y = X+\omega,\ \omega \geq 0, \quad (3.103)$$

όπου η $\bar{F}_Z(x)$ συμβολίζει τη συνάρτηση επιβίωσης της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής Z. Τώρα, το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει δείχνοντας ότι η (3.101) δίνει την (3.103). Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\int_s^\infty \bar{F}_{X-T_\lambda}(y)dy = \int_s^\infty \bar{F}_X(y)\left(1-e^{-\lambda(y-s)}\right)dy$$

και μια παρόμοια ταυτότητα ισχύει για κάθε $Y = X+\omega$, $\omega \geq 0$, οπότε, μετά από πράξεις, το αριστερό μέλος της (3.103) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
&\int_s^\infty \bar{F}_{X-T_\lambda}(y)dy \int_t^\infty \bar{F}_{Y-T_\lambda}(y)dy - \int_t^\infty \bar{F}_{X-T_\lambda}(y)dy \int_s^\infty \bar{F}_{Y-T_\lambda}(y)dy = \\
&-\int_s^t \int_t^\infty \left[\int_u^\infty \bar{F}_X(z)dz\bar{F}_Y(y) - \bar{F}_X(y)\int_u^\infty \bar{F}_Y(z)dz\right]\lambda e^{-\lambda(u-t)}\left(1-e^{-\lambda(y-s)}\right)dudy \\
&-\int_t^\infty \int_y^\infty \left[\int_u^\infty \bar{F}_X(z)dz\bar{F}_Y(y) - \bar{F}_X(y)\int_u^\infty \bar{F}_Y(z)dz\right]\lambda e^{-\lambda(u-t)}\left(1-e^{-\lambda(t-s)}\right)dudy,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι μη-αρνητικό, λόγω της (3.101). ■

Λήμμα 3.7.2. *Έστω X μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή με κατανομή DMRL και T_λ εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με ρυθμό λ, ανεξάρτητη της X. Τότε, η $E[X - T_\lambda | X \geq T_\lambda]$ είναι αύξουσα συνάρτηση του λ.*

Απόδειξη. Εφόσον η X έχει κατανομή DMRL, έχουμε ότι

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}_X(u)du}{\bar{F}_X(t)} \geq \frac{\int_s^\infty \bar{F}_X(u)du}{\bar{F}_X(s)},\ 0 \leq t \leq s. \tag{3.104}$$

Είναι ακόμη εύκολο να δούμε ότι

$$E[X - T_\lambda | X \geq T_\lambda] \quad = \quad \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty \bar{F}_X(u+t)\lambda e^{-\lambda t}dt}{\int_0^\infty \bar{F}_X(t)\lambda e^{-\lambda t}dt}du. \tag{3.105}$$

Παραγωγίζοντας την (3.105) ως προς λ και κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\lambda}E[X - T_\lambda | X \geq T_\lambda] = \\ &\frac{\int_0^\infty \int_t^\infty [\int_t^\infty \bar{F}_X(u)du\bar{F}_X(s) - \bar{F}_X(t)\int_s^\infty \bar{F}_X(u)du]e^{-\lambda(s+t)}\lambda^2(s-t)dsdt}{\left(\int_0^\infty \bar{F}_X(t)\lambda e^{-\lambda t}dt\right)^2},\end{aligned}$$

η οποία είναι μη-αρνητική, λόγω της (3.104). ∎

Στην ακόλουθη Πρόταση 3.7.1, δείχνουμε ότι η ιδιότητα DMRL της κατανομής $F(x)$ των χρόνων μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς συνεπάγεται τη μονοτονία της $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$ ως προς q_n.

Πρόταση 3.7.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Αν η κατανομή $F(x)$ των χρόνων μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς είναι DMRL, τότε η $R_{n,\boldsymbol{q}_n}$ έχει κατανομή DMRL. Επιπλέον, η $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$ είναι αύξουσα ως προς q_n, για $n = 0, 1, \ldots$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε, με επαγωγή στο n, ότι η $R_{n,\boldsymbol{q}_n}$ έχει κατανομή DMRL και ότι η $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$ είναι αύξουσα ως προς q_n.

Για $n = 0$, από την (3.5) έχουμε ότι $R_{0,\boldsymbol{q}} \stackrel{d}{=} (X - T_{\lambda q_0} | X \geq T_{\lambda q_0})$, όπου η $T_{\lambda q_0}$ είναι εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο λq_0. Εφόσον η X έχει κατανομή DMRL, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.7.1 για να πάρουμε ότι η $R_{0,\boldsymbol{q}}$

έχει επίσης κατανομή DMRL. Το Λήμμα 3.7.2 δείχνει ότι η $E[R_{0,\boldsymbol{q}_0}]$ είναι αύξουσα ως προς q_0.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι η $R_{k,\boldsymbol{q}_k}$ έχει κατανομή DMRL και ότι η $E[R_{k,\boldsymbol{q}_k}]$ είναι αύξουσα ως προς q_k. Από τη σχέση (3.7) έχουμε ότι $R_{k+1,\boldsymbol{q}_{k+1}} \stackrel{d}{=} (R_{k,\boldsymbol{q}_k} - T_{\lambda q_{k+1}} | R_{k,\boldsymbol{q}_k} \geq T_{\lambda q_{k+1}})$, όπου η $T_{\lambda q_{k+1}}$ είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λq_{k+1}. Τα Λήμματα 3.7.1 και 3.7.2 δίνουν αντίστοιχα ότι η $R_{k+1,\boldsymbol{q}_{k+1}}$ έχει κατανομή DMRL και ότι η $E[R_{k+1,\boldsymbol{q}_{k+1}}]$ είναι αύξουσα ως προς q_{k+1}. ■

Χρησιμοποιώντας τις (3.70) και (3.71), η Πρόταση 3.7.1 δίνει το ακόλουθο Πόρισμα 3.7.1.

Πόρισμα 3.7.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Αν η κατανομή $F(x)$ των χρόνων μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς είναι γνησίως DMRL, τότε η συνάρτηση αναμενόμενου καθαρού κέρδους $S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_n)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς q_n και συνεπώς υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας.*

Μπορούμε να προχωρήσουμε την ανάλυσή μας παραπάνω και να δείξουμε ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, η μοναδική στρατηγική ισορροπίας που υπάρχει όταν η $F(x)$ έχει κατανομή γνησίως DMRL , ανήκει στην κλάση των αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου.

Ορισμός 3.7.2. (Αντίστροφη Στρατηγική Κατωφλίου). *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Μια στρατηγική $\boldsymbol{q}_n = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$ λέγεται αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου, αν υπάρχει n τέτοιο ώστε $q_i = 0$, για $i < n$, $q_n \in [0,1]$ και $q_i = 1$, για $i > n$.*

Όταν η $F(x)$ έχει κατανομή DMRL, έχουμε το παρακάτω Θεώρημα 3.7.1.

Θεώρημα 3.7.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος που παριστάνει τον σταθμό ενός μέσου μεταφοράς. Αν η κατανομή $F(x)$ των χρόνων μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου μεταφοράς είναι γνησίως DMRL και το μέσο μεταφοράς έχει απεριόριστη χωρητικότητα, τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας ανήκει στην κλάση των αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου.*

Απόδειξη. Εφόσον η $F(x)$ είναι μια κατανομή γνησίως DMRL, η Πρόταση 3.7.1 δίνει ότι η $R_{n,\boldsymbol{q}_n}$ είναι επίσης γνησίως DMRL, για $n = 0, 1, \ldots$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.7.2, έχουμε ότι

$$E[R_{n,\boldsymbol{q}_n} - T_{\lambda q_{n+1}} | R_{n,\boldsymbol{q}_n} \geq T_{\lambda q_{n+1}}] < E[R_{n,\boldsymbol{q}_n} - T_{\lambda'} | R_{n,\boldsymbol{q}_n} \geq T_{\lambda'}], \ \lambda' > \lambda q_{n+1},$$

όπου οι $T_{\lambda q_{n+1}}$ και $T_{\lambda'}$ είναι εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λq_{n+1} και λ' αντίστοιχα. Παίρνοντας $\lambda' \to \infty$ και χρησιμοποιώντας την (3.7) έχουμε $E[R_{n+1,\boldsymbol{q}_{n+1}}] < E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$, για $\boldsymbol{q}_{n+1} = (\boldsymbol{q}_n, q_{n+1})$. Τότε, λόγω της άπειρης χωρητικότητας του μέσου μεταφοράς, ισχύει ότι

$$S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_n) = R - KE[R_{n,\boldsymbol{q}_n}] < R - KE[R_{n+1,\boldsymbol{q}_{n+1}}] = S_{n+1}^{obs}(\boldsymbol{q}_{n+1}). \tag{3.106}$$

Θεωρούμε, τώρα, τη στρατηγική ισορροπίας $\boldsymbol{q}^e = (q_0^e, q_1^e, \ldots)$. Για να αποδείξουμε ότι είναι αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου, αρκεί να δείξουμε ότι αν $q_n^e \in (0, 1]$ για κάποιο n, τότε $q_{n+1}^e = 1$. Πράγματι, αν $q_n^e \in (0, 1]$ έχουμε ότι $S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_n^e) \geq 0$. Τότε η (3.106) δίνει ότι $S_{n+1}^{obs}(\boldsymbol{q}_{n+1}) > 0$, για κάθε $\boldsymbol{q}_{n+1} = (\boldsymbol{q}_n^e, q_{n+1})$, $q_{n+1} \in [0, 1]$ και καταλήγουμε στη σχέση $q_{n+1}^e = 1$. Έτσι, η $\boldsymbol{q}^e$ είναι μια αντίστροφη στρατηγική κατωφλίου. ■

Η διαισθητική ερμηνεία του Θεωρήματος 3.7.1 είναι η εξής: Στην περίπτωση που η $F(x)$ είναι μια κατανομή DMRL, όσο μεγαλώνει ο αριθμός των παρόντων πελατών που παρατηρεί ένας αφικνούμενος πελάτης, έχουμε δυο αντίθετα αποτελέσματα. Από τη μια μεριά γίνεται λιγότερο πιθανό ο πελάτης να εξυπηρετηθεί από το επόμενο μέσο μεταφοράς. Από την άλλη, δίνεται ένα σήμα ότι έχει περάσει κάποιος χρόνος από την τελευταία επίσκεψη του μέσου, οπότε, λόγω της ιδιότητας DMRL της $F(x)$, ο πελάτης περιμένει μικρότερο υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης. Έτσι, το καθαρό αποτέλεσμα στον συγκεκριμένο πελάτη είναι αμφίβολο. Όμως, με την επιπλέον υπόθεση ότι το μέσο έχει απεριόριστη χωρητικότητα, ο πελάτης προτιμά να δει κατά την άφιξή του μεγαλύτερο αριθμό πελατών, καθώς αυτό σημαίνει για αυτόν λιγότερο κόστος αναμονής. Οπότε, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των πελατών κατά την άφιξη ενός πελάτη, τόσο πιο πρόθυμος είναι αυτός να εισέλθει στο σύστημα και έτσι η στρατηγική ισορροπίας ανήκει στην κλάση των αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου.

Όσον αφορά την ΑΤΠ/ΣΤΠ συμπεριφορά των πελατών, έχουμε δει στην Πρόταση 3.7.1 ότι όταν η $F(x)$ είναι DMRL τότε η $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$ είναι αύξουσα ως προς q_n. Ετσι, αν $q_n^1 < q_n^2$, προκύπτει ότι $S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_{n-1}, q_n^1) \geq S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_{n-1}, q_n^2)$, το οποίο σημαίνει ότι η βέλτιστη απάντηση ενός συγκεκριμένου πελάτη που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του, δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $(\boldsymbol{q}_{n-1}, q_n^1)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη βέλτιστη απάντησή του, δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν την $(\boldsymbol{q}_{n-1}, q_n^2)$. Υπό μια έννοια, έχουμε ΑΤΠ συμπεριφορά για κάθε παρατηρούμενη κατάσταση n.

Όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων του μέσου $F(x)$ είναι IMRL, μπορούν να εξαχθούν παρόμοια συμπεράσματα. Συγκεκριμένα, ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα με αυτά των Λημμάτων 3.7.1 και 3.7.2. Έτσι, η $R_{n,\boldsymbol{q}_n}$ είναι IMRL και η $E[R_{n,\boldsymbol{q}_n}]$ είναι φθίνουσα ως προς q_n, για $n = 0, 1, \ldots$. Επιπλέον, αν η $F(x)$ είναι γνησίως IMRL, τότε η συνάρτηση αναμενόμενου καθαρού κέρδους $S_n^{obs}(\boldsymbol{q}_n)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς q_n και έτσι υπάρχει το πολύ μια γνήσια πιθανότητα ισορροπίας εισόδου για κάθε n (δηλαδή που ανήκει στο $(0, 1)$). Τέλος, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση οι στρατηγικές ισορροπίας ανήκουν στη κλάση των στρατηγικών κατωφλίου. Με λίγα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι όταν η $F(x)$ είναι κατανομή IMRL, ισχύουν παρόμοια αποτελέσματα με την DMRL περίπτωση, οι ανισότητες είναι αντεστραμμένες και έχουμε ένα είδος ΣΤΠ συμπεριφοράς των πελατών. Παρατηρούμε, όμως, ότι υπάρχει μια διαφορά: Σε αντίθεση με το Θεώρημα 3.7.1, εδώ δεν υπάρχει ανάγκη να υποθέσουμε ότι το μέσο έχει άπειρη χωρητικότητα.

3.8 Αριθμητικά πειράματα

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα κάποιων αριθμητικών πειραμάτων που δείχνουν πώς εφαρμόζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα και φωτίζουν κάποιες πτυχές του προβλήματος που είναι σημαντικές για τον διαχειριστή του συστήματος. Χωρίζουμε την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε τρεις παραγράφους. Στην πρώτη παράγραφο ασχολούμαστε με τον αριθμό και τη μορφή των στρατηγικών ισορροπίας και στις άλλες δύο με τον τρόπο που επηρεάζουν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων και η χωρητικότητα τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών.

3.8.1 Μορφή και αριθμός στρατηγικών ισορροπίας

Όταν οι ικανές συνθήκες για την ύπαρξη αντίστροφων στρατηγικών κατωφλίου δεν ικανοποιούνται, οι στρατηγικές ισορροπίας μπορεί να εμφανίζουν μεγάλη ποικιλομορφία. Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων του μεταφορικού μέσου $F(x)$ δεν είναι μονοκόρυφη. Παρακάτω, παρουσιάζουμε κάποια παραδείγματα αυτής της περίπτωσης, όπου ο ενδιάμεσος χρόνος επισκέψεων X παίρνει μια εκ δύο δυνατών τιμών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η πληροφορία για τον αριθμό των πελατών δίνει ένα ισχυρό σήμα στον αφικνούμενο πελάτη για το αν η διάρκεια του ενδιάμεσου χρόνου επισκέψεων είναι ίση με τη μικρότερη ή τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της X.

Στο πρώτο πείραμα, βλέπουμε ότι μια στρατηγική ισορροπίας μπορεί να έχει γνήσιες πιθανότητες (αυστηρά μεταξύ του 0 και 1) σε πολλές καταστάσεις. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σενάριο με ρυθμό άφιξης $\lambda = 0.1$, διακριτή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ για τους χρόνους μεταξύ των διαδοχικών επισκέψεων του μέσου με πιθανές τιμές 1 και 50 και αντίστοιχες πιθανότητες 0.9 και 0.1, $R = 35$, $K = 1$ και διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, \ldots, 5\}$ για τις διαδοχικές χωρητικότητες του μέσου (δηλαδή $g_j = 0.2$, $j = 1, 2, \ldots, 5$). Τότε, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των Θεωρημάτων 3.4.1 και 3.4.2, βλέπουμε ότι μια στρατηγική ισορροπίας σε αυτή την περίπτωση είναι η $(1, 0.6260, 0.5967, 0.0566, 0, 0, \ldots)$.

Στο δεύτερο πείραμα, βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο οι πιθανότητες της στρατηγικής ισορροπίας να σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία. Για παράδειγμα, σε ένα αριθμητικό σενάριο με $\lambda = 0.1$, διακριτή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με πιθανές τιμές 1 και 52 και αντίστοιχες πιθανότητες 0.995 και 0.005, $R = 24$, $K = 1$ και απεριόριστη χωρητικότητα του μέσου κατά τις επισκέψεις του, παίρνουμε μια στρατηγική ισορροπίας $(1, 1, 0.6865, 1, 0.9824, 1, 1, \ldots)$. Μια τέτοια κατάσταση μπορεί να ερμηνευτεί διαισθητικά ως εξής: Όταν ένας πελάτης παρατηρεί ‘‘λίγους ’’ πελάτες στο σύστημα, έχει μια ισχυρή ένδειξη ότι ο ενδιάμεσος χρόνος επισκέψεων έχει αρχίσει σχετικά πρόσφατα. Τότε, είναι πιο πιθανό, να έχει πάρει τη μικρότερη τιμή 1 (της οποίας η εκ των προτέρων πιθανότητα είναι 0.995) και έτσι ο πελάτης είναι πρόθυμος να εισέλθει. Από την άλλη, όταν ένας πελάτης παρατηρεί ‘‘πολλούς ’’ πελάτες στο σύστημα, τείνει να πιστέψει ότι ο ενδιάμεσος χρόνος έχει πάρει τη μεγαλύτερη τιμή 52 και είναι εύλογο, επίσης, να υποθέσει ότι ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου μεταφορικού μέσου είναι μικρός. Οπότε, είναι πάλι πρόθυμος να εισέλθει. Όμως, για ενδιάμεσες τιμές του αριθμού των παρόντων πελατών στο σύστημα, η κατάσταση είναι συγκεχυμένη για τον αφικνούμενο πελάτη: Από τη μια μεριά, έχει ένα αδύναμο σήμα ότι ο ενδιάμεσος χρόνος επισκέψεων έχει πάρει τη μεγαλύτερη τιμή, και, από την άλλη μεριά, υπάρχει μια σημαντική πιθανότητα ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι την επίσκεψη του επόμενου μέσου να είναι μεγάλος. Αυτός είναι ο λόγος που κάποιες ενδιάμεσες πιθανότητες είναι μικρότερες του 1.

Στο τρίτο πείραμα, βλέπουμε ότι είναι δυνατό να υπάρχουν πολλές στρατηγικές ισορροπίας. Πράγματι, θεωρώντας, ένα αριθμητικό σενάριο με $\lambda = 0.2$, διακριτή συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με πιθανές τιμές 5 και 30 και αντίστοιχες πιθανότητες 0.9 και 0.1, $R = 7$, $K = 1$ και απεριόριστη χωρητικότητα του μέσου κατά τις επισκέψεις του, παίρνουμε τρεις στρατηγικές ισορροπίας: $(0, 0, \ldots)$, $(0.3076, 0, 0, \ldots)$ και $(1, 0, 0, \ldots)$. Πράγματι, αν κανένας πελάτης δεν εισέρχεται στο σύστημα, τότε η παρουσία 0 πελατών δε δίνει πληροφορία σε έναν αφικνούμενο πελάτη για τον ενδιάμεσο χρόνο επισκέψεων X. Αν εισέλθει θα πάρει κατά μέσο όρο $R - KE[R(X)] < 0$ χρηματικές μονάδες, οπότε προτιμά να αποχωρήσει. Αυτό δίνει τη στρατηγική ισορροπίας $(0, 0, \ldots)$. Από την άλλη μεριά, αν όλοι οι πελάτες εισέρχονται όταν το σύστημα είναι άδειο, τότε η παρουσία 0 πελατών δίνει ένα ισχυρό σήμα στον αφικνούμενο πελάτη ότι το μέσο έχει επισκεφθεί τον σταθμό πρόσφατα. Έτσι, καθώς η εκ των προτέρων πιθανότητα ο ενδιάμεσος χρόνος επισκέψεων να έχει πάρει τη μικρότερη τιμή 5 είναι 0.9, τείνει να πιστέψει ότι αυτή είναι η πραγματική τιμή και είναι πρόθυμος να μπει. Αυτό δίνει τη στρατηγική ισορροπίας $(1, 0, 0, \ldots)$. Όμως, αν μόνο ένα ποσοστό των πελατών μπαίνει όταν το σύστημα είναι άδειο, τότε έχουμε μια μικτή κατάσταση που δίνει τη στρατηγική ισορροπίας $(0.3076, 0, 0, \ldots)$.

3.8.2 Η επίδραση της μέσης τιμής και της διασποράς των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων στη συμπεριφορά των πελατών και στον ρυθμό απόδοσης του συστήματος

Σε αυτήν τη δεύτερη σειρά πειραμάτων, ερευνούμε την επίδραση της μέσης τιμής και της διασποράς των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων στη συμπεριφορά των πελατών.

Όσον αφορά την επίδραση της μέσης τιμής, η απάντηση είναι διαισθητικά σαφής: Όσο μικρότερη είναι η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων, τόσο πιο πρόθυμοι είναι οι πελάτες να εισέλθουν. Πράγματι, αυτό το γεγονός έχει επαληθευτεί από ένα μεγάλο αριθμό αριθμητικών πειραμάτων και φαίνεται ότι ισχύει πάντα, ανεξάρτητα από τη μορφή της υποκείμενης κατανομής.

Σχετικά με την επίδραση της διασποράς, έχουμε πάλι μια ξεκάθαρη κατάσταση: Η μείωση της διασποράς των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων του μέσου κάνει τους πελάτες πιο πρόθυμους να εισέλθουν στο σύστημα. Για να φωτίσουμε αυτό το σημείο, παρουσιάζουμε ένα αριθμητικό σενάριο στον Πίνακα 3.1, για ένα μοντέλο με $\lambda = 2$, Erlang συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με n φάσεις και ρυθμό $0.5n$, $R = 1.6$, $K = 1$ και απεριόριστη χωρητικότητα του μέσου κατά τις επισκέψεις του στον σταθμό. Παίρνουμε διάφορες τιμές για το n από 1 μέχρι 6, έτσι ώστε η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων να διατηρείται σταθερή στο 2, αλλά η διασπορά, η οποία ισούται με $4/n$, να μειώνεται από το 4 ως το $\frac{4}{6}$. Η μείωση της διασποράς φαίνεται να έχει πολύ σημαντική επίδραση στη συμπεριφορά των πελατών. Πράγματι, στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής ($n = 1$), κανένας πελάτης δεν εισέρχεται στο σύστημα, ενώ για Erlang κατανομή με 6 φάσεις και ίδια μέση τιμή, όλοι οι πελάτες εισέρχονται. Οι παρατηρήσεις του Πίνακα 3.1 επιβεβαιώνουν την σημαντική επίδραση της διασποράς σε συστήματα εξυπηρέτησης με στρατηγικούς πελάτες. Είναι γνωστό ότι η διασπορά έχει μια δυσμενή επίδραση στα μέτρα απόδοσης των περισσότερων συστημάτων εξυπηρέτησης χωρίς στρατηγικούς πελάτες. Τα αριθμητικά μας αποτελέσματα δείχνουν ότι αυτή η αρνητική επίδραση επιτείνεται όταν έχουμε αποφάσεις στρατηγικών πελατών. Από τη σκοπιά του σχεδιαστή του συστήματος, αυτό σημαίνει ότι ένας στόχος πρέπει να είναι η μείωση της διασποράς των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων.

3.8.3 Η επίδραση της μέσης τιμής και της διασποράς της χωρητικότητας του μεταφορικού μέσου στη συμπεριφορά των πελατών και στον ρυθμό απόδοσης του συστήματος

Στην τρίτη σειρά αριθμητικών πειραμάτων, μελετάμε την επίδραση της χωρητικότητας του μέσου μεταφοράς στη συμπεριφορά των πελατών. Είναι διαισθητικά προφανές και επαληθεύεται αριθμητικά ότι όσο πιο μεγάλη είναι η μέση τιμή της χωρητικότητας, τόσο

Πίνακας 3.1: Η επίδραση της διασποράς της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων στις στρατηγικές ισορροπίας και στον ρυθμό απόδοσης.

Κατανομή	Διασπορά	Στρατηγική ισορροπίας	Ρυθμός απόδοσης
Erlang(1,0.5)	4.0000	$(0, 0, 0, \ldots)$	0.0000
Erlang(2,1.0)	2.0000	$(0.2500, 1, 1, 1, \ldots)$	1.1666
Erlang(3,1.5)	1.3333	$(0.6726, 1, 1, 1, \ldots)$	1.7923
Erlang(4,2.0)	1.0000	$(0.8562, 1, 1, 1, \ldots)$	1.9231
Erlang(5,2.5)	0.8000	$(0.9517, 1, 1, 1, \ldots)$	1.9761
Erlang(6,3.0)	0.6667	$(1, 1, 1, \ldots)$	2.0000

πιο πρόθυμοι είναι οι πελάτες να εισέλθουν. Έτσι, επικεντρωνόμαστε στην επίδραση της διασποράς της χωρητικότητας, που φαίνεται λιγότερο ξεκάθαρη. Στον Πίνακα 3.2, δίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για ένα μοντέλο με $\lambda = 2$, υπερεκθετική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ η οποία είναι μίξη δύο εκθετικών κατανομών με ρυθμούς 1 και 2 και αντίστοιχες πιθανότητες 0.2 και 0.8, $R = 2$ και $K = 1$. Θεωρούμε διάφορες συναρτήσεις πιθανότητας $(g_k : k = 1, 2, \ldots)$ για τη χωρητικότητα του μέσου, όλες με την ίδια μέση τιμή $\bar{g} = 3$ και παίρνουμε τις αντίστοιχες στρατηγικές ισορροπίας και τους ρυθμούς απόδοσης. Η μείωση της διασποράς φαίνεται να έχει πάλι θετικό αντίκτυπο στο σύστημα, δηλαδή να αυξάνει τον ρυθμό των πελατών που εξυπηρετούνται. Παρατηρούμε, όμως, ότι αν μελετήσουμε μόνο τις στρατηγικές ισορροπίας ίσως να καταλήξουμε σε παραπλανητικά συμπεράσματα. Για παράδειγμα, μια ματιά στις γραμμές 1-5 του Πίνακα 3.2 δείχνει ότι καθώς η διασπορά αυξάνεται, οι πελάτες είναι πιο πρόθυμοι να εισέλθουν όταν βλέπουν περισσότερους πελάτες στο σύστημα. Όμως, ο ρυθμός των εξυπηρετηθέντων πελατών μειώνεται. Αυτό συμβαίνει διότι η μείωση της διασποράς επάγει στάσιμες κατανομές για τον αριθμό των πελατών στο σύστημα που δίνουν περισσότερη μάζα πιθανότητας στις καταστάσεις με μικρότερο αριθμό πελατών.

Για να δώσουμε μια διαισθητική ερμηνεία, θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη ο οποίος βλέπει λίγους πελάτες στο σύστημα. Αύξηση της διασποράς της χωρητικότητας σημαίνει ότι υπάρχει πιθανότητα να εξυπηρετηθεί, γεγονός που του δίνει κίνητρο να εισέλθει. Όμως, ταυτόχρονα η πιθανότητα να είναι η χωρητικότητα μικρή επίσης αυξάνεται. Αυτό προκαλεί μια ανεπιθύμητη κατάσταση με περισσότερους πελάτες να μπαίνουν στο σύστημα και μεγαλύτερο ποσοστό αυτών να μην εξυπηρετείται τελικά.

Πίνακας 3.2: Η επίδραση της διασποράς της χωρητικότητας του μεταφορικού μέσου στις στρατηγικές ισορροπίας και στον ρυθμό απόδοσης.

Συνάρτηση πιθανότητας	Διασπορά	Στρατηγικές ισορροπίας	Ρυθμός απόδοσης
$(0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$	0.0	$(1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$	1.3704
$(0, 0.1, 0.8, 0.1, 0, 0, 0, \ldots)$	0.2	$(1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$	1.3488
$(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0, 0, 0, \ldots)$	2.0	$(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$	1.1360
$(0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0, 0, 0, \ldots)$	2.6	$(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$	1.0620
$(0.5, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0, \ldots)$	4.0	$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$	0.8925
$(0.8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0, 0, 0, \ldots)$	16.0	$(1, 0, 0, 0, \ldots)$	0.1778

Και εδώ, φαίνεται να υπάρχει ανάγκη για παροχή εξυπηρέτησης με μικρές αποκλίσεις στην ποιότητα, που να προσαρμόζεται στις ανάγκες της ζήτησης, όταν οι πελάτες είναι στρατηγικοί.

3.9 Ανασκόπηση - Ανοικτά προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρήσαμε το πρόβλημα της μελέτης της στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών σε ένα σταθμό ενός μέσου μεταφοράς, όπου το μέσο επισκέπτεται τον σταθμό σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία. Μελετήσαμε δύο περιπτώσεις ως προς την παρεχόμενη πληροφόρηση στους αφικνούμενους πελάτες και προσδιορίσαμε τις αντίστοιχες στρατηγικές ισορροπίας. Η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε παρατηρήσιμα συστήματα εξυπηρέτησης είναι μια σχετικά πρόσφατη προσπάθεια. Πράγματι, η εργασία του Kerner (2011) που προσδιορίζει τις στρατηγικές ισορροπίας σε μια παρατηρήσιμη $M/G/1$ ουρά φαίνεται να είναι η πρώτη προς αυτήν την κατεύθυνση. Έτσι, ο αρχικός στόχος μας ήταν να δείξουμε ότι μια τέτοια μελέτη είναι εφικτή στο πλαίσιο ενός σταθμού ενός μέσου μεταφοράς που επισκέπτεται τον σταθμό σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία.

Ένα βασικό βήμα για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε ένα μη-Μαρκοβιανό παρατηρήσιμο σύστημα εξυπηρέτησης είναι ο υπολογισμός των αναμενόμενων δεσμευμένων υπολειπόμενων χρόνων εξυπηρέτησης σε στιγμές άφιξης, δεδομένου του αριθμού των πελατών που υπάρχουν στο σύστημα. Έτσι, ένας δεύτερος στόχος της εργασίας ήταν να δώσουμε μια νέα πιθανοθεωρητική προσέγγιση για αυτόν τον υπολογισμό. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες περιπτώσεις και συμπληρώνει και ξεκαθαρίζει διαισθητικά την αναλυτική προσέγγιση του Kerner (2008).

Ο τρίτος σκοπός της εργασίας μας ήταν να μελετήσουμε θέματα ύπαρξης/μοναδικότητας των στρατηγικών ισορροπίας. Στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση, η κατάσταση ήταν σαφής και η ύπαρξη και η μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας αποδείχθηκε εύκολα. Από την άλλη μεριά, στην παρατηρήσιμη περίπτωση, υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας, αλλά μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες από μία. Όμως, κάτω από φυσικές υποθέσεις για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων επισκέψεων του μέσου μεταφοράς δείξαμε ότι έπεται και η μοναδικότητα της στρατηγικής ισορροπίας. Επιπλέον, αυτές οι συνθήκες επάγουν στρατηγικές ισορροπίας τύπου αντίστροφου κατωφλίου και σχετίζονται με συμπεριφορά ΑΤΠ.

Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθούν και άλλα επίπεδα πληροφόρησης. Για παράδειγμα, υποθέτοντας ότι ένας φωτεινός πίνακας στον σταθμό πληροφορεί τους πελάτες για τον χρόνο της επόμενης επίσκεψης του μέσου, προκύπτουν δύο ακόμη επίπεδα πληροφόρησης. Η αναλυτική και αριθμητική σύγκριση των στρατηγικών ισορροπίας και των κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών κάτω από διάφορα επίπεδα πληροφόρησης δίνει καλύτερη κατανόηση της αξίας της πληροφορίας και του λεγόμενου ''τιμήματος της αναρχίας '' (price of anarchy) σε αυτήν την κλάση των συστημάτων.

Τέλος, θα ήταν επίσης ενδιαφέρον να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές στο ίδιο πλαίσιο, υποθέτοντας ότι οι πελάτες που αποφασίζουν να μπουν στο σύστημα μπορεί να παραμείνουν σε αυτό μετά την επίσκεψη του μέσου μεταφοράς (αν δεν εξυπηρετηθούν από αυτό). Κάτω από αυτή την υπόθεση, το μοντέλο δεν είναι πλέον σύστημα ολικών εξυπηρετήσεων και ο υπολογισμών των ζητούμενων στρατηγικών φαίνεται να είναι αρκετά πιο πολύπλοκος.

Κεφάλαιο 4

Σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης

4.1 Εισαγωγή

Σε κάποια συστήματα εξυπηρέτησης, π.χ. σε γραμμές παραγωγής, οι διαδικασίες που σχετίζονται με τους πελάτες (αφίξεις και εξυπηρετήσεις) γίνονται με πολύ πιο γρήγορους ρυθμούς από τις διαδικασίες που σχετίζονται με τον υπηρέτη/μηχανή (διακοπές, επιθεωρήσεις, επισκευές κ.α.). Τέτοια συστήματα παριστάνονται χρησιμοποιώντας συστήματα εξυπηρέτησης ρευστού (fluid queues, fluid flow models). Ένα σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού είναι ένα σύστημα εισόδου-εξόδου, όπου οι πελάτες μοντελοποιούνται σαν ένα συνεχές ρευστό που εισέρχεται και εξέρχεται από τον χώρο αποθήκευσης (buffer) με ρυθμούς που εξαρτώνται από κάποια στοχαστική διαδικασία που σχετίζεται με την κατάσταση της μηχανής (σε λειτουργία, κλειστή, υπό επισκευή, συντήρηση κ.α.). Τα συστήματα εξυπηρέτησης ρευστού έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς σαν προσέγγιση των κλασσικών συστημάτων εξυπηρέτησης με διακριτές μονάδες, σε εφαρμογές όπως δίκτυα δεδομένων μεγάλης ταχύτητας, δίκτυα μεταφορών κ.α.. Πράγματι, το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των εφαρμογών είναι ότι οι πελάτες - μονάδες φθάνουν και εξυπηρετούνται πολύ γρήγορα σε σχέση με τις μεταβολές που συμβαίνουν στην κατάσταση του υπηρέτη.

Υπάρχει εκτεταμένη βιβλιογραφία που αφιερώνεται στη μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης ρευστού. Κάποιες αρχικές υπολογιστικές προσεγγίσεις και αποτελέσματα υπάρχουν στις εργασίες των Kosten (1974a,b) και Kosten και Vrieze (1975). Οι Anick, Mitra και Sondhi (1982) εισήγαγαν ένα μοντέλο-ορόσημο, το οποίο είναι γνωστό ως μοντέλο AMS. Αυτό είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού που παριστάνει έναν χώρο αποθήκευσης που λαμβάνει δεδομένα από κάποιες ανεξάρτητες πηγές, καθεμία από τις οποίες εναλλάσσεται σε καταστάσεις λειτουργίας και αργίας σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Η υπόθεση ότι το εξωτερικό περιβάλλον είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχους χρόνου τροποποιήθηκε σε κάποιες εργασίες που ακολούθησαν. Για παράδειγμα ο Asmussen (1995) και οι Karandikar και Kulkarni (1995) μελέτησαν συστήματα εξυπηρέτησης ρευστού όπου το περιβάλλον είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου που υπόκειται σε λευκό θόρυβο, ενώ οι Kulkarni και Rolski (1994) θεώρησαν μια περίπτωση όπου το περιβάλλον μοντελοποιείται από μια διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck. Εισαγωγές στην περιοχή και βιβλιογραφικές ανασκοπήσεις έχουν δωθεί από τους Kulkarni (1997) και Schwartz (1996).

Τα συστήματα εξυπηρέτησης ρευστού είναι κατά κάποιο τρόπο το ημι-ντετερμινιστικό αντίστοιχο των συστημάτων εξυπηρέτησης με διακοπές και των συστημάτων εξυπηρέτησης σε τυχαίο περιβάλλον. Πράγματι, μπορούμε να δούμε τις εναλλαγές μεταξύ των καταστάσεων λειτουργίας και αργίας των ανεξαρτήτων πηγών που έχουμε στα συστήματα εξυπηρέτησης ρευστών σαν διακοπές/αποτυχίες του υπηρέτη, του θυρωρού ή του διαχειριστή του συστήματος. Τα συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές έχουν μελετηθεί εκτεταμένα (βλέπε π.χ. τις μονογραφίες των Takagi (1991) και Tian και Zhang (2006)).

Η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές είναι μια σχετικά νέα προσπάθεια. Το πρώτο σύστημα εξυπηρέτησης με διακοπές που μελετήθηκε από την προοπτική της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών φαίνεται να είναι η $M/M/1$ ουρά με χρόνους εκκίνησης που μελετήθηκε από τους Burnetas και Economou (2007). Έπειτα, οι Economou και Kanta (2008) και οι Jagannathan, Menache, Modiano και Zussman (2011) μελέτησαν τη στρατηγική συμπεριφορά πελατών στις παρατηρήσιμες και τις μη παρατηρήσιμες περιπτώσεις της $M/M/1$

ουράς με αναξιόπιστο υπηρέτη. Πιο πρόσφατα, οι Guo και Hassin (2011, 2012) μελέτησαν τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών σε μια $M/M/1$ ουρά με διακοπές και N-πολιτική ενεργοποίησης του υπηρέτη. Η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών σε συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές έχει επεκταθεί σε μοντέλα με επιπλέον χαρακτηριστικά όπως χρόνοι τερματισμού, γενικοί χρόνοι εξυπηρέτησης ή διακοπών κ.τ.λ., βλέπε π.χ. Sun, Guo και Tian (2010), Economou, Gómez-Corral και Kanta (2011), Liu, Ma και Li (2012) και Zhang, Wang και Liu (2013).

Παρόλο που τα συστήματα εξυπηρέτησης ρευστού αντιμετωπίζουν παρόμοιες καταστάσεις με τα συστήματα εξυπηρέτησης με διακοπές σε ένα ημι-ντετερμινιστικό πλαίσιο, η βιβλιογραφία μέχρι τώρα έχει αφιερωθεί μόνο σε θέματα υπολογισμού μέτρων απόδοσης (βλέπε π.χ. τις εργασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω) και σε προβλήματα ελέγχου ενός κεντρικού διαχειριστή (βλέπε π.χ. Rajagopal, Kulkarni και Stidham (1995) για το πρόβλημα βέλτιστης ροής). Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να επεκτείνει τις μελέτες για τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στην περιοχή των συστημάτων εξυπηρέτησης ρευστού. Για να αποφύγουμε τεχνικές λεπτομέρειες που ίσως συσκοτίσουν την παρουσίαση των βασικών ιδεών, θεωρούμε το απλούστερο δυνατό σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού, όπου το σύστημα εναλλάσσεται μεταξύ εκθετικά κατανεμημένων γρήγορων και αργών περιόδων εξυπηρέτησης. Ενδιαφερόμαστε για την παιγνιοθεωρητική ανάλυση αυτού του συστήματος, ώστε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών.

Η βασική συνεισφορά αυτού του κεφαλαίου συνοψίζεται στα παρακάτω:

- Προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών κάτω από δυο επίπεδα πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, μελετάμε την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και τη μορφή των στρατηγικών ισορροπίας σε κάθε περίπτωση.

- Υπολογίζουμε το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα κάτω από συγκεκριμένες στρατηγικές των πελατών σε κάθε περίπτωση.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής: Στην ενότητα 4.2 περιγράφουμε το μοντέλο, τη δομή αμοιβής - κόστους και το πλαίσιο για τις αποφάσεις. Στην ενότητα 4.3 θεωρούμε την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση και προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας. Τέλος, στην ενότητα 4.4 θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση και δείχνουμε ότι υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας.

4.2 Το μοντέλο

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού που παριστάνει μια μηχανή παραγωγής, η οποία εναλλάσσεται μεταξύ γρήγορων και αργών περιόδων λειτουργίας, που είναι ανεξάρτητες και εκθετικά κατανεμημένες με ρυθμούς q_1 και q_0 αντίστοιχα. Η κατάσταση της μηχανής παριστάνεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{Z(t)\}$ με δύο καταστάσεις, όπου η κατάσταση 1 αντιστοιχεί στη γρήγορη λειτουργία ενώ η 0 στην αργή. Ο ρυθμός εισόδου του ρευστού που παριστάνει τις αφίξεις των νέων πελατών είναι λ. Ο ρυθμός εξόδου είναι μ_1, όταν η μηχανή είναι στην κατάσταση γρήγορης εξυπηρέτησης, και μ_0 αλλιώς. Υποθέτουμε ότι $0 < \mu_0 < \mu_1$. Η χωρητικότητα του χώρου αποθήκευσης είναι άπειρη. Η δυναμική της διαδικασίας $\{X(t)\}$ που παριστάνει την ποσότητα του ρευστού περιγράφεται από τη σχέση

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda - \mu_i, & \text{αν } X(t) > 0 \text{ και } Z(t) = i, \\ (\lambda - \mu_i)^+, & \text{αν } X(t) = 0 \text{ και } Z(t) = i, \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου $(x)^+ = \max(x, 0)$.

Εύκολα βλέπουμε ότι η διδιάστατη διαδικασία $\{(X(t), Z(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή. Παρακάτω, θα χρησιμοποιούμε για λόγους ευκολίας τον συμβολισμό $i' = 1-i$, $i = 0, 1$. Έτσι, αν η i αναφέρεται στην παρούσα κατάσταση της μηχανής, η i' είναι η άλλη κατάσταση.

Θεωρούμε ότι οι πελάτες είναι στρατηγικοί και αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν τη στιγμή της άφιξής τους με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο όφελός τους. Κάθε πελάτης λαμβάνει αμοιβή R μονάδων για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του. Από την άλλη, έχει κόστος C χρηματικών μονάδων ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Οι αποφάσεις των πελατών θεωρούνται αμετάκλητες. Συγκεκριμένα, δεν επιτρέπονται υπαναχωρήσεις εισερχομένων πελατών, ούτε επαναπροσπάθειες αποχωρούντων πελατών. Εφόσον υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες είναι όμοιοι και καθένας προσπαθεί να μεγιστοποιήσει του ατομικό του κέρδος, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι υπόλοιποι πελάτες κάνουν το ίδιο, αυτή η κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ των παικτών. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε συμμετρικές στρατηγικές ισορροπίας αυτού του παιχνιδιού.

Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών επηρεάζεται από το επίπεδο της πληροφόρησης που λαμβάνουν κατά την άφιξή τους, πριν πάρουν τις αποφάσεις τους. Θεωρούμε τις ακόλουθες 2 περιπτώσεις:

- Πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες παρατηρούν τις $(X(t), Z(t))$.
- Μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση: Οι πελάτες παρατηρούν μόνο την $X(t)$.

4.3 Η πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση

Υποθέτουμε ότι ένας πελάτης φτάνει στη μηχανή παραγωγής και παρατηρεί την κατάσταση (x, i). Τότε, προκειμένου να υπολογίσει το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του αν εισέλθει, πρέπει να προσδιορίσει τον δεσμευμένο αναμενόμενο χρόνο παραμονής του στο σύστημα, $S_i(x)$. Παρατηρούμε ότι αυτός ο δεσμευμένος αναμενόμενος χρόνος παραμονής δεν εξαρτάται από τις στρατηγικές των άλλων πελατών, δεδομένης της (x, i). Πράγματι, οι μελλοντικά αφικνούμενοι πελάτες δεν επηρεάζουν τον $S_i(x)$ λόγω της FCFS πειθαρχίας και οι προγενέστερα αφιχθέντες πελάτες επίσης δεν τον επηρεάζουν, εφόσον υπαναχωρήσεις δεν επιτρέπονται. Μπορούμε εύκολα να πάρουμε κλειστούς τύπους για τους $S_i(x)$. Πράγματι, έχουμε το ακόλουθο Λήμμα 4.3.1.

Λήμμα 4.3.1. *Θεωρούμε τη πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης. Τότε, ο δεσμευμένος αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, δεδομένου ότι η κατάσταση της εξυπηρέτησης είναι i και η ποσότητα ρευστού μπροστά του είναι x δίνεται από τη σχέση*

$$S_i(x) \quad = \quad \frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x+\frac{q_i\mu_{i'}(\mu_{i'}-\mu_i)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right),\ x\geq 0,\ i=0,1. \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Για να υπολογίσουμε τον $S_i(x)$, δεσμεύουμε ως προς τη διάρκεια T_i του υπολειπόμενου χρόνου παραμονής της μηχανής στην κατάσταση i, η οποία είναι εκθετικά κατανεμημένη με ρυθμό q_i, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής. Τότε, παίρνουμε

$$S_i(x) \;=\; \frac{x}{\mu_i}e^{-q_i\frac{x}{\mu_i}} + \int_0^{\frac{x}{\mu_i}} (t + S_{i'}(x-\mu_i t))q_i e^{-q_i t}dt.$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε $u = x-\mu_i t$ και κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$S_i(x) \;=\; \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_i}e^{-\frac{q_i}{\mu_i}x} + \frac{q_i}{\mu_i}e^{-\frac{q_i}{\mu_i}x}\int_0^x S_{i'}(u)e^{\frac{q_i}{\mu_i}u}du.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\mu_i e^{\frac{q_i}{\mu_i}x}$ και παραγωγίζοντας ως προς x, καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ)

$$\frac{dS_i(x)}{dx} \;=\; -\frac{q_i}{\mu_i}S_i(x) + \frac{q_i}{\mu_i}S_{i'}(x) + \frac{1}{\mu_i},\ i=0,1,$$

με αρχικές συνθήκες $S_i(0) = 0,\ i = 0, 1$. Χρησιμοποιόντας την κλασική θεωρία των γραμμικών ΣΔΕ πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές (βλέπε π.χ. Braun (1983) Κεφάλαιο 3), παίρνουμε τη μοναδική λύση που φαίνεται στην (4.2). ∎

Τώρα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας στην πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχουμε το παρακάτω Θεώρημα 4.3.1.

Θεώρημα 4.3.1. *Θεωρούμε την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης. Τότε, οι στρατηγικές ισορροπίας είναι τύπου "διπλού κατωφλίου", δηλαδή υπαγορεύουν το εξής: "Φθάνοντας τη στιγμή t, παρατήρησε τη $(X(t), Z(t))$, μπες αν $X(t) < x_e(Z(t))$ και αποχώρησε αν $X(t) > x_e(Z(t))$". Τα κατώφλια $x_e(i)$, $i = 0, 1$ είναι οι μοναδικές ρίζες των εξισώσεων*

$$\frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x + \frac{q_i\mu_{i'}(\mu_{i'}-\mu_i)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right) = \frac{R}{C},\ i=0,1, \tag{4.3}$$

ως προς x.

Απόδειξη. Το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(X(t), Z(t)) = (x, i)$ και αποφασίζει να μπει είναι

$\mathcal{U}^{(fo)}(x,i) = R - CS_i(x)$. Παρατηρούμε ότι αυτό το αναμενόμενο καθαρό κέρδος δεν εξαρτάται από τις στρατηγικές των άλλων πελατών. Ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν $\mathcal{U}^{(fo)}(x,i) > 0$, προτιμά να αποχωρήσει αν $\mathcal{U}^{(fo)}(x,i) < 0$ και είναι αδιάφορος ως προς το να εισέλθει ή να αποχωρήσει αν $\mathcal{U}^{(fo)}(x,i) = 0$. Αυτές οι συνθήκες είναι αντίστοιχα ισοδύναμές με τις $S_i(x) < \frac{R}{C}$, $S_i(x) > \frac{R}{C}$ και $S_i(x) = \frac{R}{C}$. Παραγωγίζοντας την (4.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{dS_i(x)}{dx} &= \frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0} + \frac{q_i\mu_{i'}(\mu_{i'}-\mu_i)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}, \\
&\qquad\qquad x \geq 0,\ i=0,1, \quad (4.4) \\
\frac{d^2S_i(x)}{dx^2} &= -\frac{q_i\mu_{i'}(\mu_{i'}-\mu_i)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)^2 e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x},\ x\geq 0,\ i=0,1. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Έτσι, $\frac{dS_0(x)}{dx} > 0$, $\frac{d^2S_1(x)}{dx^2} > 0$ και $\frac{dS_1(0)}{dx} = \frac{1}{\mu_1} > 0$ και συμπεραίνουμε ότι η $S_i(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$ με εικόνα το διάστημα $[0,\infty)$. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει μοναδική ρίζα $x_e(i)$ της $S_i(x) = \frac{R}{C}$ ως προς x, η οποία είναι ακριβώς η εξίσωση (4.3). Οπότε, ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση (x,i) προτιμά να μπει για $x < x_e(i)$, είναι αδιάφορος ως προς το να μπει ή να αποχωρήσει αν $x = x_e(i)$ και προτιμά να αποχωρήσει για $x > x_e(i)$. ∎

Στο Θεώρημα 4.3.1, δε δηλώνεται τι κάνουν οι πελάτες όταν βρουν την κατάσταση $(X(t), Z(t))$ με $X(t) = x_e(Z(t))$. Προφανώς, μια στρατηγική ισορροπίας μπορεί να υπαγορεύει οτιδήποτε σε μια τέτοια κατάσταση.

Παρατηρούμε ότι $x_e(0) < x_e(1)$, δηλαδή ένας πελάτης που ακολουθεί τη στρατηγική ισορροπίας και βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση γρήγορης εξυπηρέτησης ανέχεται περισσότερη ποσότητα ρευστού μπροστά του από ότι όταν βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση αργής εξυπηρέτησης. Αυτό είναι ξεκάθαρο διαισθητικά και μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά καθώς $S_1(x) < S_0(x)$, $x > 0$. Πράγματι

$$S_1(x) - S_0(x) = \frac{\mu_0-\mu_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}\left(1 - e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right),\ x \geq 0.$$

Ένα λεπτό σημείο είναι ότι μια στρατηγική ισορροπίας έχει σημασία τι υπαγορεύει, να μπεις ή να αποχωρήσεις, σύμφωνα με το αν $X(t) < x_e(Z(t))$ ή όχι, μόνο για καταστάσεις $(X(t), Z(t))$ που είναι προσβάσιμες με θετική πιθανότητα, δεδομένης της αρχικής κατάστασης. Πράγματι, μια στρατηγική ισορροπίας μπορεί να υπαγορεύει οτιδήποτε σε καταστάσεις που δεν είναι προσβάσιμες. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι αρχικά κενό και θεωρουμε μια στρατηγική που υπαγορεύει να μπαίνεις, όταν $Z(t) = 0$, $X(t) \leq x_e(0)$ ή όταν $Z(t) = 1$, $X(t) \neq x_e(1)$. Αυτή είναι μια στρατηγική ισορροπίας, διότι το τι κάνει για καταστάσεις $(X(t), Z(t)) = (x, 1)$ με $x > x_e(1)$ δεν έχει σημασία, καθώς αυτές οι καταστάσεις δε θα παρατηρηθούν ποτέ. Όμως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της στρατηγικής ισορροπίας που είναι τέλεια ως προς τα υποπαιχνίδια για να εκλεπτύνουμε τις στρατηγικές ισορροπίας και να εξαλείψουμε ''παθολογικές '' περιπτώσεις (που εμφανίζονται ακόμη και στην ανάλυση της $M/M/1$ ουράς - βλέπε π.χ. Hassin και Haviv (2003), Παρατήρηση 2.2 στη σελ. 24, ή Hassin και Haviv (2002)). Τότε, οι στρατηγικές ισορροπίας που είναι τέλειες ως προς τα υποπαιχνίδια υπαγορεύουν να εισέλθεις όταν $X(t) < x_e(Z(t))$, να αποχωρήσεις όταν $X(t) > x_e(Z(t))$ και οτιδήποτε για $X(t) = x_e(Z(t))$.

Παρατηρούμε, ακόμη, ότι στην πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση, οι στρατηγικές ισορροπίας είναι κυριαρχούσες στρατηγικές. Πράγματι, μια τέτοια στρατηγική είναι βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη σε οποιαδήποτε στρατηγική των άλλων πελατών. Έτσι, στην πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση έχουμε μια πολύ ισχυρή έννοια ισορροπίας. Αυτό δε συμβαίνει στις άλλες περιπτώσεις πληροφόρησης όπως θα δούμε στις υπόλοιπες ενότητες.

Τώρα, προχωράμε στον υπολογισμό της συνάρτησης αναμενόμενου κοινωνικού κέρδους ανά χρονική μονάδα, όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική διπλού κατωφλίου. Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή της ποσότητας του ρευστού, όταν οι πελάτες ακολουθούν μια τέτοια κατανομή, δηλαδή πρέπει να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $F_i(x)$ με

$$F_i(x) = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x, Z(t) = i], \ x \geq 0, \ i = 0, 1. \tag{4.6}$$

Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις αυτές στο επόμενο Λήμμα 4.3.2.

Λήμμα 4.3.2. *Θεωρούμε την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης, όπου οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική διπλού κατωφλίου με διάνυσμα κατωφλίων $(x_*(0), x_*(1))$, τέτοιο ώστε $x_*(0) \leq x_*(1)$. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τις σχετικές θέσεις των 0, $\lambda - \mu_1$ και $\lambda - \mu_0$.*

Περίπτωση I. $0 < \lambda - \mu_1 < \lambda - \mu_0$.

Η ποσότητα του ρευστού κυμαίνεται στο $[x_*(0), x_*(1)]$. *Συγκεκριμένα*

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < x_*(0) \\ \frac{q_1}{q_0+q_1} \cdot \frac{-q_1\mu_0 + q_0(\lambda-\mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x - x_*(0)]\right\}}{-q_1\mu_0 + q_0(\lambda-\mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1) - x_*(0)]\right\}}, & \text{αν } x_*(0) \le x \le x_*(1) \\ \frac{q_1}{q_0+q_1}, & \text{αν } x \ge x_*(1). \end{cases} \tag{4.7}$$

και

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \le x_*(0) \\ \frac{q_0}{q_0+q_1} \cdot \frac{-q_1\mu_0\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x - x_*(0)]\right\}\right)}{-q_1\mu_0 + q_0(\lambda-\mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1) - x_*(0)]\right\}}, & \text{αν } x_*(0) \le x < x_*(1) \\ \frac{q_0}{q_0+q_1}, & \text{αν } x \ge x_*(1). \end{cases} \tag{4.8}$$

Περίπτωση II. $\lambda - \mu_1 = 0 < \lambda - \mu_0$.

Η ποσότητα ρευστού είναι σταθερή και ίση με $x_*(0)$.

Περίπτωση III. $\lambda - \mu_1 < 0 < \lambda - \mu_0$.

Η ποσότητα ρευστού κυμαίνεται στο $[0, x_*(0)]$. *Συγκεκριμένα*

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \le 0 \\ \frac{q_1}{q_0+q_1} \cdot \frac{q_0(\lambda-\mu_1)\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} + \frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x\right\}\right)}{q_0(\lambda-\mu_1) + q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} + \frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}}, & \text{αν } 0 \le x < x_*(0) \\ \frac{q_1}{q_0+q_1}, & \text{αν } x \ge x_*(0). \end{cases} \tag{4.9}$$

και

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{q_0}{q_0+q_1} \cdot \frac{q_0(\lambda-\mu_1) + q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} + \frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x\right\}}{q_0(\lambda-\mu_1) + q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1} + \frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}}, & \text{αν } 0 \le x \le x_*(0) \\ \frac{q_0}{q_0+q_1}, & \text{αν } x \ge x_*(0). \end{cases} \tag{4.10}$$

Περίπτωση IV. $\lambda - \mu_1 < \lambda - \mu_0 \le 0$.

Η ποσότητα ρευστού είναι σταθερή και ίση με 0.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, αργά ή γρήγορα το ρευστό εισέρχεται στη μηχανή όταν η ποσότητα του ρευστού μέσα σε αυτή είναι μικρότερη ή ίση του $x_*(1)$, λόγω της στρατηγικής διπλού κατωφλίου και της σχέσης $x_*(0) \leq x_*(1)$.

Οι περιπτώσεις II και IV είναι άμεσες. Πράγματι, στην περίπτωση II, αν η αρχική ποσότητα ρευστού είναι κάτω από $x_*(0)$, τότε κατά τη διάρκεια των χρόνων παραμονής στην κατάσταση γρήγορης εξυπηρέτησης η ποσότητα ρευστού παραμένει σταθερή (καθώς $\lambda - \mu_1 = 0$), ενώ κατά τη διάρκεια των χρόνων παραμονής στην κατάσταση αργής εξυπηρέτησης αυξάνεται γραμμικά με ρυθμό $\lambda - \mu_0$, μέχρι να γίνει $x_*(0)$. Έπειτα, μένει στο ίδιο επίπεδο. Αν αρχικά η ποσότητα ρευστού είναι πάνω από $x_*(0)$, έχουμε μια παρόμοια κατάσταση και η ποσότητα ρευστού τελικά γίνεται $x_*(0)$. Η περίπτωση IV είναι ακόμη πιο ξεκάθαρη, καθώς η ποσότητα του ρευστού δεν αυξάνεται όταν η μηχανή είναι στην κατάσταση γρήγορης εξυπηρέτησης και φθίνει όταν είναι στην κατάσταση αργής εξυπηρέτησης. Έτσι, η ποσότητα ρευστού γίνεται τελικά μηδέν.

Για τις περιπτώσεις I και III, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης ρευστού που εναλλάσσεται μεταξύ δύο καταστάσεων περιβάλλοντος $-$ και $+$, με εκθετικούς χρόνους παραμονής σε κάθε κατάσταση με ρυθμούς q_- και q_+ αντίστοιχα, όπου ο ρυθμός ροής είναι $\eta_- < 0$ για την κατάσταση $-$ και $\eta_+ > 0$ για την κατάσταση $+$. Αν το ρευστό είναι αναγκασμένο να κυμαίνεται στο $[0, T]$ (δηλαδή οι ρυθμοί ροής γίνονται μηδέν όταν η ποσότητα του ρευστού φτάνει τις συνοριακές καταστάσεις 0 και T) και η $F_-(x)$ (αντίστοιχα η $F_+(x)$) συμβολίζει την οριακή πιθανότητα η ποσότητα του ρευστού να είναι μικρότερη ή ίση του x και το περιβάλλον να είναι στην κατάσταση $-$ (αντίστοιχα $+$), τότε έχουμε ότι οι $F_-(x)$ και $F_+(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0, T)$ και ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα των ΣΔΕ

$$\eta_- \frac{dF_-(x)}{dx} = -q_- F_-(x) + q_+ F_+(x), \tag{4.11}$$

$$\eta_+ \frac{dF_+(x)}{dx} = q_- F_-(x) - q_+ F_+(x), \tag{4.12}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$F_-(T) = \frac{q_+}{q_- + q_+}, \; F_+(0) = 0 \tag{4.13}$$

(βλέπε π.χ. Kulkarni (1997)). Χρησιμοποιώντας τη βασική θεωρία για γραμμικά συστήματα ΣΔΕ πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές και υπολογίζοντας τις σταθερές από τις συνοριακές συνθήκες (βλέπε π.χ. Braun (1983) Κεφάλαιο 3), έχουμε ότι αυτό το σύστημα έχει μοναδική λύση που δίνεται από τις σχέσεις

$$F_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{q_+}{q_- + q_+} \cdot \frac{q_+\eta_- + q_-\eta_+ \exp\left\{-\left(\frac{q_-}{\eta_-} + \frac{q_+}{\eta_+}\right)x\right\}}{q_+\eta_- + q_-\eta_+ \exp\left\{-\left(\frac{q_-}{\eta_-} + \frac{q_+}{\eta_+}\right)T\right\}}, & \text{αν } 0 \leq x \leq T \\ \frac{q_+}{q_- + q_+}, & \text{αν } x \geq T \end{cases} \tag{4.14}$$

και

$$F_+(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{q_-}{q_- + q_+} \cdot \frac{q_+\eta_- \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{q_-}{\eta_-} + \frac{q_+}{\eta_+}\right)x\right\}\right)}{q_+\eta_- + q_-\eta_+ \exp\left\{-\left(\frac{q_-}{\eta_-} + \frac{q_+}{\eta_+}\right)T\right\}}, & \text{αν } 0 \leq x < T \\ \frac{q_-}{q_- + q_+}, & \text{αν } x \geq T. \end{cases} \tag{4.15}$$

Για την περίπτωση I, βλέπουμε εύκολα ότι το ρευστό κυμαίνεται στο $[x_*(0), x_*(1)]$ με αρνητικό ρυθμό $-\mu_0$ όταν η μηχανή βρίσκεται στην αργή λειτουργία και θετικό ρυθμό $\lambda - \mu_1$ όταν η μηχανή βρίσκεται στη γρήγορη λειτουργία. Τότε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.14)-(4.15), αντικαθιστώντας $x - x_*(0)$ στο x και θέτοντας $q_- = q_0$, $q_+ = q_1$, $\eta_- = -\mu_0$ και $\eta_+ = \lambda - \mu_1$. Αυτό δίνει τις (4.7)-(4.8).

Ομοίως, στην περίπτωση III, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το ρευστό κυμαίνεται στο $[0, x*(0)]$ και χρησιμοποιούμε τις (4.14)-(4.15) με $q_- = q_1$, $q_+ = q_0$, $\eta_- = \lambda - \mu_1$ και $\eta_+ = \lambda - \mu_0$ προκειμένου να πάρουμε τις (4.9)-(4.10). ■

Το Λήμμα 4.3.2 δείχνει ότι στην περίπτωση I, η κατανομή $F_0(x)$ είναι μικτή με μάζα πιθανότητας $p_0(x_*(0))$ στο $x_*(0)$ που δίνεται από την

$$p_0(x_*(0)) = \frac{q_1}{q_0 + q_1} \cdot \frac{-q_1\mu_0 + q_0(\lambda - \mu_1)}{-q_1\mu_0 + q_0(\lambda - \mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1) - x_*(0)]\right\}} \tag{4.16}$$

και πυκνότητα πιθανότητας $f_0(x)$ στο $(x_*(0), x_*(1))$ που δίνεται από την

$$f_0(x) = \frac{q_1}{q_0 + q_1} \cdot \frac{q_0(\lambda - \mu_1)\left(\frac{q_0}{\mu_0} - \frac{q_1}{\lambda - \mu_1}\right)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x - x_*(0)]\right\}}{-q_1\mu_0 + q_0(\lambda - \mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} - \frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1) - x_*(0)]\right\}}, \quad x_*(0) < x < x_*(1), \tag{4.17}$$

ενώ η $F_1(x)$ είναι μικτή με μάζα πιθανότητας $p_1(x_*(1))$ στο $x_*(1)$ που δίνεται από την

$$p_1(x_*(1)) \quad = \quad \frac{q_0}{q_0+q_1} \cdot \frac{[q_0(\lambda-\mu_1)-q_1\mu_0]\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}-\frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1)-x_*(0)]\right\}}{-q_1\mu_0+q_0(\lambda-\mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}-\frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1)-x_*(0)]\right\}} \qquad (4.18)$$

και πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x)$ στο $(x_*(0), x_*(1))$ που δίνεται από την

$$f_1(x) \quad = \quad \frac{q_0}{q_0+q_1} \cdot \frac{q_1\mu_0\left(\frac{q_0}{\mu_0}-\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}\right)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}-\frac{q_0}{\mu_0}\right)[x-x_*(0)]\right\}}{-q_1\mu_0+q_0(\lambda-\mu_1)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}-\frac{q_0}{\mu_0}\right)[x_*(1)-x_*(0)]\right\}}, \quad x_*(0) < x < x_*(1). \qquad (4.19)$$

Ομοίως, στην περίπτωση III, οι $F_0(x)$ και $F_1(x)$ είναι μικτές. Η κατανομή $F_0(x)$ έχει μάζα πιθανότητας $p_0(x_*(0))$ στο $x_*(0)$ που δίνεται από την

$$p_0(x_*(0)) \quad = \quad \frac{q_1}{q_0+q_1} \cdot \frac{[q_1(\lambda-\mu_0)+q_0(\lambda-\mu_1)]\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}}{q_0(\lambda-\mu_1)+q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}} \qquad (4.20)$$

και πυκνότητα πιθανότητας $f_0(x)$ στο $(0, x_*(0)$ που δίνεται από την

$$f_0(x) \quad = \quad \frac{q_1}{q_0+q_1} \cdot \frac{q_0(\lambda-\mu_1)\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x\right\}}{q_0(\lambda-\mu_1)+q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}}, \quad 0 < x < x_*(0). \qquad (4.21)$$

Όσον αφορά την $F_1(x)$, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι έχει μάζα πιθανότητας $p_1(0)$ στο 0 που δίνεται από την

$$p_1(0) \quad = \quad \frac{q_0}{q_0+q_1} \cdot \frac{q_0(\lambda-\mu_1)+q_1(\lambda-\mu_0)}{q_0(\lambda-\mu_1)+q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}} \qquad (4.22)$$

και πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x)$ στο $(0, x_*(0)$ που δίνεται από την

$$f_1(x) \quad = \quad \frac{q_0}{q_0+q_1} \cdot \frac{q_1(\lambda-\mu_0)\left(-\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}-\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x\right\}}{q_0(\lambda-\mu_1)+q_1(\lambda-\mu_0)\exp\left\{-\left(\frac{q_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{q_0}{\lambda-\mu_0}\right)x_*(0)\right\}}, \quad 0 < x < x_*(0). \qquad (4.23)$$

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αναμενόμενου κοινωνικού κέρδους ανά χρονική μονάδα, $\mathcal{B}^{(fo)}(x_*(0), x_*(1))$, όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική διπλού κατωφλίου με διάνυσμα κατωφλίων $(x_*(0), x_*(1))$. Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 4.3.2.

Θεώρημα 4.3.2. *Θεωρούμε την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης, όπου οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική διπλού κατωφλίου με διάνυσμα κατωφλίων* $(x_*(0), x_*(1))$, *τέτοιο ώστε* $x_*(0) \leq x_*(1)$. *Τότε, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τις σχετικές θέσεις των 0,* $\lambda - \mu_1$ *και* $\lambda - \mu_0$.

Περίπτωση I. $0 < \lambda - \mu_1 < \lambda - \mu_0$.

Το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(fo)}(x_*(0), x_*(1)) &= \lambda \left(p_0(x_*(0)) \frac{\mu_0}{\lambda} + \int_{x_*(0)}^{x_*(1)} f_1(x)dx + p_1(x_*(1)) \frac{\mu_1}{\lambda} \right) R \\ &\quad -CE[X], \end{aligned} \tag{4.24}$$

όπου

$$E[X] = x_*(0)p_0(x_*(0)) + \int_{x_*(0)}^{x_*(1)} x(f_0(x) + f_1(x))dx + x_*(1)p_1(x_*(1)) \tag{4.25}$$

και οι $p_0(x_*(0))$, $f_0(x)$, $p_1(x_*(1))$ *και* $f_1(x)$ *δίνονται από τις* (4.16)-(4.19).

Περίπτωση II. $\lambda - \mu_1 = 0 < \lambda - \mu_0$.

Το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{B}^{(fo)}(x_*(0), x_*(1)) = \lambda \left(\frac{q_1}{q_0 + q_1} \cdot \frac{\mu_0}{\lambda} + \frac{q_0}{q_0 + q_1} \right) R - Cx_*(0). \tag{4.26}$$

Περίπτωση III. $\lambda - \mu_1 < 0 < \lambda - \mu_0$.

Το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(fo)}(x_*(0), x_*(1)) &= \lambda \left(\int_0^{x_*(0)} f_0(x)dx + p_0(x_*(0)) \frac{\mu_0}{\lambda} + \frac{q_0}{q_0 + q_1} \right) \\ &\quad -CE[X], \end{aligned} \tag{4.27}$$

όπου

$$E[X] = x_*(0)p_0(x_*(0)) + \int_0^{x_*(0)} x(f_0(x) + f_1(x))dx \tag{4.28}$$

και οι $p_0(x_*(0))$, $f_0(x)$ *και* $f_1(x)$ *δίνονται από τις* (4.20), (4.21) *και* (4.23) *αντίστοιχα.*

Περίπτωση IV. $\lambda - \mu_1 < \lambda - \mu_0 \leq 0$.

Το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{B}^{(fo)}(x_*(0), x_*(1)) \quad = \quad \lambda R. \tag{4.29}$$

Απόδειξη. Σε όλες τις περιπτώσεις, το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{B}^{(fo)}(x_*(0), x_*(1)) \quad = \quad \lambda_{eff} R - CE[X], \tag{4.30}$$

όπου λ_{eff} είναι ο πραγματικός ρυθμός εισόδου του ρευστού, ο οποίος αναφέρεται στις αφίξεις των πελατών που μπαίνουν στο σύστημα και $E[X]$ είναι η αναμενόμενη ποσότητα ρευστού σε στάσιμη κατάσταση. Στην περίπτωση I, η ποσότητα του ρευστού κυμαίνεται στο διάστημα $[x_*(0), x_*(1)]$. Επιπλέον, αν η ποσότητα του ρευστού γίνει $x_*(0)$ ενώ το περιβάλλον βρίσκεται στην κατάσταση αργής λειτουργίας, παραμένει στο $x_*(0)$ μέχρι την επόμενη αλλαγή περιβάλλοντος. Έτσι, ένα ποσοστό $\frac{\mu_0}{\lambda}$ των πελατών που βρίσκουν το σύστημα στην αργή λειτουργία και ποσότητα ρευστού $x_*(0)$ εισέρχονται στο σύστημα, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής του ρευστού είναι 0. Απο την άλλη μεριά, οι πελάτες που βρίσκουν το σύστημα στην αργή λειτουργία, αλλά την ποσότητα ρευστού αυστηρά πάνω από $x_*(0)$ δεν εισέρχονται. Ομοίως, όλοι οι πελάτες που βρίσκουν το σύστημα στη γρήγορη λειτουργία και την ποσότητα του ρευστού αυστηρά κατω από $x_*(1)$ εισέρχονται, ενώ μόνο ένα ποσοστό $\frac{\mu_1}{\lambda}$ των πελατών που βρίσκουν το σύστημα στη γρήγορη λειτουργία και ποσότητα ρευστού $x_*(1)$ εισέρχονται στο σύστημα. Έτσι, ο πραγματικός ρυθμός άφιξης στην περίπτωση I είναι

$$\lambda_{eff} \quad = \quad \lambda \left(p_0(x_*(0)) \frac{\mu_0}{\lambda} + \int_{x_*(0)}^{x_*(1)} f_1(x) dx + p_1(x_*(1)) \frac{\mu_1}{\lambda} \right). \tag{4.31}$$

Η αναμενόμενη ποσότητα ρευστού σε στάσιμη κατάσταση, $E[X]$, υπολογίζεται από την (4.25), καθώς η κατανομή της ποσότητας του ρευστού έχει μάζες πιθανότητας $p_0(x_*(0))$ και $p_1(x_*(1))$ στα $x_*(0)$ και $x_*(1)$, που δίνονται από τις (4.16) και (4.18), και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_0(x) + f_1(x)$, όπου οι $f_0(x)$ και $f_1(x)$ δίνονται από τις (4.17) και (4.19). Αντικαθιστώντας την (4.31) και την (4.25) στην (4.30) καταλήγουμε στην (4.24).

Στην περίπτωση II, η ποσότητα ρευστού είναι σταθερή και ίση με $x_*(0)$, οπότε $E[X] = x_*(0)$ και όλοι οι πελάτες βλέπουν αυτή την κατάσταση κατά την άφιξή τους. Έτσι, όλοι οι πελάτες που βρίσκουν τη μηχανή στη γρήγορη λειτουργία μπαίνουν, ενώ μόνο ένα ποσοστό $\frac{\mu_0}{\lambda}$ αυτών που βρίσκουν τη μηχανή στην αργή λειτουργία μπαίνουν. Συνεπώς, ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων είναι

$$\lambda_{eff} \quad = \quad \lambda \left(\frac{q_1}{q_0 + q_1} \cdot \frac{\mu_0}{\lambda} + \frac{q_0}{q_0 + q_1} \right) \tag{4.32}$$

και παίρνουμε την (4.26).

Η περίπτωση III αποδεικνύεται ομοίως με την περίπτωση I, οπότε και παραλείπουμε τις λεπτομέρειες. Τέλος, στην περίπτωση IV, όλοι οι πελάτες εισέρχονται και εξυπηρετούνται κατευθείαν χωρίς να περιμένουν. Έτσι, $\lambda_{eff} = \lambda$ και $E[X] = 0$ οπότε παίρνουμε την (4.29). ■

Οι σχέσεις του Θεωρήματος 4.3.2 για το αναμενόμενο κοινωνικό κέρδος ανά χρονική μονάδα μπορούν να δοθούν σε ανηγμένη μορφή, καθώς τα σχετικά ολοκληρώματα υπολογίζονται σε κλειστή μορφή (πράγματι, βλέπουμε ότι περιέχουν μόνο εκθετικές συναρτήσεις). Όμως, οι σχέσεις γίνονται πολύπλοκες και δεν μπορούν να λυθούν προκειμένου να πάρουμε τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές σε κλειστή μορφή.

4.4 Η μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα, προσδιορίζουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών, όταν παρατηρούν μόνο την ποσότητα του ρευστού πριν πάρουν την απόφασή τους. Περιοριζόμαστε στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου, όπου οι πελάτες αποφασίζουν να μπουν αν βρούν την ποσότητα του ρευστού κάτω από κάποιο κατώφλι x_*, ενώ αποφασίζουν να αποχωρήσουν αν η ποσότητα του ρευστού ξεπεράσει το x_*. Για να βρούμε τη βέλτιστη απάντηση ενός συγκεκριμένου πελάτη, δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι x_*, πρέπει να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή της ποσότητας του ρευστού, δηλαδή τις συναρτήσεις κατανομής $F_i(x)$ που ορίζονται στην (4.6). Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.2 για $x_*(0) = x_*(1) = x_*$. Στη συνέχεια, μπορούμε να βρούμε τον δεσμευμένο αναμενόμενο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δεδομένου ότι η ποσότητα του ρευστού που βρίσκει κατά την άφιξή του είναι x και οι άλλοι ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου x_*. Αυτό γίνεται στο επόμενο Λήμμα 4.4.1.

Λήμμα 4.4.1. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης. Τότε, για τον δεσμευμένο αναμενόμενο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα,* $S^{(ao)}(x;x_*)$*, δεδομένου ότι η ποσότητα του ρευστού μπροστά του είναι* x *και ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου* x_**, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τις σχετικές θέσεις των 0,* $\lambda-\mu_1$ *και* $\lambda-\mu_0$*.*

Περίπτωση I. $0 \leq \lambda-\mu_1 < \lambda-\mu_0$.

$$S^{(ao)}(x_*;x_*) \;=\; \frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x_* + \frac{q_0q_1(\mu_1-\mu_0)^2}{(q_0+q_1)(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x_*}\right). \tag{4.33}$$

Περίπτωση II. $\lambda-\mu_1 < 0 < \lambda-\mu_0$.

$$S^{(ao)}(x;x_*) \;=\; \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x - \frac{q_1\mu_0(\lambda-\mu_0)+q_0\mu_1(\lambda-\mu_1)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right) & 0<x<x_* \\ \frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x_* - \frac{q_0\mu_1(\mu_0-\mu_1)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x_*}\right) & x=x_* \end{cases} \tag{4.34}$$

Περίπτωση III. $\lambda-\mu_1 < \lambda-\mu_0 \leq 0$.

$$S^{(ao)}(0;x_*) \;=\; 0. \tag{4.35}$$

Απόδειξη. Δεσμεύοντας ως προς την κατάσταση της μηχανής τη στιγμή άφιξης ενός συγκεκριμένου πελάτη, έχουμε

$$S^{(ao)}(x;x_*) = \pi_{Z|X}(0|x;x_*)S_0(x) + \pi_{Z|X}(1|x;x_*)S_1(x),\ x \geq 0, \tag{4.36}$$

όπου $\pi_{Z|X}(i|x;x_*)$ είναι η πιθανότητα ο συγκεκριμένος πελάτης να βρει τη μηχανή στην κατάσταση i, δεδομένου ότι παρατηρεί ποσότητα ρευστού x και ότι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική κατωφλίου x_*.

Στην περίπτωση I (που αντιστοιχεί στις περιπτώσεις I και II του Λήμματος 4.3.2), η ποσότητα ρευστού είναι σταθερή και ίση με x_*. Συνεπώς, όλοι οι πελάτες παρατηρούν αυτή την ποσότητα ρευστού κατά την άφιξή τους. Οπότε, η παρατηρησή τους δε δίνει κανένα σήμα για την κατάσταση της μηχανής. Έτσι, στην περίπτωση I, έχουμε $\pi_{Z|X}(0|x;x_*)=\frac{q_1}{q_0+q_1}$ και $\pi_{Z|X}(1|x;x_*)=\frac{q_0}{q_0+q_1}$. Χρησιμοποιώντας την (4.36) και την (4.2) παίρνουμε εύκολα την (4.33).

Στην περίπτωση II (που αντιστοιχεί στην περίπτωση III του Λήμματος 4.3.2), το ρευστό κυμαίνεται στο $[0,x_*]$. Για $x_*>0$, οι κατανομές $F_0(x)$ και $F_1(x)$ δίνονται από τις (4.9) και (4.10), με $x_*(0)=x_*$. Εφόσον η $F_1(x)$ έχει μάζα πιθανότητας στο 0, ενώ η $F_0(x)$ δεν έχει, συμπεραίνουμε ότι $\pi_{Z|X}(0|0;x_*)=0$. Ομοίως, εφόσον η $F_0(x)$ έχει μάζα πιθανότητας στο x_*, ενώ η $F_1(x)$ δεν έχει, συμπεραίνουμε ότι $\pi_{Z|X}(0|x_*;x_*)=1$. Τέλος, για $x\in(0,x_*)$, έχουμε ότι $\pi_{Z|X}(0|x;x_*)=\frac{f_0(x)}{f_0(x)+f_1(x)}$, όπου οι $f_0(x)$ και $f_1(x)$ δίνονται από τις (4.21) και (4.23) αντίστοιχα, με $x_*(0)=x_*$. Αυτό δίνει, μετά από απλοποιήσεις, $\pi_{Z|X}(0|x;x_*)=\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1-\mu_0}$, $0<x<x_*$. Επομένως, συνοπτικά,

$$\pi_{Z|X}(0|x;x_*)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1-\mu_0}, & 0<x<x_*\\ 1, & x=x_*\end{cases},\quad \pi_{Z|X}(1|x;x_*)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{\lambda-\mu_0}{\mu_1-\mu_0}, & 0<x<x_*\\ 0, & x=x_*.\end{cases} \tag{4.37}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.37) και (4.36), παίρνουμε εύκολα την (4.34), όταν $x_*>0$. Για $x_*=0$, όλοι οι πελάτες παρατηρούν ποσότητα ρευστού ίση με το 0 κατά την άφιξή τους, οπότε $S_{(ao)}(0;x_*)=0$ και μπορούμε να δούμε ότι η (4.34) εξακολουθεί να ισχύει. Τα ίδια επιχείρηματα δίνουν την (4.35), στην περίπτωση III. ■

Τώρα, μπορούμε να προσδιορίσουμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου στη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα 4.4.1

Θεώρημα 4.4.1. *Θεωρούμε τη μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση του συστήματος εξυπηρέτησης ρευστού με εναλλασσόμενη διαδικασία εξυπηρέτησης. Τότε, για την ύπαρξη στρατηγικών ισορροπίας τύπου κατωφλίου που υπαγορεύουν ''Φτάνοντας τη στιγμή t, παρατήρησε την $X(t)$, μπες αν $X(t)<x_e$ και αποχώρησε αν $X(t)>x_e$'' έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τις σχετικές θέσεις των 0, $\lambda-\mu_1$ και $\lambda-\mu_0$.*

Περίπτωση I. $0 \leq \lambda - \mu_1 < \lambda - \mu_0$.

Υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου με κατώφλι x_e το οποίο είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x + \frac{q_0q_1(\mu_1-\mu_0)^2}{(q_0+q_1)(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right) = \frac{R}{C} \tag{4.38}$$

ως προς x.

Περίπτωση II. $\lambda - \mu_1 < 0 < \lambda - \mu_0$.

Υπάρχει ένα συνεχές σύνολο στρατηγικών ισορροπίας στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου. Τα αντίστοιχα κατώφλια x_e είναι τα σημεία του διαστήματος $[x_{eL}, x_{eU}]$, όπου x_{eL} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x - \frac{q_1\mu_0(\lambda-\mu_0)+q_0\mu_1(\lambda-\mu_1)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right) = \frac{R}{C} \tag{4.39}$$

ως προς x, και x_{eU} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x - \frac{q_0\mu_1(\mu_0-\mu_1)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right) = \frac{R}{C} \tag{4.40}$$

ως προς x.

Περίπτωση III. $\lambda - \mu_1 < \lambda - \mu_0 \leq 0$.

Κάθε στρατηγική στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου με κατώφλι $x_e > 0$ είναι στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου x_*. Το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ενός συγκεκριμένου πελάτη που παρατηρεί κατά την άφιξή του ποσότητα ρευστού $X(t) = x$ και αποφασίζει να μπει είναι $\mathcal{U}^{(ao)}(x; x_*) = R - S^{(ao)}(x; x_*)$.

Στην περίπτωση I, εφόσον η ποσότητα του ρευστού είναι πάντα ίση με x_*, ο πελάτης θα δει υποχρεωτικά αυτή την ποσότητα και έτσι ο δεσμευμένος υπολειπόμενος χρόνος παραμονής του στο σύστημα δίνεται από τη σχέση (4.33). Η στρατηγική κατωφλίου x_* είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, όταν $\mathcal{U}^{(ao)}(x_*; x_*) = 0$, δηλαδή όταν η x_* είναι λύση της (4.38). Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (4.38) είναι μονότονο ως προς x, καθώς είναι ίσο με $\frac{q_1}{q_0+q_1}S_0(x)+\frac{q_0}{q_0+q_1}S_1(x)$ και οι $S_0(x)$ και $S_1(x)$ είναι μονότονες, όπως έχουμε δείξει στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Συνεπώς, η (4.38) έχει μοναδική λύση που δίνει την στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου σε αυτήν την περίπτωση.

Στην περίπτωση II, μια στρατηγική κατωφλίου x_* είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, αν και μόνο αν $\mathcal{U}^{(ao)}(x;x_*)\geq 0$, για $0\leq x<x_*$, και $\mathcal{U}^{(ao)}(x_*;x_*)\leq 0$. Αυτές οι συνθήκες είναι ισοδύναμες με τις

$$\frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x-\frac{q_1\mu_0(\lambda-\mu_0)+q_0\mu_1(\lambda-\mu_1)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x}\right)\leq\frac{R}{C},\quad 0\leq x<x_* \tag{4.41}$$

$$\frac{q_0+q_1}{q_0\mu_1+q_1\mu_0}x_*-\frac{q_0\mu_1(\mu_0-\mu_1)}{(q_0\mu_1+q_1\mu_0)^2}\left(1-e^{-\left(\frac{q_0}{\mu_0}+\frac{q_1}{\mu_1}\right)x_*}\right)\geq\frac{R}{C}. \tag{4.42}$$

Λόγω της μονοτονίας των αριστερών μελών των (4.41) και (4.42) (τα οποία είναι ίσα με $\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1-\mu_0}S_0(x)+\frac{\lambda-\mu_0}{\mu_1-\mu_0}S_1(x)$ και $\frac{q_1}{q_0+q_1}S_0(x_*)+\frac{q_0}{q_0+q_1}S_1(x_*)$ αντίστοιχα), μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο ότι οι σχέσεις ισχύουν αν και μόνο αν το x_* ανήκει στο $[x_{eL},x_{eU}]$, όπου οι x_{eL}, x_{eL} είναι οι μοναδικές λύσεις των εξισώσεων (4.39) και (4.40).

Στην περίπτωση III, κάθε στρατηγική κατωφλίου $x_e>0$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Πράγματι, οποιαδήποτε από αυτές τις στρατηγικές κι αν ακολουθούν οι πελάτες, ένας συγκεκριμένος πελάτης θέλει να χρησιμοποιήσει την ίδια στρατηγική, καθώς πάντα παρατηρεί ποσότητα ρευστού ίση με 0 και είναι πρόθυμος να εισέλθει αφού $\mathcal{U}^{(ao)}(0;x_*)=R-S^{(ao)}(0;x_*)=R>0$. ∎

Μπορούμε ακόμη να υπολογίσουμε τη συνάρτηση του αναμενόμενου κοινωνικού κέρδους ανά χρονική μονάδα, $\mathcal{B}^{(ao)}(x_*)$, όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική κατωφλίου x_*, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3.2 και τη σχέση $\mathcal{B}^{(ao)}(x_*)=\mathcal{B}^{(fo)}(x_*,x_*)$. Παρόλο που οι τύποι είναι πιο απλοί από την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση, πάλι είναι πολύ δύσκολο να λυθούν για να προσδιοριστεί η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική σε κλειστή μορφή.

Βιβλιογραφία

[1] Adan, I. J. B. F., and Kulkarni, V. G. (2003) Single-server queue with Markov-dependent inter-arrival and service times. *Queueing Systems* **45**, 113-134.

[2] Altman, E. and Hassin, R. (2002) Non-threshold equilibrium for customers joining an M/G/1 queue. In *Proceedings of the 10th International Symposium on Dynamic Games, Saint-Petersburg, Russia.*

[3] Anick, D., Mitra, D. and Sondhi, M.M. (1982) Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources. *The Bell System Technical Journal* **61**, 1871-1894.

[4] Asmussen, S. (1995) Stationary distributions for fluid flow models with or without Brownian noise. *Communications in Statistics, Stochastic Models* **11**, 21-49.

[5] Armony, M., Shimkin, N. and Whitt, W. (2009) The impact of delay announcements in many-server queues with abandonment. *Operations Research* **57**, 66-81.

[6] Artalejo, J.R. and Gomez-Corral, A. (1998) Analysis of a stochastic clearing system with repeated attempts. *Communications in Statistics - Stochastic Models* **14**, 623-645.

[7] Boxma, O. J. and Kurkova, I. A. (2001) The M/G/ 1 queue with two service speeds. *Advances in Applied Probability* **33**, 520-540.

[8] Braun, M. (1983) *Differential Equations and Their Applications, 3rd. Edition.* Springer-Verlag, New York.

[9] Burnetas, A. and Economou, A. (2007) Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. *Queueing Systems* **56**, 213-228.

[10] Cohen, J.W. (1957) Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunications Review* **18**, 49-100.

[11] Collings, T. and Stoneman, C. (1976) The $M/M/\infty$ queue with varying arrival and service rates. *Operations Research* **24**, 760-773.

[12] Cooper, R.B. (1981) *Introduction to Queueing Theory.* Edward Arnold, London.

[13] Cordeiro, J. D. and Kharoufeh, J. P. (2012) The unreliable M/M/1 retrial queue in a random environment. *Stochastic Models* **28**, 29-48.

[14] Dimitrakopoulos, Y. and Burnetas, A. (2011) Customer equilibrium and optimal strategies in an $M/M/1$ queue with dynamic service control. Preprint available at http://arxiv.org/abs/1112.1372.

[15] Economou, A. (2003) On the control of a compound immigration process through total catastrophes. *European Journal of Operational Research* **147**, 522-529.

[16] Economou, A. and Fakinos, D. (2003) A continuous-time Markov chain under the influence of a regulating point process and applications in stochastic models with catastrophes. *European Journal of Operational Research* **149**, 625-640.

[17] Economou, A. and Fakinos, D. (2008) Alternative approaches for the transient analysis of Markov chains with catastrophes. *Journal of Statistical Theory and Practice* **2**, 183-197.

[18] Economou, A., Gomez-Corral, A. and Kanta, S. (2011) Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times. *Performance Evaluation* **68** 967-982.

[19] Economou, A. and Kanta, S. (2008a) Optimal balking strategies and pricing for the single server Markovian queue with compartmented waiting space. *Queueing Systems* **59**, 237-269.

[20] Economou, A. and Kanta, S. (2008b) Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs. *Operations Research Letters* **36**, 696-699.

[21] Economou, A. and Manou, A. (2012) Equilibrium balking strategies for a clearing queueing system in alternating environment. *Annals of Operations Research* **208**, 489-514.

[22] Edelson, N.M. and Hildebrand, K. (1975) Congestion tolls for Poisson queueing processes. *Econometrica* **43**, 81-92.

[23] Erlang, A.K. (1909) Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *P. O. Electrical Engineers' Journal* **10**, 189-197.

[24] Gani, J. and Swift, R.J. (2007) Death and birth-death and immigration processes with catastrophes. *Journal of Statistical Theory and Practice* **1**, 39-48.

[25] Gautam, N., Kulkarni, V. G., Rolski, T. and Palmowski, Z. (1999) Bounds for fluid models driven by semi-Markov inputs. *Probability in Engineering and Informational Sciences* **13**, 429-475.

[26] Guo, P. and Li, Q. (2013) Strategic behavior and social optimization in partially-observable Markovian vacation queues. *Operations Research Letters* **41**, 277-284.

[27] Guo, P. and Hassin, R. (2011) Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues. *Operations Research* **59**, 986-997.

[28] Guo, P. and Hassin, R. (2012) Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues: the case of heterogeneous customers. *European Journal of Operational Research* **222**, 278-286.

[29] Guo, P. and Zipkin, P. (2007) Analysis and comparison of queues with different levels of delay information. *Management Science* **53**, 962-970.

[30] Guo, P. and Zhang, Z.G. (2013) Strategic queueing behavior and its impact on system performance in service systems with the congestion-based staffing policy. *Manufacturing and Service Operations Management* **15**, 118-131.

[31] Haight, F. (1958) An investigation of queue stability with special reference to the traffic intensity. *Ph.D. dissertation, University of New Zealand.*

[32] Hassin, R. (1986) Consumer information in markets with random products quality: The case of queues with balking. *Econometrica* **54**, 1185-1195.

[33] Hassin, R. (2007) Information and uncertainty in a queuing system. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **21**, 361-380.

[34] Hassin, R. and Haviv, M. (1997) Equilibrium threshold strategies: the case of queues with priorities. *Operations Research* **45**, 966-973.

[35] Hassin, R. and Haviv, M. (2002) Nash equilibrium and subgame perfection in observable queues. *Annals of Operations Research* **113**, 15-26.

[36] Hassin, R. and Haviv, M. (2003) *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[37] Haviv, M. and Kerner, Y. (2007) On balking from an empty queue. *Queueing Systems: Theory and Applications* **55**, 239-249.

[38] Jagannathan, K., Menache, I., Modiano, E. and Zussman, G. (2011) Non-cooperative spectrum access - The dedicated vs. free spectrum choice. In *Proceedings of the International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc'11)* Article No. 10.

[39] Karandikar, R.L. and Kulkarni, V.G. (1995) Second-order fluid models: Reflected Brownian motion in a random environment. *Operations Research* **43**, 77-88.

[40] Kendall, D. G. (1953) Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the embedded Markov chain. *Annals of Mathematical Statistics* **24**, 338-339.

[41] Kerner, Y. (2008) The conditional distribution of the residual service time in the $M_n/G/1$ queue. *Stochastic Models* **24**, 364-375.

[42] Kerner, Y. (2011) Equilibrium joining probabilities for an $M/G/1$ queue. *Games and Economic Behavior* **71**, 521-526.

[43] Kim, K. and Seila, A.F. (1993) A generalized cost model for stochastic clearing systems. *Computers and Operations Research* **20**, 67-82.

[44] Kosten, L. (1974a) Stochastic theory of multi-entry buffer, part 1. *Delft Progress Report, Series F* **1**, 10-18.

[45] Kosten, L. (1974b) Stochastic theory of multi-entry buffer, part 2. *Delft Progress Report, Series F* **1**, 44-55.

[46] Kosten, L. and Vrieze, O.J. (1975) Stochastic theory of multi-entry buffer, part 3. *Delft Progress Report, Series F* **1**, 103-115.

[47] Kulkarni, V.G. (1997) Fluid models for single buffer systems. In *Frontiers in Queueing. Models and Applications in Science and Engineering* edited by J.H. Dshalalow, p. 321-338, CRC Press.

[48] Kulkarni, V.G. and Rolski, T. (1994) Fluid model driven by an Orstein-Uhlenbeck process. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **8**, 403-417.

[49] Kulkarni, V. and Yan, K. (2012) Production-inventory systems in stochastic environment and stochastic lead times. *Queueing Systems* **70**, 207-231.

[50] Kyriakidis, E.G. (1994) Stationary probabilities for a simple immigration-birth-death process under the influence of total catastrophes. *Statistics and Probability Letters* **20**, 239-240.

[51] Kyriakidis, E.G. (1999a) Optimal control of a truncated general immigration process through total catastrophes. *Journal of Applied Probability* **36**, 461-472.

[52] Kyriakidis, E.G. (1999b) Characterization of the optimal policy for the control of a simple immigration process through total catastrophes. *Operations Research Letters* **24**, 245-248.

[53] Kyriakidis, E.G. and Dimitrakos, T.D. (2005) Computation of the optimal policy for the control of a compound immigration process through total catastrophes. *Methodology and Computing in Applied Probability* **7**, 97-118.

[54] Latouche, G. and Ramaswami, V. (1999) *Introduction to Matrix-Analytic Methods in Stochastic Modeling.* ASA- SIAM Series on Statistics and Applied Probability. American Statistical Association and the Society for Industrial and Applied Mathematics, Alexandria, VA and Philadelphia, PA.

[55] Little, J.D.C. (1961) A proof for the queueing formula $L = \lambda W$. *Operations Research* **9**, 383-387.

[56] Liu, W., Ma, Y. and Li, J. (2012) Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems under single vacation policy. *Applied Mathematical Modelling* **12**, 6186-6202.

[57] Naor, P. (1969) The regulation of queue size by levying tolls. *Econometrica* **37**, 15-24.

[58] Neuts, M. F. (1971) A queue subject to extraneous phase changes. *Advances in Applied Probability* **3**, 78-119.

[59] Neuts, M.F. (1978) The M / M / 1 queue with randomly varying arrival and service rates. *OPSEARCH* **15**, 139-157.

[60] Neuts, M.F. (1978) Further results on the M / M / 1 queue with randomly varying rates. *OPSEARCH* **15**, 158-168.

[61] Neuts, M.F. (1999) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach.* Dover Publications, Inc.: New York.

[62] O'Cinneide, C. A. and Purdue, P. (1986) The $M/M/\infty$ queue in a random environment. *Journal of Applied Probability* **23**, 175-184.

[63] Palm, C. (1938) Analysis of the Erlang traffic formulae for busy-signal arrangements. *Ericsson Technics* **6**, 39-58.

[64] Perel, N. and Yechiali, U. (2010) Queues with slow servers and impatient customers. *European Journal of Operational Research* **201**, 247-258.

[65] Rajagopal, S., Kulkarni, V.G. and Stidham, S. Jr. (1995) Optimal flow control of a stochastic fluid-flow system. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* **13**, 1219-1228.

[66] Schwartz, M. (1996) *Broadband Integrated Networks.* Prentice-Hall.

[67] Serfozo, R. and Stidham, S. (1978) Semi-stationary clearing processes. *Stochastic Processes and their Applications* **6**, 165-178.

[68] Shaked, M. and Shanthikumar, G.J. (2007) *Stochastic Orders.* Springer, New York.

[69] Stidham, S.Jr. (1974) Stochastic clearing systems. *Stochastic Processes and their Applications* **2**, 85-113.

[70] Stidham, S.Jr. (1977) Cost models for stochastic clearing systems. *Operations Research* **25**, 100-127.

[71] Stidham, S.Jr. (2009) *Optimal Design of Queueing Systems.* CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton.

[72] Stirzaker, D. (2006) Processes with catastrophes. *Mathematical Scientist* **31**, 107-118.

[73] Stirzaker, D. (2007) Processes with random regulation. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **21**, 1-17.

[74] Sun, W., Guo, P. and Tian, N. (2010) Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times. *Central European Journal of Operations Research* **18**, 241-268.

[75] Takagi, H. (1991) *Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation, Vol. I: Vacation and Priority Systems*. North-Holland.

[76] Tian, N. and Zhang, Z.G. (2006) *Vacation Queueing Models*. Springer.

[77] Tijms, H.C. (1994) *Stochastic Models: An Algorithmic Approach.* Wiley, Chichester

[78] van Doorn, E.A. and Regterschot, D.J.K. (1988) Conditional PASTA. *Operations Research Letters* **1988**, 229-232.

[79] Whitt, W. (1981) The stationary distribution of a stochastic clearing process. *Operations Research* **29**, 294-308.

[80] Whitt, W. (1986) Deciding which queue to join: Some counterexamples. *Operations Research* **34**, 55-62.

[81] Whitt, W. (1999) Improving service by informing customers about anticipated delays. *Management Science* **45**, 192-207.

[82] Wolff, R. W. (1982) Poisson arrivals see time averages. *Operations Research* **30**, 223-231.

[83] Yang, W.S., Kim, J.D. and Chae, K.C. (2002) Analysis of M/G/1 stochastic clearing systems. *Stochastic Analysis and Applications* **20**, 1083-1100.

[84] Yechiali, U. and Naor, P. (1971) Queueing problems with heterogeneous arrivals and service. *Operations Research* **19**, 722-734.

[85] Yechiali, U. (1973) A queueing-type birth-and-death process defined on a continuous-time Markov chain. *Operations Research* **21**, 604-609.

[86] Zhang, F. and Wang, J. (2010) Equilibrium analysis of the observable queue with balking and delayed repairs. *3rd International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization, CSO 2010: Theoretical Development and Engineering Practice 2*, art. no. 5533079, 125-129.

[87] Zhang, F., Wang, J. and Liu, B. (2013) Equilibrium balking strategies in Markovian queues with working vacations. *Applied Mathematical Modelling* **37**, 8264-8282.