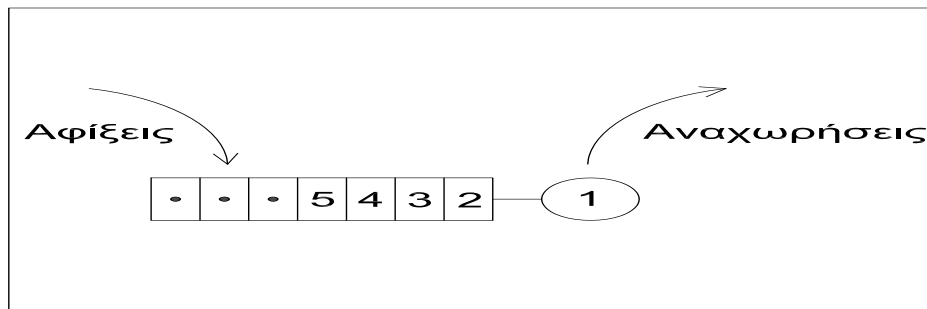




Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας

Η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας σε ουρές με ομαδικές αφίξεις και μελέτη μοντέλων γεωμετρικών εγκαταλείψεων σε ουρές με απουσίες του υπηρέτη

Σπύρος Δήμου



Αθήνα, 2012

Η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας σε M/G/k ουρές με
ομαδικές αφίξεις και μελέτη μοντέλων γεωμετρικών
εγκαταλείψεων σε ουρές με απουσίες του υπηρέτη

Σπύρος Δήμου

Διδακτορική Διατριβή

**Στα αγαπημένα μου παιδιά,
ο κόπτος και η αγωνία μου αφιέρωμα**

Με την ολοκλήρωση της διατριβής αυτής θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της καρδιάς μου τον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Αντώνη Οικονόμου που στάθηκε σε όλη την πορεία της έρευνας δίπλα μου. Η συνεχής ενθάρρυνση και παρότρυνση καθώς και η πολύπλευρη αντιμετώπιση των μαθηματικών προβλημάτων, αποτέλεσαν έμπνευση και οδηγό κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Ακόμη θα ήθελα να τον ευχαριστήσω ειλικρινά γιατί παρόλες τις δικές του υποχρεώσεις, πάντοτε έβρισκε άπλετο χρόνο να ασχοληθεί με τη δική μου εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δημήτρη Φακίνο, που μου έδωσε την ευκαιρία να πραγματοποιήσω το όνειρο μου και που με την πολυετή εμπειρία του υπήρξε οδηγός και αρωγός στο ξεκίνημα της προσωπικής μου προσπάθειας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους. Συγκεκριμένα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Χ. Παπαγεωργίου και κ. Α. Μπουρνέτα, τον Καθηγητή του Τμήματος Πληροφορικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Ε. Μαγείρου, τον Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης κ. Γ. Τσακλίδη, καθώς και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Κ. Μηλολιδάκη. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών και ιδιαίτερα τα μέλη του Τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας για την εκπαίδευση που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- την Περιφερειακή Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Μακεδονίας για την εκπαιδευτική άδεια με αποδοχές που μου χορήγησε για τέσσερα συνεχή χρόνια. Χωρίς αυτή, δεν θα μπορούσα να συνεχίσω και ολοκληρώσω την ερευνητική μου προσπάθεια.

- το Α.Τ.Ε.Ι. Δυτικής Μακεδονίας, Παράρτημα Καστοριάς, για τη φιλοξενία που μου παρείχε σε ένα από τα γραφεία συνεργατών. Πολλές ώρες μελέτης πραγματοποιήθηκαν σε αυτό τα τέσσερα προηγούμενα χρόνια.

- τη Βάσω, για την καταλυτική της μεσολάβηση την άνοιξη του 2006.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ τη σύζυγό μου Ευγενία και το γιο μου Παναγιώτη για την αγάπη τους. Η παρουσία τους και μόνο ήταν το απαραίτητο κίνητρο να συνεχίσω την προσπάθειά μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Εισαγωγικά στοιχεία	1
1.2	Η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας	5
1.3	Μοντέλα με απουσίες του υπηρέτη και εγκαταλείψεις πελατών	8
1.4	Επισκόπηση της διατριβής	11
I	Η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας σε ουρές με ομαδικές αφίξεις	17
2	Στάσιμα αποτελέσματα για την M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις	19
2.1	Εισαγωγή	20
2.2	Η M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και την πολιτική της μερικής αποδοχής πελατών	22
2.3	Αλγόριθμος υπολογισμού της στάσιμης κατανομής	33
2.4	Η M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και την πολιτική "όλοι ή κανένας" αποδοχής πελατών	39
2.5	Παραδείγματα της M/G/k/k ουράς με την "όλοι ή κανένας" πολιτική	47
3	Μία M/G/· ουρά με ομαδικές αφίξεις, απώλειες πελατών και επαναπροσπάθειες	53
3.1	Εισαγωγή-Το μοντέλο	53
3.2	Τα βασικά αποτελέσματα	57

3.3 Ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής σε μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπάθειες	72
3.4 Μία ειδική περίπτωση - Παραδείγματα	79
3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα	86
II Μοντέλα γεωμετρικών εγκαταλείψεων σε ουρές με απουσίες του υπηρέτη	95
4 Γεωμετρικές εγκαταλείψεις σε μία ουρά με απουσίες του υπηρέτη	97
4.1 Εισαγωγή	97
4.2 Περιγραφή του μοντέλου	101
4.3 Στάσιμη κατανομή	105
4.4 Χρόνος παραμονής	110
4.4.1 Η περίπτωση EAAF	111
4.4.2 Η περίπτωση LAAF	116
4.5 Περίοδος συνεχούς λειτουργίας	122
4.5.1 Κατανομή του χρόνου συνεχούς λειτουργίας	122
4.5.2 Ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας	127
4.5.3 Η κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας	132
4.6 Αριθμητικά αποτελέσματα	137
5 Γεωμετρικές εγκαταλείψεις σε μία ουρά με καταστροφές του υπηρέτη	143
5.1 Εισαγωγή	144
5.2 Περιγραφή του μοντέλου	147
5.3 Στάσιμη κατανομή	150
5.4 Χρόνος παραμονής	157
5.4.1 Η περίπτωση EAAF	158
5.4.2 Η περίπτωση LAAF	164
5.5 Περίοδος συνεχούς λειτουργίας	169
5.5.1 Κατανομή του χρόνου συνεχούς λειτουργίας	169

5.5.2	Ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας	172
5.5.3	Η κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας	174
6	Παράρτημα	179
	Βιβλιογραφία	189

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Το θέμα αυτής της διδακτορικής διατριβής είναι η μελέτη, ανάλυση και ο υπολογισμός διαφόρων μέτρων λειτουργικότητας συγκεκριμένων συστημάτων εξυπηρέτησης (ουρών αναμονής) με εφαρμογές σε τομείς όπως συστήματα επικοινωνιών, παραγωγής κ.α.. Η ανάπτυξη της θεωρίας συστημάτων εξυπηρέτησης ή θεωρίας ουρών αρχίζει ουσιαστικά από το Δανό μαθηματικό A.K. Erlang στις αρχές του 20ου αιώνα, ο οποίος πρώτος εισήγαγε στοχαστικά μοντέλα σε προβλήματα σχετικά με τις τηλεπικοινωνίες της πατρίδας του. Ο κλάδος όμως των ουρών αρχίζει να αναπτύσσεται με γοργούς ρυθμούς μόνο τις τελευταίες έξι δεκαετίες.

Μία σύντομη γενική περιγραφή των συστημάτων εξυπηρέτησης είναι η ακόλουθη. Θεωρούμε μία ακολουθία πελατών που φθάνουν σε ένα σύστημα το οποίο παρέχει κάποιου είδους εξυπηρέτηση μέσω ενός ή περισσότερων υπηρετών και έστω C_j ο j -οστός πελάτης που φθάνει στο σύστημα. Οι βασικές τυχαίες μεταβλητές που συνδέονται με τον C_j είναι οι ακόλουθες.

t_j : η χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_j με $t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots < \infty$,

$T_j = t_{j+1} - t_j$: ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των αφίξεων των πελατών C_{j+1} και C_j ,

X_j : η χρονική διάρκεια της εξυπηρέτησης του C_j δηλαδή ο χρόνος που ξοδεύει ο

C_j στον χώρο εξυπηρέτησης,

D_j : ο χρόνος αναμονής του C_j , δηλαδή ο χρόνος από την άφιξή του στο σύστημα μέχρι την έναρξη της εξυπηρέτησής του,

$S_j = D_j + X_j$: ο χρόνος παραμονής του C_j στο σύστημα, δηλαδή ο χρόνος από την άφιξή του στο σύστημα μέχρι την αναχώρησή του από αυτό,

$\tau_j = t_j + S_j$: η στιγμή αναχώρησης του C_j από το σύστημα.

Για την ακριβή περιγραφή ενός συστήματος εξυπηρέτησης χρειάζεται να παραθέσουμε τα ακόλουθα βασικά στοιχεία:

Η διαδικασία αφίξεων $\{t_j\}$. Μπορεί να είναι μία οποιαδήποτε σημειακή διαδικασία. Αναφέρεται στις αφίξεις πελατών - μονάδων στο σύστημα και περιγράφει την κατανομή και τις πιθανές συσχετίσεις που παρουσιάζουν οι διαδοχικοί ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων $\{T_j\}$. Η πιο συχνή διαδικασία αφίξεων είναι η διαδικασία Poisson (M) που είναι το κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για συστήματα όπου το πλήθος των δυνητικών πελατών είναι μεγάλο και κάθε πελάτης τα χρησιμοποιεί σε αραιά χρονικά διαστήματα και ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Άλλες διαδικασίες αφίξεων είναι η σταθερή διαδικασία αφίξεων (D) και η διαδικασία γενικών ανεξάρτητων αφίξεων (GI).

Ο Μηχανισμός εξυπηρέτησης. Καθορίζεται από την κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας των χρόνων εξυπηρέτησης $\{X_j\}$ καθώς και από τον αριθμό και τον τρόπο λειτουργίας των υπηρετών (ομογενείς ή ετερογενείς υπηρετές, ταχύτητα με την οποία εξυπηρετούν). Χρησιμοποιούμε το σύμβολο (G) όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης των διαδοχικών πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γενική κατανομή. Ειδικές περιπτώσεις είναι όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί (M), σταθεροί (D) ή r-Erlang (E_r).

Χωρητικότητα συστήματος. Αφορά στο μέγιστο πλήθος πελατών που μπορούν να βρίσκονται μέσα στο σύστημα συγχρόνως.

Πειθαρχία ουράς. Είναι ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο οι υπηρετές επιλέγουν τους πελάτες που βρίσκονται στον χώρο αναμονής για να εξυπηρετηθούν. Οι

συνήθεις πειθαρχίες ουράς είναι η “First-Come, First-Served” (FCFS), η “Last-Come, First-Served” (LCFS), και η “Service In Random Order” (SIRO). Υπάρχουν πολλές άλλες πειθαρχίες που έχουν εισαχθεί για την καλύτερη λειτουργία υπολογιστών και συστημάτων επικοινωνιών.

Επίσης, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τη συμπεριφορά των πελατών στο σύστημα, όπως οι αποχωρήσεις (balking), οι υπαναχωρήσεις (reneging) και οι μεταπηδήσεις (jockeying), οι οποίοι θα πρέπει να περιγράφονται αναλυτικά για την ακρίβεια της μαθηματικής αναπαράστασης ενός μοντέλου. Για την ταξινόμηση των μεμονωμένων συστημάτων εξυπηρέτησης χρησιμοποιείται ο συμβολισμός του Kendal, $A/B/k/c$ (): διαδικασία αφίξεων/χρόνοι εξυπηρέτησης/πλήθος υπηρετών/χωρητικότητα (πειθαρχία). Για παράδειγμα,

$M/M/1$: Poisson διαδικασία αφίξεων, εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης, ένας υπηρετής, απεριόριστος (άπειρος) χώρος αναμονής,

$M/G/k/k$: Poisson διαδικασία αφίξεων, γενικοί χρόνοι εξυπηρέτησης, k υπηρετές, χωρητικότητα συστήματος k ή ισοδύναμα καθόλου χώρος αναμονής.

Οι παραπάνω συμβολικές αναπαραστάσεις τροποποιούνται όταν εμπλέκονται και άλλοι παράγοντες.

Κατά την μελέτη ενός συστήματος εξυπηρέτησης ενδιαφερόμαστε συνήθως για ορισμένες στοχαστικές διαδικασίες που είναι οι ακόλουθες:

Η διαδικασία του πλήθους πελατών (μήκος ουράς). Έστω $Q(t)$: το πλήθος των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t , $t > 0$. Τότε η διαδικασία $\{Q(t)\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως διαδικασία του μήκους ουράς και ο προσδιορισμός της οριακής της κατανομής αποτελεί συχνά τον πρωταρχικό στόχο κατά την μελέτη τέτοιων συστημάτων.

Οι διαδικασίες των χρόνων παραμονής και αναμονής. Πρόκειται για τις στοχαστικές διαδικασίες $\{S_j\}$, $\{D_j\}$ αντίστοιχα, οι οποίες καταγράφουν τους διαδοχικούς χρόνους παραμονής και αναμονής στο σύστημα μίας ακολουθίας πελατών και

αποτελούν στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου και συνεχούς χώρου καταστάσεων.

Η διαδικασία των περιόδων συνεχούς λειτουργίας. Μια περίοδος συνεχούς λειτουργίας ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται από τη στιγμή που φτάνει ένας πελάτης σε κενό σύστημα μέχρις ότου αδειάσει το σύστημα για πρώτη φορά. Αν συμβολίσουμε Γ_n , τη n -οστή περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, τότε η $\{\Gamma_n\}$ αποτελεί την προαναφερθείσα στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου και συνεχούς χώρου καταστάσεων.

Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μια στοχαστική διαδικασία καταλήγει σε *στασιμότητα*, με την έννοια ότι η οριακή κατανομή της (*κατανομή ισορροπίας* ή *στάσιμη κατανομή*) είναι γνήσια κατανομή, ανεξάρτητη του χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε με Q , S , D και Γ τις οριακές τυχαίες μεταβλητές των προηγούμενων στοχαστικών διαδικασιών, η κατανομή των οποίων αποτελεί την αντίστοιχη οριακή κατανομή. Το πιο σημαντικό γενικό αποτέλεσμα στα μεμονωμένα συστήματα εξυπηρέτησης είναι το Θεώρημα του Little, $E(Q) = \lambda E(S)$ (δες Little(1961)), όπου λ ο ρυθμός αφίξεων πελατών. Να σημειωθεί ότι το θεώρημα ισχύει χωρίς καμιά ιδιαίτερη συνθήκη για τις διαδικασίες $\{t_j\}$, $\{S_j\}$ με την προϋπόθεση ότι εξασφαλίζεται η ύπαρξη των οριακών κατανομών των τυχαίων μεταβλητών Q , S .

Στα συστήματα εξυπηρέτησης, εκτός από την κατανομή του αριθμού των πελατών ($\{p_n\}$) σε μία αυθαίρετη χρονική στιγμή στο μέλλον που το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας (οριακή κατανομή), ενδιαφερόμαστε για την κατανομή του αριθμού των πελατών μόλις πριν από διαδοχικές αφίξεις ($\{r_n\}$) καθώς και για την κατανομή του αριθμού των πελατών αμέσως μετά από διαδοχικές αναχωρήσεις ($\{d_n\}$). Στα συστήματα με μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις ισχύει ότι $r_n = d_n$ (δες Wolff(1989) και Fakinos(1991) για πιο γενικά συστήματα). Γενικά, η κατανομή $\{p_n\}$ δεν συμπίπτει με αυτές. Όταν όμως η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson, τότε ισχύει η ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) δηλαδή $p_n = r_n$ (δες Wolff(1982)).

1.2 Η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας

Ένα από τα πρώτα μοντέλα που μελετήθηκαν είναι η $M/M/1$ ουρά. Για αυτήν οι εξισώσεις ισορροπίας είναι πολύ απλές και η οριακή κατανομή του μήκους ουράς υπολογίζεται μέσω αναδρομικών επιχειρημάτων. Η εισαγωγή της τεχνικής των πιθανογεννητριών συναρτήσεων σε διάφορες παραλλαγές/τροποποιήσεις της $M/M/1$ ουράς έχει αποδειχθεί ότι παρέχει μια πολύ ισχυρή μέθοδο για τη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς των μοντέλων. Η προηγούμενη ουρά καθώς και τα συστήματα εξυπηρέτησης $M/M/\infty$ και $M/M/k/k$ ανήκουν στην κατηγορία των απλών Μαρκοβιανών ουρών με μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ είναι μία διαδικασία γεννήσεως-θανάτου, οπότε η οριακή της κατανομή έχει τη λεγόμενη μορφή γινομένου.

Το $M/M/\infty$ σύστημα εξυπηρέτησης έχει ως στάσιμη κατανομή την κατανομή Poisson ($\rho = \lambda/\mu$), δηλαδή

$$p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

όπου λ ο ρυθμός άφιξης πελατών στο σύστημα και $1/\mu$ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, ενώ το $M/M/k/k$ έχει ως στάσιμη κατανομή την περικομμένη κατανομή Poisson στο σύνολο $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ με παράμετρο ρ , δηλαδή

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} / \sum_{r=0}^k \frac{\rho^r}{r!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k). \quad (1.2)$$

Ειδικότερα, η στάσιμη πιθανότητα

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} / \sum_{r=0}^k \frac{\rho^r}{r!}, \quad (1.3)$$

το σύστημα να είναι πλήρες, εκφράζει και την οριακή πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα να το βρει κατειλημμένο, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συμπεριληφθεί στην ουρά.

Το εντυπωσιακό για τα $M/M/\infty$ και $M/M/k/k$ συστήματα, είναι ότι έχουν την ιδιότητα της *μη-ευαισθησίας*, δηλαδή η στάσιμη κατανομή τους δεν εξαρτάται από την μορφή των κατανομών των χρόνων εξυπηρέτησης αλλά μόνο από τους μέσους χρόνους εξυπηρέτησης. Έτσι, η οριακή κατανομή (1.1) ισχύει και για το $M/G/\infty$ σύστημα ενώ η (1.2) ισχύει και για το $M/G/k/k$ σύστημα απωλειών, ανεξάρτητα από τη μορφή της κατανομής $B(x)$ των χρόνων εξυπηρέτησης και επηρεαζόμενες μόνο από τη μέση τιμή $b = 1/\mu$, μέσω του *ρυθμού (έντασης) συνωστισμού* $\rho = \lambda/\mu$, του συστήματος. Ο Erlang (1917) είχε εικάσει τη μη-ευαισθησία του συστήματος $M/G/k/k$ έχοντας αποδείξει ότι όλα τα συστήματα $M/E_r/k/k$ με τον ίδιο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $1/\mu$ έχουν την ίδια στάσιμη κατανομή. Η απόδειξη της γενικής περίπτωσης έγινε αργότερα από τον Sevastyanov (1957).

Ο τύπος (1.3) είναι γνωστός και ως *τύπος απωλειών του Erlang* (Erlang's loss formula). Κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα αυτός ο τύπος χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από την κοινότητα των τηλεπικοινωνιών, καθώς αποδείχθηκε πολύ χρήσιμος στην πρόβλεψη της πιθανότητας μία αφιχθείσα κλήση σε τηλεφωνικό δίκτυο να μην είναι ικανή να βρει διαθέσιμη "γραμμή" για να εξυπηρετηθεί. Ακόμη και σήμερα, αποτελεί βασική ιδέα για έρευνα σε περισσότερο πολύπλοκα πεδία στον χώρο των τηλεπικοινωνιών (δες Taylor 2011).

Στην περίοδο μεταξύ του τέλους της δεκαετίας του 1950 και του τέλους της δεκαετίας του 1980, ένας σημαντικός αριθμός ερευνητών μελέτησε το φαινόμενο της μη-ευαισθησίας και σε άλλα συστήματα όπως σε δίκτυα ουρών αναμονής. Οι Basket et al. (1975) και Kelly (1976, 1979) έδειξαν ότι συγκεκριμένοι τύποι δικτύων ουρών έχουν την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Επειδή ένας σημαντικός αριθμός πρακτικών συστημάτων μπορούν να μοντελοποιηθούν από μη-ευαίσθητα δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης, αυτές οι εργασίες έχουν συχνά αναφερθεί σε έρευνες σχετικές με δίκτυα τηλεπικοινωνιών (δες Taylor 2011). Αργότερα οι Noetzel (1979), Jansen και König (1980) και Hordijk και van Dijk (1981, 1983) μελέτησαν νέες περιπτώσεις δικτύων εξυπηρέτησης και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες τα δίκτυα αυτά έχουν την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Δες επίσης Chao et al. (1999) και τις αναφορές αυτών.

Ο παραπάνω τύπος του Erlang έχει γενικευθεί σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις της $M/G/k/k$ ουράς με ομαδικές αφίξεις και διάφορες πειθαρχίες αποδοχής πελατών (η πειθαρχία αποδοχής πελατών καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μέλη μίας ομάδας, ή όλη η ομάδα, απορρίπτεται από το σύστημα όταν δεν μπορεί ολόκληρη να εισέλθει σε αυτό). Ειδικότερα, ο Fakinos (1982) μελέτησε την $M/G/k/k$ ουρά με ομαδικές αφίξεις υπό την "όλοι-ή-κανένας" πολιτική αποδοχής (όλη η ομάδα εισέρχεται στο σύστημα ή απορρίπτεται από αυτό) και ομαδικές αναχωρήσεις (όλη η ομάδα αναχωρεί από το σύστημα μόλις ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή της-όλοι οι πελάτες έχουν τον ίδιο χρόνο εξυπηρέτησης). Απέδειξε ότι η στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ ($n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$), του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών είναι μορφής γινομένου και μη-ευαίσθητη στη μορφή των κατανομών των χρόνων εξυπηρέτησης $B_j(x)$ των ομάδων μεγέθους j , αλλά εξαρτάται μόνο από τις αντίστοιχες μέσες τιμές b_j αυτών. Στη συνέχεια οι Fakinos και Sirakoulis (1989) μελέτησαν την $M/G/k/k$ ουρά με ομαδικές αφίξεις, ομαδικές αναχωρήσεις υπό το καθεστώς της μερικής αποδοχής πελατών (αν μία ομάδα δεν χωράει όλη στο σύστημα τότε εισέρχεται σε αυτό ο μέγιστος δυνατός αριθμός μελών από την ομάδα) και έδειξαν ότι αντίστοιχος τύπος ισχύει για τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών, με την προϋπόθεση ότι η κατανομή πιθανότητας του μεγέθους των αφικνούμενων ομάδων είναι γεωμετρική. Σε σχέση με την $M/G/k/k$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και ομαδικές αναχωρήσεις, οι Economidou και Fakinos (1999) εισήγαγαν μία γενικότερη πολιτική αποδοχής πελατών και έδωσαν μία επαρκή συνθήκη που αφορά την κατανομή πιθανότητας του μεγέθους των αφικνούμενων ομάδων, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Επιπλέον, ο Fakinos (1990) μελέτησε την $M/G/k/k$ ουρά με ομαδικές αφίξεις, που γίνονται δεκτές με το καθεστώς της μερικής αποδοχής πελατών και απέδειξε ότι εάν οι κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης των ομάδων διαφόρων μεγεθών που βρίσκονται στο σύστημα, δεν εξαρτώνται από το αρχικό τους μέγεθος αλλά μόνο από το μέγεθος που έχουν τώρα και οι πελάτες αναχωρούν μεμονωμένα, τότε η στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ ($n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$), του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών είναι επίσης μορφής γινομένου και μη-ευαίσθητη στη μορφή των κατανομών $B_j(x)$, αλλά εξαρτάται μόνο από τις αντίστοιχες μέσες τιμές b_j . Δες επίσης Falin (1996) και Sztrik (1987) για κάποιες άλλες $M/G/.$ ουρές με απώλειες πελατών και με παρό-

μοια αποτελέσματα.

Στο Α' μέρος της παρούσας διδακτορικής διατριβής θα ασχοληθούμε με $M/G/k/k$ και με $M/G/.$ συστήματα εξυπηρέτησης με απώλειες (γενικεύσεις του μοντέλου που μελέτησε ο Fakinos το 1990) στα οποία πραγματοποιούνται ομαδικές αφίξεις πελατών και κάτω από κατάλληλες συνθήκες οδηγούν σε στάσιμη κατανομή που έχει την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας.

1.3 Μοντέλα με απουσίες του υπηρέτη και εγκαταλείψεις πελατών

Μοντέλα με απουσίες του υπηρέτη έχουν σε μεγάλο βαθμό εισαχθεί στην βιβλιογραφία των ουρών αναμονής με σκοπό να μοντελοποιήσουν καταστάσεις όπου ο υπηρέτης (υπηρέτες) δεν μπορεί να εξυπηρετήσει πελάτες για κάποια χρονικά διαστήματα. Τέτοιες καταστάσεις συχνά συναντώνται σε πραγματικές εφαρμογές. Έτσι π.χ. ένας υπηρέτης μπορεί να απενεργοποιηθεί για οικονομικούς λόγους (χαμηλή ροή πελατών που εισέρχονται στο σύστημα και/ή υψηλό κόστος ετοιμότητας), να υπόκειται σε τυχαίες βλάβες ή να υποχρεώνεται σε προληπτική συντήρηση. Αρκετές εργασίες συνοψίζουν τα κύρια μοντέλα ουρών με απουσίες του υπηρέτη καθώς και τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται σε αυτά, βλέπε π.χ. Takagi (1991) και Tian and Zhang (2006). Κάποιες άλλες επεξεργάζονται ποικίλα θέματα από τις παραπάνω ουρές όπως αυτές των He και Jewkes (1995), Choudhury (1998, 2000), Bischof (2001) και Burnetas και Economou (2007). Για την περίπτωση των ουρών με πολλούς υπηρέτες η αντίστοιχη βιβλιογραφία είναι λιγότερο εκτεταμένη, δες π.χ. Borthakur και Choudhury (1999), Artalejo και Lopez-Herrero (2003) και Artalejo, Economou και Lopez-Herrero (2005).

Θα αναφερόμαστε στα μοντέλα στα οποία ο υπηρέτης για κάποια χρονική περίοδο δεν είναι διαθέσιμος ως μοντέλα με απουσίες του υπηρέτη (server vacation models). Τυπικά, μια περίοδος απουσίας του υπηρέτη ξεκινάει αμέσως μόλις αδειάσει το σύστημα (είτε λόγω εξυπηρέτησης όλων των πελατών που ήταν σε αναμονή

μετά από μια περίοδο συνεχούς λειτουργίας, είτε λόγω κάποιας καταστροφής που συμβαίνει στο σύστημα). Αναφερόμαστε στους χρόνους κατά τους οποίους ο υπηρέτης είναι απών, ως περίοδοι απουσίας του υπηρέτη. Μια περίοδος απουσίας συνήθως τελειώνει με την εισαγωγή κάποιας συνθήκης η οποία εξαρτάται από τη διαδικασία αφίξεων κατά τη διάρκεια της περιόδου απουσίας του υπηρέτη. Για παράδειγμα, σε κάποιες περιπτώσεις είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο υπηρέτης λείπει για πολλαπλές περιόδους, όσο το σύστημα παραμένει κενό, ενώ σε κάποιες άλλες περιπτώσεις είναι ρεαλιστικότερο να υποθέσουμε ότι ο υπηρέτης λείπει μόνο για μια περίοδο και επιστρέφοντας μένει στο σύστημα έτοιμος να παρέχει εξυπηρέτηση, ακόμα και όταν δεν υπάρχουν πελάτες σε αναμονή. Σε άλλα συστήματα οι απουσίες του υπηρέτη οφείλονται σε τυχαίες βλάβες (random failures) του συστήματος, σε άλλα διότι οι υπηρέτες εναλλάσσονται μεταξύ λειτουργίας και αργίας (servers with on-off periods), ενώ σε άλλα οι υπηρέτες υπόκεινται σε βλάβες και επισκευές (servers with failures and repairs).

Η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με ανυπόμονους πελάτες που εγκαταλείπουν πρόωρα το σύστημα, ξεκινά από την πρωτοποριακή εργασία του Palm (1953, 1957) ο οποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε την M/M/c ουρά με ανεξάρτητους εκθετικούς χρόνους υπομονής. Αργότερα, αρκετοί συγγραφείς επέκτειναν αυτά τα αποτελέσματα αφαιρώντας εκθετικές υποθέσεις, δεσ π.χ. Daley (1965), Takacs (1974) και Baccelli et al. (1984) οι οποίοι μελέτησαν διάφορα συστήματα εξυπηρέτησης με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης και/ή γενικούς χρόνους μεταξύ των αφίξεων σε διάφορα πλαίσια ανυπόμονων πελατών, όπως επίσης και τους Boxma και de Waal (1994) που μελέτησαν την M/M/c ουρά με γενικά κατανομημένους χρόνους υπομονής. Οι εργασίες των Mandelbaum και Zeltyn (2006, 2009) συνοψίζουν τα κυριότερα υπολογιστικά αποτελέσματα για τα βασικά μοντέλα τύπου M/M/c με εγκαταλείψεις. Στις προαναφερθείσες εργασίες οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι εξαιτίας του μεγάλου χρόνου αναμονής τους στην ουρά, μολονότι η διαδικασία εξυπηρέτησης δεν διακόπτεται για κανένα λόγο.

Η μελέτη συστημάτων με υπαναχωρήσεις (εγκαταλείψεις) πελατών που οφείλονται στην απουσία του υπηρέτη είναι μια πιο πρόσφατη προσπάθεια. Όταν συμβαί-

νει αυτό λέμε ότι έχουμε ένα μοντέλο με απουσίες του υπηρέτη και υπαναχωρήσεις (server vacation model with renegeing). Παρόλο που το πλήθος των εργασιών που μελετάνε ουρές αναμονής με απουσίες του υπηρέτη είναι μεγάλο, το χαρακτηριστικό των ανυπόμονων πελατών και η σύνδεση του με τις απουσίες του υπηρέτη δεν είχαν μέχρι τελευταία προσελκύσει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Μόλις πρόσφατα οι Altman και Yechiali (2006) και ο Yechiali (2007) ασχολήθηκαν με συστήματα με απουσίες του υπηρέτη, στα οποία πηγή της ανυπομονησίας των πελατών είναι η αργία του συστήματος λόγω της απουσίας. Σε αυτές τις εργασίες οι συγγραφείς υποθέτουν ότι όταν ο υπηρέτης απουσιάζει, οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι και καθέννας από αυτούς ενεργοποιεί τον προσωπικό του χρόνο (ρολόι) υπομονής. Όταν αυτός ο χρόνος παρέλθει, ο αντίστοιχος πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι πελάτες εκτελούν *ανεξάρτητες εγκαταλείψεις*.

Οι Adan et al. (2009) και Economou και Kapodistria (2010) μελέτησαν ουρές με απουσίες του υπηρέτη όπου οι πελάτες εκτελούν *συγχρονισμένες εγκαταλείψεις*. Τα μοντέλα αυτά αναπαριστούν απομακρυσμένα συστήματα εξυπηρέτησης, στα οποία οι πελάτες περιμένουν να εμφανιστεί κάποιο μέσο μεταφοράς για να τους απομακρύνει από το σύστημα. Στην κατηγορία των μοντέλων με συγχρονισμένες εγκαταλείψεις, οι ευκαιρίες εγκατάλειψης (δηλαδή οι αφίξεις του μέσου μεταφοράς) συμβαίνουν σύμφωνα με μία προκαθορισμένη διαδικασία, συνήθως με μία διαδικασία Poisson. Σε μία τέτοια στιγμή κάθε παρών πελάτης παραμένει στο σύστημα με πιθανότητα q ή το εγκαταλείπει με πιθανότητα $p=1-q$, ανεξάρτητα από τους άλλους. Συνεπώς σε τέτοιες στιγμές, οι πελάτες επηρεάζονται *ταυτόχρονα* και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ελαττώνεται σύμφωνα με την διωνυμική κατανομή.

Παρόμοια Μαρκοβιανά και ημι-Μαρκοβιανά μοντέλα με αυτού του τύπου τις διωνυμικές μεταβάσεις έχουν μελετηθεί από τους Economou (2004), Artalejo et al. (2007), Economou και Fakinos (2008) και Economou και Kapodistria (2009).

Στόχος του Β' μέρους της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτελεί να συμπληρώσουμε τα προαναφερθέντα μοντέλα, μελετώντας την περίπτωση όπου κατά τη διάρκεια της απουσίας του υπηρέτη συμβαίνουν ταυτόχρονες-γεωμετρικές εγκατα-

λείψεις, δηλαδή ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μειώνεται σύμφωνα με τη γεωμετρική κατανομή.

1.4 Επισκόπηση της διατριβής

Η διατριβή είναι οργανωμένη σε δύο μέρη με δύο κεφάλαια σε κάθε ένα από αυτά. Στο Α' μέρος μελετάμε $M/G/k/k$ και $M/G/.$ συστήματα εξυπηρέτησης με απώλειες στα οποία πραγματοποιούνται ομαδικές αφίξεις πελατών και κάτω από κατάλληλες συνθήκες οδηγούν σε στάσιμη κατανομή που έχει την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Στο Β' μέρος μελετάμε την $M/M/1$ ουρά με απουσίες του υπηρέτη όπου κατά τη διάρκεια της απουσίας του υπηρέτη συμβαίνουν ταυτόχρονες γεωμετρικές εγκαταλείψεις, δηλαδή ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μειώνεται σύμφωνα με τη γεωμετρική κατανομή. Σε κάθε κεφάλαιο παρέχουμε τη μαθηματική περιγραφή του μοντέλου αναφέροντας τις προηγούμενες εργασίες που έχουν γίνει προς αυτή την κατεύθυνση. Στη συνέχεια μελετάμε διάφορα μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος, με βασικότερο όλων τη στάσιμη κατανομή του πλήθους των πελατών στο σύστημα (μήκος ουράς). Θεωρούμε επίσης διάφορα μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος τα οποία και υπολογίζουμε. Τέλος, όπου χρειάζεται, παραθέτουμε κατάλληλους αλγορίθμους με τους οποίους απλοποιούμε αναγκαίους υπολογισμούς. Παρακάτω δίνουμε την περιγραφή των διαφόρων κεφαλαίων.

Στο κεφάλαιο 2, θεωρούμε ένα $M/G/k/k$ σύστημα εξυπηρέτησης με ομαδικές αφίξεις. Συγκεκριμένα, ομάδες πελατών φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Τα μεγέθη των διαδοχικών ομάδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες των στιγμών άφιξης. Έστω (g_j) , $j = 1, 2, \dots$, η συνάρτηση πιθανότητας του μεγέθους ομάδας, δηλαδή g_j είναι η πιθανότητα η ομάδα να είναι μεγέθους j . Η εξυπηρέτηση παρέχεται από k όμοιους υπηρέτες καθένας από τους οποίους είναι ικανός να εξυπηρετεί ένα πελάτη σε κάθε χρονική στιγμή, ενώ ουρά στο σύστημα δεν επιτρέπεται να εμφανιστεί (δεν υπάρχει χώρος αναμονής). Επίσης υποθέτουμε δύο πολιτικές αποδοχής πελατών, την πολιτική της *μερικής αποδοχής* (*partial acceptance*) και την πολιτική *όλοι-ή-κανένας* (*all-*

or-nothing). Στην πρώτη περίπτωση, οποτεδήποτε μία ομάδα μεγέθους j βρίσκει n υπηρέτες απασχολημένους, τότε ένας αριθμός $\min(j, k-n)$ από τα μέλη της γίνονται δεκτά για εξυπηρέτηση, ενώ οι υπόλοιποι πελάτες, αν υπάρχουν, αναχωρούν από το σύστημα και δεν ξαναγυρίζουν σε αυτό (δηλαδή θεωρούνται χαμένοι). Μόλις μία ολόκληρη ομάδα ή ένα μέρος της γίνει δεκτή για εξυπηρέτηση, αρχίζει να εξυπηρετείται αμέσως από έναν ίσο αριθμό κενών υπηρετών. Στην δεύτερη περίπτωση, εάν το μέγεθος της ομάδας είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των κενών υπηρετών τότε όλη η ομάδα αναχωρεί και θεωρείται χαμένη για το σύστημα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη μπορεί να εξαρτάται τόσο από το αρχικό μέγεθος m της ομάδας του όσο και από το αντίστοιχο μέγεθος των δεκτών για εξυπηρέτηση πελατών, έστω d , όπου $m = d, d+1, d+2, \dots$. Πελάτες που ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες, υποθέτουμε ότι έχουν ανεξάρτητους χρόνους εξυπηρέτησης. Αναλυτικά, το κεφάλαιο 2 οργανώνεται ως ακολούθως: Στην παράγραφο 2.2 μελετάμε την $M/G/k/k$ ουρά κάτω από την πρώτη περίπτωση της μερικής αποδοχής πελατών, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των συμπληρωματικών μεταβλητών. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών στο σύστημα, είναι σε μορφή γινομένου και μη-ευαίσθητη στην μορφή των κατανομών $B_{jm}(x)$, όπου $B_{jm}(x)$ είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης μίας ομάδας με παρόν μέγεθος j της οποίας το αρχικό μέγεθος είναι m . Όμως οι κατανομές $B_{jm}(x)$ δεν είναι αυθαίρετες αλλά ικανοποιούν μία συγκεκριμένη συνθήκη. Στην παράγραφο 2.3 αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο για αριθμητικούς υπολογισμούς και δίνουμε κάποια βασικά μέτρα λειτουργικότητας του υπό μελέτη συστήματος. Στην παράγραφο 2.4 εξετάζουμε το προηγούμενο μοντέλο κάτω από την πολιτική αποδοχής πελατών «όλοι ή κανένας». Υποθέτουμε όμως μία ισχυρότερη συνθήκη για τις κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης, παρόμοια με εκείνη του Fakinos (1990). Σ' αυτή την περίπτωση δίνουμε μία ικανή συνθήκη για να είναι η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών μη-ευαίσθητη στη μορφή της κατανομής $B_j(x)$. Τέλος στην παράγραφο 2.5 εφαρμόζουμε αυτή την συνθήκη στις περιπτώσεις $k = 2, 3, 4$.

Στο κεφάλαιο 3 θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα εξυπηρέτησης. Ομάδες πελατών φθάνουν σ' ένα σταθμό εξυπηρέτησης σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Τα μεγέθη των διαδοχικά αφιχθέντων ομάδων είναι ανεξάρτητες και ισό-

νομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες των στιγμών άφιξης. Έστω ότι (g_m) ($m = 1, 2, \dots, J$), είναι η κατανομή πιθανότητας του μεγέθους μίας ομάδας που φθάνει στο σύστημα. Κάθε ομάδα πελατών του συστήματος με παρόν μέγεθος j και αρχικό μέγεθος m ($j = 1, 2, \dots, m, m = 1, 2, \dots, J$) θα αναφέρεται ως μία ομάδα τύπου (j, m) , όπως και στο κεφάλαιο 2. Δεν υποθέτουμε συγκεκριμένο αριθμό υπηρετών και χώρου αναμονής για το σύστημα. Όμως για κάθε δυνατή κατάσταση \underline{n} του συστήματος, συμβολίζουμε με $s(\underline{n})$ το μέγιστο αποδεκτό μέγεθος της ομάδας που μπορεί να εισέλθει σε αυτό. Θεωρούμε επίσης τον ακόλουθο μηχανισμό εισόδου στο σύστημα. Οποτεδήποτε μία ομάδα μεγέθους j φθάνει στο σύστημα και το βρίσκει στην κατάσταση \underline{n} , τότε όλη η ομάδα γίνεται αποδεκτή από το σύστημα ως τύπου (j, j) , εάν $j \leq s(\underline{n})$. Αν όμως $j > s(\underline{n})$, τότε όλη η ομάδα αναχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα $p_j^a(j, 0)$, ή $j - j'$ από τα μέλη της αναχωρούν αμέσως χωρίς να εξυπηρετηθούν και η ομάδα μετατρέπεται σε τύπου (j', j) ($j' = 1, 2, \dots, j - 1$), με πιθανότητα $p_j^a(j, j')$. Η νέα ομάδα προσπαθεί ακαριαία να εισέλθει στο σύστημα. Εάν $j' \leq s(\underline{n})$, τότε η ομάδα αυτή έγινε αποδεκτή ως τύπου (j', j) , αλλιώς όλη χάνεται με πιθανότητα $p_j^a(j', 0)$ ή γίνεται μεγέθους j'' (τύπος (j'', j)) με πιθανότητα $p_j^a(j', j'')$ ($j'' = 1, 2, \dots, j' - 1$), κ.ο.κ. Μόλις μία ομάδα αρχικού μεγέθους m γίνει αποδεκτή για εξυπηρέτηση ως ομάδα μεγέθους j (τύπου (j, m)), αρχίζει αμέσως να εξυπηρετείται σαν μία μονάδα. Διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και επιπλέον αυτοί που αντιστοιχούν σε ομάδες τύπου (j, m) είναι ισόνομα κατανομημένες με συνάρτηση κατανομής $B_{jm}(x)$ και πεπερασμένο μέσο b_{jm} ($j = 1, 2, \dots, J, m = j, j + 1, \dots, J$). Μετά τη συμπλήρωση της εξυπηρέτησης μίας ομάδας τύπου (j, m) , όλη η ομάδα αναχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα $p_m^s(j, 0)$ ή $j - j'$ από τα μέλη της αναχωρούν ενώ τα υπόλοιπα σχηματίζουν μία νέα ομάδα τύπου (j', m) με πιθανότητα $p_m^s(j, j')$ ($j' = 1, 2, \dots, j - 1$), η οποία εξυπηρετείται με κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης $B_{j'm}(x)$ κ.ο.κ.. Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως ακολούθως: Στην παράγραφο 3.2 εξάγουμε τα κυριότερα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συμπληρωματικών μεταβλητών. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών στο σύστημα είναι σε μορφή γινομένου και μη-ευαίσθητη στην μορφή των κατανομών $B_{jm}(x)$. Στην παράγραφο 3.3 αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής μίας M/G/k/k ουράς με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπά-

θεις -ειδικής περίπτωσης του μοντέλου της 3.2- ο οποίος αποτελεί γενίκευση του αλγόριθμου του θεωρήματος 2.2 του κεφαλαίου 2. Στην παράγραφο 3.4 μελετάμε μία ακόμη ειδική περίπτωση του αρχικού μοντέλου στην οποία όμως υποθέτουμε ότι $B_{jm}(x) = B_j(x)$, δηλαδή η εξυπηρέτηση μίας ομάδας πελατών εξαρτάται μόνο από το παρόν μέγεθος της ομάδας και όχι από το αρχικό της μέγεθος και δίνουμε τρία παραδείγματα εφαρμογής του μοντέλου σε M/G/k/k ουρές. Τέλος, στην παράγραφο 3.5, δίνουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης αναλυτικών αποτελεσμάτων τον οποίο εφαρμόζουμε στα παραδείγματα της 3.4 ακολουθώντας κατάλληλα αριθμητικά σενάρια.

Στο κεφάλαιο 4 θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φτάνουν μεμονωμένα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Η εξυπηρέτηση παρέχεται από έναν μόνο υπηρέτη, ο οποίος βρίσκεται σε μια από τις ακόλουθες καταστάσεις: ενεργός (on) ή ανενεργός - σε διακοπές (off). Οι πελάτες εξυπηρετούνται μεμονωμένα όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός κάτω από την FCFS πειθαρχία ουράς, ενώ δεν παρέχεται εξυπηρέτηση όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένοι με ρυθμό μ , και υποθέτουμε ότι υπάρχει απεριόριστος χώρος αναμονής. Όταν το σύστημα αδειάσει μετά από μια εξυπηρέτηση ο υπηρέτης ξεκινάει μια περίοδο διακοπών. Θεωρούμε ότι ο υπηρέτης λείπει για πολλαπλές περιόδους διακοπών, δηλαδή, αν επιστρέφοντας στο σύστημα το βρει κενό, ο υπηρέτης απομακρύνεται εκ νέου. Αν, όμως κατά την επιστροφή του βρει τουλάχιστον έναν πελάτη σε αναμονή επιστρέφει στο σύστημα και ξεκινάει να εξυπηρετεί οπότε το σύστημα λειτουργεί σαν μία τυπική M/M/1 ουρά έως ότου αδειάσει ξανά. Οι χρόνοι απουσίας του υπηρέτη (δηλαδή οι περίοδοι διακοπών του) είναι εκθετικά κατανομημένοι με ρυθμό γ . Κατά τη διάρκεια των διακοπών του υπηρέτη οι ευκαιρίες εγκατάλειψης συμβαίνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό ζ . Σε κάθε μία τέτοια στιγμή οι πελάτες εξετάζονται ένας προς έναν ακολουθιακά. Κάθε ένας από αυτούς εγκαταλείπει το σύστημα με πιθανότητα p ή παραμένει σε αυτό με πιθανότητα q , όπου $p + q = 1$. Έτσι οι πελάτες αρχίζουν με τη σειρά να εγκαταλείπουν το σύστημα έως ότου συναντήσουμε τον πρώτο πελάτη που θα παραμείνει σε αυτό ή μέχρι να εγκαταλείψουν το σύστημα όλοι οι παρόντες πελάτες. Έτσι λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε ευκαιρία εγκατάλειψης που παρουσιάζεται όταν ο υπηρέτης λείπει, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ελαττώ-

νεται σύμφωνα με την (κομμένη) γεωμετρική κατανομή. Επίσης υποθέτουμε ότι η διαδικασία αφίξεων των πελατών, η διαδικασία αφίξεων των ευκαιριών εγκατάλειψης, οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης καθώς και οι διαδοχικοί χρόνοι απουσίας του υπηρέτη είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες διαδικασίες. Στην παράγραφο 4.2 περιγράφουμε τις συνθήκες εκείνες που οδηγούν σε γεωμετρικές εγκαταλείψεις και εισάγουμε λεπτομερώς το υπό μελέτη μοντέλο. Στην παράγραφο 4.3 βρίσκουμε τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Στην παράγραφο 4.4 μελετάμε τους χρόνους παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, κάτω από δύο διαφορετικές πειθαρχίες εγκατάλειψης και βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes (LSTs) των αντίστοιχων κατανομών. Στην παράγραφο 4.5 δίνουμε αρκετά μέτρα απόδοσης του συστήματος που αναφέρονται σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας του. Στην παράγραφο 4.6 δίνουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά του μοντέλου κάτω από διαφορετικές παραμέτρους.

Στο κεφάλαιο 5 θεωρούμε μία $M/M/1$ ουρά στην οποία οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Η εξυπηρέτηση παρέχεται από έναν υπηρέτη, ο οποίος εξυπηρετεί τους πελάτες σύμφωνα με την FCFS πειθαρχία ουράς. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό μ . Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές (βλάβες) που συμβαίνουν όταν ο υπηρέτης είναι σε κατάσταση λειτουργίας, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού η . Σε μία τέτοια στιγμή αποτυχίας ο υπηρέτης απενεργοποιείται και όλοι οι παρόντες πελάτες εξαναγκάζονται να αφήσουν το σύστημα. Τότε, η διαδικασία επιδιόρθωσης του υπηρέτη αρχίζει αυτόματα. Οι χρόνοι επιδιόρθωσης είναι εκθετικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό γ . Όταν ο υπηρέτης είναι εκτός λειτουργίας -off-, η ροή νέων αφίξεων συνεχίζεται κανονικά. Όμως, εξαιτίας της βλάβης του υπηρέτη, οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι και προχωρούν σε εγκαταλείψεις σύμφωνα με τη διαδικασία του προηγούμενου κεφαλαίου. Επίσης όλες οι εμπλεκόμενες στοχαστικές διαδικασίες είναι ανεξάρτητες. Στην παράγραφο 5.2, περιγράφουμε τις συνθήκες εκείνες κάτω από τις οποίες οδηγούμαστε σε γεωμετρικές εγκαταλείψεις και εισάγουμε το μοντέλο του ενδιαφέροντός μας. Στην παράγραφο 5.3, δίνουμε την στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Στην

παράγραφο 5.4, μελετάμε τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα κάτω από δύο διαφορετικές πειθαρχίες εγκατάλειψης πελατών και βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των αντίστοιχων κατανομών. Τέλος, αρκετά μέτρα λειτουργικότητας που αναφέρονται στην περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, μελετώνται στην παράγραφο 5.5.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6, υπάρχει ένα παράρτημα στο οποίο δίνονται με αλγεβρικές λεπτομέρειες οι αποδείξεις δύο βασικών εξισώσεων του κεφαλαίου 2.

Μέρος Ι

Η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας σε ουρές με ομαδικές αφίξεις

Κεφάλαιο 2

Στάσιμα αποτελέσματα για την M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις

Θεωρούμε ένα M/G/k/k σύστημα εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες φθάνουν κατά ομάδες σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson. Λόγω της έλλειψης χώρου αναμονής ενδέχεται τα μέλη κάποιας ομάδας να μην μπορούν να εισέλθουν στο σύστημα. Μελετάμε λοιπόν δύο περιπτώσεις για την πολιτική αποδοχής των πελατών των αφικνούμενων ομάδων. Στην πρώτη, το σύστημα δουλεύει κάτω από την πολιτική *μερικής αποδοχής πελατών*. Ακριβή αποτελέσματα βρίσκονται για την στάσιμη κατανομή τα οποία επεκτείνουν προηγούμενα σχετικά αποτελέσματα. Στην δεύτερη περίπτωση, όπου το σύστημα λειτουργεί κάτω από την πολιτική αποδοχής *όλοι ή κανένας*, δίνουμε μία επαρκή συνθήκη ώστε το σύστημα να έχει στάσιμη κατανομή μορφής γινομένου καθώς και παραδείγματα για συγκεκριμένες τιμές του k .

Και στις δύο περιπτώσεις υποθέτουμε ότι οι πελάτες αναχωρούν μεμονωμένα από το σύστημα, ενώ η από κοινού κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των πελατών της ομάδας που γίνονται δεκτοί, μπορεί να εξαρτάται τόσο από το αρχικό μέγεθος της ομάδας, όσο και από τον αριθμό των τελικά δεκτών πελατών, πλέον μίας επιπρόσθετης συνθήκης η οποία περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 2.1.

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα εξυπηρέτησης. Ομάδες πελατών φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Τα μεγέθη των διαδοχικών ομάδων που φθάνουν στο σύστημα, είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες των στιγμών άφιξης. Έστω $(g_j), j = 1, 2, \dots$, η συνάρτηση πιθανότητας του μεγέθους ομάδας, δηλαδή g_j είναι η πιθανότητα η ομάδα να είναι μεγέθους j , και $q_j = \sum_{m=j}^{\infty} g_m$, είναι η πιθανότητα το αντίστοιχο μέγεθος να είναι τουλάχιστον $j, j = 1, 2, \dots$.

Η εξυπηρέτηση παρέχεται από k όμοιους υπηρέτες καθένας από τους οποίους είναι ικανός να εξυπηρετεί ένα πελάτη σε κάθε χρονική στιγμή, ενώ ουρά στο σύστημα δεν επιτρέπεται να εμφανιστεί (δεν υπάρχει χώρος αναμονής). Επίσης υποθέτουμε δύο πολιτικές αποδοχής πελατών, την πολιτική της μερικής αποδοχής και την πολιτική όλοι ή κανένας. Στην πρώτη περίπτωση, οποτεδήποτε μία αφιχθείσα ομάδα μεγέθους j βρίσκει n υπηρέτες απασχολημένους, τότε ένας αριθμός $\min(j, k - n)$ από τα μέλη της γίνονται δεκτά για εξυπηρέτηση ενώ οι υπόλοιποι πελάτες της ομάδας, αν υπάρχουν, αναχωρούν από το σύστημα και δεν ξαναγυρίζουν σε αυτό (δηλαδή θεωρούνται χαμένοι). Μόλις μία ολόκληρη ομάδα ή ένα μέρος αυτής γίνει δεκτή για εξυπηρέτηση, αρχίζει να εξυπηρετείται αμέσως από έναν ίσο αριθμό ελεύθερων υπηρέτων. Στην δεύτερη περίπτωση, εάν ο αριθμός της ομάδας είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των ελεύθερων υπηρέτων τότε όλη η ομάδα αναχωρεί και θεωρείται χαμένη για το σύστημα.

Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη μπορεί να εξαρτάται τόσο από το αρχικό μέγεθος m της ομάδας του όσο και από το αντίστοιχο μέγεθος των δεκτών για εξυπηρέτηση πελατών, έστω d , όπου $m = d, d+1, d+2, \dots$. Συμβολίζουμε $F_{dm}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ την από κοινού συνάρτηση κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης d πελατών που έγιναν ταυτόχρονα δεκτοί για εξυπηρέτηση και προέρχονται από μία ομάδα που φθάνοντας στο σύστημα είχε μέγεθος m . Όμως πελάτες που ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες, υποθέτουμε ότι έχουν ανεξάρτητους χρόνους εξυπηρέτησης.

Το παραπάνω σύστημα εξυπηρέτησης καλείται M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις με την πολιτική της μερικής αποδοχής πελατών. Ο όρος «ομαδικές αφίξεις» παραλείπεται όταν $g_1 = 1$, δηλαδή όταν οι πελάτες φθάνουν μεμονωμένα. Η M/G/k/k ουρά καθώς και πολλές παραλλαγές αυτής έχει μελετηθεί εκτενώς. Γι' αυτό το σύστημα είναι γνωστό ότι η στάσιμη (οριακή) κατανομή (p_n) , $n = 0, 1, 2, \dots, k$, του αριθμού των απασχολημένων υπηρετών δεν εξαρτάται από τη μορφή της κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης $B(x)$ αλλά επηρεάζεται μόνο από την μέση τιμή αυτών b (ιδιότητα της μη-ευαισθησίας), μέσω του ρυθμού (έντασης) συνωστισμού $\rho = \lambda b$ του συστήματος. Συγκεκριμένα αυτή είναι μια Poisson κατανομή με παράμετρο ρ , κομμένη στο k , δηλαδή

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} / \sum_{r=0}^k \frac{\rho^r}{r!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k),$$

σχέση η οποία είναι γνωστή ως τύπος του Erlang. Για έρευνα και αποτελέσματα σε συστήματα που έχουν την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας βλέπε π.χ. Kelly (1979), Whittle (1986), Chao et al. (1999) και τις αναφορές αυτών. Επιπλέον οι Chen (2004), Papier et al. (2007) μελέτησαν παρόμοια συστήματα αλλά χωρίς αυτή την ιδιότητα.

Ο παραπάνω τύπος του Erlang έχει γενικευθεί σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις της M/G/k/k ουράς με ομαδικές αφίξεις. Ειδικότερα, υπό το καθεστώς της μερικής αποδοχής πελατών, οι Fakinos και Sirakoulis (1989) έδειξαν ότι ανάλογος τύπος ισχύει για το μοντέλο όπου τα μέλη κάθε ομάδας έχουν ίσους χρόνους εξυπηρέτησης, με την προϋπόθεση ότι η κατανομή του μεγέθους των αφικνούμενων ομάδων είναι γεωμετρική. Σε σχέση με αυτόν τον τρόπο εξυπηρέτησης, οι Economidou και Fakinos (1999) εισήγαγαν μία γενικότερη πολιτική αποδοχής πελατών και έδωσαν μία επαρκή συνθήκη που αφορά την κατανομή του μεγέθους των αφικνούμενων ομάδων, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Επιπλέον ο Fakinos (1990) απέδειξε ότι εάν οι κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης των ομάδων διαφόρων μεγεθών που βρίσκονται στο σύστημα, δεν εξαρτώνται από το αρχικό τους μέγεθος αλλά μόνο από το μέγεθος που έχουν τώρα και οι πελάτες αναχωρούν μεμονωμένα, τότε η στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2, \dots, n_k)$, $(n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0)$, του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών είναι μορφής γινομένου και μη-ευαίσθητη

στη μορφή των κατανομών $B_j(x)$, αλλά εξαρτάται μόνο από τις αντίστοιχες μέσες τιμές b_j . Δες επίσης Falin (1996) και Sztrik (1987) για κάποιες άλλες M/G/. ουρές με απώλειες πελατών και με παρόμοια αποτελέσματα.

Το Κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως ακολούθως: Στην παράγραφο 2.2 επεκτείνουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην γενικότερη περίπτωση της εξάρτησης από το αρχικό μέγεθος της ομάδας που φθάνει στο σύστημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο των συμπληρωματικών μεταβλητών. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών στο σύστημα, που συμβολίζεται $p(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k)$ όπου \underline{n}_j το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τις ομάδες που τώρα έχουν μέγεθος j ενώ το αρχικό τους μέγεθος είναι m , $m = j, j + 1, j + 2, \dots$, ($j = 1, 2, \dots, k$), είναι σε μορφή γινομένου και μη-ευαίσθητη στην μορφή των κατανομών $B_{jm}(x)$, όπου $B_{jm}(x)$ είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης μίας ομάδας με παρόν μέγεθος j της οποίας το αρχικό μέγεθος είναι m . Όμως οι κατανομές $B_{jm}(x)$ δεν είναι αυθαίρετες αλλά ικανοποιούν μία συγκεκριμένη συνθήκη (βλέπε εξίσωση (2.1)). Στην παράγραφο 2.3 αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο για αριθμητικούς υπολογισμούς και δίνουμε κάποια βασικά μέτρα του υπό μελέτη συστήματος. Στην παράγραφο 2.4 εξετάζουμε το προηγούμενο μοντέλο κάτω από την πολιτική αποδοχής πελατών «όλοι ή κανένας» Υποθέτουμε όμως μία ισχυρότερη συνθήκη για τις κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης, παρόμοια με εκείνη του Fakinos (1990). Σ' αυτή την περίπτωση δίνουμε μία ικανή – αλλά περίπλοκη – συνθήκη για να είναι η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών μη-ευαίσθητη στη μορφή της κατανομής $B_j(x)$. Τέλος στην παράγραφο 2.5 εφαρμόζουμε αυτή την συνθήκη στις περιπτώσεις $k = 2, 3, 4$.

2.2 Η M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και την πολιτική της μερικής αποδοχής πελατών

Ας υποθέσουμε ότι d ακριβώς πελάτες-μέλη της ίδιας ομάδας με αρχικό μέγεθος m έχουν γίνει δεκτοί από το σύστημα και έστω $X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{dm}$ μία τυχαία διάταξη των χρόνων εξυπηρέτησής τους. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής αυτών

$F_{dm}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ υποτίθεται ότι είναι γνωστή για κάθε $d, m, (d = 1, 2, \dots, k, m = d, d+1, d+2, \dots)$. Έστω επίσης $Y_{1m}, Y_{2m}, \dots, Y_{dm}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή Y_{jm} ($j = 1, 2, \dots, d$) είναι η j -μικρότερη από τις $X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{dm}$. Να σημειώσουμε ότι μία τέτοια ομάδα μένει στο σύστημα με όλα τα μέλη της παρόντα για χρόνο Y_{1m} . Στο τέλος αυτής της περιόδου ένα από τα μέλη της ομάδας έχει ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του και αναχωρεί ενώ οι εναπομείναντες $d - 1$ πελάτες παραμένουν στο σύστημα για μία επιπρόσθετη χρονική περίοδο που κατανέμεται όπως η τυχαία μεταβλητή $Y_{2m} - Y_{1m}$ έως ότου μία νέα αναχώρηση να συμβεί κ.ο.κ. Γενικά, ακριβώς j μέλη από αυτή την ομάδα μένουν μαζί στο σύστημα για χρόνο

$$Z_{jm} = Y_{d-j+1,m} - Y_{d-j,m} \quad (j = 1, 2, \dots, d; Y_{0m} = 0), \quad (2.1)$$

ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητος του αριθμού d των πελατών που έγιναν δεκτοί για εξυπηρέτηση και εξαρτάται μόνο από το μέγεθος m της αφιχθείσας ομάδας. Οποτεδήποτε υπάρχουν μέσα στο σύστημα j τέτοιοι πελάτες, λέμε ότι σχηματίζουν μία ομάδα τύπου (j, m) . Επίσης η μεταβλητή Z_{jm} θα αναφέρεται ως ο χρόνος εξυπηρέτησης μίας τέτοιας ομάδας τύπου (j, m) . Στο τέλος αυτής της περιόδου, ένα μέλος από τα j της ομάδας συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του και αναχωρεί ενώ οι υπόλοιποι $j - 1$ πελάτες σχηματίζουν μία ομάδα τύπου $(j - 1, m)$ και μένουν στο σύστημα για ένα επιπρόσθετο χρονικό διάστημα χρονικής διάρκειας $Z_{j-1,m}$ κ.ο.κ. Συμβολίζουμε με $B_{jm}(x)$ και b_{jm} τη συνάρτηση κατανομής και τη μέση τιμή αντίστοιχα του χρόνου Z_{jm} , όπου $b_{jm} < \infty$, ενώ με

$$r_{jm}(x) = \frac{dB_{jm}(x)}{dx} / (1 - B_{jm}(x))$$

συμβολίζουμε τον δεσμευμένο ρυθμό εξυπηρέτησης της Z_{jm} ($j = 1, 2, \dots, k, m = j, j + 1, j + 2, \dots$).

Δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου η συνθήκη (2.1) ικανοποιείται είναι οι ακόλουθες. Η πρώτη λαμβάνει χώρα όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών που ανήκουν στην ίδια ομάδα είναι ανεξάρτητοι εκθετικοί με παράμετρο μ_m , όπου m το αρχικό μέγεθος της ομάδας. Τότε η τυχαία μεταβλητή Z_{jm} κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο $j\mu_m$, άρα ανεξάρτητη της παραμέτρου d . Η δεύτερη περίπτωση όπου

η συνθήκη (2.1) ισχύει είναι στο τροποποιημένο μοντέλο όπου οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών που ανήκουν σε κάποια ομάδα αρχικού μεγέθους m είναι ανεξάρτητοι και ισόνομα κατανομημένοι με συνάρτηση κατανομής Φ_m και λειτουργεί ως εξής: οποτεδήποτε j πελάτες από μία αφιχθείσα ομάδα μεγέθους m γίνονται δεκτοί για να εξυπηρετηθούν, τότε οι αντίστοιχοι j υπηρέτες ασχολούνται μόνο με έναν από αυτούς, επιλεγμένο στην τύχη, εξυπηρετώντας τον με ρυθμό j ενώ οι υπόλοιποι $j - 1$ πελάτες περιμένουν τη σειρά τους. Όταν ο υπό εξυπηρέτηση πελάτης αναχωρήσει τότε ένας από τους υπηρέτες μένει κενός, ενώ οι υπόλοιποι $j - 1$ υπηρέτες ασχολούνται με τον επόμενο πελάτη κ.ο.κ. Αυτό το τροποποιημένο μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα παράλληλης επεξεργασίας δεδομένων (π.χ. σε τεχνολογίες διαδικτύου).

Έστω επίσης,

n_{jm} : ο αριθμός των ομάδων τύπου (j, m) , ($j = 1, 2, \dots, k$, $m = j, j + 1, j + 2, \dots$),

$\underline{n}_j = (n_{jj}, n_{j,j+1}, n_{j,j+2}, \dots)$: το διάνυσμα των ομάδων μεγέθους j (όλων των δυνατών τύπων), ($j = 1, 2, \dots, k$),

$n_j = \sum_{m \geq j} n_{jm}$: ο συνολικός αριθμός των ομάδων μεγέθους j , ($j = 1, 2, \dots, k$),

$n^* = n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k$: ο συνολικός αριθμός πελατών που είναι παρόντες στο σύστημα,

$\underline{n} = (\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k)$: το διάνυσμα όλων των ομάδων διαφόρων τύπων που βρίσκονται στο σύστημα και

$\mathbf{S} = \{\underline{n} : n_{jm} \in \mathbb{N}_0, n^* \leq k\}$: ο αντίστοιχος χώρος καταστάσεων του συστήματος. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των συμπληρωματικών μεταβλητών. Έτσι, αν για τυχούσα χρονική στιγμή t μία σύνοψη της παρελθούσας ιστορίας του συστήματος είναι αναγκαία ώστε να προσδιορίσουμε τη μελλοντική του συμπεριφορά, τότε θα πρέπει να γνωρίζουμε τόσο τον αριθμό των ομάδων των διαφόρων τύπων που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t , όσο και τις παρελθούσες διάρκειες των αντίστοι-

χων εξυπηρετήσεων που βρίσκονται σε εξέλιξη. Ορίζουμε λοιπόν για κάθε t ($t \geq 0$) τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές:

$Q_{jm}(t)$: ο αριθμός των ομάδων τύπου (j, m) , ($j = 1, 2, \dots, k$, $m = j, j + 1, j + 2, \dots$) που είναι παρούσες στο σύστημα τη στιγμή t ,

$\underline{Q}_j(t) = (Q_{jj}(t), Q_{j,j+1}(t), Q_{j,j+2}(t), \dots)$: το διάνυσμα των ομάδων μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, k$) που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t ,

$\underline{U}_j^{(m)}(t) = (U_{1j}^{(m)}(t), U_{2j}^{(m)}(t), \dots, U_{Q_{jm}(t)j}^{(m)}(t))$: μία τυχαία διάταξη των παρελθόντων χρόνων των εξελισσόμενων εξυπηρετήσεων των ομάδων τύπου (j, m) ($j = 1, 2, \dots, k$, $m = j, j + 1, j + 2, \dots$) που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t , όταν $Q_{jm}(t) > 0$ και

$\underline{U}_j(t) = (\underline{U}_j^{(j)}(t); \underline{U}_j^{(j+1)}(t); \underline{U}_j^{(j+2)}(t); \dots)$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Η στοχαστική διαδικασία $\{(\underline{\mathbf{Q}}(t), \underline{\mathbf{U}}(t)), t \geq 0\}$ όπου $\underline{\mathbf{Q}}(t) = (\underline{Q}_1(t), \underline{Q}_2(t), \dots, \underline{Q}_k(t))$ και $\underline{\mathbf{U}}(t) = (\underline{U}_1(t), \underline{U}_2(t), \dots, \underline{U}_k(t))$ είναι μία Μαρκοβιανή διαδικασία. Έστω

$$\begin{aligned} p_{\underline{\mathbf{n}}}(\underline{\mathbf{x}})d\underline{\mathbf{x}} &= \Pr \left(\underline{Q}_j(t) = \underline{n}_j, x_{ij}^{(m)} < U_{ij}^{(m)}(t) \leq x_{ij}^{(m)} + dx_{ij}^{(m)}; \right. \\ &\quad \left. 1 \leq j \leq k, m \geq j, 1 \leq i \leq n_{jm} \right) \\ &= p_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k)d\underline{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας, όπου

$$\underline{\mathbf{x}} = (\underline{x}_1; \underline{x}_2; \dots; \underline{x}_k),$$

$$\underline{x}_j = (\underline{x}_j^{(j)}; \underline{x}_j^{(j+1)}; \underline{x}_j^{(j+2)}; \dots) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

$$\underline{x}_j^{(m)} = (x_{1j}^{(m)}, x_{2j}^{(m)}, \dots, x_{n_{jm}j}^{(m)}) \quad (j = 1, 2, \dots, k, m = j, j + 1, j + 2, \dots),$$

$$d\underline{\mathbf{x}} = dx_{11}^{(1)} dx_{21}^{(1)} dx_{31}^{(1)} \cdot \dots \text{ και}$$

$$\delta(n^*) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } n^* < k \\ 0, & \text{εάν } n^* = k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Υποθέτοντας ότι στατιστική ισορροπία έχει επέλθει έως τη στιγμή t και θεωρώντας

το σύστημα τις στιγμές t και $t + h$, βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις ισορροπίας για κάθε κατάσταση $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, με μη-αρνητικές συντεταγμένες τέτοια ώστε, $n^* \leq k$, και $p_{\underline{n}}(\cdot) = 0$, όταν $n^* > k$.

$$p_{\underline{n}}(\underline{x} + \underline{h})d\underline{x} = p_{\underline{n}}(\underline{x})d\underline{x}(1 - \lambda\delta(n^*)h) \left(1 - \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{jm}} r_{jm}(x_{ij}^{(m)})h \right) + \delta(n^*) \sum_{m=1}^{\infty} (n_{1m} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\underline{n} + \underline{e}_{1m}}(\underline{x}; 1(m) : u)d\underline{x}dur_{1m}(u)h + o(h), \quad (2.4)$$

$$(n_{jm} + 1)p_{\underline{n} + \underline{e}_{jm}}(\underline{x} + \underline{h}; j(m) : 0)d\underline{x}h = p_{\underline{n}}(\underline{x})d\underline{x}(1 - \delta(n^* + j))\lambda g_m h + \delta(n^* + j)(n_{j+1,m} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\underline{n} + \underline{e}_{j+1,m}}(\underline{x}; j+1(m) : u)d\underline{x}dur_{j+1,m}(u)h + o(h) \quad (j = 1, 2, \dots, k, m > j), (2.5)$$

$$(n_{jj} + 1)p_{\underline{n} + \underline{e}_{jj}}(\underline{x} + \underline{h}; j(j) : 0)d\underline{x}h = p_{\underline{n}}(\underline{x})d\underline{x}\lambda g_j h + o(h) \quad (j = 1, 2, \dots, k), (2.6)$$

όπου

$$\underline{h} = (h, h, h, \dots),$$

$$\underline{n} + \underline{e}_{jm} = (n_1; \dots; n_{j-1}; n_{jj}, \dots, n_{j,m-1}, n_{jm} + 1, n_{j,m+1}, \dots; n_{j+1}; \dots; n_k) \text{ και}$$

$p_{\underline{n} + \underline{e}_{jm}}(\underline{x}; j(m) : u)$: να συμβολίζει την πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\underline{n} + \underline{e}_{jm}$ με παρελθόντες χρόνους εξυπηρέτησης που δίνονται από το διάνυσμα

$$(\underline{x}; j(m) : u) = (\underline{x}_1; \dots; \underline{x}_{j-1}; (\underline{x}_j^{(j)}; \dots; \underline{x}_j^{(m-1)}; u, x_{1j}^{(m)}, \dots, x_{n_{jm}j}^{(m)}; \underline{x}_j^{(m+1)}; \dots); \underline{x}_{j+1}; \dots; \underline{x}_k).$$

Οι εξισώσεις (2.4)–(2.6) προκύπτουν αν για κάθε πιθανή κατάσταση της διαδικασίας $\{(\underline{Q}(t + h), \underline{U}(t + h))\}$ δεσμεύσουμε ως προς όλες τις πιθανές καταστάσεις του συστήματος την χρονική στιγμή t που μπορούν όμως μέσα στο στοιχειώδες

χρονικό διάστημα $(t, t + h)$ να μας οδηγήσουν στην κατάσταση της στιγμής $t + h$. Συγκεκριμένα για την εξίσωση (2.4), το σύστημα τη στιγμή $t + h$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x} + \underline{h})$, δηλαδή το ενδεχόμενο

$$\left\{ Q_j(t + h) = \underline{n}_j, x_{ij}^{(m)} + h < U_{ij}^{(m)}(t + h) \leq x_{ij}^{(m)} + h + dx_{ij}^{(m)} \right\}$$

πραγματοποιείται, εάν (για $n^* = k$) τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + h)$ δεν συμβαίνει καμία αναχώρηση, ή (για $n^* < k$) τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + h)$ δεν συμβαίνει ούτε αναχώρηση ούτε νέα άφιξη ή το σύστημα τη στιγμή t είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{1m}, (\underline{x}; 1(m) : u))$ (για όλα τα m) και στο χρονικό διάστημα $(t, t + h)$ αναχωρεί η ομάδα τύπου $(1, m)$ με παρελθόντα χρόνο εξυπηρέτησης u , αφού ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή της. Όσον αφορά την εξίσωση (2.5) υποθέτουμε ότι τη στιγμή $t + h$ η Μαρκοβιανή διαδικασία $\{(\underline{Q}(t + h), \underline{U}(t + h))\}$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{jm}, (\underline{x} + \underline{h}; j(m) : 0))$ δηλαδή μία ομάδα τύπου (j, m) , όπου $m > j$, έχει μόλις φθάσει στο σύστημα. Τότε, (για $n^* + j = k$) τη στιγμή t η διαδικασία πρέπει να βρίσκεται στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο διάστημα $(t, t + h)$ μία ομάδα μεγέθους m να φθάσει στο σύστημα, ή (για $n^* + j < k$) τη στιγμή t η διαδικασία να είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{j+1,m}, (\underline{x}; j + 1(m) : u))$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + h)$ να συμπληρωθεί η εξυπηρέτηση της ομάδας τύπου $(j + 1, m)$ με παρελθόντα χρόνο εξυπηρέτησης u . Τέλος για την εξαγωγή της (2.6) υποθέτουμε ότι τη στιγμή $t + h$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{jj}, (\underline{x} + \underline{h}; j(j) : 0))$, δηλαδή μία ομάδα τύπου (j, j) μόλις έχει φθάσει σε αυτό. Αυτό υποχρεωτικά σημαίνει ότι τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + h)$ μία ομάδα μεγέθους j φθάνει στο σύστημα.

Απλοποιώντας τον όρο $d\underline{x}$ στην εξίσωση (2.4), μεταφέροντας τον όρο $p_{\underline{n}}(\underline{x})$ στο πρώτο μέλος και χρησιμοποιώντας ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{\underline{n}}(\underline{x} + \underline{h}) - p_{\underline{n}}(\underline{x})}{h} = \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{jm}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}^{(m)}} p_{\underline{n}}(\underline{x}),$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{jm}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}^{(m)}} p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = - \left(\lambda \delta(n^*) + \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{jm}} r_{jm}(x_{ij}^{(m)}) \right) p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) \\ + \delta(n^*) \sum_{m=1}^{\infty} (n_{1m} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\underline{n} + \mathbf{e}_{1m}}(\underline{\mathbf{x}}; 1(m) : u) r_{1m}(u) du. \quad (2.7)$$

Διαιρώντας την εξίσωση (2.5) με $d\underline{\mathbf{x}}h$ και παίρνοντας το όριο όταν $h \rightarrow 0$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(n_{jm} + 1) p_{\underline{n} + \mathbf{e}_{jm}}(\underline{\mathbf{x}}; j(m) : 0) = p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) \lambda g_m (1 - \delta(n^* + j)) \\ + \delta(n^* + j) (n_{j+1,m} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\underline{n} + \mathbf{e}_{j+1,m}}(\underline{\mathbf{x}}; j+1(m) : u) r_{j+1,m}(u) du \\ (j = 1, 2, \dots, k, m > j), \quad (2.8)$$

ενώ δουλεύοντας ομοίως με την (2.6) προκύπτει η εξίσωση

$$(n_{jj} + 1) p_{\underline{n} + \mathbf{e}_{jj}}(\underline{\mathbf{x}}; j(j) : 0) = \lambda g_j p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (2.9)$$

Επίσης πρέπει να ισχύει και η εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbf{S}} \int_{x_{11}^{(1)}=0}^{\infty} \int_{x_{21}^{(1)}=0}^{\infty} \dots p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}} = 1. \quad (2.10)$$

Στο επόμενο θεώρημα έχουμε το βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου καθώς προσδιορίζουμε τη στάσιμη κατανομή της διαδικασίας $\{(\underline{\mathbf{Q}}(t), \underline{\mathbf{U}}(t))\}$ και την οριακή κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων τύπων μέσα στο σύστημα.

Θεώρημα 2.1. Η στάσιμη κατανομή $p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}})$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{(\underline{\mathbf{Q}}(t), \underline{\mathbf{U}}(t)), t \geq 0\}$, δίνεται από τον τύπο

$$p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = p(\underline{n}) \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{jm}} \hat{b}_{jm}(x_{ij}^{(m)}) \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}, \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}), \quad (2.11)$$

όπου

$$\hat{b}_{jm}(x) = \frac{1}{b_{jm}} (1 - B_{jm}(x)) \quad (j = 1, 2, \dots, k, m \geq j), \quad (2.12)$$

και

$$\begin{aligned} p(\underline{n}) &= p(n_1, n_2, \dots, n_k) \\ &= C_{\underline{\theta}} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων τύπων μέσα στο σύστημα, με

$$C_{\underline{\theta}} = \left(\sum_{(v_{sl} \in \mathbb{N}_0, \sum_{s=1}^k \sum_{l=s}^{\infty} s v_{sl} \leq k)} \prod_{s=1}^k \prod_{l=s}^{\infty} \frac{(\lambda g_l b_{sl})^{v_{sl}}}{v_{sl}!} \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

Απόδειξη. Η λύση των εξισώσεων (2.7)–(2.10) θα επιτευχθεί με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας $\{(\underline{Q}(t), \underline{U}(t))\}$ είναι της μορφής

$$p_{\underline{n}}(\underline{x}) = C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{jm}} G_{jm}(x_{ij}^{(m)}), \quad (2.15)$$

υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$G_{jm}(0) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, k, m \geq j). \quad (2.16)$$

Όταν $n^* = k$ τότε $\delta(n^*) = 0$. Έτσι, εισάγοντας την (2.15) στην (2.7) βρίσκουμε ότι:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{jm}} p_{\underline{n}}(\underline{x}) \frac{\frac{\partial}{\partial x_{ij}^{(m)}} (G_{jm}(x_{ij}^{(m)}))}{G_{jm}(x_{ij}^{(m)})} = - \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{jm}} r_{jm}(x_{ij}^{(m)}) p_{\underline{n}}(\underline{x}),$$

που ισχύει αν διαλέξουμε τις συναρτήσεις $G_{jm}(x)$ έτσι ώστε

$$\frac{d}{dx} (\log G_{jm}(x)) + r_{jm}(x) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k, m \geq j). \quad (2.17)$$

Η εξίσωση (2.17) σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη (2.16) δίνει:

$$G_{jm}(x) = e^{-\int_0^x r_{jm}(u) du} = 1 - B_{jm}(x) \quad (j = 1, 2, \dots, k, m \geq j), \quad (2.18)$$

οπότε η εξίσωση (2.15) παίρνει τη μορφή

$$p_{\underline{n}}(\underline{x}) = C_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{jm}} \left(1 - B_{jm}(x_{ij}^{(m)})\right) \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}, \underline{x} \geq \mathbf{0}). \quad (2.19)$$

Τώρα θα προσδιορίσουμε τη μορφή των συντελεστών $C_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k}$, όπου $\underline{n} = (\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k) \in \mathbf{S}$, αφού πρώτα παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{p_{\underline{n} + \underline{e}_{jm}}(\underline{x}; j(m) : u)}{p_{\underline{n}}(\underline{x})} = \frac{C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j + \underline{e}_{jm}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k}}{C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k}} (1 - B_{jm}(u)). \quad (2.20)$$

Έτσι λοιπόν, συνδυάζοντας την εξίσωση (2.9) με την (2.20) βρίσκουμε, για κάθε $j = 1, 2, \dots, k$, ότι

$$(n_{jj} + 1)C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j + \underline{e}_{jj}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} = \lambda g_j C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k} \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}, n^* + j \leq k), \quad (2.21)$$

ή

$$C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k} = \frac{\lambda g_j}{n_{jj}} C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j - \underline{e}_{jj}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}, n_{jj} > 0).$$

Δουλεύοντας επαναληπτικά την προηγούμενη εξίσωση, έως ότου στον συντελεστή του δεύτερου μέλους μηδενιστεί η συντεταγμένη που αντιστοιχεί στον αριθμό των ομάδων τύπου (j, j) , προκύπτει ότι

$$C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k} = \frac{(\lambda g_j)^{n_{jj}}}{n_{jj}!} C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, (0, n_{j,j+1}, \dots), \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k}, \quad (2.22)$$

για κάθε $\underline{n} \in \mathbf{S}$ και $j = 1, 2, \dots, k$. Συνεχίζοντας με την εξίσωση (2.8) και υποθέτοντας κατ' αρχάς $n^* + j = k$, έχουμε ότι

$$(n_{jm} + 1)C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j + \underline{e}_{jm}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} = \lambda g_m C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k}, \quad (2.23)$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, k$, $m > j$. Εάν διαλέξουμε $\underline{n} \in \mathbf{S}$ ώστε $n^* + j = k - 1$ τότε από την (2.8) έπεται ότι

$$(n_{jm} + 1)C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j + \underline{e}_{jm}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} = (n_{j+1, m} + 1)C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \underline{n}_{j+1} + \underline{e}_{j+1, m}, \underline{n}_{j+2}, \dots, \underline{n}_k},$$

και αντικαθιστώντας τον συντελεστή $C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \underline{n}_{j+1} + \underline{e}_{j+1, m}, \underline{n}_{j+2}, \dots, \underline{n}_k}$ από την (2.23) διότι $n^* + j + 1 = k$ ή από την (2.21) (εάν $j + 1 = m$), παίρνουμε ξανά το αποτέλεσμα

της (2.23). Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση (2.23) ισχύει για κάθε $\underline{n} \in \mathbf{S}$ ώστε $j \leq n^* + j \leq k$ και επομένως

$$C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k} = \frac{\lambda g_m}{n_{jm}} C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j - \underline{e}_{jm}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}, n_{jm} > 0, m > j).$$

Συνεχίζοντας επαναληπτικά μέχρι να μηδενιστεί ο αριθμός των ομάδων τύπου (j, m) , βρίσκουμε ότι

$$C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k} = \frac{(\lambda g_m)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, (n_{jj}, \dots, n_{j, m-1}, 0, n_{j, m+1}, \dots), \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k}, \quad (2.24)$$

για κάθε $\underline{n} \in \mathbf{S}$, $j = 1, 2, \dots, k$ και $m > j$. Συνδυάζοντας τις (2.22), (2.24) παίρνουμε ότι

$$C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_j, \dots, \underline{n}_k} = \prod_{m=j}^{\infty} \frac{(\lambda g_m)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, 0, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}, j = 1, 2, \dots, k). \quad (2.25)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα για κάθε $j = 1, 2, \dots, k$, παράγουμε την αναλυτική μορφή των συντελεστών $C_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k}$, δηλαδή

$$C_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k} = \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \frac{(\lambda g_m)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} C_{\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}} \quad (\underline{n} \in \mathbf{S}). \quad (2.26)$$

Τώρα θα ελέγξουμε την ισχύ των εξισώσεων (2.7)–(2.9). Μία χρήσιμη σχέση είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} p_{\underline{n} + \underline{e}_{jm}}(\underline{\mathbf{x}}; j(m) : u) &= C_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{j-1}, \underline{n}_j + \underline{e}_{jm}, \underline{n}_{j+1}, \dots, \underline{n}_k} \\ &\quad \times \left[\prod_{s=1}^k \prod_{l=s}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{sl}} (1 - B_{sl}(x_{is}^{(l)})) \right] (1 - B_{jm}(u)) \\ &= \frac{\lambda g_m}{n_{jm} + 1} C_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_k} \left[\prod_{s=1}^k \prod_{l=s}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{sl}} (1 - B_{sl}(x_{is}^{(l)})) \right] (1 - B_{jm}(u)) \\ &= \frac{\lambda g_m}{n_{jm} + 1} p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) (1 - B_{jm}(u)), \end{aligned} \quad (2.27)$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι άμεση από την (2.23). Προχωρώντας τώρα στην επαλήθευση, παρατηρούμε ότι οι (2.8), (2.9) ισχύουν με την χρήση της (2.27). Όσον

αφορά την (2.7), πρέπει να ελεγχθεί για την περίπτωση όπου $n^* < k$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\lambda p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{m=1}^{\infty} (n_{1m} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\underline{n}+\mathbf{e}_{1m}}(\underline{\mathbf{x}}; 1(m) : u) r_{1m}(u) du,$$

ή, με την χρήση της (2.27), ότι

$$\lambda p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{m=1}^{\infty} (n_{1m} + 1) \int_{u=0}^{\infty} \frac{\lambda g_m}{n_{1m} + 1} p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) (1 - B_{1m}(u)) r_{1m}(u) du,$$

το οποίο ισχύει διότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m = 1 \quad \text{και} \quad \int_{u=0}^{\infty} (1 - B_{1m}(u)) r_{1m}(u) du = 1.$$

Θέτοντας $C_{\underline{0}} = C_{\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}}$ και χρησιμοποιώντας τις (2.19), (2.26) παίρνουμε

$$p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = C_{\underline{0}} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \left(\frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \prod_{i=1}^{n_{jm}} \frac{1 - B_{jm}(x_{ij}^{(m)})}{b_{jm}} \right),$$

και ορίζοντας την πιθανότητα $p(\underline{n})$ και την πυκνότητα $\hat{b}_{jm}(x)$ όπως φαίνεται στις εξισώσεις (2.13), (2.12) προκύπτει η (2.11). Επίσης η κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων τύπων δίνεται ως

$$\begin{aligned} \Pr \left(Q_1(t) = \underline{n}_1, Q_2(t) = \underline{n}_2, \dots, Q_k(t) = \underline{n}_k \right) &= \int_{\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{0}} p_{\underline{n}}(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}} \\ &= p(\underline{n}) \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{jm}} \int_{x_{ij}^{(m)}=0}^{\infty} \hat{b}_{jm}(x_{ij}^{(m)}) dx_{ij}^{(m)} \\ &= p(\underline{n}), \end{aligned}$$

εφόσον

$$\int_{x=0}^{\infty} \hat{b}_{jm}(x) dx = 1.$$

Τέλος από την εξίσωση κανονικοποίησης (2.10) βρίσκουμε

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbf{S}} p(\underline{n}) \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_{jm}} \int_{x_{ij}^{(m)}=0}^{\infty} \hat{b}_{jm}(x_{ij}^{(m)}) dx_{ij}^{(m)} = 1,$$

ή

$$C_{\mathbf{0}} \sum_{(n_{sl} \in \mathbb{N}_0, \sum_{s=1}^k \sum_{l=s}^{\infty} s n_{sl} \leq k)} \prod_{s=1}^k \prod_{l=s}^{\infty} \frac{(\lambda g_l b_{sl})^{n_{sl}}}{n_{sl}!} = 1,$$

απ' όπου βρίσκουμε την έκφραση (2.14) για τη σταθερά $C_{\mathbf{0}}$ και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. ■

Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος 2.1 γίνεται φανερό ότι η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας $\{\mathbf{Q}(t), t \geq 0\}$, η οποία προσδιορίζει τα διανύσματα των ομάδων διαφόρων τύπων που είναι παρόντα στο σύστημα, δίνεται από τις (2.13)-(2.14). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (2.11), διαπιστώνουμε ότι σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας οι παρελθούσες διάρκειες των εξυπηρετήσεων που είναι σε εξέλιξη, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας $\hat{b}_{jm}(x)$ για ομάδα τύπου (j, m) , $(j = 1, 2, \dots, k, m \geq j)$.

2.3 Αλγόριθμος υπολογισμού της στάσιμης κατανομής

Στην ακόλουθη ανάλυση υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα J για το μέγεθος των ομάδων που φθάνουν στο σύστημα, υπόθεση περισσότερο ρεαλιστική σε εφαρμογές. Τότε οι εξισώσεις (2.11), (2.13), (2.14) παίρνουν μία ευκολότερη -για υπολογισμούς- μορφή. Συγκεκριμένα, για $J > k$, έχουμε

$$p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{n}) \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^J \prod_{i=1}^{n_{jm}} \hat{b}_{jm}(x_{ij}^{(m)}) \quad (\mathbf{n} \in \mathbf{S}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}), \quad (2.28)$$

και

$$p(\mathbf{n}) = C_{\mathbf{0}} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad (2.29)$$

όπου ο συντελεστής $C_{\mathbf{0}}$ δίνεται ως

$$C_{\mathbf{0}} = \left(\sum_{(v_{sl} \in \mathbb{N}_0, \sum_{s=1}^k \sum_{l=s}^J s v_{sl} \leq k)} \prod_{s=1}^k \prod_{l=s}^J \frac{(\lambda g_l b_{sl})^{v_{sl}}}{v_{sl}!} \right)^{-1}, \quad (2.30)$$

ενώ η περίπτωση $J \leq k$ αντιμετωπίζεται ομοίως.

Θέτοντας $Q(t)$ τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα ή ισοδύναμα τον αριθμό των απασχολημένων υπηρετών και $Q_j(t)$ τον αριθμό των ομάδων μεγέθους j τη στιγμή t ($t \geq 0$), τότε

$$Q(t) = \sum_{j=1}^k jQ_j(t).$$

Συνεπώς η στάσιμη κατανομή (p_n) , ($n = 0, 1, 2, \dots, k$) του αριθμού των απασχολημένων υπηρετών δίνεται ως

$$p_n = C_{\mathbf{0}} \times \sum_{(\sum_{j=1}^n \sum_{m=j}^J jn_{jm}=n)} \prod_{j=1}^n \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \quad (n = 0, 1, \dots, k), \quad (2.31)$$

ενώ

$$P(Q_r(t) = \nu_r) = C_{\mathbf{0}} \times \sum_{(\sum_{m=r}^J n_{rm}=\nu_r)} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad (2.32)$$

για κάθε $r = 1, 2, \dots, k$ και $0 \leq \nu_r \leq [k/r]$, όπου $[k/r]$ το ακέραιο μέρος του αριθμού k/r .

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων (p_n) , $n = 0, 1, 2, \dots, k$. Γι' αυτόν το λόγο ορίζουμε τις ποσότητες B_n ως:

$$B_n = \sum_{(\sum_{j=1}^{\min(n,J)} \sum_{m=j}^J jn_{jm}=n)} \prod_{j=1}^{\min(n,J)} \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

και $B_0 = 1$.

Θεώρημα 2.2. (i) Το επόμενο επαναληπτικό σχήμα ισχύει για τις ποσότητες B_n 's:

$$B_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(n,J-1)} (u+1) \left(\sum_{m=u+1}^J g_m b_{u+1,m} \right) B_{n-u}, \quad (2.34)$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ με αρχική συνθήκη $B_0 = 1$.

(ii) Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των απασχολημένων υπηρετών στο σύστημα

δίνεται ως

$$p_n = C_{\underline{\theta}} B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (2.35)$$

όπου

$$C_{\underline{\theta}} = \left(\sum_{n=0}^k B_n \right)^{-1}. \quad (2.36)$$

Απόδειξη.

Ορίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών B'_n s, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\left(\sum_{j=1}^{\min(n,J)} \sum_{\sum_{m=j}^J j n_{jm}=n} \prod_{j=1}^{\min(n,J)} \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right)} t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\left(\sum_{j=1}^{\min(n,J)} \sum_{\sum_{m=j}^J j n_{jm}=n} \prod_{j=1}^{\min(n,J)} \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm} t^j)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right)} \right) \\ &= \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \left(\sum_{n_{jm}=0}^{\infty} \frac{(\lambda g_m b_{jm} t^j)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) = \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J e^{\lambda g_m b_{jm} t^j}, \end{aligned}$$

οπότε

$$B(t) = e^{\lambda \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J g_m b_{jm} t^j}. \quad (2.37)$$

Παραγωγίζοντας την (2.37) ως προς t βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} B(t) = \lambda \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j g_m b_{jm} t^{j-1} B(t),$$

ή

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_{n+1} t^n &= \lambda \sum_{u=0}^{J-1} \left(\sum_{m=u+1}^J (u+1) g_m b_{u+1,m} \right) t^u \cdot \sum_{r=0}^{\infty} B_r t^r \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{u=0}^{\min(n, J-1)} \left(\sum_{m=u+1}^J (u+1) g_m b_{u+1,m} \right) B_{n-u} \right] t^n. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων t^n βρίσκουμε την (2.34).

Για κάθε $l = 0, 1, 2, \dots, k$ παρατηρούμε ότι η πιθανότητα ο αριθμός των απασχολημένων υπηρετών να είναι l είναι

$$\begin{aligned} p_l &= \sum_{(\sum_{j=1}^l \sum_{m=j}^J j n_{jm} = l)} p(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_l, \underline{0}, \dots, \underline{0}) \\ &= C_{\underline{0}} \sum_{(\sum_{j=1}^l \sum_{m=j}^J j n_{jm} = l)} \prod_{j=1}^l \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \\ &= C_{\underline{0}} B_l, \end{aligned}$$

διότι $\min(l, J) = l$. Συνεπώς η (2.35) ικανοποιείται. Επειδή τέλος $\sum_{n=0}^k p_n = 1$, αντικαθιστώντας τις πιθανότητες p_n από την (2.35) καταλήγουμε στην (2.36) και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Το θεώρημα 2.2 αποτελεί έναν αλγόριθμο υπολογισμού των πιθανοτήτων $\{p_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, k$, έχοντας πρώτα υπολογίσει τους συντελεστές B_n , $n = 1, 2, \dots, k$, από το επαναληπτικό σχήμα (2.34) και τη σταθερά $C_{\underline{0}}$ από την (2.36). Να σημειώσουμε ότι η πιθανότητα p_n δίνει το ποσοστό του χρόνου όπου n υπηρέτες από τους k είναι απασχολημένοι. Ειδικότερα η σταθερά $C_{\underline{0}}$ ισούται με το ποσοστό του χρόνου όπου το σύστημα είναι άδειο, δηλαδή όλοι οι υπηρέτες είναι διαθέσιμοι. Ο μέσος αριθμός των απασχολημένων υπηρετών $E(Q)$ δίνεται ως

$$E(Q) = \sum_{n=1}^k n p_n. \quad (2.38)$$

Ένα άλλο σημαντικό μέτρο λειτουργικότητας του συστήματος είναι το ποσοστό P_{served} των πελατών που εξυπηρετούνται ή ισοδύναμα η οριακή πιθανότητα ένας πελάτης φθάνοντας στο σύστημα να παραμείνει σε αυτό. Από την ιδιότητα PASTA, η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε στιγμές αφίξεων συμπίπτει με την $\{p_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, k$. Επίσης σε ισορροπία, το μέγεθος της ομάδας στην οποία ανήκει ένας πελάτης φθάνοντας στο σύστημα είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας $\{j g_j / M_g\}$, $j = 1, 2, \dots$, όπου M_g είναι το μέσο μέγεθος των αφικνούμενων ομάδων (δες Wolff, 1989). Συνεπώς, ας υποθέσουμε ότι ένας

συγκεκριμένος πελάτης φθάνει στο σύστημα και έστω

C_n : το ενδεχόμενο φθάνοντας να βρει n πελάτες, $n = 0, 1, 2, \dots, k$,

B_j : το ενδεχόμενο ο υπό μελέτη πελάτης να ανήκει σε ομάδα μεγέθους j , $j = 1, 2, \dots, J$,

A : το ενδεχόμενο ο πελάτης αυτός να παραμείνει τελικά στο σύστημα. Τότε

$$P_{served} = \sum_{n=0}^{k-1} \Pr(C_n) \Pr(A/C_n),$$

ή κάνοντας χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας,

$$P_{served} = \sum_{n=0}^{k-1} \Pr(C_n) \left[\sum_{j=1}^{k-n} \Pr(A/C_n B_j) \Pr(B_j/C_n) + \sum_{j=k-n+1}^J \Pr(A/C_n B_j) \Pr(B_j/C_n) \right].$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\Pr(A/C_n B_j) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } j = 1, 2, \dots, k-n \\ (k-n)/j & \text{εάν } j = k-n+1, \dots, J \end{cases},$$

καθώς και B_j, C_n ανεξάρτητα, αφού το μέγεθος της ομάδας στην οποία ανήκει ο υπό μελέτη πελάτης δεν εξαρτάται από την παρελθούσα ιστορία, έχουμε

$$P_{served} = \sum_{n=0}^{k-1} p_n \left\{ \sum_{j=1}^{k-n} \frac{j g_j}{M_g} + \sum_{j=k-n+1}^J \frac{j g_j}{M_g} \frac{k-n}{j} \right\}. \quad (2.39)$$

Θέτουμε επίσης

$$p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) = P(Q_1(t) = \nu_1, Q_2(t) = \nu_2, \dots, Q_k(t) = \nu_k),$$

με $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}_0$, και $\sum_{j=1}^k j \nu_j \leq k$, η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών οι οποίες είναι παρούσες στο σύστημα. Τότε

$$p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) = C_{\mathbf{0}} \times \sum_{(\sum_{m=j}^J n_{jm} = \nu_j, j=1,2,\dots,k)} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}.$$

Γράφοντας την παραπάνω εξίσωση με διαφορετικό τρόπο έχουμε

$$p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) = C_{\underline{0}} \prod_{j=1}^k \sum_{(\sum_{m=j}^J n_{jm} = \nu_j)} \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}$$

$$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}_0, \sum_{j=1}^k j\nu_j \leq k). \quad (2.40)$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο ειδικές περιπτώσεις του υπό μελέτη μοντέλου.

Παράδειγμα 2.1. Υποθέτοντας ότι $b_{jm} = b_j$ (π.χ. το χρονικό διάστημα όπου j μέλη κάποιας ομάδας ($j = 1, 2, \dots, k$) μένουν μαζί στο σύστημα δεν εξαρτάται από το αρχικό μέγεθος της ομάδας) και $J = \infty$, τότε η εξίσωση (2.40) γίνεται

$$p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) = C_{\underline{0}} \prod_{j=1}^k \left((\lambda b_j)^{\nu_j} \sum_{(n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{m=j}^{\infty} n_{jm} = \nu_j)} \prod_{m=j}^{\infty} \frac{(g_m)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right).$$

Όμως

$$\sum_{(n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{m=j}^{\infty} n_{jm} = \nu_j)} \prod_{m=j}^{\infty} \frac{(g_m)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} = \frac{1}{\nu_j!} \sum_{(n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{m=j}^{\infty} n_{jm} = \nu_j)} \frac{\nu_j!}{n_{jj}! n_{j,j+1}! \dots} g_j^{n_{jj}} g_{j+1}^{n_{j,j+1}} \dots$$

$$= \frac{1}{\nu_j!} q_j^{\nu_j},$$

χρησιμοποιώντας το Πολυωνυμικό θεώρημα, όπου $q_j = \sum_{m=j}^{\infty} g_m$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$p(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) = C_{\underline{0}} \prod_{j=1}^k \frac{(\lambda b_j q_j)^{\nu_j}}{\nu_j!}.$$

Στην περίπτωση αυτή η σταθερά $C_{\underline{0}}$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$C_{\underline{0}} = \left(\sum_{(v_s \in \mathbb{N}_0, \sum_{s=1}^k s v_s \leq k)} \prod_{s=1}^k \frac{(\lambda b_s q_s)^{v_s}}{v_s!} \right)^{-1}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις παράγουμε ένα γνωστό αποτέλεσμα (Δες εξίσωση (15), Fakinos (1990)).

Παράδειγμα 2.2. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών που ανήκουν στην ίδια ομάδα είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανομημένοι με παράμετρο που εξαρτάται από το αρχικό μέγεθος της ομάδας, έστω μ_m για ομάδες αρχικού μεγέθους m ($m = 1, 2, \dots, J$). Τότε η τυχαία μεταβλητή Z_{jm} είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $j\mu_m$, εφόσον είναι η ελάχιστη από j ανεξάρτητες εκθετικές (μ_m). Έτσι τα προηγούμενα αποτελέσματα είναι εφαρμόσιμα και σε αυτή την περίπτωση. Συγκεκριμένα η στάσιμη κατανομή $p(\underline{n}) = p(n_1, n_2, \dots, n_k)$, του αριθμού των ομάδων διαφόρων τύπων στο σύστημα δίνεται ως

$$p(\underline{n}) = \left(\sum_{\left(\sum_{s=1}^k \sum_{l=s}^J v_{sl} \leq k \right)} \prod_{s=1}^k \prod_{l=s}^J \frac{(\lambda g_l / s \mu_l)^{v_{sl}}}{v_{sl}!} \right)^{-1} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m / j \mu_m)^{n_{jm}}}{n_{jm}!}.$$

2.4 Η M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και την πολιτική "όλοι ή κανένας" αποδοχής πελατών

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε την M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις της παραγράφου 2.2 υπό την "όλοι ή κανένας" πολιτική αποδοχής πελατών και με μία επιπλέον συνθήκη όσον αφορά την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των διαφόρων ομάδων πελατών. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι όταν μία ομάδα μεγέθους j βρίσκεται n υπηρέτες απασχολημένους τότε

$$\begin{cases} \text{όλη η ομάδα θα εισέλθει στο σύστημα,} & \text{εάν } j \leq k - n \\ \text{όλη η ομάδα θα απομακρυνθεί από το σύστημα,} & \text{εάν } j > k - n \end{cases}.$$

Επίσης οι κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης των διαφόρων τύπων ομάδων είναι τέτοιες ώστε

$$B_{jm}(x) = B_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, k, \quad m = j, j + 1, \dots),$$

δηλαδή το ποσό του χρόνου Z_j κατά τη διάρκεια του οποίου ακριβώς j πελάτες μίας ομάδας μένουν μαζί μέσα στο σύστημα, δεν εξαρτάται από το αρχικό μέγεθος m της ομάδας αλλά μόνο από το j . Συμβολίζουμε με b_j τη μέση τιμή της μεταβλητής Z_j και

$$r_j(x) = \frac{dB_j(x)}{dx} / (1 - B_j(x)),$$

το δεσμευμένο ρυθμό τερματισμού της εξυπηρέτησης μίας ομάδας μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, k$). Ορίζουμε για κάθε t ($t \geq 0$) τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές:

$Q_j(t)$: ο αριθμός των ομάδων μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, k$) που είναι παρούσες στο σύστημα τη στιγμή t ,

$\underline{U}_j(t) = (U_{1j}(t), U_{2j}(t), \dots, U_{Q_j(t)j}(t))$: μία τυχαία διάταξη των παρελθόντων χρόνων εξυπηρέτησης των ομάδων μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, k$) που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t , όταν $Q_j(t) > 0$,

$$\underline{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_k(t)),$$

$$\underline{U}(t) = (\underline{U}_1(t), \underline{U}_2(t), \dots, \underline{U}_k(t)).$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{(\underline{Q}(t), \underline{U}(t)), t \geq 0\}$ είναι μία Μαρκοβιανή διαδικασία και έστω

$$\begin{aligned} p_{\underline{n}}(\underline{x})d\underline{x} &= p_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n_1 1}; x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n_2 2}; \dots; x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{n_k k})d\underline{x} \\ &= \Pr(Q_j(t) = n_j, x_{ij} < U_{ij}(t) \leq x_{ij} + dx_{ij}; i = 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

η στάσιμη κατανομή της, όπου

n_j : ο αριθμός των ομάδων μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, k$),

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$: η κατάσταση του συστήματος,

$$\underline{x} = (\underline{x}_1; \underline{x}_2; \dots; \underline{x}_k),$$

$$\underline{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{n_j j}) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

$d\underline{x} = dx_{11}dx_{21} \dots dx_{n_k k}$, και έστω

$$p(\underline{n}) = p(n_1, n_2, \dots, n_k) = \Pr(Q_j(t) = n_j, j = 1, 2, \dots, k),$$

η στάσιμη κατανομή των ομάδων διαφόρων μεγεθών μέσα στο σύστημα. Ο στόχος

αυτής της παραγράφου είναι να προσδιορίσουμε μία επαρκή συνθήκη ώστε η στάσιμη κατανομή $p(\underline{n})$ να μην εξαρτάται από τη μορφή των κατανομών των χρόνων εξυπηρέτησης, αλλά μόνο από τις μέσες τιμές τους. Πριν από αυτό ας συμβολίσουμε με

$$n_{j-1}^* = jn_j + (j+1)n_{j+1} + \dots + kn_k \quad (j = 1, 2, \dots, k, \quad n_0^* = n^*) \text{ και}$$

$S = \{\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k : n^* \leq k\}$, τον χώρο καταστάσεων του συστήματος. Θεωρώντας την εξέλιξη της Μαρκοβιανής διαδικασίας $(\underline{Q}(t), \underline{U}(t))$ στο διάστημα $[t, t+h]$, βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις καταστάσεων,

$$\begin{aligned} p_{\underline{n}}(\underline{x}+h)d\underline{x} = p_{\underline{n}}(\underline{x})d\underline{x} & \left(1 - \delta(n^*)\lambda h + \delta(n^*)\lambda h \sum_{i=k-n^*+1}^{\infty} g_i \right) \left(1 - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} r_j(x_{ij})h \right) \\ & + \delta(n^*) \int_{u=0}^{\infty} (n_1+1)p_{\underline{n}+e_1}(\underline{x}; 1:u)d\underline{x}d\mu_1(u)h + o(h), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} (n_j+1)p_{\underline{n}+e_j}(\underline{x}+h; j:0)d\underline{x}h = p_{\underline{n}}(\underline{x})d\underline{x} & \lambda g_j h \\ & + \delta(n^*+j) \int_{u=0}^{\infty} (n_{j+1}+1)p_{\underline{n}+e_{j+1}}(\underline{x}; j+1:u)d\underline{x}d\mu_{j+1}(u)h \\ & + o(h) \quad (j = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (2.42)$$

όπου $\underline{h} = (h, h, \dots, h)$,

$$\underline{n} + e_j = (n_1, \dots, n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1}, \dots, n_k),$$

$p_{\underline{n}+e_j}(\underline{x}; j:u)$: συμβολίζει την πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\underline{n} + e_j$ με παρελθόντες χρόνους εξυπηρέτησης

$$(\underline{x}; j:u) = (\underline{x}_1; \dots; \underline{x}_{j-1}; x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{n_j j}, u; \underline{x}_{j+1}; \dots; \underline{x}_k),$$

$x_{ij} > 0, p_{\underline{n}}(\cdot) = 0$ για κάθε $\underline{n} \notin S$ και η συνάρτηση $\delta(\cdot)$ δίνεται από την (2.3).

Οι εξισώσεις (2.41)–(2.42) προκύπτουν αν για κάθε πιθανή κατάσταση της διαδικασίας $(\underline{Q}(t+h), \underline{U}(t+h))$ δεσμεύσουμε ως προς όλες τις πιθανές καταστάσεις

του συστήματος την χρονική στιγμή t που μπορούν όμως μέσα στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ να μας οδηγήσουν στην κατάσταση της στιγμής $t+h$. Συγκεκριμένα για την εξίσωση (2.41), το σύστημα τη στιγμή $t+h$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x} + \underline{h})$, δηλαδή το ενδεχόμενο

$$\{Q_j(t+h) = n_j, x_{ij} + h < U_{ij}(t+h) \leq x_{ij} + h + dx_{ij}\}$$

πραγματοποιείται, εάν (για $n^* = k$) τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ δεν συμβαίνει καμία αναχώρηση, ή (για $n^* < k$) τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ δεν συμβαίνει κάποια αναχώρηση και είτε όχι νέα άφιξη είτε άφιξη ομάδος με μέγεθος μεγαλύτερο του $k - n^*$, ή το σύστημα τη στιγμή t είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_1, (\underline{x}; 1 : u))$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ αναχωρεί η ομάδα μεγέθους 1 με παρελθόντα χρόνο εξυπηρέτησης u , αφού όμως πρώτα ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή της, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν στο σύστημα. Όσον αφορά την εξίσωση (2.42) υποθέτουμε ότι τη στιγμή $t+h$ η Μαρκοβιανή διαδικασία $(\underline{Q}(t+h), \underline{U}(t+h))$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_j, (\underline{x} + \underline{h}; j : 0))$ δηλαδή μία ομάδα μεγέθους j , έχει μόλις φθάσει στο σύστημα. Τότε, (για $n^* + j = k$) τη στιγμή t η διαδικασία πρέπει να βρίσκεται στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο διάστημα $(t, t+h)$ μία ομάδα μεγέθους j να φθάσει στο σύστημα χωρίς να ολοκληρωθεί κάποια εξυπηρέτηση, ή (για $n^* + j < k$) τη στιγμή t η διαδικασία να είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{j+1}, (\underline{x}; j+1 : u))$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ να συμπληρωθεί η εξυπηρέτηση μόνο της ομάδας μεγέθους $j+1$ με παρελθόντα χρόνο εξυπηρέτησης u .

Διαιρώντας την (2.41) με dx , μεταφέροντας στο πρώτο μέλος την πιθανότητα $p_{\underline{n}}(\underline{x})$ και διαιρώντας με h παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{p_{\underline{n}}(\underline{x} + \underline{h}) - p_{\underline{n}}(\underline{x})}{h} = & - \left(\lambda \delta(n^*) \sum_{i=1}^{k-n^*} g_i + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} r_j(x_{ij}) \right) p_{\underline{n}}(\underline{x}) \\ & + \delta(n^*)(n_1 + 1) \int_0^\infty p_{\underline{n} + \underline{e}_1}(\underline{x}; 1 : u) r_1(u) du + \frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $h \rightarrow 0$ βρίσκουμε

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} p_{\underline{n}}(\underline{x}) = - \left(\lambda \delta(n^*) \sum_{i=1}^{k-n^*} g_i + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} r_j(x_{ij}) \right) p_{\underline{n}}(\underline{x}) + \delta(n^*)(n_1 + 1) \int_0^\infty p_{\underline{n}+\underline{e}_1}(\underline{x}; 1 : u) r_1(u) du. \quad (2.43)$$

Δουλεύοντας ομοίως με την (2.42) προκύπτει η εξίσωση

$$(n_j + 1)p_{\underline{n}+\underline{e}_j}(\underline{x}; j : 0) = \lambda g_j p_{\underline{n}}(\underline{x}) + \delta(n^* + j)(n_{j+1} + 1) \times \int_0^\infty p_{\underline{n}+\underline{e}_{j+1}}(\underline{x}; j+1 : u) r_{j+1}(u) du \quad (j = 1, \dots, k). \quad (2.44)$$

Επιπλέον έχουμε την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{\underline{n} \in S} \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty p_{\underline{n}}(\underline{x}) d\underline{x} = 1. \quad (2.45)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, υποθέτουμε ότι

$$p_{\underline{n}}(\underline{x}) = C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^{n_j} G_j(x_{ij}).$$

Με επιχειρήματα όμοια με εκείνα του θεωρήματος 2.1 μπορούμε να δείξουμε ότι $G_j(x) = 1 - B_j(x)$, οπότε η στάσιμη κατανομή παίρνει τη μορφή

$$p_{\underline{n}}(\underline{x}) = C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^{n_j} (1 - B_j(x_{ij})) \quad (\underline{n} \in S, \underline{x} \geq \underline{0}), \quad (2.46)$$

και ζητούμενο πλέον είναι η εύρεση των συντελεστών C_{n_1, n_2, \dots, n_k} και η συνθήκη κάτω από την οποία αυτοί υπάρχουν.

Για κάθε κατάσταση \underline{n} του συστήματος τέτοια ώστε $n^* < k$ η εξίσωση (2.43) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} p_{\underline{n}}(\underline{x}) + r_j(x_{ij}) p_{\underline{n}}(\underline{x}) \right) = -\lambda \sum_{i=1}^{k-n^*} g_i p_{\underline{n}}(\underline{x}) + (n_1 + 1) \int_0^\infty p_{\underline{n}+\underline{e}_1}(\underline{x}; 1 : u) r_1(u) du.$$

Όμως

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} p_{\underline{n}}(\underline{x}) = p_{\underline{n}}(\underline{x}) \frac{(1-B_j(x_{ij}))'}{1-B_j(x_{ij})} \\ r_j(x_{ij}) + \frac{d}{dx_{ij}} (\log(1-B_j(x_{ij}))) = 0 \end{cases},$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$p_{\underline{n}+\underline{e}_j}(\underline{x}; j : u) = \frac{C_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_k}}{C_{n_1, n_2, \dots, n_k}} p_{\underline{n}}(\underline{x})(1-B_j(u)), \quad (2.47)$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, k$, βρίσκουμε

$$(n_1 + 1)C_{n_1+1, n_2, \dots, n_k} = \lambda \sum_{i=1}^{k-n^*} g_i C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (n^* < k). \quad (2.48)$$

Συνεχίζοντας τώρα με την (2.44) και θεωρώντας μία κατάσταση \underline{n} τέτοια ώστε $n^* + j = k$ για $j = 1, 2, \dots, k$, παίρνουμε

$$(n_j + 1)p_{\underline{n}+\underline{e}_j}(\underline{x}; j : 0) = \lambda g_j p_{\underline{n}}(\underline{x}),$$

ή λόγω της (2.47)

$$(n_j + 1)C_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_k} = \lambda g_j C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (n^* + j = k, j = 1, \dots, k). \quad (2.49)$$

Αν όμως θεωρήσουμε μία κατάσταση \underline{n} τέτοια ώστε $n^* + j < k$ για $j = 1, 2, \dots, k-1$, τότε η (2.44) σε συνδυασμό με την (2.47) μας δίνει

$$(n_j + 1)C_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_k} = \lambda g_j C_{n_1, n_2, \dots, n_k} + (n_{j+1} + 1)C_{n_1, \dots, n_j, n_{j+1}+1, n_{j+2}, \dots, n_k} \quad (n^* + j < k, j = 1, 2, \dots, k-1). \quad (2.50)$$

Από τις εξισώσεις (2.48), (2.50) μπορούμε με επαναληπτικό τρόπο να παράξουμε τη μορφή των συντελεστών C_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Συγκεκριμένα μπορούμε να αποδείξουμε ότι (δες Παράρτημα)

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \prod_{r=1}^k \left[\frac{\lambda^{n_r}}{n_r!} \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{k-(n_{r-1}^* - rl)} g_i \right) \right] C_{0,0,\dots,0} \quad ((n_1, n_2, \dots, n_k) \in S), \quad (2.51)$$

όπου το γινόμενο $\prod_{l=1}^0(\cdot)$ ορίζεται να ισούται με 1 και η ανισότητα $k - (n_{r-1}^* - rl) \geq r$ ισχύει διότι $k \geq n^* \geq n_{r-1}^* - r(l-1)$ για κάθε $r = 1, 2, \dots, k$ και $l = 1, 2, \dots, n_r$. Από την προηγούμενη μορφή διαπιστώνουμε ότι οι τιμές της κατανομής $\{g_j\}$ που εμπλέκονται είναι οι g_1, g_2, \dots, g_k . Αυτό είναι αναμενόμενο αφού οι ομάδες με μέγεθος μεγαλύτερο του k απορρίπτονται από το σύστημα λόγω της εφαρμοζόμενης πολιτικής αποδοχής πελατών και κατά συνέπεια δεν επηρεάζουν τη στάσιμη κατανομή της ουράς. Έτσι λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^k g_i = 1$. Στη συνέχεια πρέπει να ελέγξουμε αν η εξίσωση (2.49) ισχύει. Εάν $j = 1$, τότε η (2.49) γίνεται

$$(n_1 + 1)C_{n_1+1, n_2, \dots, n_k} = \lambda g_1 C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (2.52)$$

που ισχύει λόγω της (2.48), αφού σε αυτή την περίπτωση έχουμε $n^* = k - 1$. Αντικαθιστώντας την (2.51) στην (2.49) για $j = 2, 3, \dots, k$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι (δες Παράρτημα) η (2.49) ισχύει εάν οι πιθανότητες g_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\left(\sum_{i=j}^{k-n_{j-1}^*} g_i \right) \prod_{r=1}^{j-1} \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{k-(n_{r-1}^*+j-rl)} g_i \right) = g_j \prod_{r=1}^{j-1} \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{k-(n_{r-1}^*-rl)} g_i \right), \quad (2.53)$$

για κάθε $j = 2, 3, \dots, k$ και $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in S$ με $n^* + j = k$. Για να είναι καλώς ορισμένα τα παραπάνω αθροίσματα θα πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$k - (n_{r-1}^* + j - rl) \geq r \quad \text{και} \quad k - n_{j-1}^* \geq j.$$

Αυτό συμβαίνει διότι $j = k - n^*$, οπότε αυτές γίνονται

$$n^* \geq n_{r-1}^* - r(l-1) \quad \text{και} \quad n^* \geq n_{j-1}^*$$

αντίστοιχα, που προφανώς ισχύουν. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι όταν οι αφίξεις πελατών πραγματοποιούνται σε ομάδες μεγέθους 1, τότε οι εξισώσεις (2.49) και (2.50) συμπίπτουν με την (2.52), άρα το σύστημα έχει στάσιμη κατανομή $p(n)$ ανεξάρτητη της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης $B_1(x)$. Αυτό συμβαίνει γιατί σε αυτή την περίπτωση το υπό μελέτη σύστημα έχει μετατραπεί σε μία τυπική M/G/k/k ουρά.

Εάν η (2.53) ισχύει τότε η εξίσωση κανονικοποίησης (2.45) απ' όπου θα υπολογίσουμε τη σταθερά $C_{0,0,\dots,0}$, γίνεται

$$\sum_{\underline{n} \in S} C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^{n_j} \int_0^{\infty} (1 - B_j(x_{ij})) dx_{ij} = 1,$$

ή, χρησιμοποιώντας ότι

$$\int_0^{\infty} (1 - B_j(x)) dx = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_{\underline{n} \in S} C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{j=1}^k b_j^{n_j} = 1, \quad (2.54)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται για όλα τα $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$ ώστε $n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k \leq k$. Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. *Αν σε μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις, πολιτική αποδοχής πελατών "όλοι ή κανένας", εξυπηρετήσεις ομάδων που εξαρτώνται μόνο από το τρέχον μέγεθος της ομάδας και μεμονωμένες αναχωρήσεις, η κατανομή πιθανότητας $\{g_j\}$ του μεγέθους των ομάδων ικανοποιεί την (2.53), τότε η ουρά έχει στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ η οποία δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης (ιδιότητα της μη-ευαισθησίας) και δίνεται ως*

$$p(n_1, n_2, \dots, n_k) = C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{j=1}^k b_j^{n_j} \quad (n_1, n_2, \dots, n_k) \in S, \quad (2.55)$$

όπου οι συντελεστές C_{n_1, n_2, \dots, n_k} προσδιορίζονται από τις (2.51) και (2.54).

Παρατήρηση 2.1. *Η πολυπλοκότητα της (2.53) μας δείχνει ότι σε αντίθεση με την πολιτική της μερικής αποδοχής πελατών, η "όλοι ή κανένας" πολιτική απαιτεί μία πολύ συγκεκριμένη μορφή στην κατανομή του μεγέθους των ομάδων, έτσι ώστε να έχουμε στάσιμη κατανομή ανεξάρτητη της μορφής των κατανομών των χρόνων εξυπηρέτησης. Ως ένα παράδειγμα στο οποίο δεν μπορεί να ισχύει η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας είναι η M/G/3/3 ουρά με $g_1 > 0$, $g_3 > 0$ και $g_2 = 0$. Αν κάποια χρονική*

στιγμή η κατάσταση του συστήματος είναι η $(1, 1, 0)$, δηλαδή στο σύστημα εξυπηρετούνται μία ομάδα μεγέθους 1 και μία ομάδα μεγέθους 2, τότε η ομάδα μεγέθους 1 έχει φτάσει πιο πρόσφατα από την ομάδα μεγέθους 2. Αυτό συμβαίνει διότι η ομάδα μεγέθους 2 έχει προκύψει αναγκαστικά από κάποια ομάδα μεγέθους 3 της οποίας αναχώρησε το ένα μέλος. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή οι παρελθόντες χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και επομένως η (2.46) δεν μπορεί να ισχύει.

Παρατήρηση 2.2. Εάν $j = k$ τότε η (2.53) ισχύει για κάθε κατανομή $\{g_j\}$ του μεγέθους των αφιχθέντων ομάδων. Πράγματι, όταν $j = k$ τότε $n^* = 0$ οπότε η μοναδική κατάσταση του συστήματος που πρέπει να ελεγχθεί είναι η $\underline{n} = (0, 0, \dots, 0)$. Έτσι η (2.53) γίνεται

$$\left(\sum_{i=k}^{k-n_{k-1}^*} g_i \right) \prod_{r=1}^{k-1} \prod_{l=1}^0 (\cdot) = g_k \prod_{r=1}^{k-1} \prod_{l=1}^0 (\cdot),$$

ή $\sum_{i=k}^{k-n_{k-1}^*} g_i = g_k$ που ισχύει καθώς $n_{k-1}^* = 0$. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε την (2.53) για $j = 2, 3, \dots, k-1$.

2.5 Παραδείγματα της M/G/k/k ουράς με την "όλοι ή κανένας" πολιτική

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις M/G/k/k για $k = 2, 3, 4$ με την "όλοι ή κανένας" πολιτική αποδοχής πελατών.

Παράδειγμα 2.3. Η M/G/2/2 ουρά. Στην περίπτωση όπου $k = 2$, γίνεται φανερό από την παρατήρηση 2.2 ότι η συνθήκη (2.53) ισχύει για κάθε κατανομή $\{g_j\}$. Έτσι η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας ισχύει και χρησιμοποιώντας την (2.51) για τη μορφή των συντελεστών C_{n_1, n_2} , η στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} p(0, 0) &= C_{0,0} & , & & p(1, 0) &= \lambda b_1 (g_1 + g_2) C_{0,0}, \\ p(0, 1) &= \lambda b_2 g_2 C_{0,0} & , & & p(2, 0) &= \frac{\lambda^2 b_1^2 g_1 (g_1 + g_2)}{2} C_{0,0}. \end{aligned}$$

Η σταθερά $C_{0,0}$ υπολογίζεται από την (2.54) και δίνεται ως

$$C_{0,0} = \left(1 + \lambda b_1(g_1 + g_2) + \lambda b_2 g_2 + \frac{\lambda^2 b_1^2 g_1(g_1 + g_2)}{2} \right)^{-1}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ουρά M/G/2/2 αναμένεται να έχει την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας καθώς όταν το σύστημα είναι κενό τότε με πιθανότητα $\frac{g_1}{g_1+g_2}$ ξεκινά μία περίοδος συνεχούς λειτουργίας του με 1 πελάτη παρόντα, ενώ με πιθανότητα $\frac{g_2}{g_1+g_2}$ ξεκινά μία περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος με 2 πελάτες. Στην πρώτη περίπτωση και μέχρι το σύστημα να αδειάσει, συμπεριφέρεται ως μία τυπική M/G/2/2 με μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις πελατών όπου η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson(λg_1) και η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης $B_1(x)$. Όταν η περίοδος συνεχούς λειτουργίας ξεκινά με 2 πελάτες, τότε με πιθανότητα 1 θα αναχωρήσει ο ένας από τους δύο σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα μέσης τιμής b_2 και στη συνέχεια το σύστημα θα λειτουργεί όπως στην πρώτη περίπτωση.

Παράδειγμα 2.4. Η M/G/3/3 ουρά. Στην περίπτωση όπου $k = 3$, λόγω της παρατήρησης 2.2 η συνθήκη (2.53) πρέπει να ελεγχθεί για $j = 2$. Επειδή όμως $j + n^* = k$ θα έχουμε $n^* = 1$, οπότε $\underline{n} = (1, 0, 0)$ και επομένως η (2.53) γίνεται

$$\left(\sum_{i=2}^{3-n_1^*} g_i \right) \prod_{r=1}^1 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{3-(n_{r-1}^*+2-rl)} g_i \right) = g_2 \prod_{r=1}^1 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{3-(n_{r-1}^*-rl)} g_i \right),$$

ή χρησιμοποιώντας ότι $n_1^* = 0$,

$$(g_2 + g_3) \sum_{i=1}^1 g_i = g_2 \sum_{i=1}^3 g_i,$$

και χρησιμοποιώντας ότι $\sum_{i=1}^3 g_i = 1$,

$$g_2^2 + 2g_3g_2 + g_3^2 - g_2 = 0. \quad (2.56)$$

Λύνοντας την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση βρίσκουμε ότι $g_2 = \sqrt{g_3}(1 - \sqrt{g_3})$ οπότε $g_1 = 1 - \sqrt{g_3}$. Θέτοντας $\sigma = \sqrt{g_3}$, η κατανομή $\{g_j, j = 1, 2, 3\}$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} g_1 = 1 - \sigma, \\ g_2 = \sigma(1 - \sigma), \\ g_3 = \sigma^2. \end{cases} \quad (2.57)$$

Έτσι λοιπόν δείξαμε ότι αν η κατανομή του μεγέθους των αφιχθέντων ομάδων είναι γεωμετρική περικομμένη στο 3, τότε η στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2, n_3)$ του συστήματος έχει την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας και δίνεται ως

$$\begin{cases} p(0, 0, 0) = C_{0,0,0} & , p(1, 0, 0) = \lambda b_1 C_{0,0,0}, \\ p(0, 1, 0) = \lambda b_2 (g_2 + g_3) C_{0,0,0} & , p(0, 0, 1) = \lambda b_3 g_3 C_{0,0,0}, \\ p(1, 1, 0) = \lambda^2 b_1 b_2 g_1 (g_2 + g_3) C_{0,0,0} & , p(2, 0, 0) = \frac{\lambda^2}{2!} b_1^2 (g_1 + g_2) C_{0,0,0}, \\ p(3, 0, 0) = \frac{\lambda^3}{3!} b_1^3 g_1 (g_1 + g_2) C_{0,0,0} & , \end{cases} \quad (2.58)$$

όπου

$$C_{0,0,0} = \left(1 + \lambda b_1 + \lambda b_2 (g_2 + g_3) + \lambda b_3 g_3 + \lambda^2 b_1 b_2 g_1 (g_2 + g_3) + \frac{\lambda^2}{2!} b_1^2 (g_1 + g_2) + \frac{\lambda^3}{3!} b_1^3 g_1 (g_1 + g_2) \right)^{-1} \quad (2.59)$$

Στην παρατήρηση 2.1 είδαμε ότι η M/G/3/3 περίπτωση όπου $g_1 > 0$, $g_3 > 0$ και $g_2 = 0$ δεν έχει στάσιμη κατανομή με την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Εύκολα παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη κατανομή δεν είναι της μορφής (2.57).

Παράδειγμα 2.5. Η M/G/4/4 ουρά. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ελέγξουμε τη συνθήκη (2.53) για $j = 2$, $j = 3$. Εάν $j = 2$ τότε $n^* = 2$ οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις για το διάνυσμα \underline{n} . Εάν $\underline{n} = (0, 1, 0, 0)$ τότε η (2.53) γίνεται

$$\left(\sum_{i=2}^{4-n_1^*} g_i \right) \prod_{r=1}^1 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{4-(n_{r-1}^*+2-rl)} g_i \right) = g_2 \prod_{r=1}^1 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{4-(n_{r-1}^*-rl)} g_i \right),$$

και επειδή $n_1^* = 2$ και $n_1 = 0$ έχουμε $\sum_{i=2}^2 g_i = g_2$ που ισχύει. Στη δεύτερη περίπτωση που το διάνυσμα \underline{n} ισούται με $\underline{n} = (2, 0, 0, 0)$, η (2.53) παίρνει ξανά τη μορφή

$$\left(\sum_{i=2}^{4-n_1^*} g_i \right) \prod_{r=1}^1 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{4-(n_{r-1}^*+2-rl)} g_i \right) = g_2 \prod_{r=1}^1 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{4-(n_{r-1}^*-rl)} g_i \right).$$

Όμως αυτή τη φορά έχουμε $n_1^* = 0$ και $n_1 = 2$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\left(\sum_{i=2}^4 g_i \right) \prod_{l=1}^2 \left(\sum_{i=1}^{4-(n^*+2-l)} g_i \right) = g_2 \prod_{l=1}^2 \left(\sum_{i=1}^{4-(n^*-l)} g_i \right),$$

ή

$$\left(\sum_{i=2}^4 g_i \right) \prod_{l=1}^2 \left(\sum_{i=1}^{4-(n^*+2-l)} g_i \right) = g_2 \prod_{l=1}^2 \left(\sum_{i=1}^{4-(n^*-l)} g_i \right),$$

και χρησιμοποιώντας ότι $\sum_{i=1}^4 g_i = 1$, προκύπτει η εξίσωση

$$g_1^3 - g_1^2(1 - g_2) + g_2^2 + g_2g_3 = 0. \quad (2.60)$$

Συνεχίζοντας για $j = 3$ τότε $n^* = 1$ συνεπώς $\underline{n} = (1, 0, 0, 0)$ οπότε η (2.53) μας δίνει

$$\left(\sum_{i=3}^{4-n_2^*} g_i \right) \prod_{r=1}^2 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{4-(n_{r-1}^*+3-rl)} g_i \right) = g_3 \prod_{r=1}^2 \prod_{l=1}^{n_r} \left(\sum_{i=r}^{4-(n_{r-1}^*-rl)} g_i \right),$$

και επειδή $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_0^* = 1$

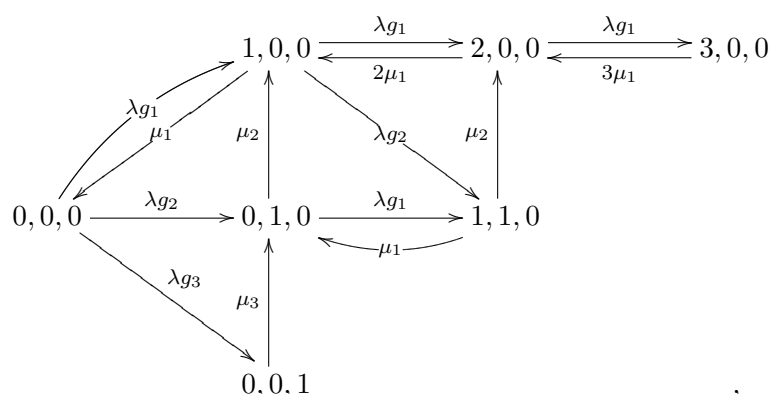
$$(g_3 + g_4)g_1 = g_3. \quad (2.61)$$

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *Mathematica* μπορούμε να βρούμε ότι το σύστημα των εξισώσεων (2.60), (2.61) μαζί με την $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 1$ έχει λύσεις που δεν αντιστοιχούν όμως σε κάποια από τις γνωστές κατανομές. Για τις λύσεις αυτές η αντίστοιχη στάσιμη κατανομή $p(n_1, n_2, n_3, n_4)$ δίνεται ως

$$\begin{aligned} p(0, 0, 0, 0) &= C_{\underline{0}}, \quad p(1, 0, 0, 0) = \lambda b_1 C_{\underline{0}}, \\ p(0, 1, 0, 0) &= \lambda b_2 (1 - g_1) C_{\underline{0}}, \quad p(0, 0, 1, 0) = \lambda b_3 (g_3 + g_4) C_{\underline{0}}, \\ p(0, 0, 0, 1) &= \lambda b_4 g_4 C_{\underline{0}}, \quad p(2, 0, 0, 0) = \frac{\lambda^2}{2!} b_1^2 (1 - g_4) C_{\underline{0}}, \\ p(1, 1, 0, 0) &= \lambda^2 b_1 b_2 (g_1 + g_2) (1 - g_1) C_{\underline{0}}, \quad p(0, 2, 0, 0) = \frac{\lambda^2}{2!} b_2^2 g_2 (1 - g_1) C_{\underline{0}}, \\ p(1, 0, 1, 0) &= \lambda^2 b_1 b_3 g_1 (g_3 + g_4) C_{\underline{0}}, \quad p(3, 0, 0, 0) = \frac{\lambda^3}{3!} b_1^3 (g_1 + g_2) (1 - g_4) C_{\underline{0}}, \\ p(2, 1, 0, 0) &= \frac{\lambda^3}{2!} b_1^2 b_2 g_1 (g_1 + g_2) (1 - g_1) C_{\underline{0}}, \quad p(4, 0, 0, 0) = \frac{\lambda^4}{4!} b_1^4 g_1 (g_1 + g_2) (1 - g_4) C_{\underline{0}}, \end{aligned}$$

όπου η σταθερά $C_0 = C_{(0,0,0,0)}$ υπολογίζεται από την εξίσωση κανονικοποίησης.

Παρατήρηση 2.3. Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, η στάσιμη κατανομή πρέπει να συμπίπτει με εκείνη του αντίστοιχου μοντέλου $M/M/k/k$ ($k = 2, 3, 4$), λόγω της ιδιότητας της μη-ευαισθησίας. Έτσι, αν θεωρήσουμε την ουρά $M/M/3/3$ με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης ομάδων πελατών $Exp(\mu_j = 1/b_j)$ ($j = 1, 2, 3$), προκύπτει το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης του σχήματος 2.1.



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για την $M/M/3/3$ ουρά με ομαδικές αφίξεις, μεμονωμένες αναχωρήσεις και πολιτική αποδοχής πελατών "όλοι ή κανένας"

Οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned}
 p(0,0,0)\lambda &= p(1,0,0)\mu_1, \\
 p(1,0,0)(\lambda g_1 + \lambda g_2 + \mu_1) &= p(0,0,0)\lambda g_1 + p(0,1,0)\mu_2 + p(2,0,0)2\mu_1, \\
 p(0,1,0)(\lambda g_1 + \mu_2) &= p(0,0,0)\lambda g_2 + p(1,1,0)\mu_1 + p(0,0,1)\mu_3, \\
 p(0,0,1)\mu_3 &= p(0,0,0)\lambda g_3, \\
 p(2,0,0)(\lambda g_1 + 2\mu_1) &= p(1,0,0)\lambda g_1 + p(1,1,0)\mu_2 + p(3,0,0)3\mu_1, \\
 p(1,1,0)(\mu_1 + \mu_2) &= p(1,0,0)\lambda g_2 + p(0,1,0)\lambda g_1, \\
 p(3,0,0)3\mu_1 &= p(2,0,0)\lambda g_1.
 \end{aligned}$$

Με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι η στάσιμη κατανομή που δίνεται από τις

(2.58), (2.59) επαληθεύει το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων ισορροπίας, όταν ισχύει η (2.56). Το ίδιο συμβαίνει και όταν $k = 2, k = 4$.

Κεφάλαιο 3

Μία M/G/· ουρά με ομαδικές αφίξεις, απώλειες πελατών και επαναπροσπάθειες

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε μία γενική M/G/· ουρά με ομαδικές αφίξεις, απώλειες πελατών και επαναπροσπάθειες. Υποθέτουμε σύνθετη διαδικασία Poisson αφίξεων, γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης των διαφόρων ομάδων-αντίστοιχων με αυτών του προηγούμενου κεφαλαίου-και καθόλου χώρο αναμονής στο σύστημα. Δείχνουμε ότι κάτω από μία ορισμένη συνθήκη, η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων των διαφόρων μεγεθών στο σύστημα έχει την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της μορφής της κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης. Επίσης για τη στάσιμη κατανομή αποδεικνύουμε ότι έχει απλή μορφή γινομένου.

3.1 Εισαγωγή-Το μοντέλο

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα εξυπηρέτησης. Ομάδες πελατών φθάνουν σ' ένα σταθμό εξυπηρέτησης σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Τα μεγέθη των διαδοχικών ομάδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες των στιγμών άφιξης. Έστω ότι (g_m) ($m = 1, 2, \dots, J$), είναι

η κατανομή πιθανότητας του μεγέθους μίας ομάδας. Κάθε ομάδα μέσα στο σύστημα με παρόν μέγεθος j και αρχικό μέγεθος m ($j = 1, 2, \dots, m$, $m = 1, 2, \dots, J$) θα αναφέρεται ως ομάδα τύπου (j, m) , όπως και στο κεφάλαιο 2. Συμβολίζουμε με

n_{jm} : τον αριθμό των ομάδων τύπου (j, m) ,

$\underline{n}_j = (n_{jj}, n_{j,j+1}, \dots, n_{jJ})$: το διάνυσμα των ομάδων με παρόν μέγεθος j και όλων των δυνατών τύπων στο σύστημα,

$\underline{n} = (\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_J)$: το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος και

$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{N}_0^{J \times (J+1)/2}$: τον αντίστοιχο χώρο καταστάσεων. Υποθέτουμε ότι το σύνολο \mathbf{S} έχει την εξής ιδιότητα:

$$\text{αν } \underline{n} + \underline{e}_{jm} \in \mathbf{S} \Rightarrow \underline{n} + \underline{e}_{j-1,m} \in \mathbf{S}, \quad (I)$$

όπου

$$\underline{n} + \underline{e}_{jm} = (\underline{n}_1; \dots; \underline{n}_{j-1}; n_{jj}, \dots, n_{j,m-1}, n_{jm} + 1, n_{j,m+1}, \dots, n_{jJ}; \underline{n}_{j+1}; \dots; \underline{n}_J)$$

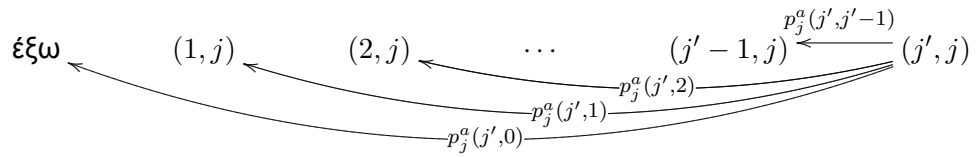
και $\underline{e}_{0m} = \underline{0}$. Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι αν η κατάσταση του συστήματος είναι \underline{n} και μία συγκεκριμένη ομάδα αναχωρήσει ή αντικατασταθεί από μία μικρότερη, τότε το νέο διάνυσμα που θα προκύψει αποτελεί ξανά κατάσταση του συστήματος. Έστω επίσης

$$s(\underline{n}) = \max \{j = 0, 1, 2, \dots, J : \underline{n} + \underline{e}_{jj} \in \mathbf{S}\}$$

να είναι το μέγιστο δεκτό μέγεθος της ομάδας που μπορεί να εισέλθει στο σύστημα, όταν η κατάσταση αυτού είναι \underline{n} .

Υποθέτουμε τον ακόλουθο μηχανισμό εισόδου στο σύστημα. Οποτεδήποτε μία ομάδα μεγέθους j φθάνει και βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση \underline{n} , τότε όλη η ομάδα γίνεται αποδεκτή από το σύστημα ως τύπου (j, j) , εάν $j \leq s(\underline{n})$. Αν όμως $j > s(\underline{n})$, τότε όλη η ομάδα αναχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα $p_j^a(j, 0)$, ή $j - j'$ από τα μέλη της αναχωρούν αμέσως χωρίς να εξυπηρετηθούν και η ομάδα

μετατρέπεται σε τύπου (j', j) ($j' = 1, 2, \dots, j-1$) με πιθανότητα $p_j^a(j, j')$. Η νέα ομάδα προσπαθεί ακαριαία να εισέλθει στο σύστημα. Εάν $j' \leq s(\underline{n})$, τότε η ομάδα αυτή έγινε αποδεκτή ως τύπου (j', j) , αλλιώς όλη η ομάδα χάνεται με πιθανότητα $p_j^a(j', 0)$ ή γίνεται μεγέθους j'' (τύπος (j'', j)) με πιθανότητα $p_j^a(j', j'')$ ($j'' = 1, 2, \dots, j' - 1$) κ.ο.κ. Σχηματικά τα προηγούμενα φαίνονται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα μετατροπής μίας ομάδας τύπου (j', j) σε άλλες, όταν φθάνοντας στο σύστημα δεν μπορεί να εισέλθει σε αυτό.

Προφανώς

$$p_j^a(j', 0) + \sum_{j''=1}^{j'-1} p_j^a(j', j'') = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, J, j' = 1, 2, \dots, j). \quad (3.1)$$

Αυτός ο μηχανισμός εισόδου είναι αρκετά γενικός και συμπεριλαμβάνει πολλές από τις γνωστές πολιτικές αποδοχής πελατών. Έτσι η "όλοι ή κανένας" πολιτική γίνεται ειδική περίπτωση του παραπάνω μηχανισμού αν θεωρήσουμε

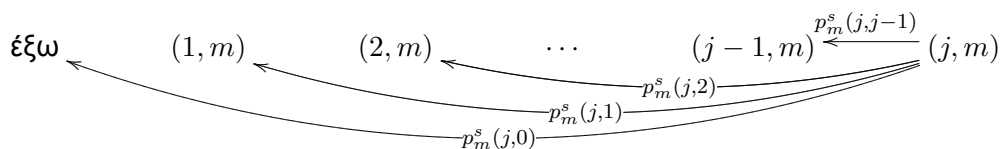
$$p_j^a(j, 0) = 1, \quad p_j^a(j, j') = 0 \quad (j' = 1, 2, \dots, j - 1),$$

ενώ η πολιτική της μερικής αποδοχής αποτελεί επίσης μία ειδική περίπτωση αν υποθέσουμε ότι

$$p_j^a(j', j' - 1) = 1, \quad p_j^a(j', j'') = 0 \quad (j' = 1, 2, \dots, j, j'' = 0, 1, \dots, j' - 2),$$

δηλαδή το μέγεθος της ομάδας που φθάνει στο σύστημα αλλά δεν χωράει, μειώνεται συνεχώς και ακαριαία κατά 1 έως ότου προκύψει ομάδα που να χωρέσει στο σύστημα.

Μόλις μία ομάδα αρχικού μεγέθους m γίνει δεκτή για εξυπηρέτηση ως ομάδα μεγέθους j (τύπου (j, m)), αρχίζει αμέσως να εξυπηρετείται σαν μία μονάδα. Διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης διαφορετικών ομάδων πελατών, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και επιπλέον αυτοί που αντιστοιχούν σε ομάδες τύπου (j, m) είναι ισόνομα κατανομημένοι με συνάρτηση κατανομής $B_{jm}(x)$, με πεπερασμένο μέσο b_{jm} ($j = 1, 2, \dots, J$, $m = j, j+1, \dots, J$). Μετά τη συμπλήρωση της εξυπηρέτησης μίας ομάδας τύπου (j, m) , όλη η ομάδα αναχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα $p_m^s(j, 0)$ ή $j - j'$ από τα μέλη της αναχωρούν ενώ τα υπόλοιπα σχηματίζουν μία νέα ομάδα τύπου (j', m) με πιθανότητα $p_m^s(j, j')$ ($j' = 1, 2, \dots, j - 1$), η οποία εξυπηρετείται με κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης $B_{j'm}(x)$ κ.ο.κ., οπότε προκύπτει το επόμενο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα μετατροπής μίας ομάδας τύπου (j, m) σε άλλες, όταν αυτή ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή της.

Επίσης,

$$p_m^s(j, 0) + \sum_{j'=1}^{j-1} p_m^s(j, j') = 1 \quad (m = 1, 2, \dots, J, j = 1, 2, \dots, m). \quad (3.2)$$

Το σύστημα εξυπηρέτησης που περιγράφεται παραπάνω θα αναφέρεται ως μία M/G/· ουρά με ομαδικές αφίξεις, απώλειες πελατών και επαναπροσπάθειες και ενσωματώνει ως ειδικές περιπτώσεις αρκετές M/G/k/k ουρές με ομαδικές αφίξεις που έχουν μελετηθεί στο παρελθόν. Έτσι όταν $g_1 = 1$ και $\mathbf{S} = \{1, 2, \dots, k\}$ για κάποιον ακέραιο k , προκύπτει η τυπική M/G/k/k ουρά που όπως έχουμε αναφέρει έχει εκτεταμένα μελετηθεί.

Οι έννοιες της *απώλειας* (blocking) πελατών που θέλουν να εισέλθουν σ' ένα

σύστημα εξυπηρέτησης καθώς και η έννοια της επαναπροσπάθειας (retrial) αυτών που μπλοκάρονται, εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές ουρών και έχει μελετηθεί εκτεταμένα από πολλούς ερευνητές. Μία επισκόπηση των σπουδαιότερων αποτελεσμάτων μπορεί να βρεθεί στους Wolff (1989), van Dijk (1993) και Falin και Templeton (1997). Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα μοντέλα ουρών με απώλειες και επαναπροσπάθειες δεν επιδέχονται αναλυτική λύση. Οι Boucherie και van Dijk (1993,1997) και Economidou και Fakinos (1998) παρουσίασαν αρκετά πρωτόκολλα απωλειών/επαναπροσπαθειών που οδηγούν σε λύσεις κλειστής μορφής.

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως ακολούθως: Στην παράγραφο 3.2 παράγουμε τα κυριότερα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συμπληρωματικών μεταβλητών. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών στο σύστημα που συμβολίζεται $p(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_J)$, όπου \underline{n}_j το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τις ομάδες που τώρα έχουν μέγεθος j ενώ το αρχικό τους μέγεθος είναι m , $m = j, j + 1, \dots, J$ ($j = 1, 2, \dots, J$), είναι σε μορφή γινομένου και μη-ευαίσθητη στην μορφή των κατανομών $B_{jm}(x)$. Στην παράγραφο 3.3 αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής μίας M/G/k/k ουράς με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπάθειες -ειδικής περίπτωσης του μοντέλου της 3.2- ο οποίος αποτελεί γενίκευση του αλγόριθμου του θεωρήματος 2.2 του κεφαλαίου 2. Στην παράγραφο 3.4 μελετάμε μία ακόμη ειδική περίπτωση του αρχικού μοντέλου στην οποία όμως υποθέτουμε ότι $B_{jm}(x) = B_j(x)$, δηλαδή η εξυπηρέτηση μίας ομάδας πελατών εξαρτάται μόνο από το παρόν μέγεθος της ομάδας και όχι από το αρχικό της μέγεθος και δίνουμε τρία κατάλληλα παραδείγματα εφαρμογής του μοντέλου σε M/G/k/k ουρές. Τέλος, στην παράγραφο 3.5, δίνουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης αναλυτικών αποτελεσμάτων τον οποίο εφαρμόζουμε στα παραδείγματα της 3.4 ακολουθώντας κατάλληλα αριθμητικά σενάρια.

3.2 Τα βασικά αποτελέσματα

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι οι κατανομές $B_{jm}(x)$ είναι (απόλυτα) συνεχείς με αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας $\beta_{jm}(x)$ και δεσμευμένους ρυθμούς ολοκλή-

ρωσης της εξυπηρέτησης

$$r_{jm}(x) = \beta_{jm}(x)/(1 - B_{jm}(x)) \quad (x \geq 0). \quad (3.3)$$

Για κάθε $t \geq 0$ ορίζουμε (αντίστοιχα με το κεφάλαιο 2) τις ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές:

$Q_{jm}(t)$: ο αριθμός των ομάδων τύπου (j, m) ($j = 1, 2, \dots, J$, $m = j, j+1, \dots, J$) που είναι παρούσες στο σύστημα τη στιγμή t ,

$\underline{Q}_j(t) = (Q_{jj}(t), Q_{j,j+1}(t), \dots, Q_{jJ}(t))$: το διάνυσμα των ομάδων μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, J$) που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t ,

$$\underline{\mathbf{Q}}(t) = (\underline{Q}_1(t), \underline{Q}_2(t), \dots, \underline{Q}_J(t)),$$

$\underline{U}_j^{(m)}(t) = (U_{1j}^{(m)}(t), U_{2j}^{(m)}(t), \dots, U_{Q_{jm}(t)j}^{(m)}(t))$: μία τυχαία διάταξη των παρελθόντων χρόνων εξυπηρέτησης των διαφόρων ομάδων τύπου (j, m) , που είναι σε εξέλιξη τη στιγμή t , όταν $Q_{jm}(t) > 0$,

$$\underline{U}_j(t) = (\underline{U}_j^{(j)}(t); \underline{U}_j^{(j+1)}(t); \dots; \underline{U}_j^{(J)}(t)) \quad (j = 1, 2, \dots, J), \text{ και}$$

$$\underline{\mathbf{U}}(t) = (\underline{U}_1(t), \underline{U}_2(t), \dots, \underline{U}_J(t)).$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{(\underline{\mathbf{Q}}(t), \underline{\mathbf{U}}(t)), t \geq 0\}$ είναι μία Μαρκοβιανή διαδικασία. Έστω

$$\begin{aligned} p_{\underline{\mathbf{n}}}(\underline{\mathbf{x}})d\underline{\mathbf{x}} &= \Pr(Q_j(t) = \underline{n}_j, x_{ij}^{(m)} < U_{ij}^{(m)}(t) \leq x_{ij}^{(m)} + dx_{ij}^{(m)}; \\ &\quad 1 \leq j \leq J, j \leq m \leq J, 1 \leq i \leq n_{jm}) \\ &= p_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_J}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_J)d\underline{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

η στάσιμη κατανομή της παραπάνω διαδικασίας, όπου

$$\underline{\mathbf{x}} = (\underline{x}_1; \underline{x}_2; \dots; \underline{x}_J), \underline{x}_j = (\underline{x}_j^{(j)}; \underline{x}_j^{(j+1)}; \dots; \underline{x}_j^{(J)}) \quad (j = 1, 2, \dots, J),$$

$$\underline{x}_j^{(m)} = (x_{1j}^{(m)}, x_{2j}^{(m)}, \dots, x_{n_{jm}j}^{(m)}) \quad (j = 1, 2, \dots, J, m = j, j+1, \dots, J),$$

$$d\mathbf{x} = \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \prod_{i=1}^{n_{jm}} dx_{ij}^{(m)} \text{ και}$$

$\lambda_{jm}(\mathbf{n})$: ο δεσμευμένος ρυθμός άφιξης των ομάδων τύπου (j, m) από το εξωτερικό του συστήματος, δεδομένου ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση \mathbf{n} . Δοθέντος ότι στατιστική ισορροπία έχει επέλθει έως τη στιγμή t και θεωρώντας το σύστημα στις στιγμές t και $t + \delta t$, βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος.

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{t}) d\mathbf{x} &= p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \left(1 - \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \sum_{i=1}^{n_{jm}} r_{jm}(x_{ij}^{(m)}) \delta t \right) \left(1 - \sum_{j=1}^{s(\mathbf{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm}(\mathbf{n}) \delta t \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{s(\mathbf{n})} \sum_{m=j}^J (n_{jm} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\mathbf{n} + \mathbf{e}_{jm}}(\mathbf{x}; j(m) : u) d\mathbf{x} du r_{jm}(u) \delta t p_m^s(j, 0) \\ &+ o(\delta t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &(n_{hm} + 1) p_{\mathbf{n} + \mathbf{e}_{hm}}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{t}; h(m) : 0) d\mathbf{x} \delta t = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \lambda_{hm}(\mathbf{n}) \delta t \\ &+ \sum_{j=h+1}^{\min(s(\mathbf{n}), m)} (n_{jm} + 1) \int_{u=0}^{\infty} p_{\mathbf{n} + \mathbf{e}_{jm}}(\mathbf{x}; j(m) : u) d\mathbf{x} du r_{jm}(u) \delta t p_m^s(j, h) + o(\delta t) \\ &h = 1, 2, \dots, s(\mathbf{n}), m = h+1, h+2, \dots, J, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &(n_{hh} + 1) p_{\mathbf{n} + \mathbf{e}_{hh}}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{t}; h(h) : 0) d\mathbf{x} \delta t = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \lambda_{hh}(\mathbf{n}) \delta t \\ &+ o(\delta t), \quad h = 1, 2, \dots, s(\mathbf{n}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

όπου

$p_{\mathbf{n} + \mathbf{e}_{jm}}(\mathbf{x}; j(m) : u)$: συμβολίζει την πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\mathbf{n} + \mathbf{e}_{jm}$ με παρελθόντες χρόνους εξυπηρέτησης

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}; j(m) : u) &= (\underline{x}_1; \dots; \underline{x}_{j-1}; (\underline{x}_j^{(j)}; \dots; \underline{x}_j^{(m-1)}; u, x_{1j}^{(m)}, \dots, x_{n_{jm}j}^{(m)}; \underline{x}_j^{(m+1)}; \dots; \underline{x}_j^{(J)}); \\ &\quad \underline{x}_{j+1}; \dots; \underline{x}_J), \end{aligned}$$

και $\delta \underline{t} = (\delta t, \delta t, \dots, \delta t)$.

Για την εξαγωγή της (3.5) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τη στιγμή $t + \delta t$ η στοχαστική διαδικασία $\{(\underline{Q}(t + \delta t), \underline{U}(t + \delta t))\}$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x} + \delta \underline{t})$, δηλαδή το ενδεχόμενο $\left\{ \underline{Q}_j(t + \delta t) = \underline{n}_j, x_{ij}^{(m)} + \delta t < U_{ij}^{(m)}(t + \delta t) \leq x_{ij}^{(m)} + \delta t + dx_{ij}^{(m)} \right\}$ πραγματοποιείται, εάν τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + \delta t)$ δεν έχουμε άφιξη εκείνων των ομάδων που θα μπορούσαν να αλλάξουν την κατάσταση \underline{n} ούτε αναχώρηση κάποιας ομάδας από αυτές που ήδη εξυπηρετούνται, ή τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{jm}, (\underline{x}; j(m) : u))$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + \delta t)$ ολοκληρώνεται η εξυπηρέτηση της ομάδος με τύπο (j, m) και παρελθούσα διάρκεια εξυπηρέτησης u και αυτή αναχωρεί από το σύστημα, για όλες τις δυνατές περιπτώσεις (j, m) , ενώ ταυτόχρονα δεν συμβαίνει άφιξη ομάδος επιτρεπτού -για το σύστημα- μεγέθους.

Για την (3.6) υποθέτουμε ότι $m > h$. Τη στιγμή $t + \delta t$ η Μαρκοβιανή διαδικασία $\{(\underline{Q}(t + \delta t), \underline{U}(t + \delta t))\}$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{hm}, (\underline{x} + \delta \underline{t}; h(m) : 0))$, δηλαδή μία ομάδα τύπου (h, m) έχει μόλις φθάσει στο σύστημα, για κάποια επιτρεπτή τιμή του μεγέθους h της ομάδας, αν τη στιγμή t η διαδικασία είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + \delta t)$ μία ομάδα τύπου (h, m) φθάνει στο σύστημα από το εξωτερικό, χωρίς να ολοκληρωθεί κάποια από τις εξυπηρετήσεις που είναι σε εξέλιξη, ή τη στιγμή t η διαδικασία είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{jm}, (\underline{x}; j(m) : u))$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + \delta t)$ ολοκληρώνεται η εξυπηρέτηση της ομάδος (j, m) με παρελθούσα διάρκεια εξυπηρέτησης u και μετατρέπεται σε τύπου (h, m) για όλες τις δυνατές τιμές j , ενώ ταυτόχρονα καμμία άφιξη ομάδος που να χωράει στο σύστημα δεν πραγματοποιείται.

Τέλος για την (3.7), έχουμε υποθέσει ότι $m = h$. Τη στιγμή $t + \delta t$ η Μαρκοβιανή διαδικασία $\{(\underline{Q}(t + \delta t), \underline{U}(t + \delta t))\}$ είναι στην κατάσταση $(\underline{n} + \underline{e}_{hh}, (\underline{x} + \delta \underline{t}; h(h) : 0))$, δηλαδή μία ομάδα τύπου (h, h) έχει μόλις φτάσει, εάν τη στιγμή t το σύστημα είναι στην κατάσταση $(\underline{n}, \underline{x})$ και στο χρονικό διάστημα $(t, t + \delta t)$ μία ομάδα τύπου (h, h) φθάνει στο σύστημα από το εξωτερικό, για κάθε επιτρεπτή τιμή του μεγέθους h , ενώ ταυτόχρονα καμμία από τις εξυπηρετήσεις που είναι σε εξέλιξη δεν τερματίζεται.

Διαιρώντας με $\delta t d\underline{x}$ και θέτοντας $\delta t \rightarrow 0$, έχουμε για κάθε $\underline{n} \in \mathbf{S}$ την ακόλουθη

διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \sum_{i=1}^{n_{jm}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}^{(m)}} p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = & - \left(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \sum_{i=1}^{n_{jm}} r_{jm}(x_{ij}^{(m)}) + \sum_{j=1}^{s(\mathbf{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm}(\mathbf{n}) \right) p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \\ & + \sum_{j=1}^{s(\mathbf{n})} \sum_{m=j}^J (n_{jm} + 1) \int_0^{\infty} p_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_{jm}}(\mathbf{x}; j(m) : u) r_{jm}(u) p_m^s(j, 0) du. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Εργαζόμενοι με αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε τις παρακάτω αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} (n_{hm} + 1) p_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_{hm}}(\mathbf{x}; h(m) : 0) = & p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \lambda_{hm}(\mathbf{n}) \\ + \sum_{j=h+1}^{\min(s(\mathbf{n}), m)} (n_{jm} + 1) \int_{u=0}^{\infty} & p_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_{jm}}(\mathbf{x}; j(m) : u) r_{jm}(u) p_m^s(j, h) du, \\ & h = 1, 2, \dots, s(\mathbf{n}), m = h + 1, h + 2, \dots, J, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(n_{hh} + 1) p_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_{hh}}(\mathbf{x}; h(h) : 0) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \lambda_{hh}(\mathbf{n}), \quad h = 1, 2, \dots, s(\mathbf{n}). \quad (3.10)$$

Έχουμε επίσης την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{S}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (3.11)$$

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $\mathbf{S} = \mathbf{N}_0^{J \times (J+1)/2}$, δηλαδή την περίπτωση όπου δεν υπάρχει περιορισμός όσον αφορά το πλήθος των ομάδων διαφόρων τύπων που μπορούν να βρίσκονται ταυτόχρονα στο σύστημα. Τότε κάθε ομάδα που φθάνει στο σύστημα γίνεται δεκτή για εξυπηρέτηση. Έτσι οι πιθανότητες επαναπροσπάθειας σε στιγμές άφιξης ($p_m^a(j, j')$) δεν παίζουν κάποιο ρόλο, ενώ ισχύει ότι

$$\begin{cases} s(\mathbf{n}) = J, \\ \lambda_{jj}(\mathbf{n}) = \lambda g_j, \\ \lambda_{jm}(\mathbf{n}) = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

για κάθε $\underline{n} \in \mathbf{S}$, $j = 1, 2, \dots, J$, $m = j + 1, j + 2, \dots, J$. Για την στάσιμη κατανομή του συστήματος υποθέτουμε ότι έχει τη μορφή

$$p_{\underline{n}}(\mathbf{x}) = c \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \left[\frac{\lambda_{jm}^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \prod_{i=1}^{n_{jm}} (1 - B_{jm}(x_{ij}^{(m)})) \right], \quad \underline{n} \in \mathbf{N}_0^{J \times (J+1)/2}, \quad (3.13)$$

όπου οι σταθερές λ_{jm} , ($j = 1, 2, \dots, J$, $m = j, j + 1, \dots, J$) υπολογίζονται ως η μοναδική λύση των εξισώσεων

$$\lambda_{jm} = \sum_{i=j+1}^m \lambda_{im} p_m^s(i, j), \quad j = 1, 2, \dots, J - 1, \quad m = j + 1, j + 2, \dots, J, \quad (3.14)$$

$$\lambda_{jj} = \lambda g_j, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.15)$$

και αποτελούν τους αδέσμευτους ρυθμούς άφιξης-αναχώρησης ομάδων διαφόρων τύπων στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας την (3.13) βρίσκουμε ότι

$$p_{\underline{n} + \mathbf{e}_{jm}}(\mathbf{x}; j(m) : u) = \frac{\lambda_{jm}}{n_{jm} + 1} p_{\underline{n}}(\mathbf{x}) (1 - B_{jm}(u)), \quad (3.16)$$

και αντικαθιστώντας στην (3.9) έχουμε

$$\lambda_{hm} = \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{j=h+1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \lambda_{jm} p_m^s(j, h) \int_{u=0}^{\infty} (1 - B_{jm}(u)) r_{jm}(u) du, \\ h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), \quad m = h + 1, h + 2, \dots, J,$$

η οποία συμπίπτει με την (3.14) αν χρησιμοποιήσουμε τις (3.3), (3.12). Αντικαθιστώντας ομοίως στην (3.10) βρίσκουμε

$$\lambda_{hh} = \lambda_{hh}(\underline{n}) \quad h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}),$$

απ' όπου με χρήση της (3.12) οδηγούμαστε στην (3.15). Αντικαθιστώντας τέλος στην (3.8) και χρησιμοποιώντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}^{(m)}} p_{\underline{n}}(\mathbf{x}) = - \frac{\beta_{jm}(x_{ij}^{(m)})}{1 - B_{jm}(x_{ij}^{(m)})} p_{\underline{n}}(\mathbf{x}),$$

καταλήγουμε στην

$$\sum_{j=1}^{s(\mathbf{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm}(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{s(\mathbf{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} p_m^s(j, 0),$$

ή με χρήση της (3.12) και της εξίσωσης $\sum_{j=1}^J g_j = 1$, βρίσκουμε

$$\lambda = \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} p_m^s(j, 0). \quad (3.17)$$

Αθροίζοντας την (3.14) για κάθε $j = 1, 2, \dots, J-1$, $m = j+1, j+2, \dots, J$, την (3.15) για όλα τα $j = 1, 2, \dots, J$ και προσθέτοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτει

$$\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} = \lambda + \sum_{j=1}^J \sum_{m=j+1}^J \sum_{i=j+1}^m \lambda_{im} p_m^s(i, j).$$

Αλλάζοντας όμως την σειρά της άθροισης έχουμε

$$\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} = \lambda + \sum_{m=1}^J \sum_{i=1}^m \lambda_{im} \sum_{j=1}^{i-1} p_m^s(i, j).$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{j=1}^{i-1} p_m^s(i, j) = 1 - p_m^s(i, 0),$$

και διαγράφοντας όμοιους όρους καταλήγουμε στην (3.17). Έτσι στην περίπτωση όπου δεν έχουμε περιορισμό στον χώρο καταστάσεων του συστήματος δείξαμε ότι η συνάρτηση $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ όπως δίνεται από την (3.13) είναι η στάσιμη κατανομή και χρησιμοποιώντας την (3.11) μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά c . Συγκεκριμένα έχουμε

$$c \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \sum_{n_{jm}=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} = 1,$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$c = \exp \left(- \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} b_{jm} \right).$$

Επιστρέφουμε τώρα στη γενική περίπτωση όπου $\mathbf{S} \subset \mathbf{N}_0^{J \times (J+1)/2}$. Πριν να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή πρέπει να προσδιορίσουμε τους δεσμευμένους ρυθμούς μετάβασης $\lambda_{jm}(\underline{n})$ των ομάδων τύπου (j, m) από το εξωτερικό του συστήματος, για κάθε $\underline{n} \in \mathbf{S}$, $j = 1, 2, \dots, s(\underline{n})$, $m = j, j+1, \dots, J$. Για κάθε κατάσταση $\underline{n} \in \mathbf{S}$ και $m = 1, 2, \dots, J$ ορίζουμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu^{(m)}(\underline{n}) : \nu \in \mathbf{N}_0\}$ στο σύνολο $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ με πιθανότητες πρώτης μετάβασης

$$p_{ji}^{(m)}(\underline{n}) = \begin{cases} p_m^a(j, i), & \text{αν } j > s(\underline{n}), i < j \\ 1, & \text{αν } j = i \leq s(\underline{n}) \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις $0, 1, 2, \dots, s(\underline{n})$ είναι καταστάσεις απορρόφησης της $\{X_\nu^{(m)}(\underline{n})\}$. Έτσι λοιπόν όταν μία ομάδα τύπου (j, m) , $j > s(\underline{n})$, φθάνει στο σύστημα όταν η κατάστασή του είναι \underline{n} , τότε το μεγεθός της μειώνεται εξαιτίας διαδοχικών επαναπροσπαθειών που περιγράφονται από την Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_\nu^{(m)}(\underline{n})\}$, έως ότου αυτό να γίνει $h \leq s(\underline{n})$. Επομένως, η πιθανότητα μία αφιχθείσα από το εξωτερικό ομάδα τύπου (j, m) , $j > s(\underline{n})$, να εισαχθεί τελικά στο σύστημα ως ομάδα τύπου (h, m) , $h \leq s(\underline{n})$, είναι ακριβώς η πιθανότητα $\pi_{jh}^{(m)}(\underline{n})$ απορρόφησης της $\{X_\nu^{(m)}(\underline{n})\}$ στην κατάσταση h , δοθέντος ότι $X_0^{(m)}(\underline{n}) = j$. Επίσης, όταν $j \leq s(\underline{n})$, τότε η ομάδα μπαίνει στο σύστημα και αυτό περιγράφεται εξίσου από την $\{X_\nu^{(m)}(\underline{n})\}$ με την απορρόφηση στην κατάσταση j , δεδομένου ότι $X_0^{(m)}(\underline{n}) = j$, που συμβαίνει με πιθανότητα 1. Χρησιμοποιώντας ένα βασικό αποτέλεσμα από τη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων (δες Wolff(1989)) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $\pi_{jh}^{(m)}(\underline{n})$ ($h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), j = s(\underline{n}) + 1, s(\underline{n}) + 2, \dots, m$) από το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων

$$\pi_{jh}^{(m)}(\underline{n}) = p_m^a(j, h) + \sum_{i=s(\underline{n})+1}^{j-1} p_m^a(j, i)\pi_{ih}^{(m)}(\underline{n}),$$

$$h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), s(\underline{n}) + 1 \leq j \leq m. \quad (3.18)$$

Έχοντας υπολογίσει τις παραπάνω πιθανότητες, οι δεσμευμένοι ρυθμοί άφιξης ομά-

δων διαφόρων τύπων από το εξωτερικό δίνεται ως

$$\lambda_{hh}(\underline{n}) = \lambda g_h, \quad \underline{n} \in \mathbf{S}, \quad h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), \quad (3.19)$$

$$\lambda_{hm}(\underline{n}) = \lambda g_m \pi_{mh}^{(m)}(\underline{n}), \quad \underline{n} \in \mathbf{S}, \quad h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), \quad m > s(\underline{n}), \quad (3.20)$$

$$\lambda_{hm}(\underline{n}) = 0, \quad \underline{n} \in \mathbf{S}, \quad h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), \quad h < m \leq s(\underline{n}). \quad (3.21)$$

Στο επόμενο θεώρημα (3.1) παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.1. *Εάν ισχύει*

$$p_m^a(j, i) = p_m^s(j, i) \quad (j = 1, 2, \dots, J, \quad m = j, j + 1, \dots, J, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j - 1), \quad (3.22)$$

τότε η στάσιμη κατανομή της $\{\underline{Q}(t), \underline{U}(t)\}$ δίνεται ως

$$p_{\underline{n}}(\underline{x}) = c_{\mathbf{S}} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \left[\frac{\lambda_{jm}^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \prod_{i=1}^{n_{jm}} (1 - B_{jm}(x_{ij}^{(m)})) \right], \quad \underline{n} \in \mathbf{S}, \quad \underline{x} \geq \underline{0}, \quad (3.23)$$

όπου οι σταθερές λ_{jm} υπολογίζονται από τις εξισώσεις (3.14), (3.15) ενώ η σταθερά $c_{\mathbf{S}}$ είναι η κατάλληλη σταθερά κανονικοποίησης και δίνεται ως

$$c_{\mathbf{S}} = \left(\sum_{\underline{n} \in \mathbf{S}} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Επιπλέον η στάσιμη κατανομή $p(\underline{n})$ του αριθμού των ομάδων διαφόρων τύπων δίνεται ως

$$p(\underline{n}) = c_{\mathbf{S}} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad \underline{n} \in \mathbf{S}, \quad (3.25)$$

και έχει την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας.

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $p_{\underline{n}}(\underline{x})$ που δίνεται από την (3.23) στις (3.8), (3.9), (3.10), χρησιμοποιώντας την (3.16) και δουλεύοντας όπως στην περι-

πτώση του απεριόριστου χώρου καταστάσεων, καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\sum_{j=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm}(\underline{n}) = \sum_{j=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} p_m^s(j, 0), \quad (3.26)$$

$$\lambda_{hm} = \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{j=h+1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \lambda_{jm} p_m^s(j, h),$$

$$h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}), \quad m = h + 1, \dots, J, \quad (3.27)$$

$$\lambda_{hh} = \lambda_{hh}(\underline{n}), \quad h = 1, 2, \dots, s(\underline{n}). \quad (3.28)$$

Η εξίσωση (3.28) ισχύει λόγω των (3.15) και (3.19). Αθροίζοντας την (3.27) για κάθε $h = 1, 2, \dots, s(\underline{n})$ and $m = h + 1, h + 2, \dots, J$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.28) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \lambda_{hm} &= \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \sum_{j=h+1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \lambda_{jm} p_m^s(j, h) \\ &= \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{m=1}^J \sum_{h=1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \sum_{j=h+1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \lambda_{jm} p_m^s(j, h) \\ &= \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{m=1}^J \sum_{j=1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \lambda_{jm} \sum_{h=1}^{j-1} p_m^s(j, h) \\ &= \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{m=1}^J \sum_{j=1}^{\min(s(\underline{n}), m)} \lambda_{jm} (1 - p_m^s(j, 0)) \\ &= \sum_{h=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=h}^J \lambda_{hm}(\underline{n}) + \sum_{j=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} - \sum_{j=1}^{s(\underline{n})} \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} p_m^s(j, 0). \end{aligned}$$

Διαγράφοντας τους ίσους όρους στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, καταλήγουμε στην (3.26). Συνεπώς αρκεί να εξετάσουμε την ισχύ της (3.27) υποθέτοντας ότι ισχύει η (3.22). Αν υποθέσουμε ότι $h = 1, 2, \dots, s(\underline{n})$ και $h < m \leq s(\underline{n})$, τότε $\lambda_{hm}(\underline{n}) = 0$ αφού φτάνοντας μία ομάδα μεγέθους m στο σύστημα, θα μπορέσει να εισέλθει σε αυτό ως ομάδα τύπου (m, m) . Έτσι η (3.27) γίνεται

$$\lambda_{hm} = \sum_{j=h+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h),$$

η οποία ισχύει από την (3.14). Εάν $h = 1, 2, \dots, s(\mathbf{n})$ και $m > s(\mathbf{n})$ τότε, εξαιτίας της (3.20), η (3.27) γίνεται

$$\lambda_{hm} = \lambda g_m \pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n}) + \sum_{j=h+1}^{s(\mathbf{n})} \lambda_{jm} p_m^s(j, h),$$

ή, αντικαθιστώντας το ρυθμό λ_{hm} από την (3.14),

$$\sum_{j=h+1}^{s(\mathbf{n})} \lambda_{jm} p_m^s(j, h) + \sum_{j=s(\mathbf{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) = \lambda g_m \pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n}) + \sum_{j=h+1}^{s(\mathbf{n})} \lambda_{jm} p_m^s(j, h),$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda g_m \pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n}) = \sum_{j=s(\mathbf{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h). \quad (3.29)$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε την (3.29). Αφού $m > s(\mathbf{n})$, τότε $m = s(\mathbf{n}) + r$, όπου r ένας θετικός ακέραιος από το σύνολο $\{1, 2, \dots, J - s(\mathbf{n})\}$. Εάν $r = 1$, τότε

$$\pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n}) = p_m^a(m, h),$$

καθώς η απορρόφηση της ομάδας μεγέθους $m = s(\mathbf{n}) + 1$ ως ομάδα τύπου (h, m) πρέπει να γίνει σε ένα βήμα. Έτσι η (3.29) γίνεται

$$\lambda g_m \pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n}) = \lambda_{mm} p_m^s(m, h),$$

που ισχύει λόγω της (3.15) και της συνθήκης (3.22). Εάν $r > 1$, τότε μία αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης $\pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n})$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \pi_{mh}^{(m)}(\mathbf{n}) &= p_m^a(m, h) \\ &+ \sum_{v=1}^{r-2} \sum_{i_1 > i_2 > \dots > i_v = s(\mathbf{n})+1}^{m-1} p_m^a(m, i_1) p_m^a(i_1, i_2) \dots p_m^a(i_v, h) \\ &+ p_m^a(m, m-1) p_m^a(m-1, m-2) \dots p_m^a(s(\mathbf{n})+1, h), \end{aligned} \quad (3.30)$$

όπου οι όροι στο δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης εκφράζουν πιθανές περιπτώσεις απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας από την κατάσταση m στην κατάσταση h σε $1, 2, \dots, r$ βήματα αντίστοιχα. Περνώντας στο δεύτερο μέλος της (3.29)

μπορούμε να το αναλύσουμε ως

$$\sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) = \lambda_{mm} p_m^s(m, h) + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \lambda_{jm} p_m^s(j, h),$$

ή χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.14) και (3.15)

$$\sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) = \lambda_{gm} p_m^s(m, h) + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^m \lambda_{i_1 m} p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h).$$

Χωρίζοντας το άθροισμα $\sum_{i_1=j+1}^m (\cdot)$ με παρόμοιο τρόπο, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} \sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) &= \lambda_{gm} \left(p_m^s(m, h) + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} p_m^s(m, j) p_m^s(j, h) \right) \\ &+ \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^{m-1} \lambda_{i_1 m} p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h), \end{aligned}$$

και προχωρώντας ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) &= \lambda_{gm} \left(p_m^s(m, h) + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} p_m^s(m, j) p_m^s(j, h) \right) \\ &+ \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^{m-1} \left(\sum_{i_2=i_1+1}^m \lambda_{i_2 m} p_m^s(i_2, i_1) \right) p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h), \end{aligned}$$

και χωρίζοντας το άθροισμα στην τελευταία παρένθεση με αντίστοιχο τρόπο παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) &= \lambda_{gm} \left(p_m^s(m, h) + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} p_m^s(m, j) p_m^s(j, h) \right) \\ &+ \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^{m-1} p_m^s(m, i_1) p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h) \\ &+ \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^{m-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{m-1} \lambda_{i_2 m} p_m^s(i_2, i_1) p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με παρόμοια βήματα, μπορούμε επαγωγικά να αποδείξουμε ότι το δεύτερο μέλος της (3.29) αναλύεται ως

$$\begin{aligned}
\sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) &= \lambda g_m \left(p_m^s(m, h) + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} p_m^s(m, j) p_m^s(j, h) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^{m-1} \dots \sum_{i_{r-3}=i_{r-4}+1}^{m-1} p_m^s(m, i_{r-3}) \dots p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h) \right) \\
&\quad + \sum_{j=s(\underline{n})+1}^{m-1} \sum_{i_1=j+1}^{m-1} \dots \sum_{i_{r-2}=i_{r-3}+1}^{m-1} \lambda_{i_{r-2}m} p_m^s(i_{r-2}, i_{r-3}) \dots p_m^s(i_1, j) p_m^s(j, h).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Όμως $i_1 \geq s(\underline{n}) + 2$, $i_2 \geq s(\underline{n}) + 3$, ..., $i_{r-2} \geq s(\underline{n}) + r - 1 = m - 1$ και $i_{r-2} \leq m - 1$, οπότε $i_{r-2} = m - 1$. Επειδή $s(\underline{n}) + 1 \leq j < i_1 < \dots < i_{r-3} < i_{r-2} = s(\underline{n}) + r - 1$ και όλοι οι προηγούμενοι δείκτες είναι ακέραιοι, συμπεραίνουμε ότι στον τελευταίο όρο της (3.31) ισχύει $j = s(\underline{n}) + 1$, $i_1 = s(\underline{n}) + 2$, ..., $i_{r-3} = m - 2$, $i_{r-2} = m - 1$. Χρησιμοποιώντας ξανά τις (3.14), (3.15) βρίσκουμε ότι

$$\lambda_{i_{r-2}m} = \lambda_{m-1, m} = \lambda_{mm} p_m^s(m, m-1) = \lambda g_m p_m^s(m, m-1),$$

οπότε ο τελευταίος όρος της (3.31) γίνεται

$$\lambda g_m p_m^s(m, m-1) p_m^s(m-1, m-2) \dots p_m^s(s(\underline{n})+2, s(\underline{n})+1) p_m^s(s(\underline{n})+1, h).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η εξής μορφή για την εξίσωση (3.31)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=s(\underline{n})+1}^m \lambda_{jm} p_m^s(j, h) &= \lambda g_m [p_m^s(m, h) \\
&\quad + \sum_{v=1}^{r-2} \sum_{j_1 > j_2 > \dots > j_v = s(\underline{n})+1}^{m-1} p_m^s(m, j_1) p_m^s(j_1, j_2) \dots p_m^s(j_v, h) \\
&\quad + p_m^s(m, m-1) p_m^s(m-1, m-2) \dots p_m^s(s(\underline{n})+1, h)],
\end{aligned} \tag{3.32}$$

όπου οι δείκτες j, i_1, \dots, i_{v-1} έχουν αντικατασταθεί από τους j_v, j_{v-1}, \dots, j_1 αντίστοιχα, για κάθε $v = 1, 2, \dots, r-2$. Οι εξισώσεις (3.30) και (3.32) συνεπάγονται την ισχύ της

(3.29) άρα η στάσιμη κατανομή της $\{\underline{Q}(t), \underline{U}(t)\}$ δίνεται από την (3.23), όπου η σταθερά κανονικοποίησης c_s προσδιορίζεται από την (3.11). Συγκεκριμένα, θέτοντας

$$\hat{b}_{jm}(x) = (1 - B_{jm}(x))/b_{jm} \quad (j = 1, 2, \dots, J, m = j, j+1, \dots, J),$$

η στάσιμη κατανομή $p_{\underline{n}}(\underline{x})$ γίνεται

$$p_{\underline{n}}(\underline{x}) = c_s \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \prod_{i=1}^{n_{jm}} \hat{b}_{jm}(x_{ij}^{(m)}).$$

Κάνοντας χρήση της (3.11) και του γεγονότος ότι

$$\int_0^{\infty} \hat{b}_{jm}(x) dx = 1,$$

καταλήγουμε στην (3.24), ενώ χρησιμοποιώντας ότι

$$p(\underline{n}) = \int_{\underline{x} > \underline{0}} p_{\underline{n}}(\underline{x}) d\underline{x},$$

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $p(\underline{n})$ δίνεται από την (3.25) και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. ■

Έστω $Q_j(t)$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των ομάδων μεγέθους j που βρίσκονται στο σύστημα τη στιγμή t ($j = 1, 2, \dots, J$), και

$$p(n_1, n_2, \dots, n_J) = P(Q_1(t) = n_1, Q_2(t) = n_2, \dots, Q_J(t) = n_J),$$

η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών που βρίσκονται στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας ότι

$$Q_j(t) = \sum_{m=j}^J Q_{jm}(t),$$

και το προηγούμενο θεώρημα, βρίσκουμε τον τύπο

$$p(n_1, n_2, \dots, n_J) = c_s \prod_{j=1}^J \sum_{(\sum_{m=j}^J n_{jm} = n_j)} \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}. \quad (3.33)$$

Στο επόμενο πόρισμα θα θεωρήσουμε μία ειδική περίπτωση του προηγούμενου μοντέλου.

Πόρισμα 3.1. *Ας θεωρήσουμε μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις, πολιτική μερικής αποδοχής πελατών, εξυπηρετήσεις ομάδων πελατών που εξαρτώνται από το παρόν αλλά και το αρχικό μεγεθός τους και μεμονωμένες αναχωρήσεις, δηλαδή το μοντέλο που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 2. Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα αυτό υπάρχουν k ($k < J$) υπηρέτες. Κατ' αρχάς ο χώρος καταστάσεων*

$$\mathbf{S} = \left\{ \underline{n} : n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{j=1}^k \sum_{m=j}^J j n_{jm} \leq k \text{ και } n_{k+1} = \dots = n_J = 0 \right\}$$

ικανοποιεί την ιδιότητα (I) αφού

$$\begin{aligned} \underline{n} + \underline{e}_{jm} \in \mathbf{S} &\Rightarrow \sum_{s=1}^k \sum_{l=s}^J s n_{sl} + j \leq k \\ &\Rightarrow \sum_{s=1}^k \sum_{l=s}^J s n_{sl} + j - 1 \leq k \\ &\Rightarrow \underline{n} + \underline{e}_{j-1,m} \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Λόγω της πολιτικής της μερικής αποδοχής πελατών και των μεμονωμένων αναχωρήσεων, η ουρά αυτή μπορεί να περιγραφεί από το μοντέλο με επαναπροσπάθειες που μελετήσαμε στην παράγραφο 3.2, όπου για τις πιθανότητες ισχύει

$$p_m^a(j, i) = p_m^s(j, i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j - 1 \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, J$, $m = j, j + 1, \dots, J$, $i = 0, 1, 2, \dots, j - 1$. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων λ_{jm} , θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (3.14) και (3.15). Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_{mm} &= \lambda g_m, \\ \lambda_{m-1,m} &= \sum_{i=m}^m \lambda_{im} p_m^s(i, m-1) = \lambda_{mm} p_m^s(m, m-1) = \lambda g_m \\ \lambda_{m-2,m} &= \sum_{i=m-1}^m \lambda_{im} p_m^s(i, m-2) = \lambda_{m-1,m} p_m^s(m-1, m-2) = \lambda g_m, \end{aligned}$$

και επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\lambda_{jm} = \lambda g_m \quad (j = 1, 2, \dots, m, m = 1, 2, \dots, J).$$

Έτσι η εξίσωση (3.25) παίρνει τη μορφή,

$$p(\underline{n}) = c_{\mathbf{s}} \prod_{j=1}^k \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda g_m b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad \underline{n} \in \mathbf{S},$$

διότι $n_{jm} = 0$ για κάθε $j = k+1, \dots, J$, $j \leq m \leq J$. Η παραπάνω εξίσωση είναι το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου 2 (δες (2.29)).

3.3 Ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής σε μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπάθειες

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε την ειδική περίπτωση του μοντέλου της προηγούμενης παραγράφου, όπου στο σύστημα υπάρχουν k όμοιοι υπηρέτες που παρέχουν εξυπηρέτηση και καθόλου χώρος αναμονής. Έτσι λοιπόν έχουμε μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις, επαναπροσπάθειες, εξυπηρετήσεις κατά ομάδες όπου όμως η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης εξαρτάται από το παρόν μέγεθος της ομάδας και το αρχικό της μέγεθος και μεμονωμένες αναχωρήσεις. Επίσης δεν υποθέτουμε κάποιον περιορισμό σε σχέση με τα k, J . Έτσι ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι

$$\mathbf{S} = \left\{ \underline{n} : n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm} \leq k \right\}.$$

Προφανώς το σύνολο \mathbf{S} έχει την επιθυμητή ιδιότητα (I) με

$$s(\underline{n}) = k - \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm}.$$

Εάν η συνθήκη (3.22) ισχύει, τότε η στάσιμη κατανομή $p(\underline{n})$ του αριθμού των ομάδων διαφόρων τύπων στο σύστημα δίνεται από την (3.25). Έστω,

$$p_n = \text{Pr}[\text{να υπάρχουν } n \text{ πελάτες στο σύστημα }],$$

και

$$p_n(r) = \text{Pr}[\text{να υπάρχουν } n \text{ πελάτες στο σύστημα, κατανομημένοι σε } r \text{ ομάδες }],$$

όταν αυτό είναι σε κατάσταση ισορροπίας, όπου $n = 0, 1, \dots, k$ και $r = 0, 1, \dots, n$. Ο υπολογισμός αυτών των πιθανοτήτων επιτυγχάνεται με την εύρεση συγκεκριμένων ποσοτήτων που ορίζονται ως εξής:

$$B_n = \sum_{(\sum_{j=1}^J j n_j = n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

όπου $n_j = \sum_{m=j}^J n_{jm}$: ο συνολικός αριθμός των ομάδων μεγέθους j , $B_0 = 1$ και λ_{jm} τις παραμέτρους που υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος των (3.14), (3.15) και

$$B_{n,r} = \sum_{(\sum_{j=1}^J n_j = r, \sum_{j=1}^J j n_j = n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (3.35)$$

όπου $B_{0,0} = 1, B_{n,0} = 0$ ($n > 0$) και $B_{n,r} = 0$ ($n < r$). Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο υπολογισμού των παραπάνω ποσοτήτων.

Πρόταση 3.1. Το επόμενο επαναληπτικό σχήμα ισχύει για τον υπολογισμό των B_n και $B_{n,r}$:

(i)

$$B_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1, n)} (u+1) \left(\sum_{m=u+1}^J \lambda_{u+1, m} b_{u+1, m} \right) B_{n-u}, \quad (3.36)$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ με αρχική συνθήκη $B_0 = 1$.

(ii)

$$B_{n+1, r+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1, n-r)} (u+1) \left(\sum_{m=u+1}^J \lambda_{u+1, m} b_{u+1, m} \right) B_{n-u, r}, \quad (3.37)$$

για κάθε $r = 0, 1, 2, \dots, n = r, r+1, \dots$ και αρχικές συνθήκες $B_{0,0} = 1, B_{n,0} = 0$ ($n > 0$) και $B_{n,r} = 0$ ($n < r$).

Απόδειξη. Ορίζουμε τις ακόλουθες γεννήτριες συναρτήσεις,

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n, \quad B(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n B_{n,r} u^r t^n,$$

και

$$B_r(t) = \sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} t^n.$$

(i) Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm} = n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm} = n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm} t^j)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) \\ &= \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \left(\sum_{n_{jm}=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{jm} b_{jm} t^j)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) = \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J e^{\lambda_{jm} b_{jm} t^j}, \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$B(t) = e^{\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} b_{jm} t^j}. \quad (3.38)$$

Παραγωγίζοντας την (3.38) ως προς t βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} B(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j \lambda_{jm} b_{jm} t^{j-1} B(t),$$

ή

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_{n+1} t^n &= \sum_{u=0}^{J-1} \left(\sum_{m=u+1}^J (u+1) \lambda_{u+1,m} b_{u+1,m} \right) t^u \cdot \sum_{l=0}^{\infty} B_l t^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{u=0}^{\min(n, J-1)} \left(\sum_{m=u+1}^J (u+1) \lambda_{u+1,m} b_{u+1,m} \right) B_{n-u} \right] t^n, \end{aligned}$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων t^n καταλήγουμε στην (3.36).

(ii) Με όμοιο τρόπο έχουμε,

$$\begin{aligned} B(t, u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \left(\sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J n_{jm}=r, \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm}=n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) u^r t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \left(\sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J n_{jm}=r, \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm}=n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm} u t^j)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) \\ &= \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \left(\sum_{n_{jm}=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{jm} b_{jm} u t^j)^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right). \end{aligned}$$

Έτσι,

$$B(t, u) = e^{u \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} b_{jm} t^j}. \quad (3.39)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} B_r(t) u^r &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} B_{n,r} t^n u^r = B(t, u) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^r \left(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} b_{jm} t^j \right)^r}{r!}, \end{aligned}$$

οπότε

$$B_r(t) = \frac{1}{r!} \left(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} b_{jm} t^j \right)^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.40)$$

ή

$$B_{r+1}(t) = \frac{1}{(r+1)!} \left(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J \lambda_{jm} b_{jm} t^j \right)^{r+1} \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη εξίσωση για $r = 0, 1, 2, \dots$ και χρησιμοποιώντας ότι

$$B_{r+1}(t) = \sum_{l=r+1}^{\infty} B_{l,r+1} t^l,$$

καθώς και την (3.40) βρίσκουμε,

$$\sum_{l=r+1}^{\infty} l B_{l,r+1} t^{l-1} = \left(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j \lambda_{jm} b_{jm} t^{j-1} \right) B_r(t),$$

ή αλλάζοντας τους δείκτες άθροισης l, j ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=r}^{\infty} (n+1) B_{n+1,r+1} t^n &= \sum_{u=0}^{J-1} \left(\sum_{m=u+1}^J (u+1) \lambda_{u+1,m} b_{u+1,m} \right) t^u \cdot \sum_{l=r}^{\infty} B_{l,r} t^l \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \left[\sum_{u=0}^{\min(J-1, n-r)} \left(\sum_{m=u+1}^J (u+1) \lambda_{u+1,m} b_{u+1,m} \right) B_{n-u,r} \right] t^n. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας ξανά τους συντελεστές των δυνάμεων t^n καταλήγουμε στην (3.37). ■

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε τους τύπους υπολογισμού των πιθανοτήτων p_n , $p_n(r)$ καθώς και κάποια άλλα μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος.

Θεώρημα 3.2. Για την M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπάθειες η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (3.22) ισχύει ότι:

(i)

$$p_n = c_s B_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k), \quad (3.41)$$

$$p_n(r) = c_s B_{n,r} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (3.42)$$

όπου

$$c_s = \left(\sum_{n=0}^k B_n \right)^{-1}, \quad (3.43)$$

είναι το ποσοστό του χρόνου συνολικά που το σύστημα παραμένει κενό.

(ii) Το ποσοστό P_{served} των αφιχθέντων πελατών που θα εξυπηρετηθούν και ισούται με την οριακή πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα να μην απορριφθεί από αυτό, δίνεται ως

$$P_{served} = \sum_{n=0}^{k-1} p_n \left[\sum_{j=1}^{k-n} \frac{j g_j}{M_g} + \sum_{j=k-n+1}^J \frac{g_j}{M_g} \sum_{h=1}^{k-n} h \pi_{jh}^{(j)}(n) \right], \quad (3.44)$$

όπου

$$M_g = \sum_{j=1}^J jg_j, \quad (3.45)$$

είναι το μέσο μέγεθος των ομάδων που φθάνουν στο σύστημα ενώ οι πιθανότητες $\pi_{jh}^{(j)}(n)$ προσδιορίζονται από το επόμενο σύστημα εξισώσεων,

$$\pi_{jh}^{(m)}(n) = p_m^a(j, h) + \sum_{i=k-n+1}^{j-1} p_m^a(j, i)\pi_{ih}^{(m)}(n), \quad (3.46)$$

για κάθε $m = k-n+1, k-n+2, \dots, J$, $j = k-n+1, k-n+2, \dots, m$ και $h = 1, 2, \dots, k-n$.

Απόδειξη.

(i) Έστω κάποιος ακέραιος $n = 0, 1, 2, \dots, k$. Διακρίνουμε τις επόμενες δύο περιπτώσεις.

Εάν $J \leq n$, τότε

$$p_n = \sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J jn_{jm}=n)} p(\underline{n}),$$

ενώ όταν $n < J$, τότε

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{(\sum_{j=1}^n \sum_{m=j}^J jn_{jm}=n)} p(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \dots, \underline{n}_n, \underline{0}, \dots, \underline{0}) \\ &= \sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J jn_{jm}=n)} p(\underline{n}). \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J jn_{jm}=n)} c_s \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \\ &= c_s B_n. \end{aligned}$$

Διακρίνοντας ομοίως δύο περιπτώσεις βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
 p_n(r) &= \sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm} = n, \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J n_{jm} = r)} p(\mathbf{n}) \\
 &= \sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm} = n, \sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J n_{jm} = r)} c_{\mathbf{s}} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \\
 &= c_{\mathbf{s}} B_{n,r}.
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση (3.43) ισχύει από το γεγονός ότι πρέπει $\sum_{n=0}^k p_n = 1$ και ότι οι πιθανότητες p_n υπολογίζονται από την (3.41).

(ii) Λόγω της ιδιότητας PASTA, η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων συμπίπτει με την $\{p_n\}$. Επίσης το μέγεθος του group στο οποίο ανήκει ένας πελάτης φθάνοντας στο σύστημα έχει κατανομή πιθανότητας $\{j g_j / M_g\}$ (δες Wolff 1989). Έστω ένας συγκεκριμένος πελάτης ο οποίος φθάνει κάποια στιγμή στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας συμβολισμό αντίστοιχο με αυτόν του κεφαλαίου 2, ορίζουμε:

C_n : το ενδεχόμενο φθάνοντας να βρει n πελάτες, $n = 0, 1, 2, \dots, k$,

B_j : το ενδεχόμενο ο υπό μελέτη πελάτης να ανήκει σε group μεγέθους j , $j = 1, 2, \dots, J$,

A : το ενδεχόμενο ο πελάτης αυτός να παραμείνει τελικά στο σύστημα. Τότε

$$P_{served} = \sum_{n=0}^{k-1} \Pr(C_n) \Pr(A/C_n)$$

ή

$$P_{served} = \sum_{n=0}^{k-1} \Pr(C_n) \left[\sum_{j=1}^{k-n} \Pr(A/C_n B_j) \Pr(B_j/C_n) + \sum_{j=k-n+1}^J \Pr(A/C_n B_j) \Pr(B_j/C_n) \right].$$

Ισχύει ότι,

$$\Pr(A/C_n B_j) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } j = 1, 2, \dots, k-n \\ \sum_{h=1}^{k-n} \pi_{jh}^{(j)}(n) \frac{h}{j} & \text{εάν } j = k-n+1, \dots, J \end{cases},$$

διότι, αν ο πελάτης ανήκει σε ομάδα μεγέθους $j \leq k - n$, τότε θα μπει σίγουρα στο σύστημα μαζί με την υπόλοιπη ομάδα του, ενώ αν $j > k - n$, τότε θα μπει αν η ομάδα του μπορέσει τελικά να γίνει επιτρεπτού μεγέθους h , $h = 1, 2, \dots, k - n$, και ο συγκεκριμένος πελάτης να ανήκει στους h πελάτες που τελικά θα μείνουν στο σύστημα. Τα δύο τελευταία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται με πιθανότητες $\pi_{jh}^{(j)}(n)$ και $\frac{h}{j}$ αντίστοιχα, όπου οι πιθανότητες $\pi_{jh}^{(j)}(n)$ προκύπτουν από το σύστημα (3.46) αντίστοιχα με τις $\pi_{jh}^{(m)}(\underline{n})$ που υπολογίζονται από το σύστημα (3.18). Τέλος επειδή τα ενδεχόμενα B_j και C_n είναι ανεξάρτητα έχουμε ότι $\Pr(B_j/C_n) = \frac{jg_j}{Mg}$, οπότε η πιθανότητα P_{served} παίρνει τη μορφή της (3.44) και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. ■

3.4 Μία ειδική περίπτωση - Παραδείγματα

Σε αυτή την περάγραφο εξετάζουμε ένα μοντέλο που αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου της παραγράφου 3.2. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι ομάδες πελατών φθάνουν σ' ένα σταθμό εξυπηρέτησης σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson(λ). Τα μεγέθη των διαδοχικών ομάδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες των στιγμών άφιξης και έχουν κατανομή πιθανότητας $\{g_m, m = 1, 2, \dots, J\}$. Μόλις μία ομάδα αρχικού μεγέθους m εισέρχεται στο σύστημα με μέγεθος j , τότε αυτή αρχίζει αμέσως να εξυπηρετείται σαν μία μονάδα με κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης $B_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, J$), να εξαρτάται μόνο από το παρόν μέγεθος της ομάδος και όχι από το αρχικό της μέγεθος. Αυτή η αλλαγή στην κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης θα επηρεάσει τόσο τον χώρο καταστάσεων του συστήματος, όσο και τον μηχανισμό εισόδου-εξόδου των ομάδων από αυτό. Συγκεκριμένα θα συμβολίσουμε με

n_j : τον αριθμό των ομάδων μεγέθους j ($j = 1, 2, \dots, J$) που είναι παρούσες στο σύστημα,

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_J)$: την κατάσταση του συστήματος και

$Q_j(t)$, $\underline{Q}(t)$ τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές. Ο αντίστοιχος χώρος καταστάσεων S είναι ένα υποσύνολο του \mathbf{N}_0^J και έχει μία ιδιότητα αντίστοιχη με αυτήν του

μοντέλου στην παράγραφο 3.2. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι:

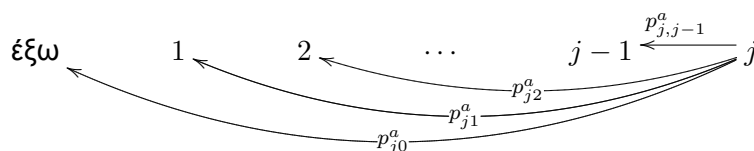
$$\text{αν } \underline{n} + \underline{e}_j \in S \Rightarrow \underline{n} + \underline{e}_{j-1} \in S, \quad (\text{II})$$

όπου \underline{e}_j είναι το J -διάστατο διάνυσμα με 1 στην j θέση και 0 αλλού ($j = 1, 2, \dots, J$, $\underline{e}_0 = (0, 0, \dots, 0)$) και ερμηνεύεται αντίστοιχα με την (I). Έστω επίσης

$$s(\underline{n}) = \max \{j = 0, 1, 2, \dots, J : \underline{n} + \underline{e}_j \in S\}$$

το μέγιστο μέγεθος της ομάδος που μπορεί να εισέλθει στο σύστημα όταν η κατάσταση αυτού είναι \underline{n} .

Υποθέτουμε τον ακόλουθο μηχανισμό εισόδου στο σύστημα. Οποτεδήποτε μία αφιχθείσα ομάδα μεγέθους j βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση \underline{n} , όλη η ομάδα γίνεται δεκτή για εξυπηρέτηση εάν $j \leq s(\underline{n})$. Εάν όμως $j > s(\underline{n})$, τότε $j - j'$ από τα μέλη της αναχωρούν αμέσως χωρίς να λάβουν εξυπηρέτηση (και θεωρούνται χαμένα για το σύστημα) και η ομάδα μετατρέπεται σε ομάδα μεγέθους j' ($j' = 1, 2, \dots, j - 1$), με πιθανότητα $p_{j,j'}^a$, είτε όλη η ομάδα αναχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα $p_{j,0}^a$. Αν συμβεί το πρώτο από τα δύο, τότε η ομάδα μεγέθους j' προσπαθεί αμέσως να εισέλθει στο σύστημα. Εάν $j' \leq s(\underline{n})$, τότε εισέρχεται αλλιώς η ίδια διαδικασία συνεχίζεται, δηλαδή $j' - j''$ από τα μέλη της χάνονται και η ομάδα γίνεται μεγέθους j'' ($j'' = 1, 2, \dots, j' - 1$), με πιθανότητα $p_{j',j''}^a$, ή όλη η ομάδα χάνεται με πιθανότητα $p_{j',0}^a$ κ.ο.κ. Τα προηγούμενα φαίνονται στο επόμενο σχήμα 3.3.



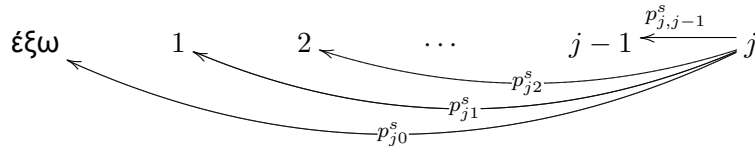
Σχήμα 3.3: Διάγραμμα μετατροπής μίας ομάδας μεγέθους j σε άλλες, όταν φθάνοντας στο σύστημα δεν μπορεί να εισέλθει σε αυτό.

Προφανώς

$$p_{j,0}^a + \sum_{j'=1}^{j-1} p_{j,j'}^a = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, J).$$

Ο μηχανισμός εξόδου από το σύστημα έχει ως εξής: Μόλις μία ομάδα μεγέθους j ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή της με κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης $B_j(x)$, ανεξάρτητη του αρχικού μεγέθους της ομάδας, έχει τις εξής επιλογές. Να αναχωρήσει ολόκληρη από το σύστημα με πιθανότητα p_{j0}^s , ή $j - j'$ από τα μέλη της να αναχωρήσουν ενώ τα υπόλοιπα σχηματίζουν μία νέα ομάδα μεγέθους j' ($j' = 1, 2, \dots, j - 1$) με πιθανότητα $p_{jj'}^s$, η οποία αρχίζει αμέσως να εξυπηρετείται με κατανομή του νέου χρόνου εξυπηρέτησης $B_{j'}(x)$, κ.ο.κ. Να σημειωθεί ότι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Τα προηγούμενα φαίνονται στο επόμενο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα μετατροπής μίας ομάδας μεγέθους j σε άλλες, όταν ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή της.

Επίσης,

$$p_{j0}^s + \sum_{j'=1}^{j-1} p_{jj'}^s = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, J).$$

Στη συνέχεια δίνουμε τη στάσιμη κατανομή $p(\underline{n})$ της διαδικασίας $\{\underline{Q}(t) : t \geq 0\}$ σαν ένα πόρισμα του θεωρήματος 3.1.

Πόρισμα 3.2. Εάν $p_{ji}^a = p_{ji}^s$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, J$ και $i = 0, 1, 2, \dots, j - 1$, τότε η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών στο σύστημα, $p(\underline{n})$, δίνεται ως

$$p(\underline{n}) = c'_s \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!}, \quad \underline{n} \in S, \quad (3.47)$$

όπου οι παράμετροι λ_j υπολογίζονται από το σύστημα

$$\lambda_j = \lambda g_j + \sum_{i=j+1}^J \lambda_i p_{ij}^s, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.48)$$

και c'_s είναι η κατάλληλη σταθερά κανονικοποίησης που υπολογίζεται ως

$$c'_s = \left(\sum_{\underline{n} \in S} \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!} \right)^{-1}. \quad (3.49)$$

Απόδειξη. Αυτό το μοντέλο αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου της παραγράφου 3.2 με

$$b_{jm} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, J, m = j, j+1, \dots, J),$$

και

$$\begin{cases} p_m^a(j, i) = p_{ji}^a \\ p_m^s(j, i) = p_{ji}^s \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, J, m = j, j+1, \dots, J, i = 0, 1, \dots, j-1).$$

Συνεπώς αν ισχύει $p_{ji}^a = p_{ji}^s$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, J$, και $i = 0, 1, 2, \dots, j-1$, τότε ισχύει και η συνθήκη (3.22) του θεωρήματος 3.1. Έτσι η εξίσωση (3.33) γίνεται

$$\begin{aligned} p(n_1, n_2, \dots, n_k) &= c_s \prod_{j=1}^J \left(b_j^{n_j} \sum_{(n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{m=j}^J n_{jm} = n_j)} \prod_{m=j}^J \frac{\lambda_{jm}^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \right) \\ &= c_s \prod_{j=1}^J \left(\frac{b_j^{n_j}}{n_j!} \sum_{(n_{jm} \in \mathbb{N}_0, \sum_{m=j}^J n_{jm} = n_j)} \frac{n_j!}{n_{jj}! n_{j,j+1}! \dots n_{jJ}!} \lambda_{jj}^{n_{jj}} \lambda_{j,j+1}^{n_{j,j+1}} \dots \lambda_{jJ}^{n_{jJ}} \right) \\ &= c_s \prod_{j=1}^J \frac{b_j^{n_j}}{n_j!} (\lambda_{jj} + \lambda_{j,j+1} + \dots + \lambda_{jJ})^{n_j}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_j = \sum_{m=j}^J \lambda_{jm}$, η στάσιμη κατανομή $p(\underline{n})$ παίρνει τη μορφή

$$p(\underline{n}) = c_s \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στη συνθήκη κανονικοποίησης $\sum_{\underline{n} \in S} p(\underline{n}) = 1$, βρίσκουμε ότι $c_s = c'_s$, όπου η σταθερά c'_s δίνεται από την (3.49). Έτσι λοιπόν η στάσιμη κατανομή, $p(\underline{n})$, παίρνει τη μορφή (3.47). Τέλος έχουμε να ελέγξουμε την

ισχύ της (3.48). Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lambda g_j + \sum_{i=j+1}^J \lambda_i p_{ij}^s &= \lambda g_j + \sum_{i=j+1}^J \left(\sum_{m=i}^J \lambda_{im} \right) p_{ij}^s \\ &= \lambda g_j + \sum_{m=j+1}^J \left(\sum_{i=j+1}^m \lambda_{im} p_{ij}^s \right), \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας ότι $p_{ij}^s = p_m^s(i, j)$ και τις εξισώσεις (3.14), (3.15) συμπεραίνουμε ότι η (3.48) ισχύει. ■

Μία ειδική περίπτωση του παραπάνω μοντέλου είναι η *M/G/. ουρά με ομαδικές αφίξεις, απώλειες πελατών, επαναπροσπάθειες και παράγοντες εξυπηρέτησης*. Συγκεκριμένα εισάγουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από N παράγοντες εξυπηρέτησης, έστω $1, 2, \dots, N$, οι οποίοι είναι αναγκαίοι ώστε το σύστημα να είναι ικανό να παρέχει εξυπηρέτηση. Αυτοί οι παράγοντες μπορεί να είναι υπηρέτες, θέσεις εξυπηρέτησης, παροχές ισχύος, πηγές διαφόρων υλικών κλπ. Υποθέτουμε ότι σε κάθε χρονική μονάδα το σύστημα έχει διαθέσιμες t_1, t_2, \dots, t_N μονάδες από τους παράγοντες $1, 2, \dots, N$ αντίστοιχα. Επιπλέον κάθε ομάδα μεγέθους j απαιτεί $S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{Nj}$ μονάδες από τους παράγοντες $1, 2, \dots, N$ αντίστοιχα, στη μονάδα του χρόνου. Είναι ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι $S_{i1} \leq S_{i2} \leq \dots \leq S_{iJ}$ για κάθε παράγοντα εξυπηρέτησης $i = 1, 2, \dots, N$. Αυτό σημαίνει ότι αν μία ομάδα είναι μικρότερη σε μέγεθος από μία άλλη, δεν απαιτεί περισσότερες μονάδες από κάθε παράγοντα στη μονάδα του χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι

$$S = \left\{ \underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_J) \in \mathbf{N}_0^J : \sum_{j=1}^J n_j S_{ij} \leq t_i, i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το σύνολο S έχει την ιδιότητα (II), διότι αν

$$\begin{aligned} \underline{n} + \underline{e}_j \in S &\Rightarrow \sum_{l=1}^J n_l S_{il} + S_{ij} \leq t_i, i = 1, 2, \dots, N \\ &\Rightarrow \sum_{l=1}^J n_l S_{il} + S_{i,j-1} \leq t_i, \text{ (διότι } S_{i,j-1} \leq S_{ij}) \\ &\Rightarrow \underline{n} + \underline{e}_{j-1} \in S, \end{aligned}$$

και επομένως το πόρισμα 3.2 εφαρμόζεται οποτεδήποτε $p_{ji}^a = p_{ji}^s$.

Στη συνέχεια δίνουμε τρία παραδείγματα M/G/k/k ουρών με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπάθειες τα οποία αποτελούν ειδική περίπτωση του μοντέλου της παραγράφου 3.4 και υποδεικνύουν την χρησιμότητά του. Σε αυτά τα παραδείγματα ο χώρος καταστάσεων είναι $S = \{ \underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_J) \in \mathbf{N}_0^J : \sum_{j=1}^J j n_j \leq k \}$, και εύκολα αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί την ιδιότητα (II). Τέλος τα δύο πρώτα αποτελούν γενικεύσεις παρελθόντων εργασιών.

Παράδειγμα 3.1. (Μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις, "όλοι ή κανένας" πολιτική αποδοχής πελατών όπου οι πελάτες της ίδιας ομάδας αναχωρούν μαζί από το σύστημα).

Σε αυτό το παράδειγμα θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου αν μία ομάδα μεγέθους j που φθάνοντας στο σύστημα βρίσκει λιγότερους από j ελεύθερους υπηρέτες, αναχωρεί αμέσως από το σύστημα. Οι πελάτες της ίδιας ομάδας εξυπηρετούνται ως μία μονάδα και αναχωρούν ταυτόχρονα μόλις τελειώσει η εξυπηρέτησή τους. Σ' αυτό το σύστημα έχουμε:

$$p_{ji}^a = p_{ji}^s = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = 0 \\ 0, & \text{αν } i \neq 0, \end{cases}$$

και η λύση των εξισώσεων (3.48) δίνει $\lambda_j = \lambda g_j$ ($j = 1, 2, \dots, J$), καθώς $p_{ij}^s = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, J$, $j + 1 \leq i \leq J$. Επομένως η (3.47) παίρνει τη μορφή

$$p^{AN}(\underline{n}) = c'_s \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda g_j b_j)^{n_j}}{n_j!} = c'_s \prod_{j=1}^{\min(k, J)} \frac{(\lambda g_j b_j)^{n_j}}{n_j!}, \quad \underline{n} \in S,$$

καθώς αν $k < J$ τότε $n_{k+1} = n_{k+2} = \dots = n_J = 0$, για κάθε $\underline{n} \in S$.

Η ειδική περίπτωση όπου $J = \infty$, έχει μελετηθεί από τους Economou and Fakinos (1999).

Παράδειγμα 3.2. (Μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις, πολιτική μερικής αποδοχής πελατών στο οποίο οι πελάτες της ίδιας ομάδας αναχωρούν μεμονωμένα).

Σε αυτή την περίπτωση, μία ομάδα μεγέθους j που φθάνει στο σύστημα και βρίσκει τουλάχιστον i ελεύθερους υπηρέτες, $i = 1, 2, \dots, k$, μπαίνει στο σύστημα με

$\min(i, j)$ από τα μέλη της ενώ οι υπόλοιποι πελάτες, αν υπάρχουν, αναχωρούν αμέσως χωρίς να εξυπηρετηθούν. Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι πελάτες της ίδιας ομάδας αναχωρούν μεμονωμένα. Αυτό το σύστημα είναι μία ειδική περίπτωση του μοντέλου της παραγράφου 3.4, με

$$p_{ji}^a = p_{ji}^s = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j - 1 \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

και οι εξισώσεις (3.48) έχουν λύση

$$\begin{aligned} \lambda_J &= \lambda g_J, \\ \lambda_{J-1} &= \lambda g_{J-1} + \sum_{i=J}^J \lambda_i p_{i,J-1}^s = \lambda g_{J-1} + \lambda_J \\ &= \lambda(g_{J-1} + g_J), \\ \lambda_{J-2} &= \lambda g_{J-2} + \sum_{i=J-1}^J \lambda_i p_{i,J-2}^s = \lambda g_{J-2} + \lambda_{J-1} \\ &= \lambda(g_{J-2} + g_{J-1} + g_J), \end{aligned}$$

και επαγωγικά, $\lambda_j = \lambda q_j$, όπου $q_j = g_j + g_{j+1} + \dots + g_J$ ($j = 1, 2, \dots, J$). Επομένως η στάσιμη κατανομή του αριθμού των ομάδων διαφόρων μεγεθών στο σύστημα είναι

$$p^{PA}(\underline{n}) = c'_s \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda q_j b_j)^{n_j}}{n_j!}, \quad \underline{n} \in S,$$

ενώ η ειδική περίπτωση όπου $J = \infty$, έχει μελετηθεί από τον Fakinos (1990).

Παράδειγμα 3.3. (Μία M/G/k/k ουρά με ομαδικές αφίξεις, ομοιόμορφες επαναπροσπάθειες στο οποίο οι πελάτες της ίδιας ομάδας αναχωρούν ομοιόμορφα).

Θεωρούμε ξανά μία ειδική περίπτωση του μοντέλου της 3.4 με ομοιόμορφες επαναπροσπάθειες, δηλαδή $p_{ji}^a = \frac{1}{j}$ ($i = 0, 1, \dots, j - 1$), και ομοιόμορφες μειώσεις του μεγέθους της ομάδας που συμπληρώνει την εξυπηρέτησή της, δηλαδή $p_{ji}^s = \frac{1}{j}$ ($i = 0, 1, \dots, j - 1$). Προφανώς $p_{ji}^a = p_{ji}^s$ και επομένως η οριακή κατανομή του αριθμού των ομάδων των διαφόρων μεγεθών στο σύστημα, δίνεται ως

$$p^{UR}(\underline{n}) = c'_s \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!}, \quad \underline{n} \in S,$$

όπου οι συντελεστές λ_j προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\lambda_j = \lambda g_j + \sum_{i=j+1}^J \frac{\lambda_i}{i}, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Έστω Q ο αριθμός των πελατών στο σύστημα της M/G/k/k ουράς με ομαδικές αφίξεις και επαναπροσπάθειες που αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου της παραγράφου 3.4, ή ισοδύναμα ο αριθμός των απασχολημένων υπηρετών. Έστω επίσης $p_n = \Pr[Q = n]$ ($n = 0, 1, 2, \dots, k$), η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας και $p_n(r) = \Pr$ [να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα καταναμημένοι σε r ομάδες]. Ορίζουμε τις ποσότητες:

$$B_n = \sum_{(\sum_{j=1}^J j n_j = n)} \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.50)$$

όπου $B_0 = 1$ και

$$B_{n,r} = \sum_{(\sum_{j=1}^J n_j = r, \sum_{j=1}^J j n_j = n)} \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (3.51)$$

όπου $B_{0,0} = 1$, $B_{n,0} = 0$ ($n > 0$), και $B_{n,r} = 0$ ($n < r$). Στο επόμενο θεώρημα βρίσκουμε τις επαναληπτικές σχέσεις με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζονται οι παραπάνω ποσότητες και μέσω αυτών οι πιθανότητες p_n , $p_n(r)$.

Θεώρημα 3.3. (i) Το επόμενο επαναληπτικό σχήμα ισχύει για τις ποσότητες B_n και $B_{n,r}$,

$$B_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1, n)} (u+1) \lambda_{u+1} b_{u+1} B_{n-u}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.52)$$

$$B_{n+1, r+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1, n-r)} (u+1) \lambda_{u+1} b_{u+1} B_{n-u, r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad n \geq r, \quad (3.53)$$

με αρχικές συνθήκες $B_0 = 1$, $B_{0,0} = 1$, $B_{n,0} = 0$ ($n > 0$) και $B_{n,r} = 0$ ($n < r$).

(ii) Όταν ισχύει η συνθήκη $p_{ji}^a = p_{ji}^s$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, J$ και $i = 0, 1, 2, \dots, j-1$, οι πιθανότητες p_n , $p_n(r)$ υπολογίζονται ως

$$p_n = c'_s B_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k), \quad (3.54)$$

$$p_n(r) = c'_s B_{n,r} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (3.55)$$

όπου

$$c'_s = \left(\sum_{n=0}^k B_n \right)^{-1}, \quad (3.56)$$

το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι άδειο.

Απόδειξη. Μπορούμε να εργαστούμε ανάλογα με την πρόταση 3.1 ορίζοντας τις ίδιες γεννήτριες συναρτήσεις, $B(t)$, $B(t, u)$ και $B_r(t)$. Όμως μία καλύτερη παρατήρηση στους ορισμούς των ποσοτήτων B_n και $B_{n,r}$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι συμπίπτουν με τους αντίστοιχους της παραγράφου 3.3. Συγκεκριμένα από την (3.34) έχουμε:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{(\sum_{j=1}^J \sum_{m=j}^J j n_{jm} = n)} \prod_{j=1}^J \prod_{m=j}^J \frac{(\lambda_{jm} b_{jm})^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \\ &= \sum_{(\sum_{j=1}^J j n_j = n, \sum_{m=j}^J n_{jm} = n_j)} \prod_{j=1}^J b_j^{n_j} \prod_{m=j}^J \frac{\lambda_{jm}^{n_{jm}}}{n_{jm}!} \\ &= \sum_{\sum_{j=1}^J j n_j = n} \prod_{j=1}^J \frac{b_j^{n_j}}{n_j!} \sum_{\sum_{m=j}^J n_{jm} = n_j} n_j! \frac{\lambda_{jj}^{n_{jj}} \lambda_{j,j+1}^{n_{j,j+1}} \cdot \dots \cdot \lambda_{jJ}^{n_{jJ}}}{n_{jj}! n_{j,j+1}! \cdot \dots \cdot n_{jJ}!}, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το πολυωνυμικό θεώρημα και τον ορισμό των παραμέτρων $\lambda_j = \sum_{m=j}^J \lambda_{jm}$, βρίσκουμε

$$B_n = \sum_{\sum_{j=1}^J j n_j = n} \prod_{j=1}^J \frac{(\lambda_j b_j)^{n_j}}{n_j!}.$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για τους συντελεστές $B_{n,r}$. Λόγω της πρότασης 3.1, οι παραπάνω συντελεστές ικανοποιούν τις επαναληπτικές εξισώσεις (3.36), (3.37). Έτσι από την (3.36) έχουμε

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1,n)} (u+1) \left(\sum_{m=u+1}^J \lambda_{u+1,m} b_{u+1,m} \right) B_{n-u} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1,n)} (u+1) b_{u+1} \left(\sum_{m=u+1}^J \lambda_{u+1,m} \right) B_{n-u} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{\min(J-1,n)} (u+1) b_{u+1} \lambda_{u+1} B_{n-u}, \end{aligned}$$

δηλαδή η εξίσωση (3.52). Ομοίως, από την (3.37) αποδεικνύουμε την (3.53). Τέλος οι (3.54), (3.55) ισχύουν από τις (3.41), (3.42) αντίστοιχα. ■

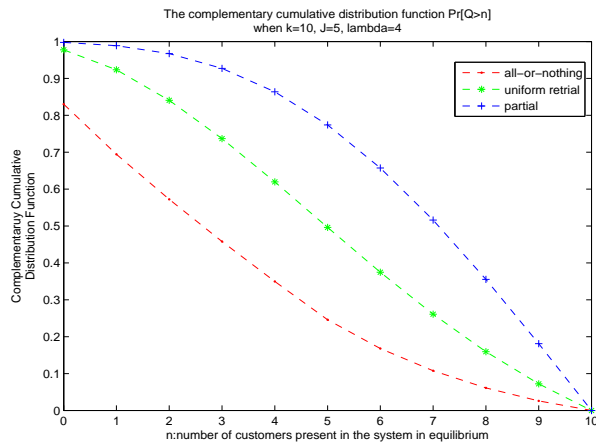
Έχοντας υπολογίσει την στάσιμη κατανομή, μπορούμε να βρούμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, ή τον μέσο αριθμό των απασχολημένων υπηρετών από την εξίσωση $E(Q) = \sum_{n=1}^k np_n$.

Στη συνέχεια δίνουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα με στόχο να φωτίσουμε περισσότερο την επίδραση των επαναπροσπαθειών στη λειτουργία του συστήματος. Συγκεκριμένα θεωρούμε το σύστημα με $k = 10$ υπηρέτες και ρυθμό άφιξης ομάδων πελατών, $\lambda = 4$. Υποθέτουμε τρία αριθμητικά σενάρια για το μέγιστο μέγεθος J των αφιχθέντων ομάδων, $J = 5$, $J = 10$ και $J = 20$.

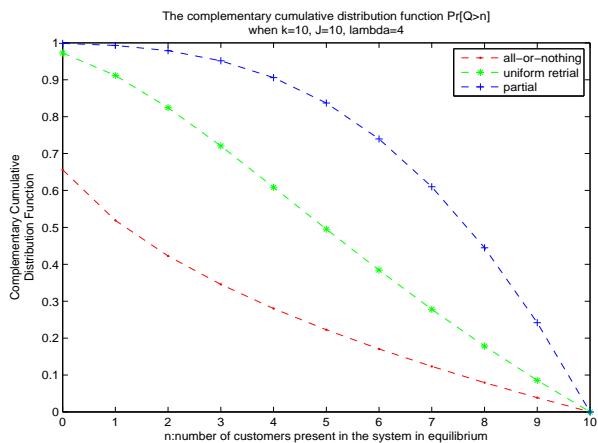
Χρησιμοποιώντας το επαναληπτικό σχήμα (3.52) και τις εξισώσεις (3.54), (3.56) δίνουμε στους Πίνακες 3.1-3.3 τις στάσιμες κατανομές p_n^{AN} , p_n^{PA} και p_n^{UR} των μοντέλων των παραδειγμάτων 3.1 ("όλοι ή κανένας" πολιτική αποδοχής), 3.2 (πολιτική "μερικής αποδοχής"), 3.3 ("ομοιόμορφες επαναπροσπάθειες") αντίστοιχα. Στα σχήματα 3.5-3.7 έχουμε σχεδιάσει την συμπληρωματική αθροιστική συνάρτηση κατανομής $\Pr[Q > n]$, για τις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις αποδοχής. Παρατηρούμε ότι $\Pr[Q^{AN} > n] \leq \Pr[Q^{UR} > n] \leq \Pr[Q^{PA} > n]$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots, 10$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $Q^{AN} \leq_{st} Q^{UR} \leq_{st} Q^{PA}$. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση n και το μέγεθος της αφιχθείσας ομάδας είναι

μεγαλύτερο από τον αριθμό $s(n)$ των ελεύθερων υπηρετών, τότε η ομάδα χάνεται κάτω από την "όλοι ή κανένας" πολιτική αποδοχής πελατών. Σε αντίθεση με την "όλοι ή κανένας" πολιτική, στην περίπτωση της πολιτικής "μερικής αποδοχής" πελατών, εισέρχεται στο σύστημα εκείνο το μέρος της ομάδος που χωράει σε αυτό. Τέλος η πολιτική των "ομοιόμορφων επαναπροσπαθειών", συνιστά μία ενδιάμεση κατάσταση όπου κάποιοι πελάτες μπαίνουν, μολονότι το σύστημα μπορεί να χωράει περισσότερους.

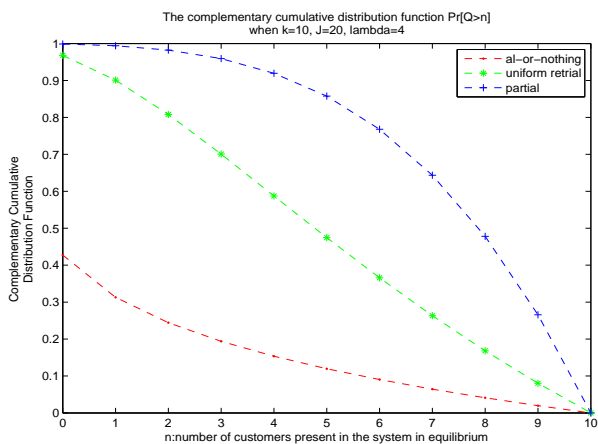
Στο σχήμα 3.8 παρέχουμε ένα γράφημα του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα $E(Q)$ ως συνάρτηση του J ($J = 1, 2, \dots, 100$), για ένα αριθμητικό σενάριο με $k = 10$ και $\lambda = 4$. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση της "όλοι ή κανένας" πολιτικής, ο μέσος αριθμός $E^{AN}(Q)$ είναι μία φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση του μέγιστου μεγέθους J ενώ στην πολιτική "μερικής αποδοχής", ο μέσος αριθμός $E^{PA}(Q)$ είναι μία αύξουσα και κοίλη συνάρτηση του J . Αλλά στην περίπτωση των "ομοιόμορφων επαναπροσπαθειών", ο μέσος αριθμός $E^{UR}(Q)$ είναι μία συνάρτηση με ολικό μέγιστο, αφού είναι αύξουσα για μικρές τιμές της μεταβλητής J ($J < 10$) και μετά συνεχίζει φθίνουσα φθάνοντας ασυμπτωτικά μία σταθερή τιμή.



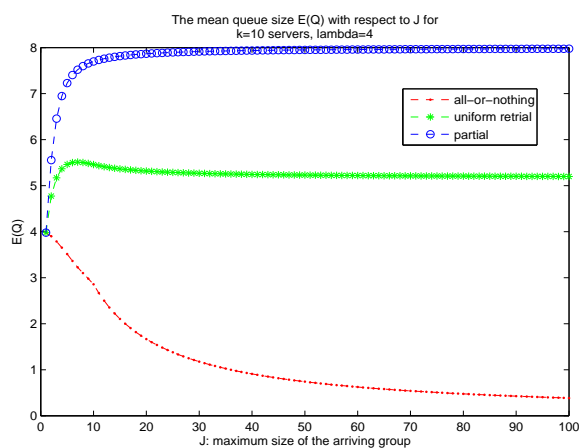
Σχήμα 3.5: Η συνάρτηση $Pr[Q > n]$ όταν $k = 10$, $J = 5$, και $\lambda = 4$



Σχήμα 3.6: Η συνάρτηση $Pr[Q > n]$ όταν $k = 10, J = 10$, και $\lambda = 4$



Σχήμα 3.7: Η συνάρτηση $Pr[Q > n]$ όταν $k = 10, J = 20$, και $\lambda = 4$



Σχήμα 3.8: Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα $E(Q)$ ως συνάρτηση του J

Αριθμός πελατών: n	p_n^{AN}	p_n^{UR}	p_n^{PA}
0	0.1697	0.0225	0.0022
1	0.1358	0.0540	0.0090
2	0.1222	0.0828	0.0215
3	0.1141	0.1040	0.0400
4	0.1084	0.1171	0.0634
5	0.1040	0.1233	0.0899
6	0.0779	0.1218	0.1167
7	0.0602	0.1137	0.1411
8	0.0465	0.1014	0.1609
9	0.0353	0.0871	0.1744
10	0.0259	0.0723	0.1810

Πίνακας 3.1: Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα για τις τρεις περιπτώσεις αποδοχής: Όλοι ή Κανένας(AN), Ομοιόμορφες Επαναπροσπάθειες(UR), Μερικής Αποδοχής(PA), όταν $k = 10$, $J = 5$, $\lambda = 4$

Αριθμός πελατών: n	p_n^{AN}	p_n^{UR}	p_n^{PA}
0	0.3438	0.0276	0.0014
1	0.1375	0.0608	0.0058
2	0.0963	0.0872	0.0141
3	0.0770	0.1038	0.0273
4	0.0655	0.1118	0.0456
5	0.0576	0.1136	0.0690
6	0.0518	0.1111	0.0973
7	0.0474	0.1061	0.1296
8	0.0438	0.0997	0.1652
9	0.0409	0.0927	0.2030
10	0.0385	0.0856	0.2417

Πίνακας 3.2: Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα για τις τρεις περιπτώσεις αποδοχής: Όλοι ή Κανένας(AN), Ομοιόμορφες Επαναπροσπάθειες(UR), Μερικής Αποδοχής(PA), όταν $k = 10$, $J = 10$, $\lambda = 4$

Αριθμός πελατών: n	p_n^{AN}	p_n^{UR}	p_n^{PA}
0	0.5726	0.0319	0.0012
1	0.1145	0.0671	0.0048
2	0.0687	0.0928	0.0118
3	0.0504	0.1075	0.0231
4	0.0403	0.1132	0.0396
5	0.0339	0.1129	0.0617
6	0.0293	0.1087	0.0899
7	0.0260	0.1025	0.1244
8	0.0234	0.0953	0.1653
9	0.0213	0.0877	0.2124
10	0.0196	0.0804	0.2657

Πίνακας 3.3: Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα για τις τρεις περιπτώσεις αποδοχής: Όλοι ή Κανένας(AN), Ομοιόμορφες Επαναπροσπάθειες(UR), Μερικής Αποδοχής(PA), όταν $k = 10$, $J = 20$, $\lambda = 4$

Μέρος II

Μοντέλα γεωμετρικών εγκαταλείψεων σε ουρές με απουσίες του υπηρέτη

Κεφάλαιο 4

Γεωμετρικές εγκαταλείψεις σε μια ουρά με απουσίες του υπηρέτη

Σ' αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε μια λεπτομερή ανάλυση ενός συστήματος εξυπηρέτησης με απουσίες του υπηρέτη και ανυπόμονους πελάτες. Αιτία της ανυπομονησίας των πελατών είναι η απουσία του υπηρέτη, ενώ υποθέτουμε ότι ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπει ταυτόχρονα το σύστημα ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Αυτό συμβαίνει όταν οι ευκαιρίες εγκατάλειψης των πελατών παρουσιάζονται σύμφωνα με μία συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία και οι πελάτες αποφασίζουν *ακολουθιακά* εάν θα αφήσουν το σύστημα ή όχι. Υπολογίζουμε αναλυτικές εκφράσεις και υπολογιστικά σχήματα για τα βασικά μέτρα απόδοσης του συστήματος, συμπεριλαμβανομένου του οριακού αριθμού των πελατών στο σύστημα, του χρόνου παραμονής ενός πελάτη που φθάνει στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, καθώς και τη διάρκεια και τον μέγιστο αριθμό πελατών σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος.

4.1 Εισαγωγή

Μοντέλα με απουσίες του υπηρέτη έχουν σε μεγάλο βαθμό εισαχθεί στην βιβλιογραφία των ουρών αναμονής με σκοπό να μοντελοποιήσουν καταστάσεις όπου ο

υπηρέτης (υπηρέτες) δεν μπορεί να εξυπηρετήσει πελάτες για κάποια χρονικά διαστήματα. Τέτοιες καταστάσεις συχνά συναντώνται σε πραγματικές εφαρμογές. Έτσι π.χ. ένας υπηρέτης μπορεί να απενεργοποιηθεί για οικονομικούς λόγους (χαμηλή ροή πελατών που εισέρχονται στο σύστημα και/ή υψηλό κόστος ετοιμότητας), να υπόκειται σε τυχαίες βλάβες ή να υποχρεώνεται σε προληπτική συντήρηση. Αρκετές εργασίες συνοψίζουν τα κύρια μοντέλα ουρών με απουσίες του υπηρέτη καθώς και τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται σε αυτά, βλέπε π.χ. Takagi (1991) και Tian and Zhang (2006). Κάποιες άλλες επεξεργάζονται ποικίλα θέματα από τις παραπάνω ουρές όπως αυτές των He και Jewkes (1995), Choudhury (1998, 2000), Bischof (2001) και Burnetas και Economou (2007). Για την περίπτωση των ουρών με πολλούς υπηρέτες η αντίστοιχη βιβλιογραφία είναι λιγότερο εκτεταμένη, δες π.χ. Borthakur και Choudhury (1999), Artalejo και Lopez-Herrero (2003) και Artalejo, Economou και Lopez-Herrero (2005).

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε μία ουρά αναμονής με απουσίες του υπηρέτη στην οποία όμως συμβαίνουν και εγκαταλείψεις πελατών. Γενικά η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης με ανυπόμονους πελάτες που εγκαταλείπουν πρόωρα το σύστημα ξεκινά από την πρωτοποριακή εργασία του Palm (1953, 1957) ο οποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε την M/M/c ουρά με ανεξάρτητους εκθετικούς χρόνους υπομονής. Αργότερα, αρκετοί συγγραφείς επέκτειναν αυτά τα αποτελέσματα αφαιρώντας εκθετικές υποθέσεις, δες π.χ. Daley (1965), Takacs (1974) και Baccelli et al. (1984) οι οποίοι μελέτησαν διάφορα συστήματα εξυπηρέτησης με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης και/ή γενικούς χρόνους μεταξύ των αφίξεων σε διάφορα πλαίσια ανυπόμονων πελατών, όπως επίσης και τους Boxma και de Waal (1994) που μελέτησαν την M/M/c ουρά με γενικά κατανεμημένους χρόνους υπομονής. Οι εργασίες των Mandelbaum και Zeltyn (2006, 2009) συνοψίζουν τα κυριότερα υπολογιστικά αποτελέσματα για τα βασικά μοντέλα τύπου M/M/c με εγκαταλείψεις. Στις προαναφερθείσες εργασίες οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι εξαιτίας του μεγάλου χρόνου αναμονής τους στην ουρά, μολοντί η διαδικασία εξυπηρέτησης δεν διακόπτεται για κανένα λόγο.

Η μελέτη συστημάτων με υπαναχωρήσεις πελατών που οφείλονται στην απου-

σία του υπηρέτη είναι μια πολύ πρόσφατη προσπάθεια. Παρόλο που το πλήθος των εργασιών που μελετάνε ουρές αναμονής με απουσίες του υπηρέτη είναι μεγάλο, το χαρακτηριστικό των ανυπόμονων πελατών και η σύνδεση του με τις απουσίες του υπηρέτη δεν είχαν μέχρι τελευταία τραβήξει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Μόλις πρόσφατα οι Altman και Yechiali (2006) και ο Yechiali (2007) ασχολήθηκαν με συστήματα απουσίας του υπηρέτη, στα οποία πηγή της ανυπομονησίας των πελατών είναι η αργία του συστήματος λόγω της απουσίας. Σε αυτές τις εργασίες οι συγγραφείς υποθέτουν ότι όταν ο υπηρέτης απουσιάζει, οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι και καθέννας από αυτούς ενεργοποιεί τον προσωπικό του χρόνο (ρολόι) υπομονής. Όταν αυτός ο χρόνος παρέλθει, ο αντίστοιχος πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι πελάτες εκτελούν *ανεξάρτητες εγκαταλείψεις*.

Οι Adan et al. (2009) και Economou και Kapodistria (2010) μελέτησαν ουρές με απουσίες του υπηρέτη όπου οι πελάτες εκτελούν *συγχρονισμένες εγκαταλείψεις*. Τα μοντέλα αυτά αναπαριστούν απομακρυσμένα συστήματα παροχής εξυπηρέτησης, στα οποία οι πελάτες περιμένουν να εμφανιστεί κάποιο μέσο μεταφοράς για να τους απομακρύνει από το σύστημα. Στην κατηγορία των μοντέλων με συγχρονισμένες εγκαταλείψεις, οι ευκαιρίες εγκατάλειψης (δηλαδή οι αφίξεις του μέσου μεταφοράς) συμβαίνουν σύμφωνα με μία προκαθορισμένη διαδικασία, συνήθως με μία διαδικασία Poisson. Σε μία τέτοια στιγμή κάθε παρών πελάτης παραμένει στο σύστημα με πιθανότητα q ή το εγκαταλείπει με πιθανότητα $p = 1 - q$, ανεξάρτητα από τους άλλους. Συνεπώς σε τέτοιες στιγμές, οι πελάτες επηρεάζονται *ταυτόχρονα* και ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ελαττώνεται σύμφωνα με την διωνυμική κατανομή. Παρόμοια Μαρκοβιανά και ημι-Μαρκοβιανά μοντέλα με αυτού του τύπου τις διωνυμικές μεταβάσεις έχουν μελετηθεί από τους Economou (2004), Artalejo et al. (2007), Economou και Fakinos (2008) και Economou και Kapodistria (2009).

Στο κεφάλαιο αυτό στοχεύουμε να συμπληρώσουμε τις προηγούμενες μελέτες που σχετίζονται με τις εγκαταλείψεις πελατών σε μία ουρά απλού υπηρέτη λόγω της ανυπομονησίας τους όταν αυτός είναι απών, τη στιγμή που ο υπηρέτης μπορεί να έχει πολλαπλές απουσίες. Το υπό μελέτη μοντέλο αναπαριστά επίσης απομακρυσμένα συστήματα παροχής εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες περιμένουν να εμ-

φανιστεί κάποιο μέσο μεταφοράς για να τους απομακρύνει από το σύστημα. Όμως σε αντίθεση με την περίπτωση των συγχρονισμένων εγκαταλείψεων, το μέσο αυτό έχει περιορισμένη χωρητικότητα όσον αφορά το έργο που μπορεί να επεξεργαστεί. Συγκεκριμένα, όταν αυτό το μέσο φθάσει στο σύστημα λαμβάνει υπόψη τους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκονται σε αναμονή, εξετάζοντάς τους ένα προς ένα. Στη συνέχεια μετακινεί από αυτό τόσους πελάτες, όσων το συνολικό έργο μπορεί να επεξεργαστεί από το μέσο, οπότε μία συγκεκριμένη ποσότητα έργου που υπήρχε στο σύστημα και ήταν προς επεξεργασία, αφαιρείται από αυτό. Έτσι λοιπόν στις στιγμές άφιξης του μέσου οι πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα επηρεάζονται μεν ακαριαία αλλά ακολουθιακά. Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των πελατών στον χώρο αναμονής ελαττώνεται σύμφωνα με την γεωμετρική κατανομή. Μαρκοβιανά και ημι-Μαρκοβιανά μοντέλα με παρόμοιο τύπο γεωμετρικών μεταβάσεων έχουν μελετηθεί από τους Brockwell et al. (1982), Neuts (1994), Visschers (2000) και Artalejo et al. (2007).

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως ακολούθως: Στην παράγραφο 4.2 περιγράφουμε τις συνθήκες εκείνες που οδηγούν σε γεωμετρικές εγκαταλείψεις και εισάγουμε το υπό μελέτη μοντέλο. Στην παράγραφο 4.3 βρίσκουμε τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Στην παράγραφο 4.4 μελετάμε τους χρόνους παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, κάτω από δύο διαφορετικές πειθαρχίες εγκατάλειψης και βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes (LSTs) των αντίστοιχων κατανομών. Στην παράγραφο 4.5 δίνουμε αρκετά μέτρα απόδοσης του συστήματος που αναφέρονται σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας του. Στην παράγραφο 4.6 δίνουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά του μοντέλου κάτω από διαφορετικές παραμέτρους.

4.2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φτάνουν μεμονωμένα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Η εξυπηρέτηση παρέχεται από έναν μόνο υπηρέτη, ο οποίος βρίσκεται σε μια από τις ακόλουθες καταστάσεις: ενεργός (on) ή ανενεργός - σε διακοπές (off). Οι πελάτες εξυπηρετούνται μεμονωμένα όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός κάτω από την FCFS πειθαρχία ουράς, ενώ δεν παρέχεται εξυπηρέτηση όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένοι με ρυθμό μ , και υποθέτουμε ότι υπάρχει απεριόριστος χώρος αναμονής. Όταν το σύστημα αδειάσει μετά από μια εξυπηρέτηση ο υπηρέτης ξεκινάει μια περίοδο διακοπών. Θεωρούμε ότι ο υπηρέτης λείπει για πολλαπλές περιόδους διακοπών, δηλαδή, αν επιστρέφοντας στο σύστημα το βρει κενό, ο υπηρέτης απομακρύνεται εκ νέου. Αν όμως κατά την επιστροφή του βρει τουλάχιστον έναν πελάτη σε αναμονή, επιστρέφει στο σύστημα και ξεκινάει να εξυπηρετεί οπότε το σύστημα λειτουργεί σαν μία τυπική M/M/1 ουρά έως ότου αδειάσει ξανά. Οι χρόνοι απουσίας του υπηρέτη (δηλαδή οι περίοδοι διακοπών του) είναι εκθετικά κατανομημένοι με ρυθμό γ . Κατά τη διάρκεια των διακοπών του υπηρέτη οι ευκαιρίες εγκατάλειψης συμβαίνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό ζ . Σε κάθε μία τέτοια στιγμή οι πελάτες εξετάζονται ένας προς ένας ακολουθιακά. Κάθε ένας από αυτούς εγκαταλείπει το σύστημα με πιθανότητα p ή παραμένει σε αυτό με πιθανότητα q , όπου $p + q = 1$. Έτσι οι πελάτες αρχίζουν με τη σειρά να εγκαταλείπουν το σύστημα έως ότου συναντήσουμε τον πρώτο πελάτη που θα παραμείνει σε αυτό ή μέχρι να εγκαταλείψουν το σύστημα όλοι οι παρόντες πελάτες. Έτσι λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε ευκαιρία εγκατάλειψης που παρουσιάζεται όταν ο υπηρέτης λείπει, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ελαττώνεται σύμφωνα με την (κομμένη) γεωμετρική κατανομή. Επίσης υποθέτουμε ότι η διαδικασία αφίξεων των πελατών, η διαδικασία αφίξεων των ευκαιριών εγκατάλειψης, οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης καθώς και οι διαδοχικοί χρόνοι απουσίας του υπηρέτη είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες. Θα αναφερόμαστε σε αυτό το μοντέλο με τον όρο *γεωμετρικές εγκαταλείψεις σε μία ουρά με απουσίες του υπηρέτη*.

Αυτός ο μηχανισμός εγκατάλειψης πελατών σε ομάδες γεωμετρικού μεγέθους

είναι μία περίπτωση που μπορούμε να συναντήσουμε σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Ως παράδειγμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύστημα επιθεωρείται από ένα «μεταφορικό μέσο» όταν ο υπηρέτης είναι απών, σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού ζ . Το μέσο κάθε φορά που επισκέπτεται το σύστημα έχει χωρητικότητα C χρονικών μονάδων που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με ρυθμό α . Φθάνοντας αρχίζει να επιθεωρεί το σύστημα εξετάζοντας τους πελάτες έναν-έναν σε σχέση με τους χρόνους εξυπηρέτησής τους. Μετακινεί από το σύστημα τόσο έργο (όπου έργο είναι το άθροισμα των χρόνων εξυπηρέτησης) όσο επιτρέπει η χωρητικότητά του. Αυτό σημαίνει ότι αν οι χρόνοι εξυπηρέτησης των παρόντων πελατών είναι X_1, X_2, \dots, X_n , τότε όλοι οι πελάτες θα μετακινηθούν αν $C \geq X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ενώ m πελάτες θα μετακινηθούν εάν $X_1 + X_2 + \dots + X_m \leq C < X_1 + X_2 + \dots + X_m + X_{m+1}$, για κάποιο $m < n$. Στην τελευταία περίπτωση υπάρχει ένα ποσό $C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)$ χρονικών μονάδων από τη χωρητικότητα του μέσου που δεν χρησιμοποιείται. Για να μην μείνει αυτός ο χώρος ανεκμετάλλευστος, αυτό το ποσό μεταφέρεται στο μέσο από τον πρώτο πελάτη που θα παραμείνει στο σύστημα με αποτέλεσμα ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης αυτού να είναι $X_{m+1} - [C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)]$.

Έτσι ο αριθμός των πελατών Λ που μπορούν να μετακινηθούν όταν το μέσο φτάνει στο σύστημα είναι ίσος με τον αριθμό των ανανεώσεων μίας διαδικασίας Poisson $\{\Lambda(t)\}$ ρυθμού μ κατά τη διάρκεια ενός εκθετικά κατανομημένου χρονικού διαστήματος C ρυθμού α , όπου η Poisson διαδικασία και το μήκος του χρονικού διαστήματος είναι ανεξάρτητα. Αυτός ο αριθμός, Λ , είναι γνωστό ότι ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή (δες π.χ. Kulkarni (1995), Κεφάλαιο 5, άσκηση 5). Πράγματι δεσμεύοντας ως προς όλες τις δυνατές τιμές της μεταβλητής C έχουμε:

$$\Pr[\Lambda = n] = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{\alpha}{\alpha + \mu} \left(\frac{\mu}{\alpha + \mu} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

Από την άλλη, η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη που παραμένει στο σύστημα είναι η δεσμευμένη κατανομή της $X_{m+1} - [C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)]$ δοθέντος ότι $X_{m+1} > C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)$. Αυτή η κατανομή είναι επίσης εκθετική. Πράγματι αν συμβολίσουμε με $F_E(u)$ την συνάρτηση κατανομής της πλεονάζουσας χωρητικότητας του μέσου $E = C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)$,

τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \Pr[X_{m+1} - E > x | X_{m+1} > E] &= \frac{\Pr[X_{m+1} > E + x]}{\Pr[X_{m+1} > E]} = \frac{\int_0^\infty e^{-\mu(x+u)} dF_E(u)}{\int_0^\infty e^{-\mu u} dF_E(u)} \\ &= e^{-\mu x}, x > 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

που αποδεικνύει ότι η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη που παραμένει στο σύστημα ύστερα από μία στιγμή επιθεώρησης είναι εκθετική με παράμετρο μ . Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλη η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο έως ότου προκύψει μία νέα ευκαιρία εγκατάλειψης κ.λ.π.

Ορίζοντας $p = \frac{\mu}{\alpha + \mu}$ προκύπτει ακριβώς το μοντέλο που περιγράψαμε, δηλαδή οι δυνατότητες εγκατάλειψης συμβαίνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού ζ και σ' αυτές τις στιγμές οι πελάτες εξετάζονται ακολουθιακά σε σχέση με την πιθανή φυγή τους από το σύστημα. Κάθε ένας από αυτούς εγκαταλείπει το σύστημα με πιθανότητα $p = \frac{\mu}{\alpha + \mu}$ ή παραμένει σε αυτό με την συμπληρωματική πιθανότητα $q = \frac{\alpha}{\alpha + \mu}$. Αυτή η ακολουθία των εγκαταλείψεων τερματίζεται μόλις βρεθεί ο πρώτος πελάτης που θα παραμείνει στο σύστημα ή μόλις όλοι οι παρόντες πελάτες το εγκαταλείψουν. Μία άλλη ερμηνεία του προαναφερθέντος μηχανισμού εγκαταλείψεων είναι ότι σε κάθε δυνατότητα εγκατάλειψης οι πελάτες εξετάζονται ένας προς ένα μέχρι να βρεθεί ο πρώτος που θα παραμείνει σε αυτό, ενώ κάθε ένας από αυτούς αποφασίζει να αφήσει το σύστημα με πιθανότητα p ή να παραμείνει σε αυτό με πιθανότητα q .

Για τον προσδιορισμό της στάσιμης κατανομής του μοντέλου χρειάζεται να εισάγουμε τη συνθήκη ευστάθειας η οποία είναι

$$\rho = \lambda/\mu < 1. \quad (4.2)$$

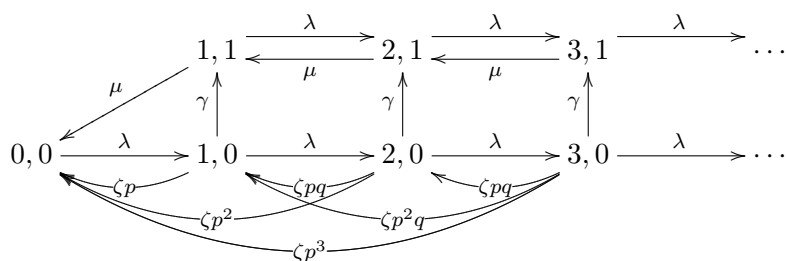
Πράγματι, υποθέτοντας ότι $\gamma > 0$, το υπό μελέτη μοντέλο συμπεριφέρεται ως μία τυπική M/M/1 ουρά όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός. Όταν το σύστημα αδειάζει, τότε ο υπηρέτης απενεργοποιείται και με πιθανότητα 1 ενεργοποιείται ξανά μετά την πά-

ροδο πεπερασμένου χρόνου, έχοντας πεπερασμένο πλήθος πελατών στον χώρο αναμονής που χρειάζονται εξυπηρέτηση.

Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{(L(t), I(t)) : t \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων $\{(n, i) : i = 0, 1 \text{ και } n = i, i + 1, i + 2, \dots\}$, όπου η μεταβλητή $L(t)$ συμβολίζει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t ενώ η μεταβλητή $I(t)$ την κατάσταση του υπηρέτη τη στιγμή t , δηλαδή είναι ίση με 1 όταν ο υπηρέτης είναι ενεργοποιημένος και 0 σε άλλη περίπτωση. Οι ρυθμοί μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(L(t), I(t))\}$ δίνονται από τη σχέση

$$q((n, i), (m, j)) = \begin{cases} \lambda, & \text{εάν } n \geq 0, m = n + 1 \text{ και } 0 \leq i = j \leq \min\{1, n\}, \\ \zeta p^k q, & \text{εάν } n \geq 2, m = n - k, 1 \leq k \leq n - 1 \text{ και } i = j = 0, \\ \zeta p^n, & \text{εάν } n \geq 1, m = 0 \text{ και } i = j = 0, \\ \gamma, & \text{εάν } n = m \geq 1 \text{ και } i = 0, j = 1, \\ \mu, & \text{εάν } n \geq 2, m = n - 1 \text{ και } i = j = 1, \\ & \text{ή } n = 1, m = 0 \text{ και } i = 1, j = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

(Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε μη-μηδενικούς ψευδο-ρυθμούς μετάβασης $q((n, 0), (n, 0)) = \zeta q$ για κάθε $n \geq 1$ οι οποίοι αντιστοιχούν σε ευκαιρίες εγκατάλειψης που συμβαίνουν όταν το σύστημα δεν είναι κενό, κατά τις οποίες όμως κανείς πελάτης δεν το εγκαταλείπει). Οι ρυθμοί μετάβασης φαίνονται στο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης του σχήματος 4.1.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης του μοντέλου.

4.3 Στάσιμη κατανομή

Υποθέτουμε ότι το σύστημα που μελετάμε βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας και εστιάζουμε στον υπολογισμό της οριακής (στάσιμης) κατανομής $(\pi(n, i) : i = 0, 1, n \geq i)$ της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(L(t), I(t))\}$. Για να το πετύχουμε ορίζουμε τις μερικές πιθανογεννήτριες συναρτήσεις

$$\Pi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n, 0)z^n, \quad \Pi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n, 1)z^n, \quad |z| \leq 1. \quad (4.4)$$

Χρησιμοποιώντας τους ρυθμούς μετάβασης (4.3) βρίσκουμε το σύνολο των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος. Συγκεκριμένα, εξισώνοντας τις ροές πιθανότητας από και προς την κατάσταση $(0, 0)$ έχουμε

$$\lambda\pi(0, 0) = \mu\pi(1, 1) + \zeta \sum_{j=1}^{\infty} p^j \pi(j, 0)$$

και προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον όρο $\zeta\pi(0, 0)$ που αντιστοιχεί σε αφίξεις ευκαιριών εγκατάλειψης σε κενό σύστημα, προκύπτει

$$(\lambda + \zeta)\pi(0, 0) = \mu\pi(1, 1) + \zeta \sum_{j=0}^{\infty} p^j \pi(j, 0). \quad (4.5)$$

Συνεχίζοντας με την εξίσωση των ροών πιθανότητας από και προς την κατάσταση $(n, 0)$, $n \geq 1$, βρίσκουμε

$$(\lambda + \gamma + \sum_{j=1}^{n-1} \zeta p^j q + \zeta p^n)\pi(n, 0) = \lambda\pi(n-1, 0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \zeta q p^{j-n} \pi(j, 0).$$

Προσθέτοντας τη ροή πιθανότητας $\zeta q \pi(n, 0)$ που αντιστοιχεί στις ψευδο-μεταβάσεις $(n, 0) \rightarrow (n, 0)$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\lambda + \gamma + \zeta)\pi(n, 0) = \lambda\pi(n-1, 0) + \zeta \sum_{j=n}^{\infty} q p^{j-n} \pi(j, 0), \quad n \geq 1. \quad (4.6)$$

Τέλος, οι εξισώσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν στις καταστάσεις $(1, 1)$ και $(n, 1)$, $n \geq 2$, είναι αντίστοιχα

$$(\lambda + \mu)\pi(1, 1) = \gamma\pi(1, 0) + \mu\pi(2, 1), \quad (4.7)$$

$$(\lambda + \mu)\pi(n, 1) = \gamma\pi(n, 0) + \mu\pi(n+1, 1) + \lambda\pi(n-1, 1), \quad n \geq 2. \quad (4.8)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.5)–(4.8) μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\pi(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\pi(n,0) + \pi(n,1)) = 1, \quad (4.9)$$

έχει μοναδική λύση η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα 4.1.

Θεώρημα 4.1. Δεδομένης της συνθήκης ευστάθειας (4.2), η στάσιμη κατανομή $(\pi(n,i))$ δίνεται από τις σχέσεις

$$\pi(0,0) = \frac{q(r_2 - 1)(\mu - \lambda)}{r_2(q\mu + \lambda p - \lambda r_1)}, \quad (4.10)$$

$$\pi(n,0) = \frac{\pi(0,0)}{r_2^n}, \quad n \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\pi(n,1) = \begin{cases} \frac{\rho(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q(1-\rho r_2)} \left[\left(\frac{1}{r_2}\right)^n - \rho^n \right] & \text{αν } r_2 \neq 1/\rho \\ \frac{(1-r_1)\pi(0,0)}{q} n \rho^n & \text{αν } r_2 = 1/\rho \end{cases}, \quad n \geq 1, \quad (4.12)$$

όπου

$$r_1 = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p - \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2\lambda}, \quad (4.13)$$

$$r_2 = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2\lambda}, \quad (4.14)$$

και $0 < r_1 < 1$, $r_2 > 1$.

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (4.6) με z^n και προσθέτοντας για κάθε $n \geq 1$, βρίσκουμε ότι

$$(\lambda + \gamma + \zeta)(\Pi_0(z) - \pi(0,0)) = \lambda z \Pi_0(z) + \zeta q \sum_{j=1}^{\infty} p^j \pi(j,0) \sum_{n=1}^j (z/p)^n. \quad (4.15)$$

Τώρα χρειάζεται να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Εάν $z \neq p$, τότε αντικαθιστώντας το άθροισμα $\sum_{n=1}^j (z/p)^n$ στην (4.15) με το κλάσμα $\frac{z}{p-z}[1 - (z/p)^j]$ και πολλαπλασιάζοντας με $z - p$ παίρνουμε

$$(\lambda + \gamma + \zeta - \lambda z)(z - p)\Pi_0(z) = (\lambda + \gamma + \zeta)(z - p)\pi(0,0) + \zeta q z (\Pi_0(z) - \Pi_0(p)). \quad (4.16)$$

Αν $z = p$ τότε η (4.15) παίρνει τη μορφή

$$(\lambda + \gamma + \zeta - \lambda p)\Pi_0(p) = (\lambda + \gamma + \zeta)\pi(0, 0) + \zeta p q \Pi_0'(p). \quad (4.17)$$

Όμως η εξίσωση (4.17) μπορεί εναλλακτικά να παραχθεί από την (4.16) αν παραγωγίσουμε ως προς z και πάρουμε το όριο $z \rightarrow p$. Έτσι η εξίσωση (4.16) ισχύει για κάθε z με $|z| \leq 1$. Λύνοντας την (4.5) ως προς $\Pi_0(p)$ και αντικαθιστώντας στην (4.16) βρίσκουμε ύστερα από λίγες αλγεβρικές πράξεις ότι

$$\Pi_0(z) = \frac{[(\lambda + \gamma + \zeta)(z - p) - qz(\lambda + \zeta)]\pi(0, 0) + \mu q z \pi(1, 1)}{(\lambda + \gamma + \zeta - \lambda z)(z - p) - \zeta q z}. \quad (4.18)$$

Θέτουμε $K_0(z)$ και $K_1(z)$ να είναι ο αριθμητής και ο παρανομαστής αντίστοιχα της $\Pi_0(z)$ στην εξίσωση (4.18). Παρατηρούμε ότι

$$K_1(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)z - p(\lambda + \gamma + \zeta),$$

ενώ η εξίσωση $K_1(z) = 0$ γίνεται ισοδύναμα $z - a(z) = 0$, όπου $a(z) = a_0 + a_2 z^2$, με

$$a_0 = \frac{p(\lambda + \gamma + \zeta)}{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p} \quad \text{και} \quad a_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p}.$$

Επειδή $a(1) < 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πόρισμα του θεωρήματος Rouché (βλέπε π.χ. Gail et al. (2000), κεφάλαιο 4, θεώρημα 5 σελ.235) και έτσι να συμπεράνουμε ότι η εξίσωση $K_1(z) = 0$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες r_1 και r_2 , η μία στον ανοικτό μοναδιαίο κύκλο και η άλλη έξω από τον κλειστό μοναδιαίο κύκλο. Οι ρίζες r_1 και r_2 δίνονται από τις εξισώσεις (4.13)–(4.14), απ' όπου φαίνεται ότι $0 < r_1 < 1$ και $r_2 > 1$.

Όμως η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $\Pi_0(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο κύκλο οπότε θα πρέπει $K_0(r_1) = 0$. Συνεπώς, αφού η συνάρτηση $K_0(z)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς z θα έχει αναγκαστικά τη μορφή $K_0(z) = C(z - r_1)$. Απλοποιώντας τον όρο $z - r_1$ από τον αριθμητή και τον παρανομαστή της (4.18) προκύπτει ότι

$$\Pi_0(z) = C/[\lambda(r_2 - z)],$$

απ' όπου αντικαθιστώντας όπου z την τιμή 0 παίρνουμε $C = \lambda r_2 \pi(0, 0)$. Έτσι η συνάρτηση $\Pi_0(z)$ γράφεται ως εξής:

$$\Pi_0(z) = \frac{r_2}{r_2 - z} \pi(0, 0). \quad (4.19)$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\frac{r_2}{r_2 - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{r_2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_2} \right)^n,$$

έχουμε

$$\Pi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(0, 0)}{r_2^n} z^n,$$

οπότε αποδείχθηκε η 4.11.

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (4.7) και (4.8) με z και z^n αντίστοιχα και προσθέτοντας για όλες τις τιμές $n = 2, 3, 4, \dots$ έχουμε

$$(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n, 1) z^n = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n, 0) z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n+1, 1) z^n + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n-1, 1) z^n,$$

ή

$$(\lambda + \mu) \Pi_1(z) = \gamma (\Pi_0(z) - \pi(0, 0)) + \frac{\mu}{z} (\Pi_1(z) - \pi(1, 1)z) + \lambda z \Pi_1(z).$$

Πολλαπλασιάζοντας με z και λύνοντας ως προς $\Pi_1(z)$ βρίσκουμε

$$\Pi_1(z) = \frac{\gamma z}{\lambda z + \mu z - \lambda z^2 - \mu} \Pi_0(z) - \frac{(\gamma \pi(0, 0) + \mu \pi(1, 1))z}{\lambda z + \mu z - \lambda z^2 - \mu}. \quad (4.20)$$

Σε αυτό το σημείο χρειαζόμαστε μία σχέση μεταξύ των $\pi(0, 0)$ και $\pi(1, 1)$ η οποία θα προκύψει από την εξίσωση $K_0(r_1) = 0$. Έτσι έχουμε ότι

$$\pi(1, 1) = \frac{p(1 - r_1)(\lambda + \zeta) + \gamma(p - r_1)}{\mu q r_1} \pi(0, 0). \quad (4.21)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.20) τη συνάρτηση $\Pi_0(z)$ από την (4.19) και την πιθανότητα $\pi(1, 1)$ από την (4.21), παίρνουμε

$$\Pi_1(z) = \frac{\lambda(1-r_1)z - (\lambda r_2 - \lambda r_1 r_2 - \gamma q)}{q(1-z)(\lambda z - \mu)(r_2 - z)} r_2 z \pi(0, 0). \quad (4.22)$$

Θέτοντας $\Lambda_0(z)$ τον αριθμητή της $\Pi_1(z)$ στην παραπάνω έκφραση και χρησιμοποιώντας ότι

$$r_1 r_2 = (\lambda p + \gamma p + \zeta p)/\lambda \quad \text{και} \quad r_1 + r_2 = (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)/\lambda,$$

εύκολα επαληθεύουμε ότι $\Lambda_0(1) = 0$. Έτσι

$$\Lambda_0(z) = \lambda(1-r_1)(z-1),$$

και απλοποιώντας τον όρο $1-z$ βρίσκουμε ότι η πιθανογεννήτρια $\Pi_1(z)$ παίρνει τη μορφή

$$\Pi_1(z) = \frac{\rho(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q} \frac{z}{(r_2-z)(1-\rho z)}. \quad (4.23)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για να αναλύσουμε την $\Pi_1(z)$ σε απλά κλάσματα. Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι $r_2\rho \neq 1$, οπότε έχουμε

$$\Pi_1(z) = \frac{\rho(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q(1-\rho r_2)} \left(\frac{r_2}{r_2-z} - \frac{1}{1-\rho z} \right),$$

ή σε γεωμετρική σειρά

$$\Pi_1(z) = \frac{\rho(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q(1-\rho r_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{r_2}\right)^n - \rho^n \right] z^n, \quad (4.24)$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση όπου $r_2\rho = 1$, η συνάρτηση $\Pi_1(z)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &= \frac{\rho(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q} \frac{\rho z}{(1-\rho z)^2} \\ &= \frac{(1-r_1)\pi(0,0)}{q} \left[\frac{1}{(1-\rho z)^2} - \frac{1}{1-\rho z} \right], \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}, \quad |t| < 1,$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\Pi_1(z) = \frac{\rho(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q} \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n z^n. \quad (4.25)$$

Από τις (4.24), (4.25) προκύπτει η εξίσωση (4.12). Επίσης χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης $\Pi_0(1) + \Pi_1(1) = 1$ και τις (4.19), (4.23) βρίσκουμε ότι το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό, $\pi(0,0)$, δίνεται από την (4.10) και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. ■

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα $E(L)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Pr[L = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n(\pi(n,0) + \pi(n,1)) \\ &= \Pi'_0(1) + \Pi'_1(1). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τις (4.19), (4.23) ως προς z για $z = 1$ και αντικαθιστώντας την $\pi(0,0)$ από την (4.10) βρίσκουμε ότι

$$E(L) = \frac{q(1-\rho)}{(r_2-1)[q(1-\rho) + \rho(1-r_1)]} \left(1 + \frac{\rho(1-r_1)(r_2-\rho)}{q(1-\rho)^2} \right). \quad (4.26)$$

4.4 Χρόνος παραμονής

Σε αυτή την παράγραφο στρέφουμε την προσοχή μας στον χρόνο παραμονής S ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Ο χρόνος παραμονής ορίζεται ως ο συνολικός χρόνος που περνάει από την άφιξη του στο σύστημα έως και την αναχώρησή του από αυτό, είτε λόγω συμπλήρωσης της εξυπηρέτησής του είτε λόγω εγκατάλειψης.

Η κατανομή του χρόνου παραμονής ενός πελάτη εξαρτάται τόσο από την πειθαρχία ουράς όσο και από την σειρά με την οποία εξετάζονται οι πελάτες για το αν θα εγκαταλείψουν το σύστημα, όταν συμβούν οι στιγμές εγκατάλειψης. Σε όλο το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι η πειθαρχία ουράς είναι FCFS. Θα διακρίνουμε όμως δύο περιπτώσεις για την σειρά με την οποία οι πελάτες επηρεάζονται όταν υπάρξει η δυνατότητα εγκατάλειψης, οι οποίες θα αναφέρονται ως οι δύο *πειθαρχίες εγκατάλειψης* για το σύστημα. Η πρώτη είναι η EAAF (Early Arrivals Abandon First). Σε αυτή την περίπτωση οι πελάτες εγκαταλείπουν το σύστημα με την ίδια σειρά με την οποία έφτασαν, δηλαδή σε κάθε ευκαιρία εγκατάλειψης οι πελάτες εξετάζονται ένας προς έναν αρχίζοντας από αυτόν που έφτασε νωρίτερα στο σύστημα.

$$\longrightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n-1 \quad \mathbf{n}$$

Στην περίπτωση αυτή αν υποθέσουμε ότι ο εξεταζόμενος πελάτης είναι ο n -οστός στο σύστημα, ο χρόνος παραμονής του δεν εξαρτάται από τις μελλοντικές αφίξεις. Η δεύτερη πειθαρχία εγκατάλειψης είναι η LAAF (Late Arrivals Abandon First), όπου οι πελάτες εγκαταλείπουν το σύστημα με αντίστροφη σειρά από αυτή με την οποία έφτασαν.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n-1 \quad \mathbf{n} \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad m \quad \longleftarrow$$

Σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση, ο χρόνος παραμονής του πελάτη εξαρτάται από τον αριθμό m των πελατών που έφθασαν στο σύστημα μετά από αυτόν.

4.4.1 Η περίπτωση EAAF

Ας συμβολίσουμε με S^{EA} τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη όταν ισχύει η πειθαρχία EAAF, $S_{(n,i)}$ τον δεσμευμένο χρόνο παραμονής ενός πελάτη δοθέντος ότι κατά την άφιξή του βρήκε $n-1$ πελάτες μπροστά του, δηλαδή είναι ο n -παλαιότερος στο σύστημα, και ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i ($i = 0, 1, n \geq i + 1$). Συμβολίζουμε επίσης με $\tilde{S}^{EA}(s)$, $\tilde{S}_{(n,i)}(s)$ τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace. Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος παραμονής του υπό μελέτη πελάτη δεν εξαρτάται από τις μελλοντικές αφίξεις. Επομένως δεν υπάρχει λόγος να γνωρίζουμε τις αφίξεις που γίνονται αργότερα από εκείνη του πελάτη που εξετά-

ζουμε. Οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί Laplace δίνονται στο επόμενο θεώρημα 4.2.

Θεώρημα 4.2. *i) Οι μετασχηματισμοί Laplace $\tilde{S}_{(n,i)}(s)$ δίνονται ως*

$$\tilde{S}_{(n,0)}(s) = \frac{A(s)}{\mu} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n + \frac{B(s)}{p(\gamma+\zeta+s)} \left(\frac{p(\gamma+\zeta+s)}{\gamma+\zeta p+s} \right)^n, \quad n \geq 1, \quad (4.27)$$

$$\tilde{S}_{(n,1)}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n, \quad n \geq 1, \quad (4.28)$$

όπου

$$A(s) = \frac{\gamma\mu(\mu q - ps)}{(\gamma+s)(\mu q - ps) - \zeta ps}, \quad (4.29)$$

$$B(s) = \frac{\zeta ps(\mu q - \gamma p - \zeta p - ps)}{(\gamma+s)(\mu q - ps) - \zeta ps}. \quad (4.30)$$

ii) Εάν $r_2 \neq \frac{1}{\rho}$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{S}^{EA}(s)$ δίνεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{EA}(s) = & \frac{A(s)\pi(0,0)r_2}{\mu(r_2-1) + r_2s} + \frac{B(s)\pi(0,0)r_2}{\gamma(r_2-p) + \zeta p(r_2-1) + (r_2-p)s} \\ & + \frac{\lambda\mu(1-r_1)r_2\pi(0,0)}{q[\mu(r_2-1) + r_2s](\mu-\lambda+s)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

όπου η πιθανότητα $\pi(0,0)$ και οι αριθμοί r_1, r_2 δίνονται από τις (4.10), (4.13) και (4.14) αντίστοιχα. Εάν $r_2 = \frac{1}{\rho}$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{S}^{EA}(s)$ υπολογίζεται ως

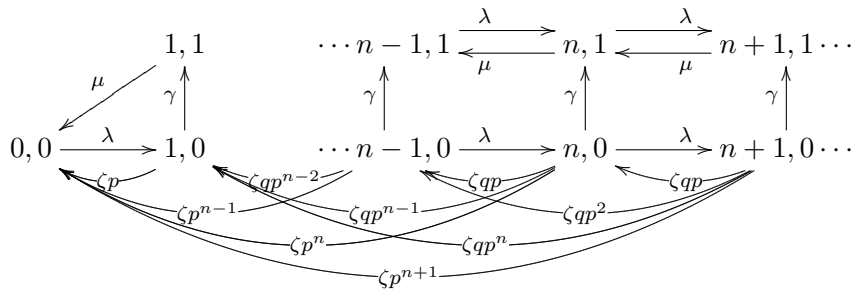
$$\begin{aligned} \tilde{S}^{EA}(s) = & \frac{A(s)\pi(0,0)}{\mu(1-\rho) + s} + \frac{B(s)\pi(0,0)}{\gamma(1-\rho p) + \zeta p(1-\rho) + (1-\rho p)s} \\ & + \frac{\lambda\mu(1-r_1)\pi(0,0)}{q[\mu(1-\rho) + s]^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

iii) Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη κάτω από την πειθαρχία εγκαταλείψεων EAAF δίνεται ως

$$\begin{aligned} E(S^{EA}) = & \left\{ \frac{\lambda(1-r_1)[r_2(\mu-\lambda) + \mu(r_2-1)]}{q\mu(r_2-1)^2(\mu-\lambda)^2} - \frac{(\zeta p - \mu q)(r_2-1) - \gamma q r_2}{\gamma\mu q(r_2-1)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\zeta p(\mu q - \gamma p - \zeta p)}{\gamma\mu q[\gamma(r_2-p) + \zeta p(r_2-1)]} \right\} \pi(0,0)r_2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

τόσο για την περίπτωση όπου $r_2 \neq \frac{1}{\rho}$, όσο και για την περίπτωση $r_2 = \frac{1}{\rho}$.

Απόδειξη. Η εξίσωση (4.28) ισχύει διότι το σύστημα συμπεριφέρεται ως μία τυπική M/M/1 ουρά, όταν ο υπηρέτης είναι ενεργοποιημένος. Επομένως, αν κατά την άφιξη του ο πελάτης βρει $n - 1$ πελάτες μπροστά του και τον υπηρέτη στη θέση "on", τότε ο χρόνος παραμονής του έχει την $\Gamma(\mu, \mu)$ κατανομή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο πελάτης φθάνοντας βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n - 1, 0)$. Στο σχήμα 4.2 βλέπουμε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης με έμφαση στις καταστάσεις (n, i) .



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης του μοντέλου με έμφαση στις καταστάσεις (n, i) .

Με πιθανότητα 1 μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα θα συμβεί μία νέα άφιξη πελάτη ή ο υπηρέτης θα επιστρέψει στα καθήκοντά του ή θα συμβεί μία ευκαιρία εγκατάλειψης. Έστω T : ο χρόνος από την άφιξη του υπό μελέτη πελάτη, που χρειάζεται για να συμβεί το πρώτο από τα τρία προηγούμενα ενδεχόμενα και $S_{(n,0)}^c$ ο υπολειπόμενος δεσμευμένος χρόνος παραμονής στο σύστημα του πελάτη που αρχικά θεωρήσαμε. Επειδή $S_{(n,0)} = T + S_{(n,0)}^c$ και ο χρόνος T είναι ο ελάχιστος από τρεις ανεξάρτητους και εκθετικά κατανομημένους χρόνους και ανεξάρτητος του $S_{(n,0)}^c$, ισχύει ότι

$$\tilde{S}_{(n,0)}(s) = E[e^{-sS_{(n,0)}}] = \frac{\lambda + \gamma + \zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} E[e^{-sS_{(n,0)}^c}].$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A_1 : η άφιξη νέου πελάτη να προηγηθεί της επιστροφής του υπηρέτη και της στιγμής ευκαιρίας εγκατάλειψης,

A_2 : η επιστροφή του υπηρέτη να προηγηθεί των αφίξεων νέου πελάτη και ευκαιρίας εγκατάλειψης,

A_3 : η στιγμή ευκαιρίας εγκατάλειψης να προηγηθεί της άφιξης νέου πελάτη και της επιστροφής του υπηρέτη και

B_{nk} : η στιγμή ευκαιρίας εγκατάλειψης στο σύστημα με n πελάτες παρόντες να διώξει τους πρώτους $n - k$ από αυτούς, $k = 0, 1, \dots, n$. Τότε λόγω της ισχυρής ιδιότητας Markov και επειδή $\Pr(B_{nk}) = qp^{n-k}$ για $k = 1, 2, \dots, n$ και $\Pr(B_{n0}) = p^n$ έχουμε

$$E[e^{-sS_{(n,0)}^c}] = \Pr(A_1)E[e^{-sS_{(n,0)}}] + \Pr(A_2)E[e^{-sS_{(n,1)}}] \\ + \Pr(A_3) \left(\sum_{k=1}^n qp^{n-k} E[e^{-sS_{(k,0)}}] + p^n \right).$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\tilde{S}_{(n,0)}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,0)}(s) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,1)}(s) \\ + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\sum_{k=1}^n p^{n-k} q \tilde{S}_{(k,0)}(s) + p^n \right), \quad n \geq 1. \quad (4.34)$$

όπου ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{S}_{(1,1)}(s)$ αναφέρεται στον υπολοιπόμενο χρόνο παραμονής ενός πελάτη που φθάνοντας βρήκε το σύστημα άδειο και το πρώτο ενδεχόμενο που συνέβη μετά την άφιξή του είναι η επιστροφή του υπηρέτη. Η παραπάνω μέθοδος ονομάζεται *μέθοδος ανάλυσης του πρώτου βήματος* αφού για την παραγωγή της (4.34) δεσμεύσαμε στο επόμενο μελλοντικό ενδεχόμενο της άφιξης του υπό μελέτη πελάτη. Αντικαθιστώντας την (4.28) και λύνοντας ως προς $\tilde{S}_{(n,0)}(s)$ βρίσκουμε

$$\tilde{S}_{(n,0)}(s) = \frac{\gamma}{\gamma + \zeta + s} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n + \frac{\zeta}{\gamma + \zeta + s} \sum_{k=1}^n p^{n-k} q \tilde{S}_{(k,0)}(s) \\ + \frac{\zeta}{\gamma + \zeta + s} p^n, \quad n \geq 1. \quad (4.35)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τους μεικτούς μετασχηματισμούς

$$\Phi(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0)}(s) z^n, \quad |z| < 1, \quad s \geq 0,$$

που αποτελούν γεννήτριες των δεσμευμένων μετασχηματισμών Laplace $\tilde{S}_{(n,0)}(s)$. Πολλαπλασιάζοντας την (4.35) με z^n και αθροίζοντας για κάθε $n \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0)}(s)z^n &= \frac{\gamma}{\gamma + \zeta + s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^n z^n + \frac{\zeta q}{\gamma + \zeta + s} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{S}_{(k,0)}(s)z^k \sum_{n=k}^{\infty} (pz)^{n-k} \\ &+ \frac{\zeta}{\gamma + \zeta + s} \sum_{n=1}^{\infty} (pz)^n, \end{aligned}$$

και υπολογίζοντας τα τρία παραπάνω γεωμετρικά αθροίσματα παίρνουμε

$$\Phi(s, z) = \frac{\gamma \mu z}{(\gamma + \zeta + s)(\mu + s - \mu z)} + \frac{\zeta q \Phi(s, z)}{(\gamma + \zeta + s)(1 - pz)} + \frac{\zeta p z}{(\gamma + \zeta + s)(1 - pz)}.$$

Λύνοντας ως προς $\Phi(s, z)$ έπεται ότι

$$\Phi(s, z) = z \frac{\gamma \mu + \zeta \mu p + \zeta p s - (\gamma \mu p + \zeta \mu p)z}{(\mu + s - \mu z)[\gamma + \zeta p + s - p(\gamma + \zeta + s)z]}. \quad (4.36)$$

Οι ρίζες του άνω παρανομαστή είναι οι αριθμοί $z = \frac{\mu + s}{\mu} > 1$ και $z = \frac{\gamma + \zeta p + s}{\gamma p + \zeta p + s p} > 1$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους για κάθε $s > 0$ (εκτός από τη θετική ρίζα του τριωνύμου $ps^2 + (p\gamma + p\zeta - q\mu)s - \mu\gamma q$). Συνεπώς το ανάπτυγμα της γεννήτριας $\Phi(s, z)$ σε σειρά δυνάμεων του z προϋποθέτει το ανάπτυγμα του κλάσματος της (4.36) σε απλά κλάσματα. Έτσι υπάρχουν συντελεστές $A(s)$, $B(s)$ ώστε

$$\Phi(s, z) = z \left(\frac{A(s)}{\mu + s - \mu z} + \frac{B(s)}{\gamma + \zeta p + s - p(\gamma + \zeta + s)z} \right), \quad (4.37)$$

όπου

$$A(s) = \lim_{z \rightarrow \frac{\mu + s}{\mu}} \frac{\gamma \mu + \zeta \mu p + \zeta p s - (\gamma \mu p + \zeta \mu p)z}{\gamma + \zeta p + s - p(\gamma + \zeta + s)z}, \quad (4.38)$$

$$B(s) = \lim_{z \rightarrow \frac{\gamma + \zeta p + s}{p(\gamma + \zeta + s)}} \frac{\gamma \mu + \zeta \mu p + \zeta p s - (\gamma \mu p + \zeta \mu p)z}{\mu + s - \mu z}. \quad (4.39)$$

Τα παραπάνω όρια με αντικατάσταση οδηγούν στις (4.29), (4.30). Αναπτύσσοντας

την (4.37) σε δυναμοσειρά ως προς z , έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(s, z) &= \frac{A(s)z}{\mu + s} \frac{1}{1 - \frac{\mu z}{\mu + s}} + \frac{B(s)z}{\gamma + \zeta p + s} \frac{1}{1 - \frac{p(\gamma + \zeta + s)z}{\gamma + \zeta p + s}} \\ &= \frac{A(s)}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^{n+1} z^{n+1} + \frac{B(s)}{p(\gamma + \zeta + s)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p(\gamma + \zeta + s)}{\gamma + \zeta p + s} \right)^{n+1} z^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A(s)}{\mu} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n + \frac{B(s)}{p(\gamma + \zeta + s)} \left(\frac{p(\gamma + \zeta + s)}{\gamma + \zeta p + s} \right)^n \right] z^n, \quad (4.40)\end{aligned}$$

οπότε η απόδειξη της (4.27) είναι άμεση. Στη συνέχεια μπορούμε να περάσουμε στον υπολογισμό του μετασχηματισμού $\tilde{S}^{EA}(s)$ δεσμεύοντας στην κατάσταση που συναντά ο υπό μελέτη πελάτης φθάνοντας στο σύστημα και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα PASTA. Έτσι έχουμε

$$\tilde{S}^{EA}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0)}(s) \pi(n-1, 0) + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{S}_{(n,1)}(s) \pi(n-1, 1). \quad (4.41)$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες $\pi(n-1, 0)$, $\pi(n-1, 1)$ από τις εξισώσεις (4.11), (4.12) αντίστοιχα και τους μετασχηματισμούς Laplace $\tilde{S}_{(n,0)}(s)$, $\tilde{S}_{(n,1)}(s)$ από τις (4.27), (4.28) αντίστοιχα στην (4.41) και υπολογίζοντας τα γεωμετρικά αθροίσματα που προκύπτουν καταλήγουμε εύκολα στην (4.31).

Η περίπτωση $r_2 = \frac{1}{\rho}$, αντιμετωπίζεται όμοια και παράγει την (4.32). Παραγωγίζοντας τον μετασχηματισμό $\tilde{S}^{EA}(s)$ που δίνεται από τις (4.31)-(4.32) και θέτοντας $s = 0$, προκύπτει η (4.33). ■

Οι τυχαίες μεταβλητές $S_{(n,i)}$ είναι γνήσιες, δηλαδή $\Pr(S_{(n,i)} < \infty) = \tilde{S}_{(n,i)}(0) = 1$.

4.4.2 Η περίπτωση LAAF

Σ' αυτή την περίπτωση ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα όταν αυτό είναι σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας και ο υπηρέτης είναι απών, εξαρτάται από τις μελλοντικές αφίξεις πελατών στο σύστημα. Ο λόγος είναι ότι στις στιγμές εγκατάλειψης, οι εγκαταλείψεις πελατών αρχίζουν από τους πρόσφατα αφιχθέντες πελάτες στο σύστημα και προχωρούν "προς τα πίσω" όπου

βρίσκονται οι πελάτες που έφθασαν νωρίτερα σε αυτό. Έτσι στην ανάλυση που ακολουθεί, χρειάζεται να ορίσουμε ένα δείκτη που να υποδεικνύει τον αριθμό των πελατών που έφθασαν αργότερα από τον πελάτη, του οποίου τον χρόνο παραμονής εξετάζουμε.

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο S^{LA} για τον χρόνο παραμονής του υπό μελέτη πελάτη κάτω από την LAAF πειθαρχία εγκατάλειψης και το σύμβολο $S_{(n,i,m)}$ ($i = 0, 1, n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$) για τον δεσμευμένο χρόνο παραμονής δοθέντως ότι ο πελάτης που μελετάμε είναι ο n - παλαιότερος στο σύστημα, δηλαδή έχει $n - 1$ πελάτες μπροστά από αυτόν και m πελάτες πίσω του (εκείνους που έφθασαν ύστερα από τον υπό μελέτη πελάτη), ενώ ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i . Έστω επίσης $\tilde{S}^{LA}(s)$, $\tilde{S}_{(n,i,m)}(s)$ οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace οι οποίοι δίνονται στο επόμενο θεώρημα 4.3.

Θεώρημα 4.3. *i) Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη, δεδομένου ότι αυτός βρίσκει $n - 1$ πελάτες κατά την άφιξή του και τον υπηρέτη στην κατάσταση i , έχει μετασχηματισμό Laplace $\tilde{S}_{(n,i,0)}(s)$ που δίνεται ως*

$$\tilde{S}_{(n,0,0)}(s) = \frac{\zeta p}{\lambda} \frac{r(s)}{1 - pr(s)} + \frac{\gamma}{\lambda} \frac{r(s)}{1 - r(s)} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n, \quad n \geq 1, \quad (4.42)$$

$$\tilde{S}_{(n,1,0)}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n, \quad n \geq 1, \quad (4.43)$$

όπου

$$r(s) = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s - \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta + s)}}{2p(\lambda + \gamma + \zeta + s)} \quad (4.44)$$

ii) Εάν $r_2 \neq \frac{1}{\rho}$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{S}^{LA}(s)$ δίνεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{LA}(s) = & \frac{\zeta p r_2 \pi(0,0)}{\lambda(r_2 - 1)} \frac{r(s)}{1 - pr(s)} + \frac{\gamma \mu r_2 \pi(0,0)}{\lambda} \frac{r(s)}{(1 - r(s))[\mu(r_2 - 1) + r_2 s]} \\ & + \frac{\lambda \mu (1 - r_1) r_2 \pi(0,0)}{q} \frac{1}{[\mu(r_2 - 1) + r_2 s](\mu - \lambda + s)}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

όπου η στάσιμη πιθανότητα κενού συστήματος $\pi(0,0)$ και οι ρίζες r_1 και r_2 δίνονται από τις (4.10), (4.13) και (4.14) αντίστοιχα. Εάν $r_2 = \frac{1}{\rho}$, τότε ο μετασχηματισμός

Laplace $\tilde{S}^{LA}(s)$ δίνεται ως

$$\tilde{S}^{LA}(s) = \frac{\zeta p \pi(0,0)}{\lambda(1-\rho)} \frac{r(s)}{1-pr(s)} + \frac{\gamma \mu \pi(0,0)}{\lambda} \frac{r(s)}{(1-r(s))[\mu(1-\rho)+s]} + \frac{\lambda \mu(1-r_1)\pi(0,0)}{q} \frac{1}{[\mu(1-\rho)+s]^2}. \quad (4.46)$$

iii) Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη κάτω από την LAAF πειθαρχία εγκατάλειψης δίνεται ως

$$E(S^{LA}) = \left\{ \frac{\lambda(1-r_1)[r_2(\mu-\lambda) + \mu(r_2-1)]}{q\mu(r_2-1)^2(\mu-\lambda)^2} - \frac{\zeta p}{\lambda(r_2-1)} \frac{r'(0)}{(1-pr(0))^2} - \frac{\gamma}{\lambda\mu} \frac{r'(0)\mu(r_2-1)(1-r(0)) - r(0)(1-r(0))r_2 + r(0)r'(0)\mu(r_2-1)}{(r_2-1)^2(1-r(0))^2} \right\} \times \pi(0,0)r_2, \quad (4.47)$$

όπου

$$r(0) = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p - \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)}, \quad (4.48)$$

και

$$r'(0) = \frac{\zeta - \zeta p - \lambda p}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)^2} + \frac{(\lambda + \zeta)^2 p^2 + (\zeta \gamma - \lambda^2 - \lambda \gamma - 2\zeta \lambda - \zeta^2)p - (\lambda + \gamma)\zeta}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)^2 \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}. \quad (4.49)$$

Απόδειξη. Όπως και στην EAAF πειθαρχία, ο δεσμευμένος χρόνος παραμονής $S_{(n,1,m)}$ του υπό μελέτη πελάτη είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό m των πελατών που φθάνουν στο σύστημα μετά την άφιξή του και κατανέμεται ως μία Γάμμα(n, μ) κατανομή. Συνεπώς $\tilde{S}_{(n,1,m)}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n$, για κάθε $n \geq 1$, $m \geq 0$, και θέτοντας $m = 0$, προκύπτει η (4.43).

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανάλυσης πρώτου βήματος όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, παίρνουμε

$$\tilde{S}_{(n,0,m)}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,0,m+1)}(s) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\sum_{j=0}^m q p^j \tilde{S}_{(n,0,m-j)}(s) + p^{m+1} \right), \quad n \geq 1, m \geq 0. \quad (4.50)$$

Ορίζουμε τους μεικτούς μετασχηματισμούς

$$\Phi_n(s, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0,m)}(s) z^m, \quad |z| < 1, \quad s \geq 0,$$

για κάθε $n \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας την (4.50) με z^m και αθροίζοντας για κάθε $m \geq 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi_n(s, z) &= \frac{\lambda}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)z} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0,m+1)}(s) z^{m+1} + \frac{\gamma}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} z^m \\ &+ \frac{\zeta q}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)} \sum_{j=0}^{\infty} (pz)^j \sum_{m=j}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0,m-j)}(s) z^{m-j} + \frac{\zeta p}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)} \sum_{m=0}^{\infty} (pz)^m \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)z} (\Phi_n(s, z) - \tilde{S}_{(n,0,0)}(s)) + \frac{\gamma}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)(1-z)} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n \\ &+ \frac{\zeta q}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)(1-pz)} \Phi_n(s, z) + \frac{\zeta p}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)(1-pz)}, \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} (1-z)\Phi_n(s, z)K(s, z) &= \zeta pz(1-z) + \gamma z(1-pz) \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^n \\ &- \lambda(1-z)(1-pz)\tilde{S}_{(n,0,0)}(s), \end{aligned} \quad (4.51)$$

και

$$K(s, z) = -p(\lambda + \gamma + \zeta + s)z^2 + (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s)z - \lambda. \quad (4.52)$$

Για κάθε $s \geq 0$, έχουμε ότι $K(s, z) = 0$, αν και μόνο αν $z - \alpha(z) = 0$, όπου $\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_2 z^2$, με $\alpha_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s}$, και $\alpha_2 = \frac{(\lambda + \gamma + \zeta + s)p}{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s}$. Όμως $\alpha(1) < 1$, και εφαρμόζοντας ξανά το πόρισμα του θεωρήματος Rouché συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $K(s, z) = 0$ έχει δύο ρίζες, μία μέσα στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$ και την άλλη στο εξωτερικό αυτού, $\{z : |z| > 1\}$. Επίσης οι ρίζες είναι πραγματικές. Η ρίζα $r(s)$ στον δίσκο $\{z : |z| < 1\}$ δίνεται από την (4.44) και εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $0 < r(s) < 1$.

Παρατηρούμε ότι

$$|\Phi_n(s, z)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |z|^m,$$

διότι $|\tilde{S}_{(n,0,m)}(s)| \leq 1$. Επομένως η σύγκλιση της γεννήτριας $\Phi_n(s, z)$ είναι σίγουρη στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$. Αυτό το γεγονός θα εκμεταλλευτούμε για την εύρεση του μετασχηματισμού $\tilde{S}_{(n,0,0)}(s)$. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας το $r(s)$ στην (4.51) και χρησιμοποιώντας ότι $K(s, r(s)) = 0$ και την προηγούμενη σύγκλιση, καταλήγουμε στην (4.42). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου παραμονής S^{LA} εκφράζεται σε σχέση με τους δεσμευμένους μετασχηματισμούς Laplace ως

$$\tilde{S}^{LA}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0,0)}(s)\pi(n-1, 0) + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{S}_{(n,1,0)}(s)\pi(n-1, 1). \quad (4.53)$$

Αντικαθιστώντας τις στάσιμες πιθανότητες $\pi(n-1, 0)$, $\pi(n-1, 1)$ από τις (4.11), (4.12) αντίστοιχα και τους μετασχηματισμούς $\tilde{S}_{(n,0,0)}(s)$, $\tilde{S}_{(n,1,0)}(s)$ από τις (4.42), (4.43) αντίστοιχα στην (4.53) και υπολογίζοντας τα αντίστοιχα γεωμετρικά αθροίσματα, προκύπτει η (4.45).

Η περίπτωση $r_2 = \frac{1}{\rho}$, αντιμετωπίζεται ομοίως και παράγει την (4.46). Παραγωγίζοντας τις (4.45)-(4.46) ως προς s και θέτοντας $s = 0$, αποδεικνύεται η (4.47). ■

Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί από το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, χρησιμοποιώντας την στάσιμη κατανομή όπως αυτή δίνεται στο θεώρημα 4.1 και εφαρμόζοντας το νόμο του Little. Η αντίστοιχη ποσότητα συμπίπτει με τους μέσους χρόνους παραμονής $E(S^{EA})$ και $E(S^{LA})$ που υπολογίζονται από τις εξισώσεις (4.33), (4.47) αντίστοιχα. Επειδή η αλγεβρική απόδειξη παρουσιάζει δύσκολους υπολογισμούς, μία αριθμητική επαλήθευση μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab.

Όπως και για τους δεσμευμένους χρόνους παραμονής της περίπτωσης EAAF, παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $S_{(n,0,0)}$ είναι γνήσια αν και μόνο αν $\tilde{S}_{(n,0,0)}(0) = 1$, ή χρησιμοποιώντας την έκφραση (4.42),

$$p(\lambda + \gamma + \zeta)r^2(0) - (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)r(0) + \lambda = 0,$$

που ισχύει λόγω της (4.44).

Έχοντας υπολογίσει τον μετασχηματισμό Laplace $\tilde{S}_{(n,0,0)}(s)$, μπορούμε από την επαναληπτική εξίσωση (4.50) να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace $\tilde{S}_{(n,0,m)}(s)$, για κάθε $m = 1, 2, \dots$. Στη συνέχεια θα βρούμε μία επαναληπτική εξίσωση για τις κεντρικές ροπές $S_{(n,0,m)}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, των τυχαίων μεταβλητών $S_{(n,0,m)}$, όπου

$$\tilde{S}_{(n,0,m)}^{(k)}(0) = (-1)^k E[S_{(n,0,m)}^k] = (-1)^k S_{(n,0,m)}^{(k)},$$

είναι η k - παράγωγος της συνάρτησης $\tilde{S}_{(n,0,m)}(s)$ ως προς s , όταν $s = 0$, ενώ $S_{(n,0,m)}^{(0)} = \tilde{S}_{(n,0,m)}(0) = 1$. Για να συμβεί αυτό, γράφουμε την (4.50) ως

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma + \zeta + s)\tilde{S}_{(n,0,m)}(s) &= \lambda\tilde{S}_{(n,0,m+1)}(s) + \gamma\tilde{S}_{(n,1,m)}(s) \\ &+ \zeta \sum_{j=0}^m qp^j \tilde{S}_{(n,0,m-j)}(s) + \zeta p^{m+1}. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας k φορές ως προς s μπορούμε επαγωγικά να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} k\tilde{S}_{(n,0,m)}^{(k-1)}(s) + (\lambda + \gamma + \zeta + s)\tilde{S}_{(n,0,m)}^{(k)}(s) &= \lambda\tilde{S}_{(n,0,m+1)}^{(k)}(s) + \gamma\tilde{S}_{(n,1,m)}^{(k)}(s) \\ &+ \zeta \sum_{j=0}^m qp^j \tilde{S}_{(n,0,m-j)}^{(k)}(s). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Θέτοντας $s = 0$ και χρησιμοποιώντας ότι η κατανομή της $S_{(n,1,m)}$ είναι Γάμμα(n, μ) προκύπτει η επαναληπτική εξίσωση

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma + \zeta)S_{(n,0,m)}^{(k)} &= kS_{(n,0,m)}^{(k-1)} + \lambda S_{(n,0,m+1)}^{(k)} + \gamma \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\mu^k} \\ &+ \zeta q \sum_{j=0}^m p^j S_{(n,0,m-j)}^{(k)}, \quad n \geq 1, m \geq 0, k \geq 1, \end{aligned} \quad (4.55)$$

απ' όπου γνωρίζοντας τις ροπές $S_{(n,0,0)}^{(k)}$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές $S_{(n,0,m)}^{(k)}$, $m = 1, 2, \dots$, θέτοντας επαναληπτικά στην (4.55) $m = 0, 1, \dots$, και αυτό για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

4.5 Περίοδος συνεχούς λειτουργίας

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος και μέτρα απόδοσης που αναφέρονται σε αυτή, όπως τον αριθμό των εγκαταλείψεων και τον μέγιστο αριθμό πελατών που βρίσκονται ταυτόχρονα μέσα στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας.

4.5.1 Κατανομή του χρόνου συνεχούς λειτουργίας

Ας συμβολίσουμε με Γ τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος και $\tilde{\Gamma}(s)$ τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace. Ως τέτοια ορίζουμε το χρονικό διάστημα από την άφιξη του πρώτου πελάτη σε κενό σύστημα έως τη στιγμή που θα ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση και του τελευταίου παρόντος πελάτη, δηλαδή μέχρι τη στιγμή που θα αδειάσει το σύστημα. Έστω επίσης $\Gamma_{(n,i)}$, ο χρόνος που χρειάζεται για να μεταβεί το σύστημα από την κατάσταση (n, i) στην κατάσταση $(0, 0)$ για πρώτη φορά και $\tilde{\Gamma}_{(n,i)}(s)$ ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace, όπου $i = 0, 1$ και $n = i, i + 1, \dots$. Είναι προφανές ότι η περίοδος συνεχούς λειτουργίας Γ ταυτίζεται με το χρόνο που χρειάζεται για να περάσει το σύστημα για πρώτη φορά από την κατάσταση $(1, 0)$ στην κατάσταση $(0, 0)$, οπότε $\tilde{\Gamma}(s) = \tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s)$. Στο επόμενο θεώρημα 4.4 υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου συνεχούς λειτουργίας συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος.

Θεώρημα 4.4. *i). Ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{\Gamma}(s)$ του χρόνου συνεχούς λειτουργίας δίνεται ως*

$$\tilde{\Gamma}(s) = \frac{\gamma}{\lambda} \cdot \frac{\tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)r(s)}{1 - \tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)r(s)} + \frac{\zeta}{\lambda} \cdot \frac{pr(s)}{1 - pr(s)}, \quad (4.56)$$

όπου

$$\tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s) = \frac{\lambda + \mu + s - \sqrt{(\lambda + \mu + s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}, \quad (4.57)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της περιόδου συνεχούς λειτουργίας μίας $M/M/1$ ουράς με ρυθμό άφιξης πελατών λ , ρυθμό εξυπηρέτησης μ , ενώ το $r(s)$ δίνεται από την (4.44).

ii) Η μέση διάρκεια της περιόδου συνεχούς λειτουργίας δίνεται ως

$$E(\Gamma) = \frac{\gamma[r(0) - (\mu - \lambda)r'(0)]}{\lambda(1 - r(0))^2(\mu - \lambda)} - \frac{\zeta pr'(0)}{\lambda(1 - pr(0))^2}, \quad (4.58)$$

όπου οι τιμές $r(0)$, $r'(0)$ δίνονται από τις (4.48) και (4.49) αντίστοιχα.

Απόδειξη. Όταν ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση "on", τότε η ουρά συμπεριφέρεται ως μία M/M/1 ουρά με ρυθμό άφιξης πελατών λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ , μέχρι την πρώτη στιγμή που το σύστημα θα αδειάσει. Συνεπώς ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s)$ συμπίπτει με τον μετασχηματισμό Laplace του υπολοιπούμενου χρόνου συνεχούς λειτουργίας μίας M/M/1 ουράς, όταν σε αυτή βρίσκονται n πελάτες παρόντες. Ο τελευταίος όμως είναι το άθροισμα n ανεξάρτητων περιόδων συνεχούς λειτουργίας της ουράς, οπότε

$$\tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) = (\tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s))^n, \quad n \geq 1, \quad (4.59)$$

όπου $\tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του μήκους μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας της άνω M/M/1 ουράς και δίνεται από την (4.57).

Για την εύρεση των συναρτήσεων $\tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s)$ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της ανάλυσης πρώτου βήματος. Πράγματι αρχίζοντας με την κατάσταση $(n, 0)$, δεσμεύοντας στο επόμενο ενδεχόμενο που μπορεί να συμβεί και δουλεύοντας με τρόπο όμοιο με εκείνο για την εξαγωγή της (4.34), βρίσκουμε το επόμενο σύστημα επαναληπτικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{\Gamma}_{(n+1,0)}(s) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) \\ &+ \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\sum_{k=1}^n qp^{n-k} \tilde{\Gamma}_{(k,0)}(s) + p^n \right), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.60)$$

όπου $\tilde{\Gamma}_{(0,0)}(s) = 1$. Η εύρεση της λύσης του άνω επαναληπτικού σχήματος απαιτεί τον ορισμό των εξής σύνθετων μετασχηματισμών

$$R_0(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s) z^n \quad \text{και} \quad R_1(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) z^n, \quad |z| < 1, \quad s \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας την (4.59) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$R_1(s, z) = \frac{\tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)z}{1 - \tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)z}. \quad (4.61)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.60) με z^n και αθροίζοντας για κάθε $n \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} R_0(s, z) - 1 &= \frac{\lambda}{(\lambda + \gamma + \zeta + s)z} (R_0(s, z) - 1 - \tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s)z) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} R_1(s, z) \\ &+ \frac{\zeta q}{\lambda + \gamma + \zeta + s} (R_0(s, z) - 1) \frac{1}{1 - pz} + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \frac{pz}{1 - pz}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(\lambda + \gamma + \zeta + s)z(1 - pz)$ και χρησιμοποιώντας την (4.61) και ότι $\tilde{\Gamma}(s) = \tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s)$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} K(s, z)(R_0(s, z) - 1) &= -\lambda(1 - pz)z\tilde{\Gamma}(s) + \gamma z(1 - pz)R_1(s, z) + \zeta pz^2 \\ &= -\lambda(1 - pz)z\tilde{\Gamma}(s) + \gamma z(1 - pz) \frac{\tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)z}{1 - \tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s)z} + \zeta pz^2, \end{aligned} \quad (4.62)$$

όπου η συνάρτηση $K(s, z)$ δίνεται από την (4.52). Για κάθε σταθερό $s \geq 0$, έχουμε δείξει στην απόδειξη του θεωρήματος 4.3 ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $K(s, z) = 0$, στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$ είναι η $r(s)$ που δίνεται από την (4.44). Αντικαθιστώντας όπου $z = r(s)$, στην εξίσωση (4.62), χρησιμοποιώντας ότι $K(s, r(s)) = 0$, και τη σύγκλιση της σειράς $R_0(s, z)$ στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$, βρίσκουμε εύκολα την (4.56). Παραγωγίζοντας τέλος ως προς s την (4.56) και θέτοντας $s = 0$, βρίσκουμε την (4.58). ■

Αντικαθιστώντας $s = 0$, στην (4.56) παρατηρούμε ότι $\tilde{\Gamma}(0) = 1$, οπότε η τυχαία μεταβλητή Γ είναι γνήσια. Επαγωγικά από την (4.60) μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλοι οι υπολοιπόμενοι χρόνοι συνεχούς λειτουργίας είναι γνήσιες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή $\tilde{\Gamma}_{(n+1,0)}(0) = 1$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Έχοντας προσδιορίσει το μετασχηματισμό Laplace $\tilde{\Gamma}(s)$, μπορούμε να βρούμε τους μετασχηματισμούς $\tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s)$, $n = 1, 2, \dots$, χρησιμοποιώντας το σύστημα των

επαναληπτικών εξισώσεων (4.60). Στόχος μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε μία επαναληπτική εξίσωση για τον υπολογισμό των κεντρικών ροπών

$$\Gamma_{(n,i)}^{(k)} = (-1)^k \tilde{\Gamma}_{(n,i)}^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \dots,$$

αφού πρώτα προσδιορίσουμε τις κεντρικές ροπές

$$\Gamma_{(n,1)}^{(k)} = (-1)^k \tilde{\Gamma}_{(n,1)}^{(k)}(0),$$

όπου $\tilde{\Gamma}_{(n,i)}^{(k)}(s)$ η k -παράγωγος ως προς s του μετασχηματισμού $\tilde{\Gamma}_{(n,i)}(s)$, $i = 0, 1$. Πολλαπλασιάζοντας την (4.60) με $\lambda + \gamma + \zeta + s$ και παραγωγίζοντας k φορές την εξίσωση που προκύπτει μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} k\tilde{\Gamma}_{(n,0)}^{(k-1)}(s) + (\lambda + \gamma + \zeta + s)\tilde{\Gamma}_{(n,0)}^{(k)}(s) &= \lambda\tilde{\Gamma}_{(n+1,0)}^{(k)}(s) + \gamma\tilde{\Gamma}_{(n,1)}^{(k)}(s) \\ &+ \zeta q \sum_{j=1}^n p^{n-j} \tilde{\Gamma}_{(j,0)}^{(k)}(s), \quad n, k \geq 1, \end{aligned} \quad (4.63)$$

όπου $\tilde{\Gamma}_{(n,0)}^{(0)}(s) = \tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s)$. Πριν θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση $s = 0$, θα προσδιορίσουμε την παράγωγο k -τάξης $\tilde{\Gamma}_{(n,1)}^{(k)}(s)$ της συνάρτησης $\tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s)$. Λόγω της (4.59) μπορούμε να γράψουμε

$$\tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) = (g(s))^n = f(g(s)),$$

όπου

$$f(s) = s^n \text{ και } g(s) = \tilde{\Gamma}_{M/M/1}(s) = \frac{\lambda + \mu + s - \sqrt{(\lambda + \mu + s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}.$$

Άρα από την παράγωγο k -τάξης της σύνθεσης δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων (τύπος Faà di Bruno) έχουμε

$$\tilde{\Gamma}_{(n,1)}^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} f(g(s)) = \sum_{r=1}^k f^{(r)}(g(s)) B_{k,r}(g'(s), g''(s), \dots, g^{(k-r+1)}(s)), \quad (4.64)$$

όπου $B_{k,r}(x_1, x_2, \dots, x_{k-r+1})$ τα πολυώνυμα Bell. Όμως

$$f^{(r)}(s) = \begin{cases} (n)_r s^{n-r} & \text{αν } r = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{αν } r = n + 1, n + 2, \dots, \end{cases}$$

όπου $n_{(r)} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$, οπότε η (4.64) γίνεται

$$\tilde{\Gamma}_{(n,1)}^{(k)}(s) = \sum_{r=1}^{\min(k,n)} (n)_{(r)} (g(s))^{n-r} B_{k,r}(g'(s), g''(s), \dots, g^{(k-r+1)}(s)). \quad (4.65)$$

Στόχος μας λοιπόν είναι να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης $g(s)$ όπου

$$g(s) = \frac{1}{2\lambda}(\mu + \lambda + s - b(s)), \quad (4.66)$$

ενώ

$$b(s) = \sqrt{c(s)}, \quad \text{και} \quad c(s) = (\mu + \lambda + s)^2 - 4\lambda\mu. \quad (4.67)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνουμε ότι

$$g^{(l)}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}(1 - b^{(l)}(s)) & \text{αν } l = 1 \\ -\frac{1}{2\lambda}b^{(l)}(s) & \text{αν } l = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.68)$$

Επομένως ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης $g(s)$ ανάγεται στον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης $b(s)$, όπου

$$b(s) = \sqrt{c(s)} = \phi(c(s)),$$

με $\phi(s) = \sqrt{s}$. Χρησιμοποιώντας ξανά τον τύπο της σύνθετης παραγώγισης, Faà di Bruno, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} b^{(l)}(s) &= \frac{d^l}{ds^l} \phi(c(s)) \\ &= \sum_{i=1}^l \phi^{(i)}(c(s)) B_{l,i}(c'(s), c''(s), \dots, c^{(l-i+1)}(s)), \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι για τις παραγώγους της συνάρτησης $\phi(s)$ ισχύει ότι $\phi^{(i)}(s) = (\frac{1}{2})_i s^{\frac{1}{2}-i}$, όπου $(\frac{1}{2})_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-i+1)$. Απομένει λοιπόν να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης $c(s)$ για τις οποίες εύκολα

βρίσκουμε ότι $c'(s) = 2(\mu + \lambda + s)$, $c''(s) = 2$ και $c^{(u)}(s) = 0$ για κάθε $u = 3, 4, \dots$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην προηγούμενη εξίσωση προκύπτει ο τύπος υπολογισμού των παραγώγων της συνάρτησης $b(s)$,

$$b^{(l)}(s) = \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2}\right)_i (c(s))^{\frac{1}{2}-i} B_{l,i}(2(\mu + \lambda + s), 2, 0, \dots, 0), \quad l \geq 1. \quad (4.69)$$

Από τις εξισώσεις (4.65)-(4.69) διαπιστώνουμε ότι η k -παράγωγος της συνάρτησης $\tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s)$ είναι πλήρως προσδιορισμένη για κάθε $k = 1, 2, \dots$. Έτσι, θέτοντας στην (4.65) $s = 0$, βρίσκουμε την εξίσωση των ροπών $\Gamma_{(n,1)}^{(k)}$ ως

$$\Gamma_{(n,1)}^{(k)} = (-1)^k \sum_{r=1}^{\min(k,n)} \binom{n}{r} B_{k,r}(g'(0), g''(0), \dots, g^{(k-r+1)}(0)), \quad n, k \geq 1. \quad (4.70)$$

όπου οι αριθμοί $g'(0), g''(0), \dots, g^{(k-r+1)}(0)$ υπολογίζονται από την (4.68) όταν, από την (4.69), έχουμε

$$b^{(l)}(0) = \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2}\right)_i (\mu - \lambda)^{1-2i} B_{l,i}(2(\mu + \lambda), 2, 0, \dots, 0), \quad l \geq 1. \quad (4.71)$$

Αντικαθιστώντας τέλος στην εξίσωση (4.63) $s = 0$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} -k\Gamma_{(n,0)}^{(k-1)} + (\lambda + \gamma + \zeta)\Gamma_{(n,0)}^{(k)} &= \lambda\Gamma_{(n+1,0)}^{(k)} + \gamma\Gamma_{(n,1)}^{(k)} \\ &+ \zeta q \sum_{j=1}^n p^{n-j} \Gamma_{(j,0)}^{(k)}, \quad n, k \geq 1. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Έχοντας υπολογίσει τις κεντρικές ροπές των μεταβλητών $\Gamma_{(n,1)}$ από τις (4.70), (4.71) καθώς και τις ροπές του χρόνου συνεχούς λειτουργίας Γ από την (4.56), μπορούμε επαναληπτικά από την (4.72) να υπολογίσουμε τις ροπές $\Gamma_{(n,0)}^{(k)}$, για κάθε $n = 2, 3, \dots$

4.5.2 Ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας

Χρησιμοποιώντας παρόμοια μεθοδολογία μπορούμε να υπολογίσουμε και άλλα μέτρα απόδοσης που αναφέρονται σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας. Έτσι λοι-

πόν μπορούμε να βρούμε τις πιθανογεννήτριες του αριθμού των αφίξεων, του αριθμού των εξυπηρετήσεων που πραγματοποιούνται καθώς και του αριθμού των εγκαταλείψεων πελατών κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος. Η κύρια ιδέα είναι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο ανάλυσης πρώτου βήματος και να παράγουμε ένα συγκεκριμένο σύστημα εξισώσεων για τις υπό μελέτη πιθανογεννήτριες. Όλα αυτά τα συστήματα έχουν την ίδια δομή εξαιτίας των κοινών ρυθμών μετάβασης και μπορούν να λυθούν παρόμοια με το σύστημα των εξισώσεων (4.60).

Στο υπόλοιπο μέρος της υποπαραγράφου θα ασχοληθούμε μόνο με τον συνολικό αριθμό των εγκαταλείψεων N που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας, αφού βασικός στόχος της ανάλυσής μας είναι η επίδραση των γεωμετρικών εγκαταλείψεων που συμβαίνουν στο υπό μελέτη μοντέλο. Έτσι λοιπόν συμβολίζουμε με $N_{(n,i)}$ το συνολικό αριθμό των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια ενός πρώτου περάσματος του συστήματος από την κατάσταση (n, i) στην $(0, 0)$, $i = 0, 1, n \geq i$. Η διάρκεια ενός τέτοιου πρώτου περάσματος ορίζεται ως ο χρόνος από τη στιγμή που κάποιος πελάτης φθάνοντας στο σύστημα το συναντά στην κατάσταση $(n - 1, i)$ έως τη στιγμή που θα λήξει η τρέχουσα περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος. Προφανώς $N_{(n,1)} = 0$, αφού κανένας πελάτης δεν εγκαταλείπει το σύστημα όση ώρα ο υπηρέτης είναι στην θέση "οη". Συνεπώς επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στον υπολογισμό των πιθανογεννητριών $\hat{N}_n(z) = E(z^{N_{(n,0)}})$. Ιδιαίτερα εστιάζουμε στην εύρεση της πιθανογεννήτριας $\hat{N}(z) = \hat{N}_1(z)$, του συνολικού αριθμού των εγκαταλείψεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας.

Έστω κάποια άφιξη πελάτη που συναντά το σύστημα στην κατάσταση $(n - 1, i)$. Με πιθανότητα 1 μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα θα συμβεί ένα από τα επόμενα τρία ενδεχόμενα: {άφιξη νέου πελάτη}, {λήξη του χρόνου απουσίας του υπηρέτη}, {άφιξη μίας ευκαιρίας εγκατάλειψης} και μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί κάποιο από αυτά, ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα δεν αλλάζει. Δεσμεύοντας ως προς το ποιο από τα τρία προηγούμενα θα συμβεί πρώτο και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που συναντάμε στην απόδειξη του θεωρήματος

4.2, έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{N}_n(z) &= E(z^{N(n,0)}) \\ &= E(z^{N(n,0)}/A_1) \Pr(A_1) + E(z^{N(n,0)}/A_2) \Pr(A_2) + E(z^{N(n,0)}/A_3) \Pr(A_3) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta} E(z^{N(n+1,0)}) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta} E(z^{N(n,1)}) + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta} E(z^{N(n,0)}/A_3),\end{aligned}$$

και δεσμεύοντας ξανά ως προς τον αριθμό B_k των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα όταν κατά την άφιξη μίας ευκαιρίας εγκατάλειψης υπάρχουν σε αυτό n πελάτες παρόντες, έχουμε

$$\begin{aligned}E(z^{N(n,0)}/A_3) &= \sum_{k=0}^n E(z^{N(n,0)}/A_3, B_{n-k}) \Pr(B_{n-k}/A_3) \\ &= \sum_{k=1}^n E(z^{n-k+N(k,0)}) qp^{n-k} + E(z^n)p^n \\ &= \sum_{k=1}^n z^{n-k} E(z^{N(k,0)}) qp^{n-k} + (pz)^n.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{N}_n(z) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta} \hat{N}_{n+1}(z) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta} \\ &+ \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta} \left(\sum_{k=1}^n qp^{n-k} z^{n-k} \hat{N}_k(z) + (pz)^n \right), \quad n \geq 1.\end{aligned}\quad (4.73)$$

Με τη βοήθεια της προηγούμενης επαναληπτικής εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανογεννήτριες $\hat{N}_n(z)$, $n \geq 2$, όταν γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια $\hat{N}_1(z)$. Για την εύρεση της τελευταίας ορίζουμε τους μεικτούς μετασχηματισμούς

$$G(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{N}_n(z) x^n, \quad \text{όπου } \hat{N}_0(z) = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.73) με x^n και προσθέτοντας για κάθε $n \geq 1$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} G(z, x) - 1 &= \frac{\lambda}{(\lambda + \gamma + \zeta)x} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{N}_{n+1}(z)x^{n+1} + \frac{\gamma x}{(\lambda + \gamma + \zeta)(1-x)} \\ &\quad + \frac{\zeta q}{\lambda + \gamma + \zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{N}_k(z)x^k \sum_{n=k}^{\infty} (pzx)^{n-k} + \frac{\zeta pzx}{(\lambda + \gamma + \zeta)(1-pzx)} \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + \gamma + \zeta)x} (G(z, x) - 1 - \hat{N}_1(z)x) + \frac{\gamma x}{(\lambda + \gamma + \zeta)(1-x)} \\ &\quad + \frac{\zeta q}{(\lambda + \gamma + \zeta)(1-pzx)} (G(z, x) - 1) + \frac{\zeta pzx}{(\lambda + \gamma + \zeta)(1-pzx)}, \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} (1-x)D(z, x)(G(z, x) - 1) &= -\lambda x(1-x)(1-pzx)\hat{N}(z) + \gamma x^2(1-pzx) \\ &\quad + \zeta pzx^2(1-x), \end{aligned} \quad (4.74)$$

όπου

$$D(z, x) = -pz(\lambda + \gamma + \zeta)x^2 + (\lambda + \lambda pz + \gamma + \zeta p)x - \lambda. \quad (4.75)$$

Δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.1 μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε σταθερό z με $|z| \leq 1$, η εξίσωση $D(z, x) = 0$, έχει μία μόνο ρίζα $x(z)$ στον ανοικτό δίσκο $\{x : |x| < 1\}$, οπότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $\hat{N}(z)$ μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί αντικαθιστώντας τη ρίζα $x(z)$ στην (4.74), χρησιμοποιώντας ότι $D(z, x(z)) = 0$, και την σύγκλιση του μετασχηματισμού $G(z, x)$ στον ανοικτό δίσκο $\{x : |x| < 1\}$, καθώς

$$|G(z, x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \hat{N}_n(z)x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{N}_n(z)| |x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n < \infty,$$

αφού

$$\left| \hat{N}_n(z) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) |z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) \leq 1.$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο επόμενο θεώρημα 4.5.

Θεώρημα 4.5. Η πιθανογεννήτρια $\hat{N}(z)$ του αριθμού των εγκαταλείψεων πελατών σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος δίνεται ως

$$\hat{N}(z) = \frac{\gamma}{\lambda} \cdot \frac{x(z)}{1-x(z)} + \frac{\zeta}{\lambda} \cdot \frac{px(z)}{1-px(z)}, \quad (4.76)$$

όπου

$$x(z) = \frac{\lambda + \lambda pz + \gamma + \zeta p - \sqrt{(\lambda + \lambda pz + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda pz(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2pz(\lambda + \gamma + \zeta)}. \quad (4.77)$$

Έχοντας υπολογίσει την πιθανογεννήτρια $\hat{N}_1(z)$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $\hat{N}_1(1) = 1$, αν και μόνο αν

$$p(\lambda + \gamma + \zeta)x^2(1) - (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)x(1) + \lambda = 0,$$

δηλαδή $D(1, x(1)) = 0$, που ισχύει διότι ο αριθμός $x(z)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $D(z, x(z)) = 0$, για κάθε z με $|z| \leq 1$. Επαγωγικά και χρησιμοποιώντας την (4.73) μπορούμε να δείξουμε ότι $\hat{N}_n(1) = 1$, για κάθε $n \geq 2$, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές N_n είναι γνήσιες.

Συνεχίζοντας θα χρησιμοποιήσουμε τις (4.73) και (4.77) για να παράγουμε μία επαναληπτική εξίσωση για τις μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών N_n . Συγκεκριμένα η (4.73) γράφεται

$$(\lambda + \gamma + \zeta)\hat{N}_n(z) = \lambda\hat{N}_{n+1}(z) + \gamma + \zeta q \sum_{k=1}^n (pz)^{n-k} \hat{N}_k(z) + \zeta(pz)^n, \quad n \geq 1.$$

Παραγωγίζοντας ως προς z και θέτοντας $z = 1$, βρίσκουμε

$$(\lambda + \gamma + \zeta)E(N_n) = \lambda E(N_{n+1}) + \zeta q \sum_{k=1}^n [(n-k)p^{n-k} + p^{n-k}E(N_k)] + n\zeta p^n, \quad n \geq 1,$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{k=1}^n (n-k)p^{n-k} = \sum_{m=0}^{n-1} mp^m = p \sum_{m=1}^{n-1} mp^{m-1} = p \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2},$$

η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$(\lambda + \gamma + \zeta)E(N_n) = \lambda E(N_{n+1}) + \frac{\zeta p}{q}[(n-1)p^n - np^{n-1} + 1] + \sum_{k=1}^n p^{n-k} E(N_k) + n\zeta p^n, \quad n \geq 1. \quad (4.78)$$

Παραγωγίζοντας την (4.76) ως προς z και θέτοντας $z = 1$, βρίσκουμε

$$E(N_1) = \frac{\gamma x'(1)}{\lambda(1-x(1))^2} + \frac{\zeta p(x(1) + x'(1))}{\lambda(1-px(1))^2}, \quad (4.79)$$

όπου από την (4.77) βρίσκουμε με παρόμοιο τρόπο ότι

$$x'(1) = \frac{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 3\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta) + \lambda p(\zeta q - \lambda p)}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)\sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}} - \frac{\lambda + \gamma + \zeta p}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)}, \quad (4.80)$$

ενώ ο αριθμός $x(1)$ υπολογίζεται από την (4.77) αν θέσουμε $z = 1$. Έχοντας υπολογίσει τη μέση τιμή $E(N_1)$ του αριθμού των εγκαταλείψεων κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας μπορούμε, με διαδοχικές επαναλήψεις της (4.78), να βρούμε τις μέσες τιμές $E(N_n)$ για κάθε $n \geq 2$.

4.5.3 Η κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας

Ο επόμενος στόχος είναι να μελετήσουμε την κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του. Αυτό το μέτρο απόδοσης έχει μελετηθεί σε αρκετά μοντέλα ουρών από διάφορους συγγραφείς (π.χ. δεσ Serfozo (1988), Lopez-Herrero και Neuts (2002) και Artalejo et al. (2005, 2007)). Η σπουδαιότητα αυτού του μέτρου οφείλεται σε δύο λόγους. Κατ' αρχάς η κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας, μπορεί να υπολογιστεί ακόμη και όταν δεν ισχύει η συνθήκη ευστάθειας (4.2), για παράδειγμα όταν το σύστημα δέχεται μεγάλη ροή πελατών. Κατά συνέπεια αποτελεί ένα μέτρο ποσοτικοποίησης της συμφόρησης του συστήματος όταν δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή. Κατά δεύτερο λόγο αποτελεί ένα δείκτη λειτουργικότητας, χρήσιμο για τον

διαχειριστή του συστήματος. Συγκεκριμένα, όταν ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα υπερβαίνει ένα κρίσιμο όριο, τότε στο σύστημα μπορεί να συμβαίνουν μатаιώσεις της λειτουργίας του. Σε αυτή την περίπτωση ο διαχειριστής ενδιαφέρεται για το ποσοστό των περιόδων συνεχούς λειτουργίας όπου δεν παρουσιάζονται τέτοια προβλήματα. Στόχος του είναι να ελέγξει τις παραμέτρους του συστήματος με τέτοιο τρόπο ώστε ο μέγιστος αριθμός πελατών του να μην υπερβεί αυτό το κρίσιμο όριο. Τέτοιες απαιτήσεις που επιτυγχάνουν μία προκαθορισμένη ποιότητα λειτουργίας μπορούν να ικανοποιηθούν μελετώντας την κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών που συναντώνται σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας του.

Η μελέτη αυτού του μέτρου βασίζεται στον υπολογισμό κάποιων πιθανοτήτων απορρόφησης μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Έτσι για κάθε αρχική κατάσταση (n, i) του μοντέλου που εξετάζουμε, $i = 0, 1, n \geq i$, ορίζουμε $M_{(n,i)}$ την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον μέγιστο αριθμό πελατών που παρατηρήθηκαν στο σύστημα μέχρι την πρώτη φορά που αυτό θα αδειάσει, δηλαδή η διαδικασία $\{(L(t), I(t)), t \geq 0\}$ να επισκεφθεί την κατάσταση $(0, 0)$. Για κάθε σταθερό m , παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $\tau_{(n,i)}(m) = \Pr[M_{(n,i)} \leq m], m \geq n$, μπορεί να θεωρηθεί ως η πιθανότητα η διαδικασία $\{(L(t), I(t))\}$, ξεκινώντας από την κατάσταση (n, i) , να φτάσει στην $(0, 0)$ προτού φτάσει στο υποσύνολο καταστάσεων $\{(m+1, i) : i = 0, 1\}$. Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $\tau_{(n,i)}(m)$ θεωρώντας την τροποποιημένη διαδικασία που προκύπτει από την αρχική όταν μετατρέψουμε τις καταστάσεις $(0, 0)$, $(m+1, 0)$ και $(m+1, 1)$ σε καταστάσεις απορρόφησης. Τότε η πιθανότητα $\tau_{(n,i)}(m)$ γίνεται η πιθανότητα η τροποποιημένη διαδικασία να απορροφηθεί στην $(0, 0)$, δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η (n, i) .

Χρησιμοποιώντας ξανά τη μέθοδο της ανάλυσης του πρώτου βήματος και δουλεύοντας όπως στην (4.73), βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για την εύρεση των

προηγούμενων πιθανοτήτων απορρόφησης.

$$\tau_{(0,0)}(m) = 1, \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \tau_{(n,0)}(m) = & \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta} \tau_{(n+1,0)}(m) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta} \tau_{(n,1)}(m) \\ & + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta} \left(p^n + \sum_{k=1}^n qp^{n-k} \tau_{(k,0)}(m) \right), \quad 1 \leq n \leq m, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\tau_{(m+1,0)}(m) = 0, \quad (4.83)$$

$$\tau_{(1,1)}(m) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tau_{(2,1)}(m) + \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad (4.84)$$

$$\tau_{(n,1)}(m) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tau_{(n+1,1)}(m) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tau_{(n-1,1)}(m), \quad 2 \leq n \leq m, \quad (4.85)$$

$$\tau_{(m+1,1)}(m) = 0. \quad (4.86)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.81)-(4.86), μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα

$$\tau_{(1,0)}(m) = \tau(m) = \Pr[M \leq m],$$

η οποία παριστάνει την τιμή στο m της συνάρτησης κατανομής του μέγιστου αριθμού M των πελατών που παρατηρείται κατά την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος. Συνοψίζουμε το αποτέλεσμα στο επόμενο θεώρημα 4.6.

Θεώρημα 4.6. *Εάν $\rho \neq 1$, τότε η κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας δίνεται ως*

$$\tau(m) = \frac{[(1 - p\eta_1)\Theta_m(\eta_1)\eta_2^{m+1} - (1 - p\eta_2)\Theta_m(\eta_2)\eta_1^{m+1}] + \zeta p(\eta_1\eta_2^{m+1} - \eta_2\eta_1^{m+1})}{\lambda[(1 - p\eta_1)\eta_2^{m+1} - (1 - p\eta_2)\eta_1^{m+1}]}, \quad (4.87)$$

όπου

$$\eta_{1,2} = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p \mp \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)}, \quad (4.88)$$

και

$$\Theta_m(z) = \begin{cases} \frac{\gamma}{1-\rho^{m+1}} \left(z \frac{1-z^m}{1-z} - \rho z \frac{\rho^m - z^m}{\rho - z} \right), & \text{αν } z \neq \rho, \\ \frac{\gamma}{1-\rho^{m+1}} \left(\rho \frac{1-\rho^m}{1-\rho} - m\rho^{m+1} \right), & \text{αν } z = \rho. \end{cases} \quad (4.89)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα το σύστημα των (4.84)-(4.86). Η εξίσωση (4.85) γράφεται

$$\lambda\tau_{(n+1,1)}(m) - (\lambda + \mu)\tau_{(n,1)}(m) + \mu\tau_{(n-1,1)}(m) = 0, \quad 2 \leq n \leq m,$$

δηλαδή αποτελεί μία ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, αρχικές συνθήκες τις (4.84), (4.86) και χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda x^2 - (\lambda + \mu)x + \mu = 0,$$

με ρίζες τις $x_1 = 1$, $x_2 = 1/\rho$. Επομένως η γενική της λύση είναι

$$\tau_{(n,1)}(m) = A + B\rho^{-n}.$$

Αντικαθιστώντας στις δύο αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε τις τιμές των A, B και βρίσκουμε ότι

$$\tau_{(n,1)}(m) = \frac{1 - \rho^{m+1-n}}{1 - \rho^{m+1}}, \quad 1 \leq n \leq m + 1. \quad (4.90)$$

Τώρα εστιάζουμε στον υπολογισμό των πιθανοτήτων $\tau_{(n,0)}(m)$ και γι' αυτό το λόγο ορίζουμε τη γεννήτρια (πολυωνυμική) συνάρτηση $\Delta_m(z)$ των πιθανοτήτων $\{\tau_{(n,0)}(m) : 0 \leq n \leq m + 1\}$,

$$\Delta_m(z) = \sum_{n=0}^{m+1} \tau_{(n,0)}(m)z^n = \sum_{n=0}^m \tau_{(n,0)}(m)z^n = 1 + \sum_{n=1}^m \tau_{(n,0)}(m)z^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.82) με $(\lambda + \gamma + \zeta)z^n$ και προσθέτοντας για κάθε $n = 1, 2, \dots, m$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma + \zeta) \sum_{n=1}^m \tau_{(n,0)}(m)z^n &= \frac{\lambda}{z} \sum_{n=1}^m \tau_{(n+1,0)}(m)z^{n+1} + \gamma \sum_{n=1}^m \tau_{(n,1)}(m)z^n \\ &+ \zeta \sum_{n=1}^m (pz)^n + \zeta q \sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m)z^k \sum_{n=k}^m (pz)^{n-k}, \end{aligned}$$

ή αντικαθιστώντας την (4.90)

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \gamma + \zeta)(\Delta_m(z) - 1) &= \frac{\lambda}{z} (\Delta_m(z) - 1 - \tau(m)z) + \frac{\gamma}{1 - \rho^{m+1}} \sum_{n=1}^m (1 - \rho^{m+1-n})z^n \\
 &\quad + \zeta pz \frac{1 - (pz)^m}{1 - pz} + \frac{\zeta q}{1 - pz} \sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m)z^k [1 - (pz)^{m-k+1}].
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Ορίζοντας

$$\Theta_m(z) = \frac{\gamma}{1 - \rho^{m+1}} \sum_{n=1}^m (1 - \rho^{m+1-n})z^n, \tag{4.92}$$

μπορούμε εύκολα να δείξουμε την ισχύ της (4.89). Επίσης,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m)z^k [1 - (pz)^{m-k+1}] &= \sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m)z^k - \sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m)(pz)^{m+1}p^{-k} \\
 &= \Delta_m(z) - 1 - (pz)^{m+1}(\Delta_m(p^{-1}) - 1).
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Θέτοντας $c = \Delta_m(p^{-1}) - 1$, αντικαθιστώντας τις (4.92), (4.93) στην (4.91) και εκτελώντας εύκολες αλγεβρικές πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 H(z)(\Delta_m(z) - 1) &= -\lambda(1 - pz)\tau(m)z + z(1 - pz)\Theta_m(z) - \zeta qz(pz)^{m+1}c \\
 &\quad + \zeta pz^2[1 - (pz)^m],
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

όπου

$$H(z) = -(\lambda + \gamma + \zeta)pz^2 + (\lambda + \gamma + \lambda p + \zeta p)z - \lambda. \tag{4.95}$$

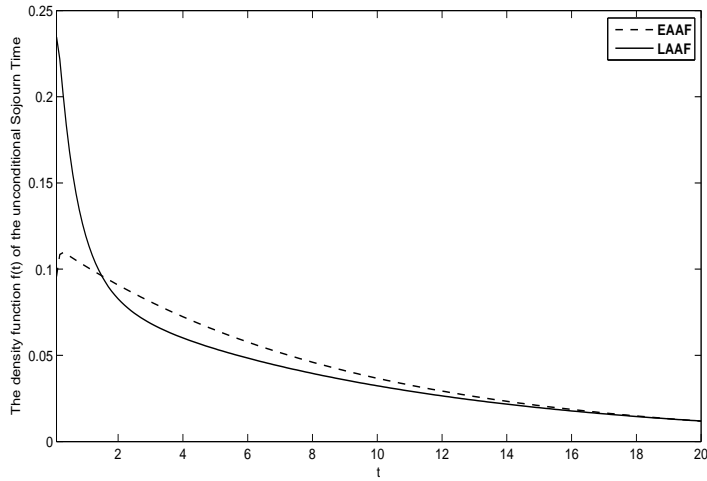
Η εξίσωση $H(z) = 0$, έχει δύο πραγματικές ρίζες η_1 και η_2 που δίνονται από την (4.88). Αντικαθιστώντας τις η_1, η_2 στην (4.94) και λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα με αγνώστους $\tau(m)$ και c , καταλήγουμε στην (4.87). ■

Η περίπτωση $\rho = 1$, εξετάζεται με παρόμοιο τρόπο.

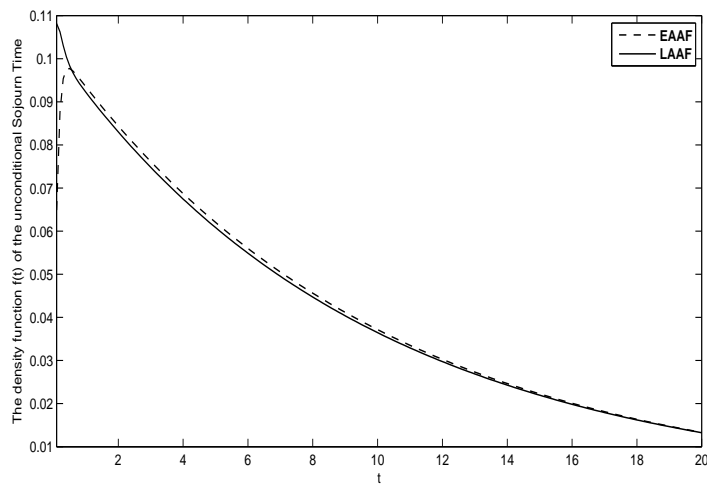
4.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε το χαρακτηριστικό των γεωμετρικών εγκαταλείψεων για το βασικό Μαρκοβιανό μοντέλο ουράς με απλό υπηρέτη ο οποίος μπορεί να λαμβάνει πολλαπλές απουσίες, ενώ οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι εξαιτίας της απουσίας του υπηρέτη. Συμπληρώνουμε λοιπόν πρόσφατες μελέτες για το ίδιο σύστημα στο οποίο όμως συμβαίνουν ανεξάρτητες και συγχρονισμένες εγκαταλείψεις (Altman και Yechiali (2006) και Adan et al. (2009) αντίστοιχα). Εκφράσεις κλειστού τύπου έχουν βρεθεί για διάφορους δείκτες λειτουργικότητας του μοντέλου. Συγκεκριμένα, έχουμε υπολογίσει τους μετασχηματισμούς Laplace για τους δεσμευμένους και αδέσμευτους χρόνους παραμονής πελάτη που φθάνει στο σύστημα όταν αυτό είναι σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας καθώς και για τη διάρκεια της περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος. Μολονότι η συμβολική αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace είναι αδύνατη, εξαιτίας της πεπλεγμένης μορφής τους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητική αντιστροφή των μετασχηματισμών για να έχουμε μία ποιοτική εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος, κάτω από διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του.

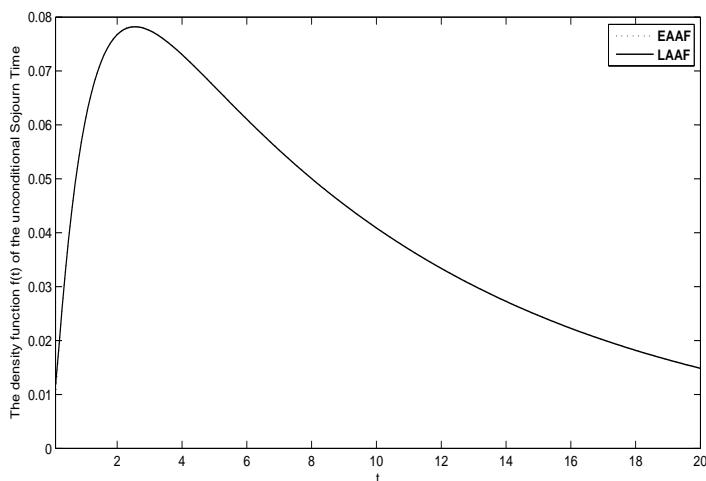
Στο σχήμα 4.3 δίνουμε το γράφημα των πυκνοτήτων των αδέσμευτων χρόνων παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα και για τις δύο πειθαρχίες εγκατάλειψης EAAF και LAAF, σ' ένα αριθμητικό σενάριο χαμηλής κυκλοφορίας πελατών ($\rho = 0.1$), όπου $\lambda = 2$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$ και $p = 0.2$. Οι πυκνότητες έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τους τύπους (4.31), (4.45) και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο αντιστροφής μετασχηματισμών Laplace των Abate και Whitt (1995). Παρατηρούμε ότι οι δύο πυκνότητες διαφέρουν σημαντικά. Πράγματι, ενώ η πυκνότητα στην περίπτωση της LAAF πειθαρχίας είναι γνησίως φθίνουσα, η αντίστοιχη πυκνότητα της περίπτωσης EAAF είναι μονοκόρυφη ξεκινώντας με γνησίως αύξουσα μονοτονία για μικρές τιμές του t . Στα σχήματα 4.4 και 4.5, παρέχουμε τα αντίστοιχα γραφήματα για δύο αριθμητικά σενάρια μέτριας ($\rho = 0.5$) και υψηλής ($\rho = 0.95$) κυκλοφορίας πελατών, με $\lambda = 10$ και $\lambda = 19$ αντίστοιχα, διατηρώντας τις άλλες παραμέτρους σταθερές όπως στο σχήμα 4.3. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός συνωστισμού ρ τόσο περισσότερο όμοιες είναι οι δύο πυκνότητες του αδέσμευτου χρόνου παραμονής, κάτω από την επίδραση των δύο διαφορετικών πειθαρχιών εγκατάλει-



Σχήμα 4.3: Η πυκνότητα $f(t)$ του χρόνου παραμονής στο σύστημα όταν $\lambda = 2$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$ και $p = 0.2$.



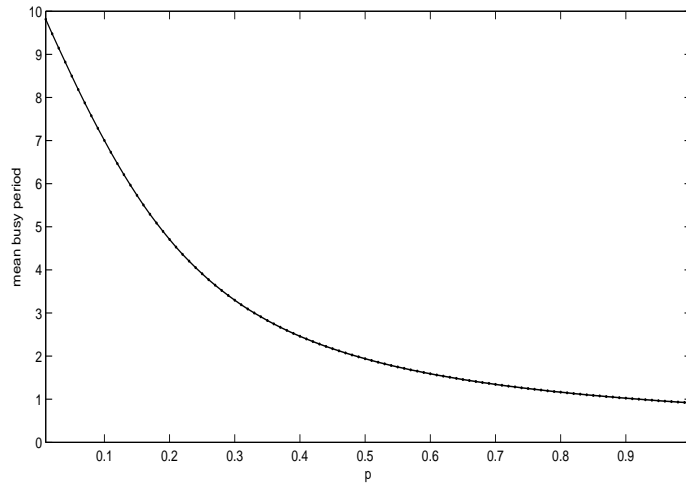
Σχήμα 4.4: Η πυκνότητα $f(t)$ του χρόνου παραμονής στο σύστημα όταν $\lambda = 10$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$ και $p = 0.2$.



Σχήμα 4.5: Η πυκνότητα $f(t)$ του χρόνου παραμονής στο σύστημα όταν $\lambda = 19$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$ και $p = 0.2$.

ψης. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι όταν το σύστημα λειτουργεί με μεγάλο ρυθμό συνωστισμού, δηλαδή με μεγάλη κυκλοφορία πελατών, τότε ξοδεύει τον περισσότερο χρόνο λειτουργίας του στο πάνω μέρος του διαγράμματος των ρυθμών μετάβασης, δηλαδή τον περισσότερο χρόνο ο υπηρέτης είναι ενεργοποιημένος και παρέχει εξυπηρέτηση. Τότε οι εγκαταλείψεις συμβαίνουν σ' ένα μικρό ποσοστό του χρόνου με αποτέλεσμα η πειθαρχία εγκατάλειψης να έχει πολύ μικρή επίδραση στη συμπεριφορά του συστήματος. Μάλιστα στο σχήμα 4.5, με ρυθμό συνωστισμού $\rho = 0.95$, παρατηρούμε ότι οι δύο πυκνότητες σχεδόν συμπίπτουν.

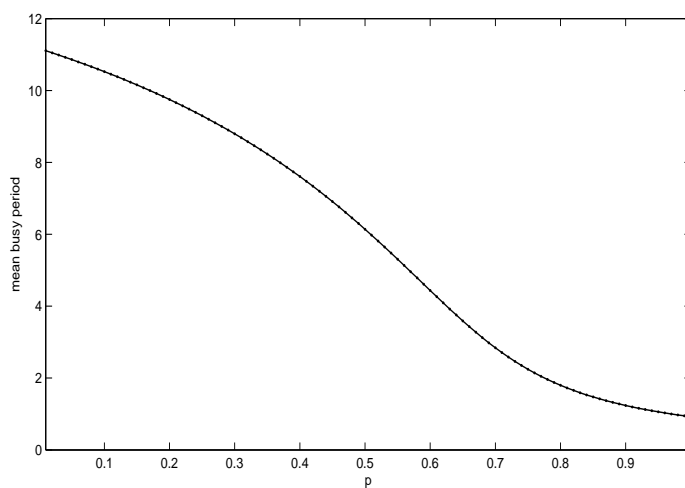
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του μοντέλου. Στο σχήμα 4.6 δίνουμε τη γραφική παράσταση του μέσου χρόνου συνεχούς λειτουργίας $E(\Gamma)$ ως συνάρτηση του p , για ένα αριθμητικό σενάριο πολύ χαμηλού ρυθμού συνωστισμού με $\lambda = 0.2$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$ και $\zeta = 1$. Παρατηρούμε ότι ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας $E(\Gamma)$ είναι φθίνουσα κυρτή συνάρτηση της πιθανότητας p . Στο σχήμα 4.7, αλλάζουμε την τιμή



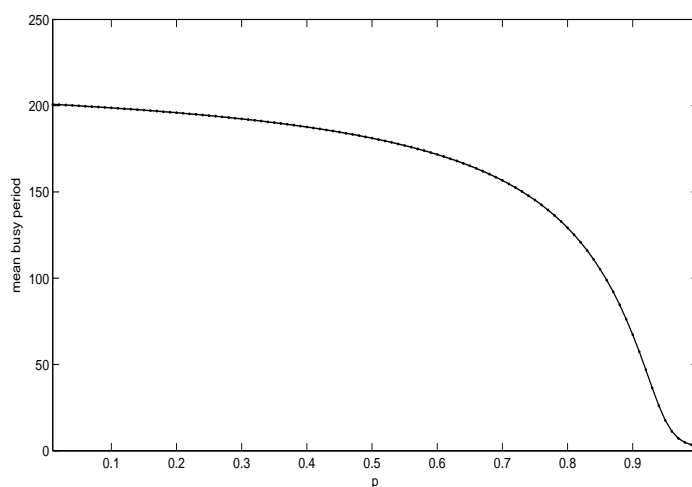
Σχήμα 4.6: Ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας $E(\Gamma)$ του συστήματος ως συνάρτηση του p όταν $\lambda = 0.2$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$.

του λ από 0.2 σε 2, κρατώντας τις άλλες παραμέτρους σταθερές και σχεδιάζουμε το ίδιο γράφημα. Τώρα όμως βλέπουμε ότι ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας παραμένει μία φθίνουσα συνάρτηση της πιθανότητας p που αρχικά είναι κοίλη και για μεγάλες τιμές του p ($p > 0.6$) μετατρέπεται σε κυρτή. Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται στο σχήμα 4.8 όπου $\lambda = 19$ ενώ οι άλλες παράμετροι παραμένουν ως έχουν, δηλαδή το σύστημα λειτουργεί σε συνθήκες μεγάλου ρυθμού συνωστισμού, $\rho = 0.95$.

Τέλος στο σχήμα 4.9, έχουμε σχεδιάσει τη συνάρτηση κατανομής $\Pr[M \leq m] = \tau(m)$ του μέγιστου αριθμού πελατών που βρίσκονται ταυτόχρονα στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του, για τρία αριθμητικά σενάρια. Στο πρώτο έχουμε ρυθμό συνωστισμού $\rho = 0.1$ με τιμές των παραμέτρων $\lambda = 2$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$ και $p = 0.5$. Στο δεύτερο αλλάξαμε την τιμή του λ σε 10 μετατρέποντας έτσι το ρυθμό συνωστισμού σε $\rho = 0.5$ και αφήνοντας ίδιες τις άλλες παραμέτρους. Στο τρίτο σενάριο αλλάξαμε πάλι μόνο την τιμή του ρυθμού



Σχήμα 4.7: Ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας $E(\Gamma)$ του συστήματος ως συνάρτηση του p όταν $\lambda = 2$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$.



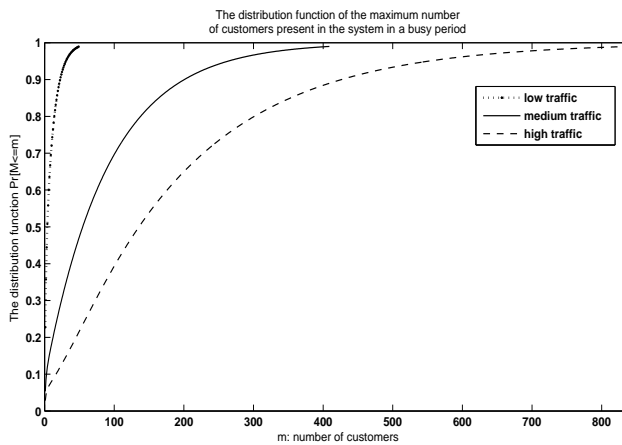
Σχήμα 4.8: Ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας $E(\Gamma)$ του συστήματος ως συνάρτηση του p όταν $\lambda = 19$, $\mu = 20$, $\gamma = 0.1$, $\zeta = 1$.

αφίξεων λ από 10 σε 19 ώστε να έχουμε υψηλό ρυθμό συνωστισμού $\rho = 0.95$. Αν συμβολίσουμε με M^{lt} τον μέγιστο αριθμό πελατών όταν $\rho = 0.1$ (low traffic), M^{mt} τον μέγιστο αριθμό πελατών όταν $\rho = 0.5$ (medium traffic) και M^{ht} τον μέγιστο αριθμό πελατών όταν $\rho = 0.95$ (high traffic), κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι

$$\Pr[M^{lt} \leq m] \geq \Pr[M^{mt} \leq m] \geq \Pr[M^{ht} \leq m], \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

που σημαίνει ότι $M^{lt} \leq_{st} M^{mt} \leq_{st} M^{ht}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς αύξηση του ρυθμού συνωστισμού αναμένεται να οδηγήσει σε μεγαλύτερο αριθμό πελατών που συσσωρεύονται στην ουρά αναμονής, εφόσον οι υπόλοιποι παράμετροι του συστήματος παραμένουν αμετάβλητες. Ένα άλλο αριθμητικό αποτέλεσμα είναι ότι με πιθανότητα σχεδόν 1 ο μέγιστος αριθμός πελατών στις τρεις προαναφερθείσες περιπτώσεις είναι 50, 410 και 843 αντίστοιχα καθώς υπολογίζουμε ότι

$$\Pr[M^{lt} \leq 50] \geq 0.99, \quad \Pr[M^{mt} \leq 410] \geq 0.99 \quad \text{και} \quad \Pr[M^{ht} \leq 843] \geq 0.99.$$



Σχήμα 4.9: Η συνάρτηση κατανομής του μέγιστου αριθμού πελατών κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνωστισμού.

Κεφάλαιο 5

Γεωμετρικές εγκαταλείψεις σε μία ουρά με καταστροφές του υπηρέτη

Θεωρούμε μία ουρά απλού υπηρέτη ο οποίος υπόκειται σε καταστροφές που συμβαίνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson. Οι καταστροφές εξαναγκάζουν όλους τους παρόντες πελάτες να εγκαταλείψουν το σύστημα και καθιστούν τον υπηρέτη ανενεργό. Τότε, μία περίοδος επιδιόρθωσης του υπηρέτη ξεκινά έως ότου αυτός καταστεί έτοιμος να συνεχίσει την εξυπηρέτηση των πελατών. Στο μεσοδιάστημα οι πελάτες συσσωρεύονται σύμφωνα με τη διαδικασία άφιξής τους. Πρόσφατα, αρκετοί συγγραφείς έχουν μελετήσει συστήματα εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι και εγκαταλείπουν το σύστημα λόγω της καταστροφής του υπηρέτη. Δύο είδη εγκαταλείψεων έχουν, προς το παρόν, μελετηθεί: οι ανεξάρτητες και οι διωνυμικές. Στην περίπτωση των ανεξάρτητων εγκαταλείψεων, κάθε πελάτης έχει τον δικό του χρόνο υπομονής και εγκαταλείπει το σύστημα όταν αυτός εκπνέει. Στην περίπτωση των διωνυμικών εγκαταλείψεων, οι στιγμές εγκατάλειψης συμβαίνουν σύμφωνα με μία συγκεκριμένη σημειακή διαδικασία και τότε όλοι οι παρόντες πελάτες αποφασίζουν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, εάν θα εγκαταλείψουν ή όχι το σύστημα.

Στο κεφάλαιο 5, συμπληρώνουμε τις μελέτες αυτές θεωρώντας την περίπτωση των γεωμετρικών εγκαταλείψεων. Η περίπτωση αυτή συναντάται όταν οι ευκαιρίες

εγκατάλειψης παρουσιάζονται σύμφωνα με μία σημειακή διαδικασία, αλλά οι πελάτες αποφασίζουν ακαριαία και *ακολουθιακά* για το αν θα εγκαταλείψουν ή όχι το σύστημα. Υπολογίζουμε αναλυτικές εκφράσεις και υπολογιστικά σχήματα για ποικίλα μέτρα απόδοσης του συστήματος όπως είναι ο οριακός αριθμός πελατών στο σύστημα, ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, η διάρκεια της περιόδου συνεχούς λειτουργίας όπως επίσης και ο αριθμός των πελατών που χάνονται καθώς και ο μέγιστος αριθμός πελατών σε μία περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος.

5.1 Εισαγωγή

Τα μοντέλα ανάπτυξης πληθυσμού με ολικές καταστροφές που εξαλείφουν όλες τις μονάδες του πληθυσμού εξαιτίας κάποιων ακραίων φυσικών γεγονότων, έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (δες π.χ. Brockwell et al. (1982), Brockwell (1986), Bartoszynski et al. (1989), Kyriakidis (1994), Hanson and Tuckwell (1997), Lee (2000), Economou and Fakinos (2003, 2008), Stirzaker (2006) and Gani and Swift (2007)). Αυτές οι εργασίες αφορούν τον υπολογισμό των σπουδαιότερων μέτρων βιολογικού ενδιαφέροντος όπως είναι, η μεταβατική και η στάσιμη κατανομή του μεγέθους του πληθυσμού, η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού καθώς και ο μέσος χρόνος μέχρι την εξάλειψη.

Πιο πρόσφατα, αρκετοί ερευνητές εγκαινίασαν τη θεώρηση και την ανάλυση μοντέλων με καταστροφές στο περιβάλλον της θεωρίας ουρών, χρησιμοποιώντας και επεκτείνοντας τις προ-υπάρχουσες μεθόδους (δες π.χ. Krishna Kumar και Arivundainambi (2000), Krishna Kumar and Pavai Madheswari (2003), Di Crescenzo et al. (2003), Economou and Fakinos (2003), Krinik et al. (2005), Krishna Kumar et al. (2007) and Di Crescenzo et al. (2011)). Πράγματι κάποιες μεγάλου βαθμού τεχνολογικές βλάβες εξαναγκάζουν όλους τους πελάτες να εγκαταλείψουν το σύστημα εξυπηρέτησης και συνεπώς μπορούν να θεωρηθούν ως καταστροφές.

Στο παρόν κεφάλαιο ενδιαφερόμαστε να συμπληρώσουμε τις μελέτες σε θέματα

εγκατάλειψης πελατών στη δομή της τυπικής ουράς απλού υπηρέτη με καταστροφές οι οποίες μετακινούν όλους τους πελάτες από το σύστημα και καθιστούν τον υπηρέτη ανενεργό. Γενικά, η μελέτη των ουρών στις οποίες συμβαίνουν εγκαταλείψεις πελατών, ξεκινά από τις πρωτοποριακές εργασίες του Palm (1953, 1957) ο οποίος μελέτησε την $M/M/c$ ουρά, όπου οι πελάτες έχουν ανεξάρτητους και εκθετικά κατανομημένους χρόνους υπομονής. Ακολούθως, αρκετοί συγγραφείς επέκτειναν αυτά τα αποτελέσματα σε διάφορες κατευθύνσεις, χαλαρώνοντας τις εκθετικές υποθέσεις. Οι ανασκοπήσεις των Mandelbaum and Zeltyn (2006, 2009) συνοψίζουν τα πιο σπουδαία υπολογιστικά αποτελέσματα για τα βασικά μοντέλα ουρών τύπου $M/M/c$ με ανεξάρτητες εγκαταλείψεις. Οι ανεξάρτητες εγκαταλείψεις αποτελούν την κυριότερη περίπτωση ακύρωσης εξυπηρετήσεων από αυτές που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία, όπου κάθε πελάτης έχει τον δικό του χρόνο υπομονής ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τους χρόνους υπομονής των άλλων πελατών.

Ένας άλλος τύπος εγκαταλείψεων πελατών είναι οι καλούμενες *συγχρονισμένες* ή *διωνυμικές* (δες π.χ. Adan et al. (2009) και Economou and Kapodistria (2010)). Αυτό το είδος των ακυρώσεων εξυπηρετήσεων προέρχεται από το πεδίο των απομακρυσμένων συστημάτων, όπου οι πελάτες πρέπει να περιμένουν για μία συγκεκριμένη δυνατότητα μεταφοράς ("μέσο μεταφοράς") ώστε να εγκαταλείψουν το σύστημα. Στην περίπτωση των μοντέλων με συγχρονισμένες εγκαταλείψεις, οι ευκαιρίες εγκατάλειψης, δηλαδή οι αφίξεις του "μέσου μεταφοράς", συμβαίνουν με μία προκαθορισμένη σημειακή διαδικασία, συνήθως μία Poisson διαδικασία. Σε μία τέτοια χρονική στιγμή, όπου η δυνατότητα εγκατάλειψης φθάνει στο σύστημα, κάθε πελάτης που είναι παρών παραμένει στο σύστημα με πιθανότητα q ή το εγκαταλείπει με πιθανότητα $p = 1 - q$, ανεξάρτητα από τους άλλους. Συνεπώς σε κάθε μία τέτοια στιγμή οι πελάτες επηρεάζονται ταυτόχρονα και ο αριθμός των πελατών ελαττώνεται σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή.

Ένας τρίτος τύπος εγκαταλείψεων που προκύπτει από ακυρώσεις εξυπηρετήσεων και έχουν πρόσφατα μελετηθεί, αναφέρεται ως *ακολουθιακές* ή *γεωμετρικές* εγκαταλείψεις. Και αυτός ο τύπος εγκαταλείψεων προέρχεται από το πεδίο των απομακρυσμένων συστημάτων, όπου οι πελάτες πρέπει να περιμένουν για μία δευτε-

ρεύουσα δυνατότητα μεταφοράς ώστε να εγκαταλείψουν το σύστημα. Σε αντίθεση όμως με την περίπτωση των συγχρονισμένων εγκαταλείψεων, υποθέτουμε ότι αυτή η δυνατότητα μεταφοράς πελατών έχει περιορισμένη χωρητικότητα. Αυτό σημαίνει ότι στις ευκαιρίες εγκατάλειψης, που συμπίπτουν με τις στιγμές άφιξης του μέσου μεταφοράς, οι πελάτες εξετάζονται ένας προς έναν και μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός από αυτούς θα αφήσει το σύστημα (όσοι από αυτούς θα χωρέσουν στο μέσο μεταφοράς). Έτσι λοιπόν έχουμε ότι σε κάθε στιγμή άφιξης της δυνατότητας μεταφοράς, οι πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα εξετάζονται ακαριαία αλλά ακολουθιακά. Κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ελαττώνεται σύμφωνα με τη γεωμετρική κατανομή. Μαρκοβιανά και μη Μαρκοβιανά μοντέλα με παρόμοιο τύπο γεωμετρικών μεταβάσεων έχουν μελετηθεί από τους Brockwell et al. (1982), Neuts (1994), Visschers (2000), Artalejo et al. (2007), Economou and Gomez-Corral (2007) και Dimou et al. (2011).

Η μελέτη των εγκαταλείψεων σε μοντέλα ουρών με καταστροφές είναι μία πολύ πρόσφατη προσπάθεια. Ο Yechiali (2007) θεώρησε την τυπική ουρά απλού υπηρέτη με καταστροφές και ανεξάρτητες εγκαταλείψεις, όπου η αιτία της ανυπομονησίας των πελατών είναι η βλάβη -άρα και απουσία- του υπηρέτη. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο του είναι μία $M/M/1$ ουρά με καταστροφές που συμβαίνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson. Κάθε καταστροφή εξαναγκάζει όλους τους πελάτες να εγκαταλείψουν το σύστημα και καθιστά τον υπηρέτη ανενεργό. Τότε αρχίζει μία χρονική περίοδος επιδιόρθωσης του υπηρέτη. Όμως οι πελάτες που φθάνουν κατά την περίοδο της επιδιόρθωσης γίνονται ανυπόμονοι εξαιτίας της βλάβης του υπηρέτη και εκτελούν ανεξάρτητες εγκαταλείψεις (δηλαδή κάθε ένας από αυτούς έχει τον δικό του χρόνο υπομονής). Το μοντέλο μπορεί να αναπαρασταθεί από μία διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και αναλύεται χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεως. Οι Economou and Karodistria (2010) μελέτησαν το ίδιο μοντέλο με διωνυμικές εγκαταλείψεις. Οι υπολογισμοί είναι θεμελιωδώς διαφορετικοί από εκείνους που αφορούν το μοντέλο του Yechiali (2007), εξαιτίας της πολυπλοκότητας των διωνυμικών εγκαταλείψεων. Σε αυτό το κεφάλαιο συμπληρώνουμε αυτές τις μελέτες θεωρώντας την περίπτωση των γεωμετρικών εγκαταλείψεων.

Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην παράγραφο 5.2, περιγράφουμε τις συνθήκες εκείνες κάτω από τις οποίες οδηγούμαστε σε γεωμετρικές εγκαταλείψεις και εισάγουμε το μοντέλο του ενδιαφέροντός μας. Στην παράγραφο 5.3, δίνουμε την στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Στην παράγραφο 5.4, μελετάμε τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα κάτω από δύο διαφορετικές πειθαρχίες εγκατάλειψης πελατών και βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των αντίστοιχων κατανομών. Τέλος, αρκετά μέτρα λειτουργικότητας που αναφέρονται στην περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, μελετώνται στην παράγραφο 5.5.

5.2 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε μία $M/M/1$ ουρά στην οποία οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού λ . Η εξυπηρέτηση παρέχεται από έναν απλό υπηρέτη, ο οποίος εξυπηρετεί τους πελάτες σύμφωνα με την FCFS πειθαρχία ουράς. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό μ . Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές (βλάβες) που συμβαίνουν όταν ο υπηρέτης είναι σε κατάσταση λειτουργίας, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού η . Σε μία τέτοια στιγμή αποτυχίας ο υπηρέτης απενεργοποιείται και όλοι οι παρόντες πελάτες εξαναγκάζονται να αφήσουν το σύστημα. Τότε, η διαδικασία επιδιόρθωσης του υπηρέτη αρχίζει αυτόματα. Οι χρόνοι επιδιόρθωσης είναι εκθετικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό γ . Όταν ο υπηρέτης είναι εκτός λειτουργίας -off-, η ροή νέων αφίξεων συνεχίζεται κανονικά. Όμως, εξαιτίας της βλάβης του υπηρέτη, οι πελάτες γίνονται ανυπόμονοι και προχωρούν σε εγκαταλείψεις. Οι ευκαιρίες εγκατάλειψης παρουσιάζονται σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού ζ . Σε κάθε μία τέτοια ευκαιρία, οι πελάτες θεωρούνται ένας προς έναν ακολουθιακά. Κάθε ένας από αυτούς εγκαταλείπει το σύστημα με πιθανότητα p ή παραμένει σε αυτό με πιθανότητα $q = 1 - p$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Έτσι, οι πελάτες αρχίζουν ακολουθιακά να εγκαταλείπουν το σύστημα και η μείωση του αριθμού των πελατών σταματά μόλις βρεθεί πελάτης που θα αποφασίσει να παραμείνει σε αυτό, ή όταν

όλοι οι πελάτες εγκαταλείπουν το σύστημα. Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφτούμε ότι τις στιγμές που παρουσιάζονται ευκαιρίες εγκατάλειψης, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ελαττώνεται σύμφωνα με τη γεωμετρική κατανομή. Υποθέτουμε ότι η διαδικασία αφίξεων πελατών, η διαδικασία καταστροφών, η διαδικασία αφίξεων των ευκαιριών εγκατάλειψης, καθώς και οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών και επιδιόρθωσης του υπηρέτη είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες. Θα αναφερόμαστε σε αυτό το μοντέλο με τον όρο *γεωμετρικές εγκαταλείψεις σε μία ουρά με καταστροφές του υπηρέτη*.

Αυτός ο μηχανισμός εγκατάλειψης πελατών σε ομάδες γεωμετρικού μεγέθους προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι σε κάθε ευκαιρία εγκατάλειψης, ένα μέσο μεταφοράς φθάνει στο σύστημα και εξετάζει τους πελάτες έναν προς ένα για το αν πρόκειται να εγκαταλείψουν το σύστημα. Όπως προαναφέραμε υποθέτουμε για κάθε πελάτη ότι,

$$\begin{cases} q : & \text{η πιθανότητα παραμονής στο σύστημα} \\ p : & \text{η πιθανότητα εγκατάλειψης,} \end{cases}$$

και επίσης ότι η διαδικασία εγκαταλείψεων θα συνεχιστεί μέχρι να βρεθεί ο πρώτος πελάτης που θα αποφασίσει να παραμείνει στο σύστημα, είτε έως ότου όλοι οι πελάτες να το εγκαταλείψουν. Σ' αυτήν όμως την περίπτωση υποθέτουμε ότι το μέσο έχει απεριόριστη χωρητικότητα και μπορεί να μεταφέρει όσους πελάτες βρει στο σύστημα, αρκεί αυτοί να το επιθυμήσουν. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις, η υπόθεση για απεριόριστη χωρητικότητα του μέσου μεταφοράς δεν είναι ρεαλιστική. Έτσι υποθέτουμε αυτό που αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, δεχόμαστε ότι το μέσο που επιθεωρεί το σύστημα, κάθε φορά που φθάνει σε αυτό έχει πεπερασμένη χωρητικότητα C (σε μονάδες χρόνου), που ακολουθεί την εκθετική(α) κατανομή και φθάνει στο σύστημα με μία διαδικασία Poisson ρυθμού ζ . Φθάνοντας, αρχίζει να το επιθεωρεί εξετάζοντας τους πελάτες έναν προς ένα σε σχέση με τους χρόνους εξυπηρέτησής τους. Στόχος του μέσου είναι να απομακρύνει από το σύστημα όσο περισσότερο έργο, δηλαδή όσο περισσότερο από τους χρόνους εξυπηρέτησης του επιτρέπει η χωρητικότητά του. Απομάκρυνση του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη σημαίνει και απομάκρυνση του ίδιου του πελάτη από τον χώρο εξυπηρέτησης.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι φθάνοντας το μέσο στο σύστημα βρίσκει n πελάτες σε αυτό και έστω X_1, X_2, \dots, X_n , οι χρόνοι εξυπηρέτησης των παρόντων πελατών. Όλοι οι πελάτες θα μετακινηθούν από το σύστημα αν το συνολικό τους έργο χωράει στο μέσο, δηλαδή αν $X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq C$, ενώ m πελάτες θα μετακινηθούν αν $X_1 + X_2 + \dots + X_m \leq C < X_1 + X_2 + \dots + X_m + X_{m+1}$, για κάποιο $m < n$. Στην περίπτωση αυτή όμως, υπάρχει ένα ποσό $C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)$ χρονικών μονάδων από τη χωρητικότητα του μέσου που δεν χρησιμοποιείται. Για να αναχωρήσει το μέσο πλήρες, υποθέτουμε ότι το ποσό αυτό μεταφέρεται από τον πρώτο πελάτη που θα παραμείνει στο σύστημα με αποτέλεσμα ο πελάτης αυτός να χρειάζεται $X_{m+1} - [C - (X_1 + X_2 + \dots + X_m)]$ χρονικές μονάδες για να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του. Έτσι, ο αριθμός των πελατών Λ που μπορούν να μετακινηθούν σε μία στιγμή επιθεώρησης, ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$\Pr[\Lambda = n] = \frac{\alpha}{\alpha + \mu} \left(\frac{\mu}{\alpha + \mu} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

(δες π.χ. Kulkarni (1995) ή κεφάλαιο 4). Επίσης, η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη που θα παραμείνει στο σύστημα, είναι επίσης εκθετική(μ) (δες εξίσωση (4.1)). Ορίζοντας λοιπόν $p = \frac{\mu}{\alpha + \mu}$, οπότε $q = \frac{\alpha}{\alpha + \mu}$, προκύπτει ακριβώς το μοντέλο που περιγράψαμε.

Σε αντίθεση με το μοντέλο χωρίς καταστροφές του κεφαλαίου 4, το παρόν μοντέλο είναι ευσταθές για όλες τις τιμές των παραμέτρων, όταν $\eta > 0$. Αυτό συμβαίνει διότι όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μία $M/M/1$ ουρά για το χρονικό διάστημα όπου ο υπηρέτης είναι ενεργός, ενώ μία καταστροφή θα συμβεί μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα η οποία και θα αδειάσει το σύστημα. Τότε, με πιθανότητα 1, ο υπηρέτης θα επαναδραστηριοποιηθεί μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα με αποτέλεσμα ένας πεπερασμένος αριθμός πελατών να έχει συσσωρευτεί για εξυπηρέτηση. Έτσι είναι βέβαιο ότι το σύστημα αρχίζοντας με μηδέν πελάτες και τον υπηρέτη ανενεργό (αμέσως μετά από καταστροφή), θα επιστρέψει στην ίδια κατάσταση με πιθανότητα 1. Επιπλέον, ο αντίστοιχος μέσος

χρόνος για να συμβεί αυτό είναι πεπερασμένος καθώς είναι άνω φραγμένος από το άθροισμα του μέσου χρόνου επιδιόρθωσης και του μέσου χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών καταστροφών. Για να αποφύγουμε όμως τετριμμένες περιπτώσεις υποθέτουμε ότι,

$$\lambda, \mu, \eta, \gamma, \zeta > 0 \quad \text{και} \quad p \in (0, 1). \quad (5.1)$$

Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{(L(t), I(t)) : t \geq 0\}$, με χώρο καταστάσεων $\{(n, i) : i = 0, 1 \text{ και } n = 0, 1, 2, \dots\}$, όπου η τυχαία μεταβλητή $L(t)$ συμβολίζει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t ενώ η $I(t)$ την κατάσταση του υπηρέτη τη στιγμή t και ισούται με 1 αν ο υπηρέτης είναι ενεργός-on-, και με 0 αν είναι ανενεργός-off-. Οι μη-μηδενικοί ρυθμοί μετάβασης $q((n, i), (m, j))$ της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{(L(t), I(t))\}$ δίνονται ως

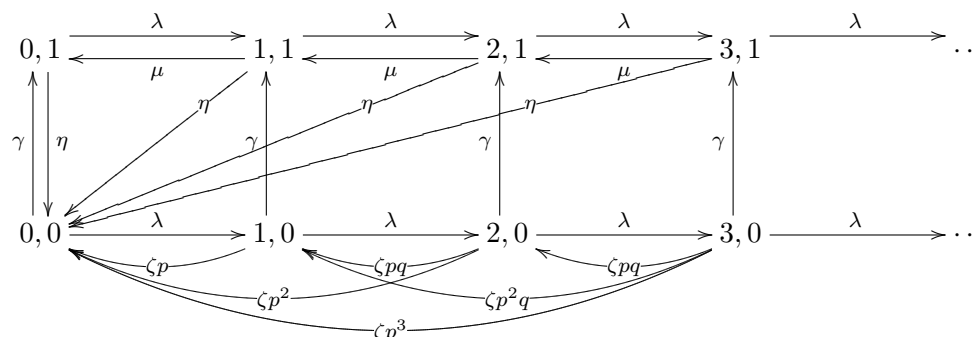
$$q((n, i), (m, j)) = \begin{cases} \lambda, & \text{αν } n \geq 0, m = n + 1 \text{ και } i = j, \\ \zeta p^k q, & \text{αν } n \geq 2, m = n - k, 1 \leq k \leq n - 1 \text{ και } i = j = 0, \\ \zeta p^n, & \text{αν } n \geq 1, m = 0 \text{ και } i = j = 0, \\ \gamma, & \text{αν } n = m \geq 0 \text{ και } i = 0, j = 1, \\ \mu, & \text{αν } n \geq 1, m = n - 1 \text{ και } i = j = 1, \\ \eta, & \text{αν } n \geq 0, m = 0 \text{ και } i = 1, j = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

(Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τους μη-μηδενικούς ψευδο-ρυθμούς μετάβασης $q((n, 0), (n, 0)) = \zeta q$, για $n \geq 1$, που αντιστοιχούν στην εμφάνιση των ευκαιριών εγκατάλειψης όπου κανείς πελάτης δεν εγκαταλείπει το σύστημα). Το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης παριστάνεται στο σχήμα 5.1.

5.3 Στάσιμη κατανομή

Έστω $(\pi(n, i) : i = 0, 1, n \geq 0)$ η στάσιμη (οριακή) κατανομή της $\{(L(t), I(t))\}$. Θεωρούμε τις (μερικές) πιθανογεννήτριες συναρτήσεις (PGFs)

$$\Pi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n, 0) z^n, \quad \Pi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n, 1) z^n, \quad |z| \leq 1. \quad (5.3)$$



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της Μ.Α.Σ.Χ. $\{(L(t), I(t))\}$

Ο σκοπός μας στο υπόλοιπο της παραγράφου είναι να προσδιορίσουμε τις γεννήτριες $\Pi_0(z)$, $\Pi_1(z)$ και αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρές δυνάμεων του z , την οριακή κατανομή $(\pi(n, i))$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω διάγραμμα, βρίσκουμε το ακόλουθο σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας:

$$(\lambda + \gamma + \zeta)\pi(0, 0) = \eta\Pi_1(1) + \zeta\Pi_0(p), \quad (5.4)$$

$$(\lambda + \gamma + \zeta)\pi(n, 0) = \lambda\pi(n-1, 0) + \zeta q \sum_{j=n}^{\infty} p^{j-n}\pi(j, 0), \quad n \geq 1, \quad (5.5)$$

$$(\lambda + \eta)\pi(0, 1) = \gamma\pi(0, 0) + \mu\pi(1, 1), \quad (5.6)$$

$$(\lambda + \eta + \mu)\pi(n, 1) = \lambda\pi(n-1, 1) + \gamma\pi(n, 0) + \mu\pi(n+1, 1), \quad n \geq 1. \quad (5.7)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην εξίσωση (5.4) έχουμε συμπεριλάβει την ψευδομετάβαση $(0, 0) \rightarrow (0, 0)$ με ρυθμό ζ , ενώ στην (5.5) έχουμε συναθροίσει την ψευδομετάβαση $(n, 0) \rightarrow (n, 0)$ με ρυθμό ζq , ώστε να απλοποιήσουμε τη μορφή τους. Η εξίσωση κανονικοποίησης είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n, 1) = 1 \Leftrightarrow \Pi_0(1) + \Pi_1(1) = 1. \quad (5.8)$$

Εξισώνοντας τους ρυθμούς μετάβασης μεταξύ των συνόλων $A = \{(j, 1) : j \geq 0\}$ και

$A' = \{(j, 0) : j \geq 0\}$, βρίσκουμε

$$\gamma\Pi_0(1) = \eta\Pi_1(1). \quad (5.9)$$

Λύνοντας το σύστημα των (5.8)-(5.9) βρίσκουμε τα ποσοστά του χρόνου που το σύστημα είναι "πάνω" και "κάτω", $\Pi_1(1)$ και $\Pi_0(1)$ αντίστοιχα,

$$\Pi_1(1) = \frac{\gamma}{\gamma + \eta} \quad \text{και} \quad \Pi_0(1) = \frac{\eta}{\gamma + \eta}. \quad (5.10)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (5.4)-(5.8) έχει μοναδική λύση η οποία δίνεται στο επόμενο θεώρημα 5.1.

Θεώρημα 5.1. Η στάσιμη κατανομή $(\pi(n, i))$ δίνεται ως

$$\pi(0, 0) = \frac{\eta q r_1 \gamma}{p(\lambda + \gamma + \zeta)(1 - r_1)(\gamma + \eta)}, \quad (5.11)$$

$$\pi(n, 0) = \frac{\pi(0, 0)}{r_2^n}, \quad n \geq 0, \quad (5.12)$$

$$\pi(n, 1) = \begin{cases} \frac{\gamma r_2 \pi(0, 0)}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)(z_2-r_2)} \left(\frac{z_1 z_2 - r_2}{z_2^{n+1}} + \frac{r_2(1-z_1)}{r_2^{n+1}} \right), & \text{αν } z_2 \neq r_2 \\ \frac{\gamma r_2 \pi(0, 0)}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)} \cdot \frac{n+1-nz_1}{r_2^{n+1}}, & \text{αν } z_2 = r_2 \end{cases}, \quad n \geq 0 \quad (5.13)$$

όπου

$$r_1 = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p - \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2\lambda}, \quad (5.14)$$

$$r_2 = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2\lambda}, \quad (5.15)$$

$$z_1 = \frac{\lambda + \eta + \mu - \sqrt{(\lambda + \eta + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}, \quad (5.16)$$

$$z_2 = \frac{\lambda + \eta + \mu + \sqrt{(\lambda + \eta + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}, \quad (5.17)$$

και $r_1, z_1 \in (0, 1)$, $r_2, z_2 \in (1, +\infty)$.

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (5.5) με z^n και προσθέτοντας για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(\lambda + \gamma + \zeta)(\Pi_0(z) - \pi(0, 0)) = \lambda z \Pi_0(z) + \zeta q \sum_{j=1}^{\infty} p^j \pi(j, 0) \sum_{n=1}^j (z/p)^n. \quad (5.18)$$

Αν $z \neq p$, αντικαθιστούμε το άθροισμα $\sum_{n=1}^j (z/p)^n$ με $\frac{z}{p-z} \frac{p^j - z^j}{p^j}$ και μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις η (5.18) παίρνει τη μορφή

$$[(\lambda + \gamma + \zeta - \lambda z)(z - p) - \zeta qz]\Pi_0(z) = (\lambda + \gamma + \zeta)(z - p)\pi(0, 0) - \zeta qz\Pi_0(p). \quad (5.19)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση ισχύει και για $z = p$. Αντικαθιστώντας την τιμή $\Pi_0(p)$ από την (5.4) βρίσκουμε

$$[(\lambda + \gamma + \zeta - \lambda z)(z - p) - \zeta qz]\Pi_0(z) = -p(\lambda + \gamma + \zeta)(1 - z)\pi(0, 0) + \eta qz\Pi_1(1). \quad (5.20)$$

Θέτοντας

$$K(z) = (\lambda + \gamma + \zeta - \lambda z)(z - p) - \zeta qz,$$

τον συντελεστή της $\Pi_0(z)$, παρατηρούμε ότι $K(z) = 0$, αν και μόνο αν $z - a(z) = 0$, όπου $a(z) = a_0 + a_2 z^2$, με

$$a_0 = p(\lambda + \gamma + \zeta)/(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p) \quad \text{και} \quad a_2 = \lambda/(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p).$$

Επειδή $a(1) < 1$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πόρισμα του θεωρήματος Rouché (δες π.χ. Gail, Hantler and Taylor (2000), Section 4, Theorem 5, p.235) και να συμπεράνουμε ότι η εξίσωση $K(z) = 0$, έχει δύο διακεκριμένες ρίζες r_1 και r_2 , μία μέσα στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο και την άλλη έξω από τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Οι ρίζες r_1 και r_2 δίνονται από τις (5.14), (5.15) και είναι φανερό ότι $0 < r_1 < 1$, και $r_2 > 1$. Να σημειωθεί ότι οι ρίζες αυτές εμφανίστηκαν στον προσδιορισμό της $\Pi_0(z)$ και στο μοντέλο του κεφαλαίου 4 (δες εξισώσεις (4.13), (4.14)).

Συνεπώς έχουμε ότι $K(r_1) = 0$ και $\Pi_0(r_1) < \infty$ (διότι η πιθανογεννήτρια $\Pi_0(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον μέσα στο μοναδιαίο δίσκο). Θέτοντας $z = r_1$ στην (5.20) βρίσκουμε

$$\pi(0, 0) = \frac{\eta q r_1}{p(\lambda + \gamma + \zeta)(1 - r_1)} \Pi_1(1), \quad (5.21)$$

από την οποία συνεπάγεται η (5.11) με τη χρήση της (5.10). Αντικαθιστώντας την (5.21) στην (5.20), βρίσκουμε ύστερα από κατάλληλους χειρισμούς ότι

$$K(z)\Pi_0(z) = \frac{p(\lambda + \gamma + \zeta)\pi(0, 0)(z - r_1)}{r_1},$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$K(z) = \lambda(z - r_1)(r_2 - z) \quad \text{και} \quad r_1 r_2 = p(\lambda + \gamma + \zeta)/\lambda,$$

παίρνουμε την τελική μορφή της $\Pi_0(z)$,

$$\Pi_0(z) = \frac{r_2}{r_2 - z} \pi(0, 0). \quad (5.22)$$

Αναπτύσσοντας την (5.22) σε δυναμοσειρά δυνάμεων του z καταλήγουμε εύκολα στην (5.12).

Συνεχίζουμε με την εύρεση της $\Pi_1(z)$. Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (5.6), (5.7) με z^0 και z^n αντίστοιχα, και αθροίζοντας για κάθε $n \geq 1$, βρίσκουμε

$$[-\lambda z^2 + (\lambda + \eta + \mu)z - \mu]\Pi_1(z) = -\mu\pi(0, 1)(1 - z) + \gamma z\Pi_0(z). \quad (5.23)$$

Θέτοντας

$$f(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \eta + \mu)z - \mu,$$

τον συντελεστή της $\Pi_1(z)$, βρίσκουμε ότι η εξίσωση $f(z) = 0$, έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $z_1 \in (0, 1)$, και $z_2 \in (1, \infty)$, οι οποίες δίνονται από τις (5.16), (5.17) αντίστοιχα. Αφού $f(z_1) = 0$, και $\Pi_1(z_1) < \infty$, θέτουμε $z = z_1$ στην εξίσωση (5.23) και βρίσκουμε

$$\pi(0, 1) = \frac{\gamma z_1 \Pi_0(z_1)}{\mu(1 - z_1)}. \quad (5.24)$$

Έτσι η (5.23) γίνεται

$$f(z)\Pi_1(z) = \frac{\gamma(z\Pi_0(z) - z_1\Pi_0(z_1)) - \gamma z_1 z(\Pi_0(z) - \Pi_0(z_1))}{1 - z_1}. \quad (5.25)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της $\Pi_0(z)$ από την (5.22), εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$z\Pi_0(z) - z_1\Pi_0(z_1) = \pi(0, 0)r_2^2 \frac{z - z_1}{(r_2 - z)(r_2 - z_1)}$$

και

$$\Pi_0(z) - \Pi_0(z_1) = \pi(0, 0)r_2 \frac{z - z_1}{(r_2 - z)(r_2 - z_1)}.$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες στην (5.25), σε συνδυασμό με την έκφραση

$$f(z) = \lambda(z - z_1)(z_2 - z),$$

παράγουμε την τελική μορφή της $\Pi_1(z)$,

$$\Pi_1(z) = \frac{\gamma\pi(0,0)r_2}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)} \cdot \frac{r_2 - z_1 z}{(r_2 - z)(z_2 - z)}. \quad (5.26)$$

Συνεχίζουμε με το ανάπτυγμα της $\Pi_1(z)$ σε απλά κλάσματα για το οποίο διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, όπου $z_2 \neq r_2$, η πιθανογεννήτρια $\Pi_1(z)$ παίρνει τη μορφή

$$\Pi_1(z) = \frac{\gamma\pi(0,0)r_2}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)} \left(\frac{A}{z_2 - z} + \frac{B}{r_2 - z} \right),$$

όπου

$$A = \frac{z_1 z_2 - r_2}{z_2 - r_2} \quad \text{και} \quad B = \frac{r_2(1 - z_1)}{z_2 - r_2}.$$

Μετά από κατάλληλες απλοποιήσεις και αναπτύσσοντας τις εμφανιζόμενες γεωμετρικές σειρές, βρίσκουμε

$$\Pi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma r_2 \pi(0,0)}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)(z_2-r_2)} \left(\frac{z_1 z_2 - r_2}{z_2^{n+1}} + \frac{r_2(1-z_1)}{r_2^{n+1}} \right) \right] z^n. \quad (5.27)$$

Στην δεύτερη περίπτωση όπου $z_2 = r_2$, η πιθανογεννήτρια $\Pi_1(z)$ παίρνει τη μορφή

$$\Pi_1(z) = \frac{\gamma\pi(0,0)r_2}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)} \left(\frac{z_1}{r_2 - z} + \frac{r_2(1-z_1)}{(r_2 - z)^2} \right),$$

ή αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του z ,

$$\Pi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma r_2 \pi(0,0)}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)} \cdot \frac{n+1 - n z_1}{r_2^{n+1}} \right] z^n. \quad (5.28)$$

Από τις εξισώσεις (5.27) και (5.28) παράγουμε εύκολα την (5.13). ■

Στο παραπάνω μοντέλο έχουμε δύο τύπους πελατών που χάνονται από το σύστημα, εκείνους που το εγκαταλείπουν λόγω ανυπομονησίας κατά τη διάρκεια των

χρόνων επιδιόρθωσης του υπηρέτη και εκείνους που εξαναγκάζονται να αφήσουν το σύστημα στις στιγμές βλαβών (καταστροφών) του υπηρέτη. Στη συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε το ποσοστό των πελατών που θα αφήσουν το σύστημα στις στιγμές βλαβών, το ποσοστό των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα εξαιτίας της ανυπομονησίας που δείχνουν κατά την επιδιόρθωση του υπηρέτη και το ποσοστό των πελατών που τελικά εξυπηρετούνται από το σύστημα.

Όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $(n, 1)$, $n \geq 0$, ο ρυθμός βλαβών του υπηρέτη είναι η και όταν μία βλάβη συμβεί, όλοι οι παρόντες πελάτες αφήνουν το σύστημα. Συνεπώς, ο ρυθμός των χαμένων πελατών λόγω βλαβών ή αλλιώς ο μέσος αριθμός πελατών που χάνονται λόγω βλαβών του υπηρέτη στη μονάδα του χρόνου, $R_{failures}$, δίνεται ως

$$R_{failures} = \sum_{n=0}^{\infty} n\eta\pi(n, 1) = \eta\Pi_1'(1). \quad (5.29)$$

Ομοίως, ο ρυθμός των πελατών που τελικά εξυπηρετούνται, R_{served} , δίνεται ως

$$R_{served} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\pi(n, 1) = \mu[\Pi_1(1) - \pi(0, 1)]. \quad (5.30)$$

Παραγωγίζοντας την (5.23) και θέτοντας $z = 1$ βρίσκουμε

$$\eta\Pi_1'(1) = \mu\pi(0, 1) + \gamma\Pi_0(1) + \gamma\Pi_0'(1) - (\mu + \eta - \lambda)\Pi_1(1). \quad (5.31)$$

Όμως από την (5.22) βρίσκουμε ότι

$$\Pi_0(1) = \frac{r_2}{r_2 - 1}\pi(0, 0), \quad \Pi_0'(1) = \frac{r_2}{(r_2 - 1)^2}\pi(0, 0). \quad (5.32)$$

Επιπλέον,

$$\pi(0, 1) = \frac{\gamma r_2 \pi(0, 0)}{\lambda(1 - z_1)(r_2 - z_1)z_2}, \quad (5.33)$$

όπως υπολογίζεται και από τις δύο περιπτώσεις της (5.13). Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.31)-(5.33) στις (5.29)-(5.30) και χρησιμοποιώντας την (5.10) για τον υπολογισμό της πιθανότητας $\Pi_1(1)$ και την (5.11) για τον υπολογισμό της $\pi(0, 0)$,

υπολογίζουμε τους ρυθμούς $R_{failures}$, R_{served} . Τέλος ο ρυθμός των εγκαταλείψεων πελατών όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός, $R_{abandonments}$, υπολογίζεται ως

$$R_{abandonments} = \lambda - R_{failures} - R_{served}. \quad (5.34)$$

Τα ποσοστά των πελατών που χάνονται λόγω βλαβών, των εξυπηρετούμενων πελατών και των χαμένων πελατών λόγω εγκαταλείψεων υπολογίζονται γρήγορα διαιρώντας τις (5.29), (5.30) και (5.34) με το συνολικό ρυθμό άφιξης πελατών στο σύστημα, λ .

5.4 Χρόνος παραμονής

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε το χρόνο παραμονής S ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Ο χρόνος παραμονής ορίζεται ως ο συνολικός χρόνος που περνάει από την άφιξή του στο σύστημα έως και την αναχώρησή του από αυτό, είτε λόγω συμπλήρωσης της εξυπηρέτησής του είτε ως αποτέλεσμα καταστροφής ή εγκατάλειψης.

Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη εξαρτάται τόσο από την πειθαρχία ουράς όσο και από τη σειρά με την οποία εξετάζονται οι πελάτες για το αν θα εγκαταλείψουν το σύστημα, όταν συμβούν οι στιγμές εγκατάλειψης. Η πειθαρχία εξυπηρέτησης πελατών είναι η FCFS. Όπως και στο κεφάλαιο 4 υποθέτουμε δύο πειθαρχίες εγκατάλειψης για το σύστημα. Η πρώτη είναι η EAAF (Early Arrivals Abandon First). Σε αυτή την περίπτωση οι πελάτες εγκαταλείπουν το σύστημα με την ίδια σειρά με την οποία έφτασαν, δηλαδή σε κάθε ευκαιρία εγκατάλειψης οι πελάτες εξετάζονται ένας προς έναν αρχίζοντας από αυτόν που έφτασε νωρίτερα στο σύστημα. Η δεύτερη πειθαρχία εγκατάλειψης είναι η LAAF (Late Arrivals Abandon First), όπου οι πελάτες εγκαταλείπουν το σύστημα με αντίστροφη σειρά από αυτή με την οποία έφτασαν.

5.4.1 Η περίπτωση ΕΑΑΦ

Έστω S^{EA} ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη κάτω από την πειθαρχία εγκατάλειψης ΕΑΑΦ, $S_{(n,i)}$ ο δεσμευμένος ρυθμός παραμονής ενός πελάτη δοθέντος ότι είναι ο n -οστός παλαιότερος στο σύστημα και ο υπηρέτης είναι στην κατάσταση i , ($i = 0, 1, n = 1, 2, \dots$). Συμβολίζουμε επίσης $\tilde{S}^{EA}(s), \tilde{S}_{(n,i)}(s)$ τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes (LSTs). Είναι φανερό σ' αυτή την περίπτωση ότι ο χρόνος παραμονής του πελάτη δεν εξαρτάται από τις μελλοντικές αφίξεις πελατών. Οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί Laplace δίνονται στο επόμενο θεώρημα 5.2.

Θεώρημα 5.2. *η) Οι δεσμευμένοι μετασχηματισμοί Laplace $\tilde{S}_{(n,i)}(s)$ δίνονται ως*

$$\tilde{S}_{(n,0)}(s) = \frac{1}{\eta + s} \left[A(s) + \frac{B(s)}{\mu} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^n + \frac{\Gamma(s)}{p(\gamma + \zeta + s)} \left(\frac{p(\gamma + \zeta + s)}{\gamma + \zeta p + s} \right)^n \right], \quad n \geq 1, \quad (5.35)$$

$$\tilde{S}_{(n,1)}(s) = \frac{1}{\eta + s} \left[\eta + s \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^n \right], \quad n \geq 1, \quad (5.36)$$

όπου

$$A(s) = \frac{\gamma\eta}{\gamma + s}, \quad (5.37)$$

$$B(s) = \frac{\gamma\mu[\mu q - p(\eta + s)]s}{\mu q(\gamma + s) - p(\eta + s)(\gamma + \zeta + s)}, \quad (5.38)$$

$$\Gamma(s) = \frac{p^2(\gamma + \zeta + s)^2 N\left(s, \frac{\gamma + \zeta p + s}{p(\gamma + \zeta + s)}\right)}{q(\gamma + s) [\mu q(\gamma + s) - p(\eta + s)(\gamma + \zeta + s)]}, \quad (5.39)$$

και

$$N(s, z) = \gamma\eta(1 - pz)(\mu + \eta + s - \mu z) + \gamma s\mu(1 - pz)(1 - z) + \zeta p(\eta + s)(1 - z)(\mu + \eta + s - \mu z). \quad (5.40)$$

ii) Εάν $r_2 \neq z_2$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{S}^{EA}(s)$ δίνεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{EA}(s) = & \frac{\pi(0,0)r_2}{\eta+s} \left[\frac{A(s)}{r_2-1} + \frac{B(s)}{r_2(\mu+\eta+s)-\mu} + \frac{\Gamma(s)}{r_2(\gamma+\zeta p+s)-p(\gamma+\zeta+s)} \right] \\ & + \frac{\gamma r_2 \pi(0,0)}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)(z_2-r_2)(\eta+s)} \times \\ & \times \left[\frac{\eta(z_1 z_2 - r_2)}{z_2-1} + \frac{\eta r_2(1-z_1)}{r_2-1} + \frac{(z_1 z_2 - r_2)\mu s}{z_2(\mu+\eta+s)-\mu} + \frac{r_2(1-z_1)\mu s}{r_2(\mu+\eta+s)-\mu} \right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου $\pi(0,0)$, r_1 , r_2 , z_1 και z_2 δίνονται από τις (5.11), (5.14), (5.15), (5.16) και (5.17) αντίστοιχα.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό των μετασχηματισμών των δεσμευμένων χρόνων παραμονής που αντιστοιχούν σε καταστάσεις με τον υπηρέτη ενεργό. Κατ' αρχάς ο χρόνος παραμονής $S_{(1,1)}$ ενός πελάτη που φθάνοντας βρίσκει κενό το σύστημα και τον υπηρέτη ενεργό, είναι ο ελάχιστος δύο ανεξάρτητων εκθετικών με παραμέτρους μ και η . Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $S_{(1,1)}$ είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\mu + \eta$ και έχει μετασχηματισμό Laplace που δίνεται ως

$$\tilde{S}_{(1,1)}(s) = \frac{\mu + \eta}{\mu + \eta + s}. \quad (5.42)$$

Έστω ότι ο υπό εξέταση πελάτης εισέρχεται στο σύστημα και το βρίσκει στην κατάσταση $(n-1,1)$, $n \geq 2$. Δεσμεύοντας ως προς το επόμενο μελλοντικό γεγονός (άφιξη νέου πελάτη, ολοκλήρωση της τρέχουσας εξυπηρέτησης και άφιξη καταστροφής) και χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα Markov καθώς και ότι ο υπολειπόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα, είναι ανεξάρτητος από το χρόνο που περνάει μεταξύ της άφιξης του υπό μελέτη πελάτη και της πραγματοποίησης του επόμενου γεγονότος, έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{(n,1)}(s) &= \frac{\lambda + \mu + \eta}{\lambda + \mu + \eta + s} \times \\ &\times \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu + \eta} \tilde{S}_{(n,1)}(s) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \eta} \tilde{S}_{(n-1,1)}(s) + \frac{\eta}{\lambda + \mu + \eta} \cdot 1 \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \eta + s} \tilde{S}_{(n,1)}(s) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \eta + s} \tilde{S}_{(n-1,1)}(s) + \frac{\eta}{\lambda + \mu + \eta + s}, \end{aligned}$$

ή

$$\tilde{S}_{(n,1)}(s) = \frac{\mu}{\mu + \eta + s} \tilde{S}_{(n-1,1)}(s) + \frac{\eta}{\mu + \eta + s}, \quad n \geq 2. \quad (5.43)$$

Επαγωγικά από την (5.43) παίρνουμε

$$\tilde{S}_{(n,1)}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^{n-1} \tilde{S}_{(1,1)}(s) + \frac{\eta}{\mu + \eta + s} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^j, \quad n \geq 1, \quad (5.44)$$

και αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό $\tilde{S}_{(1,1)}(s)$ από την (5.42) καταλήγουμε στην (5.36).

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους δεσμευμένους χρόνους παραμονής που αντιστοιχούν σε καταστάσεις με υπηρέτη ανενεργό. Εφαρμόζοντας την μέθοδο ανάλυσης του πρώτου βήματος -όπως και στο κεφάλαιο 4- καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{(n,0)}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,0)}(s) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,1)}(s) \\ &+ \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\sum_{k=1}^n p^{n-k} q \tilde{S}_{(k,0)}(s) + p^n \right), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

που είναι αντίστοιχη της (4.34). Πολλαπλασιάζοντας με $(\lambda + \gamma + \zeta + s)$ και λύνοντας ως προς $\tilde{S}_{(n,0)}(s)$ βρίσκουμε

$$\tilde{S}_{(n,0)}(s) = \frac{\gamma}{\gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,1)}(s) + \frac{\zeta q}{\gamma + \zeta + s} \sum_{k=1}^n p^{n-k} \tilde{S}_{(k,0)}(s) + \frac{\zeta p^n}{\gamma + \zeta + s}, \quad n \geq 1 \quad (5.45)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τους μικτούς μετασχηματισμούς

$$\Phi(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0)}(s) z^n, \quad |z| < 1, \quad s \geq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.45) με z^n , αθροίζοντας για κάθε n και χρησιμοποιώντας την (5.36), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(s, z) &= \frac{\gamma \eta z}{(\gamma + \zeta + s)(\eta + s)(1 - z)} + \frac{\gamma s \mu z}{(\gamma + \zeta + s)(\eta + s)(\mu + \eta + s - \mu z)} \\ &+ \frac{\zeta q \Phi(s, z)}{(\gamma + \zeta + s)(1 - pz)} + \frac{\zeta p z}{(\gamma + \zeta + s)(1 - pz)}. \end{aligned}$$

Έτσι, λύνοντας ως προς $\Phi(s, z)$ έχουμε

$$(\eta + s)\Phi(s, z) = z \frac{N(s, z)}{D(s, z)}, \quad (5.46)$$

όπου η συνάρτηση $N(s, z)$ δίνεται από την (5.40) ενώ η συνάρτηση $D(s, z)$ δίνεται από τον τύπο

$$D(s, z) = (1 - z)(\mu + \eta + s - \mu z)[\gamma + \zeta p + s - p(\gamma + \zeta + s)z]. \quad (5.47)$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $D(s, z)$ ως συνάρτηση του z , για κάθε σταθερό $s \geq 0$, τότε οι ρίζες της είναι οι αριθμοί 1 , $\frac{\mu + \eta + s}{\mu}$ και $\frac{\gamma + \zeta p + s}{p(\gamma + \zeta + s)}$ οι οποίες βρίσκονται έξω από τον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$ για κάθε $s \geq 0$. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε απλά κλάσματα σε σχέση με τη μεταβλητή z , βρίσκουμε ότι

$$\frac{N(s, z)}{D(s, z)} = \frac{A(s)}{1 - z} + \frac{B(s)}{\mu + \eta + s - \mu z} + \frac{\Gamma(s)}{[\gamma + \zeta p + s - p(\gamma + \zeta + s)z]},$$

όπου οι συντελεστές $A(s)$, $B(s)$, $\Gamma(s)$ υπολογίζονται από τα όρια

$$\begin{aligned} A(s) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) \frac{N(s, z)}{D(s, z)}, \\ B(s) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\mu + \eta + s}{\mu}} (\mu + \eta + s - \mu z) \frac{N(s, z)}{D(s, z)}, \\ \Gamma(s) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\gamma + \zeta p + s}{p(\gamma + \zeta + s)}} [\gamma + \zeta p + s - p(\gamma + \zeta + s)z] \frac{N(s, z)}{D(s, z)}, \end{aligned}$$

τα οποία μετά από απλές πράξεις οδηγούν στους τύπους (5.37), (5.38) και (5.39) αντίστοιχα. Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $\Phi(s, z)$ από την (5.46) σε δυνάμεις του z , βρίσκουμε την αναλυτική μορφή των μετασχηματισμών $\tilde{S}_{(n,0)}(s)$. Αναλυτικότερα

έχουμε,

$$\begin{aligned}\Phi(s, z) &= \frac{z}{\eta + s} \left[A(s) \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{B(s)}{\mu + \eta + s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu z}{\mu + \eta + s} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(s)}{\gamma + \zeta p + s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p(\gamma + \zeta + s)z}{\gamma + \zeta p + s} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{\eta + s} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A(s) + \frac{B(s)}{\mu + \eta + s} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(s)}{\gamma + \zeta p + s} \left(\frac{p(\gamma + \zeta + s)}{\gamma + \zeta p + s} \right)^n \right] z^{n+1},\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}\Phi(s, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta + s} \left[A(s) + \frac{B(s)}{\mu} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(s)}{p(\gamma + \zeta + s)} \left(\frac{p(\gamma + \zeta + s)}{\gamma + \zeta p + s} \right)^n \right] z^n, \quad (5.48)\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η (5.35). Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε με τον μετασχηματισμό $\tilde{S}^{EA}(s)$ δεσμεύοντας ως προς την κατάσταση του συστήματος σε μία στιγμή άφιξης πελάτη και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα PASTA. Έτσι λοιπόν βρίσκουμε

$$\tilde{S}^{EA}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0)}(s) \pi(n-1, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,1)}(s) \pi(n-1, 1). \quad (5.49)$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες $\pi(n-1, 0)$ και $\pi(n-1, 1)$ από τις (5.12), (5.13) και τους μετασχηματισμούς $\tilde{S}_{(n,0)}(s)$, $\tilde{S}_{(n,1)}(s)$ από τις (5.35), (5.36) αντίστοιχα στην (5.49) και υπολογίζοντας τα αντίστοιχα γεωμετρικά αθροίσματα, καταλήγουμε στην (5.41). ■

Η περίπτωση $r_2 = z_2$ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Η έκφραση για τον μετασχηματισμό $\tilde{S}_{(n,1)}(s)$ μπορεί, ξεκινώντας από την (5.44),

να πάρει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{(n,1)}(s) &= \left(\frac{\mu}{\mu+\eta+s}\right)^{n-1} \frac{\mu+\eta}{\mu+\eta+s} + \frac{\eta}{\mu+\eta+s} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\mu}{\mu+\eta+s}\right)^j \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu+\eta}\right)^{n-1} \left(\frac{\mu+\eta}{\mu+\eta+s}\right)^n + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\eta\mu^j}{(\mu+\eta+s)^{j+1}} \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu+\eta}\right)^{n-1} \left(\frac{\mu+\eta}{\mu+\eta+s}\right)^n + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\mu}{\mu+\eta}\right)^j \frac{\eta}{\mu+\eta} \left(\frac{\mu+\eta}{\mu+\eta+s}\right)^{j+1}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$S_{(n,1)} = \sum_{j=1}^n p_j S_j,$$

όπου

$$p_j = \begin{cases} \frac{\eta}{\mu+\eta} \left(\frac{\mu}{\mu+\eta}\right)^{j-1} & \text{εάν } j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \left(\frac{\mu}{\mu+\eta}\right)^{n-1} & \text{εάν } j = n, \end{cases}$$

ενώ οι τυχαίες μεταβλητές S_1, S_2, \dots, S_n είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και μάλιστα $S_j \approx \text{Gamma}(j, \mu + \eta)$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο χρόνος παραμονής $S_{(n,1)}$ ενός πελάτη που φθάνοντας στο σύστημα το βρίσκει στην κατάσταση $(n-1, 1)$, είναι μία μίξη κατανομών *Gamma*. Αυτό συμβαίνει διότι ο πελάτης περιμένοντας να εξυπηρετηθεί, δύο συμβάντα επηρεάζουν το χρόνο παραμονής του στο σύστημα. Οι ολοκληρώσεις εξυπηρέτησεων και η άφιξη καταστροφής. Μάλιστα, τα γεγονότα αυτά είναι ανεξάρτητα και έχουν εκθετική διάρκεια. Έτσι λοιπόν το πρώτο από αυτά πραγματοποιείται σε εκθετικό χρόνο με παράμετρο $\mu + \eta$. Άρα, ο χρόνος παραμονής του είναι S_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, αν κατά την παραμονή του στο σύστημα τα $j-1$ πρώτα γεγονότα είναι ολοκληρώσεις της εξυπηρέτησης των πρώτων $j-1$ πελατών, ενώ το επόμενο γεγονός είναι άφιξη καταστροφής. Το σενάριο αυτό πραγματοποιείται με πιθανότητα p_j . Επίσης ισούται με S_n αν τα πρώτα $n-1$ γεγονότα είναι οι ολοκληρώσεις των εξυπηρέτησεων των $n-1$ πελατών που είναι μπροστά από τον υπό μελέτη πελάτη και το επόμενο γεγονός μπορεί να είναι, είτε ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του εξεταζόμενου πελάτη είτε άφιξη καταστροφής.

Όλο αυτό το σενάριο πραγματοποιείται με πιθανότητα p_n . Τέλος, εύκολα επαληθεύουμε ότι $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

5.4.2 Η περίπτωση LAAF

Σ' αυτή την περίπτωση, ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός, εξαρτάται από τις αφίξεις των πελατών που θα πραγματοποιηθούν μετά την άφιξη του υπό μελέτη πελάτη. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε ένα δείκτη που να υποδεικνύει τον αριθμό, έστω m , αυτών των αφίξεων, όπως κάναμε στην αντίστοιχη περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο S^{LA} για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα όταν αυτό είναι σε κατάσταση ισορροπίας, κάτω από την LAAF πειθαρχία και $S_{(n,i,m)}$ ($i = 0, 1, n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$), για να συμβολίσουμε τον δεσμευμένο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δοθέντος ότι είναι ο n -οστός παλαιότερος στο σύστημα (δηλαδή τη στιγμή που έφτασε βρήκε $n-1$ πελάτες μπροστά από αυτόν), υπάρχουν m πελάτες πίσω του (εκείνους που έφτασαν μετά από αυτόν) και βρήκε τον υπηρέτη στην κατάσταση i . Έστω επίσης $\tilde{S}^{LA}(s)$, $\tilde{S}_{(n,i,m)}(s)$ οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το δεσμευμένο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δοθείσης της κατάστασης που βρίσκει φθάνοντας στο σύστημα και στη συνέχεια να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace του (αδέσμευτου) χρόνου παραμονής του. Έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα 5.3.

Θεώρημα 5.3. *i) Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη, δοθέντος ότι βρίσκει $n-1$ πελάτες κατά την άφιξή του και τον υπηρέτη στην κατάσταση i ($i = 0, 1$), έχει μετασχηματισμό Laplace $\tilde{S}_{(n,i,0)}(s)$ που δίνεται ως*

$$\tilde{S}_{(n,0,0)}(s) = \frac{\zeta p r(s)}{\lambda(1 - p r(s))} + \frac{\gamma r(s)}{\lambda(1 - r(s))} \left[\frac{\eta}{\eta + s} + \frac{s}{\eta + s} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^n \right], \quad n \geq 1, \quad (5.50)$$

$$\tilde{S}_{(n,1,0)}(s) = \tilde{S}_{(n,1)}(s) = \frac{\eta}{\eta + s} + \frac{s}{\eta + s} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta + s} \right)^n, \quad n \geq 1, \quad (5.51)$$

όπου

$$r(s) = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s - \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta + s)}}{2p(\lambda + \gamma + \zeta + s)} \quad (5.52)$$

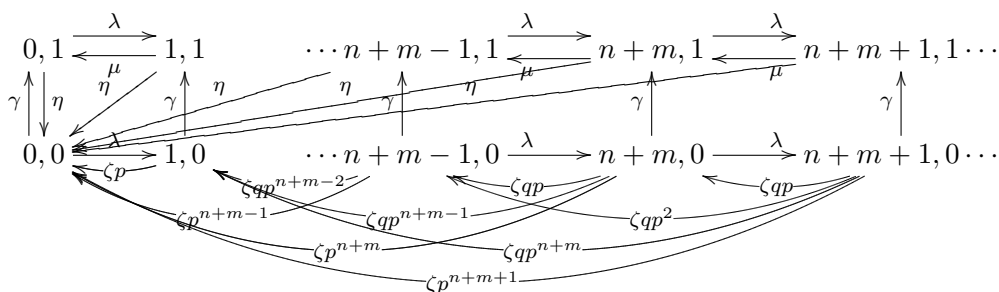
ii) Εάν $r_2 \neq z_2$, τότε ο μετασχηματισμός $\tilde{S}^{LA}(s)$ δίνεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{LA}(s) &= \frac{\zeta r_2 \pi(0,0) p r(s)}{\lambda(r_2-1)(1-p r(s))} + \frac{\gamma r_2 \pi(0,0) r(s)}{\lambda(1-r(s))(\eta+s)} \left(\frac{\eta}{r_2-1} + \frac{\mu s}{r_2(\mu+\eta+s)-\mu} \right) \\ &+ \frac{\gamma r_2 \pi(0,0)}{\lambda(1-z_1)(r_2-z_1)(z_2-r_2)(\eta+s)} \times \\ &\times \left[\frac{\eta(z_1 z_2 - r_2)}{z_2-1} + \frac{\eta r_2(1-z_1)}{r_2-1} + \frac{(z_1 z_2 - r_2)\mu s}{z_2(\mu+\eta+s)-\mu} + \frac{r_2(1-z_1)\mu s}{r_2(\mu+\eta+s)-\mu} \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

όπου τα μεγέθη $\pi(0,0)$, r_1 , r_2 , z_1 και z_2 υπολογίζονται από τις (5.11), (5.14), (5.15), (5.16) και (5.17) αντίστοιχα.

Απόδειξη. Ο δεσμευμένος χρόνος παραμονής $S_{(n,1,m)}$ κατανέμεται όπως και ο $S_{(n,1)}$ στην περίπτωση EAAF, ανεξαρτήτως του m , διότι ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη δεν εξαρτάται από τις μελλοντικές αφίξεις, όταν κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ενεργό. Συνεπώς, $\tilde{S}_{(n,1,m)}(s) = \tilde{S}_{(n,1)}(s)$ και η (5.51) προκύπτει από την (5.36).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο πελάτης φθάνοντας στο σύστημα το βρίσκει στην κατάσταση $(n-1,0)$, μετά από αυτόν έχουμε m αφίξεις πελατών και ο υπηρέτης παραμένει ανενεργός, οπότε το σύστημα έχει μεταβεί στην κατάσταση $(n+m,0)$. Δεσμεύοντας ως προς το πρώτο ενδεχόμενο που θα πραγματοποιηθεί αμέσως μετά, χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα Markov και λαμβάνοντας υπόψιν ότι: ο χρόνος παραμονής έως την πραγματοποίηση του πρώτου ενδεχομένου είναι εκθετικός $(\lambda+\gamma+\zeta)$ ενώ ο υπολειπόμενος χρόνος παραμονής είναι $S_{(n,0,m+1)}$ αν προηγηθεί άφιξη, $S_{(n,1,m)}$ αν προηγηθεί επιστροφή του υπηρέτη, $S_{(n,0,m-j)}$ αν προηγηθεί άφιξη ευκαιρίας εγκατάλειψης που θα διώξει j πελάτες, $j = 0, 1, \dots, m$ και 0 χρονικές μονάδες αν προηγηθεί άφιξη εγκατάλειψης που θα διώξει τουλάχιστον $m+1$ πελάτες, καταλήγουμε στην εξίσωση



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης του μοντέλου με έμφαση στις καταστάσεις $(n + m, i)$.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{(n,0,m)}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,0,m+1)}(s) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{S}_{(n,1,m)}(s) \\ &+ \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\sum_{j=0}^m q p^j \tilde{S}_{(n,0,m-j)}(s) + p^{m+1} \right), \quad n \geq 1, m \geq 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Ορίζουμε τους μικτούς μετασχηματισμούς

$$\Phi_n(s, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0,m)}(s) z^m, \quad |z| < 1, s \geq 0,$$

για κάθε $n \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας την (5.54) με z^m και αθροίζοντας για όλες τις τιμές του m έχουμε

$$\begin{aligned} (1 - z) \Phi_n(s, z) K(s, z) &= \zeta p z (1 - z) + \gamma z (1 - p z) \tilde{S}_{(n,1)}(s) \\ &- \lambda (1 - z) (1 - p z) \tilde{S}_{(n,0,0)}(s), \end{aligned} \quad (5.55)$$

όπου

$$K(s, z) = -p(\lambda + \gamma + \zeta + s)z^2 + (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s)z - \lambda. \quad (5.56)$$

Για κάθε σταθερό $s \geq 0$, έχουμε ότι $K(s, z) = 0$, αν και μόνο αν $z - \alpha(z) = 0$, όπου $\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_2 z^2$, με

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{(\lambda + \gamma + \zeta + s)p}{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s}.$$

Όμως $\alpha(1) < 1$, οπότε εφαρμόζοντας ξανά το πόρισμα του θεωρήματος Rouché, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $K(s, z) = 0$ έχει δύο ρίζες, $r(s) \in \{z : |z| < 1\}$ και $r_1(s) \in \{z : |z| > 1\}$. Μάλιστα αυτές οι δύο ρίζες είναι πραγματικές για κάθε $s \geq 0$. Η ρίζα $r(s)$ δίνεται από την (5.52) και ισχύει ότι $0 < r(s) < 1$.

Θέτουμε $z = r(s)$ στην (5.55). Χρησιμοποιώντας ότι $K(s, r(s)) = 0$, $\Phi_n(s, r(s)) < \infty$ (εξαιτίας της σύγκλισης της $\Phi_n(s, z)$ στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$ για κάθε $s \geq 0$) και λύνοντας ως προς $\tilde{S}_{(n,0,0)}(s)$ βρίσκουμε, αντικαθιστώντας και τον μετασχηματισμό $\tilde{S}_{(n,1)}(s)$ από την (5.51), την (5.50). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα βασιστούμε στη σχέση

$$\tilde{S}^{LA}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,0,0)}(s) \pi(n-1, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_{(n,1,0)}(s) \pi(n-1, 1), \quad (5.57)$$

που προκύπτει δεσμεύοντας ως προς την κατάσταση την οποία συναντά ο πελάτης φθάνοντας στο σύστημα. Αν αντικαταστήσουμε τις πιθανότητες $\pi(n-1, 0)$, $\pi(n-1, 1)$ από τις (5.12), (5.13) και τους μετασχηματισμούς $\tilde{S}_{(n,0,0)}(s)$, $\tilde{S}_{(n,1,0)}(s)$ από τις (5.50), (5.51) αντίστοιχα στην (5.57) και υπολογίσουμε τα εμφανιζόμενα γεωμετρικά αθροίσματα, καταλήγουμε στην (5.53). ■

Η περίπτωση $r_2 = z_2$, αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Αναπτύσσοντας τη γεννήτρια $\Phi_n(s, z)$ σε δυνάμεις του z , μπορούμε επίσης να βρούμε την ακριβή μορφή των μετασχηματισμών $\tilde{S}_{(n,0,m)}(s)$, για κάθε $m \geq 0$. Πράγματι, θέτοντας $z = r(s)$, στην (5.55) έχουμε

$$\zeta p r(s)(1 - r(s)) + \gamma r(s)(1 - p r(s)) \tilde{S}_{(n,1)}(s) - \lambda(1 - r(s))(1 - p r(s)) \tilde{S}_{(n,0,0)}(s) = 0. \quad (5.58)$$

Αφαιρώντας την (5.58) από την (5.55) βρίσκουμε

$$(1 - z) \Phi_n(s, z) K(s, z) = (z - r(s)) \left[\zeta p (1 - r(s) - z) + \gamma \tilde{S}_{(n,1)}(s) (1 - p r(s) - p z) + \lambda \tilde{S}_{(n,0,0)}(s) (1 + p - p r(s) - p z) \right].$$

Όμως οι αριθμοί $r(s), r_1(s)$ είναι οι ρίζες του δευτεροβάθμιου $K(s, z)$ οπότε αυτό μπορεί να αντικατασταθεί από το γινόμενο $p(\lambda + \gamma + \zeta + s)(z - r(s))(r_1(s) - z)$ (δες την εξίσωση (5.56) και την ανάλυση που ακολουθεί). Απλοποιώντας τον όρο $z - r(s)$ και διαιρώντας με $(1 - z)(r_1(s) - z)$ βρίσκουμε

$$p(\lambda + \gamma + \zeta + s)\Phi_n(s, z) = \frac{N_n(s, z)}{(1 - z)(r_1(s) - z)} \quad (5.59)$$

όπου

$$N_n(s, z) = \zeta p(1 - r(s)) + \gamma \tilde{S}_{(n,1)}(s)(1 - pr(s)) \\ + \lambda \tilde{S}_{(n,0,0)}(s)(1 + p - pr(s)) - p(\zeta + \gamma \tilde{S}_{(n,1)}(s) + \lambda \tilde{S}_{(n,0,0)}(s))z. \quad (5.60)$$

Η ανάλυση του $\frac{N_n(s, z)}{(1 - z)(r_1(s) - z)}$ σε απλά κλάσματα ως προς τη μεταβλητή z δίνει

$$\frac{N_n(s, z)}{(1 - z)(r_1(s) - z)} = \frac{A_n(s)}{1 - z} + \frac{B_n(s)}{r_1(s) - z},$$

όπου

$$A_n(s) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{N_n(s, z)}{r_1(s) - z} \\ = \frac{\gamma \tilde{S}_{(n,1)}(s)(1 - p - pr(s)) + \lambda \tilde{S}_{(n,0,0)}(s)(1 - pr(s)) - \zeta pr(s)}{r_1(s) - 1}, \quad (5.61)$$

$$B_n(s) = \lim_{z \rightarrow r_1(s)} \frac{N_n(s, z)}{1 - z} \\ = \frac{\gamma \tilde{S}_{(n,1)}(s)[1 - p(r(s) + r_1(s))] + \zeta p[1 - (r(s) + r_1(s))]}{1 - r_1(s)} \\ + \frac{\lambda \tilde{S}_{(n,0,0)}(s)[1 + p - p(r(s) + r_1(s))]}{1 - r_1(s)}, \quad (5.62)$$

και

$$r_1(s) = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s + \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p + s)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta + s)}}{2p(\lambda + \gamma + \zeta + s)}, \quad (5.63)$$

ενώ τα $r(s)$, $\tilde{S}_{(n,1)}(s)$ και $\tilde{S}_{(n,0,0)}(s)$ δίνονται από τις (5.52), (5.51), (5.50) αντίστοιχα. Έτσι, η εξίσωση (5.59) ανάγεται στην

$$p(\lambda + \gamma + \zeta + s)\Phi_n(s, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_n(s) + \frac{B_n(s)}{(r_1(s))^{m+1}} \right) z^m.$$

Συνεπώς,

$$\tilde{S}_{(n,0,m)}(s) = \frac{1}{p(\lambda + \gamma + \zeta + s)} \left(A_n(s) + \frac{B_n(s)}{(r_1(s))^{m+1}} \right), \quad n \geq 1, m \geq 0. \quad (5.64)$$

5.5 Περίοδος συνεχούς λειτουργίας

Όπως και στο κεφάλαιο 4, στην τρέχουσα παράγραφο θα μελετήσουμε την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος καθώς και μέτρα απόδοσης που αναφέρονται σε αυτήν, όπως το συνολικό αριθμό πελατών που χάνονται από το σύστημα και τον μέγιστο αριθμό πελατών που βρίσκονται ταυτόχρονα μέσα σε αυτό.

5.5.1 Κατανομή του χρόνου συνεχούς λειτουργίας

Ο στόχος αυτής της παραγράφου είναι να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace $\tilde{\Gamma}(s)$ της διάρκειας Γ μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας. Ως τέτοια, ορίζουμε το χρονικό διάστημα από την άφιξη ενός πελάτη σ' ένα άδειο σύστημα έως τη στιγμή που το σύστημα θα αδειάσει ξανά. Συμβολίζουμε επίσης με $\Gamma_{(n,i)}$ το χρόνο που χρειάζεται το σύστημα ώστε να περάσει για πρώτη φορά από την κατάσταση (n, i) σε μία κατάσταση του συνόλου $\{(0, 0), (0, 1)\}$, όπου $i = 0, 1$ και $n \geq 0$. Δοθέντος ότι ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα το βρίσκει κενό, η πιθανότητα να βρει τον υπηρέτη στην κατάσταση i είναι $\frac{\pi(0,i)}{\pi(0,0)+\pi(0,1)}$. Είναι λοιπόν φανερό από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, ότι

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_{(1,0)}, & \text{με πιθανότητα } \frac{\pi(0,0)}{\pi(0,0)+\pi(0,1)}, \\ \Gamma_{(1,1)}, & \text{με πιθανότητα } \frac{\pi(0,1)}{\pi(0,0)+\pi(0,1)}. \end{cases} \quad (5.65)$$

Συμβολίζοντας με $\tilde{\Gamma}_{(n,i)}(s)$, το μετασχηματισμό Laplace της μεταβλητής $\Gamma_{(n,i)}$, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα 5.4.

Θεώρημα 5.4. Ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{\Gamma}(s)$ της χρονικής διάρκειας της περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος δίνεται ως

$$\tilde{\Gamma}(s) = \frac{\pi(0,0)}{\pi(0,0) + \pi(0,1)} \tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s) + \frac{\pi(0,1)}{\pi(0,0) + \pi(0,1)} \tilde{\Gamma}_{(1,1)}(s), \quad (5.66)$$

με

$$\tilde{\Gamma}_{(1,1)}(s) = \frac{z(s)(\eta + \mu - \mu z(s))}{\lambda(1 - z(s))}, \quad (5.67)$$

$$\tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s) = \frac{\gamma[\mu r^2(s)(1 - r(s)) - \lambda r(s)(1 - r(s))\tilde{\Gamma}_{(1,1)}(s) + \eta r^2(s)]}{\lambda(1 - r(s))[(\lambda + \mu + \eta + s)r(s) - \lambda - \mu r^2(s)]} + \frac{\zeta p r(s)}{\lambda(1 - p r(s))}, \quad (5.68)$$

όπου

$$z(s) = \frac{\lambda + \mu + \eta + s - \sqrt{(\lambda + \mu + \eta + s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}, \quad (5.69)$$

και το $r(s)$ δίνεται από την (5.52).

Απόδειξη. Η εξίσωση (5.66) προκύπτει άμεσα από την (5.65). Η μέθοδος ανάλυσης του πρώτου βήματος παράγει το επόμενο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \eta + s} \tilde{\Gamma}_{(n+1,1)}(s) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \eta + s} \tilde{\Gamma}_{(n-1,1)}(s) \\ &\quad + \frac{\eta}{\lambda + \mu + \eta + s}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{\Gamma}_{(n+1,0)}(s) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) \\ &\quad + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta + s} \left(\sum_{k=1}^n q p^{n-k} \tilde{\Gamma}_{(k,0)}(s) + p^n \right), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.71)$$

όπου $\tilde{\Gamma}_{(0,0)}(s) = \tilde{\Gamma}_{(0,1)}(s) = 1$. Για να βρούμε μία ακριβή λύση των επαναληπτικών σχημάτων (5.70), (5.71), ορίζουμε τους μεικτούς μετασχηματισμούς

$$R_0(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s) z^n \quad \text{και} \quad R_1(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s) z^n, \quad |z| < 1, \quad s \geq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.70) με z^n και αθροίζοντας για κάθε $n \geq 1$, προκύπτει

$$\Lambda(s, z)(R_1(s, z) - 1) = \mu z^2 - \lambda z \tilde{\Gamma}_{(1,1)}(s) + \frac{\eta z^2}{1 - z}, \quad (5.72)$$

όπου

$$\Lambda(s, z) = -\mu z^2 + (\lambda + \mu + \eta + s)z - \lambda. \quad (5.73)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά το ίδιο πόρισμα από το θεώρημα του Rouché βρίσκουμε ότι η εξίσωση $\Lambda(s, z) = 0$, έχει δύο διακεκριμένες ρίζες: $z(s) \in (0, 1)$ η οποία δίνεται από την (5.69) και $z_1(s) \in (1, +\infty)$. Όμως $\Lambda(s, z(s)) = 0$, και $R_1(s, z(s)) < \infty$, οπότε αντικαθιστώντας την $z(s)$ εντός της (5.72) βρίσκουμε την (5.67). Δουλεύοντας την εξίσωση (5.71) με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} K(s, z)(R_0(s, z) - 1) &= -\lambda(1 - pz)z \tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s) \\ &+ \gamma z(1 - pz)(R_1(s, z) - 1) + \zeta pz^2, \end{aligned} \quad (5.74)$$

όπου η συνάρτηση $K(s, z)$ δίνεται από την (5.56). Για κάθε σταθερό $s \geq 0$, έχουμε δείξει στην απόδειξη του θεωρήματος 5.3 ότι το $r(s)$, που δίνεται από την (5.52), είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $K(s, z) = 0$, στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην εξίσωση (5.74) το $r(s)$, τη διαφορά $(R_1(s, z) - 1)$ από την (5.72) και χρησιμοποιώντας ότι $K(s, r(s)) = 0$ καθώς και τη σύγκλιση της γεννήτριας $R_0(s, z)$ στον ανοικτό δίσκο $\{z : |z| < 1\}$, παράγουμε εύκολα την (5.68). ■

Έχοντας υπολογίσει το μετασχηματισμό $\tilde{\Gamma}_{(1,1)}(s)$ μπορούμε επαναληπτικά από την εξίσωση (5.70) να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς $\tilde{\Gamma}_{(n,1)}(s)$ για κάθε $n \geq 2$. Χρησιμοποιώντας αυτούς και το μετασχηματισμό $\tilde{\Gamma}_{(1,0)}(s)$ μπορούμε από την (5.71) με επαναληπτικό τρόπο να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς $\tilde{\Gamma}_{(n,0)}(s)$, $n \geq 2$.

Αντίστοιχη μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της πιθανογεννήτριας του αριθμού των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας.

5.5.2 Ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας

Έστω,

N : ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας,

$N_{(n,i)}$: ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα κατά τη διάρκεια του πρώτου περάσματος του συστήματος από την κατάσταση (n, i) στο σύνολο $\{(0, 0), (0, 1)\}$, $i = 0, 1$, $n \geq 0$, και

$\hat{N}(z)$, $\hat{N}_{(n,i)}(z)$ οι αντίστοιχες πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.

Ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό της πιθανογεννήτριας $\hat{N}(z) = E(z^N)$. Εφόσον η περίοδος συνεχούς λειτουργίας ξεκινά από την κατάσταση $(1, 0)$ με πιθανότητα $\frac{\pi(0,0)}{\pi(0,0)+\pi(0,1)}$ ή από την κατάσταση $(1, 1)$ με πιθανότητα $\frac{\pi(0,1)}{\pi(0,0)+\pi(0,1)}$, πρέπει να υπολογίσουμε τις $\hat{N}_{(1,0)}(z)$ και $\hat{N}_{(1,1)}(z)$.

Από τη μέθοδο ανάλυσης πρώτου βήματος παράγουμε τις εξισώσεις

$$\hat{N}_{(n,1)}(z) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \eta} \hat{N}_{(n+1,1)}(z) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \eta} \hat{N}_{(n-1,1)}(z) + \frac{\eta}{\lambda + \mu + \eta} z^n, \quad n \geq 1, \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_{(n,0)}(z) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta} \hat{N}_{(n+1,0)}(z) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta} \hat{N}_{(n,1)}(z) \\ &+ \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta} \left(\sum_{k=1}^n qp^{n-k} z^{n-k} \hat{N}_{(k,0)}(z) + p^n z^n \right), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\text{ενώ } \hat{N}_{(0,1)}(z) = \hat{N}_{(0,0)}(z) = 1.$$

Για την (5.75) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $(n, 1)$, τότε με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\lambda + \mu + \eta}$ το επόμενο γεγονός είναι άφιξη νέου πελάτη και ο αριθμός των πελατών που χάνονται είναι $N_{(n+1,1)}$, με πιθανότητα $\frac{\mu}{\lambda + \mu + \eta}$ το επόμενο γεγονός είναι ολοκλήρωση εξυπηρέτησης και ο αριθμός των πελατών που χάνονται είναι $N_{(n-1,1)}$, ενώ με πιθανότητα $\frac{\eta}{\lambda + \mu + \eta}$ το επόμενο γεγονός είναι άφιξη καταστροφής και ο αριθμός των πελατών που χάνονται είναι n με πιθανότητα 1. Αντίστοιχα για την (5.76) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $(n, 0)$, τότε με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta}$ το επόμενο γεγονός είναι άφιξη νέου πελάτη και ο αριθμός των πελατών που χάνονται είναι $N_{(n+1,0)}$, με πιθανότητα

$\frac{\gamma}{\lambda+\gamma+\zeta}$ το επόμενο γεγονός είναι επιστροφή του υπηρέτη και ο αριθμός των πελατών που χάνονται είναι $N_{(n,1)}$, ενώ με πιθανότητα $\frac{\zeta}{\lambda+\gamma+\zeta}$ το επόμενο γεγονός είναι άφιξη στιγμής εγκατάλειψης και ο αριθμός των πελατών που εγκαταλείπουν το σύστημα είναι $n - k + N_{(k,0)}$ με πιθανότητα qp^{n-k} , $k = 1, 2, \dots, n$, και n με πιθανότητα p^n .

Ορίζουμε τις ακόλουθες γεννήτριες συναρτήσεις:

$$G_1(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{N}_{(n,1)}(z)x^n \quad \text{και} \quad G_0(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{N}_{(n,0)}(z)x^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.75) με x^n και προσθέτοντας για κάθε $n \geq 1$, βρίσκουμε

$$g(x)(G_1(z, x) - 1) = \mu x^2 - \lambda x \hat{N}_{(1,1)}(z) + \frac{\eta z x^2}{1 - zx}, \quad (5.77)$$

όπου

$$g(x) = -\mu x^2 + (\lambda + \mu + \eta)x - \lambda, \quad (5.78)$$

ενώ πολλαπλασιάζοντας την (5.76) με x^n και προσθέτοντας για κάθε $n \geq 1$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} C(z, x)(G_0(z, x) - 1) &= \gamma x(1 - px)(G_1(z, x) - 1) \\ &\quad - \lambda x(1 - px)\hat{N}_{(1,0)}(z) + \zeta p x^2, \end{aligned} \quad (5.79)$$

όπου

$$C(z, x) = -px(\lambda + \gamma + \zeta)x^2 + (\lambda + \lambda pz + \gamma + \zeta p)x - \lambda. \quad (5.80)$$

Η εξίσωση $g(x) = 0$, έχει δύο πραγματικές ρίζες, $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$. Για κάθε σταθερό z με $|z| \leq 1$, η εξίσωση $C(z, x) = 0$, έχει μία μοναδική ρίζα $x(z)$ στο δίσκο $\{x : |x| < 1\}$. Τότε, οι πιθανογεννήτριες $\hat{N}_{(1,1)}(z)$ και $\hat{N}_{(1,0)}(z)$ μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν αντικαθιστώντας το x_1 στην (5.77) και το $x(z)$ στην (5.79) αντίστοιχα. Συνοψίζουμε το βασικό αποτέλεσμα στο παρακάτω θεώρημα 5.5.

Θεώρημα 5.5. Η πιθανογεννήτρια $\hat{N}(z)$ του αριθμού των πελατών που χάνονται κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος δίνεται ως

$$\hat{N}(z) = \frac{\pi(0, 0)}{\pi(0, 0) + \pi(0, 1)} \hat{N}_{(1,0)}(z) + \frac{\pi(0, 1)}{\pi(0, 0) + \pi(0, 1)} \hat{N}_{(1,1)}(z), \quad (5.81)$$

όπου

$$\hat{N}_{(1,1)}(z) = \frac{x_1}{\lambda} \cdot \frac{\mu + (\eta - \mu x_1)z}{1 - x_1 z}, \quad (5.82)$$

$$x_1 = \frac{\lambda + \mu + \eta - \sqrt{(\lambda + \mu + \eta)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}, \quad (5.83)$$

και

$$\begin{aligned} \hat{N}_{(1,0)}(z) &= \frac{\gamma[\mu x^2(z)(1 - zx(z)) - \lambda x(z)(1 - zx(z))\hat{N}_{(1,1)}(z) + \eta zx^2(z)]}{\lambda(1 - zx(z))[(\lambda + \mu + \eta)x(z) - \lambda - \mu x^2(z)]} \\ &+ \frac{\zeta p x(z)}{\lambda(1 - pzx(z))}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$x(z) = \frac{\lambda + \lambda pz + \gamma + \zeta p - \sqrt{(\lambda + \lambda pz + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda pz(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2pz(\lambda + \gamma + \zeta)}. \quad (5.85)$$

5.5.3 Η κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας

Ο επόμενος στόχος μας είναι να μελετήσουμε την κατανομή του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του. Για κάθε αρχική κατάσταση (n, i) του μοντέλου μας, $i = 0, 1$, $n \geq 0$, ορίζουμε $M_{(n,i)}$ να είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το μέγιστο αριθμό πελατών που βρίσκονται ταυτόχρονα στο σύστημα έως την πρώτη φορά που αυτό θα αδειάσει, δηλαδή μέχρι τη στιγμή που η διαδικασία $\{(L(t), I(t)), t \geq 0\}$ θα εισέλθει σε κατάσταση του συνόλου $\{(0, 0), (0, 1)\}$. Για κάθε σταθερό m , παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $\tau_{(n,i)}(m) = \Pr[M_{(n,i)} \leq m]$, $m \geq n$, μπορεί να θεωρηθεί ως η πιθανότητα η διαδικασία $\{(L(t), I(t))\}$, ξεκινώντας από την κατάσταση (n, i) , να φτάσει κάποια κατάσταση του συνόλου $\{(0, 0), (0, 1)\}$ προτού φτάσει το υποσύνολο $\{(m+1, i) : i = 0, 1\}$. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $\tau_{(n,i)}(m)$ θεωρώντας την τροποποιημένη διαδικασία που προκύπτει από την αρχική όταν μετατρέψουμε τις καταστάσεις $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(m+1, 0)$ και $(m+1, 1)$ σε καταστάσεις απορρόφησης. Τότε, ο αριθμός $\tau_{(n,i)}(m)$ είναι η πιθανότητα η τροποποιημένη διαδικασία να απορροφηθεί στο σύνολο $\{(0, 0), (0, 1)\}$, δεδομένου ότι η αρχική της κατάσταση είναι η (n, i) .

Χρησιμοποιώντας ξανά τη μέθοδο ανάλυσης του πρώτου βήματος, καταλήγουμε στο επόμενο σύστημα εξισώσεων για τις πιθανότητες απορρόφησης που χαρακτηρίζουν το σύστημα, για κάθε $m = 0, 1, 2, \dots$:

$$\tau_{(0,1)}(m) = 1, \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} \tau_{(n,1)}(m) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \eta} \tau_{(n+1,1)}(m) + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \eta} \tau_{(n-1,1)}(m) \\ &\quad + \frac{\eta}{\lambda + \mu + \eta}, \quad 1 \leq n \leq m, \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\tau_{(m+1,1)}(m) = 0, \quad (5.88)$$

$$\tau_{(0,0)}(m) = 1, \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \tau_{(n,0)}(m) &= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma + \zeta} \tau_{(n+1,0)}(m) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma + \zeta} \tau_{(n,1)}(m) \\ &\quad + \frac{\zeta}{\lambda + \gamma + \zeta} \left(p^n + \sum_{k=1}^n q p^{n-k} \tau_{(k,0)}(m) \right), \quad 1 \leq n \leq m, \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\tau_{(m+1,0)}(m) = 0. \quad (5.91)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.86)-(5.91), βρίσκουμε τις πιθανότητες $\tau_{(1,0)}(m)$, $\tau_{(1,1)}(m)$. Έτσι, ορίζοντας M να είναι ο μέγιστος αριθμός πελατών που παρατηρούνται ταυτόχρονα στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του και $\tau(m) = \Pr[M \leq m]$, την τιμή της συνάρτησης κατανομής της M στον ακέραιο m , έχουμε το επόμενο θεώρημα 5.6.

Θεώρημα 5.6. *Η συνάρτηση κατανομής του μέγιστου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του, δίνεται ως:*

$$\tau(m) = \frac{\pi(0,0)}{\pi(0,0) + \pi(0,1)} \tau_{(1,0)}(m) + \frac{\pi(0,1)}{\pi(0,0) + \pi(0,1)} \tau_{(1,1)}(m), \quad (5.92)$$

όπου

$$\tau_{(1,1)}(m) = 1 - \frac{z_2 - z_1}{z_2^{m+1} - z_1^{m+1}}, \quad (5.93)$$

με τα z_1, z_2 να υπολογίζονται από τις (5.16), (5.17) αντίστοιχα και

$$\tau_{(1,0)}(m) = \frac{[(1-p\eta_1)M_m(\eta_1)\eta_2^{m+1} - (1-p\eta_2)M_m(\eta_2)\eta_1^{m+1}] + \zeta p(\eta_1\eta_2^{m+1} - \eta_2\eta_1^{m+1})}{\lambda[(1-p\eta_1)\eta_2^{m+1} - (1-p\eta_2)\eta_1^{m+1}]}, \quad (5.94)$$

όπου

$$\eta_{1,2} = \frac{\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p \mp \sqrt{(\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)^2 - 4\lambda p(\lambda + \gamma + \zeta)}}{2p(\lambda + \gamma + \zeta)}, \quad (5.95)$$

και

$$M_m(z) = \begin{cases} \gamma z \left[\frac{1-z^m}{1-z} - \frac{1}{z_2^{m+1}-z_1^{m+1}} \left(\frac{m}{z} - z_1 \frac{1-(z_1 z)^m}{1-z_1 z} \right) \right], & \text{αν } z = 1/z_2, \\ \gamma z \left[\frac{1-z^m}{1-z} - \frac{1}{z_2^{m+1}-z_1^{m+1}} \left(z_2 \frac{1-(z_2 z)^m}{1-z_2 z} - \frac{m}{z} \right) \right], & \text{αν } z = 1/z_1, \\ \gamma z \left[\frac{1-z^m}{1-z} - \frac{1}{z_2^{m+1}-z_1^{m+1}} \left(z_2 \frac{1-(z_2 z)^m}{1-z_2 z} - z_1 \frac{1-(z_1 z)^m}{1-z_1 z} \right) \right] & \text{αν } z \neq \frac{1}{z_2}, 1, \frac{1}{z_1}. \end{cases} \quad (5.96)$$

Απόδειξη. Πρώτα θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων (5.86)-(5.88). Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (5.87) παίρνει τη μορφή

$$-\lambda \tau_{(n+1,1)}(m) + (\lambda + \mu + \eta) \tau_{(n,1)}(m) - \mu \tau_{(n-1,1)}(m) = \eta, \quad 1 \leq n \leq m, \quad (5.97)$$

δηλαδή αποτελεί μία μη-ομογενή εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές και οριακές τιμές που προσδιορίζονται από τις (5.86), (5.88). Έχει λοιπόν χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi(z) = -\lambda z^2 + (\lambda + \mu + \eta)z - \mu,$$

δηλαδή τη συνάρτηση $f(z)$ της παραγράφου 5.3 και επομένως οι ρίζες της δίνονται από τις (5.16), (5.17). Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι της μορφής:

$$\tau_{(n,1)}^{hom}(m) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n, \quad 0 \leq n \leq m+1.$$

Για την εύρεση μίας ειδικής λύσης της μη-ομογενούς δοκιμάζουμε την $\tau_{(n,1)}(m) = c$, $c \in \mathfrak{R}^*$. Αντικαθιστώντας στην (5.97) έχουμε $c = 1$. Επομένως η γενική λύση της (5.97) παίρνει τη μορφή

$$\tau_{(n,1)}(m) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + 1, \quad 0 \leq n \leq m+1.$$

Ο προσδιορισμός των σταθερών C_1, C_2 θα γίνει κάνοντας χρήση των δύο οριακών συνθηκών. Έτσι, λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \tau_{(0,1)}(m) = 1, \\ \tau_{(m+1,1)}(m) = 0, \end{cases}$$

υπολογίζουμε τις σταθερές

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{z_2^{m+1} - z_1^{m+1}}, \\ C_2 = -\frac{1}{z_2^{m+1} - z_1^{m+1}}, \end{cases}$$

οπότε οι πιθανότητες $\tau_{(n,1)}(m)$ υπολογίζονται από τον τύπο

$$\tau_{(n,1)}(m) = 1 - \frac{z_2^n - z_1^n}{z_2^{m+1} - z_1^{m+1}}, \quad 0 \leq n \leq m+1. \quad (5.98)$$

Θέτοντας $n = 1$, καταλήγουμε στην (5.93). (Περισσότερες λεπτομέρειες για την επίλυση εξισώσεων διαφορών, δες Elaydi (1999)). Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $\tau_{(n,1)}(m) < 1$, καθώς $z_2^n > z_1^n$, και $z_2^{m+1} > z_1^{m+1}$, αφού $z_2 > 1 > z_1$, και ότι $\tau_{(n,1)}(m) > 0$, αφού $z_1^{m+1} < z_1^n$, και $z_2^{m+1} > z_2^n$.

Στη συνέχεια εστιάζουμε στον υπολογισμό των πιθανοτήτων $\tau_{(n,0)}(m)$ από το σύστημα των εξισώσεων (5.89)-(5.91). Για να το πετύχουμε εισάγουμε τη γεννήτρια συνάρτηση (πολυώνυμο) $\Delta_m(z)$ των πιθανοτήτων $\{\tau_{(n,0)}(m) : 0 \leq n \leq m+1\}$,

$$\Delta_m(z) = \sum_{n=0}^{m+1} \tau_{(n,0)}(m) z^n = 1 + \sum_{n=1}^m \tau_{(n,0)}(m) z^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5.90) με $(\lambda + \gamma + \zeta)z^n$ και προσθέτοντας για κάθε $1 \leq n \leq m$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma + \zeta)(\Delta_m(z) - 1) &= \frac{\lambda}{z}(\Delta_m(z) - 1 - \tau_{(1,0)}(m)z) + \gamma \sum_{n=1}^m \tau_{(n,1)}(m) z^n \\ &+ \zeta p z \frac{1 - (pz)^m}{1 - pz} + \frac{\zeta q}{1 - pz} \sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m) z^k [1 - (pz)^{m-k+1}]. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Ορίζοντας

$$M_m(z) = \gamma \sum_{n=1}^m \tau_{(n,1)}(m) z^n, \quad (5.100)$$

και χρησιμοποιώντας την (5.98) μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι η (5.96) ισχύει. Επίσης, μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\sum_{k=1}^m \tau_{(k,0)}(m) z^k [1 - (pz)^{m-k+1}] = \Delta_m(z) - 1 - (pz)^{m+1} (\Delta_m(p^{-1}) - 1). \quad (5.101)$$

Θέτοντας $d = \Delta_m(p^{-1}) - 1$, αντικαθιστώντας τις (5.100), (5.101) στην (5.99) και εκτελώντας μερικούς απλούς αλγεβρικούς υπολογισμούς, παίρνουμε

$$\begin{aligned} H(z)(\Delta_m(z) - 1) &= -\lambda(1 - pz)\tau_{(1,0)}(m)z + z(1 - pz)M_m(z) \\ &\quad - \zeta qz(pz)^{m+1}d + \zeta pz^2[1 - (pz)^m], \end{aligned} \quad (5.102)$$

όπου

$$H(z) = -(\lambda + \gamma + \zeta)pz^2 + (\lambda + \lambda p + \gamma + \zeta p)z - \lambda. \quad (5.103)$$

Η εξίσωση $H(z) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες η_1 και η_2 οι οποίες δίνονται από την (5.95) (ή από την (4.88)). Αντικαθιστώντας τα η_1, η_2 στην (5.102) και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει με αγνώστους τους $\tau_{(1,0)}(m)$ και d , καταλήγουμε στην (5.94). Η εξίσωση (5.92) ισχύει, δεσμεύοντας ως προς την κατάσταση του υπηρέτη που βρίσκει ένας πελάτης που φθάνει σε κενό σύστημα και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

■

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα

Στις ακόλουθες δύο προτάσεις θα αποδείξουμε τις εξισώσεις (2.51) και (2.53).

Πρόταση 1 (Απόδειξη της (2.51)).

Οι συντελεστές C_{n_1, n_2, \dots, n_k} που είναι λύσεις των εξισώσεων

$$(n_1 + 1)C_{n_1+1, n_2, \dots, n_k} = \lambda \sum_{i=1}^{k-n^*} g_i C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (n^* < k), \quad (1)$$

και

$$(n_j + 1)C_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_k} = \lambda g_j C_{n_1, n_2, \dots, n_k} + (n_{j+1} + 1)C_{n_1, \dots, n_j, n_{j+1}+1, n_{j+2}, \dots, n_k} \\ (n^* + j < k, 1 \leq j \leq k-1), \quad (2)$$

δίνονται ως

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda^{n_k}}{n_k!} \prod_{r=0}^{k-1} \prod_{l=1}^{n_{r+1}} \left(\sum_{i=1}^{k-(n_r^*-(r+1)l)} g_i - \sum_{i=1}^r g_i \right) C_{0,0,\dots,0} \\ ((n_1, n_2, \dots, n_k) \in S). \quad (3)$$

Απόδειξη. Θα ακολουθήσουμε τα επόμενα βήματα.

-Βήμα 1.

Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{\lambda}{n_1} C_{n_1-1, n_2, \dots, n_k} \sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \quad (n^* \leq k, n_1 > 0). \quad (4)$$

Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$C_{n_1-1, n_2, \dots, n_k} = \frac{\lambda}{n_1-1} C_{n_1-2, n_2, \dots, n_k} \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i,$$

διότι τώρα $n^* - 1 < k$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{\lambda^2}{n_1(n_1-1)} C_{n_1-2, n_2, \dots, n_k} \sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i,$$

και γενικά

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} C_{0, n_2, \dots, n_k} \sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i \cdots \sum_{i=1}^{k-(n^*-n_1)} g_i \quad (n^* \leq k). \quad (5)$$

-Βήμα 2.

Για $j = 1$ και $n_1 = 0$, η εξίσωση (2) γίνεται

$$C_{1, n_2, \dots, n_k} = \lambda g_1 C_{0, n_2, \dots, n_k} + (n_2 + 1) C_{0, n_2+1, n_3, \dots, n_k},$$

για κάθε $1+2n_2+\dots+kn_k < k$. Αλλά από την (4), η οποία ισχύει αν $1+2n_2+\dots+kn_k \leq k$, προκύπτει

$$C_{1, n_2, \dots, n_k} = \lambda C_{0, n_2, \dots, n_k} \sum_{i=1}^{k-(2n_2+\dots+kn_k)} g_i.$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (n_2 + 1) C_{0, n_2+1, n_3, \dots, n_k} &= \lambda C_{0, n_2, \dots, n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(2n_2+\dots+kn_k)} g_i - g_1 \right) \\ &= \lambda C_{0, n_2, \dots, n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(2(n_2+1)+\dots+kn_k-2)} g_i - g_1 \right), \end{aligned}$$

για κάθε $1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k < k$ ή $2(n_2 + 1) + 3n_3 + \dots + kn_k \leq k$. Από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι

$$C_{0,n_2,n_3,\dots,n_k} = \frac{\lambda}{n_2} C_{0,n_2-1,n_3,\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(2n_2+3n_3+\dots+kn_k-2)} g_i - g_1 \right) \\ (2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k \leq k, n_2 > 0). \quad (6)$$

Ομοίως

$$C_{0,n_2-1,n_3,\dots,n_k} = \frac{\lambda}{n_2-1} C_{0,n_2-2,n_3,\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(2(n_2-1)+3n_3+\dots+kn_k-2)} g_i - g_1 \right),$$

διότι τώρα $2(n_2 - 1) + 3n_3 + \dots + kn_k < k$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε

$$C_{0,n_2,n_3,\dots,n_k} = \frac{\lambda^2}{n_2(n_2-1)} C_{0,n_2-2,n_3,\dots,n_k} \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(2n_2+3n_3+\dots+kn_k-2)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(2n_2+3n_3+\dots+kn_k-4)} g_i - g_1 \right),$$

και δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο

$$C_{0,n_2,n_3,\dots,n_k} = \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} C_{0,0,n_3,\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2 \cdot 1)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2 \cdot 2)} g_i - g_1 \right) \times \dots \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2n_2)} g_i - g_1 \right), \quad (7)$$

για κάθε $2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k \leq k$. Από τις εξισώσεις (5), (7) καταλήγουμε στην έκφραση

$$C_{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k} = \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} C_{0,0,n_3,\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i \dots \sum_{i=1}^{k-(n^*-n_1)} g_i \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2 \cdot 1)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2 \cdot 2)} g_i - g_1 \right) \dots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2n_2)} g_i - g_1 \right) \\ (n^* \leq k). \quad (8)$$

-Βήμα 3.

Υποθέτουμε ότι τα προηγούμενα μπορούν να επαναληφθούν μέχρι το δείκτη j , όπου $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Δηλαδή

$$C_{0, \dots, 0, n_r, n_{r+1}, \dots, n_k} = \frac{\lambda}{n_r} C_{0, \dots, 0, n_r-1, n_{r+1}, \dots, n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(rn_r+\dots+kn_k-r)} g_i - \sum_{i=1}^{r-1} g_i \right) \\ (rn_r + \dots + kn_k \leq k, n_r > 0, r = 1, 2, \dots, j), \quad (9)$$

και

$$C_{0, \dots, 0, n_r, n_{r+1}, \dots, n_k} = \frac{\lambda^{n_r}}{n_r!} C_{0, \dots, 0, n_{r+1}, \dots, n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{r-1}^*-r)} g_i - \sum_{i=1}^{r-1} g_i \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{r-1}^*-2r)} g_i - \sum_{i=1}^{r-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{r-1}^*-rn_r)} g_i - \sum_{i=1}^{r-1} g_i \right), \quad (10)$$

για κάθε $rn_r + \dots + kn_k \leq k, r = 1, 2, \dots, j$. Έτσι οι συντελεστές $C_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}$ παίρνουν τη μορφή

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda^{n_j}}{n_j!} \sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i \cdots \sum_{i=1}^{k-(n^*-n_1)} g_i \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2-2)} g_i - g_1 \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2n_2)} g_i - g_1 \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3-2)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3n_3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \times \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*-j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*-2j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*-jn_j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \times \\ \times C_{0, \dots, 0, n_{j+1}, \dots, n_k} (n^* \leq k). \quad (11)$$

-Βήμα 4.

Θα αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις (9) και (10) του βήματος 3 ισχύουν για το δείκτη $j + 1$. Γι' αυτό το λόγο θα χρησιμοποιήσουμε την (2) για το δείκτη j θέτοντας $n_1 = n_2 = \dots, n_j = 0$, οπότε

$$C_{0,\dots,0,1,n_{j+1},\dots,n_k} = \lambda g_j C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} + (n_{j+1} + 1) C_{0,\dots,0,n_{j+1}+1,n_{j+2},\dots,n_k},$$

για κάθε $j + (j + 1)n_{j+1} + \dots + kn_k < k$. Θέτοντας στην εξίσωση (9) $r = j$, $n_j = 1$ (την οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε αφού $j + (j + 1)n_{j+1} + \dots + kn_k \leq k$), έχουμε

$$C_{0,\dots,0,1,n_{j+1},\dots,n_k} = \lambda C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k - ((j+1)n_{j+1} + \dots + kn_k)} g_i - g_1 - g_2 - \dots - g_{j-1} \right).$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (n_{j+1} + 1) C_{0,\dots,0,n_{j+1}+1,n_{j+2},\dots,n_k} &= \lambda C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k - ((j+1)n_{j+1} + \dots + kn_k)} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \\ &= \lambda C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k - ((j+1)(n_{j+1}+1) + \dots + kn_k - (j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right), \end{aligned}$$

για κάθε $j + (j + 1)n_{j+1} + \dots + kn_k < k$ ή $(j + 1)(n_{j+1} + 1) + \dots + kn_k \leq k$. Έτσι από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι

$$C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} = \frac{\lambda}{n_{j+1}} C_{0,\dots,0,n_{j+1}-1,n_{j+2},\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k - ((j+1)n_{j+1} + \dots + kn_k - (j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right), \quad (12)$$

για κάθε $(j + 1)n_{j+1} + \dots + kn_k \leq k$ και $n_{j+1} > 0$. Εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} C_{0,\dots,0,n_{j+1}-1,n_{j+2},\dots,n_k} &= \frac{\lambda}{n_{j+1} - 1} C_{0,\dots,0,n_{j+1}-2,n_{j+2},\dots,n_k} \times \\ &\times \left(\sum_{i=1}^{k - ((j+1)n_{j+1} + \dots + kn_k - 2(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right), \end{aligned}$$

διότι τώρα ισχύει $(j+1)(n_{j+1}-1) + (j+2)n_{j+2} + \dots + kn_k < k$. Συνδυάζοντας ξανά τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} = \frac{\lambda^2}{n_{j+1}(n_{j+1}-1)} C_{0,\dots,0,n_{j+1}-2,n_{j+2},\dots,n_k} \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-((j+1)n_{j+1}+\dots+kn_k-(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-((j+1)n_{j+1}+\dots+kn_k-2(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right),$$

και επαγωγικά

$$C_{0,\dots,0,n_{j+1},\dots,n_k} = \frac{\lambda^{n_{j+1}}}{n_{j+1}!} C_{0,\dots,0,n_{j+2},\dots,n_k} \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-2(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1)n_{j+1})} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right), \quad (13)$$

για κάθε $(j+1)n_{j+1} + \dots + kn_k \leq k$. Έτσι οι εξισώσεις (9), (10) του βήματος 3 αποδείχθηκαν για $r = 1, 2, \dots, k$. Συνεπώς καταλήγουμε στη μορφή των συντελεστών

$C_{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k}$,

$$C_{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda^{n_k}}{n_k!} \sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i \cdots \sum_{i=1}^{k-(n^*-n_1)} g_i \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2\cdot 2)} g_i - g_1 \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2n_2)} g_i - g_1 \right) \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3\cdot 2)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3n_3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-2k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-kn_k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \\ \times C_{0,0,\dots,0}, \quad (n^* \leq k),$$

δηλαδή στην εξίσωση (2.51).

■

Πρόταση 2 (Απόδειξη της (2.53)).

Οι συντελεστές C_{n_1, n_2, \dots, n_k} που δίνονται από την (2.51) ικανοποιούν επίσης την εξίσωση

$$(n_j + 1)C_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_k} = \lambda g_j C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (n^* + j = k, j = 1, 2, \dots, k), \quad (14)$$

εάν οι πιθανότητες g_1, g_2, \dots, g_k ικανοποιούν τη συνθήκη (2.53).

Απόδειξη. Έστω $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ με $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$ και $n^* + j = k$, όπου $j = 1, 2, \dots, k$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} C_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_k} &= \frac{\lambda}{n_j + 1} \left(\frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda^{n_k}}{n_k!} \right) \\ &\quad \binom{k-(n^*+j-1)}{\sum_{i=1}^{k-(n^*+j-1)} g_i} \binom{k-(n^*+j-2)}{\sum_{i=1}^{k-(n^*+j-2)} g_i} \left(\cdots \binom{k-(n^*+j-n_1)}{\sum_{i=1}^{k-(n^*+j-n_1)} g_i} \right) \\ &\quad \times \binom{k-(n_1^*+j-2)}{\sum_{i=1}^{k-(n_1^*+j-2)} g_i - g_1} \binom{k-(n_1^*+j-2 \cdot 2)}{\sum_{i=1}^{k-(n_1^*+j-2 \cdot 2)} g_i - g_1} \cdots \binom{k-(n_1^*+j-2n_2)}{\sum_{i=1}^{k-(n_1^*+j-2n_2)} g_i - g_1} \\ &\quad \times \binom{k-(n_2^*+j-3)}{\sum_{i=1}^{k-(n_2^*+j-3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i} \binom{k-(n_2^*+j-3 \cdot 2)}{\sum_{i=1}^{k-(n_2^*+j-3 \cdot 2)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i} \cdots \binom{k-(n_2^*+j-3n_3)}{\sum_{i=1}^{k-(n_2^*+j-3n_3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i} \\ &\quad \vdots \\ &\quad \times \binom{k-(n_{j-2}^*+j-(j-1))}{\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*+j-(j-1))} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i} \cdots \binom{k-(n_{j-2}^*+j-(j-1)n_{j-1})}{\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*+j-(j-1)n_{j-1})} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i} \\ &\quad \times \binom{k-(n_{j-1}^*+j-j)}{\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i} \binom{k-(n_{j-1}^*+j-2j)}{\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-2j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i} \cdots \binom{k-(n_{j-1}^*+j-jn_j)}{\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-jn_j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i} \\ &\quad \times \binom{k-(n_{j-1}^*+j-j(n_j+1))}{\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-j(n_j+1))} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-2(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1)n_{j+1})} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-2k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-kn_k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \\
& \quad \times C_{0,0,\dots,0}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τους εμφανιζόμενους συντελεστές στην (14) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
& \lambda \left(\frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda^{n_k}}{n_k!} \right) \times \sum_{i=1}^{k-(n^*+j-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*+j-2)} g_i \cdots \sum_{i=1}^{k-(n^*+j-n_1)} g_i \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*+j-2)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*+j-2 \cdot 2)} g_i - g_1 \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*+j-2n_2)} g_i - g_1 \right) \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*+j-3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*+j-3 \cdot 2)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*+j-3n_3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*+j-(j-1))} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*+j-2(j-1))} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*+j-(j-1)n_{j-1})} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i \right) \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-2j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-jn_j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*+j-j(n_j+1))} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-2(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1)n_{j+1})} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-2k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-kn_k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \\
& \quad \times C_{0,0,\dots,0} \\
& = \lambda g_j \left(\frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} \frac{\lambda^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\lambda^{n_k}}{n_k!} \right) \times \sum_{i=1}^{k-(n^*-1)} g_i \sum_{i=1}^{k-(n^*-2)} g_i \cdots \sum_{i=1}^{k-(n^*-n_1)} g_i \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2)} g_i - g_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2 \cdot 2)} g_i - g_1 \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_1^*-2n_2)} g_i - g_1 \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3 \cdot 2)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_2^*-3n_3)} g_i - \sum_{i=1}^2 g_i \right) \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*-(j-1))} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-2}^*-(j-1)n_{j-1})} g_i - \sum_{i=1}^{j-2} g_i \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*-j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*-2j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{j-1}^*-jn_j)} g_i - \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-2(j+1))} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_j^*-(j+1)n_{j+1})} g_i - \sum_{i=1}^j g_i \right) \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \quad \bullet \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-2k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{k-(n_{k-1}^*-kn_k)} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \right) \\
& \quad \times C_{0,0,\dots,0}.
\end{aligned}$$

Απλοποιώντας τους κοινούς όρους των παραπάνω γινομένων καταλήγουμε στη συνθήκη (2.53).



Βιβλιογραφία

- [1] Abate, J. and Whitt, W. (1995) Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions. *ORSA Journal on Computing* **7**, 36–43.
- [2] Adan, I., Economou, A. and Kapodistria, S. (2009) Synchronized reneging in queueing systems with vacations. *Queueing Systems* **62**, 1–33.
- [3] Altman, E. and Yechiali U. (2006) Analysis of customers' impatience in queues with server vacations. *Queueing Systems* **52**, 261–279.
- [4] Artalejo, J.R. and Lopez-Herrero, M.J. (2003) On the M/M/m queue with removable servers. In *Stochastic Point Processes*, eds. S.K. Srinivasan and A. Vijayakumar, 124–143, Narosa Publishing House.
- [5] Artalejo, J.R., Economou, A. and Lopez-Herrero, M.J. (2005) Analysis of a multiserver queue with setup times. *Queueing Systems* **52**, 53–76.
- [6] Artalejo, J.R., Economou, A. and Lopez-Herrero, M.J. (2007) Evaluating growth measures in an immigration process subject to binomial and geometric catastrophes. *Mathematical Biosciences and Engineering* **4**, 573-594.
- [7] Baccelli, F., Boyer, P. and Hebuterne, G. (1984) Single-server queues with impatient customers. *Advances in Applied Probability* **16**, 887–905.
- [8] Basket, F., Chandy, K., Muntz, R. and Palacios, J. (1975) Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the Association for Computing Machinery* **22**, 248–260.

- [9] Bartoszynski, R., Buhler, W.J., Chan, W. and Pearl, D.K. (1989) Population processes under the influence of disasters occurring independently of population size. *Journal of Mathematical Biology* **27**, 179–190.
- [10] Bischof, W. (2001) Analysis of M/G/1-queues with setup times and vacations under six different service disciplines. *Queueing Systems* **39**, 265–301.
- [11] Borthakur, A. and Choudhury, G. (1999) A multiserver Poisson queue with a general startup time under N -Policy. *Calcutta Statistical Association Bulletin* **49**, 199-213.
- [12] Boucherie, R.J. and van Dijk, N.M. (1993) A generalization of Norton's theorem for queueing networks. *Queueing Systems* **13**, 251–289.
- [13] Boucherie, R.J. and van Dijk, N.M. (1997) On the arrival theorem for product form queueing networks with blocking. *Performance Evaluation* **29**, 155–176.
- [14] Boxma, O.J. and de Waal, P.R. (1994) Multiserver queues with impatient customers. *ITC* **14**, 743–756.
- [15] Brockwell, P.J. (1986) The extinction time of a general birth and death process with catastrophes. *Journal of Applied Probability* **23**, 851–858.
- [16] Brockwell, P.J., Gani, J. and Resnick, S.I. (1982) Birth, immigration and catastrophe processes. *Advances in Applied Probability* **14**, 709–731.
- [17] Burnetas, A. and Economou, A. (2007) Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. *Queueing Systems* **56**, 213–228.
- [18] Chao X., Miyazawa M., Pinedo M. (1999) *Queueing Networks: Customers, Signals and Product Form Solutions*. Wiley, Chichester.
- [19] Choudhury, G. (1998) On a batch arrival Poisson queue with a random setup and vacation period. *Computers and Operations Research* **25**, 1013–1026.

- [20] Choudhury, G. (2000) An $M^X/G/1$ queueing system with a setup period and a vacation period. *Queueing Systems* **36**, 23–38.
- [21] Daley, D.J. (1965) General customer impatience in the queue $GI/G/1$. *Journal of Applied Probability* **2**, 186–205.
- [22] Di Crescenzo, A., Giorno, V., Krishna Kumar, B. and Nobile, A.G. (2011) A double-ended queue with catastrophes and repairs, and a jump-diffusion approximation. *Methodology and Computing in Applied Probability* DOI: 10.1007/s11009-011-9214-2.
- [23] Di Crescenzo, A., Giorno, V., Nobile, A.G. and Ricciardi, L.M. (2003) On the $M/M/1$ queue with catastrophes and its continuous approximation. *Queueing Systems* **43**, 329–347.
- [24] Dimou, S. and Fakinos, D. (2011) Equilibrium results for the $M/G/k$ group-arrival loss system. *TOP* DOI: 10.1007/s11750-010-0168-2.
- [25] Dimou, S., Economou, A. and Fakinos, D. (2011) The single server vacation queueing model with geometric abandonments. *Journal of Statistical Planning and Inference* **141**, 2863–2877.
- [26] Dimou, S. and Economou, A. (2011) The single server queue with catastrophes and geometric reneging. *Methodology and Computing in Applied Probability* DOI: 10.1007/s11009-011-9271-6.
- [27] Economou, A. (2004) The compound Poisson immigration process subject to binomial catastrophes. *Journal of Applied Probability* **41**, 508–523.
- [28] Economou, A. and Fakinos, D. (1998) Product form stationary distributions for queueing networks with blocking and rerouting. *Queueing Systems* **30**, 251–260.
- [29] Economou A., Fakinos D. (1999) Product form stationary distributions for the $M/G/k$ group-arrival group-departure loss system under a general acceptance policy. *E J Oper Res* **112**, 196–206.

- [30] Economou, A. and Fakinos, D. (2003) A continuous-time Markov chain under the influence of a regulating point process and applications in stochastic models with catastrophes. *European Journal of Operational Research* **149**, 625–640.
- [31] Economou, A. and Fakinos, D. (2008) Alternative approaches for the transient analysis of Markov chains with catastrophes. *Journal of Statistical Theory and Practice* **2**, 183–197.
- [32] Economou, A. and Gomez-Corral, A. (2007) The batch Markovian arrival process subject to renewal generated geometric catastrophes. *Stochastic Models* **23**, 211–233.
- [33] Economou, A. and Kapodistria, S. (2009) Q-series in Markov chains with binomial transitions: studying a queue with synchronization. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **23**, 75–99.
- [34] Economou, A. and Kapodistria S. (2010) Synchronized abandonments in a single server unreliable queue. *European Journal of Operational Research* **203**, 143–155.
- [35] Elaydi, S.N. (1999) *An Introduction to Difference Equations. Second Edition*. Springer-Verlag, New York.
- [36] Erlang, A. (1917) Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges. *Post Office Electrical Engineer's Journal* **10**, 189–197.
- [37] Fakinos D (1982) The M/G/k group-arrival group-departure loss system. *J Appl Prob* **19**, 826–834.
- [38] Fakinos D (1990) On the M/G/k group-arrival loss system. *E J Oper Res* **44**, 75–83.
- [39] Fakinos D (1990) On the relation between partial balance and insensitivity. *Adv Appl Prob* **18**, 706–723.

- [40] Fakinos, D. (1991) The relation between limiting queue size distributions at arrival and departure epochs in a bulk queue. *Stoch. Prob. Appl.* **37**, 327–329.
- [41] Fakinos D, Sirakoulis K (1989) Product-form distributions for an M/G/k group-arrival group-departure loss system. *Adv Appl Prob* **21**, 721–724.
- [42] Falin, G. (1996) A heterogeneous blocking system in a random environment. *Adv. Appl. Prob.* **33**, 211–216.
- [43] Falin, G. and Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. Chapman and Hall/CRC.
- [44] Gail, H.R., Hantler, S.L. and Taylor, B.A. (2000) Use of characteristic roots for solving infinite state Markov chains. In *Computational Probability*, ed. W.K. Grassmann, 205–255, Kluwer.
- [45] Gani, J. and Swift, R.J. (2007) Death and birth-death and immigration processes with catastrophes. *Journal of Statistical Theory and Practice* **1**, 39–48.
- [46] Hanson, F.B. and Tuckwell, H.C. (1997) Population growth with randomly distributed jumps. *Journal of Mathematical Biology* **36**, 169–187.
- [47] He, Q.M. and Jewkes, E. (1995) Flow time in the MAP/G/1 queue with customer batching and setup times. *Stochastic Models* **11**, 691–711.
- [48] Hordijk, A. and van Dijk, N.M. (1981) *Networks of Queues with Blocking Performance* 81, (ed K. Kylstra), North Holland.
- [49] Hordijk, A. and van Dijk, N.M. (1983) Networks of Queues. *Proceedings of the International Seminar on Modelling and Performance Evaluation Methodology*, INRIA, **1**, 79–135.
- [50] Hordijk, A. and van Dijk, N.M. (1983) Adjoint Processes, Job Local Balance and Insensitivity for Stochastic Networks. *Bulletin of the 44th Session International Statistical Institute* **50**, 776–788.

- [51] Jansen, U. and König, D. (1980) Insensitivity and Steady-State Probabilities in Product Form for Queueing Networks. *Elektronische Informationsverarbeitung Kybernetik* **16**, 385–397.
- [52] Kelly, F.P. (1976) Networks of Queues. *Advances in Applied Probability* **8**, 416–432.
- [53] Kelly FP (1979) *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, New York.
- [54] Krinik, A., Rubino, G., Marcus, D., Swift, R., Kasfy, H. and Lam, H. (2005) Dual processes to solve single server systems. *Journal of Statistical Planning and Inference* **135**, 121-147.
- [55] Krishna Kumar, B. and Arivundainambi, D. (2000) Transient solution of an $M/M/1$ queue with catastrophes. *Computers and Mathematics with Applications* **40**, 1233–1240.
- [56] Krishna Kumar, B. and Pavai Madheswari, S. (2003) Transient solution of an $M/M/2$ queue with catastrophes. *Mathematical Scientist* **28**, 129–136.
- [57] Krishna Kumar, B., Krishnamoorthy, A., Pavai Madheswari, S. and Sadiq Basha, S. (2007) Transient analysis of a single server queue with catastrophes, failures and repairs. *Queueing Systems* **56**, 133–141.
- [58] Kulkarni, V.G. (1995) *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Chapman and Hall.
- [59] Kyriakidis, E.G. (1994) Stationary probabilities for a simple immigration-birth-death process under the influence of total catastrophes. *Statistics and Probability Letters* **20**, 239–240.
- [60] Lee, C. (2000) The density of the extinction probability of a time homogeneous linear birth and death process under the influence of randomly occurring disasters. *Mathematical Biosciences* **164**, 93–102.
- [61] Little, J.D.C. (1961) A proof for the queueing formula: $L = \lambda W$. *Oper. Res.* **9**, 383–387.

- [62] López-Herrero, M.J. and Neuts, M.F. (2002) The distribution of the maximum orbit size of an $M/G/1$ retrial queue during the busy period. In *Advances in Stochastic Modelling*, eds. J.R. Artalejo J.R. and A. Krishnamoorthy, 219–231, Notable Publications Inc., NJ.
- [63] Mandelbaum, A. and Zeltyn, S. (2006) Service Engineering in Action: The Palm/Erlang-A queue, with applications to call centers. In *Advances in Services Innovations*, eds. D. Spath and K.-P. Fahrnich, 17–45, Springer.
- [64] Mandelbaum, A. and Zeltyn, S. (2009) The $M/M/n + G$ queue: Summary of performance measures. *Preprint*.
- [65] Neuts, M.F. (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [66] Neuts, M.F. (1989) *Structured Stochastic Matrices of $M/G/1$ Type and Their Applications*. Marcel Dekker, New York.
- [67] Neuts, M.F. (1994) An interesting random walk on the non-negative integers. *Journal of Applied Probability* **31**, 48–58.
- [68] Noetzel, A. (1976) A Generalized Queueing Discipline for Product Form Queueing Networks. *Journal of the Association for Computing Machinery* **26**, 779–793.
- [69] Palm, C. (1953) Methods of judging the annoyance caused by congestion. *Tele* **4**, 189–208.
- [70] Palm, C. (1957) Research on telephone traffic carried by full availability groups. *Tele* **1**, 107. (English translation of results first published in 1946 in Swedish in the same journal, which was then entitled *Tekniska Meddelanden fran Kungl. Telegrafstyrelsen*).
- [71] Serfozo, R.F. (1988) Extreme values of birth and death processes and queues, *Stochastic Processes and their Applications* **27**,) 291–306.

- [72] Sevastyanov, B. (1957) An Ergodic Theorem for Markov Processes and its Application to Telephone Systems with Refusals. *Theory of Probability and its Applications* **2**, 104–112.
- [73] Stirzaker, D. (2006) Processes with catastrophes. *Mathematical Scientist* **31**, 107–118.
- [74] Sztrik, J. (1987) On the heterogeneous M/G/n blocking system in a random environment. *J. Oper. Res. Soc.* **38**, 57–63.
- [75] Takacs, L. (1969) On Erlang's Formula. *Annals of Mathematical Statistics* **40**, 71–78.
- [76] Takacs, L. (1974) A single-server queue with limited virtual waiting time. *Journal of Applied Probability* **11**, 612–617.
- [77] Takagi, H. (1991) *Vacation and Priority Systems. Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation, vol. 1.* North-Holland, New York.
- [78] Taylor, P.G. (2011) Insensitivity in Stochastic Models. *Queueing Networks* **154**, 121–140.
- [79] Tian, N. and Zhang, Z.G. (2006) *Vacation Queueing Models: Theory and Applications.* Springer, New York.
- [80] van Dijk, N.M. (1993) *Queueing Networks and Product Forms: A System Approach.* New York: Wiley.
- [81] Visschers, J.W.C.H. (2000) *Random Walks with Geometric Jumps.* PhD Thesis, Technical University of Eindhoven.
- [82] Whittle P (1986) Partial balance, insensitivity and weak coupling. *Adv Appl Prob* **18**, 706–723.
- [83] Wolff, R.W. (1982) Poisson arrivals see time averages. *Operat. Res.* **30**, 619–635.

-
- [84] Wolff RW (1989) *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Prentice-Hall, NJ.
- [85] Yechiali, U. (2007) Queues with system disasters and impatient customers when system is down. *Queueing Systems* **56**, 195–202.