



ΜΗ ΑΒΕΛΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙΟΝΕΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΓΙΑ
ΠΛΑΣΜΑ ΓΛΟΥΤΟΝΙΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Από

Πολίτης Ελευθέριος
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Οκτώβριος 2014

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Μη Αβελιανό μοντέλο οιονεί-σωματιδίων για πλάσμα γλουονίων

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

Πολίτης Ελευθέριος

A.M.: 201035

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ: Φώτιος Διάκονος

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Φώτιος Διάκονος

Ξάνθος Μαϊντάς

Αντώνης Τσάπαλης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 10/10/2014

Περίληψη

Διατυπώνεται ένα μοντέλο για την περιγραφή των θερμικών ιδιοτήτων γλουονίων στηριζόμενο σε ακριβείς κλασικές λύσεις επιπέδων κυμάτων της Yang-Mills θεωρίας που επιδέχονται ερμηνεία οιονεί σωματιδίων μεταβλητής μάζας. Το προτεινόμενο μοντέλο είναι ελεύθερο από θερμοδυναμικές ασυνέπειες και παρουσιάζει αξιοσημείωτη συμβατότητα με αποτελέσματα στο Πλέγμα για την καταστατική εξίσωση του πλάσματος γλουονίων.

Αφιερώνω την παρούσα εργασία στον πατέρα μου Πολίτη Παναγιώτη

Ευχαριστίες

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, στο Τμήμα Φυσικής και συγκεκριμένα στον Τομέα της Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων κατά το έτος 2014.

Η ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας θα ήταν αδύνατη χωρίς την πολύτιμη υποστήριξη του καθηγητή μου, Αναπληρωτή Καθηγητή Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του ΕΚΠΑ Κο Φώτιο Διάκονο, σε όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, τον κ. Ξάνθο Μαϊντά, Επίκουρο Καθηγητή Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του ΕΚΠΑ και τον κ. Αντώνη Τσάπαλη Επίκουρο Καθηγητή της ΣΝΔ για την ιδιαίτερη σημασία που έδωσαν στην εργασία μου καθώς και τις σημαντικές υποδείξεις τους. Οφείλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του ΕΚΠΑ κ. Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη του Πανεπιστημίου Αθηνών που μου υπέδειξε κάποιες σημαντικές τεχνικές στο επιστημονικό πρόγραμμα “Mathematica”.

Ευχαριστώ τους συναδέλφους μου Χαρίλαο Τσαγκαράκη καθώς και Γαρυφαλιά Κατσιμίγα για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους καθώς και την ευχάριστη και αρμονική συνεργασία που έχουμε αναπτύξει. Ευχαριστώ τον φίλο μου Σπυρίδων Ραπτοτάσιο υποψήφιο διδάκτορα του Μετσόβειου Πολυτεχνείου Αθηνών καθώς και την κοπέλα μου Στυλιανή Χωριανοπούλου για την καταλυτική βοήθεια της και τις εύστοχες υποδείξεις της. Τέλος είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Παναγιώτη και Ευστρατία Πολίτη καθώς και στον αδερφό μου Ιωάννη, για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
	Introduction	1
1.1	Θεωρίες Βαθμίδας	1
1.1.1	Αβελιανή $U(1)$ θεωρία	1
1.1.2	Μη Αβελιανή θεωρία $SU(N)$	2
1.1.3	Μηδενική θερμοκρασία	3
1.2	$SU(N)$ σε πεπερασμένη θερμοκρασία	5
1.2.1	Κβαντική περιγραφή	5
1.2.2	Πλέγμα (Lattice)	7
2	Το μοντέλο των οιονεί-σωματιδίων	12
2.1	Εισαγωγή	12
2.1.1	Καθιερωμένη στατιστική περιγραφή	12
2.1.2	Θερμοδυναμική ασυνέπεια στα μοντέλα οιονεί-σωματιδίων	13
2.1.3	Το μοντέλο των οιονεί-σωματιδίων	15
2.2	Το αναθεωρημένο μοντέλο οιονεί-σωματιδίων	16
2.2.1	Η βασική ιδέα του αναθεωρημένου μοντέλου οιονεί σωματιδίων	16
2.3	Συμπεράσματα	23
3	Στάσιμες λύσεις της $SU(2)$ θεωρίας	25
3.1	Προγενέστερες μελέτες - λύσεις	25
3.1.1	Μελέτη λύσεων στον Ευκλείδιο χώρο	25
3.1.2	Επίπεδα κύματα στον χώρο Minkowski	27
3.2	Λύσεις επίπεδων κυμάτων σε μη Αβελιανή θεωρία	30
3.2.1	Εξισώσεις κίνησης	30
3.3	Η μάζα ως στοχαστική μεταβλητή	33
4	Διατύπωση του αναθεωρημένου μοντέλου qP	34
4.1	Η μάζα ως κατανομή	34

4.2	Η ελεύθερη ενέργεια	36
4.3	Εύρεση της μέσης πυκνότητας ενέργειας και πίεσης	38
4.4	Σύνοψη-Συμπεράσματα	43

Λίστα Γραφημάτων

1.1	Πλέγμα	7
1.2	Πυκνότητα ενέργειας	9
1.3	Μέση πίεση	10
2.1	Μέση πίεση και πυκνότητα ενέργειας	22
3.1	Η Ιακωβιανή συνάρτηση	33
4.1	Η συνάρτηση $\text{Erf}(x)$	35
4.2	Πυκνότητα ενέργειας	39
4.3	Μέση πίεση	39
4.4	Μέση μάζα	41
4.5	Η μέση μάζα και η διασπορά	42

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Θεωρίες Βαθμίδας

Οι θεωρίες βαθμίδας αποτελούν μια ειδική κατηγορία των θεωριών πεδίου, οι οποίες βασίζονται στην αρχή της βάρθρωσης. Η αρχή της βάρθρωσης είναι η απαίτηση μια θεωρία να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Ως παράδειγμα θεωρίας πεδίου βαθμίδας θα χρησιμοποιηθεί η Ηλεκτροδυναμική, η οποία είναι μία Αβελιανή θεωρία βαθμίδας.

1.1.1 Αβελιανή U(1) θεωρία

Στον ηλεκτρομαγνητισμό το πεδίο βαθμίδας είναι το A_μ το οποίο είναι ένα άνυσμα ως προς την ομάδα Poincare και δεν έχει περαιτέρω βαθμούς ελευθερίας. Η θεωρία περιέχει και πεδία ύλης που περιγράφονται από το μιγαδικό πεδίο $\psi(x)$. Τα σωματίδια αυτά, έχουν φορτίο q και μάζα m . Ο μετασχηματισμός βαθμίδας που αφήνει αναλλοίωτη την θεωρία (συμμετρία βαθμίδας), είναι ο ακόλουθος:

Για το πεδίο ύλης:

$$\tilde{\psi}(x) = e^{i \cdot q \cdot \theta(x)} \cdot \psi(x)$$

Για το πεδίο βαθμίδας

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + q \cdot \partial_\mu \theta(x)$$

Εφόσον η θ έχει εξάρτηση από το x , οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι τοπικοί. Ο

πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής του ηλεκτρομαγνητισμού που παραμένει αναλλοίωτος ως προς τον παραπάνω μετασχηματισμό βαθμίδας είναι ίσος με:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Τέλος η αναλλοίωτη δράση Dirac που συζεύγνει το πεδίο βαθμίδας με τα φερμιονικά πεδία, (πεδία ύλης) είναι η ακόλουθη:

$$s = \bar{\psi}(g \cdot A_\mu \cdot \gamma^\mu + i \cdot \partial_\mu \gamma^\mu)\psi$$

1.1.2 Μη Αβελιανή θεωρία SU(N)

Στην περίπτωση της μη Αβελιανής θεωρίας υπάρχει διαφοροποίηση, αφού τα πεδία είναι και ανύσματα ως προς μια πρόσθετη (εσωτερική) ομάδα συμμετρίας που συνδέεται με τον μετασχηματισμό βαθμίδας. Τα πεδία αυτά μετασχηματίζονται κάτω από έναν πίνακα U . Συγκεκριμένα, για το πεδίο ύλης ισχύει ο ακόλουθος μετασχηματισμός:

$$\tilde{\psi}(x) = U \cdot \psi(x)$$

όπου: $U = e^{i \cdot \xi^a(x) \cdot \tau^a}$

Τα τ^a είναι οι γεννήτορες της εκάστοτε υπό μελέτη ομάδας ενώ ο δείκτης a αντιστοιχεί στον δείκτη της άλγεβρας Lie. Για το πεδίο βαθμίδας θα ισχύει:

$$\tilde{A}_\mu = U A_\mu U^{-1} + i \cdot (\partial_\mu U) U^{-1}$$

Στην παρακάτω εργασία θα μελετηθεί η αλληλεπίδραση των γλουονίων χωρίς πεδία ύλης. Επομένως, η γενική μορφή της λαγκρατζιανής του συστήματος που περιέχει μόνο το πεδίο βαθμίδας θα είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (1.1)$$

όπου:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g \cdot f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Ο παραπάνω τανυστής μετασχηματίζεται ως ακολούθως:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}$$

με:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \tau^a = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \lambda^a$$

όπου λ^a οι πίνακες Gell-Mann οι οποίοι είναι οι γεννήτορες της $SU(3)$ άλγεβρας.

Παρατηρήσεις

- Ο όρος: $g \cdot f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ προέρχεται από την **μη Αβελιανή δομή** και είναι υπεύθυνος για την μη γραμμικότητα της θεωρίας.
- Στην περίπτωση της $SU(2)$, η σταθερά δομής f_{abc} γίνεται ίση με τον γνωστό τανυστή ϵ_{abc} ο οποίος, συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία και ως πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τρίτης τάξεως.

1.1.3 Μηδενική θερμοκρασία

Το καθιερωμένο πρότυπο (standard model) βασίζεται σε τοπικές μη Αβελιανές συμμετρίες. Συγκεκριμένα περιγράφεται από την ομάδα συμμετρίας:

$$SU(2)_L \otimes U(1) \text{ (ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις)} \otimes SU(3)_c \text{ (ισχυρές αλληλεπιδράσεις)}$$

Η κβαντική χρωμοδυναμική είναι η θεωρία με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των quarks και των γλουονίων, με σκοπό την δημιουργία μεγαλύτερων δομών, όπως είναι τα αδρόνια. Η θεωρία αυτή είναι μια μη Αβελιανή θεωρία βαθμίδας. Η ομάδα που περιγράφει τις συμμετρίες της θεωρίας αυτής είναι η $SU(3)_c$. Η ισχυρή αλληλεπίδραση στην περίπτωση που η θερμοκρασία είναι μηδενική, παρουσιάζει δύο πολύ σημαντικά φαινομενολογικά χαρακτηριστικά:

- **Παγίδευση (Confinement)**

Η ομάδα $SU(3)$ έχει $3^2 - 1 = 8$ γεννήτορες (T^a) και σε κάθενα από αυτούς αντιστοιχεί ένα γλουονικό πεδίο A_μ^a , τα οποία αλληλεπιδρούν ισχυρά μεταξύ τους. Επίσης τα γλουόνια είναι φορείς της δύναμης μεταξύ των χρωματισμένων σωματίων ύλης (quarks). Έχει παρατηρηθεί ότι τα φορτία ύλης αλλά και οι φορείς οι ίδιοι, αλληλεπιδρούν με τέτοιο τρόπο ώστε να μην μπορούν να εμφανιστούν σαν ελεύθερες καταστάσεις στην φύση. Αντίθετα, οι καταστάσεις τους είναι πάντα δέσμιες και χαρακτηρίζονται από ουδέτερο χρωματικό φορτίο. Επιπλέον, ακόμα και στην περίπτωση που η ενέργεια παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές, με τη σταθερά σύζευξης να γίνεται περισσότερο ασθενική, δεν παρατηρούνται καταστάσεις που να χαρακτηρίζονται από καθορισμένο χρωματικό φορτίο. Δηλαδή οι θεμελιώδεις βαθμοί ελευθερίας της θεωρίας (quarks, gluons) εμφανίζονται πάντοτε ως παγιδευμένοι στις δέσμιες καταστάσεις των αδρονίων. Το βαθύτερο αίτιο της παγίδευσης, δηλαδή της μη παρατήρησης καταστάσεων που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένο χρωματικό φορτίο, οφείλεται στο γεγονός ότι δεν αλλάζει η δομή του κενού χωρίς αλλαγή της θερμοκρασίας ή/και της πυκνότητας. Επομένως στην περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας οι αδρονικές καταστάσεις αποτελούν το βασικό φάσμα της θεωρίας.

- **Ασυμπτωτική ελευθερία (Asymptotic freedom)**

Όπως προαναφέρθηκε όσο αυξάνεται η ενέργεια, η σταθερά αλληλεπίδρασης γίνεται όλο και περισσότερο ασθενική, με αποτέλεσμα τα γλουόνια σε μια τέτοια ενεργειακή περιοχή να συμπεριφέρονται σχεδόν ως ελεύθερα, φαινόμενο που χαρακτηρίζεται ως Ασυμπτωτική Ελευθερία. Το γεγονός αυτό μας δίνει την δυνατότητα της εφαρμογής διαταρακτικών μεθόδων, σε ενέργειες αρκετά υψηλές, λόγω του ότι η σταθερά σύζευξης είναι ασθενική. Ωστόσο και σ' αυτή την περίπτωση οι δέσμιες καταστάσεις χαρακτηρίζονται από ουδέτερο χρωματικό φορτίο.

Στην περίπτωση που η ενέργεια παίρνει όλο και μικρότερες τιμές, η σταθερά αλληλεπίδρασης αυξάνεται με αποτέλεσμα ο αναλυτικός υπολογισμός του προβλήματος να καθίσταται αδύνατος. Αρχικά, το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε με πειράματα που πραγματοποιήθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του '60. Η θεωρητική ερμηνεία της

ασυμπτωτικής ελευθερίας ήρθε αργότερα από τους David Politzer, Frank Wilczek και David Gross [4], όπου βραβεύτηκαν και με το βραβείο Nobel το 2004.

1.2 SU(N) σε πεπερασμένη θερμοκρασία

Φαινομενολογική σημασία για πεπερασμένη θερμοκρασία

Όταν οι θερμοκρασίες είναι αρκετά υψηλές (της τάξης των 200 MeV¹), παρατηρείται μία αλλαγή φάσης κατά την οποία οι χρωματικοί βαθμοί των γλουονίων μπορούν να απελευθερωθούν. Οι καταστάσεις αυτές συμπεριφέρονται σχεδόν ως ελεύθερες μέσα σε ένα μέσο, γνωστό και ως QGP. Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται και ως απεγκλωβισμός (Deconfinement).

Η αλλαγή φάσης που παρατηρείται για πεπερασμένη θερμοκρασία στηρίζεται σε μια αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας η οποία οδηγεί με την σειρά της σε μια νέα δομή κενού. Το φαινόμενο αυτό δεν μπορεί να επιτευχθεί μόνο από την ενέργεια, απουσία του παράγοντα θερμοκρασίας από την θεωρία αφού κάτι τέτοιο θα οδηγούσε αποκλειστικά σε ασθενέστερη αλληλεπίδραση όπως προαναφέρθηκε.

1.2.1 Κβαντική περιγραφή

Στην παρούσα ενότητα επιδιώκεται να μελετηθεί μια “Καθαρή” θεωρία βαθμίδας (χωρίς πεδία ύλης). Η λαγκραντζιανή η οποία περιγράφει την θεωρία αυτή, θα δίνεται από την σχέση: 1.1. Προκειμένου να περιγραφεί κβαντικά η θεωρία αυτή, θα πρέπει αρχικά να υπολογιστεί το ακόλουθο συναρτησιακό ολοκλήρωμα:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \cdot \delta(\partial_\mu A^{a,\mu}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} S_M[A_\mu^a] - i \int J_\mu^a A^{\mu a}} \quad (1.2)$$

Όπου το συναρτησοειδές Z αποτελεί τον γεννήτορα για το υπολογισμό των συναρτήσεων Green της θεωρίας. Συγκεκριμένα το συναρτησοειδές Z “γεννάει” και τις συνεκτικές αλλά και τις μη συνεκτικές συναρτήσεις Green. Επομένως με βάση την κβαντική θεωρία πεδίου, σύμφωνα με την σχέση:

$$-i \cdot \ln(Z[J]) = W[J]$$

¹ Το MeV είναι μονάδα μέτρησης της ενέργειας. Όμως σύμφωνα με την σχέση: $E = k_b \cdot T$ η ενέργεια των 200 MeV αντιστοιχεί σε θερμοκρασία της τάξεως των 2.000.000.000.000 βαθμών Kelvin!!!.

παραμένουν μόνο οι συνεκτικές συναρτήσεις Green.

Εντούτοις, ο υπολογισμός της σχέσης (1.2) είναι πολύ περίπλοκος και πρακτικά αδύνατος χωρίς σημαντικές προσεγγίσεις. Ακόμα και σε μία προσπάθεια υπολογισμού του με χρήση διαταρακτικών μεθόδων εμφανίζονται πολυπλοκότητες, (λόγω της εφαρμογής της επιλογής βαθμίδας $\partial_\mu A^{\mu,a}$), όπως τα σωματίδια “φάντασμα” που ενώ είναι βαθμωτά ως προς τους μετασχηματισμούς Poincare ακολουθούν την στατιστική των φερμιονίων με αποτέλεσμα η θεωρία να διατηρεί την μοναδιακότητα (**Ghosts**) [12]. Επιπλέον σε μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας εμφανίζεται η ακόλουθη δυσκολία. Η επιλογή των πεδίων που θα θεωρούνταν διαφορετικά, μέσω των ολοκληρωμάτων διαδρομής, στην ουσία θα ήταν τα ίδια, αφού με την χρήση ενός κατάλληλου μετασχηματισμού βαθμίδας θα υπήρχε η δυνατότητα μετάβασης από το ένα πεδίο στο άλλο. Η παραπάνω διαδικασία θα είχε ως άμεση συνέπεια το συναρτησιακό ολοκλήρωμα να κατέληγε σε πολλαπλές μορφές-αντιγραφές του ίδιου αποτελέσματος. Ο πυρήνας της παραπάνω δυσκολίας έγγειται στον συνδιασμό της ελευθερίας βαθμίδας που περιέχει το γλουονικό πεδίο και της μη γραμμικότητας της θεωρίας. Το πρόβλημα αυτό, καλείται στην βιβλιογραφία ως **Gribov copies** [10].

Η συνάρτηση επιμερισμού

Από το προαναφερθέν συναρτησιακό ολοκλήρωμα δεν μπορούμε να αντλήσουμε θερμοδυναμικές ιδιότητες του γλουονικού πεδίου. Προκειμένου να εξαχθούν τα θερμοδυναμικά μεγέθη, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η “κατασκευή” της συνάρτησης επιμερισμού. Για αυτό τον σκοπό απαιτείται αρχικά ένας μετασχηματισμός στην χρονική μεταβλητή:

$$t \rightarrow -i \cdot \tau$$

που καλείται και στροφή Wick (Wick rotation).

Με την επιλογή του παραπάνω μετασχηματισμού η μετρική από Minkowski γίνεται Ευκλείδεια. Επιπλέον την νέα (φανταστική) χρονική διάσταση την περιορίζουμε στο διάστημα από μηδέν έως β (όπου $\beta = \frac{1}{k \cdot T}$).

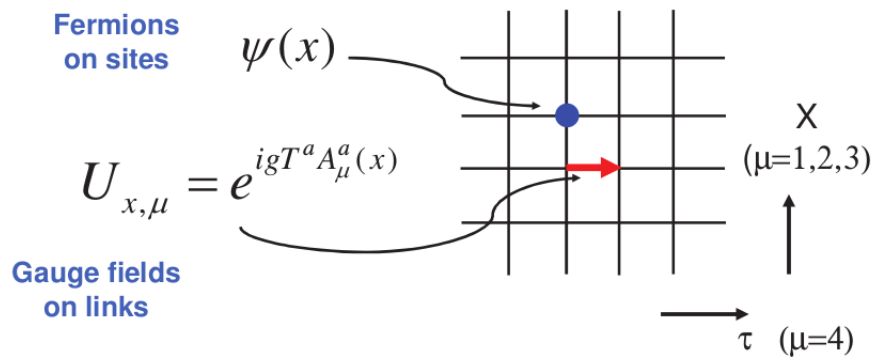
Επομένως, σύμφωνα με την τεχνική αυτή, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z[J] \rightarrow Z = \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \cdot e^{-\int_0^\beta (d^3x) \cdot (d\tau) \cdot \mathcal{L}_E[A_\mu^a]}$$

Επιπρόσθετα ο αναλυτικός υπολογισμός της συνάρτησης επιμερισμού καθίσταται αδύνατος, επειδή φέρει όλες τις δυσκολίες του συναρτησιακού ολοκληρώματος που αναφέρθηκαν και πιο πάνω.

Προκειμένου λοιπόν να εξαχθεί, προβαίνουμε σε αριθμητικό υπολογισμό με την βοήθεια του Πλέγματος.

1.2.2 Πλέγμα (Lattice)



Γράφημα 1.1: Πλέγμα

Οριζόντιος άξονας=χρονική συνιστώσα, κατακόρυφος=χωρικές συνιστώσες. Κόμβοι=πεδία ύλης (φερμιόνια), Σύνδεσμοι διαδοχικών κόμβων=πεδία βαθμίδας.

Η βασική συλλογιστική μιας πλεγματοτικής θεωρίας απαρτίζεται από τα ακόλουθα βήματα:

- Αρχικά επιτελείται μια Wick rotation της συνεχούς θεωρίας προκειμένου ο χωρόχρονος να μετατραπεί από Minkowski σε Ευκλείδιο. Επομένως η μετρική πλέον παίρνει την μορφή $diag [1, 1, 1, 1]$.
- Έπειτα διακριτοποιείται ο Ευκλείδιος χωρόχρονος σε ένα ισοτροπικό πλέγμα με σταθερά πλεγματοτικής απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων ίση με a . Συνεπώς η Poincare συμμετρία σπάει. Τελικά η πλεγματοτική σταθερά a θα πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερη για την αποκατάσταση της συμμετρίας αυτής με σκοπό να συγκλίνει με τα αποτελέσματα της συνεχούς θεωρίας στην οποία θέλουμε να έχουμε την δυνατότητα προβλέψεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ισοτροπικότητα του πλέγματος επιλέγεται στην περίπτωση που μελετάμε μια θεωρία μηδενικής θερμοκρασίας. Από την άλλη για θεωρίες με πεπερασμένη θερμοκρασία

δεν υπάρχει αυτή η ισοτροπία για τεχνικούς λόγους. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει διαφορετική σταθερά πλεγματικής απόστασης για την χρονική συνιστώσα από αυτή των χωρικών συνιστωσών (x,y,z).

- Σειρά έχει η διακριτοποίηση της συνεχούς δράσης με τρόπο ώστε η θεωρία βαθμίδας να παραμένει ακριβής στο πλέγμα. Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας τα γλουονικά πεδία σε μορφή SU(3) πινάκων πάνω στο σύνδεσμο που συνδέει δύο διαδοχικούς κόμβους του πλέγματος. Έτσι, η αναλλοίωτη SU(N) δράση σχηματίζεται από μια πλακέτα διαδοχικών συνδέσμων όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, ιδέα που αναπτύχθηκε από τον Wilson [18].

$$\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

↓

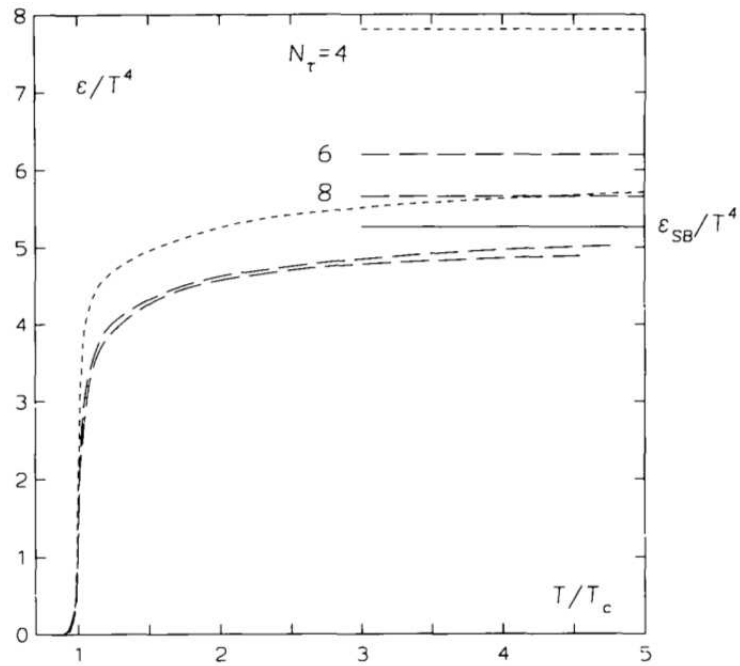
$$1 - \frac{1}{6} \{ \text{Tr} [U_1 U_2 U_3^+ U_4^+] + h.c. \}$$

Plaqueette gauge action

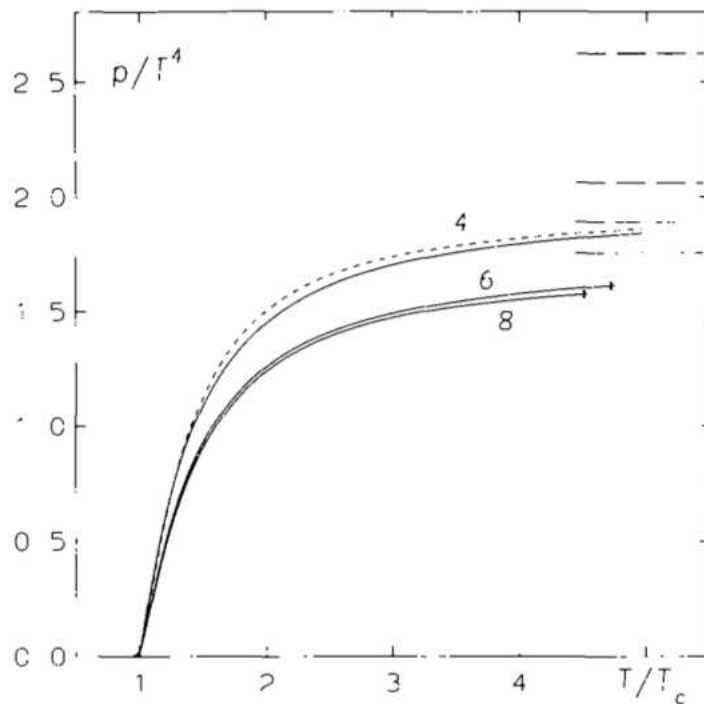
- Τέλος οι μεταβλητές που προσδιορίζουν το μέγεθος του πλέγματος είναι η διάσταση L σε κάθε μια από τις χωρικές συνιστώσες, το μέγεθος N_T για την χρονική συνιστώσα καθώς και η πλεγματική σταθερά a. Στην περίπτωση που μελετάται μια θεωρία με μηδενική θερμοκρασία η διάσταση του χρόνου ταυτίζεται με τις άλλες τρεις χωρικές διαστάσεις του πλέγματος επομένως η συνολική διάσταση θα είναι ίση με L^4 . Ολοκληρώνοντας, για να είναι αντιπροσωπευτικά τα αποτελέσματα του Πλέγματος με την συνεχή θεωρία θα πρέπει όσο είναι δυνατόν, (λόγω πεπερασμένης υπολογιστικής ισχύς) το μέγεθος L να τείνει στο άπειρο ενώ η πλεγματική σταθερά a να τείνει στο μηδέν.

Αλλαγή φάσης απεγκλωβισμού στο Πλέγμα

Σύμφωνα με την παραπάνω συλλογιστική επιτυγχάνεται η αριθμητική επίλυση της συνάρτησης επιμερισμού με την βοήθεια του Πλέγματος [11, 6]. Με δεδομένο την εύρεση της συνάρτησης επιμερισμού μπορούν στην συνέχεια να παραχθούν όλες οι θερμοδυναμικές ποσότητες του υπό μελέτη συστήματος. Παρακάτω απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της πυκνότητας της ενέργειας καθώς και της μέσης πίεσης [7] στην περίπτωση της καθαρής $SU(3)_c$ θεωρίας χωρίς φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας που αποτελεί ένα πρότυπο μοντέλο για την περιγραφή του πλάσματος γλουονίων.



Γράφημα 1.2: Πυκνότητα ενέργειας
Πυκνότητα ενέργειας βαθμιασμένη προς την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας για σειρές πλεγμάτων με $N_T = 4, 6, 8$ σημεία. πηγή: [7]



Γράφημα 1.3: Μέση πίεση

Μεση πίεση βαθμιομένη ως προς την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας πηγή: [7]

Συμπεράσματα

- Μελετώντας την γραφική παράσταση της πίεσης ως προς την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας, παρατηρούμε πως το αέριο αρχικά ($T < T_c$) ξεκινάει από μια κατάσταση συμπυκνώματος ($p=0$). Στην κατάσταση αυτή, τα γλουονικά πεδία είναι παγιδευμένα, οπότε η φυσική κατάσταση (glueballs) χαρακτηρίζεται από ουδέτερο χρωματικό φορτίο.
- Υπάρχει κάποια κρίσιμη θερμοκρασία T_c στην οποία εμφανίζεται πίεση ($P>0$) και άρα θερμοδυναμική συμπεριφορά
- Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία ($T \gg T_c$), ο λόγος P/T^4 τείνει να σταθεροποιηθεί και το αέριο στην περιοχή αυτή προσεγγίζει ποιοτικά το ιδανικό αέριο. Σε αυτό το θερμοκρασιακό εύρος παρατηρείται ο λεγόμενος απεγκλωβισμός (deconfinement). Στην κατάσταση αυτή τα γλουονικά πεδία μπορούν να εμφανιστούν σαν ασυμπτωτικά ελεύθερες καταστάσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένο χρωματικό φορτίο. Εν τούτοις, παρατηρώντας την γραφική απεικόνιση προκύπτει

το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια αρκετά σημαντική απόκλιση μεταξύ αυτής του ιδανικού αερίου και του γλουονικού πλάσματος λόγω της μη ιδανικής συμπεριφοράς του ακόμα και για θερμοκρασίες πέντε φορές μεγαλύτερες της κρίσιμης. Αξίζει να σημειωθεί ότι για το αέριο φωτονίων σε μια Αβελιανή θεωρία ο λόγος P/T^4 θα ήταν σταθερός λόγω του νόμου Stefan Boltzmann. Συνεπώς αναμένεται η σταθερά αυτή, στην περίπτωση της Αβελιανής θεωρίας που ισχύει η εικόνα του ιδανικού αερίου, να καθορίζεται από το πλήθος των spin-χρωματικών βαθμών ελευθερίας.

- Η σημαντική απόκλιση που παρατηρείται στην γραφική παράσταση σε σχέση με το ιδανικό θερμικό αέριο είναι ένα στοιχείο που προμηνύει ότι ακόμα και στις περιοχές όπου υπάρχουν αριθμητικά αποτελέσματα, ($T \sim 5T_c$) η ζεύξη παραμένει ισχυρή ενώ η χαμηλής τάξης θεωρία διαταραχών δεν θα κατέληγε σε σωστά ποσοτικά συμπεράσματα.
- Η μετάβαση από μια κατάσταση γλουονικού συμπυκνώματος μηδενικού χρωματικού φορτίου σε θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης, σε μια κατάσταση γλουονικών πεδίων με συγκεκριμένο χρωματικό φορτίο όπου τα γλουόνια συμπεριφέρονται σχεδόν σαν ελεύθερα μέσα σε ένα μέσο (GP), για θερμοκρασίες μεγαλύτερες της κρίσιμης, καλείται **αλλαγή φάσης απεγκλωβισμού**.

Κεφάλαιο 2

Το μοντέλο των οιονεί-σωματιδίων

2.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο των οιονεί-σωματιδίων (quasi-particles) είναι φαινομενολογικό, με ελάχιστες παραμέτρους προσαρμογής και χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή της μη ιδανικής συμπεριφοράς του QGP με σκοπό την μελέτη και τελικά την εξαγωγή των θερμοδυναμικών ιδιοτήτων του. Το QGP θα μπορούσε να θεωρηθεί εκλαϊκευμένα ως μια "σούπα" από quarks και γλουόνια σε εξαιρετικά υψηλές θερμοκρασίες. Η βασική παραδοχή του μοντέλου αυτού, είναι ότι η μη ιδανική θερμοδυναμική συμπεριφορά του πλάσματος, μπορεί να αποδοθεί σε θερμοκρασιακή εξάρτηση ιδιοτήτων ψευδοσωματιδίων, (οιονεί-σωματιδίων) που αντιστοιχούν στα συστατικά της "σούπας".

Για την ακρίβεια τα οιονεί-σωματίδια τα θεωρούμε ως ελεύθερα που αντιστοιχούν σε στάσιμες λύσεις επιπέδων κυμάτων σε καθορισμένο όγκο V , όπου η μάζα τους έχει εξάρτηση από την θερμοκρασία με σχέση διασποράς ίση με

$$\epsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2(T)}$$

2.1.1 Καθιερωμένη στατιστική περιγραφή

Προκειμένου να προβούμε στην εξαγωγή όλων των θερμοδυναμικών μεγεθών του γλουονικού πλάσματος με την χρήση του μοντέλου των οιονεί-σωματιδίων, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι βασικές σχέσεις ενός ιδανικού χβαντικού αερίου:

- ο μέσος αριθμός σωματιδίων είναι

$$n \sim \sum_k \frac{1}{e^{\beta \cdot \epsilon_k} - 1} \quad (2.1)$$

- Η μέση πυκνότητα ενέργειας είναι

$$\epsilon = \frac{1}{V} \cdot \sum_k \frac{\epsilon_k \cdot e^{-\beta \cdot \epsilon_k}}{1 - e^{-\beta \cdot \epsilon_k}} \quad (2.2)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις αναφέρονται για ένα χβαντικό ιδανικό θερμικό αέριο. Το “χβαντικό” είναι απόρροια του ότι το υπό μελέτη αέριο γλουονίων αποτελείται από μποζόνια με χβαντικό αριθμό Spin ίσο με την μονάδα. Ήως αποτέλεσμα η στατιστική που εφαρμόζεται να είναι η Bose-Einstein.

2.1.2 Θερμοδυναμική ασυνέπεια στα μοντέλα οιονεί-σωματιδίων

Οι καταστατικές εξισώσεις του πλάσματος γλουονίων περιέχουν και την μέση πίεση P . Ένας συνήθης τρόπος υπολογισμού της, σε ένα ιδανικό χβαντικό αέριο είναι διαμέσου της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{P \cdot V}{T} = - \sum_k \ln(1 - e^{-\beta \cdot \epsilon_k}) \quad (2.3)$$

Όμως επιλέγοντας την παραπάνω σχέση για τον υπολογισμό της μέσης πίεσης και αντικαθιστώντας τα παραγόμενα μεγέθη, (μέση πίεση και πυκνότητα ενέργειας) στην βασική σχέση της θερμοδυναμικής:

$$\epsilon(T) = T \cdot \partial_T [P(T)] - P(T) \quad (2.4)$$

παρατηρείται ότι αυτή δεν ικανοποιείται. Η μη επαλήθευση της παραπάνω έκφρασης (2.4) καλείται ως **Θερμοδυναμική ασυνέπεια**.

• Απόδειξη της σχέσης (2.4)

Σε όλη την παρακάτω ανάλυση θα θεωρηθεί ότι το χημικό δυναμικό μ είναι ίσο με το μηδέν. Από βασικές αρχές θερμοδυναμικής γνωρίζουμε ότι:

$$F = E - T \cdot S \quad (2.5)$$

$$dF = dE - T \cdot dS - S \cdot dT$$

όμως

$$dE = T \cdot dS - P \cdot dV$$

Η μεταβολή της ελεύθερης ενέργειας θα είναι ίση:

$$dF = -P \cdot dV - S \cdot dT \quad (2.6)$$

Από θεωρία γνωρίζουμε ότι η ελεύθερη ενέργεια είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας, του χημικού δυναμικού και του όγκου $F = F(T, \mu, V)$. Το μόνο εκτατικό μέγεθος από όλα τα παραπάνω είναι ο όγκος άρα θα πρέπει να ισχύει μια σχέση αναλογίας μεταξύ της ελεύθερης ενέργειας και αυτού.

$$F = a \cdot V \Rightarrow \frac{dF}{dV} = a$$

Από την σχέση (2.6) προκύπτει:

$$\frac{dF}{dV} = -P$$

Από τις δύο τελευταίες εκφράσεις συμπεραίνεται ότι: $a = -P$. Συνεπώς:

$$F = -P \cdot V$$

Επομένως η σχέση (2.5) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$E = -P \cdot V + T \cdot S$$

Επιπλέον από θερμοδυναμική ισχύει ότι:

$$S = -\frac{dF}{dT} = V \cdot \frac{dP}{dT}$$

Τέλος συνδιάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις και διαιρώντας ως προς τον όγκο προκύπτει ότι:

$$\epsilon = -P + T \cdot \frac{dP}{dT}$$

Το αίτιο πρόκλησης της λεγόμενης θερμοδυναμικής ασυνέπειας είναι το γεγονός ότι η μάζα είναι μια θερμοδυναμική μεταβλητή. Συγκεκριμένα, η θερμοδυναμική ασυνέπεια προκλήθηκε από το γεγονός ότι στην μελέτη του μοντέλου οιονεί-σωματιδίων θεωρήθηκε αρχικά ως δεδομένο ότι η μάζα εξαρτάται από την θερμοκρασία (συνεπώς δεν ήταν σταθερή) και ο υπολογισμός των θερμοδυναμικών μεγεθών όπως είναι ο μέσος αριθμός σωματιδίων, η μέση πυκνότητα της ενέργειας καθώς και η πίεση γινόταν με την παραδοχή του ιδανικού αερίου χωρίς να ελέγχεται αν ικανοποιείται η σχέση (2.3). Αυτή όμως ισχύει μόνο στην περίπτωση των ιδανικών χβαντικών αερίων **με σταθερή μάζα**. Συνεπώς δεν γίνεται να αντικαταστήσει την σχέση της πίεσης στην περίπτωση που η μάζα δεν είναι σταθερή.

2.1.3 Το μοντέλο των οιονεί-σωματιδίων

Προηγούμενα μοντέλα qP

Τις τελευταίες δεκαετίες αρκετοί ασχολήθηκαν με την εύρεση μοντέλων οιονεί-σωματιδίων που θα είχαν την δυνατότητα με την χρήση λιγότερων ρυθμιστικών παραμέτρων να πετύχουν την καλύτερη δυνατή ταύτιση με τα αποτελέσματα του Πλέγματος.

Ένα από τα πρώτα μοντέλα οιονεί σωματιδίων που μελετήθηκε [17] περιείχε δύο παραμετροποιήσιμες μεταβλητές. Ενώ συμφωνούσε σε ικανοποιητικό βαθμό με παλαιότερα αποτελέσματα που είχαν εξαχθεί από το Πλέγμα [5], εντούτοις απέτυχε να επιβεβαιώσει τα πιο πρόσφατα που χαρακτηρίζονταν και από μεγαλύτερη ακρίβεια [7].

Αργότερα [9] διαπιστώθηκε ότι το παραπάνω μοντέλο οδηγούσε σε θερμοδυναμικές ασυνέπειες λόγω του ότι δεν επαληθευόταν η σχέση (2.4). Επιπλέον συμπεράναν ότι η μάζα πρέπει να είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας προκειμένου να ικανοποιείται η σχέση αυτή και να οδηγεί σε άρση της θερμοδυναμικής ασυνέπειας. Κάτι τέτοιο όμως δεν θα μπορούσε σε καμία περίπτωση να ερμηνεύσει την συμπεριφορά του γλουονικού πλάσματος όπως υπολογιζόταν στο Πλέγμα.

Τέλος, πρόσεξαν ότι με την χρήση του παρακάτω δεσμού, στην περίπτωση που η μάζα έχει εξάρτηση από την θερμοκρασία:

$$\left. \frac{\partial P(T, m)}{\partial m} \right|_T = 0 \quad (2.7)$$

επιτυγχάνεται η άρση της θερμοδυναμικής ασυνέπειας.

2.2 Το αναθεωρημένο μοντέλο οιονεί-σωματιδίων

Εισαγωγή

Πρόσφατα προτάθηκε ένα μοντέλο οιονεί-σωματιδίων [2] που αποφεύγει τη χρήση του αυστηρού δεσμού (σχέση 2.7) ενώ επιπλέον διαθέτει μόνο μια ρυθμιστική παράμετρο που με την κατάλληλη επιλογή της, πετυχαίνεται ικανοποιητική προσαρμογή με τα αποτελέσματα του Πλέγματος [7]. Το μοντέλο αυτό, που θα παρουσιαστεί εκτενέστερα στην συνέχεια, δεν παρουσιάζει καμία θερμοδυναμική ασυνέπεια.

2.2.1 Η βασική ιδέα του αναθεωρημένου μοντέλου οιονεί σωματιδίων

Η βασική ιδέα του εν λόγω μοντέλου οιονεί-σωματιδίων [2] δανείζεται στοιχεία από το πλάσμα της ηλεκτροδυναμικής. Συγκεκριμένα, τα γλουόνια αποκτούν μάζα καθώς διαδίδονται σε ένα μέσο με χαρακτηριστικά πλάσματος (GP) που προέρχεται από την αλληλεπίδραση των γλουονίων μεταξύ τους. Η γλουονική αυτή μάζα επιλέγεται να είναι περίπου ίση με την συχνότητα του πλάσματος ω_p . Επομένως, οποιαδήποτε αλληλεπίδραση και αν συμβαίνει μεταξύ των γλουονίων καθώς διαδίδονται στο GP θα έχει αντίκτυπο στην μεταβολή της θερμικής μάζας και άρα στην συχνότητα ω_p .

Μία βασική παραδοχή είναι ότι το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ιδανικό κβαντικό θερμικό αέριο με τη μόνη διαφορά ότι τα οιονεί-σωμάτια θα έχουν μεταβαλλόμενη μάζα και αυτή με την σειρά της θα έχει εξάρτηση από την θερμοκρασία (πληροφορία που έρχεται και από το Πλέγμα). Μια τέτοια θεώρηση εξυπηρετεί στο γεγονός ότι εύκολα με γνώσεις βασικής στατιστικής, μπορούν να υπολογιστούν και να εξαχθούν όλες οι θερμοδυναμικές ποσότητες.

Τέλος εφόσον η μάζα και άρα η συχνότητα του πλάσματος εξαρτάται από την πυκνότητα, η οποία με την σειρά της είναι θερμοδυναμική ποσότητα και αυτή (σχέση 2.1), όλο το πρόβλημα θα πρέπει να λυθεί με αυτοσυνέπεια. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι:

$$m(T) = \omega_p$$

Η συχνότητα του πλάσματος μπορεί να μοντελοποιηθεί βάση σχέσεων που έχουν προκύψει σε πλάσμα ηλεκτροδυναμικής [13, 1]

$$\omega_p^2 \propto a_s(T) \cdot \frac{n}{T} = a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T} \quad (2.8)$$

Οπου:

- n η μέση αριθμητική πυκνότητα
- a_o σταθερά η οποία επιλέγεται να είναι ίση με $\frac{8\pi}{3}$,
- g^2 σταθερά σύζευξης η οποία συσχετίζεται με τη a_s της έκφρασης (2.8) δια μέσου της ακόλουθης σχέσης:

$$a_s(T) = \frac{g^2}{4\pi}$$

Επιπλέον η σταθερά σύζευξης a_s έχει εξάρτηση απ' τη θερμοκρασία όπως επιβεβαιώνεται και από προσομοιώσεις χρωμοδυναμικής με τη βοήθεια του Πλέγματος. Συνεπώς, η σχέση (2.1) περιέχει την αριθμητική πυκνότητα και στα δύο μέλη της εξίσωσης και γιαυτό όπως προαναφέρθηκε ο προσδιορισμός της εξάρτησης της από την θερμοκρασία πρέπει να γίνει αυτοσυνεπώς.

Ως σχέση αφετηρίας επιλέγεται ο υπολογισμός της μέσης πυκνότητας ενέργειας των οιονεί-σωματιδίων (σχέση 2.2). Εντούτοις η πίεση εξάγεται κατευθείαν από την σχέση (2.4) σε αντίθεση με προηγούμενες μελέτες [17, 9] που η πίεση εξαγόταν από την σχέση (2.3).

Στο αναθεωρημένο αυτό μοντέλο αντί να χρησιμοποιηθεί μια προσεγγιστική εκφραση για την συχνότητα πλάσματος ω_p , όπως είναι οι μέθοδοι διαταρακτικής QCD θεωρίας, θεωρήθηκε ότι η γλουονική πυκνότητα έχει εξάρτηση από την συγκεκριμένη συχνότητα. Μία διαταρακτική προσέγγιση θα ήταν έγκυρη σε υπερβολικά υψηλές θερμοκρασίες όπου η σταθερά αλληλεπίδρασης θα ήταν αρκετά ασθενική σύμφωνα με την ασυμπτωτική ελευθερία και θα προσέγγιζε το ιδανικό θερμικό αέριο.

Μαθηματική ανάλυση

Η συνάρτηση επιμερισμού για το παραπάνω σύστημα θα είναι η ακόλουθη:

$$\Xi = - \sum_{k=0}^{\infty} \ln(1 - e^{-\beta \cdot \sqrt{k^2 + m^2(T)}})$$

όπου $m(T)$ είναι η λεγόμενη θερμική μάζα.

Η σχέση διασποράς, $\epsilon = \sqrt{k^2 + m^2(T)}$, που χρησιμοποιείται στην παραπάνω έκφραση, αποτελεί ουσιαστικά μία προσέγγιση ενός πιο σύνθετου μοντέλου με απόκλιση σφάλματος λιγότερη από 3%. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνηθέστερη ασυμπτωτική σχέση διασποράς με: $m_{th}^2 = \frac{3}{2}\omega_p^2$ δεν είναι έγκυρη στο υπό μελέτη συστήμα μας, κι αυτό γιατί η σταθερά σύζευξης δεν είναι ασθενική ακόμα και για θερμοκρασίες πέντε φορές μεγαλύτερη της κρίσιμης.

Ο μέσος αριθμός των γλουονίων n στο υπό μελέτη μοντέλο επιλέγεται να είναι ο ίδιος με την πυκνότητα των οιονεί-σωματιδίων.

Επομένως με βάση τις θεμελιώδεις αρχές της στατιστικής μηχανικής έχουμε:

$$n = \frac{g_f}{2\pi^2} \cdot \int_0^\infty dk \cdot k^2 \cdot \frac{1}{e^{\beta\sqrt{k^2 + a_0 a_s \frac{n}{T}}} - 1}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα με την εφαρμογή της αλλαγής μεταβλητής: $k = x \cdot T$ γίνεται ίσο με:

$$n = \frac{g_f}{2\pi^2} \cdot T^3 \cdot \int_0^\infty dx \cdot x^2 \cdot \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + a_0 \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3}} - 1}} \quad (2.9)$$

όπου η σταθερά g_f είναι ίση με δεκαέξι (16) και εξαρτάται από τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Ο αριθμός αυτός προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των οκτώ (8) γλουονίων πολλαπλασιασμένο επί τους δύο βαθμούς ελευθερίας που έχει το κάθε γλουόνιο στην περίπτωση που δεν είχε μάζα.

Για την αυτοσυνεπή λύση της εξίσωσης 2.9 θέτουμε:

$$f_g^2 = \frac{2\pi^2}{g_f} \cdot \frac{n}{T^3} \quad (2.10)$$

οπότε η σχέση: 2.9 γίνεται:

$$f_g^2 = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^2}{e^{\sqrt{x^2 + \tilde{a}^2 \cdot f_g^2} - 1}} = \tilde{a}^2 \cdot f_g^2 \cdot \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l} \cdot K_2(\tilde{a} l f_g)$$

με:

$$\tilde{a}^2 = \frac{g_f \cdot a_o \cdot a_s}{2\pi^2} \quad (2.11)$$

ενώ το K_2 είναι η τροποποιημένη Bessel συνάρτηση.

Υπολογίζοντας την παραπάνω σχέση, αριθμητικά, μπορούν στην συνέχεια να εξαχθούν οι υπόλοιπες θερμοδυναμικές ποσότητες με την βοήθεια της κλασσικής στατιστικής μηχανικής. Η μέση πυκνότητα ενέργειας από το ορισμό της, δίνεται από την σχέση:

$$\epsilon = \frac{1}{V} \cdot \sum_k \frac{\epsilon_k \cdot e^{-\beta\epsilon_k}}{1 - e^{-\beta\epsilon_k}}$$

Η σχέση διασποράς δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\epsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2(T)} = \sqrt{k^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T}}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση της διασποράς στην πυκνότητα ενέργειας και μετατρέποντας το άθροισμα σε ολοκλήρωμα, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{V} \cdot \int dk \cdot k^2 \cdot \frac{\sqrt{k^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T}}}{e^{\frac{1}{T} \cdot \sqrt{k^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T}} - 1}} = \\ &= \frac{1}{V} \cdot \int dk \cdot k^2 \cdot \frac{\sqrt{T^2 \cdot (\frac{k^2}{T^2} + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3})}}{e^{\frac{1}{T} \cdot \sqrt{T^2 \cdot (\frac{k^2}{T^2} + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3})} - 1}} \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = \frac{k}{T}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{V} \cdot \int (T \cdot dx) \cdot (T^2 \cdot x^2) \cdot \frac{T \cdot \sqrt{x^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3}}}{e^{\sqrt{x^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3}} - 1}} = \\ &= \frac{T^4}{V} \cdot \int dx \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3}}}{e^{\sqrt{x^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{n}{T^3}} - 1}} \end{aligned}$$

Από την σχέση (2.10) λύνοντας ως προς τον μέσο αριθμό καταστάσεων προκύπτει:

$$n = \frac{g_f \cdot T^3}{2\pi^2} \cdot f_g^2$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην σχέση της πυκνότητας της ενέργειας θα έχουμε:

$$\epsilon = \frac{T^4}{V} \cdot \int dx \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{1}{T^3} \cdot \frac{g_f \cdot T^3}{2\pi^2} \cdot f_g^2}}{e^{\sqrt{x^2 + a_o \cdot a_s \cdot \frac{1}{T^3} \cdot \frac{g_f \cdot T^3}{2\pi^2} \cdot f_g^2} - 1}}$$

Επιπλέον σύμφωνα με την σχέση: (2.11) έχουμε:

$$a_o \cdot a_s = 2\pi^2 \cdot \frac{\tilde{a}^2}{g_f}$$

Η πυκνότητα ενέργειας προκύπτει τελικά ίση με:

$$\epsilon = \frac{T^4}{V} \cdot \int_0^\infty dx \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \tilde{a}^2 f_g^2}}{e^{\sqrt{x^2 + \tilde{a}^2 f_g^2} - 1}} \quad (2.12)$$

Η λύση της παραπάνω έκφρασης είναι η ακόλουθη:

$$\epsilon = \frac{g_f}{2\pi^2} \cdot T^4 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l^4}\right) \cdot [(\tilde{a} \cdot f_g \cdot l)^3 \cdot K_1(\tilde{a} \cdot f_g \cdot l) + 3(\tilde{a} \cdot f_g \cdot l)^2 \cdot K_2(\tilde{a} \cdot f_g \cdot l)] \quad (2.13)$$

Τέλος, η μέση πίεση συνδέεται με την πυκνότητα ενέργειας δια μέσου της έκφρασης:

$$\epsilon = T \cdot \frac{\partial P}{\partial T} - P \quad (2.14)$$

- Αναλυτική εξαγωγή της σχέσης για την μέση πυκνότητα πίεσης

Η βασική σχέση της θερμοδυναμικής που συνδέει την πυκνότητα ενέργειας με την πίεση είναι η ακόλουθη

$$\epsilon = T \cdot \frac{\partial P}{\partial T} - P$$

διαιρώντας με το T^2 έχουμε ότι

$$\frac{\epsilon}{T^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial P}{\partial T} - \frac{P}{T^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(P \cdot \frac{1}{T} \right) = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{1}{T} - \frac{P}{T^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(P \cdot \frac{1}{T} \right) + \frac{P}{T^2}$$

Επομένως:

$$\frac{\epsilon}{T^2} = \frac{\partial}{\partial T} \left(P \cdot \frac{1}{T} \right) + \frac{P}{T^2} - \frac{P}{T^2} = \frac{\partial}{\partial T} \left(P \cdot \frac{1}{T} \right)$$

Τέλος ολοκληρώνοντας ως προς την θερμοκρασία προκύπτει

$$\int_{T_0}^T dT \cdot \frac{\epsilon}{T^2} = \frac{P}{T} - \frac{P_0}{T_0} \Rightarrow$$

$$\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0} + \int_{T_0}^T dT \cdot \frac{\epsilon}{T^2} \quad (2.15)$$

Αντικαθιστώντας την μέση πυκνότητα ενέργειας (σχέση: 2.13) στην παραπάνω έκφραση προκύπτει ότι η μέση πυκνότητα πίεσης θα είναι ίση τελικά με:

$$P = -\frac{T}{V} \cdot \sum_k \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k}) + \frac{1}{T} \cdot \int_{T_0}^T \frac{d\tau}{\tau} \cdot m \cdot \frac{dm}{d\tau} \cdot \frac{1}{V} \cdot \sum_k \frac{1}{\epsilon_k \cdot (e^{\beta \cdot \epsilon_k} - 1)} \quad (2.16)$$

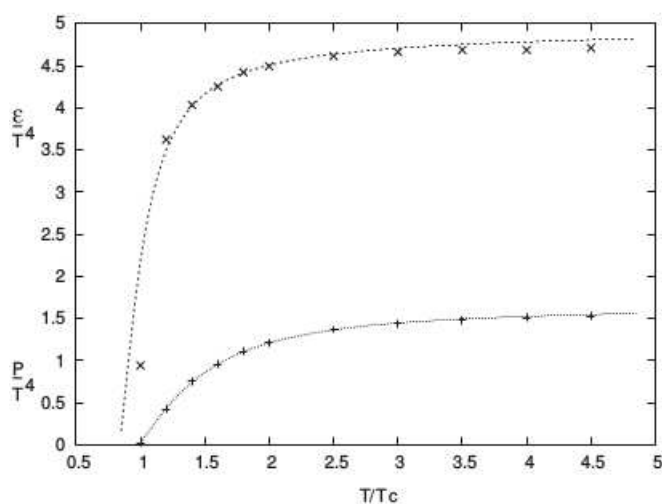
Μερικές παρατηρήσεις για το μοντέλο

Σε όλη την παραπάνω ανάλυση δεν έχει ληφθεί υπόψιν η πίεση του γλουονικού περιβάλλοντος B (Bag pressure). Στο υπο μελέτη μοντέλο δεν υπάρχουν θερμοδυναμικές ασυνέπειες επειδή στην έκφραση της μέσης πίεσης έχει προστεθεί ένας επιπλέον όρος που εξαλείφει την ασυνέπεια αυτή.

Ο δεύτερος όρος της σχέσης 2.16, είναι ο επιπλέον όρος που προέκυψε και είναι υπεύθυνος για την άρση της θερμοδυναμικής ασυνέπειας.

Αποτελέσματα

Στην ακόλουθη γραφική, αναπαρίσταται η μέση πίεση καθώς και η πυκνότητα ενέργειας. Όπως είναι εύκολα παρατηρήσιμο, τα αποτελέσματα αυτά συμβαδίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό με αυτά του Πλέγματος.



Γράφημα 2.1: Μέση πίεση και πυκνότητα ενέργειας

Στην κάτω γραφική παράσταση απεικονίζεται το p/T^4 ως προς την απόλυτη θερμοκρασία T/T_c . Ενώ στην πάνω απεικονίζεται το E/T^4 ως προς την απόλυτη θερμοκρασία [2]. Οι κουκκίδες αναφέρονται στα αποτελέσματα του Πλέγματος [7]

Στο μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε η σταθερά σύζευξης που υπολογίστηκε σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών $a_s(T)$ η οποία είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε

στους υπολογισμούς του Πλέγματος. Η σταθερά αυτή δίνεται από την σχέση:

$$a_s(T) = \frac{6\pi}{(33 - n_f) \cdot \ln\left(\frac{T}{\Lambda_T}\right)} \cdot \left\{ 1 - \frac{3 \cdot (153 - 19n_f) \cdot \ln(2\ln(T/\Lambda_T))}{(33 - 2n_f)^2 \ln\left(\frac{T}{\Lambda_T}\right)} \right\}$$

όπου Λ_T είναι μια παράμετρος σχετική με την παράμετρο βάρθρωσης της QCD, n_f είναι ο αριθμός των γεύσεων (ο αριθμός αυτός στην περίπτωση του υπο μελέτη συστήματος είναι μηδενικός). Με δεδομένο το $f_g(T)$ μπορεί να εξαχθεί η πυκνότητα ενέργειας και πίεσης βάση των σχέσεων: 2.12 και 2.14 αντίστοιχα. Η μόνη παράμετρος που μπορεί να ρυθμιστεί στο υπό μελέτη σύστημα για την βέλτιστη προσαρμογή με τα αποτελέσματα του Πλέγματος, είναι η παρακάτω:

$$t_o = \frac{\Lambda_T}{T_C}$$

Η τιμή t_o όπου πετυχαίνεται η καλύτερη προσαρμογή είναι: $t_o = 0.83$.

2.3 Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκε λοιπόν, ένα αναθεωρημένο μοντέλο οιονεί-σωματιδίων για το γλουονικό πλάσμα, όπου τα γλουόνια αποκτούν μάζα περίπου ίση με την συχνότητα του πλάσματος ω_p . Η πυκνότητα από την άλλη έχει εξάρτηση από την συγκεκριμένη συχνότητα πλάσματος και φυσικά πρέπει να υπολογιστεί με γνώσεις κλασικής στατιστικής μηχανικής λύνοντας το αυτοσυνεπές πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο αποτέλεσμα και με την βοήθεια των σχέσεων 2.12 και 2.14 εύκολα υπολογίζονται η πυκνότητα ενέργειας και η μέση πίεση.

Τα προτερήματα που παρουσιάζει το συγκεκριμένο μοντέλο έναντι των προηγούμενων είναι ότι έχει μόνο μια παράμετρο όπου με την κατάλληλη επιλογή της πετυχαίνεται σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό η ταύτιση με τα αποτελέσματα του Πλέγματος ενώ ταυτόχρονα παρέχει και μια φυσική ερμηνεία της μάζας γλουονίων.

Από την άλλη η μικρή απόκλιση στις δύο παραπάνω γραφικές της πυκνότητας ενέργειας και πίεσης μπορεί να υποδεικνύει ότι υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης στην περιγραφή του γλουονικού πλάσματος με την εικόνα οιονεί-σωματιδίων. Αυτή την

συλλογιστική θα ακολουθήσουμε στην ενότητα 4 προτείνοντας ένα τέτοιο μοντέλο που παίρνει υπόψιν του την μη Αβελιανότητα των γλουονίων.

Ένα παράδειγμα μη ικανοποιητικής παροδοχής του μοντέλου αυτού, είναι ότι η περίοδος που υπεισέρχεται στις σχέσεις της πυκνότητας ενέργειας αλλά και πίεσης ¹ και άρα στην εξαγωγή όλων των θερμοδυναμικών ποσοτήτων, έχει ληφθεί ίση με 2π . Αυτό όμως θα ίσχυε αν οι λύσεις του μη Αβελιανού γλουονικού πεδίου είχαν την μορφή κάποιων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Κάτι τέτοιο όμως απέχει από την πραγματικότητα αφού, όπως θα δούμε εκτενώς και στο επόμενο κεφάλαιο, οι λύσεις που προκύπτουν είναι περιοδικές αλλά μη γραμμικές και φυσικά με διαφορετική περίοδο από το 2π .

¹Ο τρόπος με τον οποίο υπεισέρχεται διατυπώνεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 3

Στάσιμες λύσεις της SU(2) θεωρίας

Εισαγωγή

Οι κλασικές λύσεις των θεωριών Yang-Mills αποτελούν σαγματικά σημεία του αντίστοιχου συναρτησιακού ολοκληρώματος (1.2). Επομένως αναμένεται να παίζουν σημαντικό ρόλο στην κβάντωση της θεωρίας και στον μη διαταρακτικό χειρισμό της. Στην συνέχεια θα διερευνηθούν κάποιες λύσεις των θεωριών αυτών και θα συζητηθεί η σημασία τους.

3.1 Προγενέστερες μελέτες - λύσεις

3.1.1 Μελέτη λύσεων στον Ευκλείδιο χώρο

Η εύρεση λύσεων στις εξισώσεις για μια “καθαρή” θεωρία βαθμίδας ξεκίνησε πριν από αρκετές δεκαετίες. Μία πλήρης μελέτη όπου εξήγαγε λύσεις για το πεδίο βαθμίδας στον Ευκλείδιο χώρο αναφέρεται στο άρθρο [15]. Οι λύσεις αυτές αποτελούν τα σαγματικά σημεία της σχέσης (1.2), επομένως αναμένεται να δίνουν σημαντική συνεισφορά στην συνάρτηση επιμερισμού. Η ανάλυση στην μελέτη αυτή ξεκίνησε από την λαγκραντζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \cdot F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (3.1)$$

η δράση της οποίας είναι ίση με:

$$S = \int d^4x \cdot \mathcal{L}$$

Μέσα από την απαίτηση η μεταβολή της δράσης να είναι μηδενική: $\delta\mathcal{L} = 0$ προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση κίνησης:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - ig \cdot [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (3.2)$$

Για τον αντίστοιχο τανυστή του ηλεκτρομαγνητισμού στην SU(2) θεωρία ισχύει ότι:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig \cdot [A_\mu, A_\nu] \quad (3.3)$$

η σύμβαση που ακολουθήθηκε για το πεδίο βαθμίδας, προκειμένου να επαληθεύεται η συνθήκη Lorentz στον Ευκλείδιο χώρο είναι η ακόλουθη:

$$A_\mu = i \cdot \bar{\sigma}_{\mu\nu} \partial^\nu \ln(\rho) \quad (3.4)$$

όπου:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{4i} \cdot [\sigma_i, \sigma_j]$$

και

$$\bar{\sigma}_{i4} = -\frac{1}{2} \sigma_i$$

όπου i, j
χωρικοί
δείκτες

Παρατηρήσεις:

- Στη σχέση: 3.4, το ρ είναι κάποιο τυχαίο δυναμικό που στην γενική περίπτωση έχει εξάρτηση και από τις τέσσερις χωροχρονικές συνιστώσες.

- Σύμφωνα με την παραπάνω επιλογή ο πίνακας $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός στην εναλλαγή των κάτω δεικτών.

Τελικά, αντικαθιστώντας την σχέση (3.4) στην εξίσωση κίνησης 3.2 προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση για το δυναμικό ρ

$$\frac{1}{\rho} \cdot \square \rho = 0$$

Παρόλο που οι λύσεις αυτές είναι σημαντικές για τον υπολογισμό της συνάρτησης επιμερισμού δεν αντιπροσωπεύουν κάποια πραγματική δυναμική του μοντέλου. Αυτό συμβαίνει λόγω της Ευκλείδιας μετρικής, στην οποία ο χρόνος δεν είναι πραγματικός αλλά φανταστικός, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εξαχθεί κάποια αντίστοιχη φυσική ερμηνεία. Αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που έγιναν προσπάθειες στο να μελετηθεί η ίδια θεωρία στον Minkowski χώρο.

3.1.2 Επίπεδα κύματα στον χώρο Minkowski

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση λύσεων μεταξύ άλλων [3] στο χώρο Minkowski είναι η αναζήτηση πεδίων βαθμίδας με την απαίτηση του μηδενισμού του αντίστοιχου ανύσματος Poynting, που οδήγησε στην εύρεση μη γραμμικών επίπεδων κυμάτων [8]. Η συλλογιστική που ακολουθήθηκε ήταν αρκετά κομψή και αξίζει να μελετηθεί.

Η ανάλυση ξεκινάει με την επιλογή ενός συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς για το πεδίο βαθμίδας, τέτοιο ώστε το άνυσμα Poynting να μηδενίζεται:

$$T_{0j} = F_{0i}^a F_{ij}^a = 0 \quad (3.5)$$

όπου: $F_{0i}^a = E_i^a$ ενώ $B_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η αρχική σχέση 3.5 γράφεται ως:

$$T_{0j} = \sum_a (E^a \times B^a)_j$$

Επίσης, επιλέχθηκε η παρακάτω βαθμίδα για το πεδίο A

$$A_0^a = 0 \text{ και } \partial_i A_i^a = 0$$

Επομένως προκύπτουν οι ακόλουθες τρεις εξισώσεις:

1.

$$\epsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c = 0$$

2.

$$\ddot{A}_i^a - \partial_j F_{ji}^a + g \epsilon^{abc} A_j^b F_{ji}^c = 0$$

3.

$$\dot{A}_i^a F_{ij}^a = 0$$

Μέσω των σχέσεων (1) και (2) η τελευταία σχέση μετατρέπεται ως ακολούθως:

$$\dot{A}_i^a \cdot (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) = 0$$

Μια ικανή συνθήκη προκειμένου να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση είναι:

$$\partial_j A_i^a = 0$$

Λόγω της συνθήκης αυτής, αναζητούνται λύσεις που έχουν εξάρτηση μόνο από τον χρόνο:

$$A_i^a = A_i^a(t)$$

Από την αντικατάσταση αυτή η σχέση 2 παίρνει την μορφή:

$$\ddot{A}_i^a - g^2 \cdot A_j^a A_j^b A_i^b + g^2 \cdot A_i^a A_j^b A_j^b = 0$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψιν την:

$$A_i^a = \frac{O_i^a}{g} \cdot f^a(t)$$

όπου O_i^a είναι σταθερά στοιχεία διαγώνιου πίνακα έτσι ώστε: $O_i^a O_i^b = \delta^{ab}$, προκύπτουν οι ακόλουθες τρεις πεπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις για τα f^a :

$$\dot{f}^1(t) + [(f^2(t))^2 + (f^3(t))^2] \cdot f^1(t) = 0$$

$$\dot{f}^2(t) + [(f^1(t))^2 + (f^3(t))^2] \cdot f^2(t) = 0$$

$$\dot{f}^3(t) + [(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2] \cdot f^3(t) = 0$$

Επιλέγεται η ιστροπική λύση $f^1 = f^2 = f^3 = f(t)$ από το παραπάνω πεπλεγμένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Επομένως προκύπτει:

$$f(t) = \left(\frac{2g^2}{3}\right)^{1/4} \cdot \mu \cdot \text{Cn}\left[\left(\frac{8g^2}{3}\right)^{1/4} \cdot \mu \cdot t; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad (3.6)$$

όπου μ μια ελεύθερη παράμετρος. Η σχέση που προέκυψε είναι η λύση για ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς του πεδίου βαθμίδας, στο οποίο μηδενίζεται το άνυσμα Poynting. Σε αυτή την περίπτωση, το πεδίο βαθμίδας παρουσιάζει ομοιογένεια ως προς τις χωρικές του συνιστώσες.

Ακόμα, η παραπάνω σχέση είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού πηγάζουν από αυτήν δύο βασικές πληροφορίες:

- Η παραγόμενη λύση δεν είναι πλέον γραμμική (ημίτονο ή συνημίτονο) αλλά είναι μια Ιακωβιανή ελλειπτική μη γραμμική περιοδική συνάρτηση. Αυτό το στοιχείο το περιμέναμε, αφού η ίδια η θεωρία δεν είναι γραμμική λόγω του όρου $g \cdot f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ στον τανυστή $F_{\mu\nu}^a$. Αν και στην παρακάτω ανάλυση που θα ακολουθηθεί θα υπάρξουν κάποιες διαφοροποιήσεις στην τελική λύση για το πεδίο βαθμίδας, εντούτοις η πληροφορία που λαμβάνεται από τα παραπάνω είναι ότι πράγματι οι Ιακωβιανές συναρτήσεις πρέπει να είναι απόρρα της μη Αβελιανότητας της ομάδας.
- Ο όρος της μάζας υπεισέρχεται στην φάση της σχέσης 3.6 αλλά και στο πλάτος. Το στοιχείο αυτό θέτει προβληματισμούς ως προς την σωστή επιλογή της μάζας.
- Η σχέση (3.6) με την εφαρμογή ενός Lorentz μετασχηματισμού $\mu \cdot t \rightarrow \omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, (όπου $\mu^2 = \omega^2 - \vec{k}^2$) παίρνει την μορφή επίπεδου κύματος.

- Επιπλέον έχει δειχθεί ότι πέρα της ισοτροπικής λύσεως το σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά [16]

3.2 Λύσεις επίπεδων κυμάτων σε μη Αβελιανή θεωρία

Σκοπός της παρακάτω ενότητας είναι η αναζήτηση λύσεων επίπεδων κυμάτων σε Μη Αβελιανή θεωρία. Τα επίπεδα αυτά κύματα δεν θα έχουν αρμονική μορφή λόγω της μη γραμμικότητας της θεωρίας.

Το επόμενο βήμα που θα πραγματοποιηθεί είναι η προσαρμογή του μοντέλου αυτού στις ιδιαιτερότητες των χαρακτηριστικών γραμμικών επίπεδων κυμάτων (plane wave).

Τέλος, θα ακολουθήσει η εύρεση μικροκαταστάσεων που αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα.

3.2.1 Εξισώσεις κίνησης

Η μελέτη ξεκινάει από την επίλυση της Euler-Lagrange για μια “καθαρά” SU(2) θεωρία χωρίς πεδία ύλης. Η μετρική που θα ακολουθηθεί δεν θα είναι η Ευκλείδεια αλλά η Minkowski.

Η λαγκραντζιανή πυκνότητα όπως είχαμε αναφέρει και προηγουμένως θα δίνεται από την σχέση:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

Οι Euler-Lagrange εξισώσεις είναι οι παρακάτω:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}^a + g \cdot \epsilon_{abc} A_\mu^b \cdot F_{\mu\nu}^c = 0 \quad (3.7)$$

Επιζητούνται λύσεις επιπέδων κυμάτων χρησιμοποιώντας την ακόλουθη παραδοχή για το πεδίο βαθμίδας:

$$A_{\mu}^a = \frac{1}{g} \cdot \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ \mu + \frac{k_1^2}{\omega+\mu} & \frac{k_1 \cdot k_2}{\omega+\mu} & \frac{k_1 \cdot k_3}{\omega+\mu} \\ \frac{k_1 \cdot k_2}{\omega+\mu} & \mu + \frac{k_2^2}{\omega+\mu} & \frac{k_2 \cdot k_3}{\omega+\mu} \\ \frac{k_1 \cdot k_3}{\omega+\mu} & \frac{k_2 \cdot k_3}{\omega+\mu} & \mu + \frac{k_3^2}{\omega+\mu} \end{pmatrix} \cdot h(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t) \quad (3.8)$$

Για το τετράνυσμα \mathbb{k} ισχύει:

$$\mathbb{k}^2 = k_0^2 - \sum_{a=1}^3 k_a^2 = \mu^2$$

Παρατηρήσεις

- Αν στον παραπάνω πίνακα 3.8 μηδενιστούν οι χωρικές ορμές, αυτό που προκύπτει είναι ένας διαγώνιος πίνακας ως προς τις χωρικές του συνιστώσες [8].
- Λόγω του ότι η συνάρτηση h είναι σε μορφή επίπεδου κύματος, οι τρεις στήλες του παραπάνω πίνακα αποτελούν τα τρία διανύσματα που είναι εγκάρσια ως προς το τετράνυσμα \mathbb{k}_{μ}
- Ουσιαστικά στον παραπάνω πίνακα 3.8 απεικονίζονται στις τρεις στήλες τα τρία διανύσματα πόλωσης για ένα σωματίο με ορμή \vec{k} και μάζα μ .

Τέλος, με την επιλογή της συγκριμένης συνθήκης για το πεδίο βαθμίδας, (σχέση:3.8) ικανοποιείται η συνθήκη Lorentz (Lorentz condition)

$$\partial_{\mu} A^{\mu a} = 0$$

Η διαφορική εξίσωση κίνησης που προκύπτει αν αντικατασταθεί στην σχέση που εξήχθει για το πεδίο βαθμίδας (σχέση: 3.8) στην εξίσωση Euler-Lagrange (σχέση: 3.7) είναι η παρακάτω:

$$h''(\xi) + 2 \cdot h^3(\xi) = 0$$

$$\text{όπου: } \omega^2 = \vec{k}^2 + \mu^2$$

Επιλύοντας την προκύπτουσα διαφορική εξίσωση παράγεται η παρακάτω σχέση:

$$h(\xi) = Sn[\sqrt{\sqrt{c_1} \cdot \xi^2 + 2 \cdot c_2 \cdot \sqrt{c_1} \cdot \xi + \sqrt{c_1} \cdot c_2^2}, -1]$$

Στην περίπτωση της επιλογής των συνοριακών συνθηκών: $c_2 = 0$ και $c_1 = 1$, προκύπτει τελικά η παρακάτω λύση:

$$h(\xi) = Sn[\xi, -1]$$

Η έκφραση αυτή δεν αποτελεί κάποια καινούργια λύση για την μη Αβελιανή θεωρία αφού ταυτίζεται με τις λύσεις που έχουν καταγραφεί βιβλιογραφικά [8] μέσω του ακόλουθου μετασχηματισμού:

$$h(\xi) = Sn[\xi, -1] = Cn[\sqrt{2} \cdot (\xi - \frac{p}{4}), \frac{1}{2}]$$

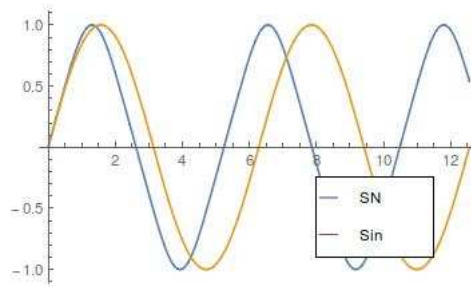
όπου p είναι η περίοδος της Ιακωβιανής ελλειπτικής με modulus -1. Η συγκεκριμένη περίοδος μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα γραφικά και είναι ίση με 5.24.

Τελικά, η αναλυτική έκφραση για το πεδίο βαθμίδας A_μ^a θα είναι η ακόλουθη:

$$A_\mu^a = \frac{1}{g} \cdot \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ \mu + \frac{k_1^2}{\omega + \mu} & \frac{k_1 \cdot k_2}{\omega + \mu} & \frac{k_1 \cdot k_3}{\omega + \mu} \\ \frac{k_1 \cdot k_2}{\omega + \mu} & \mu + \frac{k_2^2}{\omega + \mu} & \frac{k_2 \cdot k_3}{\omega + \mu} \\ \frac{k_1 \cdot k_3}{\omega + \mu} & \frac{k_2 \cdot k_3}{\omega + \mu} & \mu + \frac{k_3^2}{\omega + \mu} \end{pmatrix} \cdot Sn(\xi, -1) \quad (3.9)$$

Η σχέση (3.9) όπως προέκυψε για το πεδίο βαθμίδας, αποτελεί λύση επίπεδου κύματος λόγω της μορφής: $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t$. Ωστόσο η παραπάνω έκφραση δεν είναι γραμμική εξαιτίας της Ιακωβιανής συνάρτησης.

Η γραφική παράσταση της Ιακωβιανής συνάρτησης: $Sn[\xi, -1]$ σε σχέση με μια ημιτονικής συνάρτησης απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Γράφημα 3.1: Η Ιακωβιανή συνάρτηση

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα η περίοδος της Ιακωβιανής είναι μικρότερη σε σχέση με αυτή του ημιτόνου

3.3 Η μάζα ως στοχαστική μεταβλητή

Από τις λύσεις που προέκυψαν για την μη Αβελιανή θεωρία αλλά και από τις πληροφορίες που δόθηκαν από το πλέγμα εξάγεται το συμπέρασμα ότι η μάζα δεν γίνεται να είναι σταθερή και εξαρτάται από την θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, οι λόγοι που μας οδήγησαν στο συμπέρασμα αυτό είναι οι ακόλουθοι:

- Η μάζα γεννιέται δυναμικά και συνδέεται με το πλάτος του γλουονικού πεδίου. Με τον όρο της δυναμικής γέννησης μάζας, υπονοείται ότι ενώ η αρχική θεωρία δεν συμπεριελάμβανε τον παράγοντα μάζας, (σχέση: [refeq:xalar12](#)), εντούτοις εμφανίστηκε στο επίπεδο των λύσεων για λόγους συνέπειας δια μέσου της σχέσης διασποράς.
- Από το Πλέγμα [14] η πληροφορία που παίρνουμε είναι ότι η “εγκάρσια” μάζα είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και άρα αποτελεί θερμοδυναμική μεταβλητή. Επομένως, σε μία στατιστική περιγραφή των θερμοδυναμικών μεγεθών, θα πρέπει να έχει διακυμάνσεις.

Από όλα τα παραπάνω συμπεράσματα γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι η μάζα δεν μπορεί να είναι σταθερή. Επομένως ένας καλός τρόπος ενταξής της στο σύστημα, που θα οδηγήσει στην εξαγωγή όλων των θερμοδυναμικών ποσοτήτων, είναι δια μέσου μιας κατανομής.

Κεφάλαιο 4

Διατύπωση του αναθεωρημένου μοντέλου qP

Εισαγωγή

Από τη μελέτη της προηγούμενης ενότητας γίνεται πλέον αντιληπτό ότι η δυναμική μάζα που “γεννιέται” λόγω των αλληλεπιδράσεων έχει εξάρτηση από την θερμοκρασία με αποτέλεσμα να θεωρείται θερμοδυναμική μεταβλητή. Όμως, κάθε θερμοδυναμικό μέγεθος θα πρέπει να έχει διακυμάνσεις. Συνεπώς, η μάζα θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν ως μια κατανομή όπου οι ροπές της θα έχουν εξάρτηση από την θερμοκρασία.

4.1 Η μάζα ως κατανομή

Αρχικά, πριν από τον υπολογισμό της ελεύθερης ενέργειας προϋποθέτεται η ένταξη της κατανομής της μάζας μέσα σε αυτήν. Η μάζα λαμβάνεται υπόψιν ως μια κατανομή με δύο ρυθμιστικές παραμέτρους που για λόγους απλότητας επιλέγεται να είναι η Gauss κατανομή. Οι ροπές της, η μέση μάζα και η διασπορά, θα έχουν εξάρτηση από την θερμοκρασία. Έτσι λοιπόν η πυκνότητα πιθανότητας για την κατανομή αυτή θα είναι η παρακάτω:

$$\varrho(m) = N \cdot e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1)$$

Τα μεγέθη μ , σ αντιπροσωπεύουν τη μέση μάζα και τη διασπορά και αποτελούν τις ροπές της κατανομής αυτής ενώ όπως προαναφέρθηκε έχουν εξάρτηση από την θερμοκρασία.

Η κατανομή θα πρέπει να είναι κανονικοποιημένη με την μόνη διαφορά ότι η κανονικοποίηση αυτή δεν θα ξεκινάει από το μείον άπειρο. ο λόγος είναι ότι η μάζα δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές επομένως επιλέγεται ως αφετηρία η τιμή μηδέν. Συγκεκριμένα θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\int_0^{\infty} dm \cdot \varrho(m) = 1$$

Από εκεί προκύπτει ότι η σταθερά N θα είναι ίση με:

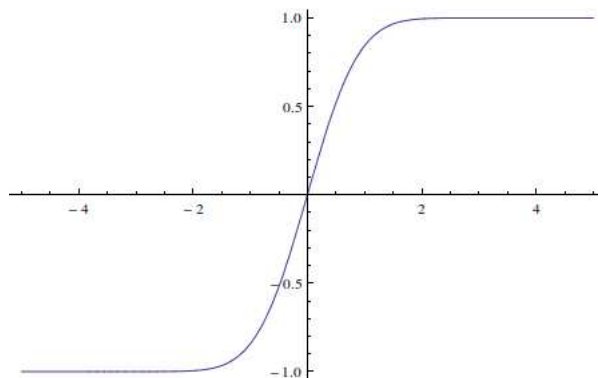
$$N = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma \cdot (1 + \text{Erf} \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right])}$$

• Η συνάρτηση **Erf[x]**

Η συνάρτηση Error function ορίζεται ως ακολούθως:

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x dt \cdot e^{-t^2}$$

Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω:



Γράφημα 4.1: Η συνάρτηση Erf(x)

Όπως φαίνεται η παραπάνω συνάρτηση είναι περιττή ως προς το μηδέν

4.2 Η ελεύθερη ενέργεια

Έχοντας πλέον επιλέξει την κατανομή της μάζας που θα ακολουθηθεί, επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της ελεύθερης ενέργειας για μια μεγαλοκανονική κατανομή, απουσία της κατανομής της μάζας. Στην παρακάτω ανάλυση που θα ακολουθηθεί έχει επιλεγθεί το χημικό δυναμικό να είναι ίσο με το μηδέν ($\mu=0$).

Η συνάρτηση επιμερισμού μιας μονοσωματιδιακής κατάστασης i με ενέργεια $E_i = n_i \epsilon_i$ είναι ίση με:

$$\xi_i = \sum_{n_i} e^{-\beta(\epsilon_i \cdot n_i - \mu \cdot n_i)} = \sum_{n_i} e^{-\beta \cdot \epsilon_i \cdot n_i}$$

όπου n_i ο αριθμός των σωματιδίων που καταλαμβάνουν την i κατάσταση και ϵ_i η ενέργεια της στάθμης. Το β είναι ίσο με το πηλίκο $\frac{1}{k \cdot T}$. Στην παρακάτω ανάλυση θεωρείται ότι $k=1$.

Η μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού για N σωματίδια είναι η εξής:

$$\Xi = \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_1}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_2}} \dots$$

Το μεγάλο δυναμικό δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} J &= -kT \cdot \ln(\Xi) \Rightarrow \\ J &= -kT \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_1}}\right) + \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_2}}\right) + \dots \right) \Rightarrow \\ J &= -kT \cdot \sum \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_i}}\right) \Rightarrow \\ J &= kT \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-\beta \cdot \epsilon_i}) \end{aligned}$$

και πηγαίνοντας πλέον στο συνεχές η ελεύθερη ενέργεια θα είναι ίση με:

$$F = g_f \cdot k \cdot T \cdot \int_0^{\infty} dk \cdot g(k) \cdot \ln(1 - e^{-\beta \cdot \sqrt{k^2 + m^2}})$$

- Η σταθερά g_f είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του χρώματος των γλουονίων και είναι ίση με το γινόμενο των οκτώ (8) γλουονικών πεδίων πολλαπλασιασμένο με τις τρεις πολώσεις λόγω της μη μηδενικής μάζας των γλουονίων (άρα $f=24$).
- Η πυκνότητα των καταστάσεων $g(k)$ στην γενική περίπτωση γράφεται ως ακολούθως:

$$g(k) = \frac{4 \cdot \pi \cdot V}{p^3} \cdot k^2$$

όπου p είναι η περίοδος του εκάστοτε κύματος. Στην περίπτωση που η θεωρία για το πεδίο βαθμίδας ήταν γραμμική (δηλαδή κάποια τριγωνομετρική ημιτονοειδής λύση) η περίοδος p θα ήταν ίση με 2π . Στο υπο μελέτη όμως μοντέλο τα πράγματα δεν είναι τόσο τετριμένα λόγω της μη γραμμικότητας του προβλήματος.

Αυτό με τη σειρά του, έχει ως αποτέλεσμα η σχέση 3.9 που προκύπτει για το πεδίο βαθμίδας να μην είναι γραμμική. Συγκεκριμένα, η λύση που προέκυψε είναι μια Ιακωβιανή συνάρτηση τύπου Sh με modulus -1. Επομένως η επιλογή της σωστής περιόδου θα πρέπει να γίνει με ιδιαίτερη προσοχή. Ο πιο απλός τρόπος για τον υπολογισμό της περιόδου είναι ο γραφικός. Έτσι προκύπτει ότι:

$$p = 5,24$$

επομένως η ελεύθερη ενέργεια θα είναι ίση με:

$$F = T \cdot g_f \cdot \int_0^\infty dk \cdot k^2 \cdot \frac{4\pi \cdot V}{p^3} \cdot \ln(1 - e^{-\frac{\sqrt{k^2+m^2}}{T}})$$

Ενσωμάτωση της μάζας στην σχέση της ελεύθερης ενέργειας

Έχοντας πλέον υπολογίσει την σχέση της ελεύθερης ενέργειας, επόμενο βήμα είναι η ενσωμάτωσή της κατανομής της μάζας (σχέση 4.1) σε αυτήν.

Τελικά η ελεύθερη ενέργεια θα είναι ίση με:

$$F = \frac{4\pi \cdot V \cdot g_f \cdot N}{p^3} \cdot T \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty dk \cdot dm \cdot k^2 \cdot \ln(1 - e^{-\frac{\sqrt{k^2+m^2}}{T}}) \cdot e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

4.3 Εύρεση της μέσης πυκνότητας ενέργειας και πίεσης

Η μέση πυκνότητα ενέργειας υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση (2.13).

Χρειάζεται να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην σωστή επιλογή των σταθερών που θα ενταχθούν σε αυτήν.

Συγκεκριμένα, η πυκνότητα ενέργειας θα είναι ίση:

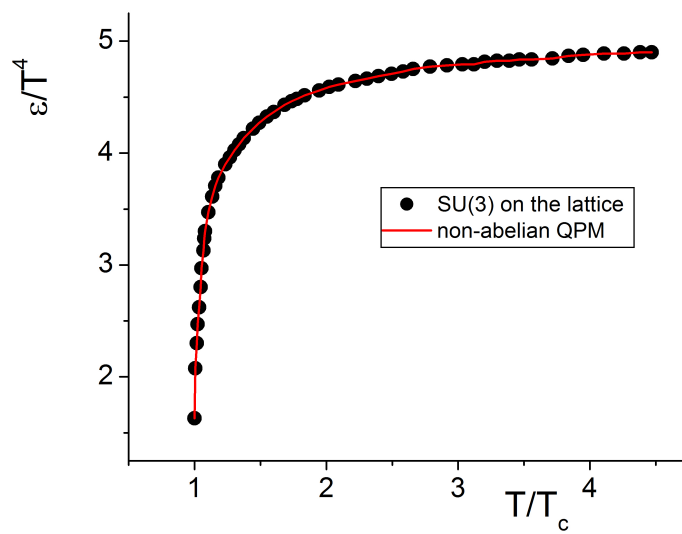
$$\epsilon = N \cdot \frac{4\pi}{p^3} \cdot g_f \cdot T^4 \cdot \int_0^\infty dm \cdot \varrho(m) \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l^4} \right) \cdot \left[\left(\frac{m}{T} \cdot l \right)^3 \cdot K_1\left(\frac{m}{T} \cdot l\right) + 3 \left(\frac{m}{T} \cdot l \right)^2 \cdot K_2\left(\frac{m}{T} \cdot l\right) \right] \right\} \quad (4.2)$$

όπου g_f είναι το γινόμενο των τριών πολώσεων επί τα οκτώ γλουόνια.

Έχοντας υπολογίσει τη μέση πυκνότητα ενέργειας, η πίεση υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση (2.15).

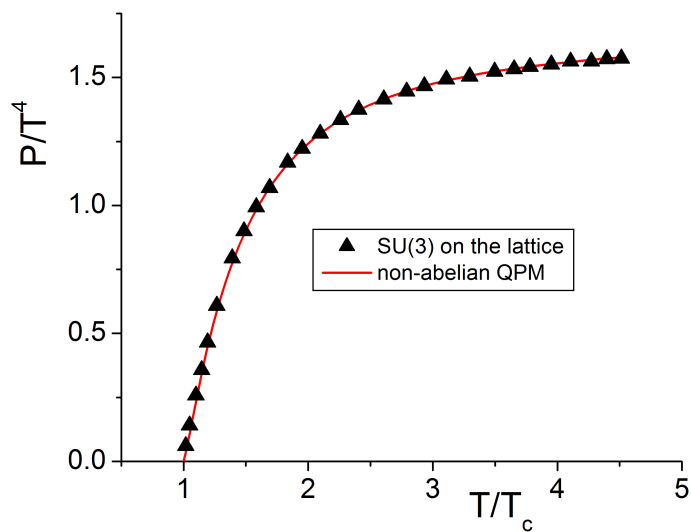
Επιπλέον, το σύστημα δεν παρουσιάζει καμία θερμοδυναμική ασυνέπεια αφού ικανοποιείται η έκφραση 2.14.

Οι γραφικές παραστάσεις της μέσης πυκνότητας ενέργειας καθώς και της πίεσης απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Γράφημα 4.2: Πυκνότητα ενέργειας

Πυκνότητα ενέργειας προς την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας, ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας. Συνεχής γραμμή αποτελέσματα από το υπο μελέτη μοντέλο. Κουκίδες αποτελέσματα από το Πλέγμα [7]



Γράφημα 4.3: Μέση πίεση

Η Μέση πίεση προς την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας, ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας. Συνεχής γραμμή αποτελέσματα από το υπο μελέτη μοντέλο. Κουκίδες αποτελέσματα από το Πλέγμα [7]

Συμφωνία με το Πλέγμα

Τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την επίτευξη της καλύτερης προσαρμογής μεταξύ των αποτελεσμάτων του Πλέγματος και του προτεινόμενου μοντέλου είναι τα ακόλουθα:

1. Αρχικά επιλέχθηκαν τα αποτελέσματα του Πλέγματος [14] για την εγκάρσια μάζα m_{tr} (επιλέγεται μόνο αυτή επειδή θεωρούμε μόνο εγκάρσιους βαθμούς ελευθερίας στην συνάρτηση επιμερισμού). Τα δεδομένα αυτά ανήκουν στο εύρος θερμοκρασιών $\frac{T}{T_c} \in [1, 1.78]$ και προσαρμόζονται με βάση την παρακάτω γραμμική σχέση:

$$\frac{m(\frac{T}{T_c})}{T} = 1.18 + 0.48 \cdot \frac{T_c}{T} \quad (4.3)$$

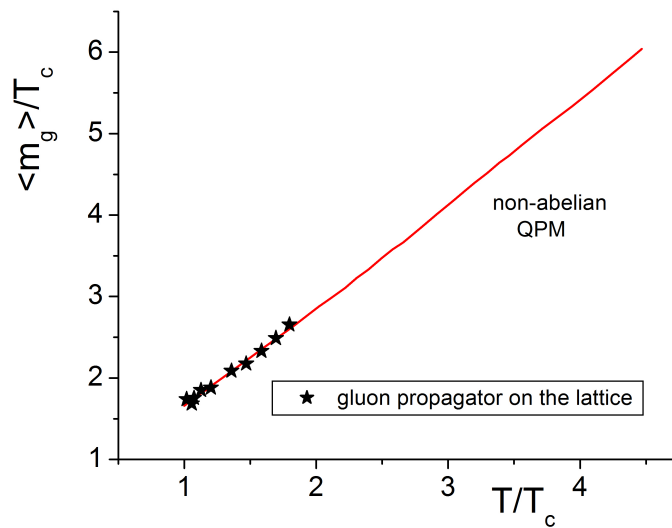
2. Η πυκνότητα ενέργειας προσαρμόζεται στα δεδομένα του Πλέγματος [7] χωρίζοντας τις θερμοκρασίες σε δύο περιοχές. **Στην πρώτη περιοχή**, $\frac{T}{T_c} \in [1, 1.78]$, η μάζα προσδιορίζεται από την σχέση (4.3) και επιχειρείται η προσαρμογή μέσω μεταβολής της διασποράς. Επομένως σε αυτή την θερμοκρασιακή περιοχή υπάρχει μόνο μια ελεύθερη παράμετρος προσαρμογής. **Στην δεύτερη θερμοκρασιακή περιοχή** $\frac{T}{T_c} \in [1.8, 4.56]$ τα δεδομένα του Πλέγματος [7] προσαρμόζονται χρησιμοποιώντας ως ελεύθερες ρυθμιστικές παραμέτρους τη μέση μάζα και τη διασπορά της κατανομής Gauss.
3. Τέλος με βάση την σχέση της πυκνότητας ενέργειας υπολογίζεται η ποσότητα $\frac{P}{T^4}$ σύμφωνα με την έκφραση (2.15).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέση μάζα, με την βοήθεια του πλέγματος [14], υπολογίστηκε μέσω της εύρεσης της εγκάρσιας συνιστώσας του διαδότη. Σε μία άμαξη θεωρία καθώς η ορμή τείνει στο μηδέν, ο διαδότης απειρίζεται. Στην περίπτωση όμως, που ο διαδότης παίρνει μία πεπερασμένη τιμή καθώς η ορμή προσεγγίζει το μηδέν, συμπεραίνεται ότι θα πρέπει να υπάρχει ένας όρος μάζας που προκαλεί αυτή την άρση της απειρίας. Με την παραπάνω συλλογιστική υπολογίζεται η έκφραση της μάζας ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Παρατηρήσεις

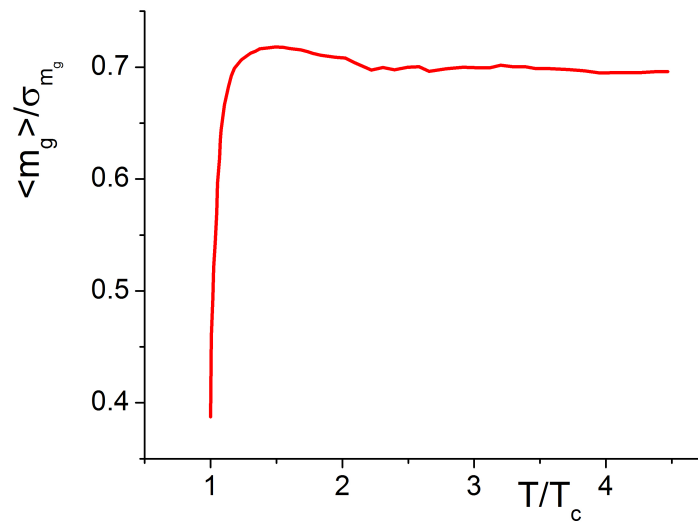
- Οι καταστατικές εξισώσεις της μέσης πυκνότητας ενέργειας και πίεσης του γλουονικού συστήματος όπως αυτές περιγράφονται από το Πλέγμα [7] αναπαράγονται με μεγάλη ακρίβεια από το προτεινόμενο μοντέλο οιονεί-σωματιδίων.
- Στην γραφική παράσταση της μέσης πίεσης παρατηρούμε ότι όσο η θερμοκρασία αυξάνεται ($T \gg T_c$), τόσο η γραφική της παράσταση πηγαίνει γραμμικά ως προς

την σχετική θερμοκρασία κάτι που επαληθεύεται και από την θεωρία διαταραχών. Από την άλλη όμως, κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία η θεωρία διαταραχών παύει να ισχύει αφού η σταθερά σύζευξης είναι αρκετά ισχυρή. Επομένως, σε αυτές τις περιοχές θερμοκρασιών, όλη η πληροφορία για το πλάσμα γλουονίων έρχεται αποκλειστικά από το Πλέγμα.



Γράφημα 4.4: Μέση μάζα

Μέση μάζα βαθμισμένη με T_c συναρτήσει της σχετικής θερμοκρασίας. Συνεχής γραμμή το υπό μελέτη μοντέλο, κουκίδες αποτελέσματα από το Πλέγμα



Γράφημα 4.5: Η μέση μάζα και η διασπορά
Ο λόγος της μέσης μάζας ως προς την διασπορά σε συνάρτηση της σχετικής θερμοκρασίας

Τέλος, από την παραπάνω γραφική παράσταση παρατηρείται ότι ο λόγος της διακύμανσης προς την μάζα για θερμοκρασίες αρκετά μεγαλύτερες από την κρίσιμη, είναι σχεδόν σταθερός. Αυτό σημαίνει ότι το υπό μελέτη μοντέλο σε μια τέτοια θερμοκρασιακή περιοχή μπορεί να περιγραφεί από ένα μόνο ρυθμιστικό παράγοντα, αυτόν της μέσης μάζας. Από την άλλη κάτι τέτοιο δεν θα ίσχυε για θερμοκρασίες κοντά στην κρίσιμη όπου η συγκεκριμένη γραφική παράσταση παρουσιάζει ένα ολικό μέγιστο. Το μέγιστο αυτό δηλώνει ότι στο συγκεκριμένο σημείο η διασπορά έχει μεγάλες διακυμάνσεις και ως εκ τούτου κρίνεται αναγκαία η ύπαρξη δυο ρυθμιστικών παραμέτρων για την σωστή περιγραφή της εν λόγω θερμοκρασιακής περιοχής. Όμως όπως προαναφέρθηκε η μάζα στην περιοχή αυτή στην περίπτωση μας προσδιορίζεται από τα αποτελέσματα του Πλέγματος. Έτσι στην πραγματικότητα υπάρχει μόνο μία ρυθμιστική παράμετρος για την προσαρμογή των αποτελεσμάτων για την καταστατική εξίσωση στο Πλέγμα.

4.4 Σύνοψη-Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την συνολική μελέτη των προηγούμενων κεφαλαίων είναι τα παρακάτω:

- Η θερμοδυναμική του πλάσματος γλουονίων είναι δυνατόν να περιγραφεί με μεγάλη επιτυχία από ένα μη Αβελιανό μοντέλο οιονεί-σωματιδίων
- Η θερμοδυναμική συνέπεια για πεπερασμένη θερμοκρασία υποδεικνύει την ύπαρξη διακυμάνσεων γλουονικής μάζας
- Ο μη Αβελιανός χαρακτήρας της θεωρίας επηρεάζει τον αριθμό των μικροκαταστάσεων και συνδέεται με την ύπαρξη διακυμάνσεων στην δυναμικά παραγόμενη γλουονική μάζα.

Προοπτικές

- Υπολογισμός κατανομής μάζας από πρώτες αρχές
- Μελέτη της μορφής των Μη Αβελιανών επίπεδων κυμάτων σε μια “καθαρή” $SU(3)$ θεωρία
- Επέκταση του μοντέλου με προσθήκη των quarks αποσκοπώντας στην περιγραφή του φασικού διαγράμματος της QCD

ΣΥΝΤΗΜΗΣΕΙΣ-ΑΡΤΙΚΟΛΕΞΑ-ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

QGP	Quark gluon plasma
SU(n)	special unitary group of degree n
GP	gluon plasma
qP	quasi-particles
QCD	Quantum Chromodynamics
ΕΚΠΑ	Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
ΣΝΔ	Σχολή Ναυτικών Δοξίμων

Βιβλιογραφία

- [1] Vishnu M. Bannur. Self-consistent quasi-particle model for relativistic plasma. *Physics Review E*, 73(067401), 2006.
- [2] Vishnu M. Bannur. Self-consistent quasiparticle model for quark-gluon plasma. *Physical Review C*, 75(044905), April 2007.
- [3] S. Coleman. Non-abelian plane waves. *Physics Letters B*, 70(59), September 1977.
- [4] Frank Wilczek David J.Gross. Asymptotically free gauge theories. *Physics Review D*, 8(3633), November 1973.
- [5] Andreas Schafer Horst Stocker Walter Greiner Dirk H. Rischke, Mark I. Gorenstein. Non-perturbative effects in the su(3) gluon plasma. *Physics Letters B*, 278:19–23, January 1992.
- [6] O. Philipsen E. Laermann. The status of lattice qcd at finite temperature. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 53(163-198), March 2003.
- [7] F. Karsch E. Laermann C. Legeland M. Lutgemeier B. Petersson G. Boyd, J. Engels. Thermodynamics of su(3) lattice gauge theory. *Nuclear Physics B*, (469):419–444, 1996.
- [8] G. K. Savvidi G. Z. Baseyan, S. G. Matinyan. Nonlinear plane waves in the massless yang-mills theory. *JETP Letters*, 29(10), 1979.
- [9] Mark I. Gorenstein and Shin Nan Yang. Gluon plasma with a medium-dependent dispersion relation. *Physical Review D*, 52(9), 1995.
- [10] V. N. Gribov. Quantization of non-abelian gauge theories. *Nuclear Physics B*, 139(1), 1978.
- [11] Frithjof Karsch. Lattice qcd at finite temperature and density. *Nuclear Physics B*, 83-84:14–23, 2000.
- [12] V.N. Popov L. D. Faddeev. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, 25(29), 7 1967.

- [13] M. V. Medvedev. Thermodynamics of photons in relativistic plasmas. *Physics Review E*, 59(4766), May 1999.
- [14] O. Oliveira P. J. Silva. Gluon screening mass at finite temperature from landau gauge gluon propagator in lattice qcd. *Physical Review D*, 89(074503), 2014.
- [15] C. Rebbi R. Jackiw, C. Nohl. Conformal properties of pseudoparticle configurations. *Physical Review D*, 15(6), 1976.
- [16] S.G. Matinyan G.K. Savvidi N.G. Ter-Arutyunyan-Savvidi. Classical yang-mills mechanics. nonlinear color oscillations. 80:830–838, July 1981.
- [17] H. Satz V. Goloviznin. Comments on quasiparticle mmodel of quark-gluon plasma. *Physics Letters C*, 57(671), 1993.
- [18] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Physical Review D*, 10(2445), October 1974.