



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ, ΑΘΗΝΑ 15784
ΤΗΛ 210 - 7276397, FAX 210 - 7276398

Παπαγεωργίου Κ. Γεώργιος

**Αλγόριθμοι
για τον υπολογισμό αραιών λύσεων
αορίστων γραμμικών συστημάτων**

Επιβλέπων καθηγητής
Μ. Δρακόπουλος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΙΑ ΤΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ
ΕΘΝΙΚΟΥ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΘΗΝΑ 2012

Αφιερωμένο στη γυναίκα μου...

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Σ. Θεοδωρίδη και τον κ. Μ. Δρακόπουλο για την άριστη συνεργασία που αναπτύξαμε και την ουσιαστική καθοδήγηση που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ιδιαίτέρως, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Α. Ευαγγελάτου-Δάλλα για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί της και για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσε. Μέσα από τη συνεργασία αυτή αισθάνομαι τυχερός, διότι άνοιξε νέους ορίζοντες για εμένα ως προς την προσέγγιση των πραγμάτων, μαθηματικών ή μη.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου Β. Νούτση και Δ. Πρεζεράκο, καθώς επίσης και τον Δ. Καλαβρουζιώτη από το Ε.Μ.Π. για την πολύτιμη βοήθειά τους την κατάλληλη στιγμή, ο καθένας με τον τρόπο του.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Μετρικές και νόρμες για τον προσδιορισμό αραιής λύσης	3
1.1 Αποστάσεις στην καθημερινή ζωή	3
1.2 Μετρικοί χώροι	5
1.2.1 Καρτεσιανό Γινόμενο Μετρικών χώρων	7
1.2.2 Εφοδιασμός του \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) με διάφορες μετρικές	8
1.3 Χώροι με νόρμες	12
2 Συνθήκες για αραιές λύσεις	17
2.1 Μέτρα για αραιές λύσεις γραμμικών συστημάτων	17
2.2 Επιλέγοντας πίνακα	19
2.2.1 Συνθήκη Περιορισμένης Ισομετρίας (RIP)	19
2.3 Η πιο αραιή λύση του συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	20
2.3.1 Μοναδικότητα της λύσης μέσω του σπάρκ	21
2.3.2 Μοναδικότητα της λύσης μέσω της αμοιβαίας συσχέτισης	22
2.4 Συνάρτηση μεταβολής ζώνης	24
3 Αλγόριθμοι	25
3.1 Το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς	25
3.1.1 Αλγόριθμοι αναζήτησης Βάσης (BP)	25
3.1.2 « Άπληστοι » αλγόριθμοι (GA)	26
3.2 Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς	32
3.2.1 Μέθοδος εσωτερικού σημείου του Νεύτωνα με αποκοπή όρων (TNIPM)	33
3.2.2 Αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων με επαναληπτικό βάρος (IRLS)	40
3.2.3 Αλγόριθμοι συρρίκνωσης	41
3.2.4 Αλγόριθμος In-Crowd	43
4 Σύγκριση αλγορίθμων	45
4.1 Επίλυση του προβλήματος με διαφορετικούς πίνακες	45
4.2 Πλήθος μη μηδενικών στοιχείων	47
4.2.1 Πυκνότητα διανύσματος για πίνακες σταθερής διάστασης $n \times 2n$	48
4.2.2 Μεταβολή ζώνης	50

4.3	Σφάλματα στην προσέγγιση της λύσης	52
4.4	Χρόνοι επίλυσης	53
	Παράρτημα	56
	Βιβλιογραφία	59

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη και εξέλιξη των θετικών επιστημών τις τελευταίες δεκαετίες, αλλά ακόμη περισσότερο η συμβολή των ηλεκτρονικών υπολογιστών στον τομέα της έρευνας, κατατάσσουν τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά σε κυρίαρχη θέση στη λίστα των σύγχρονων επιστημών του 21^{ου} αιώνα. Επιπλέον, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά αποτελούν το συνδετικό κρίκο ανάμεσα σε άλλες σύγχρονες επιστήμες, όπως την Πληροφορική, τη Ρομποτική, τις Τηλεπικοινωνίες, τη σύγχρονη Φυσική αλλά και πολλές άλλες.

Ένας σημαντικός κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ο οποίος τις τελευταίες δεκαετίες γνώρισε ραγδαία ανάπτυξη και συνεχίζει να αναπτύσσεται με ακόμη γρηγορότερο ρυθμό, είναι η Θεωρία Βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης ανέκαθεν αποτελούσαν αντικείμενο μελέτης των Μαθηματικών, λόγω όμως της διαφορετικής φύσης των προβλημάτων που προέκυπταν τελευταία, ήταν αναγκαία η ανάπτυξη μιας ενιαίας θεωρίας, αλλά ακόμη περισσότερο η προσαρμογή της θεωρίας στην πράξη.

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της Θεωρίας Βελτιστοποίησης στον τομέα της Πληροφορικής και συγκεκριμένα στην επεξεργασία και μετάδοση σήματος, είναι η αναπαράσταση ενός σήματος το οποίο μεταφέρει πληροφορία (ήχο, εικόνα ή βίντεο) από έναν αραιό μετασχηματισμό διανύσματος. Πολλά μέσα, όπως για παράδειγμα το JPEG και το JPEG-2000 χρησιμοποιούν τέτοιους κωδικοποιημένους μετασχηματισμούς. Το διάνυσμα το οποίο αναπαριστά τη γραμμή των pixel μετασχηματίζεται, δηλαδή αναπαρίσταται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων και οι νέες συντεταγμένες επεξεργάζονται ώστε να παράγουν ένα κωδικοποιημένο αποτέλεσμα (bitstream). Το JPEG χρησιμοποιεί διακριτό μετασχηματισμό συνημιτόνου (DCT) (παράλλαξη του μετασχηματισμού Fourier), ενώ το JPEG-2000 διακριτό κυματοειδή μετασχηματισμό (DWT). Οι παραπάνω μετασχηματισμοί μπορούν να ερμηνευθούν ως στροφή του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων σε μια νέα βάση. Το κέρδος μέσα από αυτή τη διαδικασία είναι η αραιότητα των νέων διανυσμάτων που προκύπτουν.

Ο μετασχηματισμός (DCT) του αρχικού διανύσματος έχει την ιδιότητα να αναθέτει στις πρώτες συντεταγμένες σχετικά μεγάλες τιμές και πολύ μικρές στις υπόλοιπες. Επομένως θεωρώντας τις τελευταίες συντεταγμένες μηδέν και προσεγγίζοντας τις αρχικές, μπορούμε να αποθηκεύσουμε πληροφορίες σε μερικά μόνο bits. Ο μετασχηματισμός στη συνέχεια αντιστρέφεται και δίνει την αναπαράσταση του αρχικού διανύσματος δεδομένων. Ο μετασχηματισμός (DWT) του αρχικού διανύσματος έχει μια ελάχιστη διαφορετική ιδιότητα. Δίνει διανύσματα με λίγες συντεταγμένες που έχουν σχετικά υψηλές τιμές (οι οποίες δεν βρίσκονται αναγκαστικά στην αρχή του διανύσματος) και ακολουθεί την ίδια διαδικασία για την αποκωδικοποίηση. Για αρκετούς τύπους περιεχομένου εικόνας, το JPEG-2000 είναι πιο αποτελεσματικό από το JPEG ακριβώς επειδή έχει τη δυνατότητα να δίνει πιο αραιές αναπαραστάσεις.

Εν συντομία, η αραιότητα αποτελεί το κλειδί για όλες τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη συμπίεση εικόνας μέσω κωδικοποίησης. Υπάρχουν όμως και άλλα προβλήματα, τα οποία προϋποθέτουν αραιότητα, όπως η απομάκρυνση θορύβου από ένα διάνυσμα δεδομένων στην επεξεργασία εικόνας και σήματος γενικότερα. Για συγκεκριμένα μέσα (π.χ. μουσικά σήματα με ισχυρό αρμονικό περιεχόμενο) οι ημιτονοειδείς αναπαραστάσεις είναι καλύτερες για τη συμπίεση και την απομάκρυνση θορύβου, ενώ για άλλα μέσα (π.χ. εικόνες με έντονες ακμές) οι κυματοειδείς συναρτήσεις αποτελούν καλύτερη επιλογή από τις ημιτονοειδείς.

Στην πράξη πολλά μέσα χρησιμοποιούν παράλληλα και τις δύο τεχνικές αναπαράστασης δεδομένων, δηλαδή η αναπαράσταση γίνεται συνδυάζοντας και τις δύο βάσεις. Η ημιτονοειδής βάση δημιουργεί ένα πίνακα διάστασης $n \times n$ και η κυματοειδής βάση έναν άλλο πίνακα $n \times n$, οπότε η ένωσή τους ένα πίνακα διάστασης $n \times 2n$. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι πως μπορούμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με n εξισώσεις και m αγνώστους, δηλαδή ένα αόριστο γραμμικό σύστημα, βρίσκοντας όμως λύση ή λύσεις οι οποίες είναι αραιές. Δηλαδή προσπαθώντας η λύση μας να περιέχει αρκετά μηδενικά στοιχεία.

Ορίσαμε λοιπόν τι αναζητούμε, αλλά προφανώς η αραιή λύση του γραμμικού συστήματος δεν μπορεί να προκύψει χωρίς την προσθήκη κάποιας επιπλέον απαίτησης. Για το λόγο αυτό θα αναγκαστούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια επιπλέον συνάρτηση βελτιστοποίησης.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Αρχικά ορίζουμε το μέτρο εκείνο με το οποίο επιδιώκουμε να κάνουμε βελτιστοποίηση. Δείχνουμε ότι το μέτρο αυτό είναι μετρική και μάλιστα προκύπτει από τη διακριτή. Λόγω της ιδιαιτερότητας του μέτρου αυτού, το πρόβλημα δεν μπορεί να είναι επιλύσιμο για οποιασδήποτε δομής πίνακα. Οπότε στη συνέχεια ορίζουμε τις προϋποθέσεις, κάτω υπό τις οποίες θα μπορούσε ένας πίνακας να ανήκει στο σύνολο εκείνων για τους οποίους το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. Κατόπιν ορίζουμε το πρόβλημα λίγο διαφορετικά, χρησιμοποιώντας μια κυρτή προσέγγιση του αρχικού μέτρου και εξετάζουμε πότε οι δύο μορφές του ίδιου προβλήματος είναι ισοδύναμες.

Στο δεύτερο μέρος αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα στην πράξη. Γενικά το πρόβλημα είναι επιλύσιμο με μια ποικιλία μεθόδων, εδώ εξετάζουμε τις πιο βασικές. Διατυπώνουμε το πρόβλημα στις τρεις διαφορετικές του μορφές και αναλύουμε τους αλγόριθμους τους οποίους χρησιμοποιούμε για να το λύσουμε σε κάθε περίπτωση. Τέλος, ελέγχουμε τα κατά πόσο τα θεωρητικά αποτελέσματα επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος στην πράξη και ελέγχουμε την ποιότητα των αλγοριθμικών διαδικασιών, συγκρίνοντας τη μια με την άλλη.

Κεφάλαιο 1

Μετρικές και νόρμες για τον προσδιορισμό αραιής λύσης

1.1 Αποστάσεις στην καθημερινή ζωή

Στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε υποσυνείδητα διάφορες αποστάσεις χωρίς να δίνουμε μεγάλη προσοχή στον ακριβή ορισμό τους. Όταν μας δοθεί ένα τυχαίο σύνολο « σημείων » η πρώτη μας σκέψη είναι να μετρήσουμε τις αποστάσεις μεταξύ τους. Ο τρόπος με τον οποίο μετράμε όμως σε κάθε περίπτωση είναι διαφορετικός και εξαρτάται από την κλίμακα που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε και τη δομή του χώρου.

Για παράδειγμα, η απόσταση της Αθήνας από τη Νέα Υόρκη μετρείται με τη γεωδεσιακή γραμμή, δηλαδή τη « γραμμή » πάνω στην επιφάνεια της γης η οποία ενώνει δύο σημεία της και έχει το ελάχιστο δυνατόν μήκος (Σχ. 1.1).

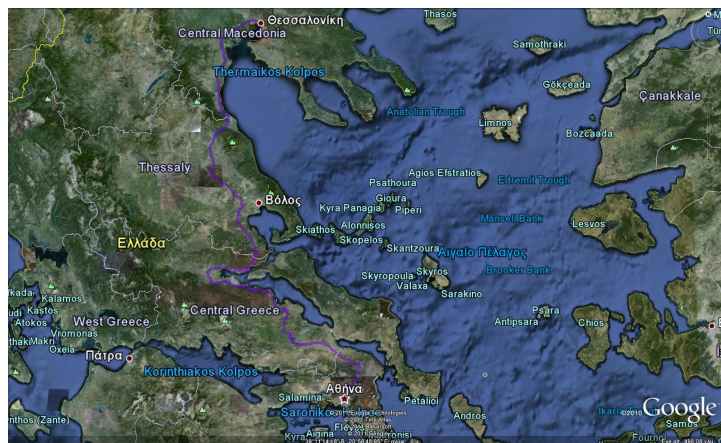


Σχήμα 1.1: Γεωδεσιακή απόσταση Αθήνας - Νέα Υόρκης (ως σημείων): 7920 km

Σε περίπτωση που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε ένα ταξίδι οδικώς, η απόσταση αυτή

καθορίζεται από τη διαδρομή που θα ακολουθήσουμε και δεν συμπίπτει απαραίτητα με την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων (Σχ. 1.2).

Υπάρχουν ακόμη « αποστάσεις » οι οποίες αποκλίνουν σημαντικά από την θεώρηση της απόστασης ως τη συντομότερη διαδρομή. Η απόσταση που πρέπει να διανύσει κάποιος ώστε να μετακινηθεί στην περιοχή του Manhattan, για παράδειγμα από την Times Square προς τη διασταύρωση του 57^{ου} δρόμου με την 9^η λεωφόρο, σχετίζεται με τη δομή του χώρου (Σχ. 1.3).



Σχήμα 1.2: Οδική απόσταση Αθήνας - Θεσσαλονίκης (ως σημείων): 502 km



Σχήμα 1.3: Απόσταση στην περιοχή Manhattan της Νέας Υόρκης

Όταν θέλουμε να μετρήσουμε αποστάσεις μεταξύ συμπαγών συνόλων, π.χ. την απόσταση μεταξύ δύο νησιών, χρειαζόμαστε « μέτρο » το οποίο μετράει απόσταση μεταξύ ολόκληρων

των συνόλων και όχι μόνο δύο σημείων. Κατάλληλο μέτρο είναι η Hausdorff απόσταση μεταξύ των συνόλων K και A η οποία ορίζεται ως

$$h(K, A) = \max\left\{\max_{\kappa \in K} \min_{\alpha \in A} |\kappa - \alpha|, \max_{\alpha \in A} \min_{\kappa \in K} |\kappa - \alpha|\right\}$$

Η απόσταση αυτή εκφράζει τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει κατ' ελάχιστον ένας κάτοικος της Άνδρου (Κεφαλλονιάς) για να φτάσει στην Κεφαλλονιά (Άνδρο) (Σχ. 1.4).



Σχήμα 1.4: Απόσταση νησιών Κεφαλλονιάς - Άνδρου

Τα παραπάνω είναι μερικά παραδείγματα περιπτώσεων όπου η έννοια της μετρικής (απόστασης) χρειάστηκε να μαθηματικοποιηθεί ώστε να ικανοποιεί τις ανάγκες που προκύπτουν σε προβλήματα διαφορετικής φύσης. Για το λόγο αυτό ορίζουμε εκ των προτέρων σε κάθε περίπτωση τον τρόπο με τον οποίο μετράμε αποστάσεις.

1.2 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 1.1 Έστω X τυχαίο μη κενό σύνολο. **Μετρική**¹ (ή απόσταση) στον X ονομάζεται μια απεικόνιση $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$, (Συμμετρική ιδιότητα)
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$, (Τριγωνική ανισότητα)

Τα στοιχεία του συνόλου ονομάζονται **σημεία**, ο αριθμός $\rho(x, y)$ **απόσταση** μεταξύ των σημείων $x, y \in X$ και το ζεύγος (X, ρ) **μετρικός χώρος**.

¹Θα συμβολίζουμε με d , ρ ή σ .

Όταν ένα σύνολο εφοδιάζεται με κάποια μετρική αυτόματα απολαμβάνει και τη δομή τοπολογικού χώρου ², όπου κυρίαρχης σημασίας έννοια είναι αυτή της ανοικτής ή κλειστής σφαίρας κέντρου $x_0 \in X$ και ακτίνας $r > 0$.

Ορισμός 1.2 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Ονομάζεται **ανοικτή σφαίρα** κέντρου x_0 και ακτίνας r , το σύνολο $S_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.

Ορισμός 1.3 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Ονομάζεται **κλειστή σφαίρα** κέντρου x_0 και ακτίνας r , το σύνολο $\tilde{S}_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$.

Ορισμός 1.4 Το $A \subseteq X$ καλείται **ανοικτό σύνολο**, αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $S_d(a, r) \subseteq A$.

Ορισμός 1.5 Το σύνολο $B \subseteq X$ καλείται **κλειστό σύνολο**, αν το συμπλήρωμά του $X \setminus B$ είναι ανοικτό.

Ορισμός 1.6 Το $\Gamma \subseteq X$ είναι **φραγμένο** αν $\Gamma \subseteq S_d(x_0, r)$ για κάποιο $x_0 \in X$ και $r > 0$.

Παραδείγματα μετρικών χώρων:

- Στον \mathbb{R}^n χρησιμοποιούμε κυρίως τις μετρικές d_1 , d_2 μεταξύ των σημείων του $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:

Η **μετρική d_1** (μετρική Manhattan) στο σύνολο \mathbb{R}^n ορίζεται ως

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Ιδιαίτερος στον \mathbb{R}^2 είναι $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ και η αντίστοιχη κλειστή σφαίρα η οποία ορίζεται είναι $\tilde{S}_{d_1}(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq r\}$, (Σχ. 1.5 - i).

Η **μετρική d_2** (Ευκλείδεια μετρική) στο σύνολο \mathbb{R}^n ορίζεται ως

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

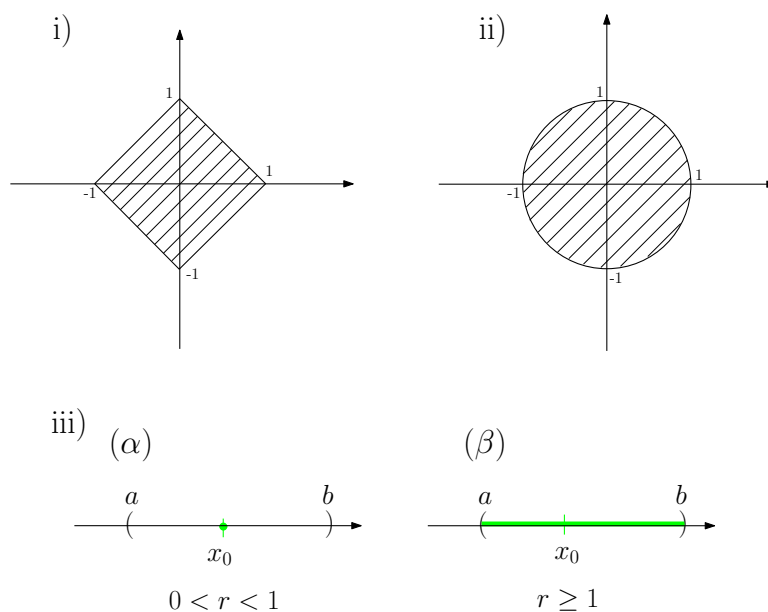
Ιδιαίτερος στον \mathbb{R}^2 είναι $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ και η αντίστοιχη κλειστή σφαίρα η οποία ορίζεται είναι $\tilde{S}_{d_2}(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq r\}$, (Σχ. 1.5 - ii).

²Ένας τοπολογικός χώρος δεν είναι αναγκαστικά μετρικός.

- Σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X ορίζεται η **μετρική** σ_0 (διακριτή μετρική) μεταξύ των σημείων $x, y \in X$ ως

$$\sigma_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y, \\ 0, & \text{αν } x = y. \end{cases} \quad (1.1)$$

Εδώ η κλειστή σφαίρα είναι $\tilde{S}_{\sigma_0}(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & 0 < r < 1 \\ X, & r \geq 1 \end{cases}, (\text{Σχ. 1.5 - iii}).$



Σχήμα 1.5: i) Η $\tilde{S}_{d_1}(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq 1\}$. ii) Η σφαίρα $\tilde{S}_{d_2}(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq 1\}$ της ευκλείδειας μετρικής στον \mathbb{R}^2 . iii)(α) Για $x_0 \in X = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και $0 < r < 1$, η $\tilde{S}_{\sigma_0}(x_0, r) = \{x_0\}$. iii)(β) Για $x_0 \in X = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και $r \geq 1$ η κλειστή σφαίρα είναι ολόκληρο το σύνολο X , δηλαδή $\tilde{S}_{\sigma_0}(x_0, r) = (a, b)$.

1.2.1 Καρτεσιανό Γινόμενο Μετρικών χώρων

Αν το σύνολο X είναι τυχαίο και δεν διαθέτει δομή (π.χ. διανυσματικού χώρου), η μόνη προφανής μετρική με την οποία μπορεί να εφοδιαστεί είναι η διακριτή μετρική (1.1).

Εάν έχουμε τους μετρικούς χώρους (X_i, ρ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, μπορούμε να ορίσουμε τις p -μετρικές ($p \geq 1$)³ στο καρτεσιανό γινόμενο $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ για $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ ως εξής:

$$d_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n; p)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n (\rho_i(x_i, y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{για } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{\rho_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}, & \text{για } p = +\infty \end{cases} \quad (1.2)$$

³Για $0 < p < 1$ δεν έχουμε μετρική, καθώς δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Οι μετρικές αυτές είναι συμβατές με τις υπάρχουσες στους X_1, X_2, \dots, X_n με την εξής έννοια: Εάν θεωρήσουμε τυχαίο σταθερό σημείο $(y_1, \dots, y_n) \in X$ ταυτίζοντας το $x_i \in X_i$ με το $(y_1, \dots, x_i, \dots, y_n) \in X$ θα έχουμε ότι

$$d_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n; p)}((y_1, \dots, x_i, \dots, y_n), (y_1, \dots, x'_i, \dots, y_n)) = \rho_i(x_i, x'_i), \text{ για } p \geq 1,$$

όπου i ο δείκτης που αντιστοιχεί στο μετρικό χώρο (X_i, ρ_i) . Στην περίπτωση όπου έχουμε $X_1 = X_2 = \dots = X_n = Y$, δηλαδή $X = Y^n$ και $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \rho$, συμβολίζουμε

$$d_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n; p)} = d_{(\rho; p)}.$$

1.2.2 Εφοδιασμός του \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) με διάφορες μετρικές

Στην εργασία αυτή, το σύνολο X του μετρικού χώρου είναι διανυσματικός χώρος ή υποσύνολό του και πιο συγκεκριμένα ο ίδιος ο \mathbb{R}^n ή υποσύνολα του. Η αξιωματική θεμελίωση του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ως ολικά διατεταγμένου σώματος μας επιτρέπει εκτός του ορισμού της διακριτής μετρικής, να ορίσουμε τη μετρική $\sigma_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $|\cdot|$ η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού και γενικότερα τη $\sigma_s(x, y) = |x - y|^s$, για $0 < s \leq 1$ ($\sigma_1 = \sigma_{|\cdot|}$). Εδώ είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sigma_s(x, y) = \sigma_0(x, y). \quad (1.3)$$

Στην περίπτωση που το σύνολο $X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ έχουμε τις αντίστοιχες p -μετρικές που προκύπτουν από τους $(\mathbb{R}, \sigma_{|\cdot|})$, (\mathbb{R}, σ_s) για $0 < s < 1$ και (\mathbb{R}, σ_0) για σημεία $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Συνήθεις μετρικές στον \mathbb{R}^n :

- Θεωρούμε το χώρο \mathbb{R} με τη μετρική $\sigma_{|\cdot|} = |x - y|$. Τότε ο \mathbb{R}^n εφοδιάζεται με τη μετρική $d_{(\sigma_{|\cdot|}; p)}$ που σύμφωνα με τη σχέση (1.2) είναι:

$$d_{(\sigma_{|\cdot|}; p)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{για } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n\}, & \text{για } p = +\infty \end{cases} \quad (1.4)$$

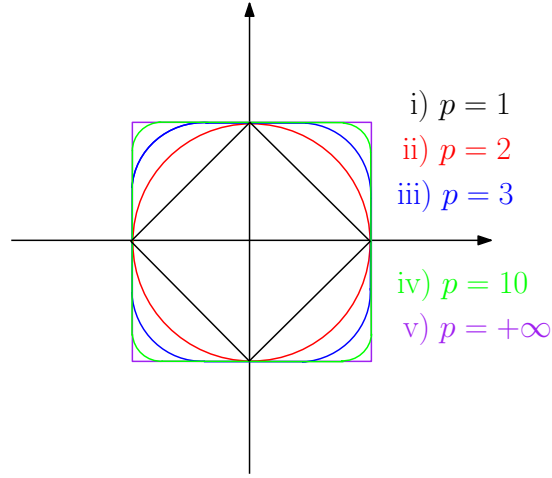
Ιδιαίτερως για $p = 2$ έχουμε την ευκλείδεια μετρική στον \mathbb{R}^n (Σχ. 1.6).

- Θεωρούμε το χώρο \mathbb{R} με τη μετρική $\sigma_s = |x - y|^s$ για $0 < s \leq 1$. Τότε ο \mathbb{R}^n εφοδιάζεται με τη μετρική $d_{(\sigma_s; p)}$ που σύμφωνα με τη σχέση (1.2) είναι:

$$d_{(\sigma_s; p)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_s(x_i, y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{για } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{\sigma_s(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}, & \text{για } p = +\infty \end{cases} \quad (1.5)$$

Ιδιαίτερως για $p = 1$ έχουμε

$$d_{(\sigma_s; 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^s, \quad 0 < s \leq 1. \quad (1.6)$$



Σχήμα 1.6: Η $\tilde{S}_{d_{(\sigma_{|\cdot|}; p)}(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_{(\sigma_{|\cdot|}; p)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq 1\}$ για διάφορες τιμές του p . Παρατηρούμε ότι καθώς το p αυξάνεται, η σφαίρα του χώρου μας τείνει να γίνει η σφαίρα $\tilde{S}_{d_{(\sigma_{|\cdot|}; +\infty)}(\mathbf{0}, 1)$, ενώ για $p = 1$ έχουμε τη σφαίρα $\tilde{S}_{d_{(\sigma_{|\cdot|}; 1)}(\mathbf{0}, 1)$.

Διακριτή Μετρική:

- Θεωρούμε το χώρο \mathbb{R} με τη μετρική $\sigma_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}$, οπότε ο \mathbb{R}^n εφοδιάζεται με τη μετρική $d_{(\sigma_0; p)}$ που σύμφωνα με τη σχέση (1.2) είναι:

$$d_{(\sigma_0; p)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_0(x_i, y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{για } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{\sigma_0(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}, & \text{για } p = +\infty \end{cases} \quad (1.7)$$

Ιδιαίτέρως για $p = 1$ έχουμε

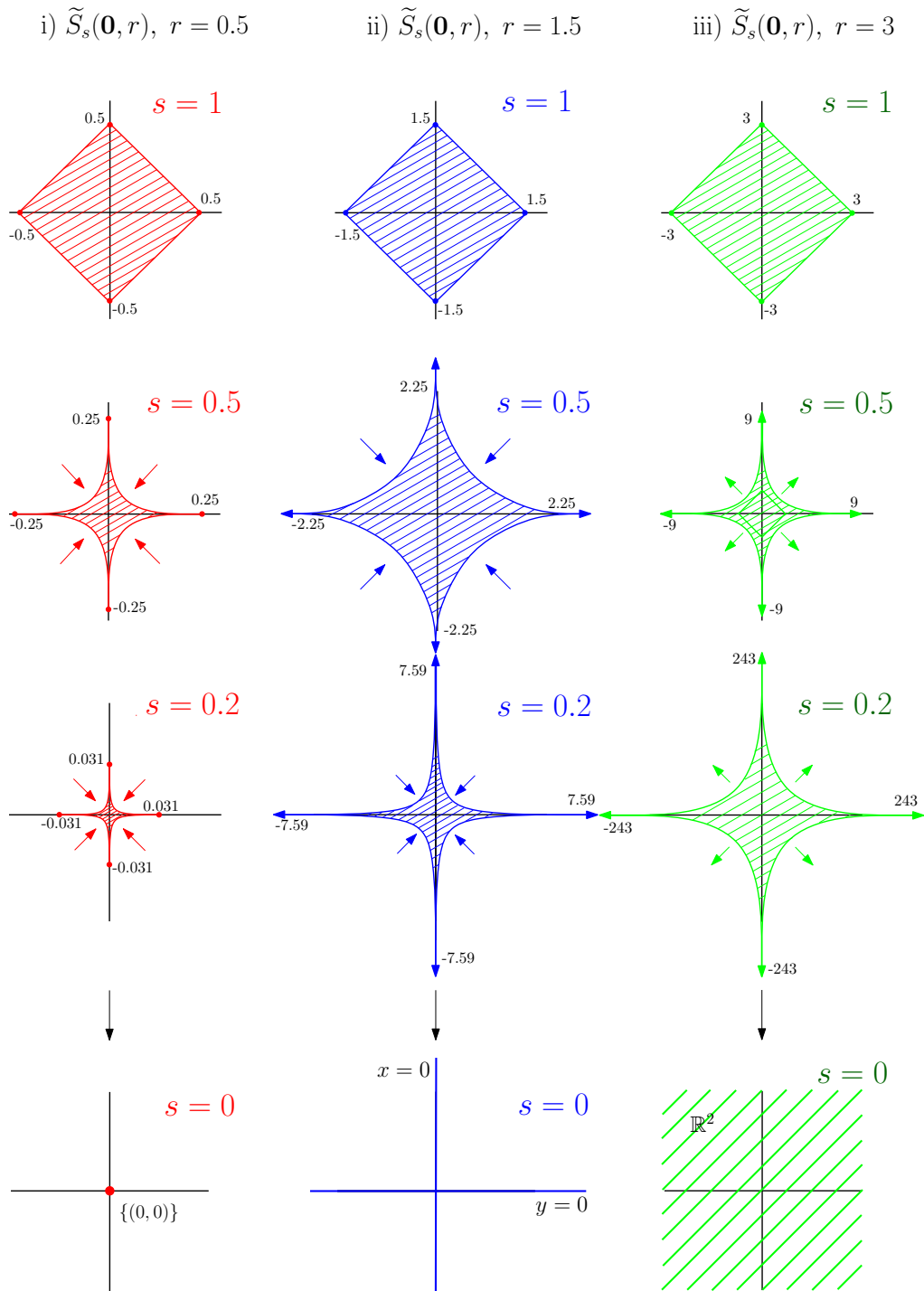
$$d_{(\sigma_0; 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \#\{i : x_i \neq y_i\}. \quad (1.8)$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση (1.8), με τις (1.3), (1.6) προκύπτει ότι,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} d_{(\sigma_s; 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^s \right) = d_{(\sigma_0; 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \#\{i : x_i \neq y_i\} \quad (1.9)$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει τη συμπεριφορά των αντίστοιχων σφαιρών. Στο (Σχ. 1.7 - i) βλέπουμε ότι στον \mathbb{R}^2 για $r \in (0, 1)$ (εδώ $r = 0.5$) καθώς $s \rightarrow 0^+$ οι σφαίρες $\tilde{S}_{(\sigma_s; 1)}(\mathbf{0}, r)$ φθίνουν, δηλαδή για $0 < s' < s \leq 1$ έχουμε $\tilde{S}_{(\sigma_{s'}; 1)}(\mathbf{0}, r) \subset \tilde{S}_{(\sigma_s; 1)}(\mathbf{0}, r)$ και τελικά πηγαίνουν προς τη σφαίρα $\tilde{S}_{(\sigma_0; 1)}(\mathbf{0}, r) = \bigcap_{0 < s \leq 1} \tilde{S}_{(\sigma_s; 1)}(\mathbf{0}, r)$. Στο (Σχ. 1.7 - ii) για $r \in [1, 2)$

(εδώ $r = 1.5$), δεν υπάρχει κάποια σχέση υποσυνόλου μεταξύ των σφαιρών $\tilde{S}_{(\sigma_{s'}, 1)}(\mathbf{0}, r)$ και $\tilde{S}_{(\sigma_s, 1)}(\mathbf{0}, r)$ για $s' < s$, αλλά η $\tilde{S}_{(\sigma_s, 1)}(\mathbf{0}, r)$ τείνει να συμπέσει με τους άξονες καθώς το $s \rightarrow 0^+$. Στο (Σχ. 1.7 - iii)) για $r \in [2, +\infty)$ (εδώ $r = 3$), οι σφαίρες αυξάνουν για $0 < s' < s \leq 1$ και έχουμε $\tilde{S}_{(\sigma_{s'}, 1)}(\mathbf{0}, r) \supset \tilde{S}_{(\sigma_s, 1)}(\mathbf{0}, r)$, όπου τελικά για $s \rightarrow 0^+$ καταλαμβάνουν ολόκληρο το σύνολο καθώς $\tilde{S}_{(\sigma_0, 1)}(\mathbf{0}, r) = \bigcup_{0 < s \leq 1} \tilde{S}_{(\sigma_s, 1)}(\mathbf{0}, r)$.



Σχήμα 1.7: Η $\tilde{S}_{\sigma_0}(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sigma_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq r\}$: i) Για $0 < r < 1$, $\tilde{S}_{\sigma_0}(\mathbf{0}, r) = \{(0, 0)\}$. ii) Για $1 \leq r < 2$, $\tilde{S}_{\sigma_0}(\mathbf{0}, r) = \{x = 0 \text{ ή } y = 0\}$. iii) Για $r \geq 2$, $\tilde{S}_{\sigma_0}(\mathbf{0}, r) = \mathbb{R}^2$.

1.3 Χώροι με νόρμες

Εάν το σύνολο X είναι διανυσματικός (γραμμικός) χώρος, εφοδιάζεται με πράξεις που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες.

Ορισμός 1.7 **Διανυσματικός χώρος** (ή γραμμικός χώρος) ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$, όπου X είναι ένα σύνολο, $+ : X \times X \rightarrow X$ μια εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και $\cdot : F \times X \rightarrow X$ μια εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $x + y = y + x, \forall x, y \in X,$
2. $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in X,$
3. Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in X$ ώστε $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in X,$
4. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $-x \in X$ ώστε $x + (-x) = (-x) + x = 0,$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in X$ και $\lambda \in F,$
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in X$ και $\lambda, \mu \in F,$
7. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in X$ και $\lambda, \mu \in F,$
8. $1 \cdot x = x, \forall x \in X.$

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Ορισμός 1.8 Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος αριθμών F . Το σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται **κυρτό**, αν για κάθε x και y στο X και κάθε $t \in [0, 1]$, το στοιχείο $tx + (1-t)y$ ανήκει επίσης στο σύνολο A .

Ορισμός 1.9 Μια πραγματική συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X ονομάζεται **κυρτή**, αν για κάθε $x, y \in A$ και $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Ορισμός 1.10 Μια πραγματική συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X ονομάζεται **κοίλη**, αν για κάθε $x, y \in A$ και $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R} έχουμε την απόλυτη τιμή με τις εξής ιδιότητες:

⁴ $F = \mathbb{C}$ ή \mathbb{R} .

1. $|x| \geq 0, x \in \mathbb{R}$ και $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|\lambda x| = |\lambda||x|, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, (θετικά ομογενής)
3. $|x + y| \leq |x| + |y|, x, y \in \mathbb{R}$, (τριγωνική ανισότητα)

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι θετικά ομογενής, κυρτή συνάρτηση με $f(x) > 0$ για $x \neq 0$. Η γενίκευση της απόλυτης τιμής σε μεγαλύτερης διάστασης γραμμικούς χώρους δίνει τη νόρμα.

Ορισμός 1.11 Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **νόρμα** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, (θετικά ομογενής)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$, (τριγωνική ανισότητα)

Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ ονομάζεται **χώρος με νόρμα**.

Ως γενίκευση της απόλυτης τιμής, η συνάρτηση $f(x) = \|x\|$ είναι θετικά ομογενής και κυρτή, με $f(x) > 0$ για $x \neq 0$. Προφανώς αν ορίσουμε $\|x - y\| = f(x, y)$ για $x, y \in X$ τότε η f αποτελεί μετρική στον X με $f(x, 0) = \|x\|$. Ακόμη, αν g είναι μια μετρική σε διανυσματικό χώρο X με τις επιπλέον ιδιότητες $g(x + z, y + z) = g(x, y), x, y \in X$ (αναλλοίωτη στις μετατοπίσεις) και $g(\lambda x, 0) = |\lambda|g(x, 0)$ με $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (θετικά ομογενής), τότε η $g(x, 0) = \|x\|$ αποτελεί νόρμα και στην περίπτωση αυτή $f \equiv g$. Θα δούμε όμως ότι κάποιες από τις μετρικές που ορίσαμε δεν προέρχονται από νόρμες.

Όπως και στην περίπτωση των μετρικών χώρων $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, ορίζονται οι p -νόρμες για τους χώρους με νόρμα $(X_i, \|\cdot\|)$.

Παραδείγματα χώρων με νόρμα για $X = \mathbb{R}^n$:

- Οι p -νόρμες για $1 < p < +\infty$:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Η ευκλείδεια νόρμα ορίζεται:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Η νόρμα αθροίσματος (ή 1-νόρμα) $\|\cdot\|_1$ και η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ αντίστοιχα:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι γενικά πρέπει $1 \leq p \leq +\infty$, ώστε η $\|\cdot\|_p$ να αποτελεί νόρμα στον \mathbb{R}^n , κάτι που εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε με χρήση της ανισότητας Minkowski.

Λόγω της ανάγκης να ορίσουμε συναρτήσεις βελτιστοποίησης, θα επιδιώξουμε τη χρήση κυρτής συνάρτησης η οποία μας εξασφαλίζει και τη μοναδικότητα της λύσης, εφόσον η τελευταία υπάρχει. Επομένως θα θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f_p(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.10)$$

η οποία είναι θετικά ομογενής για οποιοδήποτε $p > 0$, αλλά κυρτή μόνο για $p \geq 1$. Για $0 < p < 1$ είναι κατά τμήματα κοίλη, οπότε δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα (Σχ. 1.8).

Η μετρική $\sigma_s(x, y) = |x - y|^s$, $x, y \in \mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτη στις μετατοπίσεις, αλλά δεν είναι θετικά ομογενής για $s \neq 1$. Οπότε οι μετρικές στον \mathbb{R}^n

$$d_{(\sigma_s; p)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{ps} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{για } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{|x_i|^s, i = 1, 2, \dots, n\}, & \text{για } p = +\infty \end{cases}$$

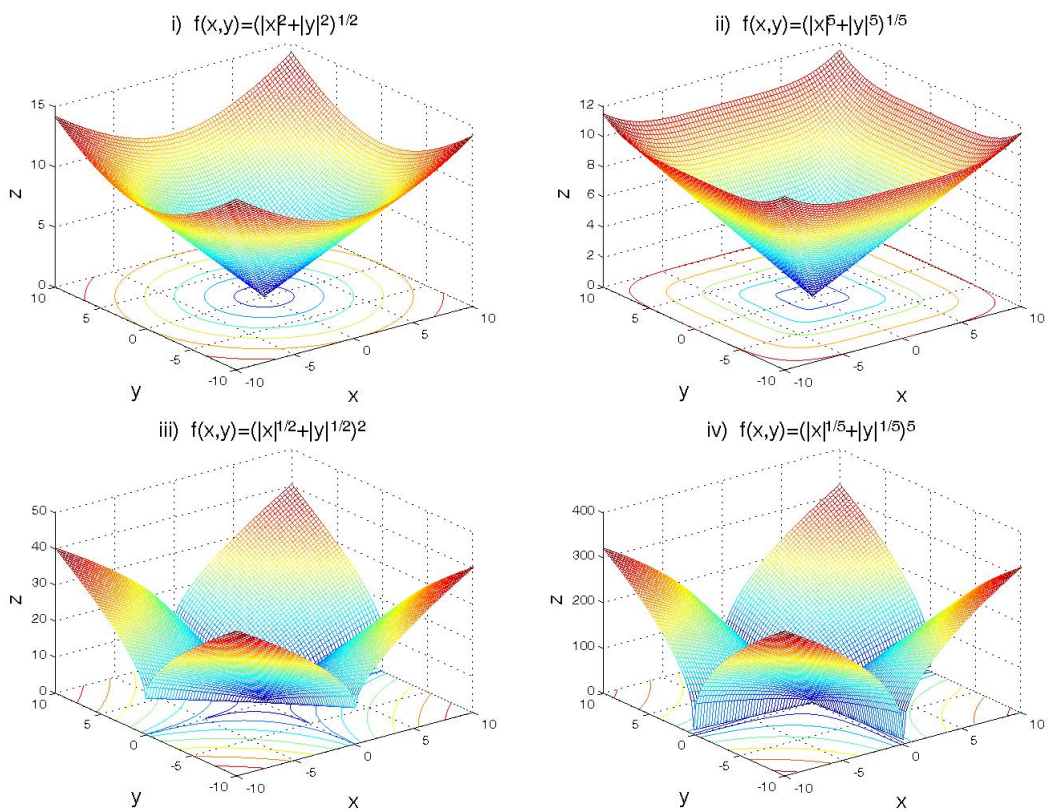
για $0 < s < 1$ που προέκυψαν από τη σ_s δεν αποτελούν νόρμες ((Σχ. 1.9) για $p = 1$).

Τα παραπάνω ερμηνεύονται γεωμετρικά ως εξής. Για $p \geq 1$ οι αντίστοιχες σφαίρες είναι κυρτά σύνολα, ενώ για $0 < p < 1$ χάνουν την ιδιότητα της κυρτότητας. Εάν $(X_i, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα τότε οι σφαίρες $\tilde{S}_{\|\cdot\|}(x, r)$ είναι πάντοτε κυρτά σύνολα. Πράγματι αν $y, z \in \tilde{S}_{\|\cdot\|}(x, r)$ τότε $\|y - x\|, \|z - x\| \leq r$, άρα για $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει ότι $\|\lambda y + (1 - \lambda)z - x\| = \|\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x)\| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r \leq r$, δηλαδή το $\lambda y + (1 - \lambda)z \in \tilde{S}_{\|\cdot\|}(x, r)$, άρα το σύνολο $\tilde{S}_{\|\cdot\|}(x, r)$ είναι κυρτό.

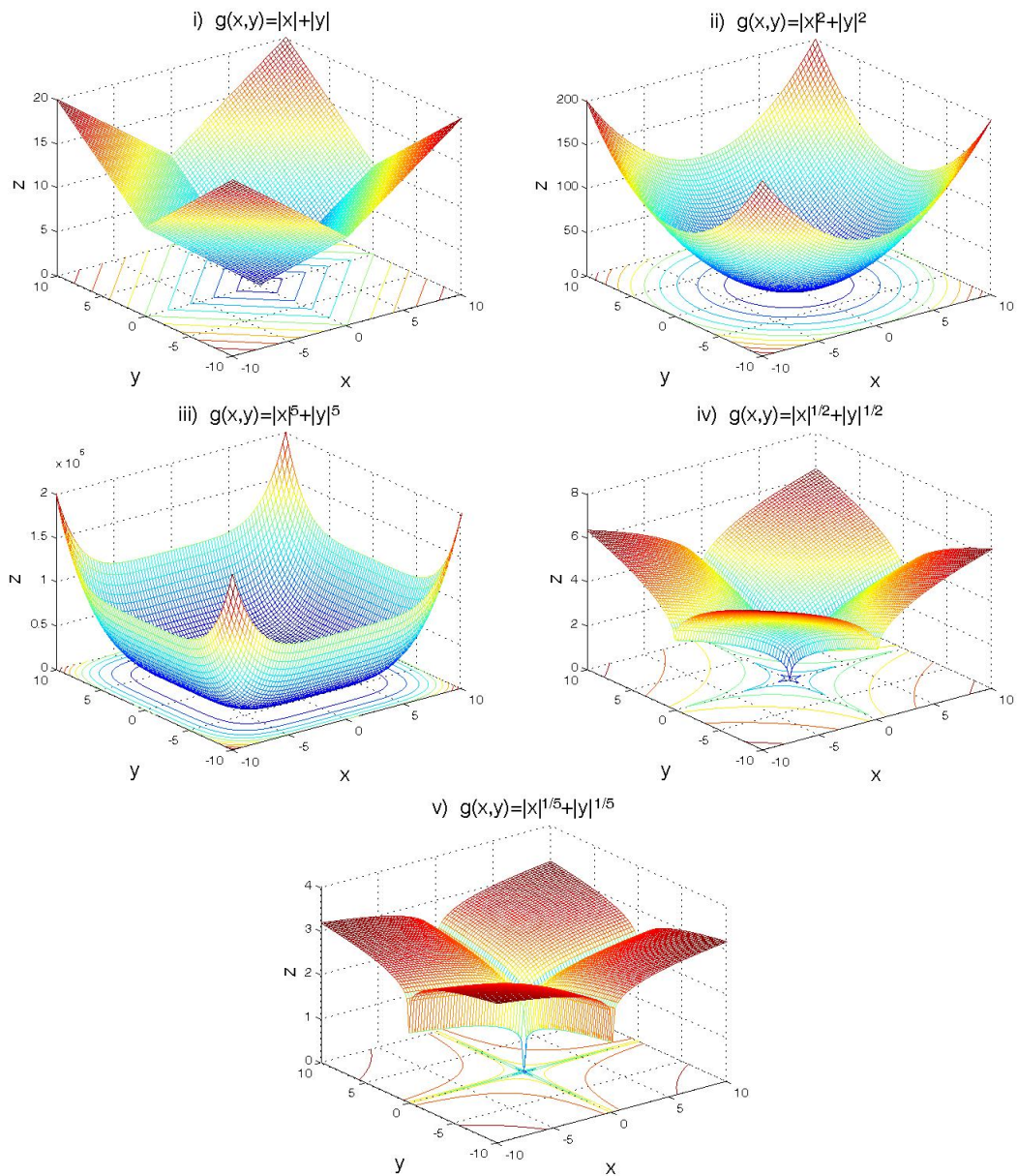
Σημείωση: Η ιδιότητα της κυρτότητας είναι πολύ ισχυρή. Συγκεκριμένα εάν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και θεωρήσουμε $K \subseteq X$ κυρτό και συμμετρικό ($K = -K$) ανοικτό ώστε να υπάρχουν $R, r > 0$ και ισχύει $S_{\|\cdot\|}(0, r) \subseteq K \subseteq S_{\|\cdot\|}(0, R)$. Τότε το K αποτελεί τη μοναδιαία σφαίρα μιας άλλης νόρμας, δηλαδή της

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\},$$

(συνάρτηση στάθμης ή συναρτησοειδές Minkowski) που είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την υπάρχουσα.



Σχήμα 1.8: Η συνάρτηση $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ στον \mathbb{R}^2 για $p > 0$: i) - ii) Για $p \geq 1$ έχουμε κυρτές συναρτήσεις. iii) - iv) Για $0 < p < 1$ παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις δεν είναι κυρτές. i) - iv) Οι συναρτήσεις είναι θετικά ομογενείς για κάθε $p > 0$.



Σχήμα 1.9: Η συνάρτηση $g(x, y) = |x|^s + |y|^s$ στον \mathbb{R}^2 για $s > 0$: i) - iii) Για $s \geq 1$ έχουμε κυρτές συναρτήσεις. iv) - v) Για $0 < s < 1$ παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις δεν είναι κυρτές. ii) - v) Για $s \neq 1$ οι συναρτήσεις δεν είναι θετικά ομογενείς.

Κεφάλαιο 2

Συνθήκες για αραιές λύσεις

2.1 Μέτρα για αραιές λύσεις γραμμικών συστημάτων

Έστω ένας πίνακας \mathbf{A} διάστασης $n \times m$ με $n < m$, τάξης n και το γραμμικό μη-ομογενές σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις (αόριστο). Αν όμως θελήσουμε να περιοριστούμε σε μια λύση του συστήματος η οποία να είναι καλώς ορισμένη, θα πρέπει να επιβάλουμε επιπλέον συνθήκες στο πρόβλημά μας. Ας θεωρήσουμε $f(\mathbf{x})$ μια συνάρτηση η οποία θα εκτιμήσει την καταλληλότητα των λύσεων \mathbf{x} , με βάση πάντα κάποιο κριτήριο. Ορίζουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης P_f ,

$$(P_f) : \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \text{ όπου } \mathbf{x} \text{ ικανοποιεί το } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2.1)$$

Επιλέγοντας μια κυρτή συνάρτηση f εξασφαλίζουμε τη μοναδικότητα της λύσης. Ένας κλασικός τρόπος επίλυσης του συστήματος είναι θεωρώντας ως συνάρτηση f το τετράγωνο της ευκλείδειας νόρμας, δηλαδή $f(\cdot) = \|\cdot\|_2^2$. Το πρόβλημα (P_2) που ορίσαμε έχει μοναδική λύση $\hat{\mathbf{x}}$, τη λύση ελάχιστης νόρμας, η οποία δίνεται αναλυτικά από τον τύπο

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b},$$

όταν ο πίνακας \mathbf{AA}^T αντιστρέφεται. Η νόρμα που επιλέξαμε, δηλαδή το τετράγωνο της l_2 -νόρμας, αποτελεί ένα μέτρο « ενέργειας ». Το ενδιαφέρον μας όμως εστιάζεται σε μέτρα για αραιές λύσεις, επομένως χρειαζόμαστε ένα διαφορετικό μέτρο.

Ένα διάνυσμα θα θεωρείται αραιό εφόσον υπάρχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στις συντεταγμένες του και αραιότερο εκείνο με τα περισσότερα μηδενικά. Συνεπώς ένα διάνυσμα με λιγότερα από m μη μηδενικά στοιχεία στις συντεταγμένες του που ικανοποιεί το σύστημα (2.1), αποτελεί μια **αραιή λύση** του συστήματος. Ένα απλό αλλά ουσιαστικό μέτρο το οποίο εκτιμά κατά πόσο η λύση μας $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ είναι αραιή, θα μπορούσε να αποτελεί, εκείνο το οποίο δίνει τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x} . Θεωρούμε λοιπόν τη μετρική

$$d_{(\sigma_0; 1)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \#\{i : x_i \neq 0\},$$

την οποία θα καλούμε d_0 για λόγους απλότητας. Επομένως αν $d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < m$, το διάνυσμα \mathbf{x} θα θεωρείται αραιό.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα (P_0) το οποίο προκύπτει από το γενικό (P_f) θεωρώντας τη συνάρτηση $f_0(\mathbf{x}) \equiv d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0})$,

$$(P_0) : \min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}), \text{ όπου } \mathbf{x} \text{ ικανοποιεί } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2.2)$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.2) φαίνεται αντίστοιχο του προβλήματος ελαχιστοποίησης της l_2 νόρμας (P_2) , παρόλα αυτά παρουσιάζει σημαντικές διαφορές σε σχέση με το τελευταίο. Η λύση του (P_2) , είναι μοναδική και εύκολα υπολογίσιμη χρησιμοποιώντας τετραγωνικό προγραμματισμό. Το (P_0) όμως παρουσιάζει δυσκολίες, λόγω ότι η συνάρτηση ελαχιστοποίησης δεν είναι κυρτή, κάτι το οποίο δεν μας εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει. Ανακαλύπτουμε ότι προκύπτουν σημαντικά ερωτήματα σχετικά με το πρόβλημα (P_0) . Υπάρχει πάντα λύση του προβλήματος, δηλαδή για οποιονδήποτε πίνακα \mathbf{A} και διάνυσμα \mathbf{b} ; Αν υπάρχει λύση είναι μοναδική; Τέλος, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι μια υποψήφια λύση είναι η βέλτιστη λύση του (P_0) ; Όπως θα δούμε παρακάτω, το πρόβλημα έχει λύση για περιπτώσεις ειδικών πινάκων \mathbf{A} και διανυσμάτων \mathbf{b} , όμως σε γενικές περιπτώσεις τα προβλήματα που αρχικά φαίνεται να αναδύονται είναι αρκετά, ώστε να καταλάβουμε ότι το πρόβλημα δεν είναι πάντοτε επιλύσιμο.

Το (P_0) αποτελεί ένα κλασσικό πρόβλημα συνδυαστικής, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιο αραιή λύση. Θα πρέπει να εξαντλήσουμε όλα τα πιθανά υποσύνολα δημιουργώντας υποσυστήματα της μορφής $\mathbf{A}_S \mathbf{x}_S = \mathbf{b}$, όπου \mathbf{A}_S συμβολίζει τον πίνακα s στηλών του πίνακα \mathbf{A} και να εξετάσουμε αν το $\mathbf{A}_S \mathbf{x}_S = \mathbf{b}$ είναι επιλύσιμο. Η πολυπλοκότητα της μεθόδου είναι 2^m και το πρόβλημα βελτιστοποίησης (P_0) είναι NP-hard¹. Επομένως η ανάγκη διαφορετικής προσέγγισης του προβλήματος είναι επιτακτική.

Έστω τώρα η συνάρτηση $f_1(\mathbf{x}) \equiv \|\mathbf{x}\|_1$, όπου $\|\mathbf{x}\|_1$ η l_1 νόρμα του \mathbf{x} , δηλαδή το πρόβλημα

$$(P_1) : \min_{\mathbf{x}} f_1(\mathbf{x}), \text{ όπου } \mathbf{x} \text{ ικανοποιεί } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.3)$$

το οποίο είναι ενδιάμεσο των προβλημάτων (P_0) και (P_2) . Η f_1 είναι η πλησιέστερη κυρτή συνάρτηση στην f_0 , άρα το πρόβλημα (P_0) προσεγγίζεται από το (P_1) . Μάλιστα αποδεικνύεται πως για πίνακες με συγκεκριμένες ιδιότητες, όταν το (P_0) έχει αραιή λύση, αυτή είναι μοναδική και συμπίπτει με τη λύση του προβλήματος (P_1) η οποία μπορεί να προκύψει με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού. Γενικότερα όμως, η λύση του προβλήματος (2.3) δεν μπορεί να προκύψει για οποιονδήποτε πίνακα \mathbf{A} , αλλά θα πρέπει να πληρεί κάποιες προϋποθέσεις.

Η συνάρτηση f_0 , δηλαδή η μετρική d_0 , παρότι μας παρέχει ένα απλό δείκτη ώστε να εκτιμήσουμε κατά πόσο μια λύση είναι αραιή, στην πράξη υστερεί σε σχέση με άλλα. Είναι εξαιρετικά σπάνιο ένα διάνυσμα με συντεταγμένες πραγματικούς αριθμούς, να προσεγγιστεί από ένα άλλο το οποίο έχει σε αρκετές συντεταγμένες απόλυτα μηδενικά.

Για το λόγο αυτό ορίζονται ασθενέστερα μέτρα, όπως οι w_p νόρμες οι οποίες μετρούν την ανταλλαγή του αριθμού των μη μηδενικών συντεταγμένων με το σφάλμα της 2-νόρμας. Θεωρώντας ως $N(\varepsilon, \mathbf{x})$ τον αριθμό των συντεταγμένων του \mathbf{x} που είναι μεγαλύτερες του ε , το μέτρο αυτό ορίζεται

$$\|\mathbf{x}\|_{w_p} = \sup_{\varepsilon > 0} N(\varepsilon, \mathbf{x}) \cdot \varepsilon^p.$$

¹Ανήκει στην περιοχή προβλημάτων τα οποία δεν επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Εδώ η περιοχή που μας ενδιαφέρει είναι $0 < p \leq 1$, διότι μας δίνει ένα ισχυρό μέτρο για αραιές λύσεις. Η ασθενής νόρμα w_p αποτελεί ένα δημοφιλές μέτρο αραιότητας το οποίο χρησιμοποιείται στις αναπαραστάσεις εικόνων καρτούν.

Ένα ισοδύναμο μέτρο είναι οι συναρτήσεις f_p (1.10), οι οποίες είναι νόρμες για $1 \leq p \leq +\infty$. Το γεγονός ότι χρειάζεται να μετρήσουμε αραιότητα, καθιστά την περιοχή $0 < p \leq 1$ πιο ενδιαφέρουσα, με κόστος όμως να χάσουμε έτσι την κυρτότητα των συναρτήσεων f_p (Σχ. 1.8 - iii), iv).

2.2 Επιλέγοντας πίνακα

Όπως ήδη αναφερθήκαμε το πρόβλημα (P_0) δεν είναι επιλύσιμο για γενικούς πίνακες. Ορίζουμε λοιπόν εδώ τις προϋποθέσεις κάτω υπό τις οποίες μπορεί ένας πίνακας να οδηγήσει στην επίλυση του προβλήματός μας.

2.2.1 Συνθήκη Περιορισμένης Ισομετρίας (RIP)

Ορισμός 2.1 Για κάθε ακέραιο $s = 1, 2, \dots$, ορίζεται η σταθερά ισομετρίας $0 < \delta_s < 1$ ενός πίνακα \mathbf{A} ως ο μικρότερος αριθμός τέτοιος ώστε

$$(1 - \delta_s)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s)\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.4)$$

να ισχύει για κάθε s -αραιό διάνυσμα \mathbf{x} . Ένα διάνυσμα θεωρείται s -αραιό όταν έχει το πολύ s μη μηδενικές συντεταγμένες.

Ο παραπάνω ορισμός δόθηκε από τον Candès. Ένας πίνακας ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα όταν το δ_s δεν είναι κοντά στη μονάδα. Όταν ισχύει η συνθήκη (2.4) η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος \mathbf{x} σχεδόν διατηρείται, όταν το προβάλλουμε στις γραμμές του πίνακα \mathbf{A} . Αν ο πίνακας \mathbf{A} ήταν ορθογώνιος, θα είχαμε $\delta_s = 0$, κάτι που δεν μπορεί όμως να συμβεί, διότι ο πίνακας μας έχει περισσότερες στήλες από γραμμές. Αν ένας πίνακας έχει μικρή σταθερά ισομετρίας, σημαίνει πως κάθε υποσύνολο s ή λιγότερων στηλών του, σχηματίζουν ένα σχεδόν ορθοκανονικό σύστημα, επομένως με τον πίνακα αυτό μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα (2.2) για ικανοποιητικό εύρος προβλημάτων, με μεγάλη πιθανότητα.

Στην πράξη, η επαλήθευση της συνθήκης (2.4) για γενικής δομής πίνακες είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία. Παρόλα αυτά έχει παρατηρηθεί ότι πίνακες με μικρή ισομετρική σταθερά αποτελούν οι πίνακες τυχαίας εισόδου, που μπορούν να προκύψουν από τις γνωστές κατανομές, οι οποίοι μάλιστα εξυπηρετούν και αρκετές εφαρμογές. Για παράδειγμα, πίνακες με στοιχεία εισόδου από τις κατανομές Gauss, Bernoulli και Poisson, όπως επίσης και από την ομοιόμορφη κατανομή, δίνουν μικρό δ_s με μεγάλη πιθανότητα, αρκεί ο αριθμός των γραμμών n να είναι της τάξης του $s \ln(m/s)$. Επίσης ο πίνακας με στοιχεία γινόμενα τυχαία επιλεγμένων στηλών από τον διακριτό πίνακα Fourier έχει μικρό δ_s με μεγάλη πιθανότητα αρκεί ο αριθμός των γραμμών n να είναι της τάξης του $s \ln(m)^4$.

Μια διαφορετική προσέγγιση για την ερμηνεία της συνθήκης (2.4) είναι ότι διατηρεί τις Ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ s -αραιών διανυσμάτων. Εάν θεωρήσουμε δύο s -αραιά διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, η διαφορά τους $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, θα είναι στη γενική περίπτωση ένα το πολύ $2s$ -αραιό

διάνυσμα. Οπότε θα έχουμε

$$(1 - \delta_{2s})\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2s})\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2.$$

Εάν το δ_{2s} είναι μικρό αυτό σημαίνει ότι η Ευκλείδεια νόρμα διατηρείται με την προβολή της λύσης στη μικρότερη διάσταση n . Τέλος, η συνθήκη RIP σχετίζεται επίσης με τον δείκτη κατάστασης του πίνακα Gram. Αν θεωρήσουμε \mathbf{A}_l τον υποπίνακα που προκύπτει από τον \mathbf{A} αν θεωρήσουμε μόνο l στήλες του, η συνθήκη RIP (2.4) είναι ισοδύναμη με την απαίτηση ο αντίστοιχος υποπίνακας Gram $\mathbf{A}_l^T \mathbf{A}$, με $l \leq s$ να περιέχει τις ιδιοτιμές του στο διάστημα $[1 - \delta_s, 1 + \delta_s]$.

Εάν συμβολίσουμε ως \mathbf{x}_s το διάνυσμα που προκύπτει από το \mathbf{x} εάν κρατήσουμε τις s μεγαλύτερες τιμές του μηδενίζοντας όλες τις υπόλοιπες και \mathbf{x}^* τη βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.3), έχουμε:

Θεώρημα 2.1 Υποθέτουμε ότι $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$. Τότε η λύση \mathbf{x}^* του προβλήματος (2.3) ικανοποιεί

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1 \quad (2.5)$$

και

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 s^{-1/2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1 \quad (2.6)$$

για κάποια σταθερά C_0 . Συγκεκριμένα εάν το \mathbf{x} είναι s -αραιό το υπολογίζει ακριβώς.

Στην περίπτωση που η λύση \mathbf{x} δεν είναι αραιή, η λύση μας προσεγγίζει ικανοποιητικά το \mathbf{x}_k . Το παραπάνω θεώρημα επιβεβαιώνει ότι τα προβλήματα (2.2) και (2.3) είναι ισοδύναμα με την ακόλουθη έννοια:

- αν $\delta_{2s} < 1$, το πρόβλημα (2.2) έχει μοναδική s -αραιή λύση.
- αν $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$, η λύση του (2.3) είναι αυτή του προβλήματος (2.2).

Αν αντιθέτως είχαμε $\delta_{2s} = 1$, τότε $2s$ στήλες του πίνακα \mathbf{A} θα ήταν γραμμικά εξαρτημένες, συνεπώς θα είχαμε ένα διάνυσμα \mathbf{x}_h , $2s$ -αραιό, με $\mathbf{A}\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$. Με αντικατάσταση το \mathbf{x}_h με $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, όπου \mathbf{x}, \mathbf{x}' s -αραιά, προκύπτει ότι $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$. Συνεπώς δεν γίνεται να κατασκευάσουμε όλα τα s -αραιά διανύσματα με οποιαδήποτε μέθοδο.

2.3 Η πιο αραιή λύση του συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Επιστρέφουμε στο πρόβλημά μας, δηλαδή την υπό συνθήκη λύση του αορίστου συστήματος, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Θεωρούμε ότι ο \mathbf{A} είναι διάστασης $n \times m$ με $n < m$ και έχει $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, δηλαδή ο πίνακας είναι μέγιστης τάξης n .

2.3.1 Μοναδικότητα της λύσης μέσω του σπάρκ

Ορισμός 2.2 Το σπάρκ ενός πίνακα \mathbf{A} ορίζεται ως ο μικρότερος αριθμός στηλών του \mathbf{A} οι οποίες είναι γραμμικά εξαρτημένες και συμβολίζεται με $spark(\mathbf{A})$.

Η τάξη ενός πίνακα \mathbf{A} ορίζεται ως ο μεγαλύτερος αριθμός των στηλών του οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες και μας εξασφαλίζει ότι οποιεσδήποτε $rank(\mathbf{A}) + 1$ στήλες του πίνακα θα είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αντίθετα, το σπάρκ ενός πίνακα ορίζεται ως ο μικρότερος αριθμός στηλών οι οποίες είναι γραμμικά εξαρτημένες και μας εξασφαλίζει ότι οποιεσδήποτε $spark(\mathbf{A}) - 1$ στήλες του πίνακα \mathbf{A} θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Προφανώς, βάσει ορισμού, υπάρχει κάποιος συσχετισμός μεταξύ των δύο. Επειδή για τον υπολογισμό του σπάρκ ενός πίνακα θα πρέπει κανείς να ελέγξει όλα τα πιθανά υποσύνολα στηλών του, μπορεί να προκύψει για τον πίνακα \mathbf{A} , $1 \leq spark(\mathbf{A}) \leq n + 1$. Δηλαδή μπορεί ένας πίνακας να είναι τάξης n , αλλά να έχει $spark(\mathbf{A}) = 2$.

Λήμμα 2.1 Τα διανύσματα $\mathbf{x} \in N(\mathbf{A})$, όπου $N(\mathbf{A})$ ο πυρήνας του πίνακα \mathbf{A} , ικανοποιούν τη σχέση

$$d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \geq spark(\mathbf{A}) \quad (2.7)$$

Απόδειξη. Λόγω ορισμού του σπάρκ, οποιεσδήποτε $l < spark(\mathbf{A})$ στήλες του πίνακα \mathbf{A} θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω ότι το διάνυσμα $\mathbf{x} \in N(\mathbf{A})$ έχει λιγότερες μη μηδενικές συντεταγμένες από το σπάρκ του \mathbf{A} , δηλαδή

$$d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \#\{i : x_i \neq 0\} = l < spark(\mathbf{A}).$$

Εφόσον $\mathbf{x} \in N(\mathbf{A})$ έχουμε ότι $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_l\mathbf{a}_l = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

όπου x_i οι μη μηδενικές συντεταγμένες του διανύσματος \mathbf{x} και \mathbf{a}_i τα αντίστοιχα διανύσματα στηλών του πίνακα \mathbf{A} για $i = 1, \dots, l$. Επειδή τα διανύσματα της εξίσωσης (2.8) είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές x_i , $i = 1, \dots, l$ θα είναι μηδέν, άρα καταλήξαμε σε αντίφαση. ■

Θεώρημα 2.2 Αν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση \mathbf{x} η οποία ικανοποιεί $d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < spark(\mathbf{A})/2$, τότε η λύση αυτή είναι υποχρεωτικά η πιο αραιή.

Απόδειξη. Έστω \mathbf{y} μια διαφορετική λύση που ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα, δηλαδή $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Επειδή $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ το διάνυσμα $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$, οπότε λόγω του Λήμματος 2.1, χρησιμοποιώντας ότι $d_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}) = d_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ και την τριγωνική ανισότητα που ικανοποιεί η διακριτή μετρική d_0 έχουμε

$$spark(\mathbf{A}) \leq d_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + d_0(\mathbf{y}, \mathbf{0}). \quad (2.9)$$

Από την παραπάνω σχέση και ότι $d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < spark(\mathbf{A})/2$, προκύπτει ότι $d_0(\mathbf{y}, \mathbf{0}) > spark(\mathbf{A})/2$. ■

2.3.2 Μοναδικότητα της λύσης μέσω της αμοιβαίας συσχέτισης

Ορισμός 2.3 Η αμοιβαία συσχέτιση ενός πίνακα \mathbf{A} ορίζεται ως η μεγαλύτερη απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου μεταξύ διαφορετικών κανονικοποιημένων στηλών του πίνακα \mathbf{A} . Συμβολίζοντας την k -στη στήλη του \mathbf{A} με \mathbf{a}_k , η αμοιβαία συσχέτιση είναι η ποσότητα

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq k, j \leq m, k \neq j} \frac{|\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_j|}{\|\mathbf{a}_k\|_2 \cdot \|\mathbf{a}_j\|_2}. \quad (2.10)$$

Η αμοιβαία συσχέτιση είναι ένα μέγεθος το οποίο χαρακτηρίζει την εξάρτηση των στηλών ενός πίνακα \mathbf{A} , δίνοντας ένα μέτρο για τη μικρότερη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα μεταξύ τους. Είναι άλλωστε γνωστό ότι για διανύσματα $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ ισχύει

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{a}_j\|_2} = \frac{\mathbf{a}_j^T \cdot \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_j\|_2 \cdot \|\mathbf{a}_i\|_2},$$

όπου με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Για το μοναδιαίο πίνακα, του οποίου οι στήλες είναι ανά δύο ορθογώνιες, η αμοιβαία συσχέτιση του πίνακα είναι μηδέν, επειδή η γωνία των διανυσμάτων είναι ορθή. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι οι στήλες του πίνακα είναι **γραμμικά ασυσχέτιστες**. Πίνακες οι οποίοι έχουν στήλες (διανύσματα) γραμμικά εξαρτημένες έχουν $\mu(\mathbf{A}) = 1$, εφόσον η γωνία τους είναι μηδέν. Για γενικούς πίνακες με περισσότερες στήλες από γραμμές ($n < m$), $0 \leq \mu(\mathbf{A}) \leq 1$ και επιδιώκουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή ώστε να πλησιάσουμε τη συμπεριφορά των ορθογώνιων πινάκων, δηλαδή ένα πίνακα ο οποίος θα έχει στήλες σχεδόν ασυσχέτιστες.

Η αμοιβαία συσχέτιση δεν επηρεάζει πάντα την επιτυχία επίλυσης του προβλήματός μας. Υπάρχουν περιπτώσεις πινάκων για τους οποίους το πρόβλημα είναι επιλύσιμο με μεγάλη πιθανότητα παρά τις μεγάλες τιμές αμοιβαίας συσχέτισης, ενώ για διαφορετικής δομής πίνακες το πρόβλημα είναι σχεδόν μη επιλύσιμο εφόσον οι τιμές αμοιβαίας συσχέτισης είναι υψηλές. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{A} γράφεται ως ένωση ορθομοναδιαίων πινάκων Φ, Ψ , δηλαδή $\mathbf{A} = [\Phi \Psi]$ με \mathbf{A} διάστασης $n \times m$, η αμοιβαία συσχέτιση ικανοποιεί $1/\sqrt{n} \leq \mu(\mathbf{A}) \leq 1$. Τη μικρότερη τιμή $1/\sqrt{n}$ παίρνουμε σε ειδικές περιπτώσεις ζευγαριών ορθογώνιων βάσεων, όπως είναι ο μοναδιαίος πίνακας \mathbf{I}_n και ο Fourier ή ο μοναδιαίος πίνακας \mathbf{I}_n με τον πίνακα Hadamard. Όταν η επιλογή των ορθογώνιων πινάκων διάστασης $n \times m$ είναι τυχαία, οι στήλες είναι ασυσχέτιστες και η αμοιβαία συσχέτιση του πίνακα \mathbf{A} είναι ανάλογη της ποσότητας $\sqrt{\log(nm)/n}$ για $n \rightarrow \infty$. Έχει επίσης αποδειχθεί ότι για την περίπτωση πίνακα \mathbf{A} διάστασης $n \times m$ και τάξης n , η αμοιβαία συσχέτιση ικανοποιεί τη σχέση

$$\mu(\mathbf{A}) \geq \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}.$$

Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει στην περίπτωση της οικογένειας πινάκων η οποία ονομάζεται Grassmanian frames και η οποία δίνει $\text{spark}(\mathbf{A}) = n + 1$, τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

Λήμμα 2.2 Για τυχαίο πίνακα \mathbf{A} διάστασης $n \times m$, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\text{spark}(\mathbf{A}) \geq 1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}. \quad (2.11)$$

Απόδειξη. Αρχικά μετατρέπουμε τον πίνακα \mathbf{A} σε $\tilde{\mathbf{A}}$, κανονικοποιώντας τις στήλες του ως προς την ευκλείδεια νόρμα. Με την ενέργεια αυτή διατηρείται το σπάρκ αλλά και η αμοιβαία συσχέτιση του πίνακα \mathbf{A} . Υπολογίζοντας τον πίνακα Gram $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{A}}$, διάστασης $m \times m$ παρατηρούμε ότι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\{G_{k,k} = 1 : 1 \leq k \leq m\} \text{ και } \{|G_{k,j}| \leq \mu(\mathbf{A}) : 1 \leq k, j \leq m, k \neq j\}. \quad (2.12)$$

Θεωρούμε στη συνέχεια έναν τυχαίο υποπίνακά του, έστω \mathbf{G}_p διάστασης $p \times p$, επιλέγοντας δηλαδή ένα υποσύνολο p στηλών του πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ και υπολογίζοντας τον Gram υποπίνακα. Αν ο υποπίνακας αυτός έχει αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο, δηλαδή ισχύει ότι

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |G_{i,j}| < |G_{i,i}|, \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq p, \quad (2.13)$$

ο \mathbf{G}_p είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς οι p στήλες του πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το παραπάνω μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε με χρήση της ανισότητας του Gerschgorin

$$|G_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^p |G_{sj}|$$

όπου λ μια ιδιοτιμή του πίνακα. Θέτοντας $\lambda = 0$ οδηγούμαστε σε άτοπο, δηλαδή το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα, άρα ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Λόγω της (2.12) έχουμε

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |G_{i,j}| \leq (p-1)\mu(\mathbf{A}),$$

οπότε με την απαίτηση $(p-1)\mu(\mathbf{A}) < 1 \Leftrightarrow p < 1 + 1/\mu(\mathbf{A})$ για κάθε υποπίνακα $p \times p$, θα έχουμε τη γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του. Άρα θα ισχύει $\text{spark}(\mathbf{A}) \geq p + 1$. Θα δείξουμε τέλος ότι $p \geq 1/\mu(\mathbf{A})$. Εφόσον p είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος αριθμός στηλών οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες σημαίνει ότι θα υπάρχει ένας τουλάχιστον υποπίνακας του \mathbf{A} διάστασης $(p+1) \times (p+1)$ με στήλες γραμμικά εξαρτημένες. Δηλαδή θα υπάρχει μια τουλάχιστον γραμμή i του υποπίνακα για την οποία δεν θα ισχύει η (2.13), δηλαδή ο πίνακας δεν θα έχει αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο, άρα θα έχουμε $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} |G_{i,j}| \geq 1$, $i \in 1, \dots, p+1$. Αν

υποθέσουμε ότι $p < 1/\mu(\mathbf{A})$ προκύπτει ότι $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} |G_{i,j}| \leq p\mu(\mathbf{A}) < 1$, άτοπο, άρα $p \geq 1/\mu(\mathbf{A})$.

Επομένως οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\text{spark}(\mathbf{A}) \geq p + 1 \geq 1 + 1/\mu(\mathbf{A})$. ■

Θεώρημα 2.3 Αν το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έχει λύση \mathbf{x} η οποία ικανοποιεί τη σχέση $d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \frac{1}{2}(1 + 1/\mu(\mathbf{A}))$, τότε η λύση αυτή είναι η πιο αραιή.

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 2.2, αν $d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \frac{1}{2}(1 + 1/\mu(\mathbf{A})) \leq \frac{1}{2} \text{spark}(\mathbf{A})$ και με χρήση του Θεωρήματος 2.2 συμπεραίνουμε ότι η λύση αυτή είναι η πιο αραιή. ■

Το Θεώρημα 2.2 το οποίο χρησιμοποιεί το σπάρκ είναι πιο ισχυρό από το Θεώρημα 2.3 το οποίο χρησιμοποιεί την αμοιβαία συσχέτιση και συνεπώς μόνο ένα φράγμα του σπάρκ. Η αμοιβαία συσχέτιση παίρνει τιμές μεγαλύτερες του $1/\sqrt{n}$ και συνεπώς το φράγμα στο Θεώρημα 2.3 δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο του $\sqrt{n}/2$. Στο Θεώρημα 2.2 όμως, το σπάρκ του πίνακα μπορεί να είναι $O(n)$, συνεπώς να δώσει φράγμα $O(n/2)$.

2.4 Συνάρτηση μεταβολής ζώνης

Ορίζουμε τις μεταβλητές $\delta = n/m$ και $\rho = k/n$, όπου $n \times m$ η διάσταση του πίνακα \mathbf{A} και $k = d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x} . Λόγω ότι $n < m$ και $k < m$, $\delta, \rho \in (0, 1)$. Έστω το σύνολο $\mathbf{A}_{GE}(n, m)$ το οποίο αποτελείται από όλους τους πίνακες διάστασης $n \times m$ με στοιχεία από την κατανομή Gauss $N(0, 1/n)$ και $L(k)$ το σύνολο που αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ με k το πολύ μη μηδενικά στοιχεία.

Θεώρημα 2.4 Έστω το ζευγάρι (δ, ρ) σταθερό. Στο πρόβλημα μεγέθους n , έστω $m_n = \lfloor n/\delta \rfloor$ και $k_n = \lfloor n\rho \rfloor$. Θεωρούμε τη στιγμή εκείνη το πρόβλημα $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ τυχαία, με \mathbf{A} πίνακα διάστασης $n \times m_n$ από το σύνολο \mathbf{A}_{GE} και ένα διάνυσμα \mathbf{x} από το σύνολο $L(k_n)$. Υπάρχει συνάρτηση $\rho_W(\delta) > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για το πρόβλημα της δεδομένης στιγμής όταν το n αυξάνεται, η πιθανότητα ώστε τα προβλήματα (P_1) και (P_0) να έχουν την ίδια λύση τείνει στο 0 όταν $\rho > \rho_W(\delta)$ και τείνει στο 1 όταν $\rho < \rho_W(\delta)$.

Για μεγάλες τιμές του n υπάρχουν δύο ζώνες στο επίπεδο των (δ, ρ) , οι οποίες διαχωρίζονται από τη συνάρτηση $\rho_W(\delta)$. Μια ζώνη επιτυχίας στην ανάκτηση της λύσης και μια ζώνη αποτυχίας. Ειδικά για μικρό $\delta > 0$, η καμπύλη $\rho_W(\delta)$ αποκτά την ενδιαφέρουσα μορφή:

Θεώρημα 2.5

$$\rho_W(\delta) = \frac{1}{2\ln(1/\delta)}(1 + o(1)), \delta \rightarrow 0.$$

Συγκεκριμένα για τυχαίους πίνακες Gauss με $m \gg n$ έχουμε την τιμή

$$c = \frac{n}{2\ln(m/n)}. \quad (2.14)$$

Αν $k > c$ είμαστε στη ζώνη αποτυχίας, ενώ αν $k < c$ βρισκόμαστε στη ζώνη επιτυχίας. Διαφορετικά, αν ο αριθμός των γραμμών ενός πίνακα από την κατανομή Gauss ξεπερνά την τιμή $2k\ln(m/n)$, για ένα k -αραιό διάνυσμα, μπορούμε να το ανακτήσουμε με μεγάλη πιθανότητα με ελαχιστοποίηση της l_1 νόρμας.

Κεφάλαιο 3

Αλγόριθμοι

3.1 Το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς

3.1.1 Αλγόριθμοι αναζήτησης Βάσης (BP)

Μια πρώτη προσέγγιση για το πρόβλημα (P_0) (2.2) είναι να ομαλοποιήσουμε την ασυνεχή μετρική d_0 , αντικαθιστώντας την με μια συνεχή ή ομαλή προσέγγιση. Μια τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι κάποια από τις l_p νόρμες για $p \in (0, 1]$ ή κάποια ομαλή συνάρτηση, όπως οι $\sum_j \log(1 + \alpha x_j^2)$ και $\sum_j x_j^2 / (\alpha + x_j^2)$. Άγνωστες όμως παραμένουν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα τοπικό ελάχιστο θα αποτελεί και ολικό ελάχιστο του προβλήματος (P_0) . Διαφορετικά, όπως είδαμε, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη d_0 μετρική με την l_1 νόρμα, η οποία αποτελεί την καλύτερη κυρτή της προσέγγιση.

Αντικαθιστώντας την d_0 μετρική με κάποια l_p νόρμα και συνεπώς λύνοντας το πρόβλημα (P_p) για $0 < p \leq 1$ χρειάζεται προσοχή ως προς την κανονικοποίηση των στηλών του πίνακα \mathbf{A} . Ενώ η d_0 μετρική δεν επηρεάζεται από την έκταση των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x} , οι l_p νόρμες είναι προβληματικές. Όταν η έκταση των μη μηδενικών θέσεων είναι μεγάλη, έχουν την τάση να οδηγούν τη λύση στο « γέμισμα » θέσεων του διανύσματος οι οποίες πολλαπλασιάζονται με μεγάλες νόρμες στηλών του πίνακα \mathbf{A} . Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι στήλες του πίνακα να κανονικοποιηθούν κατάλληλα. Το παραπάνω πρόβλημα γράφεται

$$(P_{w_1}) : \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_1 \text{ ως προς } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.1)$$

όπου ο \mathbf{W} είναι ένας διαγώνιος θετικά ορισμένος πίνακας βάρους. Μια κατάλληλη επιλογή για το (i, i) στοιχείο της διαγωνίου αποτελεί το $w(i) = \|a_i\|_2$. Υποθέτοντας ότι ο \mathbf{A} δεν έχει μηδενικές στήλες οι νόρμες είναι γνησίως θετικές και το πρόβλημα (P_1) καλώς ορισμένο εφόσον ο \mathbf{W} είναι αντιστρέψιμος. Εναλλακτικά το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να οριστεί

$$(P_1) : \min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_1 \text{ ως προς } \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (3.2)$$

θέτοντας $\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, όπου $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι ο πίνακας ο οποίος προκύπτει με κανονικοποίηση των στηλών του \mathbf{A} , δηλαδή $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$. Αν το \mathbf{y} είναι λύση του (P_1) τότε το $\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}$ αποτελεί

λύση του (P_{w_1}) και αντίστροφα αν \mathbf{x} είναι λύση του (P_{w_1}) τότε το $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ είναι λύση του (P_1) . Η περίπτωση του προβλήματος (P_1) , όπου οι στήλες του \mathbf{A} έχουν κανονικοποιηθεί και συνεπώς $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, ονομάζεται **αναζήτηση βάσης** (BP). Το (P_1) μετατρέπεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύνεται με αλγόριθμους όπως ο Simplex ή με μεθόδους-εσωτερικού-σημείου, με υπολογιστικό κόστος το διπλασιασμό της διάστασης της λύσης.

Ορίζουμε $\mathbf{y}^+ = \max(\mathbf{y}, 0)$ και $\mathbf{y}^- = \max(-\mathbf{y}, 0)$, οπότε $\mathbf{y} = \mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-$. Θεωρώντας ως $\tilde{\mathbf{I}}$ το διάνυσμα με στοιχεία τη μονάδα, το πρόβλημα (P_1) μετατρέπεται στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{I}}^T \mathbf{y}^+ + \tilde{\mathbf{I}}^T \mathbf{y}^-, \text{ ως προς } \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y}^+ - \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y}^- = \mathbf{b}, \text{ με } \mathbf{y}^+, \mathbf{y}^- \geq 0. \quad (3.3)$$

Αλγόριθμος 1

Παράμετροι Εισόδου: Πίνακας \mathbf{A} , διάνυσμα \mathbf{b} .

Υπολόγισε τους πίνακες:

- $\mathbf{W} = \text{diag}(\|\mathbf{a}_i\|_2), i = 1, 2, \dots, m.$
- $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}.$
- Λύσε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{c}^T \mathbf{y}, \text{ ως προς } \mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0, \text{ όπου}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}} \\ \tilde{\mathbf{I}} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & -\tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix}.$$

- **Ενδιάμεση έξοδος:** $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^+ \\ \mathbf{y}^- \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-.$

Έξοδος: $\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{z}$, η λύση του (P_{w_1}) .

Πίνακας 3.1: (BP) - Αλγόριθμος αναζήτησης βάσης για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος (P_{w_1}) .

3.1.2 « Άπληστοι » αλγόριθμοι (GA)

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα (P_0) (2.2). Έστω ότι ο πίνακας \mathbf{A} έχει $\text{spark}(\mathbf{A}) > 2$ και το πρόβλημα βελτιστοποίησης P_0 έχει τιμή $\text{val}(P_0) = 1$, άρα το διάνυσμα \mathbf{b} είναι βαθμωτό γινόμενο μιας στήλης του πίνακα \mathbf{A} . Μπορούμε να εντοπίσουμε τη στήλη αυτή, κάνοντας m ελέγχους για κάθε στήλη του \mathbf{A} . Τα βήματα της διαδικασίας αυτής απαιτούν $O(mn)$ flops, πολυπλοκότητα αποδεκτή. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο πίνακας \mathbf{A} έχει $\text{spark}(\mathbf{A}) > 2k_0$, οπότε το πρόβλημα είναι γνωστό ότι έχει τιμή $\text{val}(P_0) = k_0$. Τότε το \mathbf{b} είναι γραμμικός συνδυασμός το πολύ k_0 στηλών του \mathbf{A} . Γενικεύοντας την προηγούμενη διαδικασία θα προσπαθούσαμε να

αριθμήσουμε όλα τα $\binom{m}{k_0} = O(m^{k_0})$ υποσύνολα k_0 στηλών του πίνακα \mathbf{A} και να τεστάρουμε κάθε ένα ξεχωριστά, κάτι όμως το οποίο είναι απαγορευτικό, διότι το πρόβλημα θα έχει πολυπλοκότητα $O(m^{k_0}nk_0^2)$ flops, η οποία είναι απαγορευτική.

Μια « άπληστη » στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος (P_0) δεν ελέγχει όλα τα υποσύνολα στηλών, αλλά ενημερώνει μια σειρά από τοπικά βέλτιστους όρους. Ξεκινώντας από $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$, κατασκευάζει επαναληπτικά μια προσέγγιση k όρων \mathbf{x}^k , διατηρώντας ένα σύνολο ενεργών στηλών το οποίο αρχικά είναι κενό και επεκτείνει το σύνολο κατά μια στήλη σε κάθε επανάληψη. Η στήλη που επιλέγει σε κάθε βήμα μέσα από το σύνολο των ενεργών στηλών είναι εκείνη η οποία είναι κατά το μέγιστο συσχετισμένη με το υπόλοιπο \mathbf{r}^{k-1} , δηλαδή σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με αυτό. Μετά την προσθήκη της νέας στήλης, ενημερώνεται το υπόλοιπο και αν η l_2 νόρμα του βρεθεί κάτω από μια προκαθορισμένη τιμή η διαδικασία τερματίζεται. Η παραπάνω διαδικασία, στα πλαίσια της επεξεργασίας σήματος ονομάζεται Orthogonal Matching Pursuit (OMP), αλλά είναι επίσης γνωστή και με διαφορετικά ονόματα σε άλλα πεδία.

Αλγόριθμος 2

Παράμετροι Εισόδου: Πίνακας \mathbf{A} , διάνυσμα \mathbf{b} , τιμή σφάλματος ϵ_0 .

Αρχικές τιμές: Αρχικά για $k = 0$ θέσε

- Αρχική λύση: $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
- Αρχικό υπόλοιπο: $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$.
- Φορέας της αρχικής λύσης: $S^0 = \text{supp}\{\mathbf{x}^0\} = \emptyset$.

Επανάληψη: Υπολόγισε το βήμα k και αύξησε κατά 1:

- **Σάρωση:** Υπολόγισε τα σφάλματα $\epsilon(j) = \min_{z_j} \|\mathbf{a}_j z_j - \mathbf{r}^{k-1}\|_2^2$ για κάθε j θεωρώντας ως βέλτιστη λύση το $z_j^* = \mathbf{a}_j^T \mathbf{r}^{k-1} / \|\mathbf{a}_j\|_2^2$.
- **Ενημέρωση το φορέα:** Βρες την τιμή j_0 που ελαχιστοποιεί το $\epsilon(j)$: $\forall j \notin S^{k-1}, \epsilon(j_0) \leq \epsilon(j)$ και ενημέρωσε το φορέα $S^{k-1} = S^{k-1} \cup \{j_0\}$.
- **Ενημέρωση τη προσωρινή λύση:** Υπολόγισε το \mathbf{x}^k , που ελαχιστοποιεί το $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ (Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων) ως προς το φορέα $\text{supp}\{\mathbf{x}\} = S^k$.
- **Ενημέρωση το υπόλοιπο:** Υπολόγισε $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k$.
- **Τερματισμός διαδικασίας:** Αν $\|\mathbf{r}^k\|_2 < \epsilon_0$ σταμάτα, διαφορετικά επανέλαβε τη διαδικασία.

Έξοδος: Το διάνυσμα \mathbf{x}^k μετά από k επαναλήψεις.

Πίνακας 3.2: (OMP) - ένας « άπληστος » αλγόριθμος για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος (P_0).

Αν η προσέγγιση της λύσης έχει k_0 μη μηδενικά στοιχεία η πολυπλοκότητα της μεθόδου είναι $O(k_0 mn)$ flops, σημαντικά μικρότερη από την αρχική μας εκτίμηση των $O(m^{k_0} nk_0^2)$ flops. Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο αλγόριθμος μπορεί να αποτύχει. Γενικά, με τη στρατηγική αυτή προσέγγισης ανά βήμα, το σφάλμα προσέγγισης μπορεί να μειωθεί οσοδήποτε επιθυμούμε. Για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος (OGA) ανήκει στην οικογένεια εκείνων οι οποίοι ονομάστηκαν « άπληστοι », Greedy Algorithms (GA). Τέλος υπάρχουν και αρκετές παραλλαγές του αλγόριθμου, όπως ο Matching Pursuit (MP), Pure GA (PGA), Relaxed GA (RGA) και Weak GA (WGA).

Θεώρημα 3.1 Για το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (\mathbf{A} διάστασης $n \times m$ τάξης n , με $n < m$), αν η λύση \mathbf{x} υπάρχει και ικανοποιεί τη σχέση

$$d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \frac{1}{2} \left(1 + 1/\mu(\mathbf{A}) \right),$$

ο αλγόριθμος (OGA) με αρχική τιμή παραμέτρου $\epsilon_0 = 0$ την υπολογίζει ακριβώς.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η αραιότερη λύση του συστήματος είναι τέτοια ώστε όλες οι k_0 μη μηδενικές είσοδοι βρίσκονται στην αρχή του διανύσματος κατά φθίνουσα σειρά των τιμών $|x_j|/\|\mathbf{a}_j\|_2$. Έτσι,

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_{k_0} \mathbf{a}_{k_0} = \sum_{t=1}^{k_0} x_t \mathbf{a}_t. \quad (3.4)$$

Στο πρώτο βήμα ($k = 0$) του αλγόριθμου, $\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^0 = \mathbf{b}$ και το σύνολο των σφαλμάτων του βήματος της **σάρωσης** δίνονται από τη σχέση:

$$\epsilon(j) = \min_{z_j} \|\mathbf{a}_j z_j - \mathbf{b}\|_2^2 = \left\| \mathbf{a}_j \frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_j\|_2} - \mathbf{b} \right\|_2^2 = \|\mathbf{b}\|_2^2 - \left(\frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_j\|_2} \right)^2 \geq 0 \text{ ή ισοδύναμα,}$$

$$\left| \frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_j\|_2 \|\mathbf{b}\|_2} \right| = |\cos\theta| \leq 1, \text{ όπου } \theta \text{ η γωνία των } \mathbf{a}_j, \mathbf{b}.$$

Η ποσότητα $\epsilon(j)$ ελαχιστοποιείται όταν το $\cos\theta \rightarrow 1$, κάτι το οποίο συμβαίνει όταν η γωνία που σχηματίζουν τα \mathbf{a}_j, \mathbf{b} είναι η μικρότερη δυνατή. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για την επιλογή του δείκτη ελαχιστοποίησης j_0 , ο αλγόριθμος θα επιλέξει στήλη του πίνακα \mathbf{A} η οποία συνεισφέρει στον σχηματισμό του \mathbf{b} (ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a}_j, 1 \leq j \leq k_0$ (3.4)), δηλαδή μέσα από το φορέα του αραιού διανύσματος \mathbf{x} και όχι από στήλη εκτός φορέα. Συμβολίζοντας με θ_1 τη γωνία των \mathbf{a}_j, \mathbf{b} για $1 \leq j \leq k_0$ και θ_2 τη γωνία των \mathbf{a}_i, \mathbf{b} για $i > k_0$ πρέπει $\theta_1 < \theta_2 \Leftrightarrow |\cos\theta_1| > |\cos\theta_2|$ για κάθε $1 \leq j \leq k_0, k_0 < i \leq m$, δηλαδή

$$\left| \frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_j\|_2} \right| > \left| \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \right|, \text{ για κάθε } 1 \leq j \leq k_0, k_0 < i \leq m.$$

Επομένως θα έχουμε

$$\left| \frac{\mathbf{a}_1^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_1\|_2} \right| > \left| \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \right|, \text{ } i > k_0. \quad (3.5)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (3.4) στην παραπάνω σχέση αντί για \mathbf{b} , θα έχουμε

$$\left| \sum_{t=1}^{k_0} x_t \frac{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_t}{\|\mathbf{a}_1\|_2} \right| > \left| \sum_{t=1}^{k_0} x_t \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_t}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \right|, \quad i > k_0. \quad (3.6)$$

Για το αριστερό μέλος της (3.6) έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=1}^{k_0} x_t \frac{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_t}{\|\mathbf{a}_1\|_2} \right| &\geq |x_1| \|\mathbf{a}_1\|_2 - \sum_{t=2}^{k_0} |x_t| \cdot \frac{|\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_t|}{\|\mathbf{a}_1\|_2} \\ &\geq |x_1| \|\mathbf{a}_1\|_2 - \sum_{t=2}^{k_0} |x_t| \cdot \|\mathbf{a}_t\|_2 \cdot \mu(\mathbf{A}) \\ &\geq |x_1| \|\mathbf{a}_1\|_2 \left(1 - \mu(\mathbf{A})(k_0 - 1)\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

όπου κάναμε χρήση του ορισμού της αμοιβαίας συσχέτισης και τη φθίνουσα σειρά των όρων $|x_j| \|\mathbf{a}_j\|_2$. Για το δεξί μέλος της (3.6) έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=1}^{k_0} x_t \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_t}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \right| &\leq \sum_{t=1}^{k_0} |x_t| \cdot \frac{|\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_t|}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \\ &\leq \sum_{t=1}^{k_0} |x_t| \cdot \|\mathbf{a}_t\|_2 \cdot \mu(\mathbf{A}) \\ &\leq |x_1| \cdot \|\mathbf{a}_1\|_2 \cdot \mu(\mathbf{A}) k_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Αξιοποιώντας τα δύο παραπάνω φράγματα έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=1}^{k_0} x_t \frac{\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_t}{\|\mathbf{a}_1\|_2} \right| &\geq |x_1| \|\mathbf{a}_1\|_2 \left(1 - \mu(\mathbf{A})(k_0 - 1)\right) \\ &> |x_1| \cdot \|\mathbf{a}_1\|_2 \cdot \mu(\mathbf{A}) k_0 \geq \left| \sum_{t=1}^{k_0} x_t \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_t}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \right|, \end{aligned} \quad (3.9)$$

επομένως αρκεί

$$1 + \mu(\mathbf{A}) > 2\mu(\mathbf{A})k_0 \Leftrightarrow k_0 < \frac{1}{2} \left(1 + 1/\mu(\mathbf{A})\right), \quad (3.10)$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση, εφόσον $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = k_0$. Η τελευταία συνθήκη εγγυάται την επιτυχία του πρώτου βήματος του αλγόριθμου. Στο επόμενο βήμα, ενημερώνει τη λύση \mathbf{x} και το υπόλοιπο \mathbf{r}^1 . Το υπόλοιπο αυτό είναι

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{b} - \mathbf{a}_k z_k^* = \sum_{t=1}^{k_0} \tilde{x}_t \mathbf{a}_t, \quad (3.11)$$

όπου $1 \leq k \leq k_0$ και z_k^* τέτοιο ώστε το \mathbf{r}^1 να είναι ορθογώνιο με το \mathbf{a}_k σύμφωνα με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι είσοδοι του $\tilde{\mathbf{x}}$ έχουν αναδιαταχθεί κατά φθίνουσα σειρά των τιμών $|\tilde{x}_j| \cdot \|\mathbf{a}_j\|_2$ με απλή εναλλαγή των στηλών του πίνακα \mathbf{A} . Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σχέση (3.10) εξασφαλίζει και πάλι την εύρεση ενός δείκτη μέσα από τον πραγματικό φορέα της λύσης. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται k_0 φορές, επομένως ο αλγόριθμος διαλέγει πάντα τιμές από το σωστό σύνολο δεικτών, ενώ δεν μπορεί να διαλέξει τον ίδιο δείκτη προηγούμενου βήματος. Μετά από k_0 επαναλήψεις το υπόλοιπο μηδενίζεται και τερματίζει εξασφαλίζοντας έτσι τη σύγκλιση στη σωστή λύση \mathbf{x} . ■

Στη συνέχεια, επιστρέφουμε στον αλγόριθμο (BP), ο οποίος χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος (P_1).

Θεώρημα 3.2 Για το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (\mathbf{A} διάστασης $n \times m$, $n < m$ τάξης n), εάν υπάρχει λύση η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \frac{1}{2} \left(1 + 1/\mu(\mathbf{A}) \right),$$

τότε η λύση αυτή αποτελεί συγχρόνως τη μοναδική λύση του (P_1) και του (P_0).

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο των λύσεων:

$$C = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \|\mathbf{Wy}\|_1 \leq \|\mathbf{Wx}\|_1, d_0(\mathbf{y}, \mathbf{0}) > d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \text{ και } \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}\}, \quad (3.12)$$

όπου \mathbf{W} ένας πίνακας βάρους διαγώνιος και θετικά ορισμένος, συνεπώς αντιστρέψιμος. Το παραπάνω σύνολο περιέχει όλες τις λύσεις, οι οποίες είναι διαφορετικές του \mathbf{x} , έχουν μεγαλύτερο φορέα (αριθμό μη μηδενικών συντεταγμένων), ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα εξισώσεων $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ και είναι εξίσου καλές ως προς την l_1 νόρμα με βάρος \mathbf{W} . Αν υποθέσουμε ότι το σύνολο αυτό είναι μη κενό, ο αλγόριθμος (BP) θα τερματίσει σε κάποια λύση διαφορετική από το \mathbf{x} .

Λόγω του Θεωρήματος (2.2) και ότι $d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \frac{1}{2} \left(1 + 1/\mu(\mathbf{A}) \right)$, η λύση \mathbf{x} είναι υποχρεωτικά πιο αραιή από τη λύση \mathbf{y} . Ορίζοντας το $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, μπορούμε να γράψουμε το σύνολο C ισοδύναμα ως εξής:

$$C_s = \{\mathbf{e} \mid \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \|\mathbf{W}(\mathbf{e} + \mathbf{x})\|_1 - \|\mathbf{Wx}\|_1 \leq 0, \mathbf{Ae} = \mathbf{0}\}. \quad (3.13)$$

Η ιδέα της απόδειξης αυτής είναι να επεκτείνουμε το παραπάνω σύνολο, αλλά παρόλα αυτά θα δείξουμε ότι παραμένει κενό. Αυτό επομένως αποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος (BP) συγκλίνει στη σωστή λύση \mathbf{x} .

Ξεκινώντας με την απαίτηση $\|\mathbf{W}(\mathbf{e} + \mathbf{x})\|_1 - \|\mathbf{Wx}\|_1 \leq 0$, θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι οι k_0 μη μηδενικές συντεταγμένες βρίσκονται στην αρχή του διανύσματος. Αυτό μπορεί να γίνει εκτελώντας μια απλή μετάθεση των στηλών του πίνακα \mathbf{A} . Συνεπώς, η ανίσωση γράφεται

$$\|\mathbf{W}(\mathbf{e} + \mathbf{x})\|_1 - \|\mathbf{Wx}\|_1 = \sum_{j=1}^{k_0} w(j) \cdot (|e_j + x_j| - |x_j|) + \sum_{j=k_0+1}^m w(j) \cdot |e_j| \leq 0. \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|e_j + x_j| - |x_j| \geq -|e_j|$ και ότι $w(i) > 0$, $i = 1, \dots, m$ η (3.14) γράφεται

$$-\sum_{j=1}^{k_0} w(j) \cdot |e_j| + \sum_{j=k_0+1}^m w(j) \cdot |e_j| \leq \sum_{j=1}^{k_0} w(j) \cdot (|e_j + x_j| - |x_j|) + \sum_{j=k_0+1}^m w(j) \cdot |e_j| \leq 0. \quad (3.15)$$

Η παραπάνω, με προσθαφαίρεση του όρου $\sum_{j=1}^{k_0} w(j) \cdot |e_j|$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{We}|$ και εννοούμε το άθροισμα των πρώτων k_0 συντεταγμένων του διανύσματος $|\mathbf{We}|$, είναι ισοδύναμη με

$$\|\mathbf{We}\|_1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{We}| \leq 0, \quad (3.16)$$

όπου $\tilde{\mathbf{1}}$ το διάνυσμα διάστασης $m \times 1$ με συντεταγμένες τη μονάδα. Λόγω της (3.15) επεκτείνουμε το σύνολο C_s , οπότε

$$C_s \subseteq \{\mathbf{e} \mid \mathbf{e} \neq 0, \|\mathbf{We}\|_1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{We}| \leq 0, \mathbf{Ae} = 0\} = C_s^1. \quad (3.17)$$

Στη συνέχεια η απαίτηση $\mathbf{Ae} = 0$ θα αντικατασταθεί με μια ασθενέστερη, όπου και θα επεκτείνει το σύνολό μας περισσότερο. Πολλαπλασιάζοντας με \mathbf{A}^T έχουμε $\mathbf{A}^T \mathbf{Ae} = 0$, η οποία όμως δεν επεκτείνει το σύνολο C_s^1 . Για το λόγο αυτό θεωρούμε

$$\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{We} = 0. \quad (3.18)$$

Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον αντίστροφο του \mathbf{W} δεν επηρεάζει τη σχέση, ενώ ο πίνακας $\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1}$ είναι επιθυμητός, διότι κάθε στοιχείο του τελευταίου αποτελεί το κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο των στηλών του πίνακα \mathbf{A} το οποίο χρησιμοποιείται για τον ορισμό της αμοιβαίας συσχέτισης $\mu(\mathbf{A})$. Επίσης, η κύρια διαγώνιος του περιέχει μονάδες. Επομένως, η (3.18) ξαναγράφεται ως εξής:

$$-\mathbf{We} = (\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{We}. \quad (3.19)$$

Παίρνουμε στη συνέχεια την απόλυτη τιμή των στοιχείων των διανυσμάτων στην παραπάνω σχέση, οπότε έχουμε:

$$|\mathbf{We}| = |(\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{We} - \mathbf{I}) \mathbf{We}| \leq |\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{I}| \cdot |\mathbf{We}| \leq \mu(\mathbf{A})(\mathbf{1} - \mathbf{I}) |\mathbf{We}|. \quad (3.20)$$

Ο πίνακας $\mathbf{1}$ είναι διάστασης $m \times m$, τάξης 1 και έχει ως κάθε στοιχείο εισόδου τη μονάδα. Η σχέση (3.20) είναι ισοδύναμη με

$$|\mathbf{We}| \leq \frac{\mu(\mathbf{A})}{1 + \mu(\mathbf{A})} \mathbf{1} \cdot |\mathbf{We}|$$

Επομένως, το σύνολο γράφεται

$$C_s^1 \subseteq \{\mathbf{e} \mid \mathbf{e} \neq 0, \|\mathbf{We}\|_1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{We}| \leq 0, \text{ και } |\mathbf{We}| \leq \frac{\mu(\mathbf{A})}{1 + \mu(\mathbf{A})} \mathbf{1} \cdot |\mathbf{We}|\} = C_s^2. \quad (3.21)$$

Αν θέσουμε $\mathbf{f} = \mathbf{W}\mathbf{e}$, η (3.21) γράφεται

$$C_f = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} \neq \mathbf{0}, \|\mathbf{f}\|_1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{f}| \leq 0, \text{ και } |\mathbf{f}| \leq \frac{\mu(\mathbf{A})}{1 + \mu(\mathbf{A})} \mathbf{1} \cdot |\mathbf{f}|\}. \quad (3.22)$$

Το σύνολο C_f είναι μη φραγμένο, καθότι αν $\mathbf{f} \in C_f$, τότε $\alpha\mathbf{f} \in C_f$ για κάθε $\alpha \neq 0$. Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συνόλου, μπορούμε να περιορίσουμε την αναζήτηση σε μοναδιαίο διάνυσμα, δηλαδή να θεωρήσουμε $\|\mathbf{f}\|_1 = 1$. Επομένως, το νέο σύνολο C_{f_1} γράφεται

$$C_{f_1} = \{\mathbf{f} \mid \|\mathbf{f}\|_1 = 1, 1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{f}| \leq 0, \text{ και } |\mathbf{f}| \leq \frac{\mu(\mathbf{A})}{1 + \mu(\mathbf{A})} \tilde{\mathbf{1}}\}. \quad (3.23)$$

Στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbf{1} \cdot |\mathbf{f}| = \tilde{\mathbf{1}} \cdot \tilde{\mathbf{1}}^T |\mathbf{f}| = \tilde{\mathbf{1}} \cdot \|\mathbf{f}\|_1 = \tilde{\mathbf{1}}$.

Για να ικανοποιεί το διάνυσμα \mathbf{f} την απαίτηση $1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{f}| \leq 0$, θα πρέπει να εστιάσουμε στις πρώτες k_0 συντεταγμένες του διανύσματος. Η απαίτηση $\|\mathbf{f}\|_1 = 1$ και $|f_j| \leq \mu(\mathbf{A})/(1 + \mu(\mathbf{A})) < 1$ του συνόλου C_{f_1} (3.23), επιβάλλει τις k_0 συντεταγμένες να είναι ακριβώς $|f_j| = \mu(\mathbf{A})/(1 + \mu(\mathbf{A}))$, δηλαδή τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή. Οπότε επιστρέφοντας στην προηγούμενη συνθήκη έχουμε

$$1 - 2 \cdot \tilde{\mathbf{1}}_{k_0}^T \cdot |\mathbf{f}| = 1 - 2k_0 \frac{\mu(\mathbf{A})}{1 + \mu(\mathbf{A})} \leq 0 \text{ ή } k_0 \geq \frac{1}{2}(1 + 1/\mu(\mathbf{A})). \quad (3.24)$$

Αυτό όμως σημαίνει πως εάν το $k_0 < (1 + 1/\mu(\mathbf{A}))/2$, το σύνολο C_{f_1} θα είναι υποχρεωτικά κενό, άρα ο αλγόριθμος (BP) οδηγεί στην επιθυμητή λύση. ■

3.2 Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς

Ο ακριβής περιορισμός $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ πολλές φορές αντικαθίσταται από έναν ασθενέστερο, ο οποίος μετρείται με την τετραγωνική συνάρτηση κόστους $Q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2$. Η χαλάρωση αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε μια προσεγγιστική λύση σε περίπτωση που η ακριβής δεν υπάρχει, να χρησιμοποιήσουμε ιδέες από τη θεωρία βελτιστοποίησης και να συγκρίνουμε την ποιότητα μιας υποψήφιας λύσης.

Ορίζουμε λοιπόν το πρόβλημα (P_0) με σφάλμα $\delta > 0$ ως

$$(P_0^\delta) : \min_{\mathbf{x}} d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ ως προς } \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2 \leq \delta. \quad (3.25)$$

Εφόσον το (P_0) δεν είναι δυνατόν να λυθεί στη γενική περίπτωση, το ίδιο ισχύει και για το (P_0^δ). Όπως και στην αρχική διατύπωση του προβλήματος, αν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $f_0 \equiv d_0$, με την l_1 νόρμα, το πρόβλημα γράφεται

$$(P_1^\delta) : \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Wx}\|_1 \text{ ως προς } \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2 \leq \delta, \quad (3.26)$$

γνωστό ως (BPDN), όπου \mathbf{W} είναι ένας διαγώνιος θετικά ορισμένος πίνακας βάρους. Το τελευταίο λύνεται ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τετραγωνικούς και γραμμικούς περιορισμούς ανισοτήτων, αλλά και με άλλες τεχνικές οι οποίες έχουν αναπτυχθεί μέσα από τη θεωρία βελτιστοποίησης.

Μια ισοδύναμη μορφή του προβλήματος είναι η Lagrangian η οποία ορίζεται για ένα κατάλληλο πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda > 0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση του (3.26) είναι ακριβώς ίδια με τη λύση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς

$$(Q_1^\lambda) : \min_{\mathbf{x}} \lambda \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2, \quad (3.27)$$

όπου λ , είναι συνάρτηση των $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \delta$.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι γνωστό και ως l_1 -κανονικοποίηση ελαχίστων τετραγώνων (L1LS). Προκύπτει επίσης από το πρόβλημα του Tikhonov (L2LS), δηλαδή

$$(T) : \min_{\mathbf{x}} \lambda \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2,$$

με αντικατάσταση της l_2 νόρμας του διανύσματος \mathbf{x} με την l_1 νόρμα. Η αναλυτική λύση του προβλήματος (T) είναι

$$\mathbf{x}^{l_2} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Τα δύο προβλήματα φαίνεται να είναι ίδια, όμως παρουσιάζουν ομοιότητες εξίσου και διαφορές. Κατά πρώτον, το πρόβλημα του Tikhonov δίνει λύση η οποία είναι γραμμική συνάρτηση των παρατηρήσεων \mathbf{b} , κάτι το οποίο δεν συμβαίνει για το (Q_1^λ) . Η δεύτερη διαφορά είναι τα δύο προβλήματα παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά στις οριακές τιμές του λ . Στο πρόβλημα του Tikhonov, καθώς το $\lambda \rightarrow 0$, η λύση \mathbf{x}^{l_2} συγκλίνει στη λύση Moore-Penrose $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$. Το οριακό σημείο έχει την ελάχιστη l_2 νόρμα στα σημεία που ικανοποιούν $\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$, ώστε $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_2$ ως προς $\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$. Στο πρόβλημα (Q_1^λ) η ελάχιστη l_1 νόρμα παρουσιάζεται στα σημεία που ικανοποιούν $\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$, αλλά φυσικά δεν αποτελεί τη λύση Moore-Penrose. Τέλος, καθώς το $\lambda \rightarrow \infty$ η λύση \mathbf{x}^{l_2} του προβλήματος Tikhonov τείνει να μηδενιστεί, ενώ στο (Q_1^λ) η λύση συγκλίνει στη μηδενική για

$$\lambda \geq \lambda_{max} = \|2\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_\infty, \quad (3.28)$$

δηλαδή για κάποια πεπερασμένη τιμή και πάνω.

Αξιοσημείωτο είναι ότι υπάρχει μεγάλο πλήθος μεθόδων, μέσω των οποίων μπορεί να λυθεί το πρόβλημα (Q_1^λ) (3.27), εδώ παρουσιάζουμε τις εξής:

3.2.1 Μέθοδος εσωτερικού σημείου του Νεύτωνα με αποκοπή όρων (TNIPM)

Θεωρώντας το μετασχηματισμό της (3.2) το πρόβλημα (Q_1^λ) εκφράζεται ως

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda), \quad \text{όπου } L(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2. \quad (3.29)$$

Λόγω ότι η συνάρτηση κόστους στο πρόβλημα l_1 -κανονικοποίησης ελαχίστων τετραγώνων (3.29) είναι κυρτή αλλά όχι διαφορίσιμη, βασιζόμενοι στον υποδιαφορικό λογισμό χρησιμοποιούμε τις βέλτιστες συνθήκες πρώτης τάξης:

$$(2\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}))_i \in \begin{cases} \{+\lambda_i\}, & x_i > 0, \\ \{-\lambda_i\}, & x_i < 0, \\ [-\lambda_i, +\lambda_i], & x_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

Στη συνέχεια μπορούμε να κάνουμε χρήση του τύπου (3.28) για το λ_{max} . Η συνθήκη ώστε το 0 να αποτελεί βέλτιστη λύση, γίνεται $(2\mathbf{A}^T\mathbf{b})_i \in [-\lambda, \lambda]$ για $i = 1, \dots, m$, δηλαδή $\|2\mathbf{A}^T\mathbf{b}\|_\infty \leq \lambda$.

Θεωρούμε τώρα, το δυϊκό Lagrange του προβλήματος (3.29), ορίζοντας τη νέα μεταβλητή $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ και τον περιορισμό $\mathbf{z} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \\ & \text{ως προς } \mathbf{z} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ορίζοντας τις μεταβλητές του δυϊκού $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ με τους περιορισμούς $\mathbf{z}_i = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})_i$ η συνάρτηση Lagrange ορίζεται

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 + \mathbf{v}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b} - \mathbf{z}).$$

Η δυϊκή συνάρτηση του παραπάνω προβλήματος είναι

$$\inf_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \begin{cases} -(1/4)\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{b}, & |(\mathbf{A}^T \mathbf{v})_i| \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n \\ -\infty, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Θέτοντας τη συνάρτηση

$$G(\mathbf{v}) = -\frac{1}{4}\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{b},$$

το δυϊκό του Lagrange του (3.30) είναι

$$\begin{aligned} & \text{maximize } G(\mathbf{v}) \\ & \text{ως προς } |(\mathbf{A}^T \mathbf{v})_i| \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Το δυϊκό πρόβλημα (3.31) είναι ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης με μεταβλητή το $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ είναι εφικτό δυϊκό εάν ικανοποιεί τους περιορισμούς του (3.31), δηλαδή $|(\mathbf{A}^T \mathbf{v})_i| \leq \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$.

Ένα εφικτό δυϊκό σημείο \mathbf{v} δίνει ένα μικρότερο φράγμα στη βέλτιστη τιμή p^* του αρχικού προβλήματος (3.29), δηλαδή $G(\mathbf{v}) \leq p^*$, το οποίο λέγεται ασθενές δυϊκό. Επιπλέον οι βέλτιστες τιμές του αρχικού και του δυϊκού προβλήματος είναι ίσες εφόσον το αρχικό πρόβλημα (3.29) ικανοποιεί την συνθήκη του Slater η οποία ονομάζεται ισχυρή δυϊκότητα.

Μια σημαντική ιδιότητα για το πρόβλημα l_1 -κανονικοποίησης ελαχίστων τετραγώνων είναι ότι από ένα οποιοδήποτε \mathbf{x} μπορούμε να πάρουμε ένα εύκολα υπολογίσιμο φράγμα για υποβέλτιστα \mathbf{x} , κατασκευάζοντας ένα εφικτό δυϊκό σημείο

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 2s(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \\ s &= \min\{\lambda/2(|(\mathbf{A}^T \mathbf{Ax})_i - b_i|), i = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Το σημείο \mathbf{v} είναι εφικτό δυϊκό, επομένως ισχύει $G(\mathbf{v}) \leq p^*$. Η διαφορά μεταξύ της υποβέλτιστης τιμής της συνάρτησης κόστους για το αρχικό \mathbf{x} και του κάτω φράγματος $G(\mathbf{v})$ λέγεται **διαφορά δυϊκότητας**, το οποίο συμβολίζουμε με η , δηλαδή

$$\eta = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1 - G(\mathbf{v}). \quad (3.33)$$

Η διαφορά δυϊκότητας είναι πάντα μη αρνητική ως προς την ασθενή δυϊκότητα και το \mathbf{x} δεν είναι παρά η -υποβέλτιστη λύση. Σε μια βέλτιστη λύση η διαφορά δυϊκότητας είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα.

Το πρόβλημα l_1 -κανονικοποίησης ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα κυρτό τετραγωνικό πρόβλημα με γραμμικούς περιορισμούς

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \lambda \sum_{i=1}^m u_i \\ &\text{ως προς } -u_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.34)$$

με $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Παρακάτω θα περιγράψουμε μια μέθοδο εσωτερικού σημείου για την επίλυση του ισοδύναμου τετραγωνικού προβλήματος.

Αρχικά ορίζουμε τη λογαριθμική συνάρτηση φράγματος $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ για τους ανισοτικούς περιορισμούς $-u_i \leq x_i \leq u_i$ της (3.34)

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\sum_{i=1}^m \log(u_i + x_i) - \sum_{i=1}^m \log(u_i - x_i)$$

που ορίζεται στο σύνολο $\text{dom}\Phi = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |x_i| < u_i, i = 1, \dots, m\}$. Η κεντρική κατεύθυνση προς αναζήτηση λύσης αποτελείται από το μοναδικό σημείο $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ που ελαχιστοποιεί την κυρτή συνάρτηση

$$\phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = t\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + t \sum_{i=1}^m \lambda u_i + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

καθώς η παράμετρος t μεταβάλλεται από 0 έως $+\infty$. Σε κάθε σημείο $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ αντιστοιχίζουμε το $\mathbf{v}^*(t) = 2(\mathbf{Ax}^*(t) - \mathbf{b})$, το οποίο είναι εφικτό δυϊκό. Συγκεκριμένα το $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$, δεν είναι παρά $2m/t$ -υποβέλτιστο, οπότε η κεντρική κατεύθυνση γραμμικής αναζήτησης οδηγεί στη βέλτιστη λύση.

Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι εκείνη την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την ελαχιστοποίηση της ϕ_t . Η κεντρική κατεύθυνση για την αναζήτηση της λύσης υπολογίζεται ως η ακριβής λύση του συστήματος του Νεύτωνα

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \end{bmatrix} = -\mathbf{g} \quad (3.35)$$

όπου $\mathbf{H} = \nabla^2 \phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ είναι ο πίνακας Hessian και $\mathbf{g} = \nabla \phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{2m}$ η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του (\mathbf{x}, \mathbf{u}) .

Για μεγάλα προβλήματα, η ακριβής λύση του συστήματος (3.35) δεν είναι πρακτικά εφικτή. Για το λόγο αυτό θα αναζητήσουμε μια κατεύθυνση η οποία να δίνει γρήγορη σύγκλιση προς τη λύση, χωρίς μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Στην παρακάτω μέθοδο η κατεύθυνση αυτή υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συζυγών κλίσεων (PCG), για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος του Νεύτωνα. Επειδή για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιείται επαναληπτική μέθοδος, η διαδικασία ονομάζεται μέθοδος του Νεύτωνα με αποκοπή όρων.

Στην αρχική μέθοδο φράγματος, η παράμετρος t σταθεροποιείται μέχρι το ϕ_t να ελαχιστοποιηθεί, δηλαδή το $\|\nabla \phi_t\|_2$ να γίνει σχετικά μικρό. Για γρήγορη σύγκλιση, μπορούμε να ενημερώνουμε την παράμετρο t σε κάθε επανάληψη βασιζόμενοι στην τιμή της διαφοράς δυϊκότητας, η οποία υπολογίζεται από το εφικτό δυϊκό σημείο. Η διαδικασία συνοψίζεται στον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 3

Παράμετροι Εισόδου: Πίνακας \mathbf{A} , διάνυσμα \mathbf{b} , τιμή σφάλματος ϵ_0 .

Αρχικές τιμές: Αρχικά για $k = 0$ θέσε

- $t = 1/\lambda$.
- $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.
- $\mathbf{u} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$.

Επανάληψη: Υπολόγισε το βήμα k και αύξησε κατά 1:

- Υπολόγισε την κατεύθυνση της λύσης $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u})$ ως προσέγγιση της λύσης του συστήματος (3.35).
- Υπολόγισε το μέγεθος του βήματος s εκτελώντας γραμμική αναζήτηση με υπαναχώρηση.
- Ενημέρωσε το σημείο με $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}) + s(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u})$.
- Κατασκεύασε ένα εφικτό δυϊκό \mathbf{v} από (3.32).
- Υπολόγισε τη διαφορά δυϊκότητας η από (3.33).
- **Τερματισμός** εάν $\eta/G(\mathbf{v}) \leq \epsilon_0$.
- Ενημέρωσε το t .

Πίνακας 3.3: Μέθοδος του Νεύτωνα για τη λύση του προβλήματος l_1 -κανονικοποίησης ελαχίστων τετραγώνων (L1LS).

Επειδή η σχετική υποβέλτιστη τιμή φράσσεται από το λόγο $\eta/G(\mathbf{v})$ ως προς την ασθενή δυϊκότητα, χρησιμοποιούμε το τελευταίο πηλίκο για τον τερματισμό της διαδικασίας. Δηλαδή ισχύει ότι,

$$\frac{f(\mathbf{x}) - p^*}{p^*} \leq \frac{\eta}{G(\mathbf{v})},$$

όπου p^* η βέλτιστη τιμή του προβλήματος l_1 -κανονικοποίησης ελαχίστων τετραγώνων (3.29) και $f(\mathbf{x})$ η αρχική τιμή της συνάρτησης κόστους στο προηγούμενο σημείο \mathbf{x} . Επομένως ο αλγόριθμος επιλύει το πρόβλημα με σχετικό σφάλμα ϵ_0 .

Δοσμένης κατεύθυνσης $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u})$, το νέο σημείο είναι το $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + s(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u})$, όπου το βήμα $s \in \mathbb{R}_+$ πρέπει να υπολογιστεί. Στη γραμμική αναζήτηση με υπαναχώρηση, το βήμα θεωρείται $s = \beta^k$, όπου $k \geq 0$ ο μικρότερος ακέραιος ο οποίος ικανοποιεί

$$\phi_t(\mathbf{x} + \beta^k \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} + \beta^k \Delta \mathbf{u}) \leq \phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \alpha \beta^k \nabla \phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T [\Delta \mathbf{x} \ \Delta \mathbf{u}],$$

όπου $\alpha \in (0, 1/2)$ και $\beta \in (0, 1)$ είναι αλγοριθμικές μεταβλητές. (Τυπικές τιμές είναι $\alpha = 0.01$

και $\beta = 0.5$.) Για την ενημέρωση του t χρησιμοποιούμε

$$t = \begin{cases} \max\{\mu \min\{2m/\eta, t\}, t\}, & s \geq s_{min} \\ t, & s < s_{min} \end{cases}$$

όπου οι παράμετροι $\mu > 1$ και $s_{min} \in (0, 1]$ επιλέγονται κατάλληλα. Οι τιμές αυτές διαφέρουν γενικά, όμως με την τυπική επιλογή $\mu = 2$ και $s_{min} = 0.5$, είναι αποτελεσματικές για ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων. Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιεί το βήμα μήκους s ως μέτρο για την προσέγγιση της κατεύθυνσης λύσης. Συγκεκριμένα $2m/t$, είναι η τιμή του t για την οποία το αντίστοιχο κεντρικό σημείο έχει την ίδια διαφορά δυϊκότητας με το σημείο. Αυτή η ενημέρωση είναι αρκετά αξιόπιστη και λειτουργεί σωστά όταν συνδυάζεται με τον αλγόριθμο συζυγών κλίσεων (PCG) τον οποίο θα προσαρμόσουμε στο πρόβλημα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα Hessian αλλά και το διάνυσμα της παραγώγου κατά κατεύθυνση ως εξής:

$$\mathbf{H} = t\nabla^2\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \nabla^2\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2t\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix},$$

όπου

$$\mathbf{D}_1 = \text{diag}\left(\frac{2(u_1^2 + x_1^2)}{(u_1^2 - x_1^2)^2}, \dots, \frac{2(u_m^2 + x_m^2)}{(u_m^2 - x_m^2)^2}\right) \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{D}_2 = \text{diag}\left(\frac{-4u_1x_1}{(u_1^2 - x_1^2)^2}, \dots, \frac{-4u_mx_m}{(u_m^2 - x_m^2)^2}\right) \in \mathbb{R}^m.$$

Ο συμβολισμός $\text{diag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p)$ χρησιμοποιείται για το διαγώνιο πίνακα με διαγώνια μπλόκ τους $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$. Ο πίνακας Hessian είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση γράφεται

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m},$$

όπου

$$\mathbf{g}_1 = \nabla_{\mathbf{x}}\phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2t\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \begin{bmatrix} 2x_1/(u_1^2 - x_1^2) \\ \vdots \\ 2x_m/(u_m^2 - x_m^2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{g}_2 = \nabla_{\mathbf{u}}\phi_t(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = t\lambda \cdot \mathbf{1} - \begin{bmatrix} 2u_1/(u_1^2 - x_1^2) \\ \vdots \\ 2u_m/(u_m^2 - x_m^2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Υπολογίζουμε την ζητούμενη κατεύθυνση κατά προσέγγιση, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο συζυγών κλίσεων (PCG) στο σύστημα του Νεύτωνα (3.35). Ο αλγόριθμος αυτός, χρησιμοποιεί έναν προρυθμιστή $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$, ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο

προρρυθμιστής προσεγγίζει τον Hessian του $t\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$ με τις διαγώνιες εισόδους του, ενώ διατηρεί τον Hessian της συνάρτησης λογαριθμικού φράγματος $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2t\text{diag}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Εδώ, με $\text{diag}(\mathbf{S})$ συμβολίζουμε τον διαγώνιο πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον \mathbf{S} με στοιχεία εκτός διαγωνίου μηδέν.

Το κόστος υπολογισμού των διαγώνιων στοιχείων του $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ αποσβένεται, καθώς για δεδομένο πίνακα και διαφορετικές παρατηρήσεις υπολογίζεται μόνο μια φορά, αρχικά πριν τις επαναλήψεις. Όταν το υπολογιστικό κόστος παραμένει μεγάλο μπορούμε να προσεγγίσουμε το διαγώνιο πίνακα $\text{diag}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ με κατάλληλα κανονικοποιημένο ορθομοναδιαίο πίνακα, ώστε να προκύψει ο προρρυθμιστής

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2t\tau\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

όπου τ μια θετική σταθερά. Ο παραπάνω προρρυθμιστής συμπεριφέρεται ικανοποιητικά, ειδικά όταν τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ παρουσιάζουν σχετικά μικρές μεταβολές.

Ο αλγόριθμος συζυγών κλίσεων χρειάζεται μια καλή αρχική κατεύθυνση αναζήτησης λύσης και ένα κανόνα τερματισμού ο οποίος να είναι αποτελεσματικός. Αρχικό σημείο μπορεί να θεωρηθεί το 0, η αρνητική παράγωγος κατά κατεύθυνση και η κατεύθυνση που βρέθηκε στο προηγούμενο βήμα, όμως η τελευταία στην πράξη δεν είναι αποδοτική. Ο κανόνας τερματισμού είναι απλός. Η διαδικασία τερματίζεται όταν ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων της (PCG) υπερβεί ένα δοσμένο όριο N_{PCG} ή όταν υπολογίσουμε ένα σημείο με σχετικό σφάλμα μικρότερο του ϵ_{PCG} . Θεωρούμε το μεταβλητό σχετικό σφάλμα που δίνεται από τον τύπο

$$\epsilon_{PCG} = \min\{0.1, \xi\eta/\|\mathbf{g}\|_2\},$$

όπου η η διαφορά δυϊκότητας στην εκάστοτε επανάληψη και ξ μια αλγοριθμική σταθερά. Η τιμή $\xi = 0.01$ είναι μια αποτελεσματική τιμή για ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων. Ο παραπάνω τύπος μας επιτρέπει να λύσουμε το σύστημα του Νεύτωνα με μικρότερη ακρίβεια στις αρχικές επαναλήψεις και με μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς η διαφορά δυϊκότητας μειώνεται.

Κάθε επανάληψη του αλγόριθμου συζυγών κλίσεων περιλαμβάνει κάποια εσωτερικά γινόμενα, ένα γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα $\mathbf{H}\mathbf{p}$ με $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathbb{R}^{2m}$ και το βήμα επίλυσης με τον \mathbf{P} υπολογίζοντας $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{R}^{2m}$. Το βήμα επίλυσης υπολογίζεται

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_1\mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_2^2)^{-1}(\mathbf{D}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{D}_2\mathbf{r}_2) \\ (\mathbf{D}_1\mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_2^2)^{-1}(-\mathbf{D}_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{D}_3\mathbf{r}_2) \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{D}_3 = 2t\text{diag}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + \mathbf{D}_1$ για τον προρρυθμιστή (3.36) και $\mathbf{D}_3 = 2t\tau\mathbf{I} + \mathbf{D}_1$ για τον προρρυθμιστή (3.37). Το υπολογιστικό κόστος είναι $O(m)$ flops.

Το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος για το βήμα του αλγόριθμου συζυγών κλίσεων έχει το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα $\mathbf{H}\mathbf{p}$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathbb{R}^{2m}$. Το γινόμενο υπολογίζεται

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2t\mathbf{A}^T\mathbf{w} + \mathbf{D}_1\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{D}_2\mathbf{p}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{p}_2 \end{bmatrix},$$

όπου $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{p}_1$. Η πολυπλοκότητά του εξαρτάται από τα δεδομένα και καθορίζει το κόστος για το βήμα της (PCG). Για αραιά προβλήματα εξαρτάται από το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του πίνακα \mathbf{A} , για παράδειγμα αν ο \mathbf{A} έχει l μη μηδενικά στοιχεία η πολυπλοκότητα είναι $O(l)$ flops. Γενικά όμως, για πυκνά προβλήματα το κόστος αυτό είναι $O(mn)$ flops.

Επειδή η απαιτούμενη μνήμη για την επίλυση με τη μέθοδο του Νεύτωνα με αποκοπή όρων είναι μέτρια, η μέθοδος ενδείκνυται για την επίλυση προβλημάτων αρκετά μεγάλης διάστασης. Ο συνολικός χρόνος επίλυσης καθορίζεται από τη διαδικασία του αλγόριθμου συζυγών κλίσεων, δηλαδή το χρόνο που απαιτείται για κάθε βήμα και το συνολικό αριθμό των επαναλήψεων. Ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ , αλλά και από την τιμή του σφάλματος ϵ_0 . Συγκεκριμένα για μικρό λ η μέθοδος του Νεύτωνα εσωτερικού σημείου με αποκοπή όρων απαιτεί μεγαλύτερο αριθμό βημάτων της (PCG).

3.2.2 Αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων με επαναληπτικό βάρος (IRLS)

Μια διαφορετική προσέγγιση για την επίλυση του προβλήματος (3.27) είναι ο αλγόριθμος (IRLS). Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Αν ορίσουμε $\mathbf{X} = \text{diag}(|\mathbf{x}|)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την l_1 νόρμα του διανύσματος ως $\|\mathbf{x}\|_1 \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}$. Δηλαδή μπορούμε να εκφράσουμε την l_1 νόρμα, ως l_2 νόρμα βάρους \mathbf{X}^{-1} , όπου ο τελευταίος πίνακας ενημερώνεται σε κάθε επανάληψη. Δοσμένης προσέγγισης της λύσης \mathbf{x}_{k-1} ο πίνακας βάρους ορίζεται ως $\mathbf{X}_{k-1} = \text{diag}(|\mathbf{x}_{k-1}|)$ και το πρόβλημα (3.27) γράφεται ισοδύναμα

$$(I_k) : \min_{\mathbf{x}} \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{X}_{k-1}^{-1} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2, \quad (3.38)$$

το οποίο αποτελεί ένα τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Στην k -στη επανάληψη ο αλγόριθμος υπολογίζει την προσεγγιστική λύση \mathbf{x}_k , κατασκευάζει το διαγώνιο πίνακα \mathbf{X}_k και στη συνέχεια ξεκινά μια νέα επανάληψη. Επειδή σε αρκετές θέσεις των στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x} προκύπτουν μηδενικά, για την αντιστροφή του πίνακα \mathbf{X} είναι απαραίτητο να προσθέσουμε κάποιο $\epsilon > 0$ ώστε να παραμείνει σχεδόν μη ιδιάζων.

Αλγόριθμος 4

Παράμετροι Εισόδου: Πίνακας \mathbf{A} , διάνυσμα \mathbf{b} , τιμή σφάλματος ϵ_0 .

- Υπολόγισε $\mathbf{W} = \text{diag}(\|\mathbf{a}_i\|_2)$, $i = 1, 2, \dots$.

Αρχικές τιμές: Αρχικά για $k = 0$ θέσε

- Αρχική προσέγγιση λύσης: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{1}$.
- Αρχικός πίνακας βάρους: $\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_m$.

Επανάληψη: Υπολόγισε το βήμα k και αύξησε κατά 1:

- Κανονικοποιημένο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων:**
Λύσε το γραμμικό σύστημα
$$\left(2\lambda\mathbf{W}\mathbf{X}_{k-1}^{-1} + \mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$
με λύση \mathbf{x}_k .
- Ενημέρωσε το βάρος:** Ενημέρωσε τον πίνακα βάρους \mathbf{X} σύμφωνα με το \mathbf{x}_k :
$$X_k(j, j) = |x_k(j)| + \epsilon.$$
- Τερματισμός διαδικασίας:** Αν $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2 < \epsilon_0$ σταμάτα, διαφορετικά επανέλαβε τη διαδικασία.

Έξοδος: Το διάνυσμα $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ μετά από k επαναλήψεις.

Πίνακας 3.4: (IRLS) - ένας αλγόριθμος για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος (Q_1^λ).

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι αποδοτικός για προβλήματα μικρού και μεσαίου μεγέθους, αλλά δεν είναι αποδοτικός σε προβλήματα μεγάλου μεγέθους ($n, m \geq O(10^5)$).

3.2.3 Αλγόριθμοι συρρίκνωσης

Αρχικά θα περιγράψουμε τη διαδικασία για τετραγωνικό πίνακα και στη συνέχεια θα την προσαρμόσουμε στο πρόβλημά μας.

Αν υποθέσουμε ότι ο \mathbf{A} είναι τετραγωνικός και μοναδιαίος πίνακας, η λύση προκύπτει χωρίς επανάληψη σε κλειστή μορφή ως εξής. Αρχικά πολλαπλασιάζουμε το διάνυσμα \mathbf{b} με \mathbf{A}^T και παίρνουμε την αρχική λύση $\tilde{\mathbf{x}}$ η οποία θα έχει κάποιες « μεγάλες » τιμές εισόδου οι οποίες θα ξεχωρίζουν από τις υπόλοιπες μικρές τιμές. Στη συνέχεια ορίζουμε τη βαθμωτή συνάρτηση $\eta(x; \lambda) = \text{sign}(x) \cdot (|x| - \lambda)^+$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $(\cdot)^+ = \max(\cdot, 0)$ και τη διανυσματική συνάρτηση

$$\hat{\mathbf{x}} = \text{shrink}(\tilde{\mathbf{x}}; \lambda) \quad (3.39)$$

η οποία εφαρμόζει τη συνάρτηση η σε κάθε στοιχείο του διανύσματος $\tilde{\mathbf{x}}$, δηλαδή $\hat{x}(j) = \eta(\tilde{x}(j); \lambda)$. Εφαρμόζοντας τη διανυσματική συνάρτηση στην αρχική λύση $\tilde{\mathbf{x}}$ θέτουμε μηδέν τις τιμές εισόδου κάτω από την παράμετρο λ και συρρικνώνουμε τις υπόλοιπες προς το μηδέν. Η εξίσωση (3.39) είναι γνωστή ως « διαδικασία συρρίκνωσης », εφόσον έχει την τάση να περιορίζει το εύρος των τιμών και να μηδενίζει τις μικρότερες.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου ο πίνακας \mathbf{A} δεν είναι τετραγωνικός μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω ιδέα επαναληπτικά. Ο παρακάτω επαναληπτικός αλγόριθμος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για μεγάλου μεγέθους προβλήματα, όπου ο πίνακας \mathbf{A} δεν εμφανίζεται ως ένας αποκλειστικός πίνακας, αλλά ως τελεστής ο οποίος εφαρμόζεται στιγμιαία.

Αλγόριθμος 5

Παράμετροι Εισόδου: Πίνακας \mathbf{A} , διάνυσμα \mathbf{b} , τιμή σφάλματος ϵ_0 .

- Υπολόγισε $\mathbf{W} = \text{diag}(\|\mathbf{a}_i\|_2)$, $i = 1, 2, \dots$, και κανονικοποίησε τον \mathbf{A} θέτοντας $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$.

Αρχικές τιμές: Αρχικά για $k = 0$ θέσε

- Αρχική προσέγγιση λύσης: $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
- Αρχικός πίνακας βάρους: $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$.

Επανάληψη: Υπολόγισε το βήμα k και αύξησε κατά 1:

- **Προς τα πίσω προβολή:** Υπολόγισε $\mathbf{e} = \mathbf{A}^T \mathbf{r}^{k-1}$ και πολλαπλασίασε με $w(i)$ κάθε στοιχείο του.
- **Συρρίκνωση:** Υπολόγισε $\mathbf{e}_s = \text{shrink}(\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{e})$ με παράμετρο λ .
- **Γραμμική αναζήτηση παραμέτρου:** Βρες το μ ώστε να ελαχιστοποιεί την ποσότητα $J(\mathbf{x}^{k-1} + \mu(\mathbf{e}_s - \mathbf{x}^{k-1}))$, όπου J η συνάρτηση κόστους του Q_1^λ .
- **Ενημέρωση της λύσης:** Υπολόγισε $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \mu(\mathbf{e}_s - \mathbf{x}^{k-1})$.
- **Ενημέρωση υπολοίπου:** Υπολόγισε $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k$.
- **Τερματισμός διαδικασίας:** Αν $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2 < \epsilon_0$ σταμάτα, διαφορετικά επανέλαβε τη διαδικασία.
- **Ενδιάμεση έξοδος:** Το διάνυσμα \mathbf{x}_k μετά από k επαναλήψεις.

Έξοδος: Το διάνυσμα $\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}_k$.

Πίνακας 3.5: Ένας επαναληπτικός αλγόριθμος « συρρίκνωσης » για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος (Q_1^λ).

3.2.4 Αλγόριθμος In-Crowd

Έστω η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbf{x}) = \lambda \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$. Είναι γνωστό ότι μια κυρτή συνάρτηση αποκτά ολικό ελάχιστο στο \mathbf{x} αν και μόνο αν το $\mathbf{0}$ ανήκει στο υποδιαφορικό της συνάρτησης. Το σύνολο αυτό για την f είναι:

$$\partial f(\mathbf{x}) = \lambda \partial \|\mathbf{x}\|_1 - \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.40)$$

όπου θεωρούμε

$$\partial \|\mathbf{x}\|_1 = \begin{cases} v_i = 1, & x_i > 0, \\ v_i = -1, & x_i < 0, \\ v_i \in [-1, 1], & x_i = 0, \end{cases} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m.$$

Αν ονομάσουμε I το φορέα του \mathbf{x} και θεωρήσουμε τους δείκτες $k \in I$, η απαίτηση $\mathbf{0} \in \partial f(\mathbf{x})$ οδηγεί στη σχέση

$$\mathbf{A}_k^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \langle \mathbf{A}_k, \mathbf{r} \rangle = v_k \lambda = \text{sgn}(x_k) \lambda. \quad (3.41)$$

Για $j \in I^c$, $x_j = 0$, έχουμε $|\mathbf{A}_j^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})| = |\langle \mathbf{A}_j, \mathbf{r} \rangle| = |v_j| \lambda$, για κάποιο $v_j \in [-1, 1]$, το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$|\langle \mathbf{A}_j, \mathbf{r} \rangle| \leq \lambda \quad (3.42)$$

Ο In-Crowd είναι ένας αποτελεσματικός και ιδιαίτερα οικονομικός αλγόριθμος, ο οποίος είναι κατάλληλος για μεγάλης διάστασης αραιά προβλήματα, καθώς χρησιμοποιεί έξυπνα μόνο τα απαιτούμενα διανύσματα του φορέα I για την επίλυση του προβλήματος. Υπολογίζοντας τη χρησιμότητα κάθε στήλης του πίνακα \mathbf{A} , προσθέτει κάθε φορά ένα μόνο μικρό αριθμό στηλών του πίνακα στο φορέα I , επιλέγοντας ανάλογα με τη σημαντικότητα, δηλαδή αποφεύγει τη σάρωση όλων των m στηλών του πίνακα \mathbf{A} σε κάθε επανάληψη. Ο αριθμός των στηλών L που προσθέτει εξαρτάται από το πρόβλημα, αλλά έχει παρατηρηθεί ότι μια τιμή η οποία είναι αποτελεσματική για ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων είναι το $L \simeq 25$.

Αλγόριθμος 6

<p>Παράμετροι Εισόδου: Πίνακας \mathbf{A}, διάνυσμα \mathbf{b}.</p> <ul style="list-style-type: none">Υπολόγισε $\mathbf{W} = \text{diag}(\ \mathbf{a}_i\ _2)$, $i = 1, 2, \dots$, και κανονικοποίησε τον \mathbf{A} θέτοντας $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$. <p>Αρχικές τιμές: Αρχικά για $k = 0$ θέσε</p> <ul style="list-style-type: none">Αρχική προσέγγιση λύσης: $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.Αρχικός πίνακας βάρους: $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$.Αρχικός φορέας $I = \emptyset$. <p>Επανάληψη: Υπολόγισε το βήμα k και αύξησε κατά 1:</p> <ul style="list-style-type: none">« Σημαντικότητα »: Υπολόγισε $u_j = \langle \mathbf{r}, \mathbf{A}_j \rangle$, $\forall j \notin I$.Τερματισμός διαδικασίας: Αν $u_j \leq \lambda$ για κάθε $j \notin I$, τερματισμός.Προσθήκη στο φορέα: Βρες και πρόσθεσε τα L στοιχεία με το μεγαλύτερο u_j στο I, για τα οποία $u_j > \lambda$.Επίλυση συστήματος: Λύσε το πρόβλημα (3.27) στον υπόχωρο που αποτελείται από τα στοιχεία του I.Εξαίρεση: Αν $x_i = 0$, εξαίρεσε τους δείκτες i από το σύνολο I.Διαμόρφωση: Θέσε τις συντεταγμένες του $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ εκτός από τις θέσεις που βρίσκονται στο I, οι οποίες λαμβάνουν την υπολογισμένη τιμή.Ενημέρωση υπολοίπου: Υπολόγισε $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ και επανέλαβε. <p>Έξοδος: Το διάνυσμα $\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}_k$ μετά από k επαναλήψεις.</p>

Πίνακας 3.6: Αλγόριθμος In-Crowd για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος (Q_1^λ) .

Κεφάλαιο 4

Σύγκριση αλγορίθμων

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι κάθε αλγόριθμος υλοποιείται με στόχο να εξυπηρετεί κάποιο σκοπό, δηλαδή την επίλυση συγκεκριμένου προβλήματος, φαντάζει μάλλον απίθανο ένας από τους παραπάνω αλγόριθμους να ξεπερνά τους υπόλοιπους σε όλους τους τομείς. Αναμένεται κάποιος αλγόριθμος να ξεχωρίζει ως προς ένα χαρακτηριστικό, αλλά να υστερεί ως προς ένα άλλο. Σε αυτό το κεφάλαιο στόχος μας είναι η εξέταση των αλγορίθμων του προηγούμενου κεφαλαίου, ως προς τα βασικά χαρακτηριστικά τους.

Ένας τρόπος ελέγχου της αποτελεσματικότητας των αλγορίθμων, αλλά και των θεωρητικών αποτελεσμάτων για κατάλληλους πίνακες, είναι επιλύοντας το πρόβλημα γνωρίζοντας μια λύση του γραμμικού συστήματος. Κατασκευάζοντας ένα αρχικό διάνυσμα, το οποίο με χρήση του πίνακα δίνει το διάνυσμα των παρατηρήσεων, θα προσπαθήσουμε να το ανακτήσουμε, μόνο μέσω του πίνακα και των παρατηρήσεων. Το τέχνασμα αυτό εξυπηρετεί ένα διπλό σκοπό. Κατά πρώτον, η γνώση του αρχικού διανύσματος μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν η λύση την οποία υπολογίσαμε το προσεγγίζει ικανοποιητικά, οπότε και η επίλυση του προβλήματος ήταν επιτυχής. Κατά δεύτερον μας επιτρέπει να συγκρίνουμε διαφορετικές προσεγγιστικές λύσεις, ώστε να εκτιμήσουμε τη βέλτιστη λύση.

4.1 Επίλυση του προβλήματος με διαφορετικούς πίνακες

Αντικείμενο μελέτης μας σε πρώτη φάση, είναι η καταλληλότητα των πινάκων για την επίλυση του προβλήματος (2.2). Οι πίνακες που θα θεωρήσουμε παρακάτω θα αποτελέσουν αντικείμενο γενικότερου πειραματισμού σε ολόκληρη την ενότητα. Όπως ήδη αναφέραμε κατάλληλοι είναι τυχαίοι πίνακες, με στοιχεία εισόδου από την κανονική κατανομή Gauss, την ομοιόμορφη κατανομή, την κατανομή Bernoulli, αλλά και πιο συγκεκριμένης δομής, όπως πίνακας με Hadamard υποπίνακα.

Θεωρούμε τους παρακάτω πίνακες διάστασης $n \times m$:

- \mathbf{G} : πίνακας με στοιχεία από την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0, 1)$, δηλαδή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση 1.

- **U** : πίνακας με στοιχεία από την ομοιόμορφη κατανομή στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$.
- **B1** : πίνακας με στοιχεία από την κατανομή *Bernoulli* με πιθανότητα $p = 1/n$.
- **B2** : πίνακας με στοιχεία από την κατανομή *Bernoulli* με πιθανότητα $p = 1/2$.

Αρχικά, κατασκευάζουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m$ με $k < m$ μη μηδενικά στοιχεία από την κατανομή Gauss, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά, τυχαία κατανομημένα στις θέσεις συντεταγμένων του διανύσματος. Στη συνέχεια με γνωστό το \mathbf{x}_k και τον πίνακα **A**, υπολογίζουμε το διάνυσμα των παρατηρήσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ και εξετάζουμε κατά πόσο κάθε αλγόριθμος μπορεί να προσεγγίσει τη λύση \mathbf{x}_k , με γνώση μόνο των **A**, **b**. Η ακρίβεια στην εκτίμηση της λύσης θεωρείται σταθερή για όλους τους ελέγχους (10^{-3}).

Παρακάτω δίνεται το ποσοστό επιτυχίας (ως σχετική συχνότητα) ανάκτησης της λύσης στο σύνολο των 100 πειραμάτων που διεξήχθησαν για κάθε περίπτωση πίνακα-αλγόριθμου ξεχωριστά. Θεωρήσαμε σταθερή διάσταση $n \times 2n$ για κάθε πίνακα, με $n = 100$. Η πυκνότητα του κάθε διανύσματος \mathbf{x}_k έχει επιλεγεί να είναι επίσης σταθερή και ίση με $k_p = 15\%$, το οποίο σημαίνει πως έχει $knz = 30$ μη μηδενικά στοιχεία. Σε κάθε πίνακα αντιστοιχεί συγκεκριμένη τιμή αμοιβαίας συσχέτισης $\mu(\mathbf{A})$ και σκοπός μας είναι να ελέγξουμε αν το μέγεθος αυτό επηρεάζει τη διαδικασία ανάκτησης του αρχικού διανύσματος \mathbf{x}_k .

Πίνακας	Αμοιβαία συσχέτιση	Θεωρητικό φράγμα	Αλγόριθμος				
			(BP)	(OMP)	(IRLS)	(InCrowd)	(TNIPM)
G	0.38	1.82	99%	100%	98%	74%	98%
B1	0.70	1.21	99%	98%	100%	88%	97%
U	0.86	1.08	99%	98%	100%	40%	97%
B2	0.99	1.01	98%	99%	98%	0%	83%

Πίνακας 4.1: Πιθανότητα ανάκτησης του αρχικού διανύσματος \mathbf{x}_k , πυκνότητας $k_p = 15\%$, για πίνακες σταθερής δομής και διάστασης 100×200 για τις διάφορες τιμές του μ .

Στον (Πιν. 4.1) παρατηρούμε ότι η αμοιβαία συσχέτιση των πινάκων δεν επηρεάζει την πιθανότητα ανάκτησης της λύσης, για τους αλγόριθμους εκτός του (InCrowd). Ο τελευταίος δεν είναι ο καταλληλότερος για μεσαίου μεγέθους προβλήματα, αλλά είναι αποτελεσματικός όταν η διάσταση του πίνακα γίνεται μεγάλη. Οι υπόλοιποι αλγόριθμοι υπολογίζουν την αρχική λύση με μεγάλη πιθανότητα, κάτι το οποίο συμβαίνει διότι όλοι οι πίνακες ικανοποιούν τη συνθήκη περιορισμένης ισομετρίας.

Στη συνέχεια ορίζουμε τους παρακάτω πίνακες διάστασης $n \times 2n$, θεωρώντας \mathbf{I}_n το μοναδιαίο πίνακα με $n = 100$ και **G**, **U**, **B1**, **B2** τους πίνακες που ορίσαμε προηγουμένως:

- **A1** = $[\mathbf{I}_n \ \mathbf{G}]$.
- **A2** = $[\mathbf{I}_n \ \mathbf{U}]$.
- **A3** = $[\mathbf{I}_n \ \mathbf{B1}]$.
- **A4** = $[\mathbf{I}_n \ \mathbf{B2}]$.

- $\mathbf{D} = [\mathbf{I}_n \mathbf{F}_n]$, όπου \mathbf{F}_n ο πίνακας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT).
- $\mathbf{H1} = [\mathbf{I}_l \mathbf{H}_l]$, όπου \mathbf{H}_l ο πίνακας Hadamard διάστασης $l \times l$, $l = 128$ ¹.

Ο πίνακας \mathbf{F}_n έχει μιγαδικά στοιχεία γύρω από το μοναδιαίο κύκλο και το γινόμενο του επί ένα ένα διάνυσμα έχει ως αποτέλεσμα το διακριτό μετασχηματισμό Fourier του διανύσματος. Χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην επεξεργασία σήματος για την κωδικοποίηση δεδομένων. Ο πίνακας Hadamard που χρησιμοποιούμε έχει στοιχεία εισόδου -1 , 1 και είναι τετραγωνικός με χαρακτηριστικό οι στήλες του να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δηλαδή ασυσχέτιστες. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον μοναδιαίο πίνακα, ώστε να κατασκευάσουμε νέο πίνακα στην επιθυμητή διάσταση, με βασικό γνώρισμα η αμοιβαία συσχέτισή του να είναι ιδιαίτερα χαμηλή.

Στον παρακάτω (Πιν. 4.2), όπου αλλάξαμε τη δομή των πινάκων και χρησιμοποιήσαμε πίνακες διαφορετικού τύπου, παρατηρούμε ότι η αμοιβαία συσχέτιση παίζει ρόλο στην πιθανότητα εύρεσης της λύσης. Δηλαδή παρατηρούμε ότι όσο λιγότερο συσχετισμένες είναι οι στήλες ενός πίνακα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά το διάνυσμα \mathbf{x}_k , σταθερής πυκνότητας $k_p = 15\%$.

Πίνακας	Αμοιβαία συσχέτιση	Θεωρητικό φράγμα	Αλγόριθμος				
			(BP)	(OMP)	(IRLS)	(InCrowd)	(TNIPM)
H1	0.09	6.06	100%	100%	100%	100%	100%
D	0.10	5.50	-	100%	100%	-	-
A1	0.38	1.82	91%	100%	96%	50%	73%
A3	0.70	1.21	55%	99%	49%	24%	15%
A2	0.86	1.08	4%	14%	2%	0%	0%
A4	0.99	1.01	0%	0%	1%	0%	0%

Πίνακας 4.2: Πιθανότητα ανάκτησης του αρχικού διανύσματος \mathbf{x}_k , πυκνότητας $k_p = 15\%$, για πίνακες διαφορετικής δομής και διάστασης 100×200 για τις διάφορες τιμές του μ . Ο πίνακας **H1** έχει διάσταση 128×256 .

Τέλος, παρατηρούμε ότι το θεωρητικό φράγμα μέσω της αμοιβαίας συσχέτισης του θεωρήματος (2.3) δεν επηρεάζει τη διαδικασία ανάκτησης της πιο αραιής λύσης του προβλήματος, καθώς είναι ιδιαίτερα χαμηλό σε σχέση με τον αριθμό των $knz = 30$ μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος που προσπαθήσαμε να ανακτήσουμε και στις δύο κατηγορίες διαφορετικής δομής πινάκων.

4.2 Πλήθος μη μηδενικών στοιχείων

Εκτός από τη δομή του πίνακα **A**, σπουδαίο ρόλο παίζει η πυκνότητα της λύσης την οποία προσπαθούμε να ανακτήσουμε. Θα διαπιστώσουμε ότι δεν μπορούμε να ανακτήσουμε διανύσματα με μεγάλο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων για πίνακα οποιασδήποτε διάστασης. Μάλιστα

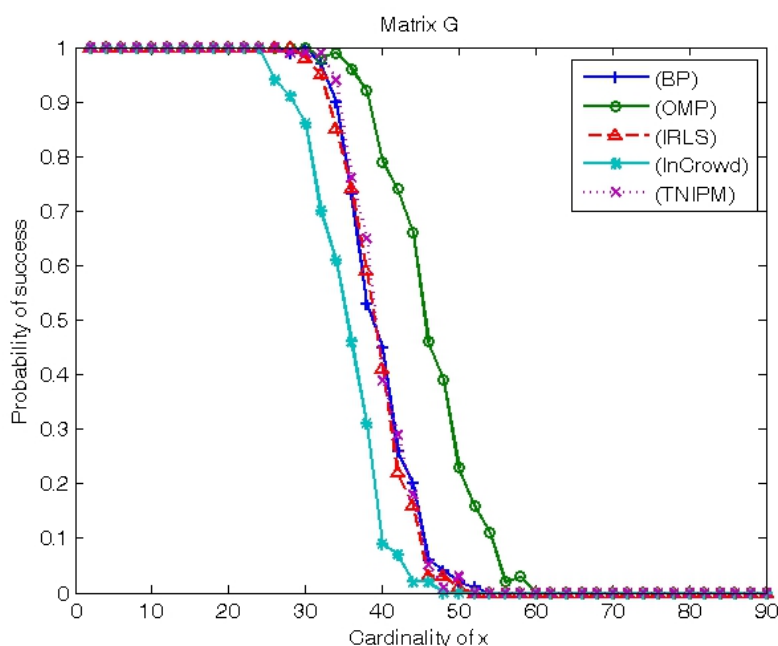
¹Η διάσταση του πίνακα Hadamard πρέπει να είναι θετικός ακέραιος και το n , $n/12$ ή $n/20$ δύναμη με βάση το 2.

θα δούμε παρακάτω ότι καθώς η διάσταση στηλών απομακρύνεται από τη διάσταση γραμμών του πίνακα, τόσο μικρότερος γίνεται ο αριθμός k των μη μηδενικών στοιχείων ενός διανύσματος \mathbf{x}_k , το οποίο μπορούμε να ανακτήσουμε. Στο παρακάτω πείραμα ελέγξαμε την πιθανότητα εύρεσης της πραγματικής λύσης σε σχέση με την πυκνότητα του διανύσματος.

4.2.1 Πυκνότητα διανύσματος για πίνακες σταθερής διάστασης $n \times 2n$

Πίνακες Gauss \mathbf{G}

Για κάθε τιμή πυκνότητας k θεωρήσαμε 100 πίνακες τύπου \mathbf{G} διάστασης 100×200 ($n = 100$) με σταθερή αμοιβαία συσχέτιση $\mu(\mathbf{G}) = 0.42$. Το σπάρκ του πίνακα είναι 101 με πιθανότητα 1, το οποίο σημαίνει πως κάθε λύση με λιγότερα από 51 μη μηδενικά στοιχεία είναι υποχρεωτικά η πιο αραιή, συνεπώς είναι η λύση του (P_0). Θεωρώντας ένα k -αραιό και τυχαίο διάνυσμα \mathbf{x}_k με στοιχεία από την κατανομή Gauss, κατασκευάσαμε τις παρατηρήσεις $\mathbf{b} = \mathbf{G}\mathbf{x}_k$. Στη συνέχεια, με γνώση μόνο των \mathbf{b}, \mathbf{G} προσπαθήσαμε να ανακτήσουμε το διάνυσμα αυτό. Για κάθε τιμή πυκνότητας υπολογίσαμε την πιθανότητα ανάκτησης της λύσης ως σχετική συχνότητα για 100 επαναλήψεις. Η σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης με την πραγματική (ως νόρμα της διαφοράς), αποτελεί κριτήριο για την εκτίμηση της επιτυχίας ή αποτυχίας στην επίλυση του γραμμικού συστήματος με ακρίβεια 10^{-3} για όλους τους ελέγχους.



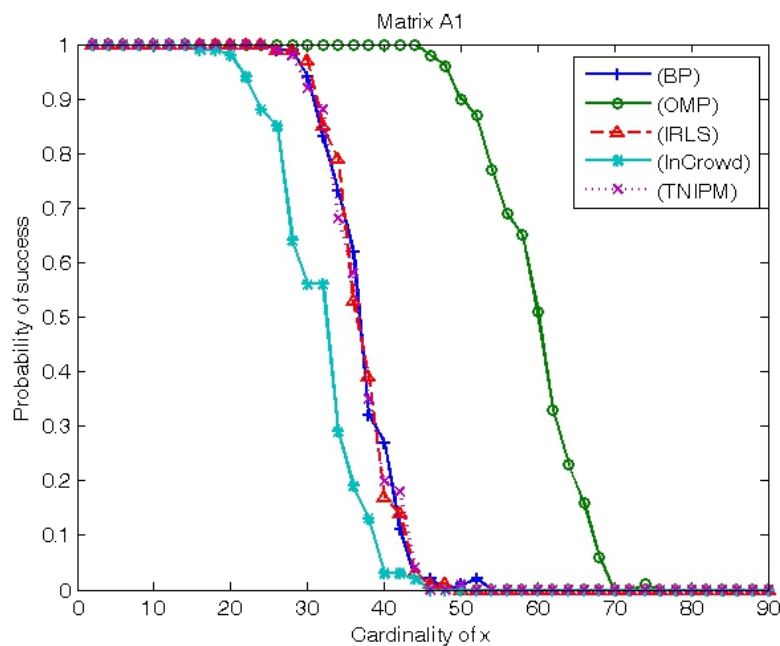
Σχήμα 4.1: Πιθανότητα ανάκτησης της λύσης συναρτήσει του αριθμού k των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x}_k για πίνακες $\mathbf{G}_{100 \times 200}$ με $\mu(\mathbf{G}) = 0.42$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι όλοι οι αλγόριθμοι είναι σε θέση να ανακτήσουν την πιο αραιή

λύση, δηλαδή το αρχικό διάνυσμα \mathbf{x}_k για αραιότητα $1 \leq d_0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq 26$. Ειδικά για τους αλγόριθμους (BP), (OMP) η ανάκτηση της λύσης ξεπερνά κατά πολύ την εκτίμηση των Θεωρημάτων (3.1) και (3.2) με καλύτερη την απόδοση του αλγόριθμου (OMP), καθώς παρατηρούμε ότι μπορεί να ανακτήσει μέχρι διανύσματα με 30 μη μηδενικά στοιχεία.

Πίνακες A1

Στη συνέχεια, εκτελέσαμε το ίδιο ακριβώς τεστ με διαφορετικό πίνακα, τύπου **A1**, ίδιας διάστασης (100×200) και με την ίδια αμοιβαία συσχέτιση (Σχ. 4.2).

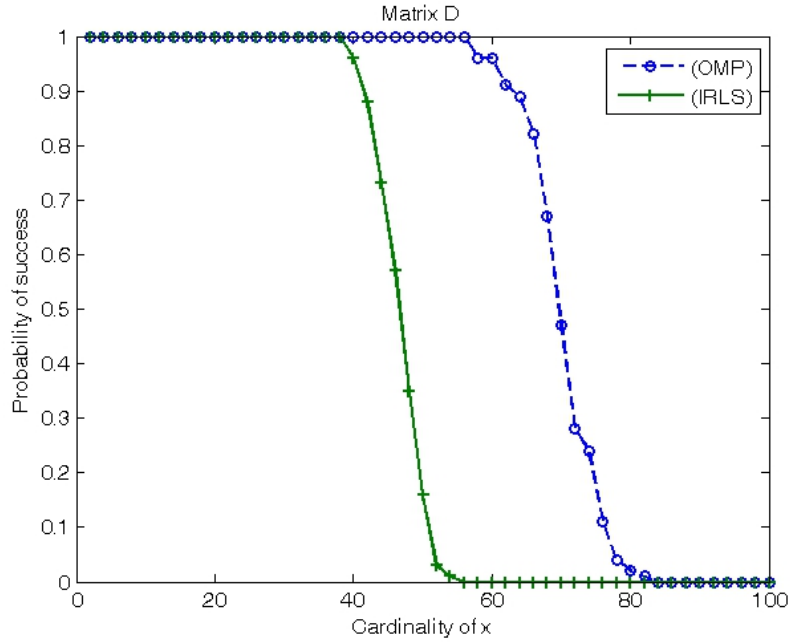


Σχήμα 4.2: Πιθανότητα ανάκτησης της λύσης συναρτήσει του αριθμού k των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x}_k για πίνακες $\mathbf{A1}_{100 \times 200}$ με $\mu(\mathbf{A1}) = 0.42$.

Εδώ παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος (OMP) μπόρεσε να ανακτήσει με πιθανότητα 1 ακόμη πιο πυκνά διανύσματα (με πλήθος μη μηδενικών στοιχείων έως 44), ενώ η απόδοση των υπόλοιπων αλγορίθμων παρέμεινε σχεδόν ίδια.

Πίνακας D

Τέλος, ελέγξαμε τη διαδικασία ανάκτησης του αρχικού τυχαίου διανύσματος \mathbf{x}_k με πίνακα τύπου $\mathbf{D}_{100 \times 200}$ (ένωση μοναδιαίου με Fourier). Παρακάτω (Σχ. 4.3), είναι προφανής η επιτυχία και των δύο αλγορίθμων να ανακτήσουν πιο πυκνά διανύσματα και από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, με τον (OMP) να φτάνει έως τα 60 μη μηδενικά στοιχεία, δηλαδή ποσοστό πυκνότητας $k_p = 30\%$.



Σχήμα 4.3: Πιθανότητα ανάκτησης της λύσης συναρτήσει του αριθμού k των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος \mathbf{x}_k για πίνακα Fourier $\mathbf{D}_{100 \times 200}$ με $\mu(\mathbf{D}) = 0.1$.

4.2.2 Μεταβολή ζώνης

Στο Θεώρημα 2.5 ορίσαμε τη συνάρτηση μεταβολής ζώνης $\rho_w(\delta)$ για μικρό $0 < \delta = n/m$, η οποία για πίνακες Gauss δίνει τη σταθερά μεταβολής ζώνης

$$c = \frac{n}{2\ln(m/n)} = \frac{n}{2\ln(1/\delta)}.$$

Στο πείραμα που ακολουθεί χρησιμοποιήσαμε πίνακες $\mathbf{G}_{n \times m}$ με στοιχεία από την κατανομή Gauss. Μεταβάλλοντας το λόγο δ του αριθμού των γραμμών προς τον αριθμό των στηλών του πίνακα, μεταβλήθηκε και η σταθερά c . Σε κάθε διάσταση, συγκρίναμε τη σταθερά c με την αντίστοιχη πυκνότητα k του διανύσματος \mathbf{x}_k , για την οποία παρατηρήσαμε αλλαγή από ποσοστό βεβαιότητας σε ποσοστό αβεβαιότητας ανάκτησης της λύσης.

Στον πίνακα (Πιν. 4.3) παρατηρούμε ότι για τιμές $k < c$ βρισκόμαστε στη ζώνη επιτυχίας, ενώ για αραιότητα $k > c$ έχουμε την αλλαγή και το πέρασμα στη ζώνη αποτυχίας στην επίλυση του προβλήματος. Στον πίνακα (Πιν. 4.4), καθώς η τιμή του δ πλησιάζει τη μονάδα, παρατηρούμε ότι χάνει την αξία της η σταθερά μεταβολής c , γεγονός αναμενόμενο καθότι ισχύει μόνο για μικρές τιμές του $\delta > 0$.

Παρόλα αυτά έχει ενδιαφέρον να σταθούμε στο σημείο ότι για πίνακα $n \times m$ με $m \simeq n$ το ποσοστό πυκνότητας του διανύσματος το οποίο μπορούμε να ανακτήσουμε πιθανότητα 1 είναι εξαιρετικά μεγάλο, σε σχέση με την αντίθετη περίπτωση όπου $m \gg n$ (Πιν. 4.5).

(α) Διάσταση: 100×800

$\delta = 0.125, c = 24$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
1%	8	100%
3%	24	91%
5%	40	1%
7%	56	0%

(γ) Διάσταση: 100×2000

$\delta = 0.05, c = 16.7$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
0.5%	10	99%
1%	20	88%
2%	40	0%
3%	60	0%

(β) Διάσταση: 100×1000

$\delta = 0.1, c = 21.7$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
1%	10	100%
2%	20	100%
3%	30	42%
4%	40	0%

(δ) Διάσταση: 100×3000

$\delta = 0.033, c = 14.7$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
0.5%	15	99%
1%	30	8%
2%	60	0%
3%	90	0%

Πίνακας 4.3: Πιθανότητα ανάκτησης της λύσης για διαφορετικές τιμές του $\delta \rightarrow 0$.

(α) Διάσταση: 100×500

$\delta = 0.2, c = 31$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
1%	20	100%
3%	60	100%
5%	100	96%
7%	140	49%
9%	180	2%

(γ) Διάσταση: 100×120

$\delta = 0.83, c = 274$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
35%	42	100%
40%	48	98%
45%	54	75%
50%	60	44%
55%	66	21%

(β) Διάσταση: 100×200

$\delta = 0.5, c = 72$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
15%	30	100%
17%	34	99%
19%	38	95%
21%	42	75%
23%	46	45%

(δ) Διάσταση: 100×105

$\delta = 0.95, c = 1025$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
50%	53	100%
55%	58	97%
60%	63	87%
65%	68	69%
70%	74	54%

Πίνακας 4.4: Πιθανότητα ανάκτησης της λύσης για διαφορετικές τιμές του $\delta \rightarrow 1$.

Διάσταση: 100×101

$\delta = 0.99, c = 5025$		
Πυκνότητα k_p	k	(OMP)
60%	61	100%
65%	66	98%
70%	71	91%
75%	76	84%
80%	81	62%

Πίνακας 4.5: Πιθανότητα ανάκτησης της λύσης πίνακα με $m \simeq n$.

4.3 Σφάλματα στην προσέγγιση της λύσης

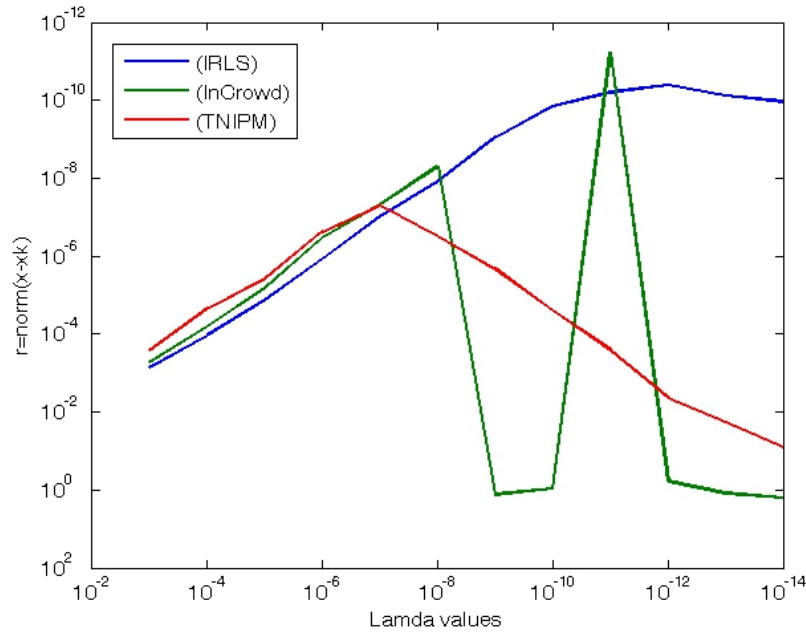
Μια εκτίμηση που μπορούμε επίσης να κάνουμε για τον ποιοτικό έλεγχο των αλγορίθμων είναι και μέσω του σφάλματος το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το γνωστό αρχικό διάνυσμα \mathbf{x}_k .

Το σφάλμα μεταξύ του αρχικού διανύσματος \mathbf{x}_k και της προσέγγισής μας, διαφέρει για κάθε πρόβλημα. Για παράδειγμα, διαφοροποιείται όταν μεταβάλλεται η διάσταση του πίνακα, αλλά και όταν αλλάζει ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων των διανυσμάτων τα οποία θέλουμε να ανακτήσουμε. Εδώ θα μελετήσουμε την περίπτωση σφάλματος για τη βασική μας διάσταση $n \times 2n$ με ($n = 100$).

Θεωρήσαμε πίνακες τύπου \mathbf{G} με αμοιβαία συσχέτιση $\mu(\mathbf{G}) = 0.42$ και κατασκευάσαμε τυχαία διανύσματα \mathbf{x}_k με στοιχεία από την κατανομή Gauss με ποσοστό πυκνότητας $k_p = 8\%$. Για τους αλγόριθμους (BP) και (OMP) και την περίπτωση όπου βρισκόμαστε στη ζώνη επιτυχίας στην επίλυση του προβλήματος το σφάλμα $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2$ είναι $O(10^{-12})$, πολύ μικρότερο από τη θεώρησή μας για σφάλμα 10^{-3} . Η περίπτωση των αλγορίθμων (IRLS), (InCrowd) και (TNIPM) είναι πιο σύνθετη καθώς το σφάλμα εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου κανονικοποίησης λ .

Παρακάτω (Σχ. 4.4) ελέγξαμε το σφάλμα $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2$ που δίνει κάθε αλγόριθμος από τους (IRLS), (InCrowd) και (TNIPM) σε σχέση με τη μεταβολή της παραμέτρου κανονικοποίησης λ . Η τιμή της παραμέτρου μεταβλήθηκε για τιμές από 10^{-3} έως 10^{-14} και σε κάθε περίπτωση υπολογίσαμε το σφάλμα που δίνει η προσεγγιστική μας λύση σε σχέση με το γνωστό διάνυσμα \mathbf{x}_k .

Αρχικά παρατηρούμε ότι η νόρμα r ελαχιστοποιείται για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου για κάθε αλγόριθμο. Για τον αλγόριθμο (IRLS) η τιμή του λ για την οποία ελαχιστοποιείται είναι το $\lambda_1 = 10^{-12}$, για τον (InCrowd) η τιμή είναι $\lambda_2 = 10^{-11}$, ενώ για τον (TNIPM) είναι $\lambda_3 = 10^{-7}$. Το μειονέκτημα για τις πολύ μικρές τιμές του λ (της τάξης του 10^{-12}) είναι ότι ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται σημαντικά για κάθε αλγόριθμο. Επίσης παρατηρούμε ότι για τις τιμές από 10^{-3} έως 10^{-7} το σφάλμα r είναι περίπου το ίδιο και για τις τρεις επαναληπτικές διαδικασίες και όχι μεγαλύτερο από την οριακή τιμή 10^{-3} , η οποία αποτελεί κριτήριο για την επιτυχία ή αποτυχία επίλυσης του προβλήματος.



Σχήμα 4.4: Σφάλματα των αλγορίθμων (TNIPM), (OMP), (InCrowd) με πίνακες τύπου $\mathbf{G}_{100 \times 200}$, για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου κανονικοποίησης λ .

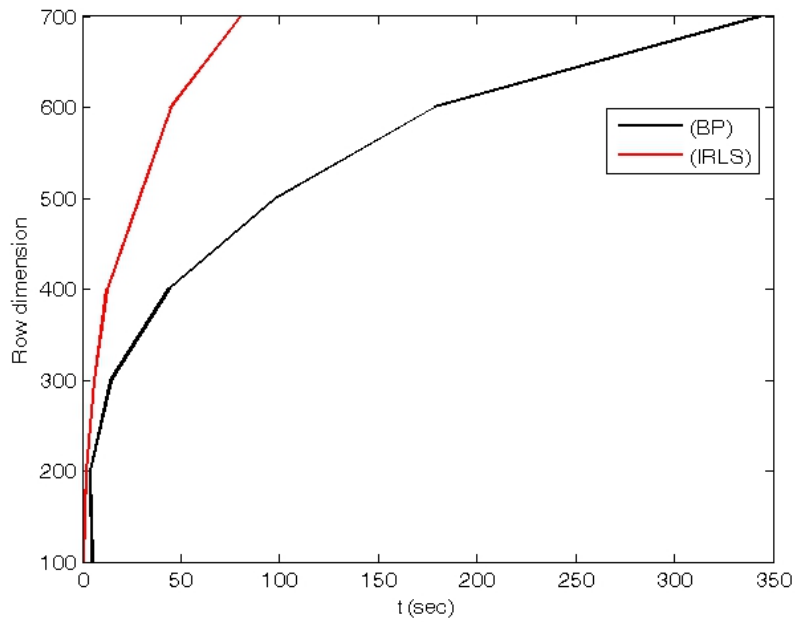
4.4 Χρόνοι επίλυσης

Όπως ήδη αναφέραμε δεν είναι όλοι οι αλγόριθμοι κατάλληλοι για κάθε είδους πρόβλημα. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του προβλήματος (2.2) εκτός από τη δομή του πίνακα είναι η διάστασή του.

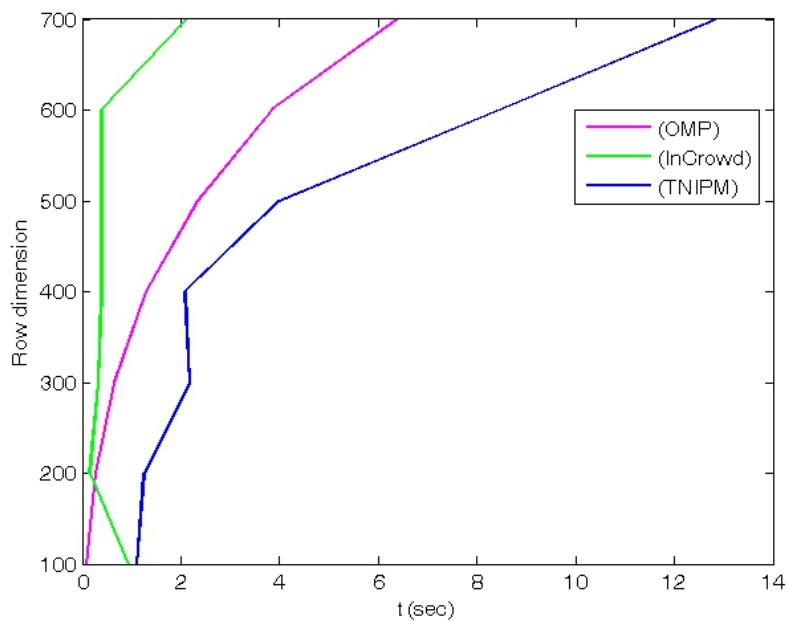
Στο παρακάτω πείραμα θεωρήσαμε πίνακες $\mathbf{B1}$ διάστασης $n \times 2n$, με στοιχεία από την κατανομή Bernoulli. Θεωρήσαμε τυχαίο διάνυσμα από την κατανομή Gauss με πυκνότητα $k_p = 10\%$ και μετρήσαμε τους χρόνους επίλυσης για κάθε αλγόριθμο ξεχωριστά, για τις διάφορες τιμές του n .

Για τους αλγόριθμους (BP), (IRLS) (Σχ. 4.5) παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η διάσταση του πίνακα, αυξάνεται σημαντικά και ο υπολογιστικός χρόνος για το πρόβλημά μας. Μάλιστα ο αλγόριθμος (BP) είναι ο πιο αργός από όλους, καθώς διπλασιάζεται η διάσταση της λύσης (επίλυση με γραμμικό προγραμματισμό). Αντιθέτως, για τους αλγόριθμους (TNIPM), (OMP) και (InCrowd) (Σχ. 4.6) παρατηρούμε ότι για την ίδια μεταβολή στην διάσταση του πίνακα, οι χρόνοι επίλυσης είναι σημαντικά μικρότεροι, οπότε και τους καθιστούν καταλληλότερους για προβλήματα μεγάλης διάστασης. Ο αλγόριθμος (InCrowd) ξεχωρίζει, διότι είναι ο ταχύτερος σε προβλήματα μεγάλης διάστασης.

Σε προβλήματα μικρής διάστασης (Πιν. 4.6), όλοι οι αλγόριθμοι συμπεριφέρονται ικανοποιητικά, παρόλα αυτά ξεχωρίζει ο αλγόριθμος (OMP) καθώς είναι ταχύτερος, επομένως θα ήταν ιδανικός σε περίπτωση όπου θα χρειαζόταν να λύσουμε μεγάλο πλήθος γραμμικών συστημάτων με πίνακες μικρής διάστασης.



Σχήμα 4.5: Χρόνοι επίλυσης για τους αλγόριθμους (BP), (IRLS) με πίνακες τύπου $\mathbf{B1}_{n \times 2n}$, για διαφορετικές τιμές του n .



Σχήμα 4.6: Χρόνοι επίλυσης για τους αλγόριθμους (TNIPM), (OMP), (InCrowd) με πίνακες τύπου $\mathbf{B1}_{n \times 2n}$, για διαφορετικές τιμές του n .

Διάσταση $n \times 2n$	Αλγόριθμος				
	(BP)	(OMP)	(IRLS)	(InCrowd)	(TNIPM)
10 × 20	0.600	0.004	0.165	0.799	0.564
20 × 40	0.076	0.003	0.196	0.071	0.536
30 × 60	0.059	0.007	0.227	0.051	0.690
40 × 80	0.103	0.012	0.613	0.069	0.966
50 × 100	0.176	0.019	0.476	0.152	1.337
60 × 120	0.240	0.030	0.442	0.207	1.493
70 × 140	0.303	0.102	0.983	0.205	1.418
80 × 160	0.512	0.081	1.217	0.259	1.619
90 × 180	0.564	0.086	0.674	0.204	1.936
100 × 200	0.737	0.095	0.988	0.211	2.203

Πίνακας 4.6: Χρόνοι επίλυσης (sec) για πίνακες τύπου $\mathbf{B1}_{n \times 2n}$, για μικρού μεγέθους προβλήματα.

Παράρτημα

Οι παραπάνω αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν σε περιβάλλον Matlab. Εδώ παραθέτονται οι κώδικες οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν:

(Mutual Coherence function)

```
function mutcoh=mut(A)
[t,e]=size(A);
for i=1:e
    w(i)=norm(A(:,i));
end
W=diag(abs(w));
A1=A*diag(1./w);
c=zeros(e);
for j=1:e
    for k=1:e
        if k>j
            c(j,k)=abs(A1(:,j)'*A1(:,k));
        end
    end
end
mutcoh=max(max(c));
```

(BP)

```
% Normalize the columns of A and compute the vector b.
for i=1:m
    w(i)=norm(A(:,i));
end
W=diag(w);
invW=diag(1./w);
A1=A*invW;

% Solve the LP minimization problem.
H=[A1,-A1];
f=ones(2*m,1);
lb=zeros(2*m,1);
options = optimset('LargeScale','off','simplex','on','Display','on');
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,[],[],H,b,lb,[],[],options);
x1=x(1:m);
x2=x(m+1:2*m);
x=x1-x2;
x=invW*x;
```

(OMP)

```
% Initialize
e0=1e-8;
x=zeros(m,1);
r=b-A*x;
p=ones(1,m);
v=find(p>0);
S=[];
for kapa=1:m;
    for i=1:length(v);
        j=v(i);
        z=A(:,j)'*r/norm(A(:,j))^2;
        f=A(:,j)*z-r;
        e(j)=norm(f)^2;
        l=find(e==min(e));
    end
    S(kapa)=l;
    S=sort(S);
    p(l)=0;
    v=find(p>0);
    x(S)=A(:,S)\b;
    r=b-A*x;
    if norm(r)<e0
        break;
    end
end
end
```

(InCrowd)

```
% Create the diagonal matrix W.
for i=1:m
    w(i)=norm(A(:,i));
end
W=diag(w);
W1=diag(1./w);
A=A*W1;
% Solve the problem using InCrowd algorithm.
lamda=1e-7;
[x,iSAtepl]=ICOpt(A,b,lamda,0,inf,1,1);
x=W1*x;
```

(IRLS)

```
% Create the diagonal matrix W.
for i=1:m
    w(i)=norm(A(:,i));
end
W=diag(w);
% Initialization
k1=0;
x=ones(m,1);
X=diag(abs(x)); X1=X;
Y=A'*b;
lamda=1e-7;
e0=1e-10;
ind=0;
for k1=1:1000
    Z=2*lamda*W*X1+A'*A;
    xold=x;
    % Solve using PCG
    % (Suitable for matrix with elements from the set of real numbers).
    Z=sparse(Z);
    L=ichol(Z);
    x=pcg(Z,Y,[],[],L,L');
    % Uncomment (and comment PCG) if the matrix A has complex elements.
    % x=Z\Y;

    r=norm(x-xold);
    if r<=e0
        break;
    end
    X1=diag(1./(abs(x)+eps));
end
```

(TNIPM)

```
% Create the diagonal matrix W and normalize the columns of A.
for i=1:m
    w(i)=norm(A(:,i));
end
W=diag(w);
W1=diag(1./w);
A=A*W1;
% Solve the system of the regularized least squares L1-norm optimization problem.
lamda=1e-7;
x1=l1_ls(A,A',n,m,b,lamda,1e-9);
x=W1*x1;
```

Η συνάρτηση `linprog` είναι εγκατεστημένη συνάρτηση στο Optimization Toolbox της Matlab, ενώ οι συναρτήσεις `ICOpt`, `l1_ls` μπορούν να αναζητηθούν στο διαδίκτυο.

Βιβλιογραφία

- [1] Herbert Amann, Joachim Escher, “*Analysis I*”, Birkhäuser Verlag, 1998.
- [2] Alfred M. Bruckstein, David L. Donoho, Micheal Elad, “*From Sparse Solutions of Equations to Sparse Modeling of signals and Images*”, SIAM Review Vol.51, No. 1, 2009.
- [3] David L. Donoho, Michael Elad, “*Optimally Sparse Representation in General (non-Orthogonal) Dictionaries via l_1 minimization*”, Proceedings, National Academy of Sciences, Vol. 100, pp. 2197-2202, 2003.
- [4] Ewout Van Den Berg and Micheal P. Friedlander, “*Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions*”, SIAM J. SCI. COMPUT, Vol. 31 No. 2, pp. 890–912, 2008.
- [5] Emmanuel J. Candès, Yonina C. Eldar, Deanna Needell, and Paige Randall, “*Compressed Sensing with Coherent and Redundant Dictionaries*”, Revised, October 2010.
- [6] Emmanuel J. Candès, “*The restricted isometry property and its implications for compressed sensing*”, ScienceDirect, March 2008.
- [7] Rick Chartrand and Valentina Staneva, “*Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing*”, AMS.
- [8] Seung-Jean Kim, Member, IEEE, K. Koh, M. Lustig, Stephen Boyd, Fellow, IEEE, and Dimitry Gorinevsky, Fellow, IEEE, “*An Interior-Point Method for Large-Scale l_1 -Regularized Least Squares*”, IEEE Journal of selected topics in signal processing, Vol. 1, No. 4, December 2007.
- [9] Patrick R. Gill, Albert Wang and Alyosha Molnar, “*The In-Crowd Algorithm for Fast Basis Pursuit Denoising*”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 59, No. 10, October 2011.
- [10] Λεώνη Ευαγγελάτου - Δάλλα, « *Στοιχεία Fractal γεωμετρίας* », Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.
- [11] Γ. Δ. Ακριβής - Β. Α. Δουγαλής, « *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση* », Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2008.

- [12] Νεγρεπόντης Σ. , Ζαχαριάδης Θ. , Καλαμίδας Ν. , Φαρμάκη Β. , « Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση », Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.
- [13] Σπύρος Αργυρός, « Πραγματική-Συναρτησιακή Ανάλυση », ΕΜΠ, 2003.
- [14] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, “*Convex Optimization*”, Cambridge University Press, 2004.
- [15] I. M Gel’fand, “*Lectures on Linear Algebra*”, Dover, 1989.
- [16] Hoaying Fu, Micheal K. NG, Mila Nikolova and Jesse L. Barlow, “*Efficient minimization methods of mixed l_2 - l_1 and l_1 - l_1 norms for image restoration*”, SIAM Journal on Scientific Computing.

