Αναδιατάξεις Συναρτήσεων και Ανισότητες Faber-Krahn

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Μπιτσούνη Βασιλική

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
National and Kapodistrian University of Athens

Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 2014

Αναδιατάξεις Συναρτήσεων και Ανισότητες Faber-Krahn

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Μπιτσούνη Βασιλική

Επιβλέπων: Γεράσιμος Μπαρμπάτης

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα 2014

Στην οικογένειά μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, δίνουμε μια εισαγωγή στην θεωρία της συμμετρικοποίησης Schwarz και στην συνέχεια μελετάμε τις εφαρμογές της σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ειδικότερα, κατασκευάζουμε την συμμετρικοποίηση Schwarz μιας πραγματικής συνάρτησης u, ορισμένης σε ένα φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Η συμμετρικοποίηση Schwarz της u, που συμβολίζεται με u^*, είναι ορισμένη στην μπάλα με κέντρο της αρχή των αξόνων και όγκο ίσο με αυτόν του χωρίου, και κατασκευάζεται μέσω της φθίνουσας αναδιάταξης της u. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι για $1 \leq p \leq \infty$ η συμμετρικοποίσηση Schwarz διατηρεί τις L^p νόρμες, ενώ για τις L^p νόρμες της κλίσης της u και της κλίσης της u^* αντίστοιχα, αποδεικνύεται η ανισότητα Pólya-Szegö:

$$\|\nabla u^*\|_{L^p(\Omega^*)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Βασικό εργαλείο για την απόδειξη της ανισότητας αυτής, και γενικότερα για όλη την εργασία, αποτελεί η ισοπεριμετρική ανισότητα.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με την ανισότητα Faber-Krahn σε ευκλείδειους χώρους. Αποδεικνύεται, λοιπόν, η ανισότητα Faber-Krahn, δηλαδή ότι από όλα τα σύνολα που έχουν τον ίδιο όγκο, η μπάλα, και μόνο αυτή, ελαχιστοποιεί την πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή Laplace με συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

Επεκτείνουμε, τέλος, την έννοια της ανισότητας Faber-Krahn και σε πολλαπλότητες Riemann και αποδεικνύουμε ότι είναι ισοδύναμη με άλλες γνωστές συναρτησιακές ανισότητες, όπως η ανισότητα Nash.

Abstract

In this Master thesis, we give an introduction to the theory of Schwarz symmetriz-
ation and study its applications in problems of partial differential equations.

We first construct the Schwarz symmetrization of a real function u, defined on a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. The Schwarz symmetrization of u, denoted u^*, is defined on the open ball centered at the origin and having the same volume as Ω and it is constructed by the decreasing rearrangement of u. Then we show that for $1 \leq p \leq \infty$ the Schwarz symmetrization preserves the L^p norms, while for the L^p norms of the gradient of u and u^* respectively, the inequality Pólya-Szegö asserts:

$$\|\nabla u^*\|_{L^p(\Omega^*)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

The crucial tool in proving this inequality, and (generally) in this Master thesis, is the isoperimetric inequality.

Then we deal with the Faber-Krahn inequality in Euclidean spaces. In particular, we prove the Faber-Krahn inequality, i.e. of all sets of given volume, the ball, and the ball alone, minimizes the first eigenvalue of the Laplace operator with Dirichlet boundary condition:

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

Finally, we extend the Faber-Krahn inequality in Riemannian manifolds and prove that it is equivalent to other known functional inequalities, such as Nash inequality.

Πρόλογος

Το 1894, ο Lord Rayleigh διατύπωσε στην διατριβή του, η οποία αναφερόταν στην θεωρία του ήχου, κάποιες εικασίες σχετικά με την ταλάντωση ορισμένων ελαστικών σωμάτων. Συγκεκριμένα, ισχυρίστηκε ότι από όλες τις μεμβράνες που έχουν το ίδιο εμβαδόν, η κυκλική μεμβράνη έχει την ελάχιστη θεμελιώδη συχνότητα ταλάντωσης. Αυτό αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Faber και Krahn στο τέλος του πρώτου τετάρτου του εικοστού αιώνα. Ωστόσο, από την αρχαιότητα ακόμη, είναι γνωστό από τη λύση του προβλήματος της Διδούς ότι από όλες τις κλειστές καμπύλες του επιπέδου που έχουν το ίδιο μήκος, ο κύκλος, και μόνο αυτός, περικλείει τη μέγιστη επιφάνεια. Αντίστροφα, από όλα τα επίπεδα χωρία που έχουν το ίδιο εμβαδόν, ο κυκλικός δίσκος, και μόνο αυτός, έχει την ελάχιστη περίμετρο. Ένα παράδειγμα του ισοπεριμετρικού αυτού προβλήματος, αποτελούν οι σαπουνόφουσκες, αφού για μία ποσότητα αέρα που διοχετεύεται σε αυτές, παίρνουν πάντα το σφαιρικό σχήμα, που έχει την ελάχιστη επιφάνεια. Αυτό συμβαίνει, διότι η σαπουνόφουσκα βρίσκεται σε θέση ισορροπίας όταν η δυναμική ενέργεια, που οφείλεται στην επιφανειακή τάση και είναι ανάλογη της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας, είναι ελάχιστη. Η ίδια η φύση, λοιπόν, φαίνεται να επιλέγει την σφαιρική συμμετρία.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τη θεωρία της συμμετρικοποίησης Schwarz, γνωστή και ως σφαιρικά συμμετρική και φθίνουσα αναδιάταξη συναρτήσεων, και την μελέτη εφαρμογών της πάνω σε συναρτησιακές ανισότητες και προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Το Κεφάλαιο 1 είναι εισαγωγικό και παρουσιάζει, συνοπτικά, βασικά στοιχεία της Συναρτησιακής Ανάλυσης και της Διαφορικής Γεωμετρίας, καθώς και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 2 εισάγεται η έννοια της αναδιάταξης μιας συνάρτησης και αναφέρονται βασικές ιδιότητες της. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να δοθεί ο ορισμός της συμμετρικοποίηση Schwarz, και να αποδειχθούν κάποιες ιδιότητες και ανισότητες που ικανοποιεί, με βασικότερη την ανισότητα Hardy-Littlewood.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε κλασσικές ανισότητες του λογισμού μεταβολών. Ειδικότερα, δίνουμε αποδείξεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας, καθώς και της ανισότητας Pólya-Szegö, ενώ αναφέρουμε συσχετισμούς με την ανισότητα Sobolev. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με την μελέτη εφαρμογών της συμμετρικοποίησης Schwarz σε προβλήματα συνοριακών τιμών για τον τελεστή Laplace. Μεταφέροντας, λοιπόν, ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, που ορίζεται σε ένα φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, στο αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών, που ορίζεται στην μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων και όγκο ίσο με αυτού του Ω, μπορούμε να συγκρίνουμε την συμμετρικοποίηση Schwarz της λύσης του πρώτου προβλήματος με την λύση του δευτέρου μέσω του Θεωρήματος Talenti.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζεται η βασική ανισότητα αυτής της εργασίας, η ανισότητα Faber-Krahn. Η ανισότητα αυτή σχετίζεται με προβλήματα ιδιοτιμών για τον τελεστή Laplace με συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$, και αντίστοιχα, σε ένα σχετικά συμπαγές υποσύνολο μίας πολλαπλότητας Riemann. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση της ανισότητας Faber-Krahn με τον όγκο του χωρίου σε μία πολλαπλότητα Riemann, καθώς και η ισοδυναμία της με την υπερσυσταλτικότητα του πυρήνα θερμότητας.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή μου κο. Γεράσιμο Μπαρμπάτη για την επιλογή αυτού του ιδιαίτερα ενδιαφέροντος θέματος, και κυρίως για την πολύτιμη βοήθεια του, την υπομονή του, την στήριξη του και τον χρόνο που αφιέρωσε. Η συμβολή του σε αυτήν την εργασία υπήρξε καθοριστική και αναντικατάστατη. Οφείλω, επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Καθηγητή κο. Ιωάννη Στρατή, τόσο για την συμπαράσταση του όλο αυτό το διάστημα, όσο και την βοήθεια του στις μετέπειτα σπουδές μου. Θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα για τις συμβουλές της, καθώς και την τιμή που μου έκανε με την συμμετοχή της στην τριμελή επιτροπή αυτής της εργασίας. Θα ήμουν αγνώμων αν δεν ευχαριστούσα τους καθηγητές μου, καθώς και την Υπεύθυνη της Γραμματείας Μεταπτυχιακών Σπουδών, κα Ελισάβετ Λέκκα, για την ευγένεια και την βοήθεια που παρέχει σε όλους τους φοιτητές. Θέλω ακόμη να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον συνάδελφό μου Λευτέρη Καστή, για την φιλία και την στήριξη του τα τελευταία δύο χρόνια. Επίσης, θα ήθελα, να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου, και ιδιαίτερα τον Αριστείδη Αλευρομάγειρο για την βοήθεια του, καθώς και τις ευχάριστες στιγμές των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος, η εργασία αυτή δεν θα μπορούσε να είχε πραγματοποιηθεί χωρίς την υποστήριξη και την κατανόηση της οικογένειάς μου. Για τον λόγο αυτό θέλω να τους ευχαριστήσω για όλα αυτά τα χρόνια που πίστεψαν σε μένα και μου έδωσαν την ευκαιρία να πραγματοποιήσω τις σπουδές μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο θα δώσουμε συνοπτικά κάποιους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης και της Διαφορικής Γεωμετρίας για διευκόλυνση του αναγνώστη. Για τον σκοπό αυτό δεν δίνουμε αποδείξεις και ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην σχετική βιβλιογραφία που παρέχεται στο τέλος αυτής της εργασίας.

1.1 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Έστω $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ένα ανοικτό σύνολο. Ορίζουμε

- $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ ως τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο $\overline{\Omega}$,
- $\mathcal{C}^k\left(\overline{\Omega}\right)$ ως τον χώρο των συναρτήσεων που είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $\overline{\Omega}$ και των οποίων οι παράγωγοι μέχρι αυτήν την τάξη έχουν συνεχή επέκταση στο $\overline{\Omega}$,
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 0}\mathcal{C}^k(\Omega)$,
- $\mathcal{C}_c(\Omega)$ ως τον χώρο των συναρτήσεων που ανήκουν στον $\mathcal{C}(\Omega)$ και των οποίων ο φορέας είναι ένα συμπαγές σύνολο που περιέχεται στο Ω, (Αν $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, ο φορέας της f είναι το σύνολο: $\operatorname{supp} f = \overline{\{\in \Omega : f(x) \neq 0\}}$),
- $\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}^k \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$,
- $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$.

Θα αναφέρουμε, τώρα, κάποια στοιχεία από τους χώρους $L^p(\Omega)$. Έστω dx το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$. Θα συμβολίζουμε με $L^1(\Omega)$ των χώρο των ολοκληρώσιμων (κατά Lebesgue) συναρτήσεων f στο Ω, δηλαδή των συναρτήσεων για τις οποίες

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)| dx < \infty.$$

Έστω $1 \leq p < \infty$. Τότε

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid |f|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

με νόρμα

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Για $p = \infty$ ορίζουμε

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{η } f \text{ είναι μετρήσιμη και υπάρχει μία σταθερά } C \\ \text{τετοια ώστε } |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \end{array} \right\}$$

με νόρμα

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \inf\{C \mid |f(x)| \leq C \quad \text{σ. π. στο } \Omega\}.$$

Τέλος, ορίζουμε

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \in L^p(V), \quad \text{για κάθε } V \subset\subset \Omega\}.$$

Ορισμός 1.1.1. Έστω $u, \upsilon \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ ένας πολυδείκτης (διάνυσμα) με τάξη $|a| = \sum_{i=1}^N a_i$. Για $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, ορίζουμε τον τελεστή

$$D^a := \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial^{a_2}}{\partial x_2^{a_2}} \cdots \frac{\partial^{a_N}}{\partial x_N^{a_N}}.$$

Λέμε ότι η συνάρτηση υ είναι η ασθενής παράγωγος $a-$τάξης της u, και γράφουμε $D^a u = \upsilon$, αν

$$\int_\Omega u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega \upsilon \phi dx, \ \forall \ \phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Ορισμός 1.1.2. Αν ο k είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, ορίζουμε τον χώρο Sobolev $W^{k,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, ως τον χώρο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : \Omega \to \mathbb{R}$, που ανήκουν στον $L^p(\Omega)$ και των οποίων οι ασθενείς παράγωγοι μέχρι τάξης k ανήκουν στον $L^p(\Omega)$.

Ορίζουμε, τότε, τον χώρο $W^{k,p}_0(\Omega)$ ως την πλήρωση του χώρου $\mathcal{C}^\infty_c$ στον $W^{k,p}(\Omega)$.

Παρατήρηση 1.1.1. Θα συμβολίζουμε με $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, με νόρμα

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^N u^2_{x_i}\right) dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

και με $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$.

Θεώρημα 1.1.1. ***(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)***
Έστω Ω χώρος μέτρου και (f_n) μία ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1(\Omega)$ που ικανοποιεί
(i) $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο Ω,
(ii) υπάρχει μία ακολουθία $g \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε για κάθε n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο Ω.
Τότε $f \in L^1(\Omega)$ και $\|f_n - g\|_1 \to 0$.

Θεώρημα 1.1.2. ***(Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές)*** *Έστω* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ένας συμπαγής και αυτοσυζυγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$. *Τότε, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{H}$*, που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του* T. *Επίσης, αν η βάση αυτή γράφεται ως* $\{\phi_n\} \cup \{\psi_n\}$, *όπου* $\{\psi_n\} \subset \mathrm{Ker}(T)$ *και* $\{\phi_n\}$ *ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του* T, $T\phi_n = \lambda_n \phi_n, \lambda_n \neq 0$, *όπου*
$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$, *τότε η ακολουθία* (λ_n) *είτε είναι πεπερασμένη είτε συγκλίνει στο 0. Επίσης έχουμε*

$$T = \sum_n \lambda_n \phi_n \otimes \phi_n$$

(όπου η σειρά συγκλίνει στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*) Τέλος, για το φάσμα του* T *ισχύει*

$$\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}.$$

Ορισμός 1.1.3. Μια οικογένεια τελεστών $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, ονομάζεται **φασματική ανάλυση της μονάδας** αν πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ο τελεστής E_λ είναι μια προβολή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Η απεικόνιση $\lambda \mapsto E_\lambda$ είναι μονότονη, δηλαδή αν $\lambda < \lambda'$, συνεπάγεται ότι $\mathrm{Range}(E_\lambda) \subset \mathrm{Range}(E_{\lambda'})$.
- Η απεικόνιση $\lambda \mapsto E_\lambda$ είναι ισχυρά αριστερά συνεχής, δηλαδή αριστερά συνεχής ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών και

  $$\|E_\lambda\|_{\mathcal{H}} \to 0, \quad \text{καθώς} \quad \lambda \to -\infty$$

  και

  $$\|E_\lambda - I\|_{\mathcal{H}} \to 0, \quad \text{καθώς} \quad \lambda \to +\infty.$$

Έπεται, επομένως, ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}$, η συνάρτηση $F(\lambda) := \|E_\lambda x\|^2$ είναι αύξουσα, αριστερά συνεχής και ισχύει

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) < \infty,$$

μάλιστα $F(+\infty) = \|x\|^2$

Λήμμα 1.1.1. *Έστω* $\phi(\lambda)$ *μία Borel συνάρτηση στο* $\mathbb{R}$. *Αν*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty,$$

τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, d(E_\lambda x, y)$$

υπάρχει για κάθε $y \in \mathcal{H}$ *και ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του* y.

Άρα από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα, που συμβολίζεται με $J_\phi x$, το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$(J_\phi x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, d(E_\lambda x, y). \tag{1.1}$$

Θεώρημα 1.1.3. *Η απεικόνιση $x \mapsto J_\phi x$ είναι ένας γραμμικός τελεστής στον $\mathcal{H}$ με πεδίο ορισμού*

$$\mathrm{dom} J_\phi := \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\},$$

που είναι ένα πυκνό γραμμικό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Επιπλέον, ο τελεστής J_ϕ είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Ακόμη, για κάθε $x \in \mathrm{dom} J_\phi$,

$$\|J_\phi x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2. \tag{1.2}$$

Μπορούμε, τώρα, να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, dE_\lambda$ ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, dE_\lambda =: J_\phi \tag{1.3}$$

και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, dE_\lambda x =: J_\phi x,$$

η σχέση (1.1) γίνεται

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, dE_\lambda x, y \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, d\left(E_\lambda x, y\right). \tag{1.4}$$

Αν το S είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η ϕ είναι μία Borel συνάρτηση στο S, τότε ορίζουμε

$$\int_S \phi(\lambda)\, dE_\lambda := \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\phi}(\lambda)\, dE_\lambda,$$

όπου $\widetilde{\phi}$ η μηδενική επέκταση της ϕ στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.1.4. ***(Φασματικό Θεώρημα)***
Έστω A ένας αυτοσυζυγής τελεστής σε έναν πραγματικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε, υπάρχει μία μοναδική φασματική ανάλυση της μονάδας $\{E_\lambda\}$ στον $\mathcal{H}$ τέτοια ώστε να προκύπτει η ακόλουθη φασματική παραγοντοποίηση:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Επιπλέον, για κάθε Borel συνάρτηση ϕ που μηδενίζεται στο φάσμα του τελεστή A, που θα συμβολίζουμε με $\mathrm{spec} A$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda)\, dE_\lambda = 0.$$

Ειδικότερα, από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$A = \int_{\mathrm{spec} A} \lambda dE_\lambda.$$

Ο τελεστής A συμπίπτει με τον τελεστή J_ϕ, όπως ορίστηκε στη σχέση (1.3), με συνάρτηση $\phi(\lambda) \equiv \lambda$ ή γενικότερα με οποιαδήποτε συνάρτηση $\phi(\lambda)$ που είναι ίση με λ στο σύνολο $specA$.

Για κάθε Borel συνάρτηση ϕ ορισμένη στο $specA$, ορίζουμε τον τελεστή $\phi(A)$ θέτοντας $\phi(A) = J_\phi$, δηλαδή

$$\phi(A) := \int_{specA} \phi(\lambda)\, dE_\lambda,$$

και

$$dom\phi(A) := \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{specA} |\phi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\}.$$

Άρα, ο τελεστής $\phi(A)$ είναι αυτοσυζυγής. Από τη σχέση (1.4) έπεται ότι για κάθε $x \in dom\phi(A)$ και $y \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$(\phi(A)x, y) = \int_{specA} \phi(\lambda)\, d(E_\lambda x, y).$$

Επιπλέον, από τη σχέση (1.2) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in dom\phi(A)$,

$$\|\phi(A)x\|^2 = \int_{specA} |\phi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2.$$

Ειδικότερα, αν η συνάρτηση ϕ είναι φραγμένη στο $specA$, τότε ο τελεστής $\phi(A)$ είναι φραγμένος και

$$\|\phi(A)x\| \leq \sup_{specA} |\phi|.$$

Θεώρημα 1.1.5. ***(Ascoli-Arzelá)***
Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στον $\mathbb{R}^N$, τέτοιων ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \quad \left(n = 1, \ldots, x \in \mathbb{R}^N\right)$$

για κάποια σταθερά M και ότι οι $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοσυνεχείς, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $|x - y| < \delta$ συνεπάγεται ότι $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$, για $x, y \in \mathbb{R}^N, k = 1, \ldots$ Τότε, υπάρχει μία υπακολουθία $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq \{f_n\}_{k=1}^{\infty}$ και μία συνεχής συνάρτηση f, τέτοια ώστε

$$f_{n_k} \to f \quad \text{ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του} \quad \mathbb{R}^N.$$

Θεώρημα 1.1.6. (Rellich–Kondrachov)
Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο με λείο σύνορο. Έστω $1 \leq p < \infty, p^* = \dfrac{pN}{N-p}$. Τότε

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

για κάθε $1 \leq q < p^*$. Η εμφύτευση είναι συμπαγής.
Παρατηρούμε ότι αφού $p^* > p$ και $p^* \to \infty$ καθώς $p \to N$, έχουμε ειδικότερα

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega),$$

για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.
Παρατηρούμε επίσης ότι

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega),$$

ακόμη και αν δεν υποθέσουμε ότι το Ω έχει λείο σύνορο.

Θεώρημα 1.1.7. (Eberlein–Šmulian)
Ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές (κάθε ακολουθία του υποσυνόλου έχει μία υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στο υποσύνολο αυτό) .

Ορισμός 1.1.4. Έστω $E \subset \mathbb{R}^N$. Για $r > 0$, ορίζουμε

$$E_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, E) < r \right\},$$

όπου $d(x, E) = \inf\{|x - y| \mid y \in E\}$ η απόσταση του x από το E. Έστω k ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq k \leq N - 1$. Ορίζουμε

$$M_k(E) = \liminf_{r \to 0} \frac{|E|}{\omega_{N-k} r^{N-k}}.$$

Το M_k ονομάζεται $k-$διάστατο **περιεχόμενο Minkowski**.

Θεώρημα 1.1.8. (Sard)
Έστω $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *μία* C^k *συνάρτηση, όπου* $k \geq \max\{n-m+1, 1\}$. *Έστω* X *το σύνολο των κρίσιμων σημείων της* f, *δηλαδή το σύνολο των σημείων* $x \in \mathbb{R}^n$ *για τα οποία ο Ιακωβιανός πίνακας της* f *έχει* $\mathrm{rank} < m$. *Τότε, η εικόνα* $f(X)$ *έχει μέτρο (Lebesgue) μηδέν στον* $\mathbb{R}^N$.

1.2 Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

Έστω M μία $N-$διάστατη πολλαπλότητα Riemann και $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων. Μια **μετρική Riemann** g στην M είναι μία απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

η οποία είναι διγραμμική, συμμετρική, θετικά ορισμένη και μετρήσιμη με την εξής έννοια: αν $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $m \in M$, τότε η απεικόνιση $m \mapsto \langle \xi, \eta \rangle(m)$ είναι μετρήσιμη.
Το ζεύγος $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ καλείται **(μετρήσιμη)πολλαπλότητα Riemann.**

Παρατήρηση 1.2.1. Τα διανυσματικά πεδία ορίζονται ως απεικονίσεις $\xi : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ τέτοιες ώστε

$$\xi(fg) = f(\xi g) + g(\xi f)$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, και γράφονται σε τοπικές συντεταγμένες ως

$$\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \partial_i.$$

Έστω (U, x) ένας χάρτης και $\partial_1, \ldots, \partial_N$ τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία στο U. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ως

$$g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle.$$

Έπεται ότι για κάθε $m \in U$ ο πίνακας $(g_{ij}(m))_{ij}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{g} = \det(g_{ij})$ και $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$.

Έστω $T(M, m)$ ο εφαπτόμενος χώρος της M στο m. Από τον ορισμό της μετρικής Riemann, προκύπτει ότι για κάθε $m \in M$, η απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R} : (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle (m)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $T(M, m)$, που σε τοπικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$\langle \xi, \eta \rangle_m = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}(m)\, \xi_i(m)\, \eta_j(m).$$

Είναι γνωστό από τη γεωμετρία Riemann ότι η κλίση μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, που συμβολίζεται με $\mathrm{grad} f$ ή ∇f, ορίζεται ως

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i,j=1}^{N} g^{ij} (\partial_i f)\, \partial_j,$$

το οποίο είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον εφαπτόμενο χώρο. Αντίστοιχα ορίζουμε την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\xi \in \mathcal{X}(M)$, που συμβολίζεται με $\mathrm{div}\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, ως

$$\mathrm{div}\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{N} \partial_j \left(\sqrt{g}\, \xi_j \right).$$

Ορισμός 1.2.1. Ο τελεστής Laplace ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση

$$\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M) : f \mapsto \mathrm{div}(\mathrm{grad} f),\ f \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

ενώ αν (U, x) χάρτης στην M, τότε παίρνει τη μορφή

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \partial_j f \right).$$

Παρατήρηση 1.2.2. Ο τελεστής Laplace είναι καλά ορισμένος, με την έννοια ότι δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που θα επιλέξουμε.

Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann και (U, x) χάρτης στην M.
Αν $f : U \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_U f\, dV = \int_{x(U)} \left(f \circ x^{-1} \right) \sqrt{g \circ x^{-1}}\, dx,$$

όπου dx το μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}^N$. Η μέθοδος αλλαγής μεταβλητής μας εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο στις τομές των χαρτών. Για να ορίσουμε το μέτρο καθολικά στην πολλαπλότητα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις διαμερίσεις της μονάδας.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ διανυσματικό πεδίο στην M με συμπαγή φορέα. Τότε*

$$\int_M \mathrm{div}\xi\, dV = 0.$$

Θεώρημα 1.2.2. ***(Green)***
Έστω $f, h \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ *συναρτήσεις, τέτοιες ώστε τουλάχιστον μία εκ των δύο να έχει συμπαγή φορέα. Τότε*

$$\int_M h\, \Delta f\, dV = -\int_M \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} h \rangle\, dV = \int_M f\, \Delta h\, dV.$$

Ορισμός 1.2.2. Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο τέτοιο ώστε $|\xi| \in L^1_{loc}(M)$. Θα λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο ξ είναι η **ασθενής κλίση** μιας συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(M)$, και θα συμβολίζουμε με $\xi = \nabla u$, αν για κάθε $\eta \in \mathcal{X}(M)$ με συμπαγή φορέα, ισχύει η σχέση

$$\int_M u\, \mathrm{div}\eta\, dV = -\int_M \langle \xi, \eta \rangle\, dV.$$

Πρόταση 1.2.1. Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann. Τότε για κάθε Lipschitz συνεχή συνάρτηση $f \in \mathcal{C}(M)$ υπάρχει η ασθενής της κλίση ∇f, η οποία είναι $L^{\infty}-$διανυσματικό πεδίο της M και

$$\|\nabla f\|_{L^{\infty}} \leq L(f), \tag{1.5}$$

όπου $L(f)$ η σταθερά Lipschitz της f.

Ορισμός 1.2.3. Έστω $1 \leq p < \infty$. Ορίζουμε τον χώρο Sobolev $W^{1,p}(M)$, ως τον χώρο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L^p(M)$ για τις οποίες υπάρχει η ασθενής κλίση ∇u και μάλιστα $|\nabla u| \in L^p(M)$.
Ορίζουμε τη νόρμα του χώρου $W^{1,p}(M)$ ως εξής

$$\|u\|_{1,p} := \left[\int_M \left(|u|^p + |\nabla u|^p\right) dV\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Αντίστοιχα με τον $\mathbb{R}^N$, ο χώρος $W^{1,p}_0(M)$ είναι η κλειστή θήκη του $\mathcal{C}^{\infty}_c(M)$ στον $W^{1,p}(M)$ και συμβολίζουμε $H^1(M) := W^{1,2}(M)$ και $H^1_0(M) := W^{1,2}_0(M)$.

Θεώρημα 1.2.3. *Για κάθε θετικά ορισμένο, αυτοσυζυγή τελεστή* $\mathcal{L}$ *σε έναν χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$*, η ημιομάδα* $e^{-\mathcal{L}t}$ *ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*
(i) Για κάθε $t \geq 0$*, ο τελεστής* $e^{-\mathcal{L}t}$ *είναι ένας φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής και*

$$\|e^{-\mathcal{L}t}\| \leq 1.$$

(ii) Η οικογένεια $\left\{e^{-\mathcal{L}t}\right\}$ *ικανοποιεί την ταυτότητα ημιομάδας*

$$e^{-\mathcal{L}t}e^{-\mathcal{L}s} = e^{-\mathcal{L}(t+s)},$$

για κάθε $t, s \geq 0$.
(iii) Η απεικόνιση $t \mapsto e^{-\mathcal{L}t}$ *είναι ισχυρά συνεχής, δηλαδή συνεχής ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών, στο διάστημα* $[0, +\infty)$*. Δηλαδή, για κάθε* $t_0 \geq 0$ *και* $f \in \mathcal{H}$

$$\|e^{-\mathcal{L}t}f - e^{-\mathcal{L}t_0}f\|_H \to 0, \quad \text{καθώς} \quad t \to t_0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $f \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{t \to 0+} e^{-\mathcal{L}t}f = f.$$

(iv) *Για κάθε* $f \in \mathcal{H}$ *και* $t > 0$, *έχουμε το* $e^{-\mathcal{L}t}f \in \mathrm{dom}\mathcal{L}$ *και*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\mathcal{L}t}f\right) = -\mathcal{L}\left(e^{-\mathcal{L}t}f\right),$$

όπου $\dfrac{d}{dt}$ *η παράγωγος στον* $\mathcal{H}$.

Λήμμα 1.2.1. *Έστω* $(\psi_n(t))$ *μία ακολουθία συναρτήσεων στον* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *τέτοιων ώστε*

$$\psi_n(0) = 0 \;\; \text{και} \;\; \sup_n \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi_n'(t)| < \infty. \tag{1.6}$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιες συναρτήσεις $\psi(t)$ *και* $\phi(t)$ *στον* $\mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) \to \psi(t) \;\; \text{και} \;\; \psi_n'(t) \to \phi(t) \;\; \text{για κάθε} \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Τότε, για κάθε $u \in H_0^1(M)$, *η συνάρτηση* $\psi(u)$ *ανήκει επίσης στον* $H_0^1(M)$ *και*

$$\nabla\psi(u) = \phi(u)\nabla u. \tag{1.8}$$

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω u μια συνάρτηση στον $\mathcal{C}(M) \cap H_0^1(M)$. Για κάθε $a > 0$, ορίζουμε

$$U_a = \{x \in M : u(x) > a\}.$$

Τότε, $(u-a)^+ \in H_0^1(U_a)$.

Λήμμα 1.2.2. *Έστω* u *μια μη αρνητική συνάρτηση στον* $H_0^1(M)$. *Τότε, υπάρχει μία ακολουθία* (u_n) *μη αρνητικών συναρτήσεων στον* $C_0^\infty(M)$ *τέτοιων ώστε*

$$u_n \to u \;\; \text{στον} \;\; H^1(M), \;\; \text{καθώς} \;\; n \to \infty.$$

Λήμμα 1.2.3. *Αν με* $H_c^1(M)$ *συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων που ανήκουν στον* $H^1(M)$ *και έχουν συμπαγή φορέα, τότε*

$$H_c^1(M) \subset H_0^1(M).$$

Κεφάλαιο 2

Συμμετρικοποίηση

2.1 Η Φθίνουσα Αναδιάταξη

Έστω $E \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο μετρήσιμο (κατά Lebesgue) χωρίο. Συμβολίζουμε το N-διάστατο μέτρο (Lebesgue) του ως $|E|$. Θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα τέτοιο χωρίο. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση που σχετίζεται με αυτήν και ορίζεται στην μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων και μέτρο ίσο με του E. Για να ορίσουμε τη συνάρτηση αυτή, θα πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε τη μονοδιάστατη φθίνουσα αναδιάταξη της.

Ορισμός 2.1.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο μετρήσιμο σύνολο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Για $t \in \mathbb{R}$, το σύνολο στάθμης $\{u > t\}$ ορίζεται ως

$$\{u > t\} = \{x \in \Omega \mid u(x) > t\} \quad .$$

Τα σύνολα $\{u < t\}, \{u \geq t\}, \{u = t\}$ και ούτω καθεξής, ορίζονται ανάλογα. Τότε η **συνάρτηση κατανομής** της u δίνεται από τον τύπο

$$\mu_u(t) = |\{u > t\}| \quad .$$

Η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς t και για
$t \geq \operatorname{ess\,sup}(u)$, έχουμε $\mu_u(t) = 0$, ενώ για $t \leq \operatorname{ess\,inf}(u)$, έχουμε
$\mu_u(t) = |\Omega|$.
Συνεπώς, το πεδίο τιμών της $\mu_u(t)$ είναι το διάστημα $[0, |\Omega|]$.

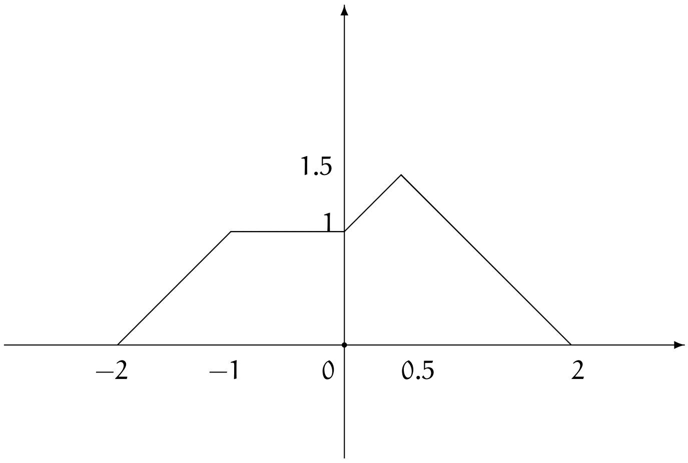
Ορισμός 2.1.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η **(μονοδιάστατη) φθίνουσα αναδιάταξη** της u, που συμβολίζεται με $u^\#$, ορίζεται στο διάστημα $[0, |\Omega|]$ ως εξής

$$\left.\begin{aligned} u^\#(0) &= \operatorname{ess\,sup}(u) \\ u^\#(s) &= \inf\{t \mid \mu_u(t) < s\}, \quad s > 0 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Η $u^\#$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής σχεδόν σε όλο το Ω. Ωστόσο, αφού η συνάρτηση $\mu_u(t)$ είναι φθίνουσα, μπορεί να έχει άλματα ασυνέχειας. Αν το t είναι ένα σημείο ασυνέχειας, τότε η $u^{\#}$ ορίζεται στο διάστημα $[\mu_u(t+), \mu_u(t-)]$ ως t.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$u(x) = \begin{cases} 2+x & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1+x & , \quad 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2-x & , \quad 0.5 \leq x \leq 2 \end{cases} .$$



Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $x_1, x_2 \in \Omega$ τα άκρα του διαστήματος $\{u > t\}$, τότε η συνάρτηση κατανομής $\mu_u(t) = |\{u > t\}| = |(x_1, x_2)|$. Άρα

- Για $0 \leq t < 1$

$$\left.\begin{array}{l} 2 + x_1 = t \Rightarrow x_1 = t - 2 \\ 2 - x_2 = t \Rightarrow x_2 = 2 - t \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_u(t) = (2-t) - (t-2) = 4 - 2t$$

- Για $1 \leq t < 1.5$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + x_1 = t \Rightarrow x_1 = t - 1 \\ 2 - x_2 = t \Rightarrow x_2 = 2 - t \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_u(t) = (2-t) - (t-1) = 3 - 2t$$

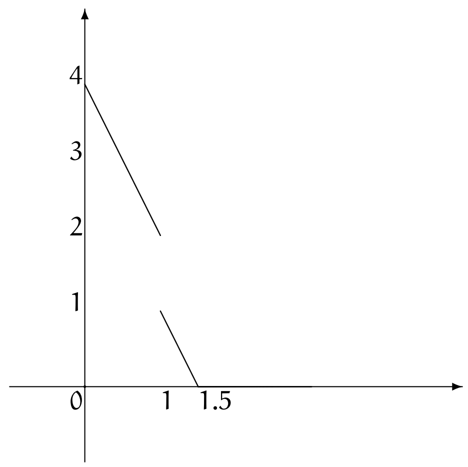
- Για $t \geq 1.5$

$$\mu_u(t) = 0 \quad .$$

Παρατηρούμε ότι η $\mu_u(t)$ είναι ασυνεχής στο 1 και συνεχής στο 1.5, άρα

$$\mu_u(t) = \begin{cases} 4-2t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 3-2t & , \quad 1 \le t \le 1.5 \\ 0 & , \quad t \ge 1.5 \end{cases} \quad .$$

και η γραφική παράσταση της $\mu_u(t)$ είναι



Η συνάρτηση $u^{\#}$ ορίζεται στο διάστημα $[0, |\Omega|] = [0, 4]$ και υπολογίζεται ως εξής:

- Στο διάστημα $[1, 1.5]$ έχουμε

  $$\mu_u(t) < s \Rightarrow 3-2t < s \Rightarrow t > \frac{3-s}{2} \quad ,$$

  άρα

  $$u^{\#}(s) = \inf\{t \mid \mu_u(t) < s\} = \frac{3-s}{2} \quad .$$

- Στο διάστημα $[0, 1]$ έχουμε

  $$\mu_u(t) < s \Rightarrow 4-2t < s \Rightarrow t > \frac{4-s}{2} \quad ,$$

  άρα

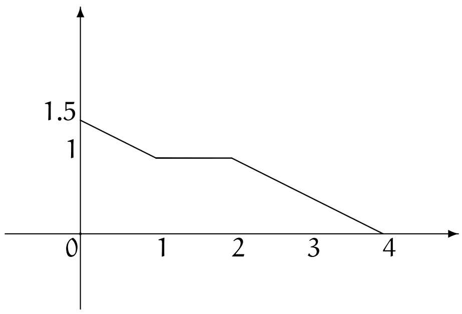
  $$u^{\#}(s) = \frac{4-s}{2} \quad .$$

- Στο σημείο $t = 1$ έχουμε ασυνέχεια για την $\mu_u(t)$,άρα η $u^{\#}$ παίρνει την τιμή 1 στο διάστημα $[\mu_u(1^+), \mu_u(1^-)] = [1, 2]$.

Η $u^{\#} : [0,4] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,4]$, συνεπώς προκύπτει

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} \dfrac{3-s}{2} & , \quad 0 \le s \le 1 \\ 1 & , \quad 1 \le s \le 2 \\ \dfrac{4-s}{2} & , \quad 2 \le s \le 4 \end{cases} \quad .$$

και η γραφική παράσταση της $u^{\#}$ είναι



Παράδειγμα 2.1.2. Έστω Ω ο δακτύλιος

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < R_1 < |x| < R_0\right\}$$

και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = \frac{\left(R_0^2 - |x|^2\right)}{2} \quad .$$

Για να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση $u^{\#}$ πρέπει πρώτα να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής $\mu_u(t) = |\{u > t\}|$. Έχουμε

$$u(x) > t \Leftrightarrow \frac{\left(R_0^2 - |x|^2\right)}{2} > t \Rightarrow |x|^2 < R_0^2 - 2t \quad .$$

Για να είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση $\mu_u(t)$ πρέπει να ισχύει

$$0 < R_1 < |x| \Rightarrow R_1^2 < |x|^2.$$

Άρα

$$\mu_u(t) = |\{x \in \Omega \mid u(x) > t\}| = \left|\left\{x \in \Omega \mid R_1^2 < |x|^2 < R_0^2 - 2t\right\}\right| \quad ,$$

δηλαδή ψάχνουμε το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων με κέντρο το μηδέν και ακτίνες R_1 και $\sqrt{R_0^2 - 2t}$ αντίστοιχα. Συνεπώς

$$\mu_u(t) = \left(R_0^2 - 2t - R_1^2\right)\pi \quad .$$

Κατασκευάζουμε τώρα την φθίνουσα αναδιάταξη της u

$$\begin{aligned}\mu_u(t) < s &\Rightarrow \left(R_0^2 - R_1^2 - 2t\right)\pi < s \\ &\Rightarrow R_0^2 - R_1^2 - \frac{s}{\pi} < 2t \\ &\Rightarrow t > \frac{1}{2}\left(R_0^2 - R_1^2 - \frac{s}{\pi}\right) \quad .\end{aligned}$$

Άρα

$$u^{\#}(s) = \inf\{t \mid \mu_u(t) < s\} \Rightarrow u^{\#}(s) = \frac{1}{2}\left(R_0^2 - R_1^2 - \frac{s}{\pi}\right) \quad .$$

Πρόταση 2.1.1. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ φραγμένο χωρίο. Τότε η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα και αριστερά συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη. (i) Έστω $s_1 < s_2$. Τότε αν $|\{u > t\}| < s_1$ συνεπάγεται ότι $|\{u > t\}| < s_2$. Άρα

$$\{t \mid \mu_u(t) < s_1\} \subset \{t \mid \mu_u(t) < s_2\} \quad .$$

Άρα από τον ορισμό της $u^{\#}$ προκύπτει ότι

$$u^{\#}(s_1) \geq u^{\#}(s_2) \quad .$$

(ii) Έστω $s \in (0, |\Omega|)$. Από το ορισμό της $u^{\#}$ και τον ορισμό του infimum, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $u^{\#}(s) \leq t \leq u^{\#}(s) + \epsilon$ και $\mu_u(t) < s$. Επιλέγουμε $h > 0$ τέτοιο ώστε $\mu_u(t) < s - h < s$. Τότε, για όλα τα $0 < h' \leq h$, έχουμε $\mu_u(t) < s - h' < s$ και αφού η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα, έχουμε από τον ορισμό της

$$u^{\#}(s) \leq u^{\#}(s - h') \leq t < u^{\#}(s) + \epsilon \quad .$$

Άρα αποδείξαμε ότι η $u^{\#}$ είναι αριστερά συνεχής. □

Πρόταση 2.1.2. Η απεικόνιση $u \mapsto u^{\#}$ είναι αύξουσα, δηλαδή αν $u \leq \upsilon$, όπου u και υ πραγματικές συναρτήσεις στο Ω, τότε $u^{\#} \leq \upsilon^{\#}$

Απόδειξη. Αφού $u \leq \upsilon$, έχουμε ότι $\{u > t\} \subset \{\upsilon > t\}$. Άρα $|\{u > t\}| \leq |\{\upsilon > t\}|$. Αν $|\{\upsilon > t\}| < s$, τότε $|\{u > t\}| < s$, επομένως έχουμε

$$\{t \mid |\{\upsilon > t\}| < s\} \subset \{t \mid |\{u > t\}| < s\}$$

και το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό της συνάρτησης αναδιάταξης. □

Ορισμός 2.1.3. Δύο πραγματικές συναρτήσεις (με πιθανόν διαφορετικό πεδίο ορισμού) ονομάζονται **ισομετρήσιμες** αν έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής. Οι ισομετρήσιμες συναρτήσεις θεωρούνται **αναδιάταξη** η μία της άλλης.

Πρόταση 2.1.3. Οι συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}$ και $u^{\#} : [0, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ είναι ισομετρήσιμες, δηλαδή για κάθε t,

$$|\{u > t\}| = \left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right| \quad . \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Αν $u^{\#}(s) > t$, τότε από τον ορισμό της $u^{\#}$ έχουμε ότι
$\inf\{t \mid |\{u > t\}| < s\} > t$,συνεπώς $|\{u > t\}| \geq s$. Άρα

$$\left\{s \mid u^{\#}(s) > t\right\} \subset \{s \mid |\{u > t\}| \geq s\} \quad .$$

Αφού η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα,έχουμε

$$|\{u^{\#} > t\}| = \sup\{s \mid u^{\#}(s) > t\} \leq |\{u > t\}| \quad . \tag{2.3}$$

Από την άλλη πλευρά, έστω $|\{u^{\#} \geq t\}| = s$. Αφού η συνάρτηση $u^{\#}$ είναι αριστερά συνεχής και φθίνουσα, συνεπάγεται ότι $u^{\#} = t$. Τότε, από τον ορισμό της $u^{\#}$, προκύπτει ότι $|\{u > t\}| \leq s$. Άρα

$$|\{u > t\}| \leq |\{u^{\#} \geq t\}| \quad . \tag{2.4}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.3) και (2.4) για $t+h$ στη θέση του t, προκύπτει

$$|\{u^{\#} > t+h\}| \leq |\{u > t+h\}| \leq |\{u^{\#} \geq t+h\}| \quad .$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $h \downarrow 0$, έχουμε

$$|\{u^{\#} > t\}| \leq |\{u > t\}| \leq |\{u^{\#} > t\}|$$

που αποδεικνύει την (2.2). □

Πόρισμα 2.1.1. Με τους συμβολισμούς που έχουμε ορίσει, έχουμε

$$\left.\begin{aligned} |\{u > t\}| &= |\{u^{\#} > t\}| \quad . \\ |\{u \geq t\}| &= |\{u^{\#} \geq t\}| \quad . \\ |\{u < t\}| &= |\{u^{\#} < t\}| \quad . \\ |\{u \leq t\}| &= |\{u^{\#} \leq t\}| \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Η πρώτη σχέση έχει ήδη αποδειχθεί.
Για τη δεύτερη σχέση θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n = \left\{u > t - \frac{1}{n}\right\} \quad , \quad n \geq 1 \quad .$$

Τότε, είναι γνωστό ότι για κάθε φθίνουσα ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\geq 1}$ ισχύει

$$\left|\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right| = \lim_{n\to\infty} |A_n| \quad .$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση έχουμε

$$|\{u \geq t\}| = \left|\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{u > t - \frac{1}{n}\right\}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left\{u > t - \frac{1}{n}\right\}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left\{u^{\#} > t - \frac{1}{n}\right\}\right| = \left|\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{u^{\#} > t - \frac{1}{n}\right\}\right| = |\{u^{\#} \geq t\}| \quad .$$

Επομένως, αφού αποδείξαμε τη δεύτερη σχέση προκύπτει

$$|\{u < t\}| = |\Omega| - |\{u \geq t\}| = |\Omega| - |\{u^{\#} \geq t\}| = |\{u^{\#} < t\}| \quad .$$

Αντίστοιχα για την τελευταία σχέση έχουμε

$$|\{u \leq t\}| = |\Omega| - |\{u > t\}| = |\Omega| - |\{u^{\#} > t\}| = |\{u^{\#} \leq t\}| \quad .$$

□

Πόρισμα 2.1.2. Αν $u \geq 0$ και $u \in L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$, τότε $u^\# \in L^p((0,|\Omega|))$ και

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u^\#\|_{p,(0,|\Omega|)} \quad . \tag{2.6}$$

Απόδειξη. Αν $p = \infty$, τότε από τον ορισμό της αναδιάταξης έχουμε ότι

$$u^\#(0) = \operatorname{ess\,sup}(u)$$

και

$$u^\#(|\Omega|) = \operatorname{ess\,inf}(u) \quad ,$$

συνεπώς η $u^\#$ είναι φραγμένη. Επιπλέον, αφού η $u^\# : [0,|\Omega|] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα, τότε είναι μετρήσιμη. Άρα $u^\# \in L^\infty((0,|\Omega|))$.
Έχουμε τότε

$$\|u^\#\|_{\infty,(0,|\Omega|)} = u^\#(0) = \operatorname{ess\,sup}(u) = \|u\|_{\infty,\Omega} \quad .$$

Έστω τώρα $1 \leq p < \infty$, τότε

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\Omega}^p &= \int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} (t^p)' \, dt \right) dx \\ &= \int_\Omega \int_0^{u(x)} pt^{p-1} dt dx = \int_\Omega \int_0^\infty \chi_{\{u>t\}}(x) \, pt^{p-1} dt dx \end{aligned}$$

και με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini προκύπτει

$$\|u\|_{p,\Omega}^p = \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{u>t\}}(x) \, pt^{p-1} dx dt = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_u(t) \, dt \quad .$$

Αντίστοιχα για την $u^\#$ έχουμε

$$\|u^\#\|_{p,(0,|\Omega|)}^p = \int_\Omega |u^\#(x)|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_{u^\#}(t) \, dt \quad .$$

Αφού οι συναρτήσεις u και $u^\#$ είναι ισομετρήσιμες, έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής. Συνεπώς αν

$$\mu_u(t) = \mu_{u^\#}(t) = \mu(t)$$

τότε

$$\|u\|_{p,\Omega}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) \, dt = \|u^\#\|_{p,(0,|\Omega|)}^p \quad .$$

Άρα αποδείξαμε την σχέση (2.6).
Το αποτέλεσμα ισχύει και χωρίς τη συνθήκη $u \geq 0$. $\square$

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση και $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε*

$$\int_\Omega F(u(x)) \, dx = \int_0^{|\Omega|} F\left(u^\#(s)\right) ds \quad . \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Έστω $E = [t, \infty]$ και $F(\xi) = \chi_E(\xi)$,όπου χ_E η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου E. Τότε

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u(x))\,dx &= \int_\Omega \chi_{\{u\geq t\}}(x)\,dx = |\{u \geq t\}| = \left|\left\{u^\# \geq t\right\}\right| \\ &= \int_0^{|\Omega|} \chi_{\{u^\#\geq t\}}(s)\,ds = \int_0^{|\Omega|} F\left(u^\#(s)\right) ds \quad .\end{aligned}$$

Ομοίως, το αποτέλεσμα ισχύει για $F = \chi_E$, όπου E οποιοδήποτε διάστημα. Συνεπώς ισχύει για οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο και οποιοδήποτε σύνολο Borel, αφού η F είναι Borel μετρήσιμη. Επομένως, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε μη αρνητική απλή συνάρτηση.
Αφού F είναι μια οποιαδήποτε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση, από γνωστό Θεώρημα (προσέγγισης μετρήσιμης συνάρτησης από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις), μπορεί να εκφραστεί ως όριο μιας αύξουσας ακολουθίας (F_n) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων τέτοιων ώστε

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F \quad ,$$

όπου η σύγκλιση είναι κατά σημείο.
Άρα, για κάθε n έχουμε αντίστοιχα

$$\int_\Omega F_n(u(x))\,dx = \int_0^{|\Omega|} F_n\left(u^\#(s)\right) ds \quad .$$

Παίρνουμε, τώρα, το όριο καθώς το $n \to \infty$ και έχουμε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u(x))\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F_n(u(x))\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{|\Omega|} F_n\left(u^\#(s)\right) ds \\ &= \int_0^{|\Omega|} F\left(u^\#(s)\right) ds \quad .\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.1.3. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Borel συνάρτηση και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $F(u) \in L^1(\Omega)$. Τότε $F\left(u^\#\right) \in L^1((0, |\Omega|))$ και ισχύει η σχέση (2.7).

Απόδειξη. Γράφουμε την $F = F^+ - F^-$, όπου $F^+ = \max\{F, 0\}$ και $F^- = \max\{-F, 0\}$. Οι συναρτήσεις F^+ και F^- είναι μη αρνητικές. Επιπλέον, για κάθε $F : X \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_X F(u(x))\,d\mu = \int_X F^+(u(x))\,d\mu - \int_X F^-(u(x))\,d\mu \quad .$$

Αφού η F είναι Borel συνάρτηση, τότε και οι F^+, F^- είναι Borel συναρτήσεις και συνεπώς ικανοποιούν την σχέση (2.7),δηλαδή

$$\int_\Omega F^+(u(x))\,dx = \int_0^{|\Omega|} F^+\left(u^\#(s)\right) ds \tag{2.8}$$

και

$$\int_{\Omega} F^{-}(u(x))\,dx = \int_{0}^{|\Omega|} F^{-}\left(u^{\#}(s)\right) ds \quad . \tag{2.9}$$

Αφού $F(u) \in L^{1}(\Omega)$, έχουμε ότι

$$\int_{\Omega} F^{+}(u(x))\,dx < \infty$$

και

$$\int_{\Omega} F^{-}(u(x))\,dx < \infty \quad ,$$

άρα αφαιρώντας την σχέση (2.9) από την (2.8) προκύπτει

$$\int_{0}^{|\Omega|} F\left(u^{\#}(s)\right) ds = \int_{\Omega} F(u(x))\,dx < \infty \quad .$$

Άρα $F\left(u^{\#}\right) \in L^{1}((0,|\Omega|))$ και αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.1.4. Έστω $u \in L^{p}(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $u^{\#} \in L^{p}((0,|\Omega|))$ και οι αντίστοιχες L^{p} νόρμες είναι ίσες.

Απόδειξη. Η περίπτωση $p = \infty$ έχει αποδειχθεί στο Πόρισμα 2.1.2.
Για $1 \leq p < \infty$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου $F(t) = |t|^{p}$. Η F είναι μια μη αρνητική Borel συνάρτηση, ως συνεχής. Άρα από το Θεώρημα 2.1.1 έχουμε

$$\int_{\Omega} F(u(x))\,dx = \int_{0}^{|\Omega|} F\left(u^{\#}(s)\right) ds \Rightarrow \int_{\Omega} |u(x)|^{p} dx = \int_{0}^{|\Omega|} |u^{\#}(s)|^{p} ds \quad , \tag{2.10}$$

και αφού $u \in L^{p}(\Omega)$, τότε

$$\int_{0}^{|\Omega|} |u^{\#}(s)|^{p} ds < \infty.$$

και άρα $u^{\#} \in L^{p}((0,|\Omega|))$.
Επομένως, από τη σχέση (2.10) έχουμε

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p} = \|u^{\#}\|_{p,(0,|\Omega|)}^{p} \Rightarrow \|u\|_{p,\Omega} = \|u^{\#}\|_{p,(0,|\Omega|)} \quad .$$

□

Παρατήρηση 2.1.1. Αφού η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1, καθώς και των Πορισμάτων, βασίζονται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις u και $u^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες, τα αποτελέσματα θα ισχύουν και για άλλες αναδιατάξεις.

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $u : [0,l] \to \mathbb{R}$ μια φθίνουσα συνάρτηση. Τότε $u = u^{\#}$.*

Απόδειξη. Αν $t < u(s)$, δηλαδή $s \in \{u > t\}$, τότε αφού η u είναι φθίνουσα,

$$[0,s] \subset \{u > t\} \Rightarrow |\{u > t\}| \geq s \Leftrightarrow \mu_{u}(t) \geq s$$

και αφού οι συναρτήσεις u και $u^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες, έχουμε $\left|\left\{u^{\#} > t\right\}\right| \geq s$. Άρα από τον ορισμό προκύπτει $t \leq u^{\#}(s)$. Άρα

$$u^{\#}(s) \geq u(s) \tag{2.11}$$

για κάθε $s \in [0, l]$. Έστω τώρα s ένα σημείο ασυνέχειας της u. Αφού η u είναι φθίνουσα ισχύει ότι

$$\{u > u(s-h)\} \subset [0, s-h] \Rightarrow |\{u > u(s-h)\}| \leq s-h < s,$$

για $h > 0$. Για να δείξουμε τώρα την αντίθετη φορά της ανισότητας (2.11), παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της φθίνουσας αναδιάταξης ισχύει ότι
$u^{\#}(s) \leq t$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $t \leq u(s-h)$.
Έστω αντίθετα ότι $t > u(s-h)$, τότε αφού η $\mu_u(t)$ είναι φθίνουσα, έχουμε $\mu_u(t) \leq \mu_u(u(s-h))$. Όμως, $\mu_u(u(s-h)) < s \leq \mu_u(t)$ που είναι άτοπο.
Άρα, ισχύει $t \leq u(s-h)$ και έχουμε ότι $u^{\#}(s) \leq u(s-h)$ και παίρνοντας το όριο καθώς $h \downarrow 0$, προκύπτει λόγω συνέχειας της u στο s ότι

$$u^{\#}(s) \leq u(s) \quad . \tag{2.12}$$

Επομένως από τις σχέσεις (2.11) και (1.12) έχουμε ότι

$$u(s) = u^{\#}(s)$$

σε όλα τα σημεία συνέχειας της u και αφού η u είναι μονότονη, το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της είναι το πολύ αριθμήσιμο. Άρα το αποτέλεσμα αποδείχθηκε. □

Πρόταση 2.1.4. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση και $u : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο. Τότε

$$\psi\left(u^{\#}\right) = (\psi(u))^{\#} \tag{2.13}$$

σχεδόν παντού στο Ω.

Απόδειξη. Βήμα 1. Αν $v, w : [0, l] \to \mathbb{R}$ είναι ισομετρήσιμες και φθίνουσες συναρτήσεις, τότε $\mu_v(t) = \mu_w(t)$ και συνεπώς από τον ορισμό της φθίνουσας αναδιάταξης θα ισχύει $v^{\#} = w^{\#}$. Επιπλέον, από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι $v = v^{\#}$ και $w = w^{\#}$ σ.π. . Άρα $v = w$ σ.π. .

Βήμα 2. Αρκεί να δείξουμε ότι οι $\psi\left(u^{\#}\right)$ και $(\psi(u))^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες και φθίνουσες στο διάστημα $[0, |\Omega|]$, τότε η (2.13) έπεται από το Βήμα 1.
Η $(\psi(u))^{\#}$ είναι φθίνουσα από τον ορισμό της αναδιάταξης.
Αφού η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα και η ψ αύξουσα, τότε η $\psi\left(u^{\#}\right)$ είναι φθίνουσα ως σύνθεση. Επιπλέον, η συνάρτηση $\psi(u)$ και η αναδιάταξη της $(\psi(u))^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες, συνεπώς προκύπτει

$$\begin{aligned}\left|\left\{\psi\left(u^{\#}\right) > t\right\}\right| &= \int_0^{|\Omega|} \chi_{\{\psi(u^{\#})>t\}}(s)\, ds = \int_\Omega \chi_{\{\psi(u)>t\}}(x)\, dx \\ &= |\{\psi(u) > t\}| = \left|\left\{(\psi(u))^{\#} > t\right\}\right| \quad ,\end{aligned}$$

όπου η ισότητα των δύο ολοκληρωμάτων προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.1, αφού η συνάρτηση $s \mapsto \chi_{\{\psi>t\}}$ είναι μια μη αρνητική Borel συνάρτηση. □

Πόρισμα 2.1.5. Αν $u : \Omega \to \mathbb{R}$, έχουμε $(u^+)^{\#} = \left(u^{\#}\right)^+$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\psi = (\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$ είναι αύξουσα. Άρα, από την Πρόταση 2.1.4 έχουμε

$$\left(u^+\right)^\# = \left(u^\#\right)^+ \quad .$$

□

Παρατήρηση 2.1.2. Εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει

$$(v + c)^\# = v^\# + c.$$

Ωστόσο, δεν ισχύει γενικά το ίδιο για δύο συναρτήσεις $v, w : \Omega \to \mathbb{R}$, δηλαδή οι $(v + w)^\#$ και $v^\# + w^\#$ δεν είναι γενικά ίσες.

2.2 Μερικές Ανισότητες Αναδιάταξης

Πρόταση 2.2.1. Έστω $p = 1$ ή ∞. Τότε για $f, g \in L^p(\Omega)$,

$$\|f^\# - g^\#\|_{p,(0,|\Omega|)} \le \|f - g\|_{p,\Omega} \tag{2.14}$$

Απόδειξη. Έστω $p = \infty$. Τότε, αφού $f, g \in L^\infty(\Omega)$, σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$, έχουμε

$$|f(x) - g(x)| \le \|f - g\|_{\infty,\Omega} \quad .$$

Άρα

$$f(x) - \|f - g\|_{\infty,\Omega} \le g(x) \le f(x) + \|f - g\|_{\infty,\Omega} \quad .$$

Αφού η νόρμα είναι ένας αριθμός, έχουμε από Παρατήρηση 2.1.2, ότι

$$\left(f - \|f - g\|_{\infty,\Omega}\right)^\# = f^\# - \|f - g\|_{\infty,\Omega}$$

και αντίστοιχα

$$\left(f + \|f - g\|_{\infty,\Omega}\right)^\# = f^\# + \|f - g\|_{\infty,\Omega} \quad .$$

Επιπλέον, αφού $f(x) - \|f - g\|_{\infty,\Omega} \le g(x)$, από την Πρόταση 2.1.2 (λόγω μονοτονίας της απεικόνισης $u \mapsto u^\#$) προκύπτει

$$\left(f - \|f - g\|_{\infty,\Omega}\right)^\# \le g^\# \Rightarrow f^\# - \|f - g\|_{\infty,\Omega} \le g^\# \quad ,$$

αντίστοιχα $f^\# + \|f - g\|_{\infty,\Omega} \ge g^\#$. Άρα

$$f^\#(s) - \|f - g\|_{\infty,\Omega} \le g^\#(s) \le f^\#(s) + \|f - g\|_{\infty,\Omega} \quad ,$$

απ'όπου προκύπτει άμεσα η ζητούμενη σχέση.

Έστω $p = 1$. Θέτουμε $h = \max\{f, g\}$. Τότε, αφού $f \le h$ και $g \le h$, έχουμε πάλι από την Πρόταση 2.1.2 ότι $f^\# \le h^\#$ και $g^\# \le h^\#$. Με χρήση της τριγωνικής ανισότητας ισχύει

$$|f^\# - g^\#| \le |f^\# - h^\#| + |h^\# - g^\#| = \left(h^\# - f^\#\right) + \left(h^\# - g^\#\right) = 2h^\# - f^\# - g^\# \quad .$$

και αφού είδαμε ότι οι L^p νόρμες είναι ίσες στην αναδιάταξη, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{|\Omega|} |f^\#(s) - g^\#(s)| ds &\leq \int_0^{|\Omega|} \left(2h^\#(s) - f^\#(s) - g^\#(s)\right) ds \\ &= \int_\Omega (2h(x) - f(x) - g(x))\, dx \\ &= \int_\Omega |f(x) - g(x)| dx,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από τη σχέση

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}.$$

Αποδείξαμε, επομένως, ότι

$$\|f^\# - g^\#\|_{1,(0,|\Omega|)} \leq \|f^\# - g^\#\|_{1,\Omega} \quad .$$

□

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω* $1 \leq p \leq \infty$*. Τότε η απεικόνιση* $u \mapsto u^\#$ *είναι συνεχής από τον* $L^p(\Omega)$ *στον* $L^p((0, |\Omega|))$.

Απόδειξη. Αν $p = 1$ ή $p = \infty$, το αποτέλεσμα έπεται από την προηγούμενη Πρόταση. Έστω $1 < p < \infty$. Θεωρούμε την ακολουθία (u_n) στον $L^p(\Omega)$, για την οποία έχουμε ότι $u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$. Αφού το Ω είναι φραγμένο χωρίο, προκύπτει από την ανισότητα Hölder ότι $u_n \to u$ στον $L^1(\Omega)$ επίσης, και αφού η απεικόνιση $u \mapsto u^\#$ είναι συνεχής στον L^1, έχουμε ότι $u_n^\# \to u^\#$ στον $L^1((0, |\Omega|))$. Επομένως υπάρχει υπακολουθία $\left(u_{n_k}^\#\right)$ τέτοια ώστε $u_{n_k}^\# \to u^\#$ σ.π. Επιπλέον, από την Πρόταση 2.1.2 έχουμε

$$\|u_{n_k}^\#\|_{p,(0,|\Omega|)} = \|u_{n_k}\|_{p,\Omega} \to \|u\|_{p,\Omega} = \|u^\#\|_{p,(0,|\Omega|)}.$$

Άρα η υπακολουθία $\left(u_{n_k}^\#\right)$ είναι φραγμένη, συνεπώς προκύπτει από το Πόρισμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι $u_{n_k}^\# \to u^\#$ και στον $L^p((0, |\Omega|))$. Αφού το όριο είναι ανεξάρτητο από την υπακολουθία, συνεπάγεται ότι ολόκληρη η ακολουθία $(u_n^\#)$ συγκλίνει στην $u^\#$ στον χώρο $L^p((0, |\Omega|))$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 2.2.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $E \subset \Omega$ ένα μετρήσιμο σύνολο, τότε

$$\int_E u(x)\, dx \leq \int_0^{|E|} u^\#(s)\, ds \quad . \tag{2.15}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\left(u|_E\right)^\# = u^\#|_{[0,|E|]} \quad \text{σ.π. στο } \Omega \quad .$$

Απόδειξη. Έστω $v = u|_E$. Αν $s \in [0, |E|]$ και $|\{u > t\}| < s$, τότε

$$|\{v > t\}| = |\{u > t\} \cap E| < s.$$

Άρα
$$\{t \mid |\{u > t\}| < s\} \subset \{t \mid |\{v > t\}| < s\},$$
και από τον ορισμό της φθίνουσας αναδιάταξης ισχύει $v^{\#}(s) \leq u^{\#}(s)$.
Ολοκληρώνοντας τώρα στο E προκύπτει

$$\int_E u(x)\,dx = \int_E v(x)\,dx = \int_0^{|E|} v^{\#}(s)\,ds \leq \int_0^{|E|} u^{\#}(s)\,ds \quad , \tag{2.16}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.
Αν ισχύει η ισότητα στην σχέση (2.15), τότε έχουμε ισότητα σε όλη την σχέση (2.16), που συμβαίνει αν και μόνο αν $v^{\#} = u^{\#}$ σ.π στο E, δηλαδή αν και μόνο αν $(u|_E)^{\#} = u^{\#}|_{[0,|E|]}$ σ.π. στο Ω. □

Λήμμα 2.2.1. *Έστω* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *και* $t \in \mathbb{R}$. *Ορίζουμε τα εξής σύνολα*

$$\begin{aligned} E_t &= \{x \in \Omega \mid u(x) > t\} \\ F_t &= \{x \in \Omega \mid u(x) \leq t\} = \Omega \setminus E_t \end{aligned}$$

και τη συνάρτηση $b : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *ως*

$$b(t,x) = \begin{cases} \chi_{E_t}(x) & ,\text{αν} \quad t \geq 0 \\ -\chi_{F_t}(x) & ,\text{αν} \quad t < 0. \end{cases}$$

Τότε
$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)\,dt. \tag{2.17}$$

Απόδειξη. Αν $u(x) \geq 0$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} \chi_{F_t}(x)\,dt + \int_0^{+\infty} \chi_{E_t}(x)\,dt = \int_0^{u(x)} dt = u(x).$$

Αν $u(x) < 0$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} \chi_{F_t}(x)\,dt + \int_0^{+\infty} \chi_{E_t}(x)\,dt = -\int_{u(x)}^{0} dt = u(x).$$

□

Λήμμα 2.2.2. *Έστω* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, *όπου* g *μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο* Ω. *Αν* $a \leq f \leq b \leq +\infty$ *με* $a \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx = a\int_\Omega g(x)\,dx + \int_a^b \left(\int_{\{f>t\}} g(x)\,dx\right) dt. \tag{2.18}$$

Απόδειξη. Αν $a \geq 0$, τότε $0 \leq f$. Ορίζουμε $E_t = \{f > t\}$, συνεπώς από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε
$$f(x) = \int_0^b \chi_{E_t}(x)\,dt.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $g(x)$ και ολοκληρώνοντας ως προς t στο Ω έχουμε από το Θεώρημα Fubini

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\int_0^b \chi_{E_t}(x)\,dtdx = \int_0^b\int_\Omega g(x)\,\chi_{E_t}(x)\,dxdt$$

και αφού $0 \le a \le f \le b \le +\infty$ προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx &= \int_0^a\int_\Omega g(x)\,dxdt + \int_a^b\int_{E_t} g(x)\,dxdt\\ &= a\int_\Omega g(x)\,dx + \int_a^b\int_{\{f>t\}} g(x)\,dxdt.\end{aligned}$$

Αν $a < 0$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $\bar f = f - a$. Άρα αφού $a \le f \le b \le +\infty$, τότε $0 \le \bar f \le b - a$ και έχουμε όπως προηγουμένως

$$\bar f(x) = \int_0^{b-a}\chi_{\{\bar f>t\}}(x)\,dt.$$

Συνεπώς, προκύπτει όπως και πριν

$$\int_\Omega \bar f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^{b-a}\int_\Omega g(x)\,\chi_{\{\bar f>t\}}(x)\,dxdt = \int_0^{b-a}\int_{\{f>t+a\}} g(x)\,dxdt \Rightarrow$$
$$\int_\Omega (f(x)-a)\,g(x)\,dx = \int_0^{b-a}\int_{\{f>t+a\}} g(x)\,dxdt$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $t + a = s$ προκύπτει

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx - a\int_\Omega g(x)\,dx = \int_a^b\int_{\{f>s\}} g(x)\,dxds,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.2.1. Αντίστοιχα αν $b \in \mathbb{R}$ και $-\infty \le a \le f \le b$, ισχύει ότι

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dt = b\int_\Omega g(x)\,dt - \int_a^b\left(\int_{\{f\le t\}} g(x)\,dx\right)dt.$$

Αποδεικνύεται όπως και πριν παίρνοντας τώρα $f(x) = -\int_a^0 \chi_{E_t}(x)\,dt$.

Θεώρημα 2.2.2. ***(Hardy-Littlewood)***
Έστω $f \in L^p(\Omega)$ *και* $g \in L^q(\Omega)$, *όπου* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \le p, q \le \infty$. *Τότε*

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx \le \int_0^{|\Omega|} f^\#(s)\,g^\#(s)\,ds \quad . \tag{2.19}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f \in L^\infty(\Omega)\cap L^p(\Omega)$. Έστω a και b πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a \le f \le b$. Έχοντας δείξει ότι οι νόρμες διατηρούνται σε όλο το πεδίο ορισμού, αλλά όχι απαραίτητα στα μετρήσιμα υποσύνολα του

(Πρόταση 2.2.2), προκύπτει εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα για τις συναρτήσεις u και $u^{\#}$ ότι

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx &= a\int_{\Omega} g(x)\, dx + \int_a^b \int_{\{f>t\}} g(x)\, dxdt \\ &= a\int_0^{|\Omega|} g^{\#}(s)\, ds + \int_a^b \int_{\{f>t\}} g(x)\, dxdt \\ &\le a\int_0^{|\Omega|} g^{\#}(s)\, ds + \int_a^b \int_0^{|\{f>t\}|} g^{\#}(s)\, dsdt \\ &= a\int_0^{|\Omega|} g^{\#}(s)\, ds + \int_a^b \int_0^{|\{f^{\#}>t\}|} g^{\#}(s)\, dsdt \\ &= \int_0^{|\Omega|} f^{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds \quad ,\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.
Αν $1 \le p < \infty$, τότε για $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ υπάρχουν ακολουθίες $(f_n), (g_n) \subset L^{\infty}(\Omega)$, με $\sup_n \|f_n\|_{\infty} < \infty$ και $\sup_n \|g_n\|_{\infty} < \infty$, τέτοιες ώστε

$$f_n \to f \quad \text{στον} \quad L^p(\Omega)$$

και

$$g_n \to g \quad \text{στον} \quad L^q(\Omega).$$

Αφού η απεικόνιση $u \mapsto u^{\#}$ είναι συνεχής από τον $L^p(\Omega)$ στον $L^p((0,|\Omega|))$ για $1 \le p \le \infty$, ισχύει ότι

$$f_n^{\#} \to f^{\#} \quad \text{στον} \quad L^p((0,|\Omega|))$$

και

$$g_n^{\#} \to g^{\#} \quad \text{στον} \quad L^q((0,|\Omega|)).$$

Τότε, με χρήση της ανισότητας Hölder έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (f_n g_n - fg)\, dx &= \int_{\Omega} (f_n g_n + f_n g - f_n g - fg)\, dx \\ &= \int_{\Omega} f_n (g_n - g)\, dx + \int_{\Omega} (f_n - f)\, g dx \\ &\le \|f_n\|_{\infty} \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0 \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Άρα $f_n g_n \to fg$ στον $L^1(\Omega)$. Αντίστοιχα αποδεικνύουμε ότι $f_n^{\#} g_n^{\#} \to f^{\#} g^{\#}$ στον $L^1((0,|\Omega|))$ και αφού $\int_{\Omega} f_n(x)\, g_n(x)\, dx \le \int_0^{|\Omega|} f_n^{\#}(s)\, g_n^{\#}(s)\, ds$, τότε

$$\int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \le \int_0^{|\Omega|} f^{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds \quad .$$

□

Παρατήρηση 2.2.2. Για κάθε συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\chi_{\{u>t\}}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \{u > t\} \\ 0 & , x \notin \{u > t\} \end{cases}$$

επομένως η φθίνουσα αναδιάταξη της θα δίνεται από τον τύπο

$$\left(\chi_{\{u>t\}}\right)^{\#}(s)=\begin{cases}1 & ,s\in[0,|\{u>t\}|]\\ 0 & ,s\notin[0,|\{u>t\}|]\end{cases}.$$

Αντίστοιχα

$$\chi_{\{u^{\#}>t\}}(s)=\begin{cases}1 & ,s\in\left\{u^{\#}>t\right\}\\ 0 & ,s\notin\left\{u^{\#}>t\right\}\end{cases}$$

και αφού η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση

$$\left\{u^{\#}>t\right\}=\left[0,\left|\left\{u^{\#}>t\right\}\right|\right]=[0,|\{u>t\}|],$$

άρα

$$\left(\chi_{\{u>t\}}\right)^{\#}(s)=\chi_{\{u^{\#}>t\}}(s).$$

Παράδειγμα 2.2.1. Αν $u,v:\Omega\to\mathbb{R}$, τότε αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\Omega}u(x)\,\chi_{\{v\leq t\}}(x)\,dx\geq\int_0^{|\Omega|}u^{\#}(s)\,\chi_{\{v^{\#}\leq t\}}(s)\,ds.$$

Πράγματι, αφού

$$\chi_{\{v\leq t\}}=1-\chi_{\{v>t\}},$$

τότε από το Θεώρημα 2.2.2 (Hardy-Littlewood) και το γεγονός ότι οι νόρμες διατηρούνται στην αναδιάταξη έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}u(x)\,\chi_{\{v\leq t\}}(x)\,dx&=\int_{\Omega}u(x)\,dx-\int_{\Omega}u(x)\,\chi_{\{v>t\}}(x)\,dx\\&\geq\int_0^{|\Omega|}u^{\#}(s)\,ds-\int_0^{|\Omega|}u^{\#}(s)\,\chi^{\#}_{\{v>t\}}(s)\,ds\\&=\int_0^{|\Omega|}u^{\#}(s)\,ds-\int_0^{|\Omega|}u^{\#}(s)\,\chi_{\{v^{\#}>t\}}(s)\,ds\\&=\int_0^{|\Omega|}u^{\#}(s)\,\chi_{\{v^{\#}\leq t\}}(s)\,ds.\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από την προηγούμενη Παρατήρηση.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω* $f,g\in L^p(\Omega)$, *όπου* $1<p<\infty$. *Τότε*

$$\|f^{\#}-g^{\#}\|_{p,(0,|\Omega|)}\leq\|f-g\|_{p,\Omega}\quad.\tag{2.20}$$

Απόδειξη. Έστω $J(t)=|t|^p$. Ορίζουμε

$$J_+(t)=\begin{cases}0 & ,\ \text{αν}\ t\leq 0\\ |t|^p & ,\ \text{αν}\ t>0\end{cases}$$

και

$$J_-(t)=\begin{cases}|t|^p & ,\ \text{αν}\ t\leq 0\\ 0 & ,\ \text{αν}\ t>0\end{cases}$$

έτσι ώστε $J = J_+ + J_-$. Αφού οι συναρτήσεις J_+ και J_- είναι κυρτές και παραγωγίσιμες, έχουμε ότι

$$J_+\left(f(x) - g(x)\right) = \int_{g(x)}^{f(x)} J_+'\left(f(x) - t\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} J_+'\left(f(x) - t\right) \chi_{\{g \le t\}}(x)\, dt. \tag{2.21}$$

Ολοκληρώνοντας στο Ω προκύπτει

$$\int_\Omega J_+\left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} J_+'\left(f(x) - t\right) \chi_{\{g \le t\}}(x)\, dt dx$$

και με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini έχουμε

$$\int_\Omega J_+\left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega J_+'\left(f(x) - t\right) \chi_{\{g \le t\}}(x)\, dx dt \tag{2.22}$$

και αντίστοιχα

$$\int_0^{|\Omega|} J_+\left(f^\#(s) - g^\#(s)\right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{|\Omega|} J_+'\left(f^\#(s) - t\right) \chi_{\{g^\# \le t\}}(s)\, ds dt. \tag{2.23}$$

Αφού η J_+ είναι κυρτή, συνεπάγεται ότι η J' είναι αύξουσα $\left(J'' \geq 0\right)$. Άρα από την Πρόταση 2.1.4 και την Παρατήρηση 2.1.2, έχουμε

$$\left(J_+'\left(f(x) - t\right)\right)^\#(s) = J_+'\left(\left(f(x) - t\right)^\#(s)\right) = J_+'\left(f^\#(s) - t\right).$$

Συνεπώς, από το Παράδειγμα 2.2.1, προκύπτει ότι

$$\int_\Omega J_+'\left(f(x) - t\right) \chi_{\{g \le t\}}(x)\, dx \geq \int_0^{|\Omega|} J_+'\left(f^\#(s) - t\right) \chi_{\{g^\# \le t\}}(s)\, ds.$$

Άρα από τις σχέσεις (2.22) και (2.23) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_\Omega J_+\left(f(x) - g(x)\right) dx \geq \int_0^{|\Omega|} J_+\left(f^\#(s) - g^\#(s)\right) ds. \tag{2.24}$$

Εναλλάσσοντας τώρα τον ρόλο των f και g στην σχέση (2.21), προκύπτει

$$J_+\left(g(x) - f(x)\right) = \int_{f(x)}^{g(x)} J_+'\left(g(x) - t\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} J_+'\left(g(x) - t\right) \chi_{\{f \le t\}}(x)\, dt.$$

Τότε, η σχέση (2.22) γίνεται

$$\int_\Omega J_+\left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega J_+'\left(g(x) - t\right) \chi_{\{f \le t\}}(x)\, dx dt.$$

και αντίστοιχα η σχέση (2.23) γίνεται

$$\int_0^{|\Omega|} J_+\left(g^\#(s) - f^\#(s)\right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{|\Omega|} J_+'\left(t - f^\#(s)\right) \chi_{\{f^\# \le t\}}(s)\, ds dt.$$

Συνεπώς, όμοια με πριν έχουμε

$$\int_{\Omega} J_{+}\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx \geq \int_{0}^{|\Omega|} J_{+}\left(g^{\#}\left(s\right)-f^{\#}\left(s\right)\right)ds.$$

Όμως $J_{+}\left(-t\right)=J_{-}\left(t\right)$, άρα η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\int_{\Omega} J_{-}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx \geq \int_{0}^{|\Omega|} J_{-}\left(f^{\#}\left(s\right)-g^{\#}\left(s\right)\right)ds. \tag{2.25}$$

Άρα προσθέτοντας τις σχέσεις (2.24) και (2.25) προκύπτει το ζητούμενο. □

2.3 Συμμετρικοποίηση Schwarz

Δοθέντος ενός μετρήσιμου υποσυνόλου $E \subset \mathbb{R}^N$ πεπερασμένου μέτρου, θα συμβολίζουμε με E^* στο εξής, την ανοικτή μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων και μέτρο ίδιο με το μέτρο του E, δηλαδή

$$|E^*| = |E|.$$

Αν $x \in \mathbb{R}^N$ ένα διάνυσμα, τότε συμβολίζουμε με $|x|$ την Ευκλείδεια νόρμα του. Τέλος, θα συμβολίζουμε με ω_N, τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^N$.

Ορισμός 2.3.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η **συμμετρικοποίση Schwarz** ή **σφαιρικά συμμετρική και φθίνουσα αναδιάταξη** της είναι η συνάρτηση $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$u^*\left(x\right) = u^{\#}\left(\omega_N |x|^N\right), x \in \Omega^*.$$

Παρατήρηση 2.3.1. Από τον ορισμό της συμμετρικοποίσης Schwarz εύκολα παρατηρούμε ότι η u^* είναι ακτινικά συμμετρική

$$\text{αν } |x| = |y|, \text{ τότε } u^{\#}\left(\omega_N |x|^N\right) = u^{\#}\left(\omega_N |y|^N\right) \Rightarrow u^*\left(x\right) = u^*\left(y\right)$$

και φθίνουσα ως προς $|x|$ συνάρτηση, διότι αν $|x| \leq |y|$,τότε αφού η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα,

$$u^{\#}\left(\omega_N |x|^N\right) \geq u^{\#}\left(\omega_N |y|^N\right) \Rightarrow u^*\left(x\right) \geq u^*\left(y\right)$$

Παράδειγμα 2.3.1. Για τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας ω_N στον $\mathbb{R}^N$, έχουμε

$$\begin{aligned} B\left(1\right) &= \left\{\left(x_1, \ldots, x_N\right) : x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1\right\} \\ &= \left\{\left(x_1, \ldots, x_N\right) : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1 - x_1^2\right\} \\ &= \left\{\left(x_1, \bar{x}\right) : x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

όπου $\bar{x} = \left(x_2, \ldots, x_N\right)$, τότε

$$\begin{aligned} \omega_N &= \int_{B(1)} dx_1 \ldots dx_N = \int_{-1}^{1} \int_{\bar{x} \in B\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)} d\bar{x}dx_1 \\ &= 2\int_{0}^{1} \omega_{N-1}\left(1 - {x_1}^2\right)^{\frac{N-1}{2}} dx_1 \end{aligned}$$

και θέτοντας $x_1^2 = t \Rightarrow dx_1 = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_N &= \omega_{N-1} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{N-1}{2}}\, dt \\ &= \omega_{N-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{N+1}{2}\right) = \omega_{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)},\end{aligned}$$

όπου $B(x,y)$ η συνάρτηση Βήτα και $\Gamma(s)$ η συνάρτηση Γάμμα. Επομένως από τον αναδρομικό τύπο του ω_N, προκύπτει

$$\omega_N = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}.$$

Πρόταση 2.3.1. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση και $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ η συμμετρικοποίση Schwarz της, τότε

$$\int_{\Omega^*} u^*(x)\, dx = \int_0^{|\Omega|} u^\#(s)\, ds.$$

Απόδειξη. Έστω β_N το (n-1)-διάστατο εμβαδόν της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^N$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\beta_N = N\omega_N$. Έχουμε

$$\omega_N = \int_{B(1)} dx = \int_0^1 \int_{\partial B(r)} dS(x)\, dr = \int_0^1 |\partial B(r)| dr = \int_0^1 \beta_N r^{N-1} dr = \frac{1}{N}\beta_N.$$

Επομένως, αν R η ακτίνα της μπάλας Ω^*, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} u^*(x)\, dx &= \int_{\Omega^*} u^\#\left(\omega_N |x|^N\right) dx = \int_0^R \int_{\partial B(r)} u^\#\left(\omega_N r^N\right) dS(x)\, dr \\ &= \int_0^R u^\#\left(\omega_N r^N\right) |\partial B(r)| dr = \int_0^R u^\#\left(\omega_N r^N\right) \beta_N r^{N-1} dr \\ &= \int_0^R u^\#\left(\omega_N r^N\right) N\omega_N r^{N-1} dr,\end{aligned}$$

και θέτοντας $s = \omega_N r^N \Rightarrow dr = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} ds$, προκύπτει

$$\int_{\Omega^*} u^*(x)\, dx = \int_0^{\omega_N R^N} u^\#(s)\, ds = \int_0^{|\Omega^*|} u^\#(s)\, ds = \int_0^{|\Omega|} u^\#(s)\, ds,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.3.2. Αποδεικνύεται αντίστοιχα ότι οι συναρτήσεις u και u^* είναι ισομετρήσιμες

$$\begin{aligned}|\{u^* > t\}| &= \int_{\Omega^*} \chi_{\{u^*>t\}}(x)\, dx = \int_{\Omega^*} \chi_{\{u^\#>t\}}(x)\, dx \\ &= \int_0^R \chi_{\{u^\#>t\}}(r)\, N\omega_N r^{N-1} dr = \int_0^{|\Omega|} \chi_{\{u^\#>t\}}(s)\, ds \\ &= \int_\Omega \chi_{\{u>t\}}(x)\, dx = |\{u > t\}|.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.3.3. Η απόδειξη της προηγούμενης Πρότασης βασίστηκε στον ορισμό της μπάλας $\Omega^* \subset \mathbb{R}^N$ και τις ιδιότητες της. Συνεπώς, αν $E \subset \Omega$ ένα μετρήσιμο υποσύνολο, τότε ισχύει

$$\int_{E^*} u^*(x)\,dx = \int_0^{|E|} u^{\#}(s)\,ds$$

και από την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει τελικά ότι

$$\int_E u(x)\,dx \le \int_{E^*} u^*(x)\,dx,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν

$$(u|_E)^* = u^*|_{E^*} \quad .$$

Παρατήρηση 2.3.4. Αφού οι συναρτήσεις u^* και $u^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες, τότε αποδεικνύουμε όμοια με το Θεώρημα 2.1.1 (οι αποδείξεις του βασίζονται στο γεγονός ότι ως ισομετρήσιμες έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής) ότι αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε είτε $F \ge 0$, είτε $F(u) \in L^1(\Omega)$, τότε

$$\int_{\Omega^*} F(u^*(x))\,dx = \int_0^{|\Omega|} F\left(u^{\#}(s)\right) ds = \int_\Omega F(u(x))\,dx$$

Αν $u \in L^p(\Omega)$ για $1 \le p \le \infty$, τότε προκύπτει από την παραπάνω σχέση, όμοια με την απόδειξη του Πορίσματος 2.1.4, ότι $u^* \in L^p(\Omega^*)$,$u^{\#} \in L^p((0,|\Omega|))$ και

$$\|u^*\|_{p,\Omega^*} = \|u^{\#}\|_{p,(0,|\Omega|)} = \|u\|_{p,\Omega}.$$

Παρατήρηση 2.3.5. Αν η $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση, τότε

$$\psi(u^*) = (\psi(u))^*$$

σχεδόν παντού στο Ω.
Η απόδειξη είναι αντίστοιχη της απόδειξης της Πρότασης 2.1.4.

Παρατήρηση 2.3.6. Αντίστοιχα με το Θεώρημα 2.2.3, αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $u \mapsto u^*$ είναι συστολή από τον $L^p(\Omega)$ στον $L^p(\Omega^*)$ για $1 \le p \le \infty$.

Πόρισμα 2.3.1. (Hardy-Littlewood)
Έστω $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^q(\Omega)$, όπου $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, 1 \le p, q \le \infty$. Τότε

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx \le \int_{\Omega^*} f^*(s)\,g^*(s)\,ds \quad . \tag{2.26}$$

Απόδειξη. Όμοια με την Πρόταση 2.3.1 έχουμε ότι αν R η ακτίνα της μπάλας Ω^*, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} f^*(s)\,g^*(s)\,ds &= \int_{\Omega^*} f^{\#}\left(\omega_N|x|^N\right) g^{\#}\left(\omega_N|x|^N\right) dx \\ &= \int_0^R \int_{\partial B(r)} f^{\#}\left(\omega_N r^N\right) g^{\#}\left(\omega_N r^N\right) dS(x)\,dr \\ &= \int_0^R f^{\#}\left(\omega_N r^N\right) g^{\#}\left(\omega_N r^N\right) N\omega_N r^{N-1} dr,\end{aligned}$$

όπου αλλαγή μεταβλητής $s = \omega_N r^N$ γίνεται

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} f^*(s)\, g^*(s)\, ds &= \int_0^{\omega_N R^N} f^{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds \\ &= \int_0^{|\Omega^*|} f^{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds \\ &= \int_0^{|\Omega|} f^{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds\end{aligned}$$

και από το Θεώρημα 2.1.2 προκύπτει τελικά η ζητούμενη ανισότητα. □

Παράδειγμα 2.3.2. Έστω $\Omega = (-2.2) \subset R$ και $u : \Omega \to R$ η συνάρτηση που ορίστηκε στο Παράδειγμα 2.1.1. Τότε, αφού $|\Omega| = |\Omega^*|$ έχουμε $\Omega^* = (-2, 2)$ και η συνάρτηση $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως $u^*(x) = u^{\#}\left(\omega_N |x|^N\right)$, είναι συμμετρική ως προς το 0, επομένως είναι μια άρτια συνάρτηση. Επιπλέον οι συναρτήσεις u και $u^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες, άρα έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής.
Τότε έχουμε

- Στο διάστημα $[1, 1.5]$ έχουμε
$$\mu_u(t) < 2x \Rightarrow 3 - 2t < 2x \Rightarrow t > \frac{3}{2} - x \quad ,$$
και
$$1 < \frac{3}{2} - x < 1.5 \Rightarrow 0 < x < 0.5 \quad .$$

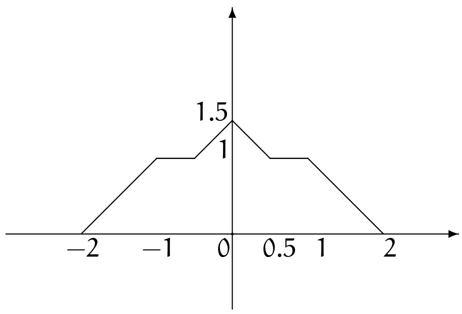
- Στο διάστημα $[0, 1]$ έχουμε
$$\mu_u(t) < 2x \Rightarrow 4 - 2t < 2x \Rightarrow t > 2 - x \quad ,$$
και
$$0 < 2 - x < 1 \Rightarrow 1 < x < 2 \quad .$$

- Στο σημείο $t = 1$ έχουμε αντίστοιχα με πριν ότι $u^*(x) = 1$ στο διάστημα $\left[\frac{\mu_u(1^+)}{2}, \frac{\mu_u(1^-)}{2}\right] = [0.5, 1]$.

Άρα

$$u^*(-x) = u^*(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x & , \quad 0 \le t \le 0.5 \\ 1 & , \quad 0.5 \le t \le 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \le s \le 2 \end{cases} \quad .$$

και η γραφική παράσταση της u^* είναι



2.4 Παραλλαγές στο θέμα

Ορισμός 2.4.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $u : \Omega \to R$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η (μονοδιάστατη) **αύξουσα αναδιάταξη** της u, που συμβολίζεται με $u_{\#}$, ορίζεται στο διάστημα $[0, |\Omega|]$ ως

$$\left.\begin{array}{r} u_{\#}\left(|\Omega|\right) = \operatorname{ess\,sup}\left(u\right) \\ u_{\#}\left(s\right) = \inf\{t \mid |\{u < t\}| > s\}, \quad s \in [0, |\Omega|) \end{array} \quad .\right\}$$

Όπως και προηγουμένως, η $u_{\#}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $m\left(t\right) = |\{u < t\}|$ σχεδόν σε όλο το Ω. Επιπλέον, είναι αύξουσα αφού αν $s_1 < s_2$, τότε από τη σχέση $|\{u < t\}| > s_2$ συνεπάγεται ότι $|\{u < t\}| > s_1$.
Άρα

$$\{t \mid |\{u < t\}| > s_2\} \subset \{t \mid |\{u < t\}| > s_1\}$$

και από τον ορισμό της $u_{\#}$ προκύπτει ότι $u_{\#}\left(s_1\right) \leq u_{\#}\left(s_2\right)$

Πρόταση 2.4.1. Η απεικόνιση $u \mapsto u_{\#}$ είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Έστω ότι $u \leq v$, τότε $\{v < t\} \subset \{u < t\}$. Συνεπώς, $|\{v < t\}| \leq |\{u < t\}|$. Αν $|\{v < t\}| > s$, τότε $|\{u < t\}| > s$, επομένως έχουμε

$$\{t \mid |\{v < t\}| > s\} \subset \{t \mid |\{u < t\}| > s\}.$$

Άρα από τον ορισμό της αύξουσας αναδιάταξης προκύπτει ότι

$$u_{\#} \leq v_{\#}.$$

□

Παρατήρηση 2.4.1. Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.3, προκύπτει ότι

$$|\{u < t\}| = \left|\left\{u^{\#} < t\right\}\right|,$$

δηλαδή οι συναρτήσεις u και $u_{\#}$ είναι ισομετρήσιμες.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$u^{\#}(s) = u_{\#}(|\Omega| - s).$$

Από τον ορισμό της φθίνουσας αναδιάταξης έχουμε

$$\begin{aligned} u^{\#}(s) &= \inf\{t \mid |\{u > t\}| < s\} = \inf\{t \mid |\Omega| - |\{u \leq t\}| < s\} \\ &= \inf\{t \mid |\{u \leq t\}| > |\Omega| - s\}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας για $t + h$ στην θέση του t, έχουμε

$$u^{\#}(s) = \inf\{t + h \mid |\{u \leq t + h\}| > |\Omega| - s\}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $h \uparrow 0$, προκύπτει

$$u^{\#}(s) = \inf\{t \mid |\{u < t\}| > |\Omega| - s\} = u_{\#}(|\Omega| - s).$$

Πρόταση 2.4.2. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε

$$u^{\#} = -(-u)_{\#}.$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις u και $u^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες, συνεπώς και οι $-u$ και $-u^{\#}$ (αντίστοιχα για τις u και $u_{\#}$), άρα έχουμε

$$|\{u^{\#} > t\}| = |\{u > t\}| = |\{-u < -t\}| = |\{(-u)_{\#} < -t\}| = |\{-(-u)_{\#} > t\}|.$$

Αφού οι $u^{\#}$ και $-(-u)_{\#}$ είναι φθίνουσες και ισομετρήσιμες, είναι ίσες σχεδόν παντού στο Ω. □

Παρατήρηση 2.4.2. Προφανώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι $u_{\#} = -(-u)^{\#}$.

Πόρισμα 2.4.1. (Hardy-Littlewood)
Έστω $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^q(\Omega)$, όπου $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1$. Τότε

$$\int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \geq \int_0^{|\Omega|} f_{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds \quad .$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.2, για τις συναρτήσεις $-f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^q(\Omega)$, και την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$-\int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \leq \int_0^{|\Omega|} \left(-f^{\#}\right)(s)\, g^{\#}(s)\, ds = -\int_0^{|\Omega|} f_{\#}(s)\, g^{\#}(s)\, ds$$

και το ζητούμενο έπεται. □

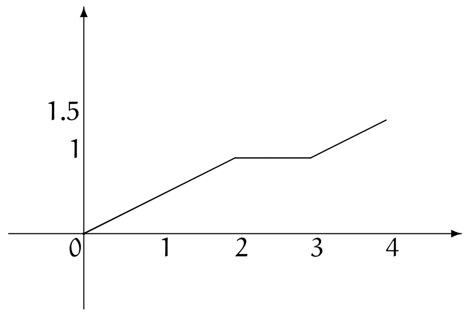
Ορισμός 2.4.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η **σφαιρικά συμμετρική και αύξουσα αναδιάταξη** της u ορίζεται στο Ω^* ως

$$u_*(x) = u_{\#}\left(\omega_N |x|^N\right), x \in \Omega^*.$$

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$, θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $u_{\#}$ και u_{*}, όταν η u είναι η συνάρτηση που έχει δοθεί στο Παράδειγμα 2.1.1. Αφού $|\Omega| = 4$, έχουμε από το Παράδειγμα 2.4.1 ότι $u^{\#}(s) = u_{\#}(|\Omega| - s)$, άρα

$$u_{\#}(s) = \begin{cases} \dfrac{s}{2} & , \quad 0 \leq s \leq 2 \\ 1 & , \quad 2 \leq s \leq 3 \\ \dfrac{s-1}{2} & , \quad 3 \leq s \leq 4 \end{cases}$$

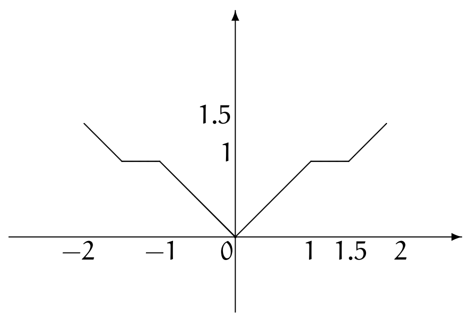
και η γραφική παράσταση της $u_{\#}$ είναι



Αντίστοιχα με την u^{*} προηγουμένως, θα υπολογίσουμε την u_{*}, που ορίζεται ως

$$u_{*}(-x) = u_{*}(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq t \leq 1.5 \\ x - \dfrac{1}{2} & , \quad 1.5 \leq s \leq 2 \end{cases} .$$

και η γραφική παράσταση της u_{*} είναι



Παρατήρηση 2.4.3. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση που οι συναρτήσεις ορίζονται σε φραγμένο χωρίο. Για μη φραγμένα χωρία υπάρχει σχετική αναφορά (βλ. [10])

Κεφάλαιο 3

Συναρτησιακές Ανισότητες

3.1 Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα. Η ανισότητα αυτή, στον $\mathbb{R}^2$, επιλύει ένα αρχαίο πρόβλημα του λογισμού μεταβολών, γνωστό ως *Το πρόβλημα της Διδούς*: Από όλες τις απλές, κλειστές καμπύλες του επιπέδου με δοσμένο μήκος, ποιά είναι η κλειστή καμπύλη που περικλείει τη μέγιστη επιφάνεια για δεδομένη περίμετρο(μήκος της καμπύλης); Η λύση του προβλήματος αυτού είναι ότι ο κύκλος, και μόνο αυτός, περικλείει το μέγιστο εμβαδόν. Ισοδύναμα, από όλα τα απλά συνεκτικά χωρία του επιπέδου με δοσμένο εμβαδόν, ο κυκλικός δίσκος, και μόνο αυτός, έχει την ελάχιστη περίμετρο. Γενικεύοντας το πρόβλημα αυτό στον $\mathbb{R}^N$, εισάγουμε τον ορισμό της περιμέτρου de Giorgi.

Η περίμετρος de Giorgi
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοικτό σύνολο και $E \subset \Omega$ ένα μετρήσιμο σύνολο. Η **περίμετρος de Giorgi** του E ως προς Ω, που συμβολίζεται με $P_\Omega(E)$, ορίζεται ως η ολική μεταβολή της χαρακτηριστικής συνάρτησης χ_E του E, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} P_\Omega(E) &= \sup\left\{\frac{\langle \nabla\chi_E, \Phi\rangle}{\|\Phi\|} : \Phi \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right)^N, \Phi \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\int_E \operatorname{div}(\Phi)\, dx}{\|\Phi\|} : \Phi \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right)^N, \Phi \neq 0\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

όπου

$$\|\Phi\|^2 = \max_{x\in\overline{\Omega}}\left(\sum_{i=1}^N |\phi_i(x)|^2\right), \Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N).$$

Παρατήρηση 3.1.1. Θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε το $P_\Omega(E)$ ως το εμβαδόν της επιφάνειας του E, που εμπεριέχεται στο Ω και στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε ένα κάθετο διάνυσμα σε αυτήν. Αν το Ω είναι φραγμένο με λείο σύνορο, τότε από το Θεώρημα Απόκλισης έχουμε

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\Phi)\, dx = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \nu d\sigma,$$

όπου το ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του $\partial\Omega$ και $P_{\mathbb{R}^N}(\Omega)$ θα είναι το εμβαδόν της επιφάνειας $\partial\Omega$.

Πρόταση 3.1.1. Για την περίμετρο de Giorgi ισχύουν οι ιδιότητες

(i) $P_\Omega(E) = P_\Omega(\Omega \setminus E)$.

(ii) Αν $E \subset \Omega \subset \Omega'$, τότε

$$P_\Omega(E) \leq P_{\Omega'}(E).$$

Απόδειξη. (i) Αποδεικνύεται εύκολα για $\Phi \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right)^N$ εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απόκλισης

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus E} div(\Phi)\,dx &= \int_\Omega div(\Phi)\,dx - \int_E div(\Phi)\,dx\\ &= \int_{\partial\Omega} \Phi\cdot\nu d\sigma - \int_E div(\Phi)\,dx\\ &= -\int_E div(\Phi)\,dx\end{aligned}$$

και παίρνοντας το supremum για όλες αυτές τις $\Phi \neq 0$.
(ii) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της περιμέτρου de Giorgi, αφού για μεγαλύτερο σύνορο χωρίου, θα είναι μεγαλύτερη η τιμή του supremum. □

Ορισμός 3.1.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Το **κατώτερο σύνολο επαφής** της u είναι το σύνολο που ορίζεται ως

$$S(u) = \{x \in \Omega \mid u(y) \geq u(x) + \nabla u(x)\cdot(y-x) \quad, \text{για κάθε } \ y \in \Omega\}. \tag{3.2}$$

Δηλαδή, το κατώτερο σύνολο επαφής είναι το σύνολο όλων των σημείων του Ω τέτοιων ώστε το γράφημα της u να βρίσκεται όλο πάνω από το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(x, u(x))$.
Θεωρούμε επιπλέον ότι η συνάρτηση $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$, με $D^2(u)(x)$ να είναι ο Εσσιανός πίνακας των δευτέρων μερικών παραγώγων της u. Τότε, αν $x \in S(u)$ και t αρκετά μικρό έτσι ώστε $x + t\xi \in \Omega$, για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^N$, προκύπτει από το Ανάπτυγμα Taylor ότι

$$u(x+t\xi) = u(x) + t\nabla u(x)\cdot\xi + \frac{t^2}{2}D^2u(x)\,\xi\cdot\xi + o\left(t^2\right)$$

και αφού $x \in S(u)$, έχουμε

$$t^2D^2u(x)\,\xi\cdot\xi + o\left(t^2\right) \geq 0.$$

Διαιρώντας την προηγούμενη σχέση με t^2 και παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0$ προκύπτει

$$D^2u(x)\,\xi\cdot\xi \geq 0.$$

Επομένως, ο Εσσιανός πίνακας της u είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας στο $S(u)$. Θεωρούμε τώρα ένα επίπεδο με ένα διάνυσμα $\vec{m} \in \mathbb{R}^N$, που βρίσκεται κάτω από την συνάρτηση u, τέτοιο ώστε το διάνυσμα $(\vec{m}, -1) \in \mathbb{R}^{N+1}$ να είναι κάθετο στο γράφημα της u και να κινείται παράλληλα στο εαυτό του. Θα έρθει τελικά σε επαφή με το γράφημα της u. Υποθέτουμε ότι το πρώτο σημείο επαφής είναι το $(x_0, u(x_0))$ και είναι τέτοιο ώστε

$$u(x) \geq u(x_0) + \vec{m} \cdot (x - x_0) \quad \forall \ x \in \Omega.$$

Επομένως η συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$g(t) = u(x) - u(x_0) - \vec{m} \cdot (x - x_0)$$

είναι μη αρνητική και παίρνει την ελάχιστη τιμή της, δηλαδή το 0, στο σημείο $x_0 \in \Omega$. Άρα

$$\nabla g(x_0) = 0 \Rightarrow \vec{m} = \nabla u(x_0),$$

που σημαίνει ότι το επίπεδο σε αυτό το σημείο είναι εφαπτόμενο στο γράφημα της u και αφού το γράφημα της u βρίσκεται όλο πάνω από αυτό, συνεπάγεται ότι

$$x_0 \in S(u) \Rightarrow \nabla u(x_0) \in \nabla u(S(u)) \Rightarrow \vec{m} \in \nabla u(S(u)).$$

Θεωρούμε, τώρα, το κάτωθι πρόβλημα Neumann για την Λαπλασιανή

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = c \ , \ \text{στο} \ \ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 \ , \ \text{στο} \ \ \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

όπου c μια σταθερά. Από τη συνθήκη συμβιβαστότητας για την ύπαρξη λύσης, έχουμε ότι

$$c = \frac{|\partial\Omega|_{N-1}}{|\Omega|}. \tag{3.4}$$

Παρατήρηση 3.1.2. Η σχέση (3.4) αποδεικνύεται εύκολα, αφού αν u είναι η λύση του προβλήματος (3.3), τότε

$$c = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \Delta u dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu d\sigma = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \frac{1}{|\Omega|}|\partial\Omega|_{N-1},$$

με τη δεύτερη ισότητα να προκύπτει από το Θεώρημα Απόκλισης.

Παρατήρηση 3.1.3. Προφανώς η λύση του προβλήματος είναι μοναδική μέχρι μια προσθετική σταθερά και μπορούμε να υποθέσουμε οποιαδήποτε τέτοια λύση. Αν το Ω είναι φραγμένο με αρκετά λείο σύνορο, τότε η λύση είναι στον $\mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Λήμμα 3.1.1. *(Cabre)*
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο με λείο σύνορο και u μια λύση του προβλήματος (3.3). Αν $B(0;1)$ είναι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^N$, με κέντρο την αρχή των αξόνων, τότε

$$B(0;1) \subset \nabla u(S(u)). \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το επίπεδο, το κάθετο διάνυσμα και την συνάρτηση g όπως τα ορίσαμε προηγουμένως. Υποθέτουμε, τώρα, ότι το πρώτο σημείο επαφής με το γράφημα της u είναι το σημείο $(x_0, u(x_0))$, όπου $x_0 \in \partial\Omega$.Επομένως η συνάρτηση g τώρα παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του Ω. Άρα, αν

ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\partial\Omega$, τότε θα ισχύει $\dfrac{\partial g}{\partial \nu} \leq 0$, άρα έχουμε

$$\nabla g\left(x_0\right) \cdot \nu \leq 0 \Rightarrow \nabla u\left(x_0\right) \cdot \nu - \vec{m} \cdot \nu \leq 0 \Rightarrow \vec{m} \cdot \nu \geq \frac{\partial u}{\partial \nu}\left(x_0\right) = 1,$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος (3.3). Έπεται επομένως ότι $|\vec{m}| \geq 1$.
Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένα επίπεδο με μία κάθετη, που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της u και κινείται παράλληλα στον εαυτό του πρέπει αναγκαστικά να έρθει πρώτη φορά σε επαφή με την u σε ένα εσωτερικό σημείο αν $|\vec{m}| \leq 1$. Επιπλέον, αν $\left(x_0, u\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής με $x_0 \in \Omega$, τότε έχουμε δείξει ότι $\vec{m} \in \nabla u\left(S\left(u\right)\right)$, άρα

$$B\left(0;1\right) \subset \nabla u\left(S\left(u\right)\right).$$

□

Θεώρημα 3.1.1. (Η Κλασσική Ισοπεριμετρική Ανισότητα)
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$, ένα φραγμένο χωρίο με αρκετά λείο σύνορο $\partial\Omega$ και $|\partial\Omega|_{N-1}$ το $\left(N-1\right)-$διάστατο εμβαδόν της επιφάνειας του συνόρου $\partial\Omega$. Ισχύει τότε

$$|\partial\Omega|_{N-1} \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}}|\Omega|^{1-\frac{1}{N}}. \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Από την σχέση (3.5) έχουμε

$$\omega_N = |B\left(0;1\right)| \leq |\nabla u\left(S\left(u\right)\right)| = \int_{\nabla u\left(S\left(u\right)\right)} dx.$$

Με αλλαγή μεταβλητής προκύπτει

$$\int_{\nabla u\left(S\left(u\right)\right)} dx \leq \int_{S\left(u\right)} |\det\left(D^2 u\left(x\right)\right)| dx,$$

όπου η ανισότητα οφείλεται στο ότι η η ∇u μπορεί να μην είναι αμφιδιαφόριση. Υποθέτουμε ότι $x \in S\left(u\right)$. Είναι γνωστό ότι ο $D^2 u\left(x\right)$ είναι ένας συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας, συνεπώς οι ιδιοτιμές του θα είναι μη αρνητικές, άρα και η ορίζουσα του. Έχουμε τότε από την ανισότητα αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου ότι

$$\det\left(D^2 u\left(x\right)\right) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_N \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_N}{N}\right)^N = \left(\frac{\operatorname{tr}\left(D^2 u\left(x\right)\right)}{N}\right)^N \tag{3.7}$$

όπου $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $D^2 u\left(x\right)$ και $\operatorname{tr}\left(D^2 u\left(x\right)\right)$ το ίχνος του. Ισχύει όμως από το πρόβλημα (3.3) και την σχέση (3.4) ότι

$$\operatorname{tr}\left(D^2 u\left(x\right)\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\left(x\right) = \Delta u\left(x\right) = c = \frac{|\partial\Omega|_{N-1}}{|\Omega|}.$$

Άρα προκύπτει

$$\omega_N \leq \int_{S\left(u\right)} \left(\frac{|\partial\Omega|_{N-1}}{N|\Omega|}\right)^N dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial\Omega|_{N-1}}{N|\Omega|}\right)^N dx = \frac{|\partial\Omega|_{N-1}^N}{N^N|\Omega|^{N-1}}$$

$$\Rightarrow |\partial\Omega|_{N-1} \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\Omega|^{1-\frac{1}{N}}.$$

□

Παρατήρηση 3.1.4. Συνήθως σε υψηλότερες διαστάσεις η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα Brunn-Minkowski, που εκφράζεται ως εξής: Αν A και B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$ και $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, τότε

$$|A + B|^{\frac{1}{N}} \geq |A|^{\frac{1}{N}} + |B|^{\frac{1}{N}},$$

που είναι ένα αποτέλεσμα της γεωμετρική θεωρίας μέτρου (βλ. [8]).

Παρατήρηση 3.1.5. Αν το Ω είναι μια μπάλα ακτίνας R, τότε

$$|\partial\Omega|_{N-1} = N\omega_N R^{N-1}$$

και

$$|\Omega| = \omega_N R^N.$$

Άρα έχουμε ισότητα για τη σχέση (3.6).

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα χωρίο όπως ορίστηκε στο προηγούμενο θεώρημα. Αν ισχύει η ισότητα στη σχέση (3.6),τότε το Ω είναι μια μπάλα.*

Απόδειξη. Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_N = |\nabla u\,(S\,(u))| &= \int_{S(u)} |\det\left(D^2 u\,(x)\right)| dx \\ &= \int_{S(u)} \left(\frac{\operatorname{tr}\left(D^2 u\,(x)\right)}{N}\right)^N dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\operatorname{tr}\left(D^2 u\,(x)\right)}{N}\right)^N dx.\end{aligned}$$

Αφού η ολοκληρωτέα ποσότητα στα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι μια σταθερά, συνεπάγεται ότι $|\Omega \setminus S\,(u)| = 0$. Επομένως το $S\,(u)$ είναι πυκνό στο Ω. Από τον ορισμό του $S\,(u)$ και το γεγονός ότι $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$, έπεται ότι $S\,(u) = \Omega$. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι

$$\det\left(D^2 u\,(x)\right) = \left(\frac{\operatorname{tr}\left(D^2 u\,(x)\right)}{N}\right)^N,$$

συνεπώς έχουμε ισότητα στην σχέση (3.7). Άρα όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες και αφού ο $D^2 u\,(x)$ είναι συμμετρικός, έχουμε ότι $D^2 u\,(x) = \lambda\,(x)\, I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Προκύπτει τότε όπως και πριν από τις σχέσεις (3.3) και (3.4)

$$\lambda\,(x) = \frac{\operatorname{tr}\left(D^2 u\,(x)\right)}{N} = \frac{|\partial\Omega|_{N-1}}{N|\Omega|} = \lambda$$

που είναι ανεξάρτητο από το $x \in \Omega$. Συνεπώς έχουμε

$$D^2 u\,(x) = \lambda I, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Έχουμε τέλος την ισότητα

$$|\nabla u\,(S\,(u))| = |B\,(0;1)|,$$

επομένως η μπάλα $B(0;1)$ είναι πυκνή στο $\nabla u(S(u))$. Άρα για κάθε $x \in \overline{\Omega}$ συμπεραίνουμε ότι $|\nabla u(S(u))| \leq 1$. Αλλά, από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος Neumann (3.3) έχουμε ότι $\nabla u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1$ στο $\partial\Omega$. Συμπεραίνουμε, τότε, ότι η κλίση ∇u της συνάρτησης u θα είναι κάθετη σε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα τ στο σύνορο του Ω, δηλαδή θα έχουμε

$$\nabla u \cdot \tau = 0.$$

Οπότε το σύνορο $\partial\Omega$ είναι μία επιφάνεια στάθμης για την u, δηλαδή η u είναι σταθερή στο $\partial\Omega$. Υποθέτουμε λοιπόν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι η λύση u που εξετάζουμε ικανοποιεί το εξής πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = \frac{|\partial\Omega|_{N-1}}{|\Omega|} \quad &, \text{ στο } \Omega \\ u = 0 \quad &, \text{ στο } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 \quad &, \text{ στο } \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Από την αρχή μεγίστου έχουμε ότι $u < 0$ στο Ω, άρα η u έχει ένα ελάχιστο σε ένα σημείο του Ω. Υποθέτουμε το σημείο αυτό είναι το $x_0 \in \Omega$, και το ελάχιστο είναι το $-M$, όπου $M > 0$, άρα $\nabla u(x_0) = 0$. Αν B είναι η μεγαλύτερη δυνατή μπάλα που περιέχεται στο Ω και έχει κέντρο το σημείο x_0, τότε $\partial B \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Αφού το B είναι κυρτό, αν $x \in B$ προκύπτει από το Θεώρημα Taylor

$$u(x) = u(x_0) + \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 u(\xi)(x - x_0) \cdot (x - x_0),$$

όπου ξ ένα σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία x και x_0. Αντικαθιστώντας το $u(x_0)$, προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσης (3.8)

$$u(x) = -M + \frac{\lambda}{2}|x - x_0|^2,$$

για κάθε $x \in B$ και συνεπώς για κάθε $x \in \bar{B}$. Αν $x \in \partial B \cap \partial\Omega$, τότε

$$0 = -M + \frac{\lambda}{2}|x - x_0|^2.$$

άρα η B είναι η μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\sqrt{\frac{2M}{\lambda}}$.
Αλλά, αφού η $u(x)$ εξαρτάται μόνο από το $|x - x_0|$ για $x \in \bar{B}$, έπεται ότι

$$u(x) = 0$$

για όλα τα $x \in \partial B$. Επιπλέον αφού $u < 0$ στο Ω και $u = 0$ στο $\partial\Omega$, δεν γίνεται να υπάρχει $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $u(x) = 0$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι $\partial B = \partial\Omega$ και $B = \Omega$, όπου B η μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\sqrt{\frac{2M}{\lambda}}$, άρα αποδείξαμε το ζητούμενο. $\square$

3.2 Το Θεώρημα Pólya-Szegö

Θεώρημα 3.2.1. ***(Fleming-Rischell)***
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ένα ανοικτό σύνολο και* $u \in W^{1,1}(\Omega)$. *Τότε*

$$\int_\Omega |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(\{u > t\})\, dt. \tag{3.10}$$

Απόδειξη. Έστω $\Phi \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right)^N$. Τότε από το Λήμμα 2.2.1 έχουμε με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \; div(\Phi)\, dx &= \int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)\, dt\right) div(\Phi)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_\Omega b(t,x)\, div(\Phi)\, dx\right) dt\end{aligned}$$

και από τον ορισμό της συνάρτησης $b(\cdot,\cdot)$ προκύπτει τελικά

$$\int_\Omega u \; div(\Phi)\, dx = -\int_{-\infty}^0 \int_{F_t} div(\Phi)\, dxdt + \int_0^{+\infty} \int_{E_t} div(\Phi)\, dxdt.$$

Η $\Phi \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right)^N$, συνεπώς από το Θεώρημα Απόκλισης έχουμε

$$\int_\Omega div(\Phi)\, dx = 0 \Rightarrow \int_{F_t} div(\Phi)\, dx = -\int_{E_t} div(\Phi)\, dx.$$

Άρα

$$\int_\Omega u \; div(\Phi)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_t} div(\Phi)\, dx\right) dt.$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο αριστερό μέλος και παίρνοντας το supremum και στα δύο μέλη για όλες τις $\Phi \neq 0$ προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.2.1. Η σχέση που αποδείξαμε στο προηγούμενο θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που η $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση και το δεξί μέλος της (3.10) είναι πεπερασμένο. Τότε για κάθε $\Phi \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right)^N$, έχουμε

$$\left|\int_\Omega div(\Phi)\, dx\right| \leq C\|\Phi\|,$$

που συνεπάγεται ότι $u \in W^{1,1}(\Omega)$ και άρα η (3.10) ισχύει.

Παρατήρηση 3.2.2. Το Θεώρημα Fleming-Rischell είναι μια ειδική περίπτωση της Co-area Formula για $g = 1$. Η Co-area Formula εκφράζεται ως εξής: Αν $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι μια Lipschitz συνάρτηση και $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, όπου $N \geq 2$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\, |\nabla u(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{u=t\}} g(x)\, d\sigma(x)\right) dt,$$

όπου με $d\sigma(x)$ συμβολίζουμε την ολοκλήρωση ως προς το κανονικό $(N-1)-$ διάστατο μέτρο στο σύνολο στάθμης $\{u = t\}$.

Πόρισμα 3.2.1. Αν η συνάρτηση $u \in W^{1,1}(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε $u \geq t_0$ σχεδόν παντού στο Ω, τότε

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{t_0}^{+\infty} P_{\Omega}(\{u > t\})\, dt. \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για $t < t_0$ ισχύει $P_{\Omega}(\{u > t\}) = 0$, τότε το αποτέλεσμα έπεται από το προηγούμενο Θεώρημα.
Αφού $u \geq t_0$, το σύνολο $\{u > t\} = \Omega$ για κάθε $t < t_0$. Άρα από τον ορισμό της περιμέτρου de Giorgi και το Θεώρημα Απόκλισης έχουμε ότι $P_{\Omega}(\Omega) = 0$. □

Πόρισμα 3.2.2. Έστω $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Τότε

$$P_{\Omega}(\{u > t\}) = -\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u| dx\right). \tag{3.12}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\upsilon = (u-t)^+ + t$. Τότε $\upsilon \geq t$ και από την σχέση (3.11) προκύπτει

$$\int_{\Omega} |\nabla \upsilon| dx = \int_{t}^{+\infty} P_{\Omega}(\{\upsilon > \tau\})\, d\tau. \tag{3.13}$$

Έστω ότι $\tau \geq t$. Αν $\upsilon > \tau$, τότε a fortiori, $\upsilon > t$ και έτσι θα έχουμε

$$(u-t)^+ > 0 \Leftrightarrow u > t \Leftrightarrow (u-t)^+ = u - t \Leftrightarrow \upsilon = u.$$

Συνεπάγεται τότε ότι $u > \tau$, άρα δείξαμε ότι για κάθε $\tau \geq t$ έχουμε

$$\{\upsilon > \tau\} = \{u > \tau\}.$$

Στο σύνολο $\{u \leq t\}$, έχουμε ότι $(u-t)^+ = 0$, άρα $\upsilon \equiv t$ και έτσι $\nabla \upsilon = 0$ σχεδόν παντού στο σύνολο αυτό. Επομένως έχουμε

$$\int_{\Omega} |\nabla \upsilon| dx = \int_{\{u \leq t\}} |\nabla \upsilon| dx + \int_{\{u>t\}} |\nabla \upsilon| dx = \int_{\{u>t\}} |\nabla u| dx.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.13) έχουμε

$$\int_{\{u>t\}} |\nabla u| dx = \int_{t}^{+\infty} P_{\Omega}(\{u > \tau\})\, d\tau. \tag{3.14}$$

Παραγωγίζοντας, τέλος, κατά μέλη ως προς t, προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Πόρισμα 3.2.3. Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο και $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $u \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω. Τότε, για $t > 0$ ισχύει

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u| dx\right) \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\{u > t\}|^{1-\frac{1}{N}}. \tag{3.15}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\tilde{u}$ τη μηδενική επέκταση της u έξω από το Ω. Τότε, η $\tilde{u} \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ και αν $t > 0$, ισχύει

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \tilde{u}(x) > t\right\} = \{x \in \Omega \mid u(x) > t\}.$$

Αφού $u \geq 0$, και προφανώς $\tilde{u} \geq 0$, από το Πόρισμα 3.2.1 έχουμε

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_0^{+\infty} P_{\Omega} \left(\{u > t\}\right) dt.$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}| dx = \int_0^{+\infty} P_{\mathbb{R}^N} \left(\{\tilde{u} > t\}\right) dt = \int_0^{+\infty} P_{\mathbb{R}^N} \left(\{u > t\}\right) dt.$$

Τα ολοκληρώματα στο αριστερό μέλος των προηγούμενων σχέσεων είναι ίσα και αφού

$$P_{\Omega} \left(\{u > t\}\right) \leq P_{\mathbb{R}^N} \left(\{u > t\}\right)$$

από την Πρόταση 3.1.1, προκύπτει τότε

$$P_{\Omega} \left(\{u > t\}\right) = P_{\mathbb{R}^N} \left(\{u > t\}\right)$$

σχεδόν για κάθε $t > 0$, και άρα για κάθε $t > 0$ λόγω πυκνότητας από τον ορισμό της περιμέτρου. Συνεπώς από την (κλασσική) ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u| dx\right) = P_{\mathbb{R}^N} \left(\{u > t\}\right) \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\{u > t\}|^{1-\frac{1}{N}}.$$

□

Λήμμα 3.2.1. *Έστω* $1 \leq p, q \leq \infty$ *είναι τέτοια ώστε* $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1$. *Θεωρούμε ακόμη συναρτήσεις* $f \in L^p(\Omega)$ *και* $g \in L^q(\Omega)$, *όπου* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ένα ανοικτό σύνολο, και θέτουμε*

$$F(t) = \int_{\{f>t\}} g(f - t)\, dx.$$

Τότε

$$F'(t) = -\int_{\{f>t\}} g dx. \tag{3.16}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h = (f - t)^+ + t$, για $t \in \mathbb{R}$. Τότε $h \geq t$ και από το Λήμμα 2.2.2 έχουμε

$$\int_{\Omega} g h dx = t \int_{\Omega} g dx + \int_t^{+\infty} \left(\int_{\{h>\tau\}} g dx\right) d\tau.$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της συνάρτησης h έχουμε

$$\int_{\Omega} g h dx = t \int_{\Omega} g dx + \int_{\Omega} g (f - t)^+ dx = t \int_{\Omega} g dx + \int_{\{f>t\}} g(f - t)\, dx.$$

Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις έχουμε

$$\int_{\{f>t\}} g(f - t)\, dx = \int_t^{+\infty} \left(\int_{\{h>\tau\}} g dx\right) d\tau. \tag{3.17}$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αυτά της απόδειξης του Πορίσματος 3.2.2, αποδεικνύουμε ότι για όλα τα $\tau \geq t$ ισχύει

$$\{h > \tau\} = \{f > \tau\}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.17) και παραγωγίζοντας ως προς t, προκύπτει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ένα ανοικτό σύνολο και* $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. *Αν* $u \geq 0$, *τότε για* $1 \leq p < \infty$ *έχουμε*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \right) dt \tag{3.18}$$

όπου $M = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$. *Επιπλέον, αν* $u^* : \Omega^* \to \mathrm{R}$ *είναι η συμμετρικοποίηση Schwarz της* u, *έχουμε ακόμη*

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_0^M \left(\int_{\{u^*=t\}} |\nabla u^*|^{p-1} d\sigma \right) dt \tag{3.19}$$

Απόδειξη. Βήμα 1

Αφού η u είναι ομαλή συνάρτηση, από το Θεώρημα Sard έχουμε ότι $|\nabla u| \neq 0$ στο σύνολο στάθμης $\{u = t\}$, για σχεδόν κάθε t στο πεδίο τιμών της u. Τότε, το σύνολο $\{u = t\}$ είναι μια $(N-1)$ −διάστατη επιφάνεια με $\{u = t\} = \partial \{u > t\}$. Επιπλέον, πάλι από το θεώρημα Sard και από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις u και u^* είναι ισομετρήσιμες, έχουμε ότι

$$|\{u = t\}| = |\{u^* = t\}| = 0.$$

Βήμα 2

Έστω $2 \leq p < \infty$. Ορίζουμε

$$f = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right).$$

Τότε, για κάθε $\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, έχουμε

$$\int_\Omega f\upsilon dx = -\int_\Omega \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \cdot \upsilon dx.$$

Αφού $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ και $\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Επομένως έχουμε

$$\int_\Omega f\upsilon dx = -\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \upsilon dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\upsilon dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f\upsilon dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \upsilon dx \tag{3.20}$$

Για $t > 0$, επιλέγουμε τη συνάρτηση $\upsilon = (u-t)^+$. Τότε, παρατηρούμε ότι η ο φορέας της υ είναι το σύνολο $\{u > t\}$ και ότι στο σύνολο αυτό ισχύει $\upsilon = u - t$, άρα $\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Επομένως, η σχέση (3.20) γίνεται

$$\int_{\{u>t\}} f(u-t)\, dx = \int_{\{u>t\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u dx = \int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p dx$$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε από το Λήμμα 3.2.1

$$\int_{\{u>t\}} f dx = -\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p dx \right) \tag{3.21}$$

Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς t στο πεδίο τιμών της u, δηλαδή στο διάστημα $[0, M]$, προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

$$\int_0^M \left(\int_{\{u>t\}} f dx \right) dt = -\int_{\{u>M\}} |\nabla u|^p dx + \int_{\{u>0\}} |\nabla u|^p dx$$
$$= \int_{\{u>0\}} |\nabla u|^p dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx. \tag{3.22}$$

Για σχεδόν κάθε t στο διάστημα $[0, M]$ ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέραμε στη αρχή της απόδειξης. Επομένως για ένα τέτοιο t, από τον ορισμό της f και το Θεώρημα Green έχουμε

$$\int_{\{u>t\}} f dx = -\int_{\{u>t\}} div \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) dx = -\int_{\partial\{u>t\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu d\sigma$$
$$= -\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu d\sigma = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \quad ,$$

αφού στο σύνολο $\{u = t\}$ η εφαπτομενική παράγωγος της u μηδενίζεται και $u > t$ μέσα σε αυτό, έχουμε ότι $-\nabla u \nu = |\nabla u|$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.22) έχουμε τη σχέση (3.18).

Βήμα 3

Έστω τώρα $1 \leq p < 2$. Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με πριν, θα έχουμε τώρα ότι το $|\nabla u|^{p-2}$ γίνεται άπειρο, αν η κλίση μηδενίζεται. Γι'αυτόν τον λόγο χρησιμοποιούμε μια τεχνική προσέγγισης. Έστω $\epsilon > 0$. Ορίζουμε

$$f_\epsilon = -div \left(\left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \right)$$

έτσι ώστε για κάθε $\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ να έχουμε

$$\int_\Omega f_\epsilon \upsilon dx = -\int_\Omega div \left(\left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \right) \upsilon dx =$$
$$= \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \cdot \nabla \upsilon dx \tag{3.23}$$

Θέτουμε όπως και προηγουμένως τη συνάρτηση $\upsilon = (u - t)^+$ για $t > 0$ και ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν προκύπτει

$$\int_0^M \left(\int_{\{u>t\}} f_\epsilon dx \right) dt = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 dx$$

και όπως πριν από το Θεώρημα Green έχουμε

$$\int_{\{u>t\}} f_\epsilon dx = \int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma.$$

Άρα τελικά προκύπτει

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 dx = \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \epsilon \right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma \right) dt. \tag{3.24}$$

Παίρνοντας τώρα το όριο καθώς το $\epsilon \to 0$ στην προηγούμενη σχέση, παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα στο αριστερό μέλος συγκλίνει κατά σημείο στην $|\nabla u|^p$. Επιπλέον, αφού $1 \leq p < 2$, έχουμε ότι

$$\left(|\nabla u|^2 + \epsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 = \left(\frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \epsilon}\right)^{\frac{2-p}{2}} |\nabla u|^p \leq |\nabla u|^p$$

σχεδόν παντού στο Ω. Αφού η $|\nabla u|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \epsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx. \tag{3.25}$$

Αντίστοιχα, για το δεξί μέλος της σχέσης (3.24) παρατηρούμε ξανά για την ολοκληρωτέα ποσότητα ότι παίρνοντας το όριο καθώς το $\epsilon \to 0$, συγκλίνει κατά σημείο στην $|\nabla u|^{p-1}$ και ότι

$$\left(|\nabla u|^2 + \epsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| = \left(\frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \epsilon}\right)^{\frac{2-p}{2}} |\nabla u|^{p-1} \leq |\nabla u|^{p-1}$$

σχεδόν παντού στο σύνολο $\{u = t\}$. Άρα αφού η $|\nabla u|^{p-1}$ είναι ολοκληρώσιμη στο σύνολο $\{u = t\}$, έχουμε πάλι από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \epsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \epsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma \leq \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma.$$

και

$$\int_0^M \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma dt < \infty.$$

αφού $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, άρα εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} \left(|\nabla u|^2 + \epsilon\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u| d\sigma\right) dt = \int_0^M \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma\right) dt. \tag{3.26}$$

Άρα, από τις σχέσεις (3.24)-(3.26) προκύπτει το ζητούμενο.
Αποδείξαμε επομένως, τη σχέση (3.18) για $1 \leq p < \infty$.

Βήμα 4

Θεωρούμε τώρα την συμμετρικοποίηση Schwarz u^* της συνάρτησης u στη μπάλα Ω^* με ακτίνα R. Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, γράφουμε $u^*(x) = u^*(|x|)$ και συνεπώς θεωρούμε για ευκολία την u^* ως συνάρτηση μίας μεταβλητής. Όπως έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο η u^* είναι φθίνουσα συνάρτηση. Κατά συνέπεια είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο Ω^*.

Εφαρμόζοντας πολικές συντεταγμένες και αλλαγή μεταβλητής $t = u^*(r)$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p dx &= \int_0^R \int_{\partial\Omega^*} |u^{*'}(|x|)|^p dS(x)\, dr = \int_0^R |u^{*'}(r)|^p |\partial\Omega^*|_{N-1} dr \\
&= \int_0^R |u^{*'}(r)|^p N\omega_N r^{N-1} dr \\
&= \int_0^R |u^{*'}(r)|^{p-1} N\omega_N r^{N-1} \left(-u^{*'}(r)\right) dr \\
&\leq \int_0^M |\nabla u^*_{|\{u^*=t\}}|^{p-1} |\{u^* = t\}|_{N-1} dt \\
&= \int_0^M \left(\int_{\{u^*=t\}} |\nabla u^*|^{p-1} d\sigma \right) dt,
\end{aligned}$$

διότι η κλίση της u^* είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα σύνολα $\{u^* = t\}$. Η ανισότητα στις παραπάνω σχέσεις οφείλεται στο γεγονός ότι η $-u^*$ είναι αύξουσα. Επομένως αποδείξαμε την σχέση (3.19). □

Παρατήρηση 3.2.3. Το προηγούμενο θεώρημα αποτελεί άλλη μια ειδική περίπτωση της co-area formula.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω ότι η συνάρτηση* $u \in C_c^\infty(\Omega)$ *είναι τέτοια ώστε* $u \geq 0$ *και έστω* μ *η συνάρτηση κατανομής της* u. *Αν* $u^* : \Omega^* \to R$ *είναι η συμμετρικοποίηση Schwarz της* u, *τότε για σχεδόν κάθε* t *στο πεδίο τιμών της* u *έχουμε*

$$-\mu'(t) = \int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} = \int_{\{u^*=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u^*|}. \tag{3.27}$$

Απόδειξη. Βήμα 1

Όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, για σχεδόν κάθε t στο πεδίο τιμών της u, ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο Βήμα 1 προηγουμένως.

Βήμα 2

Έστω $\epsilon > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2 + \epsilon}\right).$$

Όπως και πριν, πολλαπλασιάζοντας την f με τη συνάρτηση $\upsilon = (u-t)^+$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη προκύπτει ακολουθώντας την ίδια διαδικασία

$$\int_{\{u>t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \epsilon} dx = \int_{\{u>t\}} f(u-t)\, dx.$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε όμοια με την προηγούμενη απόδειξη

$$-\frac{d}{dt} \int_{\{u>t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \epsilon} dx = \int_{\{u>t\}} f dx.$$

Επιπλέον, αποδεικνύουμε από τον ορισμό της f και το Θεώρημα Green, όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος ότι

$$\int_{\{u>t\}} f dx = \int_{\{u=t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2+\epsilon} d\sigma.$$

Άρα έχουμε τελικά

$$-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2+\epsilon} dx = \int_{\{u=t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2+\epsilon} d\sigma. \tag{3.28}$$

Βήμα 3

Αν t είναι τέτοιο ώστε $|\nabla u| \neq 0$ στο σύνολο $\{u=t\}$, τότε για αρκετά μικρό $h>0$ θα ισχύει το ίδιο και στο σύνολο $\{t-h \leq u \leq t+h\}$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.28) από το $t-h$ στο t, έχουμε

$$\int_{\{t-h\leq u\leq t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2+\epsilon} dx = \int_{t-h}^{t} \left(\int_{\{u=t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2+\epsilon} d\sigma \right) d\tau. \tag{3.29}$$

Αφού $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{t-h\leq u\leq t\}} \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2+\epsilon} dx = \int_{\{t-h\leq u\leq t\}} dx$$

και

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{u=t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2+\epsilon} d\sigma = \int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

Επιπλέον, όπως και πριν $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\{u=t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2+\epsilon} d\sigma \leq \int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

και

$$\int_{t-h}^{t}\int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} d\tau < \infty.$$

προκύπτει πάλι από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t-h}^{t} \left(\int_{\{u=t\}} \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|^2+\epsilon} d\sigma \right) d\tau = \int_{t-h}^{t}\int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} d\tau.$$

Άρα η σχέση (3.29) γίνεται τελικά

$$\begin{aligned} &\int_{\{t-h\leq u\leq t\}} dx = \int_{t-h}^{t}\int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} d\tau \\ &\Rightarrow \mu(t-h) - \mu(t) = \int_{t-h}^{t}\int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} d\tau. \end{aligned}$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης με h και παίρνοντας το όριο καθώς $h \to 0$ προκύπτει

$$-\mu'(t) = \int_{\{u=t\}} \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

Βήμα 4

Έστω $r(t)$ η ακτίνα της μπάλας $\{u^* > t\}$. Τότε $\mu(t) = \omega_N (r(t))^N$. Οι συναρτήσεις $\mu(t)$ και $r(t)$ είναι φθίνουσες, αφού αν $t_1 < t_2$, τότε $\{u^* > t_2\} \subset \{u^* > t_1\}$. Άρα $r(t_2) \leq r(t_1)$ και προφανώς $|\{u^* > t_2\}| \leq |\{u^* > t_1\}|$.
Επομένως οι $\mu(t)$ και $r(t)$ είναι παραγωγίσιμες σχεδόν για κάθε t.
Αλλά, $u^*(r(t)) = t$ για σχεδόν κάθε t, απ'όπου προκύπτει ότι

$$r'(t) = \frac{1}{u^{*\prime}(r(t))}.$$

Κάνοντας πάλι κατάχρηση του συμβολισμού γράφουμε $u^*(x) = u^*(|x|)$.
Έχουμε τότε με πεπλεγμένη παραγώγιση ότι

$$\mu'(t) = N\omega_N (r(t))^{N-1} r'(t) = |\{u^* = t\}|_{N-1} \frac{1}{u^{*\prime}(r(t))} = -\frac{|\{u^* = t\}|_{N-1}}{|\nabla u^*_{|\{u^*=t\}}|}, \tag{3.30}$$

αφού η u^* είναι φθίνουσα. Δείξαμε, επομένως, το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.2.4. ***(Pólya-Szegö)***
Έστω $1 \leq p < \infty$. Αν το $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι ένα φραγμένο χωρίο και η συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε $u \geq 0$, τότε $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ και

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx. \tag{3.31}$$

Απόδειξη. Βήμα 1
Η περίπτωση $p = 1$.
Αφού η $u \geq 0$ στο Ω και $u = 0$ στο $\partial\Omega$, όπως δείξαμε στο Πόρισμα 3.2.3, θα ισχύει

$$P_\Omega(\{u > t\}) = P_{\mathbb{R}^N}(\{u > t\})$$

για $t > 0$. Επιπλέον από την κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα, έχουμε ότι

$$P_{\mathbb{R}^N}(\{u > t\}) \geq P_{\mathbb{R}^N}(\{u^* > t\})$$

για $t > 0$. Επομένως, από το Θεώρημα Fleming-Rischell και την Παρατήρηση 3.2.1, έπεται ότι

$$\int_\Omega |\nabla u| dx = \int_0^\infty P_{\mathbb{R}^N}(\{u > t\})\, dx \geq \int_0^\infty P_{\mathbb{R}^N}(\{u^* > t\})\, dx = \int_{\Omega^*} |\nabla u^*| dx$$

Βήμα 2

Έστω $1 < p < \infty$ και $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $u \geq 0$. Αν $M = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$, τότε λόγω του Θεωρήματος 3.2.2, αρκεί να δείξουμε ότι για σχεδόν κάθε $t \in (0, M)$ ισχύει

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \geq \int_{\{u^*=t\}} |\nabla u^*|^{p-1} d\sigma. \tag{3.32}$$

Αφού η u είναι ομαλή συνάρτηση, τότε από το Θεώρημα Sard η $|\nabla u|$ δεν μηδενίζεται στο σύνολο $\{u = t\}$ για σχεδόν κάθε $t \in (0, M)$. Επομένως, ισχύουν όλες οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο Βήμα 1 της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2.1.

Ορίζουμε τώρα ένα μέτρο ν στο σύνολο $\{u = t\}$ ως $d\nu = \dfrac{d\sigma}{|\nabla u|}$.

Από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\nu \leq \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\{u=t\}} d\nu \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

και αφού από τον ορισμό του ν ισχύει ότι

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} |\nabla u| d\nu,$$

η ανισότητα γίνεται

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\sigma \geq \frac{\left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\nu \right)^p}{\left(\int_{\{u=t\}} d\nu \right)^{p-1}} = \frac{\left(\int_{\{u=t\}} d\sigma \right)^p}{\left(\int_{\{u=t\}} d\nu \right)^{p-1}}.$$

Επιπλέον, από την κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε

$$\int_{\{u=t\}} d\sigma \geq \int_{\{u^*=t\}} d\sigma.$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις με τη σχέση (3.27) προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\sigma &\geq \frac{\left(|\{u^* = t\}|_{N-1} \right)^p}{\left(-\mu'(t) \right)^{p-1}} = |\{u^* = t\}|_{N-1} |\nabla u^*_{|\{u^*=t\}}|^{p-1} \\ &= \int_{\{u^*=t\}} |\nabla u^*|^{p-1} d\sigma. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αποδείξαμε το ζητούμενο για $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ και $u \geq 0$.

Βήμα 3

Έστω τώρα $1 < p < \infty$ και $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ τέτοια ώστε $u \geq 0$. Τότε, υπάρχει $\{u_n\} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ με $u_n \geq 0$ και $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$ στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Από το Βήμα 2 έχουμε

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u_n^*|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx.$$

Άρα, από την ανισότητα Poincaré-Friedrichs έχουμε ότι η ακολουθία (u_n^*) είναι φραγμένη στον $W_0^{1,p}(\Omega^*)$ και αφού $1 < p < \infty$, τότε από το Θεώρημα

Eberlein–Šmulian έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στον χώρο $W_0^{1,p}(\Omega^*)$. Επιπλέον, από το Θεώρημα Rellich-Kondrachov (ασθενούς συμπάγειας) θα συγκλίνει και ισχυρά στον $L^p(\Omega^*)$.
Γνωρίζουμε όμως από την Παράγραφο 2.3 ότι $u_n^* \to u^*$ στον $L^p(\Omega^*)$. Επομένως, η $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$. Αν η u_n^* δεν συγκλίνει στο u^*, τότε υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U της u^* ως προς την ασθενή τοπολογία του $W_0^{1,p}(\Omega^*)$ και μία υπακολουθία της u_n^*, έστω $u_{k_n}^*$ η οποία είναι φυσικά φραγμένη και δεν ανήκει στο U. Εφόσον είναι φραγμένη έχει μία υπακολουθία, την οποία χωρίς σύγχυση θα την ονομάσουμε πάλι $u_{k_n}^*$, η οποία θα συγκλίνει ασθενώς σε κάποια συνάρτηση w του χώρου $W_0^{1,p}(\Omega^*)$. Αφού η $u_{k_n}^*$ δεν ανήκει στο U, έπεται ότι w διάφορο του u^*, οπότε από το Θεώρημα Rellich-Kondrachov έχουμε άτοπο. Άρα $u_n^* \rightharpoonup u^*$ ασθενώς σε αυτόν τον χώρο.
Τέλος, από την ιδιότητα της ασθενούς κάτω ημισυνέχειας της νόρμας προκύπτει

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega^*} |\nabla u_n^*|^p dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.2.4. Αποδεικνύεται επίσης ότι το Θεώρημα Pólya-Szegö ισχύει και για συναρτήσεις ορισμένες στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ για $1 \le p < \infty$, με την συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη τους να ορίζεται στον $\mathbb{R}^N$.

Παρατήρηση 3.2.5. Το Θεώρημα Pólya-Szegö δεν ισχύει για συναρτήσεις ορισμένες στον $W^{1,p}(\Omega)$. Αποδεικνύεται εύκολα με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω $1 \le p < \infty$ και $u \in W^{1,p}(\Omega), u > 0$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $u = 1$ και ότι $0 \in \Omega$. Έστω ότι

$$u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon \quad \text{στον} \quad W^{1,p}(\Omega)$$

με $u_\epsilon = u\phi_\epsilon$ και $u_\epsilon = 0$ κοντά στο 0. Η συνάρτηση ϕ_ϵ δίνεται από τη σχέση $\phi_\epsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{για} \quad |x| > 2 \\ 0, & \text{για} \quad |x| < 1, \end{cases}$$

$0 \le \phi \le 1, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Τότε, από τον ορισμό της u_ϵ^* έχουμε ότι $u_\epsilon^* = 0$ κοντά στο $\partial\Omega^*$, επομένως $u_\epsilon^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$.
Άρα

$$0 = \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\|\nabla u_\epsilon\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u_\epsilon\|_{L^p(\Omega)}^p} \ge \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\|\nabla u_\epsilon^*\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u_\epsilon^*\|_{L^p(\Omega)}^p} \ge \lambda_{1,\rho},$$

όπου $\lambda_{1,\rho} > 0$ η σταθερά της ανισότητας Poincaré-Friedrichs, που εφαρμόσαμε στην τελευταία σχέση. Άρα το Θεώρημα Pólya-Szegö δεν ισχύει για τη συνάρτηση u.

3.3 Η Ανισότητα Sobolev

Θεώρημα 3.3.1. (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)
Έστω $1 \leq p < \infty$. *Τότε*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

όπου

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \tag{3.33}$$

και η εμφύτευση είναι συνεχής. Επιπλέον, υπάρχει μία σταθερά $C = C(p, N)$ *τέτοια ώστε για κάθε* $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *να ισχύει η ανισότητα*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \geq C\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \tag{3.34}$$

γνωστή ως ανισότητα Sobolev.

Παρατήρηση 3.3.1. Παίρνοντας τη μηδενική επέκταση έξω από το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, έχουμε μια συνεχή εμφύτευση $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Συνεπώς, η ανισότητα Sobolev ισχύει για όλες τις συναρτήσεις στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ με τις αντίστοιχες νόρμες στο Ω.

Παρατήρηση 3.3.2. Η βέλτιστη σταθερά που μπορούμε να πάρουμε για τη σχέση (3.33) είναι η

$$C_{SOB} = \inf_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{\|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N}}{\|u\|_{p^*,\mathbb{R}^N}} \tag{3.35}$$

που ονομάζεται *σταθερά Sobolev* και έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες.
Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η εύρεση της βέλτιστης σταθεράς Sobolev είναι ισοδύναμη με την εύρεση της ελάχιστης τιμής του συναρτησιακού που ορίζεται ως

$$J(u) = \frac{\|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N}}{\|u\|_{p^*,\mathbb{R}^N}}.$$

Αναζητούμε, επομένως, μη αρνητικές συναρτήσεις (αφού κάθε συνάρτηση u έχει την ίδια L^p και Sobolev νόρμα με την $|u|$), που ανήκουν στον χώρο $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, και ελαχιστοποιούν το J.
Τότε, οι συναρτήσεις αυτές θα μηδενίζονται στο άπειρο.
Επιπλέον, όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενες παραγράφους, θα ορίζεται η συμμετρικοποίηση Schwarz τους, με τις νόρμες να διατηρούνται, και θα ισχύει η ανισότητα Pólya-Szegö. Προκύπτει τότε ότι

$$J(u) \geq J(u^*),$$

δηλαδή οι συναρτήσεις που αναζητούμε πρέπει να είναι μη αρνητικές, ακτινικές και ακτινικά φθίνουσες.
Αποδεικνύεται τότε ότι

$$C_{SOB} = \sqrt{\pi} N^{\frac{1}{p}} \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(1+N-\frac{N}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\Gamma(N)}\right)^{\frac{1}{N}}$$

για $1 < p < \infty$ και $C_{SOB} = N\omega_N^{\frac{1}{N}}$ για $p = 1$.
Η ισότητα στη σχέση (3.34) ισχύει για συναρτήσεις της μορφής

$$u(x) = \left(a + b|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{N}{p}}$$

όπου a και b θετικές σταθερές (βλ. [14]).

Παράδειγμα 3.3.1. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε από αυτό το παράδειγμα πως ο εκθέτης p^* εμφανίζεται με φυσικό τρόπο.
Έστω $\lambda > 0$. Αν $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, ορίζουμε

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Τότε έχουμε

$$\|\nabla u_\lambda\|_{p,\mathbb{R}^N} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\lambda x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\lambda x = y \Rightarrow \lambda^N dx = dy,$$

προκύπτει

$$\|\nabla u_\lambda\|_{p,\mathbb{R}^N} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^p |\nabla u(y)|^p \lambda^{-N} dy\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N}.$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|_{p^*,\mathbb{R}^N} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^{p^*} \lambda^{-N} dy\right)^{\frac{1}{p^*}} = \lambda^{-\frac{N}{p^*}} \|u\|_{p^*,\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\|\nabla u_\lambda\|_{p,\mathbb{R}^N}}{\|u_\lambda\|_{p^*,\mathbb{R}^N}} = \lambda^{\left(1-\frac{N}{p}+\frac{N}{p^*}\right)} \frac{\|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N}}{\|u\|_{p^*,\mathbb{R}^N}}.$$

Άρα, για να ισχύει η ανισότητα Sobolev για όλες τις συναρτήσεις στον $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, πρέπει ο εκθέτης του λ στην προηγούμενη σχέση να μηδενίζεται. Έτσι παίρνουμε την τιμή του p^* που δίνεται από την σχέση (3.33).

Πρόταση 3.3.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $p = 1$. Τότε για κάθε συνάρτηση $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, η ανισότητα Sobolev ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η ανισότητα Sobolev στον $W_0^{1,1}(\Omega)$ με

$$p^* = \frac{N}{N-1}.$$

Για $\epsilon > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad d(x, \partial\Omega) \geq \epsilon \\ \dfrac{d(x, \partial\Omega)}{\epsilon}, & \text{αν} \quad d(x, \partial\Omega) < \epsilon \end{cases}$$

όπου $d(x, \partial\Omega) = d(x)$ η απόσταση ενός σημείου x από το σύνορο $\partial\Omega$.
Τότε $\phi_\epsilon \in W_0^{1,1}(\Omega)$ και

$$\int_\Omega \phi_\epsilon^{\frac{N}{N-1}} dx \to \int_\Omega dx = |\Omega| \quad \text{καθώς} \epsilon \to 0.$$

Έστω ακόμη

$$D_\epsilon = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < \epsilon\},$$

τότε είναι γνωστό ότι $|\nabla d| = 1$, άρα

$$|\nabla \phi_\epsilon| = \begin{cases} 0, & \text{στο} \quad D_\epsilon \\ \dfrac{1}{\epsilon}, & \text{στο} \quad \Omega \setminus D_\epsilon. \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\int_\Omega |\nabla \phi_\epsilon| dx = \frac{|D_\epsilon|}{\epsilon}.$$

Παρατηρούμε ότι παίρνοντας το όριο στο δεξί μέλος της προηγούμενης σχέσης, έχουμε το περιεχόμενό Minkowski $M_{N-1}(\partial\Omega)$.
Επομένως, εφαρμόζοντας την ανισότητα Sobolev για τη συνάρτηση ϕ_ϵ και παίρνοντας το όριο καθώς $\epsilon \to 0$,, έχουμε

$$|\partial\Omega|_{N-1} \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\Omega|^{1-\frac{1}{N}},$$

που είναι η κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα.

Έστω, αντίστροφα, ότι ισχύει η κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα και έστω $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η $u \geq 0$, αφού οι συναρτήσεις u και $|u|$ έχουν τις ίδιες L^p και Sobolev νόρμες.
Έχουμε, τότε, από το Πόρισμα του Θεωρήματος Fleming-Rischell και την ισοπεριμετρική ανισότητα ότι

$$\int_\Omega |\nabla u| dx \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}} \int_0^\infty \mu(t)^{1-\frac{1}{N}} dt, \tag{3.36}$$

όπου $\mu(t)$ η συνάρτηση κατανομής της u.
Επιπλέον, από την απόδειξη του Πορίσματος 2.1.2 έχουμε

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1},\Omega}^{\frac{N}{N-1}} = \frac{N}{N-1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{N-1}} \mu(t) dt. \tag{3.37}$$

Αφού η $\mu(t)$ είναι φθίνουσα και μη αρνητική (ως μέτρο), τότε για $\tau < t$ ισχύει

$$\mu(\tau) \geq \mu(t) \Rightarrow \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}} \geq \mu(t)^{\frac{N-1}{N}} \Rightarrow \int_0^t \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}} d\tau \geq \int_0^t \mu(t)^{\frac{N-1}{N}} d\tau$$

$$\Rightarrow \int_0^t \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}} d\tau \geq \mu(t)^{\frac{N-1}{N}} t \Rightarrow \left(\int_0^t \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}} d\tau\right)^{\frac{1}{N-1}} \geq t^{\frac{1}{N-1}} \mu(t)^{\frac{1}{N}}$$

για $t > 0$. Άρα, γράφουμε ισοδύναμα

$$t^{\frac{1}{N-1}}\mu(t) \leq \mu(t)^{\frac{N-1}{N}}\left(\int_0^t \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}}\,d\tau\right)^{\frac{1}{N-1}} = \frac{N-1}{N}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}}\,d\tau\right)^{\frac{N}{N-1}}$$

και ολοκληρώνοντας ως προς t προκύπτει

$$\frac{N}{N-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{N-1}}\mu(t)\,dt \leq \left(\int_0^t \mu(\tau)^{\frac{N-1}{N}}\,d\tau\right)^{\frac{N}{N-1}}. \tag{3.38}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (3.36)-(3.38) έχουμε τελικά

$$\int_\Omega |\nabla u|dx \geq N\omega_N^{\frac{1}{N}}\|u\|_{\frac{N}{N-1},\Omega}$$

που είναι η ανισότητα Sobolev για $p = 1$. □

3.4 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε την συμμετρικοποίση με σκοπό τη σύγκριση λύσεων διαφορετικών προβλημάτων συνοριακών τιμών και την εκτίμηση των διαφορετικών νορμών τους. Βασικό εργαλείο για να το πετύχουμε αυτό, είναι το Θεώρημα Talenti.

Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο και $f \in L^2(\Omega)$. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u = f\ ,\ \text{στο}\ \ \Omega \\ u = 0\ ,\ \text{στο}\ \ \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Ορίζουμε τη διγραμμική μορφή $B(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ως

$$B(u,\upsilon) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \upsilon dx, \quad \text{για κάθε} \quad u,\upsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{3.40}$$

όπου $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ ο γνωστός χώρος Sobolev με νόρμα $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}$. Άρα η ασθενής μορφή του προβλήματος (3.39) είναι

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \upsilon dx = \int_\Omega f\upsilon dx, \quad \text{για κάθε} \quad \upsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{3.41}$$

Προφανώς η διγραμμική μορφή $B(\cdot,\cdot)$ είναι συμμετρική και για $u,\upsilon \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |B(\upsilon,w)| &\leq \int_\Omega |\nabla \upsilon \cdot \nabla w|dx \leq \|\nabla \upsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{\|\upsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \upsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}\sqrt{\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}} \\ &= \|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

Άρα, η διγραμμική μορφή είναι συνεχής στο $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
Επιπλέον, έχουμε

$$|B(\upsilon,\upsilon)| = \int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx = \|\nabla\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq c\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.43}$$

όπου c η σταθερά της ανισότητας Poincaré-Friedrichs που χρησιμοποιήσαμε στο τελευταίο βήμα. Άρα, η διγραμμική μορφή είναι ελλειπτική (θετικά ορισμένη) στο $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
Τέλος, αποδεικνύεται εύκολα πάλι με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz και της ανισότητας Poincaré-Friedrichs, ότι το $F(\upsilon) = \int_\Omega f\upsilon dx$ είναι ένα φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό

$$|F(\upsilon)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\upsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \Rightarrow \frac{|F(\upsilon)|}{\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \sup_{0\neq\upsilon\in H_0^1(\Omega)} \frac{|F(\upsilon)|}{\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \|F\| \leq \|f\|.$$

Επομένως, από το Θεώρημα Lax-Milgram προκύπτει ότι το πρόβλημα (3.41) έχει μοναδική λύση $u \in H_0^1(\Omega)$.

Θεώρημα 3.4.1. (Θεώρημα Talenti)
Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο και $f \in L^2(\Omega)$. Έστω, ακόμη, $u \in H_0^1(\Omega)$ η (ασθενής) λύση του προβλήματος (3.41) και $f^* \in L^2(\Omega^*)$ η συμμετρικοποίση Schwarz της συνάρτησης f. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\upsilon = f^* \ , \ \text{στο} \ \ \Omega^* \\ \upsilon = 0 \ \ , \ \text{στο} \ \ \partial\Omega^* \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Αν $u \geq 0$ στο Ω, τότε $u^* \leq \upsilon$ σχεδόν παντού στο Ω^*, όπου u^* η συμμετρικοποίση Schwarz της u.

Απόδειξη. Βήμα 1
Για $t > 0$ θέτουμε $\upsilon = (u - t)^+$. Τότε $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$. Εφαρμόζοντας στην ασθενή μορφή του προβλήματος (3.41) και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 (βλ. σχέση (3.21))

$$0 \leq -\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\{u>t\}} f dx, \tag{3.45}$$

όπου η ανισότητα οφείλεται στο ότι η $\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2 dx$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς t. Παρατηρούμε τότε ότι για $t > 0$

$$\int_{\{u>t\}} f dx \geq 0. \tag{3.46}$$

Βήμα 2
Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leq t+h\}} |\nabla u| dx\right)^2 \leq \left(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leq t+h\}} |\nabla u|^2 dx\right)\left(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leq t+h\}} dx\right).$$

Συνεπώς, παίρνοντας το όριο καθώς $h \to 0$ έχουμε

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}|\nabla u|dx\right)^2 \leq \left(-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}|\nabla u|^2dx\right)\left(-\mu'(t)\right)$$

και με χρήση της σχέσης (3.45) γίνεται

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}|\nabla u|dx\right)^2 \leq -\mu'(t)\int_{\{u>t\}} fdx, \tag{3.47}$$

όπου $\mu(t)$ η συνάρτηση κατανομής της u. Θέτουμε τότε

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} f^{\#}(s)\,ds.$$

Από την Πρόταση 2.2.2 και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις u και $u^{\#}$ ως ισομετρήσιμες έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, προκύπτει

$$\int_{\{u>t\}} fdx \leq \int_0^{\mu(t)} f^{\#}(s)\,ds = F(\mu(t)).$$

Από τη σχέση (3.46) συμπεραίνουμε ότι η $F(\mu(t))$ είναι μη αρνητική για όλα τα $t > 0$. Επομένως, από τις προηγούμενες ανισότητες και το Πόρισμα 3.2.3, έχουμε

$$\left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^2 \mu(t)^{2-\frac{2}{N}} \leq -\mu'(t)\,F(\mu(t)) \Leftrightarrow$$

$$1 \leq \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2} \mu(t)^{\frac{2}{N}-2}\,F(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right). \tag{3.48}$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη ανισότητα από το t' στο t, προκύπτει με την αλλαγή μεταβλητής στο δεξί μέλος $\xi = \mu(t)$

$$t - t' \leq \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2}\int_{\mu(t)}^{\mu(t')} \xi^{\frac{2}{N}-2}F(\xi)\,d\xi \tag{3.49}$$

<u>Βήμα 3</u>

Θέτουμε $t' = 0$ και $t = u^{\#}(s) - \eta$ όπου $\eta > 0$ και $s \in (0, |\Omega|)$. Τότε έχουμε

$$\mu(t') = |\{u > 0\}| = |\Omega|$$

και

$$\mu(t) = \left|\left\{u > u^{\#}(s) - \eta\right\}\right| = \left|\left\{u^{\#} > u^{\#}(s) - \eta\right\}\right| \geq |(0,s)| = s$$

αφού η $u^{\#}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.
Επομένως, η σχέση (3.49) γίνεται

$$u^{\#}(s) - \eta \leq \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2}\int_s^{|\Omega|} \xi^{\frac{2}{N}-2}F(\xi)\,d\xi$$

και αφού το $\eta > 0$ είναι αυθαίρετο, έχουμε

$$u^{\#}(s) \leq \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2}\int_s^{|\Omega|} \xi^{\frac{2}{N}-2}F(\xi)\,d\xi. \tag{3.50}$$

Βήμα 4

Αφού η υ είναι η λύση του προβλήματος (3.44) στην μπάλα Ω^* και η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, τότε από τις ιδιότητες συμμετρίας της Λαπλασιανής έχουμε ότι η υ είναι επίσης ακτινικά συμμετρική. Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, γράφουμε $\upsilon(x) = \upsilon(|x|)$ και συνεπώς θεωρούμε για ευκολία την $\upsilon(r)$ ως συνάρτηση μίας μεταβλητής. Έχουμε τότε

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_1^2 + \cdots + x_N^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_N^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r},$$

άρα

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} = \upsilon'(r)\, r_{x_i} = \frac{\upsilon'(r)}{r} x_i$$

και

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2} = \frac{\upsilon''(r)}{r^2} x_i^2 + \frac{\upsilon'(r)}{r} - \frac{\upsilon'(r)}{r^3} x_i^2.$$

Συνεπώς

$$(\Delta\upsilon)(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2} = \upsilon''(r) + \frac{N\upsilon'(r)}{r} - \frac{\upsilon'(r)}{r} = \upsilon''(r) + \frac{N-1}{r}\upsilon'(r)$$

και το πρόβλημα (3.44) γίνεται

$$\left.\begin{array}{c} -\upsilon''(r) - \dfrac{N-1}{r}\upsilon'(r) = f^*, 0 < r < R \\ \upsilon(0) = \upsilon(R) = 0 \end{array}\right\} \tag{3.51}$$

όπου R η ακτίνα της μπάλας Ω^*. Πολλαπλασιάζοντας με r^{N-1} και ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή μια φορά, έχουμε από τον ορισμό της f^* ως προς τη μονοδιάστατη φθίνουσα αναδιάταξη

$$-r^{N-1}\upsilon'(r) = \int_0^r \sigma^{N-1} f^{\#}\left(\omega_N \sigma^N\right) d\sigma$$

και κάνοντας την αντικατάσταση

$$\omega_N \sigma^N = s \Rightarrow N\omega_N \sigma^{N-1} d\sigma = ds,$$

έχουμε

$$-r^{N-1}\upsilon'(r) = (N\omega_N)^{-1} \int_0^{\omega_N r^N} f^{\#}(s)\, ds.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά από το r στο R και έχουμε

$$-\int_r^R \upsilon'(\tau)\, d\tau = \int_r^R \tau^{1-N} (N\omega_N)^{-1} \left(\int_0^{\omega_N \tau^N} f^{\#}(s)\, ds\right) d\tau$$
$$\Rightarrow \upsilon(r) = (N\omega_N)^{-1} \int_r^R \tau^{1-N} \left(\int_0^{\omega_N \tau^N} f^{\#}(s)\, ds\right) d\tau$$

και με την αντικατάσταση

$$\xi = \omega_N \tau^N \Rightarrow d\xi = N\omega_N \tau^{N-1} d\tau$$

έχουμε

$$\upsilon(r) = \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2} \int_{\omega_N r^N}^{\omega_N R^N} \xi^{\frac{2}{N}-2} \left(\int_0^{\xi} f^{\#}(s)\, ds\right) d\xi. \tag{3.52}$$

Αφού η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μη αρνητική, η υ είναι ακτινικά φθίνουσα, άρα γράφουμε ισοδύναμα

$$\upsilon^{\#}(s) = \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2} \int_s^{|\Omega|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi)\, d\xi. \tag{3.53}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3.50) και (3.53) έχουμε ότι $u^{\#}(s) \leq \upsilon^{\#}(s)$. Αφού είμαστε στην μπάλα, προκύπτει τελικά από τον ορισμό της συμμετρικοποίησης Schwarz και το Λήμμα 2.1.1 ότι $u^* \leq \upsilon$ σχεδόν παντού στο Ω^*. □

Παρατήρηση 3.4.1. Το προηγούμενο Θεώρημα θα μπορούσε εναλλακτικά να αποδειχθεί με την ανισότητα Pólya-Szegö. Αναλυτικά, αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος, τότε έχουμε

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f u dx.$$

Από την ανισότητα Pólya-Szegö για $p = 2$ έχουμε

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\Omega} f u dx,$$

όπου $u^* \in H_0^1(\Omega^*)$ η συμμετρικοποίση Schwarz της u.
Επιπλέον, από την Ανισότητα Hardy-Littlewood (σχέση (2.26)) ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} f u dx \leq \int_{\Omega^*} f^* u^* dx.$$

Άρα, έχουμε τελικά

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\Omega^*} f^* u^* dx.$$

Άρα, η u^* είναι μία κάτω λύση της ασθενούς μορφής του προβλήματος (3.44). Αν υ είναι κλασσική λύση του προβλήματος (3.44),τότε είναι και ασθενής λύση. Άρα, δείξαμε ότι $u^* \leq \upsilon$ σχεδόν παντού στο Ω^*.

Πρόταση 3.4.1. Θεωρούμε τις υποθέσεις του Θεωρήματος Talenti, με $f \geq 0$. Αν $u^* = \upsilon$, τότε το Ω είναι μία μπάλα.

Απόδειξη. Έστω $\mu(t)$ και $\nu(t)$ οι συναρτήσεις κατανομής των u και υ αντίστοιχα. Αν $u^* = \upsilon$, τότε προφανώς $\mu(t) = \nu(t)$.
Είναι γνωστό ότι $\mu(t) = \omega_N (r(t))^N$ και $u^*(r(t)) = t$. Άρα από τη σχέση (3.52) έχουμε

$$t = \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2} \int_{\mu(t)}^{|\Omega|} \xi^{\frac{2}{N}-2} F(\xi)\, d\xi.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t προκύπτει

$$1 = \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2} (\mu(t))^{\frac{2}{N}-2} F(\mu(t))(-\mu'(t))$$

για $t > 0$. Παρατηρούμε, τότε, ότι στη σχέση (3.48) της απόδειξης τους Θεωρήματος 3.4.1 έχουμε ισότητα, που συνεπάγεται ότι έχουμε ισότητα και στο Πόρισμα 3.2.3. Άρα από το Πόρισμα 3.2.2 έχουμε

$$P_\Omega(\{u > t\}) = N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\{u > t\}|^{1-\frac{1}{N}},$$

δηλαδή το σύνολο $\{u > t\}$ ικανοποιεί την ισότητα στην κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα. Συνεπώς, για $t > 0$ το σύνολο $\{u > t\}$ είναι μια μπάλα. Το $\Omega = \{u > 0\}$ είναι τότε η αύξουσα ένωση αυτών των συνόλων, που συνεπάγεται ότι το Ω είναι κυρτό.
Θεωρούμε, τώρα, την φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n \to t$ καθώς το $n \to \infty$, τέτοια ώστε κάθε ένα από τα σύνολο $\{u > t_n\}$ να είναι μία μπάλα με κέντρο το $x_n \in \Omega$ και ακτίνα R_n. Η ακολουθία (R_n) είναι αύξουσα με $R_n \to R$ καθώς το $n \to \infty$, άρα έχουμε ότι

$$|\Omega| = \lim_{n\to\infty} \omega_N R_N^N = \omega_N R^N$$

και επεκτείνοντας μια υπακολουθία, $x_n \to x \in \overline{\Omega}$.
Αν $y \in \Omega$, τότε για n αρκετά μεγάλο $y \in \{u > t_n\}$. Επομένως, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει

$$|y - x| = |y - x + x_n - x_n| \le |y - x_n| + |x_n - x| \le R + |x_n - x|.$$

Έπεται ότι $|y - x| \le R$ και άρα το Ω είναι ένα κυρτό σύνολο που περιέχεται στην μπάλα με κέντρο το x και μέτρο ίσο με αυτό της μπάλας. Συνεπώς, το Ω είναι η μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα R. □

Πρόταση 3.4.2. Με τις υποθέσεις και τον συμβολισμό του προηγούμενου Θεωρήματος, έχουμε

$$\|u\|_{p,\Omega} \le \|\upsilon\|_{p,\Omega^*} \qquad \text{για όλα τα} \quad 1 \le p \le \infty \tag{3.54}$$

και

$$\|\nabla u\|_{q,\Omega} \le \|\nabla \upsilon\|_{q,\Omega^*} \qquad \text{για όλα τα} \quad 1 \le q \le 2. \tag{3.55}$$

Απόδειξη. Στο προηγούμενο Θεώρημα δείξαμε ότι $0 \le u^* \le \upsilon$ στο Ω^*. Επιπλέον γνωρίζουμε από την Παράγραφο 2.3 ότι η συμμετρικοποίηση Schwarz διατηρεί τις νόρμες. Συνεπώς, έχουμε

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u^*\|_{p,\Omega^*} \le \|\upsilon\|_{p,\Omega^*}$$

που αποδεικνύει τη σχέση (3.54).

Έστω $t > 0$. Από την ανισότητα Hölder για $1 \le q \le 2$ έχουμε

$$\int_{\{t<u\le t+h\}} |\nabla u|^q dx \le \left(\int_{\{t<u\le t+h\}} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\{t<u\le t+h\}} dx\right)^{\frac{2-q}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{\{t<u\le t+h\}} |\nabla u|^q dx \le \left(\int_{\{t<u\le t+h\}} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} |\mu(t+h) - \mu(t)|^{\frac{2-q}{2}}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $h \downarrow 0$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της απόδειξης του προηγούμενου Θεωρήματος προκύπτει

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}|\nabla u|^q dx &\leq \left(-\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}(-\mu'(t))^{\frac{2-q}{2}} \\
&\leq (F(\mu(t)))^{\frac{q}{2}}(-\mu'(t))^{\frac{2-q}{2}}.
\end{aligned}$$

Αν $M \leq \infty$ η μέγιστη τιμή της συνάρτησης u, τότε ολοκληρώνοντας από το 0 στο M έχουμε

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^q dx \leq \int_0^M \left(F(\mu(t))(-\mu'(t))^{-1}\right)^{\frac{q}{2}}(-\mu'(t))\,dt.$$

Στη σχέση (3.48) τα δύο μέλη τις ανισότητας είναι θετικά, αφού η $-\mu(t)$ είναι αύξουσα, επομένως εφαρμόζοντας την στην προηγούμενη σχέση προκύπτει

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^q dx \leq \int_0^M \left[\left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2}(\mu(t))^{\frac{2}{N}-2}(F(\mu(t)))^2\right]^{\frac{q}{2}}(-\mu'(t))\,dt$$

και με αλλαγή μεταβλητής $\xi = \mu(t)$, έχουμε

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^q dx \leq \int_0^{|\Omega|}\left[\left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}\xi^{\frac{1}{N}-1}F(\xi)\right]^q d\xi. \tag{3.56}$$

Τέλος, αφού η συνάρτηση υ είναι φθίνουσα, θα είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο Ω^*. Με αλλαγή μεταβλητής $s = \omega_N r^N$ στην σχέση (3.52) και παραγώγιση ως προς s προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\upsilon'\left(\left(\omega_N^{-1}s\right)^{\frac{1}{N}}\right)\frac{1}{N}\left(\omega_N^{-1}s\right)^{\frac{1}{N}-1}\omega_N^{-1} = -\left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-2}s^{\frac{2}{N}-2}F(s) \\
&\Rightarrow \upsilon'\left(\left(\omega_N^{-1}s\right)^{\frac{1}{N}}\right) = -N^{-1}\omega_N^{-\frac{1}{N}}s^{\frac{1}{N}-1}F(s) \\
&\Rightarrow |\upsilon'(r)| = (N\omega_N)^{-1}r^{1-N}F\left(\omega_N r^N\right).
\end{aligned}$$

Επομένως χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*}|\nabla \upsilon|^q dx &= \int_0^R |\upsilon'(r)|^q N\omega_N r^{N-1}dr \\
&= \int_0^R \left[(N\omega_N)^{-1}r^{1-N}F\left(\omega_N r^N\right)\right]^q N\omega_N r^{N-1}dr.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

και κάνοντας ξανά την αντικατάσταση $\xi = \omega_N r^N$ στο δεξί μέλος της σχέσης, βλέπουμε ότι είναι ίδιο με το δεξί μέλος της σχέσης (3.56), αφού είναι γνωστό ότι $|\Omega| = |\Omega^*|$. Συνεπώς από τις σχέσεις (3.56) και (3.57) προκύπτει ότι

$$\|\nabla u\|_{q,\Omega} \leq \|\nabla \upsilon\|_{q,\Omega^*}.$$

$\square$

Κεφάλαιο 4

Η Ανισότητα Faber-Krahn

4.1 Η Ανισότητα Faber-Krahn σε Ευκλείδειους Χώρους

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ανισότητα Faber-Krahn σε Ευκλείδειους χώρους και σε πολλαπλότητες Riemann. Αρχικά η ανισότητα διατυπώθηκε από τον Lord Rayleigh ως εικασία στη διατριβή του στη Θεωρία του ήχου το 1894, και αργότερα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Faber το 1923 και Krahn το 1924.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο χωρίο και $f \in L^2(\Omega)$. Θεωρούμε ξανά το πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet για τον Λαπλασιανό τελεστή, που ορίσαμε στην Παράγραφο 3.4, με $u \in H_0^1(\Omega)$ να είναι η μοναδική λύση (Θεώρημα Lax-Milgram) της ασθενούς μορφής του προβλήματος

$$B(u, v) = \int_\Omega f v dx \ , \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega) . \tag{4.1}$$

Ορίζουμε, τότε, τον τελεστή $H : \mathrm{Dom}(H) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, ως $H = -\Delta_{\mathrm{Dir}}$, όπου Δ_{Dir} ο Λαπλασιανός τελεστής με Dirichlet συνοριακές συνθήκες και

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \exists f \in L^2(\Omega) : B(u, \phi) = \int_\Omega f \phi dx \, , \, \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\} .$$

Ο τελεστής H είναι μη φραγμένος. Επιπλέον, από τη σχέση (3.43) έχουμε ότι ο H είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή $Hu \geq 0$ και αν $Hu = 0$, τότε $u = 0$ (προκύπτει άμεσα από τις συνοριακές συνθήκες υποθέτοντας την ύπαρξη δεύτερης λύσης για το μη ομογενές πρόβλημα). Άρα $\mathrm{Ker}(H) = \{0\}$, που συνεπάγεται ότι ο τελεστής H είναι 1-1.
Άρα ο H είναι αντιστρέψιμος. Θέτουμε $G = H^{-1}$ και για $f \in L^2(\Omega)$ έχουμε $u = Gf$. Αποδεικνύεται, τότε, ότι ο G είναι ένας φραγμένος τελεστής από τον $L^2(\Omega)$ στον $H_0^1(\Omega)$ αφού από το Θεώρημα Lax-Milgram έχουμε

$$c \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B(u, u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \Rightarrow$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Άρα $\|Gf\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
Από το Θεώρημα Rellich-Kondrashov είναι γνωστό ότι

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$$

και η εμφύτευση είναι συμπαγής. Επομένως, ο τελεστής

$$G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

είναι συμπαγής, δηλαδή για κάθε φραγμένη ακολουθία $(f_n) \subseteq L^2(\Omega)$ με $\|Gf_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$ υπάρχει υπακολουθία $Gf_{n_k} \to g$ στον $L^2(\Omega)$.
Έστω, τώρα, $f, g \in L^2(\Omega)$, τότε αφού η διγραμμική μορφή B είναι συμμετρική, έχουμε

$$\begin{aligned}
(Gf, g)_{L^2(\Omega)} &= \left(H^{-1}f, g\right)_{L^2(\Omega)} = \left(H^{-1}f, HH^{-1}g\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(HH^{-1}g, H^{-1}f\right)_{L^2(\Omega)} = B\left(H^{-1}g, H^{-1}f\right) \\
&= B\left(H^{-1}f, H^{-1}g\right) = \left(HH^{-1}f, H^{-1}g\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(f, H^{-1}g\right)_{L^2(\Omega)} = (f, Gg)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Άρα ο $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι ένας συμπαγής, αυτοσυζυγής τελεστής.
Επομένως, το φάσμα του περιέχει το 0.
Επιπλέον, για $f \in L^2(\Omega)$, έχουμε ότι το $Gf \in H_0^1(\Omega)$ είναι μία (ασθενής) λύση του προβλήματος (4.1), δηλαδή

$$\int_\Omega \nabla(Gf) \cdot \nabla \upsilon dx = \int_\Omega f\upsilon dx, \quad \text{για κάθε } \upsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2}$$

Άρα, για $\upsilon = Gf$ έχουμε

$$\int_\Omega (Gf) f dx = \int_\Omega \nabla(Gf) \cdot \nabla(Gf) dx = |Gf|_{1,\Omega}^2 > 0, \quad \text{αν } f \neq 0,$$

όπου

$$|u|_{1,\Omega} = \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}^2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}^2\right) dx}$$

η ισοδύναμη νόρμα στον χώρο $H_0^1(\Omega)$.
Έπεται, επομένως, από το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς θετικά ορισμένους τελεστές ότι υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{\phi_n\}$ του $L^2(\Omega)$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του G και μια ακολουθία αντίστοιχων θετικών ιδοτιμών τέτοιων ώστε $\mu_n \downarrow 0$.
Αναζητούμε, τώρα, $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \left(H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}\right)$, τέτοιο ώστε να ικανοποιεί το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον τελεστή H

$$B(u, \upsilon) = \lambda(u, \upsilon) \quad \text{για κάθε} \quad \upsilon \in H_0^1(\Omega) \tag{4.3}$$

Θεώρημα 4.1.1. *Ο τελεστής H έχει μια άπειρη ακολουθία θετικών πραγματικών ιδιοτιμών*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \tag{4.4}$$

με $\lambda_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Κάθε ιδιοτιμή είναι απομονωμένη. Οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_n\}$ συνιστούν μια ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι εφαρμόζοντας το Φασματικό Θεώρημα στον τελεστή G, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση από ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_n\}$ στον $L^2(\Omega)$ και μία φθίνουσα ακολουθία θετικών ιδιοτιμών (μ_n), που συγκλίνει στο 0, τέτοιων ώστε να ισχύει

$$G\phi_n = \mu_n \phi_n.$$

Άρα, αντικαθιστώντας με $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ προκύπτει

$$\phi_n = G(\lambda_n \phi_n) \Rightarrow H\phi_n = \lambda_n \phi_n \tag{4.5}$$

Αφού $\mathrm{Range}(G) \subseteq H_0^1(\Omega)$, από τις σχέσεις (4.2) και (4.3) έχουμε

$$\int_\Omega \nabla\phi_n \cdot \nabla \upsilon dx = \lambda_n \int_\Omega \phi_n \upsilon dx, \quad \text{για κάθε } \upsilon \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow$$
$$B(\phi_n, \upsilon) = \lambda_n (\phi_n, \upsilon), \quad \text{για κάθε } \upsilon \in H_0^1(\Omega).$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ορισμός 4.1.1. (Πηλίκο Rayleigh) Αν $u \in H_0^1(\Omega)$ με $u \neq 0$, τότε το Πηλίκο Rayleigh ορίζεται ως

$$R(u) = \frac{B(u,u)}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{4.6}$$

Θεώρημα 4.1.2. ***(Μεταβολικός χαρακτηρισμός των ιδιοτιμών)*** *Έστω V_n ο υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$ που παράγεται από τις ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n\}$.*
Τότε

$$\begin{aligned}
\lambda_n = R(\phi_n) &= \max_{0 \neq \upsilon \in V_n} R(\nu) \\
&= \min_{\upsilon \perp V_{n-1}} R(\nu) \\
&= \min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim W = n}} \max_{\upsilon \in W} R(\upsilon)
\end{aligned}$$

και

$$\lambda_1 = \min_{\substack{\upsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \upsilon \neq 0}} R(\upsilon) = R(\phi_1). \tag{4.7}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε την ορθοκανονική βάση $\{\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n\}$. Αν το διάνυσμα $\upsilon \in V_n = \langle \phi_1, \phi_2, \dots \phi_n \rangle$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $V_n \subset H_0^1(\Omega)$

$$\upsilon = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \cdots + a_n\phi_n$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$.
Άρα έχουμε από τον ορισμό του πηλίκου Rayleigh

$$\begin{aligned}
R(\upsilon) = \frac{B(\upsilon,\upsilon)}{\|\upsilon\|^2_{L^2(\Omega)}} &= \frac{|a_1|^2 B(\phi_1,\phi_1) + \cdots + |a_n|^2 B(\phi_n,\phi_n)}{|a_1|^2\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \cdots + |a_n|^2\|\phi_n\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&= \frac{a_1^2 B(\phi_1,\phi_1) + \cdots + a_n^2 B(\phi_n,\phi_n)}{a_1^2\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \cdots + a_n^2\|\phi_n\|^2_{L^2(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4.3) και (4.4) και το γεγονός ότι οι ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_i\}$, $1 \leq i \leq n$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση έχουμε

$$\begin{aligned} R(\upsilon) &= \frac{a_1^2\lambda_1\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \cdots + a_n^2\lambda_n\|\phi_n\|^2_{L^2(\Omega)}}{a_1^2\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \cdots + a_n^2\|\phi_n\|^2_{L^2(\Omega)}} \\ &= \frac{a_1^2\lambda_1 + \cdots + a_n^2\lambda_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \\ &\leq \frac{\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\lambda_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = \lambda_n = R(\phi_n). \end{aligned}$$

Άρα

$$\lambda_n = \max_{0 \neq \upsilon \in V_n} R(\nu).$$

Έστω, τώρα, $\upsilon \perp V_{n-1}$. Τότε

$$\upsilon = a_n\phi_n + a_{n+1}\phi_{n+1} + \cdots + a_m\phi_m + \cdots$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}, i \geq n$ και $m > n$.
Όπως προηγουμένως έχουμε

$$\begin{aligned} R(\upsilon) &= \frac{a_n^2\lambda_n + a_{n+1}^2\lambda_{n+1} + \cdots + a_m^2\lambda_m + \ldots}{a_n^2 + a_{n+1}^2 + \cdots + a_m^2 + \ldots} \\ &\geq \frac{\left(a_n^2 + a_{n+1}^2 + \cdots + a_m^2 + \ldots\right)\lambda_n}{a_n^2 + a_{n+1}^2 + \cdots + a_m^2 + \ldots} = \lambda_n = R(\phi_n). \end{aligned}$$

Άρα

$$\lambda_n = R(\phi_n) = \min_{\upsilon \perp V_{n-1}} R(\nu).$$

Αν W ένας τυχαίος υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$ διάστασης n, τότε υπάρχει διάνυσμα $w \in W$ το οποίο είναι κάθετο στον $V_{n-1} = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \rangle$.
Από την προηγούμενη σχέση ισχύει

$$\lambda_n \leq R(w)$$

και έτσι έχουμε

$$\lambda_n \leq \max_{\upsilon \in W} R(\nu).$$

Όμως ο W είναι τυχαίος υπόχωρος, συνεπώς γενικεύοντας για κάθε $n-$διάστατο υπόχωρο έχουμε

$$\lambda_n = \min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim W = n}} \max_{\upsilon \in W} R(\upsilon). \tag{4.8}$$

Για $n = 1$ έπεται προφανώς η σχέση (4.7). □

Παρατήρηση 4.1.1. Προφανώς, η σχέση (4.7) ισχύει και σε μία πολλάπλοτητα Riemann . Για την απόδειξη του αντίστοιχου Θεωρήματος βλέπε [9].

Λήμμα 4.1.1. *Αν η $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$ με $\upsilon \neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$R(\upsilon) = \lambda_1, \tag{4.9}$$

τότε η υ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του H που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή λ_1.

Απόδειξη. Έστω $w \in H_0^1(\Omega)$ και $t > 0$. Τότε $\upsilon + tw \in H_0^1(\Omega)$ και από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι

$$R(\upsilon + tw) \geq \lambda_1 = R(\upsilon).$$

Κανονικοποιούμε την υ και έχουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|\upsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$. Άρα

$$\frac{\int_\Omega (\nabla(\upsilon + tw) \cdot \nabla(\upsilon + tw))\,dx}{\int_\Omega (\upsilon + tw)^2\,dx} \geq \int_\Omega (\nabla\upsilon \cdot \nabla\upsilon)\,dx = \lambda_1 \Rightarrow$$
$$\int_\Omega (\nabla(\upsilon + tw) \cdot \nabla(\upsilon + tw))\,dx \geq \lambda_1 \int_\Omega (\upsilon + tw)^2\,dx$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση $\int_\Omega \nabla\upsilon \cdot \nabla\upsilon dx = \lambda_1 \int_\Omega \upsilon\upsilon dx$ γίνεται

$$2t\int_\Omega \nabla\upsilon \cdot \nabla w dx + t^2 \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w dx \geq \lambda_1 \left(2t\int_\Omega \upsilon w dx + t^2 \int_\Omega ww dx\right).$$

Διαιρώντας, τώρα, με $2t$ και παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0$ προκύπτει τελικά

$$\int_\Omega \nabla\upsilon \cdot \nabla w dx = \lambda_1 \int_\Omega \upsilon w dx$$

και αφού το $w \in H_0^1(\Omega)$ είναι τυχαίο, αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.1.3. *Η πρώτη ιδιοτιμή λ_1 του H είναι απλή και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση έχει σταθερό πρόσημο στο Ω. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε ϕ_1 τέτοια ώστε $\phi_1 > 0$ στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω $\phi \in H_0^1(\Omega)$ μία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή λ_1. Αφού $\phi \in H_0^1(\Omega)$, έχουμε ότι $|\phi| \in H_0^1(\Omega)$.
Άρα $\phi^+ = \dfrac{|\phi| + \phi}{2} \in H_0^1(\Omega)$ και $\phi^- = \dfrac{|\phi| - \phi}{2} \in H_0^1(\Omega)$.
Γράφουμε τότε $\phi = \phi^+ - \phi^-$ και έχουμε

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\phi^+ dx = \lambda \int_\Omega \phi\phi^+ dx \Rightarrow$$
$$\int_\Omega \nabla\phi^+ \cdot \nabla\phi^+ dx - \int_\Omega \nabla\phi^- \cdot \nabla\phi^+ dx = \lambda \int_\Omega \phi^+\phi^+ dx - \lambda \int_\Omega \phi^-\phi^+ dx.$$

Από τον ορισμό των ϕ^+ και ϕ^- γνωρίζουμε ότι η ϕ^+ μηδενίζεται όταν η $\phi^- \neq 0$ και αντίστροφα, άρα προκύπτει τελικά ότι

$$\int_\Omega \nabla\phi^+ \cdot \nabla\phi^+ dx = \lambda \int_\Omega \left(\phi^+\right)^2 dx.$$

Ομοίως

$$\int_\Omega \nabla\phi^- \cdot \nabla\phi^- dx = \lambda \int_\Omega \left(\phi^-\right)^2 dx.$$

Αν η ϕ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο Ω, τότε οι ϕ^+ και ϕ^- δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$R\left(\phi^+\right) = \lambda_1 = R\left(\phi^-\right).$$

Άρα, από το Λήμμα 4.1.1 οι ϕ^+ και ϕ^- είναι ιδιοσυναρτήσεις της λ_1.
Αφού $\phi^+, \phi^- \geq 0$ και δεν είναι ταυτοτικά μηδενικές, προκύπτει από την ισχυρή αρχή μεγίστου ότι $\phi^+, \phi^- > 0$, που είναι αδύνατο από τον ορισμό τους. Άρα η ϕ έχει σταθερό πρόσημο στο Ω και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε μια $\phi_1 > 0$ στο Ω που είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1.
Υποθέτουμε, τώρα, ότι η πρώτη ιδιοτιμή δεν είναι απλή. Τότε, υπάρχει άλλη ιδιοσυνάρτηση $\bar{\phi}_1$ ορθογώνια στην ϕ_1. Η $\bar{\phi}_1$ επίσης έχει σταθερό πρόσημο, και άρα το ολοκλήρωμα $\int_\Omega \phi_1 \bar{\phi}_1 dx$ δεν μηδενίζεται ποτέ, που είναι άτοπο.
Άρα η λ_1 είναι απλή ιδιοτιμή. □

Θεώρημα 4.1.4. (Faber-Krahn) *Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο. Αν με $\{\lambda_k(\Omega)\}$ συμβολίζουμε την ακολουθία των ιδιοτιμών του Λαπλασιανού τελεστή με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, τότε*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*). \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Έστω $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$, με $\phi_1 > 0$, η πρώτη ιδιοσυνάρτηση του Λαπλασιανού τελεστή στο Ω. Τότε, από τον χαρακτηρισμό του πηλίκου Rayleigh έχουμε

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{B(\phi_1, \phi_1)}{\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 dx}{\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

Αφού η $\phi_1 > 0$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Pólya-Szegö για $p = 2$ και το γεγονός ότι στην συμμετρικοποίηση Schwarz οι νόρμες διατηρούνται, προκύπτει ότι

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 dx}{\|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla \phi_1^*|^2 dx}{\|\phi_1^*\|^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_1(\Omega^*)$$

και $\phi_1^* \in H_0^1(\Omega^*)$, όπου στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσαμε ξανά τον χαρακτηρισμό του πηλίκου Rayleigh για την ιδιοτιμή του Λαπλασιανού τελεστή στην μπάλα Ω^*. □

Παρατήρηση 4.1.2. Αν το Ω είναι μια μπάλα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πρώτη ιδιοτιμή του Λαπλασιανού τελεστή με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, με τη βοήθεια των συναρτήσεων Bessel. Συγκεκριμένα, έστω $\Omega = \Omega^* = B_R$ η μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R. Αφού η συμμετρικοποίηση διατηρεί τις $L^2(\Omega)$ νόρμες και μειώνει το ολοκλήρωμα $\int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 dx$ (βλ. Θεώρημα Pólya-Szegö για $p = 2$), το πηλίκο Rayleigh της ϕ_1 είναι μεγαλύτερο από αυτό της ϕ_1^*. Από το Θεώρημα 4.1.2 είναι γνωστό ότι η μικρότερη τιμή του πηλίκου Rayleigh είναι η $\lambda_1(\Omega)$, άρα η ϕ_1^* είναι επίσης μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1(\Omega)$. Όμως η πρώτη ιδιοτιμή είναι απλή, επομένως $\phi_1 = \phi_1^*$, δηλαδή η πρώτη θετική ιδιοσυνάρτηση του Λαπλασιανού τελεστή με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, είναι μία ακτινική συνάρτηση, η οποία είναι ακτινικά φθίνουσα όταν το Ω είναι μια μπάλα.
Μπορούμε, τότε, να ορίσουμε $\phi_1(x) = u(|x|)$, όπου u η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$u''(x) + \frac{N-1}{r} u'(x) + \lambda u(r) = 0,$$

η οποία προκύπτει με αντικατάσταση πολικών συντεταγμένων στο πρόβλημα του Λαπλασιανού τελεστή, όπως δείξαμε στην Παράγραφο 3.4.

Με απλούς υπολογισμούς αποδεικνύεται ότι η λύση γράφεται στην εξής μορφή

$$u(r) = cr^{1-\frac{N}{2}} J_{\frac{N}{2}-1}\left(\sqrt{\lambda} r\right),$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά και $J_p(\rho)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης p, που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}(\rho) + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2}\right) y(\rho) = 0.$$

Από τη συνοριακή συνθήκη $u(R) = 0$ καθορίζεται η τιμή της λ. Αν $j_{p,1}$ η πρώτη θετική ρίζα της συνάρτησης J_p, έχουμε

$$\sqrt{\lambda} R = j_{\frac{N}{2}-1,1}.$$

Άρα

$$\lambda_1(B_R) = \frac{j^2_{\frac{N}{2}-1,1}}{R^2}$$

και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$\phi_1(x) = |x|^{1-\frac{N}{2}} J_{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{j_{\frac{N}{2}-1,1}}{R}|x|\right).$$

Θεώρημα 4.1.5. *Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο και $\lambda_1(\Omega)$ η πρώτη ιδιοτιμή του Λαπλασιανού τελεστή με Dirichlet συνοριακές συνθήκες. Αν*

$$\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega^*), \tag{4.11}$$

τότε το Ω είναι μπάλα.

Απόδειξη. Έστω $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$, με $\phi_1 > 0$, η πρώτη κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση του Λαπλασιανού τελεστή. Τότε, συμβολίζοντας $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega^*)$, ισχύει

$$\begin{aligned} -\Delta\phi_1 &= \lambda_1\phi_1 \quad, \text{ στο } \Omega \\ \phi_1 &= 0 \qquad, \text{ στο } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Αν $w \in H_0^1(\Omega^*)$ η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \lambda_1\phi_1^* \quad, \text{ στο } \Omega^* \\ w &= 0 \qquad, \text{ στο } \partial\Omega^* \end{aligned}$$

τότε, αφού η $\lambda_1\phi_1^*$ είναι η συμμετρικοποίση Schwarz της $\lambda_1\phi_1$ και $\phi_1 > 0$, από το Θεώρημα Talenti προκύπτει

$$\phi_1^* \le w.$$

Άρα

$$-\Delta w \le \lambda_1 w.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της προηγούμενης ανισότητας με w και ολοκληρώνοντας στο Ω^* προκύπτει με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega^*} \Delta w \cdot w dx \leq \lambda_1 \int_{\Omega^*} w^2 dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega^*} |\nabla w|^2 dx \leq \lambda_1 \int_{\Omega^*} w^2 dx \\ &\Rightarrow \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla w|^2 dx}{\int_{\Omega^*} w^2 dx} \leq \lambda_1 . \end{aligned}$$

Η λ_1 είναι επίσης η πρώτη ιδιοτιμή του Λαπλασιανού τελεστή στο Ω^*, τότε αφού είναι η ελάχιστη τιμή του πηλίκου Rayleigh, προκύπτει

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla w|^2 dx}{\int_{\Omega^*} w^2 dx} = R(w) .$$

Επομένως, έχουμε από το Λήμμα 4.1.1 ότι η w είναι η ιδιοσυνάρτηση του Λαπλασιανού τελεστή που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, δηλαδή $-\Delta w = \lambda_1 w$.
Άρα $w = \phi_1^*$ και έτσι έχουμε ισότητα στο Θεώρημα Talenti, που από την Πρόταση 3.4.1 έπεται ότι το Ω είναι μια μπάλα. □

4.2 Η Ανισότητα Faber-Krahn σε Πολλαπλότητες Riemann

Ορισμός 4.2.1. Θεωρούμε μια πολλαπλότητα Riemann (M, V). Έστω

$$Q(u, \upsilon) = \int_M \langle \nabla u, \nabla \upsilon \rangle dV, \quad \text{για κάθε} \quad u, \upsilon \in H^1(M),$$

όπου ∇u και $\nabla \upsilon$ οι ασθενείς κλίσεις των u και υ αντίστοιχα.
Ορίζουμε τον τελεστή **Laplace-Beltrami** ως

$$L : \mathrm{Dom}(L) \to L^2(M),$$

όπου

$$\mathrm{Dom}(L) = \left\{ u \in H^1(M) \mid \exists f \in L^2(M) : Q(u, \phi) = \int_M f\phi dV, \forall \phi \in C_c^\infty(M) \right\}$$

Αν $u \in \mathrm{Dom}(L)$, τότε η f είναι μοναδική και ορίζουμε

$$Lu = f$$

άρα $\langle Lu, \phi \rangle_{L^2(M)} = Q(u, \phi)$ για κάθε $\phi \in C_c^\infty(M)$.
Ο τελεστής Laplace-Beltrami είναι ένας μη αρνητικός, συμμετρικός τελεστής, αφού για κάθε $u \in \mathrm{Dom}(L)$ έχουμε

$$\langle Lu, u \rangle_{L^2(M)} = \int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle dV = \int_M |\nabla u|^2 dV \geq 0.$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τον τύπο του Green, κάθε $u \in \mathcal{C}^2(M) \cup L^2(M)$ με

$$\int_M |\Delta u|^2 dV < +\infty$$

ανήκει στο $\mathrm{Dom}\,(L)$ και μάλιστα ισχύει η σχέση

$$Lu = Hu$$

όπου H, αντίστοιχα με τους Ευκλείδειους χώρους (βλ. Παράγραφος 4.1), ο τελεστής που ορίζεται ως

$$H = -\Delta_{\mathrm{Dir}},$$

όπου Δ_{Dir} ο Λαπλασιανός τελεστής με Dirichlet συνοριακές συνθήκες στην πολλαπλότητα M.

Άρα, αφού ο τελεστής Laplace-Beltrami αποτελεί επέκταση του τελεστή H, θα τον συμβολίζουμε με H. Όμοια με τον $\mathbb{R}^N$, αποδεικνύεται (βλ. [3]) ότι ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.1. *Αν M είναι μια πλήρης $N-$διάστατη πολλαπλότητα Riemann, τότε ο τελεστής H με πεδίο ορισμού $\mathrm{Dom}\,(H)$ είναι αυτοσυζυγής.*

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω μια πολλαπλότητα Riemann M. Θεωρούμε το πρόβλημα Cauchy (πρόβλημα αρχικών τιμών) στο $M \times (0, +\infty)$ για την εξίσωση θερμότητας*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \ , \ \text{στο} \ \ M \times (0, +\infty) \\ u &= f \quad , \ \text{στο} \ \ M \times \{t = 0\} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Για κάθε $x \in M$ και $t > 0$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $P\,(x, y, t) \in L^2\,(M)$ τέτοια ώστε

$$u\,(x, t) = e^{-Ht} f\,(x) = \int_M P\,(x, y, t)\, f\,(y)\, dV\,(y)$$

για κάθε $f \in L^2\,(M)$. Η συνάρτηση P ονομάζεται ***πυρήνας θερμότητας*** *της πολλαπλότητας M.*

Τότε, για κάθε $f \in L^2\,(M)$ η συνάρτηση $u\,(x, t) = e^{-Ht} f\,(x)$ ανήκει στο $\mathcal{C}^\infty\,(M \times R_+)$ και είναι η λύση του προβλήματος (4.12).

Θεώρημα 4.2.3. *Σε μία πολλαπλότητα M ο πυρήνας θερμότητας ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(i) Ταυτότητα ημιομάδας: Για κάθε $x, y \in M$ και $t, s > 0$,

$$P\,(x, y, t + s) = \int_M P\,(x, z, t)\ P\,(z, y, s)\, dV\,(z)\,. \tag{4.13}$$

(ii) Συμμετρία:

$$P\,(x, y, t) = P\,(y, x, t) \quad \text{για κάθε} \ \ x, y \in M \ \ \text{και} \ \ t > 0. \tag{4.14}$$

(iii) $P\,(x, y, t) \geq 0$ *για κάθε $x, y \in M$ και $t > 0$, και*

$$\int_M P\,(x, y, t)\ dV\,(y) \leq 1 \tag{4.15}$$

για κάθε $x \in M$ και $t > 0$.

(iv) Για κάθε $f \in L^2\,(M)$ και για κάθε $x \in M$ και $t > 0$,

$$e^{-Ht} f\,(x) = \int_M P\,(x, y, t)\ f\,(y)\, dV\,(y)\,. \tag{4.16}$$

(v) Για κάθε $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$,

$$\int_M P(x, y, t)\, f(y)\, dV(y) \to f \ \text{ καθώς } \ t \to 0, \tag{4.17}$$

όπου η σύγκλιση είναι στον $\mathcal{C}^\infty(M)$

Θεώρημα 4.2.4. *Για κάθε* $f \in L^1(M)$ *και* $t > 0$, *έχουμε ότι* $e^{-Ht}f \in L^1(M)$ *και ισχύει*

$$\|e^{-Ht}f\|_{L^1(M)} \le \|f\|_{L^1(M)}$$

και

$$e^{-Ht}f \overset{L^1(M)}{\to} f, \quad \text{καθώς} \quad t \to 0$$

Για μία απόδειξη των Θεωρημάτων 4.2.2, 4.2.3 και 4.2.4 βλέπε [9].

Ορισμός 4.2.2. Έστω $1 \le p < q \le +\infty$. Θα λέμε ότι η ημιομάδα θερμότητας e^{-Ht} είναι $L^p(M) \to L^q(M)$ **υπερσυσταλτική** αν υπάρχει μία θετική συνάρτηση $\theta(t)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^p(M) \cap L^2(M)$ και $t > 0$, έχουμε ότι

$$e^{-Ht}f \in L^q(M)$$

και

$$\|e^{-Ht}f\|_{L^q(M)} \le \theta(t)\, \|f\|_{L^p(M)}.$$

Ορισμός 4.2.3. (Συζυγείς Εκθέτες)
Έστω $r \in [1, +\infty]$. Ο συζυγής εκθέτης r^* του r ορίζεται μέσω της

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} = 1.$$

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω ότι η ημιομάδα θερμότητας* e^{-Ht} *είναι* $L^p(M) \to L^q(M)$ *υπερσυσταλτική με συνάρτηση* $\theta(t)$. *Τότε, η* e^{-Ht} *είναι επίσης* $L^{q^*}(M) \to L^{p^*}(M)$ *υπερσυσταλτική με την ίδια συνάρτηση.*

Απόδειξη. Αφού η e^{-Ht} είναι $L^p(M) \to L^q(M)$ υπερσυσταλτική με συνάρτηση $\theta(t)$, έχουμε από τον ορισμό ότι για κάθε $g \in L^p(M) \cap L^2(M)$ και $t > 0$,

$$\|e^{-Ht}g\|_{L^q(M)} \le \theta(t)\, \|g\|_{L^p(M)}.$$

Από το Θεώρημα 1.2.3 (i) είναι γνωστό ότι η ημιομάδα θερμότητας e^{-Ht} είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Άρα, για κάθε $f \in L^{q^*}(M) \cap L^2(M)$ έχουμε από την ανισότητα Hölder

$$\begin{aligned}\left(e^{-Ht}f, g\right) = \left(f, e^{-Ht}g\right) &\le \|f\|_{L^{q^*}(M)}\|e^{-Ht}g\|_{L^q(M)} \\ &\le \theta(t)\, \|f\|_{L^{q^*}(M)}\|g\|_{L^p(M)}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, από τον ορισμό της νόρμας τελεστή προκύπτει

$$\|e^{-Ht}f\|_{L^{p^*}(M)} = \sup_{g \in L^p(M) \cap L^2(M) \setminus \{0\}} \frac{\left(e^{-Ht}f, g\right)}{\|g\|_{L^p(M)}} \le \theta(t)\, \|f\|_{L^{q^*}(M)}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πόρισμα 4.2.1. Η ημιομάδα θερμότητας e^{-Ht} είναι $L^1(M) \to L^2(M)$ υπερσυσταλτική αν και μόνο αν είναι $L^2(M) \to L^\infty(M)$ υπερσυσταλτική, με την ίδια συνάρτηση.

Θεώρημα 4.2.6. *Η ημιομάδα θερμότητας* e^{-Ht} *είναι* $L^1(M) \to L^2(M)$ *υπερσυσταλτική με συνάρτηση* $\theta(t)$ *αν και μόνο αν ο πυρήνας θερμότητας ικανοποιεί την εκτίμηση*

$$P(x,x,2t) \leq \theta^2(t) \tag{4.18}$$

για κάθε $t > 0$ *και* $x \in M$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι η e^{-Ht} είναι $L^1(M) \to L^2(M)$ υπερσυσταλτική με συνάρτηση $\theta(t)$. Τότε, από το προηγούμενο πόρισμα θα είναι $L^2(M) \to L^\infty(M)$ υπερσυσταλτική με την ίδια συνάρτηση, δηλαδή για κάθε $f \in L^2(M)$ και $t > 0$ έχουμε

$$\|e^{-Ht}f\|_{L^\infty(M)} \leq \theta(t)\,\|f\|_{L^2(M)}. \tag{4.19}$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση $f(\cdot) = P(x,\cdot,t)$ για καθορισμένα $t > 0$ και $x \in M$, έχουμε από τις ιδιότητες του Θεωρήματος 4.2.3

$$e^{-Ht}f(x) = \int_M P(x,z,t)\,P(x,z,t)\,dV(z) = P(x,x,2t)$$

και

$$\|f\|^2_{L^2(M)} = \int_M P^2(x,z,t)\,dV(z) = P(x,x,2t).$$

Άρα από τη σχέση (4.19) προκύπτει

$$P(x,x,2t) \leq \theta(t)\sqrt{P(x,x,2t)}$$

που αποδεικνύει τη σχέση (4.18).
Αντίστροφα, αν ο πυρήνα θερμότητας ικανοποιεί τη σχέση (4.18) για κάθε $t > 0$ και $x \in M$, τότε από τις ιδιότητες του Θεωρήματος 4.2.3, προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|e^{-Ht}f(x)| &= \left|\int_M P(x,y,t)\,f(y)\,dV(y)\right| \\
&\leq \left(\int_M P^2(x,y,t)\,dV(y)\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(M)} \\
&= P(x,x,2t)^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L^2(M)} \Rightarrow \\
\|e^{-Ht}f(x)\|_{L^\infty(M)} &\leq \theta(t)\,\|f\|_{L^2(M)},
\end{aligned}$$

άρα η e^{-Ht} είναι $L^1(M) \to L^2(M)$ υπερσυσταλτική με συνάρτηση $\theta(t)$. □

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann. Τότε, για κάθε $x, y \in M$ και $t > 0$ αποδεικνύεται ότι ισχύει η

$$P(x,y,t) \leq \sqrt{P(x,x,t)\,P(y,y,t)}. \tag{4.20}$$

Για να το δείξουμε αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ημιομάδων. Από την σχέση (4.13) είναι προφανές ότι ισχύει η σχέση

$$P(x,x,t) = \int_M P^2(x,z,t/2)\,dV(z).$$

Άρα από την προηγούμενη σχέση και τις σχέσεις (4.13) και (4.14) προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} P(x,y,t) &= \int_M P(x,z,t/2)\, P(y,z,t/2)\, dV(z) \\ &\leq \left(\int_M P^2(x,z,t/2)\, dV(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M P^2(y,z,t/2)\, dV(z)\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ P(x,y,t) &\leq \sqrt{P(x,x,t)\, P(y,y,t)} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.2.1. Από τη σχέση (4.20) έχουμε ότι η ημιομάδα θερμότητας e^{-Ht} είναι $L^1(M) \to L^2(M)$ υπερσυσταλτική με συνάρτηση $\theta(t)$ αν και μόνο αν ο πυρήνας θερμότητας ικανοποιεί την εκτίμηση

$$P(x,y,2t) \leq \theta^2(t)$$

για κάθε $t > 0$ και $x, y \in M$.

Ορισμός 4.2.4. Έστω Λ μία μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0, +\infty)$. Μια πολλαπλότητα Riemann (M, V) ικανοποιεί την **ανισότητα Faber-Krahn** με συνάρτηση Λ, αν για κάθε μη κενό σχετικά συμπαγές ανοικτό σύνολο $\Omega \subset M$ ισχύει

$$\lambda_{min}(\Omega) \geq \Lambda(V(\Omega))$$

και αφού το φάσμα του τελεστή Laplace με Dirichlet συνοριακές συνθήκες είναι διακριτό, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη σχέση την λ_{min} με λ_1, δηλαδή

$$\lambda_1(\Omega) \geq \Lambda(V(\Omega)). \tag{4.21}$$

Αν το Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $\Omega^* \subset \mathbb{R}^N$ η αντίστοιχη μπάλα, όπως την έχουμε ορίσει στα προηγούμενα κεφάλαια, τότε από το Θεώρημα Faber-Krahn στον $\mathbb{R}^N$ (βλ. Θεώρημα 4.1.4) έχουμε

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

Έστω r η ακτίνα της μπάλας Ω^*, τότε είναι γνωστό ότι $\lambda_1(\Omega^*) = \dfrac{c_N}{r^2}$, όπου c_N θετική σταθερά. Επιπλέον, αφού

$$V(\Omega) = V(\Omega^*) = \frac{\omega_N}{N} r^N,$$

τότε

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*) = c_N \left(N\omega_N^{-1}\right)^{-\frac{2}{N}} V(\Omega)^{-\frac{2}{N}}.$$

Άρα, προκύπτει τελικά η σχέση

$$\lambda_1(\Omega) \geq aV(\Omega)^{-\frac{2}{N}}, \tag{4.22}$$

όπου $a = a(N) = c_N \left(N\omega_N^{-1}\right)^{-\frac{2}{N}} > 0$.
Συνεπώς, η σχέση (4.21) ισχύει με συνάρτηση την $\Lambda(\upsilon) = a\upsilon^{-\frac{2}{N}}$.

Λήμμα 4.2.1. (Η Γενικευμένη Ανισότητα Nash)
Έστω (M, V) μία πολλαπλότητα Riemann, που ικανοποιεί την ανισότητα Faber-Krahn με μία συνάρτηση $\Lambda : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, η οποία είναι φθίνουσα και δεξιά συνεχής. Τότε, για κάθε $0 < \epsilon < 1$ και κάθε συνάρτηση $u \in L^1(M) \cap H_0^1(M) \setminus \{0\}$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\int_M |\nabla u|^2 dV \geq (1-\epsilon)\,\|u\|^2_{L^2(M)} \Lambda\left(\frac{2\|u\|^2_{L^1(M)}}{\epsilon\|u\|^2_{L^2(M)}}\right). \tag{4.23}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.2.1 για τις συναρτήσεις $\psi(t) = |t|$ και $\phi(t) = sgn(t)$ προκύπτει

$$\nabla|u| = sgn(u)\,\nabla u. \tag{4.24}$$

Αρκεί, επομένως, να θεωρήσουμε την u ως μη αρνητική, αφού από την προηγούμενη σχέση έχουμε $|\nabla u| = |\nabla|u||$.
Θα πάρουμε πρώτα την περίπτωση η u να είναι επιπλέον συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $s > 0$, θεωρούμε το ανοικτό σύνολο

$$\Omega_s = \{x \in M : u(x) > s\},$$

τότε από το Παράδειγμα 1.2.1 έχουμε $(u-s)^+ \in H_0^1(\Omega_s)$ και ισχύει

$$\nabla(u-s) = \begin{cases} \nabla u, & \text{για } u > s, \\ 0, & \text{για } u \leq s. \end{cases} \tag{4.25}$$

Άρα έχουμε

$$\int_{\Omega_s} |\nabla(u-s)^+|^2 dV = \int_{\Omega_s} |\nabla u|^2 dV \leq \int_M |\nabla u|^2 dV. \tag{4.26}$$

Από τη σχέση (4.7) και την Παρατήρηση 4.1.1 έχουμε

$$\lambda_1(\Omega_s) \leq \frac{\int_{\Omega_s} |\nabla(u-s)^+|^2 dV}{\int_{\Omega_s} \left((u-s)^+\right)^2 dV}. \tag{4.27}$$

Ολοκληρώνοντας την προφανή ανισότητα

$$u^2 - 2us \leq \left((u-s)^+\right)^2$$

προκύπτει

$$\int_M u^2 dV - 2s\int_M u\,dV \leq \int_M \left((u-s)^+\right)^2 dV \Rightarrow$$

$$\|u\|^2_{L^2(M)} - 2s\|u\|_{L^1(M)} \leq \int_M \left((u-s)^+\right)^2 dV. \tag{4.28}$$

Άρα, από την τελευταία ανισότητα και τις σχέσεις (4.26) και (4.27) προκύπτει τελικά

$$\lambda_1(\Omega_s)\left(\|u\|^2_{L^2(M)} - 2s\|u\|_{L^1(M)}\right) \leq \int_M |\nabla u|^2 dV. \tag{4.29}$$

Από τον ορισμό του Ω_S έχουμε ολοκληρώνοντας

$$\int_{\Omega_s} s dV \leq \int_{\Omega_s} u dV \leq \int_M u dV$$

άρα

$$V(\Omega_s) \leq \frac{1}{s}\int_M u dV = \frac{1}{s}\|u\|_{L^1(M)}$$

και αφού η συνάρτηση Λ είναι φθίνουσα, προκύπτει από την ανισότητα Faber-Krahn

$$\lambda_1(\Omega_s) \geq \Lambda(V(\Omega_s)) \geq \Lambda\left(\frac{1}{s}\|u\|_{L^1(M)}\right). \tag{4.30}$$

Συνεπώς, από την τελευταία σχέση και τη σχέση (4.29) έχουμε

$$\Lambda\left(\frac{1}{s}\|u\|_{L^1(M)}\right)\left(\|u\|^2_{L^2(M)} - 2s\|u\|_{L^1(M)}\right) \leq \int_M |\nabla u|^2 dV$$

και αντικαθιστώντας $s = \dfrac{\epsilon\|u\|^2_{L^2(M)}}{2\|u\|_{L^1(M)}}$, προκύπτει η σχέση (4.23).

Για να αποδείξουμε την γενική περίπτωση $u \in L^1(M) \cap H^1_0(M)$, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.
Ισχυρισμός: Αν (w_n) είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στο $L^1(M) \cap H^1_0(M)$ τέτοια ώστε

$$\|w_n - u\|_{L^1(M)} \to 0, \quad \|w_n - u\|_{L^2(M)} \to 0, \quad \|\nabla w_n - \nabla u\|_{L^2(M)} \to 0, \tag{4.31}$$

καθώς $n \to \infty$ και αν η σχέση (4.23) ισχύει για κάθε συνάρτηση w_n, τότε θα ισχύει και για τη συνάρτηση u.

Πράγματι, από την υπόθεση έπεται ότι η συνάρτηση Λ είναι κάτω ημισυνεχής, δηλαδή για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (r_n), ισχύει

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda(r_n) \geq \Lambda\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right). \tag{4.32}$$

Άρα εφαρμόζοντας την ανισότητα (4.23) για w_n και παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$, προκύπτει από την (4.31) η σχέση (4.23) για τη συνάρτηση u.

Θα πάρουμε, τώρα, την περίπτωση η u να είναι μια μη αρνητική συνάρτηση στον $H^1_c(M)$. Έστω Ω μια σχετικά συμπαγής ανοικτή γειτονιά του φορέα της u, $\operatorname{supp} u$. Τότε, από το Λήμμα 1.2.3 η $u \in H^1_0(\Omega)$, και αφού ο χώρος συναρτήσεων $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ είναι πυκνός στον $H^1_0(\Omega)$, υπάρχει μία ακολουθία $(u_n) \subset \mathcal{C}^\infty_c(M)$ τέτοια ώστε

$$\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \ \text{ και } \ \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \ \text{ καθώς } \ n \to \infty. \tag{4.33}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $u, u_n \in L^1(\Omega)$ και

$$\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \sqrt{V(\Omega)}\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.34}$$

Αφού η σχέση (4.23) ισχύει για κάθε συνάρτηση u_n από το πρώτο μέρος της απόδειξης, ο παραπάνω Ισχυρισμός εφαρμόζεται, άρα προκύπτει η σχέση (4.23) για τη συνάρτηση u.

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση η u να είναι μία αυθαίρετη μη αρνητική συνάρτηση στον $L^1(M) \cap H_0^1(M)$. Όπως προηγουμένως, υπάρχει μία ακολουθία $(u_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(M)$ τέτοια ώστε να ισχύει η (4.33). Από το Λήμμα 1.2.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n \geq 0$. Έστω Ω_n οποιοδήποτε σχετικά συμπαγές ανοικτό σύνολο που περιέχει το $\operatorname{supp} u_n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$w_n := \min(u, u_n) = u - (u - u_n)^+,$$

τότε $w_n \in H_0^1(M)$, και αφού $\operatorname{supp} w_n \subset \operatorname{supp} u_n$, έπεται από το προηγούμενο μέρος της απόδειξης ότι η w_n ικανοποιεί την ανισότητα (4.23). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι μία υπακολουθία της (w_n) ικανοποιεί τη σχέση (4.31). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\nabla w_n - \nabla u\|_{L^2(M)}^2 &= \int_M (\nabla w_n - \nabla u)^2 \, dV = \int_M |\nabla (u - u_n)^+|^2 dV \\
&= \int_{\{u \geq u_n\}} |\nabla (u - u_n)|^2 dV = \int_{\{u \geq u_n\}} |\nabla u - \nabla u_n|^2 dV \\
&\leq \int_M |\nabla u - \nabla u_n|^2 dV = \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(M)}^2,
\end{aligned}$$

άρα

$$\|\nabla w_n - \nabla u\|_{L^2(M)} \to 0 \ \text{ καθώς } \ n \to \infty,$$

και αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι

$$\|w_n - u\|_{L^2(M)} \to 0 \ \text{ καθώς } \ n \to \infty.$$

Επομένως, υπάρχει μία υπακολουθία (w_{n_k}) τέτοια ώστε $w_{n_k} \to u$ σχεδόν παντού. Αφού $0 \leq w_{n_k} \leq u$ και $u \in L^1(M)$, προκύπτει από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

$$\|w_{n_k} - u\|_{L^1(M)} \to 0 \ \text{ καθώς } \ n \to \infty. \tag{4.35}$$

Άρα, η υπακολουθία (w_{n_k}) ικανοποιεί τις συνθήκες του Ισχυρισμού και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 4.2.2. Για τη συνάρτηση $\Lambda(\upsilon) = a\upsilon^{-\frac{2}{N}}$ η γενικευμένη ανισότητα Nash γίνεται

$$\int_M |\nabla u|^2 dV \geq (1-\epsilon) \|u\|_{L^2(M)}^2 a \left(\frac{2\|u\|_{L^1(M)}^2}{\epsilon \|u\|_{L^2(M)}^2} \right)^{-\frac{2}{N}} \Rightarrow$$

$$\int_M |\nabla u|^2 dV \geq c \left(\int_M |u| dV \right)^{-\frac{4}{N}} \left(\int_M u^2 dV \right)^{1+\frac{2}{N}}, \tag{4.36}$$

όπου $c = c(a, N) = a(1-\epsilon)(2/\epsilon)^{-\frac{2}{N}}$. Η σχέση (4.36) ισχύει στον $\mathbb{R}^N$, όπου ονομάζεται (κλασσική) ανισότητα Nash.

Πρόταση 4.2.1. Έστω ότι ισχύει η παρακάτω ανισότητα Nash:

$$\int_M |\nabla u|^2 dV \geq \|u\|_{L^2(M)}^2 \Lambda \left(\frac{\|u\|_{L^1(M)}^2}{\|u\|_{L^2(M)}^2} \right),$$

για κάθε μη μηδενική συνάρτηση $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$, όπου Λ μία φθίνουσα συνάρτηση στο $[0, +\infty)$. Τότε, ισχύει η ανισότητα Faber-Krahn

$$\lambda_1(\Omega) \geq \Lambda(V(\Omega)),$$

για κάθε ανοικτό σύνολο $\Omega \subset M$ πεπερασμένου μέτρου.

Απόδειξη. Έστω $\Omega \subset M$ ένα ανοικτό σύνολο πεπερασμένου μέτρου και $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Παίρνοντας τη μηδενική επέκταση της u σε όλο το M, ισχύει προφανώς

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \|u\|_{L^1(M)}, \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(M)} \text{ και } \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(M)}.$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dV}{\int_\Omega u^2 dV} = \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV}{\int_M u^2 dV} \geq \Lambda\left(\frac{\|u\|_{L^1(M)}^2}{\|u\|_{L^2(M)}^2}\right).$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει

$$\frac{\left(\int_\Omega u dV\right)^2}{\int_\Omega u^2 dV} \leq \frac{\left(\int_\Omega dV\right)\left(\int_\Omega u^2 dV\right)}{\int_\Omega u^2 dV} = V(\Omega).$$

Άρα

$$\frac{\|u\|_{L^1(M)}^2}{\|u\|_{L^2(M)}^2} \leq V(\Omega)$$

και αφού η συνάρτηση Λ είναι φθίνουσα, έχουμε τελικά

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dV}{\int_\Omega u^2 dV} \geq \Lambda(V(\Omega)).$$

Παίρνοντας, τώρα, το infimum για την u στο αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης προκύπτει από το πηλίκο Rayleigh (βλ. Θεώρημα 4.1.2)

$$\lambda_1(\Omega) \geq \Lambda(V(\Omega)),$$

που είναι το ζητούμενο. □

Ορισμός 4.2.5. Λέμε ότι η συνάρτηση $\Lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $\mathbf{L}$ αν

(i) Η Λ είναι μη αρνητική, φθίνουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση.
(ii) Η Λ είναι θετική σε μία κατάλληλη γειτονιά του 0 και

$$\int_0 \frac{d\upsilon}{\upsilon \Lambda(\upsilon)} < \infty. \tag{4.37}$$

Παράδειγμα 4.2.3. Αν η συνάρτηση Λ ικανοποιεί την (i) και $\Lambda(\upsilon) = \upsilon^{-a}$, $a > 0$, για μικρό υ, τότε η συνάρτηση Λ ανήκει στην κλάση $\mathbf{L}$, ενώ αν η συνάρτηση Λ είναι σταθερή, τότε $\Lambda \notin \mathbf{L}$.

Ορισμός 4.2.6. Λέμε ότι μία συνάρτηση $\gamma\,(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση Γ αν η γ είναι θετική, αύξουσα, λογαριθμικά κοίλη και $\gamma(0+) = 0$.

Έπεται ότι για κάθε $\gamma \in \Gamma$, η συνάρτηση $\log \gamma$ είναι αύξουσα και κοίλη. Άρα, η $\log \gamma$ είναι απόλυτα συνεχής και η παράγωγος της $(\log \gamma)'$ υπάρχει σχεδόν παντού και είναι φθίνουσα. Παίρνοντας την $(\log \gamma)'$ να είναι δεξιά συνεχής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(\log \gamma)'$ ορίζεται παντού. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι $\gamma \in \Gamma$ αν και μόνο αν
(i) Η συνάρτηση γ είναι θετική, αύξουσα, απόλυτα συνεχής και $\gamma(0+) = 0$,
(ii) Η συνάρτηση $\dfrac{\gamma'}{\gamma}$ είναι φθίνουσα.

Παράδειγμα 4.2.4. Οι συναρτήσεις $\gamma(t) = t^{\alpha}$ και $\gamma(t) = \exp(-t^{-\alpha})$ ανήκουν στην κλάση Γ για κάθε $\alpha > 0$.

Λήμμα 4.2.2. *Για κάθε συνάρτηση $\Lambda \in \mathbf{L}$, το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy στο διάστημα* $(0, +\infty)$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma \Lambda(\gamma), \quad \gamma(0+) = 0 \tag{4.38}$$

έχει μία μοναδική θετική απόλυτα συνεχή λύση $\gamma(t)$. Η λύση αυτή ανήκει στην κλάση Γ και ορίζεται ως

$$\begin{cases} t = \int_0^{\gamma(t)} \dfrac{d\upsilon}{\upsilon \Lambda(\upsilon)}, & 0 < t < t_0, \\ \gamma(t) = \upsilon_0, & t \geq t_0, \end{cases} \tag{4.39}$$

όπου

$$\upsilon_0 = \sup\{\upsilon : \Lambda(\upsilon) > 0\} \quad \text{και} \quad t_0 = \int_0^{\upsilon_0} \frac{d\upsilon}{\upsilon \Lambda(\upsilon)}. \tag{4.40}$$

Αντίστροφα, για κάθε συνάρτηση $\gamma \in \Gamma$, υπάρχει μία μοναδική μη αρνητική, φθίνουσα, δεξιά συνεχής συνάρτηση Λ, που ικανοποιεί τη σχέση (4.39). Η συνάρτηση αυτή ανήκει στην κλάση $\mathbf{L}$ και ορίζεται ως

$$\begin{cases} \Lambda(\gamma(t)) = \dfrac{\gamma'}{\gamma}(t), & t > 0, \\ \Lambda(\upsilon) = 0, & \upsilon \geq \sup \gamma. \end{cases} \tag{4.41}$$

Άρα, η εξίσωση (4.38), καθώς και κάθε ένας από τους τύπους (4.39) και (4.41), ορίζουν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από τον $\mathbf{L}$ στον Γ και αντίστροφα.

Απόδειξη. *Μοναδικότητα της γ*: Έστω $(0, \upsilon_0)$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση Λ είναι θετική, δηλαδή το υ_0 όπως το έχουμε ορίσει στη σχέση (4.40), αφού η Λ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Από τη σχέση (4.38) έχουμε ότι $\gamma' \geq 0$, άρα η συνάρτηση γ είναι αύξουσα. Έστω $(0, t_0)$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο $\gamma(t) < \upsilon_0$, δηλαδή

$$t_0 := \sup\{t : \gamma(t) < \upsilon_0\}.$$

Για κάθε $t \in (0, t_0)$, έχουμε $\Lambda(\gamma(t)) > 0$. Επομένως, ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.38) από το 0 στο t έχουμε

$$\int_0^t \frac{\gamma' ds}{\gamma \Lambda(\gamma)} = t.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\upsilon = \gamma(t)$ προκύπτει

$$t = \int_0^{\gamma(t)} \frac{d\upsilon}{\upsilon \Lambda(\upsilon)} \quad \text{για κάθε} \ \ 0 < t < t_0 \tag{4.42}$$

και λόγω συνέχειας η προηγούμενη σχέση ισχύει επίσης για $t = t_0$. Από τον ορισμό του t_0, έχουμε $\gamma(t_0) \leq \upsilon_0$. Θα δείξουμε ότι $\gamma(t_0) = \upsilon_0$, δηλαδή ότι το t_0 ικανοποιεί τη σχέση (4.40).
Πράγματι, αν $\gamma(t_0) < \upsilon_0$, τότε από τις σχέσεις (4.42) και (4.37) έπεται ότι

$$t_0 = \int_0^{\gamma(t_0)} \frac{d\upsilon}{\upsilon\Lambda(\upsilon)} < \infty.$$

Όμως, για ένα πεπερασμένο t_0 θε έχουμε, λόγω συνέχειας,

$$\gamma(t_0) = \upsilon_0.$$

Άρα δείξαμε ότι η συνάρτηση γ ορίζεται για $t \leq t_0$ από τη σχέση (4.42), όπου t_0 ορίζεται από τη σχέση (4.40).
Για $t > t_0$, έχουμε $\gamma(t) \geq \upsilon_0$, άρα $\Lambda(\gamma(t)) = 0$. Συνεπώς, από τη σχέση (4.38) έπεται ότι $\gamma'(t) \equiv 0$ και

$$\gamma(t) \equiv \upsilon_0 \quad \text{για κάθε} \quad t \geq t_0, \tag{4.43}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη μοναδικότητας της γ.

Από τις ιδιότητες μονοτονίας των συναρτήσεων Λ και γ, έχουμε από τη σχέση (4.38) ότι $\frac{\gamma'}{\gamma} = \Lambda(\gamma)$, άρα η συνάρτηση $\frac{\gamma'}{\gamma}$ είναι φθίνουσα, που συνεπάγεται ότι $\gamma \in \Gamma$.

Ύπαρξη της γ: Ορίζουμε τη συνάρτηση $\gamma(t)$ από τη σχέση (4.39), όπου υ_0 και t_0 όπως ορίζονται από τη σχέση (4.40). Παρατηρούμε ότι αν το t_0 είναι πεπερασμένο, τότε και το υ_0 είναι πεπερασμένο. Πράγματι, έστω ότι $\upsilon_0 = \infty$. Τότε, από τη σχέση (4.40) έχουμε

$$t_0 = \int_0^{\infty} \frac{d\upsilon}{\upsilon\Lambda(\upsilon)} \geq \int_1^{\infty} \frac{d\upsilon}{\upsilon\Lambda(\upsilon)} \geq \frac{1}{\Lambda(1)} \int_1^{\infty} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \infty,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση Λ είναι φθίνουσα. Άρα η σχέση (4.39) ορίζει μία θετική απόλυτα συνεχή συνάρτηση γ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
Τέλος, παρατηρούμε ότι με απλές πράξεις επάληθεύουμε ότι η συνάρτηση γ είναι λύση του προβλήματος Cauchy στο διάστημα $(0, +\infty)$, που δίνεται από τη σχέση (4.38).

Μοναδικότητα της Λ: Έστω $\upsilon_0 := \sup \gamma$ και $(0, t_0)$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο $\gamma(t) < \upsilon_0$, δηλαδή $t_0 := \sup\{t : \gamma(t) < \upsilon_0\}$. Υποθέτουμε ότι $\frac{\gamma'}{\gamma} > 0$ στο διάστημα $(0, t_0)$. Πράγματι, αν $\frac{\gamma'}{\gamma}(t_1) = 0$ για κάποιο $0 < t_1 < t_0$, τότε λόγω μονοτονίας έχουμε ότι $\frac{\gamma'}{\gamma}(t) = 0$ για κάθε $t \geq t_1$. Έπεται ότι η συνάρτηση γ παίρνει την μέγιστη τιμή της στο $t = t_1$. Όμως, $\gamma(t_1) < \upsilon_0$, άρα $\gamma' > 0$ στο διάστημα $(0, t_0)$, και η συνάρτηση γ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα αυτό και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, \upsilon_0)$.

Επομένως, από τη σχέση (4.38) έχουμε ότι η συνάρτηση $\Lambda(\nu)$ ορίζεται μοναδικά στο διάστημα $(0, \upsilon_0)$ ως

$$\Lambda(\gamma(t)) = \frac{\gamma'}{\gamma}(t), \quad \text{για κάθε } \ 0 < t < t_0. \tag{4.44}$$

Αν $\upsilon_0 = \infty$, τότε από την προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι η Λ είναι μοναδική.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $\upsilon_0 < \infty$ και θέλουμε να δείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή, $\Lambda(\upsilon_0) = 0$. Τότε, αφού η συνάρτηση Λ είναι μη αρνητική και φθίνουσα, έπεται ότι

$$\Lambda(\upsilon) \equiv 0 \ \text{ για κάθε } \ \upsilon \geq \upsilon_0, \tag{4.45}$$

που αποδεικνύει στην περίπτωση αυτή ότι η Λ είναι μοναδική.
Πράγματι, αν $t_0 < \infty$, τότε για κάθε $t \geq t_0$ έχουμε $\gamma(t) \equiv \upsilon_0$, άρα $\gamma'(t) = 0$, που συνεπάγεται από τη σχέση (4.38) ότι $\Lambda(\upsilon_0) = 0$.
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $t_0 = \infty$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\gamma'}{\gamma}(t) = 0.$$

Πράγματι, η συνάρτηση $\dfrac{\gamma'}{\gamma}$ είναι φθίνουσα και έχει ένα μη αρνητικό όριο στο ∞, που θα το συμβολίζουμε με c. Αν $c > 0$, τότε η η σχέση $\dfrac{\gamma'}{\gamma} \geq c$ συνεπάγεται ότι η $\gamma(t)$ αυξάνεται τουλάχιστον εκθετικά καθώς $t \to \infty$. Όμως, έχουμε υπόθεση ότι $\sup \gamma = \upsilon_0 < \infty$. Άρα $c = 0$ και από τη σχέση (4.38) έπεται ότι

$$\lim_{t \to \infty} \Lambda(\gamma(t)) = 0.$$

Προκύπτει, επομένως, από την μονοτονία της Λ ότι $\Lambda(\upsilon_0) = 0$.

Θα αποδείξουμε, τέλος, ότι $\Lambda \in \mathbf{L}$. Πράγματι, διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4.44) με $\Lambda(\gamma(t))$ και ολοκληρώνοντας από το 0 στο t, προκύπτει ξανά με την αντικατάσταση $\upsilon = \gamma(t)$, η σχέση (4.42) για κάθε $t \in (0, t_0)$. Άρα επαληθεύεται η σχέση (4.37), που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ύπαρξη της Λ: Θα ορίσουμε την συνάρτηση Λ από τη σχέση (4.41). Θέτουμε $\upsilon_0 = \sup \gamma$ και παρατηρούμε ότι η πρώτη γραμμή της σχέσης (4.41) μας δίνει τον ορισμό της $\Lambda(\upsilon)$ για κάθε υ στο πεδίο τιμών της γ, που είναι είτε το διάστημα $(0, \upsilon_0)$, είτε το διάστημα $(0, \upsilon_0]$.
Αν $\upsilon_0 = \infty$, τότε δεν ισχύει η δεύτερη γραμμή της (4.41).
Αν $\upsilon_0 < \infty$ και το πεδίο τιμών της γ είναι το $(0, \upsilon_0)$, τότε η δεύτερη γραμμή της (4.41) επεκτείνει το πεδίο τιμών της Λ στο διάστημα $[\upsilon, +\infty)$.
Αν το πεδίο τιμών της γ είναι το $(0, \upsilon_0]$, τότε η μέγιστη τιμή της γ ταυτίζεται με το supremum της και στην τιμή αυτή έχουμε $\gamma'(t+) = 0$. Συνεπώς, $\Lambda(\upsilon_0) = 0$, που είναι συμβατό με την δεύτερη γραμμή της σχέσης (4.41).

Τέλος, είναι προφανές ότι η συνάρτηση Λ ικανοποιεί τη σχέση (4.38). $\square$

Ορισμός 4.2.7. Για κάθε $\Lambda \in \mathbf{L}$, η συνάρτηση γ, που ορίσαμε στη σχέση (4.39), ονομάζεται $\Gamma-$μετασχηματισμός της Λ. Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, η συνάρτηση Λ, που ορίσαμε στη σχέση (4.41), ονομάζεται $\mathbf{L}-$ μετασχηματισμός της γ.

Παράδειγμα 4.2.5. Σε κάθε ένα από τα ακόλουθα παραδείγματα, θα θεωρούμε ότι η συνάρτηση Λ ανήκει στην κλάση **L**.
(i) Για κάθε $a, c > 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\Lambda(\upsilon) = c\upsilon^{-a}.$$

Τότε, από τη σχέση (4.39) έχουμε

$$t = \int_0^{\gamma(t)} \frac{d\upsilon}{\upsilon\,(c\upsilon^{-a})} \Rightarrow ct = \frac{(\gamma(t))^a}{a},$$

άρα ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της είναι

$$\gamma(t) = (cat)^{\frac{1}{a}}.$$

(ii) Έστω, τώρα, η συνάρτηση Λ που ορίζεται ως

$$\Lambda(\upsilon) = c_0\upsilon^{-a} \;\; \text{για} \;\; \upsilon < 1,$$

όπου $a, c_0 > 0$. Έχουμε, τότε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα

$$t_0 = \int_0^1 \frac{d\upsilon}{\upsilon\,(c_0\upsilon^{-a})} = (c_0 a)^{-1} \tag{4.46}$$

και για $t < t_0$ ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της είναι

$$\gamma(t) = (c_0 at)^{\frac{1}{a}}.$$

(iii) Έστω η συνάρτηση

$$\Lambda(\upsilon) = c\upsilon^{-\beta} \;\; \text{για} \;\; \upsilon \geq 1,$$

όπου $\beta, c > 0$ και $c \leq c_0$. Τότε, έχουμε όμοια με πριν,

$$t - t_0 = \int_1^{\gamma(t)} \frac{d\upsilon}{\upsilon\,(c\upsilon^{-\beta})} \Rightarrow \beta c\,(t - t_0) = (\gamma(t))^{\beta} - 1$$

άρα ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της είναι

$$\gamma(t) = (c\beta t + c')^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{για} \;\; t \geq t_0,$$

όπου $c' = 1 - \beta c t_0 = 1 - \dfrac{c\beta}{c_0 a}$ (βλ. σχέση (4.46)). Σε αυτήν την περίπτωση έπεται

$$\gamma(t) \simeq \begin{cases} t^{\frac{1}{a}}, & t < 1, \\ t^{\frac{1}{\beta}}, & t \geq 1. \end{cases}$$

(iv) Έστω

$$\Lambda(\upsilon) \equiv c \;\; \text{για} \;\; \upsilon \geq 1,$$

όπου $0 < c \leq c_0$. Τότε, έχουμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα

$$t - t_0 = \int_1^{\gamma(t)} \frac{d\upsilon}{\upsilon c} \Rightarrow c\,(t - t_0) = \log(\gamma(t))$$

άρα ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της είναι

$$\gamma(t) = \exp(c(t-t_0)) \quad \text{για} \quad t \geq t_0. \tag{4.47}$$

(v) Έστω

$$\Lambda(\upsilon) \equiv 0 \quad \text{για} \quad \upsilon \geq 1.$$

Τότε, από τη σχέση (4.39) έχουμε

$$\gamma(t) \equiv 1 \quad \text{για} \quad t \geq t_0$$

(έπεται επίσης από τη σχέση (4.47) για $c = 0$).
(vi) Έστω

$$\Lambda(\upsilon) \equiv c \log^{-\beta} \upsilon \quad \text{για} \quad \upsilon \geq 2.$$

Τότε, όμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε

$$\begin{aligned}
t - t_0 &= \int_2^{\gamma(t)} \frac{d\upsilon}{\upsilon\left(c \log^{-\beta} \upsilon\right)} \Rightarrow \\
c(t-t_0) &= \int_2^{\gamma(t)} \upsilon^{-1} \log^{\beta} \upsilon d\upsilon \Rightarrow \\
c(t-t_0) &= (\beta+1)^{-1}\left(\log^{\beta+1}(\gamma(t)) - \log^{\beta+1} 2\right) \Rightarrow \\
\gamma(t) &= \exp\left((c't + c'')^{\frac{1}{\beta+1}}\right),
\end{aligned}$$

όπου $c' = c(\beta+1)$ και c'' ένας πραγματικός αριθμός.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $\Lambda \in \boldsymbol{L}$ και γ ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της. Αν η $f(t)$ είναι μία θετική απόλυτα συνεχής συνάρτηση, που ικανοποιεί την ανισότητα*

$$f' \geq f\Lambda(f) \tag{4.48}$$

στο διάστημα $(0, T)$, τότε

$$f(t) \geq \gamma(t) \quad \text{για κάθε} \quad 0 < t < T.$$

Απόδειξη. Έστω $(0, \upsilon_0)$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $\Lambda(\upsilon)$ είναι θετική, δηλαδή το υ_0 που έχουμε ορίσει στη σχέση (4.40). Έστω, ακόμη, $(0, \tau)$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο $f(t) < \upsilon_0$. Άρα, για κάθε $t \in (0, \tau)$ έχουμε από τη σχέση (4.48)

$$\int_0^t \frac{f' dt}{f\Lambda(f)} \geq t$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $\upsilon = f(t)$ προκύπτει

$$\int_{f(0)}^{f(t)} \frac{d\upsilon}{\upsilon\Lambda(\upsilon)} \geq t.$$

Συγκρίνοντας με τη σχέση (4.39), συμπεραίνουμε ότι $f(t) \geq \gamma(t)$ για κάθε $t \in (0, \tau)$.
Αν $\tau = T$, τότε έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.
Αν $\tau < T$ (που εμπεριέχει την περίπτωση $\tau = 0$), τότε για κάθε $t \in (\tau, T)$, έχουμε $f(t) \geq \upsilon_0$, που συνεπάγεται ότι $f(t) \geq \gamma(t)$, αφού $\gamma(t) \leq \upsilon_0$. $\square$

Ορισμός 4.2.8. Έστω γ μια συνάρτηση που ανήκει στην κλάση Γ και Λ ο $\mathbf{L}-$ μετασχηματισμός της. Για καθορισμένη τιμή του $\delta \in (0,1)$, λέμε ότι η συνάρτηση γ ανήκει στην κλάση Γ_δ (και η Λ ανήκει στην κλάση $\mathbf{L}_\delta$) αν για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\frac{\gamma'}{\gamma}(2t) - \delta\frac{\gamma'}{\gamma}(t) + \frac{\delta^{-1}}{(1+t)^{1+\delta}} \geq 0. \tag{4.49}$$

Λέμε ότι η συνάρτηση γ ανήκει στην κλάση $\widetilde{\Gamma_\delta}$ (και η Λ ανήκει στην κλάση $\widetilde{\mathbf{L}}_\delta$) αν για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\frac{\gamma'}{\gamma}(2t) \geq \delta\frac{\gamma'}{\gamma}(t). \tag{4.50}$$

Προφανώς, η σχέση (4.50) συνεπάγεται την (4.49), έτσι ώστε $\widetilde{\Gamma_\delta} \subset \Gamma_\delta$. Επιπλέον, αφού το αριστερό μέλος της σχέσης (4.49) παρουσιάζει μονοτονία (φθίνει) ως προς δ, μπορούμε να χρησιμοποιούμε μόνο την μεταβλητή δ για ευκολία, αντί τριών μεταβλητών. Συνεπάγεται, επομένως, ότι η κλάση Γ_δ αυξάνεται καθώς το δ μειώνεται.

Παρατηρούμε, ακόμη, ότι αν $\gamma \in \Gamma_\delta$ ή $\gamma \in \widetilde{\Gamma_\delta}$, τότε η συνάρτηση $a\gamma(bt)$ ανήκει στην ίδια κλάση για κάθε ζεύγος θετικών σταθερών a, b.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, η συνάρτηση $\dfrac{\gamma'}{\gamma}$ είναι φθίνουσα. Αν $\gamma \in \widetilde{\Gamma_\delta}$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{\gamma'}{\gamma}$ μειώνεται πολυωνυμικά. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\gamma(t) = t^a$, $a > 0$, ικανοποιεί τη σχέση (4.50) με $\delta = \dfrac{1}{2}$, άρα ανήκει στην κλάση $\widetilde{\Gamma}_{1/2}$.

Λήμμα 4.2.4. *Αν $\gamma \in \Gamma_\delta$ με $\delta \leq \frac{1}{5}$, τότε υπάρχει μια λεία συνάρτηση g στο διάστημα $[0, +\infty)$ τέτοια ώστε*

$$1 \leq g \leq e^{\delta-3}, \quad g' > 0, \tag{4.51}$$

και η συνάρτηση $\widetilde{\gamma} := \gamma g$ να ανήκει στη κλάση $\widetilde{\Gamma_\delta}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(t)$ ως την λύση του προβλήματος Cauchy

$$\frac{g'}{g}(t) = \frac{\delta^{-2}}{(1+t)^{1+\delta}}, g(0) = 1.$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση από το 0 στο t έχουμε

$$\log g(t) - \log g(0) = \delta^{-2}\int_0^t \frac{ds}{(1+s)^{1+\delta}} \Rightarrow$$
$$g(t) = \exp\left(\delta^{-2}\int_0^t \frac{ds}{(1+s)^{1+\delta}}\right).$$

Προφανώς, οι ιδιότητες της σχέσης (4.51) ισχύουν.
Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $\widetilde{\gamma} = \gamma g$ έτσι ώστε

$$\log\widetilde{\gamma} = \log(\gamma g) = \log\gamma + \log g \Rightarrow$$
$$(\log\widetilde{\gamma})' = (\log\gamma + \log g)' \Rightarrow$$
$$\frac{\widetilde{\gamma}'}{\widetilde{\gamma}} = \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{g'}{g}$$

Αφού $\gamma \in \Gamma_\delta$ έχουμε από τη σχέση (4.49)

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\gamma}'}{\widetilde{\gamma}}(2t) - \delta\frac{\widetilde{\gamma}'}{\widetilde{\gamma}}(t) &= \left[\frac{\gamma'}{\gamma}(2t) - \delta\frac{\gamma'}{\gamma}(t)\right] + \left[\frac{g'}{g}(2t) - \delta\frac{g'}{g}(t)\right] \\ &\geq -\frac{\delta^{-1}}{(1+t)^{1+\delta}} + \frac{\delta^{-2}}{(1+2t)^{1+\delta}} - \frac{\delta^{-1}}{(1+t)^{1+\delta}} \\ &= \frac{\delta^{-2}}{(1+2t)^{1+\delta}} - \frac{2\delta^{-1}}{(1+t)^{1+\delta}}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Αφού $\delta \leq \frac{1}{5}$, τότε ισχύει

$$\frac{(1+2t)^{1+\delta}}{(1+t)^{1+\delta}} \leq 2^{1+\delta} < \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}\delta^{-1},$$

άρα το δεξί μέλος της σχέσης (4.52) είναι μη αρνητικό και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Λήμμα 4.2.5. *Αν $\gamma \in \Gamma_\delta$, τότε για κάθε $\upsilon > 0$,*

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t}\left(\log\frac{\gamma(t)}{\upsilon}\right)^{+} \geq \frac{\delta}{2}\Lambda(C_\delta \upsilon), \tag{4.53}$$

όπου Λ ο $\mathbf{L}-$μετασχηματισμός της γ και $C_\delta \geq 1$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από το δ.
Αν $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_\delta$ τότε η σχέση (4.53) ισχύει με $C_\delta = 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, αρχικά, ότι $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_\delta$.
Αν $\upsilon \geq \sup\gamma$, τότε $\Lambda(\upsilon) = 0$ και η σχέση (4.53) ισχύει τετριμμένα.
Αν $\upsilon < \sup\gamma$, τότε υπάρχει $t > 0$ τέτοιο ώστε $\upsilon = \gamma(t/2)$, και αφού η συνάρτηση $\log\gamma$ είναι κοίλη έχουμε

$$\frac{2}{t}\left(\log\frac{\gamma(t)}{\upsilon}\right)^{+} \geq \frac{\log\gamma(t) - \log\gamma(t/2)}{t/2} \geq (\log\gamma)'(t) = \frac{\gamma'}{\gamma}(t).$$

Από τις σχέσεις (4.50) και (4.38) προκύπτει

$$\frac{\gamma'}{\gamma}(t) \geq \delta\frac{\gamma'}{\gamma}(t/2) = \delta\Lambda(\gamma(t/2)) = \delta\Lambda(\upsilon),$$

άρα έχουμε τελικά

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t}\left(\log\frac{\gamma(t)}{\upsilon}\right)^{+} \geq \frac{\delta}{2}\Lambda(\upsilon). \tag{4.54}$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $\gamma \in \Gamma_\delta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\delta \leq \frac{1}{5}$. Έστω g η συνάρτηση που δίνεται από το Λήμμα 4.2.4, έτσι ώστε $\widetilde{\gamma} := \gamma g \in \widetilde{\Gamma}_\delta$. Παίρνοντας ένα πολλαπλάσιο της g, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$c_\delta \leq g \leq 1,$$

όπου $c_\delta > 0$. Άρα $\widetilde{\gamma} \leq \gamma$ και από το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε ότι

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t}\left(\log \frac{\gamma(t)}{\upsilon}\right)^{+} \geq \sup_{t>0} \frac{1}{t}\left(\log \frac{\widetilde{\gamma}(t)}{\upsilon}\right)^{+} \geq \frac{\delta}{2}\widetilde{\Lambda}(\upsilon), \tag{4.55}$$

όπου $\widetilde{\Lambda}$ ο $\mathbf{L}-$μετασχηματισμός της συνάρτησης $\widetilde{\gamma}$.
Αν $\upsilon < \sup\widetilde{\gamma}$, τότε $\upsilon = \widetilde{\gamma}(t)$ για κάποιο t. Από τις σχέσεις $g' \geq 0$ και $\gamma \leq c_\delta^{-1}\widetilde{\gamma}$ προκύπτει

$$\widetilde{\Lambda}(\upsilon) = \widetilde{\Lambda}(\widetilde{\gamma}) = \frac{\widetilde{\gamma}'}{\widetilde{\gamma}} = \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{g'}{g} \geq \frac{\gamma'}{\gamma} = \Lambda(\gamma) \geq \Lambda\left(c_\delta^{-1}\widetilde{\gamma}\right) = \Lambda(C_\delta \upsilon),$$

όπου $C_\delta = c_\delta^{-1}$. Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με τη σχέση (4.55), προκύπτει η σχέση (4.53).
Αν $\upsilon \geq \sup\widetilde{\gamma}$, τότε $C_\delta\upsilon \geq \sup\gamma$ και $\Lambda(C_\delta\upsilon) = 0$, και άρα η (4.53) ισχύει τετριμμένα. □

Στα ακόλουθα Θεωρήματα αποδεικνύουμε ότι η ημιομάδα θερμότητας e^{-Ht} είναι υπερσυσταλτική αν και μόνο αν η ανισότητα Faber-Krahn ισχύει στην πολλαπλότητα Riemann (M, V).

Θεώρημα 4.2.7. *Έστω (M, V) μία πολλαπλότητα Riemann. Υποθέτουμε ότι η ανισότητα Faber-Krahn ισχύει στην πολλαπλότητα Riemann (M, V) με μία συνάρτηση $\Lambda \in \boldsymbol{L}$. Τότε, για κάθε συνάρτηση $f \in L^1(M) \cap L^2(M)$ και για όλα τα $t > 0$,*

$$\|e^{-Ht}f\|^2_{L^2(M)} \leq \frac{4}{\gamma(t)}\|f\|^2_{L^1(M)}, \tag{4.56}$$

όπου $\gamma(t)$ είναι ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της Λ.
Συνεπώς, για κάθε $t > 0$ και $x, y \in M$,

$$P(x, y, t) \leq \frac{4}{\gamma(t/2)}. \tag{4.57}$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι

$$\|f\|_{L^1(M)} = 1. \tag{4.58}$$

Για $t \geq 0$, θέτουμε $u(\cdot, t) = e^{-Ht}f$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$J(t) := \|u(\cdot, t)\|^2_{L^2(M)} = \|e^{-Ht}f\|^2_{L^2(M)}. \tag{4.59}$$

Από το Θεώρημα 1.2.3 (iv), έχουμε ότι για κάθε $t > 0$

$$u(\cdot, t) \in \mathrm{dom}H \subset H^1_0(M)$$

και

$$\frac{du}{dt} = -Hu \in L^2(M),$$

όπου $\frac{d}{dt}$ η παράγωγος στον L^2. Άρα η συνάρτηση $J(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}(u, u)_{L^2(M)} = 2\left(\frac{du}{dt}, u\right)_{L^2(M)} = -2(Hu, u)_{L^2(M)}$$

και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Green προκύπτει

$$\frac{dJ}{dt} = -2\int_M |\nabla u|^2 dV. \tag{4.60}$$

Επομένως, η συνάρτηση J είναι φθίνουσα. Έστω $(0, T)$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο $J(t) > 0$. Για $t \geq T$ έχουμε ότι $J(t) = 0$ και η σχέση (4.56) ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι $t \in (0, T)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.1 για $\epsilon = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\int_M |\nabla u|^2 dV \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(M)} \Lambda\left(4\frac{\|u\|^2_{L^1(M)}}{\|u\|^2_{L^2(M)}}\right). \tag{4.61}$$

Από το Θεώρημα 4.2.4 και τη σχέση (4.58) έπεται

$$\|u\|_{L^1(M)} \leq 1. \tag{4.62}$$

Η συνάρτηση Λ είναι φθίνουσα, άρα από τη προηγούμενη σχέση έχουμε ότι

$$\Lambda\left(4\frac{\|u\|^2_{L^1(M)}}{\|u\|^2_{L^2(M)}}\right) \geq \Lambda\left(\frac{4}{\|u\|^2_{L^2(M)}}\right). \tag{4.63}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (4.59)-(4.63) προκύπτει

$$\frac{dJ}{dt} \leq -J\Lambda\left(\frac{4}{J}\right). \tag{4.64}$$

Άρα, η συνάρτηση

$$f(t) := \frac{4}{J(t)}$$

ικανοποιεί στο διάστημα $(0, T)$ την ανισότητα

$$f' \geq f\Lambda(f).$$

και από το Λήμμα 4.2.3 προκύπτει ότι $f(t) \geq \gamma(t)$, άρα ισχύει η σχέση

$$J(t) \leq \frac{4}{\gamma(t)},$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (4.56). □

Τέλος, η εκτίμηση (4.57) για τον πυρήνα θερμότητας έπεται άμεσα από τη σχέση (4.56) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.6 και την Παρατήρηση 4.2.1

Λήμμα 4.2.6. *Για κάθε συνάρτηση* $f \in H^1_0(M)$ *τέτοια ώστε* $\|f\|_{L^2(M)} = 1$ *και για κάθε* $t \geq 0$, *ισχύει η εξής ανισότητα*

$$\exp\left(-t\int_M |\nabla f|^2 dV\right) \leq \|e^{-Ht} f\|_{L^2(M)}. \tag{4.65}$$

Απόδειξη. Έστω $\{E_\lambda\}$ η φασματική ανάλυση της μονάδας του τελεστή Laplace με Dirichlet συνοριακές συνθήκες, . Τότε, για κάθε συνάρτηση $f \in \mathrm{dom}(H) = W_0^{2,2}(M)$ τέτοια ώστε $\|f\|_{L^2(M)} = 1$ έχουμε

$$1 = \|f\|^2_{L^2(M)} = \int_0^\infty d\|E_\lambda f\|^2$$

και με χρήση του Θεωρήματος Green και του Φασματικού Θεωρήματος (βλ. Θεώρημα 1.1.7) προκύπτει

$$\int_M |\nabla f|^2 dV = -\int_M (\Delta f)\, f dV = (Hf, f) = \int_0^\infty \lambda d\|E_\lambda f\|^2. \tag{4.66}$$

Αφού το μέτρο $d\|E_\lambda f\|^2$ είναι μέτρο πιθανότητας, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Jensen, άρα έχουμε

$$\exp\left(-\int_0^\infty 2t\lambda d\|E_\lambda f\|^2\right) \le \int_0^\infty \exp(-2t\lambda)\, d\|E_\lambda f\|^2.$$

Από την ταυτότητα

$$\|e^{-Ht} f\|^2_{L^2(M)} = \int_0^\infty \exp(-2t\lambda)\, d\|E_\lambda f\|^2$$

και τη σχέση (4.66) προκύπτει

$$\exp\left(-2t\int_M |\nabla f|^2 dV\right) \le \|e^{-Ht} f\|^2_{L^2(M)},$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $f \in H_0^1(M)$ και $\|f\|_{L^2(M)} = 1$. Αφού ο χώρος $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ είναι πυκνός στον $H_0^1(M)$, υπάρχει μία ακολουθία $(f_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(M)$ τέτοια ώστε $f_n \to f$ στον $H^1(M)$. Τότε $c_n := \|f_n\|_{L^2(M)} \to 1$, που συνεπάγεται ότι $c_n^{-1} f_n \to f$ στον $H^1(M)$. Η ανισότητα (4.65) ισχύει για κάθε συνάρτηση $c_n^{-1} f_n$. Παίρνοντας το όριο και στα δύο μέλη της ανισότητας (4.65), έχουμε τη σχέση (4.65) για τη συνάρτηση f. □

Θεώρημα 4.2.8. *Έστω (M, V) μία πολλαπλότητα Riemann. Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας θερμότητας ικανοποιεί την ανισότητα*

$$P(x, x, t) \le \frac{1}{\gamma(t)} \tag{4.67}$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in M$, όπου $\gamma(t)$ μια θετική συνάρτηση στο διάστημα $(0, +\infty)$. Τότε, η πολλαπλότητα M ικανοποιεί την ανισότητα Faber-Krahn με τη συνάρτηση $\widetilde{\Lambda}(\upsilon)$ που δίνεται από τον τύπο

$$\widetilde{\Lambda}(\upsilon) = \sup_{t>0} \frac{1}{t}\left(\log\frac{\gamma(t)}{\upsilon}\right)^+. \tag{4.68}$$

Αν επιπλέον $\gamma \in \Gamma_\delta$, τότε η M ικανοποιεί την ανισότητα Faber-Krahn με τη συνάρτηση $\frac{\delta}{2}\Lambda(C_\delta \upsilon)$, όπου Λ ο $\mathbf{L}-$ μετασχηματισμός της γ και C_δ η σταθερά του Λήμματος 4.2.5.

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.67) και το Θεώρημα 4.2.6 έχουμε ότι η ημιομάδα θερμότητας $\{e^{-Ht}\}$ είναι $L^1(M) \to L^2(M)$ υπερσυσταλτική με συνάρτηση $\sqrt{1/\gamma(2t)}$, δηλαδή

$$\|e^{-H\frac{t}{2}}f\|^2_{L^2(M)} \leq \frac{1}{\gamma(t)}\|f\|^2_{L^1(M)}. \tag{4.69}$$

Έστω $\Omega \subset M$ ένα ανοικτό σύνολο πεπερασμένου μέτρου και $f \in H^1_0(\Omega)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\|f\|_{L^2(M)} = 1$. Τότε, παίρνοντας μηδενική επέκταση της f σε όλο το M, ισχύει προφανώς $f \in H^1_0(M)$ και $\|f\|_{L^1(\Omega)} = \|f\|_{L^1(M)}$. Άρα, από το προηγούμενο Λήμμα και τη σχέση (4.69) έχουμε

$$\exp\left(-\frac{t}{2}\int_M |\nabla f|^2 dV\right) \leq \|e^{-H\frac{t}{2}}f\|_{L^2(M)} \Rightarrow$$

$$\exp\left(-t\int_M |\nabla f|^2 dV\right) \leq \|e^{-H\frac{t}{2}}f\|^2_{L^2(M)} \leq \frac{1}{\gamma(t)}\|f\|^2_{L^1(M)}. \tag{4.70}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|f\|^2_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega f dV \leq \left(\int_\Omega dV\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega f^2 dV\right)^{\frac{1}{2}} = V(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)} = V(\Omega).$$

Άρα η σχέση (4.70) γίνεται

$$\int_M |\nabla f|^2 dV \geq \frac{1}{t}\left(\log\frac{\gamma(t)}{V(\Omega)}\right)^+.$$

Παίρνοντας το supremum για το $t > 0$ έχουμε

$$\int_M |\nabla f|^2 dV \geq \widetilde{\Lambda}(V(\Omega))$$

και παίρνοντας το infimum για την f στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους, προκύπτει από το πηλίκο Rayleigh (αφού $\|f\|_{L^2(M)} = 1$)

$$\lambda_1(\Omega) \geq \widetilde{\Lambda}(V(\Omega)). \tag{4.71}$$

που είναι το ζητούμενο.
Αν $\gamma \in \Gamma_\delta$, τότε από το Λήμμα 4.2.5 έχουμε

$$\widetilde{\Lambda}(\upsilon) \geq \frac{\delta}{2}\Lambda(C_\delta \upsilon)$$

και η ανισότητα Faber-Krahn γίνεται

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\delta}{2}\Lambda(C_\delta V(\Omega))$$

που αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό. □

Παρατήρηση 4.2.2. Αν $\sup\gamma = \infty$, τότε έπεται από τη σχέση (4.68) ότι $\widetilde{\Lambda}(\upsilon) > 0$. Άρα, από την σχέση (4.71) έχουμε ότι $\lambda_1(\Omega) > 0$ για κάθε ανοικτό σύνολο Ω με πεπερασμένο μέτρο.

Από το Θεώρημα 4.2.7 και την Παρατήρηση 4.2.1 έχουμε ότι αν η πολλαπλότητα M ικανοποιεί την ανισότητα Faber-Krahn με συνάρτηση $\Lambda \in \mathbf{L}$, τότε ο πυρήνα θερμότητας ικανοποιεί την εκτίμηση

$$P(x,x,t) \leq \frac{4}{\gamma(t/2)},$$

όπου γ ο $\Gamma-$μετασχηματισμός της συνάρτησης Λ.
Άρα, συνδιάζοντας τα Θεωρήματα 4.2.7 και 4.2.8, και θεωρώντας ότι $\gamma \in \Gamma_\delta$ ή ισοδύναμα $\Lambda \in \mathbf{L}_\delta$, συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα Faber-Krahn

$$\lambda_1(\Omega) \geq \Lambda(V(\Omega))$$

ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η εκτίμηση

$$P(x,x,t) \leq \frac{4}{\gamma(t)},$$

όπου οι σταθερές στις προηγούμενες σχέσεις παραλείπονται.

Πόρισμα 4.2.2. Για κάθε πολλαπλότητα Riemann (M,V) και για κάθε $n > 0$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Η εκτίμηση $P(x,x,t) \leq Ct^{-\frac{n}{2}}$, για κάθε $t > 0$ και $x \in M$.
(ii) Η ανισότητα Faber-Krahn με συνάρτηση $\Lambda(\upsilon) = c\upsilon^{-\frac{n}{2}}$, όπου $c > 0$.
(iii) Η ανισότητα Nash που δίνεται από τη σχέση (4.36).
(iv) Η ανισότητα Sobolev για κάθε $u \in H_0^1(M)$ και για $n > 2$:

$$\int_M |\nabla u|^2 dV \geq c\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dV\right)^{\frac{n-2}{n}}, \tag{4.72}$$

όπου $c = c(a,n)$.

Απόδειξη. (i)$\Leftrightarrow$ (ii) Προκύπτει άμεσα από την Παρατήρηση 4.2.2, αφού ο $\mathbf{L}-$μετασχηματισμός της συνάρτησης $\gamma(t) = C^{-1}t^{\frac{n}{2}}$ είναι η συνάρτηση $\Lambda(\upsilon) = c\upsilon^{-\frac{2}{n}}$ (βλ. Παράδειγμα 4.2.6).
(ii)$\Leftrightarrow$ (iii) Ισχύει από το Λήμμα 4.2.1, το Παράδειγμα 4.2.2 και την Πρόταση 4.2.1.
(ii)$\Leftrightarrow$ (iv) Έπεται άμεσα από το πηλίκου Rayleigh

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{\upsilon \in C_c^\infty(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla \upsilon|^2 dV}{\int_\Omega \upsilon^2 dV}$$

και την ανισότητα Hölder:

$$\int_\Omega u^2 dV \leq \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}} dV\right)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int_\Omega dV\right)^{\frac{2}{n}}.$$

□

Βιβλιογραφία

[1] Brezis, H. : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[2] Cioranescu, D. and Donato, P. : *An Introduction to Homogenization*, Oxford University Press, 1999.

[3] Davies, E. : *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[4] Davies, E. and Safarov, Y. : *Spectral Theory and Geometry*, Cambridge University Press, 1999.

[5] Diestel, J. : *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer London, Limited, 1984.

[6] Evans, L. : *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.

[7] Evans, L. and Gariepy, R. : *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1991.

[8] Federer, H. : *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.

[9] Grigoryan, A. : *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*, American Mathematical Soc., 2009.

[10] Kesavan, S. : *Symmetrization and Applications*, Series in Analysis-Vol. 3, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, 2006.

[11] Kesavan, S. : *Topics in Functional Analysis and Applications*, New Age International (P) Limited Publishers, 1989.

[12] Lieb, E. and Loss, M. : *Analysis*, American Mathematical Society., 2001.

[13] Sard, A. : *The Measure of the Critical Values of Differentiable Maps*, Bulletin of the American Mathematical Society Volume 48, Number 12, 883-890, 1942.

[14] Talenti, G. : *Best Constant in Sobolev Inequality*, Ann. Mat. Pura Appl., 110, pp. 353-372, 1976.

Ευρετήριο