Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματίων

Εργασία για την απόκτηση Μ.Δ.Ε του τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματίων του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών

Ανασκόπηση της θεωρίας συνδεσμικών συστημάτων και κατά Hamilton διατύπωση των προτύπων Bianchi

Χρήστος Ι. Παπούλιας
Α.Μ. 200718

Επιβλέπων: Αναπ. Καθηγητής Θ.Ι.Χριστοδουλάκης

Η τριμελής επιτροπή απαρτίζεται από τους:

1)Αναπληρωτής Καθηγητής Θ.Ι. Χριστοδουλάκης
2) Αναπληρωτής Καθηγητής Ν. Τετράδης
3)Επίκουρος Καθηγητής Γ. Διαμάντης

ΑΘΗΝΑ 2011

1) ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ BIANCHI TYPE III

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία γίνεται ανασκόπηση του κατά Hamilton φορμαλισμού της βαρύτητας στην πλήρη βαρύτητα και σε κοσμολογίες προτύπων Bianchi. Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός μας επιτρέπει να λύσουμε ως προς της γενικευμένες επιταχύνσεις όταν η ορίζουσα του πίνακα του Hess είναι μη μηδενική, οπότε και το σύστημα καλείται regular. Στην περίπτωση όμως που η ορίζουσα αυτή είναι μηδέν τότε δεν μπορούμε να λύσουμε προς όλες τις επιταχύνσεις, αλλά μόνο ως προς κάποιες από αυτές. Τότε τα συστήματα αυτά καλούνται '**Singular Lagrangian systems**' ή '**Constrained Hamiltonian Systems**' ή και '**Degenerate Systems**'. Ο χειρισμός τέτοιων συστημάτων είναι το αντικείμενο συζήτησης του πρώτου κεφαλαίου, ενώ σκιαγραφείται και η διαδικασία κβάντωσής τους σύμφωνα με την πρόταση του Dirac.

Η κβάντωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι μια περίπλοκη και δύσκολη διαδικασία, σε σημείο που μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί απολύτως ικανοποιητικός τρόπος χειρισμού της κβαντικής βαρύτητας. Προκειμένου να αποκτήσουμε τις κατάλληλες γνώσεις και διαίσθηση, που χρειαζόμαστε για να αντιμετωπίσουμε το πλήρες πρόβλημα, είναι λογικό να κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις παρακάμπτοντας μερικές από τις δυσκολίες που συναντάμε. Το πιο λογικό και κομψό είναι να επιβάλουμε στο πρόβλημά μας συμμετρίες και με τον τρόπο αυτό να πάρουμε ειδικές λύσεις για το πρόβλημα που δεν μπορούμε να λύσουμε πλήρως. Κάνοντας την υπόθεση ότι ο τετραδιάστατος χώρος φυλλοποιείται από ομογενείς τρισδιάστατους χώρους, (manifolds) σταθερού χρόνου, καταλήγουμε στα 9 πρότυπα Bianchi.

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις χρονικά εξαρτώμενες αμφιδιαφορίσεις που οδηγούν σε μετασχηματισμούς του $\gamma_{\alpha\beta}$ μέσω πινάκων που είναι αυτομορφισμοί της άλγεβρας Lie που ορίζουν οι σταθερές δομής των προτύπων Bianchi. Με τον τρόπο αυτό μας δίνεται η δυνατότητα να απλοποιήσουμε τη μορφή του στοιχείου γραμμής και επομένως τις εξισώσεις Einstein χωρίς να χάνεται η γενικότητα τους. Με αυτό τον τρόπο, σε όλα τα πρότυπα Bianchi εμφανίζονται τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου στην γενική λύση για το σύνολο των εξισώσεων του Einstein και αυτό μας δίνει την ελευθερία να μπορούμε πάντοτε να θέτουμε το διάνυσμα μετατόπισης $\tilde{N}^{a}$ ίσο με το μηδέν (πιθανώς με τίμημα κάποιο πιο πεπλεγμένου $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$).

Το επόμενο βήμα είναι να ακολουθήσουμε την κανονική ανάλυση της βαρύτητας για κοσμολογίες τύπου Bianchi. Εδώ θα δούμε ότι τα πρότυπα Bianchi χωρίζονται σε Class A $\left(C^{\tau}_{\tau\rho}=0\right)$ και Class B $\left(C^{\tau}_{\tau\rho}\neq 0\right)$. Η εφαρμογή του αλγόριθμου Dirac-Bergmann οδηγεί σε μια κλειστή άλγεβρα μόνο για τα Class A μοντέλα. Στα Class B εμφανίζονται περαιτέρω σύνδεσμοι χωρίς αντιστοιχία με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein, αναδεικνύοντας δηλαδή την αδυναμία μας να γράψουμε μια έγκυρη Hamiltonian για τα Class B μοντέλα.

Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρότυπο Bianchi III. Όπως θα δούμε παρά το γεγονός ότι το πρότυπο αυτό είναι Bianchi type class B με συγκεκριμένες παραδοχές μπορούμε να γράψουμε για το μοντέλο αυτό έγκυρη χαμιλτονή. Στη συνέχεια προχωράμε στην κβάντωση του σύμφωνα με την πρόταση του Dirac και λύνουμε την εξίσωση Wheeler DeWitt που προκύπτει.

INTRODUCTION

In this essay we attempt to present a review of the Hamiltonian formalism, not only in the case of full pure gravity, but also for Bianchi cosmologies. In the Lagrangian formalism we are allowed to solve the Euler Lagrange equations in terms of the generalized accelerations whenever the determinant of the Hess matrix is non vanishing, in which case the system is called regular. However, if the Hess determinant vanishes we cannot solve the Euler equations in terms of all the accelerations but only for some of them. Such systems are called '**Singular Lagrangian Systems**' or '**Constrained Hamiltonian Systems**' or '**Degenerate Systems**'. The handling of such systems according to the Dirac-Bergmann algorithm is discussed in the first chapter along with an attempt to outline the quantization in accordance with the Dirac's proposal.

The quantization of the general relativity theory is a hard and complicated process, and even nowadays we haven't found any complete way to treat quantum gravity. In order to gain appropriate knowledge and intuition, to treat the complete problem, it is reasonable to make some simplifications bypassing some of the difficulties encountered. The most logical and elegant way is to impose to our problem symmetries and thus get specific solutions to the full problem. Making the assumption that the four-dimentional space can be splitted into three-dimentional with fixed time homogeneous spaces, we end up whith the 9 Bianchi models.

Next we determine the time dependent diffeomorfisms leading to matrix transformations of the tables $\gamma_{\alpha\beta}$ that are automorfisms of the Lie algebra defined by the structure constants of each Bianchi model. In such a way we are able to simplify the form of the line element and therefore the Einstein's equations without losing generality. So after all this process, in all Bianchi models we come up with four arbitrary functions of time in the general solution of all Einstein's equations, and this always gives us the right to set the Shift vector $\tilde{\mathrm{N}}^{a}$ to zero (possibly we will have to pay the cost of a more complicated $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$).

What is next is to follow the canonical analysis of the gravity Bianchi cosmologies. Here we can see that the Bianchi types are divided into Class A $\left(C^{\tau}_{\tau\rho}=0\right)$ and Class B $\left(C^{\tau}_{\tau\rho}\neq 0\right)$ models. The Dirac-Bergmann algorithm leads to a closed algebra only for Class A models. In Class B we come up with further constraints with no correlation to the Einstein's field equations , imposing our inability to write a valid Hamiltonian for Class B models.

Finally in the third chapter we concentrate on a diagonal Bianchi type III model. As we see, although this ia a class B model, we can write a valid Hamiltonian provided the model becomes axis-symetric. Then we proceed to quantization in accordance to the Dirac's proposal and solve the Wheeler DeWitt equation obtained.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

1. ΚΛΑΣΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΧΩΡΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥΣ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα του οποίου η δυναμική παράγεται από τη δράση

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(q^k, \dot{q}^k\right) \tag{1.1}$$

όπου L η συνάρτηση Lagrange, q^k οι γενικευμένες συντεταγμένες και $\dot{q}^k$ οι γενικευμένες ταχύτητες $\left(\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt}\right)$

οι εξισώσεις Euler Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^m}\ddot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^m}\dot{q}^m - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \tag{1.2}$$

ο πίνακας

$$W_{km} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^m} \tag{1.3}$$

καλείται Hessian

Για να μεταβούμε στον φορμαλισμό Hamilton ορίζουμε τις γενικευμένες ορμές μέσω των σχέσεων

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \phi_k\left(q, \dot{q}\right) \qquad k = 1,2,\ldots N \tag{1.4}$$

Για να μπορέσουμε να λύσουμε έστω και τοπικά ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες συναρτήσει των ορμών θα πρέπει η ορίζουσα του ιακωβιανού πίνακα

$\frac{\partial P_k}{\partial \dot{q}^m} = \frac{\partial \phi_k}{\partial \dot{q}^m} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^m} = W_{km}$ να είναι μη μηδενική.

Ένα σύστημα καλείται regular όταν $\det W \neq 0$.

Η Hamiltonian ορίζεται μέσω της σχέσεως

$$H\left(q^k, P_k\right) = \dot{q}^k P_k - L \tag{1.5}$$

και οι εξισώσεις Hamilton-Jacobi είναι

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \kappa\alpha\iota \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{1.6}$$

Θα ορίσουμε τώρα την αγκύλη Poisson δύο μεγεθών Α και Β που είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων και των ορμών. Είναι:

$$\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q^k}\frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial q^k} \ . \tag{1.7}$$

Οι θεμελιώδεις αγκύλες Poisson είναι:

$$\{q^i, q^k\} = 0 \qquad \{P_i, P_j\} = 0 \qquad \{q^i, P_k\} = \delta^i{}_k \tag{1.8}$$

Αν θεωρήσουμε τις 2N μεταβλητές $\mathrm{X}_a = \left(q^1, q^2, \ldots q^N, P_1, P_2, \ldots P_N\right)$ η αγκύλη Poisson γράφεται:

$$\{A, B\} = \Gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{X}_\alpha}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{X}_\beta} \tag{1.9}$$

όπου Γ ο τετραγωνικός πίνακας $2\mathrm{N} \times 2\mathrm{N}$ $\begin{bmatrix} 0_\mathrm{N} & \mathrm{I}_\mathrm{N} \\ -\mathrm{I}_\mathrm{N} & 0_\mathrm{N} \end{bmatrix}$

Με αυτό το συμβολισμό οι θεμελιώδεις αγκύλες Poisson γράφονται

$$\{\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta\} = \Gamma_{\alpha\beta} \tag{1.10}$$

Οι αγκύλες Poisson έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&1.\ \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = -\{\mathrm{B}, \mathrm{A}\} \\
&2.\ \{\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B}, \Gamma\} = \lambda\{\mathrm{A}, \Gamma\} + \mu\{\mathrm{B}, \Gamma\} \\
&3.\ \{\mathrm{AB}, \Gamma\} = \{\mathrm{A}, \Gamma\}\mathrm{B} + \mathrm{A}\{\mathrm{B}, \Gamma\} \\
&4.\ \{\mathrm{A}, \{\mathrm{B}, \Gamma\}\} + \{\mathrm{B}, \{\Gamma, \mathrm{A}\}\} + \{\Gamma, \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}\} = 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους $\mathrm{A} = \mathrm{A}\left(P_k, q^k\right)$ είναι:

$$\dot{\mathrm{A}} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial P_k}\dot{P}_k = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial P_k} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial P_k}\frac{\partial H}{\partial q^k} \Rightarrow \dot{\mathrm{A}} = \{A, H\} \tag{1.12}$$

2. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥΣ

ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Οι σχέσεις

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \phi_i\left(q, \dot{q}\right) \qquad i = 1,2,...N \tag{2.1}$$

είναι δυνατόν να λυθούν ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες αν και μόνο αν $\det W \neq 0$. Αν $\det W = 0$ τότε έχουμε ένα σύστημα με συνδέσμους [4]. Έστω ότι η τάξη της Hessian είναι $R < N$. Τότε οι σχέσεις (2.1) μπορούν να λυθούν ως προς R από τις γενικευμένες ταχύτητες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι λύνουμε ως προς τις R πρώτες

$$\dot{q}^\alpha = f^\alpha\left(q, P_a, \dot{q}^r\right) \qquad a = 1,...,R \quad r = R+1,...,N \tag{2.2}$$

Αντικαθιστούμε την (2.2) στην (2.1) και έχουμε

$$P_i = \phi_i\left(q, \dot{q}^a, \dot{q}^r\right) = \phi_i\left(q, f^\alpha\left(q, P_a, \dot{q}^r\right), \dot{q}^r\right) = g_i\left(q, P_\alpha, \dot{q}^r\right) \tag{2.3}$$

τότε $g_\alpha = P_\alpha$. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις g_r δεν μπορούν να εξαρτώνται από τα $\dot{q}^r$ γιατί αν υπήρχε έστω και ένα από τα $\dot{q}^r$ θα μπορούσαμε να λύσουμε ως προς αυτό, πράγμα που είναι ασύμβατο με την υπόθεση που κάναμε ότι $rankW = R$ που σημαίνει ότι λύσαμε ως προς τον μεγαλύτερο αριθμό $\dot{q}^i$ που μπορούσαμε.

Έτσι $$P_r = g_r(q, P_a) \tag{2.4a}$$

Θέτω $$G_r = P_r - g_r(q, P_a) \tag{2.4b}$$

Και έχω $$G_r = 0 \quad \text{(Primary Constraints)} \tag{2.4c}$$

Ορίζουμε την κανονική Hamiltonian μέσω της σχέσης

$$H_c = H_c\left(q, P_a, \dot{q}^r\right) = P_i \dot{q}^i - L\left(q, \dot{q}\right) \tag{2.5}$$

όπου εννοείται ότι τα $\dot{q}^a$ αντικαθίστανται από τις σχέσεις (2.2) ενώ τα P_r από τις σχέσεις (2.4a).

Παρατηρήσεις

1. $$H_c = H_c\left(q, P_a, \dot{q}^r\right) = P_a \dot{q}^a + P_r \dot{q}^r - L\left(q, \dot{q}^a, \dot{q}^r\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \dot{q}^r} = P_a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^r} + P_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = P_a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^r} + P_r - P_a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^r} - P_r = 0 \Rightarrow$$

$$H_c = H_c(q, P_a) \tag{2.6}$$

2. $\dfrac{\partial H_c}{\partial P_a} = \dot{q}^a + P_b \dfrac{\partial \dot{q}^b}{\partial P_a} + \dot{q}^r \dfrac{\partial g_r}{\partial P_a} - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \dfrac{\partial \dot{q}^b}{\partial P_a} \Rightarrow$

$$\frac{\partial H_c}{\partial P_a} = \dot{q}^a + \dot{q}^r \frac{\partial g_r}{\partial P_a} \tag{2.7}$$

3. $\dfrac{\partial H_c}{\partial q^i} = P_a \dfrac{\partial \dot{q}^a}{\partial q^i} + \dfrac{\partial g_r}{\partial q^i} \dot{q}^r - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \dfrac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^i} \Rightarrow$

$\dfrac{\partial H_c}{\partial q^i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q^i} + \dfrac{\partial g_r}{\partial q^i} \dot{q}^r$

Για μία λύση των εξισώσεων Euler Lagrange $\dfrac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{P}_i$ έχουμε:

$$\frac{\partial H_c}{\partial q^i} = -\dot{P}_i + \frac{\partial g_r}{\partial q^i} \dot{q}^r \tag{2.8}$$

3. ΑΣΘΕΝΗΣ ΚΑΙ ΙΣΧΥΡΗ ΙΣΟΤΗΤΑ

Οι σύνδεσμοι $G_r(q, P_a) = 0$ περιορίζουν το σημείο που αναπαριστά την κατάσταση (q, P) του συστήματος σ' ένα υποσύνολο Γ_p του φασικού χώρου Γ και η H_c είναι ορισμένη μόνο στο Γ_p. Θέλουμε να δούμε την H_c σαν τον περιορισμό στον Γ_p μιας Hamiltonian που ορίζεται σε ολόκληρο το φασικό χώρο. Έστω $F(q, P)$ μια συνάρτηση που ορίζεται σε ολόκληρο το φασικό χώρο. Ο περιορισμός της F στον Γ_p προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τα P_r με τα $g_r(q, P_a)$.

Έτσι έχουμε τον επόμενο ορισμό:

$$F \approx 0 \Leftrightarrow F\big|_{\Gamma_p} = 0 \tag{3.1}$$

αν εκτός από την F είναι και το gradient της επίσης μηδέν στον Γ_p τότε η F καλείται ισχυρά μηδέν. Δηλαδή

$$F \approx: 0 \Leftrightarrow F\big|_{\Gamma_p} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial P_i}\right)\bigg|_{\Gamma_p} = 0 \tag{3.2}$$

Θεώρημα

Έστω $F = F(q, p)$ με $F(q, p) \approx 0 \Leftrightarrow F \approx: G_r \dfrac{\partial F}{\partial P_r}$

Απόδειξη:

Μια απειροστή μεταβολή στον φασικό χώρο $\delta q^i, \delta P_i$ επάγει για την F

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial F}{\partial P_i}\delta P_i$$

όμως στον χώρο Γ_p μόνο τα $\delta q^i, \delta P_a$ είναι ανεξάρτητα, ενώ τα

$$\delta P_r = \frac{\partial g_r}{\partial q_i}\delta q^i + \frac{\partial g_r}{\partial P_a}\delta P_a$$

Έτσι $\delta F\big|_{\Gamma p} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial q^i} + \dfrac{\partial F}{\partial P_r}\dfrac{\partial g_r}{\partial q^i}\right)\delta q^i + \left(\dfrac{\partial F}{\partial P_a} + \dfrac{\partial F}{\partial P_r}\dfrac{\partial g_r}{\partial P_a}\right)\delta P_a$

Αν

$$F \approx 0 \Leftrightarrow F\big|_{\Gamma_p} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} + \frac{\partial F}{\partial P_r}\frac{\partial g_r}{\partial q^i}\right) \approx 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{\partial F}{\partial P_a} + \frac{\partial F}{\partial P_r}\frac{\partial g_r}{\partial P_a}\right) \approx 0 \tag{3.3}$$

Από τις σχέσεις αυτές εύκολα προκύπτει ότι :

$$
\begin{aligned}
&F - G_r \frac{\partial F}{\partial P_r} \approx 0 \\
&\frac{\partial}{\partial q^i}\left(F - G_r \frac{\partial F}{\partial P_r} \right) \approx 0 \\
&\frac{\partial}{\partial P_a}\left(F - G_r \frac{\partial F}{\partial P_r} \right) \approx 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

άρα $F \approx: G_r \dfrac{\partial F}{\partial P_r}$

δηλαδή μια ασθενώς μηδέν συνάρτηση των (P, q) είναι ισχυρώς ίση με ένα γραμμικό συνδυασμό των συνδέσμων.

4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΚΑΙ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΣΥΝΔΕΣΜΩΝ

Θεωρούμε ότι η H_c είναι ο περιορισμός στον Γ_p μιας ορισμένης σε όλο το φασικό χώρο H' για την οποία θεωρούμε ότι $H' = H_c$. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3.4) για την ασθενώς μηδέν συνάρτηση $F \equiv H_c - H'$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η H_c δεν εξαρτάται από τα P_r έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_c}{\partial q^i} &\approx \frac{\partial}{\partial q^i}\left(H' - G_r \frac{\partial H'}{\partial P_r} \right) \\ \frac{\partial H_c}{\partial P_i} &\approx \frac{\partial}{\partial P_i}\left(H' - G_r \frac{\partial H'}{\partial P_r} \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.1) με τις (2.7) και (2.8) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{q}^a - \frac{\partial G_r}{\partial P_a} \dot{q}^r &\approx \frac{\partial}{\partial P_a}\left(H' - G_r \frac{\partial H'}{\partial P_r} \right) \\ \dot{P}_a + \frac{\partial G_r}{\partial q^i} \dot{q}^r &\approx -\frac{\partial}{\partial q^i}\left(H' - G_r \frac{\partial H'}{\partial P_r} \right) \end{aligned}$$

Στο πρώτο σύνολο των εξισώσεων ο δείκτης a μπορεί να επεκταθεί μέχρι N διότι για δείκτη s αντί για a οι σχέσεις ικανοποιούνται ταυτοτικά. Θέτουμε $H = H' - G_r \frac{\partial H'}{\partial P_r}$ και οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &\approx \frac{\partial H}{\partial P_i} + \frac{\partial G_r}{\partial P_i} \dot{q}^r \approx \left\{ q^i, H + \dot{q}^r G_r \right\} \\ \dot{P}_i &\approx -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial G_r}{\partial q^i} \dot{q}^r \approx \left\{ P_i, H + \dot{q}^r G_r \right\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Στις παραπάνω σχέσεις πρέπει να γίνει καθαρό ότι οι αγκύλες Poisson υπολογίζονται σαν να ήταν όλα τα q και P ανεξάρτητα. Μόνο μετά τον υπολογισμό των αγκύλων μπορούμε να θέσουμε τους συνδέσμους μηδέν (αυτό είναι ακριβώς το νόημα του συμβόλου $\approx$). Ενώ η H δεν είναι πλήρως προσδιορισμένη οι σχέσεις (4.1) επιβάλουν $H \approx: H_c$ που σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την H_c αντί τις H στις σχέσεις (4.2). έτσι τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &\approx \left\{ q^i, H_c + \dot{q}^r G_r \right\} \\ \dot{P}_i &\approx \left\{ P_i, H_c + \dot{q}^r G_r \right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Βγάλαμε τις παραπάνω σχέσεις λύνοντας ως προς μερικές από τις ταχύτητες και γράφοντας τους συνδέσμους στη μορφή $P_r = g_r(q, P_a)$. Αυτό μπορεί να είναι πρακτικά δύσκολο. Από την άλλη αν οι σύνδεσμοι μπορούν να γραφούν σε προφανώς συναλλοίωτη μορφή, μπορεί να μην είναι επιθυμητό. Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τις σχέσεις (4.3) συναρτήσει κάποιων άλλων γενικών ποσοτήτων της μορφής

$$\Phi_r(q,P) \approx 0 \qquad r = R+1,\ldots,N \quad \text{(implicit constraints)} \tag{4.4}$$

Οι σύνδεσμοι $G_r = P_r - g_r(q, P_a)$ πρέπει να θεωρούνται σαν εκπεφρασμένη λύση των $\Phi_r(q,P) \approx 0$. Υπάρχει μια αμφιλογία στη συναρτησιακή μορφή των (4.4) διότι αν $\Phi_r(q,P) \approx 0$ τότε και $\Phi_r^2(q,P) \approx 0$ μάλιστα $\Phi_r^2(q,P) \approx: 0$. Έτσι πρέπει να θέσουμε μια αρχή ελαχιστότητας στη μορφή των (4.4). Αυτό μπορεί να γίνει απαιτώντας ο $2N \times (N-R)$ πίνακας $\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial q^i}, \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_i}\right)$ να έχει τάξη τουλάχιστον N-R.

Επειδή $\Phi_r \approx 0$ οι σχέσεις (3.4) γίνονται:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial q^i} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_s}\frac{\partial g_s}{\partial q^i}\right) \approx 0 \\ &\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial P_a} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_r}\frac{\partial g_r}{\partial P_a}\right) \approx 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Επειδή θέλουμε οι σύνδεσμοι $\Phi_r \approx 0$ να έχουν ακριβή λύση την $P_r = g_r(q, P_a)$, από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων πρέπει ο πίνακας $V_r^{\ s} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_s}$ να είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο έστω τον $V^{-1\,r}{}_s$. Έτσι οι σχέσεις (4.5) μπορούν να αντιγραφούν οδηγώντας στις :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_s}{\partial q^i} &\approx -\frac{\partial G_s}{\partial q^i} \approx -V^{-1}{}_s{}^r \frac{\partial \Phi_r}{\partial q^i} \\ \frac{\partial g_s}{\partial P_a} &\approx \frac{\partial G_s}{\partial P_a} \approx -V^{-1}{}_s{}^r \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_a} \end{aligned} \tag{4.6}$$

αντικαθιστώντας τις (4.6) στις (4.3) έχουμε:

$$\dot{q}^a \approx \{q^a, H_c\} + \dot{q}^s\{q^a, G_s\} \approx \{q^a, H_c\} + \dot{q}^s \frac{\partial G_s}{\partial P_a}$$

$$\dot{q}^a \approx \{q^a, H_c\} + \dot{q}^s V^{-1}{}_s{}^r \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_a} \tag{4.7}$$

και η σχέση αυτή ισχύει τετριμμένα για τους υπόλοιπους δείκτες

$$\dot{q}^\iota \approx \{q^\iota, H_c\} + \dot{q}^s V^{-1}{}_s{}^r \frac{\partial \Phi_r}{\partial P_\iota}$$

$$\dot{P}_i \approx \{P_i, H_c\} + \dot{q}^s\{P_i, G_s\} \approx \{P_i, H_c\} - \dot{q}^s \frac{\partial G_s}{\partial q^i}$$

Θέτουμε $\mu^r = V^{-1}{}_s{}^r\,\dot{q}^s$ και $H_p = H_c + \mu^r \Phi_r$ (primary Hamiltonian) (4.8)

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H_c + \mu^r \Phi_r\}$$
$$\dot{P}_i \approx \{P_i, H_c + \mu^r \Phi_r\}$$

Συνεπώς για μια συνάρτηση $A = A(q, P)$ ορισμένη σε ολόκληρο το φασικό χώρο έχουμε:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial A}{\partial P_i}\dot{P}_i \approx \{A, H_c\} + \{A, \mu^r \Phi_r\} = \{A, H_p\} \tag{4.9}$$

5. ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Επειδή οι σύνδεσμοι ισχύουν σε κάθε χρονική στιγμή έχουμε:

$$0 \approx \dot{\Phi}_r \approx \{\Phi_r, H_c\} + \mu^s \{\Phi_r, \Phi_s\} \tag{5.1}$$

Οι σχέσεις αυτές ή είναι ασυμβίβαστες ή οδηγούν σε σχέσεις προσδιορισμού μερικών από τα μ^r ή οδηγούν σε νέους συνδέσμους. Για να διακρίνουμε τις διάφορες περιπτώσεις ορίζουμε:

$$h_r = \{\Phi_r, H_c\}$$
$$P_{rs} = \{\Phi_r, \Phi_s\}$$

<u>1η περίπτωση</u> ($\det P \neq 0$)

Τότε οι σχέσεις (5.1) λύνονται ως προς τα μ^r με λύσεις

$\mu^s \approx -P^{-1^{sr}} h_r$. Έτσι τα μ^r υπολογίζονται ασθενώς και η εξίσωση κίνησης οποιασδήποτε συνάρτησης του φασικού χώρου γίνεται:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \Phi_r\} P^{-1^{rs}} \{\Phi_s, H_c\} \tag{5.2}$$

<u>2η περίπτωση</u> $(\det P \approx 0)$

Έστω ότι η τάξη του πίνακα P είναι $M < N - R$. Επειδή ο P είναι ένας $(N - R)\times(N - R)$ πίνακας υπάρχουν N-R-M γραμμικά ανεξάρτητα μηδενικά (null) ιδιοανύσματα $e_{(a)}$.

Δηλαδή: $e_{(a)}{}^s (q, P) P_{sr} \approx 0 \qquad a = 1,2,.....,N - R - M$

Πολλαπλασιασμός των (5.1) με $e_{(a)}{}^r$ δίνει:

$$0 \approx e_{(a)}{}^r h_r =: X_a \tag{5.3}$$

Οι σχέσεις αυτές ή ικανοποιούνται κάνοντας χρήση των συνδέσμων ή οδηγούν σε νέους συνδέσμους που καλούνται δευτερογενείς σύνδεσμοι (secondary constraints) ή όπως θα δούμε (παράγραφος 5 κεφάλαιο 2) μπορεί να οδηγήσουν και σε κάποια ασυνέπεια αν η Hamiltonian που διαλέξαμε δεν είναι έγκυρη.
Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και για του δευτερογενείς συνδέσμους . Η διατήρηση των δευτερογενών συνδέσμων ή παράγει σχέσεις υπολογισμού των μ^r ή παράγει νέους (τριτογενείς) συνδέσμους κ.ο.κ. Ύστερα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων η διαδικασία τερματίζεται. Οι σύνδεσμοι που παράγονται σε ολόκληρη τη διαδικασία καλούνται με ένα όνομα δευτερογενείς.
Έτσι τελικά βρισκόμαστε στην εξής κατάσταση:
Υπάρχει μια υπερεπιφάνεια Γ_c στον 2N-διάστατο φασικό χώρο που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\Phi_r \approx 0 \qquad r = R+1,.....,N \tag{5.4a}$$
$$X_\rho \approx 0 \qquad \rho = 1,.......,L \tag{5.4b}$$

Επίσης για τους συντελεστές μ^r ισχύουν οι σχέσεις:

$$\{\Phi_r, H_p\} \approx \{\Phi_r, H_c\} + \{\Phi_r, \Phi_s\}\mu^s \approx 0 \tag{5.5a}$$
$$\{X_\rho, H_p\} \approx \{X_\rho, H_c\} + \{X_\rho, \Phi_s\}\mu^s \approx 0 \tag{5.5b}$$

Αν συμβολίσουμε όλους τους συνδέσμους με το γράμμα Ψ έχουμε

$$\Psi_{\mu} = \left(\Phi_{r}, \mathrm{X}_{\rho}\right)$$

Δηλαδή:

$$\Psi_{\mu} \approx 0 \qquad (5.6a)$$

$$\left\{\Psi_{\mu}, H_{p}\right\} \approx 0 \qquad (5.6b)$$

6. ΠΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕΓΕΘΗ

Ορισμός: Έστω $A = A(q, P)$. Το μέγεθος A καλείται πρώτης τάξης (first class) αν η αγκύλη Poisson του με όλους τους συνδέσμους είναι μηδέν. Αν το μέγεθος A δεν είναι πρώτης τάξης τότε καλείται δεύτερης τάξης (second class).

Πρόταση 1:
Η H_p είναι πρώτης τάξης
Απόδειξη: Είναι προφανές από την (5.6b)

Πρόταση 2:
Αν A είναι μέγεθος πρώτης τάξης τότε $\{A, \Psi_\mu\} \approx: \mathrm{T}_\mu{}^\nu \Psi_\nu$
Απόδειξη: Επειδή A είναι μέγεθος πρώτης τάξης τότε $\{A, \Psi_\mu\} \approx 0$ και από το θεώρημα για την ασθενή ισότητα $\{A, \Psi_\mu\} \approx: \mathrm{T}_\mu{}^\nu \Psi_\nu$

Πρόταση 3:
Η αγκύλη Poisson δυο πρώτης τάξης μεγεθών είναι πρώτης τάξης.
Απόδειξη: Έστω A, B δυο πρώτης τάξεως μεγέθη. Από την πρόταση 2

$$\{A, \Psi_\mu\} \approx: \mathrm{T}_\mu{}^\nu \Psi_\nu \text{ και } \{B, \Psi_\mu\} \approx: S_\mu{}^\nu \Psi_\nu .$$

Από την ταυτότητα Jacobi ισχύει:

$$\{\{A, B\}, \Psi_\mu\} = \{A, \{\mathrm{B}, \Psi_\mu\}\} - \{\mathrm{B}, \{\mathrm{A}, \Psi_\mu\}\} \Rightarrow$$

$$\{\{A, B\}, \Psi_\mu\} \approx \{A, S_\mu{}^\nu \Psi_\nu\} - \{\mathrm{B}, \mathrm{T}_\mu{}^\nu \Psi_\nu\} \approx \{A, \Psi_\nu\} S_\mu{}^\nu - \{\mathrm{B}, \Psi_\nu\} \mathrm{T}_\mu{}^\nu \approx 0$$

Θα ξεχωρίσουμε τους συνδέσμους σε πρώτης και δεύτερης τάξης. Επειδή κάθε γραμμικός συνδυασμός συνδέσμων αποτελεί σύνδεσμο, αυτός ο διαχωρισμός δεν είναι τετριμμένος. Αυτό συμβαίνει επειδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα σύνδεσμο με ένα γραμμικό συνδυασμό των συνδέσμων φροντίζοντας όμως η επιφάνεια Γ_c να παραμένει αναλλοίωτη. Δηλαδή αν ορίσουμε τους $\Psi_\mu = \mathrm{T}_\mu{}^\nu \Psi_\nu$ πρέπει ο $\mathrm{T}_\mu{}^\nu$ να είναι αντιστρέψιμος. Για το διαχωρισμό αυτό χρειαζόμαστε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4:
Θεωρούμε τον $(N - R + L) \times (N - R)$ πίνακα $D = [\{\Psi_\mu, \Phi_s\}] = \begin{bmatrix} \{\Phi_r, \Phi_s\} \\ \{X_\rho, \Phi_s\} \end{bmatrix}$

Αν $\mathrm{A} = \lambda^s \Phi_s$ πρώτης τάξης $\Leftrightarrow \lambda^s$ δεξί μηδενικό ιδιοάνυσμα του D.
Απόδειξη: A πρώτης τάξης
$\Leftrightarrow \{A, \Psi_\mu\} \approx 0 \Leftrightarrow \{\lambda^s \Phi_s, \Psi_\mu\} \approx 0 \Leftrightarrow \{\Psi_\mu, \Phi_s\} \lambda^s \approx 0 \Leftrightarrow D_{\mu s} \lambda^s \approx 0 \Leftrightarrow \lambda^s$ δεξί μηδενικό ιδιοάνυσμα του D.
Έστω τώρα ότι η τάξη του D είναι $K \leq N - R$. Τότε υπάρχουν N-R-K γραμμικώς ανεξάρτητα δεξιά μηδενικά ιδιοανύσματα του D, έστω τα $e_{(a)}{}^r, a = 1, \ldots, N - R - K$

Τότε σύμφωνα με την πρόταση 4 οι ποσότητες $\hat{\Phi} = e_{(a)}{}^{r}\Phi_r$ είναι πρώτης τάξης. Επιπλέον επειδή τα $e_{(a)}{}^{r}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ο $(N-R-K)\times(N-R)$ πίνακας $e_{(a)}{}^{r}$ έχει τάξη N-R-K. Επαναριθμώντας πιθανώς τους Φ_r μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι N-R-K πρώτες γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι το σύστημα $\Phi_r \approx 0$ είναι ισοδύναμο με το

$\hat{\Phi}_a \approx 0$ και $\hat{\Phi}_\beta = \Phi_{N-R-K+\beta} \approx 0 \qquad \beta = 1,....,\mathrm{K}$

Επιπλέον οι $\hat{\Phi}_\beta$ είναι δεύτερης τάξης γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ένα ακόμη μηδενικό ιδιοάνυσμα του D. Με αυτόν τον τρόπο χωρίσαμε τους πρωτογενείς συνδέσμους σε πρώτης και δεύτερης τάξης.

Το άθροισμα $\Phi_s\mu^s$ που εμφανίζεται στις εξισώσεις κίνησης μπορεί να γραφτεί:

$$\Phi_s\mu^s = \Phi_\alpha V^\alpha + \Phi_\beta u^\beta \tag{6.1}$$

Η κατάταξη στις δύο τάξεις των δευτερογενών συνδέσμων μπορεί να γίνει με την βοήθεια ενός αντιστρέψιμου πίνακα Α και άλλων δύο πινάκων Β και Γ.

Έστω $\hat{X}_\rho = \mathrm{A}_\rho{}^\sigma \mathrm{X}_\sigma + \mathrm{B}_\rho{}^\alpha \Phi_\alpha + \Gamma_\rho{}^\beta \Phi_\beta$.

Διαλέγουμε τους πίνακες Α,Β,Γ έτσι ώστε όσο το δυνατόν περισσότεροι από τους Χ να είναι πρώτης τάξης. Ας καλέσουμε αυτούς X_A και τους υπόλοιπους X_B. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι οι συντελεστές u προσδιορίζονται πλήρως. Επειδή δε οι V δεν εμφανίζονται στις εξώσεις κίνησης των συνδέσμων οι απροσδιόριστοι συντελεστές είναι τόσοι όσοι και οι πρωτογενείς πρώτης τάξης σύνδεσμοι.

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ (Dirac)**</u>

Θεωρούμε όλους τους δευτέρας τάξης συνδέσμους σε ένα ενιαίο σύνολο

$$\xi_\lambda = (\Phi_\beta, \mathrm{X}_\mathrm{B}) \text{ και τον πίνακα } \Delta = [\{\xi_\lambda, \xi_\mu\}] = \begin{bmatrix} \{\Phi_\beta, \Phi_\beta\} & \{\Phi_\beta, \mathrm{X}_\mathrm{B}\} \\ \{\mathrm{X}_\mathrm{B}, \Phi_\beta\} & \{\mathrm{X}_\mathrm{B}, \mathrm{X}_\mathrm{B}\} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Ο Δ είναι αντιστρέψιμος.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\det\Delta \approx 0$. Τότε οι γραμμές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Έτσι υπάρχουν r^λ (όχι όλα μηδέν) ώστε

$$r^\lambda\{\xi_\lambda, \xi_\mu\} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\{r^\lambda\xi_\lambda, \xi_\mu\} \approx 0$$

προφανώς $\qquad \{r^\lambda\xi_\lambda, \Phi_\alpha\} \approx 0$

και $\qquad \{r^\lambda\xi_\lambda, \mathrm{X}_\mathrm{B}\} \approx 0$

Έτσι η ποσότητα $r^\lambda\xi_\lambda$ είναι πρώτης τάξης. Αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση που κάναμε ότι ξεκινήσαμε με τον μέγιστο αριθμό πρώτης τάξης συνδέσμων.

<u>**Παρατηρήσεις:**</u>

1. Επειδή ο Δ είναι αντισυμμετρικός πρέπει το πλήθος των γραμμών του να είναι άρτιος αριθμός διότι σε αντίθετη περίπτωση $\det\Delta = 0$. Έτσι το πλήθος των δευτέρας τάξεως συνδέσμων είναι πάντα άρτιος αριθμός.

2. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν εναλλακτική μέθοδος εύρεσης των κατάλληλων γραμμικών συνδυασμών δευτέρας τάξεως συνδέσμων που είναι πρώτης τάξης. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Κατασκευάζουμε την ορίζουσα του Dirac για τους δευτέρας τάξης συνδέσμους και βρίσκουμε τα μηδενικά ιδιοανύσματα $r_{(\alpha)}{}^{\lambda}$ (το πλήθος τους πρέπει να είναι άρτιος αριθμός). Οι γραμμικοί συνδυασμοί $r_{(\alpha)}{}^{\lambda}\xi_{\lambda}$ είναι πρώτης τάξης.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τους συντελεστές u. Έχουμε:

$$0 \approx \dot{\xi}_{\mu} \approx \{\xi_{\mu}, H_p\} \approx \{\xi_{\mu}, H_c\} + \{\xi_{\mu}, \Phi_a\}V^a + \{\xi_{\mu}, \Phi_{\beta}\}u^{\beta} \Rightarrow$$
$$\{\xi_{\mu}, H_c\} + \{\xi_{\mu}, \Phi_{\beta}\}u^{\beta} \approx 0 \Rightarrow \{\xi_{\mu}, H_c\} + \Delta_{\mu\nu}U^{\nu} \approx 0$$

όπου $U^{\nu} = \begin{pmatrix} u^{\beta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, με **0** το μηδενικό διάνυσμα διάστασης ίσης με το πλήθος των X_{β}

Πολλαπλασιάζοντας με $\Delta^{\mu\lambda} = (\Delta_{\mu\lambda})^{-1}$ έχουμε:

$$\{\xi_{\mu}, H_c\}\Delta^{\mu\lambda} + \delta_{\nu}^{\lambda}U^{\nu} \approx 0 \Rightarrow$$
$$u^{\beta} \approx -\Delta^{\beta\mu}\{\xi_{\mu}, H_c\} \tag{6.3a}$$
$$0 \approx \Delta^{\beta\mu}\{X_{\beta}, H_c\} \tag{6.3b}$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης μιας συνάρτησης Α του φασικού χώρου γίνεται:

$$\dot{A} \approx \{A, H_p\} \approx \{A, H_c\} + \{A, \Phi_a\}V^a + \{A, \Phi_{\beta}\}u^{\beta} \Rightarrow$$
$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \{A, \Phi_a\}V^a - \{A, \Phi_{\beta}\}\Delta^{\beta\mu}\{\xi_{\mu}, H_c\}.$$

Λόγω της (6.3b) ο δείκτης β μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει όλους τους δεύτερης τάξης συνδέσμους. Έτσι τελικά έχουμε:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \{A, \Phi_a\}V^a - \{A, \xi_{\nu}\}\Delta^{\nu\mu}\{\xi_{\mu}, H_c\} \tag{6.4}$$

7. ΑΓΚΥΛΕΣ DIRAC

<u>**Ορισμός:**</u> Έστω Α και Β δύο συναρτήσεις του φασικού χώρου. Ορίζουμε την αγκύλη Dirac ως εξής:

$$\{A,B\}_D = \{A,B\} - \{A,\xi_\lambda\}\Delta^{\lambda\mu}\{\xi_\mu, B\} \tag{7.1}$$

<u>**Πρόταση 1:**</u>
Η αγκύλη Dirac έχει τις ίδιες ιδιότητες με την αγκύλη Poisson.

<u>**Πρόταση 2:**</u>
Οι εξισώσεις κίνησης παραμένουν αμετάβλητες αν αντί των αγκύλων Poisson χρησιμοποιήσουμε τις αγκύλες Dirac.
<u>Απόδειξη:</u>

$$\{A,H_p\}_D = \{A,H_p\} - \{A,\xi_\lambda\}\Delta^{\lambda\mu}\{\xi_\mu, H_p\}$$

όμως H_p είναι πρώτης τάξης επομένως $\{\xi_\mu, H_p\} \approx 0$.

Επομένως $\dot{A} \approx \{A,H_p\} \approx \{A,H_p\}_D$

<u>**Πρόταση 3:**</u>
Αν αντί των αγκύλων Poisson χρησιμοποιήσουμε τις αγκύλες Dirac μπορούμε να βάλουμε τους ξ_μ μηδέν πριν υπολογίσουμε τις αγκύλες Dirac.
<u>Απόδειξη:</u>
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\{A,\xi_\mu\}_D = 0$ για οποιαδήποτε συνάρτηση Α.
Έτσι έχουμε:
$\{A,\xi_\mu\} - \{A,\xi_\lambda\}\Delta^{\lambda\nu}\{\xi_\mu,\xi_\nu\} = \{A,\xi_\mu\} - \{A,\xi_\lambda\}\Delta^{\lambda\nu}\Delta_{\nu\mu} = \{A,\xi_\mu\} - \{A,\xi_\lambda\}\delta^\lambda{}_\mu = 0$.
Και επομένως όταν χρησιμοποιούμε τις αγκύλες Dirac δεν υπάρχει πλέον ανάγκη διαχωρισμού ισχυρής και ασθενούς ισότητας.

<u>**Πρόταση 4:**</u>
Αν πάρουμε ένα υποσύνολο των δευτέρας τάξης συνδέσμων $\{\xi'_\alpha\} \subset \{\xi_\mu\}$ και υπολογίσουμε τον σχηματιζόμενο από αυτούς τους συνδέσμους μόνο πίνακα του Dirac $\Delta'_{\mu\nu} = \{\xi'_\mu, \xi'_\nu\}$ και υπολογίζουμε την αγκύλη Dirac ως:

$$\{A,B\}_{D(\Delta')} = \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} - \{\mathrm{A},\xi'_\mu\}\Delta'^{\mu\nu}\{\xi'_\nu, \mathrm{B}\}$$

στη συνέχεια διαλέγουμε ένα άλλο υποσύνολο $\{\xi''_\beta\} \subset \{\xi_\mu\} : \{\xi'_\alpha\} \cap \{\xi''_\beta\} = \{\ \}$
και υπολογίσουμε μετά $\{A,B\}_{D(\Delta'')} = \{\mathrm{A},\mathrm{B}\}_{D(\Delta')} - \{\mathrm{A},\xi''_\mu\}\Delta'^{\mu\nu}\{\xi''_\nu, \mathrm{B}\}$ και συνεχίσουμε μέχρι να τελειώσουν όλοι οι σύνδεσμοι το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο σαν να είχαμε υπολογίσει την αγκύλη Dirac με ένα μόνο βήμα. Με την πρόταση αυτή είμαστε σε θέση να χειριζόμαστε με μεγαλύτερη ευχέρεια συστήματα με πολλούς συνδέσμους.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥΣ ΜΟΝΟ

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα με δευτέρας τάξης συνδέσμους μόνό. Για την χρονική εξέλιξη μιας συνάρτησης του φασικού χώρου A θα έχουμε από την (6.4)

$$\dot{A} = \{A, H_c\}_D \tag{7.2}$$

Η (7.2) είναι ένας κομψός τρόπος να γραφτεί η εξίσωση κίνησης (6.4), αλλά υπάρχει και ένας βαθύτερος λόγος που χρησιμοποιούμε τις αγκύλες Dirac.
Καταρχήν σύμφωνα με την πρόταση 3 μπορούμε πλέων να θέτουμε τους συνδέσμους μηδέν προτού υπολογίσουμε τις αγκύλες, ενώ η πρόταση 4 μας βοηθάει στον κατά τμήματα χειρισμό προβλημάτων με πολλούς συνδέσμους[4].
Επιπλέον αν έχουμε μια ποσότητα A η οποία μπορεί να είναι και δεύτερης τάξης, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ποσότητα $A^* \approx A$ που να είναι πρώτης τάξης προσθέτοντας έναν γραμμικό συνδυασμό των συνδέσμων ήτοι: $A^* = A + \mu^\lambda \xi_\lambda$.
Απαιτώντας να είναι πρώτης τάξης παίρνουμε $0 = \{A^*, \xi_\nu\} = \{A, \xi_\nu\} + \mu^\lambda \{\xi_\lambda, \xi_\nu\}$. Οι συντελεστές μ^λ προσδιορίζονται τώρα $\mu^\lambda = -\{\mathrm{A}, \xi_\nu\}\Delta^{\nu\lambda}$ και κατά συνέπεια πρώτης τάξεως ποσότητα που κατασκευάσαμε δίνεται από την έκφραση
$A^* = A - \xi_\lambda \Delta^{\lambda\nu}\{\xi_\nu, \mathrm{A}\}$
Αυτή είναι ακριβώς η διαδικασία που παίρνουμε την πρώτης τάξης H_p από την H_c.
Από αυτήν την οπτική γωνία η αγκύλη Dirac δύο ποσοτήτων A_1, A_2 θα ισούται με την αγκύλη Poisson των πρώτης τάξης ποσοτήτων που κατασκευάσαμε.

$$\{A_1, A_2\}_D = \{A_1^*, A_2^*\}$$

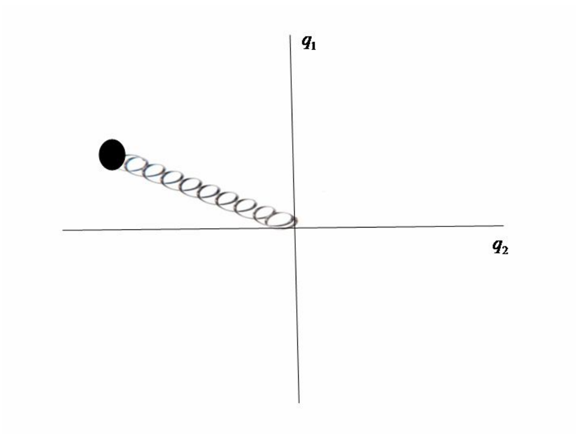
με * να συμβολίζονται τα πρώτης τάξης μεγέθη.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥΣ ΜΟΝΟ

Ας σκεφτούμε τώρα ένα σύστημα με πρώτης τάξης συνδέσμους μόνο. Όσοι είναι οι πρώτης τάξης πρωτογενείς σύνδεσμοι τόσοι θα είναι και οι απροσδιόριστοι συντελεστές V^a. Έστω τώρα ένα αρχικό σημείο του φασικού χώρου (q^0, P^0). Αν κανείς κάνει διαφορετικές επιλογές για τα V^a θα καταλήξει σε διαφορετικά σημεία (q, P) ανάλογα με την επιλογή που έκανε. Όλα αυτά τα (q,P) που μπορεί κανείς να καταλήξει πρέπει να περιγράφουν την ίδια φυσική κατάσταση (q_ϕ, P_ϕ). Επομένως υπάρχει ένας μετασχηματισμός, ο οποίος να θα είναι συμμετρία του προβλήματος και θα με πηγαίνει από την μία τελική κατάσταση στην άλλη. Ο μετασχηματισμός αυτός καλείται μετασχηματισμός βαθμίδας (Gauge Transformation) και η συμμετρία λέγεται συμμετρία βαθμίδας (Gauge symmetry).
Εάν θέλουμε να απαλλαγούμε από την ευχέρεια αυτή, το να μπορούμε δηλαδή να επιλέγουμε αυθαίρετα τους πολλαπλασιαστές V^a, θα πρέπει να προσθέσουμε καινούριες συνθήκες, υπό τη μορφή σχέσεων των q και P, στο πρόβλημά μας. Οι σχέσεις αυτές θα έχουν μόνη ιδιότητα να μην έχουν μηδενική αγκύλη Poisson με τους first class constraints (Gauge Fixing). Καταφέρνουμε έτσι να κάνουμε όλους τους συνδέσμους δεύτερης τάξης και κατά συνέπεια όλοι οι πολλαπλασιαστές να προσδιορίζονται μέσω της σχέσης (3.6α). Το τίμημα που θα πληρώσουμε για την διαδικασία αυτή είναι να χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τις αγκύλες Dirac αντί των αγκύλων Poisson. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, έχουμε δικαίωμα να διατηρήσουμε την πιο εύχρηστη αγκύλη Poisson, αρκεί να αντικαταστήσουμε τις

εναπομένουσες μεταβλητές με τις * ανάλογες προς αυτές όπως ορίζονται στην προηγούμενη παράγραφο.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>



Αν θεωρήσουμε το σωμάτιο μάζας $m = 2$ του σχήματος έχουμε $q_1 = -q_2$
Και K=2

$$T = \frac{2}{2}\left(\dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_2^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\left(2\dot{q}_1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2$$

Άρα θα είναι και

$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2 - q_1^{\,2} - q_2^{\,2}$. Οι εξισώσεις Euler Lagrange είναι:

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 - 2q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 - 2q_2 = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $q_1 + q_2 = 0$. Η πρώτη εξίσωση γίνεται $\ddot{q}_1 + q_1 = 0$.
Ας δούμε τώρα το ίδιο πρόβλημα με τη θεωρία των συνδέσμων.

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2 - q_1^{\,2} - q_2^{\,2}$$

$$P_1 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \qquad P_2 = \dot{q}_2 - \dot{q}_1$$

έχουμε $W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad ,\det W = 0$

Λύνω ως προς τη δεύτερη και αντικαθιστώ τους ορισμούς των ορμών.

$$P_1 = P_1$$

$$P_2 = -P_1 \Rightarrow P_1 + P_2 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = P_1 + P_2$$

$H_c = \dot{q}_1 P_1 + \dot{q}_2 P_2 - L \Rightarrow H_c = \dfrac{P_1^2}{2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2}$ έτσι

$$H_P = H_c + \mu^r \Phi_r = \frac{P_1^2}{2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + \mu\Phi_1$$

Η σχέση (5.1) $\left[\dot{\Phi} \approx 0\right]$ γίνεται:

$$\{\Phi_1, \mathrm{H}_c\} + \mu\{\Phi_1, \Phi_1\} \approx 0 \Rightarrow \left\{P_1 + P_2, \frac{P_1^2}{2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2}\right\} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\{P_1, q_1^{\,2}\} + \{P_2, q_2^{\,2}\} \approx 0 \Rightarrow 2q_1\{P_1, q_1\} + 2q_2\{P_2, q_2\} \approx 0 \Rightarrow q_1 + q_2 \approx 0$$

Αυτός είναι ο δευτερογενής σύνδεσμος $\Phi_2 = q_1 + q_2$.

Για να διατηρείται ο δευτερογενής σύνδεσμος πρέπει $\dot{\Phi}_2 \approx 0 \Rightarrow$

$$\{\Phi_2, \mathrm{H}_c\} + \mu\{\Phi_2, \Phi_1\} \approx 0$$

όμως $\{\Phi_2, \Phi_1\} = -\{P_1 + P_2, q_1 + q_2\} = -\{P_1, q_1\} - \{P_2, q_2\} = 2$

και $\{\Phi_2, \mathrm{H}_c\} = \left\{q_1 + q_2, \frac{P_1^2}{2}\right\} = \left\{q_1, \frac{P_1^2}{2}\right\} = P_1$

Έτσι πρέπει $P_1 + 2\mu \approx 0 \Rightarrow \mu \approx -\frac{P_1}{2}$. Άλλοι σύνδεσμοι δεν υπάρχουν.

Επειδή $\{\Phi_1, \Phi_2\} = 2$ και οι δύο είναι δεύτερης τάξης.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \{\Phi_1, \Phi_1\} & \{\Phi_1, \Phi_2\} \\ \{\Phi_2, \Phi_2\} & \{\Phi_2, \Phi_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η αγκύλη Dirac δύο μεγεθών Α και Β γίνεται:

$$\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}_D = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} - \{\mathrm{A}, \Phi_1\}\Delta^{12}\{\Phi_2, \mathrm{B}\} - \{\mathrm{A}, \Phi_2\}\Delta^{21}\{\Phi_1, \mathrm{B}\} =$$

$$\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} - \frac{1}{2}\{\mathrm{A}, \Phi_1\}\{\Phi_2, \mathrm{B}\} + \frac{1}{2}\{\mathrm{A}, \Phi_2\}\{\Phi_1, \mathrm{B}\}$$

Οι θεμελιώδεις αγκύλες Dirac είναι

$$\{q_1, P_1\}_D = \{q_1, P_1\} - \frac{1}{2}\{q_1, P_1 + P_2\}\{q_1 + q_2, P_1\} + \frac{1}{2}\{q_1, q_1 + q_2\}\{P_1 + P_2, P_1\} = 1 - \frac{1}{2} + 0 \Rightarrow$$

$$\{q_1, P_1\}_D = \frac{1}{2}$$

ομοίως $\{q_2, P_2\}_D = \frac{1}{2}$.

Επειδή οι σύνδεσμοι είναι δευτέρας τάξης μπορώ να βάλλω $P_2 = -P_1$ και $q_2 = -q_1$. Η H_p τότε γίνεται: $H_p = \frac{P_1^2}{2} + 2q_1^2$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \{q_1, H_p\}_D = \{q_1, P_1\}_D P_1 \Rightarrow \dot{q}_1 = \frac{P_1}{2} \Rightarrow 2\ddot{q}_1 = \dot{P}_1 \\ \dot{P}_1 &= \{P_1, H_p\}_D = 4\{P_1, q_1\}_D q_1 \Rightarrow \dot{P}_1 = -\frac{4q_1}{2} \Rightarrow -2q_1 = \dot{P}_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \ddot{q}_1 + q_1 = 0$$

8. ΒΑΘΜΩΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΟ ΜΕ ΤΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

Ας ξεκινήσουμε με τη δράση ενός βαθμωτού πεδίου συζευγμένου με τη βαρύτητα.

$$S = \int \sqrt{-g}\left(\Re - g^{\mu\nu}\Phi,_{\mu}\Phi,_{\nu} - \frac{1}{2}m\Phi^2 \right) d^4x \qquad (8.1)$$

$\Re$ είναι το Ricci Scalar

Αν κάνουμε την υπόθεση Friedman Robertson-Walker μετρικής:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + R^2(t)\Delta_{ij}(x)dx^i dx^j \qquad (8.2)$$

με $\Delta_{ij} = \delta_{ij} + \dfrac{kx_i x_j}{1-kx_i x^i}, k = 0, \pm 1$

και $R(t)$ να είναι το Scale factor, μια συνάρτηση δηλαδή του χρόνου η οποία περιγράφει την διαστολή (/συστολή) της χωρικής επιφάνειας.

έχουμε:

$$\Re = -\frac{6\ddot{R}}{N^2 R} - \frac{6\dot{R}^2}{N^2 R^2} - \frac{6k}{R^2} + \frac{6\dot{N}\dot{R}}{RN^3} \qquad (8.3)$$

$$\sqrt{-g} = NR^3\sqrt{\Delta} \qquad ,\Delta = \det \Delta_{ij} \qquad (8.4)$$

Επιπλέον, από την παραλλαγή της (8.1) ως προς $\delta g_{\mu\nu}$ θα προκύψει όρος $\mathrm{T}_{0i} \propto \Phi_{,0}\Phi_{,i}$ ο οποίος όμως πρέπει να μηδενιστεί διότι ο τανυστής του Einstein είναι $G_{oi} = 0$ για την μετρική (8.2). Αυτό οδηγεί στην παραδοχή ότι το πεδίο Φ πρέπει να είναι ομογενές στο χώρο , δηλαδή $\Phi = \Phi(t)$. Έτσι έχουμε:

$$g^{\mu\nu}\Phi,_{\mu}\Phi,_{\nu} = g^{00}\dot{\Phi}^2 = -\frac{\dot{\Phi}^2}{\mathrm{N}^2}$$

Έτσι η δράση (8.1) γίνεται:

$$S = \int \mathrm{N}R^3\left(\frac{-6R}{N^2 R} - \frac{6R^2}{N^2 R^2} - \frac{6k}{R^2} + \frac{6\dot{N}\dot{R}}{RN^3} + \frac{\Phi^2}{N^2} - \frac{m\Phi^2}{2} \right) dt \int \sqrt{\Delta}d^3x \qquad (8.5)$$

Το ολοκλήρωμα στο χώρο μπορεί να παραλειφθεί σαν σταθερά. Αν στον πρώτο όρο κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, αντικαταστήσουμε στη δράση και ορίσουμε ένα $\Phi' = \Phi/\sqrt{6}$ έχουμε την ανοιγμένη (reduced) δράση:

$$S = \int \left(\frac{R\dot{R}^2}{N} - kNR + \frac{R^3\dot{\Phi}^2}{N} - \frac{m\Phi^2 \mathrm{N}R^3}{2} \right) dt \qquad (8.6)$$

έχουμε δηλαδή την Lagrangian

$$L = \frac{R\dot{R}^2}{N} - kNR + \frac{R^3\dot{\Phi}^2}{N} - \frac{m\Phi^2 \mathrm{N}R^3}{2} \qquad (8.7)$$

ΟΙ ΠΡΩΤΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Οι συζυγείς ορμές των γενικευμένων συντεταγμένων R,N,Φ είναι:

$$P_R = \frac{2R\dot{R}}{N} \quad P_N = 0 \quad P_\Phi = \frac{2R^3\dot{\phi}}{N} \tag{8.8}$$

Ο πίνακας του Hess είναι:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_R}{\partial \dot{R}} = \frac{2R}{N} & \frac{\partial P_R}{\partial \dot{N}} = 0 & \frac{\partial P_R}{\partial \dot{\Phi}} = 0 \\ \frac{\partial P_N}{\partial \dot{R}} = 0 & \frac{\partial P_N}{\partial \dot{N}} = 0 & \frac{\partial P_N}{\partial \dot{\Phi}} = 0 \\ \frac{\partial P_\Phi}{\partial \dot{R}} = 0 & \frac{\partial P_\Phi}{\partial \dot{N}} = 0 & \frac{\partial P_\Phi}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{2R^3}{N} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{2R}{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^3}{N} \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

Η τάξη του W είναι προφανώς 2 και συνεπώς υπάρχει ένας πρωτογενής σύνδεσμος. Αυτός είναι ο

$$X_1 = P_N \approx 0 \tag{8.10}$$

Οι σχέσεις (8.8) λύνονται μόνο ως προς $\dot{R}$ και $\dot{\Phi}$

$$\dot{R} = \frac{NP_R}{2R} \qquad \dot{\Phi} = \frac{NP_\Phi}{2R^3} \tag{8.11}$$

Η κανονική Hamiltonian είναι

$$H_c = \dot{N}P_N + \dot{R}P_R + \dot{\Phi}P_\Phi - L \tag{8.12}$$

Αντικαθιστώντας τις $\dot{R}$ και $\dot{\Phi}$ από τις σχέσεις (8.11), $P_N = 0$ και την L από την (8.7) έχουμε:

$$H_c = N\left[\frac{P_R{}^2}{4R} + \frac{P_\Phi{}^2}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2}\right] \tag{8.13}$$

Έτσι η ανταλλοίωτη υπερμετρική του θεσεογραφικού χώρου για τις γενικευμένες συντεταγμένες (R,Φ) είναι:

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4R^3} \end{bmatrix} \text{ με αντίστροφο τον } G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 4R & 0 \\ 0 & 4R^3 \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

υπολογίζοντας τα σύμβολα Christoffel βρίσκουμε ότι τα μη μηδενικά είναι τα:

$$\Gamma^R_{RR} = \frac{1}{2R} \quad \Gamma^R_{\Phi\Phi} = -\frac{3R}{2} \quad \Gamma^\Phi_{R\Phi} = \frac{3}{2R} \tag{8.15}$$

και ο τανυστής του Riemann έχει συνιστώσα:

$$(\Re_G)^R_{\Phi R\Phi} = \Gamma^R_{R\Phi},_R - \Gamma^R_{\Phi\Phi},_R + \Gamma^\Phi_{\Phi R}\Gamma^R_{\Phi\backslash\Phi} - \Gamma^R_{\Phi\backslash\Phi}\Gamma^R_{RR} = 0$$

Άρα ο θεσεογραφικός χώρος είναι επίπεδος.

<u>ΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ</u>

Η primary Hamiltonian είναι:

$$H_p = H_c + \mu X_1 \tag{8.16}$$

συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης είναι οι:

$$\dot{A} = \{A, H_p\} = \{A, H_c\} + \mu\{A, \mathrm{X}_1\} \tag{8.17}$$

Από την διατήρηση του X_1 έχουμε:

$$\dot{\mathrm{X}}_1 \approx 0 \Rightarrow \{\mathrm{X}_1, H_p\} \approx 0 \Rightarrow \{\mathrm{X}_1, H_c\} + \mu\{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1\} \approx 0 \Rightarrow \left\{P_N, N\left[\frac{P_R^{\ 2}}{4R} + \frac{P_\Phi^{\ 2}}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2}\right]\right\} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\{P_N, N\}\left[\frac{P_R^{\ 2}}{4R} + \frac{P_\Phi^{\ 2}}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2}\right] \approx 0 \Rightarrow \left[\frac{P_R^{\ 2}}{4R} + \frac{P_\Phi^{\ 2}}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2}\right] \approx 0$$

δηλαδή:

$$X_2 = \frac{P_R^{\ 2}}{4R} + \frac{P_\Phi^{\ 2}}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2} \tag{8.18}$$

Πρέπει επίσης

$$\dot{X}_2 \approx 0 \Rightarrow \{\mathrm{X}_2, H_p\} \approx 0 \Rightarrow \{\mathrm{X}_2, H_c\} + \mu\{\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1\} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\{\mathrm{X}_2, NX_2\} + \mu\{\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1\} \approx 0 \Rightarrow 0 + 0\mu \approx 0$$

που ισχύει. Επομένως δεν υπάρχουν άλλοι σύνδεσμοι. Η Friedman Robertson-Walker μετρική είναι αναλλοίωτη κάτω από επαναπαραμετροποίηση του χρόνου. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε τον χρόνο έτσι ώστε N=1 (gauge choice). Έτσι έχουμε τους εξής τρεις συνδέσμους

$$X_1 = P_N \quad X_2 = \left[\frac{P_R^{\ 2}}{4R} + \frac{P_\Phi^{\ 2}}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2}\right] \quad X_3 = N - 1$$

για τους οποίους ισχύουν

$$\{X_1, X_2\} = 0 \quad \{X_1, X_3\} = 1 \quad \{X_2, X_3\} = 0$$

Συνεπώς ο X_2 είναι πρώτης τάξης ενώ οι X_1 και X_3 είναι δεύτερης τάξης.

Επαναονοματίζουμε τους δεύτερης τάξης συνδέσμους:

$$\xi_1 = \mathrm{X}_1 = P_N \quad \xi_2 = \mathrm{X}_3 = \mathrm{N} - 1$$

ο πίνακας του Dirac είναι:

$$\Delta_{\mu\nu} = \{\xi_\mu, \xi_\nu\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

με αντίστροφο τον $\Delta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Οι αγκύλες Dirac για τις βασικές μεταβλητές είναι:

$$\{R, P_R\}_D = \{R, P_R\} - \{R, \xi_\mu\}\Delta^{\mu\nu}\{\xi_\nu, P_R\} = \{R, P_R\} - 0 - 0 = 1$$

ομοίως $\{\Phi, P_\Phi\}_D = 1 \quad \{R, P_\Phi\}_D = 0 \quad \{\Phi, P_R\}_D = 0 \quad \{\Phi, R\}_D = 0 \quad \{P_R, P_\Phi\}_D = 0$

ΤΟ ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μετά την παραπάνω διαδικασία έχει απομείνει ένας πρώτης τάξης σύνδεσμος ο:

$$X = \left[\frac{P_R^{\ 2}}{4R} + \frac{P_\Phi^{\ 2}}{4R^3} + kR + \frac{m\Phi^2 R^3}{2} \right]$$

και η Hamiltonian του συστήματος είναι η

$$H = NX$$

σύμφωνα με την πρόταση του Dirac πρέπει να ορίσουμε έναν κβαντικό τελεστή $\hat{X}$ κλασσικό ανάλογο του οποίου να είναι ο X.

Για να βρούμε στη συνέχεια τις κβαντικές καταστάσεις του συστήματος Ψ πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση $\hat{X}\Psi = 0$ (εξίσωση Wheeler DeWitt)

Θα υιοθετήσουμε την αναπαράσταση του Schrödinger στην οποία

$$\hat{R} = R \quad \hat{\Phi} = \Phi \quad \hat{P}_R = -ih\frac{\partial}{\partial R} \quad \hat{P}_\Phi = -ih\frac{\partial}{\partial \Phi}$$

Επειδή ο X είναι τετραγωνικός στις ορμές ο μόνος βαθμωτός τελεστής που έχει κλασσικό ανάλογο τον X είναι ο:

$$\hat{X} = -h^2 \hat{\nabla}^2 + \lambda(\Re_G) + kR + \frac{1}{2}m\Phi^2 R^3 \tag{8.19}$$

όπου λ αριθμός και $\Re_G$ το Ricci scalar και ∇^2 η Laplacian που αντιστοιχούν στην υπερμετρική (8.14), για την οποία όμως είναι $\Re_G = 0$

Η αρχή επιλογής της Laplacian σαν κβαντικό ανάλογο ενός κινητικού όρου πού είναι τετραγωνικός στις ταχύτητες, πέραν της απαίτησης της συναλλοιότητας, ισχυροποιείται από το εξής επιχείρημα:

Έστω ότι έχουμε μια Lagrangian $L = \gamma_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - V(q)$. Έστω δε ότι ο τανυστής του Riemann που κατασκευάζεται από τον $\gamma_{\mu\nu}$ είναι μηδέν. Τότε υπάρχει σύστημα συντεταγμένων q' στο οποίο $\gamma'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Σε αυτό το πρόβλημα είναι προφανές ότι το κβαντικό ανάλογο του P^2 είναι ο $-h^2\frac{\partial^2}{\partial q'^2}$. Αν μεταβούμε στις q συντεταγμένες ο τελεστής αυτός μετατρέπεται στην Laplacian. Ο $\hat{X}$ είναι ερμιτιανός ως προς το μέτρο $du(R,\Phi) = \sqrt{g}dRd\Phi$ δηλαδή:

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^*(R,\Phi)\Psi_2(R,\Phi)\sqrt{g}dRd\Phi$$

Η Laplacian ενός βαθμωτού $\Psi(R,\Phi)$ είναι:

$$\nabla^2\Psi = G^{\mu\nu}\Psi_{;\mu\nu} = G^{\mu\nu}\Psi,_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\Psi,_\lambda \Rightarrow$$

$$\nabla^2\Psi = G^{RR}\Psi,_{RR} + G^{\Phi\Phi}\Psi,_{\Phi\Phi} - \Gamma^R_{RR}G^{RR}\Psi,_R - \Gamma^R_{\Phi\Phi}G^{\Phi\Phi}\Psi,_R - 2\Gamma^\phi_{R\Phi}G^{R\Phi}\Psi,_\Phi$$

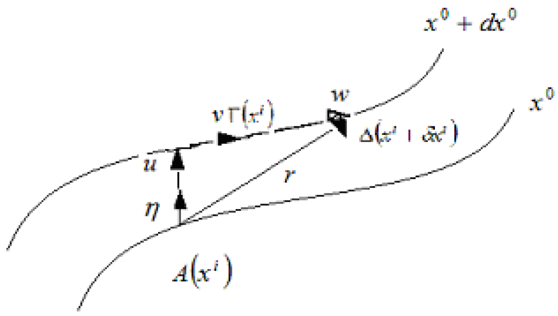
Οι κβαντικές καταστάσεις του συστήματος πρέπει να είναι μηδενικά ιδιοανύσματα του τελεστή $\hat{X}$:

$$\hat{X}\Psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Phi^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} - 4kR^2\Psi + 2mR^3\Phi^2\Psi = 0$$

Σε αυτό το στάδιο πρέπει να λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ασυμπτωτική συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης στο

$R=0$ και στο $R=\infty$. Αν η πυκνότητα πιθανότητας $P(R,\Phi)=|\Psi(R,\Phi)|^2$ έχει στο μηδέν όριο μηδέν αυτό σημαίνει ότι αποφεύγεται η κλασσική ανωμαλία.

9. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΜΙΓΟΥΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Έστω ότι έχουμε μια ισοχρονική επιφάνεια εμφυτευμένη στον χωρόχρονο (γενικότερα μια χωροειδή υπερεπιφάνεια). Ας θεωρήσουμε τις θέσεις της τις χρονικές στιγμές x^0 και $x^0 + dx^0$ και τα σημεία Α και Γ που έχουν τις ίδιες χωρικές συντεταγμένες. Έστω ακόμη ότι το u είναι στη διεύθυνση του καθέτου στην υπερεπιφάνεια ανύσματος ενώ το v στον εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια χώρο. Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν συναρτήσεις $N^{\perp}$ και N^i έτσι ώστε $u = N^{\perp}dx^0$ και $v = N^i e_i dt$ όπου e_i μια βάση του εφαπτόμενου χώρου. Η απόσταση των σημείων $A(x^0, x^i)$ και $\Delta(x^0 + dx^0, x^i + dx^i)$ είναι:

$$ds^2 = r^a r_a = (u_a + v_a + w_a)(u^a + v^a + w^a) =$$
$$u_a u^a + v_a v^a + w_a w^a + 2u_a v^a + 2u_a w^a + 2v_a w^a$$

όμως

$u \perp v \Rightarrow u_a v^a = 0 \;\&\; u \perp w \Rightarrow u_a w^a = 0$

$$u_a u^a = (N^{\perp})^2 (dx^0)^2 \eta_\alpha \eta^\alpha \Rightarrow u_a u^a = -(N^{\perp})^2 (dx^0)^2$$
$$v_a v^a = v_i v^i = N^i N^j g_{ij} (dt)^2$$
$$w_a w^a = w_i w^i = g_{ij} dx^i dx^j$$
$$v^a w_a = v^i w_i = N^2 dt dx^i dx^j$$

αντικαθιστώντας στο ds^2 έχουμε:

$$ds^2 = \left(g_{ij} N^i N^j - (N^{\perp})^2\right) dt^2 + 2 g_{ij} N^i dt dx^j + g_{ij} dx^i dx^j$$

όμως

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2 g_{0j} dt dx^j + g_{ij} dx^i dx^j$$

επομένως

$$g_{00} = g_{ij} N^i N^j - (N^{\perp})^2 \qquad g_{j0} = g_{ij} N^i$$

συνοπτικά έχουμε:

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} {}^{(4)}g_{00} & {}^{(4)}g_{0i} \\ {}^{(4)}g_{i0} & {}^{(4)}g_{ij} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N^iN_i-\left(N^{\perp}\right)^2 & N_i \\ N_i & {}^{(3)}g_{ij} \end{bmatrix} \text{ όπου } N_i=g_{ij}N^j \tag{9.1}$$

που έχει αντίστροφο

$$g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} {}^{(4)}g^{00} & {}^{(4)}g^{0i} \\ {}^{(4)}g^{i0} & {}^{(4)}g^{ij} \end{bmatrix}=\frac{1}{\left(N^{\perp}\right)^2}\begin{bmatrix} -1 & N^i \\ N^i & \left(N^{\perp}\right)^2 {}^{(3)}g^{ij}-N^iN^j \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

ενώ για την ορίζουσα

$$\sqrt{-{}^{(4)}g}=N^{\perp}\sqrt{{}^{(3)}g} \tag{9.3}$$

Επειδή η μετρική συνδέεται άμεσα με τις lapse και shift functions θα θεωρήσουμε ως γενικευμένες συναρτήσεις τα $g_{ij}, N^{\mu}=\left(\mathrm{N}^{\perp},\mathrm{N}^{i}\right)$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

Έστω ότι έχουμε μια υπερεπιφάνεια σε μια πολλαπλότητα Riemann (ή ψεύδο-Riemann). Αν $\eta^{\mu}=\frac{1}{N^{\perp}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{N}^{i} \end{pmatrix}$ το μοναδιαίο κάθετο άνυσμα, μπορεί κανείς να ορίσει έναν τανυστή K που καλείται εξωτερική καμπυλότητα (extrinsic curvature ή second fundamental form) ως εξής:

Αν το μοναδιαίο κάθετο άνυσμα διαδοθεί παράλληλα επάνω στην επιφάνεια από το σημείο x^i στο σημείο x^i+dx^i τότε η διαφορά στις συντεταγμένες του είναι $D\eta_i=-K_{ij}dx^j$

Από την αναλυτική μορφή του K και τη σχέση της μετρικής με τις lapse και shift συναρτήσεις βρίσκει κανείς ότι:

$$K_{ij}=\left(2N^{\perp}\right)^{-1}\left(-g_{ij,0}+N_{i/j}+N_{j/i}\right) \tag{9.4}$$

όπου / δηλώνει τη συναλλοίωτη παραγώγιση στην υπερεπιφάνεια. Επίσης αποδεικνύεται η εξίσωση Codazzi

$${}^{(D)}R={}^{(D-1)}R+K^{ab}K_{ab}-\left(K_a^a\right)^2+f^{\mu}_{;\mu} \tag{9.5}$$

με
$$f^{\mu}=\eta^{\beta}\eta^{\mu}{}_{;\beta}-\eta^{\mu}\eta^{\beta}{}_{;\beta}$$

H LAGRANGIAN

Γνωρίζουμε ότι η δράση του πεδίου βαρύτητας (δράση Hilbert) είναι:

$$S=\int \sqrt{-{}^{(4)}g}\,{}^{(4)}Rd^4x$$

Η πυκνότητα Lagrange $L_{Hilbert}=\sqrt{-{}^{(4)}g}\,{}^{(4)}R$ περιέχει δευτέρας τάξης παραγώγους της μετρικής. Παρόλο που υπάρχει Χαμιλτονιανός φορμαλισμός που να περιγράφει τέτοια συστήματα θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια ισοδύναμη Lagrangian που να περιέχει μόνο πρώτες παραγώγους της μετρικής. Αντικαθιστώντας στην $L_{Hilbert}$ το R από την εξίσωση Codazzi και το g από την (6.1) βρίσκουμε ότι

$$L_{Hilbert}=L-\frac{\partial v^a}{\partial x^a}$$

όπου

$$L = N^{\perp}\sqrt{g}\left(R + K^{ij}K_{ij} - K^2\right) \qquad K = K^i{}_i$$
$$v^a = 2\sqrt{-{}^{(4)}g}\left(\eta^{\beta}\eta^{\alpha}{}_{;\beta} - \eta^{\alpha}\eta^{\beta}{}_{;\beta}\right) \tag{9.6}$$

ο όρος $\dfrac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$ μπορεί να παραληφθεί και η απομένουσα Lagrangian περιέχει μόνο πρώτης τάξης χρονικές παραγώγους του g μέσω των K_{ij} ενώ δεν έχει χρονικές παραγώγους των N^{μ}.

ΟΙ ΠΡΩΤΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι $N^{\mu} = \left(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{N}^{i}\right)$ και g_{ij}. Οι αντίστοιχες συζυγείς ορμές είναι οι:

$$P_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial\left(N_{\mu,0}\right)} \approx 0 \tag{9.7}$$

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial\left(g_{ij,0}\right)} = -g^{1/2}\left(K^{ij} - Kg^{ij}\right) \tag{9.8}$$

από την (9.8) έχουμε:

$$\Pi^{i}{}_{i} = -g^{1/2}\left(K - 3K\right) \Rightarrow \Pi^{i}{}_{i} = 2Kg^{1/2}$$
$$\left(9.8\right) \Rightarrow K^{ij} = -g^{1/2}\left(\Pi^{ij} - 1/2\Pi g^{ij}\right)$$

από την (9.7) οι ταχύτητες εκφράζονται συναρτήσει των K^{ij} και από εκεί συναρτήσει των Π^{ij} Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς N^{μ}. Έτσι οι πρωτογενείς σύνδεσμοι είναι :

$$\Phi_{\mu} = P_{\mu} \approx 0$$

Η HAMILTONIAN

Η Κανονική Hamiltonian density είναι $\mathcal{H}_c = P_{\mu}N^{\mu}{}_{,0} + \Pi^{ij}g_{ij,0} - L$ Αντικαθιστώντας τα $g_{ij,0}$ και $P_{\mu} = 0$ παίρνουμε:

$$\mathcal{H}_C = 2\Pi^{ij}N_{i/j} - N^{\perp}g^{-1/2}\left(1/2\Pi^2 - \Pi^{ij}\Pi_{ij} + Rg\right) \Rightarrow$$
$$\mathcal{H}_C = 2\Pi^{ij}N_{i/j} + N^{\perp}H_{\perp}$$

όπου
$$H_{\perp} = -g^{-1/2}\left(1/2\Pi^2 - \Pi^{ij}\Pi_{ij} + Rg\right) \tag{9.9}$$

και η Hamiltonian είναι:

$$H_c = \int \mathcal{H}_c d^3x = 2\int \Pi^{ij}N_{i/j}d^3x + \int N^{\perp}H_{\perp}d^3x$$

και με παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε

$$H_c = -2\int \Pi^{ij}{}_{/j}N_i d^3x + \int N^{\perp}H_{\perp}d^3x$$

θέτουμε
$$H_i = -2\Pi_i{}^{j}{}_{/j} \tag{9.10}$$

και έχουμε

$$H_c = \int N^i H_i + N^{\perp} H_{\perp} d^3x = \int N^{\mu} \mathrm{H}_{\mu} d^3x \qquad (9.11)$$

με τα H_i και $H_{\perp}$ να δίνονται από τις σχέσεις (9.9) και (9.10) αντίστοιχα.

παρατηρήσεις:

1) Γνωρίζουμε ότι μια ποσότητα $T_{\lambda}^{\mu\nu}$ λέγεται τανυστική πυκνότητα βάρους w

εάν : $$T'^{\mu\nu}_{\lambda} = I^{w}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}}\mathrm{T}_{\gamma}^{\alpha\beta}$$

Όπου $\mathrm{I} = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$. Έτσι g τανυστική πυκνότητα βάρους 2.

Για να βρούμε τη συναλλοίωτη παράγωγο μιας τανυστικής πυκνότητας βάρους w , την πολλαπλασιάζουμε με $g^{w/2}$ οπότε γίνεται τανυστής, βρίσκουμε τη συναλλοίωτη παράγωγό της και πολλαπλασιάζουμε πάλι με $g^{-w/2}$. Έτσι προκύπτει π.χ.

$T^{\mu\nu}{}_{;\kappa} = T^{\mu\nu}{}_{,\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\kappa}\mathrm{T}^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\kappa}\mathrm{T}^{\mu\alpha} + w\Gamma^{\alpha}_{\alpha\kappa}\mathrm{T}^{\mu\nu}$

Αν π.χ. A^{μ} ανυσματική ποσότητα βάρους -1

$\mathrm{A}^{\mu}{}_{;\mu} = \mathrm{A}^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}\mathrm{A}^{\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}\mathrm{A}^{\alpha} = \mathrm{A}^{\mu}{}_{,\mu}$

2) Το θεώρημα Gauss σε καμπύλο χώρο.

Έστω A^{μ} άνυσμα. Έστω ακόμα ότι θέλω να υπολογίσω το

$\int_V \mathrm{A}^{\mu}{}_{,\mu}\sqrt{g}\,d^{(V)}x = \int_V \left(\mathrm{A}^{\mu}\sqrt{g}\right)_{;\mu} d^{(V)}x$

όμως $\mathrm{A}^{\mu}\sqrt{g}$ ανυσματική πυκνότητα βάρους -1 οπότε

$\left(\mathrm{A}^{\mu}\sqrt{g}\right)_{;\mu} = \left(\mathrm{A}^{\mu}\sqrt{g}\right)_{,\mu}$

Έτσι $\int_V \left(\mathrm{A}^{\mu}\sqrt{g}\right)_{;\mu} d^{(V)}x = \int_{S(v)} \left(\mathrm{A}^{\mu}\sqrt{g}\right) dS_{\mu}$

3) Από τη σχέση (9.8) επειδή K^{ij} τανυστής και $g^{1/2}$ βαθμωτή πυκνότητα βάρους -1, τα Π^{ij} είναι τανυστικές πυκνότητες βάρους -1. Έτσι μπορεί να γίνει η παραγοντική ολοκλήρωση.

Η πρωτογενής Hamiltonian θα είναι η κανονική συν ένας γραμμικός συνδυασμός των συνδέσμων, δηλ

$$H_p = \int N^{\mu}H_{\mu}d^3x + \int P_{\mu}v^{\mu}d^3x$$

4) Η ποσότητα $\frac{1}{2}\Pi^2 - \Pi^{ij}\Pi_{ij}$ γίνεται

$$\frac{1}{2}\left(g_{ij}\Pi^{ij}\right)^2 - g_{ik}g_{jl}\Pi^{ij}\Pi^{jl} =$$

$$\frac{1}{2}\left(g_{ij}\Pi^{ij}g_{kl}\Pi^{kl} - g_{ik}g_{jl}\Pi^{ij}\Pi^{jl} - g_{jk}g_{il}\Pi^{ij}\Pi^{kl}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk} - g_{ij}g_{kl}\right)\Pi^{ij}\Pi^{kl}$$

Έτσι $H_{\perp} = \frac{1}{2}G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - R\sqrt{g}$ όπου

$$G_{ijkl} = g^{-\frac{1}{2}}\left(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk} - g_{ij}g_{kl}\right)$$

ο G_{ijkl} είναι η ανταλλοίωτη υπερμετρική στον χώρο των g_{ij}

Η αντίστοιχη συναλλοίωτη υπερμετρική είναι:

$$G^{ijkl} = \frac{1}{4} g^{\frac{1}{2}} \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} - 2 g^{il} g^{kl} \right)$$

η οποία έχει την ιδιότητα $G^{ijkl} G_{klmn} = \delta^{ij}_{mn}$

όπου $\delta^{kl}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta^k_i \delta^l_j + \delta^k_j \delta^l_i \right)$

ΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Οι θεμελιώδεις αγκύλες Poisson είναι:

$$\left\{ N^\mu(x), P_\nu(y) \right\}_{x^0 = y^0} = \delta^\mu_\nu \delta(x, y)$$
$$\left\{ g_{ij}(x), \Pi^{kl}(y) \right\}_{x^0 = y^0} = \delta^{kl}_{ij} \delta(x, y)$$

Επειδή οι σύνδεσμοι πρέπει να διατηρούνται

$$\left\{ P_\mu, \mathrm{H}_p \right\} \approx 0 \Rightarrow \left\{ P_\mu, \mathrm{H}_p \right\} \approx 0 \Rightarrow \int d^3x \left\{ P_\mu, N^\nu H_\nu + P_\nu v^\nu \right\} \approx 0 \Rightarrow H_\nu \approx 0$$

οι οποίοι είναι οι δευτερογενείς σύνδεσμοι.

Η ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Οι σύνδεσμοι $H_\mu \approx 0$ ορίζουν μια άλγεβρα με πράξη την αγκύλη Poisson, συγκεκριμένα:

$$\left\{ \mathrm{H}^\perp(x), \mathrm{H}^\perp(y) \right\} = H^i(x) \delta_{,i}(x, y) + H^i(y) \delta_{,i}(y, x)$$
$$\left\{ \mathrm{H}_i(x), \mathrm{H}^\perp(y) \right\} = \mathrm{H}^\perp(x) \delta_{,i}(x, y)$$
$$\left\{ \mathrm{H}_i(x), \mathrm{H}_j(y) \right\} = H_j(x) \delta_{,i}(x, y) + H_i(y) \delta_{,j}(y, x)$$

όπου $\delta_{,i}(x, y) = \dfrac{\partial \delta(x, y)}{\partial x^i}$

Η απόδειξη των παραπάνω σχέσεων είναι ένας μακροσκελής υπολογισμός, κατά τον οποίο χρησιμοποιούνται μερικές ταυτότητες της θεωρίας κατανομών οι οποίες παράγονται ως εξής:

$f(x)\delta(x, y) = f(y)\delta(x, y)$ παραγογίζοτας ως προς i έχουμε:

$$f_{,i}(x)\delta(x, y) + f(x)\delta_{,i}(x, y) = f(y)\delta_{,i}(x, y) \Rightarrow$$
$$f(x)\delta_{,i}(x, y) = f(y)\delta_{,i}(x, y) - f_{,i}(x)\delta(x, y)$$

Με την άλγεβρα αυτή τερματίζεται η διαδικασία Dirac-Bergmann. Επίσης αναδεικνύονται οι δευτερογενείς σύνδεσμοι $H_i \approx 0, H_\perp \approx 0$ σαν πρώτης τάξης αντικείμενα ενώ οι συντεταγμένες του θεσεογραφικού χώρου $N^{\mu} = \left(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{N}^{i}\right)$ εμφανίζονται ως πολλαπλασιαστές Lagrange.

Κατά συνέπεια η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από τους συνδέσμους $H_i \approx 0, H_{\perp} \approx 0$ και την $H_c = \int N^i H_i + N^{\perp} H_{\perp} d^3x = \int N^{\mu} \mathrm{H}_{\mu} d^3x$

Ένας εξίσου μακροσκελής υπολογισμός αποδεικνύει ότι οι τέσσερις σύνδεσμοι $H_i \approx 0, H_{\perp} \approx 0$ μαζί με τις έξι εξισώσεις Hamilton-Jacobi $\dot{\Pi}^{ij} = \left\{\Pi^{ij}, H_c\right\}$ είναι ισοδύναμες με τις 10 εξισώσεις Einstein $G_{\mu\nu} = 0$

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΔΕΣΜΩΝ</u>

Αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό

$$x^i \to \tilde{x}^i - \xi^i(x)$$

έχουμε τις αντίστοιχες μεταβολές

$$\delta g_{ij} = \tilde{g}_{ij}\left(\tilde{x}\right) - g_{ij}\left(\tilde{x}\right) = L_{\xi} g_{ij} = \xi_{i/j} + \xi_{j/i}$$

$$\delta\Pi^{kl} = \tilde{\Pi}^{kl}\left(\tilde{x}\right) - \Pi^{kl}\left(\tilde{x}\right) = L_{\xi}\Pi^{kl} = \Pi^{kl}_{,s}\xi^s - \Pi^{sl}\xi^k_{,s} - \Pi^{ks}\xi^l_{,s} + \xi^s_{,s}\Pi^{kl}$$

Εάν τώρα υπολογίσουμε τις αγκύλες Poisson των βασικών θεσεογραφικών μεταβλητών με τους γραμμικούς συνδέσμους έχουμε:

$$\left\{\int d^3y \xi^s H_s, g_{ij}(x)\right\} = \delta g_{ij}(x)$$

$$\left\{\int d^3y \xi^s H_s, \Pi^{kl}(x)\right\} = \delta\Pi^{kl}(x)$$

επομένως οι σύνδεσμοι H_s είναι γεννήτορες των χωρικών αμφιδιαφορίσεων.

Ομοίως το H_0 είναι γεννήτορας των χρονικών αμφιδιαφορίσεων και συνοψίζοντας οι σύνδεσμοι $\left(H_i, H_0\right)$ είναι οι γεννήτορες των χωροχρονικών αμφιδιαφορίσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ

1. ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Έστω ένα γεωμετρικό αντικείμενο με ένα συγκεκριμένο νόμο μετασχηματισμού (π.χ. για ένα βαθμωτό $\Phi'(x', y') = \Phi(x, y)$). Αν βρω ένα μετασχηματισμό τέτοιο ώστε η συναρτησιακή εξάρτηση του μετασχηματισμένου αντικειμένου να είναι ίδια με του αρχικού τότε ο μετασχηματισμός αυτός είναι συμμετρία του αντικειμένου.
Ας θεωρήσουμε ως πρώτο παράδειγμα το βαθμωτό μέγεθος

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 \tag{1.1}$$

και το μετασχηματισμό

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Για το Φ ισχύει:

$$\Phi'(x', y') = \Phi(x', y') \tag{1.3}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι οι στροφές είναι συμμετρία του Φ.
Αν αντί για το μετασχηματισμό της στροφής που είδαμε παραπάνω θεωρήσουμε έναν γενικότερο (αλλά απειροστό) μετασχηματισμό της μορφής

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \xi^{\mu}(x) \tag{1.4}$$

τότε η μεταβολή του Φ κάτω από τον μετασχηματισμό αυτό θα είναι:

$$\Phi'(x'^{\mu}) = \Phi(x^{\mu}) \cong \Phi(x'^{\mu}) + \xi^{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} \tag{1.5}$$

Η παράγωγος Lie ως προς ξ ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_{\xi} \Phi = \Phi'(x'^{\mu}) - \Phi(x'^{\mu}) = \xi^{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} \tag{1.6}$$

Επομένως η απαίτηση συμμετρίας $\Phi'(x', y') = \Phi(x', y')$ εκφράζεται σε απειροστή μορφή με τη βοήθεια της παραγώγου Lie ως

$$\mathcal{L}_{\xi}\Phi = 0 \tag{1.7}$$

και το ξ είναι ο γεννήτορας του μετασχηματισμού. Μέχρι τώρα αναφερόμαστε στα πεδία ξ που είναι απειροστοί μετασχηματισμοί των συντεταγμένων. Οι αντίστοιχοι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί επάγονται από τις ολοκληρωτικές γραμμές του ξ^{μ}.
Ολοκληρωτική γραμμή του πεδίου είναι η γραμμή $x^{\mu}(\lambda)$ της οποίας η εφαπτομένη σε κάθε σημείο ισούται με ξ^{μ}. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά με τη σχέση:

$$\frac{dx^{\mu}(\lambda)}{d\lambda} = \xi^{\mu}(x(\lambda)) \tag{1.8}$$

Για τις στροφές που είδαμε παραπάνω γνωρίζουμε ότι γεννήτορας τους είναι η στροφορμή, οπότε θα δείξουμε ότι $\xi^{\mu} = (-y, x)$.
Έστω $x^{\mu} = (x, y)$, τότε η σχέση (1.8) γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Η εξίσωση που προκύπτει έχει τη μορφή $\dot{x} = Ax$ και η λύση της είναι η :

$$x = e^{A\lambda} x\big|_{\lambda=0} \tag{1.10}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός είναι ο

$$R = e^{A\lambda} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τον πίνακα της προώθησης Lorentz της οποίας ο γεννήτορας είναι ο $\xi^{\mu} = (y, x)$ οπότε η εξίσωση (1.8) γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

και ομοίως με τα παραπάνω ο πεπερασμένος μετασχηματισμός είναι:

$$L = e^{\mathrm{B}\lambda} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Ας δούμε τώρα πως μετασχηματίζεται ένα τετράνυσμα A^{μ} κάτω από τον μετασχηματισμό (1.4):

$$\mathrm{A}'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \mathrm{A}^{\kappa}(x) = \left(\delta^{\mu}_{\kappa} - \xi^{\mu}_{,\kappa}\right)\left(\mathrm{A}^{\kappa}(x') + \xi^{\lambda}\mathrm{A}^{\kappa}_{,\lambda} + \ldots\right) = \mathrm{A}^{\mu}(x') + \xi^{\lambda}\mathrm{A}^{\mu}_{,\lambda}(x') - \xi^{\mu}_{,\lambda}\mathrm{A}^{\lambda}(x')$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}'^{\mu}(x') - \mathrm{A}^{\mu}(x') = \xi^{\lambda}\mathrm{A}^{\mu}_{,\lambda}(x') - \xi^{\mu}_{,\lambda}\mathrm{A}^{\lambda}(x') = \mathcal{L}_{\xi}\mathrm{A}^{\mu} \tag{1.14}$$

Γενικεύοντας για μία τανυστική ποσότητα βάρους w η απαίτηση συμμετρίας είναι $T'^{\mu\nu\kappa\ldots}_{\alpha\beta\gamma\ldots}(x') = T^{\mu\nu\kappa\ldots}_{\alpha\beta\gamma\ldots}(x')$ και η παράγωγος Lie γίνεται:

$$\mathcal{L}_{\xi} T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu} = \xi^{\lambda} T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu,\lambda} - \xi^{\mu}_{,\lambda} T^{\lambda\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu} - \ldots + \xi^{\lambda}_{,\rho} T^{\mu\ldots\kappa}_{\lambda\ldots\nu} + \ldots + w\xi^{\lambda}_{,\lambda} T^{\mu\ldots\kappa}_{\rho\ldots\nu} \tag{1.15}$$

Είναι προφανές ότι η παράγωγος Lie ορίζεται χωρίς τη μετρική δομή, όταν όμως υπάρχει μετρική δομή, τότε είναι εύκολο να δειχτεί ότι η μερική παραγώγιση μπορεί να αντικατασταθεί με συναλλοίωτη. Στην ειδική περίπτωση που ο τανυστής που εξετάζουμε είναι η μετρική $g_{\mu\nu}$ και ικανοποιείται η σχέση

$$\mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.16}$$

τότε το ξ ονομάζεται διάνυσμα killing και είναι συμμετρία του χωρόχρονου. Έχουμε σύμφωνα με τον γενικό τύπο

$$\mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi^{\lambda} g_{\mu\nu,\lambda} + \xi^{\lambda}_{,\mu} g_{\lambda\nu} + \xi^{\lambda}_{,\nu} g_{\mu\lambda} \tag{1.17}$$

Όπως είπαμε παραπάνω μπορώ να αντικαταστήσω την απλή παραγώγιση με συναλλοίωτη, οπότε αν το ξ^{μ} αποτελεί συμμετρία του χωρόχρονου πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{1.18}$$

που είναι η εξίσωση killing.

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε σε κάποιες ιδιότητες των παραγώγων Lie. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο πεδία killing ξ_{α} , $\alpha = 1,2\ldots$ δεδομένου ότι ισχύει η $\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ για κάθε α θα ισχύει και η $\mathcal{L}_{\xi_\beta}\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ και επομένως αλλάζοντας τη σειρά των Lie παραγωγίσεων ισχύει η σχέση:

$$\mathcal{L}_{\xi_\beta}\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}\mathcal{L}_{\xi_\beta} g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{[\xi_\alpha,\xi_\beta]} g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.19}$$

Συμπεραίνουμε ότι η αγκύλη Lie $\left[\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}\right]$ είναι διάνυσμα killing. Στη διαφορική γεωμετρία υπάρχει πλήρης ταύτιση μεταξύ ενός διανύσματος $\hat{\xi}$ και του τελεστή

$\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Υπό αυτό το πρίσμα ο μεταθέτης δύο πεδίων killing ισούται με την παράγωγο Lie του ενός διανύσματος ως προς το άλλο:

$$\left[\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta\right] = \hat{\xi}_\alpha \hat{\xi}_\beta - \hat{\xi}_\beta \hat{\xi}_\alpha = \mathcal{L}_{\xi_\alpha} \xi_\beta = -\mathcal{L}_{\xi_\beta} \xi_\alpha \tag{1.20}$$

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση για την περίπτωση ενός βαθμωτού Φ.

$$\left[\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta\right]\Phi = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^j_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - \xi^i_\beta \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^j_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \xi^i_\alpha \xi^j_{\beta,i} \partial_j \Phi - \xi^i_\beta \xi^j_{\alpha,i} \partial_j \Phi$$

$$\mathcal{L}_{\xi_\alpha} \xi_\beta = \xi^i_\alpha \xi^j_{\beta,i} - \xi^j_{\alpha,i} \xi^i_\beta = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^j_\beta \frac{\partial}{\partial x^j} - \xi^i_\beta \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^j_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j} \Rightarrow \mathcal{L}_{\xi_\alpha} \xi_\beta = \xi^i_\alpha \xi^j_{\beta,i} \partial_j \Phi - \xi^i_\beta \xi^j_{\alpha,i} \partial_j \Phi \tag{1.21}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την γεωμετρική έκφραση των διανυσμάτων.

<u>ΟΜΟΓΕΝΗΣ 3-D ΜΕΤΡΙΚΗ</u>

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν ομογενή χώρο, δηλ έναν χώρο στον οποίο μπορώ να μετακινηθώ από ένα τυχόν σημείο Α σε ένα τυχόν σημείο Β και οι ιδιότητες της μετρικής να μην μεταβάλλονται από το ένα σημείο στο άλλο. Γνωρίζουμε ότι αν κινηθούμε κατά μήκος των ολοκληρωτικών γραμμών ενός πεδίου killing ξ η μετρική θα παραμείνει αμετάβλητη στη μορφή. Αν λοιπόν θέλουμε να κατασκευάσουμε την μετρική ενός ομογενούς χώρου τριών διαστάσεων, αυτή θα πρέπει να έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα πεδία killing, ώστε να μπορούμε κινούμενοι πάνω στις ολοκληρωτικές γραμμές αυτών να καλύψουμε όλο το χώρο. Για τα πεδία killing μιας μετρικής ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Αν διαθέτουμε όλα τα πεδία killing μιας μετρικής g_{ij} τότε αυτά κλείνουν μια άλγεβρα και ικανοποιούν τη σχέση

$$\left[\xi_\alpha, \xi_\beta\right] = C^\gamma_{\alpha\beta} \xi_\gamma \tag{1.22}$$

όπου τα $C^\gamma_{\alpha\beta}$ είναι ανεξάρτητα του x και λέγονται σταθερές δομής.

Οι ιδιότητες των σταθερών δομής δίνονται από τα τρία θεωρήματα Lie:

1. $C^\gamma_{\alpha\beta} = const$
2. $C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha}$
3. $C^\lambda_{\alpha\beta} C^\beta_{\mu\nu} + C^\lambda_{\mu\beta} C^\beta_{\nu\alpha} + C^\lambda_{\nu\beta} C^\beta_{\alpha\mu} = 0$ (ταυτότητα Jacobi)

Το τρίτο θεώρημα Lie προκύπτει από την ταυτότητα Jacobi για τελεστές, τα θεώρηματα 1 και 2.

Έχουμε:

$$\left[\xi_\alpha, \left[\xi_\beta, \xi_\gamma\right]\right] + \left[\xi_\beta, \left[\xi_\gamma, \xi_\alpha\right]\right] + \left[\xi_\gamma, \left[\xi_\alpha, \xi_\beta\right]\right] = 0 \quad \text{επομένως}$$

$$\left[\xi_\alpha, \left[\xi_\beta, \xi_\gamma\right]\right] = \left[\xi_\alpha, C^\delta_{\beta\gamma} \xi_\delta\right] = C^\delta_{\beta\gamma} \left[\xi_\alpha, \xi_\delta\right] = C^\delta_{\beta\gamma} C^\theta_{\alpha\delta} \xi_\theta$$

αντίστοιχα υπολογίζονται και οι άλλοι μεταθέτες και με αντικατάσταση στην ταυτότητα Jacobi παίρνουμε:

$$C^\delta_{\beta\gamma} C^\theta_{\alpha\delta} + C^\theta_{\alpha\delta} C^\delta_{\beta\gamma} + C^\theta_{\beta\delta} C^\delta_{\gamma\alpha} = 0$$

Συναιρώντας ένα ζεύγος άνω και κάτω δεικτών έχουμε την συνεπτυγμένη ταυτότητα

$$C^\delta_{\beta\gamma} C^a_{\alpha\delta} = 0$$

Σε τρεις διαστάσεις υπάρχει η αναπαράσταση των σταθερών δομής κατά Behr-MacCallum

$$C^{a}_{\beta\gamma} = m^{a\rho}\varepsilon_{\rho\beta\gamma} + \frac{1}{2}\left(C^{\tau}_{\gamma\tau}\delta^{\alpha}_{\beta} - C^{\tau}_{\beta\tau}\delta^{\alpha}_{\gamma}\right)$$

όπου $m^{\alpha\beta}$ συμμετρική τανυστική πυκνότητα βάρους 1
Σε τρεις διαστάσεις υπάρχουν 9 ομογενείς χώροι που καθορίζονται από τα $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ και προσδιορίστηκαν από τον Bianchi. Αν γνωρίζουμε τα $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ για ένα συγκεκριμένο χώρο τότε από τη σχέση (1.22) μπορούμε να βρούμε τα ξ_{α}. Με βάση τα ξ_{α} μπορούμε να βρούμε την αναλλοίωτη βάση του χώρου $\{\sigma_{\beta}\}$ που ικανοποιεί τη σχέση $\lfloor\xi_{\alpha},\sigma_{\beta}\rfloor = 0$ στη συνέχεια από τα σ_{β} μπορούμε να υπολογίσουμε της 1-μορφές σ^{γ} από τη σχέση $\sigma_{\beta}\sigma^{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta}$
η γενικότερη μορφή που μπορούμε να γράψουμε τη μετρική είναι:

$$g_{ij} = \gamma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha}_{i}\sigma^{\beta}_{j} \qquad (1.23)$$

(οι ελληνικοί δείκτες καθορίζουν τα διαφορετικά σ και ξ, ενώ οι λατινικοί τις συντεταγμένες του 3-D χώρου).
Τα σ^{γ} στην παραπάνω σχέση εξασφαλίζουν ότι $\mathcal{L}_{\xi}g_{ij} = 0$, δηλαδή ότι η μετρική είναι ομογενής και ο πίνακας $\gamma_{\alpha\beta}$, του οποίου τα στοιχεία είναι σταθερές ως προς το χώρο, εξασφαλίζει ότι παίρνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των σ^{γ} .
Επομένως η πιο γενική μορφή του στοιχείου μήκούς είναι:

$$ds^{2} = \gamma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha}_{i}(x)\sigma^{\beta}_{j}(x)dx^{i}dx^{j} \qquad (1.24)$$

όπου τα σ είναι συναρτήσεις των χωρικών συντεταγμένων.

Στην συνέχεια παραθέτουμε τον πίνακα (Π1)στον οποίο αναγράφονται οι παράγοντες δομής τα διανύσματα killing η ανταλλοίωτη βάση και οι 1- μορφές για κάθε Bianchi type.

ξ^i : killing vectors

$\{x_i\}$: αναλλοίωτη βάση

$\{\omega^i\}$: 1- μορφή βάση

$$C^i_{jk} : [\xi_j, \xi_k] = C^i_{jk} \xi_i$$

C^i_{jk} : παράγοντες δομής $[x_j, x_k] = C^i_{jk} x_i$

$$d\omega^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \omega_j \wedge \omega_k$$

Type I $C^i_{jk} = 0$			
$\xi_1 = \partial_1$	$x_1 = \partial_1$	$\omega^1 = dx^1$	$d\omega^1 = 0$
$\xi_2 = \partial_2$	$x_2 = \partial_2$	$\omega^2 = dx^2$	$d\omega^2 = 0$
$\xi_3 = \partial_3$	$x_3 = \partial_3$	$\omega^3 = dx^3$	$d\omega^3 = 0$

Type II $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$ τα υπόλοιπα $C^i_{jk} = 0$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = \partial_2$	$\omega^1 = dx^2 - x^1 dx^3$	$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = x^1 \partial_2 + \partial_3$	$\omega^2 = dx^3$	$d\omega^2 = 0$
$\xi_3 = \partial_1 + x^3 \partial_2$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Type III $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$ τα υπόλοιπα $C^i_{jk} = 0$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = e^{x^1} \partial_2$	$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = \partial_3$	$\omega^2 = dx^3$	$d\omega^2 = 0$
$\xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Type IV $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$ $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$ τα υπόλοιπα $C^i_{jk} = 0$ $C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = e^{x^1} \partial_2$	$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2 - x^1 e^{-x^1} dx^3$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = x^1 e^{x^1} \partial_2 + e^{x^1} \partial_3$	$\omega^2 = e^{-x^1} dx^3$	$d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_3 = \partial_1 + (x^2 + x^3) \partial_2 + x^3 \partial_3$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Type V $C_{13}^{1} = -C_{31}^{1} = 1$ $C_{23}^{2} = -C_{32}^{2} = 1$ τα υπόλοιπα $C_{jk}^{i} = 0$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = e^{x^1}\partial_2$	$\omega^1 = e^{-x^1}dx^2$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = e^{x^1}\partial_3$	$\omega^2 = e^{-x^1}dx^3$	$d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_3 = \partial_1 + x^2\partial_2 + x^3\partial_3$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Type VI $C_{13}^{1} = -C_{31}^{1} = 1$ $C_{23}^{2} = -C_{32}^{2} = h \neq 0,1$ τα υπόλοιπα $C_{jk}^{i} = 0$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = e^{x^1}\partial_2$	$\omega^1 = e^{-x^1}dx^2$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = e^{hx^1}\partial_3$	$\omega^2 = e^{-hx^1}dx^3$	$d\omega^2 = h\omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_3 = \partial_1 + x^2\partial_2 + hx^3\partial_3$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Type VII $C_{13}^{2} = -C_{31}^{2} = 1$ $C_{23}^{1} = -C_{32}^{1} = -1$ $C_{23}^{2} = -C_{32}^{2} = h$ $(h^2 < 4)$ τα υπόλοιπα $C_{jk}^{i} = 0$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = (A+kB)\partial_2 - B\partial_3$	$\omega^1 =$ $(C-kD)dx^2 - Ddx^3$	$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = B\partial_2 + (A-kB)\partial_3$	$\omega^2 =$ $Ddx^2 + (C+kD)dx^3$	$d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3$ $+ h\omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_3 = \partial_1 - x^3\partial_2$ $+(x^2 + hx^3)\partial_3$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Όπου
$$A = e^{kx^1}\cos ax^1 \quad B = -\frac{1}{a}e^{kx^1}\sin ax^1$$
$$C = e^{-kx^1}\cos ax^1 \quad D = -\frac{1}{a}e^{-kx^1}\sin ax^1$$
και
$$k = \frac{h}{2}$$
$$a = \left(1-k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(4-h^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Type VIII $C^1_{23} = -C^1_{32} = -1$ $C^2_{31} = -C^2_{13} = 1$ τα υπόλοιπα $C^i_{jk} = 0$ $C^3_{12} = -C^3_{21} = 1$			
$\xi_1 = \frac{1}{2} e^{-x^3} \partial_1 + \frac{1}{2}\left[e^{x^3} - \left(x^2\right)^2 e^{-x^3}\right]\partial_2 - x^2 e^{-x^3} \partial_3$	$x_1 = \frac{1}{2}\left[1+\left(x^1\right)^2\right]\partial_1 + \frac{1}{2}\left[1-2x^1x^2\right]\partial_2 - x^1 \partial_3$	$\omega^1 = dx^1 + \left[1+\left(x^1\right)^2\right]dx^2 + \left[x^1-x^2-\left(x^1\right)^2 x^2\right]dx^3$	$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \partial_3$	$x^2 = -x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + \partial_3$	$\omega^2 = 2x^1 dx^2 + \left(1-2x^1x^2\right)dx^3$	$d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$
$\xi_3 = \frac{1}{2} e^{-x^3} \partial_1 - \frac{1}{2}\left[e^{x^3} + \left(x^2\right)^2 e^{-x^3}\right]\partial_2 - x^2 e^{-x^3} \partial_3$	$x_3 = \frac{1}{2}\left[1-\left(x^1\right)^2\right]\partial_1 + \frac{1}{2}\left[-1+2x^1x^2\right]\partial_2 + x^1 \partial_3$	$\omega^3 = dx^1 + \left[-1+\left(x^1\right)^2\right]dx^2 + \left[x^1+x^2-\left(x^1\right)^2 x^2\right]dx^3$	$d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$

Type IX $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$ $C^2_{31} = -C^2_{13} = 1$ τα υπόλοιπα $C^i_{jk} = 0$ $C^3_{12} = -C^3_{21} = 1$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = -\sin x^3 \partial_1 + \frac{\cos x^3}{\sin x^1} \partial_2 - \cot x^1 \cos x^3 \partial_3$	$\omega^1 = -\sin x^3 dx^1 + \sin x^1 \cos x^3 dx^2$	$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$
$\xi_2 = \cos x^2 \partial_1 - \cot x^1 \sin x^2 \partial_2 + \frac{\sin x^2}{\sin x^1} \partial_3$	$x_2 = \cos x^3 \partial_1 + \frac{\sin x^3}{\sin x^1} \partial_2 - \sin x^3 \cot x^1 \partial_3$	$\omega^2 = \cos x^3 dx^1 + \sin x^1 \sin x^3 dx^2$	$d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$
$\xi_3 = -\sin x^2 \partial_1 - \cot x^1 \cos x^2 \partial_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1} \partial_3$	$x_3 = \partial_3$	$\omega^3 = \cos x^1 dx^2 + dx^3$	$d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$

Πίνακας (Π.1)

2. ΧΡΟΝΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΕΣ ΑΜΦΙΔΙΑΦΟΡΙΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΔΗΓΟΥΝ ΣΕ ΑΥΤΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥΣ

Είναι γνωστό ότι οι εξισώσεις του Einstein για το κενό μπορούν να προκύψουν από μια αρχή δράσης

$$I = \frac{\varepsilon}{16\pi}\int \sqrt{\varepsilon^{(4)}g}\,{}^{(4)}R d^4x \tag{2.1}$$

Ο καθιερωμένος κανονικός φορμαλισμός χρησιμοποιεί την συνάρτηση παρόδου χρόνου και την συνάρτηση μετατόπισης [4], οι οποίες παραμετροποιούν την τεσσάρων διαστάσεων μετρική

$$ds^2 = \left(N^i N_i + \varepsilon N^2\right)dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j \tag{2.2}$$

Από αυτό το στοιχείο γραμμής, με παραλλαγή της λαγκρατζιανής ως προς N, N_i και g_{ij} παράγεται το ισοδύναμο με τις εξισώσεις του Einstein σύνολο εξισώσεων, το οποίο εκπεφρασμένο με την βοήθεια της εξωτερικής καμπυλότητας $K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(N_{i/j} + N_{j/i} - g_{ij,0}\right)$, αποκτά τη μορφή:

$$H_0 = \sqrt{g}\left(K_{ij} - K^2 - \varepsilon R\right) = 0 \tag{2.3α}$$

$$H_i = 2\sqrt{g}\left(K^j_{i/j} - K_{/i}\right) = 0 \tag{2.3β}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d}{dt}\left[\sqrt{g}\left(K^{ij} - Kg^{ij}\right)\right] &= \varepsilon N\left(R^{ij} - \frac{1}{2}Rg^{ij}\right) - \frac{N}{2}\left(K_{kl}K^{kl} - K^2\right)g^{ij} + 2N\left(K^{ik}K^j_k - KK^{ij}\right)\\ &+\left(\varepsilon N^{/ij} - N^{/l}_{/l}g^{ij}\right) + \left[\left(K^{ij} - Kg^{ij}\right)N^l\right]_{/l} - N^i_{/l}\left(K^{lj} - Kg^{lj}\right) - N^j_{/l}\left(K^{li} - Kg^{li}\right)\end{aligned} \tag{2.3γ}$$

Στην κοσμολογία, ενδιαφερόμαστε για το υποσύνολο των χωρικά ομογενών χωροχρόνων που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη μιας m-διάστατης ομάδας ισομετρίας σε κάθε επιφάνεια σταθερού χρόνου Σ_t. Όταν το m είναι μεγαλύτερο από 3 και δεν υπάρχει ιδία αναλλοίωτη υποομάδα διάστασης 3, ο χωρόχρονος είναι τύπου Kantowski-Sachs [1] και δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω. Όταν το m ισούται με τη διάσταση του Σ_t, δηλαδή 3, υπάρχουν τρεις ένα μορφές σ^a_i οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$d\sigma^a = C^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma \Leftrightarrow \sigma^\alpha_{i,j} - \sigma^\alpha_{j,i} = 2C^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\gamma_i\sigma^\beta_j \tag{2.4α}$$

όπου $C^\alpha_{\beta\gamma}$ οι σταθερές δομής για την αντίστοιχη ομάδα ισομετρίας. Εν γένει οι παράγοντες δομής είναι συναρτήσεις της θέσης, για ομογενείς χώρους όμως που υπάρχει η ομάδα ισομετρίας υπάρχει μια επιλογή των 1-μορφών ώστε οι παράγοντες δομείς να μην εξαρτώνται από τη θέση.
Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν συντεταγμένες t, x^i τέτοιες ώστε το στοιχείο γραμμής (2.2) να παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = \left(N^a(t)N_a(t) + \varepsilon N^2(t)\right)dt^2 + 2N_a(t)\sigma^\alpha_i(x)dx^i dt + \gamma_{\alpha\beta}\sigma^\alpha_i(x)\sigma^\beta_j(x)dx^i dx^j \tag{2.4β}$$

Οι λατινικοί δείκτες είναι οι χωρικοί με εύρος από 1 έως 3 και οι ελληνικοί απαριθμούν τις διαφορετικές ένα - μορφές με εύρος και πάλι από 1 έως 3 και ανεβαίνουν και κατεβαίνουν με τα $\gamma^{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}$ αντίστοιχα. Εισάγοντας τις σχέσεις (2.4) στις σχέσεις ($2.3^{\alpha}2.3^{\beta}2.3^{\gamma}$) [6] παίρνουμε το ακόλουθο σύνολο τυπικών διαφορικών εξισώσεων για τους χωρικά ομογενείς χωροχρόνους τύπου Bianchi:

$$E_0 \hat{=} K^{\alpha}_{\beta}K^{\beta}_{\alpha} - K^2 - \varepsilon R = 0 \tag{2.5α}$$

$$E_a \hat{=} K^{\mu}_{\alpha}C^{\varepsilon}_{\mu\varepsilon} - K^{\mu}_{\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\alpha\mu} = 0 \tag{2.5β}$$

$$E^{\alpha}_{\beta} \hat{=} \dot{\mathrm{K}}^{\alpha}_{\beta} - \mathrm{N}\mathrm{K}\mathrm{K}^{\alpha}_{\beta} - \varepsilon \mathrm{N} R^{\alpha}_{\beta} + 2\mathrm{N}^{\rho}\left(\mathrm{K}^{\alpha}_{\nu}C^{\nu}_{\beta\rho} - \mathrm{K}^{\nu}_{\beta}C^{\alpha}_{\nu\rho}\right) = 0 \tag{2.5γ}$$

όπου $\mathrm{K}^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\alpha\rho}\mathrm{K}_{\rho\beta}$

$$\mathrm{K}_{\alpha\beta} = \sigma^{i}_{\alpha}\sigma^{j}_{\beta}K_{ij} = -\frac{1}{2\mathrm{N}}\left(\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\nu}C^{\nu}_{\beta\rho}\mathrm{N}^{\rho} + 2\gamma_{\beta\nu}C^{\nu}_{\alpha\rho}\mathrm{N}^{\rho}\right) \tag{2.6}$$

και

$$R_{\alpha\beta} = C^{\kappa}_{\sigma\tau}C^{\lambda}_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\kappa}\gamma_{\beta\lambda}\gamma^{\sigma\nu}\gamma^{\tau\mu} + 2C^{\lambda}_{\alpha\kappa}C^{\kappa}_{\beta\lambda} + 2C^{\mu}_{\alpha\kappa}C^{\nu}_{\beta\lambda}\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\kappa\lambda} + 2C^{\lambda}_{\beta\kappa}C^{\mu}_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\lambda}\gamma^{\kappa\nu} + 2C^{\lambda}_{\alpha\kappa}C^{\mu}_{\mu\nu}\gamma_{\beta\lambda}\gamma^{\kappa\nu} \tag{2.7}$$

το σύνολο των εξισώσεων (2.5) σχηματίζουν αυτό που είναι γνωστό ως (πλήρες) τέλειο ιδεώδες. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν για το σύστημα αυτό συνθήκες ολοκληρωσιμότητας. Με την βοήθεια των (2.5γ),(2.6) και (2.7) μπορεί να δείξει κανείς ότι οι παράγωγοι των (2.5α) ,(2.5β) μηδενίζονται ταυτοτικά. Ο υπολογισμός είναι άμεσος αλλά μακροσκελείς και γίνεται με χρήση της ταυτότητας Jacobi $C^{\alpha}_{\rho\beta}C^{\rho}_{\gamma\delta} + C^{\alpha}_{\rho\delta}C^{\rho}_{\beta\gamma} + C^{\alpha}_{\rho\gamma}C^{\rho}_{\delta\beta} = 0$ και της συνεπτυγμένης μορφής $C^{\alpha}_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\gamma\delta} = 0$.

Ο μηδενισμός των τεσσάρων περιορισμών $E_0 = 0, E_a = 0$ υπονοεί ότι αυτές οι εξισώσεις είναι πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων (2.5γ). Πράγματι εάν λύσουμε αλγεβρικά τις (2.5^{α}) και (2.5^{β}) και ως προς $N(t)$ και $N_a(t)$ αντίστοιχα και αντικαταστήσουμε στην (2.5^{γ}) βρίσκουμε ότι σε όλα τα πρότυπα Bianchi εκτός του προτύπου 2 μπορούμε να λύσουμε ως προς τις 2 από τις 6 επιταχύνσεις $\ddot{\gamma}_{\alpha\beta}$ που εμφανίζονται. Στον τύπο 2 οι ανεξάρτητες επιταχύνσεις είναι 3 αλλά όλες οι E_a δεν είναι ανεξάρτητες και επομένως μπορούν να λυθούν για 2 από τα 3 N_a. Έτσι το τρίτο N_a εξισορροπεί την επιπλέον ανεξάρτητη επιτάχυνση. Επομένως σε όλα τα πρότυπα Bianchi εμφανίζονται τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου στην γενική λύση για το σύνολο των εξισώσεων (2.5). Βασισμένοι στην διαίσθησή μας που αποκτήθηκε από την πλήρη θεωρία κανείς μπορεί να περιμένει ότι το γεγονός αυτό είναι μια απεικόνιση της μοναδικής γνωστής συναλλοιώτητας που εμφανίζεται στην θεωρία, της ελευθερίας που έχουμε να επιλέγουμε αυθαίρετα χωρικές και χρονικές συντεταγμένες. Το υπόλοιπο αυτού του τμήματος αφιερώνεται στην εξερεύνηση της ύπαρξης και των ιδιοτήτων των γενικών μετασχηματισμών συντεταγμένων (που περιέχουν 4 αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου) στην περίπτωση των Bianchi γεωμετριών.

Όσο αφορά στην αναπαραμετροποίηση του χρόνου η κατάσταση είναι αρκετά σαφής. Έστω ένας μετασχηματισμός:

$$t \to \tilde{t} = g(t) \Leftrightarrow t = f\left(\tilde{t}\right) \tag{2.8α}$$

αν ο μετασχηματισμός αυτός εισαχθεί στο στοιχείο γραμμής έχουμε

$$\gamma_{\alpha\beta}(t) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}\left(f\left(\tilde{t}\right)\right) \equiv \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right) \tag{2.8β}$$

$$\begin{aligned} N(t) &\rightarrow \pm N\left(f\left(\tilde{t}\right)\right)\frac{df\left(\tilde{t}\right)}{d\tilde{t}} \equiv \tilde{N}\left(\tilde{t}\right) \\ N^{a}(t) &\rightarrow N^{a}\left(f\left(\tilde{t}\right)\right)\frac{df\left(\tilde{t}\right)}{d\tilde{t}} \equiv \tilde{N}^{a}\left(\tilde{t}\right) \end{aligned} \tag{2.8γ}$$

Αντίστοιχα η ποσότητα K^{α}_{β} μετασχηματίζεται κάτω από την (2.8α) σαν βαθμωτό και επομένως οι (2.5α) και (2.5β) είναι επίσης βαθμωτές ενώ η (2.5γ) πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα $\frac{df\left(\tilde{t}\right)}{d\tilde{t}}$. Έτσι από μία δεδομένη λύση των εξισώσεων (2.5) μπορεί κανείς να πάρει πάντα μια ισοδύναμη λύση επαναπροσδιορίζοντας αυθαίρετα το χρόνο. Συμπερασματικά μπορούμε να καταλάβουμε την ύπαρξη μιας αυθαίρετης συνάρτησης του χρόνου στην γενική λύση των εξισώσεων του Einstein.
Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε και την ύπαρξη των άλλων τριών αυθαίρετων συναρτήσεων του χρόνου, λογικό είναι να στραφούμε στους μετασχηματισμούς των τριών χωρικών συντεταγμένων. Ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} \tilde{t} = t &\Leftrightarrow t = \tilde{t} \\ \tilde{x}^{i} = g^{i}(x,t) &\Leftrightarrow x^{i} = f^{i}\left(\tilde{x}^{j}, \tilde{t}\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς το στοιχείο γραμμής (2.4β) γίνεται

$$\begin{aligned} ds^{2} = &\left[N_{a}N^{a} + \varepsilon N^{2} + \frac{\partial f^{i}}{\partial \tilde{t}}\frac{\partial f^{j}}{\partial \tilde{t}}\sigma_{i}^{\alpha}(f)\sigma_{j}^{\beta}(f)\gamma_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right) + 2\sigma_{i}^{\alpha}(f)\frac{\partial f^{i}}{\partial \tilde{t}}N_{a}\left(\tilde{t}\right)\right] d\tilde{t}^{2} + \\ &2\sigma_{i}^{\alpha}(f)\frac{\partial x^{i}}{\partial \tilde{x}^{m}}\left[N_{a}\left(\tilde{t}\right) + \sigma_{j}^{\beta}(x)\frac{\partial x^{j}}{\partial \tilde{t}}\gamma_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right)\right] d\tilde{x}^{m}\, d\tilde{t} + \sigma_{i}^{\alpha}(f)\sigma_{j}^{\beta}(f)\gamma_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right)\frac{\partial x^{i}}{\partial \tilde{x}^{m}}\frac{\partial x^{j}}{\partial \tilde{x}^{n}} d\tilde{x}^{m}\, d\tilde{x}^{n} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Εάν θέλουμε να βρούμε την αλλαγή στην μορφή που προκαλείται από τον μετασχηματισμό (2.9) στο στοιχείο γραμμής (2.4^{β}), θα πρέπει να αναφερθούμε στην μορφή του στοιχείου γραμμής που δίνεται από την (2.10) στην παλιά βάση $\sigma_{i}^{\alpha}\left(\tilde{x}\right)$ στο καινούριο σημείο $\tilde{x}^{i}$. Αφού τα σ_{i}^{α} και $\frac{\partial x^{i}}{\partial \tilde{x}^{j}}$ είναι και τα δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, θα υπάρχει πάντα ένας αντιστρέψιμος πίνακας $\Lambda_{\mu}^{\alpha}\left(\tilde{x}, \tilde{t}\right)$ και ένα διάνυσμα $P^{a}\left(\tilde{x}, \tilde{t}\right)$ τέτοια ώστε:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha}_{m}\left(\tilde{x}\right)=\sigma^{\alpha}_{i}(x)\frac{\partial x^{i}}{\partial \tilde{x}^{m}}=\Lambda^{\alpha}_{\mu}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)$$

$$\sigma^{\alpha}_{i}(x)\frac{\partial x^{i}}{\partial \tilde{t}}=P^{a}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right) \tag{2.11}$$

Με αυτές τις αναθέσεις το στοιχείο γραμμής (2.10) γίνεται:

$$ds^{2}=\left[N_{a}N^{a}+\varepsilon N^{2}+P^{a}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)P^{\beta}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\gamma_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right)+2P^{a}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)N_{a}\left(\tilde{t}\right)\right]d\tilde{t}^{2}+$$

$$2\Lambda^{\alpha}_{\mu}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)\left[N_{a}\left(\tilde{t}\right)+P^{\beta}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\gamma_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right)\right]d\tilde{x}^{m}\,d\tilde{t}+\Lambda^{\alpha}_{\mu}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\Lambda^{\beta}_{\nu}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\gamma_{\alpha\beta}\left(\tilde{t}\right)\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)\sigma^{\nu}_{n}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}^{m}\,d\tilde{x}^{n} \tag{2.12}$$

Εάν θέλουμε αυτό το σημείο γραμμής να διατηρεί την προφανή χωρική ομογένεια ή ισοδύναμα ο μετασχηματισμός (2.9) να έχει μια καλά προσδιορισμένη και μη τετριμμένη δράση στα $\gamma_{\alpha\beta},\mathrm{N}(t),N^{a}(t)$, πρέπει να επιβάλουμε στα $\Lambda^{\alpha}_{\mu}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)$ και $P^{a}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)$ να μην εξαρτώνται από το χωρικό σημείο $\tilde{x}$. Δηλαδή $\Lambda^{\alpha}_{\mu}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)=\Lambda^{\alpha}_{\mu}\left(\tilde{t}\right)$ και $P^{a}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)=P^{a}\left(\tilde{t}\right)$.

Τότε η (2.12) γράφεται:

$$ds^{2}=\left[N_{a}N^{a}+\varepsilon N^{2}+P^{a}P^{\beta}\gamma_{\alpha\beta}+2P^{a}N_{a}\right]d\tilde{t}^{2}+2\Lambda^{\alpha}_{\mu}\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)\left[N_{a}+P^{\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right]d\tilde{x}^{m}\,d\tilde{t}$$

$$+\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}\gamma_{\alpha\beta}\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)\sigma^{\nu}_{n}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}^{m}\,d\tilde{x}^{n}\equiv$$

$$\left[\tilde{N}_{a}\tilde{N}^{a}+\varepsilon\tilde{N}^{2}\right]d\tilde{t}^{2}+2\tilde{N}_{a}\,\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}^{m}\,d\tilde{t}+\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,\sigma^{\mu}_{m}\left(\tilde{x}\right)\sigma^{\nu}_{n}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}^{m}\,d\tilde{x}^{n} \tag{2.13}$$

όπου

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}=\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}\gamma_{\mu\nu} \tag{2.14$^{\alpha}$}$$

$$\tilde{\mathrm{N}}_{\alpha}=\Lambda^{\beta}_{\alpha}\left(\mathrm{N}_{\beta}+P^{\rho}\gamma_{\rho\beta}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\tilde{\mathrm{N}}^{\alpha}=S^{a}_{\beta}\left(\mathrm{N}^{\beta}+P^{\beta}\right) \tag{2.14$^{\beta}$}$$

$$\tilde{\mathrm{N}}=\mathrm{N} \tag{2.14$^{\gamma}$}$$

με $S=\Lambda^{-1}$

Φυσικά η απαίτηση ότι τα $\Lambda^{\alpha}_{\mu},P^{a}$ δεν πρέπει να εξαρτώνται από το χωρικό σημείο $\tilde{x}^{i}$ θέτει μέσω της σχέσεως (2.11), τους παρακάτω διαφορικούς περιορισμούς στις συναρτήσεις f^{i} που προσδιορίζουν τον μετασχηματισμό:

$$\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m} = \sigma^i_\alpha(f)\Lambda^\alpha_\beta\left(\tilde{t}\right)\sigma^\beta_m\left(\tilde{x}\right) \tag{2.15α}$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}} = \sigma^i_\alpha(f)P^\alpha\left(\tilde{t}\right)$$

(2.15β)

Οι εξισώσεις (2.15) αποτελούν ένα σύνολο από πρώτης τάξης υψηλά μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις για τις άγνωστες συναρτήσεις f^i. Η ύπαρξη λύσεων για αυτές τις εξισώσεις εξασφαλίζεται από το θεώρημα Frobenius [2] εφόσον ισχύουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m}\right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^m}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{x}^m}\right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^m}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \tilde{t}}\right) = 0$$

Οι σχέσεις αυτές με χρήση των (2.15) και επανειλημμένη χρήση της (2.4^α) καταλήγουν στις:

$$\Lambda^\alpha_\mu C^\mu_{\beta\gamma} = \Lambda^\rho_\beta \Lambda^\sigma_\gamma C^\alpha_{\rho\sigma} \tag{2.16}$$

$$P^\mu C^\alpha_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\beta = \frac{1}{2}\dot{\Lambda}^\alpha_\beta \tag{2.17}$$

Η εξίσωση (2.16) ικανοποιείται αν το Λ^α_β είναι στοιχείο της ομάδας αυτομορφισμών της άλγεβρας Lie που καθορίζεται από τα $C^\alpha_{\beta\gamma}$. Η εξίσωση (2.17) περιορίζει περαιτέρω την μορφή του Λ^α_β, έτσι ώστε να διατηρείται η προφανής χωρική ομογένεια ανεξάρτητα από την ανάμειξη του παλιού χρόνου και χωρικών συντεταγμένων στις καινούριες χωρικές συντεταγμένες $\tilde{x}^i$. Κατά συνέπεια είναι σωστό να ονομάσουμε τους μετασχηματισμούς (2.9) που υπακούουν στις συνθήκες (2.15), (2.16) και (2.17) **Χρονικά Εξαρτώμενους Διαφομορφισμούς που Επάγουν Αυτομορφισμούς.** Η σημασία των αυτομορφισμών στις κοσμολογίες Bianchi έχει τονιστεί στο [3]. Στο [5] πραγματεύεται η καλούμενη ομογένεια που διατηρεί τους διαφομορφισμούς σε σχέση με την τοπολογία του Σ_t.

Μια χρονικά ανεξάρτητη έκδοση του (2.15) εμφανίζεται στο [7], όπου όλες οι ομογενείς τρισδιάστατες γεωμετρίες ταξινομούνται σε ισοδύναμες τάξεις με γνώμονα αυτούς τους παγωμένους μετασχηματισμούς.

Είναι ιδιαίτερα άμεσο να ελέγξουμε ότι τα E_0, E_a, E^a_β μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\tilde{E}_0 = E_0 \quad \tilde{E}_\alpha = \Lambda^\beta_\alpha E_\beta \quad \tilde{E}^\alpha_\beta = S^\alpha_\mu \Lambda^\nu_\beta E^\mu_\nu \tag{2.18}$$

Αυτό το γεγονός εξασφαλίζει τη συναλλοιώτητα των εξισώσεων (2.5) κάτω από τους μετασχηματισμούς «βαθμίδας» (2.14) και υπονοεί ότι αν $\left(N, N^a, \gamma_{\alpha\beta}\right)$ είναι μια λύση για τις εξισώσεις Einstein, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το σύνολο

$\left(\tilde{N}, \tilde{N}^{a}, \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} \right)$ (έχοντας σαν δεδομένο ότι ισχύουν οι (2.16) και (2.17). Στην πραγματικότητα όπως αποκαλύπτει η προηγούμενη απόδειξη θα είναι οι ίδιες εξισώσεις εκπεφρασμένες σε διαφορετικά χωροχρονικά συστήματα συντεταγμένων. Από τις 12 ποσότητες $\Lambda^{\alpha}_{\beta}, P^{\alpha}$ οι συνθήκες (2.16) και (2.17) μας αφήνουν σε κάθε τύπο Bianchi, όπως θα δούμε στη συνέχεια 3 αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου και τόσες σταθερές όσα είναι τα Λ^{α}_{β}. Αυτό το γεγονός, μαζί με την συναλλοιώτητα ως προς την αναπαραμετροποίηση του χρόνου, ολοκληρώνει την κατανόησή μας στο γιατί υπεισέρχονται 4 αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου στην γενική λύση της (2.5). Κατά συνέπεια, ο μετασχηματισμός (2.14) μας δίνει τη δυνατότητα να απλοποιήσουμε τη μορφή του στοιχείου γραμμής και επομένως τις εξισώσεις Einstein χωρίς να χάνεται η γενικότητα τους. Είναι προφανές ότι η απλοποίηση που πετυχαίνουμε είναι διαφορετική για κάθε πρότυπο Bianchi και ακόμα και σε ένα συγκεκριμένο Bianchi τύπο δεν είναι μοναδική, με την έννοια ότι καθένας μπορεί να χρησιμοποιήσει την ελευθερία των 4 αυθαίρετων συναρτήσεων του χρόνου με διαφορετικό τρόπο.

Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι το διάνυσμα μετατόπισης $\tilde{N}^{a}$ μπορεί πάντοτε να τεθεί ίσο με το μηδέν (πιθανώς με τίμημα κάποιο πιο πεπλεγμένου $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$).

ΟΙ ΓΕΝΝΗΤΟΡΕΣ

Θα ψάξουμε τώρα να βρούμε τους γεννήτορες των μετασχηματισμών που είναι συμμετρίες των παραγόντων δομής.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τους πίνακες που δρώντας πάνω στους παράγοντες δομής $C^{\sigma}_{\alpha\beta}$,τους αφήνουν αμετάβλητους.
Για να βρούμε τους γεννήτορες των πινάκων Λ υποθέτουμε ότι οι πίνακες εξαρτώνται από μία παράμετρο ω $\Lambda^{\alpha}_{\beta}(\omega)$ και ότι στο $\omega = 0$ ο πίνακας Λ γίνεται ο μοναδιαίος, δηλαδή

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta}(0) = \delta^{\alpha}_{\beta} . \tag{2.19}$$

ο γεννήτορας των Λ είναι ο $\lambda^{\alpha}_{\beta} = \frac{d}{d\omega} \Lambda^{\alpha}_{\beta}\Big|_{\omega=0}$

Από την σχέση (2.16) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
& C^{\sigma}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}_{\tau}(\omega)\Lambda^{\beta}_{\gamma}(\omega) = \Lambda^{\sigma}_{\rho}(\omega)C^{\rho}_{\tau\gamma} \Leftrightarrow \\
& \frac{d}{d\omega} C^{\sigma}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}_{\tau}(\omega)\Lambda^{\beta}_{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{d}{d\omega}\Lambda^{\sigma}_{\rho}(\omega)C^{\rho}_{\tau\gamma}\Big|_{\omega=0} \Leftrightarrow \\
& C^{\sigma}_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{\tau}\delta^{\beta}_{\gamma} + C^{\sigma}_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{\tau}\lambda^{\beta}_{\gamma} = \lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\rho}_{\tau\gamma} \Leftrightarrow \\
& C^{\sigma}_{\alpha\gamma}\lambda^{\alpha}_{\tau} + C^{\sigma}_{\tau\beta}\lambda^{\beta}_{\gamma} = \lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\rho}_{\tau\gamma} \Leftrightarrow \\
& \lambda^{\rho}_{\sigma}C^{\sigma}_{\alpha\beta} = C^{\rho}_{\sigma\beta}\lambda^{\sigma}_{\alpha} + C^{\rho}_{\alpha\sigma}\lambda^{\sigma}_{\beta}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Μπορεί να δειχτεί ότι τα διανυσματικά πεδία (στον χώρο των $\gamma_{\alpha\beta}$)

$$X_{(I)} = \lambda^{\rho}_{(I)\sigma}\gamma_{\rho\tau}\frac{\partial}{\partial\gamma_{\sigma\tau}} \tag{2.21}$$

γεννούν μέσω των ολοκληρωτικών γραμμών τους μετασχηματισμούς (2.14α), όπου βάλαμε έναν ακόμα δείκτη στο λ_{β}^{α} ο οποίος αριθμεί τους διαφορετικούς γεννήτορες.

Τελειώνουμε αυτή την παράγραφο παρουσιάζοντας για κάθε Bianchi πρότυπο την μορφή των γεννητόρων [12]

Type	Generators $\lambda^{\alpha}_{(i)\beta}$	# of Indep. Parameters	# of Indep. H_α's	# of Indep. E_α's	# of Indep. q^i's
I	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{pmatrix}$	9	0	0	0
II	$\begin{pmatrix} p_3+p_6 & p_1 & p_2 \\ 0 & p_3 & p_4 \\ 0 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}$	6	2	3	1
III	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	2	2	2
IV	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	3	1	2
V	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	6	3	2	1
VI	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	3	1	2
VII	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_2 & p_1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	3	1	2
VIII	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & p_3 \\ p_2 & -p_3 & 0 \end{pmatrix}$	3	3	0	3
XI	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & 0 & p_3 \\ -p_2 & -p_3 & 0 \end{pmatrix}$	3	3	0	3

3. Η LAGRANGIAN

Γνωρίζουμε ότι η δράση του πεδίου βαρύτητας (δράση Hilbert) είναι:

$$S = \int \sqrt{-{}^{(4)}g}\,{}^{(4)}R d^4x \tag{3.1}$$

Θα βρούμε τώρα την Lagrangian που αντιστοιχεί στην δράση αυτή για κοσμολογικά πρότυπα. Ακολουθώντας την διαδικασία της κανονικής ανάλυσης (κεφάλαιο 1 παράγραφος 9) της βαρύτητας γράφουμε το στοιχείο γραμμής στην μορφή

$$ds^2 = \left(N^i N_i - N^2\right)dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j \tag{3.2}$$

Έτσι καταλήγουμε να γράφουμε την δράση για το πεδίο βαρύτητας στην μορφή

$$S = \int d^4x N\sqrt{g}\left(K^{ij}K_{ij} - K^2 - R\right) \tag{3.3}$$

με K_{ij} τον τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας.

Περνώντας τώρα στην κοσμολογία, έχουμε μια τρισδιάστατη ομάδα ισομετρίας στον τρισδιάστατο χώρο σταθερού χρόνου («φέτα» Σ_t) υπάρχουν τρεις ένα μορφές σ_i^a οι οποίες ικανοποιούν την σχέση (2.4α).

Εισάγοντας στον τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας το στοιχείο γραμμής (2.4β) παίρνουμε

$$K_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^i \sigma_\beta^j K_{ij} = \sigma_\alpha^i \sigma_\beta^j \frac{1}{2N}\left(N_{i/j} + N_{j/i} - g_{ij,0}\right)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_\alpha^i \sigma_\beta^j}{2N}\left(N_{i,j} + N_{j,i} - 2\Gamma_{ij}^k N_k - g_{ij,0}\right) \tag{3.4}$$

μπορεί κανείς να υπολογίσει τα σύμβολα Christoffel

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\sigma_a^l\left(\sigma_{i,j}^a + \sigma_{j,i}^a\right) + C_{\beta\delta}^\alpha \sigma^{\delta l}\left(\sigma_{ia}\sigma_j^\beta + \sigma_{ja}\sigma_i^\beta\right)$$

οπότε καταλήγουμε για την εξωτερική καμπυλότητα στην σχέση

$$K_{\alpha\beta} = \frac{-1}{2\mathrm{N}}\left(\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\nu}C_{\beta\rho}^\nu \mathrm{N}^\rho + 2\gamma_{\beta\nu}C_{\alpha\rho}^\nu \mathrm{N}^\rho\right) \tag{3.5}$$

από την (3.5) εύκολα υπολογίζουμε:

$$\mathrm{K}_\beta^a = \gamma^{\alpha\sigma}\mathrm{K}_{\beta\sigma} = \frac{-1}{2\mathrm{N}}\left(\gamma^{\alpha\rho}\dot{\gamma}_{\rho\beta} + 2C_{\beta\sigma}^\alpha \mathrm{N}^\sigma + 2\delta_{\beta\nu}^{\alpha\rho}C_{\rho\sigma}^\nu \mathrm{N}^\sigma\right) \tag{3.6}$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_\alpha^a = \frac{-1}{2\mathrm{N}}\left(\gamma^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + 4C_{\alpha\sigma}^\alpha \mathrm{N}^\sigma\right) \tag{3.7}$$

έχουμε τώρα

$$L = N\sqrt{g}\left(K^{ij}K_{ij} - K^2 - R\right) = \sigma N\sqrt{\gamma}\left(\mathrm{K}^{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\alpha\beta} - \mathrm{K}^2 - R\right) \tag{3.8}$$

όπου $\gamma = \det\gamma_{\alpha\beta}$ και $\sigma = \det\sigma_i^\alpha$.

Προφανώς το σ είναι συνάρτηση του χώρου μόνο. Επομένως στο ολοκλήρωμα της δράσης θα έχουμε $S = \int \sigma d^3x \int dtL$ και το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να παραληφθεί σαν σταθερά.

Ορίζουμε τώρα τον supermetric :

$$G^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\sqrt{\gamma}}{4}\left(\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\mu\beta} - 2\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}\right) \tag{3.9α}$$

και τον αντίστροφό του:

$$G_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu} + \gamma_{\alpha\nu}\gamma_{\beta\mu} - \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}\right) \tag{3.9β}$$

παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
G^{\alpha\beta\mu\nu}K_{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{\gamma}}{4}\left(\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\mu\beta} - 2\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}\right)\mathrm{K}_{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\left(\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} - \gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}\right)\mathrm{K}_{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}\left(\mathrm{K}_{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\mu\nu} - \mathrm{K}_{\alpha\mu}\mathrm{K}_{\beta\nu}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\left(\mathrm{K}^{\mu\nu}\mathrm{K}_{\mu\nu} - \mathrm{K}^2\right)
\end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε την Lagrangian στην μορφή

$$L = 2NG^{\alpha\beta\mu\nu}\mathrm{K}_{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\mu\nu} - \sqrt{\gamma}\mathrm{N}R \tag{3.10}$$

Εάν εισάγουμε τις (3.5) και (3.9) στην (3.8) παίρνουμε για την Lagrangian

$$\begin{aligned}
L = &\frac{\sqrt{\gamma}}{8N}\left(\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\mu\beta} - 2\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}\right)\dot{\gamma}_{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\mu\nu} - \sqrt{\gamma}\mathrm{N}R + \\
&\frac{\sqrt{\gamma}}{4N}\left\{8N^{\rho}\left(\gamma^{\mu\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}C^{\alpha}_{\mu\rho} - C^{\sigma}_{\sigma\rho}\gamma^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta}\right) + 2\mathrm{N}^{\rho}\mathrm{N}^{\sigma}\left(7C^{\alpha}_{\mu\rho}C^{\mu}_{\alpha\delta} - 5C^{\alpha}_{\alpha\delta}C^{\beta}_{\beta\rho}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Η οποία δείχνει απ' ευθείας την εξάρτηση της Lagrangian από τα $\gamma_{\alpha\beta}$ τα N^{α} και των χρονικών παραγώγων τους, μόνο που δεν είναι και σε τόσο βολική μορφή και για το λόγο αυτό όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (3.10) προκειμένου να υπολογίσουμε της γενικευμένες ορμές.

4. H HAMILTONIAN

από τη σχέση (3.10) υπολογίζουμε τις γενικευμένες ορμές

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}^\mu} \approx 0 \text{ (primary constraints)} \tag{4.1}$$

$$P_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}^0} \approx 0 \text{ (primary constraint)} \tag{4.2}$$

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{\alpha\beta}} = \frac{\partial L}{\partial K_{\alpha\beta}} \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\gamma}_{\alpha\beta}} = -2G^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} \tag{4.3}$$

Οι σχέσεις (4.1) και (4.2) αποτελούν τους πρωτογενείς συνδέσμους, ενώ από τη σχέση (3.5) λύνω ως προς $\dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ και παίρνω:

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = -2\left(NK_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho + \gamma_{\beta\nu} C^\nu_{\alpha\rho} N^\rho\right) \tag{4.4}$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= -2G^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda}\left[-2\left(NK_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho + \gamma_{\beta\nu} C^\nu_{\alpha\rho} N^\rho\right)\right] \\ &= 4NG^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} K_{\alpha\beta} + 8G^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho \end{aligned} \tag{4.5}$$

η κανονική Hamiltonian ορίζεται ως:

$$H_c = \Pi^{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} - L \tag{4.6}$$

εισάγοντας τις σχέσεις (3.10) και (4.5) στην (4.6) έχουμε διαδοχικά:

$$H_c = 4NG^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} K_{\alpha\beta} + 8G^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho - \left[2NG^{\alpha\beta\mu\nu} K_{\alpha\beta} K_{\mu\nu} - \sqrt{\gamma} NR\right]$$

$$H_c = 2NG^{\alpha\beta\mu\nu} K_{\alpha\beta} K_{\mu\nu} + 8G^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho + \sqrt{\gamma} NR$$

$$H_c = \Pi^{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} - L = 4NG^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} K_{\alpha\beta} + 8G^{\alpha\beta\kappa\lambda} K_{\kappa\lambda} \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho - \left[2NG^{\alpha\beta\mu\nu} K_{\alpha\beta} K_{\mu\nu} - \sqrt{\gamma} NR\right]$$

$$H_c = 2NG^{\alpha\beta\mu\nu} K_{\alpha\beta} K_{\mu\nu} + \sqrt{\gamma} NR + 8G^{\alpha\beta\kappa\lambda}\left[-\frac{1}{2} G_{\mu\delta\kappa\lambda} \Pi^{\mu\delta}\right] \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho$$

$$H_c = N\frac{1}{2} G_{\kappa\lambda\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} \Pi^{\kappa\lambda} + \sqrt{\gamma} NR - 4\Pi^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\rho} N^\rho$$

Το αποτέλεσμα αυτό το ξαναγράφουμε στην μορφή:

$$H_c = NH_0 + 4N^a H_a \tag{4.7}$$

όπου

$$H_0 = \frac{1}{2} G_{\kappa\lambda\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} \Pi^{\kappa\lambda} + \sqrt{\gamma} R \tag{4.8}$$

$$H_\alpha = C^\nu_{\alpha\beta} \gamma_{\rho\nu} \Pi^{\rho\beta} \tag{4.9}$$

5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ DIRAC

Στις προηγούμενες δύο παραγράφους ορίσαμε την συνάρτηση Lagrange και από εκεί την συνάρτηση Hamilton για κοσμολογίες τύπου Bianchi. Είμαστε τώρα έτοιμοι να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Dirac για τις κοσμολογίες αυτές.

Πρώτα από όλα πρέπει να ορίσουμε τις αγκύλες Poisson.
Είναι:

$$\left\{\gamma_{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}\right]$$

$$\left\{\gamma^{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \left\{\gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\sigma\beta}\gamma_{\rho\sigma}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\sigma\beta}\left\{\gamma_{\rho\sigma}, \Pi^{\mu\nu}\right\} + \gamma^{\alpha\rho}\gamma_{\rho\sigma}\left\{\gamma^{\sigma\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} + \gamma_{\rho\sigma}\gamma^{\sigma\beta}\left\{\gamma^{\alpha\rho}, \Pi^{\mu\nu}\right\} =$$
$$\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\sigma\beta}\left[\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + \delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\nu}_{\rho}\right] + 2\left\{\gamma^{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} \Leftrightarrow \left\{\gamma^{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = -\frac{1}{2}\left[\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\beta\mu}\right]$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\gamma, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \left\{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\gamma_{1\alpha}\gamma_{2\beta}\gamma_{3\gamma}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \\
&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\gamma_{2\beta}\gamma_{3\gamma}\left\{\gamma_{1\alpha}, \Pi^{\mu\nu}\right\} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\gamma_{1\alpha}\gamma_{3\gamma}\left\{\gamma_{2\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} \\
&+ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\gamma_{1\alpha}\gamma_{2\beta}\gamma_{3\gamma}\left\{\gamma_{3\gamma}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \\
&\gamma\gamma^{1\alpha}\left\{\gamma_{1\alpha}, \Pi^{\mu\nu}\right\} + \gamma\gamma^{2\beta}\left\{\gamma_{2\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} + \gamma\gamma^{3\gamma}\left\{\gamma_{3\gamma}, \Pi^{\mu\nu}\right\} \\
&= \gamma\gamma^{\alpha\beta}\left\{\gamma_{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \gamma\gamma^{\mu\nu} \\
&\left\{\gamma, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \gamma\gamma^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας:

$$\left\{\gamma_{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}\right] \tag{5.1α}$$

$$\left\{\gamma^{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}\right\} = -\frac{1}{2}\left(\gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\gamma^{\beta\mu}\right) \tag{5.1β}$$

$$\left\{f(\gamma), \Pi^{\mu\nu}\right\} = f'(\gamma)\gamma\gamma^{\mu\nu} \tag{5.1γ}$$

και τα υπόλοιπα μηδενίζονται.

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange (4.1),(4.2) συνάγουμε τους πρωτογενείς συνδέσμους:
Οι σύνδεσμοι (4.1),(4.2) πρέπει να διατηρούνται. Από την διατήρηση των συνδέσμων έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\dot{P}_0 \approx 0 \Rightarrow \left\{P_0, H_p\right\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\left\{P_0, H_c\right\} + \mu\left\{P_0, P_0\right\} + \mu^{\alpha}\left\{P_0, P_{\alpha}\right\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\left\{P_0, H_c\right\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\left\{P_0, NH_0 + 4N^{a}H_{a}\right\} \approx 0 \Rightarrow \\
&H_0 \approx 0 \ \text{Secondary Constraint}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{P}_a \approx 0 \Rightarrow \{P_a, H_p\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{P_a, H_c\} + \mu\{P_a, P_0\} + \mu^{\beta}\{P_a, P_{\beta}\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{P_{\alpha}, H_c\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{P_{\alpha}, NH_0 + 4N^{\beta}H_{\beta}\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\delta_{\alpha}^{\beta}\mathrm{H}_{\beta} \approx 0
\end{aligned}
$$

$$H_{\alpha} \approx 0 \qquad \text{Secondary Constraints} \tag{5.3}$$

Ομοίως πρέπει να διατηρούνται και οι δευτερογενείς σύνδεσμοι (5.2) και (5.3). Από την διατήρηση των δευτερογενών συνδέσμων έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\dot{H}_0 \approx 0 \Rightarrow \{H_0, H_p\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{H_0, H_c\} + \mu\{H_0, P_0\} + \mu^{\alpha}\{H_0, P_{\alpha}\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{H_0, H_c\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{H_0, NH_0 + 4N^{a}H_{a}\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\qquad \{H_0, H_a\} \approx 0
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{H}_a \approx 0 \Rightarrow \{H_a, H_p\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{H_a, H_c\} + \mu\{H_a, P_0\} + \mu^{\alpha}\{H_a, P_{\alpha}\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{H_a, H_c\} \approx 0 \Rightarrow \\
&\{H_a, NH_0 + 4N^{\beta}H_{\beta}\} \approx 0 \Rightarrow \\
&N\{H_0, H_a\} + 4\mathrm{N}^{\beta}\{H_{\alpha}, H_{\beta}\} \approx 0
\end{aligned}
$$

και για αν ισχύει η (5.4) και επειδή αυτό θα είναι αληθές για κάθε επιλογή N^{β}

$$\{H_{\alpha}, H_{\beta}\} \approx 0 \tag{5.5}$$

Όπως θα δούμε στην ανάλυση που ακολουθεί οι σχέσεις (5.4) και (5.5) πράγματι ισχύουν και δεν θέτουν κανέναν επιπλέον σύνδεσμο στο πρόβλημά μας για κοσμολογία Bianchi class A.
Παραθέτουμε εδώ τις πράξεις για τον υπολογισμό των αγκύλων Poisson αυτών.
Πρώτα το εύκολο κομμάτι:

$$\{H_a,H_\beta\}=\{C^\rho_{\alpha\mu}\gamma_{\rho\nu}\Pi^{\mu\nu},C^\sigma_{\beta\gamma}\gamma_{\sigma\tau}\Pi^{\gamma\tau}\}=$$
$$C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\{\gamma_{\rho\nu}\Pi^{\mu\nu},\gamma_{\sigma\tau}\Pi^{\gamma\tau}\}=C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\left[\gamma_{\rho\nu}\{\Pi^{\mu\nu},\gamma_{\sigma\tau}\}\Pi^{\gamma\tau}+\gamma_{\sigma\tau}\{\gamma_{\rho\nu},\Pi^{\gamma\tau}\}\Pi^{\mu\nu}\right]=$$
$$-C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\gamma_{\rho\nu}\{\gamma_{\sigma\tau},\Pi^{\mu\nu}\}\Pi^{\gamma\tau}+C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\mu}\gamma_{\rho\nu}\{\gamma_{\sigma\tau},\Pi^{\mu\nu}\}\Pi^{\gamma\tau}=$$
$$\gamma_{\rho\nu}\{\gamma_{\sigma\tau},\Pi^{\mu\nu}\}\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\mu}-C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\gamma_{\rho\nu}\frac{1}{2}\left[\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau+\delta^\mu_\tau\delta^\nu_\sigma\right]\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\mu}-C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\nu}\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\mu}-C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\right]+\frac{1}{2}\gamma_{\rho\nu}\delta^\mu_\tau\delta^\nu_\sigma\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\mu}-C^\rho_{\alpha\mu}C^\sigma_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\rho_{\mu\alpha}C^\mu_{\beta\gamma}-C^\mu_{\alpha\gamma}C^\rho_{\mu\beta}\right]+\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma}\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\tau}-C^\rho_{\alpha\tau}C^\sigma_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[-C^\rho_{\mu\beta}C^\mu_{\gamma\alpha}-C^\rho_{\mu\gamma}C^\mu_{\alpha\beta}-C^\mu_{\alpha\gamma}C^\rho_{\mu\beta}\right]+\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma}\Pi^{\gamma\tau}\left[C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\tau}-C^\sigma_{\alpha\gamma}C^\rho_{\beta\tau}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[-C^\rho_{\mu\gamma}C^\mu_{\alpha\beta}\right]=-\frac{1}{2}C^\mu_{\alpha\beta}\mathrm{H}_\mu$$
$$\{\mathrm{H}_\alpha,\mathrm{H}_\beta\}=-\frac{1}{2}C^\mu_{\alpha\beta}\mathrm{H}_\mu$$

και αφού $H_\mu\approx 0$ θα είναι και $\{\mathrm{H}_a,\mathrm{H}_\beta\}\approx 0$
για την δεύτερη τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα αλλά αρκετά σαφή:

$$\{H_a,H_0\}=\left\{H_a,\left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+\sqrt{\gamma}R\right)\right\}=$$
$$\left\{H_a,\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\right\}+\{H_a,\sqrt{\gamma}R\}=$$
$$\frac{1}{2}\{H_a,G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}+\{H_a,\sqrt{\gamma}\}R+\sqrt{\gamma}\{H_a,R\}$$

από τον όρο $\frac{1}{2}\{H_a,G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}$ έχουμε την συνεισφορά

$$\frac{1}{2}\{H_a,G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}=\left\{H_a,\frac{1}{2}\gamma^{-1/2}(\gamma_{\kappa\mu}\gamma_{\lambda\nu}+\gamma_{\kappa\nu}\gamma_{\lambda\mu}-\gamma_{\kappa\lambda}\gamma_{\mu\nu})\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\right\}=$$
$$\frac{1}{2}\{H_a,\gamma^{-1/2}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}=\frac{1}{2}\gamma^{-1/2}\{H_a,F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}+\frac{1}{2}\{H_a,\gamma^{-1/2}\}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

όπου $F_{\kappa\lambda\mu\nu}=\gamma_{\kappa\mu}\gamma_{\lambda\nu}+\gamma_{\kappa\nu}\gamma_{\lambda\mu}-\gamma_{\kappa\lambda}\gamma_{\mu\nu}$

είναι:

$$\{\mathrm{H}_\alpha,F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}=\{\mathrm{H}_\alpha,(\gamma_{\kappa\mu}\gamma_{\lambda\nu}+\gamma_{\kappa\nu}\gamma_{\lambda\mu}-\gamma_{\kappa\lambda}\gamma_{\mu\nu})\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}=$$
$$\{\mathrm{H}_\alpha,(2\Pi_{\kappa\lambda}\Pi^{\kappa\lambda}-\Pi^2)\}=2\Pi_{\kappa\lambda}\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi^{\kappa\lambda}\}+2\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi_{\kappa\lambda}\}\Pi^{\kappa\lambda}-\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi^2\}$$

για τους δύο πρώτους όρους έχουμε:

$$\Pi_{\kappa\lambda}\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi^{\kappa\lambda}\}+\Pi^{\kappa\lambda}\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi_{\kappa\lambda}\}=$$
$$C^\sigma_{\alpha\rho}\Pi_{\kappa\lambda}\Pi^{\varepsilon\rho}\{\gamma_{\sigma\varepsilon},\Pi^{\kappa\lambda}\}+C^\sigma_{\alpha\rho}\Pi^{\kappa\lambda}\Pi^{\varepsilon\rho}\{\gamma_{\sigma\varepsilon},\Pi_{\kappa\lambda}\}=$$
$$C^\lambda_{\alpha\rho}\Pi_{\kappa\lambda}\Pi^{\kappa\rho}-C^\lambda_{\alpha\rho}\Pi_{\kappa\lambda}\Pi^{\kappa\rho}=0$$

και ο τρίτος όρος

$$\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi^2\}=2\Pi\{\mathrm{H}_\alpha,\Pi\}=2\Pi\{C^\sigma_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\varepsilon\rho},\gamma_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\}=$$
$$2C^\sigma_{\alpha\rho}\Pi\left[\gamma_{\sigma\varepsilon}\{\Pi^{\varepsilon\rho},\gamma_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\}+\Pi^{\varepsilon\rho}\{\gamma_{\sigma\varepsilon},\gamma_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\}\right]=$$
$$2C^\sigma_{\alpha\rho}\Pi\left[\gamma_{\sigma\varepsilon}\{\Pi^{\varepsilon\rho},\gamma_{\mu\nu}\}\Pi^{\mu\nu}+\Pi^{\varepsilon\rho}\gamma_{\mu\nu}\{\gamma_{\sigma\varepsilon},\Pi^{\mu\nu}\}\right]=$$
$$2C^\sigma_{\alpha\rho}\Pi\left[-\gamma_{\sigma\varepsilon}\left(\delta^\varepsilon_\mu\delta^\rho_\nu+\delta^\varepsilon_\nu\delta^\rho_\mu\right)\Pi^{\mu\nu}+\Pi^{\varepsilon\rho}\gamma_{\mu\nu}\left(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\varepsilon+\delta^\mu_\varepsilon\delta^\nu_\sigma\right)\right]=$$
$$2C^\sigma_{\alpha\rho}\Pi\left[-\gamma_{\sigma\mu}\Pi^{\mu\rho}-\gamma_{\sigma\nu}\Pi^{\rho\nu}+\Pi^{\nu\rho}\gamma_{\sigma\nu}+\Pi^{\varepsilon\rho}\gamma_{\varepsilon\sigma}\right]=0$$

επομένως καταλήγουμε στο $\{\mathrm{H}_\alpha,F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}=0$ οπότε

$$\{H_a,G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\}=\left\{H_a,\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\Rightarrow$$

$$\{\mathrm{H}_\alpha,\mathrm{H}_0\}=\frac{1}{2}\left\{H_a,\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+\{H_a,\sqrt{\gamma}\}R+\sqrt{\gamma}\{H_a,R\}$$

για το Ricci Scalar έχουμε την έκφραση:

$$R=C^\beta_{\lambda\mu}C^\gamma_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}+2\gamma^{\beta\nu}C^\gamma_{\beta\delta}C^\delta_{\nu\gamma}+4\gamma^{\nu\lambda}C^\mu_{\mu\nu}C^\beta_{\beta\lambda}-4C^\gamma_{\gamma\mu,q}\sigma^q_\nu\gamma^{\mu\nu}$$

και επειδή τα C είναι σταθερά ο τελευταίως όρος μηδενίζεται:

$$R=C^\beta_{\lambda\mu}C^\gamma_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}+2\gamma^{\beta\nu}C^\gamma_{\beta\delta}C^\delta_{\nu\gamma}+4\gamma^{\nu\lambda}C^\mu_{\mu\nu}C^\beta_{\beta\lambda}$$

επομένως μένει να υπολογίσουμε το

$$\{H_a,R\}=\{H_a,C^\beta_{\lambda\mu}C^\gamma_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}+2\gamma^{\beta\nu}C^\gamma_{\beta\delta}C^\delta_{\nu\gamma}+4\gamma^{\nu\lambda}C^\mu_{\mu\nu}C^\beta_{\beta\lambda}\}=$$
$$\{H_a,C^\beta_{\lambda\mu}C^\gamma_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\}+\{H_a,2\gamma^{\beta\nu}C^\gamma_{\beta\delta}C^\delta_{\nu\gamma}\}+\{H_a,4\gamma^{\nu\lambda}C^\mu_{\mu\nu}C^\beta_{\beta\lambda}\}$$

Ο πρώτος όρος δίνει

$$
\begin{aligned}
&\left\{H_a, C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\}= \\
&\left\{C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\rho\varepsilon}, C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\}= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\}= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left[\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}+\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\lambda\theta}\right\}+\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\right\}\right]= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}+C^{\beta}_{\mu\lambda}C^{\gamma}_{\tau\theta}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\} \\
&+C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\right\}= \\
&2C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}+C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\right\}= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left(\gamma^{\rho\mu}\gamma^{\varepsilon\tau}+\gamma^{\rho\tau}\gamma^{\varepsilon\mu}\right) \\
&-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\varepsilon}_{\gamma}+\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\varepsilon}_{\beta}\right)= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\delta^{\tau}_{\sigma}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\tau} \\
&-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\varepsilon}_{\gamma}-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\varepsilon}_{\beta}= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\beta}_{\lambda\sigma}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\tau} \\
&-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\gamma}\gamma_{\sigma\beta}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}= \\
&C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu} \\
&-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}-\frac{1}{2}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}= \\
&2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau} \\
&2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+\left(C^{\beta}_{\mu\alpha}C^{\sigma}_{\lambda\beta}+C^{\beta}_{\alpha\lambda}C^{\sigma}_{\mu\beta}\right)C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau} \\
&2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\beta}_{\mu\alpha}C^{\sigma}_{\lambda\beta}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}+C^{\beta}_{\alpha\lambda}C^{\sigma}_{\mu\beta}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau} \\
&2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\beta}_{\mu\alpha}C^{\sigma}_{\lambda\beta}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}+C^{\beta}_{\alpha\mu}C^{\sigma}_{\lambda\beta}C^{\gamma}_{\tau\theta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\mu\tau}\gamma^{\lambda\theta} \\
&2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+2C^{\beta}_{\mu\alpha}C^{\sigma}_{\lambda\beta}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau} \\
&2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+2C^{\sigma}_{\rho\alpha}C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}=0
\end{aligned}
$$

ο δεύτερος όρος είναι

$$
\begin{aligned}
&\left\{H_a, 2\gamma^{\beta\nu} C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma}\right\} = \\
&\left\{C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\rho\varepsilon}, 2\gamma^{\beta\nu} C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma}\right\} = \\
&2C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\beta\nu}\right\} = \\
&C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left(\gamma^{\rho\beta}\gamma^{\varepsilon\nu} + \gamma^{\rho\nu}\gamma^{\varepsilon\beta}\right) = \\
&C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\left(\gamma^{\rho\beta}\delta^{\nu}_{\sigma} + \delta^{\beta}_{\sigma}\gamma^{\rho\nu}\right) = \\
&C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma^{\rho\beta} + C^{\gamma}_{\sigma\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma^{\rho\nu} = \\
&C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma^{\rho\beta} + C^{\delta}_{\sigma\gamma} C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma^{\rho\beta} = \\
&2C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma^{\rho\beta}
\end{aligned}
$$

όμως

$$
\begin{aligned}
&C^{\delta}_{\sigma\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho} + C^{\delta}_{\sigma\alpha} C^{\sigma}_{\rho\gamma} + C^{\delta}_{\sigma\rho} C^{\sigma}_{\gamma\alpha} = 0 \Leftrightarrow \\
&C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma^{\rho\beta} = -C^{\gamma}_{\beta\delta}\left(C^{\delta}_{\sigma\alpha} C^{\sigma}_{\rho\gamma} + C^{\delta}_{\sigma\rho} C^{\sigma}_{\gamma\alpha}\right)\gamma^{\rho\beta} = \\
&-C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\alpha} C^{\sigma}_{\rho\gamma}\gamma^{\rho\beta} - C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\rho} C^{\sigma}_{\gamma\alpha}\gamma^{\rho\beta} = \\
&-C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\sigma\alpha} C^{\sigma}_{\rho\gamma}\gamma^{\rho\beta} - C^{\sigma}_{\rho\gamma} C^{\gamma}_{\delta\beta} C^{\delta}_{\sigma\alpha}\gamma^{\rho\beta} = 0 \Leftrightarrow \\
&\left\{H_a, 2\gamma^{\beta\nu} C^{\gamma}_{\beta\delta} C^{\delta}_{\nu\gamma}\right\} = 0
\end{aligned}
$$

ο τελευταίος όρος είναι

$$
\begin{aligned}
&\left\{H_a, 4\gamma^{\nu\lambda} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda}\right\} = \\
&4C^{\sigma}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\nu\lambda}\right\} = \\
&2C^{\sigma}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left(\gamma^{\rho\nu}\gamma^{\varepsilon\lambda} + \gamma^{\rho\lambda}\gamma^{\nu\varepsilon}\right) = \\
&2\gamma^{\rho\nu}\delta^{\lambda}_{\sigma} C^{\sigma}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda} + 2\delta^{\nu}_{\sigma}\gamma^{\rho\lambda} C^{\sigma}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda} \\
&2\gamma^{\rho\nu} C^{\lambda}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda} + 2\gamma^{\rho\lambda} C^{\nu}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda} = \\
&4\gamma^{\rho\nu} C^{\lambda}_{\alpha\rho} C^{\mu}_{\mu\nu} C^{\beta}_{\beta\lambda} = 0
\end{aligned}
$$

Συνοψίζοντας έχουμε $\left\{H_a, R\right\} = 0$

$$\{H_\alpha, H_0\} = \frac{1}{2}\left\{H_a, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + \{H_a, \sqrt{\gamma}\}R =$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}\{H_a, \gamma\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\{H_a, \gamma\}R =$$

$$\left(-\frac{1}{2\gamma}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}R\right)\frac{1}{2}\{H_a, \gamma\} =$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\{C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma\} =$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma\} =$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} - R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}C^{\sigma}_{\alpha\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma\gamma^{\rho\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\{H_\alpha, H_0\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} - \sqrt{\gamma}R\right)C^{\sigma}_{\alpha\sigma} \qquad (5.6)$$

Για τα Bianchi types class A όπου $C^{\tau}_{\tau\rho} = 0$ ο αλγόριθμος του Dirac τερματίζεται ενώ για $C^{\tau}_{\tau\rho} \neq 0$ προκύπτει ένας ακόμα σύνδεσμος

$$X_4 = \frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} - \sqrt{\gamma}R \approx 0 \qquad (5.7)$$

όμως
$$H_0 = \frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + \sqrt{\gamma}R \approx 0$$

και επομένως $X_5 = G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} \approx 0$ και $X_6 = \sqrt{\gamma}R \approx 0$

Η ύπαρξη αυτού του συνδέσμου υπονοεί ότι δεν είναι έγκυρη η παραπάνω Hamiltonian για τα Class B πρότυπα Bianchi μιας και οι 4 σύνδέσμοι $H_a \approx 0, H_\perp \approx 0$ και οι 6 Hamilton-Jacobi εξισώσεις, εξαντλούν τις 10 εξισώσεις του Einstein και αφήνουν τον σύνδεσμο αυτό χωρίς αντίστοιχη εξίσωση.
Επιπλέον η ο σύνδεσμος X_6 που προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των X_4, H_0 οδηγεί σε ασυνέπεια αφού υπονοεί πως $R = 0$ αλλά για κανένα πρότυπο Bianchi Class B δεν μπορούμε να βρούμε $R = 0$.

Έστω τώρα η ποσότητα:

$$I_{(J)} = \lambda^{\rho}_{(J)\sigma}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\sigma\tau} \tag{5.8}$$

οι πίνακες $\lambda^{\rho}_{(I)\sigma} = \left(C^{\rho}_{\alpha\sigma}, \varepsilon^{\rho}_{(I)\alpha}\right)$ είναι οι γεννήτορες των εσωτερικών και εξωτερικών αυτομορφισμών και βέβαια το $I_a = C^{\rho}_{\alpha\sigma}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\sigma\tau}$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι σύνδεσμοι $H_a \approx 0$.

Θα υπολογίσουμε τώρα την χρονική εξέλιξη της ποσότητας (5.8)

$$\begin{aligned}
&\dot{I} = \{I, H_p\} = \\
&\{I, H_c\} + \mu\{I, P_0\} + \mu^{\alpha}\{I, P_{\alpha}\} = \\
&\{I, H_c\} = \{I, NH_0 + 4N^a H_a\} = \\
&\dot{I} = N\{I, H_0\} + 4N^a\{I, H_a\}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\{I, H_0\} = \left\{I, \left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + \sqrt{\gamma}R\right)\right\} =$$

$$\left\{I, \frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\right\} + \left\{I, \sqrt{\gamma}R\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{I, G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\right\} + \left\{I, \sqrt{\gamma}\right\}R + \sqrt{\gamma}\{I, R\} =$$

ομοίως με τον υπολογισμό $\left\{H_a, G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\right\}$ έχουμε

$$\left\{I, G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}\right\} = \left\{I, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}$$

όπου $F_{\kappa\lambda\mu\nu} = \gamma_{\kappa\mu}\gamma_{\lambda\nu} + \gamma_{\kappa\nu}\gamma_{\lambda\mu} - \gamma_{\kappa\lambda}\gamma_{\mu\nu}$

ομοίως με το $\{H_a, R\}$ έχουμε

επομένως μένει να υπολογίσουμε το

$$\{I, R\} = \left\{I, C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau} + 2\gamma^{\beta\nu}C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma} + 4\gamma^{\nu\lambda}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}\right\}$$

$$\left\{I, C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\} + \left\{I, 2\gamma^{\beta\nu}C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\right\} + \left\{I, 4\gamma^{\nu\lambda}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}\right\}$$

Ο πρώτος όρος δίνει

$$\left\{I, C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\}=$$

$$\left\{\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\rho\varepsilon}, C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\}=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\right\}=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left[\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}+\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\lambda\theta}\right\}+\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\right\}\right]=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}+C^{\beta}_{\mu\lambda}C^{\gamma}_{\tau\theta}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}$$

$$+C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\right\}=$$

$$2C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma^{\mu\tau}\right\}+C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon}, \gamma_{\beta\gamma}\right\}=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\left(\gamma^{\rho\mu}\gamma^{\varepsilon\tau}+\gamma^{\rho\tau}\gamma^{\varepsilon\mu}\right)$$

$$-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\varepsilon}_{\gamma}+\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\varepsilon}_{\beta}\right)=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\tau}$$

$$-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\varepsilon}_{\gamma}-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}\frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\varepsilon}_{\beta}=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\sigma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\beta}_{\lambda\sigma}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\tau}$$

$$-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\gamma}\gamma_{\sigma\beta}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}=$$

$$C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\sigma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}+C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}$$

$$-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}-\frac{1}{2}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}=$$

$$-\frac{1}{2}C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}-\frac{1}{2}C^{\gamma}_{\theta\tau}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}=$$

$$2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}-C^{\beta}_{\lambda\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\lambda^{\sigma}_{\beta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}=$$

$$2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}-\left(\lambda^{\beta}_{\lambda}C^{\sigma}_{\beta\mu}+\lambda^{\beta}_{\mu}C^{\sigma}_{\lambda\beta}\right)C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}=$$

$$2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}-\lambda^{\beta}_{\lambda}C^{\sigma}_{\beta\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}-\lambda^{\beta}_{\lambda}C^{\sigma}_{\mu\beta}C^{\gamma}_{\tau\theta}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\mu\tau}\gamma^{\lambda\theta}=$$

$$2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}-2\lambda^{\beta}_{\lambda}C^{\sigma}_{\beta\mu}C^{\gamma}_{\theta\tau}\gamma_{\sigma\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\mu\tau}=$$

$$2C^{\gamma}_{\theta\sigma}C^{\beta}_{\lambda\mu}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\lambda\theta}\gamma^{\rho\mu}-2\lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\gamma}_{\sigma\theta}C^{\beta}_{\mu\lambda}\gamma_{\beta\gamma}\gamma^{\rho\mu}\gamma^{\theta\lambda}=0$$

ο δεύτερος όρος είναι

$$
\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{I},2\gamma^{\beta\nu}C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\right\}=\\
&\left\{\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\rho\varepsilon},2\gamma^{\beta\nu}C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\right\}=\\
&2C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon},\gamma^{\beta\nu}\right\}=\\
&C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left(\gamma^{\rho\beta}\gamma^{\varepsilon\nu}+\gamma^{\rho\nu}\gamma^{\varepsilon\beta}\right)=\\
&C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\left(\gamma^{\rho\beta}\delta^{\nu}_{\sigma}+\delta^{\beta}_{\sigma}\gamma^{\rho\nu}\right)=\\
&C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\sigma\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma^{\rho\beta}+C^{\gamma}_{\sigma\delta}C^{\delta}_{\nu\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma^{\rho\nu}=\\
&C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\sigma\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma^{\rho\beta}+C^{\delta}_{\sigma\gamma}C^{\gamma}_{\beta\delta}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma^{\rho\beta}=\\
&2C^{\gamma}_{\beta\delta}C^{\delta}_{\sigma\gamma}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma^{\rho\beta}=\\
&2C^{\gamma}_{\beta\delta}\left(\lambda^{\delta}_{\sigma}C^{\sigma}_{\rho\gamma}-\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\delta}_{\rho\sigma}\right)\gamma^{\rho\beta}=\\
&2C^{\gamma}_{\beta\delta}\lambda^{\delta}_{\sigma}C^{\sigma}_{\rho\gamma}\gamma^{\rho\beta}-2C^{\sigma}_{\rho\gamma}\lambda^{\delta}_{\sigma}C^{\gamma}_{\beta\delta}\gamma^{\rho\beta}=0
\end{aligned}
$$

ο τελευταίος όρος είναι

$$
\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{I},4\gamma^{\nu\lambda}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}\right\}=\\
&4\lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left\{\Pi^{\rho\varepsilon},\gamma^{\nu\lambda}\right\}=\\
&2\lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}\gamma_{\sigma\varepsilon}\left(\gamma^{\rho\nu}\gamma^{\varepsilon\lambda}+\gamma^{\rho\lambda}\gamma^{\nu\varepsilon}\right)=\\
&2\gamma^{\rho\nu}\delta^{\lambda}_{\sigma}\lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}+2\delta^{\nu}_{\sigma}\gamma^{\rho\lambda}\lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\lambda}\\
&4\gamma^{\rho\nu}\lambda^{\sigma}_{\rho}C^{\mu}_{\mu\nu}C^{\beta}_{\beta\sigma}=0
\end{aligned}
$$

αφού από τον ορισμό των λ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{\beta}_{\sigma}C^{\sigma}_{\rho\beta}=C^{\beta}_{\sigma\beta}\lambda^{\sigma}_{\rho}+C^{\beta}_{\rho\sigma}\lambda^{\sigma}_{\beta}\Leftrightarrow\\
&C^{\beta}_{\beta\sigma}\lambda^{\sigma}_{\rho}=C^{\beta}_{\rho\sigma}\lambda^{\sigma}_{\beta}-\lambda^{\beta}_{\sigma}C^{\sigma}_{\rho\beta}\Leftrightarrow\\
&C^{\beta}_{\beta\sigma}\lambda^{\sigma}_{\rho}=C^{\beta}_{\rho\sigma}\lambda^{\sigma}_{\beta}-\lambda^{\sigma}_{\beta}C^{\beta}_{\rho\sigma}=0
\end{aligned}
$$

Συνοψίζοντας έχουμε $\{\mathrm{I},R\}=0$

Άρα από την Poisson Bracket $\{I,H_0\}$ μένει

$$\{I,H_0\}=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{I},\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+\{\mathrm{I},\sqrt{\gamma}\}R=$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}\{\mathrm{I},\gamma\}F_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\{\mathrm{I},\gamma\}R=$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\{\mathrm{I},\gamma\}=$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\{\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\Pi^{\rho\varepsilon},\gamma\}=$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}+R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\{\Pi^{\rho\varepsilon},\gamma\}=$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}-R\right)\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\lambda^{\sigma}_{\rho}\gamma_{\sigma\varepsilon}\gamma\gamma^{\rho\varepsilon}\Leftrightarrow$$

$$\{I,H_0\}=\frac{1}{2}N\left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}-\sqrt{\gamma}R\right)\lambda^{\sigma}_{\sigma} \tag{5.10}$$

για class B ($\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda}-\sqrt{\gamma}R=0$) και για Class A όταν οι γεννήτορες είναι traceless η παραπάνω ποσότητα μηδενίζεται δηλαδή:

$$\{I,H_0\}=0 \quad \text{όταν trace}(\lambda)=0$$

Θα υπολογίσω τώρα και το $\{I,H_\beta\}$

$$\{I,H_\beta\}=\{\lambda^{\rho}_{\mu}\gamma_{\rho\nu}\Pi^{\mu\nu},C^{\sigma}_{\beta\gamma}\gamma_{\sigma\tau}\Pi^{\gamma\tau}\}=$$
$$\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\{\gamma_{\rho\nu}\Pi^{\mu\nu},\gamma_{\sigma\tau}\Pi^{\gamma\tau}\}=\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\left[\gamma_{\rho\nu}\{\Pi^{\mu\nu},\gamma_{\sigma\tau}\}\Pi^{\gamma\tau}+\gamma_{\sigma\tau}\{\gamma_{\rho\nu},\Pi^{\gamma\tau}\}\Pi^{\mu\nu}\right]=$$
$$-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\gamma_{\rho\nu}\{\gamma_{\sigma\tau},\Pi^{\mu\nu}\}\Pi^{\gamma\tau}+\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\mu}\gamma_{\rho\nu}\{\gamma_{\sigma\tau},\Pi^{\mu\nu}\}\Pi^{\gamma\tau}=$$
$$\gamma_{\rho\nu}\{\gamma_{\sigma\tau},\Pi^{\mu\nu}\}\Pi^{\gamma\tau}\left[\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\mu}-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\gamma_{\rho\nu}\frac{1}{2}\left[\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\nu}_{\tau}+\delta^{\mu}_{\tau}\delta^{\nu}_{\sigma}\right]\Pi^{\gamma\tau}\left[\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\mu}-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\nu}\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\nu}_{\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\mu}-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\right]+\frac{1}{2}\gamma_{\rho\nu}\delta^{\mu}_{\tau}\delta^{\nu}_{\sigma}\Pi^{\gamma\tau}\left[\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\mu}-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\mu}_{\beta\gamma}-\lambda^{\mu}_{\gamma}C^{\rho}_{\mu\beta}\right]+\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma}\Pi^{\gamma\tau}\left[\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\tau}-\lambda^{\rho}_{\tau}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\mu}_{\beta\gamma}-\lambda^{\mu}_{\gamma}C^{\rho}_{\mu\beta}\right]+\frac{1}{2}\gamma_{\rho\sigma}\Pi^{\gamma\tau}\left[\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\tau}-\lambda^{\sigma}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\tau}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[-\lambda^{\rho}_{\mu}C^{\mu}_{\beta\gamma}-\lambda^{\mu}_{\gamma}C^{\rho}_{\mu\beta}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\left[-\lambda^{\mu}_{\beta}C^{\rho}_{\mu\gamma}-\lambda^{\mu}_{\gamma}C^{\rho}_{\beta\mu}-\lambda^{\mu}_{\gamma}C^{\rho}_{\mu\beta}\right]=\frac{1}{2}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\gamma\tau}\lambda^{\mu}_{\beta}C^{\rho}_{\gamma\mu}=-\frac{1}{2}\lambda^{\mu}_{\beta}H_{\mu}=0$$

γιατί $\mathrm{H}_{\alpha} \approx 0$ και μετά τον υπολογισμό των αγκύλων Poisson μπορούμε να θέσουμε $\mathrm{H}_{\alpha} = 0$.

$$\dot{I} = \{I, H_p\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} - \sqrt{\gamma}R\right)\lambda^{\sigma}_{\sigma} - 2\lambda^{\mu}_{\beta}H_{\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} - \sqrt{\gamma}R\right)\lambda^{\sigma}_{\sigma}$$

άρα η ποσότητα I είναι σταθερά για όλα τα Bianchi type class B και για τα Class A στις περιπτώσεις που οι γεννήτορες λ είναι άηχνοι.

6. ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

Στην κβάντωση κατά Kuchar & Hajicek Θα πρέπει να αναβαθμίσουμε τα $\gamma_{\alpha\beta}, \Pi^{\mu\nu}$ σε τελεστές. Θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Schrödinger δηλαδή θα έχουμε

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \qquad (6.1)$$

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \qquad (6.2)$$

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $I_{(J)}$ (5.8) περιέχουν τους γραμμικούς συνδέσμους $H_a (\approx 0)$ και ανάλογα με το πρότυπο Bianchi που συζητάμε μπορεί να περιέχουν και ολοκληρώματα της κίνησης $E_{(J)} = \varepsilon^{\sigma}_{(J)\rho} \gamma_{\sigma\tau} \Pi^{\rho\tau}$ που αντιστοιχούν σε εξωτερικούς αυτομορφισμούς. Αν κάνουμε την αντικατάσταση (6.2) στο άκρο δεξιά των (5.8) παίρνουμε τους γεννήτορες όλων των αυτομορφισμών (2.21). Επειδή θέλουμε η κβαντική θεωρία που θα κατασκευάσουμε να είναι αναλλοίωτη κάτω από όλους τους αυτομορφισμούς (μιας και αυτοί γεννούνται από χωρικές αμφιδιαφορίσεις), πρέπει να θεωρήσουμε όλους τους αντίστοιχους τελεστές να έχουν μηδενική δράση επί της κυματοσυνάρτησης, παρ' όλο που μόνο οι σύνδεσμοι H_a είναι ασθενώς μηδέν, ενώ για τις ποσότητες $E_{(J)}$ έχουμε $E_{(J)} \approx K_{(J)}$.

Επομένως επιλέγουμε τις εξής γραμμικές συνθήκες-τελεστές για την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\gamma_{\alpha\beta}, C^{\rho}_{\sigma\tau})$

$$\hat{H}_a \Psi \equiv C^{\sigma}_{\alpha\rho} \gamma_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\rho\tau}} \Psi = 0 \quad \text{και} \quad \hat{E}_{(J)} \Psi \equiv \varepsilon^{\sigma}_{(J)\rho} \gamma_{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\rho\tau}} \Psi = 0 \qquad (6.3)$$

Η τελική μορφή της γενικής λύσεως των (6.3) για όλα τα πρότυπα Bianchi είναι $\Psi(\gamma_{\alpha\beta}, C^{\rho}_{\sigma\tau}) = \Psi(q^1, q^2, q^3)$ με

$$q^1 = \frac{m^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma}} \quad q^2 = \frac{(m^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta})^2}{2\gamma} - \frac{1}{4} C^{\alpha}_{\mu\kappa} C^{\beta}_{\nu\lambda} \gamma_{\alpha\beta} \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\kappa\lambda} \quad q^3 = \frac{\det(m^{\alpha\beta})}{\sqrt{\gamma}}$$

Για τον τετραγωνικό σύνδεσμο-τελεστή (αντίστοιχο του (5.2)) έχουμε

$$\hat{H}_0 \Psi \equiv \left(-\hbar^2 \nabla_h^2 + kR + V\right)\Psi = 0 \qquad (6.4)$$

όπου ∇_h^2 η conformal Laplacian που αντιστοιχεί στην επαγόμενη μετρική

$$h^{ij} = G_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial q^i}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \frac{\partial q^j}{\partial \gamma_{\mu\nu}}$$

και R το αντίστοιχο Ricci Scalar.

Οι φυσικές καταστάσεις του συστήματος θα είναι οι κοινές λύσεις των εξισώσεων (6.3) και της Wheeler DeWitt εξίσωσης (6.4)

Οι γενικές λύσεις για την (6.4) έχουν βρεθεί για τα Class A I,II,VI,VII και το Class B V. [8],[9],[10],[11]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ BIANCHI TYPE III

1. ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Από τη σχέση (2.4β) του προηγούμενου κεφαλαίου διαβάζουμε το γενικότερο στοιχείο γραμμής που μπορούμε να γράψουμε

$$ds^2 = \left(M^a(t)M_a(t) + \varepsilon M^2(t)\right)dt^2 + 2M_a(t)\sigma_i^\alpha(x)dx^i dt + \gamma_{\alpha\beta}\sigma_i^\alpha(x)\sigma_j^\beta(x)dx^i dx^j \quad (1.1)$$

θέτοντας την συνάρτηση μετατόπισης (Shift) μηδέν $\left(M_a = 0\right)$ καταλήγουμε στο

$$ds^2 = -M^2(t)dt^2 + \sigma_i^\alpha(x)\gamma_{\alpha\beta}\sigma_j^\beta(x)dx^i dx^j \quad (1.2)$$

για την κοσμολογία τύπου Bianchi type III μπορούμε να δούμε τον πίνακα (Π1) του κεφαλαίου 2. Συγκεκριμένα έχουμε:

Type III $C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1$ τα υπόλοιπα $C_{jk}^i = 0$			
$\xi_1 = \partial_2$	$x_1 = e^{x^1}\partial_2$	$\omega^1 = e^{-x^1}dx^2$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2$
$\xi_2 = \partial_3$	$x_2 = \partial_3$	$\omega^2 = dx^3$	$d\omega^2 = 0$
$\xi_3 = \partial_1 + x^2\partial_2$	$x_3 = \partial_1$	$\omega^3 = dx^1$	$d\omega^3 = 0$

Από όπου διαβάζουμε τον πίνακα

$$\sigma_i^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

που υπεισέρχεται στο στοιχείο γραμμής (1.1)
Από τον πίνακα αυτό βλέπουμε ότι η κοσμολογία Bianchi προτύπου III είναι Class B πρότυπο, αφού $C_{\tau\rho}^\tau \neq 0$. Εν γένει, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στα Class B πρότυπα δεν υπάρχει έγκυρη Hamiltonian. Θα δούμε όμως τώρα ένα παράδειγμα για το οποίο μπορούμε να γράψουμε μια Χαμιλτονιανή που να δίνει κλειστή άλγεβρα για τον αλγόριθμο Dirac-Bergmann.
Θα κάνουμε για το λόγο αυτό την παραδοχή συμμετρίας σε στροφές γύρω από τον 3^o άξονα και για το λόγο αυτό επιλέγουμε τους παράγοντες κλίμακας ώστε να είναι ο πίνακας $\gamma_{\alpha\beta}$ διαγώνιος και μάλιστα τον γράφουμε στην μορφή

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Για να υπολογίσουμε την μετρική υπολογίζουμε πρώτα το

$$\sigma^{\mathrm{T}}\gamma\sigma = \begin{pmatrix} a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t)e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & b^2(t) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

επομένως η μετρική μας είναι

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mathrm{M}^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2(t) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

επομένως το στοιχείο γραμμής είναι

$$d^2s = -M^2(t)d^2t + a^2(t)d^2x + e^{-2x}a^2(t)d^2y + b^2(t)d^2z \tag{1.7}$$

ακολουθώντας την διαδικασία που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο υπολογίζουμε την Lagrangian $L = \sqrt{-{}^{(4)}g}\,{}^{(4)}R$. Για να μην έχουμε δευτέρας τάξης παραγώγους μπορούμε να αφαιρέσουμε από την Lagrangian έναν όρο $2f^{\mu}{}_{;\mu}$ ο οποίος ούτος η άλλως έχει μηδενικό ολοκλήρωμα όπου: $f^{\mu} = \eta^{\nu}{}_{;\nu}\eta^{\mu} - \eta^{\mu}{}_{;\nu}\eta^{\nu}$ και

$$\eta^{\mu} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Μετά την αφαίρεση αυτού του όρου η Lagrangian που καταλήγουμε είναι:

$$L = -2b(t)M(t) - \frac{2b(t)\dot{a}^2(t)}{M(t)} - \frac{4a(t)\dot{a}(t)\dot{b}(t)}{M(t)} \tag{1.8}$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Dirac πρέπει να ορίσουμε την Hamiltonian του προβλήματος και για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τώρα τις γενικευμένες ορμές:

$$P_{\mathrm{M}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{M}} = 0 \text{ (Primary Constraints)} \tag{1.9}$$

$$\Pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{4b(t)\dot{a}(t)}{M(t)} - \frac{4a(t)\dot{b}(t)}{M(t)} \tag{1.10}$$

$$\Pi_b = \frac{\partial L}{\partial \dot{b}} = -\frac{4a(t)\dot{a}(t)}{M(t)} \tag{1.11}$$

λύνοντας τις σχέσεις (1.10) και (1.11) ως προς τις ταχύτητες παίρνουμε

$$\dot{a}(t) = -\frac{M(t)\Pi_b(t)}{4a(t)} \tag{1.12}$$

$$\dot{b}(t) = -\frac{a(t)M(t)\Pi_a(t) - b(t)M(t)\Pi_b(t)}{4a^2(t)} \tag{1.13}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε εύκολα την κανονική Hamiltonian ως:

$$H_c = \dot{a}(t)\Pi_a(t) + \dot{b}(t)\Pi_b(t) - L$$

$$H_c = 2b(t)M(t) - \frac{M(t)\Pi_a(t)\Pi_b(t)}{4a(t)} + \frac{b(t)M(t)\Pi_b{}^2(t)}{8a^2(t)} \tag{1.14}$$

ο σύνδεσμος που έχουμε είναι ο:

$$X = 2b(t) - \frac{\Pi_a(t)\Pi_b(t)}{4a(t)} + \frac{b(t)\Pi_b{}^2(t)}{8a^2(t)} \tag{1.15}$$

από τη διατήρηση του συνδέσμου (1.15) έχουμε:

$$\dot{X} = \{X, H_c\} = \{M(t)H_c, H_c\} = 0 \tag{1.16}$$

το οποίο είναι αληθές και δεν παράγει περαιτέρω δευτερογενείς συνδέσμους και επομένως ο αλγόριθμος του Dirac τερματίζεται.

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ WHEELER DEWITT

Εφόσον έχουμε αναπτύξει τον κατά Χάμιλτον φορμαλισμό του προβλήματός μας είμαστε σε θέση να εξετάσουμε την Κβάντωσή του σύμφωνα με την πρόταση του Dirac.
Έχουμε την Χαμιλτονιανή (1.14) και τον σύνδεσμο (1.15). Η Χαμιλτονιανή στη γενική περίπτωση μπορεί να γραφεί $H = M(t)X + M^i(t)x_i$.Προφανώς ισχύει

$$H = M(t)X \tag{2.1}$$

Στη συνέχεια πρέπει να αναβαθμίσουμε τον σύνδεσμο X σε τελεστή $\hat{X}$ ενώ έχοντας επιλέξει τη συνάρτηση μετατόπισης μηδέν η επιλογή των τελεστών $\hat{x}_i = 0$ είναι τετριμμένη.
Θα υιοθετήσουμε την αναπαράσταση Schrödinger, δηλαδή;

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \quad \text{και} \quad \hat{\Pi}^{\alpha\beta} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}$$

Για βρούμε την μορφή που πρέπει να έχει ο τελεστής $\hat{X}$, γράφουμε τον σύνδεσμο (1.15) στην μορφή:

$$X = \frac{1}{2} G^{ij} \Pi_i(t) \Pi_j(t) + 2b(t) \tag{2.2}$$

και συγκρίνοντας τις (1.15) και (2.2) διαβάζουμε την υπερμετρική:

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4a} \\ -\frac{1}{4a} & \frac{b}{4a^2} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

τώρα το κβαντικό ανάλογο του (2.2) είναι λογικό (βλέπε κεφάλαιο 1 παράγραφο 8) να επιλέξουμε τον

$$\hat{X} = -h^2 \hat{\nabla}^2 + \lambda \Re + 2b(t) \tag{2.4}$$

με $\Re$ το Ricci Scalar για την υπερμετρική (2.3) η οποία όμως περιγράφει επίπεδο χώρο δηλαδή $\Re = 0$. Επιπλέον μπορούμε κάνουμε την επιλογή h=1.
Οι κβαντικές καταστάσεις του συστήματος είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή (2.4) οι λύσεις δηλαδή της Wheeler DeWitt (W.d.W) του προβλήματός μας. Θα πρέπει δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση:

$$-\nabla^2 \Psi(a,b) + 2b\Psi(a,b) = 0 \tag{2.5}$$

Από την (2.3) εύκολα υπολογίζουμε:

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} -4b & -4a \\ -4a & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$ds^2 = -4bda^2 - 8adadb \tag{2.7}$$

Η Laplacian στον χώρο αυτό είναι:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_i \left(\sqrt{G} G^{ij} \partial_j \right) \tag{2.8}$$

Έτσι η W.d.W γίνεται

$$2b\Psi(a,b)-\frac{\frac{\partial}{\partial b}\Psi(a,b)}{8a^2}-\frac{b\frac{\partial^2}{\partial b^2}\Psi(a,b)}{8a^2}+\frac{\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\Psi(a,b)}{4a}=0 \quad (2.9)$$

Για να λυθεί παραπάνω εξίσωση κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} a &= x^{\kappa}y^{\lambda} \\ b &= x^{\mu}y^{\nu} \end{aligned} \quad (2.10)$$

κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό το στοιχείο γραμμής (2.7) γράφεται:

$$ds^2=-4x^{2\kappa+\mu}y^{2\lambda+\nu}\left(\frac{\kappa^2+2\kappa\mu}{x^2}dx^2+2\frac{\kappa\lambda+\kappa\nu+\lambda\mu}{xy}dxdy+\frac{\lambda^2+2\lambda\nu}{y^2}dy^2\right) \quad (2.11)$$

Τα κ,λ,μ,ν τα επιλέγω ώστε να μην υπάρχει διαγώνιος όρος στο νέο στοιχείο γραμμής και για να απλοποιηθεί η έκφραση επιλέγω ώστε ο ένας από τους δύο όρους $x^{2\kappa+\mu}y^{2\lambda+\nu}$ να είναι μονώνυμο δηλαδή:

$$\kappa\lambda+\kappa\nu+\lambda\mu=0 \quad (2.12)$$

$$\kappa+\mu=0 \text{ ή } \lambda+\nu=0 \quad (2.13)$$

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $\mu=-\kappa$ και $\nu=0$ οπότε

$$ds^2=4\kappa^2x^{\kappa-2}y^{2\lambda}dx^2-4\lambda^2x^{\kappa}y^{2\lambda-2}dy^2 \quad (2.14)$$

έχουμε δηλαδή την μετρική:

$$g^{ij}=\begin{pmatrix}4\kappa^2x^{\kappa-2}y^{2\lambda} & 0\\ 0 & -4\lambda^2x^{\kappa}y^{2\lambda-2}\end{pmatrix} \quad (2.15)$$

και η εξίσωση Wheeler DeWitt (2.5) γράφεται

$$2x^{-\kappa}\Psi(x,y)-\frac{x^{-2\kappa}y^{1-\lambda}\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}}{8\lambda^2}-\frac{x^{-2\kappa}y^{2-\lambda}\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2}}{8\lambda^2}+\frac{x^{1-2\kappa}y^{-2\lambda}\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}}{8\kappa^2}+\frac{x^{2-2\kappa}y^{-\lambda}\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}}{8\kappa^2}=0 \quad (2.16)$$

πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $x^{\kappa}y^{2\lambda}$ έχουμε

$$2y^{2\lambda}\Psi(x,y)+\frac{y\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}}{8\lambda^2}+\frac{y^2\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2}}{8\lambda^2}-\frac{x\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}}{8\kappa^2}-\frac{x^2\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}}{8\kappa^2}=0 \quad (2.17)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση Ψ(x,y) είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων μία συνάρτηση μόνο του x και μία μόνο του y $\Psi(x,y)=A(x)B(y)$ οι μεταβλητές χωρίζονται και παίρνω την εξίσωση:

$$-\frac{xA'(x)}{8\kappa^2A(x)}-\frac{x^2A''(x)}{8\kappa^2A(x)}+2y^{2\lambda}+\frac{yB'(y)}{8\lambda^2B(y)}+\frac{y^2B''(y)}{8\lambda^2B(y)}=0 \quad (2.17)$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$-\frac{xA'(x)}{8\kappa^2A(x)}-\frac{x^2A''(x)}{8\kappa^2A(x)}=-\omega \quad \text{και} \quad 2y^{2\lambda}+\frac{yB'(y)}{8\lambda^2B(y)}+\frac{y^2B''(y)}{8\lambda^2B(y)}=\omega \quad (2.18)$$

οι εξισώσεις (2.18) έχουν λύση την

$$A(x)=C_1Cosh\left[2\sqrt{2}\kappa\sqrt{\omega}\ln(x)\right]+iC_2Sinh\left[2\sqrt{2}\kappa\sqrt{\omega}\ln(x)\right] \quad (2.19)$$

$$B(y)=J_{-2\sqrt{2}\sqrt{\omega}}\left(4\sqrt{y^{2\lambda}}\right)C_1\Gamma\left(1-2\sqrt{2}\sqrt{\omega}\right)+J_{2\sqrt{2}\sqrt{\omega}}\left(4\sqrt{y^{2\lambda}}\right)C_2\Gamma\left(1+2\sqrt{2}\sqrt{\omega}\right) \quad (2.20)$$

Στην δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $\lambda = -\nu$ και $\mu = 0$ οπότε

$$ds^2 = -4\kappa^2 x^{2\kappa-2} y^{\lambda} dx^2 + 4\lambda^2 x^{2\kappa} y^{\lambda-2} dy^2 \tag{2.21}$$

έχουμε δηλαδή την μετρική:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -4\kappa^2 x^{2\kappa-2} y^{\lambda} & 0 \\ 0 & 4\lambda^2 x^{2\kappa} y^{\lambda-2} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

και η εξίσωση Wheeler DeWitt (2.5) γράφεται

$$2y^{-\lambda}\Psi(x,y) - \frac{x^{-2\kappa} y^{1-\lambda} \frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}}{8\lambda^2} - \frac{x^{-2\kappa} y^{2-\lambda} \frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2}}{8\lambda^2} + \frac{x^{1-2\kappa} y^{-\lambda} \frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}}{8\kappa^2} + \frac{x^{2-2\kappa} y^{-\lambda} \frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}}{8\kappa^2} = 0 \tag{2.23}$$

πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $x^{2\kappa} y^{\lambda}$ έχουμε

$$2x^{2\kappa}\Psi(x,y) - \frac{y\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}}{8\lambda^2} - \frac{y^2\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2}}{8\lambda^2} + \frac{x\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}}{8\kappa^2} + \frac{x^2\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}}{8\kappa^2} = 0 \tag{2.24}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε όπως και πριν ότι η συνάρτηση Ψ(x,y) είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων μία συνάρτηση μόνο του x και μία μόνο του y $\Psi(x,y) = F(x)G(y)$ οι μεταβλητές χωρίζονται και παίρνω την εξίσωση:

$$2x^{2\kappa} + \frac{xF'(x)}{8\kappa^2 F(x)} + \frac{x^2 F''(x)}{8\kappa^2 A(x)} - \frac{yG'(y)}{8\lambda^2 G(y)} - \frac{y^2 G''(y)}{8\lambda^2 G(y)} = 0 \tag{2.25}$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$2x^{2\kappa} + \frac{xF'(x)}{8\kappa^2 F(x)} + \frac{x^2 F''(x)}{8\kappa^2 A(x)} = -\omega \quad \text{και} \quad -\frac{yG'(y)}{8\lambda^2 G(y)} - \frac{y^2 G''(y)}{8\lambda^2 G(y)} = \omega \tag{2.26}$$

οι εξισώσεις (2.25) έχουν λύση την

$$F(x) = J_{-2i\sqrt{2}\sqrt{\omega}}\left(4\sqrt{x^{2\kappa}}\right)C_1\Gamma\left(1-2i\sqrt{2}\sqrt{\omega}\right) + J_{2i\sqrt{2}\sqrt{\omega}}\left(4\sqrt{x^{2\kappa}}\right)C_2\Gamma\left(1+2i\sqrt{2}\sqrt{\omega}\right) \tag{2.27}$$

$$G(y) = \frac{y^{\frac{-1+\omega}{\omega}}\omega C_1}{-1+\omega} + C_2 \tag{2.28}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ξεκινώντας από την δράση Hilbert-Einstein $I = \frac{\varepsilon}{16\pi}\int \sqrt{\varepsilon^{(4)}g}\,{}^{(4)}Rd^4x$ μπορεί κανείς να καταλήξει στις εξισώσεις πεδίου του Einstein κάνοντας παραλλαγή της δράσης $g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Αν θέλουμε όμως να ακολουθήσουμε τον κατά Hamilton φορμαλισμό, είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία συνδεσμικών συστημάτων. Σε τέτοια συστήματα δεν μπορούμε να ορίσουμε την Hamiltonian μέσω της σχέσης $H(q^k, P_k) = \dot{q}^k P_k - L$, επειδή ακριβώς δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς όλες τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}^k$. Για το λόγο αυτό αν έχουμε τους συνδέσμους χρησιμοποιούμε την έννοια της κανονικής χαμιλτονιανής $H_c = H_c(q, P_a) = P_i \dot{q}^i - L\left(q, \dot{q}\right)$ στη συνέχεια ορίζοντας την ασθενώς ίση Primary Hamiltonian $H_p = H_c + \mu^r \Phi_r$ με $\Phi_r \approx 0$ να είναι οι πρωτογενείς σύνδεσμοι η χρονική εξέλιξη μιας συνάρτησης Α του φασικού χώρου θα είναι $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial A}{\partial P_i}\dot{P}_i \approx \{A, H_c\} + \{A, \mu^r \Phi_r\} = \{A, H_p\}$. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο Dirac-Bergmann οι σύνδεσμοι πρέπει να ισχύουν κάθε χρονική στιγμή και επομένως η χρονική παράγωγός τους πρέπει να είναι ασθενώς μηδέν. Η απαίτηση αυτή ή θα ικανοποιείται ή θα δώσει περαιτέρω συνδέσμους (δευτερογενείς) ή θα οδηγήσει σε κάποια ασυνέπεια αν η Hamiltonian που διαλέξαμε δεν είναι έγκυρη. Στη συνέχεια είμαστε αναγκασμένοι να εξετάσουμε και την χρονική εξέλιξη των δευτερογενών συνδέσμων όπου η παραπάνω κατάσταση θα επαναληφθεί. Μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων η διαδικασία τερματίζεται.

Μια ασθενώς μηδέν συνάρτηση είναι ισχυρώς ίση με έναν γραμμικό συνδυασμό των συνδέσμων του συστήματος, επομένως έχουμε στην ανάλυσή μας τόσους πολλαπλασιαστές όσοι είναι και οι σύνδεσμοι. Για κάθε δεύτερης τάξης σύνδεσμο οι συντελεστές μπορούν να προσδιοριστούν μέσω του θεωρήματος του Dirac ενώ για κάθε πρώτης τάξης πρωτογενή σύνδεσμο εμφανίζεται ένας απροσδιόριστος συντελεστής. Οι πρωτογενείς πρώτης τάξης σύνδεσμοι είναι επομένως αυτοί που γεννούν συμμετρίες βαθμίδας (gauge symmetry). Αν τώρα θέλουμε να κάνουμε συγκεκριμένη επιλογή των συντελεστών αυτών (gauge fixing) η σωστή διαδικασία είναι να επιλέξουμε μια σχέση των (q,P) για κάθε σύνδεσμο που αντιστοιχεί στον συντελεστή που θέλουμε να προσδιορίσουμε με μοναδική ιδιότητα οι συναρτήσεις αυτές να έχουν μηδενική αγκύλη Poisson με τον αντίστοιχο σύνδεσμο, ώστε να τον μετατρέψουν σε δεύτερης τάξης σύνδεσμο και να μπορεί πλέον να προσδιοριστεί ο συντελεστής μέσω του θεωρήματος του Dirac. Περνώντας στη συνέχεια στην Κβάντωση της Βαρύτητας και αφού έχουμε καταλήξει για την Χαμιλτονιανή του συστήματος στην έκφραση $H = NX + N^i x_i$ θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε έναν κβαντικό τελεστή που θα είναι το ανάλογο κάθε συνδέσμου X, x_i. Οι φυσικές καταστάσεις του συστήματος θα περιγράφονται τότε από τις ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών $\hat{X}, \hat{x}_i$. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά επίπονη και μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί ικανοποιητικός συστηματικός τρόπος χειρισμού της κβαντικής βαρύτητας.

Είναι λοιπόν λογικό να στρεφόμαστε σε απλοποιήσεις της γενικής περίπτωσης και ο πιο λογικός δρόμος είναι να προσθέτουμε στο πρόβλημά μας συμμετρίες. Οι κοσμολογίες Bianchi είναι σίγουρα από τις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις. Εδώ μας ενδιαφέρει το υποσύνολο των χωρικά ομογενών χωροχρόνων που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη μιας 3-διάστατης ομάδας ισομετρίας σε κάθε επιφάνεια σταθερού χρόνου Σ_t. Υπάρχουν τρεις ένα μορφές σ_i^a οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις: $d\sigma^a = C^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma \Leftrightarrow \sigma^\alpha_{i,j} - \sigma^\alpha_{j,i} = 2C^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\gamma_i \sigma^\beta_j$ όπου $C^\alpha_{\beta\gamma}$ οι σταθερές δομής για την αντίστοιχη ομάδα ισομετρίας. Ο Bianchi απέδειξε ότι υπάρχουν 9 διαφορετικοί τέτοιοι χώροι που προσδιορίζονται από τις σταθερές δομής. Εάν εισαχθεί η συμμετρία αυτή στις εξισώσεις πεδίου τότε καταλήγουμε ότι σε κάθε πρότυπο Bianchi εμφανίζονται τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου στην γενική λύση για το σύνολο των εξισώσεων πεδίου. Βασισμένοι στην διαίσθησή μας που αποκτήθηκε από την πλήρη θεωρία κανείς μπορεί να αποδείξει ότι το γεγονός αυτό είναι μια απεικόνιση της μοναδικής γνωστής συναλλοιώτητας που εμφανίζεται στην θεωρία, της ελευθερίας που έχουμε να επιλέγουμε αυθαίρετα χωρικές και χρονικές συντεταγμένες. Εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός $t \to \tilde{t} = g(t) \Leftrightarrow t = f\left(\tilde{t}\right)$ δίνει πάντα μια ισοδύναμη λύση των εξισώσεων πεδίου. Όσο αφορά στις χωρικές αμφιδιαφορίσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να διατηρείται η προφανείς χωρική ομογένεια οι μετασχηματισμοί θα πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε να ανήκουν στην ομάδα αυτομορφισμών της άλγεβρας Lie που καθορίζεται από τα $C^\alpha_{\beta\gamma}$.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Dirac-Bergmann για κοσμολογίες Bianchi καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η Hamiltonian $H_c = NH_0 + 4N^a H_a$ με $H_0 = \frac{1}{2}G_{\kappa\lambda\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}\Pi^{\kappa\lambda} + \sqrt{\gamma}R$ και $H_\alpha = C^\nu_{\alpha\beta}\gamma_{\rho\nu}\Pi^{\rho\beta}$ είναι έγκυρη χαμιλτονιανή μόνο για Class A μοντέλα ενώ για Class B παράγεται ασυνέπεια μιας και η διατήρηση στον χρόνο των δευτερογενών συνδέσμων καταλήγει στο $R \approx 0$ το οποίο δεν ικανοποιείται για κανένα Class B πρότυπο Bianchi.

Αν λ^α_β είναι οι γεννήτορες των χωρικών αμφιδιαφορίσεων τότε η ποσότητα $I = \lambda^\rho_\sigma \gamma_{\rho\tau}\Pi^{\sigma\tau}$ είναι σταθερά της κίνησης, όταν οι γεννήτορες είναι άηχνοι ή πρόκειται για Class B πρότυπο. Αν προσθέσουμε έναν δείκτη που να αριθμεί τους διαφορετικούς γεννήτορες τότε οι πίνακες $\lambda^\rho_{(I)\sigma} = \left(C^\rho_{\alpha\sigma}, \varepsilon^\rho_{(1)\alpha}\right)$ αντιστοιχούν στους γεννήτορες των εσωτερικών και εξωτερικών αυτομορφισμών.

Το διανυσματικό πεδίο $X_{(I)} = \lambda^\rho_{(I)\sigma}\gamma_{\rho\tau}\Pi^{\sigma\tau}$ θα περιέχει τους γραμμικούς συνδέσμους H_a και ανάλογα με το πρότυπο Bianchi που συζητάμε μπορεί να περικλείει και γεννήτορες εξωτερικών αυτομορφισμών $E_{(J)} = \varepsilon^\sigma_{(J)\rho}\gamma_{\sigma\tau}\dfrac{\partial}{\partial\gamma_{\rho\tau}}$.

Όταν στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην κβαντική κοσμολογία θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε κβαντικούς τελεστές σε όλα τα $X_{(I)}$, οι ιδιοσυναρτήσεις των οποίων θα είναι οι φυσικές καταστάσεις του προβλήματός μας. Παράγονται επομένως δύο σετ εξισώσεων, μία για τις ιδιοσυναρτήσεις των $E_{(J)}$ και μία για τις ιδιοσυναρτήσεις των H_a. Οι εξισώσεις αυτές έχουν λυθεί για κάθε πρότυπο Bianchi και η λύση είναι πως η κυματοσυνάρτηση θα πρέπει να είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών

$\Psi\left(\gamma_{\alpha\beta}, C^{\rho}_{\sigma\tau}\right) = \Psi\left(q^1, q^2, q^3\right)$ με

$$q^1 = \frac{m^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma}} \quad q^2 = \frac{\left(m^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)^2}{2\gamma} - \frac{1}{4}C^{\alpha}_{\mu\kappa}C^{\beta}_{\nu\lambda}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\kappa\lambda} \quad q^3 = \frac{\det\left(m^{\alpha\beta}\right)}{\sqrt{\gamma}}$$

Στη συνέχεια στον τετραγωνικό σύνδεσμο $H_0 \approx 0$ θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε τον τελεστή $\hat{H}_0 \Psi \equiv \left(-\hbar^2\nabla^2_h + kR + V\right)\Psi = 0$, όπου ∇^2_h η conformal Laplacian που αντιστοιχεί στην επαγόμενη μετρική

$$h^{ij} = G_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial q^i}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\frac{\partial q^j}{\partial\gamma_{\mu\nu}}$$

και R το αντίστοιχο Ricci Scalar. Όπως είπαμε η επιλογή της $H_c = NH_0 + 4N^a H_a$ δεν είναι έγκυρη για τα Class B μοντέλα. Συγκεκριμένη όμως επιλογή των παραγόντων κλίμακας μπορεί να μας δώσει μια έγκυρη Hamiltonian για Bianchi type III παρά το γεγονός πως είναι Class B μοντέλο και επιπλέον η παραγόμενη εξίσωση Wheeler DeWitt λύνεται με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] R. Kantowski and R. K. Shachs, J. Math. Phys. 7, 443 (1966)
[2] F.W. Waarner, Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups, Scott Foressman & Company, Glenview, Illinois (1971)
[3] R. T. Jantzen, Comm. Math. Phys. 64, 211 (1979)
[4] K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Springer-Verlag (1982)
[5] A. Ashtekar and J. Samuel, Calss. Quant. Grav, 8, 2191 (1991)
[6] T. Christodoulakis and E. Korfiatis, J. Math. Phys. 33, 2863 (1992)
[7] T. Christodoulakis and E. Korfiatis , "Kuchar's physical variables and Automorphism Including Diffeomorfisms in Class A Cosmologies" Univ. of Athens, Preprint NPPS-6 (1996)
[8] T. Christodoulakis, G. Kofinas, E. Korfiatis, A. Paschos . Phys.Lett.B390:55-58, (1997)
[9] T. Christodoulakis, G. Kofinas, E. Korfiatis, A. Paschos Phys.Lett.B419:30-36, (1998)
[10] T. Christodoulakis, G.O. Papadopoulos gr-qc/0009074, Phys.Lett.B501:264-268, (2001)
[11] T. Christodoulakis, G. Kofinas, G.O. Papadopoulos . gr-qc/0101103, Phys.Lett.B514:149-154, (2001)
[12] T. Christodoulakis E. Korfiatis and G.O. Papadopoulos, Comm. Math. Phys. 226, 377-391 (2002)