ΒΑΣΙΛΙΚΗ Ι. ΒΟΥΤΕΛΗ

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ HARDY ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2013

ΒΑΣΙΛΙΚΗ Ι. ΒΟΥΤΕΛΗ

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ HARDY ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2013

Αυτή η
Μεταπτυχιακή Διατριβή
εκπονήθηκε στα πλαίσια του
Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
του Τμήματος Μαθηματικών
του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
υπό την επίβλεψη του
Αναπληρωτή Καθηγητή Γεράσιμου Μπαρμπάτη

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΜΠΑΡΜΠΑΤΗΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του
Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.
(Επιβλέψας Καθηγητής)

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΛΙΚΑΚΟΣ, Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του
Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΤΡΑΤΗΣ, Καθηγητής
του Τμήματος Μαθηματικών του
Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Στους γονείς μου, Γιάννη και Μαρία

με απέραντη αγάπη και ευγνωμοσύνη

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλους, Θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόθερμα τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, αποδεχόμενος την πρότασή μου να είναι αυτός ο Καθηγητής που θα επέβλεπε την παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή. Επίσης τον ευχαριστώ για την προθυμία και το αμέριστο ενδιαφέρον που αδιάλειπτα εξεδήλωνε, κάθε φορά που ζητούσα την βοήθειά του, προκειμένου να επιλύσω τους συνεχείς Μαθηματικούς προβληματισμούς που ανέκυπταν κατά την διάρκεια της μελέτης μου. Οι παρεμβάσεις του δρούσαν πάντα καταλυτικά ως προς την ομαλή συνέχεια και ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Ακόμη τον ευχαριστώ για την επιλογή του θέματος καθώς και για την βιβλιογραφία που μου πρότεινε σε σχέση με αυτό.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς επιτροπής Κρίσης, δηλαδή τους Καθηγητές κ. Νικόλαο Αλικάκο και κ. Ιωάννη Στρατή, για το χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη της μεταπτυχιακής μου διατριβής καθώς και για τις γνώσεις που απεκόμισα από αυτούς.

Ακόμη θα ήθελα να εκφράσω τις ολόθερμες ευχαριστίες μου σε όλους τους διδάσκοντες του τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης στων οποίων τα μαθήματα επέλεξα να εξεταστώ. Συγκεκριμένα ευχαριστώ τους Καθηγητές κ. Χριστόδουλο Αθανασιάδη, κ. Βασίλειο Δουγαλή, κ. Γρηγόριο Καλογερόπουλο, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα. Μαριλένα Μητρούλη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παναγιώτη Παυλάκο καθώς επίσης και τον Επίκουρο Καθηγητή, κ. Ευάγγελο Γρίσπο. Τους ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη και κατανόηση που έδειξαν στο πρόσωπό μου σε όλο αυτό το διάστημα.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλη την Γραμματεία του Μαθηματικού Τμήματος και ιδιαιτέρως την κα. Ελισάβετ Λέκκα, για την ακριβή πληροφόρηση και κατατόπιση που πρόθυμα μου παρείχε σε οποιοδήποτε θέμα με απασχολούσε.

Θα ήμουν αγνώμων αν δεν ευχαριστούσα τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του τμήματος που πάντα με βοηθούσαν και δέχονταν πρόθυμα να επιλύσουν κάθε απορία μου και προβληματισμό μου. Ιδιαιτέρως όμως θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα, τους αποφοιτήσαντες πλέον πρώην συμφοιτητές μου, Σταμάτη Μιχαήλ και Ευαγγελία Χάνδρή, για την απέραντη και ανιδιοτελή συμπαράσταση που μου παρείχαν ηθικά αλλά και σε γνωστικό επίπεδο. Ήταν πολύ συγκινητική η φιλαλληλία και η αλληλεγγύη που μου έδειξαν.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω ειλικρινά τον σύζυγο και σύντροφό μου Παναγιώτη Ντόγκα για την απεριόριστη στήριξη, υπομονή και αφοσίωση που αφειδώλευτα μου παρείχε καθ΄ όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Πάντοτε με εμψύχωνε να προχωρήσω και επικροτούσε θετικά κάθε μου προσπάθεια.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της καρδιάς μου τους γονείς μου Γιάννη και Μαρία, καθώς και τα αδέλφια μου Δήμητρα και Γιώργο για την άπλετη και ολοκληρωτική υποστήριξή τους καθώς και για την αυτοπεποίθηση που μου ενέπνεαν καθ΄ όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών και όχι μόνο σπουδών μου.

Ιδιαιτέρως θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου που όλα αυτά τα χρόνια στάθηκαν πιστοί αρωγοί σε κάθε προσπάθεια προόδου μου δείχνοντας αξιοσημείωτη εμπιστοσύνη στις δυνατότητές μου. Πάντα μου αναπτέρωναν το ηθικό και μου παρείχαν όλα τα υλικά μέσα που απαιτούνταν για να προχωρήσω στην επίτευξη των στόχων μου, γνωρίζοντας την υπέρμετρη αγάπη που έτρεφα και τρέφω για την συναρπαστική επιστήμη των Μαθηματικών.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η ιστορία των ανισοτήτων Hardy ξεκινά το 1920, με την ακόλουθη ανισότητα

$$\int_0^\infty f(x)^p dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \qquad (0.0.1)$$

όπου $p > 1$, $f(x) \geq 0$ και $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Αφορμή για την ανακάλυψη της ανισότητας αυτής από τον Hardy, αποτέλεσε η προσπάθεια του να απλοποιήσει τις τέσσερεις προϋπάρχουσες αποδείξεις, ενός θεωρήματος του Hilbert που αφορούσε την σύγκλιση μιας διπλής σειράς θετικών όρων. Η πέμπτη απόδειξη του Θεωρήματος αυτού, αποτελεί πόρισμα μιας ανισότητας, αντίστοιχης της (0.0.1) στη διακριτή περίπτωση. Παραπέμπουμε στο βιβλίο 'Inequalities' των G.H. Hardy, J.E. Littlewood και G. Pólya (Cambridge University Press, 1959).

Από τότε αυτή η ανισότητα έχει γενικευτεί και τροποποιηθεί προς πολλές κατευθύνσεις, εξ' αιτίας των πολλών εφαρμογών της, οι οποίες αφορούν κυρίως στη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Μία εκδοχή της ανισότητας Hardy σε διάσταση $n \geq 2$ είναι η

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq c \int_\Omega \frac{|u|^p}{d^p} dx\ . \qquad (0.0.2)$$

Εδώ Ω είναι κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ είναι η συνάρτηση απόστασης από το σύνορο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το Ω έχει αρκετά ομαλό σύνορο, τότε υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε η (0.0.2) να ισχύει για όλες της συναρτήσεις $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Ειδικότερα, αν το Ω είναι κυρτό, τότε μπορείς κανείς να πάρει $c = ((p-1)/p)^p$, την ίδια δηλαδή σταθερά με αυτήν της (0.0.1), η οποία είναι και βέλτιστη. Αυτή η συγκεκριμένη γενίκευση της ανισότητας Hardy είναι αυτή που σχετίζεται με το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η απόδειξη ορισμένων ανισοτήτων Hardy, ανάλογων της (0.0.2), για την κλασματική Λαπλασιανή. Η κλασματική Λαπλασιανή από μόνη της είναι ένας ιδιαίτερα ενδιαφέρων τελεστής ο οποίος εμφανίζεται στην μοντελοποίηση πολλών και ποικίλων φυσικών φαινομένων. Έτσι ένα σημαντικό μέρος της εργασίας αφιερώνεται στον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες της κλασματικής Λαπλασιανής καθώς και στους στενά σχετιζόμενους με αυτήν κλασματικούς χώρους Sobolev. Έχοντας κανείς εισάγει τις έννοιες αυτές, μπορεί να προχωρήσει στο κυρίως θέμα τις εργασίας, τις ανισότητες Hardy για την κλασματική Λαπλασιανή.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 1, ορίζονται οι χώροι Sobolev. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στους κλασματικούς χώρους Sobolev και ακόμη περισσότερο στους $H^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ και $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Στο Κεφάλαιο 1 πάλι, ορίζουμε τον κλασματικό τελεστή Laplace

$$\begin{aligned}(-\Delta)^k u(x) &= C(n,k) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}} dy \\ &= C(n,k) \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}} dy \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

μιας συνάρτησης $u \in \mathcal{S}$ με $k \in (0,1)$.

Ο κλασματικός τελεστής Laplace $(-\Delta)^k$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:
α) Μπορεί να γραφτεί ως διαφορικό πηλίκο δεύτερης τάξης δηλαδή

$$(-\Delta)^k u(x) = -\frac{1}{2} C(n,k) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}} dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$u \in \mathcal{S}$ και $k \in (0,1)$.
β) Ακόμα ο κλασματικός τελεστής Laplace $(-\Delta)^k : \mathcal{S} \to L^2(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $u \in \mathcal{S}$ και για $k \in (0,1)$ ικανοποιεί την ισότητα:

$$(-\Delta)^k u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2k}(\mathcal{F}u)), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{0.0.4}$$

Η ισότητα (0.0.4) δείχνει ότι ο ορισμός (0.0.3) του $(-\Delta)^k$ συμπίπτει με τον ορισμό του μέσω του Συναρτησιακού Λογισμού (Functional Calculus).
γ) Μια επίσης πολύ σημαντική ιδιότητα του κλασματικού τελεστή Laplace $(-\Delta)^k$ είναι ότι σχετίζεται άμεσα με τον κλασματικό χώρο Sobolev H^k μέσω της ισότητας

$$[u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,k)^{-1} ||(-\Delta)^{k/2} u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

όπου $k \in (0,1)$ και $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$.

Στο Κεφάλαιο 2 ξεκινούμε αποδεικνύοντας την ανισότητα Hardy που αφορά την απλή Λαπλασιανή. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι αν Ω είναι ένα φραγμένο, κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο τάξεως C^2, τότε για κάθε $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ισχύει η αμέσως παρακάτω ανισότητα Hardy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{|u|^2}{d^2} dx$$

όπου $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ είναι η συνάρτηση απόσταση του x από το $\partial\Omega$. Αρκετές ιδιότητες της συνάρτησης $d(x)$ δίνονται στην αρχή του Κεφαλαίου 2.

Τέλος στο Κεφάλαιο 3 θα ασχοληθούμε με τις ανισότητες Hardy που αφορούν τον κλασματικό τελεστή Laplace $(-\Delta)^k$. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι για $1 < a <$

$p < \infty$ σε κάθε χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και για κάθε $f \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει η παρακάτω ανισότητα Hardy:

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq D_{n,p,a} \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{m_a(x)^a} dx$$

όπου

$$\frac{1}{m_a(x)^a} = \frac{\int_{S^{n-1}} dw \frac{1}{d_{w,\Omega}(x)^a}}{\int_{S^{n-1}} dw |w_n|^a}$$

και

$$D_{n,p,a} = 2\pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma((1+a)/2)}{\Gamma((n+a)/2)} \int_0^1 \frac{|1-r^{(a-1)/p}|^p}{(1-r)^{1+a}} dr$$

είναι η βέλτιση σταθερά.

Ειδικά αν το χωρίο είναι κυρτό, τότε η ανισότητα που ισχύει είναι η κάτωθι:

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq D_{n,p,a} \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{d(x)^a} dx$$

για $1 < a < p < \infty$ και για κάθε $f \in C_c^\infty(\Omega)$.

Επίσης θα αποδειχθεί ότι αν $1 < a < 2$ και Ω είναι ένα χωρίο με μη κενό σύνορο, τότε υπάρχει σταθερά $K_{n,a} > 0$ ώστε για κάθε $f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a} \int_\Omega \frac{|f(x)|^2}{d(x)^a} dx$$

Κεφάλαιο 1

Χώροι Sobolev και κλασματικός τελεστής Laplace

1.1 Χώροι Hölder

Προτού αναφερθούμε στους χώρους Sobolev, πρώτα θα ασχοληθούμε με τους χώρους Hölder. Υποθέτουμε ότι το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και ότι $0 < a \leq 1$. Έχουμε προηγουμένως θεωρήσει την ομάδα των Lipschitz συνεχών συναρτήσεων $u : U \to \mathbb{R}$ οι οποίες εξ ορισμού ικανοποιούν την

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \ (x, y \in U) \tag{1.1.1}$$

για κάποια σταθερά C. Τώρα η (1.1.1) σαφώς δηλώνει ότι η u είναι συνεχής, και ακόμα πιο σημαντικό παρέχει ένα ομοιόμορφο μέτρο συνέχειας. Είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε επίσης συναρτήσεις u που ικανοποιούν μια διαφορετική εκδοχή της (1.1.1), συγκεκριμένα την

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^a \ (x, y \in U) \tag{1.1.2}$$

για κάποια σταθερά C. Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την (1.1.2) λέγεται Hölder συνεχής με εκθέτη a.

Ορισμός 1.1.1 *(i) Εάν $u : U \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση φραγμένη και συνεχής, γράφουμε*

$$||u||_{C(U)} = \sup_{x \in U} |u(x)|$$

(ii) Η Hölder ημινόρμα a-τάξης της $u : U \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$[u]_{C^{0,a}(U)} = \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^a} \right\}$$

και η Hölder νόρμα a-τάξης ως

$$||u||_{C^{0,a}(U)} = ||u||_{C(U)} + [u]_{C^{0,a}(U)}$$

Ορισμός 1.1.2 *Ο χώρος Hölder $C^{k,a}(U)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in C^k(U)$ για τις οποίες η νόρμα*

$$||u||_{C^{k,a}(U)} = \sum_{|m|\leq k} ||D^m u||_{C(U)} + \sum_{|m|=k} [D^m u]_{C^{0,a}(U)} \tag{1.1.3}$$

είναι πεπερασμένη.

Έτσι ο χώρος $C^{k,a}(U)$ αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις u που είναι k φορές συνεχώς διαφορίσιμες και των οποίων οι μερικές παράγωγοι k-τάξης είναι Hölder συνεχείς με εκθέτη a.

Θεώρημα 1.1.3 *(Χώροι Hölder σαν χώροι συναρτήσεων) Ο χώρος των συναρτήσεων $C^{k,a}(U)$ είναι ένας χώρος Banach.*

Απόδειξη. Παραλείπεται (βλ. [E], σελ. 241).

Έαν ο X δηλώνει έναν πραγματικό γραμμικό χώρο, τότε η $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ ονομάζεται νόρμα εάν
(i) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ για όλα τα $u, v \in X$.
(ii) $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$ για όλα τα $u \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) $||u|| = 0$ εάν και μόνον εάν $u = 0$.

Μια νόρμα μας εφοδιάζει με μια έννοια σύγκλισης: Λέμε ότι μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ συγκλίνει στην $u \in X$, δηλ. $u_k \to u$, εάν $\lim_{k\to+\infty} ||u_k - u|| = 0$.

Ένας χώρος Banach είναι τότε ένας γραμμικός χώρος με νόρμα ο οποίος είναι πλήρης, που σημαίνει ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Έτσι το Θεώρημα 1.1.3 μας λέει ότι εάν πάρουμε στο γραμμικό χώρο $C^{k,a}(U)$ την νόρμα $||\cdot|| = ||\cdot||_{C^{k,a}(U)}$, όπως ορίζεται στην (1.1.3), τότε η $||\cdot||$ ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες (i) – (iii), και επί προσθέτως κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

1.2 Χώροι Sobolev

Οι χώροι Hölder που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.1 δεν είναι δυστυχώς πολλές φορές το κατάλληλο πλαίσιο για στοιχειώδη θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς συνήθως δεν μπορούμε να κάνουμε αρκετά καλές αναλυτικές εκτιμήσεις για να αποδείξουμε ότι οι λύσεις που κατασκευάζουμε πραγματικά ανήκουν σε τέτοιους χώρους.

Αυτό που χρειάζεται μάλλον είναι μερικά άλλα είδη χώρων, που περιέχουν λιγότερο ομαλές συναρτήσεις. Στην πράξη πρέπει να βρούμε μια ισορροπία, με το να σχεδιάσουμε χώρους που περιέχουν συναρτήσεις οι οποίες έχουν πιο περιορισμένες ιδιότητες ομαλότητας.

1.2.1 Ασθενείς Παράγωγοι

Σημείωση: Έστω $C_c^\infty(U)$ ο χώρος των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων $\phi : U \to \mathbb{R}$, με συμπαγή φορέα στο U. Θα ονομάζουμε συνάρτηση δοκιμής μία συνάρτηση ϕ που ανήκει στο $C_c^\infty(U)$.

Έστω ότι μας δίνεται μια συνάρτηση $u \in C^1(U)$. Τότε εάν $\phi \in C_c^\infty(U)$, ύστερα από ολοκλήρωση κατά μέρη, βλέπουμε ότι

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = (-1) \int_U u_{x_i} \phi dx \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2.4}$$

Πιο γενικά τώρα, εάν k είναι ένας θετικός ακέραιος, $u \in C^k(U)$, και $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ένας πολυδείκτης τάξης

$$|a| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

τότε

$$\int_U u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U D^a u \phi dx \tag{1.2.5}$$

Αυτή η ισότητα ισχύει εφόσον

$$D^a \phi = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} \phi$$

και μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (1.2.4) $|a|$ φορές.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω $u \in L^1_{loc}(U)$ και a ένας πολυδείκτης. Λέμε ότι η $v \in L^1_{loc}(U)$ είναι ασθενής μερική παράγωγος της u a-τάξης, γράφοντας $D^a u = v$, εάν ισχύει ότι:*

$$\int_U u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U v \phi dx \tag{1.2.6}$$

για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(U)$. Με άλλα λόγια, εάν δίνεται μια συνάρτηση u και υπάρχει συνάρτηση v η οποία ικανοποιεί την (1.2.6) για όλες τις ϕ, λέμε ότι $D^a u = v$ υπό την ασθενή έννοια. Εάν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση v, τότε η u δεν έχει ασθενή μερική παράγωγο α τάξης.

Λήμμα 1.2.2 *(Μοναδικότητα των ασθενών παραγώγων)*
Μια ασθενής μερική παράγωγος a-τάξης της u, εάν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Απόδειξη. Έστω ότι οι $v, \bar{v} \in L^1_{loc}(U)$ ικανοποιούν την

$$\int_U u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U v \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U \bar{v} \phi dx, \ \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

Τότε

$$\int_U (v - \bar{v}) \phi dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

Από την προηγούμενη σχέση αποδεικνύεται ότι $v - \bar{v} = 0$ σχεδόν παντού. ■

1.2.2 Ορισμός Χώρων Sobolev

Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και έστω k ένας μη αρνητικός ακέραιος.

Ορισμός 1.2.3 *Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$, με $u \in L^p(U)$ έτσι ώστε για κάθε πολυδείκτη a με $|a| \leq k$, η ασθενής παράγωγος $D^a u$ υπάρχει και ανήκει στον $L^p(U)$.*

Δηλαδή

$$\begin{aligned} W^{k,p}(U) = \{ & u \in L^p(U) : \forall a \text{ με } |a| \leq k, \exists g_a \in L^p(U) \\ \text{τέτοια ώστε } & \int_U u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U g_a \phi dx, \forall \phi \in C_c^\infty(U)\} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.4 *(i) Εάν $p = 2$ συνήθως γράφουμε $H^k(U) = W^{k,2}(U)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Το γράμμα H χρησιμοποιείται αφού ο $H^k(U)$ είναι χώρος Hilbert. Σημειώνουμε ότι $H^0(U) = L^2(U)$.*

Ορισμός 1.2.5 *Ορίζουμε την νόρμα του χώρου $W^{k,p}(U)$ ως*

$$||u||_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|a| \leq k} \int_U |D^a u|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty \\ \sum_{|a| \leq k} \operatorname{esssup}_U |D^a u|, & p = \infty \end{cases}$$

1.2.3 Ιδιότητες ασθενών παραγώγων

Θεώρημα 1.2.6 *(Ιδιότητες των ασθενών παραγώγων)*
Έστω ότι $u, v \in W^{k,p}(U), |a| \leq k$. Τότε: (i) $D^a u \in W^{k-|a|,p}(U)$ και $D^b(D^a u) = D^a(D^b u) = D^{a+b} u$ για όλους τους πολυδείκτες a, b με $|a| + |b| \leq k$.
(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ και $D^a(\lambda u + \mu v) = \lambda D^a u + \mu D^a v, |a| \leq k$.
(iii) Εάν V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του U, τότε $u \in W^{k,p}(V)$.
(iv) Εάν $\zeta \in C_c^\infty(U)$, τότε $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ και

$$D^a(\zeta u) = \sum_{b \leq a} \binom{a}{b} D^b \zeta D^{a-b} u \tag{1.2.7}$$

(τύπος του Leibnitz) όπου $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$.

Απόδειξη.
(i) Έστω $\phi \in C_c^\infty(U)$. Τότε $D^b \phi \in C_c^\infty(U)$, και επίσης

$$\begin{aligned} \int_U D^a u D^b \phi dx &= (-1)^{|a|} \int_U u D^{a+b} \phi dx \\ &= (-1)^{|a|} (-1)^{|a+b|} \int_U D^{a+b} u \phi dx \\ &= (-1)^{|b|} \int_U D^{a+b} u \phi dx \end{aligned}$$

έτσι $D^b(D^a u) = D^{a+b}u$ υπό την ασθενή έννοια.

(ii) Αφού $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $u, v \in W^{k,p}(U)$ τότε:

$$\begin{aligned}
\int_U (\lambda u + \mu v) D^a \phi dx &= \int_U \lambda u D^a \phi dx + \int_U \mu v D^a \phi dx \\
&= \lambda \int_U u D^a \phi dx + \mu \int_U v D^a \phi dx \\
&= \lambda (-1)^{|a|} \int_U D^a u \phi dx + \mu (-1)^{|a|} \int_U D^a v \phi dx \\
&= (-1)^{|a|} \int_U (\lambda D^a u + \mu D^a v) \phi dx
\end{aligned}$$

Άρα αφού $\exists g_a = \lambda D^a u + \mu D^a v$ τ.ω.

$$\int_U (\lambda u + \mu v) D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U (\lambda D^a u + \mu D^a v) \phi dx$$

έπεται ότι $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και μάλιστα

$$D^a(\lambda u + \mu v) = \lambda D^a u + \mu D^a v$$

(iii) Αφού $u \in W^{k,p}(U), \exists g_a = D^a u \in L^p(U)$ τέτοια ώστε:

$$\int_U u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U D^a u \phi dx, \ \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

Όμως αφού $V \subset U$ ισχύει $C_c^\infty(V) \subset C_c^\infty(U)$. Άρα

$$\int_V u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_V D^a u \phi dx, \ \forall \phi \in C_c^\infty(V)$$

οπότε $u \in W^{k,p}(V)$ το οποίο έπρεπε να δείξουμε.

(iv) (Βλέπε L. Evans, Partial Differential Equations, σελ. 248, [E])

Πρόταση 1.2.7 *Έστω ότι U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u, v \in L^1_{loc}(U)$.*
(i) Αν για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$ υπάρχουν οι $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ασθενώς στο U και $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\infty_{loc}(U)$ τότε

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

ασθενώς στο U.
(ii) Αν $u \in C(U)$ είναι θετική στο U και για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$ υπάρχει η $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ασθενώς στο U, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial x_i} = \lambda u^{\lambda - 1} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

ασθενώς στο U.

Θεώρημα 1.2.8 *Για κάθε $k = 1, \dots$ και $1 \leq p \leq \infty$, ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι ένας χώρος Banach.*

Απόδειξη. Παραλείπεται (Βλέπε L. Evans, Partial Differential Equations, σελ. 249, [E]).

1.3 Μετασχηματισμός Fourier

Ας θεωρήσουμε το χώρο Schwartz $\mathcal{S}$ που αποτελείται από ταχέως φθίνουσες συναρτήσεις απείρως διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\mathcal{S} = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : |x|^m D^{\alpha} f(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} 0, \forall m \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n\}$$

Η τοπολογία αυτού του χώρου παράγεται από τις ημινόρμες

$$p_N(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^{\alpha} \phi(x)|, \ N = 0, 1, \dots$$

όπου $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Έστω τώρα ότι $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο των κατανομών που αποτελεί τον τοπολογικά δυϊκό χώρο του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε με

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} \phi(x) dx$$

τον μετασχηματισμό Fourier της ϕ και θυμίζουμε ότι η $\mathcal{F}$ μπορεί να επεκταθεί από τον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.4 Χώροι Sobolev $W^{k,p}$ με $k \in (0,1)$ και $p \in [1, +\infty)$

Ορισμός 1.4.1 *Έστω ότι Ω είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Έστω επίσης $k \in (0,1)$ και $p \in [1, +\infty)$. Τότε ορίζουμε ως κλασματικό χώρο Sobolev τον κάτωθι*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + k}} \in L^p(\Omega \times \Omega)\} \tag{1.4.8}$$

για κάθε $x, y \in \Omega$.

Όπως θα δούμε ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι ένας ενδιάμεσος χώρος Banach μεταξύ των χώρων $L^p(\Omega)$ και $W^{1,p}(\Omega)$, και εφοδιάζεται με τη φυσική νόρμα

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n + kp}} dx dy \right)^{1/p} \tag{1.4.9}$$

όπου ο όρος

$$[u]_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy \right)^{1/p} \tag{1.4.10}$$

ονομάζεται (ημί)νόρμα Gagliardo της u. Ας αναφέρουμε ότι στην βιβλιογραφία, οι κλασματικοί χώροι Sobolev ονομάζονται επίσης και χώροι Gagliardo ή Aronszajn ή Slobodeckij, από το όνομα αυτών οι οποίοι τους εισήγαγαν, σχεδόν ταυτόχρονα [AN,G,S].

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, όπως συμβαίνει και στην κλασική περίπτωση με $k \in \mathbb{Z}$,ο χώρος $W^{k',p}(\Omega)$ είναι συνεχώς εμφυτευμένος στον $W^{k,p}(\Omega)$ όταν $0 < k \leq k' < 1$. Αυτό αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.4.2 *Έστω $p \in [1,+\infty)$ και $0 < k \leq k' < 1$. Έστω επίσης Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει κατάλληλη θετική σταθερά $C = C(n,k,p)$ τέτοια ώστε:*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{k',p}(\Omega)}, \ \forall u \in W^{k',p}(\Omega)$$

Ειδικότερα, $W^{k',p}(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy &\leq \int_\Omega \left(\int_{\{|z| \geq 1\}} \frac{1}{|z|^{n+kp}} dz \right) |u(x)|^p dx \\ &= C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

διότι χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, το $\displaystyle\int_{|z|\geq 1} \frac{1}{|z|^{n+kp}} dz$ θα γίνει

$$\begin{aligned} \int_{|z|\geq 1} \frac{1}{|z|^{n+kp}} dz &= \int_{w \in S^{n-1}} \int_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+kp}} r^{n-1} dr dS(w) \\ &= \int_{w \in S^{n-1}} \left(\int_{r=1}^{\infty} r^{-1-kp} dr \right) dS(w) \\ &= \int_{w \in S^{n-1}} \left(\int_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r^{-kp}}{-kp} \right)' dr \right) dS(w) \\ &= \int_{w \in S^{n-1}} (\lim_{t \to \infty} [\frac{r^{-kp}}{-kp}]_1^t) dS(w) \\ &= \int_{w \in S^{n-1}} (-\frac{1}{kp})(\lim_{t \to \infty} [r^{-kp}]_1^t) dS(w) \\ &= \int_{w \in S^{n-1}} (-\frac{1}{kp})(0-1) dS(w) \\ &= \int_{w \in S^{n-1}} \frac{1}{kp} dS(w) \\ &= \frac{1}{kp} C = C(n,k,p) \end{aligned}$$

Οπότε τελικά δείξαμε ότι

$$\int_{|z|\geq 1} \frac{1}{|z|^{n+kp}} dz = \frac{1}{kp} C = C(n,k,p)$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{|z|\geq 1} \frac{1}{|z|^{n+kp}} dz |u(x)|^p dx &= \int_\Omega C(n,k,p)|u(x)|^p dx \\ &= C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ'οψιν μας την παραπάνω ανάλυση παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy &\leq 2^p \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy \\ &\leq 2^p \left(2C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}\right) \\ &= 2^{p+1} C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} \qquad (1.4.11)\end{aligned}$$

όμως

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy \leq \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+k'p}} dxdy \qquad (1.4.12)$$

διότι, αφού $0 < k \leq k' < 1$ και $|x-y| < 1$ έπεται ότι

$$\frac{1}{|x-y|^{n+kp}} \leq \frac{1}{|x-y|^{n+k'p}}$$

άρα και η (1.4.12).

Αν συνδυάσουμε τις (1.4.11) και (1.4.12) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy &\leq 2^{p+1} C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+k'p}} dxdy\end{aligned}$$

Άρα η φυσική νόρμα του χώρου $W^{k,p}(\Omega)$ γίνεται

$$\begin{aligned}||u||^p_{W^{k,p}(\Omega)} &= \int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy \\ &\leq ||u||^p_{L^p(\Omega)} (2^{p+1} C(n,k,p) + 1) + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+k'p}} dxdy \\ &\leq C'(n,k,p)||u||^p_{W^{k',p}(\Omega)}\end{aligned}$$

οπότε

$$||u||^p_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C'(n,k,p)||u||^p_{W^{k',p}(\Omega)}$$

την οποία και έπρεπε να αποδείξουμε. ■

Στην προσεχή Πρόταση 1.4.4, θα δούμε ότι το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.4.2 ισχύει και στην οριακή περίπτωση που $k' = 1$.

Στην περίπτωση όμως που $k' = 1$ πρέπει να λάβουμε υπ'οψιν μας την ομαλότητα του $\partial\Omega$, προηγουμένως όμως θα αναφέρουμε έναν σημαντικό ορισμό που θα χρειαστεί στην Πρόταση 1.4.4.

Ορισμός 1.4.3 *Ένα σύνολο Ω λέμε ότι είναι τάξης $C^{k,a}$ αν τοπικά είναι υπογράφημα μιας συνάρτησης τάξης $C^{k,a}$.*

Πρόταση 1.4.4 *Έστω $p \in [1,+\infty)$ και $k \in (0,1)$. Έστω ότι Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο τάξης $C^{0,1}$ με φραγμένο σύνορο. Τότε υπάρχει κατάλληλη θετική σταθερά $C = C(n,k,p)$ τέτοια ώστε:*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \tag{1.4.13}$$

Ειδικότερα $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Χάρη στις υποθέσεις ομαλότητας στο χωρίο Ω, μπορούμε να επεκτείνουμε την u σε μια συνάρτηση $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ και

$$||\tilde{u}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

για μία κατάλληλη σταθερά C (βλέπε, π.χ. [GT,Θεώρημα 7.25]).

Τώρα χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητής $z = y - x$ και θεωρώντας $B_1 = \Omega \cap \{|z| < 1\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}} dxdy &\leq \int_\Omega \int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{n+kp}} dzdx \\ &= \int_\Omega \int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^p} \frac{1}{|z|^{n+(k-1)p}} dzdx \\ &\leq \int_\Omega \int_{B_1} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+k-1}} dt \right)^p dzdx \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

διότι αν πάρουμε $f(t) = u(x+tz)$ με x, z σταθερές και $t \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} u(x) - u(x+z) = f(0) - f(1) &= -\int_0^1 f'(t)dt \\ &= -\int_0^1 z \cdot \nabla u(x+tz)dt \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} |u(x)-u(x+z)|^p &= \left|\int_0^1 z\cdot\nabla u(x+tz)dt\right|^p \\ &\le \int_0^1 |z\cdot\nabla u(x+tz)|^p dt \end{aligned}$$

οπότε το ολοκλήρωμα (1.4.14) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_{B_1}\frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^p}\frac{1}{|z|^{n+(k-1)p}}dzdx &\le \int_\Omega\int_{B_1}\left(\int_0^1\frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{\frac{n}{p}+(k-1)}}dt\right)^p dzdx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_1}\int_0^1\frac{|\nabla\tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+p(k-1)}}dtdzdx \\ &= \int_{B_1}\int_0^1\frac{||\nabla\tilde{u}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|z|^{n+p(k-1)}}dtdz \\ &\le C_1(n,k,p)||\nabla\tilde{u}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C_2(n,k,p)||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad (1.4.15) \end{aligned}$$

Επίσης λόγω της (1.4.11)

$$\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\ge1\}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}}dxdy \le C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} \qquad (1.4.16)$$

Έτσι συνδυάζοντας τις (1.4.15) και (1.4.16) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} ||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} &= \int_\Omega|u|^p dx+\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}}dxdy \\ &\le ||u||^p_{L^p(\Omega)}+C(n,k,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}+C_2(n,k,p)||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &= (1+C(n,k,p))||u||^p_{L^p(\Omega)}+C_2(n,k,p)||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\le C_3(n,k,p)||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

απ' την οποία έπεται ότι

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} \le C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

όπου $C=C(n,k,p)>0$. ■

Παρατήρηση 1.4.5 *Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός του χώρου Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *όπως δοθηκε στην (1.4.8) δεν μπορεί να ισχύει για* $k\ge1$.
Πράγματι, έστω Ω *ένα ανοιχτό συνεκτικό σύνολο στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε, λόγω [BR, Πρόταση 2] αποδεικνύεται ότι αν για κάποια μετρήσιμη συνάρτηση* $u:\Omega\to\mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}}dxdy<+\infty$$

τότε η συνάρτηση u είναι σταθερή. Αυτό το γεγονός είναι άμεσα συνδεδεμένο με το ακόλουθο αποτέλεσμα που ισχύει για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\lim_{k\to 1-}(1-k)^{1/p}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+kp}}dxdy = C\int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

όπου $C=C(n,p,k)$ είναι μια κατάλληλη θετική σταθερά (βλέπε [BR, Πόρισμα 4]).

1.5 Χώροι Sobolev $W^{k,p}$ με $k>1$ και k μη ακέραιο

Έστω $k>1$ και ο k δεν είναι ακέραιος. Τότε γράφουμε $k=m+\sigma$, όπου m ο είναι ένας ακέραιος και ο $\sigma\in(0,1)$.

Ορισμός 1.5.1 *Για $k>1$ αλλά όχι ακέραιο, $p\in[1,\infty)$ ορίζουμε το χώρο $W^{k,p}(\Omega)$ ως*

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u\in W^{m,p}(\Omega): D^\alpha u\in W^{\sigma,p}(\Omega),\ \forall\alpha \text{ τ.ω. } |a|=m\} \tag{1.5.17}$$

Δηλαδή ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις $u\in W^{m,p}(\Omega)$ των οποίων οι μερικές παράγωγοι $D^\alpha u$ ανήκουν στον $W^{\sigma,p}(\Omega)$, με $|\alpha|=m$.

Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι ένας χώρος Banach (η απόδειξη παραλείπεται) και είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha u||^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)}\right)^{1/p} \tag{1.5.18}$$

Προφανώς, εάν $k=m$ είναι ένας ακέραιος, τότε ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ συμπίπτει με το χώρο Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

Πόρισμα 1.5.2 *Έστω ότι $p\in[1,+\infty)$ και $k,k'>1$. Έστω επίσης ότι το Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τάξης $C^{0,1}$. Τότε, εάν $k'\geq k$, ισχύει ότι*

$$W^{k',p}(\Omega)\subseteq W^{k,p}(\Omega)$$

Απόδειξη. Γράφουμε $k=m+\sigma$ και $k'=m'+\sigma'$ όπου m,m' είναι ακέραιοι αριθμοί και $\sigma,\sigma'\in(0,1)$. Αφενός, εαν $m'=m$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.4.2 ώστε να συμπεράνουμε ότι ο χώρος $W^{k',p}(\Omega)$ είναι συνεχώς εμφυτευμένος στον $W^{k,p}(\Omega)$.

Αφετέρου όμως αν, $m'\geq m+1$, χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 1.4.2 και 1.4.4 προκύπτει ότι

$$W^{m'+\sigma',p}(\Omega)\subseteq W^{m',p}(\Omega)\subseteq W^{m+1,p}(\Omega)\subseteq W^{m+\sigma,p}(\Omega)$$

άρα έχουμε

$$W^{k',p}(\Omega)\subseteq W^{k,p}(\Omega)$$

την οποία και έπρεπε να αποδείξουμε. ■

Θεώρημα 1.5.3 *Για κάθε $k > 0$, ο χώρος $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. [βλ. [A],θεώρημα 7.38]

Τώρα θα δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.5.4 *Ορίζουμε ως $W_0^{k,p}(\Omega)$ την κλειστή θήκη του $C_0^\infty(\Omega)$ ως προς την νόρμα $||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}$ που ορίσαμε στην (1.5.18).*

Λόγω Θεωρήματος 1.5.3 έχουμε

$$W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \tag{1.5.19}$$

αλλά γενικά, για $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $W_0^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega)$, δηλαδή για $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$ δεν αποτελεί πυκνό υποσύνολό του $W^{k,p}(\Omega)$.

Επιπλέον είναι σαφές ότι αντίστοιχες Προτάσεις με τις 1.4.2, 1.4.4 και το Πόρισμα 1.5.2, ισχύουν και για τους χώρους $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Παρατήρηση 1.5.5 *Για $k < 0$ και $p \in (1, +\infty)$, μπορούμε να ορίσουμε τον $W^{k,p}(\Omega)$ ως το δυϊκό χώρο του $W_0^{-k,q}(\Omega)$. όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Παρατηρούμε ότι, σάυτή την περίπτωση, ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι πραγματικά ένας χώρος κατανομών στο Ω, εφ'οσον είναι ο δυϊκός ενός χώρου που έχει τον $C_0^\infty(\Omega)$ ως πυκνό υποσύνολό του*

1.6 Ο χώρος H^k και ο κλασματικός τελεστής Laplace

Ορισμός 1.6.1 *(Λαπλασιανή μιας συνάρτησης) Έστω Ω ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ και $u \in C^2(\Omega)$. Η Λαπλασιανή της συνάρτησης u συμβολίζεται με Δu και ορίζεται από την:*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} \tag{1.6.20}$$

Ορισμός 1.6.2 *(Εξίσωση Laplace) Έστω Ω ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε εξίσωση Laplace ονομάζεται η εξίσωση*

$$\Delta u = 0 \tag{1.6.21}$$

Σε αυτή την ενότητα θα εστιάσουμε στην περίπτωση που $p = 2$. Αυτή είναι πολύ σημαντική περίπτωση εξαίτίας του ότι οι κλασματικοί χώροι Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ και $W_0^{k,2}(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert. Οι χώροι $W^{k,2}(\Omega)$ και $W_0^{k,2}(\Omega)$ συμβολίζονται συνήθως $H^k(\Omega)$ και $H_0^k(\Omega)$, αντίστοιχα. Επιπλέον οι χώροι $H^k(\Omega)$ και $H_0^k(\Omega)$ σχετίζονται άμεσα με το κλασματικό τελεστή Laplace $(-\Delta)^k$ (βλέπε Πρόταση 1.7.6) ο οποίος για κάθε $u \in \mathcal{S}$ και $k \in (0, 1)$ ορίζεται ως εξής

Ορισμός 1.6.3 *Έστω $u \in \mathcal{S}$ και $k \in (0,1)$ τότε ορίζουμε ως κλασματικό τελεστή Laplace $(-\Delta)^k$ τον*

$$\begin{aligned}(-\Delta)^k u(x) &= C(n,k) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}} dy \\ &= C(n,k) \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}} dy \qquad (1.6.22)\end{aligned}$$

P.V. είναι η σύντμηση που χρησιμοποιείται για την έκφραση: 'υπό την έννοια της πρωταρχικής τιμής ' και ισούται όπως φαίνεται και από την (1.6.22) με

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}} dy = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}} dy$$

Επίσης $C(n,k)$ είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από το k και δίνεται από τον τύπο:

$$C(n,k) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2k}} d\zeta \right)^{-1} \qquad (1.6.23)$$

Παρατήρηση 1.6.4 *Εξαιτίας της ιδιομορφίας του πυρήνα, το δεξιό μέρος της (1.6.22) δεν είναι καλώς ορισμένο γενικά (δηλαδή μπορεί να μην υπάρχει το όριο). Στην περίπτωση που το $k \in (0,1/2)$ το ολοκλήρωμα στην (1.6.22) δεν είναι ιδιόμορφο κοντά στο x. Πράγματι για κάθε $u \in \mathcal{S}$, και $R > 0$, έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy \leq ||\nabla u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy + 2||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R^c(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2k}} dy \qquad (1.6.24)$$

Ας διευκρινίσουμε σε αυτό το σημείο ότι η σχέση (1.6.24)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy \leq ||\nabla u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy + 2||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R^c(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2k}} dy$$

ισχύει, διότι γνωρίζουμε ότι για κάθε $u \in \mathcal{S}$ ισχύει ότι

$$|u(x)-u(y)| \leq ||\nabla u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x-y|, \ \forall x, y \qquad (1.6.25)$$

και

$$|u(x)-u(y)| \leq 2||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \ \forall x, y \qquad (1.6.26)$$

Η (1.6.25) χρησιμοποιείται στην $B_R(x)$ και η (1.6.26) χρησιμοποιείται στο $B_R^c(x)$.

Άρα η (1.6.24) θα ισχύει διότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy = \int_{B_R(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy + \int_{B_R^c(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}} dy \qquad (1.6.27)$$

Λόγω των (1.6.25) και (1.6.26) η (1.6.27) θα γίνει

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}}dy &\leq ||\nabla u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B_R(x)}\frac{|x-y|}{|x-y|^{n+2k}}dy+\int_{B_R^c(x)}\frac{2||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|x-y|^{n+2k}}dy\\ &= ||\nabla u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B_R(x)}\frac{|x-y|}{|x-y|^{n+2k}}dy+2||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B_R^c(x)}\frac{1}{|x-y|^{n+2k}}dy\end{aligned}$$

οπότε αποδείξαμε την (1.6.24).

Άρα τώρα η (1.6.24) γίνεται

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2k}}dy &\leq C\Big(\int_{B_R(x)}\frac{1}{|x-y|^{n+2k-1}}dy+\int_{B_R^c(x)}\frac{1}{|x-y|^{n+2k}}dy\Big)\\ &= C_n\Big(\int_{S^{n-1}}\int_0^R\frac{1}{r^{n+2k-1}}r^{n-1}drdS(w)\\ &\quad+\int_{S^{n-1}}\int_R^{+\infty}\frac{1}{r^{n+2k}}r^{n-1}drdS(w)\Big)\\ &= C_n\Big(\int_{S^{n-1}}\int_0^R\frac{1}{r^{2k}}drdS(w)\\ &\quad+\int_{S^{n-1}}\int_R^{+\infty}\frac{1}{r^{2k+1}}drdS(w)\Big)\\ &= C_n^*\Big(\int_0^R\frac{1}{r^{2k}}dr+\int_R^{+\infty}\frac{1}{r^{2k+1}}dr\Big)<+\infty\end{aligned}$$

όπου C_n^* είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται από τη διάσταση, από την L^∞-νορμα της u και από την L^∞-νορμα της ∇u.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα δείχνοντας ότι το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα της (1.6.22) μπορεί να γραφεί ως ένα διαφορικό πηλίκο δεύτερης τάξης.

Λήμμα 1.6.5 *Έστω ότι $k\in(0,1)$ και $(-\Delta)^k$ είναι ο κλασματικός τελεστής Laplace όπως ορίστηκε στην (1.6.22). Τότε για κάθε $u\in\mathcal{S}$, έχουμε ότι*

$$(-\Delta)^k u(x)=-\frac{1}{2}C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}dy,\ \forall x\in\mathbb{R}^n \tag{1.6.28}$$

Απόδειξη. Από την σχέση (1.6.22) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(-\Delta)^k u(x) &= C(n,k)P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2k}}dy\\ &= -C(n,k)P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{n+2k}}dy\end{aligned} \tag{1.6.29}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, χρησιμοποιώντας τον τύπο $z = y - x$, η (1.6.29) θα γίνει

$$(-\Delta)^k u(x) = -C(n,k)P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \tag{1.6.30}$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας $-\tilde{z} = z$ η (1.6.30) γίνεται

$$(-\Delta)^k u(x) = -C(n,k)P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2k}} d\tilde{z} \tag{1.6.31}$$

Άρα από τις (1.6.30), (1.6.31) έπεται ότι

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz = P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2k}} d\tilde{z} \tag{1.6.32}$$

Όμως

$$\begin{aligned} 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \\ &\quad + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \end{aligned} \tag{1.6.33}$$

Όμως λόγω (1.6.32) η (1.6.33) θα γίνει:

$$\begin{aligned} 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \\ &\quad + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z}) - u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2k}} d\tilde{z} \end{aligned} \tag{1.6.34}$$

Τώρα αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (1.6.34) θέσουμε $\tilde{z} = z$, η (1.6.34) θα γίνει:

$$\begin{aligned} 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \\ &\quad + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \\ &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) + u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \end{aligned} \tag{1.6.35}$$

Ξαναγυρίζοντας τώρα στην (1.6.30) λόγω και της (1.6.35) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^k u(x) &= -C(n,k)P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \\ &= -\frac{1}{2}C(n,k)\left(2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2k}} dz\right) \\ &- \frac{1}{2}C(n,k)P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) + u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{n+2k}} dz \end{aligned} \tag{1.6.36}$$

Τώρα αν στην (1.6.36) θέσουμε $z = y$ η (1.6.36) θα γίνει:

$$(-\Delta)^k u(x) = -\frac{1}{2}C(n,k)P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}dy \tag{1.6.37}$$

Η (1.6.28) που θέλουμε να αποδείξουμε μοιάζει με την (1.6.37) που έχουμε μέχρι στιγμής αποδείξει.

Μόνο που στην (1.6.28) δεν υπάρχει το $P.V.$ που υπάρχει στην (1.6.37). Άρα θα πρέπει να απαλοιφθεί το $P.V.$ από την (1.6.37) ώστε να μπορέσουμε να φθάσουμε στην (1.6.28) τελικά.

Γι' αυτό το σκοπό θα αποδείξουμε πρώτα ότι

$$\left|\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}\right| \leq C\frac{||D^2u||_{L^\infty}}{|y|^{n+2k-2}} \tag{1.6.38}$$

Απόδειξη της (1.6.38): ένα δεύτερης τάξης ανάπτυγμα Taylor δίνει ότι:

$$\begin{cases} u(x+y) = u(x) + \nabla u \cdot y + A(x,y) \\ u(x-y) = u(x) - \nabla u \cdot y + B(x,y) \end{cases} \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.6.39}$$

όπου

$$\begin{cases} |A(x,y)| \leq ||D^2u||_{L^\infty}|y|^2 \\ |B(x,y)| \leq ||D^2u||_{L^\infty}|y|^2 \end{cases} \tag{1.6.40}$$

Άρα θα πάρουμε ότι

$$\begin{aligned} \left|\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}\right| &= \left|\frac{[u(x)+\nabla u(x)\cdot y + A(x,y)]}{|y|^{n+2k}}\right. \\ &\quad \left.+\frac{[u(x)-\nabla u(x)\cdot y + B(x,y)]-2u(x)}{|y|^{n+2k}}\right| \\ &= \left|\frac{[A(x,y)+B(x,y)]}{|y|^{n+2k}}\right| \\ &\leq C\frac{||D^2u||_{L^\infty}|y|^2}{|y|^{n+2k}} \\ &= C\frac{||D^2u||_{L^\infty}}{|y|^{n+2k-2}} \end{aligned}$$

οπότε σ' αυτό το σημείο απεδείχθη η (1.6.38).

Η συνάρτηση $|y|^{-n-2k+2}$ ολοκληρώνεται κοντά στο $y = 0$ (για κάθε $k \in (0,1)$). Γι' αυτό, εφόσον $u \in \mathcal{S}$, μπορούμε να απαλλαχθούμε απο το P.V. και να φτάσουμε στην τελική μας σχέση (1.6.28). Τώρα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη του Λήμματος 1.6.5.

1.7 Μια προσέγγιση μέσω του μετασχηματισμού Fourier

Σ' αυτήν την ενότητα, θα πάρουμε $p = 2$ και θα λάβουμε υπ' όψιν μας έναν εναλλακτικό ορισμό του χώρου $H^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier.

Συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε ως $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ για $k > 0$ τον

$$\hat{H}^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2k})|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty\} \tag{1.7.41}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ορισμός, σε αντίθεση με εκείνους στις (1.4.8), (1.4.9) ισχύει επίσης για κάθε πραγματικό αριθμό $k \geq 1$ και όχι μόνο για $0 < k < 1$.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε έναν αναλογό ορισμό του $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ και στην περίπτωση όπου $k < 0$ δηλαδή

Ορισμός 1.7.1 *Ορίζουμε ως* $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ *για* $k < 0$ *τον*

$$\hat{H}^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty\}$$

Μολονότι σ' αυτήν την περίπτωση ο χώρος $\hat{H}^k(\mathbb{R}^n)$ δεν αποτελεί υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R}^n)$ και, εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier, πρέπει να ξεκινήσουμε από ένα στοιχείο του $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, (βλέπε παρατήρηση 1.5.5).

Ο ορισμός του χώρου $\hat{H}^k(\mathbb{R}^n)$ στην (1.7.41) ισοδυναμεί με τον ορισμό του ιδίου χώρου όπως δόθηκε στην (1.4.8) όπως θα αποδειχθεί στην προσεχή Πρόταση 1.7.4. Πρώτα όμως θα αποδείξουμε ότι ο κλασματικός τελεστής Laplace $(-\Delta)^k$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας ψευδο-διαφορικός τελεστής του συμβόλου $|\xi|^{2k}$.

Πρόταση 1.7.2 *Έστω* $k \in (0, 1)$ *και έστω ότι* $(-\Delta)^k : \mathcal{S} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *είναι ο κλασματικός τελεστής Laplace όπως ορίστηκε στην (1.6.22).*

Τότε, για κάθε $u \in \mathcal{S}$, *έχουμε*

$$(-\Delta)^k u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2k}(\mathcal{F}u)), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.7.42}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.6.5, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}u$ το γραμμικό τελεστή της σχέσης (1.6.28), δηλαδή

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{2}C(n, k) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y) + u(x - y) - 2u(x)}{|y|^{n+2k}} dy$$

Έστω $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $s(\xi) = |\xi|^{2k}$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}(s(\mathcal{F}u)) \tag{1.7.43}$$

όπου με ξ σημειώνουμε την μεταβλητή συχνότητας.

Γνωρίζουμε ότι $u \in \mathcal{S}$. Αρα για την $u(x)$ ισχύει ότι

$$|D^a u(x)| \leq C_{a,k} \frac{1}{1+|x|^k}$$

Οπότε για $a = 2$ παίρνουμε

$$|D^2 u(x)| \leq C_{2,k} \frac{1}{1+|x|^k}$$

Άρα

$$\sup_{y \in B(x,1)} |D^2 u(y)| \leq C_{2,k} \sup_{y \in B(x,1)} \frac{1}{1+|y|^k} \tag{1.7.44}$$

Όμως

$$C_{2,k} \sup_{y \in B(x,1)} \frac{1}{1+|y|^k} \leq C_{2,k} \frac{C_1}{1+|x|^k} \tag{1.7.45}$$

διότι αφού $|y-x| < 1$ έπεται ότι $|x| < |y| + 1$ και κατ' επέκταση

$$|x|^k < (|y|+1)^k \leq c(1+|y|^k)$$

Οπότε

$$1 + |x|^k \leq c_1(1+|y|^k)$$

Άρα

$$\frac{1}{1+|y|^k} \leq \frac{c_1}{1+|x|^k}$$

Συνεπώς

$$C_{2,k} \sup_{y \in B(x,1)} \frac{1}{1+|y|^k} \leq C_{2,k} \frac{c_1}{1+|x|^k}$$

Έστω τώρα ότι

$$F(x,y) = \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2k}}$$

Θα αποδείξουμε ότι $|F(x,y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.
(i) Για $|y| \leq 1$ έχουμε ότι: Λόγω της σχέσης (1.6.38)

$$|F(x,y)| \leq C \frac{\sup_{B(x,1)} |D^2 u|}{|y|^{n+2k-2}} \tag{1.7.46}$$

Λόγω τώρα των σχέσεων (1.7.44) και (1.7.45) η (1.7.46) γίνεται

$$|F(x,y)| \leq C' \frac{1}{|y|^{n+2k-2}} \frac{1}{1+|x|^{n+1}}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_{|y|\leq 1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x,y)|dxdy &\leq C'\Big(\int_{|y|\leq 1}\frac{1}{|y|^{n+2k-2}}dy\Big)\times\\ &\times\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}dx\Big)<+\infty\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{|y|\leq 1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x,y)|dxdy<+\infty \tag{1.7.47}$$

(ii) Για $|y|>1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x,y)|dxdy &= \int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}\right|dxdy\\ &\leq \int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)|+|u(x-y)|+2|u(x)|}{|y|^{n+2k}}dxdy\end{aligned} \tag{1.7.48}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)|}{|y|^{n+2k}}dxdy &\stackrel{x+y=z}{=} \int_{|y|>1}\int_{z\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(z)|}{|y|^{n+2k}}dzdy\\ &= \Big(\int_{z\in\mathbb{R}^n}|u(z)|dz\Big)\Big(\int_{|y|>1}\frac{dy}{|y|^{n+2k}}\Big)<+\infty\end{aligned} \tag{1.7.49}$$

Ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(x-y)|}{|y|^{n+2k}}dxdy &\stackrel{x-y=t}{=} \int_{|y|>1}\int_{t\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(t)|}{|y|^{n+2k}}dtdy\\ &= \Big(\int_{t\in\mathbb{R}^n}|u(t)|dt\Big)\Big(\int_{|y|>1}\frac{dy}{|y|^{n+2k}}\Big)<+\infty\end{aligned} \tag{1.7.50}$$

Ακόμη

$$\int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|}{|y|^{n+2k}}dxdy=\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|dx\Big)\Big(\int_{|y|>1}\frac{dy}{|y|^{n+2k}}\Big)<+\infty \tag{1.7.51}$$

Άρα η (1.7.48) λόγω των σχέσεων (1.7.49), (1.7.50) και (1.7.51) μας δίνει ότι

$$\int_{|y|>1}\int_{x\in\mathbb{R}^n}|F(x,y)|dxdy<+\infty \tag{1.7.52}$$

Λόγω τώρα των (1.7.47) και (1.7.52) παίρνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{R^n}|F(x,y)|dxdy = \int_{|y|\leq 1}\int_{x\in R^n}|F(x,y)|dxdy + \int_{|y|>1}\int_{x\in R^n}|F(x,y)|dxdy < +\infty$$

Οπότε αφού

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{R^n}|F(x,y)|dxdy < +\infty$$

έπεται ότι

$$|F(x,y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$$

όπως θέλαμε να αποδείξουμε αρχικά.

Συνεπώς, από το θεώρημα των Fubini-Tonelli, μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα ως προς y, με μετασχηματισμό Fourier ως προς x.

Γι΄ αυτό, εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Fourier ως προς την μεταβλητή x στην σχέση που προηγείται της (1.7.43) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{L}u)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}(\mathcal{L}u)(x)dx \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{1}{2}C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}\times \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}dydx \\
&\overset{\text{Fub.-Ton.}}{=} -\frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2k}}\times \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}dxdy \\
&= -\frac{1}{2}C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathcal{F}[u(x+y)+u(x-y)-2u(x)](\xi)}{|y|^{n+2k}}dy \\
&= -\frac{1}{2}C(n,k)\times \\
&\quad \times\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathcal{F}[u(x+y)](\xi)+\mathcal{F}[u(x-y)](\xi)-\mathcal{F}[2u(x)](\xi)}{|y|^{n+2k}}dy
\end{aligned}$$

Όμως για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[u(x+y)](\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}u(x+y)dx \\
&\overset{x+y=z}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z-y)\cdot\xi}u(z)dz \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\xi}u(z)dz \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\xi}u(z)dz \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}(\mathcal{F}u)(\xi)
\end{aligned}$$

Όμοίως για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[u(x-y)](\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}u(x-y)dx \\
&\overset{x-y=t}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y+t)\cdot\xi}u(t)dt \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot\xi}u(t)dt \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot\xi}u(t)dt \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(\mathcal{F}u)(\xi)
\end{aligned}$$

Άρα ύστερα από όλα αυτά έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{L}u)(\xi) &= -\frac{1}{2}C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}(\mathcal{F}u)(\xi)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(\mathcal{F}u)(\xi)-2(\mathcal{F}u)(\xi)}{|y|^{n+2k}}dy \\
&= -\frac{1}{2}C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}-2}{|y|^{n+2k}}dy(\mathcal{F}u)(\xi) \qquad (1.7.53)
\end{aligned}$$

Όμως

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y} = \cos(\xi\cdot y) + \mathrm{i}\sin(\xi\cdot y)$$

και

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot y} = \cos(-\xi\cdot y) + \mathrm{i}\sin(-\xi\cdot y) = \cos(\xi\cdot y) - \mathrm{i}\sin(\xi\cdot y)$$

άρα

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot y} - 2 = 2\cos(\xi\cdot y) - 2 = -2(1-\cos(\xi\cdot y))$$

Άρα η (1.7.53) θα γίνει

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u)(\xi) = C(n,k)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{n+2k}}dy((\mathcal{F}u)(\xi)) \qquad (1.7.54)$$

Οπότε, για να προκύψει η (1.7.43), είναι αρκετό να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{n+2k}}dy = C(n,k)^{-1}|\xi|^{2k} \qquad (1.7.55)$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι, εάν $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2k}} \le \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{n+2k}} \le \frac{1}{|\zeta|^{n+2k-2}}$$

κοντά στο $\zeta = 0$.

Έτσι το $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2k}}d\zeta$ είναι πεπερασμένο και θετικό.

Τώρα ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\mathcal{I}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2k}} dy$$

Η $\mathcal{I}$ είναι περιστροφικά αμετάβλητη, δηλαδή

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(|\xi| e_1) \tag{1.7.56}$$

όπου το e_1 παριστάνει το πρώτο διάνυσμα κατεύθυνσης στον $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι, όταν $n = 1$, μπορούμε να συμπεράνουμε την (1.7.56) εξ' αιτίας του ότι $\mathcal{I}(-\xi) = \mathcal{I}(\xi)$.
Όταν $n \geq 2$, θεωρούμε περιστροφή R για την οποία $R(|\xi|e_1) = \xi$ και παριστάνουμε με R^T την συζυγή της R. Κατόπιν αντικαθιστώντας $\tilde{y} = R^T y$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(R(|\xi|e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2k}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos((|\xi|e_1) \cdot (R^T y))}{|y|^{n+2k}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(|\xi|e_1 \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{n+2k}} d\tilde{y} \\
&= \mathcal{I}(|\xi|e_1)
\end{aligned}$$

οπότε απεδείχθη η (1.7.56) και για $n \geq 2$.

Άρα τώρα αντικαθιστώντας $\zeta = |\xi| y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\xi) &= \mathcal{I}(|\xi|e_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(|\xi| y_1)}{|y|^{n+2k}} dy \\
&= \frac{1}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{||\zeta|/|\xi||^{n+2k}} d\zeta \\
&= C(n,k)^{-1} |\xi|^{2k}
\end{aligned}$$

όπου

$$C(n,k)^{-1} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2k}} d\zeta$$

από την (1.6.23). Οπότε και απεδείχθη η (1.7.55). Άρα δείξαμε ότι

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}u) = |\xi|^{2k} (\mathcal{F}u)$$

άρα

$$(-\Delta)^k u = \mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2k}(\mathcal{F}u)), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

το οποίο και έπρεπε να αποδείξουμε. ■

Παρατήρηση 1.7.3 *Η Πρόταση 1.7.2 είναι πολύ σημαντική και εξηγεί τον Ορισμό 1.6.3 της $(-\Delta)^k$. Πράγματι είναι γνωστό από την ανάλυση Fourier ότι*

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^2\mathcal{F}$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ουσιαστικά ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}$ διαγωνοποιεί την Λαπλασιανή $-\Delta$, υπό την έννοια ότι την μετασχηματίζει στον πολλαπλασιαστικό τελεστή $g(\xi) \mapsto |\xi|^2 g(\xi)$. Άρα η Πρόταση 1.7.2 δείχνει ότι ο Ορισμός 1.6.3 της $(-\Delta)^k$ συμπίπτει με τον ορισμό μέσω Συναρτησιακού Λογισμού (Functional Calculus).

Πρόταση 1.7.4 *Έστω $k \in (0,1)$. Τότε ο ορισμός του κλασματικού χώρου Sobolev $H^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ όπως παρουσιάστηκε στην (1.4.8) ισοδυναμεί με τον ορισμό του ίδιου χώρου $\hat{H}^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ όπως δόθηκε στην (1.7.41). Συγκεκριμένα, για κάθε $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$*

$$[u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2k}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \tag{1.7.57}$$

όπου η σταθερά $C(n,k)$ ορίστηκε στην (1.6.23).

Απόδειξη. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής χρησιμοποιώντας τον τύπο $z = x - y$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
[u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}dx\right)dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{n+2k}}dzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{u(z+y)-u(y)}{|z|^{\frac{n}{2}+k}}\right|^2 dy\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\left|\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+k}}\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\left|\mathcal{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+k}}\right)\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dz
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του Plancherel

$$||\mathcal{F}u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.7.58}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την σχέση (1.7.55) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left|\mathcal{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+k}}\right)\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dz &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{i\xi\cdot z}-1|^2}{|z|^{n+2k}}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-\cos(\xi\cdot z)}{|z|^{n+2k}}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 dz d\xi \\
&= 2c_1\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2k}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

όπου η σταθερά c_1 ισούται με

$$c_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2k}} d\zeta = C(n,k)^{-1}$$

Έτσι απέδειχθη ότι

$$[u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi$$

όπως θέλαμε στην αρχή. ■

Παρατήρηση 1.7.5 *Η ισοδυναμία των χώρων H^k και $\hat{H}^k$ που απεδείχθη στην πρόταση 1.7.4 στηρίχτηκε στον τύπο του Plancherel.*

Τώρα, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την σχέση μεταξύ του κλασματικού τελεστή Laplace $(-\Delta)^k$ και του κλασματικού χώρου Sobolev H^k.

Πρόταση 1.7.6 *Έστω $k \in (0,1)$ και $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$[u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,k)^{-1} ||(-\Delta)^{k/2} u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.7.59}$$

όπου $C(n,k)$ η σταθερά που ορίστηκε στην (1.6.23).

Απόδειξη. Λόγω των σχέσεων (1.7.58), (1.7.42) και (1.7.57) έπεται ότι

$$\begin{aligned} ||(-\Delta)^{k/2} u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= ||\mathcal{F}(-\Delta)^{k/2} u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= |||\xi|^k \mathcal{F}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2} C(n,k) [u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Άρα από εδώ ακολουθεί ότι

$$[u]^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,k)^{-1} ||(-\Delta)^{k/2} u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

την οποία και έπρεπε να αποδείξουμε. ■

Κεφάλαιο 2

Ανισότητες Hardy για τον τελεστή Laplace

2.1 Ιδιότητες της συνάρτησης απόσταση

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο ορίζοντας την συνάρτηση απόσταση

Ορισμός 2.1.1 *Έστω Ω ένα χωρίο του χώρου $\mathbb{R}^n$, το οποίο έχει μη κενό σύνορο $\partial\Omega$. Τότε ορίζουμε ως συνάρτηση απόσταση την*

$$d(x) = dist(x, \partial\Omega) = \inf\{|x - z| : z \in \partial\Omega\},\ \forall x \in \Omega \tag{2.1.1}$$

α) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $d(x)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής, άρα $d \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ (βλ. [E], Θεώρημα 4, Παράγραφος 5.8).

Επομένως η $d(x)$ είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη στο Ω και η κλίση της ισούται με την ασθενή της κλίση σχεδόν παντού.

Μάλιστα, εύκολα αποδεικνύεται ότι η σταθερά Lipschitz είναι ίση με 1, που σημαίνει ότι $|\nabla d| \le 1$ σχεδόν παντού στο Ω.

β) Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι $|\nabla d| = 1$, σχεδόν παντού στο Ω.

Επιπλέον, αν $x \in \Omega$ είναι σημείο όπου η d παραγωγίζεται, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $y \in \partial\Omega$ με $d(x) = |x - y|$.

2.2 Ανισότητα Hardy σε φραγμένο και κυρτό χωρίο με C^2 σύνορο

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω ότι Ω είναι ένα φραγμένο, κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο τάξεως C^2. Τότε για κάθε $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ισχύει ότι:*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{d^2} dx \tag{2.2.2}$$

Απόδειξη. Προτού γίνει η απόδειξη θα χρειαστεί να αναφερθούμε σε κάποια επιπλέον θεωρητικά στοιχεία.

Λήμμα 2.2.2 *Έστω ότι U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ότι $u \in L^1_{loc}(U)$ είναι μια συνάρτηση, για την οποία υπάρχουν οι ασθενείς μερικές παράγωγοι πρώτης τάξεως. Τότε και για τις συναρτήσεις $u_+, u_-, |u|$ υπάρχουν οι ασθενείς μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης και ισχύει*

$$\nabla u_+ = \begin{cases} \nabla u, \ u > 0 \\ 0, \ u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u_- = \begin{cases} -\nabla u, \ u < 0 \\ 0, \ u \geq 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u, \ u > 0 \\ 0, \ u = 0 \\ -\nabla u, \ u < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. (βλ. [E], σελ. 292).

Πρόταση 2.2.3 *(Ανισότητα του Hölder) Έστω $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (συζυγείς δείκτες). Έστω επίσης ότι η τριάδα $(X, \mathcal{U}, \mu)$ αποτελεί έναν χώρο μέτρου, δηλαδή το X είναι ένα μη κενό σύνολο, το $\mathcal{U}$ αποτελεί μια $\sigma-$άλγεβρα επί του X, και $\mu : \mathcal{U} \to [0, +\infty)$ είναι το μέτρο στο $\mathcal{X}$ με την ιδιότητα $\mu(\emptyset) = 0$ καθώς και αυτήν της αριθμητικής προσθετικότητας. Αν υποθέσουμε επίσης ότι $f \in L^p(X, \mathcal{U}, \mu)$ και $g \in L^q(X, \mathcal{U}, \mu)$, τότε $fg \in L^1(X, \mathcal{U}, \mu)$ και μάλιστα ισχύει*

$$||fg||_{1,X} \leq ||f||_{p,X} ||g||_{q,X}$$

Πρόταση 2.2.4 *(Ανίσοτητα Young) Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g, το σύνολο X καθώς επίσης και οι p, q ικανοποιούν τις ίδιες προϋποθέσεις όπως και στην Πρόταση 2.2.3. Τότε η παρακάτω σχέση αποτελεί την ανισότητα Young δηλαδή*

$$||f||_{p,X} ||g||_{q,X} \leq \frac{1}{p} ||f||^p_{p,X} + \frac{1}{q} ||g||^q_{q,X}$$

Λήμμα 2.2.5 *Έστω $\mathcal{T}$ ένα διανυσματικό πεδίο στο Ω. Για κάθε $u \in C_c^\infty$ ισχύει*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq -\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2) dx - \int_\Omega |\mathcal{T}|^2 |u|^2 dx \tag{2.2.3}$$

εφόσον έχουν νόημα τα ολοκληρώματα του δεύτερου μέλους της (2.2.3).

Απόδειξη. Είναι

$$-\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2) dx \leq \int_\Omega |\mathcal{T}||\nabla(|u|^2)| dx \tag{2.2.4}$$

σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.2, θα ισχύει

$$|\nabla(|u|^2)| = |\nabla(|u|^2)| = |\nabla(u^2)|$$

σχεδόν παντού στο Ω, οπότε η (2.2.4) γίνεται

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2) dx &\leq \int_\Omega |\mathcal{T}||\nabla(u^2)| dx \\ &= 2\int_\Omega |\mathcal{T}||u||\nabla u| dx \\ &\leq 2\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |\mathcal{T}|^2 |u|^2 |dx\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

λόγω της ανισότητας Hölder (όπου εδώ η ανισότητα Hölder εφαρμόστηκε για $p = q = 2$,$f(x) = |\nabla u(x)|$ και $g(x) = |\mathcal{T}(x)||u(x)|^{p-1} = |\mathcal{T}(x)||u(x)|$). Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα Young παίρνουμε ότι

$$\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |\mathcal{T}|^2 |u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathcal{T}|^2 |u|^2 dx \tag{2.2.6}$$

συνεπώς, η (2.2.5) λόγω της (2.2.6) γίνεται

$$-\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2) dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\mathcal{T}|^2 |u|^2 dx \tag{2.2.7}$$

από την οποία έπεται η (2.2.3). ■

Πρόταση 2.2.6 *Έστω Ω κυρτό σύνολο και συνάρτηση $u \in W^{1,1}(\Omega)$ με $u \geq 0$ και $supp(u)$ συμπαγές υποσύνολο του Ω. Τότε*

$$\int_\Omega \nabla d \cdot \nabla u dx \geq 0$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται από το γεγονός ότι η $d(x)$ είναι κοίλη (αποδεικνύεται εύκολα) σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.3.2 του Evans L. C.-Gariepy R.F., Measure Theory and fine properties of functions, CRC Press 1992. ■

Απόδειξη Θεωρήματος 2.2.1 Τώρα είμαστε σε θέση να ξεκινήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1.

Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\mathcal{T} = -\frac{1}{2}\frac{\nabla d}{d}$ στο Ω οπότε

$$-\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla d \cdot \Big(d^{-1}\nabla(|u|^2)\Big)dx$$

Από την Πρόταση 1.2.7, έπεται ότι

$$\nabla(d^{-1}|u|^2) = |u|^2\nabla(d^{-1}) + d^{-1}\nabla(|u|^2)$$

ασθενώς στο Ω. Έτσι,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2)dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla d \cdot \Big(\nabla(d^{-1}|u|^2) - |u|^2\nabla(d^{-1})\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla d \cdot \nabla(d^{-1}|u|^2)dx \\ &\quad -\frac{1}{2}(-1)\int_\Omega |u|^2 d^{-2}|\nabla d|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{d^2}dx \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.6 και της ιδιότητας β) της συνάρτησης απόστασης d (δηλαδή $|\nabla d| = 1$).

Τώρα, λόγω του Λήμματος 2.2.5, παίρνουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\geq -\int_\Omega \mathcal{T} \cdot \nabla(|u|^2)dx - \int_\Omega |\mathcal{T}|^2|u|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{d^2}dx - \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u|^2}{d^2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u|^2}{d^2}dx \end{aligned}$$

οπότε απεδείχθη η (2.2.2), όπως ήταν αρχικά το ζητούμενο. ■

Κεφάλαιο 3

Ανισότητες Hardy για την κλασματική Λαπλασιανή

Ξεκινούμε το κεφάλαιο αυτό διατυπώνοντας μια εικασία των Bodgan και Dyda [BD] που αφορά τις ανισότητες Hardy για την κλασματική Λαπλασιανή.

Έχει αποδειχθεί στο [BD] ότι για κάθε συνάρτηση f με φορέα υποσύνολο του ημιχώρου

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$$

ισχύει η

$$\frac{1}{2}\int_{H^n \times H^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a} \int_{H^n} \frac{|f(x)|^2}{x_n^a} dx \tag{3.0.1}$$

Εδώ $0 < a < 2$ και

$$K_{n,a} = \pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma((1+a)/2)}{\Gamma((n+a)/2)} \frac{1}{a} \left\{ \frac{2^{1-a}}{\sqrt{\pi}} \Gamma((2-a)/2)\Gamma((1+a)/2) - 1 \right\} \tag{3.0.2}$$

είναι η βέλτιστη σταθερά. Παρατηρούμε ότι $K_{n,1} = 0$ και $K_{n,a} > 0$ για $a \neq 1$

Έχει εικασθεί στο [BD] ότι για $1 < a < 2$ αυτή η ανισότητα συνεχίζει να ισχύει με την ίδια σταθερά για κάθε κυρτό χωρίο Ω για συναρτήσεις $f \in C_c^\infty(\Omega)$.

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{d(x)^a} dx \tag{3.0.3}$$

Για $0 < a < 1$ η ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει για φραγμένα σύνολα (βλεπε, π.χ. [D]). Βέλτιστες ανισότητες Hardy ανάλογες τις (3.0.3) αλλά για L^p νόρμες κλίσεων συναρτήσεων είναι γνωστές. Το πρώτο αποτέλεσμα οφείλεται στον Davies [D1] για την περίπτωση $p = 2$. Η περίπτωση για αυθαίρετο p αναλύεται στα [MMP,MS]. Για την ίδια περίπτωση, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το [D3]. Ας προσθέσουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα έχουν γενικευτεί αξιόλογα στο [BFT].

Έστω Ω είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ με όχι κενό σύνορο. Η επόμενη θεωρία έχει ληφθεί από τον Davies [D2].

Ορισμός 3.0.7 *Έστω μια διεύθυνση $w \in S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1\}$ δηλαδή το w ανήκει στην μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$d_{w,\Omega}(x) = \min\{|t| : x + tw \notin \Omega\} \tag{3.0.4}$$

Ορισμός 3.0.8 *Επιπλέον ορίζουμε την συνάρτηση*

$$\delta_{w,\Omega}(x) = \sup\{|t| : x + tw \in \Omega\} \tag{3.0.5}$$

Δηλαδή $\delta_{w,\Omega}(x)$ είναι η απόσταση από το x στο πιο μακρινό σημείο της τομής της γραμμής $x + tw$ και του χωρίου Ω.

Θέτουμε

$$\frac{1}{M_a(x)^a} = \frac{\int_{S^{n-1}} dw \left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)} + \frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)}\right)^a}{\int_{S^{n-1}} dw |w_n|^a} \tag{3.0.6}$$

Στην ισότητα (3.0.6) το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή μπορεί εύκολα να υπολογισθεί ότι ισούται με:

$$\int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a = 2\pi^{(n-1)/2}\frac{\Gamma((1+a)/2)}{\Gamma((n+a)/2)} \tag{3.0.7}$$

Αυτοί οι ορισμοί είναι ανάλογοι με εκείνους στο [D2] όπου οι εκτιμήσεις εκφράζονται με όρους της μορφής:

$$\frac{1}{m_2(x)^2} = \frac{\int_{S^{n-1}} dw \frac{1}{d_{w,\Omega}(x)^2}}{|S^{n-1}|/n}$$

Στην περίπτωση που το χωρίο Ω είναι κυρτό, η ποσότητα $M_a(x)$ μπορεί να ορισθεί με την βοήθεια των όρων $d(x)$ και $D(x)$, οι οποίοι ορίζονται ακολούθως:
Έστω $x \in \Omega$ αυθαίρετο, και z ένα σημείο στο σύνορο του Ω το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στο x. Άρα $d(x) = |x - z|$.

Γενικά μπορεί να υπάρχει παραπάνω από ένα σημείο z, στο σύνορο του Ω, που να βρίσκεται πιο κοντά στο x.

Κάθε τέτοιο σημείο z ορίζει ένα μοναδικό υπερεπίπεδο στήριξης P_z το οποίο είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στο Ω στο σημείο z. Αυτό ακολουθεί απ΄ το γεγονός ότι το διάνυσμα $x - z$ πρέπει να είναι κάθετο σε κάθε υπερεπίπεδο στήριξης γιατί αλλιώς το $z \in \partial\Omega$ δεν μπορεί να είναι το σημείο που βρίσκεται σε πιο κοντινή απόσταση απ΄ το x. Έτσι για κάθε $x \in \Omega$ συμπεριλαμβάνουμε μια οικογένεια υπερ-επιπέδων $\mathcal{P}_x$.

Για $P \in \mathcal{P}_x$ συμβολίζουμε με $S(P)$ το χωρίο μικρότερου πλάτους $D_{S(P)}$ που περιέχει το Ω και οριοθετείται απ΄ το P στη μία πλευρά και από ένα υπερεπίπεδο P' παράλληλο στο P από την άλλη

Αν το Ω είναι μη φραγμένο τότε ενδέχεται $D_{S(P)} = \infty$ οπότε σ΄ αυτή την περίπτωση, το τμήμα $S(P)$ που περιγράψαμε μπορεί να είναι ένας ημιχώρος.

Ορισμός 3.0.9 *Ορίζουμε ως $D(x)$ την:*

$$D(x) = \inf_{P \in \mathcal{P}_x} D_{S(P)} \tag{3.0.8}$$

Πρόταση 3.0.10 *Αν Ω κυρτό χωρίο τότε*

$$\frac{1}{M_a(x)^a} \geq \left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x) - d(x)} \right)^a \tag{3.0.9}$$

Απόδειξη. Έστω P ένα υπερεπίπεδο στήριξης και e_n ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο P. Προφανώς

$$d_{w,\Omega}(x) \leq d_{w,S(P)}(x), \quad \delta_{w,\Omega}(x) \leq \delta_{w,S(P)}(x) \tag{3.0.10}$$

Επίσης σημειώνουμε ότι

$$d_{w,S(P)}(x) + \delta_{w,S(P)}(x) = (MN)$$

είναι το μήκος του τμήματος που δίνεται από την τομή του χωρίου $S(P)$ με την γραμμή $x + tw$. Προβάλλοντας το τμήμα αυτό (το MN) πάνω στη γραμμή που είναι κάθετη στο $S(P)$ προκύπτει ότι:

$$d_{w,S(P)}(x)|w_n| = d(x), \quad \delta_{w,S(P)}(x)|w_n| = D_{S(P)} - d(x) \tag{3.0.11}$$

Παρατήρηση 3.0.11 *Αν $D_{S(P)} = +\infty$ τότε μπορεί να υπάρχουν διευθύνσεις w ώστε το μήκος του τμήματος (MN) να μην είναι πεπερασμένο.*

Συνεχίζοντας τώρα την απόδειξή μας και λαμβάνοντας υπόψιν τις (3.0.10) και (3.0.11) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)} \right. & + \left. \frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)} \right)^a \\
& \geq \left(\frac{1}{d_{w,S(P)}(x)} + \frac{1}{\delta_{w,S(P)}(x)} \right)^a \\
& = \left(\frac{|w_n|}{d(x)} + \frac{|w_n|}{D_{S(P)} - d(x)} \right)^a
\end{aligned}$$

Άρα

$$\left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)} + \frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)} \right)^a \geq |w_n|^a \left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D_{S(P)} - d(x)} \right)^a \tag{3.0.12}$$

όπου η (3.0.12) ισχύει για όλα τα $P \in \mathcal{P}_x$. Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα $P \in P_x$ και ολοκληρώνοντας την (3.0.12) στο $S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1\}$ που αποτελεί την μοναδιαία σφαίρα στο $\mathbb{R}^n$ προκύπτει ότι

$$\int_{S^{n-1}} dw \left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)} + \frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)} \right)^a \geq \int_{S^{n-1}} |w_n|^a \left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x) - d(x)} \right)^a dw \tag{3.0.13}$$

Άρα λόγω (3.0.13) η ποσότητα (3.0.6) θα γίνει:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_a(x)^a} &= \frac{\int_{S^{n-1}} dw \left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)} + \frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)}\right)^a}{\int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a} \\
&\geq \frac{\int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a \left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x)-d(x)}\right)^a}{\int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x)-d(x)}\right)^a \int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a}{\int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a} \\
&= \left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x)-d(x)}\right)^a
\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει η ανισότητα (3.0.9), την οποία και έπρεπε να αποδείξουμε. ■

Ύστερα από όλα αυτά μπορούμε να αναπτύξουμε το κύριό μας Θεώρημα.

Θεώρημα 3.0.12 *Έστω Ω ένα χωρίο με όχι κενό σύνορο και $1 < a < 2$. Υπάρχει $K_{n,a} > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε συνάρτηση $f \in C_c^\infty(\Omega)$:*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a}\int_\Omega \frac{|f(x)|^2}{M_a(x)^a}dx \tag{3.0.14}$$

Ειδικότερα, εάν Ω είναι ένα κυρτό χωρίο, τότε για κάθε συνάρτηση $f \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a}\int_\Omega |f(x)|^2 \left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x)-d(x)}\right)^a dx \tag{3.0.15}$$

όπου $d(x)$ είναι η απόσταση του $x \in \Omega$ απ΄ το σύνορο του Ω και η $D(x)$ ορίζεται στην (3.0.8). Η σταθερά $K_{n,a}$ είναι η καλύτερη δυνατή.

Οι Rupert Frank και Robert Seiringer έδωσαν έμφαση στο γεγονός ότι το Θεώρημα 3.0.12 μπορεί να γενικευθεί - άν και σε πιο ασθενή μορφή - αντικαθιστώντας τους εκθέτες 2 με $p > 1$. Ακριβέστερα έχουμε ότι

Θεώρημα 3.0.13 *(Ανισότητα Hardy για τον $(-\Delta)^k$) Έστω $1 < a < p < \infty$. Τότε για κάθε χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και για κάθε $f \in C_c^\infty(\Omega)$*

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq D_{n,p,a}\int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{m_a(x)^a}dx \tag{3.0.16}$$

όπου

$$\frac{1}{m_a(x)^a} = \frac{\int_{S^{n-1}} dw \left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)^a}\right)}{\int_{S^{n-1}} dw|w_n|^a} \tag{3.0.17}$$

και

$$D_{n,p,a} = 2\pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma((1+a)/2)}{\Gamma((n+a)/2)} \int_0^1 \frac{|1 - r^{(a-1)/p}|^p}{(1-r)^{1+a}} dr \qquad (3.0.18)$$

είναι η βέλτιστη σταθερά. Αν το χωρίο Ω είναι κυρτό τότε ισχύει η:

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq D_{n,p,a} \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{d(x)^a} dx \qquad (3.0.19)$$

Η σταθερά $D_{n,p,a}$ έχει υπολογιστεί στην [FS2], ως η βέλτιστη σταθερά για την ανισότητα Hardy για τον ημι-χώρο. Για $0 < p \leq 1$ η ανισότητα συνεχίζει να ισχύει (δες [D]), όμως η βέλτιστη σταθερά δεν είναι γνωστή.

Στην επόμενη ενότητα αποδεικνύουμε τις ανάλογες ανισότητες μίας διάστασης και κατόπιν βλέπουμε πως ένα επιχείρημα ισοστάθμισης οδηγεί στο γενικό αποτέλεσμα.

Στο τέλος της ενότητας 2 δείχνουμε πως μπορεί να αποκτηθεί το αποτέλεσμα για γενικές τιμές του p.

3.1 Το πρόβλημα στη μία διάσταση ($n = 1$)

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.12 θα βασιστεί ισχυρά στην επόμενη ανισότητα μίας διάστασης

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω $f \in C_c^\infty((\alpha, b))$. Τότε για όλα τα $1 < a < 2$ θα έχουμε ότι*

$$\frac{1}{2} \int_{(\alpha,b)\times(\alpha,b)} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}} dxdy \geq K_{1,a} \int_{(\alpha,b)} |f(x)|^2 \left(\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{b-x} \right)^a dx \quad (3.1.20)$$

Λήμμα 3.1.2 *Έστω f είναι οποιαδήποτε συνάρτηση στο $C_c^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$. Θεωρώντας την αντιστροφή $x \to \frac{1}{x}$ και θέτοντας $g(x) = I(f)(x) = |x|^{a-1} f(1/x)$ παίρνουμε ότι: $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ και*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}} dxdy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}} dxdy \qquad (3.1.21)$$

Απόδειξη. Για $\epsilon > 0$ θεωρούμε τις περιοχές

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x/y| > 1 + \epsilon\}$$

και

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y/x| > 1 + \epsilon\}$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές: $x \to \frac{1}{x}$ και $y \to \frac{1}{y}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2}{|(1/x)-(1/y)|^{1+a}}d(1/x)d(1/y) \\
&= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2}{\frac{|y-x|^{1+a}}{|x|^{1+a}|y|^{1+a}}}(-1/x^2)dx(-1/y^2)dy \\
&= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2}{|x-y|^{1+a}}\frac{|x|^{1+a}|y|^{1+a}}{|x|^2|y|^2}dxdy \\
&= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2}{|x-y|^{1+a}}|x|^{a-1}|y|^{a-1}dxdy
\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα $\int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2|x|^{a-1}|y|^{a-1}}{|x-y|^{1+a}}dxdy$ ισούται με

$$\begin{aligned}
\int_{R_1\cup R_2} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &+ \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)|^2(|x|^{a-1}|y|^{a-1}-|x|^{2(a-1)})}{|x-y|^{1+a}} \\
&+\int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/y)|^2(|x|^{a-1}|y|^{a-1}-|y|^{2(a-1)})}{|x-y|^{1+a}}dxdy
\end{aligned}$$

διότι θέτοντας

$$I_1 = \int_{R_1\cup R_2} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{R_1\cup R_2} \frac{||x|^{a-1}f(1/x)-|y|^{a-1}f(1/y)|^2}{|x-y|^{a+1}}dxdy \\
&= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|x|^{2(a-1)}f^2(1/x)+|y|^{2(a-1)}f^2(1/y)-2|x|^{a-1}f(1/x)|y|^{a-1}f(1/y)}{|x-y|^{a+1}}dxdy \\
&= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|x|^{2(a-1)}|f(1/x)|^2+|y|^{2(a-1)}|f(1/y)|^2-2|x|^{a-1}|y|^{a-1}f(1/x)f(1/y)}{|x-y|^{a+1}}dxdy
\end{aligned}$$

Επίσης θέτοντας

$$I_2 = \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)|^2(|x|^{a-1}|y|^{a-1}-|x|^{2(a-1)})+|f(1/y)|^2(|x|^{a-1}|y|^{a-1}-|y|^{2(a-1)})}{|x-y|^{1+a}}dxdy$$

βρίσκουμε ότι

$$I_2 = \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)|^2|x|^{a-1}|y|^{a-1}-|f(1/x)|^2|x|^{2(a-1)}+|f(1/y)|^2|x|^{a-1}|y|^{a-1}-|f(1/y)|^2|y|^{2(a-1)}}{|x-y|^{1+a}}dxdy$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
I_1+I_2 &= \int_{R_1\cup R_2} \frac{-2|x|^{a-1}|y|^{a-1}f(1/x)f(1/y)+|f(1/x)|^2|x|^{a-1}|y|^{a-1}+|f(1/y)|^2|x|^{a-1}|y|^{a-1}}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&= \int_{R_1\cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2}{|x-y|^{1+a}}|x|^{a-1}|y|^{a-1}dxdy
\end{aligned}$$

Άρα απεδείχθη ότι:

$$\int_{R_1 \cup R_2} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}} dxdy = \int_{R_1 \cup R_2} \frac{|f(1/x)-f(1/y)|^2 |x|^{a-1}|y|^{a-1}}{|x-y|^{1+a}} dxdy = I_1 + I_2$$

όμως από συμμετρία ύστερα από εναλλαγή των x και y παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_{R_1 \cup R_2} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}} dxdy &= \int_{R_1 \cup R_2} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}} dxdy \\ &+ 2\int_{R_1 \cup R_2} \frac{|f(1/x)|^2 (|x|^{a-1}|y|^{a-1} - |x|^{2(a-1)})}{|x-y|^{1+a}} dxdy\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Τώρα εάν θέσουμε $s = x/y$ το δεύτερο ολοκλήρωμα της (3.1.22) γράφεται ως:

$$\begin{aligned}&-\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} \frac{|f(1/x)|^2 (|x|^{a-1}|x/s|^{a-1} - |x|^{2(a-1)})}{|x-(x/s)|^{1+a}} \frac{|x|}{s^2} dxds = \\ &-\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} \left(\frac{|f(1/x)|^2 \frac{|x|^{2(a-1)}}{|s|^{a-1}}}{\frac{|x|^{1+a}|s-1|^{1+a}}{|s|^{1+a}}} - \frac{|f(1/x)|^2 |x|^{2(a-1)}}{\frac{|x|^{1+a}|s-1|^{1+a}}{|s|^{1+a}}} \right) \frac{|x|}{s^2} dxds = \\ &\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} -\left(\frac{|f(1/x)|^2 |x|^{a-3}|s|^2}{|1-s|^{1+a}} - \frac{|f(1/x)|^2 |x|^{a-3}|s|^{1+a}}{|1-s|^{1+a}} \right) \frac{|x|}{|s|^2} dxds = \\ &\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} \left(-\frac{|f(1/x)|^2 |x|^{a-2}}{|1-s|^{1+a}} + \frac{|f(1/x)|^2 |x|^{a-2}|s|^{a-1}}{|1-s|^{1+a}} \right) dxds = \\ &\int_{\mathbb{R}} |f(1/x)|^2 |x|^{a-2} dx \int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{a+1}} ds\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{a+1}} ds &= \int_{\{|s|>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{a+1}} ds \\ &+ \int_{\{(1/|s|)>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{a+1}} ds\end{aligned}$$

και ύστερα από αλλαγή της μεταβλητής $s \to \frac{1}{t}$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα βρίσκουμε ότι αυτό το άθροισμα εξαλείφεται.

Πραγματικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\{(1/|s|)>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{1+a}}ds &\overset{s=1/t}{=} \int_{\{|t|>1+\epsilon\}} \frac{|1/t|^{a-1}-1}{|1-(1/t)|^{1+a}}\frac{1}{t^2}dt\\ &= \int_{\{|t|>1+\epsilon\}} \frac{1-|t|^{a-1}}{|t-1|^{1+a}}dt\\ &\overset{t=s}{=} \int_{\{|s|>1+\epsilon\}} \frac{1-|s|^{a-1}}{|1-s|^{1+a}}ds\\ &= -\int_{\{|s|>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{1+a}}ds\end{aligned}$$

Άρα το

$$\int_{\{|s|>1+\epsilon\}\cup\{\frac{1}{|s|}>1+\epsilon\}} \frac{|s|^{a-1}-1}{|1-s|^{1+a}}ds = 0$$

Για $\epsilon \to 0$ προκύπτει πράγματι ότι

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy$$

την οποία θέλαμε αρχικά να αποδείξουμε. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1. Μετά από μεταφορά και αναγωγή σε κλίμακα, αρκεί να δείξουμε το αποτελέσμα του Θεωρήματος 3.1.1 για το διάστημα $(0,1)$.

Έστω $f \in C_c^\infty(0,1)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \quad &\geq \quad K_{1,a}\int_0^1 |f(x)|^2 \times\\ &\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)^a dx \qquad (3.1.23)\end{aligned}$$

Έστω

$$g(x) = |x+1|^{a-1}f(\frac{1}{1+x})$$

. Προφανώς $g \in C_c^\infty(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(x) = I(f)(x+1)$ και εάν θέσουμε $g(x)=0$ για $x<0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.2 και να υπολογίσουμε την παράσταση:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy + \int_0^1 dx|f(x)|^2\int_{\mathbb{R}-(0,1)}\frac{dy}{|x-y|^{1+a}}$$

Έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
I' &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}-(0,1)}\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy + \int_0^1\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}-(0,1)}\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy + \int_{\mathbb{R}-(0,1)}\int_0^1 \frac{|0-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+ \int_0^1\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{|f(x)-0|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy + \int_{\mathbb{R}-(0,1)}\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{|0-0|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy + \int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{dx}{|x-y|^{1+a}}\int_0^1 |f(y)|^2 dy \\
&+ \int_0^1 dx|f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{dy}{|x-y|^{1+a}}\Big)
\end{aligned}
$$

και από συμμετρία, ύστερα από εναλλαγή των x, y παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
I' &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+2\frac{1}{2}\int_0^1 dx|f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{dy}{|x-y|^{1+a}} = I
\end{aligned}
$$

Άρα δείξαμε ότι:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy + \int_0^1 dx|f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy
\end{aligned}
$$

Όμως λόγω του Λήμματος 3.1.2,

$$
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \tag{3.1.24}
$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την ποσότητα:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+\int_0^\infty\int_{-\infty}^0 \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy+\int_{-\infty}^0\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy+\int_0^\infty\int_{-\infty}^0 \frac{|g(x)-0|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+\int_{-\infty}^0\int_0^\infty \frac{|0-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy+\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 \frac{|0-0|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy+\int_0^\infty |g(x)|^2dx\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy \\
&+\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{|x-y|^{1+a}}\int_0^\infty |g(y)|^2dy\Big)
\end{aligned}$$

και από συμμετρία ύστερα από εναλλαγή των x, y θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+2\frac{1}{2}\int_0^\infty |g(x)|^2dx\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&+\int_0^\infty |g(x)|^2dx\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy \qquad (3.1.25)
\end{aligned}$$

Άρα λόγω των (3.1.24) και (3.1.25) το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy+\int_0^1 dx|f(x)|^2\int_{\mathbb{R}-(0,1)}\frac{dy}{|x-y|^{1+a}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy+\int_0^\infty |g(x)|^2dx\int_{-\infty}^0\frac{dy}{|x-y|^{1+a}} \qquad (3.1.26)
\end{aligned}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty dx|g(x)|^2\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy$$

και

$$\int_0^1 dx|f(x)|^2\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy$$

της σχέσης (3.1.26). Πρωτίστως όμως θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy$ για $x > 0, y < 0$ και $\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy$, για $y \in \mathbb{R} - (0,1)$ και $0 < x < 1$.
Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy &\overset{x>0,y<0}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-y)^{1+a}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} (x-y)^{-1-a} dy \\
&= -\int_{-\infty}^{0} (x-y)'(x-y)^{-1-a} dy \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{(x-y)^{-a}}{-a} \right)' dy \\
&= \frac{1}{a} \lim_{t \to -\infty} [(x-y)^{-a}]_t^0 \\
&= \frac{1}{a} (x^{-a} - 0) \\
&= \frac{1}{a} x^{-a} = \frac{1}{a} \frac{1}{x^a}
\end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy = \frac{1}{a} \frac{1}{x^a} \tag{3.1.27}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy &\overset{y\in\mathbb{R}-(0,1),0<x<1}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy \\
&\quad + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{1+a}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-y)^{1+a}} dy \\
&\quad + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(y-x)^{1+a}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} (x-y)^{-1-a} dy \\
&\quad + \int_{1}^{\infty} (y-x)^{-1-a} dy \qquad (3.1.28)
\end{aligned}$$

Όμως το

$$\int_{-\infty}^{0} (x-y)^{-1-a} dy = \frac{1}{a} \frac{1}{x^a}$$

λόγω της (3.1.27). Άρα μένει να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα της (3.1.28) δηλαδή το

$$\begin{aligned}\int_1^\infty (y-x)^{-1-a}dy &= \int_1^\infty (y-x)'(y-x)^{-1-a}dy \\ &= \int_1^\infty \left(\frac{(y-x)^{-a}}{-a}\right)' dy \\ &= -\frac{1}{a}\lim_{t\to\infty}[(y-x)^{-a}]_1^t \\ &= -\frac{1}{a}(0-(1-x)^{-a}) \\ &= \frac{1}{a}(1-x)^{-a} \qquad (3.1.29)\end{aligned}$$

Οπότε τώρα λόγω των (3.1.27), (3.1.28), (3.1.29) το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy = \frac{1}{a}\frac{1}{x^a} + \frac{1}{a}(1-x)^{-a} = \frac{1}{a}(x^{-a}+(1-x)^{-a}) \qquad (3.1.30)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx|g(x)|^2\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy &\overset{(3.1.27)}{=} \int_0^\infty dx|g(x)|^2\frac{1}{a}\frac{1}{x^a} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^a}dx \qquad (3.1.31)\end{aligned}$$

Επίσης θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx|f(x)|^2\int_{\mathbb{R}-(0,1)} \frac{1}{|x-y|^{1+a}}dy &\overset{(3.1.30)}{=} \int_0^1 dx|f(x)|^2\frac{1}{a}(x^{-a}+(1-x)^{-a}) \\ &= \frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2(x^{-a}+(1-x)^{-a})dx \qquad (3.1.32)\end{aligned}$$

Οπότε τώρα λόγω των (3.1.31), (3.1.32)η σχέση (3.1.26) θα γίνει

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \qquad (3.1.33) \\ &\quad +\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^a}dx \\ &\quad -\frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2(x^{-a}+(1-x)^{-a})dx \qquad (3.1.34)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την βέλτιστη ανισότητα Hardy (βλ. [BD]) στη μισή γραμμή της (3.1.34) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \quad &\geq \quad K_{1,a}\int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^a}dx \\ &+\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^a}dx \\ &-\frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2(x^{-a}+(1-x)^{-a})dx \quad (3.1.35)\end{aligned}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^a}dx$. Ξέρουμε ότι

$$g(x) = |x+1|^{a-1}f(\frac{1}{1+x})$$

αν θέσουμε $t = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1$ και η

$$g(x) = g(\frac{1}{t}-1) = |\frac{1}{t}|^{a-1}f(t)$$

Ύστερα από όλα αυτά είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^a}dx \quad &= \quad \int_1^0 \frac{|\frac{1}{t}|^{2a-2}|f(t)|^2}{\left(\frac{1-t}{t}\right)^a}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \quad \int_0^1 \frac{|f(t)|^2t^a}{t^{2a-2}(1-t)^a}\frac{1}{t^2}dt \\ &= \quad \int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{t^a(1-t)^a}dt \\ &\overset{t\equiv x}{=} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^a dx \qquad (3.1.36)\end{aligned}$$

Οπότε λόγω της (3.1.36) η (3.1.35) θα γίνει

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &\geq (K_{1,a}+\frac{1}{a})\int_0^1 |f(x)|^2\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^a dx \\
&\quad -\frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2(x^{-a}+(1-x)^{-a})dx \\
&= K_{1,a}\int_0^1 |f(x)|^2\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^a dx \\
&\quad +\frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^a dx \\
&\quad -\frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\frac{[x^a+(1-x)^a]}{x^a(1-x)^a}dx \\
&= K_{1,a}\int_0^1 |f(x)|^2\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^a dx \\
&\quad +\frac{1}{a}\int_0^1 |f(x)|^2\frac{[1-x^a-(1-x)^a]}{x^a(1-x)^a}dx \quad (3.1.37)
\end{aligned}
$$

Όμως η συνάρτηση $q(x) = 1 - x^a - (1-x)^a \geq 0$ για κάθε $1 < a < 2$ και για κάθε $0 \leq x \leq 1$, διότι ισχύουν τα εξής. Καταρχήν παρατηρούμε ότι $q(0) = 0$ και $q(1-x) = 1-(1-x)^a - x^a = q(x)$. Ακόμη

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= -ax^{a-1} - a(1-x)^{a-1}(-1) \\
&= -ax^{a-1} + a(1-x)^{a-1} \\
&= a[(1-x)^{a-1} - x^{a-1}]
\end{aligned}
$$

Όμως $a > 1$ και $(1-x)^{a-1} - x^{a-1} \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1/2]$ (διότι $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1-x \Leftrightarrow (1-x)^{a-1} \geq x^{a-1}$). Άρα η $q'(x) \geq 0, \forall x \in [0,1/2]$. Οπότε η $q(x)$ θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $[0,1/2]$. Όμως αφού $q(0) = 0$ εύκολα κανείς συμπεραίνει ότι $q(x) \geq 0, \forall x \in [0,1/2]$. Αφού $q(x) = q(1-x)$,

$$
q(x) = 1 - x^a - (1-x)^a \geq 0, \forall x \in [0,1]
$$

Οπότε η σχέση (3.1.37) θα γίνει:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &\geq K_{1,a}\int_0^1 |f(x)|^2\frac{1}{x^a(1-x)^a}dx \\
&= K_{1,a}\int_0^1 |f(x)|^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(1-x)}\right)^a dx
\end{aligned}
$$

την οποία και έπρεπε να αποδείξουμε. ■

Πόρισμα 3.1.3 *Έστω J ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $1 < a < 2$. Τότε για κάθε $f \in C_c^\infty(J)$ έχουμε ότι:*

$$
\frac{1}{2}\int_{J\times J} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \geq K_{1,a}\int_J |f(x)|^2(\frac{1}{d_J(x)}+\frac{1}{\delta_J(x)})^a dx \qquad (3.1.38)
$$

όπου,

$$\delta_J(x) = \sup\{|t| : x + tw \in J\}$$

και

$$d_J(x) = \min\{|t| : x + tw \notin J\}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοιχτό σύνολο $J \subset \mathbb{R}$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ξένων διαστημάτων I_k. Άρα

$$\frac{1}{2}\int_{J\times J}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}\int_{I_k}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy$$

Όμως λόγω του Θεωρήματος 3.1.1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}\int_{I_k}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\int_{I_k}\int_{I_k}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+a}}dxdy \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty}K_{1,a}\int_{I_k}|f(x)|^2\left(\frac{1}{d_{I_k}(x)}+\frac{1}{\delta_{I_k}(x)}\right)^a dx \\
&\geq K_{1,a}\int_J|f(x)|^2\left(\frac{1}{d_J(x)}+\frac{1}{\delta_J(x)}\right)^a dx \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.2 Το πρόβλημα σε ανώτερες διαστάσεις $(n \geq 2)$

Στο εξής θα ασχοληθούμε με την ανισότητα Hardy για την κλασματική Λαπλασιανή σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω Ω μια περιοχή στον $\mathbb{R}^n$ και $f \in C_c^\infty(\Omega)$, $p > 0$. Τότε*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}}dxdy &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\{x:x\cdot w=0\}}d\mathcal{L}_w(x)\int_{\{x+sw\in\Omega\}}ds\,\times \\
&\times \int_{\{x+tw\in\Omega\}}dt\frac{|f(x+sw)-f(x+tw)|^p}{|s-t|^{1+a}} \qquad (3.2.39)
\end{aligned}$$

όπου $\mathcal{L}_w$ είναι το $(n-1)$ διάστασης μέτρο Lebesgue στο επίπεδο $\{x : x\cdot w = 0\}$.

Απόδειξη. Έστω

$$I_\Omega(f) = \int_{\Omega\times\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}}dxdy$$

Θέτω $y = x + z$ άρα

$$I_\Omega(f) = \int_\Omega dx\int_{\{z:x+z\in\Omega\}}dz\frac{|f(x)-f(x+z)|^p}{|z|^{n+a}}$$

Τώρα εάν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες $z = rw$ θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} I_\Omega(f) &= \int_\Omega dx \int_{S^{n-1}} dw \Big(\int_{\{x+rw\in\Omega, r>0\}} \frac{|f(x)-f(x+rw)|^p}{|r|^{n+a}|w|^{n+a}} r^{n-1} \Big) dr \\ &= \int_\Omega dx \int_{S^{n-1}} dw \int_{\{x+rw\in\Omega, r>0\}} dr \frac{|f(x)-f(x+rw)|^p}{r^{1+a}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} dw \int_\Omega dx \int_{\{x+hw\in\Omega\}} dh \frac{|f(x)-f(x+hw)|^p}{|h|^{1+a}} \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Έτσι το χωρίο ολοκλήρωσης ως προς τη μεταβλητή h δηλαδή το $\{x + h \cdot w \in \Omega\}$ αντιστοιχεί στα σημεία τομής της γραμμής $x + hw$ με το χωρίο Ω.

Αντικαθιστώντας τώρα την μεταβλητή x με $x + sw$ όπου $x \cdot w = 0$ θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} I_\Omega(f) &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} dw \int_{\{x:x\cdot w=0\}} d\mathcal{L}_w(x) \int_{\{z:x+sw\in\Omega\}} ds \times \\ &\qquad \times \int_{\{x+(s+h)w\in\Omega\}} dh \frac{|f(x+sw)-f(x+(s+h)w)|^p}{|h|^{1+a}} \end{aligned}$$

Τώρα εάν θέσουμε $s + h = t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_\Omega(f) &= \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+a}} dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} dw \int_{\{x:x\cdot w=0\}} d\mathcal{L}_w(x) \int_{\{x+sw\in\Omega\}} ds \int_{\{x+tw\in\Omega\}} dt \\ &\quad \frac{|f(x+sw)-f(x+tw)|^p}{|s-t|^{1+a}} \end{aligned}$$

την οποία έπρεπε να δείξουμε. ■

Τώρα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.1 και το Πόρισμα 3.1.3 θα αποδείξουμε το Θεώρημα 3.0.12.

Ας υπενθυμίσουμε όμως το Θεώρημα 3.0.12.

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω Ω ένα χωρίο με όχι κενό σύνορο και $1 < a < 2$. Τότε για κάθε συνάρτηση $f \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει ότι*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a} \int_\Omega \frac{|f(x)|^2}{M_a(x)^a} dx$$

Μάλιστα εάν το Ω είναι ένα κυρτό χωρίο τότε για κάθε συνάρτηση $f \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}} dxdy \geq K_{n,a} \int_\Omega |f(x)|^2 \Big(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{D(x)-d(x)}\Big)^a dx$$

Απόδειξη. (Θεωρήματος 3.2.2) Λόγω του Λήμματος 3.2.1 για $p = 2$,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}}dxdy \;=\; \frac{1}{4}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\{x:x\cdot w=0\}}d\mathcal{L}_w(x)\int_{\{x+sw\in\Omega\}}ds\int_{\{x+tw\in\Omega\}}dt \frac{|f(x+sw)-f(x+tw)|^2}{|s-t|^{1+a}}$$

και εξαιτίας του Πορίσματος 3.1.3

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\{x:x\cdot w=0\}}d\mathcal{L}_w(x)\int_{\{x+sw\in\Omega\}}ds\int_{\{x+tw\in\Omega\}}dt\frac{|f(x+sw)-f(x+tw)|^2}{|s-t|^{1+a}} \\ \geq K_{1,a}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\{x:x\cdot w=0\}}d\mathcal{L}_w(x)\int_{\{x+sw\in\Omega\}}ds|f(x+sw)|^2\times \\ \times\left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x+sw)}+\frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x+sw)}\right)^a\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Εφόσον γνωρίζουμε ότι $\forall w \in S^{n-1}$ και για κάθε συνάρτηση $g(x)$ ισχύει η ισότητα

$$\int_{\{x:x\cdot w=0\}}\int_{\{s:x+sw\in\Omega\}}g(x+sw)dsd\mathcal{L}_w = \int_{\Omega}g(x)dx$$

τότε η (3.2.41) θα γίνει

$$\begin{aligned}K_{1,a}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\{x:x\cdot w=0\}}d\mathcal{L}_w(x)\int_{\{x+sw\in\Omega\}}ds|f(x+sw)|^2\times \\ \times\left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x+sw)}+\frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x+sw)}\right)^a \quad = \\ K_{1,a}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\Omega}|f(x)|^2\left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)}+\frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)}\right)^a dx\end{aligned}$$

Λόγω τώρα της (3.0.6) η τελευταία σχέση θα γίνει

$$K_{1,a}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}dw\int_{\Omega}|f(x)|^2\left(\frac{1}{d_{w,\Omega}(x)}+\frac{1}{\delta_{w,\Omega}(x)}\right)^a dx = K_{n,a}\int_{\Omega}\frac{|f(x)|^2}{M_a(x)^a}dx$$

Άρα αποδείχθηκε ότι

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+a}}dxdy \geq K_{n,a}\int_{\Omega}\frac{|f(x)|^2}{M_a(x)^a}dx$$

όπως αρχικά θέλαμε στο Θεώρημα 3.2.2. ■

Πριν προβούμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.13 χρειάζεται να αναφέρουμε δύο Θεωρήματα και ένα Πόρισμα που είναι απολύτως απαραίτητα γι΄ αυτήν την απόδειξη.

Θεώρημα 3.2.3 *Έστω $1 < a < p < \infty$. Τότε για όλες τις ομαλές συναρτήσεις f με $f(0) = 0$ ισχύει ότι:*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+a}} dxdy \geq D_{1,p,a} \int_0^1 \frac{|f(x)|^p}{x^a} dx$$

όπου

$$D_{1,p,a} = 2 \int_0^1 \frac{|1 - r^{(a-1)/p}|^p}{(1 - r)^{1+a}} dr$$

Απόδειξη. Έστω $\omega(x) = x^{(a-1)/p}$. Τότε από [FS2, Λήμμα 2.4] παίρνουμε ότι:

$$2 \int_0^\infty (\omega(x) - \omega(y))|\omega(x) - \omega(y)|^{p-2} \frac{dy}{|x - y|^{1+a}} = \frac{D_{1,p,a}}{x^a} \omega(x)^{p-1}, \ 0 < x < 1$$

Τώρα θα βρούμε το πρόσημο του

$$\int_1^\infty (\omega(x) - \omega(y))|\omega(x) - \omega(y)|^{p-2} \frac{dy}{|x - y|^{1+a}}, \ \forall x \in [0, 1]$$

Όμως

$$\omega'(x) = (x^{(a-1)/p})' = \frac{a-1}{p} x^{\frac{a-1}{p} - 1} = \frac{a-1}{p} x^{\frac{a-1-p}{p}} > 0$$

διότι $a > 1, p > 1$ και $0 < x < 1$.

Άρα η $\omega(x)$ είναι αύξουσα, οπότε απ΄ τον ορισμό της αύξουσας συνάρτησης έπεται ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ και για κάθε $y \in [1, \infty)$ ισχύει $\omega(x) \leq \omega(y)$ άρα $\omega(x) - \omega(y) \leq 0$. Οπότε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty (\omega(x) - \omega(y))|\omega(x) - \omega(y)|^{p-2} \frac{dy}{|x - y|^{1+a}} \leq 0$$

για κάθε $x \in [0, 1]$, αφού $|\omega(x) - \omega(y)|^{p-2} \geq 0$ και $|x - y|^{1+a} > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Τότε θα έχουμε ότι:

$$V(x) = \frac{2}{\omega(x)^{p-1}} \int_0^1 (\omega(x) - \omega(y))|\omega(x) - \omega(y)|^{p-2} \frac{dy}{|x - y|^{1+a}} \geq \frac{D_{1,p,a}}{x^a}, \ \forall x \in [0, 1]$$

Τώρα από την [FS1, Πρόταση 2.2] συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+a}} dxdy &\geq \int_0^1 V(x)|f(x)|^p dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{D_{1,p,a}}{x^a} |f(x)|^p dx \\ &= D_{1,p,a} \int_0^1 \frac{|f(x)|^p}{x^a} dx \end{aligned}$$

το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί. ■

Απ΄ τα προηγούμενα εύκολα κανείς συμπεραίνει ότι:

Θεώρημα 3.2.4 *Έστω $f \in C_c^\infty(\alpha, b)$ τότε για όλα τα $1 < a < p < \infty$ ισχύει ότι:*

$$\int_{(\alpha,b)\times(\alpha,b)} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+a}} dxdy \geq D_{1,p,a} \int_\alpha^b \frac{|f(x)|^p}{\min\{x-\alpha, b-x\}^a} dx$$

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Πόρισμα 3.2.5 *Έστω $1 < a < p < \infty$. Έστω ακόμη ότι J ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και f μια συνάρτηση στο J με $f \in C_c^\infty(J)$. Τότε*

$$\int_J \int_J \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+a}} dxdy \geq D_{1,p,a} \int_J \frac{|f(x)|^p}{d_J(x)^a} dx$$

Απόδειξη. Ακριβώς η ίδια απόδειξη όπως στο Πόρισμα 3.1.3.

Απόδειξη Θεωρήματος 3.0.13. Ακριβώς η ίδια απόδειξη όπως στο Θεώρημα 3.0.12.

Βιβλιογραφία

[A] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[AN] N. ARONSZAJN, *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral.* Techn.Report of Univ. of Kansas 14 (1955), 77-94.

[BD] K. BOGDAN, B. DYDA, *The best constant in a fractional Hardy inequality.* arXiv:0807.1825.

[BFT] G. BARBATIS, S. FILIPPAS, N. TERTIKAS, *A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants.* Trans. Amer. Math. Soc. 356(6) (2004), 2169-2196.

[BR] H. BREZIS, *How to recognize constant functions. Connections with Sobolev Spaces.* Uspekhi. Mat. Nauk 57 (2002), No. 4 (346).

[D1] E. B. DAVIES, *Some norm bounds and quadratic form inequalities for Schrondinger operators.* J. Operator Theory 12 (1984), 177-196.

[D2] E. B. DAVIES, *Heat Kernels and Spectral Theory.* Cambridge Tracts in Math., Cambridge University Press, 1989.

[D3] E. B. DAVIES, *A review of inequalities*, in: The Maz'ya Anniversary Collection, Vol. 2, Rostock, 1998, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 110, Birkhauser, Basel, 1999, 55-67.

[DPV] E. DINEZZA, G. PALATUCCI, E. VALDINOCI, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev Spaces*, Université de Nîmes, mipa.unimes.fr

[D] B. DYDA, *A fractional order Hardy inequality*, Illinois J. Math. 48(2004), 575-588.

[E] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations.* Amer. Math. Society.

[FS1] R.FRANK, R. SEIRINGER *Non-linear ground state reprentations* *and Sharp Hardy inequalities*, J. Funct. Anal. 255 (2008), 3407-3430.

[FS2] R.FRANK, R. SEIRINGER *Sharp fractional Hardy inequalities in half spaces*, arXiv:0906.1561.

[G] E. GAGLIARDO, *Proprierta di alcune classi di funzioni in piu variabili*, Ricerche Mat. 7 (1958) , 102-137.

[GM] R. GORENFLO, F. MAINARDI, *Random Walk models for Space-Fractional diffusion process*, Fractional Calculus Applied Analysis 1 (1998) , 167-191.

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin 2001.

[L] N. S. LANDKOF, *Foundations of Modern Potential Theory*, Translated from Russian, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 180, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[LS] M. LOSS, C. SLOANE, *Hardy Inequalities for fractional integrals on general domains*, Journal of Functional Analysis, www.sciencedirect.com

[MMP] M. MARCUS, V.J. MIZEL, Y. PINCHOVER, *On the best constant for Hardy's inequality in* $\mathbb{R}^n$, Amer. Math. Soc. 1998.

[MS] T. MATSKEWICH, P.E. SOBOLEVSKII, *The best possible constant in generalized Hardy's inequality for convex domain in* $\mathbb{R}^n$, Nonlinear Anal. 28 (1997) , 1601-1610.

[S] L. N. SLOBODECKIJ, *Generalized Sobolev and their applications to boundary value problems of partial differential equations* , Leningrad Gos. Ped. Inst. Ušep. Zap. 197 (1958).

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή βασίστηκε κατά το μεγαλύτερο μέρος της στα συγγράματα [DPV] και [LS].

Ευρετήριο Όρων