

Ανοικτή κβαντική ηλεκτροδυναμική

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΗΝΑΣ (Α.Μ. 200944)

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων
Αθήνα,
Οκτώβριος 2012

Εργασία Μεταπτυχιακού Διπλώματος Βασικής Φυσικής, με ειδίκευση στην Πυρηνική Φυσική και τα Στοιχειώδη Σωματίδια

Επιβλέπων: Αλέξανδρος Καρανίκας, Αναπληρωτής Καθηγητής
Φώτιος Διάκονος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Νικόλαος Τετράδης, Καθηγητής

Περίληψη:

Η κβαντική ηλεκτροδυναμική, αντιμετωπίζεται ως ένα σύνθετο σύστημα, αποτελούμενο από ένα υποσύστημα (τα ηλεκτρόνια) και το περιβάλλον του (το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο). Η δυναμική του ανοικτού υποσυστήματος, μπορεί να γίνει μόνο μέσω της μήτρας πυκνότητάς του. Για να την υπολογίσουμε, ξεκινάμε από τη συνολική μήτρα πυκνότητας του σύνθετου συστήματος, ολοκληρώνουμε τους βαθμούς ελευθερίας του περιβάλλοντος και ακολουθώντας τη λογική των Feynman - Vernon, προσδιορίζουμε το λεγόμενο συναρτησιακό επιρροής. Η μη τετριμμένη ολοκλήρωση των πεδιακών βαθμών ελευθερίας, γίνεται μέσω της τεχνικής του κλειστού μιγαδικού χρόνου, η οποία σχετίζεται με το φορμαλισμό Keldysh, ο οποίος εφαρμόζεται σε συστήματα εκτός ισορροπίας. Για τη φυσική κατανόηση του αποτελέσματος, υιοθετούμε μια ημικλασική προσέγγιση των ηλεκτρονικών ρευμάτων και εξετάζουμε μια απλή διαδικασία στην οποία μπορούν να εμφανιστούν φαινόμενα αποσυνοχής.

Abstract:

We consider quantum electrodynamics, as a complex system, which consists of a subsystem (the electrons) and its environment (the electromagnetic field). The dynamics of the open subsystem, can only be done, thru its density matrix. In order to calculate it, we start from the total density matrix of the complex system, we integrate over the environmental degrees of freedom and by following the logic of Feynman and Vernon, we arrive to the so called influence functional. The non trivial integration over the field degrees of freedom, is being done via the technic of the close complex time, which is related to the Keldysh formalism, which is applicable to non equilibrium systems. For a physical realisation of the result, we adopt a semiclassical approximation for the electron's currents and we study a procedure, in which, decoherence phenomena can appear.

Λέξεις κλειδιά:

- (1) χρονική εξέλιξη
- (2) μήτρα πυκνότητας
- (3) συναρτησιακό ολοκλήρωμα
- (4) συναρτησιακό επίδρασης
- (5) αποσυννοχή

Keywords:

- (1) time evolution
- (2) density matrix
- (3) functional integral
- (4) influence functional
- (5) decoherence

Περιεχόμενα:

- Κεφάλαιο 1. Γενικά χαρακτηριστικά των ανοικτών κβαντικών συστημάτων
Κεφάλαιο 2. Χρονική εξέλιξη των ανοικτών κβαντικών συστημάτων
Κεφάλαιο 3. Το συναρτησιακό επίδρασης της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής
Κεφάλαιο 4. Το φαινόμενο της αποσυννοχής στην κβαντική ηλεκτροδυναμική

Contents:

- Chapter 1. General properties of open quantum systems
Chapter 2. Time evolution of open quantum systems
Chapter 3. The influence functional of quantum electrodynamics
Chapter 4. The phenomenon of decoherence in quantum electrodynamics

Κεφάλαιο 1: Γενικά χαρακτηριστικά των ανοικτών κβαντικών συστημάτων

1.1: Ορισμός και εφαρμογές

Ως ανοικτό, νοείται κάθε σύστημα, που βρίσκεται σε σύζευξη με ένα άλλο σύστημα, το οποίο ονομάζεται περιβάλλον. Από τον ορισμό αυτό, προκύπτει άμεσα, ότι οι ρόλοι του συστήματος και του περιβάλλοντος, είναι δυνατόν να εναλλαχθούν, αφού το περιβάλλον βρίσκεται και αυτό σε σύζευξη με το σύστημα, με αποτέλεσμα, να το αισθάνεται ως περιβάλλον του. Συνεπώς, σύστημα και περιβάλλον, συναποτελούν ένα ευρύτερο σύστημα, το οποίο στα επόμενα θα το θεωρήσουμε κλειστό. Όλα τα ρεαλιστικά φυσικά συστήματα, είναι ανοικτά, αφού όλες οι φυσικές διεργασίες, εμπεριέχουν αλληλεπιδράσεις. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος, για τον οποίο τα τελευταία χρόνια, τα ανοικτά κβαντικά συστήματα βρίσκουν ευρεία εφαρμογή, σε όλο ένα και περισσότερους κλάδους της φυσικής, όπως π.χ. στους κβαντικούς υπολογιστές, στην κβαντική κρυπτογραφία, στην κβαντική οπτική (lasers, masers), στη φυσική των υπέρψυχρων υλικών (συμπυκνώματα Bose - Einstein) κ.ο.κ. Ας περιγράψουμε πολύ σύντομα την τελευταία εφαρμογή, προκειμένου να κατανοηθεί η ανάγκη μελέτης των ανοικτών κβαντικών συστημάτων: Εστω ένα σύστημα, αποτελούμενο από μποζόνια (αέριο Bose. Ως γνωστόν, τα σωματία αυτά, υπακούουν στη στατιστική Bose - Einstein. Μειώνουμε κατά πολύ τη θερμοκρασία, έτσι ώστε να φθάσουμε κοντά (προφανώς όχι ακριβώς, αφού κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί εργαστηριακά) στο απόλυτο μηδέν. Αν η θερμοκρασία ήταν ακριβώς $0K$, όλα τα μποζόνια του αερίου, θα μεταπηδούσαν στη θεμελιώδη τους κατάσταση (στάθμη ελάχιστης ενέργειας). Εξαιτίας όμως της θερμοκρασιακής απόκλισης από το απόλυτο μηδέν, ορισμένα από τα σωματία, μεταπίπτουν στη βασική στάθμη, ενώ κάποια άλλα παραμένουν σε διεγερμένες καταστάσεις. Θεωρώντας τα πρώτα μποζόνια ως σύστημα και τα δεύτερα ως περιβάλλον και χρησιμοποιώντας μία συσκευή Laser προκειμένου να μειώσουμε το ρυθμό συμπύκνωσης των σωματιδίων, επιτυγχάνουμε αποτελεσματικότερο έλεγχο της διατήρησης του κβαντικού χαρακτήρα του συστήματος.

1.2: Δυναμική κλειστών και ανοικτών κβαντικών συστημάτων

1.2.1: Δυναμική κλειστών συστημάτων - μήτρα πυκνότητας

Είναι γνωστό ότι η κβαντική κατάσταση οποιουδήποτε σωματιδίου ή κλει-

στού συστήματος σωματιδίων ικανοποιεί την εξίσωση του Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \quad (1)$$

Όπου $\hat{H}(t)$ η χρονοεξαρτώμενη, εν γένει, Hamiltonian του συστήματος. Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (2)$$

Με τη συνοριακή συνθήκη:

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I} \quad (3)$$

Όπου \hat{I} ο ταυτοτικός τελεστής. Ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{U}(t, t_0) = T(\exp(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(s) ds)) \quad (4)$$

Το σύμβολο T υποδηλώνει το χρονολογικό γινόμενο, δηλαδή το γινόμενο στο οποίο οι τελεστές τοποθετούνται με σειρά φθίνουσας χρονικής συντεταγμένης. Στην περίπτωση όπου η Hamiltonian του συστήματος είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η τελευταία σχέση λαμβάνει την απλή μορφή:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0)) \quad (5)$$

Από τον ορισμό του τελεστή χρονικής εξέλιξης αποδεικνύονται απεύθείας οι παρακάτω ιδιότητες: (1) Ο \hat{U} είναι μοναδιακός:

$$\hat{U}(t, t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} \quad (6)$$

και (2) ισχύει η σχέση:

$$\hat{U}(t, t_1)\hat{U}(t_1, t_0) = \hat{U}(t, t_0) \quad (7)$$

Διαφορίζοντας την έκφραση 4 ως προς το χρόνο αποκτούμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης που ικανοποιεί ο τελεστής \hat{U} :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}(t)\hat{U}(t, t_0) \quad (8)$$

Στην περίπτωση όπου το υπό μελέτη σύστημα βρίσκεται σε μία μικτή κατάσταση, δεν έχει έννοια ο ορισμός μίας κυματοσυνάρτησης του συστήματος, το οποίο

αντιπροσωπεύει μία στατιστική συλλογή. Η συλλογή αυτή χαρακτηρίζεται από έναν τελεστή που καλείται μήτρα πυκνότητας (density matrix). Προφανώς, η μήτρα πυκνότητας ορίζεται και για καθαρές καταστάσεις, όπου αποτελεί έναν εναλλακτικό αλλά ισοδύναμο τρόπο για τη στατιστική ερμηνεία της κβαντομηχανικής συμπεριφοράς του συστήματος, αντί της κυματοσυνάρτησης. Η σχέση μεταξύ κυματοσυνάρτησης και μήτρας πυκνότητας στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (9)$$

Από τον παραπάνω ορισμό συνάγεται άμεσα ότι η μήτρα πυκνότητας είναι ένας ερμητιανός και θετικός τελεστής με μοναδιαίο ίχνος. Το τελευταίο προκύπτει από το γεγονός ότι το ίχνος, δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων της μήτρας πυκνότητας αντιπροσωπεύει τη συνολική πιθανότητα το σύστημά μας να βρίσκεται σε μία οποιαδήποτε κατάσταση, η οποία προφανώς ισούται με τη μονάδα. Επιπλέον, η αναμενόμενη τιμή ενός οποιοδήποτε μεγέθους M που αφορά το σύστημα, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της μήτρας πυκνότητας ως εξής:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{M}\hat{\rho}) \quad (10)$$

Όπου το tr συμβολίζει το ίχνος. Αντικαθιστώντας τη σχέση 2 στην προτελευταία έκφραση βρίσκουμε το νόμο χρονικής εξέλιξης της μήτρας πυκνότητας:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (11)$$

Διαφορίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς το χρόνο και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση 8, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση που διέπει τη χρονική εξέλιξη της μήτρας πυκνότητας (εξίσωση Von Neumann):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (12)$$

Η οποία μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή Liouville:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \hat{L}(t)\hat{\rho}(t) \quad (13)$$

Όπου ο τελεστής Liouville δηλώνει το μεταθέτη του τελεστή επί του οποίου δρᾶ, με την Hamiltonian:

$$\hat{L}(t) = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}(t),] \quad (14)$$

1.2.2: Δυναμική ανοικτών συστημάτων - ανηγμένη μήτρα πυκνότητας

Η μήτρα πυκνότητας, όπως αυτή ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, έχει νόημα μόνο σε περιπτώσεις κλειστών κβαντικών συστημάτων. Ο λόγος είναι, ότι ένα ανοικτό σύστημα, δεν εξελίσσεται στο χρόνο αυτόνομα, αφού η δυναμική του καθορίζεται τόσο από τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, όσο και από αυτούς του περιβάλλοντος. Παρ'όλα αυτά, όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω, η μήτρα πυκνότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα, ώστε να συμπεριλάβει και τη δυναμική ανοικτών κβαντικών συστημάτων. Εστω ένα κλειστό σύστημα αποτελούμενο από δύο υποσυστήματα, το X (υπό μελέτη ανοικτό σύστημα) και το A (περιβάλλον). Ας συμβολίσουμε ως H_X και H_A τους χώρους Hilbert που συγκροτούν οι καταστάσεις των υποσυστημάτων X και A αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή, κάθε κβαντική κατάσταση ή τελεστής που αφορά το συνολικό σύστημα, θα πρέπει να εκφράζεται ως ένας κατάλληλος συνδυασμός (όχι απαραίτητα γραμμικός αφού το συνολικό σύστημα μπορεί, εν γένει, να βρίσκεται σε μία μικτή κατάσταση) τανυστικών γινομένων κβαντικών καταστάσεων ή τελεστών αντίστοιχα των δύο υποσυστημάτων, αφού ανήκει στο χώρο Hilbert του συνολικού συστήματος. Έτσι, η Hamiltonian του συνολικού κλειστού συστήματος θα έχει τη γενική μορφή:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_X \otimes \hat{I}_A + \hat{I}_X \otimes \hat{H}_A + \hat{H}_I(t) \quad (15)$$

Όπου \hat{I}_X και \hat{I}_A , οι ταυτοτικοί τελεστές που δρουν στους χώρους Hilbert H_X και H_A αντίστοιχα, \hat{H}_X και \hat{H}_A οι αδιατάρακτες Hamiltonians του συστήματος και του περιβάλλοντος αντίστοιχα και $\hat{H}_I(t)$ η Hamiltonian της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο υποσυστημάτων, η οποία προφανώς εξαρτάται από το χρόνο, προσδίδοντας χρονική εξάρτηση και στην Hamiltonian του συνολικού κλειστού συστήματος. Προκειμένου να ορίσουμε τη μήτρα πυκνότητας (και επομένως την κυματοσυνάρτηση) του υποσυστήματος X , θα πρέπει να μας είναι πλήρως γνωστή η δυναμική των βαθμών ελευθερίας του A . Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι σχεδόν ποτέ δυνατόν, αφού σε όλα τα ρεαλιστικά φυσικά προβλήματα, το περιβάλλον έχει αρκετά περίπλοκη δομή. Για παράδειγμα, στην παρούσα εργασία (και σε πολλά άλλα προβλήματα), το περιβάλλον θεωρείται ως πεδίο, δηλαδή ως σύστημα με άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Σε άλλα προβλήματα, το περιβάλλον αντιμετωπίζεται ως λουτρό θερμότητας, το οποίο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία., Στην περίπτωση αυτή, μπορεί το περιβάλλον να είναι κάπως ευκολότερα διαχειρίσιμο από μαθηματικής άποψης, αλλά και πάλι παραμένει το πρόβλημα των άπειρων βαθμών ελευθερίας. Ο ακριβής προσδιορισμός

της χρονικής εξέλιξης τέτοιων συστημάτων, προϋποθέτει την επίλυση ενός άπειρου αριθμού διαφορικών εξισώσεων κίνησης, κάτι το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο. Η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί, αν αναλογιστεί κανείς, ότι το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στη δυναμική του υποσυστήματος X και συνεπώς σε μεταβλητές M , οι οποίες χαρακτηρίζονται από τελεστές της μορφής:

$$\hat{M} = \hat{M}_X \otimes \hat{I}_A \quad (16)$$

Προφανώς η αναμενόμενη τιμή ενός τέτοιου τελεστή είναι:

$$\langle \hat{M} \rangle = tr_X(\hat{M}_X \hat{\rho}^R) \quad (17)$$

Οπου:

$$\hat{\rho}^R = tr_A \hat{\rho} \quad (18)$$

Εδώ οι δείκτες X και A στο ίχνος, υποδηλώνουν ότι αυτό λαμβάνεται επί των βαθμών ελευθερίας του υποσυστήματος X και του A αντίστοιχα. Ο τελεστής $\hat{\rho}^R$ ονομάζεται ανηγμένη μήτρα πυκνότητας (reduced density matrix) και είναι η ποσότητα στην οποία επικεντρώνεται όλο το ενδιαφέρον κατά τη μελέτη ενός ανοικτού κβαντικού συστήματος, αφού αυτή εμπεριέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία για τη δυναμική του συστήματος. Βέβαια, η άθροιση επί των βαθμών ελευθερίας του περιβάλλοντος, ή διαφορετικά η θεώρηση του τελευταίου ως μη προσβάσιμου, οδηγεί, όπως θα δούμε αργότερα, σε απόλεια πληροφορίας. Από τις ιδιότητες της μήτρας πυκνότητας, οι οποίες αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, έπεται ότι η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας είναι και αυτή ένας ερμητιανός και θετικός τελεστής, ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$$tr_X \hat{\rho}^R = 1 \quad (19)$$

1.3: Θεωρία κβαντικής μέτρησης

1.3.1: Εισαγωγή

Στην παρούσα παράγραφο περιγράφεται επιγραμματικά η θεωρία της κβαντικής μέτρησης, η οποία διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στη στατιστική ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής, για δύο κυρίως λόγους: Αφένος, η διαδικασία της μέτρησης σε ένα σύστημα, παρέχει πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο αυτή μεταβάλλει την κβαντική κατάσταση του συστήματος, επιτρέποντας έτσι την πρόβλεψη (λαμβάνοντας πάντοτε υπ'όψιν τον πιθανοκρατικό χαρακτήρα της

κβαντομηχανικής) της συμπεριφοράς του συστήματος μετά τη μέτρηση. Αφέ-
τέρου, η θεωρία της μέτρησης επιτρέπει τη γνώση των πειραματικών συνθηκών
στις οποίες πρέπει να έχει ένα σύστημα, έτσι ώστε μετά τη μέτρηση να βρίσκεται
σε μία δεδομένη κατάσταση. Επιπλέον, όπως θα δούμε αργότερα, υπάρχει συ-
σχέτιση της θεωρίας της κβαντικής μέτρησης με το φαινόμενο της αποσυνολής
(decoherence), που παρατηρείται στα ανοικτά κβαντικά συστήματα.

1.3.2: Ιδεατές μετρήσεις

Ας θεωρήσουμε μία στατιστική συλλογή με μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}$ και έστω
ότι θέλουμε να μετρήσουμε την ιδιότητα B , η οποία έχει αντίστοιχο προβολικό
τελεστή $\hat{E}(B)$. Προφανώς, ο τελεστής \hat{B} πρέπει να είναι ερμητιανός, ώστε
να αντιπροσωπεύει ένα μετρήσιμο μέγεθος. Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται
στην υποσυλλογή που αποτελείται από εκείνα τα συστήματα, για τα οποία η ιδιό-
τητα B είναι αληθής. Σύμφωνα με την υπόθεση προβολής των Von Neumann
- Luders, η πιθανότητα εμφάνισης της ιδιότητας B μετά τη μέτρηση δίνεται από
την έκφραση:

$$\begin{aligned} P(B) &= \text{tr}(\hat{E}(B)\hat{\rho}\hat{E}(B)) \\ &= \text{tr}(\hat{E}(B)\hat{\rho}) \end{aligned} \quad (20)$$

Και η μήτρα πυκνότητας της αντίστοιχης υποσυλλογής είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' &= \frac{\hat{E}(B)\hat{\rho}\hat{E}(B)}{P(B)} \\ &= \frac{\hat{E}(B)\hat{\rho}\hat{E}(B)}{\text{tr}(\hat{E}(B)\hat{\rho})} \end{aligned} \quad (21)$$

Όπου η εισαγωγή του ίχνους στον παρονομαστή, εξασφαλίζει ότι η μήτρα πυ-
κνότητας $\hat{\rho}'$ είναι νορμαλισμένη. Τέτοιες μετρήσεις, στις οποίες κάθε υποσυλ-
λογή χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα ως προς τη μετρούμενη
ιδιότητα, καλούνται επιλεκτικές μετρήσεις. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου η
μέτρηση οδηγεί σε ανάμιξη των επιμέρους υποσυλλογών της αρχικής συλλογής,
κάνουμε λόγο για μη επιλεκτική μέτρηση. Η μήτρα πυκνότητας της συλλογής
μετά από μία μη επιλεκτική μέτρηση είναι:

$$\hat{\rho}' = \sum_i P_i \hat{\rho}'_i \quad (22)$$

Όπου P_i στατιστικά βάρη που λαμβάνουν τιμές μεταξύ μηδέν και ένα και $\hat{\rho}'_i$
οι μήτρες πυκνότητας των διαφόρων υποσυλλογών μετά τη μέτρηση, οι οποίες

προκύπτουν από τη μήτρα πυκνότητας της αρχικής συλλογής, με εφαρμογή της προτελευταίας σχέσης.

1.3.3: Γενικευμένη θεωρία μέτρησης

Η υπόθεση των Von Neumann - Luders, η οποία συζητήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύει με την προϋπόθεση ότι οι μετρήσεις είναι ιδεατές. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι πάντοτε αλήθεια, αφού όλες οι πραγματικές μετρήσεις υπόκεινται σε εξωτερικές διαταραχές από το περιβάλλον (θόρυβος), στην πεπερασμένη διακριτική ικανότητα των μετρητικών οργάνων και σε αρκετά άλλα αίτια, τα οποία τις καθιστούν μη ιδεατές. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαστικά μία κατάλληλη επέκταση της υπόθεσης των Von Neumann - Luders, ώστε να συμπεριλαμβάνει τέτοιες περιπτώσεις μετρήσεων. Η επέκταση αυτή, οδηγεί στη λεγόμενη γενικευμένη θεωρία μέτρησης, σύμφωνα με την οποία: Κάθε δυνατό αποτέλεσμα, έστω m μίας μέτρησης, αναπαριστά έναν τυχαίο αριθμό, με κατανομή πιθανότητας που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P(m) = \text{tr}(\hat{F}_m \hat{\rho}) \quad (23)$$

Όπου \hat{F}_m ένας θετικός τελεστής, ο οποίος ονομάζεται Effect. Προκειμένου το άθροισμα των πιθανοτήτων εμφάνισης όλων των δυνατών αποτελεσμάτων m της μέτρησης να ισούται με τη μονάδα, ο τελεστής effect θα πρέπει να πληρεί τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_m \hat{F}_m = \hat{I} \quad (24)$$

Η μήτρα πυκνότητας της αντίστοιχης υποσυλλογής μετά τη μέτρηση είναι:

$$\hat{\rho}'_m = \hat{\Phi}_m(\hat{\rho}) \quad (25)$$

Όπου $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$ ένας υπερτελεστής, ο οποίος απεικονίζει θετικούς τελεστές σε θετικούς τελεστές, καλείται operation και ικανοποιεί τη συνθήκη νορμαλισμού:

$$\text{tr}(\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})) = \text{tr}(\hat{F}_m \hat{\rho}) \quad (26)$$

1.3.4: Το θεώρημα αναπαράστασης του Kraus

Προκειμένου να βρούμε μία αναλυτική έκφραση για τους τελεστές \hat{F}_m και $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$, απαιτούμε κατάρχην, ο τελευταίος να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Λόγω της τελευταίας εξίσωσης, το ίχνος του $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος m κατά τη μέτρηση, και συνεπώς θα πρέπει να ισχύει:

$$0 \leq \text{tr}(\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})) \leq 1 \quad (27)$$

(2) Ο $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$ θα πρέπει να είναι γραμμικός, δηλαδή για μία δεδομένη στατιστική συλλογή με μήτρα πυκνότητας

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i \hat{\rho}_i, \quad 0 \leq P_i \leq 1 \forall i \quad (28)$$

θα ισχύει:

$$\hat{\Phi}_m\left(\sum_i P_i \hat{\rho}_i\right) = \sum_i P_i \hat{\Phi}_m(\hat{\rho}_i) \quad (29)$$

και 3) Ο $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$ θα πρέπει να είναι πλήρως θετικός. Η απαίτηση αυτή, είναι πολύ ισχυρότερη από αυτή της απλής θετικότητας. Ας δούμε τη διαφορά μεταξύ των δύο αυτών απαιτήσεων: Ο τελεστής $\hat{\Phi}_m$ λέμε ότι είναι θετικός, αν για κάθε θετικό τελεστή \hat{A} που ανήκει στο χώρο Hilbert H ισχύει:

$$\hat{\Phi}_m(\hat{A}) > 0 \quad (30)$$

Θεωρούμε τώρα και έναν ακόμη χώρο Hilbert H' αυθαίρετης διάστασης D . Μπορούμε τώρα να ορίσουμε έναν συνδυασμένο τελεστή (combined operation) $\hat{\Phi}_m \otimes \hat{I}$, ο οποίος δρα στο χώρο $H \otimes H'$, ως εξής:

$$(\hat{\Phi}_m \otimes \hat{I})\left(\sum_a \hat{A}_a \otimes \hat{B}_a\right) = \sum_a \hat{\Phi}_m(\hat{A}_a) \otimes \hat{B}_a \quad (31)$$

Οπου \hat{A}_a και \hat{B}_a οποιαδήποτε σύνολα θετικών τελεστών που δρουν στους χώρους H και H' αντίστοιχα. Η πλήρης θετικότητα σημαίνει ότι όχι μόνο ο $\hat{\Phi}_m$, αλλά και ο συνδυασμένος τελεστής $\hat{\Phi}_m \otimes \hat{I}$, είναι θετικός για οποιαδήποτε διάσταση D του H' . Αυτό σημαίνει ότι ο τελευταίος είναι ένας υπερτελεστής, δηλαδή απεικονίζει θετικούς τελεστές του σύνθετου συστήματος, σε θετικούς τελεστές. Από φυσική άποψη, η απαίτηση αυτή είναι εύλογη, αφού εξασφαλίζει ότι ο τελεστής combined operation, όταν δρα στην κατάσταση (ή ακριβέστερα στη μήτρα πυκνότητας) ενός συστήματος αποτελούμενου από δύο διαχωρισμένα υποσυστήματα, επηρεάζει τοπικά μόνο το πρώτο υποσύστημα, αφήνοντας αναλλοίωτο το δεύτερο. Με βάση τις τρεις προηγούμενες απαιτήσεις, οδηγούμαστε στο θεώρημα αναπαράστασης του Kraus, το οποίο μας παρέχει τη γενικότερη

δυνατή μορφή των τελεστών operation και effect. Σύμφωνα με αυτό, οι τελεστές $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$ και \hat{F}_m , μπορούν να εκφραστούν μέσω ενός συνόλου τελεστών $\hat{\Omega}_{mk}$ αντίστοιχα ως εξής:

$$\hat{\Phi}_m(\hat{\rho}) = \sum_k \hat{\Omega}_{mk} \hat{\rho} \hat{\Omega}_{mk}^\dagger \quad (32)$$

και

$$\hat{F}_m = \sum_k \hat{\Omega}_{mk}^\dagger \hat{\Omega}_{mk} \quad (33)$$

Ακόμη, λόγω της σχέσης 24, ισχύει:

$$\sum_{m,k} \hat{\Omega}_{mk}^\dagger \hat{\Omega}_{mk} = \hat{I} \quad (34)$$

Στις αμέσως επόμενες παραγράφους, όπου θα αναπτυχθούν συγκεκριμένοι τύποι κβαντικών μετρήσεων, θα γίνει αντιληπτό ότι το πρόβλημα κάθε μέτρησης ανάγεται στον προσδιορισμό των εκάστοτε τελεστών $\hat{\Omega}_{mk}$. Το θεώρημα αναπαράστασης του Kraus, μας παρέχει έναν τρόπο γραφής των τελεστών operation και effect, με τη βοήθεια ενός συνόλου τελεστών $\hat{\Omega}_{mk}$. Γεννάται τώρα το ερώτημα: Για δεδομένους τελεστές $\hat{\Phi}_m$ και \hat{F}_m , είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένοι οι αντίστοιχοι τελεστές $\hat{\Omega}_{mk}$; Η απάντηση είναι ότι οι παραπάνω τελεστές φέρουν την ελευθερία ενός αφθάρτου μοναδιακού μετασχηματισμού. Αυτό σημαίνει ότι τα ίδια $\hat{\Phi}_m$ και \hat{F}_m , που παράγονται από τους τελεστές $\hat{\Omega}_{mk}$, παράγονται και από τους:

$$\hat{\Omega}'_{mk} = \hat{U} \hat{\Omega}_{mk} \quad (35)$$

1.3.5: Προσεγγιστικές μετρήσεις

Ας υποθέσουμε, ότι θέλουμε να μετρήσουμε ένα παρατηρήσιμο μέγεθος R . Προφανώς, το μέγεθος αυτό θα αναπαρίσταται από έναν ερμητιανό τελεστή \hat{R} , με πραγματικές ιδιοτιμές R_m . Χάριν απλοποίησης, θα θεωρήσουμε ότι το φάσμα του \hat{R} , είναι διακριτό και μη εκφυλισμένο. Αν $|\psi_m\rangle$, είναι η κατάσταση της στατιστικής υποσυλλογής που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή R_m του μετρούμενου μεγέθους, τότε η αναμενόμενη τιμή του R θα είναι:

$$\langle R \rangle = \sum_m R_m |\langle \psi_m | \psi_m \rangle| \quad (36)$$

Αν η απόσταση $R_m - R_{m-1}$ μεταξύ δύο γειτονικών ιδιοτιμών, είναι αρκετά μεγάλη συγκρινόμενη με τη διακριτική ικανότητα της χρησιμοποιούμενης μετρητικής συσκευής, η μέτρηση είναι ακριβής και συνεπώς είναι δυνατή η πραγματοποίησή της είτε με τη χρήση της υπόθεσης των Von Neumann - Luders, είτε ακριβέστερα με εφαρμογή της γενικευμένης θεωρίας κβαντικής μέτρησης και του θεωρήματος αναπαράστασης του Kraus. Στην περίπτωση, όμως, όπου οι ιδιοτιμές του \hat{R} βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, η μέτρηση μπορεί να γίνει μόνο προσεγγιστικά. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να ορίσουμε μία υποθετική πυκνότητα πιθανότητας $W_{m,m'}$, η οποία δίνει την πιθανότητα ευρεσης του συστήματος στην κατάσταση $|\psi_m\rangle$ μετά τη μέτρηση, αν πριν από αυτή βρισκόταν στην $|\psi_{m'}\rangle$. Δεδομένου ότι μετά τη μέτρηση, η συσκευή δίνει πάντα ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, προκύπτει η συνθήκη κανονικοποίησης της υποθετικής πυκνότητας W :

$$\sum_m W_{m,m'} = 1 \quad (37)$$

Στην περίπτωση μίας ακριβούς μέτρησης, ισχύει:

$$W_{m,m'} = \delta_{mm'} \quad (38)$$

Συνεπώς, η μορφή της συνάρτησης W , αποτελεί ουσιαστικά μία έκφραση της αδυναμίας ακριβούς μέτρησης του ενδιαφέροντος μεγέθους, εξαιτίας διαφόρων παραγόντων, όπως είναι η πεπερασμένη διακριτική ικανότητα των οργάνων μέτρησης, οι εξωτερικές διαταραχές που προκαλούνται στο σύστημα από το περιβάλλον (θόρυβος), η αβεβαιότητα στη γνώση της αρχικής (πριν από τη μέτρηση) κατάστασης της μετρητικής συσκευής κ.ο.κ. Με την εισαγωγή της υποθετικής πυκνότητας W , η κατανομή πιθανότητας των δυνατών αποτελεσμάτων R_m της μέτρησης, λαμβάνει τη μορφή:

$$P(m) = \sum_{m'} W_{m,m'} \langle \psi_{m'} | \hat{\rho} | \psi_{m'} \rangle \quad (39)$$

Η κατανομή αυτή, λόγω της σχέσης 37, ικανοποιεί τη συνθήκη νορμαλισμού:

$$\sum_m P(m) = 1 \quad (40)$$

Ορίζουμε τον τελεστή effect ως εξής:

$$\hat{F}_m = \sum_{m'} \langle \psi_{m'} | W_{m,m'} | \psi_{m'} \rangle \quad (41)$$

Οπότε η εξίσωση 39 γίνεται:

$$P(m) = \text{tr}(\hat{F}_m \hat{\rho}) \quad (42)$$

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο τελεστής \hat{F}_m ικανοποιεί τις συνθήκες θετικότητας και κανονικοποίησης της παραγράφου 1.3.3. Προκειμένου να βρούμε έναν κατάλληλο υπερτελεστή operation, αναζητούμε ένα σύνολο τελεστών $\hat{\Omega}_m$, που να ικανοποιούν τη σχέση 33. Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε:

$$\hat{\Omega}_m = \hat{U}_m \hat{F}_m^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

Οπου \hat{U}_m αυθαίρετος μοναδιακός τελεστής, η ακριβής μορφή του οποίου καθορίζεται από τις λεπτομέρειες της μετρητικής συσκευής και η τετραγωνική ρίζα του effect, δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{F}_m^{\frac{1}{2}} = \sum_{m'} |\psi_{m'}\rangle \sqrt{W_{m,m'}} \langle \psi_{m'}| \quad (44)$$

Η μορφή του υπερτελεστή operation, μπορεί τώρα να προσδιοριστεί με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης 32:

$$\hat{\Phi}_m(\hat{\rho}) = (P(m))^{-1} \hat{U}_m \hat{F}_m^{\frac{1}{2}} \hat{\rho} \hat{F}_m^{\frac{1}{2}} \hat{U}_m^\dagger \quad (45)$$

Η τελευταία σχέση, δείχνει ότι η μετάβαση από την αρχική μήτρα πυκνότητας, σε αυτή της στατιστικής υποσυλλογής που χαρακτηρίζεται από το αποτέλεσμα R_m της μέτρησης, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο βήματα: (1):

$$\hat{\rho}'_m = (P(m))^{-1} \hat{F}_m^{\frac{1}{2}} \hat{\rho} \hat{F}_m^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

και (2):

$$\hat{\rho}'' = \hat{U}_m \hat{\rho}'_m \hat{U}_m^\dagger \quad (47)$$

Το δεύτερο βήμα, είναι απλώς ένας μοναδιακός μετασχηματισμός της μήτρας πυκνότητας $\hat{\rho}'_m$ και επομένως δεν επιφέρει μεταβολή στην εντροπία του συστήματος, με αποτέλεσμα να μη μεταφέρει πληροφορία από ή προς το σύστημα. Ο μοναδιακός αυτός μετασχηματισμός, εκφράζει ουσιαστικά τη διαταραχή που προκαλεί στο σύστημα η συσκευή μέτρησης. Αντίθετα, το πρώτο βήμα της διαδικασίας, είναι αυτό που εκφράζει τη μεταφορά πληροφορίας κατά τη διάρκεια της μέτρησης και διαχωρίζει την αρχική στατιστική συλλογή στις επιμέρους

υποσυλλογές. Ο τελεστής effect, ορίζεται μονοσήμαντα από τη φασματική οικογένεια R_m του τελεστή \hat{R} και την υποθετική πυκνότητα πιθανότητας $W_{m,m'}$. Επομένως, οι τελεστές \hat{F}_m και \hat{R} , έχουν κοινό φάσμα ιδιοτιμών και ως εκ τούτου μετατίθενται:

$$[\hat{F}_m, \hat{R}] = 0 \quad (48)$$

Στην ιδανική περίπτωση όπου η μετρητική συσκευή είχε άπειρη διακριτική ικανότητα, λόγω της σχέσης 38, οι εκφράσεις 41 και 45 των τελεστών effect και operation, λαμβάνουν αντίστοιχα τη μορφή:

$$\hat{F}_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \quad (49)$$

και

$$\hat{\Phi}_m(\hat{\rho}) = \hat{\rho}_m'' = \hat{U}_m|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\hat{U}_m^\dagger \quad (50)$$

Η τελευταία εξίσωση, συμπίπτει με τη μήτρα πυκνότητας της υπό μελέτη υποσυλλογής σε μία ιδεατή μέτρηση (υπόθεση Von Neumann - luders, συνοδευόμενη όμως από έναν μη προσδιορισμένο μοναδιακό μετασχηματισμό, ο οποίος σχετίζεται με τα χαρακτηριστικά της χρησιμοποιούμενης μετρητικής συσκευής.

1.3.6: Έμμεσες κβαντικές μετρήσεις

Μία πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση κβαντικών μετρήσεων, άμεσα σχετιζόμενων με τα ανοικτά κβαντικά συστήματα, είναι οι λεγόμενες έμμεσες μετρήσεις. Πρόκειται για μετρήσεις μεγεθών που αφορούν συστήματα στα οποία δεν έχουμε τη δυνατότητα άμεσης πρόσβασης και συνεπώς, η μέτρηση θα πρέπει να πραγματοποιηθεί σε κάποιο άλλο σύστημα και μέσω μίας διαδικασίας αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο συστημάτων, να αποκτηθεί η επιθυμητή πληροφορία για το αρχικό σύστημα. Κάθε τέτοια μέτρηση, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τρία στοιχεία: (1) Το κβαντικό αντικείμενο, δηλαδή το σύστημα από το οποίο θέλουμε να αποσπάσουμε πληροφορία, (2) το quantum probe, δηλαδή το σύστημα στο οποίο πραγματοποιείται απευθείας η μέτρηση και (3) μία κλασική συσκευή μέτρησης. Συγκεκριμένα, η διαδικασία μίας έμμεσης μέτρησης, λαμβάνει χώρα στα τρία ακόλουθα βήματα: (1) Τη χρονική στιγμή $t = 0$, έχουμε προετοιμάσει το quantum probe σε μία καλά ορισμένη αρχική κατάσταση. (2) Την ίδια στιγμή, θέτουμε σε εφαρμογή μία αλληλεπίδραση μεταξύ κβαντικού αντικειμένου και quantum probe, η οποία διαρκεί ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα τ . Κατά τη διάρκεια αυτής της αλληλεπίδρασης, δημιουργείται μία συσχέτιση μεταξύ των δύο συστημάτων. Το probe, έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η ανάδρασή του στο αντικείμενο να είναι αμελητέα. (3) Τη στιγμή $t = \tau$,

η κλασική συσκευή πραγματοποιεί μία μέτρηση ενός παρατηρήσιμου μεγέθους το οποίο αφορά το probe και το οποίο έχει σχετισθεί, μέσω της αλληλεπίδρασης αντικειμένου - probe, με την ποσότητα που προσπαθούσαμε αρχικά να μετρήσουμε στο κβαντικό αντικείμενο. Η πραγματοποιούμενη μέτρηση επί του probe, μπορεί να αντιμετωπισθεί, είτε ως ιδεατή, είτε ως γενικευμένη, ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια. Με τον τρόπο αυτό, αποχτούμε την πληροφορία που χρειαζόμαστε, μέσω της επαγόμενης (λόγω της αλληλεπίδρασης) συσχέτισης μεταξύ των δύο συστημάτων. Θα συμβολίσουμε με H_O και H_P τους χώρους Hilbert στους οποίους ζουν οι καταστάσεις του κβαντικού αντικειμένου και του quantum probe αντίστοιχα. Προκειμένου να εξάγουμε μία αναλυτική έκφραση για τους τελεστές operation και effect, θεωρούμε αρχικά ότι τη στιγμή $t = 0$, έχουμε προετοιμάσει το quantum probe σε μία κατάσταση με μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}_P$. Η αντίστοιχη (αρχική) μήτρα πυκνότητας του κβαντικού αντικειμένου είναι $\hat{\rho}_O$. Συνεπώς, τη στιγμή $t = 0$, το συνολικό σύστημα (αντικείμενο + probe), περιγράφεται από τη μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}_O \otimes \hat{\rho}_P$, η οποία ζει στο χώρο Hilbert $H_O \otimes H_P$. Η Hamiltonian που διέπει τη δυναμική του συνολικού συστήματος έχει τη μορφή:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_O + \hat{H}_P + \hat{H}_I(t) \quad (51)$$

Όπου \hat{H}_O και \hat{H}_P οι Hamiltonian της ελεύθερης εξέλιξης του αντικειμένου και του probe αντίστοιχα και $\hat{H}_I(t)$ η Hamiltonian της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης, η οποία εμπεριέχει τη χρονική εξάρτηση και μηδενίζεται εκτός του χρονικού διαστήματος $[0, \tau]$. Επομένως, ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης για το πλήρες σύστημα δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{U} = \hat{U}(\tau, 0) = T(\exp(\frac{-i}{\hbar} \int_0^\tau \hat{H}(t) dt)) \quad (52)$$

Ετσι, η αρχική μήτρα πυκνότητας του πλήρους συστήματος, εξελίσσεται μετά από χρόνο t ως εξής:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(\hat{\rho}_O \otimes \hat{\rho}_P)\hat{U}^\dagger \quad (53)$$

Εστω τώρα ότι τη χρονική στιγμή $t = \tau$, η κλασική συσκευή μετρά το μέγεθος R , που αντιπροσωπεύεται από τον ερμητιανό τελεστή \hat{R} . Χάρην ευκολίας, υποθέτουμε ότι ο \hat{R} , ο οποίος δρα στο χώρο H_P , έχει φάσμα διακριτό και μη εκφυλισμένο. Συνεπώς:

$$\hat{R} = \sum_m R_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \quad (54)$$

Η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος R_m της μέτρησης είναι:

$$\begin{aligned} P(m) &= \text{tr}(|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\hat{\rho}(t)) \\ &= \text{tr}(\hat{U}^\dagger|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\hat{U}(\hat{\rho}_O \otimes \hat{\rho}_P)) \end{aligned} \quad (55)$$

Οπου το ίχνος λαμβάνεται επί των βαθμών ελευθερίας τόσο του αντικειμένου όσο και του probe. Τα μερικά ίχνη στους δύο παραπάνω χώρους, θα συμβολίζονται στα επόμενα ως tr_O και tr_P αντίστοιχα. Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια ενός τελεστή effect ως ακολούθως:

$$P(m) = \text{tr}_O(\hat{F}_m\hat{\rho}_O) \quad (56)$$

Οπου:

$$\hat{F}_m\hat{\rho}_O = \text{tr}_P(\hat{U}^\dagger|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\hat{U}(\hat{\rho}_O \otimes \hat{\rho}_P)) \quad (57)$$

Με απεύθείας υπολογισμό προκύπτει ότι ο τελεστής \hat{F}_m ικανοποιεί τα κριτήρια θετικότητας και νορμαλισμού της παραγράφου 1.3.3. Για παράδειγμα, για το τελευταίο έχουμε:

$$\sum_m \hat{F}_m\hat{\rho}_O = \text{tr}_P(\hat{\rho}_O \otimes \hat{\rho}_P) = \hat{\rho}_O \quad (58)$$

Ακόμη, από την προτελευταία σχέση, φαίνεται αμέσως ότι ο τελεστής \hat{F}_m , δρα στο χώρο H_O των καταστάσεων του κβαντικού αντικειμένου. Εφαρμόζοντας την υπόθεση των Von Neumann - Luders, βρίσκουμε τη μήτρα πυκνότητας του κβαντικού αντικειμένου μετά τη μέτρηση, ως εξής:

$$\hat{\rho}'_m = (P(m))^{-1} \langle\phi_m|\hat{U}(\hat{\rho}_O \otimes \hat{\rho}_P)\hat{U}^\dagger|\phi_m\rangle \quad (59)$$

Εισάγοντας το φασματικό ανάπτυγμα της μήτρας πυκνότητας του probe

$$\hat{\rho}_P = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (60)$$

μπορούμε να γράψουμε τον τελεστή operation για το κβαντικό αντικείμενο, στη μορφή:

$$\hat{\Phi}_m(\hat{\rho}_O) = \sum_k \hat{\Omega}_{mk}\hat{\rho}_O\hat{\Omega}_{mk}^\dagger \quad (61)$$

Οπου:

$$\hat{\Omega}_{mk} = \sqrt{p_k} \langle\phi_m|\hat{U}|\phi_k\rangle \quad (62)$$

Παρατηρούμε, ότι οι τελεστές Ω_{mk} της αναπαράστασης των operation και effect, είναι ανάλογοι του πλάτους πιθανότητας μετάβασης του quantum probe, μεταξύ δύο ιδιοκαταστάσεων του τελεστή \hat{K} , ο οποίος αντιπροσωπεύει το μετρούμενο μέγεθος. Ο τελεστής $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho}_O)$, όπως φαίνεται από τη μορφή του, δρα στο χώρο H_O και εκφράζει την αλλαγή της κατάστασης του κβαντικού αντικειμένου, εξαιτίας της μέτρησης που έλαβε χώρα στο quantum probe.

1.3.7: Κβαντικές μετρήσεις χωρίς αλλοίωση

Μία άλλη σημαντική κατηγορία κβαντικών μετρήσεων, είναι οι λεγόμενες μετρήσεις χωρίς αλλοίωση (quantum non-demolition measurements, οι οποίες είναι χρήσιμες για την κατασκευή μετρητικών συστημάτων ιδιαίτερα υψηλής ακρίβειας. Πρόκειται για μετρήσεις οι οποίες δεν μεταβάλλουν την κατάσταση του συστήματος στο οποίο πραγματοποιούνται. Θεωρούμε ότι σε ένα σύστημα με μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}$, πραγματοποιούμε μία ιδεατή μη επιλεκτική μέτρηση του μεγέθους \hat{A} , του οποίου το φασματικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή:

$$\hat{A} = \sum_n A_n \hat{P}_n \quad (63)$$

Όπου A_n τα δυνατά αποτελέσματα της μέτρησης και \hat{P}_n οι αντίστοιχοι προβολικοί τελεστές. Η μέτρηση αυτή δεν αλλάζει την κατάσταση του συστήματος, αφού σύμφωνα με την υπόθεση των Von Neumann - Liders, η μήτρα πυκνότητας της m - υποσυλλογής, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_m &= \sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \\ &= \sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} = \hat{\rho} \end{aligned} \quad (64)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση πληρότητας των προβολικών τελεστών, καθώς και το γεγονός ότι αυτοί μετατίθενται με τη μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}$. Θεωρούμε τώρα μία γενικευμένη μη επιλεκτική μέτρηση του μεγέθους \hat{A} , με operation $\hat{\Phi}_m(\hat{\rho})$ και effect \hat{F}_m , που ορίζονται μέσω του συνόλου των τελεστών $\hat{\Omega}_{mk}$, σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης του Kraus. Μία τέτοια μέτρηση, θεωρείται ως μέτρηση χωρίς αλλοίωση, αν η κατανομή πιθανότητας για μία ιδεατή μέτρηση του μεγέθους \hat{A} , παραμένει αναλλοίωτη κατά τη διάρκεια της μέτρησης. Αυτό σημαίνει, ότι η κατανομή των ιδιοτιμών του \hat{A} , θα πρέπει να είναι

η ίδια πριν και μετά τη μέτρηση. Η απαίτηση αυτή, εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{A}\hat{\rho}) &= \text{tr}(\hat{A}\hat{\rho}') \\ &= \sum_m \text{tr}(\hat{A}\hat{\Omega}_m\hat{\rho}\hat{\Omega}_m^\dagger) \end{aligned} \quad (65)$$

Στο παράδειγμα της ιδεατής μέτρησης, είναι $\hat{\Omega}_m = \hat{P}_m$ και προφανώς, η τελευταία εξίσωση ικανοποιείται. Η τελευταία σχέση μπορεί εναλλακτικά να ερμηνευθεί ως απαίτηση οι τελεστές $\hat{\Omega}_m$, να είναι οι ίδιοι για όλες τις δυνατές καταστάσεις του συστήματος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση 24, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία έκφραση, στη μορφή:

$$\sum_m \text{tr}(\hat{\Omega}_m^\dagger[\hat{A}, \hat{\Omega}_m]\hat{\rho}) = 0 \quad (66)$$

Προκειμένου η σχέση αυτή να ισχύει για κάθε $\hat{\rho}$, θα πρέπει οι τελεστές $\hat{\Omega}_m$, που εκφράζουν την αλλαγή που επάγει η μέτρηση στην κατάσταση του συστήματος, να μετατίθενται με τον τελεστή \hat{A} του μετρούμενου μεγέθους:

$$[\hat{A}, \hat{\Omega}_m] = 0 \quad (67)$$

Όπως ήδη αποδείξαμε, η σχέση αυτή, ικανοποιείται σε κάθε ιδεατή μέτρηση και συνεπώς, όλες οι ιδεατές μετρήσεις είναι μετρήσεις χωρίς αλλοίωση. Στην περίπτωση της έμμεσης μέτρησης της προηγούμενης παραγράφου, η Hamiltonian $\hat{H}_I(t)$ της αλληλεπίδρασης, μετατίθεται με τον τελεστή \hat{A} και συνεπώς ο τελεστής $\hat{\Omega}_m$, είναι διαγώνιος στη βάση που συγκροτούν τα ιδιοανύσματα του \hat{A} . Επομένως, οι \hat{A} και $\hat{\Omega}_m$ μετατίθενται και ως εκ τούτου και αυτή είναι μία μέτρηση χωρίς αλλοίωση. Θεωρούμε τώρα μία γενικευμένη έμμεση μέτρηση και υποθέτουμε ότι το quantum probe, βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση $|\phi\rangle$. Αντικαθιστώντας τη σχέση 62 στην τελευταία εξίσωση, αποκτούμε:

$$\langle \phi_m | [\hat{A}, \hat{U}(\tau, 0)] | \phi \rangle = 0 \quad (68)$$

Απαιτώντας η παραπάνω έκφραση να ισχύει για κάθε m και δεδομένου ότι οι καταστάσεις $|\phi_m\rangle$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού αποτελούν βάση στο χώρο Hilbert H_P των καταστάσεων του probe, προκύπτει:

$$[\hat{A}, \hat{U}(\tau, 0)] | \phi \rangle = 0 \quad (69)$$

Θα μπορούσε κανείς να ικανοποιήσει την παραπάνω συνθήκη, προετοιμάζοντας το probe σε μία κατάλληλη αρχική κατάσταση $|\phi\rangle$, τέτοια ώστε ο μεταθέτης $[\hat{A}, \hat{U}(\tau, 0)]$, αν και εν γένει μη μηδενικός, να έχει επάνω της μηδενική δράση. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί στην πράξη. Αντίθετα, είναι πολύ απλούστερο, να απαιτήσει κανείς ως ικανή και αναγκαία συνθήκη, τον εξάρχης μηδενισμό του μεταθέτη:

$$[\hat{A}, \hat{U}(\tau, 0)] = 0 \quad (70)$$

Σύμφωνα με την τελευταία απαίτηση, ο τελεστής Heisenberg της μετρούμενης ποσότητας

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0)\hat{A}\hat{U}(t, 0) \quad (71)$$

επιστρέφει στην αρχική του τιμή μετά από χρόνο $t = \tau$:

$$\hat{A}_H(\tau) = \hat{A}_H(0) \quad (72)$$

Ο ευκολότερος τρόπος για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, είναι να απαιτήσουμε ο τελεστής \hat{A} να μετατίθεται με την ολική Hamiltonian της εξίσωσης 48. Η μετάθεση με την Hamiltonian \hat{H}_P είναι προφανής, αφού πρόκειται για τελεστές που δρουν σε διαφορετικούς χώρους Hilbert. Αν επιπλέον η μετρούμενη ποσότητα διατηρείται κατά την ελεύθερη εξέλιξη του κβαντικού αντικειμένου, η εξίσωση 70, εκφράζεται μέσω της απαίτησης:

$$\hat{A}, \hat{H}_I(t) = 0 \quad (73)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει, ότι η αλληλεπίδραση του κβαντικού αντικειμένου με το probe, δεν αλλάζει τη μετρούμενη ποσότητα. Με ανάλογους συλλογισμούς, προκύπτει η αντίστοιχη απαίτηση για την προσεγγιστική μέτρηση της παραγράφου 1.3.5:

$$[\hat{R}, \hat{U}_m] = 0 \quad (74)$$

Η απαίτηση αυτή, όμως, ισχύει μόνο προσεγγιστικά, αφού ο μοναδιακός μετασχηματισμός \hat{U}_m που συνδέεται με τη μετρητική συσκευή, επηρεάζει εν γένει το μετρούμενο μέγεθος.

1.3.8: Το κβαντικό φαινόμενο Zeno

Κλείνοντας αυτή τη σύντομη εισαγωγή στη θεωρία της κβαντικής μέτρησης, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε σε ένα παράδοξο, το οποίο σχετίζεται με

τις συνεχείς μετρήσεις και είναι γνωστό ως κβαντικό φαινόμενο Zeno. Ας θεωρήσουμε τη μέτρηση ενός μεγέθους \hat{A} , του οποίου το φάσμα των ιδιοτιμών A_n θεωρείται, χάριν απλοποίησης, διακριτό και μη εκφυλισμένο:

$$\hat{A} = \sum_n A_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (75)$$

Θεωρούμε τώρα, ότι στο σύστημά μας πραγματοποιείται μία σειρά ιδεατών άμεσων μετρήσεων του μεγέθους \hat{A} , με τέτοιο τρόπο, ώστε ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο επιτυχημένων διαδοχικών μετρήσεων, να είναι σταθερός και ίσος με θ . Ανάμεσα σε δύο τέτοιες μετρήσεις, η κατάσταση $|\psi\rangle$ του συστήματος, εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση του Schrodinger (σχέση 1). Υποθέτουμε ακόμη, ότι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, το σύστημα περιγράφεται από την ιδιοκατάσταση $|\psi_n\rangle$ του τελεστή \hat{A} , με αντίστοιχη ιδιοτιμή A_n :

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_n\rangle \quad (76)$$

Προφανώς, η κατάσταση του συστήματος μετά από χρόνο t , δίνεται από την εξίσωση 2. Για αρκούντως μικρές τιμές του χρόνου t , η Hamiltonian \hat{H} του συστήματος είναι δυνατόν να θεωρηθεί προσεγγιστικά χρονοανεξάρτητη, οπότε αντί της έκφρασης 4 για τον τελεστή της χρονικής εξέλιξης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απλούστερη έκφραση 5. Αναπτύσσοντας την έκφραση αυτή κατά Taylor σε δεύτερη τάξη ως προς το χρόνο t , μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση 1 στη μορφή:

$$|\psi(t)\rangle = \left(\hat{I} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}t - \frac{1}{2\hbar^2} \hat{H}^2 t^2 + O(t^3) \right) |\psi_n\rangle \quad (77)$$

Η πρώτη επιτυχής μέτρηση του \hat{A} πραγματοποιείται τη στιγμή $t = \theta$. Συνεπώς, η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος A_n , ή με άλλα λόγια, η πιθανότητα παραμονής του συστήματος στην αρχική του κατάσταση $|\psi_n\rangle$ μετά από αυτή τη μέτρηση, είναι:

$$\begin{aligned} w_{nn}(\theta) &= | \langle \psi_n | \psi(\theta) \rangle |^2 \\ &= 1 - (\Delta E)_n^2 \theta^2 + O(\theta^4) \end{aligned} \quad (78)$$

Όπου η διασπορά στην ενέργεια της κατάστασης $|\psi_n\rangle$ δίνεται από την έκφραση:

$$(\Delta E)_n^2 = \langle \psi_n | \hat{H}^2 | \psi_n \rangle - \langle \psi_n | \hat{H} | \psi_n \rangle^2 \quad (79)$$

Επομένως, μετά από k μετρήσεις, η παραπάνω πιθανότητα γίνεται:

$$W_{nn}(k\theta) = [1 - (\Delta E)_n^2 \theta^2]^k \quad (80)$$

Στο όριο όπου η μέτρηση γίνεται συνεχής ($k \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 0$, $k\theta = \tau = \text{const}$), η τελευταία σχέση λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} W_{nn}(\tau) &= \lim_{k \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0} [1 - (\Delta E)_n^2 \tau \frac{\theta}{k}]^k \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \exp [-(\Delta E)_n^2 \tau \theta] = 1 \end{aligned} \quad (81)$$

Η τελευταία έκφραση, αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του κβαντικού φαινομένου Zeno: Κάθε σύστημα, παραμένει με πιθανότητα 1 στην αρχική του κατάσταση, όταν σε αυτό πραγματοποιείται μία συνεχής μη επιλεκτική μέτρηση. Για το παράδοξο αυτό, έχουν δοθεί διάφορες φυσικές ερμηνείες, η λεπτομερής ανάλυση και μελέτη των οποίων ξεφεύγει από το σκοπό και τα όρια της παρούσας εργασίας. Εδώ, θα αρκεστούμε δίνοντας την απλή εξήγηση, ότι επειδή η μέτρηση διεξάγεται στο σύστημα με συνεχή τρόπο, το τελευταίο δεν προλαβαίνει να μεταβεί σε άλλη (πλιν της αρχικής του) κατάσταση, αφού δεν του δίνεται ο απαραίτητος χρόνος χαλάρωσης (relaxation time), ώστε να συνειδητοποιήσει την αλλαγή που επιφέρουν στη δυναμική του οι επιμέρους διακριτές μετρήσεις (θεωρώντας μία συνεχή μέτρηση ως μία άπειρη επανάληψη διακριτών μετρήσεων), οι οποίες υποθετικά απαρτίζουν την πραγματοποιούμενη συνεχή μέτρηση και να αντιδράσει κατάλληλα.

1.4: Το φαινόμενο της αποσυννοχής (decoherence)

1.4.1: Εισαγωγή

Όπως ήδη αναφέρθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, η αλληλεπίδραση ενός ανοικτού συστήματος με το περιβάλλον του, δημιουργεί μία συσχέτιση ανάμεσα στη δυναμική των δύο συστημάτων. Η συσχέτιση αυτή, με τη σειρά της, οδηγεί σε μεταφορά πληροφορίας από το σύστημα στο περιβάλλον και αντίστροφα. Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος λόγω της επίδρασης του περιβάλλοντος σε αυτό, θα εστιάσουμε τη μελέτη μας, μόνο στη μεταφορά πληροφορίας από το σύστημα στο περιβάλλον, αγνώνοντας την αντίστροφη διαδικασία. Δεν είναι δυνατόν να πούμε, ότι αυτή η μεταφορά μεταβάλλει την κατάσταση του συστήματος, αφού πάντοτε μπορεί κανείς να επιλέξει μία βάση, που ονομάζεται προτιμώμενη (preferred basis) και στην οποία, η κατάσταση του συστήματος παραμένει ανεπηρέαστη από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Η προτιμώμενη βάση, είναι αυτή στην οποία ο προβολικός τελεστής της κατάστασης του ανοικτού συστήματος, μετατίθεται

με την Hamiltonian του συνολικού κλειστού συστήματος. Ομως, είναι θεωρητικά αποδεδειγμένο και πειραματικά επιβεβαιωμένο, ότι οι υπερθέσεις των καταστάσεων του ανοικτού συστήματος, καταστρέφονται (τείνουν στο μηδέν) πολύ γρήγορα, εξαιτίας της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Η καταστροφή αυτή, είναι γνωστή ως φαινόμενο αποσυννοχής (decoherence) και έχει ιδιαίτερη σημασία για τη μελέτη των ανοικτών κβαντικών συστημάτων. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, οι συνέπειες του φαινομένου, είναι αρνητικές, αφού καταστρέφει τον κβαντικό χαρακτήρα του συστήματος. Για παράδειγμα, στην κβαντική πληροφορία και κρυπτογραφία, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της αποσυννοχής, προκειμένου να διατηρηθούν τα qubits τις κβαντικές τους ιδιότητες, ώστε οι υλοποιούμενοι κβαντικοί αλγόριθμοι, να είναι αποτελεσματικότεροι από τους αντίστοιχους κλασικούς. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η αποσυννοχή συμβαίνει πάντοτε πολύ γρήγορα. Πράγματι, όλα τα σχετικά πειράματα έχουν δείξει, ότι οι χαρακτηριστικοί χρόνοι αποσυννοχής (decoherence times), είναι πολύ μικρότεροι από τις αντίστοιχες μακροσκοπικές χρονικές κλίμακες των θεωρούμενων συστημάτων. Το γεγονός, ότι η αποσυννοχή δεν αποτελεί αντικείμενο ενδιαφέροντος σε μακροσκοπικές φυσικές διεργασίες, οφείλεται στο ότι οι κβαντικές συσχετίσεις, δεν γίνονται αντιληπτές στο μακρόκοσμο, αφού αυτό που κανείς μετρά, δεν είναι η ίδια η κβαντική κατάσταση του συστήματος, αλλά η προβολή της στον υπόχωρο ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος της μέτρησης, όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 1.3. Για παράδειγμα, στο νοητικό πείραμα της γάτας του Schrodinger, η κυματοσυνάρτηση της γάτας είναι:

$$|cat \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|dead \rangle + |alive \rangle) \quad (82)$$

Τι συμβαίνει; η γάτα είναι κατά το ήμισυ νεκρή και κατά το άλλο ήμισυ ζωντανή; Όχι βέβαια. Αυτό που πραγματικά συμβαίνει, είναι ότι οι καταστάσεις της νεκρής και της ζωντανής γάτας συνυπάρχουν, αλλά βρίσκονται σε αποσυννοχή. Επειδή η αποσυννοχή εκδηλώνεται πολύ γρήγορα (ή ακριβέστερα, πολύ γρηγορότερα από το χαρακτηριστικό χρόνο ζωής της γάτας), η υπέρθεση των δύο καταστάσεων εξαφανίζεται και μόνο η μία από αυτές επιβιώνει. Στην επόμενη παράγραφο, θα μελετήσουμε έναν τρόπο ποσοτικής έκφρασης του φαινομένου της αποσυννοχής, το λεγόμενο συναρτησιακό αποσυννοχής (decoherence functional).

1.4.2: Το συναρτησιακό αποσυννοχής (decoherence functional)

Ας επανέλθουμε τώρα, στο πρόβλημα του ανοικτού συστήματος X , το οποίο αλληλεπιδρά με το περιβάλλον A . Η Hamiltonian του συνολικού κλειστού συστήματος, έχει τη γενική μορφή:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad (83)$$

Όπου η συνολική ελεύθερη (χωρίς αλληλεπιδράσεις) Hamiltonian, είναι το άθροισμα των ελεύθερων Hamiltonian των δύο υποσυστημάτων:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_X + \hat{H}_A \quad (84)$$

Θεωρούμε μία Hamiltonian αλληλεπίδρασης, της μορφής:

$$\hat{H}_I = \sum_n \hat{P}_n \otimes \hat{A}_n \quad (85)$$

Όπου \hat{A}_n , ένας αυθαίρετος τελεστής που δρα στο χώρο των καταστάσεων του περιβάλλοντος και \hat{P}_n , ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί σε μία πλήρη ορθοκανονική βάση στο χώρο των καταστάσεων του ανοικτού συστήματος:

$$\hat{A}_n = |n\rangle\langle n| \quad (86)$$

Η προτιμώμενη βάση, είναι αυτή που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$[\hat{H}, \hat{P}_n] = 0 \quad (87)$$

Η μετάθεση του προβολικού τελεστή με την Hamiltonian της αλληλεπίδρασης, είναι εξασφαλισμένη, αφού η \hat{H}_I είναι εκ κατασκευής ανάλογη του \hat{P}_n . Εξασφαλισμένη είναι, όμως, και η μετάθεση του \hat{P}_n με την \hat{H}_A , αφού πρόκειται για τελεστές που δρουν σε διαφορετικούς χώρους Hilbert. Επομένως, η τελευταία απαίτηση λαμβάνει τη μορφή:

$$[\hat{H}_X, \hat{P}_n] = 0 \quad (88)$$

Από τη σχέση αυτή, προκύπτει ότι η μέση ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{H}_X(t) \rangle = 0 \quad (89)$$

Μεταβαίνοντας στην εικόνα της αλληλεπίδρασης, η Hamiltonian \hat{H}_I , λαμβάνει τη μορφή:

$$\hat{H}_I(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\hat{H}_I \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)$$

$$= \sum_n \hat{P}_n \otimes \hat{A}_n(t) \quad (90)$$

Οπου:

$$\hat{A}_n(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \hat{A}_n \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \quad (91)$$

Συνεπώς, στην εικόνα της αλληλεπίδρασης, ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης, θα δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{U}(t) = T\left(\exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t \sum_n \hat{P}_n \otimes \hat{A}_n(s) ds\right)\right) \quad (92)$$

Θεωρούμε, ότι αρχικά, το ανοικτό σύστημα είναι πλήρως διαχωρισμένο από το περιβάλλον και ως εκ τούτου, η αρχική κατάσταση του συνολικού κλειστού συστήματος είναι:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (93)$$

Οπου $|\phi\rangle$, μία τυχαία νορμαλισμένη κατάσταση στο χώρο του περιβάλλοντος. Λόγω των δύο τελευταίων εξισώσεων, μετά από χρόνο t , η κατάσταση του πλήρους συστήματος θα είναι:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle \quad (94)$$

Οπου:

$$\begin{aligned} |\phi_n(t)\rangle &= T\left(\exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t \hat{A}_n(s) ds\right)\right) |\phi\rangle \\ &= \hat{V}_n(t) |\phi\rangle \end{aligned} \quad (95)$$

Παρατηρούμε, ότι αν και η αρχική κατάσταση του συνολικού συστήματος ήταν διαχωρισμένη, η τελική κατάσταση είναι εναγκαλισμένη, δηλαδή το ανοικτό σύστημα δεν είναι πλέον διαχωρισμένο από το περιβάλλον. Επομένως, η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, θα έχει την έκφραση:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^R(t) &= \text{tr}_A(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle \langle m| \langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle \end{aligned} \quad (96)$$

Ομως, λόγω της μοναδιακότητας του τελεστή της χρονικής εξέλιξης, ισχύει:

$$\langle \phi_n(t) | \phi_n(t) \rangle = 1 \quad (97)$$

Συνεπώς, τα διαγώνια στοιχεία της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας, είναι ανεξάρτητα του χρόνου. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τα μη διαγώνια στοιχεία, τα οποία, εξαρτώνται δραματικά από το χρόνο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να τείνουν στο μηδέν πολύ γρήγορα. Ορίζουμε το συναρτησιακό αποσυνοχής $\Gamma_{nm}(t)$, ως εξής:

$$| \langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle | = \exp [\Gamma_{nm}(t)], \quad \Gamma_{nm}(t) \leq 0 \quad (98)$$

Η ποσότητα αυτή, περιγράφει τη συμπεριφορά των μη διαγώνιων στοιχείων της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας. Η ακριβής χρονική της εξάρτηση, είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων, όπως είναι η συγκεκριμένη μορφή της αλληλεπίδρασης συστήματος - περιβάλλοντος, το μικροσκοπικό μοντέλο (μηχανισμός) αυτής της σύζευξης, καθώς και οι ιδιότητες της αρχικής κατάστασης. Πάντως, σε αρκετά φυσικά συστήματα, για χρόνους αρκούντως μεγαλύτερους από το χρόνο αποσυνοχής, οι χρονικά εξελιγμένες καταστάσεις του περιβάλλοντος, τείνουν να σχηματίσουν μία ορθοκανονική βάση:

$$\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle \rightarrow \delta_{nm}, \quad t \gg t_D \quad (99)$$

Και ως εκ τούτου, η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, τείνει να γίνει διαγώνια:

$$\hat{\rho}^R = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n|, \quad t \gg t_D \quad (100)$$

Θεωρούμε τώρα την κάπως γενικότερη περίπτωση, όπου το σύστημα είναι μεν αρχικά διαχωρισμένο από το περιβάλλον, αλλά το τελευταίο βρίσκεται σε μία μικτή αρχική κατάσταση:

$$\hat{\rho}(0) = |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| \otimes \hat{\rho}_A(0) \quad (101)$$

Όπου $|\psi(0)\rangle$, είναι τώρα η αρχική κατάσταση του ανοικτού συστήματος:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (102)$$

Και $\hat{\rho}_A(0)$, είναι η αρχική μήτρα πυκνότητας του περιβάλλοντος. Η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, μετά από χρόνο t , γίνεται:

$$\hat{\rho}^R(t) = \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle \langle m| \text{tr}_A [V_m^{-1}(t) V_n(t) \hat{\rho}_A(0)] \quad (103)$$

Συνεπώς, το συναρτησιακό αποσυνοχής, λαμβάνει τη μορφή:

$$\Gamma_{nm}(t) = \ln | \langle \hat{V}_m^{-1}(t) \hat{V}_n(t) \rangle | \quad (104)$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι οι καταστάσεις του ανοικτού συστήματος, χαρακτηρίζονται, όχι μόνο από τον αριθμό n , αλλά και από έναν επιπρόσθετο κβαντικό αριθμό j . Η υπόθεση αυτή, ισοδυναμεί με μία ορθογώνια διάσπαση του αρχικού χώρου Hilbert των καταστάσεων του συστήματος X , σε υπόχωρους αυθαίρετης διάστασης $d_n \geq 1$:

$$H_X = \sum_n H_{X,n} \quad (105)$$

Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να γράψουμε τον αντίστοιχο προβολικό τελεστή, ως εξής:

$$\hat{P}_n = \sum_{j=1}^{d_n} |n_j\rangle\langle n_j|, \quad d_n \geq 1 \quad (106)$$

Η κατάσταση του συστήματος, δίνεται από τη λύση της εξίσωσης Schrodinger, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n,j} |n_j\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (107)$$

Η αντίστοιχη ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, θα δίνεται από την έκφραση:

$$\hat{\rho}^R(t) = \sum_{n,m} \sum_{j,j'} c_{nj} c_{mj'}^* |n_j\rangle\langle m_{j'}| \langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle \quad (108)$$

Υστερα από πλήρη αποσυνολή, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\hat{\rho}^R(t) = \sum_n \sum_{j,j'} c_{nj} c_{nj'}^* |n_j\rangle\langle n_{j'}|, \quad t \gg t_D \quad (109)$$

Παρατηρούμε, ότι οι κβαντικές συσχετίσεις (quantum coherence) διατηρούνται, μόνο μεταξύ καταστάσεων που ανήκουν στον ίδιο υπόχωρο, δηλαδή έχουν την ίδια τιμή του κβαντικού αριθμού n . Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του συναρτησιακού αποσυνολής για μικρούς χρόνους. Για το σκοπό αυτό, αναπτύσσουμε κατά Taylor τον τελεστή $\hat{V}_n(t)$ της εξίσωσης 95 και υποθέτουμε, ότι οι τελεστές \hat{A}_n , έχουν μηδενική μέση τιμή, ως προς την αρχική μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}_A(0)$ του περιβάλλοντος:

$$\langle \hat{A}_n(t) \rangle = 0 \quad (110)$$

Με τον τρόπο αυτό αποκτούμε την ακόλουθη έκφραση, η οποία δείχνει ότι για μικρούς χρόνους, το συναρτησιακό αποσυνοχής είναι ανάλογο του τετραγώνου του χρόνου:

$$\Gamma_{nm}(t) \approx \frac{-t^2}{2} \langle (\hat{A}_n - \hat{A}_m)^2 \rangle \quad (111)$$

Κεφάλαιο 2: Χρονική εξέλιξη των ανοικτών κβαντικών συστημάτων

2.1: Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε φανερό, ότι η ποσότητα - κλειδί για τη μελέτη της δυναμικής ενός ανοικτού κβαντικού συστήματος, είναι η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας. Επομένως, η περιγραφή της χρονικής εξέλιξης του συστήματος, ανάγεται στη μελέτη της εξέλιξης της αντίστοιχης ανηγμένης μήτρας πυκνότητας. Το συνολικό σύστημα (ανοικτό σύστημα + περιβάλλον), είναι εξυποθέσεως κλειστό και ως εκ τούτου, εξελίσσεται στο χρόνο μοναδιακά, σύμφωνα με τις εξισώσεις 2 και 11. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με το ανοικτό σύστημα, του οποίου η δυναμική δεν καθορίζεται αυτόνομα, αλλά επηρεάζεται και από την παρουσία του περιβάλλοντος. Ο βαθμός αυτής της επίδρασης του περιβάλλοντος στο σύστημα, θα αποτελέσει το αντικείμενο μελέτης της παρούσας παραγράφου. Δύο είναι οι κυριότεροι τρόποι περιγραφής της χρονικής εξέλιξης της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας ενός συστήματος: (1) με τη χρήση της εξίσωσης master και (2) με τη χρήση του συναρτησιακού επίδρασης (influence functional). Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε πολύ σύντομα στην πρώτη μέθοδο και αμέσως μετά, θα μελετήσουμε εκτενώς τη δεύτερη, η οποία είναι μία μέθοδος συναρτησιακών ολοκληρωμάτων.

2.2: Η εξίσωση Master

Στην περίπτωση όπου η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα της δυναμικής ενός ανοικτού συστήματος, είναι μεγάλη σε σύγκριση με το χρόνο που απαιτείται ώστε το περιβάλλον να "ξεχάσει" την πληροφορία που αποκτά από το σύστημα, η εξέλιξη του συστήματος, μπορεί με ικανοποιητική προσέγγιση να θεωρηθεί τοπική στο χρόνο. Ένα τέτοιο σύστημα καλείται Markovian. Όπως κάθε μοναδιακός μετασχηματισμός επάγεται από μία Hamiltonian, κάθε Markovian υπερτελεστής επάγεται από μία Lindbladian, σύμφωνα με την εξίσωση Master:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \hat{L}[\hat{\rho}] = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

$$+ \sum_{\mu} (\hat{L}_{\mu} \hat{\rho} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu}) \quad (112)$$

Εδώ, κάθε τελεστής Lindblad, αναπαριστά ένα κβαντικό άλμα που θα ανιχνεύαμε, αν μπορούσαμε να παρακολουθήσουμε σε μία οθόνη την εξέλιξη του περιβάλλοντος, στο θεωρούμενο χρονικό διάστημα.

2.3: Το συναρτησιακό επίδρασης (influence functional)

2.3.1: Από την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας στο συναρτησιακό επίδρασης

Θεωρούμε και πάλι το σύστημα X , το οποίο αλληλεπιδρά με το περιβάλλον A . Η Hamiltonian του συνολικού κλειστού συστήματος, δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{H} = \hat{H}_X + \hat{H}_A + \hat{H}_I \quad (113)$$

Υποθέτουμε, ότι την αρχική χρονική στιγμή (έστω $t = 0$), το σύστημα και το περιβάλλον του, είναι πλήρως διαχωρισμένα μεταξύ τους και ότι το περιβάλλον βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση, δηλαδή στη στάθμη ελάχιστης ενέργειας που επιτρέπουν οι κανόνες επιλογής της δυναμικής του. Επομένως, αν συμβολίσουμε με $|\psi_X(0)\rangle$ την τυχαία αρχική κατάσταση του συστήματος και με $|0_A\rangle$ την κατάσταση κενού του περιβάλλοντος, η αρχική μήτρα πυκνότητας του πλήρους συστήματος θα είναι:

$$\hat{\rho}(0) = |\psi_X(0)\rangle \langle 0_A| \langle 0_A| \langle \psi_X(0)| \quad (114)$$

Η παραπάνω υπόθεση, διευκολύνει τους υπολογισμούς, χωρίς όμως να είναι απαραίτητη. Προφανώς, η αρχική μήτρα πυκνότητας του συστήματος, είναι:

$$\hat{\rho}_X(0) = |\psi_X(0)\rangle \langle \psi_X(0)| \quad (115)$$

Η χρονική εξέλιξη της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας, υπολογίζεται λαμβάνοντας το ίχνος και των δύο μελών της εξίσωσης 11, ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του περιβάλλοντος:

$$\hat{\rho}^R(t) = tr_A(\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^{\dagger}(t)) \quad (116)$$

Οπου $\hat{U}(t) = \hat{U}(t, 0)$, ο μοναδιακός τελεστής που διέπει τη χρονική εξέλιξη του πλήρους συστήματος και ο οποίος δίνεται από την έκφραση 4 ή 5, ανάλογα με την εξάρτηση ή μη της ολικής Hamiltonian από το χρόνο. Αντικαθιστώντας

την προτελευταία σχέση στην τελευταία και μεταβαίνοντας στην αναπαράσταση θέσης (χώρος των θέσεων), αποκτούμε:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{x',x}^R(t) &= \langle x' | \hat{\rho}^R(t) | x \rangle \\
&= \int DA \langle X', A | \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) | X, A \rangle \\
&= \int DA \int DX'' \int DA'' \int DX''' \int DA''' \\
&\times \langle X', A | \hat{U}(t) | X'', A'' \rangle \langle X'', A'' | \hat{\rho}(0) | X''', A''' \rangle \\
&\times \langle X''', A''' | \hat{U}^\dagger(t) | X, A \rangle
\end{aligned} \tag{117}$$

Οπου με την εισαγωγή κατάλληλων πλήρων συνόλων από ανύσματα, παρεμβάλαμε τον ταυτοτικό τελεστή, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$\int DA \int DX |A, X \rangle \langle A, X| = \hat{I} \tag{118}$$

Η απουσία βελών στις συντεταγμένες τόσο του συστήματος όσο και του περιβάλλοντος, οφείλεται στο γεγονός, ότι αυτές δεν είναι κατανάγκη συνήθη (τριδιάστατα) ανύσματα θέσης, αλλά μπορούν να είναι στοιχεία οποιοδήποτε διανυσματικού χώρου αυθαίρετης (πεπερασμένης ή άπειρης) διάστασης, ως γενικευμένες συντεταγμένες οποιασδήποτε μορφής κβαντομηχανικών συστημάτων. Λόγω της προτελευταίας σχέσης, έχουμε:

$$\langle X'', A'' | \hat{\rho}(0) | X''', A''' \rangle = \hat{\rho}_{X'',X'''}^X(0) \hat{\rho}_{A'',A'''}^A(0) \tag{119}$$

Οπότε η έκφραση 117 γίνεται:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{X',X}^R(t) &= \int DX'' \int DX''' \hat{\rho}_{X'',X'''}^X(0) \\
&\times J(X'', X''', X', X, t)
\end{aligned} \tag{120}$$

Οπου η ποσότητα J ονομάζεται πυρήνας διάδοσης (Propagating kernel) και δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
J(X'', X''', X', X, t) &= \int DA \int DA'' \int DA''' \\
&\times \langle X', A | \hat{U}(t) | X'', A'' \rangle \hat{\rho}_{A'',A'''}^A(0)
\end{aligned}$$

$$\times \langle X''', A''' | \hat{U}^\dagger(t) | X, A \rangle \quad (121)$$

Παρατηρούμε, ότι ο πυρήνας διάδοσης, ο οποίος προέκυψε αποσπώντας από την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας παράγοντες εξαρτώμενους μόνο από το σύστημα, αποτελείται από δύο διαδότες (στοιχεία πίνακα του τελεστή της χρονικής εξέλιξης, μεταξύ δύο καταστάσεων), ανάμεσα στους οποίους βρίσκεται η αρχική μήτρα πυκνότητας του περιβάλλοντος. Δεν έχουμε όμως εξάγει από την $\hat{\rho}^R(t)$ όλους τους παράγοντες που σχετίζονται μόνο με το σύστημα. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συναρτησιακά ολοκληρώματα. Οι διαδότες, εξόρισμού, μπορούν να εκφραστούν ως τέτοια ολοκληρώματα, με την αρχική και την τελική κατάσταση σε κάθε διαδότη να καθορίζουν τις συνοριακές συνθήκες της αντίστοιχης συναρτησιακής ολοκλήρωσης. Με τον τρόπο αυτό, αποκτούμε:

$$\begin{aligned} \langle X', A | \hat{U}(t) | X'', A'' \rangle &= \int_{X^{(4)}(0)=X'', X^{(4)}(t)=X'} DX^{(4)} \\ &\times \int DA^{(4)} \delta[A^{(4)}(t) - A''] \delta[A^{(4)}(0) - A'] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L(X^{(4)}, A^{(4)}) \right] \\ &= \int_{X^{(4)}(0)=X'', X^{(4)}(t)=X'} DX^{(4)} \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L_X(X^{(4)}) \right] \\ &\times \int DA^{(4)} \delta[A^{(4)}(t) - A''] \delta[A^{(4)}(0) - A'] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L_{A+I}(X^{(4)}, A^{(4)}) \right] \end{aligned} \quad (122)$$

Όπου γράψαμε την Lagrangian του πλήρους συστήματος, ως άθροισμα των αντίστοιχων Lagrangian του ανοικτού συστήματος, του περιβάλλοντος και της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned} L &= L_X + L_A + L_I \\ &= L_X + L_{A+I} \end{aligned} \quad (123)$$

Η αρίθμηση που χρησιμοποιήσαμε για τις συντεταγμένες, έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι βολική για τη συνέχεια των υπολογισμών. Ομοίως:

$$\begin{aligned}
\langle X''', A''' | \hat{U}^\dagger(t) | X, A \rangle &= \langle X, A | \hat{U}(t) | X''', A''' \rangle^* \\
&= \int_{X^{(1)}(0)=X''', X^{(1)}(t)=X} DX^{(1)} \\
&\times \int DA^{(1)} \delta[A^{(1)}(t) - A] \delta[A^{(1)}(0) - A'''] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^0 dt' L(X^{(1)}, A^{(1)})\right] \\
&= \int_{X^{(1)}(0)=X''', X^{(1)}(t)=X} DX^{(1)} \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^0 dt' L_X(X^{(1)})\right] \\
&\times \int DA^{(1)} \delta[A^{(1)}(t) - A] \delta[A^{(1)}(0) - A'''] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^0 dt' L_{A+I}(X^{(1)}, A^{(1)})\right] \tag{124}
\end{aligned}$$

Ως συναρτησιακό ολοκλήρωμα, μπορεί ακόμη να εκφραστεί και η αρχική (θεμελιώδης) μήτρα πυκνότητας του περιβάλλοντος, ως εξής:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{A'', A'''}^A(0) &= \frac{1}{Z_A} \int DA^{(3)} \delta[A^{(3)}(-0) - A''] \\
&\times \int DA^{(2)} \delta[A^{(2)}(+0) - A'''] \\
&\times \exp\left[\frac{-1}{\hbar} \int_{-\infty}^{-0} d\tau L_A^E(A^{(3)}) - \frac{1}{\hbar} \int_{+0}^{+\infty} d\tau L_A^E(A^{(2)})\right] \tag{125}
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της έκφρασης αυτής, αρκεί να θυμηθούμε τον ορισμό του διαδότη:

$$G_A(A'', t', A''', t) = H_H^{<A'', t' | A''', t>} \tag{126}$$

Όπου ο δείκτης H στα καταστατικά ανύσματα, δηλώνει ότι αυτά είναι εκπεφρασμένα στην εικόνα του Heisenberg. Μεταβαίνοντας στην εικόνα του Schrodinger, η τελευταία εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$G_A(A'', t', A''', t) = \langle A'' | \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(t' - t)\hat{H}_A\right] | A''' \rangle \quad (127)$$

Θεωρώντας ότι η Hamiltonian του περιβάλλοντος έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} G_A(A'', t', A''', t) &= \sum_{n_A} \langle A'' | \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(t' - t)\hat{H}_A\right] | n_A \rangle \\ &\quad \times \langle n_A | A''' \rangle \\ &= \sum_{n_A} \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(t' - t)E_{n_A}\right] \\ &\quad \times \phi_{n_A}(A'') \phi_{n_A}^*(A''') \end{aligned} \quad (128)$$

Η παραπάνω έκφραση, επιτρέπει τη θεώρησή της ως μία μαθηματική συνάρτηση της μεταβλητής t , της οποίας μπορούμε προς στιγμήν να ξεχάσουμε τη φυσική σημασία και να τη θεωρήσουμε ακόμη και φανταστική. Εισάγουμε τη φανταστική μεταβλητή $\tau = it$ και λαμβάνουμε τα όρια:

$$\tau = -T_E, \quad \tau' = 0, \quad T_E \rightarrow \infty \quad (129)$$

Με την εισαγωγή του Ευκλείδειου χρόνου, η προτελευταία εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} G_A(A'', 0, A''', -T_E) &= \langle A'' | 0_A \rangle \langle 0_A | A''' \rangle \\ &\quad \times \exp\left(\frac{-T_E E_{0_A}}{\hbar}\right) \\ &\quad \times [1 + O(\exp\left[\frac{-T_E(E_{n_A} - E_{0_A})}{\hbar}\right])] \end{aligned} \quad (130)$$

Οπότε, η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης του περιβάλλοντος, μπορεί να εκφραστεί ως συναρτησιακό ολοκλήρωμα του διαδότη:

$$\begin{aligned} \langle A'' | 0_A \rangle &\approx \int dA''' G_A(A'', 0, A''', -\infty) \\ &= \int_{A(-0)=A''} DA \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(\frac{-1}{\hbar} \int_{-\infty}^{-0} d\tau L_A^E(A)\right) \quad (131)$$

Η τελευταία σχέση, είναι η βάση της έκφρασης 125, με μόνη διαφορά την απουσία της σταθεράς κανονικοποίησης Z_A :

$$\begin{aligned} Z_A &= \int_{A(-\infty)=A(+\infty)} DA \\ &\times \exp\left(\frac{-1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau L_A^E(A)\right) \end{aligned} \quad (132)$$

Αυτή εισάγεται, προκειμένου η αρχική μήτρα πυκνότητας του περιβάλλοντος, να ικανοποιεί τη συνθήκη νορμαλισμού:

$$tr_A \hat{\rho}_A(0) = 1 \quad (133)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 122, 124 και 125 στην έκφραση 121, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} J(X'', X''', X', X, t) &= \frac{1}{Z_A} \\ &\times \int_{X^{(1)}(0)=X''', X^{(1)}(t)=X} DX^{(1)} \\ &\times \int_{X^{(4)}(0)=X'', X^{(4)}(t)=X'} DX^{(4)} \\ &\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L_X(X^{(4)}) + \frac{i}{\hbar} \int_t^0 dt' L(X^{(1)})\right] \\ &\times F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) \end{aligned} \quad (134)$$

Οπου η ποσότητα F , καλείται συναρτησιακό επίδρασης (influence functional ή συναρτησιακό Feynman - Vernon και δίνεται από την έκφραση:

$$\begin{aligned} F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) &= \left(\prod_{i=1}^4 \int DA^{(i)}\right) \\ &\times \delta[A^{(4)}(0) - A^{(3)}(-0)] \delta[A^{(4)}(t) - A^{(1)}(t)] \\ &\times \delta[A^{(2)}(+0) - A^{(1)}(0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L_{A+I}(X^{(4)}, A^{(4)}) - \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{-0} d\tau L_A^E(A^{(3)}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\hbar} \int_{+0}^{+\infty} d\tau L_A^E(A^{(2)}) + \frac{i}{\hbar} \int_t^0 dt' L_{A+I}(X^{(1)}, A^{(1)})\right] \quad (135) \end{aligned}$$

Πρόκειται για μία ποσότητα με ιδιαίτερη σημασία για τη μελέτη ενός ανοικτού συστήματος, αφού περιγράφει πλήρως τον τρόπο επίδρασης του περιβάλλοντος στη χρονική εξέλιξη του συστήματος, όπως φαίνεται και από τη μορφή του (όλοι οι παράγοντες που σχετίζονται μόνο με το σύστημα, έχουν τώρα αποσπαστεί από την ανηγμένη μίτρα πυκνότητας). Η τελευταία έκφραση, είναι πολύ δύσκολη για υπολογισμούς, επειδή η δράση που υπεισέρχεται σε αυτή, περιέχει πολλές συναρτησιακές ολοκληρώσεις. Επομένως, αυτό που χρειαζόμαστε ώστε να γίνει η τελευταία εξίσωση ευκολότερα διαχειρίσιμη, είναι η ανάπτυξη μίας τεχνικής, μέσω της οποίας θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μία δράση (και κατά συνέπεια ένα συναρτησιακό επίδρασης), που να περιέχει μόνο μία συναρτησιακή ολοκλήρωση. Βέβαια, ως γνωστόν, η φυσική μίας θεωρίας δεν αλλάζει μέσω μαθηματικών μετασχηματισμών. Για το λόγω αυτό, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η δημιουργία ενός τοπικού στο χρόνο (από μαθηματικής άποψης) όρου δράσης με τη χρήση του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου, δεν οδηγεί σε μία πραγματική (φυσικά υλοποιήσιμη) δράση, εξαιτίας του γεγονότος, ότι η μεταβλητή επί της οποίας ολοκληρώνεται η Lagrangian, δεν είναι ο φυσικός χρόνος. Στο εξής, θα ονομάζουμε αυτό τον όρο τροποποιημένη δράση. Τι συμβαίνει, όμως, με τη θερμοδυναμική συμπεριφορά του συστήματος; Εως τώρα, έχουμε αγνοήσει την επίδραση της θερμοκρασίας στα αποτελέσματα των υπολογισμών μας. Αν θέλαμε να επαναφέρουμε τη θερμοκρασιακή εξάρτηση, θα έπρεπε να υιοθετήσουμε για το περιβάλλον ένα θερμοδυναμικό μοντέλο. Η απλούστερη περίπτωση ενός τέτοιου προτύπου, θα ήταν να θεωρήσουμε το περιβάλλον ως ένα λουτρό θερμότητας, εβρισκόμενο σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας με θερμοκρασία T . Στην περίπτωση αυτή, η αρχική μίτρα πυκνότητας του περιβάλλοντος, θα δινόταν από τη γνωστή έκφραση της στατιστικής μηχανικής:

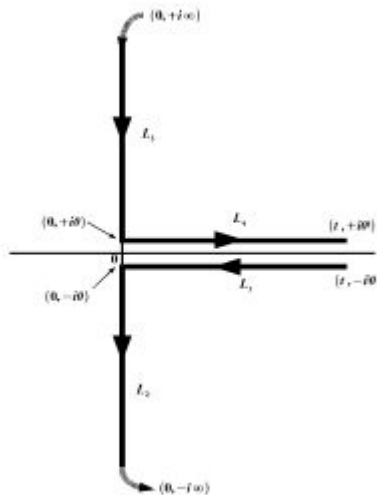
$$\hat{\rho}^A(0) = \frac{\exp(-\beta \hat{H}_A)}{Z_A}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (136)$$

Όπου k_B η σταθερά του Boltzmann και Z_A η συνάρτηση επιμερισμού του περιβάλλοντος. Αν επαναλαμβάναμε τους υπολογισμούς με αυτή την τιμή της $\hat{\rho}^A(0)$, θα διαπιστώναμε ότι στα όρια ολοκλήρωσης των Ευκλείδιων όρων δράσης, αντί του $\pm\infty$, θα εμφανιζόταν το $\pm\frac{\beta}{2}$. Η φυσική σημασία της παρατήρησης αυτής,

είναι ότι αναμένουμε να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος, όταν το περιβάλλον βρίσκεται σε μηδενική θερμοκρασία.

2.3.2: Ο φορμαλισμός κλειστού μιγαδικού χρόνου

Η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε για την απλούστευση της έκφρασης του συναρτησιακού επίδρασης (προτελευταία εξίσωση), καλείται φορμαλισμός κλειστού μιγαδικού χρόνου. Η τεχνική αυτή, σχετίζεται με το φορμαλισμό Keldysh, ο οποίος εφαρμόζεται σε συστήματα εκτός ισορροπίας. Όπως δηλώνει και το όνομά της, η μέθοδος συνίσταται στην αντικατάσταση του χρόνου t , από μία μιγαδική μεταβλητή z . Η μεταβλητή αυτή, ορίζεται επί μίας κλειστής καμπύλης C , η οποία διατρέχει το μιγαδικό επίπεδο και αποτελείται από τέσσερα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα: (1) Το τμήμα L_1 , κινείται παράλληλα προς τον πραγματικό άξονα, από το σημείο $t - i0$ έως το $0 - i0$. (2) Το τμήμα L_2 , αρχίζει από το σημείο $0 - i0$ και ακολουθεί πορεία παράλληλη προς το φανταστικό άξονα, έως το σημείο $0 - i\infty$. (3) Το τμήμα L_3 , κινείται παράλληλα προς τον πραγματικό άξονα με φορά αντίθετη από αυτή του L_1 , από το σημείο $0 + i\infty$, έως το $0 + i0$. (4) Τέλος, το τμήμα L_4 , ξεκινά από το σημείο $0 + i0$, κατευθύνεται παράλληλα προς το φανταστικό άξονα και αντίθετα προς το L_2 και καταλήγει στο σημείο $t + i0$. Η μορφή της καμπύλης C στο μιγαδικό επίπεδο, απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Η τροποποιημένη δράση που υπεισέρχεται στην έκφραση του συναρτησιακού

επίδρασης, λαμβάνει τώρα τη μορφή:

$$\bar{S} = \int_C dz L_{A+I}(X_c, A_c) \quad (137)$$

Οπου:

$$(X_{L_i}, A_{L_i}) = (X^{(i)}, A^{(i)}) \quad (138)$$

Θεωρούμε τώρα μία Lagrangian αλληλεπίδρασης, της μορφής:

$$L_I = gAX \quad (139)$$

Οπου g , η σταθερά σύζευξης, το μέτρο δηλαδή της έντασης της αλληλεπίδρασης. Στην περίπτωση αυτή, η τροποποιημένη δράση γίνεται:

$$\bar{S} = \int_C dz [L_A(A_c) + g_c A_c X_c] \quad (140)$$

Οπου ορίσαμε τη σταθερά ζεύξης g_c με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι μη μηδενική, μόνο στη φυσικά πραγματοποιήσιμη περιοχή (πραγματικός χρόνος):

$$g_{L_1} = g_{L_4} = g, \quad g_{L_2} = g_{L_3} = 0 \quad (141)$$

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ορθότητα της τεχνικής, αρκεί ναδειχθεί, ότι ξεκινώντας από την εξίσωση 137 και ολοκληρώνοντας ξεχωριστά σε κάθε τμήμα της καμπύλης C , είναι δυνατή η αναπαραγωγή των τεσσάρων όρων της έκφρασης 135. Πράγματι: Κατά μήκος των γραμμών L_1 και L_4 , έχουμε:

$$z = t' - i0 \quad (142)$$

Και επομένως:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} dz L_{A+I}(A_{L_1}, X_{L_1}) &= \int_{t-i0}^{0-i0} dz L_{A+I}(A_{L_1}, X_{L_1}) \\ &= \int_t^0 dt' L_{A+I}(A^{(1)}, X^{(1)}) \end{aligned} \quad (143)$$

και

$$\begin{aligned} \int_{L_4} dz L_{A+I}(A_{L_4}, X_{L_4}) &= \int_{0+i0}^{t+i0} dz L_{A+I}(A_{L_4}, X_{L_4}) \\ &= \int_0^t dt' L_{A+I}(A^{(4)}, X^{(4)}) \end{aligned} \quad (144)$$

Αντίστοιχα, κατά μήκος των L_2 και L_3 , έχουμε:

$$z = 0 - i\tau \quad (145)$$

Και συνεπώς:

$$\begin{aligned} \int_{L_2} dz L_A(A_{L_2}) &= \int_{0-i0}^{0-i\infty} dz L_A(A_{L_2}) \\ &= i \int_0^\infty d\tau L_A(A^{(2)}) \end{aligned} \quad (146)$$

και

$$\begin{aligned} \int_{L_3} dz L_A(A_{L_3}) &= \int_{0+i\infty}^{0+i0} dz L_A(A_{L_3}) \\ &= i \int_{-\infty}^{-0} d\tau L_A(A^{(3)}) \end{aligned} \quad (147)$$

Η ίδια η μορφή της καμπύλης C , υπαγορεύει την ύπαρξη δύο περιοδικών συνοριακών συνθηκών: (1) Το τμήμα L_2 κατέληξε στο σημείο $0 - i\infty$, ενώ το L_3 άρχισε από το $0 + i\infty$. Προκειμένου το άλμα αυτό να μη συνιστά ασυνέχεια της καμπύλης ολοκλήρωσης, θα πρέπει η μεταβλητή της συναρτησιακής ολοκλήρωσης (η συντεταγμένη του περιβάλλοντος), να έχει την ίδια τιμή στα δύο αυτά σημεία:

$$A_c(0 - i\infty) = A_c(0 + i\infty) \quad (148)$$

(2) Επειδή η καμπύλη C είναι εκ κατασκευής κλειστή, οι συντεταγμένες του περιβάλλοντος στο αρχικό ($t - i0$) και στο τελικό ($t + i0$) σημείο της διαδρομής, θα πρέπει να ταυτίζονται:

$$A_c(t - i0) = A_c(t + i0) \quad (149)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 137 και την τελευταία περιοδική συνοριακή συνθήκη, το συναρτησιακό επίδρασης γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) &= \frac{1}{Z_A} \int_{A_c(t+i0)=A_c(t-i0)} DA_c \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_C dz L_{A+I}(A_c, X_c) \right] \end{aligned} \quad (150)$$

Η τελευταία σχέση, είναι πολύ απλούστερη και πιο εύχρηστη από την έκφραση 135, αφού περιέχει μία μόνο συναρτησιακή ολοκλήρωση. Στην περίπτωση όπου

η Lagrangian της αλληλεπίδρασης δίνεται από τη σχέση 139, χρησιμοποιώντας την έκφραση 140, η τελευταία εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) &= \frac{1}{Z_A} \int_{A_c(t+i0)=A_c(t-i0)} DA_c \\
&\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_C dz L_A(A_c) + \frac{i}{\hbar} \int_C dz g_c A_c X_c \right] \\
&= \langle \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_C dz g_c A_c X_c \right) \rangle_A \\
&= \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{FV}(X_c) \right) \tag{151}
\end{aligned}$$

Όπου ο δείκτης A στη μέση τιμή, υποδηλώνει ότι αυτή έχει ληφθεί ως προς τη μήτρα πυκνότητας του περιβάλλοντος.

2.3.3: Ένα απλό παράδειγμα υπολογισμού

Στην παράγραφο αυτή, υπολογίζεται με τη χρήση της τεχνικής που μόλις συζητήθηκε, το συναρτησιακό επίδρασης στην απλή περίπτωση, όπου το περιβάλλον είναι ένας αρμονικός ταλαντωτής. Στη συνέχεια, το αποτέλεσμα του υπολογισμού γενικεύεται, για ένα περιβάλλον αποτελούμενο από μία συλλογή N αρμονικών ταλαντωτών. Το παράδειγμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, όχι μόνο λόγω της μεγάλης σημασίας του αρμονικού ταλαντωτή ως φυσικού συστήματος, αλλά και επειδή το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (όπως άλλωστε και όλα τα πεδία), το οποίο θα διαδραματίσει το ρόλο του περιβάλλοντος στο επόμενο κεφάλαιο, συμπεριφέρεται ως μία άπειρη επαλληλία αρμονικών ταλαντωτών. Θεωρούμε λοιπόν, ένα γενικό κβαντομηχανικό σύστημα X με διάνυσμα θέσης \vec{X} , συζευγμένο με έναν αρμονικό ταλαντωτή A με μάζα m_A , φυσική συχνότητα ω_A και διάνυσμα θέσης \vec{Q} . Επομένως, η Lagrangian του περιβάλλοντος είναι:

$$L_A = \frac{1}{2} m_A (\dot{\vec{Q}})^2 - \frac{1}{2} m_A \omega_A^2 \vec{Q}^2 \tag{152}$$

Θεωρούμε ακόμη, ότι η Lagrangian της αλληλεπίδρασης συστήματος - περιβάλλοντος, έχει τη μορφή:

$$L_I = g \vec{X} \cdot \vec{Q} \tag{153}$$

Επειδή η δράση του αρμονικού ταλαντωτή είναι τετραγωνική, η επίλυση της εξίσωσης 150, με τη χρήση των σχέσεων 152 και 153 και των συνοριακών συνθηκών

$$\vec{Q}_c(0 + i\infty) = \vec{Q}_c(0 - i\infty), \quad \vec{Q}_c(t + i0) = \vec{Q}_c(t - i0) \tag{154}$$

ανάγεται σε μία Gaussian ολοκλήρωση, από την οποία προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το συναρτησιακό επίδρασης:

$$F(\vec{X}^{(4)}, \vec{X}^{(1)}, t) = \exp\left[\frac{-i}{\hbar} \int_C dz g_c(z) \int_C dz' g_c(z') \times \vec{X}_c(z') \cdot \vec{X}_c(z) \theta_c(z - z') G_c^{(2)}(z - z')\right] \quad (155)$$

Η σχέση αυτή, δεν είναι τίποτε άλλο από τη μεταγραφή, στο πλαίσιο του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου, της γεννήτριας συνάρτησης του ελεύθερου αρμονικού ταλαντωτή, με πηγή το άνυσμα θέσης \vec{X} του ανοικτού συστήματος:

$$\exp\left[\frac{-i}{\hbar} \int dt g(t) \int dt' g(t') \times \vec{X}(t') \cdot \vec{X}(t) \theta(t - t') G^{(2)}(t - t')\right] \quad (156)$$

Για τη μεταγραφή αυτή, έγιναν οι αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{X}(t) \rightarrow \vec{X}_c = \vec{X}(z) \\ \vec{Q} &= \vec{Q}(t) \rightarrow \vec{Q}_c = \vec{Q}(z) \\ \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (157)$$

Η θ - συνάρτηση που υπεισέρχεται στην έκφραση 155, δεν είναι η συνήθης βηματική συνάρτηση, αφού το όρισμά της είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Η συνάρτηση αυτή, εξαρτάται από τη διαδρομή της ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο, γεγονός που υποδηλώνεται και από την παρουσία του δείκτη c στο σύμβολό της. Για να την ορίσουμε, θεωρούμε μία κατάλληλη παραμετροποίηση της καμπύλης z , με μία πραγματική παράμετρο σ , τέτοια ώστε:

$$z = z(\sigma), \quad \sigma \in [0, 1] \quad (158)$$

Με συνοριακές συνθήκες:

$$z(0) = t - i0, \quad z(1) = t + i0 \quad (159)$$

Και ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \theta_c(z - z') &= \theta_c(z(\sigma) - z(\sigma')) \\ \theta_c(z - z') &= \theta(\sigma - \sigma')|_C = L_{2,4}, \end{aligned}$$

$$\theta_c(z - z') = \theta(\sigma' - \sigma)|C = L_{1,3} \quad (160)$$

Ο παραπάνω ορισμός, προϋποθέτει ότι οι μεταβλητές z και z' , διατρέχουν την ίδια διαδρομή ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση όπου τα z και z' ολοκληρώνονται κατά μήκος διαφορετικών γραμμών, η συνάρτηση θ_c είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν ή ένα, ανάλογα με τη ροή του χρόνου κατά μήκος αυτών των γραμμών. Για παράδειγμα:

$$\theta_{L_1, L_4}(z - z') = 1 \quad (161)$$

Η σχέση αυτή είναι προφανής, αφού η ελάτωση του χρόνου κατά μήκος της γραμμής L_1 , συμβαίνει μετά την αύξησή του κατά μήκος της L_4 . Ο διαδότης της έκφρασης 155, δεν είναι παρά η συνάρτηση Green του αρμονικού ταλαντωτή, με τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες 154. Η συνάρτηση αυτή, αν θεωρήσουμε ότι T είναι η περίοδος, έχει τη γνωστή μορφή:

$$G^{(2)}(t - t') = \frac{-1}{2m_A\omega_A} \frac{\cos[\omega_A(|t - t'| - \frac{T}{2})]}{\sin(\frac{\omega_A T}{2})} \quad (162)$$

Στο πλαίσιο του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου, η σχέση αυτή γράφεται ως εξής:

$$G_c^{(2)}(z - z') = \frac{-1}{2m_A\omega_A} \frac{\cos[\omega_A(|z - z'|_c - \frac{T}{2})]}{\sin(\frac{\omega_A T}{2})} \quad (163)$$

Προφανώς, η περίοδος είναι φανταστική και ίση με $-2iT_E$, οπότε:

$$G_c^{(2)}(z - z') = \frac{-1}{2m_A\omega_A} \frac{\cos[\omega_A(|z - z'|_c + iT_E)]}{\sin(-i\omega_A T_E)} \quad (164)$$

Όπου η νόρμα με το δείκτη c , ορίζεται όπως η γνωστή μας απόλυτη τιμή, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση της συνήθους θ - συνάρτησης από την θ_c :

$$\begin{aligned} |t - t'| &= (t - t')\text{sign}(t - t') \\ &= (t - t')[\theta(t - t') - \theta(t' - t)] \\ \rightarrow |z - z'|_c &= (z - z')\text{sign}_c(z - z') \\ &= (z - z')[\theta_c(z - z') - \theta_c(z' - z)] \end{aligned} \quad (165)$$

Επειδή στις συνοριακές συνθήκες 154 η περίοδος είναι άπειρη ($T_E \rightarrow +\infty$), η προτελευταία εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$G_c^{(2)}(z - z') = \lim_{T_E \rightarrow +\infty} \left(\frac{-i}{2m_A\omega_A} \frac{\cos(\omega_A|z - z'|_c)}{\tanh(\omega_A T_E)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m_A\omega_A} \sin(\omega_A|z - z'|_c) \\
& = \frac{-1}{2m_A\omega_A} (i \cos(\omega_A|z - z'|_c) \\
& \quad + \sin(\omega_A|z - z'|_c)) \\
& = \frac{-i}{2m_A\omega_A} \exp(-i\omega_A|z - z'|_c)
\end{aligned} \tag{166}$$

Η τελευταία σχέση, οφείλεται στο γεγονός, ότι ο χρόνος μετρά μόνο στο φανταστικό άξονα ($-i\infty - (i\infty)$). Σημειώνεται, ότι αν εργαζόμαστε σε πεπερασμένη θερμοκρασία, η περίοδος θα ήταν $T \rightarrow \beta$. Λόγω της σχέσης 141, στο συναρτησιακό επίδρασης συνεισφέρουν μόνο τα ολοκληρώματα επί των τμημάτων της καμπύλης C , στα οποία ο χρόνος είναι πραγματικός. Το γεγονός αυτό, οδηγεί στις ακόλουθες τρεις συνεισφορές:

$$F(\vec{X}^{(4)}, \vec{X}^{(1)}, t) = \exp\left[\frac{ig^2}{\hbar}(I_{11} + I_{44} + I_{14})\right] \tag{167}$$

Κατά μήκος της γραμμής L_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_{11} & = \int_{L_1} dz_2 \int_{L_1} dz_1 \\
& \times \theta_{L_1}(z_2 - z_1) \vec{X}^{(1)}(z_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(z_1) G_{L_1}^{(2)}(|z_2 - z_1|_{L_1}) \\
& = \int_t^0 dt_2 \int_t^0 dt_1 \\
& \times \theta(t_1 - t_2) \vec{X}^{(1)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) G_{L_1}^{(2)}(t_2 - t_1) \\
& = \int_t^0 dt_2 \int_t^0 dt_1 \\
& \quad \times \theta(t_1 - t_2) \vec{X}^{(1)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) \\
& \quad \times \left(i \frac{\cos[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A\omega_A} + \frac{\sin[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A\omega_A} \right)
\end{aligned} \tag{168}$$

Θέτουμε:

$$G^I(t_2 - t_1) = \frac{\cos[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A\omega_A} \tag{169}$$

και

$$G^R(t_2 - t_1) = \frac{-\sin[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A\omega_A} \quad (170)$$

Οπότε αποκτούμε:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\ &\times \theta(t_1 - t_2) \vec{X}^{(1)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) \\ &\times [iG^I(t_2 - t_1) - G^R(t_2 - t_1)] \\ &=_{t_1 \leftrightarrow t_2} \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) \vec{X}^{(1)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) \\ &\times [iG^I(t_2 - t_1) + G^R(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (171)$$

Ομοίως, κατά μήκος της L_4 , έχουμε:

$$\begin{aligned} I_{44} &= \int_{L_4} dz_2 \int_{L_4} dz_1 \\ &\times \theta_{L_4}(z_2 - z_1) \vec{X}^{(4)}(z_2) \cdot \vec{X}^{(4)}(z_1) G_{L_4}^{(2)}(|z_2 - z_1|_{L_4}) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(4)}(t_1) G_{L_4}^{(2)}(t_2 - t_1) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(4)}(t_1) \\ &\times \left(i \frac{\cos[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A\omega_A} + \frac{\sin[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A\omega_A} \right) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(4)}(t_1) \\ &\times [iG^I(t_2 - t_1) - G^R(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (172)$$

Τέλος, για τον όρο διασταύρωσης, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \int_{L_1} dz_2 \int_{L_4} dz_1 \\
&\times \theta_{L_1, L_4}(z_2 - z_1) \vec{X}^{(1)}(z_2) \cdot \vec{X}^{(4)}(z_1) \\
&\times G_{L_1, L_4}^{(2)}(|z_2 - z_1|_{L_1, L_4}) \\
&= - \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\
&\times \vec{X}^{(1)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(4)}(t_1) G_{L_1, L_4}^{(2)}(t_2 - t_1) \\
&= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\
&\times \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) [\theta(t_2 - t_1) + \theta(t_1 - t_2)] \\
&\times \left(-i \frac{\cos[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A \omega_A} - \frac{\sin[\omega_A(t_2 - t_1)]}{2m_A \omega_A} \right) \\
&= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\
&\times \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) [\theta(t_2 - t_1) + \theta(t_1 - t_2)] \\
&\times [-iG^I(t_2 - t_1) - G^R(t_2 - t_1)] \\
&= - \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\
&\times \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) \theta(t_2 - t_1) \\
&\times [iG^I(t_2 - t_1) + G^R(t_2 - t_1)] \\
&\quad - \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \\
&\times \vec{X}^{(4)}(t_2) \cdot \vec{X}^{(1)}(t_1) \theta(t_1 - t_2) \\
&\times [iG^I(t_1 - t_2) - G^R(t_1 - t_2)] \tag{173}
\end{aligned}$$

Το συναρτησιακό επίδρασης, προκύπτει με αντικατάσταση των τριών τελευταίων σχέσεων στην εξίσωση 167, με το φανταστικό και το πραγματικό μέρος της συνάρτησης Green, να δίνονται αντίστοιχα από τις εκφράσεις 169 και 170. Το

αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να γενικευθεί, για την περίπτωση όπου το περιβάλλον, είναι μία συλλογή N αρμονικών ταλαντωτών, της ίδιας μάζας m_A , αλλά με διαφορετικές φυσικές συχνότητες ω_{nA} . Για την επέκταση αυτή, απαιτούνται οι αντικαταστάσεις:

$$g^2 G^I(t_2 - t_1) \rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{g_n^2}{2m_A \omega_{nA}} \cos [\omega_{nA}(t_2 - t_1)] \quad (174)$$

και

$$g^2 G^R(t_2 - t_1) \rightarrow - \sum_{n=1}^N \frac{g_n^2}{2m_A \omega_{nA}} \sin [\omega_{nA}(t_2 - t_1)] \quad (175)$$

Είναι προφανές, ότι οι παραπάνω εκφράσεις, αποτελούν το όριο σε μηδενική θερμοκρασία, των αντίστοιχων αποτελεσμάτων που θα προέκυπταν, αν θεωρούσαμε το περιβάλλον ως ένα λουτρό θερμότητας, αποτελούμενο από N αρμονικούς ταλαντωτές, σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Κεφάλαιο 3: Το συναρτησιακό επίδρασης της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής

3.1: Από τη συνήθη κβαντομηχανική στην κβαντική θεωρία πεδίου

Εως τώρα, μελετήσαμε ανοικτά κβαντικά συστήματα με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, δηλαδή συστήματα, η δυναμική των οποίων υπόκειται στις αρχές της συνήθους κβαντομηχανικής. Ορίσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά τους μεγέθη και υπολογίσαμε το συναρτησιακό επίδρασης, με τη χρήση της τεχνικής που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τι γίνεται όμως όταν τόσο το ανοικτό σύστημα όσο και το περιβάλλον του είναι πεδία, δηλαδή χαρακτηρίζονται από άπειρους βαθμούς ελευθερίας; Η απάντηση είναι, ότι όλα τα προηγούμενα μεγέθη (συνήθης και ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, συναρτησιακά αποσυνοχής και επίδρασης κ.α.) εξακολουθούν να ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν, αλλά με κάπως διαφορετική μαθηματική μορφή στις εκφράσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων. Για τη διερεύνηση αυτής της μορφής, αρκεί να θυμηθούμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβαίνει κανείς από τη συνήθη κβαντομηχανική στην κβαντική θεωρία πεδίου. Κατ'αρχάς, ένα πεδίο, μπορεί να έχει μόνο μία συνιστώσα (βαθμωτό πεδίο), ή να αποτελείται από περισσότερες της μίας συνιστώσες (σπινοριακό ή διανυσματικό πεδίο). Ας θεωρήσουμε, χάριν απλοποίησης, ένα βαθμωτό πεδίο ϕ . Η γενικευμένη συντεταγμένη $q_i(t)$ του

αντίστοιχου κβαντομηχανικού συστήματος, αντικαθίσταται από τη συνάρτηση $\phi(\vec{r}, t)$ του πεδίου. Αυτό σημαίνει, ότι ο διακριτός δείκτης i , ο οποίος αριθμεί τις συντεταγμένες, αντικαθίσταται από το συνεχή δείκτη \vec{r} και συνεπώς, σε κάθε σημείο του χώρου, αντιστοιχεί μία διαφορετική τιμή της συνάρτησης του πεδίου, δηλαδή μία διαφορετική γενικευμένη συντεταγμένη. Επιπλέον, επειδή το όρισμα της συνάρτησης οποιουδήποτε πεδίου είναι τετραδιάστατο, όλες οι εξισώσεις κίνησης της θεωρίας πεδίου, γράφονται σε συναλλοίωτη μορφή, με τη χρήση τετρανυσμάτων:

$$x = x^\mu = (t, \vec{r}) \quad (176)$$

Στη θεωρία πεδίου, η Lagrangian και η Hamiltonian συνάρτηση, εκφράζονται ως ολοκληρώματα, στον τριδιάστατο χώρο, των αντίστοιχων πυκνοτήτων:

$$L \rightarrow \int d^3r L, \quad H \rightarrow \int d^3r H \quad (177)$$

Και το ολοκλήρωμα δράσης, γράφεται ως εξής:

$$S = \int dt L \rightarrow \int dt d^3r L = \int d^4x L \quad (178)$$

Στο εξής, τα σύμβολα L και H , θα υποδηλώνουν αντίστοιχα Lagrangian και Hamiltonian πυκνότητες και όχι τις αντίστοιχες συναρτήσεις, χωρίς αυτό να αναφέρεται ρητά κάθε φορά. Για τη γραφή αυτών των πυκνοτήτων, των εξισώσεων Euler - Lagrange και Hamilton, καθώς και για τον προσδιορισμό των συζυγών ορμών των πεδίων, οι ταχύτητες αντικαθίστανται από τις χωροχρονικές παραγώγους των πεδιακών συναρτήσεων. Ακόμη, οι συνήθεις παράγωγοι των συναρτήσεων L και H ως προς τα πεδία, αντικαθίστανται από τις συναρτησιακές παραγώγους των αντίστοιχων πυκνοτήτων. Τα συναρτησιακά ολοκληρώματα, γράφονται και υπολογίζονται όπως και στην κβαντομηχανική, με την πεδιακή συνάρτηση να παίζει τώρα το ρόλο της μεταβλητής ολοκλήρωσης, ικανοποιώντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

3.2: Ο υπολογισμός για την κβαντική ηλεκτροδυναμική

Ερχόμαστε τώρα, στο βασικό πρόβλημα της παρούσας εργασίας, τον υπολογισμό του συναρτησιακού επίδρασης της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Συνοπτικά, η φυσική του προβλήματος έχει ως εξής: Το υπό μελέτη ανοικτό σύστημα, είναι ένα σύνολο ηλεκτρονίων, τα οποία ως γνωστών υπακούουν στη στατιστική Fermi - Dirac και συνεπώς περιγράφονται από σπίνορες, δηλαδή λύσεις της εξίσωσης του Dirac. Τα ηλεκτρόνια αυτά, κινούνται υπό την επίδραση

ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, που διαδραματίζει το ρόλο του περιβάλλοντος και το οποίο από μαθηματική άποψη, είναι ένα διανυσματικό πεδίο, που ικανοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell. Όπως θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, η αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων της ύλης με τα φωτόνια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, οδηγεί σε αποσυνοχή των ηλεκτρονιακών καταστάσεων, η οποία εκδηλώνεται, τόσο μέσω των διακυμάνσεων του κενού, όσο και μέσω της εκπομπής ακτινοβολίας πέδησης (bremsstrahlung). Στους υπολογισμούς που ακολουθούν, θα συμβολίσουμε τις συντεταγμένες του συστήματος και του περιβάλλοντος αντίστοιχα, ως εξής:

$$X = (\bar{\psi}, \psi), \quad A = A_\mu \quad (179)$$

Οι Lagrangian πυκνότητες της ύλης, του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$L_X = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (180)$$

$$L_A = \frac{-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\lambda(\partial \cdot A)^2 \quad (181)$$

και

$$\begin{aligned} L_I &= -g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= -gJ^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (182)$$

Όπου η σταθερά σύζευξης g , ισούται με την απόλυτη τιμή e του φορτίου του ηλεκτρονίου και η πυκνότητα ρεύματος της ύλης δίνεται από τη σχέση:

$$J^\mu = \bar{\psi}\Gamma^\mu\psi \quad (183)$$

Εφαρμόζοντας το φορμαλισμό κλειστού μιγαδικού χρόνου, όπως ακριβώς έγινε στην παράγραφο 2.3.2, αποκτούμε την ακόλουθη έκφραση για την τροποποιημένη δράση:

$$\bar{S} = \int_C dz \int d^3r L_{A+I}(A_{\mu,c}, X_c) \quad (184)$$

Όπου έγιναν οι αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned} A^\mu &= A^\mu(\vec{r}, t) \rightarrow A_c^\mu = A^\mu(\vec{r}, z) \\ X &= (\bar{\psi}(\vec{r}, t), \psi(\vec{r}, t)) \rightarrow X_c = (\bar{\psi}(\vec{r}, z), \psi(\vec{r}, z)) \\ \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (185)$$

Με τη χρήση της προτελευταίας σχέσης και των συνοριακών συνθηκών 148 και 149, προκύπτει η έκφραση του influence functional, ως συναρτησιακού ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned}
F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) &= \frac{1}{Z_A} \int_{A_c(t+i0)=A_c(t-i0)} DA_c \\
&\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_C dz \int d^3r L_A(A_c) - \frac{i}{\hbar} \int_C dz \int d^3r g_c A_c \cdot J_c \right] \\
&= \langle \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \int_C dz \int d^3r g_c A_c \cdot J_c \right) \rangle_A
\end{aligned} \tag{186}$$

Οπου:

$$J_c^\mu = \bar{\psi}_c(\vec{r}, z) \gamma^\mu \psi_c(\vec{r}, z) \tag{187}$$

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση της συνήθους κβαντομηχανικής, η εφαρμογή του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου με τον παραπάνω τρόπο, είναι δυνατή με την προϋπόθεση ότι η σταθερά σύζευξης g_c , ορίζεται επί της καμπύλης C , σύμφωνα με τη σχέση 140. Κάτι τέτοιο όμως, προϋποθέτει ότι ισχύει η υπόθεση της παραγράφου 2.3.1, ότι δηλαδή την αρχική χρονική στιγμή ($t = 0$), το ανοικτό σύστημα (στην προκειμένη περίπτωση η ύλη), είναι πλήρως διαχωρισμένο από το περιβάλλον (ηλεκτρομαγνητικό πεδίο), καθώς και ότι το τελευταίο βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση. Σε αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή θεωρούσαμε ότι το συνολικό κλειστό σύστημα, είχε μία αρχική μήτρα πυκνότητας της μορφής

$$\hat{\rho}(0) = |\psi_{A,X}(0)\rangle \langle \psi_{A,X}(0)| \tag{188}$$

θα είχαμε στο συναρτησιακό επίδρασης, όρους της μορφής:

$$L_I^E(A^{(2,3)}, X^{(2,3)}) \tag{189}$$

Επειδή η δράση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι τετραγωνική, η εξίσωση 186, με τις συνοριακές συνθήκες 148 και 149, μπορεί να επιλυθεί εύκολα, ως μία Gaussian ολοκλήρωση, δίνοντας τελικά την ακόλουθη έκφραση του συναρτησιακού επίδρασης:

$$\begin{aligned}
F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) &= \exp \left[\frac{-1}{\hbar^2} \int_C dz \int_C dz' \int d^3r \int d^3r' \right. \\
&\left. \times \theta_c(z' - z) J_c^\mu(\vec{r}', z') D_{\mu\nu}^c(\vec{r}', z', \vec{r}, z) J_c^\nu(\vec{r}, z) \right]
\end{aligned} \tag{190}$$

Που είναι απλά η μεταγραφή, στη γλώσσα του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου, του γνωστού αποτελέσματος από το θεώρημα του Wick:

$$F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) = \exp\left[\frac{-1}{\hbar^2} \int dt \int dt' \int d^3r \int d^3r' \right. \\ \left. \times \theta(t' - t) J^\mu(\vec{r}', t') D_{\mu\nu}(\vec{r}', t', \vec{r}, t) J^\nu(\vec{r}, t)\right] \quad (191)$$

Με τη συνάρτηση θ_c , να δίνεται από τη σχέση 160 ή την 161, ανάλογα με τη σχετική θέση των μιγαδικών χρονικών συντεταγμένων z και z' επί της καμπύλης C . Η συνάρτηση Green $D_{\mu\nu}^c$, έχει την έκφραση:

$$D_{\mu\nu}^c(\vec{r}', z', \vec{r}, z) = \langle A_\mu^c(\vec{r}', z') | A_\nu^c(\vec{r}, z) \rangle_A \quad (192)$$

Η οποία αποτελεί τη γενίκευση, στο πλαίσιο του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου, του ελεύθερου διαδότη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$D_{\mu\nu}(\vec{r}', t', \vec{r}, t) = \langle A_\mu(\vec{r}', t') | A_\nu(\vec{r}, t) \rangle_A \quad (193)$$

Εκτελώντας ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, αποδεικνύεται με απεύθείας υπολογισμό, ότι το συναρτησιακό επίδρασης, παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς. Συνεπώς, η συγκεκριμένη βαθμίδα στην οποία εργάζεται κανείς για τον υπολογισμό του διαδότη, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Ως βολική επιλογή, θα χρησιμοποιήσουμε τη βαθμίδα Feynman ($\lambda = 1$ στη σχέση 181). Με τον τρόπο αυτό, για τις δεδομένες περιοδικές συνοριακές συνθήκες 149, αποκτούμε:

$$D_{\mu\nu}(\vec{r}' - \vec{r}, t' - t) = g_{\mu\nu} i \hbar \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \\ \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{p}\right] \bar{D}(p, t' - t) \quad (194)$$

ή με τη χρήση του φορμαλισμού κλειστού μιγαδικού χρόνου:

$$D_{\mu\nu}^c(\vec{r}' - \vec{r}, z' - z) = g_{\mu\nu} i \hbar \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \\ \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{p}\right] \bar{D}^c(p, z' - z) \quad (195)$$

Αν $T = -2iT_E$ είναι η περίοδος, η οποία, ακριβώς όπως και στην παράγραφο 2.3.3, είναι φανταστική και άπειρη ($T_E \rightarrow +\infty$), έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{D}^c(k, z' - z) &=_{T_E \rightarrow +\infty} \frac{i \cos(k|z' - z|_c)}{2k \tanh(T_E k)} \\ &\quad + \frac{1}{2k} \sin(k|z' - z|_c) \\ &= \frac{i}{2k} \cos(k|z' - z|_c) + \frac{1}{2k} \sin(k|z' - z|_c)\end{aligned}\quad (196)$$

Οπου η νόρμα $||_c$, ορίζεται μέσω της σχέσης 165. Η τελευταία έκφραση, είναι όμοια με την εξίσωση 166, εκτός από ορισμένες σταθερές. Η ομοιότητα αυτή, δείχνει τη συσχέτιση των πεδίων με τον αρμονικό ταλαντωτή, ενώ η διαφορά στις σταθερές, είναι αναμενόμενη, αφού σε αντίθεση με τον αρμονικό ταλαντωτή, ο φορέας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης (φωτόνιο), έχει μηδενική μάζα. Αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση στην προτελευταία, προκύπτει:

$$D_{\mu\nu}^c(\vec{r}' - \vec{r}, z' - z) = g_{\mu\nu} i \hbar D_c(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \quad (197)$$

Οπου:

$$\begin{aligned}D_c(\vec{r}' - \vec{r}, z' - z) &= i \int \frac{d^3 k}{[(2\pi)^3 2k]} \exp[i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{k}] \\ &\quad \times \cos(k|z' - z|_c) \\ &\quad + \int \frac{d^3 k}{[(2\pi)^3 2k]} \exp[i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{k}] \\ &\quad \times \sin(k|z' - z|_c)\end{aligned}\quad (198)$$

Λόγω της σχέσης 140, στο συναρτησιακό επίδρασης, εμφανίζονται οι εξής τρεις συνεισφορές:

$$F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) = \exp\left[\frac{-ig^2}{\hbar}(I_{11} + I_{44} + I_{14})\right] \quad (199)$$

Οπου:

$$\begin{aligned}I_{11} &= \int_{L_1} dz_2 \int_{L_1} dz_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\ &\times \theta_{L_1}(z_2 - z_1) J^{(1)}(z_2) J^{(1)}(z_1) D^{L_1}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, |z_2 - z_1|_{L_1}) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1\end{aligned}$$

$$\times \theta(t_1 - t_2) J^{(1)}(t_2) J^{(1)}(t_1) D^{L_1}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \quad (200)$$

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} G^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) &= \int \frac{d^3 k}{[(2\pi)^3 2k]} \exp [i(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{k}] \\ &\times \cos [k(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (201)$$

και

$$\begin{aligned} G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) &= - \int \frac{d^3 k}{[(2\pi)^3 2k]} \exp [i(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{k}] \\ &\times \sin [k(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (202)$$

Οπότε, η εξίσωση 200, λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\ &\times \theta(t_1 - t_2) J^{(1)}(t_2) J^{(1)}(t_1) \\ &\times [iG^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) - G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)] \\ &=_{t_1 \leftrightarrow t_2} \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) J^{(1)}(t_2) J^{(1)}(t_1) \\ &\times [iG^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) + G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (203)$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned} I_{44} &= \int_{L_4} dz_2 \int_{L_4} dz_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\ &\times \theta_{L_4}(z_2 - z_1) J^{(4)}(z_2) J^{(4)}(z_1) D^{L_4}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, |z_2 - z_1|_{L_4}) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) J^{(4)}(t_2) J^{(4)}(t_1) D^{L_4}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\ &\times \theta(t_2 - t_1) J^{(4)}(t_2) J^{(4)}(t_1) \end{aligned}$$

$$\times [iG^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) - G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)] \quad (204)$$

Τέλος, για τον όρο διασταύρωσης, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int_{L_1} dz_2 \int_{L_4} dz_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \\ &\quad \times \theta_{L_1, L_4}(z_2 - z_1) J^{(1)}(z_2) J^{(4)}(z_1) \\ &\quad \times D^{L_1, L_4}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, |z_2 - z_1|_{L_1, L_4}) \\ &= - \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \\ &\quad \times J^{(1)}(t_2) J^{(4)}(t_1) D_{L_1, L_4}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \\ &\quad \times J^{(1)}(t_2) J^{(4)}(t_1) [\theta(t_2 - t_1) + \theta(t_1 - t_2)] \\ &\quad \times [-iG^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) - G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)] \\ &= \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \\ &\quad \times J^{(1)}(t_2) J^{(4)}(t_1) \theta(t_2 - t_1) \\ &\quad \times [-iG^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) - G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)] \\ &\quad + \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \\ &\quad \times J^{(1)}(t_1) J^{(4)}(t_2) \theta(t_2 - t_1) \\ &\quad \times [-iG^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) + G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (205)$$

Προσθέτοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις, αποκτούμε:

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{44} + I_{14} &= i \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \\ &\quad \times J^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) J^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) G^I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \\ &\quad + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int d^3r_2 \int d^3r_1 \end{aligned}$$

$$\times J^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) J^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) G^R(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t_2 - t_1) \quad (206)$$

Οπου:

$$J^{(\pm)} = J^{(1)} \pm J^{(4)} \quad (207)$$

Για τον υπολογισμό του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης Green, θέτουμε κατάρχήν:

$$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (208)$$

Οπότε, η G^I , υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} G^I(\vec{R}, \tau) &= \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k]} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}) \cos(k\tau) \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^2 2]} \int_0^\infty dk k \cos(k\tau) \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta \sin\theta \exp(ikR \cos\theta) \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^2 2iR]} \int_0^\infty dk \cos(k\tau) \\ &\quad \times [\exp(ikR) - \exp(-ikR)] \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^2 4iR]} \int_0^\infty dk [\exp(ik\tau) + \exp(-ik\tau)] \\ &\quad \times [\exp(ikR) - \exp(-ikR)] \end{aligned} \quad (209)$$

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση θ , με τη μορφή της ακόλουθης κατανομής:

$$\begin{aligned} \theta(k) &=_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \\ &\quad \times \frac{\exp(i\omega k)}{(\omega - i\eta)} \end{aligned} \quad (210)$$

Και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk \exp(ik\tau + ikR) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \theta(k) \exp(ik\tau + ikR) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - i\eta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ik\tau + ikR + i\omega k) \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - i\eta)} \\
& \quad \times 2\pi\delta(R + \tau + \omega) \\
& = \frac{i}{(R + \tau + i\eta)}
\end{aligned} \tag{211}$$

Ετσι, η σχέση 209, γίνεται:

$$\begin{aligned}
G^I(\vec{R}, \tau) & = \frac{1}{[(2\pi)^2 4R]} \\
& \times \left[\frac{1}{(R + \tau + i\eta)} + \frac{1}{(R + \tau - i\eta)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(R - \tau + i\eta)} + \frac{1}{(R - \tau - i\eta)} \right] \\
& = \frac{2}{[(2\pi)^2 4R]} \left[Pr\left(\frac{1}{(R + \tau)}\right) + Pr\left(\frac{1}{(R - \tau)}\right) \right] \\
& = \frac{2}{[(2\pi)^2 4R]} 2R Pr\left(\frac{1}{(R^2 - \tau^2)}\right) \\
& = \frac{-1}{4\pi^2} Pr\left(\frac{1}{(x_2 - x_1)^2}\right)
\end{aligned} \tag{212}$$

Οπου με Pr , δηλώνεται η κύρια τιμή. Εντελώς όμοια, υπολογίζεται και η G^R :

$$\begin{aligned}
G^R(\vec{R}, \tau) & = - \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k]} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}) \sin(k\tau) \\
& = \frac{-1}{[(2\pi)^2 2iR]} \int_0^{\infty} dk \sin(k\tau) \\
& \quad \times [\exp(ikR) - \exp(-ikR)] \\
& = \frac{1}{[(2\pi)^2 4R]} \int_0^{\infty} dk [\exp(ik\tau) - \exp(-ik\tau)] \\
& \quad \times [\exp(ikR) - \exp(-ikR)] \\
& = \frac{i}{[(2\pi)^2 4R]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{(R + \tau + i\eta)} - \frac{1}{(R + \tau - i\eta)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(R - \tau + i\eta)} + \frac{1}{(R - \tau - i\eta)} \right] \\
& = \frac{i}{[(2\pi)^2 4R]} [-2\pi i \delta(\tau + R) + 2\pi i \delta(\tau - R)] \\
& = \frac{2\pi}{[(2\pi)^2 2]} \left[\frac{1}{2R} \delta(\tau + R) - \frac{1}{2R} \delta(\tau - R) \right] \\
& = \frac{-2\pi}{[(2\pi)^2 2]} \left[\frac{1}{(\tau - R)} \delta(\tau + R) + \frac{1}{(\tau + R)} \delta(\tau - R) \right] \\
& = \frac{-1}{4\pi} \delta(\tau^2 - R^2) \\
& = \frac{-1}{4\pi} \delta[(x_2 - x_1)^2] \tag{213}
\end{aligned}$$

Η αντικατάσταση των δύο τελευταίων εξισώσεων στην έκφραση 206 και του προκύπτοντος αποτελέσματος στη σχέση 199, δίνει την τελική έκφραση του συναρτησιακού επίδρασης της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, σε συμφωνία με το γνωστό από τη βιβλιογραφία αποτέλεσμα:

$$F(X^{(4)}, X^{(1)}, t) = \exp\left(\frac{-1}{\hbar} S_I + \frac{i}{\hbar} S_R\right) \tag{214}$$

Οπου:

$$\begin{aligned}
S_I &= \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\
& \times J^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) J^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) Pr\left(\frac{1}{(x_2 - x_1)^2}\right) \tag{215}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
S_R &= \frac{g^2}{4\pi} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_1 \\
& \times J^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) J^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \delta[(x_2 - x_1)^2] \tag{216}
\end{aligned}$$

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί, ότι τα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης ισχύουν, όταν η ύλη βρίσκεται στη θερμοκρασία του απολύτου μηδενός. Η θερμοδυναμική αυτή συμπεριφορά, εξηγείται με τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα, με αυτά που αναφέρθηκαν στις παραγράφους 2.3.1 και 2.3.3.

Κεφάλαιο 4: Το φαινόμενο της αποσυνοχής στην κβαντική ηλεκτροδυναμική

4.1: Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε και μελετήθηκε εκτενώς στην παράγραφο 1.4, η αλληλεπίδραση κάθε ανοικτού συστήματος με το περιβάλλον του, επιφέρει το φαινόμενο της αποσυνοχής, δηλαδή την ταχεία καταστροφή των υπερθέσεων των κβαντικών καταστάσεων του ανοικτού συστήματος. Με τη διαδικασία αυτή, το ανοικτό σύστημα χάνει πληροφορία, η οποία μεταφέρεται στο περιβάλλον, κατά τρόπο μη αντιστρεπτό. Στο παρόν κεφάλαιο, θα εξετάσουμε το μηχανισμό, μέσω του οποίου λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της αποσυνοχής, στην ανοικτή κβαντική ηλεκτροδυναμική. Ο μηχανισμός αυτός, συνίσταται στην εκπομπή ακτινοβολίας πέδησης (bremsstrahlung από τη φορτισμένη ύλη, αλλά και στην παρουσία διακυμάνσεων του κενού, οι οποίες συνεισφέρουν επίσης στο φαινόμενο. Προκειμένου να κατανοηθεί ο παραπάνω μηχανισμός, θα εξετάσουμε ένα εικονικό πείραμα συμβολής: Ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο περιγράφεται κβαντομηχανικά από το κυματοπακέτο $|\psi\rangle$, εκπέμπεται από μία πηγή Q τη χρονική στιγμή t_i . Στη συνέχεια, το αρχικό κυματοπακέτο, διαχωρίζεται σε δύο επιμέρους συνιστώσες $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$, οι οποίες αποτελούν τις δύο εναλλακτικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το ηλεκτρόνιο. Συνεπώς, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, η αρχική κατάσταση του ηλεκτρονίου, γίνεται:

$$|\psi(t_i)\rangle = |\psi_1(t_i)\rangle + |\psi_2(t_i)\rangle \quad (217)$$

Με αντίστοιχη αρχική μήτρα πυκνότητας:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_X(t_i) &= |\psi(t_i)\rangle\langle\psi(t_i)| \\ &= \rho_{11}(t_i) + \rho_{22}(t_i) + \rho_{12}(t_i) + \rho_{21}(t_i) \end{aligned} \quad (218)$$

Όπου:

$$\rho_{ab}(t_i) = |\psi_a(t_i)\rangle\langle\psi_b(t_i)|, \quad a, b = 1, 2 \quad (219)$$

Τέλος, οι δύο εναλλακτικές ανασυνδυάζονται, δίνοντας μία εικόνα συμβολής, η οποία παρατηρείται τη χρονική στιγμή t_f , σε μία οθόνη στο σημείο S . Δεδομένου ότι εργαζόμαστε στην εικόνα της αλληλεπίδρασης, για μηδενική ζεύξη μεταξύ ηλεκτρονίων και φωτονίων, η αρχική μήτρα πυκνότητας της ύλης θα ήταν η ίδια σε κάθε χρονική στιγμή:

$$\hat{\rho}_X(t) = \hat{\rho}_X(t_i), \quad g = 0 \quad (220)$$

Όπως όμως θα φανεί στη συνέχεια, η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, μεταβάλλει τόσο τη φάση, όσο και το πλάτος της ταλάντωσης των κυματοπακέτων που συμβάλλουν, οδηγώντας έτσι σε γρήγορη καταστροφή της υπέρθεσης των συμβαλλόμενων συνιστωσών και επομένως, σε αποσυνοχή. Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.4.2, ένα κατάλληλο μέτρο για την ποσοτική περιγραφή του φαινομένου της αποσυνοχής, είναι το decoherence functional, η χρήση του οποίου, αποδεικνύεται στην περίπτωσή μας ιδιαίτερα βολική, λόγω της αναλλοιότητάς του σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και Lorentz, όπως θα φανεί στη συνέχεια. Όπως θα δειχθεί, το συναρτησιακό αποσυνοχής, εξαρτάται δραματικά από τα χαρακτηριστικά της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας.

4.2: Η ημικλασική προσέγγιση

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.3.1, ο ακριβής υπολογισμός της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας ενός ανοικτού συστήματος, είναι αδύνατος. Μία προσέγγιση, η οποία διευκολύνει σημαντικά το πρόβλημα, είναι η θεώρηση του ρεύματος της ύλης, ως μίας κλασικής πυκνότητας ρεύματος. Η προσέγγιση αυτή ισχύει ικανοποιητικά, όταν πληρούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες: (1) Αρχικά, υποθέτουμε ότι το μήκος κύματος των εκπεμπόμενων φωτονίων, είναι αρκετά μεγάλο, συγκρινόμενο με το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου:

$$\lambda = \frac{c}{\omega} \gg \lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \quad (221)$$

ή

$$\lambda \gg r_e = \alpha \lambda_C = 2.8 \times 10^{-15} m \quad (222)$$

Όπου r_e η ακτίνα του ηλεκτρονίου και α η ακτίνα του Bohr. Η παραπάνω συνθήκη, είναι δυνατόν να γραφεί ισοδύναμα, ως απαίτηση, να είναι η ενέργεια της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας πολύ χαμηλή, σε σύγκριση με την ενέργεια ηρεμίας των ηλεκτρονίων:

$$\hbar\omega \ll mc^2 \quad (223)$$

Η υπόθεση αυτή, είναι απαραίτητη, ώστε να μπορούν να αγνοηθούν φαινόμενα, όπως η δημιουργία και η καταστροφή ζευγών, η πλήρης θεώρηση των οποίων, θα καθιστούσε αδύνατη την αντιμετώπιση των ηλεκτρονιακών ρευμάτων ως κλασικών. Μπορούμε ως τόσο, να εκφράσουμε την παραπάνω συνθήκη κάπως διαφορετικά, αν θεωρήσουμε τα ηλεκτρόνια, ως σωματίδια επιταχυνόμενα, υπό την επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων, το ρόλο του οποίου, διαδραματίζει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η θεώρηση αυτή, υπαγορεύει την ύπαρξη ενός χαρακτηριστικού χρόνου t_p , ο οποίος ονομάζεται χρόνος επιτάχυνσης ή χρόνος

προετοιμασίας, ορίζεται ως το αντίστροφο της υψηλότερης από τις συχνότητες του φάσματος της επιταχύνουσας δύναμης και μπορεί να ερμηνευθεί, ως ο ελάχιστος απαιτούμενος χρόνος, προκειμένου να τεθούν σε κίνηση τα συμβάλλοντα κυματοπακέτα. Ως αποτέλεσμα της ύπαρξης ενός τέτοιου χαρακτηριστικού χρόνου, τίθεται ένα άνω φράγμα Ω_{max} , στο φάσμα συχνοτήτων της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας. Η συχνότητα αυτή, είναι της τάξης μεγέθους:

$$\Omega_{max} \approx \frac{1}{t_p} = \frac{c}{\sigma_0} \quad (224)$$

Οπου η κλίμακα μήκους σ_0 , αντιπροσωπεύει το ελάχιστο μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Επομένως, η πρώτη ημικλασική συνθήκη, λαμβάνει τη μορφή:

$$\sigma_0 \gg \lambda_C \quad (225)$$

ή

$$t_p \gg \frac{r_e}{c} \quad (226)$$

Σύμφωνα με την κλασική ηλεκτροδυναμική, η τελευταία σχέση εξασφαλίζει, ότι η ακτινοβολούμενη ενέργεια είναι μικρή, συγκριτικά με την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου που την εκπέμπει. Συνεπώς, η συνεισφορά φαινομένων απόσβεσης της ακτινοβολίας, είναι δυνατόν να θεωρηθεί αμελητέα. (2) Η κίνηση του κλασικού ηλεκτρονιακού ρεύματος, θα πρέπει να περιγράφεται ικανοποιητικά, μέσω μίας ημικλασικής προσέγγισης. Είναι γνωστό, ότι ο κβαντικός χαρακτήρας της κίνησης ενός σωματιδίου, συνίσταται στην ύπαρξη κάποιας αβεβαιότητας, τόσο στη θέση, όσο και στην ορμή του. Η σχέση μεταξύ των δύο αυτών αβεβαιότητων, καθορίζεται από την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg. Ως εκ τούτου, η ημικλασική συμπεριφορά της κίνησης ως προς κάποια παράμετρο, επιτυγχάνεται ελαχιστοποιώντας την αβεβαιότητα της εν λόγω παραμέτρου. Με τον τρόπο αυτό, αν \bar{v} είναι μία τυπική ταχύτητα και Δv η αντίστοιχη αβεβαιότητα, οδηγούμαστε στην απαίτηση:

$$\frac{\Delta v}{\bar{v}} \ll 1 \quad (227)$$

Υποθέτοντας, ότι κάθε κυματοπακέτο, αναπαριστά μία κατάσταση ελάχιστης αβεβαιότητας εύρους Δx , μπορούμε να γράψουμε την τελευταία εξίσωση, ως εξής:

$$\frac{\hbar}{mv\Delta x} \ll 1 \quad (228)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{\lambda_{dB}}{\Delta x} \ll 1 \quad (229)$$

Οπου το μήκος κύματος De Broglie του ηλεκτρονίου, δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{mv} \quad (230)$$

(3) Τέλος, μεταβαίνουμε στο χώρο των θέσεων, θεωρούμε τα ρεύματα ως τελεστές και υποθέτουμε, ότι η αρχική μήτρα πυκνότητας του ηλεκτρονίου, αναπαριστά μία προσεγγιστική ιδιοκατάσταση μίας κλασικής πυκνότητας ρεύματος. Επομένως, αν το αρχικό κυματοπακέτο του ηλεκτρονίου περιγράφει μία καθαρή κατάσταση

$$\hat{\rho}_X(t_i) = |\psi(t_i)\rangle\langle\psi(t_i)| \quad (231)$$

η υπόθεσή μας γράφεται ως εξής:

$$J^\mu(x)|\psi(t_i)\rangle \approx S^\mu(x)|\psi(t_i)\rangle \quad (232)$$

Οπου $S^\mu(x)$, είναι μία κλασική πυκνότητα ρεύματος. Στον ίδιο βαθμό ακρίβειας, μπορούμε να γράψουμε:

$$J_{(-)}^\mu(x)\hat{\rho}_X(t_i) = [J^\mu(x), \hat{\rho}_X(t_i)] \approx 0 \quad (233)$$

Σημειώνεται, ότι αν και χάριν απλοποίησης θεωρήσαμε την αρχική κατάσταση του ηλεκτρονίου ως μία καθαρή κατάσταση, κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο. Αν η αναμενόμενη τιμή της κλασικής πυκνότητας ρεύματος είναι

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \text{tr}_X(J^\mu(x)\hat{\rho}_X(t_i)) = S^\mu(x) \quad (234)$$

με τη βοήθεια της προτελευταίας εξίσωσης και της έκφρασης του συναρτησιακού επίδρασης, προκύπτει απευθείας, ότι η κατάσταση του ηλεκτρονίου, παραμένει προσεγγιστικά ανεπηρέαστη από την αλληλεπίδραση του τελευταίου με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\hat{\rho}_X(t_f) \approx \hat{\rho}_X(t_i) \quad (235)$$

Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα, θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε, μελετώντας τη δυναμική ενός Gaussian κυματοπακέτου, υπό την επίδραση ενός πεδίου ακτινοβολίας, με τη χρήση της ακριβούς αναλυτικής έκφρασης του διαδότη του πεδίου στην προσέγγιση διπόλου. Το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει, ότι οι αρχικές καταστάσεις των ηλεκτρονίων, συνιστούν αυτό που ονομάσαμε στην παράγραφο 1.4, προτιμώμενη βάση.

4.3: Υπολογισμός του συναρτησιακού αποσυνοχής

Επιστρέφουμε τώρα, στο πείραμα συμβολής της παραγράφου 4.1 και θεωρούμε το διαχωρισμό του αρχικού ηλεκτρονιακού κυματοπακέτου, σύμφωνα με την εξίσωση 219. Τότε, λόγω της σχέσης 233, αποκτούμε:

$$J^\mu(x)|\psi_1(t_i)\rangle = S_1^\mu(x)|\psi_1(t_i)\rangle \quad (236)$$

και

$$J^\mu(x)|\psi_2(t_i)\rangle = S_2^\mu(x)|\psi_2(t_i)\rangle \quad (237)$$

Οπου $S_i^\mu(x)$, κλασική πυκνότητα ρεύματος, την οποία θεωρούμε συγκεντρωμένη σε έναν κυλινδρικό σωλήνα, γύρω από τη διαδρομή που αντιστοιχεί στο κυματοπακέτο $|\psi_i\rangle$ ($i = 1, 2$). Επομένως:

$$J_{(-)}^\mu(x)\rho_{11}(t_i) \approx J_{(-)}^\mu(x)\rho_{22}(t_i) \approx 0 \quad (238)$$

$$J_{(-)}^\mu(x)\rho_{12}(t_i) \approx (S_1^\mu(x) - S_2^\mu(x))\rho_{12}(t_i) \quad (239)$$

$$J_{(+)}^\mu(x)\rho_{12}(t_i) \approx (S_1^\mu(x) + S_2^\mu(x))\rho_{12}(t_i) \quad (240)$$

$$L_C(x)\rho_{11}(t_i) \approx L_C(x)\rho_{22}(t_i) \approx 0 \quad (241)$$

και

$$L_C(x)\rho_{12}(t_i) \approx -i(H_{C_1}(x) - H_{C_2}(x))\rho_{12}(t_i) \quad (242)$$

Οπου $L_C(x)$, ένας υπερτελεστής Liouville και $H_{C_i}(x)$, η κλασική πυκνότητα ενέργειας Coulomb, που αντιστοιχεί στο ρεύμα $S_i^\mu(x)$ και δίνεται από την έκφραση:

$$H_{C_{1,2}} = \frac{1}{2} \int d^3y \frac{S_{1,2}^0(x^0, \vec{x})S_{1,2}^0(x^0, \vec{y})}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (243)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, Μπορούμε να υποθέσουμε, ότι οι πυκνότητες ενέργειας Coulomb που αντιστοιχούν στις δύο εναλλακτικές διαδρομές του ηλεκτρονίου, είναι ίσες μεταξύ τους. Είμαστε τώρα έτοιμοι, χρησιμοποιώντας την έκφραση του συναρτησιακού επίδρασης, να υπολογίσουμε απευθείας την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^R &= \rho_{11}(t_i) + \rho_{22}(t_i) \\ &+ \exp(i\Phi)\rho_{12}(t_i) + \exp(-i\Phi)\rho_{21}(t_i) \end{aligned} \quad (244)$$

Οπου:

$$\exp(i\Phi) = F(S_1, S_2) \quad (245)$$

Από την προτελευταία σχέση συνάγεται, ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, επηρεάζει τον όρο συμβολής (μη διαγώνιο όρο της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας), μέσω μίας μιγαδικής φάσης Φ , η οποία εξαρτάται από τις πυκνότητες ρεύματος που αντιστοιχούν στις δύο εναλλακτικές διαδρομές του ηλεκτρονίου. Το πραγματικό μέρος του Φ , μεταβάλλει τη φάση της ταλάντωσης των κυματοπακέτων που συμβάλλουν, αλλοιώνοντας έτσι την εικόνα συμβολής. Από την άλλη πλευρά, το φανταστικό μέρος του Φ , οδηγεί σε καταστροφή της εικόνας συμβολής, αφού μειώνει το πλάτος της ταλάντωσης, κατά τον παράγοντα:

$$|\exp(i\Phi)| = \exp \Gamma \quad (246)$$

Η ποσότητα Γ , είναι ακριβώς αυτό που ορίσαμε, στην παράγραφο 1.4.2, ως συναρτησιακό αποσυνοχής. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του συναρτησιακού επίδρασης, αποκτούμε την ακόλουθη μορφή του Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma(J^{(-)}) &= -\frac{g^2}{4\pi^2\hbar^2} \int d^4x \int d^4x' \\ &\times J^{(-)}(x)J^{(-)}(x')Pr\left(\frac{1}{(x-x')^2}\right) \end{aligned} \quad (247)$$

Η έκφραση αυτή, είναι εμφανώς συναλλοίωτη κατά Lorentz. Ακόμη, είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, επειδή η διαδρομή που ακολουθούν στο χώρο τα κλασικά ηλεκτρονικά ρεύματα, είναι κλειστή. Το συναρτησιακό αποσυνοχής, όπως φαίνεται και από τη μορφή του, παρουσιάζει διγραμμική εξάρτηση από τη διαφορά των κλασικών πυκνοτήτων ρεύματος. Η διαφορά αυτή, απεικονίζεται ως μία κλασική πυκνότητα ρεύματος, συγκεντρομένη στο εσωτερικό ενός κλειστού σωλήνα, γύρω από τη διαδρομή $\psi_1 - \psi_2$ και σχεδιάζεται ακολουθώντας τη διαδρομή ψ_1 κατά τη θετική και την ψ_2 κατά την αρνητική φορά. Επιπλέον, είναι προφανές, ότι η διαφορά $J^{(-)}$, μηδενίζεται για χρόνους $t < t_i$, καθώς και για $t > t_f$, όπου δεν υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρονίων και φωτονίων.

4.4: Φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων και παρατηρήσεις

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις συσχέτισης δύο σημείων

$$D_{1\mu\nu}(x-x') = \frac{g_{\mu\nu}}{2\pi^2} Pr\left(\frac{1}{(x-x')^2}\right) \quad (248)$$

$$D_{\mu\nu}(x-x') = \frac{g_{\mu\nu}}{2\pi} \delta[(x-x')^2] \quad (249)$$

$$D_{\mu\nu}^+ = \frac{1}{2}D_{1\mu\nu} - \frac{i}{2}D_{\mu\nu} \quad (250)$$

$$D_{\mu\nu}^- = \frac{1}{2}D_{1\mu\nu} + \frac{i}{2}D_{\mu\nu} \quad (251)$$

και το διαδότη του Feynman

$$D_{\mu\nu}^F = -\frac{i}{2}D_{1\mu\nu} + \frac{1}{2}sign(t)D_{\mu\nu} \quad (252)$$

αποκτούμε για τη φάση του όρου συμβολής της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας:

$$\begin{aligned} \exp(i\Phi) &= (A(S_1)A^*(S_2)) \\ &\times [exp[\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' S_1^\mu(x) D_{\mu\nu}^-(x-x') S_2^\nu(x')] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' S_2^\mu(x) D_{\mu\nu}^+(x-x') S_1^\nu(x')] \end{aligned} \quad (253)$$

Οπου το συναρτησιακό μετάβασης κενού - κενού, ή απλούστερα η γεννήτρια συνάρτηση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, παρουσία της πυκνότητας ρεύματος $S^\mu(x)$, έχει την έκφραση:

$$\begin{aligned} A(S) &= exp[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4x' \\ &\times S^\mu(x) D_{\mu\nu}^F(x-x') S^\nu(x')] \end{aligned} \quad (254)$$

Η προτελευταία έκφραση, επιδέχεται μία ενδιαφέρουσα φυσική ερμηνεία: Ο όρος εντός της παρένθεσης, είναι το γινόμενο δύο γεννητριών συναρτήσεων και κατά συνέπεια, περιέχει το διαδότη του Feynman. Η συνεισφορά αυτή, περιγράφει μία διαδικασία εκπομπής και επαναπορρόφησης δυνητικών φωτονίων, από τα κλασικά ρεύματα S_1^μ και S_2^μ της ύλης (διακυμάνσεις του κενού). Επομένως, ο παράγοντας εντός της αγκύλης, ο οποίος περιέχει τις συναρτήσεις D^+ και D^- , περιγράφει την εκπομπή πραγματικών φωτονίων από τα ηλεκτρόνια (ακτινοβολία πέδησης). Και οι δύο αυτές διαδικασίες, συνεισφέρουν στο συναρτησιακό αποσυνοχής, αφού ένα φωτόνιο, είναι δυνατόν να εκπεμφθεί και από τα δύο ρεύματα, μεταφέροντας πληροφορία για την ακολουθούμενη από το ηλεκτρόνιο διαδρομή. Το ερώτημα που τώρα ανακύπτει, είναι το εξής: Ποια διαδικασία, η εκπομπή δυνητικών ή πραγματικών φωτονίων, είναι υπεύθυνη για το φαινόμενο της αποσυνοχής; Η απάντηση είναι, ότι ο συνδυασμός των δύο παραπάνω διαδικασιών, οδηγεί σε αποσυνοχή, αφού η αύξηση της πιθανότητας εκπομπής

ενός πραγματικού φωτονίου, οδηγεί σε ελάττωση του πλάτους μετάβασης κενού - κενού, δηλαδή της πιθανότητας εμφάνισης μίας διακύμανσης του κενού, καταστρέφοντας έτσι την εικόνα συμβολής. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, μία συσκευή συμβολής, όπου η διαδρομή ψ_1 , αντιστοιχεί σε μία ωμαλή κίνηση του ηλεκτρονίου, ενώ η ψ_2 , σε μία ισχυρά επιταχυνόμενη κίνηση. Εστω, ότι στο πείραμα, παρατηρούμε την εκπομπή φωτονίων από το ηλεκτρόνιο. Αν γνωρίζουμε, ότι το ηλεκτρόνιο δεν εξέπεμψε κανένα φωτόνιο, θα συμπεράνουμε ότι είναι πολύ πιθανόν, να έχει ακολουθήσει τη διαδρομή ψ_1 . Σύμφωνα με τη θεωρία της κβαντικής μέτρησης, το συμπέρασμα αυτό, θα καταστρέψει την υπέρθεση των δύο εναλλακτικών διαδρομών, αφού θα προβάλλει το αποτέλεσμα, στον υπόχωρο Hilbert των καταστάσεων ψ_1 . Η περίπτωση αυτή είναι παρόμοια, με εκείνη ενός ατόμου με δύο ενεργειακά επίπεδα (στάθμες). Εστω, ότι αρχικά, το άτομο βρίσκεται σε μία επαλληλία της θεμελιώδους και της διεγερμένης κατάστασης. Αν στο πείραμα παρατηρήσουμε, ότι το άτομο δεν έχει εκπέμψει φωτόνιο για ένα χρονικό διάστημα αρκετά μεγάλο σε σύγκριση με το αντίστροφο του ρυθμού εκπομπής της ακτινοβολίας, θα έχουμε ουσιαστικά μετρήσει, ότι η κατάσταση του ατόμου, ήταν (με πολύ μεγάλη πιθανότητα) η θεμελιώδης. Επομένως, τα μη διαγώνια στοιχεία της ατομικής μήτρας πυκνότητας, τείνουν να μηδενιστούν. Τέλος, είναι ενδιαφέρον, να εκφράσουμε το συναρτησιακό αποσυννοχής, απευθείας ως συνάρτηση του πλάτους μετάβασης κενού - κενού. Λαμβάνοντας το μέτρο και των δύο μελών της τελευταίας σχέσης, βρίσκουμε:

$$\exp(\Gamma(J^{(-)})) = |A(\frac{J^{(-)}}{\sqrt{2}})|^2 \quad (255)$$

Προφανώς, ισχύει:

$$\Gamma(J^{(-)}) \leq 0 \quad (256)$$

Η ισότητα ισχύει, μόνον όταν η διαφορά $J^{(-)}$ των δύο πυκνοτήτων ρεύματος μηδενίζεται, δηλαδή όταν $S_1^{\mu} = S_2^{\mu}$. Η προτελευταία έκφραση, δείχνει ότι ο παράγοντας αποσυννοχής, ο οποίος πολλαπλασιάζει τον όρο συμβολής της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας, ισούται με την πιθανότητα μη εκπομπής φωτονίου από το ηλεκτρόνιο, παρουσία μίας κλασικής πυκνότητας ρεύματος, ίσης με $\frac{J^{(-)}}{\sqrt{2}}$. Το ρεύμα αυτό, είναι το ίδιο με εκείνο που θα δημιουργούσαν, δύο αντίθετα φορτισμένα σωμάτια φορτίου $\pm \frac{e}{\sqrt{2}}$, αν το πρώτο ακολουθούσε τη διαδρομή ψ_1 και το δεύτερο την ψ_2 . Όσο μικρότερο είναι το πλάτος μετάβασης κενού - κενού για αυτή την πυκνότητα ρεύματος, τόσο μεγαλύτερη καταστροφή προκαλείται στην εικόνα συμβολής. Το γεγονός αυτό, είναι αναμενόμενο, αφού το καταπόσο μπορεί κανείς να διακρίνει ανάμεσα στις δύο εναλλακτικές

διαδρομές του ηλεκτρονίου, δηλαδή ο βαθμός απώλειας της κβαντικής συσχέτισης, καθορίζεται από τη διαφορά των αντίστοιχων πυκνοτήτων ρεύματος. Η διαδικασία που περιγράφηκε, παρουσιάζει ομοιότητες με το φαινόμενο Bohm - Aharonov, εξαιτίας της ευαισθησίας που εμφανίζει η εικόνα συμβολής, στις διακυμάνσεις του κενού. Στις παραπάνω φυσικές ερμηνείες, απαιτείται κάποια προσοχή. Ο λόγος είναι, ότι επικεντρωθήκαμε σε διαδικασίες εκπομπής φωτονίων, οι οποίες λαμβάνουν χώρα, εντός πεπερασμένης χρονικής κλίμακας και όχι σε μεταβάσεις μεταξύ ασυμπτωτικών καταστάσεων. Είναι γνωστό, ότι ένα ρεύμα ύλης, εκπέμπει ένα άπειρο πλήθος φωτονίων μεγάλου μήκους κύματος (μαλακή ακτινοβολία), των οποίων η συχνότητα τείνει συνεχώς προς μηδενισμό, καθώς η ολική τους ενέργεια προσεγγίζει μία πεπερασμένη τιμή. Το φαινόμενο αυτό, είναι γνωστό στη θεωρία πεδίου, ως καταστροφή του υπερύθρου και λαμβάνεται υπ'όψιν, σε διαταρακτικούς υπολογισμούς κβαντικών διορθώσεων ακτινοβολίας, όπου συμμετέχουν φορτισμένα σωματίδια ύλης. Η πλήρης εξάλειψη των αποκλίσεων που οφείλονται στην καταστροφή του υπερύθρου, απαιτεί μη διαταρακτική μεταχείριση, όπου τα πλάτη πιθανότητας που αντιστοιχούν στην εκπομπή δυνητικών και πραγματικών φωτονίων, αθροίζονται σε όλες τις τάξεις, καθιστώντας τις δύο αυτές διαδικασίες μη διακρίσιμες, στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων. Θεωρώντας ότι ο χρησιμοποιούμενος ανιχνευτής ακτινοβολίας, έχει μία πεπερασμένη διακριτική ικανότητα Ω_{min} , θα υπάρχει πάντα ένας άπειρος αριθμός φωτονίων, με συχνότητα χαμηλότερη της Ω_{min} . Τα φωτόνια αυτά, διαφεύγουν χωρίς να ανιχνευθούν, καθιστώντας μη παρατηρήσιμη την καταστροφή του υπερύθρου. Ως τώσο, η δική μας ανάλυση, δεν οδηγεί σε τέτοιου είδους αποκλίσεις, αφού είναι μη διαταρακτική και λαμβάνει χώρα στο πεπερασμένο χρονικό διάστημα, που μεσολαβεί από τη στιγμή t_i , όπου το αρχικό κυματοπακέτο του ηλεκτρονίου διαχωρίζεται σε δύο επιμέρους συνιστώσες, έως τη στιγμή t_f , όπου οι συνιστώσες αυτές ανασυνδυάζονται, δίνοντας την εικόνα συμβολής. Το γεγονός αυτό, έχει ως συνέπεια, να τίθεται μία φυσική διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή, της τάξης:

$$\Omega_{min} \approx \frac{1}{(t_f - t_i)} \quad (257)$$

Βιβλιογραφία:

- (1) C. N. Gogatsos, A. I. Karanikas and G. I. Kordas, Complex time evolution of open quantum systems, (2011)
- (2) L. Ford, Electromagnetic vacuum fluctuations and electron coherence, (Physical Review D, volume 47, number 12)

- (3) A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Path integral approach to quantum Brownian motion, (Physics 121A, 1983)
- (4) L. Diosi, Landau density matrix in quantum electrodynamics, (1989)
- (5) H. P. Breuer, F. Petruccione, Theory of open quantum systems, (Oxford, 2002)
- (6) D. Giulini, E. Joos, Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory, (Springer, 1996)
- (7) J. Preskill, lecture notes on quantum computation, (Caltech)