ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΚΑΙ ΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΠΛΗΘΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΠΕΙΡΟΣΥΝΟΛΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝ

Μακρή-Γυαλιά Χριστίνα
Δ2013

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης   Καθηγητής

Αθήνα
Σεπτέμβριος, 2015

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για την ευκαιρία που μου έδωσε και την τιμή που μου έκανε να συνεργαστώ μαζί του, τις εποικοδομητικές συμβουλές του, τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε και την υπομονή του.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στους αξιόλογους καθηγητές κ. Δέσποινα Πόταρη και κ. Γεώργιο Ψυχάρη που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής της παρούσας διπλωματικής εργασίας

Ευχαριστώ επίσης:

Την Διονυσία Μπακογιάννη και την Ελένη Κλή που διευκόλυναν την καθημερινότητά μας μέσω τις άριστης δουλειάς τους στη γραμματεία του τμήματος.

Τους συμφοιτητές μου.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και καινούργιους μου φίλους Γεωργία Γραβάνη και Γεώργιο Τσουκαλά-Μανιάτη που έκαναν την σκληρή δουλειά να μοιάζει διασκέδαση.

Τους φίλους και την οικογένειά μου για την στήριξη, την βοήθεια και κυρίως για την υπομονή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει τις αντιλήψεις των τελειόφοιτων μαθητών Λυκείου σχετικά με την έννοια του απείρου και του απείρου συνόλου. Η βιβλιογραφία αναδεικνύει τις έντονες δυσκολίες των μαθητών σε δραστηριότητες σχετικές με τις έννοιες αυτές. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται οι τρόποι που χρησιμοποιούν για να συγκρίνουν το πλήθος των στοιχείων απείρων συνόλων. Ένα επιπλέον σημείο είναι η μελέτη του πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά την διαφορά πληθικότητας μεταξύ αριθμήσιμων και υπεραριθμήσιμων συνόλων. Ένα κατάλληλα σχεδιασμένο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε οχτώ (8) μαθητές της Γ' Λυκείου και ακολούθησαν συνεντεύξεις ανά ομάδα μαθητών. Στην συνέχεια έγινε ποιοτική ανάλυση των δεδομένων. Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες αντιλήψεων τη διαδικαστική, τη τοπολογική και τη πνευματική ενώ τα κριτήρια σύγκρισης της πληθικότητας απειροσυνόλων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές διακρίθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες το κριτήριο μέρος-όλο, το μοναδικό κριτήριο απείρου, οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν και το 1-1 κριτήριο.

ABSTRACT

This paper examines the perceptions of graduates of high school students about the concept of infinity and the infinite set. The literature highlights the intense difficulties of students in activities related to those concepts. More specifically, the study concentrates on the ways that students use to compare the number of elements of infinite sets. A further point is the study of how students perceive intuitively the difference between cardinality of countable and uncountable sets . A properly designed questionnaire was given to eight (8) senior students of high school, followed by interviews of every students' group. Then, a qualitative data analysis. From the qualitative data analysis perceptions of students about the concept of infinity categorized into three categories perceptions procedural, the topological and intellectual while comparison's criteria that used by the students were divided into four categories criterion part-whole, the only criterion infinity, infinite quantities can not be compared and the 1-1 criterion.

Table of Contents

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του απείρου αποτελεί διαισθητικά αντιφατική έννοια που έχει προ πολλού απασχολήσει πολλούς φιλόσοφους και μαθηματικούς. Η έννοια του απείρου απασχόλησε ως φιλοσοφικό θέμα και το έργο του Αριστοτέλη, ο οποίος χώριζε την έννοια σε δύο διαφορετικές πτυχές – δυνητικό και πραγματικό- που αντιστοιχούν στους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να αντιληφθούμε άπειρο ως διαδικασία ή ως ένα αντικείμενο (Sacristán & Noss, 2008; Tirosh, 1999). Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη το δυνητικό άπειρο μπορεί να νοηθεί ως μία διαρκή δραστηριότητα που συνεχίζεται πέρα από το χρόνο, ενώ το πραγματικό άπειρο, ως το μη πεπερασμένο που παρουσιάζεται σε μια χρονική στιγμή (Dubinsky et al., 2005). Η πρώτη κατηγορία του απείρου εμφανίζεται ως κάτι που χαρακτηρίζει τη διαδικασία, ενώ η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται σε ένα χαρακτηριστικό ή ιδιότητα ενός συνόλου (Moreno & Waldegg, 1991).

Η αποδοχή του εν δυνάμει απείρου προκάλεσε ένα μαθηματικό τρόπο σκέψης που οδήγησε σε μεγάλες επιτυχίες στα ελληνικά μαθηματικά - όπως, με τη μέθοδο του Ευδόξου -, απέκλεισε όμως το ενδεχόμενο ανάπτυξης μιας σύλληψης του πραγματικού απείρου (Moreno & Waldegg, 1991). Κατά τον 19ο αιώνα το πραγματικό άπειρο μέσω της καντοριανής θεωρίας συνόλων συνέβαλε βαθιά στην θεμελίωση των Μαθηματικών και στη θεωρητική βάση των διαφόρων μαθηματικών συστημάτων (Tsamir & Dreyfus, 2002).

Σύμφωνα με τους Galileo και Gauss, η χρήση του πραγματικού απείρου οδηγεί σε εγγενή αντιφάσεις δεδομένου ότι δεν μπορούν να συμπεριληφθούν σε έναν λογικό, συνεπή συλλογισμό. Λόγω του γεγονότος ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι πεπερασμένος, τα άτομα δεν μπορούν να συνειδητά να επικεντρωθούν σε όλες τις πληροφορίες σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και ως εκ τούτου να συλλάβουν το άπειρο ως αντικείμενο αλλά συλλαμβάνουν το άπειρο ως διαδικασία (Tall, 1992). Συνήθως, οι μαθητές καθορίζουν το άπειρο ως «κάτι που συνεχίζει και συνεχίζει" και όχι ως μια ολοκληρωμένη οντότητα (Monaghan, 2001; Tirosh, 1999) ή συλλαμβάνουν το άπειρο χρησιμοποιώντας την έννοια του ορίου, αναφέρονται σε μία διαδικασία "πλησιάσματος" που το όριό της είναι απρόσιτο (Cornu, 1991). Από την άλλη πλευρά, η έννοια του πραγματικού απείρου αποδίδεται στους μαθητές μέσω της αναφοράς σε μεγάλους πεπερασμένους αριθμούς ή σε σύνολα που το πλήθος των στοιχείων τους είναι μεγαλύτερο από κάθε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων (Monaghan, 1986).

Σύμφωνα μα την υπάρχουσα έρευνα εντοπίζονται τρεις κατηγορίες πρωταρχικών αντιλήψεων όσο αφορά στο άπειρο (Florence , Mihaela Singer, Cristian Voica) η διαδικαστική ή "εν δυνάμει άπειρο", η τοπολογική που συνδέεται με την θεώρησή του απείρου ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα και η πνευματική η οποία δίνει έμφαση στα συναισθήματα, την πνευματικότητα.

Μία από τις παρανοήσεις που εμφανίζονται κατά τη σύγκριση των απείρων συνόλων είναι η εφαρμογή των ιδιοτήτων που ισχύουν μόνο για πεπερασμένα σύνολα. Οι Tsamir και Tirosh (1999) αναφέρουν ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για τη σύγκριση απείρων συνόλων επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τις μεθόδους που τείνουν να χρησιμοποιούν κατά τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων. Όπως επισήμανε Galileo (1945), μια περατοκρατική ερμηνεία που επικρατεί κατά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων είναι η χρήση της ιδέας του περιέχεσθαι: ότι ένα σύνολο και ένα κατάλληλο υποσύνολο δεν μπορεί να είναι ισοπληθικά (Sacristán & Noss, 2008; Tirosh, 1999). Για παράδειγμα, κάθε φυσικός αριθμός έχει τετράγωνο και αντιστρόφως, πράγμα που σημαίνει ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των τετραγώνων τους είναι ισοπληθικά, αν και το σύνολο των τετραγώνων είναι ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Το συμπέρασμα αυτό δεν συνάδει με απλή λογική διότι το σύνολο και το μέρος που δεν μπορεί να είναι ισοπληθικά. Ως εκ τούτου, ένα άτομο, σε μια προσπάθεια να ενισχύσει τις πεποιθήσεις του ότι ένα σύνολο έχει ένα διαφορετικό πληθάριθμο από οποιοδήποτε από τα υποσύνολα του, χρησιμοποιεί την αιτιολόγηση μέρος - όλο (Singer & Voica, 2003) παρά την 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των συνόλων που καθορίζει την ισοπληθικότητα μεταξύ απείρων συνόλων (Tirosh & Tsamir, 1996).

Επιπλέον, πολλοί ερευνητές (Tirosh, 1999; Tirosh & Dreyfus, 2002) διερεύνησαν την επίδραση των διαφορετικών αναπαραστάσεων για τη σύγκριση των ίδιων άπειρων συνόλων. Οι ερευνητές έχουν επικεντρωθεί σε ασυνέπειες των μαθητών σε σχέση με την έννοια του απείρου, χρησιμοποιώντας τέσσερις διαφορετικές αναπαραστάσεις: οριζόντια, κάθετη, ρητή αριθμητική και γεωμετρική. Οι Tirosh και Tsamir (1996) βρήκαν ότι μια αριθμητική οριζόντια αναπαράσταση στην οποία τα δύο σύνολα είναι οριζόντια τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, ενισχύει την μέρος όλο επιχειρηματολογία. Αντιθέτως, η γεωμετρική αναπαράσταση που αποτελείται από ένα σχηματικό διάγραμμα των συνόλων, προκάλεσε απαντήσεις ισοπληθικότητας (Tirosh & Tsamir, 1996). Φαίνεται ότι η γεωμετρική αναπαράσταση επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων απείρων συνόλων (Moreno & Waldegg, 1991).

Τα ευρήματα της έρευνας της Tirosh (1985) έδειξαν ότι το επιχείρημα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους για την ισότητα δυο συνόλων είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Για να δικαιολογήσουν την μη ισότητα δύο απείρων συνόλων χρησιμοποιούσαν τα ακόλουθα επιχειρήματα ένα γνήσιο υποσύνολο ενός απείρου συνόλου περιέχει λιγότερα στοιχεία από το αρχικό σύνολο, ένα φραγμένο σύνολο έχει λιγότερα στοιχεία από ένα μη φραγμένο σύνολο, ένα γραμμικό σύνολο περιέχει λιγότερα στοιχεία από ότι ένα δισδιάστατο σύνολο.

Το άπειρο είναι σημαντική εγγενής έννοια που συνδέεται με τον σχηματισμό του αριθμού. Οι πτυχές που συνδέονται με την έννοια του απείρου θα πρέπει να είναι μέρος της εκπαίδευσης αν όχι ως μέρος του προγράμματος σπουδών αλλά με την χρήση διάφορων παραδειγμάτων από διαφορετικά πλαίσια και δίνοντας έμφαση σε διάφορες απόψεις έξω από τα μαθηματικά. (Singer 2002). Το άπειρο βρίσκεται σε αντίφαση με την καθημερινότητα και την διαίσθηση. Επιπλέον, η σύγκριση απείρων συνόλων είναι μία περίπτωση στην οποία οι τυπικές και οι διαισθητικές ερμηνείες είναι πιθανό να συγκρούονται. Σε αυτό το είδος των περιπτώσεων ο Fishbein θεωρεί ότι είναι απαραίτητο να δημιουργήσει κανείς διαισθητικές καταστάσεις που μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τις περιπτώσεις σύγκρουσης. Εκτός αυτών έχει διαπιστωθεί ότι όταν οι μαθητές χρησιμοποιούσαν περισσότερες από μία μεθόδους για την σύγκριση άπειρων συνόλων τα αποτελέσματα στα οποία κατέληγαν ήταν αντιφατικά και οι ίδιοι το αγνοούσαν αυτό(π.χ., Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir & Tirosh, 1999). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω προκύπτει ότι θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθούν οι αντιλήψεις, πεποιθήσεις και δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου αλλά και οι διαισθητικοί τρόποι σύγκρισης του πλήθους των σημείων απείρων συνόλων. Πιο συγκεκριμένα η παρούσα έρευνα εστιάζει στις αντιλήψεις που εμφανίζουν οι τελειόφοιτοι μαθητές λυκείου σχετικά με τις έννοιες άπειρο και άπειρο σύνολο καθώς και στους τρόπους που χρησιμοποιούν για να συγκρίνουν το πλήθος των στοιχείων απείρων συνόλων. Ένα επιπλέον σημείο είναι η μελέτη του πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά την διαφορά πληθικότητας μεταξύ αριθμήσιμων και υπεραριθμήσιμων συνόλων.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρείται μια ανασκόπηση ερευνών, οι οποίες αφορούν στην κατανόηση της έννοιας του απείρου και στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται από μαθητές σε δραστηριότητες σχετικές με την σύγκριση συνόλων, με σκοπό να αναδειχθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν όταν έρχονται αντιμέτωποι με την αντιφατική φύση της έννοιας του απείρου. Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στην μεθοδολογία της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζεται το ερευνητικό πρόβλημα καθώς και τα ερευνητικά ερωτήματα και γίνεται ανάλυση των ερωτήσεων του ερωτηματολογίου. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας ανά μαθητή. Στο πέμπτο, και τελευταίο, κεφάλαιο περιλαμβάνονται τα συμπεράσματα τις έρευνας ανά ερευνητικό ερώτημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1.Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

Το άπειρο είναι σημαντική εγγενής έννοια που συνδέεται με τον σχηματισμό του αριθμού. Οι πτυχές που συνδέονται με την έννοια του απείρου θα πρέπει να είναι μέρος της εκπαίδευσης αν όχι ως μέρος του προγράμματος σπουδών αλλά με την χρήση διάφορων παραδειγμάτων από διαφορετικά πλαίσια και δίνοντας έμφαση σε διάφορες απόψεις έξω από τα μαθηματικά. (Singer 2002). Όπως τονίζουν οι Mihaela Singer, Cristian Voica (2003) βασικά αντικείμενα των μαθηματικών είναι οι αριθμοί και τα σύνολα των αριθμών. Καθώς τα μαθηματικά ασχολούνται με άπειρα σύνολα αριθμών και αυτά είναι τα μόνα άπειρα σύνολα που μας είναι γνωστά πολλά ερωτήματα προκύπτουν που συνδέονται με το κατά πόσο η ιδέα του απείρου θα μπορούσε να απευθύνεται στα σχολικά μαθηματικά. Υπάρχει κάποιου είδους διαίσθηση του απείρου στα παιδιά; Θα μπορούσε να ενθαρρυνθεί στο σχολείο; Οικοδομεί το σχολείο μια κατανόηση του απείρου; Οι αριθμοί αποτελούν το πιο απλό άπειρο, οπότε αν θέλουμε να κατανοήσουμε το άπειρο θα πρέπει να προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τους αριθμούς. Οι αριθμοί λαμβάνονται μετρώντας, τον ένα μετά τον άλλον. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικοί τρόποι να κοιτάζουμε τους αριθμούς: ως ένα ολοκληρωμένο άπειρο και ως “ελλιπές” άπειρο οι τρόποι αυτοί μπορούν να εκφραστούν ως Πλατωνικός και Αριστοτέλειος τρόπος αντίστοιχα.

Η έννοια του δυνητικού απείρου περιγράφεται ως μία διαδικασία καταμέτρησης που δεν έχει τέλος για παράδειγμα 1,2,3,4,... Αυτές οι συνεχιζόμενες διεργασίες είναι τα πρώτα παραδείγματα απείρου που συναντούν τα παιδιά. Στα Μαθηματικά τέτοιες διεργασίες είναι πολύ συχνές. Ωστόσο, οι ενδιαφέρουσες περιπτώσεις στα μαθηματικά είναι, όταν το άπειρο γίνεται αντιληπτό ως ένα πράγμα. Όταν, δηλαδή, η αντίληψή μας για το άπειρο είναι αυτή του πραγματικού απείρου. Το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών είναι ένα παράδειγμα πραγματικού απείρου γιατί απαιτεί από εμάς να αντιληφθούμε τη δυνητικά απεριόριστη διαδικασία της καταμέτρησης όλο και περισσότερων αριθμών σαν να ήταν κατά κάποιο τρόπο πεπερασμένη.

Ο Fischbein (2001) ορίζει ως πραγματικό άπειρο το άπειρο το οποίο η νοημοσύνη μας είναι δύσκολο ακόμα και αδύνατο να κατανοήσει: το άπειρο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος, το άπειρο των πραγματικών αριθμών,... .Σύμφωνα με αυτόν όταν αναφέρουμε την έννοια άπειρο, έχουμε να κάνουμε με μια δυναμική μορφή του απείρου. Θεωρούμε διαδικασίες οι οποίες σε κάθε στιγμή είναι πεπερασμένες αλλά συνεχίζονται επ άπειρον. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να συλλάβουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, αλλά μπορούμε να συλλάβουμε την ιδέα ότι μετά από κάθε φυσικό αριθμό, υπάρχει και ένας άλλος φυσικός αριθμός. Η μετάβαση από το δυνητικό στο πραγματικό άπειρο περιλαμβάνει μια μετάβαση από (μια μη αναστρέψιμη) διεργασία σε ένα μαθηματικό αντικείμενο.

Μπορούμε να διακρίνουμε τα διαφορετικά είδη απείρου μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, το σύνολο των φυσικών αριθμών έχει απείρως πολλά στοιχεία, και δεν έχει άνω φράγμα. Ως εκ τούτου οι αριθμοί μπορεί να γίνονται όλο και μεγαλύτεροι αλλά δεν έχουν άνω φράγμα. Αλλά κάθε φραγμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών είναι πεπερασμένο αυτόματα, ενώ το ίδιο δεν ισχύει για τους ρητούς. Για παράδειγμα, το σύνολο των ρητών αριθμών μεταξύ μηδέν και ένα έχει απείρως πολλά στοιχεία, αλλά είναι φραγμένο. Το πραγματικό άπειρο είναι μια κεντρική έννοια στη φιλοσοφία και τα μαθηματικά, έχει ριζικά συμβάλει στη θεμελίωση των μαθηματικών και στη θεωρητική βάση των διαφόρων μαθηματικών συστημάτων. «Έχει μακρά ιστορία και επίμονα απορριφθεί από μαθηματικούς και φιλοσόφους, και ήταν εξαιρετικά αμφιλεγόμενο, ακόμη και κατά τον τελευταίο αιώνα»Tsamir & Dreyfus (2002)

1.2.ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ

1.2.1.ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Μελέτες έχουν επισημάνει την ύπαρξη και την επιμονή εναλλακτικών αντιλήψεων σχετικά με την έννοια του απείρου οι οποίες δεν είναι σύμφωνες με τους αποδεκτούς μαθηματικούς ορισμούς και μεθοδολογίες (Confrey, 1990; Fischbein, 1987; Hart, 1981; Moloney and Stacey, 1997;O' Callaghan, 1998; Sierpinska, 1994; Tall, 1991)

Η αρχική κατανόηση των παιδιών για το άπειρο είναι ως ιδιότητα διαδικασιών (ατελείωτη) παρά ως ποσότητα (αριθμό- αντικείμενο) το οποίο έχει μια τάξη μεγέθους. (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979, Monaghan, 2001).Σύμφωνα με την υπάρχουσα έρευνα εντοπίζονται τρεις κατηγορίες πρωταρχικών αντιλήψεων όσο αφορά στο άπειρο

(Florence , Mihaela Singer, Cristian Voica) η διαδικαστική, η τοπολογική και η πνευματική .

Την διαδικαστική αντίληψη ο Fischbein (1987) την ορίζει ως "εν δυνάμει άπειρο" και διακρίνει σε αυτήν κάποιες επιμέρους διαστάσεις: την χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί (π.χ το άπειρο είναι ατελείωτο , πολλές ώρες, αμέτρητο , άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει ποτέ, συμβαίνει πάντα , καταλαβαίνω το άπειρο όπως συμβαίνει και ποτέ δεν σταματά) , την χωρικό-ρυθμική διάσταση (π.χ. το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει και είναι σε εξέλιξη , όταν προσπαθείτε να πλησιάσετε τα αστέρια, όσο πιο κοντά προσπαθείς να φτάσεις τόσο πιο μακριά πάνε) , την διάσταση της μέτρησης (π.χ. το πεπερασμένο είναι σαν τον αριθμό των μολυβιών σε ένα δωμάτιο, αλλά το άπειρο είναι σαν την καταμέτρηση όλων των αριθμών του κόσμου) , την διάσταση της αλλαγής (π.χ. ο αριθμός των θρανίων σε μια τάξη θεωρείται πεπερασμένος γιατί είναι ένα ποσό που δεν μπορεί να αλλάξει με τον ίδιο τρόπο όπως ένας άπειρος αριθμός , το σύνολο των διαιρετών του 32561784937289463785 δεν είναι άπειρο επειδή υπάρχει ένας ορισμένος αριθμός ψηφίων του αριθμού που δεν αλλάζει ποτέ).

Κατά τον Singer (2001, 2008) θεωρούμε ότι μια τοπολογική αντίληψη εκδηλώνεται όταν το παιδί προκαλεί ιδιότητες και μετασχηματισμούς που είναι αμετάβλητα στην αλλαγή του σχήματος. Η τοπολογική αντίληψη του απείρου συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο και δεν έχει μεγαλύτερο αριθμό. Σε αυτήν την αντίληψη το παιδί φτάνει με την βοήθεια της αριθμογραμμής. Ορισμένες απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές που συμφωνούν με την άποψη αυτή στην ερώτηση τι νομίζετε ότι είναι άπειρο είναι: κάτι τεράστιο, κάτι πολύ μεγάλο , κάτι ημιτελές, χωρίς τέλος , ανέκφραστο, ασταμάτητο, τεράστιο , το άπειρο το έχω συνδέσει με όριο, μακρινό , κάτι απεριόριστο, χωρίς τέλος.

Όσοι διαθέτουν μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου δίνουν έμφαση στα συναισθήματα, την πνευματικότητα (π.χ. όταν σκέφτομαι το άπειρο , σκέφτομαι την αγάπη για τους γονείς και για τον αδελφό μου , μια λέξη ατέλειωτη σε αριθμούς, ο νους δεν είναι σε θέση να καταλάβει τίποτα για το άπειρο, μόνο ο Θεός μπορεί να το αποκαλύψει αυτό , άπειρο σημαίνει απόλυτο, κάτι που δεν μπορεί κανείς να αγγίξει , κάτι που οι άνθρωποι ονειρεύονται . . . να ζήσουν απείρως . . . να είναι αθάνατοι , ένα σημείο είναι απείρως μικρό και ένα αεροπλάνο απείρως μεγάλο).

Ο Fischbein διέκρινε τις πρωτογενείς από τις δευτερογενείς διαισθήσεις. Ως πρωτοβάθμιες διαισθήσεις ορίστηκαν αυτές που αναπτύσσονται στο άτομο ανεξάρτητα από οποιαδήποτε συστηματική διδασκαλία ως αποτέλεσμα της προσωπικής τους εμπειρίας. Δευτεροβάθμιες διαισθήσεις ορίστηκαν αυτές που αποκτώνται όχι από την φυσική εμπειρία αλλά μέσω κάποιας εκπαιδευτικής παρέμβασης. Οι δευτεροβάθμιες αντιλήψεις γίνονται εμφανείς όταν η τυπική γνώση γίνεται άμεση , προφανής και συνοδεύεται από αυτοπεποίθηση. Οι Δευτεροβάθμιες διαισθήσεις σχετικά με μια συγκεκριμένη ιδέα ή διαδικασία είναι συχνά αντιφατικές με τις σχετικές πρωτογενείς διαισθήσεις για τις ίδια έννοια.

Κάποιες δευτερογενείς αντιλήψεις σχετίζονται άμεσα με την αιτιολόγηση , ερμηνεία , αναπαράσταση των παραπάνω πρωταρχικών αντιλήψεων. Οι μαθητές θεωρούν το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό και χρησιμοποιούν τις αισθήσεις τους για πράξεις με το άπειρο. Αναγνωρίζουν το $\infty+1$ ως έναν αριθμό μεγαλύτερο από το άπειρο κατά 1.Το μισό του απείρου θεωρείται μικρότερο από το άπειρο. Επεκτείνουν δηλαδή τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και στην έννοια του απείρου. Επιπλέον επηρεάζονται από αριθμούς που ακούγονται μεγάλοι (π.χ: τρισεκατομμύρια) θεωρούν ότι δεν υπάρχουν αριθμοί στο διάστημα [0,1],και αν ρωτηθούν για το ποιο είναι το μέσο του διαστήματος απαντάνε ότι ίσως υπάρχουν μερικοί και όχι άπειροι. Η αυθόρμητη αναγνώριση της ύπαρξης των αριθμών μεταξύ 0 και 1 ήταν στενά συνδεδεμένη με το ότι οι αριθμοί είναι απείρως διαιρετοί με την έννοια ότι μπορούν να χωριστούν κατ' επανάληψη χωρίς ποτέ να γίνουν μηδέν (Smith et al., 2005). Αυτή η αναγνώριση είναι ένα βήμα προς τα εμπρός στην ανάπτυξη μιας δευτερογενούς διαίσθησης. Για να γίνει αυτό χρειάζεται αλληλεπίδραση μεταξύ διαδικαστικής και τοπολογικής αντίληψης.

Τα πειράματα των Falk , Gassner , Ben - Zoor , και Ben - Simon (1986) ασχολούνται με μαθητές δημοτικού σχολείου με παιχνίδια επαναλαμβανόμενων κύκλων όπου ο νικητής ήταν αυτός που έπαιρνε το μικρότερο θετικό ρητό .Πολλοί μαθητές που κατάλαβαν την απεραντοσύνη των θετικών ακεραίων , στο πλαίσιο ενός προηγούμενου παιχνιδιού (στο οποίο ο νικητής ήταν αυτός που είχε επιλέξει το μεγαλύτερο αριθμό) δεν καταλαβαίνουν την απεραντοσύνη στους θετικούς ρητούς στο πλαίσιο του παιχνιδιού, επιλέγοντας το μικρότερο (θετικό) αριθμό. Ωστόσο , οι μαθητές 11-13 ετών συνειδητοποίησαν ότι το παιχνίδι ήταν ατελείωτο .

Το τι λένε οι μαθητές σχετικά με το άπειρο εξαρτάται τόσο από την δραστηριότητα όσο και από το πλαίσιο. Ο τρόπος διαμόρφωσης μιας δραστηριότητας (στοιχεία κειμένου) και το μαθηματικό πλαίσιο (π.χ: γεωμετρικό ή αριθμητικό) φαίνεται να ασκούν επιρροή (Monagham, 2001). Ως προς το πρόβλημα ύπαρξης του απείρου οι μαθητές φαίνεται να το αντιμετωπίζουν κάτω από τρεις διαφορετικές συνιστώσες. Η ύπαρξη θεωρείται η δυνατότητα να το βιώσουν. Για παράδειγμα παίρνω έναν άπειρο αριθμό, γιατί μπορώ να προσθέσω όσους θέλω. Δεν υπάρχει ένας τελευταίος αριθμός, θα μπορούσε να αυξηθεί με την προσθήκη του 1 προς τα δεξιά!Δεν μπορώ να πω αν υπάρχει ένας τελευταίος αριθμός, δεν θα μπορούσε να τεθεί το μυαλό μας. Και σε κάθε περίπτωση ένας μεγαλύτερος αριθμός θα ήταν άχρηστος αριθμός, αν δεν μπορώ να το σκεφτώ. Το άπειρο δεν μπορεί να είναι γνωστό, γιατί αν θα μπορούσαμε να το ξέρουμε δεν θα ήταν άπειρο. Η ύπαρξη θεωρείται ως μία εσωτερική συνέπεια της δομής του συστήματος των αριθμών: αυτό συχνά σχετίζεται με το εν δυνάμει άπειρο «με την προσθήκη της μονάδας έχουμε πάντα ένα μεγαλύτερο αριθμό, αλλά δεν μπορεί να φτάσει τον τελευταίο αριθμό ». Η ύπαρξη και δυνατότητα μιας ανεξάρτητης, μη προσβάσιμης πραγματικότητας συχνά σχετίζεται με τη θρησκευτική υπέρβαση ή το χωροχρονικό συνεχές. Υπάρχουν αριθμοί, και πάντα υπήρχαν και πάντα θα υπάρχουν, ακόμη και αν δεν σκεφτόμαστε γι 'αυτούς. Θα είναι ατελείωτοι. Είναι σαν τον Θεό, που υπήρχε ήδη πριν από την δημιουργία του ανθρώπου, και ο άνθρωπος που δεν ήταν εκεί για να σκεφτεί για αυτόν ".

Ο Dubinsky et al. (2005) πρότεινε μία APOS ανάλυση των αντιλήψεων του απείρου. Πρότειναν ότι το interiorizing του άπειρο σε μία διεργασία αντιστοιχεί σε μια κατανόηση του δυνητικού άπειρο, ενώ η ενθυλάκωση ενός αντικειμένου αντιστοιχεί στο πραγματικό άπειρο.

Ο Thomas A. Petty (1996)προσπάθησε να διερευνήσει το ρόλο που παίζει η αναστοχαστική αφαίρεση στην κατασκευή της γνώσης του ατόμου για το άπειρο και για τις άπειρες διαδικασίες. Συνεντεύξεις μαθητών καθώς προσπαθούσαν να επιλύσουν προβληματικές καταστάσεις που αφορούν το άπειρο και άπειρες διαδικασίες. Χρησιμοποίησε το μοντέλο των Robert (1982) και Sierpinska (1987) Αυτό το μοντέλο περιλαμβάνει τρία στάδια:

Στάδιο 1. Στατική έννοια του ορίου

α. Η αντίληψη του ατόμου ότι ένα όριο είναι σε πεπερασμένους όρους.

β. Για το άτομο, το άπειρο δεν υπάρχει: όλα είναι πεπερασμένο και ορισμένα.

γ. Αν υπάρχει άπειρο, αυτό που οριοθετείται πρέπει να είναι πεπερασμένο

Στάδιο 2. Δυναμική έννοια του ορίου

α. Το άτομο έχει μια αντίληψη του ορίου ως μια συνεχής αδιάκοπη διαδικασία? το όριο είναι μια τιμή, η οποία προσεγγίζεται αλλά ποτέ δεν επιτυγχάνεται.

β. Για το άτομο αυτό, το άπειρο υπάρχει και αφορά την αναγνώριση του δυνιτικού απείρου σε αντίθεση με το πραγματικό άπειρο. Έχει πλαισιακή όψη και μπορεί να περιλαμβάνει μια μεταβατική φάση.

Στάδιο 3:πραγματικό άπειρο

Α. Το άτομο έχει συλλάβει την έννοια του απείρου ως μαθηματικό αντικείμενο.\

Β. Το άπειρο αντιμετωπίζεται ως ένα ορισμένο αντικείμενο

γ. Το άτομο πιστεύει ότι είναι δυνατόν να προβλεφθεί το αποτέλεσμα μιας άπειρης διαδικασίας

Με βάση τη μελέτη, ο Petty άλλαξε το μοντέλο τριών σταδίων για ένα μοντέλο τεσσάρων σταδίων με διαχωρισμό τρίτο στάδιο. Τα τέσσερα στάδια αυτού του μοντέλου είναι: Static Level, Dynamic Level, Actualized Infinity Level, και Infinity as a Mathematical Object Level.

Η Tirosh (1991) συνόψισε τα αποτελέσματα ορισμένων ψυχό-διδακτικών μελετών σχετικά με την καντοριανή θεωρία συνόλων. Σύμφωνα με την έρευνα της, διαπίστωσε ότι:

Α. Υπάρχουν βαθιές αντιφάσεις μεταξύ της έννοιας του πραγματικού απείρου και των νοητικών σχημάτων για το άπειρο τα οποία είναι φυσικά προσαρμοσμένα σε πεπερασμένα αντικείμενα και γεγονότα. Κατά συνέπεια, μερικές από τις ιδιότητες του όπως το γεγονός ότι

$\aleph = 1 + \aleph$ ο και $2\aleph = \aleph$ είναι πολύ δύσκολο να κατανοηθούν.

Β.οι διαισθήσεις του πραγματικού απείρου είναι πολύ ανθεκτικές στην επίδραση της ηλικίας και της σχολικής εκπαίδευσης.

Γ.οι διαισθήσεις του πραγματικού απείρου επηρεάζονται από το εννοιολογικό και σχηματικό πλαίσιο του προβλήματος το οποίο τίθεται.

Δ. Οι μαθητές έχουν διαφορετικές ιδέες για το άπειρο που επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την ικανότητά τους να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα που ασχολούνται με το πραγματικό άπειρο. Οι ιδέες αυτές συνήθως βασίζονται στην έννοια του δυνητικού άπειρου.

Ε. Οι εμπειρίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με άπειρο σπάνια σχετίζονται με την έννοια της πληθικότητας των αριθμών.

1.2.2.ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΤΡΟΠΟΥΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΑΠΕΙΡΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Η σύγκριση απείρων συνόλων είναι μία περίπτωση στην οποία οι τυπικές και οι διαισθητικές ερμηνείες είναι πιθανό να συγκρούονται. Σε αυτό το είδος των περιπτώσεων ο Fishbein θεωρεί ότι είναι απαραίτητο να δημιουργήσει κανείς διαισθητικές καταστάσεις που μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τις περιπτώσεις σύγκρουσης.

Πολυάριθμες μελέτες σχετικά με άπειρα σύνολα που το ένα είναι υποσύνολο του άλλου δείχνουν ότι οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά την σύγκριση του πλήθους των στοιχείων απείρων συνόλων. Μόνο μία μειοψηφία χρησιμοποιεί διαισθητικά την 1-1 αντιστοιχία. Οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν μεθόδους κατάλληλες για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων και εμφανίζουν την πεποίθηση ότι όλες οι μέθοδοι που είναι κατάλληλες για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων είναι επαρκείς και για άπειρα σύνολα (Tirosh, 1991).

Η Tsamir (2002) τονίζει ότι η επίδραση διαισθητικών ιδεών που σχετίζονται με πεπερασμένα σύνολα, επηρεάζουν τις αποφάσεις των μαθητών και την επίγνωση πιθανών αντιφάσεων, και τον τρόπο σκέψης τους που σχετίζονται με την ισοδυναμία άπειρων συνόλων.

Έχει διαπιστωθεί ότι όταν οι μαθητές χρησιμοποιούσαν περισσότερες από μία μεθόδους για την σύγκριση άπειρων συνόλων τα αποτελέσματα στα οποία κατέληγαν ήταν αντιφατικά και οι ίδιοι το αγνοούσαν αυτό(e.g., Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir & Tirosh, 1999).

Επιπλέον έχει τεκμηριωθεί ευρέως ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού προβλήματος προκαλούν διαφορετικές απαντήσεις που μερικές φορές συγκρούονται (Arcavi, Tirosh and, Nachmias, 1989; Even, 1998; Janvier, 1987; Janvier, Girardon and Morand, 1993; Johnson, 1989; Hitt, 1998; Lesh, Post and Behr, 1987; Mesquita, 1998;Silver, 1986; Tirosh, 1990; Tirosh and Stavy , 2000).

Στην έρευνα που πραγματοποίησε ο Duval (1983) επέλεξε δυο δραστηριότητες σύγκρισης των ίδιων συνόλων, του συνόλου των φυσικών και του συνόλου των τέλειων τετραγώνων. Στην πρώτη δραστηριότητα δινόταν η σειρά των φυσικών αριθμών ως εξής:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,

21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,

...

Οι μαθητές έπρεπε αρχικά να σημειώσουν τους τετράγωνους αριθμούς και στην συνέχεια να συγκρίνουν τα δύο σύνολα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι αυτή η αναπαράσταση ενίσχυε την χρήση του κριτηρίου μέρος - όλο.

Στην δεύτερη δραστηριότητα τα δύο σύνολα δίνονταν το ένα κάτω από το άλλο σε κάθετη αναπαράσταση:

A={1,2,3,4,...}

B={1,4,9,16,...}.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι όταν δύο άπειρα σύνολα γράφονται το ένα κάτω από το άλλο ενισχύεται η χρήση του κριτηρίου της 1-1 αντιστοιχίας. Τα ευρήματα της έρευνας του Duval υποδηλώνουν ότι οι αποφάνσεις των μαθητών για την ισοπληθικότητα δύο άπειρων συνόλων, καθορίζονται όχι μόνο από την σχέση μεταξύ τους, άλλα και από τον τρόπο αναπαράστασής τους.

Η έρευνα των Tirosh και Tsamir (1996) αφορούσε σύγκριση απείρων συνόλων σε οριζόντια , κάθετη, ρητή αριθμητική (πρόκειται για την αναπαράσταση των υπό σύγκριση συνόλων με τρόπο ώστε να είναι προφανής ο τρόπος αντιστοίχησης για παράδειγμα A={1,2,3,4,...} και B=$\{1^2,2^2,3^2,4^2,...\}$) και γεωμετρική αναπαράσταση. Τα ευρήματα έδειξαν ότι οι απαντήσεις των μαθητών εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την αναπαράσταση των δραστηριοτήτων. Μεγαλύτερα ποσοστά των απαντήσεων “1-1 αντιστοιχία” ή “το ίδιο πλήθος στοιχείων” παρουσιάστηκαν στα αριθμητικά ερωτήματα κάθετης αναπαράστασης και στα γεωμετρικά παραδείγματα και λιγότερο στα αριθμητικά ερωτήματα οριζόντιας αναπαράστασης.

Στην έρευνά της η Tsamir (2002) εξέτασε 15 μαθητές ηλικίας 16-18 ετών. Σε κάθε έναν από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε μεταξύ άλλων να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των παρακάτω συνόλων:

α) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,...}

Z={2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,...}

β) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...}

P={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...}

γ) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,...}

V={0,1,3,6,10,15,21,27,36,45,55,...}

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ αυτών των δραστηριοτήτων. Σαφώς, όλα τα σύνολα είναι αριθμήσιμα, και έτσι όλα αυτά τα σύνολα περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Οι δραστηριότητες στα υποερωτήματα α και β είναι παρόμοιες. Παρόλα αυτά, οι κανόνες αντιστοιχίας για κάθε μία από αυτές τις δραστηριότητες είναι πολύ διαφορετικοί. Ένας πιθανός κανόνας αντιστοίχισης για το β υποερώτημα, είναι $n \rightarrow n-4$ ενώ για το α, είναι $n \rightarrow 2n$. Έτσι, οι συμμετέχοντες αν είναι σε θέση να προσδιορίσουν τον κανόνα αντιστοιχίας καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά.

Η δραστηριότητα του υποερωτήματος γ , ωστόσο, είναι δυσκολότερη. Αφορά στην σύγκριση του συνόλου των φυσικών αριθμών με το σύνολο V στο οποίο αναπαριστάται μία αριθμητική ακολουθία. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει $V_{n+1} = V_n + n$. Για να εξηγήσουν την ισοδυναμία μεταξύ των συνόλων A και V οι μαθητές έπρεπε είτε να εκφράσουν την V_{n+1} ως $f(n)$, και στη συνέχεια να επισημάνουν μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των συνόλων, είτε να εξηγήσουν ότι η ένα-προς-ένα αντιστοιχία μπορεί να σχηματιστεί μεταξύ του συνόλου των φυσικών αριθμών και κάθε σύνολου που θα μπορούσε να γραφτεί ως άπειρη σειρά.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι στην οριζόντια αναπαράσταση οι απαντήσεις εστίαζαν στο ότι το πλήθος στοιχείων των δύο συνόλων είναι άνισο και οι μαθητές βασίζονταν σε σχέσεις του περιέχεσθαι. Σχετικά με τα ερωτήματα γεωμετρικής αναπαράστασης οι περισσότεροι μαθητές είπαν ότι το πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων ήταν ίδιο. Οι περισσότεροι από αυτούς εξέφρασαν ρητά μία έννοια αντιστοίχησης.Οι αποφάνσεις των μαθητών στην αριθμητική έκφραση συμφωνούσαν στο ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά.

Στην έρευνά τους οι Tsamir & Dreyfus (2002) επισημαίνουν το γεγονός ότι οι μαθητές αν και γοητεύονται από το άπειρο δυσκολεύονται να το κατανοήσουν. Οι μαθητές χρησιμοποιούν διαισθητικά τις ίδιες μεθόδους για τη σύγκριση των άπειρων συνόλων όπως χρησιμοποιούν και για τη σύγκριση των πεπερασμένων παρά το γεγονός ότι δεν έχουν ιδιαίτερη τάση να χρησιμοποιούν σωστά την 1-1 αντιστοιχία. Επιπλέον ένα από τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν ότι οι μαθητές τείνουν να «τερειάζουν» το {1, 2, 3 ...} πιο εύκολα με το σύνολο {12, 22, 32 ...} από ό, τι με το σύνολο {1, 4, 9 ...}.

Η έρευνα της Tirosh (1985) αφορούσε προβλήματα σύγκρισης άπειρων ποσοτήτων. Εφαρμόστηκε σε δείγμα 1381 μαθητών. Τα ευρήματα συνέκλιναν στο ότι βασικό επιχείρημα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους για την ισότητα δυο συνόλων είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Για να δικαιολογήσουν την μη ισότητα δύο απείρων συνόλων χρησιμοποιούσαν τα ακόλουθα επιχειρήματα 1. ένα γνήσιο υποσύνολο ενός απείρου συνόλου περιέχει λιγότερα στοιχεία από το αρχικό σύνολο, 2.ένα φραγμένο σύνολο έχει λιγότερα στοιχεία από ένα μη φραγμένο σύνολο, 3. ένα γραμμικό σύνολο περιέχει λιγότερα στοιχεία από ό,τι ένα δισδιάστατο σύνολο. Για παράδειγμα,το 38% των μαθητών χρησιμοποίησε αυτό το επιχείρημα υποστήριξε ότι υπάρχουν περισσότερα σημεία σε ένα τετράγωνο από ότι σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών (λιγότερο από 1%) χρησιμοποίησαν διαισθητικά την 1-1 αντιστοιχία και ότι τα διαισθητικά κριτήρια που οι μαθητές χρησιμοποίησαν για να συγκρίνουν άπειρες ποσότητες και θεωρήματα της θεωρίας συνόλων ήταν ασύμβατα μεταξύ τους.

Σύμφωνα με την έρευνά της που αφορά δραστηριότητες σύγκρισης απείρων συνόλων η Tsamir (2001) υποστηρίζει ότι συχνά οι μαθητές χρησιμοποιούν τέσσερα κριτήρια για να καθοριστεί αν ένα δεδομένο ζεύγος άπειρων συνόλων είναι ισοπληθικό: το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο),μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά), οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν και το 1-1 κριτήριο. Οι μαθητές τείνουν να εφαρμόζουν τα κριτήρια αυτά σε δραστηριότητες σύγκρισης απείρων συνόλων χωρίς να παρατηρούν τις βαθιές αντιφάσεις που συνεπάγεται η χρήση περισσότερων του ενός από αυτά.

Σε έρευνα των Vida Manfreda Kolar και Tatjana Hodnik Čadež (2012) σχετικά με την σύγκριση του πλήθους στοιχείων απείρων συνόλων μερικοί από τους ερωτηθέντες είχαν την σωστή διαίσθηση αλλά φαινόταν να λείπει η μαθηματική γνώση που απαιτείται για την παροχή της κατάλληλης επιχειρηματολογίας. Οι περισσότερες απαντήσεις βασίζονταν στο ότι και τα δύο σύνολα είναι άπειρα.

Στην έρευνα που πραγματοποίησαν οι Fischbein, Tirosh, Hess (1979) σχετικά με την σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων {1,2,3,4,...} , {2,4,6,8,...} οι περισσότεροι μαθητές απαντούν ότι το πλήθος των στοιχείων του{1,2,3,4,...} είναι μεγαλύτερο. Το κύριο επιχείρημα είναι ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει επιπλέον και τους περιττούς αριθμούς. Κάποιοι ισχυρίζονται ότι τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά διότι έχουν και τα δύο άπειρο πλήθος στοιχείων. Οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους συμμετέχοντες διχοτομήθηκαν. Η διαίσθηση στην οποία βασίζονται οι παραπάνω απαντήσεις είναι πολύ σταθερή όσο αφορά τις ηλικίες. Οι διαισθήσεις των μαθητών για το άπειρο είναι ανθεκτικές στα χρόνια. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ζητήσει από τους μαθητές να συγκρίνουν δύο άπειρα σύνολα . Λογικά οι απαντήσεις θα έπρεπε να είναι “και τα δύο σύνολα αποτελούνται από άπειρο πλήθος στοιχείων” (υποθέτοντας ότι οι μαθητές δεν γνωρίζουν τα διαφορετικά είδη απείρου αλλά έχουν μία στοιχειώδη διαίσθηση για το άπειρο). Η εξήγηση αυτού είναι ότι τα λογικά σχήματα είναι φυσικώς προσαρμοσμένα στην πραγματικότητα. Για να ξεπεραστεί αυτό η νοημοσύνη έχει εφεύρει το δυνητικό ή καταχρηστικό άπειρο με την καντοριανή ορολογία. Υπάρχουν παράδοξα αποτελέσματα που θα μπορούσαν να ερμηνευτούν μόνο ως αποτέλεσμα αυτής της γνήσιας αντίφασης.

1.3.ΟΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

1.3.1.ΟΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

Είναι γεγονός ότι πολύ μικρά τα παιδιά έχουν περιέργεια για το άπειρο . Το ενδιαφέρον όμως αυτό δεν συμβαδίζει με τα σχολικά μαθηματικά με αποτέλεσμα να παραμένει μία μυστήρια έννοια για τους περισσότερους μαθητές. Μία από τις κύριες δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του απείρου είναι ο αφηρημένος χαρακτήρας, η έννοια του απείρου είναι δύσκολο να συνδεθεί με πραγματικές εμπειρίες της ζωής, επομένως εξαρτάται από την ικανότητά μας να το απεικονίσουμε διανοητικά. Σύμφωνα με τους Fischbein et al (1979) η κύρια πηγή των δυσκολιών είναι η θεμελιώδης αντίφαση μεταξύ της έννοιας αυτής και των πνευματικών σχημάτων μας που είναι προσαρμοσμένα στην πεπερασμένη πραγματικότητα.

Ο Monaghan (2001) επισημαίνει το γεγονός ότι ο πραγματικός κόσμος είναι, προφανώς, πεπερασμένος και επομένως δεν υπάρχουν πραγματικές αναφορές για συζήτηση σχετικά με το άπειρο. Το πρόβλημα στην κατανόηση του απείρου προέρχεται επίσης από το γεγονός ότι ο μαθηματικός κόσμος είναι μη χρονικός (άπειρα αθροίσματα μπορούν να γίνουν χωρίς αναφορά στον χρόνο). Έξω από τον κόσμο των καθαρών Μαθηματικών η έκφραση "συνεχίζεται για πάντα" δεν θα είχε νόημα επειδή δεν υπάρχει διαδικασία που θα μπορούσε να διαρκέσει για πάντα (Monaghan, 2001).

Η επόμενη δυσκολία στην διαδικασία της κατανόησης της έννοιας του απείρου παρουσιάζεται στο στάδιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να φανταστούν ότι η διαδικασία της καταμέτρησης δεν τελειώνει ποτέ αλλά δεν είναι σε θέση να αποκτήσουν εικόνα για το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών ως ένα σύνολο όλων των αριθμών που παίρνει κανείς με την εφαρμογή της ίδιας διαδικασίας στο άπειρο. Έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία της κατανόησης της έννοιας του απείρου αναπτύσσεται σταδιακά και σύμφωνα με την ανάπτυξη της διανοητικής μας ικανότητας.

Η κατανόηση του απείρου είναι πολύπλοκη λόγω της περιορισμένης εφαρμογής της έννοιας σε καθημερινές καταστάσεις και επειδή διαφέρει από τους αποδεκτούς μαθηματικούς ορισμούς. Προτάσεις όπως "το σύνολο είναι ισοδύναμο με κάποιο μέρος του" έρχονται σε αντίθεση με τα συνήθη ψυχικά μας σχήματα.

Οι μελέτες δείχνουν επίσης ότι η κατανόηση του απείρου μπορεί να επηρεάζεται από την χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων οι οποίες επιτρέπουν στους μαθητές να ξεπεράσουν τα επιστημολογικά εμπόδια μεταξύ του τυπικού ορισμού της έννοιας και των πεποιθήσεων τους (Sierpinska, 1987).

Σύμφωνα με τους Fischbein, Tirosh, Hess (1979) από ψυχολογική άποψη η έννοια του απείρου είναι σαφώς αντιθετική υπό την έννοια σε καμία άμεση εμπειρία δεν μπορεί να γίνει επίκληση για να υποστηριχθεί η έννοια. Κανένα τεστ δεν μπορεί να υποστηρίξει ή να απορρίψει την έννοια του απείρου. είναι όμως μία ουσιαστική μαθηματική έννοια. Η κύρια πηγή δυσκολιών που συνοδεύουν την έννοια του απείρου είναι η ισχυρή αντίθεση μεταξύ της έννοιας και του διανοητικού σχήματός μας το οποίο κατασκευάζεται από εμπειρίες της πραγματικής ζωής. Εκτός αυτού η αποδοχή της έννοιας του απείρου απαιτεί την σύσταση νέων λογικών σχημάτων τα οποία έρχονται σε αντίθεση με τα διανοητικά μας σχήματα για παράδειγμα θα πρέπει να δεχθούμε ότι το όλο μπορεί να είναι ισοδύναμο με κάποια από τα μέρη του.

Ακόμα και σε πανεπιστημιακό επίπεδο η έννοια του απείρου των πραγματικών αριθμών δεν είναι ξεκάθαρη για όλους τους φοιτητές (Merenluoto & Pehkonen 2002). O Wheeler (1987) επισημαίνει ότι φοιτητές των Μαθηματικών διακρίνουν το 0.999... από το 1 οι τρεις τελείες σημαίνουν άπειρα δεκαδικά ψηφία. για την κατανόηση αυτής της ισότητας χρειάζεται κατανόηση του πραγματικού απείρου. Η έννοια του πραγματικού απείρου είναι αντιφατική και δύσκολη ακόμα και για τους μαθηματικούς.

Η έννοια του απείρου έχει διάφορες πτυχές, μεταξύ των οποίων το πραγματικό άπειρο είναι το πιο δύσκολο να κατανοηθεί (Fischbein, 1987; Lakoff & Nunez, 2000; Tall, 2001; Tirosh, 1991). Οι μαθητές μπορούν να συμπεράνουν ότι υπάρχουν απείρως πολλοί φυσικοί αριθμοί, με βάση το γεγονός ότι για κάθε φυσικό αριθμό, υπάρχει πάντοτε ένας επόμενος. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η ίδια σκέψη μπορεί να υποστηρίξει την έννοια της πυκνότητας. Για παράδειγμα, προτρέποντας ένα μαθητή να βρει τον αριθμητικό μέσο μ δύο ρητών αριθμών α και β και να συνεχίσει επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για τους ρητούς α,μ ..... κ.ο.κ μπορεί να οδηγήσουμε τον μαθητή να καταλάβει ότι υπάρχουν απείρως πολλοί ρητοί μεταξύ των α,β. Αυτός είναι ένας τρόπος προσέγγισης της έννοιας του πραγματικού απείρου με ένα δυνητικό τρόπο. Η εμπειρική έρευνα σχετικά με την έννοια των ρητών και των πραγματικών αριθμών και την έννοια του απείρου (Hannula, Maijala, Pehkonen & Soro, 2001; Malara, 2001; Merenluoto & Lehtinen,2002) δείχνει ότι οι παρανοήσεις που σχετίζονται με την ιδέα της διακριτικότητας είναι ισχυρές.

1.3.2.ΟΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΠΛΗΘΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΠΕΙΡΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Στις περιπτώσεις που εμπεριέχουν την έννοια του απείρου τα σχήματα απαντήσεων των μαθητών είναι παρόμοια με τα διαφορετικά σχήματα απαντήσεων που έδιναν οι μαθηματικοί μέσα στην ιστορία. Η εργασία του Bolzano The paradoxes of Infinity (1851) άνοιξε επίσημα την συζήτηση της πιθανότητας εισαγωγής της έννοιας του απείρου στα Μαθηματικά ως αντικείμενο προς μελέτη. Ένα από τα βασικά σημεία στην σύλληψη του Bolzano ήταν η σύγκριση απείρων συνόλων. Στην μελέτη του για τα άπειρα σύνολα, ο Bolzano επισήμανε δύο πιθανά κριτήρια σύγκρισης 1) μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο απείρων συνόλων 2)ένα από τα δύο σύνολα μπορεί να περιλαμβάνει το άλλο απλώς ως ένα μέρος του (σχέση μέρος – όλο). Η σχέση μέρος – όλου είναι το κριτήριο σύγκρισης που επιλέγει ο Bolzano. Τόνισε ότι αν και θα μπορούσε να δημιουργηθεί μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ ενός συνόλου και ενός κατάλληλου υποσυνόλου αυτό δεν αποτελεί δικαιολογία για το ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά. Η δυνατότητα δημιουργίας μίας τέτοιας αντιστοιχίας είναι μάλλον ένα χαρακτηριστικό των άπειρων συνόλων αν και κάπως παράδοξο. Θεμελιώδης διαφορά στο έργο του Cantor και του Bolzano είναι ότι το κριτήριο σύγκρισης που επέλεξε ο Bolzano βασίζεται στην σχέση υποσυνόλου ενώ του Cantor επικεντρώνεται στην αντιστοίχηση των στοιχείων των υπό σύγκριση συνόλων. Μέσα από το ενδιαφέρον του για τις τριγωνομετρικές σειρές ο Cantor συνειδητοποίησε ότι τα άπειρα σύνολα σημείων θα μπορούσαν να αποτελέσουν εργαλείο για την ανάλυση συναρτήσεων, οι οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν από τέτοιες σειρές. Ο Cantor απέδειξε ότι (σε αντίθεση με την διαισθητική κατανόησή μας για το άπειρο) υπάρχουν περισσότερα από ένα είδη απείρου για παράδειγμα το άπειρο πλήθος των σημείων ενός σχήματος είναι μεγαλύτερο από το άπειρο πλήθος των φυσικών αριθμών. Ο Cantor απέδειξε την ύπαρξη ενός κόσμου απείρων ιεραρχικά οργανωμένων, τον κόσμο των απαριθμήσεων.

“Ο δυνητικός χαρακτήρας του απείρου που φαινόταν να έχει πλήρως εγκαταλειφθεί ως αποτέλεσμα της θεωρίας του Cantor εμφανίστηκε σε ένα ανώτερο επίπεδο” (Becker, 1959).

Σύμφωνα με τους Luis E., Moreno A. και Guillermina Waldegg (1991) όταν ένας μαθητής έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με άπειρα σύνολα μία από τις συγκρούσεις που αντιμετωπίζει είναι να δεχθεί ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολό του. Προτάσεις όπως το ότι το σύνολο είναι ισοδύναμο με τα μέρη του έρχονται σε αντίθεση με την καθημερινή αντίληψη μας. Στην βάση αυτής της σύγκρουσης βρίσκεται το γεγονός ότι τα πνευματικά σχήματα του ατόμου πηγάζουν από την καθημερινή εμπειρία, όπου είναι προφανές ότι ένα σύνολο είναι μεγαλύτερο από τα μέρη του. Αυτή η εμπειρία διαμορφώνει την εικόνα έννοιας που τα άτομα δημιουργούν. Η επέκταση ορισμένων ιδιοτήτων των πεπερασμένων συνόλων σε άπειρα οδηγεί σε αντιφάσεις που οι μαθητές δεν είναι πάντα σε θέση να ξεπεράσουν. Όταν ο μαθητής αντιμετωπίζει το έργο της σύγκρισης δύο απείρων συνόλων που έχουν την σχέση μέρος – όλο και μια αμφιμονοσήμαντη σχέση μεταξύ τους δίνεται ρητώς αναδύεται η σύγκρουση. Πίσω από την αντίληψη των μαθητών για τα άπειρα σύνολα υπάρχει μόνο η κονστρουκτιβιστική ιδέα που οδηγεί στο εν δυνάμει άπειρο το οποίο λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του περιλαμβάνει μία μη αναστρέψιμη διαδικασία και δημιουργεί ένα εμπόδιο στην πραγματοποίηση της σύγκρισης. Οι συγκρίσεις δημιουργούν μία σύγκρουση που αφορά τις συγκεκριμένες εμπειρίες του μαθητή και την νοητική κατασκευή απείρων συνόλων. Η απόδειξη αντιστοιχίας μεταξύ ενός συνόλου και ενός κατάλληλου υποσυνόλου του οδηγεί στο ότι έχουν ίδια πληθικότητα. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με την διαίσθηση που έχει αναπτυχθεί για πεπερασμένα σύνολα σχετικά με την πληθικότητα.

Μια συνήθης αντίληψη των μαθητών είναι ότι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σχημάτων καθορίζουν το μέγεθος των αντίστοιχων συνόλων χωρίς να επιτρέπουν την δυνατότητα δημιουργίας μίας διατηρήσιμης ποσότητας.

Σύμφωνα με την έρευνα της Tsamir (2002) σχετικά με την σύγκριση της πληθικότητας απείρων συνόλων, υπάρχουν αποδείξεις της συνεχιζόμενης επιρροής των διαισθητικών ιδεών που σχετίζονται με πεπερασμένα σύνολα, οι οποίες παρενέβαιναν στην ικανότητα των μαθητών να προβληματιστούν σχετικά με τις αποφάσεις τους και των ενδεχόμενων αντιφάσεων.

Ένα από τα συμπεράσματα της έρευνας των Mihaela Singer και Cristian Voica (2003) είναι ότι για να διαπιστώσουν πιο σύνολο έχει τα περισσότερα στοιχεία οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διαισθητικά διαφόρους τύπους επιχειρημάτων όπως είναι η σχέση μέρους – όλου. Ορισμένες άλλες παρανοήσεις θα μπορούσαν να συνδέονται με διάφορες πεποιθήσεις που συνδέονται με τα άκρα διαστημάτων. Έτσι, όπως έδειξε η ίδια έρευνα μερικοί μαθητές πιστεύουν ότι οι πεπερασμένο είναι κάτι που έχει άκρα. Με αυτό συνδέεται , μια συχνή παρανόηση είναι ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν έχει άκρα . Μία άλλη κοινή αντίληψη των μαθητών είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοδύναμα , όλα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων (ενιαίο άπειρο - single infinity). Η αποκάλυψη αυτού του είδους της παρανόησης γίνεται καλύτερα σε γεωμετρικό πλαίσιο. Επιπλέον, η μελέτη αυτή έδειξε ότι οι πρωτογενείς διαισθήσεις των μαθητών είναι παρόμοιες με εκείνες που παρατηρούνται στους νέους μαθητές και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1.ΕΡΕΥΝΙΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Ο κύριος προβληματισμός, που θα απασχολήσει την παρούσα έρευνα είναι η προσπάθεια κατανόησης του τρόπου με τον οποίο τελειόφοιτοι μαθητές Λυκείου προσεγγίζουν διαισθητικά την έννοια του απείρου συνόλου καθώς και των διαισθητικών μεθόδων που χρησιμοποιούν σε δραστηριότητες σχετικές με την σύγκριση απείρων συνόλων σε αριθμητικό και γεωμετρικό πλαίσιο. Ο όρος διαίσθηση χρησιμοποιείται ως άμεση αυταπόδεικτη μορφή γνώσης . Φυσικά όλοι οι διαισθητικά αποδεκτοί ισχυρισμοί δεν είναι πραγματικά αυταπόδεικτοι ή σωστοί. Σε αυτό το κεφάλαιο θα διατυπωθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που πηγάζουν από το παραπάνω ερευνητικό πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε:

- Αντιλήψεις που παρουσιάζουν τελειόφοιτοι μαθητές Λυκείου για την έννοια του απείρου καθώς και τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν και αντιλαμβάνονται άπειρα σύνολα.

- Τους διαισθητικούς τρόπους σύγκρισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου για να συγκρίνουν το πλήθος των στοιχείων διαφόρων άπειρων συνόλων. Τα σύνολα αυτά αναπαριστώνται είτε σε γεωμετρικό πλαίσιο είτε σε αριθμητικό διακριτό πλαίσιο (κάθετη και οριζόντια αναπαράσταση) είτε σε αριθμητικό συνεχές πλαίσιο.

- Τέλος, εξετάζουμε το κατά πόσο οι τελειόφοιτοι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά την διαφορά της πληθικότητας μεταξύ αριθμήσιμων και υπεραριθμήσιμων συνόλων και πιο συγκεκριμένα την διαφορά πληθικότητας μεταξύ του συνόλου των φυσικών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

2.2.ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν οχτώ (8) μαθητές της Γ' τάξης από δύο δημόσια Λύκεια της Αττικής. Όλοι οι μαθητές ήταν ηλικίας δεκαεπτά (17) ετών. Πέντε (5) από αυτούς είχαν επιλέξει την Τεχνολογική κατεύθυνση και τρεις (3) την Θετική. Οι μαθητές επιλέχθηκαν αφού εκδήλωσαν ενδιαφέρον συμμετοχής στην έρευνα. Ήταν χωρισμένοι σε τέσσερις (4) ομάδες των δύο (2) ατόμων. Οι μαθητές κάθε ομάδας γνωρίζονταν μεταξύ τους. Η έρευνα διεξήχθη στον χώρο των μαθητών (μέσα στις τάξεις τους).

2.3.ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η επιλογή του δείγματος ήταν συμπτωματική καθώς το δείγμα ήταν ευκαιριακό. Η συλλογή δεδομένων ολοκληρώθηκε σε διάστημα είκοσι (20) ημερών. Για τους σκοπούς της έρευνας σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο εννέα (9) ερωτήσεων. Αποτελείται από ασκήσεις-ερωτήματα σχετικά με την έννοια του απείρου αλλά και την σύγκριση πληθάριθμων απείρων συνόλων. Το πλήρες ερωτηματολόγιο παρατίθεται στο Παράρτημα 1 της παρούσας εργασίας.

Τα δεδομένα της έρευνας συγκεντρώθηκαν από τα ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν οι μαθητές και από τις απομαγνητοφωνήσεις των συνεντεύξεων που έγιναν με τους μαθητές κάθε ομάδας. Τα ερωτηματολόγια συμπληρώνονταν σε πρώτο στάδιο ατομικά από τους μαθητές κάθε ομάδας σε διάστημα μισής ώρας. Διευκρινήσεις ως προς το νόημα των ερωτήσεων γίνονταν δεκτές μόνο στην περίπτωση που δεν καθοδηγούσαν τους εμπλεκόμενους προς κάποια κατεύθυνση και δόθηκαν από την ερευνήτρια κατά την διάρκεια της συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Αμέσως μετά την συμπλήρωση των ερωτηματολογίων από τους μαθητές κάθε ομάδας πραγματοποιούταν συνέντευξη και με τους δύο μαθητές της ομάδας διάρκειας 50 – 60 λεπτών, η συζήτηση αφορούσε τα ερωτήματα και τον τρόπο με τον οποίον απάντησαν σε καθένα από αυτά. Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές μπορούσαν να μιλάνε μεταξύ τους, να ανταλλάσσουν απόψεις και να επιχειρηματολογούν σε μία προσπάθεια για να πείσουν τους συνομιλητές τους για τις απαντήσεις που έδιναν. Αυτό ήταν εύκολο να γίνει δεδομένου ότι οι μαθητές γνωρίζονταν μεταξύ τους.

Η ερευνήτρια είναι αυτή που κινητοποιεί με τις ερωτήσεις της, επισημαίνει κάτι όποτε το θεωρεί σκόπιμο, ενισχύει το διάλογο και τη συζήτηση και αναδεικνύει τις απόψεις των μαθητών. Πάντα λειτουργεί σε παρασκηνιακό επίπεδο, αφήνοντας τους μαθητές να έχουν τον πρώτο λόγο και ποτέ δεν αποκαλύπτει τη λύση.

2.4.ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Το ερωτηματολόγιο (Παράρτημα 1) είναι δομημένο σε εννέα (9) ερωτήσεις οι οποίες χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το ερευνητικό ερώτημα που εξετάζουν. Κατά τον σχεδιασμό του ερωτηματολογίου λήφθηκε υπόψη ότι τα μόνα άπειρα "αντικείμενα" που "γνωρίζουν" οι μαθητές είναι σύνολα αριθμών ή συνόλων σημείων. Ως εκ τούτου, προκειμένου να μελετηθούν πώς οι μαθητές να κατανοούν το άπειρο καθώς και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν κατά την σύγκριση της πληθικότητας απείρων συνόλων θα πρέπει να δούμε πώς αντιμετωπίζουν σχετικά ερωτήματα με αριθμούς και γεωμετρικά σχέδια (Florence Mihaela Singera, Cristian Voicab, 2008).

Στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων, η οποία σχετίζεται με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και εξετάζει αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου, ανήκουν τα ερωτήματα (1) και (2). Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο ερώτημα ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία πρόταση με την λέξη άπειρο σε μη μαθηματικό πλαίσιο. Η δεύτερη ερώτηση έχει ως στόχο να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ένα άπειρο σύνολο αφού καλούνται να περιγράψουν ότι τους φέρνει στο μυαλό η φράση “άπειρο σύνολο”.

Στην δεύτερη ομάδα ερωτήσεων, η οποία συνδέεται με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και πιο συγκεκριμένα με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την σύγκριση απείρων συνόλων, ανήκουν οι ερωτήσεις (3), (4), (5), (6), (7), (8). Από αυτές οι (3), (5) αναφέρονται σε γεωμετρικό πλαίσιο. Οι ερωτήσεις (4), (7) αναφέρονται σε αριθμητικό διακριτό πλαίσιο ενώ η (6) σε αριθμητικό συνεχές. Η όγδοη (8) ερώτηση έχει γενικό πλαίσιο. Το τρίτο ερώτημα σχεδιάστηκε με πρότυπο το αντίστοιχο ερωτηματολόγιο της έρευνας των S. Aztekin, A. Arikan, B. Sriraman. Αυτό που καλούνται οι μαθητές να κάνουν είναι να συγκρίνουν το πλήθος των σημείων των περιφερειών δύο ομόκεντρων κύκλων με διαφορετικές ακτίνες έτσι φέρνοντας ακτίνες στο σχήμα που τους δίνεται, για κάθε σημείο στη μικρή περιφέρεια, μπορούν να βρουν ένα σημείο στη μεγάλη περιφέρεια. Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές συγκρίνουν το πλήθος των σημείων μίας ημιευθείας με το πλήθος των σημείων της ημιευθείας που προκύπτει αν αποκόψουμε ένα αρχικό τμήμα της πρώτης. Στο πρώτο από τα δύο υποερωτήματα της τέταρτης ερώτησης ζητείται η σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων των φυσικών και των άρτιων αριθμών σε οριζόντια αναπαράσταση ενώ στο δεύτερο η σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων των φυσικών και των περιττών αριθμών σε κάθετη αναπαράσταση. Η έβδομη ερώτηση έχει ως αφορμή την έρευνα της Tsamir (2002) και καλεί τους μαθητές να συγκρίνουν την πληθικότητα των συνόλων A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...} B={-3,-2,-

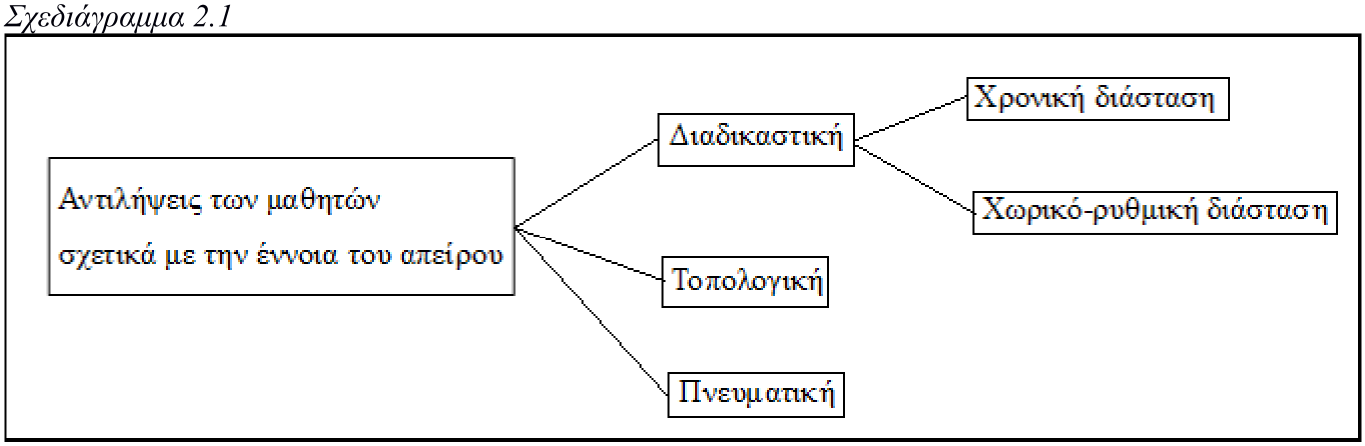
1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...} μεταξύ των οποίων ένας πιθανός κανόνας αντιστοίχισης είναι n→n-4. Στο έκτο ερώτημα ζητείται η σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων (0,1) και (0,2). Στην όγδοη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν την γνώμη τους σχετικά με το κατά πόσο δύο άπειρα σύνολα είναι πάντα ισοπληθικά.

Στην τρίτη κατηγορία ερωτήσεων ανήκει η ένατη (9) ερώτηση στην οποία οι μαθητές πρέπει να συγκρίνουν διαισθητικά το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των πραγματικών αριθμών με το αντίστοιχο του συνόλου των φυσικών αριθμών.

2.5.ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

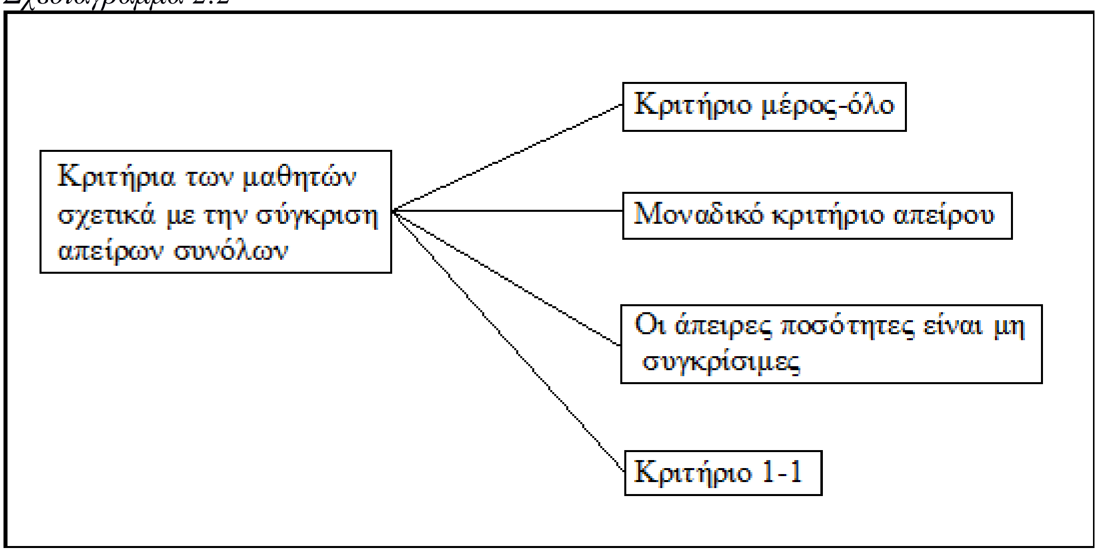
Οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες πρωταρχικών αντιλήψεων (Florence , Mihaela Singer, Cristian Voica) τη διαδικαστική, τη τοπολογική και τη πνευματική . Στην διαδικαστική αντίληψη διακρίνονται κάποιες επιμέρους διαστάσεις η χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί και η χωρικό-ρυθμική διάσταση που συνδέεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει και είναι σε εξέλιξη. Η τοπολογική αντίληψη του απείρου συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο και δεν έχει μεγαλύτερο αριθμό. Τέλος μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου διαθέτουν όσοι δίνουν έμφαση στα συναισθήματα, την πνευματικότητα. Οι κατηγορίες αυτές όπως προέκυψαν από την παρούσα έρευνα φαίνονται στο Σχεδιάγραμμα 2.1 που ακολουθεί.

Σχεδιάγραμμα 2.1



Οι μέθοδοι που χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες στην έρευνα για να καθορίσουν αν ένα δεδομένο ζεύγος άπειρων συνόλων είναι ισοπληθικό χωρίστηκαν σε τέσσερα κριτήρια (Tsamir, 2002) : το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο), το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά), οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν και το 1-1 κριτήριο. Οι κατηγορίες αυτές όπως προέκυψαν από την παρούσα έρευνα φαίνονται στο Σχεδιάγραμμα 2.2 που ακολουθεί.

Σχεδιάγραμμα 2.2



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες αντιλήψεων τη διαδικαστική (χρονική διάσταση ή χωρικό-ρυθμική διάσταση), τη τοπολογική και τη πνευματική . Τα κριτήρια σύγκρισης της πληθικότητας απειροσυνόλων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές διακρίθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες το κριτήριο μέρος-όλο, το μοναδικό κριτήριο απείρου, οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν και το 1-1 κριτήριο. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης σύμφωνα με την παραπάνω κατηγοριοποίηση.

3.1. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Αποτελέσματα απαντήσεων Μαρίας

Ερώτηση 1η

Η πρόταση που επιλέγει η Μαρία να δώσει ως απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η εξής "Οι ασκήσεις όλων των μαθημάτων είναι άπειρες". Από την απάντησή της φαίνεται να ταυτίζει την έννοια του απείρου με έναν πολύ μεγάλο αριθμό ο οποίος αντιπροσωπεύεται από το πλήθος των ασκήσεων όλων των μαθημάτων. Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι η μαθήτρια αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου ως έναν μεγάλο αλλά συγκεκριμένο αριθμό.

Όταν ,όμως, κατά την διάρκεια της συνέντευξης που ακολούθησε της ζητήθηκε να δώσει περισσότερες εξηγήσεις η μαθήτρια τόνισε ότι οι ασκήσεις όλων των μαθημάτων είναι άπειρες διότι δεν τελειώνουν ποτέ, δηλαδή, την χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο. Προκύπτει ότι η Μαρία θεωρεί το άπειρο ως κάτι ατελείωτο και κατά συνέπεια δεν μπορεί να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός όπως υπονοείται από την πρόταση που δίνει. Οι δύο αντιλήψεις που εμφανίζονται διαφέρουν ριζικά η μία από την άλλη. Η έννοια του απείρου ,όπως προσεγγίζεται διαισθητικά από την μαθήτρια, φαίνεται να είναι αντιφατική. Αυτό εξηγείται από το ότι τα ανθρώπινα λογικά σχήματα είναι φυσικώς προσαρμοσμένα στην πραγματικότητα όπου δεν δίνονται ευκαιρίες κατανόησης της αφηρημένης έννοιας του απείρου.

Στην συνέχεια η Μαρία αναφέρει ότι η διαδικασία με την οποία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι ασκήσεις όλων των μαθημάτων είναι άπειρες είναι η μέτρηση όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

Ε	Για τις ασκήσεις όλων των μαθημάτων Μαρία ;
Μ	Ούτε αυτές μπορείς να τις μετρήσεις... μετράς μέχρι ένα σημείο και μετά το χάνεις το μέτρημα... κουράζεσαι... δεν μιλάμε μόνο για τα μαθηματικά αλλά και στην φυσική στα πάντα είναι πάρα πολλές οι ασκήσεις
Ε	Πάρα πολλές δηλαδή σημαίνει άπειρες;
Μ	Όχι αλλά είναι αυτό ότι κάποια στιγμή θα κουραστείς να μετράς και θα τα παρατήσεις οπότε μπορείς να πεις ένα απλό άπειρο

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα η μαθήτρια υποστηρίζει ότι μπορούμε να δεχθούμε συμβατικά την έννοια του απείρου. Αυτό μπορεί να γίνει αν η διαδικασία μέτρησης των αντικειμένων των οποίων το πλήθος εξετάζουμε παίρνει πολύ χρόνο. Άμεσα φαίνεται η χρονική διάσταση με την οποία η μαθήτρια συνδέει την έννοια του απείρου. Αν συνδέσουμε την άποψη αυτήν με την προηγούμενη , ότι δηλαδή το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει, βλέπουμε ότι για να διαπιστώσουμε ότι ένα πλήθος αντικειμένων είναι άπειρο ,δηλαδή ότι δεν τελειώνει σύμφωνα με την μαθήτρια, αρκούν "πάρα πολλά" ,όμως, πεπερασμένα αρχικά βήματα μέτρησης. Σε αυτό το σημείο κρύβεται και μία υποκειμενικότητα ως προς το πότε μπορεί κάποιος να θεωρήσει μία ποσότητα άπειρη. Την υποκειμενικότητα αυτή η μαθήτρια την παραδέχεται σε ακόλουθο απόσπασμα χωρίς όμως να την θεωρεί προβληματική ως πηγή αντιφάσεων.

Μ	Δεν ξέρω είναι αναλόγως τον άνθρωπο
Ε	Το πόσο θα αντέξει να τις μετρήσει ;
Μ	εγώ θα κουραζόμουν να κάτσω να τις μετρήσω όλες

Ερώτηση 2η

Η ίδια μαθήτρια στην επόμενη ερώτηση η οποία σχετίζεται με την έννοια του απείρου συνόλου δίνει την εξής πρόταση "Τα αστέρια είναι ένα άπειρο σύνολο διότι δεν μπορούν να μετρηθούν". Η Μαρία φαίνεται να αντιλαμβάνεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο την έννοια του απείρου και την έννοια του απείρου συνόλου. Για να διαπιστώσουμε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο αρκεί ,σύμφωνα με την μαθήτρια, να μην υπάρχει δυνατότητα μέτρησής του. Αυτό που δεν ξεκαθαρίζεται ,όμως, είναι το αν η δυνατότητα μέτρησης εξαλείφεται λόγω χρονικού περιορισμού ή αν δεν μπορεί να εφαρμοστεί η διαδικασία της μέτρησης. Από την πορεία του διαλόγου φαίνεται ότι η μαθήτρια κλίνει προς την δεύτερη άποψη ,όπως τονίζεται και στο παρακάτω απόσπασμα του διαλόγου. Συνεπώς τα άπειρα σύνολα ταυτίζονται εννοιολογικά με τα μη μετρήσιμα σύνολα. Αξίζει να επισημανθεί ότι αυτή η άποψη δεν είχε αναφερθεί όταν η συζήτηση ήταν εστιασμένη στην έννοια του απείρου.

Θ	Δεν μπορείς να μετρήσεις όλα τα αστέρια
Μ	Ε αυτό λέω ότι είναι άπειρο σύνολο
Θ	Ναι αλλά πριν είπαμε ότι το άπειρο είναι κάτι που μπορούμε να το μετρήσουμε αλλά το μέτρημα δεν τελειώνει ποτέ.
Μ	Σε κάποιες περιπτώσεις είναι αυτό

Επιπλέον, στο απόσπασμα αυτό η μαθήτρια διαχωρίζει δύο διαφορετικά είδη απείρου βασιζόμενη δύο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να αιτιολογήσουμε την απειρία συνόλων. Ο πρώτος τρόπος ο οποίος αφορά αριθμήσιμα σύνολα είναι ότι η διαδικασία της μέτρησης "δεν τελειώνει ποτέ". Δεν είναι σαφές όμως αν η μαθήτρια υπονοεί μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των υπό μέτρηση αντικειμένων του συνόλου με τους φυσικούς αριθμούς. Η διαδικασία της μέτρησης ακόμα και πεπερασμένου πλήθους αντικειμένων ,όμως, εν γένει ταυτίζεται με αυτήν την αντιστοιχία. Ο δεύτερος τρόπος αφορά μη αριθμήσιμα σύνολα και είναι να μην υπάρχει δυνατότητα μέτρησης, δηλαδή να μην υπάρχει 1-1 αντιστοιχία του υπό εξέταση συνόλου με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Υπό αυτήν την οπτική η πρόταση που γράφει η μαθήτρια σχετικά με το σύνολο των αστεριών μοιάζει ακατάλληλο παράδειγμα καθώς το τελευταίο σύνολο είναι μετρήσιμο.

Ερώτηση 3η

Στην τρίτη ερώτηση η οποία αφορά την σύγκριση του πλήθους των σημείων δύο ομόκεντρων κύκλων διαφορετικής ακτίνας η Μαρία γράφει ότι "Και οι δύο κύκλοι έχουν ο καθένας άπειρα σημεία. Όμως ο εσωτερικός κύκλος λόγω μικρού μεγέθους έχει λιγότερα σημεία από ότι ο εξωτερικός κύκλος". Η μαθήτρια είναι φανερό ότι επηρεάζεται από την διαίσθηση της σχετικά με το μέγεθος των δύο κύκλων. Ανάγει το πρόβλημα σύγκρισης του πλήθους των σημείων των δύο κύκλων σε αυτό της σύγκρισης του μεγέθους των δύο κύκλων και στην συνέχεια συγκρίνει το πλήθος των σημείων με βάση το μήκος των ακτίνων τους. Προφανώς ,όμως, τα προβλήματα αυτά δεν είναι ισοδύναμα. Η μαθήτρια δεν είναι σε θέση να αντιληφθεί την αδυναμία του ισχυρισμού. Το ότι θεωρεί πως παρά το ότι και οι δύο κύκλοι έχουν άπειρο πλήθος σημείων το πλήθος των σημείων είναι διαφορετικό οδηγεί στην διαπίστωση ότι υπάρχουν διαφορετικοί βαθμοί απειρίας, δηλαδή διαφορετικά μεγέθη απείρου. Η Μαρία δεν μπορεί να κατανοήσει αυτήν την αντιφατικότητα στην οποία καταλήγουν τα λεγόμενά της όπως φαίνεται και από το ακόλουθο απόσπασμα του διαλόγου. Στο ίδιο απόσπασμα η μαθήτρια δίνει ένα ατυχές παράδειγμα στο οποίο ανάγει το πρόβλημα σύγκρισης του πλήθους των σημείων δύο σφαιρών σε αυτό της σύγκρισης του όγκου ή ακόμα και της επιφάνειάς τους.

Ε	Ναι αλλά και ο ένας έχει άπειρα και ο άλλος δηλαδή υπάρχουν δύο διαφορετικά άπειρα ένα μεγαλύτερο και ένα μικρότερο;
Μ	Στην συγκρκριμένη περίπτωση εξαρτάται από το μέγεθος
	Όχι ; ή από την μάζα
Ε	Τι εννοείς από την μάζα;
Μ	Δεν είναι εύστοχο το παράδειγμα αλλά ας πούμε ότι ένα μικρό μπαλάκι θα έχει λιγότερα σημεία από μία μπάλα
Ε	Η επιφάνειά του;
Μ	Ναι κάπως έτσι
Ε	Και τα δύο όμως θα έχουν άπειρα σημεία
Μ	Ναι άπειρα

Λίγο αργότερα στην συνέντευξη η μαθήτρια δείχνει να πείθεται για την αντιφατικότητα των συμπερασμάτων της και επιλέγει να υποστηρίξει ότι και οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο πλήθος σημείων. Καταλήγει στο συμπέρασμα αυτό προσπαθώντας να αποφύγει να δεχτεί την ύπαρξη πολλών διαφορετικών βαθμών απειρίας και κάνοντας χρήση του κριτηρίου μοναδικού απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Ε	Μετά όμως γράφεις ότι ο εσωτερικός κύκλος έχει λιγότερα σημεία οπότε βγαίνει το συμπέρασμα οτι υπάρχουν δύο «είδη» απείρου και αν θεωρούσα και έναν μεγαλύτερο κύκλο ; Θα υπήρχαν τρία;
Μ	Και πάει λέγοντας...
	Οπότε δεν ισχύει

Μ	Ίδιο πλήθος
Θ	Οπότε δεν έχουν άπειρα σημεία
Μ	Άπειρο είναι απλά δεν ...

Στην συνέχεια και αφού επηρεάζεται εμφανώς από την άποψη της συμμαθήτριάς της υποστηρίζει ότι για να έχουν οι δύο κύκλοι ίδιο πλήθος σημείων πρέπει το πλήθος αυτό να είναι πεπερασμένο, να μπορεί να μετρηθεί. Αυτό ,βέβαια, δεν συμφωνεί με την αρχική άποψη της μαθήτριας κατά την οποία και οι δύο κύκλοι έχουν άπειρο πλήθος σημείων.

Μ	Ναι μεν είναι πολλά τα σημεία αλλά μπορούν να μετρηθούν μέχρι ένα σημείο από εκεί όπου ξεκινήσαμε
Ε	Πόσα είναι δηλαδή;
Μ	Ενταξει τώρα δεν μπορούμε να πούμε πόσα ακριβώς είναι

Όταν ρωτάται για το πως θα γίνει αυτή η μέτρηση δεδομένου ότι τα σημεία είναι αδιάστατα υποστηρίζει ότι θα τα μετρήσει με το στυλό της, δηλαδή ως σημεία από μελάνι. Σε αυτό το σημείο η μαθήτρια φαίνεται να βρίσκεται σε σύγχυση, δεν μπορεί να επιχειρηματολογήσει είτε για το αν το πλήθος των σημείων ενός κύκλου είναι πεπερασμένο είτε για το αν είναι άπειρο.

Μ	Είναι και αυτό που είπατε ότι ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις άρα ναι μεν είναι άπειρα τα σημεία αλλά δεν μπορούμε να μετρήσουμε πόσα είναι εφόσον δεν ξέρουμε τις διαστάσεις τους.
Ε	Άρα είναι άπειρα;
Μ	Μπορεί . Μπορεί και ναι μπορεί και όχι

Μετά από μερικά λεπτά συζήτησης οι μαθήτριες υποστηρίζουν έντονα ότι τελικά το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων είναι ίδιο και είναι άπειρο. Η Μαρία αιτιολογεί την άποψή της λέγοντας ότι “είναι και οι δύο άπειροι άρα έχουν τις ίδιες ιδιότητες” χρησιμοποιώντας, δηλαδή, το κριτήριο μοναδικού απείρου. Αργότερα προσπαθούν να βρουν μία εξήγηση με την βοήθεια του σχήματος που τους δίνεται. Η Μαρία φέρνει τις διαμέτρους των δύο κύκλων και υποστηρίζει ότι όσα σημεία έχει το ημικύκλιο του ενός κύκλου έχει και του άλλου. Ουσιαστικά καταφεύγει σε μία αναδιατύπωση του προβλήματος και αιτιολογεί αυτό που θέλει να δείξει με μία ισοδύναμη πρόταση καταλαβαίνει γρήγορα ,όμως, ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να είναι σωστό. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα.

Μ	Μία διάμετρο χωρίζεται και ο μικρός και ο μεγάλος στο ίδιο... έχουν δηλαδή και από εδώ το ίδιο ... είναι και από εδώ ίδιοι και από εδώ
	Θεωρώ ότι το ίδιο πλήθος που θα υπάρχει εδώ σε αυτό πιστεύω θα υπάρχει και εδώ
	Εφόσον είναι και τα δύο το ίδιο άπειρο
Ε	Και γιατί χρειάζεται να φέρεις την διάμετρο;
	Δηλαδή το ίδιο που μου έλεγες πριν για τον μικρό και τον μεγάλο κύκλο μου το λες τώρα για τα ημικύκλια
	Πάλι θα σε ρωτήσω γιατί;
Μ	Πάλι στο ίδιο θα καταλήξουμε

Στην συνέχεια η μαθήτρια προσπαθώντας να αιτιολογήσει τον ισχυρισμό της διπλώνει το χαρτί επιχειρώντας να δείξει ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται άμεσα καταλαβαίνει ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό. Η συμμαθήτρια της Μαρίας καταφέρνει να αιτιολογήσει την ισοπληθικότητα των συνόλων των σημείων των δύο κύκλων χρησιμοποιώντας την έννοια της αντιστοιχίας και η Μαρία δείχνει να κατανοεί την ανάγκη εισαγωγής μίας αντιστοιχίας στο επιχείρημα χωρίς πρόβλημα.

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Η ερώτηση αυτή ζητά από τους μαθητές να συγκρίνουν το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α={2,4,6,8,10,...} και Β={1,2,3,4,5,...}. Η αρχική απάντηση της Μαρίας είναι ότι το πλήθος των στοιχείων είναι το ίδιο και στα δύο σύνολα, η μόνη διαφορά είναι στο εσωτερικό τους, δηλαδή στο ότι περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς. Κατά την διάρκεια της συνέντευξης η μαθήτρια αιτιολογεί την ισοπληθικότητα των δύο συνόλων λέγοντας ότι και τα δύο περιέχουν άπειρο πλήθος στοιχείων και επανέρχεται στην ίδια άποψη αρκετές φορές. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί είναι αυτό του μοναδικού απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Ε	Πως θα συγκρίνουμε τώρα το πλήθος των στοιχείων τους;
Μ	Εγώ πιστεύω ότι είναι το ίδιο
	Γιατί και τα δύο άπειρα είναι.

Στην συνέχεια επηρεαζόμενη και από την άποψη της συμμαθήτριάς της φαίνεται να αλλάζει γνώμη και να υποστηρίζει ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των φυσικών είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο των αρτίων και η αιτιολόγηση που δίνει βασίζεται σαφώς στην έννοια του υποσυνόλου και πιο συγκεκριμένα στο κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Το μισό του απείρου θεωρείται μικρότερο από το άπειρο. Επεκτείνει δηλαδή τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και στην έννοια του απείρου.

Μ	Αλλά βάσει των μονάδων που...είναι αυτό που είπαμε
	Εδώ είναι μόνο οι ζυγοί ενώ εδώ και οι περιττοί. Άρα αυτό θα έχει περισσότερα στοιχεία από ότι αυτό.

Η μαθήτρια υπονοεί ότι επειδή το σύνολο των αρτίων είναι υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών έπεται αναγκαία ότι θα έχει και μικρότερο πλήθος στοιχείων. Ο συλλογισμός αυτός είναι ορθός όταν πρόκειται για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων αλλά δεν ισχύει όταν τα σύνολα είναι άπειρα. Η μαθήτρια παρασύρεται από την σημασία της έννοιας του περιέχεσθαι όπως την συναντάμε στην καθημερινότητα. Εμφανίζεται έντονα η πεποίθηση ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι ισοπληθικό με ένα γνήσιο υποσύνολό του. Οι περιορισμοί που θέτει η πραγματικότητα όσο αφορά στην κατανόηση της σύγκρισης απείρων συνόλων επηρεάζουν και οδηγούν σε λάθος δρόμο τον τρόπο σκέψης της.

Λίγο αργότερα η συμμαθήτριά της βρίσκει την συνάρτηση με την οποία κάθε στοιχείο του δευτέρου συνόλου αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του πρώτου

Ερώτηση 4β

Σε αυτήν την ερώτηση η αρχική απάντηση της μαθήτριας είναι ίδια με την απάντηση που έδωσε στο προηγούμενο ερώτημα χρησιμοποιώντας το κριτήριο μοναδικού απείρου συγκεκριμένα γράφει "το ίδιο ισχύει και για το (β)". Στην συνέντευξη η μαθήτρια φαίνεται να αλλάζει την άποψή της.

Μ	Ναι μεν αυξάνεται ανά δύο όπως στην πρώτη περίπτωση αλλά με τους ζυγούς αυτή την φορά ισχύει το ίδιο απλά βγαίνει άλλο σύνολο.
	Τώρα έχουμε το σύνολο των περιττών ενώ στην πρώτη περίπτωση το σύνολο των ζυγών και οι περιττοί είναι υποσύνολο των φυσικών

Όταν η μαθήτρια λέει ότι ισχύει το ίδιο εννοεί ότι η αναδρομική σχέση που δίνει τον κάθε αριθμό είναι η ίδια $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$ το μόνο που αλλάζει είναι ο α_1.Δεν έχει καταφέρει να περιγράψει τον τρόπο σύγκρισης δύο άπειρων συνόλων και δεν δίνει την εντύπωση ότι πιστεύει ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά κάτι που αντιβαίνει με όσα ισχυρίζεται αρχικά.

Η Μαρία έπειτα καταλαβαίνει ότι πρέπει να αναζητήσει μία συνάρτηση αντιστοιχίας όπως ακριβώς είχε κάνει και η συμμαθήτριά της για το πρώτο υποερώτημα της ερώτησης 4 και δοκιμάζει αρκετές συναρτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο δείχνει να έχει κατανοήσει την σημασία που έχει η εύρεση κατάλληλης αντιστοιχίας ως ακλόνητο επιχείρημα για την απάντηση στην ερώτηση. Τελικά καταφέρνει να βρει την ζητούμενη συνάρτηση.

Ε	Εχεις δοκιμάσει εκεί κάποιες συναρτήσεις
Μ	Ναι αλλα δεν μου βγήκανε
	Προσπάθησα να κάνω το 2χ-4 ας πουμε γιατί αν έκανα δύο επί τρία κάνει 6 αν αφαιρέσουμε 4 βγαίνει 2 και καταλήγουμε σε αυτό.Το επόμενο όμως δεν έβγαινε.
Μ	Αν κάνουμε 2χ-1
Θ	Ναι αυτό

Ερώτηση 5η

Η απάντηση που δίνει αρχικά η Μαρία όσο αφορά στην σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο ημιευθειών είναι η εξής “Στην πρώτη περίπτωση το πλήθος των σημείων είναι περισσότερο από ότι στην δεύτερη γιατί, όπως μπορούμε να δούμε στην πρώτη περίπτωση η ευθεία είναι μεγαλύτερη από ότι στην δεύτερη περίπτωση”. Είναι προφανές ότι η απάντηση που δίνει επηρεάζεται από την σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος. Η μαθήτρια συγκρίνει το πλήθος των σημείων των δύο ημιευθειών καταφεύγοντας στο “μέγεθός” τους. Εκτός από την λογική ανεπάρκεια που παρουσιάζει ο συλλογισμός αυτός η μαθήτρια δείχνει ότι δεν έχει κατανοήσει και το τι είναι μία ημιευθεία αφού στην απάντησή της αναφέρει ότι συγκρίνει ευθείες αλλά φαίνεται να υπονοεί ευθύγραμμα τμήματα. Αυτό γίνεται φανερό και από την συνέντευξη χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο απόσπασμα.

Ε	Τι είναι ημιευθεία;
Μ	Το μισό μιας ευθείας

Αφού λυθεί το πρόβλημα του ορισμού η Μαρία επιμένει στην αρχική της απάντηση υποστηρίζοντας ότι το πλήθος των σημείων της πρώτης ημιευθείας είναι μεγαλύτερο. Αιτιολογεί αυτόν τον ισχυρισμό δίνοντας ένα “χρονικό” επιχείρημα. Αναφέρει ότι οι δύο ημιευθείες έχουν χρονική διαφορά εκκίνησης μερικών δευτερολέπτων και αυτή είναι ακριβώς η αιτία για την οποία η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα σημεία, σύμφωνα με την μαθήτρια.

Μ	Αν αυτή ξεκίνησε 10 αυτή θα ξεκίνησε 12
Ε	Σαν να έχει ένα αυτοκίνητο και να κινείται μου το λες τώρα;
Μ	Ναι κάπως έτσι
Θ	Όταν ξεκίνησε ... δηλαδή η πρώτη ημιευθεία είναι πιο μπροστά από ότι η δεύτερη
Μ	Θα έχουν διαφορά χρόνου

Στο συγκεκριμένο σημείο τονίζεται από την μαθήτρια μία χρονική διάσταση του απείρου. Αυτό το “χρονικό” επιχείρημα αναφέρεται εκ νέου στην συνέχεια από την ίδια μαθήτρια.

Στην συνέχεια η Μαρία σχεδιάζει τις δύο ημιευθείες ώστε το αρχικό σημείο της δεύτερης να είναι κάτω από το αρχικό σημείο της πρώτης και διαπιστώνει διαισθητικά ότι το πλήθος των σημείων των δύο ημιευθειών είναι ίδιο. Δίνει και πάλι χρονική διάσταση στο επιχείρημα.

Μ	Δεν χρειάζεται να είναι μεγαλύτερη
	Ας υποθέσουμε ότι αυτό εδώ είναι εδώ και ότι...
Ε	Αντι για εδω το σχεδίαζα εδώ
Θ	Ααα ...
Μ	Και συνεχίζει θα ήταν το ίδιο απλώς θα άλλαζε το σημείο δηλαδή δεν θα ΄ταν Α και θα ήταν Β
Ε	Για σχεδίασέ το αυτό έτσι όπως το λες
	Τώρα γιατί θα είχαν το ίδιο πλήθος όμως;
Μ	Γιατί ξεκινάνε από το ίδιο σημείο και καταληγουνε ... απλά συνεχίζουν μαζί ταυτόχρονα
Ε	Χρονικά πάλι δηλαδή
Μ	Ναι σε αυτό καταλήγω

Η μαθήτρια όμως δεν συμπεραίνει ότι και το πλήθος των σημείων των αρχικών ημιευθειών, των ημιευθειών δηλαδή όπως είναι σχεδιασμένες μπροστά της είναι ίδιο. Πιο συγκεκριμένα υποστηρίζει ότι ενώ οι ημιευθείες όπως είναι αρχικά σχεδιασμένες δεν έχουν το ίδιο πλήθος σημείων αν πραγματοποιήσουμε μία μεταφορά της δεύτερης ημιευθείας ώστε το αρχικό της σημείο να είναι κάτω από το αντίστοιχο της πρώτης το πλήθος των σημείων είναι ίδιο. Η μαθήτρια δεν καταλαβαίνει το παράλογο του ισχυρισμού της καθώς αν αυτός ήταν ορθός το πλήθος των σημείων μίας ημιευθείας θα έπρεπε να εξαρτάται από την θέση της στο επίπεδο.

Μ	Δηλαδή αυτή εδώ πέρα ... το μέγεθος αυτού είναι έστω και λίγο πιο μικρό από το μέγεθος αυτού. Ενώ εδώ πέρα είναι ίσα.

Έπειτα η συμμαθήτρια της Μαρίας επιχειρεί να βρει έναν τρόπο αντιστοιχίας ενώνοντας το σημείο Β της πρώτης ημιευθείας με το σημείο Β της δεύτερης και συνεχίζει φέρνοντας παράλληλα σε αυτό ευθύγραμμα τμήματα. Η Μαρία καταλαβαίνει ότι αυτή δεν είναι η σωστή αντιστοιχία καθώς περισσεύουν σημεία της πρώτης ημιευθείας, ουσιαστικά η συγκεκριμένη αντιστοιχία δεν αποτελεί συνάρτηση καθώς δεν αντιστοιχίζονται όλα τα σημεία της πρώτης ημιευθείας. Η συμμαθήτρια της Μαρίας βρίσκει τελικά την κατάλληλη αντιστοιχία και με αυτόν τον τρόπο πείθεται και η Μαρία για την ισοπληθικότητα των σημείων των δύο ημιευθειών.

Ερώτηση 6η

Η ερώτηση αυτή αφορά στην σύγκριση του πλήθους των αριθμών του διαστήματος (0,1) με το αντίστοιχο του (0,2). Η Μαρία απαντάει γράφοντας ότι και στα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί αλλά το (0,1) περιέχει λιγότερα σημεία από το (0,2). Κατά την συνέντευξη η Μαρία αλλάζει γνώμη και υποστηρίζει υπέρ της ισοπληθικότητας των δύο συνόλων, αφού σχεδιάσει τα αντίστοιχα διαστήματα προσπαθεί να βρει την κατάλληλη αντιστοιχία. Οι δύο μαθήτριες συνεργάζονται και καταφέρνουν να βρουν μια αντιστοίχιση που τις ικανοποιεί.

Μ	Δεν έχει περισσότερα έχει τα ίδια
	Γιατί πάλι άμα τα ενώσουμε όπως πριν...
Ε	Πως δηλαδή;
Θ	Πλάγια και...

Ερώτηση 7η

Στην έβδομη ερώτηση η οποία ζητάει την σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και Β={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...} η αρχική απάντηση της Μαρίας είναι ότι τα δύο σύνολα ως πλήθος είναι ίδια, η μόνη διαφορά είναι ότι το Β αρχίζει από τους αρνητικούς ενώ το Α από τους θετικούς. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί το κριτήριο μοναδικού απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά). Κατά την συνέντευξη η Μαρία γρήγορα αποφασίζει να αναζητήσει συνάρτηση όπως είχε κάνει και στην ερώτηση 4 και κάνει διάφορες δοκιμές στο χαρτί.

Μ	Αυτό με συνάρτηση πάλι. Εεε -3
Θ	Όχι ... αφαίρεση είναι
Ε	Από το 1 πως μπορώ να πάω στο -3
Μ	2χ-5. Δύο επί ένα δύο -5 κάνει -3
Ε	Ναι για χ=2;
Μ	Κάνει -1
Ε	Και όχι -2
Θ	Δεν είναι αυτή...
	Αν απλά αφαιρέσω 4;

Η συμμαθήτριά της βρίσκει τελικά την σωστή συνάρτηση παρά τις προσπάθειες της Μαρίας. Λίγη σημασία έχει όμως αυτό αφού και οι δύο μαθήτριες ήταν πλέον σε θέση να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα εύρεσης της συνάρτησης.

Ερώτηση 8η

Στην ερώτηση αν δύο άπειρα σύνολα είναι πάντα ισοπληθικά η Μαρία αρχικά υποστηρίζει ότι αφού μιλάμε για άπειρα σύνολα χωρίς καμία διαφορά θα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος στοιχείων. Για ακόμα μία φορά κάνει χρήση του κριτηρίου του μοναδικού απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά). Στην συνέντευξη ,όμως, αλλάζει την απάντησή της λέγοντας ότι για να είναι δύο άπειρα σύνολα ισοπληθικά πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να "ενωθούν" με κάποιον τρόπο. Αυτό που εννοεί είναι ότι πρέπει να υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων, μία συνάρτηση ή μία ευθεία όπως η ίδια λέει που να αντιστοιχεί ένα στοιχείο του ενός συνόλου σε ένα σημείο του άλλου συνόλου.

Μ	Ότι αν δύο σύνολα μπορούνε με κάποιον τρόπο να ενωθούν τότε θα έχουν το ίδιο σύνολο ... πλήθος
Ε	Πως ενώνω σύνολα;
Μ	Με μία συνάρτηση η μία ευθεία αναλόγως τι θα είναι το σύνολο

Αν ,όμως, δεν καταφέρουμε να βρούμε κατάλληλη συνάρτηση αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο τα δύο άπειρα σύνολα να είναι ισοπληθικά αν και δεν μπορούμε να πούμε κάτι τέτοιο με βεβαιότητα.

Ε	Οπότε αν βρω μία συνάρτηση έχουν το ίδιο πλήθος αν δεν βρώ δεν ξέρω ή δεν έχουν ;
Μ	Δεν ξέρουμε μπορεί να μην μπορούμε να βρούμε τον τρόπο

Ερώτηση 9η

Η μαθήτρια αρχικά υποστηρίζει ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι ίδιο με το πλήθος των στοιχείων των πραγματικών αριθμών όμως τα δύο σύνολα διαφέρουν ως προς την μορφή. Το κριτήριο που εφαρμόζει είναι το κριτήριο μοναδικού απείρου. Κατά την διάρκεια της συνέντευξης συνεχίζει να επιμένει για την ισοπληθικότητα των δύο συνόλων αυτή την φορά όμως την αιτιολογεί λέγοντας ότι θα υπάρχει μια συνάρτηση με την οποία κάθε φυσικός αριθμός θα αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό. Προσπαθεί να βρει κατάλληλη συνάρτηση με την βοήθεια της συμμαθήτριάς της δεν τα καταφέρνουν και έτσι οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι τα δύο σύνολα δεν είναι ισοπληθικά χωρίς όμως να μπορούν να δώσουν επαρκείς αιτιολογήσεις.

Μ	Πάλι αν φερουμε μία συνάρτηση και απόδείξουμε ότι το ένα μπορεί να συνδεθεί με το άλλο νομίζω...
Ε	Ποια είναι αυτή η συνάρτηση στα υπόλοιπα την είχαμε βρει
Μ	Ας πούμε από το 1 για να πάμε στο ½ το ποιο απλό παράδειγμα πηγαίνουμε δια δύο
Θ	Δεν γίνεται γιατί μέσα από τους πραγματικούς αριθμούς βγαίνουν άλλοι αριθμοί...
	Είναι και οι ρίζες

Αποτελέσματα απαντήσεων Θάλειας

Ερώτηση 1η

Η πρόταση που γράφει η Θάλεια χρησιμοποιώντας την λέξη άπειρο σε ένα μη μαθηματικό πλαίσιο είναι η εξής “Οι ώρες που περνάω στο φροντιστήριο είναι άπειρες ”. Η έννοια του απείρου στο νου της μαθήτριας συνδέεται άμεσα με έναν μεγάλο αριθμό. Στην συνέντευξη ,όμως, υποστηρίζει ,όπως και η Μαρία, ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει, μία διαδικασία χωρίς τέλος. Ωστόσο αυτή η αντίληψη που εμφανίζεται δεν ταιριάζει με αυτήν που εμφανίζεται από την ίδια μαθήτρια λίγες γραμμές παρακάτω όπου υποστηρίζει ότι οι ώρες μαθήματος είναι πάρα πολλές δηλαδή άπειρες. Η έννοια του απείρου δηλαδή ταυτίζεται και πάλι με αυτήν ενός μεγάλου αριθμού όπως συμβαίνει και στην αρχική απάντηση της μαθήτριας. Το ότι αναφέρει ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο θα μπορούσε να έχει ως αφορμή την αντίστοιχη άποψη της Μαρίας που έχει προηγηθεί.

Ε	Η Μαρία έγραψε ότι οι ασκήσεις όλων των μαθηματων είναι άπειρες και η Θάλεια ότι οι ώρες μαθήματος στο φροντιστήριο είναι άπειρες
Μ	Γιατι δεν τελειώνουν ποτέ
Θ	Ουτε οι ώρες μαθήματος τελειώνουν
Ε	Θάλεια γιατι επέλεξες αυτή την πρόταση ;
Θ	Γιατί είναι πάρα πολλές οι ώρες που περνάμε στο φροντιστήριο για το καλό μας φυσικά αλλά πάρα πολλές είναι άπειρες.

Στην συνέχεια η μαθήτρια αλλάζει γνώμη λέγοντας ότι η πρόταση που έγραψε αρχικά δεν είναι σωστή διότι όπως λέει το άπειρο είναι κάτι που δεν μετριέται. Η Θάλεια σε αυτό το σημείο δεν μπορεί να εννοεί ότι η διαδικασία μέτρησης δεν μπορεί να τερματιστεί διότι τότε δεν θα έβρισκε την πρότασή της λανθασμένη. Αυτό που εννοεί η μαθήτρια είναι ότι δεν υπάρχει δυνατότητα μέτρησης απείρου πλήθους αντικειμένων. Το ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν μπορούμε να μετρήσουμε είναι μία άποψη που εκφράζεται από την ίδια μαθήτρια σε αρκετά σημεία κατά την συνέντευξη.

Θ	Η αλήθεια είναι οτι τώρα που το σκέφτομαι η απάντησή μου ήταν λίγο ... γενική
Ε	Γιατί ;
Θ	Γιατί το άπειρο είναι κάτι που δεν μετριέται
Ε	Κάτι που δεν μπορώ να το μετρήσω;
Θ	Ναι

Όταν η μαθήτρια ρωτάται αν οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι καταλήγει στο ότι είναι άπειροι και επειδή οι τελευταίοι μπορούν να μετρηθούν απορρίπτει τον προηγούμενο ισχυρισμό της ότι δηλαδή ένα άπειρο πλήθος δεν μπορεί να μετρηθεί και συμφωνεί με την συμμαθήτριά της ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει. Όλα αυτά φαίνονται από το ακόλουθο απόσπασμα.

Ε	Αν σκεφτούμε τους φυσικούς αριθμούς όμως είναι άπειροι ή δεν είναι;
Θ	Είναι
Ε	Δεν μπορώ να τους μετρήσω;
Θ	Ναι αλλά αν πουμε ότι ξεκινάνε από το –οο και καταλήγουν στο +οο
Μ	Οι φυσικοί ξεκινάνε από το μηδέν
Θ	Μήπως οι άπειροι αριθμοί είναι αυτοί που δεν τελειώνουν ποτέ;

Από το ίδιο απόσπασμα φαίνεται να υπάρχει μία σύγχυση σχετικά με την έννοια των φυσικών αριθμών και αυτήν των πραγματικών. Οι φυσικοί είναι ένα σύνολο καλά διατεταγμένο ισχύει δηλαδή η αρχή του ελαχίστου από την οποία έπεται ότι υπάρχει ο επόμενος κάθε φυσικού αριθμού .Στο σύνολο των πραγματικών δεν υπάρχει η έννοια του επόμενου.

Ερώτηση 2η

Στην δεύτερη ερώτηση η πρόταση που δίνει η Θάλεια χρησιμοποιώντας την φράση άπειρο σύνολο είναι η εξής "Το χώμα είναι άπειρο σύνολο". Με τον όρο "χώμα" η μαθήτρια εννοεί τους κόκκους χώματος που υπάρχουν στην Γη. Υπό την έννοια αυτήν ένα άπειρο σύνολο ταυτίζεται με ένα σύνολο που περιέχει έναν τεράστιο αριθμό στοιχείων, όμως πεπερασμένο. Δηλαδή η έννοια του απείρου ταυτίζεται με αυτήν ενός μεγάλου αριθμού πρόκειται για την ίδια άποψη που εξέφρασε η μαθήτρια και στην πρώτη ερώτηση. Κατά την συνέντευξη εννοεί ότι το χώμα είναι άπειρο διότι δεν γίνεται να μετρηθεί υπονοώντας τους περιορισμούς που θέτει η πραγματικότητα.

Ε	Η πρόταση που έχεις γράψει με το άπειρο σύνολο Θάλεια είναι ότι το χώμα είναι ένα άπειρο σύνολο.
Θ	Ναι
Ε	Δηλαδή ;
Θ	Δεν μετριέται

Λίγο αργότερα η Θάλεια προβληματίζεται και δείχνει να καταλαβαίνει τις αντιφατικές απόψεις που εμφανίζονται σχετικά με την έννοια του απείρου: ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει ή ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν μετριέται.

Θ	Ναι αλλά πριν είπαμε ότι το άπειρο είναι κάτι που μπορούμε να το μετρήσουμε αλλά το μέτρημα δεν τελειώνει ποτέ.

Μετά από συζήτηση καταλήγει στην πεποίθηση ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο. Μπορεί όπως λέει η ίδια η μαθήτρια να ξεκινήσει να μετράει κόκκους χώματος αλλά αυτή η διαδικασία δεν θα τελειώσει ποτέ. Η άποψη αυτή ενισχύει μία χρονική αντίληψη του απείρου η ακόμα και μία χωρικό-ρυθμική διάσταση για παράδειγμα ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει και είναι σε εξέλιξη.

Ερώτηση 3η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο κύκλων η Θάλεια γράφει ότι ο κάθε κύκλος έχει άπειρα σημεία όμως αν συγκρίνουμε αυτούς τους δύο κύκλους αυτός που είναι μέσα έχει λιγότερα σημεία από αυτόν που βρίσκεται απ΄ έξω λόγω μεγέθους. Η μαθήτρια προσπαθώντας να συγκρίνει το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων επηρεάζεται από την εικόνα και την διαίσθησή της. Εμφανίζεται η άποψη ότι το πλήθος των σημείων ενός κύκλου είναι ανάλογο του "μεγέθους" του κύκλου, δηλαδή ανάλογο του μήκους της ακτίνας ή της περιφέρειάς του. Η άποψη αυτή είναι σαφώς εσφαλμένη και φαίνεται να προέρχεται από την σχηματική αναπαράσταση που η μαθήτρια έχει μπροστά της. Είναι γεγονός ότι η έννοια του απείρου βρίσκεται σε αντίφαση με την καθημερινότητα και την διαίσθηση. Είναι ,λοιπόν, αναμενόμενο σε ερωτήσεις σχετικές με το άπειρο να προκύπτουν λανθασμένες απαντήσεις όταν αυτές πηγάζουν από την διαίσθηση. Ακόμα και κατά την συνέντευξη η μαθήτρια επιμένει στην απάντησή της υποστηρίζοντας ότι είναι "φυσιολογικό" ο εσωτερικός κύκλος να έχει λιγότερα σημεία σε σχέση με τον εξωτερικό εξ αιτίας της διαφοράς μεγέθους.

Θ	Ναι είναι φυσιολογικό λόγω του μεγέθους.

Όταν ,όμως, κατά την διάρκεια του διαλόγου τονίζεται ότι αν δεχθούμε ότι οι δύο κύκλοι δεν έχουν το ίδιο πλήθος σημείων καταλήγουμε άμεσα στην ύπαρξη διαφορετικών βαθμών απειρίας η μαθήτρια φαίνεται να απορρίπτει την αρχική της απάντηση διότι αυτή γεννά παράδοξα, με την έννοια ότι προκύπτουν συμπεράσματα τα οποία η μαθήτρια αρνείται ως αναληθή. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα.

Ε	Άρα υπάρχουν δύο διαφορετικά άπειρα ένα μεγαλύτερο και ένα μικρότερο;
Μ	Εξαρτάται από το τι μετράμε
Θ	Δεν βγάζει νόημα αυτό που λέμε
Ε	Γιατί ;
Θ	Γιατί εντάξει το άπειρο θεωρείται ως ένα πράγμα όχι δύο διαφορετικά

Στην συνέχεια η ίδια μαθήτρια αναρωτιέται για το πως γίνεται οι δύο κύκλοι να έχουν ίδιο πλήθος σημείων καθώς και αυτό διαισθητικά φαίνεται να είναι το ίδιο παράδοξο όπως και η ύπαρξη διαφορετικών βαθμών απειρίας. Με αυτό το σκεπτικό καταλήγει στο ότι το πλήθος των σημείων του κάθε κύκλου δεν είναι άπειρο προσπαθώντας να αποφύγει τα παράδοξα συμπεράσματα στα οποία έφτανε. Ο συλλογισμός που ακολουθεί φαίνεται στο ακόλουθο απόσπασμα του διαλόγου.

Θ	Πρέπει να απαντήσουμε τώρα;
	Πως γίνεται να έχουν ίδια σημεία;
Μ	Ίδιο πλήθος
Θ	Οπότε δεν έχουν άπειρα σημεία
Μ	Άπειρο είναι απλά δεν ...
Θ	Δεν είναι άπειρο τελειώνει κάποια στιγμή το πλήθος του κύκλου

Η μαθήτρια επιχειρεί να βρει προσεγγιστικά ακόμα και το πλήθος των σημείων κάθε κύκλου με σκοπό να ενισχύσει τον ισχυρισμό της, δηλαδή ότι το πλήθος των σημείων αυτών είναι πεπερασμένο.

Ε	Πόσα είναι δηλαδή;
Μ	Ενταξει τώρα δεν μπορούμε να πούμε πόσα ακριβώς είναι
Ε	Περίπου;
Θ	1000, 1500 ;

Όταν γίνεται κατανοητό ότι δεν είμαστε σε θέση να μετρήσουμε το πλήθος των σημείων ενός κύκλου διότι αυτά είναι αδιάστατα η Θάλεια δεν λέει ότι το πλήθος των σημείων είναι άπειρο παρά το ότι έχει εμφανίσει την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι το οποίο δεν έχουμε την δυνατότητα να μετρήσουμε. Αυτή η στάση εξηγείται αν δεχτούμε ότι η μαθήτρια εξακολουθεί να θέλει επίμονα να αποφύγει όποια αντιφατικά συμπεράσματα εμφανίστηκαν πιο πριν.

Ε	Άρα τελικά ένας κύκλος δεν έχει άπειρα σημεία;
Μ	Δεν μπορούμε να τα μετρήσουμε
Θ	Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν είναι άπειρα

Έπειτα η Θάλεια υποστηρίζει έντονα ότι το πλήθος των σημείων ενός κύκλου δεν μπορεί να είναι άπειρο και βασίζει αυτό της τον ισχυρισμό στο ότι αν ξεκινήσει να μετράει κάποια στιγμή όταν συναντήσει το σημείο από το οποίο ξεκίνησε η μέτρηση θα πρέπει να σταματήσει.

Θ	Ναι δεν είναι άπειρο γιατί αρχικά πιστεύω ότι ... το άπειρο είναι όταν κάτι δεν τελειώνει ποτέ
	Αρχίζεις να μετράς και δεν τελειώνει ποτέ αυτός ο αριθμός
	Αλλά εδώ κάποια στιγμή τελειώνει

Μετά από συζήτηση οι μαθήτριες καταλήγουν στο ότι το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων είναι άπειρο και προσπαθούν να αιτιολογήσουν το ότι οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Η άποψη που εμφανίζεται ,στο παρακάτω απόσπασμα, από την Θάλεια είναι ότι αφού είναι και τα δύο άπειρα είναι ισοπληθικά. Αυτό είναι ένα βασικό επιχείρημα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους για την ισότητα δυο απείρων συνόλων. Το συγκεκριμένο κριτήριο σύγκρισης απείρων συνόλων αναφέρεται ως μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Θ	Μα αν είναι άπειρο τότε είναι και οι δύο ίσοι
Ε	Ίσοι δεν είναι
Μ	Ίσοι δεν είναι εννοω ότι...
Θ	Τα σημεία όμως ...
Ε	Έχουν το ίδιο πλήθος σημείων. πως θα το δείξουμε αυτό;
Θ	Αφού είναι και τα δύο άπειρα

Η Θάλεια καταφέρνει τελικά να αιτιολογήσει σχηματικά την ισοπληθικότητα του πλήθους των σημείων των δύο κύκλων φέρνοντας αρκετές διαμέτρους και κάνοντας την κατάλληλη αντιστοίχηση. Επιπλέον, η μαθήτρια δείχνει να κατανοεί την σημασία της αντιστοιχίας ,μεταξύ των σημείων των δύο κύκλων, που βρήκε.

Θ	Αν οι γραμμές ήταν έτσι και πέρναγαν πάντα από το κέντρο;
	Σε όλο τον κύκλο
Ε	Ναι...
Θ	Δεν θα ήταν...
Ε	Τι θα ήταν ;
Θ	Τότε ο μικρός κύκλος δεν θα ήταν ... ίδιο πλήθος με τον μεγάλο;
Ε	Γιατί;
Θ	Το κάθε σημείο θα πέρναγε και από τους δύο κύκλους

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Στην ερώτηση αυτή η Θάλεια πρέπει να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α={2,4,6,8,10,...} και Β={1,2,3,4,5,...}. Η γραπτή απάντηση που δίνει είναι η εξής "Το Α έχει μεγαλύτερο πλήθος από το Β διότι αυξάνεται κατά μία μονάδα παραπάνω". Η απάντηση αυτή δεν ήταν αναμενόμενη καθώς η μαθήτρια υποστηρίζει ότι το πλήθος των άρτιων αριθμών είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των φυσικών αριθμών. Η αιτιολόγηση που δίνει είναι ότι "το Α αυξάνεται κατά μία μονάδα παραπάνω", με αυτό είναι πολύ πιθανό να υπονοεί τις αναδρομικές σχέσεις $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+2$ και $\beta_\nu=\beta_{\nu-1}+1$ για τις ακολουθίες των αρτίων και των φυσικών αντίστοιχα. Αν δεχτούμε την εξήγηση αυτή βλέπουμε ότι για να βρούμε τον επόμενο φυσικό στην ακολουθία προσθέτουμε μία μονάδα στον προηγούμενο, ενώ για να βρούμε τον επόμενο άρτιο αριθμό στην ακολουθία των αρτίων προσθέτουμε στον προηγούμενο δύο μονάδες, δηλαδή, "μια μονάδα παραπάνω" όπως λέει και η μαθήτρια. Το ότι η μαθήτρια έχει σκεφτεί με τον τρόπο αυτό φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα του διαλόγου της συνέντευξης.

Ε	Θάλεια εσύ έγραψες ότι το Α έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από ότι το Β γιατί το Α αυξάνεται κατά μία μονάδα παραπάνω. Τι εννοείς με αυτό;
Θ	Δεν ξέρω...
Μ	Κατά δύο ... κατά δύο μονάδες παραπάνω αυξάνεται
Θ	Όχι μία μονάδα
Μ	Ναι μία μονάδα παραπάνω αλλά ανα δύο δηλαδή πάει 2, 4, 6, 8, ...

Ένα ακόμα κρίσιμο σημείο είναι το τι εννοεί λέγοντας "μεγαλύτερο πλήθος". Είναι σαφές ότι η μαθήτρια δεν μπορεί να αναφέρεται στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου διότι η αιτιολόγηση που δίνει δεν σχετίζεται με την σύγκριση της πληθικότητας των δύο συνόλων. Πιθανώς, αυτό που εννοεί η Θάλεια να είναι ότι οι αριθμοί που περιέχονται στο σύνολο Α είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους του συνόλου Β.

Όταν κατά την συνέντευξη η μαθήτρια προσπαθεί να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των συνόλων χρησιμοποιεί ,όπως είχε κάνει και στην τρίτη ερώτηση, το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Ε	Πως θα συγκρίνουμε το πλήθος τους;
Θ	Είναι άπειρα και τα δύο

Αργότερα οι δύο μαθήτριες αναζητούν μία αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων, όμως, η Θάλεια δεν καταλαβαίνει την χρησιμότητα μίας τέτοιας αντιστοιχίας και επιμένει ότι τα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με ότι είχε υποστηρίξει λίγο πρίν. Αιτιολογεί τον ισχυρισμό της χρησιμοποιώντας το κριτήριο μέρος-όλο(το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν περισσότερες από μία μεθόδους για την σύγκριση άπειρων συνόλων τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν είναι αντιφατικά και οι ίδιοι το αγνοούν. Το ακόλουθο απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό.

Θ	Ναι με αφαίρεση
Ε	Ναι αλλά αν αφαιρέσω από το 4 το 1 δεν θα πάω στο 2
Θ	Και γιατί πρέπει να χουν τον ίδιο αριθμό;
Μ	Για να δείξεις ότι έχουν το ίδιο πλήθος
Θ	Μα δεν έχουν το ίδιο πλήθος
Ε	Γιατί ;
Θ	Επειδή το ένα είναι υποσύνολο του άλλου

Μόλις η Θάλεια καταφέρνει να βρει την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων πείθεται ότι αυτά είναι ισοπληθικά. Η μαθήτρια αναγνωρίζει την αντιστοιχία αυτή ως συνάρτηση και πλέον γίνεται κατανοητή η αναγκαιότητά της στην σύγκριση πλήθους στοιχείων απείρων συνόλων.

Θ	Πολλαπλασιασμό κάνουμε ;
Ε	Πως θα γίνει;
Θ	Με το δύο
Ε	Άρα κάθε στοιχείο αυτού του συνόλου αντιστοιχεί σε ένα αυτού.
Θ	Είναι μία συνάρτηση από το Β στο Α
Ε	Ναι
	Ποια θα είναι η συνάρτηση;
Θ	2*χ

Ερώτηση 4β

Παρόμοια με το προηγούμενο, έτσι και σε αυτό το υποερώτημα ,στο οποίο ζητείται η σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={1,2,3,4,...} και Β={1,3,5,7,...}, η απάντηση της μαθήτριας είναι "Το Β έχει μεγαλύτερο πλήθος από το Α διότι αυξάνεται κατά μία μονάδα παραπάνω". Το σκεπτικό που ακολουθεί η Θάλεια είναι παρόμοιο με αυτό της προηγούμενης ερώτησης. Η μαθήτρια παρατηρεί ότι για να βρούμε τον επόμενο φυσικό αριθμό στην ακολουθία προσθέτουμε μία μονάδα στον προηγούμενο, ενώ για να βρούμε τον επόμενο άρτιο αριθμό στην ακολουθία των αρτίων προσθέτουμε στον προηγούμενο δύο μονάδες, επομένως, "μια μονάδα παραπάνω". Με την φράση "μεγαλύτερο πλήθος" η μαθήτρια εννοεί και πάλι ότι οι αριθμοί που περιέχονται στο σύνολο Β είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους του συνόλου Α.

Κατά την συνέντευξη οι μαθήτριες έχουν καταλάβει από το ερώτημα 4α ότι πρέπει να αναζητήσουν μία συνάρτηση μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων, η συμμαθήτρια της Θάλειας βρίσκει την συνάρτηση, η οποία αναγνωρίζεται από την τελευταία ως ορθή.

Μ	Αν κάνουμε 2χ-1
Θ	Ναι αυτό
Ε	Για χ=1 βρισκω 1 , για χ=2 βρίσκω 3 , ...
Θ	Αυτό ναι
	Έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ερώτηση 5η

Στην ερώτηση αυτή, στην οποία το πλαίσιο σύγκρισης απείρων συνόλων είναι γεωμετρικό, καθώς ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν το πλήθος σημείων δύο ημιευθειών, η Θάλεια απάντησε ότι η δεύτερη ημιευθεία είναι το μισό της πρώτης. Η απάντηση που δίνει δείχνει τον βαθμό στον οποίο η διαίσθηση της επηρεάζει τον τρόπο σκέψης της. Στη σχηματική αναπαράσταση που δίνεται στους μαθητές μοιάζει το σχεδιασμένο αρχικό τμήμα της πρώτης ημιευθείας να είναι διπλάσιο από το αντίστοιχο της δεύτερης, αυτό οδηγεί την μαθήτρια στην συγκεκριμένη απάντηση. Η μαθήτρια θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό και χρησιμοποιεί τις αισθήσεις της για να κάνει πράξεις με το άπειρο. Εκτός ,όμως, από το ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων που σχετίζονται με την έννοια του απείρου είναι πηγή εσφαλμένων απαντήσεων των μαθητών, γίνεται σαφές ότι η μαθήτρια δεν έχει κατανοήσει τον ορισμό της ημιευθείας. Αυτό φαίνεται και από το απόσπασμα του διαλόγου που ακολουθεί.

Ε	Πως βρίσκεις το μισό της πρώτης ημιευθείας; Αφού δεν έχει τέλος.
Μ	Έχει το ίδιο μήκος με κάποιο κομμάτι της πρώτης ημιευθείας
Θ	Ξεκινάνε από το ίδιο σημείο οπότε καταλήγουν και στο ίδιο σημείο

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης η μαθήτρια υποστηρίζει ότι η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα σημεία βασιζόμενη και πάλι στην οπτική αναπαράσταση σε συνδυασμό με το κριτήριο μέρος-όλο(το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) , το οποίο είχε χρησιμοποιήσει και στην τέταρτη ερώτηση.

Θ	Δηλαδή το Β είναι στο ίδιο σημείο δηλαδή ξεκινάνε από εκεί μαζί ... αλλά δεν είναι το μισό της πρώτης ημιευθείας αλλά δεν ξεκινάνε μαζί
Ε	Άρα λες ότι η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα στοιχεία;
Θ	Ναι γιατί έχει μία...
	Πήγα να πω ότι έχει μία αρχή και ξεκινάει και φτάνει εκεί που δεν φτάνει βασικά
	Αλλά ξεκινάει πιο μετά από το Β.

Όταν η συμμαθήτριά της σχεδιάζει τις δύο ημιευθείες με τέτοιο τρόπο ώστε το αρχικό σημείο της δεύτερης ημιευθείας να είναι ακριβώς κάτω από το αντίστοιχο της πρώτης, η Θάλεια δεν πείθεται για την ισοπληθικότητα των σημείων των ημιευθειών όπως αυτές είναι αρχικά σχεδιασμένες. Τονίζει ότι όταν σχεδιάζουμε εκ νέου τις ημιευθείες είναι σαν να επεμβαίνουμε στο σχήμα και να "προκαλούμε" την ισοπληθικότητα των συνόλων των σημείων. Φαίνεται σε αυτό το σημείο πόσο ισχυρή είναι η πεποίθηση ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του (αφού ,όπως η ίδια η μαθήτρια παρατηρεί, το σημείο Α δε περιέχεται στην δεύτερη ημιευθεία). Έχει ήδη υπογραμμιστεί ότι η επίδραση διαισθητικών ιδεών που σχετίζονται με πεπερασμένα σύνολα, επηρεάζουν τις αποφάσεις των μαθητών και τον τρόπο σκέψης όσο αφορά στην ισοδυναμία άπειρων συνόλων. Λίγο αργότερα ,στο ίδιο απόσπασμα που δίνεται παρακάτω, η Θάλεια επιμένει πως η αντιστοίχηση των σημείων των δύο ημιευθειών όπως σχεδιάστηκαν από τις μαθήτριες σημαίνει την ισοπληθικότητα αυτών των ημιευθειών και όχι των αρχικών. Αιτιολογώντας τον ισχυρισμό αυτό η μαθήτρια λέει ουσιαστικά ότι η ίδια αντιστοίχηση δεν μπορεί να εφαρμοστεί στις ημιευθείες όπως είναι αρχικά σχεδιασμένες διότι κάποια σημεία περισσεύουν.

Μ	Δεν μπορώ να φέρω την δεύτερη λίγο πιο πίσω
Θ	Αυτή που έχουμε εδώ ;
Ε	Ναι
Θ	Τότε το προκαλούμε να είναι ίσα
Μ	Ναι
Θ	Δεν είναι από μόνα τους.
Θ	Τραβώντας αυτήν την γραμμή καταλήγουμε στο να είναι ίσα αν το αφήναμε όμως έτσι δεν είναι ίσα
Ε	Δηλαδή αν αλλάξω την θέση μίας ημιευθείας δηλαδή αν από εδώ..
Θ	Αν προεκτείνουμε την δεύτερη στο σημείο που αρχίζει η πρώτη ..

Όταν γίνει σαφές ότι η δεύτερη ημιευθεία δεν προεκτάθηκε αλλά μετατοπίστηκε η Θάλεια πείθεται για την ισοπληθικότητα των σημείων των δύο ημιευθειών και μάλιστα καταφέρνει να βρει κατάλληλη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο ημιευθειών στο αρχικό σχήμα.

Θ	Αν τα ενώσουμε έτσι;
Μ	Πλάγια;
Θ	Ναι
	Το σκεφτόμουν από πριν

Ερώτηση 6η

Σε αυτήν την ερώτηση το ζητούμενο είναι η σύγκριση του πλήθους των αριθμών του διαστήματος (0,1) με το αντίστοιχο πλήθος στο διάστημα (0,2). Η Θάλεια στην απάντησή της αναφέρει ότι και στα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί αλλά στο διάστημα (0,2) υπάρχουν περισσότεροι. Από την απάντηση που δίνεται φαίνεται ο έντονος επηρεασμός από την διαίσθηση. Στην συνέντευξη που ακολούθησε την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου η μαθήτρια αφού σχεδιάσει τα δύο διαστήματα βρίσκει μία αντιστοιχία.

Μ	Δεν έχει περισσότερα έχει τα ίδια
	Γιατί πάλι άμα τα ενώσουμε όπως πριν…
Ε	Πως δηλαδή;
Θ	Πλάγια

Ερώτηση 7η

Στην ερώτηση αυτή η Θάλεια έπρεπε να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και B={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}. Η αρχική απάντηση της μαθήτριας ήταν ότι τα σύνολα αυτά δεν είναι ισοπληθικά διότι το Β περιέχει και αρνητικούς αριθμούς. Η Θάλεια φαίνεται να εννοεί ότι όλα τα στοιχεία του Α περιέχονται στο Β αλλά το τελευταίο περιέχει και κάποια επιπλέον στοιχεία. Το κριτήριο σύγκρισης που χρησιμοποιεί είναι και πάλι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Επηρεασμένοι από τρόπους σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων η μαθήτρια υποστηρίζει ότι αφού το σύνολο Α είναι υποσύνολο του Β πρέπει να έχει και λιγότερα στοιχεία. Η γενίκευση των μεθόδων σύγκρισης για τα πεπερασμένα στα άπειρα σύνολα είναι συνήθης και προκαλεί εσφαλμένες αντιλήψεις.

Στην συνέντευξη, και αφού έχει προηγηθεί συζήτηση σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα η Θάλεια καταλαβαίνει ότι αυτό που πρέπει να αναζητήσει είναι μία κατάλληλη συνάρτηση και μετά από μερικές δοκιμές καταφέρνει να βρει την συνάρτηση αυτή και συνεπώς, να αναγνωρίσει τα δύο σύνολα ως ισοπληθικά.

Θ	Άρα το Β θα έχει περισσότερα στοιχεία. Α όχι ... οι συναρτήσεις
Μ	Αυτό με συνάρτηση πάλι. Εεε -3
Θ	Όχι ... αφαίρεση είναι
Ε	Από το 1 πως μπορώ να πάω στο -3
Μ	2χ-5. Δύο επί ένα δύο -5 κάνει -3
Ε	Ναι για χ=2;
Μ	Κάνει -1
Ε	Και όχι -2
Θ	Δεν είναι αυτή...
	Αν απλά αφαιρέσω 4;

Ερώτηση 8η

Όσο αφορά στο κατά πόσο δύο άπειρα σύνολα είναι πάντα ισοπληθικά η αρχική απάντηση της μαθήτριας είναι η εξής “εξαρτάται, αν είναι ίδιοι οι αριθμοί τότε ναι, αν όμως το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο τότε αυτό θα έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων”. Η μαθήτρια φαίνεται να ταυτίζει την πληθικότητα ενός συνόλου με τα στοιχεία του. Υποστηρίζει ότι δύο άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά μόνο αν περιέχουν τα ίδια στοιχεία. Όταν η Θάλεια ρωτάται ξανά κατά την συνέντευξη αλλάζει γνώμη και υποστηρίζει ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι πάντα ισοπληθικά. Η απάντηση αυτή, όπως και η ίδια τονίζει, είναι επηρεασμένη από την συζήτηση που έχει προηγηθεί. Το κριτήριο που φαίνεται να χρησιμοποιεί είναι μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Ε	Θάλεια έχεις γράψει ότι αν είναι οι ίδιοι αριθμοί ναι αν όμως το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο τότε θα έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων.
Θ	Ναι αλλά μετά από όσα είπαμε έχουν το ίδιο

Ερώτηση 9η

Στην τελευταία ερώτηση η Θάλεια απαντάει ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι ισοπληθικό με αυτό των φυσικών αριθμών διότι, όπως λέει, οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να δημιουργήσουν κι άλλους αριθμούς οπότε δεν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Υπονοείται μία αντίληψη για το άπειρο η οποία συνδέεται με μία χωρικό-ρυθμική διάσταση (π.χ. το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει και είναι σε εξέλιξη). Στην συνέντευξη αν και δείχνει να επιμένει σε αυτήν την απάντηση πείθεται ότι τα σύνολα αυτά δεν είναι ισοπληθικά διότι η συμμαθήτριά της δεν καταφέρνει να βρει μία κατάλληλη συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων.

Μ	Άρα δεν μπορώ να πάω από το ένα σύνολο στο άλλο
Θ	Άρα δεν ... έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

3.2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Αποτελέσματα απαντήσεων Κατερίνας

Ερώτηση 1η

Το πρώτο ερώτημα σχετίζεται με το πως οι μαθητές κατανοούν και αντιλαμβάνονται την έννοια του απείρου. Ζητείται από τους μαθητές να γράψουν μία πρόταση με την λέξη άπειρο χωρίς να χρησιμοποιήσουν μαθηματικό πλαίσιο. Η Κατερίνα δυσκολεύτηκε να διατυπώσει μία τέτοια πρόταση. Ξεκίνησε τρεις φορές να γράφει αλλά κάθε φορά διέγραφε τις απαντήσεις της. Μία από αυτές φαίνεται να είναι η πρόταση "Υπάρχουν άπειρες λύσεις στα διάφορα προβλήματα των μαθηματικών". Είναι πιθανό η μαθήτρια να διέγραψε την πρόταση αυτή είτε γιατί την αναγνώρισε ως εσφαλμένη είτε γιατί θεώρησε ότι το πλαίσιο της είναι μαθηματικό και δεν θα γινόταν δεκτή. Η ερώτηση αυτή είναι η τελευταία που απαντάει η Κατερίνα και μάλιστα όταν η συμμαθήτριά της έχει ολοκληρώσει το ερωτηματολόγιο και την περιμένει για να ξεκινήσει η συνέντευξη. Τελικά η πρόταση που δίνει είναι η εξής "Οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου δεν διαθέτουν άπειρο χρόνο για διάφορες δραστηριότητες". Υποθέτοντας ότι η μαθήτρια έχει στο νου της ότι το άπειρο δεν έχει όρια, η πρόταση που δίνει μοιάζει άστοχη καθώς κανένας άνθρωπος και όχι μόνο οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου δεν διαθέτει άπειρο χρόνο. Κατά συνέπεια, φαίνεται ότι η μαθήτρια δεν αντιλαμβάνεται το άπειρο ως κάτι δίχως όρια. Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιεί την λέξη “άπειρο” η μαθήτρια είναι σαν να ταυτίζει την έννοια του απείρου με έναν πολύ μεγάλο αριθμό. Το τελευταίο γίνεται εμφανές και κατά την συνέντευξη που ακολούθησε. Όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα η μαθήτρια χρησιμοποιεί εναλλακτικά για την λέξη “άπειρο” την λέξη “πολύ”.

Ε	Τι εννοείς δεν διαθέτουν άπειρο χρόνο;
Κ	Ότι επειδή ασχολούνται αυτό τον καιρό με τις πανελλήνιες που είναι το σημαντικότερο για μας επικεντρωνόμαστε κυρίως στο διάβασμα και δεν έχουμε πολύ ελεύθερο χρόνο να περνάμε με τους φίλους μας ή να κάνουμε κάποιες αθλητικές δραστηριότητες που είχαμε πριν.

Ερώτηση 2η

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές πρέπει να γράψουν μία πρόταση χρησιμοποιώντας την φράση “άπειρο σύνολο”. Η πρόταση που δίνει η Κατερίνα είναι “Η φράση άπειρο σύνολο συνήθως φέρνει στο μυαλό μου ένα σύνολο που περιέχει διάφορες τιμές, όλους τους ρητούς και άρρητους αριθμούς, τους πραγματικούς αριθμούς, τους φυσικούς, τους δεκαδικούς δηλαδή όλο το **R**”. Η πρόταση αυτή έχει μαθηματικό πλαίσιο καθώς αναφέρεται αποκλειστικά σε σύνολα αριθμών. Ουσιαστικά η μαθήτρια υποστηρίζει ότι ένα άπειρο σύνολο πρέπει να περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Αιτία για το ότι η μαθήτρια επιλέγει αποκλειστικά μαθηματικό πλαίσιο για την απάντησή της είναι ότι τα Μαθηματικά ασχολούνται με άπειρα σύνολα αριθμών και αυτά είναι τα μόνα άπειρα σύνολα που μας είναι γνωστά. Αν και από την πρόταση που δίνει η Κατερίνα φαίνεται να υπάρχει σύγχυση μεταξύ των πραγματικών, των φυσικών, των ρητών, των αρρήτων και των δεκαδικών στην συνέντευξη εξηγεί ότι όλα αυτά τα έγραψε με σκοπό να εμπλουτίσει την απάντησή της. Στην συζήτηση που ακολούθησε η μαθήτρια εκφράζει την άποψη ότι κάθε πραγματικός αριθμός περιέχεται σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο ένα άπειρο σύνολο αυτό των πραγματικών αριθμών. Η Κατερίνα απορρίπτει το συμπέρασμα αυτό αναγνωρίζοντας ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άπειρο αλλά δεν περιέχει κάθε πραγματικό αριθμό.

Ε	Άρα και εσύ πιστεύεις ότι όποιον αριθμό και να σκεφτώ είναι μέσα σε ένα άπειρο σύνολο;
Κ	Ναι είναι
Ε	Οι φυσικοί αριθμοί ποιοι είναι;
Κ	Το 0 το 1το2 ...
Ε	Είναι ένα σύνολο ...
Κ	Ναι είναι άπειρο σύνολο
Ε	Υπάρχει περίπτωση να είναι ο ρίζα 3 σε αυτό;
Κ	Όχι, αλλά είναι άπειρο σύνολο

Η μαθήτρια ενώ φαίνεται να έχει καταλάβει την παρανόηση της λίγη ώρα αργότερα στην τρίτη ερώτηση εκφράζει και πάλι την πεποίθηση ότι το μοναδικό άπειρο σύνολο που υπάρχει είναι αυτό των πραγματικών αριθμών.

Ε	Το άπειρο;
Κ	Ναι αφού είναι όλο το **R**
Ε	Το άπειρο είναι ένα σύνολο που είναι όλο το R
Κ	Ναι αφού ορίζουμε ότι το άπειρο είναι από το $-\infty$ ως το $+\infty$ οπότε λέμε ότι είναι όλο το R. Άρα λέμε ότι είναι όλο το R

Ερώτηση 3η

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές έχουν να συγκρίνουν το πλήθος των σημείων δύο ομόκεντρων κύκλων με διαφορετικό όμως μήκος περιφέρειας. Η απάντηση που δίνει η Κατερίνα είναι "Καθένας από τους κύκλους περιέχει άπειρα σημεία, εφόσον τα σημεία είναι άπειρα δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το πλήθος τους". Η μαθήτρια υποστηρίζει ότι το πλήθος των στοιχείων απείρων συνόλων είναι μη συγκρίσιμο μέγεθος, δηλαδή ότι είναι αδύνατο να συγκρίνουμε το πλήθος δύο απείρων συνόλων. Την άποψη αυτή υποστηρίζει και κατά την διάρκεια της συνέντευξης όπως φαίνεται στον διάλογο που ακολουθεί.

Ε	Κατερίνα εσύ τι έχεις γράψει; Α ότι δεν μπορώ να τα συγκρίνω επειδή είναι άπειρα.
Κ	Κυρία αφού έχουν άπειρο πλήθος..
Ε	Άρα δεν μπορώ να συγκρίνω ...;
Κ	Το άπειρο με το άπειρο;
	Αν θεωρήσουμε ότι για μας στα μαθηματικά το άπειρο είναι ένα τότε θα έχουν το ίδιο πλήθος

Η μαθήτρια εκφράζει την άποψη ότι η έννοια του μαθηματικού απείρου έχει μία ενιαία υπόσταση (single infinity), δηλαδή ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά μεταξύ τους. Μία κοινή αντίληψη των μαθητών είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοδύναμα , όλα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Η αποκάλυψη αυτού του είδους της παρανόησης γίνεται καλύτερα σε γεωμετρικό πλαίσιο όπως αυτό των δύο ομόκεντρων κύκλων. Βασική αιτία αυτής της παρανόησης είναι ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια του απείρου στο σχολείο σύμφωνα με τα αναλυτικό πρόγραμμα. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί στο συγκεκριμένο σημείο η μαθήτρια είναι το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Στην συνέχεια, και στο απόσπασμα που ακολουθεί, η Κατερίνα προσδίδει στην έννοια του απείρου μία υποκειμενικότητα που εξαρτάται από το πως το άτομο συγκροτεί στο νου του την συγκεκριμένη έννοια. Αυτή η αντίληψη του απείρου έρχεται σε αντίθεση με αυτήν που εξέφρασε η ίδια μαθήτρια λίγο πριν, ότι δηλαδή το άπειρο αποτελεί μία μοναδική και ενιαία οντότητα.

Κ	Αλλιώς το φαντάζεστε εσείς το άπειρο και αλλιώς το φαντάζεται η Νικολέτα

Αργότερα η Κατερίνα προσπαθεί να συγκρίνει το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων συγκρίνοντας τις ακτίνες τους. Η μαθήτρια επηρεάζεται από την διαίσθησή της και φαίνεται να πιστεύει ότι το πλήθος των σημείων ενός κύκλου είναι ανάλογο του μήκους της περιφέρειας του κύκλου. Το επιχείρημα αυτό χρησιμοποιείται από την μαθήτρια ακριβώς επειδή δρα ενισχυτικά στον διαισθητικό τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζει το πρόβλημα.

Κ	Τώρα σκέφτομαι αυτό που είπε η Νικολέτα για το μήκος τους. Βασικά μπορούμε να συγκρίνουμε και με τις ακτίνες τους.

Η Κατερίνα γρήγορα αλλάζει γνώμη και προσπαθεί να συγκρίνει το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων χρησιμοποιώντας το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά) όπως αποκαλύπτεται και από το παρακάτω απόσπασμα. Η μαθήτρια καταλήγει σε αντιφατικά συμπεράσματα κάνοντας χρήση δύο διαφορετικών κριτηρίων σύγκρισης. Επιπλέον φαίνεται να μην αντιλαμβάνεται την αντιφατικότητα των ισχυρισμών της.

Κ	Είναι ίδιο το πλήθος
Ε	Γιατί;
Κ	Γιατί και εδώ μέσα υπάρχουν άπειρα και εδώ έξω υπάρχουν άπειρα

Όταν η αντιφατικότητα επισημανθεί η μαθήτρια επανέρχεται στην αρχική της άποψη σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει δυνατότητα σύγκρισης του πλήθους των στοιχείων των απείρων συνόλων. Αυτό τονίζεται στο μέρος του διαλόγου που ακολουθεί.

Κ	Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το άπειρο όμως
Ε	Αυτό ζητάει η ερώτηση.
Κ	Πως να το συγκρίνω;

Όταν η συμμαθήτριά της καταφέρνει να κάνει την κατάλληλη αντιστοίχηση στο σχήμα η Κατερίνα πείθεται για την ισοπληθικότητα των δύο συνόλων.

Ν	Ένα σημείο εδώ ένα εκεί. Όσες ευθείες και να φέρουμε θα ακουμπάνε μία φορά στον μικρό και μία στον μεγάλο κύκλο.
Ε	Βρίσκω ένα σημείο εδώ και αμέσως βρίσκω ένα σημείο και στον άλλον
Κ	Άρα το πλήθος τους θα είναι ίδιο

Η Κατερίνα στο παρακάτω απόσπασμα αναγνωρίζει διαισθητικά ότι η αντιστοιχία είναι συνάρτηση και μάλιστα 1-1 παρατηρώντας ότι σε κανέναν από τους δύο κύκλους δεν περισσεύουν σημεία αν συνεχίζουμε να φέρουμε τις ακτίνες.

Κ	Όχι δεν νομίζω να περισσεύουν γιατί όσες ακτίνες και να φέρω ένα σημείο του εσωτερικού ταιριάζει με ένα σημείο του εξωτερικού. Βασικά όσους κύκλους και να φέρω και έναν τρίτο να φέρω πάλι το ίδιο θα είναι. Άρα είναι ίδιο το πλήθος.

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Στο ερώτημα αυτό ζητείται η σύγκριση των άπειρων συνόλων τα σύνολα Α={2,4,6,8,10,...} και Β={1,2,3,4,5,...}. Η αρχική απάντηση που γράφει η Κατερίνα είναι η ακόλουθη "Παρατηρούμε ότι στο σύνολο Α περιέχονται ζυγοί αριθμοί, οι οποίοι φτάνουν ως το άπειρο και στο σύνολο Β περιέχονται οι πραγματικοί αριθμοί που επεκτείνονται ως το άπειρο. Επομένως το Β είναι μεγαλύτερο εφόσον περιέχονται όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.". Λέγοντας πραγματικούς αριθμούς η μαθήτρια εννοεί φυσικούς, όπως γίνεται σαφές και στην συνέντευξη. Το κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Το κριτήριο αυτό αποτελεί γενίκευση αντίστοιχου κριτηρίου που ισχύει αλλά μόνο για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων. Προτάσεις όπως το ότι το σύνολο είναι ισοδύναμο με τα μέρη του έρχονται σε αντίθεση με την καθημερινή αντίληψη μας ακριβώς διότι η τελευταία σχετίζεται με σύνολα που περιέχουν πεπερασμένο αριθμό αντικειμένων. Υπέρ του ίδιου κριτηρίου η μαθήτρια επιχειρηματολογεί και κατά την διάρκεια της συνέντευξης όπως φαίνεται στο μέρος του διαλόγου που ακολουθεί.

Κ	Όχι εννοώ ότι στο Α περιέχονται οι ρητοί 2,4,6,8,.. ενώ στο Β περιέχονται και οι ζυγοί και οι μονοί. Οι φυσικοί.
Ν	Αυτό που είπα και εγώ
Κ	Όλοι οι αριθμοί που περιέχονται στο σύνολο Α περιέχονται και στο σύνολο Β
Ε	Δηλαδή το Α είναι υποσύνολο του Β
Κ Ν	Ναι
Κ	Άρα το Β έχει περισσότερα στοιχεία

Στην συνέχεια η Κατερίνα αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να εργαστεί όπως στο τρίτο ερώτημα βρίσκοντας μία αντιστοιχία αυτή την φορά όχι μεταξύ σημείων αλλά μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Αντιλαμβάνεται, επομένως, την σημασία του κριτηρίου αντιστοίχισης. Αυτό γίνεται εμφανές και από το παρακάτω απόσπασμα.

Κ	Να δείξουμε ότι ένα στοιχείο του Α αντιστοιχεί πάλι σε ένα σημείο του Β
Ε	Πώς αντιστοιχεί; Πριν είπαμε τον τρόπο που γίνεται η αντιστοίχηση εδώ με ποιον τρόπο θα γίνει;
Κ	Έχουμε ένα στοιχείο στο σύνολο Α το οποίο θα αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο του Β

Αφού δοκιμάσει αρκετές συναρτήσεις η μαθήτρια καταφέρνει να βρει την σωστή συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων.

Ε	Με ποιον τρόπο αντιστοιχίζονται;
Ν	Α ότι αυτό είναι το πρώτο εδώ και αυτό το πρώτο εδώ;
Κ	Αφαιρώ 1;
Ε	Αν από το 2 αφαιρέσω 1 θα βρω 1 αλλά αν από το 4 αφαιρέσω 1 θα βρω 3 και όχι 2.
Κ	Άρα δεν είναι σωστή η αντιστοιχία αυτή
Ν	Ναι
Κ	Λοιπόν αν τα διαιρέσω με το δύο;
Ε	Για να δούμε 2 δια 2 κάνει 1 , 4 δια 2 κάνει 2 , ...
Κ	Και συνεχίζει
Ε	Δηλαδή ποια είναι η αντιστοιχία;
Κ	Κάθε φορά διαιρώ με το 2

Ερώτηση 4β

Όσο αφορά την σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={1,2,3,4,...} και Β={1,3,5,7,...} η μαθήτρια αρχικά δίνει παρόμοια απάντηση με αυτήν του υποερωτήματος 4α βασιζόμενη στο κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Η απάντησή της είναι η εξής "Το σύνολο Α περιέχει πραγματικούς αριθμούς από το 1 ως το άπειρο και το σύνολο Β περιέχει περιττούς αριθμούς. Επομένως το σύνολο Α είναι μεγαλύτερο.".

Στην συνέντευξη που ακολούθησε, όπως δείχνει και το παρακάτω απόσπασμα, η Κατερίνα προσπάθησε να υπερασπιστεί την απάντησή της γρήγορα, όμως, ξεκίνησε να αναζητά την κατάλληλη συνάρτηση την οποία δεν κατάφερε να βρει.

Ε	Ναι το σύνολο Β είναι το σύνολο των περιττών.
Κ	Και στο άλλο περιέχονται όλοι οι ακέραιοι.
Ν	Οι θετικοί
Κ	Άρα δεν είναι πάλι υποσύνολο;
Ε	Ναι και πριν το ίδιο μου λέγατε αλλά μετά βρήκατε την αντιστοιχία.
Κ	Εδώ δυσκολεύομαι.

Τελικά όταν τους δοθεί η αντιστοιχία η Κατερίνα καταφέρνει να την αναγνωρίσει ως μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α και σύνολο τιμών το Β.

Κ	Ναι ισχύει 2*1-1=1 , 2*2-1=3 , ...
Ν	Συνάρτηση
Ε	Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών;
Κ	Από το Α προς το Β

Επιπλέον η Κατερίνα αντιλαμβάνεται έστω και διαισθητικά την αναγκαιότητα να είναι η ζητούμενη συνάρτηση 1-1 λέγοντας ότι δεν περισσεύουν στοιχεία.

Ν	Ναι αλλά τώρα περισσεύουν
Ε	Ποια περισσεύουν;
Κ	Δεν περισσεύει γιατί αντιστοιχείς ένα στοιχείο του Α με ένα στοιχείο του Β

Ερώτηση 5η

Στην πέμπτη ερώτηση, η οποία σχετίζεται με την σύγκριση των συνόλων των σημείων δύο ημιευθειών, η απάντηση που δίνει η Κατερίνα είναι "Το πλήθος των σημείων και στις δύο ημιευθείες είναι άπειρο. Όμως η πρώτη ημιευθεία έχει μεγαλύτερο πλήθος σημείων από την δεύτερη διότι έχει μεγαλύτερο μήκος και επεκτείνεται στο άπειρο.". Η μαθήτρια για να συγκρίνει το πλήθος των σημείων των δύο ημιευθειών βασίζεται στην σύγκριση του μήκους των αρχικών τμημάτων των ημιευθειών που είναι σχεδιασμένα. Η Κατερίνα στηρίζεται στην διαίσθησή της και στην συγκεκριμένη οπτική αναπαράσταση των δύο ημιευθειών. Το εννοιολογικό και σχηματικό πλαίσιο του προβλήματος επηρεάζει τις διαισθήσεις των μαθητών και, κατά συνέπεια, τις απαντήσεις που δίνουν. Στην συζήτηση για το θέμα αυτό που ακολούθησε η Κατερίνα αντιστοιχεί τα σημεία των δύο ημιευθειών με τέτοιον τρόπο ώστε τα σημεία του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ να μην αντιστοιχίζονται με σημεία της δεύτερης ημιευθείας. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί ένα επιχείρημα αντιστοιχίας με στόχο να ενισχύσει τον αρχικό ισχυρισμό και την διαίσθησή της. Αυτό που δεν έχει γίνει κατανοητό, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο απόσπασμα του διαλόγου, είναι ότι για να αποφανθούμε την ισοπληθικότητα δύο απείρων συνόλων δεν απαιτείται κάθε αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων να αντιστοιχεί ένα προς ένα τα στοιχεία τους αλλά αρκεί να υπάρχει μία τέτοια αντιστοιχία.

Ε	Κατερίνα και εσύ το ίδιο έχεις γράψει.
Κ	Ναι η πάνω ημιευθεία έχει ένα ευθύγραμμο τμήμα παραπάνω άρα δεν θα χει και κάποιο πλήθος σημείων παραπάνω;
Ε	Δεν ξέρω εσύ θα μου πεις.
Κ	Ναι αλλά δεν είχαμε την ίδια αντιστοιχία
Ε	Για σχεδίασε αυτό που δείχνεις
Κ	Η αντιστοιχία τους ξεκινάει από εδώ και πέρα όμως αυτή η ημιευθεία έχει και αυτό το ...
Ν	Λείπει ένα κομμάτι στην δεύτερη
Κ	Ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει κάποια αντιστοιχία με την δεύτερη ημιευθεία

Η συμμαθήτρια της Κατερίνας αφού μετατοπίσει την δεύτερη ημιευθεία καταφέρνει να βρει την κατάλληλη αντιστοιχία. Μόνο τότε η Κατερίνα πείθεται για την ισοπληθικότητα των συνόλων των σημείων των δύο ημιευθειών.

N	Όχι υπάρχει κανονικά.
K	Δηλαδή αν έχει αυτό εδώ μία προέκταση...
N	Δεν είναι προέκταση είναι σαν να αρχίζει από εδώ
E	Κάνε το σχήμα Κατερίνα
K	Αυτή είναι η πρώτη ημιευθεία και αυτή η δεύτερη ... και θα συνεχίζει και αυτή στο άπειρο;
N	Έτσι και αλλιώς ημιευθείες είναι
K	Ωραία εντάξει θα έχω ένα σημείο που να αντιστοιχίζεται εδώ ... άρα θα είναι ίσα τα πλήθη.

Ερώτηση 6η

Σε αυτήν την ερώτηση η Κατερίνα έπρεπε να συγκρίνει το πλήθος των αριθμών που περιέχονται στα διαστήματα (0,1) και (0,2). Στην απάντησή της αναφέρει ότι οι αριθμοί που υπάρχουν στο διάστημα (0,1) είναι οι 0, 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9, 1 και οι αριθμοί που υπάρχουν στο διάστημα (0,2) είναι οι 0, 0,1, 0,2, 0,3, ..., 1,8, 1,9, 2. Η μαθήτρια φαίνεται να μην αντιλαμβάνεται ότι σε καθένα από αυτά τα διαστήματα το πλήθος των αριθμών είναι άπειρο. Η παρανόηση αυτή θα μπορούσε να συνδέεται με τις διάφορες πεποιθήσεις σχετικά με τα άκρα διαστημάτων. Έτσι, μερικοί μαθητές πιστεύουν ότι το πεπερασμένο είναι κάτι που έχει άκρα. Η Κατερίνα επηρεάζεται από το ότι τα διαστήματα αυτά έχουν άκρα και θεωρεί ότι το πλήθος των αριθμών που περιέχουν είναι πεπερασμένο. Επιπλέον η μαθήτρια δεν έχει κατανοήσει την βασική ιδιότητα των πραγματικών που είναι η πυκνότητα, μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός. Η μαθήτρια δεν αντιλαμβάνεται ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεταξύ μηδέν και ένα έχει απείρως πολλά στοιχεία, αλλά είναι φραγμένο. Θεωρώντας ότι τα διαστήματα (0,1) και (0,2) περιέχουν πεπερασμένο πλήθος αριθμών συμπεραίνει ότι το (0,2) περιέχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων χρησιμοποιώντας κριτήρια σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων.

Στην συνέντευξη η Κατερίνα ισχυρίζεται ότι οι αριθμοί που περιέχονται στα παραπάνω διαστήματα είναι άπειροι και είναι αυτοί που έχει γράψει. Είναι φανερό ότι δεν αντιλαμβάνεται την σημασία των εννοιών του απείρου και της πυκνότητας.

Ε	Πόσοι αριθμοί υπάρχουν στο διάστημα (0,1). Λοιπόν οι αριθμοί που υπάρχουν στο (0,1) είναι από το 0 έως το 1 δηλαδή μας το εξηγεί κιόλας η Κατερίνα με μία αποστομωτική απάντηση το 0,1 το 0,2 , 0,3 ,..., 0,9. Δηλαδή αυτοί είναι όλοι οι αριθμοί στο διάστημα (0,1);
Κ	Ε ναι
Ε	Δηλαδή 9 αριθμοί;
Κ	Όχι απλά αυτό που θέλω να πω ότι στο διάστημα (0,1) δεν υπάρχουν μόνο οι αριθμοί 0 και 1 είναι άπειροι κοιτάξτε τι γράφω εκεί .
Ε	Αυτοί που γράφεις εδώ είναι άπειροι ;
Κ	Ε δεν μπορούσα να τους γράψω και όλους γι αυτό έβαλα τελίτσες.
Ε	Αυτές οι τελίτσες εδώ τι σημαίνουν;
Κ	Εντάξει κυρία αυτό εννοώ τέλος πάντων.

Στην συνέχεια η Κατερίνα προσπαθεί να συγκρίνει το πλήθος των αριθμών των δύο διαστημάτων χρησιμοποιώντας το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα. Η Κατερίνα επανέρχεται δύο φορές στο συγκεκριμένο επιχείρημα.

Ε	Για σχεδιάστε λίγο τα διαστήματα να τα δούμε. Θα θέλατε να αλλάξετε τώρα την απάντηση σας;
Κ	Όχι
Ε	Γιατί ;
Κ	Γιατί αυτό έχει περισσότερα στοιχεία έχει μεγαλύτερο πλήθος. Γιατί περιέχεται μέσα σε αυτό το σύνολο.

Ερώτηση 7η

Στο ερώτημα αυτό ζητείται η σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων Α={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και Β={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}. Η απάντηση που δίνει η Κατερίνα κατά την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου είναι "Τα παραπάνω σύνολα δεν είναι ισοπληθικά. Το σύνολο Β περιέχει μεγαλύτερο πλήθος αριθμών εφόσον ξεκινάει από το -3 και επεκτείνεται ως το άπειρο, περιέχει, δηλαδή, τέσσερις παραπάνω αριθμούς.". Η μαθήτρια, για μία ακόμη φορά, επεκτείνει τις ιδιότητες των πράξεων και στην έννοια του απείρου. Αντιλαμβάνεται το ∞+4 ως έναν αριθμό μεγαλύτερο από το άπειρο κατά τέσσερις μονάδες. Φαίνεται ότι θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό αφού χρησιμοποιεί τις αισθήσεις της για να εκτελέσει πράξεις με το άπειρο.

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης και αφού έχει προηγηθεί ανάλογη συζήτηση και σχετικά με το τέταρτο ερώτημα η μαθήτρια καταφέρνει βρίσκοντας την κατάλληλη συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων να συμπεράνει την ισοπληθικότητά τους.

Κ	Αυτό δεν είναι σαν να λέμε 1-4=-3. Είναι σαν να έχω αυτόν εδώ τον αριθμό και να αφαιρώ ... δηλαδή είναι σαν από ένα μικρότερο να αφαιρώ ένα μεγαλύτερο.
Ε	Εδώ μου είπες ότι 1-4 = -3
Κ	Ναι
Ε	Παρακάτω;
Κ	2-4=-2, 3-4=-1 , 4-4=0,... άρα αυτή είναι η αντιστοιχία
	Εννοώ ότι είναι κ-4
Ε	Άρα τα δύο σύνολα είναι ...
Ν	Ίσα
Κ	Ισοπληθικά

Ερώτηση 8η

Στην όγδοη ερώτηση στην οποία ζητείται η γνώμη των μαθητών για το αν δύο άπειρα σύνολα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος στοιχείων η απάντηση της Κατερίνας είναι ότι δύο άπειρα σύνολα δεν είναι δυνατό να έχουν ίδιο πλήθος στοιχείων. Η μαθήτρια υποστηρίζει ότι δύο άπειρα σύνολα έχουν διαφορετικό πλήθος στοιχείων. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον συνήθη τρόπο σύγκρισης το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης η μαθήτρια υποστηρίζει ότι δύο άπειρα σύνολα θα είναι πάντα ισοπληθικά. Αιτιολογεί τον ισχυρισμό αυτό λέγοντας ότι πάντοτε θα υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Η Κατερίνα έχει, προφανώς, επηρεαστεί από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν με αφορμή το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο.

Κ	Είδαμε ότι κάθε φορά ένα στοιχείο αντιστοιχίζεται με ένα άλλο του συνόλου.
Ε	Κάθε φορά θα υπάρχει λες τέτοια αντιστοιχία;
Κ	Ναι

Ερώτηση 9η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους στοιχείων του συνόλου των πραγματικών με το αντίστοιχο των φυσικών η Κατερίνα απαντάει "Το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν μπορεί να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων εφόσον το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών είναι όλο το R όπου ανήκουν όλοι οι φυσικοί, οι ρητοί, οι άρρητοι αριθμοί. Δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών". Η μαθήτρια συγκρίνει τα δύο σύνολα κάνοντας χρήση του κριτηρίου μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Στην συνέντευξη που ακολούθησε φαίνεται η μαθήτρια να υποστηρίζει ότι μεταξύ των στοιχείων του συνόλου των πραγματικών και αυτών του συνόλου των φυσικών αριθμών θα υπάρχει αναγκαστικά μία αντιστοιχία.

Ε	Τώρα τι θα λέγατε;
Κ	Ότι υπάρχει πάντα κάποια αντιστοιχία

Αποτελέσματα απαντήσεων Νικολέτας

Ερώτηση 1η

Η πρόταση με την λέξη “άπειρο” που επιλέγει να γράψει η Νικολέτα είναι “Στο σύμπαν υπάρχουν άπειρα ηλιακά συστήματα, σε ένα από αυτά βρίσκεται και η Γη”. Η μαθήτρια συνδέει εννοιολογικά την έννοια του απείρου με το σύμπαν. Το άπειρο ταυτίζεται με το πλήθος των ηλιακών συστημάτων του σύμπαντος, δηλαδή, με τον πληθάριθμο ενός συνόλου που περιέχει “ατελείωτα” στοιχεία. Η έννοια του απείρου συνδέεται στο νου της μαθήτριας με το χωροχρονικό συνεχές και με μία, ανεξάρτητη από τον άνθρωπο, μη προσβάσιμη πραγματικότητα. Όλα τα παραπάνω ενισχύονται από τα όσα λέει η μαθήτρια και στην συνέντευξη που ακολούθησε. Η Νικολέτα υποστηρίζει ότι το άπειρο είναι κάτι δίχως όρια και ότι ακόμα και αν έχει όρια αυτά δεν είναι κτήμα της ανθρώπινης γνώσης. Στην συνέχεια εμφανίζεται πεπεισμένη για το ότι το άπειρο έχει όρια που ,όμως, δεν είναι προσβάσιμα. Στο σημείο αυτό φαίνεται, η μαθήτρια, να αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου ως κάτι το πολύ μεγάλο. Πρόκειται για μία τοπολογική αντίληψη του απείρου η οποία συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα, μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο.

Ε	Τι σημαίνει δηλαδή το άπειρο κατά την γνώμη σου;
Ν	Ότι είναι απροσδιόριστο δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι από εδώ μέχρι εκεί δεν έχει όρια ή ακόμα δεν έχουμε βρει το όριο.
Ε	Άρα υπάρχουν όρια αλλά εμείς δεν τα έχουμε βρει;
Ν	Μπορεί
Ε	Εσύ τι πιστεύεις;
Ν	Αυτή είναι η γνώμη μου κάπου θα υπάρχει ένα όριο πιστεύω.

Σε ακόλουθη ερώτηση η Νικολέτα, ακριβώς όπως είχε κάνει πριν και η Κατερίνα, δίνει μία υποκειμενική διάσταση στην έννοια του απείρου.

Ν	Εντάξει άπειρο ... δεν είναι κάτι αντικειμενικό.
Ε	Αλλάζει δηλαδή;
Ν	Μπορεί να σκεφτείτε εσείς ένα σύνολο άπειρο και εγώ ένα σύνολο και να μην είναι το ίδιο

Αργότερα στην συζήτηση για την τρίτη ερώτηση εμφανίζεται από την μαθήτρια η αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι μεγάλο. Πρόκειται για μία τοπολογική αντίληψη του απείρου αφού αυτό αντιμετωπίζεται ως μια μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο.

Ε	Πως φαντάζεσαι το άπειρο;
Ν	Μεγάλο

Ερώτηση 2η

Η ερώτηση αυτή στοχεύει στο να εκφράσουν οι μαθητές αντιλήψεις που διαθέτουν σχετικά με την έννοια του απείρου συνόλου. Η πρόταση που ζητείται, όπως διατυπώνεται από την Νικολέτα, είναι η ακόλουθη "Άπειρο σύνολο είναι ένα πεδίο ορισμού στο οποίο όποιον αριθμό και αν αναζητήσεις θα είναι μέσα σε αυτό". Η απάντηση αυτή θυμίζει την απάντηση της προηγούμενης μαθήτριας. Η Νικολέτα αναγνωρίζει ως άπειρα σύνολα μόνο σύνολα αριθμών και μάλιστα τα σύνολα αυτά που κάθε αριθμός είναι στοιχείο τους. Κατά συνέπεια η μαθήτρια πιστεύει ότι υπάρχει ένα και μοναδικό άπειρο σύνολο και αυτό δεν είναι άλλο παρά το σύνολο όλων των αριθμών. Το ότι η Νικολέτα δεν δέχεται την ύπαρξη άλλων απείρων συνόλων εκτός από αυτά που έχουν ως αντικείμενα αριθμούς είναι λογικό αν αναλογιστούμε ότι τα μόνα άπειρα σύνολα που γνωρίζουμε είναι σύνολα αριθμών. Όλα αυτά ενισχύονται και κατά την διάρκεια της συνέντευξης όπως δείχνει το παρακάτω απόσπασμα του διαλόγου.

Ν	Είναι ένα σύνολο αριθμών στο οποίο όποιο αριθμό και να βάλετε στο μυαλό σας το 3 ας πούμε ε θα είναι μέσα
Ε	Το 3 είναι μέσα σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο;
Ν	Αριθμών ... για μένα ... έτσι όπως το προσδιόρισα ναι
Ε	Ο ρίζα 3 είναι μέσα σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο;
Ν	Ναι

Ερώτηση 3η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο ομόκεντρων κύκλων με διαφορετικές ακτίνες η απάντηση που δίνει η Νικολέτα είναι η εξής "Ο κύκλος που βρίσκεται εσωτερικά έχει άπειρα σημεία, το ίδιο και αυτός που βρίσκεται εξωτερικά.

Συγκριτικά, όμως, παρατηρούμε ότι η απειρότητα του εσωτερικού κύκλου είναι φανερά μικρότερη. Συμπέρασμα αυτών είναι ότι ο εξωτερικός κύκλος διαθέτει άπειρα σημεία περισσότερα όμως από τα άπειρα σημεία του εσωτερικού.”. Η μαθήτρια ισχυρίζεται ότι το πλήθος των σημείων του εξωτερικού κύκλου είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο του εσωτερικού χωρίς να δίνει κάποια συγκεκριμένη εξήγηση του λόγου για τον οποίο αυτό συμβαίνει. Ο ισχυρισμός της μαθήτριας απορρέει από την εποπτεία της σχηματικής αναπαράστασης που της δίνεται. Η Νικολέτα έχει την πεποίθηση ότι το πλήθος των σημείων ενός κύκλου είναι ανάλογο του μεγέθους του. Πιο συγκεκριμένα κατά την διάρκεια της συνέντευξης επιχειρεί να αιτιολογήσει το ότι ο εσωτερικός κύκλος έχει λιγότερα από τον εξωτερικό σημεία συγκρίνοντας το μήκος της περιφέρειας των δύο κύκλων όπως φαίνεται και στο ακόλουθο μέρος του διαλόγου. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο επιχείρημα αναφέρεται δύο φορές προσπαθώντας να απαντήσει σε αυτήν την ερώτηση.

Ν	Το γύρω γύρω του εξωτερικού είναι πιο μεγάλο. Αν το ξετυλίξουμε δηλαδή θα είναι πιο μεγάλο από το μέσα.
Ε	Ναι δεν ζητάει να συγκρίνεις το μήκος όμως της περιφέρειας
Ν	Τα σημεία
Ε	Ζητάει το πλήθος των σημείων
Ν	Δεν θα έχει περισσότερα σημεία ο έξω αφού είναι πιο μεγάλος;

Τελικά η Νικολέτα αφού πειραματιστεί με το σχήμα φέρνει τις ακτίνες και καταφέρνει να βρει την κατάλληλη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο κύκλων και με αυτόν τον τρόπο καταλήγει στο ότι τα σύνολα των σημείων των δύο κύκλων είναι ισοπληθικά.

N	Και καλά επειδή τα ενώνεις έχεις ένα εδώ και ένα εδώ οπότε όσες τέτοιες γραμμές και να φέρεις γύρω γύρω. Να την κάνω να είναι η ίδια; Αυτή είναι η r1 ...
Ε	Και ;
Ν	Ένα σημείο εδώ ένα εκεί. Όσες ευθείες και να φέρουμε θα ακουμπάνε μία φορά στον μικρό και μία στον μεγάλο κύκλο.
Ε	Βρίσκω ένα σημείο εδώ και αμέσως βρίσκω ένα σημείο και στον άλλον
Κ	Άρα το πλήθος τους θα είναι ίδιο

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Στην αρχική απάντηση που δίνει η μαθήτρια συγκρίνει τα σύνολα Α={2,4,6,8,10,...} και Β={1,2,3,4,5,...} υποστηρίζοντας ότι “Στο σύνολο Α βρίσκονται οι άρτιοι αριθμοί οι οποίοι είναι άπειροι. Συγκρίνοντας το σύνολο Α με το σύνολο Β το οποίο περιέχει τους θετικούς ακέραιους καταλαβαίνουμε ότι συγκρίνουμε δύο άπειρα σύνολα. Το άπειρο σύνολο των θετικών ακεραίων υπερισχύει σε σχέση με το άπειρο σύνολο των αρτίων, οπότε το σύνολο Β είναι μεγαλύτερο”. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Η μαθήτρια στηρίζει την απάντησή της στην σχέση του περιέχεσθαι μεταξύ των δύο συνόλων κάτι τέτοιο όμως είναι σωστό μόνο αν τα συγκρινόμενα σύνολα είναι πεπερασμένα. Η Νικολέτα βασίζει τον ισχυρισμό της στην γενίκευση της μεθόδου αυτής και για άπειρα σύνολα. Στην συνέντευξη η Νικολέτα επιμένει στον ισχυρισμό της και ως βασικό της επιχείρημα χρησιμοποιεί την σχέση υποσυνόλου που έχουν τα δύο σύνολα.

Ν	Αφού είναι υποσύνολο δεν θα ναι πιο μικρό;

Η συμμαθήτρια της Νικολέτας βρίσκει την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων, όμως, δεν είναι σαφές το αν η Νικολέτα κατανοεί την αναγκαιότητα μίας τέτοιας αντιστοιχίας στο να αποδείξουμε ότι τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά. Σε ακόλουθο σημείο του διαλόγου και συγκεκριμένα όταν η συζήτηση εστιάζεται στο υποερώτημα 4β η μαθήτρια εκφράζει έντονα την αμφιβολία της ως προς την ορθότητα του επιχειρήματος της αντιστοιχίας. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

N	Δηλαδή θες να μου πεις ότι αν βάλεις αυτά στην σειρά θα είναι ίσα; Δεν θα ναι γιατί εδώ δεν έχει το 2 οπότε δεν γίνεται να είναι ίσα.
E	Και πριν που στο ένα σύνολο δεν υπήρχε το 1 ;
N	Εγώ δεν συμφώνησα σε αυτό
E	Ωραία πες μας την γνώμη σου για το προηγούμενο
N	Αφού είναι υποσύνολο δεν γίνεται να είναι ίσα

Η Νικολέτα συγχέει την έννοια της ισοπληθικότητας με αυτήν της ισότητας εκφράζει την άποψη ότι για να είναι δύο άπειρα σύνολα ισοπληθικά πρέπει να περιέχουν τα ίδια στοιχεία. Ουσιαστικά αυτό που λέει είναι ότι ένα άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό μόνο με τον εαυτό του. Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο μέρος του διαλόγου δεν μπορεί να δεχτεί ότι τα συγκεκριμένα σύνολα είναι ισοπληθικά διότι για παράδειγμα το 1 είναι στοιχείο του συνόλου Β αλλά όχι του Α.

N	Αφού δεν υπάρχουν στο Β εγώ αυτό δεν μπορώ να καταλάβω. Πως γίνεται να είναι ίσα αφού το 1 δεν είναι εδώ

Όταν ξεκαθαρίζεται η διαφορά μεταξύ ισότητας και η ισοπληθικότητας η μαθήτρια αντιλαμβάνεται την σημασία της αντιστοιχίας.

E	Δεν είναι ίσα είναι ισοπληθικά έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων αυτό δεν σημαίνει ότι το 1 πρέπει να ανήκει και στα δύο σύνολα αλλά όσα περιέχει το ένα τόσα περιέχει και το άλλο. σε αυτό δεν συμφωνείς;
N	Σε αυτό μπορεί να συμφωνώ.

Ερώτηση 4β

Για την σύγκριση των συνόλων Α={1,2,3,4,...} και Β={1,3,5,7,...} η Νικολέτα καταφεύγει και πάλι στο κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) όπως μαρτυρεί και η αρχική της απάντηση “Στο σύνολο Α βρίσκονται οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ενώ στο Β οι περιττοί αριθμοί. Οι ακέραιοι συμπεριλαμβάνουν μέσα τους τους περιττούς οπότε η απειρότητα του συνόλου Α είναι μεγαλύτερη, δηλαδή, στο σύνολο Α υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί.".

Μετά την συζήτηση που έχει προηγηθεί σχετικά με το υποερώτημα 4α και οι δύο μαθήτριες αναζητούν για αρκετή ώρα μία αντιστοιχία δεν καταφέρνουν, όμως, να την βρουν. Τελικά όταν τους δοθεί η αντιστοιχία η Νικολέτα την αναγνωρίζει ως μία συνάρτηση.

Κ	Ναι ισχύει 2*1-1=1 , 2*2-1=3 , ...
Ν	Συνάρτηση

Ερώτηση 5η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο ημιευθειών η αρχική απάντηση της Νικολέτας είναι "Όπως παρατηρούμε και οι δύο ημιευθείες δεν έχουν τέλος και καταλήγουν στο άπειρο. Ωστόσο, η πρώτη ημιευθεία δεν αρχίζει από το σημείο Β αλλά συμπεριλαμβάνει και μία ευθεία ΑΒ, άρα η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα άπειρα σημεία από την δεύτερη." Στην απάντησή της η μαθήτρια διατυπώνει την άποψη ότι αν και η ημιευθεία δεν έχει τέλος καταλήγει στο άπειρο, αυτό που υπονοείται είναι μια τοπολογική αντίληψη του απείρου, η οποία συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο και δεν έχει μεγαλύτερο αριθμό. Όσο αφορά στην σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο ημιευθειών η μαθήτρια χρησιμοποιεί το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) λέγοντας ότι στην πρώτη ημιευθεία περιέχεται το επιπλέον ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Με την απάντησή της η μαθήτρια δείχνει να χρησιμοποιεί τις αισθήσεις της για πράξεις με το άπειρο καθώς αναγνωρίζει το ∞+ΑΒ ως έναν αριθμό μεγαλύτερο από το άπειρο κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Επεκτείνει, δηλαδή, τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και στην έννοια του απείρου.

Ακόμα και στην συνέντευξη η μαθήτρια, αν και υποψιάζεται ότι τα σύνολα τον σημείων είναι ισοπληθικά, διαισθητικά δεν μπορεί να το δεχτεί επιμένοντας στην αρχική της απάντηση. Αιτία αυτού είναι ότι προτάσεις όπως το ότι το σύνολο είναι ισοδύναμο με τα μέρη του έρχονται σε αντίθεση με την καθημερινή αντίληψη μας.

Ν	Δεν το ήξερα από την αρχή να το γράψω αλλιώς
Ε	Τι θα απαντούσες τώρα;
Ν	Μπορεί να έγραφα και το ίδιο. Δεν μπορώ να το καταλάβω πως γίνεται να είναι ίσα οπότε...

Στην συνέχεια, και αφού έχει συζητήσει με την συμμαθήτριά της σχετικά με μία μη κατάλληλη αντιστοιχία στην οποία τα σημεία των δύο ημιευθειών αντιστοιχίζονται με τέτοιον τρόπο ώστε τα σημεία του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ να μην αντιστοιχίζονται με σημεία της δεύτερης ημιευθείας, η Νικολέτα σκέφτεται να μετατοπίσει την δεύτερη ημιευθεία ώστε το αρχικό της σημείο να βρίσκεται κάτω από το αρχικό σημείο της πρώτης. Ακόμα, όμως, και όταν βρίσκει την αντιστοιχία στο σχήμα που η ίδια έχει σχεδιάσει δεν φαίνεται, σύμφωνα με το ακόλουθο απόσπασμα, να πείθεται για την ισοπληθικότητα των συνόλων των σημείων των ημιευθειών όπως αρχικά ήταν σχεδιασμένες. Αυτό εξηγείται αν λάβουμε υπόψη μας το πόσο ισχυρές είναι οι πρωτοβάθμιες διαισθήσεις οι οποίες αναπτύσσονται στο άτομο ανεξάρτητα από οποιαδήποτε συστηματική διδασκαλία ως αποτέλεσμα της προσωπικής τους εμπειρίας.

Κ	Μήπως να την προεκτείνουμε;
Ν	Αφού δεν γίνεται να προεκταθεί
Κ	Α όχι δεν γίνεται αυτό.
Ν	Να την πάρω και να την βάλω πιο πίσω;
Ε	Κάνε ένα δικό σου σχήμα πιο κάτω. Ωραία αν ξεκινήσει από εκεί;
Ν	Ναι θα μπορούσε να είναι και ίσες
Ε	Έτσι θα μπορούσε αλλά αν ήταν όπως πριν δεν θα μπορούσε;
Ν	Εννοώ αν το θέσουμε έτσι μπορεί να είναι και ίσες.

Ερώτηση 6η

Στην ερώτηση αυτή στην οποία οι μαθητές πρέπει να συγκρίνουν το πλήθος των αριθμών που περιέχονται στα διαστήματα (0,1) και (0,2) η αρχική απάντηση που δίνει η

Νικολέτα είναι η εξής “Και στα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Συγκρίνοντας τα δύο διαστήματα συμπεραίνουμε ότι το διάστημα (0,2) έχει διπλάσιους αριθμούς από το διάστημα (0,1). Οπότε το διάστημα (0,2) είναι μεγαλύτερο.”. Η μαθήτρια συγκρίνει το πλήθος των αριθμών των διαστημάτων (0,1) και (0,2) στηριζόμενη στο μήκος της σχηματικής αναπαράστασης ∞ διαστημάτων αυτών. Θεωρεί ότι, το πλήθος των αριθμών ενός διαστήματος είναι ανάλογο του μήκους του. Επίσης, είναι πιθανό να κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα επεκτείνοντας τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς στην έννοια του απείρου. Χρησιμοποίησε, δηλαδή, τις αισθήσεις της για να κάνει την πράξη $\infty + \infty$ καταλήγοντας με αυτόν τον τρόπο στο αποτέλεσμα 2∞.

Στην συνέντευξη όταν η συμμαθήτρια της Νικολέτας χρησιμοποιεί το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) η τελευταία δείχνει να πείθεται από το σκεπτικό αυτό.

Ε	Λοιπόν γιατί δεν είναι ίδιο το πλήθος των συνόλων;
Κ	Αυτό είναι υποσύνολο αυτού.
Ν	Έχει περισσότερες τιμές

Στην συνέχεια η Νικολέτα χρησιμοποιεί ένα επιχείρημα αντιστοιχίας με στόχο να ενισχύσει τον ισχυρισμό και την διαίσθησή της σύμφωνα με την οποία τα δύο σύνολα δεν είναι ισοπληθικά. Η μαθήτρια δεν αντιλαμβάνεται ότι για να αποφανθούμε την ισοπληθικότητα δύο απείρων συνόλων δεν είναι αναγκαίο κάθε αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων να αντιστοιχεί ένα προς ένα τα στοιχεία τους αλλά αρκεί να υπάρχει μία τέτοια αντιστοιχία. Η ίδια ακριβώς λανθασμένη εντύπωση είχε εκφραστεί και από την συμμαθήτριά της στην πέμπτη ερώτηση.

N	Ναι αλλά αν κάνουμε και εδώ την αντιστοιχία θα πούμε αυτό με αυτό , αυτό με αυτό ορίστε
K	Μετά δεν έχει
E	Το ίδιο που μου λέγατε πριν δηλαδή
K	Ναι αλλά πριν βρήκαμε αντιστοιχία
E	Εδώ δεν μπορούμε να βρούμε
K	Όχι αυτό είναι συγκεκριμένο διάστημα από το 0 έως το 1 άρα η αντιστοιχία τους τελειώνει εδώ στο 1 και το υπόλοιπο δεν έχει αντιστοιχία

Η Νικολέτα λίγο αργότερα διατυπώνει την άποψη ότι για να είναι δύο σύνολα ισοπληθικά απαιτείται να έχουν τα ίδια στοιχεία. Η μαθήτρια συγχέει την έννοια της ισοπληθικότητας με αυτήν της ισότητας δύο συνόλων.

N	Και εγώ το ίδιο πιστεύω υπάρχουν αριθμοί εδώ μέσα που δεν υπάρχουν στο άλλο σύνολο

Η μαθήτρια όπως φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό και εφαρμόζει διαισθητικά πράξεις με το άπειρο. Ουσιαστικά αναγνωρίζει το $\infty+1$ ως έναν αριθμό μεγαλύτερο από το άπειρο κατά 1. Επεκτείνει δηλαδή τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και για το άπειρο.

N	Αφού αυτό το σύνολο είναι ίσο με αυτό έχουν το ίδιο πλήθος λογικά	Το (0,1)
E	Αυτό με τον εαυτό του ναι	
N	Αν προσθέσουμε και κάτι ακόμα το από κάτω δεν θα χει παραπάνω;	

Ερώτηση 7η

Η Νικολέτα συγκρίνει τα σύνολα Α={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και Β={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...} επεκτείνοντας τις ιδιότητες των πράξεων και για το άπειρο όπως ακριβώς έκανε και η συμμαθήτριά της. Η απάντηση που δίνει είναι “Τα σύνολα Α και Β δεν είναι ισοπληθικά διότι το σύνολο Β έχει 4 αριθμούς παραπάνω από το Β”. από την απάντησή της φαίνεται ότι η Νικολέτα αντιλαμβάνεται το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό διότι υπό αυτήν την έννοια το χρησιμοποιεί για να κάνει πράξεις.

Στην συνέντευξη η συμμαθήτρια της Νικολέτας καταφέρνει να βρει την συνάρτηση με την οποία αντιστοιχίζονται τα στοιχεία των δύο συνόλων και η Νικολέτα πείθεται για την ισοπληθικότητα.

Ερώτηση 8η

Η Νικολέτα στην ερώτηση αν δύο άπειρα σύνολα είναι πάντα ισοπληθικά απαντάει ως εξής "Δύο άπειρα σύνολα υπάρχει περίπτωση να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, αλλά αυτό είναι η εξαίρεση συνήθως το άπειρο είναι υποκειμενικό για το κάθε άτομο οπότε θα παίρνει και διαφορετικές διαστάσεις.". Η μαθήτρια προσδίδει μία υποκειμενικότητα στην έννοια του απείρου βασική αιτία για αυτό είναι το ότι επειδή το άπειρο έρχεται σε αντίθεση με την καθημερινή αντίληψη μας δεν μπορεί να προσδιοριστεί αντικειμενικά. Σύμφωνα με την μαθήτρια δύο άπειρα σύνολα μπορεί να είναι ή να μην είναι ισοπληθικά.

Στην συνέντευξη η μαθήτρια φαίνεται μπερδεμένη διότι ενώ έχει αλλάξει γνώμη και υποστηρίζει ότι δύο άπειρα σύνολα θα είναι πάντα ισοπληθικά δυσκολεύεται να πιστέψει ότι πάντα θα υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Αυτό γίνεται σαφές με τα παρακάτω αποσπάσματα.

Ε	Τώρα τι έχετε να πείτε μετά από όλα αυτά δύο άπειρα σύνολα έχουν
Ε	Νικολέτα συμφωνείς;
Ν	Δεν συμφωνώ αλλά πως να το αιτιολογήσω
Ε	Γιατί; ποια είναι η γνώμη σου;
Ν	Αυτό με την αντιστοιχία δεν μπορώ υπάρχει πάντα;
Ε	Τι πιστεύεις;
Ν	Μετά από όλο αυτό θα απάνταγα ναι αλλά δεν είμαι ακόμα σιγουρη για το πάντα

Ερώτηση 9η

Η ένατη ερώτηση αφορά στην σύγκριση του πλήθους στοιχείων του συνόλου των πραγματικών με το αντίστοιχο των φυσικών. Η απάντηση της Νικολέτας είναι η ακόλουθη "Εφόσον το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμπεριλαμβάνει το σύνολο των φυσικών, οι πραγματικοί αριθμοί θα είναι οι φυσικοί συν κάτι ακόμα. Οπότε δεν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.". Το κριτήριο σύγκρισης που χρησιμοποιεί η μαθήτρια είναι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Επιπλέον η Νικολέτα θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό καθώς χρησιμοποιεί τις αισθήσεις τους για πράξεις με το άπειρο επεκτείνοντας διαισθητικά τις ιδιότητες των πράξεων και για το άπειρο.

Στην συζήτηση που ακολούθησε η Νικολέτα προσπάθησε να υπερασπιστεί την αρχική της απάντηση όπως φαίνεται παρακάτω.

Ν	Αφού οι πραγματικοί περιέχουν και τους φυσικούς. Πως θα μπορώ να το αντιστοιχίσω πάντα σε έναν φυσικό;
Ε	Λες ότι δεν γίνεται δηλαδή;
Ν	Εγώ δεν σκέφτομαι κάτι που θα μπορούσε ...

Η μαθήτρια αργότερα στην συνέντευξη εμφανίζεται πεπεισμένη για την ισοπληθικότητα των δύο συνόλων καθώς και για την ύπαρξη μίας αντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων ακόμα και αν δεν μπορεί να την βρει. Αυτό φαίνεται από τα ακόλουθα αποσπάσματα.

Ε	Τι θα απαντούσατε τώρα;
Ν	Ότι υπάρχει κάποια αντιστοιχία και θα έχουν το ίδιο πλήθος
Ν	Κάτι υπάρχει που τα συνδέει αλλά στο επίπεδο που έχω φτάσει εγώ με τα μαθηματικά δεν μπορώ να το βρω
Ε	Άρα υπάρχει κάτι που κάποιος το χει βρει
Ν	Μπορεί να μην το έχει βρει
Ε	Οπότε πάντα δύο άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά;
Ν	Μετά από όλα αυτά που είπαμε ναι

3.3.ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Αποτελέσματα απαντήσεων Γιώργου

Ερώτηση 1η

Στην πρώτη ερώτηση στην οποία ζητείται από τους μαθητές να γράψουν μία πρόταση με την λέξη "άπειρο" σε εξωμαθηματικό πλαίσιο ο Γιώργος γράφει "Θα ήθελα να ταξιδέψω στο άπειρο και ακόμα παραπέρα". Από την πρόταση που δίνει ο μαθητής φαίνεται να κατανοεί ότι το άπειρο έχει κάποιου είδους όρια τα οποία όμως είναι υπερβάσιμα. Η αντίληψη του απείρου που διαθέτει ο μαθητής είναι αυτή ενός μεγάλου αριθμού. Επιπλέον ο Γιώργος αντιλαμβάνεται τοπολογικά την έννοια του απείρου δηλαδή με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο. Ο μαθητής αναφέρεται στην έννοια ως κάτι το πολύ μακρινό αναφέρεται όμως και σε κάτι που υπάρχει "παραπέρα" από το άπειρο. Η ύπαρξη μίας έννοιας που υπερβαίνει αυτή του απείρου δεν είναι αντιφατική με την έννοια του απείρου στο νου του μαθητή.

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης ο μαθητής στην ερώτηση που του γίνεται σχετικά με το τι νομίζει ότι είναι το άπειρο απαντάει ότι είναι κάτι "μακρινό" το οποίο συμφωνεί με την αρχική του απάντηση. Λίγο παρακάτω ο ίδιος μαθητής υποστηρίζει ότι το άπειρο είναι "κάτι που δεν τελειώνει". Τονίζεται και πάλι η χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί. Η τελευταία άποψη που εκφράζει αντιβαίνει προφανώς στην έννοια του απείρου όπως την χρησιμοποιεί στην πρόταση που είχε κατασκευάσει αρχικά δηλαδή στην ταύτιση του απείρου με έναν μεγάλο αριθμό. Η αντίφαση που ενέχει αυτό το σημείο δεν γίνεται αντιληπτή από τον μαθητή. Τα παραπάνω φαίνονται στους παρακάτω στοίχους.

	Ο Γιώργος μας έγραψε «Θα ήθελα να ταξιδέψω στο άπειρο και ακόμα παραπέρα»
	Γιατί το έγραψες αυτό; Τι νομίζεις ότι είναι το άπειρο;
Γ	Μακρινό...;
Ε	Δεν μπορούμε δηλαδή να το φτάσουμε; Ή μπορούμε;
Γ	Κάτι που δεν τελειώνει

Ερώτηση 2η

Ο Γιώργος συνδέει άμεσα την έννοια του απείρου συνόλου με τα Μαθηματικά. Η πρόταση που γράφει στην αρχική του απάντηση είναι ότι κάθε άπειρο σύνολο σχετίζεται με ένα σύνολο άπειρων αριθμών τους οποίους χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις μαθηματικών. Ουσιαστικά ο Γιώργος υποστηρίζει ότι δεχόμαστε συμβατικά άπειρα μόνο στα Μαθηματικά για να μπορούμε να λύνουμε ασκήσεις. Εννοεί ότι τα άπειρα σύνολα περιέχουν αποκλειστικά αριθμούς. Η απάντηση του Γιώργου αιτιολογείται αν σκεφτούμε ότι η επιστήμη των μαθηματικών ασχολείται με άπειρα σύνολα αριθμών και αυτά είναι τα μόνα άπειρα σύνολα που μας είναι γνωστά.

Στην συζήτηση που ακολούθησε επηρεασμένος ίσως από την απάντηση της Ίνας αναφέρει ότι το σύμπαν είναι άπειρο. Ο μαθητής κατά την συνέντευξη επιμένει ότι άπειρα σύνολα γίνονται δεκτά μόνο στο πλαίσιο της επιστήμης των Μαθηματικών μέχρι την στιγμή που αναφέρει ότι άπειρα σύνολα μπορούν να υπάρξουν και στα όνειρά μας. Όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα Γιώργος διαθέτει μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου αυτό φαίνεται από το ότι δίνει έμφαση στα συναισθήματα, την πνευματικότητα (κάτι που οι άνθρωποι ονειρεύονται). Από όλα τα παραπάνω φαίνεται ότι ο μαθητής εννοεί ότι τα άπειρα σύνολα δεν έχουν πραγματική υπόσταση και ότι υπάρχουν ή κατασκευάζονται αποκλειστικά και μόνο στο νου μας.

Γ	Ναι μόνο αριθμούς στα Μαθηματικά
Ε	Αλλού ;
Γ	Εεε... δεν νομίζω να χρησιμοποιείται και αλλού
Ε	Δεν υπάρχει πουθενά αλλού δηλαδή
Γ	Ε το σύμπαν είναι άπειρο
Ε	Άρα το χρησιμοποιούμε μόνο στα μαθηματικά για ασκήσεις;
Γ	Γενικά για κάτι που ονειρευόμαστε

Ερώτηση 3η

Σχετικά με το τρίτο ερώτημα στο οποίο πρέπει να συγκρίνει το πλήθος των σημείων δύο διαφορετικής ακτίνας ομόκεντρων κύκλων στην αρχική απάντηση που δίνει ο Γιώργος υποστηρίζει ότι το πλήθος των στοιχείων των δύο κύκλων είναι άπειρο και ότι και οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο πλήθος σημείων διότι και οι δύο όπως γράφει είναι 360◦ και δεν γίνεται να έχουν λιγότερα ή περισσότερα στοιχεία ο ένας από τον άλλον. Είναι πιθανό να υπονοεί την αντιστοιχία που προκύπτει αν φέρω ακτίνες του εξωτερικού κύκλου.

Όταν ο Γιώργος στην συζήτηση που ακολούθησε ρωτάται γιατί έγραψε ότι το πλήθος των σημείων του κάθε κύκλου είναι άπειρο απαντάει ότι ο λόγος είναι πως δεν υπάρχει δυνατότητα μέτρησης του πλήθους των σημείων. Ο Γιώργος ταυτίζει εννοιολογικά τα άπειρα σύνολα με τα μη μετρήσιμα σύνολα.

Ε	Γιώργο ;
Γ	Δεν μπορώ να τα μετρήσω γιαυτό είναι άπειρα

Στην συνέχεια της συνέντευξης κάνει την κατάλληλη αντιστοιχία φέρνοντας τις ακτίνες των κύκλων θέλοντας να δείξει ότι κάθε σημείο του μικρού κύκλου αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο του μεγάλου.

Ε	Τι έκανες με το στυλό σου;
Γ	Αυτό
Ε	Τι θέλεις να δείξεις με αυτό;
Γ	Ότι κάθε σημείο του μικρού κύκλου αντιστοιχεί σε ένα του μεγάλου
Ε	Πως θα το δείξουμε αυτό; Μπορείς να σκεφτείς κάτι
Γ	Να τραβήξουμε μία γραμμή

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Ο Γιώργος για να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A={2,4,6,8,10,...} και B={1.2,3,4,5,...} αναφέρει ότι το σύνολο Α περιέχει τους άρτιους ενώ το Β τους ακεραίους και συμπεραίνει ότι το Β έχει περισσότερα στοιχεία. Το πρώτο που μπορούμε να παρατηρήσουμε στην απάντηση του Γιώργου είναι η σύγχυση που υπάρχει ανάμεσα στους ακεραίους και τους φυσικούς αριθμούς. Η απάντηση του Γιώργου φαίνεται να βασίζεται στη σχέση υποσυνόλου και πιο συγκεκριμένα στο κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Το κριτήριο αυτό όταν χρησιμοποιείται για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων είναι ορθό δεν γενικεύεται, όμως, και στην σύγκριση απείρων συνόλων.

Ο Γιώργος χρησιμοποιεί το κριτήριο αυτό και κατά την συνέντευξη, όπως φαίνεται παρακάτω, όταν υποστηρίζει ότι το σύνολο Β περιέχει τα στοιχεία του Α αλλά και κάποια επιπλέον, τους περιττούς. Η μέθοδος σύγκρισης συνόλων που χρησιμοποιεί ο μαθητής είναι σωστή μόνο αν τα συγκρινόμενα σύνολα έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Ο Γιώργος γενικεύει την ισχύ του κριτηρίου και για μη πεπερασμένα σύνολα δηλαδή σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων. Αυτό δείχνει ότι δεν αντιλαμβάνεται τις θεμελιώδεις δομικές διαφορές ανάμεσα στα πεπερασμένα και τα άπειρα σύνολα.

Γ	Το Α έχει ζυγούς και το Β ζυγούς και περιττούς άρα το Β έχει περισσότερους

Στο παρακάτω απόσπασμα ο μαθητής υποστηρίζει ότι το πλήθος των φυσικών αριθμών είναι διπλάσιο από τους άρτιους, δηλαδή (πλήθος στοιχείων Β)=2(πλήθος στοιχείων Α). Ο Γιώργος θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό και χρησιμοποιούν τις αισθήσεις τους για πράξεις με το άπειρο επεκτείνοντας τις ιδιότητες των πράξεων. Το μισό του απείρου θεωρείται μικρότερο από το άπειρο.

Ε	Και οι φυσικοί;
Ι	Είναι ακόμα πιο πολλοί
Γ	Οι διπλάσιοι

Όταν όμως τα σύνολα γραφούν το ένα κάτω από το άλλο ο μαθητής βρίσκει άμεσα την αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Αντιλαμβάνεται γρήγορα ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α προκύπτει από τον διπλασιασμό των αντίστοιχων στοιχείων του Β συμπεραίνοντας ότι τα δύο αυτά σύνολα είναι ισοπληθικά, όπως φαίνεται από τον διάλογο που ακολουθεί.

Ε	Για να το δούμε λίγο διαφορετικά
Γ	Κάθε φορά το διπλασιάζω
	Οπότε από εδώ πάω εδώ επί δύο.

Ερώτηση 4β

Στο συγκεκριμένο υποερώτημα ζητείται η σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={1,2,3,4,...} και Β={1,3,5,7,...}. Η απάντηση που δίνει ο Γιώργος είναι "Το Α είναι ακέραιοι αριθμοί ενώ το Β μονοί άρα το Α έχει περισσότερα στοιχεία". Το κριτήριο που φαίνεται να χρησιμοποιεί ο μαθητής είναι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Κατά την συνέντευξη ο Γιώργος προσπαθεί να βρει μία αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων αλλά η συμμαθήτριά του τον προλαβαίνει. Ο μαθητής αφού καταλάβει τον τρόπο με τον οποίο επιτυγχάνεται η αντιστοιχία πείθεται για την ισοπληθικότητα των δύο συνόλων.

Ι	2ν-1 ; βγαίνει...
	Άρα είναι ίσοι
Ε	Γιώργο ;
Γ	Ναι είναι σωστό άρα τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος

Ερώτηση 5η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο ημιευθειών ο Γιώργος απαντάει ότι "Η πρώτη ημιευθεία έχει διπλάσιο μήκος από την δεύτερη άρα το πλήθος της πρώτης ημιευθείας θα είναι διπλάσιο από το πλήθος της δεύτερης.". Ο μαθητής όχι μόνο συνδέει άμεσα το πλήθος των σημείων με το μήκος αλλά επηρεασμένος και από την σχηματική αναπαράσταση δίνει και ποσοτική σχέση μεταξύ του πλήθους των σημείων κάνοντας επέκταση των ιδιοτήτων των πράξεων και για την έννοια του απείρου. Ο Γιώργος προσπαθεί να υπερασπιστεί την άποψη του και κατά την διάρκεια της συνέντευξης.

Γ	Η πρώτη ημιευθεία έχει διπλάσιο μήκος από την δεύτερη άρα το πλήθος της πρώτης ημιευθείας θα είναι διπλάσιο από της δεύτερης
Ε	Το διπλάσιο πως το σκέφτηκες;
Γ	Η δεύτερη ημιευθεία είναι η μισή της πρώτης το ½

Στην συνέχεια της συνέντευξης ο μαθητής κάνει χρήση του κριτηρίου μέρος-όλο υποστηρίζοντας ότι η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα σημεία σε σχέση με την δεύτερη διότι διαθέτει επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Γ	Η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα σημεία από την δεύτερη γιατί έχει διαφορά ένα μήκος ΑΒ

Έπειτα η συμμαθήτρια του Γιώργου βρίσκει την κατάλληλη αντιστοιχία μετατοπίζοντας την δεύτερη ώστε το αρχικό της σημείο να είναι κάτω από το αρχικό σημείο της πρώτης και έτσι ο Γιώργος πείθεται για το ότι το πλήθος των σημείων των δύο ημιευθειών είναι ίδιο.

Ερώτηση 6η

Στην έκτη ερώτηση στην οποία ο Γιώργος έπρεπε να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των διαστημάτων (0,1) και (0,2) η απάντησή του είναι "Και στα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Το πλήθος, όμως, των στοιχείων στο διάστημα (0,2) είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων στο (0,1)". Ο μαθητής δεν αιτιολογεί την απάντησή του και δεν εξηγεί το πως κατέληξε σε αυτήν.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί ο Γιώργος φαίνεται πως δεν έχει κατανοήσει την θεμελιώδη διαφορά μεταξύ φυσικών και πραγματικών αφού θεωρεί ότι η ύπαρξη επομένου αριθμού είναι ιδιότητα και των πραγματικών. Δεν αντιλαμβάνεται την πυκνότητα των πραγματικών αριθμών. Ισχυρίζεται ότι ο επόμενος πραγματικός αριθμός από το μηδέν είναι ένας αριθμός που έχει ακέραιο μέρος μηδέν και στο δεκαδικό μέρος έχει άπειρα μηδενικά και στο "τέλος" την μονάδα. Εδώ είναι κρυμμένη και η πεποίθηση ότι μια άπειρη σειρά αριθμών έχει ένα τέλος. Ουσιαστικά και πάλι η έννοια του απείρου ταυτίζεται με έναν πολύ μεγάλο αριθμό.

Γ	Ξεκινάω 0 και μετά μηδέν κόμμα τόσα μηδενικά 1 ...
Ε	Πόσα μηδενικά;
Γ	Άπειρα και βάζω στο τέλος 1
Ε	Μα ποιο τέλος αφού το άπειρο μου έλεγες πριν δεν έχει τέλος
Γ	Ε θα κάνουμε αυτό 0,0001

Αργότερα και οι δύο μαθητές προσπαθούν να βρουν την αντιστοιχία ο Γιώργος τελικά προτείνει την συνάρτηση f(x)=2x.

Γ	Για κάθε στοιχείο αυτού θα αντιστοιχεί το διπλάσιο από αυτό;
Ε	Το διπλάσιο;
Γ	Ναι
Ε	Λοιπόν να δούμε την αντιστοίχηση...

Ερώτηση 7η

Η απάντηση που αρχικά δίνει ο Γιώργος σχετικά με την σύγκριση των συνόλων A={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και B={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...} είναι η εξής "Τα σύνολα αυτά δεν είναι ισοπληθικά διότι το πρώτο σύνολο ξεκινάει από τους φυσικούς αριθμούς ενώ το δεύτερο από τους αρνητικούς άρα το πλήθος του δεύτερου θα είναι μεγαλύτερο.". Ο μαθητής κάνει χρήση του κριτηρίου μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης ο Γιώργος προσπαθεί να βρει την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων την οποία τελικά βρίσκει η συμμαθήτριά του.

Ερώτηση 8η

Στην 8η ερώτηση, η οποία αφορά την δυνατότητα γενίκευσης των συμπερασμάτων των προηγούμενων 7 ερωτήσεων ο Γιώργος στην απάντησή του γράφει ότι αν δύο σύνολα είναι άπειρα θα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων διότι δεν θα τελειώνουν ποτέ. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί και από το οποίο προκύπτει η απάντησή του είναι το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Στο απόσπασμα που ακολουθεί εμφανίζεται η αντίληψη του Γιώργου ότι μεταξύ των στοιχείων δύο άπειρων συνόλων θα υπάρχει πάντα μια αντιστοιχία. Επιμένει δύο άπειρα σύνολα θα είναι πάντα ισοπληθικά εδώ φαίνεται και ο βαθμός στον οποίο ο μαθητής έχει επηρεαστεί από την όλη συζήτηση και τις απαντήσεις που δόθηκαν στις προηγούμενες ερωτήσεις. Επιπλέον χρησιμοποιεί ξανά το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά). Εκτός αυτού διαφαίνεται και η έντονη απαγωγική σκέψη που τον διακατέχει αφού γενικεύει με μεγάλη ευκολία συμπεράσματα τα οποία έχει δείξει μόνο σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ε	Γιώργο εσύ τι έχεις γράψει; Αν δύο σύνολα είναι άπειρα θα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος στοιχείων γιατί δεν θα τελειώνουν ποτέ
	Μετά από όλα αυτά που κάναμε
Γ	Πρέπει να υπάρχει αντιστοιχία
Γ	Πάντα θα υπάρχει

Ερώτηση 9η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των συνόλων των πραγματικών και των φυσικών αριθμών ο Γιώργος απαντάει ότι θα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων διότι είναι και τα δύο άπειρα σύνολα. Εφαρμόζει για μία ακόμα φορά το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά). Κατά την διάρκεια της συζήτησης που ακολούθησε ο μαθητής επιμένει στην αρχική του απάντηση υποστηρίζοντας ότι μεταξύ δύο συνόλων θα υπάρχει πάντα μία συνάρτηση μεταξύ των στοιχείων τους.

Ε	Και αν δεν υπάρχει
Ι	Ε τότε δεν είναι
Γ	Θα υπάρχει δεν γίνεται να μην υπάρχει

Αποτελέσματα απαντήσεων Ίνας

Ερώτηση 1η

Η πρόταση που κατασκευάζει η Ίνα χρησιμοποιώντας την λέξη άπειρο είναι η εξής: “Το σύμπαν είναι άπειρο”. Σύμφωνα με την άποψη αυτή η έννοια του απείρου είναι μία ιδιότητα που ενυπάρχει στο υποκείμενο της πρότασης δηλαδή το σύμπαν. Αυτό που δεν είναι σαφές είναι το αν η έννοια του απείρου ταυτίζεται με αυτήν του σύμπαντος. Για να διερευνηθεί το τι εννοεί η μαθήτρια και το τι πιστεύει για το άπειρο, πρέπει να εξετάσουμε το πως σκέφτεται για το σύμπαν. Από την απάντηση που δίνει η μαθήτρια φαίνεται να αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου τοπολογικά. Η τοπολογική αντίληψη του απείρου συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο και δεν έχει μεγαλύτερο αριθμό. Εκτός αυτού η απάντηση της Ίνας δείχνει ότι η ίδια θεωρεί ότι η έννοια του απείρου έρχεται σε αντίθεση με αυτά που αντιλαμβανόμαστε την καθημερινότητά μας.

Στην συνέντευξη η Ίνα αναφέρει ότι το πρώτο πράγμα που σκέφτεται όταν ακούει την λέξη άπειρο είναι το σύμπαν. Συνεπώς οι έννοιες του απείρου και του σύμπαντος συνδέονται στενά στο εννοιολογικό δίκτυο της μαθήτριας. Σε επόμενη ερώτηση που της γίνεται αν συμφωνεί με την άποψη του συμμαθητή της ότι το άπειρο δεν έχει όρια, απαντάει ότι είναι κάτι τεράστιο αφήνοντας να εννοηθεί ότι τέτοια όρια υπάρχουν. Το άπειρο γίνεται αντιληπτό ως κάτι μεγάλο που έχει όρια τα οποία όμως όπως ισχυρίζεται είναι μακριά από τις δυνατότητες του νου. Στο σημείο αυτό δίνεται έμφαση στην πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου σύμφωνα με την οποία ο νους δεν είναι σε θέση να καταλάβει τίποτα για το άπειρο και μόνο ο Θεός μπορεί να το αποκαλύψει. Στην συνέχεια αναφέρει ότι είναι κάτι πολύ μεγάλο που δεν μπορεί να το καταλάβει. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο απόσπασμα του διαλόγου που ακολουθεί.

Ε	Ωραία. Η Ίνα μας έγραψε ότι το σύμπαν είναι άπειρο
	Γιατί ; για τον ίδιο λόγο με τον Γιώργο;
Ι	Πέρυσι έκανα αστρονομία και ... δεν ξέρω κάθε φορά που... προσπαθούσα να φανταστώ πως είναι το σύμπαν ή κάθε φορά που κοιτάω τον ουρανό.... έτσι το χω στο μυαλό μου σαν κάτι ... ή κάθε φορά που ακούω την λέξη άπειρο στην τάξη σκέφτομαι το σύμπαν πρώτα.
Ε	Σαν κάτι που δεν τελειώνει όπως και ο Γιώργος;
Ι	Σαν κάτι πολύ μεγάλο που δεν μπορώ να το καταλάβω κάτι τεράστιο

Ερώτηση 2η

Ο στόχος της ερώτησης αυτής είναι να δοθεί μία ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται για την έννοια του απείρου συνόλου διατυπώνοντας μία σχετική πρόταση. Η Ίνα αναφέρει ότι άπειρο σύνολο είναι κάτι “ατελείωτο, που δεν έχει όρια”. Η μαθήτρια αναφέρει ότι το άπειρο σύνολο είναι το σύνολο το οποίο έχει ατελείωτα σε πλήθος στοιχεία και κατά την διάρκεια της συνέντευξης.

Ε	Το άπειρο σύνολο είναι ένα σύνολο που έχει μέσα στοιχεία
Ι	Ναι, ατελείωτα
Ε	Το πλήθος τους είναι ατελείωτο;
Ι	Ναι

Τονίζεται με τον τρόπο αυτό η χρονική διάσταση του απείρου η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί (το άπειρο είναι ατελείωτο).

Στη συνέχεια του διαλόγου η μαθήτρια θέλοντας να εξηγήσει την έννοια του απείρου συνόλου υποστηρίζει την ισοπληθικότητα του με το πλήθος των κόκκων της άμμου σε μία παραλία ή ακόμα και με το πλήθος των άστρων. Για μία ακόμα φορά η μαθήτρια ταυτίζει το άπειρο με έναν μεγάλο αριθμό. Στον ακόλουθο απόσπασμα η μαθήτρια υπαινίσσεται ότι η διαδικασία της μέτρησης προϋποθέτει την ύπαρξη ενός απείρου συνόλου για να αντιστοιχιστούν τα υπό μέτρηση αντικείμενα.

Ι	Ναι
	Αυτό πάλι το σκεφτόμουνα... αν ήμουν σε μία παραλία και ήθελα να μετρήσω τους κόκκους της άμμου
Ε	Το έχεις ακούσει κάπου αυτό;
Ι	Ναι μας λέγανε ότι όταν θέλετε να μετρήσετε κάτι και είναι πάρα πολύ μεγάλο μας λέγανε μετρήστε τα αστέρια ή τους κόκους της άμμου
	Άρα και αν έχω ένα σύνολο άπειρο που δεν τελειώνει είναι απίστευτα μεγάλο...
Ε	Το σύνολο των αστεριών δηλαδή είναι άπειρο;
Ι	Ναι

Στο ακόλουθο μέρος του διαλόγου η Ίνα ταυτίζει κάτι το πολύ μεγάλο με κάτι το ατελείωτο και κατά συνέπεια με το άπειρο. Όταν ρωτάτε αν το πλήθος των αστεριών είναι άπειρο απαντάει ότι δεν ξέρει και ότι μοιάζει να είναι πολύ μεγάλο. Η μαθήτρια χωρίς να γνωρίζει το πλήθος των αστεριών συμπεραίνει ότι είναι άπειρο. Η απειρία δηλαδή είναι μια κατάσταση στην οποία δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πλήθος των αντικειμένων. Η Ίνα διαθέτει μία πνευματικά αντίληψη της έννοιας του απείρου καθώς πιστεύει ότι το άπειρο είναι κάτι μη προσβάσιμο στο νου. Προσδιορίζει το πλήθος των αστεριών με έναν αριθμό το πρώτο ψηφίο του οποίου είναι 9 και ακολουθούν πολλά μηδενικά. (πεπερασμένα). Πάλι το άπειρο ταυτίζεται με έναν μεγάλο αριθμό.

	Άρα και αν έχω ένα σύνολο άπειρο που δεν τελειώνει είναι απίστευτα μεγάλο...
Ε	Το σύνολο των αστεριών δηλαδή είναι άπειρο;
Ι	Ναι
Ε	Μπορεί τα αστέρια να είναι δισεκατομμύρια αυτό σημαίνει ότι θα είναι και άπειρα;
Ι	Μπορεί να είναι (δισεκατομμύρια) μπορεί και να μην είναι.... δεν ξέρω... μου φαίνεται κάτι πολύ μεγάλο.
Ε	Πόσο μεγάλο;
Ι	Ξεκινάμε να γράψουμε από το 9 και πέρα και τελειώνουν τα μηδενικά εκεί κάτω

Σχετικά με το πλήθος των κόκκων άμμου αναφέρει ότι είναι άπειρο και όχι ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Σε αυτό το σημείο η μαθήτρια φαίνεται να διακρίνει την έννοια του απείρου από αυτήν ενός μεγάλου αριθμού. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα έλεγε παραπάνω. Υποστηρίζει ότι για να αποτελείτε η άμμος από άπειρους κόκκους πρέπει να φτιάχνονται συνεχώς νέοι. Συνεπώς το άπειρο σύνολο συνδέεται με την έννοια του δυνητικού απείρου δηλαδή με μια άπειρη διαδικασία. Επιπλέον η Ίνα δίνει στην έννοια του απείρου μία χωρικό-ρυθμική διάσταση (το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει και είναι σε εξέλιξη).

Ε	Οι κόκκοι της άμμου;Τελειώνουν ή δεν τελειώνουν;
Ι	Δεν τελειώνουν
Ε	Ούτε και αν είχα πολλές ζωές να μετράω κόκκους άμμου;
Ι	Όχι γιατί πάντοτε θα φτιάχνονται καινούριοι
Ε	Από τι θα φτιάχνονται;
Ι	Α δεν ξέρω πως φτιάχνεται η άμμος αλλά φαντάζομαι θα φτιαχτούν δεν μπορεί...

Ερώτηση 3η

Στην ερώτηση σύγκρισης του πλήθους των σημείων δύο ομόκεντρων κύκλων με διαφορετικέ ακτίνες η Ίνα αρχικά απαντάει ότι και οι δύο έχουν πάρα πολλά σημεία αλλά ο εξωτερικός κύκλος έχει περισσότερα διότι έχει μεγαλύτερη περίμετρο. Το πρώτο που πρέπει να παρατηρήσουμε στην απάντηση αυτή είναι ότι η μαθήτρια δηλώνει ότι ένας κύκλος έχει πάρα πολλά σημεία αλλά όχι άπειρα. Είναι πιθανό με αυτόν τον τρόπο να προσπαθεί να αποφύγει την σύγκριση απείρων συνόλων. Η μαθήτρια απαντάει διαισθητικά γράφοντας ότι ο εξωτερικός κύκλος έχει περισσότερα σημεία από τον εσωτερικό. Επιπλέον θεωρεί ότι το πλήθος των σημείων ενός κύκλου είναι ανάλογο του μεγέθους του και κατά συνέπεια ανάλογο της ακτίνας του.

Στο μέρος του διαλόγου που ακολουθεί η Ίνα αναφέρει ότι αρχικά είχε σκεφτεί ότι τα σημεία είναι άπειρα αλλά τότε οι κύκλοι θα είχαν το ίδιο πλήθος σημείων. Το συμπέρασμα αυτό το απέρριψε ως αντιφατικό λόγω του μεγέθους των δύο κύκλων. Στο σημείο αυτό η Ίνα χρησιμοποιεί για την σύγκριση δύο απείρων συνόλων το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Ι	Εγώ έβαλα ότι έχει πάρα πολλά στην αρχή σκέφτηκα άπειρα αλλά μετά κοίταξα και τον άλλον κύκλο που είναι πιο μεγάλος ... και δεν μπορεί να είναι άπειρα και μέσα γιατί άμα ήταν τότε οι δύο κύκλοι θα ήταν και ίσοι οπότε είναι πάρα πολλά ένας τεράστιος αριθμός τον οποίο δεν μπορούμε να τον βρούμε και ο μεγαλύτερος κύκλος έχει ακόμα πιο πολλά σημεία γιατί έχει μεγαλύτερη περίμετρο οπότε χωράνε πιο πολλά σημεία

Σε άλλο σημείο η μαθήτρια υποστηρίζει ότι δεχόμαστε συμβατικά πως το πλήθος των σημείων είναι άπειρο. Υπάρχει δυσκολία στο να αντιληφθεί το άπειρο ως πραγματικό άπειρο. Υπονοείται ότι ένα πολυπληθές σύνολο αντικειμένων μπορεί να θεωρηθεί κατά σύμβαση άπειρο εξαιτίας του μεγάλου πλήθος των στοιχείων του. Το άπειρο και πάλι ταυτίζεται με έναν μεγάλο αριθμό.

Ε	Οι κύκλοι είναι διαφορετικοί. Εμείς θέλουμε να συγκρίνουμε το πλήθος των σημείων τους.
Ι	Δεν νομίζω να υπάρχει κύκλος με άπειρα σημεία απλά έχει τόσα πολλά που είναι εύκολο να λέμε ότι έχει άπειρα. Αν κάτσεις και τα μετρήσεις ... δεν μπορείς κιόλας πρακτικά οπότε...

Η Ίνα τελικά πείθεται για την ισοπληθικότητα των συνόλων των σημείων των δύο κύκλων εξαιτίας της αντιστοίχησης που δείχνει ο συμμαθητής της. Θεωρεί λοιπόν , επαρκή αιτιολόγηση την εύρεση κατάλληλης αντιστοίχησης.

Ι	Δεν ξέρω δεν μπορώ να το δω τώρα...νομίζω ότι τελικά έχει δίκιο ο Γιώργος

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Όσο αφορά στην σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={2,4,6,8,10,...} και Β={1,2,3,4,5,...} η αρχική απάντηση της Ίνας είναι παρόμοια με την αρχική απάντηση του συμμαθητή της. Η Ίνα γράφει "Το σύνολο Β έχει διπλάσια στοιχεία αφού περιλαμβάνει και τους περιττούς και τους άρτιους ενώ το Α περιλαμβάνει μόνο τους άρτιους.". Και οι δύο μαθητές πιστεύουν ότι ένα σύνολο και το υποσύνολο του είναι αδύνατο να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων και χρησιμοποιούν για την σύγκριση το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Η άποψη αυτή αν περιοριστούμε στα πεπερασμένα σύνολα είναι σωστή. Τι συμβαίνει όταν πρόκειται για άπειρα σύνολα; η μαθήτρια υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει διαφορά στον τρόπο σκέψης και συνεπώς στον τρόπο σύγκρισης. Επιπλέον η μαθήτρια θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό και χρησιμοποιεί διαισθητικά τις πράξεις με το άπειρο. Αναγνωρίζουν το 2∞ ως έναν αριθμό μεγαλύτερο από το άπειρο.

Στην συνέντευξη δηλώνει ότι το πλήθος των άρτιων μπορούμε να το βρούμε αν διαιρέσουμε το άπειρο, δηλαδή το πλήθος των φυσικών δια δύο.

	Πόσοι είναι οι ζυγοί;
Γ	2,4,6,8,...
Ε	Πόσοι; Το πλήθος τους
Γ	Άπειρο
Ι	Αν διαιρέσουμε το άπειρο δια δύο κάπως έτσι

Σε ένα άλλο σημείο η μαθήτρια υπονοεί ότι για να είναι δύο σύνολα ισοπληθικά πρέπει να έχουν τα ίδια στοιχεία, κάτι που είναι προφανώς λάθος ακόμα και για πεπερασμένα σύνολα. Σύμφωνα με την άποψη της Ίνας ένα άπειρο σύνολο μπορεί να είναι ισοπληθικό μόνο με τον εαυτό του.

Ι	Γιατί το Α ξεκινάει από το δύο όχι από το ένα δεν ξεκινάνε από το ίδιο

Όταν ο συμμαθητής της βρίσκει την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων η Ίνα καταλαβαίνει ότι αφού βρέθηκε η αντιστοιχία η ισοπληθικότητα των συνόλων είναι πλέον προφανής.

Ε	Για να το δούμε λίγο διαφορετικά
Γ	Κάθε φορά το διπλασιάζω
	Οπότε από εδώ πάω εδώ επί δύο.
Ι	Το διπλασιάζω
Ι	Είναι ίσα

Ερώτηση 4β

Η Ίνα συγκρίνει τα σύνολα Α={1,2,3,4,...} και Β={1,3,5,7,...} με το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) αφού η απάντηση που δίνει είναι η εξής "Το σύνολο Α έχει διπλάσια στοιχεία αφού περιέχει και τους άρτιους και τους περιττούς ενώ το Β μόνο τους περιττούς". Η αρχική απάντηση της μαθήτριας και σε αυτήν την ερώτηση βασίζεται στην σχέση του περιέχεσθαι μεταξύ των δύο συνόλων. Η Ίνα επεκτείνει δηλαδή τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και στην έννοια του απείρου.

Η Ίνα επιμένει και στην συνέντευξη στην αρχική της απάντηση και ο λόγος, όπως παραδέχεται είναι ότι δεν μπορεί να βρει την κατάλληλη αντιστοιχία. Στην συνέχεια η μαθήτρια αναζητεί μία συνάρτηση που να δίνει τον επόμενο στο σύνολο των περιττών δεν φαίνεται να έχει κατανοήσει το νόημα της 1-1 αντιστοιχίας μόνο μετά από την παρέμβαση της ερευνήτριας αντιλαμβάνεται ότι αναζητούμε συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων. Υποθέτει ότι η συνάρτηση είναι $f(\nu)=2\nu+1$ όμως γρήγορα καταλαβαίνει ότι αυτό δεν είναι σωστό διότι για $\nu=1$ έχω $f(\nu)=3$. Αναγκάζεται να την μετασχηματίσει στην $f(\nu)=2\nu-1$ την οποία και αναγνωρίζει ως την ζητούμενη συνάρτηση και συμπεραίνει αμέσως την ισοπληθικότητα των συνόλων.

Ι	Όχι γιατί δεν το βλέπω τώρα δεν βλέπω αντιστοιχία
Ε	Μήπως μπορούμε να βρούμε;
Γ	Επί 5 ; όχι ...
Ι	Είναι το προηγούμενο συν 1; Αυτό είναι το 3-1 αυτό το 5-2, 7-3,...
Ε	Εμείς θέλουμε να έχουμε μία αντιστοιχία από τους φυσικούς στους μονούς
	Δηλαδή για ένα στοιχείο αυτού του συνόλου η συνάρτηση να δίνει ένα στοιχείο αυτού
Ι	Δεν ξέρω...
Ι	2ν+1 ...
Ε	Για να το δούμε...
Ι	Δεν είναι...για ν=1 βγαίνει 3
	2ν-1 ; βγαίνει...

Ερώτηση 5η

Στην αρχική της απάντηση η Ίνα γράφει και οι δύο ημιευθείες έχουν άπειρα σημεία διότι συνεχίζονται απ άπειρον. Δηλαδή το πλήθος των σημείων μίας ημιευθείας θεωρείται ανάλογο με το μήκος του σχεδιασμένου τμήματός της. Η Ίνα συνεχίζει λέγοντας ότι η πρώτη ημιευθεία θα έχει περισσότερα σημεία διότι η αρχή της είναι πριν από την αρχή της δεύτερης. Η μαθήτρια απαντάει διαισθητικά παρασυρόμενη από την οπτική αναπαράσταση των δύο ημιευθειών. Στην απάντησή της η Ίνα υπονοεί ότι η πρώτη ημιευθεία έχει περισσότερα σημεία από την δεύτερη διότι είναι μεγαλύτερη κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Αναγνωρίζει το ∞+ΑΒ ως έναν αριθμό μεγαλύτερο από το άπειρο κατά το πλήθος των σημείων του ΑΒ. Επεκτείνει, δηλαδή, τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και στην έννοια του απείρου θεωρώντας το έναν μεγάλο αριθμό.

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης η μαθήτρια τονίζει ότι οι δύο ημιευθείες διαφέρουν κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Δηλαδή το πλήθος των σημείων της δεύτερης ημιευθείας είναι υποσύνολο του συνόλου των σημείων της πρώτης ημιευθείας . Η μαθήτρια συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων βασιζόμενη στην έννοια του περιέχεσθαι. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί είναι το το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Ο συλλογισμός αυτός είναι ορθός μόνο στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων, η μαθήτρια γενικεύει τη μέθοδο σύγκρισης και γι άπειρα σύνολα.

Ι	Δεν αρχίζουν στο ίδιο σημείο η πρώτη ξεκινάει πολύ πιο πριν θα έχουν πάντα μία διαφορά
Ε	Ποια θα είναι η διαφορά;
Ι	Το ΑΒ

Λίγο αργότερα η Ίνα προσπαθεί να βρει αντιστοιχία εργαζόμενη ανάλογα με το προηγούμενο γεωμετρικό παράδειγμα αυτό της τρίτης ερώτησης. Μετακινεί την δεύτερη ημιευθεία ώστε το αρχικό της σημείο να είναι κάτω από το αντίστοιχο της πρώτης. Η μαθήτρια βρίσκει την αντιστοιχία των σημείων φέροντας κάθετες και στις δυο ημιευθείες. Η Ίνα αναγνωρίζει την ισοπληθικότητα των συνόλων των σημείων των δύο ημιευθειών όμως υποστηρίζει όχι μόνο ότι η ισότητα αυτή δεν έπεται από το αρχικό σχήμα αλλά και ότι στο αρχικό σχήμα το πλήθος των σημείων των δύο ημιευθειών είναι διαφορετικό. Όταν καταλαβαίνει ότι η άποψη που υποστηρίζει ισοδυναμεί με ότι το πλήθος των σημείων μιας ημιευθείας εξαρτάται από την θέση της στο επίπεδο αναγκάζεται να αποδεχτεί την ισοπληθικότητα των σημείων των δύο ημιευθειών. Μάλιστα βρίσκει και την κατάλληλη αντιστοιχία στο αρχικό σχήμα ενώνοντας τα δύο αρχικά σημεία και συνεχίζοντας φέροντας παράλληλες.

Ε	Αν τα αντιστοιχίσουμε διαφορετικά;
Ι	Να πάω αυτήν πιο πίσω;
Ε	Για δοκίμασε το
Ε	Γιώργο ;
Γ	Το σκέφτομαι
Ε	Τώρα Ίνα ;
Ι	Έτσι όπως είναι εκεί πάντως δεν είναι ίσες
Ε	Δηλαδή εξαρτάται από την θέση;
Ι	Το πλήθος ε;
Ε	Ναι
Ι	Μάλλον είναι ίσες

Ερώτηση 6η

Η Ίνα συγκρίνει το πλήθος των αριθμών στα διαστήματα (0,1) και (0,2) απαντώντας στην ερώτηση ως εξής "Στο διάστημα (0,1) υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Στο διάστημα (0,2) υπάρχουν άπειροι αριθμοί, όμως, διπλάσιοι από το (0,1) αφού το (0,2) αποτελείται από τα (0,1) και (1,2) που έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών.". Το κριτήριο σύγκρισης που εφαρμόζει η μαθήτρια είναι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Επιπλέον, η Ίνα επεκτείνει τις ιδιότητες των πράξεων και στην έννοια του απείρου καθώς το χρησιμοποιεί ως έναν μεγάλο αριθμό.

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης η Ίνα υποστηρίζει ότι οι αριθμοί στα διαστήματα αυτά παρά το ότι είναι άπειροι "κάποια στιγμή τελειώνουν". Η σύγχυση προκαλείται από το γεγονός ότι οι αριθμοί στα διαστήματα [0.1], [0.2] είναι "οριοθετημένη". Δεν είναι όπως τα σημεία της ημιευθείας στην οποία η άπειρη διαδικασία είναι εμφανής. Η παρανόηση συνδέεται με τις διάφορες πεποιθήσεις σχετικά με τα άκρα διαστημάτων. Η μαθήτρια πιστεύει ότι το πεπερασμένο είναι κάτι που έχει άκρα. Η παρανόηση της μαθήτριας είναι ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν έχει άκρα.

	Πόσοι αριθμοί υπάρχουν στο διάστημα [0,1] και πόσοι στο [0,2];
Ι	Άπειροι αλλά εδώ τελειώνουν κάποια στιγμή δεν είναι σαν το άπειρο της ημιευθείας που λέγαμε πριν
Γ	Στο [0,1] υπάρχουν άπειρα σημεία αλλά τερματίζουν στο 1
Ι	Το [0,1] έχει ένα συγκεκριμένο πλήθος

Στο παρακάτω απόσπασμα η Ίνα υποστηρίζει ότι τα δύο σύνολα δεν είναι ισοπληθικά διότι δεν μπορεί να βρει την αντιστοιχία. Φαίνεται να έχει κατανοήσει την σημασία του επιχειρήματος της αντιστοιχίας.

Ι	Δεν βγαίνει εδώ η αντιστοιχία

Τελικά ο Γιώργος καταφέρνει να βρει μία αντιστοιχία μέσω της συνάρτησης f(x)=2x η οποία πείθει και την Ίνα για την ισοπληθικότητα των δύο διαστημάτων.

Ερώτηση 7η

Η έβδομη ερώτηση ζητάει τη σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και Β={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...} και η απάντηση της Ίνας είναι "Τα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά διότι δεν έχουν την ίδια αρχή". Με την απάντησή της η μαθήτρια υπονοεί ότι το δεύτερο σύνολο έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων διότι περιέχει τέσσερις επιπλέον αριθμούς σε σχέση με το πρώτο. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί είναι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Στην συνέντευξη που ακολούθησε η ίνα βρίσκει την κατάλληλη συνάρτηση και έτσι καταλήγει στην ισοπληθικότητα των δύο συνόλων.

	Ίνα ;
Ι	Φ(χ)=χ-4
Ε	Ναι ωραία

Ερώτηση 8η

Η Ίνα στην απάντηση που δίνει στην ερώτηση αυτή υποστηρίζει ότι τα άπειρα σύνολα θα είναι ισοπληθικά μόνο αν έχουν την ίδια αρχή. Είναι πιθανώς επηρεασμένη από την απάντηση που έχει δώσει στην ερώτηση 5.

Στην συνέντευξη που ακολούθησε η Ίνα συμφωνεί με τον συμμαθητή της ότι δύο άπειρα σύνολα θα είναι πάντα ισοπληθικά και συνεπώς με το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά).

Γ	Πρέπει να υπάρχει αντιστοιχία
Γ	Πάντα θα υπάρχει
Ι	Άρα όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων

Ερώτηση 9η

Σε αυτήν την ερώτηση η Ίνα αρχικά υποστηρίζει ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει πολλά περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των φυσικών. Το συμπέρασμα αυτό έπεται από την εφαρμογή του κριτηρίου μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Οι μαθητές στην συνέντευξη προσπαθούν αρκετή ώρα να βρουν κατάλληλη συνάρτηση. Η Ίνα στο ακόλουθο απόσπασμα υποστηρίζει σθεναρά ότι κάποια αντιστοίχηση υπάρχει απλά η ίδια δεν μπορεί να την βρει.

Ι	Εγώ λέω ότι είναι ίσα με πείσατε από τις 8 πρώτες δεν μπορώ τώρα ... κάποιος θα την βρήκε την 1-1 αντιστοιχία και θα έφτιαξε το σύνολο των πραγματικών δεν βγήκε από το κεφάλι μας

Στην συνέχεια, όμως, υποστηρίζει ότι αν δεν υπάρχει συνάρτηση τα άπειρα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά αφήνει δηλαδή περιθώριο να μην υπάρχει 1-1 συνάρτηση μεταξύ δύο απείρων συνόλων.

3.4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Αποτελέσματα απαντήσεων Αποστόλη

Ερώτηση 1η

Η πρόταση που γράφει ο Αποστόλης χρησιμοποιώντας την λέξη άπειρο σε μη μαθηματικό πλαίσιο είναι “Το ανθρώπινο μυαλό είναι ικανό να σκεφτεί άπειρα πράγματα”. Ο Αποστόλης φαίνεται να αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου διαδικαστικά. Επιπλέον, ο μαθητής τονίζει την χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί. Αντιλαμβάνεται το άπειρο ως δυνητικό άπειρο, δηλαδή, ως μία διαδικασία καταμέτρησης που δεν έχει τέλος. Ο μαθητής δείχνει να έχει μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου διότι δίνει έμφαση στην πνευματικότητα.

Στην συζήτηση που ακολούθησε ο Αποστόλης συμφωνεί με την συμμαθήτρια του και με μία τοπολογική αντίληψη του απείρου η οποία συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο.

Μ	Να μην έχει όρια κάτι πολύ μεγάλο
Α	Ναι αυτό.

Ερώτηση 2η

Σε αυτήν την ερώτηση ο Αποστόλης έπρεπε να κατασκευάσει μία πρόταση με την φράση “άπειρο σύνολο”. Η πρόταση που γράφει ο μαθητής είναι “Άπειρο σύνολο είναι ένα σύνολο με όλους τους αριθμούς που υπάρχουν, αλλά ταυτόχρονα να μην μπορούμε να προσδιορίσουμε το πλήθος τους”. Η απάντηση του μαθητή έχει μαθηματικό πλαίσιο καθώς αναφέρεται αποκλειστικά σε σύνολα αριθμών. Ο Αποστόλης υποστηρίζει ότι ένα άπειρο σύνολο που περιέχει αποκλειστικά αριθμούς και μάλιστα πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς. Αιτία για το ότι ο μαθητής αποδέχεται ως άπειρα σύνολα μόνο αριθμητικά σύνολα είναι ότι αυτά είναι τα μόνα άπειρα σύνολα που μας είναι γνωστά. Επιπλέον ο μαθητής τονίζει την χρονική διάσταση της έννοιας του απείρου η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα ο μαθητής επιμένει και κατά την διάρκεια της συνέντευξης ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι σύνολα αριθμών και μάλιστα ότι το μοναδικό άπειρο σύνολο που υπάρχει είναι αυτό όλων των αριθμών.

Ε	Όταν λες με όλους τους αριθμούς που υπάρχουν τι εννοείς;
Α	Οποιονδήποτε αριθμό αν σκεφτούμε
Ε	Τους πραγματικούς;
Α	Τους πραγματικούς , τους αρνητικούς οτιδήποτε
Ε	Άρα ένα άπειρο σύνολο περιέχει όλους τους αριθμούς;
Α	Ναι

Ερώτηση 3η

Η τρίτη ερώτηση έχει να κάνει με την σύγκριση του πλήθους των σημείων δύο ομόκεντρων κύκλων με διαφορετικές ακτίνες. Στην απάντησή του ο Αποστόλης αναφέρει ότι και οι δύο κύκλοι έχουν άπειρα σημεία αλλά ο εξωτερικός κύκλος έχει μεγαλύτερη περίμετρο και άρα περισσότερα σημεία. Ο μαθητής θεωρεί ότι το πλήθος των σημείων ενός κύκλου είναι ανάλογο με το μήκος της περιμέτρού του. Απαντάει στο ερώτημα χρησιμοποιώντας διαισθητικά κριτήρια σύγκρισης απείρων συνόλων, όμως, το απείρου είναι μία έννοια η οποία δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσω των αισθήσεων.

Στην συζήτηση που ακολούθησε ο Αποστόλης υποστηρίζει ότι αφού τα δύο υπό σύγκριση σύνολα είναι άπειρα δεν είναι δυνατό να τα συγκρίνουμε. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα.

Ε	Λοιπόν στην Τρίτη ερώτηση πρέπει να συγκρίνουμε το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων. Αποστόλη γράφεις ότι και οι δύο κύκλοι έχουν άπειρα σημεία αλλά ο εξωτερικός κύκλος έχει μεγαλύτερη περίμετρο άρα μάλλον πιο πολλά σημεία.
Α	Μάλλον γιατί εντάξει δεν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο άπειρους αριθμούς παρά το ότι ο εξωτερικός κύκλος είναι μεγαλύτερος από τον εσωτερικό και σε ακτίνα και σε διάμετρο και οι δύο έχουν άπειρα σημεία δεν μπορούμε να συγκρίνουμε ... ότι ο εξωτερικός έχει πιο πολλά σημεία από τον εσωτερικό.

Σε ακόλουθο σημείο, όμως, ο ίδιος μαθητής υποστηρίζει ότι ο εξωτερικός κύκλος έχει “κάποια πιο πολλά” σημεία σε σχέση με τον εσωτερικό. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγει μέσω διαισθητικών κριτηρίων αφού συγκρίνει το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων ανάγοντάς το στην σύγκριση του μεγέθους των αντίστοιχων εμβαδών των κύκλων. Στο ίδιο σημείο χρησιμοποιεί και το κριτήριο ότι τα άπειρα σύνολα είναι μη συγκρίσιμα καταλήγοντας με αυτόν τον τρόπο σε αντιφατικό συμπέρασμα. Όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν περισσότερες από μία μεθόδους για την σύγκριση άπειρων συνόλων τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν είναι αντιφατικά και οι ίδιοι το αγνοούν όπως συμβαίνει και στο ακόλουθο μέρος του διαλόγου.

Ε	Αποστόλη εσύ λες ότι δεν είναι ίσα
Α	Ναι
Ε	Η ερώτηση νομίζω ότι είναι προφανής. Μαριάννα γιατί λες ότι έχουν το ίδιο πλήθος Αποστόλη γιατί λες ότι δεν έχουν;
Α	Γιατί ο εξωτερικός κύκλος είναι μεγαλύτερος από τον εσωτερικό
Ε	Μεγαλύτερος σε τι;
Α	Και σε ακτίνα και σε διάμετρο σε εμβαδόν σε οτιδήποτε είναι μεγαλύτερος από τον εσωτερικό άρα έχει κάποια σημεία που μπορούμε να…έχει κάποια σημεία πιο πολλά από τον εσωτερικό αλλά αυτό δεν τον κάνει μεγαλύτερο στο πλήθος των σημείων επειδή είναι και τα δύο άπειρα.

Στην συνέχεια , όπως δείχνει το παρακάτω απόσπασμα, ο Αποστόλης υποστηρίζει και πάλι βασιζόμενος σε διαισθητικά κριτήρια ότι η ακτίνα και το πλήθος των σημείων είναι ποσά ανάλογα ακριβώς όπως η ακτίνα και η το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Επειδή η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου μοιάζει διπλάσια της ακτίνας του εσωτερικού συνάγει την ίδια σχέση και για την σχέση του πλήθους των σημείων των κύκλων.

Α	Μπορεί να έχει και διπλάσια σημεία
Ε	Τα διπλάσια γιατί;
Α	Πως να το πω; Έτσι όπως φαίνονται είναι λες και ο εξωτερικός έχει διπλάσια ακτίνα

Τελικά η συμμαθήτρια του Αποστόλη βρίσκει την αντιστοιχία και ο Αποστόλης πείθεται από το κριτήριο της αντιστοιχίας για την ισοπληθικότητα των σημείων των δύο κύκλων.

Ε	Αποστόλη καταλαβαίνεις τί λέει;
Α	Ναι ναι
Ε	Δηλαδή αν αυτή η ακτίνα κόψει αυτόν τον κύκλο
Α	Ε ένα σημείο θα κόψει και τον άλλον σε ένα αντίστοιχο εντάξει

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Ο Αποστόλης σχετικά με την σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων Α={2,4,6,8,...} και Β={1,2,3,4,...} απαντάει πως τα σύνολα δεν μπορούν να συγκριθούν διότι έχουν και τα δύο άπειρα στοιχεία. Το κριτήριο που χρησιμοποιεί ο μαθητής είναι ότι οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα της συζήτησης που ακολούθησε.

Α	Είναι άπειροι αριθμοί σωστά ;
Ε	Ναι
Α	Ε άρα το σύνολο Α θα περιέχει και αυτό άπειρα στοιχεία όπως και το σύνολο Β περιέχει άπειρα στοιχεία
Ε	Ναι
Α	Ε πως ξέρουμε πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο;

Ο μαθητής γράφει τα σύνολα το ένα κάτω από το άλλο και αντιλαμβάνεται διαισθητικά την ισοπληθικότητα λέγοντας ότι το πρώτο στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχεί στο πρώτο του Β κ.ο.κ. . Ο Αποστόλης αφού αναζητεί για αρκετή ώρα μία αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων καταφέρνει να βρει την κατάλληλη καταλήγοντας με τον τρόπο αυτό στην ισοπληθικότητά τους.

Α	Ναι εγώ δεν πιστεύω ότι μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε γιατί αν αρχίσουμε να τα αντιστοιχούμε ας πούμε από το 1 στο 2 το 2 στο 4 ...
Ε	Το 1 στο 2 πως αντιστοιχίζεται ;
Α	Το πρώτο στοιχείο του Β στο πρώτο του Α
Ε	Η αντιστοιχία ποια είναι ;
Α	Η μόνη αντιστοιχία που μπορώ να καταλάβω εδώ πέρα είναι ας πούμε αν πάρω το πρώτο στοιχείο του συνόλου Β και το πολλαπλασιάσουμε επί 2 θα πάρουμε το πρώτο στοιχείο του συνόλου Α
Ε	Δηλαδή;
Α	1*2=2, 2*2=4,...

Ερώτηση 4β

Σε αυτό το υποερώτημα ζητείται η σύγκριση του συνόλου των φυσικών αριθμών με το σύνολο των περιττών αριθμών. Η απάντηση του Αποστόλη είναι η ακόλουθη "Τα σύνολα περιέχουν άπειρα στοιχεία άρα παρόλο που το Β αποτελείται από τους περιττούς αριθμούς δεν σημαίνει ότι το Α έχει πιο πολλά στοιχεία". Για ακόμα μία φορά ο μαθητής υποστηρίζει την άποψη ότι οι πληθάριθμοι απείρων συνόλων είναι μη συγκρίσιμα μεγέθη. Το κριτήριο στο οποίο βασίζει την απάντησή του είναι το ότι οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν.

Στην συνέντευξη που ακολούθησε και αφού είχε προηγηθεί ανάλογη συζήτηση σχετικά με το πρώτο υποερώτημα της τέταρτης άσκησης ο μαθητής επιχειρεί να βρει έναν τρόπο αντιστοιχίας. Δοκιμάζει την συνάρτηση $f(k)=2k+1$ την οποία απορρίπτει διότι δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του συνόλου Α στο στοιχείο 1 του Β. Δηλαδή, ο λόγος για τον οποίο απορρίπτεται η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι ότι δεν είναι επί. Στο σημείο αυτό ο Αποστόλης συμπεραίνει ότι τα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά αφού το Β περιέχει ένα στοιχείο επιπλέον σε σχέση με το Α το 1. Αυτό που δεν έχει αντιληφθεί ο Αποστόλης είναι ότι για να συμπεράνουμε την ισοπληθικότητα δύο απείρων συνόλων δεν απαιτείται κάθε αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων να αντιστοιχεί ένα προς ένα τα στοιχεία τους αλλά αρκεί να υπάρχει μία τέτοια αντιστοιχία.

Α	Γιατί αν προσπαθήσουμε να κάνουμε πάλι μία αντιστοιχία θα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το 1 στο 3 ότι είναι 2*1+1 και αν συνεχίσουμε με το 2 θα αντιστοιχεί στο 2*2+1 = 5 το 3 στο 7,...
Ε	Ποια είναι η αντιστοιχία;
Α	2κ+1 που είναι οι περιττοί αριθμοί. Αλλά το πρώτο στοιχείο θα περισσεύει έπρεπε να είχε το σύνολο Α το μηδέν για να μπορούμε να κάνουμε την αντιστοιχία άρα το σύνολο Β θα περιέχει έναν παραπάνω αριθμό από το Α
Ε	Τον 1
Α	Ναι

Τελικά ο Αποστόλης βρίσκει την κατάλληλη συνάρτηση και το συμπέρασμα που εξάγει είναι η ισοπληθικότητα των συνόλων.

Α	2κ-1
Μ	Α εντάξει ναι
Α	Ναι αυτή εδώ αντιστοιχεί σε όλα
Ε	Για να δούμε 2*1-1=1, 2*2-1=3,...
Α	Άρα πάλι είναι ίσα δηλαδή ισοπληθικά

Επιπλέον αναγνωρίζει την συνάρτηση ως 1-1 και εξηγεί ότι για να είναι δύο σύνολα ισοπληθικά πρέπει να βρούμε μία 1-1 συνάρτηση μεταξύ των στοιχείων τους. Ο μαθητής διατυπώνει το κριτήριο 1-1 αντιστοιχίας.

Α	Αντιστοιχούν όλα είναι 1-1.
Ε	Ωραία είναι 1-1 λοιπόν άρα για να είναι ισοπληθικά τα σύνολα πρέπει η συνάρτηση να είναι 1-1 ή απλά έτυχε εδώ;
Μ	Θα πρέπει να είναι
Ε	Αν δεν είναι υπάρχει πρόβλημα;
Α	Ναι γιατί μπορεί δύο στοιχεία από αυτό το σύνολο να αντιστοιχούν σε μόνο ένα στοιχείο άρα θα έχει πιο πολλά στοιχεία το δεύτερο σύνολο. Αν δύο στοιχεία του Α αντιστοιχούσαν σε ένα του Β το Β θα είχε πιο πολλά στοιχεία.

Ερώτηση 5η

Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν το πλήθος των σημείων δύο ημιευθειών. Η αρχική απάντηση του Αποστόλη στο ερώτημα αυτό είναι ότι δεν γίνεται να συγκρίνουμε το πλήθος των σημείων επειδή και οι δύο ημιευθείες έχουν άπειρα σημεία και συνεχίζει γράφοντας "αν υποθέσουμε ότι το μήκος της δεύτερης ημιευθείας είναι το $+\infty$ παρόλο που η πρώτη είναι μεγαλύτερη κατά ΑΒ ισχύει ότι $AB+(+\infty) = +\infty$". Το κριτήριο που φαίνεται να χρησιμοποιεί ο μαθητής είναι το ότι οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν.

Στην συνέντευξη που ακολούθησε ο Αποστόλης βρίσκει γρήγορα την αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο ημιευθειών όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

Α	Α όμως και πάλι τα στοιχεία δεν θα είναι ίδια το πλήθος τους;
Ε	Γιατί;
Α	Γιατί μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το πρώτο σημείο της ευθείας Α με το πρώτο σημείο της ευθείας Β
Ε	Μπορείς να το δείξεις;
Α	Να φέρω ένα χάρακα από μέσα ... μπορούμε να πούμε ότι το πρώτο σημείο της Α αν είναι χ τότε και το πρώτο σημείο της Β θα είναι χ+ΑΒ

Ερώτηση 6η

Το ερώτημα αυτό καλεί τους μαθητές να συγκρίνουν το πλήθος των αριθμών των διαστημάτων (0,2) και (0,1). Στην απάντησή του ο Αποστόλης αναφέρει ότι και τα δύο διαστήματα αποτελούνται από άπειρο πλήθος αριθμών. Συνεχίζει γράφοντας ότι "δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το πλήθος των αριθμών των διαστημάτων όπως δεν μπορούμε να συγκρίνουμε και τους αριθμούς $+\infty$ και $2(+\infty)$". Ο μαθητής υποστηρίζει ότι οι άπειρες ποσότητες είναι μη συγκρίσιμες. Εκτός αυτού από την απάντησή του φαίνεται να θεωρεί το άπειρο ως έναν αριθμό.

Στην συνέντευξη ο Αποστόλης βρίσκει άμεσα μία συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων. Δείχνει να αντιλαμβάνεται την αναγκαιότητα της 1-1 αντιστοιχίας και χρησιμοποιεί το κριτήριο αυτό ως απόδειξη της ισοπληθικότητας δύο συνόλων.

Α	Γιατί αυτή είναι η αντιστοιχία πιστεύω που υπάρχει σε αυτά τα διαστήματα
Ε	Ποια είναι η αντιστοιχία;
Α	Για να συγκρίνουμε τα στοιχεία των διαστημάτων αυτών θα πρέπει να ... από το διάστημα (0,1) να το διπλασιάζουμε και αυτό θα αντιστοιχεί σε ένα από το διάστημα (0,2). Αν πάρουμε το 0,1 το αντιστοιχώ στοιχείο πιστεύω θα είναι το 0,2, στο 0,05 θα είναι το 0,1.
Ε	Άρα μου λες τελικά ότι ...
Α	Τώρα που το κατάλαβα ναι θα είναι ισοπληθικά.

Ερώτηση 7η

Στο ερώτημα αυτό ζητείται η σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων Α={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και Β={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}. Η αρχική απάντηση που δίνει ο μαθητής είναι η ακόλουθη "παρά το ότι το σύνολο Β ξεπερνάει το Α κατά τρεις αριθμούς και τα δύο έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι ισοπληθικά". Όπως στις περισσότερες από της προηγούμενες απαντήσεις του, ο Αποστόλης, το κριτήριο που φαίνεται να χρησιμοποιεί είναι το ότι οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν.

Η συμμαθήτρια του Αποστόλη βρίσκει, κατά την διάρκεια της συνέντευξης, την συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων και ο Αποστόλης την αναγνωρίζει ως 1-1 συνάρτηση εφαρμόζοντας με αυτόν τον τρόπο το κριτήριο 1-1 αντιστοιχίας.

Ε	Δηλαδή ποια είναι η αντιστοιχία; Αποστόλη κατάλαβες;
Μ	Χ-4
Α	Είναι 1-1

Ερώτηση 8η

Όσο αφορά το αν δύο άπειρα σύνολα είναι πάντα ισοπληθικά ο Αποστόλης απαντάει αρνητικά χρησιμοποιώντας το εξής παράδειγμα "τα σύνολα Α={1,3,5,7,...} και Β={1,2,3,4,...} έχουν άπειρα στοιχεία αλλά όχι το ίδιο πλήθος αφού το Α περιέχει τους περιττούς ενώ το Β τους φυσικούς". Το παράδειγμα αυτό μοιάζει με το δεύτερο υποερώτημα της τέταρτης ερώτησης. Ενώ, όμως, στην τέταρτη ερώτηση ο μαθητής είχε υποστηρίξει ότι οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν αυτήν την φορά φαίνεται να χρησιμοποιεί το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Μετά την συζήτηση σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα ο Αποστόλης φαίνεται να επηρεάζεται και να καταλήγει στο συμπέρασμα ότι δύο άπειρα σύνολα θα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αιτιολογεί αυτήν την άποψη υποστηρίζοντας ότι μεταξύ δύο απείρων συνόλων θα υπάρχει πάντα μία 1-1 συνάρτηση.

Α	Προσπαθώ να σκεφτώ κάτι ... τώρα πια πιστεύω ότι θα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων
Ε	Πάντα;
Α	Νομίζω ότι πάντα θα υπάρχει μία αντιστοιχία
Ε	Ανάμεσα σε δύο άπειρα σύνολα
Α	Κάθε φορά θα υπάρχει μία συνάρτηση που να παίρνει τα στοιχεία από το ένα σύνολο και να τα πηγαίνει στο άλλο

Ερώτηση 9η

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν την πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών με την αντίστοιχη του συνόλου των φυσικών. Ο Αποστόλης απαντάει ότι τα δύο σύνολα δεν είναι ισοπληθικά διότι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από τους φυσικούς περιλαμβάνουν και τους αρνητικούς και τους δεκαδικούς. Στην αρχική του απάντηση, δηλαδή, ο μαθητής χρησιμοποιεί το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο) αφού το βασικό του επιχείρημα είναι ότι το σύνολο των φυσικών είναι υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Η απάντηση που δίνει ο Αποστόλης, στην συνέντευξη, εκφράζει την έντονη πεποίθησή του ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθή ή ισοδύναμα ότι μεταξύ των στοιχείων δύο απείρων συνόλων -άρα και των συνόλων των πραγματικών και των φυσικών αριθμών- θα υπάρχει μία αντιστοιχία.

Α	Ναι... ε δεν μπορώ να το σκεφτώ ποια είναι η αντιστοιχία
Ε	Αλλά θα υπάρχει λες κάποια αντιστοιχία;
Α	Για το συγκεκριμένο δεν μπορώ να σκεφτώ κάποια αντιστοιχία με έναν φυσικό αριθμό αλλά λογικά θα υπάρχει δεν έχουμε εξερευνήσει ακόμα τα Μαθηματικά σε μεγάλο βάθος για να καταλάβουμε αν υπάρχει ή όχι.

Αποτελέσματα απαντήσεων Μαριάννας

Ερώτηση 1η

Στην πρώτη ερώτηση στην οποία ζητείται από τους μαθητές να δώσουν μία μη μαθηματική πρόταση με την λέξη άπειρο η Μαριάννα γράφει "Περνούν άπειρα πράγματα από το μυαλό μου". Είναι πιθανό η μαθήτρια να διαθέτει μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου δεδομένου του ότι η πρόταση που κατασκευάζει δίνει έμφαση στην πνευματικότητα.

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης η μαθήτρια εκφράζει την άποψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο, που δεν διαθέτει όρια. Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο απόσπασμα η μαθήτρια αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου τοπολογικά. Η τοπολογική αντίληψη του απείρου συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα, όπως παραδέχεται και η ίδια θεωρεί το άπειρο ως κάτι πολύ μεγάλο.

Ε	Μαριάννα έχεις γράψει περίπου το ίδιο ότι περνούν άπειρα πράγματα από το μυαλό σου. Αλλά εσύ εννοείς σε μία στιγμή;
Μ	Αυτή την στιγμή περνούν πάρα πολλά από το μυαλό μου
Ε	Άρα το άπειρο το έχετε στο νου σας σαν κάτι ;
Μ	Να μην έχει όρια κάτι πολύ μεγάλο

Ερώτηση 2η

Στην δεύτερη ερώτηση οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν μία πρόταση κάνοντας χρήση της φράσης "άπειρο σύνολο". Η πρόταση που δίνει στην απάντησή της Μαριάννας είναι η εξής "Άπειρο σύνολο ίσως είναι ένα σύνολο του οποίου τα όρια ορίζονται στο άπειρο". Από την απάντησή της φαίνεται ότι θεωρεί όχι μόνο τα αριθμητικά σύνολα είναι τα μόνα που μπορεί να είναι άπειρα αλλά πιο συγκεκριμένα ότι τα μόνα άπειρα σύνολα είναι τα διαστήματα της μορφής $(-\infty,+\infty)$,$(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\alpha)$. το να συνδέει την έννοια του απείρου συνόλου με την επιστήμη των Μαθηματικών είναι φυσικό αν αναλογιστούμε ότι τα μόνα άπειρα σύνολα που μας είναι γνωστά είναι σύνολα αριθμών. Η μαθήτρια εμφανίζει μία συχνή παρανόηση η οποία συνδέεται με την αντίληψη ότι το άπειρο σύνολο είναι κάτι που δεν έχει άκρα. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι η μαθήτρια θεωρεί ως πεπερασμένο σύνολο οτιδήποτε έχει άκρα. Όλα τα παραπάνω η Μαριάννα τα υποστηρίζει και στην συνέντευξη που ακολούθησε της συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Όπως φαίνεται παρακάτω η μαθήτρια υποστηρίζει ότι ένα άπειρο σύνολο είναι ένα διάστημα του οποίου τουλάχιστον ένα από τα δύο άκρα είναι είτε το $+\infty$ είτε το $-\infty$.

Ε	Μαριάννα γράφεις ότι άπειρο σύνολο ίσως είναι ένα σύνολο που τα όριά του ορίζονται στο άπειρο. Αυτό το ίσως εδώ γιατί το έβαλες;
Μ	Δεν ξέρω
Ε	τα όριά του ορίζονται στο άπειρο;
Μ	Το διάστημα τελειώνει στο +∞ ή στο -∞
Ε	Αλλιώς δεν μπορεί να είναι άπειρο σύνολο;
Μ	Μπορεί ;

Ερώτηση 3η

Στο ερώτημα σύγκρισης του πλήθους των σημείων δύο ομόκεντρων κύκλων με διαφορετικές περιμέτρους η απάντηση της μαθήτριας είναι ότι και οι δύο κύκλοι έχουν εξίσου άπειρα σημεία ανεξάρτητα από τις διαμέτρους τους. Το κριτήριο που φαίνεται να χρησιμοποιεί στην αρχική της απάντηση η Μαριάννα είναι το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά). Αυτό γίνεται σαφές και κατά την συνέντευξη όπως φαίνεται και στο ακόλουθο απόσπασμα.

Μ	Και εδώ είναι άπειρα και εδώ είναι άπειρα δεν ορίζονται κάπου που μπορεί να τους δεσμεύει.
Ε	Υπάρχει κάποιος κύκλος που να έχει περισσότερα ή λιγότερα σημεία;
Μ	Δεν πιστεύω ότι...δηλαδή παντού είναι άπειρα εδώ μέσα δεν μπορώ να βρω κάποια διαφορά παρόλο που έχει μεγαλύτερη περίμετρο νομίζω δεν υπάρχει διαφορά.

Αργότερα η μαθήτρια βρίσκει την αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο κύκλων και συμπεραίνει την ισοπληθικότητα των σημείων των δύο κύκλων.

Μ	Να φέρω ακτίνες;
Μ	Ότι κόβουν και τους δύο κύκλους αυτό;
Ε	Τέμνουν εννοείς... Τι σημαίνει αυτό ;
Μ	Ναι...Ότι σε όσα σημεία τέμνει τον έναν κύκλο τέμνει και τον άλλον άρα όσα σημεία περνάνε από το κέντρο περνάνε και στον άλλον.

Ερώτηση 4η

Ερώτηση 4α

Σχετικά με την σύγκριση των συνόλων Α={2,4,6,8,...} και Β={1,2,3,4,...} δηλαδή, των συνόλων των άρτιων και των φυσικών αριθμών η μαθήτρια απαντάει ως εξής "Το σύνολο Β έχει περισσότερα στοιχεία διότι περιλαμβάνει τους φυσικούς ενώ το Α μόνο τους άρτιους". Στην αρχική της απάντηση υποστηρίζει ουσιαστικά ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών είναι μεγαλύτερος από αυτόν του συνόλου των άρτιων. Η μαθήτρια εφαρμόζει για να κάνει την σύγκριση το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Το κριτήρια αυτό το εφαρμόζει και κατά την διάρκεια της συνέντευξης. Η Μαριάννα, επιπλέον, θεωρεί το άπειρο ως έναν μεγάλο αριθμό διότι χρησιμοποιεί διαισθητικά πράξεις με το άπειρο. Το μισό του απείρου θεωρείται μικρότερο από το άπειρο. Επεκτείνουν δηλαδή τις ιδιότητες των πράξεων με αριθμούς και στην έννοια του απείρου.

Μ	Ναι αλλά όπως είπα και πριν το σύνολο Α είναι υποσύνολο του Β και αν αυτό είναι συν άπειρο αυτό είναι δια 2 περίπου πως να το πω; Είναι πολύ μεγάλη η διαφορά τους
Ε	Ποια είναι η διαφορά τους δηλαδή ; τι εννοείς διαφορά;
Μ	Το πλήθος των στοιχείων που περιέχουν
Ε	Η διαφορά τους ποια είναι που μου λες;
Μ	Ότι αυτό ουσιαστικά περιέχει υποδιπλάσιο πλήθος στοιχείων από το Β σχεδόν

Όταν ο συμμαθητής της Μαριάννας προσπαθεί να βρει μία αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων η μαθήτρια απορρίπτει έναν τέτοιο συλλογισμό διότι έρχεται σε αντίφαση με την διαίσθησή της και επιμένει να κάνει την σύγκριση το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Μ	Δεν νομίζω ότι υπάρχει κάποιος τέτοιος τρόπος να τα αντιστοιχίσουμε τα δύο σύνολα. Σίγουρα κάτι περισσεύει από το Β δεν αντιστοιχεί στο Α κάτι.

Ο Αποστόλης βρίσκει τον κατάλληλο τρόπο αντιστοιχίας αλλά η Μαριάννα εξακολουθεί να μην υιοθετεί το επιχείρημα καθώς το συμπέρασμα που εξάγεται από αυτό είναι αντίθετο ως προς τα όσα αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά.

Μ	Ε θα είναι δεν ξέρω
Ε	Αν δεν έχεις πειστεί μπορείς να μας πεις κάτι άλλο
Μ	Όχι δεν έχω πειστεί αλλά εντάξει κάπως ναι
Ε	Τι είναι αυτό που σε δυσκολεύει;
Μ	Ότι είναι αρκετοί αριθμοί που δεν ανήκουν στο σύνολο Α και ανήκουν στο Β δηλαδή σε μία κλίμακα του απείρου θα είναι σχεδόν οι μισοί από αυτούς.

Ερώτηση 4β

Όσο αφορά στην σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των συνόλων Α={1,2,3,4,...} και Β={1,3,5,7,...} η μαθήτρια χρησιμοποιεί και πάλι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Πιο συγκεκριμένα γράφει "Το σύνολο Α έχει περισσότερα στοιχεία διότι περιλαμβάνει τους φυσικούς ενώ το Β μόνο τους μονούς". Το κριτήριο σύγκρισης αυτό αληθεύει μόνο όταν τα υπό μέτρηση σύνολα έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Η μαθήτρια γενικεύει την ισχύ του και για άπειρα σύνολα.

Κατά την διάρκεια της συνέντευξης και ενώ ο συμμαθητής της προσπαθεί να βρει μία συνάρτηση μεταξύ των δύο συνόλων η Μαριάννα εξακολουθεί να μην αντιλαμβάνεται την σημασία μίας τέτοιας συνάρτησης αφού αναζητεί αναδρομική σχέση μεταξύ των στοιχείων του ενός συνόλου και όχι κάποια αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων.

Μ	Ο επόμενος πλην τον προηγούμενο ας πούμε κάπως έτσι;

Ερώτηση 5η

Στο ερώτημα αυτό οι μαθητές πρέπει να συγκρίνουν το πλήθος των σημείων δύο ημιευθειών. Η απάντηση της μαθήτριας είναι "Τα σημεία των δύο ημιευθειών είναι άπειρα, ωστόσο, στην ημιευθεία Αχ ορίζονται σε ένα διάστημα για παράδειγμα (α,+∞) ενώ στην δεύτερη σε ένα διάστημα (β,+∞) με β>α άρα στην πρώτη ημιευθεία το πλήθος των σημείων είναι μεγαλύτερο". Η Μαριάννα στην απάντησή της αντιστοιχεί τα σημεία της ημιευθείας Αχ στους αριθμούς ενός διαστήματος (α,+∞) και τα σημεία της ημιευθείας Βχ στους αριθμούς ενός διαστήματος (β,+∞). Στην συνέχεια ανάγει το πρόβλημα της σύγκρισης του πλήθους των σημείων των δύο ημιευθείων σε αυτό της σύγκρισης του πλήθους των αριθμών στα διαστήματα (α,+∞) και (β,+∞) μα β>α. Η μαθήτρια συγκρίνει τα δύο σύνολα βασιζόμενη στην σχέση υποσυνόλου (α,+∞) ⊃ (β,+∞) . Η σύγκριση πραγματοποιείται με την εφαρμογή του κριτηρίου μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Στην συνέντευξη η Μαριάννα δεν προλαβαίνει να εκφράσει κάποια άποψη διότι ο συμμαθητής της βρίσκει σχεδόν αμέσως την αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο ημιευθειών. Η μαθήτρια δεν αποδέχεται το κριτήριο της αντιστοιχίας ως ορθό και αρνείται να πιστέψει κάτι που δεν συμβαδίζει με την διαίσθησή της, όπως είχε κάνει και στο προηγούμενο ερώτημα.

Ερώτηση 6η

Στην έκτη ερώτηση η οποία αφορά την σύγκριση του πλήθους των αριθμών των διαστημάτων (0,2) και (0,1) η Μαριάννα αρχικά απαντάει ότι και στα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί, ωστόσο, στο (0,2) περιλαμβάνονται περισσότεροι αριθμοί διότι πρόκειται για μεγαλύτερο διάστημα. Η μαθήτρια στηρίζει την σύγκρισή της σε διαισθητικά κριτήρια, καθώς, συγκρίνει το πλήθος των αριθμών των δύο διαστημάτων, συγκρίνοντας το αντίστοιχο μήκος τους.

Στην συζήτηση που ακολούθησε η Μαριάννα χρησιμοποιεί για την σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των δύο διαστημάτων το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Ε	Μεγαλύτερο εννοείς σε μήκος;
Μ	Σε πλήθος αριθμών ότι υπάρχουν ... δηλαδή είναι υποσύνολο του (0,2)

Ακόμα και όταν ο συμμαθητής της βρίσκει αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων η Μαριάννα δεν είναι διατεθειμένη να δεχθεί την ισοπληθικότητα των συνόλων ο λόγος είναι ότι το αποτέλεσμα αυτό αντιβαίνει στην διαίσθησή της.

Ε	Μαριάννα;
Μ	Δηλαδή αντιστοιχούμε το 0 με το 0 και το 1 με το 2;
Ε	Ναι αυτό δεν λες;
Α	Ναι δύο φορές το ...
Μ	Ότι με αυτόν τον τρόπο είναι ισοπληθή; Για να το λέτε έτσι θα ναι...

Ερώτηση 7η

Στην ερώτηση αυτή η μαθήτρια έπρεπε να συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A={1,2,3,4,5,6,7,8,...} και B={-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}. Η αρχική απάντηση της Μαριάννας ήταν ότι τα σύνολα δεν είναι ισοπληθικά καθώς το B περιέχει κάποιους επιπλέον αριθμούς σε σχέση με το A, τρεις αρνητικούς και το μηδέν. Το κριτήριο σύγκρισης που χρησιμοποιεί η μαθήτρια είναι το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Στην συνέντευξη η Μαριάννα καταφέρνει γρήγορα να βρει την αντιστοιχία μεταξύ των δύο συνόλων και αυτήν την φορά πείθεται για την ισοπληθικότητά τους και την ισχύ του κριτηρίου της αντιστοιχίας.

Ε	Μαριάννα λες ότι δεν είναι ισοπληθικά το Β επιπλέον 3 αρνητικούς και το 0.
Μ	Ναι
Ε	Θα αλλάζατε τώρα την απάντησή σας ή όχι;
Μ	Μισό λεπτό
Ε	Ναι
Μ	Υπάρχει αντιστοιχία; Ίσως ... α με το -4 ; ότι είναι 1 -4 ,2-4,...;
Ε	Δηλαδή ποια είναι η αντιστοιχία; Αποστόλη κατάλαβες;
Μ	Χ-4

Ερώτηση 8η

Το ερώτημα αυτό ζητάει την άποψη των μαθητών για το αν δύο άπειρα σύνολα αποτελούνται πάντα από το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αρχικά, η Μαριάννα απαντάει ως εξής "Δύο άπειρα σύνολα δεν έχουν αναγκαστικά το ίδιο πλήθος στοιχείων διότι το ένα μπορεί να διαφέρει κατά μερικά μόνο στοιχεία από το άλλο, αλλά, και τα δύο να είναι άπειρα". Η μαθήτρια φαίνεται να εφαρμόζει το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Υποστηρίζει ότι μεταξύ δύο απείρων συνόλων θα υπάρχει πάντα μία σχέση υποσυνόλου από την οποία θα προκύπτει και το σύνολο με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων.

Η άποψη της μαθήτριας, όπως η ίδια διατυπώνει στην συνέντευξη, είναι ότι για να είναι ισοπληθικά δύο άπειρα σύνολα πρέπει να υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους.

Ε	Τώρα τι θα λέγατε;
Μ	Το ίδιο θα έλεγα μπορεί να μην υπάρχει κάποια αντιστοιχία μεταξύ τους
Ε	Αν δεν υπάρχει αντιστοιχία δηλαδή δεν είναι ισοπληθικά
Μ	Ναι από ότι έχουμε πει

Ερώτηση 9η

Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των πραγματικών με το πλήθος των φυσικών αριθμών η Μαριάννα υποστηρίζει ότι τα δύο σύνολα δεν είναι ισοπληθικά διότι “οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών”. Η μαθήτρια συγκρίνει τα σύνολα εφαρμόζοντας το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο).

Η Μαριάννα στην συνέντευξη υποστηρίζει ότι τα σύνολα των πραγματικών και των φυσικών δεν είναι ισοπληθικά. Αιτιολογεί αυτόν τον ισχυρισμό με την πεποίθηση ότι δεν μπορεί να υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων αυτών των συνόλων.

Μ	Δεν υπάρχει πάντα αντιστοιχία
Ε	Σε αυτήν την περίπτωση λες ότι δεν θα υπάρχει;
Μ	Όχι μάλλον ... γιατί όλοι οι πραγματικοί να υπάρχει μία αντιστοιχία που να τους αντιστοιχεί όλους με τους φυσικούς που είναι τόσο συγκεκριμένοι δεν νομίζω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των τελειόφοιτων μαθητών Λυκείου σχετικά με την έννοια του απείρου καθώς και οι τρόποι που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την σύγκριση του πλήθους των στοιχείων απείρων συνόλων. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκαν:

- Αντιλήψεις που παρουσιάζουν τελειόφοιτοι μαθητές Λυκείου για την έννοια του απείρου καθώς και τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν και αντιλαμβάνονται άπειρα σύνολα.

- Οι διαισθητικοί τρόποι σύγκρισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να συγκρίνουν το πλήθος των στοιχείων διαφόρων άπειρων συνόλων.

- Τέλος,το κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά την διαφορά της πληθικότητας μεταξύ αριθμήσιμων και υπεραριθμήσιμων συνόλων.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας ανά ερευνητικό ερώτημα.

4.1.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Οι αντιλήψεις που φάνηκε να σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου ήταν οι ακόλουθες: η διαδικαστική, η τοπολογική και η πνευματική όπως επισημαίνουν και οι Florence , Mihaela Singer, Cristian Voica. Την διαδικαστική αντίληψη διακρίναμε την χρονική και την χωρικο-ρυθμηκή διάσταση στις οποίες ο Fischbein (1987) πρόσθετε την διάσταση της μέτρησης και την διάσταση της αλλαγής που στην παρούσα έρευνα δεν παρατηρήθηκαν.

Οι αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του απείρου φάνηκε να εξαρτώνται τόσο από την δραστηριότητα όσο και από το πλαίσιο. Ο τρόπος διαμόρφωσης μιας δραστηριότητας (στοιχεία κειμένου) και το μαθηματικό πλαίσιο (π.χ: γεωμετρικό ή αριθμητικό) φαίνεται να ασκούν επιρροή (Monagham, 2001).

Κάθε ένας από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα παρουσίασε διαφορετικές αντιλήψεις για την έννοια του απείρου. Η Μαρία αρχικά ταυτίζει την έννοια του απείρου με έναν πολύ μεγάλο αριθμό. Στην συνέχεια όμως έδειξε να αντιλαμβάνεται το άπειρο ως δυνητικό άπειρο δίνοντας μία χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο. Η Θάλεια αρχικά συνέδεσε άμεσα την έννοια του απείρου με έναν μεγάλο αριθμό. Έπειτα, υποστήριξε ότι "το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει, μία διαδικασία χωρίς τέλος", δηλαδή μια διαδικαστική κατανόηση της έννοιας του απείρου. Η αντίληψη του απείρου που διαθέτει ο Γιώργου είναι αυτή ενός μεγάλου αριθμού. Επιπλέον ο Γιώργος αντιλαμβάνεται τοπολογικά την έννοια του απείρου δηλαδή με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο. Στην συνέχεια τονίζεται και πάλι η χρονική διάσταση η οποία σχετίζεται με την αντίληψη ότι το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο που δεν δύναται να μετρηθεί. Ο Γιώργος υποστηρίζει ότι άπειρο μπορεί να υπάρξει και "στα όνειρά μας" δηλαδή διαθέτει και μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου. Η Ίνα φαίνεται να αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου τοπολογικά. Η τοπολογική αντίληψη του απείρου συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο και δεν έχει μεγαλύτερο αριθμό. Τα όρια του απείρου υποστηρίζει είναι "μακριά από τις δυνατότητες του νου". Στο σημείο αυτό δίνεται έμφαση στην πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου σύμφωνα με την οποία ο νους δεν είναι σε θέση να καταλάβει τίποτα για το άπειρο. Ο Αποστόλης φαίνεται να αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου διαδικαστικά και τονίζει μία χρονική διάσταση. Αντιλαμβάνεται το άπειρο ως δυνητικό άπειρο, δηλαδή, ως μία διαδικασία καταμέτρησης που δεν έχει τέλος. Σε άλλο σημείο ο Αποστόλης δείχνει μία τοπολογική αντίληψη του απείρου η οποία συνδέεται με την θεώρησή του ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο. Η Μαριάννα δείχνει αρχικά να διαθέτει μία πνευματική αντίληψη της έννοιας του απείρου δεδομένου δίνει έμφαση στην πνευματικότητα. Στην συνέχεια η μαθήτρια εκφράζει την άποψη ότι "το άπειρο είναι κάτι ατελείωτο, που δεν διαθέτει όρια". Η μαθήτρια αντιλαμβάνεται την έννοια του απείρου τοπολογικά. Τα παραπάνω έρχονται σε συμφωνία με την προϋπάρχουσα έρευνα καθώς μελέτες έχουν επισημάνει την ύπαρξη και την επιμονή εναλλακτικών αντιλήψεων σχετικά με την έννοια του απείρου οι οποίες δεν είναι σύμφωνες με τους αποδεκτούς μαθηματικούς ορισμούς και μεθοδολογίες (Confrey, 1990; Fischbein, 1987; Hart, 1981; Moloney and Stacey, 1997;O' Callaghan, 1998; Sierpinska, 1994; Tall, 1991)Επιπλέον έγινα σαφές ότι η αρχική κατανόηση των μαθητών για το άπειρο είναι ως ιδιότητα διαδικασιών (ατελείωτη) παρά ως ποσότητα (αριθμό- αντικείμενο) το οποίο έχει μια τάξη μεγέθους. (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979, Monaghan, 2001).

Εκτός των παραπάνω φάνηκε, σε συμφωνία με την έρευνα της Tirosh (1991), ότι υπάρχουν βαθιές αντιφάσεις μεταξύ της έννοιας του πραγματικού απείρου και των νοητικών σχημάτων για το άπειρο, οι διαισθήσεις του πραγματικού απείρου είναι πολύ ανθεκτικές στην επίδραση της σχολικής εκπαίδευσης και ότι οι μαθητές έχουν διαφορετικές ιδέες για το άπειρο που επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την ικανότητά τους να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα που ασχολούνται με το πραγματικό άπειρο,οι ιδέες αυτές βασίζονται στην έννοια του δυνητικού άπειρου.

Ως προς την κατανόηση των απείρων συνόλων εμφανίστηκαν διαφορετικές απόψεις οι περισσότερες από τις οποίες συνέκλιναν στο ότι τα άπειρα σύνολα είναι αποκλειστικά σύνολα αριθμών. Η άποψη αυτή ήταν αναμενόμενη καθώς τα μαθηματικά ασχολούνται με άπειρα σύνολα αριθμών και αυτά είναι τα μόνα άπειρα σύνολα που μας είναι γνωστά (Mihaela Singer, Cristian Voica, 2003). Η Κατερίνα υποστηρίζει ότι ένα άπειρο σύνολο πρέπει να περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς λέγοντας ότι “κάθε πραγματικός αριθμός περιέχεται σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο” αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο ένα άπειρο σύνολο αυτό των πραγματικών αριθμών. Η Νικολέτα, επίσης, αναγνωρίζει ως άπειρα σύνολα μόνο σύνολα αριθμών και μάλιστα τα σύνολα αυτά που κάθε αριθμός είναι στοιχείο τους. Κατά συνέπεια η μαθήτρια πιστεύει ότι υπάρχει ένα και μοναδικό άπειρο σύνολο και αυτό δεν είναι άλλο παρά το σύνολο όλων των αριθμών. Ο Αποστόλης υποστηρίζει ότι ένα άπειρο σύνολο που περιέχει αποκλειστικά αριθμούς και μάλιστα πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς. Τα μόνα άπειρα σύνολα, σύμφωνα με την Μαριάννα, είναι τα διαστήματα της μορφής $(-\infty,+\infty)$,$(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\alpha)$. Η μαθήτρια εμφανίζει μία συχνή παρανόηση η οποία συνδέεται με την αντίληψη ότι το άπειρο σύνολο είναι κάτι που δεν έχει άκρα (Mihaela Singer, Cristian Voica, 2003).

4.2.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα κριτήρια σύγκρισης που προέκυψε από την παρούσα έρευνα ότι χρησιμοποιούν οι μαθητές και συμφωνούν με την έρευνα της Tsamir (2001) είναι: το κριτήριο μέρος-όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο),μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά), οι άπειρες ποσότητες είναι αδύνατο να συγκριθούν και το 1-1 κριτήριο.

Στην έρευνά τους οι Tsamir & Dreyfus (2002) επισημαίνουν το γεγονός ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν διαισθητικά τις ίδιες μεθόδους για τη σύγκριση των άπειρων συνόλων όπως χρησιμοποιούν και για τη σύγκριση των πεπερασμένων. Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές τείνουν να εφαρμόζουν εναλλακτικά τα κριτήρια αυτά σε δραστηριότητες σύγκρισης απείρων συνόλων χωρίς να παρατηρούν τις βαθιές αντιφάσεις που συνεπάγεται η χρήση περισσότερων του ενός από αυτά. Σε βιβλιογραφικό επίπεδο έχει διαπιστωθεί ότι όταν οι μαθητές χρησιμοποιούσαν περισσότερες από μία μεθόδους για την σύγκριση άπειρων συνόλων τα αποτελέσματα στα οποία κατέληγαν ήταν αντιφατικά και οι ίδιοι το αγνοούσαν αυτό(Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir & Tirosh, 1999).

Επιπλέον οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν μεθόδους κατάλληλες για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων και εμφανίζουν την πεποίθηση ότι όλες οι μέθοδοι που είναι κατάλληλες για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων είναι επαρκείς και για άπειρα σύνολα, όπως προκύπτει και από την έρευνα της Tirosh (1991).Η Tsamir (2002) τονίζει ότι η επίδραση διαισθητικών ιδεών που σχετίζονται με πεπερασμένα σύνολα, επηρεάζουν τις αποφάσεις των μαθητών και την επίγνωση πιθανών αντιφάσεων, και τον τρόπο σκέψης τους που σχετίζονται με την ισοδυναμία άπειρων συνόλων.

Μόνο η μικρή μειοψηφία των τριών (3) μαθητών χρησιμοποίησε διαισθητικά την 1-1 αντιστοιχία και κανένας από αυτούς στην αρχική του απάντηση. Τα αποτελέσματα συμφωνούν με την έρευνα της Tirosh (1985) κατά την οποία για να δικαιολογήσουν την μη ισότητα δύο απείρων συνόλων οι μαθητές χρησιμοποιούν τα ακόλουθα επιχειρήματα: ένα γνήσιο υποσύνολο ενός απείρου συνόλου περιέχει λιγότερα στοιχεία από το αρχικό σύνολο, .ένα φραγμένο σύνολο έχει λιγότερα στοιχεία από ένα μη φραγμένο σύνολο και μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών (λιγότερο από 1%) χρησιμοποίησαν διαισθητικά την 1-1 αντιστοιχία.

Όσο αφορά στην σύγκριση του πλήθους των στοιχείων απείρων συνόλων η πλειοψηφία των μαθητών στην αρχική απάντηση που έδωσαν έδειξαν ότι επηρεάζονται έντονα από την σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα οι περισσότεροι προσπάθησαν να συγκρίνουν το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων συγκρίνοντας είτε το μήκος των ακτίνων τους είτε το μήκος των περιφερειών τους. Εξαίρεση αποτελούν ο Γιώργος και η Μαριάννα οι οποίοι χρησιμοποίησαν το μοναδικό κριτήριο του απείρου. Σχετικά με την σύγκριση του πλήθους των σημείων των δύο ημιευθειών της πέμπτης ερώτησης η πλειοψηφία των μαθητών κατέφυγε στην σύγκριση των σχεδιασμένων αρχικών μηκών των ημιευθειών. Εξαίρεση αποτελούν η Νικολέτα και η Μαριάννα που βασίστηκαν στο κριτήριο μέρος - όλο και ο Αποστόλης που υποστηρίζει ότι οι άπειρες ποσότητες είναι μη συγκρίσιμες. Συνολικά στα γεωμετρικά παραδείγματα όλα τα κριτήρια χρησιμοποιήθηκαν από τους συμμετέχοντες με κάθε έναν από αυτούς να χρησιμοποιεί περισσότερα του ενός.

Για την σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων (0,1) και (0,2) οι αρχικές απαντήσεις των μαθητών βασίζονταν στην σύγκριση του μήκους των διαστημάτων αλλά και στην σχέση υποσυνόλου δηλαδή στο κριτήριο μέρος – όλο. Εξαίρεση αποτελεί η Μαρία που χρησιμοποίησε το μοναδικό κριτήριο απείρου. Συνολικά μόνο δύο από τους μαθητές χρησιμοποίησαν στο ερώτημα αυτό το επιχείρημα της 1-1 αντιστοιχίας.

Σχετικά με την σύγκριση της πληθικότητας των συνόλων {1,2,3,4,...} , {2,4,6,8,...} ή {1,2,3,4,...} και {1,3,5,7,...} οι περισσότεροι μαθητές απαντούν ότι το πλήθος των στοιχείων του{1,2,3,4,...} είναι μεγαλύτερο. Το κύριο επιχείρημα είναι ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει επιπλέον και τους περιττούς αριθμούς. Αυτό προκύπτει και από την έρευνα των Fischbein, Tirosh, Hess (1979).Τα αποτελέσματα της έρευνας του Duval (1983) έδειξαν ότι όταν δύο άπειρα σύνολα γράφονται το ένα κάτω από το άλλο ενισχύεται η χρήση του κριτηρίου της 1-1 αντιστοιχίας.

Το βασικό επιχείρημα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους για την ισότητα δυο συνόλων σε αριθμητικό πλαίσιο είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, όπως προκύπτει από την έρευνα της Tirosh (1985).Σε έρευνα των Vida Manfreda Kolar και Tatjana Hodnik Čadež (2012) οι περισσότερες απαντήσεις βασίζονταν στο ότι και τα δύο σύνολα είναι άπειρα.

Τα ευρήματα της έρευνας των Tirosh και Tsamir έδειξαν ότι οι απαντήσεις των μαθητών εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την αναπαράσταση των δραστηριοτήτων. Μεγαλύτερα ποσοστά των απαντήσεων "1-1 αντιστοιχία" ή "το ίδιο πλήθος στοιχείων" παρουσιάστηκαν στα αριθμητικά ερωτήματα κάθετης αναπαράστασης και στα γεωμετρικά παραδείγματα και λιγότερο στα αριθμητικά ερωτήματα οριζόντιας αναπαράστασης. Ωστόσο στην παρούσα έρευνα δεν παρατηρήθηκε κάτι ανάλογο ίσως λόγω του μικρού δείγματος των μαθητών.

4.3.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΤΡΙΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Στην ένατη ερώτηση η πλειοψηφία των μαθητών συγκρίνει το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των πραγματικών και του συνόλου των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας το κριτήριο μέρος – όλο (το υποσύνολο λιγότερα στοιχεία από το σύνολο). Οι μαθητές αυτοί δείχνουν να έχουν σωστή διαίσθηση σχετικά με την πληθικότητα των συνόλων αυτών αλλά η μέθοδος που χρησιμοποιούν για να το αιτιολογήσουν είναι αυτή που χρησιμοποιείται για την σύγκριση πεπερασμένων συνόλων δηλαδή η σχέση υποσυνόλου. Εξαίρεση αποτελούν η Μαρία και ο Γιώργος, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά με βάση το μοναδικό κριτήριο απείρου (όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά). Η αντίληψη αυτή, δηλαδή, ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοδύναμα , όλα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων είναι συχνή σύμφωνα με τους Mihaela Singer, Cristian Voica και ονομάζεται ενιαίο άπειρο (single infinity).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- V. M. Kolar, T. H. Čadež, (2012)*Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity*, Educational Studies in Mathematics 80:389–412

- S. Sbaragli, (2006)*Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity*, Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education Vol. 5, 2 , 49-76

- E. Fischbein, D. Tirosh, U. Melamed, (1981) *Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?*, Educational Studies in Mathematics 12: 491-512

- E. Fischbein, R. Jehiam, D. Cohen, (1995)*The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*, Educational Studies in Mathematics 29: 29-44

- I. Kidron, D. Tall, (2015)*The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process*, Educational Studies in Mathematics 88: 183–199

- D. Tall, (2001)*Natural and formal infinities*, Educational Studies in Mathematics 48: 199–238

- E. Fischbein, (2001)*Tacit models and infinity*, Educational Studies in Mathematics 48: 309–329

- J. Monaghan, (2001)*Young peoples' ideas of infinity*, Educational Studies in Mathematics 48: 239–257

- M. Otte, (2003)*Complementarity, sets and numbers*, Educational Studies in Mathematics 53: 203–228

- L. Alcock and A. Simpson, (2004)*Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and learner's beliefs about their own role*, Educational Studies in Mathematics 57: 1–32

- D. Tall, D. Tirosh, *Infinity – the never-ending struggle*, Educational Studies in Mathematics 48: 199–238

- E. Fischbein, M. Baltsan, (1999)*The mathematical concept of set and the "collection" model*, Educational Studies in Mathematics 37: 1–22

- E. Nelson, *Completed versus Incomplete Infinity in Arithmetic*

- D. W. Wood, (2013)*Fichte's Conception of Infinity in the Bestimmung des Menschen*, State University of New York Press, p. 155-171

- A. Mamolo, *Infinite magnitude vs infinite representation: intuitions of "infinite numbers"*

- E. Pehkonen, M. S. Hannula, H. Maijala, R. Soro, (2006)*Infinity of numbers: How students understand it*, Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 345-352

- S. Aztekin, A. Arikan, B, Sriraman, (2010)*The Constructs of PhD Students about Infinity: An Application of Repertory Gridsi*, The Montana Mathematics Enthusiast, Vol. 7, no.1, pp.149- 174

- F. M. Singera, C. Voicab, (2008)*Between perception and intuition: Learning about infinity*, The Journal of Mathematical Behavior

- M. Singer, C. Voica, (2003)*Perception of infinity: does it really help in problem solving?*, The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education

- X. Vamvakoussi, S. Vosniadou ,(2004)*Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach*, Learning and Instruction 14 p. 453–467

- R. Martínez-Planell, A. C. Gonzalez, G. DiCristina, V. Acevedo, (2012)*Students' conception of infinite series*, Educational Studies in Mathematics 81: 235–249

- H. M. Doerr, (2006)*Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking*, Educational Studies in Mathematics 62: 3–24

- L. E. Moreno, G. Waldegg, (1991)*The conceptual evolution of actual mathematical infinity*, Educational Studies in Mathematics 22: 211-231

- E. Fischbein, D. Tirosh, P. Hess, (1979)*The intuition of infinity*, Educational Studies in Mathematics 10: 3-40

- B. Velickovic, (2010)*The Mathematical Theory of Infinity*

- D. Tall, (1980)*The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of* infinity, Educational Studies in Mathematics 11: 271-284

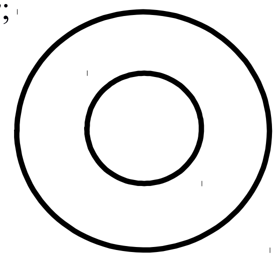
- I.Wistedt, M. Martinsson, (1996)*Orchestrating a mathematical theme: eleven-year olds discuss the problem of infinity*, Learning and Instruction. Vol. 6, No. 2. pp. 173-185

- P. Tsamir, (2001)*When the same is not perceived as such the case of infinite sets*, Educational Studies in Mathematics 48: 289–307

ΠΑΡΑΑΤΗΜΑ 1: ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Να δικαιολογήσετε κάθε απάντηση που θα δώσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

- Μπορείς να γράψεις μία πρόταση με τη λέξη “άπειρο” από την καθημερινή σου ζωή ;
- Προσπάθησε να περιγράψεις με απλά λόγια τι σου φέρνει στο μυαλό η φράση “άπειρο σύνολο”;
- Πόσα σημεία έχει καθένας από τους παρακάτω κύκλους;Μπορείς να συγκρίνεις το πλήθος των σημείων των δύο κύκλων;



- Μπορείς να συγκρίνεις το πλήθος των στοιχείων των παρακάτω συνόλων;

  α) A= {2,4,6,8,10,...} , B={1,2,3,4,5,...}

  β) A={1,2,3,4,...}

  B={1,3,5,7,9,...}
- Μπορείς να συγκρίνεις το πλήθος των σημείων των δύο ημιευθειών;

A B . . .

B . . .

- Πόσοι αριθμοί υπάρχουν στο διάστημα (0,1); Πόσοι αριθμοί υπάρχουν στο διάστημα (0,2);

Μπορείς να συγκρίνεις τα παραπάνω σύνολα ως προς το πλήθος στοιχείων που περιέχουν;

- Είναι τα παρακάτω σύνολα ισοπληθικά; A={ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , ...}

  B={ -3, -2,-1, 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...}
- Αν δύο σύνολα είναι άπειρα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων;
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων;