Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

ΠΜΣ στα Εφαρσμοσμένα Μαθηματικά

Αντίστροφα Προβλήματα σε Παραβολικές Εξισώσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά

Διπλωματική Εργασία

Αριστείδης

Αλευρομάγειρος

2015

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά τη μελέτη της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes η οποία αποτελεί βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις διαδικασίες martingale οι οποίες αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι των στοχαστικών διαφορικών εξισωσεων και φυσικά της εξίσωσης Black-Scholes. Με βασή αυτές ορίζεται το μέτρο μηδενικού κινδύνου καθώς και το πότε μια διαδικασία είναι martingale, supermartingale και submartingale.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στη θεωρία των δικαιωμάτων προαίρεσης και στα βασικά χαρακτηριστικά που τα διέπουν, δηλαδή την ημερομηνία ληξης του συμβόλαιου, την τιμή εξάσκησης του συμβολαίου και φυσικά τον παράγοντα πτητικότητα (volatility) ο οποίος είναι και ο σημαντικότερος για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο υπάρχουν τρία είδη πτητικότητας με το πιο σημαντικό εξ΄ αυτων να είναι η τεκμαρτή πτητικότητα (implied volatitility). Με βάση την πτητικότητα και το πώς αυτή επηρεάζει την τιμή του δικαίωματος προαίρεσης καθορίζεται και το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα στα χρηματοοικονομικά.

Όσον αφορά το τρίτο κεφάλαιο η άναλυση της εξίσωσης θερμότητας καθώς και η λύση της κρίνονται απαραίτητα προκείμενου να γίνει αντιληπτή η λύση της εξίσωσης Black-Scholes. Η εξίσωση Black-Scholes είναι δυνατόν να μετατραπεί με τη βοήθεια κατάλληλων μετασχηματισμών σε μία μερική διαφορική εξίσωση θερμότητας γεγονός το οποίο αποδεικνύεται στο τετάρτο κεφάλαιο. Επιπροσθέτως παρατίθεται και μια εφαρμογή αυτής της θεωρίας σε ένα δικαίωμα προαίρεσης τύπου Barrier.

Τέλος, στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας γίνεται αναφορά στο αντίστροφο πρόβλημα που είχε οριστεί στο δεύτερο κεφάλαιο, η λύση του οποίου βασίζεται σε ένα τέχνασμα το οποίο δημοσιεύθηκε από τον μαθηματικό Bruno Dupire. Συγκεκριμένα το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει οτι αν για σταθεροποιημένη τιμή της μετόχης και του χρόνου γνωρίζουμε τις τιμές των δικαιώματων προαίρεσης για όλες τις τιμές εξάσκησης και όλες τις ημερομηνίες λήξης τότε μπορούμε να βρούμε μία μοναδική συνάρτηση τοπικής πτητικότητας. Αξίζει να σημειωθεί οτι αυτό μας δίνει πληροφορία για την πτητικότητα στο μέλλον. Παρόλο που δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε την τιμή της μετοχής στο μέλλον, μελετώντας τις τιμές των δικαιώματων προαίρεσης για διάφορες τιμές εξάσκησης και ημερομηνίες λήξης λαμβάνουμε πληροφορία για την πτητικότητα.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ.Ιωαννη Στρατή, κ.Αθανάσιο Γιαννακόπουλου, κ.Γεράσιμο Μπαρμπάτη, κ.Νικόλαο Αλικάκο και κ.Βασίλειο Δουγαλή τόσο για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού αλλά και για τον επαγγελματισμό και τη θέρμη που επέδειξαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλιας τους. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου Δημήτρη Αβαράκη, Βασιλική Μπιτσούνη και Λευτέρη Καστή για τις ευχάριστες ώρες που πέρασα μαζί τους μελετώντας και που κυρίως είχα τη δυνατότητα να μοιράστω τις πιο σημαντικές γνώσεις που έλαβα ως τώρα στη ζώη μου με ανθρώπους που έδειξαν αγάπη, πάθος και προσήλωση στον κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους Ευτύχη Λιονουδάκη, Κωνσταντίνο Παδουβά, Φανή Κούζιου και την αδερφή μου Μαρία τον καθένα για ένα λόγο ξεχωριστά.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις Διαδικασίες Martingale

1.1 Διαδικασίες Martingale

Ορισμός 1.1.1 *Μια διήθηση (filtration) είναι μία οικογένεια από σ- άλγεβρες F_t τέτοια ώστε*

$$s \leq t \Rightarrow F_s \subset F_t \tag{1.1.1}$$

Η σ- άλγερβα X_t μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή t . Μια διήθηση μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος. Μια αρκετά συνηθισμένη έννοια είναι η έννοια της φυσικής διήθησης. Αυτή είναι η διήθηση η οποία παράγεται από μια στοχαστική διαδικασία X_t. Όσο περνάει ο χρόνος και παρατηρούμε την εν λόγω στοχαστική διαδικασία τόσο αυξάνει και η πληροφορία που έχουμε στην διάθεσή μας για την διαδικασία αυτή.

Ορισμός 1.1.2 *Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t ονομάζεται προσαρμοσμένη στη διήθηση F_i αν η X_t είναι F_i–μετρήσιμη για κάθε t.*

Με λόγια αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία η οποία αφορά την στοχαστική μεταβλητή X_t μέχρι την χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ-άλγεβρα F_t . Από τον ίδο τον ορισμό της φυσικής διηθήσεως μπορούμε να δούμε ότι μια στοχαστική διαδικασία X_t είναι προσαρτημένη στην φυσική της διήθηση.

Ορισμός 1.1.3 *Έστω (Ω,F,P) ένας χώρος πιθανοτήτων, F_t μια διήθηση στην F (F_t⊂F) και X_t μία οικογένεια πραγματικών ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση F_t .*

1. *Η οικογένεια X_t είναι μια martingale αν*

$$E[X_t|F_s] = X_s, \quad \sigma.\beta \quad s \leq t. \tag{1.1.2}$$

2. *Η οικογένεια X_t είναι μια supermartingale αν*

$$E[X_t|F_s] \leq X_s, \quad \sigma.\beta \quad s \leq t. \tag{1.1.3}$$

3. *Η οικογένεια X_t είναι μια submartingale αν*

$$E[X_t|F_s] \geq X_s, \quad \sigma.\beta \quad s \leq t. \tag{1.1.4}$$

Παρατήρηση 1.1.1 *Το t μπορεί να είναι είτε ένας συνεχής δείκτης $t \in \mathbb{R}$ είτε ένας διακριτός.*

Με απλά λόγια οι παραπάνω ορισμοί μας λένε ότι για μια martingale έχοντας υπόψη μας την πληροφορία που περιέχεται στην F_s η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t είναι η τιμή X_s. Αν η X_t είναι supermartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε γα την τιμή της X_t έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην F_s θα είναι μικρότερη από την τιμή X_s. Τέλος, αν η X_t είναι submartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην F_s θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή X_s. Η παραπάνω εικόνα γίνεται πιο καθαρή αν θεωρήσουμε την X_t σαν μια στοχαστική διαδικασία με το t να έχει την έννοια του χρόνου. Η F_t μπορεί να είναι οποιαδήποτε διήθηση αλλά μία επιλογή μπορεί να είναι η φυσική διήθηση $F_t=\sigma(X_u, u \leq t)$, δηλαδή η διήθηση που παράγεται από τις τροχιές της τυχαίας διαδικασίας. Η F_t στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία που αποκομίζουμε για την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας X_t παρατηρώντας την από την αρχή των χρόνων t=0 ως την χρονική στιγμή t. Αν η X_t είναι martingale, έχοντας πλήρη γνώση του ότι έχει συμβεί μέχρι τη χρονική στιγμή S η καλύτερη πρόβλεψη για το X_t, t>s είναι η τιμή X_s, δηλαδή η τελευταία της τιμή όταν τελείωσει η περιόδος παρατήρησης. Συνεπώς για μία martingale η πληροφορία που περιέχεται στην F_s δεν θα μας βοηθήσει να προβλέψουμε τίποτε σχετικά με το μέλλον της στοχαστικής διαδικασίας X_t. Για να κάνουμε τα πράγματα ακόμα πιο απτά, ας υποθέσουμε ότι η martingale X_t μπορούσε να θεωρηθεί σαν το κέρδος από κάποιο τυχερό παιχνίδι (πχ ρουλέτα), τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας τη χρονική στιγμή t έχοντας παρακολουθήσει την έκβαση του παχνιδιού μέχρι τη χρονική στιγμή s θα είναι το κέρδος που είχαμε τη χρονική στιγμή s δηλαδή το X_s. Μία martingale μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί σαν το κέρδος σε ένα τίμιο παιχνίδι. Αντίθετα, αν η X_t είναι μια supermartingale τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιχνίδι μέχρι τη χρονική στιγμή s θα είναι ότι το κέρδος μας ακουληθήσει το παίχνιδι μέχρι τη χρονική στιγμή s θα είναι ότι το κέρδος μας θα μειωθεί. Συνεπώς μία supermartingale μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιχνίδι όταν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο που δεν ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιχνιδιού. Τέλος, αν η X_t είναι submartingale τότε η καλύτερη μας πρόβλεψη είναι το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιχνιδι μέχρι την χρονική στιγμή s θα είναι οτι το κέρδος θα αυξηθει. Συνεπώς μία submartingale μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος απο ένα μη τίμιο παιχνίδι αν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο το οποίο ευνοείται από το σχεδιασμό του παιχνιδιού.

Θεώρημα 1.1.1 *Αν η X_t ϵίναι μία martingale τότϵ,*

- $E[X_t]=E[X_0]$
- $E[X_t-X_s]=0$

Παράδειγμα 1.1.1 *Ένα κλασσικό παράδϵιγμα σχϵτικά μϵ τις διαδικασίϵς martingale ϵίναι το ακόλουθο: Ας θϵωρήσουμϵ διαδοχικές ρίψϵις ένος τιμίου νομίσματος (δηλαδή ένα νόμισμα που έχϵι ίδια πιθανότητα να φέρϵι κορώνα και ίδια πιθανότητα να φέρϵι γράμματα) και ας ορίσουμϵ* *για την n-ρίψη ($n\in\mathbb{N}$) την τυχαία*

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{κορώνα} \\ -1, & \text{γράμματα} \end{cases}$$

καθώς και την τυχαία μεταβλητή $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. *Αν θεωρήσουμε ένα παιχνίδι κατά το οποίο κάποιος παίκτης ποντάρει ένα ευρώ στο αν θα έρθει κορώνα η γράμματα (κερδίζει ένα ευρώ αν έρθει κορώνα και χάνει ένα ευρώ αν έρθει γράμματα) τότε η μεταβλητή* S_n *μας δίνει την περιουσία του παίκτη τη χρονική στιγμή* n. *Ας ορίσουμε σαν* F_n *τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές* $(X_1,\ldots,X_n)$. *Είναι φανερό οτι η τυχαία μεταβλητή* X_{n+1} *είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας* F_n *έτσι ώστε:*

$$\begin{aligned} E[S_{n+1}|F_n] &= E[S_n + X_{n+1}|F_n] = E[S_n|F_n] + E[X_{n+1}|F_n] \\ &= S_n + E[X_{n+1}] = S_n \end{aligned}$$

Στο παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι η τυχαία μεταβλητή S_n *είναι* F_n*-μετρήσιμη. Από αυτό μπορούμε να συνάγουμε ότι* $E[S_m—F_n]=S_n$ *για* $m>n$. *Εφόσον* $E[—S_n—]<\infty$, *η* S_n *είναι μία martingale ως προς τη διήθηση* F_n. *Αυτό μας λέει ότι ο παίκτης περιμένει να έχει στη ρίψη n+1 την ίδια περιουσία που είχε στη ρίψη n, δεδομένης της ιστορίας της ρίψης του παιχνιδιού.*

Παράδειγμα 1.1.2 *Αν υποθέσουμε στο παραπάνω παράδειγμα πως το νόμισμα έχει παραπάνω πιθανότητα να φέρει γράμματα από ότι κορώνα, δηλαδή οτι* $P(X_n)=1\leq\frac{1}{2}$. *Τότε επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δείξουμε οτι* $E[S_{n+1}—F_n]\leq S_n$, *συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό η* S_n *είναι supermartingale.*

Παράδειγμα 1.1.3 *Αν υποθέσουμε στο παραπάνω παράδειγμα πως το νόμισμα έχει παραπάνω πιθανότητα να φέρει κορώνα από ότι γράμματα, δηλαδή οτι* $P(X_n)=1\geq\frac{1}{2}$. *Τότε επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δείξουμε οτι* $E[S_{n+1}—F_n]\geq S_n$, *συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό η* S_n *είναι subrmartingale*

Μία martingale δεν ορίζεται μόνο ως προς μια διήθηση αλλά επίσης και σε σχέση με ένα μέτρο πιθανότητας (το οποίο ουσιαστικά εμπλέκεται στον ορισμό της μέσης τιμής E). Μπορεί να συμβαίνει αυτό για κάποια διήθηση η στοχαστική διαδικασία X_t να είναι μια martingale ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας P ενώ να μην είναι μία martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας Q. Συνεχίζοντας τον παραπάνω συλλογισμό, μπορούμε να μετατρέψουμε μια δεδομένη στοχαστική διαδικασία X_t σε μια martingale προσαρτώντας σε αυτή το κατάλληλο μέτρο πιθανότητας (κρατώντας δηλαδή τις τροχιές της διαδικασίας ως έχουν αλλά προσαρτώντας στις τροχιές αυτές κάποια πιθανότητα να εμφανιστούν). Μπορούμε να ξεκαθαρίσουμε το παραπάνω σχόλιο στα πλαίσια του παραδείγματος που αναφέραμε. Η στοχαστική διαδικασία S_n είναι martingale αν σαν μέτρο πιθανότητας πάρουμε το μέτρο που ορίζεται ξεκινώντας από την υπόθεση ότι $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$ αλλά δεν είναι martingale αν την θεωρήσουμε ως προς το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται ξεκινώντας από την υπόθεση ότι το νόμισμα δεν είναι τίμιο δηλαδή ως προς κάποιο μέτρο τέτοιο ώστε $Q(T)\neq Q(H)$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε δεδομένη τη διαδικασία S_n (δηλαδή μία συλλογή ακολουθιών $(X_1,...,X_n...)$ από -1 και 1 και από αυτές κατασκευάζουμε τα επιμέρους αθροίσματα $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ παίρνοντας έτσι μία συλλογή από ακολουθίες αριθμών S_n). Η συλλογή των X_n και με την σειρά της η συλλογή των S_n είναι δεδομένες. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι με κάποια πιθανότητα μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία των συλλογών αυτών. Ας φανταστούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα επιλογής μιας ακολουθίας $(X_1,...,X_n...)$ που έχει οτιδήποτε στοιχείο σε οτιδήποτε αλλά +1 στη θέση i είναι $P(X_i=1)=p$. Η πιθανότητα επιλογής μιας ακολουθίας $(X_1,...,X_n...)$ που έχει οτιδήποτε στοιχείο σε οτιδήποτε αλλά -1 στη θέση i είναι $P(X_i=-1)=1-p$. Η πιθανότητα επιλογής είναι στη διακριτική μας ευχέρεια και αυτό ουσιαστικά είναι η επιλογή του μέτρου πιθανοτήτων το οποίο προσάπτουμε στην στοχαστική διαδικασία. Αν επιλέξουμε $p=\frac{1}{2}$ τότε η X_t γίνεται martingale . Αν επιλέγουμε $p\neq\frac{1}{2}$ ανάλογα με την τιμή του p η ίδια ακριβώς στοχαστική διαδικασία (οι ίδιες ακριβώς τροχιές) με τις προηγούμενες μπορεί να γίνουν είτε supermartingale είτε submartingale. Τονίζεται ότι δεν είναι πάντοτε δυνατό για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία να κατασκευάσουμε μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία να είναι martingale. Το σχόλιο αυτό αποτελεί την βάση για ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία της στοχαστικής ανάλυσης (και ιδιαίτερα στην θεωρία διάχυσης), το θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov. Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική ,όπως στην μαθηματική θεωρία της αποτίμησης χρεογράφων (asset pricing).

Παράδειγμα 1.1.4 . *Έστω μία ακολουθία από ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες (independent identically distributed (i.i.d)) τυχαίες μεταβλητές* Y_i , *i=1,2,.... Για τις οποίες ισχύει* $E[Y_i]= 0$, $E[{Y_i}^2]= \sigma^2$, *i= 1,2,.... . Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή*

$$X_0 = 0$$

$$X_n = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 - n\sigma^2$$

Τότε η X_n, $n\in\mathbb{N}$ *είναι μία martingale ως προς την διήθηση που παράγεται από τις μεταβλητές* Y_n *και την οποία ας συμβολίσουμε* $F_n=\sigma(\Upsilon_1,...,\Upsilon_n...)$.

Απόδειξη. Ισχύει οτι E[—X$_n$—]$\leq$2nσ$^2\leq\infty$. Παίρνοντας την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα F$_n$, έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_{n=1}|F_n] &= E[(Y_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 - (n+1)\sigma^2|F_n)] \\ &= E[(Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k + X_n - \sigma^2|F_n)] \\ &= E[(Y_{n+1})^2|F_n] + 2\sum_{k=1}^{n} Y_k E[Y_{n+1}|F_n] + X_n - \sigma^2 \\ &= X_n \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα martingale για την τυχαία μεταβλητή, X$_n$. Σημειώστε ότι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές X$_n$ και $\sum_{k=1}^{n}$Y$_k$ είναι F$_n$. – μετρήσιμες (αφού εξαρτώνται μόνο από τις (Y$_1$,...,Y$_n$...), έτσι ώστε να μπορέσουμε να εξάγουμε από την υπό συνθήκη πιθανότητα ως προς την σ-άλγεβρα αυτή. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι οι Y$_k$ είναι ανεξάρτητες , συνεπώς λοιπόν και Y$_{n+1}$ ανεξάρτητη της F$_n$, για να πάρουμε ότι

$$E[Y_{n+1}^2|F_n] = E[Y_{n+1}^2] = \sigma^2$$

$$E[Y_{n+1}|F_n] = E[Y_{n+1}] = 0$$

■

1.2 Χρόνοι στάσης

Ορισμός 1.2.1 *Έστω $(F_t)_{t\in I}$ μία διήθηση σε ένα σύνολο Ω, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών (όχι απαραίτητα διακριτό). Ένας χρόνος στάσης σχετικά με τη διήθηση αυτή είναι μία απεικόνιση $T{:}\Omega\rightarrow I$ τέτοια ώστε*

$$\{T \leq t\} \in F_t, \quad \forall t \in I \tag{1.2.1}$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι η T είναι μία τυχαία μεταβλητή. Αν ο χρόνος στάσης $\tau<\infty$, σ.β. λέμε ότι ο τ είναι πεπερασμένος σ.β. Αν ισχύει ότι $\tau\leq T<\infty$ τότε λέμε ότι ο χρόνος στάσης τ είναι φραγμένος.

Αν η διήθηση F_t θεωρηθεί σαν η φυσική διήθηση που παράγεται από κάποια στοχαστική διαδικασία X_t (ή πιο γενικά θεωρήσουμε ότι η F_t είναι μία διήθηση που κάνει την X_t μετρήσιμη), διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή T είναι ένας χρόνος στάσης αν η τιμή της μπορεί να καθοριστεί από την γνώση της στοχαστικής διαδικασίας μόνο κατά το παρελθόν και δεν χρειάζεται πληροφορία από το μέλλον. Στις περισσότερες περιπτώσεις ένας χρόνος στάσης είναι η πρώτη φορά που θα συμβεί ένα γεγονός.

Παράδειγμα 1.2.1 *Ας ορίσουμε σαν $T(\omega)= inf\{n{:}S_n= K\}$, δηλαδή την πρώτη φορά που ο παίκτης παίρνει K δραχμές . Τότε η τυχαία μεταβλητή $T(\omega)$ είναι ένας χρόνος στάσης.*

Παράδειγμα 1.2.2 *Ένας χρόνος που δεν είναι χρόνος στάσης. Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.1.1 ας ορίσουμε σαν $T_4(\omega)$ τον χρόνο που θα πρέπει να σταματήσουμε το παιγνίδι έτσι ώστε να είμαστε ακριβώς 4 ρίψεις πριν φτάσουμε στο ποσό των K δραχμών. Ο χρόνος αυτός δεν είναι χρόνος στάσης δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιος θα είναι ο χρόνος αυτός παρά μόνο αφού θα τον έχουμε περάσει . Πιο συγκεκριμένα (αν γινόταν να ταξιδεύουμε στο παρελθόν και στο μέλλον) θα έπρεπε να φτάναμε στο ποσό K(το οποίο θα γίνει σε μια χρονική στιγμή $\tau(\omega)$ $> T_4(\omega)$ και μόνο τότε θα μπορέσουμε να καθορίσουμε τον $T_4(\omega)=\tau(\omega)-4$. Μιας και ο $\tau(\omega)$ είναι χρόνος στάσης βλέπουμε ότι η τυχαία μεταβλητή T_4 απαιτεί γνώση του μέλλοντος γιατί $\{T_4\leq t\}\notin F_t$.*

Παράδειγμα 1.2.3 *Κάτω από ορισμένες σχετικά ασθενείς συνθήκες, ο χρόνος εισόδου T^G*

μίας στοχαστικής διαδικασίας X_t *σε ένα σύνολο* $G \subset \mathbb{R}^n$ *δηλαδή ο*

$$T^G = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in G\}$$

είναι ένας χρόνος στάσης. Το ίδιο ισχύει και για το χρόνο εξόδου από το σύνολο G.

$$\tau^G = inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \notin G\}$$

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στα Δικαιώματα Προαίρεσης

2.1 Δικαιώματα Προαίρεσης

Ένα κεντρικό πρόβλημα στα χρηματοοικονομικά είναι η προσαρμογή των μοντέλων χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της αγοράς. Η βασική παράμετρος που διέπει τα μοντέλα των παραγώγων που βασίζονται στις τιμές των μετοχών είναι η πτητικότητα της μετοχής. Δυστυχώς, αυτή η παράμετρος δεν μπορεί να εξαχθεί άμεσα από τα δεδομένα της αγοράς.

Το δικαίωμα προαίρεσης είναι μία οικονομική σύμβαση βασισμένη σε ένα υποκείμενο προϊόν. Το υποκείμενο προϊόν είναι συνήθως μία μετοχή, ένα επιτόκιο, ένα μετοχικό κεφάλαιο ή ένας συνδυασμός των παραπάνω οικονομικών αντικειμένων. Ένα εύκολο παράδειγμα προς κατανόηση είναι το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει μία μετοχή σε μία ορισμένη τιμή εξάσκησης K, στην ημερομηνία λήξης T – η διάρκειας ζωής είναι [0, T]. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση απόδοσης είναι:

$$(S_T - K)^+ = max(0, S_T - K) \tag{2.1.1}$$

όπου S είναι η αξία του υποκειμένου αγαθού την χρονική στιγμή t, t $\in$ [0, T]. Αφού το υποκείμενο αγαθό είναι μόνο ένα προϊόν με απλή συνάρτηση απόδοσης, ένα τέτοιο δικαίωμα προαίρεσης ορίζεται ως vanilla option.

Παρομοίως, κατέχοντας ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, ο αγοραστής έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πουλήσει το υποκείμενο αγαθό. Η συνάρτηση απόδοσης είναι:

$$(K - S_T)^+ = max(0, K - S_T) \tag{2.1.2}$$

Οι συμβάσεις δικαιωμάτων προαίρεσης μπορεί να είναι πολύ πιο σύνθετες, όπως για παράδειγμα exotic δικαιώματα προαίρεσης όπου η απόδοση κατά την ημερομηνία λήξης εξαρτάται όχι μόνο από την αξία του υποκειμένου αγαθού σε αυτή την χρονική στιγμή, αλλά και από την αξία που έλαβε πολλές φορές κατά τη διάρκεια ζωής της σύμβασης ή από περισσότερα από ένα υποκείμενα αγαθά. Το δικαίωμα προαίρεσης που μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια ζωής του ονομάζεται American option. Σε αυτόν τον τύπο ανήκει η πλειοψηφία των διαπραγματεύσιμων αμοιβαίων κεφαλαίων.

Η δυσκολία έγκειται στον καθορισμό μίας εύλογης τιμής. Όσο πιο πολύπλοκη είναι μία σύμβαση, τόσο πιο δύσκολο είναι να καταλήξουμε σε μία εύλογη τιμή, ειδικά στις αγορές με προβλήματα ρευστότητας όπου μόνο ένας μικρός αριθμός των συνολικών συμβάσεων διευθετείται. Ως εκ τούτου, υπήρχε ανάγκη για μία μαθηματική θεωρία έτσι ώστε να καταλήγουμε σε κάποιου είδους συναίνεση στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Αυτή η θεωρία ονομάζεται Arbitrage-Free Option Pricing και αναπτύχθηκε μεταξύ άλλων από τους Black, Scholes και Merton στις αρχές της δεκαετίας του 1970. Η θεωρία τους βασίζεται στην άποψη ότι η τιμή καθορίζεται σε σχέση με άλλες τιμές στην αγορά, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγονται οι ευκαιρίες για arbitrage. Ευκαιρία για αρβιτραγε σημαίνει ότι υπάρχει μία οικονομική στρατηγική η οποία εγγυάται μηδενική απώλεια και έχει θετική πιθανότητα κέρδους.

Για ένα δικαίωμα αγοράς, όταν η τιμή εξάσκησης είναι χαμηλότερη από την τιμή της αγοράς του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, λέμε ότι το δικαίωμα προαίρεσης είναι "in the money". Αυτό δεν σημαίναι απαραίτητα ότι θα αποφέρει κέρδος, αλλά ότι αξίζει να εξασκηθεί το δικαίωμα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το δικαίωμα προαίρεσης έχει κάποιο κόστος για να αγοραστεί. Ένα δικαίωμα αγοράς είναι "out of the money" όταν η τιμή εξάσκησης είναι υψηλότερη από την τιμή της αγοράς για το υποκείμενο προϊόν. Σε μία τρίτη περίπτωση, όταν η τιμή εξάσκησης είναι ίση με την αξία του υποκειμένου, το δικαίωμα προαίρεσης είναι "at the money". Η ορολογία αυτή εξαρτάται από τον τύπο του δικαιώματος προαίρεσης π.χ. δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Συλλογιζόμενοι την αγορά των vanilla options, τέσσερις όροι πρέπει να γίνουν κατανοητοί. Η τιμή δικαιώματος είναι το ποσό που ο αγοραστής πληρώνει ανά υποκείμενο αγαθό. Η τιμή του δικαιώματος επηρεάζεται κατά κύριο λόγο από τη διαφορά μεταξύ της τιμής της μετοχής και της τιμής εξάσκησης, από τον χρόνο που απομένει μέχρι να εξασκηθεί το δικαίωμα και από την πτητικότητα της υποκείμενης μετοχής. Παράγοντες όπως τα επιτόκια, οι συνθήκες της αγοράς και το ποσοστό μερίσματος που αποδίδει η υποκείμενη μετοχή, επηρεάζουν την τιμή δικαιώματος σε μικρότερο βαθμό. Η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης έχει δύο συνιστώσες: την εγγενή και της εξωγενή αξία. Η εγγενής αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι η διαφορά μεταξύ της παρούσας αξίας του υποκειμένου και της τιμής εξάσκησης, εφόσον αυτή η διαφορά είναι θετική ή μηδενική. Επομένως, η εγγενής αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι η τιμή άσκησής του τη δεδομένη στιγμή. Η εξωγενής αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι το χρηματικό ποσό που κάποιος διατίθεται να καταβάλει εώς ότου λήξει η επιλογή του δικαιώματος. Καθώς το δικαίωμα πλησιάζει στη λήξη του, η εξωγενής αξία μειώνεται και τελικά μηδενίζεται. Μόνο τα "ιν τηε μονεψ" δικαιώματα προαίρεσης έχουν εγγενή αξία. Η εγγενής αξία για τα "at the money" και "in the money" δικαιώματα είναι μηδενική. Η αξία του δικαιώματος προαίρεσης προκύπτει από το άθροισμα της εγγενούς και εξωγενούς αξίας. Τα "at the money" δικαιώματα προαίρεσης έχουν την υψηλότερη εξωγενή αξία. Σε αυτή την περίπτωση, σαν εξωγενής αξία μπορεί να θεωρηθεί το ποσό που κάποιος είναι διατεθειμένος να καταβάλει για την ευκαιρία/πιθανότητα ως προς το εάν το δικαίωμα προαίρεσης θα λήξει "in the money". Όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν έξι παράγοντες που επηρεάζουν την τιμολόγηση των vanilla options: η τιμή εξάσκησης, η τιμή της μετοχής, η πτητικότητα, η ημερομηνία λήξης, το επιτόκιο και το μέρισμα. Η πτητητικότητα αποτελεί τον πιο καθοριστικό παράγοντα. Είναι η χρονική απόκλιση μίας μετοχής, ενός επιτοκίου κλπ. Η πτητικότητα έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιείται σαν τρόπος υπολογισμού του κινδύνου. Συνοπτικά, υπάρχουν τρία διαφορετικά είδη μεταβλητότητας, η τεκμαρτή, η στοχαστική και η τοπική.

2.2 Η εξίσωση Black-Scholes

Θεωρούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, το πρόβλημα ενός Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K σε ένα υποκείμενο αγαθό $S=(S_t)_{t\geq 0}$ το οποίο περιγράφεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS = S(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{2.2.1}$$

ή

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.2.2}$$

όπου $(W_t)_{t\geq 0}$ είναι η κίνηση Brown ή αλλιώς η διαδικάσια Wiener ως προς τη διήθηση F_t. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση καλειται γεωμετρική κίνηση Brown. Η διαδικασία Wiener ακολουθεί τον ακόλουθο κανόνα:

$$dW_t = \Phi\sqrt{dt}$$

όπου Φ είναι η κανονική κατανομή. Επειδή η αναμενόμενη τιμή του τυχαίου παράγοντα είναι μηδέν αφού η κίνηση Brown ακολουθεί κανονική κατανομή, είναι πιθανόν να πιστεύουμε ότι ο αναμενόμενος ρυθμός ανάπτυξης είναι μ. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει αφού ο στοχαστικός παράγοντας μειώνει το μ κατά $\frac{1}{2}\sigma^2$. Αυτή είναι η τιμη της τυχαιότητας για το υποκείμενο αγαθό. Κάτω από τις υποθέσεις ότι δεν υπάρχουν arbitrage και κόστη συναλλαγής η τιμή του δικαιώματος αγοράς C, C(S,t)=C(S,t;K,T,r,σ) έχει την εξής αναπαράσταση:

$$C(S,t;K,T,r,\sigma) = e^{-(T-t)}E_Q^{t,S}((S_T - K)^+), \tag{2.2.3}$$

όπου το $E_Q{}^{t,S}$ είναι η αναμενόμενη τιμή του μηδενικού κινδύνου μέτρου πιθανότητας Q. Μια εξήγηση αυτής της αναπαράστασης είναι ότι για κάθε πραγματοποίηση της αγοράς ω, η συνάρτηση απόδοσης $(S_T(\omega)\text{-}K)^+$ θα πρέπει να προεξοφλείται στην παρούσα τιμής της με βάση τον βαθμό απόδοσης r, δηλαδη ως $e^{-r(T-t)}(S_T(\omega)\text{-}K)^+$. Τότε η μέση τιμή ως προς όλες τις πιθανές πραγματοποιήσεις ως προς το μέτρο μηδενικού κινδύνου μας δίνει την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Το μέτρο μηδενικού κινδύνου είναι αυτό το μέτρο το οποίο διαφέρει από όλα τα άλλα από την άποψη οτι καθιστά τη διαδικασία προεξόφλησης $(e^{-r(T-t)}(S_t))_{t\geq 0}$ μία διαδικασία martingale.

Η εύλογη αξία ένος Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς ικανοποιεί την εξίσωση Black-Scholes με τις εξής συνοριακές και τελικές συνθήκες:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}\sigma(S,t)^2 S^2 \frac{d^2C}{dS^2} + rS\frac{dC}{dS} - rC = 0, \quad S \in (0,\infty), \quad t \in [0,T] \tag{2.2.4}$$

$$\begin{gathered} C(0,t) = 0 \\ \lim_{S\to\infty}(C(S,t) - S) = 0, \quad t \in [0,T] \end{gathered} \tag{2.2.5}$$

$$C(S,T) = (S-K)^+ \tag{2.2.6}$$

Το πρόβλημα αυτό όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα εξίσωσης θερμότητας το όποιο έχει την εξής λύση:

$$C(S,t) = SN(d_+(\sigma)) - Ke^{-r(T-t}N(d_-(\sigma)), \tag{2.2.7}$$

όπου

$$d_\pm(\sigma) = \frac{\frac{S}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2}(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \sigma > 0 \tag{2.2.8}$$

και N συμβολίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής,

$$N(\alpha) := \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-s^2}{2})ds, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.2.9}$$

Παρατήρηση 2.2.1 *Ο όρος $\frac{S}{K}$ καλείται moneyess του δικαιώματος.*

Παρατήρηση 2.2.2 *Ο υπολογισμός της τιμής ενός Ευρωπαικού δικαιώματος πώλησης μπορεί να γίνει με τον ίδιο τρόπο. Ωστόσο κάτω από την υπόθεση της απουσίας arbitrage ίσχυει η ιδιότητα της put-call ισοτιμίας η οποία δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς συναρτήσει ένος δικαιώματος πώλησης και το αντίστροφο. Συγκεκριμένα,*

$$P(S,t) + S = C(S,t) + Ke^{-r(T-t)}, \quad S > 0, \quad t \in (0,T). \tag{2.2.10}$$

όπου P, C είναι οι τιμές των δικαιωμάτων πώλησης και αγοράς αντίστοιχα.

2.3 Πτητικότητα

Η εξίσωση Black-Scholes λειτούργησε καλά πριν την κατάρρευση του 1987 και 1989, αλλά έκτοτε έχει παρατηρηθεί ότι οι τιμές της αγοράς έρχονται σε αντίθεση με την υπόθεση περί συνεχούς πτητικότητας: οι τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης με διαφορετική ημερομηνία λήξης παρουσιάζουν δραστικές μεταβολές και οι τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης με διαφορετικές τιμές εξάσκησης επίσης παρουσιάζουν σημαντικές διακυμάνσεις. Το ερώτημα είναι: εάν το μοντέλο Black-Scholes αποτελεί μία έγκυρη αποτύπωση των συνθηκών της αγοράς, ποια είναι η τεκμαρτή πτητικότητα στα παρατηρούμενα δικαιώματα προαίρεσης· Επομένως, η τεκμαρτή πτητικότητα είναι η αξία σ, τέτοια ώστε η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγορά να είναι ίση με την αξία που προκύπτει εφαρμόζοντας τον τύπο Black-Scholes. Η τεκμαρτή πτητικότητα είναι ένα μέτρο που στοχεύει στο μέλλον και διαφέρει από την ιστορική πτητικότητα καθώς η τελευταία υπολογίζεται από τις ήδη γνωστές προηγούμενες αποδόσεις ενός δικαιώμάτος προαίρεσης. Στην αγορά, η τεκμαρτή πτητικότητα είναι αυτή που χρησιμοποιούν οι συναλλασσόμενοι για να εισάγουν υποκείμενα προϊόντα. Η τιμή του δικαιώματος μπορεί να υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης Black-Scholes.

Παρατήρηση 2.3.1 *Για την τιμολόγηση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης αγοράς ή πώλησης με ίδια τιμή εξάσκησης και ίδια ημερομηνία λήξης με το μοντέλο Black-Scholes, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ίδια πτητικότητα. Αυτό ισχύει πάντα για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης όταν υπάρχει ισοτιμία put-call και δεν εξαρτάται από μελλοντική πιθανότητα διανομής του υποκειμένου λόγω του ότι βασίζεται σε απλά arbitrage επιχειρήματα. Ισχύει επίσης κατά προσέγγιση για τα Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης. Ως εκ τούτου, όταν αναφερόμαστε σε τεκμαρτή πτητικότητα, δεν έχει σημασία αν πρόκειται για προαίρεση αγοράς ή πώλησης αφού και για τις δύο περιπτώσεις ισχύει το ίδιο.*

Σύμφωνα με το μοντέλο, πρέπει να αναμένουμε πανομοιότυπη τεκμαρτή πτητικότητα για διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης αγοράς. Αντιθέτως όμως, παρατηρείται μία εξάρτηση από την τιμή εξάσκησης K, από το moneyness και από το υπόλοιπο ζωής του δικαιώματος προαίρεσης. Αυτό επιβεβαιώνεται από μία σειρά εμπειρικών μελετών. Καταλήγουμε λοιπόν, ότι το μοντέλο

Black-Scholes δεν προσφέρει μία αντιπροσωπευτική περιγραφή της αγοράς και αυτό υποδηλώνεται με τον όρο smile. Η επιφάνεια, που ονομάζεται “πτητικότητα σμιλε” μεταβάλλει το σχήμα από μέρα σε μέρα, αλλά ορισμένα γενικά χαρακτηριστικά παραμένουν. Στην τιμολόγηση ενός δικαιώματος προαίρεσης, η τεκμαρτή πτητικότητα είναι αυτή που επηρεάζει την τιμή και όχι η ιστορική μεταβλητότητα, και έχει τεράστια επίδραση στον καθορισμό της τιμής.

Κατά κανόνα: όταν η τεκμαρτή πτητικότητα είναι σχετικά χαμηλή, το δικαίωμα προαίρεσης θεωρείται φθηνό. Όταν η τεκμαρτή πτητικότητα είναι σχετικά χαμηλή και αναμένεται να αυξηθεί, τότε συμφέρει η αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης. Όταν η τεκμαρτή πτητικότητα είναι σχετικά υψηλή, το δικαίωμα προαίρεσης θεωρείται ακριβό. Όταν η τεκμαρτή πτητικότητα είναι υψηλή και αναμένεται να μειωθεί, τότε συμφέρει η πώληση δικαιωμάτων προαίρεσης. Σε οποιαδήποτε προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης, οι τεκμαρτές πτητικότητες ποικίλουν ανάλογα με τις τιμές εξάσκησης. Σχεδόν πάντα, οι τεκμαρτές πτητικότητες αυξάνονται όταν πέφτουν οι τιμές εξάσκησης, αυτό είναι ότι out of the money δικαιώματα πώλησης αγοράζονται σε υψηλότερες τεκμαρτές πτητικότητες από out the money δικαιώματα αγοράς. Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως αρνητική σκιά. Σε οποιαδήποτε προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης, οι τεκμαρτές πτητικότητες ποικίλουν ανάλογα με τις ημερομηνίες λήξης. Συχνά οι μακροπρόθεσμες τεκμαρτές πτητικότητες ξεπερνούν τις βραχυπρόθεσμες τεκμαρτές πτητικότητες. Γενικα αξίζει να σημειωθεί οτιυπάρχει μια μοναδική γενικά διαφορετική τεκμαρτή πτητικότητα που σχετίζεται με διαφορετικές τιμές εξάσκησης και ημερομηνίες λήξης. Προκείμενου να αποφευχθεί το smile effect, το μοντέλο πρέπει να υποστεί κάποιες μεταβολές. Μια ευρέως διαδεδομένη προσέγγιση είναι να πραγματοποιήσουμε την υπόθεση ότι η πτητικότητα ακολούθει και αυτή μια στοχαστική διαδικασία:

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dW_t \\ d\sigma &= \lambda_t dt + \xi_t dW_t^{\nu} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Η $W_t{}^{\nu}$ είναι διαδικασία Wiener, οι παράμετροι λ_t, ξ_t πρέπει να επιλεχθούν κατάλληλα. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι το μοντέλο Herston:

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sqrt{\nu^+} S dW_t \\ d\sigma &= \kappa(\theta - \nu) dt + \sqrt{\nu^+} dW_t^{\nu} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

με ν^+=max(0,ν), δηλαδή το ν αντικαθιστά το σ^2 στο μοντέλο Black-Scholes. Τα σχοχαστικά μοντέλα πτητικότητας είναι χρήσιμα γιατι εξηγούν με ποιον τρόπο δικαιώματα προαίρεσης με διαφορετικές τιμές εξάσκησης και ημερομηνιών λήξης έχουν διαφορετικές τεκμαρτές πτητικότητες.

Μία άλλη περίπτωση που η πτητικότητα σ δεν είναι σταθερή αλλα μια ντετερμινιστική συνάρτηση του υποκείμενου αγαθου και του χρόνου σ=σ(x,t). Αυτού του είδους τα μοντέλα καλούνται μοντέλα τοπικής πτητικότητας και θα αναλυθουν διεξοδικα στα επομένα κεφάλαια. Συγκεκριμένα τα μοντέλα αυτά διέπονται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = (\mu - q)dt + \sigma(S,t)dW_t \tag{2.3.3}$$

Η συνάρτηση τοπικής πτητικότητας είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\sigma : [0,\infty) \times [0,T] \to \mathbb{R}.$$

Η τιμή ενός Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς το όποιο ακολουθει την εξίσωση 2.3.3 δίνεται απο το ακολουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}\sigma(S,t)^2 S^2 \frac{d^2C}{dS^2} + (r-q)S\frac{dC}{dS} - rC = 0, \quad S \in (0,\infty), \quad t \in [0,T] \tag{2.3.4}$$

$$\begin{gathered} C(0,t) = 0 \\ \lim_{S\to\infty}(C(S,t) - Se^{-q(t-T)}) = 0, \quad t \in [0,T] \end{gathered} \tag{2.3.5}$$

$$C(S,T) = (S-K)^+ \tag{2.3.6}$$

Το ευθύ πρόβλημα

Υποθέτοντας οτι μια μέθοδος θα μπορούσε να υπολογίσει τιμές δικαιώματων προαίρεσης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις πτητικότητας σ:

$$(0,\infty) \times [0,T] \in (S,t) \longmapsto C(S,t;K,T,r,q,\sigma),$$

τότε το ευθύ πρόβλημα ορίζεται ως:

Δοθέντος S_*,t_*,r,q,T_{max}, μιας συνεχούς συνάρτησης σ:[0,∞]×[0,T_{max}]→$\mathbb{R}$ και ενός συνόλου

R$\subset(0,\infty)\times[t_*,T_{max})$, καθόρισε τελεστή G(σ): R $\in$ (K,T)$\longmapsto$C($S_*,t_*;K,T,r,d,\sigma$).
Για την εκτίμηση του τελεστή G(σ) στο (K,T)$\in\mathbb{R}$ πρέπει να λύθει η μερική διαφορική εξίσωση 2.3.5 με τις συνοριακές συνθήκες 2.3.5 και την τελική συνθήκη 2.3.6. Στην πραγματικότητα αυτή η σύνθετη διαδικάσια μπορεί να αποφευχθεί οπώς θα δούμε αργότερα χάρη σέ ένα έξυπνο τέχνασμα το όποιο οφείλεται στο μαθηματικό Bruno Dupire.

Το αντίστροφο πρόβλημα

Σύμφωνα με τη μορφοποίηση του ευθέως προβλήματος με τη χρήση του τελεστή G(σ) το αντίστροφο πρόβλημα θα πρέπει να είναι:
Δοθέντων S_*,t_*,r,q,T_{max} και ενός υποσυνόλου R$\subset(0,\infty)\times[t_*,T_{max})$
να αποδειχθεί οτι αν G(σ)(K,T)=G($\hat{\sigma}$)(K,T) $\forall$(K,T)$\in$R τότε σ(S,t)=$\hat{\sigma}$(S,t), (S,t)$\in$I όπου το I είναι ένα υποσύνολο του $[0,\infty)\times[0,T_{max})$.

Κεφάλαιο 3

Η εξίσωση θερμότητας

Οι λύσεις της εξίσωσης θερμότητας σε ένα φραγμένο χωρίο μπορούν να αναπαρασταθούν με όρους κίνησης Brown και χρόνων στάσης της κίνησης Brown. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε οτι D $\subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα λείο φραγμένο χωρίο και οτι η u(x,t) λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad x \in D, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad x \in D \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

Η λύση του προβλήματος αναπαρίσταται από τη σχέση:

$$u(x,t) = E[\phi(X_t^x)\mathbb{I}_{\gamma^x > t(\omega)}] \tag{3.0.2}$$

όπου X_t^x=x+$\sqrt{2}B_t$ και γ^x είναι η πρώτη φορά που η X_t^x ακουμπάει το σύνορο. Η αναλυτική κατασκευήτων λύσεων του προβλήματος ανάγεται στην αρχή της υπέρθεσης: το άθροισμα δύο λύσεων της εξίσωσης θερμότητας είναι επίσης λύση του προβλήματος. Η αρχή αυτή μας δίνει μια μέθοδο για την κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων σε ένα ευρύ φάσμα εξισώσεων και όχι μόνο στην εξίσωση θερμότητας.

3.1 Η μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλήτων

Θεωρούμε το ομογενες πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad x \in D, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad x \in D \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Η ιδέα πίσω από αυτή τη μέθοδο είναι ο διαχωρισμός των μεταβλητών όπου η λύση γράφεται σαν υπέρθεση συναρτήσεων της μορφής υ(x)ϑ(t):

$$u(x,t) = \sum_{n=1} \upsilon_n(x)\vartheta_n(t) \tag{3.1.2}$$

όπου κάθε όρος στη σειρά είναι μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια συνάρτηση της μορφής w(x,t)=υ(x)ϑ(t) η οποία ικανοποιεί τόσο τη μερική διαφορική εξίσωση όσο και τη συνοριακή συνθήκη. Οι συναρτήσεις υ και ϑ είναι άγνωστες. Αντικαθιστώντας υ(x)ϑ(t) στην μερική διαφορική εξίσωση βρίσκουμε ότι:

$$\vartheta'(t)\upsilon(x) = \vartheta(t)\Delta\upsilon. \tag{3.1.3}$$

Επομένως,

$$-\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)} = -\frac{\Delta\upsilon(x)}{\upsilon(x)}. \tag{3.1.4}$$

Αφού το δεξί μέλος εξαρτάται μόνο από το x, και το αριστερό μέλος εξαρτάται μόνο από το t, τότε τα δύο μέλη πρέπει να είναι ίσα με μία σταθερά λ. Επομένως τα ϑ και υ πρέπει να ικανοποιούν

$$-\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)} = -\lambda\vartheta(t) \quad \kappa\alpha\iota \quad -\Delta\upsilon = \lambda\upsilon \tag{3.1.5}$$

Η λύση θα πρέπει επίσης να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη: υ(x)ϑ(t)=0 για κάθε x∈∂D. Συνεπώς, είτε υ(x)=0 για κάθε x∈∂D ή ϑ(t)=0. Η τελεύταια εκδοχή δεν μπορεί να ισχύει έφοσος η λύση w δεν μπορεί να είναι η τετριμμένη. Έτσι, βρίσκουμε οτι η υ πρέπει να ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} -\Delta\upsilon(x) &= \lambda\upsilon(x), \quad x \in D, \\ \upsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

και η ϑ πρέπει να ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση $\vartheta'(t)=-\lambda\vartheta(t)$. Η παραπάνω εξίσωση αν μπορούσε να λυθεί για κάποια σταθερά λ, τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς $\vartheta(t)$, και η συνάρτηση $w(x,t)=\upsilon(x)\vartheta(t)$ θα ικανοποιούσε

$$\begin{aligned} w_t &= \Delta w, \quad x \in D, \\ w(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Για $t=0$, $w(x,0)=\upsilon(x)\vartheta(0)$, και $w_t(x,0)=\upsilon(x)\vartheta'(0)$.

Ας υποθέσουμε τώρα οτι για κάθε ακέραιο $n\geq 0$, η $\upsilon_n x$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} -\Delta \upsilon_n(x) &= \lambda \upsilon_n(x), \quad x \in D, \\ \upsilon_n(x) &= 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

για κάποιες σταθερές $\{\lambda_n\}_n$, και η $\vartheta_n(t)$ ικανοποιεί

$$\vartheta_n'(t) = -\lambda_n(t)\vartheta_n(t). \tag{3.1.9}$$

Επομένως, αφού η εξίσωση είναι γραμμική, αναμένουμε οτι το άθροισμα

$$u(x,t) = \sum_n \upsilon_n(x)\vartheta_n(t) \tag{3.1.10}$$

ικανοποιεί το

$$\begin{aligned} u_t &= \mathit{\Delta} u, \quad x \in D, \quad t > 0 \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = \sum_n \upsilon(x)\vartheta(0). \tag{3.1.12}$$

Αν ισχύει οτι $\varphi(x)=\sum_n(\upsilon x)\vartheta(0)$, τότε έχουμε λύσει το πρόβλημα αρχικών τιμων.

3.2 Η εξίσωση θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε την περίπτωση που το χωρίο $D=[0,L]$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτή είναι μια περίπτωση όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $\upsilon_n(x)$

αναλυτικά. Η μερική διαφορική εξίσωση 3.1.8 είναι τώρα μια συνήθης διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$-\upsilon_n''(x) = \lambda_n \upsilon_n(x), \quad x \in [0, L]$$
$$\upsilon_n(0) = \upsilon_n(L) = 0.$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών, παρατηρούμε οτι για κάθε ακέραιο n > 0 υπάρχει μία λύση της μορφής:

$$\upsilon_n(x) = \sin(\frac{\pi n x}{L})$$

με

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 > 0.$$

Τώρα η συνθήκη 3.1.2 μπορεί να γραφτεί ως

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{\pi n x}{L}).$$

Για κάθε n η λύση της συνήθης διαφορικής εξίσωσης $\vartheta'(t)=-\lambda_n\vartheta_n(t)$ με αρχικές συνθήκες $\vartheta_n(0)=\beta_n$ είναι:

$$\vartheta_n(t) = b_n e^{-\lambda_n t}$$

Έτσι, αναμένουμε οτι η άπειρη σειρά

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi n x}{L})\vartheta_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \sin(\frac{\pi n x}{L})$$

λύνει την εξίσωση θερμότητας. Έτσι για κάθε t, η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών συναρτήσεων. Επίσης, παρατηρούμε οτι με την πάροδο του χρόνου οι συντελέστες b_n μειώνονται εκθετικά. Ωστόσο τώρα πρεπει να γίνει αντιληπτό η έννοια αυτής της άπειρης σειράς, αν συγκλίνει και με ποια έννοια η συνάρτηση u(x,t) ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

3.3 Σειρές Fourier

Στην προηγούμενη ανάλυση όπου το χωρίο D ήταν ένα διάστημα μας οδηγεί στην γενική ερώτηση: πότε μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας γραμμίκος συνδυασμός τριγονομετρικών συναρτήσεων. Οι σειρές Fourier είναι σειρές της μορφης

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\frac{n\pi x}{L}) + B_n\sin(\frac{n\pi x}{L})) \tag{3.3.1}$$

Υποθέτοντας οτι οι σειρές αυτής της μορφής συγκλίνουν, η συνάρτηση που ορίζεται από αυτές καλείται περιοδική στο δίαστημα [-L,L], αλλά μπορεί να μην είναι συνεχής. Οι συντελέστες $\{A_n\}_n$, $\{B_n\}_n$ καλούνται συντελεστές Fourier της συνάρτησης φ. Ωστόσο τα εξής ερωτήματα δημιουργούνται:

1. Ποιες συναρτήσεις φ μπορούν να αναπασταθούν με αυτό τον τρόπο·
2. Πως μπορούν να υπολογιστούν οι συντελέστες Fourier για μια τέτοια συνάρτηση φ(x)·
3. Με ποια έννοια η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση φ(x)·

Ορθογωνιότητα Για D=[-L,L], θεωρούμε το χώρο

$$L^2(D) = \{f : D \to \mathbb{R} | \int_D |f(x)|^2 dx < \infty\} \tag{3.3.2}$$

Αυτός είναι ένας απειροδίαστατος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(g,f)_2 = \int_D g(x)f(x)dx. \tag{3.3.3}$$

Δύο συνάρτησεις f,g καλούνται ορθογώνιες στο χώρο $L^2(D)$ αν $(g,f)_2=0$.

Για το χώριο D=[-L,L]

$$(\cos(\frac{n\pi x}{L}), \sin(\frac{m\pi x}{L}))_2 = \int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = 0 \tag{3.3.4}$$

για όλους τους ακεραίους n,m. Επίσης αν n≠m

$$\begin{aligned}(\sin(\frac{n\pi x}{L}), \sin(\frac{m\pi x)}{L}))_2 = 0\\ (\cos(\frac{n\pi x}{L}), \cos(\frac{m\pi x}{L}))_2 = 0\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Ωστόσο στην περίπτωση που n=m, τότε

$$\begin{aligned}(\sin(\frac{n\pi x}{L}), \sin(\frac{n\pi x)}{L}))_2 = L\\ (\cos(\frac{n\pi x}{L}), \cos(\frac{n\pi x}{L}))_2 = L\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Πληρότητα

Θεώρημα 3.3.1 *Το σύνολο των συναρτήσεων* $\{1\} \cup \{sin(\frac{n\pi x}{L})\} \cup \{cos(\frac{n\pi x}{L})\ \}$ *είναι πλήρες στον* L^2*([-L,L]).*

Αυτό σημαίνει οτί το σύνολο των συναρτήσεων $\{1\} \cup \{\sin(\frac{n\pi x}{L})\} \cup \{\cos(\frac{n\pi x}{L})\ \}$ συνίστα μία βάση για τον απειροδιάστατο χώρο L^2([-L,L]) όπως ακριβώς ένα σύνολο d ορθογωνίων διανυσμάτων του $\mathbb{R}_d$ συνιστά βάση για το χώρο $\mathbb{R}_d$. Αυτές οι συναρτήσεις είναι ορθογωνίες μεταξύ τους και το σύνολο τους είναι πυκνό στο χώρο L^2. Με άλλα λόγια, αν δοθεί μια συνάρτηση $\varphi \in L^2$([-L,L]), μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό αυτών των συναρτήσεων ο οποίος προσεγγίζει τη συνάρτηση φ με τυχαία ακρίβεια. Ισοδύναμα, αν δοθεί μια συνάρτησης $\varphi \in L^2$([-L,L]) και για κάθε ε>0, μπορούν να βρεθούν συντελεστές A_n και B_n και N αρκετά μεγάλο ώστε:

$$\|\phi(x) - (\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n}(A_n cos(\frac{n\pi x}{L}) + B_n(\frac{sin(n\pi x)}{L}))\|_2 \leq \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

Επομένως για μια συνάρτηση $\varphi \in L^2(D)$, οι συντελεστές Fourier δίνουν μία αναπαράσταση της φ μέσω αυτής της απειροδιάστατης βάσης. Ωστόσο το εξής ερώτημα γεννάται. Πως μπορόυν οι συντελέστες A_n και B_n να υπολογιστουν. Ας υποθέσουμε λοιπόν οτι υπάρχουν πεπερασμένοι όροι στο άθροισμα της εξίσωσης 3.3.1. Τότε,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n cos(\frac{k\pi x}{L}) + B_n sin(\frac{k\pi x}{L})) \tag{3.3.8}$$

Η ιδιότητα της ορθογωνιότητας μας επιτρέπει να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}(\phi(x), sin(\frac{k\pi x}{L}))_2 &= \int_{-L}^{L} \phi(x) sin(\frac{k\pi x}{L}) dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} A_n (sin(\frac{k\pi x}{L}), cos(\frac{k\pi x}{L}))_2 + \sum_{n=1}^{N} B_n (sin(\frac{k\pi x}{L}), sin(\frac{k\pi x}{L}))_2\end{aligned}$$

Μόνο ένας όρος είναι μη-μηδενικός:

$$(\phi(x), sin(\frac{k\pi x}{L}))_2 = B_k(sin(\frac{k\pi x}{L}), sin(\frac{k\pi x}{L}))_2 = B_k L \tag{3.3.9}$$

Επομένως,

$$B_k = \frac{1}{L}(\phi(x), sin(\frac{k\pi x}{L}))_2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi(x) sin(\frac{k\pi x}{L}) dx, \quad k > 0 \tag{3.3.10}$$

Όμοια, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το άθροισμα με $\cos(\frac{k\pi x}{L})$, να ολοκληρώσουμε και να λάβουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$A_k = \frac{1}{L}(\phi(x), cos(\frac{k\pi x}{L}))_2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\phi(x)cos(\frac{k\pi x}{L})dx, \quad k \geq 0 \tag{3.3.11}$$

Αν δοθεί λοιπόν μια σύναρτηση φ∈L^2 μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα 3.3.10 και 3.3.11 και στη συνέχεια να να βρούμε την σειρά 3.3.1.

3.4 Η λύση της εξίσωσης θερμότητας

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών στο χώριο D=[0,L]:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad x \in D = [0, L], \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= 0, \varphi(x) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Από τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών, αναμένουμε οτι η λύση θα δίνεται από τη σειρά

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi nx}{L})\vartheta_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin(\frac{\pi nx}{L}) \tag{3.4.2}$$

όπου τα b_n είναι οι συντελεστές Fourier για τη συνάρτηση φ. Θα δειχθεί οτι συνάρτηση αυτή που ορίζεται ως μια σειρά πράγματι λύνει την εξίσωση θερμότητας. Αν φ(x)∈L^2(D), τότε η ημιτονική συνάρτηση Fourier είναι καλά ορισμένη και οι συντελεστές της ικανοποιούν:

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{n}|b_n|^2 < \infty \tag{3.4.3}$$

Αυτό επίσης υποδηλώνει ότι για κάθε t>0, u(;,t)∈L^2(D) αφού

$$\|u(.,t)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|bn|^2|e^{-2\lambda_n t}| \leq e^{-2\lambda_1 t}\sum_{n=1}^{n}|b_n|^2 \leq e^{-2\lambda_1 t}\|\phi\|_{L^2}^2 \tag{3.4.4}$$

Στην πραγματικότητα μπορούμε να δείξουμε οτι για κάθε t>0, η συνάρτηση u είναι λεία. Για να δειχθεί αυτό, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα ορίζοντας u

$$S_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N}b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin(\frac{\pi nx}{L}) \tag{3.4.5}$$

για κάθε N. Αυτή είναι μια λεία συνάρτηση ως προς (x,t) για t>0, x∈D. Επιπλέον, τα μερικά αθροίσματα πρέπει να συγκλίνουν ομοιόμορφα. Για να δειχθεί αυτο, παρατηρούμε οτι για οποιαδήποτε M<N

$$\begin{aligned} |S_N - S_M| &\leq \sum_{n=M+1}^{N} |b_n| e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \\ &\leq \max_n |b_n| e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Επειδή οι όροι στο τελευταίο άθροισμα ειναι εκθετικά μικροι ως προς n, η διαφορά αυτή συγκλίνει στο 0 καθώς N,M $\rightarrow \infty$, ομοιόμορφα για x∈D και t∈[ε,∞) για κάθε ε>0. Επομένως, η S_N ορίζει μια ακολουθία Cauchy. Για να δούμε οτι είναι και φραγμένη αρκεί να παρατηρήσουμε οτι:

$$|S_N(x,t)| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |b_n| e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \leq \max_n |b_n| \sum_{n=M+1}^{N} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{3.4.7}$$

Αυτη είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο N, ομοιόμορφα στο x∈D και t∈[ε,∞) για κάθε ε>0. Επομένως τα μερικά αθροίσματα S_N(x,t) (τα οποία είναι συνεχή) συγκλίνουν ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση u(x,t):

$$\lim_{N->\rightarrow\infty} \max_{x \in D_{t\in[e,\infty)}} |u(x,t) - S_N(x,t)| = 0. \tag{3.4.8}$$

Επομένως η συνάρτηση u(x,t) που ορίστηκε από την παραπάνω σειρά είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μπορούμε να επεκτείνουμε την ανάλυση μας και στις παραγώγους του S_N. Αφού οι τα μερικά αθροίσματα είναι λειές συναρτήσεις, μπορούμε να πάρουμε τις παραγώγους κατά όρο. Εφαρμόζοντας την ίδια ανάλυση όπως παραπανω στις συναρτήσεις $\frac{\partial}{\partial x}S_N$ και $\frac{\partial}{\partial t}S_N$ και σε ολες τις ανώτερες παραγώγους, βρίσκουμε οτι πράγματι η συνάρτηση u(x,t) είναι λεία για κάθε t>0. Οι παράγωγοι του S_N σύγκλίνουν ομοίμορφα στις παραγώγους της συνάρτησης u για x∈D και t∈[ε,∞) για κάθε ε>0. Αυτό το γεγονός οφείλεται στην εκθετική μείωση των όρων στη σειρά Fourier για τη συνάρτηση u και γενικά δεν ισχύει για όλες τις σειρές Fourier. Αφού κάθε μερικό άθροισμα ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας με ομογένεις συνοριακές συνθήκες Dirichlet, αυτή η ανάλυση σύγκλισης δείχνει οτι u_t=u_{xx} επίσης, για όλα τα x∈ D και t>0. Επιπλέον, u(0,t)=u(L,t).

Τι συμβαίνει όμως καθώς το t → 0· Τότε ισχύει οτι

$$\lim_{t=0} \|u(.,t)\| - \varphi(.)\|_{L^2(D)} = 0. \tag{3.4.9}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί οτι η συνάρτηση φ δεν χρειάζεται να είναι συνεχής οπως είδαμε αλλά μια συνάρτηση του $L^2(D)$. Εν συντομία έχουμε δείξει τα ακόλουθα.

Θεώρημα 3.4.1 *Έστω φ(x)∈L^2([0,L]). Υπάρχει μοναδική συνάρτηση u(x,t)∈ $C^\infty \times$(0,∞) τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

και

$$\lim_{t=0} \|u(.,t) - \varphi(.)\|_{L^2(D)} = 0$$

Η συνάρτηση αυτή u ορίζεται απο το ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier 3.4.2.

Αν η συνάρτηση φ είναι συνεχής και φ(0)=φ(L)=0, τότε μπορεί να δειχθεί οτι u(x,t)→φ(x) καθώς t→0 ομοιόμορφα για όλα τα x∈D και όχι μόνο ως προς την L^2 έννοια.

3.5 Γενικεύσεις για τις συνοριακές συνθήκες

Στο αρχικό πρόβλημα είχαν τεθεί ομογενείς συνθήκες Dirichlet. Αυτού του είδους το πρόβλημα μπορεί να εμφανίστει στο μοντέλο Black-Scholes για την εύρεση της τιμής ενός διπλού Barrier δικαίωματος μετά τη μετατροπη της εξίσωσης σε εξίσωση θερμότητας. Υπάρχουν ωστόσο συνοριακές συνθήκες με δίαφορες εφαρμογές. Πολλές γραμμικές συνοριακές συνθήκες έχουν τη μορφή:

$$a(x)u + b(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x), x \in \partial D$$

όπου a, b και g είναι ορισμένες συναρτήσεις. Η συνοριακή συνθήκη έχει διαφορετική ερμηνεία ανάλογα με την επιλογή των συναρτήσεων a, b και g.

Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet καθορίζουν την τιμή του u στο σύνορο και αντιστοιχεί για b=0. Θα υποθέσουμε οτι a=1, έτσι ώστε η συνθήκη να μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u(x,t) = g(x), \quad x \in \partial D$$

όπου η συναρτήση g θα θεωρηθεί λεία. Αν για παράδειγμα η συνάρτηση u μοντελοποιεί τη θερμοκρασία, τότε η συνθήκη Dirichlet αντιστοιχεί σε καθορισμένη τιμή στο σύνορο. Μια συνηθισμένη συνθήκη Dirichlet είναι g=0. Στην πραγματικότητα αν g≠0, μπορούμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα έτσι ώστε τελικά η συνάρτηση g να είναι ίση με μηδέν. Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση u ικανοποιεί το

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad x \in D \\ u(x,t) &= g(x), \quad x \in \partial D \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad x \in D \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

και οτι η h(x)∈C$^2(\bar{D})$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση τέτοια ώστε h(x)=g(x) για όλα τα x∈∂D. Τότε η συνάρτηση w(x,t)=u(x,t)-h(x) λύνει το

$$\begin{aligned} w_t &= \Delta w + f, \quad x \in D \\ w(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D \\ w(x,0) &= \phi(x) - h(x), \quad x \in D \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

όπου f(x)=Δh(x). Συνεπώς, αν μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα της μορφής 3.5.1 όπου το g=0 τότε μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα 3.5.2 θέτοντας u(x,t)=w(x,t)+h(x,t).

Η συνοριακή συνθήκη Neumann καθορίζει την μοναδιαία παράγωγο τη συνάρτησης u στο σύνορο και αντιστοιχεί σε a=0 και b≠0. Θα υποθέσουμε ότι b=1 έτσι ώστε η συνθήκη να μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \dot{\nabla} u = g(x), \quad x \in \partial D \tag{3.5.3}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα. Όπως και στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet έτσι και στις συνοριακές συνθήκες Neumann συνηθίζεται να να επιλέγεται το g να είναι ίσο με το μηδέν. Αν η συνάρτηση u μοντελοποιεί τη μεταφορά θερμότητας, οι συνοριακές συνθήκες

Neumann καθόριζουν τη θερμική ροή να είναι ίση με το μηδέν στο σύνορο το οποίο είναι προφανώς διαφορετικό από το να θέτεις τη θερμοκρασία ίση με μηδέν.
Οι συνοριακές συνθήκες Robin είναι η τριτη περίπτωση συνοριακών συνθηκών όπου a$\neq$0 και b$\neq$0. Η συνοριακή συνθήκη Robin μοντελοποιεί την περίπτωση όπου η θερμική ροή που περνάει από το σύνορο εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία.

Κεφάλαιο 4

Η εξίσωση Black-Scholes

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η εξίσωση Black-Scholes:

$$u_t + \frac{\sigma^2}{2}x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad t < T, x > 0 \tag{4.0.1}$$

με τελική συνθήκη u(x,T)=g(x). Η συνάρτηση u(x,t) μοντελοποιεί την εύλογη αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης. Η μεταβλητή x αναπαριστά την τιμή του υποκείμενου αγαθού και η μεταβλητή t το χρόνο. Ο σταθερός χρόνος T καλείται ημερομηνία λήξης του του συμβολαίου. Η λυσή u(x,t) εξαρτάται από τον τρέχοντα χρόνο, την τρέχουσα τιμή της μετοχής και τη συνοριακή συνθήκη g(x) που καθορίζεται από τον τύπο του δικαίωματος προαίρεσης. Η λύση επίσης εξαρτάται από τις παραμέτρους σ και r που αναπαριστούν την πτητικότητα της μετοχής και τον βαθμό απόδοσης μηδενικού κινδύνου αντίστοιχα.

4.1 Η εξαγωγή της εξίσωσης Black-Scholes

Ας θεωρήσουμε οτι η αγορά αποτείται από δύο είδων αγαθά, ένα ομόλογο μηδενικού κινδύνου και μια μετοχή. Έστω Y_t η τιμή του ομολόγου και X_t η τιμή της μετοχής. Οι τιμές αυτών ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} dY_t =& rYdt \\ dX_t =& \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Η πρώτη εξίσωση ως προς τη μεταβλητή Y_t είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση με λύση $Y(t) = Y_0 e^{rt}$. Η σταθέρα $r>0$ είναι ο βαθμός απόδοσης μηδενικού κινδύνου. Η δεύτερη εξίσωση ως προς τη μεταβλητή X_t είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση η οποία μοντελοποιεί τη μεταβλητότητα στην τιμή της μετοχής. Το μοντέλο αυτό για την τιμή της μετοχής καλείται γεωμετρική κίνηση Brown. Κάνοντας χρήση του λήμματος του Ito μπορούμε να βρούμε οτι η συνάρτηση $H_t = \log X_t$ ικανοποιεί τη στοχαστική εξίσωση:

$$\begin{aligned} dH_t =& \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\sigma^2 X_t^2 dt \\ =& \frac{1}{X_t}(\mu dX_t + \sigma X_t B_t) - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\sigma^2 X_t^2 dt \\ =& (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

Επομένως $H_t = qt + \sigma B_t$ με $q=\mu-\frac{\sigma^2}{2}$, και

$$X_t = e^{H_t} = e^{qt+\sigma B_t} = e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma B_t}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί οτι ισχύει πάντα οτι $X_t>0$ αφού η τιμή της μετοχής δεν μπορεί να είναι αρνητική. Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής είναι ίση με:

$$E[X_t] = e^{qt}E[e^{\sigma B_t}] = e^{qt+t\frac{\sigma^2}{2}} = e^{\mu t}$$

Άρα, για αυτό το μοντέλο, $\mu = \frac{1}{2} \log E[X_t]$ είναι ο ρυθμός ανάπτυξης της μέσης τιμής της μετοχής. Η παράμετρος μ καλείται ο μέσος βαθμός απόδοσης για τη μετοχή.

Για ένα Ευρωπαικό δικαίωμα αγόρας, ο κάτοχος του μπορει να το αγοράσει στην τιμή εξάσκησης K στην ημερομηνία λήξης T και να το μεταπωλήσει στην τρέχουσα αξία του λαμβάνοντας κέρδος ίσο με X_t-K, υποθέτοντας οτι $X_t \geq K$. Αν $X_t < K$, τότε ο κάτοχος του δικαιώματος δεν το εξασκεί. Έτσι το κέρδος του είναι ίσο με μηδέν. Ωστόσο ποια είναι μία 'εύλογη' τιμή για ένα δικαίωμα προαιρεσης; Για μια δεδομένη τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T, χρησιμοποιούμε ως u(x,t) τη τιμή του δικαιώματος προαιρεσης το χρόνο t αν η τρέχουσα αξία του είναι ίση με $X_t = x$. Λαμβάνοντας υπόψιν την πιθανότητα επένδυσης σε ένα ομόλογο μηδενικού κινδύνου με βαθμό απόδοσης r, μια πιθανή στρατηγική για την έυρεση της τιμής του δικαιώματος προαιρεσης είναι να θέσουμε:

$$u(x,t) = E[e^{-r(T-t)}g(X_T)|X_t = x] = E[e^{-r(T-t)}(X_T - K)^+|X_t = x] \tag{4.1.2}$$

Ο παράγοντας $e^{-r(T-t)}$ είναι ο παράγοντας προεξόφλησης, ο οποίος μετατρέπει τη μελλοντική αξία την ημερομηνία λήξης T στην παρούσα αξία στο χρόνο t<T. Επομένως, με βάση αυτόν τον ορισμό η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι η παρούσα καθαρή αξία της συνάρτησης απόδοσης $g(X_T)$. Παρόλη τη λογική αυτού του ορισμού το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι σωστό. Η σωστή τιμή καθορίζεται παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή υπό ένα διαφορετικό μέτρο το οποίο καλείται μέτρο μηδενικού κινδύνου. Υπό αυτό το μέτρο η προεξοφλημένη τιμή μιας μετοχής $\hat{X}_t$:=$e^{-rt}X_t$ είναι μια διαδικασία martingale. Η διαδικασια $\hat{X}_t$ είναι η καθαρή παρούσα αξία (t=0) της μετοχής αν η τιμή της μετοχής στο χρόνο t ειναι X_t, προεξοφλημένη συμφώνα με το βαθμό απόδοσης μηδενικού κινδύνου. Αυτή ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$d\hat{X}_t = (\mu - r)\hat{X}_t dt + \sigma \hat{X}_t dB_t \tag{4.1.3}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$\hat{X}_t = e^{-rt}X_t = e^{-rt}X_t = e^{(\mu-r)t}e^{\sigma B_t - t\sigma^2/2}.$$

Ο δεύτερος όρος, $e^{(\mu-r)t}e^{\sigma B_t - t\sigma^2/2}$, είναι μια διαδικάσια martingale ως προς τη διήθηση $\{F\}_t$. Έτσι, για οποιοδήποτε s≤t,

$$\begin{aligned} E[\hat{X}_t|F_s] = e^{(\mu-r)}E[e^{\sigma B_t - t\sigma^2/2}|F_s] &= e^{(\mu-r)t}e^{\sigma B_s - s\sigma^2/2} \\ &= e^{(\mu-r)(t-s)}e^{(\mu-r)s}e^{\sigma B_s - s\sigma^2/2} \\ &= e^{(\mu-r)(t-s)}\hat{X}_s \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει οτι αν μ>r, η προεξοφλημένη τιμή $\hat{X}_t$ είναι μια διαδικάσια sub-martingale. Αντίθετα αν μ<r, η προεξοφλημένη τιμή $\hat{X}_t$ είναι μια διαδικάσια super-martingale. Μόνο στην περίπτωση που μ=r η η προεξοφλημένη τιμή $\hat{X}_t$ είναι μια διαδικάσια martingale υπό το αρχικό μέτρο. Επομένως, για να υπολογίσουμε την εύλογη αξία ένος δικαιώματος προαίρεσης πρέπει να καθοριστεί πρώτα μέτρο μηδενικού κινδύνου με ως προς το οποίο η $\hat{X}_t$ είναι μια διαδικάσια martingale. Για να προσδιορισθεί αυτό το μέτρο απαραίτητη προυπόθεση είναι να κάνουμε χρήση

του θεωρήματος Girsanov. Συγκεκριμένα το θεώρημα Girsanov αναφέρει οτι η μετατοπισμένη διαδικασία:

$$\hat{B}_t = B_t - at$$

είναι μία κίνηση Brown κάτω από το νέο μέτρο (C[0,T]),F που ορίζεται ως

$$\hat{P}(A) = E[e^{aB_T - a^2T/2}\mathbb{I}_{(A)}(\omega)]$$

όπου $\mathbb{I}_A$(ω) είναι η δείκτρια συνάρτηση για το σύνολο A∈F. Επιστρέφοντας στην εξίσωηση 4.1.3 παρατηρούμε οτι

$$d\hat{X}_t = (\mu - r + \sigma a)\hat{X}_t dt + \sigma\hat{X}_t d\hat{B}_t$$

Έτσι, αν διαλέξουμε a=(r-μ)/σ, έχουμε

$$d\hat{X}_t = \sigma\hat{X}_t d\hat{B}_t$$

Επομένως, κάτω απο το μέτρο $\hat{P}$, η προεξοφλημένη τιμή $\hat{X}_T$ είναι μια διαδικασία martingale, αφού ικανοποιεί

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_0^t \sigma\hat{X}_s d\hat{B}_s$$

όπου $\hat{B}_s$ είναι η κίνηση Brown υπό το μέτρο $\hat{P}$. Επομένως, κάτω από το νέο αυτό μέτρο η τιμής της μετοχής και του ομολόγου ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$dY_t = rY_t dt \tag{4.1.4}$$

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t d\hat{B}_t \tag{4.1.5}$$

έτσι ώστε και τα δύο αγαθά να έχουν το ίδιο ποσοστό επιστροφής. Έχοντας λοιπόν ορίσει το μέτρο μηδενικού κινδύνου για την εύρεση της τιμής ενος δικαιώματος προαίρεσης η εύλογη τιμή του είναι ίση με:

$$u(x,t) = \hat{E}[e^{-r(T-t}g(X_T)|X_t = x].$$

Παρατηρούμε επομένως ότι η εύλογη τιμή είναι εντελώς ανεξάρτητη από την τιμή μ. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση u(x,t) σαν συναρτήση των μεταβλητών x και t, όπου το x είναι η τιμή της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο t<T. Έχουμε ήδη δει οτι αν η $\hat{b}_t$ είναι μία κίνηση Brown, η στοχαστική διαδικασία που ορίζεται ως:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t d\hat{B}_t, X_0 = x > 0.$$

σχετίζεται με τον διαφορικό τελεστή

$$Au := \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx} + rxu_x$$

Συγκεκριμένα, η συνάρτηση u(x,t) είναι η στοχαστική αναπαράσταση για μία λύση μια μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_t + Au + c(x,t)u = 0. \quad x > 0, \quad t < T \tag{4.1.6}$$

με τελικη συνθήκη u(x,T)=g(x), όπου c(x,t) είναι απλά η σταθερά c(x,t)=-r στην παρούσα περίπτωση. Επομένως η εξίσωση 4.1.1 αναπαριστά τη λύση το στο τελικό πρόβλημα τιμών

$$\begin{gathered} u_t + \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad x > 0, t < T \\ u(x,T) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{4.1.7}$$

Η μερική διαφορική εξίσωση καλείται εξίσωση Black-Scholes. Είναι ένα πρόβλημα τελικών τιμών και όχι αρχικών τιμών. Αξίζει να σημειωθεί οτι η μερική διαφορική εξίσωση από μόνη της δεν εξαρτάται από τη μορφή της απόδοσης στο χρόνο T. Κατά τη διάρκεια της εξαγωγής της εύλογης αξιάς είχαμε υποθέσει οτι το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί μόνο την ημερομηνία λήξης T. Η συνάρτηση g(x), ωστόσο, δεν χρειάζεται να είναι ίση με $(x\text{-}K)^+$ όπως στην περίπτωση του Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς.

4.2 Η μετατροπή σε εξίσωση θερμότητας

Παρόλο που η εξίσωση 4.1.7 έχει διάφορους συντελεστές και χαμήλης τάξης όρους, μπορούμε να μετρατρέψουμε την εξίσωση σε εξίσωση θερμότητας μεσω μια ακολουθίας απλών μετασχηματισμών. Ταυτόχρονα, θα μειώσουμε τον αριθμό των παραμέτρων σε αυτό το μοντέλο με μετατροπή σε αδιάστατες μεταβλητές. Τα βασικά βήματα για την μετατροπή της εξίσωσης Black-Scholes σε εξίσωση θερμότητας είναι τα ακόλουθα. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση w(x,t) που ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας $w_t = w_{xx}$ για $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$.

- Η συνάρτηση υ(x,t)=w(x,T-t) ικανοποιεί τη

$$\upsilon_t + \upsilon_{xx} = 0, \quad t < T$$

- Για x>0, η συνάρτηση υ(x,t)=w(log(λ^{-1}x),t) ικανοποιεί τη

$$\upsilon_t = x^2 \upsilon_{xx} + x u_x, \quad x > 0$$

- Η συνάρτηση υ(x,t)=w(γx,δt) ικανοποιεί τη

$$\upsilon_t = \frac{\delta}{\gamma^2} \upsilon_{xx}$$

- Η συνάρτηση υ(x,t)=e^{ax}w(x,t) ικανοποιεί τη

$$\upsilon_t = \upsilon_{xx} - 2a\upsilon_x + a^2 \upsilon$$

- Η συνάρτηση υ(x,t)=e^{bt}w(x,t) ικανοποιεί τη

$$\upsilon_t = \upsilon_{xx} + b\upsilon$$

Κάνοντας χρήση αυτών των παρατηρήσεων, ξεκινάμε από την μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes και εργαζόμαστε έχοντας ως στόχο να καταλήξουμε στην εξίσωση θερμότητας. Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση u(x,t) ικανοποιεί την εξίσωση Black-Scholes:

$$u_t + \frac{\sigma^2}{2} x^2 u_{xx} + r x u_x - r u = 0, \quad t < T, x > 0$$

με τελική συνθήκη u(x,t)=g(X_T). Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις παράμετροι στην εξίσωση: r,T και σ και ισως παραμέτροι που καθορίζουν την τελική συνθήκη, για παράδειγμα η τιμή εξάσκησης K. Επιπλέον οι μεταβλητές x και t έχουν συγκεκριμένες μονάδες (π.χ. δολλάρια, ευρώ, γιεν / δευτερόλεπτα, ώρες κ.λ.π.).

Πρώτα, κάνουμε μια χρονική αλλαγή: ορίζουμε τη συνάρτηση $\upsilon^1(x,\tau)=u(x,T-\delta\tau)$ για $\tau>0$. Τότε η $\upsilon^1(x,\tau)$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\upsilon^1_\tau = \delta\frac{\sigma^2}{2}x^2\upsilon^1_{xx} + \delta r\upsilon^1_x - \delta r\upsilon_1, \quad \tau > 0, x > 0.$$

Έτσι αν επιλέξουμε $\delta=\frac{2}{\sigma^2}$, έχουμε

$$\upsilon^1 = x^2\upsilon^1_{xx} + \frac{2r}{\sigma^2}x\upsilon^1_x - \frac{2r}{\sigma^2}\upsilon_1, \quad \tau > 0, x > 0.$$

Η αρχική συνθήκη για τη συνάρτηση υ^1 είναι $\upsilon^1(x,0)=u(x,T)=g(x)$. Όχι μόνο μετατρέψαμε τη πρόβλημα σε ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών, αλλά κανονικοποιήσαμε τις μονάδες με τη χρήση του παράγοντα δ. Χάριν απλότητας, μπορούμε να ορίσουμε το $k:=\frac{2r}{\sigma^2}$. Τότε,

$$\upsilon^1_\tau = x^2\upsilon^1_{xx} + kx\upsilon^1_x - k\upsilon^1, \quad \tau > 0, x > 0.$$

Τώρα μετατρέπουμε τους όρους του δεξιού μέρους και συγκεκριμένα τους όρους ανώτερης τάξης. Η μεταβλητή x βρίσκεται στο χωρίο $[0,\infty)$ και έχει συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης. Για $\lambda>0$, αλλάζουμε τις μεταβλητές σύμφωνα με την αδιάσταση μεταβλητή $x=\lambda e^y$ για $y\in\mathbb{R}$. Έτσι ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $\upsilon^2(y,\tau)$ για $y\in\mathbb{R}$ με $\upsilon^2(\log(\lambda^{-1}x,\tau)\ )=\upsilon^1(x,\tau)$. Επομένως, $\upsilon^1(x,\tau)=\upsilon^1(\lambda e^y,\tau)$ και συνεπώς μέσω απλών υπολογισμών η συνάρτηση υ^2 ικανοποιείι την εξής σχέση:

$$\begin{aligned}\upsilon^2_\tau &= (\upsilon^2_{yy} - \upsilon^2_y) + k\upsilon^2 y - k\upsilon^2\\ &= \upsilon^2_{yy} + (k-1)\upsilon^2_y - k\upsilon^2, \quad \tau > 0, y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

με αρχική συνθήκη $\upsilon^2(y,0)=g(\lambda e^y)$.

Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $\upsilon^3(y,\tau)$ ως $\upsilon^3(y,\tau)=e^{ay}\upsilon^2(y,\tau)$. Επομένως, $\upsilon^2=e^{-ay}\upsilon^3$ έτσι ώστε

$$\upsilon^2_y = \upsilon^3_y e^{-ay} - a\upsilon^3 e^{-ay}, \quad \upsilon^2_{yy} = \upsilon^3_{yy}e^{-ay} + a^2\upsilon^3 e^{-ay} - 2a\upsilon^3_y e^{-ay}$$

και

$$\begin{aligned}\upsilon^3_\tau &= \upsilon^3_{yy} + a^2\upsilon^3 - 2a\upsilon^3_y + (k-1)(\upsilon^3_y - a\upsilon^3) - k\upsilon^3\\ &= \upsilon^3_{yy} + ((k-1)-2a)\upsilon^3_y + (a^2 - a(k-1) - k)u^3.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας a=$\frac{1}{2}$(k-1), αυτό μειώνει το

$$\upsilon^3_\tau = \upsilon^3_{yy} - (a^2+k)\upsilon^3, \quad t>0, y\in\mathbb{R}.$$

Η αρχική συνθήκη για τη συνάρτηση υ^3 είναι υ^3(x,0)=e$^{ay}\upsilon^2$(x,0)=e^{ay}g(λe^y).

Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση υ^4(y,τ)=e$^{b\tau}\upsilon^3$(y,τ), με b=(a^2+k)=$\frac{1}{4}$(k+1)^2. Παρατηρούμε οτι η συνάρτηση υ^4(y,τ) ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας υ^4_τ=υ^4_{yy} με αρχική συνθήκη υ^4(y,0)=e^{ay}g(λe^y). Ωστόσο η συνάρτηση υ^4 δεν είναι αδιάσταση και για αυτό το λόγο την κανονικοποιούμε ορίζοντας τη συνάρτηση υ^5(y,τ)=pυ^4(y,τ) όπου p είναι ένας παράγοντας ο όποιος κάνει αδίαστατη τη συνάρτηση μας. Έτσι, η συνάρτηση υ^5 ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\upsilon^5_\tau = \upsilon^5_{yy}, \quad \tau>0, \quad x\in\mathbb{R}$$

με αρχική συνθήκη υ^5(y,0)=pe^{ay}g(λe^y).

Συνοπτικά οι παρακάτω μετατροπές πραγματοποιήθηκαν:

- υ^1(x,τ)=u(x,T-$\delta\tau$), δ=$\frac{2}{\sigma^2}$, κ=$\frac{2r}{\sigma^2}$
- υ^2(y,τ)=υ^1(λe^y,τ), y=log(λ^{-1})x
- υ^3(y,τ)= e$^{ay}\upsilon^2$(y,τ)
- υ^4(y,τ)=e$^b\tau\upsilon^3$(y,τ)
- υ^5(y,τ)=πυ^4(y,τ)

Κάνοντας την αντίστροφη διαδικασία παρατηρούμε οτι:

$$u(x,t) = p^{-1}e^{-alog(\lambda^{-1}x)}e^{-b\delta^{-1}}(T-t)\upsilon(log(\lambda^{-1}x), \delta^{-1}(T-t)). \tag{4.2.1}$$

4.3 Μία λύση για ένα Ευρωπαικό δικαίωμα αγοράς

Η τελική συνθήκη για ενα Ευρωπαικό δικαίωμα αγοράς είναι:

$$g(x) = \max(x-K,0)$$

όπου K είναι η τιμή εξάσκησης του συμβολαίου. Λαμβάνοντας υπόψιν τους παραπάνω μετασχηματισμούς μπορούμε να δούμε οτι αυτή η τελική συνθήκη μπορεί να μετασχηματιστεί σε αρχική συνθήκη ως εξής:

$$\upsilon(y,0) = pe^{ay}g(\lambda e^y) = pe^{ay}max(\lambda e^y - K, 0) = max(pe^{ay}\lambda e^y - pe^{ay}K, 0)$$

Έτσι αν θέσουμε όπου λ=p^{-1}=K έχουμε οτι:

$$\upsilon(y,0) = max(e^{a+1}y - e^{ay}, 0) = max(e^{1/2(k+1)y} - e^{1/2(k-1)y}, 0)$$

Επομένως μετατρέψαμε το πρόβλημα τελικών τιμών για την τιμή ενός ευρωπαικου δικαιώματος αγοράς σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} \upsilon_\tau &= \upsilon_{yy}, \quad \tau > 0, y \in \mathbb{R} \\ \upsilon(y,0) = \upsilon_0(y) &:= max(e^{1/2(k+1)y} - e^{1/2(k-1)y}, 0), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Παρατηρούμε ότι στο αρχικό μοντέλο υπήρχαν τέσσερις παράμετροι (σ,r,T,K) ενώ τώρα ύπαρχει μόνο μία παράμετρος k. Έτσι αν μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών συνθηκων για κάθε k, θα μπορούσαμε να το λύσουμε για όλους τις πιθανές επιλογές σ,r,T,K αντιστρέφοντας απλά τους παραπάνω μετασχηματισμούς.

Θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες που σχετίζονται με τη σχέση 4.3.1. Για y=0, $\upsilon_0(0)$=0. Για y<0, $e^{1/2(k+1)y} < e^{1/2(k-1)y}$, έτσι $\upsilon_0(y)$=0, για y≤0. Για y>0, $\upsilon_0(y)>0$ και το υ_0 αυξάνεται εκθετικά ως προς το y Επομένως μία λύση του προβληματος 4.3.1 μπορεί να δοθεί απο την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \upsilon(y,\tau) = \Phi * \upsilon_0 &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(y-z,\tau)\upsilon_0(z)dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{|y-z|^2}{4\tau}} (e^{1/2(k+1)y} - e^{1/2(k-1)y}) dz \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

όπου Φ είναι η βασική λύσης της εξίσωσης θερμότητας η οποία είναι και μοναδική.

Εξαιτίας της ειδικής μορφής των αρχικών συνθηκών στην σχέση 4.3.1, η συνέλιξη αυτή μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Τότε, μπορούμε να αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς για να υπολογίσουμε τη συναρτηση u(x,t), δηλαδή την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Για να εκτίμησούμε το ολόκλήρωμα κάνουμε τα ακόλουθα:

$$
\begin{aligned}
-\frac{(y-z)^2}{4\tau}+cz &= -\frac{1}{4\tau}((y-z)^2-cz4\tau)) \\
&= -\frac{1}{4\tau}((z-(y+2c\tau))^2-4c^2\tau^2-4cy\tau) \\
&= -\frac{(z-(y+2c\tau)^2)}{4\tau}+c^2\tau+cy
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{(y-z)^2}{4\tau}}e^{cz}dz &= e^{c^2\tau+cy}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{(z-(y+2c\tau))^2}{4\tau}}dz \\
&= e^{c^2\tau+cy}\int_0^\infty (1-\Psi(-\frac{y+2c\tau}{\sqrt{2\tau}})) \\
&= e^{c^2\tau+cy}\Psi(\frac{y+2c\tau}{\sqrt{2\tau}})
\end{aligned}
$$

όπου $\Psi(\mathrm{r})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{r}\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{dz}$. Επομένως, η λύση στη μετασχηματισμένη εξίσωση είναι

$$
\upsilon(y,\tau)=e^{c_1^2\tau+c_1y}\Psi(\frac{y+2c_1\tau}{\sqrt{2\tau}})-e^{c_2^2\tau+c_2y}\Psi(\frac{y+2c_2\tau}{\sqrt{2\tau}})
$$

όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές

$$
c_1=\frac{1}{2}(k+1)=\frac{1}{\sigma^2}(r+\frac{\sigma^2}{2})=\sqrt{b}=a+1
$$

$$
c_2=\frac{1}{2}(k-1)=\frac{1}{\sigma^2}(r-\frac{\sigma^2}{2})=a
$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις με τους μετασχηματισμούς που έχουν γίνει προκύπτει οτι η λύση u(x,t) είναι ίση με:

$$
u(x,t)=Ke^{-ay}e^{-b\tau}\upsilon(t,\tau) \tag{4.3.4}
$$

με $\tau=\delta^{-1}(\mathrm{T}-\mathrm{t})=\sigma^2(\mathrm{T}-\mathrm{t}/2)$ και $\mathrm{y}=\log(\mathrm{x}/\mathrm{K})$. Επίσης παρατηρούμε οτι στις αρχικές μεταβλητές,

$$
d_1:=\frac{y+2c_1\tau}{\sqrt{2\tau}}=\frac{log(x/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

και,

$$
d_2:=\frac{y+2c_2\tau}{\sqrt{2\tau}}=\frac{log(x/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις σχέσεις 2.15, 2.16, 2.17 η τιμή ένος δικαιώματος προαίρεσης δίνεται από τη σχέση:

$$u(x,t) = x\Psi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Psi(d_2).$$

Η σχέση αυτή καλείται ως η σχέση Black-Scholes για την τιμή ενος Ευρωπαικού δικαιώματος ανάκλησης. Αξίζει να σημειωθεί οτι οι μεταβλητες d_1 και d_2 εξαρτώνται από το x,t,σ,T,K, αλλα η συνάρτηση Ψ όχι.

4.4 Δικαιώματα προαίρεσης Barrier

Ένα barrier δικαίωμα προαίρεσης είναι αυτό το οποίο έχει ημερομηνία λήξης ή γίνεται ενεργό όταν η υποκείμενη μετοχή περάσει ένα συγκεκριμένο όριο. Ένας συγκεκριμένος τύπος δικαιώματος προαίρεσης barrier είναι ένα down and out δικαίωμα αγοράς. Αυτό είναι το δικαίωμα αγοράς το οποίο είναι ενεργό αν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο πριν την ημερομηνία λήξης T. Ένα δικαίωμα αγοράς up and out είναι εκείνο το οποίο γίνεται ενεργό όταν η τιμή της μετοχής ξεπερνά ένα συγκεκριμένο όριο πριν την ημερομηνία λήξης T. Υπάρχουν ακόμα και τα δικαίωματα προαίρεσης knock out. Η τιμή ένος barrier δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να υπολογιστει από την εξίσωση Black-Scholes. Ας υποθέσουμε οτι u(x,t) είναι η τιμή ενός down and out Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς με knock out τιμή ίση με $x_0<K$. Σύμφωνα με το μοντέλο Black-Scholes η τιμή μηδενικού κινδύνου είναι:

$$u(x,t) = \hat{E}[\mathbb{I}_{(\gamma^{x,t}\geq T)}e^{-r(T-t)}g(X_T)|X_t = x]. \tag{4.4.1}$$

όπου ο χρόνος στάσης $\gamma^{x,t}(\omega)$ είναι η πρώτη φορά που η τιμη της μετοχής χτυπάει το όριο (barrier) που έχει ορισθεί

$$\gamma^{x,t}(\omega) = \inf\{s > t|X_s(\omega) \leq x_0\} \tag{4.4.2}$$

και $\mathbb{I}_A$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A. Έτσι η προσδοκία λαμβάνεται μόνο στα μονοπάτια που δεν περνούν αυτό το συγκεκριμένο όριο, αφού τοτε το δικαίωμα γίνεται ενεργό και δεν έχει αξία όποτε το X_t ισούται με το x_0 πριν την ημερομηνία λήξης T. Η συνάρτηση u(x,t) είναι η λύση του προβλήματος τελικών τιμών:

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2}{2} + u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad x > x_0, t < T$$

$$u(x,t) = g(x), \quad x > x_0$$

$$u(x_0,t) = 0, \quad t < T.$$

Αυτό είναι το τελικό πρόβλημα τιμών Black-Scholes με μια επιπλεόν συνοριακή συνθήκη που αντιστοιχεί στην knock out τιμή. Το χωρίο για τη μεταβλητή x είναι η ημιευθεία $x>x_0$. Όπως στην πέριπτωση ένος Ευρωπαικόυ vanilla δικαίωματος αγοράς μπορούμε να μετατρέψουμε την εξίσωση σε εξίσωση θερμότητας μέσω λογαραθμικών μετασχηματισμών. Έτσι, αλλάζοντας μεταβλητές όπως πριν, μπορούμε να γράψουμε:

$$u(x,t) = Ke^{-ay-b\tau}\upsilon(y,\tau)$$

όπου τα y,τ,a και b είναι τα ίδια με πριν και η συνάρτηση υ λύνει το πρόβλημα αρχιών τιμών

$$\upsilon_t = \upsilon_{yy}, \quad y > y_0, \tau > 0$$

$$\upsilon(y,0) = max(e^{1/2(k+1)y} - e^{1/2(k-1)y}, 0), \quad y > y_0$$

$$\upsilon(y_0,t) = 0, \quad t < T.$$

Το σημείο $y_0 \in \mathbb{R}$ είναι το μετασχηματισμένο όριο (Barrier) $y_0=\log(\lambda^{-1}x_0)=\log(\frac{x_0}{K})$, και $y_0<0$ υπό την υπόθεση ότι $x_0<K$. Επομένως, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση θερμότητας για την ημιευθεία $\{y>y_0\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με την τεχνική της ανάκλασης. Επεκτείνουμε τα αρχικά δεδομένα με περιττή συμμετρία γύρω από το σημείο $y=y_0$ και λύνουμε το πρόβλημα σε όλη την ευθεία. Η αντίστοιχη λύση θα έχει περιττή συμμετρία γύρω από το όριο (Barrier): $\upsilon(y_0+h,t)=-\upsilon(y_0-h,t)$. Συνεπώς η συνοριακή συνθήκη $\upsilon(y_0,t)=0$ επιτυγχάνεται.

Αξίζει να σημειώθει ότι τα αρχικά δεδομένα μπορουν να γραφτούν στην εξής μορφή:

$$\upsilon^{ex}(y) = \upsilon_0(y) - \upsilon_0(2y_0 - y), \quad y \in \mathbb{R}$$

όπου $\upsilon_0(y)=\max(e^{1/2(k+1)y}-e^{1/2(k-1)y},0)$. Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις υ^1 και υ^2 ικανοποιούν την έξίσωση θερμότητας σε όλη την ευθεία με αρχικά δεδομένα οτι $\upsilon^1(y,0)=\upsilon_0(y)$ και

$\upsilon^2(y,0)=\upsilon_0(2y_0-y)$, τότε η συνάρτηση $\upsilon(y,t)$ δίνεται από:

$$\upsilon SS(y,t) = \upsilon^1(y,t) - \upsilon^2(y,t) = \upsilon^1(y,t) - \upsilon(2y_0 - y, t)$$

Επομένως, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση θερμότητας για την ημιευθεία $\{y>y_0\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με την τεχνική της ανάκλασης. Επεκτείνουμε τα αρχικά δεδομένα με περιττή συμμετρία γύρω από το σημείο $y=y_0$ και λύνουμε το πρόβλημα σε όλη την ευθεία. Η αντίστοιχη λύση θα έχει περιττή συμμετρία γύρω από το όριο (Barrier): $\upsilon(y_0+h,t)=-\upsilon(y_0-h,t)$. Συνεπώς η συνοριακή συνθήκη $\upsilon(y_0,t)=0$ επιτυγχάνεται.
Παρατηρούμε οτι ο πρώτος όρος είναι ο $C(x,t)$, δηλαδή η τιμή ενός vanilla European call option χωρίς barrier. Όσον αφορά το δεύτερο όρο, υπό τη σχέση $x=Ke^y$, το σημείο $2y_0$-y αντιστοιχεί στο ${x_0}^2/x$. Άρα

$$Ke^{-ay-b\tau}\upsilon^1(2y_0 - y, t) = e^{-ay}e^{a(2y_0-y)}Ke^{-a(2y_0-y)-b\tau}\upsilon^1(2y_0 - y, t) = e^{-2a(y-y_0)}C(\frac{x_0^2}{x}, t)$$

και η τιμή του barrier option είναι

$$\begin{aligned} u(x,t) &= C(x,t) - e^{-2a(y-y_0)}C(\frac{x_0^2}{x}, t) \\ &= C(x,t) - (\frac{x}{x_0})^{-k-1}C(\frac{x_0^2}{x}, t) \end{aligned}$$

αφου $2a=(k-1)$.

Κεφάλαιο 5

Η εκτίμηση της πτητικότητας της μετοχής και η εξίσωση **Dupire**

Στην εξαγωγή της εξίσωσης Black-Scholes υποθέσαμε οτι η πτητικότητα ήταν σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο και από την τιμή της μετοχής. Αυτή είναι μια σημαντική απλούστευση του προβλήματος η οποία μας έδωσε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την τιμή κάποιων συγκεκριμένων δικαιωμάτων προαίρεσης. Γενικά, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την πτητικότητα σαν μία ντετερμινιστική συνάρτηση τόσο της τιμής της μετοχής όσο και του χρόνου $\sigma = \sigma(\mathrm{x,t})$, έτσι ώστε υπό το μέτρο μηδενικού κινδύνου, η τιμή της μετοχής να ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$dX_t = r(t)X_t dt + \sigma(x,t)dB_t \tag{5.0.1}$$

όπου B_t είναι η κίνηση Brown ύπο το μέτρο μηδενικού κινδύνου P. Σε ένα τέτοιο μοντέλο η συνάρτηση $\sigma(\mathrm{x,t})$ καλείται τοπική πτητικότητα. Επίσης μπορούμε να προσθέσουμε μία ακόμη υπόθεση, οτι ο βαθμός απόδοσης μπορεί να αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Τότε η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι

$$u(x,t) = \hat{E}[e^{-\int_t^T r(s)ds} g(X_T)|X_t = x]. \tag{5.0.2}$$

όπου g(x) είναι η συνάρτηση απόδοσης του δικαιώματος προαίρεσης. Έτσι, κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες στην πτητικότητα σ με βάση το θέωρημα αναπάραστασης των Feynman-

Kac η λύση του προβληματος τελικών τιμών δίνεται από την εξής σχέση

$$u_t + \frac{\sigma^2(x,t)x^2}{2}u_{xx} + r(t)xu_x - r(t)u = 0, \quad t < T, \quad x > 0 \tag{5.0.3}$$

με u(x,T)=g(x). Οι συντελεστές στην εξίσωση εξαρτώνται άπό το x και το t. Ας υποθέσουμε τώρα οτι η g(x)=(x-K)$^+$ είναι η συνάρτηση απόδοσης ενός Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς. Θα αναφερομάστε στην αντίστοιχη λύση ως u(x,t;T,K,σ) για να καθίσταται σαφές οτι η λύση εξαρτάται από την τιμή εξάσκησης K, την ημερομηνία λήξης T και τη συνάρτηση πτητικότητας σ.

Γενικά, δεν είναι εύκολο να εξαχθούν λύσεις όπως στην περίπτωση όπου η πτητικότητα είναι σταθερή. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση για την τιμή ενός δικαίωματος προαίρεσης είναι απαραίτητο να δωθεί μια αριθμήτικη λύση στο πρόβλημα τελικών τιμών. Ωστόσο, το εξής ερώτημα γεννάται. Τι πρέπει να χρησιμοποιηθεί ως σ(x,t); Στόχος μας είναι να βρεθεί μια εκτίμηση για την πτητικότητα σ με βάση τα δεδομένα της αγοράς. Όμως, ενώ δεν γνωρίζουμε τις μελλοντικές τιμές της μετοχής, έχουμε γνώση για τις τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης για διάφορες τιμές εξάσκησης και ημερομηνίες λήξης. Ενδεχομένως οι τιμές αυτές να δίνονται από τη λύση του παραπάνω προβλήματος τελικών τιμών. Επομένως, αυτό υποδεικνύει το ακόλουθο μαθηματικό ερώτημα:

Αν έχουν δοθεί τα σύνολα χρόνων { t$_i$ }, τιμών μετοχών { X$_i$ }, τιμών εξάσκησης { K$_i$ }, ημερομηνιών λήξεων { T$_i$ } και δοθέντος τιμών { C$_i$ } δικαιωμάτων αγοράς ευρωπαικού τύπου αντιστοιχισμενες σε αυτές παραμετρους μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση σ(x,t) έτσι ώστε η

$$u(X_i, t_i; T_i, K_i, \sigma) = C_i$$

να ισχύει για κάθε i· Με άλλα λόγια είναι εφικτό να βρεθεί συνάρτηση σ ώστε το μοντέλο μας να ταιριάζει με τις παρατηρούμενες τιμές των δικαιώματων αγοράς;

Αυτού του είδους τα προβλήματα καλούνται αντίστροφα προβλήματα. Αν γνωρίζαμε την τοπική πτητικότητα σ(x,t) για όλα τα x και t τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα τελικών τιμών βασιζόμενοι στο γεγόνος οτι το μοντέλο με το οπόιο περιγράφουμε το πρόβλημα είναι και το σωστό.

5.1 Η εξίσωση Dupire

Για απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε οτι ο βαθμός απόδοσης είναι σταθερός, δηλαδη r(t)=r.

Θεώρημα 5.1.1 *Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση u(x,t;K,T) λύνει το 5.0.3 με τελική συνθήκη u(x,t)=g(x)=(x-K)*$^+$*. Τότε για σταθερό x και t, η συνάρτηση υ(K,T)=u(x,t;K,T) ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών συνθηκών*

$$\upsilon_T = \frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}\upsilon_{KK} - rK\upsilon_K, \quad T > t \tag{5.1.1}$$

με αρχική συνθήκη

$$\upsilon(K,t) = (x-K)^+ \tag{5.1.2}$$

Συγκεκριμένα,

$$\sigma(K,T) = \sqrt{2\frac{\upsilon_T + rK\upsilon_{KK}}{K^2\upsilon_{KK}}} \tag{5.1.3}$$

Η εξίσωση 5.1.1 καλείται εξίσωση Dupire και η σχέση 5.1.3 καλείται η σχέση του Dupire. Το αποτέλεσμά αυτό οφείλεται στο μαθηματικό Bruno Dupire. Αυτό μας δείχνει οτι αν για σταθεροποιημένο x και t γνωρίζουμε τις τιμές των δικαιώματων προαίρεσης u(x,t;K,T) για όλες τις τιμές εξάσκησης και όλες τις ημερομηνίες λήξης τότε μπορούμε να βρούμε μία μοναδίκή τοπική πτητικότητας σ(K,T). Αξίζει να σημειωθεί οτι αυτό μας δίνει πληροφορία για την πτητικότητα στο μέλλον. Παρόλο που δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε την τιμή της μετοχής στο μέλλον, μελετώντας τις τιμές των δικαιώματων προαίρεσης για διάφορα K και T λαμβάνουμε πληροφορία για την πτητικότητα υποθέτοντας πάντα ότι οι τιμές αυτές ικανοποιούν το μοντέλο 5.0.3.

Απόδειξη. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος θα κάνουμε μια αναφορά στα αποτελέσματα των συναρτήσεων πυκνότητας μετάβασης για στοχαστικές διαδικασίες. Για δοθέντα x$\in\mathbb{R}^d$ και s$\in\mathbb{R}$, ας υποθέσουμε οτι η $\mathrm{Y}_s{}^{x,s}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί:

$$dY_t = b(Y_t,t)dt + \sigma(Y_t,t)dB_t, \quad t \geq s \tag{5.1.4}$$

$$Y_s^{x,s} = x \tag{5.1.5}$$

Κάτω από κατάλληλες προυποθέσεις στους συντελεσές b και σ, η διαδικασία αυτή είναι μια λεία συνάρτηση πυκνότητας μετάβασης p(x,s;y,t) που ικανοποιεί:

$$P(Y_s^{x,s} \in A) = \int_A p(x,s;y,t)dy \tag{5.1.6}$$

για οποιοδήποτε σύνολο Borel A$\subset\mathbb{R}^d$.

Για σταθεροποιημένο y και t, η συνάρτηση p($\cdot$,$\cdot$;y,t) ικανοποιεί την ανάδρομική εξίσωση:

$$\partial_s p + A_{x,s} p = 0, \quad t > s \tag{5.1.7}$$

όπου A$_x$ είναι ο διαφορικός τελεστής που ορίζεται ως:

$$A_{x,s} f := \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(x,s) f_{x_i,x_j} + b(x,s) \nabla_x f \tag{5.1.8}$$

Επιπλέον,

$$\lim_{s \to y} p(x,s;y,t) = \delta_y(x), \tag{5.1.9}$$

το μέτρο Dirac. Αν το Y$_t$ περιγράφει ένα κομμάτι μιας στοχαστικής διαδικασίας τοτε η ανάδρομική εξίσωση περιγράφει πως αυτό το κομμάτι πήγε εκεί που είναι σήμερα.

Για σταθεροποιημένο x και t, η p(x,s;$\cdot$,$\cdot$) ικανοποιεί την προδρομική εξίσωση:

$$\partial_t p = A^*_{y,t} p, \quad t > s \tag{5.1.10}$$

όπου A$^*{}_y$ είναι ο συζυγής τελεστής που ορίζεται ως

$$A^*_{y,t} g := \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial_{y_i} \partial_{y_j}} (a_{i,j}(y,t) g) - \nabla_y (b(t,y) g) \tag{5.1.11}$$

και a$_{i,j}$(y,t)=σσ^T. Αυτή η σχέση περιγράφει την εξέλιξη της προδρομικης πυκνότητας μετάβασης στο χρόνο. Επιπροσθέτως,

$$\lim_{t \to s} p(x,s;y,t) = \delta_x(y) \tag{5.1.12}$$

Θα αποδείξουμε τώρα το αποτέλεσμα του Dupire. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση

$$w(x,t;K,T) = e^{r(T-t)} u(x,t;K,T) = E[g(X_T)|X_t = x],$$

η οποία ικανοποιεί την

$$w_t + \frac{\sigma^2(x,t)x^2}{2} w_{xx} + rxw_x = 0, \quad t < T, x > 0 \tag{5.1.13}$$

με τελική συνθήκη w(x,t)=g(x)=(x-K)$^+$. Η λύση μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης πιθανότητας μετάβασης για X$_t$ (υπό το μέτρο μηδενικού κινδύνου):

$$w(x,t;K,T) = \hat{E}[(g(X_T)|X_t = x)] = \int_0^\infty g(y)p(x,t;y,T)dy = \int_0^\infty (y-K)p(x,t;y,T)dy \tag{5.1.14}$$

Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση ως προς K δύο φόρες έχουμε:

$$\partial_k W = -\int_K^\infty p(x,t;y,T)dy, \tag{5.1.15}$$

και

$$\partial_K^2 w = p(x,t;K,T). \tag{5.1.16}$$

Έτσι, η w$_{KK}$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας μετάβασης p(x,t;K,T) που αντιστοιχεί στην διαδικασία της τιμής της μετοχής. Επομένως, σαν συνάρτηση των K και T, η p=w$_{KK}$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$p_T = \frac{\partial^2}{\partial K^2}\left(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2} p\right) - \frac{\partial}{\partial K}(rKp), \quad T > t \tag{5.1.17}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα x και t θεωρούνται σταθερά. Άρα,

$$(w_{KK})_T = \frac{\partial^2}{\partial K^2}\left(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2} p\right) - \frac{\partial}{\partial K}(rKp), \quad T > t. \tag{5.1.18}$$

Τώρα θέλουμε να σχήματίσουμε μια εξίσωση για το w και όχι για το w$_{KK}$, επομένως ολοκληρώνουμε δύο φορές ως προς το K και λαμβάνουμε ότι:

$$w_T = \frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2} w_{KK} - rKw_K + rw + aK + c \tag{5.1.19}$$

για κάποιες σταθερές a και c. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί οτι:

$$\begin{aligned}
\int_0^{K_1}\int_0^{K_2} \frac{\partial}{\partial K_1}(rK_1 w_{K_1K_2} dK_1 dK_2 &= \int_0^K rK_2 w_{K_2K_2} dK_2 \\
&= \int_0^K \partial_{K_2}(rK_2 w_{K_2}) - rw_{K_2} dK_2 \\
&= rKw_K - rw + const
\end{aligned} \tag{5.1.20}$$

Υποθέτοντας οτι το K→∞, το w και οι παράγωγοι του τείνουν στο 0, τότε αυτό υποδηλώνει οτι a=c=0. Άρα,

$$w_T = \frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2} w_{KK} - rKw_K + rw \tag{5.1.21}$$

Ωστόσο w=e$^{r(T-t)}$u, και άρα παρατηρούμε οτι το u ικανοποιεί την εξίσωση Dupire

$$u_T = \frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2} w_{KK} - rKu_K, T > t, K > 0. \tag{5.1.22}$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Η αρχική συνθήκη είναι u(x,t;K,T)=(x-K)$^+$. Καθώς το K→∞, u(x,T;K,t)→0 και καθώς το K→0, u(x,T;K,t)→x αφού

$$\lim_{K\to 0} u(x,t;K,T) = \hat{E}[e^{-r(T-t)}X_T | X_t = x] = x \tag{5.1.23}$$

■

5.2 Δυαδικά Δικαιώματα Προαίρεσης

Ένα δυαδικό δικαίωμα προαίρεσης είναι ενα δικαίωμα προαίρεσης με συνάρτηση απόδοσης:

$$g_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \;\; x < K \\ b, & \text{αν} \;\; x \geq K \end{cases} \tag{5.2.1}$$

την ημερομηνία λήξης T. Επομένως, το b>0 είναι μια φιξαρισμένη σταθερά.

Θεώρημα 5.2.1 *Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση u(x,t;K,T) λύνει το 5.0.3 με τελική συνθήκη*

$$g_b(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; x < K \\ b, & \alpha\nu \;\; x \geq K \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Τότε για φιξαρισμένο x και t, η συνάρτηση υ(K,T)=u(x,t;K,T) ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\upsilon_T = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}\frac{\partial}{\partial K}\upsilon\right) - rK\upsilon_K - ru, \;\; T > t, K > 0 \tag{5.2.3}$$

με αρχική συνθήκη

$$\upsilon(x,t;K,T) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; x < K \\ b, & \alpha\nu \;\; x \geq K \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση w(x,t;K,T)=e$^{r(T-t)}$u(x,t;K,T)=E[g$_b$(X$_T$)— X$_t$=x] η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$w_t \frac{\sigma^2(x,t)x^2}{2} w_{xx} + rxw_x = 0, \quad t < T, x > 0 \tag{5.2.5}$$

με τελική συνθήκη w(x,t)=g$_b$(x) όπως ορίστηκε παραπάνω. Η λύση μπορεί να αναπαρασταθεί με όρους συνάρτησης πυκνότητας μετάβασης για τη στοχαστική διαδικάσια X$_t$:

$$\begin{aligned} w(x,t;K,T) = \hat{E}[(g_b(X_T)|X_t = x)] &= \int_0^\infty g_b(y)p(x,t;y,T)dy \\ &= \int_0^\infty bp(x,t;y,T)dy \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς K προκύπτει οτι

$$\partial_K w = -bp(x,t;K,T). \tag{5.2.7}$$

Άρα, -b^{-1}w$_K$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας μετάβασης που αντιστοιχεί στη διαδικάσια της τιμής της μετοχής. Επομένως, σαν συνάρτηση του K και του T, η p=-b^{-1}w$_K$ πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$p_T = \frac{\partial^2}{\partial K^2}(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}p) - \frac{\partial}{\partial K}(rKp), \quad T > t. \tag{5.2.8}$$

Όμως τα x και t είναι σταθερά. Επομένως,

$$(w_K)_T = \frac{\partial^2}{\partial K^2}(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}w_K) - \frac{\partial}{\partial K}(rKw_K), \quad T > t. \tag{5.2.9}$$

Ωστόσο θέλουμε να εξάγουμε μια εξίσωση για το w και οχι για το w$_K$. Συνεπώς θα ολοκληρώσουμε ως προς K προκείμενου να λάβουμε την εξής σχέση:

$$w_T = \frac{\partial}{\partial K}(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}w_K) - rKw_K + c \tag{5.2.10}$$

για κάποια σταθερά c.

Αν υποθέσουμε οτι το K→∞, το w και οι πάραγωγοί του τείνουν στο 0, τότε αυτό υποδηλώνει οτι η σταθερά c είναι ίση με το μηδέν. Επομένως,

$$w_T = \frac{\partial}{\partial K}(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}\frac{\partial}{\partial K}w) - rKw_K \tag{5.2.11}$$

Ωστόσο w=e$^{r(T-t)}$u, και άρα παρατηρούμε οτι το u ικανοποιεί την εξίσωση Dupire

$$w_T = \frac{\partial}{\partial K}(\frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2}\frac{\partial}{\partial K}u) - rKu_K - ru, \quad T > t, K > 0. \tag{5.2.12}$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Η αρχική συνθήκη είναι

$$\upsilon(x,t;K,T) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \ \ x < K \\ b, & \text{αν} \ \ x \geq K \end{cases} \tag{5.2.13}$$

Καθώς το K→∞, u(x,T;K,t)→0 και καθώς το K→0, u(x,T;K,t)→x αφού

$$\lim_{K\to 0} u(x,t;K,T) = \hat{E}[e^{-r(T-t)}X_T|X_t = x] = e^{-r(T-t)}b$$

■

5.3 Προσαρμογή του μοντέλου με την εξίσωση Dupire

Αναφέροντας τον όρο προσαρμογή του μοντέλου εννοούμε την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος: αν έχουν δοθεί τρέχουσες τιμών μετοχών x$_0$ στο χρόνο t$_0$, τιμές εξάσκησης $\{\mathrm{K}_i\}_{i=1}^N$, ημερομηνίες λήξεως $\{\mathrm{T}_i\}_{i=1}^N$ και Ευρωπαικές τιμές δικαιωμάτων αγοράς $\{\varsigma_i\}_{i=1}^N$ μπορούμε να βρούμε την τοπική συνάρτηση πτητικότητας σ(x,t) τέτοία ώστε:

$$u(x_0, t_0, T_i, K_i, \sigma) = c_i \tag{5.3.1}$$

να ισχύει για κάθε i; Με άλλα λόγια μπορούμε να μετατρέψουμε το μοντέλο ώστε να ταιριάζεις στις παρατηρούμενες τιμές; Η συνάρτηση u(x$_0$,t$_0$;K$_i$,T$_i$),σ υποδηλώνει τη λύση του μοντέλου

5.0.3. Αφού τα x_0 και t_0 είναι σταθερά, θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση u(K,T) ή απλά u_i. Αν ο αριθμός N των δεδομένων είναι πολύ μεγάλος, τότε χρησιμοποιώντας απευθείας τη σχέση 5.0.3 μπορεί να αποδειχθεί μη πρακτικό. Η σύγκριση των u_i με τα c_i για κάθε i απαιτεί την επίλυση N μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η εξίσωση Dupire προσφέρει μία πιο αποτελεσματική εναλλακτική. Ανακαλώντας τη συνάρτηση u(K,T) σαν συνάρτηση των K και T, αυτή λύνει την εξίσωση Dupire

$$u_T = \frac{\sigma^2(K,T)K^2}{2} u_{KK} - rKu_K, \quad T > t_0 \tag{5.3.2}$$

με αρχική συνθήκη

$$u(K,t) = (x-K)^+ \tag{5.3.3}$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι με την εξίσωση Dupire η προσαρμογή του μοντέλου γίνεται πιο αποτελεσματική: συγκρίνοντας τα u_i με τα c_i για κάθε i=1,...,N χρειάζεται να λυθει η εξίσωση Dupire μόνο μια φορά και εκτιμώντας τη λύση στα N σήμεια (K_i,T_i). Χάριν απλότητας ας υποθέσουμε ότι t_0=0· αλλιώς θα μποροούσαμε να αντικαταστήσουμε το T με T′=T-t_0. Το χωρίο για u(K,T) είναι άπειρο. Στην πραγματικότητα, περιορίζουμε το χωρίο ώστε να είναι το (K,T)∈Q:=[0,K′]×[0,T′] και λύνουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$u_T = \frac{\sigma^2(K,t)K^2}{2} u_{KK} - rKu_K, \quad (K,T) \in Q \tag{5.3.4}$$

$$\begin{aligned} u(K,0) &= (x-K)^+, \quad K \in [0,K'] \\ u(0,T) &= x, \quad T \in [0,T'] \\ u(K',T) &=, \quad T \in [0,T'] \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Ας υποθέσουμε οτι μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση Dupire με κάποια αριθμητική μέθοδο και να συγκρίνουμε το μονντέλο με τα δεδομένα της αγοράς. Στη συνέχεια όμως πως θα αλλάξουμε το σ ώστε να ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα της αγοράς· Η μέθοδος που επιλύει ένα τέτοιο πρόβλημα καλείται κανονικοποιημένα ελάχιστα τετράγωνα και δημοσιεύτηκε από τους Achdou-Pironneau. Ορίζοντας η=σ^2, υπολογίζουμε τη βέλτιστη πτητικότητα σ^*(K,T)=$\sqrt{\eta^*}$ λύνοντας ένα πρόβλημα ελαχιστοποιήσης:

$$J(\eta^*) = \min_{\eta} J(\eta) \tag{5.3.6}$$

όπου J(η) είναι η αντικείμενική συνάρτηση

$$J(\eta) = [\sum_{i=1}^{N}(u(K_i, T_i) - c_i)^2] + J_r(\eta). \tag{5.3.7}$$

Οι όροι $u(K_i,T_i)$ στην αντικειμενική συνάρτηση εξαρτώνται από το $\eta=\sigma^2$ με ένα μη γραμμικό τρόπο. Ο όρος μέσα στο άθροισμα επιβάλλει αντιφάσεις ανάμεσα στο μοντέλο και τα παρατηρούμενα δεδομένα. Το συναρτησιακό $J_r(\eta)$ καλείται κανονικοποιημένος όρος. Μια απλή επιλογή αυτού του όρου θα ήταν

$$J_r(\eta) = \int_Q \epsilon |\nabla \eta|^2 dK dT, \tag{5.3.8}$$

αλλά υπάρχουν και άλλες επιλογές. Η κανονικοποιήση είναι απαραίτητη ώστε το πρόβλημα να είναι επιλύσιμο. Αφού έχουμε πεπερασμένα σημεία c_i, τότε μπορούν να υπάρξουν πολλαπλές λύσεις στο αντίστροφο πρόβλημα. Ώστοσο όλες αυτές οι λύσεις δεν μπορούν να είναι συναρτησεις λείες και φραγμένες. Η κανονικοποίηση μας βοηθάει στο να αποφύγουμε την εύρεση τέτοιων συναρτήσεων.

Αυτός είναι ο αλγόριθμος βελτιστοποιήσης που χρισημοποιείται για την επίλυση του προβλήματος 5.3.6. Κατασκευάζουμε μία ακολουθία συναρτήσεων η^m, m=1,2,... με την ακόλουθη διαδικασία:

1. Ξεκινάμε με το η^m(K,T). Αυτή είναι μία συνάρτηση του K και T, ίσως διακριτοποιημένη με κάποιο τρόπο.

2. Υπολογίζουμε το $J(\eta^m)$ υπολογίζοντας τα $u(K_i,T_i,\eta^m)$ για κάθε i=1,...,N. Αυτό απαιτεί μία λύση για το πρόβλημα 5.3.5

3. Εύρεση μιας συνάρτησης dη τέτοια ώστε $J(\eta^m+d\eta)<J(\eta^m)$.

4. Πραγματοποίηση επαναληπτικής διαδικασίας $\eta^{m+1}=\eta^m+d\eta$ μέχρι το αποτέλεσμα μας να είναι ικανοποιητικό.

Στην πραγματικότητα, η συναρτηση η(K,T) είναι διακριτοποιημένη. Για παράδειγμα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε την συνάρτηση η σαν συνεχή, κατα τμήματα γραμμική συνάρτηση, καθορισμένη απο τις τιμές της στα πεπερασμένα προκαθαρισμένα σημεία. Με αυτό τον τρόπο αναπαριστούμε την συνάρτηση η σαν ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο n πιθανόν πολύ μεγάλο. Επίσης περιορίζουμε τη συνάρτηση η να είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ομοιόμορφα θετική. Μία μέθοδος για την επιλογή του βήματος κατεύθυνσης dη είναι η μέθοδος καθοδικής κλίσης: επέλεξε dη να είναι ένα πολλαπλάσιο της κλίσης ∇_ηJ(η). Αυτό σημαίνει χρησιμοποιώντας το επαναληπτικό σχήμα:

$$\eta_{m+1} = \eta_m - \rho\nabla_\eta J(\eta^m)$$

όπου ρ>0 είναι μία σταθερά η οποία μπορει να επιλεχθεί σε κάθε βήμα ώστε να διασφαλίσει οτι οι επαναλήψεις σε κάθε βήμα οδήγουν στην μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης. Τι πραγματικά όμως είναι το ∇_ηJ; Αν η συνάρτηση η αναπαρίσταται από ένα πεπερασμένης διάστασης διάνυσμα τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη ∇_ηJ(η^m) ώστε να είναι η κλίση του μη γραμμικού συναρτησιακού J ως προς το διάνυσμα.

Ο υπολογισμός του ∇_ηJ(η)

Πρέπει να υπολογίσουμε το:

$$\nabla_\eta J(h) = \sum_i 2(u_i - c_i)\nabla_\eta u_i + \nabla_\eta J_r(\eta) \tag{5.3.9}$$

ή για δοθέν βήμα κατεύθυνσης dη

$$\langle\nabla_\eta J(\eta), d\eta\rangle = \langle\sum_i 2(u_i - c_i)\nabla_\eta u_i, d\eta\rangle + \langle\nabla_\eta J_r(\eta)\rangle. \tag{5.3.10}$$

Για κάθε i, η u_i=u(K_i,T_i,η) είναι μία συνάρτηση του η=η(K,T), και $\nabla_\eta u_i$ είναι η κλίση αυτής της σύναρτησης ως προς το η. Για κάθε i, u_i(η) είναι η τιμή της λύσης μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης που εξαρτάται από το η. Έτσι η κλίση $\nabla_\eta u_i$ μας δείχνει πως η λύση στο σημείο (K_i,T_i) αλλάζει ως προς την παράμετρο η. Εξ' ορισμού,

$$u(K_i, T_i, \eta + d\eta) = u(K_i, T_i, \eta) + \langle\nabla_\eta u_i, d\eta\rangle + o.\upsilon.\tau. \tag{5.3.11}$$

Αφού η εξίσωση

$$\begin{aligned} L_D^\eta(u(K,T,\eta+d\eta)-u(K,T,\eta)) &= \frac{d\eta}{2}K^2\frac{\partial^2}{\partial K^2}u(K,T,\eta+d\eta) \\ &= \frac{d\eta}{2}K^2\frac{\partial^2}{\partial K^2}u(K,T,\eta)+o.\upsilon.\tau. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

όπου $L^\eta{}_D$ είναι ο γραμμικός διαφορικός τελεστής

$$L_D^\eta := u_T - \frac{\eta(K,T)K^2}{2}u_{KK} + rKu_K \tag{5.3.13}$$

που εμφανίζεται στην εξίσωση Dupire. Επίσης, u(K,T,η+dη)-u(K,T,η)=0 στο σύνορο. Επομένως,

$$\langle \nabla_\eta u_i, d\eta\rangle = w(K_i,T_i), \tag{5.3.14}$$

όπου η συνάρτηση w λύνει το

$$w_T - \frac{\eta(K,T)K^2}{2}w_{KK} + rKw_K = \frac{d\eta}{2}K^2\frac{\partial^2}{\partial K^2}u(K,T,\eta) \tag{5.3.15}$$

$$\begin{aligned} w(K,0) &= 0, \quad K\in[0,K'] \\ w(0,T) &= 0, \quad T\in[0,T'] \\ w(K',T) &= 0, \quad T\in[0,T'] \end{aligned}$$

Ωστόσο αυτό μπορεί να αποδειχθεί προβληματικό. Δοθέντος μιας μικρής απόκλισης στο dη, μπορούμε να υπολογίσουμε τον κυρίαρχο όρο αλλαγής στο u_i, $\langle\nabla_\eta u_i$,dη $\rangle$, λύνοντας την 5.3.15. Όμως, πρέπει να λύσουμε τη μερική διαφορική εξίσωση για κάθε επιλογή του dη. Έτσι αν το η είναι μέγαλης διάστασης, το να υπολογίσουμε την κλίση $\nabla_\eta u_i$ μπορεί να αποδειχθεί πολύ πολύπλοκο αφού πρέπει να ξέρουμε πως αλλάζει το u καθώς εισερχόμαστε σε διάφορες πολλαπλές κατευθύνσεις dη. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνεται μέσω της συζυγούς μεθόδου.

Για να γίνει κατανοητή αυτή η μέθοδος, ας θεωρήσουμε το γραμμικό πρόβλημα Ax=b για πολλά και διαφορετικά b_1,b_2,.... Το x είναι ένα διάνυσμα και το A ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας. Ας υποθέσουμε οτι δεν ενδιαφερόμαστε για το x συγκεκριμένα αλλά για κάποιο συναρτησιακό του x, ας πουμε το g×x=⟨g,x⟩ για δεδομένο διάνυσμα g. Αν $G=A^{-1}$, η λύση είναι x=Gb. Έτσι το συναρτησιακό που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\langle g,x\rangle = \langle g,Gb\rangle = \langle G^T g,b\rangle \tag{5.3.16}$$

Έτσι αν είναι εφικτό να υπολογίσουμε το $G^T g$ μία φορά, τότε εκτιμώντας την ποσότητα $\langle g,x \rangle$ για M>1 επιλογές του b σημαίνει ότι υπολογίζουμε M γινόμενα πίνακα διανύσματος ($\langle G^T g, b\rangle$), αντί να λύσουμε την εξίσωση Ax=b M φορές. Η μέθοδος αυτή περιγράφεται στη δημοσίευση των Achdoo-Pironneau. Αντί για ένα σύστημα εξισώσεων έχουμε μια μερική διαφορική εξίσωση που εμπεριέχει ένα γραμμικό διαφορικό τελεστή. Το συναρτησιακό που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\langle \sum_i 2(u_i - c_i)\nabla_\eta u_i, d\eta \rangle = \langle \sum_i 2(u_i - c_i)\delta_{K_i T_i}, w \rangle. \tag{5.3.17}$$

Άρα, το $\sum\limits_i 2(u_i\text{-}c_i)\delta_{K_i T_i}$ αντιστοιχεί στο g. Το $G=A^{-1}$ αντιστοιχεί στην επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, ενώ το G^T αντιστοιχεί στην επίλυση του συζυγούς προβλήματος και το w αντιστοιχεί στο Gb. Συγκεκριμένα, λύνουμε το συζυγές πρόβλημα:

$$\begin{gathered}
\partial_T P + \frac{\partial^2}{\partial K^2}(\frac{\eta K}{2}P) + \frac{\partial}{\partial K}(rKP) = \sum_i 2(u_i - c_i)\delta_{K_i T_i} \\
P(T', K) = 0 \\
P(T, K')s = 0
\end{gathered} \tag{5.3.18}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_\eta J, d\eta \rangle &= \langle \sum_i 2(u_i - c_i)\delta_{K_i T_i}, w \rangle + \langle \nabla J_r, d\eta \rangle \\
&= \int_Q (\partial_T P) + \frac{\partial^2}{\partial K^2}(\frac{\eta K^2}{2}P) + \frac{\partial}{\partial K}(rKP))w(K,T)dKdT + \langle \nabla J_r, d\eta \rangle \\
&= -\int_Q P(w_T - \frac{\eta(K,T)K^2}{2}w_{KK} + rKw_K)dKdT + \langle \nabla J_r, d\eta \rangle \\
&= -\int_Q \frac{d\eta}{2}PK^2\frac{\partial^2}{\partial K^2}u(K,T,\eta)dKdT + \langle \nabla J_r, d\eta \rangle
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Ο αλγόριθμος

Επομένως ο αλγόριθμος γίνεται:

1. Υπολόγισε την u(K,T,η^m λύνοντας τη 5.3.4 με σ^2=η.

2. Υπολόγισε την P(K,T,η^m) λύνοντας τη 5.3.18

3. Υπολόγισε τη ∇_ηJ λύνοντας το:

$$\langle \nabla_\eta J, d\eta \rangle = -\int_Q \frac{d\eta}{2} PK^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} u(K,T,\eta) dK dT + \langle \nabla J_r, d\eta \rangle$$

   Όταν η συνάρτηση η είναι διακριτοποιημένη τότε το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

4. Διάλεξε ένα βήμα:

$$\eta^{m+1} = \pi(\eta^m - \rho \nabla_\eta J(\eta^m))$$

5. Υπολόγισε το e=$\|\nabla_\eta$J$\|$. Αν το e είναι μικρότερο από τον προκαθαρισμένο βαθμό ανοχής τότε ο άλγοριθμος μπορεί να τερματιστεί γιατί έχει βρεθεί ο ζητούμενος ελαχιστοποιητής. Αλλιώς συνέχισε χρησιμοποιώντας το η^{m+1}.

Παράρτημα Α΄

Συμπλήρωμα Θεωρίας

Θεώρημα Α΄.0.1 ***(L^2 Convergence of Fourier Series)***. *Έστω φ(x)∈L^2([-L,L]) και ορίζουμε A_k και B_k από τις ακόλουθες σχέσεις αντίστοιχα.*

$$A_k = \frac{1}{L}(\phi(x), cos(\frac{k\pi x}{L}))_2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\phi(x)cos(\frac{k\pi x}{L})dx, \quad k \geq 0$$

$$B_k = \frac{1}{L}(\phi(x), sin(\frac{k\pi x}{L}))_2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\phi(x)sin(\frac{k\pi x}{L})dx, \quad k > 0$$

Αν

$$\phi_N(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n cos(\frac{n\pi x}{L}) + B_n sin(\frac{n\pi x}{L}))$$

τότε

$$\lim_{N\to\infty}\|\phi - \phi_N\| = 0$$

Θεώρημα Α΄.0.2 ***(Pointwise Convergence of Fourier Series)***. *Ας υποθέσουμε οτι δυο συνάρτησεις φ(x) και φ΄(x) είναι τμηματικά συνεχείς στο διάστημα [-L,L], τότε για κάθε x∈[-L,L],*

$$\lim_{N\to\infty}\phi_N(x) = \frac{1}{2}(\phi(x^+) + \phi(x^-)).$$

Συγκεκριμένα, αν η φ είναι συνεχής και η φ΄ τμηματικά συνεχής, τότε η συνάρτηση φ_N συγκλίνει τμηματικά στη φ για όλα τα x∈[-L,L].

Θεώρημα Α΄.0.3 ***(Parseval's Equality)***. *Για όλα τις συνάρτησεις f∈L^2(-L,L)*

$$\|f\|_2^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2}A_0^2 + L\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n|^2 + |B_n|^2)$$

Αυτό δείχνει οτι για μία συνάρτηση φ(x)∈L^2([-L,L]) και την $\varphi_N(x)$ να ορίζεται από τη σχέση:

$$\phi_N(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n cos(\frac{n\pi x}{L}) + B_n sin(\frac{n\pi x}{L}))$$

τότε το σφάλμα έχει L^2 νόρμα ίση με

$$\|\phi - \phi_N\| = L\sum_{n=N+1}^{\infty}(|A_n|^2 + |B_n|^2)$$

Επομένως καθώς το N→∞ το σφάλμα θα τείνει στο μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση φ μπορεί να προσεγγιστεί υπό την L^2 έννοια απο όρους σειράς Fourier.

Θεώρημα Α΄.0.4 ***(Ito's Lemma)***. *Θεωρούμε οτι η X_t είναι μία διαδικασία Ito η οποία μπορεί να εκφραστεί ως:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t \upsilon(s,\omega)dB_s.$$

Τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής g(t,x)∈$C^{1,2}$ μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$g(x,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\upsilon^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2})ds + \int_0^t \upsilon\frac{\partial g}{\partial x}dB_s$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί και σε ισοδύναμη διαφορική μορφή:

$$dg(t,X_t) = (\frac{\partial g}{\partial t} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\upsilon^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2})dt + \upsilon\frac{\partial g}{\partial x}dB_t$$

Θεώρημα Α΄.0.5 ***(Feynman-Kac)***. *Το θεώρημα των Feynman-Kac αποτελεί ένα σύνδεσμο αναμέσα στις παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις και τις στοχαστικές διαδικασίες. Προσφέρει μια μέθοδο λύσεων συγκεκριμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων μέσω προσομοίωσης τυχαίων περιπάτων στοχαστικών διαδικασιών. Θεωρούμε τη μερική διαφορική εξίσωση:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-V(x,t)u(x,t)+f(x,t) = 0,\ \ \nabla x \in \mathbb{R},\ \ t \in [0,T]$$

και τελική συνθήκη

$$u(x,T) = \psi(x),$$

όπου μ, σ, ψ, V *είναι δοθείσες συναρτήσεις,* T *είναι μία παράμετρος και η συνάρτηση* u:$\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ *είναι άγνωστη. Τότε το θεώρημα αναπαράστασης των Feynman-Kac μας λέει οτι η λύση μπορεί να γραφτεί στην εξής μορφή:*

$$u(x,t) = E^Q[\int_t^T e^{-\int_t^r V(X_\tau,\tau)d\tau} f(X_r,r)dr + e^{-\int_t^T V(X_\tau,\tau)d\tau}\psi(X_T)|X_t = x]$$

υπό το μέτρο πιθανότητας Q *τέτοιο ώστε η τυχαία συνάρτηση* X *να είναι μια Ito διαδικασία που δίνεται από την εξίσωση:*

$$dX = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW^q$$

Βιβλιογραφία

[1] L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, 2nd Edition, 2010.

[2] W.Strauss, An Introduction to Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, Ltd, 2nd Edition, 2007

[3] Bruno Dupire, Pricing and hedging with smiles, Cambridge University Press, 1997.

[4] Y.Achdou and O.Pironneau, Volatility smile by multilevel least square, Theory of Applied Finance, 2002.

[5] F.Black and M.Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Political Economy, 1973.

[6] R.Merton, Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 1973.

[7] P.Wimott, S.Howison and J.Dewynne, The mathematics of financial derivatives, Cambrige UP, 1995.

[8] L.C. Evans, An introduction to Stochastic Differential Equations, AMS, 2013.

[9] A.Yannacopoulos, Introduction to stochastic processes, University of the Aegean, 2003.

[10] R.Korn and E.Korn, Option Pricing and Portfolio Optimization, AMS, 2001.

[11] J.Hull, Options,Futures and other Derivatives, Pearson Education International, 7th Edition, 2007.