Εθνικο και Καποδιστριακο Πανεπιστημιο Αθηνων
Τμημα Μαθηματικων

Μεταπτυχιακο Προγραμμα Λογικης, Αλγοριθμων και Θεωριας Υπολογισμου

Διπλωματική Εργασία

Αποκρισιμότητα και Πολυπλοκότητα της Τροπικής Λογικής

Γιώργος Κούρτης, Α.Μ. 201009

Επιβλέπων: Κώστας Κούτρας, Επ. Καθηγητής

Αύγουστος 2013

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάμε την τροπική λογική, με έμφαση στις εφαρμογές της στην επιστήμη των υπολογιστών. Ένας από τους σημαντικότερους λόγους για την ευρεία χρήση της τροπικής λογικής σε πολλούς τομείς της επιστήμης των υπολογιστών (και όχι μόνο) είναι η συμπεριφορά της ως προς την αποκρισιμότητα: η τροπική λογική είναι αποκρίσιμη και παραμένει αποκρίσιμη μετά από πολύ ισχυρές επεκτάσεις ενώ, ταυτόχρονα, είναι αρκετά εκφραστική για να είναι χρήσιμη στην πράξη. Μπορεί κανείς να αντιπαραβάλει αυτή τη συμπεριφορά με την αντίστοιχη της πρωτοβάθμιας λογικής, η οποία είναι εξαρχής μη-αποκρίσιμη. Επιπρόσθετα, παρόλο που η πολυπλοκότητα της τροπικής λογικής είναι θεωρητικά αρκετά υψηλή, στην πράξη είναι σπάνια τα προβλήματα που την εξαναγκάζουν να είναι τέτοια. Αρχικά παρουσιάζουμε σχετικά αποτελέσματα, και μετά προσπαθούμε να εξηγήσουμε αυτή τη συμπεριφορά θεωρώντας κατάλληλα θραύσματα της πρωτοβάθμιας λογικής, τα οποία εκφράζουν αποτελεσματικά το «πνεύμα» της τροπικής λογικής.

Λέξεις κλειδιά: τροπική λογική, θεωρία υπολογισμού, υπολογιστική πολυπλοκότητα, θραύσματα πρωτοβάθμιας λογικής, θραύσμα δύο-μεταβλητών, φρουρούμενο θραύσμα.

Abstract

In the present dissertation we study modal logic, with an emphasis on its applications in computer science. One of the most important reasons for the wide use of modal logic in many areas of computer science (and other disciplines) is its behaviour with regard to decidability: modal logic is decidable and remains decidable after many powerful extensions while, at the same time, it is expressive enough to be useful in practice. One could juxtapose this behaviour with the behaviour of first-order logic, which is even in the simplest case undecidable. Moreover, even though the computational complexity of modal logic is in theory very high, in practice the problems that force such complexity are very rare. Initially we present relevant results, and we then try to interpret this behaviour by considering relevant fragments of first-order logic, which effectively express the "spirit" of modal logic.

Key words: modal logic, computability theory, computational complexity, fragments of first-order logic, two-variable fragment, guarded fragment.

Ευχαριστίες

Θελώ να ευχαριστήσω καταρχάς τον επιβλέποντα μου κ. Κούτρα για την εξαιρετική μας συνεργασία και τη βοήθειά του. Έμαθα πολλά από αυτόν στις ενδιαφέρουσες συναντήσεις μας. Επίσης, τον κ. Ζάχο για τα πολύ ενδιαφέροντα μαθήματα στην υπολογιστική πολυπλοκότητα και κυρίως για την ομάδα μελέτης στην οποία για πρώτη φορά ήρθα σε επαφή με την τροπική λογική. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Δημητρακόπουλο και κ. Ροντογιάννη, που δέχτηκαν (σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα) να με εξετάσουν, καθώς και όλους τους καθηγητές του ΜΠΛΑ για τα ωραία μαθήματα που προσέφεραν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Τροπική Λογική

1.1 Εισαγωγή

Εάν κάποιος προσπαθήσει να αναζητήσει την προέλευση ερωτήσεων σχετικών με την αποκρισιμότητα (και κατ΄ επέκταση την υπολογιστική πολυπλοκότητα) μαθηματικών θεωριών, θα καταλήξει αναπόφευκτα στον Hilbert. Ο Hilbert το 1928 έθεσε, ανάμεσα σε άλλα σημαντικά ερωτήματα, το λεγόμενο Πρόβλημα της Απόφασης (γερμ. Entscheidungsproblem, αγγλ. The Decision Problem). Η ουσία του, που εκφράζει την χαρακτηριστική για εκείνη την εποχή πίστη στην παντοδυναμία των μαθηματικών, είναι η εξής:

> Να βρεθεί[1] αλγόριθμος ο οποίος δεδομένης μίας οποιασδήποτε πρότασης της πρωτοβάθμιας λογικής να επιστρέφει «ναι» αν αυτή είναι έγκυρη (αγγλ. valid — αληθής σε όλα τα μοντέλα) και «όχι» αν δεν είναι έγκυρη.

Αν αυτό ήταν δυνατό θα είχε προφανώς τεράστιες συνέπειες αφού, τουλάχιστον στη θεωρία, θα αφαιρούσε την ανάγκη ύπαρξης μαθηματικών μιας και αυτοί θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από υπολογιστές. Πολλές περιοχές των μαθηματικών θα ήταν τετριμμένες.

[1] Παρατηρήστε τη διατύπωση η οποία λέει πολλά: δεν τίθεται καν το ερώτημα αν υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος. Για τον Hilbert δεν υπάρχει ignorabimus, το οποίο εκφράζεται από το περίφημο «Wir müssen wissen — wir werden wissen!» (Πρέπει να γνωρίζουμε — θα γνωρίζουμε!)

Δυστυχώς (ή ευτυχώς) το παραπάνω αποδείχτηκε αδύνατο, ανεξάρτητα από τους Church [1, 2] και Turing [3] το 1936. Οι αποδείξεις, εκτός από το ότι έλυναν ένα σημαντικό πρόβλημα, ήταν επίσης σημαντικές επειδή αποτελούσαν την πρώτη προσπάθεια αυστηρού ορισμού της έννοιας του αλγορίθμου — και σε αυτές εισήχθησαν ο λ-λογισμός και οι μηχανές Turing αντιστοίχως.

Από τη στιγμή που το Πρόβλημα της Απόφασης αποδείχτηκε αδύνατο, διάφοροι μαθηματικοί, όπως οι Löwenheim, Bernays, Schönfinkel, Skolem και Gödel, άρχισαν να μελετούν τι συμβαίνει όταν θέσουμε περιορισμούς σε αυτό. Οικογένειες τύπων ή προτάσεων της πρωτοβάθμιας λογικής που προκύπτουν θέτοντας συντακτικούς περιορισμούς καλούνται *θραύσματα της πρωτοβάθμιας λογικής* (αγγλ. fragments of first order logic). Οι σημαντικότεροι περιορισμοί που μπορούν να τεθούν είναι (i) ως προς τη σειρα των ποσοδεικτών (θεωρώντας ότι οι τύποι βρίσκονται σε κανονική ποσοδεικτική μορφή) και (ii) ως προς το πλήθος των μεταβλητών. Οικογένειες προτάσεων που εμπίπτουν στην πρώτη κατηγορία περιορισμών μελετήθηκαν πρώτα, κυρίως για ιστορικούς λόγους. Ένα παράδειγμα αποκρίσιμων κλάσεων αυτής της κατηγορίας αποτελεί η κλάση $\exists^*\forall^*$ καθώς και η κλάση $\exists^*\forall\exists^*$ [4]. Θραύσματα που προκύπτουν από τον δεύτερο περιορισμό έχουν βρει πολύ περισσότερες εφαρμογές — κυρίως στην πληροφορική, σε περιοχες όπως η θεωρία βάσεων δεδομένων και η περιγραφική θεωρία πολυπλοκότητας. Παραδείγματα τέτοιων θραυσμάτων, όπως το θραύσμα δύο-μεταβλητών (αγγλ. two-variable fragment), θα μελετηθούν εκτενώς εδώ.

Ταυτόχρονα — και μάλιστα λίγο νωρίτερα, δηλαδή από τη δεκαετία του 1910 — αναπτυσσόταν ένας άλλος σημαντικός κλάδος της μαθηματικής λογικής, η τροπική λογική. Αυτή η μελέτη ξεκίνησε αρχικά από τον Lewis [5, 6] ο οποίος προσπαθούσε να βρει τρόπο να αποφύγει παράδοξα που προέκυπταν στην κλασσική λογική από τη σημασιολογία του συνδέσμου $\rightarrow$ η οποία μας επιτρέπει, ξεκινώντας με μία ψευδή πρόταση, να συμπεράνουμε οτιδήποτε. Για το λόγο αυτό πρότεινε την επέκταση της προτασιακής λογικής με τελεστές που δηλώνουν το «απαραίτητο» και το «πιθανό» (οι οποίοι τώρα συμβολίζονται με $\Box$ και $\Diamond$ αντίστοιχα) και εισήγαγε πέντε αξιωματικά τυπικά συστήματα σχετικά με αυτούς.

Η προσέγγιση αυτή ήταν καθαρά συντακτική και αρχικά δε μελετήθηκε καθόλου η μοντελο-θεωρητική πλευρά του θέματος. Αυτό άλλαξε στη δεκαετία του 1960 κυρίως λόγω του Kripke [7], ο οποίος εισήγαγε τη λεγόμενη *σχεσιακή σημασιολογία* (αγγλ. relational semantics) για την τροπική λογική. Αυτή η σημασιολογία έδωσε μεγάλη ώθηση στη μελέτη της τροπικής λογικής, αφού έκανε πολλά θέματα πιο ξεκάθαρα και προσιτά, καθώς και επέτρεψε μία πιο αφηρημένη μελέτη της περιοχής αυτής. Πλέον, η άποψη που έχουμε για τις τροπικές λογικές είναι ότι δεν πρόκειται για εργαλεία που βοηθούν στην αξιωματική θεμελίωση των διαισθήσεών μας για το απαραίτητο και το πιθανό, αλλά ότι είναι εργαλεία για τη μελέτη συστημάτων μετάβασης.

Η τροπική λογική έχει σε πολλές περιπτώσεις συμπεριφορά καλύτερη και απλούστερη (υπολογιστικά αλλά και ως προς τη χρήση και την κατανόησή της) από αυτή της πρωτοβάθμιας λογικής, και ταυτόχρονα είναι αρκετά εκφραστική (ή τουλάχιστον μετά από κατάλληλες επεκτάσεις) ώστε να είναι χρήσιμη στην πράξη σε σημαντικούς τομείς όπως η αναπαράσταση γνώσης (βλ. περιγραφικές λογικές — αγγλ. description logics) και η επαλήθευση υλικού και λογισμικού υπολογιστών (αγγλ. hardware and software verification).

Φυσικά, αυτή η αντίθεση με την πρωτοβάθμια λογική δεν είναι πολύ ακριβής. Όπως θα δού- με αργότερα, υπάρχει μια μορφή ισοδυναμίας ανάμεσα στην τροπική λογική και κάποιο θραύσμα της πρωτοβάθμιας λογικής. Συγκεκριμένα, κάθε τύπος της τροπικής λογικής μπορεί να μεταφραστεί σε έναν ισοδύναμο της πρωτοβάθμιας λογικής, και αυτή η διαδικασία ορίζει φυσιολογικά το λεγόμενο *τροπικό θραύσμα* (αγγλ. modal fragment). Η ισοδυναμία αυτή εισήχθη από τον van Benthem [8, 9] και είναι μέρος μίας ευρύτερης θεωρίας η οποία καλείται *θεωρία αντιστοιχίας* (αγγλ. correspondence theory). Με αυτόν τον τρόπο ρίχνεται περισσότερο φως στη μελέτη της τροπικής λογικής αλλά και, αντιστρόφως, μας δίνεται η δυνατότητα να καταλάβουμε ποια είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά του τροπικού θραύσματος που το κάνουν να έχει καλύτερη (υπολογιστική) συμπεριφορά από άλλα θραύσματα. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα εισαγάγουμε αρχικά το θραύσμα δύο-μεταβλητών και, αργότερα, το φρουρούμενο θραύσμα.

1.2 Βασική Τροπική Γλώσσα

Θα εισαγάγουμε τώρα τη λεγόμενη *βασική τροπική γλώσσα*, η οποία αποτελεί την πιο απλή περίπτωση τροπικής γλώσσας. Δημιουργείται επεκτείνοντας την προτασιακή λογική με τους τελεστες $\Box$ και $\Diamond$, αν και για απλότητα θα ορίσουμε τον $\Diamond$ συναρτήσει του $\Box$.

1.2.1 Σύνταξη

Έστω Φ ένα αριθμήσιμο σύνολο προτασιακών μεταβλητών, τα μέλη του οποίου θα συμβολίζονται συνήθως με p ή q, πιθανότατα με κάποιο δείκτη. Οι (καλά-σχηματισμένοι) τύποι της βασικής τροπικής γλώσσας $\mathrm{ML}(\Phi)$ ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

$$\varphi \ := \ p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Box\varphi.$$

Το παραπάνω λέει ότι επιτρεπόμενοι τύποι της βασικής τροπικής γλώσσας είναι οι προτασιακές μεταβλητές ή ο λεγόμενος «πάτος» $\bot$, καθώς και (αναδρομικά) η άρνηση τροπικού τύπου, η διάζευξη δύο τροπικών τύπων και ο τελεστής $\Box$ ακολουθούμενος από τροπικό τύπο. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε μιλήσει για παρενθέσεις, αφού ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά προσδιορίζει μονοσήμαντα κάθε επιτρεπόμενο τύπο ως ένα συντακτικό δέντρο. Όταν γράφουμε τον τύπο σε μία γραμμή θα χρησιμοποιούμε παρενθέσεις όπου υπάρχει κίνδυνος ασάφειας.

Ορίζουμε επίσης τους υπόλοιπους λογικούς συνδέσμους ως συντομογραφίες, δηλαδή

$$\varphi \wedge \psi \ := \ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \ \ \varphi \to \psi \ := \ \neg\varphi \vee \psi,$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi \ := \ (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

Τέλος, ως *δυϊκός τελεστής* του $\Box$ ορίζεται ο

$$\Diamond\varphi \ := \ \neg\Box\neg\varphi.$$

1.2.2 Σημασιολογία

Ενώ η τροπική λογική ξεκίνησε ως εργαλείο για τη μελέτη του «απαραίτητου» και του «πιθανού», όπου $\Box p$ σημαίνει ότι το p είναι απαραίτητο και $\Diamond p$ ότι το p είναι πιθανό, αυτό δεν πρέπει να παίρνεται κυριολεκτικά. Πολλές διαφορετικές ερμηνείες δίνονται πλέον στους τελεστές αυτούς. Για παράδειγμα, εκτός από τα παραπάνω, το $\Box p$ μπορεί να θεωρηθεί ότι σημαίνει (στην τεχνητή νοημοσύνη, για παράδειγμα) ότι ένας πράκτορας *γνωρίζει* το p ή ότι (στην επαλήθευση λογισμικού υπολογιστών) το p ισχύει μετά από όλες τις πιθανές *εκτελέσεις ενός προγράμματος* ή ότι (στη χρονική λογική) το p θα ισχύει πάντα *στο μέλλον*.

Τέτοιες διαφορετικές σημασίες ενοποιούνται και γίνονται πιο ξεκάθαρες με τη χρήση της λεγόμενης *σχεσιακής σημασιολογίας*, που οφείλεται στον Kripke [10, 11]. Φυσικά υπάρχουν και άλλες σημασιολογίες για την τροπική λογική, όπως π.χ. η αλγεβρική ή η τοπολογική σημασιολογία — οι οποίες είναι επίσης πολύ χρήσιμες για διαφορετικούς λόγους. Στην πράξη όμως, η σχεσιακή σημασιολογία έχει αποδειχτεί πολύ πιο χρήσιμη και απλή. Υπό αυτή τη σημασιολογία, οι διάφορες τροπικές λογικές μπορούν να θεωρηθούν ως εργαλεία για την ανάλυση σχεσιακών μοντέλων, ή σχεσιακών συστημάτων μετάβασης. Με πιο απλά λόγια, κάποιος θα μπορούσε να πει ότι οι τροπικές λογικές είναι εργαλεία για να μιλάμε σχετικά με *γραφήματα*.

Ορισμός 1.1. *Πλαίσιο* (αγγλ. frame) καλείται κάθε ζεύγος $\mathfrak{F} = (W, R)$, όπου W είναι ένα μη-κενό σύνολο, και R είναι μία διμελής σχέση στο W, δηλαδή $R \subseteq W \times W$.

Όπως μπορεί κανείς να δει, ένα πλαίσιο για τη βασική τροπική γλώσσα είναι απλά ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Οι κορυφές του καλούνται *καταστάσεις* και οι κατευθυνόμενες ακμές αναπαριστούν πιθανές *μεταβάσεις* ανάμεσας σε καταστάσεις. Προτού ορίσουμε την συνθήκη ικανοποιησιμότητας τροπικών τύπων θα χρειαστεί να εμπλουτίσουμε τον παραπάνω ορισμό με μία συνάρτηση αποτίμησης παίρνοντας έτσι την έννοια του μοντέλου:

Ορισμός 1.2. *Μοντέλο* (αγγλ. model) καλείται κάθε τριάδα $\mathfrak{M} = (W, R, \pi)$, όπου το ζεύγος (W, R) είναι ένα πλαίσιο, και $\pi : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ είναι η λεγόμενη *συνάρτηση αποτίμησης*.

Στον παραπάνω ορισμό, $\mathcal{P}(W)$ συμβολίζει το δυναμοσύνολο του W. Διαισθητικά, για κάθε $p \in \Phi$, θεωρούμε ότι το $\pi(p) \subseteq W$ προσδιορίζει τις καταστάσεις του W στις οποίες το p είναι αληθές. Με βάση αυτή τη συνάρτηση, ορίζουμε επαγωγικά την αλήθεια (ή μη) όλων των τύπων της βασικής τροπικής γλώσσας.

Ορισμός 1.3. Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, \pi)$ ένα μοντέλο και $w \in W$. Ορίζουμε επαγωγικά τη σχέση ικανοποιησιμότητας $\models$ για τύπους της βασικής τροπικής γλώσσας ως εξής:

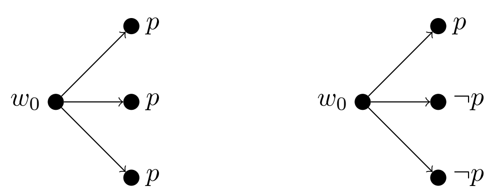
$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \models p &\quad \text{ανν} \quad w \in \pi(p), \\
\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi &\quad \text{ανν} \quad \text{όχι } \mathfrak{M}, w \models \varphi, \\
\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi &\quad \text{ανν} \quad \mathfrak{M}, w \models \varphi \text{ ή } \mathfrak{M}, w \models \psi, \\
\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi &\quad \text{ανν} \quad \text{για κάθε } v \in W \text{ τ.ω. } R(w,v),\ \mathfrak{M}, v \models \varphi.
\end{aligned}
$$

Απαιτούμε επίσης να μην ισχύει ποτέ ότι $\mathfrak{M}, w \models \bot$. Όταν $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ λέμε ότι ο φ *ικανοποιείται* (ή είναι *αληθής*) στο μοντέλο $\mathfrak{M}$ στην κατάσταση w.

Από τα παραπάνω, εύκολα καταλήγουμε και στο εξής:

$$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi \quad \text{ανν} \quad \text{υπάρχει } v \in W \text{ τ.ω. } R(w,v) \text{ και } \mathfrak{M}, v \models \varphi.$$

Στο Σχήμα 1.1 υπάρχουν δύο παραδείγματα μοντέλων: στο αριστερό, έστω $\mathfrak{M}_1$, έχουμε $\mathfrak{M}_1, w_0 \models \Box p$ και στο δεξί, έστω $\mathfrak{M}_2$, έχουμε $\mathfrak{M}_2, w_0 \not\models \Box p$ αλλά $\mathfrak{M}_2, w_0 \models \Diamond p$. Παρατηρήστε ότι έχουμε επιγράψει τις κορυφές με p ή $\neg p$ για ευκολία, εννοώντας ότι οι αντίστοιχες καταστάσεις ανήκουν στο $\pi(p)$ ή όχι αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα μοντέλων.

Ορισμός 1.4. Έστω $\mathcal{M}$ μία κλάση μοντέλων. Ένας τύπος φ καλείται *$\mathcal{M}$-ικανοποιήσιμος* (αγγλ. $\mathcal{M}$-satisfiable) αν υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ και κατάσταση w στο $\mathfrak{M}$ τέτοια ώστε $\mathfrak{M}, w \models \varphi$. Αν $\mathcal{M}$ είναι η κλάση όλων των μοντέλων (δηλαδή $\mathfrak{M}$ είναι ένα οποιοδήποτε μοντέλο), τότε λέμε απλά ότι ο φ είναι *ικανοποιήσιμος*.

Ορισμός 1.5. Έστω $\mathcal{F}$ μία κλάση πλαισίων. Ένας τύπος φ καλείται *$\mathcal{F}$-έγκυρος* (αγγλ. $\mathcal{F}$-valid) αν για κάθε πλαίσιο $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$, κάθε αποτίμηση π, και κάθε κατάσταση w στο $\mathfrak{F}$, είναι $(\mathfrak{F}, \pi), w \models \varphi$. Αν $\mathcal{F}$ είναι η κλάση όλων των πλαισίων (δηλαδή $\mathfrak{F}$ είναι ένα οποιοδήποτε πλαίσιο), λέμε απλά ότι ο φ είναι *έγκυρος*.

1.3 Τροπική και Πρωτοβάθμια Λογική

Για την παρούσα ενότητα, υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης έχει μία βασική οικειότητα με την πρωτοβάθμια λογική και τη σημασιολογία της, και δε θα ορίσουμε τίποτα σχετικό.

Θα περιγράψουμε τώρα έναν τρόπο να μεταφράζουμε τύπους της βασικής τροπικής γλώσσας σε τύπους της πρωτοβάθμιας λογικής με καθορισμένο σχεσιακό λεξιλόγιο, οι οποίοι θα ικανοποιούνται στα ίδια ακριβώς μοντέλα. Αυτό, όπως έχουμε ήδη πει, είναι πολύ σημαντικό αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μοντελο-θεωρητικά εργαλεία της πρωτοβάθμιας λογικής για τη μελέτη της τροπικής λογικής. Επίσης, αντιστρόφως, όπως θα δούμε παρακάτω η μετάφραση αυτή ορίζει φυσιολογικά το λεγόμενο *τροπικό θραύσμα*, το οποίο θα συγκρίνουμε (ως προς την υπολογιστική συμπεριφορά) με άλλα θραύσματα και θα εξηγήσουμε τι το ιδαίτερο έχει.

Έστω φ ένας τύπος της βασικής τροπικής γλώσσας και έστω $V_\varphi \subseteq \Phi$ το σύνολο όλων των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στον φ. Έστω $\sigma = \langle R, (P)_{p \in V_\varphi} \rangle$ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο το οποίο αποτελείται από το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο R και ένα μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο P για κάθε προτασιακή μεταβλητή $p \in V_\varphi$. Ορίζουμε την *τυπική μετάφραση* (αγγλ. standard translation) για τον φ αναδρομικά ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ST}_x(p) &= P(x) \\
\mathrm{ST}_x(\bot) &= \bot \\
\mathrm{ST}_x(\neg\psi) &= \mathrm{ST}_x(\psi) \\
\mathrm{ST}_x(\psi_1 \vee \psi_2) &= \mathrm{ST}_x(\psi_1) \vee \mathrm{ST}_x(\psi_2) \\
\mathrm{ST}_x(\Box\psi) &= \forall y(R(x,y) \to \mathrm{ST}_y(\psi)), \text{όπου } y \text{ νέα μεταβλητή} \\
\mathrm{ST}_x(\Diamond\psi) &= \exists y(R(x,y) \wedge \mathrm{ST}_y(\psi)), \text{όπου } y \text{ νέα μεταβλητή}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 1.6. Θεωρούμε τον τύπο $\varphi := p \to \Diamond p$ και έστω $\sigma = \langle R, P \rangle$ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο. Σύμφωνα με τα παραπάνω η τυπική μετάφραση του φ είναι

$$\mathrm{ST}_x(\varphi) = P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge P(y)).$$

Παράδειγμα 1.7. Όμοια με προηγουμένως, έστω $\varphi := p \to \Diamond(p \vee \Box p)$.

Είναι

$$\mathrm{ST}_x(\varphi) \;=\; P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge (P(y) \vee \forall z(R(y,z) \to P(z)))).$$

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενως, οι τύποι της πρωτοβάθμιας λογικής που προκύπτουν από την τυπική μετάφραση είναι ισοδύναμοι, ως προς την ικανοποιησιμότητα τους, με τους τροπικούς τύπους από τους οποίους προέκυψαν. Δηλαδή, αν ο τροπικός τύπος φ είναι αληθής σε ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$ σε μία κατάσταση w, τότε και ο τύπος $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ είναι αληθής στο $\mathfrak{M}$ αν αποτιμηθεί στην κατάσταση w, και αντιστρόφως. Αυτό εκφράζεται από το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.8. Έστω φ ένας τύπος της βασικής τροπικής γλώσσας, και έστω $\mathfrak{M} = (W, R, \pi)$ ένα μοντέλο και $w \in W$. Τότε ισχύει ότι $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ αν και μόνο αν $\mathfrak{M} \models \mathrm{ST}_x(\varphi)[x := w]$.

Απόδειξη. Παραλείφθηκε, βλ. [12]. □

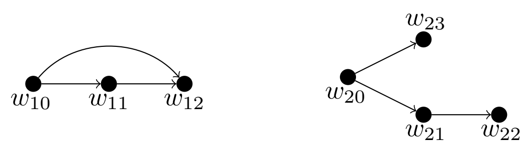
Αφού λοιπόν κάθε τροπικός τύπος μπορεί να μεταφραστεί σε έναν ισοδύναμο τύπο της πρωτοβάθμιας λογικής, οι τροπικοί τύποι καθορίζουν ένα θραύσμα της πρωτοβάθμιας λογικής: το θραύσμα τύπων οι οποίοι προκύπτουν ως μετάφραση τροπικών τύπων, το οποίο καλείται *τροπικό θραύσμα*. Υπάρχει όμως κάποιος άλλος (μοντελο-θεωρητικός) χαρακτηρισμός του θραύσματος αυτού που να είναι δυνατός χωρίς αναφορά στην τροπική λογική; Η απάντηση είναι ναι, και για να προχωρήσουμε θα χρειαστούμε την έννοια της αμφιεξομοίωσης (αγγλ. bisimulation).

Ορισμός 1.9. Έστω δύο μοντέλα, $\mathfrak{M}_1 = (W_1, R_1, \pi_1)$ και $\mathfrak{M}_2 = (W_2, R_2, \pi_2)$, και έστω $\sim \subseteq W_1 \times W_2$ μία σχέση μεταξύ καταστάσεων των $\mathfrak{M}_1$ και $\mathfrak{M}_2$. Η σχέση $\sim$ καλείται *αμφιεξομοίωση* (αγγλ. bisimulation) αν για κάθε $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ τ.ω. $w_1 \sim w_2$ ισχύουν τα εξής:

- Οι w_1 και w_2 ικανοποιούν τις ίδιες ακριβώς προτασιακές μεταβλητές.
- Αν $R_1(w_1, v_1)$ τότε υπάρχει $v_2 \in W_2$ τ.ω. $R_2(w_2, v_2)$ και $v_1 \sim v_2$.
- Αν $R_2(w_2, v_2)$ τότε υπάρχει $v_1 \in W_1$ τ.ω. $R_1(w_1, v_1)$ και $v_2 \sim v_1$.

Αν υπάρχει αμφιεξομοίωση μεταξύ δύο μοντέλων $\mathfrak{M}_1$ και $\mathfrak{M}_2$, τότε αυτά θα καλούνται *αμφιόμοια* (αγγλ. bisimilar). Επίσης, δύο καταστάσεις w_1 και w_2 θα καλούνται *αμφιόμοιες* αν $w_1 \sim w_2$, όπου η σχέση $\sim$ είναι αμφιεξομοίωση.

Στο Σχήμα 1.2 υπάρχει ένα παράδειγμα αμφιόμοιων μοντέλων. Εύκολα μπορεί να ελέγξει κανείς ότι η σχέση $\sim = \{(w_{10}, w_{20}), (w_{11}, w_{21}), (w_{12}, w_{22}), (w_{12}, w_{23})\}$ είναι αμφιεξομοίωση μεταξύ των δύο μοντέλων.



Σχήμα 1.2: Δύο αμφιόμοια μοντέλα.

Διαισθητικά, δύο μοντέλα $\mathfrak{M}_1$ και $\mathfrak{M}_2$ είναι αμφιόμοια αν ισχύει το εξής: για όλες τις αμφιόμοιες καταστάσεις w_1 στο $\mathfrak{M}_1$ και w_2 στο $\mathfrak{M}_2$, αν τοποθετήσουμε ένα αυτόματο είτε στην w_1 ή στην w_2 και το αφήσουμε να κινηθεί με βάση τις επιτρεπόμενες μεταβάσεις, τότε αυτό δε θα μπορεί να καταλάβει τη διαφορά, δηλαδή αν βρίσκεται στο $\mathfrak{M}_1$ ή στο $\mathfrak{M}_2$.

Η έννοια της αμφιεξομοίωσης εισήχθη γι΄ αυτόν ακριβώς τον λόγο, δηλαδή ως μία ασθενής έννοια ισομορφισμού μοντέλων ως προς τους τροπικούς τύπους που αληθεύουν σε αυτά: αν δύο μοντέλα είναι αμφιόμοια τότε ικανοποιούν τους ίδιους ακριβώς τύπους. Το αντίστροφο *δεν* ισχύει πάντα, αλλά μόνο για πεπερασμένα μοντέλα. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [13, 12].

Ορισμός 1.10. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο και $\varphi(x)$ ένας σ-τύπος της πρωτοβάθμιας λογικής. Θα λέμε ότι ο $\varphi(x)$ είναι *αμετάβλητος* (αγγλ. invariant) ως προς αμφιεξομοίωση αν ισχύει το εξής: για κάθε μοντέλο $\mathfrak{M}$ και κατάσταση w στο $\mathfrak{M}$, αν $\mathfrak{M} \models \varphi(x)[x := w]$, τότε επίσης ισχύει $\mathfrak{M}' \models \varphi(x)[x := w']$ για κάθε αμφιόμοιο μοντέλο $\mathfrak{M}'$ του $\mathfrak{M}$ και κάθε αμφιόμοια κατάσταση w' (στο $\mathfrak{M}'$) της w.

Αυτό μας δίνει ένα πολύ κομψό ορισμό του τροπικού θραύσματος μέσω αμφιεξομοίωσης:

Θεώρημα 1.11. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο και $\varphi(x)$ ένας σ-τύπος της πρωτοβάθμιας λογικής. Ο $\varphi(x)$ είνα αμετάβλητος ως προς αμφιεξομοίωση αν και μόνο αν είναι ισοδύναμος με την τυπική μετάφραση $\mathrm{ST}_x(\psi)$ ενός τύπου ψ της βασικής τροπικής γλώσσας.

Απόδειξη. Παραλείφθηκε, βλ. [14, 9]. $\square$

Με άλλα λόγια, το τροπικό θραύσμα είναι το θραύσμα εκείνο της πρωτοβάθμιας λογικής το οποίο είναι αμετάβλητο ως προς αμφιεξομοίωση.

1.4 Κάποιες Επεκτάσεις

Η βασική γλώσσα, όπως εισήχθη παραπάνω, είναι πολύ απλή για να είναι χρήσιμη στην πράξη. Ωστόσο, με κατάλληλες επεκτάσεις μπορεί να γίνει πολύ εκφραστική, διατηρώντας ταυτόχρονα καλές υπολογιστικές ιδιότητες (όπως θα δούμε αργότερα).

1.4.1 Πολυ-Τροπική Γλώσσα

Φυσιολογικά, το πρώτο πράγμα που μπορεί κανείς να σκεφτεί είναι να επεκτείνει τη βασική τροπική γλώσσα με έναν οποιονδήποτε αριθμό τροπικών τελεστών. Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις στη βιβλιογραφία, αυτή η εκδοχή της τροπικής γλώσσας εισάγεται ως βασική.

Έστω Φ ένα αριθμήσιμο σύνολο προτασιακών μεταβλητών (όπως προηγουμένως) και έστω M ένα σύνολο τροπικών συμβόλων, τα μέλη του οποίου συβολίζονται συνήθως με m, πιθανότατα με κάποιον δείκτη. Οι (καλάσχηματισμένοι) τύποι της πολυ-τροπικής γλώσσας ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

$$\varphi \ := \ p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid [m]\varphi \mid \langle m \rangle\varphi.$$

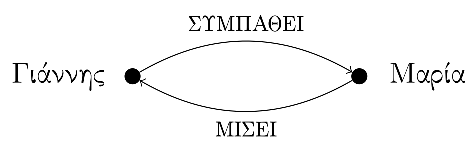
Δηλαδή, εισάγουμε δύο τροπικούς τελεστές για κάθε τροπικό σύμβολο m: τον $[m]$ που αποτελεί γενίκευση του $\Box$ και τον $\langle m \rangle$ που αποτελεί γενίκευση του $\Diamond$.

Η σημασιολογία των τελεστών αυτών ορίζεται ομοίως με τη βασική γλώσσα. Τα πλαίσια στην στην πολυ-τροπική περίπτωση αποτελούνται από μεταβάσεις επιγεγραμμένες με τα τροπικά σύμβολα στο M· δηλαδή, ένα πλαίσιο αποτελείται από ένα σύνολο καταστάσεων W και μία διμελή σχέση μετάβασης R_m για κάθε σύμβολο m στο M. Η σχέση ικανοποιησιμότητας $\models$ ορίζεται αναλόγως με τη βασική περίπτωση, όπου ο ορισμός την νέων τροπικών τελεστών είναι γενίκευση των ορισμών του $\Box$ και του $\Diamond$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \models [m]\varphi \quad & \text{ανν} \quad \text{για κάθε } v \in W \text{ τ.ω. } R_m(w,v),\ \mathfrak{M}, v \models \varphi, \\ \mathfrak{M}, w \models \langle m \rangle\varphi \quad & \text{ανν} \quad \text{υπάρχει } v \in W \text{ τ.ω. } R_m(w,v) \text{ και } \mathfrak{M}, v \models \varphi. \end{aligned}$$

Αυτή η επέκταση μπορεί να μη φαίνεται πολύ σημαντική αρχικά, αλλά κάνει μεγάλη διαφορά όταν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε περίπλοκες καταστάσεις. Αυτό είναι πολύ σημαντικώ στην αναπαράσταση γνώσεις (και συγκεκριμένα στις περιγραφικές λογικές) για παράδειγμα (βλ. [15] για περισσότερες λεπτομέρειες).

Παράδειγμα 1.12. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το ερώτημα «ο x συμπαθεί κάποιον που μισεί κάποιον» με τον πολυ-τροπικό τύπο $\varphi := \langle \text{ΣΥΜΠΑΘΕΙ} \rangle \langle \text{ΜΙΣΕΙ} \rangle \top$, όπου $\top := \neg\bot$. Έστω $\mathfrak{M}$ το μοντέλο που υπάρχει στο Σχήμα 1.3. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι $\mathfrak{M}$, Θοην $\models \varphi$.



Σχήμα 1.3: Παράδειγμα ενός μοντέλου πολυ-τροπικού τύπου.

Η συνάρτηση τυπικής μετάφρασης ορίζεται ανάλογα με τη βασική γλώσσα. Σε αυτή την περίπτωση, το σχεσιακό λεξιλόγιο για ένα πολυτροπικό τύπο φ είναι $\langle R_{m_1}, \ldots, R_{m_k}, (P)_{p \in V_\varphi} \rangle$, όπου $m_1, \ldots, m_k$ είναι τα τροπικά σύμβολα που εμφανίζονται στον φ.

1.4.2 Λογικές του Υπολογισμού

Προχωράμε τώρα σε επεκτάσεις που βρίσκουν εφαρμογές στη μοντελοποίηση υπολογισμών και πιο συγκεκριμένα στην επαλήθευση λογισμικού υπολογιστών. Μπορούμε να θεωρούμε τις σχεσιακές δομές σαν τρόπους μοντελοποίησης της εκτέλεσης ενός προγράμματος υπολογιστή που αναπαριστούν πιθανές «διαμορφώσεις» (π.χ. ως προς τη μνήμη — τιμές μεταβλητών, κατάσταση στοίβας, κλπ.) ως καταστάσεις και μεταβάσεις μεταξύ αυτών. Έτσι, είναι φυσιολογικό να σχηματίσουμε λογικές που μας βοηθούν να βγάζουμε συμπεράσματα για τέτοια πράγματα, π.χ. για να λέμε ότι ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα δεν οδηγείται ποτε σε αδιέξοδο.

Η *λογική υπολογιστικού δέντρου* (αγγλ. computation tree logic — CTL) είναι μία πολύ εκφραστική λογική αυτού του είδους. Μας επιτρέπει να μιλάμε για μονοπάτια εκτέλεσης ενός προγράμματος εισάγοντας τους ποσοδείκτες μονοπατιών **A** και **E** (οι οποίοι θα ερμηνεύονται αντιστοίχως ως «για όλα τα μονοπάτια» και «για κάποιο μονοπάτι») και τους χρονικούς τελεστές **X** και **U** (οι οποίοι θα ερμηνεύονται αντιστοίχως ως «την επόμενη φορά» και «εωσότου»).

Πιο αναλυτικά, δεδομένου ενός αριθμήσιμου συνόλου προτασιακών μεταβλητών, οι (καλά-σχηματισμένοι τύποι) της CTL ορίζονται ως εξής:

$$\varphi \;:=\; p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \mathbf{EX}\varphi \mid \mathbf{AX}\varphi \mid \mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi) \mid \mathbf{A}(\varphi\mathbf{U}\psi).$$

Η ερμηνεία των νέων τελεστών, δεδομένου $\mathfrak{M} = (W, R, \pi)$, είναι η εξής:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{M}, w \models \mathbf{AX}\varphi & \text{ανν} & \text{για κάθε } v \in W \text{ τ.ω. } R(w,v),\ \mathfrak{M}, v \models \varphi, \\
\mathfrak{M}, w \models \mathbf{EX}\varphi & \text{ανν} & \text{υπάρχει } v \in W \text{ τ.ω. } R(w,v) \text{ και } \mathfrak{M}, v \models \varphi, \\
\mathfrak{M}, w \models \mathbf{A}(\varphi\mathbf{U}\psi) & \text{ανν} & \text{για όλες τις ακολουθίες καταστάσεων } w = w_0, w_1, \ldots, \text{ υπάρχει} \\
 & & \text{κάποιο } i \geq 0 \text{ τ.ω. } \mathfrak{M}, w_i \models \psi \text{ και για όλα τα } 0 \leq j < i,\ \mathfrak{M}, w_j \models \varphi, \\
\mathfrak{M}, w \models \mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi) & \text{ανν} & \text{υπάρχει μία ακολουθία καταστάσεων } w = w_0, w_1, \ldots, \text{ και κάποιο } i \geq 0 \\
 & & \text{τ.ω. } \mathfrak{M}, w_i \models \psi \text{ και για όλα τα } 0 \leq j < i,\ \mathfrak{M}, w_j \models \varphi.
\end{array}$$

Η CTL δεν μπορεί να μεταφραστεί στην πρωτοβάθμια λογική, αφού μπορεί να εκφράσει προτάσεις σχετικά με μονοπάτια που η πρωτοβάθμια λογική δεν μπορεί. Για ακρίβεια, η CTL είναι θραύσμα της πρωτοβάθμιας λογικής *με σταθερά σημεία*.

Μία άλλη ακόμα πιο εκφραστική επέκταση της βασικής τροπικής λογικής — αλλά και της CTL — είναι ο τροπικός μ-λογισμός (αγγλ. modal μ-calculus) [16]. Αυτή η λογική επεκτείνει τη βασική τροπική λογική με την προσθήκη τελεστών για σταθερά σημεία (αγγλ. fixed-point operators). Είναι επίσης θραύσμα της πρωτοβάθμιας λογικής με σταθερά σημεία.

Κεφάλαιο 2

Πολυπλοκότητα της Βασικής Τροπικής Λογικής

Θα μελετήσουμε τώρα την υπολογιστική πολυπλοκότητα της βασικής τροπικής γλώσσας. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι η ικανοποιησιμότητα τροπικών τύπων είναι αποκρίσιμη (και με σχετικά χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα) και διατηρεί αυτές τις ιδιότητες μετά από αξιοσημείωτες επεκτάσεις. Αυτό σε συνδυασμό με τις εφαρμογές που αναφέρθηκαν έως τώρα, θα είναι το κύριο επιχείρημά μας σχετικά με τη χρησιμότητα της τροπικής λογικής στην πληροφορική (και όχι μόνο). Αργότερα θα εισαγάγουμε το θραύσμα δύο-μεταβλητών και του φρουρούμενο θραύσμα ως δύο πιθανές εξηγήσεις αυτών των καλών ιδιοτήτων.

2.1 Προαπαιτούμενα σε Πολυπλοκότητα

Πριν ερευνήσουμε ποια προβλήματα της λογικής είναι αλγοριθμικά επιλύσιμα, πρέπει να δώσουμε έναν ορισμό για το τι ακριβώς σημαίνει αυτό. Θα χρησιμοποιήσουμε τις μηχανές Turing ως μοντέλο υπολογισμού, και όταν θα λέμε ότι ένα πρόβλημα είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο θα εννοούμε επιλύσιμο από μία μηχανή Turing. Υποθέτουμε βασική οικειότητα με τις μηχανές Turing, και συγκεκριμένα με ντετερμινιστικές και μη-ντετερμινιστικές μηχανές Turing, γι΄ αυτό και θα δώσουμε μόνο μία άτυπη εισαγωγή σε σχετικές έννοιες. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτά τα θέματα μπορεί κανείς να βρει σε οποιοδήποτε σύγχρονο βιβλίο υπολογισιμότητας ή/και υπολογιστικής πολυπλοκότητας (π.χ. βλ. [17]).

Όσον αφορά τις υπολογιστικές κλάσεις, μας ενδιαφέρουν δύο βασικοί πόροι για να μετράμε πόσο αποδοτικοί είναι οι αλγόριθμοί μας: ο χρόνος (αριθμός υπολογιστικών βημάτων) και ο χώρος (χρήση μνήμης). Μία *κλάση πολυπλοκότητας* χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο πόρο (χρόνο ή χώρο) και ένα όριο $f(n)$[1] στην ποσότητα που η μηχανή μπορεί να χρησιμοποιήσει σε συνάρτηση με το μέγεθος n της εισόδου.

Για κάθε τέτοιο όριο $f(n)$ υπάρχουν τέσσερις βασικές σχετικές κλάσεις:

- $\mathsf{TIME}(f(n))$ είναι η κλάση όλων των προβλημάτων επιλύσιμων από μία ντετερμινιστική μηχανή Turing σε χρόνο το πολύ $f(n)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

- $\mathsf{NTIME}(f(n))$ είναι η κλάση όλων των προβλημάτων επιλύσιμων από μία μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing σε χρόνο το πολύ $f(n)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

- $\mathsf{SPACE}(f(n))$ είναι η κλάση όλων των προβλημάτων επιλύσιμων από μία ντετερμινιστική μηχανή Turing χρησιμοποιώντας χώρο το πολύ $f(n)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

- $\mathsf{NSPACE}(f(n))$ είναι η κλάση όλων των προβλημάτων επιλύσιμων από μία μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing χρησιμοποιώντας χώρο το πολύ $f(n)$, όπου n είναι το μέγεθος της εισόδου.

Είναι καλά γνωστό ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\mathsf{TIME}(f(n)) \subseteq \mathsf{NTIME}(f(n))$, $\mathsf{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}(f(n))$.
- $\mathsf{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathsf{SPACE}(f(n))$.
- $\mathsf{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathsf{TIME}(k^{\log n + f(n)})$.

Το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα μας λέει ότι ο μη-ντετερμινισμός δε δίνει σημαντικό πλεονέκτημα σχετικά με το χώρο [18]:

[1] Δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε τύπος ορίου· πρέπει να τεθούν κάποιοι περιορισμοί έτσι ώστε αυτό να έχει νόημα. Ωστόσο, όλοι οι τύποι ορίου που μας ενδιαφέρουν ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς, οπότε δε θα μπούμε σε σχετικές λεπτομέρειες.

Θεώρημα του Savitch. Για $f(n) \geq \log n$, $\mathsf{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathsf{SPACE}(f(n)^2)$.

Εισάγουμε μερικές συντομογραφίες για κοινές κλάσεις:

- $\mathsf{P} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{TIME}(n^k)$: ντετερμινιστικός πολυωνυμικός χρόνος.
- $\mathsf{NP} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{NTIME}(n^k)$: μη-ντετερμινιστικός πολυωνυμικός χρόνος.
- $\mathsf{PSPACE} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{SPACE}(n^k)$: ντετερμινιστικός πολυωνυμικός χώρος.
- $\mathsf{NPSPACE} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{NSPACE}(n^k)$: μη-ντετερμινιστικός πολυωνυμικός χώρος.
- $\mathsf{EXP} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{TIME}(2^{n^k})$: ντετερμινιστικός εκθετικός χρόνος.
- $\mathsf{NEXP} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{NTIME}(2^{n^k})$: μη-ντετερμινιστικός εκθετικός χρόνος.
- $2\text{-}\mathsf{EXP} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{TIME}(2^{2^{n^k}})$: ντετερμινιστικός διπλά-εκθετικός χρόνος.
- $2\text{-}\mathsf{NEXP} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{NTIME}(2^{2^{n^k}})$: μη-ντετερμινιστικός διπλά-εκθετικός χρόνος.

Τα ακόλουθα είναι επίσης γνωστά:

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE} \subseteq \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{NEXP} \subseteq 2\text{-}\mathsf{EXP} \subseteq 2\text{-}\mathsf{NEXP}.$$

Μία άλλη σημαντική έννοια είναι αυτή της *πληρότητας*. Διαισθητικά, δεδομένης μίας κλάσης πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$, ένα πρόβλημα στην $\mathcal{C}$ καλείται *$\mathcal{C}$-πλήρες* (αγγλ. $\mathcal{C}$-complete) εάν είναι ένα από τα δυσκολότερα σε αυτή την κλάση, δηλαδή απαιτεί όλους τους διαθέσιμους στην $\mathcal{C}$ υπολογιστικούς πόρους για να επιλυθεί. Συγκεκριμένα, ένα πρόβλημα Π είναι *$\mathcal{C}$-δύσκολο* (αγγλ. $\mathcal{C}$-hard) εάν κάποιος θα μπορούσε να λύσει αποδοτικά όλα τα προβλήματα στην $\mathcal{C}$ δεδομένης μίας αποδοτικής λύσης για το Π. Εάν, επιπλέον, ισχύει ότι $\Pi \in \mathcal{C}$, τότε το Π καλείται $\mathcal{C}$-πλήρες. Βλ. [17] για περισσότερες λεπτομέρειες και πιο αυστηρούς ορισμούς αυτών των εννοιών.

Φυσικά, όλα τα παραπάνω προϋποθέτουν ότι το υπο συζήτηση πρόβλημα είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο· δηλαδή, υπάρχει μία μηχανή Turing που το επιλύει. Αυτό δεν ισχύει πάντα — μάλιστα συνήθως δεν ισχύει. Ένα κλασικό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης είναι το Πρόβλημα της Απόφασης — εξού και η συζήτηση εδώ. Τέτοια αλγοριθμικά ανεπίλυτα προβλήματα καλούνται *μη-αποκρίσιμα* (αγγλ. undecidable). Παρ' όλα αυτά, όλα τα προβλήματα που θα συναντήσουμε εδώ είναι αποκρίσιμα, οπότε δε θα μπούμε σε λεπτομέρειες.

2.2 Αποκρισιμότητα της Τροπικής Λογικής

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάποια βασικά αποτελέσματα για την αποκρισιμότητα του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας για την τροπική λογική. Δηλαδή, δεδομένου ενός τύπου της βασικής τροπικής γλώσσας, υπάρχει ένας αλγοριθμικός τρόπος να προσδιορίσουμε αν αυτός είναι ικανοποιήσιμος (ή $\mathcal{M}$-ικανοποιήσιμος για μία κλάση μοντέλων $\mathcal{M}$); Η απάντηση είναι ναι, και αυτό μπορεί να αποδειχτεί με πολλούς τρόπους. Ένας συνηθισμένος τρόπος είναι δείχνοντας ότι η τροπική λογική έχει τη λεγόμενη ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου.

Ορισμός 2.1. Μία κλάση (τροπικών ή πρωτοβάθμιων) τύπων έχει την *ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου* (αγγλ. finite model property) αν κάθε ικανοποιήσιμος τύπος σε αυτήν έχει πεπερασμένο μοντέλο.

Είναι από καιρό γνωστό [19] ότι η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απάντηση ερωτημάτων αποκρισιμότητας, δεδομένου ενός πλήρους αποδεικτικού συστήματος. Αυτό γιατί, δεδομένου ενός τύπου φ, μπορεί κανείς να απαριθμεί ταυτόχρονα αποδείξεις και μοντέλα, και τελικά είτε θα βρει μία απόδειξη του φ ή θα βρει ένα μοντέλο που τον διαψεύδει. Ωστόσο, η ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου συνήθως εξασφαλίζεται αποδεικνύοντας την *ιδιότητα μικρού μοντέλου* (αγγλ. small model property), δηλαδή ότι κάθε ικανοποιήσιμος τύπος έχει μοντέλο ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Αυτό κάνει τα πράγματα ευκολότερα, αφού τότε μπορεί κανείς να διατρέξει όλα τα μοντέλα με μέγεθος μικρότερο ή ίσο αυτού του ορίου, μέχρι να βρει ένα μοντέλο που ικανοποιεί τον δεδομένο τύπο· διαφορετικά συμπεραίνει ότι αυτός δεν είναι ικανοποιήσιμος.

Λήμμα 2.2. Η τροπική λογική έχει την ιδιότητα μικρού μοντέλου.

Απόδειξη. Έστω φ ένας τύπος της βασικής τροπικής γλώσσας, και έστω $\mathfrak{M}, w \models \varphi$. Το $\mathfrak{M}$ μπορεί εύκολα να «ξετυλιχθεί» σε ένα αμφιόμοιο δενδρικό μοντέλο $\mathfrak{M}'$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}', w \models \varphi$, όπου w' είναι η ρίζα του δέντρου. Το $\mathfrak{M}'$ μπορεί να είναι άπειρο σε βάθος αλλά αυτό δεν είναι πρόβλημα αφού οι τροπικοί τύποι μπορούν να «μιλήσουν» σχετικά με καταστάσεις προσβάσιμες σε ένα πεπερασμένο αριθμό n βημάτων. Αυτός ο αριθμός φράσσεται από το μέγιστο βάθος τελεστών των υποτύπων του φ (π.χ. αν $\varphi := p \wedge \Diamond q \wedge \Diamond\Diamond\Diamond q$ θα είναι $n = 3$), το οποίο είναι επίσης φραγμένο από το μήκος του φ. Έτσι, όλα τα επίπεδα του δέντρου, εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό, μπορούν να διαγραφούν. Επιπλέον, το δέντρο έχει πεπερασμένη διακλάδωση, η οποία καθορίζεται από τον αριθμό των υποτύπων που συνιστούν τον φ, άρα και φράσσεται από το μήκος του. Συνεπώς, στο τέλος έχουμε ένα δενδρικό μοντέλο πεπερασμένου βάθους και πεπερασμένης διακλάδωσης: για να αποφασίσουμε αν ο φ είναι ικανοποιήσιμος απλά πρέπει να ελέγξουμε όλα τα δενδρικά μοντέλα μεγέθους μέχρι και $|\varphi|^n$, όπου το $|\varphi|$ συμβολίζει το μήκος του φ. □

Ως αποτέλεσμα, έχουμε δείξει το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3. Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας τύπων της βασικής τροπικής γλώσσας είναι αποκρίσιμο.

Παρατηρήστε ότι έχουμε επίσης αποδείξει την *ιδιότητα δενδρικού μοντέλου* (αγγλ. tree model property), δηλαδή ότι κάθε ικανοποιήσιμος τροπικός τύπος είναι ικανοποιήσιμος σε ένα δενδρικό μοντέλο. Αυτό θεωρείται ως ένας από τους σημαντικότερους λόγους για την καλή υπολογιστική συμπεριφορά των τροπικών λογικών (όπως θα δούμε αργότερα) και συγκεκριμένα για το ότι τέτοιες λογικές παραμένουν αποκρίσιμες μετά από διάφορες ισχυρές επεκτάσεις [20].

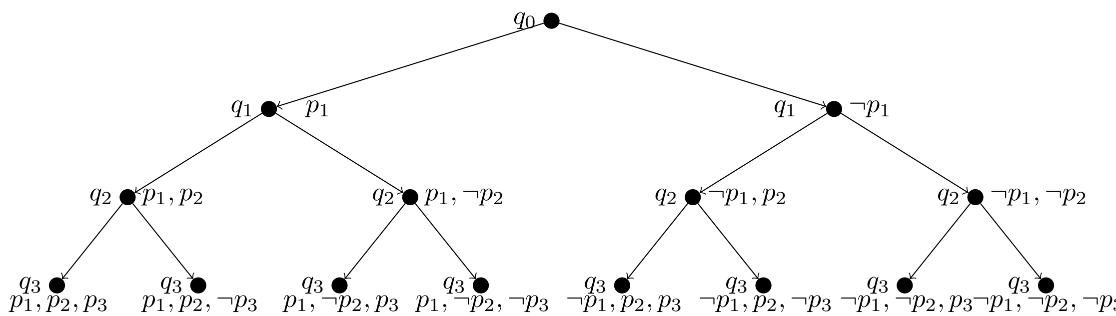
2.3 Πολυπλοκότητα Τροπικών Λογικών

Το επόμενο βήμα μετά την απόδειξη της αποκρισιμότητας για την ικανοποιησιμότητα τροπικών τύπων είναι ο προσδιορισμός της πολυπλοκότητας του προβλήματος αυτού.

2.3.1 Ύπαρξη Εκθετικών Μοντέλων

Θα δείξουμε τώρα ότι τύποι της βασικής γλώσσας μπορούν να εξαναγκάσουν την ύπαρξη μοντέλων εκθετικού μεγέθους. Αυτό αποτελεί ένδειξη για τη μη ύπαρξη ενός NP αλγορίθμου για την τροπική ικανοποιησιμότητα. Θα δείξουμε εδώ ότι η βασική τροπική γλώσσα είναι αρκετά δυνατή (εκφραστική) ώστε να περιγράψει την ύπαρξη δυαδικών δέντρων, τα οποία φυσικά εξαναγκάζουν εκθετικά μοντέλα στη χειρότερη περίπτωση. Το αποτέλεσμα αυτό, παρόλο που είναι ενδιαφέρον από μόνο του, θα μας δώσει επίσης τον τρόπο για να δείξουμε ότι η ικανοποιησιμότητα τύπων της βασικής τροπικής γλώσσας είναι PSPACE-complete.

Διαισθητικά, στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε τύπους που θα έχουν μοντέλα σαν το ακόλουθο:



Το μοντέλο αυτό θα εξαρτάται από μία παράμετρο m και, όπως είναι εύκολο να δούμε, ουσιαστικά θα καταμετρά όλους τους πιθανούς συνδυασμούς για ένα σύνολο μεταβλητών $p_1, p_2, \ldots, p_m$ σχηματίζοντας στο τελευταίο επίπεδό του ένα πίνακα αληθείας.

Συγκεκριμένα, για κάθε φυσικό m, θα δείξουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τύπο φ_m ο οποίος έχει μέγεθος $\mathcal{O}(m^2)$, αλλά εξαναγκάζει την ύπαρξη εκθετικών μοντέλων (σαν το παραπάνω). Θα χρησιμοποιήσουμε δύο οικογένειες μεταβλητών: τις $q_0, q_1, \ldots, q_m$ ως βοηθητικές για να προσδιορίζουν τα επίπεδα του δέντρου (η q_i θα είναι αληθής μόνο στο επίπεδο i) και τις $p_1, p_2, \ldots, p_m$ για τις οποίες θα σχηματιστεί ο πίνακας αληθείας στο τελευταίο επίπεδο (και θα εξαναγκάσουν συνεπώς $2^{m+1} - 1$ κόμβους).

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάποιες προτάσεις των οποίων η σύζευξη θα μας δώσει τον τύπο φ_m. Ξεκινάμε από τις μεταβλητές q_i των οποίων η σημασία είναι, όπως είπαμε, πιο απλή — θέλουμε να προσδιορίζουν τα επίπεδα. Θέλουμε να ισχύουν τα εξής:

(i) Η q_0 να αληθεύει στη ρίζα του δέντρου:

$$q_0.$$

(ii) Η q_i να αληθεύει στο επίπεδο i (ξεκινώντας από 1, αφού έχουμε q_0 λόγω του προηγουμένου) και σε κανένα άλλο επίπεδο. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει για $i = 1, \ldots, m$ ότι:

$$\Box^{(m)}(q_i \to \bigwedge_{i \neq j} \neg q_j),$$

όπου $\Box^{(m)}\psi$ είναι συντομογραφία για το $\psi \wedge \Box\psi \wedge \Box^2\psi \wedge \ldots \wedge \Box^m\psi$.

Προτού προχωρήσουμε στην διατύπωση των περιορισμών για τις p_i θα ορίσουμε μερικούς βοηθητικούς τύπους. Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές $(\neg)p_i$ με τις οποίες επιγράφεται κάθε κόμβος χαρακτηρίζονται από δύο βασικές ιδιότητες: (α) μετάδοση, δηλαδή κάθε κόμβος στο επίπεδο $i+1$ επιγράφεται με τις μεταβλητές $(\neg)p_i$ του γονέα του, και (β) διακλάδωση, δηλαδή κάθε κόμβος στο επίπεδο i διακλαδώνεται σε δύο παιδιά, το πρώτο από τα οποία επιγράφεται με p_{i+1} και το δεύτερο με $\neg p_{i+1}$. Η πρώτη ιδιότητα περιγράφεται, για $i = 0, \ldots, m$, από τον τύπο

$$M_i := (p_i \to \Box p_i) \wedge (\neg p_i \to \Box\neg p_i),$$

και η δεύτερη, για $i = 1, \ldots, m$, από τον τύπο

$$\Delta_i := q_i \to (\Diamond(q_{i+1} \wedge p_{i+1}) \wedge \Diamond(q_{i+1} \wedge \neg p_{i+1}))\,.$$

Είμαστε πλέον σε θέση να εκφράσουμε τους περιορισμούς για τις μεταβλητές p_i. Θέλουμε να ισχύουν τα εξής:

(iii) Οι p_1 και $\neg p_1$ να μεταδίδονται από κάθε κόμβο στα παιδιά του (όποια από τις δύο υπάρχει) ξεκινώντας από το επίπεδο 1, και αντιστοίχως οι p_2 και $\neg p_2$ ξεκινώντας από το επίπεδο 2, οι p_3 και $\neg p_3$ ξεκινώντας από το επίπεδο 3, κ.ο.κ.

$$\begin{array}{rl}
\Box M_1 \wedge \Box^2 M_1 \wedge \Box^3 M_1 \wedge \ldots \wedge & \Box^{m-1} M_1 \\
\wedge \Box^2 M_2 \wedge \Box^3 M_2 \wedge \ldots \wedge & \Box^{m-1} M_2 \\
\wedge \Box^3 M_3 \wedge \ldots \wedge & \Box^{m-1} M_3 \\
\vdots & \\
\wedge & \Box^{m-1} M_{m-1}
\end{array}$$

(iv) Όλοι οι κόμβοι κάθε επιπέδου διακλαδώνονται όπως περιγράψαμε παραπάνω:

$$\Delta_0 \wedge \Box\Delta_1 \wedge \Box^2\Delta_2 \wedge \ldots \wedge \Box^{m-1}\Delta_{m-1}.$$

Τέλος, ορίζουμε τον φ_m να είναι η λογική σύζευξη όλων των τύπων που προκύπτουν από τα (i), (ii), (iii) και (iv). Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το μέγεθος του φ_m είναι $O(m^2)$, αλλά προφανώς κάθε μοντέλο που τον ικανοποιεί θα είναι τουλάχιστον εκθετικό. Έχουμε λοιπόν καταλήξει στο ότι δεν υπάρχει πολυωνυμικό άνω φράγμα στο μέγεθος των μοντέλων. Αυτό μας προϊδεάζει για το ότι μπορεί να χρειαστεί να ελέγξουμε εκθετικά μεγάλα μοντέλα για να αποφασίσουμε αν ένας τροπικός τύπος φ είναι ικανοποιήσιμος. Συνεπώς υποπτευόμαστε ότι το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας είναι τουλάχιστον στο PSPACE.

2.3.2 Ένας PSPACE Αλγόριθμος

Θα παρουσιάσουμε τώρα έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χώρου για τη βασική τροπική λογική. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου είναι η εξής: δεδομένου τροπικού τύπου φ κατασκευάζουμε ένα δενδρικό μοντέλο για τον φ κρατώντας στη μνήμη ένα κλαδί κάθε φορά. Τα δέντρα που περιγράψαμε παραπάνω μπορεί να έχουν εκθετικά πολλούς κόμβους αλλά έχουν πολυωνυμικό βάθος. Έτσι, επαναχρησιμοποιώντας το χώρο για κάθε κλαδί χρειαζόμαστε το πολύ πολυωνυμικό χώρο. Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε είναι μία προσαρμογή ενός αλγορίθμου του Tobies [21].

Για τα παρακάτω, υποθέτουμε ότι όλοι οι τύποι που συναντάμε βρίσκονται σε *κανονική αρνητική μορφή*, δηλαδή οι αρνήσεις έχουν μεταφερθεί προς τα μέσα και υπάρχουν μπροστά μόνο από προτασιακές μεταβλητές. Για ένα τύπο φ αυτό μπορεί να γίνει εύκολα σε γραμμικό χρόνο και χώρο, αν εκμεταλευτούμε απλούς κανόνες της προτασιακής λογικής καθώς και τους ορισμούς των τροπικών τελεστών. Για παράδειγμα, για τον τύπο $\varphi := \Box\Diamond(p_1 \vee p_2)$ έχουμε

$$\neg\varphi \equiv \neg\neg\Diamond\neg\Diamond(p_1 \vee p_2) \equiv \Diamond\neg\neg\Box\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \Diamond\Box(\neg p_1 \wedge \neg p_2).$$

Ο αλγόριθμος που θα περιγράψουμε παρακάτω δημιουργεί, για ένα τύπο φ που είναι ικανοποιήσιμος, ένα μοντέλο που είναι δέντρο. Κάθε κόμβος (κατάσταση) του δέντρου αυτού θα επιγράφεται με ένα σύνολο τύπων οι οποίοι θα θεωρούνται αληθείς στον κόμβο αυτό. Θα γράφουμε $w \models \varphi$ εννοώντας ότι ο κόμβος w έχει επιγραφεί με τον τύπο φ. Δεν είναι υποχρεωτικό να επιγράφεται κάθε κόμβος με ένα μόνο τύπο.

κανόνας-$\wedge$:	εάν $w \models \psi_1 \wedge \psi_2 \in S$ και $\{w \models \psi_1, w \models \psi_2\} \not\subseteq S$ τότε $S := S \cup \{w \models \psi_1, w \models \psi_2\}$
κανόνας-$\vee$:	εάν $w \models \psi_1 \vee \psi_2 \in S$ και $\{w \models \psi_1, w \models \psi_2\} \cap S = \emptyset$ τότε $S := S \cup \{w \models \chi\}$, όπου $\chi \in \{\psi_1, \psi_2\}$ *μη-ντετερμινιστικά*
κανόνας-$\Diamond$:	εάν $w \models \Diamond\psi \in S$ και $(\nexists w')[Rww' \in S \ \& \ w' \models \psi]$ τότε $S := S \cup \{Rww', w' \models \psi\}$, όπου w' νέα μεταβλητή

Σχήμα 2.1: Κανόνες παραγωγής για ένα σύνολο περιορισμών.

Ένα δέντρο αυτής της μορφής θα αναπαρίσταται για ευκολία ως ένα σύνολο

$$\{Rw_iw_j \mid i, j \in \mathcal{I}\} \cup \{w_i \models \varphi_j \mid i \in \mathcal{I},\, j \in \mathcal{J}\},$$

όπου τα w_i συμβολίζουν τους κόμβους του δέντρου, το αριστερό σύνολο προσδιορίζει τις ακμές και το δεξί τους τύπους με τους οποίους έχει επιγραφεί κάθε κόμβος. Ένα τέτοιο σύνολο καλείται *σύνολο περιορισμών*.

Θα λέμε ότι ένα σύνολο περιορισμών S περιέχει *σύγκρουση*, εάν για κάποιο w, $\{w \models \varphi, w \models \neg\varphi\} \subseteq S$, διαισθητικά δηλαδή εάν κάποιος κόμβος του αντίστοιχου δέντρου είναι επιγεγραμμένος με φ και $\neg\varphi$. Για να ελέγξει αν ένας τύπος φ είναι ικανοποιήσιμος, ο αλγόριθμος ξεκινά από το σύνολο $\{w \models \varphi\}$ και εφαρμόζει επανειλημένα τους κανόνες του Σχήματος 1 μέχρι να δημιουργηθεί μία αναπόφευκτη σύγκρουση (οπότε ο τύπος είναι μη-ικανοποιήσιμος) είτε να φτάσει σε σημείο που δε μπορεί να εφαρμοστεί άλλος κανόνας (οπότε ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος και το σύνολο περιορισμών αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο αυτού).

Πιο συγκεκριμένα, ο κανόνας-$\wedge$ σπάει κάθε $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_k$ στα συστατικά του $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ για να ανιχνευθούν συγκρούσεις (δηλαδή αν $\psi_i \equiv \neg\psi_j$ για κάποια i και j). Ο κανόνας-$\vee$, για κάθε τύπο $\psi_1 \vee \psi_2$ επιλέγει *μη-ντετερμινιστικά* αν θα κρατήσει τον ψ_1 ή τον ψ_2. Τέλος, ο κανόνας-$\Diamond$ είναι υπεύθυνος για τη δημιουργία νέων κόμβων. Ένα σημαντικό βήμα μετά τη δημιουργία κάποιου κόμβου είναι η ενημέρωσή του *μη-ντετερμινιστικά* με όλους τους τύπους με τους οποίους πρέπει να επιγραφεί. Αυτό είναι απαραίτητο για να αποφευχθεί η δημιουργία καινούργιων κόμβων για κάθε τύπο της μορφής $\Diamond\psi$ το οποίο μπορεί να μην είναι απαραίτητο και στη χειρότερη περίπτωση μπορεί να δημιουργήσει κάποια σύγκρουση.

Ακολουθεί μία πιο αυστηρή διατύπωση του αλγορίθμου.

```
συνάρτηση modal-sat(w₀, S):
  όσο εφαρμόζεται κανόνας-∧ ή κανόνας-∨ και ∄ σύγκρουση:
    εφάρμοζε αυτούς τους κανόνες στο S
  εάν ∄ σύγκρουση στο S:
    όσο εφαρμόζεται κανόνας-◇ σε κάποιο w ∈ S:
      S' := {Rww',  w' ⊨ ψ,  w' ⊨ χ1,  ... ,  w' ⊨ χk}
      όπου:
        w' είναι μία νέα μεταβλητή
        ψ προέρχεται από τον ◇ψ που προκάλεσε την εφαρμογή
        τα χi επιλέγονται μη-ντετερμινιστικά από {θi, ¬θi},
           με θi ∈ {θ | w ⊨ ◇θ ή w ⊨ □θ}
      εάν ∃ σύγκρουση στο S':
        επίστρεψε false
      αλλιώς:
        επίστρεψε modal-sat(w', S')
  επίστρεψε false
```

Για να εξετάσουμε αν ο τύπος φ είναι ικανοποιήσιμος, καλούμε `modal-sat`(w, $\{w \models \varphi\}$), όπου w συμβολίζει τη ρίζα του δέντρου και επιλέγεται τυχαία. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι ο αλγόριθμος είναι *μη-ντετερμινιστικός*. Ο μη-ντετερμινισμός εμφανίζεται σε τρία σημεία: (α) στην επιλογή της σειράς με την οποία εφαρμόζονται οι κανόνες (η οποία ουσιαστικά δεν έχει καμία σημασία), (β) στις εφαρμογές του κανόνα-$\vee$ όπου επιλέγεται ποιός από τους δύο υποτύπους της διάζευξης είναι ο 'σωστός' για την ικανοποίηση του αρχικού τύπου, και (γ) μετά από κάθε εφαρμογή του κανόνα-$\Diamond$ όπου κάθε νεοδημιουργηθείς κόμβος επιγράφεται με όλους τους αναγκαίους τύπους για να εξασφαλισθεί η ικανοποιησιμότητα.

Παράδειγμα 2.4. Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν ο τύπος

$$\varphi := (p \vee \neg q) \wedge \Diamond\Diamond p \wedge \Diamond\Diamond q \wedge \Box\Box(\neg p \vee q)$$

είναι ικανοποιήσιμος. Ο αλγόριθμος κατασκευάζει ένα μοντέλο ως εξής:

1. Δημιουργείται η ρίζα και επιγράφεται με τον τύπο φ.

$$(p \vee \neg q) \wedge \Diamond\Diamond p \wedge \Diamond\Diamond q \wedge \Box\Box(\neg p \vee q)$$

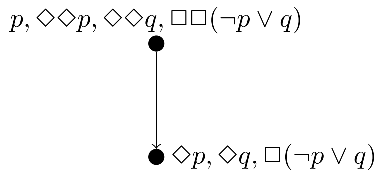
2. Εφαρμόζεται ο κανόνας-$\wedge$ διασπώντας όλες τις συζεύξεις.

$$p \vee \neg q, \Diamond\Diamond p, \Diamond\Diamond q, \Box\Box(\neg p \vee q)$$

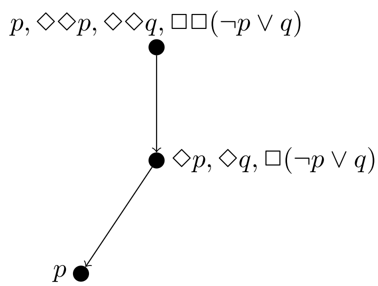
3. Εφαρμόζεται ο κανόνας-$\vee$: για τη διάζευξη $p \vee \neg q$ επιλέγεται μη-ντετερμινιστικά ένα από τα p και $\neg q$, το οποίο θα τεθεί αληθές στον κόμβο αυτό. Στην ουσία, σε μία ντετερμινιστική εκδοχή του αλγορίθμου θα δοκιμάζονταν στη σειρά και τα δύο και θα προχωρούσαμε στο επόμενο αν η επιλογή του δημιουργούσε κάποια σύγκρουση. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες γι΄ αυτό αργότερα, αλλά προς το παρόν κρατάμε το μη-ντετερμινισμό γιατί μας δίνει μία απλούστερη παρουσίαση το αλγορίθμου. Εδώ δεν έχει σημασία ποιο κρατάμε, αφού κανένα δε δημιουργεί σύγκρουση, οπότε επιλέγουμε τυχαία το p.

$$p, \Diamond\Diamond p, \Diamond\Diamond q, \Box\Box(\neg p \vee q)$$

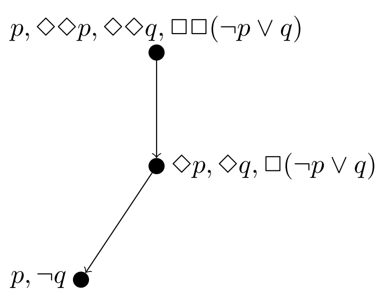
4. Πλέον δε μπορεί να εφαρμοστεί άλλο ο κανόνας-$\wedge$ ή ο κανόνας-$\vee$ και δεν υπάρχει σύγκρουση, οπότε ο αλγόριθμος προχωράει με την εφαρμογή του κανόνα-$\Diamond$. Ο πρώτος τύπος του συνόλου περιορισμών στον οποίον μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας-$\Diamond$ είναι ο $\Diamond\Diamond p$. Αυτός επιβάλλει τη δημιουργία ενός νέου κόμβου ο οποίος θα επιγραφεί με (ή στον οποιόν θα αληθεύει ο) $\Diamond p$. Μετά τη δημιουργία του κόμβου αυτού, επιλέγονται μη-ντετερμινιστικά ποιοι άλλοι τύποι του συνόλου περιορισμών θα πρέπει επίσης να αληθεύουν στον καινούργιο κόμβο και τον επιγράφει με αυτούς επιπλέον. Παρατηρήστε ότι αυτό είναι πολύ σημαντικό για την ορθότητα του αλγορίθμου, αφού για παράδειγμα δεν χρειάζεται να δημιουργηθεί νέος κόμβος για τον $\Diamond\Diamond q$. Κάτι τέτοιο δε θα δημιουργούσε πρόβλημα εδώ, αλλά σε άλλες περιπτώσεις θα μπορούσε να δημιουργήσει μη αναγκαίες συγκρούσεις (π.χ. αν υπήρχε κάποιος τύπος της μορφής $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond q$).



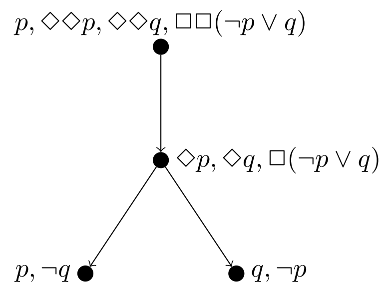
5. Εφαρμόζεται ο κανόνας-$\Diamond$ στον νεοδημιουργηθέντα κόμβο. Ο τύπος $\Diamond p$ προκαλεί τη δημιουργία ενός νέου κόμβου ο οποίος επιγράφεται με p.



6. Μη-ντετερμινιστικά επιλέγεται ο νεοδημιουργηθείς κόμβος να επιγραφεί επίσης με $\neg q$. Αυτό συμβαίνει γιατί ο τύπος $\Box(\neg p \vee q)$ επιβάλλει για κάθε κόμβο που έχει επιγραφεί με p να επιγραφεί επίσης με $\neg q$ — αφού $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$.



7. Ομοίως δημιουργείται ένας νέος κόμβος λόγω του $\Diamond q$. Επίσης, ο κόμβος αυτός επιγράφεται με $\neg p$ και πλέον ο αλγόριθμος τερματίζει αφού δεν υπάρχει δυνατότητα εφαρμογής κάποιου κανόνα αλλά ούτε και συγκρούσεις. Έχουμε δημιουργήσει ένα μοντέλο.



Σημειοτέον ότι ο τελεστής $\Box$ δεν μπορεί να επιβάλει τη δημιουργία νέων κόσμων αφού ουσιαστικά περιέχει έναν καθολικό ποσοδείκτη ο οποίος γίνεται τετριμμένα αληθής ακόμα και αν δε δημιουργηθούν νέοι κόμβοι. Η λειτουργία του είναι να επιβάλλει περιορισμούς στους ήδη δημιουργηθείς κόμβους, κάτι το οποίο λαμβάνεται υπόψιν μη-ντετερμινιστικά μετά από κάθε εφαρμογή του κανόνα-$\Diamond$ με την ενημέρωση του νέου κόμβου.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν ο φ είναι ικανοποιήσιμος τότε ο αλγόριθμος βρίσκει ένα μοντέλο του φ. Επίσης, το μέγεθος της στοίβας της αναδρομής είναι πολυωνυμικό σε συνάρτηση με το μήκος $|\varphi|$ της εισόδου. Το δέντρο σχηματίζεται με αναζήτηση πρώτα κατά βάθος, συνεπώς αποθηκεύονται οι κόμβοι και οι επιγραφές των κόμβων ένα κλαδί τη φορά. Τα δέντρα έχουν πολυωνυμικό βάθος και οι επιγραφές επίσης πολυωνυμικό μέγεθος σε συνάρτηση με το $|\varphi|$ (αφού στη χειρότερη περίπτωση ένας κόμβος θα επιγραφεί με όλους τους τύπους που συνιστούν τον φ). Άρα, συνολικά χρειαζόμαστε πολυωνυμικό χώρο. Το ότι ο αλγόριθμος είναι μη-ντετερμινιστικός δεν έχει σημασία, αφού σύμφωνα με το θεώρημα του Savitch μπορεί να μετατραπεί σε ένα ντετερμινιστικό που χρησιμοποιεί επίσης πολυωνυμικό χώρο (PSPACE = NPSPACE).

2.3.3 PSPACE-hardness της Ικανοποιησιμότητας

Τώρα που έχουμε ένα άνω φράγμα για την πολυπλοκότητα της ικανοποιησιμότητας θα εξασφαλίσουμε και ένα αντίστοιχο κάτω φράγμα, από τα οποία θα συμπεράνουμε ότι το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας είναι PSPACE-complete.

Θα παρουσιάσουμε μία αναγωγή από το πρόβλημα των ποσοδεδειγμένων λογικών τύπων στο πρόβλημα ικανοποιησιμότητας τύπων της τροπικής λογικής. Στην αναγωγή θα παίξει σημαντικό ρόλο το γεγονός ότι οι ποσοδεδειγμένοι λογικοί τύποι — και κατ΄ επέκταση όλα τα πλήρη προβλήματα στο PSPACE — μπορούν να θεωρηθούν ως παιχνίδια μεταξύ δύο παικτών και αυτό που ενδιαφέρει εμάς (ή τους παίκτες για να είμαστε πιο ακριβείς) είναι η εύρεση νικηφόρων στρατηγικών. Ο λόγος, λοιπόν, για τον οποίο το πρόβλημα των ποσοδεδειγμένων λογικών τύπων αποτελεί χαρακτηριστικό αντιπρόσωπο των δύσκολων προβλημάτων στο PSPACE είναι ότι περιγράφει με πολύ φυσικό τρόπο την ύπαρξη μίας νικηφόρας στρατηγικής: σε ένα παιχνίδι δύο παικτών, έστω A και B, ο A έχει νικηφόρα στρατηγική αν *υπάρχει* μία κίνηση του A, τέτοια ώστε *για όλες* τις κινήσεις του B, *υπάρχει* μία κίνηση του A, κ.ο.κ., μέχρι το παιχνίδι να οδηγηθεί σε μία νικηφόρα για τον A κατάσταση. Αντίστοιχα και για τον B.

Πιο συγκεκριμένα, έστω

$$\varphi := \mathsf{Q}_1 x_1 \mathsf{Q}_2 x_2 \dots \mathsf{Q}_m x_m \, \theta(x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{2.1}$$

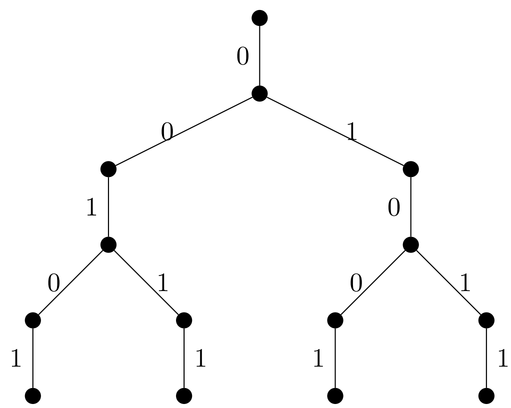
ένας ποσοδεδειγμένος λογικός τύπος, όπου $\mathsf{Q}_i \in \{\exists, \forall\}$, $1 \leq i \leq m$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο φ εκφράζει την ύπαρξη νικηφόρας στρατηγικής για ένα παιχνίδι που παίζεται από δύο παίκτες, έστω $\exists$ και $\forall$, οι οποίοι επιλέγουν διαδοχικά τιμές για τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_m$, ξεκινώντας με τον $\exists$ αν $\mathsf{Q}_1 = \exists$ και με τον $\forall$ αν $\mathsf{Q}_1 = \forall$, και ο $\exists$ κερδίζει αν ο θ καταστεί αληθής ενώ ο $\forall$ αν ο θ καταστεί ψευδής. Είναι σαφές ότι ο παίκτης $\exists$ έχει νικηφόρα στρατηγική αν και μόνο αν ο φ είναι αληθής. Μία τέτοια νικηφόρα στρατηγική θα πρέπει να προσδιορίζει την πρώτη κίνηση του $\exists$ — αν αυτός ξεκινάει πρώτος — καθώς και την απάντησή του σε κάθε πιθανή κίνηση του $\forall$.

Ένας φυσιολογικός τρόπος για να αναπαραστήσουμε μία τέτοια στρατηγική είναι χρησιμοποιώντας ένα δέντρο.

Ορισμός 2.5. Έστω φ ένας ποσοδεδειγμένος λογικός τύπος της μορφής του (2.1). Καλούμε *στρατηγική* για τη νίκη του υπαρξιακού παίκτη κάθε δέντρο T, $m+1$ επιπέδων, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Οι ακμές του T είναι επιγεγραμμένες με 0 ή 1.

(ii) Έστω e μία ακμή που ενώνει ένα κόμβο του επιπέδου l με ένα κόμβο του επιπέδου $l+1$, όπου $1 \leq l \leq m$. Η επιγραφή της e με a $(= 0$ ή $1)$ συμβολίζει την ανάθεση $x_l = a$ στον θ από τον παίκτη $\mathsf{Q}_l \in \{\exists, \forall\}$.



Σχήμα 2.2: Στρατηγική για $\theta := \neg x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)$.

(iii) Κάθε μονοπάτι από τη ρίζα σε φύλλο προσδιορίζει μία σειρά αναθέσεων που καθιστά τον θ αληθή και, αντιστρόφως, κάθε τέτοια σειρά αναπαρίσταται από κάποιο μονοπάτι του T.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, είναι ξεκάθαρο ότι ένας ποσοδεδειγμένος λογικός τύπος είναι αληθής αν και μόνο αν υπάρχει στρατηγική για τη νίκη του υπαρξιακού παίκτη.

Παράδειγμα 2.6. Θεωρούμε τον ποσοδεδειγμένο λογικό τύπο

$$\varphi := \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \exists x_5 [\neg x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)].$$

Εδώ έχουμε $\theta := \neg x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)$ και μία στρατηγική για να καταστεί ο θ αληθής φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Η στρατηγική αυτή μας λέει τα εξής:

- Ο παίκτης $\exists$ ξεκινάει θέτοντας $x_1 = 0$.
- Αν ο $\forall$ απαντήσει με $x_2 = 0$ τότε ο $\exists$ παίζει $x_3 = 1$.
- Αν ο $\forall$ απαντήσει με $x_2 = 1$ τότε ο $\exists$ παίζει $x_3 = 0$.
- Οτιδήποτε κι αν θέσει ο $\forall$ για το x_4, ο $\exists$ απαντάει με $x_5 = 1$.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι στο τέλος ο θ γίνεται πάντα αληθής.

Η βασική ιδέα της αναγωγής είναι ότι μία στρατηγική μπορεί να προκύψει επίσης ως μοντέλο ενός τύπου της τροπικής λογικής. Θα δείξουμε λοιπόν πώς να κατασκευάσουμε έναν τέτοιο τύπο πολυωνυμικού μεγέθους. Το ακόλουθο θεώρημα οφείλεται στον Ladner [5].

Θεώρημα 2.7. Έστω φ ένας ποσοδεδειγμένος λογικός τύπος στη μορφή του (2.1). Μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε έναν τύπο ψ της τροπικής λογικής, τέτοιον ώστε ο φ να είναι αληθής αν και μόνο αν ο ψ είναι ικανοποιήσιμος.

Απόδειξη. Έστω φ ένας οποιοσδήποτε — όχι απαραίτητα αληθής — ποσοδεδειγμένος τύπος της μορφής του (2.1). Θα περιγράψουμε την κατασκευή ενός τύπου ψ της τροπικής λογικής, ο οποίος διαισθητικά θα εξαναγκάζει την ύπαρξη μοντέλων τα οποία περιέχουν ως υπομοντέλο ένα δέντρο ισόμορφο με ένα δέντρο στρατηγικής, αν φυσικά είναι ικανοποιήσιμος.

Συγκεκριμένα, ο ψ θα εξαναγκάζει τη δημιουργία ενός δενδρικού μοντέλου $m+1$ επιπέδων το οποίο θα έχει διακλάδωση στο επίπεδο l, $1 \leq l \leq m$, όταν ο ποσοδείκτης της μεταβλητής x_l είναι $\forall$. Κάθε τετοια διακλάδωση θα δημιουργεί δύο νέους κόμβους w_1 και w_2 στο επίπεδο $l+1$, οι οποίοι θα επιγράφονται με p_{l+1} και $\neg p_{l+1}$ με σκοπό να «προσομοιωθεί» η ανάθεση της μεταβλητής x_l με 1 ή 0 αντίστοιχα. Επίσης, στο τελευταίο επίπεδο του δέντρου, θα πρέπει να αληθεύει ο $\theta(p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Ο προσδιορισμός των επιπέδων του δέντρου γίνεται με τη χρήση προτασιακών μεταβλητών q_j — η q_j, $0 \leq j \leq m$, θα αληθεύει μόνο σε κόμβους του επιπέδου j.

Αν ο ψ είναι ικανοποιήσιμος τότε θα εξαναγκάζει την ύπαρξη ενός μοντέλου το οποίο, εκτός από το ότι θα ικανοποιεί τα παραπάνω, θα έχει αρμόζουσες τιμές (p_i ή $\neg p_i$) και για όλα τα υπόλοιπα επίπεδα (δηλαδή αυτά που αντιστοιχούν σε υπαρξιακά ποσοδεδειγμένες μεταβλητές του φ). Από αυτό θα μπορεί εύκολα να εκμαιευθεί το δέντρο στρατηγικής για τον φ.

Ο φ προκύπτει ως σύζευξη των παρακάτω περιορισμών:

(i) Υπάρχει ρίζα:

$$q_0.$$

(ii) Κάθε q_i αληθεύει ακριβώς στο επίπεδο i:

$$\Box^{(m)}(q_i \to \bigwedge_{i \neq j} \neg q_j), \quad 0 \leq i \leq m,$$

όπου $\Box^{(m)}\psi$ είναι συντομογραφία για το $\psi \wedge \Box\psi \wedge \Box^2\psi \wedge \ldots \wedge \Box^m\psi$.

(iii) Το δέντρο έχει $m+1$ επίπεδα:

$$\Box^{(m)}(q_i \to \Diamond q_{i+1}), \quad 0 \leq i < m.$$

(iv) Κάθε καθολικός ποσοδείκτης $\forall x_l$ του φ επιβάλλει διακλάδωση στο επίπεδο $l-1$:

$$\bigwedge_{\{i | \mathsf{Q}_i = \forall\}} \Box^{i-1} \Delta_{i-1},$$

όπου

$$\Delta_j := q_j \to (\Diamond(q_{j+1} \wedge p_{j+1}) \wedge \Diamond(q_{j+1} \wedge \neg p_{j+1}))\,.$$

(v) Οι τιμές αληθείας μεταδίδονται από κάθε επίπεδο στα από κάτω του:

$$\begin{aligned} \Box M_1 \;\wedge\; \Box^2 M_1 \wedge \Box^3 M_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \Box^{m-1} M_1 \\ \wedge\; \Box^2 M_2 \wedge \Box^3 M_2 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \Box^{m-1} M_2 \\ \wedge \Box^3 M_3 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \Box^{m-1} M_3 \\ \vdots \qquad\quad \\ \wedge\; \Box^{m-1} M_{m-1}, \end{aligned}$$

όπου

$$M_j := (p_j \to \Box p_j) \wedge (\neg p_j \to \Box \neg p_j).$$

(vi) Ο θ είναι αληθής στο τελευταίο επίπεδο:

$$\Box^m (q_m \to \theta(p_1, p_2, \ldots, p_m)).$$

Είναι σαφές ότι ο ψ έχει μέγεθος πολυωνυμικό σε συνάρτηση με το μέγεθος του φ (συγκεκριμένα, είναι $|\psi| = \mathcal{O}(|\varphi|^2)$) και μπορεί να κατασκευαστεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι ο φ είναι αληθής αν και μόνο αν ο ψ είναι ικανοποιήσιμος.

Έστω ότι φ ο είναι αληθής. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα υπάρχει στρατηγική για τον φ (βλ. Σχήμα 2.2 για παράδειγμα). Τότε μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε τη στρατηγική σε μοντέλο του ψ ως εξής: Αρχικά αντιγράφουμε τους κόμβους και τις ακμές τις στρατηγικής. Έπειτα πρέπει να ορίσουμε μία συνάρτηση αποτίμησης. Για απλότητα θα μιλάμε για επιγραφή κόμβων του μοντέλου. Για $l = 2, \ldots, m+1$, έστω e μία ακμή της στρατηγικής που ενώνει ένα κόμβο v του επιπέδου l με ένα κόμβο u του επιπέδου $l+1$. Αν η e είναι επιγεγραμένη με 0, επιγράφουμε τον αντίστοιχο κόμβο u του μοντέλου με $\neg p_{l+1}$, διαφορετικα με p_{l+1}. Επίσης φροντίζουμε να επιγραφούν με την ίδια τιμή και όλοι οι κόμβοι του μοντέλου που ανήκουν στο υποδέντρο που ορίζει ο u. Αυτό εξασφαλίζει ότι θα ισχύει η συνθήκη (v) παραπάνω. Τέλος φροντίζουμε να επιγραφούν οι κόμβοι κάθε επιπέδου l με q_l. Είναι εύκολο να αποδείξουμε τώρα ότι οι συνθήκες (i) - (vi) ικανοποιούνται. Ένα παράδειγμα για το μοντέλο που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο από τη στρατηγική στο Σχήμα 2.2 υπάρχει στο Σχήμα 2.3.

Έστω τώρα ότι ο ψ είναι ικανοποιήσιμος. Τότε θα έχει μοντέλο το οποίο εξ ορισμού πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (i) - (vi) παραπάνω. Φυσικά το μοντέλο αυτό δεν θα είναι απαραίτητα το μικρότερο δυνατό σε μέγεθος (δηλαδή κάτι σαν το μοντέλο στο Σχήμα 2.3) αλλά μπορεί να περιέχει περισσότερους κόμβους και ακμές από αυτές που χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε μία στρατηγική. Είναι εύκολο όμως, έχοντας ως οδηγό τις συνθήκες (i) - (vi), να αφαιρέσουμε όλους τους μη απαραίτους κόμβους και ακμές. Αυτό θα μας οδηγήσει σε ένα μοντέλο σαν αυτό του Σχήματος 2.3. Πλέον είναι απλό, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία από αυτή της προηγούμενης παραγράφου, να πάρουμε μία στρατηγική για τον φ. Αυτό όμως, όπως έχουμε δει, σημαίνει ότι ο φ είναι αληθής. $\square$

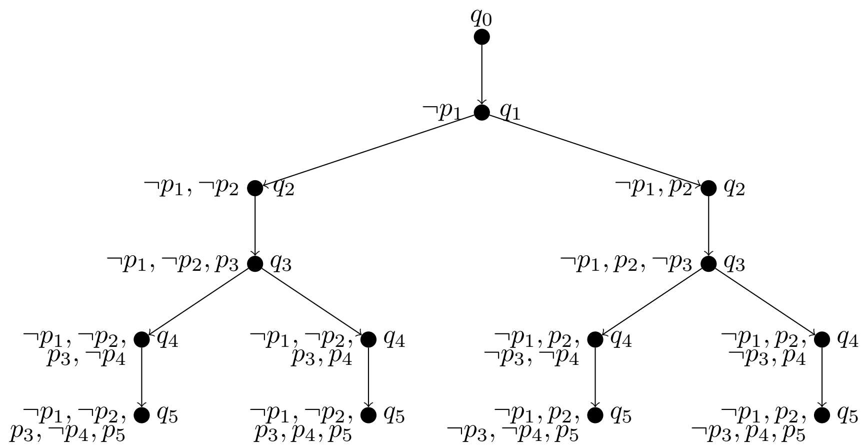
Σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Θεώρημα 2.8 (Ladner)**.** Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας για την βασική τροπική λογική είναι PSPACE-complete.

2.3.4 Πολυπλοκότητα Επεκτάσεων

Είναι πολύ ενδιαφέρον το γεγονός ότι η τροπική λογική είναι αποκρίσιμη και παραμένει αποκρίσιμη μετά από πολύ ισχυρές επεκτάσεις όπως η CTL ή ο μ-λογισμός που έχουν κάποιες από τις δυνατότητες της δευτεροβάθμιας λογικής:

Θεώρημα 2.9 (Emerson, Halpern [22])**.** Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας για την CTL είναι αποκρίσιμο και συγκεκριμένα, από πλευράς πολυπλοκότητας, είναι EXP-complete.



Σχήμα 2.3: Μοντέλο για τη στρατηγική στο Σχήμα 2.2.

Θεώρημα 2.10 (Emerson, Jutla [23]). Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας για τον μ-λογισμό είναι αποκρίσιμο και συγκεκριμένα, από πλευράς πολυπλοκότητας, είναι EXP-complete.

Υπάρχει μία πολύ ενδιαφέρουσα αντίθεση εδώ. Ενώ οι κλάσεις πολυπλοκότητας που έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα θεωρούνται πολύ δύσκολες, η τροπική λογική έχει κατά μέσο όρο πολύ καλή συμπεριφορά. Ενώ δύσκολες περιπτώσεις ικανοποιησιμότητας σίγουρα υπάρχουν (όπως μας λέει η θεωρία), στην πράξη είναι πολύ σπάνιες. Αυτό για παράδειγμα έχει αποδειχτεί περίτρανα από την κοινότητα των περιγραφικών λογικών [24, 25, 26, 27], όπου έχει αναπτυχθεί λογισμικό που έχει καλή συμπεριφορά στην πράξη παρόλο που συνήθως διαχειρίζεται λογικές που είναι τουλάχιστον EXP-complete. Μία δημοφιλής εξήγηση γι΄ αυτό είναι η ιδιότητα δενδρικού μοντέλου [20] η οποία επιτρέπει τη δημιουργία γρήγορων tableau αλγορίθμων.

Κεφάλαιο 3

Ερμηνεία της Αποκρισιμότητας

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα η τροπική λογική είναι αποκρίσιμη (και με σχετικά καλή πολυπλοκότητα στην πράξη) και παραμένει αποκρίσιμη μετά από σημαντικές επεκτάσεις, που της δίνουν εκφραστικές δυνατότητες οι οποίες θυμίζουν δευτεροβάθμια λογική. Σε αντίθεση, η πρωταβάθμια (και φυσικά η δευτεροβάθμια) λογική είναι μη αποκρίσιμη. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε εδώ αυτές τις καλές ιδιότητες της τροπικής λογικής βρίσκοντας κάποια «υπερσύνολά» της στην πρωτοβάθμια λογική που μοιράζονται (λίγο ή πολύ) αυτές τις ιδιότητες.

3.1 Το Θραύσμα Δύο-Μεταβλητών

Η πρώτη μας προσπάθεια για την εξήγηση των καλών υπολογιστικών ιδιοτήτων της τροπικής λογικής είναι το θραύσμα δύο-μεταβλητών (αγγλ. two-variable fragment) της πρωτοβάθμιας λογικής. Όπως αναφέρθηκε και στην Ενότητα 1.3, κάθε τύπος της βασικής τροπικής γλώσσας μπορεί να μεταφραστεί σε έναν ισοδύναμο τύπο της πρωτοβάθμιας λογικής. Ωστόσο, η πρωτοβάθμια λογική είναι μη-αποκρίσιμη, οπότε αυτή δεν μπορεί να είναι η εξήγηση που ψάχνουμε. Αν είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί όμως, μπορούμε να δούμε ότι η τυπική μετάφραση (στην πρωτοβάθμια λογική) μπορεί να οριστεί πιο αποδοτικά όσον αφορά τον αριθμό των μεταβλητών που χρησιμοποιεί. Συγκεκριμένα, η ακόλουθη εκδοχή της τυπικής μετάφρασης — με δύο ταυτόχρονους επαγωγικούς ορισμούς — χρησιμοποιεί μόνο δύο μεταβλητές:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ST}_x(p) &= P(x)\\
\mathrm{ST}_x(\bot) &= \bot\\
\mathrm{ST}_x(\neg\psi) &= \mathrm{ST}_x(\psi)\\
\mathrm{ST}_x(\psi_1 \vee \psi_2) &= \mathrm{ST}_x(\psi_1) \vee \mathrm{ST}_x(\psi_2)\\
\mathrm{ST}_x(\Box\psi) &= \forall y(R(x,y) \to \mathrm{ST}_y(\psi))\\
\mathrm{ST}_x(\Diamond\psi) &= \exists y(R(x,y) \wedge \mathrm{ST}_y(\psi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ST}_y(p) &= P(y)\\
\mathrm{ST}_y(\bot) &= \bot\\
\mathrm{ST}_y(\neg\psi) &= \mathrm{ST}_y(\psi)\\
\mathrm{ST}_y(\psi_1 \vee \psi_2) &= \mathrm{ST}_y(\psi_1) \vee \mathrm{ST}_x(\psi_2)\\
\mathrm{ST}_y(\Box\psi) &= \forall x(R(y,x) \to \mathrm{ST}_x(\psi))\\
\mathrm{ST}_y(\Diamond\psi) &= \exists x(R(y,x) \wedge \mathrm{ST}_x(\psi))
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εκδοχή της τυπικής μετάφρασης, ο τύπος $\varphi := p \to \Diamond(p \vee \Box p)$ από το Παράδειγμα 1.7 μπορεί να μεταφραστεί πιο αποδοτικά ως

$$\mathrm{ST}_x(\varphi) \;=\; P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge (P(y) \vee \forall x(R(y,x) \to P(x)))).$$

Έτσι οδηγούμαστε φυσιολογικά στο θραύσμα δύο μεταβλητών της πρωτοβάθμιας λογικής. Έστω FO η γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής με ισότητα. Το θραύσμα *k-μεταβλητών* της FO, το οποίο συμβολίζεται με FO^k, είναι η κλάση όλων των τύπων εκείνων της FO που αποτελούνται από k διακριτές μεταβλητές. Όλοι λοιπόν οι τύποι της FO που έχουν δύο το πολύ μεταβλητές, έστω x και y, συνιστούν το *θραύσμα δύο-μεταβλητών* FO^2 το οποίο, όπως έχουμε ήδη δείξει, περιέχει το τροπικό θραύσμα. Είναι αυτή η έγκλειση του τροπικού θραύσματος στο FO^2 ικανοποιητική εξήγηση για τις καλές υπολογιστικές ιδιότητες της τροπικής λογικής;

Καταρχάς, είναι γνωστό ότι το FO^2 είναι αποκρίσιμο· αυτό αποδείχτηκε (χωρίς ισότητα) τη δεκαετία του 1960 από τον Scott [28] και (με ισότητα) τη δεκαετία του 1970 από τον Mortimer [29]. Η αποκρισιμότητα του FO^2

ερμηνεύει μερικώς την αποκρισιμότητα του τροπικού θραύσματος. Ωστόσο, ενώ το τροπικό θραύσμα παραμένει αποκρίσιμο μετά από σημαντικές επεκτάσεις, αυτό δεν ισχύει για το FO^2. Ανάλογες επεκτάσεις του FO^2, ακόμα και με τον πιο συντηριτικό τρόπο, το κάνουν μη-αποκρίσιμο και μάλιστα υψηλού βαθμού (συγκεκριμένα Σ_1^1-hard — βλ. [30, 31]).

Σχετικά με πολυπλοκότητα, αποδείχτηκε από τον Fürer [32] ότι η FO^2-ικανοποιησιμότητα είναι NEXP-hard. Θα παρουσιάσουμε τώρα μία απόδειξη η οποία οφείλεται στους Grädel, Kolaitis, Vardi [33], ότι το FO^2 έχει την ιδιότητα μικρού μοντέλου, και συγκεκριμένα την ιδιότητα εκθετικού μοντέλου. Αυτό θα μας δώσει έναν NEXP αλγόριθμο για την FO^2-ικανοποιησιμότητα: δεδομένου ενός τύπου φ στο FO^2, διατρέχουμε όλα τα μοντέλα εκθετικού μεγέθους και αν κανένα από αυτά δεν ικανοποιεί τον φ τότε αυτός είναι μη-ικανοποιήσιμος, αλλιώς είναι ικανοποιήσιμος.

Λήμμα 3.2. Έστω φ μία πρόταση του FO^2 με ισότητα. Μπορούμε να υπολογίσουμε σε χρόνο πολυωνυμικό στο μήκος $|\varphi|$ του φ, μία πρόταση

$$\psi \ := \ \forall x \forall y\, \alpha(x,y) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \forall x \exists y\, \beta_i(x,y), \tag{3.1}$$

τέτοια ώστε $\alpha(x,y)$ και $\beta_i(x,y)$, $1 \leq i \leq m$, δεν έχουν ποσοδείκτες, ο φ είναι ικανοποιήσιμος ανν ο ψ είναι ικανοποιήσιμος, και για κάθε πεπερασμένο μοντέλο του ψ υπάρχει πεπερασμένο μοντέλο του φ ίδιου μεγέθους. Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι για όλα τα μοντέλα του ψ με τουλάχιστον δύο στοιχεία, $\beta_i(x,y) \models x \neq y$.

Απόδειξη. Παραλείφθηκε, βλ. [33]. □

Προτάσεις στη μορφή της (3.1) λέμε ότι βρίσκονται σε *κανονική μορφή Scott*.

Ορισμός 3.3. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο. Ένα *σ-λεκτικό* είναι ένας ατομικός τύπος ή η άρνηση ενός ατομικού τύπου στο σ. Ένας *k-τύπος* είναι ένα μέγιστο συνεπές σύνολο από σ-λεκτικά στις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_k$.[1] Δεδομένης μίας σ-δομής $\mathfrak{A}$ και μίας πλειάδας $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, συμβολίζουμε με

[1] Μερικές φορές είναι χρήσιμο να βλέπουμε έναν k-τύπο ως σύζευξη των τύπων που τον συνιστούν.

$\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k]$ τον μοναδικό k-τύπο τ τέτοιον ώστε $\mathfrak{A} \models \tau(a_1, \ldots, a_k)$. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι ο τ *πραγματοποιείται* από την $(a_1, \ldots, a_k)$.

Ορισμός 3.4. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο και $\mathfrak{A}$ μία σ-δομή. Ένα στοιχείο $a \in A$ καλείται *βασιλιάς* αν είναι το μοναδικό στοιχείο που πραγματοποιεί τον $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a]$.

Οι βασιλιάδες θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος, αφού πρέπει να τους διαχειριστούμε προσεκτικά για να αποφύγουμε τη δημιουργία συγκρούσεων.

Θεώρημα 3.5. Έστω ψ μία πρόταση σε κανονική μορφή Scott. Εάν ο ψ είναι ικανοποιήσιμος, τότε έχει μοντέλο μεγέθους το πολύ $3 \cdot |\psi| \cdot 2^r$, όπου r είναι ο αριθμός των σχεσιακών συμβόλων που εμφανίζονται στον ψ.

Απόδειξη. Έστω ψ στη μορφή της (3.1) και έστω $\mathfrak{A}$ ένα μοντέλο του ψ, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \psi$. Θα κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathfrak{B}$ του ψ, του οποίο το σύμπαν B θα έχει μέγεθος $|B| \leq 3 \cdot |\psi| \cdot 2^r$. Για να είναι το $\mathfrak{B}$ μοντέλο του ψ, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $\mathfrak{B} \models \forall x \forall y\, \alpha(x, y)$ και $\mathfrak{B} \models \forall x \exists y\, \beta_i(x, y)$, $1 \leq i \leq m$. Για να ικανοποιήσουμε τη δεύτερη απαίτηση, πρέπει να προσδιορίσουμε, για κάθε $b \in B$ και $1 \leq i \leq m$, ένα *μάρτυρα*, δηλαδή ένα στοιχείο $b' \in B$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{B} \models \beta_i(b, b')$, $1 \leq i \leq m$.

Έστω $w_i(a)$ ένας μάρτυρας του $a \in A$ ως προς το β_i, ι.ε. $\mathfrak{A} \models \beta_i(a, w_i(a))$. Έστω K το σύνολο όλων των βασιλιάδων στο A. Έστω $T_1 = \{\tau_1, \ldots, \tau_L\}$ το σύνολο όλων των μη-βασιλικών 1-τύπων και T_K το σύνολο όλων των βασιλικών 1-τύπων που πραγματοποιούνται στο $\mathfrak{A}$. Ορίζουμε ως *αυλή* το σύνολο

$$C = K \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{w_i(k) \mid k \in K\},$$

που αποτελείται από όλους τους βασιλιάδες και ένα μάρτυρα για κάθε βασιλιά. Επιπλέον, ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} D &= \{d_{ij},\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq L\}, \\ E &= \{e_{ij},\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq L\}, \\ F &= \{f_{ij},\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq L\}, \end{aligned}$$

και θέτουμε $B = C \cup D \cup E \cup F$. Επιπρόσθετα, θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[d_{ij}] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[e_{ij}] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[f_{ij}] = \tau_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq L$. Διαισθητικά, θα αντιγράψουμε όλη την κατάσταση των βασιλιάδων και των μαρτύρων τους από το $\mathfrak{A}$ στο C, και τα D, E, F θα παρέχουν μάρτυρες το ένα για το άλλο: τα $d \in D$ θα έχουν βασιλιάδες ή στοιχεία $e \in E$ ως μάρτυρες, και ομοίως για τα E, F και F, D. Στοιχεία του C που δεν έχουν μάρτυρες στο C θα έχουν στοιχεία από το D ως μάρτυρες.

Προχωράμε τώρα σε μία πιο ακριβή περιγραφή της κατασκευής. Ξεκινώντας με το C, για κάθε $c \in C$ θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[c] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[c]$, και για κάθε ζεύγος $(c_1, c_2) \in C^2$ θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[c_1, c_2] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[c_1, c_2]$. Αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη μάρτυρα στο $\mathfrak{B}$ για κάθε βασιλιά. Ωστόσο, στα μη-βασιλικά στοιχεία του C μπορεί να μην έχει ανατεθεί βασιλιάς ακόμα. Έστω $c \in C \setminus K$ ένα μη βασιλικό στοιχείο. Εάν κάποιος μάρτυρας $w_i(c)$ του c, για όλα τα $1 \leq i \leq m$, είναι ήδη στο C τότε έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά, έστω $\tau = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[w_i(c)]$ ο 1-τύπος του $w_i(c)$ στο $\mathfrak{A}$. Ισχύει λοιπόν ότι $\tau \in T_1$ άρα $\tau = \tau_j$, για κάποιο $1 \leq j \leq L$. Θέτουμε το d_{ij} ως β_i-μάρτυρα του c στο $\mathfrak{B}$, $1 \leq i \leq m$, και θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[c, d_{ij}] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[c, w_i(c)]$. Αυτό εξασφαλίζει ότι $\mathfrak{B} \models \exists y \, \beta_i(c, y)$, για κάθε $1 \leq i \leq m$. Παρατηρήστε ότι δεν υπάρχουν συγκρούσεις, αφού στο ζεύγος (c, d_{ij}) δεν θα ανατεθεί ξανά άλλος 2-τύπος και επιπρόσθετα ο 2-τύπος που αναθέσαμε είναι συνεπής με τους ήδη ανατεθειμένους 1-τύπους των c και d_{ij}.

Έστω $d = d_{ij} \in D$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq L$· άρα $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[d] = \tau_j$. Έστω $a \in A$ τέτοιο ώστε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a] = \tau_j$, δηλαδή $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[d] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a]$, και έστω $w_i(a)$ ένας β_i-μάρτυρας του a στο $\mathfrak{A}$. Εάν ο $w_i(a)$ είναι βασιλιάς, τότε $w_i(a) = c \in C$, κι έτσι θέτουμε τον c ως μάρτυρα του d στο $\mathfrak{B}$ και θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[d, c] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a, w_i(a)]$. Παρατηρήστε ότι δε δημιουργούνται συγκρούσεις, αφού ο 2-τύπος που αναθέσαμε είναι συνεπής με τους ήδη ανατεθειμένους 1-τύπους και, επειδή το c είναι βασιλιάς, ο β_i-μάρτυράς του έχει ήδη τεθεί και βρίσκεται στο C (αν δεν ίσχυε αυτό, θα μπορούσαν να δημιουργηθούν συγκρούσεις, π.χ. προσπαθώντας να θέσουμε το d ως μάρτυρα του c και τον 2-τύπο τους αναλόγως). Αν $w_i(a)$ δεν είναι βασιλιάς, έστω $\tau_{j'} = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[w_i(a)]$ ο 1-τύπος του $w_i(a)$ στο $\mathfrak{A}$. Προφανώς, $\tau_{j'} \in T_1$ και εκ κατασκευής $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[e_{ij'}] = \tau_{j'}$. Έτσι, θέτουμε το $e_{ij'}$ ως τον β_i-μάρτυρα του d στο $\mathfrak{B}$, και θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[d, e_{ij'}] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a, w_i(a)]$. Ξανά, δεν προκύπτουν συγκρούσεις αφού είναι η πρώτη (και τελευταία) φορά που θέτουμε τον τύπο του ζεύγους $(d, e_{ij'})$ και ο 2-τύπος που θέσαμε είναι συνεπής με τους 1-τύπους των d και $e_{ij'}$, οι οποίοι είναι ήδη ανατεθειμένοι.

Προχωράμε αναλόγως για τα στοιχεία του E — θέτοντας τους μάρτυρές τους να είναι βασιλιάδες ή στοιχεία του F — και για τα στοιχεία του F — θέτοντας τους μάρτυρές τους να είναι βασιλιάδες ή στοιχεία του D.

Σε αυτό το σημείο, όλα τα ζεύγη $(b_1, b_2) \in B^2$ των οποίων οι 2-τύποι έχουν τεθεί ικανοποιούν το $\mathfrak{B} \models \alpha(b_1, b_2)$, και έχουμε επίσης ότι $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \exists y\, \beta_i(b, y)$, για κάθε $b \in B$, αφού έχουμε αντιγράψει όλη την απαραίτητη δομή από το $\mathfrak{A}$ στο $\mathfrak{B}$ — και το $\mathfrak{A}$ είναι εξ υποθέσεως μοντέλο του ψ. Για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή, έστω $(b_3, b_4) \in B^2$, $b_3 \neq b_4$, ένα ζεύγος του οποίου ο 2-τύπος δεν έχει τεθεί ακόμα. Διαλέγουμε $(a_3, a_4) \in A^2$, $a_3 \neq a_4$, τέτοιο ώστε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a_3] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[b_3]$ και $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a_4] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[b_4]$, και θέτουμε $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[b_3, b_4] = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[a_3, a_4]$. Ένα τέτοιο ζεύγος (a_3, a_4) πρέπει να υπάρχει, διαφορετικά τα b_3 και b_4 θα ήταν βασιλιάδες και ο $\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}[b_3, b_4]$ θα είχε ήδη τεθεί. Τώρα έχουμε $\mathfrak{B} \models \forall x \forall y\, \alpha(x, y)$ και, όπως ήδη παρατηρήσαμε, $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \forall x \exists y\, \beta_i(x, y)$. Από αυτά παίρνουμε ότι $\mathfrak{B} \models \psi$.

Σχετικά με το μέγεθος του $\mathfrak{B}$, είναι ξεκάθαρο ότι $|C| \leq |K| + m|K| = (m+1)|K|$ και, επειδή κάθε 1-τύπος πρέπει να συμπεριλαμβάνει όλα τα σχεσιακά σύμβολα στον ψ (πιθανότατα με άρνηση), $|T_1| = L \leq 2^r$, όπου r είναι ο αριθμός των σχεσιακών συμβόλων που εμφανίζονται στον ψ. Επομένως,

$$|B| = |C| + 3m|T_1| \leq (m+1)|K| + 3m|T_1| \leq 3 \cdot |\psi| \cdot 2^r. \qquad \square$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.6. Η FO^2-ικανοποιησιμότητα είναι NEXP-complete.

Η πολυπλοκότητα της FO^2-ικανοποιησιμότητας, λοιπόν, είναι πολύ χειρότερη της πολυπλοκότητας της βασικής τροπικής γλώσσας. Είναι χειρότερη ακόμα και από την πολυπλοκότητα των CTL και μ-λογισμού που είναι πολύ ισχυρές επεκτάσεις. Τέλος, το FO^2 δεν έχει την ιδιότητα δενδρικού μοντέλου — αυτό φαίνεται εύκολα θεωρώντας τον τύπο $\forall x \forall y R(x, y)$ — η οποία θεωρείται πολύ σημαντική όπως έχουμε πει [20]. Συνεπώς, αν και το FO^2 παρέχει μία εξήγηση για την αποκρισιμότητα της τροπικής λογικής, η εξήγηση αυτή δεν είναι πολύ ικανοποιητική. Για το λόγο αυτό θα εισαγάγουμε τώρα το φρουρούμενο θραύσμα, το οποίο θεωρείται ότι παρέχει μία καλύτερη εξήγηση των καλών ιδιοτήτων της τροπικής λογικής.

3.2 Το Φρουρούμενο Θραύσμα

Το φρουρούμενο θραύσμα (αγγλ. guarded fragment) εισήχθη από τους Andréka, Neméti και van Benthem [34] ως μία καλύτερη εξήγηση των καλών υπολογιστικών ιδιοτήτων που το τροπικό θραύσμα παρουσιάζει. Μπορούμε να παρατηρήσουμε από την τυπική μετάφραση ότι όλοι οι ποσοδεδειγμένοι τύποι του τροπικού θραύσματος είναι της μορφής $\forall y(R(x,y) \to \psi(x,y))$ και $\exists y(R(x,y) \wedge \psi(x,y))$. Οι παραπάνω λοιπόν έκαναν την υπόθεση ότι η εμφάνιση του $R(x,y)$ σε όλους αυτούς τους τύπους που «φρουρεί» τον $\psi(x,y)$ είναι ο πραγματικός λόγος για τις καλές ιδιότητες της τροπικής λογικής. Για το λόγο αυτό αφαίρεσαν όλους τους περιορισμούς — ακόμα και για την πλειομέλεια των σχεσιακών συμβόλων — και απαίτησαν μόνο την εμφάνιση τέτοιων «φρουρών». Το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι πολύ πιο κοντινό, όπως θα δούμε, στο «πνεύμα» της τροπικής λογικής, αφού διατηρεί εν μέρει τις ιδιότητές της.

Ορισμός 3.7. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο. Ένας σ-τύπος α *φρουρεί* ένα σ-τύπο φ αν $\mathrm{free}(\alpha) \supseteq \mathrm{free}(\varphi)$.[2] Οι (καλά-σχηματισμένοι) *φρουρούμενοι τύποι* ορίζονται επαγωγικά:

- Οι ατομικοί τύποι είναι φρουρούμενοι.
- Λογικοί συνδυασμοί φρουρούμενων τύπων είναι φρουρούμενοι.
- Αν ο φ είναι φρουρούμενος, ο α ατομικός και *φρουρεί* τον φ, και $\bar{x}$, $\bar{y}$ είναι πλειάδες μεταβλητών, τότε οι τύποι $\exists\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y}) \wedge \varphi(\bar{x},\bar{y}))$ και $\forall\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y}) \to \varphi(\bar{x},\bar{y}))$ είναι φρουρούμενοι.

Όλοι οι φρουρούμενοι σ-τύποι συνιστούν το *φρουρούμενο θραύσμα* GF (στο σ).

Κάποιοι εκφραστικοί περιορισμοί του φρουρούμενου θραύσματος (κυρίως σχετικά με τον χρονικό τελεστή **until**) οδήγησαν τον van Benthem [35] στον

[2] Το $\mathrm{free}(\psi)$ συμβολίζει το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του ψ.

ορισμό του *ελαφρώς φρουρούμενου θραύσματος* (αγγλ. loosely guarded fragment), το οποίο επιτρέπει όχι μόνο ατομικούς τύπους αλλά και συζεύξεις ατομικών τύπων ως φρουρούς. Συγκεκριμένα, δεδομένου $\alpha(\bar{x},\bar{y}) := \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$, όπου $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ είναι ατομικοί τύποι, οι τύποι $\exists\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y}) \wedge \varphi(\bar{x},\bar{y}))$ και $\forall\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow \varphi(\bar{x},\bar{y}))$ είναι *ελαφρώς φρουρούμενοι* αν ο α φρουρεί τον ψ και για κάθε ποσοδεδειγένη μεταβλητή y_i και οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή z μεταξύ των $\bar{x}$ και $\bar{y}$, υπάρχει άτομο α_i που περιέχει την y_i και τη z ταυτόχρονα.

Θα δείξουμε τώρα ότι το (ελαφρώς) φρουρούμενο θραύσμα έχει την ιδιότητα δενδρικού μο- ντέλου και την ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου. Για ευκολία, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $(\exists\bar{y}.\alpha)\psi(\bar{x},\bar{y})$ για το $\exists\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y})\wedge\varphi(\bar{x},\bar{y}))$ και το συμβολισμό $(\forall\bar{y}.\alpha)\psi(\bar{x},\bar{y})$ για το $\forall\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow \varphi(\bar{x},\bar{y}))$. Η απόδειξη οφείλεται στον Grädel [36].

Ξεκινάμε με την περιγραφή μίας κανονικής μορφής για (ελαφρώς) φρουρούμενους τύπους.

Λήμμα 3.8. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο και $\varphi(\bar{x})$ ένας (ελαφρώς) φρουρούμενος τύπος στο σ. Υπάρχει μία (ελαφρώς) φρουρούμενη πρόταση ψ σε ένα λεξιλόγιο $\sigma' \supseteq \sigma$ τέτοια ώστε

$$\psi \ := \ \exists\bar{x}C(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m}(\forall\bar{x}_i.\alpha_i)(\exists\bar{y}_i.\beta_i)\varphi_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n}(\forall\bar{x}_j.\gamma_j)\psi_j(\bar{x}_j), \qquad (3.2)$$

όπου $\alpha_i(\bar{x}_i)$, $\beta_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$ και $\gamma_j(\bar{x}_j)$ είναι φρουροί, φ_i και ψ_j δεν περιέχουν ποσοδείκτες, και:

(i) $\psi \models \exists\bar{x}\,\varphi(\bar{x})$.

(ii) Κάθε μοντέλο του φ μπορεί να επεκταθεί σε μοντέλο της ψ.

(iii) $|\psi| = \mathcal{O}(|\varphi|)$ και η ψ μπορεί να υπολογιστεί από τον φ σε πολυωνυμικό χρόνο.

Απόδειξη. Παραλείφθηκε, βλ. [36]. $\square$

Όσον αφορά την ικανοποιησιμότητα, υπάρχει άλλη μία απλοποίηση που μπορεί να γίνει. Παρατηρούμε αρχικά ότι οι προτάσεις $(\forall\bar{x}_j.\gamma_j)\psi_j(\bar{x}_j)$, $1 \leq j \leq n$, μπορούν να γραφούν ως $(\forall\bar{x}_j.\gamma_j)(\exists\bar{y}_j.\delta_j)\psi'_j(\bar{x}_j,\bar{y}_j)$, και είναι έτσι ειδικές περιπτώσεις της πρώτης κατηγορίας προτάσεων. Επιπλέον, το αν οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες είναι φρουρούμενοι δεν αλλάζει κάτι, αφού ένας τύπος της μορφής $(\forall \bar{x}.\alpha)\exists \bar{y}\, \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ είναι ικανοποιήσιμος ανν η φρουρούμενη πρόταση $(\forall \bar{x}.\alpha)\exists \bar{y} R\bar{x}\bar{y} \wedge (\forall \bar{x}\bar{y}.R\bar{x}\bar{y})\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ είναι ικανοποιήσιμη. Για αυτούς τους λόγους, η κανονική μας μορφή γίνεται

$$\psi := \exists \bar{x} C(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} (\forall \bar{x}_i.\alpha_i)\exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i), \tag{3.3}$$

όπου ψ_i, $1 \leq i \leq m$, δεν έχει ποσοδείκτες.

Για να δείξουμε ότι η ικανοποιησιμότητα (ελαφρώς) φρουρούμενων τύπων είναι αποκρίσιμη, αποδεικνύουμε ότι έπεται από την ύπαρξη μίας πεπερασμένης «δομής» που καλείται μάρτυρας.[3] Ο μάρτυρας εγγυάται ικανοποιησιμότητα σε ένα (ίσως άπειρο) δενδροειδές μοντέλο. Έπειτα, αποδεικνύουμε μία ακόμα ισχυρότερη ιδιότητα: το (ελαφρώς) φρουρούμενο θραύσμα έχει την ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου.

Αρχικά εισάγουμε μερικούς νέους ορισμούς σχετικά με k-τύπους.

Ορισμός 3.9. Το *μέγεθος* ενός k-τύπου είναι το πλήθος των διακριτών στοιχείων οποιασδήποτε πλειάδας που τον πραγματοποιεί.[4] Ένας $(k+\ell)$-τύπος τ' *επεκτείνει* έναν k-τύπο τ αν $\tau \subseteq \tau'$. Επιπλέον, ο τ' επεκτείνει τον τ *κατά m νέα στοιχεία* αν ο τ' επεκτείνει τον τ, και m είναι η διαφορά μεταξύ των μεγεθών των τ' και τ. Ένας k-τύπος τ είναι *μείωση* ενός m-τύπου τ', $k \leq m$, αν υπάρχει μία αντικατάσταση $\rho : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ τέτοια ώστε, για κάθε πλειάδα $(a_1, \ldots, a_m)$ που πραγματοποιεί τον τ', η $(a_{\rho(1)}, \ldots, a_{\rho(k)})$ πραγματοποιεί τον τ.

Στα ακόλουθα, υποθέτουμε ότι οι τύποι ψ είναι της μορφής του (3.3) εκτός αν πούμε ρητά το αντίθετο.

Ορισμός 3.10. Έστω ψ μία φρουρούμενη πρόταση και έστω n ο αριθμός των διακριτών μεταβλητών στην ψ. Καλούμε *μάρτυρα* για την ικανοποιησιμότητα του ψ την πλειάδα $(T, \tau_0, \mathrm{ext}_1, \ldots, \mathrm{ext}_m)$, όπου:

- $T = \bigcup_{k \leq n} T^{(k)}$, όπου $T^{(k)}$, για κάθε $k \leq n$, είναι ένα σύνολο k-τύπων, και T είναι κλειστό ως πρός μειώσεις τύπων, δηλαδή αν $\tau \in T$ και τ^- είναι μείωση του τ, τότε $\tau^- \in T$.

[3] Προσοχή, η έννοια αυτή του μάρτυρα είναι διαφορετική από την έννοια του μάρτυρα που συναντήσαμε στο θραύσμα δύο μεταβλητών.

[4] Παρατηρήστε ότι το μέγεθος μπορεί να είναι μικρότερο του k αν ο τύπος περιέχει ισότητες.

- $\tau_0 \in T$ είναι τέτοιος ώστε $\tau_0(\bar{x}) \models C(\bar{x})$.
- Για κάθε πρόταση $(\forall \bar{x}_i.\alpha_i)\exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, όπου $\bar{x}_i = (x_1, \ldots, x_{k_i})$ και $\bar{y}_i = (y_1, \ldots, y_{\ell_i})$, $\mathrm{ext}_i : T^{(k_i)} \to T^{(k_i+\ell_i)}$ είναι μία συνάρτηση επέκτασης τέτοια ώστε:
  (i) ο $\mathrm{ext}_i(\tau)$ επεκτείνει τον τ·
  (ii) $\mathrm{ext}_i(\tau) \models \alpha_i(\bar{x}) \to \psi_i(\bar{x}, \bar{y})$.[5]

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η ύπαρξη μάρτυρα είναι απαραίτητη συνθήκη για την ικανοποιησιμότητα.

Λήμμα 3.11. Έστω ψ μία (ελαφρώς) φρουρούμενη πρόταση. Αν η ψ είναι ικανοποιήσιμη, τότε υπάρχει μάρτυρας για την ικανοποιησιμότητά της.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{A}$ ένα μοντέλο της ψ, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \psi$. Για όλα τα $k \leq n$, έστω $T^{(k)}$ το σύνολο όλων των k-τύπων που πραγματοποιούνται στο $\mathfrak{A}$· θέτουμε $T = \bigcup_{k \leq n} T^{(k)}$. Διαλέγουμε μία πλειάδα $\bar{a}_0$ τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models C(\bar{a}_0)$ και θέτουμε $\tau_0 = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[\bar{a}_0]$. Τώρα, για τον ορισμό των συναρτήσεων επέκτασης, έστω $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{k_i}) \in A^{k_i}$ μία πλειάδα τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models \alpha_i(\bar{a})$. Προφανώς, αφού $\mathfrak{A} \models \psi$, από το οποίο έπεται ότι $\mathfrak{A} \models (\forall \bar{x}_i.\alpha_i)\exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, υπάρχει μία πλειάδα $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_{\ell_i}) \in A^{\ell_i}$ τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models \psi_i(\bar{a}, \bar{a}')$. Ορίζουμε κάθε $\mathrm{ext}_i : T^{(k_i)} \to T^{(k_i+\ell_i)}$, ως

$$\mathrm{ext}_i(\tau) = \begin{cases} \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[\bar{a}, \bar{a}'], & \text{αν } \tau = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\ \tau, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι οι ext_i, $1 \leq i \leq m$, ικανοποιούν τον Ορισμό 3.10. $\square$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε ότι το (ελαφρώς) φρουρούμενο θραύσμα έχει την ιδιότητα δενδρικού μοντέλου· δηλαδή, κάθε ικανοποιήσιμη (ελαφρώς) φρουρούμενη πρόταση είναι ικανοποιήσιμη σε ένα δενδροειδές μοντέλο.

[5] Δηλαδή, δεδομένης μίας δομής $\mathfrak{A}$ και μίας πλειάδας $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{k_i}) \in A^{k_i}$ τέτοιας ώστε $\mathfrak{A} \models \alpha_i(\bar{a})$ και $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = \tau$, το $\mathrm{ext}_i(\tau)$ δίνει τον τύπο τ' τον οποίον οποιαδήποτε πλειάδα $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_{k_i}, a'_1, \ldots, a'_{\ell_i}) \in A^{k_i+\ell_i}$ που επεκτείνει την $\bar{a}$ πρέπει να πραγματοποιεί έτσι ώστε να ικανοποιεί τον ψ_i, δηλαδή έτσι ώστε να έχουμε $\mathfrak{A} \models \psi_i(\bar{a}')$. Προφανώς τότε ο τ' πρέπει να επεκτείνει τον τ.

Ωστόσο, πρέπει πρώτα να ορίσουμε αυστηρά τι εννοούμε με τις λέξεις «δένδρο» ή «δενδροειδές», αφού σχεσιακά σύμβολα οποιασδήποτε πλειομέλειας επιτρέπονται, κι έτσι δεν μπορούμε να έχουμε συνήθως δένδρα με την καθαρά γραφο-θεωρητική έννοια. Μία άλλη έννοια από τη θεωρία γραφημάτων παίζει σημαντικότερο ρόλο εδώ: η έννοια του δενδρικού-πλάτους (αγγλ. tree-width). Διαισθητικά, αυτή μετράει πόσο κοντά είναι ένα γράφημα στο να είναι δένδρο. Θα γενικεύσουμε αυτή την έννοια για μία οποιαδήποτε σχεσιακή δομή.

Ορισμός 3.12. Έστω σ ένα σχεσιακό λεξιλόγιο και $\mathfrak{A}$ μία σ-δομή. Λέμε ότι η $\mathfrak{A}$ είναι *k-δένδρο* αν υπάρχει ένα δένδρο $S = (V, E)$ και μία συνάρτηση $F : V \to \{X \subseteq A : |X| \leq k\}$, που αναθέτει σε κάθε κόμβο v του S ένα σύνολο $F(v)$ με k το πολύ στοιχεία του $\mathfrak{A}$, τέτοια ώστε:

(i) Για κάθε σ-άτομο $\alpha(x_1, \ldots, x_r)$ και κάθε πλειάδα $(a_1, \ldots, a_r) \in A^r$ τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models \alpha(a_1, \ldots, a_r)$, υπάρχει κόμβος v του S τέτοιος ώστε $\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq F(v)$.

(ii) Για κάθε στοιχείο a του $\mathfrak{A}$, το σύνολο κόμβων $\{v \in V \mid a \in F(v)\}$ είναι συνεκτικό.

Επιπλέον, λέμε ότι το $\mathfrak{A}$ έχει *φραγμένο βαθμό* αν, για κάθε κόμβο του S, ο αριθμός των γειτόνων του φράσσεται από κάποια σταθερά $c \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 3.13. Έστω ψ μία οποιαδήποτε φρουρούμενη πρόταση με $k-1$ μεταβλητές. Αν η ψ είναι ικανοποιήσιμη, τότε υπάρχει k-δένδρο φραγμένου βαθμού που είναι μοντέλο της ψ.

Απόδειξη. Ο λόγος που υποθέσαμε ότι η ψ έχει $k-1$ και όχι k μεταβλητές είναι ότι κατά τη μετατροπή της σε κανονική μορφή (βλ. Λήμμα 3.8), μπορεί να προστεθεί μία (το πολύ) νέα μεταβλητή. Έτσι, υποθέτουμε ότι η ψ είναι στη μορφή της (3.3) και ότι έχει k μεταβλητές. Επιπλέον, υποθέτουμε λόγω του Λήμματος 3.11 ότι η ψ έχει μάρτυρα $(T, \tau_0, \mathrm{ext}_1, \ldots, \mathrm{ext}_m)$ για την ικανοποιησιμότητά της.

Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathfrak{B}$ της ψ που είναι ένα k-δένδρο. Θα κατασκευάσουμε ταυτόχρονα το δένδρο $S = (V, E)$ και τη συνάρτηση F (σύμφωνα με τον Ορι- σμό 3.12), αλλά και την υπο-δομή

$\mathfrak{F}(v) \subseteq \mathfrak{B}$, $v \in V$, που προσδιορίζεται από το $F(v)$. Για σύμπαν του $\mathfrak{B}$, θέτουμε το σύνολο $B = \bigcup_{v \in V} F(v)$.

Για την κατασκευή τον υπολοίπων κόμβων στο S, η ιδέα είναι η ακόλουθη: Υποθέστε ότι το δέντρο έχει (επαγωγικά) κατασκευαστεί μέχρι το επίπεδο l και έστω u ένα φύλλο στο S. Για να σιγουρευτούμε ότι υπάρχει υπο-δομή $\mathfrak{F}(w) \subseteq \mathfrak{B}$, για κάποιο w στο S, τέτοια ώστε $\mathfrak{F}(w) \models \alpha_i(\bar{x}_i) \to \exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, έστω k_i, ℓ_i τα μήκη των $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ αντιστοίχως. Για κάθε πλειάδα $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{k_i}) \in F(u)^{k_i}$ τέτοια που $\mathfrak{F}(u) \models \alpha_i(\bar{b})$ και δεν ισχύει ήδη ότι $\mathfrak{F}(u) \models \alpha_i(\bar{b}) \to \exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{b}, \bar{y}_i)$, δημιουργούμε ένα νέο κόμβο w στο S, που συνδέεται με τον u, και θέτουμε $F(w) = \{b_1, \ldots, b_{k_i}, b'_1, \ldots, b'_{\ell_i}\}$, όπου $b'_1, \ldots, b'_{\ell_i}$ είναι *νέα στοιχεία*,[6] δηλαδή δεν είναι ήδη στο B. Παρατηρήστε ότι σε αυτό το σημείο, η υπο-δομή $\mathfrak{F}(u)$ είναι ήδη πλήρως ορισμένη, κι έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ext_i η οποία δεδομένου του k_i-τύπου του $(b_1, \ldots, b_{k_i})$, θα επιστρέψει τον $(k_i + \ell_i)$-τύπο που πρέπει να έχει η πλειάδα $(b_1, \ldots, b_{k_i}, b'_1, \ldots, b'_{\ell_i})$.

Πιο λεπτομερώς, για κάθε i, $1 \leq i \leq m$, και κάθε πλειάδα $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{k_i}) \in F(u)^{k_i}$, δημιουργούμε ένα νέο κόμβο w στο S συνδεδεμένο με τον u, αν και μόνο αν:

(i) τουλάχιστον ένα b_j, $1 \leq j \leq k_i$, είναι νέο στον u·
(ii) ισχύει ότι $\mathfrak{F}(u) \models \alpha_i(\bar{b})$·
(iii) αν $\tau = \mathrm{tp}_{\mathfrak{F}(u)}[\bar{b}]$ και $\tau' = \mathrm{ext}_i(\tau)$, τότε ο τ' επεκτείνει τον τ κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

Επιπλέον, αν ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες θέτουμε $F(w) = \{b_1, \ldots, b_{k_i}, b'_1, \ldots, b'_{\ell_i}\}$ όπως περιγράψαμε παραπάνω, και θέτουμε

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{F}(w)}[b_1, \ldots, b_{k_i}, b'_1, \ldots, b'_{\ell_i}] = \mathrm{ext}_i(\tau) = \mathrm{ext}_i\big(\mathrm{tp}_{\mathfrak{F}(u)}[b_1, \ldots, b_{k_i}]\big).$$

Σε αυτό το σημείο, η υπο-δομή $\mathfrak{F}(w)$ είναι πλήρως ορισμένη. Παρατηρήστε ότι, για κάθε v στο S, ο αριθμός των στοιχείων στο $\mathfrak{F}(v)$ είναι το πολύ k, αφού η ψ έχει k το πολύ μεταβλητές.

Αυτή η επαγωγική κατασκευή δημιουργεί ένα άπειρο δένδρο. Μέχρι τώρα, όμως, έχουμε περιγράψει τι συμβαίνει για πλειάδες $(b_1, \ldots, b_r)$ με $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq$

[6] Παρατηρήστε ότι τα $b'_1, \ldots, b'_{\ell_i}$ δεν είναι απαραιτήτως διακριτά. Αυτό ισχύει μόνο όταν ο τύπος που η ext_i επιστρέφει επεκτείνει τον τύπο της πλειάδας $(b_1, \ldots, b_{k_i})$ ακριβώς κατά ℓ_i στοιχεία. Ωστόσο, για απλότητα και χωρίς βλάβη γενικότητας, θα υποθέσουμε εδώ ότι αυτά τα στοιχεία είναι διακριτά.

$F(v)$, για κάποιο v στο S. Καλούμε αυτές τις πλειάδες *τοπικές*. Δεδομένου ότι οι συνθήκες (i) – (iii) ικανοποιούνται, περιγράψαμε πώς μπορεί κανείς να επεκτείνει όλες τις τοπικές πλειάδες χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις ext_i. Για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή, απαιτούμε να ισχύει $\mathfrak{B} \models \neg R(\bar{b})$ για όλες τις μη-τοπικές πλειάδες $\bar{b}$ και όλα τα σχεσιακά σύμβολα R στην ψ. Αυτό εξασφαλίζει ότι κανένας φρουρός α_i δε θα γίνεται αληθής σε κάποια μη-τοπική πλειάδα στο $\mathfrak{B}$, κι έτσι μπορούμε να ξεχάσουμε αυτές τις περιπτώσεις. Το φρουρούμενο θραύσμα είναι πολύ βολικό γι' αυτήν ακριβώς την ιδιότητα.

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathfrak{B}$ είναι πράγματι μοντέλο της ψ. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχουμε $\mathfrak{F}(\lambda) \models \exists\bar{x}C(\bar{x})$, όπου λ είναι η ρίζα του S, κι έτσι $\mathfrak{B} \models \exists\bar{x}C(\bar{x})$, αφού $\mathfrak{F}(\lambda) \subseteq \mathfrak{B}$. Έστω $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{k_i}) \in B^{k_i}$, $1 \leq i \leq m$. Εάν $\mathfrak{B} \models \neg\alpha_i(\bar{b})$, δεν χρειάζεται να αποδείξουμε κάτι. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mathfrak{B} \models \alpha_i(\bar{b})$. Προφανώς, η $\bar{b}$ πρέπει να περιέχεται σε κάποιον κόμβο του S, αλλιώς θα ίσχυε ότι $\mathfrak{B} \models \neg\alpha_i(\bar{b})$. Έστω u ο πρώτος κόμβος στο S τέτοιος ώστε $\{b_1, \ldots, b_{k_i}\} \subseteq F(u)$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα $b_1, \ldots, b_{k_i}$ πρέπει να είναι νέο στο $F(u)$, διαφορετικά θα υπήρχε κάποιος γονέας του u που θα τα περιείχε όλα. Οι συνθήκες (i) και (ii) ικανοποιούνται συνεπώς στο $F(u)$.

Σχετικά με τη συνθήκη (iii), έστω $\tau = \mathrm{tp}_{\mathfrak{F}(u)}[\bar{b}]$ και $\tau' = \mathrm{ext}_i(\tau)$. Εάν ο τ' δεν επεκτείνει τον τ κατά κάποιο νέο στοιχείο, τότε ο τ' πρέπει ήδη να πραγματοποιείται στην υπο-δομή $\mathfrak{F}(u)$, αφού ο τ είναι μέγιστο συνεπές σύνολο (εξ ορισμού) και ήδη προσδιορίζει πλήρως την $\bar{b}$. Εάν ο τ' επεκτείνει τον τ κατά τουλάχιστον ένα στοιχείο, τότε η συνθήκη (iii) ικανοποιείται επίσης στο $F(u)$, το οποίο σημαίνει ότι ο u πρέπει να έχει επόμενο κόμβο w στο S. Τότε πρέπει να ισχύει ότι $\mathfrak{F}(w) \models \alpha_i(\bar{x}_i) \rightarrow \exists\bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, κι έτσι ο τ' πραγματοποιείται στον w. Σε κάθε περίπτωση ο τ' πραγματοποιείται στο $\mathfrak{B}$, συνεπώς $\mathfrak{B} \models \alpha_i(\bar{x}_i) \rightarrow \exists\bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $1 \leq i \leq m$. Έπεται ότι $\mathfrak{B} \models (\forall\bar{x}_i.\alpha_i)\exists\bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $1 \leq i \leq m$, από το οποίο παίρνουμε ότι $\mathfrak{B} \models \psi$. □

Σημειότεον ότι στο [36] αποδεικνύεται πως το Θεώρημα 3.13 ισχύει και για το ελαφρώς φρουρούμενο θραύσμα. Αυτό γίνεται με μικρές προσθήκες στην προηγούμενη απόδειξη.

Θεώρημα 3.14. Οποιαδήποτε ικανοποιήσιμη ελαφρώς φρουρούμενη πρόταση με $k-1$ μεταβλητές έχει μοντέλο το οποίο είναι k-δέντρο με φραγμένο βαθμό.

Απόδειξη. Παραλείφθηκε, βλ. [36]. □

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το φρουρούμενο θραύσμα έχει την ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου. Η απόδειξη χρησιμοποιεί ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που οφείλεται στον Herwig [37], το οποίο γενικεύει ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον Hrushovski [38]. Πολύ σημαντική εδώ είναι η έννοια του μερικού ισομορφισμού (αγγλ. partial isomorphism), που είναι για την πρωτοβάθμια λογική έννοια παρόμοια με την αμφιεξομοίωση [39, 40].

Ορισμός 3.15. Έστω ένα σχεσιακό λεξιλόγιο σ και έστω $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ δύο σ-δομές. Επιπλέον, έστω $p : A_0 \rightarrowtail B_0$, όπου $A_0 \subsetneq A$ και $B_0 \subsetneq B$, μία ένα-προς-ένα συνάρτηση από ένα γνήσιο υποσύνολο του A σε ένα γνήσιο υποσύνολο του B. Η p καλείται *μερικός ισομορφισμός* από την $\mathfrak{A}$ στη $\mathfrak{B}$ αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- Για όλα τα $a_1, a_2 \in A_0$, $a_1 = a_2$ ανν $p(a_1) = p(a_2)$.
- Για όλα τα n-μελή σχεσιακά σύμβολα R στο σ και όλα τα $a_1, \ldots, a_n \in A_0$,

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{ανν} \quad R^{\mathfrak{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n)).$$

Αυτομορφισμός σε μία δομή $\mathfrak{A}$ καλείται κάθε ένα-προς-ένα και επί μερικός ισομορφισμός από την $\mathfrak{A}$ στον εαυτό της.

Θεώρημα 3.16 (Herwig)**.** Έστω $\mathfrak{A}$ μία πεπερασμένη δομή σε ένα πεπερασμένο σχεσιακό λεξιλόγιο. Τότε υπάρχει πεπερασμένη επέκταση $\mathfrak{A}^+$ (που καλείται *Herwig επέκταση*) της $\mathfrak{A}$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) Κάθε μερικός ισομορφισμός της $\mathfrak{A}$ επεκτείνεται σε αυτομορφισμό της $\mathfrak{A}^+$.

(ii) Έστω $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ μία πλειάδα τέτοια ώστε $\mathfrak{A} \models \beta(a_1, \ldots, a_m)$ για κάποιο ατομικό τύπο $\beta(x_1, \ldots, x_m)$ όπου εμφανίζονται όλες οι $x_1, \ldots, x_m$. Τότε υπάρχει αυτομορφισμός g της $\mathfrak{A}^+$ τέτοιος ώστε το $g(\bar{a})$ βρίσκεται στην $\mathfrak{A}$.

Θεώρημα 3.17. Κάθε ικανοποιήσιμη φρουρούμενη πρόταση έχει πεπερασμένο μοντέλο.

Απόδειξη. Έστω ψ μία ικανοποιήσιμη φρουρούμενη πρόταση στη μορφή της (3.3), και έστω $\mathfrak{B}$ το δενδροειδές μοντέλο που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.13. Θυμίζουμε ότι $S = (V, E)$ είναι ένα (ίσως άπειρο) δέντρο φραγμένου βαθμού και F είναι μία συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε κόμβο του

S ένα σύνολο από k στοιχεία στο B, όπου k είναι ο αριθμός των μεταβλητών στην ψ.

Παρατηρούμε αρχικά ότι επειδή η ψ έχει ένα καθορισμένο, πεπερασμένο λεξιλόγιο, και για κάθε κόμβο v στο S έχουμε $|F(v)| \leq k$, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός δομών $\mathfrak{F}(v) \subseteq \mathfrak{B}$ που ορίζονται από τα σύνολα $F(v)$, μέχρι ισομορφισμού. Συνεπώς, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποδέντρο S' του S το οποίο περιέχει όλους τους κόμβους στο S, μέχρι ισομορφισού. Δηλαδή, για κάθε κόμβο v στο S υπάρχει κόμβος u στο S', τέτοιος ώστε οι δομές $\mathfrak{F}(v)$ και $\mathfrak{F}(u)$ είναι ισόμορφες. Έστω $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ η υπο-δομή που ορίζεται από το $A = \bigcup_{u \in S'} F(u)$, και έστω $\mathfrak{A}^+$ μία Herwig επέκταση της $\mathfrak{A}$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathfrak{A}^+ \models \psi$.

Αρχικά, $\mathfrak{A} \models \exists \bar{x} C(\bar{x})$ κι έτσι $\mathfrak{A}^+ \models \exists \bar{x} C(\bar{x})$, αφού η $\mathfrak{A}$, όπως εξηγήσαμε, πρέπει να περιέχει μία υπο-δομή ισόμορφη με την $\mathfrak{F}(\lambda)$, όπου λ είναι η ρίζα του S, και $\mathfrak{F}(\lambda) \models \exists \bar{x} C(\bar{x})$.

Σχετικά με τα $(\forall \bar{x}_i.\alpha_i)\exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $1 \leq i \leq m$, έστω $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{k_i}) \in (A^+)^{k_i}$ τέτοια ώστε $\mathfrak{A}^+ \models \alpha_i(\bar{a})$. Από το Θεώρημα του Herwig, υπάρχει αυτομορφισμός g της $\mathfrak{A}^+$ τέτοιος που η $\bar{a}' = g(\bar{a})$ βρίσκεται στην $\mathfrak{A}$. Αφού οι $\bar{a}$ και $\bar{a}'$ είναι ισόμορφες, ισχύει επίσης ότι $\mathfrak{A} \models \alpha_i(\bar{a}')$. Αλλά τότε πρέπει να υπάρχει κόμβος v στο S' τέτοιος ώστε $\{a_1, \ldots, a_{k_i}\} \subseteq F(v)$. Έστω u ο επόμενος κόμβος του v στο S — χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας.

Εκ κατασκευής, αφού ο u είναι επόμενος του v, πρέπει να είναι $\mathfrak{F}(u) \models \alpha_i(\bar{a}')$ και $\mathfrak{F}(u) \models \exists \bar{y}_i \psi_i(\bar{a}', \bar{y}_i)$. Τώρα, εξ ορισμού, το S' πρέπει να περιέχει ένα w τέτοιον ώστε οι $\mathfrak{F}(u)$ και $\mathfrak{F}(w)$ να είναι ισόμορφες. Σημειοτέον ότι η $\mathfrak{F}(u)$ δεν είναι απαραίτητα υπο-δομή της $\mathfrak{A}$ αλλά, αφού ο w είναι στο S', $\mathfrak{F}(w) \subseteq \mathfrak{A}$. Έστω p ένας ισομορφισμός από την $\mathfrak{F}(u)$ στην $\mathfrak{F}(w)$ και έστω $\bar{a}'' = p(\bar{a}')$. Προφανώς, $\mathfrak{F}(w) \models \alpha_i(\bar{a}'')$ και $\mathfrak{F}(w) \models \exists \bar{y}_i \psi_i(\bar{a}'', \bar{y}_i)$. Αλλά, πάλι από το Θεώρημα του Herwig, ο p μπορεί να επεκταθεί σε έναν αυτομορφισμό f στην $\mathfrak{A}^+$. Τότε, η σύνθεση $f \circ g$ είναι επίσης αυτομορφισμός και $(f \circ g)(\bar{a}) = f(g(\bar{a})) = \bar{a}''$. Έπεται ότι $\mathfrak{F}(w) \models \exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{a}, \bar{y}_i)$, κι έτσι $\mathfrak{A}^+ \models \exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{a}, \bar{y}_i)$, αφού $\mathfrak{F}(w) \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^+$. Συνεπώς, $\mathfrak{A}^+ \models (\forall \bar{x}_i.\alpha_i)\exists \bar{y}_i\, \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $1 \leq i \leq m$, οπότε $\mathfrak{A}^+ \models \psi$. $\square$

Ένα αντίστοιχο θεώρημα αποδείχτηκε και για το ελαφρώς φρουρούμενο θραύσμα στο [41]:

Θεώρημα 3.18 (Hodkinson)**.** Κάθε ικανοποιήσιμη ελαφρώς φρουρούμενη πρόταση έχει πεπερασμένο μοντέλο.

Συνεπώς, το (ελαφρώς) φρουρούμενο θραύσμα έχει και την ιδιότητα δενδρικού μοντέλου και την ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου. Αυτό είναι πολύ καλό γιατί το ίδιο ισχύει και για την τροπική λογική. Τι γίνεται όμως με πολυπλοκότητα και επεκτάσεις;

Θεώρημα 3.19 (Grädel, [36])**.** Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας για το φρουρούμενο θραύσμα είναι 2-EXP-complete.

Το παραπάνω φαίνεται κάπως απογοητευτικό, αφού η ικανοποιησιμότητα για τη βασική τροπική λογική είναι PSPACE-complete και για τη CTL και τον μ-λογισμό EXP-complete. Ωστόσο, το αποτέλεσμα αυτό είναι παραπλανητικό αφού δεν υπάρχει περιορισμός για την πλειομέλεια των σχέσεων και ακόμα και ένα μόνο n-μελές σχεσιακό σύμβολο μπορεί να εξαναγκάσει ένα διπλά-εκθετικό αριθμό n-τύπων. Αν σταθεροποιήσουμε το n η κατάσταση βελτιώνεται:

Πόρισμα 3.20 (Grädel, [36])**.** Έστω $n \geq 2$ σταθερό και έστω C μία από τις ακόλουθες κλάσεις:

(i) Η κλάση όλων των (ελαφρώς) φρουρούμενων τύπων με n το πολύ μεταβλητές.
(ii) Η κλάση όλων των (ελαφρώς) φρουρούμενων τύπων με σχεσιακά σύμβολα πλειομέλειας το πολύ n.

Τότε το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας για την C είναι EXP-complete.

Αυτό είναι το ίδιο με την CTL και τον μ-λογισμό. Τι γίνεται όμως με επεκτάσεις; Δυστυχώς εδώ η συμπεριφορά του φρουρούμενου θραύσματος δεν είναι το ίδιο καλή με τη συμπεριφορά της τροπικής λογικής (όταν για παράδειγμα βάλουμε μεταβατικές σχέσεις ή μέτρηση αντικειμένων [36]), αλλά δεν είναι τόσο κακή όσο η συμπεριφορά του θραύσματος δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα, μετά την προσθήκη σταθερών σημείων (που είναι αξιοσημείωτη επέκταση όπως και για την τροπική λογική) το φρουρούμενο θραύσμα διατηρεί την αποκρισιμότητα:

Θεώρημα 3.21 (Grädel, Walukiewicz [42])**.** Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας για τη φρουρούμενη λογική με σταθερά σημεία είναι αποκρίσιμο και 2-EXP-complete. Για προτάσεις με σχεσιακά σύμβολα φραγμένης πλειομέλειας, η ικανοποιησιμότητα είναι EXP-complete.

Επομένως φαίνεται δίκαιο να συμπεράνουμε ότι το φρουρούμενο θραύσμα αποτελεί καλή γενίκευση και ερμηνεία του «πνεύματος» της τροπικής λογικής.

Συμπεράσματα

Είδαμε ότι εν μέρει η καλή υπολογιστική συμπεριφορά της τροπικής λογικής οφείλεται στην ιδιότητα δενδρικού μοντέλου — δηλαδή στο ότι κάθε ικανοποιήσιμος τύπος της τροπικής λογικής είναι ικανοποιήσιμος σε ένα δενδρικό μοντέλο. Αυτή η εξήγηση δεν είναι πλήρης όμως, και για να αποκτήσουμε πληρέστερη εικόνα θεωρήσαμε δύο θραύσματα της πρωτοβάθμιας λογικής τα οποία εμπεριέχουν και γενικεύουν την τροπική λογική:

- Το θραύσμα δύο-μεταβλητών ερμηνεύει την αποκρισιμότητα της τροπικής λογικής, αφού είναι το ίδιο αποκρίσιμο. Ωστόσο αυτή η ερμηνεία δεν είναι πλήρης, αφού το θραύσμα αυτό δεν έχει ούτε την ιδιότητα δενδρικού μοντέλου, ούτε την — σχετικά καλή, κυρίως στην πράξη — πολυπλοκότητα της τροπικής λογικής, ούτε και παραμένει αποκρίσιμο μετά από επεκτάσεις αντίστοιχες με αυτές της τροπικής λογικής (π.χ. με σταθερά σημεία).

- Το φρουρούμενο θραύσμα αποτελεί πληρέστερη ερμηνεία των καλών ιδιοτήτων της τροπικής λογικής. Έχει την ιδιότητα δενδρικού μοντέλου (κατά έναν πιο γενικευμένο ορισμό), είναι αποκρίσιμο και παραμένει αποκρίσιμο μετά από αρκετές παρόμοιες με της τροπικής λογικής επεκτάσεις. Ακόμα κι αυτή η εξήγηση όμως δεν είναι τελείως ικανοποιητική, αφού το φρουρούμενο θραύσμα δεν μπορεί να εκφράσει έννοιες που η τροπική λογική μπορεί, όπως για παράδειγμα τη μεταβατικότητα.

Αναφορές

[1] Church, Alonzo: *An unsolvable problem of elementary number theory.* American journal of mathematics, 58(2):345–363, 1936.

[2] Church, Alonzo: *A note on the entscheidungsproblem.* J. Symb. Log., 1(1):40–41, 1936.

[3] Turing, Alan M: *On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem.* Proceedings of the London mathematical society, 42(2):230–265, 1936.

[4] Börger, Egon, Erich Grädel, and Yuri Gurevich: *The classical decision problem.* Springer, 2001.

[5] Lewis, C.I.: *A Survey of Symbolic Logic.* General Books LLC, 2009, ISBN 9781151737052.

[6] Lewis, C.I.: *Collected Papers.* Stanford University Press, 1970, ISBN 9780804707176.

[7] Kripke, S.A.: *Semantical Considerations on Modal Logic; Naming and Necessity.* Oxford University Press, 1971.

[8] Benthem, J.F.A.K. van: *Some Correspondence Results in Modal Logic.* Mathematisch Instituut Amsterdam: Report. University of Amsterdam, 1974.

[9] Benthem, van JFAK: *Modal logic and classical logic.* 1985.

[10] Kripke, Saul A: *A completeness theorem in modal logic.* The journal of symbolic logic, 24(1):1–14, 1959.

[11] Kripke, Saul A: *Semantical analysis of modal logic I, normal modal propositional calculi*. Mathematical Logic Quarterly, 9(5-6):67–96, 1963.

[12] Blackburn, P., J.F.A.K. van Benthem, and F. Wolter: *Handbook of Modal Logic*. Studies in Logic and Practical Reasoning. Elsevier Science, 2006, ISBN 9780080466668.

[13] Blackburn, P., M. de Rijke, and Y. Venema: *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2002, ISBN 9780521527149.

[14] Benthem, J.F.A.K. van: *Modal Correspondence Theory*. Mathematisch Instituut & Instituut voor Grondslagenonderzoek, University of Amsterdam, 1976.

[15] Baader, F.: *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications*. Cambridge University Press, 2003, ISBN 9780521781763.

[16] Kozen, Dexter: *Results on the propositional μ-calculus*. Theoretical computer science, 27(3):333–354, 1983.

[17] Arora, S. and B. Barak: *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009, ISBN 9780521424264.

[18] Savitch, Walter J: *Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities*. Journal of computer and system sciences, 4(2):177–192, 1970.

[19] Harrop, Ronald: *On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi*. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 54, pages 1–13. Cambridge Univ Press, 1958.

[20] Vardi, Moshe Y: *Why is modal logic so robustly decidable?* Descriptive complexity and finite models, 31:149–184, 1996.

[21] Tobies, Stephan: *Pspace reasoning for graded modal logics*. Journal of Logic and Computation, 11(1):85–106, 2001.

[22] Emerson, E Allen and Joseph Y Halpern: *Decision procedures and expressiveness in the temporal logic of branching time.* Journal of computer and system sciences, 30(1):1–24, 1985.

[23] Emerson, E Allen and Charanjit S Jutla: *The complexity of tree automata and logics of programs.* In *Foundations of Computer Science, 1988., 29th Annual Symposium on*, pages 328–337. IEEE, 1988.

[24] Nebel, Bernhard: *Terminological reasoning is inherently intractable.* Artificial Intelligence, 43(2):235–249, 1990.

[25] Heinsohn, Jochen, Daniel Kudenko, Bernhard Nebel, and Hans Jürgen Profitlich: *An empirical analysis of terminological representation systems.* Artificial Intelligence, 68(2):367–397, 1994.

[26] Speel, Piet Hein, Frank van Raalte, PE van der Vet, and NJI Mars: *Runtime and memory usage performance of description logics.* In *Knowledge Retrieval, Use and Storage for Efficiency: Proc. of the 1st Int. KRUSE Symposium*, pages 13–27, 1995.

[27] Horrocks, Ian: *Using an expressive description logic: Fact or fiction?* KR, 98:636–645, 1998.

[28] Scott, Dana: *A decision method for validity of sentences in two variables.* Journal of Symbolic Logic, 27(377):74, 1962.

[29] Mortimer, Michael: *On languages with two variables.* Mathematical Logic Quarterly, 21(1):135–140, 1975.

[30] Grädel, Erich and Martin Otto: *On logics with two variables.* Theoretical computer science, 224(1):73–113, 1999.

[31] Grädel, Erich, Martin Otto, and Eric Rosen: *Undecidability results on two-variable logics.* Archive for Mathematical Logic, 38(4-5):313–354, 1999.

[32] Fürer, Martin: *The computational complexity of the unconstrained limited domino problem (with implications for logical decision problems).* In

Logic and Machines: Decision problems and complexity, pages 312–319. Springer, 1984.

[33] Grädel, Erich, Phokion G Kolaitis, and Moshe Y Vardi: *On the decision problem for two-variable first-order logic.* Bulletin of symbolic logic, pages 53–69, 1997.

[34] Andréka, Hajnal, István Németi, and Johan van Benthem: *Modal languages and bounded fragments of predicate logic.* Journal of Philosophical Logic, 27(3):217–274, 1998.

[35] Benthem, Johan van: *Dynamic bits and pieces.* Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam, 1997.

[36] Grädel, Erich: *On the restraining power of guards.* Journal of Symbolic Logic, pages 1719–1742, 1999.

[37] Herwig, Bernhard: *Extending partial isomorphisms on finite structures.* combinatorica, 15(3):365–371, 1995.

[38] Hrushovski, Ehud: *Extending partial isomorphisms of graphs.* combinatorica, 12(4):411–416, 1992.

[39] Van Benthem, Johan: *Language in action.* Journal of philosophical logic, 20(3):225–263, 1991.

[40] Rijke, Maarten de: *Modal model theory.* In *Annals of Pure and Applied Logic*. Citeseer, 1995.

[41] Hodkinson, Ian: *Loosely guarded fragment of first-order logic has the finite model property.* Studia Logica, 70(2):205–240, 2002.

[42] Gradel, Erich and Igor Walukiewicz: *Guarded fixed point logic.* In *Logic in Computer Science, 1999. Proceedings. 14th Symposium on*, pages 45–54. IEEE, 1999.