ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΣΤΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σταμπόλας Ιωάννης
Δ201019

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής

Αθήνα
Οκτώβριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, για την στήριξη και το άριστο κλίμα συνεργασίας καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Η συμβολή του στην παρούσα ερευνητική εργασία ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω την Αν. Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα και τον Λέκτορα κ. Ψυχάρη Γεώργιο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με στήριξε μέχρι το πέρας της διπλωματικής μου εργασίας.

Περίληψη

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποτελούν ένα σημαντικό κεφάλαιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης λόγω των πολλών εφαρμογών τους τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Καθώς η κατανόηση της έννοιας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων από τους μαθητές αποδείχθηκε δύσκολη, η έρευνα στράφηκε στον βαθμό κατανόησης των βασικών εννοιών που προαπαιτούνται, όπως το ακτίνιο, η τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου, ο τριγωνομετρικός κύκλος και η έννοια της συνάρτησης, αλλά και στη διασύνδεση των εννοιών αυτών. Στην παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε ένα υπολογιστικό εργαλείο με στόχο να λειτουργήσει ως γνωστικό εργαλείο εφαρμογής, εμπέδωσης, αναπλαισίωσης και επέκτασης της υπάρχουσας γνώσης. Μέσω της εφαρμογής του εργαλείου αναδείχθηκαν οι δυσκολίες που παρουσιάζονται στην κατανόηση των εννοιών αυτών, καθώς και οι πιθανοί παράγοντες στους οποίους οφείλονται αυτές.

Λέξεις κλειδιά: Τριγωνομετρικοί αριθμοί, τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Abstract

Trigonometric numbers and trigonometric functions consist a very important topic in secondary education because of their various applications both in mathematics and physics. As the understanding of the concept of trigonometric functions seems to be arduous, the educational research has focused on the investigation of the degree of understanding of other concepts that are prerequisite, such as the radian, the trigonometry of the right triangle, the trigonometric circle and the concept of function as well as the connections between them. In the present research, a digital tool has been developed in order to be used as a cognitive tool that would help students experiment, reframe and broaden the knowledge they had acquired in school lessons. Through the tool's use the difficulties related to the understanding of the aforementioned concepts as well as possible interrelated issues have come in the foreground.

Key words: trigonometric numbers , trigonometric functions

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Οριοθέτηση και στήριξη του θέματος

Η τριγωνομετρία και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποτελούν ένα σημαντικό κεφάλαιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική, όπου έχουν πολλές και σημαντικές εφαρμογές. Για την κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, είναι απαραίτητο οι μαθητές να είναι εξοικειωμένοι με έννοιες όπως η γωνία και το μέτρο της σε μοίρες και ακτίνια, η ομοιότητα τριγώνων, αλλά και με την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία αλλά και ως αντικείμενο. Ένα βασικό πρόβλημα κατά τη διδασκαλία της τριγωνομετρίας είναι ότι οι μαθητές αναπτύσσουν μια αποσπασματική κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Orhun 2001, Brown 2005, Weber 2005, Challenger 2009). Προκειμένου να υπάρξει μια βαθύτερη κατανόηση της τριγωνομετρίας είναι σημαντικό να δημιουργηθούν συνδέσεις ανάμεσα στις τρεις παρακάτω διαφορετικές πτυχές της:

- την τριγωνομετρία του τριγώνου, όπου οι ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών δίνονται μέσω των λόγων των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου,
- την τριγωνομετρία του μοναδιαίου κύκλου, όπου οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ορίζονται ως συντεταγμένες σημείων του μοναδιαίου κύκλου, που είναι άκρα τόξων των οποίων το μέτρο μπορεί να είναι αρνητικό ή και μεγαλύτερο του ενός κύκλου,
- τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπου μέσω της τριγωνομετρίας του μοναδιαίου κύκλου ορίζεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς.

Ειδικότερα όσον αφορά στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αυτές έχουν κάποια μοναδικά χαρακτηριστικά σε σχέση με τις υπόλοιπες συναρτήσεις που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στη συγκεκριμένη βαθμίδα οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με την ιδέα ότι μια συνάρτηση δίνεται κατά κανόνα μέσω ενός αλγεβρικού τύπου ο οποίος αποτελεί την αλγεβρική της αναπαράσταση. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι ίσως οι πρώτες συναρτήσεις που συναντούν οι μαθητές, στις οποίες οι υπολογισμοί δεν είναι δυνατόν να γίνουν με αλγεβρικό τρόπο, κάτι που δημιουργεί προβλήματα στη συλλογιστική των μαθητών (Weber, 2005). Για να υπάρξει μια βαθύτερη κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αλλά και των συναρτήσεων γενικότερα, είναι απαραίτητο οι μαθητές να είναι σε θέση να αντιληφθούν τη συνάρτηση ως διαδικασία αλλά και ως αντικείμενο. Θεωρώντας την τριγωνομετρική συνάρτηση ως διαδικασία οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να νοηματοδοτήσουν το μηχανισμό που χρησιμοποιείται ώστε μέσω του μέτρου γωνίας και της τριγωνομετρίας του τριγώνου αρχικά και εν συνεχεία του τριγωνομετρικού κύκλου, σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχίζεται η εικόνα του. Θεωρώντας τη συνάρτηση ως αντικείμενο, οι μαθητές πρέπει να μπορούν να συνδέσουν μεταξύ τους τις διάφορες αναπαραστάσεις της, όπως ο αλγεβρικός της τύπος, αν υπάρχει, και η γραφική της παράσταση.

Στην εργασία αυτή αρχικά εξετάζεται ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές έχουν κατανοήσει έννοιες όπως η ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων όπως τα ορθογώνια τρίγωνα αλλά και οι κύκλοι, το μέτρο γωνίας σε ακτίνια, ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι συναρτήσεις. Στη συνέχεια εξετάζεται αν μπορούν να συνδέσουν μεταξύ τους τις έννοιες αυτές καθώς και με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο ώστε να έχουν μια πληρέστερη εννοιολογική εικόνα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για το σκοπό αυτό οι μαθητές εργάστηκαν σε ζεύγη σε δραστηριότητες οι οποίες αναπτύχθηκαν με τη χρήση του προγράμματος Geogebra.

1.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Όπως αναφέρθηκε, η μελέτη και η κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες για τους μαθητές καθώς απαιτεί το συνδυασμό και τη σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων. Έτσι οι μαθητές πρέπει να διαπραγματευτούν και να συνδέσουν έννοιες όπως αυτές της γωνίας, του μήκους τόξου, του τριγωνομετρικού αριθμού, της μεταβλητής και της συνάρτησης. Καθώς οι έννοιες αυτές παρουσιάζουν η κάθε μια τις δικές δυσκολίες κατανόησης, η συγκεκριμένη εργασία εκτός από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις συγκεκριμένες έννοιες, εστιάζει και στις συνδέσεις που απαιτείται να γίνουν ανάμεσα στα συστατικά στοιχεία μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης προκειμένου αυτή να γίνει αντιληπτή ως ένα ξεχωριστό μαθηματικό αντικείμενο από τους μαθητές. Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές διαμορφώθηκαν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αντίληψη του ακτινίου ως μονάδα μέτρησης της γωνίας και ως μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο σύνολο των πραγματικών αριθμών;

2. με ποιον τρόπο συνδέουν την τριγωνομετρία του τριγώνου με τον τριγωνομετρικό κύκλο;
3. πως συνδέουν τον τριγωνομετρικό κύκλο με την τριγωνομετρική συνάρτηση και στη συνέχεια με τη γραφική της παράσταση;

Σκοπός του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος είναι να διερευνηθεί το είδος των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή της έννοιας του ακτινίου σε σχέση με το μήκος τόξου, τον τρόπο που αντιλαμβάνονται το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια σε σχέση με το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες, τη μετάβαση μέσω της χρήσης του μήκους τόξου για τον ορισμό σε ακτίνια του μέτρου κυρτής γωνίας στον ορισμό σε ακτίνια του μέτρου μη κυρτών γωνιών και γωνιών μεγαλύτερων των $2\pi\,\mathrm{rad}$ και στη συνέχεια να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο συνδέεται το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια με τους πραγματικούς αριθμούς και με τον άξονα των πραγματικών αριθμών ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως πεδίο ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Το δεύτερο ερώτημα αποσκοπεί στην διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν την τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου και σε πιο βαθμό είναι σε θέση να τη συνδέσουν με την τριγωνομετρία του τριγωνομετρικού κύκλου ώστε να ορίσουν τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών με μέτρο μεγαλύτερο του $\frac{\pi}{2}$. Τέλος, με το τρίτο ερώτημα ερευνάται ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν και ενσωματώνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο ως βασικό μηχανισμό της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Ερευνάται ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν το μήκος τόξου του μοναδιαίου κύκλου με το μέτρο της αντίστοιχης γωνίας σε ακτίνια και να το αντιληφθούν ως ανεξάρτητη μεταβλητή της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Επίσης ερευνάται αν οι μαθητές συνδέουν τον τριγωνομετρικό κύκλο με τη γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Κονστρουκτιβισμός

Ο κονστρουκτιβισμός μπορεί εν συντομία να ορισθεί ως μια θεωρία σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι διαδικασία ενεργούς κατασκευής της γνώσης από το ίδιο το άτομο. Σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό, οι μαθητές κατασκευάζουν οι ίδιοι τη γνώση τους και η διδασκαλία δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τρόπος μεταφοράς της γνώσης από τους καθηγητές ή άλλες πηγές στους μαθητές. Σύμφωνα με τους Duffy and Cunningham (1996) :

- η μάθηση είναι μια ενεργός διαδικασία κατασκευής παρά απόκτησης της γνώσης,
- η διδασκαλία είναι μια διαδικασία υποστήριξης της κατασκευής, παρά επικοινωνίας της γνώσης.

Από τους πρώτους που υποστήριξαν αυτή τη θέση και θεμελίωσε την θεωρία του κονστρουκτιβισμού ήταν ο Piaget (1967/ 1971). Σύμφωνα με τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού, η υποκειμενική γνώση του εξωτερικού κόσμου αποτελείται από εικασίες οι οποίες συνεχώς χρησιμοποιούνται, ελέγχονται και αντικαθίστανται όταν διαψευσθούν. Η γνώση παραμένει αποδεκτή στο βαθμό που κάνει αυτό που αναμένουμε να κάνει. Σύμφωνα με τον von Glasserfeld, (1989, σελ. 162):

α) η γνώση δεν λαμβάνεται παθητικά αλλά χτίζεται ενεργητικά από το σκεπτόμενο υποκείμενο,

β) η λειτουργία της νόησης είναι αποτέλεσμα προσαρμογής και εξυπηρετεί την οργάνωση του εμπειρικού κόσμου και όχι την ανακάλυψη της οντολογικής πραγματικότητας.

Αρχικά ο κονστρουκτιβισμός συνδέθηκε με αυτό που στη συνέχεια χαρακτηρίστηκε ως ‘απλοϊκός’ κονστρουκτιβισμός (trivial constructivism, von Glaserfelf, 1989). Σύμφωνα με αυτόν οι γνωστικές δομές κατασκευάζονται σταδιακά, αποτελούν όμως αντανακλάσεις μιας οντολογικής πραγματικότητας, ανεξάρτητης από την ανθρώπινη φύση. Οι μαθηματικές δομές θεωρούνται αυθύπαρκτες και θα αποκτηθούν σταδιακά μέσω της λογικής.

Η αρχική αυτή εκδοχή του κονστρουκτιβισμού αμφισβητήθηκε (von Glasserfeld, 1989), καθώς αν και τα άτομα κατασκευάζουν τη γνώση τους μέσα από δράσεις και στη συνέχεια την αναθεώρηση – προσαρμογή της υπάρχουσας γνώσης, οι ιδέες και οι αντιλήψεις των ατόμων δεν αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα. Ο ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός διαφέρει από τον «απλό» κονστρουκτιβισμό καθώς θεωρεί ότι η απόλυτη γνώση δεν είναι επιτεύξιμη, αφού η πραγματικότητα στην απόλυτη εκδοχή της βρίσκεται πέρα από τη σφαίρα της εμπειρικής δικαιολόγησης (Richards & von Glassefeld, 1980, σελ 35) οπότε και δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν αληθινές αναπαραστάσεις του εμπειρικού κόσμου (Ernest, 2010). Η εξωτερική πραγματικότητα μέσω τον εμποδίων που θέτει προωθεί την ανάπτυξη και εξέλιξη της υποκειμενικής γνώσης του εξωτερικού κόσμου. Καθώς όμως η γνώση αυτή υπόκειται στην αξιολόγηση του κοινωνικού περίγυρου, η αντικειμενική γνώση των μαθηματικών είναι η κοινωνικά αποδεκτή υποκειμενική γνώση. Υπό την έννοια αυτή η γνώση πρέπει να ανταποκρίνεται επιτυχώς τόσο στην φυσική όσο και στην κοινωνική πραγματικότητα. Ο κονστρουκτιβισμός έτσι εντάσσεται σε ένα νέο διαδρασιακό πλαίσιο στο οποίο δίνεται έμφαση στις δράσεις και στη γλώσσα των συμμαθητών και των δασκάλων καθώς και στα νοήματα που αναπτύσσονται μέσα από τη συμμετοχή σε κοινότητες δράσης. Ο συγκερασμός αυτός του ατομικού και του συλλογικού αποτελεί τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό (Ernest, 1994). Ο διαχωρισμός του πλαισίου απόκτησης της γνώσης όπου συχνά δίνεται έμφαση στις ατομικές υποκειμενικές γνωστικές διαδικασίες από το πλαίσιο αξιολόγησης και επικύρωσης αυτής της γνώσης είναι προβληματικός, καθώς η άμεση ή έμμεση αξιολόγηση, διόρθωση και ανατροφοδότηση του δασκάλου και των συμμαθητών συνδιαμορφώνουν τις γνωστικές αντιλήψεις.

2.2 Κονστρουκτιονισμός

Σύμφωνα με τη θεωρία του κονστρουκτιονισμού, θεμέλιο της διαδικασίας κατασκευής της γνώσης αποτελεί η κατασκευή νοητικών και κυρίως πραγματικών αντικειμένων από τον μαθητή. Στα πλαίσια κατασκευής πραγματικών αντικειμένων και με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων, οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν επιτυχώς διάφορα ζητήματα, γεγονός που προάγει τη μάθηση. Ο σχεδιασμός για παράδειγμα ενός αντικειμένου με τον υπολογιστή αποτελεί ένα είδος νοητικού καθρέπτη, καθώς οι μαθητές ελέγχουν διάφορες εικασίες και μέσα από τον πειραματισμό κατασκευάζουν νέα νοήματα. Η θεωρία του κονστρουκτιονισμού εισήχθηκε από τον Papert (1990) μαθητή του Piaget ο οποίος υποστήριξε επίσης ότι η μάθηση είναι πιο εποικοδομητική, όταν οι κατασκευές των μαθητών δημοσιοποιούνται και γίνονται αντικείμενο κριτικής αλλά και κοινής χρήσης.

2.3 Τεχνολογία και γνωστικά εργαλεία

Μια βασική παραδοχή της έρευνας σχετικά με την χρήση από τους μαθητές της τεχνολογίας για την εκμάθηση των μαθηματικών, είναι ότι η κατανόηση διαμορφώνεται από τη χρήση διαφορετικών εργαλείων. Ως εργαλείο αναφέρεται κάθε τεχνούργημα το οποίο έχει σχεδιαστεί ώστε να εξυπηρετεί ένα συγκεκριμένο σκοπό (Verillón & Rabardel, 1995). Η μελέτη της χρήσης από τους μαθητές τεχνολογικών εργαλείων, στη διδακτική των μαθηματικών, μας βοηθά να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ένα υπολογιστικό περιβάλλον μεταβάλει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν και αντιλαμβάνονται μαθηματικές έννοιες (π.χ. di Sessa 2000, Papert 1980, Noss & Hoyles 1996)

Ο όρος γνωστικό εργαλείο διαμορφώθηκε από τους Lajoie & Derry (1993) όσον αφορά στους υπολογιστές ως εργαλεία διευκόλυνσης της μάθησης. Ο Lajoie διέκρινε τέσσερεις, όχι ανεξάρτητες μεταξύ τους, λειτουργίες των γνωστικών εργαλείων:

α) υποστήριξη των γνωστικών διαδικασιών όπως η μνήμη και οι μεταγνωστικές διαδικασίες,

β) μείωση του γνωστικού φόρτου μέσω της υποστήριξης διαδικασιών που απαιτούν κατώτερες γνωστικές ικανότητες, όπως η πραγματοποίηση απλών πράξεων, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στον μαθητή να επικεντρώσει στην ανάπτυξη υψηλότερων γνωστικών ικανοτήτων,

γ) εμπλοκή του μαθητή σε γνωστικές δραστηριότητες,

δ) δυνατότητα διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων στο πλαίσιο επίλυσης προβλήματος.

Αντίστοιχα ο Van Joolingen (1999) έδωσε τον ακόλουθο ορισμό:

«Ένα γνωστικό εργαλείο είναι ένα εργαλείο το οποίο είναι μέρος του μαθησιακού περιβάλλοντος και υποστηρίζει ή εκτελεί μια αναγνωρίσιμη γνωστική διαδικασία που αποτελεί μέρος της συνολικής μαθησιακής εμπειρίας (σελ. 389) »

Σύμφωνα με τον Van Joolingen ένα γνωστικό εργαλείο μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση του νου. Η άποψη αυτή είναι συνεπής με την θέση του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού ότι η γνώση είναι διαμοιρασμένη, με την έννοια ότι οι πόροι και τα μέσα που μορφοποιούν και καθιστούν δυνατή κάθε δραστηριότητα είναι διαμοιρασμένα σε ανθρώπους, περιβάλλοντα και καταστάσεις (Cole & Engestrom, 1993). Η χρήση συγκεκριμένων εργαλείων εντάσσεται στα πλαίσια κοινωνικοπολιτισμικών διαδικασιών κατασκευής της γνώσης, καθώς τα εργαλεία «κουβαλούν» νοημοσύνη, αφού είναι αποτέλεσμα της απόφασης κάποιον ατόμων ή μιας κοινότητας σχετικά με τα μέσα που θα χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη συγκεκριμένων στόχων. Μέσω της σχεδίασης και των εφευρέσεων προσθέτουμε νοημοσύνη σε φυσικά εργαλεία και αναπαραστασιακά συστήματα. Υπάρχουν πολλοί τρόποι προσέγγισης της γνώσης που υπάρχει σε ένα εργαλείο. Ένας είναι μέσω της διερεύνησης και την ανακάλυψη συγκεκριμένων λειτουργιών του εργαλείου (αυτόνομη μάθηση), μέσω της παρατήρησης του τρόπου χρήσης και προσπάθεια μίμησης ή μέσα από καθοδηγούμενη από ικανότερους άλλους συμμετοχή.

Επίσης, οι Garofalo, Drier, Timmerman, and Shockey (2000) υποστηρίζουν ότι η αποτελεσματική χρήση της τεχνολογίας πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

α) Μια εισαγωγή στο πλαίσιο μέσω των ουσιαστικών δραστηριοτήτων με βάση το περιεχόμενο. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διδάσκουν ένα σύνολο δεξιοτήτων οι οποίες να βασίζονται στην τεχνολογία ή στο λογισμικό και στη συνέχεια να βρουν μαθηματικά θεμάτα για τα οποία οι δεξιότητες αυτές θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες για τη διδασκαλία κατάλληλων μαθηματικών διαδικασιών.

β) Να ασχολείται με την ανάπτυξη των «αξιόλογων - χρήσιμων» μαθηματικών μέσω της κατάλληλης παιδαγωγικής, τις διαδικασίες, τις στρατηγικές και να αντανακλά τη φύση και το πνεύμα των μαθηματικών.

γ) Να συνδέει μαθηματικά θέματα – αντικείμενα.

δ) Να ενσωματώνουν πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Σύμφωνα με του ίδιους, οι δραστηριότητες πρέπει να υποστηρίζουν συγκεκριμένους στόχους και να μην αναπτύσσονται απλά και μόνο επειδή η τεχνολογία το καθιστά εφικτό. Επίσης, η σωστή εκμετάλλευση των δυνατοτήτων της τεχνολογίας προϋποθέτει οι δραστηριότητες να επεκτείνουν ή να ενισχύουν αυτό που θα μπορούσε να επιτευχθεί χωρίς τη χρήση τεχνολογίας. Η τεχνολογία πρέπει να βοηθά στη βαθύτερη εξερεύνηση και κατανόηση μαθηματικών θεμάτων με διαδραστικό τρόπο. Επίσης, η τεχνολογία καθιστά πιο πρακτική τη μελέτη μαθηματικών θεμάτων αίροντας τους υπολογιστικούς περιορισμούς. Σύμφωνα πάντα με τους ίδιους, για να συνδεθούν μαθηματικές περιοχές, οι βασιζόμενες στην τεχνολογία δραστηριότητες πρέπει να διευκολύνουν τις μαθηματικές συνδέσεις μέσω της διασύνδεσης των μαθηματικών περιοχών αλλά και των μαθηματικών περιοχών με φαινόμενα του πραγματικού κόσμου. Τέλος, βασικό στοιχείο αποτελεί η ενσωμάτωση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι πολλοί μαθητές που δυσκολεύονται να συνδέσουν λεκτικές, γραφικές, αριθμητικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις, μπορούν να το επιτύχουν μέσω της κατάλληλης χρήσης της τεχνολογίας.

Η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να βοηθήσει στη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σε ένα πείραμα που διεξήγαγαν οι Blackett και Tall (1991) δύο ομάδες μαθητών μελέτησαν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Η πειραματική ομάδα διερεύνησε αριθμητικές και γεωμετρικές σχέσεις με τη χρήση ενός λογισμικού το οποίο σχεδίαζε ορθογώνια τρίγωνα ώστε να διευκολύνει την παρατήρηση των σχέσεων ανάμεσα σε αριθμητικά και γεωμετρικά δεδομένα. Η ομάδα ελέγχου παρακολούθησε το κλασσικό μάθημα της τριγωνομετρίας στο σχολείο. Σε ένα τεστ που ακολούθησε, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Παρόλο που η έρευνα σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας για τη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι σχετικά μικρή, το αποτέλεσμα αυτό είναι μια ένδειξη ότι η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόησή τους. Καθώς η τεχνολογία παρέχει νέους τρόπους κατασκευής και σύνδεσης αναπαραστάσεων, είναι αναμενόμενο η χρήση της να βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν πληρέστερη εννοιολογική εικόνα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Φαίνεται ότι υπάρχουν δύο βασικές προκλήσεις στη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αρχικά, όταν οι μαθητές μελετούν το ημίτονο και το συνημίτονο ως λόγους πλευρών ορθογωνίου τριγώνου πρέπει να είναι σε θέση να δημιουργήσουν συνδέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά σχήματα και αριθμητικές σχέσεις. Το πιο σημαντικό εμπόδιο είναι η δυσκολία μετάβασης από τη μελέτη του ημιτόνου και του συνημίτονου στο ορθογώνιο τρίγωνο στη μελέτη του ημιτόνου και του συνημιτόνου στον τριγωνομετρικό κύκλο και το καρτεσιανό επίπεδο. Υπάρχουν στοιχεία ότι με τη χρήση ενός τεχνολογικού πλαισίου το οποίο παρέχει εύκολη πρόσβαση σε οπτικές αναπαραστάσεις, μπορεί να βελτιωθεί η κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Blackett & Tall, 1991).

Στη συγκεκριμένη παρέμβαση για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Geogebra. Ο ρόλος του προγράμματος GeoGebra στη συγκεκριμένη εργασία είναι διπλός. Μπορεί κατ' αρχάς να θεωρηθεί ως εργαλείο επέκτασης του νου καθώς χωρίς τη χρήση του κάποιες διαδικασίες όπως η παρακολούθηση δυναμικών σχέσεων ανάμεσα σε κινούμενα σημεία, δεν θα ήταν δυνατόν να εκτελεστούν. Αυτές οι δυναμικές διαδικασίες του GeoGebra παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να παρατηρήσουν, να συνειδητοποιήσουν και να διερευνήσουν μαθηματικές σχέσεις. Επίσης το GeoGebra βοηθά τους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις ανάμεσα σε πολλαπλές αναπαραστάσεις αλλά και να συνδέσουν μεταξύ τους διαφορετικές μαθηματικές έννοιες όπως, στην περίπτωση της τριγωνομετρίας, του μέτρου της γωνίας, τις συναρτήσεις και την περιοδικότητα.

Από την άλλη το Geogebra μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπολογιστικό περιβάλλον το οποίο παρωθεί μια αυθεντική δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων και αποτελεί εργαλείο μάθησης σε μη τυπικά περιβάλλοντα.

2.4 Η έννοια του ακτίνιου και η χρήση του ως όρισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Καθώς το μέτρο μιας γωνίας αποτελεί το όρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, είναι απαραίτητο οι μαθητές να έχουν μια επαρκή εννοιολογική εικόνα της γωνίας αλλά και του μέτρου της. Επίσης για να υπάρξει μια πιο πλήρης κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, πρέπει οι μαθητές να είναι σε θέση να μπορούν να δουν το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια ως ένα πραγματικό αριθμό. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την κατανόηση της έννοιας της γωνίας και του μέτρου της αποτελούν ένα σημαντικό εμπόδιο στην βαθύτερη κατανόηση της τριγωνομετρίας.

Σε έρευνα στην οποία συμμετείχαν υποψήφιοι αλλά και εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών, οι Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Yilmaz, K., & Önder, O. (2006), συμπέραναν ότι δεν είχαν αρκετά πλούσια εικόνα της έννοιας του ακτινίου και ότι κυριαρχούσε η έννοια της μοίρας ως μονάδα μέτρησης μιας γωνίας. Διαπίστωσαν ότι οι συμμετέχοντες δεν θεώρησαν το ακτίνιο ως πραγματικό αριθμό, παρά το γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που τους δόθηκαν ήταν ξεκάθαρα ορισμένες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, μια πρώτη πιθανή πηγή των εννοιολογικών του ακτινίου που είχαν σχηματίσει οι καθηγητές είναι το γεγονός ότι η εξίσωση $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ λειτούργησε ως γνωστική μονάδα, καθώς ο ορισμός της έννοιας του βασίστηκε στη σχέση αυτή. Κανείς από τους συμμετέχοντες στην έρευνα δεν όρισε το ακτίνιο ως το λόγω μήκους τόξου προς μήκος ακτίνας. Επίσης, διαπιστώθηκε ότι οι συμμετέχοντες που είχαν πιο ξεκάθαρη εικόνα της έννοιας του ακτίνιου, δημιούργησαν πιο πλούσιες συνδέσεις ανάμεσα στον τριγωνομετρικό κύκλο και άλλες τριγωνομετρικές έννοιες ενώ αυτοί στους οποίους κυριαρχούσε η έννοια της μοίρας ως μονάδα μέτρησης της γωνίας, χρησιμοποιούσαν το ορθογώνιο τρίγωνο ως γνωστική μονάδα. Μια δεύτερη πιθανή πηγή των εννοιολογικών εικόνων για το ακτίνιο μπορεί να είναι το γεγονός ότι η εννοιολογική εικόνα του π στο πλαίσιο της τριγωνομετρίας είναι διαφορετική από την εννοιολογική εικόνα του π ως πραγματικός αριθμός.

Επίσης, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες και έχουν ελλιπή κατανόηση του μέτρου γωνίας και σε μοίρες (π.χ. Martinez-Sierra 2008, Brown 2005) και σε ακτίνια (π.χ. Moore 2010, Akkoç & Akbaş Gül 2010; Topçu, Ketil, Akkoç, Yılmaz, & Önder, 2006; Orhun 2001). Οι Martinez-Sierra (2008) ανέφεραν ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες με αρνητικά μέτρα γωνιών και μέτρα γωνιών μεγαλύτερα των 360^o. Επίσης ο Brown (2005) ανέφερε ότι οι μαθητές είχαν μια ελλιπή εικόνα της έννοιας της γωνίας ως στροφή, κάτι που αποτελεί εμπόδιο στην εύρεση τριγωνομετρικών λόγων γωνιών καθώς δεν ήταν σε θέση να σχεδιάσουν τις γωνίες αυτές στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Καθώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις τριγωνομετρικές έννοιες βασιζόμενοι στο μέτρο της γωνίας σε μοίρες, ένα επιπλέον εμπόδιο στην κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών και συναρτήσεων είναι η ανάγκη οι μαθητές να είναι σε θέση να μετατρέπουν το μέτρο μιας γωνίας από μοίρες σε ακτίνια. Σύμφωνα με τους (Orhun 2001, Topçu et al. 2006, Akkoç & Akbaş Gül 2010) οι μαθητές θεώρησαν ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί πραγματικών αριθμών που εκφράζανε το μέτρο γωνιών σε ακτίνια και οι οποίοι δεν ήταν πολλαπλάσια του π αναφέρονταν σε γωνιές εκφρασμένες σε μοίρες. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν αναπτύσσουν αρκετά ισχυρή εικόνα της έννοιας του ακτινίου ώστε να μπορούν να θεωρήσουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως πεδίο ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η εισαγωγή του ακτίνιου ως μονάδα μέτρησης γωνιών προσθέτει επιπλέον προβλήματα στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων από τους μαθητές, καθώς δεν μπορούν να το αντιληφθούν ως λόγο δύο μηκών ούτε και να συνδέσουν το μέτρο γωνιών με το μήκος των αντίστοιχων τόξων σε σχέση με την ακτίνα (Akkoç and Akbaş Gül 2010).

2.5 Πολλαπλές αναπαραστάσεις και η έννοια της συνάρτησης

Η έρευνα υποδεικνύει ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών, βοηθά στην βαθύτερη κατανόησή τους (c.f., Choike 2000, Pape & Tchoshanov 2001). Πράγματι, όταν οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις, προετοιμάζονται για το είδος των δραστηριοτήτων οι οποίες είναι κοινές σε αυτούς που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στον επαγγελματικό τους βίο (Greeno & Hall, 1997) – δραστηριότητες που απαιτούν την επιλογή του συνόλου των κατάλληλων αναπαραστάσεων για την κάθε περίπτωση. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα μετάφρασης από μια αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης σε μια άλλη και τη λύση προβλήματος **(**Duval 1993, Gagatsis A. and Shiakalli M. 2004, Hitt 1998, Kaput 1985, Lesh et al. 1987a, 1987b, Owens & Clements 1998)**.** Η ικανότητα αυτή επιτρέπει στους μαθητές να συνδέσουν τις ιδιότητες και πληροφορίες που εμπεριέχονται σε ένα πρόβλημα. Η σωστή ερμηνεία ενός προβλήματος μπορεί να παρεμποδιστεί από έλλειψη σημασιολογικής αντιστοιχίας (semantic congruence) (Duval 1987) ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα. Όταν δύο αναπαραστάσεις δεν είναι ισοδύναμες ως προς το νόημά τους, δημιουργούνται δυσκολίες στο πέρασμα από τη μία στην άλλη κάτι το οποίο σχετίζεται και με δυσκολίες στην λύση προβλήματος (Janvier 1987, Lesh et al. 1987a, 1987b).

Οι τρεις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων είναι η αλγεβρική, η γραφική και η αναπαράσταση με πίνακα. Η αναπαράσταση που θα επιλέξουν οι μαθητές μπορεί να καθορίσει το βαθμό δυσκολίας ή ευκολίας ενός προβλήματος (Knuth 2006b). Είναι σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να χρησιμοποιήσουν και τους τρεις τύπους αναπαράστασης και να μπορούν να μετακινηθούν από τον έναν στον άλλο (Knuth, 2000a). Σύμφωνα με τους Santos – Trigo (2002) η κατάλληλη αναπαράσταση λειτουργεί ως εργαλείο εμπλοκής της μαθηματικής σκέψης. Οι ίδιοι επίσης έδειξαν ότι οι μαθητές είναι ενήμεροι για την ύπαρξη και τη χρησιμότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Ο Herman (2007), διαπίστωσε ότι οι μαθητές κατανοούν ότι για μια συγκεκριμένη περίσταση, μια αναπαράσταση μπορεί να είναι καταλληλότερη από μια άλλη, ενώ η επίδοσή τους βελτιώνονταν με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων καθώς, οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τις διάφορες αναπαραστάσεις ώστε να λύσουν το πρόβλημα με πολλούς τρόπους, ελέγχοντας έτσι την ορθότητα της λύσης τους.

Ενώ η δυνατότητα χρήσης της κατάλληλης αναπαράστασης είναι σημαντική, εξίσου σημαντική -αν όχι πιο σημαντική- είναι η δυνατότητα διασύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων και μετάβασης από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη καθώς έτσι επιτυγχάνεται βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση και βελτιώνεται η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Even 1998). Ομοίως οι Pesek and Kirshner (2000) βρήκαν ότι η κατανόηση συνδέεται με την ενδυνάμωση των συνδέσεων ανάμεσα στις αναπαραστάσεις. Η προϋπάρχουσα γνώση μπορεί επίσης να βελτιωθεί μέσω της δημιουργίας νέων συνδέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων (Santos – Trigo 2002)

2.6 Η σημασία των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην τριγωνομετρία

Δυστυχώς δεν έχει δοθεί η απαραίτητη προσοχή στην τριγωνομετρία και στον τρόπο με τον οποίο οι πολλαπλές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της (Davis 2005). Οι μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος της τριγωνομετρίας, αντιμετωπίζουν το ημίτονο και το συνημίτονο και ως τριγωνομετρικούς αριθμούς και ως συναρτήσεις. Αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλία των τριγωνομετρικών αριθμών και συναρτήσεων είναι η χρήση μιας ποικιλίας αναπαραστάσεων. Καθώς διαφορετικά μαθήματα όπως η Γεωμετρία και η Άλγεβρα και διαφορετικά προβλήματα όπως ο υπολογισμός του ημιτόνου μιας γωνίας και η γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης, απαιτούν τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις οδηγούν σε διαφορετικού είδους κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Η τριγωνομετρία είναι μια από τις περιοχές των μαθηματικών που συνδυάζει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και το γραφικό συλλογισμό (συλλογισμό μέσω γραφημάτων) (Weber 2005). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε πολλαπλά περικείμενα τα οποία βασίζονται σε διακριτές αναπαραστάσεις, όπως αυτές του τριγώνου, του τριγωνομετρικού κύκλου και της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Αρχικά οι μαθητές διδάσκονται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μέσω της «τριγωνομετρίας του ορθογωνίου τριγώνου», όπου οι τριγωνομετρικοί αριθμοί όπως το ημίτονο και το συνημίτονο ορίζονται μέσω του λόγου πλευρών ορθογωνίων τριγώνων. Στη φάση αυτοί οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αντιμετωπίζονται αποκλειστικά ως λόγοι μεγεθών χωρίς να υπεισέρχεται η έννοια της συνάρτησης. Οι μαθητές συναντούν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μετά την εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου, ο οποίος και αποτελεί και το βασικό μηχανισμό απεικόνισης. Με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου η μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών απομακρύνεται από την τριγωνομετρία του τριγώνου και προσανατολίζεται στη χρήση του μέτρου της γωνίας ως όρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη νοηματοδότηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έχουν καταγραφεί σε πολλές περιπτώσεις. Η βασικότερη από αυτές φαίνεται να είναι το γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν μέσω αλγεβρικών τύπων ή διαδικασιών και για το λόγο αυτό η συλλογιστική των μαθητών σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές είναι προβληματική (Breidenbach, Dubinksy, Hawks, & Nichols, 1992). Για να κατανοήσουν τους τριγωνομετρικούς λόγους στο πλαίσιο της τριγωνομετρίας τριγώνου, οι μαθητές πρέπει να συσχετίσουν διαγράμματα και αριθμητικές σχέσεις και να μπορούν να χειριστούν σύμβολα απαραίτητα για την αναπαράσταση αυτών των σχέσεων (Blackett & Tall, 1991). Η εργασία μέσω των διαφορετικών αυτών αναπαραστάσεων μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο για τους μαθητές, ακόμα και πριν την εισαγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Η διδασκαλία της τριγωνομετρίας μέσω του ορθογωνίου τριγώνου δίνει έμφαση στη γνώση διαδικασιών όπως η ονομασία τριγώνων και ο υπολογισμός λόγων. Επίσης η διαδικαστική γνώση μπορεί να αποβεί εις βάρος της εννοιολογικής κατανόησης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Kendal & Stacey 1997). Επιπλέον, οι μαθητές οι οποίοι αντιμετωπίζουν αρχικά τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως λόγους πλευρών σε ορθογώνια τρίγωνα τείνουν να θεωρούν ως όρισμα των συναρτήσεων τα τρίγωνα παρά τις γωνίες (Thompson 2008). Οι μαθητές μπορεί να δυσκολεύονται να μεταβούν από την τριγωνομετρία του ορθογωνίου τριγώνου στην τριγωνομετρία του τριγωνομετρικού κύκλου και να κάνουν τις κατάλληλες συνδέσεις ανάμεσα σε αυτές τις αναπαραστάσεις (Bressoud 2010, Thompson 2008, Thompson, Carlson, & Silverman 2007). Οι δυσκολίες της μετάβασης αυτής μπορεί να προέρχονται από παρανοήσεις σχετικά με το μέτρο γωνίας και ιδιαίτερα από τη σύνδεση ανάμεσα σε μοίρες και ακτίνια (Moore 2013). Δεδομένου ότι ο τριγωνομετρικός κύκλος αποτελεί τη βάση για την κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, η δυσκολία μετάβασης από την τριγωνομετρία του ορθογωνίου τριγώνου στον τριγωνομετρικό κύκλο δημιουργεί πολλά προβλήματα στην εισαγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έρευνες σχετικά με την εκμάθηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εστιάσανε στην εύρεση διδακτικών δραστηριοτήτων που να υποστηρίζουν τη μετάβαση από την απομνημόνευση απομονωμένων γεγονότων και διαδικασιών στην εννοιολογική κατανόηση, τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και τις συνδέσεις μεταξύ τους, τη μαθηματική μοντελοποίηση και λύση προβλήματος (Hirsch, Weinhold, & Nichols 1991, p. 98). O Weber (2005) συνέκρινε δύο ομάδες μαθητών που παρακολουθούσαν το μάθημα της τριγωνομετρίας. Στη μια ομάδα η διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έγινε με την τυπική σειρά περνώντας από την τριγωνομετρία του ορθογωνίου τριγώνου στον τριγωνομετρικό κύκλο και από εκεί στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στην πειραματική ομάδα η διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έγινε αρχικά μέσω της αναπαράστασης του τριγωνομετρικού κύκλου ενώ στη συνέχεια υπήρξε μια συνεχής συσχέτιση των γραφημάτων στο καρτεσιανό επίπεδο με τα ορθογώνια τρίγωνα η οποία κατέληξε στις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στα τεστ και τις συνεντεύξεις που ακολούθησαν, η επίδοση των μαθητών που συμμετείχαν στη πειραματική ομάδα ήταν σημαντικά καλύτερη από αυτή των μαθητών που παρακολούθησαν την παραδοσιακή διδασκαλία. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας φάνηκε να έχουν βαθύτερη κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε αντίθεση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου οι οποίοι έδειξε να έχουν πολύ χαμηλή κατανόηση. Μια παρόμοια έρευνα με τον Weber πραγματοποίησε και ο Bressoud (2010), στην οποία εισήγαγε την τριγωνομετρία του μοναδιαίου κύκλου πριν την τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου. Η απομάκρυνση της προσοχής των παιδιών από τους υπολογισμούς οι οποίοι πραγματοποιούνται στα ορθογώνια τρίγωνα φάνηκε να υποστηρίζει την ανάπτυξη μιας εννοιολογικής κατανόησης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σύμφωνα και με τις δύο μελέτες η εννοιολογική κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ήταν εύθραυστη ακόμη και μετά την ολοκλήρωση της μελέτης της έννοιας. Ωστόσο η αλλαγή του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές κατασκευάζουν και συνδέουν αναπαραστάσεις είχε θετική επίδραση στη μάθησή.

Τέλος, σύμφωνα με τον Moore (2010) η διερεύνηση της συμμεταβολής του μήκους του τόξου με τις κάθετες θέσεις του σημείο του μεταβαλλόμενου άκρου του στον τριγωνομετρικό κύκλο μπορεί να είναι αποτελεσματική για την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων η οποία θα βασίζεται στην βασική έννοια του ακτινίου.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Ερευνητική μέθοδος

Η ερευνητική μέθοδος επιλέχθηκε στη βάση του θεωρητικού πλαισίου στο οποίο στηρίχθηκε η παρούσα έρευνα, του αντικειμένου της έρευνας και της φύσης των ερευνητικών ερωτημάτων. Καθώς, σύμφωνα με τον Yin (2003) ο ερευνητής πρέπει να επιλέξει ως μεθοδολογία έρευνας την μελέτη περίπτωσης όταν υπάρχουν οι ακόλουθες συνθήκες:

α) τα ερωτήματα της μελέτης αφορούν στο «πως» και στο «γιατί»,

β) δεν μπορεί να χειριστεί την συμπεριφορά αυτών που εμπλέκονται στη μελέτη,

γ) θέλει να συνυπολογίσει τις συντρέχουσες συνθήκες καθώς πιστεύει ότι σχετίζονται με το υπό μελέτη φαινόμενο,

δ) δεν είναι ξεκάθαρα τα όρια ανάμεσα στο φαινόμενο και στο πλαίσιο,

οι οποίες συντρέχουν και στην παρούσα έρευνα ως ερευνητική μέθοδος επιλέχθηκε η μελέτη περίπτωσης. Η μελέτη περίπτωσης είναι μια μέθοδος ποιοτικής έρευνας που παρέχει στον ερευνητή τα κατάλληλα εργαλεία ώστε να μελετήσει σύνθετα φαινόμενα εντός των πλαισίων τους. Σύμφωνα με τον Thomas (2011):

«Οι μελέτες περίπτωσης αποτελούν αναλύσεις ατόμων, γεγονότων, αποφάσεων, περιόδων, ιδρυμάτων ή άλλων συστημάτων που μελετούνται ολιστικά από μια ή περισσότερες μεθόδους. Η περίπτωση που αποτελεί το αντικείμενο της έρευνας θα είναι ένα παράδειγμα μιας κατηγορίας φαινομένων η οποία παρέχει ένα αναλυτικό πλαίσιο – ένα αντικείμενο – εντός του οποίου διεξάγεται η έρευνα και το οποίο η περίπτωση διαφωτίζει και ερμηνεύει»

Οι ποιοτικές μέθοδοι έρευνας θεωρείται ότι δεν έχουν την εγκυρότητα, την ακρίβεια και την αξιοπιστία των ποσοτικών ερευνών λόγω της υποκειμενικής φύσης των αποτελεσμάτων τους. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν αφορούν στο συγκεκριμένο ερευνητικό πλαίσιο καθώς τα ευρήματα πάνω στα οποία στηρίχθηκαν δεν είναι δυνατόν να επιβεβαιωθούν μέσω της επανάληψης του πειράματος στο ίδιο πλαίσιο ενώ λόγω του μικρού και μη αντιπροσωπευτικού δείγματος δεν είναι δυνατόν να γενικευθούν (Brown & Dowling 1998). Το ζητούμενο λοιπόν σε μια ποιοτική έρευνα όπως αυτή, δεν είναι η διατύπωση γενικών αρχών και κανόνων αλλά μια ερμηνεία των φαινομένων μέσω μιας επαγωγικής και αφαιρετικής διαδικασίας.

3.2 Το περικείμενο της έρευνας

Η έρευνα έλαβε χώρα σε δημόσιο Γενικό Λύκειο το σχολικό έτος 2014 – 2015. Το συγκεκριμένο σχολείο, το οποίο είναι δημόσιο, επιλέχθηκε ώστε το περικείμενο της έρευνας να είναι όσο το δυνατόν εγγύτερα στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα (Kontogiannopoulou – Polydes, 1996). Αν και είναι πιθανόν το συγκεκριμένο σχολείο να μην είναι αντιπροσωπευτικό των ελληνικών δημοσίων Γενικών Λυκείων, έχει πολλά κοινά με τα υπόλοιπα δημόσια Γενικά Λύκεια όπως για παράδειγμα ο τρόπος επιλογής του προσωπικού, ο ρόλος της διεύθυνσης του σχολείου, οι διδακτικές μέθοδοι που εφαρμόζονται, το ωρολόγιο πρόγραμμα και τα αναλυτικά προγράμματα που ακολουθούνται, κάτι που επιτρέπει στην παρούσα έρευνα να λειτουργήσει ως πλαίσιο αναφοράς για παρόμοιες εφαρμογές και σε άλλα σχολεία. Ένας άλλος λόγος που επιλέχθηκε το συγκεκριμένο σχολείο ήταν το γεγονός πως ο ερευνητής διδάσκει σε αυτό κάτι που του επέτρεψε να έχει άμεση πρόσβαση στην υλικοτεχνική υποδομή του σχολείου αλλά και να επιλέξει τους μαθητές αυτούς που κατά την κρίση του θα μπορούσαν να συμβάλουν ώστε η έρευνα να ολοκληρωθεί με επιτυχία.

Στην έρευνα πήραν μέρος τέσσερεις μαθητές της Β΄ λυκείου οι οποίοι χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων και πραγματοποιήθηκαν συνολικά τρεις δίωρες συναντήσεις. Οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα τις έννοιες των τριγωνομετρικών αριθμών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης, η επίδοση των μαθητών στις δραστηριότητες και στη λύση ασκήσεων που ήταν στο πνεύμα του σχολικού βιβλίου ήταν από ικανοποιητική έως άριστη. Η επιλογή μαθητών που έχουν ήδη διδαχθεί τις συγκεκριμένες έννοιες έγινε ώστε να διερευνηθούν τα ακόλουθα:

α) ο βαθμός κατανόησης των εννοιών που σχετίζονται με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις,

β) κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν τις αποκτηθείσες γνώσεις σε ένα διαφορετικό πλαίσιο,

γ) αν το ψηφιακό εργαλείο μπορεί να μετατραπεί σε ένα γνωστικό εργαλείο για την εμπέδωση, επέκταση, αναπλαισίωση και εφαρμογή των γνώσεων

δ) αν οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις των εννοιών.

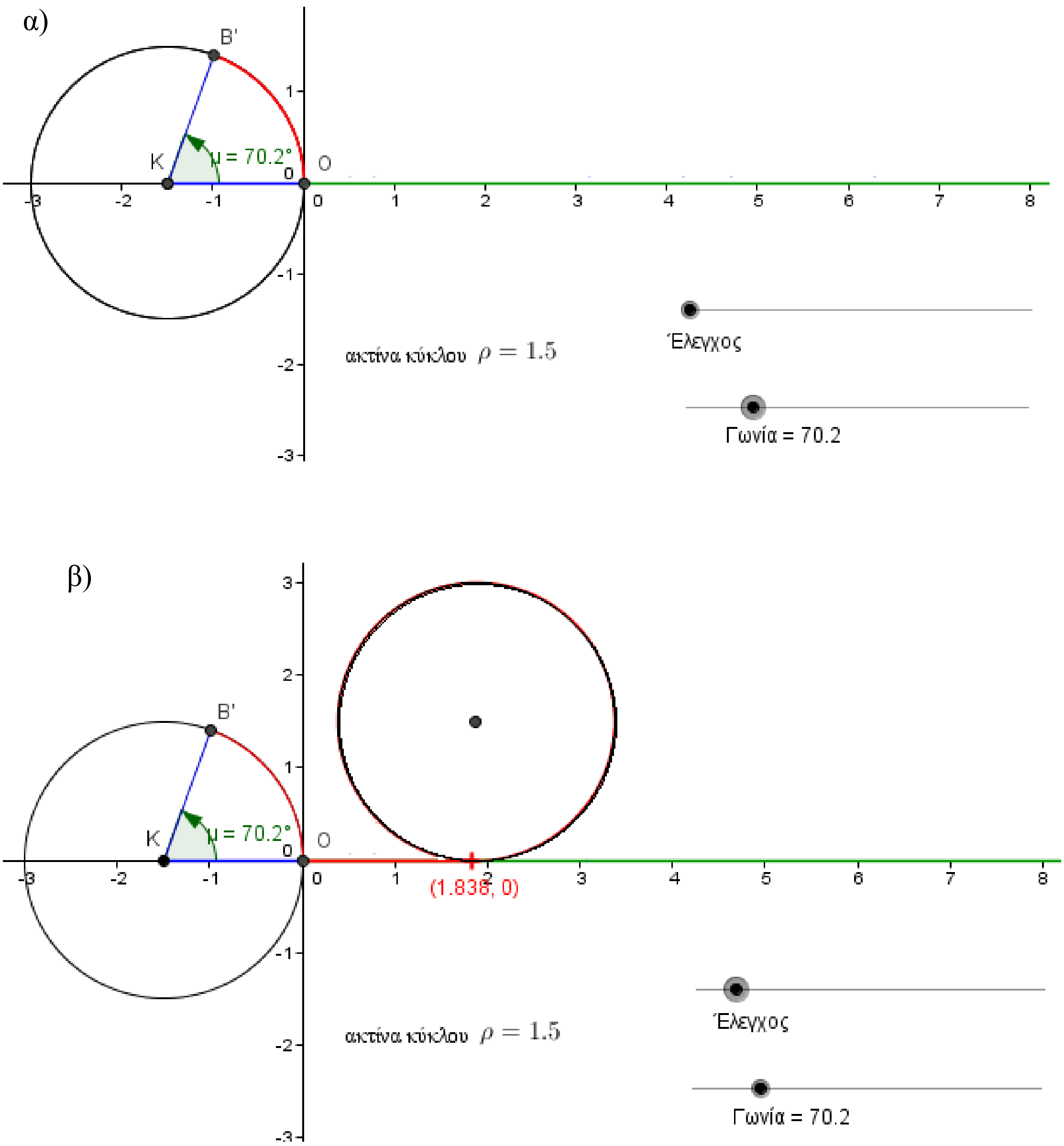
Σχετικά με τον ρόλο του ερευνητή στη διαδικασία, οι επιλογές ποικίλουν από την πλήρη συμμετοχή του ως τη μη συμμετοχή του στη διαδικασία. Όμως, και οι δύο αυτές επιλογές είναι προβληματικές (brown & Dowling, 1998). Για το λόγο αυτό κατά τη διάρκεια της έρευνας ο ερευνητής συμμετείχε μεν στην ερευνητική διαδικασία, η συμμετοχή του όμως ήταν διακριτική και αποσκοπούσε κυρίως σε παροχή διευκρινήσεων ενώ οι ερωτήσεις που έκανε είχαν ως στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να διατυπώσουν πιο καθαρά τις σκέψεις τους.

3.3 Ανάλυση δραστηριοτήτων

Η δραστηριότητα που πραγματοποιήθηκε χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος εστιάζει στην έννοια του ακτινίου ως μονάδα μέτρησης γωνιών, τη σύνδεσή του με το μέτρο της γωνίας σε μοίρες, τη σχέση του με το μήκος τόξου αλλά και τη σύνδεσή του με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο δεύτερο μέρος μελετάται ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές συνδέουν την τριγωνομετρία του τριγώνου με την τριγωνομετρία το τριγωνομετρικού κύκλου και στη συνέχεια τον τριγωνομετρικό κύκλο με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις τους.

Πρώτο Μέρος της Δραστηριότητας

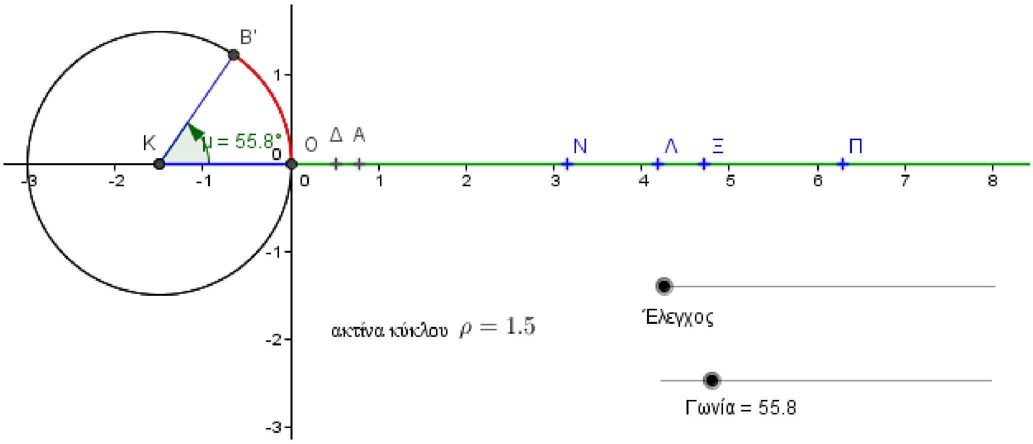
Καθώς όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, η έννοια του ακτινίου είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το ακτίνιο, στα προβλήματα που παρουσιάζονται κατά τη χρήση του ως μονάδα μέτρησης γωνιών και ως ανεξάρτητη μεταβλητή στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η σύνδεση του μέτρου μιας γωνίας σε ακτίνια με τον άξονα των πραγματικών αριθμών επιχειρήθηκε να γίνει μέσω της σύνδεσης της γωνίας με το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Το πρώτο μέρος της δραστηριότητας είχε ως στόχο να διερευνήσει σε πρώτη φάση κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τη σχέση μεταξύ τους μήκους τόξου και της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, της οποίας το μέτρο σε μοίρες είναι γνωστό, σε ένα κύκλο με σταθερή ακτίνα. Ζητήθηκε αρχικά από τους μαθητές να καταγράψουν το λόγο $\frac{Γωνία}{Μήκος\ τόξου}$ για διάφορες τιμές της γωνίας σε κύκλο με ακτίνα 1,5 ώστε να καταλήξουν μέσω παρατήρησης σε μια σχέση που να συνδέει τα δύο μεγέθη. Ο τρόπος μέτρησης του μήκους τόξου σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να παραπέμπει στην τοποθέτηση σημείων στο άξονα $x΄x$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μετακινώντας τον δρομέα «γωνία» επιλέγουν μια τυχαία επίκεντρη γωνία και στη συνέχεια με τον δρομέα «έλεγχος» κυλούν τον κύκλο κατά μήκος του άξονα $x'x$. Όταν το άκρο του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία έρχεται σε επαφή με τον άξονα εμφανίζονται οι συντεταγμένες του αντίστοιχου σημείου, κάτι που δίνει με έμμεσο τρόπο και το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Ο τρόπος αυτός μέτρησης επιλέχθηκε καθώς στο δεύτερο μέρος της παρέμβασης, οι μαθητές θα πρέπει να συσχετίσουν το μέτρο της επίκεντρης γωνίας σε ακτίνια με το μήκος τόξου στον μοναδιαίο κύκλο και στη συνέχεια να το συσχετίσουν με το όρισμα της τριγωνομετρικής συνάρτησης και τη γραφική της παράσταση. Στο σχήμα 1 φαίνεται ο αρχικός κύκλος (α) και ο τρόπος που προκύπτει το μήκος του αντίστοιχου τόξου μετά τη κύλιση κατά μήκος του άξονα $x'x$ (β).



Σχήμα 1.

α) Αρχικός κύκλος β) Συντεταγμένες του σημείου του άξονα $x'x$ στο οποίο καταλήγει το άκρο Β’ του τόξου μετά από κύλιση.

Στο δεύτερο ερώτημα ζητείται αρχικά από τους μαθητές να ελέγξουν την ορθότητα της σχέσης στην οποία κατέληξαν, υπολογίζοντας βάση αυτής την επίκεντρη γωνία της οποίας το αντίστοιχο τόξο έχει μήκος τέτοιο ώστε κατά την κύλιση του κύκλου το άκρο του να καταλήγει σε σημεία του άξονα $x'x$ με γνωστές συντεταγμένες.



Σχήμα 2

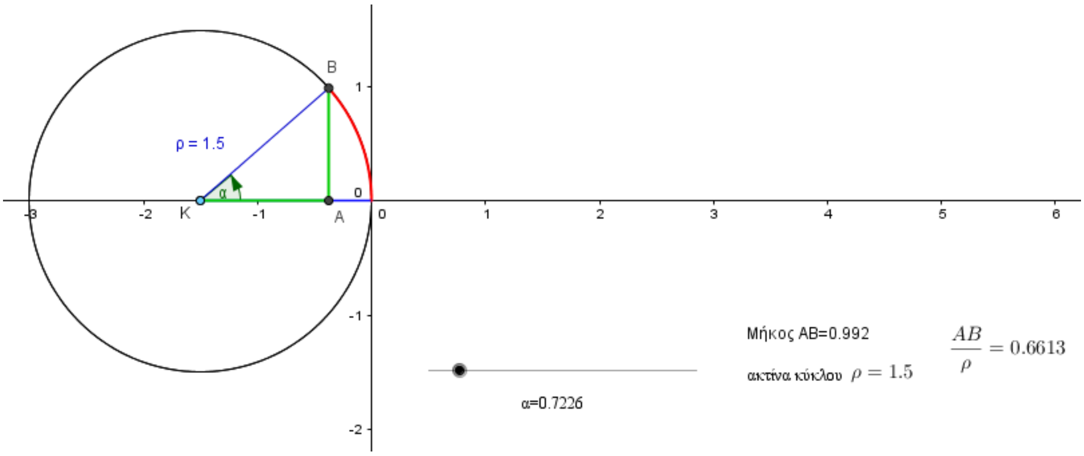
Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να επαναλάβουν τη διαδικασία των πρώτων δύο ερωτημάτων μεταβάλλοντας αρχικά την ακτίνα του κύκλου σε $\rho = 3$ αλλά και για διάφορες τιμές της ακτίνας. Με τα ερωτήματα αυτά αρχικά δημιουργείται μια γνωστική σύγκρουση, καθώς οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι η αρχική σχέση παύει να ισχύει όταν αλλάξει η ακτίνα του κύκλου οπότε καλούνται να αναμορφώσουν τη σχέση αυτή συμπεριλαμβάνοντας και την ακτίνα του κύκλου. Η παραπάνω σειρά των ερωτημάτων διαφέρει από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές διδάχθηκαν την έννοια του ακτίνιου στο σχολείο όπου η εισαγωγή της έννοιας βασίζεται στην ομοιότητα των κύκλων, στη σταθερότητα του λόγου $\alpha = \dfrac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon}{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha}$, για δεδομένη γωνία. Καθώς οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τη συγκεκριμένη έννοια, στόχος της σειράς που τέθηκαν τα ερωτήματα είναι να διερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές έχουν συνδέσει τα τρία αυτά μεγέθη και έχουν αντιληφθεί τις σχέσεις αναλογίας που τα συνδέουν.

Στο υπόλοιπο μέρος του ερωτηματολογίου, η έννοια του ακτινίου προσεγγίστηκε με την σειρά με την οποία διδάσκεται και στην τάξη. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν το λόγο $\alpha = \dfrac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon}{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha}$ για διάφορες τιμές της ακτίνας

ρ και σταθερή γωνία μ, χωρίς όμως να αναφέρεται πουθενά ότι ο λόγος α δεν είναι τίποτε άλλο από το γνωστό τους μέτρο της γωνίας σε ακτίνια. Επανέλαβαν αυτή τη διαδικασία για διάφορες τιμές της γωνίας μ παρατηρώντας έτσι ότι ο λόγος δεν εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου αλλά μόνο από τη γωνία. Ακολούθως οι μαθητές υπολόγισαν το λόγο $\frac{\mu}{\alpha}$ για τις διάφορες τιμές της γωνίας μ ώστε να παρατηρήσουν ότι παραμένει σταθερός. Στόχος ήταν να διαπιστωθεί σε ποιο βαθμό οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν και να εντάξουν τις γνώσεις τους σε ένα διαφορετικό πλαίσιο, να συνδέσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις, αν μπορούν να θεωρήσουν τον λόγο $\alpha = \frac{\mu ήκος\ τόξου}{ακτίνα}$ που δεν είναι τίποτε άλλο από το μέγεθος μιας γωνίας σε ακτίνια το οποίο έχουν ήδη διδαχθεί, ως ένα μέτρο της γωνίας και αν μέσα από τη σταθερότητα του λόγου είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τη σχέση $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{2\pi}$ την οποία επίσης έχουν διδαχθεί.

Δεύτερο Μέρος της Δραστηριότητας

Το δεύτερο μέρος της δραστηριότητας σχεδιάστηκε ώστε για να αποτελέσει πιθανώς ένα διδακτικό εργαλείο αλλά και να διερευνήσει τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στη σύνδεση του τριγωνομετρικού κύκλου με την τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου, τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου ως βασικού μηχανισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αλλά και τη σύνδεσή του με τη γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Οι μαθητές αρχικά υπολόγισαν το λόγο $\lambda = \frac{AB}{\rho}$, όπου ρ η ακτίνα κύκλου το κέντρο του οποίου είναι πάνω στον άξονα $x'x$, όχι όμως στην αρχή, ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και AB η απέναντι πλευρά του ορθογωνίου που σχηματίζεται αν από το πέρας A που αντιστοιχεί στο άκρο της ακτίνας φέρουμε κάθετη στον $x'x$. Ο συγκεκριμένος κύκλος δεν είναι ο τριγωνομετρικός κύκλος, όμως η εικόνα και η χρήση του είναι άμεσα συνδεδεμένη με αυτόν και δεν αναμένεται ένας μαθητής που έχει κατανοήσει τη λειτουργία του τριγωνομετρικού κύκλου να δυσκολευθεί να ερμηνεύσει την έννοια του ημιτόνου μέσω του κύκλου της δραστηριότητας και αντίστροφα. Επίσης λόγω περιορισμών που προκύπτουν από την κατασκευή της δραστηριότητας, η μόνη τριγωνομετρική συνάρτηση που μελετήθηκε ήταν η συνάρτηση του ημιτόνου. Καθώς οι έννοιες που εμπλέκονται στην κατανόηση και ερμηνεία και των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι οι ίδιες, κρίθηκε ότι η μελέτη της κατανόησης από τους μαθητές της συγκεκριμένης μόνο συνάρτησης είναι επαρκής καθώς τα συμπεράσματα μπορούν να επεκταθούν και στις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

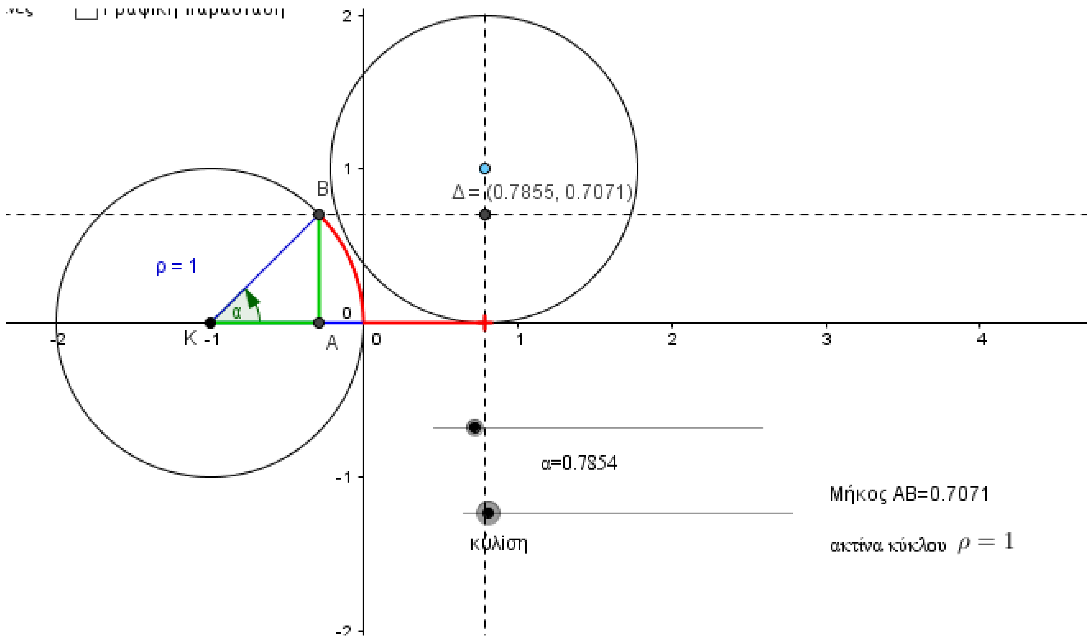


Σχήμα 3

Οι μαθητές αφού αρχικά υπολογίσουν το λόγο, για διάφορες τιμές της γωνίας α, υπολογίζουν τον ίδιο λόγο για τις ίδιες τιμές της γωνίας αλλά με διαφορετική τώρα ακτίνα και στη συνέχεια του ζητείται να ερμηνεύσουν τις παρατηρήσεις τους. Καθώς τα ερωτήματα δεν αναφέρονται ξεκάθαρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABK, στόχος είναι να εξετασθεί αν οι μαθητές οι οποίοι έχουν ήδη διδαχθεί τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι σε θέση να ερμηνεύσουν μέσω της ομοιότητας των ορθογωνίων τριγώνων τη σταθερότητα του λόγου της απέναντι πλευράς προς την ακτίνα στα πλαίσια ενός κύκλου στον οποίο η γωνία είναι επίκεντρη. Η ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύσουν σωστά τα αποτελέσματα είναι απαραίτητη ως ένα πρώτο βήμα για να περάσουν από την τριγωνομετρία του ορθογωνίου τριγώνου, στην τριγωνομετρία του μοναδιαίου κύκλου και να συνδέσουν τις δύο αναπαραστάσεις. Επίσης, είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές το γεγονός ότι ο λόγος παραμένει σταθερός για μια συγκεκριμένη γωνία και είναι ανεξάρτητος από την ακτίνα του κύκλου, ώστε στη συνέχεια να επιλέξουν το μήκος της ακτίνας να είναι ίσο με τη μονάδα, οπότε το μήκος του τόξου μιας γωνίας θα είναι ίσο με το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια. Αυτό θα τους επιτρέψει να χρησιμοποιήσουν τον συγκεκριμένο μηχανισμό για την παραγωγή της γραφικής παράστασης της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Στην τρίτη ερώτηση οι μαθητές πρέπει να βρουν με ποιον τρόπο σχετίζεται η τεταγμένη y_B του σημείου B με τον λόγο $\frac{AB}{\rho}$. Επιτυγχάνεται με τον τρόπο αυτό μια πρώτη συσχέτιση του λόγου των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με τις συντεταγμένες του σημείου του κύκλου. Στην τέταρτη και στην πέμπτη ερώτηση, οι μαθητές καλούνται, αφού έχουν συσχετίσει την τεταγμένη y_B του σημείου B με το μήκος του τμήματος AB και το λόγο λ, να βρουν γωνίες οι οποίες έχουν τον ίδιο ή αντίθετους λόγους. Σημειώνεται ότι η εφαρμογή είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε όταν οι μαθητές μεταβάλλουν το μέτρο της γωνίας να μην εμφανίζεται ο λόγος $\frac{AB}{\rho}$. Αυτό έγινε ώστε οι μαθητές να μην μπορούν να προσεγγίσουν μέσω της παρατήρησης της τιμής του λόγου την σωστή απάντηση αλλά να πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις κατάλληλες συμμετρίες στον τριγωνομετρικό κύκλο. Με τον τρόπο αυτό ερευνάται ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής μπορεί χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του κύκλου να βρει γωνίες με ίδιο ή αντίθετο λόγο, δηλαδή ίδιο ή αντίθετο ημίτονο. Αυτό είναι ένα απαραίτητο βήμα ώστε η έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού να επεκταθεί και σε αμβλείες αλλά και μη κυρτές γωνίες. Από μαθητές που έχουν κατανοήσει την έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών, την τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου και τον τριγωνομετρικό κύκλο, αναμένεται να μην αντιμετωπίσουν ιδιαίτερες δυσκολίες στο μέρος αυτό της δραστηριότητας καθώς κατά τη διδασκαλία του μαθήματος στην τάξη οι διάφορες συμμετρίες χρησιμοποιούνταν αρκετά συχνά για να νοηματοδοτήσουν τη σχέση ανάμεσα σε τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών, αντίθετων και γωνιών που διαφέρουν κατά π. Επιπλέον μέσω της πιο πάνω διαδικασίας αναδεικνύεται ο τριγωνομετρικός κύκλος ως μηχανισμός υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών. Στο έκτο ερώτημα ζητείτε από τους μαθητές, αφού παρατηρήσουν ότι ο λόγος $\frac{y_B}{\rho}$ παραμένει σταθερός για οποιαδήποτε, κυρτή ή μη κυρτή γωνία, να ερμηνεύσουν την παρατήρησή τους αυτή. Στόχος είναι να διερευνηθεί, ιδίως όταν πρόκειται για μη κυρτή γωνία, αν οι μαθητές μπορούν να ερμηνεύσουν την παρατήρησή τους γεωμετρικά μέσω της ομοιότητας των σχημάτων.

Τα επόμενα ερωτήματα αφορούν στην χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου ως μηχανισμού απεικόνισης στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι μαθητές αφού ανακαλέσουν στη μνήμη τους από την πρώτη δραστηριότητα τη σχέση που συνδέει το μέτρο επίκεντρης γωνίας σε ακτίνια με την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του αντίστοιχου τόξου, υπολογίζουν τις συντεταγμένες των σημείων $\Delta\left(\alpha, \frac{y_B}{\rho}\right)$ για διάφορες τιμές του μέτρου α σε ακτίνια της γωνίας Στη συνέχεια με το δρομέα «κύλιση» εμφανίζουν στο καρτεσιανό επίπεδο το σημείο με συντεταγμένες $\left(OB, y_B\right)$ όπου OB το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία με μέτρο α .

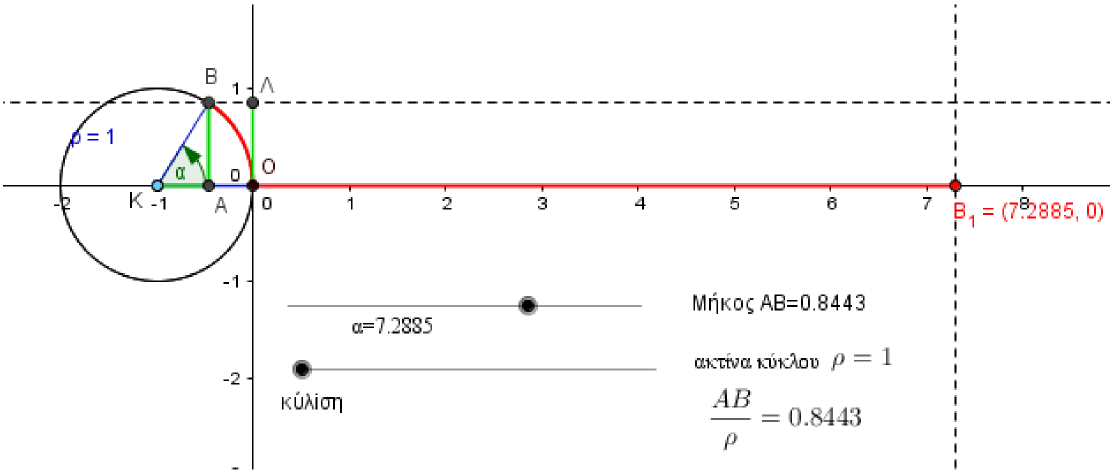


Σχήμα 4

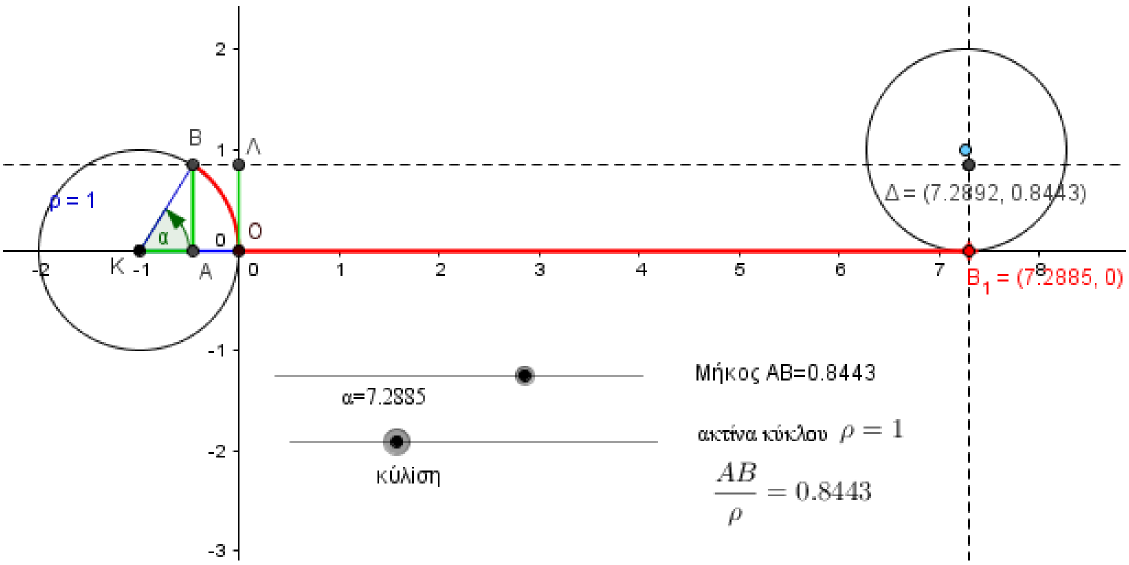
Είναι προφανές ότι καθώς αρχικά η ακτίνα του κύκλου είναι διαφορετική της μονάδας, οι συντεταγμένες του σημείου που εμφανίζεται είναι διαφορετικές από τις συντεταγμένες που έχουν υπολογίσει οι μαθητές. Ζητείται τότε από τους μαθητές να διορθώσουν το μηχανισμό, να βρουν δηλαδή ότι η ακτίνα του κύκλου πρέπει να είναι ίση με τη μονάδα, ώστε να λειτουργεί σωστά και να βρίσκει τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι αυτές που οι μαθητές έχουν υπολογίσει για τις διάφορες τιμές της γωνίας α . Επιτυγχάνεται έτσι, όχι μόνο η σύνδεση του μέτρου μιας γωνίας σε ακτίνια με τον άξονα των πραγματικών αριθμών αλλά και η χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου ως βασικού μηχανισμού για την εύρεση στο καρτεσιανό επίπεδο σημείων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης, αναδεικνύεται έμμεσα και η χρησιμότητα χρήσης του ακτινίου ως μονάδα μέτρησης του μέτρου μιας γωνίας, καθώς χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης μήκους την ακτίνα του κύκλου, το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια είναι και το μήκος του τόξου το οποίο μας δίνει και το αντίστοιχο σημείο στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μέχρι το σημείο αυτό έχει ολοκληρωθεί, χωρίς να έχει ξεκάθαρα ειπωθεί στους μαθητές, η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου ως μηχανισμού απεικόνισης μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης. Προκειμένου να ελεγχθεί αν οι μαθητές είναι σε θέση να συνδέσουν έναν μηχανισμό εύρεσης σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο με την έννοια της συνάρτησης, θεωρήθηκε σκόπιμο να ερωτηθούν σχετικά με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης και τον τρόπο που αυτή σχετίζεται με τη γραφική της παράσταση καθώς και αν τα σημεία που βρήκαν με τον μηχανισμό αυτό μπορεί να είναι σημεία γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και αν ναι να εξετάσουν αν υπάρχει μια αλγεβρική σχέση για τη συνάρτηση αυτή. Θεωρείται ότι ένας μαθητής που έχει κατανοήσει την έννοια τη συνάρτησης πρέπει να είναι σε θέση να αντιληφθεί και να διευκρινίσει τους λόγους για τους οποίους τα σημεία που βρέθηκαν μπορεί να είναι σημεία γραφικής παράστασης συνάρτησης. Αντίστοιχα οι μαθητές που έχουν κατανοήσει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αν δεν έχουν ήδη αντιληφθεί ότι πρόκειται για τη συνάρτηση ημίτονο, αναμένεται τουλάχιστον να μην θεωρήσουν απαραίτητη την ύπαρξη αλγεβρικού τύπου ώστε μια διαδικασία απεικόνισης να αποτελεί συνάρτηση.

Το επόμενο βήμα είναι να εξετασθεί αν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τον ίδιο μηχανισμό για να βρουν σημεία του επιπέδου όταν το μέτρο της γωνίας είναι μεγαλύτερο από 2π. Για το λόγο αυτό, εμφανίζεται στον άξονα $x'x$ τμήμα με αρχή την αρχή των αξόνων και μήκος το οποίο αντιστοιχεί σε μήκος τόξου γωνίας που μπορεί να είναι μεγαλύτερη των 2π. Προκειμένου τώρα το σημείο που αντιστοιχεί στο πέρας του τόξου να συμπέσει με το πέρας του ευθύγραμμου τμήματος κατά την κύλιση του κύκλου πάνω στον άξονα, θα πρέπει αυτός να κάνει περισσότερες από μια περιστροφές. Με τον τρόπο αυτό συνδέονται τόξα που αντιστοιχούν σε γωνίες με μέτρα μεγαλύτερα των 2π με το σημείο στον άξονα που θα βρεθεί το άκρο του αντίστοιχου τόξου αν ο κύκλος πραγματοποιήσει κατά την κύλισή του περισσότερες από μία περιστροφές. Επιτυγχάνεται έτσι η μια σύνδεση του θετικού ημιάξονα των πραγματικών αριθμών, άρα και των θετικών πραγματικών αριθμών, με το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια, κάτι που θεωρείται κρίσιμο προκειμένου να είναι σε θέση οι μαθητές να θεωρήσουν τους πραγματικούς αριθμούς ως πεδίο ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Κρίθηκε ότι το συγκεκριμένο υπολογιστικό περιβάλλον δεν προσφέρεται για να πραγματοποιηθεί αντίστοιχη επέκταση σε γωνίες με αρνητικό μέτρο.

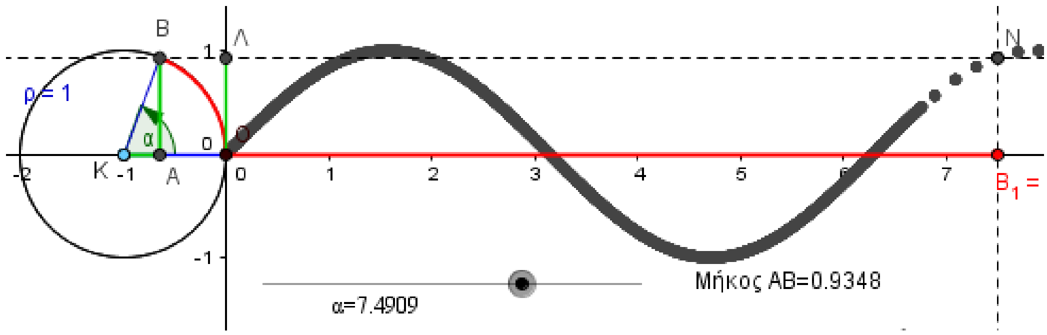


Σχήμα 5



Σχήμα 6

Στο τελευταίο μέρος της δραστηριότητας, μεταβάλλοντας το μέτρο της γωνίας α μεταβάλλεται αντίστοιχα και η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο του σημείου που προκύπτει μέσω της μέχρι τώρα διαδικασίας. Καθώς το σημείο αφήνει ίχνος στις θέσεις από τις οποίες περνάει σχηματίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο. Γίνεται έτσι προσπάθεια να συνδεθεί η συνάρτηση ως διαδικασία με τη συνάρτηση ως αντικείμενο μέσω της σύνδεσής της με τη γραφική της παράσταση, καθώς η τελευταία παραπέμπει στην αντιμετώπιση της συνάρτησης ως ένα αντικείμενο, μια ενιαία γραμμή και όχι μόνο ως μια διαδικασία μέσω της οποίας σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχεί μια τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Ερμηνεύοντας σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν πότε είναι αύξουσα, φθίνουσα που παρουσιάζει ακρότατα και ποια είναι αυτά. Επίσης, μέσω του δυναμικού χειρισμού και της κίνησης του σημείου, οι έννοιες αυτές νοηματοδοτούνται μέσα σε ένα διαφορετικό πλαίσιο. Επιπλέον δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να συνδέσουν την θέση και την κίνηση του άκρου του τόξου στον τριγωνομετρικό κύκλο με τη θέση και την κίνηση του σημείου της συνάρτησης ημίτονο στο καρτεσιανό επίπεδο. Στο τέλος αφού διευκρινηστεί στους μαθητές ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι η συνάρτηση ημίτονο, τους ζητείται να βρουν το ημίτονο συγκεκριμένων γωνιών σε ακτίνια. Καθώς δεν υπάρχει αλγεβρικός τύπος για τη συγκεκριμένη συνάρτηση, οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν το μηχανισμό που παρέχει η συγκεκριμένη δραστηριότητα. Θα πρέπει μετακινώντας το δρομέα της γωνίας στην αντίστοιχη θέση να καταγράψουν την τετμημένη του αντίστοιχου σημείου της γραφικής παράστασης την οποία μπορούν να βρουν μόνο μέσω του μήκους του τμήματος AB στον τριγωνομετρικό κύκλο. Επίσης ζητείται από τους μαθητές να βρουν γωνίες το ημίτονο των οποίων έχει συγκεκριμένη τιμή, να λύσουν δηλαδή τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές εξισώσεις. Με τα παραπάνω διερευνάται, αν οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν τις κατάλληλες συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές παραστάσεις της συνάρτησης ημίτονο και να επιλέξουν κάθε φορά την κατάλληλη αναπαράσταση ώστε να απαντήσουν στα αντίστοιχα ερωτήματα.



Σχήμα 7

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο αυτό γίνεται σύμφωνα με τη δομή των ερωτηματολογίων που δόθηκαν στους μαθητές. Καθώς σε κάθε ερωτηματολόγιο υπάρχουν ομάδες ερωτήσεων που αποσκοπούν στη διερεύνηση του επιπέδου κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών από τους μαθητές, η ανάλυση θα αφορά στις συγκεκριμένες απαντήσεις. Επίσης καθώς, ιδιαίτερα στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, η δομή είναι τέτοια ώστε εκτός από την διερεύνηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, να εξυπηρετείται μια μαθησιακή τροχιά για την εισαγωγή στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η ανάλυση θα αφορά και στο κατά πόσο αυτή η δομή βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο στέρεα και πλήρη εικόνα για την έννοια αυτή. Υπενθυμίζεται ότι οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα στο μάθημα του σχολείου και η επίδοσή τους στην τάξη αλλά και σε διαγώνισμα με ασκήσεις παρόμοιες με αυτές του σχολικού βιβλίου ήταν από ικανοποιητική έως άριστη. Οι μαθητές εργάζονταν σε ζεύγη και κατέγραφαν τις απαντήσεις του σε απαντητικό φύλλο ενώ με χρήση συγκεκριμένου λογισμικού καταγράφονταν οι μεταξύ τους συνομιλίες παράλληλα με την εικόνα στην οθόνη του υπολογιστή στον οποίον εργάζονταν.

4.1 Ανάλυση του πρώτου μέρους της δραστηριότητας

Ερωτήσεις 1 έως 4

Από το διάλογο μεταξύ των μαθητών, αποδείχθηκε ότι αρχικά οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να συσχετίσουν μέσω του μηχανισμού, το μήκος του τόξου με την τετμημένη σημείων στον άξονα $x'x$. Επίσης μετά την καταγραφή των αποτελεσμάτων διαπίστωσαν ότι ο λόγος $\frac{Γωνία}{Μήκος\ τόξου}$ είναι σταθερός για συγκεκριμένη ακτίνα.

Χαρακτηριστικός είναι ο ακόλουθος διάλογος από τη δεύτερη ομάδα:

1. *Μ: … οπ! οπ! Βγαίνει το ίδιο. 57,29 γράψε. 90 δια…*
2. *Σ: 1,571*
3. *Μ: Όντως;*
4. *Σ: Ναι!*
5. *Μ: Οπ! Κι αυτό το ίδιο. Α, ήμουνα σίγουρη.*

………………………………………………………………………………

6. *Μ: Μετά τι είναι;*
7. *Σ: 100,8… δια 1,7595*
8. *Μ: Ουπ! (57,289) Α, ναι. 57,29 γράψε πάλι.*
9. *Καθ.: Αν θέλετε κάντε κι άλλα ή απαντήστε στην ερώτηση.*

10. *Μ: Ωραία, θα γράψουμε στην απάντηση, ο λόγος της γωνίας και του μήκους τόξου βγαίνει ο ίδιος σε όλες τις περιπτώσεις.*
11. *Σ: Όσο αυξάνονται θα γράψουμε ε;*
12. *Καθ.: Τι ρωτάει;*

………………………………………………………………………………….

13. *Μ: (διαβάζει) Μπορείτε να διαπιστώσετε μια σχέση που συνδέει το μήκος τόξου με τη γωνία; Μπορείτε να την ερμηνεύσετε;*
14. *Καθ.: Μπορείς να διατυπώσεις μια σχέση…*
15. *Μ: Α! Διατυπώσετε.*
16. *Καθ.: Ναι. Ποια σχέση υποθέτεις ότι είναι;*
17. *Μ: Ο λόγος δεν είναι;*
18. *Σ: Καθώς αυξάνονται πρέπει να πούμε, παραμένει το ίδιο.*
19. *Μ: Αυτό είναι.*

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές δεν προσπάθησαν να δώσουν κάποια γεωμετρική ερμηνεία ή απόδειξη για το συγκεκριμένο αποτέλεσμα και θεώρησαν την απλή παρατήρηση επαρκή ώστε να καταλήξουν αλλά και να γενικεύσουν ένα συγκεκριμένο συμπέρασμα. Επίσης όπως φαίνεται από τις προτάσεις 1 έως 5, τους εξέπληξε ως μη αναμενόμενο το γεγονός ότι ο λόγος παραμένει σταθερός. Θα ανέμενε κανείς πως σε μαθητές που έχουν διδαχθεί και έχουν κατανοήσει την έννοια του ακτινίου, θα ήταν μάλλον αναμενόμενο το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν καθώς μια από τις βασικές έννοιες για την κατανόηση του ακτινίου είναι το γεγονός πως το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας και το μήκος του αντίστοιχου τόξου σε κύκλο με σταθερή ακτίνα είναι ανάλογα ποσά. Ενισχύεται αυτό το συμπέρασμα από το γεγονός ότι δεν προχώρησαν στην ερμηνεία του συμπεράσματός τους. Μόνο ό (Σ) με τη φράση:

Καθώς αυξάνονται πρέπει να πούμε, παραμένει το ίδιο»,

φάνηκε να αντιλαμβάνεται ότι τα μεγέθη είναι ανάλογα και να προσπαθεί να δώσει μια γεωμετρική ερμηνεία στο συμπέρασμα, αλλά δεν ολοκλήρωσε τη σκέψη του.

Αντίστοιχη ήταν και η προσέγγιση από την πρώτη ομάδα, η οποία όμως κατέγραψε το αποτέλεσμα μόνο λεκτικά κάτι που στη συνέχεια δεν επέτρεψε την άμεση εφαρμογή του τύπου για την εύρεση της γωνίας στο δεύτερο ερώτημα. Επίσης, κυρίως ο μαθητής (Κ) φάνηκε να δυσκολεύεται να συνδέσει το μήκος του τόξου με την τετμημένη του αντίστοιχου στον άξονα $x'x$. Αυτό προκύπτει και από το γεγονός ότι στη συνέχεια πολλές φορές αναφέρει ότι «*μεγαλώνει το σημείο*» όταν μεγαλώνει το μήκος του τόξου καθώς και από τον επόμενο διάλογο, όταν στο δεύτερο ερώτημα χρειάστηκε να συμπεράνουν το μήκος του τόξου από τις συντεταγμένες των σημείων:

20. *Α: Αφού η γωνία ενός κύκλου η γωνία αυτή εδώ του κύκλου εξαρτάται από το τόξο και δεν ξέρουμε το τόξο για να μπορούμε να τη βρούμε!*
21. *ΚΑΘ: Το Τόξο το ξέρεις; Για κοίτα τα σημεία. Θες να φτάσεις κυλώντας στο σημείο ..*
22. *Α: Αυτό! (δείχνει το σημείο στον άξονα $x'x$)*
23. *Καθ: Άρα πόσο είναι το τόξο;*
24. *Α: Αυτό είναι το τόξο δηλ. τώρα που πρέπει να βρούμε;*

Περνώντας στη δεύτερη ερώτηση, όπου τους ζητείται η εφαρμογή της σχέσης στην οποία κατέληξαν ώστε να βρουν τη γωνία όταν το μήκος του τόξου είναι γνωστό, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η δεύτερη ομάδα, η οποία έχει επιλέξει ακτίνα του κύκλου ίση με τη μονάδα, ενώ αναγνωρίζει ότι το μήκος του τόξου πρέπει να είναι π, δεν το συσχετίζει με το μέτρο της αντίστοιχης γωνίας σε μοίρες ακόμα και όταν διαπιστώνουν ότι πρέπει να είναι 180^o :

25. *Μ: Όπα, μισό…………57,29 επί, πες μου λίγο.*
26. *Σ: 3,1419*
27. *Μ: 179,99… Ω! Ναι, 3,14 αυτό είναι το π.*
28. *Σ: Ναι…*
29. *Μ: Βασικά γιατί δεν γράφεις 180;*
30. *Σ: Είναι 180, γράφουμε αυτό το ακριβώς. Πάμε επόμενο.*

Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο τον αριθμό π στο πλαίσιο των πραγματικών αριθμών και με διαφορετικό στο πλαίσιο του μέτρου μιας γωνίας.

Στη συνέχεια όταν η πρώτη ομάδα προσπαθεί να απαντήσει στην τρίτη ερώτηση, από τον παρακάτω διάλογο προκύπτει ότι δυσκολεύονται να συνδέσουν τις αριθμητικές σχέσεις με τη γεωμετρική αναπαράσταση.

31. *Α: Ορίστε (επαληθεύει με δοκιμή). Λοιπόν, αλλάζουμε την ακτίνα*
32. *Κ: Και λέμε…*
33. *Α: Και βάζουμε τις γωνίες, ας πούμε*
34. *Κ: 0,…*
35. *Α: Βάζουμε το ίδιο, 28,6 επί…*
36. *Κ: Αφού το ίδιο θα βγει ρε συ…*
37. *…………………………………………………………………………………..*
38. *Α: Α ναι βγαίνει το ίδιο όντως! Γράψε τα τρία αποτελέσματα Δ, Α, Ν (εννοεί τα σημεία στον άξονα) κι άμα το κάνουμε αυτό με την ακτίνα 3, η γωνία δηλαδή να είναι 14,97..*
39. *Κ: Σε τρία όμως τώρα …Δεν θα πάει στο Δ! (η γωνία στον δρομέα είναι 14,4)*
40. *Α: Γι' αυτό θα πάει (διορθώνει τη γωνία στο 14,97) θα πάει στο Δ…*
41. *Κ: Θα πάει στο Δ ναι*
42. *Α: (ελέγχει και πάει κοντά στο Α) Δηλαδή θα πάει στο Α όχι στο Δ, θα πάει στο επόμενο σημείο.*
43. *………………………………………………………………………………….*
44. *Κ: Κάνε 22,… για κάνε το άλλο να δούμε 22,46*

45. *Α: Πάει λίγο πιο κει όμως… Τέλεια (γέλια) πάει εδώ!*
46. *Κ: Μόνο του πάει ή εσύ το πας;*

Βλέπουμε ότι ενώ όπως φαίνεται από τις προτάσεις 31 έως 37, αντιλαμβάνονται ότι το αριθμητικό αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με πριν καθώς το μήκος της ακτίνας δεν υπεισέρχεται στους υπολογισμούς, θεωρούν (προτάσεις 38 έως 40) ότι το άκρο του τόξου μετά τη κύλιση θα καταλήξει στο ίδιο σημείο παρόλο που στο σχήμα τους ο κύκλος είναι σαφώς μεγαλύτερος. Ακόμα όμως και μετά από τη διαπίστωση ότι για την πρώτη γωνία με μέτρο $14,97^o$ το σημείο που βρίσκουν είναι πιο δεξιά, όταν διαπιστώνουν ότι το ίδιο συμβαίνει και για την επόμενη γωνία, όπως προκύπτει από τις προτάσεις 41 έως 44 φαίνεται να μην το θεωρούν αναμενόμενο. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν στην ουσία συνδέσει το μήκος του τόξου με τη θέση του σημείου που προκύπτει στον άξονα $x'x$ ή ότι γεωμετρική απεικόνιση δεν λαμβάνεται υπόψη κατά τη διάρκεια του συλλογισμού.

Στην ερώτηση γιατί παύει να ισχύει η σχέση όταν αλλάζει η ακτίνα και οι δύο ομάδες διαπιστώνουν ότι αυτό συμβαίνει λόγω της αλλαγής της ακτίνας χωρίς όμως να το αιτιολογήσουν όπως προκύπτει κι απ’ τον ακόλουθο διάλογο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, όπως προκύπτει από την πρόταση 50, ενώ ο (Σ) παρατηρεί πρέπει να υπάρχει κάποια σχέση που να συνδέει το μήκος της ακτίνας με το μήκος του αντίστοιχου τόξου, χωρίς όμως να αντιλαμβάνεται ότι τα μεγέθη είναι ανάλογα, και θεωρεί ότι πρέπει να αναμορφώσουν την αρχική σχέση, η (Μ) στην πρόταση 51 απαντάει πως απλώς θα πρέπει να υπάρχει και διαφορετική σταθερά για κάθε ακτίνα, κάτι που οδηγεί στο συμπέρασμα πως δεν θεωρεί ότι υπάρχει ή ότι μπορεί να βρει μια σχέση που να συνδέει τα δύο μεγέθη.

47. *Μ: Γράψε αυτό. Τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά λόγω της αύξησης της ακτίνας…*
48. *Σ: Αυξήθηκαν;*
49. *Μ: Λόγω της μεταβολής της ακτίνας διαφοροποιήθηκαν… άρα η σχέση από το ερώτημα (1) δεν ισχύει για όλες τις ακτίνες.*
50. *Σ: Όχι, άρα η σχέση του ερωτήματος (1) είναι ελλιπής θα πούμε, πρέπει να βρούμε να συνδυάζει και το ρ μέσα.*
51. *Μ: Όχι ρε συ. Αυτό, αυτή η σχέση το 57,29 ισχύει μόνο για την ακτίνα 1. Άρα θα είναι διαφορετικό το 57,29 για την ακτίνα 3 και γενικά για όλες τις ακτίνες.*

Κατά την προσπάθειά τους οι δύο ομάδες να πετύχουν με δοκιμές τη σωστή γωνία, καμία δεν αντιλήφθηκε το γεγονός ότι η ακτίνα του κύκλου και η γωνία είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη όταν το μήκος του τόξου παραμένει σταθερό. Γίνεται φανερό από τις παραπάνω απαντήσεις ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν τις σχέσεις αναλογίας που συνδέουν τη γωνία, την ακτίνα και το μήκος του αντίστοιχου τόξου και να συμπεριλάβουν τη γεωμετρική απεικόνιση στο συλλογισμό τους. Επίσης από την ακόλουθη απάντηση που έγραψε στο απαντητικό φύλλο η πρώτη ομάδα, συμπεραίνουμε ότι οι (Α) και (Κ) δεν μπορούν να διαχωρίσουν το μήκος του τόξου από το μέτρο της γωνίας:

Παρατηρούμε ότι μεγαλώνει το τόξο κάθε φορά που μεγαλώνει η ακτίνα (παρόλο που αυτό δεν είναι λογικό επειδή η γωνία είναι ίδια).

Αντίστοιχα, αρχικά στη δεύτερη ομάδα, αν και παρατηρούν ότι ο λόγος σχετίζεται με την ακτίνα αδυνατούν αρχικά να διαπιστώσουν ότι τα μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα. Επίσης παραπλανόνται από το γεγονός ότι ο λόγος για ακτίνα με μήκος 2 είναι ο μισός από αυτόν για ακτίνα με μήκος 4 και ότι το ίδιο συμβαίνει για ακτίνα με μήκος 3 και ακτίνα με μήκος 6 (προτάσεις 55 έως 62). Στη συνέχεια μετά από δοκιμές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα μεγέθη είναι μεν αντιστρόφως ανάλογα, χωρίς όμως να είναι απόλυτα σίγουροι, και χωρίς να καταλήξουν σε μια συγκεκριμένη σχέση όπως φαίνεται από τις προτάσεις 63 και 64.

52. *Σ: Δεν μ' αρέσει που για $\rho = 2$ ο λόγος είναι πιο μεγάλος, για τον λόγο που είναι εδώ η ακτίνα είναι πιο μεγάλη και ο λόγος είναι πιο μικρός.*
53. *Μ: Ε, αυτό είπαμε. Όσο αυξάνεται η ακτίνα, ο λόγος μικραίνει.*
54. *Σ: Έχεις δίκιο.*

………………………………………………..

55. *Μ: Ξέρετε κάτι; Ανά δύο … είναι τα μισά. Αλλά εδώ δεν είναι ανά δύο.*
56. *Καθ.: Είναι ανά τρία. Υπάρχει κάποια αναλογία εκεί; Αντίστοιχα;*
57. *Μ: Μία προς τρία; Κάτσε περίμενε.*
58. *Σ: Οι άλλες τι λένε;*
59. *Μ: Ανά τρία είναι πάλι το μισό ε; Αν τα διαιρέσουμε αυτά μεταξύ τους; (συγκρίνουν για ακτίνα ρ= 3 και ακτίνα ρ=6 οπότε η αναλογία είναι πάλι 1 προς 2)*
60. *Μ: Δεν θα μας βγει τίποτα.*
61. *Σ: Τι έχεις γράψει εδώ;*
62. *Μ: Γράφω ότι ανά δύο είναι το μισό.*

……………………………………………………………………………………………………

63. *Σ: Όσο μεγαλώνει η ακτίνα, μειώνεται αναλογικά η…*
64. *Μ: Καλά θες να προχωρήσουμε και να δούμε μετά…*

Φαίνεται και εδώ ότι οι μαθητές στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στα αριθμητικά αποτελέσματα για την εξαγωγή συμπερασμάτων και ότι δεν χρησιμοποιούν τη γεωμετρική αναπαράσταση ώστε να κάνουν τις κατάλληλες εικασίες σχετικά με τις σχέσεις των διαφόρων μεγεθών.

Ερωτήσεις 5 έως 8

Στις ερωτήσεις αυτές η προσέγγιση στην έννοια του ακτίνιου έγινε με βάση τον ορισμό του. Πρέπει να σημειωθεί ότι στους μαθητές ζητήθηκε να υπολογίσουν το λόγο $\alpha = \dfrac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon}{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha}$ για διάφορες τιμές του μέτρου της ακτίνας και για σταθερή κάθε φορά γωνία, χωρίς όμως να αναφερθεί ότι πρόκειται για το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια. Είναι ενδιαφέρον ότι παρά το γεγονός ότι οι μαθητές γνώριζαν τον ορισμό του ακτινίου δεν τον αναγνώρισαν στο συγκεκριμένο πλαίσιο και μόνο μετά από σχετική συζήτηση στο τέλος της δραστηριότητας υπέθεσαν πως πρόκειται για το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια κυρίως επειδή ο λόγος είχε ονομασθεί με το γράμμα α παρά επειδή αναγνώρισαν τον συγκεκριμένο λόγο ως ένα μέτρο γωνίας.

Στην πέμπτη ερώτηση από τον ακόλουθο διάλογο διαπιστώνουμε ότι η πρώτη ομάδα, επηρεασμένη και από τις απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα, αφού βρήκε ότι για την πρώτη γωνία ο λόγος α είναι σταθερός θεώρησε ότι θα πρέπει να παραμένει σταθερός και για όλες τις γωνίες:

65. *Κ: 1,57 δια 6 ίσον… 0,26. Τέλειο! Παρατηρούμε ότι βγαίνουνε παντού 0,26!*
66. *Α: Να το κάνουμε άλλη μια φορά με* $\mu = 30^o$ *ή να το κάνουμε με όλες τις μοίρες;*
67. *Κ: Μια 30, μια 60 μια 90…*
68. *Α: Πρέπει να κάνουμε 2 … Λοιπόν βάλε ακτίνα, βάλε διαφορετικές, βάλε 4 … ωραία. Τη γωνία άλλαξε, 30. …. Και το μήκος τόξου είναι 2,09;* ………………………………………………………………………………… …………………………………….
69. *Κ: και τώρα το ξαναπάμε πίσω και βάζουμε άλλη ακτίνα; Η ακτίνα αλλάζει.*
70. *Α: Βάλε … 1*
71. *Κ: Ωραία και η γωνία …*
72. *Α: Όχι, 30!*
73. *Κ: Α, ναι. Έλεγχος!*
74. *Α: 0,52*
75. *Κ: Ωχ αυτό δεν βγαίνει ίδιο.*

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν συνδέουν τη γεωμετρική αναπαράσταση με την αλγεβρική καθώς από το δυναμικό χειρισμό του σχήματος θα έπρεπε να γίνει φανερό ότι όταν μεταβάλλεται η γωνία μεταβάλλεται τουλάχιστον οπτικά και το μέτρο του μήκους του τόξου σε σχέση με την ακτίνα.

Αντίστοιχα η δεύτερη ομάδα παρατηρεί ότι ο λόγος α είναι σταθερός, ανεξάρτητος από την ακτίνα, για σταθερή γωνία και μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η γωνία. Στη συνέχεια από τον παρακάτω διάλογο, φαίνεται αρχικά να διαισθάνονται ότι κάποιο ρόλο παίζουν οι αναλογίες των μεγεθών. Για το λόγο αυτό κάνουν διάφορες δοκιμές υπολογίζοντας τους λόγους γωνίας προς ακτίνα και ακτίνας προς μήκος τόξου χωρίς όμως να καταλήξουν σε μια σχέση που να συνδέει το μέτρο της γωνίας σε μοίρες με τον λόγο α :

76. *Σ: Μπορείτε να διατυπώσετε μια σχέση που να συνδέει;*
77. *Μ: το λόγο α με τη γωνία.*
78. *Σ: Αμε!*
79. *Μ: Πως;*
80. *Μ: Βάζουμε τη γωνία 60 που έχουμε εδώ (ο δρομέας γωνία είναι 60) παίρνουμε αυτή την περίπτωση.*
    ………………………………………………………………………………………………………
81. *Σ: Ωραία για μ=60 σου λέει λόγος α πόσος είναι;*
82. *Μ: Περίμενε…*
83. *Σ: 1,04 Οπότε μ προς α να δούμε πόσο μας κάνει. Να το κάνουμε εδώ.*
84. *Μ: (κάνει τις πράξεις) Δεν θα μας βγάλει κάτι. (βγάζει 57,692)*
85. *25:03 Μ: Δεν μας βγάζει κάτι βλέπεις;*
    ……
86. *Σ: μ προς α.*
87. *25:41 Μ: Περίμενε, άμα πάρουμε 60 (κάνει 60/5=12) 12! (Διαιρεί μοίρες με ακτίνα)*
88. *Σ: Ποιο;*
89. *Μ:Α! Άμα πάρουμε 5 δια … πες μου λίγο τον (;;;)*
90. *Σ: 5,2365*
    (Διαιρεί ακτίνα με μήκος τόξου βρίσκει 0,954…)
91. *Μ: εντάξει άστο ας προχωρήσουμε.*

Όπως επίσης φαίνεται από τον παραπάνω διάλογο οι μαθητές βλέποντας το ερώτημα 6, υπολόγισαν τον λόγω $\frac{\mu}{\alpha}=57,6$, καθώς όμως δεν είχαν αντιληφθεί ότι ο α είναι το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια, δεν συσχέτισαν τον συγκεκριμένο λόγο με τη γνωστή τους σχέση $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$. Όταν απαντώντας στο ερώτημα 6 διαπίστωσαν ότι ο λόγος είναι σταθερός για κάθε γωνία μ, διατύπωσαν μεν τη σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη αλλά και πάλι δεν αντιλήφθηκαν το ρόλο του λόγου α πιθανώς επειδή η σχέση στην οποία κατέληξαν δεν περιείχε τον αριθμό π.

Αντίστοιχα η πρώτη ομάδα, απαντώντας στο 6ο ερώτημα, παρατήρησε μεν ότι ο λόγος $\frac{\mu}{\alpha}$ είναι σταθερός, θεώρησε όμως ότι ο λόγος α αφορά τον «*λόγο μήκος τόξου προς ακτίνα στο ίδιο κύκλο*» όπως λένε στην πρόταση 98, παρά το γεγονός ότι στο προηγούμενο ακριβώς ερώτημα είχαν διαπιστώσει ότι ο λόγος είναι ανεξάρτητος της ακτίνας του κύκλου και εξαρτάται μόνο από τη γωνία.

92. *Α: Λοιπόν παρατηρούμε ότι ο λόγος μ προς α…*
    ………
93. *Κ: Η γωνία είναι ανάλογη*
94. *Α: μας δίνει το…αποτέλεσμα*
95. *Κ: 57,6*
96. *Α: Αυτό βέβαια ισχύει… όταν το α*
97. *Κ: Όταν η γωνία είναι …*
98. *Α: Ισχύει …. για …. για τον λόγο μήκος τόξου προς ακτίνα στον ίδιο κύκλο!*

Διαπιστώνουμε εδώ πόσο δύσκολο είναι για τους μαθητές να αντιληφθούν τη διατήρηση της αναλογίας σε όμοια σχήματα, κάτι που ίσως να είναι από τις βασικές αιτίες που οι μαθητές δεν αποδέχονται εύκολα το ακτίνιο ως μονάδας μέτρησης γωνιών, καθώς ακόμα και όταν το έχουν διαπιστώσει πειραματικά δεν φαίνεται να κατανοούν ότι πράγματι ο λόγος αυτός εξαρτάται μόνο από τη γωνία, και μάλιστα είναι ανάλογος με το μέτρο της σε μοίρες.

Η έβδομη ερώτηση είναι σύνθετη και ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν μια σχέση που να συνδέει το μήκος του τόξου, την ακτίνα και το μέτρο της γωνίας σε μοίρες. Η διαισθητική προσέγγιση αποδεικνύεται δύσκολη καθώς οι μαθητές δεν μπορούν να διατυπώσουν μια σχέση η οποία να περιέχει όλες τις αναλογίες που έχουν μέχρι τώρα διαπιστώσει. Καταλήγουν στη ζητούμενη σχέση αλγεβρικά μετά από σχετική παρότρυνση. Χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα αποσπάσματα:

99. *Σ. Εδώ έχουμε μοίρες, τη γωνία. Ότι είναι αντιστρόφως ανάλογη δηλαδή με το μήκος της ακτίνας. Πως θα το γράψουμε αυτό δηλαδή;*
    ……………………………………………………………………………………………
100. *Σ Να δούμε τη μ/α = ;;;…Εδώ βρήκαμε το μήκος της ακτίνας είναι αντιστρόφως ανάλογο…*
101. *Μ: Το μήκος της ακτίνας είναι…*
102. *Μ: Αυτό πως το διαπιστώσαμε, το μήκος της ακτίνας είναι αντιστρόφως ανάλογο των μοιρών;*
103. *Σ: Το διαπιστώσαμε γιατί έτσι ήταν… τι να σου πω τώρα.*

Μέχρι εδώ βλέπουμε ότι δεν προσπάθησαν να δώσουν μια γεωμετρική ερμηνεία στην παρατήρησή τους. Το γεγονός ότι πολλές φορές οι μαθητές δεν προσπαθούν να νοηματοδοτήσουν και να ερμηνεύσουν τα συμπεράσματά τους, όπως φαίνεται και από τις προτάσεις 102 και 103, μέσω της σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων είναι ένας από τους λόγους που δεν τους επιτρέπει να κάνουν τις κατάλληλες εικασίες κατά τη λύση ενός προβλήματος. Στη συνέχεια μετά από σχετικές υποδείξεις, οι μαθητές καταλήγουν στη ζητούμενη σχέση μέσα από μια καθαρά αλγεβρική προσέγγιση όπως φαίνεται από τις προτάσεις 106, 112 και 118. Βλέπουμε επίσης από τις προτάσεις 104 και 111 ότι οι μαθητές έχουν αντιληφθεί πως η ακτίνα και η γωνία είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά, δυσκολεύονται όμως να συνδέσουν το μήκος του τόξου με το μέτρο της γωνίας σε μοίρες.

104. *Μ: Αντιστρόφως ανάλογο, άρα όσο μικραίνει η ακτίνα... όσο μεγαλώνει η ακτίνα, μικραίνει η γωνία.... Τι ζητάει αυτή εδώ; Συγκρίνατε τη σχέση με αυτή που καταλήξατε στο ερώτημα 4.*
105. *Μ: Λοιπόν για άκουσέ με... πρέπει να βρούμε λίγο τη σχέση. Η ακτίνα, το μήκος της ακτίνας είναι αντιστρόφως ανάλογο με το μ επί 57,69*
106. *Σ: Θα αντικαταστήσουμε αυτό που μας είπε ο κύριος εδώ!... Μήκος τόξου είναι l_t, ακτίνα προς ρ ίσον με 57...*
107. *Μ: Όπα κάτσε μη τα γράφεις κατευθείαν έτσι.*
108. *Καθ.: Το 4^o ερώτημα τι σχέση ζητούσε να βρεις, ανάμεσα σε τι;*
109. *Σ: Στην ακτίνα και στις μοίρες, στη γωνία δηλαδή.*
110. *Καθ.: Ποια είναι αυτή; Εδώ πέρα μπορείς να το δεις; Σε μήκος τόξου και γωνία ζητούσε*
111. *Σ: Οι μοίρες πως θα βγούνε με το μήκος τόξου που είναι αντιστρόφως ανάλογο με την ακτίνα;*
112. *Μ: Είναι μ επί ρ προς λ ίσον ... είναι μ επί ρ προς l_t που είναι 57,69*
  ……………………………………………………………………………………………………..
113. *Καθ.: Για κοίτα τώρα το ξεκαθαρίζει λίγο;*
114. *Σ: Μάλιστα κάτι ξεκαθαρίζει.*
115. *Μ: Τι λες ρε, τι ξεκαθαρίζει;*
116. *Σ: Η γωνία επί την ακτίνα προς το μήκος του τόξου...*
117. *Καθ.: Μήκος του τόξου δεν έψαχνες; Το ρ πάει από την άλλη μεριά;*
118. *Μ: Μισό λεπτό να σκεφτώ. (Λύνει τον τύπο)*
119. *Καθ.: Άρα; Πριν δε λέγατε ότι θέλει το ρ στον τύπο;*
120. *Μ: Αυτό ήθελε; Αχ, το χαμένο.*

Όσον αφορά στο τι ακριβώς είναι ο λόγος α, ακόμα και μετά από σχετικές ερωτήσεις και ενώ οι μαθητές βλέποντας το όνομα του αρχείου έχουν καταλάβει ότι έχει σχέση με τριγωνομετρία, δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ότι πρόκειται για μέτρο της γωνίας σε ακτίνια.

121. *Καθ: Ο λόγος α που βρήκατε σας θυμίζει τίποτα που ξέρετε;*
122. *Α: Μήκος τόξου προς ακτίνα;*

123. Καθ: Το έχουμε συναντήσει ποτέ;

……………………………………………………………………………………

……………

124. Α: Το α δεν βγήκε σε όλες τις περιπτώσεις ίδιο, μου βγήκε εδώ πέρα

125. ....

126. Καθ: Θα καθόριζε μια γωνία αυτός ο αριθμός;

127. Α: Α, δηλαδή αν βάζαμε το 0,52 για γωνία πάλι θα έβγαινε το μήκος τόξου και η ακτίνα αυτή!

……………………………………………………………………………………

…………….

(Δοκιμάζουν γωνία 0,26 σε μοίρες)

128. Κ: Κύριε άμα βάλουμε όμως αυτή τη γωνία. έβαλα τη γωνία 0,26, δεν βγάζει το ίδιο τόξο.

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω διάλογο, οι μαθητές όχι μόνο δεν αναγνωρίζουν ότι ο λόγος α είναι το ακτίνιο αλλά και όταν αντιλαμβάνονται ότι ο συγκεκριμένος λόγος θα μπορούσε να είναι ένα μέτρο της γωνίας, θεωρούν πάλι ότι το μέτρο αυτό είναι σε μοίρες όπως φαίνεται από τις προτάσεις 127 και 128. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι η έννοια της μοίρας κυριαρχεί πάνω στην έννοια του ακτινίου ή ότι δεν αντιλαμβάνονται τα ακτίνια ως πραγματικούς αριθμούς αλλά ως πολλαπλάσια του π, οπότε δεν θεωρούν ότι ένας αριθμός που δεν περιέχει τον π μπορεί να αναφέρεται σε ακτίνια. Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ όπως φαίνεται και από τον ακόλουθο διάλογο, ακόμα και όταν οι μαθητές διατυπώνουν τον ορισμό του ακτινίου, δυσκολεύονται να συνδέσουν το λόγο α της δραστηριότητας μα το ακτίνιο.

129. Καθ: Τι είναι το ακτίνιο;

…………………………………………………..

130. Α+Κ: Μήκος τόξου προς ακτίνα

131. Καθ: Εδώ τι βρήκατε;

132. Α: Α και το α είναι τα ακτίνια ε;

Το γεγονός ότι για να αφορά ένας αριθμός σε ακτίνια πρέπει να περιέχει τον π προκύπτει και από τις προτάσεις 133 και 134 όπου προκειμένου να εξηγήσει η (Α) στην (Κ) ότι ο λόγος α που βρήκανε είναι το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια αναφέρεται στο $\frac{\pi}{2}$ ως μέτρο της γωνίας, σε αριθμό δηλαδή που είναι πολλαπλάσιο του π. Επίσης από την πρόταση 134 φαίνεται ότι τον ίδιο τον π δεν τον αντιλαμβάνονται ως πραγματικό αριθμό αλλά ως μια σταθερή ποσότητα.

133. Α: Τα ακτίνια που λέμε π/2 αυτά, είναι αυτό μήκος τόξου προς ακτίνα. Για να βρεις το π πρέπει να κάνεις...

134. Κ: Δηλαδή το π είναι μήκος τόξου…;;

4.2 Ανάλυση του δευτέρου μέρους της δραστηριότητας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι ερωτήσεις 1 και 2 του δεύτερου μέρους της δραστηριότητας αφορούν στη σταθερότητα του λόγου της κάθετης πλευράς προς την ακτίνα σε ένα κύκλο. Αν και ο κύκλος αυτός δεν είναι ο τριγωνομετρικός κύκλος καθώς το κέντρο του δεν είναι στην αρχή των αξόνων ενώ η ακτίνα του μπορεί να μεταβάλλεται, η αναπαράσταση είναι αρκετά κοντά στην κλασική αναπαράσταση του τριγωνομετρικού κύκλου. Από τις απαντήσεις στις δύο πρώτες ερωτήσεις, διαπιστώνεται ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται μεν ότι ο λόγος δεν εξαρτάται από την ακτίνα δεν μπορούν όμως να δώσουν τη σωστή ερμηνεία καθώς δεν συνδέουν την αναπαράσταση του κύκλου με το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται όπως φαίνεται από τις προτάσεις 135 έως 142. Επίσης, ενώ στις προτάσεις 144 έως 146 προκύπτει ότι αντιλαμβάνονται ότι κάποιο ρόλο παίζει το γεγονός ότι η γωνία είναι η ίδια δεν αναλύουν περεταίρω τη σκέψη τους. Στον διάλογο που ακολουθεί οι μαθητές αφού μετά από σχετικές υποδείξεις παρατηρήσουν ότι πρόκειται για πλευρές ορθογωνίου, πρόταση 151, τριγώνου των οποίων ο λόγος παραμένει σταθερός, όταν ερωτούνται αν μπορούν να χρησιμοποιήσουν κάτι από την Ευκλείδεια γεωμετρία, η αρχική απάντηση στις προτάσεις 162, 163 είναι το πυθαγόρειο θεώρημα. Η κυριαρχία του πυθαγορείου θεωρήματος σε προβλήματα που αφορούν σε ορθογώνια τρίγωνα ίσως να αποτελεί εμπόδιο στην θεώρηση των τριγωνομετρικών αριθμών ως λόγους πλευρών όμοιων ορθογωνίων τριγώνων κάτι που ερμηνεύει και το γεγονός ότι δεν αντιλήφθηκαν ο συγκεκριμένος λόγος αφορούσε στο ημίτονο της συγκεκριμένης γωνίας. Στη συνέχεια μετά από κατάλληλες ερωτήσεις καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν τις ίδιες γωνίες. Βλέπουμε εδώ ότι ενώ οι μαθητές έχουν διδαχθεί τον ορισμό του ημιτόνου σε ορθογώνιο τρίγωνο, δυσκολεύονται να εντάξουν τον ορισμό αυτό στο πλαίσιο του τριγωνομετρικού κύκλου.

135. *Μ: Ναι. Άρα όσο κι αν αυξάνεται η ακτίνα, ο λόγος είναι ίδιος.*
136. *Σ: Ο λόγος παραμένει σταθερός;*
137. *Μ: Ναι. Πως το εξηγούμε αυτό;*
138. *Σ: Τι λέει; Πως το εξηγούμε αυτό; Γιατί… πρέπει να παίξουμε με το μήκος ΑΒ.*
139. *Μ: Ναι, κάτι τέτοιο είναι. Ξέρεις κάτι;*
140. *Σ: Τι;*
141. *Μ: Διπλασιάζεται το ΑΒ εδώ, όχι. Πες ότι αυτό είναι το αρχικό. Διπλασιάζεται αυτό, διπλασιάζεται και αυτό. Αφού διπλασιάζουμε την ακτίνα διπλασιάζεται και αυτό.*
142. *Σ: Σίγουρο είναι ότι θα διπλασιασθεί και το ΑΒ;*

143. Μ: Ναι.
144. Σ: Ναι γιατί είναι και η γωνία ε;
145. Μ: Ναι.
146. Σ: Εδώ είναι ίδια, η γωνία είναι ίδια.
147. Μ: Παρατήρησε ότι, είναι στο 2,5 εδώ κάπου (δείχνει στον άξονα y΄y). Άμα το πάμε στο 1,5 πάλι (αλλάζει την ακτίνα) είναι κοίτα 1,5 πες. Άρα και το μήκος του ΑΒ διπλασιάζεται.
148. Σ: Κατάλαβα. Οπότε δηλαδή 2 εδώ και 2 εδώ θα φύγουν, οπότε θα μείνει ο ίδιος λόγος.
149. Μ: Ναι. Κύριε, μπορώ να το κάνω σαν απόδειξη;
…….
150. Καθ.: Στο σχήμα σου τι είναι αυτά; Το ΑΒ τι είναι;
151. Σ: Το μήκος του τμήματος… της μιας πλευράς τριγώνου.
152. Καθ.: Το ΚΒ είναι;
153. Μ: Η ακτίνα.
154. Καθ.: Άρα υπολογίζεις ΑΒ προς;
155. Σ: ρ
156. Μ: $\frac{AB}{KB}$
157. Καθ. Γιατί είναι σταθερό αυτό;
158. Μ: Καλέ, αυτό δεν είναι ένα ορθογώνιο;
159. Σ: Ναι, έχουμε ορθή γωνία αυτή.
160. Μ: Ε, ναι…α!...Από αυτό δεν εξαρτάται;
161. Καθ.: Άρα, για πες το πιο καλά. Χρησιμοποίησε και λίγο από γεωμετρία.
162. Σ: Πυθαγόρειο;
163. Μ: Καλέ ναι!
164. Σ: Υπολογίζουμε το μήκος του ΑΒ…
165. Μ: Όσο διπλασιάζεται η
166. Σ: … του ΑΒ με το ΒΚ που είναι η ακτίνα.
167. Μ: Όσο διπλασιάζεται η υποτείνουσα δεν θα… όσο αυξάνεται η υποτείνουσα, δεν θα αυξάνονται και οι άλλες πλευρές;
168. Καθ.: Και μάλιστα αναλογικά, αυτό είπες πριν.
169. Μ: Ναι, ε αυτό δεν είναι;
170. Καθ.: Γιατί όμως είναι αυτό, υπάρχει κάποιο θεώρημα που να το έχουμε πει και να μας το εξασφαλίζει;
171. Μ: Α! ε, το πυθαγόρειο που είπε ο…
172. Σ: Δεν είναι το πυθαγόρειο.
173. Καθ.: Τι έχουμε εδώ;
174. Μ: Ένα ορθογώνιο.
175. Καθ.:Και αν αλλάξουμε την ακτίνα θα βρούμε άλλο ορθογώνιο;
176. Μ: Ναι,… όχι ουσιαστικά θα έχει…
177. Σ: Με όμοια τρίγωνα; Με όμοια τρίγωνα δηλαδή έχουμε να κάνουμε.

Στη συνέχεια όταν προσπαθούν να συσχετίσουν το μήκος ΑΒ με την τεταγμένη y_B του σημείου Β, ενώ θα περίμενε κανείς να αναγνωρίσουν με σχετική ευκολία τουλάχιστον ότι όταν το σημείο βρίσκεται στο πάνω ημιεπίπεδο, τα δύο αυτά μεγέθη είναι ίσα, οι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται να τα συνδέσουν. Αυτός ίσως να είναι και ένας από τους λόγους που οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν σωστά τον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς θα πρέπει να αντιληφθούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς όχι μόνο ως λόγους πλευρών αλλά και να τους συσχετίσουν με τις συντεταγμένες των άκρων των τόξων των αντίστοιχων γωνιών. Έτσι ενώ η δεύτερη ομάδα μετά από ιδιαίτερη δυσκολία και με κάποιες υποδείξεις δίνει τη σωστή απάντηση, η πρώτη ομάδα καταλήγει στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Το σημείο Β είναι σημείο του είναι σημείο του κύκλου, συνεπώς όσο εμείς αλλάζουμε το α το σημείο Β αλλάζει θέση πάνω στο σχήμα με αποτέλεσμα να αλλάζει η τεταγμένη.

Βλέπουμε στις γραμμές 178 έως 181 ότι επηρεασμένοι πιθανώς από το δυναμικό χειρισμό του εργαλείου εστιάζουν στη συμπεριφορά των δύο μεγεθών και δεν προσπαθούν να βρουν μια συγκεκριμένη σχέση που να τα συνδέει, παρότι έχουν διδαχθεί στο πλαίσιο του τριγωνομετρικού κύκλου ότι οι συντεταγμένες του άκρου του τόξου συνδέονται με το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας. Μετά όμως από τον ακόλουθο διάλογο, η (Α) σε αντίθεση με την (Κ) αντιλαμβάνεται τη σχέση της τεταγμένης y_B με το λόγο $\frac{AB}{\rho}$ για τις διάφορες της γωνίας και ιδιαίτερα .

178. *Καθ.: Με τον λόγο* $\frac{AB}{\rho}$ *πως σχετίζεται;*
179. *Α: Γιατί όσο το Β μικραίνει το α μεγαλώνει και είναι αντιστρόφως ανάλογα. Δηλαδή είναι ο λόγος.*
180. *Καθ.: Πάντα γίνεται αυτό;*
181. *Α: Ναι, αφού όσο… όχι, γίνεται μόνο μέχρι τις* 90^o *που είναι το* $\frac{\pi}{2}$, *μετά γίνεται το αντίθετο, μικραίνει το… τέτοιο μεγαλώνει το άλλο*
182. *Καθ.: Για ξανακοίτα, πως σχετίζεται το* y_B *με τον λόγο* $\frac{AB}{\rho}$.

   ……………………………..
183. *Καθ. : Το* y_B *με το* AB *έχουν καμία σχέση;*
184. *Α: Αφού είναι το ίδιο*
185. *Καθ.: Πάντα είναι το ίδιο; Αν μεγαλώσουμε πιο πολύ τη γωνία τι είναι;*
186. *Α: Είναι το αντίθετο. Μικραίνει μετά τις* 90^o.
187. *Καθ.: Μετά τις* 180^o *;*
188. *Α: Μετά τις 180 μικραί… είναι το αντίθετο.*
189. *Καθ.: Άρα τι σχέση έχει το* $\frac{y_B}{\rho}$ *με το* $\frac{AB}{\rho}$ *;*
190. *Α: Δεν ξέρω!*
191. *Καθ. Για σκέψου το λίγο.*

192. Α: …Είναι ίσοι, απλά όταν είναι πάνω από 180^o, … δηλαδή σε γωνίες μικρότερες του π ο λόγος γίνεται θετικός ενώ όταν είναι μεγαλύτερος του π θα βγαίνει αρνητικός.
193. Κ: Αυτό θα πούμε.
194. Α: Α! Είναι ο ίδιος λόγος.
195. Καθ.: Πάντα ο ίδιος;
196. Α: Όχι, δεν είναι ο ίδιος λόγος στην περίπτωση που η γωνία είναι μεγαλύτερη από π.
197. Καθ.: Τι είναι τότε;
198. Α: Τότε είναι αντίθετος.

Αντίστοιχα η δεύτερη ομάδα, ενώ παρατηρεί ότι $y_B = (AB)$ για γωνίες $0 \le \alpha \le \pi$ και $y_B = -(AB)$ για $\pi \le \alpha < 2\pi$, στη συνέχεια θεωρούν ότι τεταγμένη y_B είναι ίση ή αντίθετη με το λόγο λ, παραβλέποντας το γεγονός ότι η ακτίνα του κύκλου δεν είναι ίση με τη μονάδα.

Στην τέταρτη και την πέμπτη ερώτηση, παρότι έχουν συνδέσει το μήκος του AB με το λόγο λ, οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τις συμμετρίες στο σχήμα για να βρουν γωνίες με ίσο ή αντίθετο λόγο αλλά μετά από πολύ ώρα και δοκιμές καταλήγουν στην εικασία ότι οι γωνίες πρέπει να είναι παραπληρωματικές την οποία και δέχονται χωρίς απόδειξη και χωρίς να δώσουν μια γεωμετρική ερμηνεία. Παρατηρούμε εδώ ότι οι μαθητές δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν σωστά τη γεωμετρική αναπαράσταση ώστε να καταλήξουν στο ζητούμενο. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις και απαντήσεις στη συνέχεια. Επίσης στην πρόταση 199 η (Μ) αντιλαμβάνεται ότι κάποια σχέση πρέπει να υπάρχει με τον τριγωνομετρικό κύκλο, αν και μπερδεύει το συνημίτονο με το ημίτονο, πιθανότατα επειδή κάτι θυμίζουν οι παραπληρωματικές γωνίες σε σχέση με αυτά που είχε διδαχθεί στην τάξη, αποτυγχάνει όμως να αιτιολογήσει το αποτέλεσμα στον (Σ) όπως φαίνεται στις προτάσεις 204 έως 207. Το γεγονός αυτό φανερώνει για άλλη μια φορά ότι η διαδικαστική προσέγγιση κυριαρχεί της εννοιολογικής κατανόησης.

199. Μ: Ναι! Οοο, κοίτα λίγο το συνημίτονο εδώ πέρα δεν είναι 0; Σκέψου τον τριγωνομετρικό κύκλο λίγο ρε. Σκέψου ότι αυτός είναι τριγωνομετρικός κύκλος.
200. Σ: Δεν έχω καταλάβει τι θέλει.
201. Μ: Τίποτα, αυτό απλά, να κάνουμε γωνίες που ο λόγος είναι ίδιος.
202. Σ: Να τις προσδιορίσουμε, ποιες υπάρχουν;
203. Μ: Είναι η… εντάξει βάλαμε αυτήν τώρα, που είναι ίδιο με αυτό (μάλλον εννοεί τις 0 και 3,14). Οι παραπληρωματικές είναι. Οι παραπληρωματικές αυτηνής, αυτονών έχουνε ίδιο λάμδα, ίδιο λόγο. Ε εντάξει τώρα, θα πάω για μαθηματικός. Κατάλαβες;
204. Σ: Όχι.

205. *Μ: Τι δεν κατάλαβες.*
206. *Σ: Δεν έχω καταλάβει γιατί…*
207. *Μ: Γιατί είναι έτσι; Δεν ξέρω, ρώτα αυτόν που έφτιαξε τα μαθηματικά.*

Στην έκτη ερώτηση διαπιστώνουν μεν ότι ο λόγος $\frac{y_B}{\rho}$ είναι σταθερός για σταθερή γωνία, δεν προσπαθούν όμως να το εξηγήσουν ή να το ερμηνεύσουν με κάποιο τρόπο. Όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα, οι μαθητές αρκούνται στο να βγάλουν κάποιο συμπέρασμα βασιζόμενοι σε αριθμητικές παρατηρήσεις και δεν θεωρούν σημαντικό ή απαραίτητο να προβούν σε κάποια αιτιολόγηση ή ερμηνεία του συμπεράσματος, αν και τους ζητείται.

Η έβδομη ερώτηση αποσκοπούσε στο να ανακαλέσουν στη μνήμη τους τον ορισμό του μέτρου γωνίας σε ακτίνια ως σχέση μεταξύ μήκους ακτίνας και μήκους τόξου την οποία είχαν διαπραγματευτεί στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας. Από τον ακόλουθο διάλογο, διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές αν και είχαν διαπραγματευθεί την έννοια αυτή στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας δεν ανακαλούν άμεσα τη σχέση που συνδέει αυτά τα μεγέθη.

208. *Καθ.: Αυτό από τα προηγούμενα, τι θυμάστε; Ποια είναι η σχέση του τόξου με τη γωνία και την ακτίνα, ποια είχαμε βγάλει;*
209. *Μ: Ότι αυτή η επίκεντρη γωνία είναι ίση…*
210. *Σ: Είναι η μισή της…*
211. *Μ: Όχι, αυτό είναι για εδώ πέρα, γι αυτή τη γωνία. Εδώ είναι…*
212. *Σ: Είναι ίσες!*
213. *Μ: Ναι όντως έχουνε … τέτοιο.*
214. *Σ: Τι θέλετε να βρούμε;*
215. *Καθ.: Θυμάστε τα προηγούμενα που έχουμε κάνει;*
216. *Μ: Αυτά;*
217. *Καθ.: Όχι, την προηγούμενη φορά. Δεν είχαμε μήκος τόξου με γωνία και ακτίνα; Είχατε βγάλει μια σχέση.*
218. *Σ: Μήκος τόξου και ακτίνα μαζί;*
219. *Μ: Α, ότι το μήκος του τόξου προς την ακτίνα είναι ίσο με τη γωνία;*
220. *Καθ.: Με τη γωνία σε τι μονάδες;*
221. *Μ: Σε rad.*

Επιβεβαιώνεται με τον τρόπο αυτό ότι η έννοια του ακτινίου δεν γίνεται εύκολα κατανοητή από τους μαθητές και ότι αποτελεί ένα από τα εμπόδια στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Ένα θετικό στοιχείο ίσως είναι το γεγονός ότι όπως φαίνεται στις προτάσεις 217 έως 221 αναγνωρίζουν εύκολα ότι το μέτρο της γωνίας θα πρέπει να δίνεται σε ακτίνια γεγονός στο οποίο πρέπει να έχει συμβάλει και η εμπλοκή τους με την έννοια κατά την πραγματοποίηση του πρώτου μέρους της δρατηριότητας.

Στην συνέχεια στην προσπάθειά τους οι μαθητές να διορθώσουν το μηχανισμό ώστε να βρίσκει τα σωστά σημεία, στην όγδοη ερώτηση, φαίνεται να δυσκολεύονται να συσχετίσουν τις πληροφορίες που μπορούν να πάρουν από το σχήμα με αυτές που προκύπτουν από τις Αλγεβρικές σχέσεις παρόλο που είναι μάλλον εύκολο να αντιληφθεί κάποιος με βάση το σχήμα ότι για να μειωθεί το μήκος του τόξου στο μισό πρέπει να μικρύνει ο κύκλος, δηλαδή η ακτίνα . Στον ακόλουθο διάλογο οι μαθητές έχουν θέσει την ακτίνα του κύκλου ίση με 2 και προσπαθούν να διορθώσουν τον μηχανισμό ώστε να βρίσκει τα σωστά σημεία.

222. *Σ: Θα έπρεπε το Δ να μου βγει (0,8, 0,75)*
223. *……………………………………………………………………………………… ……………………………………*
224. *Μ: Ε, είναι το διπλάσιο αν το παρατηρήσεις. Το διπλάσιο δεν είναι; (ελέγχει 1,5/2 όπου 1,5 το μήκος του ΑΒ) Ναι είναι το διπλάσιο. Α, ξέρεις κάτι; Αυτά τα δύο είναι τα διπλάσια αυτών.*
225. *Σ: Ναι άρα;*
226. *Μ: Το άρα δεν το ξέρω. Απλώς σου λέω ότι είναι το διπλάσιο!* *……………………………………………………………………………………… ……………………*
227. *Σ: Να βρούμε κάτι που να διπλασιάζει;*
228. *Μ: Το Δ που βρήκαμε εμείς ήτανε το α αυτή η γωνία, ήτανε αυτό εδώ πέρα (δείχνει το τόξο ΟΒ) Α!*
229. *Σ: Α τι;*
230. *Μ: Δεν ξέρω!*
231. *Καθ.: Τι είδατε;*
232. *Μ: Είδαμε ότι αυτές είναι διπλάσιες αυτών. Κάτι δεν έχει σχέση με το τόξο;*
233. *Καθ.: Δεν ξέρω! Έχουμε μια ερώτηση πριν, ποια είναι η σχέση του μήκους τόξου με τη γωνία;*
234. *Μ: Ότι είναι ίσα.*

Βλέπουμε για άλλη μια φορά ότι ενώ από τα αποτελέσματα οι μαθητές διαπιστώνουν ότι με κάποιο τρόπο πρέπει να αλλάξουν το μήκος του τόξου, επειδή θεωρούν ότι η γωνία και το τόξο είναι η ίδια έννοια, οπότε και η πρώτη αυθόρμητη απάντηση είναι ότι είναι ίσα όπως δίνονται στις προτάσεις 233 και 234. Ακόμα και μετά από παρέμβαση και υπενθύμιση της σχέσης που συνδέει το μήκος τόξου με τη γωνία και την ακτίνα, οι μαθητές εξακολουθούν να θεωρούν ότι για να πετύχουν το κατάλληλο μήκος τόξου πρέπει να αλλάξουν την γωνία και όχι την ακτίνα:

235. *Καθ.: Τι θα αλλάξεις;* *……………………………………………………………………………………… ………………………*
236. *Σ: Θα πρέπει να πειράξω τις… (πάει το ποντίκι στο δρομέα της γωνίας)*

237. Μ: Τη γωνία; Αυτό που κάναμε και την προηγούμενη φορά.
238. Καθ.: Προσπαθούμε να πετύχουμε αυτό εδώ. Τι θα αλλάξεις;
239. Μ: Τη γωνία!

Στη συνέχεια οι μαθητές αφού καταλήξουν ότι αυτό που πρέπει να αλλάξει είναι η ακτίνα, πειραματίζονται με διάφορες τιμές της χωρίς όμως να ανατρέξουν στην αλγεβρική σχέση που τα συνδέει, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται μετά από προτροπή του διδάσκοντα. Από τις προτάσεις 240 έως 249 βλέπουμε ότι οι μαθητές δεν έχουν αναγνωρίσει ότι το μήκος τόξου είναι ίσο με το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια μόνο όταν η ακτίνα είναι ίση με τη μονάδα. Επιπλέον, ακόμα και όταν διαπιστώνουν πειραματικά ότι η ακτίνα πρέπει να είναι ίση με τη μονάδα, η (Μ) δεν θεωρεί λογικό το αποτέλεσμα όπως απαντά στην πρόταση 257. Η ερμηνεία που δίνει στην πρόταση 259 δείχνει ότι μάλλον δεν μπορεί να ερμηνεύσει σωστά τη σχέση αναλογίας που υπάρχει ανάμεσα στο μήκος τόξου και την. Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι οι μαθητές δεν μπορούν εύκολα να συσχετίσουν γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας:

240. Καθ.: Για σκέψου, πρέπει να πετύχεις να έχεις τη γωνία, αλλά βγαίνει το τόξο. Πως θα πετύχεις το τόξο και η γωνία να είναι ίσα;
241. Μ: Αλλάζουμε την ακτίνα του κύκλου.
242. Καθ.: Πόση θα την κάνεις;
243. Σ: Θα την κάνουμε μισή.
244. Μ: Όχι, διπλάσια.
245. Καθ.: Σκεφθείτε το.
246. Μ: Ρε συ, διπλάσια γιατί κοίτα είναι κάτω. Όσο αυτό μικρ… όσο αυτό μεγαλώνει…
247. Μ: Όχι ρε φίλε δεν το πετύχαμε.
248. Σ: Πήγαινε πάλι πίσω. Πρέπει να είναι μισή οπότε για να σου βγει αυτό, βλέπεις;
249. Μ: Πρέπει τότε αφού είναι 2 πρέπει να τη βάλουμε μηδέν.
250. Σ: Ένα! (βάζουν την ακτίνα 1)
251. Μ: Ναι δίκιο έχεις.!
252. Σ: Αυτό βγαίνει!
253. Μ: Άρα πρέπει να είναι μισό; (δεν έχει αντιληφθεί ότι πρέπει να είναι 1)
254. Σ: Πρέπει να βγει μισό δηλαδή. Η ακτίνα; Μισή ακτίνα δηλαδή.
255. Μ: Α! Άρα…
256. Καθ.: Είναι λογικό αυτό που βγάλατε;
257. Μ: Όχι.
258. Καθ.: Γιατί;
259. Μ.: Γιατί αυτό είναι αντιστρόφως ανάλογο με αυτό. Άρα όσο μικραίνει αυτό πρέπει να μεγαλώνει αυτό, και όσο μεγαλώνει αυτό πρέπει να μικραίνει αυτό.

Όταν οι μαθητές για να απαντήσουν στο ένατο ερώτημα, προσπάθησαν να δώσουν τον ορισμό της συνάρτησης, η αρχική απάντηση ήταν η ακόλουθη:

260. *Σ: Συνάρτηση είναι η διαδικασία μέσω της οποίας ένα στοιχείο του Α αντιστοιχεί… στο Β;*
261. *Καθ.: Αντιστοιχεί σε τι;*
262. *Σ: Έχουμε δύο σύνολα.*
263. *Καθ.: Ναι.*
264. *Σ: Έχουμε ένα σύνολο Α και ένα σύνολο Β. Συνάρτηση είναι η διαδικασία μέσω της οποίας ένα στοιχείο του Α αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του Β.*
265. *Καθ.: Ωραία. Γράψ' το. Πως σχετίζεται με τη γραφική παράσταση;*
266. *Σ: Αυτήν εδώ τη γραφική παράσταση; (δεν έχει σχηματιστεί η γραφική παράσταση, μόνο 3 κοντινά σημεία)*
267. *Καθ.: Γενικότερα.*
268. *Μ: Α! Προσδιορίζει τη συνάρτηση στο καρτεσιανό επίπεδο.*
269. *Καθ.: Δηλαδή; Πες το λίγο πιο αναλυτικά αυτό που λες.*
270. *Σ: Σημεία προσδιορίζουμε(;;;) δηλαδή. Ότι για ένα x υπάρχει και y.*
271. *Καθ.: Πόσα y;*
272. *Μ: Ένα.*

Όπως φαίνεται στην πρόταση 260, οι μαθητές, επηρεασμένοι και από τον ορισμό του σχολικού βιβλίου, αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια διαδικασία ενώ ήδη ο (Σ) έχει αντιληφθεί ότι ο μηχανισμός της δραστηριότητας αφορά στην εύρεση σημείων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Το γεγονός πως θεωρεί στην πρόταση 266, ότι τα τρία μόνο σημεία που έχει βρει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, ενισχύει την άποψη ότι αντιμετωπίζει αρχικά τη συνάρτηση ως διαδικασία εύρεσης μεμονωμένων σημείων και όχι ως αντικείμενο. Η (Μ) λέγοντας στην πρόταση 268 ότι η γραφική παράσταση «*Προσδιορίζει τη συνάρτηση στο καρτεσιανό επίπεδο*» αλλά και στη συνέχεια όταν απαντάει ότι *«Σε μια γραφική παράσταση παρουσιάζουμε τη συνάρτηση»* φαίνεται αρχικά να έχει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της συνάρτησης.

Σχετικά με την αναγκαιότητα ύπαρξης ενός αλγεβρικού τύπου σε μια συνάρτηση, από τον ακόλουθο διάλογο φαίνεται ότι ο (Σ) θεωρεί ότι μάλλον είναι ο μοναδικός τρόπος, όπως φαίνεται από τις προτάσεις 282 και 283, για να βρεθεί η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής ενώ η (Μ) σε σχετική ερώτηση απαντά στην πρόταση 284 ότι υπάρχει κι άλλος, χωρίς όμως να δώσει κάποιο παράδειγμα και το πιο πιθανό είναι ότι η απάντησή της ήταν αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο τέθηκε η ερώτηση.

273. *Σ: Η συνάρτηση δίνει αυτά τα σημεία; Το x δεν το ξέρουμε, το y μας δίνει η συνάρτηση.*
274. *Μ: Ναι.*
275. *Σ: Πως όμως. Πρέπει να πούμε και πως;*
276. *Καθ.: Εξαρτάται από κει και πέρα πως. Πως μας τα δίνει;*

277. Σ: Υπάρχουν τύποι, $y = \alpha x + \beta$.
278. *Καθ.: Ένας τρόπος λοιπόν να έχεις ένα τύπο.*
279. *Μ: Ναι.*
280. *Σ: Μέσω του τύπου.*
281. …….
282. *20:12 Καθ:. Είναι ο μοναδικός τρόπος;*
283. *Σ: Υπάρχουνε κι άλλοι;*
284. *Μ: Ε, ναι!*

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι μαθητές παρότι είχαν διδαχθεί τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είχαν κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αντιστοίχιση και το πιο πιθανό είναι ότι είχαν θεωρήσει πως δεν εντάσσονται στην έννοια της συνάρτησης όπως αυτοί την αντιλαμβάνονταν. Μετά από αυτή τη συζήτηση σχετικά με την έννοια της συνάρτησης, οι μαθητές μπόρεσαν σχετικά εύκολα να διαπιστώσουν και να αιτιολογήσουν γιατί τα σημεία του επιπέδου που βρήκαν χρησιμοποιώντας τον μηχανισμό της δραστηριότητας αποτελούν σημεία γραφικής παράστασης συνάρτησης. Σε αυτό που δυσκολεύτηκαν ήταν να απαντήσουν αν η συνάρτηση αυτή έχει κάποιο συγκεκριμένο αλγεβρικό τύπο:

285. *Μ: Και ο τύπος της ε; Α! παίρνουμε* $x = \alpha$ *και* $y = \frac{y_B}{\rho}$ …
286. *Καθ.: Και το* y_B*, πως το βρίσκεις;*
287. *Μ: Παίρνουμε βασικά 0,75 αυτήν την τιμή που μας δίνει (δεν φαίνεται κάτι στην οθόνη) και* $\frac{y_B}{\rho}$*, πόσο ήταν το ρ… ένα.*
288. *Καθ.: Βάζεις λοιπόν το* $\rho = 1$ *με το οποίο διαιρείς και έχεις κατευθείαν το* y_B.
289. *Μ: Άρα* $y_B = 0,75$*, άρα* $y = y_B$.
290. *Καθ.: Άρα, για παράδειγμα αν βάλεις* $x = 0,4$ *ποιο θα είναι το* y *;*
291. ………………………..
292. *Καθ.: Όταν έχεις έναν τύπο αντικαθιστάς την τιμή στο* x *και το βρίσκεις. Τώρα μπορείς να το βρεις; Έχεις έναν τύπο ώστε να βάλεις την τιμή του x και να υπολογίσεις;*
293. *Σ:* $y =$ ….
294. *Καθ.: Έχεις;*
295. *Σ: Υπάρχει, και είναι της… κλίσης;;*

Χρειάστηκε αρκετή ώρα και αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες να χρησιμοποιηθεί ο τύπος $\frac{y_B}{\rho}$, παρότι εξαρχής διαπιστώθηκε ότι δεν είναι δυνατόν να υπολογισθεί με κάποια αλγεβρική σχέση το y_B για να καταλήξουν οι μαθητές στον ακόλουθο διάλογο:

296. Σ: $\frac{AB}{\rho}$, *όχι παιδί μου είναι συνημίτονο – ημίτονο λέμε! Ένα από αυτά τα δύο. Ποιος είναι ο τύπος το συνημιτόνου; Η εφαπτομένη είναι οι δύο κάθετες.*
297. *Μ: Του συνημιτόνου είναι απέναντι προς …*
298. *Καθ: Του ημιτόνου είναι.*
299. *Σ: Ναι, του ημιτόνου.*
300. *Καθ: Άρα λοιπόν τι είναι αυτός ο λόγος;*
301. *Σ: Ο τύπος του ημιτόνου;*
302. *Μ: Το συνημίτονο!*
303. *Σ: Το ημίτονο είναι!*
304. *Καθ: Υπάρχει κάποιος τύπος να βρεις με πράξεις;*
305. *Μ: Του ημιτόνου.*
306. *Καθ: Δηλαδή έχει κάποιον τύπο για το ημίτονο, αν ξέρεις τη γωνία τη βάζεις στο ημίτονο, κάνεις πράξεις και το βρίσκεις;*
307. *Μ: Ναι!*
308. *Καθ: Έχουμε;*
309. *Μ: Δεν έχουμε;*
310. *Καθ: Γι' αυτό και δεν μπορούμε να βρούμε για κάθε γωνία. Ας πάμε παρακάτω. Παρατηρούμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει κάποιος τύπος, είναι όμως συνάρτηση;*
311. *Σ: Ναι!*
312. *Καθ: Γιατί έχουμε τον μηχανισμό ε;*
313. *Σ: Τον μηχανισμό που ένα σημείο αντιστοιχεί………..*

Από τον διάλογο αυτόν προκύπτει ότι ναι μεν οι μαθητές αναγνώρισαν ότι πρόκειται για το ημίτονο της γωνίας, για το οποίο όμως δεν είχαν συνειδητοποιήσει ότι δεν υπάρχει κάποια αλγεβρική σχέση με την οποία να μπορούμε να το υπολογίσουμε. Πιο συγκεκριμένα από τις προτάσεις 296 έως 301 φαίνεται να θεωρούν πως ο ορισμός του ημιτόνου ως ο λόγος δύο πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι και ο τύπος του, κάτι που τους οδηγεί στην υπόθεση ότι μπορούν να εφαρμόσουν τον τύπο αυτό για να υπολογίσουν το ημίτονο μιας γωνίας, όπως φαίνεται από τις προτάσεις 304 έως 309. Η δυσκολία να δεχτούν οι μαθητές ότι μια συνάρτηση είναι δυνατόν να μην δίνεται μέσω μιας αλγεβρικής σχέσης και τα προβλήματα που αυτή δημιουργεί για την κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έχουν επισημανθεί και από τους Breidenbach, Dubinksy, Hawks, & Nichols,(1992).

Δυσκολίες συνάντησαν οι μαθητές και στην προσπάθειά τους να απαντήσουν στην ενδέκατη ερώτηση. Αν και αρχικά ο (Σ) παρατήρησε ότι *«Το Λ είναι το* y_B *και το* B_1 *είναι το μήκος τόξου»*, στη συνέχεια δεν μπόρεσαν να τα συνδέσουν με τα σημεία της συνάρτησης ημίτονο του προηγούμενου ερωτήματος παρά μόνο μετά από παρέμβαση του καθηγητή. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και ο ακόλουθος διάλογος:

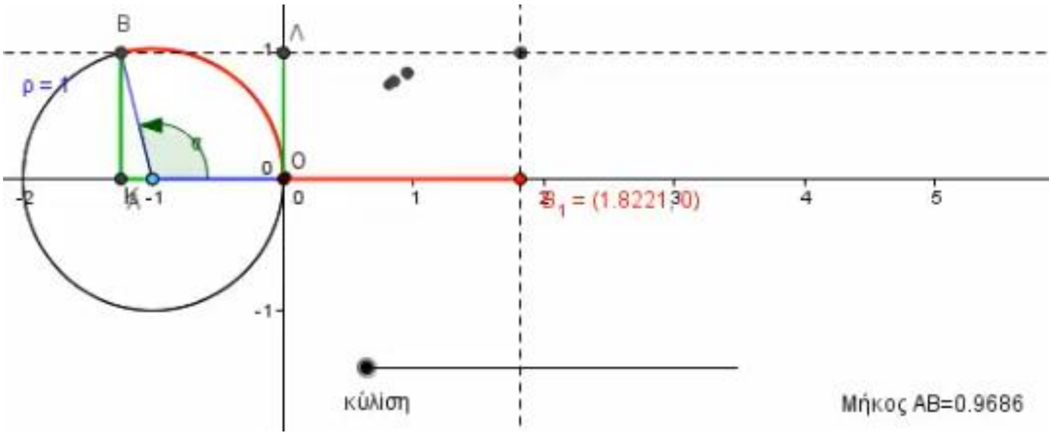
314. Σ: Είναι αυτό ίσο με αυτό; (εννοεί το τόξο ΟΒ και το τμήμα ΑΒ)

315. Μ: Αυτό εδώ, είπαμε ότι το ΟΒ όταν η ακτίνα είναι 1, είναι ΚΒ (στο σχήμα το Κ έχει πέσει πάνω στο Α). Το ΚΒ είναι αυτό ουσιαστικά, κατάλαβες; Άρα το ΟΛ είναι ίσο με $\overset{\frown}{OB}$.

316. Σ: Ναι όμως εδώ που βλέπεις δεν βγάζει το ίδιο (εννοεί το $B_1\,(1.8221,\ 0)$ *και το* $AB = 0,9686$*), άρα κάτι λάθος κάνουμε!*

317. Καθ: Που λες ότι θα είναι ίσο;

318. Σ: Λέει ότι αυτό που είναι 1,8 θα είναι ίσο με αυτό. (δείχνει το ΑΒ)



Σχήμα 8

Παρατηρούμε ότι παρόλο που είναι εμφανές ότι το μήκος του τόξου δεν μπορεί να είναι ίσο με το μήκος ΑΒ, οι μαθητές δεν μπορούν να ερμηνεύσουν σωστά το σχήμα.

Καθώς οι μαθητές είχαν ήδη διαπιστώσει ότι οι συντεταγμένες των σημείων Λ και B_1 μας δίνουν τις συντεταγμένες των σημείων της συνάρτησης και είχαν θέσει την ακτίνα το κύκλου ίση με τη μονάδα, δεν χρειάστηκε να προβούν σε κάποια διόρθωση ή επαναδιατύπωση στην δωδέκατη ερώτηση. Στη σημείο αυτό η μαθήτρια (Μ) μετακινώντας τον δρομέα α παρατηρεί ότι η γραφική παράσταση που σχηματίζεται είναι αυτή της συνάρτησης του ημιτόνου. Στη συνέχεια η παρατήρηση του τρόπου με τον οποίο κινούνται τα σημεία Β και Ν όταν μετακινείται ο δρομέας α, βοηθάει τους μαθητές να συσχετίσουν χωρίς δυσκολία τη θέση του σημείου Ν της συνάρτησης με τη θέση του σημείου Β στον κύκλο, ενώ η (Μ) παρατηρεί ότι το μήκος ΑΒ σχετίζεται με το ημίτονο. Έτσι διαπιστώνουν σχετικά εύκολα ότι τα σημεία Β και Ν έχουν την ίδια τεταγμένη, αλλά δεν είναι φανερό σε ποιο βαθμό έχουν συνδέσει το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{OB}$ με την τετμημένη του Ν. Επίσης παρατηρώντας την κίνηση του σημείου Ν δεν δυσκολεύονται να περιγράψουν πότε κινείται ανοδικά πότε καθοδικά και γιατί, ενώ διαπιστώνουν εύκολα ότι η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο 2π. Επίσης αιτιολογούν με ευκολία την περιοδικότητα με βάση τον αριθμό των πλήρων περιστροφών που χρειάζονται για να έχουμε όρισμα μεγαλύτερο του 2π όπως φαίνεται από τις προτάσεις 319 έως 324:

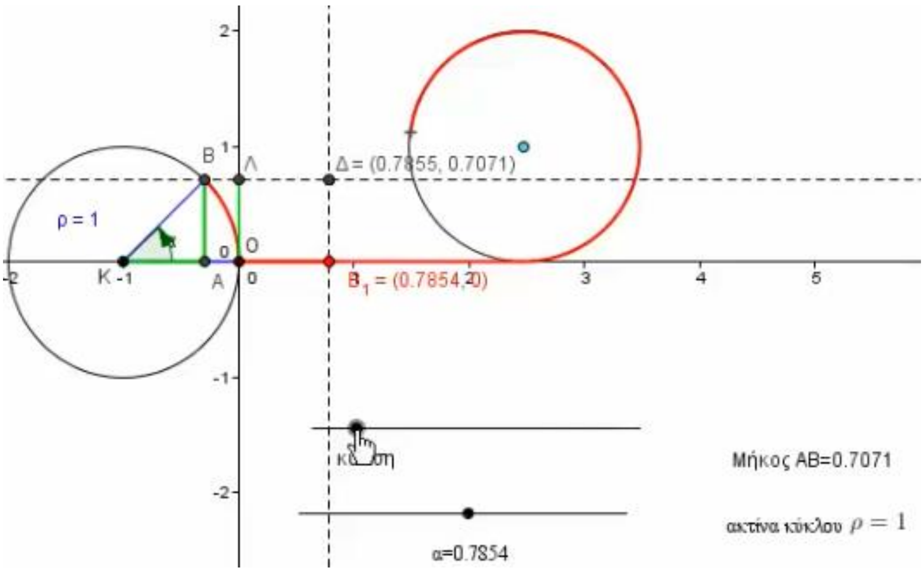
319. *Καθ: Τι κάναμε δηλαδή γιατί πήγαμε παραπέρα τι μετρήσαμε;*
320. *Μ: Μια περίοδο!*
321. *Καθ: Η γωνία είναι η ίδια ή παραπάνω, γιατί προχώρησε παραπέρα;*
322. *Μ: Γιατί κάναμε περισσότερους κύκλους.*
323. *Καθ: Άρα μετράς μόνο τη γωνία;*
324. *Σ: Άρα μετράω κύκλους και γωνία. Μετράω τη γωνία από εδώ και μετά μετράω κύκλους, $2\kappa\pi$ που λέμε.*

Στην ερώτηση 14 δυσκολεύονται ιδιαίτερα να απαντήσουν και ο πιο πιθανός λόγος είναι ότι δεν έχουν αντιληφθεί όπως διαπιστώθηκε και προηγουμένως ότι δεν υπάρχει κάποιος αλγεβρικός τύπος αλλά ένας γεωμετρικός μηχανισμός μέσω του οποίου μπορούμε να βρούμε τις τιμές της συνάρτησης ημίτονο. Ο παρακάτω διάλογος δείχνει πόσο δύσκολο είναι για τους μαθητές να κατανοήσουν ότι μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει αλγεβρικό τύπο:

325. *Καθ: Άρα έχουμε έναν μηχανισμό που να μας δίνει γραφική παράσταση και συνάρτηση;*
326. *Σ: Γραφική παράσταση και συνάρτηση…. το ημίτονο……*
327. *Καθ: Έχει τύπο;*
328. *Μ: Ναι τον τύπο του ημιτόνου.*
329. *Καθ: Είναι τύπος αυτός; Αλγεβρικός τύπος ώστε με πράξεις να βρω πόσο κάνει;*
330. *Σ: Ημίτονο ίσον $\frac{y_B}{\rho}$.*
331. *Καθ: Μπορώ να βρω το y_B;*
332. *Μ: Όχι, δεν έχει τύπο!*
333. *Σ: Δεν έχει τύπο, είναι συνάρτηση όμως!*
334. *Καθ: Έχει όμως κάποιον μηχανισμό. Είναι θα λέγαμε καθαρά αλγεβρική συνάρτηση ή μπλέκουν κι άλλα πράγματα μέσα;*
335. *Μ: Όχι, δεν είναι αλγεβρική.*
336. *Καθ: Δηλαδή έχουμε και με άλλα πράγματα να κάνουμε;*
337. *Μ: Έχουμε να κάνουμε και με κύκλους…*
338. *Σ: Γωνίες, γεωμετρικά*
339. *Μ: Ναι, δεν είναι μόνο αλγεβρικά.*

Παρατηρούμε ότι είναι σχεδόν ίδιος με τον διάλογο που προηγήθηκε και ο οποίος είχε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν έχει αλγεβρικό τύπο. Η διαφορά εδώ είναι ότι στις προτάσεις 337, 338 γίνεται η διαπίστωση πως ο μηχανισμός της συνάρτησης είναι κατά βάση γεωμετρικός παρ' όλο που θεωρούν ότι πάντα υπάρχει ένα αλγεβρικό μέρος όπως φαίνεται στην πρόταση 339. Στη συνέχεια οι μαθητές παροτρύνονται να χρησιμοποιήσουν τον μηχανισμό που έχουν στη διάθεσή τους:

340. Καθ: Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον μηχανισμό αυτό για να το υπολογίσεις;
341. Μ: Να βάλουμε το 0,.. εκειπέρα και να δούμε (γελώντας)

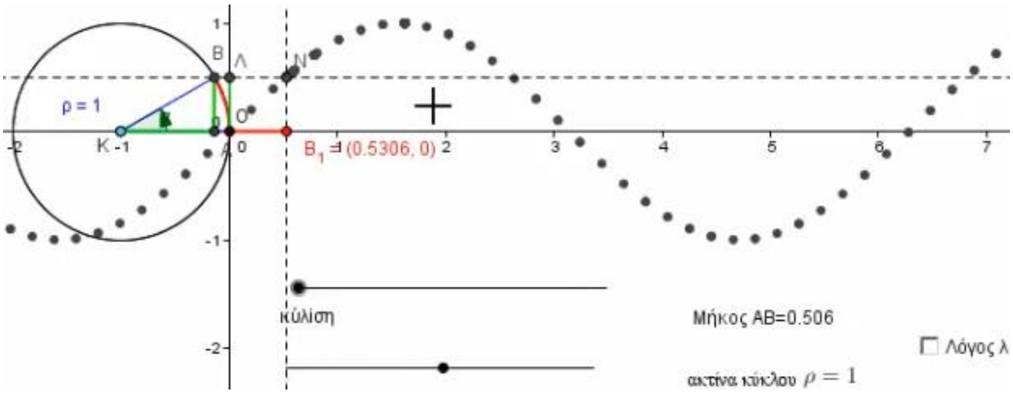


Σχήμα 9

342. Καθ: Άρα ποιο είναι το ημίτονο;
343. Σ: Το ημίτονό μας είναι το Δ, το σημείο; Όχι…
344. Μ: Το ημίτονο; Ναι το Δ είναι!
345. Σ: Το ημίτονο είναι το ΛΟ… το ΑΒ προς την ακτίνα.
346. Καθ: Ναι. Άρα μπορείς να πεις συγκεκριμένα αριθμό τώρα εδώ;
347. Σ: Θα είναι, πόσο είναι το ΑΒ;
348. Μ: Το ΑΒ είναι ίσο με …
349. Καθ: Με το ΟΛ που είναι πόσο;
350. Σ: Με το ΟΒ με το ΟΒ…είναι 0,7855…
351. Μ: Αχ, το y είναι ίσο με αυτό (δείχνει το 0,7071 στις συντεταγμένες του σημείου)
352. Σ:Ποιο;
353. Μ: Δεν είναι ίσο με το y ;
354. Σ: Ναι;
355. Μ: ΟΛ είναι ίσο με το y .
356. Σ: Οπότε τα θα γράψω;
357. Μ: 0,70 προς την ακτίνα που είναι 1…
358. Σ: Και τι κάνω μετά;
359. Μ: Αυτό είναι το y_B !

Παρατηρούμε ότι ενώ οι μαθητές μπορούσαν να δουν την τιμή της συνάρτησης άμεσα από το μήκος του τμήματος ΑΒ το οποίο εμφανίζεται στην οθόνη τους, προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν το αντίστοιχο σημείο της γραφικής παράστασης. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν είναι εξοικειωμένοι με τον συγκεκριμένο μηχανισμό και προτίμησαν το σημείο της γραφικής παράστασης που τους είναι πιο οικείο. Βλέπουμε όμως ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν σωστά τις συντεταγμένες του σημείου για να βρουν την τιμή της συνάρτησης, όπως φαίνεται από την πρόταση 343. Το γεγονός αυτό δείχνει πόσο κυρίαρχο ρόλο έχει η ύπαρξη αλγεβρικού τύπου σε μια συνάρτηση αφήνοντας σε δεύτερη μοίρα τη χρήση των άλλων αναπαραστάσεων της συνάρτησης για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Στην τελευταία ερώτηση οι μαθητές έπρεπε με τη χρήση του μηχανισμού να βρουν γωνίες των οποίων το ημίτονο είχε κάποιες συγκεκριμένες τιμές, στην ουσία να λύσουν κάποιες στοιχειώδεις τριγωνομετρικές εξισώσεις. Οι μαθητές αφού μετά από υπόδειξη χρησιμοποιούν τον μηχανισμό, βρίσκουν τη μια λύση της εξίσωσης για $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ δεν χρησιμοποιούν όμως τη γραφική παράσταση ώστε να διαπιστώσουν ότι υπάρχουν και άλλες τιμές της γωνίας με το ίδιο ημίτονο, παρόλο που γνωρίζουν να λύνουν τριγωνομετρικές εξισώσεις. Έτσι ενώ όπως θα μπορούσαν να διαπιστώσουν από το παρακάτω σχήμα, υπάρχουν τουλάχιστον τρεις γωνίες με ημίτονο 0,5, οι μαθητές βρήκαν μόνο την γωνία $\alpha = 0,53$.



5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων απαιτεί την κατανόηση και τη συσχέτιση διαφόρων εννοιών. Αρχικά είναι βασικό οι μαθητές να κατανοήσουν τον ορισμό του ακτινίου ως μονάδα μέτρησης γωνιών και τη σχέση του με το μέτρο της γωνίας σε μοίρες. Σημαντικό είναι επίσης να κατανοήσουν την τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου όπου οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι λόγοι πλευρών ορθογωνίων τριγώνων και την τριγωνομετρία του τριγωνομετρικού κύκλου και να είναι σε θέση να μεταβούν από τη μία στην άλλη. Τέλος πρέπει να αντιληφθούν ότι ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ο βασικός μηχανισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και να μπορούν να τον συνδέσουν με τις γραφικές τους παραστάσεις. Στη συγκεκριμένη εργασία έγινε προσπάθεια όχι μόνο να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό οι μαθητές έχουν κατανοήσει αυτές τις έννοιες, αλλά να παρουσιασθεί στους μαθητές και ένα νέο γνωστικό εργαλείο το οποίο θα δώσει τη δυνατότητα στους μαθητές να εμπεδώσουν, να αναπλαισιώσουν και να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους βοηθώντας στην βαθύτερη κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας που διαπραγματεύονταν την έννοια του ακτινίου, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να κατανοήσουν τις σχέσεις αναλογίας που συνδέουν το μήκος του τόξου με την ακτίνα του κύκλου και το μέγεθος της γωνίας. Η παρατήρηση αυτή είναι σύμφωνη με το συμπέρασμα των Akkoç and Akbaş Gül (2010) οι οποίοι παρατήρησαν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να το αντιληφθούν ως λόγο δύο μηκών ούτε και να συνδέσουν το μέτρο γωνιών με το μήκος των αντίστοιχων τόξων σε σχέση με την ακτίνα. Επίσης οι μαθητές όταν στη συνέχεια υπολόγιζαν το λόγο μήκους τόξου προς ακτίνα δεν αναγνώρισαν ότι πρόκειται για το γνωστό τους ορισμό του ακτινίου ακόμα και όταν τους ζητήθηκε να τον διατυπώσουν. Η παρατήρηση αυτή ενισχύει το παραπάνω συμπέρασμα καθώς όπως φαίνεται οι μαθητές μαθαίνουν τον ορισμό του ακτινίου χωρίς να τον κατανοούν και να τον συνδέουν με τα συγκεκριμένα γεωμετρικά μεγέθη. Η δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν το γεγονός ότι η αναλογία ανάμεσα στο μήκος τόξου και την ακτίνα για δεδομένη γωνία παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από την ακτίνα του κύκλου, κάτι που παραπέμπει στη χρήση της ακτίνας ως μονάδας

μέτρησης μήκους, είναι ένας από τους βασικούς λόγους που οι μαθητές σε αντίθεση με τις μοίρες δεν αντιλαμβάνονται το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών.
Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν κυρίως τις αλγεβρικές σχέσεις για την εξαγωγή συμπερασμάτων και σχεδόν καθόλου τις αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις. Αυτό πιθανότατα οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν συνηθίσει να προσεγγίζουν τα προβλήματα διαδικαστικά και όχι εννοιολογικά κάτι που μπορεί να αποβεί εις βάρος της κατανόησης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Kendal & Stacey, 1997). Γενικότερα οι μαθητές φάνηκε να μην μπορούν να αντιληφθούν τις σχέσεις των διαφόρων μεγεθών παρατηρώντας τα σχήματα ώστε να κάνουν τις κατάλληλες εικασίες και προσπαθούσαν να βγάλουν κάποιο συμπέρασμα πειραματιζόμενοι σχεδόν αποκλειστικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Επίσης διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές θεωρούσαν ότι οι αριθμοί που αφορούν σε μέτρα γωνιών που δεν περιέχουν τον π αναφέρονται στο μέτρο της γωνίας σε μοίρες και όχι σε ακτίνια, ενώ τον ίδιο τον αριθμό π δεν τον αντιλαμβάνονται ως πραγματικό αριθμό αλλά ως μία σταθερή ποσότητα. Το συμπέρασμα αυτό είναι σύμφωνο με τα συμπεράσματα των (Orhun, 2001; Topçu et al. 2006, Akkoç & Akbaş Gül 2010). Το γεγονός αυτό είναι πιθανό να αποτελεί εμπόδιο στο να αντιληφθούν οι μαθητές ως πεδίο ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον οι οι Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Yilmaz, K., & Önder, O. (2006) είχαν παρατηρήσει ότι η έννοια της μοίρας ως μονάδα μέτρησης γωνιών κυριαρχεί της έννοιας του ακτινίου και ότι η εξίσωση $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ λειτούργησε ως γνωστική μονάδα, καθώς ο ορισμός της έννοιας του ακτινίου βασίστηκε στη σχέση αυτή. Στο πλαίσιο της πρώτης δραστηριότητας, οι μαθητές κατέληξαν στη σχέση $\mu = 57,6 \cdot \alpha$ αλλά παρότι γνώριζαν ότι ο αριθμός μ είναι το μέτρο της γωνίας σε μοίρες ενώ είχαν διδαχθεί και τη σχέση $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, δεν κατάφεραν να συνδυάσουν τα συμπεράσματά τους ώστε να διαπιστώσουν ότι ο α είναι το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι η σχέση στην οποία κατέληξαν οι μαθητές δεν είναι η ακριβής σχέση και δεν περιέχει τον αριθμό π επιβεβαιώνοντας έτσι όχι μόνο την αναγκαιότητα ένας αριθμός να περιέχει τον π ώστε να αφορά στο μέτρο γωνίας σε ακτίνια αλλά και την κυριαρχία της μοίρας ως μονάδα μέτρησης της γωνίας καθώς στη συνέχεια όταν ρωτήθηκαν οι μαθητές αν ο αριθμός α θα μπορούσε να αποτελέσει μια νέα μονάδα μέτρησης του μέτρου μιας γωνίας, απέτυχαν να αναφέρουν κάτι διαφορετικό από το μέτρο της γωνίας σε μοίρες.

Μία επιπλέον παρανόηση σχετικά με τη σχέση του μήκους τόξου μιας γωνίας και το μέτρο της σε ακτίνια είναι πως πολλοί μαθητές δεν μπορούν να διαχωρίσουν τις δύο αυτέ έννοιες. Η αίσθηση αυτή φάνηκε να είναι τόσο βαθιά ριζωμένη στην αντίληψη των μαθητών, ώστε ακόμα και μετά από την παρατήρηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων αλλά και τη δυναμική μεταβολή των μεγεθών στη γεωμετρική αναπαράσταση να καταλήξουν στο ακόλουθο συμπέρασμα, χωρίς να αισθανθούν την ανάγκη να αναθεωρήσουν την άποψή τους αυτή:

Παρατηρούμε ότι μεγαλώνει το τόξο κάθε φορά που μεγαλώνει η ακτίνα (παρόλο που αυτό δεν είναι λογικό επειδή η γωνία είναι ίδια).

Το συμπέρασμα αυτό είναι σε συμφωνία με αυτό του Cetin O.F. (2015) ο οποίος διαπίστωσε ότι μόνο 23 από τους 90 μαθητές είχαν πλήρη αντίληψη της διαφοράς ανάμεσα στο μέτρο μιας γωνίας και το μήκος του αντίστοιχου τόξου.

Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητας, οι μαθητές στο πλαίσιο του τριγωνομετρικού κύκλου, δεν αναγνώρισαν τον λόγο της απέναντι καθέτου προς την ακτίνα του κύκλου ως το ημίτονο της γωνίας, ενώ και στη συνέχεια όταν χρειάστηκε να αιτιολογήσουν το γεγονός ότι ο λόγος είναι ανεξάρτητος από την ακτίνα του κύκλου χρειάστηκε να γίνουν κατάλληλες υποδείξεις από τον καθηγητή ώστε να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι αυτό οφείλεται στην ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται. Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν έχουν συνδέσει την τριγωνομετρία του ορθογωνίου τριγώνου με αυτή του τριγωνομετρικού κύκλου. Σε αντίστοιχο συμπέρασμα είχαν καταλήξει και οι Bressoud (2010), Thompson (2008) και Thompson, Carlson, & Silverman, 2007).

Μια από τις βασικές λειτουργίες του τριγωνομετρικού κύκλου είναι να επεκτείνει τον ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και σε γωνίες μεγαλύτερες των 90^o μέσω της σύνδεσής τους με τις συντεταγμένες του άκρου του αντίστοιχου τόξου. Διερευνήθηκε αν οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν την τεταγμένη του άκρου του τόξου με τον λόγο που δίνει το ημίτονο της γωνίας. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να βρουν την σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη, κάτι που αποδεικνύει επίσης ότι δεν μπορούν να συνδέσουν την τριγωνομετρία ορθογωνίου τριγώνου με αυτή του τριγωνομετρικού κύκλου.

Επίσης, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές όταν τους ζητήθηκε να βρουν γωνίες για τις οποίες ο λόγος της τεταγμένης y_B του άκρου του τόξου προς την ακτίνα ρ να είναι ίδιος ή αντίθετος, δεν χρησιμοποίησαν τις συμμετρίες του τριγωνομετρικού κύκλου αλλά προσπάθησαν με αριθμητικές δοκιμές να προσεγγίσουν το ζητούμενο. Καθώς οι μαθητές είχαν διδαχθεί και γνώριζαν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αντίθετων και παραπληρωματικών γωνιών, το γεγονός πως δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν τον τριγωνομετρικό κύκλο για να απαντήσουν στο ερώτημα αποδεικνύει ότι η προσέγγιση της έννοιας του τριγωνομετρικού αριθμού από τους μαθητές είναι καθαρά διαδικαστική, στο επίπεδο εφαρμογής τύπων στο πλαίσιο ασκήσεων συγκεκριμένης μορφής και μεθοδολογίας, και επιφανειακή.

Η αναγκαιότητα να τεθεί η ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου ίση με τη μονάδα, προκύπτει κυρίως από το γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή από τις συντεταγμένες του άκρου του τόξου προκύπτουν άμεσα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι το γεγονός ότι το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια ισούται με το μήκος του αντίστοιχου τόξου κάτι που διευκολύνει τη σύνδεση γεωμετρικά ανάμεσα στον τριγωνομετρικό κύκλο και τις συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Για μια ακόμη φορά, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να διορθώσουν τον κύκλο ώστε να δίνει άμεσα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης του ημιτόνου, οι μαθητές φάνηκε να μην μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη σχέση ανάμεσα σε μήκος τόξου, γωνία και ακτίνα ώστε να καταλήξουν στο σωστό συμπέρασμα. Επιβεβαιώνεται έτσι η μεγάλη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να αντιληφθούν και να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα σχέσεις και τους λόγους γεωμετρικών μεγεθών.

Σύμφωνα με τους Breidenbach, Dubinksy, Hawks, & Nichols,(1992), η δυσκολία των μαθητών να δεχτούν ότι υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν αλγεβρική αναπαράσταση δημιουργεί σημαντικά προβλήματα στην κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Το πρόβλημα αυτό αναδείχθηκε σε μεγάλο βαθμό και στην συγκεκριμένη δραστηριότητα, καθώς οι μαθητές ακόμα και μετά την αναγνώριση ότι ο μηχανισμός απεικόνισης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι γεωμετρικός, αδυνατούσαν να δεχτούν ότι δεν υπάρχει αλγεβρική σχέση για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μάλιστα, η ανάγκη τους να βρουν μια αλγεβρική σχέση που να δίνει την τεταγμένη y_B τους οδήγησε στο να θεωρήσουν τον ορισμό $\eta\mu\alpha = \frac{y_B}{\rho}$ ως αλγεβρική σχέση την οποία με κάποιο τρόπο θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν άμεσα για την εύρεση της τιμής του $\eta\mu\alpha$.

Στη συνέχεια η χρήση του μηχανισμού της δραστηριότητας επικεντρώνεται στη νοηματοδότηση του τριγωνομετρικού κύκλου ως βασικού μηχανισμού απεικόνισης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και στη σύνδεσή του με τη γραφική τους παράσταση. Παρατηρείται ότι μέσω της δυναμικής συμμεταβολής του άκρου του τόξου με το αντίστοιχο σημείο της γραφικής παράστασης επιτυγχάνεται ικανοποιητική σύνδεση του τριγωνομετρικού κύκλου με τη γραφική παράσταση κάτι που είναι σε συμφωνία με τα συμπεράσματα του Moore (2010). Η δυσκολία που παρουσιάζεται στη συνέχεια όταν από τους μαθητές πρέπει να βρουν το ημίτονο συγκεκριμένων γωνιών μέσω της χρήσης του μηχανισμού και της γραφικής παράστασης αποδίδεται κυρίως στο γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι δεν υπάρχει αλγεβρική σχέση που να δίνει το ζητούμενο και όχι στην ελλιπή σύνδεση του μηχανισμού με την γραφική παράσταση.

Τέλος, οι μαθητές για να βρουν γωνίες με συγκεκριμένο ημίτονο δεν χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αλλά περιορίζονται στη χρήση του μηχανισμού με αποτέλεσμα να βρίσκουν μόνο μια γωνία. Αναδεικνύεται με τον τρόπο αυτό η αναγκαιότητα χρήσης της κατάλληλης αναπαράστασης αλλά και της σύνδεσης των διάφορων αναπαραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων για τη λύση προβλήματος (Knuth 2006b, Knuth 2000a).

Βιβλιογραφία

Akkoç, H. & Akbaş Gül, N. (2010). Analysis of a teaching approach aiming at eliminating student difficulties with radian. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 43(1), 97-129.

Blackett, N., & Tall, D. O. (1991). Gender and the versatile learner of trigonometry using computer software. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 144-151). Assisi, Italy: PME.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Bressoud, D. M. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *The Mathematics Teacher*, *104*, 106-112.

Brown, S. A. (2005). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. Unpublished Ph.D. Dissertation. Illinois State University: USA.

Brown, A. & Dowling, P., (1998). Doing Research / Reading Research: A Mode of Interrogation for Education. London: Falmer Press

Cetin O. F. (2015). Students' perceptions and development of conceptual understanding regarding trigonometry and trigonometric function. Academicjournals, 10(5), 338-350.

Challenger, M. (2009). *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry.* (Unpublished doctoral dissertation). University of Warwick.

Choike, J. (2000). Teaching strategies for "Algebra for All". Mathematics Teacher, 93(7), 546-560.

Cole, M. & Engestrom, Y., (1993). A cultural historical approach to distributed cognition. In G. Salomon, (Ed.), *Distributed Cognitions. Psychological and Educational Considerations.* Cambridge: University Press.

Davis, J. (2005). Connecting procedural and conceptual knowledge of functions. Mathematics Teacher, 99 (1), 36-39.

di Sessa, A. (2000). *Changing minds, computers, learning and literacy*. Cambridge, MA: MIT Press.

Duffy, T. & Cunningham, D. J. (1996) Constructivism: Implications for the design and delivery of instruction. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology,* (pp. 170–198). New York: Macmillan.

Duval, R. (1987). The role of interpretation in the learning of mathematics. Diastasi, 2, 56 - 74.

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 37±65.

Ernest, P. (1994). Social constructivism and the psychology of mathematics education In P.Ernest (Ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (pp. 62-72). London: Falmer Press

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 39-47). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17(1)*, 105-121.

Gagatsis A. and Shiakalli M.(2004), Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving, Educational Psychology, 24(5),645 – 657.

Garofalo, J., Drier, H., Harper, S., Timmerman, M.A., and Shockey, T. (2000). Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education,* 1, (1), 66-88.

Greeno & Hall (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78, 361 – 367.*

Herman, M. (2007). What students choose to do and have to say about use of multiple representations in college algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26(1)*, 27-54.

Hirsch, C. R., Weinhold, M., & Nichols, C. (1991). Trigonometry today. *Mathematics Teacher, 84,* 98-106.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. The Journal of Mathematical Behavior, 17, 123±134.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. *In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 27±32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.*

Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving: methodological issues related to modeling. *In E. A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 381 – 398). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.*

Kendal, M., & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum, 34(1), 4–8.*

Knuth, E. J. (2000a). Understanding connections between equations and graphs. *The Mathematics Teacher, 93*(1), 48-53.

Knuth, E. J. (2000b). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education*, *31*(4), 500-508.

Kontogiannopoulou-Polydorides, G. (1996). Educational paradigms and models of computer use: Does technology change educational practice? In T. Plomb, R. Anderson & Author (Eds) (1996) Cross national policies and practices on computers in education. Netherlands: Kluwer

Lajoie, S. P., & Derry, S. J. (1993). A middle camp for (un)intelligent instructional computing: An introduction. In S. P. Lajoie, & S. J. Derry (Eds.), *Computers as Cognitive Tools* (pp. 1-11). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987a). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 41±58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987b). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33±40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martinez-Sierra, G. (2008). On the transit from trigonometry to calculus: the case of the conceptual breaks in the construction of the trigonometric functions in school. *11th International Congress on Mathematical Education*. Retrieved 10.09.2011 from http://tsg.icme11.org/document/get/667

Moore. K. C. (2010). The Role of Quantitative Reasoning in Precalculus Students Learning Central Concepts of Trigonometry. *(Unpublished Doctoral Dissertation). Arizona State University.*

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83, 225-245.*

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on mathematical meanngs. *Nordrecht: Kluwer.*

Orhun, N. (2001). Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. Mathematics Education Into The 21st Century Project Proceedings of the International Conference New Ideas in Mathematics Education International Conference on New Ideas in Mathematics Education, Palm Cove: Australia.

Owens, K. D., & Clements M. A. (1998). Representations in spatial problem solving in the classroom. The Journal of Mathematical Behavior, 17, 197±218.

Pape, S., & Tchoshanov, M. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. Theory into Practice, 40(2), 118-127.

Papert, S. A. (1980). MindStorms – Children, computers and powerfull ideas. *London: The Harvester Press.*

Papert, S. A. (1990). Introduction. In I. Harel (Ed.), *Constructionist Learning***.** Boston:MIT.

Piaget, J. (1967/1971). Biology and knowledge: An essay on the relation between organic regulations and cognitive processes. Chicago: University of Chicago Press

Pesek, D. D., & Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education 31*(5), 524-540.

Richards, J. & Glasersfeld, E. von (1980). Jean Piaget, the psychologist of epistemology. *Journal for Research in Mathematics Education,* 11, 29- 36.

Santos-Trigo, M. (2002). Students' use of mathematical representations in problem solving. *Mathematics & Computer Education*, *36*(2), 101-114.

Thomas, G. (2011). "sonia is typing..... A typology for the case study in social science following a review of definition, discourse and structure". *Qualitative Inquiry* **17** (6): 511–521.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 415-432.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 45-64). Morélia, Mexico: PME.

Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Yilmaz, K., & Önder, O. (2006). Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Groups for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 5, pp. 281-288). Prague: PME.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91-112.

Von Glasserfeld, E. (1989). *Cognition, construction of knowledge, and teaching*. *Syntheses*, 80, 121–40

Van Joolingen, W. (1999). Cognitive tools for discovery learning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 10, 385-397.

Verillón, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education, 9*(3), 77-101.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγιο 1

1) Μετακινώντας τον δρομέα «γωνία», επιλέξτε διάφορες τιμές της γωνίας μ και στη συνέχεια με το δρομέα «Έλεγχος» μετρήστε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην κάθε γωνία και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Γωνία							
Μήκος τόξου							
$\frac{Γωνία}{Μήκος\ τόξου}$							

Μπορείτε να διατυπώσετε μια σχέση που να συνδέει το μήκος τόξου με τη γωνία; Μπορείτε να την ερμηνεύσετε;

2) Με βάση τη σχέση του ερωτήματος (1) υπολογίστε τη γωνία μ ώστε κυλώντας τον κύκλο το σημείο B' να συμπέσει διαδοχικά με τα σημεία $\varDelta(0,5236,\ 0)$, $A(0,7855,\ 0)$, $N(3.1419, 0)$, $\varLambda(4,188,\ 0)$, $\varXi(4,7124,\ 0)$ και $\varPi(6,28319,\ 0)$.

3) Μετακινήστε το σημείο K ώστε η ακτίνα του κύκλου να γίνει 3 και επαναλάβετε τη διαδικασία του ερωτήματος (2). Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;

4) Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για διάφορες τιμές της ακτίνας ρ. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να επαναδιατυπώσετε τη σχέση του ερωτήματος (1);

5) Για τις γωνίες μ που δίνονται, συμπληρώστε τους παρακάτω πίνακες για διάφορες τιμές της ακτίνας ρ.

$\mu = 15^o$

Ακτίνα				
Μήκος τόξου				
$\alpha = \frac{μήκος\ τόξου}{ακτίνα}$				

$\mu = 30$

Ακτίνα				
Μήκος τόξου				
$\alpha = \frac{μήκος\ τόξου}{ακτίνα}$				

$\mu = 60$

Ακτίνα				
Μήκος τόξου				
$\alpha = \frac{μήκος\ τόξου}{ακτίνα}$				

$\mu = 90$

Ακτίνα				
Μήκος τόξου				

$\alpha = \frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon}{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha}$				

$\mu = 180$

Ακτίνα				
Μήκος τόξου				
$\alpha = \frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon}{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha}$				

$\mu = 360$

Ακτίνα				
Μήκος τόξου				
$\alpha = \frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon}{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha}$				

Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό; Μπορείτε να διατυπώσετε μια σχέση που να συνδέει το λόγο α με τη γωνία;

6) Με βάση τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (6) συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Γωνία μ				
Λόγος α				
$\frac{\mu}{\alpha}$				

Μπορείτε τώρα να διατυπώστε μια σχέση που να συνδέει το μέτρο της γωνίας σε μοίρες με το λόγο α ;

7) Συγκρίνετε τη σχέση στην οποία καταλήξατε στο ερώτημα (4). Πώς συνδέονται οι δύο σχέσεις;
8) Μπορείτε να ορίσετε μια μονάδα μέτρησης μιας γωνίας διαφορετική από τις μοίρες;

Ερωτηματολόγιο 2

1) Για διάφορες τιμές, από 0 έως $\frac{\pi}{2} \simeq 1,5708$ της γωνίας α , συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Γωνία α				
$\lambda = \frac{AB}{\rho}$				

πίνακας 1

2) Διπλασιάστε την ακτίνα του κύκλου και βρείτε το λόγο $\lambda = \frac{AB}{\rho}$ για τις γωνίες του ερωτήματος (1). Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να το εξηγήσετε;

Γωνία α				

$\lambda = \dfrac{AB}{\rho}$				

3) Με ποιον τρόπο σχετίζεται η τεταγμένη y_B, του σημείου B με τον λόγο λ;
4) Υπάρχουν γωνίες, μεγαλύτερες του $\dfrac{\pi}{2}$, για τις οποίες ο λόγος $\dfrac{y_B}{\rho}$ είναι ίδιος με αυτόν που υπολογίσατε στον πίνακα 1; Μπορείτε να τις προσδιορίσετε;
5) Υπάρχουν γωνίες, μεγαλύτερες του $\dfrac{\pi}{2}$, για τις οποίες ο λόγος $\dfrac{y_B}{\rho}$ είναι αντίθετος από αυτόν που υπολογίσατε στον πίνακα 1; Μπορείτε να τις προσδιορίσετε;
6) Για μια τυχαία, σταθερή, γωνία α πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει ο λόγος $\dfrac{y_B}{\rho}$ για τις διάφορες τιμές της ακτίνας ρ; Εξηγείστε τη σκέψη σας.
7) Ποια είναι η σχέση της γωνίας α με το μήκος του τόξου OB;
8) Για διάφορες τιμές της γωνίας α, βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\Delta\left(\alpha, \dfrac{y_B}{\rho}\right)$ και στη συνέχεια προσδιορίστε τη θέση τους στο καρτεσιανό επίπεδο

Γωνία α				
$\Delta\left(\alpha, \dfrac{y_B}{\rho}\right)$	(……. , …….)	(……. , …….)	(……. , …….)	(……. , …….)

(επιλέξτε το κουμπί «σημεία», στη συνέχεια χρησιμοποιείστε τον δρομέα κύλιση και ελέγξτε αν το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό που είχατε υπολογίσει. Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα του κύκλου και γιατί;)

9) Τι ονομάζουμε συνάρτηση; Πως σχετίζεται μια συνάρτηση με τη γραφική της παράσταση;
10) Αποτελούν τα σημεία του ερωτήματος (8) σημεία γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης; Εξηγείστε τη σκέψη σας. Αν ναι, μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της;
11) Επιλέξτε το κουμπί «Συντεταγμένες». Τι αντιπροσωπεύουν οι συντεταγμένες του σημείου Λ και τι του B_1;
12) Μετακινήστε το δρομέα «κύλιση» και ελέγξτε αν ισχύουν οι απαντήσεις που δώσατε στην ερώτηση (11). Αν όχι μπορείτε να επαναδιατυπώσετε την απάντησή σας;
13) Επιλέξτε το κουμπί «Γραφική παράσταση». Πως σχετίζεται η θέση του σημείου Ν με τη θέση του σημείου Β στον κύκλο;
14) Καθώς μεταβάλλεται ο δρομέας α, πότε το σημείο Ν κινείται ανοδικά και πότε καθοδικά και γιατί;

15) Αν ονομάσουμε $\eta\mu\alpha$ το λόγο $\frac{y_B}{\rho}$, μπορείτε να υπολογίσετε τα $\eta\mu\frac{\pi}{4}$, $\eta\mu\frac{\pi}{8}$, $\eta\mu\frac{-\pi}{5}$, $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$; (Δίνεται $\frac{\pi}{3} \approx 1,0472$, $\frac{\pi}{4} \approx 0,785398$, $\frac{\pi}{8} \approx 0.392699$, $\frac{\pi}{5} \approx 0,628319$,)

16) Μπορείτε να βρείτε για ποιες τιμές του α είναι $\eta\mu\alpha = 0.5$, $\eta\mu\alpha = -0,3$, $\eta\mu\alpha = 0,7$;