ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

«Απόπειρα αντιμετώπισης των δυσκολιών κατανόησης της πυκνής διάταξης των ρητών με τη βοήθεια της 'ελαστικογραμμής' ως αναλογίας-γέφυρας»

ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

Δ201102

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής
ΞΑΝΘΗ ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗ (Επίκ. Καθηγήτρια)

Αθήνα

Οκτώβριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 23η Οκτωβρίου 2015 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Ξ. Βαμβακούση (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της Συμβουλευτική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Ξ. Βαμβακούση (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Λέκτορα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα κα Βαμβακούση, που χωρίς την αμέριστη βοήθεια της τόσο στην επιλογή του θέματος όσο και στην υλοποίηση, δεν θα ήταν δυνατή η πραγματοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα Πόταρη, η οποία σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου παρείχε κάθε δυνατή διευκόλυνση, υποστήριξη και συμβουλή, καθώς και τον κο Ψυχάρη που άμεσα αποδέχτηκε να είναι μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάσκοντες στο πρόγραμμα για τις γνώσεις που μου πρόσφεραν και το ‘παράθυρο’ που άνοιξαν ώστε να δω ακόμα και γνωστά ‘πράγματα’ με διαφορετική οπτική.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τις κυρίες Μπακογιάννη και Κλη για την χρησιμότατη γραμματειακή υποστήριξη τους, καθώς και τους συμφοιτητές μου για τον σεβασμό και την αλληλεγγύη που μοιραστήκαμε στη διάρκεια του ΜΠΣ.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Δημήτρη Διαμαντίδη για την διευκόλυνση στο παρεμβατικό κομμάτι της διπλωματικής εργασίας μου.

Κυριάκος Οικονόμου

Περιεχόμενα

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Όπως έχει καταδείξει η έρευνα, η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών είναι δύσκολη όχι μόνο για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλά ακόμα και για φοιτητές θετικών σχολών. Με αυτή την έρευνα-παρέμβαση αποπειραθήκαμε να γεφυρώσουμε το χάσμα ανάμεσα στις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών μιας τάξης της Γ΄ Γυμνασίου για τη διάταξη των ρητών και τη μαθηματικά ορθή άποψη σχεδιάζοντας και υλοποιώντας μια σύντομη διδακτική παρέμβαση.

Για να διευκολύνουμε τους μαθητές να κατανοήσουν την ιδέα ενός τμήματος της αριθμογραμμής ως μια πυκνή διάταξη σημείων, βασιστήκαμε στην αντιστοιχία σημείων-αριθμών μέσω της αναπαράστασης της αριθμητικής γραμμής όπως αυτή χρησιμοποιείτε στο σχολικό πλαίσιο.

Επιπλέον, για να αναδιοργανώσουμε τις αντιλήψεις των μαθητών για την πυκνή διάταξη των σημείων ενός τμήματος αξιοποιήσαμε ως αναλογία-γέφυρα την ‘ελαστικογραμμή’, δηλαδή την ιδέα της αριθμητικής γραμμής ως ένα ιδεατό λάστιχο, το οποίο μπορεί να τεντωθεί απεριόριστα χωρίς να σπάει. Η συγκεκριμένη αναλογία-γέφυρα’ αποδείχτηκε αποτελεσματική στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών στην έρευνα-παρέμβαση των Vamvakoussi -Vosniadou (2012).

Με τη βοήθεια της ‘ελαστικογραμμής’ στοχεύσαμε στο να κατανοήσουν οι μαθητές όχι μόνο ότι υπάρχουν άπειρα σημεία σε οποιοδήποτε τμήμα της αριθμητικής γραμμής (επομένως και άπειροι αριθμοί) αλλά επίσης ότι δεν μπορούν να βρουν ακριβώς έναν επόμενο το οποίο είναι και πιο δύσκολο για τους μαθητές να συλλάβουν.

Της διδακτικής μας παρέμβασης, που βασίστηκε σε πέντε δραστηριότητες στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας, προηγήθηκε προ-έλεγχος των σχετικών γνώσεων των μαθητών και ακολούθησαν μετα-έλεγχος και έλεγχος συγκράτησης. Τα αποτελέσματα του προ-ελέγχου ήταν αναμενόμενα σε σχέση με τα αποτελέσματα αντίστοιχων ερευνών με διαφοροποίηση μόνο σε ένα σημείο. Οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιμετώπιζαν μεγαλύτερες δυσκολίες στη κατανόηση του άπειρου πλήθους σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα συγκριτικά με την κατανόηση του άπειρου πλήθους ενδιάμεσων αριθμών. Ο μετά-έλεγχος και έλεγχος διατήρησης κατέδειξαν σημαντική βελτίωση σε όλες τις όψεις της πυκνότητας.

ABSTRACT

It is amply documented that the density property of rational numbers is difficult to understand for students from elementary up to university level. With this intervention we attempted to bridge the gap between students' initial ideas for the ordering of rational numbers and the mathematically correct aspect.

The participants of the study were twenty five 9th graders from one class in a school in the area of Athens. They were tested on their knowledge of various aspects of the density property before and after the intervention. In addition, a retention test was administered three weeks later. The intervention was based on five tasks elaborated in one school hour.

Our intervention was based on the analogy "numbers are points on the (geometrical) line". Moreover, we drew on the bridging analogy approach, used with promising results in the intervention –study of Vamvakkousi & Vosniadou (2012), using as bridging device the idea of the rubber number line, that is, an imaginary line that does not break no matter how much it is stretched. Using this bridging analogy we aimed at helping students understand not only the infinity of points between two different points of the number line (thus, infinite numbers) but also to grasp the more difficult to conceive idea, that there is not a next rational number to a given one.

The results showed considerable improvement with respect to all aspects of the density property of rational numbers, which was retained three weeks after the intervention.

Key words: density property, discreteness, bridging analogy, rubber line, intervention.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Η πυκνή διάταξη των ρητών

Ένα σύνολο είναι πυκνά διατεταγμένο αν μεταξύ δύο στοιχείων του υπάρχει πάντα ένα ενδιάμεσο και κατ' επέκταση άπειρα ενδιάμεσα. Λέγοντας ότι το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνά διατεταγμένο εννοούμε ότι μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών θα υπάρχει πάντα ένας τρίτος με επακόλουθο ανάμεσα τους να υπάρχουν άπειροι ρητοί (συμβολικά: αν $x,y \in Q$ με $x<y$ τότε υπάρχει $z \in Q$ ώστε $x<z<y$). Αυτή η απειρία ενδιάμεσων ρητών υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει ο επόμενος ενός δοθέντος ρητού και ότι δεν υπάρχει ο ελάχιστος θετικός αριθμός. Η τελευταία συνιστώσα της πυκνότητας των ρητών συνδέεται με την έννοια της άπειρης διαιρετότητας ενός αριθμού.

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2012) κάνοντας μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην ιστορική εξέλιξη της ιδέας της πυκνής διάταξης επισημαίνουν ότι παρόλο που θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι η έννοια της πυκνότητας των ρητών είναι πρωτίστως προσβάσιμη μέσω της σχολικής μαθηματικής γνώσης, είτε αυξάνοντας τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων, είτε μετατρέποντας κλάσματα σε ισοδύναμα με μεγαλύτερους όρους είτε ακόμα βρίσκοντας το ημιάθροισμα δυο δοθέντων ρητών για να προσδιορίσουμε έναν ενδιάμεσο , εντούτοις η έννοια της πυκνότητας ανέκυψε σε γεωμετρικό πλαίσιο και πολύ αργότερα μεταφέρθηκε στο αριθμητικό πλαίσιο. Προσθέτουν δε ότι αυτό οφειλόταν κυρίως στο σαφή διαχωρισμό, που ξεκίνησε από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, μεταξύ συνεχών μεγεθών (όπως η ευθεία) και την φύση των αριθμών που θεωρείτο διακριτή . Ο Αριστοτέλη θεωρούσε τη συνέχεια και τη διακριτότητα ως ιδιότητες εφαρμοζόμενες στην κατηγορία των Μεγεθών, θεωρώντας τις γραμμές, τα επίπεδα, το χρόνο και τη κίνηση να ανήκουν στη κατηγορία των συνεχών μεγεθών και αντίστοιχα τους αριθμούς και την ομιλία στη κατηγορία των διακριτών. Ο ίδιος μέσω της 'Λογικής' του, είχε ορίσει τον αριθμό ως συλλογή αδιαίρετων μονάδων, που η φύση αυτών των αδιαίρετων μονάδων δεν είναι αριθμητική ενώ αντίστοιχα οι γραμμές και τα επίπεδα είναι συνεχή με βάση το γεγονός ότι τα στοιχεία που τα συναποτελούν 'ενώνονται μαζί σε κάποια κοινά σύνορα'. Δηλαδή για τον Αριστοτέλη η συνέχεια είναι μια σχέση μεταξύ ολοτήτων και όχι ιδιότητα που μπορεί να αποδοθεί σε μια απλή οντότητα ενώ οι αριθμοί δεν θα μπορούσαν να παράγουν το συνεχές από τη στιγμή που δεν έχουν επαφή (Boyer,1959) . Έτσι η ευθεία συνδεόταν με την άπειρη διαιρετότητα παρά με την σύγχρονη έννοια της συνέχειας (Bell, 2005). Ο ορισμός του αριθμού ως πολλαπλάσιο αδιαίρετων μονάδων, σύμφωνος με τις αντιλήψεις των Αρχαίων Ελλήνων για τη διακριτή φύση των αριθμών και τη συνεχή των μεγεθών (Klein,1992; Moreno-Armella & Waldegg, 2000), εξαιρούσε τους λόγους είτε σύμμετρους (ρητούς) είτε ασύμμετρους (άρρητους) από το να θεωρούνταν αριθμοί αλλά μόνο σχέσεις μεταξύ μεγεθών. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που για τους επόμενους αιώνες, οι μη φυσικοί αριθμοί δεν θεωρούνταν αριθμοί παρόλο την ευρεία χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων και σε υπολογισμούς (Neal, 2002;Klein, 1992).

Στα Αραβικά μαθηματικά του Μεσαίωνα οι κλασσικές έννοιες του αριθμού και των μεγεθών έρχονται πολύ κοντά όταν με έναν αυτονόητο τρόπο η διαχείριση των μεγεθών υλοποιείται μέσω των αριθμητικών μέτρων τους. Αυτό πραγματοποιήθηκε εφόσον οι Άραβες παρείχαν τους σχετικούς υπολογιστικούς αλγόριθμους ώστε είναι δυνατός ο υπολογισμός ριζών (Bos, 2001) . Αυτή η θεμελιώδης μετατόπιση παρόλο που δεν ήταν επαρκώς θεμελιωμένη και επεξεργασμένη και δεν φαίνεται να έχει κάποια επίδραση σε σύγχρονες για την εποχή εκδόσεις των στοιχείων του Ευκλείδη πέρασε στο Ευρωπαικό πλαίσιο μέσω των *abacus schools* και συνεισέφερε στη δουλειά του Stevin (Malet, 2006). Ο Stevin το 1585 με το έργο του L'Arithmetique, τόνισε ότι η προέλευση της έννοιας του αριθμού δεν μπορεί να είναι διαφορετική από την προέλευση των άλλων εννοιών και σύνδεσε τους αριθμούς και με τη μέτρηση (μέτρο καταμέτρησης) επιπλέον της απαρίθμησης αναδεικνύοντας τη συνεχή φύση των αριθμών αν και σε ένα διαισθητικό επίπεδο. Η συσχέτιση γεωμετρικών μεγεθών όπως της ευθείας με αριθμούς χρησιμοποιήθηκε στο Λογισμό και στην Αναλυτική Γεωμετρία (Berge, 2008) χωρίς όμως να είναι επαρκώς ορισμένα ούτε το γεωμετρικό ούτε το αριθμητικό συνεχές. Στην πραγματικότητα μόλις τον 19^{o} αιώνα η έννοια της πυκνότητας διαφοροποιήθηκε από την έννοια της συνέχειας και με τον αυστηρό ορισμό των ορίων το συνεχές μιας ευθείας δεν ήταν πλέον κατανοητό να αποτελείται από 'σημεία' αλλά να είναι το πεδίο των τιμών μιας συνεχούς μεταβλητής (Bell, 2005) . Με το αξίωμα Cantor- Dedekind της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών έχουμε την τεκμηριωμένη αντιστοίχηση αριθμών και σημείων της ευθείας (Χατζημανώλης, 2008). Δηλαδή η διάκριση συνέχειας και πυκνότητας έλαβε χώρα στο αριθμητικό πεδίο και όχι στο πεδίο των συνεχών μεγεθών όπως η ευθεία.

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2012) ισχυρίζονται ότι η έννοια της πυκνότητας ανέκυψε αρχικά σε γεωμετρικό πλαίσιο και πολύ αργότερα στο πλαίσιο του αριθμητικού συνεχούς, ακριβώς λόγω της δυσκολίας να υπερβούμε την επικρατούσα μέχρι τότε άποψη ότι αριθμός είναι μόνο ότι είναι πολλαπλάσιο βασικών μονάδων και συνεπώς οι μη φυσικοί δεν θεωρούνταν αριθμοί. Επίσης και με δεδομένο ότι η μαθηματική γνώση δεν αναπτύχθηκε συνεχώς και γραμμικά από τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά μέχρι τον $19^{ο}$ αιώνα, υπήρχε πάντα μια αλληλεπίδραση μεταξύ της ευθείας που ανήκει στα γεωμετρικά μεγέθη και το πεδίο των αριθμών και στη διαδικασία αυτή αρκετές έννοιες και στα δύο πεδία εξελίχθηκαν και άλλαξαν σημασία.

1.2 Δυσκολίες των μαθητών με την πυκνή διάταξη των ρητών

Μια πληθώρα ερευνών έχει τεκμηριώσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την πυκνότητα των Ρητών και Πραγματικών, τόσο αυτές τις δυσκολίες που οφείλονται στην εσφαλμένη απόδοση ιδιοτήτων που σχετίζονται με τη διακριτή δομή των Φυσικών, κάτι που είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως ‘προκατάληψη των Φυσικών αριθμών’(Ni & Zhou, 2005), όπως επίσης και δυσκολίες που οφείλονται στην πολλαπλή συμβολική αναπαράσταση τους (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007,2010,2012). Τα προβλήματα αυτά αφορούν όχι μόνο μαθητές της πρωτοβάθμιας (Hannula, Pehkonen, Maijala, & Soro, 2006) και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Merenluoto & Lehtinen, 2002; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010,2012) αλλά και φοιτητές θετικών σχολών (Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007; Vamvakoussi, Van Dooren, Vershaffel, 2012).

Ειδικότερα οι Hannula et al (2006) στην έρευνα τους που αφορούσε τη κατανόηση της έννοιας του απείρου (άρα και της πυκνότητας των ρητών) διαπίστωσαν πως οι μαθητές της αντίστοιχης τάξης 5ης δημοτικού (ηλικίες 11-12) στην πλειονότητα τους (ποσοστό μεγαλύτερο του 90%) απάντησαν πως μεταξύ των αριθμών 0,8 και 1,1 υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Αντίστοιχες δυσκολίες παρουσίασαν και οι μαθητές της πρώτης γυμνασίου (ηλικίες 13-14) αν και σε ελαφρώς σχετικά μικρότερο ποσοστό σε σχέση με τους μικρότερους μαθητές. Σημαντική ήταν η σχετική αύξηση των σωστών απαντήσεων (δηλαδή ‘άπειροι αριθμοί’) των μαθητών ηλικίας 13-14 σε σχέση με το σχεδόν μηδενικό ποσοστό των μικρότερων. Αντίστοιχα στην ερώτηση ‘ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που είναι μικρότερος από το ένα;’ το ποσοστό των πλήρως λανθασμένων απαντήσεων ήταν γενικά υψηλό αν και μειωμένο στους μαθητές ηλικίας 13-14 (σε σχέση με τους μαθητές ηλικίας 11-12) ενώ ήταν αυξημένο το αντίστοιχο ποσοστό απαντήσεων που απαιτούσαν κατανόηση της έννοιας του ‘εν δυνάμει’ απείρου (πχ: είναι ο αριθμός 0,9999…) αλλά όχι του ‘εν ενεργεία’ απείρου.

Στην αρχική τους έρευνα οι Vamvakoussi & Vosniadou (2004), διερευνώντας την επίδραση της ‘προκατάληψης της διακριτότητας στις αντιλήψεις δεκαέξι μαθητών της Γ γυμνασίου (ηλικίες 14-15) για τους ρητούς, κατέγραψαν ότι παρόλο που δεν αντιμετώπιζαν προβλήματα σε ιδιότητες των ρητών που είναι συμβατές με τις ιδιότητες των φυσικών, αντιμετώπιζαν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών. Συγκεκριμένα σε ερωτήματα που αφορούσαν το πλήθος των αριθμών ‘ανάμεσα στους 0,001 και 0,01’ είτε ‘ ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$, οι περισσότερες απαντήσεις που επιλέχτηκαν από τους μαθητές ήταν ότι υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος αριθμοί (αντίστοιχα 13 και 12 μαθητές). Αξιοσημείωτο είναι ότι στην περίπτωση των κλασμάτων δύο μαθητές που απάντησαν ότι ‘υπάρχουν άπειρο πλήθος αριθμοί’ έδωσαν σαν ενδεικτικά παραδείγματα ισοδύναμα κλάσματα με διαφορετικές αναπαραστάσεις (πχ: $\frac{4}{8}, \frac{4.0}{8}, \frac{\sqrt{16}}{8}, \frac{32}{64}$). Επιπλέον στην ερώτηση ‘πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους 0,005 και 0,006;’ δεκατρείς μαθητές απάντησαν πεπερασμένο πλήθος. Σημειωτέο δε, ότι ένας μαθητής που απάντησε σωστά και στις τρεις προηγούμενες ερωτήσεις (άπειρο πλήθος αριθμών) όταν του τέθηκε η πρόσθετη ερώτηση ‘μεταξύ $\frac{5}{6}$ και 8.5 πόσοι αριθμοί υπάρχουν;’ πρόταξε ότι πρέπει να μετατρέψει και τους δυο αριθμούς στην ίδια συμβολική γραφή (κλασματική ή δεκαδική) πριν απαντήσει ‘άπειρο πλήθος’. Στην συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές με βάση το είδος των απαντήσεων τους κατηγοριοποιήθηκαν σε πέντε ομάδες ενδεικτικές του επίπεδου κατανόησης:

1. *Αφελής Διακριτότητα*: Σε αυτή την ομάδα ανήκουν οι μαθητές που με συνέπεια απάντησαν ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς αριθμούς σε κλασματική ή δεκαδική αναπαράσταση δεν υπάρχει άλλος (π.χ. μεταξύ 0,005 και 0,006 ή ότι ανάμεσα στους $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$ είναι μόνο ο $\frac{4}{8}$).
2. *Προχωρημένη Διακριτότητα*: Σε αυτή την ομάδα ανήκουν οι μαθητές που απάντησαν με συνέπεια ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς αριθμούς σε κλασματική ή δεκαδική αναπαράσταση υπάρχει μη μηδενικό αλλά πεπερασμένο πλήθος αριθμών (π.χ. ανάμεσα στο 0,005 και 0,006 βρίσκονται μόνο οι 0,0051,

0,0052,..0,0059 ή ότι ανάμεσα στους $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$ βρίσκονται τόσοι αριθμοί όσοι και ανάμεσα στο 3 και 5, δηλαδή οι 3,1, 3,2, 3,3 κλπ).

3. *Μικτή Κατηγορία*: Σε αυτή την ομάδα ανήκαν οι μαθητές που αναγνώριζαν το άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών σε μερικές αλλά όχι όλες τις περιπτώσεις.
4. *Αφελής Πυκνότητα*: Σε αυτή την ομάδα τοποθετήθηκε ένας μόνο μαθητής με κριτήριο το ότι απάντησε με συνέπεια ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς αλλά με εμφανή έλλειψη αυθορμητισμού αφού έκρινε σκόπιμο να μετατρέψει τους δοθέντες ρητούς που είχαν διαφορετική αναπαραστασιακή μορφή.
5. *Εκλεπτυσμένη Πυκνότητα*: Το κριτήριο για να ανήκει ένας μαθητής σε αυτή την ομάδα ήταν η αυθόρμητη απάντηση του ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί χωρίς να χρειαστεί μετατροπή. Σημειωτέο ότι κανένας μαθητής δεν ανήκε σε αυτή την ομάδα.

Ήταν εμφανής και ισχυρή η προϋπόθεση της διακριτότητας σε αυτό το δείγμα μαθητών και επίσης συνάγεται από τα αποτελέσματα πως η κατανόηση της πυκνότητας των ρητών είναι μια αργή, επίπονη και σταδιακή διαδικασία.

Σύμφωνα με την έρευνα των Vamvakoussi & Vossniadou (2007,2010) οι μαθητές γυμνασίου και Β Λυκείου επηρεάζονται στις απαντήσεις τους για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών από τον τύπο των άκρων του διαστήματος (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα ή δεκαδικοί). Ειδικότερα τείνουν να αποδέχονται μόνο δεκαδικούς μεταξύ δεκαδικών και μόνο κλάσματα μεταξύ κλασμάτων και είναι πιο επιδεκτικοί στο άπειρο πλήθος αριθμών μεταξύ δυο φυσικών παρά μεταξύ δυο ρητών. Οι μαθητές ήταν περισσότερο επιδεκτικοί στο άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών μεταξύ δυο δεκαδικών παρά μεταξύ δυο κλασμάτων και αποδέχονταν πολύ πιο εύκολα την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών μεταξύ δύο φυσικών. Στην ίδια έρευνα τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η μη ύπαρξη της αριθμογραμμής σε ερωτήματα που αφορούσαν την πυκνότητα των ρητών δεν είχε κάποια σημαντική επίδραση. Είναι εμφανές ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες που προκύπτουν από τη δομή του συνόλου των ρητών, θεωρώντας πως τα κλάσματα και τους δεκαδικούς διαφορετικά υποσύνολα των ρητών.

Δυσκολίες όμως με την πυκνότητα ρητών και πραγματικών αντιμετωπίζουν και μεγαλύτεροι μαθητές τόσο με το άπειρο πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών όσο και σε μεγαλύτερο βαθμό με την 'μη ύπαρξη' επομένου. Στην έρευνα των Merenluoto & Lehtinen (2002) ακόμα και αυτοί οι μαθητές (μέση ηλικία 17,3 έτη) που δεν έδιναν κάποιο συγκεκριμένο αριθμό σαν επόμενο, αιτιολογούσαν με μια προσέγγιση της αντίληψης όχι του ουσιαστικού αλλά του εν δυνάμει απείρου, δηλαδή με ένα διαδικαστικό τρόπο λέγοντας ότι δεν είναι δυνατόν να ορίσουμε τον επόμενο ενός αριθμού 'γιατί μπορούμε διαρκώς να προσθέσουμε ψηφία και να τον κάνουμε πιο ακριβή'.

Όπως κατέδειξε η έρευνα των Giannakoulias et al (2007) δυσκολίες με την κατανόηση της πυκνότητας αντιμετωπίζουν ακόμα και φοιτητές θετικών σχολών, οι οποίοι μεταφέρουν την ιδιότητα της διακριτότητας στο πεδίο των ρητών και πραγματικών αριθμών. Μόνο το 65,5% των πρωτοετών φοιτητών της Μαθηματικής Σχολής υποστήριξε ότι δεν υπάρχει ο επόμενος του $\frac{3}{5}$ και αντίστοιχα το 59,5% απάντησε ότι δεν μπορούμε να βρούμε δύο πραγματικούς που δεν υπάρχει κάποιος άλλος ανάμεσα τους. Αντίστοιχα το 71,2% των φοιτητών απάντησε ότι υπάρχει κάποιος ενδιάμεσος αριθμός μεταξύ των 0,1 και 0,11 ενώ το 86,5% απάντησε ότι υπάρχει ενδιάμεσος αριθμός μεταξύ των $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$. Φαίνεται ότι ακόμα και οι φοιτητές μαθηματικών τμημάτων έχουν δυσκολίες με την κατανόηση της πυκνότητας και ιδιαίτερα με την όψη της που αφορά τη μη ύπαρξη επόμενου. Στην ίδια έρευνα το 45% των φοιτητών έδωσε αντικρουόμενες απαντήσεις στην αξιολόγηση των δηλώσεων: «2,999..είναι μικρότερο από 3. Έτσι το 2,999… διαφέρει από το 3» και «δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ των 2,999… και 3» και 'δεν υπάρχει ζεύγος αριθμών που να μην υπάρχει άλλος μεταξύ τους'.

Αντίστοιχα ευρήματα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν για την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών και πραγματικών ακόμα και οι φοιτητές παιδαγωγικών σχολών κατέδειξε και η έρευνα των Vamvakoussi et al (2012) στην οποία σε ερωτήματα που αφορούσαν την πυκνότητα των ρητών και ζητούσαν από τους φοιτητές να αξιολογήσουν μια δήλωση που ήταν συμβατή με μια 'επιφανειακή' θεώρηση της σωστής αντίληψης 'ότι το ενδιάμεσο πλήθος αριθμών μεταξύ δύο ρητών, είναι άπειρο' (π.χ. ανάμεσα στο 0,6 και το 0,8 υπάρχουν περισσότεροι από 3000 αριθμοί) μόνο το 34,5% στους δεκαδικούς και 46,6% στα κλάσματα έδωσαν σωστή απάντηση.

Πιθανώς η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών ενισχύεται από το γεγονός ότι διδάσκονται στο επίσημο σχολικό πρόγραμμα ότι το σύνολο των ρητών είναι επέκταση του συνόλου των φυσικών και ακεραίων μεταφέροντας την πρωταρχική αντίληψη που προέρχεται από την διδασκαλία και τις εμπειρίες των φυσικών ότι κάθε ρητός έχει μοναδική αναπαράσταση και έτσι θεωρούν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς διαφορετικά υποσύνολα του Q. Αυτό συμβαίνει και σε μαθητές με άνεση σε αλγοριθμικές διαδικασίες μετατροπής δεκαδικών σε κλάσματα ή αντίστροφα.

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσο αφορά την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών εντοπίζονται αφενός στην πρωταρχική ιδέα ότι οι αριθμοί είναι διακριτοί (και με δεδομένη διαδοχή) και αφετέρου στην πολλαπλή αναπαράσταση των ρητών που οι μαθητές θεωρούν διαφορετικά μεταξύ τους υποσύνολα των πραγματικών. Επίσης η όψη της πυκνότητας των ρητών που αφορά την μη ύπαρξη επόμενου είναι πιο δύσκολο να γίνει κατανοητή από την απειρία των ενδιάμεσων σημείων (Merenluoto & Lehtinen ,2002; Vamvakoussi & Vosniadou , 2012).

Με δεδομένο ότι η αριθμητική ευθεία προβάλει το συνεχές των πραγματικών αριθμών θα μπορούσε να συμβάλει ώστε σε αναπαραστασιακό επίπεδο οι μαθητές να υπερβούν την ιδέα της διακριτότητας και να αντιληφθούν ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις (πχ: $\frac{1}{2}, \frac{4}{8}$, 0,5) των ρητών αφού αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της ευθείας θα αντιστοιχούν και στον ίδιο αριθμό (Kilpatrick,Swafford & Findell, 2001). Αυτό οδήγησε τους ερευνητές να εξετάσουν κατά πόσο η παρουσία της αριθμητικής ευθείας θα διαφοροποιούσε ή όχι την επίδοση των μαθητών σε έργα που εστιάζουν στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών και επιπλέον να διερευνήσουν αν η ιδέα της απειρίας είναι πιο εύκολα προσβάσιμη για τους μαθητές σε γεωμετρικό πλαίσιο (άπειρο πλήθος σημείων σε ένα τμήμα) ή σε αριθμητικό πλαίσιο (άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών). Ο Χατζημανώλης (2008) και οι Vamvakoussi & Vosniadou (2012) στις έρευνες τους εξετάζοντας τις προαναφερόμενες παραμέτρους για την χρήση της αριθμητικής ευθείας ανακάλυψαν ευρήματα συμβατά με την υπόθεση τους ότι η κατανόηση της πυκνότητας από τους μαθητές είναι περισσότερο προσβάσιμη σε γεωμετρικό παρά σε αριθμητικό πλαίσιο (οι μαθητές αποδέχονταν ευκολότερα την απειρία ενδιάμεσων σημείων σε ευθύγραμμο τμήμα, παρά την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών), ενώ αντίστοιχα η παρουσία ή μη της ευθείας δεν φάνηκε να έχει σημαντική επίδραση στις απαντήσεις τους για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών ανάμεσα σε δυο ρητούς.

Εφόσον η αντίληψη των μαθητών για τις ιδιότητες των αριθμών και τα αντίστοιχα σύνολα τους, κυριαρχείται από την 'προκατάληψη των φυσικών αριθμών' και προκειμένου να συλλάβουν την πυκνότητα των ρητών απαιτείται εννοιολογική αλλαγή ώστε να υπάρξει μια σημαντική αναδιοργάνωση της γνωσιακής δομής τους για την έννοια του αριθμού και να αντιληφθούν ότι δεκαδικοί, κλασματικοί είναι μέλη του ίδιου συνόλου στο οποίο όμως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αδιακρίτως τις ιδιότητες των φυσικών. Αυτό όμως προϋποθέτει και βασίζεται σε αναπαραστασιακές αλλαγές (Ni & Zhou, 2005).

1.3 Πιθανές εξηγήσεις των δυσκολιών.

1.3.1 Το ζήτημα της Εννοιολογικής Αλλαγής

Ο όρος ‘εννοιολογική αλλαγή’ χρησιμοποιήθηκε για να χαρακτηρίσει το είδος της μάθησης που απαιτείται όταν η νέα πληροφορία που πρόκειται να μάθουμε έρχεται σε σύγκρουση με την προϋπάρχουσα εμπειρική γνώση της καθημερινότητας μας. Έχει τις ρίζες της στην αναφορά στη ‘θεωρία αλλαγής στην ιστορία της επιστήμης’ του Kuhn, 1970 και έχει υπάρξει πηγή υποθέσεων για την μάθηση και τη διδασκαλία των επιστημών για πολλά χρόνια. Σύμφωνα με την κλασσική προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, οι μαθητές σχηματίζουν λανθασμένες αντιλήψεις στις (φυσικές) επιστήμες που αποτελούν κακές παραλλαγές της επίσημης επιστημονικής θεωρίας και οι οποίες θα πρέπει να αλλάξουν. Στο βιβλίο του ο Kuhn επιχειρηματολογεί πως η επιστημονική θεωρία αναπτύσσεται στο πλαίσιο παραδειγμάτων (δίκτυα διαμοιρασμένων ιδεών, πεποιθήσεων , πρακτικών) και κοινών δεσμεύσεων ότι οι μαθητές της Επιστήμης μαθαίνουν όταν γίνουν επιστήμονες και ότι η αλλαγή των θεωριών δεν είναι μια προσθετική διαδικασία αλλά μάλλον μια ρηξικέλευθη, κατά την οποία το παλιό παράδειγμα απορρίπτεται και υιοθετείται το νέο . Ακόμη αυτή η διαδικασία της αντικατάστασης των λαθεμένων εναλλακτικών θεωριών με τις επιστημονικά ορθές θεωρούνταν υπό το πρίσμα μιας λογικής διεργασίας που μπορούσε αφενός να προωθήσει την γνωσιακή σύγκρουση και αφετέρου θα μπορούσε συμβεί σε σύντομο χρόνο. Αυτό το επεξηγηματικό πλαίσιο για την αλλαγή των θεωριών έχει εξυπηρετήσει σαν πηγή υποθέσεων όσο αφορά το πώς αλλάζουν οι έννοιες, τόσο στη Φιλοσοφία και Ιστορία όσο και στην διαδικασία της Μάθησης των Επιστημών (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982).

Ο αντίλογος και η κριτική που αναπτύχθηκε με την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής επικεντρώθηκε στο ότι εστιάζει στις λαθεμένες αντιλήψεις των μαθητών οφειλόμενες στην προϊούσα γνώση και αγνοεί τις παραγωγικές ιδέες και εναλλακτικές αντιλήψεις που ενδεχομένως δεν είναι τόσο ισχυρές όσο μπορεί αρχικά να φαίνεται και ότι η γνωσιακή σύγκρουση δεν είναι μια αποτελεσματική διδακτική στρατηγική. Επιπλέον η διδασκαλία που στοχεύει στο να ‘αντιμετωπίσει μετωπικά τις λαθεμένες αντιλήψεις υπό το πρίσμα της αντικατάστασης τους, είναι παραπλανητική και απίθανο να πετύχει’ (Smith, diSessa & Roschelle, 1993). Οι Caravita & Halden (1994) τόνισαν ότι η εννοιολογική αλλαγή επιτυγχάνεται σε ευρύτερα πλαίσια, είτε εκπαιδευτικά είτε κοινωνικοπολιτισμικά , επηρεάζεται από συναισθηματικούς και άλλους ευμετάβλητους παράγοντες και ότι πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η επιστημονική γνώση κατασκευάζεται και καθίσταται έγκυρη σε κοινωνικά πλαίσια (Driver, Asoko, Leach, Mortimer & Scott, 1994; Pintrich,1999). Παράλληλα εμφανίζεται στην γνωσιακή-αναπτυξιακή ψυχολογία μια θεώρηση που συνδέει την εννοιολογική αλλαγή με την έρευνα για τον τρόπο επεξήγησης της ανάπτυξης των εννοιών σε παιδιά με το πέρασμα του χρόνου και καταληκτικά με την εκπαιδευτική διαδικασία και έρευνα(Vosniadou & Brewer, 1987; Vamvakoussi, 2004). Ενώ το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής διευκολύνει την ανάπτυξη της επιστήμης μέσω μιας προσθετικής διαδικασίας εμπλουτισμού της γνώσης στα ενυπάρχοντα γνωστικά σχήματα, όταν η νέα γνώση είναι ριζικά διαφορετική στη δομή, είτε στα φαινόμενα που επεξηγεί ή ακόμα στις βασικές έννοιες που τη συνθέτουν, τότε η προϋπάρχουσα γνώση μπορεί να εμποδίσει την πρόσκτηση της νέας και να οδηγήσει στην εμφάνιση *παρανοήσεων* (Gelman & Meck, 1992; Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Οι προσπάθειες των Vosniadou και των συνεργατών της να παράσχουν λεπτομερείς περιγραφές της διαδικασίας ανάπτυξης της γνώσης σε ποικίλα πεδία των φυσικών επιστημών όπως η Αστρονομία (Vosniadou, 2003), Μηχανική (Ioannides & Vosniadou , 2001), Χημεία (Kouka, Vosniadou, & Tsaparlis, 2001), Βιολογία (Kyrkos & Vosniadou, 1997), κατέληξαν στο ότι οι μαθητές απαντούν ερωτήματα των παραπάνω πεδίων με ένα εσωτερικά συνεπή τρόπο αποκαλύπτοντας την ύπαρξη ενός περιορισμένου αλλά συνεκτικού αρχικού επεξηγηματικού πλαισίου.

Η *Θεωρία Πλαισίου* για την *Εννοιολογική Αλλαγή* προβλέπει ότι η νέα γνώση που είναι ασύμβατη με την προϋπάρχουσα είναι πιο δύσκολο και χρονοβόρο να αφομοιωθεί από τη νέα γνώση που απλά εμπλουτίζει τα ενυπάρχοντα γνωστικά σχήματα. Επιπλέον, είναι εξαιρετικά πιθανό οι μαθητές αγνοώντας τους Οντολογικούς και Επιστημολογικούς περιορισμούς των αρχικών επεξηγηματικών τους σχημάτων να χρησιμοποιήσουν τους ίδιους προσθετικούς μηχανισμούς αδιακρίτως και να οδηγηθούν σε *παρανοήσεις*. Αυτές οι *παρανοήσεις* που οφείλονται στην ασυμβατότητα προηγούμενων και νέων γνωστικών δομών και αντανακλούν την προσπάθεια των μαθητών να συγκεράσουν τη νέα γνώση με την παλιά τις ονομάζουμε *συνθετικά μοντέλα* (Vosniadou & Brewer,1992,1994). Ειδικότερα η *Θεωρία Πλαισίου* για την *Εννοιολογική Αλλαγή* απαντά άμεσα στην κριτική των Caravita & Halden (1994) και Smith et al. (1993) και τονίζει ότι η *Προσέγγιση της Γνωσιακής Ανάπτυξης* για την Εννοιολογική Αλλαγή είναι αρκετά διαφορετική από την κλασσική προσέγγιση της .

Πρώτον, οι παρανοήσεις των μαθητών θεωρούνται μεμονωμένες λαθεμένες αντιλήψεις που δεν αντιπροσωπεύουν μια ολοκληρωμένη θεωρία.

Δεύτερον, γίνεται διαφοροποίηση ανάμεσα στις *πρωταρχικές παρανοήσεις* (preconceptions) που υπάρχουν στο αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο του μαθητή και στις *παρανοήσεις* (misconceptions) που προκύπτουν μετά από την εισαγωγή των νέων εννοιών. Οι τελευταίες χαρακτηρίζονται ως *συνθετικά μοντέλα.*

Τρίτο, η θεωρητική βάση της Θεωρίας Πλαισίου για την Εννοιολογική Αλλαγή είναι εποικοδομητική (Costructivistic) με την έννοια ότι όχι μόνο 'κτίζει' τη νέα γνώση πάνω στα υφιστάμενες γνωσιακές δομές αλλά και παρέχει ένα πλαίσιο κατανόησης για την παραγωγή ουσιαστικών και αποδοτικών προβλέψεων για τη διαδικασία πρόσληψης της γνώσης.

Τέλος ενώ η Γνωσιακή προσέγγιση ερευνά τη μια πλευρά της Εννοιολογικής Αλλαγής ταυτόχρονα είναι συμπληρωματική και όχι παρεμποδιστική σε άλλους *κοινωνικοπολιτισμικούς* και *παρωθητικούς*/ *συγκινησιακούς, συναισθηματικούς* (motivational/affective) παράγοντες (Anderson, Greno, Reder, &Simon, 2000). Η Vossniadou (1999) τονίζει το σημαντικό ρόλο της *Μετα-εννοιολογικής Επίγνωσης* (metaconceptual awareness) εφόσον πολλές φορές οι μαθητές δεν έχουν επίγνωση ότι οι αρχικές γνώσεις τους σε συνδυασμό με προσθετικούς μηχανισμούς μάθησης μπορούν να οδηγήσουν σε αποδόμηση της νέας γνώσης. Προσθέτει ότι πολύ σημαντικοί είναι αφενός οι *παράγοντες κινητοποίησης* (motivational factors) καθότι οι μαθητές θα πρέπει να θέλουν να μάθουν και αφετέρου το ευρύτερο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο ώστε να παρέχει το εκπαιδευτικό υπόβαθρο και τα κατάλληλα εργαλεία που διευκολύνουν την εννοιολογική αλλαγή.

1.3.2 Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά (το σύνολο των ρητών)

Με δεδομένο ότι το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής αναδείχτηκε μέσα από τη διαπραγμάτευση των φυσικών επιστημών και ο αρχικός εμπνευστής Thomas Kuhn εξαίρεσε τα Μαθηματικά από το συγκεκριμένο επιστημονικό αναπτυξιακό μοντέλο, διακρίνοντας την αυστηρή επαγωγική δομή τους σε αντίθεση με τη πειραματική των Φυσικών Επιστημών, υπήρχε μια περίσκεψη και απροθυμία να υιοθετηθεί το συγκεκριμένο πλαίσιο. Διαφοροποίηση σε αυτή την αντίληψη έχουμε από τον Mahoney (1997, στο Vosniadou & Verschaffel, 2004) ο οποίος παρατήρησε ότι η επέκταση των Μαθηματικών θεωριών μπορεί να μετέτρεψε παλιότερες θεωρίες και γνώσεις μη χρηστικές αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι σταμάτησαν να είναι Μαθηματικά.

Αυτή η συζήτηση μας δίνει τη δυνατότητα να φωτίσουμε το διάλογο σχετικά με την προσέγγιση της *Εννοιολογικής Αλλαγής* όπως αυτή εφαρμόζεται σε καταστάσεις μάθησης. Εξάλλου ερευνητές έχουν επισημάνει ότι ακόμα και στην περίπτωση των Φυσικών επιστημών δεν πρέπει να εξετάζουμε την *Εννοιολογική Αλλαγή* με όρους αντικατάστασης της ‘αφελούς’ γνώσης με την ‘ορθή’ αλλά κάτω από το πρίσμα της δυνατότητας που παρέχει στους μαθητές να αναπτύξουν πολλαπλές πρακτικές και περισσότερο αφαιρετικά επεξηγηματικά πλαίσια με ισχυρότερη γενικευσιμότητα και ισχύ (Driver et al., 1994; Spada, 1994). Επομένως το θέμα της ριζοσπαστικής αντικατάστασης των θεωριών δεν είναι ζήτημα για τη διδασκαλία και τη μάθηση.

Εξάλλου είναι γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν παρόμοιες καταστάσεις κατά την εκμάθηση είτε των Μαθηματικών είτε των Φυσικών επιστημών. Για αυτό εξάλλου αναπτύσσουν και στα Μαθηματικά μια ‘αφελή’ θεωρία όπως και στις Φυσικές Επιστήμες που φαίνεται να έχει μια νευροβιολογική βάση και αναπτύχθηκε στην μακρόχρονη εξελικτική διαδικασία και αποτελείται από πολύ συγκεκριμένες θεμελιώδεις αρχές ή προϋποθέσεις (π.χ. η αντίληψη της διακριτότητας των αριθμών) που σε κάποιες περιπτώσεις διευκολύνει την κατανόηση (όπως είναι η απειρία των Φυσικών αριθμών) αλλά σε άλλες εμποδίζει τη μάθηση (π.χ. απειρία αριθμών ανάμεσα σε 2 ρητούς) (Dehaene, 2001; Gelman, 2000; Lipton & Spelke, 2003).

Σε επίρρωση αυτών έχουμε αρκετά ευρήματα από έρευνες που διεξήχθηκαν με βάση τη *Θεωρία Πλαισίου για την εννοιολογική Αλλαγή* που η εφαρμογή της ήταν εξαιρετικά παραγωγική στο να ερμηνεύσει και να εξηγήσει τις δυσκολίες των μαθητών όσο αφορά τα κλάσματα (Stafylidou & Vosniadou, 2004), την κατανόηση των πραγματικών αριθμών (Merenluoto & Lehtinen, 2002) τη χρήση του αρνητικού προσήμου στην Άλγεβρα (Vlassis, 2004), την έννοια του αριθμού (Hartnet & Gelman, 1998; Merenluoto & Lethinen, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007) , τη διδασκαλία και μάθηση της ισοδυναμίας των άπειρων συνόλων (Tsamir & Tirosh, 2007).

Όπως έχει δείξει η έρευνα οι δυσκολίες της κατανόησης της πυκνότητας των ρητών προκύπτουν κυρίως από το φαινόμενο της 'προκατάληψης των φυσικών' και την αντίστοιχη ιδέα της διακριτότητας, όπως επίσης και την πολλαπλή αναπαραστασιακή μορφή των ρητών (κλάσματα, δεκαδικοί). Προφανώς τα πρώτα χρόνια της ζωής ενός παιδιού οι σχηματιζόμενες από την καθημερινή κοινωνική αλληλεπίδραση συστηματικές διαισθητικές αντιλήψεις του παιδιού για τους αριθμούς βασίζονται στους φυσικούς και διαμεσολαβούνται τόσο μέσω της γλωσσικής του ανάπτυξης όσο και με την αρχή και εξάσκηση της απαρίθμησης (Greer, 2004). Εξάλλου τα μικρά παιδιά επιδεικνύουν ένα πλουραλισμό δεξιοτήτων στην μεταχείριση ποσοτικών σχέσεων και αναλογικού συλλογισμού πολύ πριν επίσημα διδαχθούν για τους ρητούς (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2013, 2014; Sophian, 2000). Επιπλέον η διδασκαλία των μαθηματικών τα πρώτα σχολικά χρόνια επικεντρώνεται στις πράξεις και τις ιδιότητες των φυσικών με αποτέλεσμα η αρχική διαισθητική αντίληψη τους για τον αριθμό να επισημοποιείται και συστηματοποιείται ώστε να έχουν δομήσει μια εμπλουτισμένη και επίμονη αντίληψη για τους αριθμούς με άξονα την κατανόηση των φυσικών (Gelman, 2000; Smith, Solomon & Carey, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Ενώ η κατανόηση των φυσικών διευκολύνει την κατανόηση κάποιων χαρακτηριστικών του συνόλου των ρητών, όπως είναι το άπειρο πλήθος τους και οι σχετικές ιδιότητες των πράξεων (π.χ. αντιμεταθετική, ύπαρξη αντιθέτου, κλπ.) όταν τα χαρακτηριστικά αυτά δεν είναι συμβατά με τους φυσικούς (π.χ. απειρία αριθμών μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών, 'μη ύπαρξη' επόμενου) οι μαθητές κάνουν λάθη διότι εξακολουθούν να εφαρμόζουν στο συλλογισμό τους ίδιους μη προσήκοντες ρητούς και άδηλους κανόνες που απορρέουν από την κατανόηση των φυσικών . Έτσι μπορούν να αποφασίσουν ότι δεν υπάρχει κάποιος ενδιάμεσος αριθμός μεταξύ των 0,005 και 0,006 ή μεταξύ των $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$. Όπως παρατηρούν οι Vamvakoussi & Vosniadou (2007) « η ιδέα της διακριτότητας των αριθμών είναι μια θεμελιώδης προϋπόθεση για το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο του αριθμού, μέσα στο οποίο η διατακτικότητα (orderability) δεν διαφοροποιείται από την διαδοχή (nextness)».

Επιπλέον η πολλαπλή αναπαράσταση των ρητών σαν δεκαδικοί ή κλασματικοί ή ισοδύναμες κλάσεις αριθμών, σε αντίθεση με την μοναδική αναπαράσταση των φυσικών, είναι ένα πρόσθετο εμπόδιο για τους μαθητές στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν την πυκνότητα των ρητών. Οι μαθητές δεν θεωρούν ότι οι διαφορετικές αυτές αναπαραστάσεις αφορούν τον ίδιο αριθμό και συχνά δεν θεωρούν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως μέλη του ίδιου συνόλου (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi et al, 2012) με συνέπεια να δυσκολεύονται να κατανοήσουν την πυκνή δομή των ρητών. Έτσι απαντούν για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών ανάλογα με το αν τα άκρα είναι δεκαδικοί ή κλάσματα ενώ δέχονται πολύ πιο εύκολα την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών μεταξύ φυσικών. Επίσης αντιδρούν στην ιδέα ότι ανάμεσα σε δεκαδικούς μπορούμε να έχουμε κλάσματα και το αντίστροφο.

Είναι εμφανές από τις παραπάνω δυσκολίες των μαθητών ότι στην προσπάθεια τους για να κατανοήσουν την πυκνή δομή των ρητών, σχηματίζουν συνθετικά μοντέλα ως αποτέλεσμα της αργής και επίπονης και με ενδιάμεσα στάδια αναδιοργάνωσης της έννοιας του αριθμού εξαιτίας της ισχυρής προϋπάρχουσας γνώσης που αφορά την διακριτότητα και τον μοναδικό συμβολισμό των φυσικών, σύμφωνα με τη θεωρία πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006)

Επίσης, όλες οι συνιστώσες της πυκνότητας των ρητών δεν γίνονται αντιληπτές με τον ίδιο τρόπο και τον ίδιο βαθμό από τους μαθητές γιατί η κατανόηση τους εμπλέκει διαφορετικές όψεις της απειρίας. Κάποιοι μαθητές κατανοούν την έννοια της πυκνότητας σαν μια αναδρομική διαδικασία που όταν τους ζητείτε να σκεφτούν ενδιάμεσους αριθμούς παίρνουν τον αριθμητικό μέσο για τους δύο πρώτους και συνεχίζουν βρίσκοντας το ημιάθροισμα του αριθμητικού μέσου με έναν από τους αρχικά δοθέντες αριθμούς κοκ. Δηλαδή έχουν για την πυκνότητα την αντίληψη του ‘εν δυνάμει’ απείρου που εξελίσσεται σαν μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία έχουμε μια ακολουθία αριθμών που είναι άπειρη αφού πάντα μπορούμε να προσθέσουμε ένα ακόμα στοιχείο (Fischbein, 2001). Ο Tall (1980) υποστηρίζει ότι η διαίσθηση για την απειρία των μαθητών αναπτύσσεται με συλλογισμούς που βασίζονται στη μέτρηση παρά σε ιδιότητες που αφορούν την πληθικότητα των αριθμών και για αυτό οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μεγαλύτερα μήκους ευθύγραμμα τμήματα έχουν περισσότερα σημεία.

Αντίθετα η ουσιαστική έννοια της απειρίας συλλαμβάνεται από την ολότητα των πυκνά διατεταγμένων ενδιάμεσων σε ένα διάστημα ή σε ένα τμήμα της ευθείας. Ακόμα το πώς προσεγγίζει κάποιος την απειρία υποδηλώνει και το πώς προσεγγίζει την έννοια του ‘μη επόμενου’. Για μαθητές που σκέφτονται στο πλαίσιο των δεκαδικών αριθμών, ‘άπειρα’ σημαίνει ένας πάρα πολύ μεγάλος αριθμός που προκύπτει προσθέτοντας διαδοχικά και ένα δεκαδικό ψηφίο. Αυτή η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή που μας οδηγεί να αντιληφθούμε την απειρία των φυσικών αριθμών, αλλά δεν μπορεί να παράγει ένα πυκνά διατεταγμένο πεδίο αριθμών στο οποίο ποτέ δεν μπορεί να βρεθεί ένας αριθμός αμέσως μετά τον άλλο. Έρευνες έχουν δείξει πως η ιδέα του εν δυνάμει απείρου είναι η κυρίαρχη αντίληψη για το άπειρο (Hartnett & Gelman, 1998; Tsamir & Tirosh, 1999).

1.4 Διδακτική αντιμετώπιση του προβλήματος

1.4.1 Βασικές αρχές δημιουργίας ενός ευνοϊκού για την εννοιολογική αλλαγή περιβάλλοντος μάθησης

Για να αντιμετωπίσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές για την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών απαιτείται εννοιολογική αναδιοργάνωση των γνώσεων τους που αφορά την έννοια του αριθμού αλλά και την έννοια του ουσιαστικού άπειρου. Η κατανόηση του άπειρου πλήθους των ενδιάμεσων σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος μπορεί μέσω αναλογικού τρόπου σκέψης και χρήση της κατάλληλης αναλογίας-γέφυρας να διευκολύνει την κατανόηση του άπειρου πλήθους των ενδιάμεσων αριθμών και την συνεπαγόμενη 'μη ύπαρξη' επόμενου. Εφόσον οι έρευνες έχουν δείξει πως οι μαθητές είναι πιο επιδεκτικοί στο να δεχτούν την απειρία των ενδιάμεσων σημείων από την απειρία του πλήθους των ενδιάμεσων αριθμών και δεδομένης της αντιστοιχίας-ταύτισης της αριθμητικής ευθείας με τους πραγματικούς, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ευαισθησία τους αυτή με κατάλληλη διδακτική παρέμβαση ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη εννοιολογική αλλαγή και να κατανοήσουν την πυκνή δομή των ρητών.

Οι Vosniadou et all (2001) περιέγραψαν 8 προτάσεις για τον σχεδιασμό μαθησιακών περιβαλλόντων που προωθούν την Εννοιολογική Αλλαγή στην Επιστήμη. Επιγραμματικά οι προτάσεις αυτές ήταν:

1) *Εύρος κάλυψης του προγράμματος σπουδών*
2) *Σειρά πρόσληψης των εμπλεκόμενων εννοιών*
3) *Λαμβάνουμε υπόψη την πρότερη γνώση των μαθητών*
4) *Διευκολύνουμε την μεταγνωστική ενημερότητα των μαθητών*
5) *Απευθυνόμαστε στις εμφωλευμένες αντιλήψεις των μαθητών*
6) *Κινητοποίηση για την εννοιολογική αλλαγή*
7) *Γνωστική σύγκρουση*
8) *Χρησιμοποιούμε μοντέλα και εξωτερικές αναπαραστάσεις*

Οι Tsamir & Tirosh (2007), βασιζόμενοι στην εργασία των Vosniadou et all (2001) επαναδιαπραγματεύθηκαν διδακτικές παρεμβάσεις τους που αφορούσαν την ισοδυναμία των άπειρων συνόλων αναστοχάζοντας αντίστοιχα τις προτάσεις αυτές, συμπεραίνοντας ότι οι συγκεκριμένες προτάσεις για το σχεδιασμό μαθησιακών περιβαλλόντων που θα διευκολύνουν την εννοιολογική αλλαγή, θα μπορούσε να είναι εξαιρετικά παραγωγικές και για τα μαθηματικά. Βέβαια πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη το παραπάνω πλαίσιο με πολύ μεγάλη προσοχή εξαιτίας της επίδρασης πολλών ενδογενών διαφορών στην εκπαίδευση μεταξύ μαθηματικών και Επιστήμης για τον αντίστοιχο σχεδιασμό ισχυρών μαθησιακών περιβαλλόντων στα Μαθηματικά.

Περαιτέρω, οι Vosniadou & Vamvakoussi (2006) λαμβάνοντας υπόψη τους τις αρχές που πρότεινε ο De Corte (2004) για το σχεδιασμό ισχυρών περιβαλλόντων μάθησης για τη μάθηση των Μαθηματικών προτείνουν τις παρακάτω βασικές αρχές που πρέπει να τηρούν οι σχεδιαστές σχολικών προγραμμάτων, οι δάσκαλοι αλλά και οι ερευνητές ώστε να επιτύχουν την απαιτούμενη εννοιολογική αλλαγή στη διδασκαλία και μάθηση τους:

1. ***Εύρος της κάλυψης του προγράμματος σπουδών συναρτήσει του δοθέντος σχολικού χρόνου***.

Είναι προτιμότερο σύμφωνα με τις ερευνήτριες, να σχεδιάσουμε παρεμβάσεις που επικεντρώνονται στη διερεύνηση και βαθιά κατανόηση κάποιων σημαντικών και βασικών εννοιών και τη σχέση τους με άλλες έννοιες από το να προσπαθούμε να καλύψουμε επιφανειακά ένα μεγάλο τμήμα της ύλης που θα οδηγήσει σε μη συνεκτική λογική σκέψη και κατ' επέκταση σε παρανοήσεις τους μαθητές.

2. ***Η σειρά πρόσκτησης των εμπλεκόμενων εννοιών.***

Σύμφωνα με τις ερευνήτριες πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας στο σχεδιασμό τις εξής δύο παραμέτρους:

1) Θα πρέπει να εξετάζουμε αν το πρόγραμμα σπουδών θα μπορούσε να στηρίξει την εισαγωγή συγκεκριμένων εννοιών σε πρώιμα στάδια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Χρησιμοποιούν για παράδειγμα τα στοιχεία που προέκυψαν από την έρευνα των Yujing & Yong-Di (1995) για να υποστηρίξουν ότι η επεξεργασία ιδεών σχετικών με τα κλάσματα σε αρχικό στάδιο της διδασκαλίας μπορεί να εξασθενίσει το αρνητικό αποτέλεσμα της κατανόησης για τους φυσικούς.

2) Θεωρούν ότι πρέπει να έχουμε υπόψη μας κατά το σχεδιασμό ότι η επέκταση μιας μαθηματικής έννοιας δεν αντιστοιχεί κατ' ανάγκη σε εμπλουτισμό υπαρχόντων γνωστικών

σχημάτων. Φέρνουν για παράδειγμα τη μελέτη τους για τους ρητούς κατά την οποία για να κατανοήσουν οι μαθητές την πυκνή δομή των ρητών πρέπει να εγκαταλείψουν την προϋπόθεση της διακριτότητας, όπως επίσης να αντιληφθούν ότι κλάσματα και δεκαδικοί είναι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των στοιχείων του ίδιου συνόλου (εν προκειμένω των ρητών).

3. ***Κατευθύνουμε τις αρχικές θεωρίες των μαθητών και τις εμφωλευμένες αντιλήψεις τους***.

Οι ερευνήτριες τονίζουν ότι πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στις πληροφορίες που παρέχουμε στην κατάρτιση ενός προγράμματος σπουδών ή βιβλίων ή της επικοινωνίας κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης μας, ώστε να μην ενδυναμώνουμε τις παρανοήσεις των μαθητών και να μη απευθυνόμαστε στις εμφωλευμένες προκαταλήψεις τους και στη βάση της αρχικής θεωρίας τους για τον αριθμό. Για παράδειγμα αναφέρουν τον ορισμό των ρητών στο τρέχων πρόγραμμα σπουδών της Β΄ γυμνασίου που αναφέρει ότι «όλοι οι αριθμοί που ξέρουμε, δηλαδή οι φυσικοί, δεκαδικοί και κλάσματα ,μαζί με τους αρνητικούς αριθμούς, συναποτελούν το σύνολο των ρητών» με αποτέλεσμα να διευρύνει την αρχική τάση των μαθητών να ομαδοποιούν τους αριθμούς με βάση τον συμβολισμό τους.

4. Αυξάνουμε τη μετα-εννοιολογική ενημερότητα των μαθητών: Δίνουμε ευκαιρίες να εκφράσουν και επεξεργαστούν απόψεις.

Ένα δυναμικό περιβάλλον μάθησης θα πρέπει να στοχεύει στην ενίσχυση της μετα-εννοιολογικής επίγνωσης των μαθητών δίνοντας τους την ευκαιρία εξωτερικεύοντας τις απόψεις τους να τις υποβάλλουν σε αξιολόγηση τόσο από τους ίδιους όσο και από τους συμμαθητές και τους δασκάλους τους. Έτσι μπορεί να αντιληφθούν τις ασυνέπειες και τις παρανοήσεις του συλλογισμού τους.

5. Χρησιμοποιούμε εξωτερικές αναπαραστάσεις και επιμορφωτικά τεχνουργήματα

Οι Vosniadou & Vamvakoussi (2006) επιχειρηματολογούν πως ενώ τα χειριστικά εργαλεία, τα μοντέλα και τα επιμορφωτικά τεχνουργήματα είναι σημαντικά εργαλεία για ένα δυναμικό περιβάλλον μάθησης, η απλή παρουσία τους δεν είναι ικανή να διαμεσολαβήσει και να καταστήσει αποτελεσματική μια διδασκαλία. Τα ευρήματα της έρευνας τους ότι η παρουσία της αριθμογραμμής δεν είχε ουσιαστική επίδραση στην επίδοση των μαθητών οφείλεται πιθανόν γιατί η μεταφορά 'οι αριθμοί είναι σημεία μιας ευθείας' δεν είναι εύκολο να γίνει κατανοητό ή γιατί απλά οι απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα που υπήρχε η αριθμογραμμή απλά βασίζονταν στις 'θεωρίες' τους για τους αριθμούς. Μια εναλλακτική ερμηνεία, σύμφωνα με τις ίδιες ερευνήτριες, είναι οι περιορισμοί που το αναπαραστασιακό εργαλείο της αριθμογραμμής θέτει από μόνο του για την κατανόηση της πυκνότητας. Συμπληρώνουν δε ότι μπορεί οι μαθητές να αποδίδουν στην αριθμητική ευθεία ιδιότητες ενός φυσικού αντικειμένου (δηλαδή ότι έχει παραπάνω από μια διαστάσεις) ή ότι μπορεί να την ερμηνεύουν με βάση το πρίσμα της διακριτότητας σαν μια γραμμή από διακριτά σημεία. Καταλήγουν λέγοντας ότι η χρήση εξωτερικών παραστάσεων και τεχνουργημάτων πρέπει να συνοδεύεται από ρητές και σαφής επεξηγήσεις και οι εισηγητές πρέπει να είναι ενήμεροι για τους περιορισμούς και τα αντίστοιχα πλεονεκτήματα της χρήσης τέτοιων εργαλείων.

Συμπεραίνοντας, θα συμφωνούσαμε ότι για να επιτύχουμε την εννοιολογική αλλαγή στα Μαθηματικά σε έννοιες, όπως η πυκνότητα των ρητών, που η κατανόηση τους άπτεται της απειρίας συνόλων (είτε αυτά είναι αριθμοί είτε σημεία ενός τμήματος) είναι θεμελιώδες να ακολουθήσουμε τις παραπάνω προδιαγραφές και αφού έχουμε σαν οδηγό το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να αναγνωρίζουμε τις έννοιες που προκαλούν τις σημαντικότερες δυσκολίες στους μαθητές και μας δίνει τη δυνατότητα να προβλέψουμε και να εξηγήσουμε τις συστηματικές παρανοήσεις τους όπως επίσης μας παρέχει το επεξηγηματικό πλαίσιο σε αντιδιαισθητικές μαθηματικές έννοιες καθώς και να βρούμε τις κατάλληλες 'γέφυρες-αναλογίες' για την αντιμετώπιση τους.

1.4.2. Αναλογικός συλλογισμός και 'γέφυρα-αναλογία'

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2012) προτείνουν τον αναλογικό συλλογισμό ως ένα μηχανισμό που μπορεί να επιφέρει εννοιολογική αλλαγή. Σύμφωνα με την Gentner (1983) αναλογικός συλλογισμός είναι ένα είδος συλλογισμού που εφαρμόζεται σε ειδικές πρότυπες περιπτώσεις, κατά τις οποίες το τι ξέρουμε για τη μια πρότυπη κατάσταση χρησιμοποιείται ώστε να βγάλουμε συμπεράσματα για κάποια άλλη και είναι ο πυρήνας της εφαρμογής αναλογιών στις Επιστήμες. Ο αναλογικός συλλογισμός υλοποιείται μέσω της αναλογικής αντιστοίχισης μεταξύ δύο καταστάσεων. Κατά την αναλογική αντιστοίχιση μια οικεία κατάσταση ή πεδίο χρησιμεύει ως βάση ή πηγή περιγραφών, αντιστοιχίζεται με την δυσνόητη κατάσταση ή πεδίο στόχο που αποτελεί και τον αντικειμενικό σκοπό κατανόησης. Η αναλογική αντιστοίχιση απαιτεί ευθυγράμμιση των 2 καταστάσεων και με την κατάλληλη αντιστοίχηση προωθούνται συμπεράσματα από το πεδίο βάση στο πεδίο στόχο.

Η θεωρία της αναλογικής δομικής αντιστοίχισης στοχεύει στη σύλληψη της ψυχολογικής διαδικασίας που πραγματοποιεί την αναλογική αντιστοίχιση. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία η διαδικασία σύγκρισης περιλαμβάνει την ευθυγράμμιση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις του πεδίου βάσης και του πεδίου στόχου που αποκαλύπτει κοινή δομή σχέσεων και έτσι μπορούν να μεταφερθούν αφαιρετικές γενικεύσεις από τη βάση στο στόχο. Η προτιμητέα ευθυγράμμιση των 2 πεδίων που είναι δομικά συνεπής είναι μια 'ένα προς ένα' αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων της βάσης και στοιχείων του στόχου ώστε να έχουμε μια παράλληλη σύνδεση των 2 δομών.

Η αυτόματη χρήση αναλογιών έχει τεκμηριωθεί σε συνεντεύξεις επιστημόνων που σκεπτόντουσαν φωναχτά (Clement, 1981,1988) αλλά και μαθητών (Clement, 1987). Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι οι ειδικοί χρησιμοποιούν ειδικά μοτίβα για αναλογικό συλλογισμό για να επεκτείνουν το πεδίο ενός σημαντικού αναλογικού παραδείγματος και υπερβούν μια εννοιολογική δυσκολία (Clement 1989). Η στρατηγική της εύρεσης μιας ενδιάμεσης τρίτης περίπτωσης που μοιράζεται κοινά χαρακτηριστικά αμφότερα και με την αρχική κατάσταση (πεδίο βάσης) και με την ανάλογη κατάσταση (πεδίο στόχος) λέγεται 'γέφυρα- αναλογία'.

Ο Clement (1989) προτείνει μια λίστα σημαντικών παραγόντων για την εννοιολογική αλλαγή μέσω του αναλογικού συλλογισμού και την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών. Η στρατηγική αυτή που την επιγράφει ως 'στρατηγική γεφύρωσης' περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- Το πρώτο βήμα της στρατηγικής είναι να καταστήσουμε σαφή την παρανόηση μέσω μιας στοχευμένης ερώτησης.
- Το επόμενο βήμα είναι να προτείνουμε μια περίπτωση που θεωρούμε ανάλογη και η οποία θα επικαλείται τη ‘διαίσθηση’ των μαθητών. Ονομάζει αυτή την κατάσταση σαν ‘παράδειγμα σταθεροποίησης’ (anchoring example). Επειδή όμως οι μαθητές για τη σχέση του παραδείγματος με το πεδίο στόχο δεν ‘πείθονται’ θα πρέπει ο εισηγητής να δοκιμάσει μια (ή περισσότερες) γέφυρα-αναλογία .Αυτό μπορεί μετατρέψει το βασικό πεδίο και να το κάνει εννοιολογικά πλησιέστερο στο πεδίο στόχος.

Η Vosniadou (1989) διατείνεται ότι ο όρος ‘αναλογικός συλλογισμός’ αναφέρεται στη διαδικασία της αντίληψης της βαθιάς και σχεσιακή (σε αντίθεση με την επιφανειακή ή έννοιο-διαδικαστική) ομοιότητα στη δομή 2 επιστημονικών πεδίων και τη μεταφορά της γνώσης από το πιο οικείο (βάση) στο λιγότερο οικείο (στόχος). Οι Gentner και Wolff (2000) επιχειρηματολογούν ότι η σύγκριση μεταξύ 2 πεδίων μπορεί να τονίσει τα κοινά στοιχεία τους και να αποκαλύψει όχι εύκολα παρατηρούμενες ομοιότητες και υποστηρίζουν ότι η προβολή συμπερασμάτων προσαυξάνει τη γνώση για το πεδίο στόχος και μέσα από αυτή τη διεργασία αναπαρίσταται το πεδίο στόχος ή αμφότερα τα πεδία και αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εννοιολογική αλλαγή. Εξάλλου η αντιστοίχιση μεταξύ πεδίων είναι μια ‘ριζοσπαστική διαδικασία’ που υποβοηθά τη μάθηση όταν αυτό που πρόκειται να διδαχθεί υπερβαίνει την υπάρχουσα γνώση όχι απλά ποσοτικά αλλά και ποιοτικά (Carey, 1985). Επιπλέον υποστήριξαν ότι η ‘ριζοσπαστική διεργασία’ με την οποία η έννοια του ρητού αριθμού δημιουργείται εμπεριέχει τη μοντελοποίηση του αριθμού από την άποψη των αναπαραστάσεων της φυσικής ποσότητας δηλαδή μια αντιστοίχιση πεδίων ανάμεσα στην ύλη και στον αριθμό. Οι ίδιοι ερευνητές είχαν ευρήματα ότι έχει μεγάλη συσχέτιση ο τρόπος που τα παιδιά του δημοτικού σχολείου βλέπουν και κατανοούν την άπειρη διαιρετότητα της ύλης με αυτή του αριθμού (με αυτή τη σειρά). Θα συμπεραίναμε λοιπόν ότι ο αναλογικός συλλογισμός και ειδικότερα η αντιστοίχιση μεταξύ εννοιολογικών πεδίων είναι ένας σημαντικός μηχανισμός για την εννοιολογική αλλαγή.

1.4.3. Η αριθμογραμμή: αναπαραστασιακό εργαλείο που διευκολύνει αλλά και εννίοτε παρεμποδίζει τη κατανόηση.

Η αριθμητική ευθεία αποτελεί ένα χρησιμότατο αναπαραστασιακό εργαλείο για την μαθηματική εκπαίδευση. Η αντιστοίχιση σημείων της ευθείας με αριθμούς και η χρήση της σαν εργαλείο μέτρησης και πράξεων ξεκινά από τα πρώτα χρόνια του δημοτικού. Η αντιστοιχία αυτή δεν ξεκίνησε από την αρχή της επιστημονικής θεώρησης των μαθηματικών από τους αρχαίους έλληνες μαθηματικούς και δεν εξελίχτηκε γραμμικά με το πέρασμα του χρόνου. Στην ουσία η ταύτιση των σημείων μιας ευθείας με αριθμούς συνδέεται άμεσα με την εξέλιξη της έννοιας αριθμός και πραγματοποιείται με τις εργασίες των Cantor και Dedekind που αφορούν την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

Ο Hilbert (1950, στο Χατζημανώλης, 2008) στα σχόλια του για το αξίωμα της πληρότητας με το οποίο εξασφαλίζεται η μοναδικότητα του συνόλου των πραγματικών με την έννοια ότι κάθε άλλο σύνολο με τα ίδια αξιώματα είναι ισομορφικό με το σύνολο των πραγματικών αριθμών αναφέρει : '…*Από θεωρητική άποψη η αξία αυτού του αξιώματος είναι ότι έμμεσα μας οδηγεί στην εισαγωγή οριακών σημείων και επομένως καθιστά δυνατή μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία ενός τμήματος και στο σύστημα των πραγματικών αριθμών.*' Εξελικτικά , η 'πραγματική ευθεία' ορίζεται στην εποχή μας ως το σύνολο των πραγματικών αριθμών R.

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2012) επισημαίνουν ότι εφόσον η αριθμητική ευθεία είναι μια αναπαράσταση του συνεχούς των πραγματικών αριθμών θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να υπερβούν την ιδέα της διακριτότητας των αριθμών και επίσης να τους βοηθήσει να κατανοήσουν ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις όπως το 0,5 και $\frac{1}{2}$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της ευθείας και κατά συνέπεια και στο ίδιο ρητό αριθμό, συνειδητοποιώντας ότι φυσικοί και μη φυσικοί αριθμοί είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου. Ακόμη μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση της έννοιας των δεκαδικών με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη επαναλαμβανόμενα, δηλαδή τους άρρητους. Εξάλλου η πυκνότητα των σημείων ενός τμήματος θα ήταν πιο εύκολα προσβάσιμη, εφόσον η αριθμητική γραμμή δεν εμπλέκει για τους σημεία- αριθμούς συμβολικές παραστάσεις. Επιπλέον οι ειδικοί στα μαθηματικά χρησιμοποιούν την αριθμητική ευθεία ως ενδεδειγμένο μοντέλο όταν αναφέρονται στην πυκνότητα των πραγματικών αριθμών .

Από την άλλη μεριά η αριθμητική ευθεία είναι ένα αφηρημένο αντικείμενο και δεν δίνεται έμφαση στη διδασκαλία για τις διαφορετικές ιδιότητες της ευθείας ως πραγματικό αντικείμενο που παράγεται από τη συνεχή κίνηση της μύτης του μολυβιού και της ιδεατής αριθμητικής ευθείας. Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στην «ολιστική ευθεία» με την έννοια του ίχνους ενός κινούμενου αντικειμένου που παράγει ένα συνεχές αναπαραστασιακό αποτέλεσμα με την κοινή έννοια του όρου και της εκλεπτυσμένης μεταφοράς της σαν σύνολο σημείων (Lakoff & Nunez, 2000 στο Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Αυτές οι αντιφατικές απόψεις για την ευθεία σε συνδυασμό με τη μη επίγνωση της αντίφασης από τους μαθητές, επιτείνουν τη δυσκολία που έχουν στο να την ερμηνεύσουν και να έχουν μια θολή αντίληψη για την αντιστοίχιση αριθμών με σημεία, σε συνδυασμό με την χρησιμοποίηση της τα πρώτα σχολικά χρόνια των μαθητών για μετρήσεις φυσικών αριθμών, μπορεί να δυσκολεύει την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών. Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2012) αναφέρουν πως ένας άλλος παράγοντας δυσκολίας στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών με τη χρήση της αριθμητικής ευθείας ,είναι οι αντιλήψεις των σημείων της ως υλικά σημεία, πράγμα αντίθετο με την απειρία του πλήθους των σημείων σε ένα τμήμα της και μπορεί να αποτελεί τη βάση της ιδέας του τμήματος σαν ‘ένα περιδέραιο από κουκίδες’ και αντίστοιχα τη βάση της πεποίθησης ότι μακρύτερα τμήματα έχουν περισσότερα σημεία. Επίσης η χρησιμοποιούμενη μεταφορά για την αριθμητική ευθεία ως βαθμολογημένος χάρακας (συνήθως στη διδασκαλία δεκαδικών) μπορεί να δημιουργήσει την εντύπωση ότι το πλήθος των ενδιάμεσων σημείων είναι πεπερασμένο.

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2007, 2010, 2012) σε μια σειρά ερευνών για την επίδραση της αριθμητικής ευθείας σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου σχετικά με το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα, βρήκαν ότι όχι μόνο η επίδραση της δεν ήταν σημαντική αλλά και ότι κάποιες φορές η παρουσία της ευθείας οδηγούσε σε αντίθετα αποτελέσματα (μαθητές άλλαξαν τις απαντήσεις τους από ‘άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών’ σε ‘πεπερασμένο’). Η ταυτόχρονη διερεύνηση των αντιλήψεων των παιδιών για το πλήθος και για την πυκνή διάταξη των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα με ένα νοητικό πείραμα που ζητούσε από τους μαθητές να περιγράψουν ένα τμήμα της ευθείας μετά από απεριόριστη μεγέθυνση, έδειξε ότι η πλειοψηφία τους το έβλεπαν σαν φυσικό δυσδιάστατο αντικείμενο που αυξάνονται οι διαστάσεις του ή σαν μια σειρά κουκίδων, τη μια δίπλα στην άλλη. Οι ίδιες ερευνήτριες ερμηνεύουν το γεγονός ότι την τελευταία περιγραφή την είχαν απαντήσει και μαθητές που είχαν δηλώσει ότι τα ενδιάμεσα σημεία είναι άπειρα σε αντίστοιχες ερωτήσεις, λέγοντας ότι πιθανόν τα παιδιά απαντώντας 'άπειρα σημεία' εννοούν στην πραγματικότητα 'ένα πολύ μεγάλο πλήθος πολύ μικρών κουκίδων' και είναι επίσης πιθανό, για τα παιδιά το «άπειρο πλήθος ενδιάμεσων» να μην είναι ισοδύναμο με τη «μη ύπαρξη επόμενου». Προσθέτουν δε ότι «*η ερμηνεία αυτή είναι συμβατή με ευρήματα που δείχνουν ότι, σε αριθμητικό πλαίσιο, μαθητές που αναφέρονται σε δεκαδικούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία, θεωρούν ότι π.χ. το 0,9999…. Είναι ο αμέσως προηγούμενος του ένα, δηλαδή ότι ένας τέτοιος αριθμός θεωρητικά υπάρχει…Τέλος, τα παιδιά ήταν πολύ περισσότερο διατεθειμένα να αποδεχτούν την απειρία των ενδιάμεσων σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, παρά την απειρία των αριθμών σε ένα διάστημα, ανεξάρτητα από τη παρουσία ή όχι της αριθμητικής ευθείας (στην περίπτωση των αριθμών)*».

1.4.4. Μια παρέμβαση για την κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών

Οι Vamvakoussi & Vosniadou το 2012 διεξήγαγαν μια μελέτη παρέμβασης σε μαθητές της Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου με στόχο τη κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών. Στο σχεδιασμό τους έλαβαν υπόψη ότι οι μαθητές μπορεί να έχουν εμφωλευμένες προϋποθέσεις στις ιδέες τους τόσο γύρω από τον αριθμό των ενδιάμεσων σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα όσο και για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών από την ιδέα της διακριτότητας, σύμφωνα με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών. Στο πρώτο σκέλος της συγκεκριμένης έρευνας, επιβεβαίωσαν τις καταγεγραμμένες στη βιβλιογραφία δυσκολίες των μαθητών αλλά επίσης διαφάνηκε ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές ήταν πιο επιδεκτικοί στο άπειρο πλήθος ενδιάμεσων σημείων παρά στο άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών και χωρίς η αποδοχή του πρώτου να σηματοδοτεί κατ' ανάγκη την κατανόηση του δεύτερου. Επίσης δεν φάνηκε οι μαθητές να κάνουν χρήση της αναλογίας μεταξύ των σημείων της αριθμογραμμής και των αριθμών. Θεώρησαν ότι η κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας είναι πιθανά πιο εύκολα προσβάσιμη στους μαθητές σε γεωμετρικό παρά σε αριθμητικό πλαίσιο. Προκειμένου να διευκολύνουν την κατανόηση της πυκνότητας, τόσο στην συνιστώσα της του άπειρου πλήθους ενδιάμεσων αριθμών όσο και της 'μη ύπαρξης' επόμενου, υιοθέτησαν την προσέγγιση της 'αναλογίας-γέφυρας' που προτείνεται από τους Brown & Clement (1989) σε συνδυασμό με τη σαφή χρησιμοποίηση της αντιστοιχίας αριθμών σε σημεία. Στην συγκεκριμένη παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε σαν παρεμβολή ανάμεσα στην υποτιθέμενη ως αρχική κατανόηση των παιδιών για το ευθύγραμμο τμήμα ως φυσικό αντικείμενο ή ως σειρά διακριτών σημείων και την κατανόηση που αποτελεί στόχο της διδασκαλίας, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα ως πυκνά διατεταγμένο σύνολο σημείων, η ιδέα της 'ελαστικής' αριθμογραμμής. Η 'ιδεατή' αριθμογραμμή ως λάστιχο που δεν σπάει όσο και να τεντωθεί, μπορεί να λειτουργήσει σαν μια αναλογία βασισμένη στην καθημερινή εμπειρία των παιδιών με ένα φυσικό αντικείμενο (λάστιχο) και παράλληλα είναι συμβατή με τις αρχικές αντιλήψεις των παιδιών. Όμως η ιδεατή ελαστική γραμμή με την ιδιότητα της να μη σπα όσο και να την τεντώνουμε, μια διαδικασία που 'πατά' πάνω στην έννοια του εν δυνάμει απείρου, παράγει διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα και όχι διαδοχικά σημεία. Έτσι υπέθεσαν ότι με αυτή την ιδέα θα βοηθούσαν τους μαθητές όχι μόνο να συλλάβουν την έννοια των άπειρων σημείων σε ένα τμήμα αλλά και ότι δεν μπορούν να βρουν δυο σημεία που να βρίσκεται το ένα μετά το άλλο δίνοντας παράλληλα σχετικές εξηγήσεις.

Σχεδίασαν μια παρέμβαση βασισμένη μόνο σε τρία κείμενα ώστε να ελέγξουν την υπόθεση τους ελαχιστοποιώντας την παρείσφρηση άλλων αλληλεπιδραστικών παραγόντων μάθησης. Και τα τρία κείμενα της παρέμβασης είχαν ένα κοινό τμήμα T1 (εφεξής *basic text*), με αναφορά στο πλήθος των αριθμών στο διάστημα μεταξύ 0 και 1 το οποίο παρείχε την σωστή πληροφορία για το άπειρο πλήθος των ενδιάμεσων σημείων κάνοντας σαφή αναφορά στην αντιστοιχία σημείων και αριθμών. Συνέχισαν στη 2η παράγραφο επικαλούμενες την αντίληψη των μαθητών για το διάστημα 0 και 1 να δίνουν και άλλα παραδείγματα ενδιάμεσων δεκαδικών σε αυτό το διάστημα. Η αντίστοιχη παράγραφος στο δεύτερο κείμενο T2 (εφεξής *figure text*) διέφερε στο ότι παρείχε με σχήμα το διάστημα 0 και 1 και τους αντίστοιχους ενδιάμεσους αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή σύμφωνα με την πρακτική που παρουσιάζονται τέτοια θέματα στα σχολικά βιβλία . Το τρίτο κείμενο T3 (εφεξής *rubber-line text*) ενώ είχε κοινή την 1η παράγραφο με το T1 ακολούθως εισήγαγε την ιδέα της 'ελαστικής' αριθμογραμμής κάνοντας σαφή την 'ιδιαίτερη' φύση της να μη σπα όσο και να την τεντώσουμε. Κατόπιν καλούσε τους μαθητές να τοποθετήσουν 'νοητικά' ενδιάμεσους αριθμούς στο διάστημα 0 και 1 ώστε αυτό να καλυφθούν όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Ακολούθως τους ζητούσε να 'τεντώσουν' την ελαστική γραμμή και να παρατηρήσουν ότι τώρα έχει δημιουργηθεί χώρος ώστε να εισέλθουν και άλλα ενδιάμεσα σημεία κοκ. Κατέληγε λέγοντας ότι έτσι προκύπτουν άπειρα ενδιάμεσα σημεία μεταξύ των σημείων που αντιστοιχούν στα 0 και 1 και επομένως υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ 0 και 1.

Η διαδικασία της έρευνας περιλάμβανε μέσα σε χρονική διάρκεια μιας ώρας τον προ-έλεγχο, ακολουθούσε η παρέμβαση με τα αντίστοιχα κείμενα T1,T2,T3 και ακολουθούσε ο μετά-έλεγχος. Σε κάθε τμήμα δόθηκε ένα μόνο από τα κείμενα T1 ή T2 ή T3 της παρέμβασης.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα κειμένου παρέμβασης και ηλικίας βελτίωσαν τις απαντήσεις τους όσο αφορά τα 'άπειρα στοιχεία'. Επίσης οι μαθητές που διάβασαν το κείμενο T3, δηλαδή εκτέθηκαν στην ιδέα της 'ελαστικής' αριθμογραμμής, τα πήγαν καλύτερα όπως είχε υποτεθεί και στα ερωτήματα του 'μη επόμενου', τόσο από πλευράς σωστών απαντήσεων όσο και παροχής συνεπών εξηγήσεων. Συγκεκριμένα οι μεγαλύτεροι μαθητές έδειξαν σημαντική βελτίωση στο ερώτημα που αφορούσε τα σημεία ενώ οι νεότεροι έδειξαν σημαντική βελτίωση και στα ερωτήματα που αφορούσαν αριθμούς. Αντίστοιχα το κείμενο T2 (figure text) δεν φάνηκε να έχει κάποια ιδιαίτερη βαρύτητα στο να διευκολύνει κάποιες από τις όψεις τις πυκνότητας.

Αυτή η παρέμβαση-μελέτη ήταν η αφορμή και οδηγός και για την δική μας παρέμβαση παρέχοντας μας το αποδοτικό εργαλείο (που χρησίμευσε ως αναλογία-γέφυρα) της 'ελαστικής' αριθμογραμμής.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ</u>

2.1 Στόχος της έρευνας- Ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της παρούσας μελέτης-παρέμβαση είναι μέσω της ειδικά σχεδιασμένης παρέμβασης μας μέσα σε ένα πραγματικό-καθημερινό σχολικό περιβάλλον, με τη χρήση της γέφυρας-αναλογίας του 'ιδεατού' εργαλείου της 'ελαστικής' αριθμογραμμής, να κατανοήσουν οι μαθητές την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Συγκεκριμένα να αντιληφθούν ότι :

I) *ανάμεσα σε 2 σημεία της αριθμογραμμής υπάρχουν άπειρα σημεία άρα και άπειροι αριθμοί και*

II) *όταν μας δοθεί οποιοσδήποτε ρητός, σε οποιαδήποτε αναπαραστασιακή μορφή, δεν υπάρχει ο επόμενος του.*

Θεωρήσαμε ότι η κατανόηση μιας τόσο δύσκολης μαθηματικής έννοιας για μαθητές ανεξάρτητα εκπαιδευτικής βαθμίδας, θα είναι ευκολότερα προσβάσιμη σε γεωμετρικό πλαίσιο παρά σε αριθμητικό, γι' αυτό και επιλέξαμε το εργαλείο της 'ελαστικής' αριθμογραμμής που κατέχει την ιδιότητα της αέναης επιμήκυνσης χωρίς να αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά της, ως γέφυρα-αναλογία ανάμεσα στις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών και της αντιδιαισθητικής μαθηματικής ιδέας της απειρίας των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

2.2 Συμμετέχοντες

Η έρευνα μας είναι μια μελέτη παρέμβασης, σε μια τάξη 27 (12 αγόρια και 15 κορίτσια) μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου ενός Πειραματικού Γυμνασίου στην περιοχή Αθηνών. Οι μαθητές του συγκεκριμένου τμήματος είχαν επιλεγεί με κλήρωση και όχι με εξετάσεις να φοιτήσουν στο συγκεκριμένο σχολείο και έτσι δεν είναι μια τάξη αριστούχων ή παιδιών με ιδιαίτερες μαθησιακές ικανότητες, αλλά μπορούμε να πούμε ότι δεν διαφοροποιούνται σημαντικά από μια τάξη ενός 'καλού' Αθηναϊκού Γυμνασίου. Επίσης η εμπλοκή τους σε επανειλημμένες πειραματικές διδασκαλίες κάνει τη δική μας παρεμβατική διαδικασία λιγότερο καινοφανή και 'προβληματική' στο συγκεκριμένο σχολικό πλαίσιο. Σημειωτέο δε, ότι επιλέξαμε το συγκεκριμένο τμήμα γιατί όπως ανέφερε μαθηματικός καθηγητής της Γ΄ γυμνασίου του σχολείου τα παιδιά αλληλεπιδρούν πολύ περισσότερο από τα άλλα τμήματα, ένα στοιχείο που ήταν σημαντικό για την παρέμβαση μας αφού ένας άξονας της σχεδίασης που βασίστηκε ήταν η αλληλεπίδραση των μαθητών.

2.3 Σχεδιασμός

Ο σχεδιασμός της παρέμβασης περιλάμβανε προ-έλεγχο, μετά-έλεγχο και έλεγχο συγκράτησης. Πιο συγκεκριμένα σε πρώτη φάση ελέγχθηκαν οι υπάρχουσες γνώσεις των συμμετεχόντων την έρευνα μαθητών όσο αφορά την πυκνότητα των ρητών. Τα αποτελέσματα του προ-ελέγχου αξιοποιήθηκαν στο σχεδιασμό της παρέμβασης. Αμέσως μετά την παρέμβαση μας που βασίστηκε σε πέντε ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες που εκτελέστηκαν σε μία διδακτική ώρα, ακολούθησε ο μετά-έλεγχος με ένα ερωτηματολόγιο, που αποτελούνταν από τις 13 ερωτήσεις του προελέγχου εμπλουτισμένο με επιπλέον 4 ερωτήματα , 2 σε γεωμετρικό και 2 σε αριθμητικό πλαίσιο για την πυκνότητα των ρητών. Το ίδιο ερωτηματολόγιο, δόθηκε ως έλεγχος συγκράτησης (retention test) τρείς εβδομάδες μετά την παρέμβαση μας. Ο πυρήνας όλων των ελέγχων (δηλαδή τα δεκατρία κοινά δοκίμια των τριών ελέγχων) είναι έργα που τα είχε χρησιμοποιήσει στα πλαίσια της διπλωματικής του εργασίας για πρώτη φορά ο Χατζημανώλης (2008) στην έρευνα του για την κατανόηση των ρητών από τους μαθητές.

Από την ανάλυση των απαντήσεων του ερωτηματολογίου του προελέγχου προέκυψαν κυρίως αναμενόμενα αποτελέσματα για τις γνώσεις των μαθητών όσο αφορά το πλήθος των αριθμών ανάμεσα σε 2 διαφορετικούς ρητούς είτε εμφανίζεται η αριθμογραμμή είτε όχι, όπως αναλυτικά παρουσιάζουμε στη συνέχεια. Ωστόσο εμφανίστηκε και το αντίθετο του αναμενόμενου, σύμφωνα με τις Vamvakoussi & Vosniadou (2012), η επίδοση τους να υστερήσει στην κατηγορία των ερωτημάτων που αφορούσαν το πλήθος των σημείων ανάμεσα σε δυο διαφορετικά σημεία ενός τμήματος. Πιο συγκεκριμένα, ήταν έντονη η τάση των μαθητών στο να συνδέουν το πλήθος των σημείων με το μήκος του δοθέντος τμήματος. Αυτή αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν ότι ανάμεσα σε 2 διαφορετικά σημεία ενός τμήματος της αριθμογραμμής και ανεξάρτητα της μεταξύ τους απόστασης, παρεμβάλλονται άπειρα σημεία, άρα και άπειροι αριθμοί ήταν το έναυσμα, ώστε να σχεδιάσουμε την παρέμβαση μας με στόχευση την εννοιολογική αλλαγή των μαθητών όσο αφορά την ισότητα άπειρων συνόλων σε Γεωμετρικό πλαίσιο (απειρία πλήθους σημείων ανάμεσα σε 2 διαφορετικά) χρησιμοποιώντας το εργαλείο της ‘ελαστικής’ γραμμής ως γέφυρα-αναλογία και με οδηγό της δημιουργίας των διδακτικών δραστηριοτήτων το πλαίσιο που καθορίζουν οι Vamvakoussi & Vosniadou (2006), όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας μελέτης .

2.4 Ερευνητικά εργαλεία

2.4.1 Δοκίμια προ-ελέγχου

Το δοκίμιο του προ-ελέγχου αποτελούνταν από 13 συνολικά ερωτήματα εκ των οποίων τα πρώτα 9 είναι πολλαπλής επιλογής χωρίς αιτιολόγηση, ενώ το τα επόμενα 3 ερωτήματα ζητούσαν από τους μαθητές να αξιολογήσουν μια δήλωση, αιτιολογώντας ταυτόχρονα την απάντηση τους. Η τελευταία ερώτηση ($13^{η}$) τέθηκε σε διαφορετικό πλαίσιο από το σύνηθες, σαν ένα 'νοητικό πείραμα'. Τα πρώτα 9 ήταν χωρισμένα σε 3 κατηγορίες των 3 ερωτημάτων η κάθε μία και στόχος κάθε κατηγορίας ήταν να ελέγξει δεξιότητες και γνώσεις των μαθητών σχετιζόμενες με την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών σε αριθμητικό, γεωμετρικό ή αριθμητικό και γεωμετρικό πλαίσιο συνδυαστικά. Οι υπόλοιπες 4 ερωτήσεις στόχευσαν στο να ελέγξουν τις γνώσεις των μαθητών για την μη ύπαρξη επόμενου ρητού αριθμού.

Στο 1ο φύλλο κάθε ερωτηματολογίου περιγράψαμε την διαδικασία με την οποία θα απαντούσαν οι μαθητές (επιπλέον της προφορικής οδηγίας), δηλαδή ότι θα συμπληρώνουν το ένα φύλλο και κατόπιν θα παίρνουν το επόμενο. Περαιτέρω, προσπαθώντας να προλάβουμε τυχόν παρανοήσεις δώσαμε και επεξηγήσεις ότι :

i) όπου γίνεται αναφορά σε αριθμό ή αριθμούς, πρόκειται για πραγματικούς και
ii) η φράση «άπειρο πλήθος αριθμών» σημαίνει ένα πλήθος χωρίς τέλος ενώ η φράση «πεπερασμένο πλήθος αριθμών» σημαίνει ότι μπορεί να είναι πολύ λίγοι ή πάρα πολλοί αλλά κάπου τελειώνουν.

Η πρώτη κατηγορία ερωτημάτων, δηλαδή τα πρώτα τρία (εφεξής, *Αριθμητικά*) εξέταζαν την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών σε αριθμητικό πλαίσιο όσο αφορά την όψη των άπειρων ενδιάμεσων αριθμών, ρωτώντας τους μεταξύ 2 διαφορετικών αριθμών (είτε δεκαδικών, είτε κλασματικών είτε ακέραιων) πόσοι άλλοι υπάρχουν, δίνοντας τους τις εναλλακτικές επιλογές:

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός,

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών και

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

Η δεύτερη κατηγορία ερωτημάτων $4^{ο}$,$5^{ο}$,$6^{ο}$ (εφεξής, Α*ριθμογραμμής*) ήταν παρόμοια με την πρώτη αλλά έπρεπε οι μαθητές πρώτα να τοποθετήσουν ένα συγκεκριμένο αριθμό ανάμεσα σε 2 δοθέντες και κατόπιν να απαντήσουν για το πλήθος των αριθμών ανάμεσα τους, ώστε να εξετάσουμε την επίδραση της αριθμογραμμής στην κατανόηση της συνιστώσας των άπειρων ενδιάμεσων αριθμών.

Τα ερωτήματα της 3ης κατηγορίας (εφεξής, *Σημεία*) εξέταζαν την κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας σε γεωμετρικό πλαίσιο και συγκεκριμένα την όψη της των άπειρων ενδιάμεσων σημείων, ρωτώντας τους μαθητές για τον αριθμό των σημείων σε ένα τμήμα μιας ευθείας το οποίο διαφοροποιούνταν σε μήκος ή προσανατολισμό. Οι επιλογές των μαθητών ήταν αντίστοιχες με των προηγούμενων κατηγοριών, δηλαδή :

α) δεν υπάρχει κανένα σημείο,

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων και

γ) υπάρχουν άπειρα σημεία.

Η 4η ομάδα ερωτήσεων (10η, 11η, 12η) αφορούσε τον έλεγχο της κατανόησης της πυκνότητας όσο αφορά την όψη της μη ύπαρξης επόμενου αριθμού (εφεξής, *μη Επόμενος*) τόσο σε διάστημα αριθμών όσο και μετά από μεμονωμένους ρητούς, σε δεκαδική ή κλασματική αναπαράσταση, ζητώντας τους να αξιολογήσουν αιτιολογημένα μια δήλωση. Συγκεκριμένα το 1ο ερώτημα της ομάδας έδινε ότι μια μεταβλητή χ έπαιρνε τιμές στο ανοικτό διάστημα (0,1) και τονίζοντας ότι η μεταβλητή χ δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, ρωτούσε αν μπορούν να προσδιορίσουν την πρώτη τιμή που θα πάρει αιτιολογώντας ταυτόχρονα και δίνοντας τις εξής επιλογές:

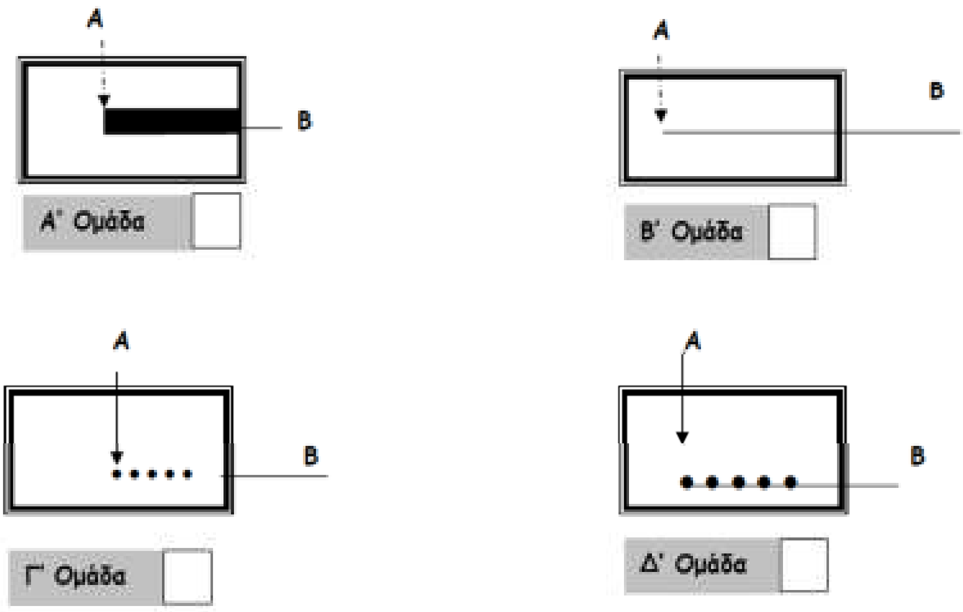
α) Ναι, είναι η τιμή……

β) Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή, γιατί….

γ) Δεν υπάρχει απάντηση στο ερώτημα, γιατί………..

Αντίστοιχα τα επόμενα δύο ερωτήματα ρωτούσαν τους μαθητές αν συμφωνούσαν ή όχι, ότι ο επόμενος του 2,37 είναι ο 2,38 και αντίστοιχα αν ο επόμενος του $\frac{5}{9}$ είναι ο $\frac{6}{9}$ και να αιτιολογήσουν την απάντηση τους.

Το τελευταίο ερώτημα έλεγχε και αυτό την κατανόηση των μαθητών όσο αφορά την ‘μη ύπαρξη επόμενου’ αλλά στο γεωμετρικό πλαίσιο με ένα ‘νοητικό’ πείραμα. Το σενάριο έλεγε πως ένας καθηγητής μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές του να σκεφτούν ότι έχουν ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα πολύ ισχυρό μικροσκόπιο με το οποίο μπορούν να κοιτάξουν ένα σημείο Α και τα κοντινά του σημεία από ‘πολύ κοντά’. Κατόπιν ζήτησε από τους μαθητές να περιγράψουν με ένα σχέδιο πως θα ‘έβλεπαν’ το Α και τα κοντινά σημεία του. Τους δίνονταν 4 εναλλακτικά σχήματα (Εικόνα 1) να επιλέξουν και να αιτιολογήσουν την επιλογή τους. Στο $1^{ο}$ σχέδιο το ευθύγραμμο τμήμα μεγάλωνε σε μήκος και πλάτος, στο $2^{ο}$ παρέμενε όμοιο με το δοθέν, στο $3^{ο}$ σχήμα παρουσιαζόταν σαν ένα ‘μονοπάτι’ κουκίδων και στο $4^{ο}$ σχήμα παρουσιάζονταν σαν ένα ευθύγραμμο τμήμα με ένα ‘μονοπάτι’ κουκίδων να το διατρέχει. Για την περίπτωση που τα δοθέντα σχήματα δεν τους κάλυπταν, δόθηκε χώρος να σχεδιάσουν το δικό τους. Σημειώνουμε ότι ο πυρήνας των κοινών δοκιμίων των τριών ελέγχων (δηλαδή το ‘νοητικό’ πείραμα και τα έργα ένα έως και εννέα) είναι έργα που αρχικά χρησιμοποίησε στη διπλωματική του εργασία ο Χατζημανώλης (2008).



Εικόνα 1: επιλογές νοητικού πειράματος

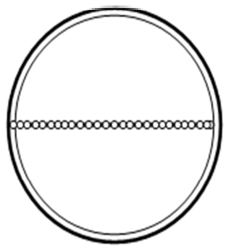
2.4.2 Δοκίμια μετά-έλεγχου και έλεγχου συγκράτησης.

Τα ερωτηματολόγια του μετά-ελέγχου και του ελέγχου συγκράτησης ήταν κοινά και βασίστηκαν στις 13 ερωτήσεις του προ-έλεγχου που εμπλουτίστηκαν με 4 επιπλέον ερωτήματα που τοποθετήθηκαν πριν το έργο του 'νοητικού' πειράματος και τα οποία στόχευαν να ανιχνεύσουν την γνώση των μαθητών για την όψη της πυκνότητας των ρητών που αφορά την 'μη ύπαρξη' επόμενου, ελέγχοντας τους μαθητές σε έργα που δεν τα είχαν αντιμετωπίσει στο παρελθόν, ούτε τα είχαν επεξεργαστεί στην παρέμβαση. Συγκεκριμένα τα ερωτήματα 13 και 14 ελέγχουν την κατανόηση της συνιστώσας της πυκνότητας του 'μη επόμενου' αντίστοιχα σε αριθμητικό και γεωμετρικό πλαίσιο. Το έργο 13 ανέφερε την υποτιθέμενη δήλωση ενός μαθητή, πως ο επόμενος του αριθμού δύο υπάρχει αλλά δεν μπορεί να βρεθεί με απόλυτη ακρίβεια, λέγοντας ότι είναι ο 2,000…1 και 'διευκρινίζοντας' πως με τις τρεις τελείες εννοεί ότι μεσολαβούν άπειρα μηδενικά και ζητούσε από τους μαθητές να την αξιολογήσουν αιτιολογώντας αν συμφωνούν ή όχι. Παρόμοια στο έργο 14 ζητούσαμε αντίστοιχα να αξιολογήσουν αιτιολογημένα τη δήλωση μιας μαθήτριας πως μια ευθεία έχει άπειρα σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και αν μπορούσαμε να μεγεθύνουμε ένα κομμάτι της θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε τα σημεία ένα-ένα όπως στην εικόνα που είχε ζωγραφίσει. Η εικόνα που υποτίθεται ότι είχε ζωγραφίσει η μαθήτρια παρουσίαζε το 'μεγεθυμένο' τμήμα της ευθείας σαν μια σειρά κουκίδων (Εικόνα 2). Και στα δύο ερωτήματα απευθυνόμαστε στην 'εν δυνάμει' αντίληψη του άπειρου που έχουν οι μαθητές ώστε να εξετάσουμε το επίπεδο της κατανόησης των μαθητών. Το $3^{ο}$ επιπλέον ερώτημα (ερώτημα 15) ζητούσε να αποφανθούν με αιτιολόγηση οι μαθητές για το αν μπορούν να προσδιορίσουν το μικρότερο θετικό ακέραιο. Το $4^{ο}$ επιπλέον ερώτημα (Εικόνα 3) ήταν ένα έργο για την κατανόηση της όψης της πυκνής διάταξης των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος σχετική με την άπειρη διαιρεσιμότητα. Δίναμε στους μαθητές ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, βρίσκαμε το μέσο του M_1, στη συνέχεια βρίσκαμε το μέσο M_2 του AM_1, κατόπιν βρίσκαμε το μέσο M_3 του AM_2 και ζητούσαμε από τους μαθητές να εκτιμήσουν πόσες φορές μπορεί να επαναληφθεί η διαδικασία δίνοντας σχετική επεξήγηση.

Ο μετά-έλεγχος ακολούθησε την επόμενη διδακτική ώρα της παρέμβασης και ο έλεγχος-συγκράτησης ακολούθησε 3 εβδομάδες αργότερα. Η διαδικασία ήταν η ίδια όπως και στον προ-έλεγχο, δηλαδή δόθηκαν οι ίδιες επεξηγήσεις και οι μαθητές αφού συμπλήρωναν το ένα φύλλο το παρέδιδαν και έπαιρναν το επόμενο. Οι μαθητές του μετά-ελέγχου ήταν 27, ενώ οι μαθητές του ελέγχου-συγκράτησης 25. Ο τελικός αριθμός των μαθητών που έλαβαν μέρος και στους 3 ελέγχους ήταν 25.

Μετά το πέρας του ελέγχου-συγκράτησης δώσαμε ένα επιπλέον ερωτηματολόγιο στους μαθητές, αποτελούμενο από τα 3 επιπρόσθετα (σε σχέση με τον προ-έλεγχο) ερωτήματα των μετά-ελέγχου και ελέγχου-συγκράτησης, συγκεκριμένα τα ερωτήματα 13,14,15, καθώς και το κοινό ερώτημα 10 των τριών ελέγχων, στο οποίο αφού πρώτα τους παροτρύναμε ρητά να θεωρήσουν ότι οι δοσμένοι αριθμοί βρίσκονται πάνω στην ‘ελαστική’ αριθμογραμμή και υπενθυμίζοντας την ιδιότητα της να τεντώνεται απεριόριστα τους θέσαμε το ερώτημα αν θα επιμείνουν στην ίδια απάντηση που έδωσαν στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο (του ελέγχου συγκράτησης). Στην περίπτωση που άλλαζαν την απάντηση τους, ζητούσαμε να αιτιολογήσουν την αλλαγή αυτή. Θέλαμε με αυτό τον τρόπο να διερευνήσουμε αν η υπενθύμιση της χρήσης της ‘ελαστικής’ αριθμογραμμής θα λειτουργούσε επιβοηθητικά ώστε οι μαθητές να διορθώσουν τυχόν λανθασμένες απαντήσεις τους όπως επίσης αν στις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο του ελέγχου συγκράτησης έλαβαν υπόψη την ‘ελαστική’ αριθμογραμμή, γεγονός που θα συνηγορούσε στη διατήρηση της επίδρασης της παρέμβασης μας .

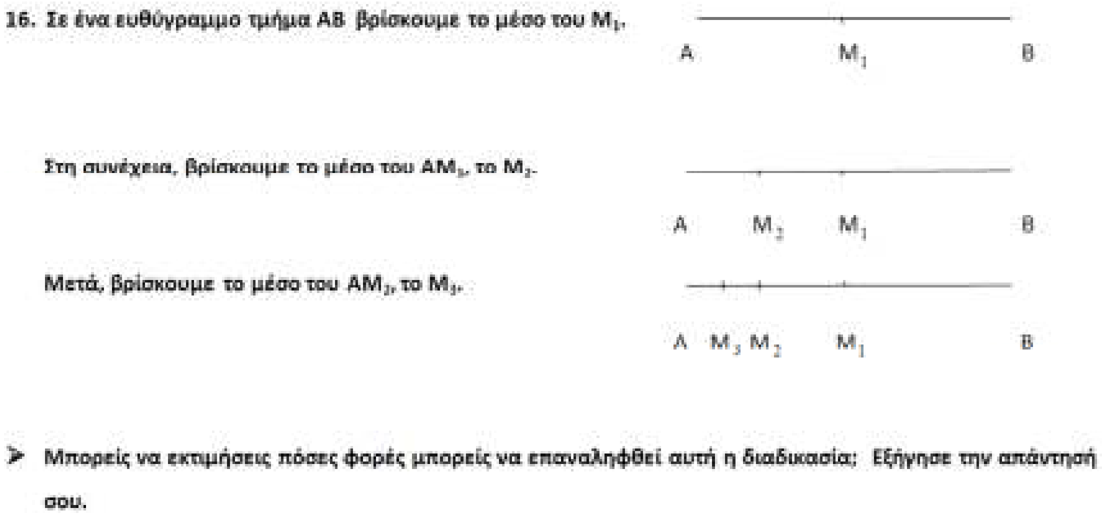
14.Η Κική λέει: «Μια ευθεία έχει άπειρα σημεία, που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Αν μπορούσες όμως να μεγεθύνεις απεριόριστα πολύ ένα κομμάτι της ευθείας, θα μπορούσες να ξεχωρίσεις τα σημεία ένα-ένα, όπως στην εικόνα που έχω ζωγραφίσει»



➢ Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑

Εξήγησε γιατί: ……………………………………………………………………

Εικόνα 2: ερώτημα 14



Εικόνα 3: ερώτημα 16

2.5 Παρέμβαση-Δραστηριότητες παρέμβασης

Η διδακτική παρέμβαση έγινε σε μία διδακτική ώρα μέσα στο πρόγραμμα του σχολείου, την ώρα των μαθηματικών. Χωρίσαμε τους 27 μαθητές σε 6 ομάδες. Κάθε ομάδα είχε 4 ή 5 μαθητές ώστε να αλληλεπιδράσουν και να αυξηθεί η μεταγνωστική ενημερότητα τους καθώς θα ήταν πιο εύκολο (απουσία του καθηγητή-κριτή) να εκφράσουν και να συγκρίνουν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του εξεταζόμενου φαινομένου. Η παρέμβαση μας μαγνητοσκοπήθηκε τηρώντας την δεοντολογία που απαιτεί να μην φαίνονται τα πρόσωπα των μαθητών και καταγράψαμε ηχητικά τις ομάδες (με φτωχά αποτελέσματα όσο αφορά το υλικό καταγραφής λόγω τεχνικών κωλυμάτων).

Προσπαθήσαμε να σχεδιάσουμε την παρέμβαση μας τηρώντας τις αρχές που πρότειναν οι Vosniadou & Vamvakoussi (2006) για τη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων που διευκολύνουν την εννοιολογική αλλαγή και λαμβάνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις των Tsamir & Tirosh (2007) που αφορούν την λειτουργικότητα της ένα προς ένα αντιστοιχίας για να καταδείξουμε την ισοδυναμία δύο άπειρων συνόλων. Ειδικότερα, τηρώντας την αρχή των Vosniadou & Vamvakoussi για τη σημασία της σειράς πρόσκτησης των εμπλεκόμενων εννοιών, αποφασίσαμε να επικεντρώσουμε την παρέμβαση μας γύρω από τη βασική ιδέα της απειρίας των σημείων σε οποιοδήποτε τμήμα της αριθμογραμμής και την αντίστοιχη αναλογία με την απειρία των αριθμών εφόσον η αποτελεσματικότητα αυτής της διαδικασίας αποδείχθηκε αποτελεσματική στην έρευνα Vamvakoussi & Vosniadou (2012).. Λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη σύσταση-οδηγία τους να μην προσπαθούμε να καλύψουμε επιφανειακά με όλες τις δυνατές υποπεριπτώσεις της ύλης που θέλουμε να διδάξουμε αλλά να εστιάζουμε στις κεντρικές ιδέες και στην σχέση που έχουν μεταξύ τους και έχοντας δεδομένους χρονικούς περιορισμούς, σχεδιάσαμε πέντε δραστηριότητες. Οι δύο πρώτες στόχευαν την κατανόηση της πυκνής διάταξης των σημείων ενός τμήματος και οι υπόλοιπες τρείς στη συνέχεια στόχευαν στο να μεταφέρουν την προηγούμενη κατανόηση στο πλαίσιο των αριθμών, πρώτα την όψη της πυκνότητας που αφορά το άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών και τέλος την όψη που αφορά την μη ύπαρξη επόμενου. Παράλληλα αποφύγαμε να επιβαρύνουμε τους μαθητές με ήσσονος σημασίας κατασκευές και αλγοριθμικές διαδικασίες, παρείχαμε έτοιμη κάθε κατασκευή και αφήσαμε στους μαθητές μόνο την επεξεργασία και καταγραφή των νέων ιδεών . Αποφύγαμε να σημειώνουμε με κουκίδες τα σημεία που αντιστοιχούσαν σε αριθμούς αλλά υποδεικνύαμε τη θέση τους στην 'ελαστική' αριθμογραμμή με βέλη ώστε να διατηρήσουν οι μαθητές την εικόνα της αναλλοίωτη και όχι να επιβεβαιώσουμε την άτυπη γνώση τους που έχει προκύψει από τη συνήθη σχολική πρακτική από τα χρόνια του δημοτικού ότι η γραμμή είναι ένα σύνολο διακριτών σημείων, όπως επιτάσσει η ρητή αρχή του εφαρμοζόμενου πλαισίου. Επίσης έχοντας διαπιστώσει με τον προ-έλεγχο το σημαντικό παράγοντα της διακριτότητας που επιδρά στις αντιλήψεις των μαθητών για τον πλήθος των σημείων ενός τμήματος που το θεωρούν ανάλογο του μήκους τους, επιλέξαμε να αποπειραθούμε να αναδιοργανώσουμε τις συγκεκριμένες εμφωλευμένες αντιλήψεις τους αναδεικνύοντας με τη βοήθεια της 'ένα προς ένα' αντιστοίχισης σε γεωμετρικό πλαίσιο (Εικόνα 4) την ισοδυναμία των άπειρων σημείων μεταξύ δύο διαφορετικού μήκους τμημάτων της ευθείας, γνωρίζοντας από την εργασία των Tsamir & Tirosh (2007) την διδακτική αποτελεσματικότητα της. Χρησιμοποιήσαμε για αυτό τον σκοπό τη γέφυρα-αναλογία της 'ελαστικής' αριθμογραμμής που λειτουργώντας ως εξωτερικό αναπαραστασιακό εργαλείο (σύμφωνα με την 5^{η} αρχή) για την κατανόηση της πυκνής διάταξης των σημείων/αριθμών και ιδιαίτερα στη όψη του 'μη επόμενου', αποδείχθηκε εξαιρετικά αποδοτικό στην παρέμβαση των Vamvakoussi & Vosniadou (2012). Για να διευκολύνουμε την μετα-εννοιολογική ενημερότητα των μαθητών (4^{η} αρχή) τους οργανώσαμε σε μικρές ομάδες φροντίζοντας κάθε ομάδα να έχει τουλάχιστον ένα από τους μαθητές που στον προ-έλεγχο επέδειξαν σχετική κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας απαντώντας με επιτυχία τουλάχιστον στα ερωτήματα που ανίχνευαν τις γνώσεις τους για την όψη της πυκνότητας των άπειρων ενδιάμεσων σημείων/αριθμών και ταυτόχρονα είχαν καλή αλληλεπίδραση με τους περισσότερους συμμαθητές της ομάδας τους (σύμφωνα με τον καθηγητή της τάξης) . Έχοντας σαν βασικό βήμα σε κάθε δραστηριότητα να αφήνουμε για λίγα λεπτά τα μέλη κάθε ομάδας να συνδιαλέγονται εκφράζοντας τις απόψεις τους και εκθέτοντας τις, να γίνουν αντικείμενο κριτικής, διαπραγμάτευσης και αξιολόγησης από τους συμμαθητές τους, θέλαμε να βοηθήσουμε την επεξεργασία των νέων ιδεών για την πυκνότητα και να μειώσουμε τις εσωτερικές αντιφάσεις τους στην προσπάθεια τους να αναδιοργανώσουν τις γνώσεις τους.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε ήταν η εξής: αφού πρώτα εξηγήσαμε στους μαθητές το στόχο της παρέμβασης μας, καθώς και τις δυσκολίες κατανόησης που εμπεριέχει η έννοια της πυκνότητας των ρητών για μαθητές όλων των βαθμίδων, ακόμα και φοιτητές και πριν τους μοιράσαμε τα φύλλα εργασίας τους ενημερώσαμε ότι θα συμπληρώνουν κάθε δραστηριότητα εφόσον έχει συμφωνήσει η ολομέλεια της τάξης στο τι θα γράψουμε (το οποίο καταγράφαμε ταυτόχρονα στον πίνακα). Κατόπιν τους παρωθήσαμε να θυμηθούν τα σύνολα των αριθμών που είχαν μάθει δηλαδή τους φυσικούς, ακέραιους και τους ρητούς (σε κλασματική ή δεκαδική μορφή) και πραγματικούς τοποθετώντας σχετικά αριθμητικά παραδείγματα (ρητών) πάνω στην αριθμητική ευθεία. Σε ερώτηση μας πόσοι αριθμοί υπάρχουν πάνω στην ευθεία των αριθμών απάντησαν σχεδόν αυτόματα ‘άπειρα’. Συνεχίσαμε να ανιχνεύουμε τις ιδέες των μαθητών τοποθετώντας στην αριθμογραμμή του πίνακα μας τους αριθμούς ένα και δύο ζητώντας να μας πουν πόσοι αριθμοί νομίζουν ότι υπάρχουν στο διάστημα αυτό. Μερικοί μαθητές απάντησαν ότι ‘υπάρχουν αρκετοί αριθμοί αλλά κάπου τελειώνουν’ χωρίς να υπάρχει αντίκρουση αυτής της άποψης από την τάξη. Αποφύγαμε να ανασκευάσουμε και προχωρήσαμε στην εισαγωγή της παρέμβασης.

Ξεκινήσαμε την παρέμβαση μας λέγοντας στους μαθητές τα εξής:

«Η Μαθηματική ευθεία των αριθμών είναι ένα αντικείμενο με ιδιαίτερες ιδιότητες. Μπορούμε να την φανταστούμε σαν μια λεπτή λαστιχένια ζώνη που ποτέ δεν σπα ανεξάρτητα από το πόσο θα την τεντώσουμε». Κατόπιν σχεδιάσαμε στον πίνακα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ αναφέροντας τα εξής : « Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πάνω σε μια ‘ελαστική’ ευθεία. Αν τεντώσουμε το ελαστικό τμήμα ΑΒ, τότε παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ που έχει μεγαλύτερο μήκος.», σχεδιάζοντας κάτω και παράλληλα με το ΑΒ ένα μεγαλύτερο σε μήκος τμήμα ΓΔ. Ζητήσαμε από τους μαθητές να μας πουν πόσα σημεία νομίζουν ότι υπάρχουν σε κάθε τμήμα και αν κάποιο έχει περισσότερα ή λιγότερα σημεία. Ακολούθησε διαπραγμάτευση των απόψεων των μαθητών, οι οποίοι αν και τελικά διατύπωναν την απάντηση ότι τόσο το τμήμα ΑΒ όσο και το ΓΔ έχουν άπειρα σημεία, είχαν δυσκολία στο να αντιληφθούν ότι ουσιαστικά έχουν το ίδιο άπειρο πλήθος σημείων (ορισμένοι μάλιστα ανασκεύασαν τη άποψη τους για την απειρία των σημείων του μικρότερου ΑΒ).

Με δεδομένο ότι η μελέτη των απαντήσεων των μαθητών στον προ-έλεγχο κατέδειξε την αδυναμία τους να αντιληφθούν την απειρία των σημείων σε ένα τμήμα της ευθείας ανεξάρτητα από το μήκος του και κατ' επέκταση την απειρία των αριθμών σε ένα τμήμα της αριθμογραμμής (η οποία επιβεβαιώθηκε και από τις απαντήσεις τους στην εισαγωγή της παρέμβασης) και προκειμένου οι μαθητές να αναδιοργανώσουν τις γνώσεις τους ,είχαμε σχεδιάσει την 1η δραστηριότητα (εικόνα 4) αντιμετωπίζοντας και κατευθύνοντας τις εμφωλευμένες αντιλήψεις τους για το πλήθος των σημείων και το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων. Στοχεύσαμε να αλλάξουν εννοιολογικά τη σύνδεση του πλήθους των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα με το μήκος του και να αντιληφθούν ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ανεξάρτητα του μήκους τους έχουν το ίδιο άπειρο πλήθος σημείων. Την συγκεκριμένη δραστηριότητα πριν δώσουμε τα φύλλα εργασίας και την μελετήσουν μόνοι τους οι μαθητές, την παρουσιάσαμε στον πίνακα και συζητώντας μαζί τους καταλήξαμε στα συμπεράσματα που στη συνέχεια τους ζητήθηκε αφού τη διαβάσουν να τα συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας που τους δώσαμε. Αναμέναμε να διαπιστώσουν ότι υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία των 2 τμημάτων, δηλαδή ότι σε κάθε σημείο του ΑΒ αντιστοιχεί ένα του ΓΔ και αντίστροφα διατυπώνοντας ότι 'σε κάθε σημείο του ΑΒ αντιστοιχεί ένα του ΓΔ και αντίστροφα'.

Κατόπιν σχεδιάζοντας στον πίνακα το σχήμα της 1ης δραστηριότητας (εικόνα 4). Φέραμε τις ΓΑ και ΔΒ που τέμνονταν στο Ο και πήραμε ένα σημείο χ΄ πάνω στο τμήμα ΓΔ και ενώνοντας το με το Ο το Οχ΄ έτμησε το ΑΒ στο σημείο που ονομάσαμε χ. Στη συνέχεια πήραμε ένα σημείο ψ πάνω στο τμήμα ΑΒ και προεκτείνοντας την Οψ τμήσαμε το ΓΔ στο ψ΄. Ζητήσαμε από τους μαθητές να μας πουν αν παρατηρούν κάποια σχέση όσο αφορά τα σημεία των δύο τμημάτων, οι οποίοι αφού έγινε η σχετική διαπραγμάτευση στην τάξη κατέληξαν στο συμπέρασμα που γράψαμε στον πίνακα ότι 'σε κάθε σημείο του ΑΒ αντιστοιχεί ένα του ΓΔ και αντίστροφα'.

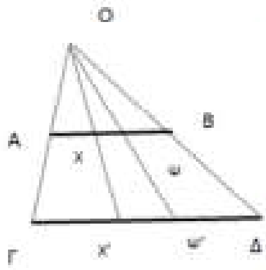
Συνεχίσαμε κατόπιν απευθυνόμενοι στην τάξη με την ακόλουθη ερώτηση:

«Τι σημαίνει αυτό για το πλήθος των σημείων στα 2 τμήματα;»

Αναμέναμε την απάντηση ότι τα 2 ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο άπειρο πλήθος σημείων, ανεξάρτητα του μήκους τους πράγμα εύλογο όπως φάνηκε από τις απαντήσεις τους . Τέλος γενικεύσαμε συμφωνώντας με τους μαθητές ότι ' όλα τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο άπειρο πλήθος σημείων ανεξάρτητα μήκους'.

Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πάνω σε μια 'ελαστική' ευθεία.

Αν τεντώσουμε το ελαστικό τμήμα ΑΒ, τότε παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ που έχει μεγαλύτερο μήκος.



Ας δοκιμάσουμε το εξής: φέρνουμε τις ημιευθείες ΓΑ και ΔΒ και ονομάζουμε Ο το σημείο τομής τους. Κατόπιν παίρνουμε ένα σημείο χ στο ΑΒ και αφού φέρουμε την Οχ την προεκτείνουμε μέχρι αυτή να τμήσει το ΓΔ στο χ΄.

Κατόπιν, παίρνουμε ένα σημείο ψ΄ στο ΓΔ και ενώνουμε το Ο με το ψ΄. Ονομάζουμε ψ το σημείο που η Οψ τέμνει το ΑΒ.

Παρατηρείτε κάποια σχέση ανάμεσα στα σημεία των 2 τμημάτων;

....

Τι σημαίνει αυτό για το πλήθος των σημείων στα 2 τμήματα;

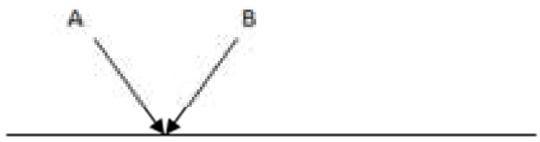
....

Συμπέρασμα...

Εικόνα 4: Φύλλο εργασίας.1η Δραστηριότητα

Στη συνέχεια για να ενδυναμωθεί η αναδιοργάνωση των γνώσεων τους σχετικά με την απειρία των σημείων σε ένα τμήμα της ευθείας ανεξάρτητα του μήκους του, ζητήσαμε από τους μαθητές να διαβάσουν προσεκτικά την $2^{η}$ δραστηριότητα (Εικόνα 5) και να την συζητήσουν με την ομάδα τους. Παράλληλα, παρακολουθούσαμε τους διαλόγους και τους προτρέπαμε να λάβουν υπόψη στα συμπεράσματα τους την ιδιότητα της 'ελαστικής' αριθμογραμμής να επεκτείνεται απεριόριστα χωρίς να αλλάζει η υφή της. Στο τέλος ζητώντας τις απόψεις κάθε ομάδας φάνηκε ότι όλες συμφωνούσαν στη σωστή απάντηση Γ.

Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω τμήματος της 'ελαστικής' αριθμογραμμής πόσα σημεία νομίζετε ότι υπάρχουν; (Λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα της 'ελαστικής' αριθμογραμμής να επεκτείνεται αναλογικά χωρίς να αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά της)



Α) δεν υπάρχει σημείο

Β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων

Γ) υπάρχουν άπειρα σημεία

Εικόνα 5: Φύλλο εργασίας.2η Δραστηριότητα

Συνεχίσαμε με τις υπόλοιπες 3 δραστηριότητες του φύλλου εργασίας, φροντίζοντας να τηρούμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή να αφήνουμε κάθε ομάδα να συνδιαλέγεται και τα μέλη της να αλληλεπιδρούν και στη συνέχεια να ανακοινώνονται τα αποτελέσματα στην ολομέλεια της τάξης όπου και επακολουθούσε συζήτηση και επίλυση τυχόν διαφωνιών. Στη συνέχεια οι μαθητές έγραφαν την σωστή απάντηση και την αιτιολόγηση στο φύλλο εργασίας τους.

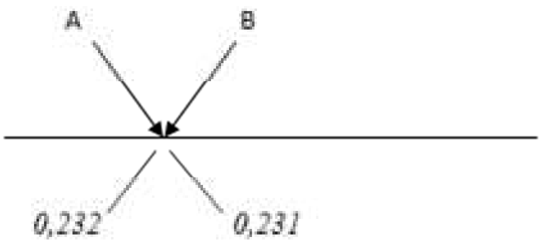
Οι δραστηριότητες 3 (εικόνα 6) και 4 (εικόνα 7) στόχευσαν ευθέως στην κατανόηση της όψης της πυκνότητας των άπειρων ενδιάμεσων ρητών χρησιμοποιώντας την γέφυρα-αναλογία της 'ελαστικής' αριθμογραμμής για την κατανόηση της πυκνής διάταξης των σημείων ενός τμήματος και 'πατώντας' στην αντιστοιχία σημείων με αριθμούς, επικεντρώνονταν στο άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών. Προσπαθήσαμε να παρωθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν ότι όπως ανάμεσα σε δύο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας υπάρχουν άπειρα σημεία και με δεδομένο ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο έναν αριθμό, ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς μεσολαβούν άπειροι. Συγκεκριμένα δίνονταν στους μαθητές δύο δεκαδικοί (Εικόνα 6) ή αντίστοιχα δύο κλασματικοί αριθμοί (Εικόνα 7), οι οποίοι αντιστοιχούσαν στα σημεία Α και Β και τους ζητούσαμε να μας πουν το πλήθος των αριθμών ανάμεσα τους, αιτιολογώντας την απάντηση τους. Η αναμενόμενη σωστή απάντηση ήταν 'υπάρχουν άπειροι αριθμοί γιατί ανάμεσα σε δύο διαφορετικά σημεία ενός τμήματος υπάρχουν άπειρα σημεία'.

Αν τα σημεία Α και Β του παρακάτω τμήματος της αριθμογραμμής αντιστοιχούν στους αριθμούς 0,231 και 0,232 εξετάστε με την ομάδα σας αν ανάμεσα στους 0,231 και 0,232 βρίσκονται:

α) κανένας αριθμός

β) πεπερασμένο το πλήθος αριθμών

γ) άπειροι αριθμοί



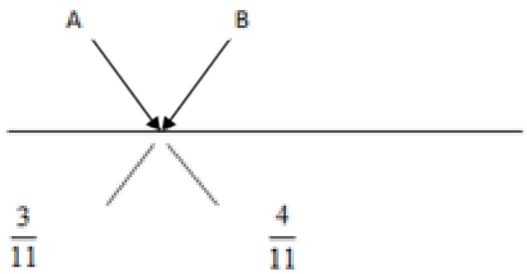
Εικόνα 6: Φύλλο εργασίας.3η Δραστηριότητα

Αν τα σημεία Α και Β του παρακάτω τμήματος της 'ελαστικής' αριθμογραμμής αντιστοιχούν στους αριθμούς $\frac{3}{11}$ και $\frac{4}{11}$ εξετάστε με την ομάδα σας αν ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{11}$ και $\frac{4}{11}$ βρίσκονται:

α) κανένας αριθμός

β) πεπερασμένο το πλήθος αριθμών

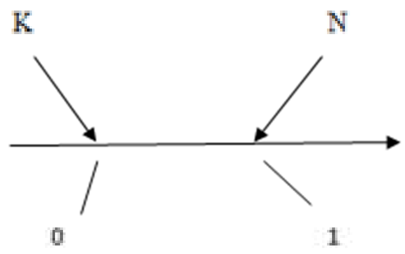
γ) άπειροι αριθμοί



Εικόνα 7: Φύλλο εργασίας.4η Δραστηριότητα

Η τελευταία δραστηριότητα (Εικόνα 8) στόχευε στο να αντιληφθούν οι μαθητές μέσω της απειρίας των σημείων της 'ελαστικής' αριθμογραμμής την μη ύπαρξη επόμενου αριθμού . Γι' αυτό υποδεικνύαμε πάνω στην προσανατολισμένη αριθμογραμμή δύο σημεία, τα Κ, Ν τα οποία αντιστοιχούσαν στους αριθμούς 0 και 1 και ζητήσαμε από τους μαθητές να εξετάσουν αν μπορούν να προσδιορίσουν τον επόμενο του μηδενός ή τον προηγούμενο του ένα. Παρωθήσαμε τις ομάδες που δυσκολεύονται να συμπεράνουν ορθά, ότι λόγω της απειρίας των αριθμών δεν υπάρχει ο αμέσως επόμενος (αντίστοιχα ο αμέσως προηγούμενος), να θεωρήσουν ότι υπάρχει ο επόμενος του μηδενός (αντίστοιχα ο αμέσως προηγούμενος του ένα) και να ονομάσουν το αντίστοιχο σημείο Λ (αντίστοιχα Μ) και να αναρωτηθούν αν υπάρχει (ουν) σημεία της 'ελαστικής' αριθμογραμμής ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ (αντ. ανάμεσα στα Μ και Ν) και να καταγράψουν τα συμπεράσματα τους αιτιολογημένα μετά τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης.

Μία μεταβλητή χ παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 0 και μικρότερες του 1 (δηλαδή 0<χ<1). Λαμβάνοντας υπόψη ότι η 'ελαστική' αριθμογραμμή τεντώνεται και επεκτείνεται όσο θέλουμε από οποιαδήποτε σημεία της, να εξετάσετε με την ομάδα σας αν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον ***αμέσως επόμενο*** *αριθμό του 0 και τον* ***αμέσως προηγούμενο*** *του 1.*



Συμπληρώστε την απάντηση σας μετά την συζήτηση της ομάδας σας και την συμφωνία με την ολομέλεια της τάξης αιτιολογώντας:

....

Εικόνα 8: Φύλλο εργασίας.5η Δραστηριότητα

Συγκρίνοντας την παρέμβαση μας με την αντίστοιχη παρέμβαση των Vamvakoussi & Vosniadou (2012), παρατηρούμε τα εξής: οι δύο παρεμβάσεις βασίστηκαν στην σαφή αντιστοιχία σημείων ενός τμήματος και αριθμών χρησιμοποιώντας τη γέφυρα –αναλογία της 'ελαστικής' αριθμογραμμής ώστε να αναδιοργανώσουν τις ιδέες των μαθητών για την πυκνή διάταξη πρώτα σε γεωμετρικό πλαίσιο και κατόπιν να μεταφέρουν αυτή τη γνώση σε αριθμητικό πλαίσιο. Όμως η δικιά μας παρέμβαση για την αντιμετώπιση των δυσκολιών της κατανόησης της πυκνότητας δεν βασίστηκε μόνο σε κείμενο που παρείχε τις σχετικές πληροφορίες για την 'ελαστική' αριθμογραμμή και ανασκεύαζε τις αναμενόμενες λαθεμένες πεποιθήσεις των μαθητών και από το οποίο αντλούσαν πληροφορίες οι μαθητές για να απαντήσουν στο μετά-έλεγχο, αλλά βασίστηκε και στην αλληλεπίδραση με τον εισηγητή και με τους συμμαθητές τους μέσα από μια σειρά σχετικών δραστηριοτήτων. Επίσης δώσαμε ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια της απειρίας των σημείων ενός τμήματος ανεξάρτητα μήκους και προσπαθήσαμε να την αποδείξουμε με μια κατασκευή ώστε να την ισχυροποιήσουμε σαν ιδέα στο μυαλό των μαθητών. Ο συνολικός χρόνος που διατέθηκε για την αναδιοργάνωση των γνώσεων των μαθητών στην παρέμβαση μας ήταν πολύ περισσότερος από την παρέμβαση των δύο ερευνητριών.

Ένα άλλο ζήτημα που θέλουμε να θίξουμε είναι η αλληλεπίδραση των μαθητών. Από τις παρατηρήσεις μας στην τάξη και τις σχετικές καταγραφές υπάρχουν στοιχεία που τεκμηριώνουν πως οι περισσότεροι ‘καλοί’ μαθητές με κατανόηση της πυκνότητας των ρητών λειτούργησαν σαν ‘καθοδηγητές’ στις συζητήσεις που έκαναν οι ομάδες. Ήταν εύκολο για τους μαθητές που είχαν δυσκολία να αποδεχθούν την απειρία των αριθμών σε ένα διάστημα να εκφράσουν τις διαφωνίες και τις δυσκολίες τους και αντίστοιχα οι ‘καθοδηγητές’ να τους εξηγούν επικαλούμενοι την απειρία των ενδιάμεσων σημείων είτε αν αυτό δεν ήταν καταλυτικό στο να αντιληφθούν, να παρέχουν συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα, ή μεθόδους εύρεσης ενδιάμεσων αριθμών (π.χ. μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με μεγαλύτερους όρους οπότε προκύπτουν ενδιάμεσοι αριθμοί, οι οποίοι επαναλαμβάνοντας την διαδικασία γίνονται άπειροι το πλήθος). Βέβαια σε κάθε ομάδα η συμμετοχή όλων των μελών δεν ήταν η ίδια και συνήθως κάποιοι αρκούνταν απλά να συμφωνούν ή μόνο να παρακολουθούν τα τεκταινόμενα. Επίσης κάθε ομάδα είχε τον δικό της ρυθμό επεξεργασίας των δραστηριοτήτων με αποτέλεσμα σε κάποιες ομάδες, που τα συμμετέχοντα μέλη κατανοούσαν και συμφωνούσαν σύντομα παρατηρώντας μια επαναληπτικότητα στις απαντήσεις των δραστηριοτήτων, να βαριούνται και να αστεΐζονται μεταξύ τους επιβαρύνοντας ηχητικά την αίθουσα και δυσκολεύοντας την συγκέντρωση και με ρυθμό ενασχόληση των υπόλοιπων μαθητών. Ο υποφαινόμενος μαζί με τον καθηγητή της τάξης και μία συνάδερφο παρείχαμε εξηγήσεις και διευκρινήσεις κατά την διάρκεια των διαβουλεύσεων των ομάδων όπως επίσης τους υπενθυμίζαμε την ιδιότητα της ‘ελαστικής’ αριθμογραμμής να μη σπα όσο και αν τεντωθεί.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μας για κάθε έλεγχο ξεχωριστά.

3.1 Μεμονωμένη ανάλυση απαντήσεων προ-ελέγχου

Μελετώντας τα αποτελέσματα του προ-ελέγχου, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1, ο αριθμός και το ποσοστό των σωστών απαντήσεων δηλαδή των απαντήσεων 'Άπειρο' στις κατηγορίες 'Αριθμοί', 'Αριθμογραμμή' και 'μη επόμενος' ήταν αναμενόμενο σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010,2012).

	ΑΡΙΘΜΟΙ	ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ	ΣΗΜΕΙΑ	ΜΗ ΕΠΟΜΕΝΟΣ
Αριθμός	40	36	32	21
Ποσοστό %	53,33	48	42,66	28

Πίνακας 1: αριθμός και ποσοστό σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία
. ερωτημάτων του προ-ελέγχου

Αντίθετα στην κατηγορία Σημεία ενώ αναμέναμε καλύτερες επιδόσεις, σε σχέση με τις δύο προηγούμενες, είχαμε χειρότερες. Παρατηρώντας τις επιμέρους επιδόσεις στα ερωτήματα της κατηγορίας Σημεία, διαπιστώσαμε ότι στα δύο πρώτα ερωτήματα ο αριθμός των σωστών απαντήσεων ήταν ο αναμενόμενος, ενώ στο τρίτο ερώτημα ήταν ιδιαίτερα χαμηλός όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2. Ήταν φανερή η 'ευαισθησία' των μαθητών στο να συνδέουν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με το πλήθος των σημείων του. Αυτή ή εμφανής αδυναμία των μαθητών να έχουν τη σωστή αντίληψη της απειρίας των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, άρα και σε ένα τμήμα της αριθμογραμμής και αναλογικά την αντίληψη της απειρίας των αριθμών ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ρητούς, μας κατεύθυνε στο να δώσουμε έμφαση στην παρέμβαση μας στο να αναδιοργανώσουν οι μαθητές τις γνώσεις τους γύρω από το συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα μέσω της αναλογίας-γέφυρας της ιδεατής 'ελαστικής' αριθμογραμμής να κατανοήσουν την πυκνότητα των αριθμών με τη μεταφορά της πυκνής διάταξης των σημείων ενός τμήματος.

	Ερώτημα 7	Ερώτημα 8	Ερώτημα 9
Αριθμός	12	14	6
Ποσοστό %	48	56	24

Πίνακας 2: αριθμός και ποσοστό σωστών απαντήσεων των ερωτημάτων της κατηγορίας Σημεία (ερωτήματα:7,8,9) στον προ-έλεγχο.

Τέλος στην 13^{η} ερώτηση που αφορούσε το ‘νοητικό’ πείραμα, επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα του προ-ελέγχου, η τάση που παρατηρήθηκε και στη σχετική έρευνα των Vamvakoussi & Vosniadou (2012), δηλαδή η τάση των μαθητών να επιλέγουν κατά πλειονότητα την εικόνα του τμήματος ως ‘μονοπάτι κουκίδων’ (δέκα συνολικά μαθητές δηλαδή 40% εκ των οποίων επτά την επιλογή Γ και τρείς μαθητές την επιλογή Δ που το προηγούμενο ‘μονοπάτι κουκίδων’ διατρέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα) ή σαν φυσικό αντικείμενο (επτά μαθητές δηλαδή 28%) που αυξάνουν οι διαστάσεις του (μήκος και πλάτος). Αντίστοιχα έξη μαθητές (24%) επέλεξαν τη σωστή απάντηση Β ενώ ένας μαθητής (4%) επέλεξε Α ή Β. Επικεντρώνοντας στους μαθητές που με σχετική συνέπεια (δηλαδή τουλάχιστον δύο στις τρείς) ανήκαν οι απαντήσεις τους στην κατηγορία ‘Άπειρα’, παρατηρήσαμε ότι έξη περιέγραψαν το τμήμα σαν ένα φυσικό αντικείμενο που μεγαλώνουν οι διαστάσεις του όταν μεγεθύνουμε (δηλαδή την επιλογή Α της εικόνας 2), τέσσερεις το περιέγραψαν σαν μια ευθεία που δεν αλλάζουν οι διαστάσεις της (επιλογή Β από Εικόνα 2) ενώ ένας επίλεξε δύο από τις δοθείσες επιλογές τις Α ή Β (εικόνα 2) δηλαδή το περιέγραψε σαν ‘φυσικό αντικείμενο που αυξάνουν οι διαστάσεις του ή εναλλακτικά ότι παραμένει αμετάβλητη όσο και να μεγεθύνουμε.

3.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων στα κοινά ερωτήματα μετά-έλεγχου και έλεγχου συγκράτησης και σύγκριση με αποτελέσματα προ-έλεγχου

Σε κάθε μια από τις πρώτες 9 κοινές ερωτήσεις των τριών ελέγχων βαθμολογήσαμε με ένα κάθε λανθασμένη επιλογή:

α) *δεν υπάρχει κανένας αριθμός/σημείο ή*

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών/σημείων

ενώ κάθε σωστή απάντηση:

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί/σημεία,

βαθμολογήθηκε με δύο.

Τις επιλογές (α) ή (β) τις κατηγοριοποιήσαμε σαν απαντήσεις «Πεπερασμένο» και τις απαντήσεις (γ) ως «Άπειρο».

Στα ερωτήματα 10, 11 και 12 που ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν δηλώσεις που αφορούσαν την ύπαρξη επόμενου, βαθμολογήσαμε με 1 κάθε λανθασμένη απάντηση, δηλαδή κάθε απάντηση που συμφωνούσε ότι υπάρχει επόμενος αριθμός είτε άμεσα (πχ. είναι ο αριθμός 0,0001) ή έμμεσα υποστηρίζοντας ότι είναι δύσκολο να τον προσδιορίσουμε (π.χ. ‘Επειδή στον 0,00..001 μεσολαβούν άπειρα μηδενικά είναι δύσκολο να τον προσδιορίσουμε’ ή ‘εξαρτάται από το βαθμό της ακρίβειας που θέλουμε για να τον προσδιορίσουμε’).

Με 2 βαθμολογήσαμε απαντήσεις που προέκυπταν από πιο εξελιγμένα συνθετικά μοντέλα που έχουν κατασκευάσει οι μαθητές στη προσπάθεια τους να κατανοήσουν την πυκνότητα των ρητών και πιο συγκεκριμένα τις σωστές απαντήσεις στα ερωτήματα 10, 11 και 12 χωρίς σωστή δικαιολόγηση, τέτοια που να αποκλείει την ύπαρξη επόμενου. Ως μη σωστές, θεωρήσαμε τις αιτιολογήσεις που δεν ανέφεραν ρητά την απειρία αριθμών ή σημείων και κατέφυγαν σε αντιπαραδείγματα (πχ. μεταξύ των 2,37 και 2,38 υπάρχουν και άλλοι αριθμοί όπως οι 2,371, 2,372 κλπ). Τέλος με 3 βαθμολογήθηκαν οι σωστές επιλογές με σωστά αιτιολογημένες απαντήσεις δηλαδή με αιτιολογήσεις που ρητά ανέφεραν: ‘διότι τα σημεία/αριθμοί είναι άπειρα/οι’ ή επικαλούνταν την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών (π.χ.

‘ανάμεσα στο $\frac{5}{9}$ και το $\frac{6}{9}$ υπάρχουν άπειροι αριθμοί, οπότε θα μπορούμε πάντα/συνεχώς να βρίσκουμε έναν αριθμό κοντύτερα στο $\frac{5}{9}$’).

Με δεδομένο το μικρό δείγμα των 25 μαθητών που συμμετείχαν και στους 3 ελέγχους, υποβάλαμε τα δεδομένα μας σε έλεγχο με το μη παραμετρικό κριτήριο Wilcoxon ώστε να διερευνήσουμε διαφορές στην επίδοση των μαθητών μεταξύ των ελέγχων. Το κριτήριο έδειξε σημαντική βελτίωση των μαθητών αμέσως μετά την παρέμβαση (Z=-4,190, p=0,000). Αντίστοιχα είχαμε μία μείωση της επίδρασης της παρέμβασης μεταξύ μετά-έλεγχου και έλεγχου διατήρησης (Z=-2,169, p=0,030). Παρόλα αυτά εφαρμόζοντας το ίδιο τεστ μεταξύ προ-ελέγχου και ελέγχου διατήρησης καταδεικνύεται η διατήρηση της θετικής επίδρασης της παρέμβασης (Z=-3,777, p=0,000) 3 εβδομάδες αργότερα.

Η βελτίωση που επιτεύχθηκε σε όλα τα κοινά 12 πρώτα ερωτήματα είναι εμφανής αν εξετάσουμε συγκριτικά τον αριθμό των σωστών απαντήσεων ανά ερώτημα ή ανά κατηγορία ερωτημάτων αντίστοιχα (Αριθμοί, Αριθμογραμμή, Σημεία, Μη επόμενος) των 3 ελέγχων (Πίνακας 3). Σημειωτέο ότι στα 3 ερωτήματα της κατηγορίας ‘Μη επόμενος’ ως σωστή καταγράψαμε μόνο την ορθή επιλογή απάντησης που συνοδεύονταν με αιτιολόγηση βασισμένη στην αρχή της απειρίας των σημείων ή αριθμών. Επίσης σημαντικό είναι ότι στα έργα της ίδιας κατηγορίας είχαμε υπερτριπλασιασμό των σωστών απαντήσεων μεταξύ προ-ελέγχου και μετά-ελέγχου (από 17 σε 56). Επιπλέον στην ίδια κατηγορία, ο αριθμός των σωστών απαντήσεων μεταξύ μετά-ελέγχου και ελέγχου-συγκράτησης παρέμεινε σχεδόν ο ίδιος (από 39 σε 38). Αξιοσημείωτο και μη αναμενόμενο σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες είναι ότι και στους δύο έλεγχους ο αριθμός των σωστών απαντήσεων είτε η ερώτηση αφορούσε δεκαδικό είτε κλασματικό ρητό ήταν ίδιος.

Αντίθετα είχαμε μια σημαντική μείωση (από 17 σε 12) των σωστών απαντήσεων στο $10^{ο}$ κοινό ερώτημα που ζητούσε από τους μαθητές αν μπορούν να προσδιορίσουν ποια είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει η μεταβλητή x στο διάστημα (0,1). Ίσως η διατύπωση της ερώτησης είναι λίγο ‘παραπλανητική’ γιατί προδιαθέτει τους μαθητές για την ύπαρξη επόμενου το οποίο είχε σαν αποτέλεσμα να αναδειχθεί το συνθετικό μοντέλο στο οποίο συνυπάρχει η αδυναμία τους με λογική επεξεργασία να προσδιορίσουν τον επόμενο με την διαισθητική αντίληψη ότι υπάρχει. Είναι εμφανές το φαινόμενο που παρατηρήθηκε και σε άλλες μελέτες οι απαντήσεις των μαθητών να επηρεάζονται από τα άκρα του διαστήματος όσο αφορά την μη ύπαρξη επόμενου. Προφανώς αμέσως μετά την παρέμβαση είχαμε σημαντική αύξηση του αριθμού των σωστών απαντήσεων (από 6 σε 17), όμως 3 εβδομάδες αργότερα μειώθηκε η επίδραση της. Τα συγκριτικά αποτελέσματα των μετά-ελέγχου και ελέγχου-συγκράτησης επιβεβαιώνουν ότι η αναδιοργάνωση των γνώσεων των μαθηματικών σε ένα πεδίο με τελικό στόχο μια αντικειμενικά δύσκολη μαθηματική έννοια όπως είναι η πυκνότητα των ρητών ώστε να επιτευχθεί η επιζητούμενη εννοιολογική αλλαγή, είναι μια διαδικασία που βασίζεται πέρα από τις κατάλληλες παρεμβάσεις και αντίστοιχα εργαλεία, στο κατάλληλο χρόνο που θα διατεθεί καθότι είναι μια χρονοβόρα διαδικασία με ενδιάμεσα στάδια που εξελίσσεται μη γραμμικά.

	ΑΡΙΘΜΟΙ			**ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ**			**ΣΗΜΕΙΑ**			**ΜΗ ΕΠΟΜΕΝΟΣ**		
ΠΡΟ-ΕΛΕΓΧΟΣ	12	10	18	9	13	15	12	13	6	6	5	5
Σύνολο	***40***			***37***			***31***			***16***		
ΜΕΤΑ-ΕΛΕΓΧΟΣ	24	23	23	24	23	24	25	24	25	17	19	20
Σύνολο	***70***			***71***			***74***			***56***		
ΕΛΕΓΧΟΣ-ΣΥΓΚΡΑΤΗΣΗΣ	21	21	22	24	21	22	21	24	20	12	19	19
Σύνολο	***64***			***67***			***65***			***50***		

Πίνακας 3:αριθμός σωστών απαντήσεων κοινών ερωτημάτων και σύνολο σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία και ανά έλεγχο.

3.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων ‘νοητικού’ πειράματος

Αντίστοιχα για το ‘νοητικό’ πείραμα του $13^{ου}$ κοινού ερωτήματος, το οποίο εξέταζε την έννοια της πυκνότητας (μη ύπαρξη επόμενου αριθμού) στο γεωμετρικό πλαίσιο των σημείων, μετά την παρέμβαση παρατηρούμε μια σημαντική αύξηση (διπλασιασμό) των ορθών απαντήσεων, δηλαδή την επιλογή Β που το τμήμα παραμένει αναλλοίωτο, ενώ ταυτόχρονα υποτριπλασιάζεται (3 συνολικά) ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν Γ ή Δ δηλαδή το τμήμα σαν ‘μονοπάτι κουκίδων’ (επιλογή Γ) ή σαν ‘μονοπάτι κουκίδων’ που διαπερνάται από μια ευθεία (επιλογή Δ)(βλ. Πίνακα 4). Αξιοσημείωτο είναι το ότι από τον μετά-έλεγχο στον έλεγχο συγκράτησης, είχαμε μια αύξηση των σωστών απαντήσεων Β κατά δύο και των εναλλακτικών απαντήσεων Α ή Β κατά μια με αντίστοιχη μείωση του αριθμού των απαντήσεων Α που απεικόνιζαν το ευθύγραμμο τμήμα σαν φυσικό δυσδιάστατο αντικείμενο. Με δεδομένο ότι ο συνολικός αριθμός των επιλογών Γ ή Δ παρέμεινε σταθερός μεταξύ μετά-ελέγχου και ελέγχου συγκράτησης παρατηρούμε μια εξέλιξη του συνθετικού μοντέλου της αριθμογραμμής από φυσικό αντικείμενο προς την ‘ιδεατή’ αριθμογραμμή που παραμένει αναλλοίωτη όσο και αν την μεγεθύνουμε .

Επιλογή	**Α**	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Α ή Β**	**Γ ή Δ**
ΠΡΟ-ΕΛΕΓΧΟΣ	7	6	7	3	1	1
ΜΕΤΑ-ΕΛΕΓΧΟΣ	6	12	3	0	2	2
ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΓΚΡΑΤΗΣΗΣ	3	14	3	0	3	2

Πίνακας 4: αριθμός μαθητών ανά αντίστοιχη επιλογή και ανά έλεγχο στο νοητικό πείραμα.

3.3 Ανάλυση αποτελεσμάτων επιπλέον ερωτημάτων Μετά-έλεγχου και έλεγχου συγκράτησης

Στα 4 επιπλέον (σε σχέση με τον προ-έλεγχο) ερωτήματα των μετά- ελέγχου και ελέγχου-συγκράτησης που στόχευαν να διερευνήσουν τις αντιλήψεις των μαθητών για την πυκνότητα τόσο σε αριθμητικό όσο και γεωμετρικό πλαίσιο με δραστηριότητες που δεν είχαν επεξεργαστεί οι μαθητές στον προ-έλεγχο αλλά ούτε στην παρέμβαση, είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Στην 1^{η} επιπρόσθετη δραστηριότητα ο αριθμός των σωστών επιλογών ‘Όχι’ που συνοδεύονταν από τη σωστή αιτιολόγηση ‘διότι έχουμε άπειρους αριθμούς/σημεία αμέσως μετά το 2 ’ ήταν 10 (40%) και για τους δύο ελέγχους.

Αντίστοιχα στη 2^{η} επιπρόσθετη δραστηριότητα ο αριθμός σωστών απαντήσεων ήταν ο ίδιος σε μετά-έλεγχο 19 (76%) και έλεγχο συγκράτησης.

Στην 3^{η} επιπρόσθετη δραστηριότητα που ζητούσε από τους μαθητές να προσδιορίσουν, αν μπορούν, τον μικρότερο θετικό ακέραιο συνέβη το φαινόμενο ο αριθμός των σωστών απαντήσεων από τον μετά-έλεγχο (18 σωστές, 72%) στον έλεγχο-συγκράτησης (23 σωστές, 92%) να αυξηθεί.

Στην 4^{η} επιπρόσθετη δραστηριότητα που ανίχνευε τις γνώσεις των μαθητών γύρω από την άπειρη διαιρεσιμότητα ενός ευθύγραμμου τμήματος ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στον μετά-έλεγχο ήταν 22 (88%) και αντίστοιχα στον έλεγχο-συγκράτησης είχαμε 24 (96%).

Παρατηρούμε δηλαδή μια αύξηση του αριθμού των σωστών απαντήσεων στα δύο τελευταία ερωτήματα από τον μετά-έλεγχο στον έλεγχο συγκράτησης, που μπορεί να οφείλεται στην επαναδιαπραγμάτευση των ερωτημάτων.

Τέλος στα 4 ερωτήματα που ακολούθησαν τον έλεγχο-συγκράτησης και ρωτούσαμε τους μαθητές αν άλλαζαν την απάντηση τους αντίστοιχα στα ερωτήματα 10,13,14,15 λαμβάνοντας υπόψη ότι οι δοσμένοι αριθμοί ήταν πάνω στην ‘ελαστική’ αριθμογραμμή, μόνο ένας μαθητής άλλαξε την απάντηση του στο ερώτημα 13 (που ήταν λάθος) και επέλεξε την ορθή. Η μη σημαντική διαφοροποίηση των απαντήσεων των μαθητών πρέπει να οφείλεται στο μεγάλο ποσοστό ορθών απαντήσεων στη πρώτη και κύρια φάση του ελέγχου συγκράτησης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη επικεντρώθηκε στις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν με την έννοια της πυκνότητας των ρητών οι μαθητές ενός τμήματος της Γ΄ γυμνασίου ενός πειραματικού γυμνασίου και στην παρέμβαση που σχεδιάσαμε και εφαρμόσουμε στην προσπάθεια μας να τις αντιμετωπίσουμε. Ο προ-έλεγχος των αντιλήψεων των συγκεκριμένων μαθητών επιβεβαίωσε προηγούμενες έρευνες ότι η πυκνή διάταξη των ρητών αλλά και των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι εξαιρετικά απαιτητική έννοια για την κατανόηση των μαθητών. Η διαφοροποίηση με τα συμπεράσματα της μελέτης των Vamvakoussi & Vosniadou (2012) ήταν ότι οι μαθητές μας δέχτηκαν ευκολότερα την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών από την απειρία των ενδιάμεσων σημείων ενός τμήματος, κάτι που ίσως οφείλεται στη μη σύνδεση μεταξύ των δύο αναπαραστασιακών πεδίων (Duval, 2006). Έχοντας αυτό το δεδομένο σχεδιάσαμε την παρέμβαση μας προσπαθώντας να εφαρμόσουμε το πλαίσιο των πέντε αρχών για τη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης που διευκολύνουν την εννοιολογική αλλαγή, που προσδιόρισαν οι Vosniadou & Vamvakoussi (2006). Με τη βοήθεια της 'γέφυρας-αναλογίας' της 'ελαστικής' αριθμογραμμής (εφαρμόζοντας την $5^{η}$ αρχή), που χρησιμοποίησαν οι ίδιες ερευνήτριες σε αντίστοιχη παρέμβαση τους για την κατανόηση των ρητών με θετικά αποτελέσματα ιδιαίτερα στην όψη του 'μη επόμενου' αριθμού, εστιάσαμε κατ' αρχάς στην αντιδιαισθητική έννοια της απειρίας των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, ανεξάρτητα του μήκους του (τηρώντας την $1^{η}$ αρχή). Στην αρχή της παρέμβασης μας κάναμε ρητή υπενθύμιση στους μαθητές της αντιστοίχισης αριθμών με σημεία της αριθμογραμμής. Κατόπιν για να τους κινητοποιήσουμε θέσαμε το ερώτημα του πλήθους των σημείων σε δυο διαφορετικού μήκους τμήματα παρωθώντας τους ταυτόχρονα να εκφράσουν τη γνώμη τους. Στη συνέχεια κάνοντας χρήση της 'ένα προς ένα' αντιστοιχίας των σημείων των δυο τμημάτων, προσπαθήσαμε απευθυνόμενοι στις εμφωλευμένες αντιλήψεις τους να αναδιοργανώσουν τις ιδέες τους γύρω από το συγκεκριμένη έννοια (τηρώντας την $3^{η}$ αρχή). Κατόπιν στοχεύσαμε να σταθεροποιήσουν την νέα έννοια της απειρίας των ενδιάμεσων σημείων ανεξάρτητα μήκους, θέτοντας τους το ερώτημα του πλήθους των ενδιάμεσων σημείων αναπαριστώντας ταυτόχρονα στην ευθεία δυο πολύ κοντινά σημεία. Συνεχίσαμε με τρείς δραστηριότητες που στόχευαν στην έννοια της πυκνότητας των ρητών είτε στη συνιστώσα των άπειρων ενδιάμεσων σημείων (οι δυο πρώτες), είτε στην συνιστώσα της έννοιας του 'μη επόμενου' η τελευταία. Η σειρά των δραστηριοτήτων στην παρέμβαση μας έλαβε υπόψη ότι η κατανόηση της πυκνότητας των ρητών δεν ήταν μια απλή διαδικασία εμπλουτισμού προηγούμενων γνώσεων αλλά προϋπόθετε κατ' αρχάς εννοιολογική αναδιοργάνωση των γνώσεων των μαθητών όσο αφορά την πυκνή δομή των σημείων ενός τμήματος, την αναλογία με τους αριθμούς στην αριθμογραμμή και την συνέχεια αντίστοιχη εφαρμογή στις δύο όψεις της (2η αρχή). Σε όλες τις δραστηριότητες δίναμε την αριθμογραμμή και υποδεικνύαμε με βέλη τα σημεία που αντιστοιχούσαν στους αριθμούς, αποφεύγοντας την χρήση κουκίδων που παραπέμπει στην άτυπη γνώση τους για την αριθμογραμμή σαν μονοπάτι κουκίδων (Sbaragli, 2006). Σε κάθε δραστηριότητα τα συμπεράσματα κάθε ομάδας τα συζητούσε η ολομέλεια της τάξης ώστε να επιλυθούν τυχόν διαφωνίες στη προσπάθεια μας να αυξήσουμε την μεταγνωστική ενημερότητα τους (τηρώντας την 4η αρχή).

Παρά το σύντομο της παρέμβασης (μία διδακτική ώρα) τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά αφού οι μαθητές έδειξαν σημαντική βελτίωση (την οποία επίσης διατήρησαν σε ικανοποιητικό βαθμό όπως έδειξε ο έλεγχος συγκράτησης) και στη συνιστώσα του 'μη επόμενου' που έχει και την μεγαλύτερη δυσκολία (και παρόλο που η διάρκεια διαπραγμάτευσης της αντίστοιχης δραστηριότητας ήταν περιορισμένη λόγω χρονικής πίεσης). Η σημαντική βελτίωση τους πέρα από τη σημαντική αύξηση της επίδοσης τους στα ερωτήματα μετα-ελέγχου και ελέγχου συγκράτησης φαίνεται και στον σχετικά 'όμοιο' τρόπο που τα απάντησαν (Πίνακας 3). Βέβαια από τις επιδόσεις κάποιων μαθητών αλλά και τις εξηγήσεις αρκετών, στα επιπλέον ερωτήματα του μετά-ελέγχου φάνηκε η δυσκολία που αντιμετώπισαν στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν σχηματίζοντας σύμφωνα με το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής συνθετικά μοντέλα (π.χ. ότι είναι πολύ δύσκολο να βρούμε τον επόμενο γιατί υπάρχουν άπειρα σημεία, ή στο νοητικό πείραμα να θεωρούν την 'ιδεατή' αριθμογραμμή σαν δυσδιάστατο αντικείμενο που αυξάνουν οι διαστάσεις του όσο μεγεθύνουμε).

Σημειώνουμε ότι στα τρία τελευταία κοινά ερωτήματα μετα-ελέγχου και ελέγχου συγκράτησης, είχαμε μια αύξηση των σωστών απαντήσεων από τον μετά-έλεγχο στον έλεγχο συγκράτησης, που δεν συνέβη με τις άλλες κατηγορίες των κοινών ερωτημάτων των τριών ελέγχων και μάλλον ερμηνεύεται με την επαναληπτική εμφάνιση τους στους δύο ελέγχους.

Τέλος, γνωρίζοντας ότι δεν μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα λόγω μεγέθους δείγματος και μη χρησιμοποίησης ομάδας ελέγχου, θα είχε επιστημονικό ενδιαφέρον να ενσωματωθεί η 'γέφυρα-αναλογία' της 'ελαστικής' αριθμογραμμής σε ένα δυναμικό αναπαραστασιακό εργαλείο σε ένα μαθησιακό περιβάλλον που να επιτρέπει την αλληλεπίδραση μαθητών μεταξύ τους και με το καθηγητή. Διακρίνοντας την θετική επίδραση της γέφυρας-αναλογίας της ελαστικής αριθμογραμμής θεωρούμε ότι θα έπρεπε ενδεχομένως και σε μικρότερες τάξεις, να ενσωματωθεί στη διδασκαλία και μάλιστα χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές στο επίσημο σχολικό προγραμματισμό της διδακτέας ύλης αλλά επεκτείνοντας τα σημεία εκείνα που κάνουν χρήση και αναφορά στην αριθμογραμμή. Προφανώς, για ασφαλέστερα συμπεράσματα χρειάζεται να μελετηθεί η εισαγωγή του συγκεκριμένου εργαλείου με αντίστοιχες έρευνες-παρεμβάσεις και σε άλλες τάξεις μέσα στο ‘σύνηθες’ σχολικό περιβάλλον.

ΞΕΝΕΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Anderson, J., Greeno, J. G., Reder, L. M., & Simon, H. A. (2000). Perspectives on learning, thinking, and activity. *Educational Researcher*, *29*(4), 11–13.

Bell, J. L. (2005). Continuity and infinitesimals. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy*. Retrieved from http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/continuity.

Berge, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 217–235. doi: 10.1007/s10649-007-9101-5.

Bos, H.J.M., 2001. Redefining Geometrical Exactness. Springer, New York.

Boyer, C. B. (1959). *The history of calculus and its conceptual development*. New York, NY: Dover Publications.

Brown, D., and Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Factors influencing understanding in a teaching experiment.,*Instructional Science*, 18: 237-261.

Caravita, S., & Hallden, O. (1994). Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction*, *4*, 89–111.

Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge: MIT Press.

Clement, J.(1981). Analogy generation in scientific problem solving. In *Proceedings of the third annual conference of the cognitive science society*: Berkley, CA.

Clement, J. (1987), with the assistance of Brown, D., Camp, C., Kudukey, J., Minstrel', J., Palmer, D., Schultz, R., Shimabukuro, J., Steinberg, M., and Veneman, V. Overcoming students' misconceptions in physics: the role of anchoring intuitions and analogical validity. In J. D. Novak (Ed.) *Proceedings of the Second international Seminar, Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, vol. III (pp.84-97)* Cornell University, July 26-29,1987.

Clement, J. (1988).Observed methods for generating analogies in scientific problem solving. *Cognitive Science*,12,563-586.

Clement, J. (1989). Learning via model construction and criticism: Protocol evidence on sources of creativity in science. Glover, J., Ronning, R., and Reynolds, C.(Eds.), *Handbook of creativity: Assessment, theory and research.* NY: Plenum,341-381.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology*, *53*, 279–310.

Dehaene, S. (2001a). Precis of the number sense.Mind & Language, 16,16–36.

Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61,103-131, Springer 2006.

Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., & Scott, P. (1994). Constructing scientific knowledge in the classroom. *Educational Researcher*, *23*(7), 5–12.

Fischbein, E. (2001). Tacit models of infinity. *Educational Studies in Math.*, 48, 309-329.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21, 27–37.

Gelman, R., & Meck, E. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. In:J. Bideaud, C. Meljac, & J. P. Fischer (Eds), *Pathways to number* (pp. 171–189). Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
Gentner, D., & Wolff, P. (2000). Metaphor and knowledge change. In E. Dietrich & A. Markman (Eds.), *Cognitive dynamics: Conceptual change in humans and machines* (pp. 295-342). Mahwah, NJ: LEA.
Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties.In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 426–425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.
Greer, B. (2004). The growth of mathematics through conceptual restructuring. *Learning & Instruction*, *14*, 541–548.
Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337.
Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*,*18*,341–374.
Ioannides, C., & Vosniadou, S. (2001). The changing meanings of force: From coherence to fragmentation. *Cognitive Science Quarterly*, *2*(1), 5–62.
Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics* . Washington, DC: National Academy Press.
Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York, NY: Dover Publications. (Original work published 1968).
Kouka, A., Vosniadou, S., & Tsaparlis, G. (2001**)**. *The development of students' understanding of water as a solvent.* Paper presented at the Biennial Meeting of the European Science Education Association, Thessaloniki, Greece.
Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions* (2nd ed.). Chicago: Chicago Press.
Kyrkos, C., & Vosniadou, S. (1997). *Mental models of plant nutrition.* Poster presented at the 7th Biennial Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction, Athens, Greece.
Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being* (pp. 155–333). New York: Basic Books.
Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: large numbers discrimination in human infants. Psychological Science, 4, 396–401.
Mahoney, M.S. (1997). Revolution in mathematics.(Unpublished manuscript.)
Malet, A. (2006). *Renaissance notions of number and magnitude. Historia Mathematica* (pp.63–81).Oxford, UK:Elsevier.
McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2013). Young children's recognition of quantitative relations in mathematically unspecified settings. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 450–460.
McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2014). Spontaneous Focusing on Quantitative Relations in the Development of Children's Fraction Knowledge. *Cognition and Instruction*, *32*(2), 198–218.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In: M. Limon & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction*, *14*, 519–534.

Moreno-Armella, L. E., & Waldegg, G. C. (2000). An epistemological history of number and variation. In: V. Katz (Ed.),*Using history to teach Mathematics: An international perspective* (pp. 183–190). MAA Notes #51. Washington, DC:The Mathematical Association of America.

Neal, K. (2002). *From discrete to continuous: The broadening of the number concepts in early modern England*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist,40(1),27–52.doi:10.1207/s15326985ep40013.

Pintrich, P. (1999). Motivational beliefs as resources for and constraints on conceptual change. In:W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds), *New perspectives on conceptual change* (pp.33–50). Killington: Oxford.

Posner, G .J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Towards a theory of conceptual change. *Science Education, 66*, 211–227.

Sbaragli, S. (2006). Primary school teachers' beliefs and change of beliefs on mathematical infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *5*(2), 49–76.

Smith, J. P., diSessa, A. A., & Rochelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*, 115–163.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students'understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*, 101–140.

Sophian, C. (2000). Perceptions of proportionality in young children: Matching spatial ratios. *Cognition*, *75*, 145–170.

Spada, H. (1994). Conceptual change or multiple representations? *Learning and Instruction, 4*, 113-116.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 503–518.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring numbers and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271–284.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 213–219.

Tsamir, P., & Tirosh, D.(2007). Teaching for conceptual change: The case of infinite sets. *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 299-316.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344–355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. Learning and Instruction,14, 453–467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vosniadou, S. & Vamvakoussi, X. (2006). Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments. In L. Verschaffel, P. Dochy, M. Boekartz, & S. Vosniadou (Eds.), *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Eric De Corte* (pp. 55-70). Oxford, UK: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in an interval? Presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 267–283). Oxford, UK: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding about rational numbersandtheirnotation.CognitionandInstruction,28(2),181–209.doi:10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Vamvakoussi, X.,& Vosniadou, S.(2012). Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy, *Mathematical Thinking and Learning*, 14:4, 265-284.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction*, *14*, 469–484.

Vosniadou, S. (1989). Analogical reasoning and knowledge acquisition: A developmental perspective. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning ,* (pp. 1–15). New York:Cambridge University Press.

Vosniadou, S., (1999). Conceptual change research: State of the art and future directions. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.) *New Perspectives on Conceptual Change*, (pp. 3-13), Elsevier Science.

Vosniadou, S. (2003). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. In: G. M. Sinatra, & P. R. Pintrich (Eds), *Intentional conceptual change* (pp. 377–406).Mahwah, NJ: Erlbaum**.**

Vosniadou, S. & Brewer, W.F., (1987). Theories of Knowledge Restructuring in Development. *Review of Educational Research, 57*(1), pp. 51-67.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology***,** *24***,** 535–585.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1994). Mental models of the day/night cycle**.** *Cognitive Science***,** *18*,123–183**.**Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. Learning and Instruction, 11, 381–419.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. In L.Verschaffel & S. Vosniadou (Guest Eds.), *The conceptual change approach to mathematics learning and teaching, Special Issue of Learning and Instruction, 14*, 445-451.

Yujing, N., & Yong-Di, Z. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist***,** *40*(1)**,** 27–52.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., (2004). *Εννοιολογική αλλαγή στα Μαθηματικά: Η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών*, Διδακτορική διατριβή.Αθήνα.

Νεγρεπόντης Σ. , Γιωτόπουλος Σ. , Γιαννακούλιας Ε. (1987). *ΑπειροστικόςΛογισμός*. Τόμος Ι σελ 34.

Χατζημανώλης, Ν., (2008). Διπλωματική διατριβή, *Η ευθεία ως αναπαραστασιακό εργαλείο για τη κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών,* Αθήνα.

Καλτσούνη-Νόβα, Χ.,(2006).*Μεθοδολογία εμπειρικής έρευνας στις Κοινωνικές Επιστήμες*:*Ανάλυση Δεδομένων με τη χρήση του SPSS*, Αθήνα:Gutenberg.

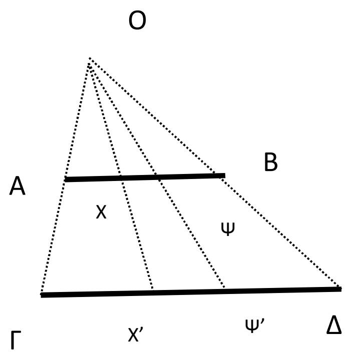
Κυριακίδης Λεωνίδας (2013) Σημειώσεις μαθήματος, *Ποσοτική Μεθοδολογία Έρευνας.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Ι)-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πάνω σε μια ‘ελαστική’ ευθεία.

Αν τεντώσουμε το ελαστικό τμήμα ΑΒ, τότε παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ που έχει μεγαλύτερο μήκος.



Ας δοκιμάσουμε το εξής: φέρνουμε τις ημιευθείες ΓΑ και ΔΒ και ονομάζουμε Ο το σημείο τομής τους. Κατόπιν παίρνουμε ένα σημείο χ στο ΑΒ και αφού φέρουμε την Οχ την προεκτείνουμε μέχρι αυτή να τμήσει το ΓΔ στο χ΄.

Κατόπιν, παίρνουμε ένα σημείο ψ΄ στο ΓΔ και ενώνουμε το Ο με το ψ΄. Ονομάζουμε ψ το σημείο που η Οψ τέμνει το ΑΒ.

Παρατηρείτε κάποια σχέση ανάμεσα στα σημεία των 2 τμημάτων;

…………………………………………………………………….

Τι σημαίνει αυτό για το πλήθος των σημείων στα 2 τμήματα;

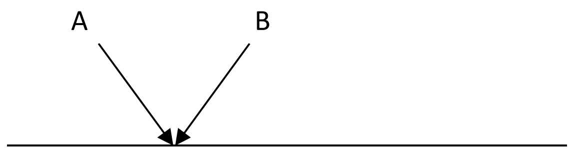
……………………………………………………………………..

Συμπέρασμα…………………………………………………………

…………………………………………………………………

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω τμήματος της ‘ελαστικής’ αριθμογραμμής πόσα σημεία νομίζετε ότι υπάρχουν; (Λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα της ‘ελαστικής’ αριθμογραμμής να επεκτείνεται αναλογικά χωρίς να αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά της)



α) δεν υπάρχει σημείο

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων

γ) υπάρχουν άπειρα σημεία

Συμπληρώστε την απάντηση σας <u>μετά</u> την συζήτηση της ομάδας σας και την συμφωνία με την ολομέλεια της τάξης αιτιολογώντας:

……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………..

………………………………………………………………………

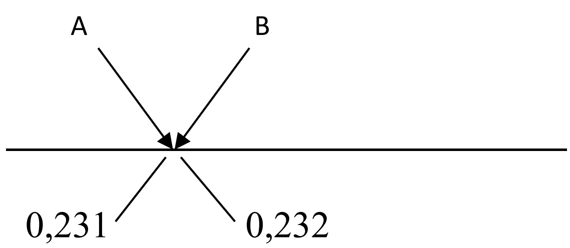
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Αν τα σημεία Α και Β του παρακάτω τμήματος της ‘ελαστικής’ αριθμογραμμής αντιστοιχούν στους αριθμούς 0,231 και 0,232 εξετάστε με την ομάδα σας αν ανάμεσα στους 0,231 και 0,232 βρίσκονται:

α) κανένας αριθμός

β) πεπερασμένο το πλήθος αριθμών

γ) άπειροι αριθμοί



Συμπληρώστε την απάντηση σας μετά την συζήτηση της ομάδας

σας και την συμφωνία με την ολομέλεια της τάξης αιτιολογώντας:

………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………

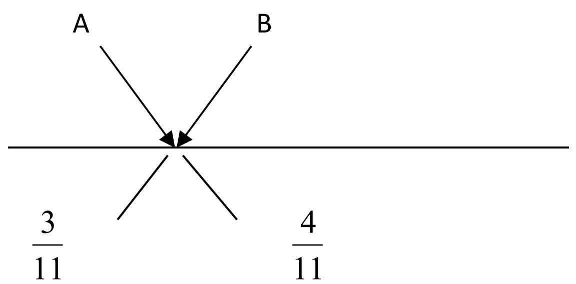
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4

Αν τα σημεία Α και Β του παρακάτω τμήματος της 'ελαστικής' αριθμογραμμής αντιστοιχούν στους αριθμούς $\frac{3}{11}$ και $\frac{4}{11}$ εξετάστε με την ομάδα σας αν ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{11}$ και $\frac{4}{11}$ βρίσκονται:

α) κανένας αριθμός

β) πεπερασμένο το πλήθος αριθμών

γ) άπειροι αριθμοί



Συμπληρώστε την απάντηση σας μετά την συζήτηση της ομάδας

σας και την συμφωνία με την ολομέλεια της τάξης αιτιολογώντας:

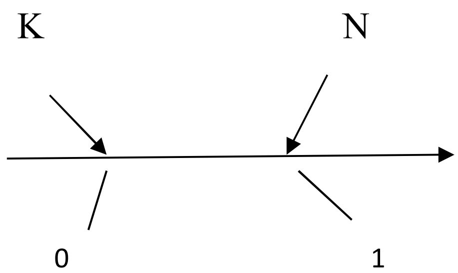
………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5

Μία μεταβλητή χ παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 0 και μικρότερες του 1 (δηλαδή $0<\chi<1$). Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ‘ελαστική’ αριθμογραμμή τεντώνεται και επεκτείνεται όσο θέλουμε από οποιαδήποτε σημεία της, να εξετάσετε με την ομάδα σας αν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον **αμέσως επόμενο** αριθμό του 0 και τον **αμέσως προηγούμενο** του 1.



Συμπληρώστε την απάντηση σας <u>*μετά*</u> *την συζήτηση της ομάδας σας και την συμφωνία με την ολομέλεια της τάξης αιτιολογώντας:*

……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………..

………………………………………………………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΙΙ)-ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΕΛΕΓΧΩΝ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1^{ο} *(ΠΡΟ-ΕΛΕΓΧΟΣ)*

ΣΧΟΛΕΙΟ……………………………………………………ΤΑΞΗ/ΤΜΗΜΑ………………

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ……………………………………………………………………

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Θα σου δοθούν διαδοχικά 5 φύλλα εργασιών. Αφού συμπληρώσεις

το 1^{ο} θα το παραδώσεις και κατόπιν θα σου δοθεί το 2^{ο} το οποίο αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις κρατώντας την ίδια διαδικασία για τα υπόλοιπα 3 φύλλα.

Στα επόμενα όπου βλέπεις «αριθμοί/ός» θα ξέρεις ότι πρόκειται για πραγματικό.

(Υπενθύμιση: όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε μέχρι τώρα είναι πραγματικοί)

Επίσης λέμε ότι ο αριθμός Χ είναι ανάμεσα στους Ψ και Ζ με Ψ<Ζ αν Ισχύει : Ψ<Χ<Ζ.

Επιπλέον η φράση «άπειρο πλήθος αριθμών» σημαίνει ένα πλήθος αριθμών χωρίς τέλος ενώ η φράση «πεπερασμένο πλήθος αριθμών» σημαίνει ότι μπορεί να είναι πολύ λίγοι ή πάρα πολλοί αλλά κάπου τελειώνουν.

Ερωτήματα:

1. **Ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006**
   α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

   β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

   γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

2. **Ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και το $\frac{4}{5}$**
   α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

   β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

   γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

3. **Ανάμεσα στο 0 και το 1**

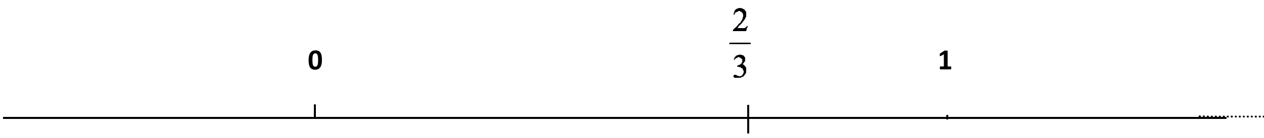
   α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

   β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

   γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

4. **Σημείωσε τον αριθμό $\frac{1}{3}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών**.



➢ **Ανάμεσα στο $\frac{1}{3}$ και το $\frac{2}{3}$**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

5. Σημείωσε τον αριθμό 0,002 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

➢ **Ανάμεσα στο 0,001 και το 0,002**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

6. Σημείωσε τον αριθμό 1 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

➢ **Ανάμεσα στο 1 και το 2**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

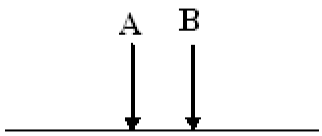
β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………………………

Αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

7. Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος

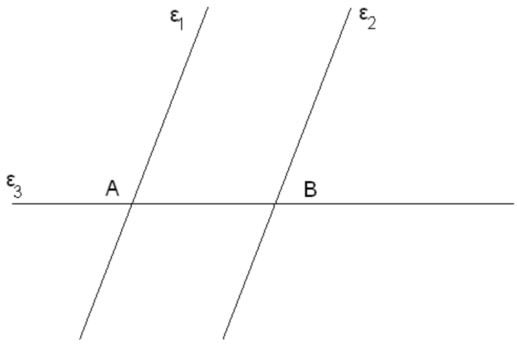


α) δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

8. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.



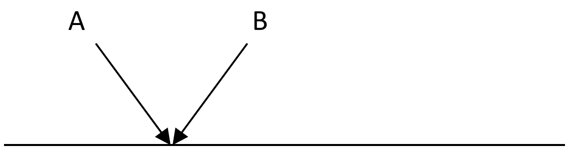
- **Πόσες ευθείες υπάρχουν, παράλληλες προς τις ε1 και ε2, που να διέρχονται από ένα σημείο ανάμεσα στο Α και το Β;**

  α) Δεν υπάρχει καμία τέτοια ευθεία.

  β) Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων ευθειών.

  γ) Υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων ευθειών.

9. Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος



α) δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………

Αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

10. Το x $\in$ (0,1), δηλαδή το x είναι μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1). Δεδομένου ότι το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, μπορείς να προσδιορίσεις ποια είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;

α) Ναι, είναι η τιμή …………………………………………………………………………………….

β) Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή, γιατί

……….

……….

γ) Δεν υπάρχει απάντηση στο ερώτημα, γιατί …………………………………………….

……….

11. Ο Κυριάκος λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 2,37 είναι ο 2,38, γιατί το 38 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 37».

- **Συμφωνείς με τον Κυριάκο; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ……………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

12. Η Κική λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του $\frac{5}{9}$ είναι ο $\frac{6}{9}$, γιατί το 6 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 5».

- **Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ……………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

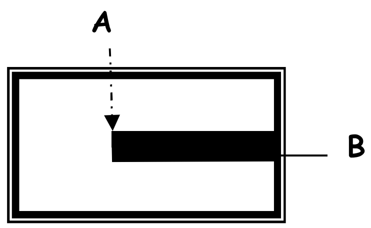
Ονοματεπώνυμο………………………………………………………

Αφού παραδώσεις συμπληρωμένο αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

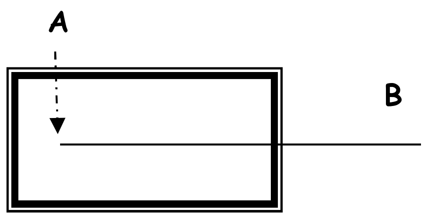
13.Διάβασε προσεκτικά το παρακάτω κείμενο, παρατήρησε τα σχέδια και απάντησε στις ερωτήσεις:

Σε μια εργασία για τα μαθηματικά, ο καθηγητής ζήτησε από τα παιδιά να κάνουν νοερά ένα πείραμα: Να σκεφτούν ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να φανταστούν ότι έχουν ένα πολύ ισχυρό μικροσκόπιο και μπορούν να κοιτάξουν το Α και τα κοντινά του σημεία από πολύ κοντά.

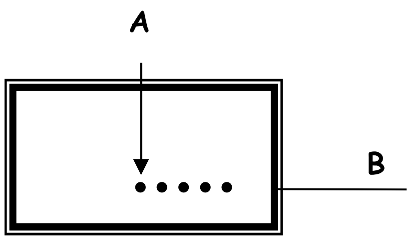
Στη συνέχεια τους ζήτησε να περιγράψουν με ένα σχέδιο πώς θα έβλεπαν το σημείο Α και τα κοντινά του σημεία. Τα παιδιά δούλεψαν σε ομάδες και έφτιαξαν τα παρακάτω σχέδια.



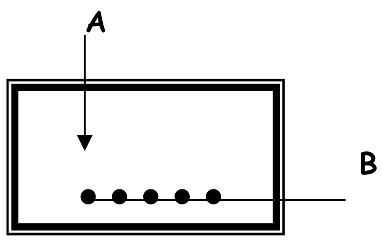
Α΄ Ομάδα ☐



Β΄ Ομάδα ☐



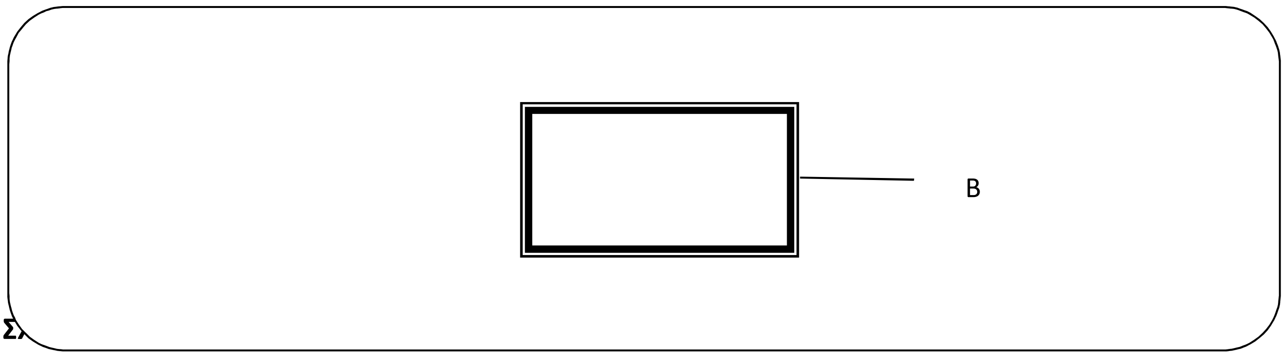
Γ΄ Ομάδα ☐



Δ΄ Ομάδα ☐

- **Υπάρχει κάποια ομάδα που έφτιαξε το σχέδιο που θα έφτιαχνες κι εσύ;**
  - Αν ναι, σημείωσε √ στο αντίστοιχο κουτάκι. (Μπορείς να επιλέξεις περισσότερα από ένα).

    Αιτιολόγησε την επιλογή σου / τις επιλογές σου:.. Αν όχι, φτιάξε εδώ το δικό σου σχέδιο:



ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ………………………………………………………………………

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Θα σου δοθούν διαδοχικά 5 φύλλα εργασιών. Αφού συμπληρώσεις

το $1^{ο}$ θα το παραδώσεις και κατόπιν θα σου δοθεί το $2^{ο}$ το οποίο αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις κρατώντας την ίδια διαδικασία για τα υπόλοιπα 3 φύλλα.

Στα επόμενα όπου βλέπεις «αριθμοί/ός» θα ξέρεις ότι πρόκειται για πραγματικό.

(Υπενθύμιση: όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε μέχρι τώρα είναι πραγματικοί)

Επίσης λέμε ότι ο αριθμός Χ είναι ανάμεσα στους Ψ και Ζ με Ψ<Ζ αν Ισχύει : Ψ<Χ<Ζ.

Επιπλέον η φράση «άπειρο πλήθος αριθμών» σημαίνει ένα πλήθος αριθμών χωρίς τέλος ενώ η φράση «πεπερασμένο πλήθος αριθμών» σημαίνει ότι μπορεί να είναι πολύ λίγοι ή πάρα πολλοί αλλά κάπου τελειώνουν.

Ερωτήματα:

1. **Ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

2. **Ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και το $\frac{4}{5}$**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

3. **Ανάμεσα στο 0 και το 1**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

4. **Σημείωσε τον αριθμό $\frac{1}{3}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών**.

➢ **Ανάμεσα στο $\frac{1}{3}$ και το $\frac{2}{3}$**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

5. Σημείωσε τον αριθμό 0,002 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.

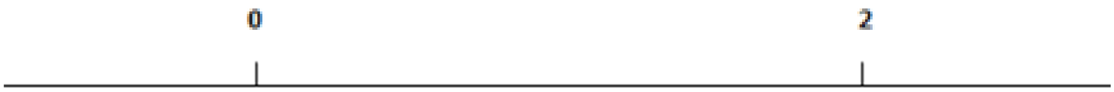
➢ **Ανάμεσα στο 0,001 και το 0,002**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

6. Σημείωσε τον αριθμό 1 πάνω στην ευθεία των πραγματικών.



➢ **Ανάμεσα στο 1 και το 2**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

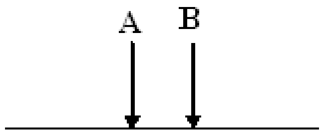
β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………

Αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

7. Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος

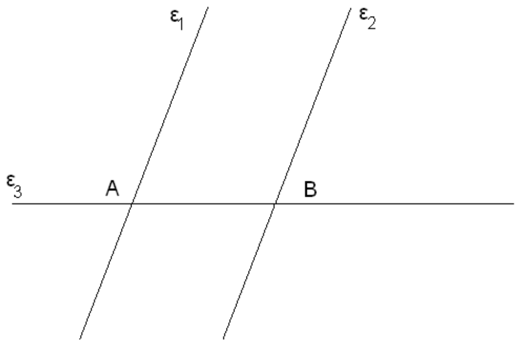


α) δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

8. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.



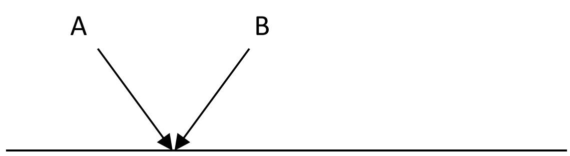
- **Πόσες ευθείες υπάρχουν, παράλληλες προς τις ε1 και ε2, που να διέρχονται από ένα σημείο ανάμεσα στο Α και το Β;**

  α) Δεν υπάρχει καμία τέτοια ευθεία.

  β) Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων ευθειών.

  γ) Υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων ευθειών.

9. Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος



α) δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………

Αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

10. Το x $\in$ (0,1), δηλαδή το x είναι μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1). Δεδομένου ότι το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, μπορείς να προσδιορίσεις ποια είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;

α) Ναι, είναι η τιμή ……………………………………………………………………………………….

β) Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή, γιατί

……

……

γ) Δεν υπάρχει απάντηση στο ερώτημα, γιατί …………………………………………………

……

11. Ο Κυριάκος λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 2,37 είναι ο 2,38, γιατί το 38 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 37».

- **Συμφωνείς με τον Κυριάκο; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

12. Η Κική λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του $\frac{5}{9}$ είναι ο $\frac{6}{9}$, γιατί το 6 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 5».

- **Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………

Αφού παραδώσεις συμπληρωμένο αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

13. Ο Βασίλης λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός μετά το 2 υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί με απόλυτη ακρίβεια. Είναι ο 2,000….01, και με τις τρεις τελείες εννοώ ότι μεσολαβούν άπειρα μηδενικά».

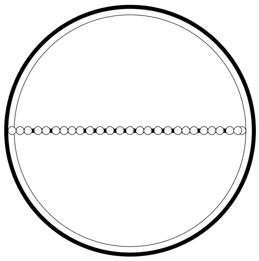
- **Συμφωνείς με το Βασίλη; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ……………………………………………………………………………………………………

……

……

14.Η Κική λέει: «Μια ευθεία έχει άπειρα σημεία, που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Αν μπορούσες όμως να μεγεθύνεις απεριόριστα πολύ ένα κομμάτι της ευθείας, θα μπορούσες να ξεχωρίσεις τα σημεία ένα-ένα, όπως στην εικόνα που έχω ζωγραφίσει»



- **Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ……………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………

15. Μπορείς να προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;

Ναι ❑ Όχι ❑

- **Αν απάντησες Ναι, γράψε το μικρότερο θετικό αριθμό: ……………………………………………….**
- **Αν απάντησες Όχι, εξήγησε γιατί:**

……

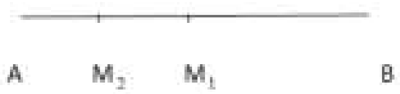
……

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………………………………………

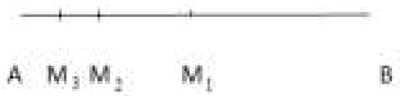
Αφού παραδώσεις συμπληρωμένο αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

16. Σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ βρίσκουμε το μέσο του M_1.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε το μέσο του AM_1, το M_2.



Μετά, βρίσκουμε το μέσο του AM_2, το M_3.



- **Μπορείς να εκτιμήσεις πόσες φορές μπορείς να επαναληφθεί αυτή η διαδικασία; Εξήγησε την απάντησή σου.**

……….

……….

……….

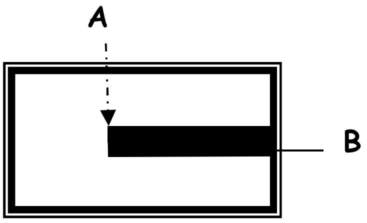
Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………

Αφού συμπληρώσεις αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

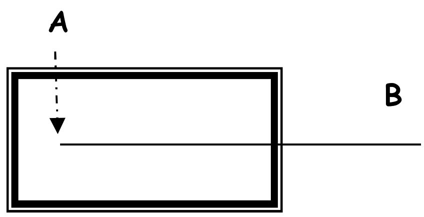
17..Διάβασε προσεκτικά το παρακάτω κείμενο, παρατήρησε τα σχέδια και απάντησε στις ερωτήσεις:

Σε μια εργασία για τα μαθηματικά, ο καθηγητής ζήτησε από τα παιδιά να κάνουν νοερά ένα πείραμα: Να σκεφτούν ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να φανταστούν ότι έχουν ένα πολύ ισχυρό μικροσκόπιο και μπορούν να κοιτάξουν το Α και τα κοντινά του σημεία από πολύ κοντά.

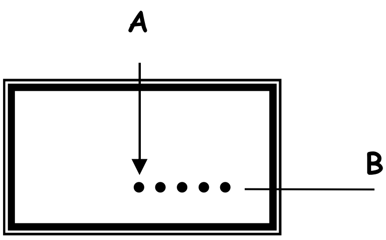
Στη συνέχεια τους ζήτησε να περιγράψουν με ένα σχέδιο πώς θα έβλεπαν το σημείο Α και τα κοντινά του σημεία. Τα παιδιά δούλεψαν σε ομάδες και έφτιαξαν τα παρακάτω σχέδια.



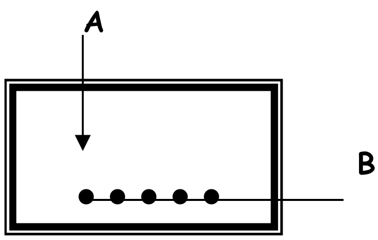
Α' Ομάδα ☐



Β' Ομάδα ☐



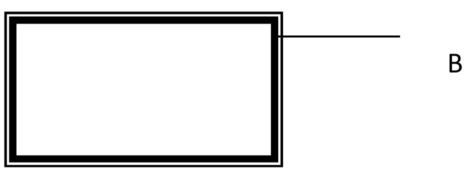
Γ' Ομάδα ☐



Δ' Ομάδα ☐

- **Υπάρχει κάποια ομάδα που έφτιαξε το σχέδιο που θα έφτιαχνες κι εσύ;**
  - Αν ναι, σημείωσε √ στο αντίστοιχο κουτάκι. (Μπορείς να επιλέξεις περισσότερα από ένα).

    Αιτιολόγησε την επιλογή σου / τις επιλογές σου:... Αν όχι, φτιάξε εδώ το δικό σου σχέδιο:



<u>ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 3Α</u> ***<u>(ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ)</u>***

ΣΧΟΛΕΙΟ………………………………………………ΤΑΞΗ/ΤΜΗΜΑ………………

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ………………………………………………………………

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Θα σου δοθούν διαδοχικά 5 φύλλα εργασιών. Αφού συμπληρώσεις

το $1^{ο}$ θα το παραδώσεις και κατόπιν θα σου δοθεί το $2^{ο}$ το οποίο αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις κρατώντας την ίδια διαδικασία για τα υπόλοιπα 3 φύλλα.

Στα επόμενα όπου βλέπεις «αριθμοί/ός» θα ξέρεις ότι πρόκειται για πραγματικό.

(Υπενθύμιση: όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε μέχρι τώρα είναι πραγματικοί)

Επίσης λέμε ότι ο αριθμός Χ είναι ανάμεσα στους Ψ και Ζ με Ψ<Ζ αν Ισχύει : Ψ<Χ<Ζ.

Επιπλέον η φράση «άπειρο πλήθος αριθμών» σημαίνει ένα πλήθος αριθμών χωρίς τέλος ενώ η φράση «πεπερασμένο πλήθος αριθμών» σημαίνει ότι μπορεί να είναι πολύ λίγοι ή πάρα πολλοί αλλά κάπου τελειώνουν.

Ερωτήματα:

1. **Ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

2. **Ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και το $\frac{4}{5}$**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

3. **Ανάμεσα στο 0 και το 1**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

4. **Σημείωσε τον αριθμό $\frac{1}{3}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών**.

➢ **Ανάμεσα στο $\frac{1}{3}$ και το $\frac{2}{3}$**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

5. **Σημείωσε τον αριθμό 0,002 πάνω στην ευθεία των πραγματικών**.

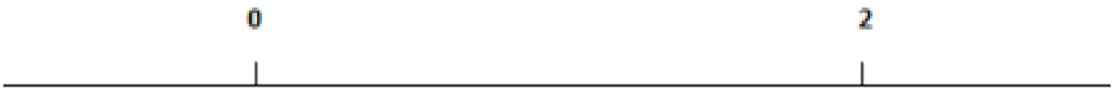
➢ **Ανάμεσα στο 0,001 και το 0,002**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

6. **Σημείωσε τον αριθμό 1 πάνω στην ευθεία των πραγματικών**.



➢ **Ανάμεσα στο 1 και το 2**

α) δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

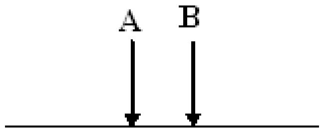
β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

γ) υπάρχουν άπειροι αριθμοί.

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………

Αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

7. Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος

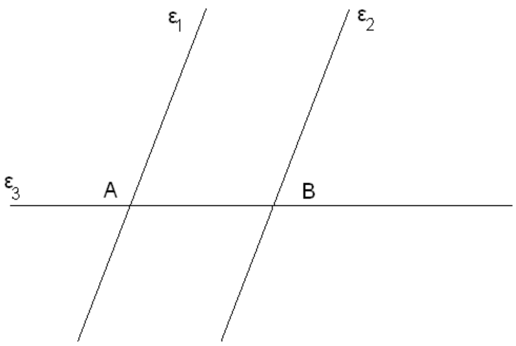


α) δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

8. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.



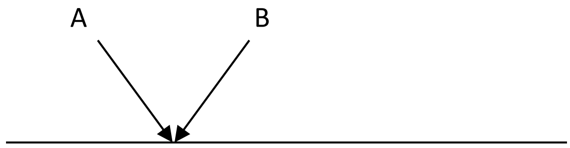
- **Πόσες ευθείες υπάρχουν, παράλληλες προς τις ε1 και ε2, που να διέρχονται από ένα σημείο ανάμεσα στο Α και το Β;**

  α) Δεν υπάρχει καμία τέτοια ευθεία.

  β) Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων ευθειών.

  γ) Υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων ευθειών.

9. Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος



α) δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………

Αφού το συμπληρώσεις θα το παραδώσεις και θα πάρεις το επόμενο φύλλο

10. Το x $\in$ (0,1), δηλαδή το x είναι μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1). Δεδομένου ότι το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, μπορείς να προσδιορίσεις ποια είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;

α) Ναι, είναι η τιμή ……………………………………………………………………………………

β) Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή, γιατί

…….

……….........

γ) Δεν υπάρχει απάντηση στο ερώτημα, γιατί ……………………………………………………

………......

11. Ο Κυριάκος λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 2,37 είναι ο 2,38, γιατί το 38 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 37».

- **Συμφωνείς με τον Κυριάκο; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

12. Η Κική λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του $\frac{5}{9}$ είναι ο $\frac{6}{9}$, γιατί το 6 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 5».

- **Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: ………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………

Αφού παραδώσεις συμπληρωμένο αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

13. Ο Βασίλης λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός μετά το 2 υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί με απόλυτη ακρίβεια. Είναι ο 2,000….01, και με τις τρεις τελείες εννοώ ότι μεσολαβούν άπειρα μηδενικά».

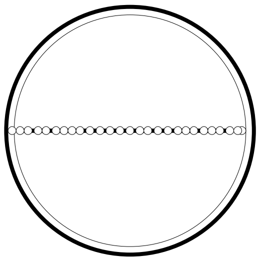
- **Συμφωνείς με το Βασίλη; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: …………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

14.Η Κική λέει: «Μια ευθεία έχει άπειρα σημεία, που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Αν μπορούσες όμως να μεγεθύνεις απεριόριστα πολύ ένα κομμάτι της ευθείας, θα μπορούσες να ξεχωρίσεις τα σημεία ένα-ένα, όπως στην εικόνα που έχω ζωγραφίσει»



- **Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑**

Εξήγησε γιατί: …………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………

15. Μπορείς να προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;

Ναι ❑ Όχι ❑

- **Αν απάντησες Ναι, γράψε το μικρότερο θετικό αριθμό: ……………………………………………….**
- **Αν απάντησες Όχι, εξήγησε γιατί:**

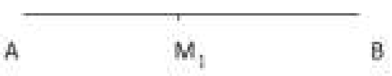
………

………

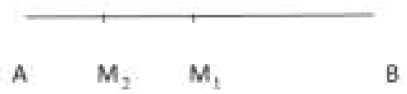
Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………………………………………

Αφού παραδώσεις συμπληρωμένο αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

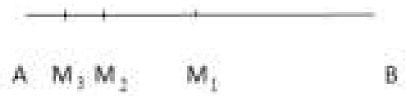
16. Σε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB βρίσκουμε το μέσο του M_1.



Στη συνέχεια, βρίσκουμε το μέσο του AM_1, το M_2.



Μετά, βρίσκουμε το μέσο του AM_2, το M_3.



- **Μπορείς να εκτιμήσεις πόσες φορές μπορείς να επαναληφθεί αυτή η διαδικασία; Εξήγησε την απάντησή σου.**

……….

……….

……….

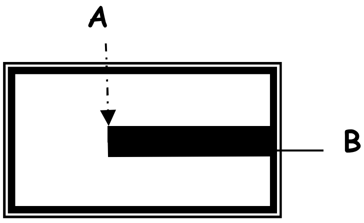
Ονοματεπώνυμο……

Αφού συμπληρώσεις αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

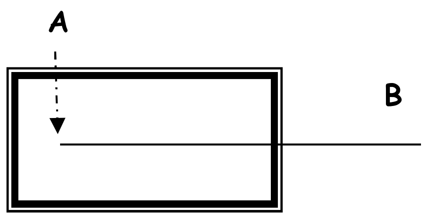
17..Διάβασε προσεκτικά το παρακάτω κείμενο, παρατήρησε τα σχέδια και απάντησε στις ερωτήσεις:

Σε μια εργασία για τα μαθηματικά, ο καθηγητής ζήτησε από τα παιδιά να κάνουν νοερά ένα πείραμα: Να σκεφτούν ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να φανταστούν ότι έχουν ένα πολύ ισχυρό μικροσκόπιο και μπορούν να κοιτάξουν το Α και τα κοντινά του σημεία από πολύ κοντά.

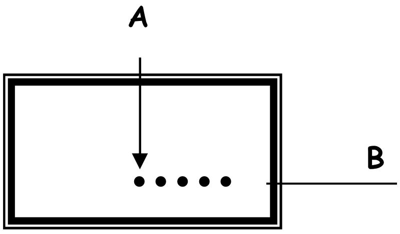
Στη συνέχεια τους ζήτησε να περιγράψουν με ένα σχέδιο πώς θα έβλεπαν το σημείο Α και τα κοντινά του σημεία. Τα παιδιά δούλεψαν σε ομάδες και έφτιαξαν τα παρακάτω σχέδια.



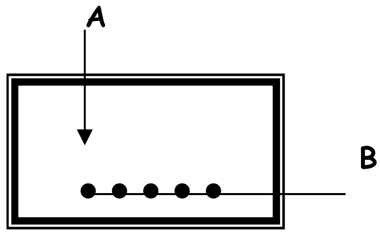
Α' Ομάδα ☐



Β' Ομάδα ☐



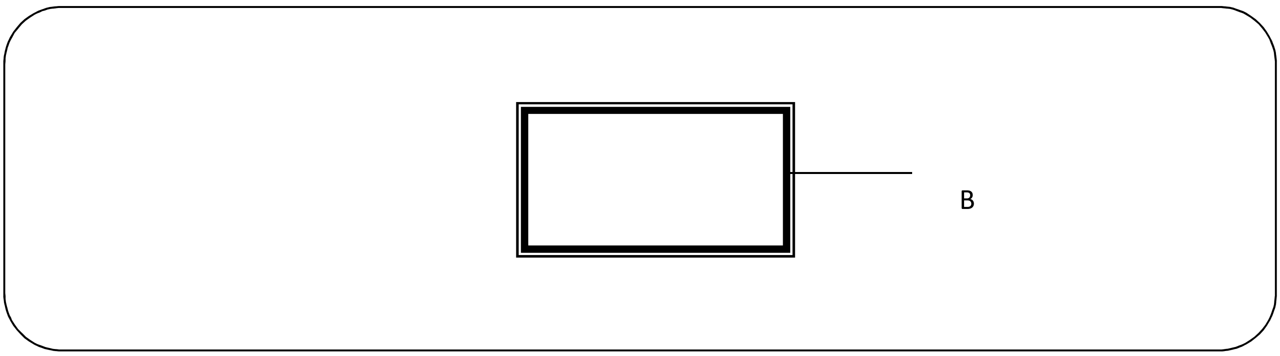
Γ' Ομάδα ☐



Δ' Ομάδα ☐

- **Υπάρχει κάποια ομάδα που έφτιαξε το σχέδιο που θα έφτιαχνες κι εσύ;**
  - Αν ναι, σημείωσε √ στο αντίστοιχο κουτάκι. (Μπορείς να επιλέξεις περισσότερα από ένα).

    Αιτιολόγησε την επιλογή σου / τις επιλογές σου:... Αν όχι, φτιάξε εδώ το δικό σου σχέδιο:



<u>**ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 3Β**</u> <u>***(ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ)***</u>

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ……………………………………………………………………

1. **Στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο τέθηκε το ερώτημα**: «Το $x \in (0,1)$, δηλαδή το x είναι μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1).
   Δεδομένου ότι το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, μπορείς να προσδιορίσεις ποια είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;

   α) Ναι, είναι η τιμή …………………………………………………………………………….

   β) Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή, γιατί ………………………

   γ) Δεν υπάρχει απάντηση στο ερώτημα, γιατί …………………………………….»

   Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι το 0 και το 1 βρίσκονται πάνω στην 'ελαστική' αριθμογραμμή που μπορεί να τεντωθεί απεριόριστα θα δίνατε την ίδια απάντηση;

   Ναι ☐ **Όχι** ☐

   Στην περίπτωση που θα αλλάζατε την απάντηση σας ποια από τις θα δίνατε;

   α) ☐ β) ☐ γ) ☐

   Δικαιολογείστε την επιλογή σας:…………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………….

2. **Στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο τέθηκε το ερώτημα**: «Ο Βασίλης λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός μετά το 2 υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί με απόλυτη ακρίβεια. Είναι ο 2,000….01, και με τις τρεις τελείες εννοώ ότι μεσολαβούν πάρα πολλά μηδενικά».
   Συμφωνείς με το Βασίλη; Ναι ☐ Όχι ☐

   Εξήγησε γιατί: …………………………………………………………………….»

   Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι το 2 βρίσκεται πάνω στην 'ελαστική' αριθμογραμμή που μπορεί να τεντωθεί απεριόριστα, θα δίνατε την ίδια απάντηση;

   Ναι ☐ **Όχι** ☐

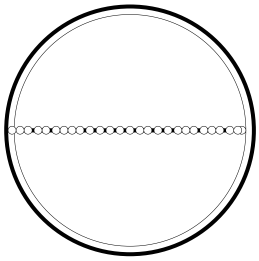
   Στην περίπτωση που θα αλλάζατε την απάντηση σας αιτιολογείστε την νέα

   απάντηση σας:……………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………………………..

Αφού συμπληρώσεις αυτό το φύλλο θα πάρεις το επόμενο

3. Στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο τέθηκε το ερώτημα: «Η Κική λέει: «Μια ευθεία έχει άπειρα σημεία, που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Αν μπορούσες όμως να μεγεθύνεις απεριόριστα πολύ ένα κομμάτι της ευθείας, θα μπορούσες να ξεχωρίσεις τα σημεία ένα-ένα, όπως στην εικόνα που έχω ζωγραφίσει»



- Συμφωνείς με την Κική; Ναι ❑ Όχι ❑

Εξήγησε γιατί: …………………………………………………………………….»

Λαμβάνοντας υπόψη σας το τμήμα είναι μέρος της 'ελαστικής' ευθείας που μπορεί να τεντωθεί απεριόριστα, θα δίνατε την ίδια απάντηση;

Ναι ☐ **Όχι** ☐

Στην περίπτωση που θα αλλάζατε την απάντηση σας αιτιολογείστε την νέα

απάντηση σας:………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

4. Στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο τέθηκε το ερώτημα: « Μπορείς να

προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;

Ναι ❑ Όχι ❑

Αν απάντησες Ναι, γράψε το μικρότερο θετικό αριθμό:…………………

- Αν απάντησες Όχι, εξήγησε γιατί:…………………………………….»

Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι το 0 βρίσκεται πάνω στην 'ελαστική' αριθμογραμμή που μπορεί να τεντωθεί απεριόριστα, θα δίνατε την ίδια απάντηση;

Ναι ☐ **Όχι** ☐

Στην περίπτωση που θα αλλάζατε την απάντηση σας αιτιολογείστε την νέα

απάντηση σας:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (III)- ΕΛΕΓΧΟΙ (με Στατιστικό πακέτο) SPSS

Wilcoxon Signed Ranks Test

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ - ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ	Negative Ranks	2[a]	3,50	7,00
	Positive Ranks	23[b]	13,83	318,00
	Ties	0[c]		
	Total	25		
ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ - ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ	Negative Ranks	9[d]	5,39	48,50
	Positive Ranks	1[e]	6,50	6,50
	Ties	15[f]		
	Total	25		

a. ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ < ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ

b. ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ > ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ

c. ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ = ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ

d. ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ < ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ

e. ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ > ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ

f. ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ = ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ

Test Statistics[a]

	ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ - ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ	ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ - ΜΕΤΑΕΛΕΓΧΟΣ
Z	-4,190[b]	-2,169[c]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000	,030

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.

c. Based on positive ranks.

```
NPAR TESTS
  /WILCOXON=ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ WITH ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ (PAIRED)
  /STATISTICS DESCRIPTIVES QUARTILES
  /MISSING ANALYSIS.
```

NPar Tests

Notes

Output Created		17-SEP-2015 19:23:36
Comments		
Input	Data	C:\Documents and Settings\kiriakos\Τα έγγραφά μου\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΥ.sav
	Active Dataset	DataSet1
	Filter	<none>
	Weight	<none>
	Split File	<none>
	N of Rows in Working Data File	25
Missing Value Handling	Definition of Missing	User-defined missing values are treated as missing.
	Cases Used	Statistics for each test are based on all cases with valid data for the variable(s) used in that test.
Syntax		NPAR TESTS /WILCOXON=ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ WITH ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ (PAIRED) /STATISTICS DESCRIPTIVES QUARTILES /MISSING ANALYSIS.
Resources	Processor Time	00:00:00,02
	Elapsed Time	00:00:00,02
	Number of Cases Allowed[a]	112347

a. Based on availability of workspace memory.

[DataSet1] C:\Documents and Settings\kiriakos\Τα έγγραφά μου\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΥ.sav

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum	Percentiles
						25th
ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ	25	1,57333	,294942	1,167	2,167	1,29167
ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ	25	2,05667	,253129	1,417	2,250	2,00000

Descriptive Statistics

	Percentiles	
	50th (Median)	75th
ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ	1,58333	1,75000
ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ	2,08333	2,25000

Wilcoxon Signed Ranks Test

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ - ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ	Negative Ranks	2[a]	9,00	18,00
	Positive Ranks	22[b]	12,82	282,00
	Ties	1[c]		
	Total	25		

a. ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ < ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ

b. ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ > ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ

c. ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ = ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ

Test Statistics[a]

	ΕΛΕΓΧΟΣΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ - ΠΡΟΕΛΕΓΧΟΣ
Z	-3,777[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.