Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Ασυνέχεια vDVZ και Galileons: Κλασσική και κβαντική συμπεριφορά

Διπλωματική εργασία για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Πέτρου Παναγιώτη Ασημάκη

Αθήνα 2014

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Νικόλαο Τετράδη, καθηγητή του τμήματος φυσικής και τον Νικόλαο Μπρουζάκη, μεταδιδάκτορα του τμήματος, για την στήριξή τους προς το πρόσωπό μου όλον αυτόν τον καιρό. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη, αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με βοήθησε να φτάσω ως εδώ.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Λίγο καιρό αφ'οτου διατυπώθηκε η γενική θεωρία της σχετικότητας δημιουργήθηκε η ιδέα να δοθεί μάζα στο γκραβιτόνιο και οι επιστήμονες σκέφτηκαν να εξετάσουν κατά πόσο θα ηταν συνεπής μια τέτοια θεωρία. Έτσι τροποποιήσαν τη διαταρακτική γενική σχετικότητα με κατάλληλους όρους και εξέτασαν τα αποτελέσματα [4]. Το ενδιαφέρον για μια τέτοια τροποποίηση αναπτερώθηκε τα τελευταία χρόνια με τις ενδείξεις που παρουσιάστηκαν για την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος [2, 3]. Η ιδέα της μαζικής βαρύτητας αποτελεί μία πιθανή εναλλακτική πρόταση στην εισάγωγή της κοσμολογικής σταθεράς στις εξισώσεις πεδίου.

Οι πρώτοι οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη μαζική βαρύτητα ήταν οι Fierz και Pauli [5] το 1939 που προσέθεσαν όρο μάζας για το γκραβιτόνιο στη δράση Einstein-Hilbert. Μετά από αυτό το γεγονός δεν μεσολάβησαν πολλά μέχρι και τις αρχές του 1970, μια εποχή πού σημειώθηκε σημαντική πρόοδος στην κβαντική θεωρία πεδίου γενικότερα. Η γραμμική θεωρία των Fierz-Pauli συζευγμένη με πηγή μελετήθηκε τότε από τους van Dam,Veltman και Zakharov [6, 7], οι οποίοι ανακάλυψαν το γεγονός ότι η θεωρία αυτή δίνει διαφορετικές προβλέψεις σε σχέση με τη γραμμικοποιημένη βαρύτητα στο όριο που η μάζα του γκραβιτονίου τείνει στο μηδέν. Παραδείγματος χάριν, η μαζική βαρύτητα στο οριο που η μάζα τείνει στο μηδέν προβλέπει ότι το πλάτος σκέδασης μεταξύ δύο πηγών του είναι κατά 25% διαφορετικό από αυτό της διαταρακτικής γενικής σχετικότητας [8]. Βλέπουμε λοιπόν πως υπάρχει μια ασυνέχεια (ασυνέχεια vDVZ) στη φυσική όπως αυτή περιγράφεται από τις παραμέτρους της θεωρίας.

Η ασυνέχεια vDVZ οφείλεται στο γεγονός ότι το γκραβιτόνιο με μάζα οσοδήποτε μικρή, έχει πέντε ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας, τις πέντε καταστάσεις της ιδιοστροφορμής (spin) του, ενώ απουσία όρου μάζας παίρνουμε το άμαζο γκραβιτόνιο το οποίο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, τις δύο εγκάρσιες πολώσεις. Λόγω της διαφοράς στις προβλέψεις της μαζικής βαρύτητας με αυτές της γραμμικοποιημένης γενικής σχετικότητας, θα πρέπει η μάζα του γκραβιτονίου να είναι ακριβώς μηδέν και όχι να έχει έστω μια πολυ μικρή τιμή.

Ο Vainshtein [9] βρήκε ότι οι μη γραμμικότητες της θεωρίας της μαζικής βαρύτητας αυξάνονται όσο η μάζα του γκραβιτονίου ελλατώνεται. Στην περιοχή γύρω από μια πηγή μάζας Μ οπως ο Ήλιος υπάρχει μια κλίμακα μήκους γνωστή ως ακτίνα Vainshtein,

$$r_V \sim \left(\frac{M}{m^4 M_P^2}\right)^{\frac{1}{5}}. \tag{1.1}$$

Για αποστάσεις $r \leq r_V$ αρχίζουν να κυριαρχούν οι μη γραμμικότητες και οι προβλέψεις της θεωρίας χάνουν την συνέπειά τους.Όταν η μάζα του γκραβιτονιου τείνει στο μηδέν ($m \to 0$) τότε η ακτίνα Vainshtein τείνει στο άπειρο ($r_V \to \infty$), οπότε η γραμμική προσέγγιση αποτυγχάνει. Για παράδειγμα, αν πάρουμε Μ τη μάζα του Ήλιου και μια πολύ μικρή τιμή για τη μάζα του γκραβιτονίου (m$\sim 10^{-33} eV$) , δηλαδή της τάξης της σταθεράς του Hubble τότε η κλίμακα στην οποία θα πρέπει να αναζητήσουμε διορθώσεις στη βαρύτητα είναι της τάξης των $r_V \sim 10^{18}$ km, δηλαδή όσο το μέγεθος του γαλαξία Milky Way. Έτσι καταλαβαινουμε ότι ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας δεν επηρεάζει τα πειράματα ελέγχου της θεωρίας της βαρύτητας.

Τέλος, μια σχετικά πρόσφατη προσπάθεια τροποποίησης της γενικής σχετικότητας είναι αυτή των Dvali, Gabadadze, Porrati, το μοντέλο DGP [10]. Η θεωρία του κυβικού (cubic) galileon με την οποία θα ασχοληθούμε, περιγράφει τη δυναμική ενός βαθμωτού το οποίο επιζεί στο όριο αποσύζευξης του μοντέλου DGP. Συνοπτικά, η δράση του κυβικού Galileon περιέχει έναν όρο με παραγώγους ανώτερης τάξης που είναι κυβικός ως προς το βαθμωτό πεδίο και συνοδεύεται από μία σταθερά σύζευξης ή οποία θέτει την κλίμακα στην οποία η θεωρία γίνεται ισχυρώς συζεύξιμη. Η θεωρία αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $\pi(x) \to \pi(x) + b^\mu x_\mu + c$. Μία πολύ σημαντική ιδιότητα της θεωρίας είναι ότι οι εξισώσεις κίνησης που μας δίνει είναι δεύτερης τάξης. Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία δεν περιέχει πεδία φαντάσματα (ghost modes).

Κεφάλαιο 2

Η δράση Fierz-Pauli

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη δράση των Fierz-Pauli. Θα ξεκινήσουμε με την προσέγγιση του ασθενούς πεδίου και θα αναπτύξουμε τη δράση των Einstein-Hilbert γύρω από τον επίπεδο χωρόχρονο. Για να γίνει αυτό θα αναπτύξουμε πρώτα την ορίζουσα της μετρικής, και ύστερα τον τανυστη Riemann ώστε να καταλήξουμε στο γραμμικοποιημένο βαθμωτό Ricci. Κάνοντας αυτά τα βήματα θα καταλήξουμε στη δράση των Fierz-Pauli. Τέλος, θα προσθέσουμε όρο μάζας και θα βρούμε τις εξισώσεις ώστε να καταλήξουμε στον διαδότη, και θα τον συγκρίνουμε με τον διαδότη που προκύπτει όταν η μάζα είναι μηδενική. Όπως θα δούμε, παίρνοντας το όριο της μάζας να τείνει στο μηδέν ο διαδότης της μαζικής περίπτωσης δεν αντιστοιχεί σε αυτόν της διαταρακτικής γενικής σχετικότητας. Έτσι θα οδηγηθούμε στην ασυνέχεια vDVZ. Τέλος, εισάγουμε το τέχνασμα Stuckelberg με το οποίο βλέπουμε που οφείλεται η ασυνέχεια. Στο όριο που η μάζα του γκραβιτονίου τείνει στο μηδέν, δεν παίρνουμε το άμαζο γκραβιτονιο μόνο, αλλά παίρνουμε το άμαζο γκραβιτόνιο ένα άμαζο διανυσματικό και ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο.

2.1 Η δράση Fierz-Pauli

Για να καταλήξουμε στη δράση των Fierz-Pauli είναι σκόπιμο να μελετήσουμε τη δράση Einstein-Hilbert σε γραμμικό επίπεδο. Ξεκινάμε πρώτα με προσέγγιση ασθενούς πεδίου(weak field approximation)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι η μετρική του καμπυλωμένου χωρόχρονου, $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική του επίπεδου χωρόχρονου, δηλαδή η μετρική Minkowski, και $h_{\mu\nu}$ η απόκλιση από την επίπεδη μετρική. Οι δείκτες στους τανυστές ανεβαίνουν και κατεβαίνουν με την επίπεδη μετρική. Επίσης, δύο συνεχόμενοι ίδιοι δείκτες σημαίνουν άθροιση και η σύμβαση για τις μετρικές είναι η $(-+++)$. Η δράση Einstein-Hilbert είναι η

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R, \tag{2.2}$$

όπου η ποσότητα g είναι η ορίζουσα της μετρικής $g_{\mu\nu}$ και R το βαθμωτό Ricci. Επίσης, ορίζουμε ότι

$$\frac{1}{16\pi G} \equiv M_P^2, \tag{2.3}$$

όπου G είναι η σταθερά της βαρύτητας και c η ταχύτητα του φωτός.

Θα πρέπει να αναπτύξουμε και τους δύο αυτούς όρους ως προς $h_{\mu\nu}$ και θα κρατήσουμε τη δεύτερη τάξη ως προς $h_{\mu\nu}$ στη δράση. Παίρνοντας την ορίζουσα της μετρικής $g_{\mu\nu}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{g}) = \det(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{h}) = \exp(\log\det(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{h})) = \\ = \det(\boldsymbol{\eta})\exp(tr\log(1+(\boldsymbol{\eta})^{-1}\boldsymbol{h})).\end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου $(\boldsymbol{\eta})^{-1}$ είναι ο αντίστροφος πίνακας της επίπεδης μετρικής ο οποίος ισούται με τον $\boldsymbol{\eta}$. Η ποσότητα $(\boldsymbol{\eta})^{-1}\boldsymbol{h}$ θα μας δώσει το ίχνος του πίνακα $\boldsymbol{h}$. Θα το συμβολίζουμε με h. Ύστερα από μερικές πράξεις φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$\sqrt{-g} \simeq 1 + \frac{h}{2}. \tag{2.5}$$

Η σχέση 2.1 είναι σε συναλλοίωτη μορφή. Για να οδηγηθούμε στην ανταλλοίωτη μορφή της θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta^{\lambda}_{\nu}, \tag{2.6}$$

όπου το δεξί μέλος είναι το δέλτα του Kronecker. Η παραπάνω ταυτότητα, αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης, μας υποδεικνύει ότι

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Μένει τώρα να τροποποιηθεί ο δεύτερος όρος στη δράση Einstein-Hilbert, δηλαδή το βαθμωτό Ricci. Θα ορίσουμε πρώτα τον τανυστή Riemann και θα καταλήξουμε μέσω αυτού στο βαθμωτό Ricci. Ορίζουμε τον τανυστή Riemann ως [11]

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) + \\ + g_{\eta\sigma}\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right), \tag{2.8}$$

οπου τα Γ είναι τα σύμβολα Christoffel. Η εξάρτησή τους από τη μετρική δίνεται από την εξίσωση

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right). \tag{2.9}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.1 και 2.7 στη σχέση 2.9, έχουμε

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(\eta^{ad} - h^{ad})\left(\frac{\partial h_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial h_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial x^d}\right). \tag{2.10}$$

Το βαθμωτό Ricci θα σχηματιστεί από τη συστολή δύο μετρικών με τον τανυστή Riemann

$$R = g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \tag{2.11}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.1), (2.14) και (2.15), η (2.18) γίνεται

$$R = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\kappa} - h^{\mu\kappa}\right)\left(\eta^{\lambda\nu} - h^{\lambda\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) + \\ + \left(\eta^{\mu\kappa} - h^{\mu\kappa}\right)\left(\eta^{\lambda\nu} - h^{\lambda\nu}\right)\left(\eta_{\eta\sigma} + h_{\eta\sigma}\right)\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right), \tag{2.12}$$

όπου τα σύμβολα Christoffel δίνονται από τη σχέση 2.9. Τελικά για τη δράση θα έχουμε ότι

$$S = M_P^2 \int d^4x \left(1 + \frac{h}{2}\right)\left[\frac{1}{2}(\eta^{\mu\kappa} - h^{\mu\kappa})(\eta^{\lambda\nu} - h^{\lambda\nu}) \times \right. \\ \times \left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) + \\ \left. + (\eta^{\mu\kappa} - h^{\mu\kappa})(\eta^{\lambda\nu} - h^{\lambda\nu})(\eta_{\eta\sigma} + h_{\eta\sigma})\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right)\right]. \tag{2.13}$$

Συνολικά μέσα στη δράση πρέπει να κρατήσουμε όρους δεύτερης τάξης, οπότε, στη σχέση αυτή στον όρο των γινομένων των μετρικών με τα σύμβολα Christoffel θα κρατήσουμε τον όρο

$$\begin{aligned}\left(\eta^{\mu\kappa}-h^{\mu\kappa}\right)\left(\eta^{\lambda\nu}-h^{\lambda\nu}\right)\left(\eta_{\eta\sigma}+h_{\eta\sigma}\right)\left(\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}-\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right) &= \\ = \eta^{\mu\kappa}\eta^{\lambda\nu}\eta_{\eta\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}-\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right)+\mathcal{O}(h^3),\end{aligned} \tag{2.14}$$

διότι η παρένθεση με τα σύμβολα Christoffel είναι ήδη δεύτερης τάξης ως προς h και ο αποιοσδήποτε άλλος συνδιασμός θα μας έδινε παραπάνω τάξη. Στην προσέγγιση ασθενούς πεδίου τα σύμβολα Christoffel θα πάρουν τη μορφή

$$\Gamma^{a}_{bc}=\frac{1}{2}\eta^{ad}\left(\frac{\partial h_{db}}{\partial x^{c}}+\frac{\partial h_{dc}}{\partial x^{b}}-\frac{\partial h_{bc}}{\partial x^{d}}\right). \tag{2.15}$$

Στον όρο με τις δεύτερες παραγώγους του πεδίου θα κρατήσουμε και πρώτη και δεύτερη τάξη διότι θα πολλαπλασιαστεί με τον όρο της σχέσης 2.5 και θα κρατήσουμε συνολικά όρους δεύτερης τάξης. Ο όρος της 2.14 είναι ήδη δεύτερης τάξης, οπότε θα πολλαπλασιαστεί μόνο με την μονάδα του όρου της 2.5. Τροποποιώντας τον όρο με τα σύμβολα Christoffel φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\kappa}\eta^{\lambda\nu}\eta_{\eta\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}-\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right) &= \partial_{\nu}h^{\eta\nu}\partial^{\mu}h_{\eta\mu}-\partial_{\eta}h\partial_{\mu}h^{\eta\mu}+\frac{1}{4}\partial_{\nu}h\partial^{\nu}h- \\ &-\frac{3}{4}\partial_{\eta}h^{\mu\nu}\partial^{\eta}h_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial^{\eta}h^{\mu\nu}\partial_{\mu}h_{\eta\nu},\end{aligned} \tag{2.16}$$

όπου $\partial^{\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial x_{a}}$ και $\partial_{\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial x^{a}}$. Τροποποιώντας τον πρώτο όρο με τις παραγώγους παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{h}{2}\right)\frac{1}{2}(\eta^{\mu\kappa}-h^{\mu\kappa})(\eta^{\lambda\nu}-h^{\lambda\nu})\left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}}-\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\right) &= \\ = \frac{3}{2}\partial_{\mu}h\partial_{\nu}h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial_{\mu}h\partial^{\mu}h+\partial_{\mu}h^{\lambda\nu}\partial^{\mu}h_{\lambda\nu}-2\partial_{\nu}h^{\mu\nu}\partial_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\mu}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Παίρνοντας υπ'οψιν και τους όρους από τα σύμβολα Christoffel έχουμε τελικά

$$S=M_P^2\int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_{\mu}h\partial_{\nu}h^{\mu\nu}-\frac{1}{4}\partial_{\mu}h\partial^{\mu}h+\frac{1}{4}\partial_{\mu}h^{\lambda\nu}\partial^{\mu}h_{\lambda\nu}-\frac{1}{2}\partial^{\lambda}h^{\mu\nu}\partial_{\nu}h_{\lambda\mu}\right]. \tag{2.18}$$

Στην παρούσα εργασία έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό του Weinberg. Όμως, ο Weinberg [11] στον ορισμό για τον τανυστή Riemann χρησιμοποιεί ένα (-) σε σχέση με την υπόλοιπη βιβλιογραφία, συνεπώς, κάνοντας αλλαγή δεικτών και ανεβάζοντας και κατεβάζοντας δείκτες φτάνουμε στο αποτέλεσμα [8]

$$S = M_p^2 \int d^4x \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + \frac{1}{4}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\nu h^\mu{}_\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\nu\rho})(\partial^\nu h^{\mu\rho}) \right]. \tag{2.19}$$

Τώρα προσθέτουμε όρο μάζας για το γκραβιτόνιο της μορφής

$$S_{FP,m} = -\frac{1}{4} M_p^2 m^2 \int d^4x \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2 \right). \tag{2.20}$$

Οποιοσδήποτε άλλος συνδιασμός εκτός των $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ και h^2 θα οδηγούσε σε αστάθειες [12, 13]. Επίσης η επιλογή των προσήμων αυτών είναι η μοναδική που οδηγεί σε μία θεωρία χωρίς φαντάσματα (ghost modes) [14]. Έτσι έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned} S_{PF} = S + S_{PF,m} = M_p^2 \int d^4x \Big[& -\frac{1}{4}(\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + \frac{1}{4}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\nu h^\mu{}_\nu) + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\nu\rho})(\partial^\nu h^{\mu\rho}) - \frac{1}{4} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \Big]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Επίσης προσθέτουμε μία ζεύξη του γκραβιτονίου με τον τανυστή ενέργειας - ορμής, οπότε η δράση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} S_{PF} = M_p^2 \int d^4x \Big[& -\frac{1}{4}(\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + \frac{1}{4}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\nu h^\mu{}_\nu) + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\nu\rho})(\partial^\nu h^{\mu\rho}) - \frac{1}{4} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) + M_P^{-2} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \Big], \end{aligned} \tag{2.22}$$

όπου $T_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής. Η παραπάνω σχέση ονομάζεται δράση Fierz-Pauli και ειναι τετραγωνική ως προς το πεδίο $h_{\mu\nu}$.

2.2 Ασυνέχεια vDVZ

Η ασυνέχεια vDVZ όπως θα δούμε γίνεται εμφανής στη μορφή του διαδότη της μαζικής βαρύτητας. Για να υπολογίσουμε το διαδότη θα πρέπει πρώτα να πάρουμε τη μεταβολή (variation) της δράσης για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης. Παίρνοντας τη μεταβολή της δράσης έχουμε

$$\delta S_{PF} = M_P^2 \int d^4x \Big[-\frac{1}{2}\partial_\mu(\delta h_{\nu\rho})\partial^\mu h^{\nu\rho} + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu(\delta h) - \frac{1}{2}\eta_{\kappa\lambda}\partial_\mu(\delta h^{\kappa\lambda})\partial^\nu h^\mu{}_\nu - \\ - \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\nu(\delta h^\mu{}_\nu) + \frac{1}{2}\partial_\mu(\delta h_{\nu\rho})\partial^\nu h^{\mu\rho} + + \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu(\delta h^{\mu\rho}) - \\ - \frac{1}{2}m^2 h_{\mu\nu}(\delta h^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}m^2 h(\delta h) + M_P^{-2} T_{\mu\nu}(\delta h^{\mu\nu}) \Big], \quad (2.23)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}$. Μετά από κατάλληλη αλλαγή δεικτών και μερικές ολοκληρώσεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\delta S = M_P^2 \int d^4x \Big[\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\kappa\partial^\lambda h^\kappa{}_\lambda - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h - \frac{1}{2}\partial_\nu\partial^\rho h_{\mu\rho} - \\ - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\rho h_{\nu\rho} - \frac{1}{2}m^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}h + M_P^{-2}T_{\mu\nu} \Big](\delta h^{\mu\nu}). \quad (2.24)$$

Απαιτώντας η μεταβολή της δράσης να μηδενίζεται, παίρνουμε την εξίσωση κίνησης

$$-\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h) + M_P^{-2}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\rho\partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \Box h) + \frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\nu h^\rho{}_\mu + \frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\mu h^\rho{}_\nu. \quad (2.25)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης αυτής είναι ο γραμμικοποιημένος τανυστής Einstein. Δρώντας με μία παράγωγο στην 2.25 και θεωρώντας ότι ο τανυστής ενέργειας ορμής διατηρείται ($\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$), βρίσκουμε ότι

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h. \quad (2.26)$$

Ο τανυστής $h_{\mu\nu}$ είναι ένας πίνακας 4×4 με δεκαέξι στοιχεία, όμως λόγω του γεγονότος ότι είναι συμμετρικός τα ανεξάρτητα στοιχεία του είναι δέκα. Η 2.26 είναι τέσσερις ανεξάρτητες εξισώσεις για τις συνιστώσεις του $h_{\mu\nu}$, άρα μένουμε με έξι ανεξάρτητες συνιστώσες. Γυρνώντας στη σχέση 2.26, αν την παραγωγίσουμε παίρνουμε ότι

$$\partial^\rho\partial^\sigma h_{\rho\sigma} = \Box h. \quad (2.27)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\eta_{\mu\nu}$ την εξίσωση κίνησης 2.25 θα πάρουμε το ίχνος (trace) της. Ύστερα από λίγες πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$h = -\frac{2}{3}\frac{T}{m^2 M_P^2}. \quad (2.28)$$

Από την εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι το ίχνος του $h_{\mu\nu}$ μπορεί να προσδιοριστεί αλγεβρικά οπότε δεν διαδίδεται, δηλαδή δεν είναι ανεξάρτητος βαθμός ελευθερίας. Με τον προσδιορισμό του ίχνους έχουμε άλλον έναν δεσμό, άρα τελικά οι βαθμοί ελευθερίας του μαζικού γκραβιτονίου είναι πέντε. Παραγωγίζοντας δύο φορές την εξίσωση (2.38) παίρνουμε

$$\partial_\mu \partial_\nu h = -\frac{2}{3}\frac{\partial_\mu \partial_\nu T}{m^2 M_P^2}. \tag{2.29}$$

Από την εξίσωση κίνησης και την εξίσωση 2.29 έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m^2\left(h_{\mu\nu}+\frac{2}{3}\frac{T\eta_{\mu\nu}}{m^2M_P^2}\right)+\frac{T_{\mu\nu}}{M_P^2}=&\frac{1}{3}\frac{\partial_\mu\partial_\nu T}{m^2M_P^2}\\ &-\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\nu h^\rho_\mu+\frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\mu h^\rho_\nu. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ύστερα από λίγες πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-\frac{1}{2}(\Box - m^2)h_{\mu\nu} = \frac{1}{M_P^2}(T_{\mu\nu}-\frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu}) + \frac{1}{3}\frac{\partial_\mu\partial_\nu T}{m^2M_P^2}. \tag{2.31}$$

Θα επιχειρήσουμε μέσω της εξίσωσης αυτής να βρούμε τον διαδότη. Χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό Fourier που μας πηγαίνει στο χώρο των ορμών. Δηλαδή,

$$h_{\mu\nu}(x^\rho) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik^\mu x_\mu}\tilde{h}_{\mu\nu}(k^\rho). \tag{2.32}$$

Ο τανυστής $T_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός οπότε μπορεί να γραφεί σαν

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\nu\mu} = T^{\rho\sigma}\big(\frac{1}{2}\eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\big). \tag{2.33}$$

Επιπροσθέτως, ορίζουμε

$$T^{\rho\sigma}(x^\rho) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik^\mu x_\mu}\tilde{T}^{\rho\sigma}(k^\rho). \tag{2.34}$$

Άρα η εξίσωση 2.31 γίνεται

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2+m^2}\left[\eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu}+\eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu}-\frac{2}{3}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}-\frac{2}{3m^2}\eta_{\rho\sigma}k_\mu k_\nu\right]\frac{\tilde{T}^{\rho\sigma}}{M_P^2}. \tag{2.35}$$

Οπότε ο διαδότης είναι ο

$$D^{(m\neq 0)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{k^2+m^2}\left[\eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu}+\eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu}-\frac{2}{3}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}-\frac{2}{3}\eta_{\rho\sigma}\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right]. \tag{2.36}$$

Στην άμαζη περίπτωση ισχύει ότι η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \tag{2.37}$$

Αυτό ισχύει και σε περίπτωση που έχουμε μία διατηρούμενη πηγή. Πράγματι, αν επεξεργαστούμε τον όρο πηγής θα έχουμε

$$\int d^4x \; h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \to \int d^4x \; h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + 2 \int d^4x \; \partial_\mu \xi_\nu T^{\mu\nu}, \tag{2.38}$$

έχοντας χρησιμοποιήσει ότι ο τανυστής της πηγής είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή δεικτών. Ο τελευταίος όρος θα μας δώσει

$$\int d^4x \; \partial_\mu \xi_\nu T^{\mu\nu} = - \int d^4x \; \xi_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.39}$$

όπου έχουμε μηδενίσει την ολική απόκλιση. Άρα συνολικά η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς. Χρειάζεται να ορίσουμε μία βαθμίδα. Επιλέγουμε τη βαθμίδα de Donder

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h = 0. \tag{2.40}$$

Ξέρουμε ότι το γκραβιτόνιο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Αυτό διότι έχουμε αρχικά τις δέκα ανεξάρτητες συνιστώσες του $h_{\mu\nu}$. Από τη χαμιλτονιανή προκύπτει ότι οι τέσσερις συνιστώσες του τανυστή δεν είναι δυναμικές, οπότε δεν είναι ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας και άρα, φτάνουμε στις έξι ανεξάρτητες συνιστώσες. Επιπλέον, λόγω της συνθήκης de Donder παίρνουμε τέσσερις εξισώσεις δεσμών. Συνεπώς, συνολικά έχουμε δύο ανεξάρτητες συνιστώσες για τον τανυστή $h_{\mu\nu}$. Γυρνώντας στις εξισώσεις κίνησης, θα πάρουμε για την άμαζη περίπτωση ότι

$$\begin{aligned} M_P^{-2} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho \partial_\mu h^\rho_\nu + \\ + \frac{1}{2}\partial_\rho \partial_\nu h^\rho_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \Box h). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Μέσω της συνθήκης 2.40 η εξίσωση κίνησης απλοποιείται στην

$$\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\Box h = -M_P^{-2} T_{\mu\nu}. \tag{2.42}$$

Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης αυτής βρίσκουμε ότι

$$\Box h = 2 M_P^{-2} T, \tag{2.43}$$

όπου T είναι το ίχνος του τανυστή της πηγής. Αντικαθιστώντας την 2.43 στην εξίσωση κίνησης καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\Box h_{\mu\nu} = -M_P^{-2}\big(2T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}T\big). \tag{2.44}$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι ο $T_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός, τον γράφουμε στη μορφή

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\nu\mu} = T^{\kappa\lambda}\big(\frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}\big). \tag{2.45}$$

Άρα η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\Box h_{\mu\nu} = -M_P^{-2}\big(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}\big)T^{\kappa\lambda}. \tag{2.46}$$

Πηγαίνοντας στην εξίσωση στο χώρο των ορμών για να βρούμε το διαδότη, η εξίσωση κίνησης μετατρέπεται στην

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}\big(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}\big)M_P^{-2}\tilde{T}^{\kappa\lambda}. \tag{2.47}$$

Συνεπώς, ο διαδότης είναι ο

$$D^{(m=0)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{k^2}\big(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\big), \tag{2.48}$$

ενώ είχαμε βρει για τη μαζική περίπτωση ότι

$$D^{(m\neq 0)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{k^2+m^2}\left(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} - \frac{2}{3}\eta_{\rho\sigma}\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right).$$

Παίρνοντας το όριο που η μάζα τεινει στο μηδέν στο μαζικό διαδότη, βλέπουμε ότι ύπαρχει πρόβλημα απειρισμού στον τελευταίο όρο. Όμως, επείδη ο τανυστής ενέργειας διατηρείται, ισχύει στον χώρο των ορμών ότι $k_\mu T^{\mu\nu}(k) = 0$. Συνεπώς, υπολογίζοντας ένα πλάτος σκέδασης ο τελευταίος όρος θα μας δώσει μηδέν. Η ουσιώδης διαφορά ανάμεσα στους δύο διαδότες βρίσκεται στον τρίτο όρο. Στον άμαζο διαδότη ο τρίτος όρος έχει συντελεστή -1, ενώ στον μαζικό διαδότη $-\frac{2}{3}$. Η διαφορά αυτή είναι ανεξάρτητη της μάζας του γκραβιτονίου και ονομάζεται ασυνέχεια vDVZ. Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρή και να είναι η μάζα του γκραβιτονίου, η θεωρία των Fierz-Pauli δίνει διαφορετικά αποτελέσματα από την γραμμικοποιημένη βαρύτητα.

Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα πλάτος A σε μηδενική τάξη(tree level) μεταξύ δύο ρευμάτων. Έχουμε

$$A = M_P^2 \int d^4x \; S^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(T)(x), \tag{2.49}$$

όπου $h_{\mu\nu}(T)$ είναι το γκραβιτονιο σε μηδενική τάξη(tree level) το οποίο γεννάται απο τη διατηρούμενη πηγή $T^{\rho\sigma}$, και η ποσότητα M_P είναι παράμετρος μάζας. Το πεδίο δίδεται από τη σχέση

$$h_{\mu\nu}(T)(x) = M_P^{-2} \int d^4x' \; D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')T^{\rho\sigma}(x'). \tag{2.50}$$

Άρα το πλάτος συνολικά γίνεται

$$A = \int d^4xd^4x' \; S^{\mu\nu}(x)D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')T^{\rho\sigma}(x'). \tag{2.51}$$

Ύστερα από μερικές πράξεις φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$A^{(m=0)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; \tilde{S}^{\mu\nu}(k)D^{(m=0)}_{\mu\nu\rho\sigma}(-k)\tilde{T}^{\rho\sigma}(-k). \tag{2.52}$$

Αντικαθιστώντας τον άμαζο διαδότη με το ισοδύναμο του, παίρνουμε ότι

$$A^{(m=0)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; \frac{2}{k^2} \left(\tilde{S}^{\mu\nu}(k)\tilde{T}_{\mu\nu}(-k) - \frac{1}{2}\tilde{S}(k)\tilde{T}(-k) \right). \tag{2.53}$$

Κάνοντας τα ίδια βήματα για τον διαδότη με μάζα φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$A^{(m\neq0)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; \frac{2}{k^2} \left(\tilde{S}^{\mu\nu}(k)\tilde{T}_{\mu\nu}(-k) - \frac{1}{3}\tilde{S}(k)\tilde{T}(-k) \right), \tag{2.54}$$

στο όριο των υψηλών ενεργείων. Θεωρώντας μη σχετικιστικές πηγές τέτοιες ώστε $\tilde{S}^{\mu\nu} \propto diag(M_1, 0, 0, 0)$ και $\tilde{T}_{\mu\nu} \propto diag(M_2, 0, 0, 0)$, και η απόσταση μεταξύ τους να είναι μικρή σε σχέση με το μήκος κύματος Compton του γκραβιτονίου(που όταν η μάζα του τείνει στο μηδέν,το μήκος κυματός του τείνει στο άπειρο), καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$A^{(m=0)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}M_1M_2, \tag{2.55}$$

$$A^{(m\neq0)} = \frac{4}{3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}M_1M_2. \tag{2.56}$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι

$$A^{(m\neq0)} = \frac{4}{3}A^{(m=0)}. \tag{2.57}$$

Το δυναμικό που δημιουργείται στην περίπτωση της μαζικής περίπτωσης είναι μεγαλύτερο από αυτό της άμαζης κατά έναν παράγοντα τέσσερα τρίτα. Όσοδήποτε μικρή τιμή πάρουμε για τη μάζα του γκραβιτονίου, φτάνοντας στο άμαζο όριο, η διαφορά αυτή δεν αλλάζει. Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, αυτό οφείλεται στο ότι το άμαζο γκραβιτόνιο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας ενώ το μαζικό γκραβιτόνιο έχει πέντε βαθμούς ελευθερίας.

2.3 Το τέχνασμα του Stuckelberg

Θα δείξουμε που ακριβώς οφείλεται αυτή η ασυνέχεια, όμως δεν θα ξεκινήσουμε πρώτα με τη βαρύτητα αλλά με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Θα πάρουμε πρώτα τη δράση όπου θα βάλουμε μάζα στο φωτόνιο και θα δούμε τι γίνεται στο όριο που η μάζα τείνει στο μηδέν. Θα δούμε ότι στο άμαζο όριο οι βαθμοί ελευθερίας δεν διατηρούνται και θα δείξουμε το τέχνασμα για να αποκαταστήσουμε τον αριθμό τους. Ύστερα θα δούμε πως αυτό το τέχνασμα εφαρμόζεται στη βαρύτητα.

2.4 Το διανυσματικό πεδίο

Ξεκινάμε με τη δράση

$$S = \int d^dx \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \right), \tag{2.58}$$

όπου ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός, ο δεύτερος είναι ο όρος μάζας και ο τρίτος είναι η σύζευξη του φωτονίου με μία πηγή. Ο όρος μάζας σπάει τη συμμετρία του μετασχηματσμού $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ που υπάρχει στον κλασσικό ηλεκτρομαγνητισμό. Το πεδίο Proca περιέχει συνολικά τρεις βαθμούς ελευθερίας στις $D = 4$ διαστάσεις. Το πεδίο A_μ όμως έχει τέσσερις συνιστώσες. Για να δούμε τι συμβαίνει στρεφόμαστε στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό του προβλήματος. Βρίσκοντας τα συζυγή πεδία του A_μ βλέπουμε ότι το συζυγές πεδίο της συνιστώσας A_0 είναι μηδενικό και αυτό διότι η λαγκραντζιανή δεν περιέχει τη χρονική παράγωγο της συνιστώσας αυτής. Άρα, το A_0 δεν είναι πραγματικός βαθμός ελευθερίας. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν είναι οι

$$\Box A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - m^2 A^\nu + J^\nu = 0. \tag{2.59}$$

Αυτη μπορεί να γραφεί ως

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu + J^\nu = 0. \tag{2.60}$$

Μπορούμε να την απλοποιήσουμε θέτοντας την πηγή ίση με το μηδέν. Επίσης παίρνοντας για $\nu = 0$ την εξίσωση έχουμε

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = m^2 A^0. \tag{2.61}$$

Συνεπώς, η συνιστώσα A_0 δεν είναι δυναμική [15]. Στη δράση (2.96) παίρνοντας το όριο που η μάζα τείνει στο μηδέν, παίρνουμε τον κλασικο ηλεκτρομαγνητισμό. Ξέρουμε ότι το φωτόνιο έχει 2 βαθμούς ελευθερίας στις τέσσερις διαστάσεις, οι οποίοι προκύπτουν παίρνοντας τις εξισώσεις κίνησης συν μία συνθήκη βαθμίδας, π.χ βαθμίδες Lorentz, Coulomb. Βλέπουμε ότι το όριο της μάζας να τείνει στο μηδέν δεν είναι ομαλό διότι το φωτόνιο με μάζα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας ενώ το άμαζο φωτόνιο, στο οποίο καταλήγουμε, έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Δηλαδή, χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας στη μετάβαση από το μαζικό φωτόνιο στο άμαζο.

Το τέχνασμα του Stuckelberg ξεκινά εισάγοντας ένα νέο βαθμωτό πεδίο φ με τέτοιο τρόπο ώστε η νέα δράση να έχει συμμετρία βαθμίδας αλλά να είναι ισοδύναμη με την αρχική δράση. Κάνουμε την αντικατάσταση

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \phi. \tag{2.62}$$

Αυτός δεν είναι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας, αλλά δημιουργούμε μία καινούρια δράση εισάγοντας το πεδίο φ. Ο τανυστής $F^{\mu\nu}$ είναι αναλλοίωτος κάτω από αυτή την αντικατάσταση, αφού αυτή μοιάζει με μετασχηματισμό βαθμίδας. Η νέα δράση παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^d x \, \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 (A_\mu + \partial_\mu \phi)^2 + A_\mu J^\mu - \phi \partial_\mu J^\mu \right), \tag{2.63}$$

όπου ο τελευταίος όρος προέκυψε από ολοκλήρωση κατά μέλη. Η νέα δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \qquad \delta \phi = -\Lambda, \tag{2.64}$$

με $\Lambda = \Lambda(x)$. Αν θέσουμε φ=0 θα δούμε πως θα καταλήξουμε στην αρχική. Όμως, δεν μπόρούμε να το κάνουμε έτσι αυθαίρετα αυτό διότι παίρνοντας την μεταβολή της δράσης στην 2.63, θα έχουμε και μία εξίσωση κίνησης για το πεδίο φ. Έτσι, θέτοντας κατέυθείαν φ=0 χάνουμε πληροφορία. Η δράση 2.63 έχει για εξισώσεις κίνησης τις

$$\Box A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - m^2 A^\nu - m^2 \partial^\nu \phi + J^\nu = 0, \quad m^2 \partial_\mu A^\mu + m^2 \Box \phi - \partial_\mu J^\mu = 0, \tag{2.65}$$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις για τα A_ν και φ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση προκύπτει παίρνοντας την απόκλιση της πρώτης. Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $\phi = 0$ στη δράση 2.63 και να πάρουμε τη δράση της 2.58. Συνεπώς, αυτό σημαίνει ότι οι δράσεις 2.58, 2.63 είναι ισοδύναμες. Οι δύο θεωρίες περιγράφουν ένα σωμάτιο μαζικό με ιδιοστροφορμή (spin) 1 στις $D = 4$ διαστάσεις. Η τελευταία δράση το επιτυγχάνει αυτό χρησιμοποιώντας περισσότερα πεδία και περισσότερες συμμετρίες βαθμίδας.

Επαναορίζουμε τώρα το πεδίο φ έτσι ώστε να κανονικοποιήσουμε τον κινητικό όρο

$$\phi \to \frac{1}{m} \phi. \tag{2.66}$$

Η δράση τώρα γίνεται

$$S = \int d^dx \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - mA_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + A_\mu J^\mu - \frac{1}{m}\phi \partial_\mu J^\mu \right), \tag{2.67}$$

με συμμετρία βαθμίδας την

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \qquad \delta\phi = -m\Lambda. \tag{2.68}$$

Θεωρούμε το άμαζο όριο $m = 0$. Πρέπει η πηγή να διατηρείται διότι αν δεν συμβαίνει αυτό τότε το βαθμωτό πεδίο συζεύγνυται ισχυρά με την πηγή και το όριο $m \to 0$ δεν υπάρχει. Οπότε θεωρώντας μία πηγή που διατηρείται, η δράση παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^dx \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + A_\mu J^\mu \right), \tag{2.69}$$

και η συμμετρία βαθμίδας παίρνει τη μορφή

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \qquad \delta\phi = 0. \tag{2.70}$$

Στη μορφή που είναι η 2.69 βλέπουμε ότι το πεδίο A_μ έχει αποσυζευχθεί από το βαθμωτό ενώ παραμένει συζευγμένο με την πηγή με το βαθμωτό να είναι εντελώς αποσυζευγμένο. Το σημαντικό γεγονός είναι ότι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας διατηρείται στο άμαζο όριο. Η δράση 2.69 περιγράφει ένα άμαζο διανυσματικό πεδίο με δύο βαθμούς ελευθερίας και ένα βαθμωτό πεδίο με έναν βαθμό ελευθερίας στις τέσσερις διαστάσεις. Οι δύο βαθμοί ελευθερίας από το άμαζο πεδίο είναι οι εγκάρσιες πολώσεις του μαζικού διανυσματικού πεδίου της 2.58 ενώ ο τρίτος βαθμός ελευθερίας που προέρχεται από το βαθμωτό πεδίο είναι η διαμήκης πόλωση του μαζικού διανυσματικού πεδίου.

Ορίζουμε μία βαθμίδα που μοιάζει με την βαθμίδα Lorentz και είναι της μορφής

$$\partial_\mu A^\mu + m\phi = 0. \tag{2.71}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις της 2.70 στην 2.71 βρίσκουμε ότι η παράμετρος Λ θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\left(\Box - m^2\right)\Lambda = 0. \tag{2.72}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F = \partial_\mu A^\mu + m\phi, \tag{2.73}$$

και λόγω τη συνθήκης 2.71, ισχύει

$$F = 0. \tag{2.74}$$

Η συνθήκη αυτή είναι ένα ολόνομος δεσμός, δηλαδή εξαρτάται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες και δεν έχει εξάρτηση και από τις παραγώγους αυτών. Λόγω του ότι είναι ολόνομος δεσμός μπορούμε να τον προσθέσουμε στη λαγκραντζιανή μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange. Προσθέτοντας τον όρο της συνθήκης στη δράση οι εξισώσεις κίνησης που θα πάρουμε θα είναι οι ίδιες με αυτές που θα παίρναμε από την παλιά δράση επιβάλλοντας στο τέλος την συνθήκη βαθμίδας.

Ο όρος της συνθήκης δίδεται από τη δράση

$$S_{GF} = -\int d^D x \left(\partial_\mu A^\mu + m\phi\right)^2. \tag{2.75}$$

Προσθέτοντας τον όρο αυτό στην 2.67, την διαγωνοποιούμε. Δηλαδή δεν περιέχει πια όρους που να αναμειγνύουν και τα δύο πεδία. Έτσι

$$S + S_{GF} = \int d^D x \left(\frac{1}{2}A_\mu(\Box - m^2)A^\mu + \frac{1}{2}\phi(\Box - m^2)\phi + A_\mu J^\mu - \frac{1}{m}\phi\partial_\mu J^\mu\right), \tag{2.76}$$

η οποία θα είναι ίση με

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{2}A_\mu(\Box - m^2)A^\mu + \frac{1}{2}\phi(\Box - m^2)\phi + A_\mu J^\mu\right), \tag{2.77}$$

για διατηρούμενη πηγή. Παίρνουμε τη μεταβολή της δράσης για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης. Αυτές είναι οι εξής

$$\left(\Box - m^2\right) A^\mu + J^\mu = 0, \tag{2.78}$$

$$\left(\Box - m^2\right) \phi = 0, \tag{2.79}$$

για τα πεδία A_μ και φ αντίστοιχα. Από τις εξισώσεις 2.78 και 2.79 βρισκουμε ότι οι διαδότες είναι οι

$$iD_{\mu\nu}(p) = -\frac{i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2}, \qquad iD(p) = -\frac{i}{p^2 + m^2}, \tag{2.80}$$

για το διανυσματικό και το βαθμωτό πεδίο αντίστοιχα.

2.5 Η βαρύτητα κατά Stuckelberg

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση της μαζικής βαρύτητας. Αυτή όπως δείξαμε προηγουμένως περιγράφεται από τη δράση [4]

$$S = \int d^D x \left(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}m^2\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\right) + \kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right), \tag{2.81}$$

όπου

$$L_{(m=0)} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h, \quad (2.82)$$

και

$$\kappa = \sqrt{8\pi G}. \quad (2.83)$$

Η σταθερά G είναι είναι η νευτώνεια σταθερά της βαρύτητας και η σταθερά c είναι η ταχύτητα του φωτός. Όπως δείξαμε προηγουμένως η δράση αυτή περιγράφει ένα γκραβιτόνιο με μάζα το οποίο έχει πέντε βαθμούς ελευθερίας στις πέντε διαστάσεις. Η λαγκραντζιανή με τους όρους χωρίς μάζα είναι αναλλοίωτη κάτω απο μετασχηματισμούς της μορφής

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (2.84)$$

Με την παρουσία όρου μάζας βλέπουμε ότι η συμμετρία αυτή πια δεν υφίσταται.

Θα εισάγουμε ένα πεδίο Stuckelberg A_μ, όπως είχαμε το βαθμωτό στον ηλεκτρομαγνητισμό προηγουμένως, κάνοντας την αντικατάσταση

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu. \quad (2.85)$$

Επισημαίνουμε και παλι ότι αυτός δεν είναι μετασχηματισμός βαθμίδας αλλά η δημιουργία μιας νέας λαγκραντζιανής που περιέχει το πεδίο A_μ. Οι όροι που δεν περιέχουν μάζα παραμένουν αναλλοίωτοι διότι η αντικατάσταση αυτή μοιάζει με το μετασχηματισμό 2.84. Η νέα δράση παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^D x \, \big(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}m^2\big(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\big) - \frac{1}{2}m^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m^2 h_{\mu\nu}\big(\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu\big) + \\ + 2m^2 h\partial_\mu A^\mu + \kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - 2\kappa A_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu}\big), \quad (2.86)$$

όπου έχουμε ολοκληρώσει κατά μέλη τον τελευταίο όρο και έχουμε μηδενίσει την ολική απόκλιση. Ο τανυστής $F_{\mu\nu}$ ορίζεται ως

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.87)$$

Η νέα συμμετρία είναι η

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \qquad \delta A_\mu = -\xi_\mu. \quad (2.88)$$

Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν είναι οι εξής

$$\Box h^{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\lambda \partial^\mu h^{\nu\lambda} + \partial^\mu \partial^\nu h + \partial_\lambda \partial_\kappa h^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu} - \Box h\eta^{\mu\nu} - m^2 h^{\mu\nu} + m^2 h\eta^{\mu\nu} - \\ - m^2 \partial^\mu A^\nu - m^2 \partial^\nu A^\mu + 2m^2 \partial_\kappa A^\kappa \eta^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.89)$$

και

$$2m^2\Box A^\nu - 2m^2\partial_\mu\partial^\nu A^\mu + 2m^2\partial_\mu h^{\mu\nu} - 2m^2\partial^\nu h - 2\kappa\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \qquad (2.90)$$

για τα $h_{\mu\nu}$ και A_ν αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη παίρνοντας την απόκλιση αυτής. Οπότε, θέτοντας εξαρχής $A_\mu = 0$ παίρνουμε τη δράση της 2.81 και δεν χάνουμε την πληροφορία της εν δυνάμει χαμένης εξίσωσης ως προς A_ν. Άρα, οι δύο δράσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επανορίσουμε το διανυσματικό πεδίο μέσω της σχέσης $A_\mu \to \frac{1}{m}A_\mu$ ώστε να κανονικοποιήσουμε τον κινητικο όρο του διανυσματικου πεδίου. Κάνοντας το αυτό παίρνουμε

$$S = \int d^Dx\, \big(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}m^2\big(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\big) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - mh_{\mu\nu}\big(\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu\big) + \\ + 2mh\partial_\mu A^\mu + +\kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{2\kappa}{m}A_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}\big). \qquad (2.91)$$

Παίρνοντας το όριο $m \to 0$ και αφού πρώτα θεωρήσουμε ότι η πηγή διατηρείται, καταλήγουμε στη δράση

$$S = \int d^Dx\, \left(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right). \qquad (2.92)$$

Η δράση αυτή περιγράφεται από ένα άμαζο γκραβιτόνιο και ένα άμαζο διανυσματικό. Οπότε συνολικά έχουμε τέσσερις βαθμούς ελευθερίας, δύο για κάθε ένα σωμάτιο στις τέσσερις διαστάσεις. Βλέπουμε ότι το όριο αυτό δεν είναι ομαλό διότι χάνουμε έναν βαθμό ελευθερίας από τους αρχικούς πέντε. Ξανακάνουμε την ίδια διαδικασία εισάγοντας ένα βαθμωτό πεδίο φ για το οποίο θα ισχύει

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\phi. \qquad (2.93)$$

Η δράση 2.86 παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^Dx\, \big(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}m^2\big(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\big) - \frac{1}{2}m^2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m^2h_{\mu\nu}\big(\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu\big) + \\ + 2m^2h\partial_\mu A^\mu - 2m^2\big(h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi - h\Box\phi\big) + \kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - 2\kappa A_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu} + 2\kappa\phi\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}\big), \qquad (2.94)$$

όπου έχουμε ολοκληρώσει κατά μέλη τον τελευταίο όρο. Η δράση αυτη έχει σαν συμμετρίες τις

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \qquad \delta A_\mu = -\xi_\mu, \qquad (2.95)$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \qquad \delta\phi = -\Lambda. \tag{2.96}$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι εξής

$$\Box h^{\mu\nu} - \partial_\lambda\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\lambda\partial^\mu h^{\nu\lambda} + \partial^\mu\partial^\nu h + \partial_\lambda\partial_\kappa h^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu} - \Box h\eta^{\mu\nu} - m^2 h^{\mu\nu} + m^2 h\eta^{\mu\nu} -$$
$$- m^2\partial^\mu A^\nu - m^2\partial^\nu A^\mu + 2m^2\partial_\lambda A^\lambda\eta^{\mu\nu} - 2m^2\partial^\mu\partial^\nu\phi + 2m^2\eta^{\mu\nu}\Box\phi + \kappa T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.97}$$

$$2m^2\Box A^\nu - 2m^2\partial_\mu\partial^\nu A^\mu + 2m^2\partial_\mu h^{\mu\nu} - 2m^2\partial^\nu h - 2\kappa\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.98}$$

$$- 2m^2\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + 2m^2\Box h + 2\kappa\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.99}$$

για τα $h_{\mu\nu}$, A_ν και φ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η τρίτη εξίσωση προκύπτει από την πρώτη παίρνοντας δύο φορές την απόκλιση αυτης. Άρα δεν χάνουμε πληροφορία από την τρίτη εξίσωση, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη βαθμίδα $\phi = 0$, και συνεπώς, η δράση να είναι ισοδύναμη με την 2.91.

Επανακλιμακώνουμε τα πεδία A_μ και ϕ μέσω των μετασχηματισμών

$$A_\mu \to \frac{1}{m}A_\mu, \qquad \phi \to \frac{1}{m^2}\phi. \tag{2.100}$$

Η δράση τώρα παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^Dx\ \Big(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}m^2\big(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\big) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - mh_{\mu\nu}\big(\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu\big) +$$
$$+ 2mh\partial_\mu A^\mu - 2\big(h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi - h\Box\phi\big) + \kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{2}{m}\kappa A_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{2}{m^2}\kappa\phi\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}\Big), \tag{2.101}$$

Η νέα δράση έχει ως συμμετρίες τις

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \qquad \delta A_\mu = -m\xi_\mu, \tag{2.102}$$

$$\delta A_\mu = m\partial_\mu\Lambda, \qquad \delta\phi = -m^2\Lambda, \tag{2.103}$$

και απορροφώντας τη σταθερά m μέσα στη σταθερα Λ, παίρνουμε

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \qquad \delta A_\mu = -\xi_\mu, \tag{2.104}$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda, \qquad \delta\phi = -m\Lambda, \tag{2.105}$$

Τώρα θα θεωρήσουμε το όριο $m \to 0$. Για να μην έχουμε απειρισμό θα πρέπει η πηγή να διατηρείται. Άρα οι δύο τελευταίοι όροι μηδενίζονται, και έτσι καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$S = \int d^Dx\ \Big(L_{(m=0)} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\big(h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi - h\Box\phi\big) + \kappa h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\Big). \tag{2.106}$$

Η λαγκρατζιανή αυτή περιέχει τους πέντε ζητούμενους βαθμούς ελευθερίας στις τέσσερις διαστάσεις , δύο από το άμαζο γκραβιτόνιο, δύο από το άμαζο διανυσματικό και ένας από το βαθμωτό. Βέβαια αυτή η λαγκρατζιανή δεν είναι διαγωνοποιημένη, καθώς έχουμε μίξη του γκραβιτονίου με το βαθμωτό. Οπότε θα πρέπει να τη διαγωνοποιήσουμε. Για να γίνει αυτό θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} + \pi\eta_{\mu\nu}, \tag{2.107}$$

όπου π είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Η μετασχηματισμένη λαγκρατζιανή ως προς το άμαζο κομμάτι είναι η

$$L_{(m=0)}(h=0) = L_{(m=0)}(h') + \big(D-2\big)\big(\partial_\mu\pi\partial^\mu h' - \partial_\mu\pi\partial_\nu h'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\big(D-1\big)\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi\big), \tag{2.108}$$

όπου D είναι οι διαστάσεις του χωροχρόνου. Θεωρώντας ότι το πεδίο π δίνεται από τη σχέση

$$\pi = \frac{2}{D-2}\phi, \tag{2.109}$$

η λαγκρατζιανή παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^D x\ \big(L_{(m=0)}(h') - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\frac{D-1}{D-2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \kappa h'_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + \frac{2}{D-2}\kappa\phi T\big), \tag{2.110}$$

με νέες συμμετρίες τις

$$\delta h'_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \qquad \delta A_\mu = 0, \tag{2.111}$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda, \qquad \delta\phi = 0. \tag{2.112}$$

Στη νέα αυτή μορφή βλέπουμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι συζευγμένο με το ίχνος του τανυστή ενέργειας όρμης. Αυτή η σύζευξη είναι το αίτιο της ασυνέχειας vDVZ. Επειδή το ίχνος του τανυστή ενέργειας ορμής που οφείλεται στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό για τα φωτόνια, το βαθμωτό δεν επηρεάζει την κύρτωση του φωτός. Όμως, επηρεάζει το δυναμικό. Το δυναμικό της μαζικής περίπτωσης, για μία μάζα σημειακή, είναι μεγαλύτερο κατά έναν παράγοντα τέσσερα τρίτα από αυτόν της άμαζης.

Επιστρέφοντας στη δράση 2.101 και πραγματοποιώντας την αντικατάσταση

$$h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} + \frac{2}{D-2}\phi\eta_{\mu\nu}, \tag{2.113}$$

η δράση τροποποιείται στην

$$S = \int d^D x \Bigg(L_{(m=0)}(h') - \frac{1}{2} m^2 \big(h'_{\mu\nu} h'^{\mu\nu} - h'^2 \big) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \\ - m h'_{\mu\nu} \big(\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \big) + 2 m h' \partial_\mu A^\mu + 2 \frac{D-1}{D-2} \phi \big(\Box + \frac{D}{D-2} m^2 \big) \phi + \\ + 2 \frac{D-1}{D-2} \big(m^2 h' \phi + 2 m \phi \partial_\mu A^\mu \big) + \frac{2}{D-2} \kappa \phi T + \kappa h'_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \\ - \frac{2}{m} \kappa A_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{2}{m^2} \kappa \phi \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} \Bigg). \quad (2.114)$$

Οι συμμετρίες της δράσης αυτής είναι οι

$$\delta h'_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + \frac{2}{D-2} m \Lambda \eta_{\mu\nu}, \quad \delta A_\mu = -m \xi_\mu, \quad \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad \delta \phi = -m \Lambda. \quad (2.115)$$

Θα ορίσουμε δύο συνθήκες βαθμίδας που μοιάζουν με την συνθήκη Lorentz. Αυτές είναι οι

$$\partial^\nu h'_{\mu\nu} - \partial_\mu h' + m A_\mu = 0, \quad (2.116)$$

$$\partial_\mu A^\mu + m \left(\frac{1}{2} h' + 2 \frac{D-1}{D-2} \phi \right) = 0. \quad (2.117)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις των συμμετριών στις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε ότι

$$\big(\Box - m^2 \big) \xi_\mu = 0, \quad (2.118)$$

και

$$\big(\Box - m^2 \big) \Lambda = 0, \quad (2.119)$$

οπότε πρέπει τα ξ_μ, Λ να ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις. Όπως και στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού εισάγουμε τις δύο αυτές συνθήκες σαν όρους στη δράση μέσω της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Οι όροι αυτοί έχουν την ιδιότητα να διαγωνοποιούν τη δράση και είναι οι

$$S_{GF1} = - \int d^D x \left(\partial^\nu h'_{\mu\nu} - \partial_\mu h' + m A_\mu \right)^2, \quad (2.120)$$

και

$$S_{GF2} = - \int d^D x \left(\partial_\mu A^\mu + m \big(\frac{1}{2} h' + 2 \frac{D-1}{D-2} \phi \big) \right)^2. \quad (2.121)$$

Η νέα διαγωνοποιημένη δράση είναι η

$$S' = S + S_{GF1} + S_{GF2} = \int d^D x \left(\frac{1}{2} h'_{\mu\nu} \big(\Box - m^2\big) h'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} h' \big(\Box - m^2\big) h' + \right.$$
$$+ A_\mu \big(\Box - m^2\big) A^\mu + 2\frac{D-1}{D-2}\phi\big(\Box - m^2\big)\phi + \frac{2}{D-2}\kappa\phi T + \kappa h'_{\mu\nu} T^{\mu\nu} -$$
$$\left. - \frac{2}{m}\kappa A_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{2}{m^2}\kappa\phi\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu} \right), \quad (2.122)$$

και για διατηρούμενες πηγές η δράση μετατρέπεται στην

$$S' = S + S_{GF1} + S_{GF2} = \int d^D x \left(\frac{1}{2} h'_{\mu\nu} \big(\Box - m^2\big) h'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} h' \big(\Box - m^2\big) h' + \right.$$
$$\left. + A_\mu \big(\Box - m^2\big) A^\mu + 2\frac{D-1}{D-2}\phi\big(\Box - m^2\big)\phi + \frac{2}{D-2}\kappa\phi T + \kappa h'_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right) \quad (2.123)$$

Η εξίσωση κίνησης για το πεδίο $h'_{\mu\nu}$ είναι η

$$\big(\Box - m^2\big) h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\big(\Box - m^2\big) h' \eta_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.124)$$

Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης αυτής βρίσκουμε ότι

$$\frac{2-D}{2}\big(\Box - m^2\big) h' = -\kappa T, \quad (2.125)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = D$ στις D διαστάσεις. Ορίζοντας

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} T^{\mu\mu} + \frac{1}{2} T^{\nu\mu} = T^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} + \frac{1}{2}\eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu} \right), \quad (2.126)$$

και

$$T = T^{\rho\sigma}\eta_{\rho\sigma}, \quad (2.127)$$

βρίσκουμε ότι

$$h'_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2 + m^2}\left(\frac{1}{2}\big(\eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} + \eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu}\big) - \frac{1}{D-2}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu} \right)\kappa T^{\rho\sigma}, \quad (2.128)$$

συνεπώς ο διαδότης είναι ο

$$iD_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = -\frac{i}{p^2 + m^2}\left(\frac{1}{2}\big(\eta_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} + \eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu}\big) - \frac{1}{D-2}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu} \right). \quad (2.129)$$

Η εξίσωση για το πεδίο A_ν είναι η

$$2\big(\Box - m^2\big)\eta^{\mu\nu}A_\mu = 0, \tag{2.130}$$

με διαδότη τον

$$iD_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{2}\frac{i\eta_{\mu\nu}}{p^2+m^2}. \tag{2.131}$$

Τέλος η εξίσωση κίνησης για το βαθμωτό πεδίο είναι η

$$4\frac{D-1}{D-2}\big(\Box - m^2\big)\phi = -\frac{2}{D-2}\kappa T, \tag{2.132}$$

με διαδότη τον

$$iD(p) = -\frac{i}{p^2+m^2}\frac{D-2}{4\big(D-1\big)}. \tag{2.133}$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στο όριο που η μάζα τείνει στο μηδέν δύο από τους πέντε βαθμούς ελευθερίας του μαζικού γκραβιτονίου ανήκουν στο κανονικό γκραβιτόνιο, οι άλλοι δύο στο διανυσματικό πεδίο και ο πέμπτος στο βαθμωτό.

Κεφάλαιο 3

Galileons

Η θεωρία του κυβικού (cubic)Galileon περιγράφει τη δυναμική μια βαθμωτής θεωρίας που επιζεί στο όριο αποσύζευξης του DGP μοντέλου [10, 16]. Στο όριο αυτό επικεντρωνόμαστε στις αλληλεπιδράσεις του βαθμωτού βαθμού ελευθερίας χωρίς τις επιπλοκές από τις αλληλεπιδράσεις του γκραβιτονίου. Το μοντέλο DGP είναι ένα κοσμολογικό μοντέλο το οποίο περιγράφει τον τετραδιάστατο χωρόχρονο σαν μία μεμβράνη η οποία βρίσκεται εμβαπτισμένη σε έναν χωρόχρονο πέντε διαστάσεων, με την πέμπτη διάσταση να είναι πολύ μεγάλη και να εμφανίζεται σε κοσμολογική κλίμακα. Πάνω στην τετραδιάστατη μεμβράνη η βαρύτητα έχει την τετραδιάστατη συμπεριφορά, ενώ σε πολύ μεγάλες αποστάσεις που υπεισέρχεται η πέμπτη διάσταση, η βαρύτητα γίνεται ασθενέστερη. Το μοντέλο περιγράφεται από τη δράση

$$S_{DGP} = 2M_5^3 \int_M d^5x\, \sqrt{-G}R(G) + 2M_4^2 \int_{\partial M} d^4x\, \sqrt{-\gamma}R(\gamma), \tag{3.1}$$

όπου M είναι μία πενταδιάστατη πολλαπλότητα και ∂M το σύνορο. Η μετρική G είναι η πενταδιάστατη μετρική, ενώ γ είναι η τετραδιάστατη μετρική στο σύνορο, και χρησιμοποιούμε σε αυτο το κομμάτι, για τις μετρικές, την σύμβαση (-++++),(-+++). Η κλίμακα του μοντέλου είναι η $\lambda_{DGP} = \dfrac{1}{m} = \dfrac{M_4^2}{M_5^3}$, όπου για αποστάσεις μικρότερες του λ_{DGP} η βαρύτητα συμπεριφέρεται τετραδιάστατα. Ο άμαζος διαδότης της πενταδιάστατης περίπτωσης έχει την ίδια μορφή, ως προς το κομμάτι των τανυστών, με τον μαζικό διαδότη της τετραδιάστατης περίπτωσης, συνεπώς υπάρχει η ίδια ασυνέχεια που πλήττει την μαζική βαρύτητα [17].

Χωρίζουμε τις πέντε διαστάσεις σε 4+1, και γράφουμε τη δράση σε μεταβλητές που μοιάζουν με αυτές του φορμαλισμού ADM [18]. Με βάση αυτές τις μεταβλητές, το κομμάτι τη δράσης που περιέχει τον πενταδιάστατο όρο παίρνει τη μορφή

$$S_{bulk} = 2M_5^3 \int d^4x \int_0^\infty dy\, \sqrt{-\gamma}\big[R(\gamma) - K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} + K^2\big], \qquad (3.2)$$

με $N = (G^{55})^{-\frac{1}{2}}$, $N_\mu = G_{5\mu}$ και $\gamma_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ στις επιφάνειες $y = x^5$. Επίσης, η εξωτερική καμπυλότητα είναι η

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}\bigg(\frac{d\gamma_{\mu\nu}}{dy} - D_\mu N_\nu - D_\nu N_\mu\bigg), \qquad (3.3)$$

όπου D_μ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος σε σχέση με την μετρική $\gamma_{\mu\nu}$. Κάνουμε προσέγγιση ασθενους πεδίου

$$G_{MN} = \eta_{MN} + H_{MN}, \qquad \gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad (3.4)$$

όπου $M, N, ... = 0, .., 3; 5$ είναι οι δείκτες του πενταδιάστατου χωρόχρονου και μ,ν,... οι δείκτες για τον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Λόγω του ότι η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, επιλέγουμε τη βαθμίδα De Donder[20], και προσθέτουμε τον αντίστοιχο όρο στη δράση με πολλαπλασιαστή Lagrange. Παίρνοντας μετασχηματισμούς της μορφής $x^M \to x^M + \Xi^M$, βλέπουμε ότι έχουμε εναπομείνουσα ελευθερία βαθμίδας. Ολοκληρώνοντας τη δράση ως προς y και παίρνοντας υπ'οψιν τις εξισώσεις κίνησης ($H_{MN}(x, y) = \exp\big(-y\Delta\big)h_{MN}(x)$) του όρου με τις πέντε διαστάσεις βρίσκουμε ότι

$$S = M_5^3 \int d^4x \bigg[-\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\Delta h_{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_4\Delta h_4 + \frac{1}{2}h_4\Delta h_{55} - \frac{1}{4}h_{55}\Delta h_{55} - \\ - N^\mu\Delta N_\mu - N^\mu\big(\partial_\mu h_4 + \partial_\mu h_{55} - 2\partial^\nu h_{\mu\nu}\big)\bigg], \qquad (3.5)$$

όπου h_4 είναι το ίχνος του $h_{\mu\nu}$ και $\Delta = \sqrt{-\Box_4}$. Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω την εναπομείνουσα συμμετρία βαθμίδας. Ορίζουμε βαθμίδα ξανά και εισάγουμε τον όρο στην δράση με έναν πολλαπλασιαστή Lagrange. Προσθέτοντας και τον κινητικό όρο του συνόρου, βρίσκουμε ότι

$$L_{bdy} = M_4^2\bigg[\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\big(\Box_4 - m\Delta\big)h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}h_4\big(\Box_4 - m\Delta\big)h_4 - mN^\mu\big(\Delta + m\big)N_\mu + \\ + \frac{1}{2}mh_4\Delta h_{55} - mN^\mu\partial_\mu h_{55} - \frac{1}{4}h_{55}\Delta h_{55}\bigg]. \qquad (3.6)$$

Αντικαθιστώντας $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + m\pi\eta_{\mu\nu}$, $N'_\mu = N_\mu - \partial_\mu\pi$, $h_{55} = -2\Delta\pi$, έχουμε ότι

$$L \simeq M_4^2\bigg[\frac{1}{2}h'_{\mu\nu}\Box_4 h'_{\mu\nu} - \frac{1}{4}h'_4\Box_4 h'_4 - mN'^\mu\Delta N'_\mu + 3m^2\pi\Box_4\pi\bigg]. \qquad (3.7)$$

Λόγω του ότι ο συντελεστής του όρου $\pi\Box_4\pi$ είναι μικρός, σημαίνει ότι οι ανώτερης τάξης όροι αλληλεπίδρασης θα είναι σημαντικοί. Μέχρι στιγμής υπολογίσαμε τετραγωνικούς όρους ως προς το πεδίο π. Προσθέτοντας όρους αλληλεπίδρασης στον όρο με τις πέντε διαστάσεις θα προκύψουν όροι αλληλεπίδρασης στο σύνορο, οι οποίοι θα είναι μεγαλύτερης τάξης για το πεδίο π. Από τους όρους αυτούς ο όρος με τη μικρότερη διάσταση προκύπτει να είναι κυβικός ως προς το πεδίο π, και η κλίμακα που εμφανίζονται οι αλληλεπιδράσεις αυτές είναι η $\Lambda_3 \sim \left(m^2 M_4\right)^{\frac{1}{3}}$. Κάνοντας τις αντικαταστάσεις

$$N = 1 + \frac{1}{2}\exp\big(-y\sqrt{-\Box_4}\big)h_{55}, \tag{3.8}$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bigg(1 - \frac{1}{2}\exp\big(-y\sqrt{-\Box_4}\big)h_{55}\bigg)\bigg(\partial_\mu N_\nu + \partial_\nu N_\mu\bigg), \tag{3.9}$$

και

$$N_\mu = \exp\big(-y\sqrt{-\Box_4}\big)\partial_\mu \pi, \tag{3.10}$$

στην 3.2, και ολοκληρώνοντας ως προς y βρίσκουμε ότι η συνεισφορά του κυβικού όρου στη μεμβράνη είναι η

$$\Delta L_{bdy} = M_4^2 m \partial^\mu \pi \partial_\mu \pi \Box_4 \pi. \tag{3.11}$$

Το βαθμωτό αυτό είναι αντίστοιχο αυτού που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην μαζική βαρύτητα. Το πεδίο π περιγράφει την καμπύλωση τετραδιάστατης μεμβράνης στις πέντε διαστάσεις. Έτσι, οδηγούμαστε στη δράση για το cubic galileon. Η θεωρία αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς της μορφής $\pi(x) \to \pi(x) + b_\mu x^\mu + c$, αγνοώντας τους επιφανειακούς όρους. Επίσης, επειδή οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν είναι δεύτερης τάξεως, σημαίνει ότι η θεωρία δεν περιέχει πεδία φαντάσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε τις κβαντικές διορθώσεις της κυβικής θεωρίας του Galileon στον έναν βρόχο. Δηλαδή θα ξεκινήσουμε από τη δράση

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - \frac{\nu_0}{2}(\partial\pi)^2\Box\pi\right), \tag{3.12}$$

όπου έχουμε επαναορίσει το πεδίο ώστε ο κινητικός όρος να έχει κανονική μορφή, και θα καταλήξουμε στον υπολογισμό της ενεργού δράσης αυτής. Για να επιτευχθεί αυτό θα θεωρήσουμε μία διαταραχή γύρω από το κλασικο πεδίο και μέσω παραγοντικών ολοκληρώσεων θα φέρουμε τη δράση σε μορφή τέτοια ώστε η διαταραχή να συνοδεύεται από παραγώγους δευτέρας τάξεως. Ύστερα θα υπολογίσουμε την ενεργό δράση στο επίπεδο του ενός βρόχου και θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα.

3.1 Η δράση

Ξεκινάμε από τη δράση

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - \frac{\nu_0}{2}(\partial\pi)^2 \Box\pi \right), \tag{3.13}$$

στον d-διάστατο Ευκλείδιο χώρο. Για να υπολογισουμε την ενεργό δράση θα πάρουμε τις διακυμάνσεις φ του πεδίου π γύρω από μία μέση τιμή π_{cl}, δηλαδή

$$\pi = \pi_{cl} + \phi. \tag{3.14}$$

Από τον πρώτο όρο στη δράση 3.13, κρατάμε μόνο τους τετραγωνικούς όρους ως προς τις διακυμάνσεις φ του πεδίου, δηλαδή

$$S_1 = -\frac{1}{2} \int d^d x \; \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \tag{3.15}$$

Για το δεύτερο κομμάτι της δράσης 3.13 έχουμε

$$S_2 = -\int d^d x \; \frac{\nu_0}{2}(\partial\pi)^2 \Box\pi. \tag{3.16}$$

Κρατώντας ξανά τετραγωνικούς όρους ως προς τις διακυμάνσεις, βρίσκουμε

$$S_2 = -\frac{\nu_0}{2} \int d^d x \; \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \Box \pi_{cl} + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \pi_{cl} \Box \phi \right). \tag{3.17}$$

Αυτός ο όρος ύστερα απο παραγοντική ολοκλήρωση και μηδενίζοντας τους επιφανειακούς όρους, μας δίνει

$$S_2 = -\frac{\nu_0}{2} \int d^d x \; \left(2\pi_{cl} \partial_\nu \partial_\mu \phi \partial^\nu \partial^\mu \phi - 2\pi_{cl} \Box\phi \Box\phi \right). \tag{3.18}$$

Ύστερα από λίγες ακόμα παραγοντικές ολοκληρώσεις φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$S_2 = \frac{\nu_0}{2} \int d^d x \; \left(2\phi \Box \pi_{cl} \Box \phi - 2\phi \partial^\mu \partial^\nu \pi_{cl} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right). \tag{3.19}$$

Κάνοντας μία παραγοντική ολοκλήρωση στην 3.15 και προσθέτοντας τις 3.15, 3.19 παιρνουμε συνολικά

$$S = S_1 + S_2 = \int d^d x \; \left(-\frac{1}{2}\phi\Box\phi + \frac{\nu_0}{2}\phi\big(2\Box\pi_{cl}\Box\phi - 2\partial^\mu \partial^\nu \pi_{cl} \partial_\mu \partial_\nu \phi \big) \right). \tag{3.20}$$

3.2 Η εξίσωση της ενεργού δράσης

Θα προσπαθήσουμε να φτάσουμε στην εξίσωση για την ενεργό δράση. Ορίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα διαδρομών (path integral) [22]

$$Z(J) = N \int [d\pi] \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\big(S[\pi] - J\pi\big)\right], \tag{3.21}$$

όπου N είναι μια σταθερα κανονικοποιήσης, J μία πηγή, S η αρχική δράση, δηλαδή η δράση της σχέσης 3.13. Για τον νορμαλισμό του ολοκληρώματος διαδρομών διαλέγουμε [22]

$$Z(0) = 1, \tag{3.22}$$

συνεπώς, η σταθερά νορμαλισμού θα ισούται με

$$N = \left(\int [d\pi]\ \exp\left[-\frac{1}{\hbar}S[\pi]\right]\right)^{-1}. \tag{3.23}$$

Παίρνοντας την προσέγγιση $\hbar \to 0$, το ολοκλήρωμα διαδρομών της σχέσης 3.21 κυριαρχείται από την κλασική λύση η οποία θα ελαχιστοποιεί το εκθετικό. Δηλαδή

$$\frac{\delta S}{\delta \pi}\left[\pi_{cl}\right] = J. \tag{3.24}$$

Ορίζουμε το πεδίο π με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$\pi_{cl}(J = 0) = 0. \tag{3.25}$$

Τοποθετώντας την κλασική λύση π_{cl} πίσω στην δράση και παίρνοντας τον λογάριθμο της σχέσης θα έχουμε στην μηδενική τάξη ότι

$$\ln Z(J) \sim \ln Z_0(J) = \frac{1}{\hbar}\left[-S[\pi_{cl}] + J\right]. \tag{3.26}$$

Ορίζουμε τώρα ένα νέο συναρτησιακό $W(J)$ το οποίο είναι το γενεσιουργό συναρτησιακό όλων των "συνδεδεμένων"(connected) συναρτήσεων συσχετισμού. Δηλαδή,

$$W(J) = \hbar \ln Z(J). \tag{3.27}$$

Έτσι σε μηδενική τάξη ως προς $\hbar$ έχουμε

$$W(J) = W_0(J) = -S[\pi_{cl}] + J\pi_{cl}. \tag{3.28}$$

Για διακυμάνσεις γύρω από την κλασική λύση

$$\pi = \pi_{cl} + \phi, \tag{3.29}$$

αναπτύσσουμε τη δράση γύρω από το σημείο π_{cl} και κραταμε όρους μέχρι δεύτερη τάξη. Επομένως

$$S[\pi_{cl}+\phi] = S[\pi_{cl}] + \int d^d x \, \frac{\delta S}{\delta \pi(x)}\bigg|_{\pi=\pi_{cl}} \phi(x) + \\ + \frac{1}{2}\int d^d x_1 d^d x_2 \; \phi(x_1) \frac{\delta^2 S}{\delta\pi(x_1)\delta\pi(x_2)}\bigg|_{\pi=\pi_{cl}} \phi(x_2), \quad (3.30)$$

Λόγω της 3.24 θα έχουμε τελικά ότι

$$S[\pi_{cl}+\phi] - \int d^d x \; J(\pi_{cl}+\phi) = S[\pi_{cl}] - \int d^d x \; J\pi_{cl} \\ + \frac{1}{2}\int d^d x_1 d^d x_2 \; \phi(x_1) \frac{\delta^2 S}{\delta\pi(x_1)\delta\pi(x_2)}\bigg|_{\pi=\pi_{cl}} \phi(x_2). \quad (3.31)$$

Για τη δράση της 3.20 έχουμε

$$S^{(2)}(x_1,x_2;\pi_{cl}) = \frac{\delta^2 S}{\delta\pi(x_1)\delta\pi(x_2)}\bigg|_{\pi=\pi_{cl}} = -\Box\delta(x_1-x_2) + 2\nu_0\big(\Box\pi_{cl}\Box\delta(x_1-x_2) - \\ - \partial^\mu\partial^\nu\pi_{cl}\partial_\mu\partial_\nu\delta(x_1-x_2)\big). \quad (3.32)$$

Το ολοκλήρωμα διαδρομών σε αυτή την τάξη γίνεται

$$Z(J) \sim Z_0(J)\int d[\phi] \; \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\int dx_1 dx_2 \; \phi(x_1) S^{(2)}(x_1,x_2;\pi_{cl})\phi(x_2)\right], \quad (3.33)$$

με

$$Z_0(J) = N\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\big(S[\pi_{cl}] - J\pi_{cl}\big)\right]. \quad (3.34)$$

Λόγω του ότι έχουμε τον όρο $\frac{1}{\hbar}$ στο εκθετικό, θα πρέπει τα πεδία να είναι μεγέθους της τάξης $\sqrt{\hbar}$. Δηλαδή θα έχουμε

$$\pi = \pi_{cl} + \sqrt{\hbar}\phi. \quad (3.35)$$

Όμως ούτως ή άλλως θα μπορούσαμε να πάρουμε τη σύμβαση $\hbar = 1$. Το ολοκλήρωμα στα πεδία χ είναι ένα γκαουσσιανό(gaussian) ολοκλήρωμα που θα μας δώσει

$$\int d[\phi] \; \exp\left[-\frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 \; \phi(x_1) S^{(2)}(x_1,x_2;\pi_{cl})\phi(x_2)\right] = \\ = \left(\frac{\det S^{(2)}(x_1,x_2;\pi_{cl})}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.36)$$

Μπορούμε να διαιρέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με την ποσότητα $\det S^{(2)}\big(x_1, x_2; 0\big)$ εφόσον αυτή δεν είναι μηδενική. Με αυτή την τροποποίηση θα πάρουμε

$$Z(J) \propto Z_0(J) \left[\frac{\det S^{(2)}(x_1, x_2; \pi_{cl})}{\det S^{(2)}(x_1, x_2; 0)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.37}$$

Για το συναρτησιακό $W(J)$ θα έχουμε

$$W(J) = \hbar \ln Z_0(J) - \frac{\hbar}{2} \ln \left[\frac{\det S^{(2)}(x_1, x_2; \pi_{cl})}{\det S^{(2)}(x_1, x_2; 0)}\right] = -S[\pi_{cl}] + \int d^d x \ J(x)\pi_{cl}(x) - \\ - \frac{\hbar}{2} \ln \left[\frac{\det S^{(2)}(x_1, x_2; \pi_{cl})}{S^{(2)}(x_1, x_2; 0)}\right]. \tag{3.38}$$

Η ενεργός δράση ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Legendre του συναρτησιακού $W(J)$

$$\Gamma[\boldsymbol{\pi}] + W(J) - \int d^d x \ J(x)\boldsymbol{\pi}(x) = 0, \tag{3.39}$$

όπου

$$\frac{\delta \Gamma[\boldsymbol{\pi}]}{\delta \boldsymbol{\pi}} = J(x). \tag{3.40}$$

Το πεδίο $\boldsymbol{\pi}$ εδώ είναι η αναμενόμενη τιμή του τελεστη $\pi(x)$ παρουσία πηγής. Δηλαδή

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\int d[\pi] \ \pi \exp\left[-\frac{1}{\hbar}(S[\pi] - J\pi)\right]}{\int d[\pi] \ \exp\left[-\frac{1}{\hbar}(S[\pi] - J\pi)\right]}. \tag{3.41}$$

Ισχύει ότι

$$\Gamma_1[\boldsymbol{\pi}] = -W_1(J) = \frac{1}{2}\left[tr \ln S^{(2)}(x_1, x_2; \pi_{cl}) - tr \ln S^{(2)}(x_1, x_2; 0)\right], \tag{3.42}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα $\ln \det = tr \ln$. Επίσης, θεωρούμε ότι οι τελεστές στην παραπάνω σχέση είναι τοπικοί. Άρα, αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι

$$\Gamma_1[\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{2} tr \left[\ln\left[-\Box + 2\nu_0\big(\Box\pi_{cl}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\pi_{cl}\partial_\mu\partial_\nu\big)\right] - \ln\left[-\Box\right]\right]. \tag{3.43}$$

Ορίζουμε

$$-\Box\Delta(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2), \tag{3.44}$$

και

$$\Sigma_1(x_1) = 2\nu_0 \Box\pi_{cl}\Box, \tag{3.45}$$

$$\Sigma_2(x_1) = -2\nu_0 \partial^\mu \partial^\nu \pi_{cl} \partial_\mu \partial_\nu. \tag{3.46}$$

Άρα η διόρθωση για τον ένα βρόχο (1-loop) είναι

$$\Gamma_1[\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{2} tr \ln \Big[\mathbb{I} + \big(\Sigma_1(x_1) + \Sigma_2(x_1) \big) \Delta(x_1, x_2) \Big]. \tag{3.47}$$

3.3 Υπολογισμός της ενεργού δράσεως σε έναν βρόχο

Για να γίνει ο υπολογισμός θα αναπτύξουμε το λογάριθμο σε δυνάμεις του $(\Sigma_1 + \Sigma_2)\Delta$. Συνεπώς

$$\ln (\mathbb{I} + (\Sigma_1 + \Sigma_2)\Delta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} ((\Sigma_1 + \Sigma_2)\Delta)^n. \tag{3.48}$$

Κρατώντας σε αυτό το άθροισμα τους όρους μέχρι $n = 2$ παίρνουμε ότι

$$\ln (\mathbb{I} + (\Sigma_1 + \Sigma_2)\Delta) \simeq (\Sigma_1 + \Sigma_2)\Delta - \frac{1}{2}((\Sigma_1 + \Sigma_2)\Delta)^2, \tag{3.49}$$

οπότε για τη διόρθωση της ενεργού δράσης (effective action) σε έναν βρόχο (one-loop) καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\boldsymbol{\pi}] \simeq \frac{1}{2} tr \Bigg[& \Sigma_1(x_1)\Delta(x_1, x_2) + \Sigma_2(x_1)\Delta(x_1, x_2) - \\ & - \frac{1}{2} \Big(\Sigma_1(x_1)\Delta(x_1, x_2) + \Sigma_2(x_1)\Delta(x_1, x_2) \Big)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Το ίχνος στην εξίσωση είναι ένα ολοκλήρωμα στο οποίο θα πρέπει οι δείκτες να είναι κυκλικοί, δηλαδή ο αρχικός με τον τελικό δείκτη θα πρέπει να είναι οι ίδιοι. Έχοντας αυτό υπ'οψιν συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\boldsymbol{\pi}] \simeq & \frac{1}{2} \int d^d x_1 \, \Big(\Sigma_1(x_1)\Delta(x_1, x_1) + \Sigma_2(x_1)\Delta(x_1, x_1) \Big) - \\ & - \frac{1}{4} \int d^d x_1 d^d x_2 \, \Big(\Sigma_1(x_1)\Delta(x_1, x_2) + \Sigma_2(x_1)\Delta(x_1, x_2) \Big) \times \\ & \times \Big(\Sigma_1(x_2)\Delta(x_2, x_1) + \Sigma_2(x_2)\Delta(x_2, x_1) \Big). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Το κομμάτι που είναι τετραγωνικό ως προς τη μέση τιμή του πεδίου π_{cl} είναι το δεύτερο ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση το οποίο θα μας δώσει

$$\begin{aligned}\Gamma_1[\boldsymbol{\pi}] = -\frac{1}{4}\int d^dx_1d^dx_2\ \Sigma_1(x_1)\Delta(x_1,x_2)\Sigma_1(x_2)\Delta(x_2,x_1)-\\ -\frac{1}{2}\int d^dx_1d^dx_2\ \Sigma_1(x_1)\Delta(x_1,x_2)\Sigma_2(x_2)\Delta(x_2,x_1)-\\ -\frac{1}{4}\int d^dx_1d^dx_2\ \Sigma_2(x_1)\Delta(x_1,x_2)\Sigma_2(x_2)\Delta(x_2,x_1) =\\ = A_1 + A_2 + A_3.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Το κομμάτι A_1 είναι το

$$A_1 = -\frac{1}{4}\int d^dx_1d^dx_2\ \Sigma_1(x_1)\Delta(x_1,x_2)\Sigma_1(x_2)\Delta(x_2,x_1), \tag{3.53}$$

άρα,

$$A_1 = -\nu_0^2\int d^dx\ \Box\pi_{cl}(x_1)\Box(x_1)\Delta(x_1,x_2)\Box\pi_{cl}(x_2)\Box(x_2)\Delta(x_2,x_1). \tag{3.54}$$

Για να το υπολογίσουμε θα μεταφέρουμε το ολοκλήρωμα στον χώρο των ορμών. Έτσι, ορίζουμε

$$\pi_{cl}(x) = \int d^dq\ \tilde{\pi}_{cl}(q)\exp\big(iqx\big). \tag{3.55}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}A_1 = -\nu_0^2\int d^dx_1d^dx_2d^dq_1d^dq_2\frac{d^dp_1}{(2\pi)^d}\frac{d^dp_2}{(2\pi)^d}\ (-q_1^2)\tilde{\pi}_{cl}(q_1)\exp\big(iq_1x_1\big)\times\\ \times\frac{(-p_1^2)}{p_1^2}\exp\big(ip_1(x_1-x_2)\big)(-q_2^2)\tilde{\pi}_{cl}(q_2)\exp\big(iq_2x_2\big)\frac{(-p_2^2)}{p_2^2}\exp\big(ip_2(x_2-x_1)\big).\end{aligned} \tag{3.56}$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned}A_1 = -\nu_0^2\int d^dq_1d^dq_2\frac{d^dp_1}{(2\pi)^d}\frac{d^dp_2}{(2\pi)^d}\ q_1^2\tilde{\pi}_{cl}(q_1)(2\pi)^d\delta^{(d)}(p_1-p_2+q_1)\times\\ \times\ q_2^2\tilde{\pi}_{cl}(q_2)(2\pi)^d\delta^{(d)}(p_2-p_1+q_2).\end{aligned} \tag{3.57}$$

Από τις δέλτα συναρτήσεις παίρνουμε ότι

$$p_2 = p_1 + q_1 \equiv p + q, \tag{3.58}$$

και

$$q_2 = -q_1 \equiv -q. \tag{3.59}$$

Συνεπώς,

$$A_1 = -\nu_0^2 \int d^d q \; (2\pi)^d q^4 \tilde{\pi}_{cl}(q) \tilde{\pi}_{cl}(-q) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}. \tag{3.60}$$

Το A_2 θα ισούται με

$$\begin{aligned} A_2 = -\frac{1}{2} \int d^d x_1 d^d x_2 \; \Sigma_1(x_1) \Delta(x_1, x_2) \Sigma_2(x_2) \Delta(x_2, x_1) = \\ = 2\nu_0^2 \int d^d x_1 d^d x_2 \Box \pi_{cl} \Box(x_1) \Delta(x_1, x_2) \partial^\mu \partial^\nu \pi_{cl}(x_2) \partial_\mu \partial_\nu(x_2) \Delta(x_2, x_1). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ύστερα από μερικές πράξεις παίρνουμε ότι

$$A_2 = 2\nu_0^2 \int d^d q \; (2\pi)^d q^2 q_\mu q_\nu \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\nu}{(p+q)^2}. \tag{3.62}$$

Για δύο ποσότητες $p^\mu p^\nu$ ισχύει ότι

$$p^\mu p^\nu = \frac{\eta^{\mu\nu}}{d} p^2. \tag{3.63}$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε ότι

$$A_2 = 2\nu_0^2 \int d^d q \; (2\pi)^d q^4 \tilde{\pi}_{cl}(q) \tilde{\pi}_{cl}(-q) \frac{1}{d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}. \tag{3.64}$$

Τέλος, για το A_3 έχουμε

$$\begin{aligned} A_3 = -\frac{1}{4} \int d^d x_1 d^d x_2 \; \Sigma_2(x_1) \Delta(x_1, x_2) \Sigma_2(x_2) \Delta(x_2, x_1) = \\ = -\nu_0^2 \int d^d x_1 d^d x_2 \; \partial^\mu \partial^\nu \pi_{cl}(x_1) \partial_\mu \partial_\nu(x_1) \Delta(x_1, x_2) \partial^\rho \partial^\sigma \pi_{cl}(x_2) \partial_\rho \partial_\sigma(x_3) \times \\ \times \Delta(x_2, x_1). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Ύστερα από λίγες πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$A_3 = -\nu_0^2 \int d^d q \; (2\pi)^d q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma \tilde{\pi}_{cl}(q) \tilde{\pi}_{cl}(-q) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu (p^\rho + q^\rho)(p^\sigma + q^\sigma)}{p^2 (p+q)^2}. \tag{3.66}$$

Θα αναπτύξουμε το $\dfrac{1}{(p+q)^2}$ μέχρι όρους τάξης $\mathcal{O}(q^4)$. Αυτό το κάνουμε γιατί θέλουμε να συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα των Shapiro-Netto [23]. Κάνοντας το ανάπτυγμα, βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(p+q)^2} = \frac{1}{p^2+2p^\alpha q_\alpha+q^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{q_\alpha p^\alpha}{p^4} + \frac{4(q_\alpha p^\alpha)^2}{p^6} - \frac{q^2}{p^4} - \frac{(q_\alpha p^\alpha)^3}{p^8} + \\
+ \frac{4q^2 q_\alpha p^\alpha}{p^6} + + \frac{16(q_\alpha p^\alpha)^4}{p^{10}} - \frac{12q^2(q_\alpha p^\alpha)^2}{p^8} + \frac{q^4}{p^6} + \mathcal{O}(q^5). \quad (3.67)
\end{aligned}
$$

Έτσι, έχουμε

$$
\begin{aligned}
A_3 = -\nu_0^2 \int d^d q\ (2\pi)^d q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma \tilde{\pi}_{cl}(q)\tilde{\pi}_{cl}(-q) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\ \frac{p^\mu p^\nu (p^\rho+q^\rho)(p^\sigma+q^\sigma)}{p^4} \times \\
\times \Bigg(1 - \frac{q_\alpha p^\alpha}{p^2} + \frac{4(q_\alpha p^\alpha)^2}{p^4} - \frac{q^2}{p^2} - \frac{(q_\alpha p^\alpha)^3}{p^6} + \\
+ \frac{4q^2 q_\alpha p^\alpha}{p^4} + + \frac{16(q_\alpha p^\alpha)^4}{p^8} - \frac{12q^2(q_\alpha p^\alpha)^2}{p^6} + \frac{q^4}{p^4} + \mathcal{O}(q^5)\Bigg). \quad (3.68)
\end{aligned}
$$

Πρέπει να έχουμε υπ'οψιν παίρνοντας το γινόμενο ότι οι ολοκληρώσεις στις περιττές δυνάμεις των p και q θα δώσουν μηδέν διότι είναι ολοκληρώσεις περιττών συναρτήσεων σε όλο τον χώρο. Επίσης, χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες

$$
p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma = \frac{p^4}{d(d+2)} \left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu}\right), \quad (3.69)
$$

$$
p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma p^\kappa p^\lambda = \frac{p^6}{d(d+2)(d+4)} \left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\kappa\lambda} + 14\mu\epsilon\tau\right), \quad (3.70)
$$

$$
p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma p^\kappa p^\lambda p^\xi p^\tau = \frac{p^8}{d(d+2)(d+4)(d+6)} \left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\xi\tau} + 105\mu\epsilon\tau\right). \quad (3.71)
$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις ταυτότητες στα ολοκληρώματα φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$
\begin{aligned}
A_3 = -\nu_0^2 \int d^d q\ (2\pi)^d \tilde{\pi}_{cl}(q)\tilde{\pi}_{cl}(-q) \Bigg[\frac{3}{d(d+2)} q^4 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} + \\
+ \frac{d^2-9d+8}{d^3+6d^2+8d} q^6 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\ \frac{1}{p^2} - \frac{(d-24)(d-2)(d-1)}{d(d+6)(d^2+6d+8)} q^8 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\ \frac{1}{p^4}\Bigg]. \quad (3.72)
\end{aligned}
$$

Προσθέτοντας τους τρεις αυτούς όρους βρίσκουμε για την ενεργό δράση ότι

$$\Gamma[\boldsymbol{\pi}] = \nu_0^2 \int d^d q \ (2\pi)^d \tilde{\pi}_{cl}(q)\tilde{\pi}_{cl}(-q)\Big[- \frac{d^2-1}{d(d+2)} q^4 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} - \\ - \frac{(d-8)(d-1)}{d(d+2)(d+4)} q^6 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{p^2} + \frac{(d-24)(d-2)(d-1)}{d(d+2)(d+4)(d+6))} q^8 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{p^4}\Big]. \tag{3.73}$$

Για να το μεταφέρουμε στο χώρο των θέσεων ορίζουμε

$$\pi_{cl}(q) = \int \frac{d^d x_1}{(2\pi)^d} \ \exp\big(-iqx_1\big)\pi_{cl}(x_1). \tag{3.74}$$

Ύστερα από λίγες πράξεις καταλήγουμε στην ενεργό δράση

$$\Gamma[\boldsymbol{\pi}] = \nu_0^2 \int d^d x \ \pi_{cl}(x)\Big[- \frac{d^2-1}{d(d+2)} \Big(\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \Big) \ \Box^2 + \\ + \frac{(d-8)(d-1)}{d(d+2)(d+4)} \Big(\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{p^2} \Big) \ \Box^3 + \frac{(d-24)(d-2)(d-1)}{d(d+2)(d+4)(d+6)} \Big(\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{p^4} \Big) \ \Box^4 \Big] \pi_{cl}(x). \tag{3.75}$$

[24] Τα ολοκληρώματα στη μορφή που είναι, για να υπολογιστούν, πρέπει να θέσουμε ένα ανώτατο όριο (cutoff) Λ για τις ορμές λόγω των υπεριωδών αποκλίσεων , το οποίο είναι της τάξης της θεμελιώδους κλίμακας της θεωρίας. Επίσης, λόγω των υπέρυθρων αποκλίσεων θέτουμε ένα κατώτατο όριο για τις ορμές το οποίο είναι της τάξης των εξωτερικών ορμών q που εισέρχονται στον βρόχο. Οι Shapiro-Netto [23] υπολογίζουν στην ενεργό δράση μόνο τη συνεισφορά από τον όρο $\pi\Box^4\pi$, ο οποίος συνοδεύεται από την λογαριθμική απόκλιση $(\log \Lambda)$ που προέρχεται από το ολοκλήρωμα των εσωτερικών ορμών. Στο αποτέλεσμά μας, για $d = 4$ βλέπουμε ότι έχουμε επιπλέον όρους της μορφής $\pi\Box^2\pi$ και $\pi\Box^3\pi$ οι οποίοι συνοδεύονται απο αποκλίσεις της μορφής Λ^4 και Λ^2 αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα της 3.75 συμφωνεί (για $m = 2$) με τη δομή των αποκλινόντων όρων της ενεργού δράσης για τον ένα βρόχο, η οποία δίνεται από τη σχέση [19, 25, 26]

$$\Gamma \sim \sum_m \big[\Lambda^4 + \Lambda^2\partial^2 + \partial^4 \log\Big(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\Big)\big]\Big(\frac{\partial^2\pi}{\Lambda^3}\Big)^m, \tag{3.76}$$

θεωρώντας $\nu_0 \sim \frac{1}{\Lambda^3}$. Από τη μορφή της 3.75 βλέπουμε ότι δεν έχουμε διορθώσεις στις παραμέτρους σύζευξης του cubic Galileon, συνεπώς δεν επανακανονικοποιούνται. Όμως, οι κβαντικές διορθώσεις θα δημιουργήσουν νέους όρους οι οποίοι δεν περιέχονται στο cubic Galileon και αυτό θα είχε ως συνέπεια οι εξισώσεις κίνησης που θα πάρουμε να είναι μεγαλύτερης τάξης και έτσι η θεωρία να περιέχει βαθμούς ελευθερίας από πεδία φαντάσματα.

Κεφάλαιο 4

Heat kernel

Θα υπολογίσουμε την ενεργό δράση του κυβικού Galileon από το προηγούμενο κεφάλαιο με τη βοήθεια του heat kernel. Θα ασχοληθούμε με υπόβαθρο στο οποίο η κλασική τιμή του πεδίου είναι αρκετά μεγάλη. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ενεργό δράση χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του λογαρίθμου όπως κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θα ξεκινήσουμε με την δράση

$$S_0 = \int d^4x \, \left(\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - \frac{\nu}{2}(\partial\pi)^2 \Box\pi \right), \tag{4.1}$$

την οποία ορίζουμε σε Ευκλείδειο χώρο. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη(αγνοώντας επιφανειακές αποκλίσεις) κάτω από γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς της μορφής $\pi \to \pi + a_\nu x^\nu + b$. Η σταθερά σύζευξης ν καθορίζει την κλίμακα Λ στην οποία η θεωρία συζεύγνυται ισχυρά [27]. Η κλίμακα αυτή αποτελεί το υπεριώδες όριο της θεωρίας. Οι εξισώσεις κίνησης της 4.1 είναι δεύτερης τάξης, συνεπώς δεν περιέχει βαθμούς ελευθερίας από πεδία φαντάσματα. Μέσω της θεωρίας του Galileon μπορούμε να κατανοήσουμε τον μηχανισμό Vainshtein [8, 9]. Η παραπάνω δράση έχει μία σφαιρικά συμμετρική λύση της μορφής $\pi_{cl} = \pi_{cl}(w)$, όπου $w = r^2$ και η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d\pi_{cl}(w)}{dw} = \pi'_{cl}(w) = \frac{1}{8\nu}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\nu c}{w^{\frac{3}{2}}}}\right), \tag{4.2}$$

με $\nu, c > 0$ και $w_V = r_V^2 \sim \left(\nu c\right)^{\frac{2}{3}}$, όπου r_V η ακτίνα Vainshtein. Για $w \gg w_V$ η λύση είναι $\pi_{cl} \sim \frac{c}{r}$ ενώ, για $w \ll w_V$ η λύση είναι $\pi_{cl} \sim \sqrt{\frac{c}{\nu}}\sqrt{r}$ [24]. Χωρίζοντας το πεδίο σε μια κλασικη τιμή και τις κλασικές διακυμάνσεις, παίρνουμε την εξίσωση κίνησης

$$\Delta\delta\pi = 0, \tag{4.3}$$

όπου Δ ο τελεστής που υπολογίσαμε στο προηγούμενο καφάλαιο, δηλαδή

$$\Delta = -\Box + 2\nu\Box\pi_{cl}\Box - 2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi_{cl}\partial^\nu\partial^\mu. \tag{4.4}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για αποστάσεις $r \gg r_V$ ο πρώτος όρος του τελεστή γίνεται πολυ μεγαλύτερος από τους άλλους δύο, ενώ για αποστάσεις $r \ll r_V$, όπου $\nu\Box\pi_{cl} \gg 1$, οι άλλοι δύο όροι κυριαρχούν. Σαν αποτέλεσμα, οι κλασσικές διακυμάνσεις του πεδίου έχουν πολύ μικρό πλάτος σε αποστάσεις $r \ll r_V$.

4.1 Μία εισαγωγή στο Heat kernel

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα κάνουμε μία εισαγωγή για το heat kernel, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό. Θεωρούμε έναν τελεστή Δ στον Ευκλείδειο χώρο

$$\langle x'|\,\Delta\,|x\rangle = \Delta_x\,\langle x'\,|\,x\rangle\,, \tag{4.5}$$

όπου Δ_x είναι η αναπαράσταση του τελεστή στον χώρο των θέσεων. Ορίζουμε σαν heat kernel την εξίσωση [28]

$$h(x,x',\epsilon) = \langle x|\exp\big(-\epsilon\Delta\big)\,|x'\rangle\,. \tag{4.6}$$

Αναπτύσσοντας το εκθετικό και χρησιμοποιώντας την 4.5, βρίσκουμε ότι

$$h(\epsilon,x,x') = \langle x|\exp(-\epsilon\Delta)\,|x'\rangle = \langle x|\,\big(\mathbb{I}-\epsilon\Delta+\frac{\epsilon^2}{2}\Delta^2+...\big)\,|x'\rangle = \exp(-\epsilon\Delta_x)\,\langle x\,|\,x'\rangle\,. \tag{4.7}$$

Πηγαίνοντας στο χώρο των ορμών παίρνουμε

$$h(\epsilon,x,x') = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\exp(-\epsilon\Delta_x)\,\langle x\,|\,k\rangle\,\langle k\,|\,x'\rangle\,, \tag{4.8}$$

με

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,|k\rangle\,\langle k| = 1. \tag{4.9}$$

Τελικά, με της βοήθεια της σχέσης

$$\langle x\,|\,k\rangle = \exp\big(ikx\big), \tag{4.10}$$

θα έχουμε ότι

$$h(\epsilon,x,x') = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\exp\big(-ikx'\big)\exp(-\epsilon\Delta_x)\exp\big(ikx\big). \tag{4.11}$$

4.2 Ενεργός δράση σε έναν βρόχο(one loop effective action)

Για την ενεργό δράση σε έναν βρόχο ισχύει ότι

$$\Gamma_{1-loop} = \frac{1}{2} tr \ln \Delta. \tag{4.12}$$

Μεταφέροντάς τη σχέση αυτή στην αναπαράσταση ιδιόχρονου του Schwinger (Schwinger's proper time representation), θα πάρουμε ότι

$$\Gamma_{1-loop} = -\int_{a=\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon}\, tr \exp\big(-\epsilon\Delta\big), \tag{4.13}$$

στο οποίο θέτουμε $\alpha = \frac{1}{\Lambda^2}$, δηλαδή ένα ανώτατο όριο στο ε για τις υπεριώδεις αποκλίσεις. Αναπτύσσοντας το εκθετικό, το ίχνος γίνεται

$$tr \exp(-\epsilon\Delta) = tr\left(\mathbb{I} - \epsilon\Delta + \frac{\epsilon^2}{2}\Delta^2 + ...\right) = \int d^4x\ \langle x| \exp(-\epsilon\Delta) |x\rangle =$$
$$= \int d^4x\ h(\epsilon, x, x). \tag{4.14}$$

Επομένως, η διόρθωση της ενεργού δράσης στον έναν βρόχο θα ισούται με

$$\Gamma_{1-loop} = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \int d^4x\ h(\epsilon, x, x). \tag{4.15}$$

4.3 Υπολογισμός του heat kernel και της ενεργού δράσεως

Ο τελεστής Δ δίδεται από τη σχέση

$$\Delta = -\Box + 2\nu\Box\pi\Box - 2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu, \tag{4.16}$$

για $\pi = \pi_{cl}$. Σύμφωνα με τη σχέση 4.11 το διαγώνιο στοιχείο του heat kernel παίρνει τη μορφή

$$h(\epsilon, x, x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \exp\big(-ikx\big) \exp\big(-\epsilon\Delta_x\big) \exp\big(ikx\big) =$$
$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \exp\big(-ikx\big) \left(1 - \epsilon\Delta_x + \frac{\epsilon^2}{2}\Delta_x^2 + ...\right) \exp\big(ikx\big). \tag{4.17}$$

Το επόμενο βήμα είναι να δράσουμε με τους τελεστές στο εκθετικό ώστε να υπολογίσουμε το heat kernel. Θα χρησιμοποιήσουμε μία δοκιμαστική συνάρτηση f [28], την οποία θα τοποθετήσουμε στα δεξιά των τελεστών. Θα δράσουμε με τους τελεστές στο γινόμενο του εκθετικού με την δοκιμαστική συνάρτηση και στο τέλος των υπολογισμών θα θέσουμε τη συνάρτηση αυτή ίση με την μονάδα.

Για παράδειγμα, ας δούμε την διαδικασία αυτή για τον τελεστή Δ. Για το πρώτο κομμάτι του τελεστή θα έχουμε ότι

$$\exp\big(-ikx\big)(-\Box)\exp\big(ikx\big) = -\exp\big(-ikx\big)\partial_\mu\partial^\mu\big(\exp\big(ikx\big)f\big). \tag{4.18}$$

Η παράγωγος θα δράσει σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, δηλαδή

$$\partial^\mu\big(\exp\big(ikx\big)f\big) = \big(ik^\mu\exp\big(ikx\big)f + \exp\big(ikx\big)\partial_\mu f\big). \tag{4.19}$$

οπότε

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\partial^\mu\big(\exp\big(ikx\big)f\big) = \\ &\exp\big(ikx\big)\big(ik_\mu+\partial_\mu\big)\big(ik^\mu+\partial^\mu\big)f = \exp\big(ikx\big)\big(-k^2+2ik^\mu\partial_\mu+\Box\big)f.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Τελικά καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\exp\big(-ikx\big)(-\Box)\exp\big(ikx\big)f = (k^2-2ik^\mu\partial_\mu-\Box)f. \tag{4.21}$$

Με την ίδια λογική θα έχουμε

$$\exp\big(-ikx\big)\partial^\mu\partial^\nu\exp\big(ikx\big)f = (-k^\mu k^\nu+ik^\mu\partial^\nu+ik^\nu\partial^\mu+\partial^\mu\partial^\nu)f. \tag{4.22}$$

Αντικαθιστώντας από τις προηγούμενες σχέσεις, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}h(\epsilon,x,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \exp\Bigg(-\Bigg[&\epsilon\big(k^2-2ik^\mu\partial_\mu-\Box\big)-2\epsilon\nu\Box\pi\big(k^2-2ik^\mu\partial_\mu-\Box\big)-\\ &-2\epsilon\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi\big(-k^\mu k^\nu+ik^\mu\partial^\nu+ik^\nu\partial^\mu+\partial^\mu\partial^\nu\big)\Bigg]\Bigg).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Αυτό θα ισούται με

$$\begin{aligned}h(\epsilon,x,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\Bigg[&-\epsilon k^2+2i\epsilon k^\mu\partial_\mu+\epsilon\Box+2\epsilon\nu\Box\pi\big(k^2-2ik^\mu\partial_\mu-\Box\big)-\\ &-2\epsilon\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi\big(-k^\mu k^\nu+ik^\mu\partial^\nu+ik^\nu\partial^\mu+\partial^\mu\partial^\nu\big)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.24}$$

Επαναορίζουμε την ορμή

$$k \to \frac{k}{\sqrt{\epsilon}}, \tag{4.25}$$

έτσι ώστε

$$h(\epsilon,x,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\epsilon^2}\exp\Big[-k^2+2i\sqrt{\epsilon}k^\mu\partial_\mu+\epsilon\Box+2\nu\Box\pi\big(k^2-2i\sqrt{\epsilon}k^\mu\partial_\mu-\epsilon\Box\big)- \\ -2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi\big(k^\mu k^\nu-2i\sqrt{\epsilon}k^\mu\partial^\nu-\epsilon\partial^\mu\partial^\nu\big)\Big]. \tag{4.26}$$

Ο λόγος που το κάναμε αυτό είναι διότι θέλουμε να απομονώσουμε τον όρο $\exp\big(-k^2\big)$ και να αναπτύξουμε το υπόλοιπο κομμάτι. Αυτό είναι απαραίτητο για την καλή σύγκλιση του ολοκληρώματος.

Θα επεξεργαστούμε τον εκθέτη για τον φέρουμε σε πιο κομψή μορφή. Πρώτα παίρνουμε τον όρο που δεν περιέχει το ε και τον φέρνουμε στην ακόλουθη μορφή

$$-k^2-2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi k^\mu k^\nu+2\nu\Box\pi k^2 = k^\mu k^\nu\big(-\eta_{\mu\nu}+2\nu\Box\pi\eta_{\mu\nu}-2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi\big), \tag{4.27}$$

όπου $\eta_{\mu\nu}$ η ευκλείδια μετρική. Ορίζουμε

$$g_{\mu\nu} = \big(1-2\nu\Box\pi\big)\eta_{\mu\nu}+2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi, \tag{4.28}$$

άρα,

$$-k^2-2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi k^\mu k^\nu+2\nu\Box\pi k^2 = -g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu. \tag{4.29}$$

Για τους όρους που περιέχουν την τετραγωνική ρίζα του ε θα πάρουμε

$$2i\sqrt{\epsilon}k^\mu\big(\partial_\mu-2\nu\Box\pi\partial_\mu+2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\nu\big) = \\ 2i\sqrt{\epsilon}k^\mu\big((1-2\nu\Box\pi)\eta_{\mu\nu}+2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi)\partial^\nu\big) = 2i\sqrt{\epsilon}k^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu, \tag{4.30}$$

και τέλος, για τους όρους με το ε βρίσκουμε ότι

$$\epsilon\Box-2\epsilon\nu\Box\pi+2\epsilon\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu = \\ \epsilon\big[(1-2\nu\Box\pi)\eta_{\mu\nu}+2\nu\partial_\mu\partial_\nu\pi)\big]\partial^\mu\partial^\nu = \epsilon g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu, \tag{4.31}$$

συνεπώς,

$$h(\epsilon,x,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\epsilon^2}\exp\big(-g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu+2i\sqrt{\epsilon}k^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu+\epsilon g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\big). \tag{4.32}$$

Ορίζοντας

$$X = -g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu, \tag{4.33}$$

και

$$Y = 2i\sqrt{\epsilon}k^{\mu}g_{\mu\nu}\partial^{\nu} + \epsilon g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu}, \tag{4.34}$$

θα έχουμε τελικά ότι

$$h(\epsilon, x, x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\epsilon^2}\exp\big(X+Y\big). \tag{4.35}$$

Οι τελεστές X και Y δεν μετατίθενται μεταξυ τους διότι η νέα μετρική $g_{\mu\nu}$ εξαρτάται απο τη θέση και οι ελεύθερες παράγωγοι θα δράσουν πάνω της. Θα χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα Zassenhaus που ισχύει για δύο τελεστές που δεν μετατίθενται. Αυτή είναι η εξής

$$\exp\big(X+Y\big) = \exp\big(X\big)\exp\big(Y\big)\exp\big(-\frac{1}{2}\big([X,Y]\big)\big)\exp\big(\frac{1}{6}\big(2[Y,[X,Y]]+[X,[X,Y]]\big)\big). \tag{4.36}$$

Θα αναπτύξουμε τα εκθετικά και θα κρατήσουμε συνολικά όρους που θα είναι μέχρι τάξη ε. Κανοντάς το αυτό, βρίσκουμε ότι

$$\exp(X+Y) = \exp\big(X\big)\Bigg(1-\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{8}[X,Y][X,Y]+Y-\frac{1}{2}Y[X,Y]+\frac{Y^2}{2}+ \\ +\frac{1}{6}\big(2[Y,[X,Y]]+[X,[X,Y]]\big)\Bigg)+\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}}). \tag{4.37}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τον πρώτο μεταθέτη. Έχουμε ότι

$$[X,Y] = \big[-g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}, 2i\sqrt{\epsilon}k^{\alpha}g_{\alpha\beta}\partial^{\beta} + \epsilon g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\big]. \tag{4.38}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα για τρεις ποσότητες A,B,C

$$[A, B+C] = [A,B] + [A,C], \tag{4.39}$$

η σχέση 4.38 παίρνει την μορφή

$$[X,Y] = \big[-g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}, 2i\sqrt{\epsilon}k^{\alpha}g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big] + \big[-g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}, \epsilon g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\big]. \tag{4.40}$$

Τώρα θα βγάλουμε έξω από τους μεταθέτες τις σταθερές ποσότητες, δηλαδή το έψιλον με τις δυνάμεις του και τις ορμές. Οι ποσότητες που μένουν εντός μεταθετών είναι οι παράγωγοι και η μετρική $g_{\mu\nu}$, η οποία εξαρτάται από τη θέση. Άρα, ο μεταθέτης θα μας δώσει

$$[X,Y] = -2i\sqrt{\epsilon}k^{\mu}k^{\nu}k^{\alpha}\big[g_{\mu\nu}, g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big] - \epsilon k^{\mu}k^{\nu}\big[g_{\mu\nu}, g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\big]. \tag{4.41}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C], \tag{4.42}$$

παίρνουμε

$$[X,Y] = -2i\sqrt{\epsilon}k^\mu k^\nu k^\alpha \Bigg(\big[g_{\mu\nu}, g_{\alpha\beta}\big]\partial^\beta + g_{\alpha\beta}\big[g_{\mu\nu}, \partial^\beta\big]\big) - \epsilon k^\mu k^\nu \times$$
$$\times \big(\big[g_{\mu\nu}, g_{\alpha\beta}\big] g_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta + g_{\alpha\beta}\big[g_{\mu\nu}, \partial^\alpha\big]\partial^\beta + g_{\alpha\beta}\partial^\alpha\big[g_{\mu\nu}, \partial^\beta\big] \Bigg). \quad (4.43)$$

Οι παράγωγοι που βρίσκονται αριστερά και δεξιά των μεταθετών είναι ελεύθερες.

Ισχύει ότι

$$\big[g_{\mu\nu}, g_{\alpha\beta}\big] = 0, \quad (4.44)$$

και

$$\big[g_{\mu\nu}, \partial^\alpha\big] = -\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big). \quad (4.45)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον αρχικό μεταθέτη, βρίσκουμε ότι

$$[X,Y] = 2i\sqrt{\epsilon}k^\mu k^\nu k^\alpha g_{\alpha\beta}\partial^\beta\big(g_{\mu\nu}\big) + \epsilon k^\mu k^\nu g_{\alpha\beta} \times$$
$$\times \Bigg(\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^\beta + \partial^\beta\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big) \Bigg). \quad (4.46)$$

Η παράγωγος ∂^β στον τελευταίο όρο είναι ελεύθερη, έτσι, θα τον επεξεργαστούμε λίγο. Παίρνουμε τον μεταθέτη

$$\big[\partial^\beta, \partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\big] = \partial^\beta\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big) - \partial^\beta\big(\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\big), \quad (4.47)$$

και λύνοντας ως προς τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της εξίσωσης, βρίσκουμε

$$\partial^\beta\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big) = \big[\partial^\beta, \partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\big] + \partial^\beta\big(\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\big), \quad (4.48)$$

με

$$[\partial^\beta, \partial^\alpha(g_{\mu\nu})] = \partial^\beta(\partial^\alpha(g_{\mu\nu})), \quad (4.49)$$

όπου τώρα η παράγωγος ∂^β δρα στην μετρική. Άρα, συνολικά καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$-\frac{1}{2}[X,Y] = -i\sqrt{\epsilon}k^\mu k^\nu k^\alpha g_{\alpha\beta}\partial^\beta\big(g_{\mu\nu}\big) - \frac{1}{2}\epsilon k^\mu k^\nu g_{\alpha\beta} \times$$
$$\times \Bigg(\partial^\beta\big(\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\big) + 2\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^\beta \Bigg). \quad (4.50)$$

Με την ίδια λογική υπολογίζουμε και τους υπόλοιπους όρους. Στο τέλος αντικαθιστούμε τις ποσότητες X και Y με τα ισοδύναμα τους και φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$\exp(X+Y) = \exp\big(-g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\big)\Bigg(1-\big(i\sqrt{\epsilon}k^\mu k^\nu k^\alpha g_{\alpha\beta}\partial^\beta\big(g_{\mu\nu}\big)+\frac{\epsilon}{2}k^\mu k^\nu g_{\alpha\beta}\times$$
$$\times\big(\partial^\beta\big(\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\big)+2\partial^\alpha\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^\beta\big)-$$
$$-\frac{\epsilon}{2}\big(k^\mu k^\nu k^\alpha g_{\alpha\beta}\partial^\beta(g_{\mu\nu})\big)\big(k^m k^n k^a g_{ab}\partial^b(g_{mn})\big)+$$
$$+2i\sqrt{\epsilon}k^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu+\epsilon g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu+2\epsilon k^\mu k^\nu k^\alpha k^\kappa g_{\kappa\lambda}\big(\partial^\lambda\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^\beta\big(g_{\mu\nu}\big)+$$
$$+g_{\alpha\beta}\partial^\lambda\big(\partial^\beta\big(g_{\mu\nu}\big)\big)+g_{\alpha\beta}\partial^\beta\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^\lambda\big)-$$
$$-2\epsilon(k^\mu k^m g_{\mu\nu}\partial^\nu(g_{mn})\partial^n+k^\mu k^m g_{\mu\nu}g_{mn}\partial^\nu\partial^n)-\frac{4\epsilon}{3}k^\mu k^\nu k^\alpha k^\kappa g_{\kappa\lambda}\big(\partial^\lambda(g_{\alpha\beta})\partial^\beta(g_{\mu\nu})+$$
$$+g_{\alpha\beta}\partial^\lambda(\partial^\beta(g_{\mu\nu}))\big)+\frac{\epsilon}{3}k^\mu k^\nu k^\alpha k^\kappa g_{\alpha\beta}\partial^\alpha(g_{\mu\nu}\partial^\beta(g_{\kappa\lambda})\Bigg). \quad (4.51)$$

Τώρα θα επαναορίσουμε τις ορμές εισάγοντας έναν τανυστή S^μ_ν. Δηλαδή,

$$k^\mu = S^\mu{}_\rho k'^\rho, \quad (4.52)$$

όπου τον τανυστή τον ορίζουμε έτσι ώστε να κάνει τη μετρική $g_{\mu\nu}$ ευκλείδια μέσω του μετασχηματισμού

$$S^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} S^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (4.53)$$

Οι τανυστές S^μ_ν είναι εν γένει συναρτήσεις του x. Επίσης, ισχύει η ιδιότητα

$$S^\alpha{}_\beta S^\gamma{}_\delta \eta^{\beta\delta} = \big(S^2\big)^{\alpha\gamma}, \quad (4.54)$$

όπου θα τη χρησιμοποιήσουμε στον υπολογισμό.

Θα δούμε τώρα πως μετατρέπεται η ποσότητα X κάτω από τον μετασχηματισμό 4.53. Έχουμε

$$X = -g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = -g_{\mu\nu}S^\mu{}_\rho k'^\rho S^\nu{}_\sigma k'^\sigma = -k'^\rho S^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} S^\nu{}_\sigma k'^\sigma =$$
$$= -k'^\rho \eta_{\rho\sigma} k'^\sigma = -k'_\sigma k'^\sigma = -k'^2. \quad (4.55)$$

Πραγματοποιώντας τις μετατροπές και στους υπόλοιπους όρους, θα πάρουμε το αποτέλεσμα

$$
\begin{aligned}
h(\epsilon,x,x) = \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\epsilon^2}\big(\det S\big)\Bigg[\exp(-k'^2)\Bigg(1 - i\sqrt{\epsilon}S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}k'^{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}k'^{\gamma}g_{\alpha\beta}\times \\
\times\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) - \frac{\epsilon}{2}S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}k'^{\sigma}g_{\alpha\beta}\big(\partial^{\beta}\big(\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\big) + 2\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^{\beta}\big) - \frac{\epsilon}{2}\big(S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}k'^{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}k'^{\gamma}\times \\
\times g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)\big(S^{m}{}_{r}k'^{r}S^{n}{}_{s}k'^{s}S^{a}{}_{c}k'^{c}g_{ab}\partial^{b}\big(g_{mn}\big)\big) + 2i\sqrt{\epsilon}S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}g_{\mu\nu}\partial^{\nu} + \epsilon g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu} + \\
+ 2\epsilon S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}k'^{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}k'^{\gamma}S^{\kappa}{}_{\delta}k'^{\delta}g_{\kappa\lambda}\big(\partial^{\lambda}\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) + g_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\big(\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big) + \\
g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^{\lambda}\big) - 2\epsilon S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{m}{}_{r}k'^{r}\big(g_{\mu\nu}\partial^{\nu}\big(g_{mn}\big)\partial^{n} + g_{\mu\nu}g_{mn}\partial^{\nu}\partial^{n}\big) - \\
- \frac{4\epsilon}{3}S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}k'^{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}k'^{\gamma}S^{\kappa}{}_{\delta}k'^{\delta}g_{\kappa\lambda}\big(\partial^{\lambda}\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) + g_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\big(\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)\big) + \\
+ \frac{\epsilon}{3}S^{\mu}{}_{\rho}k'^{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}k'^{\sigma}S^{\kappa}{}_{\delta}k'^{\delta}S^{\lambda}{}_{\epsilon}k'^{\epsilon}g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\kappa\lambda}\big)\Bigg)\Bigg], \quad (4.56)
\end{aligned}
$$

όπου η ορίζουσα $\det S$ είναι η ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού. Το δεξί μέλος της εξίσωσης δρα στη δοκιμαστική συνάρτηση που αναφέραμε προηγουμένως και η οποία είναι ίση με τη μονάδα. Συνεπώς, οι όροι με τις ελεύθερες παραγώγους οι οποίοι θα δράσουν πάνω σε αυτή τη συνάρτηση θα δώσουν μηδέν.

Τώρα θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\int d^4k'\ \exp\big(-k'^2\big)k'^{\mu}k'^{\nu} = \frac{\pi^2}{2}\eta^{\mu\nu}, \quad (4.57)$$

$$\int d^4k'\ \exp\big(-k'^2\big)k'^{\mu}k'^{\nu}k'^{\rho}k'^{\sigma} = \frac{\pi^2}{4}\big(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\mu\rho}\big), \quad (4.58)$$

και

$$\int d^4k'\ \exp\big(-k'^2\big)k'^{\mu}k'^{\nu}k'^{\rho}k'^{\sigma}k'^{\alpha}k'^{\beta} = \frac{\pi^2}{8}\big(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta} + 14\ \mu\epsilon\tau\alpha\theta\big). \quad (4.59)$$

Για παράδειγμα,

$$\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\epsilon^2}\big(\det S\big)\exp\big(-k'^2\big) = \frac{1}{(2\pi)^4}\big(\det S\big)\pi^2. \quad (4.60)$$

Υπολογίζοντας και τα υπόλοιπα ολοκληρώματα και κάνοντας τις πράξεις με τις συστολές των δεικτών, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} h(\epsilon,x,x) = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^2}\big(\det S\big)\Bigg[1 - \frac{\epsilon}{4}S^{\mu}{}_{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}\eta^{\rho\sigma}g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big(\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)- \\ - \frac{\epsilon}{16}S^{\mu}{}_{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)S^{m}{}_{r}S^{n}{}_{s}S^{a}{}_{c}g_{ab}\partial^{b}\big(g_{mn}\big)\big(\eta^{\rho\sigma}\eta^{\gamma r}\eta^{sc}+ \\ + 14\ \mu\epsilon\tau\alpha\theta\big) + \frac{\epsilon}{2}S^{\mu}{}_{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}S^{\kappa}{}_{\delta}\big(\eta^{\rho\sigma}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\rho\gamma}\eta^{\sigma\delta} + \eta^{\rho\delta}\eta^{\sigma\gamma}\big)\times \\ \times g_{\kappa\lambda}\big(\partial^{\lambda}\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) + g_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\big(\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)\big) - \frac{\epsilon}{3}S^{\mu}{}_{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}S^{\alpha}{}_{\gamma}S^{\kappa}{}_{\delta}\times \\ \times \big(\eta^{\rho\sigma}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\rho\gamma}\eta^{\sigma\delta} + \eta^{\rho\delta}\eta^{\sigma\gamma}\big)g_{\kappa\lambda}\big(\partial^{\lambda}\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) + g_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\big(\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)\big)+ \\ + \frac{\epsilon}{12}S^{\mu}{}_{\rho}S^{\nu}{}_{\sigma}S^{\kappa}{}_{\delta}S^{\lambda}{}_{\epsilon}\big(\eta^{\rho\sigma}\eta^{\delta\epsilon} + \eta^{\rho\delta}\eta^{\sigma\epsilon} + \eta^{\rho\epsilon}\eta^{\sigma\delta}\big)g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\kappa\lambda}\big)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση 4.54, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} h(\epsilon,x,x) = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^2}\big(\det S\big)\Bigg[1 - \frac{\epsilon}{4}\big(S^2\big)^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big(\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\big) - \frac{\epsilon}{16}\big(4\big(S^2\big)^{\mu\nu}\big(S^2\big)^{\alpha m} \\ \big(S^2\big)^{na} + 4\big(S^2\big)^{\mu\alpha}\big(S^2\big)^{\nu m}\big(S^2\big)^{na} + 2\big(S^2\big)^{\mu n}\big(S^2\big)^{\nu a}\big(S^2\big)^{\alpha m} + 2\big(S^2\big)^{\mu m}\big(S^2\big)^{\alpha a}\big(S^2\big)^{\nu n} + \\ + 2\big(S^2\big)^{\mu m}\big(S^2\big)^{\alpha n}\big(S^2\big)^{\nu a} + \big(S^2\big)^{\mu\nu}\big(S^2\big)^{\alpha a}\big(S^2\big)^{mn}\big)g_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)g_{ab}\partial^{b}\big(g_{mn}\big) + \\ + \frac{\epsilon}{6}\big(S^2\big)^{\mu\nu}\big(S^2\big)^{\alpha\kappa}g_{\kappa\lambda}\big(\partial^{\lambda}\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) + g_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\big(\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)\big) + \\ + \frac{\epsilon}{3}\big(S^2\big)^{\mu\kappa}\big(S^2\big)^{\nu\alpha}g_{\kappa\lambda}\big(\partial^{\lambda}\big(g_{\alpha\beta}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big) + g_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}\big(\partial^{\beta}\big(g_{\mu\nu}\big)\big)\big) + \\ + \frac{\epsilon}{12}\big(\big(S^2\big)^{\mu\nu}\big(S^2\big)^{\kappa\lambda} + 2\big(S^2\big)^{\nu\kappa}\big(S^2\big)^{\mu\lambda}\big)g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\big(g_{\mu\nu}\big)\partial^{\beta}\big(g_{\kappa\lambda}\big) + \mathcal{O}\big(\epsilon^{\frac{3}{2}}\big)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Στην αρχή του κεφαλαίου είχαμε ορίσει τον τελεστή Δ 4.16. Ο τελεστής αυτός για να είναι αυτοσυζυγής θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\partial_{\mu}g^{\mu\nu} = 0, \tag{4.63}$$

όπου $g^{\mu\nu}$ είναι η μετρική που ορίσαμε στη σχέση 4.28. Αν πάρουμε την απόκλιση της μετρικής θα δούμε ότι ικανοποιεί αυτή την απαίτηση. Είχαμε δείξει προηγουμένως ότι για τους πίνακες S ισχύει η σχέση 4.53. Μεταφέροντας τη σχέση αυτή σε αναπαράσταση πινάκων, καταλήγουμε στη σχέση

$$S^2 = g^{-1}. \tag{4.64}$$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$S^2 \equiv T, \tag{4.65}$$

και από την 4.64 προκύπτει ότι

$$\det S = \big(\det g\big)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.66}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, η εξίσωση για το heat-kernel απλοποιείται στην εξής

$$h(\epsilon, x, x) = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^2}\big(\det S\big)\bigg[1 + \frac{\epsilon}{48}\big(-4T^{\mu\nu} g_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta g_{\mu\nu} + 4T^{\nu\alpha}\partial^\mu g_{\alpha\beta}\partial^\beta g_{\mu\nu} + \\ + g_{\alpha\beta}T^{\kappa\lambda}T^{\mu\nu}\partial^\beta g_{\kappa\lambda}\partial^\alpha g_{\mu\nu} + 2g_{\alpha\beta}T^{\nu\kappa}T^{\mu\lambda}\partial^\alpha g_{\mu\nu}\partial^\beta g_{\kappa\lambda}\big) + \mathcal{O}\big(\epsilon^{\frac{3}{2}}\big)\bigg]. \tag{4.67}$$

Θα εστιάσουμε την προσοχή μας γύρω απο τη σφαιρική λύση 4.2. Στην περίπτωση αυτή, για $\frac{1}{\Lambda} \leq r \leq r_V$ ισχύει όπως προηγουμένως ότι $\pi_{cl} \sim \sqrt{r}$. Άρα, η μετρική που ορίσαμε συμπεριφέρεται ως $g \sim \Box\pi_{cl} \sim \left(\frac{r}{r_V}\right)^{-\frac{3}{2}}$, ενώ ο αντίστροφος πίνακας της μετρικής που είναι ο πίνακας T συμπεριφέρεται ως $T \sim \left(\frac{r}{r_V}\right)^{\frac{3}{2}}$. Επίσης, για την ορίζουσα του πίνακα S έχουμε ότι $\det S \sim \left(\frac{r}{r_V}\right)^3$. Χωρίζουμε το πεδίο σε μία κλασική τιμή και τις κβαντικές διακυμάνσεις, δηλαδή $\pi = \pi_{cl} + \delta\pi$ και αναπτύσσουμε σε δυνάμεις των κβαντικών διακυμάνσεων. Κρατώντας την τάξη με τους τετραγωνικούς όρους, βρίσκουμε ότι η ενεργός δράση, η οποία δίδεται από τη σχέση 4.15, παίρνει την μορφή [27]

$$\Gamma_{1-loop} = \nu^2 \int d^4x \,\Big(c_0\frac{r^6}{r_V^6}\Lambda^4\big(\delta\pi\partial^4\delta\pi\big) + c_{1a}\frac{r^{\frac{5}{2}}}{r_V^{\frac{9}{2}}}\Lambda^2\big(\delta\pi\partial^4\delta\pi\big) + \\ + c_{1b}\frac{r^{\frac{7}{2}}}{r_V^{\frac{9}{2}}}\Lambda^2\big(\delta\pi\partial^5\delta\pi\big) + c_{1c}\frac{r^{\frac{9}{2}}}{r_V^{\frac{9}{2}}}\Lambda^2\big(\delta\pi\partial^6\delta\pi\big) + \mathcal{O}(\log\Lambda)\Big), \tag{4.68}$$

με τα c_i να είναι αδιάστατες σταθερές. Η παραπάνω μορφή για την ενεργό δράση είναι σχηματική και απεικονίζει μόνο των αριθμό των παραγώγων που δρουν στις διακυμάνσεις και την επίδραση του υποβάθρου.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε αναφέρει ότι η μορφή των αποκλινόντων όρων της ενεργού δράσης στον ένα βρόχο έχουν την μορφή

$$\Gamma \sim \sum_m \Big[\Lambda^4 + \Lambda^2\partial^2 + \partial^4\log\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\Big]\big(\nu\partial^2\pi\big)^m, \tag{4.69}$$

όπου $\nu \sim \frac{1}{\Lambda^3}$. Η ενεργός δράση αυτή αποκλίνει σε αποστάσεις μικρότερες της ακτίνας Vainshtein λόγω του γεγονότος ότι $\Box\pi_{cl} \gg 1$, οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προβλέψεις στη θεωρία. Συγκρίνοντας την 4.68 με την 4.69 βλέπουμε ότι με την τεχνική του heat-kernel εμφανίζονται όροι μπροστα από τις αποκλίσεις οι οποίοι οφείλονται στους πίνακες S και για $r < r_V$ είναι παράγοντες σύγκλισης για το ολοκλήρωμα. Άρα, χωρίς την τεχνική του heat-kernel οι διορθώσεις γίνονται πολύ μεγάλες και η σειρά αποκλίνει και συνεπώς, η θεωρία καταρρέει ενώ, με τη τεχνική του heat-kernel και λαμβάνοντας υπ'όψιν την επίδραση του υποβάθρου, οι διορθώσεις που προκύπτουν είναι αρκετά μικρότερες.

Βιβλιογραφία

[1] M. Fierz and W. Pauli. *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,"* Proc. Roy. Soc. Lond. A173 (1939) 211-232.

[2] Supernova Cosmology Project Collaboration, S. Perlmutter et al. *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae,"* Astrophys. J. 517 (1999) 565-586, arXiv:astro-ph/9812133.

[3] Supernova Search Team Collaboration, A. G. Riess et al. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant,"*Astron. J. 116 (1998) 1009-1038, arXiv:astro-ph/9805201.

[4] Kurt Hinterbichler Center for particle cosmology, Department of physics and astronomy, University of Pennsylvania, 209 South 33rd Street, Philadelphia, PA 19104, USA.

[5] M. Fierz and W. Pauli. *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,"* Proc. Roy. Soc. Lond. A173 (1939) 211-232.

[6] H. van Dam and M. J. G. Veltman. *Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields,"*Nucl. Phys. B22 (1970) 397-411.

[7] V. I. Zakharov JETP Letters (Sov. Phys.) 12 (1970) 312.

[8] Eugeny Babichev and Cedric Deffayet. *An introduction to the Vainshtein mechanism*, Laboratoire de Physique Theorique d'AOrsay, Batiment 210, Universite Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex, France. 2 APC (UMR 7164 - APC, Univ Paris Diderot, CNRS/IN2P3, CEA/lrfu, Obs de Paris, Sorbonne Paris Cit, France), 10 rue Alice Domon et Leonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France, arXiv:1304.7240v1 [gr-qc] 26 Apr 2013.

[9] Vainshtein A I 1972 Phys. Lett. B 39 393.

[10] Gia Dvali, Gregory Gabadadze, Massimo Porrati, *4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space*, Department of Physics, New York University, New York, NY 100 03.

[11] Steven Weinberg. *GRAVITATION AND COSMOLOGY: PRINCIPLES AND APPLICATIONS OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY*, Massachusetts Institute of Technology.

[12] Pauli W and Fierz M 1939 Helv. Phys. Acta 12 297.

[13] Fierz M 1939 Helv. Phys. Acta 12 3; Fierz M and Pauli W 1939 Proc. Roy. Soc. Lond. A 173 211.

[14] P. Van Nieuwenhuizen, *"On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation,"* Nucl. Phys. B60 (1973) 478-492.

[15] Walter Greiner, Joachim Reinhardt *FIELD QUANTIZATION.*

[16] Cedric Deffayet, Gia Dvali, Gregory Gabadadze* *Accelerated Universe from Gravity Leaking to Extra Dimensions* Department of Physics, New York University, New York, NY 100 03 *Theoretical Physics Institute, University of Minnesota, M inneapolis, MN 55455.

[17] *Massive Gravity* Claudia de Rham, CERCA and Physics Department Case Western Reserve University 10900 Euclid Ave, Cleveland, OH 44106, USA,arXiv:1401.4173v2 [hep-th] 14 Mar 2014.

[18] R.Arnowitt, S.Deser and C.Misner, in *Gravitation: an introduction to current research*,L.Witten ed., Wiley, New York 1962.

[19] A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP 0406 (2004) 059 [hep-th/0404159].

[20] Markus A. Luty, Massimo Porrati, Riccardo Rattazzi, *Strong Interactions and Stability in the DGP Model*, Markus A. Luty Department of Physics, University of Maryland College Park, MD 20742, USA Massimo Porrati Department of Physics, New York University 4 Washington Place, New York, NY 10012, USA Riccardo Rattazzi ? Theory Division, CERN CH-1211, Geneva 23, Switzerland.

[21] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. D 79 (2009) 064036 [arXiv:0811.2197 [hep-th]].

[22] JEAN ZINN-JUSTIN, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*,Commissariat a I 'Energie Atomique Direction des Sciences de la matiere Gifsur Yvette, France.

[23] Tiberio de Paula Netto and Ilya L. Shapiro, *One-loop divergences in the Galileon model*, Departamento de F?sica, ICE, Universidade Federal de Juiz de Fora Juiz de Fora, 36036-330, MG, Brazil.

[24] N. Brouzakis[1], A. Codello[2], N. Tetradis[1,3], and O. Zanusso[4], *Quantum corrections in Galileon theories*,
[1]Department of Physics, University of Athens, Zographou 157 84, Greece,
[2] SISSA, Via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
[3] Department of Physics, CERN - Theory Division, CH-1211 Geneva 23, Switzerland
[4] Radboud University Nijmegen, Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics, Heyendaalseweg 135, 6525 AJ Nijmegen, The Netherlands

[25] C. de Rham, G. Gabadadze, L. Heisenberg and D. Pirtskhalava, Phys. Rev. D 87 (2013) 085017 [arXiv:1212.4128]; C. de Rham, L. Heisenberg and R. H. Ribeiro, Phys. Rev. D 88 (2013) 084058 [arXiv:1307.7169 [hep-th]]. C. de Rham, G. Gabadadze, L. Heisenberg and D. Pirtskhalava, Phys. Rev. D 83 (2011) 103516 [arXiv:1010.1780 [hep-th]].

[26] K. Hinterbichler, M. Trodden and D. Wesley, Phys. Rev. D 82 (2010) 124018 [arXiv:1008.1305 [hep-th]].

[27] Nikolaos Brouzakis[1] and Nikolaos Tetradis[1,2], *Suppression of Quantum Corrections by Classical Backgrounds*,
[1] Department of Physics, University of Athens, Zographou 157 84, Greece,
[2] Department of Physics, CERN - Theory Division, CH-1211 Geneva 23, Switzerland

[28] Rafael I. Nepomechie, *Calculating heat kernels*, Department of Physics, FM-15, University of Washington, Seattle, Washington 98195