



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
Επεξεργασία σήματος στις επικοινωνίες και τα πολυμέσα**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Βαθμονόμηση Κάμερας με τη Χρήση των Σημείων Φυγής  
στις Τρεις Διαστάσεις**

**Θεοφάνης Β. Σβίγγος**

**Επιβλέποντες: Εμμανουήλ Σαγκριώτης, Αναπληρωτής καθηγητής**

**ΑΘΗΝΑ**

**ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2013**

## **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Βαθμονόμηση Κάμερας με τη Χρήση των Σημείων Φυγής στις Τρεις Διαστάσεις

**Θεοφάνης Β. Σβίγγος**

**A.M.: M1113**

**ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:** **Εμμανουήλ Σαγκριώτης**, Αναπληρωτής Καθηγητής

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:** **Εμμανουήλ Σαγκριώτης**, Αναπληρωτής Καθηγητής  
**Διονύσης Κάβουρας**, Καθηγητής

Ιανουάριος 2013

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η περιγραφή και η διερεύνηση μεθόδου βαθμονόμησης μιας κάμερας με μόνο στοιχείο μας μια φωτογραφία η οποία έχει τραβηχτεί από την συγκεκριμένη κάμερα. Αφού ολοκληρωθεί η βαθμονόμησης της κάμερας και υπολογιστούν πλήρως οι παράμετροί της, θα εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός στην αρχική μας εικόνα. Στόχος του μετασχηματισμού είναι να χρησιμοποιηθεί σαν ένα μέσω για να ελεγχθεί στην πράξη η ορθή βαθμονόμηση της κάμερας.

Το πρώτο κύριο βήμα προς την επίτευξη του στόχου μας είναι η εύρεση τριών σημείων φυγής, ένα για κάθε μια από τις τρεις διαστάσεις. Τα σημεία φυγής προέρχονται από ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες στον πραγματικό κόσμο, αλλά στη φωτογραφία μας αυτές οι ευθείες αν προεκταθούν στο άπειρο τέμνονται.

Έπειτα θα γίνει πλήρη περιγραφή του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιώντας τα σημεία φυγής θα μπορέσουμε να βαθμονομήσουμε πλήρως την κάμερα μας. Αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί γνωρίζοντας τις παραμέτρους της κάμερας τότε πολύ εύκολα θα μπορέσουμε να εφαρμόσουμε πάνω στην φωτογραφία μας οποιοδήποτε μετασχηματισμό.

Στη συνέχεια περιγράφεται το μαθηματικό μοντέλο του μετασχηματισμού που θα εφαρμοστεί. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ο μετασχηματισμός που επιλέχτηκε είναι η αποτύπωση της πρόσοψης ενός κτηρίου.

Τέλος παρουσιάζεται βήμα προς βήμα η εφαρμογή των μεθόδων στην πράξη και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για διάφορες φωτογραφίες.

**ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:** Επεξεργασία Εικόνας

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Σημείο φυγής, Μοντέλο κάμερας μικρής-οπής, βαθμονόμηση κάμερας, προοπτική γεωμετρία, ευθεία φυγής

## **ABSTRACT**

The subject of this thesis is to describe and explore the calibration method of a camera with only our element a photo which has been pulled from the specific camera. Once the calibration of cameras and computers are fully configured, you apply a transformation to our original image. The aim of the transformation is used as a means to check in practice the correct calibration of the camera.

The first major step toward achieving our goal is to find three vanishing points, one for each of the three dimensions. The vanishing points from lines that are parallel in the real world, but in our photograph these lines if extrapolated to infinity intersect.

Then it will be a complete description of how using the vanishing points will be able to fully calibrate our camera. This is very important because knowing the parameters of the camera then you will easily be able to apply on the photo any transformation.

Then describe the mathematical model of transformation that will be applied. In this thesis, the chosen transformation is an imprint of a building facade. Finally illustrated step by step the methods in practice and presents the results for different images.

**ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:** Image Processing

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Vanishing Point, Pin-Hole Camera Model, Camera calibration, Perspective geometry, Vanishing Line

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ευκαιρία ολοκλήρωσης της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Μανώλη Σαγκριώτη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα, καθώς και για την βοήθεια και γνώση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b> .....	<b>12</b>
<b>1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ</b> .....	<b>13</b>
1.1 Εισαγωγή .....	13
1.2 Συντεταγμένες .....	14
1.3 Ομοιογένεια .....	14
1.4 Προβολική Γεωμετρία και Μετασχηματισμοί στο 2-διάστατο Χώρο .....	16
1.4.1 Το 2-διάστατο Προβολικό Επίπεδο .....	16
1.4.2 Σημεία και ευθείες .....	16
1.4.3 Ιδανικά σημεία και η ευθεία στο άπειρο .....	17
1.4.4 Κωνικές Τομές .....	19
1.5 Προβολικοί Μετασχηματισμοί .....	20
1.6 Προβολική Γεωμετρία και Μετασχηματισμοί στο 3D Χώρο .....	22
1.6.1 Σημεία και Προβολικοί Μετασχηματισμοί .....	23
1.6.2 Επίπεδα, Ευθείες και Προβολικοί Μετασχηματισμοί .....	23
1.6.3 Επίπεδα .....	23
1.6.4 Ευθείες .....	24
1.7 Μοντέλο κάμερας-μικρής οπής (pin-hole camera) .....	24
<b>2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΜΕΡΑΣ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΑ ΦΥΓΗΣ ΣΕ ΕΙΚΟΝΑ</b> .....	<b>30</b>
2.1 Εισαγωγή .....	30
2.2 Βασικές έννοιες .....	30
2.2.1 Σημείο φυγής (vanishing point) και ιδανική ευθεία .....	30
2.2.2 Βαθμονόμηση κάμερας .....	32
2.2.3 Ενδογενείς Παράμετροι .....	33
2.2.4 Εξωγενείς παράμετροι .....	37
2.3 Περίληψη του αλγορίθμου κατασκευής τριδιάστατου μοντέλου .....	38
2.4 Γεωμετρικό πλαίσιο .....	40
2.4.1 Αξιολόγηση και συμβολισμός .....	40

2.4.2	Προσέγγιση .....	40
2.4.3	Χρησιμοποιώντας τα σημεία φυγής .....	41
2.4.4	Βαθμονόμηση κάμερας και ανάκτηση του προσανατολισμού .....	41
2.4.5	Ανάκτηση της μήτρας προβολής .....	42
<b>2.5</b>	<b>Γεωμετρική ερμηνεία.....</b>	<b>43</b>
2.5.1	Ορθοκεντρικότητα(orthocentrality) του κύριου σημείου .....	43
2.5.2	Οι παράγοντες ως κανονικοποιημένο εμβαδόν τριγώνου .....	44
2.5.3	Υπολογισμός ορθόκεντρου .....	45
<b>3.</b>	<b>ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΚΑΜΕΡΑΣ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΚΑΘΕΤΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ (VERTICAL OBJECTS).....</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Μοντέλο της κάμερα προς βαθμονόμηση .....</b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>Κάθετο σημείο φυγής και ευθεία σημείων φυγής της σκηνής.....</b>	<b>49</b>
3.3.1	Κάθετο σημείο φυγής.....	49
3.3.2	Ευθεία φυγής.....	51
<b>3.4</b>	<b>Υπολογισμός ενδογενών και εξωγενών παραμέτρων.....</b>	<b>52</b>
3.4.1	Καθορισμός τριών κάθετων σημείων φυγής.....	52
3.4.2	Σχέση μεταξύ σημείων φυγής και ενδογενών και εξωγενών παραμέτρων .....	52
3.4.3	Καθορισμός των ενδογενών παραμέτρων και αριθμητικής μεταφοράς .....	53
3.4.4	Υπολογισμός του ύψους τοποθέτησης της κάμερας.....	54
<b>4.</b>	<b>ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>56</b>
<b>4.1</b>	<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>Υπολογισμός των παραμέτρων της κάμερας στην πράξη .....</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Μετασχηματισμός της αρχικής εικόνας.....</b>	<b>62</b>
4.3.1	Θεωρητικό υπόβαθρο.....	62
4.3.2	Μετασχηματισμός της εικόνας στην πράξη .....	67
<b>5.</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΈΡΕΥΝΑ.....</b>	<b>74</b>
	<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ .....</b>	<b>75</b>
	<b>ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ .....</b>	<b>76</b>

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι..... 77**

**ΑΝΑΦΟΡΕΣ..... 81**



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

- Εικόνα 1.1: Το μοντέλο του προβολικού επιπέδου. Τα σημεία και οι ευθείες του αντιστοιχούν σε ακτίνες και επίπεδα, αντίστοιχα, που διέρχονται από την αρχή στο . Ευθείες που ανήκουν στο -επίπεδο αντιστοιχούν σε ιδανικά σημεία ενώ το - επίπεδο αντιπροσωπεύει την ..... σελ. 18
- Εικόνα 1.2: Γεωμετρικές ιδιότητες των ειδικών κατηγοριών 2D μετασχηματισμών. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, ο πίνακας είναι ένας πίνακας περιστροφής. Η Τρίτη στήλη δείχνει το αποτέλεσμα των μετασχηματισμών σε ένα τετράγωνο. Οι μετασχηματισμοί που βρίσκονται πιο ψηλά στον πίνακα περιλαμβάνουν τους πιο χαμηλούς..... σελ. 21
- Εικόνα 1.3: Μοντέλο κάμερα-μικρής οπής..... σελ. 25
- Εικόνα 1.4: Γεωμετρία της κάμερας μικρής οπής ..... σελ. 26
- Εικόνα 1.5: Γεωμετρία της κάμερας μικρής οπής με παρατήρηση από την αρνητική πλευρά του άξονα Y ..... σελ. 27
- Εικόνα 2.1: Παράλληλες ευθείες στο επίπεδο προβολής έχουν ένα καλά ορισμένο σημείο τομής στο άπειρο, το ιδανικό σημείο ..... σελ. 31
- Εικόνα 2.2: Η κάμερα με κεντρικό σημείο C βλέπει ένα σύνολο παράλληλων ευθειών του επιπέδου π. Οι παράλληλες ευθείες τέμνονται σε ένα ιδανικό σημείο I. Οι αντίστοιχες ευθείες της εικόνας τέμνονται σε ένα σημείο φυγής V, το οποίο αποτελεί εικόνα του I. Σημειώστε ότι η ακτίνα CV είναι παράλληλη των ευθειών της σκηνής..... σελ. 31
- Εικόνα 2.3: Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά σημεία φυγής, εμφανίζονται στις φωτογραφίες δρόμων όπου οι παράλληλες γραμμές συγκλίνουν ..... σελ. 32
- Εικόνα 2.4: Από τις συντεταγμένες του επιπέδου εστίασης στις συντεταγμένες της εικόνας (η είναι η τυπική προβολική βάση) ..... σελ. 35
- Εικόνα 2.5: α) Γραμμικό μοντέλο, β) Ακτινική παραμόρφωση τύπου pincushion, γ) Ακτινική παραμόρφωση τύπου barrel..... σελ. 35
- Εικόνα 2.6: Παράδειγμα ακτινικής παραμόρφωσης (α) εικόνα χωρίς παραμόρφωση, (β) εικόνα με ακτινική παραμόρφωση τύπου barrel. Τα σημεία της εικόνας έχουν μετατοπιστεί ακτινικά ως το κέντρο της εικόνας..... σελ. 36

Εικόνα 2.7: Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου Ο χρήστης επιλέγει μερικές παράλληλες και κάθετες ακμές στην εικόνα. Έπειτα τις χρησιμοποιεί για να υπολογίσει τους πίνακες προβολής του σημείου θέασης.....	σελ. 39
Εικόνα 2.8: Εικόνα 1.1: Ερμηνεία του ως ορθόκεντρου και το σαν εμβαδό.	σελ. 44
Εικόνα 3.1: Κάθετο σημείο φυγής και σχεδιασμός ευθείας φυγής της σκηνής.....	σελ. 49
Εικόνα 3.2: Σχέδιο αναλογίας .....	σελ. 54
Εικόνα 4.1: Αρχική φωτογραφία .....	σελ. 56
Εικόνα 4.2: Σημεία ως προς άξονα Y .....	σελ. 57
Εικόνα 4.3: Σημεία ως προς τον άξονα X .....	σελ. 58
Εικόνα 4.4: Σημεία ως προς τον άξονα Z .....	σελ. 58
Εικόνα 4.5: Σημείο φυγής ως προς τον άξονα Y, σε σχέση με την αρχική εικόνα.	σελ. 59
Εικόνα 4.6: Σημείο φυγής ως προς τον άξονα X, σε σχέση με την αρχική εικόνα.	σελ. 59
Εικόνα 4.7: Σημείο φυγής ως προς τον άξονα Z, σε σχέση με την αρχική εικόνα.	σελ. 60
Εικόνα 4.8: Τα σημεία φυγής σε σχέση με την αρχική εικόνα.....	σελ. 61
Εικόνα 4.9: Τα σημεία φυγής σημειώνονται με + και το ορθόκεντρο με ο.....	σελ. 61
Εικόνα 4.10: Σχήμα για περιγραφή του μετασχηματισμού της αρχικής εικόνας....	σελ. 63
Εικόνα 4.11: Σύστημα συντεταγμένων.....	σελ. 65
Εικόνα 4.12: Οι ευθείες που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των σημείων φυγής.....	σελ. 67
Εικόνα 4.13: Γραφική απεικόνιση των σημείων φυγής και του ορθόκεντρου βασισμένοι στην αρχική μας εικόνα.....	σελ. 68
Εικόνα 4.14: Τελικό αποτέλεσμα. Λήψη της πρόσοψης του κτηρίου .....	σελ. 69
Εικόνα 4.15: Τελικό αποτέλεσμα λόγω μη γραμμικού μετασχηματισμού.....	σελ. 70
Εικόνα 4.16: Τελικό αποτέλεσμα. Λήψη της δεύτερης πλευράς του κτηρίου .....	σελ. 70
Εικόνα 4.17: Αρχική εικόνα .....	σελ. 71
Εικόνα 4.18: Τελικό αποτέλεσμα. Αριστερή πρόσοψη του κτηρίου .....	σελ. 71
Εικόνα 4.19: Τελικό αποτέλεσμα. Δεξιά πρόσοψη του κτηρίου .....	σελ. 72
Εικόνα 4.20: Αρχική εικόνα.....	σελ. 72

Εικόνα 4.21: Τελικό αποτέλεσμα. Αριστερή πρόσοψη του κτηρίου ..... σελ. 73

Εικόνα 4.22: Τελικό αποτέλεσμα. Δεξιά πρόσοψη του κτηρίου ..... σελ. 73

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών 'Επεξεργασίας Σήματος για τις Επικοινωνίες και τα Πολυμέσα' του τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Αντικείμενο της εργασίας είναι η βαθμονόμηση κάμερας για την οποία έχουμε μια φωτογραφία.

Στόχος της συγκεκριμένης εργασίας είναι να παρουσιαστεί η μέθοδος για την βαθμονόμηση της κάμερας με την χρήση των σημείων φυγής στις τρεις διαστάσεις. Βαθμονόμηση κάμερας είναι η διαδικασία για την εύρεση των παραμέτρων της κάμερας από την οποία προήλθε μια συγκεκριμένη φωτογραφία ή βίντεο. Συνήθως οι παράμετροι της κάμερας εκπροσωπούνται από μια μήτρα 3x4 που ονομάζεται, 'μήτρα της κάμερας'. Στην συγκεκριμένη εργασία θεωρήσαμε ότι η κάμερα μας περιγράφεται με το μοντέλο της κάμερας μικρής-οπής (Pin-Hole Camera).

Αφού βαθμονομήσουμε την κάμερα από την οποία έχουμε μια φωτογραφία θα εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό στην αρχική μας εικόνα. Στόχος του μετασχηματισμού που θα εφαρμοστεί είναι για να μπορέσουμε να ελέγξουμε στην πράξη αν έγινε σωστή βαθμονόμηση στην κάμερά μας.

Όλοι οι υπολογισμοί και η πρακτική εφαρμογή των μεθόδων που θα παρουσιαστούν έγινε σε περιβάλλον MATLAB 7.11.0 (R2010b).

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή του τμήματός μας Κύριο Μανώλη Σαγκριώτη για την παρότρυνση του να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα.

## 1. Βασικές έννοιες

### 1.1 Εισαγωγή

Είμαστε όλοι εξοικειωμένοι με τους προβολικούς μετασχηματισμούς (projective transformations). Όταν κοιτάμε μια εικόνα βλέπουμε τα τετράγωνα που δεν είναι τετράγωνα και τους κύκλους που δεν είναι κύκλοι. Ο μετασχηματισμός που χαρτογραφεί αυτά τα επίπεδα αντικείμενα επάνω στην εικόνα είναι ένα παράδειγμα ενός προβολικού μετασχηματισμού.

Έτσι γεννιέται το ερώτημα, ποιες από τις ιδιότητες της γεωμετρίας διατηρούνται από τους προβολικούς μετασχηματισμούς; Σίγουρα όχι η μορφή αφού οι κύκλοι μπορεί να παρουσιάζονται σαν ελλείψεις. Όμως ούτε και οι γωνίες, οι αποστάσεις και οι αναλογίες των αποστάσεων. Εντούτοις αυτό που διατηρείται είναι η ιδιότητα της ευθύτητας.

Για να δούμε γιατί απαιτείται να χρησιμοποιούμε την προβολική γεωμετρία θα αρχίσουμε πρώτα από την ευκλείδεια γεωμετρία, δηλαδή τη γεωμετρία που περιγράφει τις γωνίες και τα σχήματα των αντικειμένων. Η ευκλείδεια γεωμετρία δημιουργεί προβλήματα για ένα σημαντικό λόγο, ότι πρέπει να δημιουργούμε εξαιρέσεις για μερικές από τις βασικές έννοιες της γεωμετρίας όπως η διατομή των γραμμών. Δύο γραμμές (στη γεωμετρία 2 διαστάσεων) σχεδόν πάντα συναντώνται σε ένα σημείο, αλλά υπάρχουν και μερικά ζευγάρια γραμμών που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα και καλούνται παράλληλοι. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτές οι ευθείες τέμνονται στο άπειρο. Όμως αυτό δεν είναι γενικά πειστικό και συγκρούεται με ένα άλλο γνωμικό που λέει ότι το άπειρο δεν υπάρχει. Μπορούμε να ενισχύσουμε το ευκλείδειο επίπεδο με την προσθήκη αυτών των σημείων στο άπειρο όπου οι παράλληλες γραμμές συναντιούνται, και επιλύουμε τη δυσκολία με το άπειρο αποκαλώντας τα, «ιδανικά σημεία». Προσθέτοντας αυτά τα σημεία ο ευκλείδειος χώρος μετασχηματίζεται σε ένα νέο τύπο γεωμετρικού αντικειμένου, τον προβολικό χώρο.

Αυτός είναι πολύ χρήσιμος τρόπος σκέψης, δεδομένου ότι εξοικειωνόμαστε με τις ιδιότητες του ευκλείδειου χώρου συμπεριλαμβάνοντας τις έννοιες όπως οι γωνίες, οι αποστάσεις, τα σημεία και οι γραμμές. Δεν υπάρχει τίποτα μυστήριο για τον προβολικό χώρο, είναι μια επέκταση του ευκλείδειου χώρου με την εξαίρεση ότι δύο γραμμές συναντιούνται πάντα σε ένα σημείο, το οποίο μερικές φορές είναι ένα «μυστήριο» σημείο στο άπειρο.

## 1.2 Συντεταγμένες

Ένα σημείο στον ευκλείδειο 2-διάστατο χώρο αντιπροσωπεύεται από ένα διατεταγμένο ζευγάρι πραγματικών αριθμών  $(x,y)$ . Μπορούμε να προσθέσουμε μία επιπλέον συντεταγμένη σε αυτό το ζευγάρι, έχοντας τώρα το  $(x,y,1)$  το οποίο αντιπροσωπεύει το ίδιο σημείο. Αυτό είναι αρκετά αβλαβές, δεδομένου ότι μπορούμε να επιστρέψουμε πίσω και να πάμε από μια αντιπροσώπευση του σημείου σε μία άλλη απλά με την προσθήκη ή την αφαίρεση της τελευταίας συντεταγμένης. Τώρα θα πάμε στο σημαντικό εννοιολογικό βήμα της ερώτησης γιατί η τελευταία συντεταγμένη πρέπει να είναι μονάδα. Τι γίνεται με το σημείο  $(x,y,2)$ ; Εδώ κάνουμε μια σύμβαση και λέμε ότι τα  $(x,y,1)$  και  $(2x,2y,2)$  παριστάνουν το ίδιο σημείο, και επιπλέον τα  $(kx,ky,k)$  αντιπροσωπεύουν τα ίδια σημεία για οποιαδήποτε μη μηδενική τιμή του  $k$ . Τυπικά τα σημεία αντιπροσωπεύονται από τις κλάσεις ισοδυναμίας των τριπλών συντεταγμένων, όπου 2 σημεία είναι ισοδύναμα όταν διαφέρουν κατά ένα κοινό πολλαπλάσιο. Αυτές είναι οι ομογενείς συντεταγμένες του σημείου. Όταν μας δίνεται ένα σημείο με τρεις συντεταγμένες  $(kx,ky,k)$  μπορούμε να πάρουμε τις αυθεντικές συντεταγμένες διαιρώντας με  $k$  και παίρνοντας τα  $(x,y)$ .

Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι αν το  $(x,y,1)$  αντιπροσωπεύει το ίδιο σημείο με το ισοδύναμο ζευγάρι  $(x,y)$ , δεν υπάρχει σημείο για να αντιπροσωπεύει το  $(x,y,0)$ . Αν προσπαθήσουμε να διαιρέσουμε με την τελευταία συντεταγμένη παίρνουμε το σημείο  $(x/0,y/0)$  που είναι άπειρο. Έτσι βλέπουμε πως προκύπτουν τα σημεία στο άπειρο, δηλαδή είναι τα σημεία που παριστάνονται από τις ομογενείς συντεταγμένες, στις οποίες η τελευταία συντεταγμένη είναι 0.

Οι ίδιες ιδέες που μετασχηματίζουν το δισδιάστατο ευκλείδειο χώρο σε προβολικό χώρο με σημεία που περιγράφονται από ομογενείς συντεταγμένες, μπορούν να επεκταθούν σε οποιαδήποτε διάσταση. Ο ευκλείδειος χώρος μπορεί να επεκταθεί στον προβολικό χώρο με περιγραφείς σημείων μέσω ομογενών διανυσμάτων. Για  $n=2$  τα σημεία στο άπειρο σχηματίζουν μια ευθεία που καλείται ευθεία στο άπειρο, ενώ για  $n=3$  σχηματίζουν επίπεδο που καλείται επίπεδο στο άπειρο.

## 1.3 Ομοιογένεια

Στην κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία όλα τα σημεία είναι ίδια. Δεν υπάρχει κανένα διακεκριμένο σημείο. Όλος ο χώρος είναι ομογενής. Όταν προστίθενται οι συντεταγμένες ένα σημείο επιλέγεται ως αφετηρία. Ωστόσο είναι σημαντικό να

συνειδητοποιήσουμε ότι αυτό είναι ένα μέρος των επιλεγμένων συντεταγμένων. Θα μπορούσαμε να βρούμε ένα διαφορετικό τρόπο ώστε ένα σημείο στο επίπεδο των συντεταγμένων να θεωρείται ως αφητηρία. Στην πραγματικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε μια αλλαγή των συντεταγμένων για τον Ευκλείδειο χώρο στον οποίο οι άξονες μετατοπίζονται και περιστρέφονται σε διαφορετική θέση. Μπορούμε με έναν άλλον τρόπο να θεωρήσουμε ότι ο ίδιος ο χώρος μετατοπίζεται και περιστρέφεται σε άλλη θέση. Η προκύπτουσα διαδικασία είναι γνωστή ως Ευκλείδεια μετατροπή.

Ένας γενικότερος τύπος μετασχηματισμού είναι αυτός της εφαρμογής ενός γραμμικού μετασχηματισμού στο  $\mathbb{R}^n$ , ακολουθούμενο από έναν Ευκλείδειο μετασχηματισμό που κινεί την αρχή του διαστήματος. Μπορούμε να το σκεφτούμε αυτό σαν μετακίνηση χώρου, περιστροφή και τελικά τέντωμα γραμμικά σε διαφορετικές αναλογίες και σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Ο προκύπτων μετασχηματισμός είναι γνωστός σαν συσχετισμένος (affine) μετασχηματισμός.

Το αποτέλεσμα είτε ενός Ευκλείδειου είτε ενός συσχετισμένου (affine) μετασχηματισμού είναι ότι τα σημεία που βρίσκονται στο άπειρο παραμένουν στο άπειρο. Τέτοια σημεία διατηρούνται με κάποιο τρόπο, τουλάχιστον ως σύνολο, από τέτοιους μετασχηματισμούς.

Από την άποψη της προβολικής γεωμετρίας, τα σημεία στο άπειρο δεν έχουν διαφορές από τα άλλα σημεία. Ακριβώς όπως και ο Ευκλείδειος χώρος είναι μοναδικός, έτσι είναι και ο προβολικός χώρος. Η ιδιότητα ότι τα σημεία στο άπειρο έχουν την τελευταία συντεταγμένη μηδέν σε ομογενείς συντεταγμένες, δεν είναι τίποτα άλλο από αστοχία στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Αναλογικά με τους Ευκλείδειους ή τους συσχετισμένους μετασχηματισμούς, μπορούμε να καθορίσουμε έναν προβολικό μετασχηματισμό στον προβολικό χώρο. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός του Ευκλείδειου χώρου παρουσιάζεται με πολλαπλασιασμό πινάκων που εφαρμόζεται στις συντεταγμένες του σημείου. Με τον ίδιο τρόπο ο προβολικός μετασχηματισμός του προβολικού χώρου αποτυπώνεται με τις ομογενείς συντεταγμένες που παρουσιάζουν ένα σημείο  $((n+1)$ -διάνυσμα), το οποίο πολλαπλασιάζεται με μια γενικευμένη (non-singular) μήτρα. Κάτω από μια τέτοια αποτύπωση τα σημεία στο άπειρο (των οποίων η τελευταία συντεταγμένη είναι μηδέν) αντιστοιχούν σε αυθαίρετα άλλα σημεία. Τα σημεία στο άπειρο δεν διατηρούνται. Κατά συνέπεια ένας προβολικός μετασχηματισμός του προβολικού χώρου παρουσιάζεται από ένα γραμμικό μετασχηματισμό των ομογενών συντεταγμένων:

Στα προβλήματα ανάλυσης εικόνας με υπολογιστές, ο προβολικός χώρος χρησιμοποιείται ως ο καταλληλότερος τρόπος αναπαράστασης του πραγματικού τρισδιάστατου χώρου

#### 1.4 Προβολική Γεωμετρία και Μετασχηματισμοί στο 2-διάστατο Χώρο

Στην ενότητα αυτή μελετώνται οι ιδιότητες της προβολικής γεωμετρίας στον 2-διάστατο χώρο. Συγκεκριμένα, μελετώνται οι περιγραφές των σημείων, ευθειών, καμπυλών σε ομογενείς συντεταγμένες, και πως αυτές μετασχηματίζονται υπό προβολικούς μετασχηματισμούς. Εισάγονται οι έννοιες των ιδανικών σημείων και της ευθείας στο άπειρο. Στην ενότητα αυτή, έντονοι μικροί χαρακτήρες, όπως  $\infty$ , συμβολίζουν ένα διάνυσμα στήλη, και το ανάστροφό του,  $\infty^T$ , συμβολίζει ένα διάνυσμα γραμμή.

##### 1.4.1 Το 2-διάστατο Προβολικό Επίπεδο

Τα σημεία σε ένα επίπεδο περιγράφονται από το ζεύγος συντεταγμένων  $(x,y)$  στο  $\mathbb{R}^2$ . Οι ομογενείς συντεταγμένες του σημείου είναι  $(kx,ky,k)$  στο  $\mathbb{R}^3$ .

##### 1.4.2 Σημεία και ευθείες

Ομογενείς περιγραφές ευθειών. Η ευθεία σε ένα επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση  $ax+by+c=0$ . Η επιλογή διαφορετικών τιμών για τις σταθερές  $a, b$  και  $c$  δίνει διαφορετικές ευθείες στο επίπεδο. Επομένως, μια ευθεία μπορεί να παρασταθεί ως ένα διάνυσμα  $(a,b,c)^T$ . Ωστόσο, το διάνυσμα αυτό δεν αποτελεί μοναδικό τρόπο περιγραφής της ευθείας αυτής, διότι η εξίσωση  $ka+ky+kz=0$  και άρα το διάνυσμα  $(ka,kb,kc)^T$  περιγράφουν την ίδια ευθεία για κάθε μη μηδενικό  $k$ . Τα διανύσματα αυτά αν και διαφορετικά είναι ισοδύναμα καθώς παριστάνουν την ίδια ευθεία. Μια ισοδύναμη τάξη διανυσμάτων είναι γνωστή ως ομογενές διάνυσμα. Οποιοδήποτε διάνυσμα  $(a,b,c)^T$  είναι αντιπροσωπευτικό της ισοδύναμης τάξης.

Ομογενείς περιγραφές σημείων. Ένα σημείο  $(x,y)$  ανήκει στην ευθεία  $ax+by+c=0$  αν και μόνο αν  $ax+by+c=0$ . Αυτό μπορεί να γραφεί ως  $(a,b,c)^T \cdot (x,y,1)^T = 0$ . Επομένως, το σύνολο διανυσμάτων  $(x,y,1)^T$  αντιστοιχεί στο σημείο  $(x,y)$  στο  $\mathbb{R}^2$ . Για το λόγο αυτό, και τα σημεία και οι ευθείες μπορούν να παρασταθούν με ομογενείς



συντεταγμένες. Ένα αυθαίρετο ομογενές διάνυσμα της μορφής  $\vec{d}$  στο  $\mathbb{R}^3$  αντιπροσωπεύει το σημείο  $(x, y, z)$  στο  $\mathbb{R}^3$ .

Μια απλή εξίσωση καθορίζει αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, συγκεκριμένα:

Αποτέλεσμα 1: ένα σημείο  $x$  ανήκει στην ευθεία  $\ell$  αν και μόνο αν

Τομή ευθειών. Για δύο ευθείες  $\ell$  και  $\ell'$  ορίζεται το διάνυσμα  $\vec{d} = \vec{d}(\ell, \ell')$ , όπου  $\vec{d}$  αντιπροσωπεύει το εξωτερικό γινόμενο. Από την ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου ισχύει ότι  $\vec{d} \cdot \vec{d} = 0$ . Επομένως, αν θεωρηθεί ότι  $x$  αντιπροσωπεύει ένα σημείο, τότε το  $x$  ανήκει και στις δύο ευθείες  $\ell$  και  $\ell'$ , και άρα αποτελεί το σημείο τομής των ευθειών.

Αποτέλεσμα 2: Άρα το σημείο τομής δύο ευθειών  $\ell$  και  $\ell'$  είναι το σημείο

Ευθεία ορισμένη από ευθεία. Έστω δύο σημεία  $x$  και  $x'$ . Ορίζοντας το διάνυσμα  $\vec{d} = \vec{d}(x, x')$  και θεωρώντας ότι παριστάνει ευθεία, εύκολα προκύπτει ότι αυτή διέρχεται και από τα δύο σημεία.

Αποτέλεσμα 3: Άρα η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $x$  και  $x'$  είναι η

### 1.4.3 Ιδανικά σημεία και η ευθεία στο άπειρο

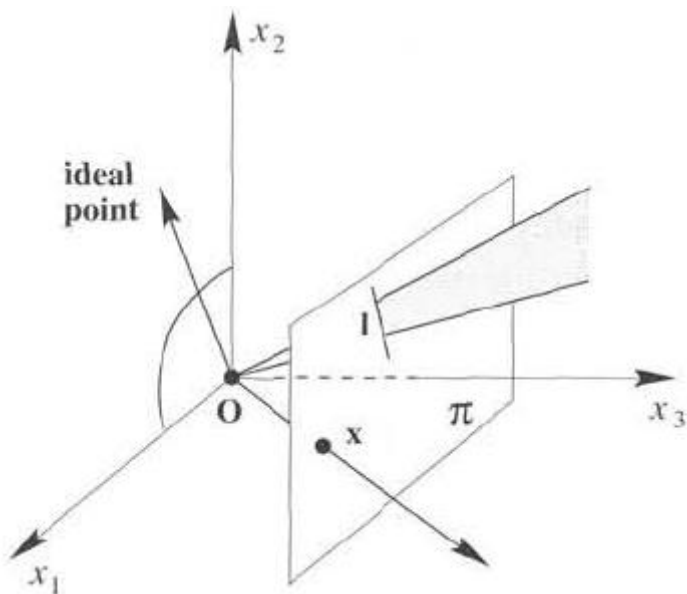
Σημείο τομής παράλληλων ευθειών. Έστω δύο παράλληλες ευθείες  $\ell$  και  $\ell'$ . Αυτές περιγράφονται από τα διανύσματα  $\vec{d}$  και  $\vec{d}'$ . Σύμφωνα με το αποτέλεσμα 2 το σημείο τομής είναι  $x = \vec{d} \times \vec{d}'$ . Αγνοώντας την πολλαπλασιαστική σταθερά, το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το  $x = \vec{d} \times \vec{d}'$ . Το σημείο αυτό είναι σημείο απείρου και δεν αντιστοιχεί σε πεπερασμένο σημείο στο  $\mathbb{R}^3$ .

Ευθεία στο άπειρο. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ένα ομογενές διάνυσμα  $\vec{d}$  με  $\vec{d} \cdot \vec{d} = 0$  αντιστοιχεί σε πεπερασμένο σημείο στο  $\mathbb{R}^3$ . Τα σημεία με  $\vec{d} \cdot \vec{d} = 0$  θεωρούνται σημεία στο άπειρο. Το σύνολο όλων των ιδανικών σημείων (δηλαδή σημείων στο άπειρο) μπορεί να γραφεί ως  $\mathbb{R}P^2$ , όπου ένα συγκεκριμένο σημείο καθορίζεται από το λόγο  $(x, y, z)$ . Είναι φανερό ότι αυτό το σύνολο σημείων ανήκει σε μια ευθεία, την ευθεία στο άπειρο, που περιγράφεται από το διάνυσμα  $\vec{d} = (0, 0, 1)$ . Πράγματι, εύκολα επαληθεύει κανείς ότι  $\vec{d} \cdot \vec{d} = 0$ . Από το αποτέλεσμα 2 το σημείο τομής της ευθείας  $\ell$  και της ευθείας στο άπειρο είναι το ιδανικό

σημείο  $l$  Μια ευθεία  $\pi$  παράλληλη στην  $l$ , έχει το ίδιο σημείο τομής με την ευθεία στο άπειρο  $l \cap \pi = \infty$ . Σε μη ομογενείς συντεταγμένες, το διάνυσμα  $l$  είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην ευθεία και ορθογώνιο στο κάθετο διάνυσμα της ευθείας  $(a,b)$  και έτσι αντιπροσωπεύει τη διεύθυνση της ευθείας. Για το σκοπό αυτό, η ευθεία στο άπειρο μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο των διαφορετικών διευθύνσεων των ευθειών στο 2-διάστατο χώρο.

Μοντελοποίηση του προβολικού επιπέδου. Για ευκολότερη κατανόηση του  $\mathbb{P}^2$ , μπορεί κανείς να το σκεφτεί ως ένα σύνολο ακτινών στο  $\mathbb{R}^3$ . Το σύνολο όλων των διανυσμάτων της μορφής  $kl$  με  $k$  μεταβαλλόμενο σχηματίζει μια ακτίνα που διέρχεται από την αρχή ( $k=0$ ). Μια τέτοια ακτίνα αντιπροσωπεύει ένα σημείο στο  $\mathbb{P}^2$ . Με το μοντέλο αυτό, μια ευθεία στο  $\mathbb{P}^2$  είναι ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή. Τα σημεία και οι ευθείες στο  $\mathbb{P}^2$  μπορούν να προκύψουν από την τομή των ακτινών και των επιπέδων που διέρχονται από την αρχή με το επίπεδο  $\pi$ . Οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα ιδανικά σημεία και το επίπεδο που αντιστοιχεί στην  $l$  είναι παράλληλα στο επίπεδο  $\pi$ . Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 1.

Διαδικότητα. Είναι εμφανές ότι ο ρόλος των ευθειών και των σημείων εναλλάσσεται στις σχέσεις που αφορούν τις ιδιότητες τους. Τα Αποτελέσματα 2 και 4 είναι τα ίδια, με τους ρόλους των σημείων και ευθειών να εναλλάσσονται.



Εικόνα 1.1: Το μοντέλο του προβολικού επιπέδου. Τα σημεία και οι ευθείες του  $\mathbb{P}^2$  αντιστοιχούν σε ακτίνες και επίπεδα, αντίστοιχα, που διέρχονται από την αρχή στο  $\mathbb{R}^3$ . Ευθείες που ανήκουν στο  $\mathbb{P}^2$  -επίπεδο αντιστοιχούν σε ιδανικά σημεία ενώ το  $l$  -επίπεδο αντιπροσωπεύει την  $l$ .

#### 1.4.4 Κωνικές Τομές

Μια κωνική τομή είναι μια καμπύλη που περιγράφεται από μια εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο. Στην ευκλείδεια γεωμετρία διακρίνονται τρία είδη κωνικών τομών, οι υπερβολοειδείς, οι ελλειψοειδείς και οι παραβολικές.

Η εξίσωση μια κωνικής τομής σε μη ομογενείς συντεταγμένες είναι:

Ομογενοποιώντας τις συντεταγμένες με αντικατάσταση της συνιστώσας  $z$  με  $z + c$

και της  $z$  με  $z - c$  προκύπτει η εξίσωση

ή σε μορφή πινάκων

όπου ο πίνακας  $C$  δίνεται από

Ο πίνακας  $C$  είναι συμμετρικός. Ο λόγος των στοιχείων του πίνακα είναι σημαντικός καθώς ο πολλαπλασιασμός του πίνακα με μια μη μηδενική σταθερά δεν επηρεάζει την εξίσωση. Επομένως, μια κωνική τομή έχει πέντε βαθμούς ελευθερίας (τα έξι στοιχεία ενός συμμετρικού πίνακα  $3 \times 3$  πλην μια πολλαπλασιαστική σταθερά).

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων του πίνακα  $C$  και επομένως της κωνικής τομής απαιτεί τον προσδιορισμό των πέντε στοιχείων και άρα απαιτεί την γνώση πέντε σημείων που ανήκουν στην καμπύλη. Με άλλα λόγια, πέντε σημεία καθορίζουν μια κωνική τομή.

Εφαπτόμενες στις κωνικές τομές. Η ευθεία  $l$  εφαπτόμενη σε μια κωνική τομή σε σημείο  $P$  δίνεται από το παρακάτω αποτέλεσμα:

Αποτέλεσμα 4: Η ευθεία  $l$  εφαπτόμενη στην  $C$  στο σημείο  $P$  δίνεται από τη σχέση

Πράγματι, η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο  $P$ , διότι  $l^T C P = 0$ . Αν η ευθεία έχει ένα σημείο επαφής με την κωνική τομή, τότε είναι εφαπτόμενη. Διαφορετικά, αν η ευθεία έχει και δεύτερο σημείο τομής, έστω  $Q$ , τότε  $l^T C Q = 0$ . Τότε όμως ισχύει ότι

για κάθε  $P$ . Επομένως, όλη η ευθεία  $l$  που ενώνει τα σημεία  $P$  ανήκει στην κωνική τομή  $C$ . Για μη εκφυλισμένες κωνικές τομές (βλ. παρακάτω), ένα τέτοιο συμπέρασμα δεν ισχύει.

Διαδικές κωνικές τομές. Ο ορισμός της κωνικής τομής παραπάνω βασίζεται στον καθορισμό της καμπύλης από σημεία. Από την ιδιότητα της δυαδικότητας μπορεί να οριστεί μια κωνική τομή που προκύπτει από εξισώσεις σε ευθείες. Αυτή η κωνική τομή περιγράφεται επίσης από ένα  $3 \times 3$  πίνακα  $C$ . Μια ευθεία  $l$  εφαπτόμενη στην κωνική τομή  $C$  ικανοποιεί τη σχέση  $l^T C l = 0$ . Ο συμβολισμός  $C$  δείχνει ότι ο πίνακας  $C$  είναι ο συζυγής πίνακας του  $C$ . Αν ο πίνακας  $C$  συμμετρικός και αντιστρέψιμος, τότε ισχύει

Στην περίπτωση που ο πίνακας  $C$  είναι πλήρης, από το Αποτέλεσμα 4 η εφαπτόμενη από ένα σημείο  $P$  που ανήκει στην κωνική τομή  $C$  ικανοποιεί τη σχέση  $l^T C l = 0$ . Αντιστρέφοντας προκύπτει ότι  $l = C^{-1} P$ . Το σημείο  $P$  ανήκει στην κωνική τομή οπότε ισχύει ότι  $P^T C P = 0$ . Επομένως, προκύπτει ότι  $l^T C l = 0$ .

Εκφυλισμένες κωνικές τομές. Αν ο πίνακας  $C$  δεν είναι πλήρους βαθμού, τότε η κωνική τομή λέγεται εκφυλισμένη.

## 1.5 Προβολικοί Μετασχηματισμοί

**Ορισμός 1.** Προβολικότητα είναι ένας αντιστρέψιμος μετασχηματισμός  $h$  από το  $\mathbb{P}^2$  στον εαυτό του τέτοιος ώστε τρία σημεία  $P, Q, R$  και  $h(P), h(Q), h(R)$  ανήκουν στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν  $P, Q, R$  και  $h(P), h(Q), h(R)$  είναι συνευθειακά.





Η προβολικότητα ονομάζεται αλλιώς και προβολικός μετασχηματισμός ή ομογραφία.

**Θεώρημα 1.** Μια αντιστοίχιση  $h$  είναι μια προβολικότητα αν και μόνο αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $H$  τέτοιος ώστε για κάθε σημείο  $P$  στο  $\mathbb{P}^2$  που περιγράφεται από ένα διάνυσμα  $p$  να ισχύει ότι  $h(p) = Hp$ .

Πράγματι, έστω τρία συνευθειακά σημεία  $P, Q, R$  και  $h(P), h(Q), h(R)$  ανήκουν στην ευθεία  $l$ . Τότε  $l^T C l = 0$  για  $i = 1, \dots, 3$ . Έστω ότι ο  $H$  είναι ένας μη αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας. Ισχύει ότι  $l^T C l = 0$ . Επομένως τα σημεία  $P, Q, R$  ανήκουν στην ευθεία  $l$  και άρα είναι συνευθειακά. Τελικά, διατηρείται η ιδιότητα της συγγραμικότητας και άρα πρόκειται για προβολικότητα.

Από τα παραπάνω, είναι δυνατό να δοθεί ένας εναλλακτικός ορισμός του προβολικού μετασχηματισμού.

**Ορισμός 2.** Ένας επίπεδος προβολικός μετασχηματισμός είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός σε ομογενείς διανύσματα που περιγράφεται από ένα αντιστρέψιμο  $3 \times 3$  πίνακα  $H$ , δηλαδή

Group	Matrix	Distortion	Invariant properties
Projective 8 dof	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$		Concurrency, collinearity, <b>order of contact</b> : intersection (1 pt contact); tangency (2 pt contact); inflections (3 pt contact with line); tangent discontinuities and cusps. cross ratio (ratio of ratio of lengths).
Affine 6 dof	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Parallelism, ratio of areas, ratio of lengths on collinear or parallel lines (e.g. midpoints), linear combinations of vectors (e.g. centroids). The line at infinity, $l_\infty$ .
Similarity 4 dof	$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Ratio of lengths, angle. The circular points, I, J (see section 2.7.3).
Euclidean 3 dof	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Length, area

Εικόνα 1.2: Γεωμετρικές ιδιότητες των ειδικών κατηγοριών 2D μετασχηματισμών. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, ο πίνακας είναι ένας πίνακας περιστροφής. Η Τρίτη στήλη δείχνει το αποτέλεσμα των μετασχηματισμών σε ένα τετράγωνο. Οι μετασχηματισμοί που βρίσκονται πιο ψηλά στον πίνακα περιλαμβάνουν τους πιο χαμηλούς.

όπου ο πίνακας  $H$  δίνεται από:

**Μετασχηματισμός ευθειών.** Παραπάνω έγινε φανερό πως όταν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία τότε το νέο σημείο ανήκει στην ευθεία. Συμπερασματικά, υπό το μετασχηματισμό, μια ευθεία μετασχηματίζεται σε

### Ιεραρχία Μετασχηματισμών

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται οι ειδικές περιπτώσεις του προβολικού μετασχηματισμού. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι περιπτώσεις αυτές.

Για κάθε ένα από τους μετασχηματισμούς στον σχήματος 2 δίνεται παρακάτω μια σύντομη περιγραφή των χαρακτηριστικών τους.

**Προβολικός Μετασχηματισμός.** Όπως παρατηρήθηκε και παραπάνω, ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη την ιδιότητα της συγγραμικότητας. Διαθέτει οκτώ βαθμούς ελευθερίας, καθώς είναι ομογενής μετασχηματισμός (πίνακας εννέα στοιχείων πλην μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς).

**Αφινικός Μετασχηματισμός.** Ο αφινικός μετασχηματισμός διατηρεί τις παράλληλες ευθείες, τον λόγο εμβαδών, το λόγο μηκών σε παράλληλες ευθείες και την ευθεία στο άπειρο. Διαθέτει έξι βαθμούς ελευθερίας (τέσσερα στοιχεία του πίνακα A και δύο στοιχεία του διανύσματος t.)

**Μετασχηματισμός Ομοιότητας.** Ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί το λόγο μηκών, τις γωνίες καθώς και τα κυκλικά σημεία . Διαθέτει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας (ένα βαθμό για την περιστροφή, ένα για την κλίμακα και δύο για την μετακίνηση).

**Ευκλείδειος Μετασχηματισμός.** Ο ευκλείδειος μετασχηματισμός διατηρεί τα μήκη και τα εμβαδά. Διαθέτει τρεις βαθμούς ελευθερίας (ένα για την περιστροφή και δύο για την μετακίνηση).

## 1.6 Προβολική Γεωμετρία και Μετασχηματισμοί στο 3D Χώρο

Στην ενότητα αυτή μελετώνται οι ιδιότητες της προβολικής γεωμετρίας στον 3D κόσμο. Οι έννοιες που εισάγονται είναι επεκτάσεις των εννοιών που μελετήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Στην ενότητα αυτή, με κεφαλαία έντονα γράμματα θα συμβολίζουμε ένα διάνυσμα διάστασης  $4 \times 1$ .

### 1.6.1 Σημεία και Προβολικοί Μετασχηματισμοί

Ένα σημείο στο τρισδιάστατο χώρο περιγράφεται σε ομογενείς συντεταγμένες ως ένα διάνυσμα  $4 \times 1$ . Συγκεκριμένα, το ομογενές διάνυσμα με αντιστοιχεί στο σημείο του όπου

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενή σημεία με αντιστοιχούν σε σημεία στο άπειρο.

Ένας προβολικός μετασχηματισμός στον είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που δρα σε ομογενή διανύσματα  $4 \times 1$ . Πρόκειται για έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $H$  διάστασης  $4 \times 4$ . Ο πίνακας  $H$  που αντιπροσωπεύει τον μετασχηματισμό σε ομογενείς συντεταγμένες έχει 15 βαθμούς ελευθερίας (16 στοιχεία του πίνακα πλην μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς). Ο προβολικός μετασχηματισμός διατηρεί τις ευθείες, δηλαδή ευθείες μετασχηματίζονται σε ευθείες, καθώς και τα σημεία τομής ευθειών με επίπεδα.

### 1.6.2 Επίπεδα, Ευθείες και Προβολικοί Μετασχηματισμοί

Στον τα σημεία και τα επίπεδα είναι δυαδικά και η περιγραφή τους είναι ανάλογη με την δυαδικότητα σημείου-ευθείας στον .

### 1.6.3 Επίπεδα

Στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο ένα επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση

Ομογενοποιώντας τις συντεταγμένες ενός σημείου που ανήκει στο επίπεδο, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

προκύπτει η εξίσωση:

ή σε διανυσματική μορφή όπου .

που εκφράζει ότι το σημείο ανήκει στο επίπεδο .

Οι πρώτες τρεις συνιστώσες του  $\mathbf{p}_i$  αντιστοιχούν στο κάθετο διάνυσμα του επιπέδου στην ευκλείδεια γεωμετρία.

Τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο. Έστω τρία σημεία  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  ανήκουν στο επίπεδο  $\pi$ . Τότε για κάθε σημείο  $\mathbf{p}$  ισχύει  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{p}_1 + \beta \mathbf{p}_2 + \gamma \mathbf{p}_3$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις γίνονται:

Αν τα τρία σημεία είναι μη συγγραμικά, ο πίνακας που σχηματίζεται από τα σημεία θα έχει βαθμό 3. Αν ο πίνακας έχει βαθμό 2, τότε τα σημεία είναι συγγραμικά. Η λύση της εξίσωσης δίνει ένα σύνολο από επίπεδα που διέρχονται από τα σημεία αυτά.

Το επίπεδο στο άπειρο. Το επίπεδο στο άπειρο  $\pi_\infty$  περιλαμβάνει όλες τις διευθύνσεις  $\mathbf{d}$ . Παρακάτω, περιγράφονται δύο ιδιότητες του επιπέδου αυτού:

- Δύο επίπεδα είναι παράλληλα αν και μόνο αν η ευθεία τομής τους ανήκει στο  $\pi_\infty$ .
- Μια ευθεία είναι παράλληλη σε μία άλλη ευθεία, ή σε ένα επίπεδο, αν το σημείο τομής ανήκει στο  $\pi_\infty$ .

Το επίπεδο  $\pi_\infty$  είναι μια γεωμετρική αναπαράσταση για τους 3 βαθμούς ελευθερίας που χρειάζονται για να καθοριστούν οι αφινικές ιδιότητες. Το επίπεδο στο άπειρο είναι αναλλοίωτο από αφινικούς μετασχηματισμούς.

#### 1.6.4 Ευθείες

Μια ευθεία ορίζεται από την ένωση δύο σημείων ή την τομή δύο επιπέδων. Ο τρόπος περιγραφής τους είναι μέσω αυτών των δύο δυνατοτήτων ορισμού μιας ευθείας.

### 1.7 Μοντέλο κάμερας-μικρής οπής(pin-hole camera)

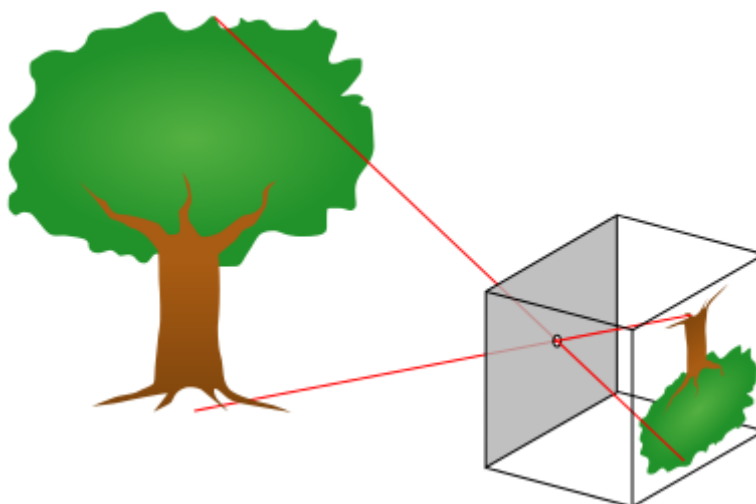
Μια φωτογραφική μηχανή ή γενικότερα μία κάμερα μπορεί να μοντελοποιηθεί με πολλούς τρόπους, ανάλογα με τις ιδιότητες τις οποίες θέλουμε να περιγράψουμε, το βαθμό ακρίβειας που επιθυμούμε, και την εφαρμογή για την οποία προορίζεται το μοντέλο. Το μοντέλο κάμερας το οποίο χρησιμοποιούμε συνήθως για την τρισδιάστατη μοντελοποίηση αντικειμένων και χώρων είναι το μοντέλο μικρής οπής.



Το μοντέλο της κάμερας μικρής-οπής (pinhole camera) αποτελεί μία απλούστευση του μοντέλου της κάμερας λεπτού φακού, καθώς αγνοεί τα φαινόμενα οπτικής παραμόρφωσης ή θολότητας των μη εστιασμένων ειδώλων (φαινόμενα που οφείλονται στη γεωμετρία των φακών και είναι έντονα στις περιοχές μακριά από το κέντρο της προβαλλόμενης εικόνας). Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει φακός, μόνο μία μικρή οπή που λειτουργεί όπως το οπτικό κέντρο του φακού, δηλαδή όλες οι ακτίνες του φωτός διέρχονται από την οπή αδιάθλαστες. Όσο πιο μικρή η διάμετρος, τόσο πιο καθαρή αλλά και σκοτεινή η προβαλλόμενη εικόνα στο επίπεδο προβολής. Φωτογραφικές μηχανές με πολύ μικρή διάμετρο κλείστρου, καθώς και το μάτι σε περιβάλλον έντονου φωτισμού λειτουργούν σαν κάμερες-μικρής οπής. Το μαθηματικό μοντέλο της κάμερας-μικρής οπής ονομάζεται μοντέλο σημειακής προοπτικής προβολής.

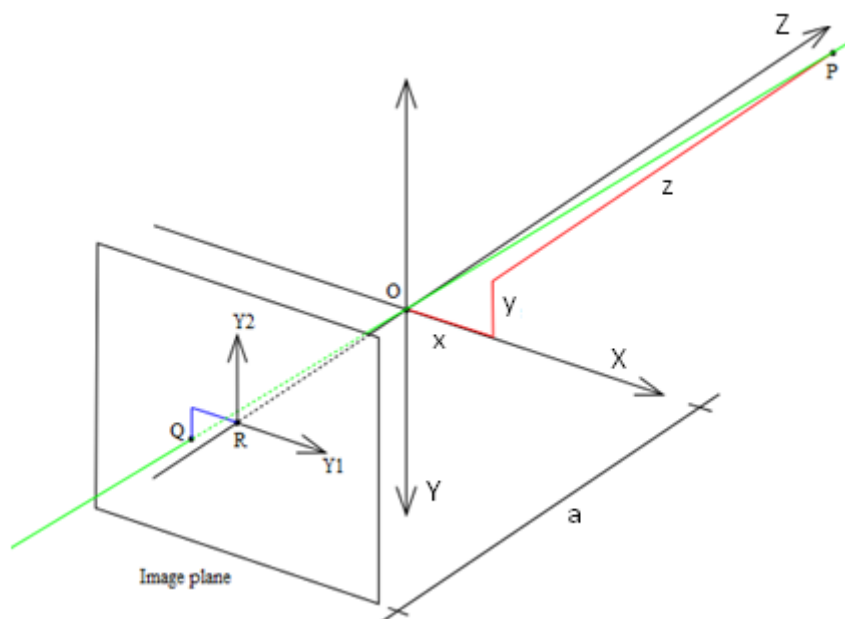
Το μοντέλο μικρής οπής για την κάμερα περιγράφει τη μαθηματική σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός τρισδιάστατου σημείου και της προβολής του στο επίπεδο της εικόνας, μέσω μίας ιδανικής φωτογραφικής κάμερας μικρής οπής. Σε μια τέτοια φωτογραφική μηχανή το άνοιγμα της κάμερας περιγράφεται ως ένα σημείο, απείρως μικρό, μέσω του οποίου περνάνε όλες οι γραμμές των προβολών των σημείων. Το σημείο αυτό χαρακτηρίζεται ως «μικρή οπή» και στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως οπτικό κέντρο της κάμερα για τον τρισδιάστατο χώρο.

Στην πράξη το μοντέλο κάμερας-μικρής οπής φαίνεται στην εικόνα 1.3.



**Εικόνα 1.3: Μοντέλο κάμερα-μικρής οπής**

Ενώ γεωμετρικά το μοντέλο κάμερας-μικρής οπής παρουσιάζεται στο σχήμα 1.4.

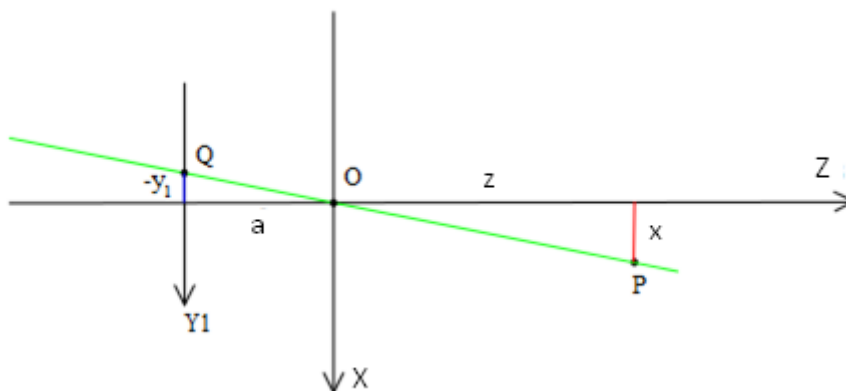


Εικόνα 1.4: Γεωμετρία της κάμερας μικρής οπής

Στην εικόνα 1.4 φαίνονται τα παρακάτω βασικά σημεία:

- Το ορθογώνιο 3D σύστημα συντεταγμένων έχει σαν κέντρο το σημείο  $O$  και αποτελείται από τους άξονες  $X$ ,  $Y$  και  $Z$ .
- Το επίπεδο όπου προβάλλεται η 3D εικόνα αφού περάσει την οπή της κάμερας, είναι παράλληλο με τους άξονες  $X$  και  $Y$  και έχει απόσταση  $f$  από το κέντρο αξόνων του 3D συστήματος συντεταγμένων. Στην πράξη το επίπεδο βρίσκεται στη θέση  $-a$  του άξονα  $Z$ , όπου  $a > 0$ .
- Το σημείο  $R$  (principal point or image center) βρίσκεται στο σημείο του επιπέδου της εικόνας όπου κόβεται από τον άξονα  $Z$  ( κύριος άξονας ή κύρια ακτίνα της κάμερας).
- Το σημείο  $P$  βρίσκεται κάπου στο χώρο με συντεταγμένες  $(x, y, z)$  που ανήκουν στους άξονες  $X$ ,  $Y$  και  $Z$ .
- Η γραμμή προβολής του σημείου  $P$  στην κάμερα είναι η πράσινη γραμμή του σχήματος 1.4 η οποία διέρχεται από τα σημεία  $P$  και  $O$ .
- Η προβολή του σημείου  $P$  πάνω στο επίπεδο της εικόνας συμβολίζεται με  $Q$ . Στην πράξη θεωρούμε ότι  $Q$  έχει συντεταγμένες  $(x', y')$ .
- Το 2D σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο της εικόνας έχει κέντρο το σημείο  $R$  και αποτελείται από τους άξονες  $Y_1$  και  $Y_2$  και οι οποίοι είναι παράλληλοι με τους άξονες  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα. Το σημείο  $Q$  χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες  $(x', y')$ .

Τώρα θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου  $Q$  με τις συντεταγμένες του σημείου  $P$ . Το παρακάτω σχήμα είναι ίδιο με το σχήμα 1.4 αλλά το βλέπουμε από την αρνητική πλευρά του άξονα  $Y$ .



**Εικόνα 1.5: Γεωμετρία της κάμερας μικρής οπής με παρατήρηση από την αρνητική πλευρά του άξονα Y**

Από την εικόνα 1.5 και τις ομοιότητες τριγώνων προκύπτει:

$$\frac{-y_1}{-a} = \frac{x}{z}$$

Βλέποντας τώρα την εικόνα από την αρνητική πλευρά του άξονα X και από την ομοιότητα τριγώνων έχουμε:

$$\frac{-y_1}{-a} = \frac{-x}{z}$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$-$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει τη σχέση μεταξύ των 3D συντεταγμένων του σημείου P και των συντεταγμένων της εικόνας που χαρακτηρίζουν το σημείο Q στο επίπεδο της εικόνας.

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι το αντικείμενο απεικονίζεται αντιστραμμένο στην κάμερα. Αυτό λύνεται με 2 τρόπους:

- 1) Περιστρέφουμε το σύστημα συντεταγμένων της εικόνας κατά  $180^\circ$
- 2) Τοποθετούμε το επίπεδο της εικόνας στο σημείο f του άξονα Z αντί για το  $-a$ .

Οπότε η σχέση γράφεται:

$$- \quad (1)$$

Ας θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα είναι η παρουσίαση των 3D συντεταγμένων σε ομογενείς συντεταγμένες (διάνυσμα 4 συνιστωσών) και το διάνυσμα παρουσίασης των σημείων της εικόνας σε ομογενείς συντεταγμένες (διάνυσμα 3 συνιστωσών). Οπότε ισχύει:

$$y \sim Cx$$

όπου  $C$  είναι ο  $3 \times 4$  πίνακας της κάμερας.

Σε ομογενείς συντεταγμένες η σχέση (1) γράφεται:

$$\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$$

Ο πίνακας  $\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$  μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των πινάκων:

και

Οπότε ο μετασχηματισμός γράφεται:

$$(2)$$

Οπότε το μοντέλο προοπτικής προβολής μπορεί να απλοποιηθεί στη σχέση:

Θεωρούμε το σημείο του χώρου  $P$  με ομογενείς συντεταγμένες ευκλείδειου τύπου  
οπότε έχουμε:

όπου  $R$  είναι ο  $3 \times 3$  πίνακας περιστροφής και  $T$  είναι το διάνυσμα μεταφοράς με 3  
στοιχεία.

Από την προηγούμενη σχέση και την σχέση (2) έχουμε:

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν για μια ιδανική κάμερα. Στην πραγματικότητα ο πίνακας  
της κάμερας είναι:

όπου οι παράμετροι  $a$  είναι οι συντελεστές κλίμακας των 2 αξόνων. Οι παράμετροι  $u$  και  $v$  είναι οι συντεταγμένες του πρωτεύοντος σημείου. Η παράμετρος  $s$  είναι ο παράγοντας στρέβλωσης μεταξύ των 2 αξόνων.

Άρα ο πίνακας παραμέτρων της κάμερα τελικά είναι:

Οπότε ο μετασχηματισμός της κάμερας γίνεται:

## 2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΜΕΡΑΣ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΑ ΦΥΓΗΣ ΣΕ ΕΙΚΟΝΑ

### 2.1 Εισαγωγή

Αρκετές προσπάθειες έχουν γίνει για να μπορέσουν να ανακτηθούν ρεαλιστικά πρότυπα των φωτογραφιών στον πραγματικό κόσμο. Η πιο κοινή γεωμετρική προσέγγιση είναι να προσπαθήσουμε να ανακτήσουμε τρισδιάστατα μοντέλα από παραμετροποιημένες εικόνες ή μη παραμετροποιημένες ακολουθίες εικόνων. Μια εναλλακτική προσέγγιση αποτελεί η απεικόνιση μιας εικόνας σε αντιπροσωπεύσεις σε μια τρισδιάστατη σκηνή. Αυτό έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς για να παραχθεί μια ενδιάμεση εικόνα θέασης από δύο κοντινά σημεία θέασης και έχει το πλεονέκτημα ότι δεν χρειάζεται να οριστεί ρητά το τρισδιάστατο μοντέλο της σκηνής.

Η πρόσοψη, ένα από το επιτυχέστερα συστήματα μοντελοποίησης και απόδοσης αρχιτεκτονικών κτηρίων από φωτογραφίες, αποτελείται από μια υβριδική γεωμετρία και μια προσέγγιση η οποία βασίζεται στην εικόνα. Δυστυχώς αυτή η προσπάθεια είναι χρονοβόρα και κοπιαστική για τον χρήστη για να γίνει αποσύνθεση της σκηνής, ακολουθούμενη από μια εκτίμηση της θέσης των απεικονισμένων αντικειμένων. Εντούτοις η υψηλή ποιότητα των επιτευχθέντων αποτελεσμάτων με το σύστημα της πρόσοψης έχει ενθαρρύνει πολλούς να σχεδιάσουν τέτοια διαλογικά συστήματα.

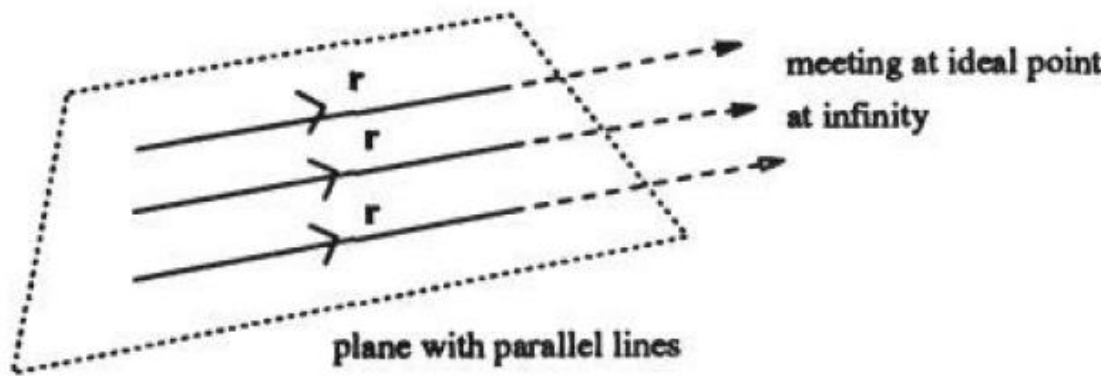
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια πολύ απλούστερη προσέγγιση για να κατασκευάζουμε ένα τρισδιάστατο μοντέλο και να παράγουμε νέες θεάσεις της εικόνας εκμεταλλευόμενοι τις παραμέτρους της σκηνής που μοντελοποιείται.

### 2.2 Βασικές έννοιες

Στο σημείο αυτό θα γίνει μια ανάλυση των βασικών εννοιών που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω.

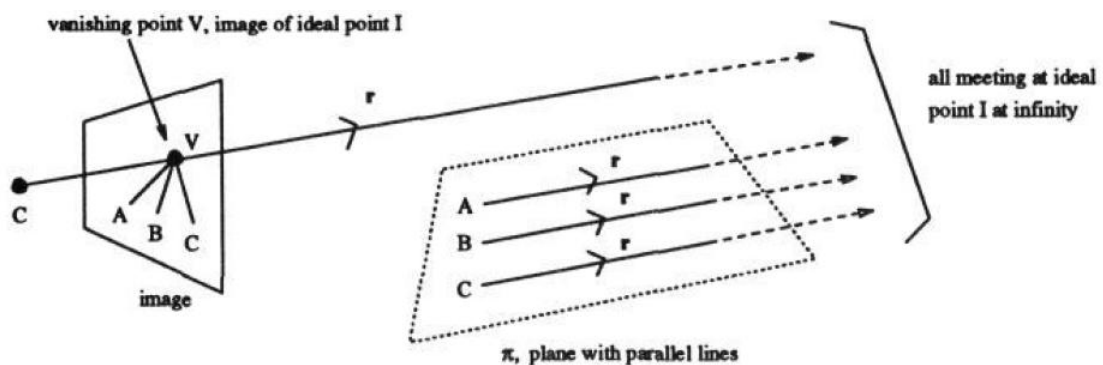
#### 2.2.1 Σημείο φυγής(vanishing point) και ιδανική ευθεία

Θεωρούμε ένα σύνολο παράλληλων γραμμών στο επίπεδο προβολής (εικόνα 2.1). Οι ευθείες αυτές αν προεκταθούν νοητά εκτός του επιπέδου προς το άπειρο, τέμνονται σε ένα ιδανικό σημείο. Αυτή είναι μια μοναδική σχέση μεταξύ των παράλληλων ευθειών μιας δεδομένη διεύθυνσης και του αντίστοιχου ιδανικού σημείου(με αυτή την έννοια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα ιδανικό σημείο προσδιορίζει μια κατεύθυνση). Το σύνολο όλων των ιδανικών σημείων του επιπέδου προβολής αποτελούν την ιδανική ευθεία.



Εικόνα 2.1: Παράλληλες ευθείες στο επίπεδο προβολής έχουν ένα καλά ορισμένο σημείο τομής στο άπειρο, το ιδανικό σημείο.

Το ιδανικό αυτό σημείο είναι ένα σημείο φυγής (vanishing point) (εικόνα 2.2). Η εικόνα 2.2 δείχνει επίσης και το τυπικό αποτέλεσμα της προβολικής γεωμετρίας, ότι δηλαδή η ευθεία  $CV$  που διέρχεται από το κεντρικό σημείο της κάμερας και το σημείο φυγής είναι παράλληλη στις ευθείες της σκηνής που χρησιμοποιήθηκαν για τον εντοπισμό του σημείου φυγής.



Εικόνα 2.2: Η κάμερα με κεντρικό σημείο  $C$  βλέπει ένα σύνολο παράλληλων ευθειών του επιπέδου  $\pi$ . Οι παράλληλες ευθείες τέμνονται σε ένα ιδανικό σημείο  $I$ . Οι αντίστοιχες ευθείες της εικόνας τέμνονται σε ένα σημείο φυγής  $V$ , το οποίο αποτελεί εικόνα του  $I$ . Σημειώστε ότι η ακτίνα  $CV$  είναι παράλληλη των ευθειών της σκηνής.

Στην εικόνα 2.3 φαίνεται ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα που δείχνουν πως οι παράλληλες ευθείες σε μια φωτογραφία συγκλίνουν στο άπειρο, δίνοντας τα σημεία φυγής.



**Εικόνα 2.3:** Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά σημεία φυγής, εμφανίζονται στις φωτογραφίες δρόμων όπου οι παράλληλες γραμμές συγκλίνουν.

## 2.2.2 Βαθμονόμηση κάμερας

Στις πραγματικές συνθήκες δεν μπορούμε πάντα να απαιτήσουμε να πάρουμε ως δεδομένες ορισμένες εξιδανικεύσεις. Σε μια πραγματική κάμερα οι θέσεις των σημείων σε μια εικόνα μετρούνται σε pixels, η αρχή των αξόνων είναι στην πάνω αριστερή γωνία της εικόνας, η θέση και ο προσανατολισμός της κάμερας γενικά είναι τυχαίος και υπάρχουν παραμορφώσεις οι οποίες οφείλονται κυρίως στην κάμερα.

Για να μπορούμε να καθορίσουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο και των συντεταγμένων της προβολής του στην εικόνα, έτσι ώστε να μπορούν να γίνουν μετρήσεις και να βρεθεί η θέση τους στον πραγματικό χώρο, πρέπει να γνωρίζουμε τις παραμέτρους της κάμερας. Οι παράμετροι χωρίζονται σε ενδογενείς και εξωγενείς. Αυτές που εξαρτώνται μόνο από την ίδια την κάμερα, και δεν αλλάζουν μεταξύ διαφορετικών λήψεων, ονομάζονται ενδογενείς, ενώ εκείνες που εξαρτώνται από τη θέση και τον προσανατολισμό της κάμερας σε κάθε λήψη, και που προφανώς μπορούν να αλλάζουν μεταξύ των λήψεων, ονομάζονται εξωγενείς. Οι παράμετροι της κάμερας, κυρίως, εκπροσωπούνται από τον πίνακα της κάμερας, και η διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση όλων των παραμέτρων ονομάζεται βαθμονόμηση της κάμερας (camera calibration).

Μπορούμε να κάνουμε όμως και μια πιο θεωρητική προσέγγιση της βαθμονόμησης. Για να καταλάβουμε πλήρως την Ευκλείδεια σχέση μεταξύ της εικόνας και του κόσμου, είναι απαραίτητο να εκφραστεί η Ευκλείδεια γεωμετρική σχέση τους. Όπως έχουμε δει, η Ευκλείδεια γεωμετρία του τρισδιάστατου κόσμου ορίζεται από τη διευκρίνιση ενός ιδιαίτερου επιπέδου στο ως επίπεδο στο άπειρο, και ένα ιδιαίτερο κωνικό σε εκείνο το επίπεδο ως απόλυτο κωνικό. Για μια κάμερα που δεν βρίσκεται στο επίπεδο στο



άπειρο, το επίπεδο στο άπειρο απεικονίζεται, ένα προς ένα, επάνω στο επίπεδο της εικόνας. Αυτό γίνεται επειδή οποιοδήποτε σημείο στην εικόνα ορίζει μια ακτίνα στο χώρο που συναντά το επίπεδο στο άπειρο σε ένα μοναδικό σημείο. Κατά συνέπεια, το επίπεδο στο άπειρο στον  $\infty$  δεν μας λέει τίποτα νέο για την εικόνα. Το απόλυτο κωνικό εντούτοις, όντας ένα κωνικό στο επίπεδο στο άπειρο, πρέπει να προβάλει σε έναν κωνικό στην εικόνα. Η προκύπτουσα καμπύλη εικόνας καλείται εικόνα απόλυτου κωνικού(IAC). Εάν η θέση του IAC είναι γνωστή σε μια εικόνα, κατόπιν λέμε ότι η κάμερα είναι βαθμονομημένη.

### 2.2.3 Ενδογενείς Παράμετροι

Είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τις εσωτερικές παραμέτρους μιας κάμερας αφού μόνο τότε μας δίνεται η δυνατότητα να λάβουμε με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια μια τρισδιάστατη αναδημιουργία του αντικειμένου. Ο μόνος τρόπος να αποφύγουμε την βαθμονόμηση είναι ο αλγόριθμος αυτοβαθμονόμησης (self calibration), όπου οι ενδογενείς παράμετροι υπολογίζονται ταυτόχρονα με την δομή του χώρου, και δεν απαιτείται προηγούμενη γνώση τους. Αυτό που ζητάμε είναι έχοντας ως δεδομένες τις παραμέτρους της κάμερας να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες κάθε σημείου της εικόνας, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να πάρουμε τις συντεταγμένες εκείνες που θα μας έδινε μία ιδανική κανονικοποιημένη κάμερα. Το κανονικοποιημένο σύστημα συντεταγμένων (που αντιστοιχεί στην ιδανική κανονικοποιημένη κάμερα) έχει την αρχή του στο κύριο σημείο της εικόνας, και ίσα μοναδιαία διανύσματα στους δυο άξονες, ενώ η εστιακή απόσταση είναι ίση με ένα. Δηλαδή θέλουμε το μετασχηματισμό που θα μετατρέψει τις κανονικοποιημένες συντεταγμένες ενός σημείου στις πραγματικές συντεταγμένες του, επί της εικόνας και αυτό το χρειαζόμαστε γιατί με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού στις συντεταγμένες της εικόνας, μπορούμε να πάρουμε την εικόνα που θα έδινε η κανονικοποιημένη κάμερα.

Σε μια πραγματική κάμερα, το εστιακό μήκος μπορεί να είναι οποιοδήποτε και επιπλέον το πιο πιθανό είναι οι συντεταγμένες της εικόνας να μην αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του ορθογώνιου εστιακού επιπέδου. Είναι δυνατόν οι άξονες της εικόνας να μην είναι απολύτως ορθογώνιοι. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί, για παράδειγμα, αν οι αισθητήρες της κάμερας δεν είναι τοποθετημένοι με ακρίβεια σε απόλυτα ορθογώνια διάταξη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια γραμμική παραμόρφωση η οποία μπορεί να συμπεριληφθεί εύκολα στο γραμμικό μοντέλο που ήδη αναλύσαμε. Τα παραπάνω εισάγονται στο μοντέλο αλλάζοντας τον πίνακα  $K$  σε έναν γενικότερο πίνακα, που περιέχει και τις παραμέτρους των μεταβολών.

Ο μετασχηματισμός για να λάβουμε τις συντεταγμένες της εικόνας από το εστιακό επίπεδο διευκρινίζεται στην εικόνα 2.4 και έχει την μορφή:

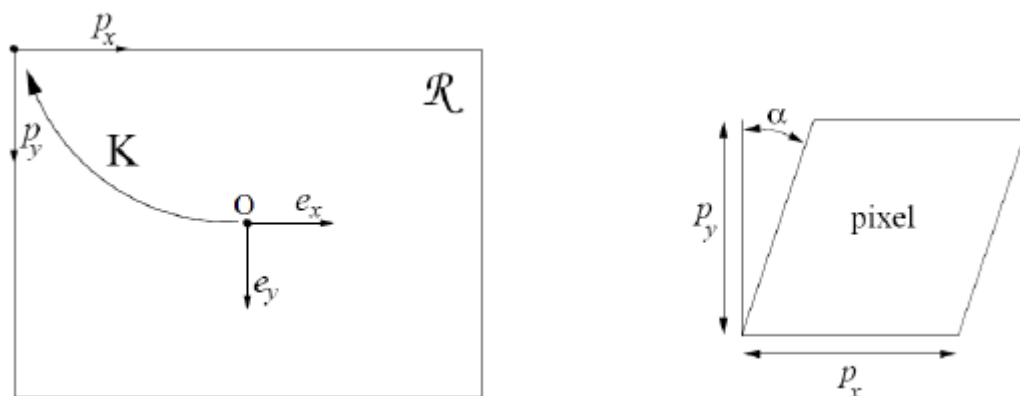
$$\begin{matrix} - & & - \\ & & \\ & & - \end{matrix}$$

Όπου  $u$  και  $v$  είναι το πλάτος και το ύψος των pixels,  $u_0$  είναι το κύριο σημείο και το  $\alpha$  είναι η λοξή γωνία όπως δείχνεται στην εικόνα 2.3. Οι αναλογίες  $u/u_0$  και  $v/v_0$  απλουστεύονται στην ακόλουθη εξίσωση, η οποία είναι και αυτή που θα χρησιμοποιήσουμε:

Όπου  $u_0$  και  $v_0$  είναι το εστιακό μήκος που μετρείται με το πλάτος και το ύψος των pixels, και  $s$  ένας παράγοντας για τη λοξή κίνηση λόγω των μη-ορθογώνιων pixels. Ο παραπάνω άνω-τριγωνικός πίνακας καλείται πίνακας βαθμονόμησης της κάμερας και θα τον σημειώνουμε με  $K$  (είναι ο συμπεριλαμβανομένου των γραμμικών παραμορφώσεων). Έτσι η εξίσωση (2.2) περιγράφει το μετασχηματισμό από τις εστιακές συντεταγμένες στις συντεταγμένες εικόνας. Το μοντέλο της εξίσωσης (2.2) που περιλαμβάνει γραμμικές παραμορφώσεις μπορεί να γραφτεί και ως:

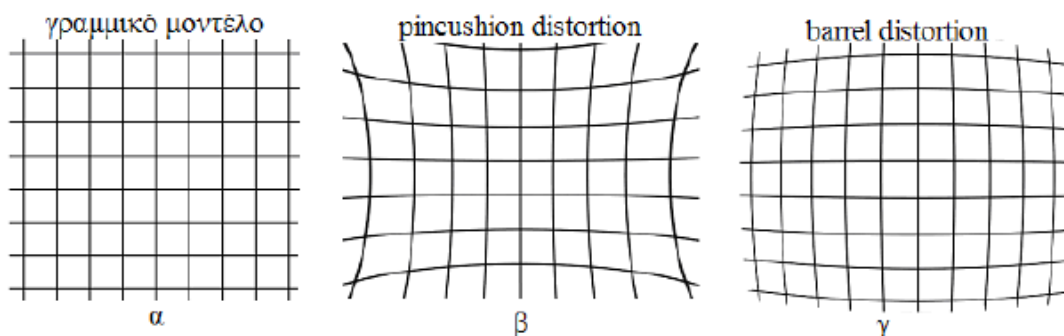
Για τις περισσότερες κάμερες τα pixels είναι σχεδόν τέλεια ορθογώνια και έτσι το  $s$  είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Επιπλέον, το κύριο σημείο είναι συχνά κοντά στο κέντρο της εικόνας. Αυτές οι υποθέσεις μπορούν συχνά να χρησιμοποιηθούν ως μια σωστή αρχή για τις πιο σύνθετες επαναληπτικές διαδικασίες εκτίμησης. Σε μια κάμερα με σταθερή οπτική αυτές οι παράμετροι είναι ίδιες, για όλες τις εικόνες που λαμβάνονται με αυτή την κάμερα. Για τις κάμερες που έχουν ικανότητες μεγέθυνσης και εστίασης το εστιακό μήκος μπορεί προφανώς να αλλάζει, αλλά και το κύριο σημείο μπορεί να ποικίλει. Τα οπτικά της κάμερας, αλλά και ο τρόπος κατασκευής της προκαλούν όμως και μη γραμμικές παραμορφώσεις, εισάγοντας έτσι συστηματικά σφάλματα, τα οποία πρέπει να λάβουμε υπόψη, αν θέλουμε να έχουμε μεγάλο βαθμό ακρίβειας. Ανάλογα με το βαθμό ακρίβειας που επιθυμούμε στην εφαρμογή μας, και ανάλογα με τις απαιτήσεις

μας για ταχύτητα στον αλγόριθμο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερους ή λιγότερους όρους οι οποίοι θα περιγράφουν τις παραμορφώσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα αυτών των παραμορφώσεων είναι αμελητέα κάτω από κανονικές περιστάσεις απόκτησης των εικόνων.



**Εικόνα 2.4: Από τις συντεταγμένες του επιπέδου εστίασης στις συντεταγμένες της εικόνας (η είναι η τυπική προβολική βάση)**

Μια από τις πιο σημαντικές παραμορφώσεις είναι η ακτινωτή παραμόρφωση, η οποία σε μικρά εστιακά μήκη έχει ακόμα πιο αξιοπρόσεκτη επίδραση. Οι φακοί της κάμερας σε πολλές περιπτώσεις, λόγω της ατελούς κατασκευής τους, δεν έχουν πάντα την απαιτούμενη καμπυλότητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα σημεία στην εικόνα να μην βρίσκονται στη θέση που προβλέπει το γραμμικό μοντέλο, αλλά υφίστανται ακτινική μετατόπιση, ως επί των πλείστων προς το κύριο σημείο της εικόνας. Όταν η μετατόπιση αυτή είναι θετική, τότε έχουμε ακτινική παραμόρφωση με μετατόπιση τύπου pincushion, ενώ όταν είναι αρνητική, έχουμε μετατόπιση τύπου barrel, εικόνα 2.5. Οι μη γραμμικοί ενδογενείς παράμετροι (πχ στρέβλωση του φακού) είναι επίσης σημαντικές αν και δεν μπορούν να συμπεριληφθούν στο γραμμικό μοντέλο της κάμερας, όπως περιγράφηκε πιο πάνω. Από την άλλη υπάρχουν πολλοί σύγχρονοι αλγόριθμοι βαθμονόμησης κάμερας που περιλαμβάνουν την εκτίμηση αυτών των ενδογενών παραμέτρων.



**Εικόνα 2.5: α) Γραμμικό μοντέλο, β) Ακτινική παραμόρφωση τύπου pincushion, γ) Ακτινική παραμόρφωση τύπου barrel**

Είναι δυνατό να ακυρωθεί το μεγαλύτερο μέρος της επίδρασης της ακτινικής παραμόρφωσης με τη στρέβλωση της εικόνας. Οι συντεταγμένες στις μη παραμορφωμένες συντεταγμένες του επιπέδου της εικόνας  $(x,y)$  μπορούν να ληφθούν από τις παρατηρηθείσες συντεταγμένες εικόνας από την ακόλουθη εξίσωση:

Όπου  $x_c$  και  $y_c$  είναι η πρώτη και δεύτερη παράμετρος της ακτινικής παραμόρφωσης και  $(x_0, y_0)$  . Μερικές φορές είναι απαραίτητο να επιτραπεί το κέντρο της ακτινωτής παραμόρφωσης να είναι διαφορετικό από το κύριο σημείο. Όταν το εστιακό μήκος της κάμερας αλλάζει (μέσω του ζουμ ή της εστίασης) οι παράμετροι  $x_c$  και  $y_c$  θα ποικίλουν επίσης οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x_c &= x_c + \Delta x_c \\ y_c &= y_c + \Delta y_c \end{aligned}$$

Λόγω των αλλαγών στο σύστημα φακών αυτό είναι μόνο μια προσέγγιση, εκτός εάν τα ψηφιακά ζουμ είναι ακριβή.



**Εικόνα 2.6: Παράδειγμα ακτινικής παραμόρφωσης (α) εικόνα χωρίς παραμόρφωση, (β) εικόνα με ακτινική παραμόρφωση τύπου barrel. Τα σημεία της εικόνας έχουν μετατοπιστεί ακτινικά ως το κέντρο της εικόνας.**

## 2.2.4 Εξωγενείς παράμετροι

Για να έχουμε ένα πιο ολοκληρωμένο πραγματικό μοντέλο, πρέπει να βγάλουμε μία σχέση ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων και όχι ως προς το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας, όπως κάναμε μέχρι τώρα. Στις προηγούμενες σχέσεις θεωρούσαμε ότι τα σημεία του τρισδιάστατου κόσμου είναι πάνω σε ένα σύστημα συντεταγμένων με επίκεντρο την φωτογραφική μηχανή, δηλαδή το σημείο εστίασης. Στην πράξη ωστόσο, τα τρισδιάστατα σημεία μπορεί να είναι μέρος οπουδήποτε αυθαίρετου συστήματος συντεταγμένων. Υποθέτοντας ότι οι συντεταγμένες του παγκόσμιου συστήματος είναι και ότι οι άξονες είναι Ευκλείδειου τύπου, υπάρχει ένας μοναδικός Ευκλείδειος μετασχηματισμός (περιστροφή και μεταφορά), που αντικατοπτρίζει την κίνηση της σκηνής, μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων. Δηλαδή,

Όπου  $R$  είναι ένας πίνακας περιστροφής  $3 \times 3$ , το  $t$  είναι  $3 \times 1$  διάνυσμα παράλληλης μετατόπισης και το είναι ομοιογενές σημείο στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας. Η κίνηση της κάμερας ισούται με μια αντίστροφη κίνηση της σκηνής και μπορεί επομένως να διαμορφωθεί ως εξής:

Όπου  $R$  και  $t$  είναι οι εξωγενείς παράμετροι της κάμερας, οι οποίες καθορίζουν κάθε φορά την θέση και τον προσανατολισμό της κάμερας σε σχέση με το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων. Οπότε το συνολικό γεωμετρικό γραμμικό μοντέλο μίας ιδανικής κάμερας, που έχει συγκεκριμένη ενδογενή παραμόρφωση και συγκεκριμένη θέση και προσανατολισμό, έχει ως εξής:

ή αλλιώς

Όπου  $\mathbf{A}$  είναι ο πίνακας μια ιδανικής κανονικοποιημένης ( $a=1$ ) κάμερας,  $\mathbf{K}$  είναι ο πίνακας βαθμονόμησης και  $\mathbf{P}$  είναι ο πίνακας κάμερας.

### 2.3 Περίληψη του αλγορίθμου κατασκευής τρισδιάστατου μοντέλου

Ένα τρισδιάστατο μοντέλο μπορεί να ανακτηθεί από δύο ή περισσότερες μη παραμετροποιημένες εικόνες ακολουθώντας τα παρακάτω τέσσερα βήματα (εικόνα 2.7):

1. Ο χρήστης επιλέγει ένα σύνολο από ακμές οι οποίες είναι είτε παράλληλες είτε κάθετες στον πραγματικό κόσμο. Αυτά τα στοιχεία εντοπίζονται στην εικόνα χρησιμοποιώντας της πληροφορίες κλίσης που μας δίνει η εικόνα.
2. Το επόμενο βήμα αφορά στην βαθμονόμηση της κάμερας: Οι ενδογενείς παράμετροι της φωτογραφικής μηχανής καθορίζονται για κάθε εικόνα. Αυτό επιτυγχάνεται με τον καθορισμό των σημείων φυγής (vanishing points) της εικόνας τα οποία είναι τα σημεία τομής των παράλληλων ευθειών της εικόνας αν τις προεκτείνουμε στο άπειρο. Τα σημεία φυγής των τριών αμοιβαία ορθογώνιων μεταξύ τους κατευθύνσεων αξιοποιούνται για να μας δώσουν τις τρεις ενδογενείς παραμέτρους της κάμερας και τον προσανατολισμό του σημείου θέασης.
3. Ένας πίνακας προβολής για κάθε σημείο θέασης υπολογίζεται από τις ακμές τις εικόνας και των σημείων φυγής. Αυτοί οι πίνακες καθορίζονται από την εκμετάλλευση των περιορισμών και των επιπρόσθετων αντιστοιχιών που δίνει το διάνυσμα (ένα περιστροφής και ένα μεταφοράς) μεταξύ των σημείων θέασης.
4. Το τελευταίο βήμα περιλαμβάνει την χρησιμοποίηση αυτών των πινάκων προβολής για να βρεθούν περισσότερες συσχετίσεις των εικόνων και στη συνέχεια να υπολογιστούν τα τρισδιάστατα κατασκευαστικά τρίγωνα τα οποία αντιπροσωπεύουν ένα μοντέλο της σκηνής.

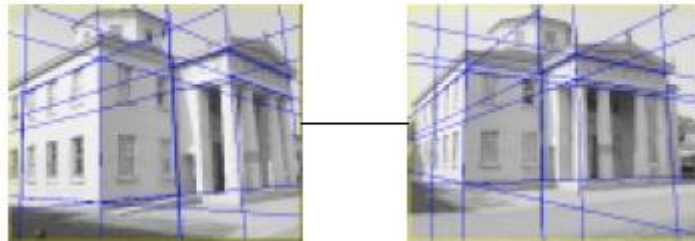
### 1. Original uncalibrated photographs



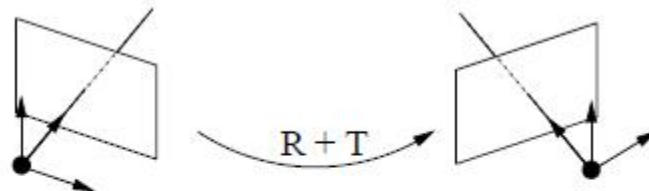
### 2. Primitive definition and localisation



### 3. Finding vanishing points and camera calibration



### 4. Computation of projection matrices and camera motion



### 5. Triangulation, 3D reconstruction and texture mapping



**Εικόνα 2.7:** Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου. Ο χρήστης επιλέγει μερικές παράλληλες και κάθετες ακμές στην εικόνα. Έπειτα τις χρησιμοποιεί για να υπολογίσει τους πίνακες προβολής του σημείου θέασης.

## 2.4 Γεωμετρικό πλαίσιο

### 2.4.1 Αξιολόγηση και συμβολισμός

Για μια κάμερα μικρής οπής (Pin-hole Camera), η οπτική προβολή από τον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο σε μια εικόνα μπορεί πρακτικά να παρουσιαστεί με ομογενής συντεταγμένες από τον 3x4 πίνακα προβολής της κάμερας, :

Ο πίνακας προβολής έχει 11 βαθμούς ελευθερίας και μπορεί να αποσυντεθεί στον προσανατολισμό και την θέση της κάμερας βασισμένο στο παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων (ένας 3x3 πίνακας περιστροφής και ένα 3x1 διάνυσμα μεταφοράς (translation) :

και ένα 3x3 πίνακα βαθμονόμησης της κάμερας, , που αντιστοιχεί στον ακόλουθο μετασχηματισμό:

Όπου  $a$  είναι η εστιακή απόσταση και , είναι οι συντεταγμένες του pixel του κύριου σημείου (η τομή του οπτικού άξονα με το επίπεδο της εικόνας).

### 2.4.2 Προσέγγιση

Στην προσέγγιση μας, τα σημεία φυγής (vanishing points) που αντιστοιχούν σε τρεις κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθοριστεί για κάθε σημείο θέασης:

1. Η μήτρα βαθμονόμησης της κάμερας, , κάνοντας την παραδοχή ότι υπάρχει μηδενική τιμή για τον παράγοντα λοξής κίνησης(skew) και γνωστή αναλογία μεγεθών.
2. Η μήτρα περιστροφής, .
3. Η κατεύθυνση της μήτρας μεταφοράς, .



Θα δείξουμε ότι οι 8 βαθμοί ελευθερίας της μήτρας προβολής μπορούν να προσδιοριστούν από τρία σημεία φυγής που αντιστοιχούν στην προβολές των τριών σημείων στο άπειρο και σε ένα σημείο αναφοράς. Η μήτρα προβολής μπορεί να ανακτηθεί. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο, επιτρέπεται η Ευκλείδεια ανακατασκευή όλων των ορατών σημείων μέχρι μια κλίμακα.

### 2.4.3 Χρησιμοποιώντας τα σημεία φυγής

Από την εξίσωση (2.12) και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα σημεία στο άπειρο αντιστοιχούν στις τρεις ορθογώνιες κατευθύνσεις μπορούμε να αντλήσουμε απλούς περιορισμούς σχετικά με τα στοιχεία του πίνακα προβολής:

Όπου είναι αρχικά άγνωστοι παράγοντες κλιμάκωσης. Αυτή η εξίσωση μπορεί να αναδιαταχτεί και να εκφράζεται σε όρους της μήτρας βαθμονόμησης της κάμερας, και προσανατολισμού της κάμερας (μήτρα περιστροφής), :

### 2.4.4 Βαθμονόμηση κάμερας και ανάκτηση του προσανατολισμού

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη εξίσωση (2.16) με την ανάστροφη της έχουμε:

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες της μήτρα περιστροφής, , μπορούμε να ορίσουμε ξανά την εξίσωση (2.16) για την ανάκτηση περιορισμών σχετικά με τις παραμέτρους της κάμερας και των άγνωστων παραμέτρων κλιμάκωσης, . Ειδικότερα:

Έχοντας υποθέσει ότι ο λόγος των διαστάσεων και η λοξότητα(skew) είναι γνωστά, η εξίσωση (2.18) μπορεί να ξαναγραφτεί ως σύστημα 6 γραμμικών εξισώσεων (από έξι στοιχεία της συμμετρικής μήτρας) και μπορεί να λυθεί για να υπολογιστούν οι τρεις παράμετροι και οι άγνωστοι συντελεστές κλίμακας, . Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων είναι το εξής:

Μια γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων δίνεται στην επόμενη ενότητα.

#### 2.4.5 Ανάκτηση της μήτρας προβολής

Λύνοντας το σύστημα συντεταγμένων και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.16) οδηγούμαστε σε ένα 3x3 υπο-πίνακα της μήτρας προβολής, , και από τον οποίο μπορούμε εύκολα να πάρουμε τον πίνακα περιστροφής .

Η τέταρτη στήλη της μήτρας προβολής εξαρτάται από την θέση του συστήματος των πραγματικών συντεταγμένων σε σχέση με το σύστημα παραμέτρων της κάμερας. Ένα αυθαίρετο σημείο αναφοράς μπορεί να επιλεγεί ως προέλευση(origin). Οι συντεταγμένες της εικόνας καθορίζουν τον πίνακα , με έναν αυθαίρετο συντελεστή κλίμακας, .

Με μια απλή θέαση και χωρίς μετρικές πληροφορίες αυτή η κλίμακα είναι άοριστη και μπορεί να οριστεί αυθαίρετα π.χ . Για πρόσθετες προβολές, οι αντιστοιχίες εικόνας και ενός πέμπτου σημείου, απαιτείται να γίνει διόρθωση του συντελεστή κλίμακας με περισσότερες προβολές.

## 2.5 Γεωμετρική ερμηνεία

Εξάγουμε μια απλή γεωμετρική ερμηνεία που βασίζεται στην ανάλυση της εξίσωσης (2.18) και στηρίζεται στην ιδιότητα των σημείων φυγής.

### 2.5.1 Ορθοκεντρικότητα(orthocentrality) του κύριου σημείου

Σύμφωνα με την υπόθεση ότι η αναλογία μεγέθους είναι γνωστή και ο παράγοντας λοξής κίνησης(skew) είναι μηδενικός η εξίσωση (2.16) μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

Οπότε:

Η ορθοκανονικότητα της μήτρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάκτηση των σημείων και καθώς και για την επίλυση των και . Γράφοντας και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των 2 πρώτων στηλών έχουμε:

---

Αφού , η εξίσωση (2.23) μπορεί να ξαναγραφεί ως:

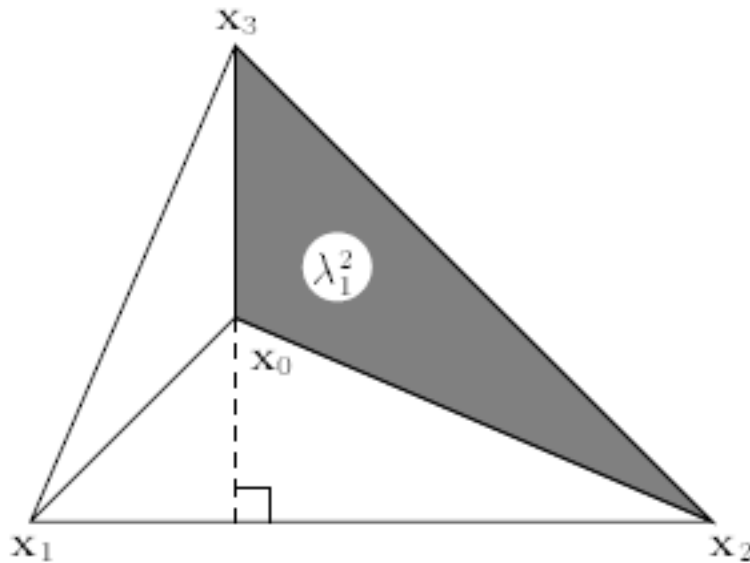
Και για τα υπόλοιπα ζεύγη στηλών του πίνακα έχουμε:

Αφαιρώντας την εξίσωση (2.26) από την (2.24) έχουμε:

Οπότε προκύπτει:

Με την προϋπόθεση ότι το διάνυσμα είναι ορθογώνιο προς το (Βλέπε εικόνα 2.9). Οι άλλες δύο συνθήκες ορθογωνιότητας είναι όμοιες και υποδηλώνουν ότι

το  $\lambda_1^2$  είναι το ορθόκεντρο των  $X_1, X_2, X_3$ . Η εξίσωση (2.24) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του  $\lambda_1^2$ .



Εικόνα 2.8: Ερμηνεία του  $\lambda_1^2$  ως ορθόκεντρο και το  $\lambda_1^2$  σαν εμβαδό.

### 2.5.2 Οι παράγοντες $\lambda_i^2$ ως κανονικοποιημένο εμβαδόν τριγώνου

Για να ληφθεί η γεωμετρική ερμηνεία του παράγοντα  $\lambda_i^2$  πρέπει να ληφθούν υπόψη οι παρακάτω εξισώσεις:

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.31) στις (2.29) και (2.30) αντίστοιχα έχουμε:

Οπότε:

---

---



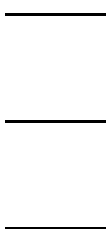
### 2.5.3 Υπολογισμός ορθόκεντρου

Το ορθόκεντρο είναι το σημείο όπου τέμνονται τα ύψη του τριγώνου. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των συντεταγμένων του ορθόκεντρου.

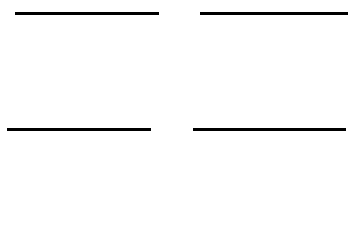
Από την εικόνα 2.9 θεωρούμε ότι τα σημεία αντιστοιχούν στις συντεταγμένες

.

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου, οπότε έχουμε:



Το επόμενο στάδιο είναι να υπολογίσουμε τις κλίσεις των υψών:



Όπου A είναι το σημείο όπου το ύψος που διέρχεται από την γωνία τέμνει την πλευρά , B είναι το σημείο όπου το ύψος που διέρχεται από την γωνία τέμνει την πλευρά και C είναι το σημείο όπου το ύψος που διέρχεται από την γωνία τέμνει την πλευρά .

Στην συνέχεια βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας :



Η εξίσωση της ευθείας είναι:

\_\_\_\_\_

Η εξίσωση της ευθείας είναι:

\_\_\_\_\_

Από την σχέση (2.41) έχουμε:

\_\_\_\_\_

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.44) στην (2.42) έχουμε:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Και αντικαθιστώντας την τιμή του  $x$  στην σχέση (2.44) βρίσκουμε το  $y$ . Άρα μπορέσαμε και υπολογίσαμε τις συντεταγμένες του  $(x,y)$  του ορθόκεντρου.

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων όπως φαίνεται και από την σχέση (2.34) αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου.

Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τη σχέση:

\_\_\_\_\_

Όπου:

### **3. Βαθμονόμηση κάμερας βασισμένη σε κάθετα αντικείμενα (Vertical Objects)**

#### **3.1 Εισαγωγή**

Η βαθμονόμηση της κάμερας και η τρισδιάστατη ανακατασκευή είναι τα βασικά προβλήματα της επεξεργασίας εικόνων τριών διαστάσεων. Τα τελευταία χρόνια μια νέα εφαρμογή έχει αναδειχτεί στο πεδίο της επεξεργασίας εικόνων. Χωρίς τεχνητή παρέμβαση, αντιλαμβάνεται έναν κινούμενο προς μια κατεύθυνση στόχο, και γίνεται ταυτοποίηση και παρακολούθηση με αυτόματη ανάλυση μια λίστας εικόνων που έχουν τραβηχτεί από την κάμερα. Η κίνηση των κινούμενων στόχων αναλύονται και μια διαχείριση μπορεί να επιτευχθεί η οποία αλλάζει με το χρόνο.

Οι υφιστάμενοι στόχοι που ερευνούνται μπορούν να χωριστούν σε 4 κατηγορίες με βάση την διάσταση του βαθμονομημένου αντικειμένου. Έτσι μπορούν να βαθμονομηθούν με βάση: α) τα τρισδιάστατα αντικείμενα, β) τα δισδιάστατα αντικείμενα της σκηνής, γ) τα μονοδιάστατα αντικείμενα και δ) στα αντικείμενα μηδενικής διάστασης. Η τελευταία αυτή κατηγορία μπορεί να χωριστεί στην μέθοδο της αυτοβαθμονόμησης και στην βαθμονόμηση η οποία στηρίζεται στη γεωμετρική πληροφορία ή στην πληροφορία της μετακίνησης των αντικειμένων της σκηνής. Επειδή μια κάμερα παρακολούθησης είναι πάντα βαθμονομημένη στη σκηνή, στην περίπτωση που δεν υπάρχουν βαθμονομημένα αντικείμενα στη σκηνή, ή γεωμετρικά στοιχεία ή πληροφορία κίνησης, μια τεχνητή σκηνή πρέπει πάντα να καθορίζεται. Ως εκ τούτου, αυτή η τεχνητή σκηνή θα πρέπει να πληρεί του περιορισμούς που υπάρχουν στην πράξη.

Με την χρησιμοποίηση τριών χαρακτηριστικών σημείων φυγής μπορεί να γίνει βαθμονόμηση της κάμερας. Απαιτείται μόνο μια εικόνα για την βαθμονόμηση της κάμερας του μοντέλου των τριών παραμέτρων. Οπότε τα κύρια σημεία της εικόνας είναι το κατακόρυφο κέντρο του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από τα σημεία φυγής. Παρακάτω θα γίνει μια προσέγγιση η οποία βασίζεται σε κατακόρυφα αντικείμενα (vertical objects) χρησιμοποιώντας τουλάχιστον 3 τοποθετήσεις ενός ανθρώπου από μία ακολουθία εικόνων ενός βίντεο με στόχο τον υπολογισμό των ενδογενών και των εξωγενών παραμέτρων της κάμερας με απλούς υπολογισμούς.

#### **3.2 Μοντέλο της κάμερα προς βαθμονόμηση**

Το μοντέλο της κάμερας περιέχει ένα κρυμμένο μοντέλο (γραμμικό μοντέλο). Ας υποθέσουμε ότι οι άξονες  $X$  και  $Z$  του παγκόσμιου συστήματος συντεταγμένων είναι πάνω στο έδαφος, ενώ ο άξονας  $Y$  είναι προς τα κάτω, και ότι αυτό το σύστημα

συντεταγμένων υπερκαλύπτει το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας(ο οπτικός άξονας της κάμερας είναι ο άξονας Z, και το επίπεδο απεικόνισης είναι παράλληλο με το επίπεδο XOY). Πρώτα το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας μεταφέρεται πάνω στο T, και στη συνέχεια περιστρέφεται κατά  $\beta$  μοίρες γύρω από τον άξονα Y, περιστρέφεται  $\alpha$  μοίρες γύρω από τον άξονα X και στο τέλος  $\gamma$  μοίρες γύρω από τον άξονα Z. Οι αντίστοιχες μήτρες περιστροφής είναι οι  $R_x$ ,  $R_y$  και  $R_z$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το μοντέλο της προοπτικής προβολής ορίζεται ως:

Ο  $T$  έχει 11 βαθμούς ελευθερίας. Μεταξύ αυτών είναι οι 3 ενδογενείς παράμετροι του μοντέλου, και θεωρούμε ότι ο συντελεστής παραμόρφωσης είναι 0, και ότι ο συντελεστής εστιακής κλίμακας είναι 1.

Επειδή χρειαζόμαστε μόνο την κάθετη μετατόπιση της κάμερας θεωρούμε ότι ο T μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

Όπου  $t_z$  είναι η κάθετη μετατόπιση της κάμερας. Αν η διάταξη της περιστροφής είναι διαφορετική ο πίνακας περιστροφής R θα είναι επίσης διαφορετικός:

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε την λύση των 3 ενδογενών παραμέτρων και των 4 εξωγενών παραμέτρων.

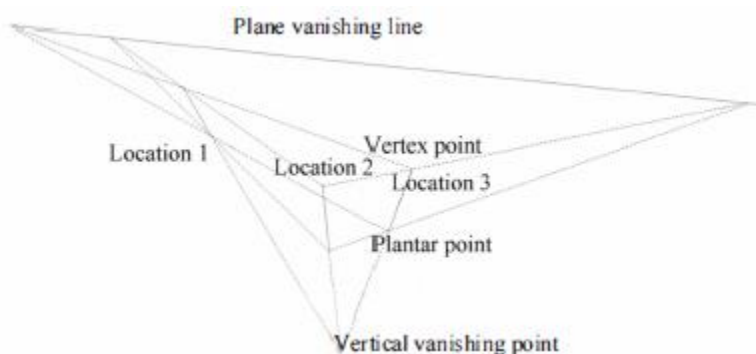


### 3.3 Κάθετο σημείο φυγής και ευθεία σημείων φυγής της σκηνής

Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε το αυτό-προσαρμοσμένο Γκαουσιανό μοντέλο για την μοντελοποίηση του χρώματος της σκηνής, θα σημειώσουμε την περιοχή που είναι στο προσκήνιο και στη συνέχεια θα επισημάνουμε τον άξονα του ανθρώπινου σώματος, αναλύοντας το βάδισμα του ανθρώπινου σώματος και τελικά θα πάρουμε τα ακριβή σημεία κορυφής και σημεία από τα πέλματα του ανθρώπου (vertex and plantar points). Η συνέχεια θα αποτελέσει μια εισαγωγή για το πώς θα βρούμε ένα κάθετο σημείο φυγής και την ευθεία του σημείου φυγής της σκηνής βρίσκοντας ένα σημείο κορυφής και ένα σημείο από τα πόδια. Λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία του κάθετου σημείου φυγής, την ευθεία του σημείου φυγής της σκηνής και την ευαισθησία των δυο αυτών στοιχείων στο θόρυβο, προτείνεται ένας βέλτιστος αλγόριθμος για το σημείο φυγής και την ευθεία του σημείου φυγής.

#### 3.3.1 Κάθετο σημείο φυγής

Με την επίδραση του θορύβου οι παράλληλες ευθείες μιας φωτογραφίας δεν συγκλίνουν. Στην εικόνα ένας άνθρωπος στέκεται σε 3 διαφορετικά σημεία στο οπτικό πεδίο της κάμερας. Τα 2 σημεία της γραμμής αντιστοιχούν στο κεφάλι και τα πέλματα του ανθρώπου. Το σημείο φυγής είναι το σημείο τομής των παραλλήλων που προεκτείνονται στο άπειρο στο επίπεδο απεικόνισης, ή αλλιώς είναι η εικόνα της παραλλήλου. Με τον τρόπο αυτό, το κάθετο σημείο φυγής είναι το σημείο τομής  $N$  ομάδων σημείων κορυφής και σημείων πελμάτων.



Εικόνα 3.1: Κάθετο σημείο φυγής και σχεδιασμός της ευθείας φυγής της σκηνής.

Υποθέτοντας ότι το μοντέλο θορύβου των σημείων κορυφής και των σημείων των πελμάτων είναι μηδενικό, το οποίο σημαίνει ότι ακολουθεί τον ανεξάρτητο Γκαουσιανό

θόρυβο, καθώς και ότι διαφορετικά τελικά σημεία έχουν την ίδια διακύμανση, τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Όπου και είναι τα τελικά σημεία και είναι τα θεωρητικά τελικά σημεία, είναι η διακύμανση. Σύμφωνα με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, η εξίσωση (3.7) είναι ελάχιστη:

Όπου είναι το σημείο τομής όλως των τμημάτων της γραμμής, και είναι οι τιμές των τελικών σημείων στην πράξη, συμβολίζει την απόσταση μεταξύ των τελικών σημείων και της γραμμής .

Θεωρούμε τις μονογενείς συντεταγμένες των 2 τελικών σημείων της τμηματικής γραμμής οι οποίες είναι και , και το επιθυμητό σημείο τομής είναι . Από την εξίσωση (3.7) μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση (3.8) η οποία δείχνει ότι η βέλτιστη λύση μπορεί να προκύψει με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης του κόστους:

$$\min_{\mu} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Όπου,

αντιπροσωπεύουν ανεξάρτητα τα και σχετίζονται με το  $i$ -στο τμήμα της γραμμής. Η τιμή του σημείου φυγής βρίσκεται από την μήτρα ή βρίσκοντας την μικρότερη ιδιοτιμή του διανύσματος .

Στην πράξη, αν ο θόρυβος είναι ανισότροπος, το πιο ακριβές μοντέλο υιοθετεί την απόσταση Mahalanobis. Τότε το καλύτερο σημείο φυγής βρίσκεται με την ελαχιστοποίηση της εξίσωσης (3.9):

Όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι οι τιμές συνδιακύμανσης των σημείων κορυφής και πελμάτων,  $\mathbf{v}$  είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης που διέρχεται από τα  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$ , με  $\|\mathbf{v}\| = 1$ ,  $\mathbf{m}$  είναι το μέσο σημείο των  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$ . Ελαχιστοποιώντας την εξίσωση (3.9), μπορούμε να υπολογίσουμε το κάθετο σημείο φυγής.

### 3.3.2 Ευθεία φυγής

Όπως είδαμε στην εικόνα 3.1, η τομή της ευθείας των σημείων κορυφής και της ευθείας των σημείων των πελμάτων μπορούν να ορίσουν το σημείο φυγής. Όταν βρούμε 2 ή περισσότερα σημεία φυγής, τότε μπορούμε να καθορίσουμε την ευθεία φυγής. Θεωρώντας τις μη ομογενείς συντεταγμένες  $(x, y, z, 1)$ , οι οποίες είναι η τομή των τμηματικών γραμμών  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$ , όπου αποτελούνται από 2 ζευγάρια σημείων κορυφής και σημείων πελμάτων  $(\mathbf{p}_{11}, \mathbf{p}_{12})$  και  $(\mathbf{p}_{21}, \mathbf{p}_{22})$ . Η συνδιακύμανση (μη-ομογενείς) υπολογίζεται από την εξίσωση (3.10):

Όπου,

Έπειτα η ευθεία φυγής μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας της εξίσωση (3.12):

Όπου  $\mathbf{v}$ , και  $\mathbf{m}$ .

Μια σημαντική σημείωση ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα σημεία φυγής και την ευθεία φυγής σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι ότι θα πρέπει τα δεδομένα να νορμαλίζονται πρώτα.

### 3.4 Υπολογισμός ενδογενών και εξωγενών παραμέτρων

#### 3.4.1 Καθορισμός τριών κάθετων σημείων φυγής

Δεδομένου τριών κάθετων σημείων φυγής, θα εκφράσουμε τις ενδογενείς και τις εξωγενείς παραμέτρους, αποφεύγοντας τους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Θεωρώντας ότι ο Z άξονας και ο X άξονας βρίσκονται πάνω στο έδαφος, το αρχικό σημείο τοποθέτησης της κάμερας, αλλά και οι κατευθύνσεις του άξονα X και Z δεν προσδιορίζεται. Σύμφωνα με το χαρακτηριστικό ότι τα κύρια σημεία της εικόνας είναι το κατακόρυφο κέντρο του τριγώνου, το οποίο σχηματίζεται από τα ορθογώνια σημεία φυγής, τα 3 κάθετα σημεία φυγής μπορούν να προσδιοριστούν ως εξής:

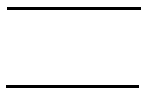
- Η τεταγμένη του κύριου σημείου της εικόνας, P, πάντοτε βρίσκεται στο μισό της εικόνας, ενώ η σύνδεση του P και του είναι κάθετη προς το επίπεδο της ευθείας φυγής, η οποία έχει υπολογιστεί, και η τετμημένη του κύριου σημείου P μπορεί να υπολογιστεί.
- Επιλέγουμε ένα σημείο ως σημείο φυγής της τυχαίας κατεύθυνσης X.
- Η L1 η οποία διέρχεται από το σημείο φυγής του X άξονα και από το κύριο σημείο P, είναι κάθετη στην L2, η οποία διέρχεται από το σημείο φυγής ως προς τον Y άξονα και του σημείου φυγής του ως προς τον Z άξονα. Επιπλέον το σημείο φυγής είναι επάνω στην ευθεία φυγής. Οπότε το σημείο φυγής ως προς τον Z άξονα μπορεί να οριστεί.

#### 3.4.2 Σχέση μεταξύ σημείων φυγής και ενδογενών και εξωγενών παραμέτρων

Θεωρώντας ότι η κατεύθυνση της ευθείας είναι , μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σημείο φυγής δεν εξαρτάται από την μετατόπιση της κάμερας και οι ανομοιογενείς συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} & \text{_____} \\ & \text{_____} \end{aligned}$$

Όπου και είναι η τετμημένη και η τεταγμένη του . Επιλέγοντας 3 άξονες κατεύθυνσης (1,0,0),(0,1,0) και (0,0,1), τα σημεία φυγής των 3 αξόνων μπορούν να οριστούν, και στηριζόμενοι στην εξίσωση (3.5), εύκολα προκύπτουν τα εξής:



### 3.4.3 Καθορισμός των ενδογενών παραμέτρων και αριθμητικής μεταφοράς

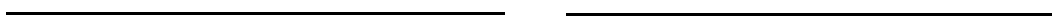
Δοθείσης ενός κύριου σημείου μιας εικόνας και ενός κάθετου σημείου φυγής, η γωνία  $\gamma$  περιστροφής γύρω από τον  $Z$  άξονα μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:



Αν η γωνία του επιπέδου της ευθείας φυγής και του επιπέδου είναι  $\gamma$  τότε μπορούμε να εκφράσουμε την γωνία  $\gamma$  ως εξής:



Μεταβάλλοντας την εξίσωση (3.2) και την εξίσωση (3.15) η εστιακή απόσταση μπορεί να υπολογιστεί ως:



Το κάθετο σημείο φυγής, το κύριο σημείο, η εστιακή απόσταση και η γωνία  $\gamma$  έχουν υπολογιστεί παραπάνω, η γωνία περιστροφής γύρω από τον  $X$  άξονα είναι:



Η γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα  $Y$  είναι:

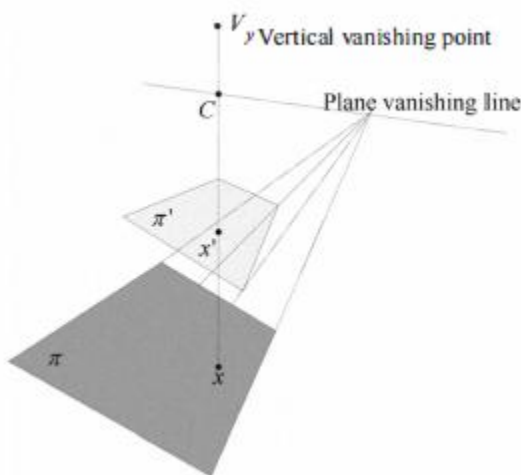


$\gamma$  είναι η γωνία περιστροφής της κάμερας γύρω από τον άξονα  $Z$  και είναι πάντα μικρή.  
 $\alpha$  είναι η γωνία περιστροφής της κάμερας γύρω από τον άξονα  $X$  η οποία έχει διάστημα τιμών (τα κλειστά διαστήματα δείχνουν ότι η κάμερα κινείται κάθετα πάνω

και κάτω, και  $\beta$  είναι η γωνία μετακίνησης της κάμερας αριστερά και δεξιά, η οποία παίρνει τιμές . Στην πράξη όταν στο πεδίο θέασης ο στόχος εμφανίζεται πίσω από την κάμερα, είναι εύκολο να απομακρύνουμε τις μη λογικές τιμές.

### 3.4.4 Υπολογισμός του ύψους τοποθέτησης της κάμερας

Αν η αρχή του παγκόσμιου συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται κάτω από το σημείο στήριξης της κάμερας, το ύψος τοποθέτησης της κάμερας μετατοπίζεται πάνω στην κατεύθυνση του  $Y$  άξονα.



Εικόνα 3.2: Σχέδιο αναλογίας

Όπως βλέπουμε στην εικόνα 3.2 το σημείο  $x$ , το σημείο κορυφής  $x'$  και το κάθετο σημείο φυγής βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία, η οποία τέμνεται με το επίπεδο της ευθείας φυγής στο σημείο  $C$ . Θεωρώντας την αμετάβλητη αναλογία της προβολικής γεωμετρίας,

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

Όπου  $y$  είναι το κάθετο ύψος του ανθρώπινου σώματος,  $y'$  είναι το απαιτούμενο ύψος τοποθέτησης της κάμερας στον  $Y$  άξονα,  $x$  είναι η απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σημείων  $x$  και  $y$ . Όταν υπάρχουν πολλά ύψη, έγκυρη τιμή αποτελεί η μέση τιμή αυτών.

Θεωρώντας την επίδραση του θορύβου, το κάθετο σημείο φυγής δεν είναι συγγραμμικό με τα  $x$  και  $x'$ . Έπειτα θεωρούμε ότι η ευθεία που σχηματίζεται από τα σημεία  $x$  και  $y$  τέμνονται με το επίπεδο της ευθείας φυγής στο σημείο  $C$ . Η ευθεία που σχηματίζεται από τα σημεία  $x'$  και  $y'$  τέμνονται με το επίπεδο της ευθείας φυγής στο σημείο  $C'$ . Τελικά η τομή βρίσκεται στη μέση των σημείων  $C$  και  $C'$ .

Αν  $k \neq 1$ , τότε μετά τους υπολογισμούς των ενδογενών και των εξωγενών παραμέτρων της κάμερας, όλες οι συντεταγμένες των σημείων της εικόνας πολλαπλασιάζονται με  $k$ , και έπειτα βρίσκουμε τις παραμέτρους ακολουθώντας την παραπάνω μέθοδο. Να σημειωθεί ότι το υπολογισμένο κύριο σημείο της εικόνας μεταβάλλεται σε  $(k \cdot x_c, k \cdot y_c)$  από  $(x_c, y_c)$  ενώ οι υπόλοιπες ενδογενείς και εξωγενείς παράγοντες παραμένουν οι ίδιες.

## 4. Παρουσίαση αλγορίθμου και αποτελέσματα

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε όσα έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε στην πράξη τις παραμέτρους της κάμερας. Έχοντας μια αρχική φωτογραφία θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους της κάμερας που τράβηξε αυτή τη φωτογραφία. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει σε περιβάλλον MATLAB. Στην συνέχεια για να μπορέσουμε να ελέγξουμε κατά πόσο ο υπολογισμός των παραμέτρων αυτών είναι ακριβής θα εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό στην αρχική μας εικόνα ώστε να μπορέσουμε να πάρουμε την ίδια φωτογραφία σαν να έχει τραβηχτεί από την ίδια κάμερα αλλά από διαφορετική γωνία λήψης. Στην συνέχεια θα γίνει μια εφαρμογή της μεθόδου και σε άλλες φωτογραφίες για την σύγκριση των αποτελεσμάτων.

### 4.2 Υπολογισμός των παραμέτρων της κάμερας στην πράξη

Η αρχική μας εικόνα η οποία έχει ληφθεί από μια κάμερα είναι η παρακάτω:



4.1: Αρχική φωτογραφία.

Το πρώτο βήμα το οποίο θα πρέπει να γίνει για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της κάμερα είναι να μπορέσουμε να βρούμε στην αρχική μας φωτογραφία ευθείες οι οποίες στον πραγματικό κόσμο είναι παράλληλες. Θα πρέπει να βρούμε από 2 ευθείες οι οποίες θα είναι παράλληλες ως προς του άξονες  $X, Y$  και  $Z$ . Άρα θα πρέπει



να βρεθούν 2 ευθείες παράλληλες προς τον άξονα Χ, 2 ευθείες παράλληλες προς τον άξονα Υ και 2 ευθείες παράλληλες προς τον άξονα Ζ.

Οπότε τα σημεία που επιλέγονται είναι τα εξής:

- Ως προς τον άξονα Υ τα  $y_1(192.7996,212.5224)$ ,  $y_2(498.8113,235.6294)$ ,  $y_3(192.7996,63.2636)$  και  $y_4(493.1907,137.5807)$
- Ως προς τον άξονα Ζ τα  $z_1(175.3132,53.8959)$ ,  $z_2(51.0350,112.6002)$ ,  $z_3(178.4358,195.6605)$  και  $z_4(53.5331,216.8940)$
- Ως προς τον άξονα Χ τα  $x_1(189.0525,225.6372)$ ,  $x_2(190.9261,58.2675)$ ,  $x_3(506.3054,248.7442)$  και  $x_4(499.4358,133.2091)$

Στις παρακάτω εικόνες φαίνονται τα σημεία που έχουν επιλεγεί και γραφικά.



**Εικόνα 4.2: Σημεία ως προς άξονα Υ**



**Εικόνα 4.3: Σημεία ως προς τον άξονα X**



**Εικόνα 4.4: Σημεία ως προς τον άξονα Z**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους στον πραγματικό κόσμο, στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερα αν προεκταθούν τότε τέμνονται σε ένα σημείο στο άπειρο. Εκμεταλλευόμενοι αυτή την ιδιότητα των ευθειών υπολογίζουμε 3 σημεία φυγής (ένα σε κάθε άξονα). Τα σημεία αυτά είναι τα  $v_x$ ,  $v_y$  και  $v_z$  και γραφικά απεικονίζονται στις παρακάτω εικόνες:



**Εικόνα 4.5: Σημείο φυγής ως προς τον άξονα Υ, σε σχέση με την αρχική εικόνα.**



**Εικόνα 4.6: Σημείο φυγής ως προς τον άξονα Χ, σε σχέση με την αρχική εικόνα.**

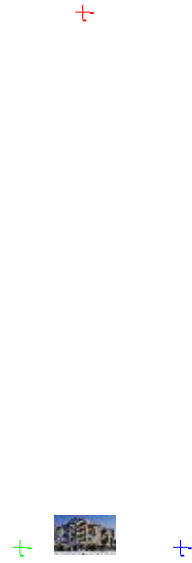


**Εικόνα 4.7: Σημείο φυγής ως προς τον άξονα Z, σε σχέση με την αρχική εικόνα.**

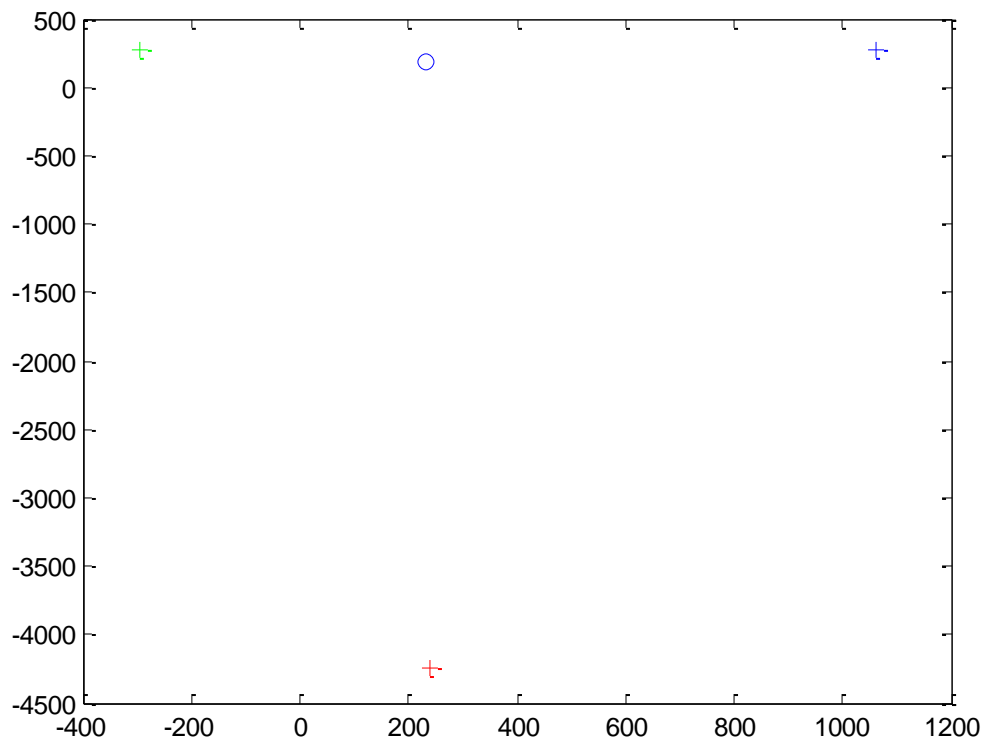
Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στις γραφικές αναπαραστάσεις των τριών σημείων φυγής σε σχέση με την αρχική εικόνα αυτά βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση έξω από τα όρια της εικόνας.

Αφού τώρα έχουμε υπολογίσει τα σημεία φυγής, το επόμενο βήμα είναι να βρούμε το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται παίρνοντας σαν σημεία τα σημεία φυγής.

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται γραφικά τα σημεία φυγής σε σχέση με την αρχική εικόνα καθώς και τα σημεία φυγής μαζί με το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία φυγής. Με πράσινο '+' συμβολίζεται το σημείο φυγής ως προς τον άξονα Z, μπλε '+' το σημείο φυγής ως προς τον άξονα X και με κόκκινο '+' το σημείο φυγής ως προς τον άξονα Y. Με το μπλε 'ο' συμβολίζεται το ορθόκεντρο.



4.8: Τα σημεία φυγής σε σχέση με την αρχική εικόνα.



4.9: Τα σημεία φυγής σημειώνονται με + και το ορθόκεντρο με ο.

Έπειτα εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.34), η οποία υπολογίζει τις παραμέτρους με βάση τα εμβαδά του τριγώνου, βρίσκουμε τις παραμέτρους  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Αφού έχει γίνει ο υπολογισμός των παραμέτρων εύκολα υπολογίζουμε την παράμετρο  $a$  της κάμερας, καθώς και τον πίνακα περιστροφής της κάμερας  $R$ . Η παράμετρος  $a$  για την συγκεκριμένη εικόνα έχει τιμή 654,2797 ενώ ο πίνακας περιστροφής είναι

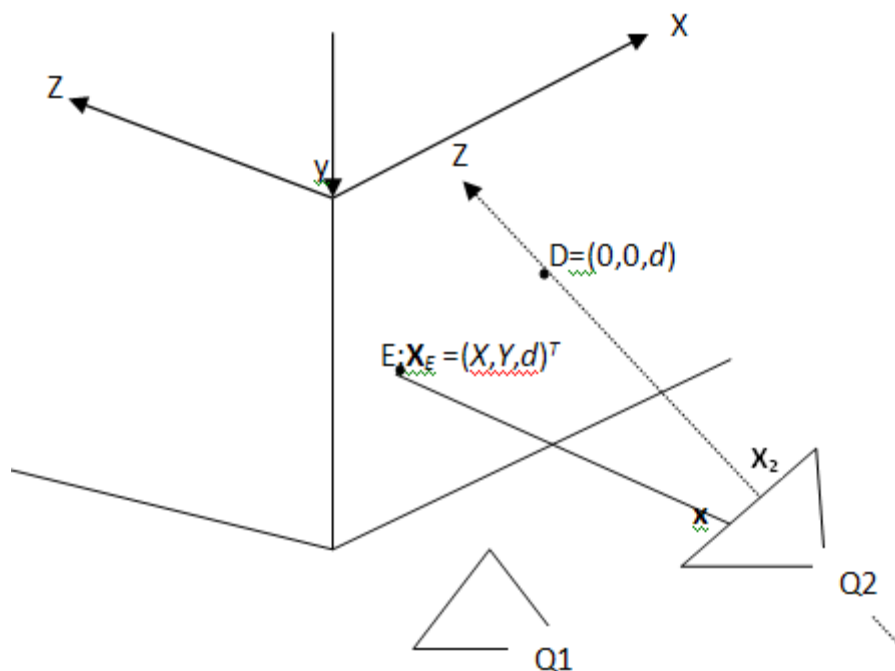
Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι και στην πράξη επαληθεύεται η εξίσωση (2.31), ότι δηλαδή

Οπότε πλέον έχουμε πετύχει τον στόχο μας και έχουμε καταφέρει να υπολογίσουμε πλήρως όλες τις παραμέτρους της κάμερας με την οποία έχει τραβηχτεί η σκηνή της αρχικής μας εικόνας.

### **4.3 Μετασχηματισμός της αρχικής εικόνας**

#### **4.3.1 Θεωρητικό υπόβαθρο**

Ύστερα από τον υπολογισμό των παραμέτρων της κάμερας θα εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό στην αρχική μας εικόνα ώστε να μπορέσουμε να δούμε πρακτικά, ότι οι παράμετροι της κάμερας έχουν υπολογιστεί ορθά. Η αρχική μας εικόνα είναι ένα κτήριο, του οποίου η φωτογραφία έχει τραβηχτεί με τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνονται 2 από τις πλευρές του. Παρακάτω θα περιγραφεί η μέθοδος με την οποία θα μπορέσουμε να δούμε το κτήριο σαν να έχει τραβηχτεί η φωτογραφία από την ίδια κάμερα αλλά υπό διαφορετική γωνία έτσι ώστε να φαίνεται η πρόσοψη του κτηρίου.



**Εικόνα 4.10: Σχήμα για την περιγραφή του μετασχηματισμού της αρχικής εικόνας**

Στην εικόνα 4,10, με Q1 συμβολίζεται η κάμερα από την οποία πήραμε την αρχική εικόνα, και με Q2 συμβολίζεται η θέση της κάμερας από την οποία επιθυμούμε να αποκτήσουμε την νέα φωτογραφία της δεξιάς πρόσοψης του κτηρίου. Για το σκοπό αυτό θα δουλέψουμε ως εξής:

Πρέπει να πάρουμε τη φωτογραφία που λαμβάνεται από την Q2 κάμερα, και η οποία θα έχει οπτικό άξονα κάθετο στο επίπεδο της πρόσοψης του κτηρίου. Οπότε θεωρούμε ότι το κέντρο της κάμερας Q2 είναι η αρχή των συντεταγμένων του κόσμου (0,0,0), και έτσι ορίζεται ο άξονας OZ. Οι υπόλοιποι άξονες ορίζονται έτσι ώστε να δημιουργείται ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή ο άξονας Y είναι ο κατακόρυφος και ο X άξονας είναι παράλληλος με το επίπεδο της πρόσοψης.

Η θέση της κάμερας Q2 βρίσκεται σε απόσταση d pixels, πάνω στον άξονα OZ, από το επίπεδο της πρόσοψης. Οπότε  $D=(0,0,d)^T$  είναι το σημείο που τέμνει ο άξονας OZ το επίπεδο της πρόσοψης, την οποία επιθυμούμε να φωτογραφίσουμε, και η εξίσωση του επιπέδου είναι  $Z=d$ . Οπότε η εξίσωση της κάμερας Q2 δίνεται από τη σχέση:

Οπότε πλέον από τη φωτογραφία του κτηρίου και τα τρία σημεία φυγής που έχουμε υπολογίσει μπορούμε να παραστήσουμε την εξίσωση της κάμερας Q1 ως εξής:

Όπου το  $(l,m,n)^T$  είναι το διάνυσμα θέσης της κάμερας Q1 στο σύστημα που ορίσαμε πιο πάνω. Το  $(l,m,n)^T$  μπορεί να προσδιοριστεί αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες χώρου για ένα σημείο της αρχικής εικόνας. Για παράδειγμα αν δεχθούμε ότι το σημείο  $(0,0,0)^T$  απεικονίζεται στη αρχική εικόνα στο σημείο  $(x_s,y_s)^T$  τότε ισχύει:

Έστω σημείο  $x_2$  της φωτογραφίας (φωτογραφία της κάμερας Q2) που επιθυμούμε να κατασκευάσουμε. Αυτό αποτελεί εικόνα του σημείου E του επιπέδου με συντεταγμένες  $X = (X,Y,d,1)^T$ . Η εξίσωση της Q2E είναι:

Οπότε η παραπάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\begin{matrix} - & & - & - \\ & - & & \end{matrix}$$

Το σημείο E απεικονίζεται στο  $x_1$  της φωτογραφίας που έλαβε η Q1 (Εικόνα I1) και ισχύει:

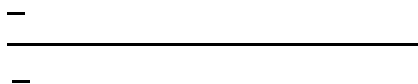
$$\begin{matrix} - & & - \\ & - & \end{matrix}$$

Ορίζουμε:

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω μη γραμμικός affine μετασχηματισμός:

$$\begin{matrix} - \\ \hline - \end{matrix}$$



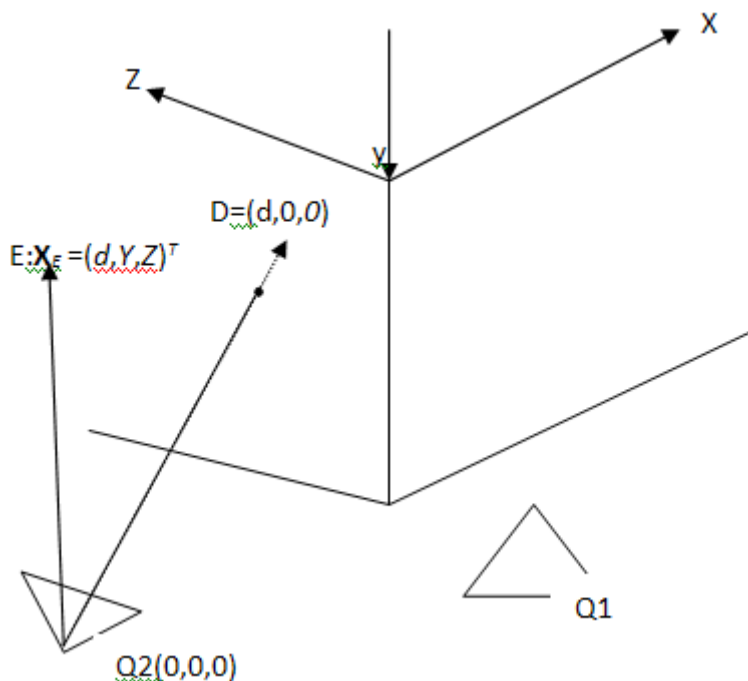


Και αντίστροφα:



Αρά μπορέσαμε να βρούμε την σχέση που συνδέει τα pixels της αρχικής φωτογραφίας που πήραμε από την κάμερα Q1, με τα pixels τη φωτογραφίας που θέλουμε να κατασκευάσουμε.

Τώρα θα κατασκευάσουμε την φωτογραφία που αναπαριστά την αριστερή πρόσοψη του κτηρίου. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα συντεταγμένων χρειάζεται μια δεξιόστροφη στροφή 270°. Το σύστημα συντεταγμένων σε αυτή την περίπτωση φαίνεται στην εικόνα 4.11.



Εικόνα 4.11: Σύστημα συντεταγμένων

Οπότε η εξίσωση της κάμερας Q2 γίνεται:

Έστω σημείο  $x_2$  της φωτογραφίας (Φωτογραφία της Κάμερας 2) που επιθυμούμε να κατασκευάσουμε. Αυτό αποτελεί εικόνα του σημείου  $E$  του επιπέδου με συντεταγμένες  $X = (d, Y, Z, 1)^T$ . Η εξίσωση της  $Q_2E$  είναι:

Οπότε προκύπτει:

$$- \quad -$$

Άρα:

$$-$$

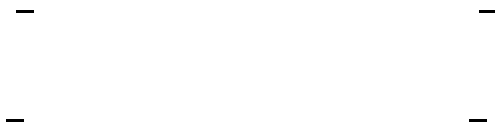
Το σημείο  $E$  απεικονίζεται στο  $x_1$  της φωτογραφίας που έλαβε η  $Q_1$  (Εικόνα 4.11) και ισχύει:

$$- \quad -$$

Και προκύπτει ο μη γραμμικός affine μετασχηματισμός:

$$\begin{array}{l} - \\ \hline - \\ \\ - \\ \hline - \end{array}$$

Και αντίστροφα:



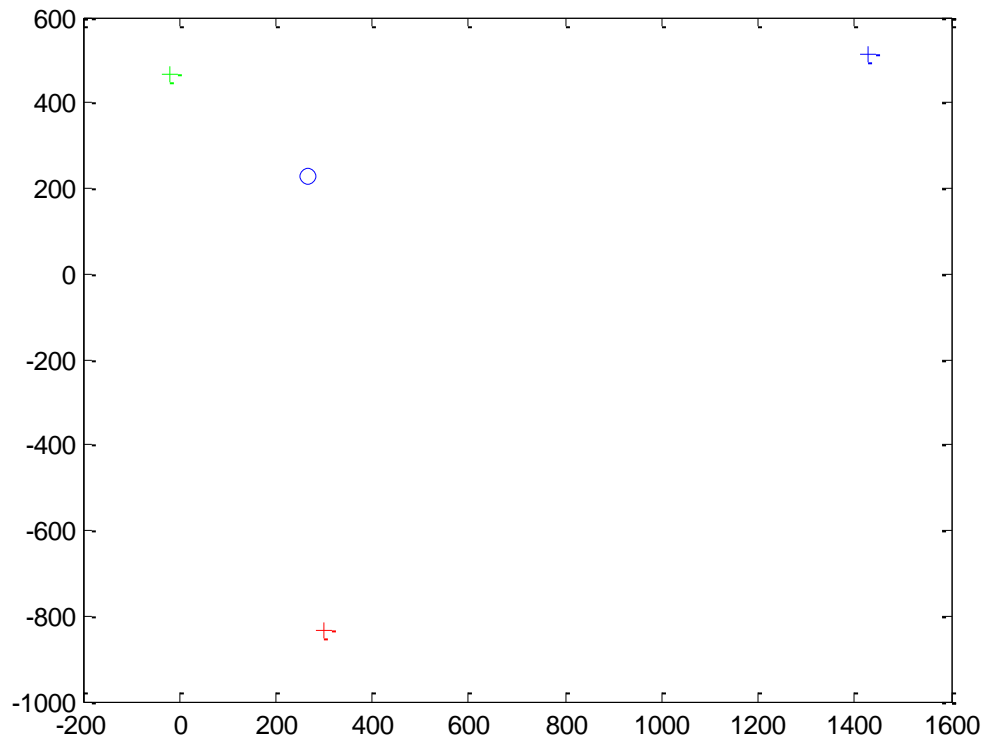
#### 4.3.2 Μετασχηματισμός της εικόνας στην πράξη

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η αρχική φωτογραφία έχοντας πάνω χαραγμένες τις ευθείες που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των vanishing points.



**Εικόνα 4.12:** Οι ευθείες που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των σημείων φυγής

Τα σημεία φυγής μαζί με το ορθόκεντρο απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.



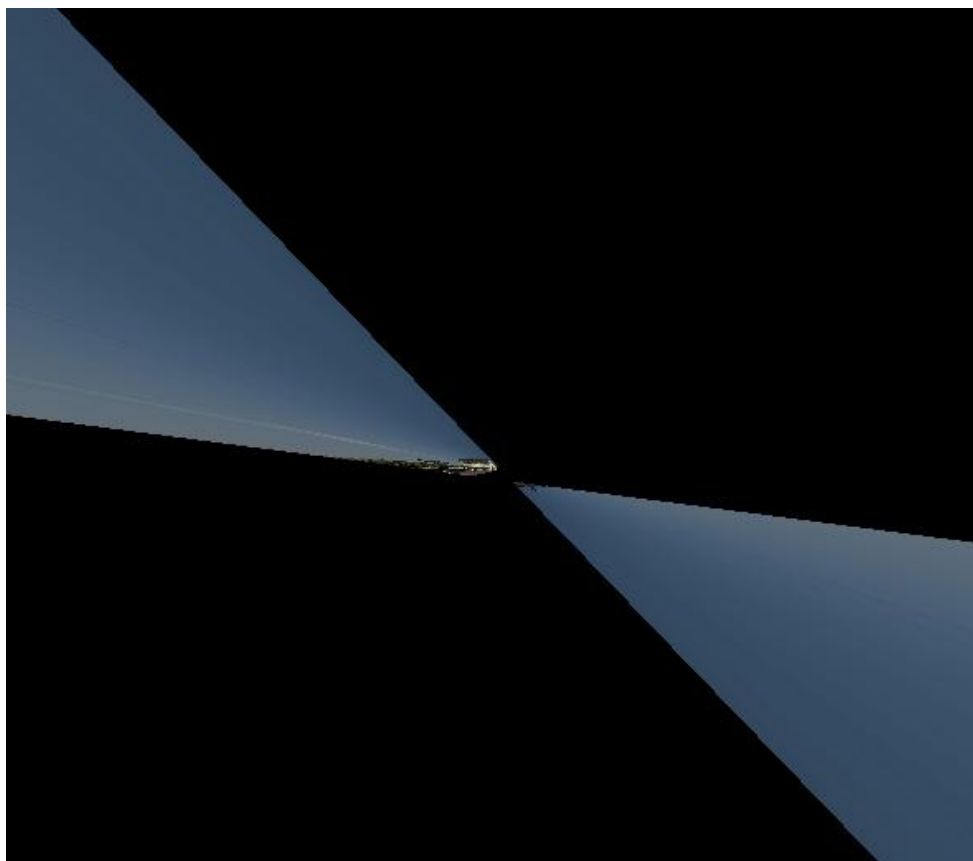
**Εικόνα 4.13: Γραφική απεικόνιση των σημείων φυγής και του ορθόκεντρου βασισμένοι στην αρχική μας εικόνα.**

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό που έχουμε υπολογίσει στην προηγούμενη παράγραφο παίρνουμε την εξής εικόνα:



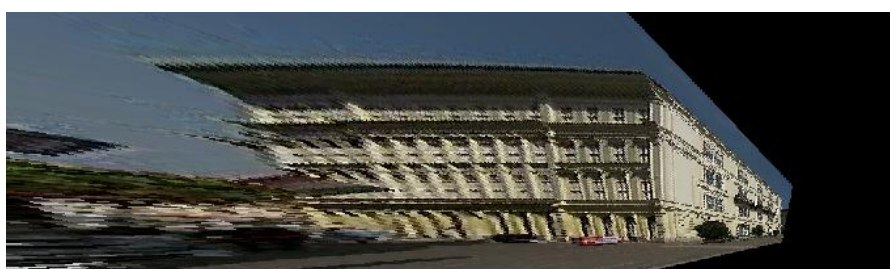
**Εικόνα 4.14: Τελικό αποτέλεσμα. Λήψη της πρόσοψης του κτηρίου**

Εφαρμόζοντας τώρα τον δεύτερο μετασχηματισμό που υπολογίσαμε μπορούμε να πάρουμε σαν τελικό αποτέλεσμα την φωτογραφία της άλλης πλευράς του κτηρίου. Σε αυτή την περίπτωση λόγω του ότι ο μετασχηματισμός που εφαρμόζεται είναι μη γραμμικός affine, παρουσιάζονται ορισμένες ασυνέχειες στην εμφάνιση του τελικού αποτελέσματος, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



**Εικόνα 4.15: Τελικό αποτέλεσμα λόγω μη γραμμικού μετασχηματισμού**

Για να λύσουμε το πρόβλημα που παρουσιάζεται επιλέγουμε από την παραπάνω εικόνα, να προβάλουμε μόνο το κομμάτι που περιέχει την επιθυμητή πληροφορία. Οπότε παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα όπως φαίνεται στην παρακάτω φωτογραφία.



**Εικόνα 4.16: Τελικό αποτέλεσμα. Λήψη της δεύτερης πλευράς του κτηρίου.**

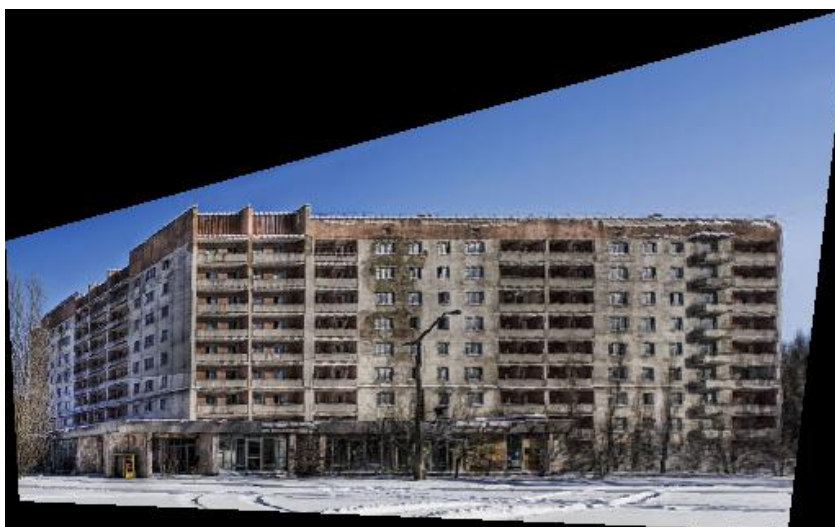
Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που παίρνουμε χρησιμοποιώντας κάποιες άλλες εικόνες.

Έχοντας σαν αρχική εικόνα την φωτογραφία που φαίνεται στην εικόνα 4.16 βαθμονομούμε πλήρως την κάμερα.



**4.17: Αρχική εικόνα.**

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας με την σειρά πρώτα τον μετασχηματισμό για την προβολή της δεξιάς πλευράς του κτηρίου και έπειτα τον μετασχηματισμό για την προβολή της αριστερής πλευράς του κτηρίου παίρνουμε σαν αποτελέσματα τις παρακάτω φωτογραφίες.



**Εικόνα 4.18: Τελικό αποτέλεσμα. Αριστερή πρόσοψη του κτηρίου**





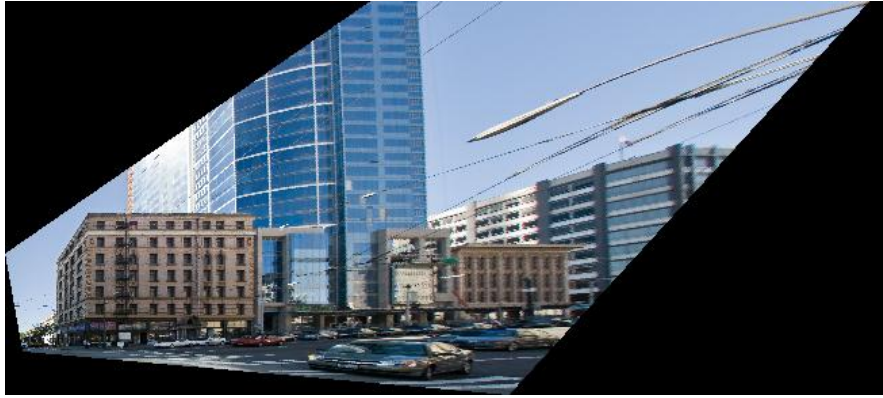
**4.19: Τελικό αποτέλεσμα. Δεξιά πρόσοψη του κτηρίου**

Με τον ίδιο τρόπο έχοντας σαν αρχική φωτογραφία την εικόνα 4.18 παίρνουμε σαν τελικές εικόνες τις παρακάτω φωτογραφίες.

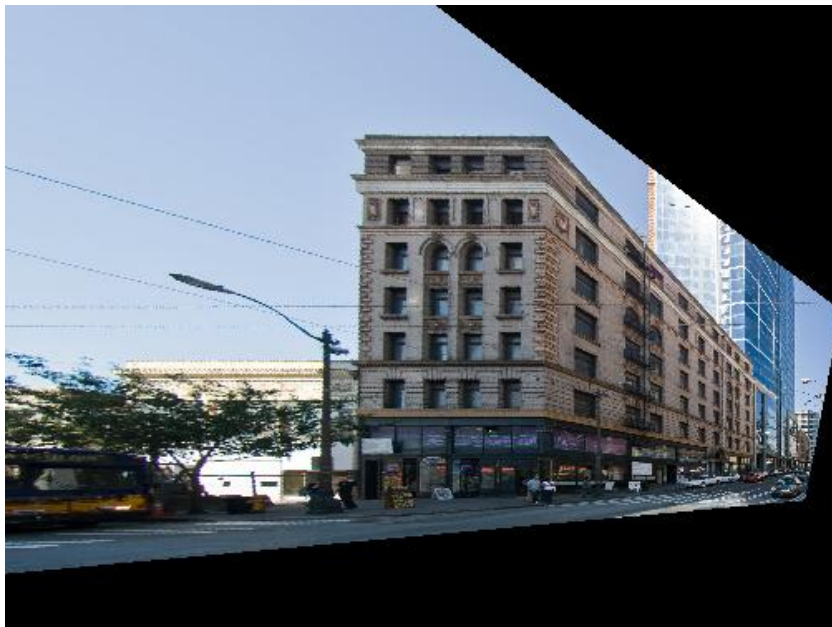


**4.20: Αρχική εικόνα.**





**Εικόνα 4.21: Τελικό αποτέλεσμα. Αριστερή πρόσοψη του κτηρίου**



**4.22: Τελικό αποτέλεσμα. Δεξιά πρόσοψη του κτηρίου**

## 5. Συμπεράσματα και Μελλοντική Έρευνα

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία είδαμε ότι έχοντας μια μόνο φωτογραφία και βρίσκοντας 3 σημεία φυγής, ένα σε κάθε μια από τις τρεις διαστάσεις, μπορούμε να βαθμονομήσουμε πλήρως την κάμερά μας. Έχοντας βαθμονομήσει την κάμερά μας, και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό για την προβολή των πλευρών ενός κτηρίου, είδαμε στην πράξη ότι τα αποτελέσματα που πήραμε από την βαθμονόμηση της κάμερας ήταν ορθά.

Το σημαντικότερο ρόλο ώστε τα αποτελέσματα που θα πάρουμε να είναι τα καλύτερα δυνατά παίζει η σωστή επιλογή των σημείων φυγής. Σε περίπτωση που η ευθείες που θα επιλεγούν ώστε να βρούμε ένα σημείο φυγής δεν είναι οι καλύτερες δυνατές τότε τα αποτελέσματα που θα πάρουμε από την βαθμονόμηση της κάμερας δεν θα είναι ορθά.

Επίσης στην παρούσα διπλωματική εργασία τα σημεία φυγής δεν επιλέγονται αυτόματα από το σύστημα, αλλά ο χρήστης δίνει τις ευθείες από τις οποίες προκύπτουν τα σημεία φυγής. Μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να αποτελέσει η εύρεση μεθόδου για τον αυτόματο υπολογισμό των σημείων φυγής από το σύστημα.

Επίσης για την εύρεση όσο το δυνατό ορθότερων σημείων φυγής θα μπορούσαν να επιλέγονται πολλές ευθείες σε κάθε μια από τις τρεις διαστάσεις, και το σημείο φυγής να προκύπτει σαν τον μέσο όρο των σημείων που θα προέκυπταν από την σύγκλιση των ευθειών. Αντί για τον μέσο όρο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και ένα κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας για την επιλογή του κατάλληλου σημείου φυγής.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

<b>Ξενόγλωσσος όρος</b>	<b>Ελληνικός Όρος</b>
Vanishing Point	Σημείο Φυγής
Vanishing Line	Ευθεία Φυγής
Principal Point	Κύριο Σημείο
Pin-Hole Camera	Κάμερα Μικρής Οπής
Skew	Παράγοντα κλίσης

## ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

IAC	Image of the Absolute Conic

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

- Camera\_calibration.m

```

clear all; close all;clc;
filename1 = 'Hungary_Budapest_building_villa.jpg';
filename2 = 'Hungary_Budapest_building_villa.txt';
ii=imread(filename1);
imshow(ii);
[x, y] = textread(filename2, '%f %f');
points = [x, y];

figure;imshow(ii);hold on;
plot(points(1:2,1),points(1:2,2),'b-');
plot(points(3:4,1),points(3:4,2),'b-');
plot(points(5:6,1),points(5:6,2),'r-');
plot(points(7:8,1),points(7:8,2),'r-');
plot(points(9:10,1),points(9:10,2),'g-');
plot(points(11:12,1),points(11:12,2),'g-');

hold off
vx=VanishingPoint1([points(1,:),1],[points(2,:),1],[points(3,:),1],[points(4,
:),1]);
vy=VanishingPoint1([points(5,:),1],[points(6,:),1],[points(7,:),1],[points(8,
:),1]);
vz=VanishingPoint1([points(9,:),1],[points(10,:),1],[points(11,:),1],[points(
12,:),1]);

X0 = orthocenter1([vx,1],[vy,1],[vz,1]);

lz = sqrt((areaoftriangle(X0,vx,vy))/(areaoftriangle(vz,vx,vy)));
lx = sqrt((areaoftriangle(X0,vz,vy))/(areaoftriangle(vz,vx,vy)));
ly = sqrt((areaoftriangle(X0,vz,vx))/(areaoftriangle(vz,vx,vy)));

a = sqrt(-(vz-X0)*(vx-X0)');

R=[(lx*(vx(1)-X0(1)))/a,(ly*(vy(1)-X0(1)))/a,(lz*(vz(1)-X0(1)))/a;
    (lx*(vx(2)-X0(2)))/a,(ly*(vy(2)-X0(2)))/a,(lz*(vz(2)-X0(2)))/a;
    lx,ly,lz];

K=[a,0,X0(1);0,a,X0(2);0,0,1];
R=[R(:,1),R(:,2),R(:,3)];
figure;
plot(vz(1),vz(2),'+g',vx(1),vx(2),'+b',vy(1),vy(2),'+r',X0(1),X0(2),'ow');

axis('ij');hold on;imshow(ii);
hold off;

vlxy=lineequation([vy,1],[vx,1]);

save('PK','P','K')

```

- Main\_Fisrt\_Transformation

```

clear all; close all;clc;
load PK;
ii=imread('Hungary_Budapest_building_villa.jpg');
imshow(ii);
d=4000;a=1000;Q1=[-10^10,-50000,5000];
L=K*Q1';l=L(1);m=L(2);n=L(3);

x11t=[1,size(ii,2),size(ii,2),1];
x12t=[1,1,size(ii,1),size(ii,1)];
x21t=zeros(4,1);x22t=zeros(4,1);
for i=1:4
    x=x11t(i);y=x12t(i);
    coefmat=d*[x*P(3,1)-P(1,1),x*P(3,2)-P(1,2);y*P(3,1)-P(2,1),y*P(3,2)-
P(2,2)];

Xmat=coefmat;Xmat(1,1)=d*a*(P(1,3)-x*P(3,3))+a*(1-x*n);Xmat(2,1)=d*a*(P(2,3)-
y*P(3,3))+a*(m-y*n);
Ymat=coefmat;Ymat(1,2)=d*a*(P(1,3)-x*P(3,3))+a*(1-x*n);Ymat(2,2)=d*a*(P(2,3)-
y*P(3,3))+a*(m-y*n);
Dcoef=det(coefmat);
DX=det(Xmat);
DY=det(Ymat);
x21t(i)=DX/Dcoef;x22t(i)=DY/Dcoef;
end
figure;plot([x21t',x21t(1)],[x22t',x22t(1)])
axis('equal');grid

Xdim=max(x21t)-min(x21t);Ydim=max(x22t)-min(x22t);
Ds=sqrt(Xdim*Ydim/size(ii,1)/size(ii,2));
I1=uint8( zeros( round(Ydim/Ds),round(Xdim/Ds),3 ));
line=0;
for y2=min(x22t):Ds:max(x22t)
    line=line+1;clmn=0;
    for x2=min(x21t):Ds:max(x21t)
        clmn=clmn+1;

x11=round((d/a*(P(1,1)*x2+P(1,2)*y2+P(1,3)*a)+1)/(d/a*(P(3,1)*x2+P(3,2)*y2+P(
3,3)*a)+n));

x12=round((d/a*(P(2,1)*x2+P(2,2)*y2+P(2,3)*a)+m)/(d/a*(P(3,1)*x2+P(3,2)*y2+P(
3,3)*a)+n));
        if 1<=x11 & x11<= size(ii,2)
            if 1<= x12 & x12<= size(ii,1)
                I1(line,clmn,1:3)=ii(x12,x11,1:3);
            end
        end
    end
end
end
I2=I1;
for l=1:line
    for c=1:clmn
        I2(line-l+1,c,1:3)=I1(l,c,1:3);
    end
end
figure;imshow (I2)

```

- Main\_Second\_Transformation

```

clear all; close all;clc;
filename='Hungary_Budapest_building_villa.jpg';
load PK_Hung;
ii=imread(filename);
imshow(ii);
d=800;a=100;Q1=[-10^2,0,-10^5];
L=K*Q1';l=L(1);m=L(2);n=L(3);
pixel=0;x21=zeros(size(ii,1)*size(ii,2),1);x22=x21;
for x11=1:3:size(ii,2)
    for x12=1:3:size(ii,1)
        pixel=pixel+1;
        x=x11;y=x12;
        coefmat=d*[-x*P(3,3)+P(1,3),x*P(3,2)-P(1,2);-
y*P(3,3)+P(2,3),y*P(3,2)-P(2,2)];
        Xmat=coefmat;Xmat(1,1)=d*a*(P(1,1)-x*P(3,1))+a*(1-
x*n);Xmat(2,1)=d*a*(P(2,1)-y*P(3,1))+a*(m-y*n);
        Ymat=coefmat;Ymat(1,2)=d*a*(P(1,1)-x*P(3,1))+a*(1-
x*n);Ymat(2,2)=d*a*(P(2,1)-y*P(3,1))+a*(m-y*n);
        Dcoef=det(coefmat);
        DX=det(Xmat);DY=det(Ymat);
        x21(pixel)=DX/Dcoef;x22(pixel)=DY/Dcoef;
    end
end
x21(pixel+1:end)=[];x22(pixel+1:end)=[];
cc=find(abs(x21)<10^6);
scr=x21(cc);x21=scr;scr=x22(cc);x22=scr;
cc=find(abs(x22)<10^6);
scr=x21(cc);x21=scr;scr=x22(cc);x22=scr;

Xdim=max(x21)-min(x21);Ydim=max(x22)-min(x22);
Ds=sqrt(Xdim*Ydim/size(ii,1)/size(ii,2));
I1=uint8( zeros( round(Ydim/Ds+0.5),round(Xdim/Ds+0.5),3 ));
line=0;

for y2=min(x22)+Ydim*0.0:Ds:min(x22)+Ydim
    line=line+1;clmn=0;
    for x2=min(x21)+Xdim*0.0:Ds:min(x21)+Xdim

        clmn=clmn+1;
        x11=round((d/a*(P(1,1)*a+P(1,2)*y2-
P(1,3)*x2)+1)/(d/a*(P(3,1)*a+P(3,2)*y2-P(3,3)*x2)+n));
        x12=round((d/a*(P(2,1)*a+P(2,2)*y2-
P(2,3)*x2)+m)/(d/a*(P(3,1)*a+P(3,2)*y2-P(3,3)*x2)+n));
        if 1<=x11 & x11<= size(ii,2)
            if 1<= x12 & x12<= size(ii,1)
                I1(line,clmn,1:3)=ii(x12,x11,1:3);
            end
        end
    end
end
I1=I1(1:line,clmn:-1:1,1:3);
figure;imshow (I1)
I2=I1;
for l=1:line
    for c=1:clmn
        I2(line-l+1,c,1:3)=I1(l,c,1:3);
    end
end
end

```

- Areaoftriangle

```
function area = areaoftriangle( X1,X2,X3 )
u1 = X1(1);
u2 = X2(1);
u3 = X3(1);
v1 = X1(2);
v2 = X2(2);
v3 = X3(2);

X1X3 = sqrt((u3-u1)^2+(v3-v1)^2);
X3X2 = sqrt((u2-u3)^2+(v2-v3)^2);
X2X1 = sqrt((u1-u2)^2+(v1-v2)^2);

t = (X1X3+X3X2+X2X1)/2;
area = sqrt(t*(t-X1X3)*(t-X2X1)*(t-X3X2));

fprintf('The area of triangle is: %d\n',area);

end
```

- Orthocenter1

```
function X0 = orthocenter1( X1,X2,X3 )
% Function to evaluate orthocenter of a triangle
% Compute line X1xX2 and altitude 3
l3=lineequation(X1,X2);
altit3=[l3(2),-l3(1),l3(1)*X3(2)-l3(2)*X3(1)];
% Compute line X2xX3 and altitude 1
l1=lineequation(X2,X3);
altit1=[l1(2),-l1(1),l1(1)*X1(2)-l1(2)*X1(1)];
% Compute crossing of altitude 3 and altitude 1
X0=lineequation(altit3,altit1);
X0=X0(1:2)/X0(3);
```

- Lineequation

```
function line=lineequation(p1,p2);
line=[det([p1(2),p1(3);p2(2),p2(3)]),-
det([p1(1),p1(3);p2(1),p2(3)]),det([p1(1),p1(2);p2(1),p2(2)])];
```

- VanishingPoint1

```
function point = VanishingPoint1( p11,p12,p21,p22 )
%This function computes the intersection of the lines (p11,p12)x(p21,p22)
% First evaluate equation of the line defined by the (p11,p12)
l1=lineequation(p11,p12);
% Then evaluate equation of the line defined by the (p21,p22)
l2=lineequation(p21,p22);
%Finally evaluate the intersection of the two lines
%Because of the duality lineequation is also used
point=lineequation(l1,l2);
point=point(1:2)/point(3);
```



## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Richard Hartley and Andrew Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2000,2003.
- [2] Paul Beardsley and David Murray, *Camera Calibration using Vanishing Points*, 1992.
- [3] R. Cipolla, T. Drummond and D. Robertson, *Camera Calibration from Vanishing Points in Images of Architectural Scenes*, 1999.
- [4] Wang Yao, Sun Jingdong, Wang Shan and Gao Hongbo, "Camera Calibration Based on Vertical Objects", *Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference*, 2011.
- [5] David Liebowitz, Antonio Criminisi and Andrew Zisserman, "Creating Architectural Models from Images", *The Eurographics Association and Blackwell Publishers 1999*.
- [6] Fengjun Lv, Tao Zhao and Ramakant, "Camera Calibration from Videp of a Walking Human", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, September 2006.
- [7] Gabriele Fangi, Gianluca Gagliardini, Eva Sarvina Malinverni, "Photointerpretation and Small Scale Stereoplotting with Digitally Rectified Photographs with Geometrical Constraints", *University of Ancona*.
- [8] Ignazio Infantino, Roberto Cipolla and Antonio Chella, "Reconstruction of Architectural Scenes from Uncalibrated Photos and Maps", *IARP Workshop on Machine Vision Applications*, November 28-30, 2000.