Εθνικο και Καποδιστριακο Πανεπιστημιο Αθηνων

Διπλωματικη Εργασια

Γενικεύσεις και Εκλεπτύνσεις του Σημείου Ισορροπίας Nash

Φοιτητής:
Στέφανος Λεοναρδος

Επιβλέπων:
Αναπλ. Καθηγητής
Κωνσταντίνος Μηλολιδακης

Η εργασία παραδίδεται για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Τομέας Στατιστικής & Επιχειρησιακής Έρευνας
Τμήμα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

4 Ιουλίου 2013

«Ένα γραμμάριο τύχης αξίζει περισσότερο από εκατό κιλά σοφία.»

Ελληνική παροιμία

Φοιτητής:
Στέφανος Λεονάρδος

Τριμελής Επιτροπή:

Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης	Καθηγητής Απόστολος Μπουρνέτας	Αναπληρωτής Καθηγητής Αντώνης Οικονόμου
....	....	....
....	....	....
....	....	....

4 Ιουλίου 2013

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνο Μηλολιδάκη για την αμέριστη βοήθειά του στην εκπόνηση της, για τον χρόνο που αφιέρωσε για να μου εξήγησει τις έννοιες που αναπτυσσόνται σε αυτήν και τέλος για τη δυνατότητα που μου έδωσε να γνωρίσω και να συμμετέχω ως φοιτητής στις ακαδημαϊκές του δραστηριότητες.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Απόστολο Μπουρνέτα και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Αντώνη Οικονόμου τόσο για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Επιτροπή όσο και για τη διδασκαλία τους στο πλαίσιο των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη που συνεχίζουν να μου προσφέρουν.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το Σημείο Ισορροπίας Nash αποτελεί τη βασικότερη έννοια λύσης στη σύγχρονη Θεωρία Παιγνίων χωρίς συνεργασία. Η ευρεία χρήση του οφείλεται στο γεγονός της ύπαρξής του σε κάθε κατάσταση πεπερασμένης σύγκρουσης, όπως απέδειξε ο Nash (1950). Τα τελευταία χρόνια, ωστόσο, υπάρχει μια συνεχώς αναπτυσσόμενη βιβλιογραφία πάνω στην καταλληλότητα του σημείου αυτού ως έννοια λύσης ενός παιχνιδιού. Η κριτική αναπτύσσεται πάνω σε δύο κύριους άξονες.

Πρώτον, ότι το σημείο Nash σε αρκετές περιπτώσεις δεν αποτελεί μια ελκυστική λύση, με αποτελέσμα να μην μπορεί να αποτελεί την πρόταση της Θεωρίας Παιγνίων προς τους παίχτες. Υπέρ της κριτικής αυτής συνηγορεί το γεγονός ότι σε πρακτικά πειράματα, τα αποτελέσματα συχνά απέχουν πολύ από τη σύσταση του σημείου Nash. Η βιβλιογραφία που αναπτύσσεται στην κατευθύνση αυτή εστιάζει, μεταξύ άλλων, στην εύρεση γενικεύσεων του σημείου Nash, που δεν μας λένε τι πρέπει να προτείνουμε στους παίκτες αλλα τι θα δούμε ως εξωτερικοί παρατηρητές να κάνουν οι παίκτες, αν τους αφήσουμε να αποφασίζουν μόνοι τους. Κεντρική στον χώρο αυτό είναι η δουλειά ενός ακόμη νομπελίστα παιγνιοθεωρητικού, του Robert J. Aumann, με την οποία ασχοληθήκαμε εκτενώς στην παρούσα εργασία.

Δεύτερον, ότι σε παιχνίδια με περισσότερα από ένα σημεία Nash χρειαζόμαστε μια μέθοδο ώστε να μπορούμε να διαλέξουμε ανάμεσα σε «καλά» και «κακά» σημεία. Πάνω σε αυτό το πρόβλημα έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια μια αχανής βιβλιογραφία με αρκετές ενδιαφέρουσες θεωρίες. Εδώ, ασχολούμαστε με τις κεντρικές θεωρίες του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας και της προς τα πίσω επαγωγής.

Κοινός παρανομαστής όλων των θεωριών και αποτελεσμάτων που εξετάσαμε είναι οι θεμελιώδεις έννοιες της κοινής prior κατανομής και της κοινής γνώσης του ορθολογισμού των παικτών. Ο κλάδος που ασχολείται με αυτό το αντικείμενο και γνωρίζει σήμερα μια σοβαρή ανάπτυξη ονομάζεται Επιστημική Θεωρία Παιγνίων (*Epistemic Game Theory*). Συγκεκριμένα στα κεφάλαια της παρούσας εργασίας ασχολούμαστε με τα εξής:

Στο 1ο Κεφάλαιο εισάγουμε τις βασικές έννοιες που αφορούν το επιστημικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στη συνέχεια, βασιζόμενοι στον Aumann (1987). Αρχικά ορίζονται τα συστήματα πίστεων και η έννοια των καταστάσεων του κόσμου που αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία του μοντέλου. Με τη βοήθειά τους δίνεται ακολούθως ο ορισμός της κοινής prior κατανομής. Στη συνέχεια γίνεται σχολιασμός της κοινής prior και δικαιολογείται η χρήση της. Τέλος, ορίζεται με τη βοήθεια των τελεστών γνώσης η έννοια της κοινής γνώσης ενός ενδεχομένου.

Στο 2ο Κεφάλαιο συνεχίζεται η εισαγωγή των εννοιών που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια της εργασίας. Γίνεται εκτενής αναφορά στην έννοια του ορθολογισμού και παρουσιάζονται διαφορετικοί ορισμοί και προσεγγίσεις. Ακολουθεί ο ορισμός της κοινής γνώσης του ορθολογισμού και δίνεται ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός της με τη βοήθεια των προσεγγίσιμων καταστάσεων.Ακολούθως ορίζονται τα ορθολογικά συστήματα πίστεων και οι έννοιες αποσαφηνίζονται με τη βοήθεια παραδειγμάτων. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μία σύντομη αναφορά στις περιπτώσεις που υπάρχει κάποια μορφή έλλειψης ορθολογισμού.

Στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικότερα αποτελέσματα με τα οποία ασχοληθήκαμε στη παρούσα εργασία. Πρόκειται για τις εργασίες Agreeing to Disagree, Aumann (1976), όπου δίνουμε την απόδειξη βασιζόμενοι στα συστήματα πίστεων, Epistemic Conditions for Nash Equilibrium, Aumann & Brandenburger (1995), για την παρουσίαση του οποίου ακολουθούμε την πιο επεξηγηματική προσέγγιση των Hillas & Kohlberg (2002) και τέλος Rational Expectations in Games, Aumann & Dreze (2008) με την οποία ασχοληθήκαμε αναλυτικά. Με το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται το πρώτο μέρος της εργασίας που αφορά τα παιχνίδια σε κανονική μορφή.

Στη συνέχεια στρέφουμε το ενδιαφέρον μας σε παιχνίδια σε εκτεταμένη μορφή. Αρχικά, στο 4ο Κεφάλαιο ασχολούμαστε με τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης. Ο Aumann (1995) αποδεικνύει ότι μια ικανή συνθήκη για να προκύψει το επαγωγικό αποτέλεσμα είναι να υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού. Σε αντίθετη περίπτωση οποιαδήποτε έκβαση είναι δυνατή και η χρήση της μεθόδου τίθεται υπό αμφισβητηση, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την εκτεταμένη χρήση της στην επίλυση προβλημάτων στη Θεωρία Παιγνίων αλλά και στην Επιχειρησιακή Έρευνα γενικότερα.

Τέλος, στο 5ο Κεφάλαιο αναφερόμαστε σε έννοιες ισορροπίας για παιχνίδια σε εκτεταμένη μορφή, οι οποίες γενικεύονται και σε παιχνίδια ελλειπούς πληροφόρησης. Ακολουθώντας την προσέγγιση του Redondo (2003) αναφερόμαστε αρχικά στα σημεία ισορροπίας τέλεια ως προς τα υποπαιχνίδια. Στη συνέχεια εξηγούμε την έννοια του ασθενώς τέλειου μπεϋζιανού σημείου ισορροπίας και καταλήγουμε στην έννοια του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας των Kreps & Wilson (1982) που αποτελεί το κεντρικό σημείο του κεφαλαίου αυτού. Η παραπάνω έννοιες ισορροπίας αποσαφηνίζονται με τη βοήθεια παραδειγμάτων από τη σχετική βιβλιογραφία.

Συνοψίζοντας, οι κύριοι άξονες της παρούσας εργασίας ήταν η βιβλιογραφική επισκόπηση και η κατανόηση των σημαντικότερων εννοιών και αποτελεσμάτων που έχουν παρουσιαστεί στο πεδίο της Επιστημικής Θεωρίας Παιγνίων, φιλοδοξώντας στη δημιουργία των απαιτούμενων βάσεων για τη μελλοντική διεξαγωγή έρευνας στο εν λόγω αντικείμενο.

Κεφάλαιο 1

Συστήματα γνώσης και πίστεων

1.1 Διαδραστικά συστήματα πίστεων

1.1.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Θεωρούμε ένα παιχνίδι G σε κανονική μορφή, το οποίο αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

(i) τους παίκτες, δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, και για κάθε παίκτη $i \in N$,

(α′) ένα πεπερασμένο σύνολο S^i, το οποίο ονομάζεται σύνολο *καθαρών στρατηγικών* του παίκτη i και

(β′) μια συνάρτηση: $h^i : S \to \mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται *συνάρτηση πληρωμής* του παίκτη i. Με S συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο:

$$S = S^1 \times S^2 \times \cdots \times S^n$$

που ονομάζεται σύνολο στρατηγικών καταστάσεων.

Σύμφωνα με τους Aumann & Dreze (2008):

Ορισμός 1.1. *Ένα διαδραστικό σύστημα πίστεων* Π *- ή απλά σύστημα πίστεων - για το παιχνίδι* G *ορίζεται να αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *για κάθε παίκτη* $i \in N$ *ορίζουμε ένα πεπερασμένο σύνολο* T^i*, το οποίο περιλαμβάνει τους τύπους του παίκτη* i*, δηλαδή:*

$$T^i = \{t^i : t^i \text{ τύπος του παίκτη } i\}, \quad \text{με } |T^i| < +\infty$$

2. *για κάθε τύπο* t^i *του παίκτη* i*:*

(α′) *μια στρατηγική* $s^i(t^i) \in S^i$ *και*

(β′) *μια κατανομή πιθανότητας* $p^i(\cdot\,; t^i)$ *πάνω στο σύνολο*

$$T^{-i} = T^1 \times T^2 \times \cdots \times T^{i-1} \times T^{i+1} \times \cdots \times T^n,$$

των $(n-1)$*-άδων των τύπων των υπολοίπων παικτών. Η κατανομή αυτή ονομάζεται θεωρία ή πίστη του τύπου* t^i.

Παρατήρηση 1.2. Επομένως, κάθε τύπος ενός παίκτη παίζει μια συγκεκριμένη καθαρή στρατηγική και έχει μια *θεωρία* σχετικά με το ποιοί είναι οι τύποι των άλλων παικτών, τους οποίους θα αντιμετωπίσει. Οι τύποι κάθε παίκτη συμβολίζουν όλες τις διαφορετικές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο παίκτης κατά την έναρξη του παιχνιδιού, ανάλογα με την ιδιωτική πληροφόρηση που θα λάβει μέχρι εκείνη την στιγμή. Φυσικά, είναι λογικό να υποθέσουμε - και η υπόθεση αυτή υιοθετείται πράγματι στην συνέχεια - ότι κάθε παίκτης γνωρίζει τον τύπο του όταν θα κληθεί να παίξει το παιχνίδι. Δηλαδή, γνωρίζει ακριβώς τι πληροφορίες έλαβε και ποια στρατηγική θα ακολουθήσει.

Θέτουμε: $T = T^1 \times T^2 \times \cdots \times T^n$. Κάθε n-άδα τύπων (μία για κάθε παίκτη), δηλαδή κάθε στοιχείο:

$$t := (t^1, t^2, \cdots, t^n) \in T, \quad \text{με } t^i \in T^i,\ i \in N,$$

ονομάζεται *κατάσταση του κόσμου.*

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τα προηγούμενα, σε κάθε κατάσταση του κόσμου είναι πλήρως προσδιορισμένο το τι ακριβώς θα συμβεί, Aumann (1987). Δηλαδή, ποια στρατηγική θα παίξει ο κάθε παίκτης και ποια ακριβώς είναι η πίστη του για τους τύπους των υπολοίπων παικτών. Πιο λεπτομερώς εξηγούμε τον ορισμό στην επόμενη παράγραφο.

Ως *ενδεχόμενο* E ορίζουμε κάθε υποσύνολο με στοιχεία του T.[1] Για κάθε ενδεχόμενο E ορίζουμε ως $p(E; t^i)$ την πιθανότητα που δίνει ο τύπος t^i του παίκτη i στο ενδεχόμενο E, δηλαδή:

$$p(E; t^i) := \text{η πιθανότητα που δίνει η θεωρία του } t^i \text{ στο σύνολο } \{t^{-i} \in T^{-i} \colon (t^i, t^{-i}) \in E\}.$$

Σε μια κατάσταση του κόσμου t, θα λέμε ότι ο τύπος t^i γνωρίζει το ενδεχόμενο E ή ισοδύναμα ότι ο παίκτης i γνωρίζει το ενδεχόμενο E όταν:

$$p(E; t^i) = 1.$$

[1] Το T παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει το Ω στις πιθανότητες. Εδώ: $\Omega \equiv T^1 \times T^2 \times \cdots T^n = T$.

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, *γνωρίζει* σημαίνει ότι αποδίδει πιθανότητα 1. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν ορισμένες παραλλαγές αυτού του ορισμού, οι οποίες αν και οδηγούν σε ενδιαφέρουσες θεωρίες, δεν θα εξεταστούν στην παρούσα ανάλυση[2].

1.1.2 Οι καταστάσεις του κόσμου & η ερμηνεία τους

Επανερχόμαστε στις καταστάσεις του κόσμου, δηλαδή στα στοιχεία $t = (t^1, t^2, \cdots, t^n)$ του συνόλου T. Όπως αναφέραμε συνοπτικά και προηγουμένως, σε κάθε κατάσταση του κόσμου είναι γνωστά με ακρίβεια όλα τα παρακάτω:

- οι ενέργειες (στρατηγικές) των παικτών,
- οι συναρτήσεις πληρωμής τους

και βέβαια μέσα από το σύστημα πίστεων

- οι πίστεις τους για τις ενέργειες και τις συναρτήσεις πληρωμής των άλλων,
- οι πίστεις τους για τις πίστεις των άλλων σχετικά με τα παραπάνω κ.ο.κ.

Πιο συγκεκριμένα, η πίστη - ή θεωρία - ενός τύπου t^i αντιπροσωπεύει τις πιθανότητες που αποδίδει ο τύπος αυτός στους τύπους των υπολοίπων παικτών (και άρα στις στρατηγικές τους και κατ' επέκταση στις πίστεις τους). Είναι άμεσο, ότι ο τύπος ενός παίκτη καθορίζει πλήρως τις πίστεις του παίκτη αυτού:

- για τους τύπους των άλλων παικτών,
- για τις πίστεις των άλλων παικτών σχετικά με τους υπόλοιπους παίκτες,
- για τις πίστεις των άλλων παικτών σχετικά με τις πίστεις των υπολοίπων παικτών,
  ....
- κ.ο.κ. ad infinitum.

Με άλλα λόγια, όλη η παραπάνω άπειρη ιεραρχία των πίστεων σχετικά με τις πίστεις, σχετικά με τις πίστεις, ..., σχετικά με τους τύπους των παικτών περιγράφεται πλήρως από το σύστημα πίστεων που ορίσαμε.

Έχουμε, λοιπόν, αποσαφηνίσει ότι σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο, όταν είναι δεδομένο ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση t του κόσμου όλοι γνωρίζουν τα πάντα και είναι πλήρως καθορισμένη η έκβαση του παιχνιδιού και οι πληρωμές των παικτών. Έτσι, δημιουργείται η εύλογη απορία, αν το μοντέλο είναι κατάλληλο για την περιγραφή των διαδραστικών καταστάσεων μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ατόμων με ελλιπή ή ιδιωτική πληροφόρηση, με τις οποίες ασχολείται η Θεωρία Παιγνίων.

[2]Βλέπε Ben Porath (1997).

Η απάντηση είναι ότι αυτό που συμβαίνει στην πράξη είναι ότι γενικά κανείς δεν γνωρίζει ποια είναι η πραγματική κατάσταση t του κόσμου. Με τον τρόπο αυτό μοντελοποιείται η άγνοια ή η ελλιπής πληροφόρηση κάθε παίκτη σχετικά με τις στρατηγικές και τις πίστεις των υπολοίπων, που υπάρχει σε ένα παιχνίδι n παικτών. Η οπτική γωνία που περιγράφει το μοντέλο αυτό είναι αυτή ενός εξωτερικού παρατηρητή. Αυτός δεν διαθέτει κάποια εκ των προτέρων γνώση ή πληροφόρηση για τις προτιμήσεις των παικτών και θεωρεί τις ενέργειές τους ως μέρος της κατάστασης του κόσμου που θα προκύψει. Η θεώρηση αυτή είναι αναλυτική και όχι κανονιστική. Δηλαδή, περιγράφει αυτό που συμβαίνει με κάθε λεπτομέρεια αλλά δεν έχει σκοπό να προτείνει ή να υποδειξει στους παίκτες πως πρέπει να ενεργήσουν. (Aumann & Brandenburger, 1995)

1.2 Η υπόθεση της κοινής prior κατανομής

1.2.1 Ορισμός & ερμηνεία

Μια από τις δύο βασικές υποθέσεις στις οποίες βασίζονται τα αποτελέσματα που αποδεικνύονται στη συνέχεια αυτής της εργασίας, είναι αυτή της κοινής prior κατανομής[3].

Θεωρούμε ένα παιχνίδι G, με ένα σύνολο N-παικτών σε κανονική μορφή, για το οποίο δίνεται επίσης ένα σύστημα πίστεων Π, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1. Η υπόθεση της κοινής prior διατυπώνεται ως εξής, Aumann & Dreze (2008):

Ορισμός 1.3. *Η κοινή prior είναι μια κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ πάνω στο σύνολο των δυνατών καταστάσεων του κόσμου $T = T^1 \times T^2 \times \ldots \times T^n$, η οποία αποδίδει θετική πιθανότητα σε κάθε τύπο κάθε παίκτη, έτσι ώστε η θεωρία κάθε τύπου κάθε παίκτη $p^i(\cdot\,; t^i)$ να είναι η δεσμευμένη κατανομή της $\mathbb{P}$ με δεδομένο ότι αυτός ο παίκτης είναι αυτού του τύπου*[4]*. Συμβολικά:*

$$p^i(t^{-i}; t^i) = \frac{\mathbb{P}(t^{-i}, t^i)}{\mathbb{P}(t^i)} = \mathbb{P}(t^{-i}|t^i).$$

Αυτό που μας λέει η υπόθεση της κοινής prior είναι ότι υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ πάνω στο σύνολο T όλων των δυνατών καταστάσεων του κόσμου (*όλων των δυνατών συνδυασμών των τύπων των παικτών*) που δίνει, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θετική πιθανότητα σε κάθε τύπο κάθε παίκτη[5]. Ακολούθως, η *θεωρία ή πίστη* κάθε τύπου t^i του κάθε παίκτη i προκύπτει ως η δεσμευμένη κατανομή της $\mathbb{P}$, δεδομένου του τύπου του παίκτη. Δηλαδή:

$$p^i\left(E; t^i\right) = \mathbb{P}\left(E|t^i\right),$$

Με άλλα λόγια, η πιθανότητα που αποδίδει κάθε τύπος ενός παίκτη σε κάθε συνδυασμό τύπων - ή σε κάθε κατάσταση του κόσμου - είναι ακριβώς η πιθανότητα που δίνεται στην κατάσταση αυτή από την κοινή prior, δεδομένης της ιδιωτικής πληροφόρησής του, δηλαδή δεδομένου του τύπου του. Η ύπαρξη της κοινής prior μπορεί να γίνει αντιληπτή ως εξής:
Η φύση «κληρώνει» μια κατάσταση t σύμφωνα με την γνωστή σε όλους κατανομή $\mathbb{P}$. Στη συνέχεια, ανακοινώνει σε κάθε παίκτη τον τύπο του t^i, αλλά όχι τους τύπους των υπολοίπων (διάνυσμα: t^{-i}). Η θεωρία του τύπου t^i για το ποιοί τύποι «κληρώθηκαν» για τους υπόλοιπους είναι ακριβώς η δεσμευμένη κατανομή $\mathbb{P}(\cdot\ |t^i)$.

[3] Η άλλη είναι η κοινή γνώση του ορθολογισμού. Βλέπε Κεφάλαιο 2.

[4] Θυμόμαστε ότι το T παίζει τον ρόλο του χώρου πιθανότητας Ω και τα στοιχεία του t αντιστοιχούν στα στοιχεία ω όπως τα γνωρίζουμε από την θεωρία πιθανοτήτων.

[5] Η κοινή prior μπορεί να δίνει πιθανότητα 0 σε κάποιο τύπο t^i. Τότε απλώς απαλείφουμε τον τύπο αυτό από το μοντέλο μας.

1.2.2 Σχετικά με την υπόθεση της κοινής prior

Η υπόθεση της κοινής prior είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και ως «the Harsanyi doctrine», καθώς πρώτος την θεμελιώσε ο ομώνυμος νομπελίστας παιγνιοθεωρητικός. Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο η υπόθεση αυτή είναι ρεαλιστική - δηλαδή, κατά πόσο μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει σε μια πραγματική κατάσταση - ώστε να έχει νόημα η υιοθέτησή της στο επιστημικό μοντέλο που περιγράφουμε. Ο Aumann (1987) αφιερώνει αρκετό χρόνο ώστε να την εξηγήσει και να δικαιολογήσει τη χρήση της. Τα κεντρικότερα σημεία αυτής της εργασίας παραθέτουμε για τον ίδιο λόγο στην συνέχεια.

Η υπόθεση της κοινής prior υποδηλώνει ότι οποιεσδήποτε διαφορές στις εκτιμήσεις διαφορετικών ατόμων σχετικά με την πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός θα πρέπει να εξηγούνται αποκλειστικά και μόνο από διαφορές στην πληροφόρηση που δέχτηκαν αυτά τα άτομα. Εκφράζει, δηλαδή, την άποψη ότι ενώ άνθρωποι με διαφορετική ιδιωτική πληροφόρηση μπορούν κάλλιστα να διατηρούν διαφορετικές πίστεις (ή πιθανότητες), δεν υπάρχει κάποια λογική βάση για να κάνουν το ίδιο άνθρωποι που έχουν δεχθεί ακριβώς τις ίδιες πληροφορίες.

Στη βιβλιογραφία που αφορά την ανάλυση καταστάσεων ιδιωτικής ή ελλιπούς πληροφόρησης, τόσο στα οικονομικά, όσο και στη Θεωρία Παιγνίων, η χρήση της υπόθεσης της κοινής prior είναι καθολική είτε με άμεσο είτε με έμμεσο τρόπο. Είναι χαρακτηριστικό, ότι κάθε φορά που γράφεται μια πρόταση της μορφής «έστω p η πιθανότητα να ...», γίνεται αυτόματα η υπόθεση ότι υπάρχει μια κοινή prior, αφού θεωρείται ότι κάποιο γεγονός έχει μια αντικειμενική πιθανότητα την οποία όλοι γνωρίζουν και αποδέχονται. Σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να γραφόταν «έστω p^i η πιθανότητα που δίνει ο παίκτης i να ... και έστω p^j η πιθανότητα που δίνει ο παίκτης j να ...». Για παράδειγμα, σε παιχνίδια όπου υπάρχει κίνηση της φύσης, θεωρούμε ότι κάθε δυνατή ενέργεια της φύσης έχει μία και μοναδική πιθανότητα p γνωστή σε όλους τους παίκτες, σε αντίθεση με το να λέγαμε ότι ο κάθε παίκτης έχει μια αυθαίρετη υποκειμενική πιθανότητα.

Η χρήση της κοινής prior ενισχύεται από την τάση που υπάρχει στη σύγχρονη οικονομική θεωρία να τονισθεί η σημασία της πληροφόρησης - και ιδιαίτερα της ιδιωτικής πληροφόρησης - στη λήψη αποφάσεων. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, κάτω από την υπόθεση της κοινής prior, διαφορές στις πιθανοτικές εκτιμήσεις των παικτών εκφράζουν διαφορές στην πληροφόρηση τους και μόνο. Οι προσπάθειες που έχουν γίνει - όπως επισημαίνει ο Aumann (1987) - να πραγματοποιηθούν αναλύσεις πάνω σε μοντέλα χωρίς κοινή prior δεν είχαν ιδιαίτερη απήχηση. Ένας από τους λόγους, συνεχίζει, φαίνεται να είναι η αδυναμία των μοντέλων - λόγω της πολυπλοκότητάς τους - να εξάγουν πρακτικά συμπεράσματα και να περιγράψουν τα οικονομικά ζητήματα για τα οποία αναπτύχθηκαν.

Σε αντίθεση με την υποκειμενικότητα στις προτιμήσεις των παικτών, η ύπαρξη εν γένει προσωπικών πιθανοτικών εκτιμήσεων είναι κάτι που η οικονομική θεωρία αρνείται να δεχθεί ως ιδέα και να το χρησιμοποιήσει. Στην περίπτωση που δεχόμασταν διαφορές στις πίστεις ατόμων με ακριβώς την ίδια πληροφόρηση, θα ήταν σαν να επιτρέπαμε την ύπαρξη προκαταλήψεων στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Κάτι τέτοιο δεν είναι καθόλου θεμιτό, αφού στην πραγματικότητα κάποιος μπορεί ακόμα και να επικριθεί αν επιτρέπει προσωπικές προτιμήσεις και απόψεις να επηρεάζουν την κρίση του. Συνεπώς, προβάλλει λογικό να αναφερόμαστε σε αντικειμενικές εκτιμήσεις πιθανοτήτων που είναι κοινώς αποδεκτές και γνωστές από όλους του παίκτες. Αυτές ακριβώς οι πιθανότητες αποτελούν την κοινή prior κατανομή.

Χρονικά, η συμφωνία πάνω στην κατανομή αυτή από όλους τους παίκτες, τοποθετείται πριν το αρχικό στάδιο του παιχνιδιού. Ύστερα από την στιγμή της συμφωνίας πάνω στις πιθανότητες όλων των δυνατών καταστάσεων του κόσμου που μπορεί να προκύψουν, αρχίζει η ιδιωτική πληρόφορηση που οδηγεί κάθε παίκτη σε συγκεκριμένο τύπο. Από κει και πέρα, σύμφωνα με το μοντέλο που περιγράφουμε, όλα είναι προκαθορισμένα, αν θυμηθούμε ότι για κάθε τύπο είναι πληρώς προσδιορισμένα τόσο η στρατηγική όσο και η πίστη του. Αυτά, φυσικά, δεν ισχύουν για τις προτιμήσεις των παικτών και τις συναρτήσεις πληρωμής που τις εκφράζουν, που μπορούν να περιέχουν οποιοδήποτε βαθμό υποκειμενικότητας, Aumann (1987).

1.3 Τελεστές γνώσης & η έννοια της κοινής γνώσης

1.3.1 Ορισμοί

Για κάθε παίκτη $i \in N$ ορίζουμε έναν τελεστή K_i από το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(T)$ του συνόλου T στον εαυτό του, ως εξής:

$$\begin{aligned} &K_i \colon \mathcal{P}(T) \longrightarrow \mathcal{P}(T) \\ &\mathcal{P}(T) \ni E \longmapsto \{t \in T \colon p(E;t^i) = 1\} \in T. \end{aligned}$$

Δηλαδή K_iE είναι το σύνολο όλων των καταστάσεων, στις οποίες ο i γνωρίζει το E. Οι τελεστές K_i ονομάζονται *τελεστές γνώσης* και είναι πολύ χρήσιμοι για την μαθηματική μοντελοποίηση των επιστημικών εννοιών που αναπτύσσονται στη συνέχεια.

Έστω, τώρα, το υποσύνολο του T:

$$\begin{aligned} K^1E :&= K_1E \cap K_2E \cap \cdots \cap K_nE \\ &= \text{το ενδεχόμενο όλοι οι παίκτες να γνωρίζουν το } E. \end{aligned}$$

Τότε, για $t \in K^1E$ λέμε ότι το E είναι αμοιβαία γνωστό στην κατάσταση t σε πρώτη τάξη ή ισοδύναμα ότι αποτελεί *αμοιβαία γνώση 1ης τάξης* (*1st order mutual knowledge*) ή απλά αμοιβαία γνώση. Όμοια, θέτουμε:

$$\begin{aligned} K^2E :&= K^1K^1E \\ &= \text{το ενδεχόμενο όλοι οι παίκτες να γνωρίζουν ότι όλοι οι} \\ &\quad\ \text{παίκτες γνωρίζουν το } E. \end{aligned}$$

Τότε, για $t \in K^2E$ λέμε ότι στην κατάσταση t το E αποτελεί *αμοιβαία γνώση 2ης τάξης* (*2nd order mutual knowledge*).

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο K^mE για κάθε $m \in \mathbb{N}$ κι να λέμε ότι ένα ενδεχόμενο E αποτελεί *αμοιβαία γνώση τάξης* m μεταξύ των παικτών στην κατάσταση t, αν $t \in K^mE$.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι ένα ενδεχόμενο (ή γεγονός) αποτελεί:

- αμοιβαία γνώση (1ης τάξης), όταν όλοι οι παίκτες το γνωρίζουν,
- αμοιβαία γνώση 2ης τάξης, όταν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν, ότι όλοι οι παίκτες το γνωρίζουν,

- αμοιβαία γνώση 3ης τάξης, όταν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν, ότι όλοι οι παίκτες γνωρίζουν, ότι όλοι οι παίκτες το γνωρίζουν,

  ....

- κ.ο.κ. για οποιαδήποτε πεπερασμένη τάξη $m \in \mathbb{N}$.

Τέλος, έστω το σύνολο:

$$CKE := K^1E \cap K^2E \cap K^3E \cap \ldots.$$

Ορισμός 1.4. *Θα λέμε ότι το ενδεχόμενο E αποτελεί κοινή γνώση μεταξύ των παικτών στην κατάσταση t, αν $t \in CKE$.*

Ένα θεμελιώδες στοιχείο που προκύπτει από τη δομή του μοντέλου που περιγράφουμε, είναι ότι η prior κατανομή και τα σύνολα των τύπων των παικτών αποτελούν κοινή γνώση μεταξύ των παικτών, αφού στην περίπτωση αυτή το σύνολο E συμπίπτει με το T. Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή να καταλάβουμε ότι αυτό δεν είναι υπόθεση, αλλά αποτελεί ιδιότητα του μοντέλου - ταυτολογία ή θεώρημα, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Aumann (1987).

1.3.2 Ιδιότητες

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένα λήμματα - ιδιότητες - των τελεστών γνώσης τα οποία επιβεβαιώνουν τη συνοχή και τη συμβατότητα των ορισμών της προηγούμενης παραγράφου με τη διαίσθησή μας.

Λήμμα 1.5. *Ο παίκτης i γνωρίζει ότι αποδίδει πιθανότητα π σε ένα ενδεχόμενο E αν και μόνο αν πράγματι αποδίδει πιθανότητα π στο E.*

Λήμμα 1.6. $CKE = K_iCKE$.
Αν ένα ενδεχόμενο αποτελεί κοινή γνώση, τότε κάθε παίκτης γνωρίζει ότι αυτό αποτελεί κοινή γνώση.

Λήμμα 1.7. $K_i(E_1 \cap E_2 \cap \ldots) = K_iE_1 \cap K_iE_2 \cap \ldots$
Ένας παίκτης γνωρίζει ότι συμβαίνουν όλα τα ενδεχόμενα από μία συλλογή ενδεχομένων αν και μόνο αν γνωρίζει ότι συμβαίνει κάθε ένα από αυτά.

Λήμμα 1.8. *Αν $E \subset F$ τότε $K_iE \subset K_iF$.*
Αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου E συνεπάγεται την πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου F, τότε εάν ο παίκτης i γνωρίζει το E, θα γνωρίζει και το F.

Λήμμα 1.9. $CKE \subset E$.
Εάν αποτελεί κοινή γνώση μεταξύ των παικτών ότι ένα ενδεχόμενο έχει πραγματοποιηθεί, τότε αυτό έχει πραγματοποιηθεί.

Λήμμα 1.10. $K_i(K_iE)^c = (K_iE)^c$.
Ο παίκτης i γνωρίζει ότι δεν γνωρίζει το ενδεχόμενο E αν και μόνο αν δεν γνωρίζει το ενδεχόμενο E.

Λήμμα 1.11. $K_iE \subset E$.
Ο παίκτης i μπορεί να γνωρίζει ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιήθηκε μόνο αν αυτό έχει όντως πραγματοποιηθεί.

Οι αποδείξεις υπάρχουν στους Aumann (1995) και Aumann & Brandenburger (1995) και προκύπτουν άμεσα από τη χρήση των ορισμών.

Κεφάλαιο 2

Ο ορθολογισμός στη Θεωρία Παιγνίων

2.1 Η έννοια του ορθολογισμού

2.1.1 Εισαγωγή

Στην ανάλυση των παιχνιδιών χωρίς συνεργασία, πλήρους ή ελλιπούς πληροφόρησης, είναι λογικό να μας απασχολούν οι εικασίες κάθε παίκτη σχετικά με τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών. Ένα κεντρικό ερώτημα στη Θεωρία Παιγνίων είναι πώς μπορεί να ενσωματωθεί μια τέτοια διαδικασία εικασιών στην τυπική *επίλυση* ενός παιχνιδιού. Για παράδειγμα, υπάρχουν θεωρίες προσαρμοστικότητας των στρατηγικών των παικτών στις πίστεις τους για τις στρατηγικές των υπολοίπων παικτών, Fudenberg & Levine (1999). Αν και η παρούσα εργασία δεν ασχολείται με παρόμοια μοντέλα *μάθησης* και *προσαρμογής* αλλά με τις επιστημικές συνθήκες που θα μας δώσουν ως έκβαση του παιχνιδιού μια καθιερωμένη έννοια λύσης (όπως π.χ. το σημείο Nash), κοινό σημείο και στις δύο προσεγγίσεις είναι η διερεύνηση του ορθολογισμού των παικτών.

Αρχικά, ίσως φαίνεται τετριμμένο να συζητάμε για ορθολογισμό, καθώς θα ήταν περίεργο να ασχολούμαστε με τις επιλογές και τη συμπεριφορά παικτών που δεν είναι ορθολογικοί. Πολλά προβλήματα ή παράδοξα της Θεωρίας Παιγνίων, ωστόσο, ξεκινάνε από περιπτώσεις όπου φαίνεται να μην επιλέγεται από τους παίκτες η ορθολογική συμπεριφορά (σε πραγματικά πειράματα) ή περιπτώσεις όπου ο ορθολογισμός οδηγεί σε μή επιθυμητά ή ρεαλιστικά θεωρητικά αποτελέσματα. Τι ορίζουμε, όμως, ως ορθολογισμό· δηλαδή πότε λέμε ότι ένας παίκτης είναι ορθολογικός ή ότι συμπεριφέρεται ορθολογικά και πότε όχι; Ο βασικότερος ορισμός που συναντάει κανείς σε μεγάλο μέρος της γενικότερης μαθηματικής βιβλιογραφίας και μοιάζει να είναι άμεση έκφραση της κοινής λογικής είναι ο εξής:

Ορθολογικός είναι ένας παίκτης όταν με τις κινήσεις του, μεγιστοποιεί την ωφέλειά του.

Ακριβώς, εδώ σε αυτόν τον τόσο απλό ορισμό αρχίζουν τα προβλήματα:

(i) πως μπορεί ένας παίκτης να γνωρίζει ακριβώς ποια από τις στρατηγικές του πρέπει να χρησιμοποιήσει ώστε να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του αν υποθέσουμε ότι δεν γνωρίζει τις στρατηγικές των άλλων; Αν και η υπόθεση ότι οι στρατηγικές των υπολοίπων παικτών είναι δεδομένες χρησιμοποιείται συχνά στη Θεωρία Παιγνίων, σε πολλές περιπτώσεις δεν ευσταθεί ή δεν μπορεί να γίνει.

(ii) υπάρχουν καταστάσεις όπου ο εντοπισμός ακριβώς αυτής της στρατηγικής είναι χρονοβόρος ή έχει μεγάλο κόστος ή είναι ακόμα και υπολογιστικά αδύνατος[1]. Πως θα ορίζαμε μια ορθολογική συμπεριφορά σε μια τέτοια περίπτωση;

(iii) σε πολλά εμπειρικά πειράματα[2] η συμπεριφορά των παικτών αποκλίνει σημαντικά από τις συστάσεις της Θεωρίας Παιγνίας και του σημείου ισορροπίας. Πρέπει, λοιπόν, να θεωρήσουμε ότι οι παίκτες που καλούνται να παίξουν ένα τέτοιο παιχνίδι δεν μπορούν να λειτουργήσουν ορθολογικά και αποτυγχάνουν να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους καθώς η συμπεριφορά τους δεν συμφωνεί με τα θεωρητικά αποτελέσματα;

2.1.2 Διαφορετικοί ορισμοί & προσεγγίσεις

Όλα τα παραπάνω, καταδεικνύουν τις αδυναμίες αυτού του γενικού ορισμού και επισημαίνουν το πρόβλημα διατύπωσης μιας έννοιας ορθολογικής συμπεριφοράς που δεν θα επιτρέπει τέτοιες αντιφάσεις. Στη σχετική βιβλιογραφία συναντάει κανείς πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις και παραλλαγές. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις πιο διαδεδομένες από αυτές, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε και στην παρούσα εργασία.

Μια ευρέως αποδεκτή έννοια του ορθολογισμού είναι αυτή του Μπεϋζιανού ορθολογισμού, Aumann (1996):

Ορισμός 2.1. *Ένας παίκτης ονομάζεται ορθολογικός κατά Bayes σε μία κατάσταση t του κόσμου, αν η στρατηγική $s^i(t^i)$ που ακολουθεί ο συγκεκριμένος τύπος του t^i, μεγιστοποιεί την πληρωμή του δεδομένης της πληροφόρησης που διαθέτει. Συμβολικά:*

$$E\left[h^i(s^i(t^i), s^{-i}) \mid t^i\right] \geq E\left[h^i(w^i, s^{-i}) \mid t^i\right]$$

[1] Οι Daskalakis et al. (2009), αποδεικνύουν ότι η υπολογιστική πολυπλοκότητα της εύρεσης του σημείου Nash είναι εξαιρετικά μεγάλη στην γενική περίπτωση. Ένα επιχείρημα σύμφωνα με το οποίο ασκείται κριτική στο σημείο Nash βασίζεται ακριβώς πάνω σε αυτό το στοιχείο. Στο ότι, δηλαδή, αφού είναι υπολογιστικά αδύνατο το σημείο Nash να βρεθεί μέσα σε ντετερμινιστικά πολυωνυμικό χρόνο από έναν υπολογιστή, πως περιμένουμε να βρεθεί από ένα πολύπλοκο σύστημα, όπως η οικονομία ή κάποιο ζωικό είδος;

[2] Το δίλημμα του ταξιδιώτη, το παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας κ.α.

για κάθε $w^i \neq s^i(t^i)$, με $w^i \in S^i$. Αν ένας παίκτης είναι ορθολογικός σε κάθε κατάσταση του κόσμου που μπορεί να προκύψει με θετική πιθανότητα, δηλαδή αν κάθε τύπος ενός παίκτη είναι ορθολογικός, τότε ο παίκτης ονομάζεται ορθολογικός.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, ένας ορθολογικός παίκτης επιλέγει μια στρατηγική, η οποία μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλειά του όταν οι επιλογές των άλλων παικτών κατανέμονται πιθανοτικά σύμφωνα με τη θεωρία του. Αυτό δικαιολογεί την ονομασία Μπεϋζιανός ορθολογισμός. Δύο βασικές συνέπειες αυτής της θεώρησης είναι οι εξής:

- οι μεικτές στρατηγικές δεν ερμηνεύονται ως συνειδητή τυχαιοποίηση, αλλά ως εικασίες - δηλαδή πιθανότητες - σχετικά με το τι θα κάνει ο άλλος ή οι άλλοι παίκτες (οι οποίες προκύπτουν από τη θεωρία τους, βλ. Ορισμό 1.1). Έτσι, οι παίκτες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη πληρωμή τους παίζοντας ουσιαστικά ενάντια στην εικασία τους.
- κάθε παίκτης μπορεί να έχει πολλούς διαφορετικούς τύπους, κάθε ένας από τους οποίους μπορεί να διαθέτει και μια διαφορετική πίστη. Στη συνέχεια, κάθε τύπος καλείται να επιλέξει μια στρατηγική που να μεγιστοποιεί την πληρωμή του δεδομένης της πίστης του, προκειμένου ο παίκτης να θεωρηθεί ορθολογικός. Έτσι, μια στρατηγική μπορεί να είναι βέλτιστη για περισσότερους από έναν τύπους του παίκτη.

Σε παιχνίδια που δίνονται σε εκτεταμένη μορφή, ο Aumann (1995) χρησιμοποιεί μια πιο ασθενή έννοια του ορθολογισμού, και καταφέρνει παρόλα αυτά να αποδείξει εξίσου ισχυρά αποτελέσματα με τον μπεϋζιανό ορθολογισμό, όπως θα δούμε στην συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, έστω ένα παιχνίδι G, n-παικτών σε εκτεταμένη μορφή και έστω μία κατάσταση του κόσμου t. Έστω

$$s = \left(s^1(t), s^2(t), \ldots, s^n(t)\right)$$

η στρατηγική κατάσταση που ακολουθείται[3]. Έστω, τέλος, v μια κορυφή του δένδρου στην οποία η κίνηση ελέγχεται από τον παίκτη i. Για την ορισμό του ασθενούς ορθολογισμού χρειαζόμαστε την έννοια της δεσμευμένης πληρωμής του παίκτη i στην κορυφή v:

Ορισμός 2.2. *Ως δεσμευμένη πληρωμή του παίκτη i στην κορυφή v κάτω από την στρατηγική κατάσταση s, ορίζουμε την πληρωμή που θα πάρει στην τερματική κορυφή που θα οδηγηθούν οι παίκτες, αν ξεκινώντας από την κορυφή v, ακολουθήσουν τις στρατηγικές της s.*

Με βάση τα παραπάνω ο ασθενής ορθολογισμός ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.3. *Θα λέμε ότι παίκτης i είναι ορθολογικός στην κορυφή v αν δεν υπάρχει στρατηγική που να γνωρίζει ο i και που να του εξασφαλίζει καλύτερη δεσμευμένη πληρωμή*

[3] Θυμηθείται ότι η στρατηγική κάθε παίκτη είναι προδιαγεγραμμένη από τον τύπο του.

στην υ από αυτήν που του εξασφαλίζει η στρατηγική $s^i(t)$ που ήδη ακολουθεί. Αν ο i είναι ορθολογικός σε κάθε κορυφή που ελέγχει τότε ονομάζεται ορθολογικός.

Ορισμένες παρατηρήσεις για τον παραπάνω ορισμό είναι οι εξής:

1. Για να χαρακτηριστεί ένας παίκτης ορθολογικός σύμφωνα με την ασθενή έννοια δεν χρειάζεται να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του. Η απαίτηση που πρέπει να ικανοποιεί είναι από τις στρατηγικές που γνωρίζει, τη στιγμή που λαμβάνει την απόφασή του, να επιλέξει αυτήν που του αποδίδει την καλύτερη πληρωμή. Η έννοια αυτή ορίζεται από τον Aumann (1995) και χρησιμοποιείται στην συνέχεια εκτενώς στη βιβλιογραφία, βλέπε Chen et al. (2012).
2. Η ασθενής έννοια του ορθολογισμού έπεται από την έννοια του μπεϋζιανού ορθολογισμού. Αν ένας παίκτης μεγιστοποιεί την αναμενόμενη πληρωμή του, τότε σίγουρα δεν μπορεί να έχει μια επιλογή που να γνωρίζει ότι θα εξασφαλίσει ένα καλύτερο αποτέλεσμα. Έτσι, οποιοδήποτε αποτέλεσμα αποδεικνύεται κάτω από την ασθενή έννοια, συνεχίζει να ισχύει αν η ασθενής έννοια αντικατασταθεί από την μπεϋζιανή έννοια.
3. Στον ορισμό δεν έγινε καμία διάκριση ανάμεσα σε κορυφές που ο παίκτης θεωρεί πιθανό να φτάσει το παιχνίδι και σε κορυφές που δεν θεωρεί πιθανό. Λαμβάνοντας υπόψη την διαφορά αυτή, προκύπτουν οι εξής έννοιες:
   (i) *Ουσιαστικός (substantive) ορθολογισμός*: Οι παίκτες συμπεριφέρονται ορθολογικά ακόμα και σε κορυφές που γνωρίζουν ότι δεν πρόκειται να φτάσει το παιχνίδι κάτω από την δεδομένη στρατηγική κατάσταση.
   (ii) *Υλικός (material) ορθολογισμός*: Οι παίκτες συμπεριφέρονται ορθολογικά μόνο σε κορυφές που γνωρίζουν ότι θα φτάσει το παιχνίδι κάτω από την δεδομένη στρατηγική κατάσταση.

   Οι δύο έννοιες οδηγούν σε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα. Ένας παίκτης όταν επιλέγει μια στρατηγική ασφαλώς λαμβάνει υπόψη του τι θα γινόταν αν δεν την επέλεγε, δηλαδή εξετάζει τι θα συνέβαινε έξω από το μονοπάτι που προδιαγράφει η στρατηγική που επιλέγει. Έτσι, παίζει καθοριστικό ρόλο αν οι παίκτες συμπεριφέρονται ορθολογικά και στα υπόλοιπα μονοπάτια. Η έννοια του υλικού ορθολογισμού είναι πολύ ασθενής και αποτυγχάνει να οδηγήσει στην απόδειξη των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στην συνέχεια. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται η έννοια του ουσιαστικού ορθολογισμού[4].
4. Ο ορισμός απαιτεί από τον παίκτη να είναι ορθολογικός, την στιγμή που καλείται να κάνει την κίνησή του. Ο ορισμός έχει δωθεί με βάση τι συμβαίνει από μια κορυφή και μετά και όχι με βάση τι συνέβει για να φτάσουμε σε κάποια κορυφή. Έτσι, κάθε απόφαση, πρέπει να είναι ορθολογική αυτοτελώς και να οδηγεί σε μεγιστοποίηση της δεσμευμένης πληρωμής από μια κορυφή και μετά, ανεξαρτήτως αν ήταν αναμενόμενο

[4] Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτό το βασικό ζήτημα, βλ. Aumann (1996).

να φτάσει το παιχνίδι σε αυτήν την κορυφή ή όχι[5]. Και αυτό το στοιχείο, συνηγορεί στην χρήση του ουσιαστικού ορθολογισμού, έναντι του υλικού.

Με τις παραπάνω προσεγγίσεις αντιμετωπίζεται σε μεγάλο βαθμό το πρόβλημα του ορισμού μιας έννοιας μεγιστοποίησης - και άρα ορθολογισμού - κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας ή κάτω από την όχι πάντα ισχύουσα υπόθεση ότι οι παίκτες γνωρίζουν την στρατηγική των υπολοίπων. Στις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται κυρίως η ασθενής έννοια του ορθολογισμού.

[5] Και αυτό το ζήτημα έχει σημαντικές προεκτάσεις. Για μια πιο λεπτομερή ανάλυση, βλ. Aumann (1996)

2.2 Η κοινή γνώση του ορθολογισμού

2.2.1 Ορισμός & ερμηνεία

Όταν κάποιος παίκτης κληθεί να αποφασίσει ποια θα είναι η στρατηγική που θα ακολουθήσει, τότε σίγουρα περιμένουμε ότι θα κάνει κάποιες σκέψεις σχετικά με το ποια θα είναι η στρατηγική των αντιπάλων του. Για παράδειγμα ας πάρουμε την περίπτωση ενός παιχνιδιού τέλειας πληροφόρησης δύο παικτών - Ι και ΙΙ - σε εκτεταμένη μορφή. Έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε ως αυτονόητη τη λύση που προκύπτει με επαγωγή από τις τερματικές κορυφές προς την αρχική (δυναμικός προγραμματισμός). Επομένως, έμμεσα θεωρούμε, ότι ο παίκτης που θα κινηθεί πρώτος, έχοντας συμπεράνει ποιες θα είναι οι μελλοντικές κινήσεις του άλλου παίκτη, θα επιλέξει να κινηθεί προς την κορυφή που θα μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλειά του από κει και πέρα.

Το ερώτημα είναι ποιες σιωπηρές υποθέσεις κάνουμε θωρώντας ότι αυτή θα είναι η εξέλιξη του παιχνιδιού. Προφανώς, ο κάθε παίκτης θα πρέπει να είναι ορθολογικός. Αρκεί, όμως, σε έναν παίκτη να γνωρίζει ότι οι άλλοι παίκτες είναι ορθολογικοί - ότι δηλαδή μεγιστοποιούν σε κάθε περίπτωση την ωφέλειά τους, σύμφωνα με τις πίστεις τους - ώστε να μπορεί να συμπεράνει ή έστω να μπορεί να προβλέψει με μεγάλη πιθανότητα ποια θα είναι η στρατηγική που θα επιλέξουν; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι - όπως θα δούμε - αρνητική.

Έστω τώρα, ότι ο παίκτης Ι είναι ορθολογικός και ότι γνωρίζει ότι ο παίκτης ΙΙ είναι και αυτός ορθολογικός. Αν τώρα ο Ι δεν γνωρίζει επιπλέον τι γνωρίζει ο αντίπαλός του για τον ίδιο, τότε παρά τις προηγούμενες υποθέσεις δεν μπορεί να είναι σίγουρος για το πως θα συμπεριφερθεί τελικά ο ΙΙ. Αυτό, επειδή είναι πιθανό - από την σκοπιά του Ι - το ενδεχόμενο ο ΙΙ να μην τον θεωρεί ορθολογικό και άρα να πράττει ανάλογα.

Συνεπώς, για να μπορεί να συνεχίσει ο Ι τον συλλογισμό του και να αποφασίσει την στρατηγική του, χρειάζεται να γνωρίζει τι πιστεύει ο ΙΙ για αυτόν. Το επιχείρημα αυτό μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές, με αποτέλεσμα να καταλήγουμε άμεσα στο ότι η μόνη περίπτωση να είναι ο Ι σίγουρος για το τι θα πράξει ο ΙΙ είναι όταν συμβαίνουν τα ακόλουθα:

(i) ο Ι γνωρίζει ότι ο ΙΙ είναι ορθολογικός,

(ii) ο Ι γνωρίζει ότι ο ΙΙ γνωρίζει ότι ο Ι είναι ορθολογικός,

(iii) ο Ι γνωρίζει ότι ο ΙΙ γνωρίζει ότι ο Ι γνωρίζει ότι ο ΙΙ είναι ορθολογικός,

....

(iv) κ.ο.κ μέχρι το άπειρο.

Προφανώς τα ίδια ισχύουν και από την πλευρά του παίκτη ΙΙ. Έτσι, προκύπτει ο επόμενος ορισμός της έννοιας της κοινής γνώσης του ορθολογισμού η οποία αποτελεί κεντρικό σημείο αναφοράς σε όλη την ανάλυση που ακολουθεί στην παρούσα εργασία, Aumann (1995):

Ορισμός 2.4. *Σε μία κατάσταση του κόσμου t θα λέμε ότι υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού (common knowledge of rationality ή CKR), αν στην κατάσταση αυτή:*

(i) *όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί,*

(ii) *όλοι οι παίκτες γνωρίζουν ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί,*

(iii) *όλοι οι παίκτες γνωρίζουν ότι όλοι οι παίκτες γνωρίζουν ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί,*

....

(iv) *κ.ο.κ μέχρι το άπειρο.*

Φυσικά εδώ είπαμε με λόγια όσα θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει συμβολικά, όπως στο Εδάφιο 1.4.1. Τότε το ρόλο του E θα έπαιζε το ενδεχόμενο R να είναι όλοι οι παίκτες ορθολογικοί, K_iR θα ήταν το ενδεχόμενο ο i παίκτης να γνωρίζει το R, K^1R θα ήταν η αμοιβαία γνώση 1ης τάξης του R, κ.ο.κ.

Αν και θα φανεί στη συνέχεια μέσα από παραδείγματα[6], ίσως είναι ήδη και διαισθητικά προφανές ότι η ύπαρξη άγνοιας - σε οποιοδήποτε βαθμό - προκαλεί αβεβαιότητα για τις ενέργειες των παικτών και άρα και για την έκβαση του παιχνιδιού. Η άγνοια αυτή μπορεί να εκφραστεί ως έλλειψη αμοιβαίας γνώσης του ορθολογισμού των παικτών οποιασδήποτε - αυθαίρετα μεγάλης - τάξης, δηλαδή γενικά ως έλλειψη κοινής γνώσης. Έτσι, γενικά για να μπορούμε με ακρίβεια να προβλέψουμε την έκβαση ενός οποιουδήποτε παιχνιδιού, δεν είναι αρκετό να περιοριστούμε στην ύπαρξη του ορθολογισμού ή ακόμα και στην αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού οποιασδήποτε τάξης. Όσο και αν φαίνεται απαιτητικό, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τη συνθήκη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού. Αν διακόψουμε την συλλογιστική που αναπτύσσεται στον ορισμό σε ένα οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ - όσο μεγάλο και αν είναι αυτό - τότε επιτρέπουμε άμεσα την εισαγωγή αβεβαιότητας - έστω και μικρής - στο σύστημα. Έτσι, γίνεται δυνατό ένα εύρος συμπεριφορών των παικτών που δεν αντιφάσκουν στις (πεπερασμένες) υποθέσεις αμοιβαίου ορθολογισμού αλλά μπορούν να απέχουν από τις αναμενόμενες συμπεριφορές κάτω από τις γνωστές έννοιες λύσης (π.χ. επαγωγική επίλυση, σημείο Nash κ.λ.π.). Οι παραπάνω σκέψεις θα επιβεβαιωθούν στη συνέχεια με την παρουσίαση διαιθητικά αναμενόμενων αποτελεσμάτων[7] που βασίζονται στη συνθήκη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού και ακόμα περισσότερο με την απόδειξη ότι η συνθήκη αυτή είναι αυστηρή - δηλαδή ότι αν χαλαρωθεί έστω και λίγο και αντικατασταθεί με αμοιβαία γνώση αυθαίρετα μεγάλης τάξης $n \in \mathbb{N}$, τα αποτελέσματα παύουν να ισχύουν.

[6] Βλέπε Παραδείγματα 2.1 και 2.2

[7] Για παράδειγμα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης. Βλέπε Κεφάλαιο 4.

2.2.2 Χαρακτηρισμός της κοινής γνώσης του ορθολογισμού

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, η συνθήκη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού προκύπτει άμεσα όταν θέλουμε να αποκλείσουμε την ύπαρξη αβεβαιότητας ως προς τον ορθολογισμό των παικτών σε ένα παίγνιο. Παρόλα αυτά, ως μια άπειρη διαδοχή συλλογισμών, φαίνεται να είναι πολύ δύσκολη η επιβεβαίωση της στην πράξη. Στην συνέχεια δίνεται ένας πολύ χρήσιμος χαρακτηρισμός που μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε αν ισχύει η συνθήκη αυτή σε ένα δεδομένο παιχνίδι ή όχι και στην επόμενη παράγραφο γίνεται μια μικρή συζήτηση σχετικά με το κατά πόσο η συνθήκη είναι ρεαλιστική και απαντάται στην πράξη ή όχι.

Πρώτα, ορίζουμε την έννοια των προσεγγίσιμων καταστάσεων. Έστω, λοιπόν, κατά τα γνωστά ένα παιχνίδι G, n-παικτών και ένα σύστημα πίστεων Π πάνω σε αυτό. Έστω, επίσης, μια κατάσταση του κόσμου t.

Ορισμός 2.5. *Για μία κατάσταση του κόσμου t, θα λέμε ότι η t' είναι προσεγγίσιμη από την t αν οι θεωρίες των τύπων των παικτών στην t, είναι συμβατές με το να δίνει η κοινή prior θετική πιθανότητα στο ενδεχόμενο η πραγματική κατάσταση του κόσμου να είναι η t'.*[8]

Μια κατάσταση t' είναι, δηλαδή, προσεγγίσιμη από την t, όταν υπάρχει ένας τύπος κάποιου παίκτη στην t που μπορεί να πιστεύει (δίνει θετική πιθανότητα) σε κάποιο από τα εξής:

(i) ότι η πραγματική κατάσταση είναι η t'

(ii) ότι υπάρχει κάποιος τύπος που μπορεί να πιστεύει ότι η πραγματική κατάσταση είναι η t'

(iii) ότι υπάρχει κάποιος τύπος που μπορεί να πιστεύει ότι υπάρχει κάποιος τύπος που μπορεί να πιστεύει ... ότι η πραγματική κατάσταση είναι η t', κ.ο.κ.

Συμβολίζουμε με $M(t)$ το σύνολο των προσεγγίσιμων καταστάσεων από την t, Geanakoplos (1994).

Για την ανάλυση αυτής της κατάστασης, είναι απαραίτητο κάθε παίκτης να έρθει στη θέση ένος εξωτερικού παρατηρητή. Κανείς παίκτης δεν μπορεί να αγνοήσει το ενδεχόμενο ότι οι υπόλοιποι πιστεύουν γι' αυτόν κάτι διαφορετικό από αυτό που ισχύει στην πραγματικότητα. Έτσι, παρόλο που γνωρίζει ακριβώς τι ισχύει για τον εαυτό του - αν είναι π.χ. ορθολογικός ή όχι ή ποια είναι η πίστη του - δεν είναι απαραίτητο ότι θα το γνωρίζουν και οι υπόλοιποι[9].

[8] Ένας ισοδύναμος ορισμός με την βοήθεια των διαμερίσεων που στην συνέχεια εγκαταλήφθηκαν και αντικαταστάθηκαν από τα συστήματα πίστεων δίνεται στον Aumann (1976).

[9] Θυμίζουμε ότι το σύστημα πίστεων - και συνεπώς οι πίστεις κάθε τύπου - αποτελούν κοινή γνώση στο μοντέλο που εξετάζουμε. Αυτό, όμως, που δεν είναι κάθε φορά γνωστό, είναι ποιος τύπος του παίκτη i κληρώθηκε - και συνεπώς ποια είναι η πίστη του παίκτη αυτού.

Συνεπώς, κάθε παίκτης πρέπει να λάβει υπόψη του την άγνοια των υπολοίπων για τον ίδιο όταν αποφασίζει για τις δικές του ενέργειες ή στρατηγικές. Και για να το κάνει αυτό πρέπει να αναλύσει καταστάσεις όπου θα θεωρήσει ότι ισχύει για τον εαυτό του κάτι διαφορετικό από αυτό που ισχύει στην πραγματικότητα, μόνο και μόνο επειδή μπορεί αυτό να το πιστεύουν οι άλλοι γι΄ αυτόν. Θα πρέπει, δηλαδή, να αγνοήσει την ιδιωτική του πληροφόρηση και να αναλύσει τα δεδομένα από την θέση των υπολοίπων.

Αυτή είναι η γωνία του εξωτερικού παρατηρητή που - όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 1 - είναι κατάλληλη για να εκφράσει την συνολική και υποκειμενική αβεβαιότητα που υπάρχει στο σύστημα.

Έτσι, λοιπόν, κάθε παίκτης όταν κληθεί να αποφασίσει την στρατηγική του, θα βασιστεί μεταξύ άλλων και στην εκτίμησή του για το αν οι υπόλοιποι παίκτες είναι ορθολογικοί, αν γνωρίζουν ότι ο ίδιος είναι ορθολογικός, αν γνωρίζουν ότι αυτός γνωρίζει ότι αυτοί γνωρίζουν ότι είναι ορθολογικός κ.ο.κ. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα πρέπει να αξιολογήσει κάθε κατάσταση του κόσμου για την οποία δίνεται θετική πιθανότητα από το σύστημα πίστεων στο να είναι η πραγματική κατάσταση του κόσμου[10]. Βλέπουμε έτσι, ότι το ενδεχόμενο R: *όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί* θα είναι αμοιβαία γνώση *πρώτου βαθμού* στην κατάσταση t , τότε και μόνο τότε όταν για όλες τις καταστάσεις που είναι προσεγγίσιμες από την t σε ένα βήμα ισχύει ότι σε αυτές οι παίκτες είναι ορθολογικοί. Όμοια, το ενδεχόμενο R θα είναι αμοιβαία γνώση *δεύτερου βαθμού* αν για όλες τις καταστάσεις που είναι προσεγγίσιμες από την t σε δύο βήματα ικανοποιείται ο ορθολογισμός κάθε παίκτη, κ.ο.κ. Οι σκέψεις, αυτές, δικαιολογούν την παρακάτω ισοδυναμία[11]:

Πρόταση 2.6. *Σε μία κατάσταση του κόσμου t, ο ορθολογισμός των παικτών αποτελεί κοινή γνώση αν και μόνο αν οι παίκτες είναι ορθολογικοί για κάθε προσεγγίσιμη κατάσταση από την t.*

Άμεσο είναι το ακόλουθο πόρισμα που μας δίνει τον ζητούμενο χαρακτηρισμό, Aumann (1992):

Πόρισμα 2.7. *Η κοινή γνώση του ορθολογισμού σε κάθε κατάσταση είναι ισοδύναμη με τον ορθολογισμό των παικτών σε κάθε κατάσταση (universal rationality).*

Με άλλα λόγια, όταν σε κάθε κατάσταση του κόσμου στην οποία δίνεται θετική πιθανότητα από το σύστημα πίστεων, όλοι οι τύποι των παικτών φέρονται ορθολογικά, τότε υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού.

[10] Θυμόμαστε ότι σε ένα σύστημα πίστεων περιλαμβάνονται οι πίστεις των παικτών για τους άλλους παίκτες, οι πίστεις τους για αυτές τις πίστεις, ... κ.ο.κ. μέχρι το άπειρο. Έτσι, θετική πιθανότητα δίνεται από το σύστημα σε κάθε κατάσταση που κάποιος παίκτης την θεωρεί πιθανή, σε κάθε κατάσταση που κάποιος παίκτης θεωρεί ότι κάποιος παίκτης την θεωρεί πιθανή, ... κ.ο.κ. μέχρι το άπειρο.

[11] Βλέπε Geanakoplos (1994), Aumann (1987).

Παρατήρηση 2.8. Τυπικά, η παραπάνω ισοδυναμία ισχύει πάνω στις καταστάσεις που έχουν θετική πιθανότητα να εμφανιστούν σύμφωνα με την κοινή prior. Αγνοώντας, όμως, τις υπόλοιπες καταστάσεις, έχουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας το αποτέλεσμα.

Οι έννοιες της αμοιβαίας και της κοινής γνώσης του ορθολογισμού μπορούν να γίνουν περισσότερο κατανοητές μέσα από ορισμένα παραδείγματα. Ιδιαίτερα χρήσιμη στην κατανόησή τους είναι όπως θα δούμε η έννοια των προσεγγίσιμων καταστάσεων.

Παράδειγμα 2.1. Aumann (1992). Έστω G ένα παιχνίδι με τον ακόλουθο πίνακα:

	L	R
T	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$2,2$

Σχημα 2.1: Το παιχνίδι G

Θεωρούμε πάνω στο G το ακόλουθο σύστημα πίστεων Π_1 με κοινή prior:

	L_1	L_2	R
T_1	$1,1$	$1,1$	$0,0$
T_2	$1,1$	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$0,0$	$2,2$

(α΄) Οι τύποι των παικτών

	L_1	L_2	R
T_1	$1/6$	$1/6$	
T_2	$1/6$		$1/6$
B		$1/6$	$1/6$

(β΄) Η κοινή prior

Σχημα 2.2: Το σύστημα πίστεων Π_1

Οι δύο πρώτες σειρές των δύο παραπάνω πινάκων αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικούς τύπους του παίκτη I, οι οποίοι αν και παίζουν την ίδια στρατηγική, έχουν διαφορετική πίστη (θεωρία). Συγκεκριμένα, ο τύπος T_1 του I γνωρίζει ότι ο τύπος του II είναι είτε ο L_1 είτε ο L_2 και άρα είναι βέβαιος[12] ότι ο παίκτης II παίζει την στρατηγική L. Αντίθετα, ο τύπος T_2 του I αποδίδει ίση πιθανότητα στο να παίζει ο παίκτης II την στρατηγική L (τύπος L_1) είτε στο να παίζει την στρατηγική R (τύπος R). Αντίστοιχα ισχύουν για τους τύπους του II.

Έτσι, υπάρχουν συνολικά 9 δυνατές καταστάσεις του κόσμου (συνδυασμοί τύπων) από τις οποίες μόνο οι 6 είναι πιθανές στην περίσταση που εξετάζουμε. Μάλιστα κάθε μία από αυτές είναι το ίδιο πιθανό να προκύψει ως πραγματική κατάσταση του κόσμου (πιθανότητα $1/6$).

Έστω, τώρα ότι η πραγματική κατάσταση του κόσμου είναι η $t_1 = (T_1, L_1)$. Ο παίκτης I παίζει την στρατηγική T και ο II το γνωρίζει αυτό με βεβαιότητα. Ωστόσο, ο παίκτης

[12] Δηλαδή αποδίδει πιθανότητα 1 στο ενδεχόμενο,

Ι δε γνωρίζει ότι ο παίκτης ΙΙ όντως το γνωρίζει αυτό. Στην πραγματικότητα, αποδίδει πιθανότητα $1/2$ στο να συμβαίνει αυτό, δηλαδή ο παίκτης ΙΙ να έχει τύπο L_1. Αποδίδει την ίδια πιθανότητα ($1/2$) στο ενδεχόμενο ο παίκτης ΙΙ να είναι τύπου L_2 και άρα να μην γνωρίζει με βεβαιότητα (ο ΙΙ) αν ο Ι παίζει την στρατηγική T ή την στρατηγική B.

Παρατηρούμε ακόμα ότι στην κατάσταση t_1 που εξετάζουμε και οι δύο παίκτες είναι ορθολογικοί (δηλαδή, μεγιστοποιούν την πληρωμή τους σύμφωνα με την πίστη τους). Παρόλα αυτά, κανένας παίκτης δε γνωρίζει με βεβαιότητα ότι ο άλλος είναι ορθολογικός. Συγκεκριμένα, ο παίκτης Ι αποδίδει πιθανότητα $1/2$ στο ενδεχόμενο ο τύπος του παίκτη ΙΙ να είναι ο L_2 και άρα να μην είναι ορθολογικός[13]. Το ίδιο ισχύει και από την πλευρά του παίκτη ΙΙ καθώς ούτε ο τύπος L_2 του παίκτη Ι είναι ορθολογικός. Έτσι, τελικά, και οι δύο παίκτες αποδίδουν πιθανότητα $1/2$ στο ενδεχόμενο ο άλλος παίκτης να είναι ορθολογικός.

Η ακόλουθη περίσταση του παιχνιδιού του προηγούμενη παραδείγματος θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην αμοιβαία και στην κοινή γνώση του ορθολογισμού.

Παράδειγμα 2.2. Aumann (1992). Έστω, το παιχνίδι G του προηγούμενου παραδείγματος και έστω το ακόλουθο σύστημα πίστεων:

	L_1	L_2	L_3	L_4	R
T_1	$1,1^*$	$1,1^*$	$1,1$	$1,1$	$0,0$
T_2	$1,1^*$	$1,1$	$1,1^*$	$1,1$	$0,0$
T_3	$1,1$	$1,1^*$	$1,1$	$1,1^*$	$0,0$
T_4	$1,1$	$1,1$	$1,1^*$	$1,1$	$0,0^*$
B	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0^*$	$2,2^*$

Σχημα 2.3: Το σύστημα πίστεων Π_2

όπου οι αστερίσκοι ($*$) συμβολίζουν πιθανότητα $1/10$ - είναι οι καταστάσεις που έχουν θετική πιθανότητα κάτω από την κοινή prior. Έστω ότι η πραγματική κατάσταση του κόσμου είναι και πάλι η $t_1 = (T_1, L_1)$. Στην κατάσταση αυτή - όπως και προηγουμένως - ο Ι γνωρίζει ότι ο τύπος του είναι T_1, αλλά δε γνωρίζει τον τύπο του ΙΙ. Παρόμοια, ο ΙΙ γνωρίζει ότι ο τύπος του είναι L_1, αλλά δε γνωρίζει τον τύπο του Ι. Επίσης, τόσο ο Ι όσο και ο ΙΙ είναι

[13]Το ότι ο τύπος L_2 δεν είναι ορθολογικός προκύπτει από το γεγονός ότι σύμφωνα με την πίστη του θα πετύχαινε υψηλότερη αναμενόμενη πληρωμή αν επέλεγε τη στρατηγική R από τη στρατηγική L που προδιαγράφει ο τύπος του. Συγκεκριμένα η αναμενόμενη πληρωμή του κάτω από την L είναι ίση με: $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{1}{6}$, ενώ κάτω από τη R είναι ίση με: $\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6} > \frac{1}{6}$.

ορθολογικοί. Ωστόσο, αυτό που αλλάζει τώρα είναι ότι υπάρχει επιπλέον και αμοιβαία γνώση αυτού του γεγονότος, δηλαδή και οι δύο παίκτες γνωρίζουν (αποδίδουν πιθανότητα 1) στο ενδεχόμενο ο άλλος παίκτης να είναι ορθολογικός. Αυτό προκύπτει ως εξής.

Ο παίκτης I αποδίδει ίση πιθανότητα (1/2) στα ενδεχόμενα ο παίκτης II να έχει τύπο L_1 ή L_2. Όμως, και οι δύο αυτοί τύποι του II είναι ορθολογικοί καθώς μεγιστοποιούν την αναμενόμενη πληρωμή τους σύμφωνα με την πίστη τους, όταν παίζουν την στρατηγική που προδιαγράφει ο τύπος τους (δηλαδή την L) και όχι κάποια άλλη (δηλαδή την R). Έτσι, ο I γνωρίζει (με πιθανότητα 1) ότι ο II είναι ορθολογικός. Με αντίστοιχο συλλογισμό καταλήγουμε στο ότι και ο II γνωρίζει ότι ο I είναι ορθολογικός. Συνεπώς υπάρχει *αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού 1ης τάξης*. Παρατηρούμε ότι αυτό προέκυψε από το γεγονός ότι οι παίκτες είναι ορθολογικοί σε κάθε κατάσταση που είναι προσεγγίσιμη σε ένα βήμα από την πραγματική κατάσταση του κόσμου.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, συμπεραίνουμε ακόμα ότι ο I γνωρίζει ότι ο II γνωρίζει ότι ο I είναι ορθολογικός. Πράγματι ο I - έχοντας τύπο T_1 - θεωρεί πιθανούς τους τύπους L_1 και L_2 του II, οι οποίοι θεωρούν πιθανούς τους τύπους T_1, T_2 και T_3 για τον I[14], οι οποίοι είναι όλοι ορθολογικοί. Άρα, ο I σκέφτεται ότι όποιος και να είναι ο τύπος του II, αυτός θα θεωρεί τον I ορθολογικό. Άρα, αυτό που διαπιστώσαμε είναι ότι ο I γνωρίζει ότι ο II τον θεωρεί (με πιθανότητα 1) ορθολογικό. Τα ίδια ισχύουν και από την πλευρά του II. Έτσι, τελικά, και οι δύο παίκτες είναι ορθολογικοί, και οι δύο γνωρίζουν ότι ο άλλος είναι ορθολογικός και επίσης και οι δύο γνωρίζουν ότι ο άλλος γνωρίζει ότι είναι ορθολογικοί. Έτσι, λέμε ότι υπάρχει *αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού 2ης τάξης*. Αντίστοιχα με πριν, αυτό προέκυψε από το γεγονός ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί σε κάθε κατάσταση που είναι προσεγγίσιμη σε δύο βήματα από την πραγματική κατάσταση του κόσμου.

Ωστόσο, στο επόμενο βήμα η παραπάνω συλλογιστική δεν μας οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα, καθώς οι τύποι T_4 και L_4 δεν είναι ορθολογικοί. Αυτό φαίνεται ως εξής. Ο τύπος T_4 του παίκτη I παίζοντας τη στρατηγική T - που προδιαγράφει ο τύπος του - αναμένει πληρωμή ίση με: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$. Αντίθετα, η αναμενόμενη πληρωμή του κάτω από τη στρατηγική B είναι ίση με: $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ που είναι μεγαλύτερη. Άρα, ο τύπος T_4 παίζοντας T δε μεγιστοποιεί την πληρωμή του σύμφωνα με την πίστη του, που σημαίνει ότι δεν είναι ορθολογικός. Αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι ο τύπος L_4 του II δεν είναι ορθολογικός.

Έτσι, στις καταστάσεις του κόσμου (T_4, R) και (L_4, B) - οι οποίες είναι προσεγγίσιμες σε 3 βήματα από την πραγματική - δεν είναι και οι δύο παίκτες ορθολογικοί. Αυτό σημαίνει, ότι ο I θεωρεί πιθανό ότι ο II θεωρεί πιθανό ότι ο I θεωρεί πιθανό ότι ο II δεν είναι ορθολογικός. Αντίστοιχα, για τον II. Ως συνέπεια, δεν υπάρχει αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού 3ης τάξης (ή παραπάνω).

[14] Θυμηθείτε ότι το σύστημα πίστεων αποτελεί κοινή γνώση μεταξύ των παικτών και έτσι ο I είναι σε θέση να τα γνωρίζει όλα αυτά. Αυτό που *δεν* γνωρίζει είναι ποιος είναι ο τύπος του II.

2.3 Ορθολογικά συστήματα πίστεων

Η έννοια της κοινής γνώσης του ορθολογισμού συνδέεται με τα συστήματα πίστεων μέσω του ακόλουθου ορισμού, Aumann & Dreze (2008):

Ορισμός 2.9. *Ένα σύστημα πίστεων* Π *ονομάζεται ορθολογικό (rational belief system ή RBS) αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) όλοι οι τύποι όλων των παικτών είναι ορθολογικοί (universal rationality) και

(ii) οι πίστεις των παικτών προκύπτουν από μια κοινή prior κατανομή $\mathbb{P}$ *πάνω στο* T.

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση ύπαρξης της κοινής prior $\mathbb{P}$ ισχύει ότι:

$$p\left(E;t^i\right) = \mathbb{P}\left(E|t^i\right),$$

για κάθε ενδεχόμενο $E \subset T$ και για κάθε τύπο t^i, $i \in N$. Τα ορθολογικά συστήματα πίστεων θα μας απασχολήσουν αρκετά στην συνέχεια. Μια βασική έννοια που προκύπτει από τον ορισμό τους είναι αυτή των ορθολογικά αναμενόμενων πληρωμών ή ορθολογικών προσδοκιών, Aumann & Dreze (2008):

Ορισμός 2.10. *Σε ένα παιχνίδι* G *χαρακτηρίζουμε ως ορθολογικά αναμενόμενη πληρωμή ή ορθολογική προσδοκία (rational expectation) ενός παίκτη κάθε αναμενόμενη πληρωμή κάθε τύπου αυτού του παίκτη σε κάθε ορθολογικό σύστημα πίστεων (RBS).*

Πάνω στην έννοια των ορθολογικά αναμενόμενων πληρωμών έχει αναπτυχθεί πρόσφατα μια πολύ πλούσια θεωρία, η οποία κατατάσσεται στην κατηγορία των γενικεύσεων του σημείου ισορροπίας Nash και την οποία θα δούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο τα ορθολογικά συστήματα πίστεων αποτελούν μια ρεαλιστική βάση για την ανάλυση ενός παιγνίου. Δηλαδή, κατά πόσο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού είναι μια υπόθεση που συναντάται συχνά στην πράξη, ώστε να αξίζει να ασχοληθούμε με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή. Για τα παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης, αποδεικνύεται εύκολα, ότι η κοινή γνώση του ορθολογισμού είναι πράγματι εφικτή. Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας λέει, δηλαδή, ότι σε κάθε παιχνίδι τέλειας πληροφόρησης (ΤΠ) υπάρχει ένα σύστημα πίστεων και μία κατάσταση του κόσμου t στην οποία είναι κοινή γνώση ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί. Πιο συγκεκριμένα:

Πρόταση 2.11. *Σε κάθε παιχνίδι τέλειας πληροφόρησης, υπάρχει ένα σύστημα πίστων το οποίο είναι ορθολογικό. Δηλαδή:*

$$\emptyset \neq CKR.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σύστημα πίστεων όπου κάθε παίκτης έχει μόνο έναν τύπο, ο οποίος σε κάθε κορυφή που ελέγχει κάνει την επιλογή που μεγιστοποιεί την δεσμευμένη πληρωμή του αν όλοι οι άλλοι παίκτες από την κορυφή αυτή και μετά ακολουθούν την επιλογή που μεγιστοποιεί την πληρωμή τους. Τότε οι παίκτες είναι ορθολογικοί σε κάθε κορυφή, υπάρχει, δηλαδή, universal rationality και άρα κοινή γνώση του ορθολογισμού CKR . □

Αυτό το αποτέλεσμα δεν ισχύει σε αυθαίρετα παιχνίδια - ελλιπούς πληροφόρησης - στα οποία πράγματι η κοινή γνώση του ορθολογισμού μπορεί να μην είναι εφικτή. Ένας τρόπος για να αποτελέσει ένα γεγονός κοινή γνώση είναι να ανακοινωθεί δημόσια μπροστά σε όλους τους παίκτες ότι συνέβει. Στην σχετική βιβλιογραφία υπάρχουν άρθρα που ασχολούνται με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων να υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού σε μια δεδομένη κατάσταση, βλέπε Collevechio & Li Calzi (2012).

Αυτό που προέχει για την παρούσα ανάλυση είναι να καταλάβουμε ότι συνθήκη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού είναι αναλυτική και όχι κανονιστική. Δηλαδή, σε μία δεδομένη κατάσταση είτε υπάρχει είτε όχι. Δεν μπορεί κανείς να την απαιτήσει ή να πει ότι θα έπρεπε να ισχύει, Aumann (1996).Η αξία της συνεπώς, δεν βρίσκεται στο ότι μας λέει τι πρέπει να γίνει ή τι θα έπρεπε να γίνει σε μία κατάσταση. Αντίθετα, βρίσκεται στο ότι είναι ακριβώς η αυστηρή εκείνη συνθήκη που αν ισχύει, τότε εξασφαλίζει ότι η έκβαση ενός παιγνίου μπορεί είναι προβλέψιμη και διαισθητικά αναμενόμενη. Έτσι, εξηγεί πως εμφανίζονται διάφορα «παράδοξα», δηλαδή αποτελέσματα που διαφέρουν από τη διαίσθηση ή την υπόδειξη της θεωρίας, σε περιπτώσεις που δεν ισχύει.

2.4 Μορφές έλλειψης του ορθολογισμού

2.4.1 Έννοιες & ορισμοί

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, δεν αρκεί - στη γενική περίπτωση - οι παίκτες να είναι ορθολογικοί, ώστε να μπορούμε να γνωρίζουμε πως θα συμπεριφερθούν, δηλαδή να γνωρίζουμε τι στρατηγικές θα επιλέξουν.[15]Για αυτό εξετάσαμε τη συνθήκη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού, δηλαδή της αμοιβαίας γνώσης του ορθολογισμού τάξης n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τι συμβαίνει, όμως, αν σε μία συγκεκριμένη κατάσταση αυτή η διαδοχή συλλογισμών δεν συνεχίζεται μέχρι το άπειρο, αλλά κάποια στιγμή σταματάει; Δηλαδή, τι συμβαίνει στην περίπτωση που υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να υπάρχει αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού τάξης n_0 αλλά όχι παραπάνω.

Πρακτικά, αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, τότε υπάρχει κάποιος παίκτης, που πιστεύει ότι κάποιος παίκτης πιστεύει, ότι ... κάποιος παίκτης δεν συμπεριφέρεται ορθολογικά. Πιο απλά, και σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό που δώσαμε παραπάνω, αυτό σημαίνει ότι:

- σε μία κατάσταση του κόσμου που είναι προσεγγίσιμη από την πραγματική κατάσταση του κόσμου[16], υπάρχει κάποιος τύπος κάποιου παίκτη που χρησιμοποιεί μία στρατηγική που γνωρίζει ότι δεν είναι βέλτιστη σύμφωνα με την πίστη του.

Η περίπτωση αυτή, αναφέρεται ως περίπτωση *φραγμένου ορθολογισμού τάξης* n_0 (*bounded rationality*) ή ως περίπτωση αμοιβαίας γνώσης του ορθολογισμού τάξης n_0, αλλά όχι $n_0 + 1$, (βλ. Παράδειγμα 2.2). Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι αν η παρέκκλιση αυτή επηράζει την έκβαση του παιχνιδιού σε περιπτώσεις που το n_0 είναι αρκετά μεγάλο και αν υπάρχει κάποιος τρόπος για την μέτρηση του μεγέθους της απόκλισης από την ορθολογική συμπεριφορά, δηλαδή αν υπάρχει κάποιος τρόπος της μέτρησης της έλλειψης ορθολογισμού.

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι σαφής. Για κάθε αυθαίρετα μεγάλο $n \in \mathbb{N}$ μπορεί κανείς να κατασκευάσει αντιπαραδείγματα (βλέπε Aumann, 1992)ώστε το

---

[15]Στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε η στρατηγική κάθε παίκτη είναι καθορισμένη από τον τύπο του και αποτελεί μέρος της περιγραφής της κατάστασης του κόσμου. Προκύπτει συνεπώς, εύλογα το ερώτημα αν οι παίκτες μπορούν να επιλέγουν ή όχι. Η απάντηση είναι ότι πράγματι επιλέγουν και η επιλογή αυτή γίνεται σύμφωνα με τον τύπο τους, δηλαδή σύμφωνα με την ιδιωτική τους πληροφόρηση. Με δεδομένη την πληροφόρηση η παίκτες υπολογίζουν μια εκ των υστέρων κατανομή για τις επιλογές των υπολοίπων και στη συνέχεια -αν είναι ορθολογικοί - επιλέγουν μια στρατηγική που να απαντά βέλτιστα στην κατανομή αυτή.

Ωστόσο, για έναν εξωτερικό παρατηρητή - την οπτική γωνία του οποίου υιοθετεί το μοντέλο - η στρατηγική κάθε παίκτη αποτελεί μέρος της περιγραφής της κατάστασης του κόσμου την οποία βλέπει. Έτσι, μπορεί κανείς παραπλανητικά να οδηγηθεί στο εσφαλμένο συμπέρασμα ότι στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε δεν υπάρχει δυνατότητα επιλογής για τους παίκτες. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το ζήτημα αυτό, βλέπε Aumann (1987).

[16]Σε n_0 βήματα ή συλλογισμούς,

αποτέλεσμα ενός παιγνίου να διαφέρει στις περιπτώσεις που υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού και φραγμένη γνώση του ορθολογισμού τάξης n. Όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα, η απάντηση δεν είναι τόσο άμεση.

Για να αξιολογήσουμε τις δυνατές εκβάσεις ενός παιγνίου σε μία κατάσταση έλλειψης της κοινής γνώσης του ορθολογισμού, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τόσο το μέγεθος της μη ορθολογικής συμπεριφοράς που εμφανίζεται όσο και την πιθανότητα με την οποία αυτή μπορεί να εμφανιστεί. Υπάρχουν, δηλαδή, δύο βασικές πτυχές της έλλειψης ορθολογισμού οι οποίες είναι αλληλένδετες· για παράδειγμα η αντίδραση του ίδιου παίκτη μπορεί να είναι διαφορετική απέναντι σε μία πιθανή παράλογη συμπεριφορά ενός αντιπάλου του που εμφανίζεται με μεγάλη πιθανότητα και όταν εμφανίζεται του κοστίζει 1€ και σε μία που εμφανίζεται με μικρή πιθανότητα και όταν εμφανίζεται του κοστίζει 1.000.000€, Aumann (1992).

Έτσι, οδηγούμαστε στους παρακάτω δύο ορισμούς τόσο του βαθμού (*degree*) όσο και του μεγέθους (*amount*) του παραλογισμού σε ένα παιχνίδι. Θεωρώντας μια κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$[17] πάνω στο σύνολο T των δυνατών καταστάσεων του κόσμου, έχουμε ότι (βλ. Aumann, 1992):

Ορισμός 2.12. *Ως βαθμό έλλειψης ορθολογισμού (degree of irrationality) ενός παίκτη i σε μία κατάσταση του κόσμου t, ορίζουμε το αντίθετο της μέγιστης τάξης αμοιβαίας γνώσης του ορθολογισμού του i στην κατάσταση t.*

Για παράδειγμα, αν υπάρχει αμοιβαία γνώση 1ης τάξης για τον ορθολογισμό του i, αλλά όχι 2ης, τότε ο *βαθμός έλλειψης του ορθολογισμού* του i είναι -1. Αντίστοιχα αν υπάρχει αμοιβαία γνώση μέχρι 100ης τάξης για τον ορθολογισμό του i, τότε ο *βαθμός έλλειψης του ορθολογισμού* του i είναι -100. Προφανώς, το -1 αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη έλλειψη από το -100.

Ορισμός 2.13. *Ένα μέτρο της έλλειψης ορθολογισμού είναι η μέση της τιμή, η οποία για έναν παίκτη i σε μία κατάσταση του κόσμου t, ορίζεται ως εξής. Για κάθε τύπο του παίκτη i υπολογίζεται η διαφορά ανάμεσα στην αναμενόμενη πληρωμή του τύπου αυτού και την μέγιστη αναμενόμενη πληρωμή που θα μπορούσε να πάρει αν άλλαζε τη στρατηγική του. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζεται η διαφορά αυτή με την πιθανότητα εμφάνισης του συγκεκριμένου τύπου και γίνεται άθροισμα ως προς όλους τους τύπους.*[18]

Η ποσότητα που προκύπτει ονομάζεται αναμενόμενη έλλειψη ορθολογισμού (expected irrationality) του παίκτη i.

[17] Θυμηθείτε ότι αυτή είναι η κοινή prior.
[18] Υπολογίζεται δηλαδή μια μέση τιμή.

Έτσι, αν για παράδειγμα, ισχύει η υπόθεση της CKR, τότε η αναμενόμενη έλλειψη ορθολογισμού κάθε παίκτη θα είναι 0 - αφού η υπόθεση CKR είναι ισοδύναμη με την υπόθεση της universal rationality που συνεπάγεται ότι οι διαφορές του ορισμού είναι μηδενικές.

2.4.2 Προβλήματα στη μέτρηση της έλλειψης ορθολογισμού

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ο βαθμός έλλειψης ορθολογισμού αφορά μια συγκεκριμένη κατάσταση του κόσμου - είναι δηλαδή τοπικό μέτρο - ενώ η αναμενόμενη έλλειψη ορθολογισμού είναι ένα γενικό μέτρο που αφορά το σύστημα πίστεων συνολικά. Ενδεχομένως να ήταν χρήσιμο ένα μέτρο που και θα χρησιμοποιούσε μέση τιμή και θα ήταν τοπικό, μετρώντας την έλλειψη ορθολογισμού σε κάθε κατάσταση του κόσμου χωριστά, Aumann (1992).

Το βασικό, ωστόσο, πρόβλημα στον ορισμό και την μέτρηση της έλλειψης του ορθολογισμού σύμφωνα με την παραπάνω προσέγγιση είναι η αντίφαση που δημιουργείται μεταξύ της ικανότητας του παίκτη να έχει καλά ορισμένες πιθανότητες για ότι αφορά τις στρατηγικές του ή τους τύπους γενικότερα των υπολοίπων και της αδυναμίας του να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη πληρωμή του. Ο ορισμός, όμως, των προσωπικών πιθανοτήτων (βλ. Savage, 1954) δίνεται μέσω της συνάρτησης ωφέλειας και κάποιος που δεν είναι ορθολογικός ή δεν μεγιστοποιεί δε μπορεί να έχει (προσωπικές ή υποκειμενικές) πιθανότητες. Ένας τρόπος να παρακαμφθεί αυτό το πρόβλημα - που οδηγεί όμως σε άλλα μειονεκτήματα - είναι να τροποποιηθεί ο ορισμός του συστήματος πίστεων έτσι ώστε να καθορίζεται μια θεωρία μόνο για κάποιον τύπο που είναι ορθολογικός.

Γενικότερα, δεν υπάρχει μια ενιαία θεωρία στη βιβλιογραφία πάνω στο θέμα της έλλειψης ορθολογισμού ή της ύπαρξης φραγμένου ορθολογισμού. Όπως φαίνεται, το συγκεκριμένο πεδίο - της ανάλυσης καταστάσεων φραγμένου ορθολογισμού - είναι αρκετά ρευστό με πολλά ανοιχτά ερευνητικά ερωτήματα. Αυτό που θα απασχολήσει εμάς, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, είναι τα αποτελέσματα στα οποία οδηγεί η ύπαρξη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού και όχι τι συμβαίνει όταν δεν υπάρχει.

Κεφάλαιο 3

Σημείο συσχετισμένης ισορροπίας & ορθολογικές προσδοκίες

3.1 Δεν γίνεται να συμφωνούμε οτι διαφωνούμε

Θεωρώντας την ύπαρξη μιας κοινής prior ο John Harsanyi (1968) επιχειρηματολόγησε ότι οι διαφορές σε υποκειμενικές πιθανότητες θα πρέπει να αποδίδονται αποκλειστικά σε διαφορές στην πληροφόρηση. Δηλαδή, ότι δεν υπάρχει κάποια λογική βάση να υποστηρίζουμε ότι άνθρωποι που έχουν δεχθεί ακριβώς την ίδια πληροφόρηση να οδηγούνται σε διαφορετικές εκ των υστέρων πιθανοτικές εκτιμήσεις.

Ο Aumann (1976) δίνει τη θεωρητική βάση κάτω από την οποία επιτυγχάνεται η συμφωνία των υποκειμενικών υποθέσεων. Αποδεικνύει ότι αν δύο άνθρωποι έχουν κοινή prior και οι εκ των υστέρων πιθανότητές τους για κάποιο ενδεχόμενο A αποτελούν κοινή γνώση μεταξύ τους, τότε αυτές οι εκ των υστέρων πιθανότητες θα πρέπει να είναι ίσες. Αυτό ισχύει, ακόμα και αν έχουν δεχθεί διαφορετική ιδιωτική πληροφόρηση. Με απλά λόγια, αποδεικνύει ότι άνθρωποι με την ίδια prior *δεν γίνεται να συμφωνούν ότι διαφωνούν*.

Όπως αναφέρει ο Aumann (1976) και όπως θα δούμε στη συνέχεια, το παραπάνω συμπέρασμα είναι τετριμμένο μόλις οριστεί το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο. Ωστόσο, δεν είναι διαισθητικά προφανές και η απόδειξη του διαφωτίζει καταστάσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ ατόμων σε περίβαλλον ασύμμετρης (ιδιωτικής) πληροφόρησης όπως αυτές που απαντώνται στη Θεωρία Παιγνίων και γενικότερα στα οικονομικά.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το παρακάτω παιχνίδι δύο παικτών I και II[1]:

1. Έστω: $T^1 = \{t_1^1, \dots, t_n^1\}, T^1 = \{t_1^2, \dots, t_n^2\}$ τα σύνολα των τύπων των δύο παικτών και $T = T^1 \times T^2$ το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του κόσμου. Ένα ενδεχόμενο A είναι ένα υποσύνολο του T.
2. Έστω π μια κοινή prior πάνω στο T, έτσι ώστε η θεωρία κάθε τύπου κάθε παίκτη να είναι η δεσμευμένη της π δεδομένου ότι ο παίκτης είναι αυτού του τύπου. Δηλαδή, με σύμβολα για κάθε ενδεχόμενο $A \subset T$, (βλέπε Aumann & Dreze, 2008):

$$p^i(A\,|t^i) = \frac{\pi(A \cap t^i)}{\pi(t^i)},$$

   όπου με t^i και $\pi(t^i)$ συμβολίζουμε απλουστευτικά το ενδεχόμενο $((t^i, t^j))_{t^j \in T^j}$ και την περιθώρια πιθανότητα

$$\pi((t^i, \cdot)) = \sum_{t^j \in T^j} \pi(t^i, t^j)$$

   αντίστοιχα. Ιδιαίτερα για στοιχειώδη ενδεχόμενα $t_0 = (t_0^1, t_0^2) \in T$ ισχύει ότι:

$$p^i(t\,|t^i) = \begin{cases} \frac{\pi(t)}{\pi(t^i)}, & \text{αν } t^i = t_0^i, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

3. Έστω ένα ενδεχόμενο $A \subset T$, δύο γνωστοί αριθμοί $q_1, q_2 \in [0,1]$ και έστω το ενδεχόμενο:

$$E := \{t \in T : p^1(A\,|t^1) = q_1 \text{ και } p^2(A\,|t^2) = q_2\}.$$

   Δηλαδή, E είναι το ενδεχόμενο η εκ των υστέρων πιθανότητα που δίνει ο I, δεδομένου του τύπου του[2] στο ενδεχόμενο A να είναι q_1 και αντίστοιχα για τον II. Συμβολίζουμε με CKE το ενδεχόμενο το E να αποτελεί κοινή γνώση μεταξύ των δύο παικτών. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6 έχουμε ότι:

$$t \in CKE \iff M(t) \subset E$$

   όπου με $M(t)$ συμβολίζουμε το σύνολο των προσεγγίσιμων καταστάσεων από την t, (βλέπε Ορισμός 2.2).

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα (Aumann, 1976):

[1] Οι έννοιες που ακολουθούν έχουν οριστεί και παρουσιάζονται πιο αναλυτικά στα Κεφάλαια 1 και 2 της παρούσης εργασίας. Στη συνέχεια δίνονται μόνο για λόγους συνεκτικότητας του παρόντος κεφαλαίου.

[2] Δηλαδή της πληροφόρησής του,

Πρόταση 3.1. *Έστω μία κατάσταση του κόσμου $t_0 \in T$ και έστω ότι $t_0 \in CKE$. Τότε, θα ισχύει ότι:*

$$q_1 = q_2.$$

Απόδειξη. Εφόσον $M(t_0) \subset E$ θα ισχύει ότι για κάθε προσεγγίσιμη κατάσταση από την t_0 η posterior του A δεδομένου του τύπου του παίκτη I θα είναι σταθερή και ίση με q_1, δηλαδή:

$$q_1 = p^1(A\,|t^1) = \frac{\pi(A \cap t^1)}{\pi(t^1)}, \qquad \forall\,(t^1, \cdot) \in M(t_0) \subset E,$$

το οποίο δίνει:

$$\pi(t^1) \cdot q_1 = \pi(A \cap t^1), \qquad \forall\,(t^1, \cdot) \in M(t_0) \subset E.$$

Αθροίζοντας ως προς t^1 στις καταστάσεις $t = (t^1, t^2) \in M(t_0)$ παίρνουμε ότι:

$$\sum_{t^1 \in M(t_0)} \pi(t^1) \cdot q_1 = \sum_{t^1 \in M(t_0)} \pi(A \cap t^1)$$

από όπου:

$$\pi(M(t_0)) \cdot q_1 = \pi(A \cap M(t_0)) \implies q_1 = \frac{\pi(A \cap M(t_0))}{\pi(M(t_0))}.$$

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω αντίστοιχα για τον II παίρνουμε ότι:

$$\pi(M(t_0)) \cdot q_2 = \pi(A \cap M(t_0)) \implies q_2 = \frac{\pi(A \cap M(t_0))}{\pi(M(t_0))},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.[3] □

Η πρακτική εφαρμογή του αποτελέσματος αυτού, φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα:

Παράδειγμα 3.1. Aumann (1976). Έστω δύο άτομα I και II, τα οποία θέλουν να εκτιμήσουν την πιθανότητα p του ενδεχομένου A ένα συγκεκριμένο νόμισμα που διαθέτουν να φέρει κορώνα στην επόμενη ρίψη. Θεωρούμε ότι έχουν ως κοινή prior για την παράμετρο p την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$[4] - συμβολικά $P \sim U(0, 1)$ - και ότι ο κάθε παίκτης δικαιούται να κάνει μία ρίψη και να παρατηρήσει το αποτέλεσμά της χωρίς όμως να το ανακοινώσει στον άλλον (ιδιωτική πληροφόρηση).

Έστω, λοιπόν, ότι ο I έφερε κορώνα (K) και ο II γράμματα (Γ). Τότε ο I εκτιμάει ότι:

$$f_{P|K}(p|K) = \frac{P(K|P = p) \cdot f(p)}{P(K)} = \frac{p \cdot 1}{\int_0^1 p\,dp} = \frac{p}{\frac{1}{2}} = 2p.$$

[3] O Aumann (1976) αποδεικνύει το παραπάνω αποτέλεσμα κάνοντας χρήση διαμερίσεων σε αυθαίρετο χώρο πιθανότητας, χωρίς να αναφέρεται συγκεκριμένο στο χώρο T.

[4] Δηλαδή θεωρούν εξίσου πιθανή οποιαδήποτε τιμή για την παράμετρο p,

Άρα, η εκ των υστέρων πιθανότητα που δίνει ο I στο ενδεχόμενο A είναι:

$$P(A|K) = \int_0^1 p \cdot 2p \, dp = \frac{2}{3}.$$

Ακολουθώντας αντίστοιχες πράξεις, βρίσκουμε ότι η εκ των υστέρων πιθανότητα που αποδίδει ο II στο ενδεχόμενο A είναι 1/3.

Στη συνέχεια ανακοινώνονται (δημόσια) οι εκτιμήσεις αυτές (ώστε να αποτελέσουν κοινή γνώση μεταξύ των παικτών). Μαθαίνοντας, όμως, ο I την εκτίμηση του II καταλαβαίνει ότι ο II έφερε γράμματα Γ και έτσι γνωρίζει πλέον ότι στις δύο ρίψεις ήρθε μία φορά κορώνα (στη δικιά του) και μία φορά γράμματα (στου παίκτη II). Έτσι, αναθεωρεί την εκτίμησή του για το ενδεχόμενο A σε 1/2. Το ίδιο κάνει και ο II και έτσι οι δύο παίκτες συμφωνούν τελικά ότι η εκ των υστέρων πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι 1/2.

Στο προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσε κανείς να διατυπώσει την ένσταση, ότι η ανακοίνωση των εκ των υστέρων πιθανοτικών εκτιμήσεων ισοδυναμούσε με την ανακοίνωση του αποτελέσματος της ρίψης, δηλαδή με αποκάλυψη της ιδιωτικής πληροφόρησης. Συνεπώς, ήταν αναμενόμενο ότι θα συμφωνήσουν. Το ενδιαφέρον είναι ότι σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα (Aumann, 1976) το ίδιο θα συμβεί και σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, όπως η ακόλουθη.

Παράδειγμα 3.2. Aumann (1976). Έστω, τώρα ότι κάθε άτομο δικαιούται να κάνει έναν αυθαίρετο αριθμό ρίψεων. Έτσι, ο καθένας γνωρίζει πόσες ρίψεις έκανε και τι ήρθε σ' αυτές (ιδιωτική πληροφόρηση), αλλά δε γνωρίζει ούτε τον αριθμό των ρίψεων του άλλου, αλλά ούτε και τα αποτελέσματα των ρίψεων αυτών. Θεωρούμε, ωστόσο, ότι οι παίκτες διαθέτουν μια κοινή εκ των προτέρων κατανομή πάνω στον δυνατό αριθμό των ρίψεων (υπόθεση κοινής prior).

Έστω, λοιπόν, ότι αυτή τη φορά ο I έκανε 4 ρίψεις και έφερε $KKK\Gamma$ ενώ ο II έκανε και αυτός 4 ρίψεις και έφερε $\Gamma\Gamma\Gamma K$. Τότε ο I εκτιμάει ότι:

$$f_{P|KKK\Gamma}(p|KKK\Gamma) = \frac{P(KKK\Gamma|P=p) \cdot f(p)}{P(KKK\Gamma)} = \frac{p^3 \cdot (1-p) \cdot 1}{\int_0^1 p^3 \cdot (1-p) \, dp} = 20p^3(1-p).$$

Άρα, η εκ των υστέρων πιθανότητα που δίνει ο I στο ενδεχόμενο A είναι:

$$P(A|KKK\Gamma) = \int_0^1 p \cdot 20 \cdot p^3 \cdot (1-p) \, dp = 20 \cdot [\frac{1}{5}p^5 - \frac{1}{6}p^6]_0^1 = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Ακολουθώντας αντίστοιχες πράξεις, βρίσκουμε ότι η εκ των υστέρων πιθανότητα που αποδίδει ο II στο ενδεχόμενο A είναι 1/3.

Τώρα, όμως, με την (δημόσια) ανακοίνωση των εκτιμήσεων αυτών, ο άλλος παίκτης δε γνωρίζει αν το συμπέρασμα αυτό προήλθε από την παρατήρηση μίας, τεσσάρων ή από οποιδήποτε άλλο δυνατό αριθμό ρίψεων. Η πληροφορία που λαμβάνουν για την εκτίμηση του άλλου θα τους οδηγήσει να αναθεωρήσουν τις αρχικές τους εκτιμήσεις, αλλά στην περίπτωση αυτή δεν είναι καθόλου διαισθητικά προφανές ότι θα επέλθει συμφωνία μεταξύ των εκτιμήσεών τους.

Πρακτικά αυτό που θα συμβεί είναι ότι κάθε παίκτης θα λάβει υπόψη του την ιδιωτική πληροφόρηση που έχει, τη δημόσια ανακοίνωση των εκ των υστέρων πιθανοτήτων και με βάση την κοινή prior πάνω στο δυνατό αριθμό των ρίψεων θα αναθεωρήσει την εκ των υστέρων πιθανότητα που δίνει στο ενδεχόμενο A. Στη συνέχεια οι δύο παίκτες θα ανακοινώσουν εκ νέου τις καινούργιες πιθανότητες, κάτι που θα οδηγήσει σε νέα αναθεώρηση. Το αποτέλεσμα που δείξαμε (Aumann, 1976) υποδεικνύει ότι η διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί μέχρις ότου να επέλθει συμφωνία, μέχρι δηλαδή οι εκ των υστέρων πιθανότητες των δύο παικτών για το ενδεχόμενο A να είναι ίσες.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει όταν δεν υπάρχει κοινή γνώση των εκ των υστέρων πιθανοτήτων αλλά μόνο αμοιβαία γνώση. Αυτό φαίνεται και στο ακόλουθο παράδειγμα που βασίζεται στον Aumann (1992).

Παράδειγμα 3.3. Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα πίστεων:

	t_1^2	t_2^2	t_3^2
t_1^1	$2/14$		$2/14$
t_2^1		$1/14$	$1/14$
t_3^1	$4/14$	$4/14$	

Έστω ότι η πραγματική κατάσταση του κόσμου είναι η $t^1 = (t_1^1, t_1^2)$ (πάνω αριστερά) και έστω το ενδεχόμενο:

$$A = \{(t_1^1, t_1^2), (t_2^1, t_3^2), (t_3^1, t_2^2)\},$$

(καταστάσεις σημειωμένες με κύκλο). Τότε, ο παίκτης I - μαθαίνοντας ότι ο τύπος του είναι t_1^1 - γνωρίζει ότι $q_1 = \frac{1}{2}$ και ότι $q_2 = \frac{1}{3}$. Αντίστοιχα, ο II - μαθαίνοντας ότι ο τύπος του είναι t_1^2 - γνωρίζει και αυτός ότι $q_1 = \frac{1}{2}$ και ότι $q_2 = \frac{1}{3}$. Δηλαδή υπάρχει αμοιβαία γνώση των εκ των υστέρων πιθανοτήτων.

Ωστόσο ο II πιστεύει ότι ο I μπορεί να είναι τύπου t_3^1 και άρα ότι μπορεί να μην γνωρίζει αν $q_2 = \frac{1}{3}$ ή αν $q_2 = \frac{4}{5}$. Συνεπώς, δεν υπάρχει αμοιβαία γνώση 2ου βαθμού και έτσι η πρόταση αποτυγχάνει.

3.2 Επιστημικές συνθήκες για το σημείο ισορροπίας Nash

Οι Aumann & Brandenburger (1995) προσδιορίζουν επαρκείς επιστημικές συνθήκες - δηλαδή συνθήκες που αφορούν τις γνώσεις των παικτών σχετικά με το παιχνίδι, τις ενέργειες, τον ορθολογισμό και γενικά τις αντίστοιχες γνώσεις των υπολοίπων παικτών - για την ισορροπία Nash σε παιχνίδια n-παικτών, $n \geq 2$.

Σύμφωνα με την οπτική γωνία που υιοθετούν[5] ένας παίκτης επιλέγει μόνο καθαρή στρατηγική χωρίς να αναμειγνύει ή να τυχαιοποιεί συνειδητά. Όμως, επειδή δε γνωρίζει τις επιλογές καθαρής στρατηγικής από τους υπόλοιπους, η εικασία του για την επιλογή στρατηγικής οποιουδήποτε άλλου παίκτη εκφράζεται ως μια κατανομή πιθανότητας πάνω στις καθαρές στρατηγικές αυτού του «άλλου» παίκτη, (βλ. Κεφάλαιο 2). Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, τα αποτελέσματα των Aumann & Brandenburger (1995) παρέχουν επαρκείς συνθήκες ώστε ένα προφίλ εικασιών να είναι σημείο ισορροπίας Nash. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μια ουσιαστική διαφορά στη δομή των εικασιών σε παιχνιδιών 2-παικτών και σε παιχνίδια n-παικτών με $n > 2$, οδηγεί στον προσδιορισμό διαφορετικών συνθηκών για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις.

Το επιστημικό μοντέλο που χρησιμοποιούν οι Aumann & Brandenburger (1995) είναι αυτό που ορίστηκε στα Κεφάλαιο 1 & 2 με κάποιες κατάλληλες επεκτάσεις.[6]

Καταρχάς, θεωρούν τις καταστάσεις του κόσμου $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T$, δηλαδή θεωρούν ένα δεδομένο τύπο t^i για κάθε παίκτη i. Όπως και προηγουμένως, ο τύπος $t^i \in T^i$ κάθε παίκτη προσδιορίζει πλήρως τη θεωρία του $p(\cdot\,|t^i)$ και τη στρατηγική του $s^i \in S^i$. Ωστόσο, τώρα, σύμφωνα με την προσέγγιση που ακολουθούν, ο τύπος καθορίζει *επιπλέον* και την συνάρτηση πληρωμής h^i κάθε παίκτη, σε αντίθεση με όσα είχαμε δει στο Κεφάλαιο 1, όπου η συνάρτηση πληρωμής $h = (h^i)_{i=1}^n$ - δηλαδή το παιχνίδι - προϋπήρχε του συστήματος πίστεων. Με άλλα, λόγια κάθε τύπος έχει επιπλέον δικιά του συνάρτηση πληρωμής $h^i(t^i)$ και έτσι σε κάθε κατάσταση του κόσμου παίζεται ένα «διαφορετικό» παιχνίδι $h(t)$.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή ορίζονται συναρτήσεις πάνω στο σύνολο T[7], οι οποίες από τη στιγμή που το T μπορεί να θεωρεί ως δειγματικός χώρος (δηλαδή ως χώρος πιθανότητας), αποτελούν τυχαίες μεταβλητές. Σε ότι ακολουθεί θα συμβολίζουμε με «$\tilde{}$» τις συναρτήσεις που ορίζονται πάνω στο T, δηλαδή τις τυχαίες μεταβλητές. Έτσι, προκύπτουν οι ακόλουθοι ορισμοί:

[5]και η οποία έχει πολλούς υποστηρικτές στη σχετική βιβλιογραφία, βλ. σχετικά Aumann & Brandenburger (1995),

[6]Βλέπε διαδραστικά συστήματα πίστεων.

[7]Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του κόσμου, βλ. Παράγραφος 1.2.

1. Ως *παιχνίδι* ορίζεται μια συνάρτηση $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Έτσι, η συνάρτηση:

$$\tilde{h}(t) : S \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$s \longmapsto \tilde{h}(t)(s) = (\tilde{h}^i(t)(s))_{i=1}^n$$

   ονομάζεται *το παιχνίδι που παίζεται στην κατάσταση* t, για $t \in T$. Συμβολίζουμε με $[h]$ το ενδεχόμενο $[\tilde{h} = h] := \{t \in T : \tilde{h}(t) = h\}$, δηλαδή το ενδεχόμενο να παίζεται το παιχνίδι h. Αντίστοιχα ορίζονται τα ενδεχόμενα:

$$[t^i] := \{t \in T : \tilde{t}^i(t) = t^i\}, \text{ο παίκτης } i \text{ να έχει τύπο } t^i \text{ και}$$
$$[s^i] := \{t \in T : \tilde{s}^i(t) = s^i\}, \text{ο παίκτης } i \text{ να παίζει την στρατηγική } s^i$$

2. Ως *εικασία (conjecture)* ϕ^i ενός παίκτη i σε μια κατάσταση t ονομάζεται μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο S^{-i}, τέτοια ώστε:

$$\phi^i(t)(s^{-i}) := P([s^{-i}]; t^i)$$

   Συμβολίζουμε με $\phi(t) := (\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t))$ τις εικασίες όλων των παικτών σε μία κατάσταση t.

Σχετικά με τις εικασίες αυτές, δημιουργείται μια βασική διαφορά ανάμεσα σε παιχνίδια 2-παικτών και σε παιχνίδια n-παικτών με $n > 2$. Αρχικά, εξετάζοντας την περίπτωση $n = 2$ παρατηρούμε ότι η εικασία κάθε παίκτη είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στις καθαρές στρατηγικές του άλλου - δηλαδή εξ ορισμού μια *μεικτή στρατηγική* του άλλου παίκτη.

Αντίθετα, στην περίπτωση όπου $n > 2$ αυτό αλλάζει. Η εικασία ϕ^i ενός παίκτη i δεν είναι πλέον μία μεικτή στρατηγική κάποιου άλλου παίκτη, αλλά μία κατανομή πιθανότητας πάνω στις $(n-1)$ - άδες ενεργειών των υπολοίπων παικτών. Ωστόσο, η κατανομή αυτή (δηλαδή η εικασία ϕ^i του παίκτη i) επάγει μια μεικτή στρατηγική για κάθε παίκτη j διαφορετικό του i, η οποία είναι η περιθώρια της ϕ^i πάνω στο S^j, για $j \neq i$. Η περιθώρια αυτή, κατανομή ονομάζεται *εικασία του* i *για τον* j. Το πρόβλημα, ωστόσο, τώρα είναι ότι οι διαφορετικοί παίκτες από τον j μπορούν να διατηρούν διαφορετικές μεταξύ τους εικασίες για τον j και έτσι δεν είναι πλέον καθόλου ξεκάθαρο - αντίθετα με την περίπτωση $n = 2$ - ποια μεικτή στρατηγική θα αποτελέσει τη συνιστώσα του j στο «υποψήφιο» σημείο Nash.

3. Τέλος, όπως ορίσαμε και στο Κεφάλαιο 2, ένας παίκτης είναι ορθολογικός σε μία κατάσταση του κόσμου t, αν η καθαρή στρατηγική του στην t μεγιστοποιεί την αναμενόμενη πληρωμή του, δεδομένου του τύπου του t^i. Ισοδύναμα, αν θέσουμε $h^i := \tilde{h}^i(t)$ και $s^i := \tilde{s}^i(t)$, τότε, με σύμβολα, ένας παίκτης είναι ορθολογικός αν:

$$E[h^i(s^i, \tilde{s}^{-i}); t^i] \geq E[h^i(u^i, \tilde{s}^{-i}); t^i], \qquad \text{για κάθε } u^i \in S^i.$$

Έχοντας ορίσει το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο, μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των Aumann & Brandenburger (1995). Ακολουθούμε την προσέγγιση των Hillas & Kohlberg (2002) πάνω στο άρθρο των Aumann & Brandenburger (1995). Το πρώτο αποτέλεσμα αφορά τις ενέργειες των παικτών σε αντίθεση με τα επόμενα που αφορούν τις εικασίες τους σχετικά με τις ενέργειες των υπολοίπων.

Θεώρημα 3.2. *Έστω μία στρατηγική κατάσταση $s \in S$. Έστω ότι σε μία κατάσταση του κόσμου t ο κάθε παίκτης είναι ορθολογικός και είναι αμοιβαία γνωστό ότι $\tilde{s} = s(t)$ (οι καθαρές στρατηγικές των παικτών είναι αμοιβαία γνωστές). Τότε η $s(t)$ αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash .*

Το Θεώρημα αυτό είναι διαισθητικά ξεκάθαρο και όπως επισημαίνουν οι Aumann & Brandenburger (1995) η απόδειξή του είναι άμεση. Τα επόμενα αποτελέσματα που αφορούν, όπως είπαμε τις εικασίες των παικτών, είναι από τη φύση τους περισσότερο σύνθετα.

Θεώρημα 3.3. *Έστω h ένα παιχνίδι n-παικτών και $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ μια n-άδα εικασιών (μία για κάθε παίκτη). Αν t είναι μία κατάσταση του κόσμου στην οποία:*

(i) είναι αμοιβαία γνωστό ότι $\tilde{h} = h$,

(ii) είναι αμοιβαία γνωστό ότι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και

(iii) είναι αμοιβαία γνωστό ότι $\tilde{\phi} = \phi$,

και επιπλέον αν:

(α′) για κάθε j, οι εικασίες ϕ^i, με $i \neq j$, των υπολοίπων παικτών επάγουν την ίδια εικασία σ^j για τον j και[8]

(β′) οι εικασίες κάθε παίκτη i είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις εικασίες των υπολοίπων παικτών $j \neq i$,

τότε η n-άδα $(\sigma^1, \sigma^2 \ldots, \sigma^n)$ αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές στο παιχνίδι h.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις υποθέσεις (α′) και (β′), το διάνυσμα σ «αποτελεί» πράγματι ένα διάνυσμα μεικτών στρατηγικών. Έστω τώρα η εικασία ενός παίκτη i για έναν παίκτη j. Ο παίκτης i γνωρίζει την εικασία του j η οποία σύμφωνα με τις (α′) και (β′) είναι η σ και ακόμα γνωρίζει ότι ο j είναι ορθολογικός. Έτσι, η εικασία του i για την επιλογή του παίκτη j - δηλαδή η συνιστώσα σ^j θα δίνει θετικό βάρος πιθανότητας μόνο σε εκείνες τις στρατηγικές του j που μεγιστοποιούν την πληρωμή του j δεδομένης της εικασίας του j, δηλαδή της σ. Από αυτό, όμως, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο, ότι δηλαδή το διάνυσμα σ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας. □

[8] Δηλαδή την ίδια κατανομή πιθανότητας σ^j πάνω στο S^j για την επιλογή καθαρής στρατηγικής από τον j.

Με άλλα λόγια, αυτό που λέει το Θεώρημα 3.3 είναι ότι αν σε μία κατάσταση του κόσμου όλοι οι παίκτες γνωρίζουν το παιχνίδι που παίζουν, γνωρίζουν ότι όλοι οι παίκτες είναι λογικοί και γνωρίζουν τις εικασίες των άλλων, τότε κάτω από τις υποθέσεις (α′) και (β′), οι κατανομές πιθανότητας που αποδίδουν τις εικασίες του κάθε ενός για το τι κάνουν οι υπόλοιποι βρίσκονται σε ισορροπία Nash.

Παρατηρώντας ότι στην περίπτωση όπου $n = 2$, οι συνθήκες (α′) και (β′) ικανοποιούνται αυτόματα, το ακόλουθο Πόρισμα είναι άμεσο:

Πόρισμα 3.4. *Έστω h ένα παιχνίδι $n = 2$ παικτών. Τότε αρκεί να ισχύουν οι συνθήκες (i)-(iii) του προηγούμενου Θεωρήματος ώστε η $(\sigma^1, \sigma^2 \ldots, \sigma^n)$ να αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash.*

Παρατήρηση 3.5. Αυτό που αιφνιδιάζει στο παραπάνω Θεώρημα είναι πως - αντίθετα με τις αντιλήψεις που κυριαρχούσαν στη σχετική βιβλιογραφία[9] - δεν απαιτείται πουθενά η ύπαρξη της *κοινής* γνώσης. Κλειδί εδώ είναι η συνθήκη (iii) που είναι τόσο ισχυρή ώστε να «υπερκαλύψει» την κοινή γνώση του ορθολογισμού και την κοινή prior που απαιτούνται για την συσχετισμένη ισορροπία (βλ. Aumann, 1987).

Στην περίπτωση όπου $n > 2$ προκύπτει το ακόλουθο μη τετριμμένο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.6. *Έστω h ένα παιχνίδι n-παικτών και $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ μια n-άδα εικασιών (μία για κάθε παίκτη). Έστω ότι οι θεωρίες των παικτών προκύπτουν από μια κοινή prior η οποία δίνει θετική πιθανότητα στο ενδεχόμενο:*

(i) είναι αμοιβαία γνωστό ότι $\tilde{h} = h$,

(ii) είναι αμοιβαία γνωστό ότι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και

(iii) είναι <u>κοινά</u> γνωστό ότι $\tilde{\phi} = \phi$,

τότε ικανοποιούνται οι σύνθηκες (α′) και (β′) του προηγούμενο Θεωρήματος και άρα η n-άδα $(\sigma^1, \sigma^2 \ldots, \sigma^n)$ αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash στο παιχνίδι h.

Παρατήρηση 3.7. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στους Aumann & Brandenburger (1995). Σχεδιαγραμματικά ακολουθεί την εξής συλλογιστική. Πρώτα, αποδεικνύεται ότι οι εικασίες οποιονδήποτε δύο παικτών για τις επιλογές ενός τρίτου είναι μεταξύ τους ίσες, κάτι που προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του Agreeing to Disagree, Aumann (1976).[10] Δεύτερον, αποδεικνύεται η περισσότερο σύνθετη συνθήκη ότι κάτω από αυτές τις υποθέσεις οι εικασίες κάθε παίκτη για τις εικασίες δύο οποιονδήποτε άλλων παικτών είναι μεταξύ τους στοχαστικά ανεξάρτητες. Τέλος, έχοντας κανείς αποδείξει τα παραπάνω, το ζητούμενο αποτελέσμα προκύπτει από το Θεώρημα 3.3.

[9] Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Aumann & Brandenburger (1995), Ενότητα 1.
[10] Πρόταση 3.1 της παρούσης εργασίας.

Παρόλο που τώρα χρειάστηκε η κοινή prior και πάλι το αποτέλεσμα προέκυψε χωρίς κοινή γνώση του παιχνιδιού ή του ορθολογισμού των παικτών. Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι απαιτήθηκε κοινή - αντί για αμοιβαία - γνώση των εικασιών, συνθήκη που είναι πολύ ισχυρή.

Οι Aumann & Brandenburger (1995) αποδεικνύουν ότι οι συνθήκες και των δυο Θεωρημάτων είναι σφικτές με την έννοια ότι αν χαλαρωθούν έστω και λίγο, υπάρχουν αντιπαραδείγματα ως προς την ισχύ των Θεωρημάτων.

Τέλος, ο Polak (1999) αποδεικνύει ότι:

Θεώρημα 3.8. *Αν η συνθήκη (i) του Θεωρήματος 3.6 αντικατασταθεί με την ενισχυμένη συνθήκη:*

(i′) είναι κοινά γνωστό ότι $\tilde{h} = h$*,*

τότε:

1. *το Θεώρημα 3.6 ισχύει χωρίς να απαιτείται η κοινή prior*
2. *Αυτόματα ισχύει η συνθήκη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού, δηλαδή η ενισχυμένη εκδοχή (ii′) της συνθήκης (ii).*

Παρατήρηση 3.9. Σε παιχνίδια «πλήρους πληροφόρησης» (complete information) υποτίθεται (συνήθως από τον ορισμό τους) ότι ισχύει η ενισχυμένη συνθήκη (i′). Έτσι στα παιχνίδια αυτά *δεν* απαιτείται η κοινή prior.

3.3 Ορθολογικά αναμενόμενες πληρωμές

3.3.1 Εισαγωγή

Οι Aumann και Dreze (2008) ασχολούνται με τον χαρακτηρισμό των ορθολογικά αναμενόμενων πληρωμών για έναν παίκτη, δηλαδή των πληρωμών που θα μπορούσε να αναμένει ένας παίκτης κάτω από τις υποθέσεις της κοινής prior (common prior - CP) και της κοινής γνώσης του ορθολογισμού των παικτών (CKR).

Στη βιβλιογραφία είναι γενικά παραδεκτό ότι σε ένα παιχνίδι 2-παικτών 0-αθροίσματος η τιμή (value) του παιχνιδιού εκφράζει την *ορθολογικά αναμενόμενη* πληρωμή των παικτών, ενώ επίσης είναι γενικά παραδεκτό, ότι οι διάφορες έννοιες λύσης σε παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος (π.χ. σημείο Nash με τις διάφορες εκλεπτύνσεις και γενικεύσεις του) δεν συμβαδίζουν υποχρεωτικά με *ορθολογικά αναμενόμενες* πληρωμές. Το πρόβλημα αυτό ακριβώς αντιμετωπίζουν οι Aumann & Dreze (2008), με στόχο τη δημιουργία ενιαίας θεωρίας για τις *ορθολογικά αναμενόμενες* πληρωμές.

Στη γενική του μορφή, το πρόβλημα αυτό δεν έχει μονοσήμαντη απάντηση καθώς είναι υποπροσδιορισμένο. Τα σύνολα στρατηγικών και οι συναρτήσεις πληρωμής ορίζουν τη στρατηγική μορφή ενός παιχνιδιού, δεν αρκούν όμως, για να περιγράψουν τις *συνθήκες* κάτω από τις οποίες παίζεται το παιχνίδι. Οι συνθήκες αυτές είναι καθοριστικές για την έκβαση του παιχνιδιού και μπορούν στην πράξη να οδηγήσουν το ίδιο παιχνίδι σε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα[11]. Οι παίκτες ενός παιχνιδιού γνώριζουν τις ιδιαίτερες συνθήκες κάτω από τις οποίες θα γίνει το παιχνίδι και συνεπώς είναι λογικό να περιμένουμε ότι οι προσδοκίες τους θα εξαρτώνται από αυτές. Άρα, κάθε θεωρία που θα προσπαθήσει να δώσει απάντηση στο αρχικό ερώτημα θα πρέπει να τις λαμβάνει υπόψη της. Με τον τρόπο αυτό, περνάμε από την έννοια του παιχνιδιού στην έννοια της *περίστασης του παιχνιδιού* που περιλαμβάνει το ίδιο το παιχνίδι αλλά και το πλαίσιο μέσα στο οποίο παίζεται.

Η βασική δομή που είναι κατάλληλη για να περιγράψει τις διαφορές στο πλαίσιο στο οποίο παίζεται κάθε φορά ένα παιχνίδι είναι τα συστήματα - ή οι ιεραρχίες - πίστεων που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Όπως γνωρίζουμε, τα συστήματα πίστεων περιγράφουν μεταξύ άλλων τις πίστεις των παικτών για τις ενέργειες και για τις πίστεις των άλλων παικτών. Στην περίπτωση που οι ίδιοι παίκτες παίζουν το ίδιο παιχνίδι αλλά διατηρούν διαφορετικές απόψεις για τις κινήσεις των άλλων παικτών (ή για τις απόψεις τους), είναι πολύ λογικό να περιμένουμε ότι θα οδηγηθούν σε διαφορετικές επιλογές και άρα και σε διαφορετικές

[11] Πολλά γνωστά παιχνίδια μπορούν να χρησιμεύσουν ως παραδείγματα, όπως π.χ. το παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας ή το δίλημμα του κρατουμένου με παίκτες διαφορετικής εμπειρίας.

προσδοκίες ως προς την έκβαση του παιχνιδιού. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, οι Aumann & Dreze (2008) επιλέγουν έναν παίκτη, έστω τον παίκτη I - για τον οποίο θέλουν να υπολογίσουν τις προσδοκίες του - και οδηγούνται στον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.10. *Η περίσταση Γ ενός παιχνιδιού G (game situation Γ of a game G) ορίζεται ως εξής:*

1. *ένα παιχνίδι G σε στρατηγική μορφή (σύνολα στρατηγικών και συνάρτηση πληρωμής) και*
2. *ένα σύστημα πίστεων πάνω στο G και*
3. *ένα δεδομένο τύπο t^1 του παίκτη I.*

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η περίσταση Γ βασίζεται στο G ή ότι το G αποτελεί τη βάση για τη Γ.

Είναι άμεσο ότι σε κάθε περίσταση ενός παιχνιδιού αντιστοιχεί μια καλά ορισμένη προσδοκία για τον I, που είναι ακριβώς η αναμενόμενη πληρωμή του I σύμφωνα με την στρατηγική του και την πίστη ή θεωρία του. Χωρίς, όμως, να θέσουμε κάποιους επιπλέον περιορισμούς στις πίστεις του I δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε κάποιο σαφές συμπέρασμα, καθώς οποιαδήποτε πληρωμή ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη είναι εφικτή. Ακόμα και σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος οι προσδοκίες του I μπορούν να είναι πολύ διαφορετικές από την τιμή του παιχνιδιού ανάλογα με τις πίστεις του. Και αυτό, παρόλο που στα παιχνίδια αυτά η τιμή προβάλλει ως αδιαμφισβήτητη και γενικώς αποδεκτή έννοια λύσης.

Οι τελευταίες διαπιστώσεις μας δίνουν κίνητρο να αναζητήσουμε επιπλέον συνθήκες που να εξασφαλίζουν ότι τουλάχιστον σε ένα παιχνίδι 2-παικτών 0-αθροίσματος η προσδοκία του I θα είναι η τιμή του παιχνιδιού, όποια και να είναι η περίσταση στην οποία αυτό παίζεται. Εφόσον τα παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος έχουν ως σαφή λύση την τιμή του παιχνιδιού δεν υπάρχει λόγος να δικαιολογήσουμε κάποια διαφορετική προσδοκία των παικτών ως προς την έκβασή του, όποια και αν είναι η περίσταση στην οποία παίζεται.

Παρατηρούμε ότι στα πλαίσια του προβληματισμού που περιγράψαμε, υποβόσκει ήδη η έννοια του ορθολογισμού - με τη μορφή λογικών ή μη προσδοκιών. Έτσι, το μοντέλο που αναπτύσσεται στην συνέχεια βασίζεται στην επιστημική υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται μέσα από τα ορθολογικά συστήματα πίστεων και τις ορθολογικές προσδοκίες που ορίσαμε στην Παράγραφο 2.3. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τον ορισμό αυτό και προσθέτουμε κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες που προκύπτουν από αυτόν.

3.3.2 Ορισμός & ιδιότητες

Θεωρούμε ένα παιχνίδι G σε κανονική μορφη και ένα ορθολογικό σύστημα πίστεων Π (belief system) πάνω σε αυτό. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύστημα πίστεων είναι ορθολογικό όταν υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού και όταν οι πίστεις των παικτών προκύπτουν από μια κοινή prior, βλέπε Ορισμό 2.8. Ο επόμενος ορισμός είναι ίδιος με τον Ορισμό 2.9 και παρατίθεται για λόγους πληρότητας του παρόντος κεφαλαίου.

Ορισμός 3.11. *Σε ένα παιχνίδι G ονομάζουμε ορθολογικά αναμενόμενη πληρωμή ή ορθολογική προσδοκία κάθε αναμενόμενη πληρωμή των τύπων ενός παίκτη - έστω του I - που προκύπτει από ένα ορθολογικό σύστημα πίστεων πάνω στο G.*

Πριν παρουσιάσουμε δύο από τα βασικά αποτελέσματα που ισχύουν για τις ορθολογικές προσδοκίες, επισημαίνουμε τις παρακάτω ιδιότητές τους:

(1) *Κάθε πληρωμή που αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας Nash είναι ορθολογική. Το ίδιο και κάθε δεσμευμένη πληρωμή (δηλ. αναμενόμενη πληρωμή του I δεδομένου του τύπου του), όταν η κοινή prior αποτελεί σημείο συσχετισμένης ισορροπίας. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Απόδειξη. Ένα σημείο συσχετισμένης ισορροπίας στο G μπορεί κατά τετριμμένο τρόπο να μετατραπεί σε σημείο συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού $2G$[12], απλά αποδίδοντας πιθανότητα 0 στο δεύτερο αντίτυπο κάθε στρατηγικής του παίκτη I. Στη συνέχεια το αποτέλεσμα είναι άμεσο από το γεγονός ότι σε ένα παιχνίδι G οι ορθολογικές προσδοκίες του παίκτη I ταυτίζονται με τις δεσμευμένες πληρωμές στα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού $2G$ (βλ. Θεώρημα 3.16′). □

Η πρώτη αυτή ιδιότητα μας λέει ότι η έννοια των ορθολογικών προσδοκιών είναι ασθενέστερη από την έννοια του σημείου ισορροπίας Nash και ακόμα από την έννοια του σημείου συσχετισμένης ισορροπίας. Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι υπάρχουν ορθολογικές προσδοκίες που δεν αντιστοιχούν σε κανένα σημείο ισορροπίας. Με άλλα λόγια, οι ορθολογικές προσδοκίες αποτελούν μια γενίκευση των δύο αυτών εννοιών ισορροπίας. Παρόλα αυτά είναι αρκετά ισχυρή έννοια, ώστε να αποδίδει την τιμή του παιχνιδιού ως μόνη ορθολογική προσδοκία σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος, όπως θα δούμε στην συνέχεια.

(2) *Κάθε ορθολογική προσδοκία ενός παίκτη είναι μεγαλύτερη ή ίση από το επίπεδο ασφαλείας του παίκτη αυτού.*

[12] Για τον ορισμό του παιχνιδιού $2G$, βλέπε Παράγραφο 3.3.3.

Απόδειξη. Έστω t_1^* ένας τύπος του παίκτη I με στρατηγική $s_1^* := s_1(t_1^*)$ και δεσμευμένη αναμενόμενη πληρωμή (προσδοκία) ίση με α σε ένα ορθολογικό σύστημα πίστεων Π . Έστω, ακόμα p η κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο $S^{-1} = S^2 \times S^3 \times \ldots \times S^n$ που επάγει η θεωρία του t_1^*. Έτσι:

$$\alpha = \sum_{s^{-1} \in S^{-1}} p(s^{-1}) \cdot h_1(s_1^*, s^{-1}).$$

Λόγω της κοινής γνώσης του ορθολογισμού (CKR) , ο τύπος t_1^* είναι ορθολογικός και άρα η στρατηγική s_1^* μεγιστοποιεί την αναμενόμενη πληρωμή του, δεδομένης της πίστης του. Έτσι, από το Θεώρημα minimax προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha = \max_{s^1 \in S^1} \sum_{s^{-1} \in S^{-1}} p(s^{-1}) \cdot h_1(s_1, s^{-1}) &\geq \min_q \max_{s^1 \in S^1} \sum_{s^{-1} \in S^{-1}} q(s^{-1}) \cdot h_1(s_1, s^{-1}) \\ &= \max_r \min_{s^{-1} \in S^{-1}} \sum_{s^1 \in S^1} r(s^1) \cdot h_1(s_1, s^{-1}), \end{aligned}$$

όπου οι δείκτες q και r διατρέχουν τα σύνολα των κατανομών πιθανότητας πάνω στα σύνολα S^{-1} και S^1 αντίστοιχα. □

Αυτό που προκύπτει από τη συγκεκριμένη ιδιότητα είναι ότι κάθε ορθολογική προσδοκία είναι τουλάχιστον ίση με τη maxmin πληρωμή που μπορεί να εξασφαλίσει ο παίκτης χρησιμοποιώντας μεικτές στρατηγικές. Με άλλα λόγια, κάθε ορθολογική προσδοκία είναι και *ατομικά ορθολογική*, με την έννοια ότι ο παίκτης αναμένει τουλάχιστον αυτό που μπορεί να εξασφαλίσει για τον εαυτό του (δηλαδή το επίπεδο ασφαλείας του).

Η επόμενη ιδιότητα γενικεύει το αναλλοίωτο των σημείων συσχετισμένης ισορροπίας (άρα και των ΣΣΙ, βλ. Μηλολιδάκης (2009), εδάφια 4.3, 6.3, 9.3) για ορθολογικές προσδοκίες.

(3) *Οι ορθολογικές προσδοκίες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από διαδοχική απλοποίηση ισχυρά κυριαρχούμενων στρατηγικών.*

Απόδειξη. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι μια αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική δεν μπορεί ποτέ να εμφανίζεται με θετική πιθανότητα σε ένα σημείο συσχετισμένης ισορροπίας, κάθως είναι πάντοτε προτιμότερο να επιλέγεται αντί αυτής η αντίστοιχη κυριαρχούσα στρατηγική. □

(4) *Οι μετασχηματισμοί θέσης - πρόσθεση σταθεράς - και κλίμακας - πολλαπλασιασμός με θετική σταθερά - στις πληρωμές ενός παίκτη μεταβάλλουν ανάλογα τις ορθολογικές προσδοκίες του παίκτη με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών.*

Απόδειξη. Καθώς τέτοιοι μετασχηματισμοί αφήνουν αμετάβλητα τα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας (άρα και τα σημεία ισορροπίας Nash), ενώ μεταβάλλουν ανάλογα τις πληρωμές του παιχνιδιού (βλέπε Μηλολιδάκης (2009), Λήμμα 2.1), η ιδιότητα αυτή προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι σε ένα παιχνίδι G οι ορθολογικές προσδοκίες του παίκτη I ταυτίζονται με τις δεσμευμένες πληρωμές στα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού $2G$ (βλ. Θεώρημα 3.16′). □

(5) *Κάθε στοιχειώδες παιχνίδι έχει μία μέγιστη ορθολογική πληρωμή, η οποία είναι ίση με την μέγιστη πληρωμή του I πάνω στις στρατηγικές καταστάσεις (σε καθαρές στρατηγικές).*[13]

Επισημαίνουμε ότι *στοιχειώδες* θεωρείται κάθε παιχνίδι που έχει ένα σημείο συσχετισμένης ισορροπίας, το οποίο αποδίδει θετική πιθανότητα σε κάθε στρατηγική κάθε παίκτη και στο οποίο η στρατηγική που υποδεικνύεται σε κάθε παίκτη είναι αυστηρά καλύτερη από οποιαδήποτε άλλη στρατηγική του παίκτη αυτού[14]. Αποδεικνύεται ότι κάθε παιχνίδι μπορεί υπο μία συγκεκριμένη έννοια να αναχθεί σε ένα στοιχειώδες παιχνίδι, Myerson (1997).

3.3.3 Χαρακτηρισμός των ορθολογικών προσδοκιών: Το παιχνίδι $2G$.

Έστω, λοιπόν, ένα παιχνίδι n-παικτών G. Αφού μας ενδιαφέρουν οι ορθολογικές προσδοκίες, θα ασχοληθούμε μόνο με ορθολογικά συστήματα πίστεων πάνω στο G, δηλαδή με συστήματα όπου οι πίστεις των παικτών προέρχονται από μια κοινή prior και όπου σε κάθε κατάσταση υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού[15]. Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να χαρακτηρίσουμε τις ορθολογικές προσδοκίες, δηλαδή να τις ταυτοποιήσουμε με γνωστά σε μας *αντικείμενα*, για τα οποία διαθέτουμε ακριβείς μεθόδους υπολογισμού.

Όπως απέδειξαν οι Aumann & Dreze (2008) η λύση δίνεται με τη βοήθεια των σημείων συσχετισμένης ισορροπίας - πιο συγκεκριμένα των πληρωμών των παικτών σε αυτά - όχι όμως του αρχικού παιχνιδιού G[16] αλλά ενός επαυξημένου παιχνιδιού, το οποίο προκύπτει από το αρχικό με διπλασιασμό[17] των διαθέσιμων στρατηγικών. Αν και η έννοια του επαυξημένου παιχνιδιού φαντάζει ίσως *τεχνητή* μόλις την πρωτοσυναντάει κανείς, γίνεται γρήγορα σαφές ότι αποτελεί μια εξέλιξη που προκύπτει φυσιολογικά όταν κανείς επεξεργάζεται μια περίσταση ενός παιχνιδιού, όπως θα δούμε στην συνέχεια. Μέσω του επαυξημένου αυτού

[13] Η απόδειξη είναι τεχνική και παραλείπεται. Βλέπε Aumann & Dreze (2008), Proposition D.

[14] Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με το ότι όλες οι ανισότητες που καθορίζουν το σημείο συσχετισμένης ισορροπίας είναι αυστηρές.

[15] Θυμίζουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι όλοι οι τύποι όλων των παικτών είναι ορθολογικοί (universal rationality).

[16] Θυμηθείτε άλλωστε ότι οι ορθολογικές προσδοκίες αποτελούν γενίκευση των σημείων συσχετισμένης ισορροπίας.

[17] Λέγοντας διπλασιασμό εννοούμε ότι έχουμε 2 αντίγραφα κάθε στρατηγικής.

παιχνιδιού προκύπτουν δύο ισοδύναμοι τρόποι να χαρακτηρίσουμε το σύνολο των ορθολογικών προσδοκιών, τους οποίους θα δούμε αναλυτικά στην συζήτηση που ακολουθεί.

Ξεκινάμε, λοιπόν, με ένα παιχνίδι G σε κανονική μορφή και ένα ορθολογικό σύστημα πίστεων Π (belief system) πάνω σε αυτό. Για τον παίκτη I - για τον οποίο ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τις ορθολογικές προσδοκίες του - θεωρούμε τους τύπους του $t_1^1, t_1^2, \dots t_1^k$ κάθε ένας από τους οποίους παίζει μια συγκεκριμένη στρατηγική, έστω $s(t_1^i)$, $i = 1, \dots, k$ και έχει μια συγκεκριμένη πίστη (ή θεωρία) η οποία είναι η δεσμευμένη της κοινής prior δεδομένου ότι ο I είναι αυτού του τύπου. Με βάση τη δομή αυτή που προϋποθέτουμε προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες του μοντέλου.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η κοινή prior μπορεί να θεωρηθεί ως μια κατανομή πιθανότητας πάνω σε ένα *τεχνητό* παιχνίδι G_Π που προκύπτει από το αρχικό παιχνίδι G ως εξής:
Θεωρούμε ως σύνολο στρατηγικών του Π - και αντίστοιχα των υπολοίπων παικτών - το σύνολο όπου κάθε στρατηγική εμφανίζεται τόσες φορές όσοι και οι τύποι του στο σύστημα πίστεων Π που την χρησιμοποιούν. Για παράδειγμα, αν ο Ι έχει δύο στρατηγικές, έστω s_1 και s_2 και 5 τύπους $t_1, \dots, t_5$ από τους οποίους οι τρεις πρώτοι παίζουν την στρατηγική s_1 και οι δύο τελευταίοι την στρατηγική s_2, τότε το σύνολο των στρατηγικών του στο παιχνίδι G_Π θα ήταν το εξής:

$$S^1 = \{s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_2^1, s_2^2\}$$

Είναι άμεσο ότι η κοινή prior μπορεί να ερμηνευθεί ως μία συσχετισμένη στρατηγική στο επαυξημένο παιχνίδι G_Π, στο οποίο, όπως μόλις είπαμε, κάθε στρατηγική εμφανίζεται στο σύνολο στρατηγικών του I τόσες φορές όσοι και οι τύποι του που την χρησιμοποιούν. Το κλειδί για όσα ακολουθούν είναι ότι αυτή η συσχετισμένη στρατηγική βρίσκεται σε ισορροπία, αποτελεί δηλαδή ένα σημείο συσχετισμένης ισορροπίας[18].

Η τελευταία διαπίστωση είναι άμεση συνέπεια της δομής του ορθολογικού συστήματος πίστεων. Θυμίζουμε ότι μια συσχετισμένη στρατηγική είναι σε ισορροπία αν με δεδομένες τις συστάσεις της φύσης κανείς παίκτης δεν έχει συμφέρον να παρεκλίνει μονόπλευρα από τις συστάσεις αυτές, (βλέπε Μηλολιδάκης (2009), Ορισμός 9.2.1). Δηλαδή, όταν η αναμενόμενη πληρωμή ενός παίκτη μεγιστοποιείται όταν αυτός ακολουθεί τις συστάσεις της φύσης. Στο επιστημικό μοντέλο που εξετάζουμε, το γεγονός ότι το σύστημα πίστεων Π είναι ορθολογικό συνεπάγεται εξ ορισμού την ύπαρξη της κοινής γνώσης του ορθολογισμού ή ισοδύναμα ότι όλοι οι τύποι όλων των παικτών είναι ορθολογικοί. Αυτό σημαίνει ότι η στρατηγική κάθε τύπου κάθε παίκτη του δίνει τη μέγιστη αναμενόμενη πληρωμή απέναντι στην κατανομή πιθανότητας της κοινής prior.Έτσι, η κατανομή αυτή αποτελεί ένα σημείο συσχετισμένης ισορροπίας στο επαυξημένο παιχνίδι G_Π. Οδηγηθήκαμε, λοιπόν στο εξής συμπέρασμα:

[18]Όπως θα δούμε αμέσως, αυτό οφείλεται στην υπόθεση της univeral rationality.

Παρατήρηση 3.12. Έστω ένα παιχνίδι G και ένα ορθολογικό σύστημα πίστεων Π πάνω σε αυτό. Τότε η κοινή prior κατανομή αποτελεί *σημείο συσχετισμένης ισορροπίας* στο επαυξημένο παιχνίδι G_Π που προκύπτει από το G αν θεωρήσουμε σε αυτό ως σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη το σύνολο, όπου κάθε στρατηγική εμφανίζεται τόσες φορές όσοι και οι τύποι του παίκτη που την χρησιμοποιούν.

Δεσμεύοντας, τώρα, έναν τύπο του I στο G - έστω τον t_1^1 που παίζει την στρατηγική s_1 - έχουμε ότι η αναμενόμενη πληρωμή του τύπου αυτού είναι μια ορθολογική προσδοκία. Ισοδύναμα, όμως, αυτή είναι και η δεσμευμένη πληρωμή του παίκτη αυτού στο παιχνίδι G_Π αν αυτός παίξει την στρατηγική s_1^1 στο σημείο συσχετισμένης ισορροπίας που καθορίζει η κοινή prior. Έτσι, το πρόβλημα προσδιορισμού των ορθολογικών πληρωμών ανάγεται σε πρόβλημα προσδιορισμού των σημείων συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού G_Π και στη συνέχεια του υπολογισμού των δεσμευμένων πληρωμών των παικτών σε αυτά. Αυτός είναι και ένας πρώτος - μεταβατικός - χαρακτηρισμός των ορθολογικών προσδοκιών, και αποτελεί την βασική σκέψη για τα αποτελέσματα που ακολουθούν. Ξεκινώντας από το επαυξημένο παιχνίδι G_Π και τον χαρακτηρισμό αυτό, μπορούμε να κάνουμε συγχωνεύσεις και να οδηγηθούμε σε ένα ενδιάμεσο παιχνίδι χωρίς να χάσουμε την ιδιότητα της συσχετισμένης ισορροπίας και κατ' επέκταση του χαρακτηρισμού των ορθολογικών προσδοκιών. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 3.13. *Έστω ένα σύστημα πίστων Π σε ένα παιχνίδι n-παικτών G και π η κοινή prior. Έστω ακόμη, δύο τύποι t_i^1 και t_i^2 του παίκτη i που παίζουν την ίδια στρατηγική. Ορίζουμε ως Π' το σύστημα πίστεων που προκύπτει από συνένωση των τύπων t_i^1 και t_i^2 σε έναν κοινό τύπο u_i^0 με στρατηγική:*

$$s_i(u_i^0) := s_i(t_i^1) = s_i(t_i^2)$$

ως εξής:

(i) το σύνολο των τύπων του παίκτη i γίνεται το:

$$T_i' = T_i \cup \{u_i^0\} \setminus \{t_i^1, t_i^2\},$$

(ii) η κοινή prior π' στο Π' είναι η:

$$\begin{aligned} \pi'(u_i, t^{-i}) &:= \pi(u_i, t^{-i}), & \forall u_i \neq u_i^0 \\ \pi'(u_i^0, t^{-i}) &:= \pi(t_i^1, t^{-i}) + \pi(t_i^2, t^{-i}) \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, οι τύποι με ταυτόσημες στρατηγικές συνενώνονται σε έναν τύπο με την στρατηγική αυτή, και η prior κατανομή είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των τύπων αυτών πριν την συνένωση.

Λήμμα 3.14. *Για την διαδικασία συνένωσης τύπων που ορίσαμε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Το σύστημα πίστεων Π' είναι ορθολογικό.*
2. *Η συνένωση τύπων επηρεάζει μόνο τις προσδοκίες των τύπων που συνενώνονται και κανενός άλλου τύπου.*

Απόδειξη. 1. Πρέπει να δείξουμε ότι στο Π' η στρατηγική κάθε τύπου μεγιστοποιεί την αναμενόμενη πληρωμή του. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- για τους τύπους των υπολοίπων παικτών $j \neq i$: αυτό είναι άμεσο, καθώς οι (δεσμευμένες) αναμενόμενες πληρωμές τους είναι ίδιες στο Π' και στο Π,
- για τους τύπους $u_i \neq u_i^0$ του παίκτη i: ισχύει το ίδιο με πριν, καθώς ούτε εδώ αλλάζει κάτι,
- για τον τύπο u_i^0 του παίκτη i: τώρα πρέπει να δείξουμε ότι η δεσμευμένη πληρωμή του παίκτη i (δεδομένου ότι ο τύπος του είναι u_i^0 και ότι παίζει την στρατηγική που του υποδεικνύει ο τύπος του) είναι τουλάχιστον όσο η δεσμευμένη πληρωμή του, αν ο τύπος του είναι u_i^0 αλλά παίζει μια οποιαδήποτε άλλη στρατηγική r_i. Δηλαδή, με σύμβολα, πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\frac{\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(u_i^0, t^{-i}) h_i(s_i(u_i^0), t^{-i})}{\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(u_i^0, t^{-i})} \geq \frac{\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(u_i^0, t^{-i}) h_i(r_i, t^{-i})}{\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(u_i^0, t^{-i})}$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(u_i^0, t^{-i}) h_i(s_i(u_i^0), t^{-i}) \geq \sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(u_i^0, t^{-i}) h_i(r_i, t^{-i})$$

Ωστόσο, λόγω της CKR στο Π ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(t_i^1, t^{-i}) h_i(s_i(t_i^1), t^{-i}) \geq \sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(t_i^1, t^{-i}) h_i(r_i, t^{-i}) \tag{3.1}$$

$$\sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(t_i^2, t^{-i}) h_i(s_i(t_i^2), t^{-i}) \geq \sum_{t^{-i}\in T^{-i}} \pi'(t_i^2, t^{-i}) h_i(r_i, t^{-i}) \tag{3.2}$$

Προσθέτωντας τις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς των π' και $s_i(u_i^0)$ προκύπτει το ζητούμενο.

□

Με δεδομένη τη στρατηγική s_1 του παίκτη I που έχουμε δεσμεύσει[19], και κάνοντας κατάλληλες διαδοχικές συνενώσεις τύπων, μπορούμε να φτάσουμε σε ένα ορθολογικό σύστημα πίστεων - έστω Π'' - με τις εξής ιδιότητες:[20]

1. Κάθε στρατηγική $s \neq s_1$ παίζεται το πολύ από έναν τύπο του I. Ο τύπος αυτός έχει προκύψει από συνένωση όλων των τύπων που παίζουν αυτήν την στρατηγική στο παιχνίδι G_{Π},

2. Η στρατηγική s_1 παίζεται από 2 τύπους:

   (α′) των δεσμευμένο τύπο t_1^1 του I και

   (β′) έναν δεύτερο τύπο - έστω u_1^1 - ο οποίος προέκυψε αντίστοιχα, από συνένωση όλων των υπόλοιπων τύπων - εκτός του δεσμευμένου - που παίζουν την στρατηγική s_1[21].

Έτσι, αντιστοιχίζοντας κάθε τύπο του Π'' με την στρατηγική του προκύπτει το παιχνίδι $G_{\Pi''}$ το οποίο πιο εύστοχα - λόγω της δομής του - ονομάζεται G_{2s_1}. Τον ακριβή ορισμό του παιχνιδιού αυτού - που προέκυψε από την διαδικασία διαδοχικών συνενώσεων που μόλις περιγράψαμε - δίνουμε στην συνέχεια:

Ορισμός 3.15. *Ορίζουμε το παιχνίδι G_{2s_1} ως το παιχνίδι που προκύπτει από το G_{Π} ως εξής:*

(i) για κάθε στρατηγική $s' \neq s_1$ του αρχικού παιχνιδιού G, συνενώνουμε όλα τα αντίγραφά της σε ένα,

(ii) για την στρατηγική s_1 κρατάμε δύο αντίγραφα: ένα αυτό του τύπου που έχουμε δεσμεύσει και ένα δεύτερο στο οποίο συνενώνουμε όλα τα υπόλοιπα αντίγραφά της.

Όπως είδαμε, λοιπόν, από την διαδικασία των συνενώσεων φτάνουμε σε ένα σύστημα πίστεων Π'' και μια κοινή prior κατανομή π''. Το παιχνίδι G_{2s_1} είναι σε όλα ίδιο με το G εκτός από το ότι η στρατηγική s_1 εμφανίζεται δύο φορές, έστω s_1^1 και s_2^1. Κάθε τύπος στο Π'' αντιστοιχεί σε μία στρατηγική στο G_{2s_1}. Έτσι, η κατανομή π'' επάγει μια κατανομή πιθανότητας ρ πάνω στο σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων του G_{2s_1}, αποδίδοντας μηδενική πιθανότητα σε όσες καταστάσεις δεν εμφανίζονται στο Π''. Για την κατανομή ρ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

[19]Για την ακρίβεια θυμίζουμε ότι έχουμε δεσμεύσει έναν τύπο, έστω τον t_1^1 του I που παίζει την στρατηγική s_1^1.

[20]Το ότι το σύστημα πίστεων Π'' που προκύπτει είναι ορθολογικό, αποδεικνύεται άμεσα με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του Λήμματος 3.13.

[21]Τι συμβαίνει όμως, αν κανένας άλλος τύπος δεν παίζει την s_1· Την περίπτωση αυτή θα αντιμετωπίσουμε χωριστά στη συνέχεια (βλ. Παρατήρηση 3.9.3), διαπιστώνοντας ότι η παραπάνω κατασκευή παραμένει δυνατή.

Λήμμα 3.16. *Η κατανομή ρ είναι σημείο συσχετισμένης ισορροπίας στο παιχνίδι G_{2s_1}.*

Απόδειξη. Επειδή το σύστημα πίστεων Π'' είναι ορθολογικό, η προσδοκία κάθε τύπου κάτω από την προδιαγεγραμμένη στρατηγική του θα είναι τουλάχιστον ίση με την προσδοκία του αν παίζει μια οποιαδήποτε άλλη στρατηγική. Ισοδύναμα, κάθε στρατηγική στο παιχνίδι G_{2s_1} η οποία παίζεται με θετική πιθανότητα εξασφαλίζει στον παίκτη που την ακολουθεί μεγαλύτερη (ή ίση) δεσμευμένη αναμενόμενη πληρωμή κάτω από την κατανομή ρ από κάθε άλλη στρατηγική. Συνεπώς, η κατανομή ρ είναι σημείο συσχετισμένης ισορροπίας. □

Αντίστροφα, με δεδομένη την κατανομή ρ μπορούμε να ορίσουμε ένα σύστημα πίστεων B πάνω στο G ως εξής: οι τύποι του παίκτη i στο B είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με εκείνες τις στρατηγικές του στο G_{2s_1} στις οποίες η ρ αποδίδει θετική πιθανότητα. Ακολούθως, η πίστη κάθε τύπου ενός παίκτη είναι η δεσμευμένη της ρ δεδομένης της στρατηγικής που αντιστοιχεί σε αυτόν τον τύπο. Βασιζόμενοι σε αυτά, μπορούμε να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα της ενότητας, τον χαρακτηρισμό, δηλαδή, τον ορθολογικών προσδοκιών ενός παιχνιδιού.

Θεώρημα 3.17. *Σε ένα παιχνίδι G οι ορθολογικές προσδοκίες του παίκτη I ταυτίζονται με τις δεσμευμένες πληρωμές στα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας των παιχνιδιών*

$$G_{2s_1},\ \ s_1 \in S_1,$$

όπου S_1 το σύνολο στρατηγικών του παίκτη I.

Απόδειξη. Έστω α η προσδοκία του τύπου t_1^1 (αρά και του u_1^1) στο Π''. Σύμφωνα με τα Λήμματα 3.6.1 και 3.8, η προσδοκία α αποτελεί δεσμευμένη πληρωμή στο σημείο συσχετισμένης ισορροπίας ρ του G_{2s_1}. Αυτό αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.

Για το αντίστροφο, έστω μια στρατηγική s_1 στο επαυξημένο παιχνίδι G_{2s_1} και έστω β η δεσμευμένη πληρωμή της s_1 στο σημείο συσχετισμένης ισορροπίας ρ του παιχνιδιού G_{2s_1}. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα πίστεων B είναι ορθολογικό. Αυτό προκύπτει άμεσα από το ότι η κατανομή ρ είναι μια κοινή prior για το B κάθως και ότι το γεγονός ότι η ρ είναι σημείο συσχετισμένης ισορροπίας στο G_{2s_1} ισοδυναμεί με το την ύπαρξη κοινής γνώσης του ορθολογισμού (CKR) στο B. □

Αν θεωρήσουμε την παραπάνω διαδικασία συνένωσης των στρατηγικών του παίκτη I αυτήν την φορά δεσμεύοντας ταυτόχρονα μία φορά για κάθε του στρατηγική οδηγούμαστε στο παιχνίδι $2G$. Αυτό, δηλαδή είναι το ίδιο με το G με την διαφορά ότι κάθε στρατηγική του παίκτη I εμφανίζεται δύο φορές. Με βάση το παιχνίδι αυτό, έχουμε την ακόλουθη ισοδύναμη έκφραση του Θεωρήματος 3.17:

Θεώρημα 3.17′. *Σε ένα παιχνίδι G οι ορθολογικές προσδοκίες του παίκτη I ταυτίζονται με τις δεσμευμένες πληρωμές στα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού $2G$.*

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση του χαρακτηρισμού των ορθολογικών προσδοκιών με δύο παρατηρήσεις, που ίσως έχουν ήδη γίνει αντιληπτές ή έμμεσα αναφερθεί:

Παρατήρηση 3.18. 1. Τα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού $2G$ - και γενικότερα των επαυξημένων παιχνιδιών - δεν προκύπτουν «διπλασιάζοντας» τα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας του παιχνιδιού G. Η διαδικασία του διπλασιασμού επηρεάζει τα σημεία συσχετισμένης ισορροπίας κατά μη τετριμμένο τρόπο. Αντίθετα, κάθε σημείο συσχετισμένης ισορροπίας του διπλασιασμένου παιχνιδιού $2G$, οδηγεί μέσα από την διαδικασία της συνένωσης που περιγράφηκε παραπάνω σε ένα σημείο συσχετισμένης ισορροπίας του αρχικού παιχνιδιού G. Είναι άμεσο, μάλιστα, ότι η αναμενόμενη πληρωμή ενός παίκτη στα δυο αυτά σημεία είναι ίση.

2. Ο υπολογισμός των σημείων συσχετισμένης ισορροπίας ενός παιχνιδιού μπορεί να γίνει με ακρίβεια μέσω της επίλυσης ενός πεπερασμένου συστήματος ανισώσεων. Έτσι, οι ορθολογικές προσδοκίες προσδιορίζονται πλήρως σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα.

3. Η προηγούμενη κατασκευή βασίστηκε στο ενδιάμεσο παιχνίδι G_{2s_1}, όπου η στρατηγική s_1 εμφανίζεται δύο φορές (π.χ. σε ένα διπινακοπαιχνίδι αυτό θα σήμαινε ότι θα επαναλαμβάνεται δύο φορές η γραμμή s_1). Την πρώτη φορά ως δεσμευμένη (λόγω της δέσμευσης του αντίστοιχου τύπου του παίκτη) και τη δεύτερη φορά λόγω της συνένωσης όλων των άλλων γραμμών που παιζόταν η s_1 στο G_Π. Τι γίνεται λοιπόν αν στο σύστημα πίστεων Π η s_1 εμφανίζεται ακριβώς μία φορά (στη γραμμή που δεσμεύσαμε); Τότε και πάλι μπορούμε να οδηγηθούμε στο G_{2s_1}, με τη δεύτερη γραμμή της s_1 να δίνει μηδενικό βάρος πιθανότητας σε κάθε στήλη. Αλλά το Θεώρημα λέει κάτι άλλο: ότι *για κάθε* ορθολογικό σύστημα πίστεων Π οι ορθολογικά αναμενόμενες πληρωμές του παίκτη I (και κάθε παίκτη) είναι δεσμευμένες πληρωμές σημείου συσχετισμένης ισορροπίας του G_{2s_1} και αντιστρόφως. Αυτό είναι ακριβές επομένως ανεξάρτητα από το αν για κάποιο *συγκεκριμένο* ορθολογικό σύστημα πίστεων ο δεσμευμένος τύπος ενός παίκτη είναι ο μόνος που παίζει τη συγκεκριμένη στρατηγική.

3.4 Ορθολογικές προσδοκίες σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, έχουμε διαπιστώσει, ότι γενικά οι ορθολογικές προσδοκίες εξαρτώνονται από την συγκεκριμένη περίσταση στην οποία βρίσκεται κάθε φορά ένα παιχνίδι. Ωστόσο, όπως θα δούμε, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των παιχνιδιών 2-παικτών 0-αθροίσματος μας επιτρέπουν να αποδείξουμε ότι στα παιχνίδια αυτά, οι ορθολογικές προσδοκίες είναι ανεξάρτητες της περίστασης του παιχνιδιού και ίσες με τη σαφή λύση του, δηλαδή με την τιμή του, όπως αυτή δίνεται από το θεώρημα minimax[22].

Μάλιστα όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα, σε παιχνίδια 2-παικτών μη μηδενικού αθροίσματος μπορούν να υπάρχουν αντιφατικές προσδοκίες ακόμα και σε ορθολογικά συστήματα πίστεων.

Παράδειγμα 3.4. Aumann & Dreze (2008). Έστω το παιχνίδι Chicken που δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

	A	Δ
Π	$6, 6$	$2, 7$
K	$7, 2$	$0, 0$

Σχημα 3.1: Το παιχνίδι Chicken

Το παιχνίδι Chicken έχει 3 σημεία ισορροπίας Nash: δύο σε καθαρές στρατηγικές με πληρωμές $(7, 2)$ και $(2, 7)$ και ένα σε μεικτές με πληρωμές $(4\,{}^2\!/\!_3, 4\,{}^2\!/\!_3)$. Θεωρούμε, τώρα, την ακόλουθη περίσταση του παιχνιδιού.

Έστω ότι κάθε παίκτης έχει δύο τύπους και ότι υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των στρατηγικών και των τύπων των δύο παικτών. Επίσης, έστω μια κοινή prior κατανομή πάνω στο παιχνίδι - Σχήμα 2(Α′) - από όπου προκύπτουν οι πίστεις (θεωρίες) των τύπων του παίκτη I (γραμμές) και του παίκτη II (στήλες) ως οι δεσμευμένες της κοινής prior δεδομένου του τύπου τους - Σχήματα 2(Β′) & 2(Γ′).

Δηλαδή στην συγκεκριμένη περίσταση του παιχνιδιού υπάρχει κοινή prior και όπως εύκολα φαίνεται υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού (κάθε τύπος κάθε παίκτη μεγιστοποιεί την πληρωμή του σύμφωνα με την πίστη του). Για παράδειγμα, ο τύπος Π του παίκτη I είναι ορθολογικός καθώς παίζοντας την στρατηγική Π που προδιαγράφει ο τύπος του αναμένει πληρωμή ίση με: $\frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 4$. Αντίθετα αν επιλέξει την στρατηγική K η αναμενόμενη

[22] Αν δεν περιοριστούμε σε ορθολογικές προσδοκίες, δηλαδή αν δεν θεωρήσουμε ότι υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού (CKR) και κοινή prior, τότε η παραπάνω ιδιότητα δεν είναι αληθής. Στην περίπτωση αυτή οι προσδοκίες των παικτών μπορούν να είναι οτιδήποτε ανάμεσα στην ελάχιστη και την μέγιστη πληρωμή τους, Aumann & Dreze (2008).

	A	Δ
Π	7/22	7/22
K	7/22	1/22

(α΄) Η κοινή prior

	A	Δ
Π	1/2	1/2
K	7/8	1/8

(β΄) Η θεωρία του Ι

	A	Δ
Π	1/2	7/8
K	1/2	1/8

(γ΄) Η θεωρία του ΙΙ

Σχημα 3.2: Το σύστημα πίστεων Π_1

πληρωμή του είναι μικρότερη καθώς ισούται με: $\frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3.5$. Αντίστοιχα επιβεβαιώνουμε ότι όλοι οι τύποι των παικτών είναι ορθολογικοί και άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι το σύστημα πίστεων που ορίσαμε είναι ορθολογικό.

Όπως βλέπουμε η αναμενόμενη πληρωμή του τύπου K του παίκτη Ι είναι ίση με:

$$\frac{7}{8} \cdot 7 + \frac{1}{8} \cdot 0 = \frac{49}{8} = 6\,{}^1\!/_8.$$

Ωστόσο, αυτός ο τύπος του παίκτη Ι αποδίδει πιθανότητα 1/8 στο ενδεχόμενο ο τύπος του παίκτη Ι να είναι Δ, ο οποίος έχει επίσης αναμενόμενη πληρωμή ίση με $6\,{}^1\!/_8$. Δηλαδή, προκύπτει ένα ζεύγος αμοιβαία αποκλειόμενων προσδοκιών καθώς το διάνυσμα $(6\,{}^1\!/_8, 6\,{}^1\!/_8)$ δεν ανήκει στην κυρτή θήκη των δυνατών πληρωμών.

Αυτή η ασυμφωνία προκύπτει παρά τις συνθήκες της κοινής prior και ακόμα περισσότερο της κοινής γνώσης του ορθολογισμού που ικανοποιούνται στην συγκεκριμένη περίσταση του παιχνιδιού. Μάλιστα και οι δύο παίκτες γνωρίζουν αυτήν την αντίφαση και το ενδεχόμενο ότι πράγματι μπορεί να συμβεί αποτελεί κοινή γνώση. Ο λόγος που δημιουργείται δεν είναι η έλλειψη ορθολογισμού αλλά οι διαφορετικές εκτιμήσεις των παικτών που είναι συνηθισμένο να υπάρχουν σε περιπτώσεις με ιδιωτική πληροφόρηση, όπως αυτή που εξετάζουμε.

Μια διαφορετική περίσταση του παιχνιδιού δίνεται στη συνέχεια:

	A	Δ
Π	1/3	1/3
K	1/3	0

(α΄) Η κοινή prior π_2

	A	Δ
Π	1/2	1/2
K	1	0

(β΄) Η θεωρία του Ι

	A	Δ
Π	1/2	1
K	1/2	0

(γ΄) Η θεωρία του ΙΙ

Σχημα 3.3: Το σύστημα πίστεων Π_2

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι και το σύστημα πίστεων Π_2 είναι ορθολογικό, δηλαδή έχει μια κοινή prior - την π_2 - και όλοι οι τύποι όλων των παικτών είναι ορθολογικοί. Σε αυτήν την περίσταση είναι κοινή γνώση ότι η έκβαση (K, Δ) είναι αδύνατη[23]. Έτσι, ο τύπος K του παίκτη I αναμένει πληρωμή 7 και γνωρίζει ότι παίκτης II έχει τύπο A με αναμενόμενη πληρωμή ίση με 4. Ωστόσο, και πάλι το διάνυσμα πληρωμών $(7, 4)$ είναι αδύνατο. Έτσι, παρόλο που δεν υπάρχει καμία έλλειψη ορθολογισμού στο σύστημα πίστεων, παρατηρούμε ότι μπορούν και πάλι να προκύψουν αμοιβαία αποκλειόμενες προσδοκίες.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, η ασυμφωνία δεν μπορεί να προκύψει σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος. Για να το αποδείξουμε αυτό παρατηρούμε πρώτα το εξής.

Πρόταση 3.19. *Αν η πληρωμή του παίκτη I σε κάθε σημείο συσχετισμένης ισορροπίας είναι το επίπεδο ασφαλείας του - έστω v - τότε το επίπεδο ασφαλείας του είναι και η μόνη ορθολογική προσδοκία του.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την ιδιότητα (2) κάθε ορθολογική προσδοκία είναι $\geq v$. Έστω α μια ορθολογική προσδοκία $> v$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.16 η α θα είναι μια δεσμευμένη πληρωμή του I σε κάποιο σημείο συσχετισμένης ισορροπίας ϱ του διπλασιασμένου παιχνιδιού $2G$. Συνεπώς, η αναμενόμενη πληρωμή του I που αντιστοιχεί στο ϱ θα είναι $> v$, καθώς προκύπτει ως μέση τιμή των δεσμευμένων πληρωμών, κάθε μία από τις οποίες είναι $\geq v$ και μία (τουλάχιστον) - ή α - είναι γνήσια μεγαλύτερη από v. Τότε, όμως, η πληρωμή του I που αντιστοιχεί στο σημείο συσχετισμένης ισορροπίας ϱ' του G, το οποίο προκύπτει από την συνένωση των διπλασιασμένων στρατηγικών, θα είναι ίση με αυτή στο ϱ και άρα μεγαλύτερη από v, κάτι που είναι αντίφαση με την υπόθεση. □

Με την βοήθεια της παραπάνω πρότασης είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα που έχουμε προαναφέρει.

Θεώρημα 3.20. *Σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος η μόνη ορθολογική προσδοκία είναι η τιμή του παιχνιδιού.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι σε παιχνίδια 2-παικτών 0-αθροίσματος η αναμενόμενη πληρωμή σε κάθε σημείο συσχετισμένης ισορροπίας είναι η τιμή του παιχνιδιού, (βλέπε Aumann (1974), Section 2).Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από την προηγούμενη πρόταση. □

Παρατήρηση 3.21. Το Θεώρημα 3.19 αποδεικνύεται διαισθητικά ως εξής: Έστω G ένα παιχνίδι 2-παικτών 0-αθροίσματος όπου υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού και κοινή prior και έστω v η τιμή του. Ο παίκτης I διαθέτει μια μεικτή στρατηγική που του εξασφαλίζει πληρωμή $\geq v$ απέναντι σε οποιαδήποτε μεικτή στρατηγική του II. Αυτό συνεπάγεται - θεωρώντας τις μεικτές στρατηγικές του II ως τις δυνατές πίστεις τύπων του I - ότι κάθε τύπος του I διαθέτει μια καθαρή στρατηγική που του εξασφαλίζει αναμενόμενη πληρωμή

[23] Η έκβαση αυτή αντιστοιχεί στη σύγκρουση των δύο παικτών.

$\geq v$. Λόγω της κοινής γνώσης του ορθολογισμού ή ισοδύναμα λόγω του ότι κάθε τύπος κάθε παίκτη είναι ορθολογικός, συμπεραίνουμε ότι κάθε τύπος του I αναμένει πληρωμή $\geq v$. Με την ίδια λογική κάθε τύπος του II αναμένει πληρωμή $\geq -v$. Άρα, η μέση πληρωμή του I κάτω από την κοινή prior θα είναι $\geq v$ και ομοίως, η μέση πληρωμή του II κάτω από την κοινή prior θα είναι $\geq -v$. Παρατηρούμε ότι αυτές οι μέσες πληρωμές δεν εξαρτώνται πλέον από κάποια συγκεκριμένη περίσταση αλλά είναι οι ex ante πληρωμές κάτω από την CP. Άρα, υποχρεωτικά θα αθροίζουν στο 0. Τώρα, αν υπάρχει ένας τύπος του I που αναμένει πληρωμή αυστηρά μεγαλύτερη από v, τότε και η μέση πληρωμή του κάτω από την κοινή prior θα είναι $> v$. Αυτό, όμως, έρχεται σε αντίφαση με το 0-άθροισμα του παιχνιδιού, αφού ο II έχει μέση πληρωμή $\geq -v$.

Παρατηρήστε ότι ο συλλογισμός της παραπάνω απόδειξης δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε παιχνίδια μη 0-αθροίσματος. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.4, σε τέτοια παιχνίδια είναι αντίθετα δυνατό να υπάρχουν ταυτόχρονα αμοιβαία αποκλειόμενες ορθολογικές προσδοκίες. Η διαφορά οφείλεται στο ότι σε παιχνίδια 0-αθροίσματος το γεγονός ότι οι προσδοκίες πρέπει να αθροίζουν στο 0 δεν είναι θέμα γνώσης αλλά κάτι αντικειμενικό που συνοδεύει τη δομή του παιχνιδιού. Δηλαδή, η αντίφαση εδώ - και κατά συνέπεια το ζητούμενο αποτέλεσμα - προκύπτει από το ότι η ασυνέπεια είναι γενική (global) και όχι τοπική (local) όπως στην περίπτωση του Παραδείγματος 3.4 (και γενικά στην περίπτωση παιχνιδιών μη 0-αθροίσματος).

Κεφάλαιο 4

Προς τα πίσω επαγωγή σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης

4.1 Εισαγωγή

Αντίθετα με τις έννοιες που συζητήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια - σημείο συσχετισμένης ισορροπίας, ορθολογικές προσδοκίες - και οι οποίες κάτω από μια αναλυτική και όχι κανονιστική προσέγγιση έχουν ως στόχο να γενικεύσουν το σημείο ισορροπίας Nash, στην συνέχεια θα στρέψουμε την προσοχή μας, σε συγκεκριμένες κατηγορίες παιχνιδιών, στις οποίες θα αναζητήσουμε τρόπους για να εντοπίσουμε τις *καλύτερες* λύσεις, δηλαδή θα αναζητήσουμε έννοιες που εκλεπτύνουν το σημείο ισορροπίας Nash.

Μια βασική κατηγορία παιχνιδιών με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που θα μας απασχολήσει σε όσα ακολουθούν, είναι αυτή των παιχνιδιών τέλειας πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή. Σε τέτοια παιχνίδια, κάθε παίκτης γνωρίζει ακριβώς σε ποια κορυφή βρίσκεται, όλες τις κινήσεις που οδήγησαν σε αυτήν την κορυφή καθώς και όλες τις κορυφές που ακολουθούν. Όλα τα σύνολα πληροφόρησης είναι *μονοσύνολα*, και οι κινήσεις των παικτών λαμβάνουν χώρα διαδοχικά.

Το βασικό ερώτημα που τίθεται είναι εάν και κατά πόσο η ιδιαίτερη μορφή των παιχνιδιών αυτών μπορεί να μας βοηθήσει να *διαλέξουμε* αυτό που διαθέτει τα πιο ευνοϊκά χαρακτηριστικά στις περιπτώσεις που υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας[1]. Ως ένα δυνατό εργαλείο για την επίλυσή τους, προβάλλει η προς τα πίσω επαγωγή (*backward induction*), μια από τις κεντρικότερες και πιο γερά θεμελιωμένες μεθόδους στην Επιχειρησιακή Έρευνα και ειδικότερα στη Θεωρία Παιγνίων. Η λογική της, βασίζεται στο ότι ο τελευταίος

[1]Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας Nash και εμείς να θέλουμε να διαλέξουμε αυτό με την μεγαλύτερη πληρωμή για την κοινωνία ή αυτό που παρουσιάζει την μεγαλύτερη σταθερότητα ως λύση.

παίκτης που θα κληθεί να αποφασίσει θα παίξει έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του. Έτσι, με δεδομένη την κίνηση του τελευταίου παίκτη, ο προτελευταίος μπορεί εύκολα να αποφασίσει ποια ενέργειά μεγιστοποιεί την δικιά του πληρωμή κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στην αρχή του παιχνιδιού.

Όσο άμεση και συμβατή με την λογική είναι η παραπάνω θεώρηση της προς τα πίσω επαγωγής, στην πράξη φαίνεται να υπάρχουν ορισμένα βασικά προβλήματα στην εφαρμογή της.

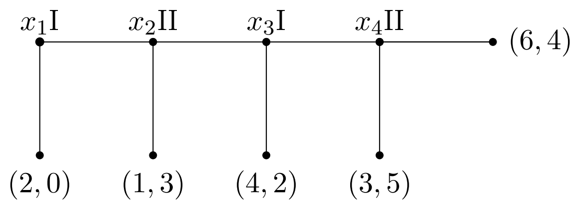
1. Πρώτον, υπάρχουν συγκεκριμένα παιχνίδια όπου τα θεωρητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής δεν συμφωνούν ούτε κατά προσέγγιση με τα πρακτικά αποτελέσμτα που προκύπτουν από τη διεξαγωγή πειραμάτων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας με το οποίο θα ασχοληθούμε στην συνέχεια.
2. Το δεύτερο πρόβλημα είναι ότι δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο, ποιες επιστημικές συνθήκες - δηλαδή συνθήκες που αφορούν τον ορθολογισμό και τις πίστεις των παικτών - δικαιολογούν την χρησιμοποίησή της μεθόδου. Διότι είναι σαφές, ότι ο συλλογισμός που υποδεικνύει η προς τα πίσω επαγωγή, βασίζεται στο ότι κάθε παίκτης θεωρεί ότι οι άλλοι θα παίξουν ορθολογικά, θεωρεί ότι οι άλλοι θεωρούν ότι ο ίδιος θα παίξει ορθολογικά κ.ο.κ. μέχρι το άπειρο. Θα δούμε και εδώ ότι η κοινή γνώση του ορθολογισμού - και όχι η αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού οποιασδήποτε τάξης $n \in \mathbb{N}$ - είναι η κατάλληλη αυστηρή συνθήκη κάτω από την οποία μπορεί απρόσκοπτα να εφαρμοστεί η μέθοδος.
3. Τέλος, το τρίτο πρόβλημα αφορά την έννοια της υποθετικής γνώσης και τον τρόπο ορισμού του ορθολογισμού. Με το πρόβλημα αυτό ασχοληθήκαμε στο Κεφάλαιο 2, ωστόσο θα αναφερθούμε ξανά και στη συνέχεια. Τα τρία αυτά προβλήματα, όπως είναι φανερό, συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους και η λύση τους ενός επηρεάζει και την λύση των υπολοίπων.

4.2 Κοινή γνώση του ορθολογισμού και προς τα πίσω επαγωγή

4.2.1 Το παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας

Ας δούμε με ένα παράδειγμα τι ακριβώς εννοούμε:

Παράδειγμα 4.1. Το παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας (centipede game) με 4 περιόδους.



Σχημα 4.1: Το παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας (με 4 περιόδους).

Στο παιχνίδι που δίνεται στο προηγούμενο σχήμα είναι γνωστό ότι σε κάθε σημείο ισορροπίας Nash ο πρώτος παίκτης I βγαίνει έξω με την πρώτη κίνηση. Αυτό προκύπτει ως εξής. Στον κόμβο x_4 ο παίκτης ΙΙ έχει σαφές συμφέρον να σταματήσει το παιχνίδι, δηλαδή να επιλέξει κάτω (κ) αντί δεξιά (δ). Ο Ι γνωρίζοντας αυτό το γεγονός, συγκρίνει μεταξύ των πληρωμών 4 (κ) και 3 (δ), εάν ποτέ βρεθεί στον κόμβο x_3 που ελέγχει, και επομένως θα επιλέξει να σταματήσει το παιχνίδι. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι ο ΙΙ θα επιλέξει (κ) στον κόμβο x_2 και τελικά ότι ο Ι θα επιλέξει (κ) στον κόμβο x_1.

Με άλλα λόγια, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση κάθε παίκτης έχει συμφέρον να παίξει κάτω αν και όποτε έρθει η σειρά του να παίξει. Δηλαδή, υιοθετώντας την παραπάνω συλλογιστική, που υποδεικνύει η μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής, και οι δύο παίκτες γνωρίζουν πλέον ότι ο Ι θα πάει κάτω στον κόμβο x_1 και έτσι το παιχνίδι θα τελειώσει άμεσα χωρίς να παίξει ο ΙΙ. Αυτό, όπως μόλις είπαμε, βασίστηκε στο ότι όταν ο Ι εξέταζε τις επιλογές του στον κόμβο x_1 θεώρησε ως δεδομένο ότι αν πάει δεξιά (δ) - δηλαδή αν επιλέξει να συνεχίσει το παιχνίδι - ο ΙΙ θα σταματήσει το παιχνίδι στον κόμβο x_2. Ακριβώς στο σημείο αυτό εισέρχεται η έννοια της υποθετικής γνώσης στο μοντέλο επίλυσης και δημιουργεί ένα βασικό πρόβλημα.

Αν συμβεί τελικά ο Ι να πάει δεξιά στον κόμβο x_1 δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο για τον ΙΙ πως να ερμηνεύσει αυτήν την κίνηση. Διότι πλέον, το επιχείρημα ότι τον συμφέρει αδιαμφισβήτητα να πάει κάτω (κ) στον κόμβο x_2 φαίνεται να καταρρέει, καθώς ο Ι δεν έκανε αυτό που αναμενόταν στον κόμβο x_1 και άρα κανείς δεν μπορεί να ξέρει αν θα κάνει το ίδιο και στον κόμβο x_3.

Έτσι, αν επανέλθουμε στην αρχή του παιχνιδιού και συγκεκριμένα την στιγμή που ο ΙΙ επιλέγει την στρατηγική του[2], αναρωτιόμαστε αν θα πρέπει να την αλλάξει. Αυτό, διότι σε περίπτωση που έρθει η σειρά του να παίξει σημαίνει ότι ο αρχικός συλλογισμός, που βασίστηκε στην μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής και τον οδήγησε στην απόφαση να σταματήσει το παιχνίδι αν και όποτε ερχόταν η σειρά του, είναι πλέον αβάσιμος.

4.2.2 Αποτελέσματα

Στο εξής θεωρούμε ένα παιχνίδι τέλειας πληροφόρησης, n-παικτών, για το οποίο υποθέτουμε επιπλέον ότι βρίσκεται στη *γενική θέση* (*general position*), δηλαδή ότι οι πληρωμές κάθε παίκτη σε διαφορετικές τερματικές κορυφές του δένδρου του παιχνιδιού είναι επίσης διαφορετικές. Το ερώτημα που τίθεται, λοιπόν, είναι κάτω από ποιες επιστημικές συνθήκες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού. Δηλαδή, τι πρέπει να γνωρίζουν οι παίκτες σχετικά με τον ορθολογισμό των άλλων παικτών ώστε τελικά όταν επιλέγουν την στρατηγική τους να μπορούν να βασιστούν στην προς τα πίσω επαγωγή; Η απάντηση δίνεται από τον Aumann (1995) στο θεώρημα που αποδεικνύουμε στην συνέχεια. Πρώτα, όμως, δίνονται κάποιοι ορισμοί που χρησιμεύουν στην μαθηματική έκφραση των εννοιών που αναφέραμε παραπάνω.

Ορισμός 4.1. *(Α΄) Ορίζουμε ως επαγωγική επιλογή b^v στην κορυφή v του παίκτη i την επιλογή εκείνη του i που μεγιστοποιεί την (δεσμευμένη) πληρωμή του[3] όταν όλοι οι παίκτες κάνουν την επαγωγική επιλογή σε όλες τις κορυφές που ελέγχουν μετά την κορυφή v. Φυσικά, αν από την v έπονται μόνο τερματικές κορυφές, τότε η b^v είναι απλά η επιλογή που μεγιστοποιεί την πληρωμή του i.*

(Β΄) Ορίζουμε ως επαγωγικό αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα που προκύπτει εάν σε κάθε κορυφή γίνεται η επαγωγική επιλογή (από τον παίκτη που την ελέγχει).

Παρατηρούμε ότι κάτω από την υπόθεση ότι το παιχνίδι βρίσκεται στη *γενική θέση* το επαγωγικό αποτέλεσμα είναι μοναδικό. Έστω τώρα κατά τα γνωστά, μια κατάσταση του κόσμου t στην οποία αντιστοιχεί η στρατηγική κατάσταση $s(t)$ - καθορισμένη πλήρως από τον τύπο κάθε παίκτη - και ένα μοναδικό αποτέλεσμα. Θεωρούμε, επιπλέον το ενδεχόμενο I, το αποτέλεσμα να είναι το επαγωγικό, το οποίο μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε, δηλαδή:

$$I := \{t : \text{το αποτέλεσμα που δίνει η } s(t) \text{ είναι το επαγωγικό.}\}$$

[2]Θυμηθείτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να προγραμματίζει στην *αρχή* του παιχνιδιού ένα «ρομπότ» σε κάθε κόμβο που ελέγχει, με μια σαφή εντολή για το τι ακριβώς θα κάνει αν το παιχνίδι βρεθεί σε εκείνο τον κόμβο.

[3]Δηλαδή την πληρωμή του, δεδομένου ότι βρίσκεται στην κορυφή v. Βλέπε και Ορισμό 2.2).

Θυμίζουμε ότι ως δεσμευμένη πληρωμή ενός παίκτη i σε μια κορυφή v κάτω από την στρατηγική κατάσταση s - συμβολικά $h^v(s)$ - έχουμε ορίσει την πληρωμή στην οποία θα οδηγηθεί ο i αν ξεκινώντας από την v όλοι οι παίκτες ακολουθούν στο εξής τις οδηγίες της s, (βλέπε Ορισμός 2.2). Επίσης, αν ένας παίκτης είναι ορθολογικός σε κάθε κορυφή που ελέγχει, τότε ονομάζεται ορθολογικός, (βλέπε Ορισμός 2.3). Εδώ έχουμε κάνει διάκριση ανάμεσα σε διάφορες έννοιες ορθολογισμού. Θυμίζουμε, επιγραμματικά, ότι ένας παίκτης ονομάζεται ορθολογικός σε μια κορυφή v κατά:

(α′) την ισχυρή έννοια, αν γνωρίζει ότι δεν μπορεί να βελτιώσει την πληρωμή του.

(β′) την μπεϋζιανή έννοια, αν γνωρίζει ότι δεν μπορεί να βελτιώσει την αναμενόμενη πληρωμή του.

(γ′) ασθενή έννοια, αν δεν γνωρίζει μια στρατηγική - άλλη από αυτήν που χρησιμοποιεί - που να του αποφέρει καλύτερη πληρωμή.

Σε όσα ακολουθούν υποθέτουμε την ασθενή έννοια. Το αξιοσημείωτο είναι ότι στην γενική περίπτωση η ασθενής έννοια αρκεί για να αποδείξουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα που αφορούν την χρήση της μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής. Φυσικά, τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν αν υποτεθεί κάποια από τις δύο ισχυρότερες έννοιες. Αν και η μπεϋζιανή είναι διαισθητικά η πιο φυσική και άμεση, αποφεύγεται να χρησιμοποιείται καθώς προϋποθέτει την χρήση συστημάτων πίστεων με πίστεις που συνεχώς θα ανανεώνονται, τελεστές γνώσεις που θα εξαρτώνται από την ιστορία του παιχνιδιού και γενικά την χρήση πιθανοτήτων που κάνουν το μοντέλο δύσχρηστο. Αφού όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν προκύπτουν από την ασθενή έννοια (που έπεται από την μπεϋζιανή), η αποφυγή της γίνεται τελικά χωρίς επιπλέον κόστος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, (Aumann 1995), που μας δίνει μια ικανή συνθήκη για τη χρήση της μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής.

Θεώρημα 4.2. *Αν σε ένα παιχνίδι πλήρους πληροφόρησης υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού τότε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού θα είναι το επαγωγικό. Συμβολικά:*

$$CKR \subset I$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν σε μία κατάσταση του κόσμου t υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού τότε σε κάθε κόμβο γίνεται η επαγωγική επιλογή. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Έστω ένας κόμβος v που ελέγχει ο παίκτης i:

- Επαγωγική αρχή. Λόγω της κοινής γνώσης του ορθολογισμού σε κάθε κόμβο πριν τους τερματικούς οι παίκτες κάνουν την επαγωγική επιλογή (δηλαδή αυτή που μεγιστοποιεί την πληρωμή τους).

- Επαγωγική υπόθεση. Έστω ότι η επαγωγική επιλογή γίνεται σε κάθε κόμβο $w > v$ (δηλαδή σε κάθε κόμβο μετά τον v) στον οποίο υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού.
- Επαγωγικό βήμα. Από τον ορισμό της επαγωγικής επιλογής b^v είναι γνωστό ότι η b^v μεγιστοποιεί την δεσμευμένη πληρωμή του παίκτη που ελέγχει τον κόμβο v όταν από τον κόμβο αυτόν και μετά γίνεται η επαγωγική επιλογή. Και μάλιστα, κάτω από την υπόθεση της γενικής θέσης, αυτή είναι και η μοναδική επιλογή που το κάνει αυτό. Λόγω της κοινής γνώσης του ορθολογισμού, για τον παίκτη που ελέγχει τον κόμβο v ισχύει ακόμα ότι:
  1. είναι ορθολογικός στον κόμβο v,
  2. γνωρίζει ότι όλοι οι υπόλοιποι παίκτες είναι ορθολογικοί στους κόμβους μετά τον v και άρα ότι κάνουν την επαγωγική επιλογή στους κόμβους αυτούς.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι ο παίκτης που ελέγχει την κορυφή v θα κάνει και αυτός την επαγωγική επιλογή. Αυτό, αποδεικνύει το ζητούμενο ότι δηλαδή η κοινή γνώση του ορθολογισμού στην κατάσταση t οδηγεί στην επαγωγική επιλογή σε κάθε κόμβο v και άρα στο επαγωγικό αποτέλεσμα. Συμβολικά:

$$CKR \subset I$$

□

Είναι άμεσο να αναρωτηθεί κανείς αν το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο, δηλαδή αν ισχύει: $CKR = \emptyset$. Στην Πρόταση 2.11 αποδείξαμε ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή ότι η κοινή γνώση του ορθολογισμού είναι πράγματι εφικτή σε κάθε παιχνίδι πλήρους πληροφόρησης.

4.2.3 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Αυτό που μόλις αποδείξαμε, ότι δηλαδή η κοινή γνώση του ορθολογισμού συνεπάγεται το επαγωγικό αποτέλεσμα σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης, ίσως να μην είναι ξεκάθαρο ή να μην συμφωνεί απόλυτα με την διαίσθηση ορισμένων. Στη σχετική αρθογραφία[4] έχει γίνει διάλογος πάνω στο συγκεκριμένο θέμα και η παρακολούθησή του βοηθά στην σωστότερη κατανόηση των συγκεκριμένων εννοιών. Ακολουθούν ορισμένα βασικά σημεία του διαλόγου, που δευκρινίζουν τις βασικότερες πτυχές του αποτελέσματος που αποδείξαμε.

Κάθε παίκτης καθορίζει τη στρατηγική του πριν αρχίσει το παιχνίδι. Είναι χαρακτηριστική η προσέγγιση ότι οι παίκτες αποφασίζουν στην αρχή του παιχνιδιού το τι θα κάνουν σε κάθε κόμβο - εάν το παιχνίδι φτάσει στον κόμβο αυτό - και στην συνέχεια «φεύγουν» τοποθετώντας ένα ρομπότ σε κάθε κόμβο που ελέγχουν ώστε να εκτελέσει την στρατηγική τους. Έτσι, γεννιέται το ερώτημα ως προς τη χρονική στιγμή στην οποία κάποιος καλείται

[4]Βλέπε Binmore (1996), Aumann (1996) και Aumann (1998).

ορθολογικός. Δηλαδή αν ο ορθολογισμός αφορά έναν χαρακτηρισμό των παικτών στην αρχή του παιχιδιού ή στη συνέχεια.

Θυμίζουμε ότι ο ορθολογισμός ορίστηκε κατά κύριο λόγο με βάση τη δεσμευμένη πληρωμή από κάθε κόμβο και μετά. Δηλαδή, με δεδομένο ότι το παιχνίδι έφτασε στον συγκεκριμένο κόμβο, η κάθε επιλογή πρέπει να μεγιστοποιεί την πληρωμή του παίκτη που ελέγχει τον κόμβο από κει και πέρα. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι ακόμα και σε κόμβους που σύμφωνα με την «λογική»[5] δεν πρόκειται να φτάσει το παιχνίδι, οι παίκτες πρέπει και πάλι να πουν από πριν τι θα κάνουν αν για κάποιο λόγο το παιχνίδι έφτανε εκεί.

Ορισμένοι υποστηρίζουν (βλ. Binmore (1996)) ότι ένας παίκτης όταν καθορίζει την στρατηγική του θα πρέπει να λάβει υπόψη του ποια συμπεριφορά - ορθολογική ή όχι - θα οδηγούσε το παιχνίδι σε κόμβους που κάτω από την υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού θα ήταν αδύνατο. Δηλαδή, ουσιαστικά προτείνουν ότι ο παίκτης όταν σκέφτεται τι θα κάνει αν ποτέ το παιχνίδι φτάσει εκεί θα πρέπει να λάβει υπόψη του ότι για να γίνει αυτό κάποιος παίκτης θα πρέπει να μην είναι ορθολογικός. Συνεπώς δεν μπορεί να γνωρίζει και ποια θα είναι η συμπεριφορά του από κει και πέρα. Φαίνεται έτσι, να παγιδευόμαστε σε ένα κυκλικό επιχείρημα που κάνει αδύνατον τον ορισμό του ορθολογισμού, καθώς ο μόνος τρόπος για να βρούμε μια ορθολογική στρατηγική είναι να εξετάσουμε με ακρίβεια τι θα γίνει σε κόμβους που αν υπήρχε κοινή γνώση του ορθολογισμού δεν θα έφτανε ποτέ το παιχνίδι[6].

Η προσέγγιση που υποστηρίζει ο Aumann (1995) αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό αποδεικνύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα. Το βασικό του επιχείρημα είναι ότι από την στιγμή που υποθέσαμε την κοινή γνώση του ορθολογισμού, θα ήταν αντίφαση να λέμε ότι αν το παιχνίδι έφτανε σε έναν κόμβο που δεν περιμέναμε τότε δεν γίνεται να υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού. Την έχουμε υποθέσει και άρα υπάρχει σε κάθε κόμβο. Και κάτω από αυτήν την υπόθεση απέδειξε ότι το αποτέλεσμα θα είναι το επαγωγικό σε παιχνίδια πλήρους πληροφόρησης.

Άρα, λοιπόν, στο παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας για παράδειγμα, αν υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού ο πρώτος παίκτης θα σταματούσε στον πρώτο κόμβο (θα έπαιζε κάτω). Το έχουμε αποδείξει. Πως θα έπρεπε να σκεφτεί ο παίκτης που ελέγχει τον δεύτερο κόμβο, για το τι θα κάνει αν έρθει η σειρά του;

Κάθε παίκτης θα κάνει τις σκέψεις του γνωρίζοντας ότι ισχύει αυτή η υπόθεση. Θα ήταν ασύμβατο να πει κανείς εκ των προτέρων ότι *«αν φτάσουμε στον x κόμβο τότε παύω να θεωρώ ότι υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού από κει και πέρα»*. Αυτό είναι ισοδύναμο

[5] Δηλαδή σύμφωνα με τις επιστημικές υποθέσεις που κάναμε,

[6] Με απλά λόγια, το κρίσιμο σημείο είναι σχετικά με το πως θα αποφασίσουν οι παίκτες για την στρατηγική τους σε κόμβους που κάτω από την υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού το παιχνίδι δεν θα φτάσει.

με το να πει ότι η υπόθεση που έκανε, δεν ισχύει εκ των προτέρων. Σύμφωνα, λοιπόν, με την απόδειξη του προηγούμενο Θεωρήματος, ο κάθε παίκτης είναι βέβαιος ότι σε κάθε κόμβο θα γίνει η επαγωγική επιλογή. Κάτω από αυτήν την υπόθεση ο πρώτος παίκτης δεν θα παίξει ποτέ δεξιά. Και αν παίξει σημαίνει ότι δεν υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού και άρα προφανώς το παραπάνω αποτέλεσμα, αν εκ των υστέρων συμβεί αυτό, δεν ισχύει.

Η συζήτηση αυτή αφορά σε μεγάλο βαθμό τις έννοιες του υλικού (material) και του ουσιαστικού (substantive) ορθολογισμού. Ο Aumann (1996) αποδεικνύει ότι σε συγκεκριμένα παιχνίδια - όπως αυτό της σαρανταποδαρούσας - αρκεί ο πραγματικός ορθολογισμός, δηλαδή ο ορθολογισμός μόνο στους κόμβους που φτάνει το παιχνίδι, για να πάρουμε το επαγωγικό αποτέλεσμα. Σε γενικές γραμμές όμως κάτι τέτοιο δεν είναι αλήθεια. Η λύση ενός παιχνιδιού είναι στην γενικότητά της άρρηκτα συνδεδεμένη, με το τι θα συμβεί σε κάθε εναλλακτική περίπτωση (off path behaviour).

Η ισχύς του αποτελέσματος του Aumann (1995) δεν βρίσκεται στο ότι παρέχει την λύση σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης. Είναι γνωστό από πειράματα και από εμπειρικές μελέτες ότι οι παίκτες τέτοιων παιχνιδιών σε αρκετές περιπτώσεις δεν καταλήγουν στο επαγωγικό αποτέλεσμα[7]. Δύσκολα θα περιμέναμε κάποιος να δεχθεί την συμβουλή μας να βγει έξω από την πρώτη κίνηση και να χάσει την ευκαιρία για παραπάνω κέρδη. Είναι κάτι που δεν συμφωνεί με την διαίσθησή μας.

Εκεί, λοιπόν, όπου θα πρέπει να εντοπίσουμε την σημασία του παραπάνω αποτελέσματος είναι στο ότι καθορίζει την συνθήκη - την κοινή γνώση του ορθολογισμού - κάτω από την οποία θα πρκύψει το επαγωγικό αποτέλεσμα. Το μοντέλο του Aumann για μία ακόμα φορά δεν είναι κανονιστικό αλλά αναλυτικό. Δεν μας λέει τι πρέπει να κάνει κανείς, αλλά μας λέει ότι για να προκύψει αναμφίβολα το επαγωγικό αποτέλεσμα θα πρέπει να υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού (και όχι κάτι λιγότερο). Έχουμε δει, ότι η συνθήκη αυτή δύσκολα ισχύει σε πραγματικές καταστάσεις. Δεν μπορεί κανείς να την απαιτήσει ή να θεωρήσει αυθαίρετα ότι ισχύει. Είτε υπάρχει είτε όχι. Επίσης, έχουμε δει το πόσο ουσιαστικά διαφέρει από την απλή ύπαρξη του ορθολογισμού ή από την αμοιβαία γνώση του ορθολογισμού οποιασδήποτε τάξης $n \in \mathbb{N}$. Απόλυτα ορθολογικοί παίκτες μπορούν να οδηγηθούν σε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα από το επαγωγικό αν το γεγονός ότι είναι ορθολογικοί δεν αποτελεί μεταξύ του κοινή γνώση.

[7]Στο παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας δεν συνηθίζεται κανείς να βγαίνει έξω με την πρώτη κίνηση ειδικά όταν οι περίοδοι που ακολουθούν είναι πολλές. Βλέπε McKelvey & Palfrey (1992) και Nagel & Tang (1998)

Κεφάλαιο 5

Έννοιες ισορροπίας για παιχνίδια σε εκτεταμένη μορφή

5.1 Εισαγωγή

Η έννοια της ισορροπίας Nash αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο θεωρητικό εργαλείο στην επίλυση παιχνιδιών χωρίς συνεργασία και στη σχετική βιβλιογραφία θεωρείται από τους περισσότερους συγγραφείς ως βασική απαίτηση για στρατηγική ισορροπία. Παρόλα αυτά και με δεδομένο ότι σε πολλά παιχνίδια που ελκύουν το ενδιαφέρον υπάρχουν πολλαπλά σημεία Nash, γίνεται φανερό ότι το εργαλείο αυτό αδυνατεί συχνά να υποδείξει μια μονοσήμαντη λύση.

Στις περιπτώσεις αυτές προκύπτει η απαίτηση για τον καθορισμό επιπλέον κριτηρίων ή συνθηκών που να περιορίζουν τα σημεία ισορροπίας Nash και να βοηθούν στον αποτελεσματικό προσδιορισμό ενός μοναδικού σημείου επίλυσης. Πάνω σε αυτήν την κατεύθυνση αναπτύχθηκε ένας από τους πιο ενεργούς τομείς έρευνας της σύγχρονης Θεωρίας Παιγνίων που έχει επικεντρωθεί στον προσδιορισμό κριτηρίων τα οποία αφορούν μεμονωμένα τις κινήσεις κάθε παίκτη. Το αποτελέσμα είναι η πολύπλευρη θεωρία των εκλεπτύνσεων του σημείου ισορροπίας Nash, για την επίλυση παιχνιδιών χωρίς συνεργασία, με την οποία θα ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο.

Η ανάπτυξη του κεφαλαίου ακολουθεί τους F. Vega-Redondo (2003) και Van Damme (1987). Στόχος είναι η παρουσίαση του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας (sequential equilibrium) που προτάθηκε από τους Kreps & Wilson (1982) και αποτελεί ένα από τα κεντρικά αποτελέσματα στη θεωρία των εκλεπτύνσεων.Για μια πιο αναλυτική εισαγωγή στο αντικείμενο - το οποίο δεν εξαντλείται στο παρόν κεφάλαιο - παραπέμπουμε στους Fudenberg & Levine (1998).

5.2 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι δίνεται ένα παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή, χωρίς κινήσεις της φύσης. Συγκεκριμένα, έστω

$$\Gamma = \{N, (K_i)_{i=1}^n, (H_i)_{i=1}^n, (A(x))_{x\in K\setminus Z}, ([\pi_i(z)]_{i=1}^n)_{z\in Z}\}$$

όπου:

1. $N =$ το σύνολο των παικτών, $N = \{1, 2, \dots, n\}$,
2. $K_i =$ το σύνολο των κορυφών (κόμβων) που ελέγχει ο παίκτης $i, i \in N$. Υποθέτουμε ότι $|K_i| < \infty$, για $i \in N$.
3. $H_i =$ το σύνολο των συνόλων πληροφόρησης που διαθέτει ο παίκτης $i, i \in N$, δηλαδή

$$K_i = \bigcup_{h\in H_i} h, \text{ με } h \cap h' = \emptyset, \text{ αν } h \neq h' \text{για } h, h' \in H_i.$$

   Υπενθυμίζουμε ότι αν όλα τα σύνολα πληροφόρησης $h \in H := \bigcup_{i=1}^n H_i$ είναι *μονοσύνολα*, δηλαδή αν

$$|h| = 1, \qquad \forall h \in \bigcup_{i=1}^n H_i,$$

   τότε το παιχνίδι ονομάζεται *τέλειας πληροφόρησης*.
4. $A(x) =$ το σύνολο των δυνατών ενεργειών στον κόμβο x από τον παίκτη που τον ελέγχει. Γίνεται η υπόθεση ότι κάθε κόμβος που έπεται άμεσα από τον x συνδέεται με μία και μοναδική ενέργεια του συνόλου $A(x)$.
5. $Z =$ το σύνολο των τερματικών κορυφών, με

$$K := \left(\bigcup_{i=1}^n K_i\right) \bigcup Z,$$

   όπου K, το σύνολο όλων των κορυφών.
6. $[\pi_i(z)]_{i=1}^n =$ το $n-$διάστατο διάνυσμα πληρωμών των παικτών αν το παιχνίδι καταλήξει στην τερματική κορυφή z.

Γίνονται οι υποθέσεις, ότι όλοι οι παίκτες του παιχνιδιού γνωρίζουν πλήρως τη δομή του παιχνιδιού[1] καθώς και ότι υπάρχει τέλεια ανάμνηση (*perfect recall*), δηλαδή ότι οι παίκτες δεν ξεχνούν τις κινήσεις που έκαναν και γενικά ότι δεν ξεχνούν μεταγενέστερα οποιαδήποτε πληροφορία είχαν σε κάποιο προγενέστερο στάδιο του παιχνιδιού[2].

[1] Δηλαδή ότι γνωρίζουν πλήρως όλα τα παραπάνω στοιχεία που προσδιορίζουν το Γ.

[2] Αυτό σημαίνει ότι δύο μονοπάτια που περνούν από κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα πληροφόρησης ενός παίκτη δε μπορούν να έχουν δύο *μετέπειτα* κορυφές που να ανήκουν στο ίδιο σύνολο πληροφόρησης.

Παρατηρούμε ότι αφού ο παίκτης δε διαχωρίζει τις κορυφές ενός συνόλου πληροφόρησης, θα ισχύει $A(x) = A(x')$ για $x, x' \in h$ όπου $h \in H_i$. Για απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $A(h)$ στο εξής για να υποδηλώσουμε τις διαθέσιμες ενέργειες του παίκτη στο σύνολο πληροφόρησης h. Ας ορίσουμε τώρα $A_i := \bigcup_{h\in H_i} A(h)$, το σύνολο όλων των δυνατών ενεργειών του παίκτη i. Τότε ορίζουμε ως (καθαρή) *στρατηγική* του παίκτη i κάθε συνάρτηση:

$$\sigma_i : H_i \longrightarrow A_i$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sigma_i(h) \in A(h), \qquad \forall h \in H_i,$$

Δηλαδή, η ενέργεια που επιλέγεται σε κάθε σύνολο πληροφόρησης ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο των δυνατών ενεργειών $A(h)$ του συνόλου αυτού.

Είναι γνωστό από τη στοιχειώδη θεωρία ότι για να προχωρήσει η ανάλυση όσο αφορά τα ΣΣΙ του παιχνιδιού απαιτείται να εξετάσουμε *μεικτές* στρατηγικές, δηλαδή κατανομές πιθανότητας πάνω στις καθαρές στρατηγικές. Όμως, λόγω της υπόθεσης της τέλειας ανάμνησης, κατά την απαιτούμενη τυχαιοποίηση μπορούμε να περιοριστούμε σε μια απλούστερη κλάση στρατηγικών, τις συμπεριφορικές (Kuhn, 1953), που ο ορισμός τους ακολουθεί αμέσως μετά.

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό αυτό, επισημαίνουμε ότι οι καθαρές στρατηγικές που μόλις ορίσαμε είναι υποσύνολο των συμπεριφορικών (όπως φυσικά και των μεικτών που δεν θα χρησιμοποιήσουμε).

Ορισμός 5.1. *Για κάθε παίκτη $i \in N$, ως συμπεριφορική στρατηγική ορίζεται μια συνάρτηση γ_i τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} \gamma_i : H_i &\longrightarrow \mathbb{P}^{|A(h)|} \\ H_i \ni h &\longmapsto [\gamma_i(h)(\alpha)]_{\alpha\in A(h)} \in \mathbb{P}^{|A(h)|}, \end{aligned}$$

όπου $\mathbb{P}^{|A(h)|}$ το simplex πιθανοτήτων διάστασης $|A(h)|$, με την εξής ερμηνεία. Για κάθε $\alpha \in A(h)$, $\gamma_i(h)(\alpha)$ είναι η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης i επιλέγει την ενέργεια α όταν βρεθεί σε κάποιον από τους κόμβους x του συνόλου πληροφόρησης h.
Το σύνολο των συμπεριφορικών στρατηγικών του παίκτη i συμβολίζεται με Ψ_i, δηλαδή:

$$\Psi_i \equiv \{\gamma_i | \gamma_i : H_i \longrightarrow \mathbb{P}^{|A(h)|}\}.$$

Κατά τα γνωστά, συμβολίζουμε με:

$$\Psi \equiv \Psi_1 \times \Psi_2 \times \ldots \Psi_n$$

το σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *του παιχνιδιού σε συμπεριφορικές στρατηγικές.*

Σύμφωνα με το επιστημικό μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε, ένα σύστημα πίστεων ορίζεται ως εξής[3]:

Ορισμός 5.2. *Ως πίστη του παίκτη* i *που κινείται στο σύνολο πληροφόρησης* h *ορίζουμε μία συνάρτηση* μ*, τέτοια ώστε:*

$$\begin{array}{rcl} \mu : H_i & \longrightarrow & \mathbb{P}^{|h|} \\ H_i \ni h & \longmapsto & \mu(x)_{x \in h} \in \mathbb{P}^{|h|}, \end{array}$$

με την εξής ερμηνεία. Για κάθε σύνολο πληροφόρησης $h \in H_i$*, η συνάρτηση* μ *καθορίζει την υποκειμενική πιθανότητα* $\mu(x)$ *που αποδίδει σε κάθε κόμβο* $x \in h$ *ο* i*-παίκτης που κάνει την κίνηση στο σύνολο πληροφόρησης* h*.*

Ως σύστημα πίστεων ορίζεται το διάνυσμα:

$$\mu = \{\mu(x)_{x \in h}\}_{h \in H}.$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις παραπάνω έννοιες - δηλαδή τις συμπεριφορικές στρατηγικές και το σύστημα πίστεων - οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό που επισυνάπτει σε μια στρατηγική κατάσταση γ σε συμπεριφορικές στρατηγικές ένα σύστημα πίστεων μ.

Ορισμός 5.3. *Θα ονομάζουμε εκδοχή (assessment) την στρατηγική κατάσταση σε συμπεριφορικές στρατηγικές* γ *με προσαρτημένο ένα σύστημα πίστεων* μ *δηλαδή το ζεύγος* (μ, γ)*.*

Ο όρος εκδοχή (assessment) έχει εισαχθεί από τους Kreps & Wilson (1982). Οι παραπάνω έννοιες θα μας φανούν χρήσιμες στον ορισμό και την παραπέρα συζήτηση του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας. Πριν φτάσουμε όμως σε αυτό, μεσολαβούν οι έννοιες του *τέλειου ως προς τα υποπαιχνίδια σημείου ισορροπίας*[4] καθώς και του *ασθενώς τέλειου μπεϋζιανού σημείου ισορροπίας* που ορίζονται και παρουσιάζονται συνοπτικά στην ακόλουθη παράγραφο.Αν δεν γίνεται ρητή αναφορά για το αντίθετο, σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι υπάρχει κοινή γνώση του ορθολογισμού μεταξύ των παικτών.

---

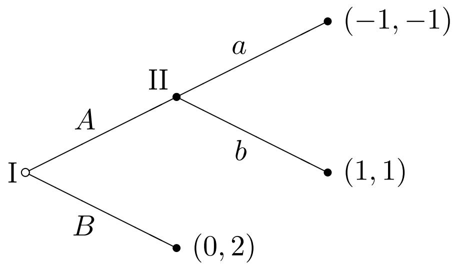
[3] Φυσικά, ο ορισμός αυτός δεν έρχεται σε αντίθεση με τα συστήματα πίστεων που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1. Αντίθετα είναι ένας ισοδύναμος ορισμός που προτιμάται σε παιχνίδια σε εκτεταμένη μορφή.

[4] Για μια εκτενή ανάλυση αυτής της έννοιας, βλέπε Myerson (1991).

5.3 Αναξιόπιστες απειλές: σημεία ισορροπίας τέλεια ως προς τα υποπαιχνίδια

Το σημείο ισορροπίας Nash αντιπροσωπεύει μια στρατηγικά σταθερή κατάσταση, υπό την έννοια ότι κανείς παίκτης δεν έχει κάποιο όφελος να παρεκκλίνει από αυτό μονόπλευρα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι στρατηγικές που επιλέγουν οι παίκτες - παρόλο που μπορεί να είναι βέλτιστες με την έννοια της στρατηγικής ισορροπίας Nash - περιλαμβάνουν μη βέλτιστη συμπεριφορά σε κόμβους που δεν θα φτάσει το παιχνίδι. Αυτό έχει ως συνέπεια, στις περιπτώσεις αυτές να θεωρήσουμε ότι το σημείο ισορροπίας υποστηρίζεται από «αναξιόπιστες απειλές», θέτοντας έτσι υπό αμφισβήτηση τη θεωρούμενη στρατηγική σταθερότητα που αυτό εκφράζει.

Μια απτή παρουσίαση των ιδεών αυτών δίνεται μέσα από το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή του ακόλουθου σχήματος:



Σχημα 5.1: Ένα παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή, με ένα «αναξιόπιστο» ΣΣΙ

Παράδειγμα 5.1. Το παιχνίδι αυτό έχει δύο σημεία ισορροπίας Nash: τα (B, a) και (A, b). Ωστόσο, μια πιο προσεκτική εξέτασή τους, αποκαλύπτει ότι έχουν ορισμένες ιδιότητες που τα διαφοροποιούν ριζικά.

Το σημείο (B, a) φαίνεται να μην είναι λογική - ή στρατηγικά σταθερή - λύση για τον εξής λόγο. Βασίζεται στην αναξιόπιστη απειλή από την πλευρά του II ότι θα επιλέξει την ενέργεια a αν ο παίκτης I του έδινε την ευκαιρία να κινηθεί, στην περίπτωση που αυτός δεν επέλεγε την στρατηγική του σημείου ισορροπίας - δηλαδή την B - αλλά την εναλλακτική του στρατηγική A. Παρόλα αυτά, σε αυτό το ΣΣΙ, ο παίκτης I διαλέγει τελικά όντως την στρατηγική B και έτσι η απειλή του II δεν πραγματοποιείται, με αποτέλεσμα η ενδεχόμενη ζημιά που θα προκαλούσε και στον ίδιο του τον εαυτό να είναι χωρίς συνέπειες. Είναι, όμως, οξύμωρο το ότι ο παίκτης I το κάνει αυτό μόνο και μόνο επειδή πιστεύει ότι ο II θα ήταν σε θέση να πραγματοποιήσει την απειλή αυτή. Κάτω από την υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Έτσι, τελικά, καταλήγουμε στο ότι η υπόθεση ότι ο II θα παίξει a αν του δωθεί η ευκαιρία να κινηθεί, δεν είναι πιστευτή και συνεπώς το σημείο ισορροπίας (B, a) δεν μπορεί να υποστηριχθεί ως λύση του παιχνιδιού.

Το σημείο (A, b) αντίθετα είναι πιστευτό και πλήρως αναμενόμενο καθώς προκύπτει από την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής, δηλαδή της επίλυσης διαδοχικών προβλημάτων μεγιστοποίησης ξεκινώντας από το μέλλον και καταλήγοντας στο παρόν[5]. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου εξασφαλίζει ότι αν μία απόφαση πρόκειται να παρθεί σε κάποιο σημείο του παιχνιδιού, τότε θα έχει λάβει υπόψη της όλες τις αποφάσεις που θα την ακολουθήσουν και θα αποτελούν βέλτιστες απαντήσεις σε αυτήν.

Σύμφωνα με τον Selten (1965), όποιο σημείο ισορροπίας Nash ικανοποιεί αυτήν την συνθήκη ονομάζεται τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια (συμβολικά Τ.Υ. σημείο ισορροπίας). Το όνομα που δίνεται σε αυτήν την έννοια εκλέπτυνσης, επισημαίνει και το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της: ο περιορισμός των στρατηγικών σε κάθε υποπαιχνίδι - ανεξάρτητα από το αν αυτό θα παιχθεί ή όχι - πρέπει να αποτελεί ΣΣΙ. Αποκλείει έτσι, τις λεγόμενες «αναξιόπιστες απειλές», καθώς απαιτεί από ορθολογικούς παίκτες να συμπεριφερθούν ανάλογα όπου και αν βρεθεί το παιχνίδι. Οι σκέψεις αυτές διατυπώνονται στην συνέχεια, με μαθηματική σαφήνεια.

Έστω $\Gamma = \{N, (K_i)_{i=1}^n, (H_i)_{i=1}^n, (A(x))_{x \in K \setminus Z}, ([\pi_i(z)]_{i=1}^n)_{z \in Z}\}$ ένα παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή, χωρίς κίνηση της φύσης και έστω $\hat{K} \subset K$ ένα υποσύνολο κόμβων που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Υπάρχει ένα σύνολο πληροφόρησης $\hat{h}$, τέτοιο ώστε το υποσύνολο $\hat{K}$ να περιέχει όλους του κόμβους στο $\hat{h}$ και *κάθε* άλλο κόμβο που ακολουθεί από αυτούς.
2. Κάθε σύνολο πληροφόρησης $h \in H$ ανήκει ολοκληρωτικά στο υποσύνολο $\hat{K}$ *ή* στο συμπλήρωμά του.

[5]Στην πραγματικότητα γνωρίζουμε ήδη από το Κεφάλαιο 4, ότι η κοινή γνώση του ορθολογισμού συνεπάγεται το επαγωγικό αποτέλεσμα.

Με δεδομένο ένα τέτοιο υποσύνολο $\hat{K}$, ορίζεται ένα σχετικό υποπαιχνίδι ως ακολούθως:

Ορισμός 5.4. *Έστω ένα παιχνίδι* Γ *σε εκτεταμένη μορφή και έστω ένα σύνολο* $\hat{K}$ *με τις παραπάνω ιδιότητες. Τότε, με βάση το* $\hat{K}$ *ορίζουμε το σχετικό υποπαιχνίδι:*

$$\hat{\Gamma} = \{N, (\hat{K}_i)_{i=1}^n, (H_i)_{i=1}^n, (\hat{A}(x))_{x\in\hat{K}\setminus\hat{Z}}, ([\hat{\pi}_i(z)]_{i=1}^n)_{z\in\hat{Z}}\}$$

ως ακολούθως:

1. $\hat{K}_i \equiv K_i \cap \hat{K}$, *για* $i = 1, 2, \ldots, n$ *και* $\hat{Z} \equiv Z \cap \hat{K}$,
2. $\forall x, x' \in \hat{K}$ *ισχύει ότι: ο κόμβος* x' *έπεται του κόμβου* x[6] *αν και μόνο αν αυτό συμβαίνει και στο αρχικό παιχνίδι,*
3. $\hat{H}_i \equiv \{h \in H_i : h \subset \hat{K}\}$ *για* $i = 1, 2, \ldots, n$
4. $\hat{A}(x) \equiv A(x)$, *για κάθε* $x \in \hat{K}\setminus\hat{Z}$,
5. $\hat{\pi}_i(z) \equiv \pi_i(z)$, *για κάθε* $z \in \hat{Z}$.

Αν επιπλέον το σύνολο πληροφόρησης $\hat{h}$ *που γεννά το υποπαιχνίδι* $\hat{\Gamma}$, *είναι μονοσύνολο, τότε το υποπαιχνίδι* $\hat{\Gamma}$ *ονομάζεται γνήσιο (proper)*[7]

Στη συνέχεια περιορίζουμε την προσοχή μας σε γνήσια υποπαιχνίδια[8]. Επειδή αυτά τα υποπαιχνίδια διαθέτουν την ίδια δομή με το αρχικό παιχνίδι, μπορούμε να δούμε ότι κάθε συμπεριφορική στρατηγική γ_i στο Γ παράγει μια συμπεριφορική στρατηγική $\gamma_i|_{\hat{\Gamma}}$ κατά τελείως φυσιολογικό τρόπο ως εξής:

$$\gamma_i|_{\hat{\Gamma}} \equiv \gamma_i(h), \qquad \forall h \in \hat{H}_i.$$

Η απαίτηση που πρέπει τώρα να ικανοποιούν οι παραγόμενες στρατηγικές σε κάθε υποπαιχνίδι ώστε να αποτελεί η αρχική στρατηγική γ Τ.Υ. σημείο ισορροπίας είναι άμεση και διατυπώνεται στον ακόλουθο ορισμό (Selten, 1965).

Ορισμός 5.5. *Μια στρατηγική κατάσταση* $\gamma \in \Psi$ *ονομάζεται σημείο ισορροπίας τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια (συμβολικά Τ.Υ. - σημείο ισορροπίας) του παιχνιδιού* Γ, *αν για κάθε γνήσιο υποπαιχνίδι* $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ *η παραγόμενη στρατηγική* $\Gamma|_{\hat{\Gamma}}$ *είναι σημείο ισορροπίας του* $\hat{\Gamma}$.

Επιστρέφοντας στο παιχνίδι του Σχήματος 5.1, παρατηρούμε, ωστόσο, ότι οι παίκτες διατηρούν αντικρουόμενες προτιμήσεις όσον αφορά τα δύο σημεία ισορροπίας. Ο παίκτης Ι προτιμά το ΣΣΙ (A, b) ενώ ο παίκτης ΙΙ το (B, a). Έτσι, η εκλέπτυνση που προσφέρει το κριτήριο της τελειότητας ως προς τα υποπαιχνίδια θα ληφθεί υπόψη τόσο από τον παίκτη Ι,

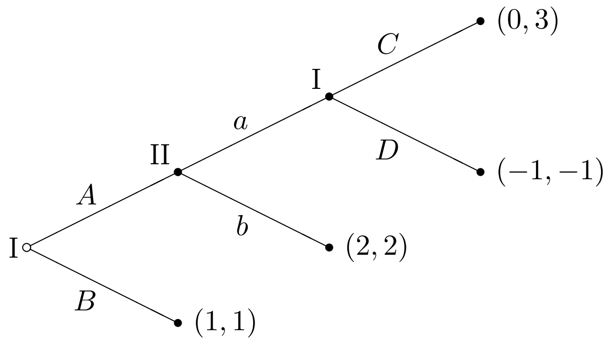
[6] Δηλαδή υπάρχει διαδοχή ενεργειών των παικτών που από τον κόμβο x να οδηγεί στον κόμβο x',

[7] Τέτοια γνήσια υποπαιχνίδια κάνουν την εμφάνισή τους σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης.

[8] Μια διαισθητική ερμηνεία του προηγούμενου μακροσκελή ορισμού - ο οποίος στην πραγματικότητα εκφράζει με μαθηματικό τρόπο αυτό που κανείς πραγματικά καταλαβαίνει με την έννοια υποπαιχνίδι - καθώς και διάφορα παραδείγματα που εξετάζουν τις διάφορες περιπτώσεις υποπαιχνιδιών ή μη που μπορεί να προκύψουν δίνονται στον Μηλολιδάκη (2009), Παράγραφος 3.4.

δίνοντάς του ανταγωνιστικό πλεονέκτημα, όσο και από τον παίκτη ΙΙ, ο οποίος αν και θα το προτιμούσε δεν είναι σε θέση να την αγνοήσει.

Παράδειγμα 5.2. Αντίθετα, ας θεωρήσουμε το παιχνίδι του ακόλουθου σχήματος, Van Damme (1987). Και σε αυτό το παιχνίδι μπορούμε να αποκλείσουμε ορισμένα ΣΣΙ επειδή



Σχημα 5.2: Ένα παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή, με δύο «αναξιόπιστα» ΣΣΙ

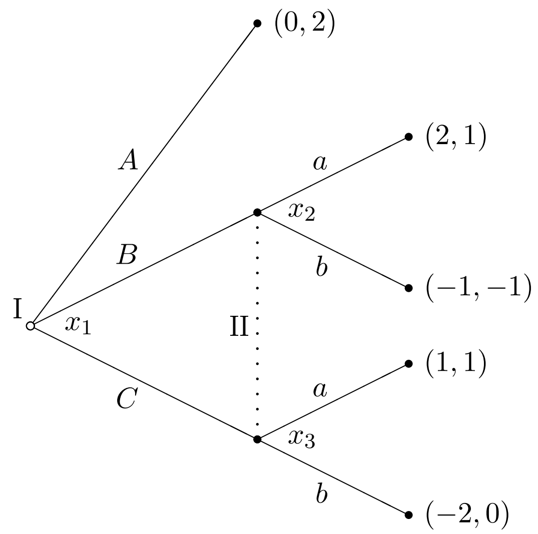
δεν είναι τέλεια ως προς τα υποπαιχνίδια (Τ.Υ.). Αυτό συμβαίνει για τις στρατηγικές καταστάσεις $((B, D), a)$ και $((A, D), b)$ που αποτελούν σημεία Nash. Το μόνο Τ.Υ. σημείο ισορροπίας είναι το $((B, C), a)$. Παρατηρείστε, όμως, ότι σε αυτό κάθε παίκτης λαμβάνει μία μονάδα ωφέλειας, σε αντίθεση με το - κατά τα άλλα ασταθές ή αναξιόπιστο - σημείο $((A, D), b)$ όπου καθένας λαμβάνει 2 μονάδες ωφέλειας. Συμβαίνει, δηλαδή ότι κάτω από την κοινή γνώση του ορθολογισμού, οι δύο παίκτες εγκλωβίζονται σε ένα αποτέλεσμα που και οι δύο θα ήθελαν να αποφύγουν. Λιγότερη γνώση, θα τους επέτρεπε ίσως να πετύχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα[9].

[9] Κάτι παρόμοιο είδαμε να συμβαίνει και στο παιχνίδι της σαρανταποδαρούσας, το οποίο αποτελεί μάλιστα και ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα αυτής της αντίφασης.

5.4 Ασθενώς τέλεια μπεϋζιανά σημεία ισορροπίας

Σε αντίθεση με τα παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης, το κριτήριο της τελειότητας ως προς τα υποπαιχνίδια έχει πολύ μικρή διακριτική ικανότητα - δηλαδή ικανότητα να ξεχωρίσει κάποιο ΣΣΙ ως πιο σταθερό ή λογικό - σε παιχνίδια με ταυτόχρονες κινήσεις ή με κινήσεις που δεν γίνονται πλήρως ορατές από όλους τους παίκτες. Στην ακραία περίπτωση, μάλιστα, όπου ο αρχικός κόμβος είναι και το μοναδικό μονοσύνολο πληροφόρησης, τότε όλα τα ΣΣΙ είναι κατά τετριμμένο τρόπο Τ.Υ. σημεία ισορροπίας, καθώς το μόνο γνήσιο υποπαιχνίδι είναι το ίδιο το παιχνίδι.

Παράδειγμα 5.3. Για να γίνει πιο κατανοητό το πρόβλημα αυτό και για να δούμε πως μπορεί κανείς να το αντιμετωπίσει, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παιχνίδι, Redondo (2003):



Σχημα 5.3: Ένα παιχνίδι, στο οποίο το κριτήριο των Τ.Υ. ΣΣΙ δεν είναι αποτελεσματικό.

Το παιχνίδι του Σχήματος 5.3 διαθέτει 2 ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές: (A, b) και (B, a). Λόγω του ότι δεν υπάρχουν γνήσια υποπαιχνίδια, και τα δύο ΣΣΙ είναι κατά τετριμμένο τρόπο Τ.Υ. σημεία ισορροπίας. Ωστόσο, το πρώτο από αυτά - το (A, b) - δεν φαίνεται λογικό ή εφικτό. Συγκεκριμένα, η πρόβλεψη ότι αν ο παίκτης ΙΙ κληθεί να παίξει τότε θα επιλέξει b, είναι ριζικά ασύμβατη με την υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού[10]. Αυτό ισχύει, διότι η επιλογή b είναι κυριαρχούμενη από την επιλογή a και αυτό όποιος και αν είναι ο πραγματικός κόμβος στον οποίο βρίσκεται το παιχνίδι - ο x_2 ή ο x_3. Έτσι, όποια και να είναι η εκτίμηση του ΙΙ σχετικά με την πιθανότητα να βρίσκεται το παιχνίδι στον κόμβο x_2 ή στον κόμβο x_3[11], η επιλογή b δεν γίνεται να είναι ορθολογική. Αυτός ο συλλογισμός

[10] Ακόμα και με το γεγονός ότι ο ΙΙ είναι ορθολογικός.

[11] Οι κόμβοι αυτοί ανήκουν στο ίδιο σύνολο πληροφόρησης του ΙΙ, και έτσι, όταν καλείται να κινηθεί στο συγκεκριμένο σύνολο, μόνο να πιθανολογεί μπορεί σχετικά με το ποιος είναι ο πραγματικός κόμβος που έχει φτάσει το παιχνίδι.

μπορεί να γίνει, όμως, και από τον παίκτη I - λόγω της κοινής γνώσης του ορθολογισμού - και άρα το ΣΣΙ (A, b) μπορεί να απορριφθεί ως αναξιόπιστο ή μη λογικό. Με άλλα λόγια, η «απειλή» από την μεριά του II ότι θα παίξει b αν του δοθεί η ευκαιρία να κινηθεί δεν γίνεται πιστευτή από τον I.

Η ιδέα αυτή, αποτυπώνεται στην έννοια του ασθενώς τέλειου μπεϋζιανού σημείου ισορροπίας (weak perfect bayesian equilibrium ή WPBE). Εκτός από μία στρατηγική κατάσταση σε ισορροπία, το WPBE απαιτεί και οι πίστεις των παικτών να είναι συμβατές με την κατάσταση αυτή. Για παράδειγμα αν στο παραπάνω παιχνίδι θεωρήσουμε το ΣΣΙ (B, a), τότε οποιαδήποτε πίστη του II αποδίδει θετική πιθανότητα στον κόμβο x_3 είναι ασύμβατη με αυτό το σημείο ισορροπίας. Γενικότερα, ακόμα και αν θεωρήσουμε ότι ο II δεν γνωρίζει ποιο από τα δύο σημεία ισορροπίας - (A, b) ή (B, a) είναι αυτό που παίζεται[12] - τότε και πάλι αφού σε κανένα από αυτά ο I δεν παίζει την στρατηγική C, οποιαδήποτε πίστη του II αποδίδει θετική πιθανότητα στον κόμβο x_3 είναι κάτω από την υπόθεση της κοινής γνώσης του ορθολογισμού ασύμβατη ή ασυνεπής με την στρατηγική κατάσταση που παίζεται.

Από τη μία λοιπόν, υπάρχει η απαίτηση για επιλογή μιας βέλτιστης στρατηγικής από κάθε παίκτη με βάση τις πίστεις του για τις στρατηγικές των άλλων, και από την άλλη υπάρχει η απαίτηση οι πίστεις αυτές να είναι εξακολουθητικά συνεπείς. Με δεδομένο, ότι οι πίστεις ενός παίκτη σε ένα σύνολο πληροφόρησης εκφράζουν την υποκειμενική πιθανότητα που αποδίδει ο εν λόγω παίκτης, σε κάθε κόμβο του συνόλου του να είναι αυτός ο πραγματικός κόμβος στον οποίο βρίσκεται το παιχνίδι, οι συνθήκες του WPBE συνοψίζονται διαισθητικά ως εξής:

(1) Η συμπεριφορική στρατηγική κάθε παίκτη αποτελεί βέλτιστη απάντηση δεδομένης της πίστης του παίκτη αυτού στις στρατηγικές των υπολοίπων.

(2) Οι πίστεις κάθε παίκτη σε κάθε ένα σύνολο πληροφόρησης ενημερώνονται σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes - όπου αυτός εφαρμόζεται, δηλαδή όπου η prior πιθανότητα του συνόλου πληροφόρησης δεν είναι μηδέν - με δεδομένες τις στρατηγικές των υπολοίπων.

Οι έννοιες αυτές διατυπώνονται με μαθηματική σαφήνεια στους ακόλουθους ορισμούς[13].

Ορισμός 5.6. *Έστω $\gamma \in \Psi$ μια στρατηγική κατάσταση σε συμπεριφορικές στρατηγικές. Ένα σύστημα πίστεων μ ονομάζεται συνεπές κατά Bayes - ή απλά συνεπές - με την κατάσταση γ αν ισχύει ότι:*

$$\mu(x) P^{\gamma}(h) = P^{\gamma}(x),$$

για κάθε $h \in H$, $\forall x \in h$.

[12] Η διαφορετικά αυτό που ο παίκτης I, ως ο πρώτος που κινείται, επιθυμεί να παίξει,

[13] Θυμίζουμε ότι έχουμε θεωρήσει σε όλη την ενότητα ένα παιχνίδι Γ σε εκτεταμένη μορφή, πάνω στο οποίο διατυπώνονται οι ορισμοί αυτοί.

Παρατήρηση 5.7. Η συνθήκη που δίνεται στον παραπάνω ορισμό, είναι έτσι διατυπωμένη ώστε να ενσωματώνει δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το ποια είναι η prior πιθανότητα ενός συνόλου h κάτω από την στρατηγική κατάσταση γ:

(i) Αν $P^\gamma(h) \neq 0$, τότε: $\mu(x) = \dfrac{P^\gamma(x)}{P^\gamma(h)}$, σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes.

(ii) Αν όμως, $P^\gamma(h) = 0$ - δηλαδή αν το παιχνίδι δεν φτάνει στο σύνολο πληροφόρησης h κάτω από την στρατηγική γ - τότε και $P^\gamma(x) = 0$, $\forall x \in h$ και άρα η παραπάνω συνθήκη του ορισμού ισχύει τετριμμένα ανεξάρτητα από το διάνυσμα $(\mu(x))_{x\in h}$. Στην περίπτωση αυτή οι πίστεις $\mu(x)$ του παίκτη i στο σύνολο h καθώς και όλες οι πίστεις στα σύνολα που έπονται από το h μπορούν να διαμορφωθούν αυθαίρετα[14].

Ορισμός 5.8. *Έστω ένα σύστημα πίστεων μ. Μια στρατηγική κατάσταση $\gamma \in \Psi$ ονομάζεται εξακολουθητικά ορθολογική ως προς το μ αν ισχύει ότι:*

$$\pi_i(\gamma \,|\, \mu, h) \geq \pi_i((\gamma_i, \gamma_i^{-i}) \,|\, \mu, h),$$

για κάθε $i \in N$, $\forall h \in H_i$, $\forall \gamma_i \in \Psi_i$.

Πολλές φορές όταν ικανοποιείται η συνθήκη στον παραπάνω ορισμό, αναφέρεται ισοδύναμα η εκδοχή (μ, γ) ως εξακολουθητικά ορθολογική. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε και τις δύο εκφράσεις χωρίς να τις ξεχωρίζουμε. Με βάση τις έννοιες αυτές, μπορούμε να δώσουμε τώρα τον ακριβή ορισμό του ασθενώς τέλειου μπεϋζιανού σημείου ισορροπίας.

Ορισμός 5.9. *Μια στρατηγική κατάσταση $\gamma \in \Psi$ ονομάζεται ασθενώς τέλειο μπεϋζιανό σημείο ισορροπίας - weak perfect bayesian equilibrium ή WPBE - αν υπάρχει ένα σύστημα πίστεων μ, τέτοιο ώστε η εκδοχή (μ, γ) να ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

1. *η στρατηγική κατάσταση γ να είναι εξακολουθητικά ορθολογική ως προς το σύστημα πίστεων μ και*
2. *το σύστημα πίστεων μ να είναι συνεπές με την στρατηγική κατάσταση γ.*

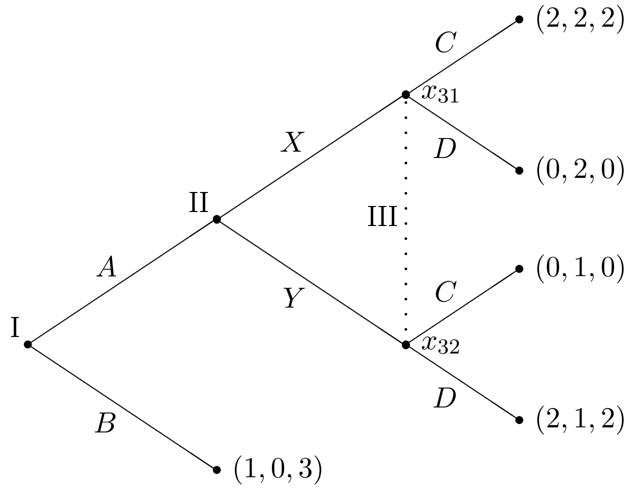
Γίνεται, πλέον, εμφανής μια αμφίδρομη απαίτηση για συνέπεια μεταξύ των στρατηγικών καταστάσεων και πίστεων των παικτών. Από τη μία η συνθήκη (1) υποδεικνύει ότι με δεδομένες τις πίστεις των παικτών σε κάθε σύνολο πληροφόρησης, η στρατηγική που επιλέγεται θα πρέπει να είναι εξακολουθητικά ορθολογική και η συνθήκη (2) υποδεικνύει ότι με δεδομένη την στρατηγική κατάσταση, οι πίστεις των παικτών θα πρέπει να είναι συμβατές κατά Bayes με αυτήν. Η μαθηματική τους διατύπωση οδήγησε στον ορισμό του ασθενώς τέλειου μπεϋζιανού σημείου ισορροπίας.

Σε παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης τα Τ.Υ. σημεία ισορροπίας και τα WPB σημεία ισορροπίας ταυτίζονται. Επίσης, επειδή όπως είδαμε, σε γενικές γραμμές η έννοια του

[14] Αρκεί βέβαια να είναι διανύσματα πιθανότητας.

WPB σημείου ισορροπίας εκλεπτύνει περαιτέρω την έννοια του Τ.Υ. σημείου ισορροπίας, θα περίμενει κανείς ότι κάθε WPB σημείο ισορροπίας θα είναι και Τ.Υ. σημείο ισορροπίας. Κάτι, τέτοιο, όμως δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν WPB σημεία ισορροπίας που δεν είναι Τ.Υ. όπως δείχνει και το ακόλουθο παράδειγμα. (βλ. Redondo Κεφάλαιο 4.4)

Παράδειγμα 5.4. Έστω το παιχνίδι G σε εκτεταμένη μορφή που δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



ΣΧΗΜΑ 5.4: Ένα WPBE, που δεν είναι Τ.Υ. σημείο ισορροπίας.

Στο παιχνίδι αυτό η στρατηγική κατάσταση (B, X, D) είναι ένα WPB σημείο ισορροπίας το οποίο δεν είναι Τ.Υ. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε πρώτα ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας Nash του υποπαιχνιδιού που ξεκινάει από την κορυφή που ελέγχει ο ΙΙ είναι το (X, C). Αρά, λοιπόν, το σημείο ισορροπίας (B, X, D) δεν είναι Τ.Υ.

Από την άλλη, το γεγονός ότι είναι παρόλα αυτά WPBE προκύπτει ως εξής. Έστω $\hat{h}$ το σύνολο πληροφόρησης του ΙΙΙ, το οποίο είναι εκτός του μονοπατιού που προκύπτει από το σημείο ισορροπίας. Έτσι, η πίστη $\hat{\mu} = (\hat{\mu}(x_{31}), \hat{\mu}(x_{32}))$ του ΙΙΙ μπορεί να καθοριστεί αυθαίρετα. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ως πίστη του ΙΙΙ την $\hat{\mu} = (0, 1)$[15]. Δηλαδή, σύμφωνα με την πίστη αυτή ο ΙΙΙ θεωρεί ότι ο ΙΙ έπαιξε Y. Έτσι, προκειμένου να απαντήσει βέλτιστα σύμφωνα με την πίστη του είναι άμεσο ότι πρέπει να επιλέξει την στρατηγική D.

Συνεπώς, ικανοποιούνται και οι δύο υποθέσεις του Ορισμού 5.9 και άρα το σημείο (B, X, D) είναι WPBE χωρίς όμως να είναι Τ.Υ. Παρατηρούμε ότι η ασυμφωνία αυτή προέκυψε λόγω της δυνατότητας που μας δίνει η έννοια του WPBE για αυθαίρετο προσδιορισμό των πίστεων των παικτών σε σύνολα πληροφόρησης (συγκεκριμένα εδώ στο σύνολο $\hat{h}$ του ΙΙΙ) που είναι εκτός του μονοπατιού που προκύπτει από το σημείο ισορροπίας.

[15]Σύμφωνα με τα κριτήρια του Ορισμού 5.9 κάθε διάνυσμα πιθανότητας είναι αποδεκτό ως πίστη στο σύνολο πληροφόρησης $\hat{h}$ από την στιγμή που όπως αναφεράμε, αυτό βρίσκεται εκτός του μονοπατιού (off path) του σημείου ισορροπίας.

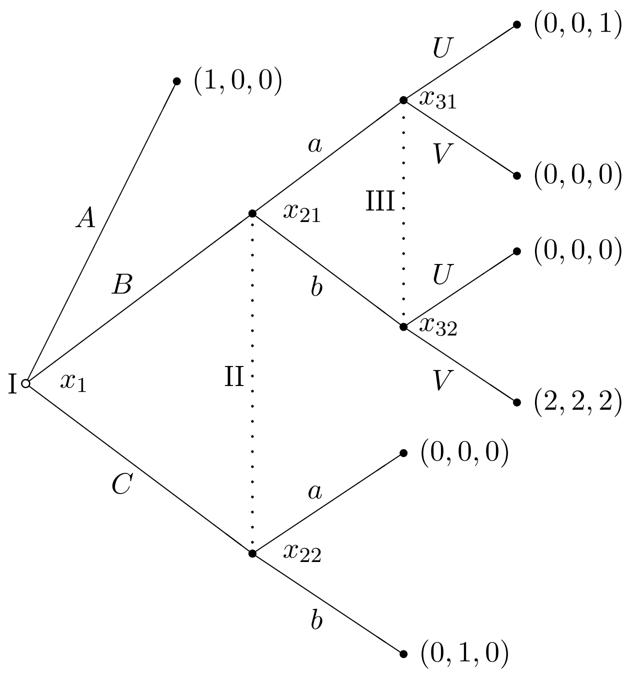
Σύμφωνα με αυτά που αναφέρει ο Redondo (2003), αυτό δεν συμβαίνει σε παιχνίδια πολύ απλής μορφής - όπως π.χ. παιχνίδια 2 σταδίων - ωστόσο είναι δυνατόν να συμβεί σε παιχνίδια μέτριας πολυπλοκότητας. Έτσι, φαίνεται ότι το WPB σημείο ισορροπίας στερείται σε αυθαίρετα παιχνίδια αυτής της επιθυμητής ιδιότητας - να είναι δηλαδή, τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια - με αποτέλεσμα να απαιτείται και πάλι η εισαγωγή περαιτέρω κριτηρίων εκλέπτυνσης.

Όπως, θα δούμε και στην συνέχεια το πρόβλημα αυτό δημιουργείται από την αδυναμία ουσιαστικά, που υπάρχει στην απαίτηση της συνέπειας κατά Bayes - συνθήκη (2) - να εκφραστεί σε σύνολα πληροφόρησης, στα όποια το παιχνίδι δεν φτάνει κάτω από την επικρατούσα στρατηγική κατάσταση. Πέρα από το ισχυρά τέλειο μπεϋζιανό ΣΣΙ, που επιλύει το πρόβλημα αυτό και το οποίο οφείλεται στους Fudenberg και Tirole (1991), μια διαφορετική αντιμετώπιση του προβλήματος προτάθηκε - προγενέστερα χρονικά - από τους Kreps & Wilson (1982), μέσω του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας. Η παρουσίασή του, γίνεται στην παράγραφο που ακολουθεί και αποτελεί τον σκοπό του παρόντος κεφαλαίου.

5.5 Εξακολουθητικά σημεία ισορροπίας

Στην προηγούμενη παράγραφο ολοκληρώσαμε την παρουσίαση των WPBE επισημαίνοντας ορισμένες αδυναμίες τους, η αντιμετώπιση των οποίων αποτελεί το κίνητρο για την αναζήτηση επιπρόσθετων κριτηρίων εκλέπτυνσης[16]. Κατά κύριο λόγο, διαπιστώσαμε ότι δεν εξασφαλίζουν τελειότητα ως προς τα υποπαιχνίδια, δηλαδή ότι μπορεί να επιτρέπουν μη βέλτιστη συμπεριφορά - ή συμπεριφορά που να μην είναι σε ισορροπία - σε γνήσια υποπαιχνίδια, στα οποία όμως δεν φτάνει το παιχνίδι. Έτσι, προέκυπταν «ασταθή» σημεία ισορροπίας, τα οποία κανείς θα ήθελε να μπορεί να αποκλείσει. Χρειάζονται επομένως συνθήκες που να περιορίζουν κατάλληλα την αυθαιρεσία που επιτρέπει η έννοια του WPBE στις πίστεις των παικτών για σύνολα πληροφόρησης εκτός του μονοπατιού που προκύπτει από το σημείο ισορροπίας. Ο στόχος είναι δηλαδή, να αποκλειστούν οποιεσδήποτε αβάσιμες πίστεις και κατά συνέπεια και ενέργειες σε σύνολα πληροφόρησης όπου το παιχνίδι δεν θα φτάσει. Οι σκέψεις αυτές γίνονται πιο κατανοητές με το ακόλουθο παράδειγμα, Redondo (2003):

Παράδειγμα 5.5. Στο ακόλουθο παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή, η στρατηγική κατάσταση $\hat{\gamma} = (A, b, U)$ αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash.



Σχημα 5.5: Ένα WPBE, που δεν είναι εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας.

Αυτό το ΣΣΙ είναι WPBE για οποιοδήποτε σύστημα πίστεων $\hat{\mu}$ ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

$$\hat{\mu}(x_{31}) \cdot 1 + \hat{\mu}(x_{32}) \cdot 0 \geq \hat{\mu}(x_{31}) \cdot 0 + \hat{\mu}(x_{32}) \cdot 2$$

[16] Πάντα βέβαια με τον εξισορροπητικό περιορισμό τα κριτήρια αυτά να μην είναι πολύ περιοριστικά.

ή ισοδύναμα: $\hat{\mu}(x_{31}) \geq 2/3$. Επίσης, είναι τετριμμένο ότι η κατάσταση $\hat{\gamma}$ αποτελεί Τ.Υ. σημείο ισορροπίας, αφού το παιχνίδι δε διαθέτει άλλα γνήσια υποπαιχνίδια εκτός από ολόκληρο το παιχνίδι.

Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι η εκδοχή $(\hat{\mu}, \hat{\gamma})$ εμπεριέχει μια βασική ασυνέπεια. Οποιαδήποτε πίστη $\hat{\mu}$ με $\hat{\mu}(x_{31}) \geq 2/3$ είναι ασύμβατη με το γεγονός ότι στο ΣΣΙ ο παίκτης ΙΙ διαλέγει τη στρατηγική b. Οι μόνες πίστεις - όσον αφορά τον παίκτη ΙΙΙ - που θα είχαν την ιδιότητα να είναι «συνεπείς» με το στρατηγικό προφίλ $\hat{\gamma}$ και τη δομή του παιχνιδιού, είναι αυτές για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\hat{\mu}(x_{32}) = 1,$$

αφού αν παίζεται η στρατηγική b, ο παίκτης ΙΙΙ δεν είναι δυνατόν να αναμένει ότι το παιχνίδι θα βρεθεί στον κόμβο x_{31}.

Ουσιαστικά, η ρίζα του προβλήματος είναι ότι στο σύνολο πληροφόρησης του ΙΙΙ δεν είναι εφαρμόσιμος ο κανόνας του Bayes, διότι η εκ των προτέρων πιθανότητα να φτάσει το παιχνίδι σε αυτό κάτω από την δεδομένη στρατηγική ισορροπίας, είναι μηδενική. Άρα, όσον αφορά την έννοια του WPBE οποιαδήποτε πίστη στο συνολο αυτό είναι αποδεκτή και έτσι μπορεί να προσδιοριστεί αυθαίρετα, αρκεί οι παίκτες να μεγιστοποιούν ως προς αυτήν. Γενικά, αυτή η αυθαιρεσία επιτρέπεται στην συνέχεια και για κάθε σύνολο πληροφόρησης που έπεται ενός τέτοιου συνόλου με μηδενική εκ των προτέρων πιθανότητα.

Στόχος, λοιπόν, είναι να καθοριστεί μια συνθήκη που θα περιορίζει την παραπάνω αυθαιρεσία. Σε ένα σύνολο πληροφόρησης h που είναι off the path, οι πίστεις θα πρέπει να είναι «συμβατές» με τις κινήσεις που προσδιορίζει η επικρατούσα στρατηγική κατάσταση[17] $\hat{\gamma}$ για τους παίκτες που κινήθηκαν σε προηγούμενα σύνολα πληροφόρησης από όπου πέρασε το παιχνίδι για να φτάσει στο h. Φυσικά, αφού το h είναι εκτός του μονοπατιού που προκύπτει από την $\hat{\gamma}$, αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας παίκτης δεν κινήθηκε σύμφωνα με αυτήν. Αλλά οι κινήσεις κάποιων άλλων παικτών δεν αντιφάσκουν με το το να φτάσει το παιχνίδι στο h και έτσι είναι λογικό να απαιτήσουμε η πίστη του παίκτη που ελέγχει το σύνολο h να προσδιοριστεί σύμφωνα με τις κινήσεις *αυτών* των παικτών. Επίσης, θέλουμε οι πίστεις μ' σε κάθε σύνολο h' που ακολουθεί το h να είναι σύμφωνες με την πίστη μ στο h. Αυτό, φυσικά, υπονοεί ότι από την στιγμή που καθοριστεί η πίστη μ στο σύνολο πληροφόρησης h τότε οποιαδήποτε άλλη πίστη μ' σε σύνολο h' που ακολουθεί το h δεν θα πρέπει να αντιφάσκει με τη μ.

Ένας αποτελεσματικός τρόπος να παρακαμφθεί αυτό το πρόβλημα, είναι μέσα από την εισαγωγή μιας συνθήκης λογικής «συνέχειας» κατά τη διαδικασία του καθορισμού των πίστεων σε ένα οποιοδήποτε σύνολο πληροφόρησης. Η βασική ιδέα αφορά χρησιμοποίηση εντελώς

[17] Δηλαδή η στρατηγική κατάσταση που παίζεται, η αυτή που εξετάζεται,

μεικτών στρατηγικών που δίνουν θετική εκ των προτέρων πιθανότητα σε κάθε σύνολο πληροφόρησης και στη συνέχεια στην εφαρμογή του κανόνα του Bayes. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 5.10. *Μια συμπεριφορική στρατηγική γ_i του παίκτη i ονομάζεται εντελώς μεικτή αν αποδίδει θετική πιθανότητα σε κάθε διαθέσιμη ενέργεια που έχει ο παίκτης i σε κάθε ένα από τα σύνολα πληροφόρησής του.*

Μια στρατηγική κατάσταση $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ ονομάζεται εντελώς μεικτή, αν κάθε μία από τις στρατηγικές γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι εντελώς μεικτή. Δηλαδή, αν:

$$\gamma_i(h)(a) > 0,$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall h \in H_i$, $\forall a \in A(x)$.

Έτσι, αν γ είναι μια εντελώς μεικτή στρατηγική κατάσταση, τότε είναι άμεσο ότι κάθε σύνολο πληροφόρησης του παιχνιδιού έχει θετική εκ των προτέρων πιθανότητα να φτάσει το παιχνίδι κάποια στιγμή σε αυτό. Θεωρώντας, λοιπόν, μια κατάλληλη ακολουθία

$$(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

από στρατηγικές καταστάσεις σε εντελώς μεικτές στρατηγικές, μπορούμε να προσεγγίσουμε μια οποιαδήποτε στρατηγική κατάσταση γ. Από την στιγμή, όμως, που τώρα οι γ_k καθορίζουν μονοσήμαντα τις συμβατές πίστεις σε κάθε σύνολο πληροφόρησης μπορούμε να απαιτήσουμε οι πίστεις αυτές να προσεγγίζουν τις πίστεις στα σύνολα πληροφόρησης με μηδενική εκ των προτέρων πιθανότητα κάτω από την κατάσταση γ. Έτσι, βασιζόμενοι στην έννοια της συνέπειας κατά Bayes που δώσαμε στον Ορισμό 5.6 και αντιμετωπίζοντας, με την χρήση εντελώς μεικτών στρατηγικών, το πρόβλημα των συνόλων πληροφόρησης με μηδενική εκ των προτέρων πιθανότητα, οδηγούμαστε στις ακόλουθες έννοιες συνέπειας μεταξύ πίστεων και στρατηγικών καταστάσεων.

Ορισμός 5.11. *Έστω $\gamma \in \Psi$ μια εντελώς μεικτή στρατηγική κατάσταση στο παιχνίδι Γ. Τότε μια εκδοχή (μ, γ) θα ονομάζεται συνεπής αν ισχύει ότι:*

$$\mu(x) = \frac{P^\gamma(x)}{P^\gamma(h)},$$

για κάθε $h \in H$, $\forall x \in h$.
Δηλαδή, αν οι πιθανότητες $\mu(x)$ ταυτίζονται με τις εκ των υστέρων πιθανότητες που προκύπτουν από την εφαρμογή του κανόνα του Bayes στο σύνολο h κάτω από την κατάσταση γ.

Επισημαίνεται, ότι ο προηγούμενος ορισμός αφορά την έννοια της συνέπειας μόνο σε εντελώς μεικτές στρατηγικές. Η έννοια αυτή γενικεύεται για αυθαίρετες στρατηγικές στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.12. *Έστω $\gamma \in \Psi$ μια στρατηγική κατάσταση στο παιχνίδι Γ. Μια εκδοχή (μ, γ) θα ονομάζεται συνεπής κατά Kreps & Wilson αν ισχύει ότι:*

$$(\mu, \gamma) = \lim_{k \to \infty} (\mu_k, \gamma_k),$$

όπου γ_k εντελώς μεικτές στρατηγικές και (μ_k, γ_k) συνεπείς εκδοχές για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν η εκδοχή (μ, γ) μπορεί να γραφεί ως όριο μιας ακολουθίας $(\mu_k, \gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ από συνεπείς εκδοχές σε εντελώς μεικτές στρατηγικές[18].

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εισαγωγή μιας έννοιας ακολουθιακής συνέχειας στη διαμόρφωση των πίστεων, μας επέτρεψε τον ορισμό της απαιτούμενης συνέπειας μεταξύ των πίστεων και της στρατηγικής καταστάσης που παίζεται ακόμα και στις - μέχρι τώρα προβληματικές - περιπτώσεις όπου υπάρχουν σύνολα πληροφόρησης με μηδενική εκ των προτέρων πιθανότητα. Διατηρώντας την απαίτηση για εξακολουθητικά ορθολογική συμπεριφορά που δόθηκε στον Ορισμό 5.8 καταλήγουμε στον ορισμό του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας που πρότειναν οι Kreps & Wilson (1982) ως εκλέπτυνση του σημείου ισορροπίας Nash.

Ορισμός 5.13. *Σε ένα παιχνίδι Γ ορίζουμε ως εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας (sequential equilibrium) κάθε εκδοχή (μ, γ), η οποία είναι:*

(i) συνεπής κατά Kreps & Wilson και
(ii) εξακολουθητικά ορθολογική.

Συχνά στην βιβλιογραφία κατ' οικονομία αναφέρεται ως εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας, μια στρατηγική κατάσταση γ^* για την οποία υπάρχει ένα σύστημα πίστεων μ^* τέτοιο ώστε η εκδοχή (μ^*, γ^*) να ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Επιστρέφοντας στο παιχνίδι του Σχήματος 5.4, θεωρούμε τις συμπεριφορικές που αντιστοιχούν στο ΣΣΙ $\hat{\gamma} = (A, b, U)$:

$$\hat{\gamma}_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{\gamma}_2 = (0, 1), \quad \hat{\gamma}_3 = (1, 0),$$

και ορίζουμε την ακολουθία εντελώς μεικτών στρατηγικών $(\hat{\gamma}_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\hat{\gamma}_{1,k}, \hat{\gamma}_{2,k}, \hat{\gamma}_{3,k})_{k \in \mathbb{N}}$ ως εξής:

[18] Τα όρια που εμφανίζονται στον ορισμό υπολογίζονται στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ καθώς αφορούν πιθανότητες.

$$\hat{\gamma}_{1,k} = (1-(1+\rho)\cdot\varepsilon_{1k}, \varepsilon_{1k}, \rho\cdot\varepsilon_{1k})$$
$$\hat{\gamma}_{2,k} = (\varepsilon_{2k}, 1-\varepsilon_{2k})$$
$$\hat{\gamma}_{3,k} = (1-\varepsilon_{3k}, \varepsilon_{3k})$$

όπου $\rho > 0$ και $\varepsilon_{1k}, \varepsilon_{2k}, \varepsilon_{3k} \longrightarrow 0$, για $k \to +\infty$. Παρατηρούμε ότι έτσι οι στρατηγικές καταστάσεις $\hat{\gamma}_k$ συγκλίνουν στην στρατηγική κατάσταση $\hat{\gamma}$, δηλαδή:

$$\hat{\gamma}_k \longrightarrow \hat{\gamma}, \qquad \text{καθώς} \qquad k \to +\infty.$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes προκύπτουν μονοσήμαντα οι σχετικές πίστεις των παικτών II και III στα αντίστοιχα σύνολα πληροφόρησης:

$$\hat{\mu}_{2,k} = \big(\mu_k(x_{21}), \mu_k(x_{22})\big) = \left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{\rho}{1+\rho}\right)$$
$$\hat{\mu}_{3,k} = \big(\mu_k(x_{31}), \mu_k(x_{32})\big) = (\varepsilon_{2k}, 1-\varepsilon_{2k})$$

Παίρνοντας το όριο για $k \to +\infty$ παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\mu}_{2,k} = \left(\frac{1}{1+\rho}, \frac{\rho}{1+\rho}\right)$$
$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\mu}_{3,k} = (0,1)$$

Έτσι, επιβεβαιώνεται ότι οι μόνες συνεπείς κατά Kreps & Wilson πίστεις με την κατάσταση $\hat{\gamma}$ είναι αυτές στις οποίες ο παίκτης III αποδίδει πιθανότητα 1 στον κόμβο x_{32}. Συνεπώς, το WPBE $\hat{\gamma} = (A, b, U)$ δεν είναι εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας καθώς δεν είναι εξακολουθητικά ορθολογικό ως προς τις πίστεις αυτές[19].

Αντίθετα, η στρατηγική κατάσταση $\bar{\gamma} = (B, b, V)$ - σε καθαρές στρατηγικές - ή ισοδύναμα:

$$\bar{\gamma}_1 = (0,1,0), \quad \bar{\gamma}_2 = (0,1), \quad \bar{\gamma}_3 = (0,1),$$

σε συμπεριφορικές στρατηγικές, αποτελεί ένα εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας - το οποίο είναι και το μόνο του εν λόγω παιχνιδιού. Καθώς οι στρατηγικές αυτές δίνουν θετική πιθανότητα σε κάθε σύνολο πληροφόρησης, δεν είναι απαραίτητη η προσέγγισή τους από μια ακολουθία εντελώς μεικτών στρατηγικών. Με δεδομένη την δομή του παιχνιδιού, οι μόνες συνεπείς πίστεις των παικτών προκύπτουν άμεσα και είναι οι ακόλουθες:

$$\bar{\mu}_2 = (1,0), \quad \bar{\mu}_3 = (0,1),$$

Έτσι, η εκδοχή $(\bar{\mu}, \bar{\gamma})$ είναι συνεπής. Από την άλλη, με δεδομένες τις πίστεις $\bar{\mu}$, είναι εύκολο

[19] Παραβιάζει δηλαδή την συνθήκη (ii) του Ορισμού 5.13

να δει κανείς ότι η στρατηγική $\bar{\gamma}$ είναι εξακολουθητικά ορθολογική. Ικανοποιούνται, δηλαδή και οι δύο συνθήκες του Ορισμού 5.13 και άρα η εκδοχή $(\bar{\mu}, \bar{\gamma})$ - ή ισοδύναμα η στρατηγική $\bar{\gamma}$ - αποτελεί εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας.

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση του εξακολουθητικού σημείου ισορροπίας, αναφέροντας δύο βασικές ιδιότητές του που αποδείχθηκαν από τους Kreps & Wilson (1982). Αυτές επιβεβαιώνουν ότι οι συνθήκες που το καθορίζουν είναι αρκετά αυστηρές ώστε να εξασφαλίζεται ότι διατηρεί την ιδιότητα της τελειότητας ως προς τα υποπαιχνίδια και ταυτόχρονα αρκετά χαλαρές ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξή του σε κάθε παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή. Συγκεκριμένα:

Πρόταση 5.14. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) Κάθε παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή διαθέτει τουλάχιστον ένα εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας.

(2) Αν η εκδοχή (μ, γ) είναι ένα εξακολουθητικό σημείο ισορροπίας, τότε η στρατηγική κατάσταση γ είναι ένα Τ.Υ. σημείο ισορροπίας.

Ωστόσο, όπως αναφέρει ο Van Damme (1996) οι Kreps & Wilson (1982) είναι σκεπτικοί για το αν απαιτούν υπερβολική συνέπεια ως προς τις πίστεις σε σύνολα πληροφόρησης εκτός από αυτά που επισκέπτεται το παιχνίδι κάτω από την δεδομένη στρατηγική κατάσταση ενός σημείου ισορροπίας. Όπως έχουμε επισημάνει και στην αρχή του κεφαλαίου στο πεδίο αυτό - λόγω της ιδιαίτερης φύσης του - έχουν αναπτυχθεί, και συνεχίζουν να αναπτύσσονται πολυάριθμες θεωρίες και παραλλαγές. Η σχετική βιβλιογραφία είναι πραγματικά αχανής και σε καμία περίπτωση δεν εξαντλείται στο κεφάλαιο αυτό. Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε ενδεικτικά στους Fudenberg & Levine (1998) καθώς και στους Redondo (2003), Van Damme (1987) τους οποίους ακολουθήσαμε και στο παρόν κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία

[1] Μηλολιδάκης, Κωνσταντίνος: *Θεωρία Παιγνίων, Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας.* Σοφία, 2009.

[2] Aumann, Robert J.: *Subjectivity and correlation in randomized strategies.* Journal of Mathematical Economics, 1:67–96, 1974.

[3] Aumann, Robert J.: *Agreeing to disagree.* The Annals of Statistics, 4(6):1236–1239, 1976.

[4] Aumann, Robert J.: *Correlated equilibrium as an expression of bayesian rationality.* Econometrica, 55(33):1–18, January 1987.

[5] Aumann, Robert J.: *Irrationality in game theory.* Economic Analysis of Markets and Games (Essays in Honor of Frank Hahn), (35):214–227, 1992.

[6] Aumann, Robert J.: *Backward induction and common knowledge of rationality.* Games and Economic Behaviour, 8:6–19, 1995.

[7] Aumann, Robert J.: *Reply to Binmore.* Games and Economic Behaviour, 17:138–146, 1996.

[8] Aumann, Robert J.: *Rationality and bounded rationality.* Games and Economic Behaviour, 21:2–14, 1997.

[9] Aumann, Robert J.: *On the centipede game.* Games and Economic Behaviour, 23:97–105, 1998.

[10] Aumann, Robert J. and Adam Brandenburger: *Epistemic conditions for Nash equilibrium.* Econometrica, 63(5):1161–1180, September 1995.

[11] Aumann, Robert J. and Jacques H. Dreze: *Rational expectations in games.* The American Economic Review, 98(1):72–86, 2008.

[12] Binmore, Ken: *A note on backward induction.* Games and Economic Behaviour, 17:135–137, 1996.

[13] Chen, Jing, Silvio Micali, and Rafael Pass: *An epistemic approach to mechanism design.* Games 2012, Bilgi University, Istanbul Turkey.

[14] Collevechio, Andrea and Marco LiCalzi: *The probability of nontrivial common knowledge.* Games and Economic Behavior, 76:556–570, 2012.

[15] Daskalakis, Constantinos, Paul W. Goldberg, and Christos H. Papadimitriou: *The complexity of computing a Nash equilibrium.* SIAM Journal on Computing, 39(1):195–259, May 2009.

[16] Fudenberg, Drew and David K. Levine: *The Theory of Learning in Games.* MIT Press, 1998.

[17] Fudenberg, Drew and Jean Tirole: *Perfect bayesian equilibrium and sequential equilibrium.* Journal of Economic Theory, 53:236–260, 1991.

[18] Geanakoplos, John: *Common knowledge.* Handbook of Game Theory with Economic Applications, 2:1437–1496, 1994.

[19] Hillas, John and Elon Kohlberg: *Foundations of strategic equilibrium.* Handbook of Game Theory, ed. R.J. Aumann and S. Hart, Elsevier Science B.V., 3:1597–1663, 2002.

[20] Kreps, David M. and Robert Wilson: *Sequential equilbria.* Econometrica, 50(4):863–894, 1982.

[21] Kuhn, Harold W.: *Extensive games and the problem of information.* Contributions to the Theory of Games II (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds.), Annals of Mathematics Studies, 28:193–216, 1953.

[22] McKelvey, Richard D. and Thomas R. Palfrey: *An experimental study of the centipede game.* Econometrica, 60(4):803–836, July 1992.

[23] Myerson, Roger: *Game Theory: Analysis of Conflict.* Harvard University Press, 1991.

[24] Nagel, Rosemarie and Fang Fang Tang: *An experimental study on the centipede game in normal form - an investigation on learning.* Journal of Mathematical Psychology, 42(2):356–384, June/September 1998.

[25] Nash, John: *Equilibrium points in n-person games.* Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(1):48–49, September 1950.

[26] Polak, Ben: *Epistemic conditions for Nash equilibrium and common knowledge of rationality.* Econometrica, 67:673–676, 1999.

[27] Porath, Elhanan Ben: *Rationality, Nash equilibrium and backward induction in perfect information games.* Review of Economic Studies, 64:23–46, 1997.

[28] Redondo-Vega, Fernando: *Economics and the Theory of Games.* Cambridge University Press, 2003.

[29] Savage, Leonard J.: *The Foundations of Statistics.* New York: John Wiley and Sons, 1954.

[30] VanDamme, Eric: *Stability and Perfection of Nash Equilibria.* Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού LaTeX θα ήταν πραγματικά αδύνατη χωρίς τη χρήση του κώδικα που διαθέτουν δωρεάν στο διαδίκτυο οι ακόλουθοι:

1. Για τη δομή της εργασίας χρησιμοποιήθηκε το πρότυπο Masters/Doctoral Thesis από τη σελίδα: http://www.latextemplates.com, που έχει συνταχθεί από τους Steven Gunn & Sunil Patel.
2. Για τα σχήματα που εμφανίζονται στην εργασία - παιχνίδια σε κανονική και εκτεταμένη μορφή - χρησιμοποιήθηκαν τα πρότυπα sgame και egame από τη σελίδα: http://www.economics.utoronto.ca/osborne/latex, τα οποία έχουν συνταχθεί από τον Professor Martin J. Osborne.

Απευθύνουμε ευχαριστίες προς τους συγγραφείς για τη δωρεάν διάθεση της πνευματικής τους εργασίας και την πολύτιμη συνεισφορά τους.