



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**"Διδασκαλία και μάθηση της κυρτότητας συνάρτησης στη
δευτεροβάθμια εκπαίδευση."**

Αθανάσιος Μποχώτης
Δ201410

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

Καθηγητής

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 29^η Σεπτεμβρίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα Καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, τόσο γιατί το μάθημα του, η Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού, ήταν η αφορμή για το θέμα της παρούσας εργασίας, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές που μου έδωσε και τον χρόνο που μου αφιέρωσε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της.

Την Καθηγήτρια Κα Πόταρη Δέσποινα και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ψυχάρη Γεώργιο που με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην συμβουλευτική επιτροπή.

Την Καθηγήτρια Κα Φαρμάκη Βασιλική για την υποστήριξή της κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών ως σύμβουλος καθηγητής.

Τον Καθηγητή κ. Κυριακίδη Λεωνίδα για τις συμβουλές που μου έδωσε για το στατιστικό κομμάτι της εργασίας.

Όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος για τις γνώσεις που μου προσέφεραν.

Όλους τους συμφοιτητές μου από το πρόγραμμα και ιδιαίτερα τον φίλο μου Νίκο, για την συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια του προγράμματος.

Τους συναδέλφους καθηγητές και τους μαθητές της Γ' Λυκείου που συνεργάστηκαν για τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων ώστε να ολοκληρωθεί η έρευνα.

Τις κυρίες Διονυσία Μπακογιάννη και Ελένη Κλη από τη γραμματεία του προγράμματος για την πολύτιμη υποστήριξή τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για όλη τη στήριξη που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	6
Κεφάλαιο 1.....	8
Εισαγωγή.....	8
Κεφάλαιο 2: Θεωρητικό Πλαίσιο	11
2.1.1 Η έννοια της αναπαράστασης	11
2.1.2 Εσωτερική και εξωτερική αναπαράσταση	12
2.1.3 Οι αναπαραστάσεις στα μαθηματικά	17
2.1.4 Αναπαραστάσεις και πρακτική στην τάξη	20
2.2.1 Η έννοια της οπτικοποίησης	21
2.2.2 Είδη οπτικοποίησης	22
2.2.3 Οπτικοποίηση και μαθηματικά	24
2.3.1 Εικόνα έννοιας και Ορισμός έννοιας	27
2.3.2 Εικόνα έννοιας και ορισμός έννοιας, ένα μοντέλο	29
2.3.3 Αποκάλυψη της εικόνας έννοιας και διδασκαλία	33
2.3.4 Η προσωρινή εικόνα έννοιας	34
Κεφάλαιο 3: Η Κυρτότητα στο σχολικό βιβλίο	36
Κεφάλαιο 4: Μεθοδολογία	43
4.1 Στόχοι της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα	43
4.2 Το πλαίσιο της έρευνας – Οι συμμετέχοντες	43
4.3 Παρουσίαση και ανάλυση του ερωτηματολογίου	44
4.4 Συλλογή δεδομένων	51
4.5 Ανάλυση δεδομένων	51
Κεφάλαιο 5: Αποτελέσματα	56
5.1 Εισαγωγή	56
5.2 Απαντήσεις των μαθητών στο ερωτηματολόγιο	56

5.3 Οι πιο συχνές παρανοήσεις των μαθητών	69
5.4 Αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων	78
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα	87
Κεφάλαιο 7: Βιβλιογραφία	94
Παράρτημα	99

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια της κυρτότητας χρησιμοποιείται ευρέως όχι μόνο σε πολλούς τομείς των μαθηματικών αλλά και σε άλλες θετικές επιστήμες. Παρόλο που είναι μια βασική έννοια, ο ρόλος της είναι υποβαθμισμένος. Περνά σχεδόν απαρατήρητη από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, γιατί κατά τη διδασκαλία της ακολουθούνται διαδικασίες όμοιες με αυτές που ακολουθήθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο του σχολικού βιβλίου κατά τη διδασκαλία της μονοτονίας.

Στην έρευνα αυτή εξετάστηκε ο βαθμός κατανόησης της έννοιας της κυρτότητας από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου.

Έλαβαν μέρος 112 μαθητές της Γ΄ Λυκείου από 7 Λύκεια του νομού Αττικής.

Οι μαθητές χωρίστηκαν σύμφωνα με στατιστική ανάλυση που έγινε, με τη χρήση της μεθόδου της Ανάλυσης Άδηλων Κλάσεων (Latent Class Analysis), σε 4 κλάσεις ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν. Έγινε, επίσης, παραγοντική ανάλυση στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου και προέκυψαν τρεις παράγοντες. Με κριτήριο η κάθε ερώτηση να έχει απαντηθεί τουλάχιστον από το 50% των μαθητών και να έχουν απαντηθεί το λιγότερο οι μισές ερωτήσεις του κάθε παράγοντα, παρατηρήθηκε μια κλιμάκωση των σωστών απαντήσεων από τη μία κλάση στην επόμενη. Επιπλέον, έγινε σε μια ομάδα επτά μαθητών μια διδασκαλία βασισμένη στο γεωμετρικό ορισμό της έννοιας της κυρτότητας. Δόθηκε και σε αυτούς να συμπληρώσουν το ίδιο ερωτηματολόγιο και στη συνέχεια έγινε έλεγχος των αποτελεσμάτων του κάθε μαθητή. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές αυτοί έδωσαν απαντήσεις που ικανοποιούσαν τουλάχιστον τους δύο από τους τρεις παραπάνω παράγοντες.

Λέξεις κλειδιά: Κυρτότητα, Παραγοντική Ανάλυση, Ανάλυση Άδηλων Κλάσεων.

ABSTRACT

The concept of convexity is widely used not only in many areas of mathematics but in other sciences as well. Although it is a basic concept, its role is underexposed. It passes almost unnoticed by the students of grade 12, because when it is taught the procedures followed are similar to those used in the preceding paragraph of the textbook about teaching function monotony.

In this research the degree of understanding of the concept of convexity was examined among students of grade 12.

112 students of grade 12 from seven high schools in Attica participated. The students were divided according to the statistical analysis done using the method of Latent Class Analysis, in four classes according to their responses. Also, the factor analysis of the questionnaire questions was carried out according to which three factors arose. On condition that each question should have been answered by at least 50% of the students and also that at least half of the questions of each factor be answered, an escalation of correct responses was observed from one class to the next. Moreover, there was a group of seven students for whom the teaching was based on the geometrical definition of convexity. They were given the same questionnaire and then the results of each student were assessed. It was found that these students gave answers that satisfy at least two of the above three factors.

Key words: Convexity, Factor analysis, Latent Class Analysis.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κυρτότητα είναι μια βασική γεωμετρική έννοια. Όμως χρησιμοποιείται ευρέως και σε άλλους τομείς των μαθηματικών, όπως στη συναρτησιακή ανάλυση, στη μιγαδική ανάλυση, στη θεωρία γραφημάτων, στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, στα διακριτά μαθηματικά, στην αλγεβρική γεωμετρία, στη θεωρία πιθανοτήτων. Η κυρτότητα έχει σημαντικό ρόλο, εκτός από τα μαθηματικά, και σε επιστήμες όπως στη φυσική, στη χημεία, και στη βιολογία.

Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι η έννοια της κυρτότητας σε γενικές γραμμές είναι υποτιμημένη.

Ο Αρχιμήδης στο έργο του “περί Σφαιράς και Κυλίνδρου Α’” για πρώτη φορά απομόνωσε τις βασικές ιδιότητες της κυρτότητας. Ο M.O.Hölder, στα 1889, μελέτησε την συνθήκη κυρτότητας για συναρτήσεις που έχουν θετική και συνεχή δεύτερη παράγωγο. Ο O.Stolz, στο σύγγραμμά του στο Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό (1893) απέδειξε την ύπαρξη αριστερών και δεξιών παραγώγων για κυρτές συναρτήσεις.

Το βασικό άρθρο για τις κυρτές συναρτήσεις ανήκει στον J.L.W.V. Jensen και παρουσιάστηκε το 1905. Σε αυτό ο Jensen ορίζει και μελετά κυρτές συναρτήσεις. Ειδικότερα αποδεικνύει την Ανισότητα Jensen. Δεν είναι υπερβολή να ισχυριστούμε ότι κατ’ουσία όλες οι αναλυτικές ανισότητες προκύπτουν από την κυρτότητα καταλλήλων συναρτήσεων.

Ο ρόλος της κυρτότητας της συνάρτησης στην ύλη των μαθηματικών της Γ’ Λυκείου είναι σημαντικός τόσο στην κατασκευή γραφικών παραστάσεων, όσο και στο ότι σχετίζεται με την εφαπτομένη καμπύλης.

Η παράγραφος που αφορά την έννοια της κυρτότητας στο σχολικό βιβλίο περνά από τους μαθητές σχεδόν απαρατήρητη. Ο κύριος λόγος είναι ότι επαναλαμβάνονται διαδικασίες που οι μαθητές ήδη γνωρίζουν από την μονοτονία συνάρτησης τις οποίες διδάχτηκαν σε προηγούμενη παράγραφο. Η μόνη διαφορά είναι ότι, αντί να εξετάσουμε το πρόσημο της πρώτης παράγωγου της συνάρτησης, εξετάζουμε το πρόσημο της δεύτερης παράγωγου.

Οι αντιλήψεις των μαθητών της Γ΄ Λυκείου για την έννοια της κυρτότητας είναι το ζητούμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο, πάνω στο οποίο στηρίχθηκε η παρούσα εργασία. Παρουσιάζεται αρχικά η έννοια της αναπαράστασης και η διάκριση που γίνεται σε εσωτερική και εξωτερική αναπαράσταση, καθώς και η σημαντικότητα τους στα μαθηματικά. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια της οπτικοποίησης τα είδη της και ο ρόλος της στα μαθηματικά. Τέλος, αναφερόμαστε στην εικόνα έννοιας και στον ορισμό έννοιας (*concept image* , *concept definition*), καθώς και σε ένα μοντέλο για την αλληλεπίδραση της εικόνας και του ορισμού της έννοιας.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας αναφέρεται ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται η έννοια της κυρτότητας στο σχολικό βιβλίο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας, και συγκεκριμένα στη μεθοδολογία της έρευνας, αναφέρεται ο σκοπός της εργασίας που είναι η προσπάθεια να αποτυπωθούν οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια της κυρτότητας συνάρτησης. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε κατάλληλο ερωτηματολόγιο, συνελέγησαν απαντήσεις από 112 μαθητές της Γ΄ Λυκείου και έγινε στατιστική ανάλυση των απαντήσεων με τη βοήθεια των λογισμικών IBM SPSS Statistics v19 και Mplus V6.12 Muthen and Muthen. Ειδικότερα, με τη χρήση του IBM SPSS Statistics v19 έγινε παραγοντική ανάλυση. Με τη βοήθεια του Mplus V6.12 Muthen and Muthen οι μαθητές χωρίστηκαν σε κλάσεις ανάλογα με τις απαντήσεις τους.

Στη συνέχεια, σε μία ομάδα επτά μαθητών διδάχθηκε η έννοια της κυρτότητας, βασισμένη στον γεωμετρικό ορισμό της. Μετά τη διδασκαλία οι μαθητές αυτοί συμπλήρωσαν το ίδιο ερωτηματολόγιο και μελετήσαμε τις επιδόσεις τους σε σχέση με τους παράγοντες που προέκυψαν από την προηγούμενη ανάλυση.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της έρευνας. Αρχικά αναφέρονται οι πιο συχνές παρανοήσεις των μαθητών που παρατηρήθηκαν. Οι παρανοήσεις με τη μεγαλύτερη συχνότητα ήταν δύο. Η πρώτη από αυτές είχε να κάνει με το ότι οι μαθητές θεωρούσαν ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από τα ακρότατα της συνάρτησης. Η δεύτερη αφορούσε στον

σχεδιασμό της γραφικής παράστασης. Παρόλο που το σχέδιο των μαθητών ήταν σωστό ως προς την κυρτότητα, αυτό δεν απεικόνιζε γραφική παράσταση συνάρτησης.

Μετά από παραγοντική ανάλυση που έγινε στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου, η έρευνα βασίστηκε στους παρακάτω τρεις παράγοντες:

α) Αν οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν πρόχειρα μια γραφική παράσταση συνάρτησης γνωρίζοντας μόνο δύο σημεία από τα οποία διέρχεται και το είδος της κυρτότητας της αν αυτό δεν μεταβάλλεται.

β) Αν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν το είδος της κυρτότητας μιας συνάρτησης από τρία συγκεκριμένα σημεία του γραφήματος της έχοντας ως δεδομένο ότι η κυρτότητα δεν αλλάζει.

γ) Αν οι μαθητές γνωρίζουν τον τυπικό ορισμό και αναγνωρίζουν τα διαστήματα κυρτότητας από το γράφημα.

Με τη βοήθεια του λογισμικού Mplus V6.12 Muthen and Muthen οι μαθητές χωρίστηκαν σε 4 κλάσεις ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις που συμμετείχαν τελικά στην έρευνα.

Με κριτήριο πάνω από τους μισούς μαθητές (50%) να έχουν απαντήσει σωστά στην κάθε ερώτηση και ταυτόχρονα να έχουν απαντηθεί τουλάχιστον οι μισές ερωτήσεις του κάθε παράγοντα, προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας.

Παρατηρήθηκε μια κλιμάκωση των σωστών απαντήσεων από τη μία κλάση στην επόμενη. Επιπλέον, η διδασκαλία που ήταν προσαρμοσμένη στο γεωμετρικό ορισμό της έννοιας της κυρτότητας είχε σαν αποτέλεσμα οι απαντήσεις των επτά μαθητών που την παρακολούθησαν να ικανοποιούν τουλάχιστον δύο από τους τρεις παράγοντες που προέκυψαν από την παραγοντική ανάλυση.

Στο έκτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της έρευνας και πως αυτά συνδέονται με τη βιβλιογραφία.

Στο έβδομο κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνεται η βιβλιογραφία στην οποία βασίστηκε η έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1.1 Η έννοια της αναπαράστασης

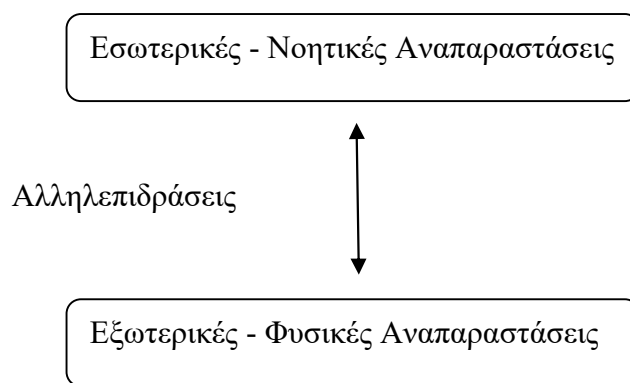
Μιλώντας χωρίς απόλυτη ακρίβεια, *αναπαράσταση* είναι μια κάποιου είδους διαμόρφωση, που εξ ολοκλήρου ή τμηματικά, αντιστοιχεί, αφορά, συνδέεται, αντιπροσωπεύει, συμβολίζει, αλληλεπιδρά με έναν ειδικό τρόπο, ή αλλιώς αντιπροσωπεύει κάτι άλλο (Palmer, 1977). Λέμε "χωρίς απόλυτη ακρίβεια" επειδή μεταξύ άλλων σύνθετων χαρακτηριστικών, οι αναπαραστάσεις δεν εμφανίζονται μεμονωμένα. Ανήκουν συνήθως σε ιδιαίτερα δομημένα συστήματα, είτε προσωπικά και ιδιοσυγκρασιακά είτε πολιτιστικά και συμβατικά. Σε αυτά έχει δοθεί ο ορισμός "σχήματα συμβόλων" (Karut, 1987) ή "αναπαραστατικά συστήματα" (Goldin, 1987 Lesh, Landau, & Hamilton, 1983). Επιπλέον, η σχέση αναπαράστασης είναι γενικά ασταθής και η συγκεκριμένη φύση της δεν είναι ένα απαραίτητο χαρακτηριστικό της αναπαράστασης. Αυτό συμβαίνει επειδή, αναπόφευκτα και πραγματικά, μια αλληλεπίδραση ή μια πράξη αναπαράστασης περιλαμβάνεται στη σχέση μεταξύ αυτών που αντιπροσωπεύουν και αυτών που αντιπροσωπεύονται (Von Glasersfeld, 1987).

Σύμφωνα με τον Karut (1987a) μια αναπαράσταση περιλαμβάνει τις παρακάτω πέντε ολότητες:

- i) την ολότητα που αναπαρίσταται
- ii) την ολότητα που αναπαριστά
- iii) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται
- iv) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση
- v) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες

2.1.2 Εσωτερική και εξωτερική αναπαράσταση

Σύμφωνα με τους Goldin & Karut (1996) μια διάκριση που είναι πολύ σημαντική για την ψυχολογία της μάθησης και της μαθηματικής πρακτικής, και θεμελιώδης στην κοινή προοπτική τους πάνω στην έννοια της αναπαράστασης, είναι αυτή μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών συστημάτων αναπαράστασης.



Σχήμα 1: Εσωτερικές και Εξωτερικές αναπαραστάσεις.

Η παραπάνω διάκριση έχει χαρακτηριστεί μερικές φορές ως διάκριση μεταξύ *σημαινόμενου* (εσωτερικού) και *σημαίνοντος* (εξωτερικού), δεν θεωρούν όμως ότι η σχέση του σημαίνόμενου και του σημαίνοντος είναι αμετάβλητη και μίας κατεύθυνσης, αλλά ότι μεταβάλλεται και αντιστρέφεται.

Ο όρος *εσωτερική αναπαράσταση* χρησιμοποιείται για να αναφερθούμε στις πιθανές νοητικές διαμορφώσεις των ατόμων, όπως οι μαθητές ή οι λύτες προβλημάτων. Φυσικά, όντας εσωτερικές, τέτοιες διαμορφώσεις δεν παρατηρούνται άμεσα. Οι δασκάλοι ή οι ερευνητές πολύ συχνά (και αναγκαία) συμπεραίνουν τους νοητικούς σχηματισμούς των μαθητών ή θέματα που προκύπτουν από αυτά που λένε ή κάνουν, δηλαδή από τη συμπεριφορά τους. Συχνά, εξάγουν τέτοια συμπεράσματα σιωπηλά, παρά ρητά, και μερικές φορές

συνειδητά θέτουν ως στόχο, μέσω της διδασκαλίας, να αναπτύξουν τα ιδιαίτερα είδη των εσωτερικών αναπαραστάσεων στους μαθητές τους.

Σε έναν ορισμένο βαθμό ένα άτομο μπορεί να είναι σε θέση να περιγράψει τις νοητικές διαδικασίες του/της, όπως φαίνονται αυτές να εμφανίζονται, μέσω της ενδοσκόπησης. Όχι μόνο η "μεταγνωστική συνειδητοποίηση" είναι αναπόφευκτα ατελής και ελλιπής, αλλά η εμπειρία από αυτή είναι άμεσα προσιτή μόνο στο πρόσωπο που κάνει την ενδοσκόπηση. Ο όρος *εσωτερική αναπαράσταση* χρησιμοποιείται για να μην αναφερθούμε στο άμεσο αντικείμενο της ενδοσκοπικής δραστηριότητας, αλλά σε ένα κατασκευάσμα που προσεγγίζεται από έναν παρατηρητή από την παρατήρηση της συμπεριφοράς (συμπεριλαμβανομένης, φυσικά, της λεκτικής και μαθηματικής συμπεριφοράς). Αν και η εμπειρία της ενδοσκόπησης είναι υποκειμενική, οι περιγραφές που προκύπτουν από την ενδοσκόπηση είναι κατανοητές όπως, παραδείγματος χάριν, λεκτική και χειρονομιακή συμπεριφορά. Στην ανάπτυξη μιας θεωρίας βασισμένης στα συστήματα της εσωτερικής αναπαράστασης, είναι επιθυμητό για χάρη της συνοχής και της χρησιμότητας, τα είδη διαμορφώσεων που εμφανίζονται θεωρητικά (δηλαδή εσωτερικές αναπαράστασεις που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις) να φέρουν κάποια ομοιότητα στις περιγραφές των ατόμων της υποκειμενικής συνειδητοποίησής τους. Εντούτοις, είναι σημαντικό το γεγονός ότι διακρίνουμε σαφώς τον όρο της εσωτερικής αναπαράστασης όπως χρησιμοποιείται εδώ σε σχέση με άλλες απόψεις που μπορούν να συμπεριλάβουν οντολογικές υποθέσεις για το "νου".

Σε αντίθεση με τη χρήση της εσωτερικής αναπαράστασης, χρησιμοποιούμε τον όρο *εξωτερική αναπαράσταση* για να αναφερθούμε στις φυσικά ενσωματωμένες, παρατηρήσιμες διαμορφώσεις όπως είναι οι λέξεις, οι γραφικές παραστάσεις, οι εικόνες, οι εξισώσεις, ή οι μικρόκοσμοι υπολογιστών. Αυτοί είναι σε γενικές γραμμές προσβάσιμοι για παρατήρηση από ένα οποιοδήποτε άτομο με τις κατάλληλες γνώσεις. Φυσικά, η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων ως μέρος δομημένων συστημάτων, και η ερμηνεία των αναπαριστώμενων σχέσεών τους, δεν είναι "αντικειμενική" ή "απόλυτη" αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαράστασεις αυτών που κάνουν την ερμηνεία.

Έστω μια γραφική παράσταση που έχει χαραχθεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες από ένα άτομο για "να αναπαραστήσει" την εξίσωση $y + 3x - 6 = 0$. Η συγκεκριμένη γραφική παράσταση δεν είναι ένα απομονωμένο σχέδιο. Εμφανίζεται μέσα σε ένα σύστημα αναπαράστασης συντεταγμένων, βασισμένο σε συγκεκριμένους κανόνες και συμβάσεις, που έχουν κατασκευαστεί και είναι κοινωνικά αποδεκτοί, οι οποίοι πρέπει στη συνέχεια (τουλάχιστον μερικώς) "να γίνουν κατανοητοί" πριν πραγματοποιηθεί η αναπαραστατική πράξη. Η γραφική παράσταση θεωρείται ως εξωτερική διαμόρφωση, και το σύστημα της αναπαράστασης των καρτεσιανών συντεταγμένων μεταχειρίζεται ως εξωτερικό από οποιοδήποτε άτομο. Διακρίνεται έτσι η εξωτερική γραφική παράσταση από τις εσωτερικές οπτικές, κιναισθητικές, ή άλλες αναπαραστάσεις που η γραφική παράσταση μπορεί να προκαλέσει σε ένα άτομο. Επίσης διακρίνουμε περαιτέρω το συμβατικό σύστημα του καρτεσιανού συστήματος αναπαράστασης συντεταγμένων (εξωτερικό) από το εσωτερικό εννοιολογικό/διαδικαστικό σύστημα αναπαράστασης του ατόμου που μπορεί να αναφερθεί και να αλληλεπιδράσει με το εξωτερικό σύστημα.

Οι Goldin & Karut (1996) δεν θεωρούν ότι η σχέση μεταξύ τέτοιων εσωτερικών και εξωτερικών συστημάτων είναι άμεση ή απλή με οποιονδήποτε τρόπο και ότι η εσωτερική βέβαια δεν πρόκειται να αναλυθεί απλά ως "νοητική εικόνα" ή "αντίγραφο" του εξωτερικού συστήματος.

Επιπλέον, το είδος της εννοιολογικής οντότητας που η γραφική παράσταση "αναπαριστά" μπορεί να διαφέρει σημαντικά από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Για παράδειγμα, αυτή η γραφική παράσταση μπορεί εκτός από την παραπάνω εξίσωση να αναπαριστά τη συνάρτηση $f(x) = -3x + 6$, ή τη σχέση θέσης-χρόνου ενός κινούμενου προς τα δυτικά αντικειμένου με μια σταθερή ταχύτητα 3 μέτρων ανά δευτερόλεπτο, που ξεκινά 6 μέτρα ανατολικά από την αρχή, ή μπορεί να αναπαραστήσει την υποτεινούσα ενός ορθογωνίου τριγώνου που «κοιτάζει» προς τα δεξιά, του οποίου βάση είναι 2 μονάδες και το ύψος είναι 6 μονάδες. Η δύναμη και η χρησιμότητα μιας αναπαράστασης εξαρτώνται σαφώς από το ότι είναι μέρη ενός δομημένου συστήματος, και από το βαθμό ευελιξίας ή μεταβλητότητας σε αυτό που μπορούν να αναπαραστήσουν.

Ιδιαίτερης σπουδαιότητας είναι οι διπλής κατεύθυνσης αλληλεπιδράσεις μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αντιπαραστάσεων. Μερικές φορές ένα άτομο εξωτερικεύει με φυσική μορφή μέσω πράξεων που απορρέουν από τις εσωτερικές δομές, όπως αυτές της γραφής, της ομιλίας, του χειρισμού των στοιχείων κάποιου εξωτερικού συγκεκριμένου συστήματος, και τα λοιπά. Άλλες φορές ένα άτομο εσωτερικεύει με τη βοήθεια των αλληλεπιδράσεων με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός αναπαραστατικού συστήματος, με την ανάγνωση, την ερμηνεία λέξεων και προτάσεων, την ερμηνεία εξισώσεων και γραφικών παραστάσεων, και πάει λέγοντας. Τέτοιες ερμηνευτικές πράξεις μπορούν να πραγματοποιηθούν τόσο σε ένα ενεργό, σκόπιμο επίπεδο που να υπόκειται στο συνειδητό, εμφανή έλεγχο, όσο και σε ένα πιο παθητικό, αυτόματο επίπεδο όπου οι φυσικές δομές ενεργούν στο άτομο σαν "αντήχηση" με τις προηγουμένως κατασκευασμένες νοητικές δομές (Grossberg, 1980). Κατά συνέπεια η φυσική γλώσσα ή οι γνωστές μαθηματικές εκφράσεις γίνονται «κατανοητές» χωρίς σκόπιμη, συνειδητή πνευματική δραστηριότητα. Οι αλληλεπιδράσεις και στις δύο κατευθύνσεις μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων μπορούν (και έτσι κάνουν συχνότερα) να εμφανιστούν ταυτόχρονα.

Σύμφωνα με τους (Lesh, Behr, & Post, 1987), οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι εξωτερικές δηλώσεις ή καλύτερα «οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών», δηλαδή οι εκδηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει τις έννοιες οι μαθητές. Οι Lesh, Post & Behr, (1987) περιγράφουν τα πέντε είδη συστημάτων που εντάσσονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες σχετίζονται με τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος. Τονίζουν πως η ομαδοποίηση έχει γίνει με κριτήριο τον τρόπο παραγωγής τους και όχι με τον τρόπο λειτουργίας τους μέσα σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα. Τα είδη αυτά είναι τα παρακάτω:

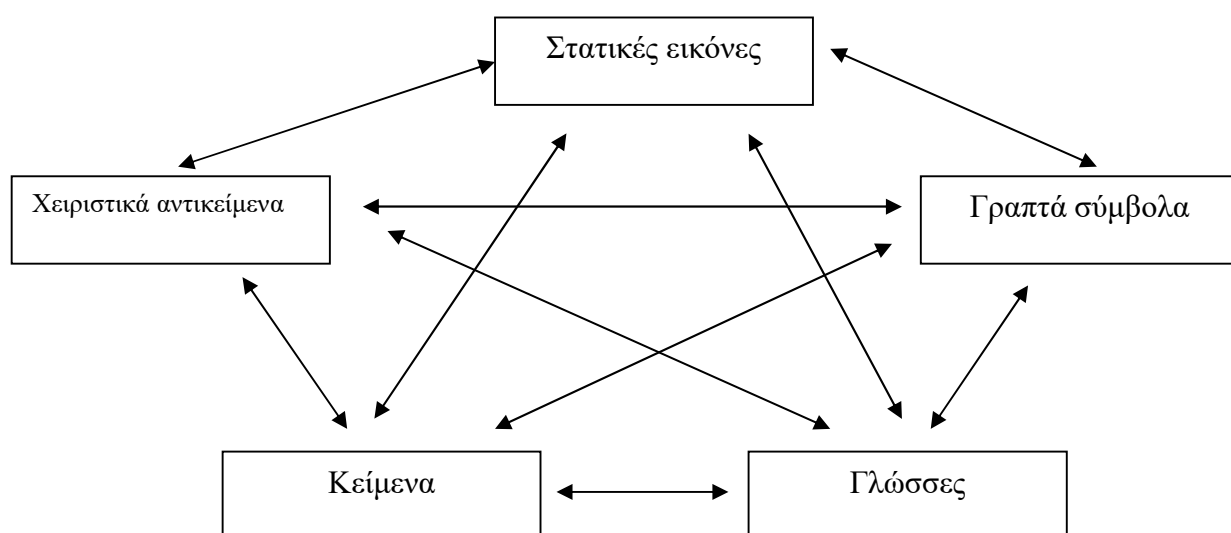
1. *Κείμενα*. Η γνώση είναι οργανωμένη στο εσωτερικό τους και προέρχονται συνήθως από γεγονότα της καθημερινής ζωής. Με βάση αυτά οι μαθητές μπορούν να βγάλουν συμπεράσματα που ίσως τα χρησιμοποιήσουν για την επίλυση προβλημάτων στα οποία ισχύουν διαφορετικές καταστάσεις.

2. Αντικείμενα ή μοντέλα που μπορούν να χειριστούν οι μαθητές. Μερικά από αυτά είναι οι κύβοι της αριθμητικής, η αριθμητική γραμμή, οι ράβδοι κλασμάτων τα οποία δεν παρουσιάζουν κάποιο νόημα αυτά καθαυτά παρά σημασία έχουν οι σχέσεις που προκύπτουν από την ενασχόληση των μαθητών μαζί τους.

3. Εικόνες και διαγράμματα. Αποτελούν στατικά - εικονικά μοντέλα που μπορούν να εσωτερικευθούν σαν νοητικές εικόνες από τους μαθητές.

4. Γλώσσες. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται και πιο εξειδικευμένες όπως είναι η μαθηματική λογική.

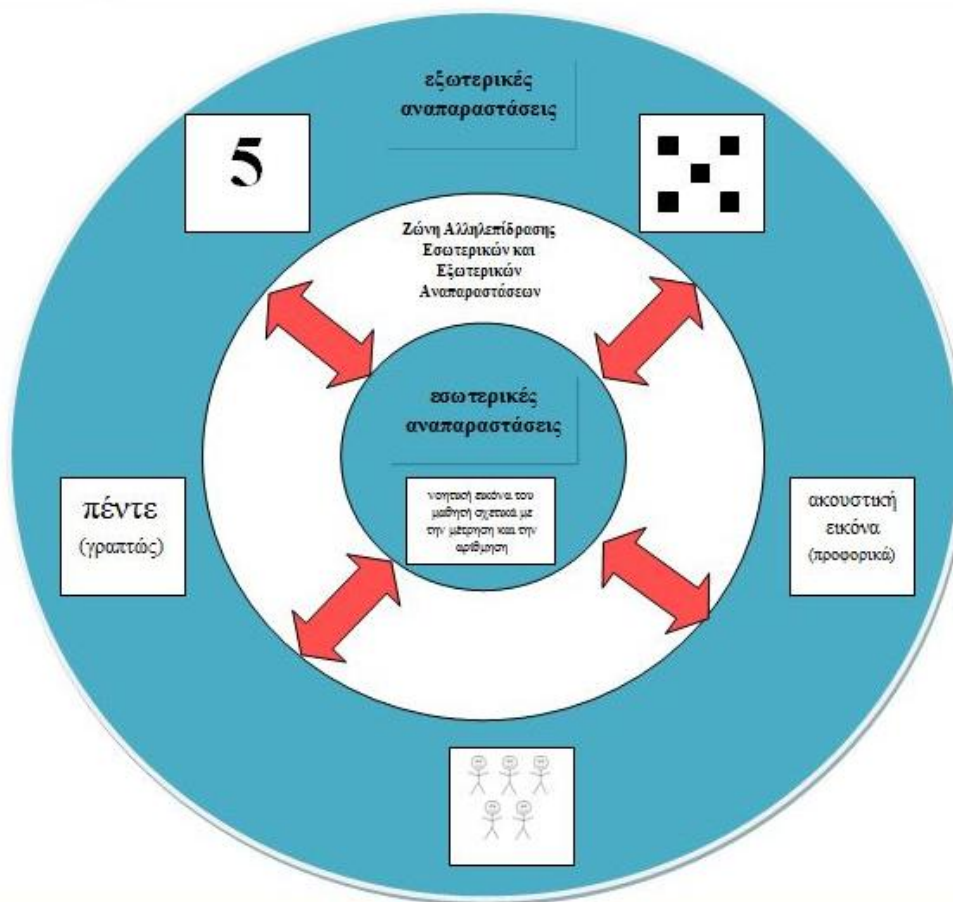
5. Γραπτά σύμβολα. Αυτά μπορεί να είναι εξειδικευμένα (για παράδειγμα τα σύμβολα της γλώσσας των συνόλων) είτε φράσεις της καθομιλουμένης. (Σχήμα 2)



Σχήμα 2: Τα πέντε είδη συστημάτων που εντάσσονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις κατά Lesh, Post & Behr (1987).

2.1.3 Οι αναπαραστάσεις στα μαθηματικά

Οι Pape and Tchoshanov (2001) αναφέρουν ότι οι αναπαραστάσεις εντός των μαθηματικών μπορούν να θεωρηθούν ως *εσωτερικές*, αφαιρέσεις των μαθηματικών ιδεών ή γνωστικά σχήματα που έχουν αναπτυχθεί από τον μαθητή μέσα από την εμπειρία. Απ'την άλλη μεριά, αναπαραστάσεις όπως αριθμητικά ψηφία, αλγεβρικές εξισώσεις, γραφικές παραστάσεις, πίνακες και διαγράμματα είναι *εξωτερικές* εκδηλώσεις των μαθηματικών εννοιών που «ενεργούν ως ερέθισμα για τις αισθήσεις» και μας βοηθούν να κατανοήσουμε αυτές τις έννοιες (Janvier, Girardon, & Morand, 1993). Τέλος, η αναπαράσταση αναφέρεται επίσης στην πράξη εξωτερίκευσης μιας εσωτερικής, νοητικής αφαίρεσης. Για παράδειγμα, ένα παιδί τεσσάρων ετών που δίνει ονόματα στα πέντε παιχνίδια του χρησιμοποιώντας αριθμούς ανάλογα με την κατάταξη των παιχνιδιών, (δηλαδή ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε), μπορεί να μην κατανοεί ότι ο τελευταίος αριθμός που χρησιμοποιεί δηλώνει τον αριθμό όλων των παιχνιδιών. Αργότερα, στην ηλικία των 5-6 ετών, το παιδί το κατανοεί και αρχίζει να τυποποιεί τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων του πέντε. Είναι τότε σε θέση να χρησιμοποιεί αυτές τις αναπαραστάσεις όταν δηλαδή αρχίζει να κάνει συγκρίσεις, όπως "περισσότερο από" και "λιγότερο από". Τότε μπορεί να φανταστεί την οπτική εικόνα του πέντε και μπορεί αυτή να χρησιμεύσει ως πρότυπο για τη σύγκριση και άλλων συνόλων αντικειμένων.



Σχήμα 3: Η σχέση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά κατά την κατανόηση της αριθμησης.

Το Σχήμα 3 απεικονίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων, που διευκολύνουν την ικανότητα του μαθητή να κάνει τέτοιες συγκρίσεις. Το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών στα «έγγραφα προτύπων» (NCTM, 2000), αλλά και τα επιστημονικά πρότυπα του Εθνικού Ερευνητικού Συμβουλίου (NRC, 1996) απαιτούν, οι μαθητές να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν με ευελιξία διάφορες μορφές αναπαραστάσεων για να διερευνήσουν και να επικοινωνήσουν για τα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου. Ο δρόμος προς την ευέλικτη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, ωστόσο, είναι προκλητικός. Στις Αρχές και Κριτήρια για τα Σχολικά Μαθηματικά (NCTM, 2000), η

αναπαράσταση εισάγεται ως πρότυπο διαδικασίας. Αν και ακόμα είναι αναπόσπαστη σε καθένα από τα κριτήρια περιεχομένου, αυτό το κριτήριο έχει ξεχωρίσει από τα ατομικά πρότυπα περιεχομένου που παρουσιάστηκαν στην αρχική έκδοση (NCTM, 1989). Αυτή η μετατόπιση στην έμφαση είναι στη γραμμή με αυξανόμενο ενδιαφέρον για τις αναπαραστάσεις μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ., Maher & Speiser, 1998a, 1998b). Μέσα στο έγγραφο του NCTM (2000) «ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται τόσο στην διαδικασία και το προϊόν, όσο και στην πράξη της σύλληψης μιάς μαθηματικής έννοιας ή σχέσης με κάποια μορφή και στην ίδια τη μορφή» (σελ. 67).

Τα νέα πρότυπα διαδικασίας ζητούν για όλους τους μαθητές να είναι σε θέση να:

1. Δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για την οργάνωση, την καταγραφή, και την κοινοποίηση των μαθηματικών ιδεών.
2. Επιλέγουν, εφαρμόζουν, και μεταφράζουν μεταξύ των μαθηματικών αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλημάτων .
3. Χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για την μοντελοποίηση και ερμηνεία φυσικών κοινωνικών και μαθηματικών φαινομένων. (σελ. 67).

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι αναπαραστάσεις που αναφέρονται σε κάθε μία από αυτές τις δηλώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως εσωτερικά, γνωστικά σχήματα ή ως οι εξωτερικεύσεις αυτών των νοητικών κατασκευασμάτων. Αυτό γίνεται, γιατί οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν εσωτερικές αναπαραστάσεις για να οργανώσουν μαθηματικές ιδέες ή για να επιλύσουν προβλήματα. Εναλλακτικά, μπορούν να παράγουν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις για να πραγματοποιήσουν τις ίδιες διαδικασίες. Οι Pape & Tchoshanov υποστηρίζουν τη θέση ότι η ανάπτυξη της αναπαραστατικής σκέψης των μαθητών είναι μια διαδικασία δύο όψεων, μια αλληλεπίδραση της εσωτερίκευσης των εξωτερικών αναπαραστάσεων και της εξωτερίκευσης των νοητικών εικόνων (Σχήμα 3). Αυτή η αλληλεπίδραση συχνά πραγματοποιείται στο πλαίσιο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Οι μαθηματικές έννοιες που μαθεύτηκαν μέσω της σταδιακής οικοδόμησης νοητικών εικόνων για τις πρωτοβάθμιες έννοιες όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αντικειμένων σε ένα σύνολο πολύπλοκων φυσικών

φαινομένων ή η σχέση μεταξύ του ποσοστού της ροής του νερού και της ποσότητας των ρύπων. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αυτών των εννοιών (το ψηφίο που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αντικειμένων ή τη γραφική παράσταση των ρύπων), τονώνει τη σχετιζόμενη νοητική εικόνα του αριθμού των αντικειμένων στο σύνολο ή της σχέσης μέσα στη φύση. Θεωρούν ότι υπάρχει μια αμοιβαία επιρροή μεταξύ των δύο μορφών αναπαραστάσεων: η φύση μιας εξωτερικής αναπαράστασης επηρεάζει τη φύση της εσωτερικής και το αντίστροφο. Έτσι, τα απλοϊκά γραφήματα οδηγούν σε απλοϊκές κατανοήσεις ενώ οι πολύπλοκες εξωτερικές αναπαραστάσεις διευκολύνουν την κατανόηση των πιο σύνθετων φαινομένων. Τελικά, οι Pape and Tchoshanov (2001) επισημαίνουν ότι η αναπαράσταση είναι κοινωνική δραστηριότητα από τη φύση της. Όταν οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν δεδομένα σε ένα γράφημα, αυτό δεν πρέπει να είναι ένα στατικό τελικό αποτέλεσμα, μια εικόνα, αλλά μάλλον ένα κίνητρο για συζήτηση για να τους βοηθήσει να δημιουργήσουν μια σχέση ή να σχηματίσουν μια αιτιολόγηση μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Τελικά συμπεραίνουν ότι αναπαραστατική σκέψη είναι η ικανότητα του μαθητή να ερμηνεύσει, να κατασκευάσει και να χειριστεί (επικοινωνήσει) αποτελεσματικά και με τις δύο μορφές των αναπαραστάσεων, εξωτερικές και εσωτερικές, ατομικά και μέσα σε κοινωνικές καταστάσεις.

2.1.4 Αναπαραστάσεις και πρακτική στην τάξη

Οι Pape and Tchoshanov (2001) αναφέρουν πως ένας από τους στόχους των μαθηματικών σύμφωνα με τον (NCTM, 2000), είναι η ευέλικτη χρήση των αναπαραστάσεων, άρα η συμπεριφορά των καθηγητών και οι κανόνες της τάξης είναι σημαντικό να εξεταστούν. Επιθυμούν να τονίσουν τέσσερα συμπεράσματα για την πρακτική της τάξης. Κατ' αρχήν, στους μαθητές πρέπει να δοθεί η ευκαιρία να εξασκηθούν με τις αναπαραστάσεις, τόσο στην παραγωγή εξωτερικών αναπαραστάσεων, όσο και στην εσωτερίκευση των μαθηματικών ιδεών μέσω κοινωνικής δραστηριότητας που περιλαμβάνει διάφορες εξωτερικές

αναπαραστάσεις. Δεύτερον, τονίζουν ότι η αναπαράσταση είναι εκ φύσεως μια κοινωνική δραστηριότητα. Μαθητές καταφέρνουν να κατανοούν και τη διαδικασία της αναπαράστασης και τα αποτελέσματα της μέσω της κοινωνικής δραστηριότητας.

Τρίτον, επισημαίνουν πως, προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν ικανότητες στα μαθηματικά, η διδασκαλία πρέπει να χρησιμοποιήσει μια ποικιλία τεχνικών (π.χ., αναλυτικές και γεωμετρικές). Τέλος, οι αναπαραστάσεις πρέπει να θεωρηθούν ως εργαλεία για σκέψη, εξήγηση, και αιτιολόγηση. Κατά συνέπεια, καθηγητές και μαθητές πρέπει να αναπτύξουν κανόνες τάξεων που διευκολύνουν την εξήγηση, την αιτιολόγηση και τη χρήση των αναπαραστάσεων στην υπηρεσία των υποστηρικτικών επιχειρημάτων. Αν και η διαδικασία είναι προκλητική, αυτές οι ιδέες θα διευκολύνουν τις απαραίτητες αλλαγές για σημαντική αλλαγή στις πρακτικές της τάξης που οδηγούν σε σημαντική μαθηματική κατανόηση.

2.2.1 Η έννοια της οπτικοποίησης

Ο Arcavi (1999), παραφράζοντας τους ορισμούς των Zimmermann & Cunningham (1991, σελ.3) και Hershkowitz κ.α, (1989, σελ.75) δίνει τον παρακάτω ορισμό:

«Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, η ερμηνεία, η χρήση και ο προβληματισμός πάνω σε φωτογραφίες, εικόνες, διαγράμματα, στο μυαλό μας, σε χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και μετάδοση πληροφοριών, τη σκέψη και την ανάπτυξη ιδεών, που στο παρελθόν ήταν άγνωστες, και τη βελτίωση της κατανόησης».

Η Presmeg (2006) αναφέρει ότι ο όρος οπτικοποίηση έχει χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους στη βιβλιογραφία της έρευνας. Ακολουθώντας τον ορισμό των Piaget and Inhelder (1971) για την οπτικοποίηση, ορίζει τα εξής: «όταν ένα άτομο δημιουργεί μια χωρική διάταξη (που συμπεριλαμβάνει και μία μαθηματική περιγραφή) υπάρχει μια οπτική εικόνα στο μυαλό του ατόμου, που οδηγεί τη

δημιουργία αυτή. Έτσι, η οπτικοποίηση θεωρείται ότι περιλαμβάνει διαδικασίες κατασκευής και μετασχηματισμού, όχι μόνο οπτικών νοητικών εικόνων, αλλά και όλων των περιγραφών μιας χωρικής φύσης που μπορεί να εμπλέκεται στην πράξη των μαθηματικών».

Ο Duval (1999) αναφέρει ότι «δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς οπτικοποίηση» θεωρώντας τις αναπαραστάσεις και την οπτικοποίηση ως τον πυρήνα της κατανόησης στα Μαθηματικά.

2.2.2 Είδη οπτικοποίησης

Ο Guzman (2002), αναφέρει ότι υπάρχουν τύποι οπτικοποίησης που έχουν σημαντικές διαφορές και δυσκολίες στην εφαρμογή τους, και προσπαθεί να τους διαχωρίσει όπως παρακάτω:

Ισομορφική οπτικοποίηση

Τα αντικείμενα μπορεί να έχουν μια "ακριβή" αντιστοιχία με τις αναπαραστάσεις τους. Αυτό σημαίνει ότι, σε γενικές γραμμές, θα ήταν δυνατό να θεσπιστεί ένα σύνολο κανόνων για τη μετάφραση των στοιχείων της οπτικής μας αναπαράστασης και των μαθηματικών σχέσεων των αντικειμένων που αναπαριστούν. Με αυτό τον τρόπο, οι οπτικοί χειρισμοί των αντικειμένων θα μπορούσαν να μετασχηματιστούν, εάν το επιθυμούσαμε, σε αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις. Αυτό το είδος αναπαράστασης ονομάζεται ισομορφική οπτικοποίηση.

Η μοντελοποίηση ενός μαθηματικού προβλήματος σε πολλές περιπτώσεις ενδέχεται να είναι μια ισομορφική οπτικοποίηση. Η χρησιμότητά της είναι μάλλον προφανής. Ο χειρισμός των αντικειμένων που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας ή με τη φαντασία μας είναι ευκολότερος και αμεσότερος από το χειρισμό αφηρημένων αντικειμένων, τα οποία μπορεί συχνά να περίπλοκα στη δομή τους.

Ομοιομορφική οπτικοποίηση

Σε αυτό το είδος οπτικοποίησης, που καλείται "ομοιομορφική", μερικά από τα στοιχεία έχουν ορισμένες κοινές σχέσεις που μιμούνται αρκετά καλά τις σχέσεις μεταξύ των αφηρημένων αντικειμένων, και έτσι μπορούν να μας παρέχουν υποστήριξη, μερικές φορές πολύ σημαντική, στο να καθοδηγήσει τη φαντασία μας στις μαθηματικές διαδικασίες, συμπεράσματος, έρευνας και απόδειξης.

Αναλογική οπτικοποίηση

Εδώ αντικαθιστούμε νοητικά τα αντικείμενα με τα οποία εργαζόμαστε, με άλλα που σχετίζονται μεταξύ τους με έναν ανάλογο τρόπο και των οποίων η συμπεριφορά είναι περισσότερο γνωστή ή ίσως ευκολότερη στο χειρισμό της, επειδή έχει ερευνηθεί ήδη.

Αυτό το είδος οπτικοποίησης ή αναλογικού μοντελισμού ήταν μια από τις συνηθισμένες μεθόδους ανακαλύψεων που χρησιμοποιήθηκαν από τον Αρχιμήδη, σύμφωνα με αυτά που γράφει στο φίλο του Ερατοσθένη στη διάσημη επιστολή του, γνωστή ως «η Μέθοδος».

Διαγραμματική οπτικοποίηση

Σε αυτό το είδος απεικόνισης τα νοητικά αντικείμενα μας και οι κοινές τους σχέσεις, που αφορούν τις πτυχές που είναι ενδιαφέρουσες για μας, απλώς αναπαριστώνται από διαγράμματα που αποτελούν μια χρήσιμη βοήθεια στις διαδικασίες σκέψης μας. Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι σε πολλές περιπτώσεις τέτοια διαγράμματα είναι παρόμοια με τους μνημοτεχνικούς κανόνες.

2.2.3 Οπτικοποίηση και μαθηματικά

Είναι αλήθεια ότι "μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις", αλλά αυτό προϋποθέτει έναν σημαντικό όρο, ότι η εικόνα πρέπει να βγάζει σωστό νόημα και να είναι κατανοητή. Διαφορετικά, μια εικόνα δεν αξίζει τίποτα. (Guzman, 2002)

Ο Arcavi (1999) αναφέρει ότι φαίνεται να υπάρχει ευρεία συμφωνία σχετικά με τον κεντρικό ρόλο της οπτικοποίησης στη πράξη και τη μάθηση των μαθηματικών.

Αυτός ο ρόλος πηγάζει από το γεγονός ότι η οπτικοποίηση δεν έχει πλέον σχέση με την απλή επεξήγηση μόνο, αλλά επίσης αναγνωρίζεται ως βασικό στοιχείο της αιτιολογίας (βαθιά εμπλεκόμενη με την εννοιολογική και όχι με την απλή αντιληπτική), επίλυση προβλημάτων, ακόμη και της απόδειξης.

Σύμφωνα με τον Tall (1991), σε μία μαθηματική έρευνα η απόδειξη είναι το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας. Πριν υπάρξει η απόδειξη, πρέπει να υπάρχει μια ιδέα για το ποιά θεωρήματα αξίζει να αποδειχθούν, ή ποια θεωρήματα μπορεί να ισχύουν. Αυτό το διερευνητικό στάδιο της μαθηματικής σκέψης οφελείται από την οικοδόμηση μιας συνολικής εικόνας σχέσεων και ως μια τέτοια εικόνα μπορεί να επωφεληθεί από μια οπτικοποίηση. Η οπτικοποίηση όμως έχει το διακριτικό μειονέκτημά της. Το πρόβλημα είναι ότι οι εικόνες μπορεί συχνά να οδηγούν σε λανθασμένα θεωρήματα. Για παράδειγμα, τον δέκατο ένατο αιώνα, για μεγάλο διάστημα πίστευαν ότι οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν το πολύ ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων όπου μπορεί να είναι μη-διαφορίσιμες. Η ιδέα ότι μια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι συνεχής παντού, και πουθενά διαφορίσιμη, ήταν δύσκολο για κάποιον να το σκεφτεί.

Με τη διερεύνηση παραδειγμάτων, τα οποία λειτουργούν, και παραδειγμάτων, τα οποία αποτυγχάνουν, είναι πιθανόν οι μαθητές να αποκτήσουν τις οπτικές διαισθήσεις, οι οποίες είναι απαραίτητες για να παρέχουν ισχυρές τυπικές ιδέες. Έτσι, η διαίσθηση και η μαθηματική αυστηρότητα δεν χρειάζεται να είναι σε αντίθεση η μία με την άλλη. Με την παροχή ενός κατάλληλα ισχυρού πλαισίου, η διαίσθηση οδηγεί φυσικά στην αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης.

Ο Arcavi (1999) αναφέρει ότι έμπειροι μαθηματικοί μπορούν να ισχυριστούν ότι «βλέπουν» μέσα από συμβολικές μορφές, ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητά τους.

Για άλλους, και σίγουρα για τους μαθητές των μαθηματικών, η οπτικοποίηση μπορεί να έχει ένα ισχυρό συμπληρωματικό ρόλο στις τρεις πτυχές που επισημαίνονται: οπτικοποίηση ως (α) υποστήριξη και απεικόνιση κατ'ουσία συμβολικών αποτελεσμάτων (και, ενδεχομένως, παρέχοντας μια απόδειξη από μόνη της), (β) έναν δυνατό τρόπο για την επίλυση των συγκρούσεων μεταξύ (σωστών) συμβολικών λύσεων και (λανθασμένων) διαισθήσεων, και (γ) ως ένας τρόπος για να μας βοηθήσει να εμπλακούμε και να ανακτήσουμε εννοιολογικό υπόβαθρο το οποίο μπορεί εύκολα να παρακαμφθεί με τυπικές λύσεις.

Όμως, εξακολουθούν να υπάρχουν πολλά θέματα που αφορούν στην οπτικοποίηση στη μαθηματική εκπαίδευση και που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Ο Arcavi (1999) δανειζόμενος από τους Eisenberg και Dreyfus (1991), κατατάσσει τις δυσκολίες της οπτικοποίησης σε τρεις βασικές κατηγορίες: «πολιτιστική», «γνωστική» και «κοινωνιολογική».

Η «πολιτιστική» δυσκολία αναφέρεται στις πεποιθήσεις και τις αξίες πάνω στο τι σημαίνουν τα μαθηματικά και τι σημαίνει κάνω μαθηματικά, τι είναι θεμιτό ή αποδεκτό και τι δεν είναι. Αμφισβήτηση στο εσωτερικό της μαθηματικής κοινότητας και δηλώσεις όπως «αυτό δεν είναι μαθηματικά» (Sfard, 1998, σ. 454), από τους σημαντικότερους εκπροσώπους της, είναι πιθανό να διεισδύσει μέσα στην τάξη, μέσω του διδακτικού υλικού, της εκπαίδευσης καθηγητών κλπ. και να διαμορφώσει την έμφαση και το πνεύμα τους. Αυτή η στάση, την οποία η Presmeg (1997, σελ. 310) αποκαλεί «υποτίμηση» της οπτικοποίησης, δεν αφήνει πολλά περιθώρια για τις πρακτικές στην τάξη να ενσωματώσουν και να δώσουν αξία στην οπτικοποίηση, ως αναπόσπαστο μέρος του κάνω μαθηματικά. Οι γνωστικές δυσκολίες περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, τη συζήτηση της οποίας μία απλή εκδοχή θα αναγνωστεί ως εξής: είναι η "οπτική" ευκολότερη ή δυσκολότερη; Όταν η οπτικοποίηση ενεργεί σύμφωνα με εννοιολογικά πλούσιες εικόνες (ή με τα λόγια του Fischbein (1987) όταν υπάρχουν εννοιολογικές δομές

που παρεμβαίνουν), η γνωστική απαίτηση είναι σίγουρα υψηλή. Εκτός αυτού, αιτιολογώντας με έννοιες τις οπτικές ρυθμίσεις, μπορεί να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν πάντα διαδικαστικά "ασφαλείς" ρουτίνες στις οποίες θα στηριχθεί (όπως μπορεί να συμβαίνει στην περίπτωση με πολλές τυπικές συμβολικές προσεγγίσεις). Συνειδητά ή ασυνειδητά, τέτοιες καταστάσεις μπορεί να απορριφθούν από τους μαθητές (ενδεχομένως και από τους καθηγητές) με την αιτιολογία ότι είναι πολύ «ολισθηρές» ή πολύ «επικίνδυνες».

Μια άλλη γνωστική δυσκολία προκύπτει από την ανάγκη να επιτευχθεί ευέλικτη και επαρκής μετάφραση εμπρός και πίσω μεταξύ των οπτικών και αναλυτικών αναπαραστάσεων της ίδιας κατάστασης, η οποία βρίσκεται στον πυρήνα της κατανόησης σε πολλά από τα μαθηματικά. Η κατανόηση και η ικανότητα του χειρισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων, μπορεί να είναι μια μακροσκελής, εξαρτώμενη από το πλαίσιο, μη γραμμική, ακόμα και βασανιστική διαδικασία για τους μαθητές (e.g. Schoenfeld, Smith και Arcavi, 1993).

Οι κοινωνιολογικές δυσκολίες, περιλαμβάνουν ό,τι οι Eisenberg και Dreyfus (1991) θεωρούν σαν θέματα της διδασκαλίας. Η ανάλυσή τους δείχνει ότι η διδασκαλία υποδηλώνει μία «διδασκτική μεταφορά» (Chevallard, 1985), η οποία, εν συντομία σημαίνει ότι η γνώση από τον επιστημονικό, ακαδημαϊκό χαρακτήρα της υφίσταται μια σειρά από μετασχηματισμούς προσαρμογής για να καταστεί κατάλληλη ως αντικείμενο διδασκαλίας. Οι μετασχηματισμοί αυτοί δεν προσδιορίζονται μόνο από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά επηρεάζονται από ένα πλέγμα αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στους διδάσκοντες, τους κοινωνικούς παράγοντες, τις πολιτικές επιλογές και τους γονείς. (Chevallard, 1991)

Μία επιπλέον κοινωνιολογική δυσκολία (ή καλύτερα κοινωνικο-πολιτισμική), είναι ότι τα περισσότερα σχολεία γενικότερα, και οι τάξεις των μαθηματικών ειδικότερα, έχουν μαθητές με διάφορα πολιτισμικά υπόβαθρα. Μερικοί μαθητές μπορεί να προέρχονται από πλούσιους οπτικά πολιτισμούς, δηλαδή έχουν οπτική επαφή με πολλές και ποικίλες εικόνες στην καθημερινή τους ζωή και ως εκ τούτου για αυτούς η οπτικοποίηση έχει τη δυνατότητα να καλύψει πιθανά "ελλείμματα". Σε αντίθεση, οι μαθητές που προτιμούν να χρησιμοποιούν τις

οπτικές μεθόδους περισσότερο κατά την επίλυση προβλημάτων, τα οποία μπορούν να λυθούν με οπτικές και μη οπτικές μεθόδους, μπορεί να υποεκπροσωπούνται στις υψηλές μαθηματικές επιδόσεις (Presmeg, 1986, 1989).

2.3.1 Εικόνα έννοιας και Ορισμός έννοιας (Concept Image, Concept Definition)

Οι Tall and Vinner (1981) αναφέρουν ότι τα Μαθηματικά συγκρινόμενα με άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, θεωρούνται ως ένα αντικείμενο μεγάλης ακρίβειας στο οποίο οι έννοιες μπορούν να καθοριστούν με ακρίβεια για να αποτελέσουν τη σταθερή βάση για τη μαθηματική θεωρία.

Η πραγματικότητα στην ψυχολογία είναι κάπως διαφορετική. Πολλές έννοιες που συναντάμε στα μαθηματικά έχουν αντιμετωπιστεί με διαφορετικούς τρόπους πριν οριστούν τυπικά. Στο μυαλό του κάθε άτομου υπάρχει μια σύνθετη γνωστική δομή που παράγει ποικίλες προσωπικές νοητικές εικόνες κατά την επίκληση μιας έννοιας.

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος δεν είναι μια απολύτως λογική ύπαρξη. Ο σύνθετος τρόπος με τον οποίο λειτουργεί είναι συχνά αντίθετος με τη λογική των μαθηματικών. Η καθαρή λογική δεν μας δίνει πάντα την ενόραση, ούτε η τύχη μας οδηγεί σε λάθη. Για να κατανοήσουμε πώς αυτές οι διαδικασίες εμφανίζονται, άλλοτε επιτυχημένα και άλλες φορές λανθασμένα, πρέπει να διατυπώσουμε μια διάκριση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών όπως ορίζονται τυπικά και των γνωστικών διαδικασιών μέσω των οποίων συλλαμβάνονται.

Καθημερινά, χρησιμοποιούμε πολλές έννοιες, χωρίς να βασιζόμαστε στον τυπικό τους ορισμό, αφού μαθαίνουμε να τις αναγνωρίζουμε από την εμπειρία μας και τη χρήση τους μέσα στα κατάλληλα πλαίσια. Αργότερα, αυτές οι έννοιες μπορούν να βελτιώνονται ως προς τη σημασία τους και να ερμηνεύονται με αυξανόμενη λεπτότητα με ή χωρίς την πολυτέλεια ενός ακριβούς ορισμού. Συνήθως, σε αυτή τη διαδικασία, στην έννοια δίνεται ένα σύμβολο ή ένα όνομα που της επιτρέπει να κοινοποιείται και έτσι να ενισχύεται ο νοητικός χειρισμός της. Βέβαια, η συνολική γνωστική δομή που ενισχύει το νόημα της έννοιας είναι πιο διευρυμένη

από την επίκληση ενός ενιαίου συμβόλου. Είναι ευρύτερη από οποιαδήποτε άλλη νοητική εικόνα, είτε αυτή είναι εικονογραφική, είτε είναι συμβολική είτε είναι κάτι άλλο. Κατά τη διάρκεια των νοητικών διαδικασιών που έχουν ως σκοπό την ανάκληση και τον χειρισμό μιας έννοιας, πολλές σχετικές διαδικασίες έρχονται στο προσκήνιο (και συνειδητά, και ασυνείδητα), έχοντας επιπτώσεις στο νόημα και τη χρήση της έννοιας.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *εικόνα έννοιας (concept image)* για να περιγράψουμε τη συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με την έννοια, η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες. Οικοδομείται κατά τη διάρκεια των ετών μέσω διαφόρων εμπειριών, που αλλάζει καθώς το άτομο συναντά τα νέα ερεθίσματα και ωριμάζει.

Με τον όρο *ορισμό έννοιας (concept definition)* εννοούμε ένα λεκτικό ορισμό που εξηγεί με ακρίβεια την έννοια αυτή. Ένα άτομο μπορεί να τον μάθει με ένα συγκεκριμένο τρόπο διαμόρφωσης ή να τον μάθει αποδίδοντας του μεγαλύτερο νόημα και να τον συσχετίσει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της έννοιας. Μπορεί επίσης να είναι μια προσωπική ανακατασκευή ενός ορισμού από ένα μαθητή. Ακόμη μπορεί να είναι ο τρόπος που ο μαθητής χρησιμοποιεί τις λέξεις για να εξηγήσει εκείνο το κομμάτι της εικόνας έννοιας που ενεργοποιείται μία συγκεκριμένη στιγμή. Είτε ο ορισμός έννοιας του δίνεται ή κατασκευάζεται από τον ίδιο, μπορεί να διαφέρει από καιρό σε καιρό. Με αυτό τον τρόπο ένας *προσωπικός* ορισμός έννοιας μπορεί να διαφέρει από τον *τυπικό* ορισμό έννοιας, με τον τελευταίο να είναι ένας ορισμός έννοιας, ευρέως αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα.

2.3.2 Εικόνα έννοιας και ορισμός έννοιας, ένα μοντέλο.

Ο Vinner (1981) προκειμένου να περιγράψει την αλληλεπίδραση του ορισμού έννοιας και της εικόνας έννοιας χρησιμοποιεί δύο κελιά (cells) τα οποία είναι δύο ανεξάρτητες γνωστικές δομές. Το ένα κελί είναι για τον ορισμό της έννοιας και το δεύτερο είναι για την εικόνα έννοιας. Το ένα κελί ή ακόμη και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Η συμπλήρωσή τους μπορεί να γίνει με διάφορες διαδικασίες. Για παράδειγμα, έστω ένας μαθητής έχει διαμορφώσει μια εικόνα για την έννοια του συστήματος συντεταγμένων επειδή έχει δει πολλές γραφικές παραστάσεις σε διάφορες περιπτώσεις. Σύμφωνα με αυτήν την εικόνα έννοιας οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι κάθετοι ο ένας στον άλλο. Αργότερα ο καθηγητής των μαθηματικών μπορεί να ορίσει στους μαθητές ένα σύστημα συντεταγμένων με οποιεσδήποτε δύο τεμνόμενες ευθείες γραμμές. Ως αποτέλεσμα αυτού, τα παρακάτω τρία σενάρια μπορεί να εμφανιστούν:

i) Θα αλλάξει η εικόνα έννοιας για να περιλάβει επίσης συστήματα συντεταγμένων που οι άξονες τους δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. (Ικανοποιητική ανακατασκευή).

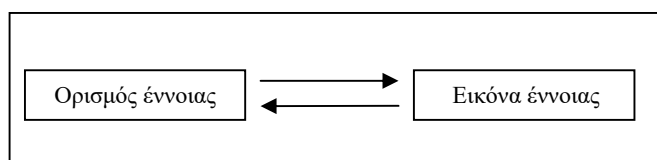
ii) Το κελί της εικόνας έννοιας θα παραμείνει όπως είναι. Το κελί του ορισμού θα περιέχει τον ορισμό του καθηγητή για λίγο αλλά αυτός ο ορισμός θα ξεχαστεί ή θα διαστρεβλωθεί μετά από λίγο και όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει τι είναι ένα σύστημα συντεταγμένων θα μιλήσει για άξονες που σχηματίζουν ορθή γωνία. (Δεν έχουμε αφομοίωση του τυπικού ορισμού.)

iii) Τα δύο κελιά θα παραμείνουν όπως είναι. Τη στιγμή που ο μαθητής θα ερωτηθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό του δασκάλου του, αλλά σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα σκεφτεί ένα σύστημα συντεταγμένων που έχει δύο κάθετους άξονες.

Μια παρόμοια διαδικασία είναι πιθανό να προκύψει όταν εισάγεται αρχικά μια έννοια με τη βοήθεια ενός ορισμού. Εδώ το κελί εικόνας έννοιας είναι κενό στην αρχή. Μετά από αρκετά παραδείγματα και εξηγήσεις το κελί βαθμιαία γεμίζει.

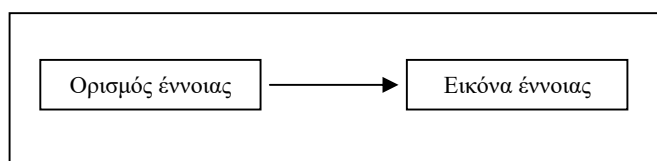
Ωστόσο, αυτό δεν απεικονίζει απαραίτητα όλες τις πτυχές του καθορισμού της έννοιας. Παρόμοια σενάρια όπως τα παραπάνω (i)- (iii) μπορεί να εμφανιστούν

επίσης σε αυτή τη φάση. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4, όπου το διάγραμμα αναφέρεται στα στάδια του σχηματισμού έννοιας.



Σχήμα 4: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

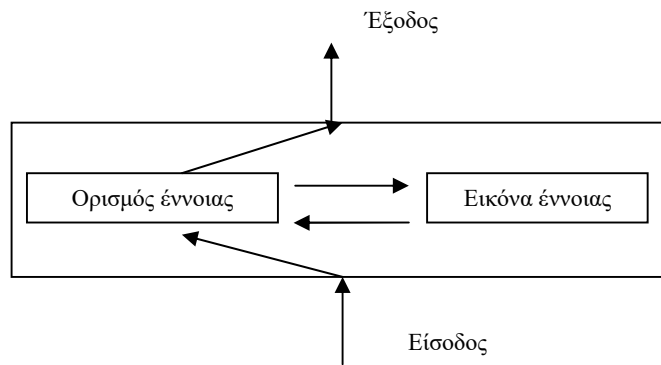
Φαίνεται ότι πολλοί εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν στο στάδιο του σχηματισμού της έννοιας μια διαδικασία μίας κατεύθυνσης όπως φαίνεται στο σχήμα 5.



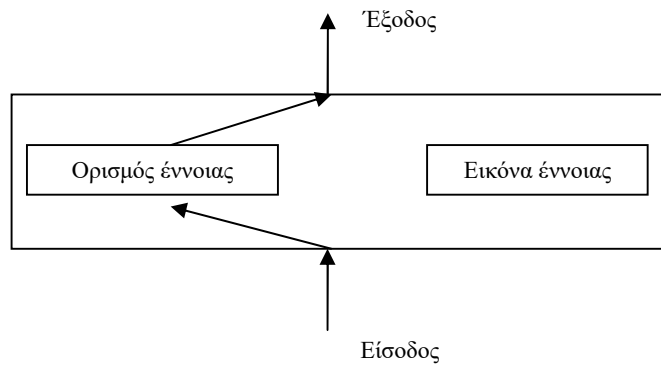
Σχήμα 5: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

Δηλαδή, η εικόνα έννοιας διαμορφώνεται με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα είναι ολοκληρωτικά υπό τον έλεγχό της.

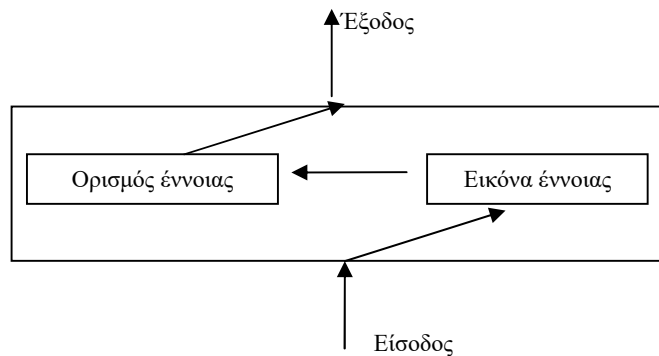
Εκτός από τα στάδια του σχηματισμού έννοιας υπάρχει επίσης το στάδιο της χρήσης της έννοιας κατά την επίλυση προβλήματος. Σε αυτό το στάδιο ένα πρόβλημα δίνεται στους μαθητές και τα κελιά της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι θα ενεργοποιηθούν. Τα μοντέλα που αποδίδουν μια μαθηματικά αποδεκτή διαδικασία είναι, αυτά που περιγράφονται στα σχήματα 6 έως 8.



Σχήμα 6 : Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας.



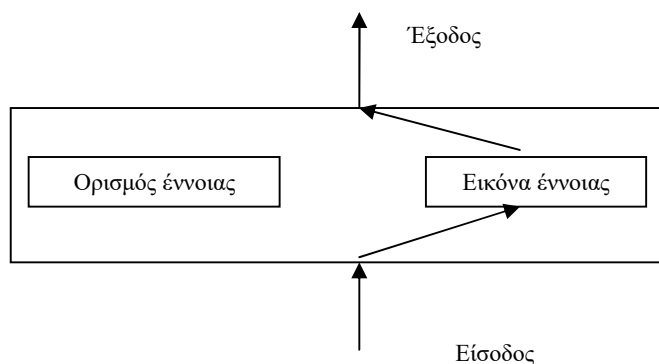
Σχήμα 7: Καθάρως τυπική αφαίρεση



Σχήμα 8: Αφαίρεση μετά από διαισθητική σκέψη

Σε αυτά τα μοντέλα το τελικό συμπέρασμα προκύπτει με χρήση του ορισμού της έννοιας.

Από έρευνες έχει προκύψει ότι τα σχήματα 6 έως 8 δεν απεικονίζουν την πρακτική πολλών μαθητών. Το μοντέλο που φαίνεται ότι περιγράφει τις διαδικασίες που ακολουθούν πολλοί μαθητές είναι το παρακάτω:



Σχήμα 9: Διαισθητική απάντηση.

Αυτό οφείλεται στον τρόπο σκέψης του μαθητή στην καθημερινή του ζωή, όπου δεν χρησιμοποιούνται ορισμοί για τις έννοιες. Η κατανόηση μιας έννοιας

διαμορφώνεται κυρίως μέσα από την εικόνα που σχηματίζουμε για αυτήν. Φαίνεται ότι ο καθημερινός τρόπος σκέψης κυριαρχεί, και όταν πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, αγνοούν την ανάγκη να συμβουλευτούν τον τυπικό ορισμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, η αναφορά μόνο στο κελί της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον μαθητή στην επιτυχία. Αυτό το γεγονός δεν τον οδηγεί στην αλλαγή του τρόπου σκέψης του δηλαδή στην χρησιμοποίηση του τυπικού ορισμού της έννοιας.

2.3.3 Αποκάλυψη της εικόνας έννοιας και διδασκαλία

Μερικές φορές εξετάζουμε τους μαθητές προκειμένου να δούμε εάν γνωρίζουν μερικές απλές γεωμετρικές έννοιες όπως η ορθή γωνία, το ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος τριγώνου και ούτω καθ'εξής. Πολύ συχνά ανακαλύπτουμε ότι οι μαθητές μας δεν γνωρίζουν τις παραπάνω έννοιες και έχουν διαμορφώσει για αυτές λανθασμένες εικόνες έννοιας. Αυτές οι εικόνες μπορεί να είναι αποτέλεσμα ενός συγκεκριμένου συνόλου παραδειγμάτων που δόθηκαν στους μαθητές. Υπάρχει μια υπόθεση ότι οι μαθητές πρόκειται να χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς έννοιας όταν λύνουν ένα πρόβλημα και γι' αυτό δεν υπάρχει ανάγκη να τους δοθούν πολυάριθμα διαφορετικά παραδείγματα. Αυτό όμως, όπως προαναφέραμε, δεν συμβαίνει πάντα στην πράξη.

Ορισμένα παραδείγματα είναι τα παρακάτω:

Σε ένα βιβλίο για τη δεύτερη τάξη ο συγγραφέας ορίζει ένα ισοσκελές τρίγωνο ως τρίγωνο που έχει δύο ίσες πλευρές. Όλα τα ισοσκελή τρίγωνα τα οποία υπάρχουν στο κείμενο έχουν μια οριζόντια βάση. Ας σχεδιάσουμε κάποια τρίγωνα τα οποία είναι ισοσκελή τρίγωνα αλλά μόνο ένα από αυτά έχει οριζόντια βάση. Θα ήταν για μας έκπληξη αν μόνο αυτό το τρίγωνο θα αναγνωριζόταν από τους μαθητές μας ως ισοσκελές;

Σε ένα βιβλίο γεωμετρίας (*Geometry with Coordinates*, SMSG, part I, pp.143-144) η ευθεία γωνία είναι «η ένωση δύο αντίθετων ακτίνων». Υπάρχει μόνο ένα σχέδιο

ευθείας γωνίας στο βιβλίο και αυτό φυσικά είναι μιας οριζόντιας ευθείας γωνίας. Αν δοθούν σε ένα μαθητή ευθείες γωνίες οι οποίες δεν είναι όλες οριζόντιες, θα ήταν έκπληξη, αν ο μαθητής αναγνώριζε μόνο τις οριζόντιες ως ευθείες γωνίες; Σε ένα άλλο βιβλίο από το SMSG (*Mathematics for Junior High School, Volume 2, part I, pp. 194-195*) αναφέρονται τα ορθογώνια τρίγωνα. Σε όλα απ' αυτά, η μία από τις πλευρές της ορθής γωνίας είναι οριζόντια (υπάρχουν δέκα ορθογώνια τρίγωνα όλα μαζί). Είναι περιττό να κάνουμε την ίδια ερώτηση.

Έτσι, η δημιουργία της εικόνας έννοιας των μαθητών είναι πολύ σημαντική για τη διδασκαλία, αφού, όχι μόνο θα μπορούσε να μας δώσει μια καλύτερη κατανόηση για τους μαθητές μας (γνωρίζοντας τι τους προκάλεσε για να ενεργήσουν όπως ενήργησαν), αλλά επίσης μπορεί να προτείνει κάποιες βελτιώσεις στη διδασκαλία μας, η οποία διαμορφώνεται με παρόμοιες λανθασμένες εικόνες έννοιας.

2.3.4 Η προσωρινή εικόνα έννοιας

Υπάρχει ένα σημαντικό θέμα που θίγεται εδώ. Σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μερικές φορές μόνο μέρη του κελιού εικόνας έννοιας ή του κελιού ορισμού έννοιας ενεργοποιούνται. Άρα, η εικόνα έννοιας (ή ο ορισμός έννοιας) που έχει διαμορφωθεί δεν μπορεί να καθοριστεί από μια μόνο παρατήρηση μιας συγκεκριμένης συμπεριφοράς. Επομένως, πρέπει να μιλήσουμε για εκείνο το μέρος του κελιού που ενεργοποιήθηκε κατά την εργασία στο συγκεκριμένο έργο. Ως εκ τούτου, εμείς εξετάσαμε το κελί εικόνας έννοιας (ή του ορισμού έννοιας) σε μία ορισμένη στιγμή. Μπορούμε να το ονομάσουμε προσωρινή εικόνα έννοιας (ή ορισμό έννοιας).

Παραδείγματος χάριν, κάποιος μπορεί να κληθεί να σχεδιάσει ένα τετράπλευρο έτσι ώστε σχεδιάζοντας μία ευθεία γραμμή να είναι πιθανό να περιέχει τέσσερα τρίγωνα. Κατά την προσπάθεια επίλυσης, πολλοί εργάστηκαν σε απλά τετράπλευρα (συγκεκριμένα εκείνα που οι πλευρές δεν τέμονταν μεταξύ τους εσωτερικά) και έτσι απέτυχαν στην επίλυση του προβλήματος. Μερικοί από αυτούς πραγματικά δεν ήταν εξοικειωμένοι με τα μη-απλά τετράπλευρα, αλλά οι

άλλοι απέτυχαν απλά να τα ανακαλέσουν στη μνήμη τους, ενώ γνώριζαν την έννοια. Μπορούμε να πούμε ότι η προσωρινή τους εικόνα έννοιας δεν περιέλαβε τα μη-απλά τετράπλευρα, αν και η μόνιμη εικόνα έννοιας τους τα περιλαμβάνει. Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο "προσωρινή εικόνα έννοιας" μόνο όταν πιστεύουμε ότι το κατάλληλο μέρος του κελιού εικόνας έννοιας ενεργοποιήθηκε, διαφορετικά θα πούμε απλά "εικόνα έννοιας" (Vinner , 1981).

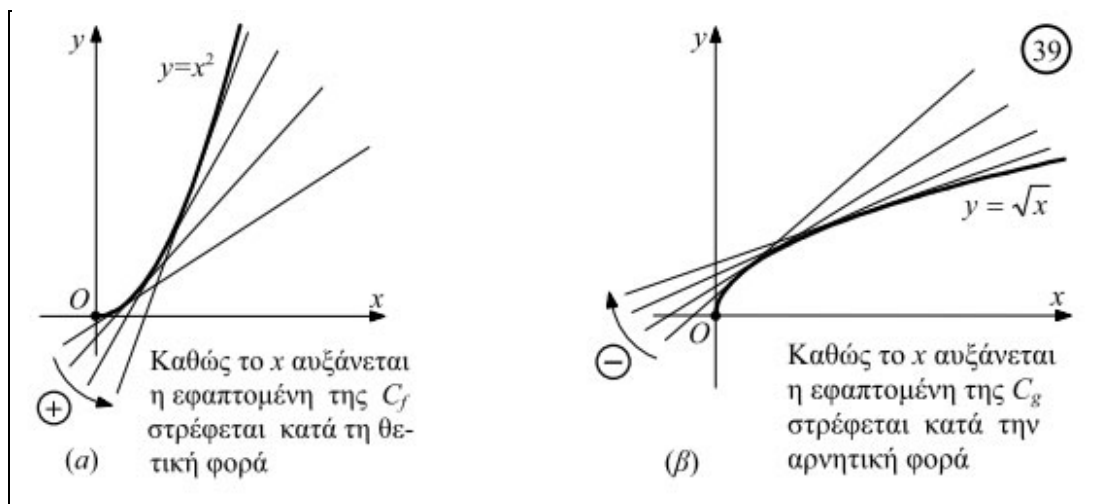
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

Η έννοια της κυρτότητας συνάρτησης εισάγεται στο σχολικό βιβλίο μια παράγραφο μετά από αυτή της μονοτονίας συνάρτησης. Στο σημείο αυτό, οι μαθητές έχουν αναπτύξει μια διαδικαστική προσέγγιση για την εύρεση της μονοτονίας συνάρτησης, ακολουθώντας μια συγκεκριμένη μεθοδολογία (βρίσκοντας το πεδίο ορισμού, εξετάζοντας τη συνέχεια, υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης, βρίσκοντας το πρόσημο της κτλ.). Το πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι οι μαθητές συνεχίζουν να έχουν την ίδια διαδικαστική προσέγγιση και στην περίπτωση της κυρτότητας. Ακολουθούν τα αντίστοιχα βήματα απλά εργαζόμενοι με την δεύτερη παράγωγο. Ίσως λόγω αυτής της αντιστοιχίας, η κυρτότητα δεν αντιμετωπίζεται με ιδιαίτερη προσοχή από τους μαθητές. Το μεγαλύτερο ποσοστό των ασκήσεων που δίνονται για λύση στη συγκεκριμένη παράγραφο ζητάει τον υπολογισμό και την εύρεση προσήμου της δεύτερης παραγώγου, αλλά καθόλου γραφικές παραστάσεις. Όμως, μετά τα θέματα των πανελληνίων εξετάσεων του 2016, όπου ζητήθηκε γραφική παράσταση συνάρτησης, αναμένεται οι μαθητές να αντιμετωπίσουν διαφορετικά την νέα έννοια.

Η εισαγωγή της έννοιας της κυρτότητας στο σχολικό βιβλίο γίνεται με τη βοήθεια ενός προβλήματος: της χάραξης γραφικής παράστασης συναρτήσεων. Υπάρχουν συναρτήσεις με το ίδιο είδος μονοτονίας οι οποίες «ανέρχονται» και «κατέρχονται» με διαφορετικό τρόπο σε αντίστοιχα διαστήματα. Το πρόβλημα αυτό δεν μπορούμε να το λύσουμε με τις γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα. Δημιουργείται έτσι η ανάγκη για την εύρεση ενός τρόπου διάκρισης αυτών των συναρτήσεων. Η προσπάθεια για τον τρόπο επίλυσης του, θα μας οδηγήσει στην εισαγωγή της νέας έννοιας.

Στο βιβλίο, με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος 10, αναφέρεται πως μεταβάλλεται η κλίση $f'(x)$ της γραφικής παράστασης της f καθώς το x αυξάνεται.



Σχήμα 10: Μεταβολή της κλίσης $f'(x)$

Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι :

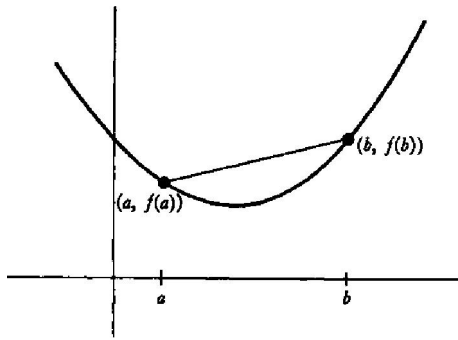
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Ανάγκη για την εισαγωγή της κυρτότητας υπάρχει και για να διακρίνουμε τα μεγέθη που έχουν αυξανόμενο ή ελαττούμενο ρυθμό μεταβολής. Στο παραπάνω παράδειγμα ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται, η εφαπτομένη στρέφεται κατά τη θετική φορά (αντίστοιχα όταν ελαττώνεται, η εφαπτομένη στρέφεται κατά την αρνητική φορά) και αυτό συμβαίνει είτε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα είτε είναι γνησίως φθίνουσα.

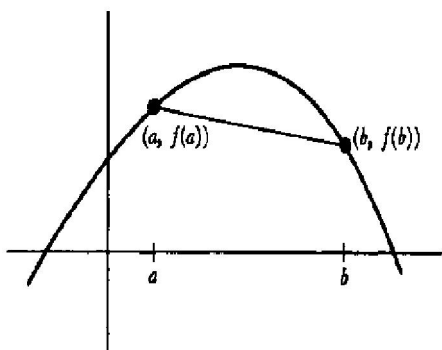
Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαν να έχουν δοθεί παραδείγματα γραφικών παραστάσεων γνωστών συναρτήσεων που είναι κυρτές ή κοίλες, π.χ. οι $f(x)=x^2$, $s(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$, $h(x)=a^x$, $a>1$ κτλ.

Ο ορισμός αυτός δεν καλύπτει την περίπτωση συναρτήσεων όπως π.χ. $f(x)=|x|$. Η κυρτότητα είναι μία γεωμετρική έννοια. Η προϋπόθεση μια συνάρτηση να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη δεν περιλαμβάνει τις συναρτήσεις που είναι κυρτές και όχι δύο φορές παραγωγίσιμες. Για τον λόγο αυτό θα μπορούσε να έχει δοθεί και ο παρακάτω γεωμετρικός ορισμός της κυρτής και της κοίλης συνάρτησης.

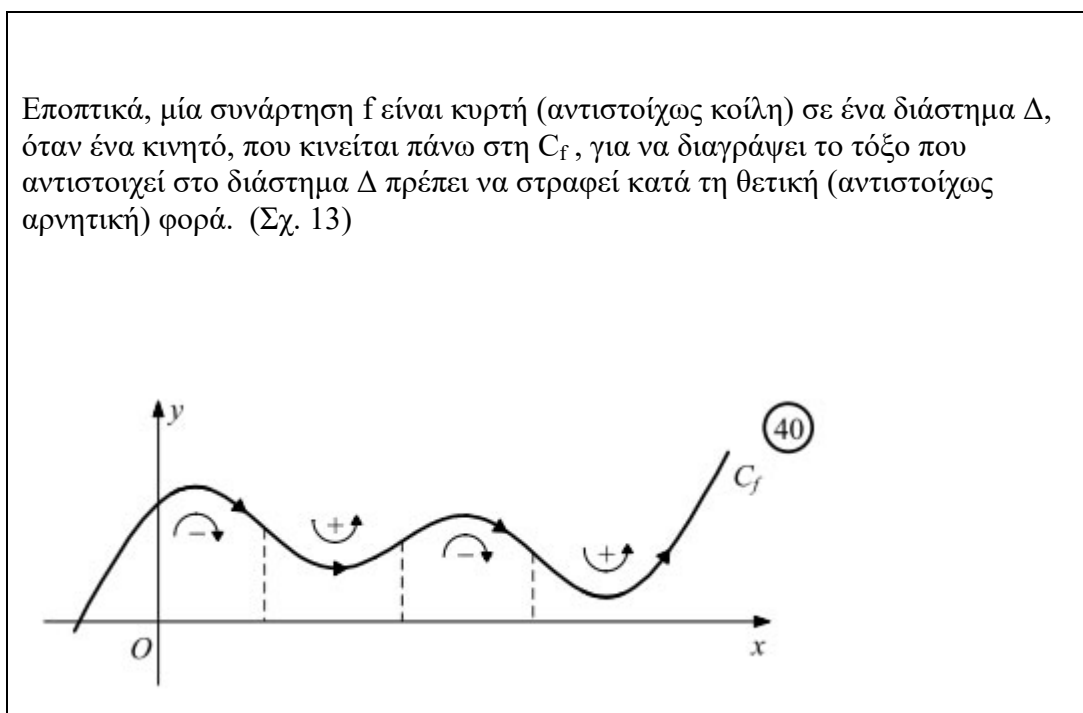
Μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα είναι κυρτή (αντ. κοίλη) αν για κάθε a και β που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και για κάθε $0 \leq \lambda \leq 1$ ισχύει $f(\lambda a + (1-\lambda)\beta) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(\beta)$ (αντ. $f(\lambda a + (1-\lambda)\beta) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(\beta)$). Δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(\beta, f(\beta))$ βρίσκεται πάνω (αντ. κάτω) από τη γραφική παράσταση της f .



Σχήμα 11 Κυρτή συνάρτηση: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(\beta, f(\beta))$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f .



Σχήμα 12 Κοίλη συνάρτηση: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .



Σχήμα 13: Κινητό το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f

Η εποπτική προσέγγιση του σχήματος 13 φαίνεται από τη βιβλιογραφία (Tsamir P. & Onodenco R. (2004)) ότι χρησιμοποιείται από μαθητές που έχουν κατανοήσει την έννοια όπως αυτό φαίνεται από τις απαντήσεις τους.

Στη συνέχεια, το σχολικό βιβλίο δίνει ένα σημαντικό σχόλιο που συνδέει μια κυρτή συνάρτηση με την εφαπτομένη που δέχεται η γραφική της παράσταση.

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ.39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Ένας από τους στόχους του νέου προγράμματος σπουδών είναι οι μαθητές να αναγνωρίζουν τη σχετική θέση της εφαπτομένης και της γραφικής παράστασης συνάρτησης με βάση την κυρτότητα της.

Όμως, η σχέση της εφαπτόμενης ευθείας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης με τη γραφική παράσταση της έχει χρησιμοποιηθεί κατά κύριο λόγο στις ασκήσεις για την επίλυση ανισοτικών σχέσεων. Για το λόγο αυτό θα μπορούσε να έχει δοθεί από το σχολικό βιβλίο μια από τις παρακάτω ανισοτικές σχέσεις:

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(x) \geq f(\xi) + (x-\xi) f'(\xi)$, $x \in (\alpha, \beta)$.
- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι κοίλη στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(x) \leq f(\xi) + (x-\xi) f'(\xi)$, $x \in (\alpha, \beta)$.

Ή εναλλακτικά:

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και η ευθεία $(\varepsilon): y = ax + \beta$ είναι η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \Delta$ τότε: $f(x) \geq ax + \beta$
- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ και η ευθεία $(\varepsilon): y = ax + \beta$ είναι η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \Delta$ τότε: $f(x) \leq ax + \beta$

Θα μπορούσε στο σημείο αυτό να τονιστεί το γεγονός ότι στην περίπτωση των κυρτών (αντ. κοίλων) συναρτήσεων η αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος Fermat είναι και ικανή για ολικό ελάχιστο (αντ. ολικό μέγιστο). Δηλαδή, αν έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και κυρτή (αντ. κοίλη) στο $[a, \beta]$ και υπάρχει x_0 στο (a, β) με $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση ολικού ελάχιστου (αντ. ολικού μέγιστου) στο $[a, \beta]$.

Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η σύνδεση των δύο βασικών εννοιών της κυρτότητας και των ακροτάτων συνάρτησης.

Στη συνέχεια δίνεται το παρακάτω θεώρημα ως συνέπεια του ορισμού:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Αμέσως μετά το θεώρημα, στο σχόλιο που ακολουθεί, γίνεται αναφορά για το αν ισχύει ή όχι το αντίστροφο του θεωρήματος, η οποία βοηθά την καλύτερη κατανόηση του από τους μαθητές.

Όμως, με δεδομένο ότι μελετάμε συναρτήσεις που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το εξής:

Αν μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) είναι κυρτή (αντ. κοίλη) στο διάστημα (α, β) τότε ισχύει ότι $f''(x) \geq 0$ (αντ. $f''(x) \leq 0$).

Τέλος δίνονται οι ασκήσεις της παραγράφου.

Εάν υποθέσουμε ότι η πιο σημαντική χρήση της κυρτότητας είναι για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων (όπως αναφέρει και το σχολικό βιβλίο) και η επίλυση ανισοτήτων, σε καμία άσκηση της συγκεκριμένης παραγράφου δεν ζητείται κάτι τέτοιο (εκτός από μία άσκηση στη Γ' ομάδα). Επίσης, δεν ζητείται σε άσκηση αύξηση ή ελάττωση του ρυθμού μεταβολής που αφορά τη φυσική ερμηνεία του ορισμού της έννοιας.

Οι περισσότερες ασκήσεις μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια μεθοδολογίας, οι μαθητές αναξάρτητα αν έχουν κατανοήσει ή όχι την έννοια μπορούν να επιλύσουν τις ασκήσεις ακολουθώντας συγκεκριμένες διαδικασίες. Μεγαλύτερη βαρύτητα θα πρέπει να δοθεί σε ασκήσεις που αφορούν την κατασκευή ή την ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει το βαθμό κατανόησης της έννοιας της κυρτότητας από τους μαθητές της Γ' Λυκείου.

Ο στόχος της έρευνας είναι:

Να ελεγχθεί κατά πόσο οι μαθητές της Γ' Λυκείου μπορούν να αποτυπώσουν ενδεικτικές αντιλήψεις που έχουν για την έννοια της κυρτότητας.

Πιο αναλυτικά θα εξετάσουμε αν:

- Μπορούν οι μαθητές να αναγνωρίσουν την κυρτότητα μιας συνάρτησης από τρία σημεία του γραφήματος της.
- Έχουν τη δυνατότητα να σχεδιάσουν μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία.
- Αναγνωρίζουν τα διαστήματα κυρτότητας από το γράφημα και διατυπώνουν τον τυπικό ορισμό της.

4.2 ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Φεβρουάριο του 2016 σε 112 μαθητές Γ' Λυκείου των Ομάδων Προσανατολισμού, Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής σε 7 Δημόσια Λύκεια της Αττικής, ώστε η έρευνα να είναι κοντά στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα. Οι μαθητές και των δύο προσανατολισμών διδάσκονταν την ίδια ύλη από το σχολικό βιβλίο (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2015). Της κύριας έρευνας προηγήθηκε πιλοτική έρευνα σε ένα τμήμα Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών με συμπλήρωση ερωτηματολογίου (δύο μόνο μαθητές από τους 20 μαθητές του τμήματος δεν έδιναν το μάθημα σε πανελλαδικό επίπεδο).

Ο χρόνος που είχαν οι μαθητές για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν μία διδακτική ώρα (45 λεπτά), ο οποίος αποδείχθηκε αρκετός. Οι μαθητές δεν είχαν την υποχρέωση να συμπληρώσουν το ονοματεπώνυμο τους. Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές είχε 10 ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές καλούνταν να αναγνωρίσουν την κυρτότητα συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση, να χαράξουν πρόχειρα μια γραφική παράσταση συνάρτησης γνωρίζοντας το είδος της κυρτότητας της και κάποια σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται, να απαντήσουν σε κάποια θεωρητικά ερωτήματα και τέλος να λύσουν μια απλή άσκηση βρίσκοντας την κυρτότητα μιας συνάρτησης της οποίας ο τύπος είχε δοθεί.

Ο ερευνητής συμμετείχε στη διαδικασία διακριτικά με μοναδικό σκοπό την παροχή διευκρινίσεων.

Το ερωτηματολόγιο δόθηκε στους μαθητές αφού είχαν τελειώσει το κεφάλαιο του Διαφορικού Λογισμού και είχαν ξεκινήσει αυτό του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μετά από την έρευνα που έγινε παραπάνω στους 112 μαθητές, σε μία ομάδα 7 μαθητών έγινε διδασκαλία της έννοιας της κυρτότητας βασισμένη στον γεωμετρικό ορισμό της με στόχο η γεωμετρία να μας οδηγήσει στον τυπικό ορισμό. Στη συνέχεια η ομάδα των 7 μαθητών συμπλήρωσε το ίδιο ερωτηματολόγιο με τους 112 μαθητές.

4.3 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Ερώτηση 1

Προσπαθήστε να εξηγήσετε με δικά σας λόγια τι σκέφτεστε όταν ακούτε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή, και τι όταν μια συνάρτηση είναι κοίλη.

Ερώτηση 2

Γράψτε όσες ιδιότητες μπορείτε να σκεφτείτε μιας κυρτής και μιας κοίλης συνάρτησης.

Στις δύο πρώτες ερωτήσεις δεν ζητείται από τους μαθητές ο τυπικός ορισμός της κυρτότητας αλλά είναι επιθυμητό οι μαθητές να δώσουν τη δική τους αυθόρμητη εκδοχή για τον ορισμό της κυρτότητας, να φανεί ποιά είναι η εικόνα που έχουν στο μυαλό τους, αλλά και να ανακαλέσουν ιδιότητες του ορισμού αυτού.

Ερώτηση 3

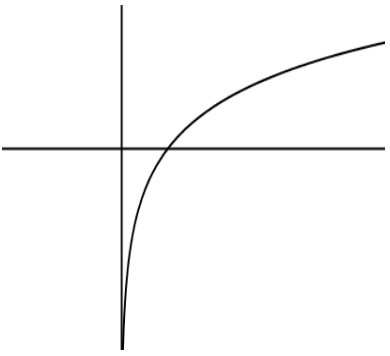
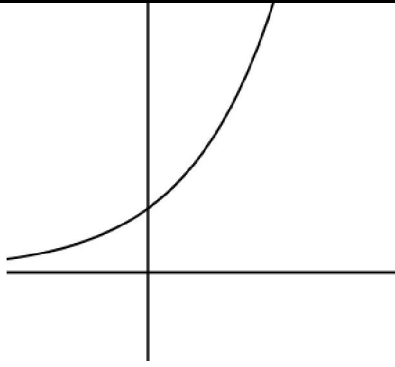
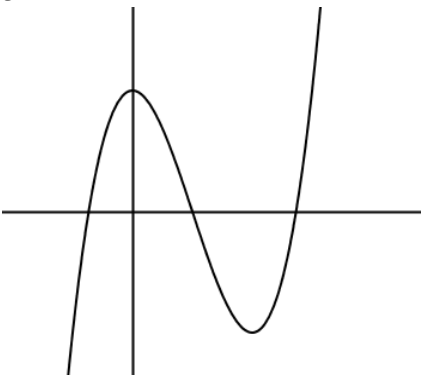
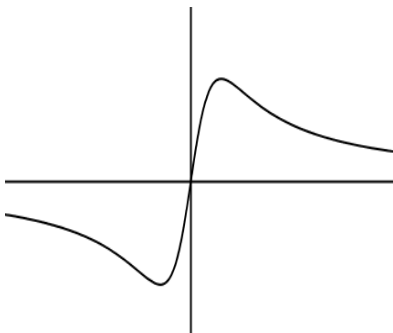
Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη τι συμπέρασμα βγάζετε για την κυρτότητα της $-f$;

Αυτή είναι μία ερώτηση που εξετάζει αν οι μαθητές έχουν γνωρίζουν πως συνδέεται η κυρτότητα μιας συνάρτησης f με την κυρτότητα της αντίθετης της συνάρτησης $-f$.

Ερώτηση 4

α) Ελέγξτε τη κυρτότητα στις παρακάτω συναρτήσεις. Στις περιπτώσεις που αλλάζει να φέρετε παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα χωρίζοντας τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις σε διαστήματα ώστε αυτή να διατηρείται.

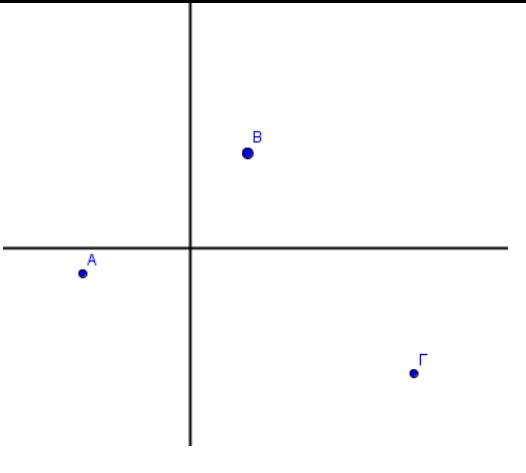
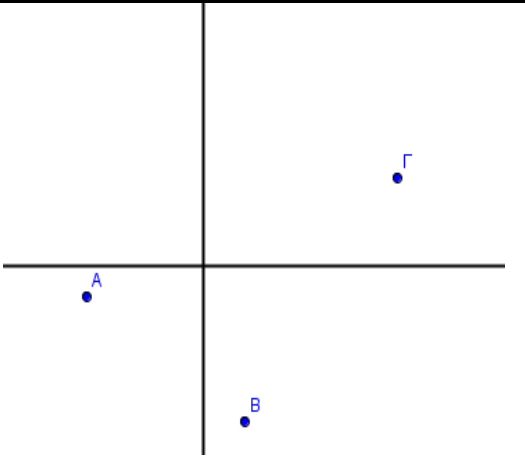
β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της κυρτότητας σε κάθε περίπτωση.

<p>1.</p> 	<p>2.</p> 
<p>Απάντηση:</p>	<p>Απάντηση:</p>
<p>3.</p> 	<p>4.</p> 
<p>Απάντηση:</p>	<p>Απάντηση:</p>

Ο στόχος των παραπάνω ερωτήσεων είναι να εξετάσουν αν οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν από μία γραφική παράσταση το είδος της κυρτότητας της κάθε συνάρτησης, στα διαστήματα στα οποία διατηρείται.

Ερώτηση 5

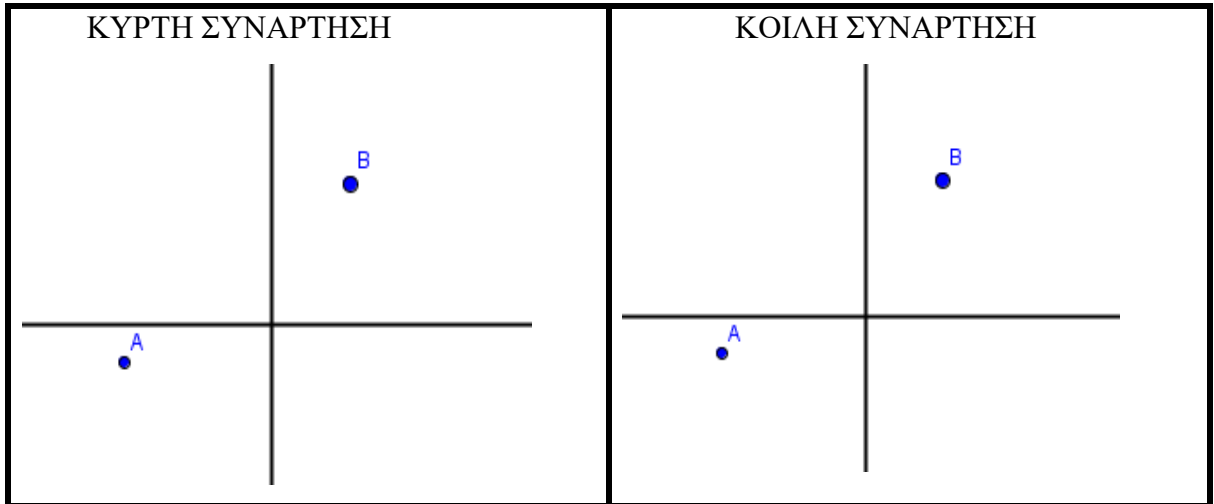
Αν γνωρίζουμε ότι τα παρακάτω τρία σημεία, της κάθε περίπτωσης, ανήκουν σε γραφική παράσταση συνάρτησης που είναι κυρτή ή κοίλη μπορούμε να γνωρίζουμε με ακρίβεια το είδος της κυρτότητας της συνάρτησης;

	
Απάντηση:	Απάντηση:

Ο στόχος του παραπάνω ερωτήματος είναι να εξετάσει αν οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν το είδος της κυρτότητας μιας συνάρτησης από τρία σημεία του γραφήματος της όταν αυτή διατηρείται.

Ερώτηση 6

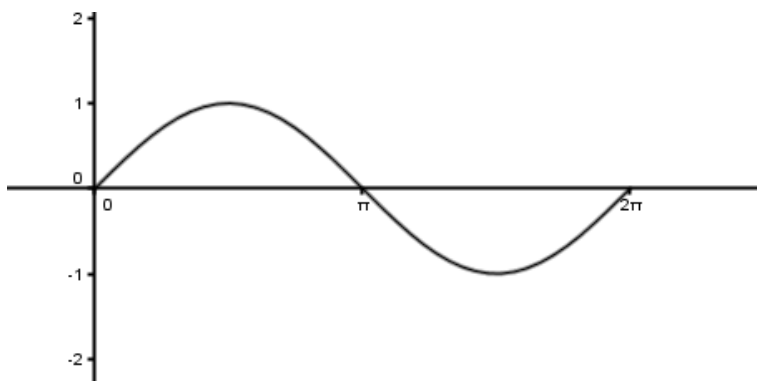
Προσπαθήστε να ενώσετε τα σημεία A και B κατάλληλα ώστε να ανήκουν στη γραφική παράσταση μιας κυρτής συνάρτησης.



Η παραπάνω ερώτηση έχει σαν στόχο να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών στην κατασκευή γραφικής παράστασης, αν γνωρίζουν το είδος της κυρτότητας της και δύο σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται.

Ερώτηση 7

Επιλέγοντας τυχαία σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης και φέροντας τις εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία αυτά να πείτε τι συμβαίνει με την κλίση της εφαπτομένης σε μια κυρτή συνάρτηση και τι σε μια κοίλη συνάρτηση. Μπορείτε να διατυπώσετε κάποιο συμπέρασμα;



Η ερώτηση αυτή έχει σαν στόχο να εξετάσει κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τον τρόπο που μεταβάλλεται η παράγωγος της f καθώς το x αυξάνεται, και να συνδέσουν την μονοτονία της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης f με την κυρτότητα της.

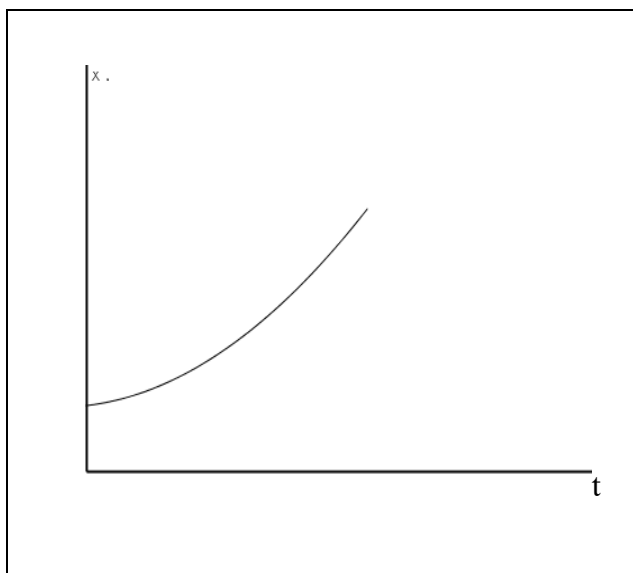
Ερώτηση 8

Να δώσετε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης και τον ορισμό της κοίλης συνάρτησης.

Ο στόχος αυτού του ερωτήματος είναι να εξετάσει αν οι μαθητές γνωρίζουν τον τυπικό ορισμό του σχολικού βιβλίου.

Ερώτηση 9

Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης ενός κινητού που κινήθηκε πάνω στον άξονα xx' για κάποιο χρονικό διάστημα. Τι πιστεύετε ότι ισχύει για την επιτάχυνση του κινητού;



Ο στόχος αυτής της ερώτησης είναι οι μαθητές να συνδυάσουν την κυρτότητα της συνάρτησης που απεικονίζεται στην παραπάνω γραφική παράσταση με την ιδιότητα της δεύτερης παραγώγου (είναι θετική ή μηδέν, αν η συνάρτηση είναι

κυρτή), και στη συνέχεια να συμπεράνουν τι συμβαίνει με την επιτάχυνση του κινητού η οποία είναι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης θέσης του.

Ερώτηση 10

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα την παρακάτω συνάρτηση.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Το παραπάνω ερώτημα είναι μία άσκηση του σχολικού βιβλίου και έχει στόχο να εξετάσει κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να υπολογίσουν σωστά τις δύο πρώτες παραγώγους της συνάρτησης και να κατασκευάσουν τον πίνακα μεταβολών τους. Είναι ένα ερώτημα που ελέγχει τη διαδικαστική γνώση των μαθητών.

Η αξιοπιστία του συνόλου των ερωτήσεων του ερωτηματολογίου που χαρακτηρίστηκαν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος εκτιμήθηκε με το δείκτη Cronbach's Alpha με τη χρήση του λογισμικού IBM SPSS Statistics v19. Η τιμή του δείκτη Cronbach's Alpha ήταν 0,843. (Ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach's Alpha πρέπει να έχει τιμή μεγαλύτερη από 0,70. Από 0,70 έως 0,80 θεωρείται ικανοποιητική η εσωτερική αξιοπιστία της κλίμακας, από 0,80 έως 0,90 θεωρείται πολύ καλή αξιοπιστία και τέλος από 0,90 και πάνω θεωρείται εξαιρετική αξιοπιστία).

4.4 ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω των ερωτηματολογίων που συμπληρώθηκαν από τους μαθητές στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας (45 λεπτά). Ο τρόπος συλλογής των δεδομένων ήταν το τμήμα του εκάστοτε δημόσιου σχολείου όπου γινόταν κάθε φορά η συμπλήρωση. Να σημειωθεί ότι δεν είχε προηγηθεί κάποια επανάληψη στην κυρτότητα. Οι μαθητές έρχονταν σε επαφή με το ερωτηματολόγιο για πρώτη φορά τη στιγμή που ξεκινούσε η συμπλήρωση. Όλοι οι μαθητές που βρίσκονταν μέσα στο κάθε τμήμα απάντησαν στο ερωτηματολόγιο.

Από τη διαδικασία αυτή προέκυψαν 112 συμπληρωμένα ερωτηματολόγια για την ποσοτική έρευνα και 7 επιπλέον ερωτηματολόγια από τη δεύτερη ομάδα.

4.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τα δεδομένα των 112 ερωτηματολογίων αναλύθηκαν ποσοτικά. Χρησιμοποιήσαμε αρχικά μόνο τις ερωτήσεις οι οποίες μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως σωστές ή λάθος. Τα δεδομένα εισήχθησαν αρχικά στο λογισμικό Excel, στη συνέχεια στο λογισμικό IBM SPSS Statistics v 19 και από εκεί στο λογισμικό Mplus V6.12 Muthen and Muthen. Στη συνέχεια εξαιρέθηκαν οι ερωτήσεις q 4.4 και q 10 για τον λόγο ότι πολύ λίγοι μαθητές τις απάντησαν και λόγω έλλειψης διασποράς δεν μπορούν να μας πληροφορήσουν για διακρίσεις μεταξύ των μαθητών. Τέλος, εξαιρέθηκαν και οι ερωτήσεις q 3 και q 9 γιατί μετά την παραγοντική ανάλυση και κατά τον έλεγχο της αξιοπιστίας παραγόντων ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach's Alpha του παράγοντα που συμμετείχαν είχε τιμές 0,593 και 0,438 αντίστοιχα (μικρότερες του 0,70) οι οποίες δεν εξασφαλίζουν υψηλή αξιοπιστία. Τελικά για τις 8 ερωτήσεις που έμειναν με τη βοήθεια του λογισμικού IBM SPSS Statistics v 19 έγινε έλεγχος αξιοπιστίας με δείκτη

αξιοπιστίας Cronbach's Alpha 0,843, όπως φαίνεται στον πίνακα 1 του παραρτήματος.

Στη συνέχεια έγινε παραγοντική ανάλυση χρησιμοποιώντας το λογισμικό IBM SPSS Statistics v19. Η παραγοντική ανάλυση είναι μια στατιστική τεχνική η οποία χρησιμοποιείται για να εντοπίζει ή να επιβεβαιώνει την ύπαρξη ενός σχετικά μικρού αριθμού παραγόντων, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα πολλών αλληλοσυσχετιζόμενων μεταβλητών. Η παραγοντική ανάλυση με τον προσδιορισμό των μη άμεσα παρατηρήσιμων παραγόντων αποσκοπεί στο να απλοποιήσει την περιγραφή, επεξήγηση και κατανόηση πολύπλοκων φαινομένων ή συνόλων δεδομένων και να συμβάλει στην πιο αποτελεσματική ερμηνεία των συνόλων και των συσχετίσεων των μεταβλητών. (Σημειώσεις κ. Κυριακίδη)

Αρχικά χρησιμοποιήθηκε Διερευνητική Παραγοντική Ανάλυση στην οποία διερευνούνται οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων μεταβλητών χωρίς να εξετάζεται αν τα δεδομένα ταιριάζουν με ένα προκαθορισμένο μοντέλο. Η διερευνητική ανάλυση παραγόντων είναι ουσιαστικά μια τεχνική μείωσης δεδομένων.

Οι προϋποθέσεις για τη χρήση διερευνητικής ανάλυσης δεδομένων είναι:

- Οι δηλώσεις μας να είναι σε ισοδιαστημική κλίμακα, που στην περίπτωση μας ισχύει, γιατί το Σωστό Λάθος μπορεί να θεωρηθεί ισοδιαστημικό.
- Να έχουμε μεγάλο δείγμα τουλάχιστον 100 ατόμων και να είναι πενταπλάσιο από τις ερωτήσεις μας, το οποίο επίσης ισχύει, γιατί το δείγμα μας είναι 112 μαθητές (μεγαλύτερο του 100) αλλά και ο αριθμός των ερωτήσεων είναι 8 που το πενταπλάσιο τους είναι 40, άρα πάλι είμαστε εντός των παραπάνω περιορισμών.

Από την παραγοντική ανάλυση προέκυψαν 3 παράγοντες όπως φαίνεται στον πίνακα 2 του παραρτήματος.

Ο πρώτος παράγοντας είχε τις ερωτήσεις q 5.1 q 5.2

Ο δεύτερος παράγοντας είχε τις ερωτήσεις q 6.1 q 6.2

Ο τρίτος παράγοντας είχε τις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 και q 8

Στη συνέχεια έγινε έλεγχος αξιοπιστίας για τις ερωτήσεις του κάθε παράγοντα.

Όλοι οι παράγοντες είχαν υψηλό δείκτη αξιοπιστίας Cronbach's Alpha σύμφωνα με τους αντίστοιχους Πίνακες 3,4 και 5 οι οποίοι φαίνονται στο παράρτημα.

Έγινε παραγοντική ανάλυση και με τη βοήθεια του λογισμικού Mplus V6.12 Muthen and Muthen. Τα αποτελέσματα ήταν τα ίδια δηλαδή οι ίδιες ερωτήσεις ανήκουν στους ίδιους παράγοντες.

Στη συνέχεια, ομαδοποιήσαμε τους μαθητές σε διακριτές ομάδες με χρήση της μεθόδου Ανάλυσης Άδηλων Κλάσεων, Latent Class Analysis (LCA), (Goodman,1974 Lazarsfeld & Henry, 1968). Η LCA είναι μια στατιστική μέθοδος η οποία μας βοηθά να εντάξουμε τα υποκείμενα της έρευνας τα οποία έχουν διερευνηθεί ως προς ένα πλήθος μεταβλητών (στην περίπτωση μας είναι οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου) σε μία από τον μικρό αριθμό βασικών ομάδων που προκύπτουν. Σωστές απαντήσεις χαρακτηρίστηκαν όσες είχαν απαντηθεί σωστά και είχαν πλήρη αιτιολόγηση, όπου είχε ζητηθεί. Λανθασμένες χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις που ή ήταν λάθος ή δεν είχαν πλήρη αιτιολόγηση, όπου είχε ζητηθεί, ή δεν απαντήθηκαν καθόλου.

Οι σωστές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1, οι λανθασμένες και οι αναπάντητες ερωτήσεις με 0.

Ο έλεγχος με τη βοήθεια της LCA στηρίχθηκε στις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 8 που αναφέρονται στην αναγνώριση της κυρτότητας συνάρτησης μέσα από τη γραφική της παράσταση και στη γνώση του

τυπικού ορισμού της, στις ερωτήσεις q 6.1 q 6.2 που αναφέρονται στην κατασκευή της γραφικής παράστασης κυρτής συνάρτησης που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία και στις ερωτήσεις q 5.1 q 5.2 που αναφέρονται στην αναγνώριση της κυρτότητας της συνάρτησης με τη βοήθεια τριών σημείων του γραφήματος της με την προϋπόθεση ότι αυτή δεν αλλάζει.

Για την επιλογή του κατάλληλου αριθμού κλάσεων έγινε αρκετές φορές η εφαρμογή του λογισμικού Mplus V6.12 Muthen and Muthen ζητώντας κάθε φορά ταξινόμηση με διαφορετικό αριθμό κλάσεων. Για να επιλέξουμε την καλύτερη ταξινόμηση δηλαδή τον κατάλληλο αριθμό κλάσεων χρησιμοποιήσαμε τα παρακάτω κριτήρια:

- Η τιμή του δείκτη BIC (Bayesian Information Criterion) να είναι η μικρότερη.
- Η τιμή της εντροπίας να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο 1.
- Ο πίνακας ταξινόμησης Average Latent Class Probabilities for Most Likely Class Membership (Row) by Latent Class (Column) να έχει την κύρια διαγώνιο κοντά στο 1 (μεγαλύτερη από 0,9) και τα άλλα στοιχεία κοντά στο 0.

Κατασκευάστηκε έτσι, ένας πίνακας σχετικών συχνοτήτων %, προκειμένου να είναι φανερό ποιο ποσοστό μαθητών της κάθε κλάσης απάντησε σωστά στην κάθε ερώτηση.

Τα κριτήρια που τέθηκαν για να έχει μια κλάση ικανοποιητική επίδοση στον κάθε παράγοντα ήταν τα εξής:

- πάνω από τους μισούς μαθητές (50 %) να έχουν απαντήσει σωστά στην κάθε ερώτηση
- να έχουν απαντηθεί τουλάχιστον οι μισές ερωτήσεις του κάθε παράγοντα.

Προκειμένου να γίνει πιο εύκολα η ερμηνεία των αποτελεσμάτων, κατασκευάστηκε ένα πίνακας σχετικών συχνοτήτων % με τα παραπάνω δεδομένα αλλά οι ερωτήσεις του κάθε παράγοντα τοποθετήθηκαν σε διαδοχικές γραμμές

και ταυτόχρονα οι κλάσεις στις στήλες είχαν τοποθετηθεί με σειρά καλύτερης επίδοσης.

Μετά από την μελέτη των αποτελεσμάτων των μαθητών ανά κλάση που προέκυψαν από την προηγούμενη ταξινόμηση, έγινε προσπάθεια για ερμηνεία του τρόπου σκέψης τους, με στόχο την περιγραφή της κάθε κλάσης αλλά και των ομοιοτήτων ή διαφορών της με τις άλλες με στόχο να εξετάσουμε αν επαληθεύεται το θεωρητικό μοντέλο που παρουσιάστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο.

Τέλος, έγινε έλεγχος των αποτελεσμάτων της ομάδας που είχε διδαχθεί την κυρτότητα με διδασκαλία στηριγμένη στο γεωμετρικό της ορισμό. Αξιολογήθηκαν οι απαντήσεις και ελέγχθηκε ποιούς παράγοντες ικανοποίησε ο κάθε μαθητής ξεχωριστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην πρώτη παράγραφο δίνονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών σε ολόκληρο το ερωτηματολόγιο. Στη συνέχεια, δίνονται κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών στις οποίες μπορούμε να διακρίνουμε κάποιες παρανοήσεις τους και ακολούθως δίνουμε τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων. Αρχικά κατά την επεξεργασία έγινε παραγοντική ανάλυση με τη βοήθεια του λογισμικού IBM SPSS Statistics v19. Έπειτα οι μαθητές χωρίστηκαν σε κλάσεις, ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν στο ερωτηματολόγιο, με τη βοήθεια του λογισμικού Mplus V6.12 Muthen and Muthen. Τέλος από τους μαθητές που διδάχθηκαν την έννοια της κυρτότητας με διδασκαλία η οποία βασίστηκε στο γεωμετρικό της ορισμό πήραμε τις απαντήσεις από τον κάθε μαθητή ξεχωριστά εξετάζοντας ποιους παράγοντες αυτές ικανοποιούν.

5.2 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Ερώτηση 1:

Οι περισσότεροι μαθητές σε αυτή την ερώτηση απάντησαν με τον ίδιο τρόπο που απάντησαν και στην ερώτηση 2. Έδωσαν ιδιότητες των κυρτών συναρτήσεων, με πιο συχνή απάντηση αυτή που μας μιλάει για το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου, ίσως γιατί αυτή είναι η ιδιότητα που χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές στην επίλυση των ασκήσεων. Μια απάντηση που επίσης δόθηκε συχνά, ήταν ότι η κυρτή συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω ενώ η κοίλη στρέφει τα κοίλα κάτω. Τέλος, αρκετοί μαθητές μίλησαν για «χαρούμενες» και «λυπημένες» γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αντιστοιχίζοντας την χαρούμενη στην κυρτή και τη λυπημένη στην κοίλη συνάρτηση.

Ερώτηση 2:

Οι μαθητές εδώ έπρεπε να γράψουν όσες ιδιότητες μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης μπορούσαν να σκεφτούν. Η ιδιότητα που διατύπωσαν οι μαθητές με τη μεγαλύτερη συχνότητα ήταν αυτή που αφορούσε την μονοτονία της πρώτης παραγώγου, δηλαδή μια απάντηση που βασίζεται στον τυπικό ορισμό της συνάρτησης. (Ο αριθμός των απαντήσεων αυτών ήταν σε ποσοστό 31,25% του συνόλου για την κυρτή και 29,46% του συνόλου για την κοίλη συνάρτηση).

Οι απαντήσεις σε ποσοστό 25,89% του συνόλου τόσο στην κυρτή όσο και στην κοίλη συνάρτηση αναφέρονταν στην ιδιότητα που έχει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα αν μια συνάρτηση είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» (αντίστοιχα «πάνω») από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

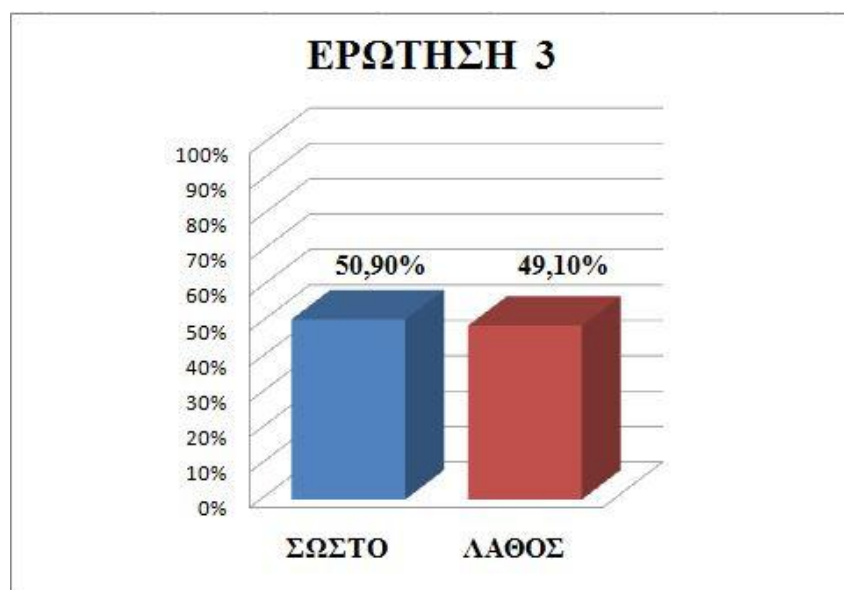
Το 14,29% των μαθητών ανέφεραν ότι μια κυρτή συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω και το 13,39% των μαθητών ανέφεραν ότι μία κοίλη συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω.

Ένα ποσοστό 4,46% των μαθητών μίλησαν για την αλλαγή της κυρτότητας της συνάρτησης αναφέροντας τον ορισμό του σημείου καμπής.

Τέλος μόνο ένας μαθητής μίλησε για τη χορδή της γραφικής παράστασης, δηλαδή μία συνάρτηση λέγεται κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , αν για κάθε α και β που ανήκουν στο Δ , το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ βρίσκεται «πάνω» (αντίστοιχα κάτω) από τη γραφική παράσταση της ενώ το 14,29% των μαθητών στην κυρτή και το 13,39% των μαθητών στην κοίλη έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις.

Ερώτηση 3:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων σε αυτή την ερώτηση είναι 57 σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 50,9% και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

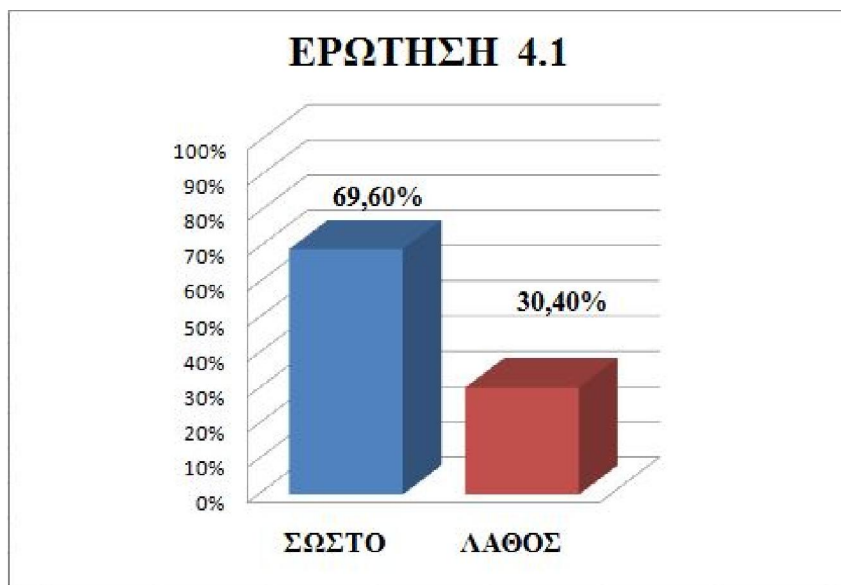


Διάγραμμα 1: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 3

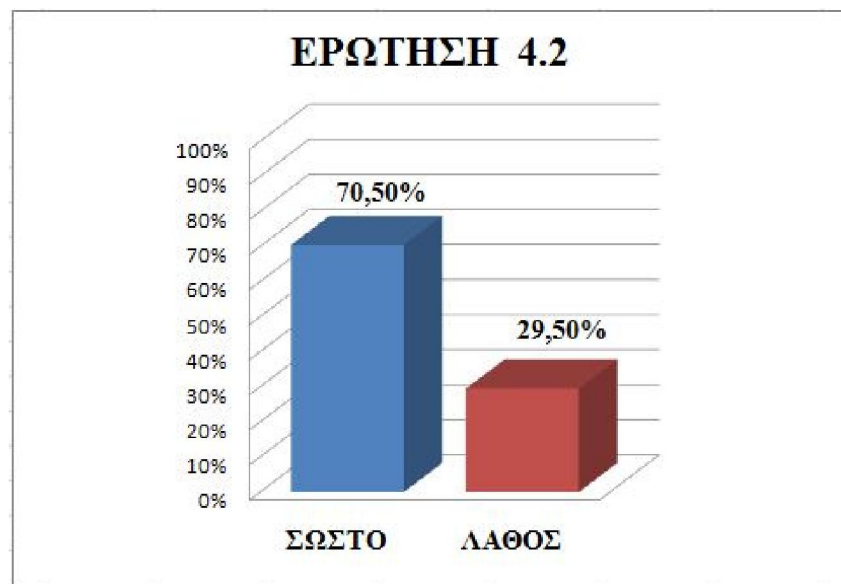
Αν και η ερώτηση είναι σχετικά απλή, οι μισοί μόνο μαθητές απάντησαν σωστά. Αυτό ίσως έχει να κάνει με τη βαρύτητα που δίνουν οι μαθητές στο διαδικαστικό κομμάτι της επίλυσης των ασκήσεων της κυρτότητας σε σχέση με την εικόνα που μας δίνει η γραφική της παράσταση.

Ερώτηση 4:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 4.1 4.2 4.3 και 4.4 είναι 78, 79, 36 και 5 αντίστοιχα, σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι 69,6% 70,5% 32,1% και 4,5% και φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



Διάγραμμα 2: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 4.1



Διάγραμμα 3: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 4.2



Διάγραμμα 4: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 4.3



Διάγραμμα 5: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 4.4

Είναι φανερό ότι οι επιδόσεις των μαθητών στις δύο πρώτες περιπτώσεις, που αφορούν συναρτήσεις, οι οποίες διατηρούν την κυρτότητα τους, είναι υψηλές,

φανερόνοντας ότι έχουν μια σωστή εικόνα για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στην ερώτηση 4.3, που έχουμε αλλαγή της κυρτότητας, οι μαθητές σε αρκετά υψηλό ποσοστό απαντούν λανθασμένα, με πιο συχνή την παρανόηση που έχει να κάνει με το σημείο αλλαγής της κυρτότητας. Σε μεγάλο ποσοστό 30,36% οι μαθητές απάντησαν ότι αλλαγή κυρτότητας έχουμε στο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης. Επίσης το 21,43% δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση αυτή. Ένα μικρότερο ποσοστό 8,93%, πιστεύει ότι η κυρτότητα είναι ένα αμετάβλητο χαρακτηριστικό της συνάρτησης, δηλαδή πιστεύουν ότι η συνάρτηση είναι σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της ή κυρτή ή κοίλη.

Στην ερώτηση 4.4 ελάχιστοι μαθητές απάντησαν σωστά. Το 37,50% παρατήρησε ότι αλλαγή κυρτότητας έχουμε μόνο στο σημείο με τετμημένη μηδέν, αγνοώντας τα άλλα δύο σημεία στα οποία επίσης είχαμε αλλαγή κυρτότητας. Το 26,79% απάντησε ότι αλλαγή κυρτότητας έχουμε στο τοπικό μέγιστο και στο τοπικό ελάχιστο. Τέλος, το 21,43% δεν απάντησε καθόλου στο ερώτημα.

Ερώτηση 5:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 5.1 και 5.2 είναι 51 και 50 αντίστοιχα σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι 45,5% και 44,6% και φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



Διάγραμμα 6: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 5.1



Διάγραμμα 7: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 5.2

Στην ερώτηση 5.1 ένα μεγάλο ποσοστό 52,68% έκανε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης, χωρίς όμως να τους έχει ζητηθεί. Από το παραπάνω ποσοστό, το 14,29% αντιστοιχούσε σε σωστές απαντήσεις ενώ το υπόλοιπο 38,39% αντιστοιχούσε σε λανθασμένες απαντήσεις. Σε ορισμένες από τις απαντήσεις που απαντήθηκαν με λάθος τρόπο υπήρχαν συναρτήσεις που δεν διατηρούσαν την κυρτότητα, όπως ζητούσε η εκφώνηση. Πολλοί μαθητές σε ποσοστό 15,18% συνέδεσαν τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Δεν απάντησε καθόλου το 16,07%. Αντίστοιχα στην ερώτηση 5.2, το ίδιο ποσοστό (52,68%), έκανε μια πρόχειρη γραφική παράσταση χωρίς να του ζητηθεί από το ποσοστό αυτό το 17,86% απάντησε σωστά και το υπόλοιπο 34,82% απάντησε λάθος. Και σε αυτή την ερώτηση πάλι είχαμε απαντήσεις στις οποίες οι γραφικές παραστάσεις δεν διατηρούσαν την κυρτότητα. Αρκετοί μαθητές σε ποσοστό 11,61% ένωσαν τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Δεν απάντησε καθόλου το 16,07%.

Ερώτηση 6:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 6.1 και 6.2 είναι 83 και 82 αντίστοιχα σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι 74,1% και 73,2% και φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα:



Διάγραμμα 8: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 6.1



Διάγραμμα 9: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 6.2

Οι ερωτήσεις 6.1 και 6.2 είχαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας, όπου φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούσαν να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αρκεί να γνώριζαν την κυρτότητα της και δύο σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται. Οι λανθασμένες απαντήσεις στις ερωτήσεις αυτές σε μεγάλο ποσοστό είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό: οι μαθητές είχαν σχεδιάσει γραφικές παραστάσεις που δεν αναπαριστούσαν συναρτήσεις (14,97% για τις κυρτές συναρτήσεις και 15,87% για τις κοίλες συναρτήσεις). Τέλος, ένα μικρό ποσοστό δεν απάντησε καθόλου στις ερωτήσεις αυτές.

Ερώτηση 7:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 7 είναι 5 σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 4,5% και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



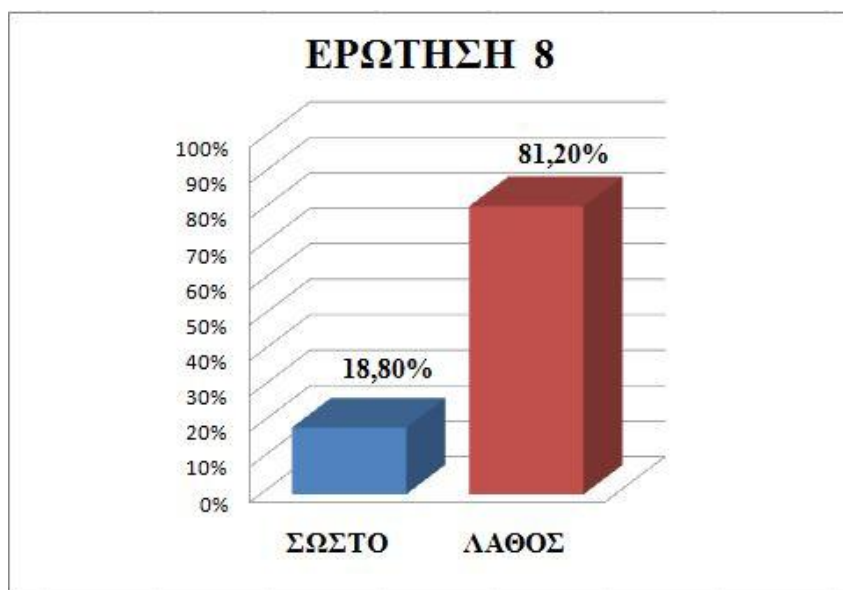
Διάγραμμα 10: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 7

Η ερώτηση 7 ζητούσε από τους μαθητές να φέρουν εφαπτομένες σε τυχαία σημεία και να περιγράψουν τι συμβαίνει με την κλίση της εφαπτομένης σε μια

κυρτή και τι σε μία κοίλη συνάρτηση. Εκτός από τους ελάχιστους που απάντησαν σωστά, αρκετοί μαθητές μόλις είδαν γραφική παράσταση και εφαπτομένη έγραψαν το σχόλιο του σχολικού βιβλίου που αναφέρει ότι αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» (αντιστοίχως «πάνω») από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Το 44,72% των μαθητών δεν απάντησε στην ερώτηση. Το ποσοστό αποτυχίας είναι υψηλό, αν λάβουμε υπόψη μας ότι το σχολικό βιβλίο στην εισαγωγή της έννοιας αναφέρει τι συμβαίνει όταν στρέφεται προς τη θετική ή την αρνητική φορά η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .

Ερώτηση 8:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 8 είναι 21 σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 18,8% και φαίνεται στο παρακάτω διαγράμμα:

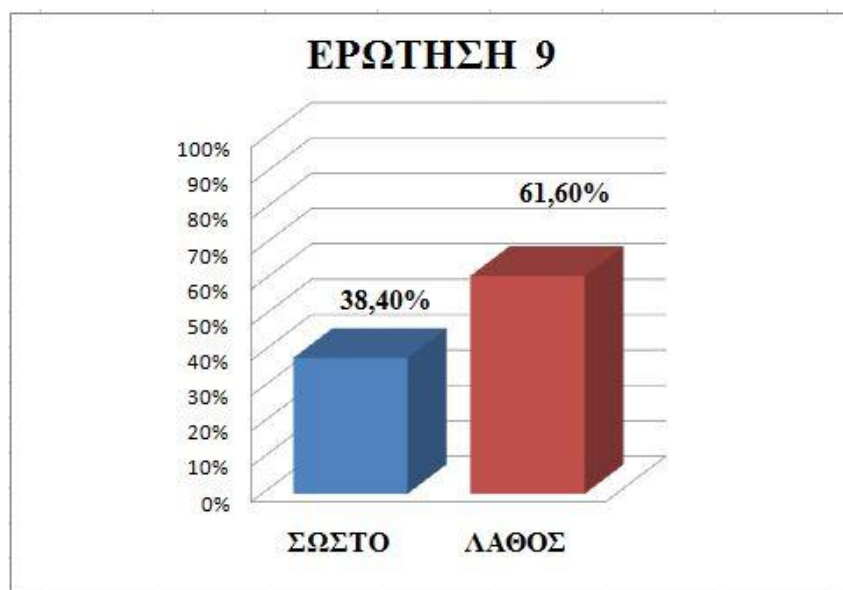


Διάγραμμα 11: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 8

Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αποτελεσμάτων έπαιξε το γεγονός ότι πολλοί μαθητές (12,50%) απάντησαν με την ιδιότητα που δίνει το θεώρημα και κατά συνέπεια η απάντηση στην ερώτηση θεωρήθηκε λανθασμένη. Το παραπάνω φαινόμενο είναι πολύ συνηθισμένο και στις απαντήσεις των μαθητών στις πανελλήνιες εξετάσεις. Πολύ συχνά, όταν ζητηθεί ο ορισμός μιας έννοιας οι μαθητές απαντούν με το αντίστοιχο θεώρημα που αφορά την έννοια αυτή. Αρκετοί μαθητές που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν απαντήσεις που συνδύαζαν τον ορισμό με το θεώρημα της κυρτότητας, δίνοντας έτσι τον προσωπικό τους ορισμό (*personal concept definition*, Tall and Vinner, (1981)). Τέλος μεγάλο ποσοστό μαθητών (61,61%) δεν απάντησαν καθόλου στην ερώτηση αυτή.

Ερώτηση 9:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 9 είναι 43 σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 38,4% και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

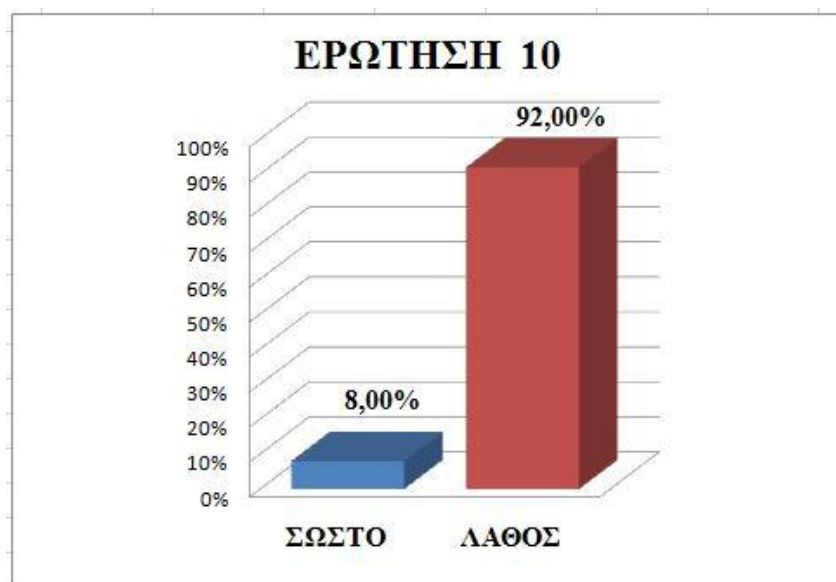


Διάγραμμα 12: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 9

Παρόλο που υπάρχει αντίστοιχη άσκηση στο σχολικό βιβλίο, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων παραμένει χαμηλό ίσως γιατί θέματα όπως αυτό δεν τίθενται σχεδόν ποτέ στις εξετάσεις. Το 51,79% δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση αυτή, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό έδωσε μόνο την απάντηση χωρίς να δώσει επιπλέον εξηγήσεις.

Ερώτηση 10:

Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 10 είναι 9 σε σύνολο 112 ερωτηθέντων μαθητών. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι 8% και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Διάγραμμα 13: Ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 10

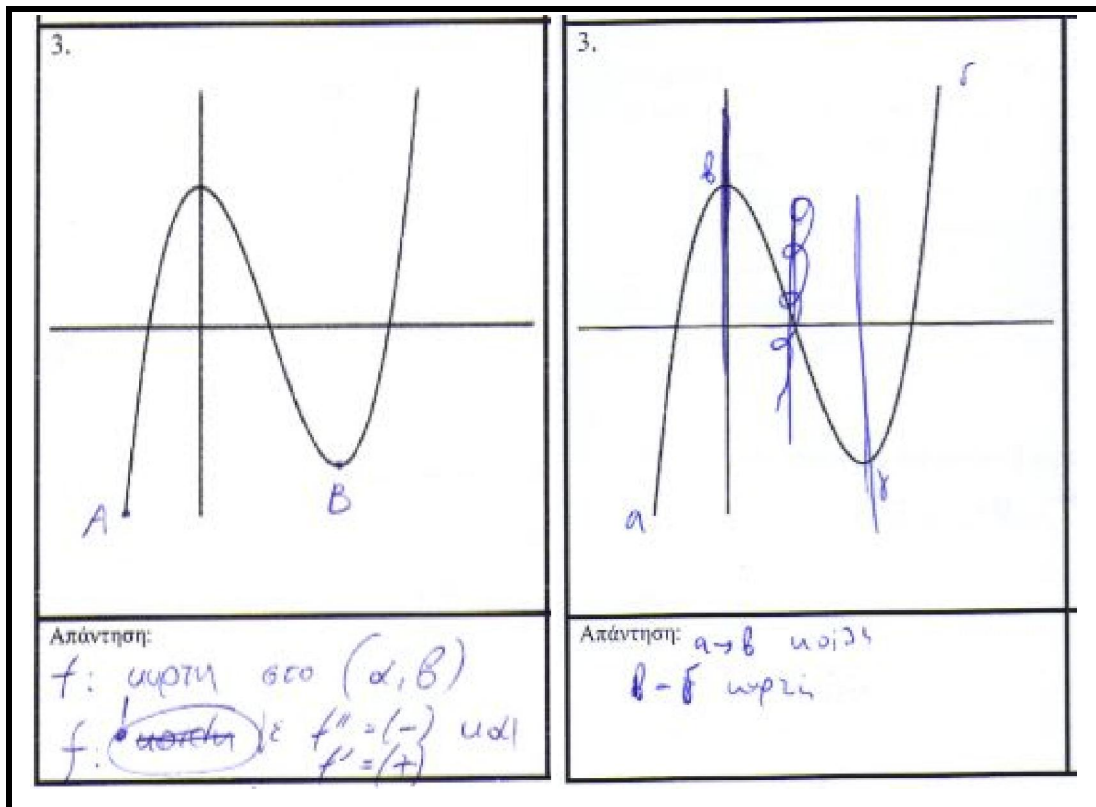
Οι μαθητές επηρεασμένοι από την μορφή των θεμάτων των εξετάσεων, είναι σε θέση να λύνουν πιο δύσκολες θεωρητικές ασκήσεις, αλλά δεν μπορούν να λύσουν μια άσκηση όπως αυτή που είναι σχετικά απλή και ζητάει από τους μαθητές υπολογισμό πρώτης και δεύτερης παραγώγου. Αυτό φανερώνει την αδυναμία των μαθητών να υπολογίσουν σωστά την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο συνάρτησης, να κάνουν σωστά πράξεις, να λύσουν σωστά μια πολυωνυμική

ανίσωση. Ένα σημαντικό ποσοστό (39,29%) δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση αυτή (ίσως να έπαιξε κάποιο μικρό ρόλο ότι η άσκηση ήταν η τελευταία του ερωτηματολογίου και είχε αρκετές πράξεις). Το υπόλοιπο ποσοστό 52,71% ασχολήθηκε με την επίλυση της άσκησης αυτής αλλά λόγω διαφόρων λαθών, κυρίως σε πράξεις δεν οδηγήθηκε στη σωστή λύση παρόλο που γνώριζαν την μεθοδολογία επίλυσης της. Από τους παραπάνω, ένα ακόμη μικρότερο ποσοστό κατάφερε να φτάσει, έστω και με λάθη, στον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης.

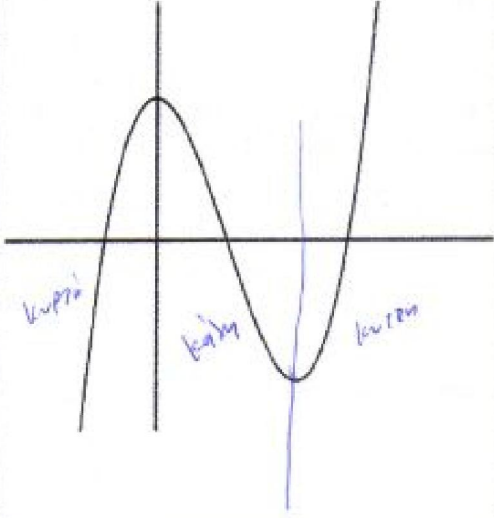
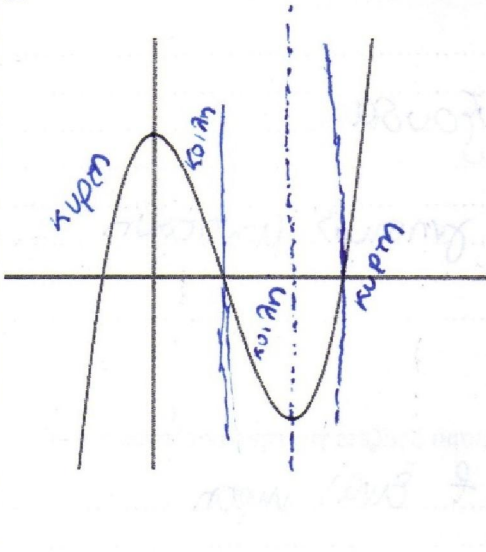
5.3 ΟΙ ΠΙΟ ΣΥΧΝΕΣ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Οι πιο συχνές παρανοήσεις των μαθητών είναι οι παρακάτω:

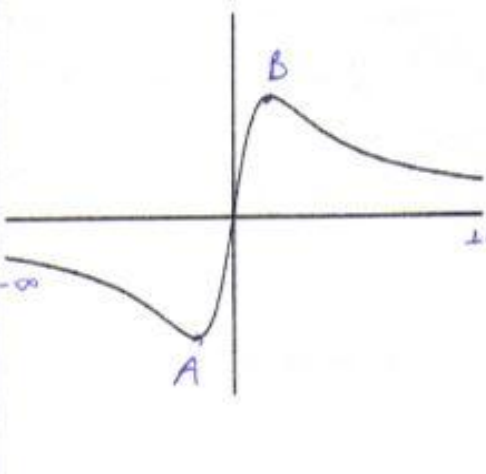
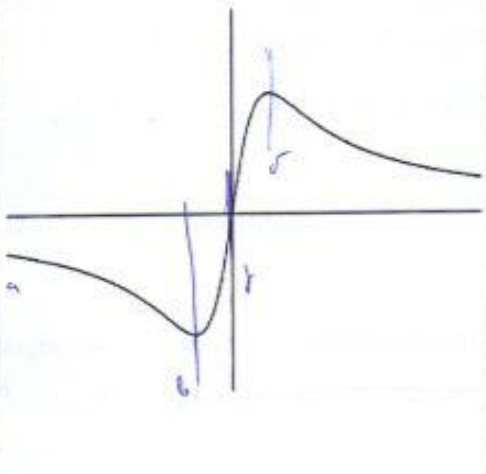
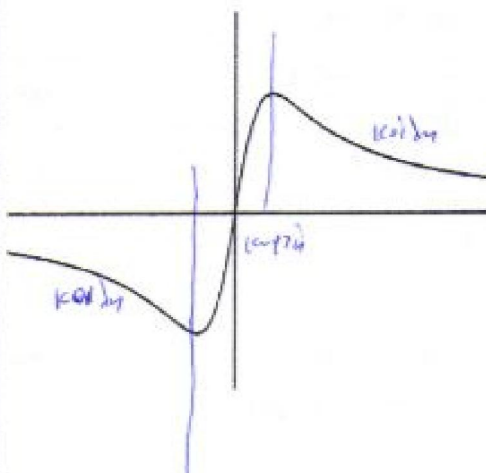

Ι) Στα ερωτήματα 4.3 και 4.4, που οι μαθητές έπρεπε να φέρουν παράλληλες στον yy' στα σημεία που η κυρτότητα αλλάζει, ώστε να χωριστούν οι γραφικές παραστάσεις σε διαστήματα στα οποία η κυρτότητα διατηρείται, πολλοί μαθητές έφεραν παράλληλες από τα σημεία στα οποία η συνάρτηση είχε ακρότατο θεωρώντας λανθασμένα ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από το σημείο αυτό. Οι μαθητές θεωρούν ότι όπου η καμπύλη «στρίβει», υποχρεωτικά έχουμε και αλλαγή της κυρτότητας γύρω από το σημείο αυτό.



ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την αλλαγή της κυρτότητας. (Θεωρούν ότι η κυρτότητα αλλάζει στο ακρότατο της συνάρτησης).

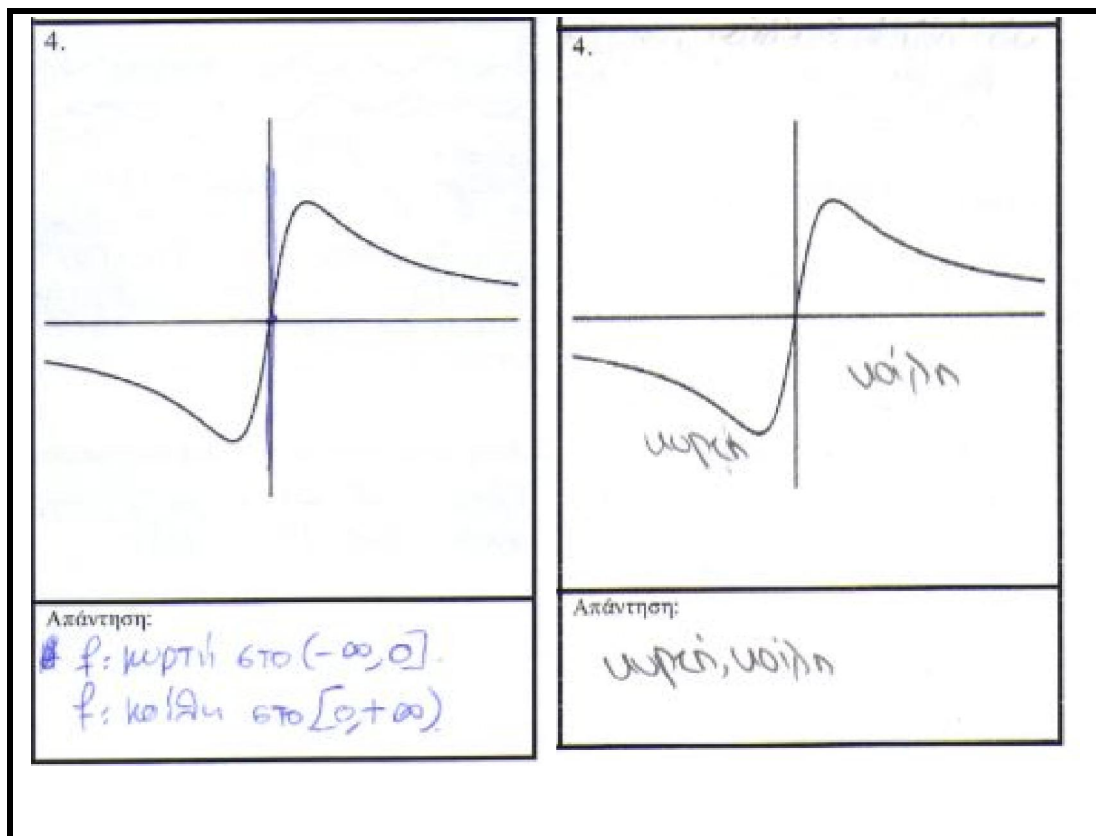
<p>3.</p> 	<p>3.</p> 
<p>Απάντηση:</p>	<p>Απάντηση:</p>

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Παρανόσεις των μαθητών σε σχέση με την αλλαγή της κυρτότητας. (Θεωρούν ότι η κυρτότητα αλλάζει στο ακρότατο της συνάρτησης).

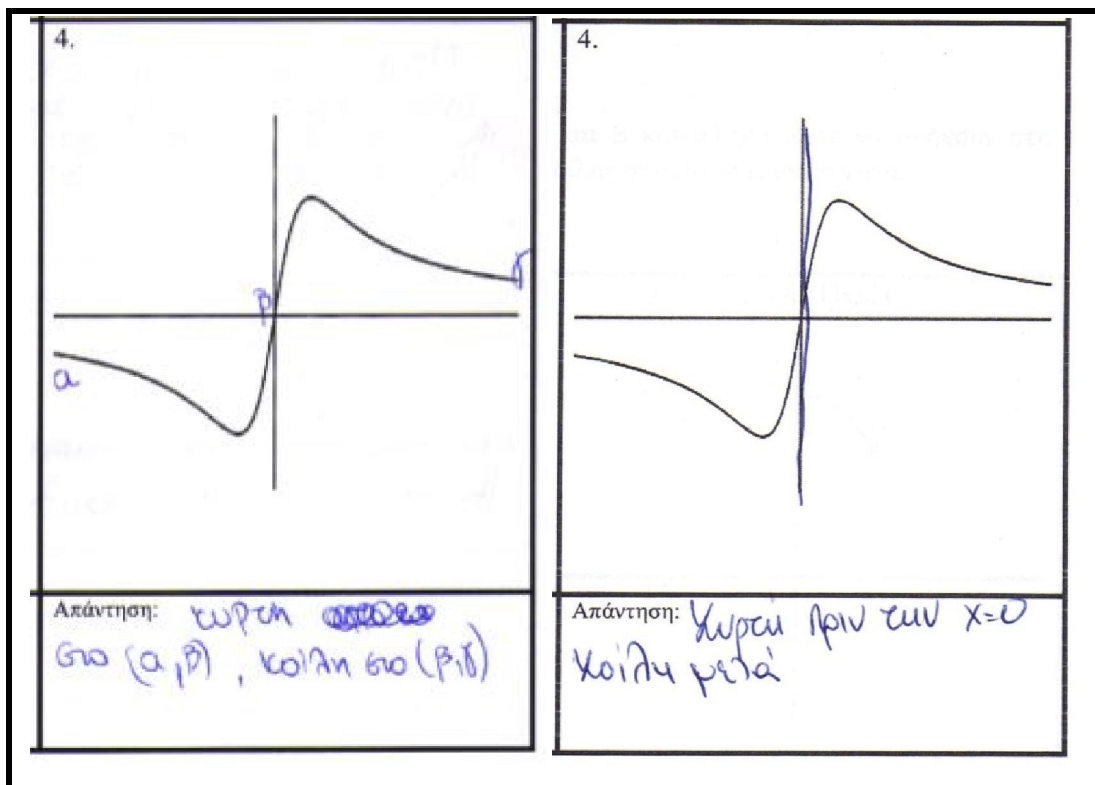
<p>4.</p> 	<p>4.</p> 
<p>Απάντηση: $\delta > 0$ στο $(-\infty, A)$ f: κρηνη κ $f''(+)$ $f'(-)$ $\delta > 0$ στο (A, β) κρηνη $f''(+)$ $f'(+)$ $\delta > 0$ στο $(\beta, +\infty)$ κρηνη</p>	<p>Απάντηση: $a \rightarrow b$ κρηνη $\delta \rightarrow \gamma$ κρηνη $\gamma \rightarrow \delta$ κρηνη</p>
<p>4.</p> 	<p>4.</p> 
<p>Απάντηση:</p>	<p>Απάντηση: κοιλη κορυφη κορυφη</p>

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Παρανόησεις των μαθητών σε σχέση με την αλλαγή της κυρτότητας.

II) Στο ερώτημα 4.4 δεν αναγνώρισαν όλες τις περιπτώσεις αλλαγής της κυρτότητας αλλά μόνο αυτή γύρω από το σημείο $x_0=0$.



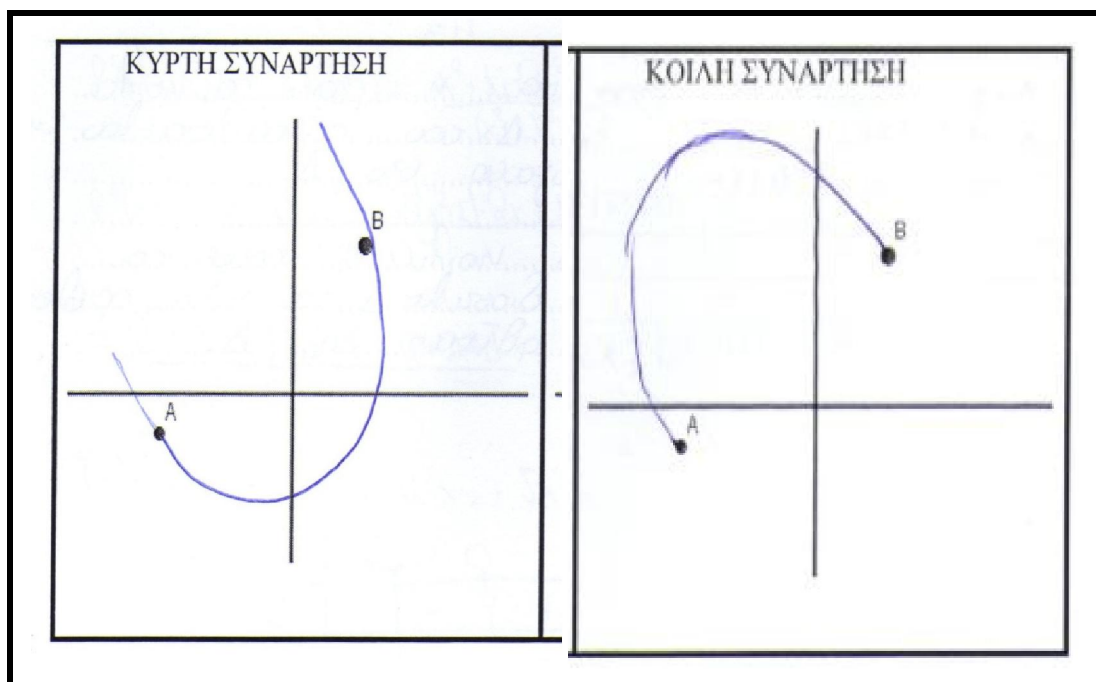
ΠΙΝΑΚΑΣ 4: Οι μαθητές δεν αναγνώρισαν όλα τα διαστήματα στα οποία η κυρτότητα αλλάζει.



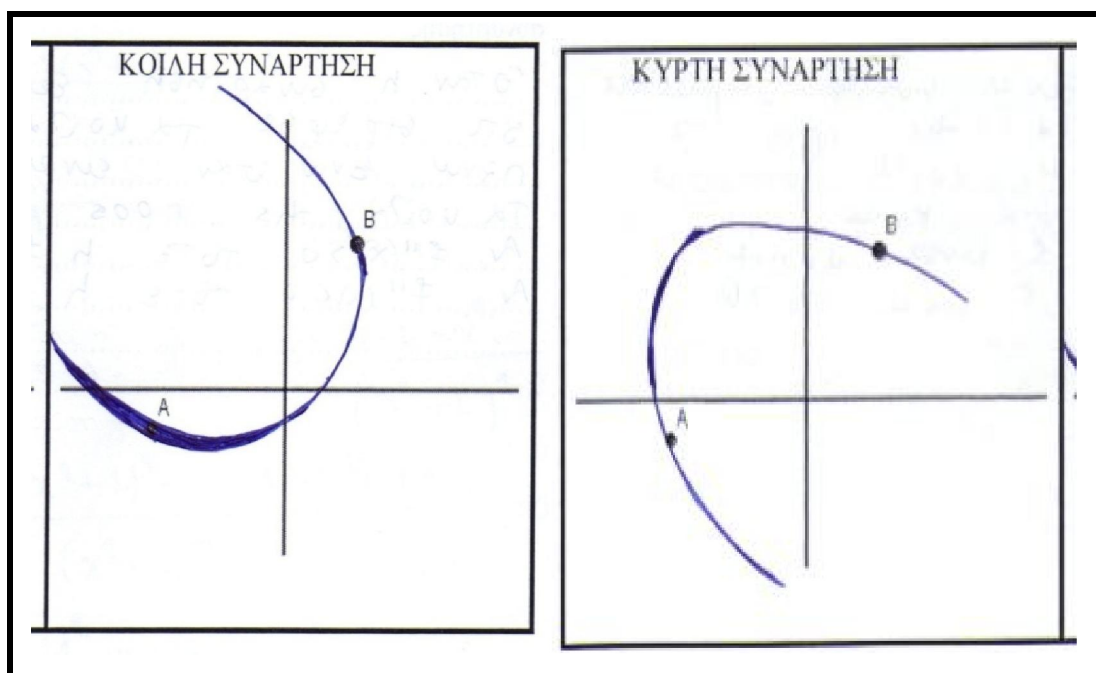
ΠΙΝΑΚΑΣ 5: Οι μαθητές δεν αναγνώρισαν όλα τα διαστήματα στα οποία η κυρτότητα αλλάζει.

III) Ενώ έχει ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις, οι γραφικές τους παραστάσεις δεν απεικονίζουν συνάρτηση.

Η παρανόηση αυτή έγινε από ένα σημαντικά μεγάλο αριθμό μαθητών στα ερωτήματα 5.1 5.2 6.1 και 6.2.

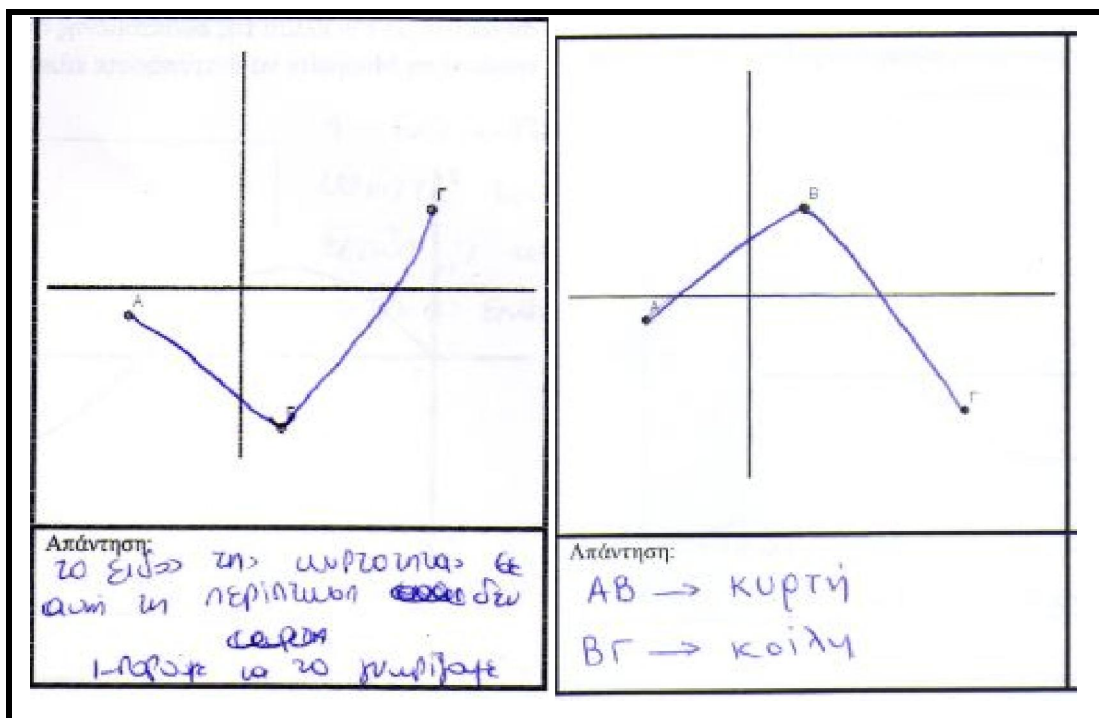


ΠΙΝΑΚΑΣ 6: Οι μαθητές δεν σχεδίασαν γραφική παράσταση συνάρτησης.

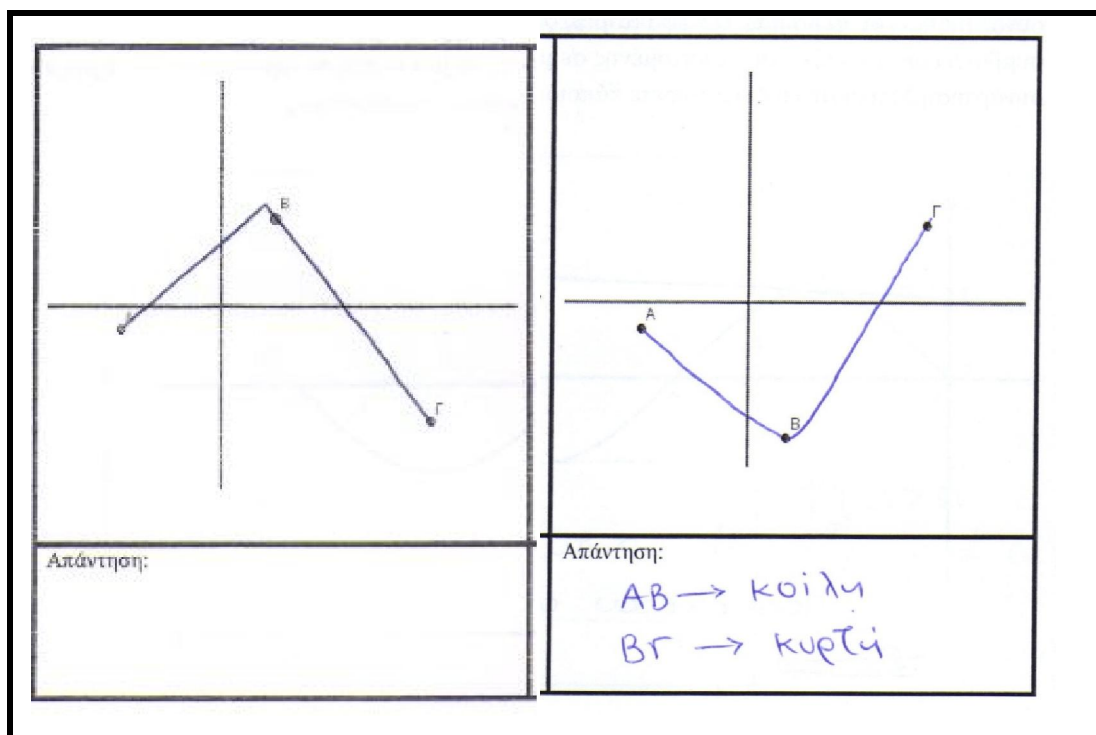


ΠΙΝΑΚΑΣ 7: : Οι μαθητές δεν σχεδίασαν γραφική παράσταση συνάρτησης και αντέστρεψαν την κυρτότητα μεταξύ των δύο συναρτήσεων.

IV) Χωρίς να έχει ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν κάτι στα ερωτήματα 5.1 και 5.2, έχουν ενώσει τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Προκύπτουν έτσι γραφικές παραστάσεις που ανήκουν σε γραμμικές συναρτήσεις με δύο κλάδους. Το πρόβλημα όμως είναι ότι ο ορισμός που έχει δοθεί για τις κυρτές και κοίλες συναρτήσεις δεν μας καλύπτει στην περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων και γενικά το σχολικό βιβλίο δεν έχει ασχοληθεί σε κάποιο σημείο με την κυρτότητα τους.

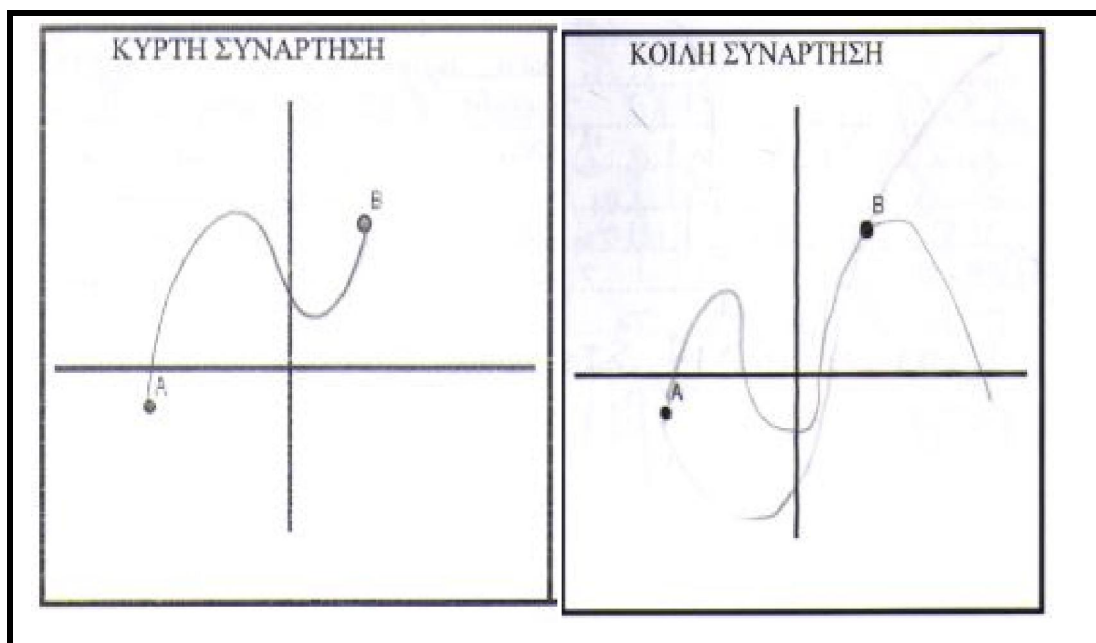


ΠΙΝΑΚΑΣ 8: Οι μαθητές ένωσαν τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα.

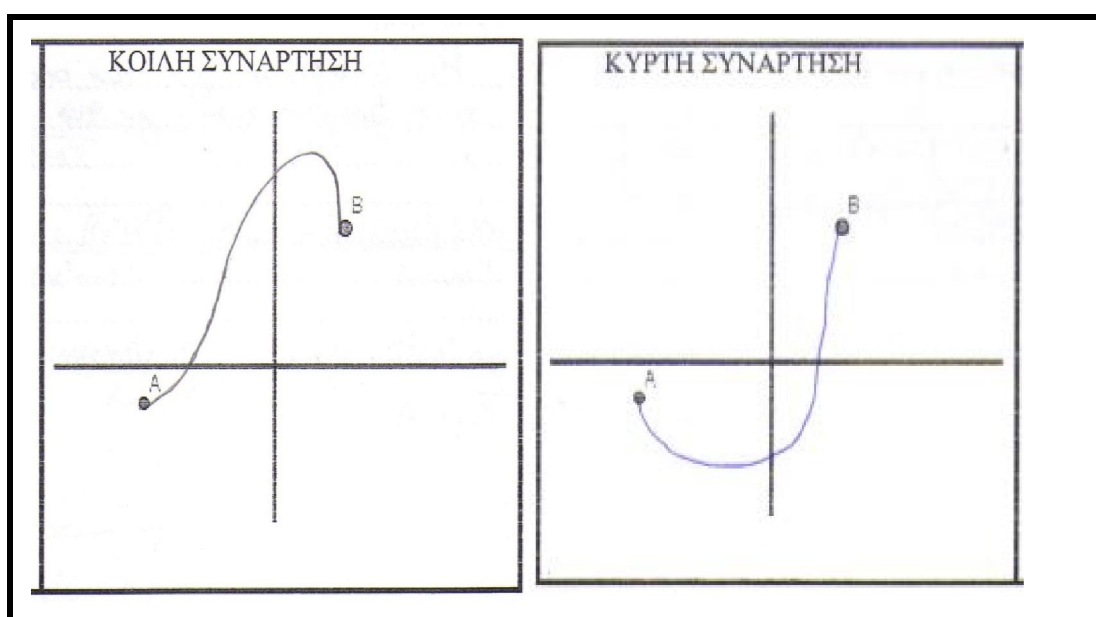


ΠΙΝΑΚΑΣ 9: Οι μαθητές ένωσαν τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα.

V) Στα ερωτήματα 6.1 και 6.2 οι μαθητές κλήθηκαν να ενώσουν τα σημεία Α και Β ώστε να ανήκουν στη γραφική παράσταση μιας κοίλης ή μιας κυρτής συνάρτησης κατά περίπτωση. Ένας μικρός αριθμός μαθητών σχεδίασε συναρτήσεις οι οποίες δεν διατηρούν την κυρτότητα τους. Αυτό ίσως να έχει να κάνει με την παρανόηση των μαθητών που θεωρούν ότι η κάθε συνάρτηση είναι μόνο κυρτή ή μόνο κοίλη στο πεδίο ορισμού της και η κυρτότητα αυτή δεν μεταβάλλεται.



ΠΙΝΑΚΑΣ 10: Οι μαθητές σχεδίασαν συναρτήσεις που δεν διατηρούν την κυρτότητα τους.



ΠΙΝΑΚΑΣ 11: Οι μαθητές σχεδίασαν συναρτήσεις που δεν διατηρούν την κυρτότητα τους.

VI) Τέλος, μια συχνή παρανόηση που έγινε από τους μαθητές, είχε να κάνει με τον ορισμό της κυρτότητας. Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να διατυπώσουν τον ορισμό, πολλοί απ' αυτούς απάντησαν με τη διατύπωση του αντίστοιχου θεωρήματος που αναφέρεται στην έννοια της κυρτότητας.

5.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η ανάλυση που έγινε βασίστηκε στις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 5.1 q 5.2 q 6.1 q 6.2 και q 8, στις οποίες μπορούσε να δοθεί ο χαρακτηρισμός ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ. Δεν χρησιμοποιήσαμε τις δύο ερωτήσεις q 4.4 και q 10, γιατί είχαν μικρό ποσοστό σωστών απαντήσεων και λόγω έλλειψης διασποράς δεν μπορούσαν να μας πληροφορήσουν για διακρίσεις μεταξύ των μαθητών.

Επίσης, δεν χρησιμοποιήσαμε τις q 3 και q 9, διότι μετά την παραγοντική ανάλυση, στους παράγοντες που προέκυψαν κατά τον έλεγχο αξιοπιστίας παραγόντων, είχαν δείκτη αξιοπιστίας Cronbach's Alpha μικρότερο του 0,70. Οι σωστές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1, οι λανθασμένες και οι αναπάντητες ερωτήσεις με 0.

Η συνολική επίδοση των μαθητών σε αυτές τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ήταν:

ΕΡΩΤΗΣΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΩΣΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΩΣΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
q 4.1	78	69,6 %
q 4.2	79	70,5 %
q 4.3	36	32,1 %
q 5.1	51	45,5 %
q 5.2	50	44,6 %
q 6.1	83	74,1 %
q 6.2	82	73,2 %
q 8	21	18,8 %

Πίνακας 12: Συνολική επίδοση των μαθητών στις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 5.1 q5.2 q6.1 q 6.2 και q 8.

Η παραγοντική ανάλυση που έγινε έδωσε τους παρακάτω παράγοντες:

ΕΡΩΤΗΣΗ	Παράγοντας 1	Παράγοντας 2	Παράγοντας 3
q 4.1			0,696
q 4.2			0,746
q 4.3			0,529
q 5.1	0,919		
q 5.2	0,917		
q 6.1		0,945	
q 6.2		0,952	
q 8			0,706

Πίνακας 13: Ερωτήσεις που περιέχονται στον κάθε παράγοντα.

Οι ερωτήσεις ανά παράγοντα ήταν οι παρακάτω:

Ο πρώτος παράγοντας F_1 είχε τις ερωτήσεις q 5.1 q 5.2

F_1 : Αναγνώριση της κυρτότητας από τρία σημεία του γραφήματος.

Ο δεύτερος παράγοντας F_2 είχε τις ερωτήσεις q 6.1 q 6.2

F_2 : Σχεδιασμός κυρτής / κοίλης συνάρτησης που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία.

Ο τρίτος παράγοντας F_3 είχε τις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 και q 8

F_3 : Γνώση τυπικού ορισμού και αναγνώριση διαστημάτων κυρτότητας από το γράφημα.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της latent class analysis (LCA), σχηματίστηκαν κλάσεις των συμμετεχόντων ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν.

Η επιλογή του αριθμού των κλάσεων έγινε με τη βοήθεια του στατιστικού προγράμματος Mplus V6.12 Muthen and Muthen. Το κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Bayesian Information Criterion (BIC), επιλέγοντας ως καλύτερη ταξινόμηση αυτή με την μικρότερη τιμή του (BIC).

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις τιμές του κριτηρίου (BIC) για 3, 4 και 5 κλάσεις αντίστοιχα.

Latent Classes	3	4	5
Bayesian Information Criteria (BIC)	862,525	851,132	867,670

Πίνακας 14: Τιμές του Bayesian Information Criteria (BIC) ανά αριθμό κλάσεων.

ΚΛΑΣΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΤΟΜΩΝ
1	24
2	46
3	26
4	16

Πίνακας 15: Αριθμός ατόμων ανά κλάση.

Η τιμή της εντροπίας είναι 0,993 τιμή που είναι πολύ κοντά στη μονάδα που φανερώνει υψηλή ακρίβεια στην ομαδοποίηση.

Οι κλάσεις είναι διακριτές γιατί η πιθανότητα να ανήκει ένας μαθητής σε μία μόνο κλάση είναι πάνω από 0,90 όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4
1	0.997	0.000	0.000	0.003
2	0.000	0.998	0.002	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000

Πίνακας 16: Ταξινόμηση των πιθανοτήτων ένταξης των ατόμων σε κλάσεις.

Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που μας έδωσε το λογισμικό Mplus V6.12 Muthen and Muthen, ο κάθε μαθητής ανάλογα με τον τρόπο που απάντησε τοποθετήθηκε σε μία από τις τέσσερις κλάσεις.

Οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν με βάση τα παρακάτω κριτήρια:

- i) να έχουν πιθανότητα μεγαλύτερη του 0,5 (δηλαδή περισσότεροι από το 50% των μαθητών της κλάσης να έχουν απαντήσει σωστά) και
- ii) να έχουν απαντηθεί σωστά τουλάχιστον οι μισές ερωτήσεις του κάθε παράγοντα.

Η σειρά των ερωτήσεων του πίνακα 17 είναι διαφορετική από αυτή που είχαν στο ερωτηματολόγιο, ώστε οι ερωτήσεις του κάθε παράγοντα να είναι μαζί και τα ποσοστά να είναι διατεταγμένα κατά φθίνουσα σειρά.

Έτσι σχηματίζονται οι παρακάτω ομάδες:

	Ερωτήσεις	Ομάδα 1 46 μαθητές (41,07%)	Ομάδα 2 26 μαθητές (23,21%)	Ομάδα 3 16 μαθητές (14,23%)	Ομάδα 4 24 μαθητές (21,43%)
Παράγοντας 2	q 6.1	91,3	100	93,4	0
	q 6.2	89,1	100	93,4	0
Παράγοντας 3	q 4.1	97,8	100	0	29,2
	q 4.2	100	100	0	29,2
	q 4.3	58,7	34,6	0	0
	q 8	21,7	30,7	6,2	8,3
Παράγοντας 1	q 5.1	100	8	18,7	0
	q 5.2	100	4,2	18,7	0

Πίνακας 17: Πίνακας ομάδων μαθητών

Από τις τέσσερις ομάδες που σχηματίζονται, μόνο τρεις από αυτές ικανοποιούν τα παραπάνω κριτήρια.

Στην Ομάδα 4 ταξινομήθηκαν είκοσι τέσσερις μαθητές από τους εκατόν δώδεκα δηλαδή ποσοστό 21,43%. Οι μαθητές αυτοί δεν είχαν ικανοποιητική επίδοση σε καμία από τις ερωτήσεις (πιθανότητα σωστής απάντησης μεγαλύτερη του 0,5).

Ένα μικρό ποσοστό τους, αναγνώρισε μόνο το είδος της κυρτότητας της γραφικής παράστασης, όταν αυτή δεν μεταβάλλεται. Ένα ακόμη μικρότερο ποσοστό γνώριζε και τον τυπικό ορισμό. Στις άλλες ερωτήσεις τα ποσοστά σωστών απαντήσεων ήταν μηδενικά.

Η Ομάδα 3 αφορούσε δεκαέξι μαθητές από τους εκατόν δώδεκα, δηλαδή το 14,23% και ικανοποιούσε μόνο τον δεύτερο παράγοντα. Οι μαθητές αυτοί σε πολύ μεγάλο ποσοστό μπορούσαν να σχεδιάσουν μια γραφική παράσταση συνάρτησης που διέρχονταν από δύο σημεία αν γνώριζαν την κυρτότητα της, ένα μικρό ποσοστό της κλάσης αυτής μπορούσε να αναγνωρίσει την κυρτότητα συνάρτησης αρκεί να γνώριζαν ότι αυτή διατηρείται και τρία σημεία του γραφήματος από τα οποία αυτή διέρχεται. Τέλος, δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν την κυρτότητα μιας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση. Πίστευαν ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από τα ακρότατα και ένα ελάχιστο ποσοστό των μαθητών της κλάσης αυτής γνώριζε τον τυπικό ορισμό.

Η Ομάδα 2 αφορούσε είκοσι έξι μαθητές από τους εκατόν δώδεκα, δηλαδή το 23,21% ικανοποιούσε τους δύο παράγοντες τον δεύτερο και τον τρίτο. Όλοι οι μαθητές που ανήκαν σε αυτή είναι σε θέση να σχεδιάσουν μια γραφική παράσταση συνάρτησης που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία εάν γνώριζαν την κυρτότητα της. Όλοι τους μπορούσαν να αναγνωρίσουν την κυρτότητα μιας δοσμένης συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση, αρκεί αυτή να μην αλλάξει. Τα αποτελέσματα δεν ήταν τόσο καλά στην περίπτωση που είχαμε περισσότερες εναλλαγές στην κυρτότητα. Παρόλο που σχεδόν όλοι οι μαθητές απάντησαν, ένα ελάχιστο ποσοστό της ομάδας αυτής μπορούσε να αναγνωρίσει την κυρτότητα συνάρτησης, γνωρίζοντας τρία σημεία του γραφήματος της και ότι αυτή διατηρείται. Η συγκεκριμένη ομάδα επίσης είχε χαμηλό ποσοστό στη γνώση του τυπικού ορισμού (30,7%), αλλά το καλύτερο από όλες τις άλλες κλάσεις. Ένα 20% περίπου απάντησε με τη διατύπωση του θεωρήματος και ένα μεγαλύτερο ποσοστό δεν απάντησε καθόλου. Επίσης, δόθηκαν και λανθασμένοι ορισμοί

(π.χ. $f'(x) > 0$ ή $f(x)$ γνησίως αύξουσα). Όπως φαίνεται εδώ, ένας μαθητής πρώτα είναι σε θέση να σχεδιάζει μια κυρτή συνάρτηση αν δοθούν δύο σημεία της και στη συνέχεια μπορεί να αναγνωρίζει το είδος της κυρτότητας της, κατά διαστήματα, αν δοθεί η γραφική της παράσταση.

Η Ομάδα 1 αφορούσε σαράντα έξι μαθητές από τους εκατόν δώδεκα, δηλαδή το 41,07% ικανοποιούσε και τους τρεις παράγοντες. Οι μαθητές που ανήκουν στην ομάδα 1 σε πολύ υψηλό ποσοστό είναι σε θέση να σχεδιάσουν μια γραφική παράσταση συνάρτησης που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία, αν γνωρίζουν την κυρτότητα της. Σχεδόν όλοι τους μπορούσαν να αναγνωρίσουν την κυρτότητα μιας δοσμένης συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση, αρκεί η κυρτότητα να μην αλλάζει και ένα μεγάλο ποσοστό από αυτούς το 58,7% μπορούν να αναγνωρίσουν την κυρτότητα ανά διαστήματα. Όλοι οι μαθητές της ομάδας 1 μπορούν να αναγνωρίσουν την κυρτότητα συνάρτησης, αρκεί να γνωρίζουν ότι αυτή διατηρείται και τρία σημεία του γραφήματος της. Η συγκεκριμένη ομάδα είχε πολύ μικρό ποσοστό 21,7% σωστών απαντήσεων, όταν είχε ζητηθεί από τους μαθητές ο τυπικός ορισμός. Στην ομάδα αυτή φαίνεται πόσο πιο ισχυρή είναι η εικόνα έννοιας σε σχέση με τον ορισμό έννοιας.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι μια ολοκληρωμένη εικόνα έννοιας για την κυρτότητα της συνάρτησης σχηματίζεται κλιμακωτά από τους τρεις παράγοντες. Ο μαθητής πρέπει αρχικά να μπορεί να σχεδιάζει τη γραφική παράσταση κυρτής συνάρτησης, αν γνωρίζει το είδος της κυρτότητας και δύο σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται, να πληροί δηλαδή τον δεύτερο παράγοντα. Στη συνέχεια, με δεδομένο ότι πληροί τον δεύτερο παράγοντα, θα πρέπει να πληροί και τον τρίτο παράγοντα, δηλαδή να μπορεί να αναγνωρίσει την κυρτότητα και το είδος της από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Τέλος, αφού πληροί τους δύο παράγοντες πρέπει να ικανοποιεί και τον πρώτο παράγοντα, δηλαδή τη αναγνώριση της κυρτότητας, εάν γνωρίζει τρία σημεία του γραφήματος της συνάρτησης.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, παρά την καλή εικόνα έννοιας που μπορεί να έχουν οι μαθητές, δεν γνωρίζουν τον ορισμό έννοιας σε μεγάλο ποσοστό.

Στη συνέχεια έγινε έλεγχος των αποτελεσμάτων της ομάδας των 7 μαθητών.

Τα αποτελέσματα ήταν τα παρακάτω:

		ΜΑΘΗΤΗΣ 1	ΜΑΘΗΤΗΣ 2	ΜΑΘΗΤΗΣ 3	ΜΑΘΗΤΗΣ 4	ΜΑΘΗΤΗΣ 5	ΜΑΘΗΤΗΣ 6	ΜΑΘΗΤΗΣ 7
Παράγοντας 2	q 6.1	1		1	1	1		
	q 6.2	1		1	1	1	1	
Παράγοντας 3	q 4.1	1	1	1	1	1	1	1
	q 4.2	1	1	1	1	1	1	1
	q 4.3		1	1		1		
	q 8	1						
Παράγοντας 1	q 5.1	1	1	1		1		1
	q 5.2	1	1	1		1		1

Πίνακας 18: Επιδόσεις της ομάδας των 7 μαθητών

Ο μαθητής 1 ικανοποιεί και τους τρεις παράγοντες. Δεν έχει απαντήσει μόνο στην ερώτηση q 4.3 του τρίτου παράγοντα που ζητάει να αναγνωρίσουμε την κυρτότητα κατά διαστήματα από τη γραφική παράσταση, όπου θεώρησε ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από το ακρότατο της συνάρτησης. Επίσης είναι ο μοναδικός ο οποίος έχει απαντήσει σωστά στην ερώτηση που ζητάει τον τυπικό ορισμό της κυρτής και κοίλης συνάρτησης.

Ο μαθητής 2 ικανοποιεί δύο από τους τρεις παράγοντες, τον πρώτο και τον τρίτο. Απάντησε λανθασμένα στην ερώτηση q 8 του τρίτου παράγοντα που ζητάει τον τυπικό ορισμό της έννοιας αναφέροντας την ιδιότητα της εφαπτομένης ευθείας. Ο

δεύτερος παράγοντας δεν έχει απαντηθεί γιατί ο μαθητής στις αντίστοιχες ερωτήσεις αντέστρεψε την κυρτότητα (σχεδίασε την κυρτή αντί για κοίλη και αντίστροφα).

Ο μαθητής 3 ικανοποιεί και τους τρεις παράγοντες. Είχε εξαιρετική επίδοση αφού απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις εκτός από αυτή που αναφέρονταν στον τυπικό ορισμό στην οποία απάντησε με τη διατύπωση του θεώρηματος.

Ο μαθητής 4 ικανοποιεί δύο από τους τρεις παράγοντες δηλαδή τον δεύτερο παράγοντα και οριακά τον τρίτο. Οι ερωτήσεις του τρίτου παράγοντα που είχαν πρόβλημα ήταν οι q 4.3 όπου ο μαθητής θεώρησε ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από το ακρότατο και η q 8 όπου δεν απάντησε καθόλου στον τυπικό ορισμό. Δεν απάντησε σωστά στις δύο ερωτήσεις του πρώτου παράγοντα γιατί σχεδίασε (χωρίς να το ζητάει η ερώτηση) μια γραφική παράσταση της οποίας η κυρτότητα αλλάζει κατά διαστήματα (ενώ η ερώτηση λέει ότι δεν αλλάζει).

Ο μαθητής 5 ικανοποιεί και τους τρεις παράγοντες. Είχε εξαιρετική επίδοση αφού απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις εκτός από αυτή που αναφέρονταν στον τυπικό ορισμό στην οποία δεν έδωσε καμία απάντηση.

Ο μαθητής 6 ικανοποιεί οριακά τους δύο παράγοντες. Στον δεύτερο παράγοντα έκανε λάθος στην ερώτηση q 6.1 όπου ένωσε τα δύο σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στον τρίτο παράγοντα απάντησε λανθασμένα στην ερώτηση q 4.3 όπου θεώρησε ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από το ακρότατο και δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση q 8 που αφορούσε τον τυπικό ορισμό. Τέλος δεν απάντησε σωστά στις δύο ερωτήσεις του πρώτου παράγοντα γιατί δεν έκανε προσεκτική ανάγνωση της ερώτησης θεωρώντας ότι η κυρτότητα μπορεί να αλλάξει κατά διαστήματα.

Ο μαθητής 7 ικανοποιεί δύο παράγοντες τον πρώτο και οριακά τον τρίτο. Στον τρίτο παράγοντα έκανε το ίδιο λάθος με τους προηγούμενους μαθητές στην ερώτηση q 4.3 θεωρώντας ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από το ακρότατο και δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση q 8 που αφορά τον τυπικό ορισμό. Στις ερωτήσεις του δεύτερου παράγοντα δεν απάντησε σωστά γιατί αντέστρεψε την κυρτότητα (σχεδίασε την κυρτή αντί για κοίλη και αντίστροφα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να εξετάσει το βαθμό κατανόησης της έννοιας της κυρτότητας από τους μαθητές της Γ' Λυκείου. Για το σκοπό αυτό χωρίσαμε τους μαθητές σε ομάδες ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν στο ερωτηματολόγιο. Στόχος της είναι να ερευνήσει κατά πόσο οι μαθητές της Γ' Λυκείου μπορούν να αποτυπώσουν ενδεικτικές αντιλήψεις που έχουν για την έννοια της κυρτότητας.

Χορηγήθηκαν ερωτηματολόγια σε 112 μαθητές Γ' Λυκείου των Ομάδων Προσανατολισμού, Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής που μόλις είχαν τελειώσει τη διδασκαλία του Διαφορικού λογισμού. Στα ερωτηματολόγια ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν πώς αντιλαμβάνονται την έννοια της κυρτότητας και τις ιδιότητές της, να σχεδιάσουν γραφική παράσταση κοίλης, κυρτής συνάρτησης που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία, να αναγνωρίσουν την κυρτότητα συνάρτησης από τρία σημεία του γραφήματός της, να αναγνωρίσουν την κυρτότητα από το γράφημα της συνάρτησης, να διατυπώσουν τον τυπικό ορισμό της και τέλος να λύσουν μια άσκηση η οποία ζητούσε να μελετηθεί η κυρτότητα μιας συνάρτησης της οποίας δινόταν ο τύπος.

Έγινε ποσοτική ανάλυση των δεδομένων. Στη συνέχεια έγινε ταξινόμηση των μαθητών σε ομάδες ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν με την μέθοδο της Ανάλυσης των Άδηλων Κλάσεων (Latent Class Analysis).

Πιο συγκεκριμένα οι τέσσερις ομάδες στις οποίες χωρίστηκαν οι μαθητές είναι οι παρακάτω:

- Η ομάδα 1 περιείχε τους μαθητές με υψηλές επιδόσεις σε όλες τις ερωτήσεις, εκτός από αυτή που αναφέρονταν στον τυπικό ορισμό με επίδοση 21,7%.
- Η ομάδα 2 περιείχε τους μαθητές που είχαν εξαιρετικές επιδόσεις στις ερωτήσεις που αναφέρονταν στην αναγνώριση της κυρτότητας συνάρτησης, από τη γραφική της παράσταση, αν αυτή δεν αλλάζει, αλλά και στις ερωτήσεις που αφορούσαν στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης, αρκεί να γνώριζαν το είδος της κυρτότητας και δύο σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται. Η κλάση αυτή

περιέχει τους μαθητές με την καλύτερη επίδοση στην ερώτηση που αφορούσε τη διατύπωση του τυπικού ορισμού (30,7%), σε σχέση με τις άλλες τρεις κλάσεις.

- Η ομάδα 3 περιείχε τους μαθητές που είχαν πολύ καλή επίδοση στις ερωτήσεις που αφορούσαν στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης, αρκεί να γνώριζαν το είδος της κυρτότητας και δύο σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται. Οι επιδόσεις τους όμως στις άλλες ερωτήσεις ήταν πολύ χαμηλές.

- Η ομάδα 4 περιείχε τους μαθητές που είχαν πολύ χαμηλές επιδόσεις, δηλαδή κάτω από το όριο του 50% που είχαμε θέσει. Όλες οι ερωτήσεις εκτός από δύο είχαν μηδενικές επιδόσεις. Για την ακρίβεια αυτές οι δύο ερωτήσεις του παράγοντα που αναφέρονταν στην αναγνώριση της κυρτότητας μιας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση, αν αυτή δεν αλλάζει, απαντήθηκαν σε ποσοστό 29,2% και η ερώτηση που αναφέρονταν στον τυπικό ορισμό απαντήθηκε σε ποσοστό 8,3%.

Με παραγοντική ανάλυση που έγινε στις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 5.1 q 5.2 q 6.1 q 6.2 και q 8 προέκυψαν οι παρακάτω τρεις παράγοντες:

Ο πρώτος παράγοντας F_1 : Αναγνώριση της κυρτότητας από τρία σημεία του γραφήματος που περιλαμβάνει τις ερωτήσεις q 5.1 q 5.2

Ο δεύτερος παράγοντας F_2 : Σχεδιασμός κυρτής / κοίλης συνάρτησης που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία που περιλαμβάνει τις ερωτήσεις q 6.1 q 6.2

Ο τρίτος παράγοντας F_3 : Γνώση τυπικού ορισμού και αναγνώριση διαστημάτων κυρτότητας από το γράφημα που περιλαμβάνει τις ερωτήσεις q 4.1 q 4.2 q 4.3 και q 8.

Επιπλέον σε μια ομάδα 7 μαθητών έγινε εισαγωγή της έννοιας με τη βοήθεια του γεωμετρικού ορισμού της, ο οποίος μας οδήγησε στον τυπικό ορισμό της.

Φαίνεται πως η διδασκαλία αυτή βοήθησε τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας αφού οι απαντήσεις τους ικανοποιούσαν τουλάχιστον δύο από τους τρεις παράγοντες. Έτσι επαληθεύεται η βιβλιογραφία που αφορά το ρόλο που έχουν οι οπτικές αναπαραστάσεις στην κατανόηση των μαθητών (NTCM, Presmeg, Duval, Guzman, κ.α.)

Αξιολογήθηκαν ξεχωριστά οι απαντήσεις του κάθε μαθητή της ομάδας.

Συγκεκριμένα, τρεις από τους επτά μαθητές είχαν εξαιρετική επίδοση ικανοποιώντας και τους τρεις παράγοντες. Οι υπόλοιποι τέσσερις μαθητές ικανοποίησαν τους δύο παράγοντες.

Δύο μαθητές δεν ικανοποίησαν τον πρώτο παράγοντα γιατί δεν έκαναν προσεκτική ανάγνωση των αντίστοιχων ερωτήσεων με αποτέλεσμα να απαντήσουν λάθος.

Δύο μαθητές δεν ικανοποίησαν το δεύτερο παράγοντα γιατί στις αντίστοιχες ερωτήσεις αντέστρεψαν την κυρτότητα (σχεδίασαν την κυρτή αντί για κοίλη και αντίστροφα).

Όλοι οι μαθητές ικανοποίησαν τον τρίτο παράγοντα γιατί όλοι απάντησαν τουλάχιστον στις δύο (q 4.1 q 4.2) από τις τέσσερις ερωτήσεις του παράγοντα.

Πρόβλημα δημιουργήθηκε όταν οι μαθητές παρά τη γνώση του γεωμετρικού ορισμού της κυρτότητας απάντησαν λανθασμένα στην ερώτηση q 4.3 θεωρώντας ότι η κυρτότητα αλλάζει γύρω από το ακρότατο της συνάρτησης.

Όταν ζητήθηκε ο τυπικός ορισμός, μόνο ένας μαθητής απάντησε σωστά, δύο μαθητές απάντησαν λανθασμένα και τέσσερις μαθητές δεν απάντησαν καθόλου.

Η παραπάνω βέβαια είναι μια μελέτη συγκεκριμένης περίπτωσης η οποία δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα.

Ο σημαντικός ρόλος της οπτικοποίησης στα μαθηματικά φαίνεται και από τα συνολικά αποτελέσματα της έρευνας. Οι μαθητές σε πολύ υψηλό ποσοστό μπορούν να σχεδιάσουν μια κυρτή συνάρτηση και να αναγνωρίσουν την κυρτότητα της από τη γραφική της παράσταση.

Επίσης, έχουν τη δυνατότητα να αναγνωρίζουν την κυρτότητα συνάρτησης, αν γνωρίζουν τρία σημεία του γραφήματος της, και ότι αυτή διατηρείται.

Όμως ένα μόνο μικρό ποσοστό (18,8%) γνωρίζει τον τυπικό ορισμό.

Επαληθεύονται έτσι προηγούμενα ερευνητικά αποτελέσματα (Tall, D., & Vinner, Sh. (1981)), που υποστηρίζουν ότι στην πράξη οι περισσότεροι μαθητές, όταν τους δοθεί ένα πρόβλημα, σκέφτονται με τον τρόπο που έχουν συνηθίσει στα πλαίσια της καθημερινής ζωής δηλαδή δίνοντας έμφαση στην εικόνα της έννοιας.

Ο τρόπος αυτός κυριαρχεί και έτσι ο μαθητής αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό.

Το σχολικό βιβλίο αναγνωρίζει τον σημαντικό τον ρόλο της κυρτότητας της συνάρτησης για τη χάραξη γραφικών παραστάσεων. Όμως, στην εφαρμογή και στις ασκήσεις που δίνει στη συγκεκριμένη παράγραφο, ζητά από τους μαθητές να ακολουθήσουν διαδικασίες και να κάνουν αλγεβρικές πράξεις, χωρίς να ζητείται από αυτούς να σχεδιάσουν γραφικές παραστάσεις.

Πέρα από τα αποτελέσματα που αφορούν τους στόχους της έρευνας, προέκυψαν και παρανοήσεις των μαθητών πάνω στην έννοια της κυρτότητας αλλά και σε άλλες βασικές έννοιες.

Μια πρώτη παρανόηση ήταν ότι ένας αρκετά μεγάλος αριθμός μαθητών θεωρούσε ότι η κυρτότητα αλλάζει στο σημείο που είχε ακρότατο η συνάρτηση.

Οι Tsamir και Onodenco (2004) σε άρθρο τους που αφορούσε τα σημεία καμπής είχαν εντοπίσει τις δυσκολίες που είχαν οι μαθητές στην αναγνώριση τους. Θεωρούσαν πως, όπου η γραφική παράσταση «στρίβει», έχουμε σημείο καμπής. Οι δυσκολίες αυτές βρίσκονται σε αντιστοιχία με την παρανόηση, που μελετάμε τώρα, την αναγνώριση της αλλαγής της κυρτότητας γύρω από το ακρότατο της συνάρτησης.

Πιθανόν εδώ να φαίνεται η χρησιμότητα του γεωμετρικού ορισμού της κυρτότητας. Είναι φανερό ότι οι μαθητές έχουν μια «περίπου» σωστή αντίληψη για το πώς μοιάζει η γραφική παράσταση μιας κυρτής ή μιας κοίλης συνάρτησης.

Μια δεύτερη παρανόηση που προέκυψε, ήταν πάνω στο πρόχειρο σχεδιασμό μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης. Το σχέδιο των μαθητών είχε τα χαρακτηριστικά της κυρτότητας που ζητούσαμε αλλά δεν ήταν σχέδιο που απεικόνιζε συνάρτηση. Η γραφική παράσταση συνάρτησης δεν μπορεί να τέμνεται από παράλληλη στον yy' σε περισσότερα από ένα σημεία, γνώση που έχουν οι μαθητές από μικρότερες τάξεις. Η πληροφορία αυτή αναφέρεται και στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου στην σελίδα 135 στις αρχές του β' μέρους της ανάλυσης.

Οι βασικότεροι λόγοι που δημιουργούν αυτό το φαινόμενο είναι: Αρχικά, η διδασκαλία της συνάρτησης στο γυμνάσιο ακολουθεί τη συγκεκριμένη σειρά κατά τη μετάβαση από την μία αναπαράσταση στην άλλη (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση). Έπειτα, στην Α΄ Λυκείου το κεφάλαιο των συναρτήσεων ασχολείται κατά κύριο λόγο με την μελέτη τους δίνοντας στους μαθητές ένα νέο τρόπο (μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες και οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις) ώστε να ακολουθήσουν πάλι διαδικασίες. Οι μαθητές δεν μπορούν να διαχωρίσουν μια οποιαδήποτε σχέση από μια συναρτησιακή σχέση, γιατί εκτός από τα διαγράμματα Venn και την ιδιότητα που έχει η παράλληλη στον yy' όταν τέμνει τη γραφική παράσταση, δεν την συναντούν κάπου αλλού. Αυτό ενισχύει την άποψη ότι οι μαθητές μαθαίνουν μεθοδολογίες, προκειμένου να λύσουν ασκήσεις παρόμοιες με αυτές των θεμάτων των πανελληνίων εξετάσεων, χωρίς να έχουν εννοιολογική γνώση και κατανόηση.

Μια τρίτη παρανόηση ήταν ότι, ενώ είχαμε αλλαγή της κυρτότητας σε διάφορες γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αρκετοί μαθητές δεν την αναγνώρισαν. Η παρανόηση αυτή ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι η κυρτότητα είναι ένα αμετάβλητο χαρακτηριστικό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Τέλος, ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών όταν τους ζητήθηκε ο τυπικός ορισμός της έννοιας απάντησε με το αντίστοιχο θεώρημα που την αφορά. Η παρανόηση αυτή ίσως οφείλεται στο λόγο ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν πιο συχνά το θεώρημα στην επίλυση ασκήσεων. Επίσης, οι μαθητές συνηθίζουν να μαθαίνουν τη θεωρία, όταν πλησιάζουν οι εξετάσεις.

Η παραπάνω έρευνα θα μπορούσε να επεκταθεί και να γίνει σε φοιτητές του πρώτου έτους του μαθηματικού τμήματος. Το ερωτηματολόγιο μπορεί να είναι το ίδιο με το αρχικό, προσθέτοντας ερωτήματα τα οποία προκύπτουν από τα αποτελέσματα της προηγούμενης έρευνας. Η έρευνα μπορεί να πραγματοποιηθεί σε φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος, πριν και μετά τη διδασκαλία του μαθήματος του Απειροστικού Λογισμού II, ώστε να διαπιστωθεί, αν αλλάζουν οι αντιλήψεις τους για την κυρτότητα συνάρτησης.

Μια νέα έρευνα θα μπορούσε να γίνει σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου, αφού διδαχθούν την έννοια της κυρτότητας, με βάση την εικόνα της, η οποία θα μας οδηγήσει στον ορισμό της. Τα αποτελέσματά της θα μπορούσαν να αναλυθούν ποιοτικά, έτσι ώστε να αποτυπωθούν οι αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια. Ο στόχος της έρευνας θα ήταν να εξετάσει, αν η παραπάνω διδασκαλία μπορεί να βελτιώσει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών.

Κατά τη γνώμη μου, τα παραπάνω αποτελέσματα είναι η συνέπεια μιας πορείας που έχουν πολλοί μαθητές στο γυμνάσιο, και στη συνέχεια στο λύκειο. Πιο συγκεκριμένα στα τέσσερα πρώτα χρόνια, (δηλαδή στις τρεις τάξεις του γυμνασίου και στην Α΄ λυκείου) οι μαθητές δεν κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες και η ενασχόληση τους με τα μαθηματικά περιορίζεται στην αναπαραγωγή διαδικασιών. Καθώς πλησιάζουν οι πανελλήνιες εξετάσεις, αρχίζουν στην Β΄ Λυκείου να αφιερώνουν περισσότερο χρόνο. Όμως, η επιπλέον ενασχόλησή τους εξακολουθεί να μην αφορά στην προσπάθεια κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από μέρος τους. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, να γίνονται σοβαρές παρανοήσεις σε βασικά θέματα. Αναπαράγουν πάλι διαδικασίες και θεωρούνται «επιτυχημένοι», αν μπορούν να εκτελούν ένα μεγάλο αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών συνδεδεμένες με γνωστούς φορμαλισμούς, ώστε να μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων.

Αρκετά από τα παραπάνω είναι προβλήματα που έχει δημιουργήσει η μορφή των θεμάτων των εξετάσεων. Οι μαθητές κατά την προετοιμασία τους προσανατολίζονται σε ασκήσεις που λύνονται με συγκεκριμένο τρόπο ακολουθώντας διαδικασίες χωρίς να έχουν κατανοήσει την έννοια που βρίσκεται πίσω. Είναι συχνό το φαινόμενο, μαθητές να μπορούν να λύνουν ασκήσεις με υψηλό βαθμό δυσκολίας ακολουθώντας συγκεκριμένη μεθοδολογία, αλλά να μην μπορούν να κάνουν σωστά πράξεις, ώστε να υπολογίσουν την παράγωγο μιας απλής συνάρτησης ή να λύσουν μια πολυωνυμική ανίσωση ή να μπορούν να σχεδιάσουν μια απλή γραφική παράσταση.

Το σχολικό εγχειρίδιο είναι και θα πρέπει να είναι, κατά τη γνώμη μου, το βασικό εγχειρίδιο μελέτης που έχουν οι μαθητές της Γ' λυκείου, προκειμένου να προετοιμαστούν για τις πανελλήνιες εξετάσεις. Για να επιτύχει το στόχο του, είναι απαραίτητο οι ασκήσεις του να ανανεώνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα, ώστε να ανταποκρίνονται στο επίπεδο των θεμάτων των εξετάσεων αλλά και να βοηθούν στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Τέλος, όπως φαίνεται οι μαθητές, προσαρμόζουν το διάβασμά τους πάνω στα θέματα των πανελληνίων εξετάσεων. Όσο τα θέματα θα «ζητούν» από τους μαθητές διαδικαστική γνώση και δεξιότητες, οι μαθητές θα μαθαίνουν διαδικασίες και δεν θα έχουν εννοιολογική γνώση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη Βιβλιογραφία

Arcavi A., (1999). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*. see ED 433 998.

Aspinwall Leslie, Kenneth L. Shaw and Norma C. Presmeg, (1997). *Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a function and its derivative*. Kluwer Academic Publishers, printed in the Netherlands.

Avgerinou M., (2009). Re-Viewing Visual Literacy in the “Bain d’ Images” Era. *TechTrends* 53(2), 28-34.

Berger M.(1990). Convexity. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 97, No. 8, Special Geometry Issue (Oct.,1990), pp. 650-678.

Biza I. & Christou C. & Zachariades T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent. *Research in Mathematics Education vol 10*: pp. 53-70

Chevallard Y., (1988, August). *On didactic transposition theory: some introductory notes*. Paper presented at the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, Czechoslovakia.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique, avec un exemple de la Transposition Didactique* de Y. Chevallard et M.-A. Johsua. Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Davis P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24: 333-344 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Duval R., (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.) *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, I, 3-26. Mexico.

Eisenberg, T., & Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America Washington, DC, pp 25-37.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gagatsis A. & Elia I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004*. Vol 2 pp. 447-454.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin (Eds.), *Theories of mathematical learning*, (pp. 397-430), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goodman, L. A. (1974). Exploratory Latent Structure Analysis Using Both Identifiable and Unidentifiable Models. *Biometrika*, 61, 215–231.

Grossberg, S. (1980). How does a brain build a cognitive code? *Psychological Review*, 87, 1-51.

Guzman M., (2002). The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. In *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level* (2nd) SE 066 909.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. and Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition. (ICMI Study Series)* (pp. 70-95). Cambridge: University Press

Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. In P.S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J.J. (1987a). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, (pp. 53-74). 1991 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Knuth, E. J. (2000b). Understanding connections between equations and graphs. *The Mathematics Teacher*, 93(1), 48-53.

Lazarsfeld, P. F., & Henry, N. W. (1968). *Latent structure analysis*. Boston: Houghton Mifflin.

- Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 263-343). New York: Academic Press.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale Erlbaum.
- Maher, C.A., & Speiser, R. (Eds.). (1998a). Representations and the psychology of mathematics education: Part I [special issue]. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1).
- Maher, C.A., & Speiser, R. (Eds.). (1998b). Representations and the psychology of mathematics education: Part II [special issue]. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2).
- Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (2010). *Mplus User's Guide. Sixth Edition*. Los Angeles, CA: Muthen & Muthen.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*: Reston, VA: NCTM.
- Palmer, S. E. (1977). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pape, S. & Tchoshanov, M. (2001), The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory into Practice*, 40(2), Realizing Reform in School Mathematics pp. 118-127.
- Piaget, J and Inhelder, B. :1971, *Mental Imagery and the Child*, Routledge and Kegan Paul, London.
- Presmeg N., (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future*, 205-235. Rotterdam: Sense Publishers.
- Presmeg N., (1986). Visualization and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics* 17, 297-311.
- Presmeg N., (1986). Visualization in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 6, 3 (November 1986) FLM Publishing Association Montreal Quebec, Canada.

Schoenfeld, A. H., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In Glaser, R. (Ed.) *Advances in instructional psychology*. Vol. 4. (pp. 55-176). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Spivak M., (1991). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Tall, D., & Vinner, Sh. (1981), 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, 12 151-169.

Tall D., (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the Calculus. In Zimmermann & Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America Notes 19, 105– 119.

Tall D., (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Student's Difficulties in Calculus. ICME-7, Quebec, Canada*, (1993), 13-28.

Tsamir P. & Ovodenco R. (2004). Prospective Teachers' Images and Definitions: The case of Inflection Points. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004*. (Vol 4 pp. 337-344)

Vinner Shlomo (1983), "Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function" *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1983 Vol.14, No.3, p 293-305.

Von Glasersfeld, E. (1987b) Preliminaries to any Theory of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.215-225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zimmermann & Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America Notes 19, 105– 119

Ελληνική Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος Γ.:(2015). «*Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Γ΄ τάξη Γενικού Λυκείου*» ΙΤΥΕ – Διόφαντος.

Βοσνιάδου Σ. (2007) *Εισαγωγή στην Ψυχολογία. Γνωστική Ψυχολογία*. (Πρώτος Τόμος).Gutenberg.

Γαγάτσης, Α, Σπύρου, Π, (2000) *Πολλαπλές Αναπαραστάσεις Ανθρώπινη Νοημοσύνη και Μάθηση*. Αθήνα.

Ζαχαριάδης, Θ.(2015) *Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού»*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών. ΠΜΣ «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».

Κυριακίδης, Λ.(2015) *Σημειώσεις του μαθήματος «Ποσοτική Μεθοδολογία Έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών»*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών. «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».

Μπιζιά,Ε. (2008) *Διαισθητικές Αντιλήψεις των Μαθητών για την Εφαπτομένη Ευθεία στην Ανάλυση*.Διδακτορική Διατριβή, ΕΚΠΑ, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών.

Νεγρεπόντης, Σ. , Γιωτόπουλος, Σ , Γιαννακούλιας, Ε.:(1999). *Απειροστικός Λογισμός Ι Ια*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Ντούγιας Σ. (1984). *Απειροστικός Λογισμός Ι*.Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.(1984).

Ντρίζος Δ. (2006). *Οι κυρτές συναρτήσεις. Μια πορεία μεταξύ γεωμετρικής και συναρτησιακής θεώρησης*. Ευκλείδης Γ΄ (2006).

Πατσιομίτου Σ., Εμβαλωτής Α. (2011) *Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία*, Θέματα θετικών επιστημών και τεχνολογίας στην εκπαίδευση Τόμος 2, Τεύχος 3 Σελ. 247-272 Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Πολύζος Γ. (1986). *Κυρτές συναρτήσεις και σημεία καμπής*.Ευκλείδης Β΄ 1986 Νο 4.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΗ:

ΣΧΟΛΕΙΟ:

ΤΜΗΜΑ:

1. Προσπαθήστε να εξηγήσετε με δικά σας λόγια τι σκέφτεστε όταν ακούτε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή, και τι όταν μια συνάρτηση είναι κοίλη.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Γράψτε όσες ιδιότητες μπορείτε να σκεφτείτε μιας κυρτής και μιας κοίλης συνάρτησης.

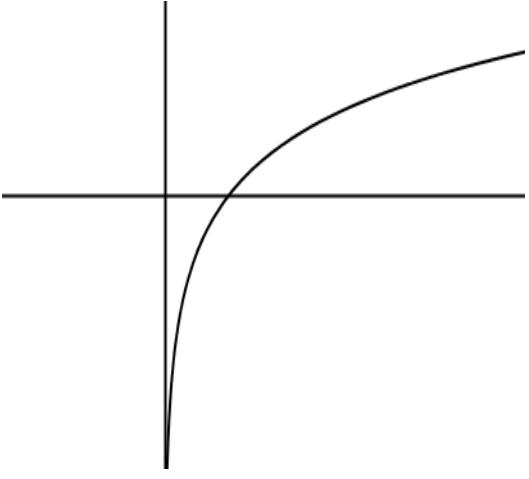
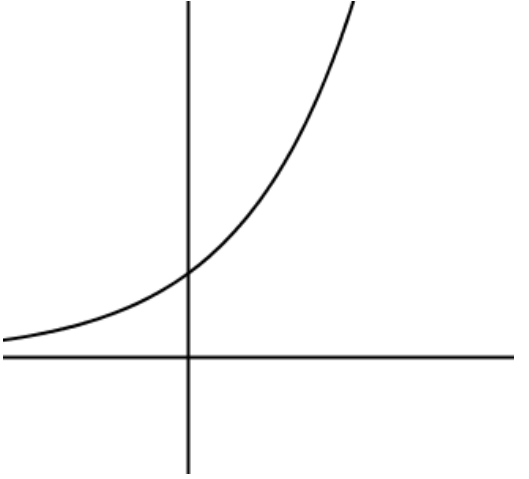
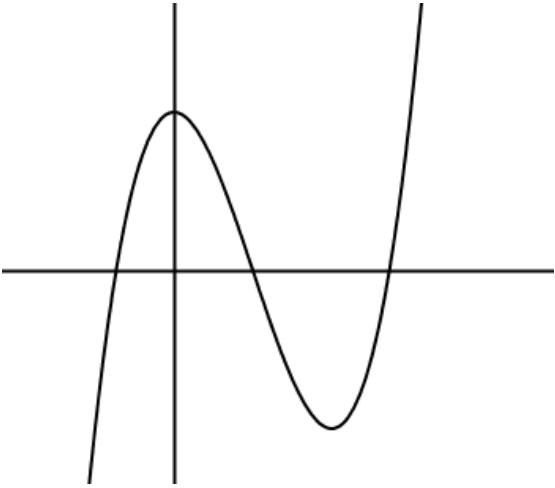
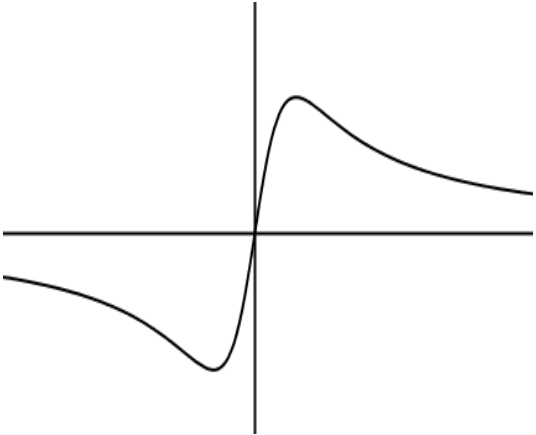
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη τι συμπέρασμα βγάζετε για την κυρτότητα της $-f$;

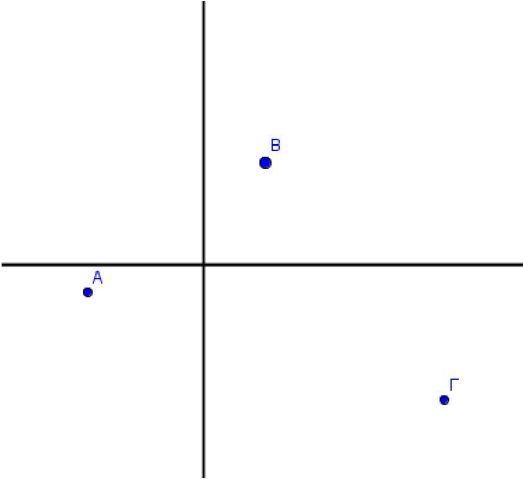
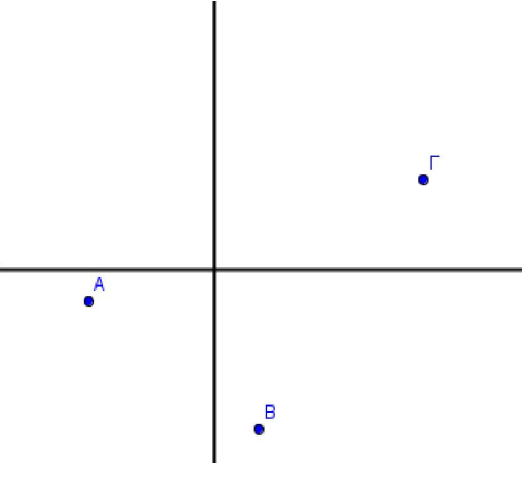
.....
.....
.....

4. α) Ελέγξτε τη κυρτότητα στις παρακάτω συναρτήσεις .Στις περιπτώσεις που αλλάζει να φέρετε παράλληλες στον κατακόρυφο άξονα χωρίζοντας τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις σε διαστήματα ώστε αυτή να διατηρείται.

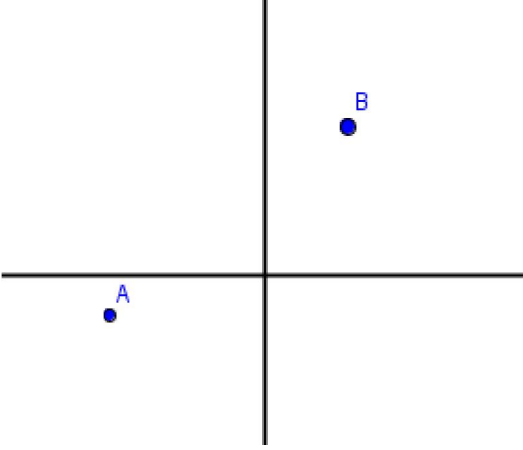
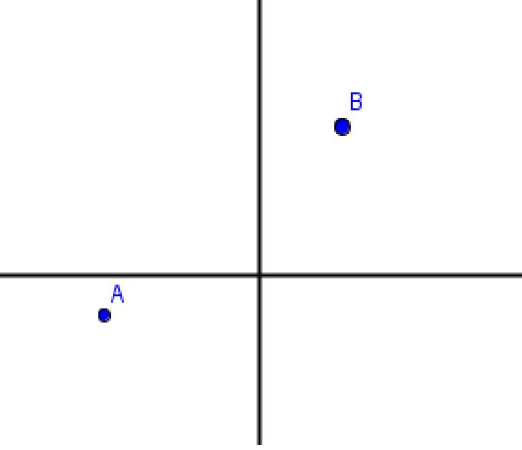
β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της κυρτότητας σε κάθε περίπτωση.

<p>1.</p> 	<p>2.</p> 
<p>Απάντηση:</p>	<p>Απάντηση:</p>
<p>3.</p> 	<p>4.</p> 
<p>Απάντηση:</p>	<p>Απάντηση:</p>

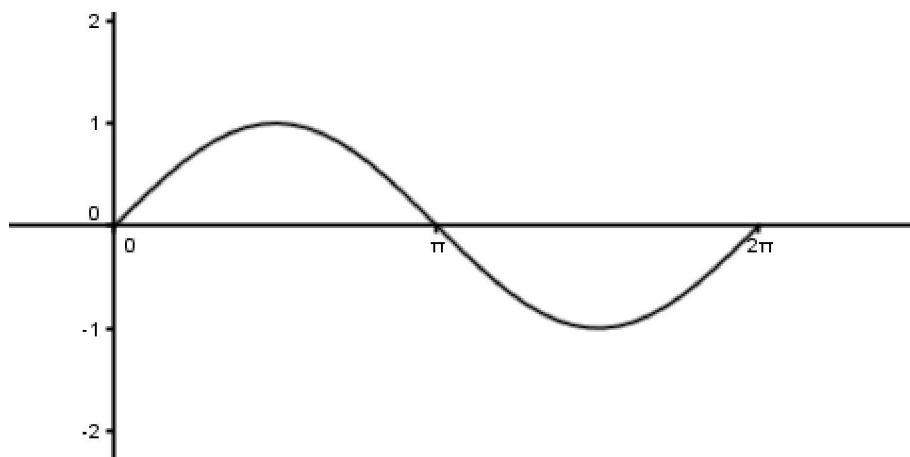
5. Αν γνωρίζουμε ότι τα παρακάτω τρία σημεία ,της κάθε περίπτωσης , ανήκουν σε γραφική παράσταση συνάρτησης που είναι κυρτή ή κοίλη μπορούμε να γνωρίζουμε με ακρίβεια σε κάθε περίπτωση το είδος της κυρτότητας της συνάρτησης;

	
Απάντηση:	Απάντηση:

6. Προσπαθήστε να ενώσετε τα σημεία A και B κατάλληλα ώστε να ανήκουν στη γραφική παράσταση μιας κυρτής και μιας κοίλης συνάρτησης αντίστοιχα.

ΚΥΡΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΚΟΙΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
	

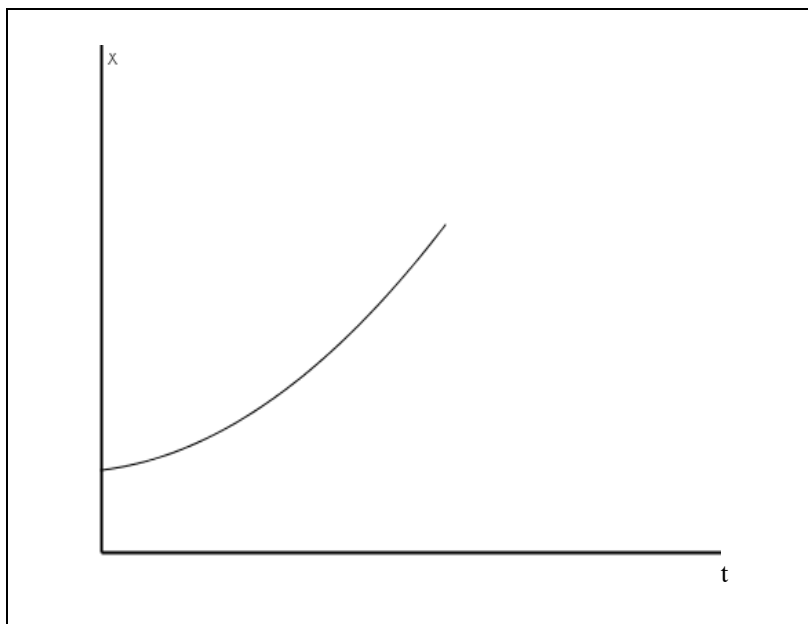
7. Επιλέγοντας τυχαία σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης και φέροντας τις εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία αυτά να πείτε τι συμβαίνει με την κλίση της εφαπτομένης σε μια κυρτή συνάρτηση και τι σε μια κοίλη συνάρτηση. Μπορείτε να διατυπώσετε κάποιο συμπέρασμα;



8. Να δώσετε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης και τον ορισμό της κοίλης συνάρτησης.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

9. Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης ενός κινητού που κινήθηκε πάνω στον άξονα xx' για κάποιο χρονικό διάστημα. Τι πιστεύετε ότι ισχύει για την επιτάχυνση του κινητού;



10. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα την παρακάτω συνάρτηση.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ SPSS

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	112	100,0
	Excluded ^a	0	,0
	Total	112	100,0

a. Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,843	8

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Αξιοπιστία του ερωτηματολογίου των 8 ερωτήσεων.
Δείκτης αξιοπιστίας Cronbach's Alpha 0,843 (Πολύ καλή αξιοπιστία)**

Factor Analysis

Notes

Output Created		29-Avy-2016 10:24:54
Comments		
Input	Data	C:\Users\ 8 QUESTIONS.sav
	Active Dataset	DataSet1
	Filter	<none>
	Weight	<none>
	Split File	<none>
	N of Rows in Working Data	112
	File	
Missing Value Handling	Definition of Missing	MISSING=EXCLUDE: User-defined missing values are treated as missing.
	Cases Used	LISTWISE: Statistics are based on cases with no missing values for any variable used.
Syntax		FACTOR /VARIABLES q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 5.1 q 5.2 q 6.1 q 6.2 q 8 /MISSING LISTWISE /ANALYSIS q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 5.1 q 5.2 q 6.1 q 6.2 q 8 /PRINT INITIAL EXTRACTION ROTATION /FORMAT BLANK(.30) /CRITERIA MINEIGEN(1) ITERATE(25) /EXTRACTION PC /CRITERIA ITERATE(25) /ROTATION VARIMAX /SAVE REG(ALL) /METHOD=CORRELATION.
Resources	Processor Time	00 00:00:00,047
	Elapsed Time	00 00:00:00,088
	Maximum Memory Required	9688 (9,461K) bytes

Communalities

	Initial	Extraction
q 4 1	1,000	,750
q 4 2	1,000	,819
q 4 3	1,000	,467
q 5 1	1,000	,894
q 5 2	1,000	,887
q 6 1	1,000	,962
q 6 2	1,000	,965
q 8	1,000	,578

Extraction Method: Principal

Component Analysis.

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total
1	3,942	49,280	49,280	3,942
2	1,266	15,824	65,104	1,266
3	1,113	13,917	79,021	1,113
4	,912	11,403	90,423	
5	,586	7,328	97,752	
6	,068	,850	98,601	
7	,058	,730	99,331	
8	,053	,669	100,000	

Total Variance Explained

Component	Extraction Sums of Squared Loadings		Rotation Sums of Squared Loadings		
	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	49,280	49,280	2,399	29,987	29,987
2	15,824	65,104	2,015	25,184	55,172
3	13,917	79,021	1,908	23,849	79,021
4					
5					
6					
7					
8					

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Component Matrix^a

	Component		
	1	2	3
q 4 1	,782		,366
q 4 2	,808		,404
q 4 3	,647		
q 5 1	,763	-,520	
q 5 2	,757	-,524	
q 6 1	,733	,511	-,404
q 6 2	,718	,538	-,400
q 8		,403	,605

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. 3 components extracted.

Rotated Component Matrix^a

	Component		
	1	2	3
q 4 1	,480		,696
q 4 2	,473		,746
q 4 3	,344		,529
q 5 1	,919		
q 5 2	,917		
q 6 1		,945	
q 6 2		,952	
q 8			,706

Extraction Method: Principal Component

Analysis.

Rotation Method: Varimax with Kaiser

Normalization.

a. Rotation converged in 5 iterations.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Δεδομένα για τους συντελεστές επιβάρυνσης του κάθε παράγοντα.

Component Transformation Matrix

Component	1	2	3
1	,653	,544	,527
2	-,727	,645	,234
3	-,213	-,536	,817

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Rotation Method: Varimax with Kaiser

Normalization.

RELIABILITY

/VARIABLES=q 5.1 q 5.2

/SCALE('ALL VARIABLES') ALL

/MODEL=ALPHA.

Reliability

Notes

Output Created		29-Aug-2016 10:26:14
Comments		
Input	Data	C:\Users\ 8 QUESTIONS.sav
	Active Dataset	DataSet1
	Filter	<none>
	Weight	<none>
	Split File	<none>
	N of Rows in Working Data	112
	File	
	Matrix Input	
Missing Value Handling	Definition of Missing	User-defined missing values are treated as missing.
	Cases Used	Statistics are based on all cases with valid data for all variables in the procedure.
Syntax		RELIABILITY /VARIABLES=q 5.1 q 5.2 /SCALE('ALL VARIABLES') ALL /MODEL=ALPHA.
Resources	Processor Time	00 00:00:00,000
	Elapsed Time	00 00:00:00,014

Scale: ALL VARIABLES

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	112	100,0
	Excluded ^a	0	,0
	Total	112	100,0

a. Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,972	2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Αξιοπιστία των ερωτήσεων q 5.1 q 5.2 του πρώτου παράγοντα με δείκτη αξιοπιστίας Cronbach's Alpha 0,972 (Εξαιρετική αξιοπιστία)

RELIABILITY

/VARIABLES=q 6.1 q 6.2

/SCALE('ALL VARIABLES') ALL

/MODEL=ALPHA.

Reliability

Notes

Output Created		29-Aug-2016 10:26:30
Comments		
Input	Data	C:\Users
		\Desktop\8 QUESTIONS.sav
	Active Dataset	DataSet1
	Filter	<none>
	Weight	<none>
	Split File	<none>
	N of Rows in Working Data	112
	File	
	Matrix Input	
Missing Value Handling	Definition of Missing	User-defined missing values are treated as missing.
	Cases Used	Statistics are based on all cases with valid data for all variables in the procedure.
Syntax		RELIABILITY /VARIABLES=q 6.1 q 6.2 /SCALE('ALL VARIABLES') ALL /MODEL=ALPHA.
Resources	Processor Time	00 00:00:00,015
	Elapsed Time	00 00:00:00,010

Scale: ALL VARIABLES

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	112	100,0
	Excluded ^a	0	,0
	Total	112	100,0

a. Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,964	2

ΠΙΝΑΚΑΣ 4: Αξιοπιστία των ερωτήσεων 6.1 και 6.2 του δεύτερου παράγοντα με δείκτη αξιοπιστίας Cronbach's Alpha 0,964. (εξαιρετική αξιοπιστία).

RELIABILITY

/VARIABLES=q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 8

/SCALE('ALL VARIABLES') ALL

/MODEL=ALPHA.

Reliability

Notes

Output Created		29-Aug-2016 10:25:52
Comments		
Input	Data	C:\Users\Desktop\ 8 QUESTIONS.sav
	Active Dataset	DataSet1
	Filter	<none>
	Weight	<none>
	Split File	<none>
	N of Rows in Working Data	112
	File	
	Matrix Input	
Missing Value Handling	Definition of Missing	User-defined missing values are treated as missing.
	Cases Used	Statistics are based on all cases with valid data for all variables in the procedure.
Syntax		RELIABILITY /VARIABLES= q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 8 /SCALE('ALL VARIABLES') ALL /MODEL=ALPHA.
Resources	Processor Time	00 00:00:00,000
	Elapsed Time	00 00:00:00,007

Scale: ALL VARIABLES

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	112	100,0
	Excluded ^a	0	,0
	Total	112	100,0

a. Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,735	4

ΠΙΝΑΚΑΣ 5: Αξιοπιστία των ερωτήσεων q 4.1 q 4.2 q 4.3 q 8 του τρίτου παράγοντα με δείκτη αξιοπιστίας Cronbach's Alpha 0,735. (ικανοποιητική αξιοπιστία).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ MPLUS

Mplus VERSION 6.12
MUTHEN & MUTHEN
08/29/2016 8:19 AM

SUMMARY OF ANALYSIS

Number of groups	1
Number of observations	112
Number of dependent variables	8
Number of independent variables	0
Number of continuous latent variables	0
Number of categorical latent variables	1

Observed dependent variables

Binary and ordered categorical (ordinal)
Q1 Q2 Q3 Q4 Q5 Q6
Q7 Q8

Categorical latent variables
C

Estimator	MLR
Information matrix	OBSERVED
Optimization Specifications for the Quasi-Newton Algorithm for Continuous Outcomes	
Maximum number of iterations	100
Convergence criterion	0.100D-05
Optimization Specifications for the EM Algorithm	
Maximum number of iterations	500
Convergence criteria	
Loglikelihood change	0.100D-06
Relative loglikelihood change	0.100D-06
Derivative	0.100D-05
Optimization Specifications for the M step of the EM Algorithm for Categorical Latent variables	
Number of M step iterations	1
M step convergence criterion	0.100D-05
Basis for M step termination	ITERATION
Optimization Specifications for the M step of the EM Algorithm for Censored, Binary or Ordered Categorical (Ordinal), Unordered	

Categorical (Nominal) and Count Outcomes
 Number of M step iterations 1
 M step convergence criterion 0.100D-05
 Basis for M step termination ITERATION
 8 QUESTIONS.dat
 Input data format FREE

UNIVARIATE PROPORTIONS AND COUNTS FOR CATEGORICAL VARIABLES

Q1		
Category 1	0.304	34.000
Category 2	0.696	78.000
Q2		
Category 1	0.295	33.000
Category 2	0.705	79.000
Q3		
Category 1	0.679	76.000
Category 2	0.321	36.000
Q4		
Category 1	0.545	61.000
Category 2	0.455	51.000
Q5		
Category 1	0.554	62.000
Category 2	0.446	50.000
Q6		
Category 1	0.259	29.000
Category 2	0.741	83.000
Q7		
Category 1	0.268	30.000
Category 2	0.732	82.000
Q8		
Category 1	0.812	91.000
Category 2	0.188	21.000

THE MODEL ESTIMATION TERMINATED NORMALLY

MODEL FIT INFORMATION

Number of Free Parameters 35

Loglikelihood

H0 Value -342.992
H0 Scaling Correction Factor 1.000
for MLR

Information Criteria

Akaike (AIC) 755.984
Bayesian (BIC) 851.132
Sample-Size Adjusted BIC 740.519
($n^* = (n + 2) / 24$)

Chi-Square Test of Model Fit for the Binary and Ordered Categorical
(Ordinal) Outcomes

Pearson Chi-Square

Value 115.379
Degrees of Freedom 220
P-Value 1.0000

Likelihood Ratio Chi-Square

Value 79.488
Degrees of Freedom 220
P-Value 1.0000

FINAL CLASS COUNTS AND PROPORTIONS FOR THE LATENT
CLASSES

BASED ON THE ESTIMATED MODEL

Latent
Classes

1	23.93789	0.21373
2	45.91182	0.40993
3	26.08819	0.23293
4	16.06211	0.14341

FINAL CLASS COUNTS AND PROPORTIONS FOR THE LATENT CLASS PATTERNS
 BASED ON ESTIMATED POSTERIOR PROBABILITIES

Latent
 Classes

1	23.93789	0.21373
2	45.91182	0.40993
3	26.08819	0.23293
4	16.06211	0.14341

CLASSIFICATION QUALITY

Entropy 0.993

CLASSIFICATION OF INDIVIDUALS BASED ON THEIR MOST LIKELY LATENT CLASS MEMBERSHIP

Class Counts and Proportions

Latent
 Classes

1	24	0.21429
2	46	0.41071
3	26	0.23214
4	16	0.14286

Average Latent Class Probabilities for Most Likely Latent Class Membership
 (Row)
 by Latent Class (Column)

	1	2	3	4
1	0.997	0.000	0.000	0.003
2	0.000	0.998	0.002	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000

RESULTS IN PROBABILITY SCALE

Latent Class 1

Q1				
Category 1	0.708	0.093	7.599	0.000
Category 2	0.292	0.093	3.140	0.002
Q2				
Category 1	0.708	0.093	7.598	0.000
Category 2	0.292	0.093	3.140	0.002
Q3				
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000
Q4				
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000
Q5				
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000
Q6				
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000
Q7				
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000
Q8				
Category 1	0.917	0.057	16.204	0.000
Category 2	0.083	0.057	1.475	0.140

Latent Class 2

Q1				
Category 1	0.022	0.022	1.011	0.312
Category 2	0.978	0.022	45.408	0.000
Q2				
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000
Q3				
Category 1	0.413	0.073	5.674	0.000
Category 2	0.587	0.073	8.074	0.000
Q4				
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000
Q5				
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000
Q6				
Category 1	0.087	0.042	2.093	0.036
Category 2	0.913	0.042	21.927	0.000
Q7				
Category 1	0.109	0.046	2.368	0.018
Category 2	0.891	0.046	19.377	0.000
Q8				
Category 1	0.783	0.061	12.842	0.000
Category 2	0.217	0.061	3.567	0.000

Latent Class 3

Q1					
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000	
Q2					
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000	
Q3					
Category 1	0.654	0.093	7.007	0.000	
Category 2	0.346	0.093	3.713	0.000	
Q4					
Category 1	0.920	0.054	16.943	0.000	
Category 2	0.080	0.054	1.474	0.140	
Q5					
Category 1	0.958	0.041	23.463	0.000	
Category 2	0.042	0.041	1.021	0.307	
Q6					
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000	
Q7					
Category 1	0.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	1.000	0.000	0.000	1.000	
Q8					
Category 1	0.693	0.091	7.647	0.000	
Category 2	0.307	0.091	3.394	0.001	

Latent Class 4

Q1					
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000	
Q2					
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000	
Q3					
Category 1	1.000	0.000	0.000	1.000	
Category 2	0.000	0.000	0.000	1.000	
Q4					
Category 1	0.813	0.098	8.334	0.000	
Category 2	0.187	0.098	1.914	0.056	
Q5					
Category 1	0.813	0.098	8.334	0.000	
Category 2	0.187	0.098	1.914	0.056	
Q6					
Category 1	0.066	0.064	1.033	0.302	
Category 2	0.934	0.064	14.590	0.000	
Q7					
Category 1	0.066	0.064	1.033	0.302	
Category 2	0.934	0.064	14.590	0.000	
Q8					
Category 1	0.938	0.060	15.506	0.000	
Category 2	0.062	0.060	1.033	0.302	

LATENT CLASS ODDS RATIO RESULTS

Latent Class 1 Compared to Latent Class 2

Q1					
Category > 1	0.009	0.010	0.904	0.366	
Q2					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q3					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q4					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q5					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q6					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q7					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q8					
Category > 1	0.328	0.269	1.217	0.224	

Latent Class 1 Compared to Latent Class 3

Q1					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q2					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q3					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q4					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q5					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q6					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q7					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q8					
Category > 1	0.205	0.175	1.172	0.241	

Latent Class 1 Compared to Latent Class 4

Q1					
Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q2					
Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q3					
Category > 1	1.000	0.000	999.000	999.000	
Q4					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q5					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q6					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q7					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q8					
Category > 1	1.367	1.738	0.786	0.432	

Latent Class 2 Compared to Latent Class 3

Q1					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q2					
Category > 1	1.000	0.000	999.000	999.000	
Q3					
Category > 1	2.685	1.372	1.958	0.050	
Q4					
Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q5					
Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q6					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q7					
Category > 1	0.000	0.000	999.000	999.000	
Q8					
Category > 1	0.626	0.349	1.796	0.073	

Latent Class 2 Compared to Latent Class 4

Q1	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q2	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q3	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q4	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q5	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q6	Category > 1		0.742	0.862	0.861	0.389
Q7	Category > 1		0.579	0.660	0.877	0.380
Q8	Category > 1		4.171	4.560	0.915	0.360

Latent Class 3 Compared to Latent Class 4

Q1	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q2	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q3	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q4	Category > 1		0.379	0.371	1.022	0.307
Q5	Category > 1		0.190	0.229	0.829	0.407
Q6	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q7	Category > 1	*****	0.000	999.000	999.000	
Q8	Category > 1		6.664	7.444	0.895	0.371

Beginning Time: 08:19:03
Ending Time: 08:19:27
Elapsed Time: 00:00:24

MUTHEN & MUTHEN
3463 Stoner Ave.
Los Angeles, CA 90066

Tel: (310) 391-9971
Fax: (310) 391-8971
Web: www.StatModel.com
Support: Support@StatModel.com

Copyright (c) 1998-2011 Muthen & Muthen