ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

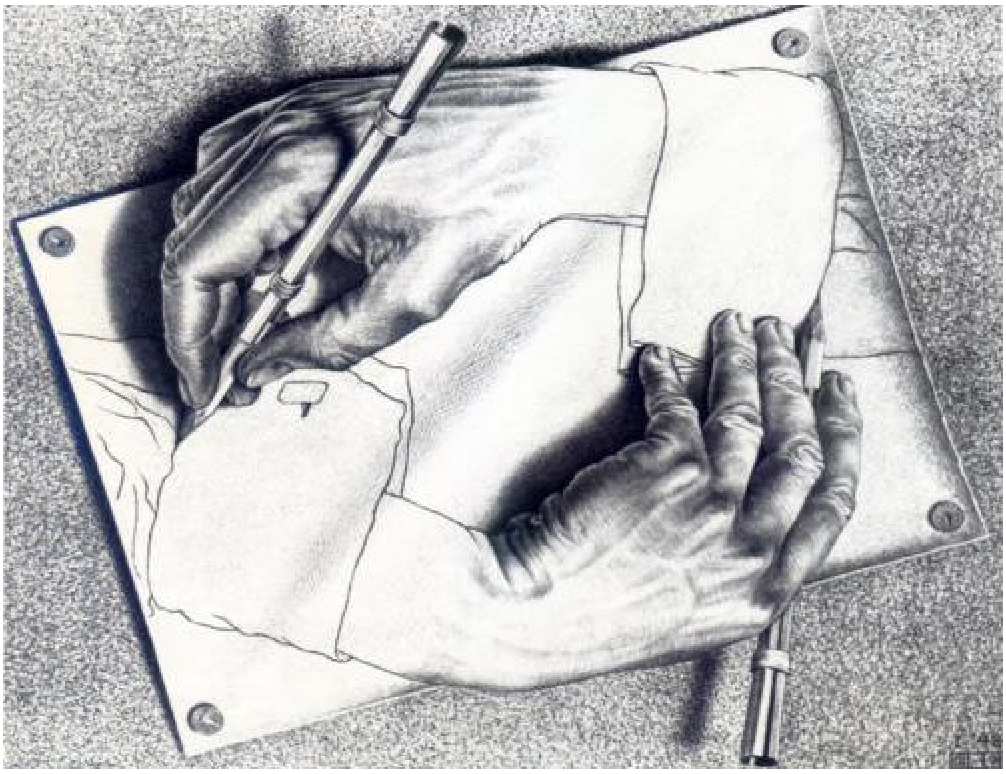
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΑΦΗΓΗΣΗΣ. ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΛΑΓΟΔΟΝΤΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

Α.Μ. 200926

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη

από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……………………………………(επιβλέπων Καθηγητής)	………………	……………
2)…………………………………………………	………………	…………
3)…………………………………………………	………………	…………

Στην οικογένεια μου,

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Σπύρου για την πολύτιμη βοήθειά του, σε κάθε στάδιο της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.
- Τον κ. Γιώργο Ψυχάρη για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.
- Τον κ. Τεύκρο Μιχαηλίδη, αρχικά για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στην τριμελή εξεταστική επιτροπή και στη συνέχεια, για την πολύτιμη βοήθεια, τις διορθώσεις και τις παρατηρήσεις του. Η συμβολή του, ήταν καθοριστικής σημασίας για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.
- Τον οργανισμό «Θαλής και φίλοι» για την παραχώρηση του βιβλίου «Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative».
- Την γραμματέα, του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, κα. Διονυσία Μπακογιάννη, για την απεριόριστη υπομονή της και τη συνεχή προσπάθειά της, να μας ενημερώνει και να μας εξυπηρετεί άμεσα.
- Όλους τους διδάσκοντες και τους συμφοιτητές μου.
- Ιδιαίτερα τις φίλες και συμφοιτήτριες Δήμητρα Κωνσταντίνου και Βασιλική Σμαΐλη, για τη συνεργασία και την υποστήριξή τους, που ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση των σπουδών μου.
- Τους γονείς μου Δημήτρη και Αναστασία και τον αδελφό μου Παναγιώτη, που στάθηκαν δίπλα μου, με τόση υπομονή και αγάπη όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πρώτο μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας, διερευνώνται οι σχέσεις μαθηματικών και αφήγησης. Αρχικά περιγράφονται οι λόγοι, για τους οποίους, τα δύο σύνολα, μαθηματικά και αφήγηση, αντιμετωπίστηκαν παραδοσιακά, ως δύο διαφορετικά υπερσύνολα και καταγράφονται οι προσπάθειες να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ των δύο κόσμων. Εξετάζονται οι δομικές αναλογίες μεταξύ αφήγησης και απόδειξης μαθηματικών θεωρημάτων και η επίδραση της ελληνικής ποιητικής αφήγησης, στις αποδείξεις των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, μέσω της δικανικής ρητορικής. Περιγράφεται, ένα ακόμη σημείο σύνδεσης μεταξύ μαθηματικών και αφηγηματικών κειμένων, καθώς και τα δύο, πρέπει να έχουν νόημα με μια ισχυρή αλλά όχι προφανή έννοια. Επίσης, γίνεται αναφορά σε περιπτώσεις, όπου η αφήγηση δανείζεται στοιχεία από τη μαθηματική επιστήμη, τόσο σε επίπεδο μορφής, όσο και σε επίπεδο περιεχομένου. Το πρώτο μέρος, ολοκληρώνεται, με την παρουσίαση των απόψεων πέντε συγγραφέων-τριών μαθηματικών και δύο φυσικών-για τον τρόπο που τα μαθηματικά επεμβαίνουν στο έργο τους.

Στο δεύτερο μέρος, το ενδιαφέρον, επικεντρώνεται στη μαθηματική λογοτεχνία. Καταγράφεται η σημαντική αύξηση, που παρατηρείται στην παραγωγή έργων «μαθηματικής λογοτεχνίας» τις τελευταίες δεκαετίες και παρατίθενται τρεις ορισμοί. Επιχειρείται μια ιστορική αναδρομή σε λογοτεχνικά κείμενα, με εκτεταμένες αναφορές στα μαθηματικά. Διακρίνονται τρεις βασικές κατηγορίες «μαθηματικής λογοτεχνίας», η προσχηματική, η βιωματική και η δομική και παρουσιάζονται εν συντομία, χαρακτηριστικά παραδείγματα από κάθε κατηγορία. Ενώ γίνεται και μια αναλυτική παρουσίαση της «Επιπεδοχώρας» (Flatland) του Abbot, μιας και αποτελεί το πρώτο μαθηματικό μυθιστόρημα.

Στο τρίτο μέρος, διερευνάται ο ρόλος της αφήγησης, ιστορικής και μυθοπλαστικής (λογοτεχνία) στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους, είναι παλιά υπόθεση καθώς ξεκινά από την ελληνική αρχαιότητα και η αξία της, έχει επισημανθεί εδώ και εκατό χρόνια στο διεθνή, αλλά και στον Ελληνικό χώρο. Για το λόγο αυτό, γίνεται μια ανασκόπηση των προσπαθειών, που συνέτειναν στην ενσωμάτωση ιστορικών μαθηματικών αφηγήσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπλέον αναφέρονται τα οφέλη, που απορρέουν από την ενσωμάτωση αυτή.

Η πληθώρα λογοτεχνικών βιβλίων με θέμα τα μαθηματικά, τις δύο τελευταίες δεκαετίες, έστρεψε το ενδιαφέρον τόσο των ερευνητών της διδακτικής, όσο και των καθηγητών των μαθηματικών, να συνδέσουν τα μαθηματικά με τη λογοτεχνία. Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζονται ορισμένες έρευνες, που αναλύουν διδακτικές προσεγγίσεις μαθηματικών με τη βοήθεια της λογοτεχνίας. Επιπρόσθετα, καταγράφονται ο τρόπος λειτουργίας και οι στόχοι των μαθηματικών λεσχών ανάγνωσης. Τέλος προτείνονται δύο παραδείγματα δραστηριοτήτων. Το πρώτο είναι ένα διδακτικό σενάριο, για την Α΄ Γυμνασίου, βασισμένο στο «Μηδέν», του Guedj. Η δεύτερη δραστηριότητα, απευθύνεται σε μαθητές της Α΄ Λυκείου. Δίνονται κατάλληλα αποσπάσματα από βιβλία, με στόχο να γίνει μια συζήτηση, γύρω από τη φύση και τη χρησιμότητα των μαθηματικών.

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΦΗΓΗΣΗ

1.1 Δύο διαφορετικοί κόσμοι;

Κατά τον Χρίστο Παπαδημητρίου δεν χωρεί αμφιβολία ότι ο Όμηρος βρισκόταν σε μια διάθεση άκρως μαθηματική όταν έγραφε τη ραψωδία μ της Οδύσσειας,«...και έφτασαν στο τριγωνικό νησί της Σικελίας/ όπου του Ήλιου έβοσκαν τα όμορφα θρεφτάρια/ γελάδια σε κοπάδια εφτά, αρνιά σε άλλα τόσα, /πενήντα το καθένα τους...». Ο Παπαδημητρίου μας προτρέπει να προσέξουμε την ποιητικότατη περιγραφή του αριθμού 700 και την κομψή γεωμετρική αφαίρεση της σικελικής γεωγραφίας. Και συνεχίζει ότι εμπνευσμένος από τους στίχους αυτούς, πέντε αιώνες αργότερα, ο μεγάλος Σικελός μαθηματικός Αρχιμήδης, έστελνε σε έναν άλλο μαθηματικό, τον Ερατοσθένη, ένα πανέμορφο ποίημα-πρόβλημα με το οποίο προκαλούσε τους σοφούς της Αλεξανδρείας. Μια πρόκληση που διήρκεσε χιλιετίες και για την οποία τελικά χρειάστηκε να επιστρατευθούν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, για τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος. Καταλήγοντας ότι κατά τα άλλα, οι σχέσεις λογοτεχνίας και μαθηματικών παρέμεναν παγερές έως ανύπαρκτες. (Παπαδημητρίου, 2004)

Η πεποίθηση ότι επιστήμη και τέχνη, αποτελούν δύο διακεκριμένα και αυτοτελή νοητικά σύνολα, που είναι ριζικώς διάφορα και αντιτιθέμενα, θεμελιώνεται στους νεώτερους χρόνους στη μεταφυσική Καρτεσιανή διχοτόμηση, λογικής και συναισθήματος. Και βέβαια σ’ αυτή την κλασσική δυαδική αντίθεση, ο ένας πόλος της αντιθετικής σχέσης, έχει αξιολογική σήμανση με θετικό πρόσημο, ενώ ο άλλος συνήθως υποτιμάται ή αγνοείται. Το ιστορικοπολιτισμικό πλαίσιο, που εξέθρεψε αυτή την πεποίθηση, η οποία σε μεγάλο βαθμό αποτελεί προκατάληψη, ήταν η σταδιακή διαμόρφωση του αστικού κόσμου και η εξορθολογισμένη τεχνικο-επιστημονική δραστηριότητα, απότοκη της μεταφυσικής θεοποίησης του Ορθού λόγου που κυριάρχησε τους τελευταίους 2-2,5 αιώνες. (Δοξιάδης, 2011)

Ο Husserl στο έργο του, «Η κρίση της ευρωπαϊκής ανθρωπότητας και η φιλοσοφία», καθώς και σε όλες τις διαλέξεις που έδωσε καθ’ όλη τη διάρκεια της δεκαετίας του 1930, θεωρεί ότι η κρίση του ευρωπαϊκού πολιτισμού πρέπει να χρεωθεί στις θετικές μαθηματικές επιστήμες (εκπροσωπούμενες από τον Γαλιλαίο) και τον τρόπο που συνέλαβαν τον εαυτό τους και τη μέθοδό τους. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθηματικές επιστήμες, όχι μόνο συνέβαλαν στη μαθηματικοποίηση της φύσης, μετατρέποντάς την, από αντικείμενο άμεσης εμπειρίας στο εσωτερικό ενός κόσμου-της-ζωής, σε ιδεατό μαθηματικό μόρφωμα, αλλά θεώρησαν ότι αυτή η μαθηματικοποίηση ήταν επαρκώς θεμελιωμένη στον εαυτό της. Με αποτέλεσμα σύμφωνα πάντα με τον Husserl, τη ριζική περιφρόνηση της ίδιας τους, της ιστορικότητας, την παραγωγή τους στη βάση του κόσμου-της-ζωής και των πραγμάτων που υπάρχουν μέσα σε αυτόν και το προεπιστημονικό τους υπόβαθρο, κατατεμαχίζοντας το κοσμοείδωλο του δυτικού ανθρώπου με καταστροφικές γι' αυτόν συνέπειες.

Στις μέρες μας, η ιδέα ότι όλη η ανθρώπινη δραστηριότητα μπορεί να εξηγηθεί από τις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά εμφανίζεται στους περισσότερους ως προφανής. Εντούτοις, αυτή η «αγωνία» για την αναζήτηση της αλήθειας μέσω της λογικής, έχει ρίζες βαθιές: ξεκινά από τα χρόνια του Πλάτωνα. Από τότε που ο Πλάτωνας στην «Πολιτεία»[1], περιέγραφε τους ποιητές και τους «παραμυθάδες» ως επικίνδυνους, γιατί βάζουν αναξιόπιστη γνώση στα κεφάλια των παιδιών. Θεωρούσε την ποίηση ως εχθρό της αλήθειας, ένα είδος ασθένειας, για την οποία πρέπει να βρεθεί αντίδοτο. Το αντίδοτο, είναι η λογική, που μας βοηθά να δούμε τον κόσμο όπως πράγματι είναι. Ιδιαίτερα, η γνώση των Μαθηματικών, μέσω της καθαρής λογικής, οδηγεί κάποιον στο βασίλειο της αφαίρεσης και της καθολικότητας. Σ’ αυτό το βασίλειο, οι «παραμυθάδες» δεν έχουν θέση και για αυτό πρέπει «να λογοκριθούν ή να εξορισθούν». Το αξιοσημείωτο όμως είναι, ότι ο Πλάτωνας περιέγραψε την υπεροχή της λογικής, μέσα από ένα παραμύθι, την αλληγορία του Σπηλαίου[2], στο οποίο προσπαθεί να μας πει τι συνιστά γνώση και πώς αποκτιέται. Ουσιαστικά «Διδάσκει μέσα από ένα παραμύθι, ότι το παραμύθι δεν μπορεί να διδάξει (την αλήθεια)» (Κολέζα, 2006).

Αλλά και στον «Φαίδρο» («Το φτερωτό άρμα της ψυχής», 253c-254b), ο Πλάτωνας με μια μεταφορική εικόνα, αποτυπώνει μια αντιθετική θεώρηση των

---

[1] «Πολιτεία», βιβλίο 2ο: «Ο Πλάτωνας, μέσω του Σωκράτη, που τον θέτει αντιμέτωπο του Γλαύκωνα και του Αδείμαντα, κάνει λόγο για «κατασκευαστές μύθων» (377b), για ψεύδη που λέει ο Ησίοδος και ο Όμηρος (377d) παρόλο που ο τελευταίος είναι καλός ποιητής (μάλιστα «ο τραγικότερος των τραγικών»), για τον κίνδυνο των νέων να τους ακούν (378c) για το τί πρέπει να ξέρουν οι νέοι για τους μύθους αυτούς (378d) και για επιβεβλημένη επίβλεψη των μυθοποιών (377b)».

[2] Ο αλληγορικός μύθος του σπηλαίου, εκτείνεται από το 514 α έως το 517c της πλατωνικής «Πολιτείας».

σχέσεων λογικής και συναισθήματος. Η λογική παρουσιάζεται ως ηνίοχος, ο οποίος πασχίζει να δαμάσει και να θέσει υπό τον έλεγχο του, τα συναισθήματα, τα οποία έχουν τη μορφή άγριων αλόγων. Τρία στοιχεία αυτής της μεταφοράς είναι δηλωτικά και συμπυκνώνουν την ουσία της επικρατούσας πεποίθησης. Πρώτον υπάρχει ένας δυϊσμός λογικής και συναισθήματος στις ανθρώπινες λειτουργίες. Η λογική και το συναίσθημα, είναι δύο διαφορετικές και αντιθετικές νοητικές λειτουργίες, δύο διαφορετικά και αντιθετικά φαινόμενα του ανθρώπινου ψυχισμού. Δεύτερον, το συναίσθημα είναι μια κατώτερη και ουσιαστικά πρωτόγονη ψυχολογική λειτουργία, πρωτίστως ανορθολογική και νοητικά διαλυτική, έξω από τον έλεγχο της ανθρώπινης θέλησης. Τρίτον, το συναίσθημα πρέπει να τίθεται, σε κάθε περίπτωση σκέψης και πράξης, υπό τον έλεγχο της λογικής (Χασάπης, 2006).

Πράγματι, τα δύο σύνολα, «μαθηματικά» και «αφήγηση»-γιατί και οι δύο έννοιες είναι στην πραγματικότητα σύνολα πραγμάτων και όχι μονάδες-έχουν αντιμετωπιστεί παραδοσιακά, ως δύο διαφορετικά υπερσύνολα. Τα μαθηματικά κατατάσσονται στην κατηγορία που αποδίδεται με τον χαρακτηρισμό «επιστημονική κουλτούρα» και η αφήγηση κατατάσσεται στην κατηγορία που αποδίδεται με τον χαρακτηρισμό «λογοτεχνική κουλτούρα». Πρόκειται για δύο διακριτά διαφορετικές μορφές ανθρώπινης δραστηριότητας, οι οποίες αναπτύσσονται υπό διαφορετικούς όρους και για διαφορετικές ανάγκες, κοινωνικές και ατομικές. Κάθε μια από τις δραστηριότητες αυτές, έχει αναπτύξει και χρησιμοποιεί τα δικά της μέσα παραγωγής και έκφρασης, τα οποία όχι μόνο απεικονίζουν αλλά και τονίζουν τις διαφορές τους. (Χασάπης, 2006)

Αντικείμενο της μαθηματικής δραστηριότητας, είναι στο επίπεδο της επιστημονικής πρακτικής, η έρευνα των αξιωματικά θεμελιωμένων αφηρημένων δομών, οι οποίες προέρχονται, είτε από τις φυσικές επιστήμες, είτε από πεδία των ίδιων των μαθηματικών και στο επίπεδο της σχολικής εκπαίδευσης η μελέτη των ποσοτήτων, των δομών, των μεταβολών και του χώρου. Η μελέτη αυτή αναπτύσσεται και στη μία και στην άλλη περίπτωση, με τη χρήση της παραγωγικής λογικής και μιας αντίστοιχης κατά περίπτωση, μαθηματικής σημειολογίας. Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής, οργανώνονται, ως μαθηματική γνώση σε συστήματα εννοιών, παραδοχών (αξιωμάτων) και συμπερασμάτων(θεωρημάτων), καθώς και διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των συμπερασμάτων αυτών (αποδείξεις). (Χασάπης 2006)

Κάθε αφήγηση αποτελεί: *«μια εξιστόρηση, μια ορισμένη σειρά συμβάντων που μεταβάλλουν μια αρχική κατάσταση πραγμάτων ή ενεργειών, πράξεων που σκόπιμα διαπράττονται από τους "ήρωες" μιας ιστορίας»* (Πολίτης, 2006). Ως κύριες μορφές της αφήγησης καταγράφονται η μυθοπλαστική, η ιστορική και η ρεαλιστική αφήγηση.

Η μυθοπλαστική αφήγηση, όπως δηλώνει και το όνομα της, δεν αφηγείται το πραγματικό. Οικοδομεί ένα σύνολο καταστάσεων και ένα πλήθος προσώπων, ενδεχομένως αληθοφανών, αλλά στην ουσία απολύτως φανταστικών. Τυπικές περιπτώσεις μυθοπλασίας αποτελούν τα λαϊκά παραμύθια, προϊόντα συλλογικής επεξεργασίας και οι αφηγήσεις της ατομικής, δημιουργικής λογοτεχνίας.

Η ιστορική αφήγηση βασίζεται στην εξιστόρηση πραγματικών γεγονότων του παρελθόντος. Τυπική περίπτωση ιστορικής αφήγησης αποτελεί η ιστοριογραφία, η οποία χρησιμοποιεί την αφήγηση για να ανασυστήσει επιλεκτικά όψεις και στοιχεία του παρελθόντος.

Η ρεαλιστική αφήγηση διαφέρει από την ιστορική ως προς το χρόνο των συμβάντων και την τεκμηρίωση τους. Εξιστορεί γεγονότα, σύγχρονα του αφηγητή, τα οποία τεκμηριώνει κατά περίπτωση, σε εμπειρικά δεδομένα. Η ειδησιογραφία των μέσων μαζικής ενημέρωσης, όπως και το πλήθος των μικρών και μεγάλων «ιστοριών», που καθημερινά ανταλλάσουν μεταξύ τους οι άνθρωποι σε κάθε ευκαιρία, αποτελούν τις πλέον τυπικές περιπτώσεις ρεαλιστικής αφήγησης.

Η λογοτεχνία (μυθοπλαστική αφήγηση) τώρα, συγκροτείται από τα γραπτά και προφορικά προϊόντα του έντεχνου λόγου, με κριτήριο την μάλλον ασαφώς ορισμένη και ιστορικά μεταβαλλόμενη έννοια της «λογοτεχνικότητας». Επειδή μια πλήρης αναφορά στις προσεγγίσεις της έννοιας της λογοτεχνικότητας, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, συνοπτικά αναφέρεται, ότι διακρίνονται δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται οι προσεγγίσεις, οι οποίες, υιοθετώντας οντολογικές πρακτικές, ορίζουν τη λογοτεχνικότητα με κριτήριο ειδοποιά χαρακτηριστικά του λογοτεχνικού λόγου, οπότε στην περίπτωση αυτή, η λογοτεχνικότητα είναι μια ιδιαίτερη οργάνωση της γλώσσας ή απλά εκείνο το χαρακτηριστικό των κειμένων, το οποίο προκαλεί κατά την ανάγνωση τους μια αισθητική απόλαυση. Στη δεύτερη κατηγορία, εντάσσονται εκείνες οι προσεγγίσεις της λογοτεχνικότητας, οι οποίες υιοθετώντας ιστορικά κριτήρια, θεωρούν τα χαρακτηριστικά της, μεταβαλλόμενα και συναρτημένα με το χρόνο και το χώρο. Από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα, κυρίαρχο κριτήριο λογοτεχνικότητας είναι εκείνο της λογοτεχνικής γλώσσας με έμφαση στην ιστορικότητα της (Βελουδής 1992). (Χασάπης 2006).

Ένας από τους πρώτους, που μίλησαν για δύο κόσμους, τον επιστημονικό και τον λογοτεχνικό ήταν ο C.P.Snow το 1959. Σε μια διάλεξη του, στο Cambridge, με τίτλο «Οι δύο κουλτούρες», η οποία συμπληρώθηκε το 1964, με το κείμενο «Μια επανεξέταση», εντόπισε το χάσμα ανάμεσα στους δύο προαναφερθέντες κόσμους και επεσήμανε την ασυνεννοησία, την άγνοια και την έλλειψη επικοινωνίας μεταξύ των ανθρώπων, των γραμμάτων και των τεχνών, από τη μία πλευρά και των επιστημόνων από την άλλη. Αυτό το χάσμα καθιστούσε και τις δύο πλευρές πιο φτωχές, ενώ παράλληλα επιβράδυνε σημαντικά την παγκόσμια πρόοδο.

Οι απόψεις του Snow προκάλεσαν μια συζήτηση που κράτησε αρκετές δεκαετίες και αφορούσε στο κατά πόσον υπάρχουν αυτές οι δύο διαφορετικές κουλτούρες και αν είναι εφικτή η δημιουργία μιας τρίτης κουλτούρας. Σύμφωνα με το Snow, αυτή η τρίτη κουλτούρα, θα μπορούσε να στελεχωθεί από μη επιστήμονες, οι οποίοι θα χαρακτηρίζονται ωστόσο, από έντονη περιέργεια και θα έχουν τη βούληση και το κίνητρο να γεφυρώσουν το χάσμα.

Ο Polyani (1964) διακρίνει μεταξύ «*προσωπικής*» και «*υποκειμενικής*» γνώσης ενώ ο Medawar (1972), θεωρεί την Επιστήμη και τη Λογοτεχνία, ως ανταγωνιστές, που χρησιμοποιούν διαφορετικά είδη φαντασίας. (Κολέζα, 2006)

Ο Αμερικανός γνωστικός ψυχολόγος Jerome Bruner,το 1986, στο δοκίμιο του «Two modes of thinking» (σελ.113) εστιάζει σε δύο τρόπους γνωστικής λειτουργίας, μέσω των οποίων, προσπαθούμε να κατανοήσουμε τον κόσμο. «*Οι δύο τρόποι, αν και συμπληρωματικοί, δεν ανάγονται ο ένας στον άλλον. Προσπάθειες για να αναχθεί, ο ένας τρόπος στον άλλον ή να αγνοηθεί ο ένας σε βάρος του άλλου αποτυγχάνουν αναπόφευκτα να συλλάβουν την ποικιλομορφία της σκέψης. Οι δύο τρόποι διαφέρουν ριζικά ως προς τις διαδικασίες επαλήθευσης που χρησιμοποιούν. Μια καλή ιστορία και ένα καλοδιατυπωμένο επιχείρημα είναι δύο διαφορετικά πράγματα. Και τα δυο μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέσα για να πείσουν…αλλά για ριζικά διαφορετικά πράγματα: τα επιχειρήματα πείθουν για τις αλήθειες τους, οι ιστορίες για την αληθοφάνεια τους.*»

Ο πρώτος τρόπος, ο παραδειγματικός ή λογικό-επιστημονικός (paradigmatic thinking) κυρίαρχος στο διάλογο, που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους διανοούμενους της Δύσης, τουλάχιστον από το 17^{ο} αιώνα, προσπαθεί να εκπληρώσει το ιδανικό ενός τυπικού μαθηματικού συστήματος, περιγραφής και εξήγησης. Στα πλεονεκτήματά του, συγκαταλέγονται η αμερόληπτη, επαληθεύσιμη ανάλυση, η «*λογική απόδειξη, το υγιές επιχείρημα και η εμπειρική ανακάλυψη που καθοδηγείται από αιτιολογημένες υποθέσεις*» (σελ.13). Παρόλα αυτά ο Bruner θεωρεί αυτόν τον τρόπο «*άκαρδο*», διότι επιδιώκει «*να ξεπεράσει το ιδιαίτερο(που φέρνουν οι ιστορίες) με στόχο να κατακτήσει την αφαίρεση*» (σελ.13). Ο δεύτερος τρόπος σκέψης, είναι ο αφηγηματικός (narrative thinking), όπου γίνεται χρήση μεταφορών και αναλογιών ώστε να κατανοηθεί και να περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται γεγονότα και καταστάσεις. Ο Bruner, θεωρεί αυτόν τον δεύτερο τρόπο σκέψης, ως μια «*μορφή τέχνης*». Η Κολέζα (2006), συμπληρώνει ότι η ικανότητα να ακούς ή να διαβάζεις ιστορίες, ενισχύει την ικανότητα πρόβλεψης και αναγνώρισης, το ενσυναίσθημα, την ικανότητα μνήμης και συγκέντρωσης, ενώ επιπλέον ενθαρρύνει τη διάθεση για μάθηση. Και συνεχίζει, υποστηρίζοντας, ότι στην πραγματικότητα, οι μαθηματικές ιδέες αναπτύσσονται συχνά κατά τρόπο αφηγηματικό, ενώ τα λογοτεχνικά έργα μπορούν να περιλάβουν τον παραδειγματικό τρόπο δόμησης.

Ανάλογη άποψη διατυπώνει στο άρθρο του, «Mythematics» (2003) και ο Παπαδημητρίου, ο οποίος μας πληροφορεί ότι ο παραπάνω διαχωρισμός σε δύο τρόπους σκέψης, ενισχύεται και από τα αποτελέσματα των νευροεπιστημών, ενώ στο ίδιο άρθρο τονίζει ότι «*δεν υπάρχει καμία ιδέα που να αξίζει να εξηγηθεί και η οποία να μην μπορεί να εξηγηθεί με μια καλή ιστορία*».

«*…η χρησιμοποίηση των Μαθηματικών στην αφήγηση ιστοριών και η χρησιμοποίηση ιστοριών για την εξήγηση των Μαθηματικών είναι δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Ενώνουν αυτά που δε θα έπρεπε ποτέ να έχουν χωριστεί: τους τρόπους του επιστήμονα και του καλλιτέχνη να αποκαλύπτουν αλήθειες για τον κόσμο*» (Frucht, 1999). (Κολέζα, 2006)

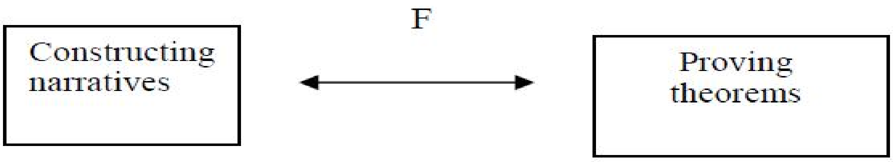
Το «*Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*», 2012, είναι το πρώτο, διεθνώς, ερευνητικό βιβλίο, που εξετάζει τη σχέση των μαθηματικών με την αφήγηση. Στον τόμο αυτό, έχουν συγκεντρωθεί πρωτότυπες ερευνητικές εργασίες, κορυφαίων μαθηματικών, ιστορικών και φιλοσόφων, ενώ διερευνάται από διαφορετικές κατευθύνσεις, η σύγκλιση μαθηματικών και αφήγησης.

Χρησιμοποιώντας ως οδηγό ορισμένες από τις εργασίες του βιβλίου Circles Disturbed και άλλα συναφή κείμενα, θα υποστηριχθεί στη συνέχεια, ότι η λογικό-μαθηματική λειτουργία και η αφηγηματική λειτουργία, παρουσιάζουν πολλές δομικές ομοιότητες και αναλογίες, πράγμα που μας κάνει να υποψιαζόμαστε ότι ενδεχομένως, να αναδεικνύονται από ένα ενιαίο και διαφοροποιημένο γνωστικό «κέντρο».

Άλλωστε, όλα τα συμβολικά συστήματα (και η γλώσσα των μαθηματικών και η γλώσσα της αφήγησης) κατασκευάζουν και ανακατασκευάζουν την πραγματικότητα και με τη σημασία αυτή, έχουν γνωστική αξία: κάνουν την πραγματικότητα να εμφανίζεται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Οργανώνουν «*εκ νέου τον κόσμο σύμφωνα με τα έργα τους και τα έργα σύμφωνα με τον κόσμο*» μας λέει ο Goodman. Θα λέγαμε, ότι όλα τα συμβολικά συστήματα, αναπτύσσουν αυτή την οργανωτική δύναμη επειδή διαθέτουν μια γνωστοποιητική διάσταση, επειδή δημιουργούν νέα δίκτυα ανάγνωσης της εμπειρίας ή παραγωγής της. (Δοξιάδης, 2011)

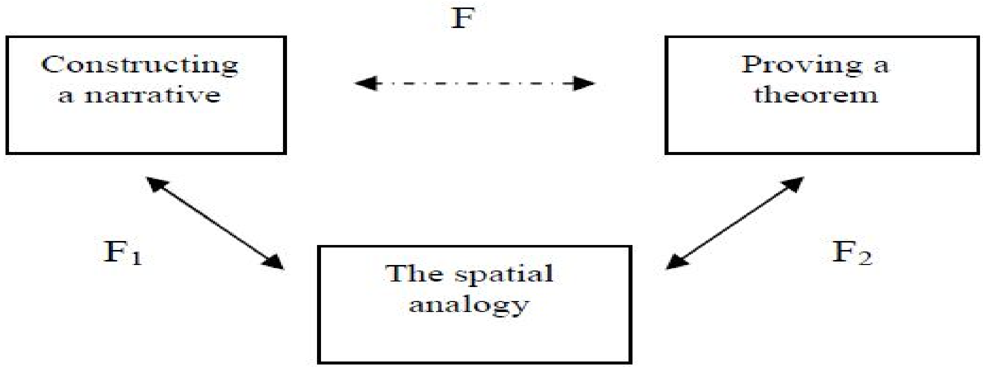
1.2 Δομικές αναλογίες μεταξύ Αφήγησης και απόδειξης μαθηματικών θεωρημάτων

Ποιητική του Ευκλείδη ονόμασε ο Απόστολος Δοξιάδης, τη διάλεξη του, στο συνέδριο «Μαθηματικά και κουλτούρα», στη Βενετία, τον Απρίλιο του 2001. Στο κείμενό του, εξερευνά την άποψή του, ότι υπάρχουν ισχυρές δομικές αναλογίες μεταξύ αφήγησης και απόδειξης μαθηματικών θεωρημάτων - αναλογίες που κατά το συγγραφέα, ένας μαθηματικός θα μπορούσε να μπει στον πειρασμό να τις αποκαλέσει «ισομορφισμούς», δηλαδή ένα-προς-ένα αντιστοιχίες των στοιχείων, των δύο συνόλων τα οποία επιπλέον, διατηρούν τη δομή τους. Τονίζει ότι η θέση του, αυτή, δεν διεκδικεί την αυστηρότητα ενός καθαρά μαθηματικού αποτελέσματος, αλλά θεωρεί ότι οδηγεί προς μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση, έστω κι αν είναι κατά προσέγγιση ακριβής.

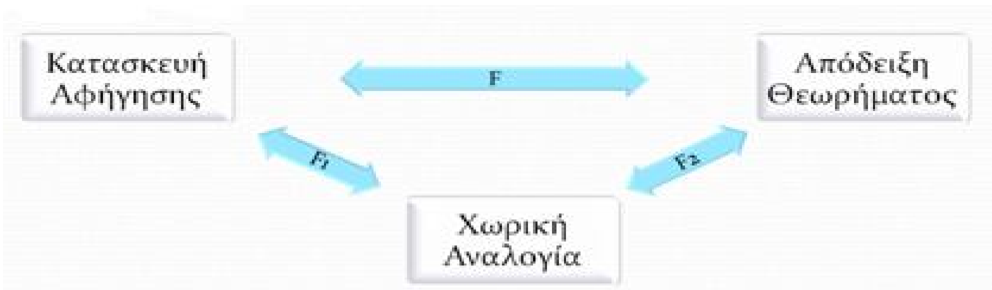


Το σχήμα αποδίδεται στα ελληνικά:

Για την «απόδειξη» αυτού του ισομορφισμού, που τον συμβολίζει με το γράμμα F, εφαρμόζει τη μεταβατική ιδιότητα, σύμφωνα με την οποία για να δειχθεί ότι το Α είναι ίσο (ή ισόμορφο) με το Γ, αρκεί να δειχθεί ότι και τα δύο είναι ανεξαρτήτως ίσα (ή ισόμορφα) με ένα ορισμένο Β. Έτσι αν Α = Β και Β = Γ συνεπάγεται ότι Α = Γ. Θεωρεί ότι το κοινό σημείο αναφοράς, το Β, στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μια χωρική αναλογία, η οποία πιστεύει, ότι διέπει τόσο μια αφήγηση όσο και μια απόδειξη.



Το προηγούμενο σχήμα, μεταγράφεται, στα ελληνικά:



Έτσι, προσπαθεί να δείξει τη δομική ισοδυναμία, F, μεταξύ της κατασκευής μιας αφήγησης και της απόδειξης ενός θεωρήματος, δείχνοντας πως και τα δύο αυτά είναι ανεξαρτήτως ισοδύναμα με ένα χωρικό μοντέλο[ισοδυναμίες F_1 και F_2]. Η μεταβατική ιδιότητα εγγυάται τότε, ότι $F = F_1, F = F_2$.

Αφού κατέστησε σαφή την τεχνική που θα χρησιμοποιήσει για την επαλήθευση του παραπάνω ισομορφισμού, ξεκινά να «αποδείξει» τις επιμέρους ισοδυναμίες:

F_1 - *Η υποκείμενη χωρική μεταφορά της αφήγησης*

Κατά τον εικοστό αιώνα επιτυγχάνεται σύμφωνα με τον Δοξιάδη, η εξεύρεση κάποιων παγκόσμιων νόμων, που διέπουν τη δομή της αφήγησης. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται στο Ρώσο λαογράφο Vladimir Propp, ο οποίος σε μια πραγματεία του, διαπιστώνει ότι το λεγόμενο «*μαγικό παραμύθι*», συμμορφώνεται πάντα προς μια συγκεκριμένη δομή, που περιλαμβάνει πρότυπες «*λειτουργίες*», που μπορεί να κυμαίνονται σε ένα σύνολο μεταβλητών, δίνοντας διαφορετικές εκδοχές μιας περισσότερο ή λιγότερο σταθερής και βασικής δομής. Συνοψίζει, τη δομή αυτή στα εξής:

- Ο «ήρωας» ζει σε μια κατάσταση σταθερότητας.
- Κάτι ανατρέπει αυτή την κατάσταση.
- Ο ήρωας ξεκινά ένα ταξίδι για να αποκαταστήσει τη σταθερότητα.
- Αντιμετωπίζει προκλήσεις με τη βοήθεια ενός «*μαγικού βοηθού*», ο οποίος είναι συχνά ένα ζώο.
- Η τελική πρόκληση (-εις) αντιμετωπίζεται με επιτυχία.
- Ο ήρωας έρχεται σε υψηλότερη κατάσταση σταθερότητας, λόγω των ενεργειών του.

Επισημαίνει ότι πίσω από όλες αυτές τις φάσεις, υπάρχει ένα ταξίδι σε (γεωγραφικά) σημεία, όπου τα πάντα μπορούν να συνδέονται: ζωτικής σημασίας συναντήσεις, απόκτηση πληροφοριών ή αντικειμένων, προκλήσεις, αγώνες, μαγικά γεγονότα, αποκαλύψεις, κλπ. Καθώς και ότι όλα αυτά, μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν χάρτη, κάθε βήμα του ήρωα έχει μια χωρική αναλογία. Έτσι, η εξέλιξη της ιστορίας, είναι κίνηση προς τα εμπρός, οι αποφάσεις είναι σταυροδρόμι, ο στόχος της αφήγησης είναι επίσης ένας φυσικός προορισμός και υπάρχει φυσικά η πλήρης διαδικασία που έρχεται σε πλήρη κύκλο, από τη σταθερότητα, στην αστάθεια και πάλι στην σταθερότητα.

Η εξέταση αμέτρητων ιστοριών, καταγεγραμμένων σε φιλμ ή σε σελίδες ή σωζόμενων από την προφορική παράδοση, οδηγεί κατά τον συγγραφέα στη διαπίστωση, ότι οι περισσότερες από αυτές ανταποκρίνονται κατ' ουσίαν στο εξής πρότυπο: ένας ήρωας θέλει κάτι και ξεκινά μια περιπέτεια-ταξίδι για να το βρει. Αυτό το «κάτι» που θέλει ο ήρωας (μπορεί να είναι ένα άτομο, μια ιδέα, ένα υλικό αντικείμενο ή οτιδήποτε άλλο), είναι ο στόχος του ταξιδιού ή μιλώντας χωρικά, ο προορισμός του. Με περαιτέρω γενίκευση του ορισμό του μύθου αναζήτησης και αντικαθιστώντας τη φράση «ο ήρωας θέλει κάτι», με τη φράση «ο συγγραφέας θέλει κάτι για αυτόν/αυτήν» κρίνει, ότι καλύπτονται σχεδόν όλες οι αφηγήσεις ή ακριβέστερα, σχεδόν όλες οι απλές ή στοιχειώδεις αφηγήσεις. Στη συνέχεια παραθέτει μερικά διάσημα παραδείγματα ηρωικών στόχων / προορισμών:

Ήρωας	**Στόχος**
Οδυσσέας	Ιθάκη
Οιδίποδας	Θεραπεία του Λιμού
Lancelot Guinevere	Το Δισκοπότηρο
Άμλετ	Να εκδικηθεί το φόνο πατέρα του
Ρωμαίος	Ιουλιέτα
Ιουλιέτα	Ρωμαίος
Jay Gatsby	Μαργαρίτα
Οι τρεις αδερφές (Τσέχοφ)	Μόσχα
Ο γέρος και η θάλασσα (Χεμινγουέι)	Το ψάρι

Ο Δοξιάδης επισημαίνει ότι το ταξίδι του ήρωα, είτε πρόκειται για μεταφορικό («Τα τέσσερα κουαρτέτα» του TS Eliot), είτε για κυριολεκτικό («Οδύσσεια»), είτε και για τα δύο, μπορεί να χαρτογραφηθεί, δηλαδή μπορεί να δοθεί μια ακριβής χωρική μορφή, ακόμη και αν αυτός ο «χώρος» είναι άυλος, όπως είναι για παράδειγμα, ο κόσμος της μνήμης ή της φαντασίας. Η επίτευξη του στόχου (προορισμού) μπορεί να λάβει πολλές διαφορετικές μορφές, κατά το συγγραφέα. Ενδεικτικά αναφέρει τις εξής:

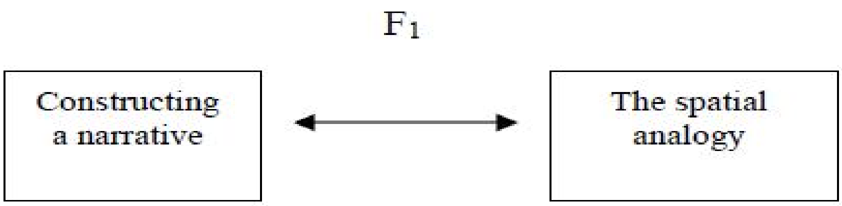
- Ο στόχος έχει επιτευχθεί και αυτό ικανοποιεί την ανάγκη του ήρωα.
- Ο στόχος έχει επιτευχθεί, αλλά ο ήρωας βρίσκει ότι είναι απογοητευμένος με αυτό.
- Ο στόχος έχει επιτευχθεί, αλλά στη συνέχεια ο ήρωας συνειδητοποιεί ότι ένας νέος στόχος βρίσκεται μπροστά του και ως εκ τούτου ξεκινά ένα νέο ταξίδι.

- Ο στόχος έχει επιτευχθεί, αλλά αυτό κάνει τον ήρωα να συνειδητοποιήσει τη σημασία του ταξιδιού πέρα από τον στόχο.
- Ο στόχος έχει μόνο εν μέρει επιτευχθεί και ο ήρωας το συνειδητοποιεί και το αποδέχεται.
- Ο στόχος έχει μόνο εν μέρει επιτευχθεί και ο ήρωας το συνειδητοποιεί και δεν το αποδέχεται.
- Ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί, και αυτό κάνει τον ήρωα λυπημένο.
- Ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί, αλλά αυτό είναι εντάξει, γιατί ο ήρωας έχει φτάσει σε μια νέα γνώση. κ.ο.κ

Συμπεραίνει ότι σχεδόν όλες οι ιστορίες, έχουν να κάνουν με έναν ήρωα που θέλει (ή έναν συγγραφέα που θέλει ο ήρωας του) να πάρει κάτι, ακολουθώντας μια συγκεκριμένη πορεία, κυριολεκτική ή μεταφορική. Έτσι, υποστηρίζει, ότι κάθε αφήγηση μπορεί να παρασταθεί ως ένα ταξίδι, με αρχή (B) και τέλος (E) με τις διάφορες δυνάμεις (βέλη), που λειτουργούν είτε ως «*βοηθοί*» εξωτερικά ή εσωτερικά, ή ως εμπόδια, που επηρεάζουν την πορεία της προόδου του ήρωα:

Σύμφωνα με το σχόλιο του Δοξιάδη, οι διακεκομμένες γραμμές, δείχνουν «*τους δρόμους που δεν έχουν ληφθεί*» (από την περίφημη φράση του TS Eliot), τους εναλλακτικούς δρόμους που ο ήρωας τελικά δεν θα επιλέξει.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, ο συγγραφέας καταλήγει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός, τον οποίο ονομάζει F_1, μεταξύ αφήγησης και χωρικής αναλογίας:



Το προηγούμενο σχήμα, μεταγράφεται στα ελληνικά:

F_2 - Η υποκείμενη χωρική μεταφορά της μαθηματικής απόδειξης

Διακρίνει την αποδεικτική διαδικασία σε πολύ απλή (όπως η απόδειξη του Ευκλείδη, για τους άπειρους πρώτους αριθμούς), αλλά και σε μακρά, επίπονη, περίπλοκη και πολύπλευρη. Αναφέρει ως χαρακτηριστικό παράδειγμα περίπλοκης απόδειξης, την περίφημη απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά από τον Andrew Wiles, που ήταν το αποκορύφωμα μιας πολύ μακράς διαδικασίας, που διαρκεί μερικές δεκαετίες ή αιώνες, αν πάμε πίσω στον Galois και τις ρίζες της σύγχρονης άλγεβρας και δημιουργήθηκε διαδοχικά (αν και χωρίς σαφές τέλος στον ορίζοντα, για μεγάλο χρονικό διάστημα), από μια σειρά μαθηματικών, μεταξύ των οποίων οι Taniyama, Shimura, Weil, Frey, Ribet, και μερικοί ακόμα, με τον Wiles να παρέχει την τελική ολοκληρωτική ώθηση, που έφερε τα διάφορα θέματα μαζί.[3] Συμπεραίνει, ότι όπως μια αφήγηση, έτσι και μια τέτοια διαδικασία σταδιακής ανακάλυψης, εκτεταμένη ή σύντομη, πολύπλοκη ή απλή, μπορεί να χαρτογραφηθεί.

Καταλήγει ότι όλα όσα ειπώθηκαν κατά τη σύγκριση της αφήγησης με το χωρικό μοντέλο, ισχύουν επίσης και για τη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης: Ένας μαθηματικός ξεκινά να αποδείξει μια πρόταση, η οποία είναι πραγματικά το τέλος του προορισμού του. Επεξηγεί περαιτέρω αυτό το σημείο, με χρήση παραδειγμάτων:

Ήρωας	**Στόχος**
Ευκλείδης	Να αποδείξει ότι οι πρώτοι είναι άπειροι.
Newton/Leibniz	Να βρουν την κλίση μιας καμπύλης.[4]

[3] Η εικασία του Fermat διατυπώθηκε το 1638 και από τότε ξεκινούν οι προσπάθειες απόδειξης της, οι οποίες τελικά ολοκληρώθηκαν το 1995.

[4] Στην πραγματικότητα αρχικός στόχος του Newton, που ήταν περισσότερο προσανατολισμένος προς τη φυσική, ήταν να ορίσει τη στιγμιαία ταχύτητα, ενώ επιδίωξη του Leibniz, ο οποίος ενδιαφερόταν κυρίως για το μαθηματικό κομμάτι ήταν η εύρεση της κλίσης της καμπύλης.

Evariste Galois	Να βρει τη γενική λύση εξίσωσης 5^{ου} βαθμού με ριζικά.
Henri Poincaré	Το πρόβλημα των τριών σωμάτων.
Atle Selberg	Να βρει μια στοιχειώδη απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών. [5]
Stephen Smale	Να βρει απόδειξη της εικασίας του Poincaré για $n \geq 5$.
Andrew Wiles	Να βρει την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά.

Στη συνέχεια παραθέτει κάποιες επιπλέον πτυχές της αποδεικτικής διαδικασίας, που εισάγουν/παραδέχονται μια χωρική συσχέτιση:

- Ο μαθηματικός κινείται μπροστά (συχνά και πίσω) μέσα στο χώρο της λογικής, ερευνώντας κάθε πιθανή διαδρομή.
- Ο μαθηματικός μπορεί να επωφεληθεί από χάρτες πορείας, μεγαλύτερης (ήδη αποδεδειγμένα αποτελέσματα) ή μικρότερης (εικασίες) ακρίβειας.
- Ο μαθηματικός θα αντιμετωπίσει προκλήσεις, απογοητεύσεις, θα κερδίσει κάποιες μάχες (ενδιάμεσα αποτελέσματα) και θα χάσει κάποιες άλλες (αδιέξοδα), συχνά μπορεί να αλλάξει κατεύθυνση, θα επικουρείται από «μαγικούς βοηθούς» (μέντορες, συναδέλφους, από τη συσσωρευμένη γνώση του παρελθόντος), μπορεί να χρησιμοποιήσει ισχυρά φυλακτά ή όπλα (νέες μέθοδοι) και τέλος (σε ένα σενάριο με «happy end»), θα φτάσει στον προορισμό του, δηλαδή στην επιθυμητή απόδειξη του θεωρήματος.

Φυσικά η ευτυχής κατάληξη, όπως σημειώνει και ο συγγραφέας, δεν είναι υποχρεωτική. Ο μαθηματικός μπορεί να μην πετύχει το στόχο του ή να θεωρήσει ότι το τελικό αποτέλεσμα, δεν ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του (όπως παραδείγματος χάριν ο Nagata που εργαζόταν στο 14^{ο} πρόβλημα του Hilbert και τελικά απέδειξε μόνο το ψευδές) ή πάλι σαν κάποιο νεωτεριστικό ήρωα, μπορεί να σκεφτεί ότι έχει

[5] Το θεώρημα των πρώτων αριθμών, το απέδειξαν αρχικά, οι Hadamard και De la Vallée Poussin με μιγαδική ανάλυση.

φτάσει στην απόδειξη, ενώ στην πραγματικότητα αυτό δεν έχει συμβεί (όπως η σκέψη του Fermat ότι είχε αποδειχθεί θεώρημα του). Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί μια ουσιώδης διαφορά ανάμεσα στις ιστορίες και τα θεωρήματα: η επίτευξη του στόχου είναι το μόνο αποδεκτό happy end στις ιστορίες ενώ any end is a happy end στα μαθηματικά. Η απόδειξη ή η κατάρριψη μιας εικασίας είναι εξίσου αποδεκτές ως «λύσεις». Ο Δοξιάδης θεωρεί ότι τα πιθανά αποτελέσματα της χωρικής εξέλιξης του μαθηματικού, μέσα στο λαβύρινθο της αποδεικτικής διαδικασίας, μπορεί να κατέληξαν σε ορισμένους από τους διάφορους τρόπους, που αναφέρθηκαν προηγουμένως για τη μυθοπλασία, παρουσιάζοντας εδώ οπτικές για τους μαθηματικούς, παρόμοιες με αυτές που παρουσίασε νωρίτερα για τους «ήρωες»:

- Ο στόχος έχει επιτευχθεί και αυτό ικανοποιεί την ανάγκη του μαθηματικού (π.χ. Ευκλείδης και η απειρία των πρώτων αριθμών.)
- Ο στόχος έχει επιτευχθεί, αλλά ο μαθηματικός ή άλλοι εκφράζουν την απογοήτευσή τους με αυτό (π.χ. η απόδειξη του διάσημου θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων: Χρειάστηκαν 126 χρόνια, μέχρι να αποδειχθεί τελικά, ότι η εικασία αυτή είναι αληθινή. Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων είναι μάλιστα το πρώτο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών, που λύθηκε με ουσιαστική βοήθεια από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Η απόδειξη όμως, αμφισβητήθηκε επειδή κανείς δεν μπορεί να επιβεβαιώσει ότι στον κώδικα του υπολογιστή δεν υπήρχε κάποιο εγγενές λογικό σφάλμα. Ανάλογο παράδειγμα αποτελεί η απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών από τους Jacques Hadamard και De la Vallée Poussin. Οι Hadamard και De la Vallée Poussin κατόρθωσαν ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλον να το αποδείξουν, το 1896, αλλά πέρα από την αρχική ικανοποίηση για την εύρεση της απόδειξης, υπήρξε στη συνέχεια απογοήτευση εξαιτίας της πολυπλοκότητας των μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκαν. Οπότε ξεκίνησε μια διαδικασία αναζήτησης απλούστερου τρόπου απόδειξης του θεωρήματος. Τελικά το θεώρημα αποδείχθηκε με πιο στοιχειώδη μαθηματικά από τον Atle Seldberg.)
- Ο στόχος έχει επιτευχθεί, αλλά στη συνέχεια ο μαθηματικός αντιλαμβάνεται ένα νέο στόχο και έτσι ξεκινά ένα νέο ταξίδι (η απόδειξη του θεωρήματος δείχνει ένα πολύ πιο σημαντικό αποτέλεσμα). (π.χ. Η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων με ριζικά: Οι Βαβυλώνιοι επιλύουν το δευτεροβάθμιο. Η πρώτη δημοσίευση ενός τύπου για την επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων μέσω ριζικών, έγινε το 1545,

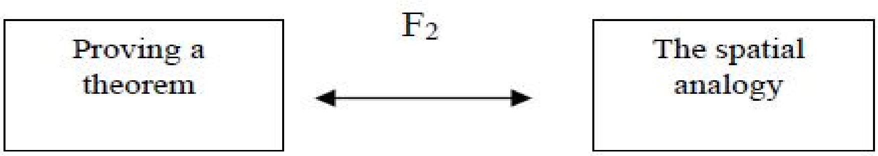
από τον Girolamo Cardano, αν και η αρχική ανακάλυψη της μεθόδου οφείλεται εν μέρει και στους Scipione del Ferro και Niccolo Tartaglia. Ο μαθητής του Cardano, Lodovico Ferrari ανακάλυψε μία μέθοδο για την επίλυση εξισώσεων τετάρτου βαθμού μέσω ριζικών. Ο Niels Henrik Abel το 1824 και το 1826 και αφού οι μαθηματικοί είχαν προσπαθήσει για χρόνια να βρουν τύπο με ριζικά, για τις ρίζες ενός πολυωνύμου πέμπτου βαθμού, δημοσίευσε μια πλήρη απόδειξη για τη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης πέμπτου βαθμού. Άρα λοιπόν με την απόδειξη του Abel επιτυγχάνεται ο στόχος και εν συνεχεία ο Galois βρίσκει κριτήρια, για τη δυνατότητα επίλυσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ριζικά.

- Ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί, αλλά αυτό κάνει τον μαθηματικό να συνειδητοποιήσει τη σημασία του ταξιδιού πάνω από το στόχο (π.χ. Στην προσπάθεια του να μελετήσει την κατανομή των πρώτων αριθμών, ο Riemann βρίσκει τη συνάρτηση ζήτα και διατυπώνει μια σειρά από εικασίες σχετικές με τις ιδιότητες της συνάρτησης ζήτα, μία εκ των οποίων είναι η περίφημη υπόθεση του Riemann: όλες οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης ζήτα έχουν πραγματικό μέρος ½. Η υπόθεση του Riemann δεν έχει ακόμη αποδειχτεί, αλλά οι προσπάθειες για την απόδειξη της, οδήγησαν σε μαθηματικές δραστηριότητες πέρα από τους πρώτους αριθμούς.)
- Ο στόχος έχει μόνο εν μέρει επιτευχθεί και ο μαθηματικός το αντιλαμβάνεται και το αποδέχεται (αποδείξεις που δεν διαχειρίζονται το πλήρες αποτέλεσμα, αλλά μια ασθενέστερη εκδοχή του, π.χ. η απόδειξη του Chen Jingrun, 1966, ότι κάθε άρτιος αριθμός είναι το άθροισμα πρώτων και ημι-πρώτων[6] - μια πιο αδύναμη εκδοχή της εικασίας του Γκόλντμπαχ).
- Ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί, αλλά αυτό δεν είναι πρόβλημα, επειδή ο μαθηματικός έχει καταλήξει σε νέα γνώση (π.χ. Ο Μέναιχμος παρουσίασε μια αξιόλογη λύση-με τη βοήθεια των κωνικών τομών, τις οποίες ανακάλυψε -στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, χωρίς ωστόσο την αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη. Το πρόβλημα δεν λύθηκε με καθαρά πλατωνικά κριτήρια, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη. Άρα ο στόχος δεν έχει επιτευχτεί, αλλά αυτό είναι καλό, διότι έτσι άνοιξε το κεφάλαιο των κωνικών τομών, τις οποίες χρησιμοποίησε αργότερα ο Kepler και έφτιαξε το ηλιακό σύστημα).

[6] Δηλαδή, γινόμενο δύο πρώτων

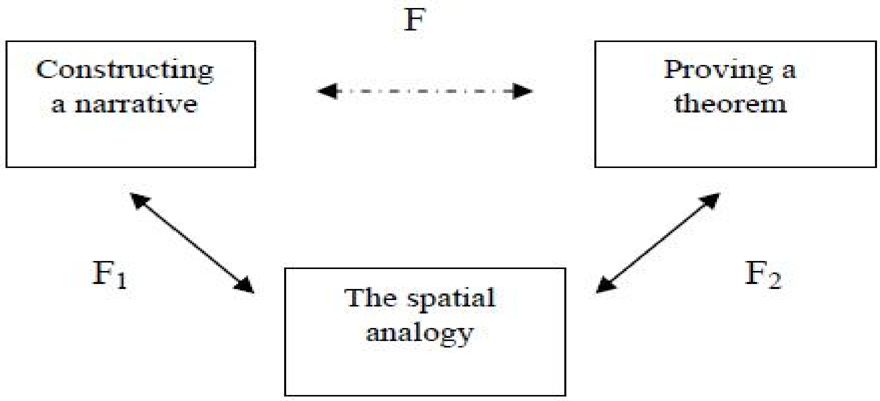
- Ο στόχος αυτός επιτεύχθηκε μόνο εν μέρει, ο μαθηματικός το αντιλαμβάνεται και δεν το αποδέχεται (π.χ. Το 1873, ο Cantor έγραψε στον δάσκαλό του, Dedekind, περιγράφοντάς του την απόδειξη *της μη αριθμησιμότητας* των *πραγματικών* αριθμών, σε αντίθεση με την *αριθμησιμότητα* των *ρητών* - όπου αριθμησιμότητα ενός συνόλου είναι, ακριβώς, η ιδιότητα να μπορούν να μπουν τα στοιχεία του, σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους *φυσικούς αριθμούς*, δηλαδή το 1, 2, 3, ... κ.ο.κ. Τα δύο αυτά θεωρήματα, οδήγησαν τον Cantor σε αναζήτηση για την πιθανή ύπαρξη ενός τρίτου είδους απείρου, σε κάποια υποσύνολα των πραγματικών, μεταξύ ρητών και πραγματικών, και στη λεγόμενη «Υπόθεση του Συνεχούς» που εικάζει ότι τέτοιο, τρίτο είδος δεν υπάρχει.)
- Ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί, και αυτό κάνει τον μαθηματικό λυπημένο. (π.χ. Ο Αϊνστάιν δεν μπόρεσε ποτέ να αποδεχθεί τα συμπεράσματα της Κβαντομηχανικής, και μάλιστα την ερμηνεία, που είχε διαμορφώσει η σχολή της Κοπεγχάγης. Συνήθιζε να λέει ότι ο Θεός δεν παίζει ζάρια, αναφερόμενος στο γεγονός ότι η Κβαντομηχανική, υπολογίζει μόνο την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός, οπότε η μελλοντική κατάσταση ενός συστήματος σωμάτων δεν είναι μονοσήμαντα γνωστή. Η διαμάχη του γι' αυτό το θέμα με τον Μπορ, έμεινε ιστορική. Από το 1930 ως το τέλος της ζωής του, το 1955, προσπάθησε να ενοποιήσει τη βαρύτητα με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Δυστυχώς αυτός ο στόχος αποδείχθηκε πολύ δύσκολος, ακόμη και για μια διάνοια όπως ο Αϊνστάιν. Έτσι δεν είναι περίεργο που ως σήμερα δεν το έχει καταφέρει κανένας άλλος.)

Δεδομένων όλων των προηγούμενων επιχειρημάτων ο συγγραφέας αναδεικνύει την ισοδυναμία F_2:



Το προηγούμενο σχήμα, αποδίδεται, στα ελληνικά:

Επομένως, με χρήση της μεταβατικής ιδιότητας, επαληθεύεται ο αρχικός ισχυρισμός του συγγραφέα, για την ύπαρξη ισομορφισμού, μεταξύ της κατασκευής αφήγησης και της απόδειξης μαθηματικών θεωρημάτων.



1.3 Γιατί οι ιστορίες και οι αποδείξεις είναι ενδιαφέρουσες;

Ο Bernard Teissier δίνει τη δική του διάσταση, στην αντιπαραβολή μαθηματικών και αφήγησης εξηγώντας γιατί οι ιστορίες και οι αποδείξεις είναι ενδιαφέρουσες.

Σύμφωνα με τον Teissier η έννοια της αφήγησης ποικίλλει ανάλογα με την τοποθεσία και δεν είναι εύκολο να οριστεί. Αντίστοιχα θεωρεί, ότι υπάρχουν πολλά είδη μαθηματικών κειμένων, που εξαρτώνται από τον χρόνο και τον τόπο, σημειώνοντας ότι καθώς οι πιο ευρέως γνωστές αφηγήσεις στις μέρες μας φαίνεται να είναι τα μυθιστορήματα, έτσι και τα πιο ευρέως γνωστά μαθηματικά κείμενα είναι πιθανώς οι αποδείξεις.

Για τον Teissier η αφήγηση, μεταξύ άλλων, παρέχει αντιπροσωπευτικά την εμπειρία μιας διαδρομής, σε ένα σύνολο (ή ένα γράφημα) αλληλεπιδράσεων μεταξύ των χαρακτήρων, οι οποίοι μπορεί να είναι άνθρωποι ή συλλογές ανθρώπων ή αντικείμενα του περιβάλλοντα κόσμου, ενώ ο αναγνώστης μιας αφήγησης δεν έχει συνήθως καμία δυσκολία, να ταυτιστεί με τους χαρακτήρες ή τουλάχιστον να συλλάβει την ουσία τους. Σε ορισμένες αφηγήσεις, ωστόσο, οι χαρακτήρες που δεν μπορούν να υπάρξουν στον πραγματικό κόσμο, δημιουργήθηκαν για να εκπληρώσουν ένα συγκεκριμένο ρόλο και στη συνέχεια η αναγνώριση μπορεί να γίνει πιο λεπτή, και ενδιαφέρουσα. Οι αποδείξεις είναι ομοίως κατά το συγγραφέα, μεταξύ άλλων, μονοπάτια, σε ένα γράφημα λογικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ καταφάσεων. Τονίζει ότι όπως ακριβώς, δημιουργήθηκαν οι χαρακτήρες σε ένα μυθιστόρημα, έτσι και στις αποδείξεις κάποια νέα αντικείμενα μπορεί να δημιουργήθηκαν για να εκπληρώσουν ένα συγκεκριμένο ρόλο.

Επισημαίνει την ύπαρξη μιας διαφοράς, που αφορά στην κατανόηση αποδείξεων και αφήγησης. Η κατανόηση της αφήγησης είναι άμεση, ενώ ο μαθηματικός έχει περισσότερες δυσκολίες να αναγνωρίσει τον εαυτό του, στους «χαρακτήρες» της απόδειξης και ως εκ τούτου, η κατανόηση μιας απόδειξης είναι εκ φύσεως, μια ξαφνική φώτιση, όταν εντελώς αναπάντεχα, «τα πάντα ταιριάζουν μεταξύ τους». Τα πράγματα διαφοροποιούνται σε αφηγήσεις, η αξία των οποίων έγκειται στη μεταφορική ή συμβολική τους φύση, οπότε η κατανόηση τους, πλησιάζει την κατανόηση μιας απόδειξης.

Επεξηγώντας περαιτέρω τι εννοεί με τον όρο κατανόηση μιας απόδειξης, ισχυρίζεται, ότι η κατανόηση αυτή, βασίζεται στην έννοια/το νόημα και όχι στη λογική. Πιστεύει ότι μια απόδειξη, ίσως γίνει περισσότερο αντιληπτή μόνο όταν κατανοηθεί ως μια αφήγηση.

«*Κατανοούμε όταν έχουμε εξάγει από την απόδειξη ένα δυναμικό σχέδιο, το οποίο μέσα από μια σειρά αναλογιών και ερμηνεία μαθηματικών αντικειμένων, από την άποψη της πρωτόγονης εμπειρίας μας για τον κόσμο, είναι συμβατό με αυτή την εμπειρία.*» (σελ.233)

Υπογραμμίζει ότι η γνώση αυτών των αναλογιών και των ερμηνειών, προκύπτει όταν κανείς εκπαιδευτεί ως μαθηματικός και αργότερα, καθώς προσπαθεί να καταλάβει τα μαθηματικά, ενώ η αφήγηση δεν απαιτεί ιδιαίτερη εκπαίδευση, καθώς εκφράζεται άμεσα με όρους της εμπειρίας του ατόμου, για τον κόσμο.

Σύμφωνα με τον Teissier αναμένεται τα μαθηματικά κείμενα να είναι «αληθή», σύμφωνα με έναν συγκεκριμένο και ακριβή ορισμό, γεγονός που αποτελεί έναν πολύ σοβαρό περιορισμό, ενώ δεν αναμένεται οι αφηγήσεις να είναι «αληθείς» υπό την ίδια έννοια. Η σύνδεση που επιθυμεί να καθιερώσει μεταξύ Μαθηματικών και Αφήγησης, είναι ότι στην πραγματικότητα τα Μαθηματικά πρέπει να έχουν νόημα με μια ισχυρή αλλά όχι προφανή έννοια, και η αφήγηση επίσης πρέπει να είναι αληθινή, με μια ισχυρή, αλλά όχι προφανή έννοια, καθώς και τα δύο είναι προϊόντα των αλληλεπιδράσεων, μεταξύ (σωματικής, συναισθηματικής) της αντίληψής του ατόμου για τον κόσμο και ορισμένων πολύ ισχυρών και κυρίως ασυνείδητων ορμών, μερικές από τις οποίες σχετίζονται με το Φροϋδικό ασυνείδητο, αλλά υπάρχουν και άλλες, διαφορετικής φύσης, που μένει να διερευνηθούν. Για να καταστεί περαιτέρω σαφής η άποψη του Teissier, δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα[7]. Αν αναλογιστεί κανείς το αξίωμα της υπερβολικής γεωμετρίας σύμφωνα με το οποίο, από σημείο εκτός ευθείας άγονται άπειρες παράλληλες προς την ευθεία αυτή, γίνεται αντιληπτό ότι παρόλο που πρόκειται για μια πρόταση, η οποία είναι αληθής με βάση σαφείς και προκαθορισμένους κανόνες, [8]στην πραγματικότητα, η όποια προσπάθεια, να σχεδιαστούν σε μια κόλλα χαρτί από σημείο εκτός ευθείας, άπειρες παράλληλες, προς τη δοθείσα, ευθείες δεν έχει νόημα. Από την άλλη, η αφήγηση των ταξιδιών του Γκιούλιβερ, στη χώρα των Λιλιπούτειων δεν είναι αληθής, όχι εξαιτίας της γνώσης ότι δεν πήγε ο Γκιούλιβερ εκεί, αλλά γιατί δεν επιδέχεται με κανένα τρόπο μια διαδικασία απόδειξης που να την κατοχυρώνει. Ωστόσο και αυτή η ιστορία έχει νόημα αλληγορικό-μεταφορικό, όπως και το παραπάνω αξίωμα της υπερβολικής γεωμετρίας έχει νόημα, παρόλο που αυτό το νόημα δεν είναι προφανές.

Ο Teissier πιστεύει ότι θα ήταν συναρπαστικό να υπάρξει μια ανάλυση μαθηματικών κειμένων, που να προσπαθεί να φέρει στο φως, το «κρυφό νόημα» τους και τον τρόπο με τον οποίο αυτό το κρυφό νόημα, αλληλεπιδρά με τη δομή, διότι θα συμπληρωνόταν ο έλεγχος της ορθότητας τους και η κατανόηση και θα διυλίζονταν τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία. Παρατηρεί όμως, ότι ακόμη και δύο αιώνες μετά τον Καντ, η κυρίαρχη επιστημονική κουλτούρα, δεν έχει ακόμη πλήρως αποδεχτεί το γεγονός, ότι το νόημα δεν μπορεί να αναχθεί σε ορθολογική και συνειδητή σκέψη, θέτοντας ένα ακόμη εμπόδιο, για την κατανόηση της σχέσης μαθηματικών και αφήγησης.

Προτείνει ότι πρέπει κανείς, να διακρίνει ανάμεσα στα θεμέλια της αλήθειας και τα θεμέλια του νοήματος, για να εξετάσει τις πραγματικές διαφορές-και ομοιότητες-μεταξύ αφηγηματικού και μαθηματικού νοήματος, και τις διαφορές-και ομοιότητες-μεταξύ των ορμών, που οδηγούν στη δημιουργία των αφηγήσεων και εκείνων, που οδηγούν στη δημιουργία των Μαθηματικών. Η πρόοδος των γνωστικών

[7] Το συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποίησε ο Μιχαηλίδης στην παρουσίαση του βιβλίου Circles Disturbed όπου συμπεριλαμβάνεται το δοκίμιο του B. Teissier.

[8] Η πρόταση αυτή, αποτελεί αξίωμα της υπερβολικής γεωμετρίας. Το 1868, στο *«Δοκίμιο επί μίας ερμηνείας της μη-ευκλείδειας Γεωμετρίας»*, ο Beltrami έδωσε το πρώτο μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Σε αυτό, οι γραμμές της Υπερβολικής Γεωμετρίας αντιπροσωπεύονται από γεωδαισιακές πάνω στην ψευδοσφαίρα. Με τον τρόπο αυτό ο Beltrami, προσπάθησε να αποδείξει ότι το Αξίωμα των παραλλήλων του Ευκλείδη δεν μπορούσε να εξαχθεί από τα άλλα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ωστόσο, αυτή η απόδειξη αποτυγχάνει, καθώς η ψευδοσφαίρα είναι μόνο ένα μικρό υποσύνολο του υπερβολικού επιπέδου.

επιστημών, δημιουργεί ριζικά νέες δυνατότητες, στη μελέτη των θεμελίων του νοήματος, παρέχοντας την αρχή μιας νέας κατανόησης, στην αντίληψή των ανθρώπων για τον κόσμο, τη μνήμη και τα μυριάδες ασυνείδητα γεγονότα που φιλοξενεί, αντικαθιστώντας τις μάταιες προσπάθειες να αναλυθεί το νόημα «*ορθολογικά*», επισημαίνει ο συγγραφέας.

Στη συνέχεια, επιχειρεί να δώσει μια πρώτη εξήγηση, για τον όρο, γνωστικό νόημα, σε μια προσπάθεια να φωτίσει τις σχέσεις μαθηματικών και αφήγησης. Διακρίνει δύο τύπους συστατικών:

- Μια γνωστική ερμηνεία, ορισμένων πρωτόγονων μαθηματικών αντικειμένων. Η πρόοδος των νευροεπιστημών, επιτρέπει κατά τον Teissier στα άτομα, να αρχίσουν να βλέπουν, τη βιολογική βάση, του αμείωτου συστατικού ρόλου του χώρου και του χρόνου, στην αναπαράσταση των φαινομένων. Έναν ρόλο, που ο Καντ, ο Poincaré, ο Hermann Weyl, ο Enriques, και άλλοι, υπογράμμισαν τη σημασία του.
- Η πηγή ενέργειας και η δόμηση, που παρέχονται από αυτό που ο συγγραφέας αποκαλεί «*χαμηλό επίπεδο σκέψης*».

Με τον όρο αυτό, ο Teissier, εννοεί ακούσιες και πιο συχνά ασυνείδητες διαδικασίες σκέψης. Δηλαδή ακούσιες αποφάσεις, όπως διακρίσεις σε ακίνητο/ κινητό, ανομοιογενές/ομοιογενές, αυτόματη σύγκριση πραγμάτων που μπορούν να συγκριθούν, για παράδειγμα από πλευράς μεγέθους, ανίχνευση χρονικών και γεωγραφικών κανονικοτήτων ή συμμετριών, αναλογίες, διάκριση μεταξύ ενός αντικειμένου και των χαρακτηριστικών/ιδιοτήτων του, αναγνώριση των αντικειμένων που μοιράζονται ακριβώς τα χαρακτηριστικά που ενδιαφέρουν τα άτομα. Στο «*χαμηλό επίπεδο σκέψης*» συμπεριλαμβάνει επίσης, αυτά που είναι προφανώς θεμελιώδεις ανάγκες ή ορμές του ανθρώπινου μυαλού, όπως η επίμονη αναζήτηση για τις αιτίες ή την προέλευση, η ανάγκη για ερώτηση, αν κάθε φορά που το Α συνεπάγεται το Β, αν το Β συνεπάγεται το Α, η ανάγκη για προβολή στο μέλλον, η ανάγκη να ολοκληρώσει αυτό που δεν είναι πλήρες, να αποσυνθέσει ένα σύνθετο αντικείμενο ή μηχανισμό σε απλά αντικείμενα ή μηχανισμούς, η ανάγκη να ταξινομήσει, και πολλά άλλα.

Καταλήγει ότι η κοινή ιδέα των δύο αυτών συστατικών, είναι ότι ο εγκέφαλος, είναι η έδρα των ασυνείδητων και ακούσιων δραστηριοτήτων, εκ των οποίων ένα μέρος μοιάζει με τα Μαθηματικά, και ότι αυτές οι ασυνείδητες δραστηριότητες αλληλεπιδρούν με συνειδητές δραστηριότητες , «*ως δεξαμενές του νοήματος*». Αυτό που γίνεται αντιληπτό ως νόημα, είναι για το συγγραφέα, η απήχηση που παράγεται από τη φυσιολογία, μεταξύ της συνειδητής σκέψης του ατόμου και της δομής του κόσμου, όπως αυτή ολοκληρώνεται, ασυνείδητα, από τις αισθήσεις του.

Για να καταστήσει σαφείς, τους παραπάνω ισχυρισμούς του, παραθέτει ως παράδειγμα την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Κατά τον συγγραφέα για να φτάσει κανείς στο μαθηματικό αντικείμενο, που στην περίπτωση αυτή είναι η ευθεία των πραγματικών, πρέπει να συγκεράσει, να απλοποιήσει, να συνδυάσει, και να αντιπαραβάλει διάφορα ερεθίσματα. Επομένως, στην κατάληξη της αντίληψης του ατόμου για τη μαθηματική ευθεία των πραγματικών αριθμών, συνέβαλλαν τα ερεθίσματα και οι εικόνες από την οπτική γραμμή του ματιού και την αιθουσιαία γραμμή του αυτιού.

Συμπερασματικά, πρέπει να σημειωθεί, ότι κατά κάποιον τρόπο, οι απόψεις του Teissier, ότι η αποδοχή και κατ’ επέκταση η κατανόηση μιας απόδειξης βασίζονται στις ήδη υπάρχουσες ιδέες και ερεθίσματα, έρχονται σε αντιπαράθεση με το λογικισμό, όπου μια απόδειξη έχει σαφείς κανόνες.

1.4 Η επιρροή της αφήγησης στις αποδείξεις των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών

Στην εργασία του «A Streetcar Named (among other things) Proof: Narrative and poetic roots of deductive mathematics», ο Δοξιάδης, δίνει τη δική του ερμηνεία, για την επιρροή της αφήγησης, στις αποδείξεις των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και ειδικότερα, στις γεωμετρικές αποδείξεις των «Στοιχείων», του Ευκλείδη. Πιο συγκεκριμένα, ισχυρίζεται ότι η μεθοδολογία της απόδειξης, δεν γεννήθηκε εκ του μηδενός, αλλά ήταν το αποτέλεσμα της σταδιακής μετατροπής και της σύγκλισης διαφόρων εξελισσόμενων πρακτικών, στην καρδιά των οποίων βρίσκεται, η ανθρώπινη ικανότητα για αφήγηση ιστοριών, προκειμένου να εξυπηρετηθούν νέες, αναδυόμενες πολιτισμικές ανάγκες.

Λόγω της έκτασης της εργασίας, θα προσπαθήσουμε, να εστιάσουμε στα κύρια σημεία της. Ο Δοξιάδης, αρχικά επιχειρεί μια ανασκόπηση των ερευνών, γύρω από την εμφάνιση της μαθηματικής απόδειξης, που συνοψίζεται στα παρακάτω: Η εμφάνιση στον κλασικό κόσμο, του συστηματικού ορθολογισμού, έχει εξιδανικευτεί σε έναν χρονολογημένο τόπο, της πνευματικής ιστορίας, που είναι γνωστός ως «το ελληνικό θαύμα». Αν και οι νεότερες προσεγγίσεις, εξετάζουν την ανακάλυψη της απόδειξης, υπό ένα πιο ιστορικά ενημερωμένο πρίσμα, εξακολουθεί να υπάρχει στο κέντρο τους, η ιδέα μιας ασυνέχειας, θεωρώντας την εμφάνιση του ορθολογισμού, ως μια ρήξη με το παρελθόν. Αυτή η αίσθηση, της πλήρους εγκατάλειψης των παλαιών πρακτικών, για κάτι εντελώς νέο, είναι ιδιαίτερα ισχυρή στην περίπτωση, της εμφάνισης, της μαθηματικής απόδειξης και ενισχύεται από την απουσία πρώιμων μαθηματικών κειμένων. Επιπλέον, μέχρι τις τελευταίες δεκαετίες, οι ιστορικοί των μαθηματικών, μελέτησαν την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, τις τεχνικές και τα αποτελέσματα, μόνο από μια εσωτερική άποψη για την πειθαρχία, δηλαδή, εάν οι μαθηματικοί, κάθε ηλικίας, μίλησαν, διάβασαν ή επηρεάστηκαν από άλλους μαθηματικούς (τα μαθηματικά γέννησαν μαθηματικά, και αυτό ήταν).

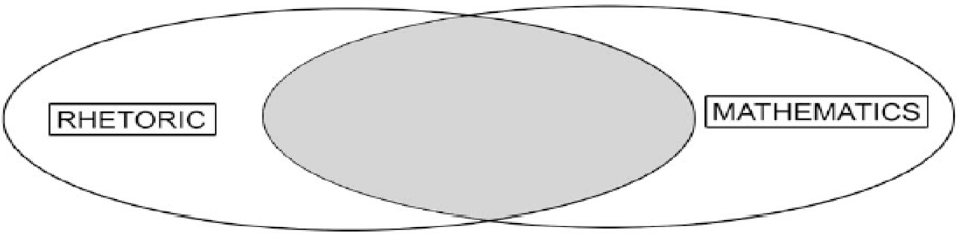
Παρά τη σημαντική πρόσφατη έρευνα, των τελευταίων δεκαετιών, που βασίζεται στην αυτονόητη παραδοχή, ότι οι επιστήμονες δε λειτουργούν σε πολιτιστικό κενό, η ιστορία προέλευσης της απόδειξης δεν έχει ακόμη γραφτεί. Στην πραγματικότητα, αντί να σκεφτόμαστε, μια μοναδική νέα μέθοδο, ονομαζόμενη «απόδειξη», όπως αυτή τυποποιήθηκε στο βιβλίο του Αριστοτέλη «Όργανον» (ή Λογικά) και παρουσιάστηκε σε πλήρη χρήση στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, μπορούμε να τη σκεφτούμε ως μια συνεκδοχή της γραμμής απόδειξης, ή διεργασία αυτής. Γιατί, όπως ο G.E.R. Lloyd γράφει, ακόμη «και επιτρέποντας στον Αριστοτέλη τη δική του πρωτοτυπία, η έννοια της αυστηρής απόδειξης, δεν ξεπήδησε από το κεφάλι του, πάνοπλη, σαν άλλη Αθηνά», σημειώνει ο συγγραφέας.

Ο συγγραφέας παραλληλίζει το τραμ και τους σταθμούς από τους οποίους διέρχεται, με τα διαδοχικά στάδια, από τα οποία πέρασε, αυτό που σήμερα καλείται απόδειξη. Θεωρεί ότι το έργο των Gernet (1981) και Vernant (1984) και η περαιτέρω ανάπτυξη του, από άλλους μελετητές, μεταξύ των οποίων οι Vidal-Naquet, (με Vernant 1988), Detienne (1996) και Loraux (2006), αποκαλύπτει, ότι η ώθηση, για την ανάπτυξη της λογικής, καθορίστηκε από τις ανάγκες και τις ευκαιρίες, που δημιουργήθηκαν από τους νέους δημοκρατικούς θεσμούς του πέμπτου αιώνα.

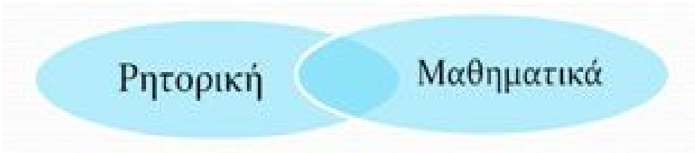
Κατά το Δοξιάδη κανείς δεν αμφισβητεί ότι η ρητορική τέχνη ή πειθώ, χρησιμοποιεί επίσης μια μορφή απόδειξης και ως εκ τούτου, παίζει επίσης ρόλο, στην εμφάνιση της απόδειξης στα Ευκλείδεια μαθηματικά. Τονίζει ότι αυτό το είδος απόδειξης, είναι εντελώς διαφορετικό από το συνονόματό του, στα μαθηματικά.

Θεωρεί ότι αυτή η άρνηση, της μεταξύ τους, ουσιώδους ομοιότητας, που πηγάζει με βεβαιότητα από την-πλατωνικά καταγόμενη-προκατάληψη, που θέτει τη ρητορική στον αντίποδα της λογικής, απέτρεψε την έρευνα της ρητορικής πρακτικής, από το να γίνει ουσιώδης, στη γνωστική ιστορία των λογικό-επαγωγικών αποδείξεων.

Ξεκινά από τη θέση ότι οι δύο πρακτικές, έχουν μια μεγάλη περιοχή όπου επικαλύπτονται, ή σε απλή διαγραμματική μορφή:



Σχ.1

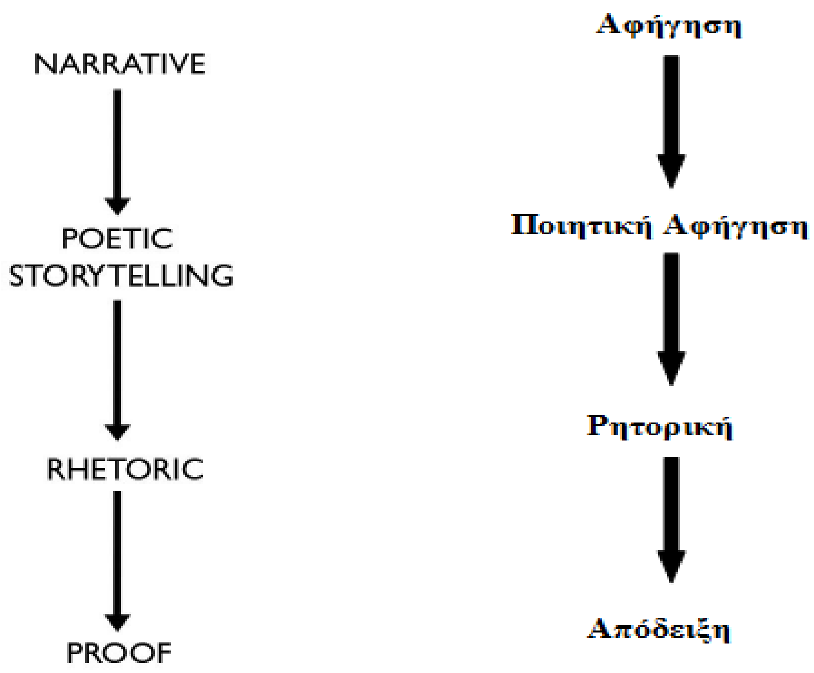


Τονίζει ότι οι παλαιότεροι, σχεδόν αποκλειστικά εσωστρεφείς ιστορικοί των μαθηματικών, ασχολήθηκαν με τη δεξιά πλευρά του σχήματος, «χυτεύοντας», όπως χαρακτηριστικά λέει, προς την αριστερή, για να αναδείξουν τις διαφορές της ρητορικής από τα μαθηματικά. Ο Δοξιάδης αρχίζει από την αντίθετη πλευρά, προσπαθώντας να καταλάβει τις ομοιότητες τους.

Εντοπίζει την άνθιση των δύο πρακτικών στον ίδιο περίπου χρόνο, το δεύτερο μισό του 5^{ου} αιώνα, μέσα ή γύρω από τους ίδιους κύκλους καλλιεργημένων ατόμων, που ζουν στις ίδιες, λίγο πολύ, ελληνικές πόλεις, στο αντιπαρατιθέμενο πολιτιστικό πλαίσιο, της ελληνικής δημοκρατίας, στο οποίο καλλιεργείται «η φιλοδοξία να εξασφαλιστεί μια επίδειξη που θα φιμώσει την αντιπολίτευση και τους λοιπούς». Ο εντοπισμός ομοιοτήτων, μεταξύ των σύγχρονων πρακτικών Α και Β θέτει κατά το συγγραφέα το ερώτημα της γενεαλογίας. Στη γενική περίπτωση, υπάρχουν τρεις δυνατότητες: 1)Η Α γέννησε τη Β; 2)Η Β γέννησε την Α; 3)Και οι δύο είναι απόγονοι ενός κοινού προγόνου; Αν και η έκθεση του, όπως ο ίδιος σημειώνει, περιλαμβάνει σε μεγάλη δόση την τρίτη δυνατότητα, έχει την τάση να βρίσκεται στο πλευρό εκείνων, που θεωρούν ότι η ρητορική, είχε μεγαλύτερη επιρροή στα μαθηματικά, από εκείνους, όπως ο Szabo (1978), οι οποίοι βλέπουν την επιρροή κυρίως προς την άλλη κατεύθυνση. Ο συγγραφέας επαναλαμβάνει αυτή την άποψη και στην εργασία «Sing, Muse, of the Hypotenuse».Greek mathematicians as Poets, Storytellers and Orators όπου μαζί με τον Σιάλαρο, θεωρούν ότι το ζήτημα της κατεύθυνσης, αν δηλαδή «η ρητορική επηρεάστηκε από τα μαθηματικά» ή αν «τα μαθηματικά επηρεάστηκαν από τη ρητορική» ή αν ως προς αυτό το θέμα «επηρέασαν ο ένας τον άλλο» -αν και τα τρία είναι πιθανά- λιγότερο διαφωτιστικό από το ότι «η ποίηση παρείχε το υλικό και για τα δύο».

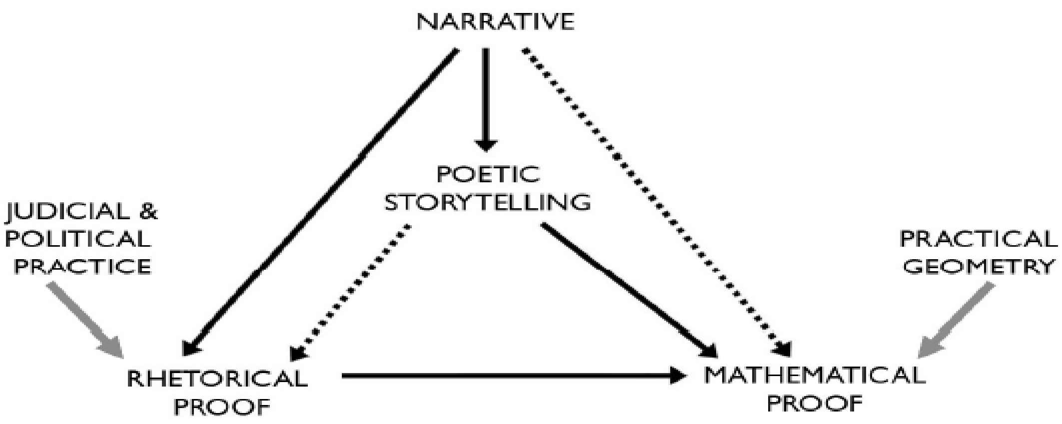
Θεωρεί σημαντικό, πριν από την εξέταση, για το πώς ρητορικές έννοιες, μέθοδοι και πρότυπα, έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην μαθηματική απόδειξη, ότι θα πρέπει να μάθουμε πώς έφτασαν εκεί, στην πρώτη θέση. Το να ειπωθεί ότι τα μαθηματικά, πήραν τα κύρια λογικό-παραγωγικά τους, αποδεικτικά εργαλεία από τη ρητορική, αφήνοντας ανεξήγητο το πως τα εργαλεία αυτά εντάχθηκαν στη ρητορική, είναι σαν να εντοπίζεται εκ νέου, αντί να απαντάται το αρχικό ερώτημα, επισημαίνει ο Δοξιάδης.

Αποτυπώνει γραφικά αυτή την ιστορική εξέλιξη. Ξεκινά με την αφήγηση από εκεί πηγαίνει στην Ποιητική αφήγηση, στη Ρητορική και στον απώτερο στόχο την Απόδειξη:

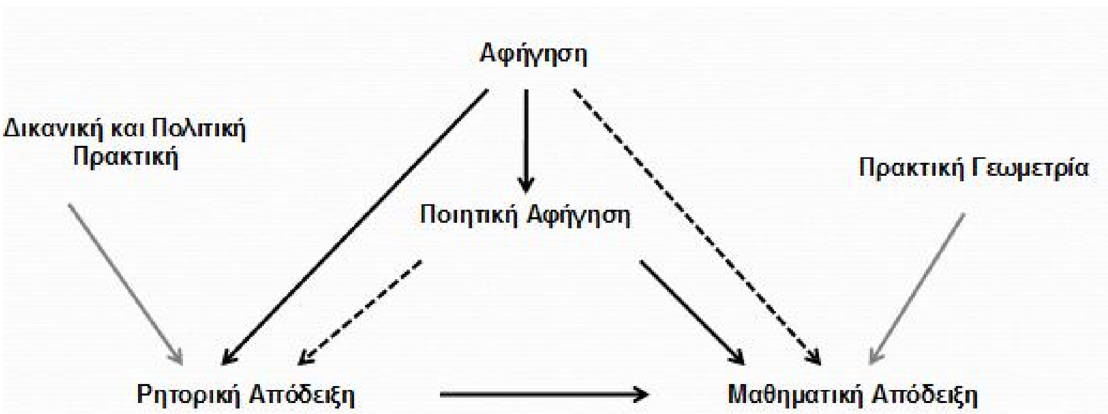


Σχ. 2

Όμως, ως απόδειξη, μετά από ένα ορισμένο σημείο στην κλασική εποχή, σημειώνει, ότι δεν θεωρείται πραγματικά μία πρακτική, αλλά δύο, που σχετίζονται και οι οποίες εκτείνονται στη ρητορική και τα μαθηματικά, οπότε αλλάζει το γραμμικό διάγραμμα του Σχ.2 στο Σχ. 3, το οποίο δίνει μια πιο επαρκή εικόνα της κατάστασης, ειδικά κατά την περίοδο που μας ενδιαφέρει, τον τέταρτο και τον πέμπτο αιώνα π.Χ.



Σχ.3



Στο παραπάνω σχήμα, τα μαύρα στερεά βέλη υποδηλώνουν την άμεση επιρροή, τα διακεκομμένα την έμμεση, ενώ τα γκρι, τις μη προερχόμενες από την αφήγηση επιρροές, επιρροές που προέρχονται από τις συγκεκριμένες περιοχές, στις οποίες γεννήθηκε η ανάγκη για τέτοιου είδους αποδείξεις, δηλαδή τη δικαστική και γεωμετρική πρακτική , αντίστοιχα.

Ακολουθώντας τη δομή του κειμένου, θα προσπαθήσουμε να ξετυλίξουμε το κουβάρι της διαδρομής, που με αφετηρία την ελληνική ποιητική αφήγηση, οδήγησε στην ανάπτυξη της μαθηματικής πρακτικής, που καλείται απόδειξη.

1.4.1 Αφήγηση

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστούν, ορισμένες γνωστικές πτυχές της αφήγησης, όπως καταγράφονται στην εργασία του Δοξιάδη.

Κατ' αρχάς είναι απαραίτητη η διάκριση των όρων, αφήγηση και ιστορία-διήγηση (narrative & story, στο πρωτότυπο). Αφήγηση (προφορική ή γραπτή) είναι η έκθεση σειράς γεγονότων (πραγματικών ή φανταστικών) με ορισμένο τρόπο (λογοτεχνικό, ιστορικό, παραμυθικό κ.ά.). Διήγηση είναι η εξιστόρηση (γεγονότος, περαστικού κλπ.) καθώς και το ίδιο το κείμενο που την περιέχει, προφορική, γραπτή αφήγηση (ιστορία).[9]Ο συγγραφέας επισημαίνει ότι ενώ συχνά χρησιμοποιούνται ως συνώνυμα, εντούτοις, θεωρεί τον πρώτο όρο, ως πιο γενικό από τον τελευταίο. Βασιζόμενος στην παραπάνω διάκριση, καταλήγει ότι όλες οι ιστορίες είναι αφηγήσεις, αλλά δεν είναι όλες οι αφηγήσεις, ιστορίες. Η ικανότητά μας για αφήγηση, θεωρεί ότι είναι μία από τις πιο βασικές γνωστικές δεξιότητες μας. Αν και η ικανότητα αυτή είναι αναγκαία, από μόνη της δεν αρκεί, για να εξηγήσει την πολυπλοκότητα ή την εξελιγμένη μορφή πολλών ιστοριών, οι οποίες επίσης απαιτούν, για τη δημιουργία τους, μια πολιτισμικά αναπτυχθείσα πρακτική. Κατά τον Δοξιάδη, η «αφήγηση» δηλώνει έναν τρόπο ομιλίας, στόχος του οποίου είναι να εκπροσωπεί τη δράση. Επικαλείται τον Carroll, σύμφωνα με τον οποίο, τα βασικά συστατικά της (προφορικής) αφήγησης, είναι φράσεις, που περιγράφουν «δράση» (π.χ. Ο Ιωάννης έφαγε ένα μήλο) ή «γενική κατάσταση των πραγμάτων» (π.χ. Ο Βασιλιάς είναι παχύς). Μας πληροφορεί ότι η πρώτη φράση, είναι στην πραγματικότητα, ένα ατομικό μέρος του λόγου, στη λειτουργία της αφήγησης, ενώ η δεύτερη δεν είναι αφήγηση, καθώς δεν εξελίσσεται στο χρόνο, αναγκαία προϋπόθεση, για την αναπαράσταση της δράσης. Αναφέρει ότι μεγαλύτερα τμήματα αφήγησης, μπορεί να περιέχουν και τα δύο είδη ατομικών προτάσεων, καθώς οι προτάσεις γενικής κατάστασης των πραγμάτων, εμπλουτίζουν την αναπαράσταση της δράσης. Συμπληρώνει ότι ένα άλλο βασικό συστατικό της αφήγησης, είναι ο διάλογος, ο οποίος, σε μια αναλυτική προσέγγιση, μπορεί πραγματικά να υπαχθεί και στα δύο προηγούμενα είδη, δεδομένου, ότι αποτελείται από συνδυασμούς των δύο ειδών ατομικών προτάσεων. Επίσης ο «κανόνας» ή «γνώμη», αποτελεί κατά το συγγραφέα, το τρίτο συστατικό της αφήγησης, το οποίο, διακρίνεται από τα δύο

[9] Οι ορισμοί αφήγησης και διήγησης προέρχονται από το Λεξικό Μπαμπινιώτη.

πρώτα, διότι δεν περιγράφει τόσο πολύ ενέργεια, αλλά σκέψη του χαρακτήρα ή του αφηγητή. Σαφώς, δεν είναι όλες οι μορφές αφήγησης, μίγματα από τα τρία είδη των συστατικών φράσεων, καταλήγει ο συγγραφέας. Αναφέρεται στην προσπάθεια των μελετητών, να καθορίσουν τα κριτήρια, που προσδιορίζουν το τι συνιστά αφήγηση, σε τυπικό επίπεδο. Για το συγγραφέα, το κριτήριο για την αφηγηματικότητα μεταφέρεται από την αναπαράσταση, στην εγκυρότητα της νοητικής αναπαράστασης, για την απεικόνιση της δράσης. Δηλαδή, αν μια αλληλουχία, από τα τρία είδη συστατικών προτάσεων που αναφέρονται στο κείμενο, δημιουργεί μια επαρκή αναπαράσταση στο μυαλό του ακροατή, τότε ο συγγραφέας θεωρεί ότι εντάσσεται στη λειτουργία της αφήγησης, εάν πάλι όχι, τότε δεν εντάσσεται, παρόλο που τα τμήματα είναι στη λειτουργία της αφήγησης. Το γεγονός ότι υπάρχουν αποκλίσεις, από ακροατή σε ακροατή, δεν ακυρώνει τον ορισμό, αλλά οι αποκλίσεις αυτές, εδράζονται στη συγκεκριμένη γνωστική πραγματικότητα, στην οποία θα πρέπει ούτως ή άλλως να ανήκουν, σημειώνει ο συγγραφέας.

Υποστηρίζει, ότι στην πραγματικότητα η αφήγηση είναι η συμβολική διαμεσολάβηση μεταξύ δύο κόσμων, του κόσμο των δράσεων και του κόσμο των νοητικών αναπαραστάσεων (ενεργειών, δράσεων). Θεωρεί τις αφηγήσεις ως μονοπάτια, γραμμικές αλληλουχίες προερχόμενες από μη γραμμικούς κόσμους. Το ενδιαφέρον τους, έγκειται σύμφωνα με το συγγραφέα, στο ότι οριοθετούν το εύρος των ενδεχομένων. Σε κάθε περίπτωση επιλέγεται ένα, από τα πολλά. Το «ένα» είναι γραμμικό, τα «πολλά» πίσω από αυτό δεν είναι. Για να αποκαλυφθεί η κρυμμένη μη-γραμμικότητα πίσω από μια αφήγηση, προτείνει ότι θα πρέπει, είτε να εξεταστούν πιο προσεκτικά οι αιτίες ενός συγκεκριμένου γεγονότος (εισερχόμενη μη-γραμμικότητα), είτε οι πιθανές εναλλακτικές λύσεις του (εξερχόμενη μη-γραμμικότητα).

Σύμφωνα με το συγγραφέα, οι αφηγήσεις ενός μη-γραμμικού κόσμου επιλέγονται να είναι τεράστιες, αλλά όχι κατ' ανάγκη απεριόριστες ή εντελώς άμορφες. Στη συνέχεια, το εξηγεί περαιτέρω, λέγοντας, ότι όταν ένα πρόσωπο ενεργεί, στη ζωή, στη φαντασία ή σε μια αφήγηση, αυτός ή αυτή εν μέρει καθοδηγείται από την ανάγκη και τις διαθέσιμες επιλογές, και αυτό ήδη δίνει κάποια δομή, σε ένα τουλάχιστον μέρος του αφηγηματικού κόσμου. Διακρίνει τρεις κατηγορίες στρατηγικών, για την αντιμετώπιση της ακραίας πολυπλοκότητας των μη-γραμμικών κόσμων, τις οποίες και επεξηγεί:

- *Την γλώσσα των στόχων και των επιμέρους στόχων*. Πάθη, ανάγκες, συνήθειες, και ούτω καθεξής, ενεργούν πάνω στους χαρακτήρες των αφηγήσεων – όπως συμβαίνει και στη ζωή - για να δώσουν στη δράση τους, μια ώθηση προς τα εμπρός και με τον τρόπο αυτό, περιορίζονται οι επιλογές. Η δράση είναι συνήθως προσανατολισμένη στο στόχο και έτσι διαρθρώνεται με τρόπους που επηρεάζονται από το στόχο.

- *Επεκτασιμότητα (Σπονδυλωτή κατασκευή) και περιγράμματα.* Οι άνθρωποι συλλαμβάνουν αφηγήσεις αποτελούμενες από μέρη, τα οποία μπορεί να συμπτυχθούν σε μικρότερες εκδοχές. Αν και αυτά τα περιγράμματα, χάνουν πολλές από τις πληροφορίες που περιέχονται στην εκτεταμένη μορφή, μπορούν να είναι -εν μέρει, για αυτόν ακριβώς το λόγο- εξαιρετικά χρήσιμα σε γνωστικό επίπεδο, βοηθώντας να κατανοηθεί καλύτερα το γενικό σχήμα της δράσης και άρα να προσανατολιστεί το άτομο, σε έναν αφηγηματικό κόσμο ταυτόχρονα σε μάκρο και σε μίκρο-επίπεδο.
- *Φόρμουλες, Μοτίβα, Τύποι και Είδη.* Όπως σε κάθε ανθρώπινη υψηλή διανοητική δραστηριότητα έτσι και στην ανθρώπινη ικανότητα σύνθεσης και κατανόησης ιστοριών, η έμφυτη γνωστική δυνατότητα, εμπλουτίζεται από μια παράδοση διαμορφωμένη για μεγάλες χρονικές περιόδους από την πολιτιστική πρακτική. Σύμφωνα με την εργασία του Δοξιάδη, η πρόταση των γνωστικών ψυχολόγων, Piaget (1973) και Neisser (1976) ότι η δράση διέπεται από νοητικά μοντέλα (συστήματα), τα οποία είναι δομημένα και ιεραρχικά και η έννοια του αλγορίθμου, έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της ιδέας του σεναρίου (Schank και Abelson 1977), ή γενικής αφήγησης, που ταυτόχρονα οριοθετεί και διατάσει τις επιλογές για δράση, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Και συνεχίζει ότι η ύπαρξη των σεναρίων, ως οδηγών για τη γνωστική λειτουργία, δείχνει ότι ένα μεγάλο μέρος της εργασίας αναπαράστασης που μπαίνει σε μια αφήγηση, είναι ήδη εκεί, πριν συμβεί η ενέργεια που περιγράφει. «*Οι νοητικές αναπαραστάσεις δεν είναι απλώς καθρέφτες που διατηρούν τη φύση αλλά καλούπια για τη διαμόρφωση της.*» (σελ.293)Κατά το συγγραφέα οι βασικές ιδιότητες της αφήγησης-η ατομική δομή και η αλληλεπίδραση μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών-δεν ακυρώνονται κατά την εξιστόρηση. Σε μια περίτεχνη αφήγηση, στην κορυφή όλων των παραπάνω, έρχονται να προστεθούν οι πολιτιστικές επιρροές. Οι ανάγκες και οι ευκαιρίες, οι πεποιθήσεις, τα έθιμα, οι μυθικές ιδέες, τα τελετουργικά, η μουσική, ο χορός και οι εικαστικές τέχνες από μια συγκεκριμένη κουλτούρα, όλα συμβάλλουν, στις ιδιαίτερες ιστορίες που

δημιουργεί. Στο κείμενο της εργασίας επισημαίνεται, ότι η τέχνη ενός παραδοσιακού αφηγητή, καθοδηγείται σε όλα τα επίπεδα της σύνθεσης από μοτίβα. Στο χαμηλότερο επίπεδο, είναι πολύ συχνές οι λεκτικές φόρμουλες (π.χ. «μια φορά κι έναν καιρό»), στο υψηλότερο βρίσκονται πρότυπα μοτίβα (π.χ. «τα τρία αδέλφια»), προχωρώντας ακόμη περισσότερο, οι σκηνές είναι δομημένες ανάλογα με το είδος, αλλά οι τύποι είναι ακόμη πιο σημαντικοί στο επίπεδο των ιστοριών.

1.4.2 Ελληνική ποιητική αφήγηση

Στο σημείο αυτό θα παρουσιαστούν εν συντομία, ορισμένες από τις πληροφορίες, που αναφέρονται στο κείμενο του Δοξιάδη, για την ελληνική ποιητική αφήγηση. Ξεκινά από τις πρώτες σωζόμενες ελληνικές καλλιτεχνικές αφηγήσεις, που είναι τα έπη του Ομήρου και του Ησίοδου (8-7 αιώνας π.Χ.). Αρκετά αφηγηματικά στοιχεία συναντά κανείς και στα έργα των λυρικών ποιητών (7-6 αιώνας π.Χ.). Η υπεροχή των ομηρικών επών, έναντι των άλλων μορφών της ποιητικής αφήγησης, είναι αδιαμφισβήτητο γεγονός, για το συγγραφέα. *Ο μέσος μορφωμένος Έλληνας ήξερε «απέξω κι ανακατωτά» τα έργα του Ομήρου και δεν αποτελεί καμία κατάπληξη ότι πολλά από τα τεχνοτροπικά χαρακτηριστικά τους, παίζουν καθοριστικό ρόλο, στη διαμόρφωση μετέπειτα αφηγηματικών μορφών όχι μόνο σε έμμετρο λόγο αλλά και αργότερα στην πεζογραφία.* (σελ.293)

Στη συνέχεια αναφέρεται στο αρχαϊκό στυλ, που διαμορφώνεται από το συνδυασμό έμφυτων μηχανισμών και προφορικής παράδοσης. Στο αρχαϊκό στυλ, οι ατομικές προτάσεις, τοποθετούνται μαζί-δίνοντας την αίσθηση «πλάνων ταινίας» ή «φωτογραφιών» της δράσης-για να συνθέσουν μεγαλύτερες μονάδες δράσης ή σκηνές, οι οποίες δημιουργούν μια ζωντανή αναπαράστασης της δράσης, στο μυαλό του ακροατή.

Η λυρική ποίηση φέρνει πολλές καινοτομίες, στο μέτρο, τη μορφή και τα πρότυπα για την κατασκευή συγκεκριμένων τύπων ποιημάτων, αλλά τίποτα ιδιαίτερα νέο στην αφηγηματική τεχνική. Όπως και στην ομηρική ποίηση, τα τμήματα της αφήγησης στα λυρικά ποιήματα, καθοδηγούνται από την αναπαράστασης της δράσης. Αυτή η κατάσταση αλλάζει κατά το Δοξιάδη, με την τραγωδία, τη νέα μεγάλη ποιητική μορφή της κλασικής εποχής, η οποία αυξάνει την αναπαράσταση της δράσης, σε ένα νέο επίπεδο, με τη μετατόπιση από την αφήγηση στη μίμηση. Χαρακτηριστικά λέει: *«Η τραγωδία, ειδικά μετά τον Αισχύλο, είναι σε μια συνεχή αλληλεπίδραση με την πρώτη ελληνική τέχνη πεζού λόγου, τη ρητορική, Υπάρχουν στοιχεία ρητορικής στην τραγωδία, ενώ με τη σειρά της και η τραγωδία επηρεάζει τους ρήτορες. Η ανάπτυξη και των δύο μορφών, είναι μέρος της ευρύτερης ιστορίας των αλλαγών, που επέφερε η πολιτική μεταμόρφωση, από την τυραννία στην ολιγαρχία και τελικά στη δημοκρατία. Κεντρικές σε αυτή τη διαδικασία, είναι οι νέες πολιτιστικές μορφές χρήσης του λόγου, δηλαδή ο αγωνιστικός διάλογος και ο ρητορικός λόγος, σκοπός των οποίων είναι να πεισθούν με μη-βίαιο τρόπο άλλα πρόσωπα.»* (σελ.294)

Το κεντρικό ερώτημα που θέτει ο συγγραφέας είναι: *«Πώς συνδυάζονται τα ατομικά κομμάτια, από τις υπάρχουσες μορφές της γλώσσας, που δημιουργήθηκαν για να εξυπηρετήσουν την αναπαράσταση της δράσης και την ποιητική αφήγηση, ώστε να ανταποκριθούν στις νέες ανάγκες πατώντας στην ομιλία;»* (σελ.295)Υποστηρίζει ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν μπορεί να δοθεί, χωρίς μια πιο διεξοδική συζήτηση για την κλασική ρητορική.

1.4.3 Ρητορική

Από το κείμενο πληροφορούμαστε την ύπαρξη τριών ειδών ρητορικής, που το καθένα προκύπτει από διαφορετικές ανάγκες, δημιουργώντας έτσι, τις δικές του λύσεις. Αυτά είναι το *επιδεικτικό*, που συνήθως χρησιμοποιείται σε δημόσιες εκδηλώσεις, το *διαβουλευτικό ή πολιτικό*, που χρησιμοποιείται από τους ομιλητές στη συνέλευση και το εγκληματολογικό ή *δικανικό*, που ομιλείται από τους συμμετέχοντες σε ένα δικαστήριο.

Από τα τρία είδη ρητορικής, το ενδιαφέρον του συγγραφέα, επικεντρώνεται κυρίως στη δικανική ρητορική, καθώς υποστηρίζει ότι περιέχει, τα πιο σαφή παραδείγματα αποδεικτικών μορφών, οι οποίες ισχύουν και για τα μαθηματικά.

Ενώ εκ πρώτης όψεως, η ανάπτυξη της δικανικής ρητορικής φαίνεται να είναι μια διαδικασία συνολικής εγκατάλειψης της ποιητική αφήγησης, για μια αφήγηση πιο καθημερινή, ως αναπαράσταση της δράσης, στο επίπεδο της μικροδομής της, έχουν μεταφερθεί αρκετές από τις αρετές και τα τεχνάσματα της ποίησης, στον πεζό λόγο. Για το συγγραφέα, εντυπωσιακό είναι το γεγονός, ότι ενώ «*οι παραπάνω ιδιότητες απουσιάζουν από το αφηγηματικό κομμάτι του ρητορικού λόγου, είναι εμφανείς στο* *λογικό, δηλαδή στην άμεση επιχειρηματολογία»*(σελ.301). Με αφορμή την προηγούμενη δήλωση, εντοπίζει ένα είδος παραδόξου. Ένα παράδοξο, που εικάζει ότι μπορεί να περιέχει, την καρδιά της πρώιμης ιστορίας της λογικής: *«Αν και ο στόχος των ρητόρων εισάγοντας ποιητικές τεχνικές στην ρητορική θα μπορούσε κάλλιστα να ήταν αρχικά αισθητικός, αυτές οι ίδιες τεχνικές σύντομα αποτέλεσαν τη βάση της εκκολαπτόμενης μεθόδου της λογικής επιχειρηματολογίας.»* (σελ. 301)

Η προβληματική του συγγραφέα, γύρω από την εμφάνιση της λογικής, εστιάζεται, πρώτον στην αξιοποίηση ορισμένων ιδιοτήτων της αφήγησης, που αποκαλύφθηκαν από το αγωνιστικό σκηνικό και δεύτερον σε μια σειρά από «exaptation» ποιητικές τεχνικές. Ο όρος exaptation, ανήκει στην εξελικτική βιολογία και αναφέρεται σε ένα χαρακτηριστικό, αρχικά «εξελιγμένο για άλλες χρήσεις (ή για καμία λειτουργία), το οποίο αργότερα αποκτά έναν διαφορετικό ρόλο. Άρα η λογική δεν προκύπτει τον πέμπτο και τον τέταρτο αιώνα, φαινομενικά από το πουθενά, αλλά από την αφήγηση και την ποίηση. Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο της δικανικής ρητορικής, η θέση του Δοξιάδη, είναι ότι αυτό που αργότερα ονομάστηκε «λογική», άρχισε να αναπτύσσεται, ως μια μέθοδος, για τη σύγκριση λόγων, που αμφισβητούν την αφήγηση γεγονότων, με σκοπό να πείσει έναν δικαστή ή τους πολίτες, ότι η εκδοχή του ομιλητή ταιριάζει καλύτερα στα γεγονότα.

Η επίδραση της αφήγησης και της ποιητικής αφήγησης στην παρουσίαση της δικανικής ρητορικής, εξετάζεται στην εισήγηση του συγγραφέα, σε δύο επίπεδα, της μάκρο και της μίκρο δομής.

Στο επίπεδο της μάκρο-δομής, το πρότυπο του δικανικού λόγου, αποτελείται από τέσσερα μέρη, την εισαγωγή, την αφήγηση, την απόδειξη και τον επίλογο, αν και μερικοί αρχαίοι θεωρητικοί, διαιρούν περαιτέρω, το τρίτο μέρος (την απόδειξη), στη διαίρεση, την κατάλληλη απόδειξη και τη διάψευση. Ο στόχος αυτού του πρότυπου είναι διπλός. Αφενός να δημιουργήσει σχετική, από ότι συνολική βεβαιότητα, ότι αφήγηση του ρήτορα, είναι η καλύτερη προσαρμογή στα πραγματικά περιστατικά της υπόθεσης και αφετέρου να δείξει, ότι οι πράξεις που περιγράφονται σε αυτή, κρίνονται καλύτερα, από την εφαρμογή ενός συγκεκριμένου νόμου. Στη συνέχεια και με βάση την εργασία του Δοξιάδη, παρουσιάζονται αναλυτικότερα τα μέρη του δικανικού λόγου:

- **Εισαγωγή:** Εκτός από τους στόχους, που σχετίζονται με τις φυσικές συνθήκες του αρχαίου δικαστηρίου, όπως η προσέλκυση της προσοχής του κοινού, η εισαγωγή έχει ως στόχο να προσδιορίσει τι πρέπει να αποδειχθεί, από την άποψη της αφήγησης και του νόμου.

- **Αφήγηση:** Αυτό το μέρος του λόγου είναι καθαρή αφήγηση, μια αναπαράσταση της δράσης, όπου δίνονται τα «απλά πραγματικά στοιχεία».
- **Απόδειξη:** Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κάποιοι αρχαίοι θεωρητικοί διαιρούν περαιτέρω την απόδειξη, σε διαίρεση, πραγματική απόδειξη και διάψευση.
- **Διαίρεση:** Το πρώτο καθήκον της διαίρεσης, είναι να διασπάσει τη μεγαλύτερη δράση, στην αφήγηση του λόγου, σε τμήματα, επιλέγοντας εκείνα, ή τις ερμηνείες τους (το κίνητρο μιας ενέργειας, ας πούμε), τα οποία στην πραγματικότητα, θα πρέπει να αποδειχθούν ή αυτά, που η άλλη πλευρά, μπορεί να αμφισβητήσει(προκύπτουν οι υπό-αφηγήσεις). Το δεύτερο, είναι να παρέχει, για κάθε αμφισβητούμενο τμήμα της δράσης, που είναι πάντα μια μικρή αφήγηση, μια λίστα με εναλλακτικές αφηγήσεις, που ο αντίπαλος μπορεί πιθανόν, να τις αμφισβητήσει.(προκύπτουν οι αντι-αφηγήσεις) Με αυτή τη διπλή διαδικασία, η διαίρεση φέρνει στο λόγο νέες αφηγήσεις, τις οποίες, ο ομιλητής θα πρέπει να υποστηρίξει, προκειμένου να διαπιστωθεί πέραν πάσης αμφιβολίας, ότι η δική του αφήγηση, είναι η καλύτερη προσέγγιση της αλήθειας.
- **Ορθή/κατάλληλη απόδειξη:** Το αποδεικτικό τμήμα, μιας κλασσικής δικανικής ομιλίας, αποτελείται από δύο διαφορετικά είδη τεχνικής, τις αποκαλούμενες μη καλλιτεχνικές αποδείξεις (άτεχνη πίστης) και τις καλλιτεχνικές αποδείξεις (έντεχνη πίστης). Οι μη καλλιτεχνικές αποδείξεις, είναι πληροφορίες, που έρχονται στον ομιλητή, από εξωτερικούς παράγοντες, χωρίς καμία δική του προσθήκη με πνευματική αξία σε αυτό, όπως είναι οι δηλώσεις των μαρτύρων, οι συμβάσεις και οι νόμοι. Οι καλλιτεχνικές αποδείξεις, πρέπει να εφευρεθούν από τον ομιλητή. Υπάρχουν τρία είδη καλλιτεχνικών αποδείξεων, οι αποδείξεις σχετικά με το χαρακτήρα (ήθος) του εναγομένου, του κατήγορου ή μερικές φορές του μάρτυρα, οι αποδείξεις που απευθύνεται στα συναισθήματα των ενόρκων (πάθος) και τέλος οι λογικές αποδείξεις, οι οποίες απευθύνονται στο λόγο (διάνοια), σύμφωνα με τον Αριστοτέλη.
- **Επίλογος**

Ο συγγραφέας εντοπίζει ότι στη μικροδομή των Πειστικών Λόγων και ειδικά στα τύπου λόγου καλλιτεχνικά επιχειρήματα, βρίσκονται οι ρίζες της διαδικασίας, που έγινε, σε μια περίοδο μερικών δεκαετιών, αυτό που σήμερα αναγνωρίζεται ως λογική. Ειδικότερα, ισχυρίζεται ότι τα τύπου λόγου καλλιτεχνικά επιχειρήματα, ήρθαν στη ρητορική του πέμπτου αιώνα, από την ποίηση και την ποιητική αφήγηση, πιθανώς σε μορφές που εισήχθησαν αρχικά, για να ανακουφίσουν την ξηρότητα της πεζογραφίας, με ενισχυμένη γλώσσα. Ωστόσο, θεωρεί ότι ορισμένες από αυτές τις μορφές, αποδείχθηκαν πιο χρήσιμες από άλλες, στην επίτευξη της πειθούς και έτσι έγιναν ολοένα και πιο κυρίαρχες. *«Η ρητορική δανείστηκε τις μορφές της ποίησης για την ομορφιά, αλλά διατήρησε κάποιες από αυτές για την πειστική αποτελεσματικότητά τους.»* (σελ. 312)

Η θέση του Δοξιάδη είναι ότι για την κατασκευή, των πειστικών επιχειρημάτων τους και ιδιαίτερα τις τύπου λόγου καλλιτεχνικές αποδείξεις, οι Έλληνες ρήτορες, έκαναν εκτεταμένη χρήση, δύο βασικά, συναφών τεχνικών της αρχαϊκής ποιητικής αφήγησης, του χιασμού και της κυκλικής σύνθεσης. Ο χιασμός (chiasmos) και η κυκλική σύνθεση (ring composition) αποτελούν κατά το συγγραφέα τον ελλείποντα κρίκο, το πιο κρίσιμο συστατικό, για την κατανόηση του περάσματος από την αφηγηματική αναπαράσταση, σε αυτό που αργότερα ονομάστηκε λογική αφαίρεση.

Ο χιασμός και η κυκλική σύνθεση, ακολουθώντας το συμβολισμό του Δοξιάδη, θα παριστάνονται στα επόμενα με X και RC. Ο X είναι μια συμμετρική δομή των φράσεων, στην ελάχιστη μορφή ABB*A*, όπου το B* και το A* επαναλαμβάνουν το σύνολο ή μέρος του B και A, αντιστοίχως. Οι λέξεις ή φράσεις που είναι κοινές, καλούνται N και N * άξονες του A. Ο συγγραφέας παραθέτει στο σημείο αυτό, ένα παράδειγμα μικρού X. Πρόκειται για τη διάσημη η φράση του John F. Kennedy, «Μην ρωτάς τι μπορεί η χώρα σου να κάνει για σένα, αλλά τι μπορείς να κάνεις εσύ για τη χώρα σου», όπου «χώρα» είναι ο εξωτερικός ή A-άξονας και «εσύ» ο εσωτερικός ή B-άξονας.

Η κυκλική σύνθεση RC, διαφέρει από τον X, μόνον στο ότι το κεντρικό N-N* ζεύγος, αντικαθίσταται από ένα μοναδικό κεντρικό στοιχείο N ή στην απλούστερη δυνατή μορφή A-B-B*-A*, αντικαθίσταται από A-B-A*. Στην εργασία του Δοξιάδη, δηλώνεται σαφώς ότι οι πρώτες εμφανίσεις X / RC στην ελληνική λογοτεχνία, είναι στα ομηρικά έπη. Παρόλο που η χρήση X / RC στα έπη, οφείλεται στη μνημονική τους αξία, ο συγγραφέας δεν θεωρεί ότι είναι απλώς μνημονικές τεχνικές. Για να ισχυροποιήσει την παραπάνω θέση του, επικαλείται τον Reece, που αποκαλεί τον χιασμό και την κυκλική σύνθεση ως *«ίσως τη πιο σημαντική δομική συσκευή της* *προφορικής αφήγησης, χτίζοντας γέφυρες μεταξύ των πολλών συστατικών του μεγαλύτερου ποιήματος ... υφαίνοντας το παρεκκλίνον υλικό στο μεγαλύτερο ιστό της αφήγησης».* (σελ. 314) Συμπεραίνει λοιπόν ότι, αν και οι X / RC μπορεί να ξεκίνησαν ως ασυνείδητοι μηχανισμοί» ,επέζησαν, για τη μνημονική και τεκτονική τους αξία.

1.4.4 Η απόδειξη στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά

Στην παρούσα ενότητα, περιγράφεται η θέση του Δοξιάδη, ότι *«η μάκρο και η μίκρο δομή, των πρώτων ελληνικών αποδείξεων, των γεωμετρικών μαθηματικών, που συνήθως ταυτίζονται με τον Ευκλείδη, επηρεάστηκαν σε μεγάλο βαθμό από την κυρίαρχη-μέσα στο ανταγωνιστικό πολιτιστικό πλαίσιο της ελληνικής πόλεως- πρακτική της δικανικής ρητορικής, όπως αυτή διαμορφώθηκε, κάτω από την επίδραση της αφήγησης και της ποιητικής αφήγησης».* (σελ. 325)

Στο επίπεδο της μακροδομής, ο συγγραφέας προτείνει ότι ο αττικός δικανικός λόγος, όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα, παρέχει το υπόδειγμα για τη μορφή των γεωμετρικών αποδείξεων. Στο επίπεδο της μικροδομής, υποστηρίζει *«ότι X / RC κατασκευές, παρόμοιες με εκείνες, που παίζουν τόσο κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη της απόδειξης στην ελληνική ρητορική, είναι από τα κύρια εργαλεία της μαθηματικής επαγωγής. Καθώς οι αποδείξεις του Ευκλείδη, είναι αναμφισβήτητα, οι πρώτες, στην καταγεγραμμένη πνευματική ιστορία, που αξίζουν το όνομα απόδειξη, η περιγραφή της επιρροής της ποιητικής αφήγησης, στην απόδειξη, μέσω της ρητορικής, ισοδυναμεί με την εύρεση του χαμένου κρίκου στην γνωστική ιστορία των μαθηματικών, από τη μη απόδειξη, στην απόδειξη.* (σελ. 326)

Ο Δοξιάδης θεωρεί ότι το φυσικό περιβάλλον για τη διδασκαλία των πρώτων αποδείξεων, ήταν μια ομάδα από ειδικούς, που γνώριζαν τη χρήση του διαβήτη και οι οποίοι κουβέντιαζαν γύρω από μια κερωμένη πινακίδα και έφτιαχναν σχήματα σε αυτή. Σε αυτή τη διαδικασία, τα διαγράμματα ήταν μεγάλης σημασίας (Netz 1999). Διότι κατά τον Netz (2003), αποδεικνύεται, πως η γεωμετρική πρακτική δεν είναι κάτι που απλώς παρατηρούμε και παράλληλα γίνεται κατανοητή σε οπτικό επίπεδο, αλλά είναι αντιθέτως ένα επεξηγηματικό παράδειγμα, με στόχο την δόμηση φορμαλιστικών δομών, που θα οδηγήσουν στην γνώση. Χαρακτηριστικά αναφέρει:
«Το διάγραμμα με τα σημεία αντιστοιχισμένα σε γράμματα, μας εφοδιάζει με ένα σύμπαν διαπραγμάτευσης. Οι Έλληνες μαθηματικοί δεν είχαν την παραμικρή ανάγκη να

καθορίσουν τις οντολογικές τους αρχές, όταν μιλούσαν και πραγματεύονταν μέσω διαγραμμάτων. Οι αποδείξεις γίνονταν σε ένα αντικειμενικό επίπεδο και οι όποιες άλλες ερωτήσεις περιθωριοποιούνταν. Κάποιος με την απευθείας μετάβασή του στο διάγραμμα, έκανε απάνω στο διάγραμμα την βρώμικη δουλειά και όταν τον ρωτούσαν ποια ήταν η οντολογία της πρακτικής του σφύριζε αδιάφορα και επέστρεφε στην πρακτική του (…) η επιλογή των Ελλήνων να κάνουν μαθηματικά και μόνο μαθηματικά ήταν εφικτή και ταυτόχρονα εξηγήσιμη διότι το διάγραμμα έπαιζε αποδοτικά και εμφατικά το ρόλο του υποκατάστατου της οντολογίας» (σελ 59, Netz, 2003).

1.4.5 Ομοιότητες αποδείξεων και αφηγήσεων

Ο Δοξιάδης προτείνει *«να σκεφτούμε την απόδειξη ενός ελληνικού θεωρήματος, ως μια γραπτή απόδειξη, της προσανατολισμένης, στο στόχο, δραστηριότητας ενός μαθηματικού, κατά τη διαδικασία της προσπάθειας να δείξει ότι μια συγκεκριμένη γεωμετρική δήλωση είναι αληθής. Με άλλα λόγια, να σκεφτούμε το θεώρημα σαν μια συμβολική αναπαράσταση της προς απόδειξη δράσης.»* (σελ. 331) Και συνεχίζει ότι *«με βάση τον ορισμό που δόθηκε για την αφήγηση αυτό ισοδυναμεί ακριβώς με μια αφήγηση».* (σελ.331)

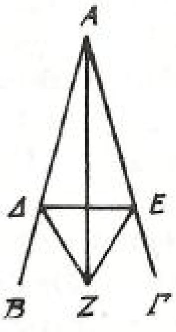
Ένα ελληνικό θεώρημα, κατά το συγγραφέα, χρησιμοποιεί τα ίδια τρία είδη ατομικών προτάσεων, ως απλές αφηγήσεις: δράσης, γενικής κατάστασης των πραγμάτων και γνώμης, σαν εκφράσεις των γενικών κανόνων. Ο συγγραφέας επισημαίνει ότι στη γεωμετρία, τα σχετικά ποσοστά των τριών αυτών τύπων, είναι διαφορετικά από εκείνα που βρίσκουμε στις αφηγήσεις. Αλλά συμπληρώνει ότι το πιο σημαντικό, είναι ότι τα ποσοστά διαφοροποιούνται μεταξύ των θεωρημάτων. Για να γίνει περισσότερο σαφές αυτό χρησιμοποιεί ως παράδειγμα δύο προτάσεις από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη:

Παράδειγμα 1^{o}: Πρόταση Ι.9 [10]

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΒΑΓ. Πρέπει νὰ διχοτομήσωμεν αὐτήν.

[10] Το κείμενο της Πρότασης Ι.9 είναι από το βιβλίο του Σταμάτη.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ, δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ο Δοξιάδης τροποποιεί την Πρόταση Ι.9 ακολουθώντας τις παρακάτω συμβάσεις:

α) Οι ατομικές προτάσεις χωρίζονται από //,

β) οι προτάσεις δράσης είναι υπογραμμισμένες,

γ) οι γενικής κατάστασης των πραγμάτων προτάσεις είναι σε κανονικό τύπο,

δ) οι κανόνες είναι με έντονα γράμματα,

ε) το αφηρημένο ύφος του Ευκλείδη μεταγράφεται στο πρώτο πρόσωπο ενός μαθηματικού

Οπότε η Πρόταση Ι.9 μεταγράφεται ως εξής:

BAC είναι η δεδομένη ευθύγραμμη γωνία. / /Γι’ αυτό απαιτείται <u>να διχοτομηθεί.</u> / / <u>Παίρνω ένα σημείο, D, τυχαία στην AB</u>, / /<u>παίρνω ένα τμήμα AE, ίσο με το AD από το AC</u>, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που δίνεται στην **[Πρότ I.3]**. / / <u>Τότε θα ενώσω το D με το E με τον κανόνα μου.</u> / /<u>Τότε θα δημιουργήσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο DEF, με DE ως μία από τις πλευρές του, χρησιμοποιώντας την τεχνική που δίνεται στην</u> **[Πρότ I.1]**. / / <u>Τώρα μπορώ να ενώσω το A με το F.</u> / /Τώρα <u>μπορώ να πω ότι μπορώ να αποδείξω ότι η γωνία BAC</u> έχει διχοτομηθεί από την ευθεία AF.

Ο συγγραφέας ολοκληρώνει το παράδειγμα, λέγοντας ότι:

«Σαφώς, αυτό το δείγμα Ευκλείδειου κειμένου, ταιριάζει σχεδόν τέλεια με τον ορισμό της αφήγησης, ως αναπαράστασης της δράσης, με το γεωμέτρη μας, ως τον κύριο χαρακτήρα: οι προτάσεις δράσης κυριαρχούν, περιγράφοντας τα βήματα σε μια σκόπιμη ενέργεια του ανθρώπου, που πραγματοποιούνται για την εκπλήρωση ενός στόχου. Το δείγμα περιλαμβάνει μόνο δύο φράσεις γενικής κατάστασης των πραγμάτων, η πρώτη από τις οποίες, είναι πραγματικά δεικτική δηλαδή δείχνοντας σε ένα αντικείμενο και η τελευταία δηλώνοντας ένα αχρονικό γεγονός σχετικά με αυτό.» (σελ. 332)

Παράδειγμα 2ο : Πρόταση III.7[11]

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι τὸ Ζ, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἂς εἶναι δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τὸ Ζ ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς τρίτης (Ι.20), ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΒ, ΕΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΒΕ [ἄρα αἱ ΒΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ΑΖ]· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΖΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΕ, ΕΖ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΕ, ΕΖ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΒΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΓΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΓΖ (Ι,24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΗ (Ι.20), ἡ δὲ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα ἡ κοινὴ ΕΖ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΖΔ. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἄγονται πρὸς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓΔ κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΖΔ. Διότι, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου αὐτῆς Ε (ὡς κορυφῆς) ἡ γωνία ΖΕΘ ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ (Ι. 23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἡ δὲ ΕΖ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΕ, ΕΖ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ. Λέγω, ὅτι ἄλλη ἴση (ἐκτὸς τῆς ΖΘ) πρὸς τὴν ΖΗ δὲν ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἄγεται ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, δηλ. ἡ ἐγγύτερον πρὸς τὸ κέντρον ἴση μὲ τὴν μακρύτερον· ὅπερ ἀδύνατον (κατὰ τὸ α′ μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Ζ δὲν ἄγεται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἄλλη ἴση πρὸς τὴν ΗΖ· ἄρα μία μόνη.

Και η Πρόταση III.7 τροποποιείται από Δοξιάδη, με χρήση των ίδιων συμβάσεων που

[11] Το κείμενο της Πρότασης III.7 είναι από το βιβλίο του Σταμάτη.

ακολουθήθηκαν στην Πρόταση Ι.9. Ο συγγραφέας επισημαίνει ότι παρόλο που και αυτή η Πρόταση προέρχεται από τα «Στοιχεία», τα ποσοστά των τριών ειδών προτάσεων είναι πολύ διαφορετικά, μία μόνο πρόταση δράσης, δύο γνώμες και οι υπόλοιπες είναι γενικής κατάστασης των πραγμάτων προτάσεις:

Έστω ότι BE, CE, και η GE έχουν ενωθεί. / /Και αφού [**για κάθε τρίγωνο (οποιεσδήποτε) δύο πλευρές είναι μεγαλύτερες από την τρίτη (πλευρά)[Πρότ Ι.20]** / / EB EF και είναι, συνεπώς, μεγαλύτερες από ό, τι η BF. / /Και η AE (είναι) ίση με τη BE [έτσι, BE και EF είναι ίσες με την AF]. / /Ετσι, η AF (είναι) μεγαλύτερη από την BF. / /Και πάλι, αφού BE είναι ίση με CE, και FE (είναι) κοινή, οι δύο (ευθείες γραμμές) BE, EF είναι ίσες με τις δύο (ευθείες γραμμές) CE, EF (αντίστοιχα). / / Αλλά, η γωνία BEF (είναι) επίσης μεγαλύτερη από τη γωνία CEF. / / Έτσι, η βάση BF είναι μεγαλύτερη από τη βάση CF. **[Πρότ Ι.24]**. / / Έτσι, για το ίδιους (λόγους), CF είναι επίσης μεγαλύτερη από FG.

Ο μικρός αριθμός των προτάσεων δράσης, (μία μόνο!) στην Πρόταση ΙΙΙ.7, οδηγεί τον συγγραφέα στο συμπέρασμα, ότι αυτό το δείγμα Ευκλείδειου κειμένου, δεν ταιριάζει με τον ορισμό της αφήγησης, ως αναπαράστασης της δράσης. Υποθέτει, ότι είτε πρόκειται για ένα τμήμα των «Στοιχείων» που δεν είναι αφήγηση, είτε για ένα τμήμα αφήγησης, το οποίο δεν είναι χαρακτηριστικό της μορφής. Επιπλέον, ο Δοξιάδης επισημαίνει, ότι οι δύο Προτάσεις, ανήκουν σε δύο διαφορετικά μέρη του υποδείγματος, για ένα Ευκλείδειο θεώρημα, η πρώτη στην κατασκευή, ενώ η δεύτερη στην απόδειξη, γεγονός που ίσως εξηγεί, τα διαφορετικά ποσοστά προτάσεων δράσης. Ο Δοξιάδης θεωρεί ότι η ελληνική γεωμετρία, όπως η ρητορική, ακολουθεί τα διδάγματα της ποιητικής αφήγησης, δηλαδή κατασκευάζει τα θεωρήματα της, σύμφωνα με στερεά μοτίβα ή πρότυπα. Όμως, από τα μέσα του τέταρτου αιώνα-αν όχι νωρίτερα-σύμφωνα πάντα με τον Δοξιάδη έχει προκύψει ένα πρότυπο σχέδιο για το γεωμετρικό θεώρημα, που είναι το εξής:

- **Πρόταση,** όπου δίνεται μια δήλωση σε μία γενική μορφή.

- **Έκθεση,** όπου η γενική δήλωση που περιγράφεται στην πρόταση γίνεται συμβολικά συμπαγής, διατηρώντας όμως τη γενικότητα της, με αναφορά σε ένα διάγραμμα γραμμάτων.

- **Διορισμός**, όπου η δήλωση της πρότασης φτιάχνεται σύμφωνα με τους όρους της *έκθεσης*.

- **Κατασκευή**, όπου κατασκευάζονται επιπλέον σημεία, γραμμές ή σχήματα που θα είναι χρήσιμα στην *απόδειξη*.

- **Απόδειξη,** η απόδειξη της δήλωσης, όπως ορίζεται στην *έκθεση* και στο *διορισμό*, χρησιμοποιώντας επίσης τα αντικείμενα που κατασκευάστηκαν στην *κατασκευή*.

- **Συμπέρασμα**, το οποίο επαναλαμβάνει τη δήλωση, στην αφηρημένη διατύπωση της *πρότασης*.

Ξεχνώντας ότι οι αναφορές ενός ελληνικού θεωρήματος είναι στον κόσμο της γεωμετρίας και βλέποντας το περιεχόμενό του, απλώς τυπικά, ο συγγραφέας παρατηρεί ότι το πρότυπο αυτό, είναι σε άμεση αναλογία με το εκείνο του δικανικού λόγου:

GEOMETRIC THEOREM	FORENSIC SPEECH	FUNCTION
Protasis *Ekthesis-diorismos*	Prologue	Setting out of problem
Kataskeuê	Narration	Description of the facts
Apodeixis	Proof	Proof that the facts actually support the speaker's contention as to their meaning as stated.
Sumperasma	Epilogue	Statement of what was proven

Ακολουθεί η μεταγραφή του σχήματος στα ελληνικά:

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ	**ΔΙΚΑΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ**	**ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ**
Πρόταση Έκθεση-Διορισμός	Πρόλογος	Εκθέτεται το πρόβλημα
Κατασκευή	Αφήγηση	Περιγράφονται τα γεγονότα
Απόδειξη	Απόδειξη	Αποδεικνύεται ότι τα γεγονότα, πράγματι υποστηρίζουν τον ισχυρισμό του ομιλητή, όπως αρχικά δηλώθηκε.
Συμπέρασμα	Επίλογος	Δηλώνεται αυτό που αποδείχθηκε

Ο Δοξιάδης διακρίνει σε τρεις κατηγορίες, τα επιμέρους τμήματα του προτύπου για τα αρχαία ελληνικά θεωρήματα, αναφορικά με τη δομική ομοιότητά τους, με την αφήγηση:

α) η **πρόταση** και το **συμπέρασμα** έχουν ελάχιστη τυπική ομοιότητα, λόγω του ότι είναι προτάσεις γενικής κατάστασης των πραγμάτων,

β) η **έκθεση**, ο **διορισμός** και η **απόδειξη** είναι λίγο πιο κοντά σε αυτό, περιέχοντας κάποιες προτάσεις δράσης και

γ) η **κατασκευή** έχει μεγάλο βαθμό ομοιότητας, αποτελούμενη σχεδόν αποκλειστικά από προτάσεις που καθορίζουν μια ενέργεια.

Ο Δοξιάδης πιστεύει ότι, όπως ο δικανικός λόγος έχει ως στόχο, να αποδείξει ότι ένας ορισμένος νόμος εφαρμόζεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση που ορίζεται από μια αφήγηση, έτσι και τα γεωμετρικά θεωρήματα προχωρούν, για να δείξουν, ότι η συγκεκριμένη κατάσταση ολοκληρώνεται με την **κατασκευή**, που ενσωματώνει την αλήθεια, που αναφέρεται στην **πρόταση**. Αναφέρει ότι η παραπάνω αναλογία γίνεται εντονότερη συγκρίνοντας το αποδεικτικό μέρος του θεωρήματος με αυτό του δικανικού λόγου:

GEOMETRIC THEOREM	FORENSIC SPEECH	FUNCTION
"Division"	Division	Breakdown of problem in all possible alternatives
"Proof proper"	Proof proper	Proof of each one of the possible alternatives set out in the division.
"Non-artistic proofs": *Axioms, definitions, common notions, previously proven theorems*	Non-artistic proofs: *Testimonies, contracts laws*	Proofs given to the speaker from outside the case/theorem.
"Artistic proofs":		
---	Ethos	Proofs created by the speaker using arguments of character.
---	Pathos	Proofs created by the speaker using arguments of emotion.
"Logos"	Logos	Proofs created by the speaker, using only a) the materials given inside the theorem or by previously established fact (in geometry), or b) inside the speech or storyworld, supported by high narrative probability (in rhetoric).

Στη συνέχεια, ο προηγούμενος πίνακας μεταγράφεται στα ελληνικά.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ	ΔΙΚΑΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
«Διαίρεση»	Διαίρεση	Ανάλυση του προβλήματος σε όλες τις πιθανές εναλλακτικές.
«Κατάλληλη απόδειξη»	Κατάλληλη απόδειξη	Απόδειξη κάθε μιας από τις πιθανές εναλλακτικές, όπως αναλύθηκαν στη διαίρεση.
«Μη-καλλιτεχνικές αποδείξεις»: αξιώματα, ορισμοί, κοινές έννοιες, ήδη αποδεδειγμένα θεωρήματα	Μη-καλλιτεχνικές αποδείξεις: δηλώσεις μαρτύρων, συμβάσεις, νόμοι	Δίνονται στον ομιλητή αποδείξεις εκτός υπόθεσης/θεωρήματος.
«Καλλιτεχνικές αποδείξεις»:νέες στο θεώρημα αποδείξεις		
-	Ήθος	Αποδείξεις, δημιουργούνται από τον ομιλητή με χρήση επιχειρημάτων σχετικά με το χαρακτήρα (ήθος) του εναγόμενου.
-	Πάθος	Αποδείξεις, δημιουργούνται από τον ομιλητή με χρήση επιχειρημάτων που απευθύνονται στα συναισθήματα των ενόρκων

«Λόγος»	Λόγος	Αποδείξεις δημιουργούνται από τον ομιλητή, χρησιμοποιώντας μόνο τα υλικά που δόθηκαν στην έκθεση-διορισμό-κατασκευή, αφήγηση και γενικές αρχές υπάρχουσες έξω από αυτό.

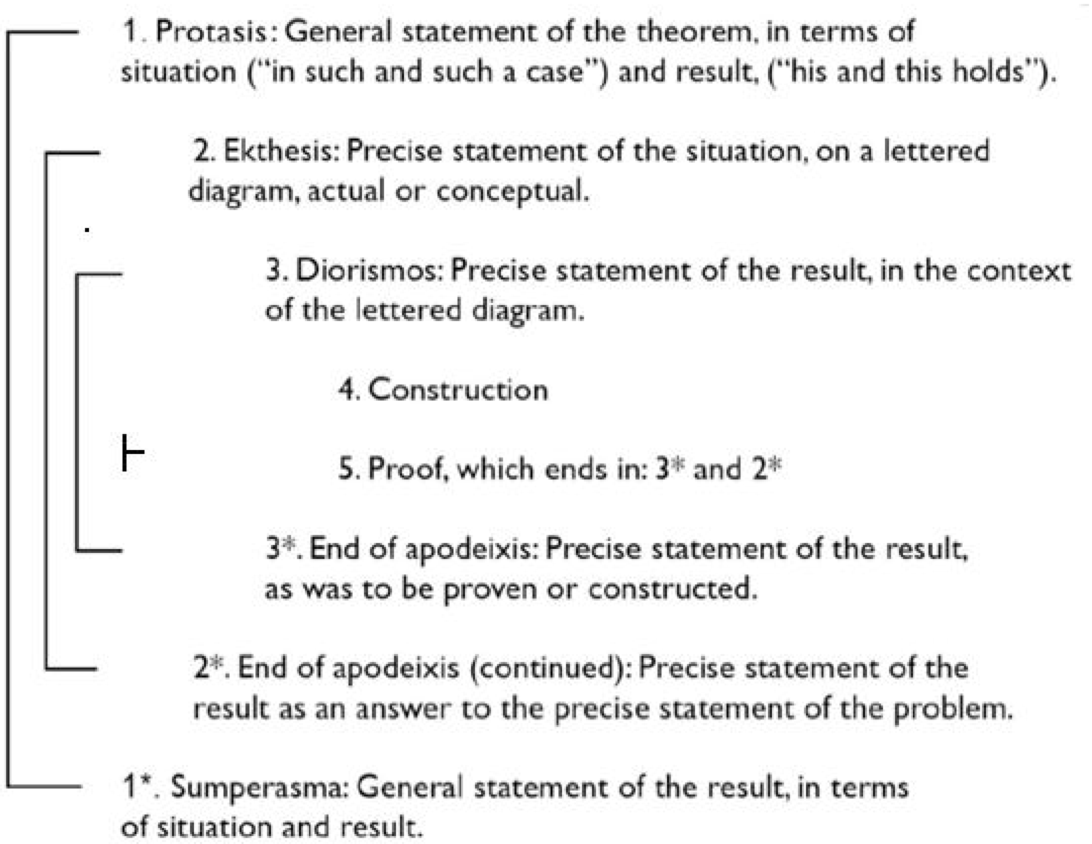
Με τη βοήθεια του προηγούμενου πίνακα, ο συγγραφέας διαπιστώνει ότι, *«εκτός από το κύριο διακριτικό χαρακτηριστικό, ότι ένα γεωμετρικό θεώρημα δεν χρησιμοποιεί επιχειρήματα ήθους ή πάθους, η μακροδομή της απόδειξης είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Αρχικά το πρόβλημα διασπάται στα συστατικά του μέρη που επιδέχονται απόδειξη, οπότε αυτός που προσπαθεί να τα αποδείξει, προχωρά χρησιμοποιώντας, τόσο μη καλλιτεχνικές-άτεχνες (αξιώματα, κοινές έννοιες ή αποδεδειγμένα θεωρήματα) όσο και καλλιτεχνικές-έντεχνες (νέες, στο θεώρημα αποδείξεις) αποδείξεις, για να επιτεθεί στα συστατικά μέρη, ένα προς ένα. Η χρήση τόσο καλλιτεχνικών, όσο και μη καλλιτεχνικών αποδείξεων και η διάκριση τους, είναι μια από τις ισχυρότερες εισαγωγές, στα μαθηματικά, από τη δικανική πρακτική. Είναι ακριβώς αυτή η εισαγωγή, η οποία αντιπροσωπεύει την ισχυρή αναδρομικότητα των μαθηματικών και τη συνάφεια μεταξύ πολλών προτάσεων τους»* (σελ.336)

Ο συγγραφέας εκτός από τις ομοιότητες αποδείξεων και αφηγήσεων στο επίπεδο της μακροδομής, ισχυρίζεται ότι και στο επίπεδο της μικροδομής, υπάρχουν κοινά στοιχεία. Ο Δοξιάδης εκφράζει την πεποίθηση, ότι η γεωμετρική απόδειξη, λειτουργεί με τους τρεις τύπους των προτάσεων, ιδιαίτερα στα γεωμετρικά επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας X/RC κατασκευές, με αρχές παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται στη ρητορική

Πριν αναφερθεί σε συγκεκριμένες περιπτώσεις αποδείξεων, όπου καταδεικνύονται οι X / RC δομές, ο συγγραφέας αναφέρει ορισμένες γενικές ενδείξεις ότι ο χιασμός και η κυκλική σύνθεση είναι κεντρικής σημασίας για την εμφάνιση της γεωμετρικής απόδειξης:

α. *Η μακροδομή μιας απόδειξης περιβάλλεται από τρία μέρη X / RC δομής.*

Παρόλο που το πρότυπο του ελληνικού θεωρήματος, έχει ισχυρές αναλογίες με εκείνο του δικανικού λόγου, ο συγγραφέας υπογραμμίζει, ότι το πεδίο του, είναι πολύ καλύτερα ορισμένο και τα δομικά χαρακτηριστικά του είναι σαφέστερα. Οπότε πιστεύει ότι λειτουργία του εξωτερικού ζεύγους-πρόλογος επίλογος στη ρητορική- γίνεται πολύ πιο εστιασμένη σε μια γεωμετρική απόδειξη, πλαισιώνοντας μια ιεραρχία σταδιακής εισόδου, στην καρδιά της απόδειξης και στη συνέχεια πίσω από αυτήν. Από την αφηρημένη γενικότητα της *πρότασης*, στη μεγαλύτερη εξειδίκευση της *έκθεσης* και του *διορισμού* που επιτρέπουν χειρισμούς, μέσα στην ίδια την απόδειξη και πάλι πίσω, ο Δοξιάδης διαπιστώνει μια RC, η οποία περιβάλλει τη δομή των τμημάτων κατασκευής και την απόδειξη του θεωρήματος, δηλαδή τα 4 και 5 και την οποία αποτυπώνει γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχ.4

Το σχήμα, μεταγράφεται στα ελληνικά:

1. Πρόταση: Γενική δήλωση του θεωρήματος, σε όρους της κατάστασης (σε τέτοια και τέτοια περίπτωση) και αποτέλεσμα (αυτό και αυτό ισχύει).

2. Έκθεση: Ακριβής δήλωση της κατάστασης, σε ένα διάγραμμα με γράμματα, πραγματικό ή εννοιολογικό.

3. Διορισμός: Ακριβής δήλωση του αποτελέσματος, στο πλαίσιο του διαγράμματος.

4. Κατασκευή

5. Απόδειξη, η οποία τελειώνει στα 3* και 2*

3*. Τέλος της απόδειξης: Ακριβής δήλωση του αποτελέσματος, όπως ήταν να αποδειχθεί ή να κατασκευαστεί.

2*. Τέλος της απόδειξης: Ακριβής δήλωση του αποτελέσματος, ως απάντηση, στην ακριβή δήλωση του προβλήματος.

1*. Συμπέρασμα: Γενική επαναδιατύπωση του θεωρήματος, σε όρους της κατάστασης και αποτέλεσμα.

Καταλήγει ότι *«αυτή η εξωτερική διαμόρφωση της δομής, που είναι ιδιαίτερα σταθερή στα Στοιχεία του Ευκλείδη, είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι το X / RC είναι πάρα πολύ στο μυαλό του μαθηματικού συγγραφέα»* και προσθέτει ότι *«η ελληνιστική ποίηση αφθονεί σε περίπλοκα κατασκευασμένες X / RC μορφές αυτού του τύπου»*. (σελ. 344)

β. *Οι πιο σημαντικές βασικές δομές σε ατομικό επίπεδο απόδειξης είναι RC*

Ο συγγραφέας παρατηρεί ότι τα δύο είδη συνδέσεων μεταξύ των ατομικών προτάσεων σε μια αφήγηση, το γραμμικό (απλούστερο και πιο αυστηρά διατεταγμένο) και το μη-γραμμικό, της αιτιότητας (πιο σύνθετο),όπου περισσότερες από μία δράσεις ή γενικές καταστάσεις προκαλούν άλλες, ισχύουν και για τη σύνδεση των προτάσεων σε μια γεωμετρική απόδειξη. Αντίστοιχα οι σύνδεσμοι μπορεί να είναι είτε γραμμικοί, όπως και στην περίπτωση των βημάτων σε μια κατασκευή ή των «κανόνων επανεγγραφής» μιας απόδειξης, δηλαδή τα ισοδύναμα της αντικατάστασης, π.χ. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ή μη-γραμμικοί, όπως στην περίπτωση οποιουδήποτε τύπου δομής που περιλαμβάνει συλλογισμούς, ή άλλες πιο πολύπλοκες δομές της σκέψης.

γ. *Το στυλ των Ευκλείδειων μαθηματικών φαίνεται μπερδεμένο και επαναλαμβανόμενο*

Κατά το συγγραφέα η εξοικείωση με τη γραμμική δομή και όχι με τη μη-γραμμική ή κυκλική μορφή, έχει ως αποτέλεσμα παλαιότερα κείμενα, που είναι κατασκευασμένα στις αρχές των X/RC, να φαντάζουν σήμερα, απλά έως και άμορφα ή ακατάστατα. Εντούτοις το επιχείρημα αυτό, παρέχει για τον Δοξιάδη, μια εκπληκτική ώθηση για την αναζήτηση X/RC στον Ευκλείδη και σε άλλα κείμενα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. *«Οι φαινομενικά παράλογες επαναλήψεις είναι μια ακόμη ένδειξη των κρυμμένων X / RC.»*. (σελ. 346)

Τα περισσότερα από τα επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν νωρίτερα για τη χρησιμότητα των X/RC στη ρητορική ισχύουν επίσης, περιστασιακά, με μικρές προσαρμογές-στη χρήση τους σε μια γεωμετρική απόδειξη. *«Παρόμοιες ανάγκες οδηγούν σε παρόμοιες μορφές: τι είναι αυτό που οι επαγγελματίες γεωμέτρες, οι οποίοι γνώριζαν τη χρήση του διαβήτη, χρειάζονται περισσότερο από οτιδήποτε άλλο, προκειμένου να αναγκάσουν ακολουθίες γεωμετρικών ενεργειών και σύνολα παρατηρήσεων σε ένα είδος αποδεικτικού επιχειρήματος, είναι μια νέα σύνταξη. Και αυτό είναι ακριβώς που βρίσκει κάποιος σε ένα X / RC.»* (σελ. 346-347).

Στη συνέχεια ο Δοξιάδης εξετάζει τη λειτουργία των X/RC σε πολλά διαφορετικά θεωρήματα, τόσο στο επίπεδο των μικροδομής, δηλαδή στα ατομικά Xs ή RCs που εμφανίζονται στις αποδείξεις, όσο και στο επίπεδο της μέσης-ή μέσο-δομής, δηλαδή τις μορφές στις οποίες ατομικές X/RCs τοποθετούνται μαζί, προκειμένου να επιτευχθεί απόδειξη. Επειδή όμως μια τέτοια ανάλυση ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας δε θα επεκταθούμε περισσότερο.

1.5 Με ποιον τρόπο τα Μαθηματικά επεμβαίνουν στην Αφήγηση

Μέχρι στιγμής έγινε μια προσπάθεια να διερευνηθούν, οι δομικές ομοιότητες μαθηματικών και αφήγησης. Επίσης παρουσιάστηκε η επιρροή της αφήγησης, στις αποδείξεις των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, μέσω της ποιητικής αφήγησης και της ρητορικής. Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούν περιπτώσεις, όπου η αφήγηση δανείζεται στοιχεία από τη μαθηματική επιστήμη, τόσο σε επίπεδο μορφής, όσο και σε επίπεδο περιεχομένου.

Στο «*Mathematics and prose literature*» (Pycior, 1994), περιγράφεται ιστορικά, με ποιον τρόπο, η συγγραφή πεζού λόγου επηρεάστηκε από την εξέλιξη των μαθηματικών. Τον 17^{o} και 18^{o} αιώνα αναφέρεται, ότι οι Thomas Sprat, Robert Hooke, Άγγλοι επιστήμονες και μαθηματικοί, συμφώνησαν ενάντια, στον περίκομψο πεζό λόγο, για ένα βαθύ και μαθηματικό τρόπο γραφής. Η λογοτεχνία δεν υιοθετεί μόνο έννοιες των μαθηματικών, αλλά και μεθόδους τους. Η ευκλείδεια γεωμετρία θεωρούνταν, ως το απόλυτο πρότυπο για την ανθρώπινη γνώση και έτσι, ηθικολόγοι, φιλόσοφοι, όπως οι Henry More και Spinoza και θεωρητικοί της πολιτικής έσπευσαν να προσαρμόσουν την τεχνική των γραπτών τους, πάνω στην επαγωγική μέθοδο.

Τον 19^{o} αιώνα, με την άνθηση της ανάλυσης και την ανακάλυψη των μη-ευκλείδειων γεωμετριών, η επαγωγική μέθοδος προσαρμοσμένη σε λογοτεχνικά κείμενα, έχασε την απήχηση της. Τότε άρχισαν να γράφονται αστυνομικά μυθιστορήματα, όπως το «*Auguste Dupin*» του E. A. Poe και οι ιστορίες του *Sherlock Holmes* από τον A. C. Doyle, όπου χρησιμοποιούνταν μέθοδοι, παρόμοιες με αυτές των μαθηματικών, αλλά όχι εντελώς επαγωγικές. Ο Fauvel (1994) υποστηρίζει επιπλέον, ότι και αργότερα τα μοντέρνα μαθηματικά, επηρέασαν τη λογοτεχνική αισθητική (σελ.1637-1639).

Η Φίλη (2002) μας πληροφορεί ότι το 1960, ιδρύεται στο Παρίσι το Ou. Li. Po. (Ouvroir de la Litterature Potentielle – Εργαστήρι Δυναμικής Λογοτεχνίας), από τους Francois Le Lionnais και Reymond Queneau. Επιδίωξη των ιδρυτών του, ήταν να δώσουν στη λογοτεχνική έκφραση, μαθηματικές δομές. Μάλιστα, ο Reymond Queneau παρουσίασε και μια αξιωματική της Λογοτεχνίας, βασιζόμενος στις «Αρχές της Γεωμετρίας» (Grundlagen der Geometrie) του Hilbert, αντικαθιστώντας στις προτάσεις του Hilbert τις λέξεις «σημεία», «ευθείες», «επίπεδα» με τις λέξεις «λέξεις», «φράσεις», «παραγράφους». Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω αξιώματα του Reymond Queneau, σε αντιπαραβολή, με τα αντίστοιχα του Hilbert,όπως παρουσιάστηκαν από τη Φίλη (2002), στο $19^{ο}$ συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας:

Από την Πρώτη Ομάδα Αξιωμάτων
(Αξιώματα του Ανήκειν)

Queneau	Hilbert
1.1 Υπάρχει μια φράση, που περιλαμβάνει δύο δεδομένες λέξεις.	1.1 Υπάρχει μια ευθεία, που ενώνει τα δύο δεδομένα σημεία Α και Β και που σ' αυτήν ανήκουν τα δύο αυτά σημεία.
1.2 Δεν υπάρχει παραπάνω από μία φράση, που να περιλαμβάνει δύο δεδομένες λέξεις.	1.2 Δεν υπάρχει παραπάνω από μια ευθεία, στην οποία ανήκουν δύο σημεία Α και Β.

Από τη Δεύτερη Ομάδα Αξιωμάτων
(Αξιώματα Διάταξης)

Queneau	Hilbert
2.2 Έχοντας δύο λέξεις μιας φράσης, υπάρχει τουλάχιστον μια τρίτη λέξη, τέτοια ώστε, η δεύτερη να είναι ανάμεσα στην πρώτη και στην τρίτη.	2.2 Δοθέντων δύο σημείων Α και C, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Β που ανήκει στην Α C και τέτοιο ώστε, το Β να είναι ανάμεσα στο Α και στο C.

Μία άλλη περίπτωση, όπου γίνεται φανερή η επίδραση των μαθηματικών στη λογοτεχνία, αποτελούν τα παρακάτω αποσπάσματα, από κορυφαία λογοτεχνικά έργα, τα οποία σύμφωνα με την Κολέζα (2006,σελ.33,34,35), «*επικαλούνται τα μαθηματικά για να στηρίξουν μια θεωρία υιοθετώντας έμμεσα την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μια άρτια συγκροτημένη επιστήμη που μπορεί να εξηγήσει τα πάντα*». (σελ.33)

Η Κολέζα παρατηρεί ότι ο Ντοστογιέφσκι, στο έργο «*Αδερφοί Καραμαζώφ*», χρησιμοποιεί τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, για να υποστηρίξει το μεταφυσικό του δίλημμα, ότι ενώ πιστεύει στο Θεό, δεν μπορεί να πιστέψει ότι ο Θεός έφτιαξε τον κόσμο. Συγκεκριμένα, ο Ντοστογιέφσκι, χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι «*ακόμα κι αν* *ξέρει και είναι πρόθυμος να υποστηρίξει ότι οι παράλληλες ευθείες συγκλίνουν, συγχρόνως δεν μπορεί να το δεχθεί.*»

Κάτι ανάλογο, διαπιστώνει ότι συμβαίνει και στο έργο του Τολστόι, «*Πόλεμος και Ειρήνη*». Κατά την Κολέζα, ο συγγραφέας υιοθετεί μερικές εντυπωσιακές μαθηματικές μεταφορές, για να επεξηγήσει τη θεωρία του, περί ανάγνωσης της ιστορίας. Η ιδέα είναι, ότι τα μεμονωμένα άτομα δεν μπορούν να επηρεάσουν υπό οποιαδήποτε έννοια τον ρου της ιστορίας, αλλά ότι η πορεία της ιστορίας, καθορίζεται από μυριάδες κινήσεις, απειροελάχιστα μικρών ανθρώπινων επιθυμιών. Σύμφωνα με τη θεωρία του Τολστόι, η ιστορία πρέπει να αναλυθεί με μαθηματικό τρόπο: όχι ως σύνολο διακριτών γεγονότων αλλά ως συνεχής διαδικασία.

«Η κίνηση της ανθρωπότητας, που προκαλείται από αναρίθμητες τυχαίες ανθρώπινες επιθυμίες, είναι συνεχής. Στόχος της ιστορίας είναι να κατανοήσει τους νόμους αυτής της συνεχούς κίνησης…Μόνο παίρνοντας απείρως μικρές μονάδες παρατήρησης (δηλαδή τις μεμονωμένες τάσεις των ατόμων) και επιτυγχάνοντας να τις ολοκληρώσεις (δηλαδή να βρεις το άθροισμα αυτών των απειροστών) μπορούμε να ελπίσουμε ότι θα φθάσουμε να κατανοήσουμε τους νόμους της ιστορίας μας».

« Ένα μεγάλο ποσοστό του ανθρώπινου λάθους» υπογραμμίζει ο Τολστόι, *«προέρχεται από την αυθαίρετη διαίρεση της συνεχούς κίνησης σε ασυνεχή [διακριτά] στοιχεία»*. Η Κολέζα επισημαίνει μάλιστα, ότι ο Τολστόι χρησιμοποιεί το παράδοξο, στο μύθο του Αχιλλέα και της χελώνας, για να δείξει ότι η ιστορία δεν μπορεί να αναλυθεί ως μια σειρά διακριτών αποσπασμάτων.

Το παράδοξο, ισχυρίζεται ο Τολστόι, προκύπτει από τη διαίρεση της κίνησης, σε διακριτά τμήματα, ενώ η κίνηση είναι συνεχής: *«Με το να παίρνουμε όλο και μικρότερα κομμάτια της κίνησης πλησιάζουμε μόνο τη λύση του προβλήματος, αλλά δεν τη φτάνουμε ποτέ. Μόνο όταν συλλάβουμε την έννοια του απείρως μικρού και την προκύπτουσα γεωμετρική πρόοδο με κοινό λόγο ενός δεκάτου, και έχουμε βρει το άθροισμα αυτής της απειροσειράς, φθάνουμε τη λύση του προβλήματος.»*

Στο ίδιο έργο, πληροφορούμαστε ότι ο Τολστόι περιγράφει τα Μαθηματικά του πολέμου, μέσω μιας ακραίας χρήσης αναλογιών:

«Η στρατιωτική επιστήμη λέει, ότι όσο μεγαλύτεροι οι αριθμοί [ενός στρατού] τόσο μεγαλύτερη η δύναμη… Με αυτόν τον τρόπο η στρατιωτική επιστήμη είναι σαν να παραδέχεται ότι μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια στη Μηχανική κάνοντας αναφορά μόνο στη μάζα. Είναι σαν να λέμε ότι οι ορμές των κινούμενων σωμάτων θα είναι ίσες ή άνισες σύμφωνα με την ισότητα ή την ανισότητα των μαζών τους. Αλλά η ορμή είναι

το γινόμενο της μάζας και της ταχύτητας. Έτσι, στον πόλεμο, η δύναμη ενός στρατού είναι το προϊόν της μάζας του και κάτι άλλου, κάποιου άγνωστου παράγοντα X». Αυτόν τον άγνωστο παράγοντα ο Τολστόι ορίζει ως *«…την μεγαλύτερη ή μικρότερη επιθυμία των στρατιωτών να πολεμήσουν και να αντιμετωπίσουν τον κίνδυνο».* Και εξηγεί: *«Εάν δέκα άτομα πολεμώντας δεκαπέντε άτομα τους σκοτώσουν ή τους συλλάβουν όλους χάνοντας αυτοί μόνο τέσσερα άτομα, η απώλεια θα είναι τέσσερα άτομα από τη μία πλευρά και δεκαπέντε από την άλλη. Έτσι το τέσσερα ισούται με το δεκαπέντε, και μπορούμε να γράψουμε* $4x = 15y$. *Με άλλα λόγια, το X είναι ως προς το Y, ό,τι το δεκαπέντε ως προς το 4. Αν και αυτή η εξίσωση δεν μας δίνει την απόλυτη αξία του άγνωστου παράγοντα, μας δίνει μια αναλογία μεταξύ των δύο αγνώστων».*

Τέλος, η Κολέζα αναφέρεται στην Emma, του ομώνυμου μυθιστορήματος της Jane Austen. Μας πληροφορεί ότι το όνομα Emma, για κάποιους υπαινίσσεται την αναλογία $\frac{M}{A}$, όπου σύμφωνα με τον φιλόσοφο του 18^{ου} αιώνα Francis Hutcheson, A είναι η τέλεια αρετή και M είναι η αρετή που διαθέτει κάποιος. Η Emma πρέπει να βελτιωθεί ως προς την αρετή της, περνώντας από μια κατάσταση, όπου $M < A$ σε μια άλλη, όπου $M = A$ (Honan, 1987).

Αναφορές στα μαθηματικά, απαντώνται και πολύ νωρίτερα, στο έργο του Δάντη. Κι εδώ είναι φανερός ο απέραντος σεβασμός για τα μαθηματικά. Έτσι, στο τρίτο μέρος της «*Θείας Κωμωδίας*», τον «*Παράδεισο*», τα μαθηματικά εμφανίζονται, ως ο εγγυητής της απόλυτης αλήθειας και της βεβαιότητας. Το απραγματοποίητο περιγράφεται με τους στίχους:

…αν τρίγωνο μπορείς σε μισοκύκλι
χωρίς ορθή γωνία ποτέ να μπάσεις…

Εξίσου χαρακτηριστικό παράδειγμα, λογοτεχνικού έργου με αναφορά στα μαθηματικά, αποτελεί και το μυθιστόρημα του Ιουλίου Βερν, «*Γύρω από τη Σελήνη*», που δημοσιεύτηκε το 1870. Πρόκειται, για συνέχεια του μυθιστορήματος «*Από τη Γη στη Σελήνη*» (1865) και περιγράφει τις περιπέτειες των ηρώων, του πρώτου έργου προς και γύρω από τη Σελήνη.

Τα μαθηματικά έρχονται αναπόφευκτα στο προσκήνιο, στο «Γύρω από τη Σελήνη», καθώς οι δύο Αμερικανοί του Τηλεβολικού Συλλόγου, προσπαθούν να εξηγήσουν στον αμύητο Μισέλ Αρντάν, το πώς υπολόγισαν την τροχιά του βλήματος, που μεταφέρει τους τρεις τους, στη Σελήνη. Ο Αρντάν αποδεικνύεται ανεπίδεκτος και η παράθεση εξισώσεων σταματά.

Από το έργο διαπιστώνεται, ότι ο συγγραφέας γνώριζε, ότι μία βολή που γίνεται υπό την επίδραση της βαρύτητας, θα έχει σίγουρα τροχιά που περιγράφεται από μια δευτεροβάθμια εξίσωση, καθώς επίσης και ότι μία εξίσωση δευτέρου βαθμού μπορεί οδηγεί σε κωνικές τομές. Στο ίδιο μυθιστόρημα, ο Βερν σπεύδει να υπογραμμίσει έμμεσα, ότι τα μαθηματικά αποτελούν τον τέλειο τρόπο ερμηνείας και ελέγχου του φυσικού κόσμου.

Αλλά και στα έργα του Χόρχε Λουίς Μπόρχες, τα μαθηματικά κατέχουν περίοπτη θέση. Ο Γ. Ριζόπουλος, 2013, στο άρθρο του, «*Ο Μπόρχες και το μαθηματικό άπειρο*», στο ηλεκτρονικό περιοδικό «*24 γράμματα*», παρουσιάζει κάποια επιλεγμένα σημεία από διηγήματα του Μπόρχες, που σχετίζονται με τα Μαθηματικά και κυρίως με την έννοια του Απείρου.

Ο Ριζόπουλος επισημαίνει ότι παρά το γεγονός, ότι ο Μπόρχες δεν είχε σπουδάσει επίσημα μαθηματικά, οι σχετικές του ανησυχίες είναι συνεχείς και εμφανείς στα έργα του. Σύμφωνα με το συντάκτη του άρθρου, η αντίληψη του Μπόρχες γύρω από τα μαθηματικά και η σαφήνεια με την οποία τα παρουσίασε στο έργο του, όχι μόνο βοηθά στην κατανόηση των εννοιών αλλά δημιουργεί και νέες προοπτικές στην προσέγγιση τους.

Αναφερόμενος στο «*Βιβλίο της Άμμου*», ο συντάκτης του άρθρου λέει χαρακτηριστικά: *«Ο Μπόρχες, μιλάει για ένα βιβλίο με άπειρες σελίδες που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος. Στο κείμενο, που θα μπορούσε να έχει εμπνεύσει τον ίδιο τον Cantor, αν δεν ήταν εμπνευσμένο από τις εργασίες του τελευταίου, φαίνεται πως ο συγγραφέας σκέφτεται το δυνητικό και μετρήσιμο, δηλαδή το αριθμήσιμο άπειρο. Όλες οι σελίδες του βιβλίου έχουν φυσική αρίθμηση. Και είναι πραγματικά τόσες πολλές που είναι αδύνατο για κάποιον να ξανανοίξει το βιβλίο στην ίδια ακριβώς σελίδα! Αυτή η «λεπτομέρεια» καθιστά αμέσως προφανή μια αρχέγονη διάκριση μεταξύ απείρου και πεπερασμένου.»*

Αλλά και σε ένα άλλο πολύ μικρό διήγημα του Μπόρχες, με τίτλο «*Ο δίσκος*» ο Ριζόπουλος διαπιστώνει τη σαφή ιδέα του συγγραφέα, για άπειρο και τη σχέση του με τις χωρικές διαστάσεις. Χαρακτηριστικό είναι το σχετικό απόσπασμα:

« Η γραμμή αποτελείται από άπειρο αριθμό σημείων , το επίπεδο από άπειρο αριθμό γραμμών, ο όγκος από άπειρο αριθμό επιπέδων, ο υπερ-όγκος από άπειρο αριθμό όγκων…»

Στο άρθρο του, συμπεριλαμβάνεται επίσης, μία ακόμη ιστορία από τις «*Μυθοπλασίες*», όπου διαπιστώνει μία έμμεση αλλά σαφή αναφορά, στα περίφημα παράδοξα του Ζήνωνα, του Ελεάτη. Πιο συγκεκριμένα, στην αστυνομική ιστορία μυστηρίου, «*Ο Θάνατος και η πυξίδα*», ο πρωταγωνιστής και τελικά θύμα, ντετέκτιβ Erik Lönnrot λέει στο τέλος:

«..Ξέρω έναν ελληνικό λαβύρινθο που αποτελείται από μία και μόνη ευθεία γραμμή. Σ' αυτή τη γραμμή έχουν χαθεί πολλοί Φιλόσοφοι, πόσο μάλλον ένας απλός ντετέκτιβ.»

Στη συνέχεια, ο πρωταγωνιστής, σύμφωνα πάντα με τον Ριζόπουλο, συνεχίζει την αναφορά/πρότασή του, προς τον μέλλοντα δολοφόνο του, για μια απόσταση που γίνεται μισή, μετά τέταρτο, μετά όγδοο… και συνεχώς υποδιπλασιάζεται επ' άπειρον. (Ουσιαστικά περιγράφεται η απειροσειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{\nu}}=2$, που έχει όμως πεπερασμένο όριο).

Τέλος ο Andrew Crumey (2004), αναφερόμενος στον Μπόρχες, επισημαίνει ότι στα έργα του, *«εμπεριέχεται ένα λαβυρινθώδες σύμπαν συνεχώς διακλαδούμενο, καθώς τυχαία γεγονότα ανοίγουν την μια πιθανότητα ή την άλλη. Την ιδέα ο Μπόρχες την πήρε από τον Λάιμπνιτζ, έναν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 17ου αιώνα».*

Στην παρούσα ενότητα καταγράφονται ενδεικτικά, λογοτεχνικά έργα με αναφορές στα μαθηματικά, τα οποία σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να ενταχθούν, σε αυτό που στη συνέχεια θα οριστεί ως «μαθηματική λογοτεχνία». Εκτενέστερη αναφορά σε λογοτεχνικά έργα, όπου τα μαθηματικά έχουν κεντρική θέση στην εξέλιξη της πλοκής, θα πραγματοποιηθεί, στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

1. 6 Η άποψη των συγγραφέων…

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις πέντε συγγραφέων (εκ των οποίων οι τρεις είναι μαθηματικοί και οι δύο φυσικοί) που το έργο τους σχετίζεται με τον έναν ή με τον άλλον τρόπο με τα μαθηματικά, στο ερώτημα για το πώς τα μαθηματικά επεμβαίνουν στις αφηγήσεις τους.

Για τον Crumey (2004), *«τα μαθηματικά προσφέρουν σπουδαία μαθήματα στον φέρελπι συγγραφέα. Κατ' αρχάς, τη σταθερότητα, τη συνέπεια, τη συνέχεια, κάτι που οι αρχαίοι Έλληνες ανέδειξαν σε υψηλή τέχνη μέσα από την έννοια της μαθηματικής απόδειξης».* Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η άποψη του, για τη συγγραφή. Παραλληλίζει την εργασία του συγγραφέα, με εκείνη του μαθηματικού. *«Ο* *μαθηματικός γνωρίζει πάντα την τελευταία αράδα της απόδειξης του πριν δείξει την πρώτη. Έτσι και ο καλός συγγραφέας.»* Οι διαδοχικές φάσεις της συγγραφής και της προσπάθειας απόδειξης ενός θεωρήματος, παρουσιάζουν σύμφωνα με τον Crumey πολλές ομοιότητες. *«Αρχικά γίνεται η «συγκέντρωση» των δεδομένων, όταν πολλά μεμονωμένα παραδείγματα συγκεντρώνονται μαζί. Ακολουθεί ο σχηματισμός του πρότυπου σχεδίου, όταν τα μέρη αρχίζουν να συνταιριάζονται. Κατόπιν, μπορεί να ακολουθήσει μια περίοδος όπου όλα πάνε στραβά και κατά συνέπεια, κανείς νιώθει χαμένος. Τελικά, έρχεται η «έξοδος» προς τη σύνθεση. Είναι τότε που ο συγγραφέας ή ο μαθηματικός κάθεται στο γραφείο ή τον ηλεκτρονικό υπολογιστή και απολαμβάνει το σπάνιο αίσθημα της «έμπνευσης», για το οποίο και μόνο αξίζει όλη η προσπάθεια.»*

Χαρακτηριστική είναι η απάντηση του Δοξιάδη (2006): *«Ανεξαρτήτως του θέματος, τα Μαθηματικά επηρέασαν τον τρόπο της γραφής μου διδάσκοντάς με κάτι για το μέτρο, την οικονομία και τη δομή. Από την άλλη μεριά, όποτε τα Μαθηματικά υπάρχουν στο έργο και θεματικά, θέλω πάντα η μαθηματική δομή να είναι εναργής αφηγηματικά».*

Κατά τον Guedj (2006) *«αυτό που αφηγούνται τα Μαθηματικά και η λογοτεχνία δεν αναφέρεται σε κάποιον εξωτερικό κόσμο. Δεν οφείλουν να λογοδοτήσουν στην έννοια του πραγματικού. Ο κύριος στόχος ενός μυθιστορήματος ή μιας μαθηματικής θεωρίας είναι να παραγάγουν ένα σύμπαν, που να είναι αυτάρκες και από το οποίο, το μόνο που απαιτείται είναι η συνέπεια. Αυτό που περιμένουμε από ένα μυθιστόρημα δεν είναι να είναι συμβατό με τον κόσμο, αλλά να δημιουργεί ή μάλλον να αποτελεί έναν δικό του κόσμο, που να είναι ανεκτός και βιώσιμος. Ένα μυθιστόρημα, έστω και ρεαλιστικό, αποτελεί πάντοτε μια αποστασιοποίηση από τον χώρο, τα όντα, τις καταστάσεις. Μπορεί βέβαια να εμπνέεται από αυτές, αλλά το πώς τις διαχειρίζεται είναι υπόθεση των μυθοπλαστικών επιλογών του δημιουργού. Αυτή η αποστασιοποίηση, μοιάζει πολύ με την αφαίρεση που είναι απαραίτητη στην άσκηση των Μαθηματικών, που αποτελεί την πράξη δημιουργίας της μαθηματικής διαδικασίας. Απαιτείται ακόμα αυτά που συμβαίνουν -τα γεγονότα- να είναι αναπόφευκτα, αν και όχι υποχρεωτικά προβλέψιμα. Οφείλουν να μας εκπλήσσουν όταν συμβαίνουν και να μας πείθουν ότι είχαν λόγο να συμβούν. Από τις προηγούμενες διαπιστώσεις προκύπτει ότι οι λέξεις αποτελούν την πραγματικότητα, την πρώτη ύλη τόσο της λογοτεχνίας όσο και των Μαθηματικών. Είναι γεγονός ότι στα Μαθηματικά δεν σταματούμε ποτέ να παίζουμε με τις λέξεις.»*

Για τον Παυλιώτη (2006) *«τα Μαθηματικά επηρέασαν και συνεχίζουν να επηρεάζουν την ενασχόληση μου, με το αστυνομικό μυθιστόρημα, στον σχεδιασμό, τη δομή, την τάξη, τη σαφήνεια και τη λιτότητα, στην οικονομία αλλά και στη διαχείριση του χρόνου»*. Σημειώνει ότι το ίδιο το αστυνομικό μυθιστόρημα, το βλέπει και σαν μαθηματικό πρόβλημα. Και συνεχίζει: «*Με την εγκληματική πράξη διαταράσσεται η Τάξη και επέρχεται το Χάος. Αυτός που αναλαμβάνει την εξιχνίαση, προσπαθεί από το χάος να φέρει τάξη. Όλο το ζήτημα έγκειται στο να βρει την αλήθεια, να αποδείξει δηλαδή ένα μεγάλο θεώρημα. Και αυτό πετυχαίνεται με την απόδειξη μικρότερων θεωρημάτων, τα οποία με τη σειρά τους προκύπτουν από ακόμα πιο μικρά, τα λήμματα. Να λοιπόν που υπάρχει και ένα είδος φράκταλ δομής.»*

Ο Μιχαηλίδης αναφέρει ότι *«οι αφηγήσεις του, είναι αθροίσματα στατικών εικόνων, στις οποίες μπαίνει μια μαθηματική ιδέα που τις μετατρέπει σε μύθο.»*

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

Στα προηγούμενα, παρουσιάστηκαν κάποια αποσπάσματα από κείμενα, που στοχεύουν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ μαθηματικών και αφήγησης εν γένει και να περιγραφούν οι δομικές ομοιότητες των δύο κόσμων. Στο σημείο αυτό, θα γίνει μια καταγραφή των ορισμών, που έχουν δοθεί για τη «μαθηματική λογοτεχνία». Στη συνέχεια, θα επιχειρηθεί μία ιστορική αναδρομή σε σημαντικά λογοτεχνικά έργα που εμπνέονται από τα μαθηματικά, φθάνοντας ως το σήμερα, όπου παρατηρείται μια σημαντική αύξηση στη λογοτεχνική παραγωγή έργων, που συνδέονται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο με τα μαθηματικά. Θα γίνει μια προσπάθεια ταξινόμησης των έργων, που εντάσσονται σε αυτό, που θα ονομαστεί «μαθηματική λογοτεχνία», ενώ θα γίνει και μια εκτενής παρουσίαση της «*Επιπεδοχώρας*», του Abbot, ως το πρώτο έργο που δικαιολογεί πλήρως τον τίτλο του μαθηματικού μυθιστορήματος.

Κατά την τελευταία δεκαετία, όπως προαναφέρθηκε, παρατηρείται μια σημαντική αύξηση στη λογοτεχνική παραγωγή έργων που συνδέονται με τα μαθηματικά. *«Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι η αύξηση αυτή, σε γενικές γραμμές συνοδεύεται και από καλή ποιότητα. Δεδομένων των αδυσώπητων νόμων της αγοράς, που ισχύουν στις σύγχρονες παγκοσμιοποιημένες κοινωνίες, το φαινόμενο αυτό, δεν μπορεί παρά να σηματοδοτεί ένα ολοένα αυξανόμενο ενδιαφέρον, από την πλευρά των αναγνωστών, προς οτιδήποτε συνδέεται άμεσα ή έμμεσα με τα μαθηματικά.»* (Μιχαηλίδης, 2003)

Ας δούμε όμως, αν οι καθ’ ύλην αρμόδιοι, οι συγγραφείς, θεωρούν ότι η πληθώρα λογοτεχνικών έργων που σχετίζονται με τα μαθηματικά, σηματοδοτούν τη γέννηση ενός νέου λογοτεχνικού είδους:

Ο Απόστολος Δοξιάδης (2006), δεν πιστεύει σ' αυτήν την κατηγοριοποίηση, αν και θεωρεί ότι ένα τέτοιο είδος μοιάζει σταδιακά να διαμορφώνεται. Κρίνει ότι η επιτυχία, των πρώτων έργων της λεγόμενης «μαθηματικής λογοτεχνίας», βασίζεται στην πρωτοτυπία, αλλά δεν βλέπει να υπάρχουν αρκετά θέματα για να συντηρήσουν μια συνεχή παραγωγή.

Ανάλογη άποψη διατυπώνει και ο Denis Guedj (2006), πιστεύοντας ότι η προσθήκη ενός προσδιορισμού στη λέξη μυθιστόρημα, λειτουργεί ως υποβάθμιση και συνεχίζει αναφέροντας ότι η δημιουργία ενός έργου, που έχει ως αφηγηματικό θέμα τα Μαθηματικά, απαιτεί μια συγκεκριμένη εργασία, την οποία περιγράφει, ως *«δραματουργική επιστημολογία»* και η οποία συνίσταται, στο να αφηγηθεί κανείς το δράμα των εννοιών που αποτελούν το αντικείμενο των Μαθηματικών. Μόνον όταν τα μυθιστορήματα που έχουν ως αντικείμενο τα Μαθηματικά, θα αρχίσουν να διαβάζονται σαν όλα τα άλλα, θα έχει κερδηθεί το στοίχημα, υπογραμμίζει ο Guedj.

Ο Andrew Crumey (2013) δηλώνει ότι τον ενδιαφέρει περισσότερο το είδος των βιβλίων που αντιστέκονται στην κατηγοριοποίηση. Θεωρεί αρνητικό στοιχείο για ένα βιβλίο να κατατάσσεται σ' ένα είδος και ενστικτωδώς το αποφεύγει για τα έργα του. Στόχος του, είναι να παρουσιάσει ιδέες από τα μαθηματικά και τη φυσική, που καθόρισαν την ανθρώπινη σκέψη και να διερευνήσει με ποιον τρόπο οι ιδέες αυτές, αντανακλώνται στη ζωή του σύγχρονου ανθρώπου. Δεν ενίσταται στην ύπαρξη κατηγοριών, μόνο στην περίπτωση που εξυπηρετούν πρακτικούς σκοπούς, όταν δηλαδή, βοηθούν το αναγνωστικό να επιλέξει αυτό που θέλει να διαβάσει

Διαφορετική είναι η άποψη του Τεύκρου Μιχαηλίδη (2006), ο οποίος αναφέρει ότι όπως ένα μυθιστόρημα που αντλεί τη θεματολογία του από την ιστορία χαρακτηρίζεται ιστορικό, όπως ένα ποίημα που υμνεί τον έρωτα περιγράφεται ως ερωτικό, έτσι κι ένα αφήγημα που εμπνέεται από τα Μαθηματικά ή αναφέρεται με καθοριστικό τρόπο σε αυτά, μπορεί να χαρακτηριστεί μαθηματική μυθοπλασία. Κατά το Μιχαηλίδη, όταν μια απόδειξη κατέχει σε ένα μυθιστόρημα *«το ρόλο του ιερού Γκράαλ»*, όταν αποτελεί το κίνητρο ενός εγκλήματος, όταν ένα ολόκληρο μυθιστόρημα χτίζεται ως πρόσχημα για να παρουσιαστεί μια μαθηματική θεωρία, πιστεύει ότι μπορούμε σαφώς να μιλάμε για ένα σχετικά αυτόνομο λογοτεχνικό είδος.

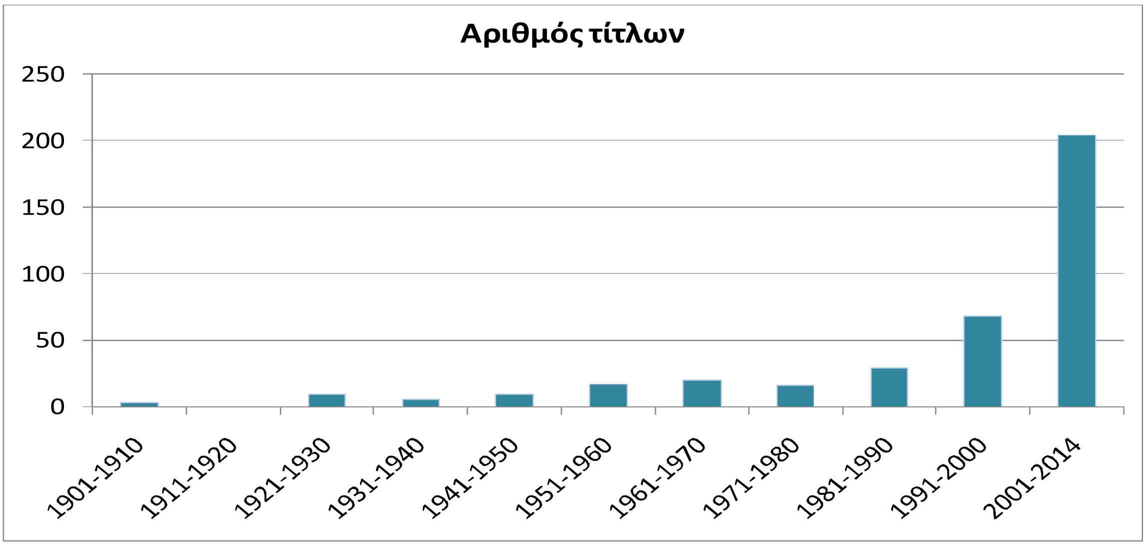
Ο Αργύρης Παυλιώτης (2006) θεωρεί ότι πρόκειται για ένα νέο λογοτεχνικό είδος, αν υπάρξει συνέχεια. Και εκφράζει την πεποίθηση του, για την ύπαρξη συνέχειας, λόγω της συνεχούς ανάπτυξης και διεύρυνσης των λεγόμενων εφαρμοσμένων Μαθηματικών, τα οποία εφαρμόζονται σε όλο και περισσότερες επιστήμες και ανθρώπινες δραστηριότητες, παρέχοντας πολύτιμο υλικό, για την πλουσιοπάροχη τροφοδότηση της λογοτεχνίας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο δικτυακός τόπος του μαθηματικού, πανεπιστημιακού και συγγραφέα Alex Kasman, όπου παραθέτει έναν εκτενέστατο κατάλογο όλων των λογοτεχνικών έργων, που μπορούν να χαρακτηριστούν ως «μαθηματική λογοτεχνία». Ο Μιχαηλίδης (2003) τονίζει, ότι η επιλογή των καταχωρήσεων είναι υποκειμενική αφού δεν μπορεί να υπάρξει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός της «μαθηματικής λογοτεχνίας» και σε αρκετές περιπτώσεις οι καταχωρήσεις αφορούν αριστουργήματα της παγκόσμιας λογοτεχνίας όπως το

«*Πόλεμος και Ειρήνη*» του Λ.Τολστόι ή οι «*Οι αδερφοί Καραμαζώφ*» του Φ.Ντοστογιέφσκι (στα οποία αναφερθήκαμε σε προηγούμενη ενότητα) όπου υπάρχουν σύντομες ή εντελώς περιφερειακές αναφορές στα μαθηματικά ή στους μαθηματικούς. Επιπρόσθετα, στις καταχωρήσεις του Kasman, συμπεριλαμβάνονται μόνο έργα, που έχουν γραφτεί ή μεταφραστεί στα αγγλικά, με αποτέλεσμα να μην καταμετρώνται, αρκετά μαθηματικά μυθιστορήματα, όπως για παράδειγμα τα έργα του C. Frabetti, που είναι γραμμένα στα ισπανικά. Λαμβάνοντας υπόψη τις επιφυλάξεις αυτές, ενδεικτικά παρουσιάζεται η ροή των καταχωρήσεων, που ενισχύουν τον ισχυρισμό, για τη σημαντική αύξηση που παρατηρείται στην παραγωγή έργων «μαθηματικής λογοτεχνίας» τις τελευταίες δεκαετίες:

Δεκαετία	**1901-1910**	**1911-1920**	**1921-1930**	**1931-1940**	**1941-1950**	**1951-1960**	**1961-1970**	**1971-1980**	**1981-1990**	**1991-2000**	**2001-2014**
# τίτλων	3	0	9	5	9	17	20	16	29	68	202

Μαθηματική λογοτεχνία ανά δεκαετία



2.1 Προσπάθειες ορισμού της «Μαθηματικής Λογοτεχνίας»

Με όλες τις επιφυλάξεις που διατυπώθηκαν στα προηγούμενα και ανασκοπώντας τη σχετική βιβλιογραφία, παρατίθενται στη συνέχεια, τρεις ορισμοί για τη «μαθηματική λογοτεχνία». Ο Μιχαηλίδης (2003), δίνει έναν περιγραφικό «ορισμό» για τη μαθηματική λογοτεχνία:

«Θα ονομάζουμε «μαθηματική λογοτεχνία» κάθε μορφή μυθοπλασίας, στην οποία τα μαθηματικά παίζουν καθοριστικό ρόλο, είτε επειδή το αντικείμενο της πλοκής σχετίζεται με αυτά, είτε γιατί κάποιοι από τους χαρακτήρες της, συνδέονται με αυτά και οι ενέργειές τους επηρεάζονται σημαντικά από αυτή τη σχέση.»

Στη συνέχεια, ακολουθεί ένας εξίσου περιγραφικός ορισμός του Μηλιώνη (2001), σύμφωνα με τον οποίο, *«Όταν η λογοτεχνία διαπραγματεύεται θέματα μαθηματικών, χαρακτηρίζεται ως μαθηματική λογοτεχνία. Θέματα ιστορίας, φιλοσοφίας, επιστημολογίας, έρευνας, εφαρμογών και διδακτικής των μαθηματικών αποτελούν συνήθως το αντικείμενο των έργων της μαθηματικής λογοτεχνίας.»* (σελ.590)

Ένας τρίτος ορισμός έχει δοθεί από την Leary (2004), όπου ορίζει ως μαθηματική λογοτεχνία το εξής:

«Ως μαθηματική λογοτεχνία ορίζεται αόριστα σαν οποιοδήποτε είδος μυθοπλαστικής ή όχι, λογοτεχνίας που μπορεί να διαβαστεί σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο χωρίς την πρόθεση να διδαχθεί στον αναγνώστη μια αλγοριθμική ή υπολογιστική μαθηματική δεξιότητα. Ο παραδοσιακός τρόπος κειμένου δεν αποτελεί μαθηματική λογοτεχνία, ενώ ένα ποίημα, μια σύντομη ιστορία, μια ιστορική αφήγηση ή ένα μυθιστόρημα μπορούν να αποτελούν κάποια παραδείγματα.». (σελ.4)

Και συνεχίζει αναφέροντας ότι,

«*Ένα καλό δείγμα μαθηματικής λογοτεχνίας θα μπορούσε: να περιλαμβάνει στρώσεις νοημάτων ενδυναμώνοντας φυσικούς δεσμούς με τα μαθηματικά, παρέχοντας ευκαιρίες στον αναγνώστη να χρησιμοποιήσει τα μαθηματικά για αυθεντικούς σκοπούς αποδίδοντας ευχαρίστηση σε μαθηματικές αναζητήσεις· αξιοποιώντας το ρεπερτόριο γνώσεων του αναγνώστη προσκαλώντας τον να μάθει κάτι καινούργιο, ενδυναμώνοντας την ανακάλυψη· γενικεύοντας την αίσθηση της απορίας· ενθαρρύνοντας την περιέργεια του αναγνώστη· καλλιεργώντας ένα χιουμοριστικό ή συνομιλητικό τόνο· διεγείροντας και εμπλέκοντας τον αναγνώστη να έχει μια λογική σύνθεση είτε επεξηγηματική, είτε αφηγηματική· εάν το βιβλίο έχει αφηγηματική δομή, η* *υπόθεση θα πρέπει να πηγάζει φυσικά από τις ενέργειες του χαρακτήρα· εάν το βιβλίο είναι σε ποιητική μορφή, ο ρυθμός και ο στίχος να είναι φυσικοί και όχι αριστοτεχνικά κατασκευασμένοι.*» (Leary, 2004, σελ.4)

Φαίνεται ότι ο πρώτος ορισμός με τον δεύτερο, κατά κάποιον τρόπο συγκλίνουν, ενώ ο τρίτος απευθύνεται σε ένα μεγαλύτερο εύρος κειμένων, πιθανόν και μη λογοτεχνικών.

Ο Α. Δοξιάδης (2006), ενίσταται στη χρήση του όρου μαθηματική λογοτεχνία-τον οποίο μάλιστα αποκαλεί «φρικαλέα διατύπωση»-αναγκάζεται όμως να τον χρησιμοποιήσει για καθαρά πρακτικούς λόγους. Ωστόσο, θεωρεί ότι ο ίδιος διαφοροποιείται από τις δύο συνήθεις κατηγορίες συγγραφέων μαθηματικής λογοτεχνίας, δηλαδή τόσο από τους συγγραφείς-μαθηματικούς, που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για διδακτικούς ή προπαγανδιστικούς σκοπούς, όσο και από τους κατ' επάγγελμα συγγραφείς που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σαν έναν ιδιότυπο ιδεολογικό εξωτισμό….

2.2 Ιστορική αναδρομή

Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, τα λογοτεχνικά κείμενα, όταν αναφέρονται στα μαθηματικά επιδεικνύουν ιδιαίτερο σεβασμό επισημαίνει ο Μιχαηλίδης (2003) στο άρθρο του «Από τον Αισχύλο στους μεταμοντέρνους: μαθηματική λογοτεχνία». Και συνεχίζει λέγοντας ότι οι αναφορές σε αυτά είναι προσεκτικές, μετρημένες και μαρτυρούν ένα μείγμα δέους και θαυμασμού από τη μεριά του λογοτέχνη. Καθώς και ότι αυτή, είναι μια σχεδόν ενιαία στάση, από τα πρώτα χρόνια ύπαρξης γραπτού λόγου μέχρι τις αρχές του εικοστού αιώνα, όταν εμφανίζονται τα πρώτα δείγματα αυτού που γενικά και αόριστα ονομάστηκε «μαθηματική λογοτεχνία».

Σύμφωνα με τον Μιχαηλίδη (2003, 2004), το «*Τσου Πέι Τσουάγκ Σιγκ*», θεωρείται το αρχαιότερο κινεζικό μαθηματικό κείμενο, παρόλο που οι απόψεις σχετικά με τη χρονολόγησή του, αποκλίνουν μέχρι και χίλια χρόνια. Οι πιο τολμηροί το τοποθετούν γύρω στο 1200 π.Χ. ενώ η επικρατέστερη άποψη είναι πως γράφτηκε γύρω στο 300 π.Χ. Το έργο παρουσιάζει τους διαλόγους ενός νεαρού πρίγκιπα με έναν υπουργό, σχετικά με τις κινήσεις των άστρων και με αυτή την ευκαιρία, παρουσιάζονται οι ιδιότητες των τριγώνων και ο λογισμός των κλασμάτων. Η «*Σούρια Σιντχάντα*» γράφτηκε στην Ινδία, περί το 400 μ.Χ. Έχει τη μορφή επικού ποιήματος που αφηγείται τα κατορθώματα του Ήλιου. Μέσα στην αφήγηση περιλαμβάνονται πλούσιες αστρονομικές πληροφορίες καθώς και το μαθηματικό τους υπόβαθρο. Ο Μιχαηλίδης παραθέτει μερικούς στίχους από τη *Σούρια Σιντχάντα, όπου* ο άγνωστος ινδός ποιητής αναφέρεται στο Γκανίτ, την τέχνη δηλαδή των Μαθηματικών:

«Όπως τα φτερά που παγωνιού και τα πολύτιμα πετράδια τοποθετούνται στο ψηλότερο μέρος του κορμιού έτσι και η θέση του Γκανίτ είναι στο ψηλότερο κλαδί των Βέδα.»

…

«Τι ωφελούν τα πολλά λόγια; Ότι στον κόσμο υπάρχει που κινείται ή δεν κινείται δε μπορεί να γίνει κατανοητό χωρίς Γκανίτ».

Αλλά και στην τραγωδία του Αισχύλου *«Προμηθεύς Δεσμώτης»* 500 π.Χ., γίνεται αναφορά στους αριθμούς. Δεμένος στο βράχο του Καυκάσου, τιμωρημένος απ' το Δία γιατί τόλμησε να προσφέρει στους θνητούς γνώσεις, που αρμόζουν μόνο σε θεούς, ο Προμηθέας απαριθμεί στο χορό των Ωκεανίδων τα δώρα που χάρισε στους ανθρώπους. Κι ανάμεσα σ' αυτά, τα προορισμένα μόνο για αθάνατους αγαθά:

«…μα και τον αριθμό, την πιο τρανή σοφία βρήκα για χάρη τους εγώ…»

Ιδιαίτερη μνεία κάνει ο Μιχαηλίδης (2003), σε ένα κατά βάση λογοτεχνικό κείμενο του 5ου μ.Χ. αιώνα, αφιερωμένο στο σύνολο των επιστημονικών γνώσεων της εποχής. Πρόκειται, για το έργο του Μαρσιανού Καπέλλα, «*Οι γάμοι του Ερμή και της Φιλολογίας*» (~410 μ.Χ.). Ο θεός Ερμής νυμφεύεται τη Φιλολογία. Οι επτά ελεύθερες τέχνες παρελαύνουν για να ευχηθούν και αυτο-παρουσιάζονται. Ανάμεσά τους, η Αριθμητική (που η παρουσίασή της καταλαμβάνει 58 από τις 379 σελίδες του έργου), η Γεωμετρία (που ενσωματώνει και τη Γεωγραφία με 60 σελίδες) και η Αστρονομία (41 σελίδες). Το ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο κείμενο, έγκειται κατά τον Μιχαηλίδη (2003), στην ιδέα του συγγραφέα να επινοήσει ένα μύθο ως πρόσχημα για να παρουσιάσει τις επιστημονικές γνώσεις της εποχής του. Ο Μιχαηλίδης (2003) επισημαίνει ότι, η συγκεκριμένη ιδέα εμφανίζεται για πρώτη φορά στη λογοτεχνία, καθιστώντας το έργο του Μαρσιανού Καπέλλα, πρόδρομο των σημερινών μαθηματικών μυθιστορημάτων, προσχηματικής μυθοπλασίας, τα οποία θα αναφερθούν στη συνέχεια. Οι ίδιες, οι επιστημονικές γνώσεις, που παρουσιάζονται προκαλούν θλίψη με τη φτώχια τους και τη χαμηλή τους ποιότητα. Το έργο αυτό, γραμμένο εν μέρει σε πεζό και εν μέρει σε έμμετρο λόγο, χρησίμευσε ως σχολικό εγχειρίδιο κατά τον Μεσαίωνα και επηρέασε πολύ τους πρώτους πανεπιστημιακούς κύκλους της Ευρώπης.

Με τον όρο επιστημονική επανάσταση, ορίζεται ένα διάστημα 150 περίπου ετών, στη διάρκεια του οποίου, η εικόνα του Σύμπαντος, αφού πέρασε από πολλά ενδιάμεσα στάδια άλλαξε ριζικά. Η ηλιοκεντρική ιδέα περί Σύμπαντος, αποκρυσταλλωμένη σ' ένα ενιαίο σύστημα από τον Κοπέρνικο και αναθεωρημένη στη νέα αυτή μορφή από τον Κέπλερ-αντικατέστησε τις κυκλικές τροχιές με ελλειπτικές-τοποθετείται από το Νεύτωνα σε ένα συνεπές μαθηματικό πλαίσιο, βασισμένο στους περίφημους νόμους του Νεύτωνα. Η επιστημονική επανάσταση δεν περιορίστηκε φυσικά μόνο στην Αστρονομία. Η πρόοδος στην Αστρονομία *«προκάλεσε αλυσιδωτές αντιδράσεις στη Μηχανική, την Οπτική, τη Χημεία, την Ανατομία, τη Φυσιολογία, ενώ στο υπόβαθρο όλων αυτών των ανακατατάξεων χτιζόταν σταδιακά μια νέα μαθηματική θεωρία, πρώτη ριζικά νέα μαθηματική δημιουργία ύστερα από τη Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων: ο Απειροστικός Λογισμό».*(Μιχαηλίδης, 2010)

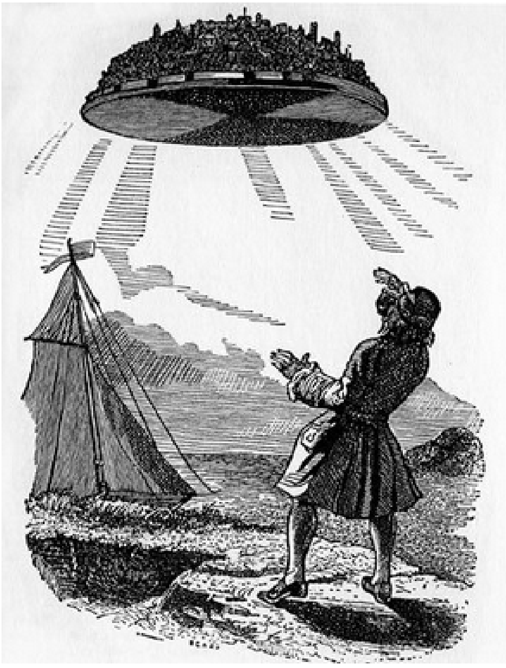
Η λογοτεχνία του 17ου και 18ου αιώνα δε θα μπορούσε να μείνει ανεπηρέαστη από τις αλλαγές αυτές. Το 1634, κυκλοφορεί το έργο του Kepler, «*Somnium*».Το βιβλίο εξιστορεί τις περιπέτειες ενός νεαρού ταξιδιώτη, που αφού σπούδασε Αστρονομία κοντά στον Τύχο Μπράχε, καταφέρνει χάρη στις μαγικές ικανότητες της μητέρας του, να ταξιδέψει στη Σελήνη και να περιγράψει τον κόσμο, όπως τον έβλεπε από εκεί. Η περιπέτεια του νεαρού ταξιδιώτη παρουσιάζεται σαν ένα όνειρο που είδε ο συγγραφέας, ύστερα από έντονες σχετικές συζητήσεις με συναδέλφους του και άτομα της αυλής. Στο έργο συμπεριλαμβάνονται με τη μορφή υποσημειώσεων ιστορικά στοιχεία, γεωγραφικές πληροφορίες καθώς και μαθηματικές και αστρονομικές λεπτομέρειες. *«Έχουμε λοιπόν ένα από τα πρώτα δείγματα προσχηματικής μυθοπλασίας με στόχο την εύκολη και ανώδυνη διάδοση των νέων ιδεών. Επιπροσθέτως έχουμε το πρώτο ίσως έργο επιστημονικής φαντασίας.»* (Μιχαηλίδης, 2010)

Το 1662, κυκλοφορεί στην Αγγλία, το έργο της Margaret Cavendish, « *Η Περιγραφή ενός καινούριου κόσμου που αποκαλείται λαμπρός κόσμος*». Στο έργο περιγράφονται οι περιπέτειες μιας νεαρής αριστοκράτισσας, την οποία ερωτεύεται ένας έμπορος. Επειδή η ταπεινή καταγωγή του, τον καθιστά ακατάλληλο για σύζυγο της, αποφασίζει να την απαγάγει. Όμως το πλοίο του, παρασύρεται από την κακοκαιρία προς το Βόρειο Πόλο, τη στιγμή που χάρη σε μια αστρονομική συγκυρία, η τροχιά της Γης προσεγγίζει, αυτήν ενός άλλου πλανήτη. Όλοι οι επιβαίνοντες στο πλοίο σκοτώνονται εκτός από την κοπέλα, που μεταφέρεται με έναν ανεμοστρόβιλο στον πλανήτη. Ο άρχοντας του νέου αυτού κόσμου την ερωτεύεται, τη νυμφεύεται και της παραδίδει τα ηνία της εξουσίας. Ως βασίλισσα πλέον, η πρωταγωνίστρια συνομιλεί με τους διάφορους επιστήμονες της χώρας, οι οποίοι ανάλογα με την ειδικότητά τους, έχουν το όνομα και τη μορφή διαφόρων ζώων. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης με τους μαθηματικούς-αράχνες και τους γεωμέτρες-ψείρες, η βασίλισσα τους ρωτά επίμονα αν κατάφεραν να τετραγωνίσουν τον κύκλο. Αναρωτιέται ακόμα, αν μπορούν να κατασκευάσουν φανταστικές γραμμές (οι φανταστικοί αριθμοί είχαν έρθει στο προσκήνιο από το 1545, ως τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών) . Επίσης, η βασίλισσα παρατηρεί ότι τα σημεία των μαθηματικών, είναι τόσο μικροσκοπικά και μηδαμινά που μοιάζουν φανταστικά. Από την παρατήρηση της βασίλισσας, αναδεικνύεται η δυσκολία κατανόησης της έννοιας του απειροστού, που αρχίζει να διαφαίνεται, από τις προσπάθειες θεμελίωσης του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. (Μιχαηλίδης, 2010)

Από το κείμενο γίνεται φανερό, ότι οι γνώσεις της Cavendish είναι ελλιπείς και επιφανειακές. Επιπλέον, στόχος του έργο της, δεν είναι η εκλαΐκευση των νέων επιστημονικών επιτευγμάτων, αλλά η κοινωνική κριτική και επειδή τα μαθηματικά βρίσκονται στο προσκήνιο, τα ενσωματώνει στο κείμενο της. Βέβαια η θεώρησή της, για τις θετικές επιστήμες παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, αφού αποτελεί μια αξιόπιστη μαρτυρία για τον τρόπο με τον οποίο, ο μη ειδικός αντιλαμβάνεται τα επιτεύγματα της επιστημονικής επανάστασης.

Ο Γκιούλιβερ, ο διάσημος ήρωας του Jonathan Swift (1667 – 1745), σ’ ένα από τα ταξίδια του θα φτάσει στη Λαπούτα, ένα νησί που αιωρείται μεταξύ γης και ουρανού και που διοικείται από μαθηματικούς. Οι κάτοικοι του νησιού περνούν το χρόνο τους ασχολούμενοι με τους τέσσερις κλάδους του Quadrivium, Γεωμετρία, Αριθμητική, Αστρονομία και Μουσική. Τόσο πολύ απασχολημένοι είναι με τις επιστημονικές ενατενίσεις τους, που παραμελούν τις στοιχειώδεις κοινωνικές τους υποχρεώσεις. Έτσι διατηρούν υπηρέτες, που έχουν ως μοναδική αποστολή, να τους θυμίζουν πότε πρέπει να μιλήσουν ή να ακούσουν, χτυπώντας τους ελαφρά στο στόμα ή στο αυτί αντίστοιχα. Τα ρούχα τους, είναι διακοσμημένα με αστρονομικά σύμβολα, τα εδέσματά τους, σερβίρονται κομμένα σε κανονικά γεωμετρικά σχήματα. Όμως, τα σπίτια τους είναι κακοχτισμένα και ετοιμόρροπα γιατί, όπως και ο Πλάτων, απεχθάνονται την πρακτική Γεωμετρία και αρνούνται να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για ταπεινούς καθημερινούς σκοπούς.

Και στο έργο του Swift, ο Μιχαηλίδης (2004) διακρίνει *«την έμμεση, ενδεχομένως και ασυναίσθητη επιρροή που ασκούν οι επιστημονικές εξελίξεις στην ουσία του μύθου»*. Εκτός από τις αναφορές στους μαθηματικούς της Λαπούτα, η επίδραση των Μαθηματικών είναι φανερή στα δυο πρώτα ταξίδια του Γκιούλιβερ, στη χώρα των Λιλιπούτιων και των Μπρόμπντιγκναγκ. Στην πρώτη περίπτωση ο ήρωας ναυαγεί σε μια χώρα μικροσκοπικών πλασμάτων που έχουν ακριβώς τα ίδια φυσικά και νοητικά χαρακτηριστικά με τους συνηθισμένους ανθρώπους αλλά είναι πενήντα φορές μικρότεροι. Στη δεύτερη, ο Γκιούλιβερ είναι ο μικροσκοπικός σε μια χώρα γιγάντων.



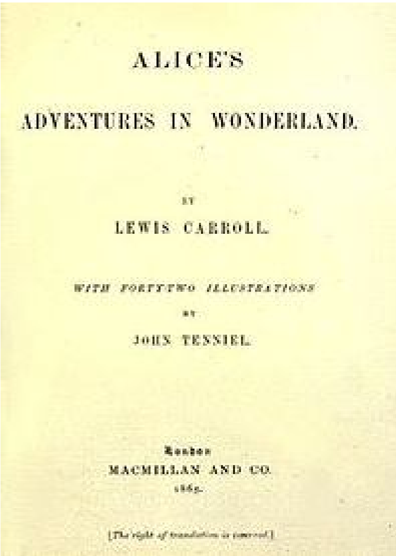
Η διατήρηση των ιδιοτήτων υπό κλίμακα σχετίζεται άμεσα με την πρόσφατη εφεύρεση και διάδοση των τηλεσκοπίων και των μικροσκοπίων, αλλά κυρίως με την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού. Στα «*Ταξίδια του Γκιούλιβερ*» αφηρημένες μαθηματικές έννοιες διεισδύουν τόσο στην πλοκή όσο και τα ευρήματα.

Η ιδέα, της ύπαρξης όμοιων ανθρώπινων όντων σε διαφορετικά μεγέθη, είναι κυρίαρχη και στο «*Μικρομέγα*», του Βολταίρου που εκδόθηκε το 1752. Ένας γίγαντας από τον Σείριο, 24.000 φορές μεγαλύτερος από τους κατοίκους της Γης, φτάνει στο ηλιακό μας σύστημα. Αρχικά, αποβιβάζεται στον Κρόνο, όπου οι κάτοικοι είναι 900 φορές μεγαλύτεροι από τους γήινους. Εκεί, πιάνει φιλίες με το γραμματέα της Ακαδημίας των Επιστημών και μαζί επισκέπτονται τη Γη.

Οι έννοιες του απείρου και του απειροστού ταλανίζουν και τον Βολταίρο, ο οποίος αδυνατεί να κατανοήσει το αληθινό τους νόημα, ταυτίζοντας το άπειρο με το «πάρα πολύ μεγάλο» και το απειροστό με το «πάρα πολύ μικρό». Η αναλλοίωτη κλίμακα του Swift, εμπλουτίζεται από το Βολταίρο. Στον «*Μικρομέγα*» τα μεγαλύτερα όντα είναι και μακροβιότερα, έχουν περισσότερες αισθήσεις και το φωτεινό φάσμα τους έχει περισσότερα χρώματα. Ο Μιχαηλίδης (2010) υπογραμμίζει, ότι παρά τον κύριο στόχο του Βολταίρου, να κρίνει και να καυτηριάσει την άσκοπη επιθετικότητα των ανθρώπων, ο αναγνώστης του «*Μικρομέγα*», αποκομίζει την αίσθηση, ότι ο συγγραφέας διακατέχεται από την αγωνία να παραθέσει, όλες τις γνώσεις που έχει αποκτήσει σχετικά με τις εξελίξεις στη Φυσική Φιλοσοφία[12].

Περίπου έναν αιώνα αργότερα (1865), η παρουσία των μαθηματικών στο έργο του Lewis Carroll, είναι και πιο έντονη και πιο οργανωμένη. Βεβαίως, το γεγονός ότι πίσω από το ψευδώνυμο του δημιουργού, της *«Αλίκης στη χώρα των θαυμάτων»* (1865), κρύβεται ο μαθηματικός Charles Lutwidge Dodgson, λέκτορας στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, παίζει σημαντικό ρόλο.

Χωρίς να γίνεται η παραμικρή ευθεία αναφορά στη συγκεκριμένη επιστήμη, χωρίς κανένας από τους φανταστικούς ήρωες να έχει σχέση με τον κλάδο, η παρουσία των Μαθηματικών σε κάθε εύρημα, σε κάθε ευφυολόγημα, σε κάθε αποστροφή του λόγου, είναι έντονη. Στις σελίδες του, διακρίνονται η «μαθηματική» δομή και τα παράδοξα, που απορρέουν από τη μη προσεκτική χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Αν δεν υπήρχαν τόσες άλλες λογοτεχνικές κατηγορίες, που να τα διεκδικούν, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι τα μυθιστορήματα του Carroll είναι τα πρώτα δείγματα Μαθηματικής Λογοτεχνίας.


ALICE'S

ADVENTURES IN WONDERLAND.

BY

LEWIS CARROLL.

WITH FORTY-TWO ILLUSTRATIONS

BY

JOHN TENNIEL.

London

MACMILLAN AND CO.

1865.

[The right of translation is reserved.]

Είκοσι χρόνια αργότερα, το 1884, κυκλοφόρησε το «*Flatland*» του Edwin Abbot. Είναι η εποχή, που πολλαπλασιάζονται οι δημοσιεύσεις σχετικά με τις γεωμετρίες τεσσάρων διαστάσεων, ένα μαθηματικό εργαλείο εξαιρετικά -όπως αποδείχθηκε αργότερα– χρήσιμο, αυστηρά θεμελιωμένο από επιστημονική άποψη, αλλά για το οποίο, ακόμα και όσοι έχουν κάποια εξοικείωση με τις θετικές επιστήμες, δεν διαθέτουν καθόλου προσλαμβάνουσες παραστάσεις. Τα εκλαϊκευτικά άρθρα συγγραφέων, όπως ο Charles Hinton, δεν κατορθώνουν να παρουσιάσουν με εύληπτο τρόπο το θέμα. Η ανυπαρξία «βασιλικής οδού» προς τη Γεωμετρία, την οποία είχε ανακοινώσει ο Ευκλείδης, επιβεβαιώνεται για άλλη μια φορά. Και τότε ο ιερέας και δημοδιδάσκαλος Abbot, έχει μια πρωτοφανή για τα παιδαγωγικά χρονικά σύλληψη: Γράφει ένα μυθιστόρημα που εκτυλίσσεται στο χώρο των δύο διαστάσεων. Από θέση ισχύος ο τρισδιάστατος αναγνώστης, κατανοεί τις δυσκολίες, που θα είχαν τα επίπεδα όντα, να κατανοήσουν την τρίτη διάσταση και τις συγκρίνει με τις δικές του

[12] Μέχρι τον $19^{ο}$ με τον όρο Φυσική Φιλοσοφία εννοούσαν όλες τις αποκαλούμενες σήμερα, θετικές επιστήμες ,τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Χημεία και η Αστρονομία.

δυσκολίες, να συλλάβει την έννοια της τέταρτης. Ωστόσο η «*Flatland*» δεν είναι ένα καμουφλαρισμένο μάθημα Γεωμετρίας. Είναι μια ολοκληρωμένη νουβέλα που σατιρίζει καυστικά, ήθη και έθιμα της Βικτωριανής Αγγλίας, ένα σαφώς λογοτεχνικό κείμενο, όπου τα Μαθηματικά εντάσσονται αρμονικά στην πλοκή και δημιουργούν αυτό που ανεπιφύλακτα θα χαρακτηριστεί, ως το πρώτο μαθηματικό μυθιστόρημα.

Μετά τον Abbot και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ’90, ελάχιστα έργα μπορούν να χαρακτηριστούν ως «μαθηματική λογοτεχνία», με την έννοια που περιγράφηκε πιο πάνω. Υπάρχουν βέβαια αρκετές μυθιστορηματικές βιογραφίες, που αναφέρονται σε μαθηματικούς καθώς και αρκετά αστυνομικά μυθιστορήματα, όπου το θύμα, ο δολοφόνος ή αυτός που εξιχνιάζει το έγκλημα είναι μαθηματικοί και αυτή τους η ιδιότητα, υπεισέρχεται κατά κάποιο τρόπο στην πλοκή. Όμως, κανένα δεν προχωρά πέρα από τα στερεότυπα του «αφηρημένου μαθηματικού», της «σαφήνειας των εξισώσεων», της «αναμφισβήτητης αλήθειας» στα οποία αναφερθήκαμε πιο πάνω. Ο αστυνόμος Μπέκας, ήρωας του Γιάννη Μαρή, που «στο σχολείο αγαπούσε πολύ την Άλγεβρα», που θεωρούσε ότι «όλα είναι στοιχεία μιας μαθηματικής εξίσωσης» και ότι «βήμα-βήμα πηγαίνουμε από το γνωστό στον άγνωστο», αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα. (Μιχαηλίδης, 2003)

Οι δεκαετίες του ’50 και του ’60, χαρακτηρίζονται από την άνθηση της επιστημονικής φαντασίας. Σ’ αυτό το λογοτεχνικό είδος, τα μαθηματικά παίζουν κατά κανόνα ένα σκοτεινό, για να μην πούμε σκοταδιστικό ρόλο. Επειδή η συντριπτική πλειοψηφία των μυθιστορημάτων, αυτού του τύπου, στηρίζεται σε μια παραβίαση φυσικών νόμων (κίνηση με ταχύτητα μεγαλύτερη αυτής του φωτός, τηλεμεταφορά, ταξίδια στο παρελθόν και στο μέλλον με στόχο την τροποποίηση του παρόντος κλπ.), γίνεται επίκληση κάποιου συγκεχυμένου μαθηματικού όρου ή τύπου, που εξασφαλίζει τη «νομιμοποίηση» της φυσικής παρανομίας. Η ιδέα, «αφού είναι μαθηματικό είναι εγγυημένα αληθές αλλά έτσι κι αλλιώς δεν το καταλαβαίνει κανένας» είναι όλη κι όλη η συμμετοχή των μαθηματικών, στα έργα επιστημονικής φαντασίας.

Εξαίρεση αποτελούν ίσως τα έργα του Ισαάκ Ασίμωφ και ειδικότερα η τριλογία «*Foundation*». Εκεί εμφανίζεται μια υποθετική επιστήμη, η Ψυχοϊστορία, που χρησιμοποιώντας τη Στατιστική, τη μελέτη των επαναλήψεων και των κανονικοτήτων και την αυτοομοιότητα (που παρουσιάζεται χωρίς να κατονομάζεται), είναι σε θέση να προβλέψει ή ακόμα και να επηρεάσει το μέλλον, όχι σε ατομική αλλά σε μαζική κλίμακα. Παρατηρείται εδώ, μια προαναγγελία των θεωριών του

Χάους και της Πολυπλοκότητας, που αναπτύχθηκαν 25 χρόνια αργότερα. Επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα βιβλία του Gregory Benford, στα οποία στηρίζει την υπόθεσή του, σε έγκυρες από μαθηματική άποψη εξισώσεις, που δεν έχουν όμως επαληθευθεί πειραματικά.

Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, ολοκληρώνεται η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Γερμανό Dedekind. Ο ορισμός όμως, των πραγματικών αριθμών στην εργασία του, έγινε με αρκετά σύνθετο και δυσνόητο τρόπο. Χρειάστηκε να μεσολαβήσει ένα διάστημα 100 ετών, για να απλουστευθεί ο ορισμός των πραγματικών αριθμών από τον Άγγλο μαθηματικό John Horton Conway. Με εξίσου απλό τρόπο ορίζονται στην εργασία του Conway, και αριθμοί ακόμα πιο γενικοί από τους πραγματικούς. Το 1972, στα πλαίσια ενός γεύματος, ο Conway κοινοποιεί την εργασία του, στον διάσημο καθηγητή της Πληροφορικής Donald Ervin Knuth. Ο τελευταίος επέλεξε, να συγγράψει ένα μυθιστόρημα, για να παρουσιάσει στην παγκόσμια μαθηματική κοινότητα αλλά και στο ευρύ κοινό τις ιδέες του Conway. Το συγκεκριμένο βιβλίο αποτελεί μάλιστα, μια από τις σπάνιες περιπτώσεις, όπου μία νέα μαθηματική ιδέα παρουσιάζεται, μέσω ενός μυθιστορήματος. Έτσι, το 1974, κυκλοφορεί το έργο του, με τίτλο «*Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*», στο οποίο οι κεντρικοί πρωταγωνιστές, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, ανακαλύπτουν σε μια ερημική ακτή μια προχωρημένη μαθηματική θεωρία - καθώς και τους εαυτούς τους, τον έρωτα, και την αναπόδραστη μέθη των μαθηματικών. (Παπαδημητρίου, 2004)

Στη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας, παρατηρείται πληθώρα εκδόσεων, που εντάσσονται στα πλαίσια της μαθηματικής λογοτεχνίας. Τα περισσότερα από αυτά τα βιβλία πραγματοποιούν πολλές εκδόσεις, μεταφράζονται σε πολλές γλώσσες και μερικά από αυτά γίνονται best-seller, δημιουργώντας ένα ρεύμα μαθηματικής λογοτεχνίας, το οποίο χωρίζεται σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες. Στην προσχηματική-διδακτική μυθοπλασία, στη βιωματική μαθηματική λογοτεχνία, στη δομική μαθηματική λογοτεχνία και στις ιστορίες αναζήτησης που θα παρουσιαστούν αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

2.2 Προσπάθειες ταξινόμησης των έργων Μαθηματικής Λογοτεχνίας

Ο Τ. Μιχαηλίδης στο άρθρο του «*Μαθηματικές μυθοπλασίες: Μια προσπάθεια ταξινομίας στη λογοτεχνία των μαθηματικών*» (2004) αναφέρει ότι, «*η ταξινόμηση με βάση σαφή και αυστηρά κριτήρια είναι μια εργασία οικεία στον μαθηματικό*». Αναφέρεται ενδεικτικά, σε χαρακτηριστικά παραδείγματα ταξινόμησης από τα μαθηματικά, όπως η ταξινόμηση των ακέραιων αριθμών σε άρτιους (ζυγούς, πολλαπλάσια του 2 δηλαδή) ή περιττούς. Στην ταξινόμηση των τριγώνων, με βάση τις πλευρές τους, σε ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά καθώς και στην ταξινόμηση με βάση τις γωνίες τους, σε ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια. Τονίζει όμως, ότι «*όσο απομακρυνόμαστε από τα Μαθηματικά, τα κριτήρια γίνονται όλο και περισσότερο ασαφή. Ακόμα και παραμένοντας στο χώρο των θετικών επιστημών, δεν είναι σπάνιες οι επαμφοτερίζουσες καταστάσεις που κάνουν τις ταξινομήσεις ασαφείς. Παράδειγμα ο χωρισμός των στοιχείων σε μέταλλα ή αμέταλλα, ή ο χωρισμός των ζώντων οργανισμών σε ζώα ή φυτά.*»

Καταλήγοντας στο εξής:

«Καταλαβαίνει λοιπόν κανείς πόσο υποκειμενική και αμφιλεγόμενη θα είναι κάθε προσπάθεια ταξινομίας σε χώρους όπως η τέχνη ή η λογοτεχνία.»

Στη συνέχεια, με δεδομένη την εννοιολογική δυσκολία, να χαρακτηριστεί κάποιο κείμενο, ως «μαθηματική λογοτεχνία», διακρίνονται τέσσερις κατηγορίες μαθηματικής λογοτεχνίας, με βάση το κυρίαρχο στοιχείο των έργων, την «προσχηματική – διδακτική», τη «βιωματική», τη «δομική» και τις «ιστορίες αναζήτησης».

Η **«*προσχηματική-διδακτική μυθοπλασία*»** ,όπου ο μύθος χρησιμοποιείται ως πρόσχημα, για τη μετάδοση γνώσεων, με τρόπο περισσότερο εύληπτο και αποδεκτό, είναι ένα είδος ιδιαίτερα διαδεδομένο στις μέρες μας. Είναι σαφές ότι αυτό το λογοτεχνικό είδος, δεν αφορά αποκλειστικά στα Μαθηματικά. Σε όλα σχεδόν τα γνωστικά αντικείμενα, έχει επιχειρηθεί αυτή η μέθοδος προσέγγισης, με λιγότερη ή περισσότερη επιτυχία. «*Ωστόσο με δεδομένη τη δυσπιστία και το φόβο απέναντι στα Μαθηματικά, που η πλειοψηφία των πολιτών κουβαλά από τη σχολική περίοδο της ζωής τους, ένα τέτοιο εγχείρημα σε αυτό τον τομέα, αποκτά ξεχωριστή σημασία*» επισημαίνει ο Μιχαηλίδης. Παρόλο που τα σημαντικότερα και πιο επιτυχημένα δείγματα του είδους, εμφανίστηκαν κατά την τελευταία δεκαετία, ο Μιχαηλίδης εντοπίζει απόπειρες προσχηματικής μυθοπλασίας με μαθηματικό περιεχόμενο, στα βάθη της ιστορίας, όπως το έργο του Μαρσιανού Καπέλλα *«Οι γάμοι του Ερμή και της Φιλολογίας»*, που αναφέρθηκε στα προηγούμενα και αποτέλεσε ένα από τα βασικότερα διδακτικά εγχειρίδια στη Δύση κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα.

Εξέχουσα θέση κατέχουν αναμφίβολα, το «*Θεώρημα του παπαγάλου*»(1998) του Denis Guedj και το «*Flatterland*» (2001) του Ian Stewart. Το πρώτο, έχει τη μορφή αστυνομικού μυθιστορήματος. Στην προσπάθεια τους, να λύσουν το μυστήριο του «θανάτου» ενός φίλου τους, οι ήρωες μελετούν τα βασικά προβλήματα, που κυριάρχησαν στην ιστορία των Μαθηματικών, ανά τους αιώνες και βρίσκουν αναλογίες και ομοιότητες ανάμεσα στα Μαθηματικά και το πρόβλημα που τους απασχολεί. Στην ίδια κατηγορία, εντάσσονται και δυο ακόμη έργα του Guedj, το «*Επιχείρηση Μεσημβρία*» και «*Τα αστέρια της Βερενίκης*». Το πρώτο, περιγράφει τη μέτρηση του μεσημβρινού, με τη μέθοδο του γεωδαιτικού τριγωνισμού, που πραγματοποιήθηκε με απόφαση της επαναστατικής εθνοσυνέλευσης, κατά τα πρώτα χρόνια της Γαλλικής Επανάστασης, ενώ το δεύτερο, αφηγείται τη μέτρηση της περιφέρειας της Γης από τον Ερατοσθένη κατά τους ελληνιστικούς χρόνους.

Το «*Flatterland*», αποτελεί «συνέχεια» του «*Flatland*»(1884), του Edwin Abbot και έχει ως κεντρική ηρωίδα, μια νεαρή δισδιάστατη κάτοικο του επιπέδου, που ανακαλύπτει σε κάποια αποθήκη, τη «μαγική λέξη», που καλεί τον Διαστημικό Άλτη, ένα ον που την οδηγεί στην περιδιάβαση των κόσμων διαφόρων διαστάσεων. «*Χωρίς να υστερεί σε χιούμορ και παιγνιδιώδη διάθεση, ο μύθος έχει καθαρά προσχηματικό χαρακτήρα, αφού ο κύριος στόχος του, είναι φανερά η ξενάγηση του σύγχρονου αναγνώστη στο χώρο των μοντέρνων, μη ενορατικών γεωμετριών*» αναφέρει ο Μιχαηλίδης.

Μια δεύτερη υπό-κατηγορία, θα μπορούσε ίσως να περιγραφεί με τον όρο **«*βιωματική μαθηματική λογοτεχνία*»**. Κεντρικός ήρωας αυτών των έργων είναι κάποιος μαθηματικός, μια προσωπικότητα που έχει δημιουργηθεί με βάση ένα ή περισσότερα υπαρκτά πρόσωπα. Η πλοκή στρέφεται γύρω από τα βιώματα, τα όνειρα και τις φιλοδοξίες αυτού του κεντρικού ήρωα και συνάμα επιχειρεί μια ανάλυση των ιδιαιτέρων χαρακτηριστικών, που απορρέουν από την ιδιότητά του ως μαθηματικού. Παρόλο που ο ήρωας είναι φανταστικός, συχνά ελίσσεται σε πραγματικούς χώρους και συνδιαλέγεται με υπαρκτά, ιστορικά πρόσωπα.

Κορυφαίο σε αυτή την κατηγορία έργο είναι χωρίς αμφιβολία το έργο, «*Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ*» (1992), του Απόστολου Δοξιάδη. Ο ήρωας του έργου, ο μαθηματικός Πέτρος Παπαχρήστου, μαθητής του (υπαρκτού) Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή, αφιερώνει τη ζωή του, στη λύση ενός από τα δυσκολότερα προβλήματα που απασχολούν τους μαθηματικούς εδώ και τρεις αιώνες. Ανάλογου ύφους, αλλά πιο κοντά στο στυλ του «campus novel», σύμφωνα με την παρατήρηση του Μιχαηλίδη, είναι *«Οι Άγριοι Αριθμοί»* (1998) του Schogt Philibert. Το βιβλίο περιελίσσεται γύρω από την κύρια αγωνία των σημερινών πανεπιστημιακών, που κωδικοποιείται κάτω από τη φράση «publish or perish» (δημοσιεύσεις ή θάνατος). Και τα δυο έργα, αγγίζουν με πρωτότυπο τρόπο, το δημοφιλές θέμα των ορίων ανάμεσα στην ιδιοφυία και την τρέλα.

Μια τρίτη κατηγορία είναι η ***«δομική μαθηματική λογοτεχνία».*** Είναι έργα που εκτός από τη θεματολογία τους, συνυφαίνουν τα Μαθηματικά και στη δομή τους. Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα μαθηματικά αποτελούν το βασικό συστατικό της δομής τους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της τρίτης κατηγορίας είναι το «*Βιβλίο Κόλαση*» (2003), του Carlo Frabetti καθώς και τα διηγήματα του J. L. Borges. Φυλακισμένος στα βάθη μιας κόλασης, δομημένης σε κύκλους κατά το δαντικό πρότυπο, ο κεντρικός ήρωας πρέπει να φέρει σε πέρας τους άθλους, που του αναθέτει ο φύλακας διάβολός του, νικώντας τον σε μαθηματική ευρηματικότητα.«*Ο αναγνώστης που έχει μαθηματικές γνώσεις, θα τον παρακολουθήσει να ξεκινά από το παράδοξο του Ράσελ και τη θεμελίωση των συνόλων και σε κάθε νέο κύκλο να κατακτά κι από ένα νέο μαθηματικό σύνολο: τους φυσικούς, τους ακεραίους, τους ρητούς κ.ο.κ. Ωστόσο η μαθηματική εξέλιξη, ευδιάκριτη για τον ειδικό, περνά απαρατήρητη για τον «κοινό θνητό», που απλώς απολαμβάνει τη δομή χωρίς να συνειδητοποιεί τις ευθείες αναφορές στα συγκεκριμένα θεωρήματα*» επισημαίνει ο Μιχαηλίδης.

Ωστόσο, ο Μιχαηλίδης θεωρεί ότι κάποια έργα, όπως για παράδειγμα το «*Τούριγκ: Μαθήματα αγάπης*» (2003) του Χρίστου Παπαδημητρίου και η «*Αρχή του ντ' Αλαμπέρ*» (1996) του Audrew Crumey, είναι δύσκολο να ενταχθούν σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες. Το πρώτο, αποτελεί μια συνεχή εναλλαγή ανάμεσα σε μια κλασσική ερωτική ιστορία, μια σειρά από μαθήματα Μαθηματικών και Πληροφορικής κι ένα συναρπαστικό ταξίδι στον κόσμο της εικονικής πραγματικότητας. Το δεύτερο, ξεκινά σαν μια μυθιστορηματική βιογραφία κι εξελίσσεται σε μια περιδιάβαση στους πολλαπλούς κόσμους, όπου η ευκλείδεια πραγματικότητα εναλλάσσεται με τον χωρόχρονο, την κβαντική πολλαπλότητα και την πλειότιμη λογική. Θεωρεί ότι ενώ τα δυο αυτά έργα έχουν στοιχεία και από τις τρεις κατηγορίες, δεν εντάσσονται πραγματικά σε καμιά από αυτές, λόγω της συνθετότητας και της πολυπλοκότητας τους και τα εντάσσει στο χώρο του μεταμοντέρνου μυθιστορήματος.

Σε μεταγενέστερο άρθρο του, κάνει λόγο και για μια τέταρτη κατηγορία, τις ***«ιστορίες αναζήτησης»***, που αφηγούνται κάποια μαθηματική περιπέτεια. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν, «*Τα αστέρια της Βερενίκης*» (2003) του Denis Guedj και «*Ο άνθρωπος που μετρούσε την άμμο*» (2000) της Gillian Bradshaw. Παρατηρούμε ότι το πρώτο έργο, εντάσσεται και στην κατηγορία της προσχηματικής μυθοπλασίας, γεγονός που καταδεικνύει τη δυσκολία της ταξινόμησης των έργων στη μία ή στην άλλη κατηγορία. Στο δεύτερο βιβλίο, κεντρικός πρωταγωνιστής είναι ο Αρχιμήδης. Ύστερα από αρκετά χρόνια σπουδών στη Βιβλιοθήκη και το Μουσείο της Αλεξάνδρειας, ο νεαρός Αρχιμήδης, ήδη διάσημος για την εφεύρεση του κοχλία που φέρει το όνομά του, επιστρέφει στις Συρακούσες. Φτάνοντας θα διαπιστώσει ότι είναι απαραίτητος τόσο στην οικογένειά του, αφού ο βαριά άρρωστος πατέρας του δε μπορεί πια να την συντηρήσει, όσο και στην πατρίδα του, που απειλείται από την πολιορκία των Ρωμαίων. Για να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις του, θα πρέπει να επιστρατεύσει τόσο τη μαθηματική του ιδιοφυΐα, όσο και την τεχνική του ευρηματικότητα.

Ένα έργο που έχει ως θέμα του, τη σχέση των Μαθηματικών με τη Λογοτεχνία, είναι «*Το τελευταίο παραμύθι του Μιγκέλ Τόρρες ντα Σίλβα*», του Thomas Vogel. Ο ήρωας, εγγονός ενός ονομαστού παραμυθά, σπουδάζει ύστερα από προτροπή του παππού του, Μαθηματικά. Στην πορεία, ανακαλύπτει ότι μέσα από τα Μαθηματικά, θα μπορέσει ίσως να ολοκληρώσει το τελευταίο παραμύθι, που πεθαίνοντας άφησε μισοτελειωμένο ο παππούς του. Είναι ένα έργο ποιητικό, που δίνει τη δική του εκδοχή πάνω στο ερώτημα: «*Πώς μπορούν να συμβιβαστούν, να συνυπάρξουν, να αλληλεπιδράσουν ο ορθολογισμός και η αυστηρή αξιωματική παραγωγική διαδικασία των Μαθηματικών με την αμφισημία, την υποκειμενική ερμηνεία και το φανταστικό κόσμο της μυθοπλασίας*».

Λαμβάνοντας υπόψη μας τα παραπάνω, και πάντοτε διατηρώντας κάποιες επιφυλάξεις, μπορούμε να συναγάγουμε κάποια πρώτα συμπεράσματα για τα βασικά συστατικά της μαθηματικής λογοτεχνίας, που κατά κανόνα: (i) Γράφεται από μαθηματικούς, συχνά πανεπιστημιακούς δασκάλους, ερευνητές διεθνούς κύρους ή εκπαιδευτικούς, με μεγάλη αγάπη τόσο για τα Μαθηματικά, όσο και για τη Λογοτεχνία. (ii) Έχει ως κεντρικούς ήρωες μαθηματικούς, πρόσωπα ιστορικά ή πλασματικά, που έρχονται σε επαφή με επιφανείς μαθηματικούς της εποχής τους. (iii) Τα μαθηματικά παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη ζωή των πρωταγωνιστών, αλλά και στην εξέλιξη του έργου, είτε μέσα από την προσπάθεια επίλυσης κάποιου άλυτου μαθηματικού προβλήματος, είτε μέσα από την εγγραφή μαθηματικών γρίφων ή κωδίκων στην πλοκή του έργου. (iv) Χρησιμοποιεί λέξεις και αναπαραστάσεις, που βρίσκονται μέσα στα Μαθηματικά. (v) Περιέχει πληροφορίες για ιστορικά ζητήματα της μαθηματικής επιστήμης καθώς και επιστημολογικές εξηγήσεις των μεγάλων αλλαγών της.

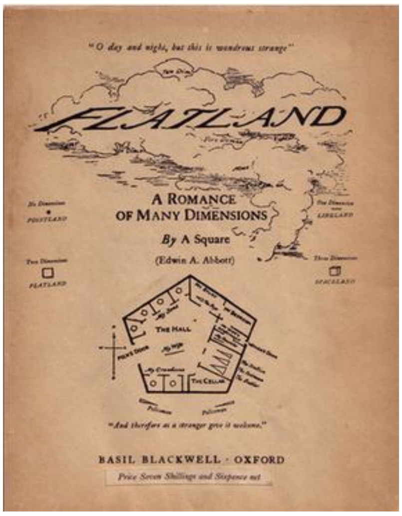
Συνακολούθως, τα έργα μαθηματικής λογοτεχνίας, αποτελούν ένα είδος μύησης στο βασίλειο των Μαθηματικών, «*που εμπερικλείει ένα αμάλγαμα ομορφιάς και αλήθειας απρόσιτο για τους κοινούς θνητούς*», όπως χαρακτηριστικά γράφει ο Α. Δοξιάδης, στο έργο του, «*Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ*» (σελ.40). Ταυτόχρονα, εισάγουν τον αναγνώστη στα άδυτα του μυαλού μιας μαθηματικής ιδιοφυΐας.

Ο Σπύρου (2006), σημειώνει ότι η εμφάνιση της μαθηματικής λογοτεχνίας διαδραματίζει πολλαπλό ρόλο. Τονίζει ότι δεν μπορούμε να ισχυριστούμε άμεσα ότι αυτή αποτελεί το στοιχείο της αυτοσυνείδησης της μαθηματικής κοινότητας, καθώς η επιστημονική αυτή ομάδα προσδιορίζεται από κριτήρια αυστηρά εσωτερικά. Πρόκειται για μια λογοτεχνία που διαβάζεται από τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας συμπληρώνοντας την εικόνα που έχουν για τον εαυτό τους.

Κατά τον Σπύρου, τα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από τον πολύ ειδικό συμβολισμό και το περιορισμένο συχνά πλαίσιο επεξεργασίας των επιμέρους προβλημάτων, με αποτέλεσμα οι Μαθηματικοί των διαφορετικών κλάδων ελάχιστα να κατανοούν ο ένας τον άλλο. Για το λόγο αυτό, θεωρεί ότι ενδιαφέρουν τους μαθηματικούς οι ολιστικές περιγραφές, που προσφέρονται ευκολότερα από τη λογοτεχνική γλώσσα.

2.4 Η Επιπεδοχώρα

Στο σημείο αυτό, θα ολοκληρώσουμε την περιδιάβαση μας, στη μαθηματική λογοτεχνία με μια εκτενέστερη παρουσίαση της *«Flatland»* του Abbot, ώστε να καταστεί σαφής ο χαρακτηρισμός που της αποδόθηκε στα προηγούμενα, ως το πρώτο μαθηματικό μυθιστόρημα.



Το έργο, «Η επιπεδοχώρα, ένα μυθιστόρημα πολλών διαστάσεων», όπως είναι ο πλήρης τίτλος του, διαρθρώνεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, με αφηγητή το Τετράγωνο[13], ο αναγνώστης μαθαίνει για τη φύση της Επιπεδοχώρας, το κλίμα, τα σπίτια, τους κατοίκους και τον τρόπο ζωής τους, καθώς επίσης και για την κοινωνική και πολιτική οργάνωση τους. Στην Επιπεδοχώρα υπάρχουν μόνο το μήκος και το πλάτος, ενώ απουσιάζει η τρίτη διάσταση το ύψος. Οι κάτοικοι του κόσμου αυτού, κινούνται πάνω στον επίπεδο κόσμο τους και είναι επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (κύκλοι, κανονικά πολύγωνα, τετράγωνα, τρίγωνα, ευθύγραμμα τμήματα) που μιλούν, έχουν νόηση και συνθέτουν μια αυστηρά οργανωμένη κοινωνία. Η κοινωνική τους θέση καθορίζεται από το σχήμα τους. Στην κορυφή της κοινωνικής πυραμίδας βρίσκονται οι κύκλοι-ιερείς, ακολουθούν τα πολύγωνα-ευγενείς ενώ τα πεντάγωνα και τετράγωνα αποτελούν την τάξη των εμπόρων. Τα μεσαία και κατώτερα κοινωνικά στρώματα παριστάνονται με ισόπλευρα και ισοσκελή τρίγωνα αντίστοιχα. Τα ευθύγραμμα τμήματα-γυναίκες βρίσκονται στη βάση της πυραμίδας. Δεδομένης της δισδιάστατης υπόστασης τους, οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας αντιλαμβάνονται όλα τα γεωμετρικά σχήματα σαν ευθύγραμμα τμήματα ή σημεία.

Οι περιπέτειες του Τετράγωνου, σε χώρους διαφορετικών διαστάσεων, εξιστορούνται στο δεύτερο μέρος του έργου. Μια νύχτα, το Τετράγωνο βλέπει στο όνειρο του, ότι βρίσκεται σε έναν χώρο μιας διάστασης, τη Γραμμοχώρα και προσπαθεί να εξηγήσει στους κατοίκους της, τη φύση της Επιπεδοχώρας. Αλλά οι προσπάθειες του αποδεικνύονται άκαρπες καθώς οι κάτοικοι της, είναι ευθείες γραμμές και άρα αδυνατούν να αντιληφθούν οτιδήποτε υπάρχει έξω από τη Γραμμοχώρα.

Η πραγματική περιπέτεια ξεκινά για το Τετράγωνο, όταν ο εγγονός του, τον ρωτά *τι μπορεί να σημαίνει στη Γεωμετρία το* 3^3. Αρχικά το Τετράγωνο απαντά πως *δεν σημαίνει τίποτα απολύτως* αλλά ένας απρόσμενος επισκέπτης από το χώρο των τριών διαστάσεων η Σφαίρα, έρχεται να ανατρέψει τον αρχικό ισχυρισμό του. Η Σφαίρα προσπαθεί να πείσει το Τετράγωνο για την ύπαρξη του χώρου των τριών

[13] A.Square, δηλαδή, ένα τετράγωνο, ήταν το ψευδώνυμο που χρησιμοποίησε ο Abbot.

διαστάσεων καθώς και να του εξηγήσει στη φύση του χώρου αυτού. Όταν όλες οι προσπάθειες της πέφτουν στο κενό, καλεί το Τετράγωνο να επισκεφτεί τον τρισδιάστατο κόσμο της. Εκεί, το Τετράγωνο έρχεται αντιμέτωπο με μια ακόμη διάσταση και μαγεύεται από την αλήθεια στην οποία μυήθηκε. Υιοθετεί την ύπαρξη ενός χώρου τεσσάρων διαστάσεων και προεκτείνει τη σκέψη του σε έναν χώρο πέντε διαστάσεων.

Στη συνέχεια, επισκέπτεται μαζί με τη Σφαίρα, τη Σημειοχώρα, όπου κάθε προσπάθεια επικοινωνίας με το Σημείο είναι αδύνατη και έτσι επιστρέφει στον επίπεδο κόσμο του. Ενθουσιασμένο από τη γνώση της τρίτης διάστασης προσπαθεί να τη διαδώσει και στους άλλους κατοίκους της Επιπεδοχώρας, αλλά τελικά συλλαμβάνεται και φυλακίζεται.

Ο Abbot έχοντας μελετήσει τη λογοτεχνική παραγωγή της εποχής του και γνωρίζοντας τις σημαντικότερες εξελίξεις στο χώρο των μαθηματικών (έχουν ανακαλυφθεί οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες), γράφει όχι μόνο ένα απολαυστικό μυθιστόρημα, αλλά και ένα εξαιρετικό μαθηματικό έργο, με σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο (Μηλιώνης, 2006). Το έργο έχει εκπαιδευτικό και κοινωνικό χαρακτήρα και στοχεύει στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, όπως οι γεωμετρικές ιδιότητες του επιπέδου και των επίπεδων σχημάτων. Περιέχονται στοιχεία προβολικής γεωμετρίας ενώ κύρια επιδίωξη του συγγραφέα είναι η εξοικείωση του αναγνώστη με την τέταρτη διάσταση, κατ' αναλογία με την προσπάθεια που καταβάλλει το Τετράγωνο για να εξοικειωθεί με την τρίτη διάσταση.

Ο Abbot δημιουργεί έναν ζωντανό κόσμο, όπου τα μαθηματικά αντικείμενα εμφανίζονται να έχουν ανθρώπινες ιδιότητες, ξεφεύγοντας από τα συνηθισμένη παρουσίαση των μαθηματικών, ως ένα σύνολο ορισμών και προτάσεων, με αποτέλεσμα η πρόσληψη της γνώσης να γίνεται ευχάριστη και διασκεδαστική. Ο Μηλιώνης (2006) επισημαίνει και μια επιπλέον πλευρά της μαθηματικής διάστασης της Επιπεδοχώρας, που σχετίζεται με τα εμπόδια που συναντάμε στην εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και τα οποία σε μεγάλο βαθμό έχουν σχέση με τα εμπόδια που συναντά το Τετράγωνο κατά τις περιηγήσεις του, σε χώρους διαφορετικών διαστάσεων. Οι εδραιωμένες ιδέες και αντιλήψεις λειτουργούν ως εμπόδια και αντιστέκονται στην αποδοχή νέων προσεγγίσεων. Το ίδιο συμβαίνει και με τις νέες μαθηματικές ιδέες. Όταν το Τετράγωνο επιστρέφει στην Επιπεδοχώρα και υποστηρίζει την ύπαρξη της τρίτης διάστασης, συλλαμβάνεται και φυλακίζεται. Η ιστορία των μαθηματικών βρίθει από ανάλογες περιπτώσεις. Ας θυμηθούμε τον

Πυθαγόρειο Ίππασο, ο οποίος όταν ανακαλύπτει την αρρητότητα αποτάσσεται από τις τάξεις των Πυθαγορείων και τελικά πνίγεται σε ναυάγιο.

3. Η ΑΦΗΓΗΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η μάθηση εν γένει και κατ' επέκταση η μάθηση των μαθηματικών είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής νοημάτων, τα οποία συγκροτούνται από κάθε άνθρωπο προσωπικά και επομένως απαιτείται μια διαφορετική από την κρατούσα στις μέρες μας θεώρηση της μάθησης, όπου οι ανθρώπινες συναισθηματικές λειτουργίες υποτιμώνται έναντι των γνωστικών λειτουργιών.

Κατά τις δύο τελευταίες δεκαετίες, πληθώρα ερευνών, αρχικά στην νευροβιολογία και εν συνεχεία στην ψυχολογία και στην φιλοσοφία (ενδεικτικά αναφέρονται: Ben-Ze'en, 2000, Damasio, 1994 & 1996, De Sousa, 1987, Elster, 1999, Frank, 1988, Greenspan, 1988, Lazarus & Lazarus, 1994, Turski, 1994) έρχονται να ανατρέψουν την παραπάνω κυρίαρχη θεώρηση, ξεπερνώντας το δυϊσμό νόησης και συναισθήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι συναισθηματικές λειτουργίες αντιμετωπίζονται ως αλληλένδετες των λογικών διεργασιών και αμοιβαία ενισχυτικές σε κάθε ανθρώπινη νοητική ή πρακτική δραστηριότητα. Παρά το γεγονός ότι το συναίσθημα δεν υπόκειται σε ορθολογικές νοητικές λειτουργίες, αποδεικνύεται εντούτοις, ότι ως ψυχολογική λειτουργία, παρέχει στην ανθρώπινη νόηση ένα αξιολογικό πλαίσιο για τη ρύθμιση της συμπεριφοράς και ένα ολοκληρωμένο σύστημα απόκρισης και λήψης αποφάσεων(Damasio, 1994).Επιπλέον, αποδεδειγμένα καθοριστική είναι και η λειτουργία του συναισθήματος, ως παράγοντα δραστηριοποίησης της σκέψης και υποκίνησης της δράσης (Ben-Ze'en, 2000). Συνεπώς, η συμβολή του συναισθήματος στη μαθησιακή διαδικασία είναι ουσιαστικά και πολλαπλά υποστηρικτική και προαπαιτούμενη, καθώς: «*το θετικό και αρμονικά ανεπτυγμένο συναίσθημα...είναι αναγκαία προϋπόθεση για την καλή λειτουργία του οικοδομήματος της λογικής σκέψης*» (Damasio, 2000). (Χασάπης, 2006)

Τα ανθρώπινα συναισθήματα εκδηλώνονται μόνο μέσα από την αφήγηση και η αφήγηση αποτελεί το μόνο μέσο έκφρασης των συναισθημάτων, για αυτό και είναι ζητούμενη μια σύζευξη των μαθηματικών με τη λογοτεχνία.

«Η διδασκαλία των μαθηματικών ως κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης οφείλει πρώτα από όλα να παρέχει την αναγκαία υποστήριξη στις προσωπικές διερευνήσεις των μαθητών, δημιουργώντας πλούσια περιβάλλοντα μάθησης που υποκινούν αμφιβολίες και παρέχουν εμπειρίες μάθησης. Στη βάση αυτή και μόνο η

αφήγηση, ως κείμενο και προφορικός λόγος, μπορεί να αποτελέσει συνιστώσα της διδασκαλίας των μαθηματικών.» (Χασάπης, 2006)

Ως άνθρωποι σκεφτόμαστε με όρους αφήγησης, αποδίδουμε νοήματα στις εμπειρίες μας και κατανοούμε τον κόσμο με μορφές αφήγησης, ορίζουμε τις υποκειμενικότητες μας μέσα από τις αφηγήσεις, τις δικές μας και των άλλων και υπό μία έννοια ζούμε σε έναν κόσμο συγκροτημένο με τους κανόνες και τους μηχανισμούς της αφήγησης (Bruner, 1990/1997).

Η αφήγηση είναι ένα συμβολικό σύστημα, το οποίο οι άνθρωποι χρησιμοποιούν σε κάθε περίπτωση, για να κατανοούν γεγονότα και προβλήματα της ζωής τους και να αναπαριστούν αυτά τα γεγονότα και προβλήματα με μια ποικιλία τρόπων. Η ποικιλία των αναπαραστάσεων η οποία ενσωματώνεται στην αφήγηση, η πολύ-τροπικότητα δηλαδή της αφήγησης, συνίσταται στο εγγενές χαρακτηριστικό της, να συνθέτει σε ένα όλο την πολλαπλότητα και την διαφορετικότητα της ανθρώπινης εμπειρίας, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα αισθήματα, συναισθήματα και νοήματα μέσα από λεκτικές προτάσεις και μεταφορές. Ενσωματώνοντας τη συνθετότητα της εμπειρίας, η αφήγηση παρέχει δυνατότητες μιας αντίστοιχα σύνθετης κατανόησης των αντικειμένων, αλλά και της ίδιας, της ανθρώπινης δραστηριότητας, εμπεριέχοντας μια διαδικασία «απόδειξης» της εγκυρότητας των αναπαραστάσεων και των ερμηνειών που η ίδια κατασκευάζει, αφού κάθε αφήγηση συνέχεται υποχρεωτικά από μιας δικής της και ιδιάζουσα κατά περίπτωση «λογική», η οποία δημιουργεί νοήματα και προσφέρει ευχαρίστηση και στον «αφηγητή» και στον ακροατή η αναγνώστη της ιστορίας (Gadanidis & Hoogland, 2003).

Δεν μπορεί, επομένως, να αγνοείται η αφήγηση, ως μέσω μάθησης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Δεδομένων των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως, κάθε μορφή αφήγησης, γραπτή ή προφορική μπορεί να εισαχθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών, έτσι ώστε να διδαχθούν έννοιες και τεχνικές των μαθηματικών και να αναδειχθεί το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο της ανάπτυξης τους.

Σε κάθε περίπτωση όμως, μια διδασκαλία των μαθηματικών με συστατικό στοιχείο της την αφήγηση οργανώνεται με βάση τις ακόλουθες θέσεις (Egan, 1989):

- *Στη σκέψη των παιδιών το συγκεκριμένο και το αφηρημένο συνυπάρχουν αλληλένδετα,*
- *Στη σκέψη των παιδιών, οι συναισθηματικές λειτουργίες είναι συνυφασμένες με τις λογικές διεργασίες,*

- *Στη σκέψη των παιδιών, οι λεκτικές διατυπώσεις μετασχηματίζονται άμεσα σε νοητικές εικόνες,*
- *Τα παιδιά διατυπώνουν και κατανοούν λεκτικές μεταφορές,*
- *Τα παιδιά κατανοούν και ιδιοποιούνται γνωστικά περιεχόμενα τα οποία οργανώνονται ως αφηγήσεις,*
- *Τα παιδιά μαθαίνουν ευκολότερα ξεκινώντας από διχοτομίες και αντιθέσεις εννοιών και τέλος*
- *Τα παιδιά μαθαίνουν ευκολότερα όταν ο αφηγηματικός λόγος έχει ρυθμό και ομοιοκαταληξία.*

Αρχικά, αναφέρθηκε ότι ως κύριες μορφές αφήγησης καταγράφονται η ιστορική, η μυθοπλαστική και η ρεαλιστική αφήγηση. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν διδακτικές ενέργειες στα μαθηματικά με συστατικό στοιχείο την αφήγηση (ιστορική, μυθοπλαστική-λογοτεχνία), καθώς και πληθώρα ερευνών που συνηγορούν στη χρήση αφηγηματικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

3.1 Η ιστορική αφήγηση στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η χρήση ιστορικών αφηγήσεων-εγχειρίδια που αναφέρονται εκτενώς στην ιστορική εξέλιξη διαφόρων μαθηματικών εννοιών ή και ακόμη ολόκληρων κλάδων των μαθηματικών, βιογραφικά σημειώματα μεγάλων μαθηματικών-στη διδασκαλία των μαθηματικών, έχει τις ρίζες της, στην ελληνική αρχαιότητα κατά τον Ευθύμογλου (2002). Πιο συγκεκριμένα αναφέρει ότι ο Πρόκλος στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, εισάγει μια ιστορική ανασκόπηση της Γεωμετρίας. Το παράδειγμα του ακολουθούν και διάφοροι συγγραφείς μετά την αναγέννηση, με χαρακτηριστικά παραδείγματα το βιβλίο «*Arithmétique*» του Peter Ramus, το 1555 και τη Γεωμετρία του Ιησουΐτη A.Tacket, το 1654, που ασκούν μεγάλη επίδραση στη σχολική Γεωμετρία. Ο Ευθύμογλου (2002) θεωρεί ότι η χρήση ιστορικών στοιχείων, στοχεύει στο να υπογραμμίσει ότι το υπό μελέτη κεφάλαιο των μαθηματικών, είναι αποτέλεσμα κοπιώδους προσπάθειας πολλών ανθρώπων. Και καταλήγει ότι με τον τρόπο αυτό, επιδιώκεται να αμβλυνθεί η αποστροφή των μαθητών για το μάθημα των μαθηματικών, το οποίο επειδή στηρίζεται σε αδιάσειστους κανόνες και αυστηρή λογική προσλαμβάνεται από αυτούς αισθητηριακά ως άχρωμο και στεγνό.

«Τίποτε δεν είναι σπουδαιότερο από το να δει κανείς καθαρά την προέλευση μιας μαθηματικής ιδέας, ούτε η ίδια η ιδέα» λέει χαρακτηριστικά ο Leibniz.

Οι οικονομικές, κοινωνικές και επιστημονικές ανακατατάξεις που λαμβάνουν χώρα στη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα, έχουν ως αποτέλεσμα ριζικές αλλαγές στα εκπαιδευτικά συστήματα. Δίνεται έμφαση στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και διερευνώνται διάφορα εκπαιδευτικά και παιδαγωγικά ζητήματα. Την περίοδο αυτή, ωριμάζει η σκέψη για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών σε διδακτικό επίπεδο όπως μας πληροφορεί ο συγγραφέας.

Και συνεχίζει αναφερόμενος στο βιβλίο, «*The Philosophy of Arithmetic exhibiting a progressive view of the Theory and Practice of Calculation*», 1817, του J.Leslie, όπου η ιστορική αφήγηση υπάρχει παντού και χρησιμοποιείται για να παραστήσει την πορεία ανάδυσης και μορφοποίησης της αριθμητικής γνώσης και να συγκρίνει τρόπους χειρισμού των αριθμητικών ζητημάτων. Διακρίνει μια ανάλογη προσπάθεια το 1853, στη Λειψία, στο βιβλίο «*Die element der Mathematic*», του Richard Baltzer, το οποίο απευθύνεται στους μαθηματικούς και είναι εφοδιασμένο με ιστορικές αναφορές.

Και ο Τζανάκης (2009) σημειώνει ότι η ιδέα για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση είναι αρκετά παλιά και εμφανίζεται με λιγότερο ή περισσότερο συστηματικό τρόπο, ήδη από τον 19^{ο} αιώνα στα έργα των De Morgan (1865) και Glaisher (1890).

Κομβικό σημείο στην αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία, αποτελεί σύμφωνα με τον Ευθύμογλου (2002) και τον Τζανάκη (2000, 2009) η στάση μεγάλων μαθηματικών όπως ο Felix Klein (1914/1945) και ο Poincare (1908), οι οποίοι αναφέρθηκαν σχετικά στο έργο τους. Πιο συγκεκριμένα ο Klein χρησιμοποίησε ευρέως ιστορικές αφηγήσεις για τα μαθηματικά, στις διαλέξεις που έδωσε για πρώτη φορά το 1907, στα πλαίσια της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών και οι οποίες αποτέλεσαν το περιεχόμενο του φημισμένου έργο του «Στοιχειώδη μαθηματικά από ανωτέρα άποψη». Σ' αυτό το έργο χαρακτηριστικά αναφέρει: *«Ένα ουσιαστικό εμπόδιο στην ανάδυση μιας τόσο φυσικής κι αληθινά επιστημονικής μεθόδου διδασκαλίας είναι η έλλειψη ιστορικής γνώσης που τόσο συχνά γίνεται αισθητή. Για να το καταπολεμήσω αυτό, αποφάσισα να εισάγω ιστορικές παρατηρήσεις στην παρουσίασή μου και κάνοντας το αυτό, πιστεύω ότι σας έχω ξεκαθαρίσει πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες, πως πάντοτε σχεδόν εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και μόνο μετά από μακρά ανάπτυξη αποκρυσταλλώθηκαν* *σε αυστηρές μορφές τόσο οικείες στη συστηματική παρουσίας. Είναι κρυφή μου ελπίδα ότι η γνώση αυτή θα αποκτήσει μια διαρκή και τελεσφόρα επίδραση πάνω στο χαρακτήρα της δικής σας διδασκαλίας.»*

Εκτός από τη Γερμανία, όπου το ενδιαφέρον και η έρευνα για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους, συνεχίζεται μέχρι σήμερα, ο Ευθύμογλου (2002) αναφέρεται και σε ανάλογες προσπάθειες στις Η.Π.Α. στις αρχές του 20ου αιώνα. Κύριος εκφραστής τους ο David E. Smith (1860-1944). Σε κείμενο του, για την αναδιοργάνωση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ο Smith γράφει: *«Συμβουλεύουμε τους δασκάλους να μάθουν τα καθοριστικά γεγονότα της ιστορίας των μαθηματικών και να μάθουν ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως απάντηση στις ανθρώπινες ανάγκες, τόσο τις νοητικές όσο και τις τεχνικές. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν αυτό το υλικό περιστασιακά στα μαθήματα τους για να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με άτυπες συζητήσεις για την ανάπτυξη των μαθηματικών και για τη ζωή των μεγάλων δημιουργών της επιστήμης»* και συνεχίζει *«Ιστορικό και βιογραφικό υλικό θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να κάνει τη δουλειά πιο ενδιαφέρουσα και με περισσότερη σημασία»*.

Ενώ σύμφωνα τον Τζανάκη (2009), η ιδέα για τη συστηματική χρήση ιστορικής αφήγησης στη διδακτική των μαθηματικών παίρνει συγκεκριμένη μορφή με την ίδρυση μιας διεθνούς ομάδας μελέτης γύρω από το θέμα αυτό, της HPM (*The International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*) και η οποία είναι μία από τις δύο βασικότερες και παλαιότερες ομάδες μελέτης, που τελούν υπό την αιγίδα της *Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση* (ICMI: *The International Commission on Mathematical Instruction).*

Αλλά και αρκετοί μαθηματικοί και συγγραφείς έχουν επισημάνει την ανάγκη, να αξιοποιηθεί η ιστορική αφήγηση της μαθηματικής επιστήμης, στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο Παναγιώτου (2002) στην εργασία του, «*Ο ρόλος της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών*» παραθέτει ένα μικρό απόσπασμα από το βιβλίο «*Teacher in America*» (1954), του Jacque Barzun: *«Έχω την εντύπωση-σχεδόν τη βεβαιότητα-ότι η άλγεβρα έχει γίνει απωθητική εξ' αιτίας της απροθυμίας ή της ανικανότητας των δασκάλων να εξηγήσουν τα γιατί…Δεν υπάρχει ιστορικό πλαίσιο στη διδασκαλία, έτσι δίνεται η αίσθηση ότι όλο το σύστημα έχει πέσει έτοιμο από τον ουρανό και για να χρησιμοποιηθεί μόνο από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς.»*

Ένα δεύτερο, εξίσου χαρακτηριστικό απόσπασμα, συναντά κανείς στο βιβλίο του Guedj, «*Το θεώρημα του παπαγάλου*». Ο Guedj σατιρίζοντας την ανυπαρξία ιστορικού πλαισίου στη διδασκαλία των μαθηματικών, γράφει: *«Όπως όλοι οι μαθητές στον κόσμο, ο Ιωνάθαν είχε συναντηθεί με τον Θαλή αρκετές φορές. Κάθε φορά όμως ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε, στο μάθημα των μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Πού και πού κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια: Θαλής, Πυθαγόρας, Pascal, Descartes, ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για το πότε ή το που συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς προσγειώνονταν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Αλλά και τα βουνά έχουν κάποια ιστορία, κάποια αρχή.»* (Guedj, 1998, σελ. 35)

3.1.1 Επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορικής αφήγησης των μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

Το ενδιαφέρον των καθηγητών για ιστορικές μαθηματικές αφηγήσεις αυξάνεται, όπως προκύπτει από τον αυξανόμενο αριθμό βιβλίων και άρθρων ιστορικού περιεχομένου, καθώς και από τον αυξημένο αριθμό βιβλίων ερευνητικών ομάδων που μελετούν τη χρησιμοποίηση και την αξία της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Το νέο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και τα αντίστοιχα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, δίνουν έμφαση σε ιστορικές αφηγήσεις με θέμα τα μαθηματικά καθώς ένας σημαντικός αριθμός ιστορικών σημειωμάτων, σχολίων και εικόνων, έχει ενσωματωθεί στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου. Στο σημείο αυτό, θα διερευνηθούν οι λόγοι που συνηγορούν στην ενσωμάτωση ιστορικών αφηγήσεων στη διδακτική των μαθηματικών.

Η Καφούση (2002) βασιζόμενη στα αποτελέσματα αρκετών ερευνών, (Arcavi & Bruckheimer, 2000, Elligton, 1998, Fauvel, 1991, Sleeter, 1997) αναφέρει τα ακόλουθα επιχειρήματα υπερ της χρήσης της ιστορικής αφήγησης των μαθηματικών στη διδασκαλία τους:

- *Βοηθά στον «εξανθρωπισμό» και την «απομυθοποίηση» της μαθηματικής επιστήμης.*

- *Παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες ασχολούνται και να συνειδητοποιήσουν την αξία των σύγχρονων τεχνικών και διαδικασιών.*
- *Επιτρέπει την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις έρευνας και προβληματισμού γύρω από ένα μαθηματικό θέμα.*
- *Βοηθά στην ανάπτυξη μιας πολύ-πολιτισμικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών.*
- *Διευκολύνει την προσπάθεια αλλαγής των απόψεων των μαθητών για τη μαθηματική δραστηριότητα.*
- *Συμβάλλει στη συνειδητοποίηση του καθοριστικού ρόλου των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της κοινωνίας.*
- *Διευκολύνει την ανάπτυξη διαθεματικών δραστηριοτήτων και επομένως τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα.*

Ανάλογα επιχειρήματα διατυπώνονται και στις εργασίες των Τζανάκη (2009) και Παναγιώτου (2002). Σε ό,τι αφορά το πρώτο επιχείρημα, ο Τζανάκης (2009) υποστηρίζει ότι ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας των Μαθηματικών με ιστορικές αφηγήσεις είναι *«ο κατ' εξοχήν τρόπος για να δει κανείς τα Μαθηματικά ως μια ανθρώπινη προσπάθεια και όχι ως ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων»* (σελ. 21). Από την πλευρά του, ο Παναγιώτου (2002) θεωρεί ότι η ενσωμάτωση βιογραφικών πληροφοριών που αφορούν μεγάλους μαθητικούς, στη διδασκαλία, *«φέρνει τα Μαθηματικά πιο κοντά στην καρδιά των μαθητών»* (σελ. 124). Η ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών, βρίθει από παραδείγματα προσπαθειών επιτυχημένων και αποτυχημένων, για τη λύση προβλημάτων και τονίζει τον ανθρώπινο παράγοντα. Γνωρίζοντας ιδέες και ερωτήματα που δεν οδήγησαν κάπου, αλλά αποτέλεσαν απαραίτητα βήματα στη διαμόρφωση διαφόρων μαθηματικών εννοιών, οι μαθητές ενθαρρύνονται να διατυπώσουν τους δικούς τους προβληματισμούς, ενώ παράλληλα αντιλαμβάνονται ότι οι ευρετικές διαδικασίες, οι αμφιβολίες, τα λάθη, οι ελλιπείς διατυπώσεις και αποδείξεις, τα αδιέξοδα κλπ αποτελούν αναπόσπαστο μέρος αυτού που είναι τα Μαθηματικά. (Τζανάκης, 2009, σελ.20, 21, 22)

Κατά τον Παναγιώτου (2002) *«Η μάθηση δεν είναι μια ομοιόμορφη και συνεχής διαδικασία. Μερικές φορές πραγματοποιείται με μικρά συνεχή βήματα, μερικές φορές με άλματα. Ορισμένα θέματα μπορούν να παρουσιασθούν χρησιμοποιώντας τις υπάρχουσες γνώσεις, μερικά όμως χρειάζονται ένα μεγάλο άλμα στη σκέψη. Έχει* *παρατηρηθεί ότι τα άλματα που πρέπει να κάνουν οι μαθητές συμπίπτουν με αυτά που συνέβησαν στην εξέλιξη των μαθητικών…»* (σελ.119). Επομένως, αφηγήσεις που περιέχουν πληροφορίες για το πώς προέκυψαν διάφορες ριζικές μαθηματικές έννοιες, ευαισθητοποιούν τους καθηγητές σε μελλοντικές δυσκολίες των μαθητών κατά τη διδασκαλία των εννοιών αυτών. Επιπλέον και οι δύο ερευνητές, Τζανάκης, Παναγιώτου επισημαίνουν ότι η παρουσίαση με τη μορφή Ορισμός-Θεώρημα-Απόδειξη-Πόρισμα μπορεί να είναι κομψή και να βοηθά στην εξοικονόμηση χρόνου, εντούτοις αφήνει τους μαθητές με την απορία για το πώς προέκυψαν οι ορισμοί και τα θεωρήματα αυτά. Για να υπάρξει αποτελεσματική μάθηση, η βαθμιαία εξέλιξη των υπό μελέτη μαθηματικών εννοιών πρέπει να γίνεται γνωστή στους μαθητές, μέσα από αφηγηματικά κείμενα που περιγράφονται τα βασικά βήματα της εξελικτικής αυτής διαδικασίας. Μόνο έτσι οι μαθητές θα δουν πώς πρόεκυψε αυτό που διδάσκονται σήμερα. (Παναγιώτου, σελ.121)

Η ανάπτυξη μιας πολυ-πολιτισμικής προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι σύμφωνα με τον Τζανάκη(2009), ιδιαίτερα επίκαιρη σήμερα δεδομένων των πολυ-πολιτισμικών σχολικών τάξεων. Μέσα από αφηγήσεις που αφορούν στην ιστορία της μαθηματικής επιστήμης αναδεικνύονται λιγότερο γνωστές όψεις των μαθηματικών, ή άλλες μορφές που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια διαφορετικών πολιτισμικών παραδόσεων. Ως εκ τούτο, οι μαθητές αντιλαμβάνονται την οικουμενική διάσταση των μαθηματικών και *«αναγνωρίζουν το ρόλο πολλών ανθρώπων και εθνών στην ανάπτυξη της μαθηματικής κουλτούρας»* (Παναγιώτου, 2002, σελ. 123).

Τα μαθηματικά είναι μια εξελισσόμενη και δυναμική επιστήμη, η οποία όπως και κάθε άλλη ανθρώπινη δραστηριότητα, επηρεάζεται από κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες. Διαμορφώνονται σύμφωνα με τις υλικές και πνευματικές ανάγκες της κάθε εποχής. Οι ιστορικές αφηγήσεις που καταγράφουν την άποψη που επικρατούσε για τα μαθηματικά στις διάφορες εποχές και παρουσιάζουν την επίδρασή τους, στην πνευματική και πρακτική ζωή των ανθρώπων, αναδεικνύουν τον ανθρώπινο χαρακτήρα των μαθηματικών, προκαλώντας το ενδιαφέρον των μαθητών. (Παναγιώτου, 2002, σελ.122)

Ο Τζανάκης (2009) τονίζει ότι παρόλο που τα μαθηματικά εξελίχθηκαν και εξελίσσονται σε μεγάλο βαθμό σε διαρκή και γόνιμη αλληλεπίδραση με άλλες επιστήμες, εντούτοις η διδασκαλία τους γίνεται χωρίς αναφορά στη συσχέτιση τους με τις άλλες επιστήμες. Θεωρεί ότι η ενσωμάτωση ιστορικών αφηγήσεων στη διδασκαλία μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και των άλλων επιστημονικών πεδίων διαφοροποιώντας σημαντικά την άποψη των μαθητών ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανιαρό και στεγνό μάθημα, απομονωμένο από τα άλλα μαθήματα.

Συνοψίζοντας, οι ιστορικές μαθηματικές αφηγήσεις μπορεί να μην κάνουν τη διδασκαλία των μαθηματικών ευκολότερη αλλά μπορούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, τη θετική στάση τους απέναντι στο μάθημα, την εκτίμηση για το ρόλο των μαθηματικών στην ανάπτυξη των πολιτισμών και επιπρόσθετα μπορούν να συνεισφέρουν στην αποτελεσματικότητα των καθηγητών, εμπλουτίζοντας το διδακτικό τους ρεπερτόριο.

Επειδή στόχος της ενότητας αυτής είναι να καταγραφούν οι γνωστικοί και διδακτικοί στόχοι που επιτυγχάνονται όταν η ιστορική αφήγηση ενσωματώνεται στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω σε παραδείγματα διδασκαλίας με χρήση ιστορικών μαθηματικών αφηγήσεων. Περισσότερη έμφαση θα δοθεί στην αξιοποίηση της μυθοπλαστικής αφήγησης στη διδακτική των μαθηματικών και θα δοθούν και δύο παραδείγματα διδασκαλίας, δεδομένου ότι αποτελεί μια σχετικά πρόσφατη τάση και η σχετική βιβλιογραφία είναι πιο περιορισμένη.

3.2 Η Μυθοπλαστική αφήγηση (λογοτεχνία) στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η πληθώρα λογοτεχνικών βιβλίων με θέμα τα μαθηματικά, έστρεψε το ενδιαφέρον τόσο των ερευνητών της διδακτικής, όσο και των καθηγητών των μαθηματικών να συνδέσουν τα μαθηματικά με τη λογοτεχνία. Τις δύο τελευταίες δεκαετίες έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες που αναλύουν διδακτικές προσεγγίσεις μαθηματικών με τη βοήθεια της λογοτεχνίας. Σύμφωνα με την Κολέζα (2006), οι έρευνες αυτές στοχεύουν στη διερεύνηση τριών κυρίως ερωτημάτων:

- *Θα μεταβληθούν οι στάσεις-συνήθως αρνητικές-των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά;*
- *Θα παρακινηθούν οι μαθητές να μάθουν Μαθηματικά;*
- *Τι είδους συνδέσεις θα δημιουργήσουν οι μαθητές μεταξύ Μαθηματικών και πραγματικού κόσμου;*

Διατρέχοντας τη σχετική βιβλιογραφία, διαπιστώνει κανείς ότι προτείνονται διδακτικές προσεγγίσεις διαθεματικού και εκλαϊκευτικού χαρακτήρα μερικές από τις οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

3.2.1 Διδακτικές προσεγγίσεις διαθεματικού χαρακτήρα

Κατ' αρχάς, κρίνεται απαραίτητο να οριστεί η έννοια της διαθεματικότητας στην εκπαίδευση. Ο Klein (1990) ορίζει ως διαθεματική προσέγγιση, τη σύνθεση δύο ή περισσότερων γνωστικών αντικειμένων, που δημιουργούν ένα καινούργιο επίπεδο διαλόγου και ενότητας της γνώσης (Τζεφρίου,2004, σελ.18). Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2002), που έχει εκδοθεί από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, προσεγγίζεται η γνώση με διαθεματικό τρόπο με σκοπό την αναβάθμιση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Επιπρόσθετα στο βιβλίο του καθηγητή της Α΄ Γυμνασίου(2007, σελ.15) διατυπώνεται το εξής:

«Η Διαθεματικότητα μπορεί να αποτελέσει τη γέφυρα για τη σύνδεση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο, αφού αυτός συνιστά και την αναφορά και συμπυκνώνει την ουσία. Για τα Μαθηματικά η διαδικασία μέσω της οποίας παράγονται τα αποτελέσματα θα πρέπει να είναι εμπλουτισμένη με διαθεματικές προσεγγίσεις, ώστε να αποκτούν περιεχόμενο οι έννοιες και στη συνέχεια, μέσω συνδέσεων, το απαιτούμενο βάθος (αλλά και την εφαρμοσιμότητα) κάθε φορά. Αυτές οι συνδέσεις διευκολύνονται μέσα από τον προσδιορισμό ορισμένων θεμελιωδών εννοιών των διαφόρων μαθημάτων.»

Οι διαθεματικές διδακτικές προσεγγίσεις μαθηματικών και λογοτεχνίας διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες. Στη μεν πρώτη στόχος είναι η ταυτόχρονη διδασκαλία μαθηματικών και λογοτεχνίας, ενώ στη δεύτερη κατηγορία, η λογοτεχνία χρησιμοποιείται ως μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για να καταστεί σαφής η παραπάνω κατηγοριοποίηση παρατίθενται οι ακόλουθες διδακτικές έρευνες και προτάσεις διδασκαλίας.

3.2.1.1 Διαθεματικές διδακτικές προσεγγίσεις που αποσκοπούν στην ταυτόχρονη διδασκαλία μαθηματικών και λογοτεχνίας

Η συζήτηση για την ενσωμάτωση μυθοπλαστικής αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών, ξεκινά από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η έρευνα της Kliman (1993), βασίστηκε σε ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα, My Travels with Gulliver, το οποίο εφαρμόστηκε σε τμήματα της Δ΄ Δημοτικού και είχε σαν στόχο να μάθουν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις μονάδες μέτρησης, τις κλίμακες, τους λόγους, τις αναλογίες και να μπορούν να συγκρίνουν μεγέθη. Για να επιτευχθούν οι γνωστικοί αυτοί στόχοι, η δασκάλα διάβαζε στους μαθητές αποσπάσματα από το βιβλίο του Swift, «*Τα ταξίδια του Γκιούλιβερ*», ενώ στη συνέχεια τους απεύθυνε ερωτήσεις για το μέγεθος των αντικειμένων και των γιγάντων. Επιπλέον, το απόγευμα στο σπίτι, οι μαθητές ενθαρρύνονταν να προσομοιώσουν τα αντικείμενα καθημερινής χρήσης στον κόσμου του ήρωα. Στο τέλος της δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να σχεδιάσουν τα γιγάντια αντικείμενα της ιστορίας, που τους εντυπωσίασαν και να φτιάξουν δικές τους, φανταστικές ιστορίες που να εξιστορούν τις προσωπικές τους περιπέτειες στον κόσμο του βιβλίου.

Σύμφωνα με την Kliman (1993), μέσα από τη διδακτική παρέμβαση, οι μαθητές βρήκαν διαδικασίες για να εκφράζουν τη σκέψη τους με τη χρήση μαθηματικών όρων, καθώς υποστήριζαν τα αποτελέσματα των υπολογισμών τους. Επιπλέον τα παιδιά που μετείχαν στην έρευνα, συνέδεσαν τα μαθηματικά με την καθημερινή ζωή. Μέσω των αποσπασμάτων του λογοτεχνικού έργου, οι μαθητές προσέγγισαν παραδείγματα της δομής των μαθηματικών. Προσπαθώντας να κατανοήσουν τον κόσμο του ήρωα, βρήκαν σχέσεις αναλογίας μεταξύ των διαστάσεων των αντικειμένων της ιστορίας και των πραγματικών τους διαστάσεων.

Οι Burnett και Wichman (1997) πραγματοποίησαν ένα διαθεματικό πρόγραμμα μαθηματικών και λογοτεχνίας, σε 1785 μαθητές της Β΄ Δημοτικού, που αποσκοπούσε στη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή. Ένας επιπλέον στόχος του προγράμματος, ήταν να μειωθεί το άγχος που αισθάνονται οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με τα μαθηματικά. Το πρόγραμμα περιλάμβανε μαθηματικά παιχνίδια, παιχνίδια στον ηλεκτρονικό υπολογιστή καθώς και ενότητες με θέμα τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και μαθηματικούς χειρισμούς σε συνεργασία με τους γονείς. Για να εξυπηρετηθούν οι σκοποί των παραπάνω δραστηριοτήτων, χρησιμοποιήθηκε μια λίστα από 29 λογοτεχνικά κείμενα, στα οποία βασίστηκε η διδασκαλία των μαθηματικών. Στην έρευνα συμπεριλήφθηκαν τεστ αξιολόγησης των μαθητών, οι παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών ενώ παράλληλα έγιναν συμβούλια μεταξύ ερευνητών και εκπαιδευτικών. Επίσης πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια ερωτηματολογίων και συνεντεύξεων, έρευνες στους μαθητές και στους γονείς τους. Τέλος οι μαθητές κλήθηκαν πριν και μετά την ολοκλήρωση της έρευνας να συμπληρώσουν διερευνητικά ερωτηματολόγια, για να διαπιστωθεί αν η εμπλοκή τους με τις προαναφερθείσες δραστηριότητες είχε τα προσδοκώμενα αποτελέσματα. Από τα ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν οι μαθητές μετά την έρευνα έγινε φανερή η μείωση του άγχους τους. Τέλος μέσω της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές συνέδεσαν τα μαθηματικά με την επίλυση καθημερινών προβλημάτων.

Η Γιαννικοπούλου (2002) στην εργασία της, «*Λογοτεχνία και Μαθηματικά*», προτείνει μια διαθεματική διδακτική προσέγγιση με στόχο την ταυτόχρονη διδασκαλία των δύο αντικειμένων. Πιστεύει ότι η χρήση ιστοριών στη διδασκαλία των μαθηματικών, προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, τους δίνει τη δυνατότητα για συναισθηματική εμπλοκή και καταδεικνύει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τη Γιαννικοπούλου (2002), η χρήση της λογοτεχνίας για διδακτικούς σκοπούς των μαθηματικών, δεν πρέπει να παραβλέπει τον κύριο ρόλο της λογοτεχνίας που είναι η αισθητική απόλαυση, ενώ παράλληλα επισημαίνει ότι σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να συνθλίβεται το λογοτεχνικό κομμάτι υπό το βάρος της μαθηματικής γνώσης. Χαρακτηριστική είναι η άποψή της, στη σελίδα 92,για το ρόλο που πρέπει να διαδραματίζει ο εκπαιδευτικός κατά την πραγματοποίηση μιας τέτοιας δραστηριότητας: *«Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι έτοιμος να σχολιάσει, να πειραματιστεί, να συζητήσει με τα παιδιά τους μαθηματικούς προβληματισμούς που κυοφορεί το ίδιο το βιβλίο. Ταλέντο του διδάσκοντος είναι, καθώς διαβάζει μια ιστορία να εντοπίσει τις κατάλληλες διδακτικές στιγμές και να σκύψει πάνω στις μαθηματικές απορίες των παιδιών».* Η συγγραφέας θεωρεί ότι η αποτελεσματικότητα μιας διαθεματικής διδακτικής προσέγγισης εξαρτάται από την επιλογή κατάλληλου κειμένου. Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να επιλέγεται ένα κείμενο που να έχει τόσο λογοτεχνικό, όσο και μαθηματικό ενδιαφέρον, ούτως ώστε να μπορεί να δημιουργηθεί μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών, ένα πλαίσιο συζήτησης και διαπραγμάτευσης των εμπλεκόμενων εννοιών.

3.2.1.2 Διαθεματικές διδακτικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν τη λογοτεχνία ως μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Η Leary (2004) πιστεύει ότι η διδασκαλία των μαθηματικών με τη βοήθεια της λογοτεχνίας μπορεί να βελτιώσει τις επιδόσεις των μαθητών, της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις Η.Π.Α.. Προτείνει διάφορους τρόπους αξιοποίησης της λογοτεχνίας στην τάξη των μαθηματικών όπως: Να αναγνωστούν από τους μαθητές αποσπάσματα από έργα μαθηματικής λογοτεχνίας και να ακολουθήσει συζήτηση πάνω σε αυτά. Να δημιουργηθούν ομάδες τεσσάρων ή πέντε μαθητών, όπου ο ένας μαθητής διαβάζει αποσπάσματα από ένα βιβλίο μαθηματικής λογοτεχνίας και οι υπόλοιποι του θέτουν ερωτήματα. Να ειδωθεί ένα έργο μαθηματικής λογοτεχνίας, ως μαθηματικό πρόβλημα και ο καθηγητής προσποιούμενος πλήρη άγνοια, μέσα από ερωτήσεις να εκμαιεύσει από τους μαθητές τη μαθηματική γνώση (σωκρατική μέθοδος). Να δοθεί μια μαθηματική ιστορία, η οποία να ανάγεται σε ένα πρόβλημα και οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες, στις οποίες συμμετέχουν και οι γονείς τους, να προσπαθήσουν να το επιλύσουν.

Η Leary (2004), μέσα από τις έρευνες που καταγράφει στην εργασία της, συμπεραίνει ότι η χρήση έργων μαθηματικής λογοτεχνίας, έδωσε στους μαθητές το έναυσμα να συζητήσουν γύρω από διάφορες μαθηματικές έννοιες και τους βοήθησε να αναπτύξουν έναν αρχικό αλγεβρικό συλλογισμό. Επιπρόσθετα μέσα από την αφήγηση ιστοριών οι μαθητές ανέπτυξαν ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, δημιούργησαν μια θετική στάση απέναντι στο μάθημα και ενισχύθηκαν οι ικανότητες τους, σε διαδικασίες λύσης προβλήματος. Η Leary επικαλούμενη την εργασία των Within και Wilde (1992), σημειώνει για την μαθηματική παιδική λογοτεχνία: *«Η μαθηματική παιδική λογοτεχνία παρέχει ένα περιεχόμενο γεμάτο νόημα για τα μαθηματικά, αντιμετωπίζει τα μαθηματικά σαν γλώσσα, εξηγεί ότι τα μαθηματικά αναπτύσσονται μέσα από την ανθρώπινη εμπειρία, παρέχει την αισθητική διάσταση του αριθμού, αναμειγνύει τα μαθηματικά με άλλες περιοχές του αναλυτικού προγράμματος»*. Αναφερόμενη στη μαθηματική λογοτεχνία εν γένει, επισημαίνει ότι για να προκύψουν αποτελέσματα ανάλογα με αυτά της παιδικής, θα πρέπει το κείμενο ή το βιβλίο που επιλέγεται για μια διδακτική παρέμβαση, να είναι τέτοιο ώστε οι μαθηματικές έννοιες να απορρέουν από αυτό με φυσικό τρόπο.

Οι Μητακίδου και Τρέσσου (2005) στην έρευνα τους, που πραγματοποιήθηκε στη Θεσσαλονίκη, σε μια τάξη υποδοχής, στα πλαίσια της διαπολιτισμικής εκπαίδευσης και σε συνεργασία με την εκπαιδευτικό της τάξης, είχαν σαν στόχο τη διδασκαλία της ελληνικής γλώσσας και την εκμάθηση βασικών εννοιών στα μαθηματικά. Παρατηρείται ότι στην παρούσα έρευνα, ο ρόλος της λογοτεχνίας διαφοροποιείται, καθώς λειτουργεί ως μέσο για τη διδασκαλία των δύο εμπλεκόμενων μαθημάτων. Για τους σκοπούς της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν τα παραμύθια «*Ο Αλή Μπαμπάς και οι σαράντα κλέφτες*» και «*Σαράντα Γιάννηδες*». Επιλέχθηκε το λογοτεχνικό είδος του παραμυθιού, γιατί λόγω του οικουμενικού του χαρακτήρα παρείχε τη δυνατότητα επικοινωνίας, μεταξύ παιδιών με διαφορετικά πολιτισμικά χαρακτηριστικά. Τα παραμύθια χωρίστηκαν σε ενότητες και τέθηκαν οι διδακτικοί στόχοι της κάθε ενότητας από την εκπαιδευτικό σε συνεργασία με τις ερευνήτριες. Η εκπαιδευτικός αφηγούνταν η ίδια την κάθε ενότητα και στη συνέχεια έθετε ερωτήματα στους μαθητές, δημιουργώντας έτσι κλίμα διαλόγου. Μετά την ολοκλήρωση του κάθε παραμυθιού ζητήθηκε από τους μαθητές, να διασκευάσουν το παραμύθι σύμφωνα με την φαντασία τους.

Σύμφωνα με την Μητακίδου (2005), η χρήση της σωστής μαθηματικής ορολογίας από την εκπαιδευτικό, στα πλαίσια της παραπάνω έρευνας, ώθησε τους μαθητές να επεκτείνουν τη χρήση της γλώσσας και των μαθηματικών. Δημιουργήθηκε ένα κλίμα διαπραγμάτευσης μαθηματικών ιδεών, όπου οι μαθητές για να εκφράσουν τους ισχυρισμούς τους, χρησιμοποίησαν τη γλώσσα των μαθηματικών προφορικά και γραπτά. Επιπλέον υποστηρίζει (σελ. 167) ότι μέσω του προγράμματος, η εκπαιδευτικός πέτυχε σε μεγάλο βαθμό να αυξήσει τις προσδοκίες της για τους μαθητές, δείχνοντας με τη στάση της ότι όλοι οι μαθητές πρέπει να μάθουν και ότι όλοι οι μαθητές έχουν να πουν κάτι που αξίζει. Τέλος η Μητακίδου και Τρέσσου (2005) επισημαίνουν ότι, *«όταν ο πολιτισμός της τάξης συνδιαμορφώνεται από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές μέσα από συνεχή διαπραγμάτευση νοημάτων και γόνιμη αλληλεπίδραση, τότε ο τρόπος και οι πρακτικές προκύπτουν ως αποτέλεσμα ισότιμης συμμετοχής στη μαθησιακή διαδικασία».*

Οι Ανέστη και Τριανταφυλλίδης (2005), πραγματοποίησαν μια διαθεματική διδακτική παρέμβαση, διάρκειας τριών ωρών, σε δύο τάξεις της Β΄ Δημοτικού, χρησιμοποιώντας τη λογοτεχνία ως μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για τους σκοπούς της έρευνας, χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο του Ε. Τριβιζά, «*Η Φίφη και η Φωφώ*». Κατά τη διάρκεια της αφήγησης του βιβλίου, το οποίο είχε κατάλληλα προσαρμοστεί για τους σκοπούς της έρευνας, οι μαθητές εργαζόμενοι σε ζευγάρια, καλούνταν να απαριθμήσουν τα αντικείμενα που έφαγαν οι δύο φάλαινες, η Φίφη και η Φωφώ. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια υλικών χειροτεχνίας, ζητήθηκε από τα ζευγάρια να αναπαραστήσουν τα αντικείμενα και τις δύο φάλαινες. Καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης ήταν παρόντες τέσσερις ερευνητές, οι οποίοι απηύθυναν ερωτήσεις στα ζευγάρια.

Οι ερευνητές με την ολοκλήρωση της παρέμβασης, κατέληξαν ότι ενισχύθηκε η ικανότητα των μαθητών να διαβάζουν, να κατανοούν και να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα. Η Ανέστη (2005), υποστηρίζει ότι με τη βοήθεια της λογοτεχνίας, οι μαθητές κατάφεραν να θέσουν τα μαθηματικά σε ένα νέο πλαίσιο γεμάτο νόημα, να έρθουν σε επαφή με την ιστορική τους εξέλιξη, να τα κατανοήσουν και έτσι να γνωρίσουν τη δυναμική τους διάσταση.

Το 2006, ο Τριανταφυλλίδης πραγματοποίησε μία ακόμη διδακτική παρέμβαση, που συνέδεε τα μαθηματικά με την ποίηση, με στόχο να διερευνήσει τις αντιλήψεις των μαθητών, σχετικά με τις πράξεις και τις πρακτικές που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη. Τα υποκείμενα της έρευνας, ήταν μαθητές της Γ΄, Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού, που κατάγονταν από την Αλβανία. Οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν ποιήματα με θέματα εμπνευσμένα από τα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα ένα ποίημα με τίτλο, «Ο κύριος Πολλαπλασιασμός και η κυρία διαίρεση».

3.2.2 Διδακτικές προσεγγίσεις εκλαϊκευτικού χαρακτήρα

Οι διδακτικές προσεγγίσεις που συνδυάζουν τα μαθηματικά με τη λογοτεχνία, εκτός από διαθεματικό, μπορούν να έχουν και εκλαϊκευτικό χαρακτήρα. Στο σημείο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να επεξηγηθεί περαιτέρω, ο όρος εκλαΐκευση. Ο Goffree (1989) αναφέρει: *«Εκλαΐκευση της επιστημονικής γνώσης έχουμε όταν η αναπαράσταση της επιστημονικής γνώσης απλοποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε να κάνει το μη ειδικό να κατανοήσει τις συνέπειες της, παρόλο που ο ίδιος δεν μπορεί να τις ανακατασκευάσει.»* Και συνεχίζει διευκρινίζοντας τη διαφορά της διδακτικής από την εκλαΐκευση: *«Όταν ένα άτομο εργάζεται πάνω στην επιστημονική γνώση για εκπαιδευτικούς σκοπούς, καλείται «ειδικός της διδακτικής» και οι δραστηριότητες αυτού μπορούν να καλούνται «διδακτική». Αυτοί που εκτελούν την ίδια δουλειά εκ* *μέρους κοινωνικών ομάδων, που δεν επιθυμούν να αποκτήσουν πληροφορίες μέσω της επίσημης εκπαίδευσης, ονομάζονται «information officers» και αντικείμενο τους είναι η εκλαΐκευση. Η διαφορά διδακτικής και εκλαΐκευσης βρίσκεται στους διαφορετικούς σκοπούς.»*

Ο Sriraman (2003, 2004) με τη συνεργασία και άλλων καθηγητών μαθηματικών, πραγματοποίησε ένα εκπαιδευτικό πειραματικό πρόγραμμα, με στόχο να αναπτύξει την κριτική σκέψη των μαθητών και να τους εισάγει σε ανώτερες μαθηματικές έννοιες μέσω της εκλαΐκευσης. Το πρόγραμμα, που απευθυνόταν σε μαθητές 13 και 14 ετών, βασίστηκε στο έργο του Abbot «*Flatland*» και είχε διάρκεια τεσσάρων εβδομάδων. Οι μαθητές εργάστηκαν χωρισμένοι σε έξι ομάδες. Στη διάρκεια των συναντήσεων, που λάμβαναν χώρα κάθε Πέμπτη, για 50 λεπτά και κάθε Παρασκευή, για ολιγόλεπτες συζητήσεις, μία ομάδα παρουσίαζε στις υπόλοιπες τα αποτελέσματα των ερευνών της, σχετικά με διάφορα ζητήματα που είχαν τεθεί στην τάξη. Η αξιολόγηση των μαθητών έγινε μέσα από τις εκθέσεις, που έγραψαν για το βιβλίο και από τη συμμετοχή τους στις συζητήσεις. Η αντικατάσταση των παραδοσιακών τεστ ευχαρίστησε ιδιαίτερα τους μαθητές, σημειώνει ο ερευνητής.

Σύμφωνα με τον Sriraman (2003), η έννοια της διάστασης που παρουσιάζεται στο βιβλίο, δημιούργησε το κατάλληλο πλαίσιο για να εισαχθούν οι μαθητές σε διευρυμένες μαθηματικές έννοιες, όπως τα όρια και οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες. Επιπλέον, οι μαθητές καθώς συζητούσαν για την κοινωνική οργάνωση, τις προκαταλήψεις της εποχής και τις διάφορες μαθηματικές έννοιες, χρησιμοποίησαν τη φαντασία τους και καλλιέργησαν την κριτική τους σκέψη.

Μετά την εμπειρία της παραπάνω διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές θέλησαν να υπάρξει και συνέχεια. Για το σκοπό αυτό επιλέχθηκαν από τους ερευνητές, τα πέντε πρώτα κεφάλαια από το βιβλίο του Ian Steward, «*Flatterland*». Οι συναντήσεις, στο νέο αυτό πειραματικό πρόγραμμα, διάρκειας οχτώ εβδομάδων, πραγματοποιούνταν κάθε Παρασκευή για 50 λεπτά. Η δεύτερη αυτή παρέμβαση, χρησιμοποιώντας τη δομή της «*Flatterland*» αποσκοπεί στο να ανακαλύψουν οι μαθητές, μη διαισθητικά μαθηματικά προβλήματα, να κατανοήσουν την έννοια των διαστάσεων και τη γεωμετρία των Fractals και να εισαχθούν στην taxicab γεωμετρία[14].

[14] Η Taxicab γεωμετρία είναι μία μη-Ευκλείδεια γεωμετρία. Την εισήγαγε ο Γερμανός μαθηματικός Hermann Minkowski (1864 – 1909) εκατό περίπου χρόνια πριν.

Οι μαθητές αυτή τη φορά, χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Στην πρώτη ομάδα συμπεριλήφθηκαν οι μαθητές, που είχαν κατανοήσει επαρκώς ορισμένα από τα θέματα του βιβλίου, ενώ στη δεύτερη ομάδα μετείχαν όσοι δεν είχαν σχηματισεί επαρκή αντίληψη. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, έθεταν ερωτήματα σε αυτούς της πρώτης, έτσι ώστε να αποκτήσουν επαρκή αντίληψη για τα υπό διερεύνηση θέματα του βιβλίου.

Από το αίτημα των μαθητών, να υπάρξει συνέχεια της πρώτης διδακτικής παρέμβασης, γίνεται φανερή η αλλαγή της στάσης τους απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών. Ο ενθουσιασμός των μαθητών για τα μαθηματικά ήταν τέτοιος, ώστε μετά την ολοκλήρωση και του δεύτερου πειράματος, τρεις μαθητές επέλεξαν να παρακολουθήσουν ένα θερινό σχολείο μαθηματικών, ενώ τέσσερεις μαθητές αποφάσισαν να ακολουθήσουν σπουδές στα καθαρά ή τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, σημειώνει ο ερευνητής. Τέλος, ο Sriraman (2004) καταλήγει, ότι η αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας στην τάξη των μαθηματικών, μπορεί να ανοίξει νέες προοπτικές τόσο για τους μαθητές, όσο και για τους καθηγητές.

3.2.3 Μαθηματικές Σχολικές Λέσχες Ανάγνωσης

Η ιδέα για τη δημιουργία μαθηματικών σχολικών λεσχών ανάγνωσης ξεκίνησε από την ομάδα «Θαλής και Φίλοι», στην Ελλάδα, πριν από οχτώ περίπου χρόνια. Κοινή πεποίθηση των ιδρυτών της ομάδας, Α. Δοξιάδης, Τ. Μιχαηλίδη και Π. Δελλαπόρτα, ήταν ότι τα μαθηματικά έχουν απομακρυνθεί σημαντικά από το γενικότερο πολιτισμό και ότι η αφήγηση μπορεί να αποτελέσει τον απαραίτητο συνδετικό κρίκο. Μια από τις πρώτες δραστηριότητες που προώθησε η ομάδα, στην προσπάθεια προσέγγισης μαθηματικών και αφήγησης, ήταν η δημιουργία λεσχών ανάγνωσης στα σχολεία της μέσης εκπαίδευσης, με τη συνεργασία εθελοντών εκπαιδευτικών.

Την πρωτοβουλία, για τη δημιουργία μιας σχολικής λέσχης ανάγνωσης μαθηματικού βιβλίου, αναλαμβάνει ένας καθηγητής του σχολείου, όχι απαραίτητα μαθηματικός, ο οποίος προτείνει στους μαθητές να συναντώνται ανά τακτά χρονικά διαστήματα (μία φορά την εβδομάδα ή το δεκαπενθήμερο), για να συζητήσουν το βιβλίο που έχει επιλεγεί και το οποίο διαβάζεται τμηματικά από τα μέλη της λέσχης. Οι συναντήσεις πραγματοποιούνται εκτός διδακτικών ωρών. Υπάρχει όμως και η δυνατότητα να ενταχθούν στις πολιτιστικές δραστηριότητες, που προβλέπονται από τη νομοθεσία. Η συμμετοχή των μαθητών είναι εθελοντική.

Ο εκπαιδευτικός-συντονιστής επιλέγει μαζί με τους μαθητές ένα βιβλίο μαθηματικής λογοτεχνίας και εν συνεχεία το χωρίζει σε ενότητες, ανάλογα με το χρόνο, που μπορούν να αφιερώσουν στο διάβασμα του βιβλίου τα μέλη της λέσχης. Κατά την έναρξη κάθε συνάντησης, ένας μαθητής που έχει οριστεί από πριν, παρουσιάζει μια περίληψη της υπό συζήτηση ενότητας. Η συζήτηση εξελίσσεται με το ρυθμό και το στυλ που επιλέγουν οι μαθητές. Ο εκπαιδευτικός-συντονιστής έχει υποστηρικτικό ρόλο και παρεμβαίνει όπου χρειαστεί, τροφοδοτώντας τη συζήτηση με θέματα και δραστηριότητες, που έχει ετοιμάσει εκ των προτέρων.

Εκτός από τη συζήτηση με αφορμή αποσπάσματα του βιβλίου, ο Μιχαηλίδης (2006) προτείνει μια σειρά από δραστηριότητες και εκδηλώσεις που μπορούν να πλαισιώσουν μια λέσχη ανάγνωσης. Μαθηματικές δραστηριότητες έρευνας και ανακάλυψης, με αφορμή αναφορές του βιβλίου, όπως για παράδειγμα εύρεση πρώτων αριθμών με το κόσκινο του Ερατοσθένη κ.λ.π.. Αναζήτηση στο διαδίκτυο πληροφοριών, σχετικά με το ιστορικό πλαίσιο του βιβλίου και τη ζωή μαθηματικών που πιθανόν αναφέρονται σ' αυτό. Χρήση παράλληλων κειμένων ή βιβλίων με συναφές περιεχόμενο. Διάλογος μέσω του διαδικτύου, με άλλες λέσχες ανάγνωσης, με στόχο την ανταλλαγή απόψεων. Δραματοποίηση αποσπασμάτων του βιβλίου. Παρακολούθηση θεατρικών παραστάσεων και κινηματογραφικών έργων, που πραγματεύονται ανάλογα θέματα. Επισκέψεις σε συναφείς, με το θέμα του βιβλίου, χώρους: εκθέσεις, μουσεία, πλανητάριο. Πρόσκληση ομιλητών. Οργάνωση εκδηλώσεων-παρουσιάσεων προς το υπόλοιπο σχολείο, τους γονείς, το κοινό της γειτονιάς.

Ο Μιχαηλίδης (2006), τονίζει ότι *«είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι δεν υπάρχει κάποια «διδακτέα ύλη» που πρέπει να καλυφθεί και ότι παρά τους προφανείς διδακτικούς στόχους, η λέσχη ανάγνωσης είναι κυρίως μια εναλλακτική πρόταση ψυχαγωγίας με αποδέκτες τόσο τους μαθητές όσο και τους συντονιστές-εκπαιδευτικούς. Η θεματολογία των συζητήσεων και δραστηριοτήτων δεν είναι υποχρεωτικό να περιορίζεται στα μαθηματικά, επιθυμητό είναι μάλλον το αντίθετο. Από αυτή την άποψη οι λέσχες ανάγνωσης προωθούν και αυτές το διεπιστημονικό-διαθεματικό μοντέλο προσέγγισης της γνώσης που βρίσκεται σήμερα στην πρώτη γραμμή των παιδαγωγικών αναζητήσεων.»* (σελ.17) Ο ψυχαγωγικός χαρακτήρας, η απουσία διδακτέας ύλης και αξιολόγησης των μαθητών, σε αντίθεση με το κλασσικό μοντέλο διδασκαλίας, έχουν βρει μεγάλη ανταπόκριση, δεδομένου ότι το σχολικό έτος 2005-2006, σε περισσότερα από 150 σχολεία στην Ελλάδα λειτούργησαν λέσχες ανάγνωσης.

Ο Μιχαηλίδης (2006), διευκρινίζει ότι «*οι λέσχες ανάγνωσης, στη μορφή που προτείνονται, δεν αποτελούν μια πρόταση υποκατάστασης της παραδοσιακής διδασκαλίας αλλά μια δραστηριότητα που μπορεί να λειτουργήσει παράλληλα και συμπληρωματικά. Ωστόσο, στα πλαίσια της διεύρυνσης διαθεματικών-διεπιστημονικών τρόπων προσέγγισης της γνώσης η ιδέα του «χτισίματος» ενός ολοκληρωμένου και αυτοτελούς κύκλου διδασκαλίας με κύριο άξονα αναφοράς ένα λογοτεχνικό ή εκλαϊκευτικό βιβλίο δε θα πρέπει να αποκλειστεί*» (σελ.17). Συμπεραίνεται επομένως ότι οι στόχοι των λεσχών ανάγνωσης δεν είναι αμιγώς διδακτικοί, αλλά διαθεματικοί, εκλαϊκευτικοί και πολιτιστικοί και για αυτό το λόγο δεν μπορούν να ενταχθούν σε μία μόνο από τις προηγούμενες κατηγορίες δραστηριοτήτων, που αξιοποιούν τη μαθηματική λογοτεχνία. Αποτελούν από μόνες τους μία κατηγορία, που αφορά τη διδακτική των μαθηματικών όχι μόνο στο χώρο του σχολείου αλλά και ευρύτερα. Άρα λοιπόν στα πλαίσια των λεσχών ανάγνωσης, η αφήγηση αποτελεί το έναυσμα για συζητήσεις μεταξύ καθηγητών και μαθητών γύρω από διάφορα μαθηματικά θέματα, μέσα από τις οποίες επιτυγχάνονται οι διδακτικοί στόχοι των εκπαιδευτικών.

3.3 Δύο παραδείγματα χρήσης της λογοτεχνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών

Με δεδομένα τα οφέλη που προκύπτουν από τις πολλαπλές χρήσεις της μαθηματικής λογοτεχνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και τα οποία καταγράφηκαν σε προηγούμενη ενότητα, προτείνονται στο σημείο αυτό, δύο παραδείγματα δραστηριοτήτων. Το πρώτο είναι ένα διδακτικό σενάριο βασισμένο στο «*Μηδέν*», του Guedj. Στην περίπτωση αυτή, το λογοτεχνικό κείμενο εντάσσεται στη διδακτική πράξη, με στόχο την καλύτερη κατανόηση του δεκαδικού συστήματος, από τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου.

Στη δεύτερη δραστηριότητα, που απευθύνεται σε διαφορετικό ηλικιακό επίπεδο, σε μαθητές της Α΄ Λυκείου, δίνονται αποσπάσματα από τα βιβλία, «*Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ*», του Δοξιάδη και «*Διάλογοι για τα μαθηματικά*», του Renyi καθώς και το κείμενο «*Ένα συνηθισμένο πρωινό, ενός συνηθισμένου ανθρώπου*», του Μιχαηλίδη, για να γίνει μια συζήτηση, γύρω από τη φύση και τη χρησιμότητα των μαθηματικών. Πρόκειται για μια μεταμαθηματική δραστηριότητα, όπου η λογοτεχνία δίνει το έναυσμα για διάλογο, μεταξύ μαθητών, που έχουν ήδη διδαχθεί διάφορες μαθηματικές έννοιες, προσεγγίζοντας έτσι τις μαθηματικές λέσχες ανάγνωσης.

3.3.1 Δραστηριότητα 1η –Διδακτικό Σενάριο

Με το παρόν σενάριο, οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με την ιστορική εξέλιξη, της συμβολικής αναπαράστασης των φυσικών αριθμών καθώς και με την εφεύρεση του μηδενός, με τη βοήθεια αποσπασμάτων από το «Μηδέν» του Denis Guedj, με στόχο την καλύτερη κατανόηση του δεκαδικού συστήματος.

- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Φυσικοί αριθμοί, Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

- **Θέματα:**

- Βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα
- Εφεύρεση του μηδενός
- Εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης
- Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
- Δυαδικό σύστημα αρίθμησης
- Μετάβαση από ένα σύστημα αρίθμησης σε άλλο

Σκεπτικό δραστηριότητας

Στο Δημοτικό έχουν διδαχθεί τόσο οι έννοιες, όσο και οι διαδικασίες που σχετίζονται με τους φυσικούς, οπότε η διδασκαλία τους, στην Α΄ Γυμνασίου έχει περισσότερο επαναληπτικό χαρακτήρα. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στις ιδιότητες των πράξεων καθώς και σε αλγοριθμικές διαδικασίες που υποστηρίζουν τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (π.χ. η αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα, η αφαίρεση ως αντίθετη πράξη της πρόσθεσης κλπ.).

Στο αναλυτικό πρόγραμμα δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο δεκαδικό σύστημα αναπαράστασης των φυσικών αριθμών (ο προτεινόμενος χρόνος για τη διδασκαλία του είναι μία ώρα) και οι όποιες πληροφορίες για την εξέλιξη των διαφόρων αριθμητικών συστημάτων υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, συνήθως παρακάμπτονται λόγω της πίεσης να «βγει» η διδακτέα ύλη. Έτσι, τα μαθηματικά παρουσιάζονται απογυμνωμένα, από το ιστορικό-κοινωνικό γίγνεσθαι στο οποίο εξελίχθηκαν και φαντάζουν ξένα στους μαθητές, που δεν αντιλαμβάνονται τη λογική δομή τους και απογοητεύονται από την υπερβολική αυστηρότητα και αφαίρεσή τους.

Η παρούσα εργασία, με τη βοήθεια συγκεκριμένων αποσπασμάτων από το «*Μηδέν*» του Denis Guedj, αποσκοπεί σε μια διαφορετική προσέγγιση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, λαμβάνοντας υπόψη τα διάφορα στάδια εξέλιξης του. Το ζητούμενο είναι οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, μέσα από τη διαδρομή της συμβολικής αναπαράστασης των φυσικών αριθμών στο χρόνο, όπως περιγράφεται στο έργο Guedj, να ανακαλύψουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο λογαριασμοί και προβλήματα, αλλά ότι μπορεί να έχουν και άλλες, πολλές φορές ενδιαφέρουσες όψεις.

Η πρώτη γνωριμία των μαθητών με τα γυμνασιακά μαθηματικά είναι καθοριστικής σημασίας, για τη μετέπειτα θετική ή αρνητική στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Για το λόγο αυτό, οι δραστηριότητες του σεναρίου, ενθαρρύνουν τους μαθητές να συζητήσουν και να επιχειρηματολογήσουν για διάφορα θέματα, που σχετίζονται με το δεκαδικό σύστημα, ξεφεύγοντας από τη συνήθη τεχνική διδασκαλία (θεωρία-επίλυση ασκήσεων). Οι μαθητές εργαζόμενοι σε μικρές ερευνητικές ομάδες θα κατανοήσουν την «περιπέτεια» της αναπαράστασης των φυσικών αριθμών ώστε να συνειδητοποιήσουν ότι δεν μας ήρθε «ουρανοκατέβατη» άλλα διαμορφώθηκε από τις κοινωνικές και πολιτιστικές ανάγκες της κάθε εποχής, κατανοώντας έτσι ότι τα μαθηματικά είναι μια δυναμική και εξελισσόμενη επιστήμη.

➢ Θεωρητικό πλαίσιο για τη διδασκαλία

Το συγκεκριμένο σενάριο βασίζεται στη θεωρία του κοινωνικό-πολιτισμικού πλαισίου και οργανώνεται με βάση, την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.

Τις τελευταίες δεκαετίες, πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει τη σημασία του πολιτισμικού πλαισίου, ως σημείου αναφοράς για τη μαθηματική εκπαίδευση. Ο Cobb υποστηρίζει ότι *«η πολιτισμοποίηση και η θεσμοθέτηση της μαθηματικής* *δραστηριότητας είναι απαραίτητη πλευρά της μαθηματικής εκπαίδευσης των παιδιών. Οι αναλύσεις που εστιάζονται μόνον στην ατομική κατασκευή της μαθηματικής γνώσης, λένε μόνο το μισό μιας ωραίας ιστορίας».*

Κοινωνικοί κονστρουκτιβιστές, όπως ο Harre (1984) και ο Solmon (1989) αναζητούν τις ρίζες των μαθηματικών ικανοτήτων των παιδιών, μέσα στις κοινωνικές δραστηριότητες και βλέπουν τη γνωστική ανάπτυξη, ως μια σταδιακή κοινωνικοποίηση των κρίσεων του παιδιού. Κατά τη διάρκεια αυτής της κοινωνικοποίησης, η γνώση, η κατανόηση, η κατασκευή του νοήματος και εμείς οι ίδιοι ως άτομα, συγκροτούμαστε και οριοθετούμαστε από τη γλώσσα μας. Η ιδέα ενός αυτόνομου ατόμου, το οποίο έρχεται αντιμέτωπο με εξωτερικές έννοιες, όπως φυσικά ή νοητικά αντικείμενα και το οποίο αποκτά «κατανόηση» σε μία ιδιωτική διαδικασία, δεν είναι επαρκής.

Η διαδικασία της κατανόησης αντιμετωπίζεται ως κοινωνική, μάλλον, δραστηριότητα παρά ως ψυχολογική. «Αυτό σημαίνει ότι το άτομο, δεν περνά από μία προ- σε μία μετά- κατάσταση κατανόησης, αποκομμένο από εξωτερικές επιδράσεις, δεν αποκτά δηλαδή, συγκεκριμένες, καλοσχηματισμένες έννοιες με κάποιο μυστικό τρόπο. Υπάρχει απαραίτητα μία αλληλεπίδραση του παιδιού με μία ποικιλία νοημάτων, μέσω της γλώσσας, με τους άλλους και με τις προσωπικές του εμπειρίες. Μερικές φορές, ο τρόπος που κατανοεί τα πράγματα δεν ταιριάζει με εκείνον των άλλων, συμπεριλαμβανομένου και του εκπαιδευτικού. Μόνο μέσα από συζητήσεις, υποδείξεις, συμπεράσματα και ανασκευές ή αλλαγές στον τρόπο σκέψης, μέσα από τον απόηχο των ενεργειών του, το παιδί γίνεται ικανό για περαιτέρω εξέλιξη». (Lerman, 1994)

Συνοπτικά τέσσερις είναι οι κεντρικές ιδέες μιας **κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης** της μαθηματικής εκπαίδευσης (Van Oers, 1996):

- Το κοινωνικό, πολιτισμικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον, δε διευκολύνει (ή παρακωλύει) απλά τη μάθηση. Οι κοινωνικές οργανωτικές διαδικασίες είναι έμφυτο χαρακτηριστικό της μάθησης, είτε αυτή λαμβάνει χώρα σε ένα ανοιχτό κοινωνικό πλαίσιο, είτε όχι.
- Η μάθηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ως μία μορφή μαθητείας, κατά τη διάρκεια της οποίας, οι αρχάριοι γίνονται «ειδικοί» μέσα από συμμετοχή σε δραστηριότητες μιας κοινωνικής ομάδας.
- Η μάθηση των μαθητικών είναι μια επικοινωνιακή δραστηριότητα.

- Η μάθηση απαιτεί τη διαπραγμάτευση του νοήματος, στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας.

Οι κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες έχουν τις ρίζες τους, στις εργασίες των Ρώσων ψυχολόγων, Vygotsky, Luria, Leont'ev. Η εκπαίδευση για τον Vygotsky είναι κατά βάση μια διαδικασία εκπολιτισμού, κατά την οποία τα παιδιά ενθαρρύνονται, παρακινούνται και υποβοηθούνται στην κατάκτηση βασικής γνώσης, συνδυασμένης με το ανθρωπιστικό στοιχείο.

Για τον Vygotsky, η μάθηση δεν είναι μια απλή σχέση μεταξύ ατόμου και γνώσης, αλλά η εισαγωγή του ατόμου σε μια υπάρχουσα κουλτούρα. Οι συνέπειες αυτού του γεγονότος για τη διδασκαλία είναι πολύ μεγάλες, ειδικά όσον αφορά το ρόλο του εκπαιδευτικού και την αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητή. Μία από τις βασικές διαδικασίες αυτής της αλληλεπίδρασης είναι η **σημειολογική ή σημειωτική (δια)μεσολάβηση**. Ένα τέτοιο φαινόμενο εντοπίζεται, όταν «η άμεση παρόρμηση του μαθητή να αντιδράσει σε ένα ερέθισμα, παρεμποδίζεται από τη σκόπιμη εισαγωγή κάποιου «σήματος» από τον εκπαιδευτικό. Το αποτέλεσμα είναι ο έλεγχος της συμπεριφοράς των μαθητών με βάση το εξωτερικό ερέθισμα».

Ο Vygotsky, τάσσεται υπέρ μιας πολιτισμικο-ιστορικής προσέγγισης της εκπαίδευσης, κατά την οποία, η μάθηση εξαρτάται από την ευκαιρία, που έχουν οι μαθητές να αξιολογήσουν τις ιδέες και τις σκέψεις τους, θέτοντάς τες σε κριτική σύγκριση με ένα σύνολο πολιτισμικών εργαλείων: εννοιών, μεθόδων κλπ

Την ίδια άποψη εκφράζει και ο Leont'ev, κάνοντας διάκριση μεταξύ **πολιτισμικού νοήματος** και **προσωπικού νοήματος**. Το πολιτισμικό νόημα αναφέρεται στις γενικευμένες γνώσεις και δεξιότητες, που αποκτήθηκαν στη διάρκεια της ιστορικο-πολιτισμικής πορείας της ανθρώπινης κοινωνίας και οι οποίες αναπαρίστανται μέσω συμβόλων, κυρίως μέσω της γλώσσας. Το προσωπικό νόημα βασίζεται στην απόδοση προσωπικής αξίας σε ενέργειες και στόχους, στα πλαίσια μιας πολιτισμικής δραστηριότητας με βάση τα ατομικά κίνητρα, τις φιλοδοξίες, τους στόχους, τον τρόπο που βλέπει το άτομο τον εαυτό του μέσα στον κόσμο κλπ. Το πολιτισμικό νόημα μπορεί να μετατραπεί σε αναλυτικά προγράμματα και να διδαχθεί. Αντίθετα, το προσωπικό νόημα δε διδάσκεται άμεσα, αλλά μπορεί να χτιστεί σταδιακά, μέσω της ενεργούς εμπλοκής του ατόμου, στα πλαίσια μιας εκπαιδευτικής σχέσης. Η προσπάθεια μετάδοσης του πολιτισμικού νοήματος, χωρίς προηγουμένως να έχει δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να το συνδέσουν με το προσωπικό νόημα, καταλήγει συνήθως σε τυποποιημένη μηχανική μάθηση.

Την άποψη, λοιπόν, που αναγνωρίζει στον άνθρωπο τη φυσική κλίση προς τη συλλογική δράση, ασπάζεται το κίνημα της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας και επιχειρεί να αξιοποιήσει τη φυσική αυτή κλίση, για την προώθηση της σχολικής μάθησης και την προσωπική ανάπτυξη των μαθητών.

Το ομαδοσυνεργατικό κίνημα θεωρεί ότι μάθηση δεν σημαίνει απλώς απόκτηση πληροφοριών, αλλά μία συνεχή διαδικασία επίλυσης εσωτερικών γνωστικών συγκρούσεων. Οι συγκρούσεις αυτές, δημιουργούνται αλλά και επιλύονται, μέσα στο πλαίσιο της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης του ατόμου με το φυσικό και κοινωνικό του περιβάλλον.

Αντίθετα με το παραδοσιακό σχολείο, που θεωρούσε σημαντικές τις σχέσεις εκπαιδευτικού-μαθητών, ενώ παρέκαμπτε τις διαμαθητικές σχέσεις, το ομαδοσυνεργατικό κίνημα αναγνωρίζει την παιδευτική σημασία των διαμαθητικών σχέσεων, τις οποίες θεωρεί μήτρα μάθησης και ανάπτυξης, χωρίς βεβαίως, να παραγνωρίζει την αναγκαιότητα και τη σπουδαιότητα των σχέσεων εκπαιδευτικού μαθητών.

Η διαφορά αντιλήψεων φαίνεται εμμέσως, πλην σαφώς, στον τρόπο με τον οποίο οργανώνουν τόσο το παραδοσιακό σχολείο όσο και το ομαδοσυνεργατικό κίνημα, το μαθητικό δυναμικό και τη διαδικασία της διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, το παραδοσιακό σχολείο οργανώνει τη διδακτική διαδικασία γύρω από τις σχέσεις εκπαιδευτικού-μαθητών και δημιουργεί ένα φάσμα διδακτικών προσεγγίσεων, που αρχίζουν από τις μονολογικές διδασκαλίες και φθάνουν μέχρι τον κατευθυνόμενο διάλογο. Σε κάθε μία από αυτές τις διδακτικές μορφές, ο ρόλος του εκπαιδευτικού και ο βαθμός ελέγχου της όλης διαδικασίας διαφοροποιούνται, αλλά ο εκπαιδευτικός παραμένει πάντοτε κυρίαρχος, σε σχέση με το συλλογικό ρόλο των μαθητών. Αντίθετα, στο ομαδοσυνεργατικό κίνημα, η οργάνωση και η διεξαγωγή της όλης διδακτικής διαδικασίας στηρίζεται στη δυναμική των διαμαθητικών σχέσεων.

- **Καινοτομίες**

Η ανάγνωση κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών, έχει σήμερα περιθωριακή θέση και εξαντλείται κυρίως στην ανάγνωση των σχολικών εγχειριδίων καθώς και συναφών σχολικών βοηθημάτων, με στόχο την εκμάθηση θεωρητικών γνώσεων (ορισμών, θεωρημάτων, αποδείξεων) και τεχνικών για την επίλυση ασκήσεων, σχεδόν αποκλειστικά σε ένα πλαίσιο αξιολόγησης. Τα όποια κείμενα αφηγηματικού λόγου περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία, ως ιστορικά σημειώματα ή περιγραφές εφαρμογών των μαθηματικών, έχουν περιθωριακό χαρακτήρα και συνήθως παραλείπονται από τις δραστηριότητες της διδασκαλίας των αντίστοιχων ενοτήτων, κυρίως λόγω έλλειψης χρόνου. Στην παρούσα εργασία, τα επιλεγμένα αποσπάσματα από το «*Μηδέν*», είναι καθοριστικής σημασίας, για την περαιτέρω εξέλιξη της δραστηριότητας. Αναμένεται ότι θα αποτελέσουν αφορμή, για προβληματισμό και συζήτηση. Στο «*Μηδέν*», αρκετοί από τους κεντρικούς ήρωες κατανοούν σε σημαντικό βαθμό τα μαθηματικά. Κατά τη ροή των κειμένων, διατυπώνουν τις σκέψεις τους, χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και ιδέες, προκαλώντας έτσι το ενδιαφέρον των αναγνωστών για τα μαθηματικά, ενώ παράλληλα συνθέτουν κόσμους ιδιαίτερα γοητευτικούς.

- **Προστιθέμενη αξία**

Μέσα από το σενάριο αυτό, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές, να εργαστούν στα χρονικά πλαίσια που αυτοί επιθυμούν, αφιερώνοντας τον χρόνο που χρειάζονται, ώστε να αποδώσουν. Αυτό αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας, κυρίως, σε σχέση με την μετωπική διδασκαλία, όπου, ακόμη και αν ο εκπαιδευτικός θελήσει να δώσει χρόνο στους μαθητές να απαντήσουν, αυτοί πιέζονται (κυρίως από τους «καλούς» της τάξης) και τελικά παραιτούνται.

Επίσης, τα συμπεράσματα, ακόμη και αν αυτά προκύπτουν κατευθυντικά, αντλούνται από τους ίδιους, με αποτέλεσμα να γίνονται αφομοιωμένη για αυτούς γνώση.

Πλεονέκτημα αποτελεί και η αλλαγή των ρόλων του εκπαιδευτικού και των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός παύει να έχει τον πρώτο λόγο, λειτουργεί οργανωτικά και υποστηρικτικά απέναντι στους μαθητές του, στους οποίους δίνονται οι προϋποθέσεις να αυτενεργήσουν, να συνεργαστούν, να διερευνήσουν και τελικά να αποκομίσουν γνώσεις, ώστε μακροπρόθεσμα να αλλάξουν τη στάση τους απέναντι στη μάθηση αλλά και ειδικότερα στα μαθηματικά.

Πλαίσιο εφαρμογής

- **Σε ποιους απευθύνεται:** σε μαθητές της Α΄ Γυμνασίου
- **Χρόνος υλοποίησης:** Για την εφαρμογή του σεναρίου, εκτιμάται ότι απαιτούνται 4 διδακτικές ώρες. Ο χρόνος των επιμέρους δραστηριοτήτων, αναφέρεται παρακάτω, στην παράγραφο «Ανάλυση της δραστηριότητας».
- **Χώρος υλοποίησης:** η συμβατική αίθουσα διδασκαλίας

- **Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών:**

- Η έννοια του ψηφίου
- Η έννοια του αριθμού
- Οι φυσικοί αριθμοί
- Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
- Δυνάμεις φυσικών αριθμών

- **Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:**

- Φύλλα εργασίας
- Τετράδιο, ως πρόχειρο για την εκτέλεση πράξεων, δοκιμών
- Σχολικό βιβλίο, για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες

- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης**

Κάθε ομάδα συμπληρώνει το φύλλο εργασίας και το ανταλλάσσει, με κάποια άλλη ομάδα για διόρθωση. Ο καθηγητής παρεμβαίνει, για να απαντήσει σε απορίες και να εξηγήσει κάποια κομμάτια, που χρήζουν περαιτέρω ανάλυσης. Επομένως, η εργασία αυτή, θα γίνει στα πλαίσια της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Οι μαθητές μπαίνουν στη θέση του ερευνητή, συνεπώς η συνεργασία με τους άλλους μαθητές της μικρής ομάδας, όχι μόνο θα είναι καταλυτική στην εξαγωγή συμπερασμάτων αλλά, επιπλέον, θα διδάξει στους μαθητές την αξία, της ομαδικής συνεργασίας. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός, θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν.

➢ **Ο ρόλος του καθηγητή**

- Βλέπει τα μαθηματικά ως μια εξελισσόμενη δυναμική επιστήμη
- Σχεδιάζει δραστηριότητες με ενδιαφέρον για τα παιδιά
- Καθορίζει τους στόχους, τους οποίους κάνει σαφείς στους μαθητές
- Θέτει ερωτήματα και προβληματισμούς
- Συμβουλεύει παρά καθοδηγεί
- Ενθαρρύνει την συλλογική δουλειά
- Συντονίζει για την επίτευξη των επιδιωκόμενων στόχων

➢ **Ο ρόλος του μαθητών**

- Επιλέγουν μόνοι τους τις στρατηγικές διερεύνησης και πειραματισμού
- Αναπτύσσουν ικανότητες έκφρασης μαθηματικών εννοιών και συλλογισμών
- Κατασκευάζουν γενικευμένα μοντέλα μέσω των συγκεκριμένων
- Συνδυάζουν λειτουργικές, εικονικές και συμβολικές αναπαραστάσεις

➢ **Στόχοι της δραστηριότητας:**

Με την ολοκλήρωση του σεναρίου επιδιώκεται από πλευράς **γνωστικού αντικειμένου** οι μαθητές :

- Να γνωρίζουν τι είναι σύστημα αρίθμησης με βάση το 10 και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του.
- Να γνωρίζουν τη σημειολογία της θέσης των ψηφίων σε έναν αριθμό.
- Να μπορούν να μετατρέπουν αριθμούς από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης σε άλλα και αντίστροφα.

Ενώ από **παιδαγωγικής πλευράς** το σενάριο φιλοδοξεί ώστε οι μαθητές :

- Να μάθουν να εργάζονται και να παράγουν σκέψεις, υποθέσεις και γνώσεις μέσα από μια ομαδική έρευνα.

- Να αντιληφθούν την χρησιμότητα της επαγωγικής σκέψης, αλλά και την αναγκαιότητα της παραγωγικής διαδικασίας.
- Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας τους για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους και να διατυπώσουν κανόνες.
- Να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας τους και από τον καθηγητή τους.

Ανάλυση της δραστηριότητας

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα απαρτίζεται από 3 φάσεις και ο προτεινόμενος χρόνος για την υλοποίησή της, είναι 4 ώρες. Είναι προτιμότερο, να μη μεσολαβούν μεγάλα χρονικά διαστήματα μεταξύ των φάσεων της δραστηριότητας, έτσι ώστε, να υπάρχει συνέχεια στη σκέψη των μαθητών. Το καλύτερο θα ήταν, το παρόν σενάριο, να πραγματοποιηθεί μετά τις χριστουγεννιάτικες διακοπές και να αφιερωθεί διάστημα τριών διαδοχικών ημερών για την υλοποίηση των φάσεων.

Λίγο πριν τις διακοπές, κρίνεται σκόπιμο, να αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να ενημερώσουμε τους μαθητές για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και τα ζητούμενά του. Επίσης, χωρίζονται οι μαθητές σε ομάδες των δύο ή των τριών ατόμων και καθορίζονται οι αρμοδιότητες των μελών τους. Η σύσταση των ομάδων πρέπει να είναι ανομοιογενής, όσον αφορά το γνωστικό επίπεδο. Έτσι, το παιδί με τις περισσότερες δυσκολίες θα μπορεί να βοηθηθεί από το πιο έμπειρο παιδί, αλλά και το δεύτερο στην προσπάθειά του, να δίνει εξηγήσεις σε δύσκολες έννοιες, οργανώνει τη σκέψη του και οδηγείται γενικότερα σε υψηλότερη γνωστική και προσωπική συγκρότηση.

Καλό θα ήταν, κατά τη διάρκεια των Χριστουγεννιάτικων διακοπών, να ζητηθεί από τους μαθητές να κάνουν μία επανάληψη στο πρώτο κεφάλαιο, του σχολικού βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου, το οποίο αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Έτσι οι μαθητές, ακόμη και οι πιο αδύναμοι, αναμένεται να συμμετέχουν πιο ενεργά στις συζητήσεις σχετικά με αυτούς.

Η ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

Φάση 1η

Η πρώτη φάση θα πραγματοποιηθεί σε μία διδακτική ώρα. Αρχικά, ο καθηγητής διαβάζει στην τάξη τα παρακάτω αποσπάσματα από το «Μηδέν», του Denis Guedj, που περιέχουν αρκετές πληροφορίες σχετικά με την αντίληψη, που είχαν οι Σουμέριοι για την έννοια του αριθμού. Ειδικότερα το δεύτερο κείμενο, χρησιμεύει, στο να αντιληφθούν οι μαθητές, το πέρασμα από τη συγκεκριμένη ποσότητα στην αφηρημένη. Δηλαδή να κατανοήσουν οι μαθητές, τη μετάβαση από τις δέκα γίδες ή τα δέκα πρόβατα στον αριθμό δέκα γενικά.

Ι

Τανμούζι: ...τον αριθμό των άστρων είναι αδύνατον να τον αναπαραστήσουμε με έναν κονδυλοφόρο. Όπως άλλωστε κι ένα σωρό αριθμούς.

Τανμούζι: Αν μετρούσα όλους τους κόκκους από όλες τις ροδιές της Σουμερίας…

Αεμέρ: Δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός!

Τανμούζι: Και βέβαια υπάρχει! Μετράς τον αριθμό των κόκκων που έχει κάθε ρόδι και τον πολλαπλασιάζεις πρώτα με τον αριθμό των καρπών που έχει κάθε ροδιά, και έπειτα με τον αριθμό των δέντρων.

Αεμέρ: Τότε που είναι το πρόβλημα;

Τανμούζι: Το πρόβλημα είναι ότι ο αριθμός υπάρχει, αλλά δεν μπορούμε να τον γράψουμε.

Αεμέρ: Και γιατί θέλεις να τον γράψεις; Για ποια συναλλαγή; Ανταλλάσσοντας τι;

Τανμούζι: Τίποτε!

Αεμέρ: Επομένως, μετράς έτσι για το τίποτε!

Τανμούζι: Ναι! Θέλω να το γράψω μόνο και μόνο για να το γράψω!

Αεμέρ: Ωστόσο μου λες ότι δεν μπορείς. Και παρεμπιπτόντως, γιατί δεν μπορείς;

Τανμούζι: Επειδή δεν υπάρχουν αρκετά σύμβολα. Θα έπρεπε να επινοήσω ένα σωρό καινούργια. Με όσα διαθέτουμε, δεν μπορούμε να μετρήσουμε πάνω από το εκατό χιλιάδες. Ίσως λίγο παραπάνω. (για περισσότερη ζωντάνια, το πρωτότυπο κείμενο αποδίδεται σε διαλογική μορφή)

II

«…Είχαν ένα σύμβολο για "δέκα πρόβατα", ένα άλλο για "δέκα γίδες", ένα τρίτο για "δέκα κατσίκες", ένα τέταρτο για "δέκα αρνιά", για "δέκα κριάρια". Πώς τα κατάφερναν! Αυτό κι αν ήταν πολύπλοκο. Σιγά, σιγά δημιούργησαν ένα ιδιαίτερο σύμβολο για το δέκα, την μπίλια την οποία χρησιμοποιούμε σήμερα. Μόνο για το δέκα, χωρίς να προσδιορίζουν τι "δέκα": το ίδιο σύμβολο ίσχυε και για τα πρόβατα και για τις γίδες και για τις κατσίκες και για όλα τα άλλα…»

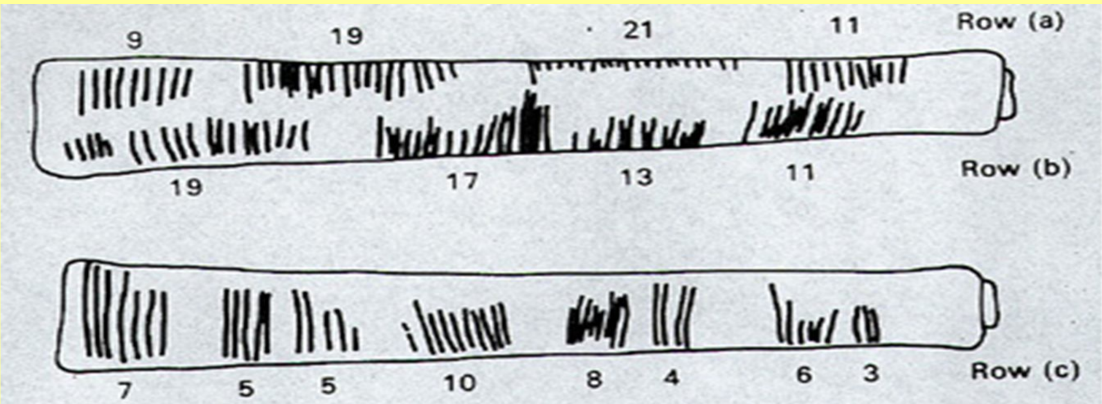
Μετά την ανάγνωση των κειμένων μοιράζεται στις ομάδες το παρακάτω φύλλο εργασίας, καθώς και τα αποσπάσματα Ι και ΙΙ από το «Μηδέν», για να μπορούν οι μαθητές να ανατρέχουν σε αυτά, κατά τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας:

1ο Φύλλο εργασίας

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Ομάδα:………………………………………………………………………..

1. *Παρατηρήστε την παρακάτω εικόνα, όπου εικονίζονται οι δύο όψεις του κόκαλου του Ishango. Πρόκειται για μία από τις αποδείξεις, που μας αποκαλύπτουν ότι οι άνθρωποι από πολύ παλαιά προσπάθησαν να αναπαραστήσουν συμβολικά τους φυσικούς αριθμούς.*



α) *Με ποιον τρόπο παριστάνονται οι αριθμοί;*

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

β) *Φανταστείτε να παριστάνονταν με τον παραπάνω τρόπο τα ποσά που κινούνται σε έναν τραπεζικό λογαριασμό. Θα δημιουργούνταν προβλήματα;*

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………....

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς* IIIIIIIIII *και* IIIIIIIIIII. *Τι παρατηρείτε;

....

....

....

2. *Στην αρχή του πρώτου κειμένου ποια επιθυμία εκφράζει ο Τανμούζι και ποια είναι η αντίδραση της Αεμέρ; Γιατί ο Τανμούζι δυσκολεύεται να πραγματοποιήσει την επιθυμία του;*

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3.*Διαβάστε το παρακάτω κείμενο. Διαπιστώνετε να υπάρχει κάποια σχέση με την επιθυμία του Τανμούζι;*

Ο Αρχιμήδης (περίπου 287-212 π.Χ.) στο έργο του Ψαμμίτης γράφει: *«Υπάρχουν μερικοί, βασιλιά Γέλωνα που πιστεύουν ότι ο αριθμός της άμμου είναι άπειρος σε μέγεθος και όταν λέω άμμου δεν εννοώ την άμμο που υπάρχει στις Συρακούσες και στην υπόλοιπη Σικελία αλλά και αυτή που βρίσκεται σε κάθε περιοχή είτε κατοικείται είτε όχι. Υπάρχουν δε μερικοί άλλοι που πιστεύουν ότι δεν υπάρχει τόσο μεγάλος αριθμός, που να μπορεί να γραφτεί και να κατονομαστεί και ο οποίος να υπερβαίνει τον αριθμό όλων των κόκκων άμμων που υπάρχουν στο σύμπαν».*

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..


ΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ
ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ
Ψαμμίτης,
καὶ Κύκλου Μέτρησις,
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ,
εἰς αὐτὴν ὑπόμνημα.
ARCHIMEDIS
SYRACUSANI

Για να υπολογίσει τον αριθμό των κόκκων άμμου που υπάρχουν στο σύμπαν, ο Αρχιμήδης επινόησε ένα σύστημα μέτρησης με μονάδα μέτρησης την μυριάδα. Η λέξη προέρχεται από τη λέξη μυριάς, για τον αριθμό 10.000. Πρότεινε ένα σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιώντας μυριάδα μυριάδων (100 εκατομμύρια) και συμπέρανε ότι ο αριθμός των κόκκων άμμου που χωράει το σύμπαν είναι 8×10^{63} .

4. ***Σύμφωνα με το πρώτο κείμενο που διαβάστηκε στην τάξη, για ποιους λόγους θεωρούν ο Τανμούζι και η Αεμέρ ότι αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά στο Σουμεριακό πολιτισμό;***

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

5.Σκεφτείτε γιατί οι Σουμέριοι, ομαδοποιούσαν τα ζώα τους σε δεκάδες, δέκα αρνιά, δέκα πρόβατα κλπ. και όχι π.χ. σε επτάδες ή τετράδες; Στη συνέχεια διαβάστε το κείμενο που ακολουθεί.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

«Γιατί όλοι οι άνθρωποι, τόσο οι Έλληνες, όσο και οι βάρβαροι μετρούν μέχρι το δέκα και όχι μέχρι κάποιον άλλο αριθμό, όπως το 2,3,4 ή 5 και μετά να αρχίζουν πάλι από την αρχή, λέγοντας για παράδειγμα ένα πέντε, δύο πέντε όπως λένε ένδεκα (ένα δέκα), δώδεκα (δύο δέκα)… Μήπως επειδή όλοι οι άνθρωποι γεννιούνται με δέκα δάκτυλα; Έχοντας στα δάκτυλά τους κάτι αντίστοιχο με τα χαλίκια, συνήθισαν να χρησιμοποιούν αυτόν τον αριθμό για να μετρούν και όλα τα άλλα». (Heath Th., «Ιστορία των Ελληνικών», τόμος Ι, σελ. 45)

6. ***Υιοθετήστε τα παρακάτω σύμβολα για τους είκοσι πρώτους αριθμούς:***

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, κ, ν, /, Δ***, Ψ,*** $\otimes$***,*** $\wedge$***, #, &,*** $\vee$***, φ***

Με βάση τα παραπάνω σύμβολα, να εκτελέσετε τις πράξεις 5+3, $7+6$***, Ψ-/,*** $\otimes$ ***+ κ***

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………....

7. ***Λίγα ιστορικά στοιχεία…***

«*Από το 4000 ως το 2000 π.Χ. το δυτικό τμήμα της Μεσοποταμίας το κυβερνούσαν οι Σουμέριοι. Ο λαός αυτός είχε φτάσει σε ψηλό επίπεδο πολιτισμού και ήταν ένας από τους αρχαϊκούς λαούς που ήξερε να γράφει. Οι Σουμέριοι έγραφαν πάνω σε μαλακές πλάκες από άργιλο ως εξής: πίεζαν την επιφάνεια της πλάκας μ' ένα στυλό σε σχήμα σφήνας και ύστερα έψηναν την πλάκα. Τα σύμβολα τους-που αποτυπώνονταν πάνω στις πλάκες-είχαν το σχήμα σφήνας, για αυτό λέγονταν σφηνοειδή. Οι αριθμοί τους αποδίδονταν κι αυτοί με σφηνοειδή σύμβολα. Κατά τις ανασκαφές που έγιναν τον περασμένο αιώνα, βρέθηκε πλήθος τέτοιων πλακών.*

Τα πιο παλαιά κείμενα των Σουμερίων ανάγονται στο 3000 π.Χ. περίπου, στην εποχή που εγκαθιδρύθηκε στην Ούρ, η πρώτη δυναστεία. Με τα χρόνια, ένας λαός που ζούσε πιο βόρεια, οι Ακκάδιοι, μετανάστευσε στα νότια. Ενδεχόμενα, κυριάρχισε πάνω στους Σουμέριους και παρέλαβε πολλά από τον ανεπτυγμένο πολιτισμό τους. Ανάμεσα σε αυτά, υιοθέτησε και το αριθμητικό σύστημα των Σουμερίων.

Γύρω στο 1700 π.Χ. ο Χαμμουραμπί, βασιλιάς της πόλης της Βαβέλ, κατέχτησε Σουμέριους και Ακκάδιους και ίδρυσε την πρώτη Βαβυλωνιακή δυναστεία. Μετά το θάνατό του, η αυτοκρατορία του διαλύθηκε, ο πολιτισμός της όμως διατηρήθηκε για πολλά χρόνια.» (Bunt, Jones & Bedient, «Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών», σελ.49)

8. ***Εργασία για το σπίτι:***

«Φανταστείτε ότι ζείτε σε μια άλλη εποχή, στο παρελθόν, όπου δεν έχει εφευρεθεί η σημερινή αναπαράσταση των φυσικών αριθμών. Πώς θα γράφατε τους δέκα πρώτους φυσικούς αριθμούς και πως θα εκτελούσατε πράξεις με μεγαλύτερους αριθμούς;»

Η πρώτη ερώτηση, δεν σχετίζεται με τα κείμενα, και έχει εισαγωγικό χαρακτήρα. Αποσκοπεί στο να διαπιστώσουν οι μαθητές, τα προβλήματα που προκύπτουν από την αναπάρασταση των φυσικών αριθμών, με επαναληπτική καταγραφή της μονάδας, όπως η δυσκολία στην άμεση και εύκολη διάκριση δύο αριθμών και άρα να κατανοήσουν την ανάγκη για τη δημιουργία αριθμητικών συστημάτων.

Στόχος της δεύτερης ερώτησης, είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την αδυναμία των Σουμέριων να γράψουν και να κατονομάσουν μεγάλους αριθμούς, λόγω έλλειψης κατάλληλων συμβόλων. Η επιθυμία του Τανμούζι να καταγράψει τον αριθμό των κόκκων από όλες τις ροδιές της Σουμερίας, αποκαλύπτει στους μαθητές, ότι παρά το γεγονός, ότι η μαθηματική επιστήμη βρίσκεται σε πολύ πρώιμο στάδιο, ο Τανμούζι απολαμβάνει την ενασχόληση με τα μαθηματικά για τα μαθηματικά.

Η τρίτη ερώτηση και το απόσπασμα από τον Ψαμμίτη του Αρχιμήδη, δίνεται στους μαθητές για να κατανοήσουν, ότι ακόμη και μετά από 2500 χρόνια, αρκετοί άνθρωποι έχουν ανάλογους προβληματισμούς με τον Τανμούζι. Διαπιστώνουν ότι την εποχή που έζησε ο Αρχιμήδης, μόνο οι μαθηματικοί, οι οποίοι γνώριζαν την εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων, μπορούσαν να γράψουν και να κατονομάσουν μεγάλους αριθμούς. Έτσι συνειδητοποιούν την αξία του δεκαδικού συστήματος όπου με δέκα μόνο ψηφία μπορεί να εκφραστεί οποιοσδήποτε αριθμός ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλος ή μικρός είναι. Επιπρόσθετα, αντιλαμβάνονται ότι λόγω της ευκολίας που παρουσιάζει η εκμάθηση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος και ο μη μαθηματικός μπορεί να γράψει και να κατονομάσει οποιονδήποτε αριθμό.

Στην τέταρτη ερώτηση, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για ποιους λόγους θεωρούν ότι αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά στο σουμεριακό πολιτισμό. Οι απόψεις του Τανμούζι και της Αεμέρ αποτελούν μια καλή αφορμή για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά είναι κάτι που δημιουργεί ο ίδιος ο άνθρωπος και ότι ο τύπος των μαθηματικών που χρησιμοποιεί είναι συνάρτηση των πολιτιστικών και άλλων απαιτήσεων και αναγκών της εποχής του.

Στόχος του πέμπτου ερωτήματος είναι να γίνει σαφές, ότι η οργάνωση σε δεκάδες υπαγορεύτηκε από τη χρήση των χεριών στη μέτρηση.

Επιπλέον, τα δύο αυτά αποσπάσματα αποτελούν μια καλή αφορμή για να συζητηθεί με τους μαθητές, η αναγκαιότητα χρήσης ενός μικρού αριθμού απλών συμβόλων, που πρέπει να χαρακτηρίζει ένα σύστημα αρίθμησης, προκειμένου να είναι λειτουργικό και εύχρηστο. Για να καταστεί περαιτέρω σαφές αυτό, συμπεριλαμβάνεται στο φύλλο εργασίας το έκτο ερώτημα. Κοιτάζοντας τη λίστα των συμβόλων, οι μαθητές εύλογα θα απαντήσουν ότι 5+3=8 και 7+6 $=\Delta$. Και στο ερώτημα Ψ-/ εύκολα προκύπτει η απάντηση 2. Οι δυσκολίες ξεκινούν στην εύρεση του αθροίσματος $\otimes+$ κ (25 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης), διότι δεν έχει επινοηθεί σύμβολο για το αποτέλεσμα αυτό. Και επιπλέον θα έπρεπε να έχουν επινοηθεί τέσσερα άλλα σύμβολα για τους αριθμούς, που προηγούνται του αποτελέσματος αυτού. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι αν υπάρχει διαφορετικό σύμβολο για κάθε νέα ποσότητα, στο τέλος θα εξαντληθεί και η επινοητικότητα και η μνήμη.

Λόγω της αναφοράς στη *Σουμερία*, παρατίθενται στο φύλλο εργασίας ορισμένες ιστορικές πληροφορίες για το σουμεριακό και το βαβυλωνιακό πολιτισμό, ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν το ιστορικό πλαίσιο του μυθιστορήματος και κατ' επέκταση τις κοινωνικές και πολιτισμικές συνθήκες, υπό τις οποίες διαμορφώθηκε το βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης. Δεν ζητείται από τις ομάδες να αναζητήσουν τις πληροφορίες αυτές στο διαδίκτυο, για να μην χαθεί χρόνος και για να αποφευχθεί η σύγχυση από τον όγκο των πληροφοριών που ενδεχόμενα προκύψουν.

Από την εργασία για το σπίτι, αναμένεται να προκύψουν πολλές και ενδιαφέρουσες προτάσεις, μέσω των οποίων θα γίνει φανερή η κατανόηση ή μη από τους μαθητές, της αναγκαιότητας χρήσης ενός μικρού αριθμού συμβόλων, για την αναπαράσταση των φυσικών αριθμών!

Φάση 2η

Εκτιμάται ότι για την ολοκλήρωση της θα χρειαστούν 2 διδακτικές ώρες.

Στην αρχή της πρώτης ώρας θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των προτάσεων της κάθε ομάδας για ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης των φυσικών αριθμών, ώστε να ελεγχθεί αν επιτεύχθηκαν οι προσδοκώμενοι στόχοι, όπως αυτοί καθορίστηκαν στην πρώτη φάση.

Στη συνέχεια, οι μαθητές με αφορμή τα παρακάτω αποσπάσματα από το «Μηδέν», όπου παρέχονται πληροφορίες για τους κανόνες λειτουργίας του βαβυλωνιακού συστήματος αρίθμησης, θα εμπλακούν σε δραστηριότητες σχετικά με το σύστημα αυτό. Η ανάγνωση των κειμένων, όπως και στην 1η Φάση γίνεται από τον καθηγητή, για εξοικονόμιση χρόνου.

III

Ούνζου: Με τη νέα μέθοδο, λοιπόν, χρειαζόμαστε μόνο δύο σύμβολα.

Αεμέρ: Δύο; Για όλους αυτούς τους αριθμούς;

Ούνζου: Μία σφήνα και μια διπλή σφήνα [15]. Μόνο! (Σηκώθηκε και πήρε ένα καλάμι.)

Η σφήνα κάθετη. (Ζωγράφισε τη σφήνα στην άμμο.)  *Η διπλή σφήνα οριζόντια. (Τη ζωγράφισε και αυτή) ∢. Η σφήνα είναι το ένα, η διπλή σφήνα το 10.*

Αεμέρ: Πιο σιγά, πιο σιγά! Σφήνα, ένα, η, διπλή σφήνα το δέκα.

Ούνζου: Η πρωτοτυπία, όμως, είναι ότι και το εξήντα συμβολίζεται με μία κάθετη σφήνα.

Αεμέρ: Με την ίδια σφήνα;

Ούνζου: Με την ίδια..

Αεμέρ: Μα, τότε θα μπερδευόμαστε! Άσε με να καταλάβω! Σφήνα, ένα, σφήνα εξήντα!

(Το βλέμμα της φωτίστηκε.) Για πες μου, τότε, πώς θα έγραφες τρεις χιλιάδες εξακόσια;

Ούνζου: Γιατί αυτόν το συγκεκριμένο αριθμό;

Αεμέρ: Πώς θα τον έγραφες;

---

[15] Στην ελληνική μετάφραση του «Μηδέν», από όπου προέρχονται τα αποσπάσματα, χρησιμοποιούνται οι όροι καρφί και λοξή δοκός. Δεδομένου ότι στο πρωτότυπο και στη διεθνή βιβλιογραφία, τα σύμβολα , ∢ καλούνται σφήνα και διπλή σφήνα, οι όροι καρφί και λοξή δοκός έχουν αντικατασταθεί.

Ούνζου: Με μία σφήνα.

Αεμέρ: Ορίστε;

Ούνζου: Με μία σφήνα και τίποτε άλλο. Μόνο με μία σφήνα!

Αεμέρ: Με κοροϊδεύεις;

Ούνζου: Όχι

Αεμέρ: Με ρωτάς γιατί αυτόν τον συγκεκριμένο αριθμό. Μήπως ξέχασες ότι εμάς, τις κεζέρτου, μας αποκαλούν Οι-γυναίκες-με-τους-τρεις-χιλιάδες-εξακόσιους-συζύγους;

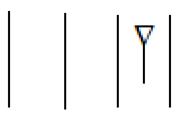
Ούνζου: Α, ώστε γι' αυτό τον επέλεξες; ....Όχι δεν είναι το ίδιο, γιατί διαφέρει η θέση της σφήνας. Εκεί βρίσκεται όλο το θέμα....

Αεμέρ: Ποια θέση;

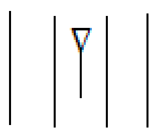
Ούνζου: Μιλάω για τη θέση των αριθμών, για τη σειρά με την οποία τους γράφουμε.

Αεμέρ: Για ξαναπές το.

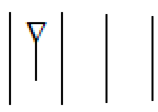
Ούνζου: Να σου δώσω ένα παράδειγμα. (Με την άκρη του καλαμιού του, χάραξε κολόνες. Στην πρώτη από δεξιά ζωγράφισε μία σφήνα) Ένα.



(Έσβησε τη σφήνα και ζωγράφισε μία άλλη, αλλά στη δεύτερη κολόνα.) Εξήντα.



(Την έσβησε κι αυτή και ζωγράφισε μια καινούργια, στην τρίτη κολόνα.) Τρεις χιλιάδες εξακόσια!

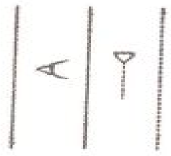


Αεμέρ: Περίμενε, περίμενε! Τα λες πολύ γρήγορα.

Ούνζου: Ποιος τα λέει γρήγορα; Είναι τόσο απλό!

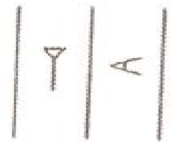
Αεμέρ: Μη μου λες πως είναι απλό, όταν εγώ σου λέω πως δεν καταλαβαίνω. Γιατί αν είναι απλό και εγώ δεν το καταλαβαίνω, τότε θα πει πως είμαι βλάκας!

Ούνζου: Έχεις δίκιο δεν είναι τόσο απλό. Γίνεται όμως απλό, όταν το καταλάβεις. Η τιμή ενός συμβόλου εξαρτάται από τη θέση στην οποία το τοποθετείς όταν γράφεις τον *αριθμό. Θέλεις και άλλο παράδειγμα; Διπλή σφήνα ακολουθούμενη από μία σφήνα μας κάνει μια φορά το δέκα συν μια φορά το ένα, δηλαδή έντεκα. Με παρακολουθείς;*



Αεμέρ: Ναι.

Ούνζου: Μία σφήνα με μια διπλή σφήνα: μια φορά το εξήντα συν μια φορά το δέκα, εβδομήντα. Με παρακολουθείς;



Αεμέρ: Ναι. Το κεφάλι μου γυρίζει. Είναι χειρότερο και από το να είχα πιει μπύρα.

Ούνζου: Η μέθη της γνώσης, βλέπεις! Τώρα μπορούμε να γράψουμε οποιονδήποτε αριθμό, καταλαβαίνεις;

…

Ο Ούνζου θυμήθηκε τις εξετάσεις στο τέλος των σπουδών του. Ο εξεταστής χάραξε στην πλάκα τρεις γραμμές και του την έδωσε.

Εξεταστής: «Ποιος αριθμός είναι αυτός;»

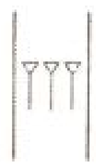
Ούνζου: «Εξαρτάται.»

Εξεταστής: «Εξαρτάται από τι;»

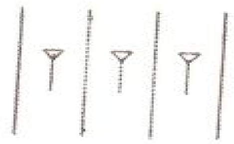
Ούνζου: «Θέλω να πω, ότι μπορεί να είναι πολλοί αριθμοί.»

Εξεταστής: «Απάντησε! Ποιος αριθμός;»

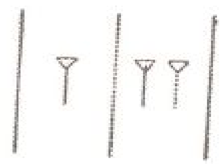
Ούνζου: «Αν πρόκειται για τα χτυπήματα με το μαστίγιο που ετοιμάζεσαι να μου δώσεις για τη λανθασμένη απάντησή μου, θα έλεγα ότι είναι το τρία, γιατί, αφού οι τρεις σφήνες δε χωρίζονται, μας κάνουν τρεις μονάδες.



«Αν πρόκειται για τα ψήγματα χρυσού που σκοπεύεις να μου προσφέρεις επειδή είμαι ο καλύτερος μαθητής που έχεις γνωρίσει, θα έλεγα ότι είναι το τρεις χιλιάδες εξιακόσια εξήντα ένα, γιατί αν χωρίσουμε τις τρεις σφήνες, έχουμε εξήντα φορές το εξήντα, συν μία φορά το εξήντα, συμ μία μονάδα.»



«Αν πρόκειται για την ηλικία του πατέρα μου, θα έλεγα πως είναι το εξήντα δύο, γιατί αν ξεχωρίσουμε την πρώτη σφήνα και αφήσουμε τις άλλες δύο μαζί, έχουμε μία φορά το εξήντα συν δύο μονάδες.»



«Θα έλεγα επίσης, ότι πρόκειται για το εκατόν είκοσι ένα, γιατί αν γράψουμε τις δύο σφήνες μαζί, χωριστά από την τρίτη, έχουμε δύο φορές το εξήντα συν μία μονάδα.»

Εξεταστής: «Τι πρέπει να γίνει, λοιπόν, για να διαβάζεται ο αριθμός χωρίς κανένα δισταγμό;»

Ούνζου: «Πρέπει να αφήσουμε ένα κενό ανάμεσα στις σφήνες, ώστε να καταλαβαίνουμε που χωρίζονται.»

Εξεταστής: «Πόσο μεγάλο κενό;»

Ούνζου: «Χμ...Ένα κενό...»

Εξεταστής: «Που θα χαθεί με τον καιρό από αντιγραφή σε αντιγραφή!»

Ούνζου: «Τι πρέπει να γίνει λοιπόν;»

Εξεταστής: «Δεν μπορεί να γίνει τίποτε. Ο μόνος τρόπος είναι να γράφουμε τις σφήνες και τις πλάγιες σφήνες μέσα σε κολόνες, ώστε να είναι ξεκάθαρος ο τρόπος με τον οποίο χωρίζονται.»

IV

Η Αεμέρ δεν έπαυε να σκέφτεται τη συζήτηση του Ατάρου με τον Χοτέπ για την ανάγκη να υπάρχουν κολώνες στη γραφή των αριθμών. Τι θα μπορούσε να εμποδίζει τους αριθμούς να κολλάνε μεταξύ τους; Τι θα μπορούσε να πάρει στη μνήμη μας τη θέση της κενής κολόνας; Μα το να μην είναι κενή! Κι όμως, έπρεπε να είναι κενή.

Πότε, πότε αμφέβαλλε. Εφόσον κανένας μέχρι σήμερα δεν είχε βρει λύση, θα πει πως δεν υπήρχε! Παρόλα αυτά, δεν εγκατέλειπε την προσπάθεια. Δεν εγκατέλειπε ποτέ. Πέρασε μέρες συλλογιζόμενη αυτό το θέμα – της είχε γίνει έμμονη ιδέα. Πώς να απαλλαγούν από τις κολόνες; Μια αμυδρή έμπνευση γλίστρησε στο μυαλό της. Να γράψει κάτι στην κενή κολόνα. Κάτι που να μην αντιπροσωπεύει ποσότητα, επομένως ούτε σφήνα, ούτε διπλή σφήνα. Οτιδήποτε άλλο. Σκέφτηκε μία σφήνα λοξή, μια δοκό λοξή. Καλύτερα ακόμη, δύο σφήνες λοξές.

Έτσι δε θα ήταν δυνατό να μπερδευτούν με κανένα άλλο σύμβολο. Πέρασε πολλές μέρες προσπαθώντας να βάλει σε εφαρμογή τις δύο λοξές σφήνες.

Αποφάσισε να φωνάξει τον Ατάρου. Εκείνος έφτασε, εξακολουθώντας να παιδεύεται με τα δεκανίκια του.

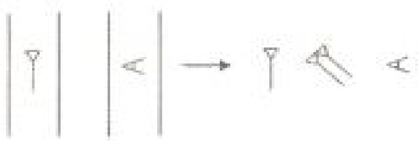
«Κάθισε», του είπε. Κάθισε δίπλα στο στηθαίο. Ο ήλιος έδυε πίσω από τον ορίζοντα. Τα πουλιά άρχιζαν τις νυχτερινές πτήσεις τους. « Μπορείς να μου δανείσεις τις τρεις χιλιάδες εξακόσια δέκα σου;»

Την κοίταξε τρομαγμένος. Ύστερα, μπήκε στο παιχνίδι: «Είναι δικές σου!»

«Γράφω τον αριθμό όπως τον έγραψες εσύ τη βραδιά που φιλοξενούσαμε τον Αιγύπτιο αστρονόμο». Τον έγραψε. «Τελικά αυτές οι κολόνες – μου πήρε καιρό να το παραδεχτώ – είναι απλώς μια σκαλωσιά που βοηθάει τον αριθμό να μην γκρεμίζεται. Νομίζω…» Για λίγο μόνο δίστασε. «Πιστεύω ότι βρήκα τον τρόπο να απαλλαγούμε από αυτές».

Ο Ατάρου σηκώθηκε στηριζόμενος στα δεκανίκια του.

Η Αεμέρ ζωγράφισε τη διπλή λοξή σφήνα σε μια γωνιά της πλάκας. Αυτό το σύμβολο, που δε μοιάζει με κανένα άλλο, δεν αντιπροσωπεύει ποσότητα. Το γράφω στην κενή κολόνα. Βλέπεις; Τώρα μπορώ να σβήσω όλες τις κολόνες που στηρίζουν τον αριθμό, και συγχρόνως εμπόδιζαν την πορεία του. Τώρα πια ο αριθμός είναι ελεύθερος! Σφήνα, διπλή λοξή δοκός, πλάγια σφήνα. Κοίταξε, Ατάρου, τις τρεις χιλιάδες εξακόσια δέκα σου! Βαδίζουν μόνες τους, τρέχουν!»



Ο Ατάρου, ενθουσιασμένος πέταξε τα δεκανίκια, έκανε μερικά βήματα προς την Αεμέρ και ….έσπασε τα μούτρα του!

Η Αεμέρ έτρεξε κοντά του, τον πήρε στην αγκαλιά της και του χάιδεψε το πρόσωπο λέγοντας τρυφερά: «Χτύπησες;»

Ο Ατάρου γελούσε: «Διπλή λοξή σφήνα! Διπλή λοξή σφήνα! Δε χρειαζόμαστε πια δεκανίκια! Αεμέρ, είσαι φοβερή! Οι αριθμοί τρέχουν … ενώ εγώ έρπω!»

Αρχικά, πρέπει να πληροφορηθούν οι μαθητές, ότι στην πραγματικότητα, οι Βαβυλώνιοι, δεν χρησιμοποιούσαν κατά τη γραφή των αριθμών τις κολώνες που χρησιμοποιούνται στα κείμενα (πρόκειται για προσθήκη του συγγραφέα). Καταλάβαιναν, για ποιον αριθμό γινόταν λόγος από τα συμφραζόμενα του προβλήματος ή από το εξαγόμενο του υπολογισμού. Μετά την παραπάνω διευκρίνηση μοιράζεται το δεύτερο φύλλο εργασίας και τα αποσπάσματα ΙΙΙ και IV:

2ο Φύλλο εργασίας

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Ομάδα:……………………………………………………………………..

1. ***Ποια ψηφία χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι για να αναπαραστήσουν τους αριθμούς;***

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

2. ***Φανταστείτε τη βαβυλωνιακή αναπαράσταση των αριθμών 1, 60 και 3600 χωρίς τις κολώνες που υπάρχουν στο κείμενο ΙΙΙ, δεδομένου ότι οι Βαβυλώνιοι δεν τις χρησιμοποιούσαν κατά τη γραφή των αριθμών. Τι πρόβλημα δημιουργείται;***

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………......

3. ***Σύμφωνα με το κείμενο ΙΙΙ ποιοι αριθμοί μπορεί να παριστάνονται με τρεις σφήνες; Ποιου αριθμού τις δυνάμεις, χρησιμοποιεί ο Ούνζου για να τους βρει;***

....

....

....

....

4. ***Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης όταν μετακινούμε ένα ψηφίο από μία στήλη σε αυτήν που είναι αριστερά της, η αξία του δεκαπλασιάζεται. Σύμφωνα με τα κείμενα, στο βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης με ποιον αριθμό πολλαπλασιάζεται ένα ψηφίο που μετακινείται από μία στήλη σε αυτήν που είναι αριστερά της ;***

……………………………………………………………………………………………

5. ***Θεωρείτε ότι η διπλή λοξή σφήνα που βρήκε η Αεμέρ, στο IV κείμενο επιλύει το πρόβλημα της αναπαράστασης του μηδενός; Σκεφτείτε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση της Αεμέρ δεν λύνει το πρόβλημα.***

……………………………………………………………………………………………

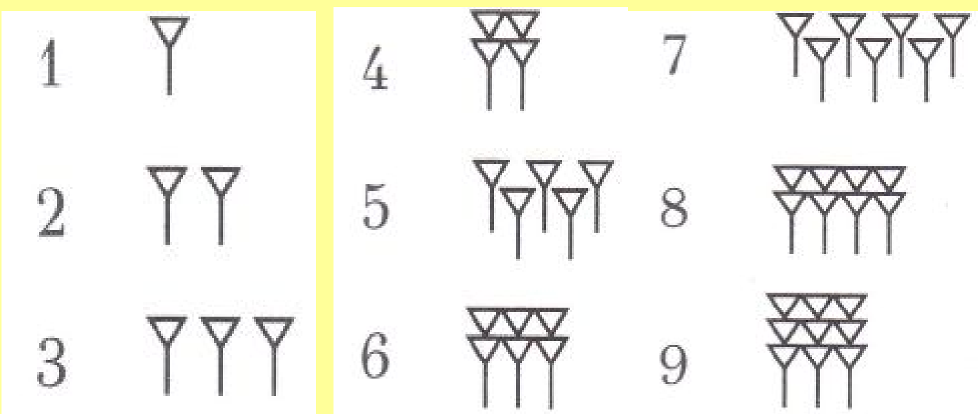
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Άρα λοιπόν οι Βαβυλώνιοι έγραφαν τους αριθμούς ως εξής:



6. ***Με βάση τον παραπάνω πίνακα και όσα διαβάσατε στα κείμενα, να παραστήσετε στο Βαβυλωνιακό σύστημα τους παρακάτω αριθμούς:***

10 …………….. **12** ……………..

15 …………….. **20** ……………..

27 …………….. **30** …………….

33 ……………. **40** …………….

49 ……………. **50** …………….

56 ……………. **58** …………….

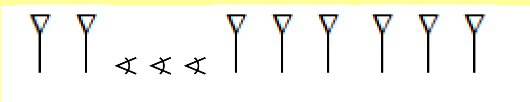
60 ……………. **61** ……………..

62 ……………. **75** ……………..

89 …………….. **121** ……………..

134 ……………

7. ***Δεχόμαστε ότι ο αριθμός 2,0,36 (60-αδική γραφή) παριστάνεται με το συμβολισμό:***



(α) ***Για ποιον αριθμό πρόκειται;***

……

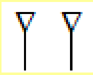
……

(β) ***Να σημειωθεί ένας ακόμη αριθμός που παριστάνεται με τον ίδιο βαβυλωνιακό συμβολισμό.***

………

………

8. ***Να γράψετε για τον καθένα από τους επόμενους δύο συμβολισμούς, τρεις αριθμούς που είναι δυνατό να παριστάνονται από αυτούς.***

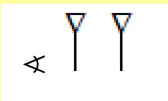
(α) 

………

………

………

………

(β) 

………

………

………

………

9. ***Διαπιστώνετε κάποια ομοιότητα μεταξύ του βαβυλωνιακού και του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης που χρησιμοποιούμε σήμερα;***

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

10. ***Ποια είναι, λοιπόν, η βάση του βαβυλωνιακού συστήματος αρίθμησης;***

…………………………………………………………………………………………….

11. ***Σκεφτείτε περιπτώσεις όπου μέχρι σήμερα χρησιμοποιούμε τη βάση, του βαβυλωνιακού αριθμητικού συστήματος; Στη συνέχεια διαβάστε το παρακάτω κείμενο.***

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

«Οι λέξεις "λεπτό" και "δευτερόλεπτο", προέρχονται από τους Βαβυλώνιους. Οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει αστρονομικά ενδιαφέροντα που σχετίζονταν με την κατασκευή ημερολογίου, ώστε να αναγνωρίζουν την κατάλληλη εποχή για σπορά και θερισμό. Οι Έλληνες τόσο ως έμποροι, όσο και ως καταχτητές, ήρθαν σε επαφή με τους Βαβυλώνιους και γνώρισαν το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης. Πιο συγκεκριμένα οι Έλληνες αστρονόμοι υιοθέτησαν αυτό το σύστημα για τα κλάσματα που χρησιμοποιούσαν στην αστρονομία και έλεγαν εξηκοστά τις πρώτες υποδιαιρέσεις, εξηκοστά των εξηκοστών τις δεύτερες κ.ο.κ. Αυτή η ορολογία διατηρήθηκε και όταν τα ελληνικά αστρονομικά κείμενα μεταφράστηκαν στα αραβικά, αλλά και αργότερα, όταν (στον ΙΒ΄ αιώνα) τα αραβικά κείμενα μεταφράστηκαν στα λατινικά από τους επιστήμονες της δυτικής Ευρώπης. Τα εξηκοστά και τα εξηκοστά των εξηκοστών έγιναν στα λατινικά, αντίστοιχα, ***pars minuta prima*** *και* ***pars minuta secunda****. Με τον καιρό οι φράσεις αυτές συντομεύτηκαν. Στα αγγλικά έμειναν οι λέξεις* ***minutes*** *και* ***seconds*** *που χρησιμοποιούνται τόσο κατά τη μέτρηση του χρόνου όσο και κατά τη μέτρηση γωνιών.»* (Bunt, Jones & Bedient, «Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών», σελ. 54)

12. ***Άρα λοιπόν οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν ένα ………………., ………………, αριθμητικό σύστημα, ………………. Μετρούσαν με ...., ... και .... Τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν για να παραστήσουν το ένα, το δέκα και το εξήντα ήταν .... Για το μηδέν χρησιμοποιούσαν το σύμβολο.......................... Αλλά μόνο στην περίπτωση που το μηδέν .... μεταξύ δύο άλλων ψηφίων.***

Η πρώτη ερώτηση δεν παρουσιάζει δυσκολία για τους μαθητές. Από τα κείμενα πληροφορούνται ότι οι Βαβυλώνιοι μετρούσαν με μονάδες, δεκάδες και εξηντάδες, ενώ υπάρχουν και τα αντίστοιχα βαβυλωνιακά σύμβολα για τους αριθμούς αυτούς.

Η δεύτερη ερώτηση απαντάται με τη βοήθεια του πρώτου κειμένου, όπου περιέχονται οι αντίστοιχες βαβυλωνιακές αναπαραστάσεις των αριθμών 1, 60 και 3600. Στόχος είναι, να παρατηρήσουν την ομοιότητα των αναπαραστάσεων και να αντιληφθούν τις παρερμηνείες που προκύπτουν.

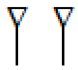
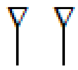
Η τρίτη ερώτηση αποσκοπεί αφενός, στο να παρατηρήσουν οι μαθητές, ότι με τρεις σφήνες μπορεί να παριστάνονται οι αριθμοί 3, 3661, 62 και 121 και αφετέρου να αντιληφθούν, ότι οι αριθμοί αυτοί, γράφονται με τη βοήθεια δυνάμεων του 60. Έτσι εύκολα θα απαντήσουν στην τέταρτη ερώτηση ότι η μετακίνηση ενός ψηφίου προς τα αριστερά σημαίνει πολλαπλασιασμό με το 60, στο βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα.

Η πέμπτη ερώτηση προέρχεται από το δεύτερο κείμενο. Σε αυτό, οι μαθητές πληροφορούνται, ότι χρησιμοποιήθηκε για το 0 η διπλή λοξή σφήνα (τελευταία βαβυλωνιακή εποχή, λίγους αιώνες π.Χ.)  . Ο προβληματισμός της Αεμέρ για την εύρεση συμβόλου, που να αναπαριστά το κενό, καθιστά σαφές στους μαθητές ότι το «κενό» και το «τίποτα» είχαν συλληφθεί ως νόημα, αλλά δεν μπορούσαν να θεωρηθούν συνώνυμα του μηδενός καθώς η χρήση της διπλής λοξής σφήνας (ή διπλής πλάγιας σφήνας), γινόταν μόνο όταν το 0 παρεμβαλλόταν ανάμεσα σε δύο άλλα ψηφία και άρα το πρόβλημα παρέμενε. Οι μαθητές με τη βοήθεια της τρίτης ερώτησης, όπου τους ζητήθηκε να συγκρίνουν τη βαβυλωνιακή αναπαράσταση των αριθμών 1, 60 και 3600, εύκολα θα απαντήσουν, ότι στην περίπτωση των τριών αυτών αριθμών, η διπλή λοξή σφήνα της Αεμέρ, δεν επιλύει το πρόβλημα.

Η έκτη άσκηση στοχεύει στο να εξοικειωθούν οι μαθητές με το βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης. Για να αποφευχθούν οι δυσκολίες, παραθέτονται στο δεύτερο φύλλο εργασίας ορισμένοι βαβυλωνιακοί συμβολισμοί.

Στις ασκήσεις επτά και οχτώ γίνεται ακόμη πιο φανερή η αδυναμία του βαβυλωνιακού συστήματος καθώς οι δοσμένες βαβυλωνιακές αναπαραστάσεις αντιστοιχούν σε περισσότερους από έναν αριθμούς.

Ειδικότερα στο πρώτο ερώτημα, της άσκησης επτά, όπου δίνεται και ο βαβυλωνιακός συμβολισμός αλλά και η εξηνταδική γραφή (θα πρέπει να εξηγηθεί τι σημαίνει ο όρος αυτός), οι μαθητές δε θα δυσκολευτούν ιδιαίτερα να γράψουν το ανάπτυγμα δυνάμεων του εξήντα και να απαντήσουν ότι πρόκειται για τον αριθμό 7236. Αν παρουσιαστούν δυσκολίες στο δεύτερο ερώτημα, ο καθηγητής προτείνει στους μαθητές, να σκεφτούν μια διαφορετική εξηνταδική γραφή (π.χ. την 2,36) και εν συνεχεία με τη βοήθεια των δυνάμεων του εξήντα, να βρουν τον ζητούμενο αριθμό.

Αναφορικά με το πρώτο ερώτημα της όγδοης άσκησης, αναμένεται ότι οι μαθητές με τη βοήθεια του πίνακα που υπάρχει στο δεύτερο φύλλο εργασίας, εύκολα θα απαντήσουν ότι με δύο καρφιά παριστάνεται τόσο ο αριθμός 2, όσο και ο αριθμός 120. Οπότε στο σημείο αυτό τους ζητείται να σκεφθούν το εξής παράδοξο: *«Βοσκός έχει κοπάδι που αποτελείται από*  *πρόβατα και*  *σκύλους για τη φύλαξή τους. Ο ίδιος φυσικά γνωρίζει τον ακριβή αριθμό των ζώων του. Εσείς;»* Στόχος αυτού του προβλήματος είναι να γίνουν φανερές στους μαθητές οι παρερμηνείες που προκύπτουν από τη χρήση του βαβυλωνιακού συστήματος αρίθμησης και κατ' επέκταση η ανάγκη αντικατάστασης του από ένα πιο ευέλικτο. Ενδεχομένως να δυσκολευτούν να απαντήσουν ότι το ίδιο σύμβολο μπορεί να παριστάνει το 3601 ή το 7200. Για να διευκολυνθούν, ο καθηγητής τους προτρέπει να γράψουν μερικά από τα δυνατά εξηνταδικά αναπτύγματα. Με τον ίδιο τρόπο, θα χειριστεί ο εκπαιδευτικός τις όποιες δυσκολίες υπάρξουν στο (β) ερώτημα. Έτσι γίνονται φανερά στους μαθητές τα προβλήματα που προκύπτουν λόγω της απουσίας του μηδενός.

Οι ασκήσεις έξι, επτά και οχτώ, δίνονται στους μαθητές και για έναν επιπλέον λόγο. Για να κατανοήσουν τη μετάβαση από το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης στο δεκαδικό και αντίστροφα. Οι μετατροπές από το ένα σύστημα στο άλλο, δεν αποτελούν αυτοσκοπό αλλά διευκολύνουν στην καλύτερη κατανόηση του δεκαδικού.

Η γενική διατύπωση της ένατης ερώτησης πιθανόν, να δυσκολέψει τους μαθητές. Στην περίπτωση αυτή, ο καθηγητής τους παραπέμπει στο πρώτο κείμενο, όπου ο Ούνζου εξηγεί στην Αεμέρ ότι *«η τιμή ενός συμβόλου εξαρτάται από τη θέση στην οποία το τοποθετείς όταν γράφεις τον αριθμό»* και τους ρωτά αν συμβαίνει κάτι ανάλογο στο δεκαδικό σύστημα. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το βαβυλωνιακό όπως και το δεκαδικό είναι θεσιακό αριθμητικό σύστημα. Με αφορμή την ερώτηση αυτή καλό θα ήταν να συζητηθεί με τα παιδιά η έννοια του αριθμητικού συστήματος ώστε να κατανοήσουν ότι πρόκειται για ένα σύνολο από κανόνες σχετικά με την ονομασία και τη γραφή των αριθμών.

Και η απάντηση της ερώτησης δέκα, θα δυσκολέψει τους μαθητές, καθώς μπορεί να μη γνωρίζουν, τι ονομάζεται βάση αριθμητικού συστήματος. Για να βοηθηθούν στην απάντηση τους, ο εκπαιδευτικός τους προτρέπει να σκεφτούν ποια είναι η βάση του αριθμητικού συστήματος που χρησιμοποιείται σήμερα, δεδομένου του δεκαδικού αναπτύγματος κάθε φυσικού αριθμού (λόγω της αναφοράς στο δεκαδικό ανάπτυγμα, καλό θα ήταν να γραφτούν στον πίνακα από τον καθηγητή, δύο-τρία δεκαδικά αναπτύγματα αριθμών, π.χ. των 274, 3008 κλπ.). Μέσα από το διάλογο και με τη βοήθεια όλων των προηγούμενων ερωτήσεων και ασκήσεων, θα γίνει σαφές ότι το 60 αποτελεί τη βάση του αριθμητικού συστήματος των Βαβυλωνίων, για αυτό και οι αριθμοί γράφονται με τη βοήθεια εξηνταδικού αναπτύγματος, δηλαδή με τη βοήθεια δυνάμεων του εξήντα. Επιπλέον πρέπει να αντιληφθούν ότι πρόκειται για ένα ατελές ή ελλιπές σύστημα θέσης. Η έννοια του συστήματος θέσης δεν παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές καθώς ήδη συζητήθηκε (ερώτηση 9). Για να κατανοήσουν τι σημαίνει ατελές σύστημα αρίθμησης αρκεί να τους εξηγήσουμε ότι το δεκαδικό σύστημα είναι πλήρες, διότι έχει ξεχωριστό σύμβολο για καθένα από τους αριθμούς 0 ως 9.

Μέσω της ενδέκατης ερώτησης και του κειμένου που την ακολουθεί, τα παιδιά συνειδητοποιούν ότι έχουν συναντήσει ιδέες που έχουν τις ρίζες τους, στους Βαβυλώνιους. Και ενώ αρχικά το βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης μοιάζει παράξενο, γίνεται πιο οικείο για τα παιδιά όταν θυμηθούν ότι η ώρα διαιρείται σε 60 λεπτά και ο κύκλος σε 360 μοίρες. Είναι απαραίτητο να πληροφορηθούν οι μαθητές ότι οι γωνίες μετρώνται σε μοίρες. Καθώς και ότι η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 λεπτά (60') και κάθε λεπτό σε 60 δεύτερα ή δευτερόλεπτα (60'').

Η σύμπληρωση κενών, που συμπεριλαμβάνεται στο τέλος του δεύτερου φύλλου εργασίας, έχει καθαρά, επαναληπτικό χαρακτήρα, καθώς συνοψίζει όλες τις γνώσεις που αποκόμισαν οι μαθητές σχετικά με το βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης.

Τα ερωτήματα και οι ασκήσεις του φύλλου εργασίας εμπλέκουν τους μαθητές στη διαδικασία ερμηνείας των συμβόλων που χρησιμοποιούνταν για τη γραφή των αριθμών στο σύστημα αρίθμησης των Βαβυλωνίων. Με τον τρόπο αυτό θα αντιληφθούν ότι πρέπει να αποφεύγονται οι αυθαίρετες ερμηνείες των συμβόλων και θα συνειδητοποιήσουν τη σημασία της συνέπειας που πρέπει να ακολουθεί ένα σύστημα αρίθμησης όσον αφορά στην αξία του κάθε συμβόλου.

Τέλος αποστέλλεται ηλεκτρονικά στους μαθητές το παρακάτω απόσπασμα από το «Μηδέν», για να το διαβάσουν στο σπίτι:

V

… «Γνωρίζεις, λοιπόν την ύπαρξη των εννέα συμβόλων και τη σημασία της θέσης που κατέχουν, χάρη στη μετάφραση του Σίντχιντ. Και συνειδητοποίησες ότι το σύμβολο μπορεί να αντιπροσωπεύει πολλούς αριθμούς. Αλλά αυτό δε σε βοήθησε. Και σκέφτηκες…»

«Μου λείπει κάτι», τον διέκοψε ο Μοχάντ.

«Αλλά δεν ξέρεις τι».

«Αλλά δεν ξέρω τι».

«Το ίδιο συνέβη και σ' εμάς πριν από πολύ καιρό όταν ανακαλύψαμε τα εννέα σύμβολα».

«Πώς τα ξέρεις όλα αυτά;»

Ο Πάνκα αγνόησε την ερώτηση. «Και η Αεμέρ σου είπε όσα έμαθε από το κυνήγι με το γεράκι».

«Ναι, αυτό που έκανε ήταν παρακινδυνευμένο, θα μπορούσε να…»

«Αν δε διακινδυνεύαμε, δε θα καταφέρναμε τίποτε. Κερδίζουμε, χάνουμε αλλά τουλάχιστον προσπαθούμε. Σου έλειπε το δέκατο σύμβολο. Το διαχωριστικό!»

«Ναι», μουρμούρισε ο Μοχάντ. «Ρίχτηκα με τα μούτρα στη δουλειά. Άρχισα να καταλαβαίνω…»

«Και ήσουν έτοιμος να το ανακαλύψεις».

«Δεν μπορώ να πω με σιγουριά, αλλά νομίζω ότι αυτό το κάτι είχε αρχίσει να ξεκαθαρίζει».

«Επομένως η πρότασή μου έφτασε πάνω στην ώρα. Διαφορετικά δεν θα είχα να σου αποκαλύψω τίποτε, και δε θα ήταν δυνατόν να γίνει η συναλλαγή». Ο Πάνκα γονάτισε, οι αλυσίδες του έτριξαν. Απλώνοντας το χέρι σε ένα φρουρό, είπε επιτακτικά: «Το μαχαίρι σου!»

Ο φρουρός αρνήθηκε.

«Δος του το», τον πρόσταξε ο Μοχάντ.

Ο φρουρός δίστασε. Ο Μοχάντ του έριξε ένα άγριο βλέμμα. Ο άντρας άπλωσε το όπλο του. Ο Πάνκα το άρπαξε με αστραπιαία ταχύτητα. «Με φοβούνται ακόμη και αλυσοδεμένο!» δήλωσε πικρόχολα.

Με την άκρη της λάμας, ο Πάνκα χάραξε αργά στο χώμα ένα μικρό κύκλο.

Ο Μοχάντ παρακολουθούσε την κίνηση του με τεταμένη προσοχή.

«Σούνια, το κενό! Το δέκατο σύμβολο είναι το κενό, Μοχάντ!»

«Αυτό είναι το φαρίκα;»

«Ακριβώς! Σκοπός του είναι να διαχωρίζει τα σύμβολα, δείχνοντας τη θέση του κενού που υπάρχει ανάμεσα τους, ώστε να μην μπερδεύονται».

«Αυτό ήταν, λοιπόν! Ώστε αυτό ήταν που έλειπε!» επανέλαβε ο Μοχάντ κατάπληκτος. Γονάτισε δίπλα στον Πάνκα. Η Αεμέρ τους παρακολουθούσε έτσι όπως ήταν σκυμμένοι δίπλα, δίπλα, ο Άραβας σοφός και ο Ινδός ληστής. «Είναι θαυμάσιο. Ένα σύμβολο, μόνο ένα, και τα πάντα τακτοποιούνται! Πώς το είπες;»

«Σούνια»

«Και γιατί είναι στρογγυλό;»

Ο Πάνκα τον κοίταξε αινιγματικά, χωρίς να του δώσει απάντηση. «Πες έναν αριθμό!» πρόσταξε.

Προλαβαίνοντας τον Μοχάντ, η Αεμέρ πέταξε: «Χίλια ένα!»

«Ας είναι, λοιπόν! Χίλια ένα. Γράψ' το, Μοχάντ».

Με την άκρη του δακτύλου, ο Μοχάντ χάραξε διστακτικά πέντε μακριές παράλληλες γραμμές, για να δείξει τις κολόνες. Στην πρώτη και στην τέταρτη έγραψε ένα.

¦1¦ ¦ ¦1¦

«Βλέπω ότι αφομοίωσες καλά την αρίθμηση των Ινδών», είπε ο Πάνκα με θαυμασμό. «Δεν υπάρχει δεκάδα, επομένως η δεύτερη κολόνα είναι κενή, δεν υπάρχει εκατοντάδα, επομένως η τρίτη κολόνα μένει κενή. Αφού είναι κενές, τις γεμίζεις! Γράφεις το σούνια. Έλα», είπε στο Μοχάντ. Του έδωσε το μαχαίρι.

Συγκινημένος, ο Μοχάντ χάραξε ντροπαλά έναν μικρό κύκλο στη δεύτερη κολόνα.

¦1¦0¦ ¦1¦

Ύστερα, άλλον έναν στην τρίτη κολόνα.

¦1¦0¦0¦1¦

Ξεχνώντας κάθε μέτρο προφύλαξης, οι φρουροί τους είχαν πλησιάσει. Σκυμμένοι πάνω από τους ώμους του Πάνκα και του Μοχάντ, προσπαθούσαν να δουν τι έγραφε ο δεύτερος στο χώμα.

«Τώρα σβήσε τις κολόνες!» πρόσταξε ο Πάνκα ξαναπαίρνοντας το μαχαίρι.

Με την άκρη του δαχτύλου, ο Μοχάντ έσβησε προσεκτικά μία από τις κάθετες γραμμές που έδειχναν τις κολόνες, κι έπειτα άλλη μία.

«Όλες!» φώναξε ο Πάνκα.

Ο Μοχάντ τις έσβησε όσο πιο γρήγορα μπορούσε, καθώς τον κατέκλυζε ένας ενθουσιασμός, τον οποίο δεν μπορούσε πια να ελέγξει.

1001

Κοίταζε τον αριθμό που ήταν γραμμένος στην άμμο. Κοίταζαν και οι φρουροί, σιωπηλοί, συνειδητοποιώντας ότι κάτι πολύ σοβαρό διαδραματιζόταν μπροστά στα μάτια τους.

«Ξέρεις τι δηλώνει αυτός ο αριθμός Αεμέρ;» ρώτησε ο Πάνκα. Όσα πολλά κι αν είναι τα πράγματα, πάντα υπάρχει άλλο ένα, άλλο ένα που μπορούμε να το αποκτήσουμε ή να το αρνηθούμε. Δεν υπάρχει τέλος στους αριθμούς!» Δείχνοντας με το μαχαίρι κάθε κύκλο, πρόσθεσε: «Τόσα σούνια, όσες κενές κολόνες. Αυτό είναι όλο το θέμα-να γεμίσεις το κενό! Αυτό είναι το ωραίο-να θεωρείς την “απουσία” “ παρουσία”!» κατέληξε με αλλαγμένη φωνή. «Οι Ινδοί ξέρουν να αντιμετωπίζουν την “απουσία”, Μοχάντ!»

Την “απουσία” σαν “παρουσία”, επανέλαβε νοερά η Αεμέρ.

«Αυτό είναι…»-ο Μοχάντ έψαξε τη λέξη-«φιλοσοφία!»

« Πολύ ελληνικό! Είναι μάλλον υπερβατικότητα. Για μας ο θάνατος δεν είναι η εκμηδένιση, αλλά μια ιδιαίτερη μορφή “παρουσίας”. Καταλαβαίνεις, τώρα, γιατί το σύμβολο του κενού το ανακαλύψαμε εμείς οι Ινδοί; Σκέφτηκα πολύ πάνω σ’ αυτό εκεί κάτω στους βάλτους…»

…

«Σου προσφέρω περισσότερα!» είπε ο Πάνκα, βγάζοντας τον Μοχάντ από τις σκέψεις του. «Οι Ινδοί επινόησαν μία ειδική γλώσσα για τους αριθμούς. Δημιούργησαν ένα *πραγματικό αλφάβητο, ένα αλφάβητο με δέκα "γράμματα". Σ' αυτή τη γλώσσα, κάθε αριθμός έχει ένα όνομα, μόνο ένα», τόνισε ο Πάνκα. « Σε αντάλλαγμα, κάθε "λέξη" αυτής της γλώσσας είναι το όνομα ενός αριθμού. Μόνο ενός αριθμού! Καταλαβαίνεις, Μοχάντ; Αν γράψεις 1001, αυτό είναι το όνομα ενός μόνο αριθμού. Αυτή είναι η μεγάλη ανακάλυψη. Τέρμα στις αμφισημίες! Μόνο δέκα σύμβολα, όσα και τα δάχτυλα του χεριού, όσα και τα φτερά στη φτερούγα του γερακιού, αρκούν για να εκφραστούν όλοι οι αριθμοί του κόσμου!»*

Ο Μοχάντ αγαλλίαζε.

«Υπάρχει και κάτι άλλο ακόμη», πρόσθεσε ο Πάνκα με ύφος ανωτερότητας. Όταν γράφεις πολλούς αριθμούς, μπορείς να δεις αμέσως ποιος είναι ο πιο μεγάλος».

Ο Μοχάντ δεν ήξερε πια πού βρισκόταν.

«Ο πιο μεγάλος είναι ο πιο μακρύς! Την τιμή ενός αριθμού τη δείχνει η γραφή του».

Ο Μοχάντ πήδηξε στο άλογό του. Προχωρώντας παράλληλα στον Τίγρη, διέσχισε την περιφέρεια της Βαγδάτης, όρμησε μέσα στους πολυσύχναστους δρόμους, όπου δέχτηκε κάμποσες βρισιές και απέφυγε την αγορά. Στο κεφάλι του γύριζε η τελευταία φράση του Πάνκα: «Την τιμή ενός αριθμού τη δείχνει η γραφή του». Αυτό που μέχρι τότε αποτελούσε δύο ξεχωριστές λειτουργίες-η γραφή των αριθμών και η μέτρηση- στο εξής θα ήταν μία!

Στα αυτιά του ηχούσε η φωνή του Πάνκα. Δηλαδή, γράφεις τους αριθμούς και μετράς απευθείας, με τους αριθμούς και τον κονδυλοφόρο, δε σου χρειάζεται τίποτε άλλο. Μετράς χρησιμοποιώντας την ονομασία των αριθμών!

Ήταν ενθουσιασμένος. Τέρμα στις πλάκες με την άμμο! Χαρτί, μελάνι, ένας κονδυλοφόρος!

Αυτό που του είχε αποκαλύψει ο Πάνκα αποτελούσε μια τόσο ριζική αλλαγή, ώστε δεν κατάφερνε να φανταστεί τι ακριβώς σήμαινε πρακτικά το να κάνει μια πράξη γραπτώς, χωρίς να έχει ανάγκη από κολόνες ή νομίσματα.

Όταν έφυγε ο Μοχάντ, ο Πάνκα εξομολογήθηκε στην Αεμέρ: «Σε σένα οφείλω να το πω, Αεμέρ. Στον Μοχάντ αποκάλυψα μόνο τα μισά από όσα ξέρω. Το σούνια δεν είναι απλώς ένα σύμβολο που μας επιτρέπει να γράφουμε τους αριθμούς-είναι αριθμός. Ένας καινούργιος αριθμός!»

Η Αεμέρ τον κοίταξε ξαφνιασμένη. «Πώς γίνεται να δημιουργήσει κανείς έναν καινούργιο αριθμό! Οι αριθμοί βρίσκονται εδώ και είναι πάντα οι ίδιοι!»

«Ε, λοιπόν εμείς δημιουργήσαμε έναν καινούργιο και… όχι τον πιο αμελητέο!» είπε και ξεκαρδίστηκε στα γέλια με τη λέξη που είχε βρει. «Να πώς μετράμε στην Ινδία. Τα αγαθά, νταμάμ-οι οφειλές, ρανάμ. Αν η περιουσία σου υπερβαίνει το χρέος σου, είσαι ένας άνθρωπος πλούσιος. Αν το χρέος σου υπερβαίνει την περιουσία σου, είσαι ένας φτωχός αγρότης. Τι γίνεται, όμως, όταν τα πλούτη σου ισοδυναμούν με τα χρέη σου; Μόνο εμείς δώσαμε την απάντηση. Όταν τα πλούτη σου ισοδυναμούν με τα χρέη σου, οφείλεις σούνια! Οφείλεις… μηδέν! Επινοήσαμε μία καινούργια ποσότητα, Αεμέρ. Αυτή που προκύπτει όταν από μία συγκεκριμένη ποσότητα αφαιρείς μία ίση ποσότητα».

Φάση 3η

Θα διεξαχθεί στη σχολική τάξη, ενώ μία διδακτική ώρα είναι αρκετή για την ολοκλήρωσή της. Αρχικά γίνεται μια σύντομη επισκόπηση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από τις δραστηριότητες της προηγούμενης φάσης. Στη συνέχεια μοιράζεται στις ομάδες, το τρίτο και τελευταίο φύλλο εργασίας:

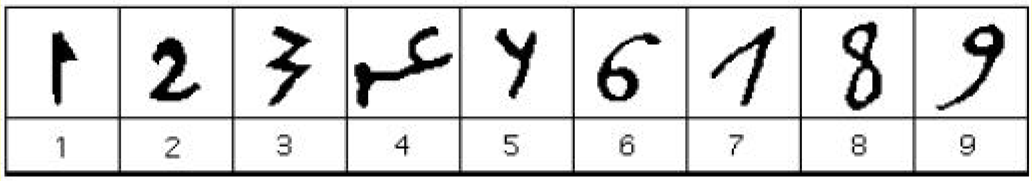
Από το κείμενο V, οι μαθητές έχουν πληροφορηθεί ότι το πρόβλημα αναπαράστασης του κενού, επιλύεται όχι απλά με τη χρήση ενός συμβόλου, αλλά με την ανακάλυψη ενός καινούργιου αριθμού, του μηδενός. Επίσης, μαθαίνουν ότι τα πολύπλοκα και δύσχρηστα βαβυλωνιακά σύμβολα παράστασης των αριθμών εγκαταλείπονται και τη θέση τους παίρνουν τα πιο εύχρηστα, ινδικά ψηφία.

3ο Φύλλο εργασίας

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Ομάδα:……………………………………………………………………..

Τα δυτικό-αραβικά ψηφία



Το ινδοαραβικό σύστημα της αναπαράστασης εισήγαγε στη Δύση ο Λεονάρντο της Πίζας (π. 1170 - π. 1250 μ.Χ.), ο γνωστός ως Fibonacci, με το βιβλίο του Liber Abbaci

(1202 και επανέκδοση 1228). Γράφει σε αυτό ο Λεονάρντο: «Τα δέκα ψηφία των Ινδών είναι τα 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Με αυτά και το σύμβολο 0, που οι Άραβες αποκαλούν «ζέφιρουμ» μπορεί να γραφεί κάθε αριθμός.

Στην Αριθμητική του Τρεβίζο(1478μ.Χ) πάλι διαβάζουμε: «Αρίθμηση είναι η αναπαράσταση των αριθμών με ψηφία. Αυτό γίνεται με δέκα χαρακτήρες ή ψηφία όπως δείχνουμε εδώ: i, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Από τα ψηφία αυτά το πρώτο, i, δεν αποκαλείται αριθμός, αλλά πηγή του αριθμού. Το δέκατο ψηφίο, 0, αποκαλείται ζέφιρουμ (zephirum) ή nulla, δηλαδή είναι το ψηφίο για το τίποτα, αφού από μόνο του δεν έχει καμία αξία, μολονότι μαζί με τα άλλα μεγαλώνει την αξία τους»

Το ινδοαραβικό σύστημα ονομάζεται έτσι γιατί, σύμφωνα με την ιστορική έρευνα, στο πλαίσιο του ινδικού πολιτισμού γύρω στον έβδομο αιώνα άρχισε να χρησιμοποιείται ένα σύστημα με αξία θέσης και βάση το 10, στο οποίο το μηδέν παριστανόνταν με μία τελεία. Το σύστημα αυτό υιοθέτησαν οι μουσουλμάνοι, οι οποίοι χρησιμοποίησαν το κυκλάκι για να αναπαραστήσουν το μηδέν, και μέσω αυτών διαδόθηκε στη μεσαιωνική Ευρώπη.

1.*Ο Ευκλείδης στο 7^{o} βιβλίο των «Στοιχείων», γράφει:*

Μονάς εστίν, καθ' ην έκαστον των όντων εν λέγεται, δηλαδή μονάδα είναι αυτό εξαιτίας του οποίου κάθε ον λέγεται ένα (βιβλίο VII,ορισμός 1).

Αριθμός δε το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος, δηλαδή (φυσικός) αριθμός είναι πλήθος μονάδων (βιβλίο VII,ορισμός 2).

Διαπιστώνετε κάποια ομοιότητα μεταξύ όσων γράφει ο Ευκλείδης και όσων διαβάζουμε στην «Αριθμητική του Τρεβίζο»;

....

....

....

....

2. *Απαριθμήστε μερικά από τα πλεονεκτήματα του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, όπως αυτά καταγράφονται στο κείμενο V.*

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

3. ***Πώς αντιλαμβάνεται ο Μοχάντ το μηδέν; Τι αποκαλύπτει στη συνέχεια ο Πάνκα στην Αεμέρ σχετικά με το μηδέν;***

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

4. ***Η Αεμέρ σε κάποιο σημείο του κειμένου διατυπώνει την εξής άποψη:«Πώς γίνεται να δημιουργήσει κανείς έναν καινούργιο αριθμό! Οι αριθμοί βρίσκονται εδώ και είναι πάντα οι ίδιοι!»Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη αυτή;***

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….

5. ***Σύμφωνα με όσα διαβάσετε στο κείμενο V αλλά και από την εμπειρία σας τα χαρακτηριστικά του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης είναι:***

α) ***Για την αναπαράσταση ενός αριθμού χρησιμοποιούνται τα ψηφία,…………………………………,τα οποία καταγράφονται οριζόντια και διαβάζονται από τα ………………. προς τα……………….***

Τα ψηφία αυτά ανάλογα με τη θέση που έχουν στην αναπαράσταση έχουν διαφορετική αξία, δηλαδή αναπαριστούν ……………..,……………., ……………….. κ.ο.κ. όταν αντίστοιχα βρίσκονται στη δεξιότερη θέση της αναπαράστασης, στην αμέσως προηγούμενη της δεξιότερης, στην αμέσως προηγούμενη της δεξιότερης της δεξιότερης κ.ο.κ.

β) ***Οπότε τα δεκαδικά αναπτύγματα των 1643 και 70508 είναι τα εξής:***

1643 = ...

70508=..

6. ***Η δυαδική αναπαράσταση ενός φυσικού αριθμού, ένας από τους πρώιμους μελετητές της οποίας, ήταν ο σπουδαίος φιλόσοφος Leibniz (1646-1716), συνδέεται με την επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σύμφωνα με όσα είπαμε χρειαζόμαστε μόνον δύο ψηφία το 1 και το 0 για να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε φυσικό αριθμό.***

Στο παράδειγμα που ακολουθεί βλέπετε τη διαδικασία με την οποία ο 25 γράφεται στο δυαδικό σύστημα ή σε σύστημα με βάση το 2:

$25 = 2 \cdot 12 + 1$

$12 = 2 \cdot 6 + 0$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$1 = 2 \cdot 0 + 1$

Δηλαδή, διαβάζοντας από κάτω προς τα πάνω,

$25 = (11001)_2$.

Με τη βοήθεια του παραδείγματος να γράψετε το 37 στο δυαδικό σύστημα.

....

....

....

....

....

7. Να γράψετε στο δεκαδικό σύστημα τον αριθμό $(10110111)_2$.

....

....

....

....

....

Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε φυσικός αριθμός, π.χ. ο $a_\nu \dots a_3\ a_2\ a_1\ a_0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$a_\nu \dots a_3\ a_2\ a_1\ a_0 = a_\nu \cdot 10^\nu + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Όπως καταλαβαίνετε, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια δυνάμεων του 2,3,4,5,7,...,60 κλπ.

Στην αρχή του τρίτου φύλλου εργασίας, δίνονται ορισμένες ιστορικές πληροφορίες για το ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται σήμερα. Οι μαθητές θα πρέπει επιπλέον, να πληροφορηθούν ότι το σύστημα αυτό, πέρασε από «σαράντα κύματα» μέχρι να καθιερωθεί στην Ευρώπη, ενώ η μορφή των ψηφίων του, σταθεροποιήθηκε χάρη στην εφεύρεση της τυπογραφίας.

Οι μαθητές στην πρώτη ερώτηση καλούνται να εντοπίσουν την αναλογία μεταξύ όσων γράφονται στην «Αριθμητική του Τρεβίζο» και των δύο ορισμών, από το 7ο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Και στις δύο περιπτώσεις το ένα και το μηδέν δεν θεωρούνται αριθμοί. Στόχος είναι να αντιληφθούν, το χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε, ώστε να συμπεριληφούν στους φυσικούς αριθμούς.

Η δεύτερη και η τρίτη ερώτηση δεν αναμένεται να δυσκολέψουν τους μαθητές, καθώς στο κείμενο V, περιέχονται αρκετές πληροφορίες για τα πλεονεκτήματα της χρήσης του δεκαδικού συστήματος, καθώς και για τις απόψεις του Πάνκα και του Μοχάντ για το μηδέν.

Η τέταρτη ερώτηση έχει φιλοσοφικό χαρακτήρα και συμπεριλήφθηκε στο φύλλο εργασίας προκειμένου να αναπτύξουν οι μαθητές τις απόψεις τους, για το θέμα αυτό. Ακόμη αποτελεί μια καλή αφορμή, για να πληροφορηθούν εν συντομία, οι μαθητές, από τον καθηγητή τους, την άποψη του Πλάτωνα για τις μαθηματικές αλήθειες. Σύμφωνα με το φιλόσοφο, ο μαθηματικός δεν εφευρίσκει νέες μαθηματικές αλήθειες. Αυτές υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτόν και περιμένουν υπομονετικά τον εξερευνητή τους. Η πέμπτη άσκηση, έχει επαναληπτικό χαρακτήρα και δεν παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές.

Οι ασκήσεις έξι και επτά δίνονται στους μαθητές, για να κατανοήσουν τη μετάβαση από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και αντίστροφα, με στόχο την καλύτερη κατανόηση του δεκαδικού. Ειδικότερα, στην άσκηση έξι, δεν αναμένεται οι μαθητές, να συναντήσουν ιδιαίτερες δυσκολίες, λόγω του δοσμένου παρεδείγματος. Αν παρόλα ταύτα, διαπιστωθούν προβλήματα, μπορούν να δοθούν επιπλέον παραδείγματα.

Για να διευκολυνθούν οι μαθητές, στην απάντηση της ερώτησης επτά, ο καθηγητής τους πληροφορεί ότι στο δυαδικό σύστημα, οι διαδοχικές θέσεις αντιστοιχούν σε δυνάμεις του δύο.

Η περιπέτεια της συμβολικής αναπαράστασης των φυσικών αριθμών, όπως περιγράφεται στα αποσπάσματα από το «Μηδέν», δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια συλλογή από θεωρήματα, αξιώματα κλπ αλλά μια ζωντανή επιστήμη που διαμορφώθηκε χάρη στις κοινωνικο-πολιτισμικές ανάγκες της κάθε εποχής.

Είναι απαραίτητο μετά την ολοκλήρωση του σεναρίου να μοιραστεί στους μαθητές, για συμπλήρωση στο σπίτι, το παρακάτω ερωτηματολόγιο, με σκοπό να αξιολογηθεί η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση και να διορθωθούν οι όποιες ατέλειες. Επιπλέον με τη βοήθεια των ερωτημάτων αυτών, ο μαθητής συνειδητοποιεί ποιες γνώσεις αποκόμισε από τις προαναφερθείσες δραστηριότητες (μεταγνωστική διάσταση).

Τι μου άρεσε από τις δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκα		
Τι δεν μου άρεσε από τις δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκα		
Στη συνεργασία μου με τους συμμαθητές μου	Ναι	Όχι
Άκουσα τους συμμαθητές μου προσεχτικά…		
Με βοήθησαν οι παρατηρήσεις των συμμαθητών μου…		
Βρήκα τις παρατηρήσεις τους δίκαιες...		
Στην κριτική μου ήμουν δίκαιος…		
Έμαθα…	Ναι	Όχι
Να μετατρέπω αριθμούς από το 10-δικό στο 2-δικό σύστημα		
Να αναγνωρίζω την θεσιακή αξία ενός ψηφίου		
Αριθμητικά συστήματα τα οποία δεν φανταζόμουν ότι υπάρχουν		

3.5 Κείμενα για τη φύση και τις εφαρμογές των μαθηματικών

Προτεινόμενος χρόνος υλοποίησης δύο διδακτικές ώρες.

Συχνά ένα εύλογο ερώτημα που θέτουν οι μαθητές, είναι τι είναι τα μαθηματικά και σε τι χρησιμεύουν.

Για να αποφευχθούν οι αυστηροί ορισμοί, που ενδεχομένως προκύψουν, αν ζητηθεί από τους μαθητές να αναζητήσουν πληροφορίες για το θέμα στο διαδίκτυο, μια καλή ιδέα είναι, να διαβαστούν συγκεκριμένα αποσπάσματα από τα βιβλία «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ» του Απόστολου Δοξιάδη και «Διάλογοι για τα μαθηματικά» του Alfred Renyi, σε μετάφραση Μ. Μυτιληναίου και Π. Σπύρου[16], τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια. Τα αποσπάσματα αυτά παρέχουν στους μαθητές ένα κοινό πλαίσιο αναφοράς, για την εξέλιξη του διαλόγου για τα Μαθηματικά.

Το βιβλίο, «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ» αποτελεί ουσιαστικά το πρώτο ελληνικό μαθηματικό μυθιστόρημα. Κεντρικός ήρωας, ο συνταξιούχος πανεπιστημιακός καθηγητής, Πέτρος Παπαχρήστου, που αφιέρωσε τη ζωή του, στην απόδειξη της Εικασίας του Γκόλντμπαχ. Ο ανιψιός του, μαθηματικός και ο ίδιος, μας εξιστορεί τη ζωή, του θείου του.

Όταν ο ανιψιός ανακοινώνει στο θείο του, την επιθυμία του, να σπουδάσει μαθηματικά διαδραματίζεται ο ακόλουθος διάλογος (σελ.42, 43,44):

«Για πες μου, λοιπόν, εσύ τι νομίζεις ότι είναι τα μαθηματικά;

Άρχισα λοιπόν να αραδιάζω κοινοτοπίες περί της "κωρονίδος των επιστημών", περί των πολύτιμων εφαρμογών στα ηλεκτρονικά, στην ιατρική και της εξερεύνησης του διαστήματος.

Ο θείος με στραβοκοίταξε:

" Αν σε ενδιαφέρουν οι εφαρμογές, γιατί δεν γίνεσαι μηχανικός; Ή φυσικός; Και αυτοί ασχολούνται με κάποιου είδος Μαθηματικά».

---

[16] Η παρούσα δραστηριότητα προτείνεται από τον Στ. Μπαλή, σελ. 99-100, στον τόμο «Μαθηματικά και Λογοτεχνία», 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών (17&18 Μαρτίου 2006).

«…τα πραγματικά μαθηματικά δεν έχουν καμία σχέση με τις εφαρμογές και τους υπολογισμούς που μαθαίνεις στο σχολείο. Αποτελούν αφηρημένα διανοητικά κατασκευάσματα που-τουλάχιστον για όσο διάστημα ασχολείται μαζί τους ο μαθηματικός-δεν άπτονται στο παραμικρό του πραγματικού κόσμου».

Στο βιβλίο «Διάλογοι για τα μαθηματικά» περιλαμβάνονται τρεις διάλογοι για τη φύση και τις εφαρμογές των μαθηματικών. Στον πρώτο διάλογο ο Ιπποκράτης ζητά τη γνώμη του Σωκράτη, για το αν πρέπει να σπουδάσει μαθηματικά πλάι στο Θεόδωρο. Παρατίθεται ένα μικρό απόσπασμα:

Σωκράτης: Τώρα πες μου, νεαρέ μου φίλε, ποιο είναι το αντικείμενο των μαθηματικών; Τι πράγματα μελετά ο μαθηματικός;

Ιπποκράτης: Έκανα στο Θεαίτητο την ίδια ερώτηση. Μου απάντησε ότι ο μαθηματικός μελετά τους αριθμούς και τα γεωμετρικά σχήματα.

Σωκράτης: Η απάντηση είναι σωστή, αλλά τι λες, αυτά τα πράγματα υπάρχουν;

Ιπποκράτης: Βέβαια. Πώς θα μπορούσαμε να μιλάμε γι' αυτά αν δεν υπάρχουν;

Στην πορεία του διαλόγου οι δύο συνομιλητές καταλήγουν ότι, οι βασικές έννοιες των μαθηματικών είναι αφηρημένες ιδέες, ενώ παράλληλα εξετάζονται διάφορα θέματα, όπως με ποιον τρόπο ο μαθηματικός δημιουργεί τις αφηρημένες ιδέες, ποια σχέση έχουν με τον πραγματικό κόσμο και πώς αυτές εφαρμόζονται.

Συνοψίζοντας ο Ιπποκράτης αποφαίνεται:

Ιπποκράτης: Καλά λοιπόν, όταν ξεκαθαρίστηκε γιατί τα μαθηματικά είναι σε θέση να δώσουν σίγουρη γνώση για έναν κόσμο διαφορετικό από τον κόσμο στον οποίο ζούμε, για τον κόσμο της ανθρώπινης σκέψης, η ερώτηση που απόμεινε ήταν για τη χρησιμότητα αυτής της γνώσης. Τώρα έχουμε βρει πως ο κόσμος των μαθηματικών δεν είναι τίποτα άλλο από μια αντανάκλαση του πραγματικού κόσμου στο μυαλό μου. Μ' αυτό γίνεται φανερό, ότι κάθε ανακάλυψη στον κόσμο των μαθηματικών μας δίνει κάποιες πληροφορίες για τον πραγματικό κόσμο.

Ζητείται από δύο μαθητές, να διαβάσουν στην τάξη τα σχετικά αποσπάσματα. Στη συνέχεια οι μαθητές ενθαρρύνονται, να προσπαθήσουν να απαντήσουν στα ερωτήματα τους, σχετικά με το τι είναι μαθηματικά και που αυτά χρησιμεύουν.

Οι απόψεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών εμφανίζουν τεράστια ποικιλία, για το λόγο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να δοθούν στους μαθητές ορισμένα παραδείγματα:

«Τι είναι λοιπόν τα Μαθηματικά; Φαίνεται ότι έχουμε τρεις επιλογές:

- Τα Μαθηματικά είναι η ανθρωπιστική επιστήμη που υμνεί την αιώνια λογική.

- Είναι η φυσική επιστήμη που μελετά το φαινόμενο λογική.

- Είναι η τέχνη που πλάθει μορφές αιθέριας ομορφιάς από πρώτη ύλη που ονομάζεται λογική. Είναι όλα αυτά και άλλα. Πάνω απ' όλα, όμως, μπορώ να σας διαβεβαιώσω ότι τα Μαθηματικά είναι ευχαρίστηση.» W. T. Tutte

«Τα Μαθηματικά είναι η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο εγκέφαλός μας, για να επικοινωνήσει με τον εαυτό του.» G. Hichilnisky

«Η ουσία των Μαθηματικών είναι η αλήθεια.» G. Cantor

«Τα Μαθηματικά είναι το αντικείμενο για το οποίο ποτέ δεν ξέρουμε για τι μιλάμε, ούτε αν αυτό που λέμε είναι αλήθεια.» B. Russell

«Εκείνο το υλικό που μερικές φορές είναι διαυγές ... και μερικές φορές ασαφές ... είναι ... τα μαθηματικά.» I. Lakatos

Τα αποφθέγματα, σε συνδυασμό με τα παραπάνω αποσπάσματα, αποσκοπούν να στο να καταδείξουν στους μαθητές τη δυσκολία, να δοθεί ένας αυστηρός ορισμός για τα μαθηματικά. Επιπλέον για να αναδειχθεί η πολλαπλότητα του μαθηματικού νοήματος, ζητείται από τους μαθητές να αναφέρουν συνοπτικά, τα όσα κάνουν στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών, την αρίθμηση, την εκτίμηση, τις πράξεις των αριθμών, τον υπολογισμό, τη σύγκριση, την αναλογία, τη μελέτη : σχημάτων, ομοιότητας, ισότητας, σμίκρυνσης ή μεγέθυνσης , ιδιοτήτων, μεγεθών , εμβαδού και όγκου κλπ.

Η πρακτική χρησιμότητα των «αφηρημένων» μαθηματικών θεωριών είναι μια συχνά επαναλαμβανόμενη μαθητική απορία. Εδώ μάλιστα, μπορεί να αναφερθεί η γνωστή φράση του Γαλιλαίου, «το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες» η οποία αφορά στη χρήση των μαθηματικών για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Για να γίνουν ακόμη πιο φανερές οι εφαρμογές των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και η στενή σχέση τους με την τεχνολογία, δίνεται στους μαθητές το παρακάτω κείμενο, του Τ. Μιχαηλίδη:

Ένα συνηθισμένο πρωινό, ενός συνηθισμένου ανθρώπου

«*Το ραδιόφωνο-ξυπνητήρι του Θανάση χτύπησε στις 7:00. Χάρη στην ψηφιακή τεχνολογία, βασισμένη στην αριθμητική ανάλυση και το δυαδικό σύστημα το δωμάτιο γέμισε μουσική, λες και μια ορχήστρα ολόκληρη είχε μαζευτεί στο προσκέφαλό του. Σηκώθηκε. Σε δέκα λεπτά το ψυγείο και το φουρνάκι του, που λειτουργούσαν με fuzzy logic - παρακλάδι της πλειότιμης συμβολικής λογικής που ήταν υπεύθυνη και για την ασφαλή λειτουργία του ABS στο αυτοκίνητό του - του εξασφάλισαν ένα πλούσιο πρωινό. Στις 7:40 πληκτρολογούσε στο συναγερμό τον τετραψήφιο κωδικό του – η θεωρία των πιθανοτήτων λέει πως ο ενδεχόμενος διαρρήκτης είχε μόλις 1 στις 10.000 πιθανότητα να τον παραβιάσει – κι έφυγε ήσυχος για τη δουλειά. Μπήκε στο μετρό - άλλο θαύμα κι αυτό, σήραγγες, κανάλια υπονόμων, δίκτυα παροχής, μια ολόκληρη υπόγεια πόλη σχεδιασμένη με βάση τα γραφήματα του Όιλερ - βολεύτηκε κι άνοιξε την εφημερίδα. «Μείωση κατά 12% των ατυχημάτων μετά την εφαρμογή του αλκοτέστ. 27% των οδηγών συμμορφώθηκαν ήδη με τους νέους αυστηρούς κανονισμούς». 12%, 27%! Και πώς το βρήκανε; Τα νύχια τους μυρίσανε; Γύρισε στα αθλητικά. Ο Κωνσταντίνου να στέλνει με κεφαλιά στα δίχτυα το ημικανονικό 32-εδρο β' τύπου του Αρχιμήδη – τη μπάλα του ποδοσφαίρου δηλαδή – δέσποζε στην σελίδα. Στις 8:30 έμπαινε στο γραφείο. Άνοιξε τον υπολογιστή (ήταν γεμάτος ολοκληρωμένα κυκλώματα βασισμένα στην άλγεβρα Μπουλ αλλά ο Θανάσης ούτε το ήξερε ούτε ήθελε να το μάθει) και μπήκε στο Ίντερνετ. Ο κώδικας RSA βασισμένος στους πρώτους αριθμούς του εξασφάλισε μια ασφαλή σύνδεση και άνοιξε το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο. Μήνυμα από τη Μαρία! – το πρόσωπο. Καλό κορίτσι η Μαρία, σκέφτηκε. Καλλιεργημένη, πρόσχαρη, σπιρτόζα, όμορφη. Ένα μονάχα κουσούρι είχε. Σπούδαζε Μαθηματικά. Χάθηκε να σπουδάσει κάτι άλλο, κάτι πιο κοντά στην καθημερινή ζωή, κάτι χρήσιμο τελοσπάντων! Έτσι σκέφτηκε ο Θανάσης και βγήκε επειγόντως απ' το e-mail γιατί πλησίαζε ο διευθυντής.*»

Το σκωπτικό ύφος του κειμένου, αναμένεται, να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Ίσως μάλιστα ξαφνιαστούν από τη συνύπαρξη των Μαθηματικών με το χιούμορ, καθώς η αυστηρότητα των Μαθηματικών αποκλείει, στο μυαλό τους, κάθε είδους αστεϊσμό.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Κανένα άλλο μάθημα, ίσως, δεν προσφέρεται για τόσο πολύ καλή ή κακή διδασκαλία όσο τα μαθηματικά. Και η «κακή» διδασκαλία οφείλεται κυρίως στην αδυναμία να αναδειχτεί η γοητεία της μαθηματικής δημιουργίας.

Μια άλλη δυσκολία, χωρίς αμφιβολία, είναι και το γεγονός ότι η διατύπωση των μαθηματικών απαιτεί εκλεπτυσμένες και πολύπλοκες συμβολικές τεχνικές. Ο καθηγητής, που επιδίδεται, κυρίως, στην προσπάθεια να εξοικειωθούν οι μαθητές του με τις τεχνικές χειρισμού των συμβόλων και, συνεπώς παραλείπει το εννοιολογικό τους υπόβαθρο, θα χάσει μοιραία το ενδιαφέρον των μαθητών του και δε θα κατορθώσει να διαλύσει τις παρανοήσεις σχετικά με τα μαθηματικά που είναι τόσο έντονες σήμερα.

Μια λύση στην αντιμετώπιση των παραπάνω δυσκολιών, θα μπορούσε να είναι, η εισαγωγή αφηγηματικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Για να διδάξουν έννοιες και τεχνικές των μαθηματικών, για να απεικονίσουν χαρακτηριστικά των μαθηματικών και να αναδείξουν το ιστορικό και πολιτισμικό της ανάπτυξης τους ή για να οργανώσουν την ίδια τη διδασκαλία των μαθηματικών προσφέροντας μέσα, για την κατανόηση της μαθηματικής δραστηριότητας και των αντικειμένων της. Η χρήση αφηγηματικών κειμένων-ιστορικές αφηγήσεις που αφορούν στην εξέλιξη μαθηματικών εννοιών, βιογραφίες μαθηματικών, έργα μαθηματικής λογοτεχνίας-στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν αντικαθιστά την αναλυτική σκέψη. Τη συμπληρώνει με το να αναπτύσσει τη φαντασία, με το να προκαλεί για εναλλακτικές ερμηνείες, με το να δημιουργεί ένα περιβάλλον όπου ο μαθητής εμπλέκεται ηθελημένα και συμμετέχει μέσα από τις προσωπικές του ερμηνείες. (Κολέζα, 2006)

«*Τίποτα δεν μπορεί να σπάσει τη μονοτονία της μονόδρομης μεταφοράς πληροφοριών τόσο αποτελεσματικά, διασκεδαστικά και παραγωγικά όσο μια καλή ιστορία. Οι ιστορίες είναι εγγενώς ενδιαφέρουσες, δεδομένου ότι είναι ελκυστικές…είναι πιο πιθανό να θυμηθούμε μια ιστορία από ένα λογικό επιχείρημα.*» (Παπαδημητρίου, 2003)

Ξένη Βιβλιογραφία

1. Burnett, S.J., Wichman, A. M. (1997). *Mathematics and Literature: An Approach to Success*. Action Research Project, Saint Xavier University

2.Doxiadis Ap. (2012), *A Streetcar Named (among other things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric*, p. 281-388, Circles Disturbed, The Interplay of Mathematics and Narrative, Princeton University Press.

3. Doxiadis Ap. (2001), *Euclid's Poetics. An examination of the similarity between narrative and proof*. Lecture given at the Mathematics and Culture conference, Venice, April 2001.

4. Doxiadis Ap. & Sialaros M. (2013), *Sing, Muse, of the Hypotenuse. Greek mathematicians as Poets, Storytellers and Orators.*

5. Goffree F. (1989).The popularisation of science and technology from an educational designer's standpoint. In Ming, C.K. and Fong, L.K.(Eds.), *Popularization of Science and Technology: What Informal nad Nonformal Education Can Do?*, 50-69, International Conference, Faculty of Education of Hong Kong in co-operation with UNESCO, Hong Kong.

6. Kliman M. (1993). Integrating mathematics and literature in the elementary classroom. *The Arithmetic Teacher*, *40* (6), 318-321.

7. Leary A. K. (2004).*The Status of Literature in the Secondary Mathematics Classroom.* Thesis presented to the faculty of the College of Education University of Alaska Anchorage for the Degree of Master of Education, UMI Number: 1421665

8. Netz R. (2003) *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a Study in Cognitive History*. (Cambridge: Cambridge University Press)

9. Papadimitriou Ch. (2003), *Mythematics: In Praise of Storytelling in the Teaching of Computer Science and Math*. This paper is based on the talk at the 2003 ITICSE conference on July 2, 2003 in Thessaloniki.

10. Pycior H. M. (1994).Mathematics and prose literature. In Grahham and Guiness, L (Eds.), *Companion encyclopaedia of the history and philosophy of mathematical sciences, II* , 1633-1643, Rautledge

11. Sriraman B. (2003). Mathematics and Literature: Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam. *The Australian Mathematics Teacher*, *59* (4), 26-31.

12. Sriraman B. (2004). Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy. *The Australian Mathematics Teacher. 60* (1), 17-23.

13. Teissier B. (2012), *Mathematics and Narrative: why are stories and proofs interesting?,* p. 232-243,Circles Disturbed, The Interplay of Mathematics and Narrative, Princeton University Press.

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Abbot E. (1999), *Flatland η Επιπεδοχώρα*, (Φ. Μωράκη, μετάφραση), Αθήνα: εκδ. Αιώρα.

2. Ανέστη Δ. & Τριανταφυλλίδης Τ. (2005), Η διαμόρφωση μιας κοινότητας μάθησης μέσα από τη διδακτική σύνδεση λογοτεχνίας και μαθηματικών*, Πρακτικά 1ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, Αθήνα, σελ. 259-268.

3.Bunt L., Jones Ph. & Bedient J. (1981), *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*, (Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου), Αθήνα : εκδ. Γ.Α. Πνευματικού.

4. Γιαννικοπούλου, Α. (2002). Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Στο Καϊλά Μ. Καλαβάσης, Φ. και Πολεμικός Ν. (Επιμ.) *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες Σχέσεις στην Εκπαίδευση*, (σελ. 71-101). Αθήνα: Ατραπός.

5. Δοξιάδης, Α. (1992). *Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ*. Αθήνα: Εκδ. Καστανιώτης.

6. Ευθυμόγλου Ε. (2002), *Μαθηματικά-ιστορική εξέλιξη ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση*. Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Σελ. 255-268, Αθήνα: εκδ. Ε.Μ.Ε.

7. Guedj D. (2006), *Μηδέν*, (Ε. Βαγγελάτου μετάφραση), Αθήνα: εκδ. Ψυχογιός

8. Guedj D. (1998), *Το θεώρημα του παπαγάλου*, (Τ. Μιχαηλίδη, μετάφραση), Αθήνα: Εκδόσεις Πόλις.

9. Καφούση Σ. (2002),*Συζητώντας για την Ιστορία των Μαθηματικών στη σχολική τάξη*, Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Σελ. 175-184, Αθήνα: εκδ. Ε.Μ.Ε.

10. Κολέζα Ε. (2000), *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Αθήνα: εκδ. Leader Books.

11. Κολέζα Ε. (2006), *Τα Μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της Λογοτεχνίας: ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων*, Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, σελ. 27-48, Θεσσαλονίκη: City Publish.

12. Κολίτση Φ. (2009), *Έλληνες συγγραφείς και «μαθηματική λογοτεχνία»: επιστήμη φαντασία, νεωτερικότητα,* [Ανακοίνωση στην ΙΒ Επιστημονική Συνάντηση του τμήματος Φιλολογίας (ΑΠΘ): «Η νεωτερικότητα στη νεοελληνική λογοτεχνία και κριτική» (26-29 Μαρτίου, 2009)]

13. Kaplan R. (2012), *Το υπαρκτό τίποτα. Μια ιστορία του μηδενός,* (Τ. Μιχαηλίδης μετάφραση), Αθήνα: εκδ. Αλεξάνδρεια.

14. Λέρη Β. (2008), *Η αξιοποίηση της «Μαθηματικής Λογοτεχνίας» ως μέσο βελτίωσης των στάσεων των μαθητών για τα μαθηματικά* .Διπλωματική Εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Σπύρου.

15. Μηλιώνης Χρ. (2006), Εξερευνώντας την Επιπεδοχώρα, Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, σελ. 229-250,Θεσσαλονίκη: City Publish.

16. Μητακίδου Σ. & Τρέσσου Ε.(2005). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία.* Εκδόσεις Επίκεντρο, Θεσ/νίκη.

17. Μιχαηλίδης Τ. (2004), *Μαθηματικά επίκαιρα*, Αθήνα: εκδ. Πόλις.

18.Μιχαηλίδης Τ. (2006), *Λέσχες ανάγνωσης μαθηματικού βιβλίου: Μια εναλλακτική-συμπληρωματική διδακτική πρόταση*, Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, σελ. 15-26, Θεσσαλονίκη: City Publish.

19. Μιχαηλίδης Τ. (2010),*Τα Μαθηματικά στη Λογοτεχνία της Επιστημονικής Επανάστασης*

20. Μιχαηλίδης Τ. (2007), *Από τον Αισχύλο στους μεταμοντέρνους: μαθηματική λογοτεχνία.* Αυτό το κείμενο αποτελεί την τελευταία μετεξέλιξη μιας παρουσίασης που έγινε στο 19ο συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας στην Κομοτηνή, το Νοέμβριο του 2002.

21. Μιχαηλίδης Τ. , *Η μυστική γοητεία των αριθμών, Μια διαχρονική περιδιάβαση στη μαθηματική λογοτεχνία.* ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ (Επτά Ημέρες) 10-11/4/ 2004

22. Μιχαηλίδης Τ. (2005), *Η επίδραση της Επιστημονικής Επανάστασης στη λογοτεχνία της εποχής της.* Διημερίδα τμήματος Μεθοδολογίας Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

23. Μιχαηλίδης Τ. , *Μαθηματικές Μυθοπλασίες. Μια προσπάθεια ταξινομίας στη λογοτεχνία των μαθηματικών.* ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ (Επτά Ημέρες) 10-11/4/2004

24. Μπαλής Στ. (2006), *Διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών: Μαθηματικά-Ιστορία-Αστρονομία-Αρχαία Ελληνική Γραμματεία-Λογοτεχνία*, Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, σελ. 95-108,Θεσσαλονίκη: City Publish.

25. Παναγιώτου Ε. (2002), *Ο ρόλος της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών*, Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Σελ. 117-130, Αθήνα: εκδ. Ε.Μ.Ε.

26. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (1997). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.

27. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2001). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.

28. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2007). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο Εκπαιδευτικού.

29. Rényi, A. (1979). *Διάλογοι για τα Μαθηματικά*. (Μ. Μυτιληναίου & Π. Σπύρου, μετάφραση). Αθήνα: Εκδ. Διογένης.

30. Σπύρου Π. (2006), *Λογοτεχνία και μαθηματικά: Όρια και συγκλίσεις*, Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, σελ. 59-70, Θεσσαλονίκη: City Publish.

31. Συλλογικό έργο: Θωμαΐδης Ι., Χρυσανθόπουλος Κ., Χριστιανίδης Ι., Χασάπης Δ., Φαρμάκη Β., Τζανάκης Κ., Πάσχος Θ., Νεγρεπόντης Στ., Μιχαηλίδης Τ., Λάππας Δ. (2009), *Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: εκδ. Ζήτη.

32. Φίλη Χρ. (2002), *Ο Reymond Queneau, το εργαστήρι της δυναμικής Λογοτεχνίας και οι αρχές της Λογοτεχνίας*, Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Σελ. 685-701, Αθήνα: εκδ. Ε.Μ.Ε.

33. Χασάπης Δ. (2006), *Μαθηματικά και Λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σχέση*, Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, σελ. 3-14, Θεσσαλονίκη: City Publish.

34. Wilder R. (1986), *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*, (Δ. Ψυχογυιός μετάφραση), Αθήνα: εκδ. Π. Κουτσούμπος ΑΕ

35. ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ (Επτά Ημέρες) 10-11/4/2004

36. ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ(Βιβλιοθήκη) 24/01/2006

Διαδίκτυο

1. Kasman, A., *Mathematical Fiction*: http://math.cofc.edu./faculty/MATHFICT

2. Θαλής και Φίλοι: http://www.thalesandfriends.org

3. Wikipedia: https://el.wikipedia.org/

4. Ελληνική Μαθηματική Εταιρία: www.hms.gr/

5. mathandliterature. blogspot.com/

6. mkaragiannis. blogspot.com/

7. www.24grammata.com/