

Δράσεις ομάδων σε συμπλεκτικές πολλαπλότητες

Παναγιώτης Σ. Χρήστου

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ιούλιος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Δράσεις ομάδων σε συμπλεκτικές
πολλαπλότητες**

Παναγιώτης Σ. Χρήστου

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπων: Διονύσιος Λάμπας
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 9η Ιουλίου 2013.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Ιάκωβος Ανδρουλιδάκης
Επίκουρος Καθηγητής

.....
Διονύσιος Λάμπας
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Αντώνιος Μελάς
Καθηγητής

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή Δ. Λάππα για την καθοδήγησή του κατά τη συγγραφή αυτής της εργασίας.

Η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έγινε στο πλαίσιο της υλοποίησης του μεταπτυχιακού προγράμματος το οποίο συγχρηματοδοτήθηκε μέσω της Πράξης «Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών Ι.Κ.Υ. με διαδικασία εξατομικευμένης αξιολόγησης ακαδ. έτους 2011-2012 » από πόρους του Ε.Π. «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) και του ΕΣΠΑ, του 2007-2013.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με δράσεις ομάδων Lie σε συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Μια συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι ένα ζεύγος (M, ω) , με τη M να είναι διαφορική πολλαπλότητα και την ω μια μη εκφυλισμένη και κλειστή 2-μορφή στην M . Οι δράσεις μου μας ενδιαφέρουν είναι οι λεγόμενες συμπλεκτικές, δηλαδή αυτές που διατηρούν την ω . Μάλιστα τα βασικά μας αποτελέσματα θα αφορούν μια ειδικότερη κατηγορία δράσεων, τις λεγόμενες χαμιλτονιανές, που όπως μαρτυρά και το όνομά τους έχουν άμεση σχέση με την Κλασσική Μηχανική και τα χαμιλτονιανά πεδία. Για τον ορισμό των χαμιλτονιανών δράσεων χρειαζόμαστε την έννοια της απεικόνισης ορμής που είναι μια γενίκευση της χαμιλτονιανής συνάρτησης της Κλασσικής Μηχανικής.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τους βασικούς ορισμούς και μερικά χρήσιμα αποτελέσματα της Συμπλεκτικής Γεωμετρίας. Αρχικά θα μελετήσουμε συμπλεκτικούς γραμμικούς χώρους και έπειτα θα ασχοληθούμε με τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Το βασικό θεώρημα του κεφαλαίου αυτού είναι το Θεώρημα του Darboux. Αυτό είναι ένα πολύ βασικό θεώρημα της Συμπλεκτικής Γεωμετρίας, το οποίο λέει ότι όλες οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες ίδιας διάστασης είναι τοπικά ίδιες. Άρα σε αντίθεση με τη Γεωμετρία Riemann, όπου έχουμε την καμπυλότητα, στη Συμπλεκτική Γεωμετρία δεν υπάρχουν τοπικές αναλλοίωτες. Για το Θεώρημα Darboux θα δώσουμε δύο αποδείξεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετήσουμε γενικά τις δράσεις ομάδων Lie σε πολλαπλότητες. Αφού κάνουμε μια γρήγορη εισαγωγή στις ομάδες Lie, θα μελετήσουμε δράσεις τους που είναι ελεύθερες και γνήσιες. Το βασικό αποτέλεσμα που ισχύει για αυτές τις δράσεις είναι ότι ο χώρος των τροχιών δέχεται και αυτός δομή διαφορικής πολλαπλότητας με φυσιολογικό τρόπο. Έπειτα θα μελετήσουμε δράσεις με μοναδική υπόθεση ότι είναι γνήσιες.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με ελεύθερες και γνήσιες χαμιλτονιανές δράσεις. Αποδεικνύουμε το λεγόμενο Θεώρημα Συμπλεκτικής Αναγωγής των Marsden-Weinstein-Meyer, το οποίο λέει ότι με τις παραπάνω προϋποθέσεις ο χώρος των τροχιών της δράσης είναι με φυσιολογικό τρόπο και αυτός συμπλεκτική πολλαπλότητα. Η διαδικασία της συμπλεκτικής αναγωγής είναι μια γενίκευση της μεθόδου της Κλασσικής Μηχανικής, όπου όταν έχουμε μεγέθη που διατηρούνται πάνω στις τροχιές, μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των εξισώσεων της κίνησης.

Στο κεφάλαιο τέσσερα θα δούμε τη χαμιλτονιανή δράση του τόρου σε μια συμπαγή και συνεκτική συμπλεκτική πολλαπλότητα. Αποδεικνύεται πως τότε η εικόνα της απεικόνισης ορμής είναι ένα κυρτό πολύτοπο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως Θεώρημα Κυρτότητας των Atiyah-Guillemin-Sternberg.

Στο πέμπτο κεφάλαιο ασχολούμαστε πάλι με τη συμπλεκτική αναγωγή μιας πολλαπλότητας, αλλά τώρα με μόνη υπόθεση για τη δράση ότι είναι γνήσια. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος των τροχιών δεν είναι απαραίτητα πολλαπλότητα αλλά υπάρχει μια διάσπασή του σε συμπλεκτικές πολλαπλότητες.

Λέξεις κλειδιά: χαμιλτονιανές δράσεις, απεικόνιση ορμής, συμπλεκτική αναγωγή, θεώρημα κυρτότητας, συμπλεκτικά στρώματα

Abstract

We study Lie group actions on symplectic manifolds. A symplectic manifold is a pair (M, ω) , where M is a differentiable manifold and ω is a non-degenerate, closed 2-form on M . We are interested in symplectic group actions, which are these actions which preserve the form ω . Moreover, we mainly deal with a special subset of these actions, the so called hamiltonian actions. These are closely related with Classical mechanics, as their name indicates. For the definition of a hamiltonian action we have to introduce the notion of the moment or momentum map.

The first chapter is an introductory chapter to Symplectic Geometry. We study symplectic vector spaces and then symplectic manifolds. The central theorem of this chapter is the Darboux's Theorem. It is a fundamental theorem for Symplectic Geometry. As a consequence of this theorem, all symplectic manifolds of equal dimension are locally symplectomorphic (isomorphic in the symplectic category). So, in contrast with Riemannian Geometry, in Symplectic Geometry there are no local invariants. We are going to give two proofs of the Darboux's Theorem.

In the second chapter we study Lie group actions on general differentiable manifolds. After a brief introduction to Lie group theory, we deal with free and proper actions. The basic theorem for these actions is that the orbit space admits differentiable structure in a natural way. We study also proper actions with no further assumptions.

In chapter number three we study free, proper hamiltonian actions. We prove the Marsden-Weinstein-Meyer regular reduction theorem, that under the above mentioned assumptions the orbit space is a symplectic manifold. The reduction method is a generalisation of a well known method from physics. If you have a constant of motion, you can decrease the number of the equations of motion.

The fourth chapter contains the proof of the Atiyah-Guillemin-Sternberg convexity theorem. The image of the moment map, for a hamiltonian action of the torus on a compact, connected symplectic manifold, is a convex polytope.

Finally we study singular symplectic reduction: reduction when the action is proper and not necessarily free. The orbit space in this occasion isn't a manifold in general, but it has a decomposition in symplectic pieces.

Keywords: hamiltonian group actions, moment map, symplectic reduction (singular and regular), convexity theorem, symplectic strata

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	6
1.1. ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	6
1.2. Η ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΜΑΔΑ	10
1.3. ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ	11
1.4. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ	26
Κεφάλαιο 2. ΔΡΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ LIE	31
2.1. ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΕΣ LIE	31
2.2. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ	35
2.3. ΓΝΗΣΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ	41
Κεφάλαιο 3. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΕΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ	52
3.1. ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	52
3.2. ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΟΡΜΗΣ	53
3.3. ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΑΝΑΓΩΓΗ	60
3.4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΩΝ ΡΟΩΝ	64
Κεφάλαιο 4. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ	67
4.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MORSE – BOTT	67
4.2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ	79
Κεφάλαιο 5. ΓΝΗΣΙΕΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ	92
5.1. Η ΑΛΓΕΒΡΑ $C^\infty(M_\mathcal{O})$	93
5.2. ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΟΝ $M_\mathcal{O}$	94
5.3. ΤΑ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ ΤΟΥ $M_\mathcal{O}$	97
Κεφάλαιο 6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	115
6.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ	115
6.2. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ MOSER	115
Βιβλιογραφία	117

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τους βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα από τη Συμπλεκτική Γεωμετρία που θα μας χρειαστούν. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας συμπλεκτικούς γραμμικούς χώρους, δηλαδή διανυσματικούς χώρους με μια μη εκφυλισμένη, αντισυμμετρική διγραμμική μορφή (συμπλεκτική μορφή). Έπειτα θα δούμε τη συμπλεκτική γραμμική ομάδα, την υποομάδα της γενικής γραμμικής κάτω από τη δράση της οποίας διατηρείται η συμπλεκτική μορφή. Στην τρίτη ενότητα θα ορίσουμε τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες, που είναι διαφορικές πολλαπλότητες μαζί με μια κλειστή, μη εκφυλισμένη 2-μορφή. Θα αποδείξουμε ένα από τα κεντρικότερα Θεωρήματα στη συμπλεκτική γεωμετρία, το λεγόμενο Θεώρημα Darboux. Το Θεώρημα αυτό λέει ότι τοπικά όλες οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες ίδιας διάστασης είναι ίδιες, άρα σε αντίθεση με τη Γεωμετρία Riemann, όπου υπάρχει η καμπυλότητα, δεν υπάρχουν τοπικές αναλλοίωτες. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις αυτού του Θεωρήματος. Θα εξετάσουμε τέλος τις μιγαδικές δομές, οι οποίες είναι στενά συνδεδεμένες με τη συμπλεκτική γεωμετρία.

Για την ανάλυσή μας στο κεφάλαιο αυτό έχουμε χρησιμοποιήσει τα [McS98] και [daS08].

1.1. ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω στο $\mathbb{R}$. Μια απεικόνιση $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται:

- **διγραμμική** αν $\omega(a_1v_1 + a_2v_2, w) = a_1\omega(v_1, w) + a_2\omega(v_2, w)$ και $\omega(w, a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\omega(w, v_1) + a_2\omega(w, v_2)$ για κάθε $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2, w \in V$.
- **αντισυμμετρική** αν $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$ για κάθε $v, w \in V$.
- **μη εκφυλισμένη** αν $\omega(v, w) = 0$ για κάθε $w \in V$ μόνο αν $v = 0$.

Το σύνολο των διγραμμικών και αντισυμμετρικών μορφών στον V μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $\wedge^2(V^*)$.

Το παρακάτω Θεώρημα μας λέει πως πάντα μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλη βάση, ώστε μια διγραμμική αντισυμμετρική μορφή να γραφεί σε ορισμένη κανονική μορφή. Θα είναι πολύ χρήσιμο στη συνέχεια για την απόδειξη του Θεωρήματος Darboux που αφορά μια αντίστοιχη κανονική μορφή που μπορούν να πάρουν 2-μορφές με συγκεκριμένες ιδιότητες πάνω από πολλαπλότητες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.1. *Αν V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n και $\omega \in \wedge^2(V^*)$, τότε υπάρχει βάση $\{f_1, \dots, f_n\}$ του V , ώστε αν $\{f^1, \dots, f^n\}$ η δυϊκή βάση του V^* , $\omega = f^1 \wedge f^2 + \dots + f^{2(p-1)} \wedge f^{2p}$. Το p εξαρτάται μόνο από την ω . Η ω είναι μη εκφυλισμένη αν και μόνο αν $2p = n$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση του V και

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e^i \wedge e^j$$

η έκφραση της ω στην αντίστοιχη βάση του $\Lambda^2(V^*)$, όπου με e^j συμβολίζουμε το δυϊκό του e_j . Αν $\omega = 0$, το ζητούμενο προκύπτει με χρήση αυτής της βάσης και για $p = 0$. Αν $\omega \neq 0$, θα υπάρχουν e_i, e_j ώστε $\omega(e_i, e_j) = a_{ij} \neq 0$. Επαναδιατάσσοντας, αν χρειάζεται τα διανύσματα της βάσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{12} \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$\omega = \left(e^1 - \frac{a_{23}}{a_{12}} e^3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{12}} e^n \right) \wedge (a_{12} e^2 + \dots + a_{1n} e^n) + \omega^1$$

με το ω^1 να μην εξαρτάται από τα e^1 και e^2 . Θέτουμε

$$\begin{aligned} f^1 &= e - \frac{a_{23}}{a_{12}} e^3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{12}} e^n \\ f^2 &= a_{12} e^2 + \dots + a_{1n} e^n \end{aligned}$$

Επαληθεύεται εύκολα ότι η $\{f^1, f^2, e^3, \dots, e^n\}$ είναι βάση του V και $\omega = f^1 \wedge f^2 + \omega^1$ με το ω^1 να μην εξαρτάται από τα e^1, e^2 . Αν $\omega^1 = 0$ έχουμε τελειώσει, αλλιώς εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο στην ω^1 και συνεχίζουμε μέχρι να γραφεί η ω στην επιθυμητή μορφή.

Θα δείξουμε τώρα ότι το p εξαρτάται μόνο από την ω και όχι από την επιλογή της βάσης. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$V \rightarrow V^* : v \rightarrow \omega(v, \cdot)$$

και έστω $E(\omega)$ η εικόνα της συνάρτησης αυτής. Παρατηρούμε ότι η $\{f^1, \dots, f^{2p}\}$ είναι βάση του $E(\omega)$ και επομένως $2p = \dim(E(\omega))$.

Η ω είναι μη εκφυλισμένη αν και μόνο αν η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός, επομένως αν και μόνο αν $E(\omega) = V^*$ και άρα $2p = \dim V^* = \dim V = n$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2. Μια μη εκφυλισμένη διγραμμική αντισυμμετρική μορφή ω στον V θα λέγεται **συμπλεκτική μορφή**. Η ω λέμε ότι είναι μια **συμπλεκτική δομή** στον V και το ζεύγος (V, ω) θα λέγεται **συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος**.

Οι συμπλεκτικοί χώροι (V_1, ω_1) και (V_2, ω_2) θα λέγονται **ισόμορφοι** αν υπάρχει $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, ώστε $\omega_2(\phi(v), \phi(w)) = \omega_1(v, w)$ για κάθε $v, w \in V_1$. Ο ϕ ονομάζεται τότε **γραμμικός συμπλεκτομορφισμός**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.3. Έστω (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος. Τότε η διάσταση του V είναι άρτια και υπάρχει βάση $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$, ώστε

$$\omega(u_i, u_j) = 0 = \omega(v_i, v_j)$$

$$\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$$

για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$. Μια τέτοια βάση λέγεται **συμπλεκτική βάση**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεσα από το Θεώρημα 1. $\square$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος αυτού είναι ότι δύο συμπλεκτικοί χώροι είναι ισομορφοί αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση.

Έστω (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος και W ένας υπόχωρος του. Το **συμπλεκτικό συμπλήρωμα του W** είναι ο υπόχωρος

$$(1.1.1) \quad W^\omega = \{u \in V : \omega(u, v) = 0 \text{ για κάθε } v \in W\}$$

Γενικά η τομή των W και W^ω δεν είναι κενή, π.χ. αν $W = \langle v \rangle$ τότε, αφού $\omega(v, v) = 0$, $W \subset W^\omega$. Έχουμε τους παρακάτω χαρακτηρισμούς για τον W ανάλογα με τη σχέση του με τον W^ω

- **ισοτροπικός** αν $W \subset W^\omega$
- **συν-ισοτροπικός** αν $W^\omega \subset W$
- **συμπλεκτικός** αν $W \cap W^\omega = \{0\}$
- **λαγκρανσιανός** αν $W = W^\omega$

Ο W είναι συμπλεκτικός υπόχωρος αν και μόνο αν η ω περιορισμένη σε αυτός είναι μη εκφυλισμένη, άρα αν και μόνο αν ο $(W, \omega|_W)$ είναι συμπλεκτικός χώρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.4. Αν $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ μια συμπλεκτική βάση, τότε οι υπόχωροι $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ και $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ είναι λαγκρανσιανοί, ένας υπόχωρος που παράγεται μόνο από u_i ή μόνο από v_i είναι ισοτροπικός, ενώ αν παράγεται από όλα τα u_i και μερικά v_i - ή όλα τα v_i και μερικά u_i - είναι ζο-ισοτροπικός.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1.5. Αν (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος και W, W_1 και W_2 υπόχωροι του V τότε

$$(1.1.2) \quad \dim W + \dim W^\omega = \dim V$$

$$(1.1.3) \quad (W^\omega)^\omega = W$$

$$(1.1.4) \quad W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_2^\omega \subset W_1^\omega$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η ω είναι μη εκφυλισμένη, ως συμπλεκτική μορφή, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1, επάγει ισομορφισμό

$$\iota_\omega : V \rightarrow V^*$$

με $\iota_\omega v(w) = \omega(v, w)$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\phi : V \rightarrow W^* : v \mapsto \iota_\omega v|_W$$

Έχουμε

$$\ker \phi = \{v \in V : \phi(v) = 0\} = \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \text{ για κάθε } w \in W\} = W^\omega$$

Επίσης η ϕ είναι επι, αφού η ι_ω είναι ισομορφισμός, άρα

$$\dim V = \dim(\ker \phi) + \dim(\operatorname{im} \phi) = \dim W^\omega + \dim W^* = \dim W^\omega + \dim W$$

Έστω $v \in W$. Τότε για κάθε $w \in W^\omega$ ισχύει $\omega(w, v) = -\omega(v, w) = 0$, άρα $w \in W^{\omega\omega}$. Επομένως $W \subset W^{\omega\omega}$. Αφού επιπλέον

$$\dim W = \dim V - \dim W^\omega = \dim W^{\omega\omega}$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (1.1.2) για τον W^ω , έπεται ότι $W = W^{\omega\omega}$. $\square$

Αν ο W είναι ισοτροπικός, άρα $\dim W \leq \dim W^\omega$, έπεται ότι από την (1.1.1) ότι $\dim W \leq \frac{\dim V}{2}$. Ομοίως, αν ο W είναι ζο-ισοτροπικός, τότε $\dim W \geq \frac{\dim V}{2}$. Αν τέλος ο W είναι λαγκρανσιανός, τότε $\dim W = \dim W^\omega = \dim V/2$.

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει τη σημασία των λαγκρανσιανών υποχώρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.6. Έστω (V, ω) συμπλεκτικός χώρος με $\dim V = 2n$.

(i) Κάθε ισοτροπικός υπόχωρος περιέχεται σε ένα λαγκρανσιανό. Μάλιστα ένας ισοτροπικός υπόχωρος είναι λαγκρανσιανός αν και μόνο αν είναι μεγιστικός ισοτροπικός.

(ii) Κάθε βάση ενός λαγκρανσιανού υποχώρου επεκτείνεται σε συμπλεκτική βάση του V .

(iii) Έστω Y λαγκρανσιανός υπόχωρος του V . Τότε ο (V, ω) είναι συμπλεκτομορφικός με τον $(Y \oplus Y^*, \omega_{Y \oplus Y^*})$, όπου $\omega_{Y \oplus Y^*}(u \oplus a, v \oplus b) = b(u) - a(v)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Κάθε ισοτροπικός περιέχεται σε μεγιστικό ισοτροπικό, άρα αρκεί να δείξω το δεύτερο μέρος της πρότασης.

Έστω W λαγκρανσιανός υπόχωρος του V . Επομένως είναι και ισοτροπικός. Θα δείξουμε ότι είναι μεγιστικός ισοτροπικός. Έστω W' ισοτροπικός υπόχωρος με $W \subset W'$. Τότε

$$W'^\omega \subset W^\omega = W \subset W' \subset W'^\omega$$

και επομένως $W = W'$.

Έστω τώρα W μεγιστικός ισοτροπικός υπόχωρος. Ισχύει $W \subset W^\omega$. Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο πως δεν μπορεί να είναι γνήσιο υποσύνολο, άρα ισχύει ισότητα και επομένως ο W είναι λαγκρανσιανός. Υποθέτουμε ότι $W \subsetneq W^\omega$. Επομένως υπάρχει $0 \neq w \in W^\omega - W$. Θεωρούμε το χώρο W' που παράγεται από το σύνολο $W \cup \{w\}$. Ο W' είναι ισοτροπικός και περιέχει τον W . Πράγματι τα στοιχεία του W' έχουν τη μορφή $w + au, w' + bu$ με $w, w' \in W, a, b \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\omega(w + au, w' + bu) = 0$$

που σημαίνει ότι $W' \subset W'^\omega$. Άτοπο, αφού W μεγιστικός ισοτροπικός.

(ii) Έστω W λαγκρανσιανός υπόχωρος του V και $\{v_1, \dots, v_k\}$ μια βάση του. Όπως έχουμε δει $\dim W = n$, άρα $k = n$. Θεωρούμε τον ισομορφισμό

$$\iota_\omega : V \rightarrow V^*$$

που έχουμε περιγράψει. Αν $v^1, \dots, v^n \in V^*$ τα δυϊκά των $v_1, \dots, v_n$, θέτουμε $u_1 = \iota_\omega^{-1}(v^1), \dots, u_n = \iota_\omega^{-1}(v^n)$. Τότε

$$\omega(v_i, v_j) = 0 \text{ αφού ο } W \text{ είναι ισοτροπικός}$$

$$\omega(u_i, v_j) = \iota_\omega u_i(v_j) = v^i(v_j) = \delta_{ij}$$

$$\omega(u_i, u_j) = \iota_\omega u_i(u_j) = v^i(u_j) = 0$$

Άρα η $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ είναι μια συμπλεκτική βάση του V (η γραμμική ανεξαρτησία έπετατο άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις).

(iii) Εύκολα φαίνεται ότι ο $(Y \oplus Y^*, \omega_{Y \oplus Y^*})$ είναι συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος.

Αφού ο Y είναι λαγκρανσιανός υπόχωρος του V , τότε $\dim Y = n$. Έστω $e_1, \dots, e_n$ μια βάση του Y . Από το (ii) θα υπάρχουν $f_1, \dots, f_n \in V$ ώστε η $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ να είναι βάση του V και $\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j), \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Έστω $e_i^*, i = 1, \dots, n$ τα δυϊκά των $e_i, i = 1, \dots, n$. Αυτά αποτελούν μια βάση του Y^* . Ορίζουμε

$$\phi : Y \oplus Y^* \rightarrow V$$

$$e_i \mapsto e_i$$

$$e_j^* \mapsto f_j$$

και επεκτείνουμε γραμμικά. Επαληθεύεται άμεσα ότι η ϕ είναι συμπλεκτομορφισμός. $\square$

Το επόμενο Θεώρημα αφορά πηλίκα συμπλεκτικών χώρων και πως μπορούμε, υπό συνθήκες, να ορίσουμε σε αυτά κατάλληλη συμπλεκτική μορφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.7. (Γραμμικό symplectic reduction) Έστω (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος και $W \subset V$ συν-ισοτροπικός υπόχωρος. Τότε στο χώρο πηλίκου $W' = W/W^\omega$ επάγεται από την ω με φυσικό τρόπο συμπλεκτική μορφή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ένα στοιχείο του W' έχει τη μορφή $[w] = w + W^\omega, w \in W$. Ορίζουμε

$$\omega' : W' \times W' \rightarrow \mathbb{R}$$

με $\omega'([w_1], [w_2]) = \omega(w_1, w_2)$ για $w_1, w_2 \in W$.

Αν $[w_1] = [w'_1]$ και $[w_2] = [w'_2]$ τότε υπάρχουν $u_1, u_2 \in W^\omega \subset W$ ώστε $w_1 = w'_1 + u_1, w_2 = w'_2 + u_2$. Αφού $\omega(u_1, u_2) = \omega(w_i, u_j) = 0$ έπεται ότι $\omega(w_1, w_2) = \omega(w'_1, w'_2)$ και επομένως η ω' είναι καλά ορισμένη.

Το ότι η ω' είναι διγραμμική και αντισυμμετρική έπεται άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες τις ω . Η ω' είναι και μη εκφυλισμένη, και άρα συμπλεκτική μορφή στον W' , αφού

$$\omega'([w], [v]) = 0, \forall [v] \in W' \Rightarrow \omega(w, v) = 0, \forall v \in W$$

και επομένως $w \in W^\omega$, δηλαδή $[w] = 0$. □

1.2. Η ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΜΑΔΑ

Θα μελετήσουμε τώρα τους συμπλεκτομορφισμούς σε ένα χώρο. Αφού, όπως είδαμε, όλοι οι χώροι ίδιας διάστασης είναι ισόμορφοι, αρκεί να εξετάσουμε μόνο τον $\mathbb{R}^{2n}$ με μια συμπλεκτική δομή.

Έστω $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ καρτεσιανές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^{2n}$. Θεωρούμε τον πίνακα J_o (και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση που ορίζει ως προς αυτή τη βάση) με

$$J_o = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Στον $\mathbb{R}^{2n}$ ορίζουμε τη διγραμμική απεικόνιση ω_o με $\omega_o(u, v) = \langle J_o v, u \rangle = -v^T J_o u$ για $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ (όπου οι συντεταγμένες των u, v είναι ως προς τη βάση αυτή).

Παρατηρούμε ότι $J_o^2 = -I$, άρα ο J_o είναι αντιστρέψιμος και $J_o^{-1} = J_o^T = -J_o$. Επομένως η ω_o είναι συμπλεκτική μορφή στον $\mathbb{R}^{2n}$ και ο $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος.

Συμβολίζουμε το σύνολο των συμπλεκτομορφισμών στον $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ με $Sp(2n)$. Είναι δηλαδή

$$Sp(2n) = \{\Psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} | \Psi \text{ γραμμική και } \Psi^* \omega_o = \omega_o\}$$

όπου $\Psi^* \omega_o(u, v) = \omega_o(\Psi u, \Psi v)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Psi \in Sp(2n) &\Leftrightarrow \omega_o(u, v) = \omega_o(\Psi u, \Psi v), \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \\ &\Leftrightarrow v^T J_o u = v^T \Psi^T J_o \Psi u, \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \\ &\Leftrightarrow \Psi^T J_o \Psi = J_o \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $J_o \in Sp(2n)$. Το επόμενο Λήμμα μας εξασφαλίζει ότι η $Sp(2n)$ είναι ομάδα. Θα ονομάζεται **συμπλεκτική γραμμική ομάδα** και τα στοιχεία της (ή σωστότερα οι αντίστοιχοι πίνακες) **συμπλεκτικοί πίνακες**.

ΛΗΜΜΑ 1.2.1. Η $Sp(2n)$ είναι υποομάδα της $GL(2n)$ και αν $\Psi \in Sp(2n)$ τότε και $\Psi^T \in Sp(2n)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ο Ψ ανήκει στην $Sp(2n)$, τότε $\Psi^T J_o \Psi = J_o$. Παίρνοντας ορίζουσες στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο J_o αντιστρέφεται, άρα έχει μη μηδενική ορίζουσα, προκύπτει ότι $(\det \Psi)^2 = 1$, άρα $\Psi \in GL(2n)$.

Άμεσα ο μοναδιαίος πίνακας ανήκει στη $Sp(2n)$.

Έστω $\Psi \in Sp(2n)$ οπότε $\Psi^T J_o \Psi = J_o$. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με $(\Psi^T)^{-1}$ και από δεξιά με Ψ^{-1} , προκύπτει

$$J_o = (\Psi^T)^{-1} J_o \Psi^{-1} = (\Psi^{-1})^T J_o \Psi^{-1}$$

οπότε $\Psi^{-1} \in Sp(2n)$. Παίρνοντας αντίστροφους στην τελευταία σχέση έχουμε

$$-J_o = J_o^{-1} = -\Psi J_o \Psi^T$$

άρα και $\Psi^T \in Sp(2n)$.

Αν τώρα $\Psi_1, \Psi_2 \in Sp(2n)$ τότε

$$(\Psi_1 \Psi_2)^T J_o (\Psi_1 \Psi_2) = \Psi_2^T (\Psi_1^T J_o \Psi_1) \Psi_2 = \Psi_2^T J_o \Psi_2 = J_o$$

άρα $\Psi_1 \Psi_2 \in Sp(2n)$. □

Όπως είδαμε στην παραπάνω απόδειξη, $(\det \Psi)^2 = 1$ για $\Psi \in Sp(2n)$. Θα δείξουμε ότι και η ορίζουσα ισούται με ένα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.2. Κάθε συμπλεκτικός πίνακας έχει ορίζουσα ίση με ένα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\omega_o = \sum_i dx^1 \wedge dy^i$ έχουμε

$$(1.2.1) \quad \omega_o^n = n! dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$$

που σημαίνει ότι η ω_o^n είναι μια volume form (διαφορική μορφή μέγιστης τάξης που δεν μηδενίζεται πουθενά).

Για $\Psi \in Sp(2n)$, οπότε $\Psi^* \omega_o = \omega_o$, έχουμε

$$\Psi^* \omega_o^n = \Psi^* \omega_o \wedge \cdots \wedge \Psi^* \omega_o = \omega_o^n$$

n -φορές

και επομένως από τον ορισμό της ορίζουσας έπεται ότι $\det \Psi = 1$. □

1.3. ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1. Έστω M διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μια **συμπλεκτική δομή** ή **συμπλεκτική μορφή** στην M είναι μια εκφυλισμένη - εννοούμε ότι ο περιορισμός της σε κάθε εφαπτόμενο επίπεδο είναι μη εκφυλισμένη μορφή- και κλειστή (δηλαδή $d\omega = 0$, όπου d είναι η exterior derivative) 2-μορφή. Μια **συμπλεκτική πολλαπλότητα** είναι ένα ζεύγος (M, ω) , όπου η M είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και η ω συμπλεκτική μορφή στη M .

Ο περιορισμός μια συμπλεκτική μορφής ω στον $T_p M, p \in M$, $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, είναι μη εκφυλισμένη, εξ'ορισμού της ω , και αντισυμμετρική, αφού η ω είναι 2-μορφή, διγραμμική μορφή. Είναι επομένως μια συμπλεκτική μορφή στο διανυσματικό χώρο $T_p M$. Επομένως ο $T_p M$, και επομένως και η M , πρέπει να έχουν άρτια διάσταση. Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν δέχεται κάθε πολλαπλότητα συμπλεκτική δομή.

Εκτός από τη διάσταση υπάρχουν και άλλοι τοπολογικοί περιορισμοί. Έτσι, μια συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη, αφού η ω^n , με $n = \dim M/2$, είναι μορφή όγκου, αφού για κάθε $p \in M$ η ω_p^n θα είναι μορφή όγκου στον αντίστοιχο εφαπτόμενο χώρο, όπως έχουμε δει.

Ένας άλλος περιορισμός είναι πως αν η (M^{2n}, ω) είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα τότε $H_{dR}^{2k}(M) \neq 0$ για $k = 0, 1, \dots, n$. Μάλιστα η ω^k , η οποία είναι κλειστή αφού είναι και η ω , δεν είναι ακριβής, και επομένως $0 \neq [\omega^k] \in H_{dR}^{2k}(M)$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι η ω^k είναι κλειστή. Τότε υπάρχει $\theta \in \Omega^{2k-1}(M)$, ώστε $\omega^k = d\theta$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγίσεως γινομένου διαφορικών μορφών και το γεγονός ότι η ω είναι κλειστή προκύπτει ότι $\omega^n = d(\theta \wedge \omega^{n-k})$. Αφού η ω^n είναι μορφή όγκου, για μια περιοχή ενός σημείου της πολλαπλότητας ισόμορφης με την ανοιχτή μπάλα B^{2n} , έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \neq \text{volume}(B^{2n}) &= \int_{B^{2n}} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \int_{B^{2n}} d(\theta \wedge \omega^{n-k}) \\ &= \int_{\partial B^{2n}=0} \theta \wedge \omega^{n-k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου για τη τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα του Stokes.

Περισσότερα για τον αν μπορούν να δεχτούν συμπλεκτική δομή πολλαπλότητες με συγκεκριμένες ομάδες συνομολογίας στις εργασίες των Donaldson [Don96] και Taubes [T94, T95], ενώ μια προσπάθεια για τοπολογικό χαρακτηρισμό των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων περιέχεται στην εργασία του Gompf [G04].

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.2. Έστω $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Μια συνάρτηση $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ θα λέγεται συμπλεκτομορφισμός αν είναι αμφιδιαφόριση και $\psi^*\omega_2 = \omega_1$, δηλαδή για κάθε $p \in M_1, u, v \in T_p M_1$ $(\psi^*\omega_2)_p(u, v) := \omega_2|_{\psi(p)}(T_p\psi \cdot u, T_p\psi \cdot v) = \omega_1|_p(u, v)$.

1.3.1. Παραδείγματα συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων.

- (1) Θεωρούμε τον χώρο $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ με $\omega_o = \sum_i dx_i \wedge dy_i$, όπου $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ μια βάση του $\mathbb{R}^{2n}$. Προφανώς είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα. Αν $u = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n), v = (a'_1, \dots, a'_n, b'_1, \dots, b'_n) \in T_x \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ (ως προς την παραπάνω βάση) τότε

$$\omega_o(X, Y) = \sum_{i=1}^n (a_i b'_i - a'_i b_i) = -u^T J_o v$$

- (2) Έστω $(M_i, \omega_i), i = 1, 2$ συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Τότε η $(M_1 \times M_2, \omega_1 \times \omega_2)$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα.
- (3) **Η συνεφαπτόμενη δέσμη.** Έστω X πολλαπλότητα διάστασης n . Η συνεφαπτόμενη δέσμη

$$T^*X = \{(x, \xi) : x \in X, \xi \in T_x^*X\}$$

είναι πολλαπλότητα διάστασης $2n$. Αν $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n)$ χάρτης στην X με $x \in \mathcal{U}$, τότε κάθε $\xi \in T_x^*X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\xi = \sum_i \xi_i dx_i|_x$, οπότε ο $(T^*\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ είναι χάρτης για την T^*X . Ορίζουμε στην $T^*\mathcal{U}$ τη 2-μορφή

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i$$

η οποία είναι προφανώς συμπλεκτική. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο ορισμός της ω_{can} είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των συντεταγμένων. Η ω_{can} ονομάζεται **κανονική συμπλεκτική μορφή**. Υπάρχει και άλλος τρόπος να την ορίσουμε. Έστω

$$\begin{aligned}\pi : M = T^*X &\rightarrow X \\ (x, \xi) &\mapsto x\end{aligned}$$

τότε για $p = (x, \xi) \in M$

$$d\pi_p : T_p M \rightarrow T_x X$$

και

$$\begin{aligned}d\pi^* : T_x^* X &\rightarrow T_p^* M \\ \xi &\mapsto \xi \circ d\pi_p\end{aligned}$$

Ορίζουμε την 1-μορφή $\lambda_{can} \in T^*M$ με

$$\lambda_{can}|_p = d\pi_p^*(\xi), \text{ όπου } p = (x, \xi)$$

Η λ λέγεται **ταυτολογική μορφή**. Αν $(x, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ χάρτης στην $T^*\mathcal{U}$, τότε για $p = (x; \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)) \in T^*\mathcal{U}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_{can}|_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right|_p \right) &= \bar{\xi} \left(d\pi_p \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right|_p \right) = \bar{\xi}(0) = 0 \\ \lambda_{can}|_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) &= \bar{\xi} \left(d\pi_p \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) = \bar{\xi} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) = \bar{\xi}_i\end{aligned}$$

άρα $\lambda_{can} = \sum_i \xi_i dx_i$ και επιμένως $\omega_{can} = -d\lambda_{can}$. Η λ_{can} , άρα και η ω_{can} , κατασκευάστηκε χωρίς αναφορά σε συντεταγμένες.

1.3.2. Συμπλεκτικά και χαμιλτονιανά πεδία και η αγγύλη Poisson. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και $H \in C^\infty(M)$. Το διανυσματικό πεδίο X_H που προκύπτει από την H μέσω της σχέσης

$$(1.3.1) \quad \iota_{X_H} \omega = dH$$

όπου $(\iota_{X_H} \omega)_p(v) = \omega_p(X_H(p), v)$ για $p \in M, v \in T_p M$, ονομάζεται **χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο** και η H **χαμιλτονιανή του πεδίου**. Οι ονομασίες αυτές θα γίνουν κατανοητές από τα παραδείγματα που θα δώσουμε στη συνέχεια και σχετίζονται με την κλασική μηχανική. Το X_H είναι μοναδικό, αφού η ω είναι μη εκφυλισμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.3. Θεωρούμε το συμπλεκτικό χώρο $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o = \sum_i dq_i \wedge dp_i)$ και έστω $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Το διανυσματικό πεδίο $-J_o dH$ είναι το χαμιλτονιανό πεδίο της H . Οι εξισώσεις της ροής αυτού του πεδίου είναι

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}$$

Αν η H είναι η ενέργεια ενός μηχανικού συστήματος, αυτές είναι οι εξισώσεις κίνησης στην χαμιλτονιανή τους μορφή. Έτσι εξηγείται και η προέλευση του ονόματος χαμιλτονιανό πεδίο.

Θεωρούμε τη σφαίρα S^2 με κυλινδρικές συντεταγμένες (θ, h) (αν σκεφτούμε τη σφαίρα εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) με αρχή των αξόνων το κέντρο της σφαίρας, για $p \in S^2$ η $\theta(p)$ είναι η γωνία ανάμεσα στο υπερ-πίπεδο, που περιέχει τον άξονα z και το σημείο p , και τον άξονα x , και $h(p)$ ισούται με τη z συντεταγμένη του p). Η $d\theta \wedge dh$ είναι συμπλεκτική μορφή στην S^2 . Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(\theta, h) = h$. Το $X_H = \frac{\partial}{\partial \theta}$ είναι το χαμιλτονιανό πεδίο για την H . Η ροή του είναι $\phi_t(\theta, h) = (\theta + t, h)$ (κύκλοι παράλληλοι στο xy επίπεδο).

Αν συμβολίσουμε με $\gamma_{H_t}(p) = \gamma_{X_H}(t, p)$ τη ροή του X_H από το σημείο p τη στιγμή t έχουμε το ακόλουθο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 1.3.4. *Η γ_{H_t} , για τα t για τα οποία ορίζεται, διατηρεί την ω , δηλαδή $\gamma_{H_t}^* \omega = \omega$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_{H_t}^* \omega &= \gamma_{H_t}^* \mathcal{L}_{X_H} \omega \\ &= \gamma_{H_t}^* (d\iota_{X_H} \omega + \iota_{X_H} d\omega) \\ &= \gamma_{H_t}^* ddH \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου για την πρώτη ισότητα δες στο Παράρτημα, για τη δεύτερη χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του Cartan, ενώ για στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η ω είναι κλειστή. $\square$

Αν το πεδίο X_H είναι πλήρες, δηλαδή η ροή του από κάθε σημείο ορίζεται για κάθε t , τότε η $\gamma_{H_t} : M \rightarrow M$ είναι αμφιδιαφόριση για κάθε t (από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων) και μάλιστα από το παραπάνω Λήμμα είναι συμπλεκτομορφισμός. Αυτό είναι μια πρώτη ένδειξη ότι η ομάδα συμπλεκτομορφισμών μιας συμπλεκτικής πολλαπλότητας είναι πολύ μεγάλη, αφού κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση ορίζει μια (μονοπαραμετρική) οικογένεια συμπλεκτομορφισμών.

Η ακόλουθη πρόταση είναι μια γενίκευση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στα πλαίσια της συμπλεκτικής γεωμετρίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.5. *Η χαμιλτονιανή H είναι σταθερή στις τροχιές του X_H .*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\gamma_{H_t}) &= dH \left(\frac{d}{dt} \gamma_{H_t} \right) \\ &= dH(X_H) \\ &= \iota_{X_H} \omega(X_H) \\ &= \omega(X_H, X_H) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Με άλλα λόγια κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του X_H περιέχεται σε ένα επιπεδοσύνολο της H . Γι'αυτό και στη συνέχεια με το reduction θα περιοριζόμαστε σε επιπεδοσύνολα του moment map, που είναι μια γενίκευση της χαμιλτονιανής.

Η παρακάτω πρόταση περιέχει κάποιες βασικές ιδιότητες για το πως να βρίσκουμε τα χαμιλτονιανά πεδία συναρτήσεων που προκύπτουν από συνδυασμούς άλλων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.6. Για $f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ και $\phi \in \text{Symp}(M, \omega)$ ισχύει

$$(1.3.2) \quad X_{af+bg} = aX_f + bX_g$$

$$(1.3.3) \quad X_{fg} = fX_g + gX_f$$

$$(1.3.4) \quad \phi^* X_f = X_{\phi^* f}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$\begin{aligned} \iota_{X_{af+bg}} \omega &= d(af + bg) \\ &= adf + bdg \\ &= a\iota_{X_f} \omega + b\iota_{X_g} \omega \\ &= \iota_{aX_f + bX_g} \omega \end{aligned}$$

και αφού η ω είναι μη εκφυλισμένη έπεται ότι $X_{af+bg} = aX_f + bX_g$.

Επίσης

$$\begin{aligned} \iota_{X_{fg}} \omega &= d(fg) \\ &= gdf + fdg \\ &= g\iota_{X_f} \omega + f\iota_{X_g} \omega \\ &= \iota_{gX_f + fX_g} \omega \end{aligned}$$

και άρα $X_{fg} = fX_g + gX_f$.

Για την τρίτη σχέση τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned} \iota_{X_{\phi^* f}} \omega &= d(\phi^* f) \\ &= \phi^* df \\ &= \phi^* \iota_{X_f} \omega \\ &= \iota_{\phi^* X_f} \phi^* \omega \\ &= \iota_{\phi^* X_f} \omega \end{aligned}$$

όπου στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\phi \in \text{Symp}(M, \omega)$. Οπότε, αφού η ω είναι μη εκφυλισμένη, έπεται ότι $\phi^* X_f = X_{\phi^* f}$. $\square$

Ένα διανυσματικό πεδίο X θα λέγεται **συμπλεκτικό διανυσματικό πεδίο** αν διατηρεί την ω , δηλαδή $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Όμως από τον τύπο του Cartan

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota_X d\omega + d\iota_X \omega = d\iota_X \omega$$

αφού $d\omega = 0$. Άρα ένα διανυσματικό πεδίο X είναι συμπλεκτικό αν και μόνο αν $d\iota_X \omega = 0$, δηλαδή η μορφή $\iota_X \omega$ είναι κλειστή.

Όπως έχουμε πει το X θα είναι χαμιλτονιανό πεδίο αν υπάρχει $H \in C^\infty(M)$, ώστε $\iota_X \omega = dH$. Στην περίπτωση αυτή η μορφή $\iota_X \omega$ είναι ακριβής, άρα και κλειστή. Επομένως ένα χαμιλτονιανό πεδίο είναι συμπλεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε και στα παραδείγματα. Ισχύει μόνο τοπικά, αφού μια κλειστή μορφή είναι τοπικά ακριβής. Τα εμπόδια για να είναι ένα συμπλεκτικό πεδίο χαμιλτονιανό περιέχονται στην $H_{dR}^1(M)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.7. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και X διανυσματικό πεδίο στη M . Το X είναι συμπλεκτικό αν και μόνο αν η ροή του γ_t διατηρεί τη συμπλεκτική δομή, δηλαδή $\gamma_t^* \omega = \omega$ για τα t που ορίζεται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma_t^*\omega &= \gamma_t^*\mathcal{L}_X\omega \\ &= \gamma_t^*(d\iota_X\omega + \iota_X d\omega) \\ &\stackrel{d\omega=0}{=} \gamma_t^*d\iota_X\omega\end{aligned}$$

Επομένως αν το X είναι συμπλεκτικό τότε $d\iota_X\omega = 0$ και άρα $\frac{d}{dt}\gamma_t^*\omega = 0$ και τελικά $\gamma_t^*\omega = \text{σταθ.} = \gamma_0^*\omega = \omega$.

Αν από την άλλη $\gamma_t^*\omega = \omega$ για κάθε t , τότε

$$\gamma_t^*d\iota_X\omega = \frac{d}{dt}\gamma_t^*\omega = 0$$

για κάθε t . Για $t = 0$ παίρνουμε $d\iota_X\omega = 0$, δηλαδή το πεδίο είναι συμπλεκτικό. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.8. Αν (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και X, Y συμπλεκτικά πεδία στη M , τότε η αγγύλη $Lie [X, Y]$ είναι χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο με χαμιλτονιανή $\omega(Y, X)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$\begin{aligned}\iota_{[X, Y]}\omega &= \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y\mathcal{L}_X\omega \\ &= d\iota_X\iota_Y\omega + \iota_X d\iota_Y\omega - \iota_Y d\iota_X\omega - \iota_Y\iota_X d\omega \\ &= d(\omega(Y, X))\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε τύπος από το Παράρτημα, για τη δεύτερη εφαρμόστηκε για τους δύο όρους ο τύπος του Cartan και για την τρίτη το γεγονός ότι $d\omega = 0$ και $d\iota_X\omega = 0 = d\iota_Y\omega$, αφού τα πεδία είναι συμπλεκτικά. $\square$

Αν συμβολίσουμε $\mathfrak{X}^{sym}(M)$ και $\mathfrak{X}^{ham}(M)$ τα συμπλεκτικά και τα χαμιλτονιανά πεδία αντίστοιχα, τότε από την παραπάνω πρόταση έπεται το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3.9. $H(\mathfrak{X}^{ham}(M), [\cdot, \cdot])$ είναι υπάλγεβρα Lie της $(\mathfrak{X}^{sym}(M), [\cdot, \cdot])$ η οποία είναι υπάλγεβρα Lie της $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.10. Μια **πολλαπλότητα Poisson** είναι ένα ζεύγος $(M, \{\cdot, \cdot\})$, όπου η M είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και η $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ είναι μια διγραμμική αεπικόνιση με τις εξής ιδιότητες:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (αντισυμμετρική)
- $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (ταυτότητα Jacobi)
- $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ (κανόνας Leibniz)

για κάθε $f, g, h \in C^\infty(M)$. Η $\{\cdot, \cdot\}$ λέγεται **αγγύλη Poisson** (ή **δομή Poisson**) στη M . Η $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ είναι μια **άλγεβρα Poisson**. Γενικότερα μια άλγεβρα Poisson A είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα εφοδιασμένος, εκτός από την πρόσθεση, με δύο ακόμα πράξεις που τις συμβολίζουμε με $\cdot$ και $\{\cdot, \cdot\}$ τέτοιες ώστε η $(A, \cdot)$ να είναι προσεταιριστική άλγεβρα και η $\{\cdot, \cdot\}$ που λέγεται αγγύλη Poisson να είναι διγραμμική, αντισυμμετρική και να ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi και τον κανόνα του Leibniz.

Έστω τώρα (M, ω) μια συμπλεκτική πολλαπλότητα. Θα δείξουμε ότι στην M ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο μια αγγύλη Poisson. Οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες είναι επομένως ειδική περίπτωση των πολλαπλοτήτων Poisson. Υπάρχουν πολλαπλότητες Poisson που δεν είναι συμπλεκτικές πολλαπλότητες, όπως θα δούμε στα

παραδείγματα. Για f, g στην $C^\infty(M)$ ορίζουμε

$$(1.3.5) \quad \{f, g\}_\omega = \omega(X_f, X_g)$$

όπου τα X_f, X_g είναι τα χαμιλτονιανά πεδία με χαμιλτονιανές τις f και g αντίστοιχα. Πριν δείξουμε ότι η $\{\cdot, \cdot\}_\omega$ ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας αγγύλης Poisson θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα. Όταν είναι κατανοητό ποια είναι η συμπλεκτική δομή την αντίστοιχη αγγύλη Poisson θα τη συμβολίζουμε για ευκολία απλά $\{\cdot, \cdot\}$.

ΛΗΜΜΑ 1.3.11. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και $\{\cdot, \cdot\}$ η αγγύλη που ορίζεται από την ω μέσω της (1.3.4). Τότε για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$

$$(1.3.6) \quad X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$$

και αν $\phi_{X_g}^t$ η ροή του πεδίου X_g

$$(1.3.7) \quad \{f, g\} = df(X_g) = X_g(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\phi_{X_g}^t)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την Πρόταση (1.3.8) έχουμε ότι

$$\iota_{[X_g, X_f]}\omega = d(\omega(X_f, X_g))$$

που σημαίνει ότι

$$[X_f, X_g] = -[X_g, X_f] = -X_{\omega(X_f, X_g)} = -X_{\{f, g\}}$$

Για την απόδειξη της άλλης σχέσης τώρα

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(X_f, X_g) \\ &= \iota_{X_f}\omega(X_g) \\ &= df(X_g) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\phi_{X_g}^t) \end{aligned}$$

□

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι η αγγύλη που ορίσαμε πληρεί τις ιδιότητες μιας αγγύλης Poisson. Για $f, g, h, f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- Αρκεί να δείξουμε ότι είναι γραμμική ως προς το πρώτο όρισμα. Η γραμμικότητα ως προς το δεύτερο έπεται από αυτή και την αντισυμμετρία που θα αποδείξουμε μετά.

$$\begin{aligned} \{af_1 + bf_2, g\} &= \omega(X_{af_1 + bf_2}, X_g) \\ &= \omega(aX_{f_1} + bX_{f_2}, X_g) \\ &= a\omega(X_{f_1}, X_g) + b\omega(X_{f_2}, X_g) \\ &= a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\} \end{aligned}$$

όπου για τη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση (1.3.5).

•

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -\{g, f\}$$

- Αφού $d\omega = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
0 = d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f\omega(X_g, X_h) - X_g\omega(X_f, X_h) + X_h\omega(X_f, X_g) \\
&\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\
&= X_f\{g, h\} - X_g\{f, h\} + X_h\{f, g\} \\
&\quad + \omega(X_{\{f, g\}}, X_h) + \omega(X_{\{h, f\}}, X_g) + \omega(X_{\{g, h\}}, X_f) \\
&= \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{f, g\}, h\} \\
&\quad + \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} \\
&= -2(\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\})
\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της exterior derivative.

•

$$\begin{aligned}
\{fg, h\} &= \omega(X_{fg}, X_g) \\
&= \omega(fX_g + gX_f, X_h) \\
&= f\omega(X_g, X_h) + g\omega(X_f, X_h) \\
&= f\{g, h\} + g\{f, h\}
\end{aligned}$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση (1.3.5).

Ας δούμε τώρα μια χρήσιμη Πρόταση που γενικεύει την (1.3.4).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.12. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και $\{\cdot, \cdot\}$ η επαγόμενη από την ω αγγύλη Poisson. Αν $f, H \in C^\infty(M)$ με $\{f, H\} = 0$, τότε η f είναι σταθερή σε κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του X_H .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ϕ_H^t η ροή του X_H τότε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(\phi_H^t) &= df(X_H) \\
&= X_H(f) \\
&= \{f, H\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το Λήμμα (1.3.11). □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.13. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα, $f, g \in \text{Sym}(M, \omega)$ και $\phi \in \text{Sym}(M, \omega)$. Αν $\{\cdot, \cdot\}$ η αγγύλη Poisson που προκύπτει από την ω τότε $\phi^*\{f, g\} = \{\phi^*f, \phi^*g\}$, όπου $\phi^*f = f \circ \phi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\phi \in \text{Sym}(M, \omega)$, από την Πρόταση (1.3.6) έχουμε $\phi^* X_f = X_{\phi^* f}$ και $\phi^* X_g = X_{\phi^* g}$. Για $p \in M$ έχουμε

$$\begin{aligned} \{\phi^* f, \phi^* g\}(p) &= \omega_p \left(X_{\phi^* f}|_p, X_{\phi^* g}|_p \right) \\ &= \omega_p \left(\phi^* X_f|_p, \phi^* X_g|_p \right) \\ &= \omega_{\phi^{-1}(\phi(p))} \left(T_{\phi(p)} \phi^{-1} X_f|_{\phi(p)}, T_{\phi(p)} \phi^{-1} \cdot X_g|_{\phi(p)} \right) \\ &= \left((\phi^{-1})^* \omega \right)_{\phi(p)} \left(X_f|_{\phi(p)}, X_g|_{\phi(p)} \right) \\ &= \omega_{\phi(p)} \left(X_f|_{\phi(p)}, X_g|_{\phi(p)} \right) \\ &= \{f, g\}(\phi(p)) = \phi^* \{f, g\}(p) \end{aligned}$$

όπου στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $(\phi^{-1})^* \omega = \omega$, αφού ο ϕ και άρα και ο ϕ^{-1} είναι συμπλεκτομορφισμός. $\square$

1.3.3. Θεώρημα Darboux. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια πρώτη απόδειξη ενός θεμελιώδους Θεωρήματος της συμπλεκτικής γεωμετρίας, του Θεωρήματος Darboux. Η απόδειξη αυτή είναι γεωμετρική και περιέχεται στο βιβλίο του Arnold [Arn89]. Το Θεώρημα αυτό λέει πως τοπικά όλες οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες ίδιας διάστασης είναι ίδιες (τοπικά συμπλεκτομορφικές), άρα σε αντίθεση π.χ. με τη γεωμετρία Riemann που υπάρχει η καμπυλότητα, στη συμπλεκτική γεωμετρία δεν υπάρχουν τοπικές αναλλοίωτες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.14 (Darboux). Έστω (M^{2n}, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα. Για κάθε σημείο της M υπάρχει χάρτης $(U, (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n))$, ώστε στο U να ισχύει

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

Χάρτες που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται **χάρτες Darboux**.

Παρατηρούμε πως ο $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ είναι χάρτης Darboux αν και μόνο αν $\{p_i, p_j\} = 0 = \{q_i, q_j\}$ και $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Πράγματι αν $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ χάρτης Darboux, τότε

$$\begin{aligned} X_{p_i}(p_j) &= \omega(X_{p_j}, X_{p_i}) = 0 \\ X_{p_i}(q_j) &= \omega(X_{q_j}, X_{p_i}) = -\delta_{ij} \end{aligned}$$

άρα $X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i}$. Επίσης

$$\begin{aligned} X_{q_i}(p_j) &= \omega(X_{p_j}, X_{q_i}) = \delta_{ij} \\ X_{q_i}(q_j) &= \omega(X_{q_j}, X_{q_i}) = 0 \end{aligned}$$

άρα $X_{q_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$. Οπότε

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \omega(X_{p_i}, X_{p_j}) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = 0 \\ \{q_i, q_j\} &= \omega(X_{q_i}, X_{q_j}) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0 \\ \{p_i, q_j\} &= \omega(X_{p_i}, X_{q_j}) = \omega\left(-\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Αντίστοφα, αν $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ χάρτης με τις δοσμένες ιδιότητες τότε

$$X_{p_i}(p_j) = \{p_j, p_i\} = 0$$

$$X_{p_i}(q_j) = \{q_j, p_i\} = -\delta_{ij}$$

άρα $X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i}$. Ομοίως $X_{q_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$. Άρα

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \omega(X_{q_i}, X_{q_j}) = \{q_i, q_j\} = 0$$

Ομοίως

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = 0$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \delta_{ij}$$

Οπότε τελικά $\omega = \sum dp_i \wedge dq_j$. Ας προχωρήσουμε τώρα στη απόδειξη του Θεωρήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρχικά θα κατασκευάσουμε επαγωγικά τον χάρτη και μετά θα αποδείξουμε ότι έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Έστω χάρτης $(U; x_1, \dots, x_{2n})$ στο $y_o \in M$. Ορίζουμε τη συνάρτηση-πρώτη συντεταγμένη $q_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ με $q_1 = x_1$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $q_1(y_o) = x_1(y_o) = 0$. Έστω X_{q_1} το αντίστοιχο χαμιλτονιανό πεδίο και $\phi_{q_1}^t$ η ροή του. Αφού $X_{q_1}|_{y_o} \neq 0$ (αν $X_{q_1}|_{y_o} = 0$, τότε $0 = \iota_{X_{q_1}}\omega|_{y_o} = dq_1(y_o) = (1, 0, \dots, 0)$ άτοπο), μπορούμε να θεωρήσουμε μια υπερεπιφάνεια N διάστασης $2n-1$ που περιέχει το $\bar{x}_o$ και είναι κάθετη στο X_{q_1} στο σημείο αυτό. Αν περιοριστούμε σε κατάλληλα μικρή περιοχή του y_o , σε κάθε σημείο της επιφάνειας αυτής το X_{q_1} δεν θα είναι εφαπτόμενο. Επομένως, από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, για κάθε σημείο y , σε περιοχή του y_o , υπάρχουν $z_y \in N$ και $t_y \in \mathbb{R}$, ώστε $y = \phi_{q_1}^{t_y}(z_y)$ και τα z_y, t_y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις ως προς y . Θέτουμε $p_1(y) = t_y$. Τότε $p_1(y) = 0$ για $y \in N$ και για $t \in \mathbb{R}, y \in N$

$$p_1(\phi_{q_1}^t(y)) = t \xrightarrow{\text{παραγωγίζοντας ως προς } t}$$

$$dp_1(X_{q_1}) = 1 \Rightarrow$$

$$\{p_1, q_1\} = dp_1(X_{q_1}) = 1$$

όπου για την πρώτη ισότητα στη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήθηκε το Λήμμα 1.3.11.

Αν $n = 1$ με την παραπάνω μέθοδο έχουμε κατασκευάσει τις (q_1, p_1) και έχουμε τελειώσει.

Θεωρούμε πως το Θεώρημα Darboux ισχύει για συμπλεκτικές πολλαπλότητες διάστασης $2n-2$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για διάσταση $2n$.

Κατασκευάζουμε τις q_1, p_1 όπως πριν. Ορίζουμε $K = \{y \in U : p_1(y) = 0 = q_1(y)\}$. Από την κατασκευή των p_1, q_1 έχουμε $p_1(y_o) = 0 = q_1(y_o)$, άρα $y_o \in K$. Τα dp_1, dq_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού αν υπάρχει $0 \neq a \in \mathbb{R}$ με $dp_1 = adq_1$, τότε $1 = \{p_1, q_1\} = dp_1(X_{q_1}) = adq_1(X_{q_1}) = aX_{q_1}(q_1) = 0$ άτοπο), άρα με χρήση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης προκύπτει ότι η K είναι πολλαπλότητα διάστασης $2n-1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ω επάγει περιοριζόμενη στην K συμπλεκτική δομή. Άρα η K είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $2n-2$ και μπορούμε επομένως να εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση. Η ένθεση $\iota : K \hookrightarrow M$ επάγει τη 2-μορφή $\iota^*\omega$

στη K , η οποία είναι κλειστή αφού $d\iota^*\omega = \iota^*d\omega = 0$. Θα δείξουμε ότι είναι και μη εκφυλισμένη, άρα συμπλεκτική. Για $\xi \in T_y K, y \in K$ έχουμε

$$\begin{aligned}\omega(X_{q_1}|_y, \xi) &= \iota_{X_{q_1}|_y} \omega(\xi) \\ &= dq_1(\xi) \\ &= \xi(q_1) = 0\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $q_1 = 0$ στην K και $\xi \in TK$. Ομοίως $\omega(X_{p_1}|_y, \xi) = 0$. Επομένως $T_y K \subset \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle^\omega$ και τελικά $T_y K = \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle^\omega$ για κάθε $y \in K$, αφού

$$\dim \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle^\omega = 2n - \dim \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle = 2n - 2 = \dim K$$

Επίσης τα X_{q_1}, X_{p_1} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού είναι τα dq_1, dp_1) και $X_{q_1}, X_{p_1} \notin \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle^\omega$ (αφού $\omega(X_{p_1}, X_{q_1}) = \{p_1, q_1\} = 1$). Άρα

$$TM = \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle \sqcup TK$$

Έστω τώρα $\xi \in TK$ με $\omega(\xi, \xi') = 0$ για κάθε $\xi' \in TK$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $\omega(\xi, v) = 0$ για κάθε $v \in TM$ και επομένως $\xi = 0$.

Δείξαμε επομένως ότι η K είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $2n - 2$. Από επαγωγική υπόθεση υπάρχουν συντεταγμένες $(\tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$, ώστε

$$\iota^*\omega = \omega|_{TK} = \sum_{i=2}^n d\tilde{p}_i \wedge d\tilde{q}_i$$

Οι q_i, p_i είναι συναρτήσεις ορισμένες σε περιοχή του y_o στην K . Θα τις επεκτείνουμε σε συναρτήσεις σε περιοχή του y_o στην M . Αφού τα X_{q_1}, X_{p_1} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο y_o και $[X_{q_1}, X_{p_1}] = X_{\{p_1, q_1\}} = X_1 = 0$, από βασική θεωρία για διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες, για κάθε y σε περιοχή του y_o στη M , θα υπάρχουν μοναδικά $t_y, s_y \in \mathbb{R}$ και $z_y \in K$, τα οποία θα είναι και διαφορίσιμες ως προς y συναρτήσεις, ώστε $y = \phi_{q_1}^{t_y} \phi_{p_1}^{s_y}(z_y)$, όπου $\phi_{p_1}^t, \phi_{q_1}^s$ οι ροές των X_{p_1}, X_{q_1} αντίστοιχα. Προφανώς $z_y = y, t_y = 0 = s_y$ για $y \in K$, άρα αν θέσουμε $p_i(y) = \tilde{p}_i(z_y), q_i(y) = \tilde{q}_i(z_y)$ για $i = 2, 3, \dots, n$, οι p_i, q_i επεκτείνουν τις $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i$.

Θα δείξουμε τώρα ότι οι συντεταγμένες αυτές έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες. Συμβολίζουμε με $\phi_{q_i}^t, \phi_{p_i}^t, i = 1, \dots, n$ τις ροές των πεδίων X_{q_i}, X_{p_i} αντίστοιχα. Όπως είδαμε $[X_{q_1}, X_{p_1}] = 0$, άρα από γνωστή πρόταση $\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s = \phi_{p_1}^s \phi_{q_1}^t$ για κάθε t, s που ορίζονται. Επομένως για κάθε y στην περιοχή που ορίζονται οι συντεταγμένες αυτές,

$$\begin{aligned}q_i(\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s(y)) &= q_i(\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s \phi_{q_1}^{t_y} \phi_{p_1}^{s_y}(z_y)) \\ &= q_i(\phi_{q_1}^{t+t_y} \phi_{p_1}^{s+s_y}(z_y)) \\ &= \tilde{q}_i(z_y)\end{aligned}$$

και επομένως οι q_i , και αντίστοιχα και οι p_i είναι αναλλοίωτες πάνω στις ροές των X_{q_1} και X_{p_1} , επομένως

$$\{q_i, p_1\} = X_{p_1}(q_i) = 0, i = 2, 3, \dots, n$$

και ομοίως $\{p_i, p_1\} = \{q_i, q_1\} = \{p_i, q_1\} = 0$ για $i = 2, \dots, n$.

Παρατηρούμε ότι για $y \in K$

$$\omega(X_{q_i}|_y, X_{q_1}|_y) = \{q_i, q_1\}(y) = 0$$

$$\omega \left(X_{q_i}|_y, X_{p_1}|_y \right) = \{q_i, p_1\}(y) = 0$$

και αφού $T_y K = \langle X_{q_1}, X_{p_1} \rangle^\omega$, έπεται ότι $X_{q_i} \in T_y K$ για $i = 2, \dots, n$. Ομοίως $X_{p_i} \in T_y K, i = 2, \dots, n$. Άρα τα $X_{q_i}|_K, X_{p_i}|_K$ είναι τα χαμιλτονιανά πεδία των $q_i|_K, p_i|_K$. Επομένως

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\}|_K &= \omega \left(X_{q_i}|_K, X_{p_i}|_K \right) \\ &= \iota^* \omega \left(X_{q_i}|_K, X_{p_i}|_K \right) \\ &= \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου για την τρίτη και την τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες, από επαγωγική υπόθεση, των $\tilde{p}_i, \tilde{p}_j$ σε συνδυασμό με την παρατήρηση πριν την απόδειξη του θεωρήματος. Ομοίως

$$\{q_i, q_j\}|_K = 0$$

$$\{p_i, q_j\}|_K = \delta_{ij}$$

για $i = 1, 2, \dots, n$. Μένει να δείξουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν σε περιοχή του y_o στη M και όχι μόνο στην K . Οι ροές $\phi_{q_1}^t, \phi_{p_1}^t$ είναι συμπλεκτομορφισμοί, ως ροές χαμιλτονιανών πεδίων. Άρα $(\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s)^* \omega = \omega$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, η ισοδύναμα για κάθε y στην περιοχή του y_o που ορίζονται οι χάρτες που φτιάξαμε και για $u, v \in T_y M$ έχουμε

$$\omega_y(u, v) = \omega_{\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s(y)}(d(\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s)u, d(\phi_{q_1}^t \phi_{p_1}^s)v)$$

και ειδικά για $t = -t_y, s = -s_y$

$$\omega_y(u, v) = \omega_{z_y}(d(\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y})u, d(\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y})v)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\}(y) &= \omega_y \left(X_{p_i}|_y, X_{p_j}|_y \right) \\ &= \omega_{z_y} \left(d(\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y}) X_{p_i}|_y, d(\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y}) X_{p_j}|_y \right) \\ &= \omega_{z_y} \left(X_{p_i}|_{z_y}, X_{p_j}|_{z_y} \right) \\ &= \{p_i, p_j\}(z_y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ανισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι όπως έχουμε δείξει οι ροές $\phi_{p_i}^t, i = 1, \dots, n$ μετατίθενται με τις ροές $\phi_{q_1}^t, \phi_{p_1}^s$ άρα

$$\begin{aligned} d(\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y}) X_{p_i}|_y &= \frac{d}{dt} \Big|_0 (\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y}) (\phi_{p_i}^t(y)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \phi_{p_i}^t (\phi_{q_1}^{-t_y} \phi_{p_1}^{-s_y})(y) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \phi_{p_i}^t(z_y) = X_{p_i}|_{z_y} \end{aligned}$$

Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις.

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση πριν την απόδειξη βλέπουμε πως ο χάρτης αυτός είναι ο ζητούμενος. $\square$

1.3.4. Το κόλπο του Moser και μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Darboux. Στην παράγραφο αυτή, χρησιμοποιώντας μια τεχνική που οφείλεται στον Moser, θα δώσουμε μια δεύτερη τελείως διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Darboux. Μάλιστα, με χρήση αυτής της τεχνικής, το Θεώρημα Darboux μπορεί να γενικευτεί σημαντικά [W71]. Η τεχνική αυτή έχει αποδειχτεί πολύ χρήσιμη στη συμπλεκτική γεωμετρία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.15. Έστω M πολλαπλότητα. Μια συνάρτηση διαφορίσιμη $\rho : M \times I \rightarrow M$, με $I \subset \mathbb{R}$, θα λέγεται **ισοτοπία** αν η $\rho_t = \rho(t, \cdot) : M \rightarrow M$ είναι αμφιδιαφόριση για κάθε t στο I και $\rho_0 = id$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.16 (Moser [Mos65]). Έστω M συμπαγής διαφορίσιμη πολλαπλότητα και ω_o, ω_1 συμπλεκτικές μορφές στη M . Αν $[\omega_o] = [\omega_1]$ και για κάθε $t \in (0, 1)$ η $\omega_t = (1-t)\omega_o + t\omega_1$ είναι συμπλεκτική μορφή, τότε υπάρχει ισοτοπία $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ ώστε $\rho_t^* \omega_t = \omega_o$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Λέμε τότε ότι οι ω_o, ω_1 είναι **ισχυρά ισοτοπικές**.

Υπάρχει και μια ασθενέστερη έννοια ισοτοπίας συμπλεκτικών μορφών. Οι ω_o, ω_1 λέγονται **ασθενώς ισοτοπικές** αν υπάρχει οικογένεια συμπλεκτικών μορφών $\omega_t, t \in [0, 1]$ που έχει διαφορίσιμη εξάρτηση από το t και $[\omega_t] = [\omega_o]$ για κάθε t στο $[0, 1]$.

Αν οι ω_o και ω_1 είναι ισχυρά ισοτοπικές, τότε για $t = 1$ έχουμε $\rho_1^* \omega_1 = \omega_o$. Άρα είναι συμπλεκτομορφικές οι δύο μορφές. Η έννοια δηλαδή της ισχυρής ισοτοπίας είναι ισχυρότερη του συμπλεκτομορφισμού. Το Θεώρημα του Darboux, όπως διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο λέει ότι δύο συμπλεκτικές μορφές σε πολλαπλότητες ίδιας διάστασης είναι τοπικά συμπλεκτομορφικές. Εδώ θα δείξουμε ότι είναι μάλιστα τοπικά ισχυρά ισοτοπικές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι υπάρχει ισοτοπία ρ με $\rho_t^* \omega_t = \omega$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Τότε από τη σχέση

$$\begin{aligned} X_t \circ \rho_t &= \frac{d\rho_t}{dt} \Leftrightarrow \\ X_t &= \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1} \end{aligned}$$

ορίζεται ένα διαφορίσιμο, και ως προς t , χρονομεταβλητό διανυσματικό πεδίο X_t στη M . Για κάθε t το πεδίο αυτό θα ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\omega_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho_t^* \omega_t) \\ &= \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right) \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα αποδεικνύεται στο Παράρτημα. Αφού η ρ_t είναι αμφιδιαφόριση έπεται ότι τα παραπάνω ισχύουν αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} &= 0, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \omega_1 - \omega_o &= 0, \forall t \in \mathbb{R} \quad (*) \end{aligned}$$

Αντίστροφα τώρα, αν υπάρχει διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $X_t, t \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $(*)$, τότε λύνοντας το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$X_t \circ \rho_t = \frac{d\rho_t}{dt}, \rho_0 = id$$

η λύση του οποίου υπάρχει για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αφού η πολλαπλότητα είναι συμπαγής, παίρνουμε μια συνάρτηση $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ με τη ρ_t , από τη βασική θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, να είναι αμφιδιαφόριση. Επομένως η ρ είναι ισοτοπία. Επίσης

$$\frac{d}{dt}(\rho_t^* \omega_t) = \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right) = 0$$

και επομένως $\rho_t^* \omega_t = \rho_0^* \omega_o \stackrel{\rho_0 = id}{=} \omega_o$.

Δείξαμε επομένως, ότι η ύπαρξη της ζητούμενης ισοτοπίας είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός χρονομεταβλητού πεδίου που ικανοποιεί την $(*)$. Η τεχνική αυτή είναι γνωστή ως Moser's trick.

Από υπόθεση έχουμε ότι $[\omega_o] = [\omega_1]$, άρα υπάρχει 1-μορφή θ ώστε

$$\omega_1 = \omega_o + d\theta \quad (1)$$

Επίσης από τον τύπο του Cartan

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = \iota_{X_t} d\omega_t + d\iota_{X_t} \omega_t \quad (2)$$

Με χρήση των (1) και (2), και αφού $d\omega_t = (1-t)d\omega_o + td\omega_1 = 0$, η $(*)$ γράφεται ισοδύναμα

$$d\iota_{X_t} \omega + d\theta = 0$$

Για να λύσουμε επομένως την $(*)$ αρκεί να βρούμε χρονομεταβλητό πεδίο X_t ώστε

$$\iota_{X_t} \omega + \theta = 0$$

Η εξίσωση αυτή όμως είναι γραμμική ως προς X_t , άρα έχει λύση και μάλιστα μοναδική. Ας το δούμε όμως αυτό αναλυτικά. Έστω $(x_1, \dots, x_{2n})$ συντεταγμένες σε περιοχή ενός σημείου. Ως προς τις συντεταγμένες αυτές $\omega_t = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \omega_{ij}(t) dx_i \wedge dx_j$, $\theta = \sum_i \theta_i dx_i$ και $X_t = \sum_i X_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στην περιοχή αυτή

$$\omega \left(X_t, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = -\theta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right), j = 1, \dots, 2n \Leftrightarrow \sum_i \omega_{ij}(t) X_i(t) = -\theta_j$$

που είναι ένα γραμμικό σύστημα για τις συντεταγμένες του X_t , άρα έχει μοναδική λύση. Λόγω μοναδικότητας οι λύσεις σε περιοχές που επικαλύπτονται θα ταυτίζονται. Άρα μπορούμε να ενώσουμε τις λύσεις και να πάρουμε το επιθυμητό X_t . $\square$

Θα αποδείξουμε τώρα μια τοπική μορφή του παραπάνω Θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.17 (Θεώρημα Moser-Τοπική μορφή). Έστω M πολλαπλότητα, $N \subset M$ υποπολλαπλότητα και ω_o, ω_1 συμπλεκτικές μορφές στη M με $\omega_o|_p = \omega_1|_p, \forall p \in N$. Τότε υπάρχουν περιοχές $\mathcal{U}_o, \mathcal{U}_1$ της N στη M και αμφιδιαφόριση $\rho : \mathcal{U}_o \rightarrow \mathcal{U}_1$, ώστε $\rho|_N = id$ και $\rho^* \omega_1 = \omega_o$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε $d(\omega_1 - \omega_o) = 0$ και $(\omega_1 - \omega_o)|_N = 0$. Από το Θεώρημα (6.2.1) στο Παράρτημα, υπάρχει περιοχή $\mathcal{U}_o$ της N στη M και 1-μορφή θ στην $\mathcal{U}_o$ με

$$\theta|_N = 0, \quad \omega_1 - \omega_o = d\theta$$

Θεωρούμε στην $\mathcal{U}_o$ την οικογένεια 2-μορφών

$$\omega_t = (1-t)\omega_o + t\omega_1 = \omega_o + td\theta, \quad t \in [0, 1]$$

Οι ω_t είναι κλειστές, αφού είναι οι ω_o, ω_1 . Επίσης, αφού $\omega_t|_N = \omega_o|_N$ και η ω_o είναι μη εκφυλισμένη, αν μικρύνουμε ενδεχομένως τη περιοχή $\mathcal{U}_o$, οι ω_t θα είναι και μη εκφυλισμένες και άρα συμπλεκτικές μορφές για κάθε $t \in [0, 1]$.

Εφαρμόζουμε τώρα το κόλπο του Moser. Προσδιορίζουμε το διανυσματικό πεδίο X_t στην $\mathcal{U}_o$, μέσω της εξίσωσης

$$\iota_{X_t}\omega_t + \theta = 0$$

. Αφού $\theta|_N = 0$ και οι ω_t είναι μη εκφυλισμένες για κάθε $t \in [0, 1]$, θα ισχύει $X|_N = 0$. Άρα τα σημεία της N είναι σημεία ισορροπίας για το X_t . Ειδικά η ροή τους θα ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα αν μικρύνουμε κατάλληλα την $\mathcal{U}_o$, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η ροή από τα σημεία της ορίζεται για κάθε t στο $[0, 1]$.

Έστω $\phi : \mathcal{U}_o \times [0, 1] \rightarrow M$ η λύση, που προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{d\phi_t}{dt} = X_t \circ \phi_t$$

. Αφού τα σημεία της N μένουν σταθερά στη ροή του X_t , έχουμε $\phi_0|_N = id$. Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t &= \phi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right) \\ &= \phi_t^*(\iota_{X_t}d\omega_t + d\iota_{X_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_o) \\ &= \phi_t^*(d(\iota_{X_t}\omega + \theta)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

άρα $\phi_t^*\omega_t = \phi_0^*\omega_o = \omega_o$. Θέτοντας $\mathcal{U}_1 = \phi(\mathcal{U}_o \times [0, 1]) = \cup_{t \in [0, 1]} \phi_t(\mathcal{U}_o)$ και $\rho = \phi_1$ έχουμε τελειώσει. $\square$

Να παρατηρήσουμε πως δείξαμε κάτι ισχυρότερο από αυτό που περιγράφει η εκφώνηση, ότι δηλαδή οι δύο μορφές είναι ισχυρά ισοτοπικές στη περιοχή $\mathcal{U}_o$.

Με χρήση τώρα αυτού του Θεωρήματος μπορούμε να δούμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Darboux.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω (M^{2n}, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και $y_o \in M$. Η ω_{y_o} είναι συμπλεκτική μορφή στο διανυσματικό χώρο $T_{y_o}M$. Από Θεώρημα (1.1.1), υπάρχει βάση $(e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n)$ στον $T_{y_o}^*M$, ώστε $\omega_{y_o} = \sum_i e^i \wedge f^i$. Επιλέγουμε κατάλληλες συντεταγμένες $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ σε περιοχή του y_o , ώστε $dp_i|_{y_o} = e^i$, $dq_i|_{y_o} = f^i$, οπότε

$$\omega_{y_o} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i|_{y_o}$$

Θέτουμε $\omega_o = \omega, \omega_1 = \sum_i dp_i \wedge dq_i$. Αυτές είναι συμπλεκτικές μορφές σε περιοχή του y_o και $\omega_o|_{y_o} = \omega_1|_{y_o}$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Θεώρημα, με $N = \{y_o\}$, προκύπτει ότι υπάρχουν περιοχές $\mathcal{U}_o, \mathcal{U}_1$ του y_o και αμφιδιαφόριση $\phi : \mathcal{U}_o \rightarrow \mathcal{U}_1$ με

$\phi(y_o) = y_o$ και $\phi^*\omega_1 = \omega_o$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\omega = \omega_o &= \phi^* \left(\sum_i dp_1 \wedge dq_i \right) \\ &= \sum_i \phi^* dp_i \wedge \phi^* dq_i \\ &= \sum_i d(p_i \circ \phi) \wedge d(q_i \circ \phi)\end{aligned}$$

άρα οι $(q_1 \circ \phi, \dots, q_n \circ \phi, p_1 \circ \phi, \dots, p_n \circ \phi)$ είναι συντεταγμένες Darboux σε περιοχή του y_o . $\square$

1.4. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε και θα εξετάσουμε την έννοια της μιγαδικής δομής. Οι μιγαδικές δομές προσφέρουν ένα τρόπο σύνδεσης της γεωμετρίας Riemann (που καθορίζεται από μια συμμετρική, μη εκφυλισμένη, διγραμμική μορφή) και της συμπλεκτικής γεωμετρίας (που καθορίζεται από μια αντισυμμετρική, μη εκφυλισμένη και κλειστή μορφή).

1.4.1. Μιγαδικές δομές σε διανυσματικούς χώρους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.1. Έστω V διανυσματικός χώρος. Μια **μιγαδική δομή** στον V είναι ένας αυτομορφισμός $J : V \rightarrow V$ τέτοιος, ώστε $J^2 = -id$.

Παρατηρούμε ότι, αν ο V έχει τη μιγαδική δομή J , τότε μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$, αν ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό με ένα μιγαδικό αριθμό ως εξής

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \times V &\rightarrow V \\ (s + it, v) &\mapsto sv + tJv\end{aligned}$$

Ορίζουμε δηλαδή το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός στοιχείου του v με τη μιγαδική μονάδα i να είναι η εικόνα του στοιχείου αυτή μέσω της J .

Επομένως ένας διανυσματικός χώρος που δέχεται μιγαδική δομή είναι απαραίτητα άρτιας πραγματικής διάστασης.

Το σύνολο των μιγαδικών δομών στον V το συμβολίζουμε με $\mathcal{J}(V)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2. Στον $\mathbb{R}^{2n}$ θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στον πίνακα J_o . Αυτή είναι μια μιγαδική δομή, γιατί $J_o^2 = -id$. Μέσω του ισομορφισμού

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &\mapsto (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)\end{aligned}$$

μπορούμε να ταυτίσουμε τον $\mathbb{R}^{2n}$ με τον $\mathbb{C}^n$. Παρατηρούμε τότε ότι η J_o αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με i .

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.3. Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης $2n$ και $J \in \mathcal{J}(V)$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$, ώστε $J \circ \Phi = \Phi \circ J_o$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ η μιγαδοποίηση του V ($\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \frac{2\dim V}{2} = 2n$). Αν $v_1 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$ ορίζουμε $J(v_1 + iv_2) = Jv_1 + iJv_2$. Θεωρούμε τους υποχώρους $E^{\pm} = \ker(Id \pm iJ)$ του $V^{\mathbb{C}}$. Το τυχαίο στοιχείο v του $V^{\mathbb{C}}$ γράφεται

$$v = \frac{v - iJv}{2} + \frac{v + iJv}{2}$$

Έχουμε ότι

$$(id \pm iJ) \frac{v \mp iJv}{2} = \frac{1}{2} (v \mp iJv \pm iJv - i^2 J^2 v) = 0$$

άρα $\frac{v \mp iJv}{2} \in E^{\pm}$. Επίσης αν $v \in E^+ \cap E^-$, τότε $v + iJv = 0 = v - iJv$, οπότε $v = 0$. Επομένως $V^{\mathbb{C}} = E^+ \oplus E^-$.

Επίσης

$$\begin{aligned} u + iv \in E^+ &\Leftrightarrow u + iv = -iJu + Jv \\ &\Leftrightarrow u = Jv \text{ και } v = -Ju \\ &\Leftrightarrow v + iu = -Ju + iJv = iJ(v + iu) \\ &\Leftrightarrow v + iu \in E^- \end{aligned}$$

επομένως $\dim_{\mathbb{C}} E^+ = \dim_{\mathbb{C}} E^-$, και αφού $V^{\mathbb{C}} = E^+ \oplus E^-$, προκύπτει $\dim_{\mathbb{C}} E^{\pm} = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}/2 = n$.

Έστω $w_j = u_j + iv_j, j = 1, 2, \dots, n$ μια βάση του E^+ , όπου $u_j, v_j \in E^+$. Τότε τα $v_j + iu_j$, από τα προηγούμενα, είναι μια βάση του E^- . Επομένως τα $u_j + iv_j, v_k + iu_k, j, k = 1, 2, \dots, n$. Αποτελούν μια βάση του $V^{\mathbb{C}}$ και άρα τα $u_j, v_j, j = 1, 2, \dots, n$. Είναι μια βάση του V . Επίσης, αφού $w_j \in E^+$, ισχύει $u_j = Jv_j$ και $v_j = -Ju_j$.

Αν $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^{2n}$ ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$$

$$x_i \mapsto v_i$$

$$y_i \mapsto u_i$$

Αυτή είναι προφανώς ισομορφισμός και

$$J\Phi x_i = Jv_i = u_i = \Phi y_i = \Phi J_o x_i$$

$$J\Phi y_i = Ju_i = -v_i = -\Phi x_i = \Phi J_o y_i$$

και από γραμμικότητα $J \circ \Phi = \Phi \circ J_o$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.4. Έστω (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος. Μια μιγαδική δομή J στον V θα λέμε ότι είναι **συμβατή με την ω** ή **ω -συμβατή** αν για κάθε $u, v \in V$ ισχύει

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) \text{ (δηλαδή η } \omega \text{ είναι συμπλεκτομορφισμός)}$$

και

$$\omega(u, Ju) > 0, \text{ για } u \neq 0$$

Το σύνολο των ω -συμβατών μορφών στον (V, ω) συμβολίζεται με $\mathcal{J}(V, \omega)$.

Για μια μιγαδική δομή J στον (V, ω) (όχι απαραίτητα ω -συμβατή) ορίζουμε

$$g_J : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \omega(u, Jv)$$

Επαληθεύεται άμεσα ότι η g_J είναι εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν η J είναι ω -συμβατή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.5. Θεωρούμε τον συμπλεκτικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$. Όπως είδαμε η J_o είναι μιγαδική δομή σε αυτόν. Επίσης για $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\omega(Ju, Jv) &= -(Ju)^T J(Jv) = u^T J^2 Jv = -u^T Jv = \omega(u, v) \\ \omega(u, Ju) &= -u^T J(Ju) = u^T u > 0 \text{ για } u \neq 0\end{aligned}$$

Άρα η J_o είναι ω_o -συμβατή μιγαδική δομή.

Υπάρχουν όμως συμβατές μιγαδικές δομές σε κάθε συμπλεκτικό χώρο.

Συμβολίζουμε με $Met(V)$ το χώρο των μετρικών στον V (δηλαδή των διγραμμικών, συμμετρικών, μη εκφυλισμένων μορφών). Τα στοιχεία του $Met(V)$ και του $\mathcal{J}(V, \omega)$ είναι πίνακες, άρα μπορούμε να τους βάλουμε νόρμα και να τα δούμε ως τοπολογικούς χώρους (αφού όλες οι νόρμες σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια συγκεκριμένη νόρμα). Το επόμενο Λήμμα είναι πολύ χρήσιμο στη συνέχεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.6. Έστω (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος. Υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r : Met(V) \rightarrow \mathcal{J}(V, \omega)$, τέτοια ώστε $r(g_J) = J$ και $r(\Phi^*g) = \Phi^*r(g)$ για κάθε $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$, $g \in Met(V)$, $\Phi \in Symp(V, \omega)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $g \in Met(V)$ και $A_g : V \rightarrow V$ ο αυτομορφισμός τέτοιος ώστε $\omega(u, w) = g(A_g u, w)$ για κάθε $u, w \in V$ (αν Ω, G οι πίνακες των ω, g ως προς μια βάση τότε $\omega(u, w) = u^T \Omega w$, $g(A_g u, w) = u^T A_g^T G w$ και επιλέγουμε $A_g^T = \Omega G^{-1}$). Παρατηρούμε ότι για κάθε $u, v \in V$

$$g(A_g u, v) = \omega(u, v) = -\omega(v, u) = g(-A_g v, u) = g(u, -A_g v)$$

δηλαδή $A_g^* = -A_g$, όπου A_g^* ο συζυγής του A_g ως προς τη g . Τότε ο $P_g = A_g^* A_g = -A_g^2$ είναι θετικά ορισμένος και επομένως, από το φασματικό Θεώρημα (δες π.χ. [?]), υπάρχει μοναδικός αυτομορφισμός $Q_g : V \rightarrow V$ αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος ώστε $Q_g^2 = P_g$.

Θεωρούμε τον αυτομορφισμό $J_g = Q_g^{-1} A_g$. Θα δείξουμε ότι $J_g \in \mathcal{J}(V, \omega)$. Οι Q_g και A_g μετατίθενται, ως συναρτήσεις του A_g^2 , οπότε

$$J_g^2 = Q_g^{-1} A_g Q_g^{-1} A_g = (Q_g^2)^{-1} A_g^2 = P_g^{-1} (-P_g) = -Id$$

Επίσης για $v, w \in V$

$$\begin{aligned}\omega(v, J_g v) &= g(A_g v, J_g v) \\ &= g(A_g v, Q_g^{-1} A_g v) \\ &= g(Q_g^{-1} A_g v, A_g v) > 0, \text{ για } v \neq 0\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι αφού ο Q_g είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος, το ίδιο θα είναι και ο Q_g^{-1} . Τέλος

$$\begin{aligned}\omega(J_g v, J_g w) &= g(A_g J_g v, J_g w) \\ &= g(A_g Q_g^{-1} A_g v, Q_g^{-1} A_g w) \\ &= g(Q_g^{-1} A_g Q_g^{-1} A_g v, A_g w) \\ &= g(J_g^2 v, A_g w) \\ &= -g(v, A_g w) \\ &= -g(A_g w, v) \\ &= -\omega(w, v) = \omega(v, w)\end{aligned}$$

άρα πράγματι $J_g \in \mathcal{J}(V, \omega)$.

Μπορούμε να ορίσουμε επομένως $r(g) = J_g, g \in \text{Met}(V)$. Λόγω της μορφής του J_g , έπεται ότι η απεικόνιση r είναι συνεχής.

Αν τώρα $g = g_J$ για $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$, τότε, αφού για κάθε $u, v \in V$ έχουμε

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) = g_J(A_{g_J}u, v) = \omega(A_{g_J}u, Jv)$$

και αφού ο J είναι αυτομορφισμός και η ω μη εκφυλισμένη, έπεται ότι $A_{g_J} = J$. Οπότε $P_{g_J} = -A_{g_J}^2 = -J^2 = -Id$ και άρα $Q_{g_J} = Id$. Άρα τελικά $r(g_J) = J_{g_J} = A_{g_J} = J$.

Έστω τώρα $\Phi \in \text{Symp}(V, \omega)$. Τότε για κάθε $u, v \in V$ και $g \in \text{Met}(V)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= \omega(\Phi u, \Phi v) \\ &= g(A_g \Phi u, \Phi v) \\ &= (\Phi^* g)(\Phi^{-1} A_g \Phi u, v) \end{aligned}$$

οπότε $A_{\Phi^* g} = \Phi^{-1} A_g \Phi$ (προφανώς $\Phi^* g \in \text{Met}(V)$, αφού Φ αυτομορφισμός). Επομένως $Q_{\Phi^* g} = \Phi^{-1} Q_g \Phi$, αφού $\Phi^{-1} Q_g \Phi > 0$ (αφού $Q_g > 0$) και

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1} Q_g \Phi)^2 &= \Phi^{-1} Q_g^2 \Phi \\ &= -\Phi^{-1} A_g^2 \Phi \\ &= -A_{\Phi^* g}^2 = P_{\Phi^* g} \end{aligned}$$

Οπότε τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} r(\Phi^* g) &= J_{\Phi^* g} \\ &= Q_{\Phi^* g}^{-1} A_{\Phi^* g} \\ &= \Phi^{-1} Q_g^{-1} A_g \Phi \\ &= \Phi^{-1} J_g \Phi \\ &= \Phi^{-1} r(g) \Phi = \Phi^* r(g) \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.4.7. Να παρατηρήσουμε πως γενικά $g(\cdot, \cdot) \neq g_{J_g}(\cdot, \cdot)$.

Αν έχουμε μια οικογένεια συμπλεκτικών διανυσματικών χώρων (V_t, ω_t) , με μετρικές g_t , που εξαρτώνται με διαφορίσιμο τρόπο από την παράμετρο t (όπως αν π.χ. η (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα με μετρική Riemann g , η $\{(T_p M, \omega_p), g_p\}_{p \in M}$ είναι μια τέτοια οικογένεια) τότε, παρατηρώντας την παραπάνω απόδειξη έπεται ότι και οι μιγαδικές δομές J_t θα εξαρτώνται με διαφορίσιμο τρόπο από την παράμετρο t .

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.4.8. Έστω (V, ω) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος. Τότε το σύνολο $\mathcal{J}(V, \omega)$ είναι μη κενό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον V και εφαρμόζουμε το παραπάνω Θεώρημα. □

1.4.2. Σχεδόν μιγαδικές δομές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.9. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα. Μια **σχεδόν μιγαδική δομή** J στη M είναι ένα διαφορίσιμο πεδίο από μιγαδικές δομές στα εφαπτόμενα

επίπεδα, δηλαδή είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\begin{aligned} J : M &\rightarrow \sqcup_{p \in M} \text{Aut}(T_p M) \\ x &\mapsto J_x \end{aligned}$$

με την J_x να είναι μιγαδική δομή στον διανυσματικό χώρο $T_x M$.

Αν (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα, μια σχεδόν μιγαδική δομή J στη M θα λέγεται **συμβατή με την ω** ή **ω -συμβατή** αν για κάθε $x \in M$ η J_x είναι ω_x -συμβατή. Ισοδύναμα αν η $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ είναι μετρική Riemann στη M .

Αν σε μια πολλαπλότητα έχουμε συμπλεκτική δομή ω , μετρική Riemann g και μια σχεδόν μιγαδική δομή J , τότε η τριάδα (ω, g, J) λέγεται **συμβατή** αν $g = g_J$ (οπότε η J είναι και ω -συμβατή).

Χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό σχεδόν για να διαχωρίσουμε αυτές τις δομές από τις μιγαδικές δομές σε μιγαδικές πολλαπλότητες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.10. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα. Τότε υπάρχει ω -συμβατή σχεδόν μιγαδική δομή στην M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε μια μετρική Riemann g στην M . Για $x \in M$ η ω_x είναι συμπλεκτική δομή στον $T_x M$ και η g_x εσωτερικό γινόμενο. Από την Πρόταση (1.4.6) υπάρχει J_x που είναι ω_x -συμβατή μιγαδική δομή στον $T_x M$. Από την παρατήρηση μετά την πρόταση, η εξάρτηση των J_x από το x είναι διαφορίσιμη, άρα ορίζουν μια ω -συμβατή σχεδόν μιγαδική δομή στη M . $\square$

ΔΡΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ LIE

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις δράσεις ομάδων Lie σε πολλαπλότητες. Αρχικά θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς που αφορούν μια ομάδα Lie και την άλγεβρα που της αντιστοιχεί. Στη δεύτερη ενότητα θα μελετήσουμε δράσεις που έχουν συγκεκριμένες καλές ιδιότητες, είναι ελεύθερες και γνήσιες. Το βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής είναι ότι ο χώρος των τροχιών της δράσης, που προκύπτει ως πηλίκο της αρχικής πολλαπλότητας στην οποία δρούμε, είναι και αυτός διαφορική πολλαπλότητα με τη διαφορική δομή να προκύπτει φυσιολογικά. Το αποτέλεσμα αυτό είναι κεντρικό για το κεφάλαιο τρία, όπου θα μελετήσουμε ελεύθερες και γνήσιες χαμιλτονιανές δράσεις. Στην τρίτη ενότητα τέλος, θα μελετήσουμε δράσεις ομάδων Lie με την μόνη υπόθεση τώρα ότι είναι γνήσιες. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος των τροχιών δεν είναι γενικά πολλαπλότητα, αλλά μπορούμε παρόλα αυτά να αποκτήσουμε μια αρκετά καλή περιγραφή. Θα αποδείξουμε διάφορες σημαντικές ιδιότητες, όπως την ύπαρξη αναλλοίωτων στη δράση μετρικών, και θα μελετήσουμε τη διαμέριση της πολλαπλότητας σε σύνολα σημείων με διαφορετικό τύπο τροχιών.

Για το κεφάλαιο αυτό στηρίζομαστε στο βιβλίο των Duistermaat και Kolk [DK00], όπου και παραπέμπουμε τον αναγνώστη για την εύρεση όσων αποδείξεων δεν παρουσιάζουμε.

2.1. ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΕΣ LIE

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1. Μια **ομάδα Lie** G είναι μια ομάδα $(G, \cdot)$, η οποία είναι και πολλαπλότητα, τέτοια ώστε οι πράξεις

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \text{ (πολλαπλασιασμός)} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow G \text{ (αντιστροφή)} \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Με χρήση του Θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης μπορεί ναδειχθεί ότι αρκεί η μ να είναι διαφορίσιμη.

Έστω e η μονάδα της G . Ο εφαπτόμενος χώρος στη μονάδα $T_e G$ συμβολίζεται με $\mathfrak{g}$. Η $\mathfrak{g}$ έχει δομή διανυσματικού χώρου, ως εφαπτόμενος χώρος, διάστασης ίση με αυτή της G . Αποδεικνύεται ότι, αν κάνουμε και την ταύτιση $T_{(e,e)}(G \times G) = T_e G \times T_e G$, η πρόσθεση στη $\mathfrak{g}$ είναι η πράξη που προκύπτει από την παραγωγή της μ στη μονάδα. Η $\mathfrak{g}$ με πράξη την πρόσθεση είναι μια μεταθετική ομάδα Lie.

Έστω $g \in G$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$I_g : G \rightarrow G \text{ (συζυγία)}$$

$$x \mapsto gxg^{-1}$$

Έχουμε ότι $I_g(e) = e$, άρα παραγωγίζοντας προκύπτει η γραμμική απεικόνιση

$$Ad_g \equiv T_e I_g : T_e G \rightarrow T_e G$$

. Για $g_1, g_2 \in G$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Ad_{g_1 g_2} &= T_e I_{g_1 g_2} \\ &= T_e (I_{g_1} \circ I_{g_2}) \\ &= T_e I_{g_1} \circ T_e I_{g_2} \\ &= Ad_{g_1} \circ Ad_{g_2} \end{aligned}$$

άρα, αφού $I_e = id$,

$$Ad_g \circ Ad_{g^{-1}} = Ad_e = T_e id = id$$

Επομένως η Ad_g είναι αντιστρέψιμη γραμμικά απεικόνιση. Ορίζεται επομένως η συνάρτηση

$$Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto Ad_g$$

η οποία, από τα παραπάνω, είναι ομομορφισμός ομάδων και ονομάζεται **συζυγής (adjoint) αναπαράσταση της G στην $GL(\mathfrak{g})$** . Παραγωγίζοντας την Ad στη μονάδα προκύπτει η απεικόνιση

$$ad \equiv T_e Ad : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathfrak{g})$$

, όπου κατά τα γνωστά ταυτίσαμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_I GL(\mathfrak{g})$ με το χώρο $L(\mathfrak{g})$ των γραμμικών απεικονίσεων στη $\mathfrak{g}$.

Ορίζουμε τη φυσική διγραμμική απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi, X) \mapsto \xi(X)$$

Για κάθε $g \in G$ ορίζεται η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση

$$Ad^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

με

$$\langle Ad_g^* \xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} X \rangle, \xi \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}$$

. Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη σχέση για την Ad , προκύπτει ότι για $g_1, g_2 \in G$ $Ad_{g_1}^* \circ Ad_{g_2}^* = Ad_{g_1 g_2}^*$ και άρα ορίζεται η απεικόνιση

$$Ad^* : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$$

$$g \mapsto Ad_g^*$$

η οποία είναι ομομορφισμός ομάδων και ονομάζεται **συν-συζυγής (coadjoint) αναπαράσταση της G στην $GL(\mathfrak{g}^*)$** . Παραγωγίζοντας στη μονάδα, παίρνουμε την απεικόνιση

$$ad^* := T_e Ad^* : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathfrak{g}^*)$$

Για $X, X' \in \mathfrak{g}, \xi, \xi' \in \mathfrak{g}^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle ad^*(X) \cdot \xi, X' \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left\langle Ad_{\exp(tX)}^* \cdot \xi, X' \right\rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \xi, Ad_{\exp(-tX)} \cdot X' \rangle \\ &= -\langle \xi, ad(X) \cdot X' \rangle \end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.2. Μια πραγματική **άλγεβρα Lie** είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με μια διγραμμική απεικόνιση

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$$

η οποία ονομάζεται **αγγύλη Lie**, τέτοια ώστε για κάθε $u, v, w \in V$

- $[u, v] = -[v, u]$ (αντισυμμετρία)
- $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (ταυτότητα *Jacobi*)

Για $X, Y \in \mathfrak{g}$ ορίζουμε

$$[X, Y] := ad(X) \cdot Y$$

Αποδεικνύεται ότι με αυτή την αγγύλη η $\mathfrak{g}$ είναι άλγεβρα Lie. Ονομάζεται η **άλγεβρα Lie της ομάδας Lie G** .

Το εντυπωσιακό είναι ότι κάθε άλγεβρα Lie πεπερασμένης διάστασης είναι άλγεβρα Lie μιας απλά συνεκτικής ομάδας Lie. Το Θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως Τρίτο Θεώρημα του Lie και μια αποδειξή του περιέχεται στην παράγραφο (1.14) του [DK00].

Θα δούμε τώρα έναν εναλλακτικό ορισμό της άλγεβρας Lie μια ομάδας. Έστω G ομάδα Lie. Για $g \in G$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} R_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η L_g είναι αμφιδιαφόριση με $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ και για $g_1, g_2 \in G$ ισχύει $L_{g_1 g_2} = L_{g_1} \circ L_{g_2}$. Ομοίως, η R_g είναι αμφιδιαφόριση με $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ και για $g_1, g_2 \in G$ ισχύει $R_{g_1 g_2} = R_{g_1} \circ R_{g_2}$.

Θεωρούμε το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων στη G

$$\mathfrak{X}^L(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) : (L_g)_* X = X, \forall g \in G\}$$

Ως γνωστόν, ο χώρος $\mathfrak{X}(M)$ των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων δε μια πολλαπλότητα M είναι άλγεβρα Lie με την αγγύλη να ορίζεται από τη σχέση

$$[X, Y] = X(Yf) - Y(Xf), f \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Αποδεικνύεται (σε οποιοδήποτε βιβλίο εισαγωγής στη Διαφορική Γεωμετρία, π.χ. στο [L09]) ότι το σύνολο $\mathfrak{X}^L(G)$ είναι υπάλγεβρα Lie της $\mathfrak{X}(G)$ (είναι δηλαδή κλειστό και ως προς την αγγύλη).

Αν $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ τότε για κάθε $g \in G$

$$X_g = T_e L_g \cdot X_e$$

άρα τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία καθορίζονται πλήρως από την τιμή τους στην μονάδα. Επομένως η απεικόνιση

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}^L(G) &\rightarrow T_e G = \mathfrak{g} \\ X &\mapsto X_e\end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Αν για $X \in \mathfrak{g}$ συμβολίσουμε με X^L το αντίστοιχο αριστερά αναλλοίωτο πεδίο (δηλαδή $X_g^L = T_e L_g \cdot X$, για κάθε $g \in G$) αποδεικνύεται ότι $[X^L, Y^L]_e = \text{ad}(X) \cdot Y$. Άρα η απεικόνιση αυτή είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie, και μπορούμε επομένως να ταυτίζουμε την άλγεβρα Lie μια ομάδας με τα αριστερά αναλλοίωτα πεδία.

Αντίστοιχα ισχύουν και για την περίπτωση των δεξιά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων

$$\mathfrak{X}^R(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) : (R_g)_* X = X, \forall g \in G\}$$

Θα ορίσουμε τώρα μια χρήσιμη απεικόνιση από μια άλγεβρα Lie προς την ομάδα από την οποία προέρχεται. Αν M πολλαπλότητα και $X \in \mathfrak{X}(M)$ συμβολίζουμε με ϕ_X^t τη ροή του X τη στιγμή t .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.3. Έστω G ομάδα Lie με μονάδα e . Τα (δεξιά ή αριστερά) αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της είναι πλήρη. Αν $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ ή $\mathfrak{X}^R(G)$ και $s, t \in \mathbb{R}$ τότε $\phi_{sX}^t = \phi_X^{st}$. Αν $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$, $X^R \in \mathfrak{X}^R(G)$ τότε $\phi_{X^L}^t = R_{\phi_{X^L}^t(e)}$, $\phi_{X^R}^t = L_{\phi_{X^L}^t(e)}$.
Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot \phi_{X^L}^t(e) &= X_g^L \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{X^R}^t(e) \cdot g &= X_g^R\end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ και $\gamma : (a, b) \rightarrow G$ ολοκληρωτική καμπύλη του X . Για οποιαδήποτε $\Delta t \in \mathbb{R}$, $g \in G$ ορίζουμε $\bar{\gamma} : (a + \Delta t, b + \Delta t) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\bar{\gamma}(t) = g \cdot \gamma(t - \Delta t)$. Τότε

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\gamma}}(t) &= \frac{d}{dt} L_g(\gamma(t - \Delta t)) \\ &= T_{\gamma(t - \Delta t)} L_g \cdot X_{\gamma(t - \Delta t)} \\ &= X_{g \cdot \gamma(t - \Delta t)} = X_{\bar{\gamma}(t)}\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $X \in \mathfrak{X}^L(G)$. Για $\Delta t = t_2 - t_1$ με $a < t_1 < t_2 < b$ και $g = \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$ έχουμε επιπλέον ότι $\bar{\gamma}(t_2) = \gamma(t_2)$ και από μοναδικότητα της λύσης οι $\gamma, \bar{\gamma}$ θα ταυτίζονται όπου ορίζονται και οι δύο. Έτσι μπορεί η γ να επεκταθεί στο $(a, b + \Delta t)$ και με συνεχείς επεκτάσεις στο (a, ∞) . Αντίστοιχα επεκτείνεται και σε όλο το $\mathbb{R}$. Αν $X \in \mathfrak{X}^R(G)$ η απόδειξη είναι αντίστοιχη.

Αν $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt} \phi_X^{st} = s \frac{d}{dt} \phi_X^t = sX$$

και $\phi_X^{s0} = id = \phi_X^0$. Από μοναδικότητα της λύσης έπεται ότι $\phi_X^{st} = \phi_{sX}^t$. Τέλος

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot \phi_{X^L}^t(e) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_g(\phi_{X^L}^t(e)) \\ &= TL_g \cdot X_{\phi_{X^L}^t(e)}^L \\ &= X_{g \cdot \phi_{X^L}^t(e)} \end{aligned}$$

και $g \cdot \phi_{X^L}^0(e) = g$. Οπότε $g \cdot \phi_{X^L}^t(e) = \phi_{X^L}^t(g)$ και ομίως για την άλλη σχέση. $\square$

Αφού τα αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία είναι πλήρη, μπορούμε να ορίσουμε την **εκθετική απεικόνιση**

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

με $\exp(X) = \phi_{X^L}^1(e)$, $X \in \mathfrak{g}$. Άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι για $s, t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$ ισχύει

- $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$
- $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.4. Η $\exp$ είναι αμφιδιαφόριση σε περιοχή του μηδενός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_0 \exp \cdot X &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{tX^L}^1(e) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{tX^L}^t(e) \\ &= X_e^L = X \end{aligned}$$

δηλαδή $T_0 \exp = id$ και από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έπεται το ζητούμενο. $\square$

2.2. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1. Έστω G ομάδα Lie και M διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μια **διαφορίσιμη δράση της G στη M** είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m \end{aligned}$$

τέτοια ώστε $e \cdot m = m$ για κάθε $m \in M$ (όπου e η μονάδα της G) και $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m$ για κάθε $g_1, g_2 \in G, m \in M$. Ισοδύναμα είναι ένας ομομορφισμός $\mathcal{A} : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ τέτοιος ώστε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto \mathcal{A}_g(m) \end{aligned}$$

να είναι διαφορίσιμη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2.2. Οι δράσεις του $\mathbb{R}$ στη M βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα πλήρη διανυσματικά πεδία της M . Πράγματι αν X πλήρες διανυσματικό πεδίο και $\phi(t, p)$ η ροή του από το p τη στιγμή t , τότε η ϕ είναι δράση του $\mathbb{R}$. Αντίστροφα, έστω ϕ δράση του $\mathbb{R}$ στη M . Για $p \in M$ ορίζουμε $X_p = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \phi(t, p)$. Το X είναι διανυσματικό πεδίο στη M . Επίσης για κάθε $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} \phi(t, p) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(t + s, p) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(t, \phi(s, p)) \\ &= X_{\phi(s, p)} \end{aligned}$$

άρα η ϕ είναι η ροή του X και, αφού ορίζεται για κάθε $\mathbb{R}$, το πεδίο είναι πλήρες.

Ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στη M , με $x \sim y$ αν υπάρχει $g \in G$ ώστε $y = g \cdot x$. Η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το σύνολο $\mathcal{O}(x) = G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$ και ονομάζεται **τροχιά** του x για την αντίστοιχη δράση.

Έστω X τοπολογικός χώρος και R σχέση ισοδυναμίας στον X . Με X/R συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Έστω επίσης $\pi : X \rightarrow X/R$ η φυσική προβολή, που απεικονίζει κάθε σημείο του X στην κλάση του. Θεωρούμε στον X/R τη μεγαλύτερη τοπολογία ως προς την οποία η π είναι συνεχής. Με την τοπολογία αυτή ένα $V \subset X/R$ είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(V) \subset X$ είναι ανοιχτό. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **τοπολογία πηλίκου** και ο χώρος X/R με την τοπολογία αυτή ονομάζεται **χώρος πηλίκου**. Γενικά ο χώρος X/R δεν είναι 'καλός' τοπολογικός χώρος. Ακόμα και στην περίπτωση που ο X είναι πολλαπλότητα, ο χώρος πηλίκου μπορεί να μην είναι Hausdorff ή ούτε καν T_1 , αν δεν κάνουμε κάποιες υποθέσεις για την R .

Έστω M διαφορίσιμη πολλαπλότητα και G ομάδα Lie που δρα στη M . Συμβολίζουμε με M/G τον (τοπολογικό) χώρο πηλίκου $M/\sim$ (όπου $x \sim y$ αν $y \in \mathcal{O}(x)$). Το $G \cdot x$ που είναι ένα σημείο στον M/G είναι κλειστό σύνολο, αν και μόνο αν η αντίστοιχη τροχιά στην M είναι κλειστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.3. Για $M = T^2$, $G \subset GL(2, \mathbb{R})$ και

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot (x, y) = (ax, by) \pmod{1}$$

Τότε για $a/b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (άρητη κλίση) οι τροχιές είναι πυκνές στον T^2 αλλά όχι κλειστές. Άρα ο χώρος πηλίκου δεν είναι T_1 .

Για $M = \mathbb{R}^2$, $G = (\mathbb{R}, +)$ με $t \cdot (x, y) = (x + ty, y)$. Τότε

$$\mathcal{O}((x, y)) = \begin{cases} (x, 0), & \text{για } y = 0 \\ \mathbb{R} \times y, & \text{για } y \neq 0 \end{cases}$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή οι τροχιές είναι κλειστά υποσύνολα της M και άρα ο χώρος πηλίκου είναι T_1 . Δεν είναι όμως Hausdorff. Πράγματι, έστω $\mathcal{O}((x, 0)) = \{(x, 0)\}$, $\mathcal{O}((y, 0)) = \{(y, 0)\} \in M/G$ και $V_1, V_2 \subset M/G$ ανοιχτά σύνολα με $\{(x, 0)\} \in V_1$, $\{(y, 0)\} \in V_2$. Θα δείξουμε ότι τα V_1, V_2 δεν μπορεί να είναι ξένα. Τα $\pi^{-1}(V_1), \pi^{-1}(V_2)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και $(x, 0) \in \pi^{-1}(V_1), (y, 0) \in \pi^{-1}(V_2)$. Άρα υπάρχει $z > 0$, ώστε $(x, z) \in \pi^{-1}(V_1)$ και $(y, z) \in \pi^{-1}(V_2)$. Οπότε $\pi((x, z)) = \pi((y, z)) = \mathcal{O}((0, z)) \in V_1 \cap V_2$.

ΛΗΜΜΑ 2.2.4. Έστω X τοπολογικός χώρος, R σχέση ισοδυναμίας στον X και $\pi : X \rightarrow X/R$ η φυσική προβολή. Αν ο χώρος πηλίκου X/R είναι Hausdorff, τότε η R είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$. Αντίστροφα, αν η π είναι ανοιχτή απεικόνιση και το R είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, τότε ο χώρος X/R είναι Hausdorff.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $U \subset X$ ορίζουμε

$$U^R = \pi^{-1}(\pi(U)) = \{y \in X : (y, z) \in R \text{ για κάποιο } z \in U\}$$

Για $U, V \subset X$ ισχύει ότι $(U \times V) \cap R \neq \emptyset$ αν και μόνο αν $U^R \cap V^R \neq \emptyset$. Πράγματι,

$$U^R \cap V^R \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\exists z \in U^R \cap V^R \Leftrightarrow$$

$$\exists z \in X, x \in U, y \in V : (x, z) \in R, (z, y) \in R \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in U, y \in V : (x, y) \in R \Leftrightarrow$$

$$(U \times V) \cap R \neq \emptyset$$

Έστω X/R Hausdorff. Θα δείξουμε ότι το $X \times X - R$ είναι ανοιχτό. Έστω $(x, y) \in X \times X - R$. Οπότε $\pi(x) \neq \pi(y)$. Αφού ο X/R είναι Hausdorff, υπάρχουν $U', V' \subset X/R$ ανοιχτά με $U' \cap V' = \emptyset$ και $\pi(x) \in U', \pi(y) \in V'$. Αφού η π είναι επί ισχύει ότι $U' = \pi(\pi^{-1}(U')), V' = \pi(\pi^{-1}(V'))$. Θέτουμε $U = \pi^{-1}(U'), V = \pi^{-1}(V')$. Τα U, V είναι ανοιχτά, αφού π συνεχής, $U \cap V = \pi^{-1}(U' \cap V') = \emptyset$ και $x \in U, y \in V$. Έπεται ότι $U^R \cap V^R = \emptyset$, γιατί αν υπήρχε $z \in U^R \cap V^R$ τότε $\pi(z) \in \pi(U) \cap \pi(V) = U' \cap V' = \emptyset$ που είναι άτοπο. Οπότε $(U \times V) \cap R = \emptyset$, $U \times V$ ανοιχτό και $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - R$. Οπότε το $X \times X - R$ είναι ανοιχτό και άρα το R κλειστό.

Έστω τώρα $R \subset X \times X$ και π ανοιχτή. Για $\pi(x), \pi(y) \in X/R$ με $\pi(x) \neq \pi(y)$ θα δείξουμε ότι υπάρχουν ανοιχτά ξένα σύνολα που τα περιέχουν. Αφού $\pi(x) \neq \pi(y)$, $(x, y) \in X \times X - R$ με το $X \times X - R$ να είναι ανοιχτό. Άρα, υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά, ώστε $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - R$. Οπότε $(U \times V) \cap R = \emptyset$ και επομένως $U^R \cap V^R = \emptyset$. Επίσης τα U^R και V^R είναι ανοιχτά, αφού η π είναι ανοιχτή και συνεχής, και $\pi(x) \in U^R, \pi(y) \in V^R$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2.5. Η συνθήκη π ανοιχτή χρειάζεται για να δείξουμε ότι αν R κλειστό ο X/R είναι Hausdorff, γιατί δεν ισχύει γενικά. Πράγματι, έστω X Hausdorff αλλά όχι regular τοπολογικός χώρος (για τους ορισμούςδες [Mun00]). Υπάρχει επομένως $A \subset X$ κλειστό και $x_o \in X - A$ που δεν διαχωρίζονται με ανοιχτά σύνολα. Ορίζουμε $R = (A \times A) \cup \Delta \subset X \times X$, όπου $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ η διαγώνιος η οποία είναι κλειστό σύνολο, αφού ο χώρος X είναι Hausdorff. Οπότε και το R είναι κλειστό, ως ένωση κλειστών. Εύκολα φαίνεται ότι το R είναι και σχέση ισοδυναμίας στον X . Ο χώρος πηλίκου X/R όμως δεν είναι Hausdorff. Πράγματι, έστω $z \in A$. Τότε $A = [z] \neq [x_o] = \{x_o\}$. Έστω $U, V \subset X/R$ ανοιχτά με $[z] \in U, [x_o] \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Τότε $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$, $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V) \subset X$ ανοιχτά και $x_o \in \pi^{-1}(U), A \subset \pi^{-1}(V)$ που είναι άτοπο.

Ας επιστρέψουμε στην μελέτη των δράσεων. Θεωρούμε τη δράση της G στη M . Για $x \in M$ το σύνολο $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ είναι υποομάδα της G και λέγεται **σταθεροποιούσα του x ή ομάδα ισοτροπίας της δράσης στο x** . Η δράση λέγεται

- **μεταβατική**, αν έχει μόνο μια τροχιά
- **ελεύθερη** στο $x \in M$, αν $G_x = 1_G$

- **ελεύθερη**, αν είναι ελεύθερη σε κάθε σημείο της M
- **πιστή**, αν $\bigcap_{x \in M} G_x = \{1_G\}$

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$. Η f θα λέγεται γνήσια αν είναι συνεχής και $f^{-1}(K)$ συμπαγές για κάθε $K \subset Y$ συμπαγές. Η δράση της G στην M θα λέγεται **γνήσια (proper)** αν η απεικόνιση $G \times M \rightarrow M \times M : (g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ είναι γνήσια. Ισοδύναμα (αφού οι πολλαπλότητες είναι μετρικοί χώροι και για μετρικούς χώρους οι έννοιες τις συμπάγειας και τις ακολουθιακής συμπάγειας ταυτίζονται), αν για $\{g_n\} \subset G$, $\{x_n\} \subset M$ και $x, y \in M$ ώστε $x_n \rightarrow x$ και $g_n \cdot x_n \rightarrow y$, υπάρχει $g \in G$ με $g_n \rightarrow g$.

ΛΗΜΜΑ 2.2.6. *Αν X, Y Hausdorff τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ γνήσια, τότε η f είναι και κλειστή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $C \subset X$ κλειστό. Για να δείξουμε ότι $f(C)$ κλειστό, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συγκλίνον δίκτυο από σημεία του $f(C)$ συγκλίνει σε σημείο του $f(C)$ (ότι οι χώροι είναι Hausdorff εξασφαλίζει τη μοναδικότητα των ορίων). Έστω $\{x_i\}_{i \in I} \subset C$ δίκτυο και $f(x_i) \rightarrow y \in Y$. Το σύνολο $K = \{f(x_i)\}_{i \in I} \cup \{y\} \subset Y$ είναι συμπαγές. Αφού η f είναι κανονική, $f^{-1}(K)$ συμπαγές, άρα και το $f^{-1}(K) \cap C$ είναι συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, και κλειστό, αφού είναι συμπαγές και ο X είναι Hausdorff. Ισχύει ότι $\{x_i\}_{i \in I} \subset f^{-1}(K) \cap C$. Άρα υπάρχει υποδίκτυο $\{x_a\}_{a \in I'}$ και $x \in f^{-1}(K) \cap C$, ώστε $x_a \rightarrow x$. Αφού f συνεχής, $f(x_a) \rightarrow f(x) \in f(C)$. Από μοναδικότητα του ορίου $y = f(x) \in f(C)$. $\square$

ΛΗΜΜΑ 2.2.7. *Έστω G ομάδα Lie και M πολλαπλότητα. Αν η δράση της G στη M είναι γνήσια, τότε ο χώρος πηλίκο M/G είναι Hausdorff.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι $M/G = M/R$, όπου $R = \{(x, g \cdot x) : g \in G, x \in M\}$. Από το (2.2.4) αρκεί να δείξουμε ότι η προβολή $\pi : M \rightarrow M/G$ είναι ανοιχτή και το R είναι κλειστό υποσύνολο του $M \times M$.

Έστω $U \subset M$ ανοιχτό. Τότε

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{y \in M : \exists g \in G, x \in U \text{ ώστε } y = g \cdot x\} \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot U \end{aligned}$$

που είναι ανοιχτό, αφού η απεικόνιση $M \rightarrow M : x \rightarrow g \cdot x$ είναι αμφιδιαφόριση για κάθε $g \in G$. Επομένως, αφού ο M/G έχει την τοπολογία πηλίκο, και το $\pi(U)$ είναι ανοιχτό.

Από υπόθεση η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, x) &\mapsto (g \cdot x, x) \end{aligned}$$

είναι γνήσια και άρα, από το προηγούμενο Λήμμα είναι κλειστή. Οπότε το $R = \mathcal{A}(G \times M)$ είναι κλειστό. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.8. *Έστω G ομάδα Lie, M διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $\mathcal{A}$ γνήσια και ελεύθερη δράση της G στη M . Ο χώρος των τροχιών M/G με την τοπολογία πηλίκο δέχεται με μοναδικό τρόπο δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας διάστασης $\dim M - \dim G$ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Αν $\pi : M \rightarrow M/G$ η φυσική προβολή, τότε για κάθε $b \in M/G$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή Q στην M/G και αμφιδιαφόριση*

$$\begin{aligned} \tau : \pi^{-1}(Q) &\rightarrow G \times S \\ x &\mapsto (\chi(x), s(x)) \end{aligned}$$

τέτοια ώστε για $x \in \pi^{-1}(Q)$, $g \in G$

$$\pi(x) = s(x) \text{ και}$$

$$\tau(g \cdot x) = (g \cdot \chi(x), s(x))$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το προηγούμενο Λήμμα ο M/G είναι Hausdorff. Επίσης, αν $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμη βάση του M , αφού π είναι ανοιχτή όπως είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος, η $\{\pi(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση του M/G και επομένως είναι και αυτός δεύτερος αριθμήσιμος. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι και τοπικά ευκλείδειος.

Έστω $x \in M$, g ορίζουμε

$$\mathcal{A}_x : G \rightarrow M$$

$$h \mapsto \mathcal{A}(h, x) \equiv h \cdot x$$

και

$$\mathcal{A}_g : M \rightarrow M$$

$$y \mapsto \mathcal{A}(g, y)$$

Η γραμμική απεικόνιση $T_e \mathcal{A}_x : \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$, όπου e η μονάδα της G , είναι 1-1. Πράγματι, έστω $X \in \mathfrak{g}$ με $T_e \mathcal{A}_x \cdot X = 0$. Θα δείξουμε ότι $X = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot x &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp((t+s)X) \cdot x \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp(tX) \exp(sX) \cdot x \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{A}_{\exp(tX)}(\mathcal{A}_x(\exp(sX))) \\ &= T_x \mathcal{A}_{\exp(tX)} \circ T_e \mathcal{A}_x \cdot X \\ &= 0 \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Που σημαίνει ότι η απεικόνιση $\exp(tX) \cdot x = \exp(0X) \cdot x = x$ για κάθε t . Αφού η δράση είναι ελεύθερη, έπεται ότι $\exp(tX) = e$ για κάθε t . Παραγωγίζοντας την τελευταία αυτή σχέση ως προς t , αφού $T_0 \exp = id$, έπεται ότι $X = 0$.

Έστω $x \in M$. Παίρνουμε μια υποπολλαπλότητα S' της M από το x , ώστε $T_x M = T_e \mathcal{A}_x(\mathfrak{g}) \oplus T_x S'$ (αυτή η πολλαπλότητα μπορεί να προκύψει επιλέγοντας μια βάση διανυσμάτων για το συμπλήρωμα του $T_e \mathcal{A}_x$ στον $T_x M$, επεκτείνοντάς τα τοπικά και ολοκληρώνοντας). Η διάσταση της S' είναι $\dim M - \dim G$. Αφού η δράση είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, υπάρχει ανοιχτή περιοχή S του x στην S' , ώστε

$$T_y M = T_e \mathcal{A}_y(\mathfrak{g}) \oplus T_y S, \quad \forall y \in S$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{B}_S : G \times S \rightarrow M$ με $\mathcal{B}_S = \mathcal{A}|_{G \times S}$. Για κάθε $y \in S$ έχουμε ότι $T_{(e,y)} \mathcal{B}_S = (T_e \mathcal{A}_y, id)$. Άρα, από την παραπάνω διάσπαση του $T_y M$, έπεται ότι είναι επί. Είναι και 1-1, αφού είναι η $T_e \mathcal{A}_y$.

Για $g, h \in G$ και $y \in S$ έχουμε $\mathcal{B}_S(gh, y) = \mathcal{A}_g(\mathcal{B}_S(h, y))$. Παραγωγίζοντας ως προς (h, y) για $h = e$ έχουμε $T_{(g,y)} \mathcal{B}_S = T_y \mathcal{A}_g \circ T_{(e,y)} \mathcal{B}_S$. Η $T_y \mathcal{A}_g$ είναι ισομορφισμός, αφού η $\mathcal{A}_g$ είναι αμφιδιαφόριση, και η $T_{(e,y)} \mathcal{B}_S$ επίσης, όπως είδαμε. Άρα η $T_{(g,y)} \mathcal{B}_S$ είναι ισομορφισμός για κάθε $g \in G$, $y \in S$. Άρα, από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, έπεται ότι η $\mathcal{B}_S$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Θα δείξουμε ότι, μικραίνοντας

ενδεχομένως την S , είναι και 1-1, άρα είναι αμφιδιαφόριση από το $G \times S$ προς κάποιο ανοιχτό υποσύνολο της M . Έστω ότι, όσο και να μικραίνουμε την S , δεν είναι 1-1. Επομένως υπάρχουν $y_i, z_i \in S$ και $g_i, h_i \in G$, $i = 1, 2, \dots$ ώστε $y_i, z_i \rightarrow x$, $g_i \cdot y_i = h_i \cdot z_i$ και $(g_i, y_i) \neq (h_i, z_i)$ για κάθε i . Μάλιστα ισχύει ότι $g_i \neq h_i$ για κάθε i (γιατί αλλιώς, αφού και $g_i \cdot y_i = h_i \cdot z_i$, θα ίσχυε και $y_i = z_i$ και τελικά $(g_i, y_i) = (h_i, z_i)$). Θέτουμε $k_i = h_i^{-1}g_i$, οπότε $k_i \neq e$ για κάθε i και $z_i = k_i \cdot y_i$. Αφού $k_i \cdot y_i = z_i \rightarrow x$ και $y_i \rightarrow x$ και η δράση είναι γνήσια, προκύπτει ότι υπάρχει υπακολουθία k_{i_j} και $k \in G$, ώστε $k_{i_j} \rightarrow k$. Τότε, από τη συνέχεια της δράσης, $x = \lim_j z_{i_j} = \lim_j k_{i_j} \cdot y_{i_j} = k \cdot x$ και αφού η δράση είναι ελεύθερη $k = e$ και επομένως $k_{i_j} \rightarrow e$. Άρα ανακεφαλαιώνοντας, $z_{i_j} = k_{i_j} \cdot y_{i_j}$ με $k_{i_j} \neq e$ και z_{i_j}, y_{i_j} σε περιοχή του x και k_{i_j} σε περιοχή του e . Άτοπο, αφού η $\mathcal{B}_S : G \times M \rightarrow M$, όπως δείξαμε, είναι αμφιδιαφόριση σε περιοχή του (e, x) .

Θέτουμε $Q = \pi(\mathcal{B}_S(G \times S))$, που είναι ανοιχτό υποσύνολο του M/G αφού π ανοιχτή, και

$$\tau_S = \mathcal{B}_S^{-1} = (\chi_S, s_S) : \pi^{-1}(Q) = \mathcal{B}_S(G \times S) \rightarrow G \times S$$

η οποία είναι αμφιδιαφόριση και για $g \in G$ και $x \in \pi^{-1}(Q)$, αφού $\mathcal{B}_S(g\chi_S(x), s_S(x)) = (g\chi_S(x)) \cdot s_S(x) = g \cdot \mathcal{B}_S(\chi_S(x), s_S(x)) = g \cdot x$,

$$(g\chi_S(x), s_S(x)) = \tau_S(g \cdot x)$$

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να βάλουμε δομή διαφορικής πολλαπλότητας στον χώρο M/G . Έστω $\pi(x) \in M/G$ και $S \subset M$ η πολλαπλότητα για το $x \in M$, όπως την κατασκευάσαμε πριν. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \rho_S : \pi(S) &\rightarrow S \\ \pi(x) &\mapsto s_S(x) \end{aligned}$$

Τότε $\pi^{-1}(\pi(S)) = G \cdot S = \mathcal{B}_S(G \times S)$ ανοιχτό, άρα και $\pi(S)$ ανοιχτό. Η ρ_S είναι καλά ορισμένη, αφού $s_S(g \cdot x) = s_S(x)$ για κάθε $g \in G$. Είναι συνεχής, αφού είναι η s_S , προφανώς επί και 1-1, αφού όπως είδαμε κάθε σημείο στο $\mathcal{B}_S(G \times S)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $g \cdot y$ με $y \in S, g \in G$. Τελικά η ρ_S είναι ομοιομορφισμός, αφού η αντιστροφή της η $\pi|_S$ είναι και αυτή συνεχής. Άρα, αφού η S είναι πολλαπλότητα, η ρ_S είναι χάρτης. Μένει να δείξουμε ότι η αλλαγή χαρτών είναι διαφορίσιμη συνάρτηση (δες και σχήμα 1). Έστω $(\pi(S), \rho_S), (\pi(S'), \rho_{S'})$ χάρτες με $\pi(S) \cap \pi(S') \neq \emptyset$. Τότε

$$\rho_{S'} \circ \rho_S^{-1} : S \supset \rho_S(\pi(S) \cap \pi(S')) \rightarrow \rho_S(\pi(S) \cap \pi(S')) \subset S'$$

και για $x \in \rho_S(\pi(S) \cap \pi(S'))$ έχουμε

$$\rho_{S'}(\rho_S^{-1}(x)) = \rho_{S'}(\pi(x)) = s_{S'}(x)$$

που είναι αμφιδιαφόριση. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2.9. Η $\pi : M \rightarrow M/G$, με τοπικές τετριμενοποιήσεις τις τ που δείνει το παραπάνω Θεώρημα, είναι μια λεία νηματική δέσμη, τέτοια ώστε η δράση της G στη M μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με τη G στον πρώτο παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου $G \times S$. Η π λέμε ότι είναι μια **πρώτεύουσα νηματική δέσμη με ομάδα δομής G** .

Η υποπολλαπλότητα S του Θεωρήματος λέγεται **slice**. Αφού γενικεύσουμε κατάλληλη τον ορισμό θα δείξουμε ότι slices υπάρχουν και για δράσεις που είναι γνήσιες μόνο, και όχι απαραίτητα ελεύθερες.

2.3. ΓΝΗΣΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε δράσεις ομάδων Lie με τη μοναδική υπόθεση ότι είναι γνήσιες. Για την ανάλυσή μας θα ακολουθήσουμε τα [?] και [CB97].

Σε όλη την ενότητα η M θα είναι διαφορική πολλαπλότητα, η G ομάδα Lie και

$$\begin{aligned}\mathcal{A} : G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m\end{aligned}$$

γνήσια δράση της G στην M . Θα συμβολίζουμε με 1 τη μονάδα της G .

Ήδη έχουμε δει ότι ο χώρος πηλίκου M/G είναι Hausdorff.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.1. Έστω $x \in M$. Η σταθεροποιούσα G_x του x είναι συμπαγής υποομάδα Lie της G και η τροχιά $G \cdot x$ του x είναι κλειστή εμφυτευμένη (embedded) υποπολλαπλότητα της M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω

$$\begin{aligned}\mathcal{B} : G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, m) &\mapsto (g \cdot m, m)\end{aligned}$$

Τότε η σταθεροποιούσα $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ είναι ομοιομορφική με το $\mathcal{B}^{-1}(\{x, x\})$ που είναι συμπαγής, αφού η δράση είναι γνήσια. Επίσης η G_x είναι υποομάδα της G . Άρα από το Θεώρημα του Cartan, θα είναι και ομάδα Lie.

Έστω $\{g_n \cdot x\} \subset G \cdot x$ και $g_n \cdot x \rightarrow y \in M$. Αφού η δράση είναι γνήσια, υπάρχει $g \in G$ ώστε $g_n \rightarrow g$. Οπότε $y = \lim g_n \cdot x = g \cdot x \in G \cdot x$ και άρα η τροχιά είναι κλειστό υποσύνολο της M .

Θεωρούμε τη δράση της G_x στη G με $G_x \times G \rightarrow G : (h, g) \mapsto gh^{-1}$. Αφού η G_x είναι συμπαγής η δράση είναι γνήσια. Προφανώς είναι και ελεύθερη, άρα το πηλίκο G/G_x είναι διαφορική πολλαπλότητα. Ορίζουμε $\phi : G/G_x \rightarrow M : [g] \mapsto g \cdot x$. Η ϕ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και immersion. Επίσης η αντίστροφή της είναι συνεχής, αφού η δράση είναι γνήσια. Άρα η εικόνα της, που είναι η τροχιά $G \cdot x$ είναι υποπολλαπλότητα της M . $\square$

2.3.1. Το Θεώρημα γραμμικοποίησης του Bochner. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς για $x \in M$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_x : G &\rightarrow M \\ g &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

και $a_x = T_1 \mathcal{A}_x : T_1 G \equiv \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$. Τότε για $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot x &= \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \exp(tX) \exp(hX) \cdot x \\ &= T_x L_{\exp(tX)} \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \exp(hX) \cdot x \\ &= T_x L_{\exp(tX)} \cdot \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \mathcal{A}_x(\exp(hX)) \\ &= T_x L_{\exp(tX)} \cdot a_x(X)\end{aligned}$$

και ο $T_x L_{\exp(tX)}$ είναι ισομορφισμός για κάθε t .

Άρα

$$\begin{aligned}
 a_x(X) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot x = 0, \forall t \\
 &\Leftrightarrow \exp(tX) \cdot x = x, \forall t \\
 &\Leftrightarrow \exp(tX) \in G_x, \forall t \\
 &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{g}_x
 \end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$(2.3.1) \quad T_1 G_x \equiv \mathfrak{g}_x = \ker a_x$$

ΛΗΜΜΑ 2.3.2. Έστω $\mathcal{A}$ δράση της ομάδας Lie G στην πολλαπλότητα M . Έστω $x \in M$ και S υποπολλαπλότητα της M που περιέχει το x , τέτοια ώστε

$$T_x M = a_x(\mathfrak{g}) \oplus T_x S$$

Έστω επίσης C υποπολλαπλότητα της G που διέρχεται από το 1 , τέτοια ώστε

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \oplus T_1 C$$

Τότε υπάρχουν ανοιχτή περιοχή S_o του x στην S και ανοιχτή περιοχή C_o του 1 στη C , ώστε η $\mathcal{A}_o := \mathcal{A}|_{C_o \times S_o}$ να είναι αμφιδιαφόριση μεταξύ $C_o \times S_o$ και μιας ανοιχτής περιοχής του x στην M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $(X, v) \in T_{(1,x)}(C \times S) = T_1 C \times T_x S$ και a καμπύλη στην S με $a(0) = x, a'(0) = v$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 T_{(1,x)} \mathcal{A}|_{C \times S} \cdot (X, v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX) \cdot a(t) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{A}_{a(t)}(\exp(tX)) \\
 &= T_1 \mathcal{A}_x \circ T_0 \exp \cdot X + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{A}_{a(t)}(1) \\
 &= T_1 \mathcal{A}_x \cdot X + v \\
 &= a_x(X) + v
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 T_{(1,x)} \mathcal{A}|_{C \times S} \cdot (X, v) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{a_x(X)}_{a_x(\mathfrak{g})} + \underbrace{v}_{T_x S} = 0 \\
 &\Leftrightarrow a_x(X) = 0 \text{ και } v = 0 \\
 &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{g}_x \cap T_1 C \text{ και } v = 0 \\
 &\Leftrightarrow X = 0, v = 0
 \end{aligned}$$

όπου στη τρίτη συνεπαγωγή χρησιμοποιήθηκε το αποτέλεσμα πριν το Λήμμα. Άρα η $T_{(1,x)} \mathcal{A}|_{C \times S}$ είναι 1-1. Επίσης

$$\begin{aligned}
 \dim(C \times S) &= \dim T_1 C + \dim T_x S \\
 &= (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_x) + (\dim M - \dim a_x(\mathfrak{g})) \\
 &= (\dim \mathfrak{g} - \dim(\ker a_x)) + (\dim M - \dim a_x(\mathfrak{g})) \\
 &= \dim M
 \end{aligned}$$

άρα είναι και επί, δηλαδή ισομορφισμός. Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.3 (Γραμμικοποίησης του Bochner). Έστω $\mathcal{A}$ δράση της συμπαγούς ομάδας $Lie K$ στην πολλαπλότητα M . Έστω επίσης $x \in M$ σταθερό σημείο για τη δράση. Τότε υπάρχει K -αναλλοίωτη ανοιχτή περιοχή U του x_o στην M και V ανοιχτή περιοχή του 0 στον $T_{x_o}M$ και αμφιδιαφόριση

$$\chi : U \rightarrow V$$

με $\chi(x_o) = 0$ που είναι K -ισομεταβλητή, δηλαδή $\chi(k \cdot x) = T_{x_o}\mathcal{A}_k \cdot \chi(x)$ για κάθε $k \in K, x \in U$, όπου $\mathcal{A}_k : M \rightarrow M : m \mapsto k \cdot m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε ανοιχτή περιοχή $U' \subset M$ του x_o , υπάρχει ανοιχτή περιοχή του $U \subset U'$ του x_o που είναι K -αναλλοίωτη. Πράγματι, αφού η $\mathcal{A}$ είναι συνεχής και $\mathcal{A}(k, x_o) = x_o \in U'$ για κάθε $k \in K$, θα υπάρχουν για κάθε $k \in K$ ανοιχτές περιοχές $W(k) \subset K$ του k και $U(k) \subset M$ του x_o ώστε $\mathcal{A}(W(k) \times U(k)) \subset U'$. Αφού όμως K συμπαγές και $K = \cup_{k \in K} W(k)$, θα υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο F του K , ώστε $K = \cup_{k \in F} W(k)$. Αν θέσουμε $U'' = \cap_{k \in F} U(k) \subset M$ ανοιχτή περιοχή του x_o , τότε $\mathcal{A}(K \times U'') \subset U'$. Θέτουμε $U = \mathcal{A}(K \times U'') = \cup_{k \in K} k \cdot U''$.

Έστω $\tilde{\chi} : \tilde{U} \rightarrow T_{x_o}M$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με $\tilde{\chi}(x_o) = 0$ και $T_{x_o}\tilde{\chi} = id$ (μπορούμε π.χ. να πάρουμε ένα χάρτη σε περιοχή του x_o). Μικραίνοντας το $\tilde{U}$ μπορούμε να το κάνουμε K -αναλλοίωτο, όπως δείξαμε.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο

$$X = \left\{ \chi : \tilde{U} \rightarrow T_{x_o}M : \chi(x_o) = 0 \right\}$$

Αφού το x_o είναι σταθερό σημείο για τη δράση, τότε $T_{x_o}\mathcal{A}_k \circ \chi \circ \mathcal{A}_k^{-1} \in X$.

Κατασκευάζουμε το στοιχείο του X

$$\bar{\chi}(x) = \int_{k \in K} T_{x_o}\mathcal{A}_k \cdot \tilde{\chi} \circ \mathcal{A}_k^{-1}(x) dk, \forall x \in \tilde{U}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται ως προς το K -αναλλοίωτο μέτρο Haar (δες [Kn02]). Έχουμε

$$\bar{\chi} = T_{x_o}\mathcal{A}_k \circ \bar{\chi} \circ \mathcal{A}_k^{-1}, \forall k \in K$$

δηλαδή είναι ισομεταβλητός, και

$$\begin{aligned} T_{x_o}\bar{\chi} &= \int_{k \in K} T_{x_o}(T_{x_o}\mathcal{A}_k \cdot \tilde{\chi} \circ \mathcal{A}_k^{-1}) dk \\ &= \int_{k \in K} T_{x_o}\mathcal{A}_k \cdot T_{x_o}\tilde{\chi} \circ T_{x_o}\mathcal{A}_k^{-1} dk \\ &\stackrel{T_{x_o}\tilde{\chi}=id}{=} id \end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, υπάρχει περιοχή U του x_o , την οποία από την παρατήρηση στην αρχή της απόδειξης μπορούμε να την κάνουμε K -αναλλοίωτη, ώστε η $\bar{\chi} : U \rightarrow \bar{\chi}(U)$ να είναι αμφιδιαφόριση. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3.4. Έστω g εσωτερικό γινόμενο στο διανυσματικό χώρο $T_{x_o}M$. Το

$$\bar{g} = \int_{k \in K} (T_{x_o}\mathcal{A}_k)^* g dk$$

είναι K -αναλλοίωτο. Με άλλα λόγια αν θεωρήσουμε το χώρο $E = (T_{x_o}M, \bar{g})$ η K (ή για την ακρίβεια η $\{T_{x_o}\mathcal{A}_k : k \in K\}$) είναι συμπαγής υποομάδα της ορθογώνιας ομάδας του E . Έστω B ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον E , που περιέχεται στο V που δίνει το Θεώρημα. Η B είναι K -αναλλοίωτη. Προορίζοντας την U , μπορούμε να δούμε την χ ως αμφιδιαφόριση μεταξύ U και B .

2.3.2. Ύπαρξη slice.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.5. Έστω $\mathcal{A} : G \times M \rightarrow M$ δράση της ομάδας Lie G στην πολλαπλότητα M . Μια slice από το $x_o \in M$ για τη δράση $\mathcal{A}$ είναι μια υποπολλαπλότητα της M με $x_o \in S$ ώστε:

- $T_{x_o}M = a_{x_o}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_o}S$ και $T_xM = a_x(\mathfrak{g}) + T_xS$, για κάθε $x \in S$
- Η S είναι G_{x_o} -αναλλοίωτη.
- Αν $x \in S, g \in G$ και $g \cdot x \in S$, τότε $g \in G_{x_o}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.6. Έστω $\mathcal{A}$ γνήσια δράση της ομάδας Lie G στην πολλαπλότητα M και $x_o \in M$. Υπάρχει slice από το x_o για την $\mathcal{A}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η δράση είναι γνήσια, η σταθεροποιούσα G_{x_o} είναι συμπαγής ομάδα Lie, από την Πρόταση (2.3.1). Επίσης το x_o είναι προφανώς σταθερό σημείο για τη δράση της G_{x_o} . Από το Θεώρημα Γραμμικοποίησης του Bochner, και την Παρατήρηση μετά από αυτό, υπάρχει U ανοιχτή και G_{x_o} -αναλλοίωτη περιοχή του x_o στην M , ανοιχτή μπάλα B_ϵ ακτίνας ϵ (ως προς το G_{x_o} αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο που κατασκευάσαμε στην Παρατήρηση αυτή) στον $T_{x_o}M$ με κέντρο το 0 , και

$$\chi : U \rightarrow B_\epsilon$$

G_{x_o} -ισομεταβλήτη αμφιδιαφόριση, με $\chi(x_o) = 0$ και $T_{x_o}\chi = id$.

Για $k \in G_{x_o}$ και $g \in G$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_{kgk^{-1}}(x_o) = \mathcal{A}_k(\mathcal{A}_g(x_o))$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή ως προς g στο σημείο $g = 1$ και κατά την κατεύθυνση $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}_{k \exp(tX)k^{-1}}(x_o) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}_k(\mathcal{A}_{\exp(tX)}(x_o)) \Rightarrow \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}_{x_o}(I_k(\exp(tX))) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}_k(\mathcal{A}_{x_o}(\exp(tX))) \Rightarrow \\ T_1\mathcal{A}_{x_o} \circ Ad_k \cdot X &= T_{x_o}\mathcal{A}_k \circ T_1\mathcal{A}_{x_o} \cdot X \Rightarrow \\ a_{x_o}(Ad_k \cdot X) &= T_{x_o}\mathcal{A}_k(a_{x_o}(X)) \end{aligned}$$

Επομένως, η εφαπτόμενη δράση της G_{x_o} στον $T_{x_o}M$, αφήνει την εικόνα $a_{x_o}(\mathfrak{g}) \subset T_{x_o}M$ αναλλοίωτη. Οπότε και το $a_{x_o}(\mathfrak{g})^\perp$, το ορθογώνιο συμπλήρωμα ως προς την G_{x_o} -αναλλοίωτη μετρική στον $T_{x_o}M$, είναι και αυτό αναλλοίωτο.

Αφού η χ είναι ισομεταβλήτη, η $S_\epsilon = \chi^{-1}(a_{x_o}(\mathfrak{g})^\perp \cap B_\epsilon)$ είναι G_{x_o} -αναλλοίωτη υποπολλαπλότητα της M , με $x_o \in S_\epsilon$. Άρα η S_ϵ ικανοποιεί την ιδιότητα (ii) της slice.

Για $v \in T_{x_o}M$ έχουμε

$$\begin{aligned} v \in T_{x_o}S_\epsilon &\Leftrightarrow v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a(t), a \text{ καμπύλη στην } S_\epsilon \text{ με } a(0) = x_o, a'(0) = v \\ &\Leftrightarrow_{T_{x_o}\chi=id} v = T_{x_o}\chi \cdot v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \chi(a(t)) \in a_{x_o}(\mathfrak{g})^\perp \end{aligned}$$

άρα $T_{x_o}S_\epsilon = a_{x_o}(\mathfrak{g})^\perp$ και επομένως

$$T_{x_o}M = a_{x_o}(\mathfrak{g}) \oplus a_{x_o}(\mathfrak{g})^\perp = a_{x_o}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_o}S_\epsilon$$

Επομένως, για αρκετά μικρό ϵ , θα ισχύει και

$$T_xM = a_x(\mathfrak{g}) + T_xS_\epsilon, \forall x \in S_\epsilon$$

Αν δείξουμε ότι για κάποιο ϵ η S_ϵ ικανοποιεί και τη τρίτη ιδιότητα μιας slice, έχουμε τελειώσει. Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η S_ϵ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα τρία. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Οπότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν $\{g_j\} \subset G, \{x_j\} \subset S_\epsilon$ με $g_j \cdot x_j \in S_\epsilon, g_j \notin G_{x_o}$ και $g_j \cdot x_j \rightarrow x_o, x_j \rightarrow x_o$. Αφού η δράση είναι γνήσια (παιρνώντας σε υπακοιουθία της $\{g_j\}$) θα ισχύει ότι $g_j \rightarrow g$ για κάποιο $g \in G$. Οπότε, από συνέχεια της δράσης, θα έχουμε $g_j \cdot x_j \rightarrow g \cdot x_o$. Όμως, $g_j \cdot x_j \rightarrow x_o$, οπότε $g \cdot x_o = x_o$, δηλαδή $g \in G_{x_o}$. Θεωρώντας αντί των g_j τα $g'_j = g^{-1}g_j$, έχουμε $g'_j \rightarrow 1, g'_j \cdot x_j \rightarrow x_o$ και $g'_j \notin G_{x_o}$, αφού $g'_j = g^{-1}g_j$ με $g_j \notin G_{x_o}$ και $g^{-1} \in G_{x_o}$. Επίσης $g'_j \cdot x_j \in S_\epsilon$.

Έστω C υποπολλαπλότητα της G από το 1 με

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{x_o} \oplus T_1C$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} q : C \times G_{x_o} &\rightarrow G \\ (c, k) &\mapsto ck \end{aligned}$$

Λόγω της παραπάνω διάσπασης της $\mathfrak{g}$ το διαφορικό της q είναι ισομορφισμός, άρα, από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, θα υπάρχουν $C_o \subset C$ περιοχή του 1 στη C , V περιοχή του 1 στην G_{x_o} και W περιοχή του 1 στην G , ώστε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} C_o \times V &\rightarrow W \\ (c, k) &\mapsto ck \end{aligned}$$

να είναι αμφιδιαφόριση.

Αφού $g'_j \rightarrow 1$, από ένα j και μετά $g'_j \in W$ και άρα γράφονται με μοναδικό τρόπο ως $g'_j = c_j k_j$, με $c_j \in C_o, k_j \in G_{x_o}$. Αφού $g'_j \notin G_{x_o}$ για κάθε j , θα πρέπει $c_j \neq 1$. Από την άλλη, η S_ϵ είναι G_{x_o} -αναλλοίωτη, και $x_j \in S_\epsilon$, άρα $k_j \cdot x_j \in S_\epsilon$.

Έχουμε $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{x_o} \oplus T_1C$ και $T_{x_o}M = a_{x_o}(\mathfrak{g}) \oplus T_{x_o}S_\epsilon$, οπότε από το Λήμμα (2.3.2), υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $1 \in C_o \subset C, x_o \in S_o \subset S_\epsilon$ και $x_o \in M_o \subset M$, ώστε η συνάρτηση

$$\begin{aligned} C_o \times S_o &\rightarrow M_o \\ (c, s) &\mapsto c \cdot s \end{aligned}$$

να είναι αμφιδιαφόριση. Μικραίνοντας αρκετά το ϵ , μπορούμε να αντικαταστήσουμε την S_o με την S_ϵ .

Άρα $c_j \in C_o, k_j \cdot x_j \in S_\epsilon$ και

$$c_j \cdot (k_j \cdot x_j) = (c_j k_j) \cdot x_j = g'_j \cdot x_j \in S_\epsilon$$

άτοπο, λόγω της παραπάνω αμφιδιαφόρισης, αφού όπως έχουμε δει $c_j \neq 1$. □

2.3.3. Συσχετισμένες νηματικές δέσμες. Έστω X, Y διαφορικές πολλαπλότητες και H ομάδα Lie η οποία δρά στις X και Y . Συμβολίζουμε τις αντίστοιχες δράσεις με

$$\begin{aligned} H \times X &\rightarrow X \\ (h, x) &\mapsto x \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} H \times Y &\rightarrow Y \\ (h, y) &\mapsto h \cdot y \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η δράση της H στην X είναι ελεύθερη και γνήσια. Οπότε, όπως έχουμε δείξει, ο χώρος πηλίκου X/H θα είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $\dim X - \dim H$ και η $\pi : X \rightarrow X/H$ θα είναι πρωτεύουσα δέσμη με ομάδα δομής H .

Θεωρούμε τη δράση της H στο γινόμενο $X \times Y$ με

$$\begin{aligned} H \times (X \times Y) &\rightarrow X \times Y \\ (h, (x, y)) &\mapsto (x \cdot h^{-1}, h \cdot y) \end{aligned}$$

Αφού η δράση της H στην X είναι γνήσια και ελεύθερη και η δράση της H στην $X \times Y$ θα είναι γνήσια και ελεύθερη. Επομένως ο χώρος πηλίκου

$$X \times_Y Y := (X \times Y) / H = \{ (x \cdot h^{-1}, h \cdot y) : h \in H \} : (x, y) \in X \times Y \}$$

θα είναι πολλαπλότητα διάστασης $\dim \left(X \times_Y Y \right) = \dim X + \dim Y - \dim H$.

Η προβολή $X \times Y \rightarrow X$ επάγει μοναδική απεικόνιση $X \times_Y Y \rightarrow X/H$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \rightarrow & X \times_Y Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \rightarrow & X/H \end{array}$$

να μετατίθεται. Η $X \times_Y Y \rightarrow X/H$ είναι νηματική δέσμη με τυπική ίσα ίση με Y . Θα λέμε ότι είναι η δέσμη πάνω από την X/H με ίσα Y που σχετίζεται με την πρωτεύουσα δέσμη $X \rightarrow X/H$.

Έστω G μια άλλη ομάδα Lie που δρα στην X

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_X : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

ώστε η δράση της να μετατίθεται με αυτή της H , δηλαδή $g \cdot (x \cdot h^{-1}) = (g \cdot x) \cdot h^{-1}$ για κάθε $x \in X, g \in G$ και $h \in H$. Παρατηρούμε πως η δράση $\mathcal{A}_X$ απεικονίζει H -τροχιές στην X σε H -τροχιές. Επομένως ορίζει δράση της G στην X/H

$$\begin{aligned} G \times (X/H) &\rightarrow X/H \\ (g, x \cdot H) &\mapsto (g \cdot x) \cdot H \end{aligned}$$

Ομοίως η δράση της G στην $X \times Y$

$$\begin{aligned} G \times (X \times Y) &\rightarrow X \times Y \\ (g, (x, y)) &\mapsto (g \cdot x, y) \end{aligned}$$

μετατίθεται με τη δράση της H στην $X \times Y$. Επομένως ορίζει δράση της G στην $X \times_H Y$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.7. Έστω $X = G$ ομάδα Lie $H < G$ συμπαγής, άρα υποομάδα Lie, και Y μια άλλη πολλαπλότητα. Θεωρούμε πως η G, H δρουν στην X με $G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto gx$ (πολλαπλασιασμός από τα αριστερά) και $H \times X \rightarrow X : (h, x) \mapsto xh^{-1}$ (πολλαπλασιασμός από τα δεξιά με το αντίστροφο). Οι δράσεις αυτές μετατίθενται προφανώς (προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού). Προφανώς η δράση της H στην X είναι ελεύθερη, ενώ είναι και γνήσια αφού η H είναι συμπαγής. Θεωρούμε επίσης πως η H δρα και στην Y . Ορίζεται τότε η $X \times_H Y = G \times_H Y$.

2.3.4. Τύποι τροχιών. Για όλη την ενότητα η M θα είναι μια διαφορική πολλαπλότητα, G ομάδα Lie και $\mathcal{A}$ γνήσια δράση της G στην M .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.8. Έστω $H < G$ συμπαγής και

$$M^H = \{m \in M : H \subset G_m\} = \{m \in M : h \cdot m = m, \forall h \in H\}$$

Τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του M^H είναι διαφορική υποπολλαπλότητα της M και για κάθε $p \in M^H$ έχουμε

$$T_p(M^H) = \{v_p \in T_p M : T_p \mathcal{A}_h \cdot v_p = v_p, \forall h \in H\} \equiv (T_p M)^H$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $p \in M^H$. Αφού $H < G_p$, άρα το p είναι σταθερό σημείο για τη δράση της H , και η H είναι συμπαγής, από το Θεώρημα γραμμικοποίησης του Βοζνηνερ υπάρχουν περιοχή U του p στην M , V περιοχή του 0 στον $T_p M$ και H -ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση

$$\psi : U \rightarrow V$$

με $\psi(p) = 0$.

Αφού η δράση της H στον $T_p M$ είναι γραμμική, ο $(T_p M)^H$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $T_p M$.

Θα δείξουμε ότι

$$\psi^{-1} \left((T_p M)^H \cap V \right) = U \cap M^H$$

οπότε, αφού λόγω συνέχειας η διάσταση του $(T_q M)^H$ είναι σταθερή για κάθε q σε μια συνεκτική συνιστώσα του M^H , και η ψ μπορεί να παίξει το ρόλο χάρτη, και επομένως κάθε συνεκτική συνιστώσα του M^H είναι embedded υποπολλαπλότητα της M . Έχουμε

$$\begin{aligned} v \in (T_p M)^H \cap V &\Leftrightarrow \\ v \in V \text{ και } T_p \mathcal{A}_h \cdot v &= v, \forall h \in H \Leftrightarrow \\ \psi^{-1}(v) \in U \text{ και } h \cdot \psi^{-1}(v) &= \psi^{-1}(v), \forall h \in H \Leftrightarrow \\ \psi^{-1}(v) &\in U \cap M^H \end{aligned}$$

□

Για $H < G$ ορίζουμε

$$M_H = \{m \in M : G_m = H\}$$

Προφανώς $M_H \subset M^H$. Επίσης, αφού η δράση είναι γνήσια, άρα κάθε σταθεροποιούσα είναι συμπαγής υποομάδα, $M_H = \emptyset$ για H όχι συμπαγή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.9. Το M_H είναι ανοιχτό υποσύνολο του M^H και οι συνεκτικές συνιστώσες του M_H είναι υποπολλαπλότητες της M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα εξετάσουμε την περίπτωση η H να είναι συμπαγής, γιατί αλλιώς, όπως είπαμε, $M_H = \emptyset$.

Αρκεί να δείξουμε μόνο ότι το M_H είναι ανοιχτό υποσύνολο του M^H , γιατί τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα, οι συνεκτικές του συνιστώσες θα είναι υποπολλαπλότητες της M .

Έστω $p \in M_H$, οπότε $H = G_p$, και S μια slice από το p για τη δράση της G στην M . Αν $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ και $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus k$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}\phi : S \times k &\rightarrow M \\ (s, \eta) &\mapsto \mathcal{A}_{\exp(t\eta)}(s)\end{aligned}$$

Ισχύει $\phi(p, 0) = p$ και όπως είδαμε στην απόδειξη της ύπαρξης slice, η ϕ είναι τοπικά αμφιδιαφόριση έστω από την περιοχή W του $(p, 0)$ στην $S \times k$ στην περιοχή U του p στην M .

Έστω $q \in M^H \cap U$, οπότε υπάρχουν $\eta \in k$ και $s \in S$ ώστε $q = \exp(t\eta) \cdot s$. Θέτουμε για ευκολία $g = \exp(t\eta)$. Οπότε

$$G_q = gG_s g^{-1}$$

Όμως, αφού $s \in S$ όπου S slice από το p , θα ισχύει, από την τρίτη ιδιότητα της slice, $G_s \subset G_p = H$. Οπότε

$$G_q \subset gHg^{-1}$$

Επίσης, αφού $q \in M^H$ θα ισχύει $H \subset G_q$, οπότε

$$H \subset G_q \subset gHg^{-1}$$

Οι H, gHg^{-1} είναι προφανώς αμφιδιαφορικές, άρα έχουν τον ίδιο αριθμό συνεκτικών συνιστωσών, ο οποίος είναι και πεπερασμένος αφού η H είναι συμπαγής. Μάλιστα, αφού $H \subset gHg^{-1}$, κάθε συνεκτική συνιστώσα της H θα περιέχεται σε μια συνεκτική συνιστώσα της gHg^{-1} . Όμως οι H, gHg^{-1} έχουν την ίδια άλγεβρα Lie (αφού $H \subset gHg^{-1}$ άρα $\text{Lie}(H) \subset \text{Lie}(gHg^{-1})$ και έχουν την ίδια διάσταση), άρα θα έχουν την ίδια συνεκτική συνιστώσα στη μονάδα και τελικά όλες τις συνεκτικές τους συνιστώσες ίδιες, άρα $H = gHg^{-1} = G_q$. Οπότε $q \in M_H$.

Δείξαμε επομένως ότι $U \cap M_H \subset U \cap M_H$, άρα τελικά $U \cap M_H = U \cap M^H$, αφού $M_H \subset M^H$. Καλύπτοντας την M_H με τέτοια U τελειώσαμε. $\square$

Για $H < G$ ορίζουμε επίσης

$$M_{(H)} = \{m \in M : \exists g \in G \text{ ώστε } G_m = gHg^{-1}\}$$

Αφού $G_{g \cdot y} = gG_y g^{-1}$, θα έχουμε $M_{(H)} = G \cdot M_H$. Το $M_{(H)}$ λέγεται το **σύνολο των σημείων τύπου τροχιάς** H . Δύο σημεία που ανήκουν στο ίδιο $M_{(H)}$ θα λέμε ότι έχουν τον ίδιο τύπο τροχιάς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.10. Το σύνολο $M_{(H)}$ είναι υποπολλαπλότητα της M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $m \in M_{(H)} = G \cdot M_H$, οπότε υπάρχουν $g \in G$ και $p \in M_H \subset M_{(H)}$ ώστε $m = g \cdot p$. Αφού η $\mathcal{A}_g$ είναι αμφιδιαφόριση που αφήνει το $M_{(H)}$ αναλλοίωτο, αρκεί να εξετάσουμε μόνο μια περιοχή του p στο $M_{(H)}$.

Έστω $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ και S slice του p για τη δράση της G στην M . Όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος, η

$$\begin{aligned}\phi : S \times \mathfrak{k} &\rightarrow M \\ (s, \eta) &\mapsto \exp(\eta) \cdot s\end{aligned}$$

είναι αμφιδιαφόριση από μια περιοχή του $(p, 0)$ στο $S \times \mathfrak{k}$ σε μια περιοχή του $\phi(p, 0) = p$ στην M .

Αφού $p \in M_H$, θα έχουμε $H = G_p$ άρα η H θα είναι συμπαγής και θα αφήνει το p σταθερό. Από το Θεώρημα γραμμικοποίησης του Bochner υπάρχουν H -αναλλοίωτη περιοχή U του p στην M , V H -αναλλοίωτη περιοχή του 0 στον $T_p M$ και H -ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση $\psi : U \rightarrow V$ με $\psi(p) = 0$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\theta' : (T_p S \cap V) \times \mathfrak{k} &\rightarrow (S \cap U) \times \mathfrak{k} \\ (v, \eta) &\mapsto (\psi^{-1}(v), \eta)\end{aligned}$$

η οποία είναι αμφιδιαφόριση. Ορίζουμε επίσης

$$\begin{aligned}\theta = \phi \circ \theta' : (T_p S \cap V) \times \mathfrak{k} &\rightarrow M \\ (v, \eta) &\mapsto \exp(\eta) \cdot (\psi^{-1}(v))\end{aligned}$$

η οποία, ως σύνθεση τοπικών αμφιδιαφορίσεων, είναι αμφιδιαφόριση από μια περιοχή, έστω $V' \times W$, του $(0, 0)$ στον $(T_p S \cap V) \times \mathfrak{k}$, σε μια περιοχή $U = \theta(V' \times W)$ του p στην M μικραίνοντας και τις δύο περιοχές U μπορώ να τις κάνω ίδιες).

Θέτουμε

$$Y = \psi(M_H \cap S \cap U) = \psi(M^H \cap S \cap U)$$

αφού για αρκετά μικρό U έχουμε $M_H \cap U = M^H \cap U$. Η Y είναι η τομή μιας ανοιχτής περιοχής του 0 στον $T_p S$ (αφού $Y \subset \psi(U)$) με τον $T_p(M^H \cap S) = \{v \in T_p S : T_p \mathcal{A}_h \cdot v = v, \forall h \in H\}$. Άρα είναι πολλαπλότητα. Έχουμε

$$\theta(Y \times W) = (\exp(\eta) \cdot \psi^{-1}(Y)) \cap U = (\exp(\eta) \cdot (M_H \cap S \cap U)) \cap U = M_{(H)} \cap U$$

αφού $M_{(H)} = G \cdot M_H$. $\square$

Αφού η σταθεροποιούσες είναι συμπαγείς, ισχύει

$$(2.3.2) \quad M = \bigsqcup_{\substack{[H] \\ H < G, \text{ συμπαγής}}} M_{(H)}$$

όπου $[H]$ η κλάση συζυγίας της ομάδας H . Αυτή η διάσπαση λέγεται **διάσπαση ως προς τον τύπο των τροχιών**.

Υπενθυμίζουμε ότι μια οικογένεια συνόλων σε ένα τοπολογικό χώρο λέγεται τοπικά πεπερασμένη αν κάθε σημείο του χώρου έχει μια ανοιχτή περιοχή που τέμνει πεπερασμένα σε πλήθος σύνολα της οικογένειας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.11. *Η διάσπαση ως προς τον τύπο των τροχιών είναι τοπικά πεπερασμένη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $n = \dim G$ και $m = \dim M$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς τα n και m .

Αν $m = 0$, τότε η M αποτελείται από διακριτά σημεία. Άρα για $x \in M$, το $\{x\}$ είναι ανοιχτό και τέμνει μόνο το $M_{(G_x)}$.

Αν $n = 0$, η G είναι πεπερασμένη ομάδα και άρα έχει πεπερασμένου πλήθους υποομάδες, άρα η διάσπαση τύπου τροχιών είναι πεπερασμένη.

Έστω $p \in M$. Αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια υπάρχει slice S από το p . Η G_p είναι συμπαγής και αφήνει το p σταθερό και την S αναλλοίωτη. Όπως έχουμε δει θα υπάρχει περιοχή U του p στην M , ώστε για κάθε $q \in U$ να υπάρχουν $s \in S$ και $g \in G$, ώστε $q = g \cdot s$. Οπότε $G_q = gG_sg^{-1}$, άρα τα q και s έχουν τον ίδιο τύπο τροχιάς. Επίσης για $s \in S$, $G_s \subset G_p$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η διάσπαση της S τύπους τροχιών ως προς τη δράση της G_p είναι τοπικά πεπερασμένη.

Από το Θεώρημα γραμμικοποίησης του Bochner, αφού η G_p είναι συμπαγής και αφήνει το p αναλλοίωτο, υπάρχει G_p -ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση ϕ με $\phi(p) = 0$ από μια περιοχή U του p στην S σε μια περιοχή του 0 στον T_pS . Αν η δράση στην T_pS είναι τετριμμένη, τότε λόγω ισομεταβλητότητας της ψ , και η δράση στην U θα είναι τετριμμένη και άρα $G_p \subset G_q$ για κάθε $q \in U$. Όμως για κάθε $q \in U \subset S$ ισχύει $G_q \subset G_p$ (η S είναι slice από το p), άρα $G_q = G_p$, δηλαδή $U \subset M_{G_p} \subset M_{(G_p)}$. Αν τώρα η δράση της G_p στον T_pS δεν είναι τετριμμένη θεωρούμε ένα G_m -αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο (παίρνουμε ένα τυχαίο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και μετά παίρνουμε, αφού G_p είναι συμπαγής, το μέσο όρο $\int_{k \in G_m} \langle T_p A_k \cdot, T_p A_k \cdot \rangle dk$) και ως προς αυτό παίρνουμε τη σφαίρα ακτίνας r , S_r . Αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι G_p -αναλλοίωτο, έχουμε δράση της G_p στην S_r που είναι πολλαλότητα διάστασης μικρότερης από αυτή της M . Από επαγωγική υπόθεση η διάσπαση τύπου τροχιών στην B_r θα είναι τοπικά πεπερασμένη. Αφού η S_r είναι συμπαγής, τα σημεία της θα ανήκουν σε πεπερασμένου πλήθους διαφορετικούς τύπους τροχιών. Αφού η δράση στην T_pS είναι γραμμική, έπεται ότι $G_v = G_{tv}$, $v \in T_pS$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Άρα τα σημεία v και tv έχουν τον ίδιο τύπο τροχιάς. Επειδή κάθε σημείο, εκτός του 0 , στην μπάλα B_r μπορεί να γραφεί ως tv , $t \in S_r$, προκύπτει ότι τα σημεία της θα έχουν πεπερασμένους σε τύπους διαφορετικούς τύπους τροχιών. Λόγω ισομεταβλητότητας της ψ το ίδιο ισχύει για περιοχή του p στην S . $\square$

2.3.5. G-αναλλοίωτες συναρτήσεις και γνήσιες δράσεις. Για ορισμούς σχετικούς με τις τοπολογικές έννοιες και βασικά αποτελέσματα της τοπολογίας παραπέμπουμε στο [Mun00].

Και στην ενότητα αυτή η $\mathcal{A}$ θα είναι μια γνήσια δράση της ομάδας Lie G στην πολλαλότητα M .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.12. Έστω $\{U_a\}$ ανοιχτή κάλυψη της M με G -αναλλοίωτα σύνολα. Τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας στην M συβορδινάτε στην $\{U_a\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο χώρος πηλίκου, όπως έχουμε δείξει αφού η δράση είναι γνήσια, είναι Hausdorff. Επίσης είναι παρασυμπαγής και τοπικά συμπαγής, αφού είναι και ο M (δες και [P61]).

Αφού η δράση είναι γνήσια για κάθε $p \in M$ θα υπάρχει αντίστοιχη slice S_p . Η $\{G \cdot S_p\}_{p \in M}$ είναι μια ανοιχτή κάλυψη της M , την οποία μπορούμε να την κάνουμε, μικραίνοντας τις S_p , να είναι subordinate στην $\{U_a\}$. Αφού ο M είναι παρασυμπαγής, υπάρχει υποκάλυψη $\{G \cdot S_k\}, S_k$ η slice από το p_k , τοπικά πεπερασμένη. Τότε η $\{\pi(S_k)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη ανοιχτή κάλυψη του M/G . Αφού ο M/G είναι τοπικά συμπαγής, μπορούμε να βρούμε $V_k \subset S_k$ με $\bar{V}_k$ συμπαγή, και η $\{\pi(V_k)\}$ να καλύπτει τον M/G .

Στην S_k κατασκευάζουμε συνάρτηση $\tilde{f}_k$ θετική στο V_k και με $\text{supp}(\tilde{f}_k) \subset \bar{V}_k$. Αφού η G_{p_k} είναι συμπαγής, μπορούμε να ορίσουμε

$$\bar{f}_k = \int_{g \in G_{p_k}} \mathcal{A}_g^* \tilde{f}_k dk \quad \text{στην } S_k$$

Η $\bar{f}_k$ είναι G_{p_k} αναλλοίωτη. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} f_k(g \cdot m) &= \bar{f}_k(m), \forall g \in G, m \in S_k \\ f_k(m) &= 0, \text{ αλλιώς} \end{aligned}$$

Η $\left\{ h_k = \frac{f_k}{\sum_k f_k} \right\}$ είναι η ζητούμενη διαμέριση της μονάδας. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.3.13. Υπάρχει G -αναλλοίωτη μετρική Riemann στην M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\{G \cdot S_k\}$ G -αναλλοίωτη ανοιχτή κάλυψη της M (τα S_k όπως στην προηγούμενη απόδειξη) και $\{h_k\}$ η αντίστοιχη G -αναλλοίωτη διαμέριση της μονάδας. Αφού G_{p_k} συμπαγής, μπορούμε να ορίσουμε G_{p_k} -αναλλοίωτη μετρική για την TM , έστω $\bar{g}_k$, σε όλα τα σημεία της S_k . Ορίζουμε

$$\begin{aligned} g_k(g \cdot s) &= \mathcal{A}_g^* \bar{g}_k(s), \forall g \in G, s \in S_k \\ g_k &= 0, \text{ αλλιώς} \end{aligned}$$

Η $g = \sum_k h_k g_k$ είναι η ζητούμενη μετρική. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.3.14. Έστω X ένα G -αναλλοίωτο υποσύνολο της M και f G -αναλλοίωτη διαφορίσιμη συνάρτηση στο X . Τότε υπάρχει $F \in C^\infty(M)$ και G -αναλλοίωτη, ώστε $F|_X = f$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς στην απόδειξη του Θεωρήματος (2.3.12), ορίζουμε

$$F_k = 0, \text{ αν } X \cap S_k = \emptyset$$

$$F_k|_{X \cap S_k} = f|_{X \cap S_k}, \text{ αλλιώς}$$

και $F_k(g \cdot m) = F_k(m)$, για $g \in G, m \in S_k$ και $F_k = 0$ αλλιώς. Η $F = \sum F_k h_k$ είναι η ζητούμενη. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.3.15. Έστω $p, p' \in M$ με $p' \notin G \cdot p$. Τότε υπάρχει $F \in C^\infty(M)$ G -αναλλοίωτη με $F|_{G \cdot p} = 1$ και $F|_{G \cdot p'} = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω S slice από το p . Αν η τροχιά του p' δεν τέμνει την S , άρα ούτε το $X = G \cdot S$, ορίζουμε συνάρτηση f στο X με $f \equiv 1$. Η F που δίνει το προηγούμενο Πόρισμα έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αν τώρα η τροχιά του p' τέμνει την S . Έστω $q \in (G \cdot p') \cap S$. Τότε $q \neq p$, γιατί τότε θα είχαμε $G \cdot p' = G \cdot q = G \cdot p$. Από την τρίτη ιδιότητα της slice έχουμε ότι $(G \cdot p') \cap S = G_p \cdot q$ και άρα είναι συμπαγές και $p \notin G_p \cdot q$. Άρα υπάρχει $U \subset S$ ανοιχτό με $p \in U$ και $U \cap ((G \cdot p') \cap S) = U \cap (G \cdot p') = \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το U στη θέση της S είμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. $\square$

ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΕΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Η ύπαρξη συμμετριών σε ένα μηχανικό σύστημα μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά την ανάλυση του. Κάθε συμμετρία, από το Θεώρημα της Noether, αντιστοιχεί σε ένα διατηρούμενο μέγεθος ή αλλιώς **ολοκλήρωμα της κίνησης**. Όταν έχουμε διατηρούμενα μεγέθη μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των εξισώσεων ή ακόμα και να επιλύσουμε το πρόβλημα.

Στα πλαίσια της Συμπλεκτικής Γεωμετρίας, οι συμμετρίες αντιστοιχούν στην ύπαρξη ομάδων που δρουν στη συμπλεκτική πολλαπλότητα διατηρώντας τη συμπλεκτική δομή (συμπλεκτικές δράσεις). Εμείς θα περιοριστούμε σε μια ειδικότερη κατηγορία δράσεων, στις χαμιλτονιανές δράσεις. Στην περίπτωση που η ομάδα που δρά είναι το $\mathbb{R}$ ή ο S^1 , μια χαμιλτονινή δράση είναι η δράση με συμπλεκτομορφισμούς που αντιστοιχούν στη ροή ενός χαμιλτονιανού πεδίου. Στην γενικότερη περίπτωση, όταν έχουμε δράση μιας τυχαίας ομάδας, για να οριστεί η έννοια της χαμιλτονιανής δράσης θα χρειαστεί να εισάγουμε την έννοια της απεικόνισης ορμής (moment map). Αφού δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς, στην τρίτη παράγραφο του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε το βασικό Θεώρημα. Όταν έχουμε μια ελεύθερη και γνήσια χαμιλτονιανή δράση σε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα, ο χώρος των τροχιών δέχεται με φυσιολογικό τρόπο δομή συμπλεκτικής πολλαπλότητας. Η νέα αυτή πολλαπλότητα έχει μοκρότερη διάσταση από την αρχική, άρα έχουμε κατά μια έννοια απλοποιήσει το πρόβλημά μας. Γενικά, η διαδικασία χρήσης των συμμετριών για την απλοποίηση ενός συστήματος ονομάζεται **συμπλεκτική αναγωγή (symplectic reduction)**.

3.1. ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Θεωρούμε ένα μηχανικό σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας. Αυτό στην πιο γενική του μορφή περιγράφεται από ένα **χαμιλτονιανό σύστημα** (M^{2n}, ω, H) , όπου η (M, ω) είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα (ο χώρος κατάστασης) και $H \in C^\infty(M)$ (αυτή είναι η χαμιλτονιανή του συστήματος, που καθορίζει τη δυναμική). Θεωρώντας ένα χάρτη Darboux $(\mathcal{U}, (q_1, q_n, p_1, p_n))$, όπως έχουμε δει, οι εξισώσεις που ικανοποιεί η ροή του χαμιλτονιανού πεδίου X_H (εξισώσεις κίνησης) έχουν στην $\mathcal{U}$ τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{dH}{dp_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{dH}{dq_i}\end{aligned}$$

για $i = 1, 2, \dots, n$.

Έστω ότι υπάρχει $f \in C^\infty(M)$ που είναι αναλλοίωτη στη ροή του X_H . Αν κοιτάξουμε πάλι την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος Darboux, παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $q_1 = f$ στην $\mathcal{U}$. Οπότε

$$q_1 = f = \text{σταθ.} = c \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{dq_1}{dt} = 0 \Rightarrow H \text{ ανεξάρτητη του } p_1$$

και επιπλέον

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \xrightarrow{H \text{ ανεξάρτητη του } p_1} 0 \\ p_1 &= -\int \frac{\partial H}{\partial q_1}(c, q_2, \dots, q_n, \hat{p}_1, p_2, \dots, p_n) dt \end{aligned}$$

Η διάστασης $2n - 2$ πολλαπλότητα

$$\mathcal{U}_{red} = \left\{ (q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) : \left(c, q_2, \dots, q_n, -\int \frac{\partial H}{\partial q_1}(c, q_2, \dots, q_n, \hat{p}_1, p_2, \dots, p_n) dt, p_2, \dots, p_n \right) \in \mathcal{U} \right\}$$

είναι ο λεγόμενος **ανηγγμένος χώρος κατάστασης** και η συνάρτηση $H_{red} \in C^\infty(\mathcal{U}_{red})$ με

$$H_{red}(q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) = H\left(c, q_2, \dots, q_n, -\int \frac{\partial H}{\partial q_1}(c, q_2, \dots, q_n, \hat{p}_1, p_2, \dots, p_n) dt, p_2, \dots, p_n\right)$$

η λεγόμενη **ανηγγμένη χαμιλτονιανή**.
Λύνοντας τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

$i = 2, 3, \dots, n$, που αντιστοιχούν στο σύστημα $(\mathcal{U}_{red}, \omega_{red}, H_{red})$ με $\omega_{red} = \sum_{i=2}^n dp_i \wedge dq_i$, βρίσκουμε τις $q_2(t), \dots, q_n(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$. Έχουμε επίσης $q_1(t) = c$ και

$$p_1 = -\int \frac{\partial H}{\partial q_1}(c, q_2(t), \dots, q_n(t), \hat{p}_1, p_2(t), \dots, p_n(t)) dt$$

οπότε έχουμε επιλύσει τις εξισώσεις κίνησης για το αρχικό σύστημα.

Συνοψίζοντας, η ύπαρξη συμμετριών επιτρέπει να αποκτήσουμε τη λύση του αρχικού συστήματος των $2n$ εξισώσεων, επιλύοντας τις $2n - 2$ εξισώσεις του ανηγμένου συστήματος. Αν έχουμε περισσότερα του ενός ολοκληρώματα κίνησης, τα οποία ικανοποιούν κάποιες συνθήκες ανεξαρτησίας, μπορούμε να μειώσουμε και άλλο τη διάσταση του προβλήματος ή ακόμα και να το επιλύσουμε. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του Θεωρήματος Arnold-Liouville, που στη πιο γενική του μορφή αποδείχτηκε από τον Arnold στο (δες και [Arn89]).

3.2. ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΟΡΜΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και G ομάδα Λιε. Μια **συμπλεκτική δράση** της G στη (M, ω) είναι μια δράση της G στη M με συμπλεκτομορφισμούς, ισοδύναμα μια διαφορίσιμη δράση $\mathcal{A} : G \times M \rightarrow M$ με $\mathcal{A}_g = \mathcal{A}(g, \cdot) \in \text{Symp}(M, \omega)$ για κάθε $g \in G$.

Οι συμπλεκτικές δράσεις του $(\mathbb{R}, +)$ σε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα πλήρη συμπλεκτικά πεδία στην πολλαπλότητα, αφού, όπως έχουμε δει, ένα διανυσματικό πεδίο είναι συμπλεκτικό αν και μόνο αν η ροή του είναι συμπλεκτομορφισμός. Αντίστοιχα ισχύουν και για δράσεις της S^1 ,

αφού μπορούμε να τις δούμε ως περιοδικές δράσεις του $\mathbb{R}$. Οι αντιστοιχίες αυτές μας επιτρέπουν να ορίσουμε χαμιλτονιανές δράσεις για τις ομάδες $\mathbb{R}$ και S^1 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.2. Η δράση του $\mathbb{R}$ ή του S^1 λέγεται χαμιλτονιανή αν το διανυσματικό πεδίο X που της αντιστοιχεί είναι χαμιλτονιανό. Όπως ξέρουμε, τότε υπάρχει $H \in C^\infty(M)$ ώστε $dH = \iota_X \omega$. Η H λέγεται χαμιλτονιανή συνάρτηση της δράσης.

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της χαμιλτονιανής δράσης για μια τυχαία ομάδα Lie. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση της ομάδας $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ με $G_i = \mathbb{R}$ ή S^1 . Θα λέμε ότι η δράση της G είναι χαμιλτονιανή αν η δράση κάθε υποομάδας $G_i \simeq 0 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times 0$ είναι χαμιλτονιανή με την έννοια που ορίσαμε. Ισοδύναμα, αν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ που είναι G -αναλλοίωτη και $d\mu_i = \iota_{X_i} \omega$, όπου X_i το διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στη δράση της G_i . Ο ορισμός αυτός είναι γενίκευση του προηγούμενου ορισμού, αφού η χαμιλτονιανή είναι αναλλοίωτη στη ροή του χαμιλτονιανού της πεδίου ή αλλιώς αναλλοίωτη στη δράση του $\mathbb{R}$ (ή του S^1). Η συνάρτηση μ είναι μια γενίκευση της χαμιλτονιανής. Ας δούμε τώρα τον γενικό ορισμό της χαμιλτονιανής δράσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.3. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα, G ομάδα Lie και Φ δράση της G στην M με συμπλεκτομορφισμούς. Η δράση θα λέγεται **χαμιλτονιανή** αν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (1) Για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$d\mu^X = \iota_{X^\#} \omega$$

όπου $\mu^X : M \rightarrow \mathbb{R}$ με $\mu^X(p) = \langle \mu(p), X \rangle$, $p \in M$ και $X^\#$ είναι το διανυσματικό πεδίο στη M που παράγεται από τη δράση της υποομάδας $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ της G .

- (2)

$$\mu \circ \Phi_g = \text{Ad}_g^* \circ \mu, \text{ για κάθε } g \in G$$

δηλαδή η μ είναι G -ισομεταβλητή, αν στη δυϊκή άλγεβρα Lie θεωρήσουμε τη συν-συζυγή δράση.

Θα λέμε τότε ότι η τετράδα (M, ω, G, μ) είναι ένας **χαμιλτονιανός G -χώρος** και η μ θα λέγεται **απεικόνιση ορμής** (moment ή momentum map).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2.4. Το πεδίο $X^\#$ δίνεται από τη σχέση $X_p^\# = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p$ για κάθε $p \in M$.

Μερικοί συγγραφείς ορίζουν τις απεικονίσεις ορμής μόνο με την ιδιότητα 1 και ονομάζουν ισομεταβλητές απεικονίσεις ορμής όσες έχουν και τις δύο ιδιότητες. Εμείς θα θεωρούμε απεικονίσεις ορμής με βάση τον Ορισμό (3.2.3).

Από την πρώτη ιδιότητα του ορισμού έπεται ότι αν μ' είναι μια άλλη απεικόνιση ορμής για τη δράση τότε υπάρχει $\xi \in \mathfrak{g}^*$ ώστε $\mu'(p) = \mu(p) + \xi$ για κάθε $p \in M$.

Εκτός από την απεικόνιση ορμής μπορεί να οριστεί και μια δυϊκή απεικόνιση (co-moment map)

$$\mu^* : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$$

με $\mu^*(X) = \mu^X = \langle \mu, X \rangle$ για $\mathfrak{g}$. Η μ^* μάλιστα είναι μορφισμός αλγεβρών Lie. Η γραμμικότητα έπεται άμεσα. Από την ιδιότητα 2 της μ , για κάθε $g \in G, p \in M$

έχουμε $\mu(g \cdot p) = Ad_g^* \mu(p)$. Άρα για $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \langle \mu(\exp(tX) \cdot p), Y \rangle &= \langle Ad_{\exp(tX)}^* \mu(p), Y \rangle = \langle \mu(p), Ad_{\exp(-tX)} Y \rangle \\ &\Rightarrow \mu^Y(\exp(tX) \cdot p) = \langle \mu(p), Ad_{\exp(-tX)} Y \rangle \\ &\Rightarrow X_p^\#(\mu^Y) = \langle \mu(p), -ad(X) \cdot Y \rangle = \langle \mu(p), [X, Y] \rangle \\ &\Rightarrow \{\mu^*(X), \mu^*(Y)\} = \{\mu^Y, \mu^X\}(p) \\ &= \mu^*([X, Y])(p) \end{aligned}$$

όπου στην πρώτη συνεπαγωγή παραγωγίσαμε ως προς t στο 0 και στη τρίτη χρησιμοποιήθηκαν ιδιότητες της αγγύλης Poisson χαμιλτονιανών πεδίων (Λήμμα (1.3.11)).

Ο γενικός ορισμός της χαμιλτονιανής δράσης που δώσαμε συμφωνεί με τους προηγούμενους για την περίπτωση που η ομάδα είναι η $\mathbb{R}$, S^1 ή γενικότερα η $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$, όπου $\mathbb{T}^m = S^1 \times \dots \times S^1$. Πράγματι για $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ έχουμε $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \mathbb{R}^{n+m}$, οπότε $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. Αν $e_i, i = 1, \dots, n+m$ η αντίστοιχη βάση του $\mathbb{R}^{n+m}$, η πρώτη συνθήκη του ορισμού λέει ότι τα διανύσματα $X_i = e_i^\#$ είναι χαμιλτονιανά με χαμιλτονινές τις $\mu^{X_i} = \mu_i$ αντίστοιχα. Η δεύτερη συνθήκη, αφού η ομάδα G είναι μεταθετική οπότε η συν-συζυγής δράση είναι τετριμμένη - $Ad_g^* = id$ για κάθε $g \in G$ -, λέει απλώς ότι η μ είναι G -αναλλοίωτη. Άρα παίρνουμε πάλι τον προηγούμενο ορισμό που είχαμε δώσει.

3.2.1. Παραδείγματα χαμιλτονιανών δράσεων.

- (1) Έστω $(M_i, \omega_i, G, \mu_i), i = 1, 2$ χαμιλτονιανοί G -χώροι. Θεωρούμε τη δράση της G στη $(M_1 \times M_2, \omega_1 \times \omega_2)$ με $g \cdot (p_1, p_2) = (g \cdot p_1, g \cdot p_2)$, για $g \in G, p_i \in M_i$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mu : M_1 \times M_2 &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ (p_1, p_2) &\mapsto \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2) \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mu(g \cdot (p_1, p_2)) &= \mu(g \cdot p_1, g \cdot p_2) \\ &= \mu_1(g \cdot p_1) + \mu_2(g \cdot p_2) \\ &= Ad_g^* \cdot \mu_1(p_1) + Ad_g^* \cdot \mu_2(p_2) \\ &= Ad_g^* \cdot \mu(p_1, p_2) \end{aligned}$$

και για $X \in \mathfrak{g}$

$$\iota_{X^\#}(\omega_1 \times \omega_2)|_{(p_1, p_2)} = \iota_{X^\#} \omega_1|_{p_1} \times \iota_{X^\#} \omega_2|_{p_2} = d\langle \mu_1(p_1), X \rangle + d\langle \mu_2(p_2), X \rangle = d\langle \mu(p), X \rangle$$

Οπότε η δράση της G στη $(M_1 \times M_2, \omega_1 \times \omega_2)$ είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής τη μ .

- (2) Έστω $(M, \omega, G, \mu_i), i = 1, 2, \dots, n$ συμπλεκτικοί G -χώροι. Τότε για $0 \neq a \in \mathbb{R}$ οι $(M, a\omega, G, a\mu_1)$ και $(M, 2\omega, G, \mu_1 + \mu_2)$ είναι χαμιλτονιανοί G -χώροι.
- (3) **Συν-συζυγείς τροχιές.** Έστω G ομάδα Lie. Η G δρα στη δυϊκή άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}^*$ με τη συν-συζυγή δράση. Έστω $\mathcal{O} = \{Ad_g^* \cdot \eta : g \in G\}$ μια τροχιά αυτής της δράσης. Αν υποθέσουμε ότι η δράση είναι γνήσια η $\mathcal{O}$ είναι embedded υποπολλαπλότητα της $\mathfrak{g}^*$, διαφορετικά είναι απλώς immersed υποπολλαπλότητα αμφιδιαφορίσιμη με την G/G_η , όπου G_η η σταθεροποιούσα ενός $\eta \in \mathcal{O}$ (η G/G_η είναι πολλαπλότητα, αφού η δράση με αριστερό

πολλαπλασιασμό της G_η στη G είναι ελεύθερη και γνήσια). Ο επαπτόμενος χώρος στο η είναι

$$T_\eta \mathcal{O} = \{ad^*(X) \cdot \eta : X \in \mathfrak{g}\}$$

Επίσης, $X_\eta^\# = ad^*(X) \cdot \eta$. Ορίζουμε στην $\mathcal{O}$ τη διγραμμική μορφή $\omega_{\mathcal{O}}$ με

$$\omega_{\mathcal{O}}|_\eta(ad^*(X) \cdot \eta, ad^*(X') \cdot \eta) = \langle \eta, [X, X'] \rangle, X, X' \in \mathfrak{g}$$

Η $\omega_{\mathcal{O}}$ λέγεται **συμπλεκτική μορφή Kirillon-Konstant-Souriau**. Θα αποδείξουμε τώρα ότι είναι πράγματι συμπλεκτική μορφή. Καταρχάς, αν $ad^*(X) \cdot \eta = ad^*(X') \cdot \eta$, τότε για κάθε $Y \in \mathfrak{g}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \langle \eta, [X, Y] \rangle &= \langle \eta, ad(X) \cdot Y \rangle \\ &= -\langle ad^*(X) \cdot \eta, Y \rangle \\ &= -\langle ad^*(X') \cdot \eta, Y \rangle \\ &= \langle \eta, ad(X') \cdot Y \rangle \\ &= \langle \eta, [X', Y] \rangle \end{aligned}$$

άρα είναι καλά ορισμένη. Είναι επίσης αντισυμμετρική, λόγω της αντισυμμετρικότητας της αγγύλης $[\cdot, \cdot]$. Είναι μη εκφυλισμένη, αφού αν για κάθε $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(ad^*(X) \cdot \eta, ad^*(Y) \cdot \eta) = \langle \eta, [X, Y] \rangle \\ &= -\langle ad^*(X) \cdot \eta, Y \rangle \end{aligned}$$

άρα $ad^*(X) \cdot \eta = 0$. Για $X, X', Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\left(Ad_{\exp(Y)}^* \right)^* \omega_{\mathcal{O}} \right)_\eta(ad^*(X) \cdot \eta, ad^*(X') \cdot \eta) &= \\ &= \left\langle Ad_{\exp(Y)}^* \cdot \eta, \left[TAd_{\exp(-Y)}^* \cdot X, TAd_{\exp(-Y)}^* \cdot X' \right] \right\rangle \\ &= \left\langle Ad_{\exp(Y)}^* \cdot \eta, Ad_{\exp(-Y)}^* [X, X'] \right\rangle \\ &= \langle \eta, [X, X'] \rangle = \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(ad^*(X) \cdot \eta, ad^*(X') \cdot \eta) \end{aligned}$$

δηλαδή η $\omega_{\mathcal{O}}$ είναι ισομεταβλητή (τουλάχιστον αν περιοριστούμε στη δράση της συνιστώσας της μονάδας της G) και επομένως $\mathcal{L}_{X^\#} \omega_{\mathcal{O}} = 0$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ (όπου, το $X^\#$ είναι το διανυσματικό πεδίο στην $\mathcal{O}$ που προκύπτει από τη δράση της υποομάδας $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ της G). Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mu_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{g}^* : \xi \mapsto \xi \text{ (εμφύτευση)}$$

Προφανώς η $\mu_{\mathcal{O}}$ είναι ισομεταβλητή και για $X, Y \in \mathfrak{g}, \eta \in \mathcal{O}$

$$\begin{aligned} d\langle \mu_{\mathcal{O}}, X \rangle|_\eta(Y_\eta^\#) &= Y_\eta^\#(\langle \mu_{\mathcal{O}}, X \rangle) \\ &= \langle Y_\eta^\#(\mu_{\mathcal{O}}), X \rangle \\ &= -\langle ad^*(Y) \cdot \eta, ad(Y) \cdot X \rangle \\ &= \langle \eta, [X, Y] \rangle \\ &= \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(ad^*(X) \cdot \eta, ad^*(Y) \cdot \eta) \\ &= \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(X_\eta^\#, Y_\eta^\#) \end{aligned}$$

Αν επομένως η $\omega_{\mathcal{O}}$ είναι συμπλεκτική (μένει να δείξω ότι είναι κλειστή), η συν-συζυγής δράση θα είναι χαμιλτονιανή με συνάρτηση απεικόνισης τη $\mu_{\mathcal{O}}$. Για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\iota_{X\#}d\omega_{\mathcal{O}} = \mathcal{L}_{X\#}\omega_{\mathcal{O}} - d\iota_{X\#}\omega_{\mathcal{O}} = 0 - d(d\langle\mu_{\mathcal{O}}, X\rangle) = 0$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του Cartan. Όμως όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα στην $\mathcal{O}$ έχουν τη μορφή $X^{\#}$ για κάποιο $X \in \mathfrak{g}$, οπότε $d\omega_{\mathcal{O}} = 0$. Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε συν-συζυγής τροχιά είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα. Έτσι η $\mathfrak{g}^*$, που ισούται με την ένωση της τροχιάς της, είναι ένωση συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Η ίδια δεν είναι γενικά συμπλεκτική πολλαπλότητα (αφού μπορεί να μην έχει καν άρτια διάσταση). Είναι όμως πολλαπλότητα Poisson με

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df_{\xi}, dg_{\xi}] \rangle, \text{ για } f, g \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*), \xi \in \mathfrak{g}^*$$

όπου τα $df_{\xi}, dg_{\xi} : T_{\xi}\mathfrak{g}^* \equiv \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ τα αντιμετωπίζουμε ως στοιχεία της $\mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$. Για την απόδειξη ότι αυτή είναι δομή Poisson, καθώς και για περισσότερες πληροφορίες για τις συν-συζυγείς τροχιές παραπέμπουμε στο [MR99].

Έχουμε επομένως μια πολλαπλότητα Poisson που γράφεται ως ένωση συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Ο Weinstein στο [W83] έδειξε ότι αυτό μπορεί να γίνει για κάθε πολλαπλότητα Poisson.

- (4) **Γραμμικές δράσεις και τετραγωνικές απεικονίσεις ορμής.** Έστω (V, ω_V) συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος. Μπορούμε να τον δούμε ως συμπλεκτική πολλαπλότητα με $\omega_V|_p(u, v) = \omega_V(u, v)$ για κάθε $p \in V$ και $u, v \in T_p V \equiv V$.

Ορίζουμε την 1-μορφή λ_V με $\lambda_V|_v(u) = \frac{1}{2}\omega_V(v, u)$ για $v \in V$ και $u \in T_v V \equiv V$. Ισχύει $d\lambda_V = \omega_V$.

Πράγματι έστω $v \in V$ και $u_1, u_2 \in T_v V \equiv V$. Στα παρακάτω θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τα u_1, u_2 ως στοιχεία του $T_v V$ ή ως στοιχεία του V ή ως τα αντίστοιχα σταθερά διανυσματικά πεδία (οπότε $[u_1, u_2] = 0$). Έχουμε:

$$\begin{aligned} d\lambda_V(u_1, u_2) &= (\mathcal{L}_{u_1}\lambda_V(u_2)) - (\mathcal{L}_{u_2}\lambda_V(u_1)) - \lambda_V([u_1, u_2]) \\ &= \mathcal{L}_{u_1}\left(\frac{1}{2}\omega_V(\cdot, u_1)\right) - \mathcal{L}_{u_2}\left(\frac{1}{2}\omega_V(\cdot, u_1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\omega_V(u_1, u_2) - \frac{1}{2}\omega_V(u_2, u_1) = \omega_V(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Αν επιπλέον η ομάδα Lie G δρα γραμμικά και με συμπλεκτομορφισμούς στον V , τότε η λ_V είναι G -αναλλοίωτη. Πράγματι, για $A \in G \subset \text{Symp}(V, \omega)$ και $v, u \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} (A^*\lambda_V)_v(u) &= \lambda_V|_{Av}(Au) \\ &= \frac{1}{2}\omega_V(Av, Au) \\ &= \frac{1}{2}\omega_V(v, u) \\ &= \lambda_V|_v(u) \end{aligned}$$

Αν $A(t) \in G$ για κάθε t με $A(0) = id$ και $A'(0) = \xi \in \mathfrak{g}$, τότε για $u, v \in V$

έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_V(A(t)u, A(t)v) &= \omega_V(u, v) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_V(A(t)u, A(t)v) &= 0 \Rightarrow \\ \omega_V(\xi \cdot u, v) + \omega_V(u, \xi \cdot v) &= 0\end{aligned}$$

όπου τα στοιχεία της $\mathfrak{g}$ είναι και αυτά πίνακες, άρα δρουν γραμμικά στον V . Θα δείξουμε τώρα ότι η δράση είναι μάλιστα χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής

$$\mu_V : V \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

τέτοια ώστε για $v \in V, \xi \in \mathfrak{g}$, $\mu_V^\xi(v) \equiv \mu_V(v) \cdot \xi = \lambda_V|_v(\xi \cdot v) = \frac{1}{2}\omega_V(v, \xi \cdot v)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}d\langle \mu_V, \xi \rangle|_v \cdot u &= d\mu_V^\xi|_v \cdot u \\ &= d\lambda_V(\xi \cdot v, u) \\ &= \omega_V(\xi \cdot v, u) \\ &= (\iota_{\xi \cdot v} \omega_V)(u)\end{aligned}$$

και άρα το χαμιλτονιανό πεδίο της μ_V^ξ στο σημείο $v \in V$ είναι το $\xi \cdot v$. Επίσης για $g \in G, v \in V$ και $\xi \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu_V(g \cdot v) \cdot \xi &= \frac{1}{2}\omega_V(g \cdot v, \xi g \cdot v) \\ &= \frac{1}{2}\omega_V(g \cdot v, gg^{-1}\xi g \cdot v) \\ &= \frac{1}{2}\omega_V(v, g^{-1}\xi g \cdot v) \\ &= \frac{1}{2}\omega_V(v, Ad_{g^{-1}}\xi \cdot v) \\ &= \langle \mu_V(v), Ad_{g^{-1}}\xi \rangle \\ &= \langle Ad_g^* \mu_V(v), \xi \rangle\end{aligned}$$

άρα $\mu_V(g \cdot v) = Ad_g^* \mu_V(v)$. Επομένως πράγματι ο μ_V είναι απεικόνιση ορμής για τη δράση.

Ας δούμε πως αλλιώς μπορεί να προκύψει η παραπάνω περίπτωση. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie που δρα στην (M, ω) με συμπλεκτομορφισμούς και η δράση είναι γνήσια. Έστω $x \in M$ και (V, ω_V) συμπλεκτικός υπόχωρος του $T_x M$ με $\omega_V = \omega_x|_V$. Έστω G_x η σταθεροποιούσα του x . Αφού η δράση είναι γνήσια η G_x θα είναι συμπαγής υποομάδα Lie της G . Για $g \in G_x$ συμβολίζουμε $\mathcal{A}_g : M \rightarrow M : p \mapsto g \cdot p$ και $a_g = T_x \mathcal{A}_g : T_x M \rightarrow T_{\mathcal{A}_g(x)} M = T_x M$. Αν οι $a_g, g \in G_x$ αφήνουν τον V αναλλοίωτο τότε επάγεται μια γραμμική συμπλεκτική δράση της G_x στον V , με $g \cdot v = a_g(v), v \in V, g \in G_x$. Από τα προηγούμενα η δράση θα είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής

$$\mu_V : V \rightarrow \mathfrak{g}_x^*$$

όπου για $v \in V, \xi \in \mathfrak{g}_x^*$ έχουμε $\mu_V(v) \cdot \xi = \omega_x(v, \xi \cdot v)$.

- (5) **Χαμιλτονιανή δράση στη συνεφαπτόμενη δέσμη.** Έστω G ομάδα Lie και N πολλαπλότητα στην οποία δρα η G με

$$\begin{aligned} G \times N &\rightarrow N \\ (g, q) &\mapsto g \cdot q = \phi_g(q) \end{aligned}$$

Από τη δράση αυτή επάγεται δράση της G στην $M = T^*N$ με

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, (q, a_q)) &\mapsto (\phi_g(q), \phi_{g^{-1}}^* a_q) \end{aligned}$$

Έστω η προβολή

$$\begin{aligned} \pi : M = T^*N &\rightarrow N \\ (q, a_q) &\mapsto q \end{aligned}$$

Είναι ισομεταβλητή απεικόνιση.

Αν $\xi \in \mathfrak{g}$ και ξ_N, ξ_M τα διανυσματικά πεδία στις N και M αντίστοιχα, που παράγονται από τις αντίστοιχες δράσεις της υποομάδας $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\} < G$ στις δύο πολλαπλότητες. Επαληθεύεται ότι

$$\xi_N = \pi^* \xi_M$$

Όπως έχουμε δει, η $M = T^*N$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα με την κανονική συμπλεκτική δομή $\omega_{can} = -d\lambda_{can}$ (δες Παράδειγμα 3 στην ενότητα (1.3.1)). Για $m = (q, a_q)$ και $d\pi_m : T_m M \rightarrow T_q N$ έχουμε

$$\begin{aligned} \iota_{\xi_M} \lambda_{can}|_{(q, a_q)} &= \lambda_{can}|_{(q, a_q)} (\xi_M|_{(q, a_q)}) \\ &= d\pi_{(q, a_q)}^* (a_q) \cdot \xi_M|_{(q, a_q)} \\ &= a_q (d\pi_{(q, a_q)} \cdot \xi_M|_{(q, a_q)}) \\ &= a_q (\xi_N|_q) \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

με $\langle \mu(m), \xi \rangle = a_q (\xi_N|_q)$ για $m = (q, a_q) \in M$ και $\xi \in \mathfrak{g}$. Τότε $\langle \mu, \xi \rangle = \iota_{\xi_M} \lambda_{can}$. Όμως η λ_{can} είναι ισομεταβλητή, άρα

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\xi_M} \lambda_{can} = d\iota_{\xi_M} \lambda_{can} + \iota_{\xi_M} d\lambda_{can} \Rightarrow \\ \iota_{\xi_M} \omega_{can} &= -\iota_{\xi_M} d\lambda_{can} = d\iota_{\xi_M} \lambda_{can} \end{aligned}$$

οπότε $d\langle \mu, \xi \rangle = \iota_{\xi_M} \omega_{can}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι η μ είναι και ισομεταβλητή, άρα είναι απεικόνιση ορμής για τη δράση.

3.3. ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗ ΑΝΑΓΩΓΗ

Η σύγχρονη προσέγγιση, στο θέμα της χρησιμοποίησης των συμμετριών ενός προβλήματος της μηχανικής, ή της συμπλεκτικής γεωμετρίας γενικότερα, για να το απλοποιήσουμε έχει ως εξής. Έχουμε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα και μια ομάδα που δρα χαμιλτονιανά σε αυτή. Θεωρούμε τον χώρο πηλίκου που προκύπτει από τη δράση και το πρόβλημα είναι να ορίσουμε, αν γίνεται, συμπλεκτική δομή σε αυτόν. Η περίπτωση ελεύθερης και γνήσιας δράσης (το λεγόμενο regular symplectic reduction ή Marsden-Weinstein reduction) μελετήθηκε από τους Marsden και Weinstein [MW74]. Τον ίδιο καιρό ο Meyer μελετούσε αντίστοιχα θέματα με διαφορετική όμως προσέγγιση [Mey73]. Η προσέγγισή μας, και αυτή που έχει επικρατήσει, είναι αυτή τον Marsden και Weinstein.

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το Θεώρημα που αποτελεί το αντικείμενο της παραγράφου θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 3.3.1. Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος με τη δράση της G στη M να είναι γνήσια και $\mathfrak{g}_p$ η άλγεβρα $\text{Lie } G_p$, της σταθεροποιούσας στο $p \in M$. Τότε για την

$$T_p\mu : T_pM \rightarrow T_{\mu(p)}\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$$

ισχύει

$$\begin{aligned} \ker T_p\mu &= (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} \\ \text{im } T_p\mu &= \mathfrak{g}_p^o \end{aligned}$$

όπου $\mathcal{O}_p = \{g \cdot p : g \in G\}$ η τροχιά του p και $\mathfrak{g}_p^o = \{\xi \in \mathfrak{g}^* : \langle \xi, X \rangle = 0, \forall X \in \mathfrak{g}_p\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Καταρχάς να σημειώσουμε ότι η σταθεροποιούσα G_p είναι κλειστή υποομάδα της G και άρα, από το Θεώρημα του Cartan, είναι ομάδα Lie και επομένως έχει νόημα να μιλάμε για την άλγεβρα Lie της. Επίσης, αφού η δράση είναι γνήσια, η τροχιά $\mathcal{O}_p$ είναι υποπολλαπλότητα της M . Αφού σε περιοχή της μονάδας της ομάδας G τα στοιχεία της έχουν τη μορφή $\exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, μια καμπύλη πάνω στην $\mathcal{O}_p$ που περνά από το p για $t = 0$ θα έχει τη μορφή $\exp(tX) \cdot p$. Οπότε

$$T_p\mathcal{O}_p = \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p, X \in \mathfrak{g} \right\} = \{X_p^\# : X \in \mathfrak{g}\}$$

Για $X \in \mathfrak{g}$, $v \in T_pM$ έχουμε

$$\omega_p(X_p^\#, v) = (\iota_{X^\#}\omega)_p(v) = d\mu_p^X(v) = \langle T_p\mu \cdot v, X \rangle$$

Άρα

$$\begin{aligned} v \in \ker T_p\mu &\Leftrightarrow \langle T_p\mu \cdot v, X \rangle = 0, \forall X \in \mathfrak{g} \\ &\Leftrightarrow \omega_p(X_p^\#, v), \forall X \in \mathfrak{g} \\ &\Leftrightarrow v \in (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} \end{aligned}$$

Επίσης αν $\xi \in \text{im } T_p\mu$ τότε υπάρχει $v \in T_pM$, ώστε $\xi = T_p\mu \cdot v$ και άρα

$$\langle \xi, X \rangle = \langle T_p\mu \cdot v, X \rangle = \omega_p(X_p^\#, v) = 0, \text{ για } X \in \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}$$

αφού αν $X \in \mathfrak{g}_p$, τότε $\exp(tX) \cdot p = p$ για t σε περιοχή του 0 και άρα $X_p^\# = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p = 0$. Επομένως $\text{im } T_p\mu \subset \mathfrak{g}_p^o$. Θα δείξουμε ότι έχουν

και ίδιες διαστάσεις, άρα ισχύει ισότητα. Πράγματι

$$\begin{aligned}
 \dim(im T_p \mu) &= \dim T_p M - \dim(\ker T_p \mu) \\
 &= \dim T_p M - \dim(T_p \mathcal{O}_p)^{\omega_p} \\
 &= \dim T_p M - (\dim T_p M - \dim T_p \mathcal{O}_p) \\
 &= \dim \mathcal{O}_p \\
 &= \dim(G/G_p) \\
 &= \dim G - \dim G_p \\
 &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_p \\
 &= \dim \mathfrak{g}_p^o
 \end{aligned}$$

όπου στην 5η ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός πως $\mathcal{O}_p$ και G/G_p βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.2 (Θεώρημα Marsden-Weinstein). Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος και $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ η ένθεση. Αν η G δρα γνήσια και ελεύθερα στο $\mu^{-1}(0)$ τότε

- Ο χώρος των τροχιών $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $\dim M - 2 \dim G$.
- Η προβολή $\pi : \mu^{-1}(0) \rightarrow M_{red}$ είναι πρωτεύουσα δέσμη.
- Η M_{red} δέχεται συμπλεκτική δομή ω_{red} , ώστε $i^* \omega = \pi^* \omega_{red}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $g \in G$ και $p \in \mu^{-1}(0)$, τότε $g \cdot p \in \mu^{-1}(0)$, αφού $\mu(g \cdot p) = Ad_g^* \mu(p) = 0$. Οπότε η δράση της G στη M , επάγει δράση στο σύνολο $\mu^{-1}(0) \subset M$. Από υπόθεση αυτή η δράση είναι ελεύθερη, άρα $G_p = \{1_G\}$ και επομένως και $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ για κάθε $p \in \mu^{-1}(0)$. Από το προηγούμενο Λήμμα τότε $im T_p \mu = \mathfrak{g}_p^o = \mathfrak{g}^*$ για κάθε $p \in \mu^{-1}(0)$, που σημαίνει ότι η απεικόνιση $T_p \mu : T_p M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ είναι επί για κάθε $p \in \mu^{-1}(0)$. Με εφαρμογή του Θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, προκύπτει ότι το $\mu^{-1}(0)$ είναι υποπολλαπλότητα της M , διάστασης $\dim M - \dim G$.

Αφού από υπόθεση η δράση της G στην πολλαπλότητα $\mu^{-1}(0)$ είναι ελεύθερη και γνήσια, από το Θεώρημα (2.2.8), προκύπτει ότι η $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $\dim \mu^{-1}(0) - \dim G = \dim M - 2 \dim G$ και η $\pi : M \rightarrow M_{red}$ είναι πρωτεύουσα δέσμη.

Μένει να ορίσουμε κατάλληλη συμπλεκτική δομή στη M_{red} . Για κάθε $p \in \mu^{-1}(0)$ έχουμε $T_p \mathcal{O}_p \subset (T_p \mathcal{O}_p)^{\omega_p}$. Πράγματι, τα στοιχεία του $T_p \mathcal{O}_p$ είναι τα $X_p^\#$ για $X \in \mathfrak{g}$ και για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
 \omega_p(X_p^\#, Y_p^\#) &= \{\mu^X, \mu^Y\}(p) \\
 &= \mu^{[X, Y]}(p) \\
 &= \langle \mu(p), [X, Y] \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της αγγύλης Ποισσον και η τελευταία από το γεγονός ότι $p \in \mu^{-1}(0)$.

Επίσης για $p \in \mu^{-1}(0)$ ισχύει $T_p\mu^{-1}(0) = \ker T_p\mu$. Πράγματι, προφανώς $T_p\mu^{-1}(0) \subset \ker T_p\mu$, και αφού

$$\begin{aligned} \dim(\ker T_p\mu) &= \dim T_pM - \dim(im T_p\mu) \\ &= \dim M - \dim \mathfrak{g}^* \\ &= \dim T_p\mu^{-1}(0) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το προηγούμενο Λήμμα και το γεγονός ότι $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_p^*$ για $p \in \mu^{-1}(0)$, ισχύει τελικά $T_p\mu^{-1}(0) = \ker T_p\mu$.

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα αυτά, και αφού $T_p\mathcal{O}_p = (\ker T_p\mu)^{\omega_p}$ από το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε για $p \in \mu^{-1}(0)$

$$\begin{aligned} (T_p\mu^{-1}(0))^{\omega_p} &= (\ker T_p\mu)^{\omega_p} \\ &= T_p\mathcal{O}_p \\ &\subset (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} \\ &= \ker T_p\mu \\ &= T_p\mu^{-1}(0) \end{aligned}$$

δηλαδή ο υπόχωρος $T_p\mu^{-1}(0)$ του (T_pM, ω_p) είναι συν-ισοτροπικός.

Ο εφαπτόμενος χώρος της M_{red} στο $\pi(p)$ είναι

$$T_{\pi(p)}M_{red} \simeq T_p\mu^{-1}(0) / T_p\mathcal{O}_p \simeq T_p\mu^{-1} / (T_p\mu^{-1})^{\omega_p}$$

άρα, από το Θεώρημα (1.1.7), δέχεται συμπλεκτική δομή $\omega_{red}|_{\pi(p)}$ με

$$\omega_{red}|_{\pi(p)}(T_p\mu \cdot u, T_p\mu \cdot v) = \omega_p(u, v), u, v \in T_p\mu^{-1}(0)$$

Από τη σχέση ορισμού της η ω_{red} είναι διαφορίσιμη. Είναι επίσης μη εκφυλισμένη, αφού η $\omega_{red}|_{\pi(p)}$ είναι μη εκφυλισμένη ως συμπλεκτική μορφή. Εξ'ορισμού επίσης $\pi^*\omega_{red}|_p = \omega_p$ για κάθε $p \in \mu^{-1}(0)$. Τέλος η ω_{red} είναι κλειστή και άρα συμπλεκτική μορφή αφού

$$\pi^*d\omega_{red} = d\pi^*\omega_{red} = di^*\omega = i^*d\omega = 0$$

και αφού η π είναι επί έπεται ότι $d\omega_{red} = 0$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.3.3. Αντί του $\mu^{-1}(0)$ θα μπορούσαμε να έχουμε το $\mu^{-1}(\xi)$ για οποιοδήποτε $\xi \in \mathfrak{g}^*$ που είναι μη ιδιάζουσα τιμή της απεικόνισης ορμής (αυτό στην περίπτωση του 0 δεν χρειάστηκε να το υποθέσουμε, αφού προέκυψε από το γεγονός ότι έχουμε ελεύθερη δράση) και το επιπεδοσύνολο $\mu^{-1}(\xi)$ είναι αναλλοίωτο (κάτι που πάλι δεν χρειάστηκε να υποτεθεί στην περίπτωση του 0).

Θα αποδείξουμε τώρα μια γενικότερη μορφή του παραπάνω Θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.4. Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος και $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ μια συν-συζυγής τροχιά, τέτοια ώστε όλα τα σημεία της να είναι μη ιδιάζουσες τιμές (regular values) για τη μ . Υποθέτουμε πως η δράση της G στο $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ είναι ελεύθερη και γνήσια και ότι η συν-συζυγής δράση είναι και αυτή γνήσια. Τότε η

$$M_{\mathcal{O}} = \mu^{-1}(\mathcal{O}) / G$$

είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $\dim M_{\mathcal{O}} = \dim M + \dim \mathcal{O} - 2 \dim G$, με συμπλεκτική δομή $\omega_{\mathcal{O}}$ τέτοια ώστε

$$\omega_{\mathcal{O}}([u], [v]) = \omega(u, v) - \langle \mu(p), [\xi, \xi'] \rangle$$

για $p \in \mu^{-1}(\mathcal{O})$, $u, v \in T_p \mu^{-1}(\mathcal{O})$, $[u] = T_p \pi \cdot u$, $[v] = T_p \pi \cdot v$, όπου $\pi : \mu^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow M_{\mathcal{O}}$ η προβολή, και $X, X' \in \mathfrak{g}$ τέτοια ώστε

$$d\mu_p \cdot u = \text{ad}^*(X) \cdot \mu(p) \quad \text{και} \quad d\mu_p \cdot v = \text{ad}^*(X') \cdot \mu(p)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η συν-συζυγή δράση είναι γνήσια, η τροχιά $\mathcal{O}$ είναι κλειστή embedded υποπολλαπλότητα της $\mathfrak{g}^*$. Αφού επίσης όλα τα σημεία της $\mathcal{O}$ είναι μη ιδιάζουσες τιμές για τη μ τότε το σύνολο $\mu^{-1}(\mathcal{O}) \subset M$ είναι κλειστή embedded υποπολλαπλότητα της M διάστασης

$$\dim \mu^{-1}(\mathcal{O}) = \dim M + \dim \mathcal{O} - \dim \mathfrak{g}^* = \dim M + \dim \mathcal{O} - \dim G$$

και για $p \in \mu^{-1}(\mathcal{O})$ ισχύει $T_p \mu(T_p \mu^{-1}(\mathcal{O})) = T_{\mu(p)} \mathcal{O}$ (δες κάποιο βιβλίο διαφορικής γεωμετρίας π.χ. [H76], [L09] ή [Mich08]).

Να παρατηρήσουμε ότι λόγω ισομεταβλητότητας της συνάρτησης ορμής μ , το σύνολο $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ είναι G -αναλλοίωτο. Αφού, από υπόθεση, η δράση της G στην $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ είναι γνήσια και ελεύθερη, από το Θεώρημα (2.2.8), ο χώρος πηλίκου $M_{\mathcal{O}}$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης

$$\begin{aligned} \dim M_{\mathcal{O}} &= \dim \mu^{-1}(\mathcal{O}) - \dim G \\ &= \dim M + \dim \mathcal{O} - 2 \dim G \end{aligned}$$

Θεωρούμε την πολλαπλότητα $M' = M \times \mathcal{O}$ με συμπλεκτική δομή την

$$\omega' = \omega \times (-\omega_{\mathcal{O}})$$

όπου $\omega_{\mathcal{O}}$ είναι η συμπλεκτική δομή στην συν-συζυγή τροχιά $\mathcal{O}$ όπως ορίστηκε στο παράδειγμα 3 της παραγράφου (3.2.1). Θεωρούμε επίσης τη δράση της G στην M' , με $g \cdot (p, \xi) = (g \cdot p, \text{Ad}_g^* \cdot \xi)$ για $g \in G, p \in M, \xi \in \mathcal{O}$. Αφού η δράση της G στη M είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής μ και, όπως προκύπτει από τα παραδείγματα 2 και 3 της παραγράφου (3.2.1), η συν-συζυγής δράση της G στη $(\mathcal{O}, -\omega_{\mathcal{O}})$ είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής. Τότε, λόγω του παραδείγματος 1 της (3.2.1), έπεται ότι η δράση της G στη M' είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής

$$\mu'(p, \xi) = \mu(p) - \xi, \quad \text{για } p \in M, \xi \in \mathfrak{g}^*$$

Παρατηρούμε ότι

$$(\mu')^{-1}(0) = \{(p, \xi) \in M' : \mu(p) = \xi\} = \bigcup_{p \in \mu^{-1}(\mathcal{O})} (p, \mu(p))$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε άμεσα ότι, αφού η δράση στο $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ είναι γνήσια και ελεύθερη, και η δράση στο $(\mu')^{-1}(0)$ είναι γνήσια και ελεύθερη. Από το Θεώρημα των Marsden-Weinstein που αποδείξαμε πριν έπεται τότε ότι η $M'_{red} = (\mu')^{-1}(0) / G$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα με συμπλεκτική δομή ω'_{red} τέτοια ώστε αν

$$\begin{aligned} \pi_1 : (\mu')^{-1}(0) &\rightarrow M'_{red} \quad (\text{η προβολή}) \\ i_1 : (\mu')^{-1}(0) &\hookrightarrow M' \quad (\text{η εμφύτευση}) \end{aligned}$$

να ισχύει $\pi_1^* \omega'_{red} = i_1^* \omega'$, δηλαδή $\omega'_{red}([(u, \xi)], [(v, \xi')]) = \omega'_{(p, \mu(p))}((u, \xi), (v, \xi')) = \omega_p(u, v) - \langle \mu(p), [\xi, \xi'] \rangle$ για $p \in \mu^{-1}(\mathcal{O}), u, v \in T_p \mu^{-1}(\mathcal{O})$ και $\xi, \xi' \in T_{\mu(p)} \mathcal{O}$ (με

$[(u, \xi)]$ συμβολίζουμε το $T\pi_1 \cdot (u, \xi)$.

Η απεικόνιση

$$\phi : (\mu')^{-1}(0) \rightarrow \mu^{-1}(\mathcal{O}) : (p, \mu(p)) \mapsto p$$

είναι G -ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση, άρα επάγει αμφιδιαφόριση

$$\phi_G : M'_{red} \rightarrow M_{\mathcal{O}}$$

Η αμφιδιαφόριση αυτή επάγει στην $M_{\mathcal{O}}$ τη συμπλεκτική δομή $\omega_{M_{\mathcal{O}}}$ με $\phi_G^* \omega_{M_{\mathcal{O}}} = \omega'_{red}$.

Υπενθυμίζουμε ότι από το Παράδειγμα 3 της παραγράφου (3.2.1) ισχύει

$$T_{\eta}\mathcal{O} = \{ad^*(X) \cdot \eta : X \in \mathfrak{g}\}, \text{ για } \eta \in \mathcal{O}$$

οπότε για $p \in \mu^{-1}(\mathcal{O})$ ισχύει

$$\begin{aligned} T_p \mu^{-1}(\mathcal{O}) &= \{u \in T_p M : d\mu_p \cdot u \in T_{\mu(p)} \mathcal{O}\} \\ &= \{u \in T_p M : \exists X \in \mathfrak{g} \text{ τέτοιο ώστε } ad^*(X) \cdot \mu(p) = d\mu_p \cdot u\} \end{aligned}$$

άρα και

$$\begin{aligned} T_{(p, \mu(p))} \left((\mu')^{-1}(0) \right) &= \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\exp(tX) \cdot p, Ad_{\exp(tX)}^* \cdot \mu(p) \right) : X \in \mathfrak{g} \right\} \\ &= \{(u, ad^*(X) \cdot \mu(p)) \in T_p M \times T_{\mu(p)} \mathcal{O} : d\mu_p u = ad^*(X) \cdot \mu(p)\} \end{aligned}$$

. Επομένως η σχέση $\phi_G^* \omega_{M_{\mathcal{O}}} = \omega'_{red}$ σημαίνει ότι για $p \in \mu^{-1}(\mathcal{O})$ και $u, v \in T_p \mu^{-1}(\mathcal{O})$ ισχύει

$$\omega_{\mathcal{O}}([u], [v]) = \omega'_{red}([u, ad^*(X) \cdot \mu(p)], [v, ad^*(X') \cdot \mu(p)]) = \omega_p(u, v) - \langle \mu(p), [X, X'] \rangle$$

με τα X, X' όπως στην εκφώνηση. $\square$

Αντίστοιχα με τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν αποδειχθεί και για την περίπτωση πολλαπλότητων Poisson [MR86].

3.4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΩΝ ΡΟΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4.1. (Noether) Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος και $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ G -αναλλοίωτη συνάρτηση. Τότε η απεικόνιση ορμής μ είναι σταθερή στις ολοκληρωτικές καμπύλες του χαμιλτονιανού πεδίου της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X_f το χαμιλτονιανό πεδίο της f και ϕ_t η ροή του. Έστω επίσης $p \in M$, $X \in \mathfrak{g}$, $X^\#$ το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από τη δράση της υποομάδας $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\} \subset G$ και $\mu^X = \langle \mu, X \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu^X(\phi_t(p)) &= d\mu^X \cdot X_f \\ &= \iota_{X_f} d\mu^X \\ &= \iota_{X_f} \iota_{X^\#} \omega \\ &= -\iota_{X^\#} \iota_{X_f} \omega \\ &= -\iota_{X^\#} df \\ &= -\frac{d}{dt} f(\exp(tX) \cdot p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το ότι η f είναι G -αναλλοίωτη. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4.2. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Έστω επίσης $\psi : G \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ συμπλεκτική δράση της G στην (M, ω) . Αν $f \in C^\infty(M)$ και είναι G -αναλλοίωτη, τότε η ροή της ϕ_t είναι G -ισομεταβλητή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $p \in M$ και $g \in G$. Θέτουμε $a(t) = g \cdot \phi_t(p)$, $b(t) = \phi_t(g \cdot p)$. Τότε $a(0) = g \cdot p = b(0)$ και

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \psi_g(\phi_t(p)) \\ &= T\psi_g \cdot X_f|_p \end{aligned}$$

όπου X_f το χαμιλτονιανό πεδίο της f . Επίσης

$$\frac{db(t)}{dt} = X_f|_{\psi_g(p)}$$

Αφού ψ_g συμπλεκτομορφισμός, από την Πρόταση (1.3.6) έχουμε $\psi_g^* X_f = X_{\psi_g^* f}$, άρα $T\psi_g \cdot X_f = X_f \circ \psi_g$. Οπότε $a(t) = b(t)$ για κάθε t . $\square$

Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie που δρα γνήσια και ελεύθερα στην M και η δράση είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση οριμής μ . Όπως δείξαμε, τότε ο χώρος των τροχιών $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα με συμπλεκτική μορφή ω_{red} , τέτοια ώστε $\pi^* \omega_{red} = i^* \omega$, όπου $\pi : M \rightarrow M_{red}$ η φυσική προβολή και $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ η ένθεση.

Έστω $H \in C^\infty(M)$ που είναι G -αναλλοίωτη, δηλαδή $H(g \cdot p) = H(p)$ για κάθε $g \in G$, $p \in M$. Από αυτήν επάγεται μοναδική συνάρτηση $H_{red} : M_{red} \rightarrow \mathbb{R}$ με $H_{red} \circ \pi = H \circ i$. Η H_{red} είναι καλά ορισμένη, αφού η H είναι G -αναλλοίωτη. Μάλιστα $H_{red} \in C^\infty(M_{red})$. Πράγματι, έστω $q \in M_{red}$. Θεωρούμε ένα $p \in \pi^{-1}(q)$ και έστω S υποπολλαπλότητα από το p , όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος (2.2.8), δηλαδή μια slice από το p . Τότε η $\pi(S)$ είναι ανοιχτή περιοχή του q , η $\pi|_S : S \rightarrow \pi(S)$ αντίστροφη χάρτη για τον M_{red} , και $H_{red}(\pi(s)) = H(s)$ για κάθε $s \in S$, άρα και η H_{red} είναι διαφορίσιμη αφού είναι η H .

Έστω ϕ_H^t η χαμιλτονιανή ροή της H στην M και $\phi_{H_{red}}$ η χαμιλτονιανή ροή της H_{red} στην M_{red} . Θα δείξουμε ότι $\phi_{H_{red}}^t \circ \pi = \pi \circ \phi_H^t|_{\mu^{-1}(0)}$. Να παρατηρήσουμε καταρχάς ότι η σχέση αυτή έχει νόημα, αφού η ϕ_H^t , ως ροή της G -αναλλοίωτης συνάρτησης H , από το Θεώρημα της Noether αφήνει το $\mu^{-1}(0)$ αναλλοίωτο και από την Πρόταση (3.4.2) είναι ισομεταβλητή. Αρκεί να δείξουμε ότι $X_{H_{red}} \circ \pi = T\pi \circ X_H$, όπου X_H και $X_{H_{red}}$ τα χαμιλτονιανά πεδία της H στην M και της H_{red} στην M_{red} αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned} \pi^* (\iota_{X_{H_{red}}} \omega_{red}) &= \pi^* dH_{red} \\ &= d(\pi^* H_{red}) \\ &= dH \\ &= \iota_{X_H} \omega \end{aligned}$$

Άρα για $p \in M$ και $u \in T_p M$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi^* (\iota_{X_{H_{red}}} \omega_{red})|_p \cdot u &= (\iota_{X_H} \omega)_p \cdot u \Rightarrow \\ \omega_{red}|_{\pi(p)} (X_{H_{red}}|_{\pi(p)}, T_p \pi \cdot u) &= \omega_p (X_H|_p, u) \Rightarrow \\ \omega_{red}|_{\pi(p)} (X_{H_{red}}|_{\pi(p)}, T_p \pi \cdot u) &= \omega_{red}|_{\pi(p)} (T_p \pi \cdot X_H|_p, T_p \pi \cdot u) \end{aligned}$$

και άρα $X_{H_{red}}|_{\pi(p)} = T_p\pi \cdot X_H|_p$. Όπου στη δεύτερη συνεπαγωγή χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\pi^*\omega_{red} = i^*\omega$.

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Θα περιοριστούμε τώρα σε χαμιλτονιανές δράσεις του τόρου σε συμπαγείς και συνεκτικές πολλαπλότητες. Το Θεώρημα που θα αποδείξουμε λέει ότι για τέτοιες δράσεις η εικόνα της απεικόνισης ορμής είναι κυρτό πολύτοπο. Το Θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως Θεώρημα κυρτότητας των Atiyah-Guillemin-Sternberg. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε στοιχεία από τη Θεωρία των συναρτήσεων Morse-Bott, τα οποία και θα αναπτύξουμε. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ένα Λήμμα που περιγράφει τοπικά, σε περιοχή ενός κρίσιμου σημείου της, μια συνάρτηση Μορσε-Βοττ, καθώς και το Θεώρημα Ευσταθούς/Ασταθούς πολλαπλότητας.

4.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MORSE – BOTT

Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Το $p \in M$ θα λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f αν $T_p f = 0$. Η $c \in \mathbb{R}$ λέγεται **κανονική τιμή** της f αν κάθε $x \in f^{-1}(c)$ είναι κρίσιμο σημείο, αλλιώς λέγεται **κρίσιμη τιμή** της f .

Οι ορισμοί αυτοί γενικεύονται και για συναρτήσεις μεταξύ δύο οποιονδήποτε πολλαπλότητων. Έτσι αν M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \rightarrow N$, το $p \in M$ θα λέγεται κρίσιμο σημείο της f αν το διαφορικό $T_p f$ δεν είναι επί. Οι άλλοι ορισμοί μένουν ίδιοι.

Αν p κρίσιμο σημείο της f τότε μπορούμε να ορίσουμε τη διγραμμική μορφή

$$H_p(f) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto X_p(Y(f))$$

όπου $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ με $X_p = u$ και $Y_p = v$. Αφού το p είναι κρίσιμο σημείο ισχύει

$$0 = T_p f([X, Y]_p) = [X, Y]_p(f)$$

οπότε $X_p(Y(f)) = Y_p(X(f))$, που σημαίνει ότι η $H_p(f)$ είναι καλώς ορισμένη, ανεξάρτητη από την επιλογή των X, Y , και συμμετρική. Η $H_p(f)$ ονομάζεται **Hessian μορφή** της f στο p .

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1. Η διαφορίσιμη συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση Morse** αν σε κάθε κρίσιμο σημείο της η Hessian μορφή είναι μη εκφυλισμένη.

Για στοιχεία για τις συναρτήσεις Μορσε παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο κλασικό βιβλίο του Μίλνερ [Mil69] ή στο πιο σύγχρονο [N11].

Για τη μελέτη μας θα χρειαστούμε μια γενικότερη κλάση συναρτήσεων από τις συναρτήσεις Morse.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.2. Έστω $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ πολλαπλότητα Riemann. Μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται **συνάρτηση Morse-Bott** αν το σύνολο των

κρίσιμων σημείων της $Crit(f)$ είναι ένωση συνεκτικών υποπολλαπλοτήτων C_i της M και

$$T_p Crit(f) = \ker \nabla^2 f(p)$$

για κάθε $p \in Crit(f)$, όπου η $\nabla^2 f(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ η γραμμική απεικόνιση με $\langle \nabla^2 f(p) \cdot u, w \rangle = H_p(f)(u, w)$ για κάθε $u, w \in T_p M$. Ισοδύναμα, αν η διγραμμική μορφή $\mathcal{H}_p(f)$, που επάγει η $H_p(f)$ στην κάθετη δέσμη $N_p M = T_p M / T_p Crit(f)$ της $T_p Crit(f)$, είναι μη εκφυλισμένη. Τα C_i λέγονται **κρίσιμες υποπολλαπλότητες**.

Αφού $Tf = 0$ σε κάθε C_i και οι C_i είναι συνεκτικές, έπεται ότι η f έχει σταθερή τιμή πάνω σε κάθε κρίσιμη υποπολλαπλότητα.

Οι συναρτήσεις Morse-Bott είναι πράγματι γενικεύσεις των συναρτήσεων Morse, αφού αν το $Crit(f)$ είναι ένωση πολλαπλοτήτων διάστασης 0, δηλαδή διακριτών σημείων και

$$0 = T_p \{p\} = \ker \nabla^2 f(p)$$

άρα η Hessian είναι μη εκφυλισμένη.

4.1.1. Λήμμα Morse-Bott. Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ένα πολύ βασικό Λήμμα, το οποίο λέει πως σε περιοχή ενός κρίσιμου σημείου της μια συνάρτηση Morse-Bott έχει πολύ συγκεκριμένη μορφή. Η απόδειξη που θα δώσουμε προέρχεται από το [BH04].

ΛΗΜΜΑ 4.1.3 (Morse-Bott). Έστω $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Morse-Bott, όπου M διαφορική πολλαπλότητα με $\dim M = m$, C κρίσιμη υποπολλαπλότητα με $\dim C = n$ και $p \in C$. Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του p στην M και χάρτης $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ τέτοιος, ώστε:

- (1) $\phi(p) = 0$
- (2) $\phi(U \cap C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} : y = 0\}$
- (3) $(f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$,
όπου k ο δείκτης της $\mathcal{H}_p(f)$.

Αφού η $\mathcal{H}_p(f)$ έχει συνεχή, και μάλιστα διαφορίσιμη, εξάρτηση από το p και η C είναι συνεκτική, ο δείκτης της θα είναι ο ίδιος σε όλη την C .

Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει πως κάθε κρίσιμη υποπολλαπλότητα βρίσκεται μέσα σε μια περιοχή που δεν περιέχει άλλες κρίσιμες πολλαπλότητες. Ειδικά αν η M είναι συμπαγής το πλήθος των κρίσιμων πολλαπλοτήτων είναι πεπερασμένο.

Θα χρησιμοποιούμε μερικά Λήμματα επιπλέον, πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Λήμματος Morse-Bott.

ΛΗΜΜΑ 4.1.4. Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ κυρτή περιοχή του 0 και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $g_i \in C^\infty(U)$ με

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

ώστε

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0) + \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

Αν επιπλέον $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0, i = 1, \dots, m$ τότε υπάρχουν $h_{ij} \in C^\infty(U)$ με

$$h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$$

ώστε

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(0) + \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n) \\ &= x^T H_x x \end{aligned}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$, το οποίο το βλέπουμε ως διάνυσμα στήλη, και $H_x = (\frac{1}{2}(h_{ij}(x) + h_{ji}(x)))_{i,j}$ συμμετρικός πίνακας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, αφού U κυρτό και $0 \in U$, έπεται ότι $tx \in U$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i g_i(x) \end{aligned}$$

όπου $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ και άρα $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Αν τώρα $0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = g_i(0) = 0, i = 1, \dots, n$. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στις g_i , έπεται ότι υπάρχουν h_{ij} , ώστε

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x)$$

με $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0)$. Οπότε τελικά

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(0) + \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

□

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο χρησιμοποιείται και στο [H76] για την απόδειξη του Λήμματος του Morse.

ΛΗΜΜΑ 4.1.5. Έστω $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ διαγώνιος πίνακας με $a_i = \pm 1$ για $i = 1, 2, \dots, m$. Τότε υπάρχει περιοχή U του A στο διανυσματικό χώρο των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων ($\simeq \mathbb{R}^{m(m+1)/2}$) και διαφορίσιμη απεικόνιση

$$P : U \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$$

ώστε $P(A) = I_{m \times m}$ και $P(S)^T S P(S) = A$ για κάθε $S \in U$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο m . Για $m = 1$, $A = (a)$ με $a = \pm 1$. Αν πάρουμε το U αρκετά μικρό, τότε αν $S = (s) \in U$, το s θα έχει το ίδιο πρόσημο με το a . Ορίζουμε τότε

$$P(S) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}$$

Έστω ότι έχει αποδειχθεί για $m - 1$.

Παίρνουμε έναν $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$, $a_i = \pm 1$ για $i = 1, 2, \dots, m$.

Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει περιοχή U_1 του $A_1 = \text{diag}(a_2, \dots, a_m)$ στο χώρο των $(m-1) \times (m-1)$ συμμετρικών πινάκων και $P_1 : U_1 \rightarrow GL_{m-1}(\mathbb{R})$ με $P_1(A_1) = I_{(m-1) \times (m-1)}$ και $P_1(S_1)^T S_1 P_1(S_1) = A_1$ για κάθε $S_1 \in U_1$.

Έστω $S = (s_{ij})$ συμμετρικός $m \times m$ πίνακας με $s_{11} \neq 0$ και να έχει το ίδιο πρόσημο με το a_1 . Ονομάζουμε B την αντίστοιχη διγραμμική μορφή

$$B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^T S y$$

Έστω $e_1, \dots, e_m$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^m$. Ορίζουμε

$$w_1 = \frac{e_1}{\sqrt{|s_{11}|}} \\ w_j = e_j - \frac{s_{1j}}{s_{11}} e_1, j > 1$$

Προφανώς τα $w_1, \dots, w_m$ αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^m$. Ο πίνακας S' που αντιστοιχεί στη B ως προς τη βάση αυτή είναι

$$S' = (B(w_i, w_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = C_S^T S C_S$$

όπου

$$C_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|s_{11}|}} & -\frac{s_{12}}{s_{11}} & \dots & -\frac{s_{1m}}{s_{11}} \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{(m-1) \times (m-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ο πίνακας αλλαγής βάσης. Παρατηρούμε πως ο C_S έχει διαφορίσιμη εξάρτηση από τα στοιχεία του S . Αν επιπλέον ο S επιλεγεί αρκετά κοντά στον A , έστω σε μια περιοχή U , τότε $S_1 \in U_1$.

Ορίζουμε

$$P : U \rightarrow GL_m(\mathbb{R}) \\ S \mapsto C_S R_S$$

όπου

$$R_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1(S_1) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Επαληθεύεται άμεσα ότι η P είναι η ζητούμενη συνάρτηση. $\square$

Θα χρειαστούμε ένα ακόμα Λήμμα, για συναρτήσεις Morse, το οποίο χρησιμοποιεί το κόλπο του Moser που έχουμε ήδη περιγράψει.

ΛΗΜΜΑ 4.1.6. Έστω $f : U_o \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, όπου $U_o \subset \mathbb{R}^m$ κυρτή περιοχή του 0, με $f(0) = 0$ και $d_0 f = 0$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας της Hessian στο 0

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right)_{i,j}$$

είναι αντιστρέψιμος. Έστω

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^T A x \end{aligned}$$

η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Τότε υπάρχουν περιοχές U, U' του 0 στον $\mathbb{R}^m$ με $U \subset U_o$ και αμφιδιαφορίση $\phi : U \rightarrow U'$, ώστε

$$f \circ \phi = q$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $t \in [0, 1]$ ορίζουμε συναρτήσεις $f_t : U_o \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_t = q + t(f - q)$$

Θα βρούμε οικογένεια αμφιδιαφορίσεων ϕ_t ώστε

$$f_t \circ \phi_t = q, \text{ για κάθε } t \in [0, 1] \quad (1)$$

Τότε για $\phi = \phi_1$, αφού $f_1 = f$, απίρνουμε το ζητούμενο.

Αν ξ_t το χρονομεταβλητό πεδίο που αντιστοιχεί στη ϕ_t , δηλαδή

$$\xi_t = \frac{d\phi_t}{dt} \circ \phi_t, \phi_o = id$$

παραγωγίζοντας την (1) ως προς t παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{df_t}{dt} \circ \phi_t + df_t|_{\phi_t} \cdot \xi_t &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{df_t}{dt} + df_t \cdot \xi_t &= 0 \Leftrightarrow \\ df_t \cdot \xi_t &= q - f \equiv g \quad (2) \end{aligned}$$

Άρα το να βρούμε αμφιδιαφορίσεις ϕ_t που ικανοποιούν την (1) είναι ισοδύναμο με το να βρούμε ένα χρονομεταβλητό διανυσματικό πεδίο ξ_t που ικανοποιεί την (2).

Έχουμε $g(0) = 0 - 0 = 0$ και $d_0 g = d_0 q - d_0 f = 0$. Άρα, από το Λήμμα (4.1.4), για κάθε $x \in U_o$ υπάρχει συμμετρικός πίνακας G_x , που εξαρτάται με διαφορίσιμο τρόπο από το x , ώστε

$$g(x) = x^T G_x x$$

Αν $\xi_t^i, i = 1, \dots, m$ οι συνιστώσες του ξ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^m$, τότε δουλεύοντας ανάλογα με το Λήμμα (4.1.4) έχουμε για $x \in U_o$ και $s \in \mathbb{R}$ αρκετά μικρό

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (df_t|_{sx} \cdot \xi_t|_{sx}) &= \frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^m \xi_t^i \frac{\partial f_t}{\partial x_i} (sx) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \xi_t^i x_j \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_i \partial x_j} (sx) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} df_t|_x \cdot \xi_t|_x &= df_t|_x \cdot \xi_t|_x - df_t|_0 \cdot \xi_t|_0 \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (df_t|_{sx} \cdot \xi_t|_{sx}) ds \\ &= \sum_{i,j=1}^m \xi_t^j x_i (B_x^t)_{ij} \\ &= x^T B_x^t \xi_t|_x \end{aligned}$$

όπου B_x^t ο πίνακας με στοιχεία τα $(B_x^t)_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_i \partial x_j}(sx) ds$, και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύννηδες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$. Για $x = 0$ έχουμε $B_0^t = 2A + t(A - 2A) = (2 - t)A$. Επομένως, αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, και ο B_0^t θα είναι αντιστρέψιμος για κάθε $t \in [0, 1]$. Αν περιοριστούμε σε μια αρκετά μικρή περιοχή $\tilde{U} \subset U_o$ του 0, οι πίνακες B_x^t θα είναι αντιστρέψιμοι για κάθε $t \in [0, 1]$ και κάθε $x \in \tilde{U}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} df_t \cdot \xi_t = g &\Leftrightarrow g(x) = df_t|_x \cdot \xi_t|_x, \forall x \in \tilde{U} \\ &\Leftrightarrow x^T G_x x = x^T B_x^t \xi_t|_x, \forall x \in \tilde{U} \\ &\Leftrightarrow \xi_t|_x = (B_x^t)^{-1} G_x x, \forall x \in \tilde{U} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει το ζητούμενο διανυσματικό πεδίο στην $\tilde{U}$ και έχει διαφορίσιμη εξάρτηση από τα x και t . Αφού $\xi_t|_0 = 0$, αν περιοριστούμε σε μια περιοχή $U \subset \tilde{U}$ η ροή $\phi_t(x)$ από το $x \in U$ θα υπάρχει για κάθε $t \in [0, 1]$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.7. Οι πίνακες G_x και B_x^t εξαρτώνται με διαφορίσιμο τρόπο από τα στοιχεία του πίνακα A . Το ίδιο επομένως ισχύει για τα ξ_t και ϕ_t .

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Λήμματος Morse-Bott.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η C είναι υποπολλαπλότητα της M και $p \in C$, θα υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του p στη M και χάρτης

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

με $\phi(U \cap C) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Μάλιστα μπορεί ο χάρτης να επιλεγεί έτσι, ώστε $\phi(p) = 0$.

Η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Μορσε-Βοττ και το σύνολο $\mathbb{R}^n \times \{0\} = \phi(U \cap C)$ είναι κρίσιμη υποπολλαπλότητά της. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{R}^{m-n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto (f \circ \phi^{-1})(x, y) - f(p) \end{aligned}$$

είναι συνάρτηση Morse, με το 0 να είναι κρίσιμο σημείο της και $f_x(0) = 0$. Οι πίνακες που αντιστοιχούν στις Hessian μορφές των f_x

$$A_x = \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial y_i \partial y_j} \right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(x,0)} \right)_{i,j}$$

είναι μη εκφυλισμένοι και έχουν διαφορίσιμη εξάρτηση από το x . Μπορούμε, εφαρμόζοντας κατάλληλη γραμμική αμφιδιαφόριση στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ που να είναι είναι η ταυτοτική στον $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ -αντιστοιχεί σε αλλαγή βάσης-, να επιτύχουμε ο A_0 να είναι διαγώνιος με k στοιχεία ίσα με -1 (όπου k ο δείκτης της $\mathcal{H}_p(f)$ στη C) και τα υπόλοιπα ίσα με 1.

Για $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} q_x : \mathbb{R}^{m-n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto y^T A_x y \end{aligned}$$

Από το Λήμμα (4.1.6) και την Παρατήρηση μετά από αυτό, έπεται ότι οικογένεια αμφιδιαφορίσεων $\psi_x, x \in \mathbb{R}^n$ του $\mathbb{R}^{m-n}$ με $\psi_x(0) = 0$, που έχουν διαφορίσιμη εξάρτηση

από το x , ώστε για κάθε $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ να ισχύει

$$q_x(y) = f_x(\psi_x(y)) = (f \circ \phi^{-1})(x, \psi_x(y)) - f(p)$$

Τότε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\rightarrow M \\ (x, y) &\mapsto \phi^{-1}(x, \psi_x(y)) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμη και 1-1. Άρα η αντίστροφή της είναι χάρτης. Επίσης $\tilde{\phi}(0, 0) = p$, $\tilde{\phi}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = U \cap C$ και

$$(f \circ \tilde{\phi})(x, y) - f(p) = (f \circ \phi^{-1})(x, \psi_x(y)) - f(p) = q_x(y)$$

Αφού οι πίνακες A_x έχουν διαφορίσιμη, άρα συνεχή εξάρτηση από το x , για x αρκετά κοντά στο 0 οι A_x θα είναι αρκετά κοντά στον $A_0 = \text{diag} \begin{pmatrix} -1, \dots, -1, & 1, \dots, 1 \\ k-\text{φορές} & (m-n-k)-\text{φορές} \end{pmatrix}$.

Αν περιορίσουμε επομένως την $\tilde{\phi}$ σε κατάλληλη περιοχή $\tilde{U}$ του 0, οι πίνακες A_x θα ανήκουν στην περιοχή του A_0 που προκύπτει από το Λήμμα (4.1.5), οπότε όπως μας λέει το Λήμμα θα ισχύει

$$P(A_x)^T A_x P(A_x) = A_0, \text{ για } x \text{ σε περιοχή του } 0$$

όπου $P(A_x) \in GL_{m-n}(\mathbb{R})$ και είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του x .

Επομένως αν ορίσουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : \tilde{U} &\rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{U}) \\ (x, y) &\mapsto \tilde{\phi}(x, P(A_x)y) \end{aligned}$$

αυτή είναι διαφορίσιμη και 1-1. Άρα η αντίστροφή της είναι χάρτης. Παρατηρούμε πως $\tilde{\psi}(0, 0) = \tilde{\phi}(0, 0) = p$ και $\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})) = C \cap \tilde{\phi}(\tilde{U})$ και

$$\begin{aligned} (f \circ \tilde{\psi})(x, y) - f(p) &= (f \circ \tilde{\phi})(x, P(A_x)y) - f(p) \\ &= q_x(P(A_x)y) \\ &= (P(A_x)y)^T A_x (P(A_x)y) \\ &= y^T P(A_x)^T A_x P(A_x)y \\ &= y^T A_0 y \\ &= -y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_{m-n}^2 \end{aligned}$$

□

4.1.2. Η ροή κλίσης μιας συνάρτησης Morse-Bott. Για την ενότητα αυτή η $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ θα είναι μια συμπαγής πολλαπλότητα Riemann διάστασης m και η $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση Morse-Bott στη M . Η **κλίση** της f είναι το διαφορίσιμο διανυσματικός πεδίο ∇f στη M που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} p \text{ κρίσιμο σημείο της } f &\Leftrightarrow d_p f = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \nabla f, X \rangle(p) = X_p(f) = d_p f \cdot X_p = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(M) \\ &\Leftrightarrow \nabla f(p) = 0 \end{aligned}$$

Η **ροή κλίσης** ϕ_t είναι η ροή του πεδίου $-\nabla f$, δηλαδή

$$\frac{d\phi_t(p)}{dt} = -\nabla f \circ \phi_t(p), \forall p \in M$$

Αφού η πολλαπλότητα είναι συμπαγής, η ροή ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.8. Για κάθε $p \in M$ το όριο

$$\phi_{\pm\infty}(p) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_t(p)$$

υπάρχει και είναι κρίσιμο σημείο της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε πως η $\psi_t = \phi_{-t}$ είναι η ροή κλίσης της συνάρτησης $-f$, η οποία είναι και αυτή μια συνάρτηση Morse-Bott με τα ίδια κρίσιμα σημεία με την f , και $\psi_{+\infty} = \phi_{-\infty}$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση για το όριο καθώς το t τείνει στο συν άπειρο.

Η $\phi_t(p)$ είναι σταθερή για κάθε t , και επομένως ίση με p για κάθε t , αν και μόνο αν $\nabla f_p = 0$, επομένως αν και μόνο αν το p είναι κρίσιμο σημείο της f .

Αν τώρα το p , επομένως και το $\phi_t(p)$ για κάθε t , δεν είναι κρίσιμο σημείο έπεται ότι

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(p)) = -\nabla f|_{\phi_t(p)}(f) = -\langle \nabla f, \nabla f \rangle_{\phi_t(p)} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

επομένως η συνάρτηση $f(\phi_t(p))$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t .

Ορίζουμε το σύνολο

$$\Omega_{+\infty} = \{q \in M : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ με } t_n \rightarrow +\infty \text{ ώστε } \phi_{t_n}(p) \rightarrow q\}$$

Παίρνοντας μια τυχαία ακολουθία $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ με $t_n \rightarrow +\infty$ και θεωρώντας την ακολουθία $\phi_{t_n}(p)$ στην M , αφού η M είναι συμπαγής κάποια υποακολουθία θα συγκλίνει σε κάποιο σημείο έστω q . Τότε $q \in \Omega_{+\infty}$ και άρα $\Omega_{+\infty} \neq \emptyset$.

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $\phi_t(V) \subset \Omega_{+\infty}$. Πράγματι, έστω $q \in \Omega_{+\infty}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $t_n \rightarrow +\infty$, ώστε $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$. Τότε για οποιοδήποτε t , έχουμε $t + t_n \rightarrow +\infty$ και $\phi_{t+t_n}(p) = \phi_t(\phi_{t_n}(p)) \rightarrow \phi_t(q)$, αφού η ϕ_t είναι συνεχής. Επομένως $\phi_t(q) \in \Omega_{+\infty}$.

Έστω τώρα $q_0, q_1 \in \Omega_{+\infty}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $t_n \rightarrow +\infty$, την οποία μπορούμε να πάρουμε γνήσια αύξουσα, ώστε

$$\phi_{t_{2n+i}}(p) \rightarrow q_i, i = 0, 1$$

Οπότε, αφού $t_{2n+1} > t_{2n+1} > t_{2n}$ έχουμε

$$f(\phi_{t_{2n+2}}(p)) > f(\phi_{t_{2n+1}}(p)) > f(\phi_{t_{2n}}(p))$$

και επομένως, παίρνοντας τον n να τείνει στο άπειρο, παίρνουμε ότι $f(q_0) = f(q_1)$. Αφού τα q_0, q_1 επελέγησαν τυχαία έπεται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\Omega_{+\infty} \subset f^{-1}(c)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\Omega_{+\infty} \subset \text{Crit}(f)$. Πράγματι, έστω $q \in \Omega_{+\infty}$ — $\text{Crit}(f)$. Αφού το q δεν είναι κρίσιμο σημείο η $f(\phi_t(q))$ θα είναι γνήσια φθίνουσα ως

προς t , ενώ αφού $q \in \Omega_{+\infty}$, και άρα $\phi_t(q) \in \Omega_{+\infty}$ για κάθε t , θα ισχύει $f(\phi_t(q)) = c$ για κάθε t . Καταλήξαμε επομένως σε άτοπο.

Έστω $q \in \Omega_{+\infty}$. Τότε το q είναι κρίσιμο σημείο της f και υπάρχει ακολουθία $t_n \rightarrow +\infty$, ώστε $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(p) = q$. Αφού το q είναι κρίσιμο σημείο της f , από το Λήμμα Morse-Bott, υπάρχει χάρτης $(U'; (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-n}))$, όπου n η διάσταση της κρίσιμης υποπολλαπλότητας που ανήκει το q , ώστε

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) - f(p) = -y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_{m-n}^2$$

όπου k ο δείκτης της $\mathcal{H}_q(f)$. Θεωρούμε την περιοχή $U = \{a \in U' : y_1^2(a) + \dots + y_m^2(a) < r^2\}$ για κάποιο r αρκετά μικρό. Το πεδίο κλίσης της f στην περιοχή U έχει τη μορφή

$$-\nabla f = 2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + 2y_k \frac{\partial}{\partial y_k} - 2y_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \dots - 2y_{m-n} \frac{\partial}{\partial y_{m-n}}$$

Αφού $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$, θα υπάρχει n_o ώστε $\phi_{t_{n_o}}(p) = y_o \in U$ και έστω $(x_1(0), \dots, x_n(0), y_1(0), \dots, y_{m-n}(0))$ οι συντεταγμένες του. Για όσο βρίσκεται μέσα στην U , η ροή $\phi_t(y_o) = \phi_{t+t_{n_o}}(p)$ του y_o θα έχει τη μορφή

$$(x_1(0), \dots, x_n(0), y_1(0)e^{2t}, \dots, y_k(0)e^{2t}, y_{k+1}(0)e^{-2t}, \dots, y_{m-n}(0)e^{-2t})$$

Αν η ροή του y_o δεν ξαναβγαίνει από την U , θα πρέπει $y_1(0) = \dots = y_k(0) = 0$ και επομένως

$$\phi_t(p) = \phi_{t-t_{n_o}}(y_o) = (x_1(0), \dots, x_n(0), 0t, \dots, 0, y_{k+1}(0)e^{-2(t-t_{n_o})}, \dots, y_{m-n}(0)e^{-2(t-t_{n_o})}) \rightarrow (x_1(0), \dots, x_n(0), 0, \dots, 0)$$

το σημείο αυτό δεν μπορεί να είναι άλλο από το q .

Μένει να δείξουμε ότι πράγματι η ροή του y_o δεν βγαίνει πάλι από την περιοχή U . Θέτουμε $y_-^2 = (y_1(0))^2 + \dots + (y_k(0))^2$ και $y_+^2 = (y_{k+1}(0))^2 + \dots + (y_{m-n}(0))^2$. Μικραίνουμε και άλλο την περιοχή U , ώστε $r^2 = y_-^2 + y_+^2$. Έχουμε $f(y_o) - f(p) = -y_-^2 + y_+^2$. Η ροή του y_o μπαίνει ή βγαίνει από την περιοχή U τις χρονικές στιγμές για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned} y_-^2 e^{4t} + y_+^2 e^{-4t} &= \\ &= (y_1(0)e^{2t})^2 + \dots + (y_k(0)e^{2t})^2 + (y_{k+1}(0)e^{-2t})^2 + \dots + (y_{m-n}(0)e^{-2t})^2 = r^2 \end{aligned}$$

Λύνοντας προκύπτει ότι τότε $e^{4t} = 1$ ή $e^{4t} = \frac{y_+^2}{y_-^2}$. Οπότε, στα σημεία εισόδου και εξόδου από την U , η τιμή της f θα είναι $f(p) - y_-^2 + y_+^2$ (που είναι ίση με την τιμή στο y_o) ή $f(p) - y_+^2 + y_-^2$. Αφού η $f(\phi_t(y_o))$ μειώνεται διαρκώς θα πρέπει η έξοδος από την περιοχή U να γίνεται από σημείο όπου η f έχει τιμή $f(p) - y_+^2 + y_-^2$, η οποία πρέπει να είναι μικρότερη της $f(y_o)$, και να μην ξαναμπαίνει. Μάλιστα πρέπει $y_-^2 - y_+^2 < 0$ και άρα $f(p) - y_+^2 + y_-^2 < f(p)$. $\square$

Έστω C μια κρίσιμη υποπολλαπλότητα της f . Εξ'ορισμού της f ως συνάρτησης Morse-Bott ο πυρήνας του πίνακα της Hessian για $x \in C$ είναι το εφαπτόμενο στη C επίπεδο $T_x C$. Επομένως έχουμε τη διάσπαση

$$T_x M = T_x C \oplus E_x^- \oplus E_x^+, \text{ για } x \in C$$

όπου E_x^-, E_x^+ οι υπόχωροι του $T_x M$ στους οποίους ο περιορισμός της Hessian είναι αρνητικά και θετικά ορισμένη αντίστοιχα. Είναι δηλαδή οι υπόχωροι που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αρνητικές και θετικές ιδιοτιμές αντίστοιχα

του πίνακα της Hessian. Αφού η C είναι συνεκτική, οι διαστάσεις των E_x^- και E_x^+ είναι σταθερές για κάθε $x \in C$. Οι αριθμοί

$$n^-(C) = \dim E_x^-, \forall x \in C$$

$$n^+(C) = \dim E_x^+, \forall x \in C$$

είναι ο **δείκτης** και ο **συν-δείκτης** της f στη C .

Ορίζουμε τα σύνολα

$$W^s(C) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(q) \in C \right\}$$

$$W^u(C) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(q) \in C \right\}$$

Η προηγούμενη πρόταση εξασφαλίζει ότι τα σύνολα είναι καλά ορισμένα, αφού υπάρχουν τα όρια $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(q)$ για κάθε $q \in M$. Το $W^s(C)$ ονομάζεται **ευσταθής πολλαπλότητα της C** και το $W^u(C)$ **ασταθής πολλαπλότητα της C** .

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.9 (Ευσταθούς-ασταθούς πολλαπλότητας για Morse-Bott συναρτήσεις). Αν $m = \dim M$ και $n = \dim N$, το σύνολο $W^s(C)$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $n + n^+(C)$ με $T_x W^s(C) = T_x C \oplus E_x^+$ για $x \in C$ και το σύνολο $W^u(C)$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $n + n^-(C)$ με $T_x W^u(C) = T_x C \oplus E_x^-$ για $x \in C$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση $-f$ είναι και αυτή Morse-Bott με τα ίδια κρίσιμα σημεία, δείκτη στη C ίσο με $n^+(C)$, συν-δείκτη στη C ίσο με $n^-(C)$, ροή κλίσης ϕ_{-t} και ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα στη C τις $W^u(C)$ και $W^s(C)$ αντίστοιχα. Άρα αρκεί να μελετήσουμε μόνο το $W^s(C)$.

Παρατηρούμε πως το σύνολο $W^s(C)$ είναι ϕ_t αναλλοίωτο για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και $q \in W^s(C)$. Τότε υπάρχει $p \in C$, ώστε

$$\phi_t(q) \rightarrow p$$

οπότε

$$\phi_t(\phi_{t_0}(q)) = \phi_{t+t_0}(q) \rightarrow p$$

και επομένως $\phi_{t_0}(q) \in W^s(C)$.

Έστω $x \in W^s(C)$. Τότε υπάρχει $p \in C$, ώστε $\phi_t(x) \rightarrow p$ για $t \rightarrow +\infty$. Άρα για οποιαδήποτε περιοχή U του p θα υπάρχει t , ώστε το $\phi_t(x)$, και λόγω συνέχειας και η $\phi_t(V)$ για κάποια περιοχή του x στη M , να περιέχεται στην U . Επίσης η ϕ_t είναι αμφιδιαφόριση και αφήνει το $W^s(C)$ αναλλοίωτο. Επομένως, αρκεί να μελετήσουμε την $W^s(C)$ σε περιοχή της C .

Έστω $p \in C$. Από το Λήμμα Morse-Bott υπάρχει χάρτης $(U', \phi = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-n}))$, ώστε $\phi(p) = 0$, $\phi(U \cap C) = \{q \in U : y_1(q) = \dots = y_{m-n}(q) = 0\}$ και

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) - f(p) = -y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_{m-n}^2$$

όπου $k = n^-(C)$. Περιοριζόμαστε στην περιοχή

$$U = \left\{ q \in U : (y_1(q))^2 + \dots + (y_{m-n}(q))^2 < r^2 \right\}$$

Τότε $C \cap U = C \cap U'$ για r αρκετά μικρό. Όπως είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη, η ροή από το σημείο με συντεταγμένες $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-n})$ μένει για πάντα μέσα στο U αν και μόνο αν $y_1 = \dots = y_k = 0$, ενώ διαφορετικά βγαίνει από την περιοχή U

με την τιμή της f να είναι μικρότερη από την τιμή της στο p , και άρα σε όλο το C , και επομένως τότε δεν μπορεί να τείνει στο C . Έχουμε επομένως

$$W^s(C) \cap U = \{q \in U : y_1(q) = \dots = y_k(q) = 0\}$$

που σημαίνει ότι η $W^s(C)$ είναι (εμβεδδεδ) υποπολλαπλότητα της M διάστασης $m - k = n + n^+(C)$.

Από τη μορφή της f στην U προκύπτει ότι

$$E_p^+ = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{m-n}} \Big|_p \right\rangle$$

ενώ προφανώς

$$T_p C = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\rangle$$

Οπότε $T_p W^s(C) = T_p C \oplus E_p^+$. □

Παρατηρούμε πως

$$n^-(C) = \text{codim}(W^s(C))$$

$$n^+(C) = \text{codim}(W^u(C))$$

Μια εναλλακτική απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος, μάλιστα σημαντικής γενίκευσής του, μπορεί να βρεθεί στο [HPPS70].

Από την Πρόταση (4.1.8) ότι

$$M = \bigcup_C W^s(C) = \bigcup_C W^u(C)$$

με τα σύνολα σε κάθε ένωση να είναι ξένα ανά δύο και πεπερασμένα σε πλήθος.

4.1.3. Επιπεδοσύνολα μιας συνάρτησης Morse-Bott. Το παρακάτω Λήμμα είναι πολύ χρήσιμο για την απόδειξη του βασικού Θεωρήματος αυτού του κεφαλαίου, αλλά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και από μόνο του.

ΛΗΜΜΑ 4.1.10. Έστω M συμπαγής και συνεκτική πολλαπλότητα με $\dim M = m$ και $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Morse-Bott με $n^\pm(C) \neq 1$, για κάθε κρίσιμη υποπολλαπλότητα C . Τότε τα επιπεδοσύνολα $f^{-1}(c)$ είναι συνεκτικά για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε μια μετρική Riemann στην M και έστω ϕ_t η ροή κλίσης.

Θα δείξουμε αρχικά ότι υπάρχουν μια ακριβώς κρίσιμη πολλαπλότητα δείκτη 0 και μια συν-δείκτη 0. Η M είναι συμπαγής, άρα η f θα έχει μέγιστο και ελάχιστο, τα οποία είναι κρίσιμα σημεία με δείκτη 0 και συν-δείκτη 0 αντίστοιχα. Οι κρίσιμες υποπολλαπλότητες που τα περιέχουν είναι οι ζητούμενες. Για την απόδειξη ότι είναι οι μοναδικές, έστω C_0 η ένωση των κρίσιμων πολλαπλοτήτων δείκτη 0. Το σύνολο $M - W^s(C_0)$ ισούται με την ένωση συνόλων της μορφής $W^s(C)$, όπου C κρίσιμη υποπολλαπλότητα με $\text{codim}(W^s(C)) = n^+(C) \neq 0, 1$. Είναι επομένως ένωση πολλαπλοτήτων με συνδιάσταση τουλάχιστον 2. Από την Αλγεβρική Τοπολογία, αφού η M είναι συνεκτική, γνωρίζουμε τότε ότι το $W^s(C_0) \subset M$ είναι συνεκτικό. Έπεται ότι και η C_0 είναι συνεκτική και επομένως είναι η κρίσιμη πολλαπλότητα που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της f . Πράγματι, έστω ότι το C_0 δεν είναι συνεκτικό και έστω C, C' μια διαμέριση του C_0 , επομένως τα C, C' είναι ενώσεις κρίσιμων υποπολλαπλοτήτων δείκτη 0. Άρα τα $W^s(C), W^s(C')$ -ή για την ακρίβεια οι ενώσεις των ευσταθών πολλαπλοτήτων των συνεκτικών συνιστωσών τους- θα είναι πολλαπλότητες διάστασης

m , άρα ανοιχτά σύνολα και επομένως θα αποτελούν μια διαμέριση του $W^s(C_0)$. Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι η κρίσιμη πολλαπλότητα C_N που αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή της f είναι και αυτή μοναδική.

Αφού η M είναι συμπαγής θα έχει πεπερασμένο πλήθος κρίσιμων υποπολλαπλοτήτων και επομένως και πεπερασμένο πλήθος κρίσιμων τιμών, έστω

$$c_0 < c_1 < \dots < c_N$$

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$C_0 = f^{-1}(c_0) \text{ και } C_N = f^{-1}(c_N)$$

και είναι συνεκτικά.

Τώρα θα αποδείξουμε το Θεώρημα για $c_0 < c < c_1$, οπότε η c είναι και κανονική τιμή της f . Έστω $x_0, x_1 \in f^{-1}(c)$. Αφού τα x_0, x_1 δεν είναι κρίσιμα σημεία και επομένως, όπως έχουμε δει, η f θα μειώνεται πάνω στις τροχιές τους, πρέπει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_1) \in C_0$$

και έστω y_0, y_1 τα αντίστοιχα όρια. Μπορούμε να ενώσουμε τα x_0 και x_1 με μονοπάτι στη M ως εξής. Αρχικά ενώνουμε το x_0 με το y_0 με το μονοπάτι που ορίζει η ροή $\phi_t(x_0)$ (αυτό το τμήμα βρίσκεται εξ'ολοκλήρου μέσα στην $W^s(C_0)$), μετά ενώνουμε τα y_0 και y_1 με ένα μονοπάτι στη C_0 , η οποία είναι συνεκτική όπως δείξαμε, και τέλος ενώνουμε τα x_1 και y_1 μέσω της ροής κλίσης. Αφού

$$\text{codim}(C_0) = n^+(C_0) \geq 2$$

και η C_0 περιέχεται στην $W^s(C_0)$, που έχει διάσταση όση και η M , έπεται (δες [Mil65] ή [GP74], την συζήτηση σχετικά με transversality) ότι μπορούμε να αλλάξουμε ελαφρώς το τμήμα του μονοπατιού μεταξύ y_0 και y_1 , ώστε να ανύκει στο $W^s(C_0) - C_0$. Κουνώντας το μονοπάτι αυτό, με σταθερά τα άκρα x_0 και x_1 , ακολουθώντας την ροή κλίσης κατά τα αρνητικά t , προκύπτει ένα μονοπάτι που ενώνει τα x_0 και x_1 και βρίσκεται στο $f^{-1}(c)$.

Συνεχίζουμε με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι το $f^{-1}(c)$ είναι συνεκτικό για c κανονική τιμή της f με $c < c_j$, $j < N$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $c_j < c < c_{j+1}$. Έστω $x_0, x_1 \in f^{-1}(c)$. Αφού $M = \cup_C W^s(C)$ με $\text{codim}(W^s(C)) = n^-(C) \geq 2$ για $C \neq C_0$ και $\dim W^s(C_0) = m$, και αφού η $f^{-1}(c)$ είναι υποπολλαπλότητα διάστασης $m - 1$, αφού η c είναι κανονική τιμή της f , έπεται ότι μπορούμε να ενώσουμε τα x_0 και x_1 με σημεία $y_0, y_1 \in W^s(C_0)$ αντίστοιχα, μέσω μονοπατιών στην $f^{-1}(c)$. Τα σημεία y_0, y_1 τα ενώνουμε μέσω της ροής κλίσης με τα σημεία $z_0, z_1 \in f^{-1}(c')$ αντίστοιχα, όπου $c_{j-1} < c' < c_j$. Αυτό γίνεται γιατί τα σημεία y_0, y_1 ανήκουν στην $W^s(C_0)$, άρα η ροή τους τείνει στα της C_0 όπου έχουμε το ελάχιστο της f . Από την επαγωγική υπόθεση τα z_0, z_1 μπορούν να ενωθούν με μονοπάτι στην $f^{-1}(c')$. Αφού $\dim W^u(C_N) = m$ (το C_N περιέχει τα σημεία μεγίστου), ενώ $\text{codim}(W^u(C)) = n^+(C) \geq 2$ για $C \neq C_N$, όπως πριν έπεται ότι μπορούμε να αλλάξουμε το μονοπάτι των z_0, z_1 , ώστε να ανήκει στην $W^u(C_N)$. Αφήνοντάς το να κινηθεί κατά τα αρνητικά t ακολουθώντας την ροή κλίσης παίρνουμε ένα μονοπάτι στην $f^{-1}(c)$ που ενώνει τα y_0, y_1 . Αυτά όμως είναι ενωμένα με μονοπάτια στην $f^{-1}(c)$ με τα x_0 και x_1 αντίστοιχα, άρα έχουμε τελειώσει.

Μένει να δείξουμε ότι το $f^{-1}(c_j)$ είναι συνεκτικό για $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Έστω $c \in \mathbb{R}$ με $c_j < c < c_{j+1}$, οπότε το διάστημα $(c_j, c]$ αποτελείται μόνο από κανονικές τιμές της f . Για ένα σημείο $x \in f^{-1}(c)$, το οποίο δεν θα είναι κρίσιμο, αφού η c δεν είναι κρίσιμη τιμή, η ροή του $\phi_t(x)$ θα τείνει προς κάποιο σημείο p μιας κρίσιμης

πολλαπλότητας, για το οποίο, αφού η $f(\phi_t(x))$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς t θα ισχύει $f(p) \leq c_j$. Άρα είτε $p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) \in f^{-1}(c_j)$, είτε $p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) \in f^{-1}(c_i)$ για κάποιο $i < j$, οπότε υπάρχει $t(x)$ ώστε $\phi_{t(x)}(x) \in f^{-1}(c_j)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi : f^{-1}(c) \rightarrow f^{-1}(c_j)$$

με

$$\psi(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) & , \text{ αν } \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) \in f^{-1}(c_j) \\ \phi_{t(x)}(x) & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Από την παραπάνω συζήτηση η ψ είναι επί, ενώ χρησιμοποιώντας την μορφή της ροής κλίσης που προκύπτει χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες που δίνει το Λήμμα Morse-Bott, προκύπτει ότι είναι και συνεχής. Επομένως, αφού $f^{-1}(c)$ είναι συνεκτικό όπως δείξαμε, και το $f^{-1}(c_j) = \psi(f^{-1}(c))$ θα είναι συνεκτικό. $\square$

4.2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το παρακάτω Θεώρημα που αποδείχτηκε ανεξάρτητα από τον Atiyah [At82] και τους Guillemin και Sternberg [?].

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.1 (Atiyah-Guillemin-Sternberg). Έστω (M, ω) συμπαγής και συνεκτική συμπλεκτική πολλαπλότητα και $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ χαμιλτονιανή δράση του τόρου $\mathbb{T}^m$ στην M με απεικόνιση ορμής $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε

- Για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^m$ κανονική τιμή της μ , το επιπεδοσύνολο $\mu^{-1}(\eta)$ είναι συνεκτικό.
- $\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} \text{Fix}(\psi_\tau) = \bigcup_{i=1}^N C_i$, όπου οι C_i είναι συνεκτικές συμπλεκτικές πολλαπλότητες.
- Σε κάθε C_i η τιμή της μ είναι σταθερή, $\mu(C_i) = \eta_i, i = 1, 2, \dots, N$.
- Η εικόνα της μ είναι κυρτή και ισούται με την κυρτή θήκη των $\eta_j, j = 1, \dots, N$, δηλαδή

$$\mu(M) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i \eta_i : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \text{ και } \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, N \right\}$$

Η απόδειξη που θα δώσουμε είναι αυτή του Atiyah, ακολουθώντας το [?]. Να σημειώσουμε επίσης πως στο [Kir84] περιέχεται μια γενίκευση του παραπάνω που αφορά δράση μιας τυχαίας συμπαγούς ομάδας Lie.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα χρειαστούμε τα παρακάτω τρία Λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 4.2.2. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα, G συμπαγής ομάδα Lie και $\psi : M \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ συμπλεκτική δράση της G στην (M, ω) . Τότε υπάρχει G -αναλλοίωτη μετρική στην M . Υπάρχει επίσης σχεδόν μιγαδική δομή J στην M , συμβατή με την ω και αναλλοίωτη ως προς τη δράση της G , δηλαδή $\psi_g^* J = J$ για κάθε $g \in G$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε μια μετρική Riemann g_o στην M . Για κάθε $\theta \in G$, η $\psi_\theta^* g_o$ είναι και αυτή μετρική Riemann. Για να αποκτήσουμε μια G -αναλλοίωτη μετρική παίρνουμε τον μέσο όρο, δηλαδή ορίζουμε

$$g = \int_{\theta \in G} \psi_\theta^* g_o d\theta$$

Η g είναι μια G -αναλλοίωτη μετρική στην M . Για κάθε $p \in M$, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $r_p : \text{Met}(T_p M) \rightarrow \mathcal{J}(T_p M, \omega_p)$ του Θεωρήματος (1.4.6), προκύπτει ότι η $J_p = r_p(g)$ είναι ω_p -συμβατή μιγαδική δομή στον $T_p M$. Από την παρατήρηση μετά το Θεώρημα, προκύπτει ότι η J θα έχει διαφορίσιμη εξάρτηση από το p , άρα θα είναι μια σχεδόν μιγαδική δομή στην M . Μένει να δείξουμε ότι είναι G -αναλλοίωτη. Παρατηρώντας την απόδειξη του Θεωρήματος (1.4.6), προκύπτει ότι αφού η ω (η δράση είναι συμπλεκτική) και η g είναι G -αναλλοίωτες, και η J θα είναι επίσης. Πράγματι, για $x \in M$, $\theta \in G$, $u, v \in T_x M$ και $A_x, A_{\psi_\theta(x)}$ οι αυτομορφισμοί των $T_x M$ και $T_{\psi_\theta(x)} M$ αντίστοιχα που δίνει το Θεώρημα, έχουμε

$$\begin{aligned} g(T_{\psi_\theta(x)} \psi_\theta^{-1} \circ A_{\psi_\theta(x)} \circ T_x \psi_\theta \cdot u, v) &= g(T_{\psi_\theta(x)} \psi_\theta^{-1} \circ A_{\psi_\theta(x)} \circ T_x \psi_\theta \cdot u, T_{\psi_\theta(x)} \psi_\theta^{-1} \circ T_x \psi_\theta \cdot v) \\ &= g(A_{\psi_\theta(x)} \circ T_x \psi_\theta \cdot u, T_x \psi_\theta \cdot v) \\ &= \omega(T_x \psi_\theta \cdot u, T_x \psi_\theta \cdot v) \\ &= \omega(u, v) = g(A_x \cdot u, v) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ότι η g είναι G -αναλλοίωτη και στην τέταρτη το ότι η ω είναι G -αναλλοίωτη. Προκύπτει επομένως ότι

$$T_{\psi_\theta(x)} \psi_\theta^{-1} \circ A_{\psi_\theta(x)} \circ T_x \psi_\theta = A_x$$

άρα ο A , και επομένως και η J που προκύπτει από αυτόν, είναι G -αναλλοίωτος. $\square$

ΛΗΜΜΑ 4.2.3. Έστω (M, ω) συμπαγής και συνεκτική συμπλεκτική πολλαπλότητα, G συμπαγής ομάδα Lie και $\psi : G \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ συμπλεκτική δράση της G στην (M, ω) . Το σύνολο των σημείων της M που μένουν σταθερά από τη δράση της G , δηλαδή το

$$\text{Fix}(G) = \bigcap_{\theta \in G} \text{Fix}(\psi_\theta), \text{ όπου } \text{Fix}(\psi_\theta) = \{m \in M : \psi_\theta(m) = m\}$$

είναι συμπλεκτική υποπολλαπλότητα της M και

$$T_x \text{Fix}(G) = \bigcap_{\theta \in G} \ker(id - T_x \psi_\theta), \forall x \in \text{Fix}(G)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε $\text{Fix}(G) = M_G = M_{(G)}$, όπως συνήθως συμβολίζεται, και επομένως, αφού η G είναι συμπαγής, θα είναι υποπολλαπλότητα της M .

Από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχουν στην M μετρική g και σχεδόν μιγαδική ω -συμβατή δομή J που είναι G -αναλλοίωτες. Για κάθε $p \in M$ ορίζεται η εκθετική απεικόνιση $\exp_p : T_p M \rightarrow M$, ως προς τη μετρική g (υπενθυμίζουμε ότι για $X \in T_p M$, $\exp_p(X) = \gamma(1)$, όπου $\gamma(t)$ γεωδαισική με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = X$). Επίσης η εκθετική ορίζεται σε όλο τον $T_p M$, αφού η M είναι συμπαγής).

Για κάθε $x \in \text{Fix}(G)$, $\theta \in G$ και $X \in T_x M$ ισχύει

$$\exp_x(T_x \psi_\theta \cdot X) = \psi_\theta(\exp_x(X))$$

δηλαδή η εκθετική είναι G -ισομεταβλητή. Πράγματι, η $a(t) = \exp_x(tT_x \psi_\theta \cdot X)$ είναι γεωδαισική με $a(0) = x$ και $a'(0) = T_x \psi_\theta \cdot X$. Για την $b(t) = \psi_\theta(\exp_x(tX))$ ισχύει $b(0) = \psi_\theta(x) = x = a(0)$ και $b'(0) = T_x \psi_\theta \cdot X = a'(0)$. Η b είναι και αυτή γεωδαισική, αφού η $\exp_x(tX)$ είναι γεωδαισική και η ψ_θ ισομετρία (αφού η g είναι G -αναλλοίωτη). Άρα $a(t) = b(t)$ για κάθε t και για $t = 1$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για κάθε $x \in \text{Fix}(G)$ ισχύει

$$T_x \text{Fix}(G) = \bigcap_{\theta \in G} \ker(id - T_x \psi_\theta)$$

Πράγματι, έστω $X \in \bigcap_{\theta \in G} \ker(id - T_x \psi_\theta)$, οπότε $T_x \psi_\theta \cdot X = X$, για κάθε $\theta \in G$. Οπότε

$$\begin{aligned} \psi_\theta(\exp_x(tX)) &= \exp_x(T_x \psi_\theta \cdot tX) \\ &= \exp_x(tX) \equiv \gamma(t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}, \theta \in G$. Επομένως $X = \gamma'(0)$, με $\psi_\theta(\gamma(t)) = \gamma(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}, \theta \in G$, επομένως $\gamma(t) \in \text{Fix}(G)$ και άρα $X \in T_x \text{Fix}(G)$. Αντίστροφα, αν $X \in T_x \text{Fix}(G)$, θα υπάρχει καμπύλη $\gamma(t)$ στην $\text{Fix}(G)$, οπότε $\psi_\theta(\gamma(t)) = \gamma(t)$ για κάθε t , ώστε $\gamma(0) = x$ και $\gamma'(0) = X$. Τότε για κάθε $\theta \in G$

$$\begin{aligned} T_x \psi_\theta \cdot X &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_\theta(\gamma(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = X \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με $i : \text{Fix}(G) \hookrightarrow M$ την εμφύτευση της $\text{Fix}(G)$ στην M , θεωρούμε στην $\text{Fix}(G)$ τη 2-μορφή $i^*\omega$. Αυτή είναι κλειστή, αφού είναι και η ω . Αν δείξουμε ότι είναι και μη εκφυλισμένη, τότε θα είναι συμπλεκτική. Έστω $x \in \text{Fix}(G)$ και $X \in T_x \text{Fix}(G)$. Για κάθε $\theta \in G$, αφού η J είναι G -αναλλοίωτη ισχύει

$$T_x \psi_\theta \cdot J_x X = J_{\psi_\theta(x)} X = J_x X$$

και επομένως $J_x X \in \bigcap_{\theta \in G} \ker(id - T_x \psi_\theta) = T_x \text{Fix}(G)$. Άρα αν για κάθε υπάρχει $u \in T_x \text{Fix}(G)$ ώστε $i^*\omega(u, v) = 0$ για κάθε $v \in T_x \text{Fix}(G)$, παίρνοντας για v το $J_x u$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_x(u, J_x u) \\ &= g_J(u, u) \end{aligned}$$

οπότε $u = 0$. □

ΛΗΜΜΑ 4.2.4. Έστω (M, ω) συμπαγής και συνεκτική συμπλεκτική πολλαπλότητα. Θεωρούμε χαμιλτονιανή δράση της συμπαγούς ομάδας $\text{Lie } G = \mathbb{T}^m$, έστω $\psi : G \rightarrow \text{Sympr}(M, \omega)$, και έστω $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^m$ η αντίστοιχη απεικόνιση ορμής. Για κάθε $\xi \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$, η αντίστοιχη χαμιλτονιανή $H_\xi = \mu^\xi = \langle \mu, \xi \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση *Morse-Bott*, οι κρίσιμες πολλαπλότητές της είναι άρτιας διάστασης και άρτιων δείκτη και συν-δείκτη. Επιπλέον, το κρίσιμο σύνολο $\text{Crit}(H_\xi)$ της H_ξ είναι συμπλεκτική υποπολλαπλότητα της M και ισούται με

$$\text{Crit}(H_\xi) = \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau)$$

όπου $T_\xi = \overline{(\{t\xi : t \in \mathbb{R}\} / \mathbb{Z}^m)}$ ο κλειστός υποτόρος του $\mathbb{T}^m$ που παράγεται από το X .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η T_X είναι μια συμπαγής ομάδα Lie (από το Θεώρημα του Cartan, ως κλειστή υποομάδα μια συμπαγούς ομάδας Lie). Από το Λήμμα (4.2.2) υπάρχει G -αναλλοίωτη ω -συμβατή σχεδόν μιγαδική δομή J στην M και έστω $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ η οποία θα είναι και αυτή G -αναλλοίωτη.

Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$\text{Crit}(H_\xi) = \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau)$$

Για απλότητα θέτουμε $H = H_\xi$. Έστω X_H το διανυσματικό πεδίο στην M που παράγεται από τη δράση της μονοπαριμετρικής ομάδας $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^m$, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\psi_{\exp(t\xi)} = X_H \circ \psi_{\exp(t\xi)}$$

Από τον ορισμό της απεικόνισης ορμής ισχύει

$$\iota_{X_H}\omega = dH$$

Έστω $x \in \text{Crit}(H)$. Τότε $dH|_x = 0$ και επομένως

$$\omega_x(X_H|_x, w) = (\iota_{X_H}\omega)_x(w) = dH|_x \cdot w = 0$$

για κάθε $w \in T_x M$. Αφού η ω_x είναι μη εκφυλισμένη, ως συμπλεκτική μορφή, έπεται ότι $X_H|_x = 0$. Οπότε

$$\psi_{\exp(t\xi)}(x) = x, \text{ για κάθε } t$$

Λόγω συνέχεις της δράσης θα ισχύει

$$\psi_\tau(x) = x, \text{ για κάθε } \tau \in T_\xi = (\{\exp(tX_\xi) : t \in \mathbb{R}\} / \mathbb{Z}^m)$$

και επομένως $x \in \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau)$. (Η εκθετική στον τόρο δεν είναι τίποτα άλλο από την προβολή $\text{mod } \mathbb{Z}^m$)

Έστω τώρα $x \in \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau)$. Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\psi_{\exp(t\xi)}(x) = x$ και επομένως

$$0 = \frac{d\psi_{\exp(t\xi)}(x)}{dt} = X_H|_{\psi_{\exp(t\xi)}(x)} = X_H|_x$$

Άρα

$$dH|_x = \omega_x(X_H|_x, \cdot) = 0$$

δηλαδή $x \in \text{Crit}(H)$.

Από το Λήμμα (4.2.3) προκύπτει ότι το σύνολο $\text{Crit}(H)$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα και

$$T_x \text{Crit}(H) = \bigcap_{\theta \in T_\xi} \ker(id - T_x \psi_\theta), \forall x \in \text{Crit}(H)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $\ker \nabla^2 H(x) = T_x \text{Crit}(H)$ για κάθε $x \in \text{Crit}(H)$, και επομένως η H είναι συνάρτηση Morse-Bott. Έστω $x \in \text{Crit}(H)$ και $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Έχουμε (για να αποφύγουμε τη σύγχυση συμβολίζουμε με $Hess$ τη Hessian μορφή)

$$\begin{aligned} Hess_x(H)(X_x, Y_x) &= X_x(Y(H)) \\ &= X_x(dH \cdot Y) \\ &= X_x(\iota_{X_H}\omega \cdot Y) \\ &= X_x(\omega(X_H, Y)) \\ &= (\mathcal{L}_X \omega)_x(X_H|_x, Y_x) \\ &\quad + \omega_x([X, X_H]_x, Y_x) + \omega_x(X_H|_x, [X, Y]_x) \\ &= \omega_x([X, X_H]_x, Y_x) \end{aligned}$$

όπου στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός τη παραγώγου Lie μιας 2-μορφής και στη τελευταία ισότητα το γεγονός ότι $X_H|_x = 0$, αφού $x \in \text{Crit}(H)$.

Για $x \in \text{Crit}(H) = \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau)$ έχουμε

$$T_x \psi_{\exp(t\xi)} : T_x M \rightarrow T_x M$$

Θέτουμε $A_\xi = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} T_x \psi_{\exp(t\xi)}$. (Αφού $T_x \psi_{\exp((t+s)\xi)} = T_x \psi_{\exp(t\xi)} T_x \psi_{\exp(s\xi)}$, αν τους δώ ως πινάκες θα ισχύει $T_x \psi_{\exp(t\xi)} = e^{tA_\xi}$). Έχουμε

$$A_\xi \cdot X_x = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T_x \psi_{\exp(t\xi)} \cdot X_x = [X, X_H]_x$$

οπότε

$$\begin{aligned} Hess_x(H)(X_x, Y_x) &= \omega_x([X, X_H]_x, Y_x) \\ &= \omega_x(A_\xi \cdot X_x, Y_x) \\ &= (g_J)_x(J_x A_\xi \cdot X_x, Y_x) \end{aligned}$$

όμως εξ'ορισμού της $\nabla^2 H(x)$ (όπου χρησιμοποιούμε την μετρική g_J) ισχύει

$$Hess_x(H)(X_x, Y_x) = (g_J)_x(\nabla^2 H(x) \cdot X_x, Y_x)$$

και επομένως $\nabla^2 H(x) = J_x A_\xi$. Άρα

$$\begin{aligned} X_x \in \ker \nabla^2 H(x) &\Leftrightarrow X_x \in \ker A_\xi, \text{ αφού } J_x \text{ αντιστρέψιμη} \\ &\Leftrightarrow A_\xi X_x = 0 \\ &\Leftrightarrow T_x \psi_{\exp(\xi)} \cdot X_x = e^{tA_\xi} X_x = X_x, \forall t \\ &\Leftrightarrow X_x \in \bigcap_{\theta \in T_\xi} \ker(id - T_x \psi_\theta) = T_x Crit(H) \end{aligned}$$

Στην απόδειξη του Λήμματος (4.2.3) είδαμε ότι το $T_x Fix(T_\xi) = T_x Crit(H)$ είναι J_x αναλλοίωτο, επομένως η J_x είναι μια μιγαδική δομή σε αυτόν τον υπόχωρο και επομένως

$$\dim Crit(H) = \dim T_x Crit(H) = \acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma$$

Ο A_ξ είναι αντισυμμετρικός. Πράγματι, για $x \in Crit(H)$, $\tau \in T_x$ και $u, w \in T_x M$ έχουμε

$$\begin{aligned} (g_J)_x(T_x \psi_\tau \cdot w, u) &= (g_J)_x(T_x \psi_\tau \cdot w, T_x \psi_\tau \circ T_x \psi_{-\tau} \cdot u) \\ &= (g_J)_x(w, T_x \psi_{-\tau} \cdot u) \end{aligned}$$

αφού η g_J είναι G -αναλλοίωτη, οπότε

$$\begin{aligned} (g_J)_x(A_\xi w, u) &= \lim_{t \rightarrow 0} (g_J)_x \left(\frac{T_x \psi_{\exp(t\xi)} - id}{t} w, v \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (g_J)_x \left(w, \frac{T_x \psi_{\exp(-t\xi)} - id}{t} v \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (g_J)_x \left(w, \frac{T_x \psi_{\exp(t\xi)} + id}{-t} v \right) \\ &= (g_J)_x(w, -A_\xi u) \end{aligned}$$

οπότε αν A_ξ^* ο συζυγής του A_ξ ως προς την μετρική g_J , έχουμε

$$\begin{aligned} A_\xi^* &= -A_\xi \Rightarrow (-J_x \nabla^2 H(x))^* = J_x \nabla^2 H(x) \\ &\Rightarrow \nabla^2 H(x) J_x = J_x \nabla^2 H(x) \end{aligned}$$

αφού ο $\nabla^2 H(x)$ είναι αυτοσυζυγής και όπως έχουμε δει $J_x^* = -J_x$.

Θεωρούμε τη διάσπαση

$$T_x M = T_x Crit(H) \oplus E_x^+ \oplus E_x^-, \text{ για } x \in Crit(H)$$

Για $w \in E_x^+$ έχουμε, εξ'ορισμού του E_x^+ , ότι $\text{Hess}_x(H)(w, w) > 0$ άρα

$$\begin{aligned}\text{Hess}_x(H)(J_x w, J_x w) &= (gJ)_x(\nabla^2 H(x) J_x w, J_x w) \\ &= (gJ)_x(J_x \nabla^2 H(x) w, J_x w) \\ &= (gJ)_x(\nabla^2 H(x) w, w) > 0\end{aligned}$$

άρα και $J_x w \in E_x^+$. Άρα η J_x είναι μιγαδική δομή στον E_x^+ και επομένως

$$n^+ = \dim E^+ = \text{άρτιος}$$

Ομοίως και n^- άρτιος. □

Η απόδειξη του Θεωρήματος κυρτότητας, όπως την έδωσε ο Atiyah, είναι με επαγωγή στη διάσταση του τόρου. Θα προσπαθήσουμε πρώτα να δούμε πως από μια χαμιλτονιανή δράση του m τόρου παίρνουμε, υπό συνθήκες, μια χαμιλτονιανή δράση του $m-1$ τόρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2.5. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα. Θεωρούμε στην (M, ω) χαμιλτονιανή δράση της $G = \mathbb{T}^m$ με απεικόνιση ορμής

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) : M \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^m$$

Ο μ θα λέμε ότι είναι **ανάγωγος** αν οι 1-μορφές $d\mu_1, \dots, d\mu_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, δηλαδή αν για $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

$$a_1 d\mu_1(x) + \dots + a_m d\mu_m(x) = 0, \forall x \in M \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

Αν για κάποιο $0 \neq \theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ η $H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle = \theta_1 \mu_1 + \dots + \theta_m \mu_m$ είναι σταθερή τότε ο μ δεν είναι ανάγωγος. Αντίστροφα, αν ο μ δεν είναι ανάγωγος και η M είναι συνεκτική, τότε υπάρχει $0 \neq \theta \in \mathbb{R}^m$, ώστε η H_θ να είναι σταθερή.

ΛΗΜΜΑ 4.2.6. Έστω (M, ω) συνεκτική συμπλεκτική πολλαπλότητα στην οποία έχουμε χαμιλτονιανή δράση του τόρου $\mathbb{T}^m$, έστω $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$, με αντίστοιχη απεικόνιση ορμής $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Αν ο μ δεν είναι ανάγωγος, υπάρχει χαμιλτονιανή δράση $\psi' : \mathbb{T}^{m-1} \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ με απεικόνιση ορμής $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_m) : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ και πίνακας $A \in \mathbb{R}^{(m-1) \times m}$, ώστε για κάθε $\tau \in \mathbb{T}^m$ και $x \in M$ να ισχύει

$$\psi_\tau = \psi'_{A\tau} \text{ και } \mu(x) = A^T \mu'(x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού ο μ δεν είναι ανάγωγος και η M είναι συνεκτική, θα υπάρχει $0 \neq \theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ώστε

$$\theta_1 \mu_1(x) + \dots + \theta_m \mu_m(x) = \text{σταθ.}, \forall x \in M$$

και, αφού για τις απεικονίσεις ορμής δεν αλλάζει κάτι με την προσθήκη μιας σταθεράς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μεδέν. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\theta_m \neq 0$.

Έστω $X_i, i = 1, \dots, m$ το διανυσματικό πεδίο στην M που προκύπτει από τη δράση της υποομάδας $\left\{ te_i \equiv \begin{pmatrix} 0, \dots, t \\ i-\text{θέση} \dots 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{T}^m$. Τότε, αφού η δράση είναι χαμιλτονιανή ισχύει

$$\iota_{X_i} \omega = d\langle \mu, e_i \rangle = d\mu_i$$

Για το διανυσματικό πεδίο $X = \theta_1 X_1 + \dots + \theta_m X_m$ ισχύει

$$\begin{aligned}\iota_X \omega &= \theta_1 \iota_{X_1} \omega + \dots + \theta_m \iota_{X_m} \omega \\ &= \theta_1 \mu_1 + \dots + \theta_m \mu_m = 0\end{aligned}$$

Παρατηρούμε 'ότι το X παράγεται από τη δράση της υποομάδας που παράγεται από το $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, επομένως έχουμε

$$\frac{d\psi_{t\theta}}{dt} = X = 0$$

και επομένως $\psi_{t\theta}(x) = x$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in M$.

Ορίζουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\theta_1/\theta_m \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\theta_2/\theta_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\theta_{m-1}/\theta_m \end{bmatrix}$$

Η απεικόνιση $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^{m-1}$ που επάγει ο A είναι επί. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε τη δράση του τόρου $\mathbb{T}^{m-1}$ με

$$\psi'_{A\tau} = \psi_\tau, \forall \tau \in \mathbb{T}^{m-1}$$

Αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\tau' = (\tau'_1, \dots, \tau'_m) \in \mathbb{T}^m$ με $A\tau = A\tau'$. Τότε

$$\tau_1 = \tau'_1 + \frac{\theta_1}{\theta_m}(\tau_m - \tau'_m), \dots, \tau_{m-1} = \tau'_{m-1} + \frac{\theta_{m-1}}{\theta_{m-1}}(\tau_m - \tau'_m)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \psi_\tau &= \psi\left(\tau'_1 + \frac{\theta_1}{\theta_m}(\tau_m - \tau'_m), \dots, \tau'_{m-1} + \frac{\theta_{m-1}}{\theta_{m-1}}(\tau_m - \tau'_m), \tau_m\right) \\ &= \psi_{(\tau'_1, \dots, \tau'_{m-1}, \tau'_m)} \circ \psi\left(\frac{\theta_1}{\theta_m}(\tau_m - \tau'_m), \dots, \frac{\theta_{m-1}}{\theta_{m-1}}(\tau_m - \tau'_m), \tau_m - \tau'_m\right) \\ &= \psi_{\tau'} \circ \psi_{\frac{\tau_m - \tau'_m}{\theta_m} \theta} \\ &= \psi_{\tau'} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το $\psi_{t\theta} = id$ για κάθε t , όπως δείξαμε.

Έστω $X'_i, i = 1, 2, \dots, m-1$ το διανυσματικό πεδίο στην M που προκύπτει από τη δράση της υποομάδας $\left\{ te'_i \equiv \left(0, \dots, \underbrace{t}_{i-\text{θέση}} \dots, 0 \right) : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{T}^{m-1}$. Τότε, αφού $\psi_{te_i} = \psi'_{tAe_i} = \psi'_{te'_i}$, έπεται ότι $X'_i = X_i$, άρα είναι χαμιλτονιανό πεδίο με χαμιλτονιανή την μ_i . Επομένως, η δράση ψ' είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$. Επίσης ισχύει $\mu = A^T \mu'$, λόγω της παρατήρησης στην αρχή ($\mu_m = -\theta_1/\theta_m \mu_1 - \dots - \theta_{m-1}/\theta_m \mu_{m-1}$). $\square$

Μπρούμε τώρα να δούμε την απόδειξη του Θεωρήματος κυρτότητας Atiyah-Guillemin-Sternberg.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

- (1) Το σύνολο $\mu^{-1}(\eta) \subset M$ είναι συνεκτικό για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^m$ κανονική τιμή της μ .

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς τη διάσταση m του τόρου. Για $m = 1$, η απεικόνιση ορμής είναι μια συνάρτηση $\mu = \langle \mu, 1 \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$, άρα από το Λήμμα (4.2.4) είναι συνάρτηση Morse-Bott με άρτιο δείκτη και συνδείκτη σε κάθε κρίσιμη πολλαπλότητα. Επομένως, από το Λήμμα (4.1.10), το $\mu^{-1}(\eta)$ είναι συνεκτικό.

Υποθέτουμε πως το συμπέρασμα ισχύει για $m - 1$. Έστω $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \text{Sympr}(M, \omega)$ χαμιλτονιανή δράση του τόρου διάστασης m με απεικόνιση ορμής $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$.

Αν ο μ δεν είναι ανάγωγος, τότε υπάρχει $0 \neq a = (a_1, \dots, a_m)$ ώστε $a_1 d\mu_1 + \dots + a_m d\mu_m = 0$, άρα η απεικόνιση $T\mu = [d\mu_1 \dots d\mu_m]^T$ δεν είναι επί. Άρα στην περίπτωση αυτή η $\mu^{-1}(\eta) = \emptyset$.

Αν τώρα ο μ είναι ανάγωγος, για κάθε $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^m$ η χαμιλτονιανή $H_\xi = \langle \mu, \xi \rangle$ δεν είναι σταθερή. Τότε το σύνολο

$$Z = \bigcup_{\xi \neq 0} \text{Crit}(H_\xi)$$

είναι αριθμήσιμη ένωση συμπλεκτικών υποπολλαπλοτήτων διάστασης γνήσιας μικρότερης της $\dim M$ (μάλιστα σε επόμενο στάδιο θα δούμε πως είναι τελικά πεπερασμένες στο πλήθος). Πράγματι, από το Λήμμα (4.2.4) έχουμε ότι

$$\text{Crit}(H_\xi) = \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau)$$

και η $\text{Crit}(H_\xi)$ είναι πεπερασμένη ένωση συνεκτικών συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων άρτιας διάστασης. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^m$, όμως, μπορούμε να βρούμε $\xi' \in \mathbb{Q}^m$ με $T_{\xi'} \subset T_\xi$. Άρα

$$\text{Crit}(H_\xi) = \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau) \subset \bigcap_{\tau \in T_{\xi'}} \text{Fix}(\psi_\tau) = \text{Crit}(H_{\xi'})$$

Επομένως

$$Z = \bigcup_{0 \neq \xi \in \mathbb{Q}^m} \text{Crit}(H_\xi)$$

και άρα είναι αριθμήσιμη ένωση συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων άρτιας διάστασης. Οι υποπολλαπλότητες αυτές είναι γνήσιες. Πράγματι, το $\text{Crit}(H_\xi)$ είναι και αυτό πολλαπλότητα και αν $\dim \text{Crit}(H_\xi) = \dim M$ θα είναι ανοιχτό σύνολο στην M . Όμως, από τον ορισμό τους ως κρίσιμα σημεία είναι και κλειστό. Αφού η M είναι συνεκτική θα πρέπει επομένως $\text{Crit}(H_\xi) = M$, που είναι άτοπο γιατί τότε πρέπει η H_ξ να είναι σταθερή. Άρα αφού $\dim M, \dim \text{Crit}(H_\xi)$ άρτιες, αφού οι πολλαπλότητες είναι συμπλεκτικές, και η $\text{Crit}(H_\xi)$ είναι υποπολλαπλότητα γνήσιας μικρότερης διάστασης, προκύπτει ότι $\text{codim}(\text{Crit}(H_\xi)) \geq 2$. Επομένως, για κάθε $\xi \neq 0$ το $M - \text{Crit}(H_\xi)$ είναι πυκνό στην M , και ανοιχτό. Επομένως το

$$M - Z = \bigcap_{0 \neq \xi \in \mathbb{Q}^m} (M - \text{Crit}(H_\xi))$$

από το Θεώρημα του Baire είναι πυκνό στην M . Είναι επίσης ανοιχτό αφού

$$\begin{aligned} M - Z &= \{x \in M : d\mu_1(x), \dots, d\mu_m(x) \text{ γραμμικά ανεξάρτητα}\} \\ &= \{x \in M : T_x \mu \text{ είναι επί}\} \end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το σύνολο των κανονικών τιμών της μ είναι πυκνό στο $\mu(M)$. Έστω $k \in \mu(M)$ και U ανοιχτό σύνολο στο $\mu(M)$ που περιέχει το k . Έστω $x \in \mu^{-1}(k) \subset M$. Το $M - Z$ δείξαμε ότι είναι πυκνό στην M , άρα υπάρχει ακολουθία $\{x_i\} \subset M - Z$ ώστε $x_i \rightarrow x$, και επομένως και $\mu(x_i) \rightarrow \mu(x) = k$. Υπάρχει επομένως i , ώστε $\mu(x_i) \in U$. Αφού

$x_i \in M - Z$, η $T_{x_i}\mu$ είναι επί. Επομένως υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του x_i , ώστε $\mu(V) \subset U$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$. Από το Θεώρημα του Sard υπάρχει κανονική τιμή η της μ που ανήκει στο $\mu(V)$ και άρα στο U .

Με ανάλογο τρόπο θα δείξουμε ότι και το σύνολο

$$R' = \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mu(M) : (\eta_1, \dots, \eta_{m-1}) \text{ είναι κανονική τιμή της } \mu' = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}\}$$

είναι πυκνό στην $\mu(M)$. Έστω $k \in \mu(M)$ και U ανοιχτή περιοχή του k στην $\mu(M)$. Από τα προηγούμενα υπάρχει $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in U$ που είναι κανονική τιμή της μ και $\mu(V)$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$ με $\eta \in \mu(V) \subset U$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mu'' : M &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto (\mu_1(x), \dots, \mu_{m-1}(x), \eta_m) \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα του Sard υπάρχει κανονική τιμή $(\eta'_1, \dots, \eta'_m)$ της μ'' , άρα $(\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$ κανονική τιμή της μ' , με $(\eta'_1, \dots, \eta'_m) \in \mu(V)$.

Τώρα θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mu^{-1}(\eta)$ είναι συνεκτικό για $\eta \in R'$. Τότε το $\mu^{-1}(\eta)$ θα είναι συνεκτικό για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^m$, αφού μ συνεχής και R' πυκνό στο $\mu(M)$. Έστω επομένως $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in R'$. Η $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$ είναι απεικόνιση ορμής για την χαμιλτονιανή δράση του $(m-1)$ τόρου

$$\begin{aligned} \psi' : \mathbb{T}^{m-1} &\rightarrow \text{Sym}(M, \omega) \\ (\tau_1, \dots, \tau_{m-1}) &\mapsto \psi_{(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, 0)} \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση η

$$Q = (\mu')^{-1}(\eta) = \bigcap_{j=1}^{m-1} \mu_j^{-1}(\eta_j)$$

είναι συνεκτική υποπολλαπλότητα της M και μάλιστα συμπαγής, ως κλειστό υποσύνολο της συμπαγούς M . Θεωρούμε τον περιορισμό της μ_m

$$\mu_m|_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$$

Θα δείξουμε ότι η $\mu_m|_Q$ είναι συνάρτηση Morse-Bott με δείκτη και συν-δείκτη άρτιους, επομένως από το Λήμμα (4.1.10) το σύνολο

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(\eta) &= \bigcap_{j=1}^m \mu_j^{-1}(\eta_j) \\ &= Q \cap \mu_m^{-1}(\eta_m) \\ &= \left(\mu_m|_Q\right)^{-1}(\eta_m) \end{aligned}$$

είναι συνεκτικό και άρα έχουμε τελειώσει.

Ας δείξουμε τώρα ότι η $\mu_m|_Q$ είναι πράγματι Morse-Bott.

Το $x \in Q$ είναι κρίσιμο σημείο της $\mu_m|_Q$ αν και μόνο αν υπάρχει $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, 1) \in \mathbb{R}^m$ ώστε το x να είναι κρίσιμο σημείο για την $H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle$. Πράγματι, αν x κρίσιμο σημείο για την $\mu_m|_Q$, τότε $d\mu_m(x) \cdot \xi = 0$ για κάθε $\xi \in T_x Q$. Επιπλέον οι $\mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ είναι σταθερές στην Q , άρα και $d\mu_i(x) \cdot \xi = 0$ για $i = 1, 2, \dots, m-1$ και για κάθε $\xi \in T_x Q$. Αν $(T_x Q)^\perp := T_x M / T_x Q$, $\dim(T_x Q)^\perp = \dim M - \dim Q = m-1$. Τα $d\mu_i(x), i = 1, \dots, m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις στον $(T_x Q)^\perp$, ανήκουν

επομένως στον δυικό του, ο οποίος έχει και αυτός διάσταση $m - 1$. Θα είναι επομένως γραμμικώς εξαρτημένα αν τα περιορίσουμε στον $(T_x Q)^\perp$. Θα είναι όμως και γραμμικώς εξαρτημένα ως γραμμικές απεικονίσεις από τον $T_x M$ στο $\mathbb{R}$, αφού $d\mu_i(x)|_{T_x Q} = 0$. Επιπλέον τα $d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού το x είναι κανονικό σημείο της μ' . Άρα υπάρχουν $\theta_1, \dots, \theta_{m-1} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{aligned} d\mu_m(x) &= -\theta_1 d\mu_1 - \dots - \theta_{m-1}(x) d\mu_{m-1}(x) \\ \Rightarrow dH_\theta(x) &= 0, \text{ με } \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, 1) \end{aligned}$$

δηλαδή το x είναι κρίσιμο σημείο της H_θ . Αντίστροφα τώρα, έστω x κρίσιμο σημείο της $H_\theta, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, 1)$. Τότε

$$\theta_1 d\mu_1(x) + \dots + \theta_{m-1} d\mu_{m-1}(x) + d\mu_m(x) = 0$$

Επομένως για $\xi \in T_x Q$, αφού όπως είπαμε οι $\mu_i, i = 1, 2, \dots, m - 1$ είναι σταθερές στο Q και άρα $d\mu_i(x) \cdot \xi = 0, i = 1, 2, \dots, m - 1$, έπεται ότι και $d\mu_m(x) \cdot \xi = 0$. Άρα το $d\mu_m(x) = 0$, δηλαδή το x είναι κρίσιμο σημείο της $\mu_m|_Q$.

Έστω επομένως $x \in Q$ κρίσιμο σημείο της $\mu_m|_Q$, άρα υπάρχει $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, 1)$ ώστε το x να είναι κρίσιμο σημείο της H_θ . Από το Λήμμα (4.2.4), η H_θ είναι συνάρτηση Morse-Bott και οι κρίσιμες πολλαπλότητες της είναι συμπλεκτικές και έχουν άρτιο δείκτη και συν-δείκτη. Έστω C η κρίσιμη πολλαπλότητα της H_θ που περιέχει το x . Θα δείξουμε ότι

$$T_x M = T_x C + T_x Q$$

Αρκεί να δείξουμε ότι τα $d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως στοιχεία του $(T_x C)^*$. Πράγματι τότε, αν $k = \dim M - (m - 1) = \dim Q$, και $e_1, \dots, e_k$ μια βάση του $(T_x Q)^*$, την οποία επεκτείνουμε σε διανύσματα του $(T_x M)^*$ με $e_i|_{(T_x Q)^\perp} = 0$, τα $e_1, \dots, e_k, d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως στοιχεία του $(T_x C + T_x Q)^*$ (αφού όπως είδαμε $d\mu_i(x)|_{T_x Q} = 0, \dots, i = 1, m - 1$). Επομένως $\dim (T_x C + T_x Q)^* \geq m$ που σημαίνει ότι $(T_x C + T_x Q)^* = T_x M$.

Αφού η ομάδα $\mathbb{T}^m$ είναι μεταθετική, η συν-συζυγής δράση θα είναι τετριμμένη. Άρα, από την ισομεταβλητότητα της μ έχουμε

$$\mu(\psi_g(p)) = \mu(p), \forall g \in G, p \in M$$

Οπότε

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \mu_i(p) \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \mu_i(\psi_{\exp(t\theta)}(p)) \\ &= d\mu_i(p) \cdot X_{H_\theta}|_p \\ &= \omega_p(X_{\mu_i}, X_{H_\theta}) \\ &= -\omega_p(X_{H_\theta}, X_{\mu_i}) \\ &= -dH_\theta(p) \cdot X_{\mu_i} \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η H_θ είναι σταθερή στις πάνω στις ροές των χαμιλτονιανών πεδίων X_{μ_i} . Άρα, αφού η C είναι επιπεδοσύνολο -ως κρίσιμη πολλαπλότητα-

έπεται ότι

$$X_{\mu_1}(x), \dots, X_{\mu_{m-1}}(x) \in T_x C$$

Επίσης τα $X_{\mu_1}(x), \dots, X_{\mu_{m-1}}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ως χαμιλτονιανά πεδία των $\mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ με $d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x)$ γραμμικώς ανεξάρτητα στον $T_x M$, αφού $\mu'(x)$ κανονική τιμή του $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$. Άρα, αφού $\omega|_{T_x C}$ είναι μη εκφυλισμένη (η C όπως είπαμε είναι συμπλεκτική υποπολλαπλότητα της M), και τα $X_{\mu_1}(x), \dots, X_{\mu_{m-1}}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $T_x C$, έχουμε

$$a_1 d\mu_1(x) \cdot \xi + \dots + a_{m-1} d\mu_{m-1}(x) \cdot \xi = 0, \forall \xi \in T_x C \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i \omega(X_{\mu_i}, \xi) = 0, \forall \xi \in T_x C \Leftrightarrow$$

$$a_1 X_{\mu_1}(x) + \dots + a_{m-1} X_{\mu_{m-1}}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$$

που σημαίνει ότι τα $d\mu_1(x), \dots, d\mu_{m-1}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως στοιχεία του $(T_x C)^*$. Ολοκληρώσαμε επομένως την απόδειξη ότι $T_x M = T_x Q + T_x C$.

Από την τελευταία αυτή σχέση έπεται ότι $(T_x C)^\perp \subset T_x Q$. Όπως είπαμε η H_θ είναι Morse-Bott με άρτιους $n^\pm(C) = \dim E^\pm$. Άρα

$$T_x M = T_x C \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$$

και $\ker \nabla^2 H_\theta(x) = T_x C$. Θεωρούμε την

$$H_\theta|_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$$

Αφού $E_x^+ \oplus E_x^- = (T_x C)^\perp \subset T_x Q$, έχουμε

$$T_x Q = (T_x C \cap T_x Q) \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$$

άρα $\text{Crit}(H_\theta|_Q) = \text{Crit}(H_\theta) \cap Q$ και $\ker \nabla^2 H_\theta|_Q(x) = T_x C \cap T_x Q$ που σημαίνει ότι και η $H_\theta|_Q$ είναι συνάρτηση Morse-Bott με δείκτη και συνδείκτη άρτιους (όσες και οι διάστάσεις των E^- και E^+ αντίστοιχα). Όμως, οι $\mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ είναι σταθερές στην Q , άρα

$$H_\theta|_Q = \langle \mu, \theta \rangle|_Q = \mu_m|_Q + \sum_{i=1}^{m-1} \theta_i \mu_i = \mu_m|_Q + \text{σταθ.}$$

άρα και η $\mu_m|_Q$ είναι Morse-Bott με άρτιο δείκτη και συν-δείκτη.

(2) Το σύνολο $\mu(M) \subset \mathbb{R}^m$ είναι κυρτό.

Θα δουλέψουμε και εδώ με επαγωγή ως προς m . Για $m = 1$, $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$. Αφού η M είναι συνεκτική και η μ συνεχής, η $\mu(M)$ θα είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κυρτό. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $m-1$ και θεωρούμε χαμιλτονιανή δράση $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \text{Sym}(M, \omega)$ του m -τόρου με απεικόνιση ορμής $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Αν μ δεν είναι ανάγωγος, από το Λήμμα (4.2.6), θα υπάρχει χαμιλτονιανή δράση του $(m-1)$ -τόρου με απεικόνιση ορμής $\mu' : M \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ και πίνακας $A \in M_{(m-1) \times m}(\mathbb{R})$, ώστε $\mu = A^T \mu'$. Από την επαγωγική υπόθεση το $\mu'(M)$ είναι κυρτό, άρα και το $\mu(M) = A^T \mu'(M)$ θα είναι και αυτό κυρτό.

Αν τώρα ο μ είναι ανάγωγος. Έστω $A \in M_{m \times (m-1)}(\mathbb{R})$ που είναι 1-1. Θεωρούμε τη δράση

$$\psi_A : \mathbb{T}^{m-1} \rightarrow \text{Symp}(M, \omega) : \theta \mapsto \psi_{A\theta}$$

Εύκολα φαίνεται ότι είναι χαμιλτονιανή με απεικόνιση ορμής $\mu_A = A^T \mu$. Ο A^T είναι επί, αφού ο A είναι 1-1, άρα, αφού $d\mu_A = A^T d\mu$ και οι συνιστώσες $d\mu_1, \dots, d\mu_m$ είναι ανεξάρτητες, και οι αντίστοιχες συνιστώσες του $d\mu_A$ θα είναι ανεξάρτητες, άρα ο μ_A είναι ανάγωγος. Από το προηγούμενο βήμα της απόδειξης, το σύνολο των κανονικών τιμών της μ_A είναι πυκνό στο $\mu_A(M)$ και $\mu_A^{-1}(\eta) \subset M$ συνεκτικό για κάθε $\eta \in \mathbb{R}^{m-1}$. Έστω $\eta \in \mathbb{R}^{m-1}$ κανονική τιμή της μ_A και $x_o \in M$ ώστε $\eta = \mu_A(x_o) = A^T \mu(x_o)$. Τότε

$$\begin{aligned} x \in \mu_A^{-1}(\eta) &\Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_A(x_o) \\ &\Leftrightarrow A^T(\mu(x) - \mu(x_o)) = 0 \end{aligned}$$

άρα

$$\mu_A^{-1}(\eta) = \{x \in M : \mu(x) - \mu(x_o) \in \ker A^T\}$$

Αφού ο $A^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ είναι επί ο πυρήνας του θα έχει διάσταση 1. Έστω $x_o, x_1 \in \mu_A^{-1}(\eta)$ με $\mu(x_o) \neq \mu(x_1)$. Τότε $\mu(x_1) - \mu(x_o) \in \ker A^T$ και αφού $\dim(\ker A^T) = 1$, θα έχουμε

$$\ker A^T = \{\lambda(\mu(x_1) - \mu(x_o)) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Επίσης, αφού $\mu_A^{-1}(\eta)$ είναι συνεκτική όπως είπαμε, θα υπάρχει μονοπάτι $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mu_A^{-1}(\eta)$ με $\gamma(0) = x_o, \gamma(1) = x_1$. Αφού $\gamma(t) \in \mu_A^{-1}(\eta), \forall t$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} \mu(\gamma(t)) - \mu(x_o) &\in \ker A^T, \forall t \\ &\Rightarrow \mu(\gamma(t)) = \mu(x_o) + \lambda(t)(\mu(x_1) - \mu(x_o)) \end{aligned}$$

όπου το λ είναι συνεχής συνάρτηση του t με $\lambda(0) = 0$ και $\lambda(1) = 1$. Έστω $t \in [0, 1]$. Από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $t' \in [0, 1]$, ώστε $t = \lambda(t')$. Οπότε

$$\begin{aligned} (1-t)\mu(x_o) + t\mu(x_1) &= \mu(x_o) + t(\mu(x_1) - \mu(x_o)) \\ &= \mu(x_o) + \lambda(t')(\mu(x_1) - \mu(x_o)) \\ &= \mu(\gamma(t')) \in \mu(M) \end{aligned}$$

Έστω τώρα δύο τυχαία σημεία $y_o, y_1 \in M$ με $\mu(y_o) \neq \mu(y_1)$. Μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθίες $\{x_n\}, \{x'_n\} \subset M$ με $x_n \rightarrow y_o$ και $x'_n \rightarrow y_1$ ώστε $\mu(x_n) - \mu(x'_n) \in \ker A_n^T$, με $A_n \in M_{m \times (m-1)}(\mathbb{R})$ και να είναι 1-1. Μάλιστα αφού το σύνολο των κανονικών τιμών του μ_{A_n} είναι πυκνό στο $\mu_{A_n}(M)$, μπορούμε να επιλέξουμε τα x_n, x'_n ώστε $\eta_n = \mu_{A_n}(x_n) = \mu_{A_n}(x'_n)$ να είναι κανονική τιμή της μ_{A_n} . Από τα προηγούμενα τότε έχουμε

$$(1-t)\mu(x'_n) + t\mu(x_n) \in \mu(M), \forall t \in [0, 1]$$

Το σύνολο $\mu(M) \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές άρα κλειστό, ως εικόνα της συμπαγούς M μέσω της συνεχής συνάρτησης μ . Παίρνοντας όριο στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$(1-t)\mu(y_1) + t\mu(y_o) \in \mu(M), \forall t \in [0, 1]$$

- (3) $\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} \text{Fix}(\psi_\tau) = \bigcup_{i=1}^N C_i$, όπου οι C_i είναι συνεκτικές συμπλεκτικές πολλαπλότητες και η μ είναι σταθερή σε κάθε μια από αυτές.

Από το Λήμμα (4.2.3) το σύνολο $\bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} \text{Fix}(\psi_\tau)$ είναι συμπλεκτική υποπολλαπλότητα της M . Αφού η M είναι συμπαγής θα ισούται με την πεπερασμένη ένωση συνεκτικών συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων, έστω των $C_1, \dots, C_N$. Οι συναρτήσεις $\mu_i, i = 1, \dots, m$ είναι χαμιλτονιανές $-\mu_i = \langle \mu, e_i \rangle$

$$\text{με } e_i = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-θέση}}, \dots, 0 \right) \text{ - άρα από το Λήμμα (4.2.4)}$$

$$\text{Crit}(\mu_i) = \bigcap_{\tau \in T_{e_i}} \text{Fix}(\psi_\tau) \supset \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} \text{Fix}(\psi_\tau)$$

οπότε $C_j \subset \text{Crit}(\mu_i)$ για κάθε $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, N$. Αφού επιπλέον οι C_j είναι συνεκτικές, οι μ_i , και άρα και η μ , θα είναι σταθερές σε κάθε μια από αυτές. Έστω $\mu(C_j) = \eta_j, j = 1, \dots, N$.

- (4) Η $\mu(M)$ ισούται με την κυρτή θήκη των η_j .

Αφού $\eta_1, \dots, \eta_N \in \mu(M)$ και από το Βήμα 2 έχουμε αποδείξει ότι το $\mu(M)$ είναι κυρτό, η κυρτή τους θήκη $K(\eta_1, \dots, \eta_N)$ περιέχεται στο $\mu(M)$. Από την άλλη, έστω $\eta \in \mathbb{R}^m - K(\eta_1, \dots, \eta_N)$. Επιλέγουμε διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\langle \eta_j, \xi \rangle < \langle \eta, \xi \rangle \text{ για κάθε } j = 1, \dots, N$$

Μάλιστα το ξ μπορεί να επιλεγεί ώστε να έχει συντεταγμένες ανεξάρτητες πάνω από το $\mathbb{Q}$. Τότε

$$T_\xi = \overline{(\{t\xi : t \in \mathbb{R}\} / \mathbb{Z}^m)} = \mathbb{T}^m$$

Οπότε, για την χαμιλτονιανή H_ξ από το Λήμμα (4.2.4) έχουμε

$$\text{Crit}(H_\xi) = \bigcap_{\tau \in T_\xi} \text{Fix}(\psi_\tau) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} \text{Fix}(\psi_\tau) = \bigcup_{i=1}^N C_i$$

Αφού M συμπαγής και H_ξ συνεχής, θα έχει μέγιστο, το οποίο φυσικά θα ανήκει στο κρίσιμο σύνολο της H_ξ , άρα σε κάποια από τις C_j . Επομένως

$$\begin{aligned} \max_{p \in M} H_\xi(p) &= \max_{p \in \bigcup_{i=1}^N C_i} H_\xi(p) \\ &= \max_{p \in \bigcup_{i=1}^N C_i} \langle \mu(p), \xi \rangle \\ &= \max_{j=1, \dots, N} \langle \eta_j, \xi \rangle < \langle \eta, \xi \rangle \end{aligned}$$

Επομένως $\eta \notin \mu(M)$.

□

ΓΝΗΣΙΕΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Θεωρούμε χαμιλτονιανή δράση $\mathcal{A}$ της G στην (M, ω) με απεικόνιση ορμής $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Έστω $\mathcal{O}$ μια συν-συζυγής τροχιά της G . Ορίζουμε τον χώρο $M_{\mathcal{O}}$ ως το τοπολογικό πηλίκο

$$M_{\mathcal{O}} := \mu^{-1}(\mathcal{O}) / G$$

Συμβολίζουμε με

$$\begin{aligned} \pi : \mu^{-1}(\mathcal{O}) &\rightarrow M_{\mathcal{O}} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

με $[x] = \{y \in \mu^{-1}(\mathcal{O}) : \exists g \in G \text{ ώστε } y = g \cdot x\}$. Ο $M_{\mathcal{O}}$ είναι τοπολογικός χώρος (με την τοπολογία πηλίκο), αλλά χωρίς επιπλέον συνθήκες για τη δράση δεν είναι αναγκαστικά πολλαπλότητα. Στο κεφάλαιο τρία μελετήσαμε την περίπτωση η δράση να είναι ελεύθερη και γνήσια και τα σημεία της $\mathcal{O}$ κανονικές τιμές της μ (regular reduction). Είδαμε ότι τότε ο $M_{\mathcal{O}}$ είναι πολλαπλότητα και δέχεται με φυσικό τρόπο συμπλεκτική δομή.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τον $M_{\mathcal{O}}$ με μοναδική υπόθεση ότι η δράση είναι γνήσια και η $\mathcal{O}$ τοπικά κλειστή. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι εξασφαλισμένο ότι το $\mu^{-1}(\mathcal{O})$, και πόσο μάλλον ο $M_{\mathcal{O}}$, είναι πολλαπλότητα και η ανάλυση είναι πολύ πιο σύνθετη. Η ανάλυσή μας θα ακολουθήσει την εξής πορεία.

Αρχικά ορίζουμε μια οικογένεια κατάλληλων συναρτήσεων, θα τη συμβολίζουμε με $C^{\infty}(M_{\mathcal{O}})$, στον $M_{\mathcal{O}}$ που προκύπτουν από τις G -αναλλοίωτες συναρτήσεις της M . Μπορούμε μάλιστα να ορίσουμε και μια αγγύλη Poisson για τις συναρτήσεις αυτές. Η ιδέα αυτή οφείλεται στους Arms, Cushman και Gotay [ACG91]. Θα δούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε τη έννοια της χαμιλτονιανής ροής για κάθε συνάρτηση της $C^{\infty}(M_{\mathcal{O}})$, η οποία θα είναι τελικά η προβολή της χαμιλτονιανής ροής μιας συνάρτησης της M .

Το βασικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι ότι ο χώρος των τροχιών $M_{\mathcal{O}}$ γράφεται ως ένωση συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Μάλιστα η διάσπαση σε συμπλεκτικές πολλαπλότητες επάγεται από τη διάσπαση της M σε τύπους τροχιών. Επιπλέον οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες μένουν αναλλοίωτες στις χαμιλτονιανές ροές των συναρτήσεων $C^{\infty}(M_{\mathcal{O}})$, και μάλιστα οι συνεκτικές συνιστώσες των συμπλεκτικών αυτών πολλαπλοτήτων είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας για τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $M_{\mathcal{O}}$, με $x \sim y$ αν τα x και y μπορούν να ενωθούν μέσω χαμιλτονιανών ροών. Επίσης, οι εμμετρεύσεις των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων στον $M_{\mathcal{O}}$ είναι συναρτήσεις Poisson. Το Θεώρημα αυτό αποδείχτηκε από τους Sjamaar και Lerman [SL91] για την περίπτωση που η ομάδα G είναι συμπαγής. Ακολούθως οι Bates και Lerman [BL97] κατάφεραν να δείξουν το ίδιο αποτέλεσμα για μια γενική γνήσια δράση χρησιμοποιώντας ανάλογες μεθόδους. Αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό.

Η απόδειξη του Θεωρήματος βασίζεται στην ακόλουθη βασική ιδέα. Θα ορίσουμε κατάλληλη συμπλεκτική πολλαπλότητα Y σε περιοχή μιας τροχιάς της M . Το Θεώρημα εμφύτευσης σταθερού βαθμού μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να δουλέψουμε με την Y αντί με την M . Η μορφή της Y είναι αρκετά καλά κατανοητή. Μπορούμε να πούμε πως αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο σε επιλογή κατάλληλων συντεταγμένων.

Μερικά χρόνια αργότερα οι Cushman και Śniatycki [CS01] έδωσαν μια διαφορετική απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος. Μελέτησαν τις κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση $\sim$ στον $M_\mathcal{O}$ και έδειξαν, με χρήση του Θεωρήματος Stefan-Sussmann, ότι ολοκληρώνονται σε πολλαπλότητες.

5.1. Η ΑΛΓΕΒΡΑ $C^\infty(M_\mathcal{O})$

Θέλουμε να ορίσουμε κατάλληλη οικογένεια συναρτήσεων στο χώρο πηλίκου $M_\mathcal{O}$. Είναι λογικό να ξεκινήσουμε με τις G -αναλλοίωτες συναρτήσεις στην M

$$C^\infty(M)^G = \{f \in C^\infty(M) : f \circ A_g = f, \forall g \in G\}$$

και ειδικά από τον περιορισμό τους $C^\infty(M)^G \Big|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$ στο σύνολο $\mu^{-1}(\mathcal{O})$. Η $C^\infty(M)^G$ είναι υπάλγεβρα Poisson της $C^\infty(M)$. Πράγματι, είναι προφανώς κλειστή ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό (μάλιστα και ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων), ενώ για $f, h \in C^\infty(M)^G$ και $g \in G$ έχουμε

$$\{f, h\} \circ A_g = \{f \circ A_g, h \circ A_g\} = \{f, h\}$$

άρα $\{f, h\} \in C^\infty(M)^G$. Για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση (1.3.13), αφού η δράση είναι χαμιλτονιανή άρα $A_g \in \text{Symp}(M, \omega)$.

Μπορούμε να ταυτίσουμε τον περιορισμό $f|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$ μιας συνάρτησης $f \in C^\infty(M)$ στο $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ με την κλάση των συναρτήσεων στην M που ο περιορισμένες στο $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ ταυτίζονται με την $f|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mu^{-1}(\mathcal{O})) = \{f \in C^\infty(M)^G : f|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})} = 0\}$$

Το σύνολο αυτό είναι ιδεώδες για την άλγεβρα $C^\infty(M)^G$ με πολλαπλασιασμό τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Ορίζουμε την λεγόμενη **άλγεβρα των διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $M_\mathcal{O}$**

$$\begin{aligned} C^\infty(M_\mathcal{O}) &:= C^\infty(M)^G \Big|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})} \\ &\cong C^\infty(M)^G / \mathcal{I} \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια αν $f \in C^\infty(M_\mathcal{O})$, τότε υπάρχει $f_o \in C^\infty(M)^G$ ώστε

$$\pi^* f = f_o|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$$

Οι συναρτήσεις της $C^\infty(M_\mathcal{O})$ είναι συνεχείς με την τοπολογία πηλίκου του $M_\mathcal{O}$. Ορίζουμε την αγγύλη

$$\{\cdot, \cdot\}_{M_\mathcal{O}} : C^\infty(M_\mathcal{O}) \times C^\infty(M_\mathcal{O}) \rightarrow C^\infty(M_\mathcal{O})$$

τέτοια ώστε αν $f_o, g_o \in C^\infty(M)^G$, τότε

$$\{f_o + \mathcal{I}, g_o + \mathcal{I}\}_{M_\mathcal{O}} = \{f_o, g_o\} + \mathcal{I}$$

όπου $\{\cdot, \cdot\}$ η αγγύλη Poisson στην M που επάγεται από την ω . Ισοδύναμα για $f, g \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$

$$\pi^* \{f, g\}_{M_{\mathcal{O}}} = \{f, g\}|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$$

Η $\{\cdot, \cdot\}_{M_{\mathcal{O}}}$ έχει τις ιδιότητες μιας αγγύλης Poisson, αρκεί να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη.

Ένα **Poisson ιδεώδες** για την άλγεβρα $C^\infty(M)$ (ή οποιαδήποτε υπάλγεβρα της ως προς τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων και την αγγύλη Poisson -θα λέγεται υπάλγεβρα Poisson-) είναι ένα ιδεώδες ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων και ως προς την αγγύλη Poisson.

ΛΗΜΜΑ 5.1.1. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα, $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα Poisson της $C^\infty(M)$ και $X \subset M$. Αν για κάθε $H \in \mathcal{A}$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ που ορίζεται, ισχύει $\phi_H^t(X) \subset X$, όπου ϕ_H^t η ροή του χαμιλτονιανού πεδίου X_H , τότε το σύνολο

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathcal{A} : f|_X = 0\}$$

είναι Poisson ιδεώδες για την $\mathcal{A}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς το $\mathcal{I}(X)$ είναι ιδεώδες για την $\mathcal{A}$ ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων.

Έστω $f \in \mathcal{A}, h \in \mathcal{I}(X)$ και $p \in X$. Συμβολίζουμε με $\phi_f^t(p)$ την ολοκληρωτική καμπύλη του χαμιλτονιανού πεδίου X_f της f από το σημείο p . Από υπόθεση $\phi_f^t(p) \in X$ για κάθε t που ορίζεται η ροή. Επομένως $h(\phi_f^t(p)) = 0$ για t σε περιοχή του μηδενός και άρα

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\phi_f^t(p)) = \{h, f\}(p)$$

Αφού το p το επιλέξαμε τυχαία, έπεται ότι $\{h, f\}|_X = 0$ και επομένως $\{h, f\} \in \mathcal{I}(X)$ που σημαίνει ότι το $\mathcal{I}(X)$ είναι ιδεώδες Poisson για την $\mathcal{A}$.

Θέτουμε $\mathcal{A} = C^\infty(M)^G$, $X = \mu^{-1}(\mathcal{O})$. Όπως είδαμε η $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα Poisson της $C^\infty(M)$. Από το Θεώρημα της Noether για $f \in \mathcal{A}, p \in X$ και ϕ_t την χαμιλτονιανή ροή της f , έχουμε (αφού f είναι G -αναλλοίωτη) $\mu(\phi_t(p)) = \mu(p) \in \mathcal{O}$, άρα $\phi_t(p) \in \mu^{-1}(\mathcal{O}) = X$. Από το προηγούμενο Λήμμα επομένως το $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mu^{-1}(\mathcal{O}))$ είναι Poisson ιδεώδες της $C^\infty(M)^G$. Επομένως η αγγύλη $\{\cdot, \cdot\}_{M_{\mathcal{O}}}$ είναι καλά ορισμένη, αφού για $f, g \in C^\infty(M)^G$ και $f', g' \in \mathcal{I}$ έχουμε

$$\{f + f', g + g'\} = \{f, g\} + \underbrace{\{f, g'\} + \{f', g\} + \{f', g'\}}_{\in \mathcal{I}}$$

Γενικότερα αν $U \subset M_{\mathcal{O}}$ ανοιχτό με $U = (\mu^{-1}(\mathcal{O}) \cap V) / G$, όπου $V \subset M$ ανοιχτό και G -αναλλοίωτο μπορούμε να ορίσουμε

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &:= C^\infty(V)^G \Big|_{V \cap \mu^{-1}(\mathcal{O})} \\ &= C^\infty(V)^G / \mathcal{I}(\mu^{-1}(\mathcal{O}) \cap V) \end{aligned}$$

□

5.2. ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΟΝ $M_{\mathcal{O}}$

Αφού ο χώρος $M_{\mathcal{O}}$ δεν είναι γενικά πολλαπλότητα δεν μπορούμε να ορίσουμε χαμιλτονιανά πεδία και να βρούμε τις ροές τους. Θα ορίσουμε απευθείας τη χαμιλτονιανή ροή μιας συνάρτησης $C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ χρησιμοποιώντας την αγγύλη $\{\cdot, \cdot\}_{M_{\mathcal{O}}}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2.1. Μια **διαφορίσιμη καμπύλη** γ στον χώρο $M_{\mathcal{O}}$ είναι μια συνεχής (στον $M_{\mathcal{O}}$ χρησιμοποιούμε την τοπολογία πηλίκου) συνάρτηση $\gamma : I \rightarrow M_{\mathcal{O}}$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, ώστε για κάθε συνάρτηση $h \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ η συνάρτηση $h \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι διαφορίσιμη.

Μια **διαφορίσιμη ροή** $\{\phi_s\}_{s \in I}$, όπου $I \subset \mathbb{R}$, στην M είναι μια μονοπαριμετρική ομάδα (δηλαδή $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, $\phi_0 = id$) ομοιομορφισμών $\phi_s : M \rightarrow M$, τέτοια ώστε για κάθε $h \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ και για κάθε $s \in I$ να ισχύει $h \circ \phi_s \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ και για κάθε $p \in M_{\mathcal{O}}$ η $\mathbb{R} \supset I \rightarrow M : s \mapsto \phi_s(p)$ να είναι διαφορίσιμη καμπύλη.

Η **χαμιλτονιανή ροή** της $f \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ είναι η διαφορίσιμη ροή $\{\phi_t\}$ που για κάθε $p \in M_{\mathcal{O}}$ και $h \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{dt} h(\phi_t(p)) = \{h, f\}_{M_{\mathcal{O}}}(\phi_t(p))$$

Παρατηρούμε πως $f \circ \phi_t = f$, αφού $\{f, f\}_{M_{\mathcal{O}}} = 0$.

Στην περίπτωση που η $M_{\mathcal{O}}$ είναι πολλαπλότητα, οι παραπάνω ορισμοί ταυτίζονται με τους συνηθισμένους και η ύπαρξη και μοναδικότητα της ροής, η οποία τότε θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $X_f \circ \phi_t = \frac{d}{dt} \phi_t$, έπεται από το γνωστό Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων. Υπενθυμίζουμε πως το Θεώρημα αυτό ισχύει σε πολλαπλότητες γιατί είναι τοπικά ευκλείδειες, άρα με χρήση χαρτών η εξίσωση αυτή γράφεται ως ένα σύστημα συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σε κάποιο υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου, όπου και ξέρουμε ότι ισχύει το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας. Στη γενική περίπτωση όμως, ο $M_{\mathcal{O}}$ δεν είναι πολλαπλότητα και για να είναι καλά ορισμένη η χαμιλτονιανή ροή, πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητά της.

Ας αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη. Έστω $f \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$ και $\bar{f} \in C^\infty(M)^G$ ώστε $\pi^* f = \bar{f}|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$. Έστω επίσης $\bar{\phi}_t$ η χαμιλτονιανή ροή της $\bar{f}$. Αφού η $\bar{f}$ είναι G -αναλλοίωτη, από το Θεώρημα της Noether έχουμε ότι $\mu(\bar{\phi}_t(p)) = \mu(p)$ για κάθε $p \in M$, άρα $\bar{\phi}_t(\mu^{-1}(\mathcal{O})) \subset \mu^{-1}(\mathcal{O})$. Επίσης από την Πρόταση (3.4.2) η ϕ_t είναι G -ισομεταβλητή. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την $\phi_t : M_{\mathcal{O}} \rightarrow M_{\mathcal{O}}$ με $\phi_t \circ \pi = \pi \circ \bar{\phi}_t$. Η ϕ_t είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι και η $\bar{\phi}_t$. Έχουμε

$$\begin{aligned} (\phi_t \circ \phi_s) \circ \pi &= \phi_t \circ \pi \circ \bar{\phi}_s \\ &= \pi \circ \bar{\phi}_t \circ \bar{\phi}_s \\ &= \pi \circ \bar{\phi}_{t+s} \\ &= \phi_{t+s} \circ \pi \end{aligned}$$

και για $h \in C^\infty(M_{\mathcal{O}})$, οπότε υπάρχει $\bar{h} \in C^\infty(M)^G$ ώστε $\pi^* h = \bar{h}|_{\mu^{-1}(\mathcal{O})}$, έχουμε

$$\begin{aligned} (h \circ \phi_s) \circ \pi &= h \circ \pi \circ \bar{\phi}_s \\ &= \bar{h} \circ \bar{\phi}_s \end{aligned}$$

με την $\bar{h} \circ \bar{\phi}_s$ να είναι G -αναλλοίωτη, αφού η $\bar{\phi}_s$ είναι ισομεταβλητή και η $\bar{h}$ G -αναλλοίωτη. Επίσης η $s \mapsto h \circ \phi_s$ είναι λεία, αφού η $\bar{h} \circ \bar{\phi}_s$ είναι λεία. Άρα η ϕ_t είναι διαφορίσιμη ροή στο $M_{\mathcal{O}}$. Μένει να δείξουμε ότι είναι η χαμιλτονιανή ροή της f . Για $p \in \mu^{-1}(\mathcal{O})$ και $p_o = \pi(p) \in M_{\mathcal{O}}$ έχουμε

$$h \circ \phi_t(p_o) = \bar{h} \circ \bar{\phi}_t(p)$$

άρα

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(\phi_t(p_o)) &= \frac{d}{dt} \bar{h}(\bar{\phi}_t(p)) \\ &= \{\bar{h}, \bar{f}\}(\bar{\phi}_t(p)) \\ &= \{h, f\}_{M_O}(\pi(\bar{\phi}_t(p))) \\ &= \{h, f\}_{M_O}(\phi_t(p_o)) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε τώρα τη μοναδικότητα. Ας δώσουμε πρώτα έναν ορισμό. Θα λέμε ότι ένα σύνολο συναρτήσεων σε ένα χώρο **διαχωρίζει σημεία** αν για κάθε δύο διαφορετικά σημεία του χώρου υπάρχει συνάρτηση στο σύνολο αυτό που παίρνει διαφορετικές τιμές στα δύο αυτά σημεία.

ΛΗΜΜΑ 5.2.2. *Αν οι $C^\infty(M_O)$ συναρτήσεις διαχωρίζουν σημεία στον M_O , τότε η χαμιλτονιανή ροή μιας συνάρτησης $f \in C^\infty(M_O)$ είναι μοναδική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $f' \in C^\infty(M)^G$ με $f \circ \pi = f'|_{\mu^{-1}(O)}$ και ϕ'_t η χαμιλτονιανή ροή στην M της f' . Είδαμε ότι η ϕ_t με $\phi_t \circ \pi = \pi \circ \phi'_t$ είναι χαμιλτονιανή ροή στον M_O της f . Έστω ψ_t μια άλλη χαμιλτονιανή ροή της f . Για $h \in C^\infty(M_O)$ και $m \in M_O$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(\psi_{-t}(m)) &= - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=-t} h(\psi_s(m)) \\ &= -\{h, f\}_{M_O}(\psi_{-t}(m)) \\ &= \{h, -f\}_{M_O}(\psi_{-t}(m)) \end{aligned}$$

άρα η ψ_{-t} είναι χαμιλτονιανή ροή της $-f$.

Αν δείξουμε ότι, για κάθε $h \in C^\infty(M_O)$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ που ορίζονται οι ροές και $m \in M_O$, ισχύει

$$h(\phi_t \circ \psi_{-t}(m)) = h(m)$$

τότε, αφού οι συναρτήσεις C^∞ διαχωρίζουν σημεία στον M_O , θα ισχύει $\phi_t \circ \psi_{-t}(m) = m$ και άρα, αφού $\psi_{-t} = \psi_t^{-1}$, $\phi_t = \psi_t$. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(\phi_t(\psi_{-t}(m))) &= \{h, f\}_{M_O}(\phi_t(\psi_{-t}(m))) + \{h \circ \phi_t, -f\}_{M_O}(\psi_{-t}(m)) \\ &= \{h, f\}_{M_O}(\phi_t(\psi_{-t}(m))) - \{h \circ \phi_t, f \circ \phi_t\}_{M_O}(\psi_{-t}(m)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $h(\phi_t(\psi_{-t}(m))) = \text{σταθ.} = h(m)$. Χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $f = f \circ \phi_t$, όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει, και $\{h, f\}_{M_O}(\phi_t(p)) = \{h \circ \phi_t, f \circ \phi_t\}(p)$ για κάθε $p \in M_O$. Αυτό ισχύει γιατί, αν $p_o \in M$ με $\pi(p_o) = p$ και $h' \in C^\infty(M)^G$ με $h \circ \pi = h'|_{\mu^{-1}(O)}$, τότε

$$\begin{aligned} \{h, f\}_{M_O}(\phi_t(p)) &= \{h', f'\}(\phi'_t(p_o)) \\ &= \{h' \circ \phi'_t, f' \circ \phi'_t\}(p_o) \\ &= \{h \circ \phi_t, f \circ \phi_t\}_{M_O}(p) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η ϕ'_t είναι συμπλεκτομορφισμός, άρα και μορφισμός Poisson. $\square$

Αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια, οι συναρτήσεις $C^\infty(M)^G$ διαχωρίζουν τροχιές στην M . Οπότε οι συναρτήσεις $C^\infty(M_O)$ διαχωρίζουν σημεία στον M_O . Επομένως το προηγούμενο Λήμμα μας εξασφαλίζει τη μοναδικότητα των χαμιλτονιανών ροών στον M_O .

5.3. ΤΑ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΑ ΣΤΡΩΜΑΤΑ ΤΟΥ M_O

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκου M_O (υπενθυμίζουμε ότι η μόνη υπόθεση για τη δράση είναι ότι είναι γνήσια) μπορεί να γραφεί ως ένωση συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων που μένουν αναλλοίωτες στις χαμιλτονιανές ροές των συναρτήσεων $C^\infty(M_O)$. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε αρκετά Θεωρήματα και κατασκευές.

5.3.1. Γνήσιες συμπλεκτικές δράσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3.1. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie που δρα γνήσια στην M με συμπλεκτομορφισμούς. Τότε υπάρχει G -αναλλοίωτη ω -συμβατή σχεδόν μιγαδική δομή J στην M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η δράση είναι γνήσια, από το Πρόσχημα (2.3.13), θα υπάρχει G -αναλλοίωτη μετρική g στην M . Χρησιμοποιώντας την g και δουλεύοντας όπως στην απόδειξη της Πρότασης (1.4.10), παίρνουμε μια ω -συμβατή σχεδόν μιγαδική δομή στην M . Επαληθεύεται ότι είναι και G -αναλλοίωτη. $\square$

Το παρακάτω είναι μια ισομεταβλητή εκδοχή του Θεωρήματος Darboux.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3.2. Έστω (M, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα, $N \subset M$ υποπολλαπλότητα, ω_0, ω_1 συμπλεκτικές μορφές στην M με $\omega_0|_p = \omega_1|_p$ για κάθε $p \in N$ και G ομάδα Lie που δρα στην M . Αν η δράση είναι γνήσια, αφήνει αναλλοίωτη την N και διατηρεί τις ω_0, ω_1 , τότε υπάρχουν G -αναλλοίωτες περιοχές U_0 και U_1 της N στην M και ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση $\rho : U_0 \rightarrow U_1$, ώστε $\rho|_N = id$ και $\rho^*\omega_1 = \omega_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη γίνεται όπως ακριβώς και αυτή του Θεωρήματος (1.3.17), με μερικές τροποποιήσεις που λαμβάνουν υπόψη τη δράση.

Καταρχάς η περιοχή U_0 στην απόδειξη μπορεί να αντικατασταθεί από την G -αναλλοίωτη περιοχή $G \cdot U_0$.

Χρησιμοποιώντας μια G -αναλλοίωτη μετρική, που υπάρχει αφού η δράση είναι γνήσια, η εκθετική της θα είναι G -ισομεταβλητή μεταξύ μιας περιοχής της N στην κάθετη δέσμη σε αυτήν και περιοχή της στην M . Τότε η 1-μορφή που κατασκευάζουμε στο Παράρτημα και δίνεται από τον τύπο

$$\theta = Q(\omega_1 - \omega_0) = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t}(\omega_1 - \omega_0)) dt$$

είναι G -αναλλοίωτη, αφού η ρ_t από τη μορφή της είναι G -ισομεταβλητή, v_t είναι G -αναλλοίωτο, αφού ικανοποιεί την εξίσωση $v_t \rho_t = \frac{d\rho_t}{dt}$, και ω_0, ω_1 G -αναλλοίωτες, αφού η δράση της διατηρεί.

Οπότε και η $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$ είναι G -αναλλοίωτη, άρα και το διανυσματικό πεδίο X_t που προκύπτει από τη σχέση

$$\iota_{X_t} \omega_t + \theta = 0$$

Οπότε η ροή του ϕ_t , από την οποία προκύπτει η ζητούμενη αμφιδιαφόριση $\rho = \phi_1$, είναι G -ισομεταβλητή. $\square$

5.3.2. Εμφυτεύσεις σταθερού βαθμού. Έστω (P, τ) συμπλεκτική πολλαπλότητα, $X \subset P$ υποπολλαπλότητα της P και $x \in X$. Υπενθυμίζουμε ότι το συμπλεκτικό συμπλήρωμα του διανυσματικού χώρου $T_x X$, τον οποίο τον αντιμετωπίζουμε ως υπόχωρο του συμπλεκτικού διανυσματικού χώρου $T_x P$, είναι ο

$$T_x X^\tau = \{u \in T_x P : \tau_x(u, w) = 0, \forall w \in T_x X\}$$

Αν συμβολίσουμε με $T_X P$ τον περιορισμό της εφαπτόμενης δέσμης TP της P στην X (δηλαδή $T_X P = \bigcup_{p \in X} T_p P$), τότε οι χώροι $\{T_x X^\tau\}_{x \in X}$ σχηματίζουν μια διανυσματική υποδέσμη, έστω TX^τ , της $T_X P$.

Αφού η τ είναι διγραμμική και μη εκφυλισμένη, ως συμπλεκτική μορφή, έχουμε τον φυσικό ισομορφισμό

$$\begin{aligned} T_X P &\rightarrow T_X^* P \\ (x, v) &\mapsto (x, \tau_x(v, \cdot)) \end{aligned}$$

Μέσω του ισομορφισμού αυτού, η TX^τ ταυτίζεται με την

$$TX^o = (T_X P / TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} \{(x, \tau_x(v, \cdot)) \in T_X^* P : v \in T_x P, \tau_x(v, \cdot)|_{T_x X} = 0\}$$

Όμως $(T_X P / TX)^* \simeq T_X P / TX$ ως διύκιοι, άρα ο TX^τ είναι ισόμορφος, ως διανυσματική δέσμη, με την κάθετη δέση του X στην M , δηλαδή την $T_X P / TX$.

Ο περιορισμός της τ στην TX^τ δεν είναι απαραίτητα συμπλεκτική μορφή, γιατί δεν είναι αναγκαστικά μη εκφυλισμένη. Όμως, από το Γραμμικό symplectic reduction, ο $T_x X^\tau / (T_x X^\tau \cap T_x X)$, $x \in X$ είναι συμπλεκτικός χώρος (με τη συμπλεκτική μορφή που επάγεται από την τ). Αν η διάσταση αυτών των διανυσματικών χώρων πηλίκου είναι σταθερή για κάθε $x \in X$, οπότε η $TX^\tau / (TX^\tau \cap TX)$ είναι διανυσματική δέσμη, λέμε ότι η εμφύτευση $X \hookrightarrow P$ είναι **σταθερού βαθμού** και η δέσμη

$$N(X) := TX^\tau / (TX^\tau \cap TX)$$

ονομάζεται **συμπλεκτική κάθετη δέσμη** της εμφύτευσης $X \hookrightarrow (P, \tau)$. Το εντυπωσιακό χαρακτηριστικό των εμφυτεύσεων σταθερού βαθμού είναι πως κατά μια έννοια, που περιγράφεται ακριβώς στο επόμενο Θεώρημα, είναι μοναδικές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3.3 (Μοναδικότητα εμφυτεύσεων σταθερού βαθμού). Έστω $(P, \tau), (P', \tau')$ συμπλεκτικές πολλαπλότητες και $i : X \rightarrow P, i' : X \rightarrow P'$ εμφυτεύσεις σταθερού βαθμού, ώστε οι συμπλεκτικές κάθετες δέσμες που τους αντιστοιχούν να είναι ισόμορφες και να ισχύει $i^* \tau = (i')^* \tau'$. Τότε υπάρχουν ανοιχτές περιοχές, U του $i(X)$ στην P και U' του $i'(X)$ στην P' , και αμφιδιαφόριση $\phi : U \rightarrow U'$, ώστε $\phi \circ i = i'$ και $\phi^* \tau' = \tau$.

Αν επιπλέον η ομάδα $Lie G$ δρα γνήσια στις X, P, P' , η δράσεις διατηρούν τις τ, τ' (δράσεις με συμπλεκτομορφισμούς) και οι i, i' είναι G -ισομεταβλητές, τότε οι περιοχές U και U' μπορούν να επιλεγούν να είναι G -αναλλοίωτες και η ϕ να είναι G -ισομεταβλητή. Αν οι δράσεις της G στις (P, τ) και (P', τ') είναι χαμιλτονιανές με αντίστοιχες απεικονίσεις ορμής $\mu : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ και $\mu' : P' \rightarrow \mathfrak{g}^*$, και ισχύει $\mu \circ i = \mu' \circ i'$, τότε θα ισχύει και $\mu' \circ \phi = \mu$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $v = TX^\tau \cap TX$, $N = TX^\tau/v$ και $E = TX/v$. Οι N, E είναι συμπλεκτικές με τη δομή τους να επάγεται από την τ . Επίσης $v \subset (N \oplus E)^\tau$ και

$$\begin{aligned} \dim(N \oplus E)^\tau &= \dim P - \dim(N \oplus E) \\ &= \dim P - \dim N - \dim E \\ &= \dim P - (\dim TX^\tau - \dim v) - (\dim TX - \dim v) \\ &= 2 \dim v \end{aligned}$$

και $v \subset v^\tau$, άρα ο v είναι λαγκρανσιανός υπόχωρος του $(N \oplus E)^\tau$. Από το Θεώρημα (1.1.6), θα ισχύει $(N \oplus E)^\tau = v \oplus v^*$ με τη συνήθη συμπλεκτική δομή στον $v \oplus v^*$. Άρα

$$T_X P = N \oplus E \oplus (v \oplus v^*)$$

Αν N', E', v' οι αντίστοιχες έννοιες για την εμφύτευση $i : X \rightarrow P'$, τότε

$$T_X P' = N' \oplus E' \oplus (v' \oplus v'^*)$$

Από υπόθεση $N \simeq N'$, ενώ αφού $i^* \tau = (i')^* \tau'$ θα ισχύει $v \simeq v'$ και άρα και $E \simeq E'$. Τελικά έχουμε $T_X P \simeq T_X P'$. Άρα και οι κάθετες δέσμες N_X και N'_X του X στις δύο εμφυτεύσεις θα είναι ισόμορφες. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σωληνοειδούς περιοχής και αναλλοίωτες μετρικές, που υπάρχουν αφού οι δράσεις είναι γνήσιες, παίρνουμε ισομεταβλητές αμφιδιαφορίσεις μεταξύ μιας περιοχής του X σε μια κάθετη δέσμη και μια περιοχή του X στην αντίθετη πολλαπλότητα στην οποία εμφυτεύεται. Χρησιμοποιώντας και τον ισομορφισμό των δεσμών μπορούμε να δούμε και τος δύο συμπλεκτικές δομές ως δομές στην ίδια πολλαπλότητα. Το ζητούμενο έπεται τότε από την ισομεταβλήτη εκδοχή του Darboux (Θεώρημα (5.3.2)).

Αν επιπλέον οι δράσεις είναι χαμιλτονιανές. Η $\mu' \circ \phi$ είναι και αυτή απεικόνιση ορμής για τη δράση της G στην (P, τ) . Πράγματι, για $\xi \in \mathfrak{g}$, αν ξ_P και $\xi_{P'}$ τα διανυσματικά πεδία στις P και P' αντίστοιχα, που παράγονται από τη δράση της υποομάδας $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\} \subset G$, για $q \in P$ έχουμε

$$\begin{aligned} \xi_{P'}(\phi(q)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot \phi(q) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp(t\xi) \cdot q) \\ &= T_q \cdot \xi_P(q) \end{aligned}$$

δηλαδή $\phi^* \xi_{P'} = \xi_P$. Οπότε

$$\begin{aligned} d\langle \mu' \circ \phi, \xi \rangle &= d\phi^* \langle \mu', \xi \rangle \\ &= \phi^* d\langle \mu', \xi \rangle \\ &= \phi^* \iota_{\xi_{P'}} \tau' \\ &= \iota_{\phi^* \xi_{P'}} \phi^* \tau' \\ &= \iota_{\xi_P} \tau \end{aligned}$$

και για $g \in G$

$$(\mu' \circ \phi)(g \cdot q) = g \cdot (\mu' \circ \phi)(q)$$

αφού οι μ' και ϕ είναι ισομεταβλητές. Άρα θα υπάρχει σταθερά $c \in \mathfrak{g}$, ώστε $\mu' \circ \phi = \mu + c$ και αφού $\mu' \circ \phi|_X = \mu' \circ i' = \mu|_X$ η c θα είναι μηδέν. $\square$

5.3.3. Περιγραφή του κεντρικού Θεωρήματος. Ας διατυπώσουμε τώρα το κεντρικό Θεώρημα του κεφαλαίου αυτού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3.4 (Singular reduction). Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος, με τη δράση της G στην M να είναι γνήσια. Αν $O \subset \mathfrak{g}^*$ τοπικά κλειστή συν-συζυγής τροχιά, τότε:

- (1) Ο χώρος πηλίκου $M_O = \mu^{-1}(O)/G$ γράφεται ως, τοπικά πεπερασμένη, ένωση συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Τις συμπλεκτικές αυτές πολλαπλότητες θα τις ονομάζουμε συμπλεκτικά κομμάτια του M_O .
- (2) Οι χαμιλτονιανές ροές των συναρτήσεων $C^\infty(M_O)$ στον M_O διατηρούν τη διάσπαση του M_O σε συμπλεκτικά κομμάτια.
- (3) Οι εμφυτεύσεις των συμπλεκτικών κομματιών στον M_O είναι συναρτήσεις Poisson.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος αυτού, ας δούμε ένα ενδιαφέρον Πόρισμα, το οποίο λέει ότι η διάσπαση του M_O σε συμπλεκτικά κομμάτια καθορίζεται από την άλγεβρα $(C^\infty(M_O), \{\cdot, \cdot\}_{M_O})$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.3.5. Έστω $M_O, N_{O'}$ χώροι πηλίκου που προκύπτουν από τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες M και N αντίστοιχα, όπως έχουμε περιγράψει, και έστω $\phi : M_O \rightarrow N_{O'}$ ομοιομορφισμός. Αν το pull-back $\phi^* : C^\infty(N_{O'}) \rightarrow C^\infty(M_O)$ είναι ισομορφισμός Poisson, τότε η ϕ απεικονίζει συμπλεκτικά κομμάτια του M_O σε συμπλεκτικά κομμάτια του $N_{O'}$.

Για την απόδειξη του Πορίσματος θα χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 5.3.6. Έστω (M, ω) συνεκτική συμπλεκτική πολλαπλότητα και $x, y \in M$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$, ώστε $y = \phi_1^{f_n} \circ \dots \circ \phi_1^{f_1}(x)$, όπου $\phi_t^{f_i}$ η χαμιλτονιανή ροή της συνάρτησης f_i .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρχεί να δείξουμε ότι κάθε σημείο έχει περιοχή στην οποία ισχύει το ζητούμενο. Τότε έχουμε τελειώσει. Πράγματι, αν $x, y \in M$, αφού η M είναι συνεκτική θα υπάρχει μονοπάτι που τα συνδέει. Καλύπτοντας το μονοπάτι αυτό με, πεπερασμένου πλήθους αφού είναι συμπαγές, περιοχές στις οποίες έχουμε αποδείξει ότι ισχύει το ζητούμενο, έχουμε τελειώσει.

Έστω $x \in M$. Θεωρούμε ένα χάρτη Darboux $(U, (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n))$ με $x \in U$. Όπως έχουμε δει ισχύει $X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i}$ και $X_{q_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$. Άρα τα σημεία στην U μπορούν να συνδεθούν με τους time one maps των χαμιλτονιανών ροών των συναρτήσεων $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ και πολλαπλασίων τους. $\square$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το Πόρισμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στην M_O ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας: $x \sim y$ αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M_O)$ ώστε $y = \phi_1^{f_n} \circ \dots \circ \phi_1^{f_1}(x)$. Η επαλήθευση ότι έχουμε ορίσει σχέση ισοδυναμίας, έπεται άμεσα από τις ιδιότητες των ροών. Ισχυριζόμαστε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι συνεκτικές συνιστώσες των συμπλεκτικών κομματιών. Πράγματι, αφού ένα συμπλεκτικό κομμάτι, και άρα και κάθε συμπλεκτική του συνιστώσα, είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα και οι εμφυτεύσεις στον M_O είναι απεικονίσεις Poisson, έπεται από το προηγούμενο Λήμμα ότι τα σημεία μιας συνεκτικής συνιστώσας ενός συμπλεκτικού κομματιού είναι ισοδύναμα. Αντίστροφα, αν δύο σημεία του M_O είναι ισοδύναμα, από το 2 του Θεωρήματος (5.3.4) θα ανήκουν στο ίδιο συμπλεκτικό κομμάτι, και προφανώς στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, αφού συνδέονται με μονοπάτι.

Αφού η ϕ^* είναι συνάρτηση Ποισσον, θα διατηρεί της χαμιλτονιανές ροές. Άρα, επειδή ο ορισμός των συμπλεκτικών κομματιών, όπως είδαμε, εξαρτάται μόνο από τις χαμιλτονιανές ροές έχουμε τελειώσει. $\square$

Ο χώρος πηλίκου $M_{\mathcal{O}}$ είναι ο χώρος των τροχιών της δράσης. Για να καταλάβουμε τη δομή του σε περιοχή ενός σημείου του πρέπει να μελετήσουμε την περιοχή μιας τροχιάς στην M . Αντί αυτής της περιοχής, από το Θεώρημα μοναδικότητας εμφυτεύσεων σταθερού βαθμού, μπορούμε να εμφυτεύσουμε την τροχιά σε μια άλλη 'απλούστερη' συμπλεκτική πολλαπλότητα και να μελετήσουμε μια περιοχή της τροχιάς σε αυτήν.

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε μια συμπλεκτική πολλαπλότητα (M, ω) και μια ομάδα $\text{Lie } G$ που δρα γνήσια και χαμιλτονιανά στην (M, ω) με απεικόνιση ορμής $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Έστω επίσης $x \in M$, $a = \mu(x) \in \mathfrak{g}^*$ και $\mathcal{O} = G \cdot a$ η συνσυζυγής τροχιά από το a , η οποία θεωρούμε πως είναι **τοπικά κλειστή** (υποσύνολο της $\mathfrak{g}^*$ που γράφεται ως τομή ενός ανοιχτού και ενός κλειστού, ή ισοδύναμα είναι ανοιχτό στην κλειστότητά του), και $M_{\mathcal{O}} = \mu^{-1}(\mathcal{O})/G$. Το παρακάτω Λήμμα, για $M = \mathfrak{g}^*$, μας εξασφαλίζει πως η $\mathcal{O}$ είναι (embedded) υποπολλαπλότητα της $\mathfrak{g}^*$.

ΛΗΜΜΑ 5.3.7. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα, G ομάδα Lie που δρα στην M και $\mathcal{O} = \{g \cdot x : g \in G\}$ η τροχιά της δράσης από το σημείο $x \in M$. Αν η $\mathcal{O}$ είναι τοπικά κλειστή, τότε είναι (embedded) υποπολλαπλότητα της M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathcal{A}$ η δράση της G στην M . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned}\phi : G &\rightarrow M \\ g &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

Τότε $\phi(G) = \mathcal{O}$ και η ϕ είναι σταθερού βαθμού, αφού για $g_1 = gg_2$, $g, g_1, g_2 \in G$ και $g_1(t)$ καμπύλη στην G με $g(0) = g_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}T_{g_2}\phi &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(gg_1(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g\phi(g_1(t)) \\ &= T\mathcal{A}_g \circ T_{g_1}\phi\end{aligned}$$

και η $\mathcal{A}_g$ είναι αμφιδιαφόριση. Έστω k ο βαθμός της ϕ , $m = \dim M$ και $n = \dim G$. Για $g \in G$, από το Θεώρημα σταθερού βαθμού (δες [L09]), υπάρχει χάρτης $(U, \bar{x})$ στην G με $g \in U$ και χάρτης $(V, \bar{y})$ στην M με $\phi(g) \in V$, ώστε

$$\bar{y} \circ \phi \circ \bar{x}^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

Η $\phi(U)$ είναι υποπολλαπλότητα της M . Αφού η $\mathcal{O} = \phi(G)$ είναι τοπικά κλειστή και η M τοπικά συμπαγής, ως πολλαπλότητα, η $\mathcal{O}$ θα είναι τοπικά συμπαγής, οπότε η απεικόνιση $\phi' : G \rightarrow \mathcal{O} : g \mapsto \phi(g)$ θα είναι ανοιχτή (δες [D08] Θεώρημα (1.8.6)). Επομένως θα υπάρχει $W \subset M$ ανοιχτό, ώστε $W \cap \mathcal{O} = \phi'(U) = \phi(U)$. Επομένως η $\mathcal{O}$ είναι embedded υποπολλαπλότητα της M . $\square$

Αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια, η τροχιά $G \cdot x$ θα είναι υποπολλαπλότητα της M . Επίσης, αφού η δράση είναι χαμιλτονιανή άρα συμπλεκτική, οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned}\phi_g : M &\rightarrow M \\ p &\mapsto g \cdot p\end{aligned}$$

θα είναι συμπλεκτομορφισμοί για κάθε $g \in G$ και επομένως

$$T_{g \cdot x}(G \cdot x)^{\omega_{g \cdot x}} \cap T_{g \cdot x}(G \cdot x) = T_x(G \cdot x)^{\omega_x} \cap T_x(G \cdot x)$$

και άρα η εμφύτευση $G \cdot x \hookrightarrow M$ θα είναι σταθερού βαθμού.

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια νέα συμπλεκτική πολλαπλότητα (Y, τ) , μια εμφύτευση $i : G \cdot x \rightarrow Y$ σταθερού βαθμού και ισομεταβλητή με $i^* \tau = \omega|_{G \cdot x}$ και μια γνήσια χαμιλτονιανή δράση της G στην (Y, τ) με απεικόνιση ορμής μ_Y , ώστε $\mu_Y(x) = a$, οπότε και $\mu_Y(g \cdot x) = \text{Ad}_g^* \cdot a = \mu(x)$ για κάθε $g \in G$. Επίσης η κάθετη συμπλεκτική δέσμη της εμφύτευσης $i : G \cdot x \rightarrow Y$ θα είναι ίδια με αυτή της εμφύτευσης $G \cdot x \hookrightarrow M$.

Οπότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα εμφύτευσης σταθερού βαθμού, προκύπτει ότι υπάρχει περιοχή U της $G \cdot x$ στην M , περιοχή U_Y της $G \cdot x$ στην Y και ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση $\phi : U_Y \rightarrow U$, ώστε $\phi^* \omega = \tau$, $\phi \circ i = \text{id}$ και $\phi^* \mu = \mu_Y$.

Η ακόλουθη Πρόταση περιγράφει τη μορφή της συμπλεκτικής μορφής ω αν περιορίσουμε πάνω στην τροχιά $G \cdot x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3.8. Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος με τη δράση της G στην M να είναι γνήσια. Τότε για $x \in M$ ισχύει

$$\omega|_{G \cdot x} = \mu^* \omega_{G \cdot \mu(x)}|_{G \cdot x}$$

όπου η $\omega_{G \cdot \mu(x)}$ είναι η Kirillov-Konstant-Souriau (KKS) συμπλεκτική μορφή στην συν-συζυγή τροχιά $G \cdot \mu(x) \subset \mathfrak{g}^*$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $a = \mu(x)$. Για $\xi \in \mathfrak{g}$ συμβολίζουμε με ξ_M το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο στην M -δηλαδή αυτό που προκύπτει από τη δράση της υποομάδας $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\} \subset G$ - και με $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο στην $\mathfrak{g}^*$ (στην $\mathfrak{g}^*$ έχουμε την συνσυζυγή δράση της G).

Αφού η δράση είναι γνήσια η τροχιά $G \cdot x$ είναι υποπολλαπλότητα της M . Για $y \in G \cdot x$ έχουμε

$$T_y(G \cdot x) = \{\xi_M(y) : \xi \in \mathfrak{g}\}$$

Για $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \omega_y(\xi_M(y), \eta_M(y)) &= (\iota_{\xi_M} \omega)_y(\eta_M(y)) \\ &= d\langle \mu, \xi \rangle_y(\eta_M(y)) \\ &= \eta_M(y) \cdot \langle \mu, \xi \rangle \\ &= \langle \eta_M(y) \cdot \mu, \xi \rangle \\ &= \langle d\mu_y(\eta_M(y)) \xi \rangle \end{aligned}$$

Όπως έχουμε δει η συνσυζυγής τροχιά $G \cdot a$ του a στην $\mathfrak{g}^*$, είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα με συμπλεκτική μορφή την $\omega_{G \cdot a}$ και επίσης

$$T_y(G \cdot a) = \{\xi_{\mathfrak{g}^*}(y) : \xi \in \mathfrak{g}\}, y \in G \cdot a$$

Επομένως για $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ και $y \in G \cdot x$ έχουμε

$$(\mu^* \omega_{G \cdot a})_y(\xi_M(y), \eta_M(y)) = \omega_{\mu(y)}(T_y \mu \cdot \xi_M(y), T_y \mu \cdot \eta_M(y))$$

αφού ο μ είναι ισομεταβλήτος ισχύει $\mu(y) \in G \cdot a$ και

$$T_y \mu \cdot \xi_M(y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mu(\exp(t\xi) \cdot y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot \mu(y) = \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu(y))$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 (\mu^* \omega_{G \cdot a})_y (\xi_M(y), \eta_M(y)) &= (\omega_{G \cdot a})_{\mu(y)} (\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu(y)), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu(y))) \\
 &= \langle \mu(y), [\xi, \eta] \rangle \\
 &= \langle \mu(y), -ad(\eta) \cdot \xi \rangle \\
 &= \langle ad^*(\eta) \cdot \mu(y), \xi \rangle \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle Ad_{\exp(t\eta)}^* \cdot \mu(y), \xi \rangle \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \mu(\exp(t\eta) \cdot y), \xi \rangle \\
 &= \langle \eta_M(y) \cdot \mu, \xi \rangle \\
 &= \omega_y (\xi_M(y), \eta_M(y))
 \end{aligned}$$

□

Από την παραπάνω πρόταση έπεται εύκολα το ακόλουθο Πρόσμημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.3.9. Έστω (M, ω, G, μ) συμπλεκτικός G -χώρος με τη δράση της G στην M να είναι γνήσια. Τότε για $x \in M$ ισχύει

$$T_x(G \cdot x)^\omega \cap T_x(G \cdot x) = T_x(G_a \cdot x)$$

όπου G_a η ομάδα ισοτροπίας του $a = \mu(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Να παρατηρήσουμε καταρχάς ότι η ομάδα G_a είναι κλειστή υποομάδα της G , άρα και αυτή είναι ομάδα Lie. Η δράση της G , άρα και αυτή της κλειστής υποομάδας της G_a , είναι γνήσια. Επομένως η τροχιά $G_a \cdot x$ είναι υποπολλαπλότητα της M .

Όπως είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη, $T_x(G \cdot x) = \{\xi_M(x) : \xi \in \mathfrak{g}\}$. Άρα

$$\begin{aligned}
 \xi_M(x) \in T_x(G \cdot x)^\omega &\Leftrightarrow \\
 \omega_x(\xi_M(x), \eta_M(x)) &= 0, \forall \eta \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \\
 \omega_{G \cdot a}|_a(\xi_{\mathfrak{g}^*}(a), \eta_{\mathfrak{g}^*}(a)) &= 0, \forall \eta \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \\
 \xi_{\mathfrak{g}^*}(a) &= 0
 \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισοδυναμία χρησιμοποιήθηκε η προηγούμενη Πρόταση και στην τελευταία το γεγονός ότι $T_a(G \cdot a) = \{\eta_{\mathfrak{g}^*}(a) : \eta \in \mathfrak{g}\}$. Όμως

$$0 = \xi_{\mathfrak{g}^*}(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot a \Leftrightarrow \xi \in G_a$$

οπότε $\xi_M(x) \in T_x(G_a \cdot x)$.

□

Αφού η μ είναι ισομεταβλητή, έπεται ότι $G_x \subset G_a, a = \mu(x)$.

Από το παραπάνω Πρόσμημα προκύπτει ότι ο πυρήνας της $\omega|_{T_x(G \cdot x)}$ είναι ο $(\mathfrak{g}_a)_M(x) := \{\xi_M(x) : \xi \in \mathfrak{g}_a = Lie(G_a)\} = T_x(G_a \cdot x)$.

Η G_x είναι συμπαγής υποομάδα Lie της G , αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια.

Υπενθυμίζουμε ότι η G , άρα και η υποομάδα της G_x , δρα στην $\mathfrak{g}$ με τη συζυγή δράση. Για $g \in G_x$ και $\xi \in \mathfrak{g}_a$, έχουμε

$$\begin{aligned} g \cdot \xi &= Ad_g \cdot \xi \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{g \exp(t\xi) g^{-1}}_{\in G_a} \in \mathfrak{g}_a \end{aligned}$$

Δηλαδή η υπάλγεβρα $\mathfrak{g}_a$ της $\mathfrak{g}$ μένει αναλλοίωτη από τη δράση της G_x . Μπορούμε επομένως να διασπάσουμε την $\mathfrak{g}$ σε G_x αναλλοίωτους υπόχωρους

$$(5.3.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{s}$$

Αφού, όπως είπαμε, ο πυρήνας της $\omega|_{T_x(G \cdot x)}$ είναι ο $(\mathfrak{g}_a)_M(x)$, συνεπάγεται ότι η $\omega|_{T_x(G \cdot x)}$ είναι μη εκφυλισμένη και άρα συμπλεκτική αν την περιορίσουμε στον υπόχωρο $s_M(x) = \{\xi_M(x) : \xi \in \mathfrak{s}\}$ του $T_x(G \cdot x)$. Δηλαδή, ο $s_M(x)$ είναι συμπλεκτικός υπόχωρος του $(T_x M, \omega_x)$ και από την Πρόταση (5.3.8) η συμπλεκτική μορφή σε αυτόν είναι η KKS μορφή $(\omega(x)|_{s_M(x)} \simeq \omega_{G \cdot a}(a))$.

Αφού επίσης, όπως προκύπτει από το Πρόσχημα (5.3.9), ο $(\mathfrak{g}_a)_M(x)$ είναι υπόχωρος του $T_x(G \cdot x)^\omega$ και είναι και G_x αναλλοίωτος, αφού για $g \in G_x, \xi \in \mathfrak{g}_a$ έχουμε

$$g \cdot \xi_M(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{(g \exp(t\xi)) \cdot x}_{\in G_a} \in (\mathfrak{g}_a)_M(x)$$

μπορούμε να πάρουμε την G_x -αναλλοίωτη διάσπαση

$$(5.3.2) \quad T_x(G \cdot x)^\omega = (\mathfrak{g}_a)_M(x) \oplus V$$

Επιχειρηματολογώντας όπως πριν, ο V θα είναι συμπλεκτικός υπόχωρος του $(T_x M, \omega_x)$. Συμβολίζουμε την αντίστοιχη συμπλεκτική μορφή με $\omega_V = \omega_x|_V$.

Αφού οι $V, s_M(x) \subset T_x M$ είναι συμπλεκτικοί και G_x -αναλλοίωτοι και ο $(V \oplus s_M(x))^{\omega_x}$ θα είναι συμπλεκτικός και G_x -αναλλοίωτος. Από τα προηγούμενα επίσης προκύπτει ότι $(\mathfrak{g}_a)_M(x) \subset (V \oplus s_M(x))^{\omega_x}$. Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned} \dim(V \oplus s_M(x)) + \dim(V \oplus s_M(x))^{\omega_x} &= \dim T_x M \\ &= \dim T_x(G \cdot x) + \dim T_x(G \cdot x)^{\omega_x} \\ &= \dim s_M(x) + \dim (\mathfrak{g}_a)_M(x) + \dim V + \dim (\mathfrak{g}_a)_M(x) \end{aligned}$$

οπότε $2 \dim (\mathfrak{g}_a)_M(x) = \dim(V \oplus s_M(x))^{\omega_x}$. Επίσης $(\mathfrak{g}_a)_M(x) \subset ((\mathfrak{g}_a)_M(x))^{\omega_x}$, αφού ο $(\mathfrak{g}_a)_M(x)$ είναι ο πυρήνας της $\omega|_{T_x(G \cdot x)}$. Άρα ο $(\mathfrak{g}_a)_M(x)$ είναι λαγχαρνιακός υπόχωρος του $(V \oplus s_M(x))^{\omega_x}$, και επομένως από το Θεώρημα (1.1.6) (iii) ο $(V \oplus s_M(x))^{\omega_x}$ θα είναι συμπλεκτομορφικός με τον $(\mathfrak{g}_a)_M(x) \oplus ((\mathfrak{g}_a)_M(x))^*$ με τη συμπλεκτική μορφή που περιγράφεται στο Θεώρημα.

Αποκτήσαμε επομένως την ακόλουθη διάσπαση για τον $(T_x M, \omega_x)$

$$(5.3.3) \quad (T_x M, \omega_x) \simeq (V, \omega_V) \oplus (s_M(x), \omega_{G \cdot a}(a)) \oplus ((\mathfrak{g}_a)_M(x) \oplus ((\mathfrak{g}_a)_M(x))^*)$$

5.3.4. Κατασκευή της συμπλεκτικής πολλαπλότητας (Y, τ) . Υπενθυμίζουμε ότι $G_x \subset G_a, a = \mu(x)$ άρα $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{g}_a$. Ορίζουμε

$$(5.3.4) \quad Y := G \times_{G_x} ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V)$$

και $\pi : Y \rightarrow G/G_x \simeq G \cdot x$, την προβολή στην πρώτη συνιστώσα. Την τροχιά $G \cdot x$ μπορούμε να τη σχεφτόμαστε εμφυτευμένη στην Y , ως τη μηδενική τομή της. Αφού η δράση η G στην M είναι γνήσια, η G_x είναι συμπαγής ομάδα Lie. Άρα η δράση της

G_x στην G , με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με το αντίστροφο, είναι γνήσια και ελεύθερη. Επομένως και η δράση της G_x στην $G \times ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V)$ είναι γνήσια και ελεύθερη και άρα η $Y = \left(G \times_{G_x} ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V) \right) / G_x$ είναι διαφορική πολλαπλότητα.

Ο εφαπτόμενος χώρος της Y στο $x \in G \cdot x \subset Y$ είναι (με e συμβολίζουμε τη μονάδα της G):

$$\begin{aligned} T_x Y &= (T_e G / T_e G_x) \oplus (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V \\ &\simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x) \oplus (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V \\ &= (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x) \oplus s \oplus (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V \\ &\simeq (\mathfrak{g}_a)_M(x) \oplus s_M(x) \oplus ((\mathfrak{g}_a)_M(x))^* \oplus V \\ &\simeq T_x M \end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η διάσπαση της $\mathfrak{g}$ και στην τέταρτη οι ισομορφισμοί $\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x \simeq (\mathfrak{g}_a)_M(x)$ και $s \simeq s_M(x)$. Ο πρώτος προκύπτει από την απεικόνιση $\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x \rightarrow (\mathfrak{g}_a)_M(x) : [\xi] \mapsto \xi_M(x)$. Αυτή είναι ισομορφισμός αρκεί να είναι καλά ορισμένη, που είναι αφού

$$\begin{aligned} [\xi] = 0 &\Rightarrow \xi \in \mathfrak{g}_x \\ &\Rightarrow \exp(t\xi) \in G_x \\ &\Rightarrow \xi_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x = 0 \end{aligned}$$

Ο άλλος ισομορφισμός προκύπτει αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε ότι η ομάδα G μπορεί να δράσει στην Y , με $g \cdot [h, \lambda, v] = [gh, \lambda, v]$ για $g, h \in G$, $\lambda \in (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^*$ και $v \in V$.

Επόμενο στόχος είναι να κατασκευάσουμε μια κλειστή και G -αναλλοίωτη μορφή τ στην Y , ώστε $\tau(x) = \omega(x)$. Την τ θα την φτιάξουμε ως το άθροισμα τριών όρων.

- Έχουμε

$$Y \xrightarrow{\pi} G \cdot x \xrightarrow{\mu|_{G \cdot x}} G \cdot a, \quad a = \mu(x)$$

Θέτουμε $\tau_1 = \pi^*(\mu|_{G \cdot x})^* \omega_{G \cdot a}$, όπου η $\omega_{G \cdot a}$ είναι η KKS μορφή στη συν-συζυγή τροχιά $G \cdot a$. Αφού η $\omega_{G \cdot a}$ είναι κλειστή, ως συμπλεκτική, και η τ_1 είναι κλειστή. Επίσης $\tau|_{(\mathfrak{g}_a)_M(x) \oplus V} = 0$, αφού προκύπτει από pull-back προβολής στην πρώτη συνιστώσα του Y , και από την Πρόταση (5.3.8) $\tau_1(x)|_{s_M(x)} = \omega(x)|_{s_M(x)} \simeq \omega_{G \cdot a}(a)$. Η τ_1 επομένως είναι G -αναλλοίωτη, αφού είναι και η KKS (η συν-συζυγής δράση της G είναι συμπλεκτική), και μη εκφυλισμένη στο x .

- Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Y = G \times_{G_x} ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V) & \longrightarrow & G \times_{G_x} V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* & \longrightarrow & G/G_x \simeq G \cdot x \end{array}$$

το οποίο μετατίθεται. Μια διαφορική μορφή στην πολλαπλότητα $G \times_{G_x} V$ μπορούμε να τη δούμε ως διαφορική μορφή στην Y που μηδενίζεται στον

$(\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^*$, μέσω του pull-back της προβολής $Y \rightarrow G \times_{G_x} V$. Ομοίως τις μορφές της $G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^*$ μπορούμε να της δούμε ως μορφές στην Y που μηδενίζονται στον V .

Υπενθυμίζουμε ότι $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus s$, με τη διάσπαση να είναι G_x αναλλοίωτη. Άρα η προβολή $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_a$ είναι G_x -ισομεταβλητή και επομένως επάγει προβολή $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \rightarrow \mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x$. Από αυτήν προκύπτει η εμφύτευση

$$j : (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* \\ \xi \mapsto \xi'$$

με $\xi'|_s = 0$ και $\xi'|_{\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x} = \xi$. Τελικά παίρνουμε την εμφύτευση (για απλότητα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο j)

$$j : G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \rightarrow G \times_{G_x} (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^*$$

Όμως $T^*(G \cdot x) = \{(g \cdot x, \xi) : g \in G, \xi \in T_{g \cdot x}^*(G \cdot x) \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^*\} \simeq G \times_{G_x} (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^*$. Άρα αποκτήσαμε μια εμφύτευση του $G \times_{G_x} (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^*$ στη συνεφαπτόμενη δέσμη της $G \cdot x$. Η συνεφαπτόμενη δέσμη, όπως έχουμε δει, είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα με την κανονική συμπλεκτική μορφή $\omega_{T^*(G \cdot x)}$. Θέτουμε $\tau_2 = j^* \omega_{T^*(G \cdot x)}$. Η τ_2 είναι κλειστή και G -αναλλοίωτη, αφού είναι και η $\omega_{T^*(G \cdot x)}$ ως συμπλεκτική μορφή. Παρατηρώντας τη μορφή της τ_2 , προκύπτει ότι $\tau_2(x) = \omega_{(\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x) \oplus (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^*}$ (με την έννοια ότι μηδενίζεται για τα άλλα διανύσματα του $T_x Y$). Ειδικά είναι μη εκφυλισμένη στο x .

- Για $g \in G_x$ και $\xi \in \mathfrak{g}_x$ έχουμε

$$g \cdot \xi = Ad_g \cdot \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \underbrace{g \exp(t\xi) g^{-1}}_{\in G_x} \in \mathfrak{g}_x$$

Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε την G_x -αναλλοίωτη διάσπαση

$$(5.3.5) \quad \mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_x \oplus m$$

και συνδυάζοντάς την με τη διάσπαση $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus s$, προκύπτει η G_x -αναλλοίωτη διάσπαση

$$(5.3.6) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \oplus m \oplus s$$

Έστω $A_o : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_x$ η προβολή, η οποία από τα παραπάνω θα είναι G_x -ισομεταβλητή. Ορίζουμε την 1-μορφή A με τιμές στην $\mathfrak{g}_x$, $A : TG \rightarrow \mathfrak{g}_x$ με $A_g(v) = A_o(T_g L_{g^{-1}} \cdot v)$, $g \in G, v \in T_g G$. Εκ κατασκευής η A είναι G -αναλλοίωτη.

Η δράση της G , και άρα και της G_x , στην M είναι γνήσια και συμπλεκτική. Επίσης η συζυγής δράση της G_x αφήνει αναλλοίωτο τον $V \subset T_x M$. Έχουμε επομένως μια συμπλεκτική γραμμική δράση της συμπαγούς G_x στον (V, ω_V) . Όπως είδαμε στον Παράδειγμα 4 της παραγράφου (3.2.1), η δράση αυτή θα είναι χαμιλτονιανή με τετραγωνική απεικόνιση ορμής $\mu_V : V \rightarrow \mathfrak{g}_x^* : v \mapsto \mu_V(v)$ με $\mu_V(v) \cdot \xi = \frac{1}{2} \omega_V(v, \xi \cdot v)$, $\xi \in \mathfrak{g}_x$.

Θεωρούμε την πολλαπλότητα $G \times V$ και σε αυτήν ορίζουμε τη 2-μορφή

$$\tilde{\tau}_3 = d \langle A, \mu_V \rangle + \omega_V$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_x^* \rightarrow \mathbb{R} : (X, \xi) \mapsto \xi(X)$. Οι A και ω_V είναι G_x -αναλλοιώτες και για $v \in V, g \in G, g_x \in G_x$ και $X \in T_g G$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle Ad_{g_x} \cdot A_g(X), \mu_V(g_x \cdot v) \rangle &= \langle Ad_{g_x} \cdot A_g(X), Ad_{g_x}^* \cdot \mu_V(v) \rangle \\ &= \langle Ad_{g_x^{-1}} \cdot Ad_{g_x} \cdot A_g(X), \mu_V(v) \rangle \\ &= \langle A_g(X), \mu_V(v) \rangle \end{aligned}$$

άρα η $\tilde{\tau}_3$ είναι G_x -αναλλοιώτη. Είναι επίσης κλειστή, αφού γράφεται ως άθροισμα μιας ακριβούς (της $d\langle A, \mu_V \rangle$) και μιας κλειστής (της ω_V). Αφού η $\tilde{\tau}_3$ είναι G_x αναλλοιώτη, από την προβολή $G \times V \rightarrow G \times_{G_x} V$, θα επέγεται στην $G \times_{G_x} V$, άρα και στην Y , όπως εξηγήσαμε, μια 2-μορφή τ_3 . Αυτή θα είναι κλειστή, αφού είναι και η $\tilde{\tau}_3$, και επίσης G -αναλλοιώτη, αφού η A είναι G -αναλλοιώτη (η G δρα στην πρώτη συνιστώσα της $G \times_{G_x} V$ από την οποία εξαρτάται μόνο η A , από τα κομμάτια της $\tilde{\tau}_3$). Παρατηρούμε ότι $\tau_3(x)|_V = \omega_V$, αφού για $(g, 0) \in G \times V$ έχουμε

$$d\langle A, \mu_V \rangle(g, 0) = \langle dA(g), \mu_V(0) \rangle + \langle A(g), d\mu_V(0) \rangle = 0$$

αφού η μ_V είναι τετραγωνική, άρα $\mu_V(0) = 0 = d\mu_V(0)$, ενώ εκτός του V η $\tau_3(x)$ είναι μηδέν.

Αφού κατασκευάσαμε τις τ_1, τ_2 και τ_3 , ορίζουμε τη 2-μορφή τ στην Y με $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$. Από την κατασκευή της είναι κλειστή, G -αναλλοιώτη και $\tau(x) = \omega(x)$. Άρα, αφού όπως είδαμε $T_x Y = T_x M$, η τ είναι συμπλεκτική και άρα μη εκφυλισμένη στη μηδενική τομή $G \cdot x$ της δέσμης $Y \rightarrow G \cdot x$. Θα υπάρξει επομένως ανοιχτή περιοχή Y_o της $G \cdot x$ στην Y , ώστε η $\tau|_{Y_o}$ να είναι μη εκφυλισμένη και άρα συμπλεκτική. Αφού μάλιστα η τ είναι G -αναλλοιώτη, μπορούμε να πάρουμε και την Y_o να είναι G -αναλλοιώτη.

Συνοψίζοντας, έχουμε τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες (M, ω) και $(Y_o, \tau|_{Y_o})$, και την πολλαπλότητα $X = G \cdot x$ που εμφυτεύεται και στις δύο. Επίσης η ομάδα $\text{Lie } G$ δρα γνήσια στις M, Y_o και X και μάλιστα στις (M, ω) και $(Y_o, \tau|_{Y_o})$ η δράση είναι συμπλεκτική και $\tau(x) = \omega(x)$. Έχουμε δει ότι $T_x(G \cdot x)^{\omega_x} \cap T_x(G \cdot x) = (\mathfrak{g}_a)_M(x)$ και $T_x(G \cdot x)^{\omega_x} = (\mathfrak{g}_a)_M(x) \oplus V$, οπότε $V = T_x(G \cdot x)^{\omega_x} / (T_x(G \cdot x)^{\omega_x} \cap T_x(G \cdot x))$. Επομένως η συμπλεκτική κάθετη δέσμη της εμφύτευσης $G \cdot x \hookrightarrow (M, \omega)$ είναι η $G \times_{G_x} V$, η οποία απαληθεύεται άμεσα ότι είναι και η συμπλεκτική κάθετη δέσμη της εμφύτευσης $G \cdot x \hookrightarrow (Y_o, \tau|_{Y_o})$. Από το Θεώρημα μοναδικότητας εμφύτευσης σταθερού βαθμού, προκύπτει ότι, αν μικρύνουμε ενδεχομένως το Y_o , υπάρχει $\psi : Y_o \rightarrow M$ αμφιδιαφόριση μεταξύ Y_o και $\psi(Y_o)$, ώστε $\psi|_{G \cdot x} = id$ και $\psi^* \omega = \tau$.

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε μια απεικόνιση ορμής $\mu_Y : Y \rightarrow \mathfrak{g}^*$ για τη δράση της G στην Y , τέτοια ώστε $\mu_Y(x) = \mu(x) = a$. Τότε, από το Θεώρημα μοναδικότητας των εμφυτεύσεων σταθερού βαθμού, θα έχουμε $\mu_Y = \mu \circ \psi$.

Η μ_Y θα προκύψει ως άθροισμα τριών όρων.

•

$$Y \xrightarrow{\pi} G \cdot x \xrightarrow{\mu|_{G \cdot x}} G \cdot a, \quad a = \mu(x)$$

Έχουμε ορίσει $\tau_1 = \pi^*(\mu|_{G \cdot x})^* \omega_{G \cdot a}$, όπου η $\omega_{G \cdot a}$ είναι η KKS μορφή στη συν-συζυγή τροχιά $G \cdot a$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu_1 : Y \rightarrow \mathfrak{g}^*$ με $\mu_1 = \pi^*(\mu|_{G \cdot x})$. Τότε για $(g, \lambda, v) \in G \times ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V)$, αν $[g, \lambda, v] \in$

$Y = G \times_{G_x} ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V)$ η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας, έχουμε

$$\begin{aligned}\mu_1([g, \lambda, v]) &= \mu(\pi([g, \lambda, v])) \\ &= \mu(g \cdot x) \\ &= g \cdot \mu(x) = g \cdot a\end{aligned}$$

Άρα η μ_1 είναι ισομεταβλητή.

Έστω $\xi \in \mathfrak{g}$ και ξ_Y και $\xi_{G \cdot x}$ τα διανυσματικά πεδία στις Y και $G \cdot x$ αντίστοιχα που προκύπτουν από τη δράση της υποομάδας $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\} \subset G$. Με αντίστοιχα επιχειρήματα όπως στην Πρόταση (5.3.8), έχουμε $\pi_* \xi_Y = \xi_{G \cdot x}$. Οπότε

$$\begin{aligned}\iota_{\xi_Y} \tau_1 &= \iota_{\xi_Y} (\pi^* (\mu|_{G \cdot x})^* \omega_{G \cdot a},) \\ &= \iota_{\xi_Y} (\pi^* \omega_{G \cdot x}) \\ &= \pi^* \iota_{\pi_* \xi_Y} (\omega_{G \cdot x}) \\ &= \pi^* \iota_{\xi_{G \cdot x}} \omega_{G \cdot x} \\ &= \pi^* d \langle \mu|_{G \cdot x}, \xi \rangle \\ &= d \langle \pi^* \mu|_{G \cdot x}, \xi \rangle \\ &= d \langle \mu_1, \xi \rangle\end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση (5.3.8).

- Μπορούμε να κάνουμε την ταύτιση $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* \equiv \mathfrak{g}_x^o = \{\xi \in \mathfrak{g}^* : \xi(X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}\}$ και $T^*(G \cdot x) = G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\mu'_2 : G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ [g, \lambda] &\mapsto g \cdot \lambda \equiv Ad_g^* \cdot \lambda\end{aligned}$$

Η μ'_2 είναι καλά ορισμένη αφού για $h \in G_x$

$$\begin{aligned}\mu'_2([h \cdot g, h \cdot \lambda]) &= \mu'_2([gh^{-1}, Ad_h^* \cdot \lambda]) \\ &= Ad_{gh^{-1}}^* Ad_h^* \cdot \lambda \\ &= Ad_g^* \cdot \lambda \\ &= \mu'_2([g, \lambda])\end{aligned}$$

Εύκολα φαίνεται ότι είναι και G -ισομεταβλητή.

Μέσω της ταύτισης $T^*(G/G_x) = T^*(G \cdot x) = G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o$, από το παράδειγμα

όπου μελετήσαμε τη δράση μιας ομάδας Lie στη συνεφαπτόμενη δέσμη της, προκύπτει ότι η μ'_2 είναι απεικόνιση ορμής για τη δράση της G στην $G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o$.

Υπενθυμίζουμε τη συνάρτηση που ορίσαμε όταν κατασκευάσαμε την τ_2

$$j : (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \rightarrow \mathfrak{g}_x^o$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}j' : Y &\rightarrow G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o \\ [g, \lambda, v] &\mapsto [g, j(\lambda)]\end{aligned}$$

Τότε για $\xi \in \mathfrak{g}$, αν ξ_Y και $\xi_G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o$ τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία στις Y και $G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o$, όπως έχουμε δει πάλι σε αντίστοιχες περιπτώσεις, θα ισχύει $j'^* \xi_G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o = \xi_Y$. Ορίζουμε

$$\mu_2 = j'^* \mu'_2 : Y \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \iota_{\xi_Y} \tau_2 &= j'^* \left(\iota_{\xi_G \times_{G_x} \mathfrak{g}_x^o} \omega_{T^*(G \cdot x)} \right) \\ &= j'^* d \langle \mu'_2, \xi \rangle \\ &= d \langle \mu_2, \xi \rangle \end{aligned}$$

- Θεωρούμε τη δράση της G στην $G \times V$ με $G \times (G \times V) \rightarrow G \times V : (g, (h, v)) \mapsto (gh, v)$. Υπενθυμίζουμε ότι η 1-μορφή A , που ορίστηκε κατά την κατασκευή της τ_3 είναι G -αναλλοίωτη, επομένως και η $\tilde{\tau}_3$ είναι αναλλοίωτη ως προς αυτή τη δράση. Για $\xi \in \mathfrak{g}$, το διανυσματικό πεδίο στη $G \times V$ που προκύπτει από τη δράση της υποομάδας που παράγει το ξ είναι $\xi_{G \times V} = (\xi_G, 0)$, όπου $\xi_G(g) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi)g$, για $g \in G$. Το ξ_G , άρα και το $\xi_{G \times V}$, είναι δεξιά αναλλοίωτο, αφού

$$\begin{aligned} TR_g \circ \xi_G \circ R_g^{-1}(h) &= TR_g \cdot \xi_G(hg^{-1}) \\ &= TR_g \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi)hg^{-1} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi)hg^{-1}g = \xi_G(h) \end{aligned}$$

Αφού η A είναι G -αναλλοίωτη έχουμε

$$0 = \mathcal{L}_{\xi_{G \times V}} \langle A, \mu_V \rangle = \iota_{\xi_{G \times V}} d \langle A, \mu_V \rangle + d \iota_{\xi_G} \langle A, \mu_V \rangle = \iota_{\xi_G} d \langle A, \mu_V \rangle + d \langle A(\xi_G), \mu_V \rangle$$

Επίσης για $g \in G$, $A_g(\xi_G(g)) = A_o(TL_{g^{-1}}\xi_G(g)) = A_o(TL_{g^{-1}}TR_{g^{-1}}\xi_G(e)) = A_o(Ad_{g^{-1}} \cdot \xi)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mu'_3 : G \times V &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ (g, v) &\mapsto -Ad_g^* \cdot i(\mu_V(v)) \end{aligned}$$

όπου $i : \mathfrak{g}_x^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, η δυϊκή της προβολής $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_x$.

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} d \langle \mu'_3, \xi \rangle &= -d \langle Ad_g^* \cdot i(\mu_V(v)), \xi \rangle \\ &= -d \langle i(\mu_V(v)), Ad_{g^{-1}} \cdot \xi \rangle \\ &= -d \langle \mu_V(v), A_o(Ad_{g^{-1}} \cdot \xi) \rangle \\ &= -d \langle \mu_V(v), A_g(\xi_G(g)) \rangle \\ &= -d \iota_{\xi_G} \langle \mu_V, A(\xi_G) \rangle \\ &= \iota_{\xi_G} d \langle \mu_V, A \rangle = \iota_{\xi_G \times V} \tilde{\tau}_3 \end{aligned}$$

Επιχειρηματολογώντας όπως και τις άλλες φορές, προκύπτει ότι η

$$\begin{aligned}\mu_3 : (Y, \tau_3) &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ [g, \lambda, v] &\mapsto -g \cdot i(\mu_V(v))\end{aligned}$$

είναι η ζητούμενη απεικόνιση ορμής (με την έννοια ότι έχει τις ιδιότητες της απεικόνισης ορμής, χωρίς η τ_3 να είναι συμπλεκτική).

Ορίζουμε $\mu_Y : Y \rightarrow \mathfrak{g}^*$, με $\mu_Y = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. Δηλαδή

$$(5.3.7) \quad \mu_Y([g, \lambda, v]) = g \cdot (a + j(\lambda) - i(\mu_V(v)))$$

για $(g, \lambda, v) \in G \times ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V)$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η μ_Y είναι απεικόνιση ορμής για τη δράση της G στην Y .

5.3.5. Απόδειξη του κεντρικού Θεωρήματος. Η ακόλουθη Πρόταση είναι πολύ χρήσιμη στην απόδειξη του κεντρικού Θεωρήματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3.10. *Αν η συνσυστημένη τροχιά από το $a = \mu(x) \in \mathfrak{g}^*$ είναι τοπικά κλειστή, τότε για Y_o περιοχή της $G \cdot x$ στην Y αρκετά μικρή ισχύει*

$$\mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap Y_o = \{[g, \lambda, v] \in Y_o : \lambda = 0 \text{ και } \mu_V(v) = 0\}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}b : Y = G \times_{G_x} ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V) &\mapsto G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^* \\ [g, \lambda, v] &\mapsto [g, \lambda - i_a(\mu_V(v))]\end{aligned}$$

όπου $i_a : \mathfrak{g}_x^* \rightarrow \mathfrak{g}_a^*$, η εμφύτευση που επάγεται από την προβολή $\mathfrak{g}_a \rightarrow \mathfrak{g}_x$, ως προς την G_x -αναλλοίωτη διάσπαση $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_x \oplus m$ και κάνουμε την ταύτιση $(\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* = \{\xi \in \mathfrak{g}_a^* : \xi(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}_x\}$.

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση

$$\begin{aligned}\mathcal{E} : G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^* &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ [g, v] &\mapsto g \cdot (a + k(v))\end{aligned}$$

όπου $k : \mathfrak{g}_a^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ η εμφύτευση που προκύπτει από τη διάσπαση $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus s$.

Παρατηρούμε τότε ότι η απεικόνιση ορμής μ_Y γράφεται ως σύνθεση των δύο αυτών συναρτήσεων

$$\mu_Y = \mathcal{E} \circ b$$

Η $G \cdot a$ είναι (embedded) υποπολλαπλότητα της $\mathfrak{g}^*$, αφού η τοχιά $G \cdot a$ είναι τοπικά κλειστή. Επίσης, φαίνεται εύκολα ότι η $\mathcal{E}$ είναι εμβάπτυση (submersion). Άρα η $\mathcal{E}^{-1}(G \cdot a) = \left\{ [g, 0] \in G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^* : g \in G \right\}$ είναι embedded υποπολλαπλότητα της $G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^*$ συνδιάστασης

$$\dim \mathfrak{g}^* - \dim(G \cdot a) = \dim G_a$$

Η μηδενική τομή $Z = \left\{ [g, 0] \in G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^* : g \in G \right\} \subset G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^*$ είναι υποπολλαπλότητα της $G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^*$ συνδιάστασης $\dim \mathfrak{g}_a^* = \dim G_a$ και προφανώς $Z \subset \mathcal{E}^{-1}(G \cdot a)$. Άρα θα υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \subset G \times_{G_x} \mathfrak{g}_a^*$, ώστε $Z = \mathcal{E}^{-1}(G \cdot a) \cap U$. Θέτουμε $Y_o =$

$b^{-1}(U) \subset Y$ ανοιχτό με $G \cdot x \subset Y_o$.

Έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap Y_o &= (\mathcal{E} \circ b)^{-1}(G \cdot a) \cap Y_o \\ &= b^{-1}(\mathcal{E}^{-1}(G \cdot a) \cap U) \\ &= b^{-1}(Z) \\ &= [g, \lambda, v] \in Y_o : \lambda = 0 \text{ και } \mu_V(v) = 0 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\lambda \in (\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^*$, άρα $\lambda(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in \mathfrak{g}_x$, ενώ $\mu_V(v) \in \mathfrak{g}_x^*$. $\square$

Στο παρακάτω Θεώρημα αποδεικνύεται η ύπαρξη των συμπλεκτικών κομματιών και περιγράφεται η μορφή τους.

Υπενθυμίζουμε ότι για $H < G$

$$M_{(H)} = \{m \in M : \exists g \in G, \text{ ώστε } G_m = gHg^{-1}\}$$

και, αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια, η $M_{(H)}$ είναι υποπολλαπλότητα της M .

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3.11. Έστω (M, ω, G, μ) χαμιλτονιανός G -χώρος, με τη δράση της G στην M να είναι γνήσια. Για $H < G$ και $a \in \mathfrak{g}^*$, με την $G \cdot a$ να είναι τοπικά κλειστή, το σύνολο $\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$ είναι υποπολλαπλότητα της M και το πηλίκο $(M_a)_{(H)} := (\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)})/G$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα και η εμφύτευση $(M_a)_{(H)} \hookrightarrow M_{G \cdot a} = \mu^{-1}(G \cdot a)/G$ είναι συνάρτηση Poisson.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in \mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$. Όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει, με εφαρμογή του Θεωρήματος μοναδικότητας των εμφυτεύσεων σταθερού βαθμού, υπάρχουν G -αναλλοίωτες περιοχές U της $G \cdot x$ στην M και Y_o της $G \cdot x$ στην $Y = G \times_{G_x} ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{g}_x)^* \oplus V)$ και G -ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση $\psi : Y_o \rightarrow U$ με $\psi|_{G \cdot x} = id$, $\psi^*\omega = \tau|_{Y_o}$ και $\mu_Y = \mu \circ \psi$.

Θέτουμε $(Y_o)_a = (\mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap Y_o)/G$ και $U_a = (\mu^{-1}(G \cdot a) \cap U)/G$ (τα πηλίκα αυτά προς το παρόν είναι απλά τοπολογικοί χώροι). Από την ψ , λόγω ισομεταβλητότητας και αφού $\mu_Y = \mu \circ \psi$, επάγεται ομοιομορφισμός $\psi_a : (Y_o)_a \rightarrow U_a : [y] \mapsto [\psi(y)]$. Θεωρούμε επίσης το pull-back της ψ_a , $\psi_a^* : C^\infty(U_a) \rightarrow C^\infty((Y_o)_a)$, όπου $C^\infty(U_a) = C^\infty(U)^G|_{\mu^{-1}(G \cdot a)}$ και $C^\infty((Y_o)_a) = C^\infty(Y_o)^G|_{\mu^{-1}(G \cdot a)}$. Το ότι είναι καλά ορισμένη η ψ_a^* έπεται εύκολα από τις ιδιότητες της ψ . Είναι μάλιστα ισομορφισμός Poisson.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως αρκεί να αποδείξω το θεώρημα για την $(Y_o, \tau|_{Y_o})$.

Αφού $x \in \mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$, θα υπάρχει $g \in G$ ώστε $G_x = gHg^{-1}$. Τότε $g^{-1} \cdot x \in \mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$ και μάλιστα $G_{g^{-1} \cdot x} = H$. Άρα, χρησιμοποιώντας το $g \cdot x$ αντί του x , μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G_x = H$. Οπότε έχουμε $Y = G \times_H ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)$, όπου $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Θα δείξουμε ότι

$$Y_{(H)} = G \times_H ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)^H$$

όπου $((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)^H$ ο υπόχωρος του $((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)$ που σχηματίζεται από τα διανύσματα που μένουν σταθερά στη γραμμική δράση της H στον $((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)$. Πράγματι, έστω $[g, \lambda, v] \in Y$ και $g' \in G$, τότε

$$\begin{aligned} g' \cdot [g, \lambda, v] &= [g, \lambda, v] \Leftrightarrow \\ [g'g, \lambda, v] &= [g, \lambda, v] \Leftrightarrow \\ \exists h \in H : (g'g, \lambda, v) &= h \cdot (g, \lambda, v) \Leftrightarrow \\ \exists h \in H : g'g &= gh^{-1}, \lambda = h \cdot \lambda, v = \cdot \lambda \end{aligned}$$

Οπότε αν $[g, \lambda, v] \in G \times_H ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)^H$, τότε $\forall h \in H$ έχουμε $h \cdot \lambda = \lambda, h \cdot v = v$ και η σταθεροποιούσα του είναι

$$\begin{aligned} G_{[g, \lambda, v]} &= \{g' \in G : g' \cdot [g, \lambda, v] = [g, \lambda, v]\} \\ &= \{g' \in G : \exists h \in H : g'g = gh^{-1}, \lambda = h \cdot \lambda, v = \cdot \lambda\} \\ &= \{g' \in G : \exists h \in H : g'g = gh^{-1}\} \\ &= gHg^{-1} \end{aligned}$$

άρα τότε $[g, \lambda, v] \in Y_{(H)}$. Αντίστροφα, έστω $[g, \lambda, v] \in Y_{(H)}$. Τότε υπάρχει $g' \in G$, ώστε $G_{[g, \lambda, v]} = g'Hg'^{-1}$. Υποθέτουμε ότι $[g, \lambda, v] \notin G \times_H ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)^H$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού $[g, \lambda, v] \notin G \times_H ((\mathfrak{g}_a/\mathfrak{h})^* \oplus V)^H$, θα υπάρχει $h \in H$ ώστε $(h \cdot \lambda, h \cdot v) \neq (\lambda, v)$. Τότε $G_{[g, \lambda, v]}$ δεν είναι συζυγής της H , που είναι άτοπο.

Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap (Y_o)_{(H)} &= \mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap Y_o \cap Y_{(H)} \\ &= \{[g, \lambda, v] \in Y_o : \lambda = 0 \text{ και } \mu_V(v) = 0\} \cap Y_{(H)} \\ &= G \times_H V^H \\ &= (G/H) \times V^H \end{aligned}$$

όπου V^H ο υπόχωρος του V που αποτελείται από τα σταθερά 'τη δράση της H διανύσματα. Η V^H είναι πολλαπλότητα, ως διανυσματικός χώρος, και η G/H είναι πολλαπλότητα, αφού η δράση της H στην G (με πολλαπλασιασμό) είναι ελεύθερη και γνήσια (αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια όλες η σταθεροποιούσες θα είναι συμπαγείς, άρα είτε η H θα είναι συμπαγής είτε $M_{(H)} = \emptyset$). Άρα η $\mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap (Y_o)_{(H)} = (G/H) \times V^H$ είναι υποπολλαπλότητα της Y_o . Επίσης $(\mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap (Y_o)_{(H)})/G = ((G/H) \times V^H)/G = V^H$. Άρα και η $(\mu_Y^{-1}(G \cdot a) \cap (Y_o)_{(H)})/G$ είναι πολλαπλότητα. Μάλιστα είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα, αφού η $\omega_V|_{V^H}$ είναι μη εκφυλισμένη και άρα συμπλεκτική.

Μένει να δείξουμε ότι η εμφύτευση $i : (M_a)_{(H)} \hookrightarrow M_{G \cdot a}$, όπου $M_{G \cdot a} = \mu^{-1}(G \cdot a)/G$ και $(M_a)_{(H)} = (\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)})/G$, είναι συνάρτηση Poisson, δηλαδή ότι το pull-back i^* απεικονίζει συναρτήσεις $C^\infty(M_{G \cdot a})$ σε συναρτήσεις $C^\infty((M_a)_{(H)})$ ($i^* : (C^\infty(M_{G \cdot a}), \{\cdot, \cdot\}_{M_{G \cdot a}}) \rightarrow (C^\infty((M_a)_{(H)}), \{\cdot, \cdot\})$). Έστω $f, g \in C^\infty(M_{G \cdot a})$. Τότε υπάρχουν $f', g' \in C^\infty(M)^G$, ώστε $\pi^*f = f'|_{\mu^{-1}(G \cdot a)}$ και $\pi^*g = g'|_{\mu^{-1}(G \cdot a)}$, όπου $\pi : \mu^{-1}(G \cdot a) \rightarrow M_{G \cdot a}$ η προβολή. Τότε $\pi^*f|_{(M_a)_{(H)}} = f'|_{\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}}$ και

$\pi^* g|_{(M_a)(H)} = g'|_{\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}}$, με την $\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$ να είναι G -αναλλοίωτη πολλαπλότητα της M . Επομένως $f|_{(M_a)(H)}, g|_{(M_a)(H)} \in C^\infty(M_{G \cdot a})$. Επίσης έχουμε για $q \in \mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$, οπότε $\pi(q) \in (M_a)_{(H)}$

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{M_{G \cdot a}}(\pi(q)) &= \{f', g'\}(q) \\ &= \left\{ f'|_{\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}}, g'|_{\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}} \right\}(q) \\ &= \left\{ f|_{(M_a)(H)}, g|_{(M_a)(H)} \right\}(\pi(q)) \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η $\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$ είναι G -αναλλοίωτη. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε την απόδειξη του κεντρικού Θεωρήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η δράση της G στην M είναι γνήσια, η M γράφεται ως

$$M = \bigsqcup_{\substack{H < G \\ \text{συμπαγές}}} M_{(H)}$$

και η ένωση είναι τοπικά πεπερασμένη. Επομένως

$$M_{G \cdot a} = \bigsqcup_{\substack{H < G \\ \text{συμπαγές}}} (M_a)_{(H)}$$

με τα $(M_a)_{(H)}$, από το προηγούμενο Θεώρημα, να είναι συμπλεκτικές πολλαπλότητες και οι εμφυτεύσεις τους στην $M_{G \cdot a}$ είναι συναρτήσεις Poisson. Μάλιστα η ένωση είναι τοπικά πεπερασμένη, αφού το ίδιο ισχύει για την $M = \bigsqcup_{\substack{H < G \\ \text{συμπαγές}}} M_{(H)}$. Τα $(M_a)_{(H)}$ είναι τα συμπλεκτικά κομμάτια της $M_{G \cdot a}$. Μένει να δείξουμε ότι τα συμπλεκτικά κομμάτια μένουν αναλλοίωτα στις χαμιλτονιανές ροές των $C^\infty(M_{G \cdot a})$. Υπενθυμίζουμε ότι για $H < G$

$$\begin{aligned} M^H &= \{m \in M : H \subset G_m\} = \{m \in M : h \cdot m = m, \forall h \in H\} \\ M_H &= \{m \in M : G_m = H\} \end{aligned}$$

και $\pi : \mu^{-1}(G \cdot a) \rightarrow M_{G \cdot a}$ η προβολή. Έστω $f \in C^\infty(M_{G \cdot a})$, οπότε υπάρχει $\tilde{f} \in C^\infty(M)^G$ ώστε $\pi^* f = \tilde{f}|_{\mu^{-1}(G \cdot a)}$. Συμβολίζουμε με $\tilde{\phi}_t$ την χαμιλτονιανή ροή της $\tilde{f}$. Αφού η $\tilde{f}$ είναι G -αναλλοίωτη, από το θεώρημα της Noether, έχουμε ότι $\mu(\tilde{\phi}_t(p)) = \mu(p)$, $\forall p \in M$ άρα $\tilde{\phi}_t(\mu^{-1}(G \cdot a)) \subset \mu^{-1}(G \cdot a)$. Επίσης η $\tilde{\phi}_t$ είναι ισομεταβλητή. Επομένως, για $p \in M$ και για κάθε $h \in H \equiv G_p$ έχουμε

$$h \cdot \tilde{\phi}_t(p) = \tilde{\phi}_t(h \cdot p) = \tilde{\phi}_t(p)$$

που σημαίνει ότι $\tilde{\phi}_t(p) \in M^H$. Έστω $p' \in M_H$. Αφού, όπως έχουμε δει η M_H είναι ανοιχτή στην M^H , θα υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο U της M με $p' \in U$ ώστε $M_H \cap U = M^H \cap U$. Έστω $q \in U \cap M_H$, τότε για κάθε $h \in H$ έχουμε

$$h \cdot \tilde{\phi}_t(q) = \tilde{\phi}_t(h \cdot q) = \tilde{\phi}_t(q)$$

δηλαδή $\tilde{\phi}_t(q) \in M^H$. Επομένως, αν μικρύνουμε αρκετά το U , έχουμε

$$\tilde{\phi}_t(U \cap M_H) = \tilde{\phi}_t(U \cap M^H) \subset U \cap M^H = U \cap M_H$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_t(M_{(H)}) &= \tilde{\phi}_t(G \cdot M_H) \\ &= G \cdot \tilde{\phi}_t(M_H) \\ &\subset G \cdot M_H = M_{(H)}\end{aligned}$$

και επίσης $\tilde{\phi}_t(\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}) \subset \mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}$.

Όπως έχουμε δει η ϕ_t , με $\phi_t \circ \pi = \pi \circ \tilde{\phi}_t|_{\mu^{-1}G \cdot a}$, είναι η χαμιλτονιανή ροή της f .

Έχουμε επομένως

$$\begin{aligned}\phi_t((M_a)_{(H)}) &= \phi(\pi(\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)})) \\ &= \pi(\tilde{\phi}_t(\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)})) \\ &\subset \pi(\mu^{-1}(G \cdot a) \cap M_{(H)}) \\ &= (M_a)_{(H)}\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Εδώ θα συγκεντρώσουμε ορισμένες ιδιότητες των διαφορικών μορφών τις οποίες χρησιμοποιούμε στην εργασία αυτή. Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [L09].

Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ω διαφορική μορφή στην M . Για $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ισχύει

•

$$\iota_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X \iota_Y \omega - \iota_Y \mathcal{L}_X \omega$$

•

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota_X d\omega - d\iota_X \omega \text{ (τύπος του Cartan)}$$

όπου $\mathcal{L}_X \omega$ η παράγωγος Lie της ω κατά την κατεύθυνση του X και $\iota_X \omega = \omega(X, \dots)$.

Αν ϕ_t η ροή του χρονομεταβλητού διανυσματικού πεδίου X_t τότε ισχύει

•

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή και την ιδιότητα της παραγωγισής $\frac{d}{dt} f(t, t) = \frac{\partial}{\partial x} \big|_{x=t} f(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \big|_{y=t} f(t, y)$ παίρνουμε τη σχέση

•

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_t = \phi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega + \frac{d}{dt} \omega_t \right)$$

6.2. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ MOSER

Έστω M πολλαπλότητα διάστασης n , X υποπολλαπλότητα διάστασης $k < n$ και $i : X \hookrightarrow M$ η εμφύτεση. Μέσω του μονομορφισμού $T_p i : T_p X \rightarrow T_p M, p \in X$ μπορούμε να θεωρήσουμε τον $T_p X$ ως υπόχωρο του $T_p M$. Ορίζεται επομένως ο χώρος πηλίκου $T_p X^\perp = T_p M / T_p X$ που είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $n - k$ και ονομάζεται κάθετος χώρος στην X στο p . Ορίζουμε την **κάθετη δέσμη** $TX^\perp$ στην X με

$$TX^\perp = \{(p, v) : p \in X, v \in T_p X^\perp\}$$

Η $TX^\perp$ είναι διανυσματική δέσμη πάνω από την X . Είναι επίσης πολλαπλότητα διάστασης n . Η X εμφυτεύεται σε αυτή ως κλειστή υποπολλαπλότητα μέσω της απεικόνισης

$$\begin{aligned} i_o : X &\hookrightarrow TX^\perp \\ p &\mapsto (p, 0) \end{aligned}$$

Μια περιοχή $\mathcal{U}_o$ της X στην $TX^\perp$ ονομάζεται **κυρτή** αν για κάθε $p \in X$ το $\mathcal{U}_o \cap T_p X^\perp$ είναι κυρτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2.1. Έστω M πολλαπλότητα, $X \subset M$ υποπολλαπλότητα και ω κλειστή l -μορφή στη M , ώστε $\omega|_X = 0$. Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή $\mathcal{U}$ της X στη M και $(l-1)$ -μορφή στην περιοχή αυτή, έστω θ , ώστε $\omega = d\theta$ στην $\mathcal{U}$. Μάλιστα η θ μπορεί να επιλεγεί ώστε $\theta|_X = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα σωληνοειδούς περιοχής (απόδειξη του μπορεί να βρεθεί στα [daS08], [H76]) υπάρχει $\mathcal{U}_o \subset TX^\perp$ κυρτή και $\mathcal{U} \subset M$

ανοιχτές περιοχές της X και $\phi : \mathcal{U}_o \rightarrow \mathcal{U}$ αμφιδιαφόριση, ώστε $\phi \circ i_o = i$. Λόγω αυτής της αμφιδιαφόρισης, αρκεί να κατασκευάσουμε τη ζητούμενη μορφή θ στη $\mathcal{U}_o$.

Αφού η $\mathcal{U}_o$ είναι κυρτή, μπορούμε να ορίσουμε για κάθε $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \rho_t : \mathcal{U}_o &\longrightarrow \mathcal{U}_o \\ (x, v) &\mapsto (x, tv) \end{aligned}$$

Η ρ_t είναι αμφιδιαφορίσεις και $\rho_0 = i_o \circ \pi_o$, $\rho_t \circ i_o = i_o$, $\rho_1 = Id$, όπου $\pi_o : \mathcal{U}_o \rightarrow X$ η προβολή.

Ορίζουμε επίσης τους τελεστές $Q : \Omega^d(\mathcal{U}_o) \rightarrow \Omega^{d-1}(\mathcal{U}_o)$, $d = 1, 2, \dots$ με

$$Qa = \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t} a) dt$$

όπου v_t το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από τη σχέση

$$v_t \circ \rho_t = \frac{d\rho_t}{dt}$$

Υποστηρίζουμε ότι ο Q ικανοποιεί τη σχέση

$$Id - (i_o \circ \pi_o)^* = dQ + Qd \quad (*)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή στην ω , αφού $d\omega = 0$ και $(i_o \circ \pi_o)^* \omega = \pi_o^*(i_o \omega) = 0$ (αφού $i_o \omega = \omega|_X = 0$), έχουμε $\omega = dQ\omega$. Θέτοντας $\theta = Q\omega$ παίρνουμε το ζητούμενο. Μάλιστα για $x \in X$, $\rho_t(x) = \rho_t(i_o(x)) = x$ για κάθε t , επομένως $v_t|_X = 0$ και τελικά $\theta_x = Q\omega|_X = 0$.

Θα αποδείξουμε τώρα την $(*)$. Για $a \in \Omega^d(\mathcal{U}_o)$, $d = 1, 2, \dots$ έχουμε

$$\begin{aligned} Qda + dQa &= \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t} da) dt + \int_0^1 d\rho_t^*(\iota_{v_t} a) dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t} da) dt + \int_0^1 \rho_t^*(d\iota_{v_t} a) dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^*(\iota_{v_t} da + d\iota_{v_t} a) dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^* \mathcal{L}_{v_t} a dt \\ &= \int_0^1 \frac{d\rho_t^* a}{dt} dt \\ &= \rho_1^* a - \rho_0^* a \\ &= a - (i_o \circ \pi_o)^* a \end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφία

- [–]
- [ACG91] J.M. Arms, R.H. Cushman, M.J. Gotay, *A Universal Reduction Procedure for Hamiltonian Group Actions*, The Geometry of Hamiltonian Systems, T.Ratiu ed., M.S.R.I. Publ., 22, Springer-Verlag, 33-51
- [At82] M.F. Atiyah, *Convexity and Commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 1-15
- [Arn63] V.I. Arnold, *On a theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 61 (1967), 292-296
- [Arn89] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2nd edition), Springer-Verlag, New York, 1989
- [BH04] A. Banyaga, D.E. Hurtubise, *A proof of the Morse-Bott Lemma*, Expositiones Mathematicae, 22 (4) (2004), 365-373
- [BL97] L. Bates, E. Lerman, *Proper Group Actions and Symplectic Stratified Spaces*, Pacific Journal of Math., 181 (1997), 201-229
- [C90] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis* (2nd edition), Springer-Verlag, New York, 1990
- [CB97] R.H. Cushman, L.R. Bates, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, Birkhäuser, 1997
- [CS01] R. Cushman, J. Śniatycki, *Differential Structure of Orbit Spaces*, Canad. J. of Math., 53 (2001), 715-755
- [D08] T. Dieck, *Algebraic Topology*, EMS, 2008
- [Don96] S.K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost complex geometry*, Journal of Diff. Geom., 44 (1996), 666-705
- [DK00] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, *Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000
- [G04] R.E. Gompf, *Towards a topological characterization of symplectic manifolds*, J. of Symplectic Geom., 2 (2004), 177-206
- [GS82] V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity Properties of the Moment Mapping*, Invent. math., 67 (1982), 491-513
- [GP74] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 1974
- [H76] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, New York, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg, 1976
- [HPPS70] M. Hirsch, J. Palis, C. Pugh, M. Shub, *Neighborhoods of Hyperbolic Sets*, Inventiones math., 9 (1970), 121-134
- [Kir84] F. Kirwan, *Convexity properties of the moment mapping III*, Inventiones math., 77 (1984), 547-552
- [Kn02] A.W. Knap, *Lie Groups, Beyond an Introduction* (2nd edition), Birkhauder, 2002
- [L09] J.M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2009
- [MR86] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Reduction of Poisson Manifolds*, Lett. Math. Phys., 11 (1986), 161-169
- [MR99] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems* (2nd edition), Springer-Verlag, New York, 1999
- [MW74] J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry*, Reports on Math. Phys., 5 (1) (1974), 121-130
- [McS98] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology* (2nd edition), Oxford University Press, New York, 1998

- [Mey73] K.R. Meyer, *Symmetries and integrals in mechanics*, Dynamical Systems (Proc. Symp., Univ. Bahia, Salvador, 1971) 259-272, Academic Press, New York, 1973
- [Mich08] P.W. Michor, *Topics in Differential Geometry*, AMS, 2008
- [Mil65] J. Milnor, *Topology from the differentiable point of view*, The University Press of Virginia, 1965
- [Mil69] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1969
- [Mos65] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., 120 (1965), 286-294
- [Mun00] J.R. Munkres, *Topology* (2nd edition), New Jersey, Prentice Hall, 2000
- [N11] L. Nicolaescu, *An invitation to Morse Theory* (2nd edition), Springer, 2011
- [P61] R.S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math., (2) 73 (1961), 295-323
- [SL91] R. Sjamaar, E. Lerman, *Stratified Symplectic Spaces and Reduction*, Ann. of Math., (2) 134 (1991), 375-422
- [daS08] A. Canas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer, 2008
- [T94] C. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Research Letters, 1 (1994), 809-822
- [T95] C. Taubes, *More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants*, Math. Research Letters, 2 (1995), 9-14
- [W71] A. Weinstein, *Symplectic Manifolds and their Lagrangian Submanifolds*, Adv. in Math., 6 (1971), 329-346
- [W83] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. of Diff. Geom., 18 (1983), 523-557