ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εννοιολογικές και διαδικαστικές στρατηγικές σε έργα για τους ρητούς και η σχέση τους με τις προσεγγίσεις των μαθητών στη μελέτη των μαθηματικών

Μαρία Μπεμπένη

Α.Μ.: Δ 200809

Αθήνα 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την
……………………..από
Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1. Πόταρη Δέσποινα (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Παν/μίου Αθηνών	........……………...........
2. Βαμβακούση Ξένια	Εκλ. Λέκτορας Παν/μίου Ιωαννίνων	……….….....................
3. Σπύρου Παναγιώτης	Επίκουρος Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών	………..…...................

Ευχαριστίες

Στο τέλος αυτής της προσπάθειας θα ήθελα να:

- ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσά μου, Αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Δέσποινα Πόταρη για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου καθώς και την πολύτιμη γνώση που αποκόμισα σε μεθοδολογικά ζητήματα έρευνας κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών της μαθημάτων
- ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή
- εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην καθηγήτρια μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα και εκλ. Λέκτορα του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Ξένια Βαμβακούση για το διαρκές ενδιαφέρον της, κατά τη συστηματική παρακολούθηση της διπλωματικής μου εργασίας, τόσο σε επιστημονικό, όσο και σε ανθρώπινο επίπεδο. Την ευχαριστώ από καρδιάς που με εισήγαγε στους άγνωστους μέχρι τότε για μένα, γοητευτικούς χώρους έρευνας της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών και μου έδωσε τα κίνητρα να χαρώ κάθε στάδιο εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Επιπλέον ευχαριστώ:

- τις συνοδοιπόρους μου κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, Λίνα & Νάσια, Σοφία & Χριστίνα
- τη φίλη και συνάδελφο Γιώτα για την αμέριστη συμπαράστασή της καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας
- την οικογένειά μου που εξακολουθεί να με συγκινεί στηρίζοντας κάθε μου προσπάθεια.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται απόπειρα να διερευνηθούν τα εξής ερωτήματα:

α) Υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση για τους ρητούς συνδυάζονται από τους μαθητές;

β) Αν ναι, πόσο ευρείες μπορεί να είναι; Και σε τι μπορεί να οφείλονται;

Τα ερωτήματα αυτά άπτονται διαφορετικών χώρων έρευνας τόσο στο χώρο της Μαθηματικής Παιδείας, όσο και στο χώρο της Ψυχολογίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στα σχετικά θέματα. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά ανασκοπείται η βιβλιογραφία σχετικά με την αίσθηση του αριθμού και ειδικότερα του ρητού αριθμού. Από την ανασκόπηση αυτή προκύπτει ότι η αίσθηση του ρητού περιλαμβάνει διαδικαστικές και εννοιολογικές συνιστώσες, οι οποίες όμως δεν είναι εύκολο να διαχωριστούν εμπειρικά. Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια ανασκοπείται η βιβλιογραφία σχετικά με τη διάκριση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης, με έμφαση σε έρευνες που αφορούν τους ρητούς αριθμούς. Επειδή τα αποτελέσματα στο χώρο της ψυχολογίας δε συμφωνούν για το ποιο είδος αναπτύσσεται πρώτα, ανατρέχουμε σε δύο κριτικές που ασκήθηκαν στο ζήτημα του διαχωρισμού των δύο ειδών γνώσης τις οποίες και αναλύουμε διεξοδικά. Στη μία κριτική τίθεται ζήτημα μεθοδολογικής φύσης (κατά πόσο μπορούν να επινοηθούν έργα που μετρούν ξεχωριστά το κάθε είδος γνώσης) και στην άλλη τίθεται το ζήτημα των ατομικών διαφορών στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης ως μία πιθανή αιτία πού να εξηγεί την ασυμφωνία των αποτελεσμάτων των προηγούμενων ερευνών για το ποιο είδος προηγείται. Η δημιουργία τέτοιων διαφορών σε σχέση με το επίπεδο κατανόησης των ρητών από τους μαθητές οφείλεται ενδεχομένως στο είδος προσέγγισης που ακολουθούν οι μαθητές στη μελέτη των μαθηματικών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε την έρευνά μας που σε πρώτη φάση, είχε ως στόχο τη διερεύνηση του επιπέδου ανάπτυξης της αίσθησης του ρητού σε μαθητές Γ’ Γυμνασίου. Λαμβάνοντας υπόψη την κριτική που αναλύεται στο πρώτο κεφάλαιο για τη δυσκολία μέτρησης των δύο ειδών γνώσης, σχεδιάστηκε μία ποιοτική μελέτη για να παρατηρηθεί το είδος των στρατηγικών που ακολουθούν οι μαθητές σε έργα για τους ρητούς, ανεξάρτητα από το αν τα έργα εμπίπτουν σε διαδικαστικές/εννοιολογικές συνιστώσες. Υποθέσαμε ότι θα βρεθούν μαθητές δύο «ακραίων» προφίλ σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης των έργων για τους ρητούς, αυτοί που ακολουθούν συστηματικά διαδικαστική προσέγγιση και αποτυγχάνουν σε έργα με εννοιολογική στόχευση («διαδικαστικό» προφίλ) καθώς και μαθητές με φτωχές εννοιολογικές γνώσεις που θα χρησιμοποιούν με επιτυχία εννοιολογικές στρατηγικές («εννοιολογικό» προφίλ). Στη δεύτερη φάση της έρευνας αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τις αιτίες που προκαλούν τις ατομικές διαφορές που αναμένουμε. Προβλέψαμε ότι οι διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές με το διαδικαστικό και εννοιολογικό προφίλ αντιμετωπίζουν τα έργα για τους ρητούς συνοδεύονται κι από διαφορές στον τρόπο που προσεγγίζουν τα μαθηματικά και τη μελέτη τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται διεξοδικά τα αποτελέσματα της έρευνας. Τα ευρήματα είναι συμβατά με την υπόθεσή μας ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τη διαδικαστική/εννοιολογική γνώση και μάλιστα είναι δυνατό να παρατηρηθούν «ακραία» προφίλ - μαθητές που αντιμετωπίζουν τα έργα για τους ρητούς μόνο με διαδικαστικές ή μόνο με εννοιολογικές στρατηγικές. Επιπλέον, τα ευρήματα δίνουν μία ένδειξη ότι οι διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης συνοδεύονται κι από διαφορές στον τρόπο που προσεγγίζουν τα μαθηματικά και τη μελέτη τους. Η πεποίθηση των μαθητών ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και διαδικασιών ασύνδετων μεταξύ τους, τους εμποδίζει να ακολουθήσουν στρατηγικές στη μελέτη που να επιτρέπουν την κατασκευή νοήματος και την ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το επίπεδο κατανόησής τους στους ρητούς αριθμούς. Αντίθετα η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύμπλεγμα εννοιών επιτρέπει στους μαθητές να ακολουθούν στρατηγικές στη μελέτη που υποστηρίζουν τη σύνδεση εννοιών και συνεπάγεται την προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση τους στους ρητούς αριθμούς.

1. Θεωρητικό πλαίσιο

1.1. Αριθμητικός εγγραμματισμός και αίσθηση του αριθμού

Εδώ και δεκαετίες ο *μαθηματικός εγγραμματισμός* αναγνωρίζεται ως κεντρικός εκπαιδευτικός στόχος με ιδιαίτερες κοινωνικές προεκτάσεις, ενώ έχουν επισημανθεί διάφορες συνέπειες της έλλειψής του (π.χ. Paulos, 1988). Το ενδιαφέρον για την κοινωνική διάσταση του μαθηματικού εγγραμματισμού διαφαίνεται σε διάφορες απόπειρες ορισμού του. Σύμφωνα με την OECD/PISA (2003), για παράδειγμα, μαθηματικός εγγραμματισμός είναι η ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται το ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, να κάνει θεμελιωμένες κρίσεις και να τα συνδέει με τέτοιους τρόπους ώστε να ανταποκρίνονται στις ανάγκες της σημερινής και μελλοντικής του ζωής ως ένας χρήσιμος, μη επαναπαυόμενος και σκεπτόμενος πολίτης.

Σημαντική συνιστώσα του *μαθηματικού εγγραμματισμού* αποτελούν οι γνώσεις και δεξιότητες που άπτονται του αριθμού και της ποσότητας, οι οποίες απαντώνται στη βιβλιογραφία με διάφορους όρους και ορισμούς. Ο De Lange (1999), για παράδειγμα, προτείνει τον όρο **αριθμητικός εγγραμματισμός ή αριθμητισμός (numeracy)** που αφορά στην ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται αριθμούς και δεδομένα και να κάνει εκτιμήσεις για ένα πραγματικό πρόβλημα, καθώς και τον ποσοτικό εγγραμματισμό (quantitative literacy) που αφορά στις μαθηματικές ικανότητες που σχετίζονται με την ποσότητα. Η Hoyles (2002) προτάσσει την κατανόηση ποσοτήτων και αναλογιών, τους ακριβείς υπολογισμούς με ενδιάμεσους νοητικούς υπολογισμούς και την εκτίμηση αριθμητικών αποτελεσμάτων. Ο Steen (2001) ορίζει ως ποσοτικό εγγραμματισμό (Q.L.). την ικανότητα να χειριζόμαστε αποτελεσματικά τις ποσοτικές πλευρές της ζωής. Ωστόσο ο Steen αναφέρει ότι, σύμφωνα με τους περισσότερους ερευνητές, ποσοτικός εγγραμματισμός είναι η γνώση του ατόμου που απαιτείται για να εκτελεί κάποιος αριθμητικές πράξεις καθώς κι η ικανότητα να χειρίζεται τη σχετική με τους αριθμούς γνώση όταν καλείται να δώσει λύση σε πραγματικά προβλήματα. Κάποιοι ερευνητές ταυτίζουν τον μαθηματικό εγγραμματισμό με τον ποσοτικό εγγραμματισμό, ή τον αριθμητισμό με τον ποσοτικό εγγραμματισμό, παρ’ όλα αυτά τα όρια δεν είναι καθόλου σαφή.

Ο όρος *αίσθηση του αριθμού* (number sense) προέκυψε από την ανάγκη να αποκτήσει ένα πιο λειτουργικό χαρακτήρα η περιγραφή αυτού του σύνθετου πλέγματος γνώσεων, δεξιοτήτων και διάθεσης πρόσφορης για τα μαθηματικά, τα οποία υπονοούνται στους παραπάνω ορισμούς (McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

Πριν προχωρήσουμε σε μια πιο διεξοδική ανάλυση του τι είναι η *αίσθηση του αριθμού*, πώς αναλύεται και πώς ελέγχεται εμπειρικά, θα θέλαμε να σταθούμε σε δύο σημαντικά σημεία, από τα οποία πηγάζει και το ενδιαφέρον μας για το συγκεκριμένο θέμα. Καταρχήν, ήδη από τα παραπάνω έχει διαφανεί ότι μια βαθιά και ευέλικτη κατανόηση για τον αριθμό υπερβαίνει κατά πολύ την ικανότητα αναπαραγωγής αλγοριθμικών διαδικασιών. Ωστόσο, ένα πλήθος ερευνών διεθνώς δείχνουν ότι μια μεγάλη μερίδα παιδιών διαφόρων ηλικιών αποτυγχάνει σε έργα που παρεκκλίνουν έστω και ελάχιστα από τους αλγορίθμους και τις μεθόδους που έχουν διδαχθεί στο σχολείο, αποτυγχάνει να αναγνωρίσει τις συνθήκες υπό τις οποίες αυτά είναι εφαρμόσιμα σε καταστάσεις εντός και εκτός σχολείου, ενώ συχνά αποτυγχάνει και στην απλή εφαρμογή τους, διότι τις αντιμετωπίζει ως μια σειρά βημάτων που στερούνται νοήματος (βλ. Moss, 2005, για μια περιεκτική ανασκόπηση).

Επιπλέον, φαίνεται ότι η βαθιά και ευέλικτη κατανόηση των αριθμών μπορεί να υποστηρίξει και τη γενικότερη μαθηματική ανάπτυξη, ενώ η έλλειψή της να την εμποδίσει (Burns, 1989; Leutzinger, & Bertheau, 1989; McIntosh et al., 1992; Reys, Reys, Emanuelsson, Johnsson, & Yang, 1999).

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι αίσθηση του αριθμού είναι ένα πολύ σημαντικό ζήτημα στη μαθηματική εκπαίδευση, το οποίο ενδεχομένως να διαμορφώνει από τα πρώτα χρόνια της σχολικής ζωής τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, με ό,τι αυτό συνεπάγεται. Η επαφή με τους αριθμούς αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη επαφή του ανθρώπου με τα μαθηματικά άρα είναι ικανή να διαμορφώσει και τη στάση τους απέναντι σε αυτά. Η ενδεχόμενη δυσκολία στον ευέλικτο χειρισμό των αριθμών, μπορεί να δημιουργήσει ακόμα και αποστροφή προς τα μαθηματικά (Kamisnki, 2002), η οποία με τη σειρά της μπορεί μακροπρόθεσμα να επηρεάσει σημαντικές αποφάσεις της ζωής του ατόμου, όπως για παράδειγμα την επιλογή του επαγγέλματος, αποκλείοντας ένα μεγάλο εύρος επιστημονικών αντικειμένων των οποίων τα μαθηματικά αποτελούν βασικό εργαλείο.

1.2. Τι είναι αίσθηση του αριθμού;

Ο Berch (2005) έκανε μια διάκριση μεταξύ της «πρώτης» και «δεύτερης» τάξης αίσθησης του αριθμού (lower-order και higher-order, αντίστοιχα) αναφερόμενος σε μία έμφυτη (αντιληπτική) ικανότητα της ποσότητας καθώς και σε μία επίκτητη εννοιολογική, αντίστοιχα. Στην πρώτη, αναφέρονται κυρίως ψυχολόγοι και νευροψυχολόγοι, οι οποίοι οριοθετούν την αίσθηση του αριθμού «*σε μια στοιχειώδη διαίσθηση για την ποσότητα, συμπεριλαμβανομένης της ικανότητας να αναγνωρίζει κανείς γρήγορα και με ακρίβεια μικρές ποσότητες, να συγκρίνει αριθμητικά μεγέθη, να μετράει και να κατανοεί απλές αριθμητικές πράξεις*» (Berch, 2005, σελ. 334). Η «δεύτερης» τάξης αίσθηση του αριθμού, στην οποία αναφέρονται κυρίως οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, δεν εξαντλείται στα παραπάνω χαρακτηριστικά (αν και τα περιλαμβάνει). Πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει την εις βάθος κατανόηση των μαθηματικών αρχών και ιδιοτήτων, έναν υψηλό βαθμό ευχέρειας και ευελιξίας με τις πράξεις και τις διαδικασίες, την αναγνώριση για την αυτοτέλεια και την κανονικότητα των μαθηματικών και την άνεση να δουλεύει κάποιος με αριθμητικές εκφράσεις – η ανάπτυξη των οποίων προϋποθέτει και τη συστηματική μαθηματική εκπαίδευση.

Έχουν γίνει πολλές απόπειρες να ορισθεί η «δεύτερης» τάξης αίσθηση του αριθμού. Κατά τους Reys, Reys και Yang (1998), η αίσθηση του αριθμού είναι μια ενορατική αίσθηση για τους αριθμούς και τις διάφορες χρήσεις τους και ερμηνείες, λ.χ. η εκτίμηση για διάφορα επίπεδα της ακρίβειας όταν κάνουμε υπολογισμούς, η ικανότητα να εντοπίζουμε αριθμητικά λάθη, μια προσέγγιση της κοινής λογικής για να χειριζόμαστε τους αριθμούς. Η αίσθηση του αριθμού δεν είναι ένα πεπερασμένο σύνολο δεξιοτήτων που ένας μαθητής έχει είτε δεν έχει, ούτε αποτελεί μία ενότητα που μπορεί να διδαχθεί. Πάνω απ' όλα, η αίσθηση του αριθμού χαρακτηρίζεται από μια επιθυμία να καταλαβαίνουμε αριθμητικές καταστάσεις. Είναι ένας τρόπος σκέψης που πρέπει να κυριαρχήσει σε όλες τις περιπτώσεις διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, για να έχουν νόημα τα μαθηματικά. Η Sowder (1994), όρισε την αίσθηση του αριθμού ως τις προσεκτικά τακτοποιημένες έννοιες που επιτρέπουν τη συσχέτιση των ιδιοτήτων των αριθμών με τις ιδιότητες των πράξεων. Σύμφωνα με τον Howden (1989), η αίσθηση του αριθμού μπορεί να περιγραφεί ως μία καλή διαίσθηση για τους αριθμούς και τις μεταξύ τους σχέσεις. Αναπτύσσεται προοδευτικά ως αποτέλεσμα της εξερεύνησης των αριθμών, της σύλληψής τους σε διαφορετικά πλαίσια και τη σύνδεση αυτών με τρόπους που δεν περιορίζονται από τους παραδοσιακούς αλγορίθμους. Οι Turkel και Newman (1988) αναφέρονται στα άτομα με ανεπτυγμένη την αίσθηση του αριθμού ως αυτά που έχουν άνεση με τους αριθμούς και που γνωρίζουν πώς χρησιμοποιούνται και πώς ερμηνεύονται.. Σύμφωνα με τους Schneider και Thompson (2000), η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην κατανόηση του αριθμού και των αριθμητικών σχέσεων και την ικανότητα της ευέλικτης μεταφοράς μεταξύ πολλαπλών αριθμητικών παραστάσεων των δεδομένων μεγεθών.

Οι Verschaffel και De Corte (1996) τονίζουν τη σύνθετη, πολυδιάστατη και ιδιαίτερη φύση της αίσθησης του αριθμού, και επισημαίνουν ότι δεν μπορεί να χωριστεί σε κεφάλαια ενός εγχειριδίου ή σε διδακτικές ενότητες και ότι η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι αποτέλεσμα ενός συνόλου μαθηματικών δραστηριοτήτων και όχι μιας ενότητας με ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες.

Είναι φανερό ότι τέτοιου είδους ορισμοί δεν είναι λειτουργικοί, με την έννοια ότι είναι πολύ γενικοί και δε σκιαγραφούν την αίσθηση του αριθμού ως εμπειρικά ελέγξιμη. Κάποιες προσπάθειες, ωστόσο, έχουν γίνει και προς αυτή την κατεύθυνση (NCTM, 1989; Schull, 1998). Σύμφωνα με το NCTM, τα παιδιά με έντονη την αίσθηση του αριθμού, έχουν καταλάβει καλά την έννοια του αριθμού, αναγνωρίζουν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των αριθμών, τη σχετική και απόλυτη ποσότητα των μεγεθών, εκτιμούν το πώς οι πράξεις επηρεάζουν τους αριθμούς και έχουν αναπτύξει σημεία αναφοράς για να αντιλαμβάνονται την αξία των αριθμών.

Μια πιο συστηματική απόπειρα ορισμού και ανάλυσης της αίσθησης του αριθμού έγινε από τους McIntosh et al (1992), οι οποίοι όρισαν την αίσθηση του αριθμού ως την κατανόηση του αριθμού και των πράξεων σε συνδυασμό με την ικανότητα να χρησιμοποιεί το άτομο αυτή του την κατανόηση με ευέλικτους τρόπους για να κάνει κρίσεις γύρω από τα μαθηματικά και να αναπτύσσει χρήσιμες στρατηγικές για το πώς να χειρίζεται τους αριθμούς και τις πράξεις. Οι αριθμοί αντιμετωπίζονται ως πλούσιες σε νοήματα μαθηματικές οντότητες (entities) και οι μαθηματικοί χειρισμοί και τα εξαγόμενα αποκτούν νόημα. Όσοι μπορούν να αντιμετωπίσουν τους αριθμούς με αυτό τον τρόπο, κάνουν χρήση μιας σειράς από εσωτερικούς ελέγχους για να κρίνουν τη λογικότητα των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην τάση και την ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί τους αριθμούς και τις ποσοτικές μεθόδους ως έναν τρόπο για να επικοινωνεί, να επεξεργάζεται και να ερμηνεύει τις πληροφορίες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την προσδοκία ότι οι αριθμοί είναι χρήσιμοι και ότι τα μαθηματικά έχουν μία συγκεκριμένη κανονικότητα.

Η συνεισφορά των McIntosh et al. (1992) έγκειται στη συστηματική ανάλυση της αίσθησης του αριθμού σε συνιστώσες, η οποία λαμβάνει υπόψη χαρακτηριστικά όπως αυτά που διατυπώθηκαν από το NCTM, αλλά εμπλουτίζεται και με κάποια πιο συγκεκριμένα. Σύμφωνα με τους McIntosh et al. (1992) η αίσθηση του αριθμού είναι σημαντική γιατί επιτρέπει στο άτομο να αναπτύσσει και να χρησιμοποιεί υπολογιστικές μεθόδους, συμπεριλαμβανομένων των υπολογισμών με «χαρτί και μολύβι», καθώς και των νοητικών υπολογισμών και εκτιμήσεων. Πιο συγκεκριμένα, διέκριναν τρία πεδία που συνιστούν την αίσθηση του αριθμού (βλ. Πίνακα 1).

Πίνακας 1: Συνιστώσες της Αίσθησης του αριθμού κατά McIntosh et al. (1992)

Γνώση και ευχέρεια σχετικά με τους αριθμούς	Αίσθηση της διάταξης των αριθμών
	Διασύνδεση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων για τους αριθμούς
	Αίσθηση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών
	Σύστημα «βολικών» αριθμών ως σημεία αναφοράς (π.χ., για τη διάταξη)
Γνώση και ευχέρεια σχετικά με τις πράξεις	Κατανόηση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς
	Κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων των πράξεων
	Κατανόηση της σχέσης μεταξύ των πράξεων
Εφαρμογή της γνώσης και της ευχέρειας με τους αριθμούς και τις πράξεις τους στην επίλυση προβλημάτων	Κατανόηση της σχέσης μεταξύ του πλαισίου προβλήματος και των απαιτούμενων πράξεων
	Γνώση ότι υπάρχουν πολλές στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος
	Χρήση κατάλληλης αναπαράστασης ή μεθόδου
	Έλεγχος της λογικότητας των δεδομένων και των αποτελεσμάτων

Το πρώτο πεδίο περιλαμβάνει τη γνώση και την ευχέρεια σχετικά με τους αριθμούς. Παραδείγματα συνιστωσών του πρώτου πεδίου είναι η αίσθηση της διάταξης των αριθμών, η διασύνδεση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων για τους αριθμούς, η αίσθηση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών και η χρήση «βολικών» αριθμών ως σημείων αναφοράς για την εκτίμηση του μεγέθους άλλων αριθμών. Το δεύτερο πεδίο αντιστοιχεί στη γνώση και την ευχέρεια σχετικά με τις πράξεις. Περιλαμβάνει την κατανόηση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς, των ιδιοτήτων των πράξεων και της σχέσης μεταξύ των πράξεων. Τέλος, το τρίτο πεδίο αφορά το πώς η γνώση και η ευχέρεια με τους αριθμούς και τις πράξεις εφαρμόζεται στην επίλυση προβλημάτων. Περιλαμβάνει την κρίση για το αν απαιτείται ένας ακριβής ή προσεγγιστικός υπολογισμός, τη γνώση ότι υπάρχουν πολλές στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος, τη χρήση της κατάλληλης αναπαράστασης ή μεθόδου και τον έλεγχο της λογικότητας των δεδομένων και των αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση των McIntosh et al. ήταν και παραμένει ένα βασικό σημείο αναφοράς στο χώρο της έρευνας για την αίσθηση του αριθμού, αν και έχει δεχθεί κριτικές (π.χ., Verschaffel, & De Corte, 1996). Μια παρατήρηση που μπορεί να γίνει για τη συγκεκριμένη ανάλυση είναι ότι δίνεται μεγάλη έμφαση στην εννοιολογική πλευρά της αίσθησης του αριθμού και πολύ λιγότερη στη διαδικαστική πλευρά. Το αίτημα για έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών λειτούργησε εν μέρει και ως αντίδραση στην έμφαση στις αλγοριθμικές διαδικασίες που δινόταν στα «παραδοσιακά» σχολικά μαθηματικά. Ωστόσο, η σχέση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης στη μάθηση γενικά, και στη μάθηση των μαθηματικών ειδικότερα, είναι σύνθετη και έχει απασχολήσει ερευνητές τόσο στο χώρο της ψυχολογίας, όσο και στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών.

1.3. Διαδικαστική γνώση VS Εννοιολογική γνώση

Η διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, με ρίζες στο χώρο της Γνωστικής Ψυχολογίας, έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως και στο χώρο της μάθησης των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τους Rittle-Johnson και Siegler (1998), η διαδικαστική γνώση περιλαμβάνει τις συγκεκριμένες διαδικασίες για τη επίλυση προβλημάτων, που καλούνται αλγόριθμοι ή στρατηγικές. Ως διαδικαστική γνώση μπορεί να οριστεί η ικανότητα εκτέλεσης μιας καθορισμένης σειράς βημάτων που οδηγούν στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Η χρήση της διαδικαστικής γνώσης δεν απαιτεί σημαντικό επίπεδο κατανόησης από το μέρος του μαθητή: πρέπει απλά να εκτελέσει σωστά μία διαδικασία για να βρει τη σωστή λύση. Μπορεί να αυτοματοποιηθεί σε διαφορετικούς βαθμούς και εξαρτάται από το βαθμό εξάσκησης. Αυτό το είδος γνώσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς κάποιος να έχει ιδιαίτερη γνώση και ιδιαίτερη προσοχή. Ωστόσο, αυτή η αποτελεσματικότητα έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι ευέλικτη (Schneider, & Stern, 2010) και συνδέεται με συγκεκριμένα είδη προβλημάτων. Οι Hiebert και Lefevre (1986) χαρακτήρισαν τη διαδικαστική γνώση ως ασύνδετες πληροφορίες που δε σχετίζονται με μαθηματικές ιδέες. Γενικά, η διαδικαστική γνώση αναφέρεται στην ικανότητα του μαθητή να εκτελεί συγκεκριμένες διαδικασίες για να λύσει ένα συγκεκριμένο τύπο προβλήματος, χωρίς να καταλαβαίνει γιατί δουλεύει η διαδικασία. Σύμφωνα με τον Byrnes (1992), η διαδικαστική γνώση αποτελεί το σύνολο των αλγορίθμων, κανόνων, για την ολοκλήρωση μιας δραστηριότητας (knowing how). Είναι μία καθοδηγούμενη από το στόχο πράξη που περιέχει μνημονικές στρατηγικές, αλγορίθμους και κανόνες. Περιλαμβάνει την αλληλουχία συγκεκριμένων πράξεων που θεωρούνται ότι παράγουν το σωστό αποτέλεσμα που στην περίπτωση των μαθηματικών είναι η σωστή απάντηση σε ένα πρόβλημα.

Από την άλλη μεριά, η εννοιολογική γνώση σχετίζεται με την άδηλη ή μη κατανόηση των αρχών που διέπουν ένα γνωστικό πεδίο, καθώς και την ικανότητα δημιουργίας διασυνδέσεων μεταξύ σχετικών «μονάδων» γνώσης (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001), όπως η ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας (Hierbert, & Lefevre, 1986). Οι Hiebert και Lefevre όρισαν την εννοιολογική γνώση ως ένα δίκτυο, μέσα στο οποίο οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών είναι τόσο σημαντικές όσο και οι ίδιες οι μαθηματικές έννοιες. Η εννοιολογική γνώση εκτείνεται πέραν της στείρας απομνημόνευσης κανόνων και αλγορίθμων και περιλαμβάνει την πραγματική μαθηματική κατανόηση ενός δεδομένου προβλήματος και τη σχέσης του με ένα ευρύτερο σύμπλεγμα μαθηματικών εννοιών, δηλαδή κάποιος που εκτελεί μία διαδικασία βασίζεται σε μία εκτεταμένη κατανόηση των εννοιών. Σύμφωνα με τον Byrnes (1992), η εννοιολογική γνώση (knowing that), χαρακτηρίζεται ως η ικανότητά μας να κάνουμε διασυνδέσεις στη γνώση κι όχι ως η ικανότητά μας να απομνημονεύουμε ασύνδετες πληροφορίες. Οι διαδικασίες είναι γραμμικά εκτελέσιμες κι ανεξάρτητες από την έννοια. Κάποιος που εκτελεί μία διαδικασία είναι σε θέση να εξηγήσει τι σημαίνουν τα στοιχεία που εφάρμοσε.

Συνοψίζοντας, η εννοιολογική γνώση :

- αφορά στην ικανότητα να κάνουμε διασυνδέσεις στη γνώση (Byrnes, 1992)
- αφορά στην ικανότητα να αντιλαμβανόμαστε πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας (Byrnes, 1992)
- βοηθάει στην επιλογή της διαδικασίας για τη λύση ενός προβλήματος (Rittle-Johnson et al., 2001)
- είναι πλούσια σε συσχετίσεις (Hierbert, & Lefevre, 1986)
- είναι συνυφασμένη με την διαισθητική και την τυπική γλώσσα σε μία προσωπική βάση (Kieren, 1993).

Ένα θέμα που απασχολεί τους ερευνητές εδώ και δεκαετίες είναι το πώς το ένα είδος γνώσης επηρεάζει το άλλο κατά την ανάπτυξή τους. Υπάρχουν τέσσερις θεωρητικές απόψεις για τη συσχέτιση των δύο ειδών γνώσης, καθεμία από τις οποίες στηρίζεται σε σχετική έρευνα. Η σχέση μπορεί να είναι μονόδρομη προς την διαδικαστική γνώση (concepts-first approach; Geary, 1994; Gelman, & Williams, 1998; Halford, 1993), μονόδρομη προς την εννοιολογική γνώση (procedures-first approach; Fuson, 1988; Karmiloff-Smith, 1992; Siegler, & Stern, 1998), ή αμφίδρομη (iterative model; Rittle-Johnson et al., 2001) και τέλος τα δύο γνώσης μπορεί να μη σχετίζονται (Resnick, 1982).

Οι περισσότερες έρευνες σχετικά με τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση εξετάζουν ποιο είδος γνώσης προηγείται. Σύμφωνα με τις concepts-first theories, τα παιδιά αναπτύσσουν αρχικά (ή γεννιούνται με) βασικές εννοιολογικές αρχές σε ένα πεδίο και στη συνέχεια τη χρησιμοποιούν για να γενικεύσουν και να επιλέγουν διαδικασίες για να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα (Geary, 1994; Gelman, & Williams, 1998; Halford, 1993). Σχετική έρευνα έχει δείξει ότι αυτά τα μαθηματικά πεδία ποικίλουν, από την απλή αριθμητική έως αναλογική σκέψη (Byrnes, 1992; Cowan, & Renton, 1996; Dixon, & Moore, 1996; Hiebert, & Wearne, 1996; Siegler, & Crowley, 1994). Αυτή η θεωρία χρησιμοποιείται για να δικαιολογηθεί η διδασκαλία που εστιάζει στην εννοιολογική γνώση πριν διδαχθεί η διαδικαστική (NTCM, 1989).

Σύμφωνα με τις procedures-first theories, η διαδικαστική γνώση επιτρέπει την ανάπτυξη της εννοιολογικής (Baroody, 2003; Kadijevich, 2003), η εννοιολογική γνώση αναπτύσσεται μετά τη διαδικαστική, τα παιδιά μαθαίνουν διαδικασίες για να λύνουν προβλήματα σε κάποια ενότητα των μαθηματικών και στη συνέχεια εξάγουν τις έννοιες από την εμπειρία τους από τη λύση προβλημάτων (Fuson, 1988; Karmiloff-Smith, 1992; Siegler, & Stern, 1998). Μια δεδομένη διαδικασία μπορεί να διευκολύνει την εκμάθηση των εννοιών όπως για παράδειγμα στο μέτρημα και στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (Byrnes, & Wasik, 1991; Fuson, 1988; Hiebert, & Wearne, 1996; Karmiloff-Smith, 1992; Siegler, & Stern, 1998).

Σύμφωνα με το επαναληπτικό (iterative) μοντέλο των Rittle- Johnson et al. (2001), η αύξηση στο ένα είδος γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του άλλου είδους γνώσης, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε αύξηση στο πρώτο είδος γνώσης. Η προηγούμενη έρευνα στη διαδικαστική-εννοιολογική γνώση είναι συμβατή με αυτή την αμφίδρομη σχέση της ανάπτυξης των δύο ειδών γνώσης. Πρώτον, τα παιδιά συχνά έχουν μία μερική γνώση διαδικασιών και εννοιών (π.χ. Fuson, 1988). Δεύτερον, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο ειδών γνώσης, δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το ένα είδος γνώσης τόσο μεγαλύτερο είναι και το άλλο (Byrnes, & Wasik, 1991; Hiebert, & Wearne, 1996), και τρίτον, η βελτίωση του ενός τύπου γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση και του άλλου τύπου γνώσης (Rittle-Johnson, & Alibali, 1999). Άρα, η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση αναπτύσσονται παράλληλα, επηρεάζουν η μία την άλλη αυξητικά, χωρίς να προηγείται αυστηρά το ένα είδος γνώσης (Rittle-Johnson et al., 2001).

Το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle Johnson et al. (2001) μπορεί να αντιμετωπίσει δύο πολύ σημαντικά θέματα:

- μπορεί το ένα είδος γνώσης να είναι περισσότερο ανεπτυγμένο από το άλλο, ωστόσο δεν έχει νόημα να λέμε ότι κάποιος κατέχει ή όχι το ένα από τα δύο είδη (Sophian, 1997)
- είναι πιθανό να προηγείται στην ανάπτυξή του ένα από τα δύο είδη γνώσης, ωστόσο δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιο είναι αυτό. Η έκθεση στις διαδικασίες ή

τις έννοιες καθορίζει αν υπάρχει αρχικά διαδικαστική ή εννοιολογική γνώση (Rittle Johnson, & Siegler, 1998).

Οι Rittle Johnson et al. (2001) έλεγξαν την ισχύ του επαναληπτικού μοντέλου για τη διαδικαστική-εννοιολογική γνώση και στην περίπτωση των δεκαδικών. Με μια σειρά πειραματικές παρεμβάσεις, έδειξαν ότι η ενίσχυση της εννοιολογικής γνώσης οδήγησε σε ενίσχυση της διαδικαστικής και αντίστροφα, εύρημα που στηρίζει τη θέση των ερευνητών για το επαναληπτικό μοντέλο.

1.3.1. Κριτικές στο χώρο έρευνας για τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση

Πρόσφατα, οι Hallett, Nunes και Bryant (2010) ισχυρίστηκαν ότι η μέχρι τώρα έρευνα δε λαμβάνει υπόψη τις ατομικές διαφορές των παιδιών στον τρόπο που συνδυάζουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση. Ερευνώντας την κατανόηση των κλασμάτων, υπέθεσαν ότι υπάρχουν παιδιά στα οποία υπερτερεί η εννοιολογική γνώση, παιδιά στα οποία υπερτερεί η διαδικαστική γνώση και παιδιά στα οποία η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση βρίσκονται σε παρόμοια επίπεδα ανάπτυξης. Αναλύοντας τις επιδόσεις 318 παιδιών της Δ΄ και Ε΄ δημοτικού σε εννοιολογικά και διαδικαστικά έργα, βρήκαν πράγματι τις προβλεπόμενες ατομικές διαφορές. Οι ερευνητές δεν εξηγούν διεξοδικά πώς προκύπτουν αυτές οι διαφορές, ωστόσο εικάζουν ότι δεν είναι αναπτυξιακές, αλλά ότι οφείλονται στην ευχέρεια και το ενδιαφέρον που κάθε παιδί διαθέτει για την εκμάθηση εννοιών και διαδικασιών. Ανασκοπώντας τη σχετική βιβλιογραφία, οι Schneider και Stern (2010) άσκησαν κριτική σε μεθοδολογικά ζήτημα που αφορούν στον εμπειρικό έλεγχο των δύο ειδών γνώσης. Σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, καμία από τις έρευνες δε δείχνει ξεκάθαρα ότι έχουν μετρηθεί ξεχωριστά τα δύο είδη γνώσης με το σωστό τρόπο. Σε κάποιες έρευνες είναι πιθανό να έχει μετρηθεί μόνο το ένα είδος γνώσης με τα δύο μέτρα που υποτίθεται θα μετρούσαν τα δύο είδη γνώσης. Υποστήριξαν ότι είναι πολύ δύσκολο να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την υποτιθέμενη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης διατυπώνοντας τα εξής επιχειρήματα:

- κάθε μέτρο μπορεί να προκαλεί αλλαγές στο ποσό του είδους της γνώσης που υποτίθεται ότι θέλουμε να μετρήσουμε
- κάθε μέτρο παρουσιάζει δεν παρουσιάζει σταθερό σφάλμα μέτρησης

- η διαφορά του κάθε μέτρου έχει να κάνει με τις διαφορετικές ικανότητες του ατόμου π.χ. αν η εννοιολογική γνώση μετράται με βάση την εξήγηση ενός αφηρημένου κανόνα, τότε η κατανόηση του κανόνα μετράται με βάση την ικανότητα της αιτιολόγησης, την ευφράδεια, το λεξιλόγιο. Αντίστοιχα, όταν η διαδικαστική γνώση εξετάζεται με διαδικαστικά προβλήματα που περιέχουν διαγράμματα, η γνώση για τα διαγράμματα και το αναπαριστώμενο περιεχόμενο επηρεάζει την αξιολόγησή της.
- οι έννοιες είναι στατικές δομές που μπορούν να ενεργοποιηθούν μέσω της διαδικαστικής γνώσης (Goldstone, & Kersten, 2003; Medin, 1989) και νέες διαδικασίες μπορούν να προκύψουν από τις έννοιες (Geary, 1994). Έτσι, η επίδοση στις δραστηριότητες που εξετάζουν εννοιολογική γνώση μπορεί σε κάποιο βαθμό να σημαίνει και διαδικαστική γνώση και αντίστροφα (Rittle Johnson et al., 2001).

Ποιες είναι οι εμπειρικές ενδείξεις που δείχνουν ότι δύο μέτρα αξιολογούν με σωστό τρόπο τα δύο είδη γνώσης; Σύμφωνα με τους Schneider και Stern (2010), τα συνήθη μέτρα που χρησιμοποιούνται δεν είναι αξιόπιστα για να μετρηθεί το ένα είδος γνώσης ανεξάρτητα από το άλλο. Οποιοδήποτε αποτέλεσμα σχετικά με τη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο εκτός κι αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά μέτρα για το ίδιο είδος γνώσης με μία πολυμεθοδική προσέγγιση π.χ. για τη μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης να ορίσουμε συγκεκριμένες συνιστώσες.

Στον προβληματισμό των Schneider και Stern (2010), εντάσσεται και το ακόλουθο ερώτημα: Σε ποιο βαθμό είναι δυνατόν να επινοηθούν έργα που μετρούν αποκλειστικά εννοιολογική ή διαδικαστική γνώση; Για παράδειγμα, η σύγκριση ετερωνύμων κλασμάτων είναι ένα έργο που μπορεί να αποκαλύψει φτωχή εννοιολογική κατανόηση για τα κλάσματα (όταν π.χ. ένα παιδί βασίζει τη σύγκριση σε μόνο έναν από τους δύο όρους των κλασμάτων). Η επιτυχία στο έργο, όμως, μπορεί να εξασφαλιστεί και με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου, χωρίς αυτό να συνεπάγεται απαραίτητα εννοιολογική κατανόηση. Από την άλλη μεριά, σε πολλές περιπτώσεις, η αναγνώριση ότι μια αλγοριθμική διαδικασία είναι κατάλληλη και απαραίτητη προαπαιτεί εννοιολογική κατανόηση. Γενικότερα, η κατασκευή έργων που εξετάζουν διαδικαστική γνώση χωρίς να εξετάζουν εννοιολογική και αντίστροφα είναι δύσκολη υπόθεση (Silver, 1986), διότι αυτού του είδους τα έργα είναι ευαίσθητα στο υποκείμενο, το περιεχόμενο καθώς και το πλαίσιο εφαρμογής (Haapasalo, 2003).

Τα μεθοδολογικά αυτά ζητήματα ανακύπτουν κυρίως στο χώρο έρευνας της Γνωστικής/Αναπτυξιακής και Εκπαιδευτικής Ψυχολογίας, όπου δραστηριοποιούνται πολλοί ερευνητές που ενδιαφέρονται για την ανάπτυξη και τη μάθηση στα μαθηματικά. Από την άλλη μεριά, το ζήτημα της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (όχι απαραίτητα με αυτή την ορολογία) ανακύπτει και σε γνωστές θεωρητικές αναλύσεις στο χώρο έρευνας για τη Μαθηματική Εκπαίδευση.

1.4. Η πλευρά της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Σύνδεση Διαδικαστικής-Εννοιολογικής γνώσης με τις θεωρίες Sfard, Gray-Tall, Dubinsky

Το θέμα των διαδικασιών-εννοιών, εκτός από επιστήμονες της Γνωστικής Ψυχολογίας, απασχόλησε και την επιστημονική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό που οι ψυχολόγοι ονομάζουν διαδικαστική γνώση, οι επιστήμονες της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρούν ότι συμπληρώνει την εννοιολογική γνώση και τονίζουν ότι σε καμία περίπτωση τα δύο είδη δε μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα αλλά υπάρχει μία συνεχής αλληλεπίδραση. Διατυπώθηκαν τρεις πολύ σημαντικές θεωρίες οι οποίες αναλύονται συνοπτικά.

Σε ένα πολύ σημαντικό της άρθρο, η Sfard (1991) διατυπώνει τη θεωρία της υποστασιοποίησης, σύμφωνα με την οποία οι έννοιες μπορούν να αντιμετωπιστούν είτε ως αφηρημένα αντικείμενα (objects) είτε ως διεργασίες (processes). Αναφερόμαστε στη δομική (operational) και λειτουργική (structural) επινόηση μιας έννοιας αντίστοιχα. Βασική συνιστώσα της κατανόησης των μαθηματικών θεωρείται η ικανότητα να μπορεί κανείς να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες και ως διεργασίες και ως αντικείμενα. Για παράδειγμα, αν κάποιος βλέπει την έκφραση $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ μόνο σαν μία οδηγία για την εκτέλεση της πράξης, στην περίπτωση αυτή θα έχει εστιάσει την προσοχή του στη διεργασία της πρόσθεσης αγνοώντας το αντικείμενο του αποτελέσματος της πρόσθεσης που κρύβεται πίσω από την πράξη. Η Sfard (1991) δίνει έμφαση στη δυϊκότητα των λειτουργικών (διεργασία) και δομικών (αντικείμενο) εννοιών. Για να αντιληφθεί κανείς τις υψηλού επιπέδου μαθηματικές έννοιες πρέπει να σκέφτεται λειτουργικά και δομικά. Το στάδιο, κατά την Sfard, κατά το οποίο ο μαθητής μπορεί να αντιληφθεί μία μαθηματική έννοια με τα δικά της χαρακτηριστικά ονομάζεται υποστασιοποίηση (reification). Προϋπόθεση για την υποστασιοποίηση είναι η εσωτερίκευση (interiozation), δηλαδή η εξοικείωση με τις αλγοριθμικές διαδικασίες (εκτέλεση πράξεων χωρίς να σκέφτεται κάποιος τον αλγόριθμο και η συμπύκνωση (condensation), το στάδιο εκείνο που μία διαδικασία συμπυκνώνεται σε μία μορφή που μπορούμε να τη σκεφτούμε και να συνδυάζουμε διαδικασίες. Η Sfard καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η λειτουργική και δομική κατανόηση δεν είναι αντίθετες αλλά συμπληρώνουν η μία την άλλη. Αν και στη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας η λειτουργική αντίληψη προηγείται της δομικής (με εξαίρεση των κλάδο της γεωμετρίας), στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ικανότητα για δομική προσέγγιση θεωρείται ως ο απώτερος στόχος της μαθησιακής διαδικασίας. Αυτός είναι και ο λόγος που η διαδικασία δομικής συγκρότησης των μαθηματικών εννοιών αποτέλεσε το αντικείμενο πολλών ερευνών, τόσο από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όσο και από το χώρο της ψυχολογίας τα τελευταία σαράντα χρόνια.

Οι Gray και Tall (1994, 1995) σε δύο πολύ γνωστά τους άρθρα αναπτύσσουν τη θεωρία διεργασίας-έννοιας με βάση την οποία διακρίνουν στα μαθηματικά τη διεργασία (process), που αναφέρεται στο σύνολο ενεργειών πάνω σε αντικείμενα, από την έννοια (concept) που αφορά στα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Διαχωρίζουν τον όρο διεργασία από τον όρο διαδικασία (procedure), που αναφέρεται στον συγκεκριμένο αλγόριθμο για την επίτευξη του στόχου μια διεργασίας. Για παράδειγμα, η διεργασία της πρόσθεσης μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς αλγοριθμικά τρόπους (διαδικασίες) ανάλογα με τις στρατηγικές που επιλέγει κάθε φορά το άτομο. Αυτό που επιχειρούν οι Tall και Gray (1994), είναι μια ερμηνεία του τρόπου με την οποία οι διεργασίες μετατρέπονται σε έννοιες κι αντίστροφα με το ίδιο σύμβολο να εκφράζει άλλοτε μια διεργασία κι άλλοτε μια έννοια. Για παράδειγμα το κλάσμα $\frac{2}{3}$ εκφράζει ταυτόχρονα τη διαίρεση 2 δια 3 (διεργασία) και το αποτέλεσμα της διαίρεσης με τη μορφή κλασματικού αριθμού. Η σκέψη που στηρίζεται στην εννοιολογική γνώση είναι πιο ευέλικτη από αυτή που περιορίζεται στις διεργασίες και είναι πιο περιορισμένη.

Οι δεξιοτέχνες της μαθηματικής σκέψης μπορούν με ευελιξία να αναλύουν και να ανασυνθέτουν το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικές διαδικασίες. Για εξηγήσουν το φαινόμενο αυτό, οι Gray και Tall δημιούργησαν τον όρο procept (διεργασία-έννοια) από το συνδυασμό των λέξεων process και concept. Η σκέψη με διεργασίες-έννοιες (proceptual thinking) ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται τον συμβολισμό ευέλικτα άλλοτε ως διεργασία κι άλλοτε ως έννοια, αλλάζοντας με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο και είναι αυτή που ξεχωρίζει τους περισσότερο επιτυχημένους στα μαθηματικά μαθητές.

Η έννοια procept θεωρείται ως μία γνωστική κατασκευή, στην οποία ο συμβολισμός μπορεί να λειτουργήσει ως, για την αλλαγή από την εστίαση στη διεργασία για τον υπολογισμό και το χειρισμό, στην έννοια που μπορεί το άτομο να σκεφτεί ως διαχειρίσιμη ολότητα. Οι διεργασίες - έννοιες είναι η ρίζα της ανθρώπινης ικανότητας να χειρίζεται μαθηματικές ιδέες στην αριθμητική, την άλγεβρα και τον απειροστικό λογισμό. Επιτρέπουν στον ανθρώπινο εγκέφαλο να μεταβαίνει από το «κάνω τη διεργασία» (doing the process) στο «σκέφτομαι για μία έννοια» (thinking about a concept). Το άτομο πρώτα εξοικειώνεται με τη διεργασία ως μια βήμα-βήμα διαδικασία, στη συνέχεια την εκτελεί υποσυνείδητα. Δράσεις όπως το μέτρημα, ενθυλακώνονται σε έννοιες διαμέσου της χρήσης των συμβόλων. Για παράδειγμα, όταν ένα παιδί μετράει μήλα, θα πει αρχικά «υπάρχουν ένα, δύο, τρία μήλα». Καθώς αυτό γίνεται ρουτίνα θα μετρήσει σιωπηλά «υπάρχουν [ένα, δύο,] τρία μήλα». Όταν πλέον, η διεργασία του μετρήματος έχει ενσωματωθεί στην έννοια θα πει «υπάρχουν...τρία μήλα» ή «υπάρχουν τρία μήλα». Η ενθυλάκωση μια διεργασίας σε έννοια δε συμβαίνει πάντα, με αποτέλεσμα οι μαθητές να συνεχίσουν να εκτελούν αλγοριθμικά πράξεις και χειρισμούς συμβόλων στηριζόμενοι στην απομνημόνευση. Αυτό δε συμβαίνει στην περίπτωση των γεωμετρικών αντικειμένων που το «σκέφτομαι για τους συμβολισμούς ως διαχειρίσιμες ολότητες» προηγείται του «κάνω μαθηματικά». Για παράδειγμα, η στρογγυλότητα των σχημάτων οδηγεί στην ιδιότητα του ορισμού του κύκλου. Το υποκείμενο πρώτα βλέπει τα σχήματα ως φυσικά αντικείμενα από την παρατήρηση του πραγματικού κόσμου και στη συνέχεια, ως νοητά με συγκεκριμένες ιδιότητες. Μεταβαίνει έτσι από τα πλαίσια της διδιάστατης ή τρισδιάστατης ευκλείδειας γεωμετρίας στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες (προβολική ή ελλειπτική).

Η θεωρία APOS (Action-Process-Object-Schema) του Dubinsky (1991), υποστηρίζει ότι η απόκτηση της γνώσης συνίσταται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει νοητικές κατασκευές με σκοπό να αντιμετωπίσει καταστάσεις προβληματισμού. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία APOS, η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ξεκινά με τη δράση (action), δηλαδή την αντίδραση του υποκειμένου σε ένα φυσικό νοητικό αντικείμενο που το λαμβάνει ως εξωτερικό. Με τον όρο διεργασία, ο Dubinsky αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να στοχάζεται πάνω σε μία δράση. Στη συνέχεια, η δράση με τη σειρά της εσωτερικεύεται με τη μορφή νοητικής διεργασίας, το άτομο αποκτά τον έλεγχο πάνω στη δράση, δηλαδή μπορεί να αναστοχαστεί και να περιγράψει όλα τα βήματα, χωρίς να χρειάζεται να τα εκτελέσει. Στο επόμενο στάδιο, οι διεργασίες με τη σειρά τους ενθυλακώνονται σε αντικείμενα (objects). Το υποκείμενο, σ' αυτή τη φάση, αντιλαμβάνεται τη διεργασία ως μία ολότητα και μπορεί να κρίνει πώς θα ενεργήσει για να σκεφτεί πάνω στη διεργασία σαν ένα αυτόνομο αντικείμενο. Τα αντικείμενα, αντιστρόφως μπορούν να απο-ενθυλακωθούν πάλι πίσω στις διεργασίες από τις οποίες προέρχονται. Τέλος, διεργασίες και αντικείμενα οργανώνονται σε σχήματα (schemas) που δίνουν τη δυνατότητα στο υποκείμενο να αποφασίσει ποιο είδος νοητικών δομών θα χρησιμοποιήσει στο δεδομένο πρόβλημα.

Οι θεωρίες της υποστασιοποίησης της Sfard, η θεωρία της διεργασίας-έννοιας των Gray και Tall και η θεωρία APOS του Dubinsky διακρίνονται από το κοινό χαρακτηριστικό της γνωστικής ανάπτυξης που ξεκινάει από τη δράση και καταλήγει στη σχηματοποίηση εννοιών που συμπεριφέρονται ως νοητικές οντότητες. Περιλαμβάνουν την ενθυλάκωση διεργασίας-αντικειμένου, σύμφωνα με την οποία οι δράσεις επάνω σε γνωστά ή υπάρχοντα αντικείμενα, εσωτερικεύονται ως διεργασίες και στη συνέχεια ενθυλακώνονται ως νοητά αντικείμενα της σκέψης κατά την προσπάθεια του υποκειμένου να κατανοήσει την παρεχόμενη πληροφορία και να κάνει συνδέσεις με τις γνωστικές δομές που έχει στη διάθεσή του.

1.5. Συνοψίζοντας

Η σχέση διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης είναι περίπλοκη. Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των ερευνών στο χώρο της ψυχολογίας για το ποιο είδος προηγείται δε συμφωνούν, ενισχύει την άποψη ότι πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη οι κριτικές που έχουν ασκηθεί για το σημαντικό αυτό θέμα.

Ένα ζήτημα που χρήζει αντιμετώπισης αφορά στο πώς μετράται η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση. Όπως συζητήσαμε στην παράγραφο 1.3.1, τίθεται το ερώτημα σε ποιο βαθμό είναι δυνατό να επινοηθούν έργα που μετρούν αποκλειστικά μόνο το ένα από τα δύο είδη γνώσης. Ένας πιθανός τρόπος υπέρβασης αυτής της δυσκολίας είναι να ληφθεί υπόψη ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής ως άτομο προσεγγίζει το κάθε έργο, διακρίνοντας μεταξύ διαδικαστικών και εννοιολογικών *στρατηγικών* οι οποίες ακολουθούνται. Το θέμα αυτό συζητάμε στην παράγραφο 1.5.1.

Ένα δεύτερο σημαντικό ζήτημα είναι αυτό των ατομικών διαφορών στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης. Οι ατομικές διαφορές, ενδεχομένως να αποτελούν και μία εξήγηση για το ότι τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών, σχετικά με το ποιο είδος γνώσης προηγείται ή είναι περισσότερο ανεπτυγμένο αποκλίνουν. Αν δεχθούμε ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης, ένα ερώτημα που προκύπτει είναι πόσο ευρείες μπορεί να είναι αυτές οι διαφορές; Σ' αυτό το σημείο, γεννάται και το καίριο ερώτημα σε ποιους παράγοντες μπορούν να αποδοθούν αυτές οι ατομικές διαφορές. Ένα παράγοντας στον οποίο μπορεί να οφείλεται η δημιουργία τέτοιων διαφορών είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά που επηρεάζει και τον τρόπο που προσεγγίζουν τη μελέτη. Το είδος προσέγγισης που ακολουθούν οι μαθητές στη μελέτη των μαθηματικών ενδεχομένως επηρεάζει και τον τρόπο με τον οποίοι συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς. Το ζήτημα αυτό συζητάμε στην παράγραφο 1.5.2.

1.5.1. Διαδικαστικές και εννοιολογικές στρατηγικές στους ρητούς

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μια μεθοδολογική δυσκολία στον εμπειρικό έλεγχο της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης είναι ότι τα όρια της διάκρισης των έργων που χρησιμοποιούνται σε εννοιολογικά/διαδικαστικά δεν είναι σαφή.

Πολλοί ερευνητές έχουν, ωστόσο, μελετήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε έργα για τους ρητούς, διακρίνοντάς τις σε εννοιολογικές και διαδικαστικές. (Clarke, & Roche, 2009; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993; Smith, 1995; Yang, Reys, & Reys, 2007). Οι Yang et al. (2007) κάνουν λόγο για στρατηγικές που στηρίζονται σε διαδικασίες και μνημονικούς κανόνες (rule-based strategies) καθώς και σε στρατηγικές που στηρίζονται στα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού (number sense-based strategies). Μία συστηματική καταγραφή των στρατηγικών που ακολουθούνται σε έργα για τους ρητούς έκανε ο Smith (1995). Αναφέρεται σε μία, παρόμοια με αυτή των Yang et al. (2007), διάκριση στρατηγικών σε σχέση με τους ρητούς. Κάνει λόγο για διδαχθείσες στρατηγικές (instructed strategies) οι οποίες στηρίζονται σε διαδικασίες και για στρατηγικές που αποτελούν το αποτέλεσμα της ικανότητας των μαθητών να σκέφτονται με λογικό τρόπο για τους ρητούς (constructed strategies). Στην παρούσα έρευνα, υιοθετούμε τη διάκριση των στρατηγικών που μπορούν να παρατηρηθούν σε έργα για τους ρητούς σε διαδικαστικές και εννοιολογικές. Οι διαδικαστικές στρατηγικές περιλαμβάνουν τη μετατροπή σε ομώνυμα ή δεκαδικούς για τη σύγκριση δύο κλασμάτων, την εφαρμογή του «χιαστί» ή τη χρήση μνημονικού κανόνα που μπορεί να μην συνοδεύεται απαραίτητα από εννοιολογική κατανόηση. Οι εννοιολογικές στρατηγικές περιλαμβάνουν τη χρήση του «αριθμού αναφοράς» (benchmarking, reference number ή transitive), την αξιοποίηση συμπληρωμάτων της μονάδας (residual thinking ή gap thinking), ή τη σχηματική αναπαράσταση (Post et al., 1993). Για παράδειγμα, η σύγκριση κλασμάτων με ίσους αριθμητές μπορεί να αντιμετωπισθεί με τη χρήση του μνημονικού κανόνα «από δύο κλάσματα που έχουν ίσους αριθμητές μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρανομαστή» (χωρίς εννοιολογική κατανόηση) ή με την εννοιολογική στρατηγική της σχηματικής αναπαράστασης. Τα κλάσματα 3/8 και 5/6 μπορούν να συγκριθούν εφαρμόζοντας «χιαστί», μετατρέποντάς τα σε ομώνυμα/δεκαδικούς (διαδικαστικές στρατηγικές) ή χρησιμοποιώντας ως «αριθμό» αναφοράς το ½. Επίσης, τα κλάσματα 4/5 και 6/7 μπορούν να συγκριθούν με τις προαναφερθείσες διαδικαστικές στρατηγικές ή συγκρίνοντας τα συμπληρώματά τους (για τη μονάδα) 1/5 και 1/7 (βλ. Πίνακα 2). Οι μαθητές που επιλέγουν να αντιμετωπίζουν τα έργα για τους ρητούς με εννοιολογικές στρατηγικές, αποδεικνύεται ότι έχουν υψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης και έχουν γενικά καλύτερη επίδοση σε έργα για τους ρητούς (Post et al., 1993).

Φαίνεται λοιπόν ότι η διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης θα μπορούσε να γίνει όχι με αποκλειστικό γνώμονα τα έργα αυτά καθαυτά, αλλά τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε αυτά.

Πίνακας 2: Διαδικαστικές και εννοιολογικές στρατηγικές σε έργα για τους ρητούς

<table>
<tr><th>Παράδειγμα έργου</th><th>Διαδικαστικές στρατηγικές</th><th>Εννοιολογικές στρατηγικές</th></tr>
<tr><td>Σύγκριση κλασμάτων</td><td rowspan="2">▪ Μετατροπή κλασμάτων σε ομώνυμα ή σε δεκαδικούς
▪ Εφαρμογή του «χιαστί» (cross-multiply)
▪ Εφαρμογή μνημονικών κανόνων για τη σύγκριση χωρίς απαραίτητη εννοιολογική κατανόηση</td><td rowspan="2">▪ Χρήση «βολικών αριθμών» ως σημείων αναφοράς
▪ Σχηματική αναπαράσταση
▪ Αξιοποίηση του συμπληρώματος (Residual thinking-Gap thinking)</td></tr>
<tr><td>Διάταξη ρητών</td></tr>
</table>

1.5.2. Διαδικαστική & Εννοιολογική γνώση και Πεποιθήσεις για τη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών

Με την υπόθεση ότι υπάρχουν όντως ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς αριθμούς (Hallet et al, 2010), προκύπτει το ερώτημα: πώς ανακύπτουν αυτές οι διαφορές.

Ένας παράγοντας που ενδεχομένως συμβάλλει στη δημιουργία τέτοιων διαφορών είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά (mathematics-related beliefs), μια συνιστώσα των οποίων είναι οι πεποιθήσεις σχετικά με το αντικείμενο, δηλαδή πεποιθήσεις για τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους (Op ’t Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2002). Σύμφωνα με τους Op ‘t Eynde et al. (2002, σελ.16), οι πεποιθήσεις γύρω από τα μαθηματικά είναι οι σαφείς ή υποκρυπτόμενες υποκειμενικές ιδέες που οι μαθητές πιστεύουν πως είναι αληθείς και επηρεάζουν την μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος.

Για παράδειγμα, μια ευρέως διαδεδομένη πεποίθηση -τόσο σε μαθητές, όσο και σε διδάσκοντες- είναι ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και διαδικασιών, η οποία συνδέεται με την πεποίθηση ότι η απομνημόνευση είναι σημαντική στη μάθηση των μαθηματικών (π.χ., Kloosterman, 2002). Τέτοιου είδους πεποιθήσεις ενδεχομένως θα μπορούσαν να σχετίζονται με διαδικαστικές προσεγγίσεις γενικά και στους ρητούς αριθμούς ειδικότερα.

Παρά το γεγονός ότι είναι ευρέως αποδεκτό ότι οι σχετικές με τα μαθηματικά πεποιθήσεις επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών, ένα καίριο ερώτημα είναι με ποιο τρόπο γίνεται αυτό. Υιοθετήσαμε το μοντέλο της Σταθοπούλου (2006), το οποίο προβλέπει την έμμεση επίδραση των πεποιθήσεων, διαμέσου της προσέγγισης του μαθητή στη μελέτη. Στο μοντέλο αυτό γίνεται διάκριση ανάμεσα στη βαθιά και την επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση και τη μελέτη (βλ. Πίνακα 3): Στην πρώτη, το υποκείμενο έχει ως στόχο την προσωπική κατασκευή νοήματος, υιοθετεί στρατηγικές μάθησης που υποστηρίζουν τη σύνδεση ιδεών και έχει (μεταγνωστική) επίγνωση για τη διαδικασία της μάθησης. Στη δεύτερη, το υποκείμενο έχει ως στόχο την υψηλή (σχολική) επίδοση ή ακόμα και την απλή διεκπεραίωση των σχολικών καθηκόντων, υιοθετεί την απομνημόνευση ως στρατηγική μάθησης, ενώ δεν έχει (μεταγνωστική) επίγνωση των πεποιθήσεών του και της διαδικασίας της μάθησης. Η Σταθοπούλου υπέθεσε ότι οι «απλοϊκές» πεποιθήσεις για ένα αντικείμενο –στην περίπτωσή της, στη φυσική- συνδέονται με επιφανειακές προσεγγίσεις στη μελέτη, και άρα και έλλειμμα εννοιολογικής κατανόησης. Στην περίπτωση των μαθηματικών, «απλοϊκή» θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και διαδικασιών. Αντίθετα, πιο «εκλεπτυσμένη» θα μπορούσε να θεωρηθεί η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι σώμα γνώσης στο οποίο οι έννοιες και οι διαδικασίες διασυνδέονται μεταξύ τους με τρόπο που αποδίδει νόημα και στα δύο (Φιλίππου και Χρήστου, 2001).

Πίνακας 3: Χαρακτηριστικά της βαθιάς και της επιφανειακής προσέγγισης στη μάθηση και τη μελέτη

Προσέγγιση της μάθησης και της μελέτης	**Κριτήρια**		
	Στόχοι	Χρήση στρατηγικών	Μεταγνωστική επίγνωση
Βαθιά προσέγγιση	Προσωπική κατασκευή νοήματος	Σύνδεση ιδεών επί τη βάσει αρχών	Επίγνωση των ιδίων πεποιθήσεων

Επιφανειακή προσέγγιση	Υψηλή επίδοση, απλή διεκπεραίωση, ή άσκοπη ενασχόληση	Απομνημόνευση / αποστήθιση	Έλλειψη επίγνωσης των ιδίων πεποιθήσεων

2. Η παρούσα έρευνα

2.1.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Με την παρούσα έρευνα διερευνήσαμε τα εξής ερωτήματα:

- Υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά συνδυάζουν την εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση για τους ρητούς;
- Αν υπάρχουν ατομικές διαφορές
    - πόσο ευρείες είναι;
    - πού μπορεί να οφείλονται;

Διενεργήσαμε μια έρευνα σε δύο φάσεις. Στην πρώτη, μελετήσαμε την αίσθηση του (ρητού) αριθμού σε παιδιά Γ΄ Γυμνασίου. Υιοθετήσαμε τη διάκριση μεταξύ εννοιολογικών και διαδικαστικών συνιστωσών της αίσθησης του αριθμού. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη την κριτική των Schneider και Stern (2010), σχεδιάστηκε μια ποιοτική μελέτη, κατά την οποία είναι δυνατόν να παρατηρηθούν οι στρατηγικές (εννοιολογικές/διαδικαστικές) που ακολουθεί το κάθε παιδί, ανεξάρτητα από το αν τα έργα εμπίπτουν σε εννοιολογικές ή διαδικαστικές συνιστώσες. Θεωρήσαμε ως διαδικαστικές τις στρατηγικές που σχετίζονται με την χρήση κανόνων και την εφαρμογή κανόνων ή αλγορίθμων που κατά κύριο λόγο διδάσκονται στο σχολείο. Θεωρήσαμε εννοιολογικές στρατηγικές αυτές που δεν έχουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, αλλά αντίθετα, βασίζονται στην κατανόηση της δεδομένης κατάστασης που έχει να αντιμετωπίσει ο μαθητή (Clarke, & Roche, 2009; Post et al., 1993; Smith, 1995; Yang, et al., 2007). Παραδείγματα τέτοιων στρατηγικών αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.5.1.

Παρόμοια με τους Hallet et al. (2010), υποθέσαμε ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς. Προβλέψαμε, μάλιστα, ότι θα βρεθούν μαθητές δύο «ακραίων» προφίλ σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης των έργων για τους ρητούς, αυτοί που ακολουθούν συστηματικά διαδικαστική προσέγγιση και αποτυγχάνουν σε έργα με εννοιολογική στόχευση («διαδικαστικό» προφίλ) καθώς και μαθητές με μικρή διαδικαστική ευχέρεια που θα χρησιμοποιούν με επιτυχία εννοιολογικές στρατηγικές («εννοιολογικό» προφίλ).

Η πρόβλεψη για την ύπαρξη «διαδικαστικού προφίλ» είναι εύλογη, δεδομένου ότι στο σχολικό πλαίσιο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διαδικαστική συνιστώσα των ρητών, αλλά όχι στην εννοιολογική συνιστώσα (Moss, 2005; Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, 2011). Για τον ίδιο λόγο, η πρόβλεψη για την ύπαρξη «εννοιολογικού προφίλ» θα μπορούσε να θεωρηθεί μη αναμενόμενη. Ωστόσο, η πρόβλεψη αυτή βασίζεται σε μια συχνή και καλά τεκμηριωμένη παρατήρηση, ότι υπάρχει μεγάλη διάσταση ανάμεσα στην (αρχική) εννοιολογική κατανόηση των παιδιών για τους ρητούς, και την ικανότητά τους να χειρίζονται τις αντίστοιχες συμβολικές αναπαραστάσεις (βλ. Ni, & Zhou, 2005, για μια εκτεταμένη συζήτηση). Πιο συγκεκριμένα, πολλά παιδιά μπορούν να αντιμετωπίσουν έργα που σχετίζονται με τους ρητούς σε ένα πλαίσιο που δεν απαιτεί το χειρισμό συμβόλων, αλλά αποτυγχάνουν σε παρόμοια έργα που περιλαμβάνουν σύμβολα. Τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα προέρχονται κυρίως από παιδιά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και αντανακλούν τη διάσταση ανάμεσα στη μη τυπική γνώση των παιδιών που σχετίζεται με τους ρητούς και την τυπική σχολική γνώση που, σε μεγάλο βαθμό, αφορά την εκμάθηση και το χειρισμό νέων συμβόλων. Με βάση αυτή την παρατήρηση, δε θα μπορούσε να αποκλειστεί το ενδεχόμενο να υπάρχουν παιδιά που συνεχίζουν να στηρίζονται κατά κύριο λόγο στην εννοιολογική τους κατανόηση για τους ρητούς.

Ταυτόχρονα, επεκτείνοντας τον προβληματισμό των Hallet et al. (2010), στην παρούσα μελέτη αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τις αιτίες που προκαλούν τις ατομικές διαφορές που αναμένουμε. Λαμβάνοντας υπόψη το μοντέλο της Σταθοπούλου (2006), προβλέψαμε ότι οι διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές με το «διαδικαστικό» και «εννοιολογικό» προφίλ αντιμετωπίζουν τα έργα για τους ρητούς συνοδεύονται κι από διαφορές στον τρόπο που προσεγγίζουν τα μαθηματικά και τη μελέτη τους.

Οι ισχυρισμοί αυτοί ελέγχθηκαν πειραματικά με μία εμπειρική μελέτη που περιελάμβανε δύο φάσεις. Πιο συγκεκριμένα στην πρώτη φάση της έρευνας:

- διερευνήθηκε το επίπεδο ανάπτυξης των διαδικαστικών και εννοιολογικών συνιστωσών της αίσθησης του ρητού με βάση το παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο, μέσω της εξέτασης του είδους των στρατηγικών που ακολούθησαν οι μαθητές ανεξάρτητα από το αν τα έργα εμπίπτουν σε διαδικαστικές ή εννοιολογικές συνιστώσες της αίσθησης του ρητού.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας:

- διερευνήθηκαν οι πεποιθήσεις των μαθητών ως προς τη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών ως ένας παράγοντας που προκαλεί τις ατομικές διαφορές των μαθητών των δύο «ακραίων» προφίλ («διαδικαστικό» – «εννοιολογικό») που αναμένουμε στον τρόπο που προσεγγίζουν τα έργα για τους ρητούς
- ελέγχθηκε η βεβαιότητα των μαθητών για τις απαντήσεις που έδωσαν στο δοκίμιο της πρώτης φάσης της έρευνας με σκοπό να διερευνηθεί η μεταγνωστική επίγνωση της κατανόησής τους για τους ρητούς.

2.2. Μεθοδολογία έρευνας

2.2.1. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην 1^{η} φάση της έρευνας ήταν επτά μαθητές της Γ’ Γυμνασίου από σχολεία της Δυτικής Αττικής, με ικανοποιητική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών του σχολείου. Στη συνέχεια, δύο από τις μαθήτριες που συμμετείχαν στην 1^{η} φάση και διαπιστώθηκε ότι ανήκουν σε «ακραία» προφίλ, συμμετείχαν στη 2^{η} φάση της έρευνας προκειμένου να διερευνηθεί η προσέγγισή τους στη μελέτη των μαθηματικών.

2.2.2. Υλικά

Η συλλογή των δεδομένων έγινε με γραπτά δοκίμια και συνεντεύξεις. Σχεδιάστηκαν δύο δοκίμια. Το πρώτο περιελάμβανε 19 έργα σχετικά με τις εννοιολογικές και διαδικαστικές συνιστώσες για το ρητό αριθμό. Ακολουθεί μια αδρή κατηγοριοποίηση των έργων (βλ. Πίνακα 4), βασισμένη σε σχετική βιβλιογραφία (π.χ. McIntosh et al., 1992; Moss, & Case, 1999).

- 3 έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με χρήση διαδικασιών (πράξεις κλασμάτων, μετατροπή σε ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση-διάταξη ρητών)
- 6 έργα που εξέταζαν βασική εννοιολογική κατανόηση (αναπαράσταση κλασμάτων σε επιφάνεια, αναγνώριση κλάσματος ως λόγου, νοερή σύγκριση καταχρηστικού και γνήσιου κλάσματος ώστε να αληθεύει μια ανισοτική σχέση)
- 10 έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση ή απαιτούσαν συνδυασμό εννοιολογικής γνώσης και διαδικαστικής ευχέρειας (π.χ. αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, εκτίμηση αποτελέσματος πράξεων, έργα για το ρόλο της μονάδας και το κλάσμα ως λόγο σε πραγματικό πρόβλημα, έργα για την πυκνή διάταξη των ρητών).

Πίνακας 4: Κατηγοριοποίηση έργων 1ου δοκιμίου (Συνιστώσες της αίσθησης του ρητού)

Έργα που μπορούν να αντιμετωπιστούν με χρήση διαδικασιών	**Έργα που εξετάζουν βασική εννοιολογική κατανόηση**	**Έργα που εξετάζουν προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση ή απαιτούν συνδυασμό εννοιολογικής γνώσης και διαδικαστικής ευχέρειας**
Πράξεις κλασμάτων Q.1.1	Αναπαράσταση γνησίων και καταχρηστικών κλασμάτων σε επιφάνεια (αναγνώριση και κατασκευή) Q. 1.4, 1.5	Αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή Q. 1.7, 1.8 ii)
Μετατροπή σε ισοδύναμα κλάσματα Q.1.1, 1.2	Αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου Q. 1.12, 1.13, 1.14	Εκτίμηση αποτελέσματος πράξεων Q. 1.10, 1.11
Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων Q. 1.3, 1.7 i), 1.8	Νοερή σύγκριση καταχρηστικού και γνήσιου κλάσματος ώστε να αληθεύει μια ανισοτική	Έργα για την πυκνή διάταξη των ρητών Q. 1.17, 1.18
		Έργα για το ρόλο της μονάδας

	σχέση Q. 1.16	και για το κλάσμα ως λόγο σε πραγματικό πρόβλημα Q. 1.6
		Σύγκριση κλασμάτων χωρίς τη μετατροπή σε ομώνυμα ή σε δεκαδικούς Q. 1.9
		Κατανόηση της σχέσης μεταξύ των πράξεων Q. 1.15, 1.19

Παραδείγματα έργων που εξετάζουν συγκεκριμένες εννοιολογικές συνιστώσες όπως αυτές διατυπώνονται στο θεωρητικό πλαίσιο των McIntosh et al. δίνονται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5: Παραδείγματα έργων που εξετάζουν εννοιολογικές συνιστώσες της αίσθησης του ρητού

Εννοιολογικές συνιστώσες κατά McIntosh et al. (1992)	**Παράδειγμα έργου**
Αίσθηση της διάταξης των ρητών	**Q.1.7-8:** Διάταξη των 3/2, 1/9, 0.7 Τοποθέτηση στην αριθμογραμμή
Κατανόηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων των αριθμών	**Q.1.5:** Δείξε με ένα σχήμα το 2/3, στη συνέχεια με ένα άλλο σχήμα το 5/3.
Αίσθηση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών	**Q.1.6:** Η Στέλλα και ο Γιώργος διαλύουν σιρόπι βύσσινο σε νερό και φτιάχνουν βυσσινάδα. Η κούπα του Γιώργου περιέχει 600 ml νερό. Το ποτήρι της Στέλλας περιέχει 200 ml νερό. Η Στέλλα ρίχνει στο ποτήρι της 50 γραμμάρια σιρόπι βύσσινο. Ο Γιώργος βάζει 100 γραμμάρια βύσσινο στην κούπα του. Ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα;
Σύστημα του «αριθμού αναφοράς»	**Q.1.9:** Σύγκριση κλασμάτων 8/9, 5/4 και 8/14, 5/8 (χωρίς να μετατραπούν σε ομώνυμα)
Κατανόηση της έννοιας και της επίδρασης	**Q.1.16:** Ποια πράξη (πολ/μος, διαίρεση)

των πράξεων στους αριθμούς	πρέπει να γίνει, ώστε να ισχύει η ανισότητα; $3 \ldots 10 > 3$, $5 \ldots 2 < 5$, $10 \ldots \frac{1}{2} < 10$, $10 \ldots \frac{3}{4} > 10$
Κατανόηση της σχέσης μεταξύ των πράξεων	**Q.1.19:** Μπορείς να βρεις τους αριθμούς που λείπουν; $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\ldots\right).\frac{1.000}{\ldots}=1$

Για τη διερεύνηση των πεποιθήσεων σχετικά με τη μάθηση και τη μελέτη (επιφανειακή/βαθιά) των μαθηματικών σχεδιάστηκε ένα δεύτερο δοκίμιο με 14 ερωτήσεις ανοιχτού τύπου προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στο πλαίσιο συνέντευξης διάρκειας μίας ώρας. Μια ομάδα ερωτήσεων αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη μελέτη των μαθηματικών γενικά, ενώ μια δεύτερη επικέντρωνε στις πεποιθήσεις για τους ρητούς και πιο συγκεκριμένα για τα κλάσματα. Οι περισσότερες ερωτήσεις ήταν διατυπωμένες με τη μορφή σεναρίου που περιέγραφε μια κατάσταση προς σχολιασμό ή αντιμετώπιση. Οι ερωτήσεις του 2^{ου} δοκιμίου παρουσιάζονται αναλυτικά στην ενότητα Παράρτημα Ι. Στον Πίνακα 6 φαίνεται μια κατηγοριοποίηση των έργων βασίζεται σε βιβλιογραφία των Kloosterman (2002) και Op ’t Eynde et al. (2002).

Πίνακας 6: Κατηγοριοποίηση Έργων 2^{ου} Δοκιμίου

Πεποιθήσεις για τα μαθηματικά	Πεποιθήσεις για τη μελέτη των μαθηματικών Q. 2.1-4
	Πεποιθήσεις για την επίδοση στα μαθηματικά Q. 2.5
	Πεποιθήσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών Q. 2.6
Πεποιθήσεις για τους ρητούς	Πεποιθήσεις για τη μελέτη των ρητών Q. 2.12
	Πεποιθήσεις για την επίδοση στους ρητούς Q. 2.9, 10

	Πεποιθήσεις για τη διδασκαλία των ρητών Q. 2.8
	Πεποιθήσεις για τους ρητούς ως αντικείμενο Q. 2.7, 11
Αυτοαξιολόγηση της επίδοσης στα έργα για τους ρητούς του δοκιμίου της 1ης φάσης της έρευνας	Q. 2.13, 14

2.2.3. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η έρευνα περιελάμβανε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση οι μαθητές, συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο σε μία περίπου ώρα και στη συνέχεια στα πλαίσια ημιδομημένης συνέντευξης διάρκειας μίας περίπου ώρας τους ζητήθηκε να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν. Στη δεύτερη φάση, η οποία πραγματοποιήθηκε μία εβδομάδα αργότερα, κλήθηκαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις για τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά. Επιπλέον, τους ζητήθηκε να σχολιάσουν τις απαντήσεις τους του πρώτου δοκιμίου (βεβαιότητα για τη λύση, επίγνωση της επίδοσής τους στα έργα). Η δεύτερη συνέντευξη διήρκησε περίπου μία ώρα. Όλες οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

2.2.4. Διαδικασία ανάλυσης

Κατά την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων της 1ης φάσης της έρευνας:

- αξιολογήθηκαν οι απαντήσεις ως προς την ορθότητά τους
- έγινε ποιοτική καταγραφή των στρατηγικών που ακολουθήθηκαν (διαδικαστικών ή εννοιολογικών) κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, ανεξάρτητα από το αν τα έργα εμπίπτουν σε διαδικαστικές ή εννοιολογικές συνιστώσες.

3. Αποτελέσματα

3.1. Αποτελέσματα της 1ης Φάσης της Έρευνας

Από την επεξεργασία των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν τα ακόλουθα τρία προφίλ μαθητών (ομάδες A, B, C), βασισμένα στο σύνολο των απαντήσεων όπως αυτά προέκυψαν από τις συνεντεύξεις:

A. «Διαδικαστικό - Εννοιολογικό» προφίλ (3 μαθητές)

Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας ολοκλήρωσαν επιτυχώς όλα σχεδόν τα έργα, ακόμη και τα απαιτητικά έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση ή απαιτούσαν συνδυασμό εννοιολογικής γνώσης και διαδικαστικής ευχέρειας. Χρησιμοποίησαν εννοιολογικές στρατηγικές, όταν αυτό ήταν πρόσφορο (π.χ. στα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι» -έργα σύγκρισης – διάταξης ρητών) και ήταν σε θέση να επιλέγουν την κατάλληλη στρατηγική διαδικαστική ή εννοιολογική στο πλαίσιο του δεδομένου προβλήματος, εξηγώντας τον τρόπο που εργάστηκαν στη συνέντευξη.

B. «Διαδικαστικό» προφίλ (3 μαθητές)

Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας ολοκλήρωσαν με επιτυχία όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση (π.χ. πράξεις κλασμάτων), εφάρμοσαν επιτυχώς **διαδικαστικές στρατηγικές** στα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι» και απέτυχαν σε όλα τα έργα που εξέταζαν απλή/προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση ή στα έργα που απαιτούσαν συνδυασμό διαδικαστικής ευχέρειας και εννοιολογικής γνώσης (π.χ. κατανόηση των ιδιοτήτων των πράξεων και της σχέσης μεταξύ των πράξεων).

C. «Εννοιολογικό» προφίλ (1 μαθήτρια)

Η μαθήτρια αυτής της κατηγορίας απέτυχε σε όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση αλλά ολοκλήρωσε όλα σχεδόν τα έργα που εξέταζαν απλή/προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση**.** Εφάρμοσε επιτυχώς **εννοιολογικές στρατηγικές** σε όλα τα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι». Απέτυχε στα έργα που απαιτούσαν συνδυασμό διαδικαστικής ευχέρειας και εννοιολογικής γνώσης.

3.1.1. Μαθητές της ομάδας Α

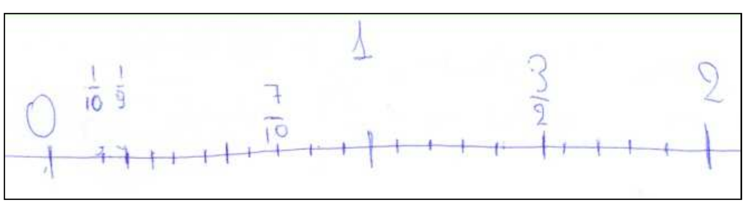
Οι τρεις μαθητές (A_1, A_2, A_3) που ανήκουν στην ομάδα αυτή ολοκλήρωσαν επιτυχώς όλα σχεδόν τα έργα, χρησιμοποίησαν εννοιολογικές στρατηγικές όταν αυτό ήταν δυνατό και μπορούσαν να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν στη συνέντευξη. Ένας εκ των τριών μαθητών (A_1) δεν μπόρεσε να αναπαραστήσει ρητούς στην αριθμογραμμή και να εκτιμήσει το αποτέλεσμα πράξης ρητών (Q.1.10-11), ωστόσο εντάχθηκε στην κατηγορία Α, γιατί ήταν σε θέση να χρησιμοποιεί εννοιολογικές στρατηγικές σε έργα διάταξης και σύγκρισης και αντιμετώπισε με επιτυχία, έργα για το ρόλο της μονάδας σε πραγματικό πρόβλημα, έργα που εξέταζαν την κατανόηση της σχέσης μεταξύ των πράξεων των ρητών. Ο μαθητής A_2 αντιμετώπισε όλα τα έργα με επιτυχία και ο A_3 δεν κατάφερε να ολοκληρώσει μόνο το έργο Q.1.19 (κατανόηση της σχέσης μεταξύ των πράξεων). Οι απαντήσεις τους δίνονται αναλυτικά στην ενότητα Παράρτημα ΙΙ.

Συμπερασματικά, οι μαθητές αυτής της ομάδας:

- απάντησαν σωστά σε όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστικές συνιστώσες της αίσθησης του ρητού
- αντιμετώπισαν με εννοιολογικές στρατηγικές τα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι»
- επέλεξαν και εφάρμοσαν τη σωστή στρατηγική σε έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική γνώση ή απαιτούσαν συνδυασμό διαδικαστικής-εννοιολογικής γνώσης.

Η προχωρημένη εννοιολογική γνώση των μαθητών της κατηγορίας αυτής φάνηκε κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, ακόμη και από τις απαντήσεις τους σε έργα που εξέταζαν απλή εννοιολογική γνώση. Για παράδειγμα, ο μαθητής A_2 στην ερώτηση «αν κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα» (Q.1.13) απάντησε *«Δεν μπορούμε να ξέρουμε ούτε πόσα* *κομμάτια έφαγε, ούτε πόσα κομμάτια είχε η πίτσα […] Μπορεί να έχει 4, 8, 12, 16 κομμάτια κ.λ.π. αφού ισχύει ότι:* $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}$*».* Ο ίδιος μαθητής στην ερώτηση «πόσα ζευγάρια αριθμών μπορείς να βρεις ώστε $\alpha \cdot \beta=3$;» (Q.1.15) απάντησε: *«Υπάρχουν τα ακόλουθα ζευγάρια αριθμών* $1 \cdot 3=3$ *,* $3 \cdot 1=3$*. Αν όμως βάλουμε και δεκαδικούς μπορούμε να βρούμε άπειρα ζευγάρια αριθμών, π.χ.:* $6 \cdot 0{,}5=3$ *,* $12 \cdot 0{,}25=3$ *,* $30 \cdot 0{,}1$*».*

Οι μαθητές της ομάδας αυτής εφάρμοσαν με επιτυχία εννοιολογικές στρατηγικές σε όλα τα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι». Χρησιμοποίησαν για τη σύγκριση των κλασμάτων τις εννοιολογικές στρατηγικές του «αριθμού αναφοράς», της σχηματικής αναπαράστασης καθώς και της «αξιοποίησης του συμπληρώματος». Για παράδειγμα, ο μαθητής A_2, σε έργο σύγκρισης κλασμάτων (Q.1.7), έδωσε την εξής απάντηση*: «ισχύει ότι* $\frac{1}{9}<\frac{7}{10}<\frac{3}{2}$ *αφού,* $\frac{3}{2}>1$*,* $\frac{1}{9}<\frac{1}{2}$ και $\frac{7}{10}>\frac{1}{2}$*»* και έκανε σωστά την αναπαράσταση στον άξονα των πραγματικών όπως αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1. Επιπλέον ο μαθητής A_2 εφάρμοσε την προχωρημένη στρατηγική της «αξιοποίησης του συμπληρώματος» όταν του ζητήθηκε να συγκρίνει τα κλάσματα $\frac{8}{10}$ και $\frac{10}{12}$ (Q.1.9) απάντησε: *«Ισχύει ότι* $\frac{8}{10}<\frac{10}{12}$ αφού $\frac{2}{10}>\frac{2}{12}$». Στην ίδια ερώτηση ο A_3 απάντησε σωστά δίνοντας την παρακάτω αιτιολόγηση: *«Και στα δύο κλάσματα ο αριθμητής είναι κατά 2 μικρότερος από τον παρανομαστή αλλά ο* $\frac{10}{12}$ *έχει μεγαλύτερους όρους.»*



Σχήμα 1: Μαθητής της ομάδας Α (A_3) στην Q.1.7

Οι μαθητές που εντάχθηκαν σ' αυτή την ομάδα αντιμετώπισαν επιτυχώς όλα σχεδόν τα έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική γνώση. Στο έργο για το ρόλο της μονάδας σε πραγματικό πρόβλημα (Q.1.6): «Η Στέλλα και ο Γιώργος διαλύουν σιρόπι βύσσινο σε νερό και φτιάχνουν βυσσινάδα. Η κούπα του Γιώργου περιέχει 600 ml νερό. Το ποτήρι της Στέλλας περιέχει 200 ml νερό. Η Στέλλα ρίχνει στο ποτήρι της 50 γραμμάρια σιρόπι βύσσινο. Ο Γιώργος βάζει 100 γραμμάρια βύσσινο στην κούπα του. Ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα;» ο A_3 απάντησε: *«Ο Γιώργος έχει 3 φορές περισσότερο νερό και 2 φορές περισσότερο βύσσινο από τη Στέλλα. Για να είναι το ίδιο γλυκιά πρέπει να βάλει 3 φορές περισσότερο βύσσινο από την Στέλλα. Άρα η Στέλλα έχει τη πιο γλυκιά βυσσινάδα»*. Στα έργα πυκνής διάταξης των ρητών (Q.1.17, Q.1.18), που αποδείχθηκε ότι ήταν και τα πιο απαιτητικά του πρώτου δοκιμίου, οι περισσότερες από τις απαντήσεις ήταν σωστές και συνοδευόμενες από ικανοποιητικές αιτιολογήσεις. Πιο συγκεκριμένα, στην ερώτηση (Q.1.18) «αν υπάρχουν αριθμοί μεταξύ δύο κλασμάτων, κι αν ναι πόσοι» ο μαθητής A_3 απάντησε: *«Ναι υπάρχουν αριθμοί και είναι άπειροι διότι μπορούμε να γράψουμε κλάσματα με πολύ μεγαλύτερους όρους και να βρούμε πολλά κλάσματα ανάμεσα»*. Στην ερώτηση αυτή παρόμοιες απαντήσεις έδωσαν και οι A_1, A_2. Στο έργο «ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός» (Q.1.17), οι μαθητές A_2, A_3 απάντησαν αντίστοιχα: *«δεν υπάρχει, οι δεκαδικοί είναι άπειροι»* και *«δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιος είναι γιατί δεν τελειώνουν οι δεκαδικοί»*. Παρόλο που η απάντηση του A_1 στην ίδια ερώτηση δεν είναι ορθή: *«ο μικρότερος αριθμός είναι ο 0,000....1 (άπειρα μηδενικά ενδιάμεσα και στο τέλος 1). Δεν ξέρω ποιος είναι, ούτε ο Η/Υ δεν μπορεί να τον βρει, ούτε τα μισά νούμερα δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε, είναι ένας αριθμός που έχει για δεκαδικά ψηφία άπειρα μηδενικά, κι αν ποτέ υπάρξει τέλος, τελευταίο νούμερο είναι το 1»*, ωστόσο δείχνει μία απλοϊκή αίσθηση της πυκνότητας.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, μόνο ο μαθητής A_2 κατάφερε να ολοκληρώσει όλα τα έργα του πρώτου δοκιμίου με επιτυχία. Ήταν ο μοναδικός που απάντησε σωστά στο έργο που αφορούσε τη σχέση μεταξύ των πράξεων (Q.1.19). Έδωσε την παρακάτω απάντηση:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-...\right).\frac{1.000}{...}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{100}{200}+\frac{50}{200}-0\right).\frac{1.000}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{150}{200}\cdot\frac{1000}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{150000}{200x}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1500}{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=1500 \Leftrightarrow x=750$$

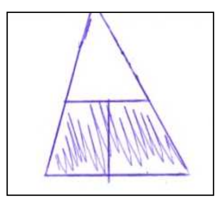
Δεν είναι οι μοναδικοί αριθμοί, υπάρχουν άπειροι αριθμοί που μπορώ να συμπληρώσω στο ένα από τα δύο έχω έναν άγνωστο, τον οποίο και μπορώ να υπολογίσω».

3.1.2. Μαθητές της ομάδας Β

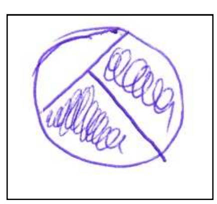
Τρεις μαθητές (B_1, B_2, B_3) με επαρκή διαδικαστική γνώση που στερούνταν έστω και στοιχειώδους εννοιολογικής. Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας είχαν παρόμοια επίδοση. Πιο συγκεκριμένα:

- απάντησαν σωστά σε όλα τα έργα που εξέταζαν που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με χρήση διαδικασιών
- δε χρησιμοποίησαν εννοιολογικές στρατηγικές σε έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι»
- απέτυχαν σε όλα τα έργα που εξέταζαν έστω και στοιχειώδη εννοιολογική γνώση
- απέτυχαν σε όλα τα έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική γνώση και αποτύγχαναν συστηματικά στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούσαν εννοιολογικές στρατηγικές στα έργα της 3ης κατηγορίας.

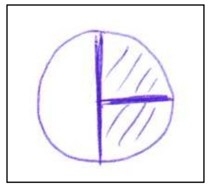
Δίνονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα των απαντήσεων των μαθητών B_1, B_2, B_3. Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας απέτυχαν και στα πιο απλά έργα αναπαράστασης κλάσματος, ακόμα και με το πιο οικείο μοντέλο αυτό της «πίτας». Όταν τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν σχηματικά το 2/3 έδωσαν τις απαντήσεις όπως αυτές φαίνονται στα Σχήματα 2, 3, 4.



Σχήμα 2: Μαθητής B_1 στην Q.1.5 (i)

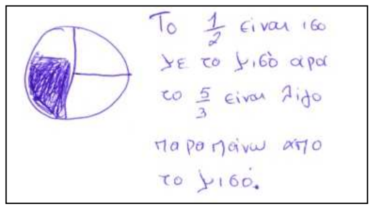


Σχήμα 3: Μαθήτρια B_2 στην Q.1.5 (i)

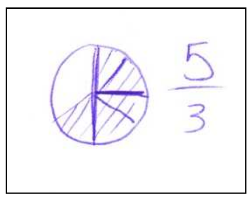


Σχήμα 4: Μαθήτρια B_3 στην Q.1.5 (i)

Όσον αφορά στη σχηματική αναπαράσταση του 5/3 (Q.1.5 ii), ο B_1 δεν μπόρεσε να απαντήσει, ενώ οι μαθήτριες B_2 και B_3 έδωσαν τις απαντήσεις όπως αυτές φαίνονται στα Σχήματα 5, 6.

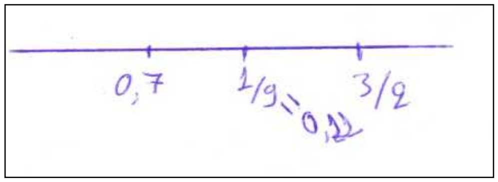


Σχήμα 5: Μαθήτρια B_2 στην Q.1.5 (ii)



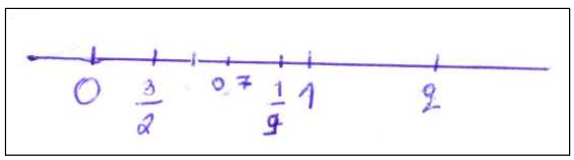
Σχήμα 6: Μαθήτρια B_3 στην Q.1.5 (ii)

Επιπλέον, οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν μπορούσαν να αναγνωρίζουν το κλάσμα ως λόγο (Q.1.12, 13, 14). Για παράδειγμα, στην ερώτηση «Αν κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;» όλοι οι μαθητές απάντησαν λανθασμένα. Χαρακτηριστικό είναι ότι, ενώ εκτέλεσαν με επιτυχία όλες τις συγκρίσεις και διατάξεις ρητών όταν είχαν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν χαρτί και μολύβι, ωστόσο απέτυχαν σε όλες τις περιπτώσεις που τους ζητήθηκε να το κάνουν νοερά. Για παράδειγμα, η μαθήτρια B_3 σε έργο σύγκρισης κλασμάτων απάντησε ότι $\frac{123}{220} > \frac{6}{5}$ με την αιτιολόγηση: *«ο αριθμητής και παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι από του άλλου»*. Επιπλέον, απέτυχαν στην αναπαράσταση των ρητών στην αριθμογραμμή σε όλες τις περιπτώσεις. Ενδεικτική είναι η απάντηση του B_1 στην ερώτηση διάταξης των ρητών 0,7, 1/9 και 3/2 και παράστασής τους στον άξονα. Αφού μετέτρεψε τα κλάσματα σε δεκαδικούς $\frac{1}{9} = 0{,}11$ και $\frac{3}{2} = 1{,}5$, εκτίμησε ότι το $0{,}11 > 0{,}7$ και παράστησε τα κλάσματα στον άξονα λανθασμένα (βλ. Σχήμα 7):



Σχήμα 7: Μαθητής B_1 στην Q.7

Η μαθήτρια B_2 στην ίδια ερώτηση μετέτρεψε όλα τα κλάσματα σε ομώνυμα για να μπορέσει να τα συγκρίνει, αλλά τα αναπαρέστησε λανθασμένα όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Μαθήτρια B_2 στην Q.7

Από τις απαντήσεις των μαθητών στην Q.1.6, διαφαίνεται ότι δεν κατανοούν το ρόλο του κλάσματος σε πραγματικό πρόβλημα. Οι τρεις μαθητές απάντησαν ως εξής:

B_1: *«Ο Γιώργος έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα γιατί είχε σε 600ml νερό, 100g βύσσινο:* $\frac{600}{100}$*=6 ml, ενώ η Στέλλα:* $\frac{200}{50}$*=4 ml»*

B_2: *«Το παιδί που έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα είναι η Στέλλα, γιατί έβαλε μικρότερη ποσότητα νερό απ' ότι ο Γιώργος και λιγότερο βύσσινο. Άρα θα είναι πιο γλυκιά η βυσσινάδα της, γιατί οι ποσότητες νερού - βύσσινου είναι σχετικά κοντά, δηλ. δεν περιέχουν ανάμεσα πολλούς αριθμούς όπως το 600 με το 100».*

B_3: *«Μάλλον ο Γιώργος έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα αφού ισχύει ότι* $\frac{600}{100} > \frac{400}{100}$*, αλλά δεν είμαι σίγουρη».*

Όπως ήταν αναμενόμενο οι μαθητές απέτυχαν στα έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση όπως για παράδειγμα στα έργα για την πυκνή διάταξη των ρητών. Είναι εμφανές ότι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας μεταφέρουν την ιδιότητα της διακριτότητας που ισχύει στους φυσικούς και στο σύνολο των ρητών αριθμών. Ενδεικτικές είναι οι απαντήσεις στην ερώτηση: «Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ » (Q.1.18)

B_1: *«Δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο* $\frac{2}{5}$ *και το* $\frac{3}{5}$*, αφού ο επόμενος του 2 είναι ο 3.»*

B_2: *«Υπάρχουν ακριβώς 9. Αυτοί είναι οι:* $\frac{2,1}{5}, \frac{2,2}{5}, \ldots, \frac{2,9}{5}$*. Το* $\frac{2,11}{5}$ έχει περάσει το $\frac{3}{5}$*.»*

B_3: *«Μάλλον είναι 9 οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα.»*

3.1.3. Μαθήτρια της ομάδας C

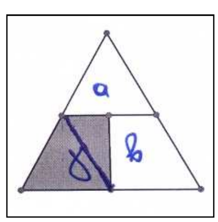
Η μαθήτρια της C κατηγορίας ήταν η μοναδική που απέτυχε σε όλα σχεδόν τα έργα της πρώτης κατηγορίας (Q.1.1-3). Πιο συγκεκριμένα:

- δε θυμόταν ποια κλάσματα ονομάζονται ισοδύναμα, ωστόσο αντιμετώπισε επιτυχώς το έργο με εννοιολογικό τρόπο
- έκανε σωστά τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων
- απέτυχε στην πρόσθεση ομώνυμων και την αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων, (προσθέτοντας - αφαιρώντας αριθμητές με αριθμητές και παρανομαστές με παρανομαστές)
- δεν μπόρεσε να εκτελέσει τη διαίρεση κλασμάτων.

Ωστόσο, η περίπτωσή της παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού:

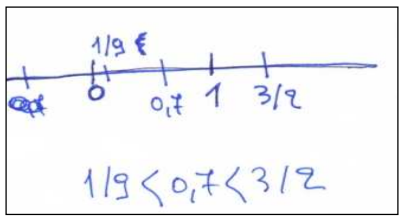
- εφάρμοσε επιτυχώς εννοιολογικές στρατηγικές σε έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν διαδικαστικά
- ολοκλήρωσε με επιτυχία σχεδόν όλα τα έργα που εξέταζαν προχωρημένη εννοιολογική γνώση.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ακόμη και στα απλά έργα αναπαράστασης, διαφαινόταν η εννοιολογική της γνώση. Για παράδειγμα, στην Q.1.4.(ii) (Βλ. Σχήμα 9) απάντησε: «Δεν μπορεί να είναι ίσα και τα τρία κομμάτια αφού το α είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο ενώ *τα β και γ ένα ισοσκελές και ορθογώνιο μαζί[…] Είναι το 1/4 , το 1/3 δεν είναι. Περισσεύει ένα κομματάκι. Αν το χωρίσουμε εδώ, βγαίνουν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα. Άρα είναι το ¼*».



Σχήμα 9: Απάντηση C_3 στην Q.1.4 (ii)

Η μαθήτρια C_1 ολοκλήρωσε με επιτυχία όλα σχεδόν τα έργα σύγκρισης και διάταξης ρητών, εφαρμόζοντας εννοιολογικές στρατηγικές και στην περίπτωση που δεν είχε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει χαρτί και μολύβι. Για παράδειγμα, στη σύγκριση των κλασμάτων 6/14 και 5/8 αξιοποίησε το ½ ως αριθμό αναφοράς και συμπέρανε σωστά ότι το 6/14 είναι μικρότερο από το 5/8, αφού το πρώτο είναι μικρότερο και το δεύτερο είναι μεγαλύτερο από το ½ αντίστοιχα. Σε ανάλογο έργο, για τη διάταξη των ρητών 0,7, 3/2 και 1/9 αξιοποίησε τα ½, 1 ως αριθμούς αναφοράς και έκανε σωστή αναπαράσταση των ρητών στην αριθμογραμμή (βλ. Σχήμα 10).



Σχήμα 10: Απάντηση C_1 στην Q.1.7

Χαρακτηριστικό είναι ότι έδειξε να αντιλαμβάνεται το κλάσμα ως λόγο. Απάντησε σωστά ότι από τη δήλωση «Κάποιος έφαγε το ¼ μιας πίτσας» (Q.1.13) δεν μπορεί να συμπεράνει πόσα κομμάτια έφαγε *σχολιάζοντας «Δεν μπορώ να ξέρω, γιατί δε μου λέει πόσα κομμάτια είναι όλη η πίτσα, αλλά αν είχε 4 κομμάτια, τότε είχε φάει το 1»*. Στο έργο για το ρόλο του κλάσματος σε πραγματικό πρόβλημα (Q.1.6), η μαθήτρια C_1 έδωσε την παρακάτω πολύ ικανοποιητική απάντηση: *«Γιώργος:* $\frac{100}{600}$ *, Στέλλα:* $\frac{50}{200}$*. Τα 50g που έβαλε η Στέλλα στη βυσσινάδα είναι τα μισά των 100g που έβαλε ο Γιώργος στα 600g. Άρα πολλαπλασιάζουμε επί 2 το* $\frac{50}{200}=\frac{100}{400}$*. Το* $\frac{100}{400}$ *είναι αναλογικά πιο πολύ σιρόπι από το* $\frac{100}{600}$*»*. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ο τρόπος που η C_1 αντιμετώπισε το έργο Q.1.16 που απαιτούσε νοερή σύγκριση καταχρηστικού και γνήσιου κλάσματος ώστε να αληθεύει μια ανισοτική σχέση. Μπόρεσε κατόπιν πειραματισμών με αριθμούς να καταλήξει στον εξής κανόνα κατά τη διάρκεια της συνέντευξης: *«Όταν έναν αριθμό α τον πολλαπλασιάζουμε με ένα κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος του α, ενώ όταν το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας»*.

Ενδεικτικό επίσης είναι ότι η μαθήτρια αναφέρθηκε αυθόρμητα σε αναπαραστάσεις για τους αριθμούς -και μάλιστα, στην απαιτητική αναπαράσταση των αριθμών σε άξονα- για να αντιμετωπίσει κάποια από τα πιο σύνθετα έργα του δοκιμίου. Για παράδειγμα, στην ερώτηση «Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 2/5 και 3/5» (Q.1.18) απάντησε *«Αν τους βάλουμε στον άξονα, σίγουρα θα υπάρχει κάποιο κενό. Στο κενό αυτό περιέχονται άπειροι αριθμοί»*.

Όσον αφορά το τελευταίο έργο του πρώτου δοκιμίου Q.1.19, η μαθήτρια πιθανόν δεν μπόρεσε να ανταποκριθεί λόγω της αδυναμίας της στην εκτέλεση πράξεων με κλάσματα.
Η μαθήτρια C_1 κατά τη διάρκεια της πρώτης συνέντευξης προβληματίστηκε για τη λογικότητα κάποιων λανθασμένων απαντήσεών της. Για παράδειγμα, στο έργο Q.1.8. ii, κατά τη σύγκριση των κλασμάτων ¾ και 6/ 7, ενώ συμπέρανε λανθασμένα ότι « *είναι ίσα γιατί λείπει κι από τα δύο 1»* (λανθασμένη εφαρμογή του residual thinking) όταν στη συνέχεια τοποθέτησε τους δύο ρητούς στην αριθμογραμμή, προβληματίστηκε και κατέληξε ότι ο αρχικός της ισχυρισμός της ήταν λανθασμένος. Όπως θα αναφερθεί και στα αποτελέσματα της δεύτερης φάσης της έρευνας, κατά τη διάρκεια της δεύτερης συνέντευξης, η μαθήτρια έδειξε να είχε πλήρη επίγνωση σχετικά με το ποιες από τις απαντήσεις της ήταν λανθασμένες, ενώ αντίστοιχα μπορούσε να υποστηρίξει με βεβαιότητα τις σωστές απαντήσεις.

3.1.4. Τα δύο «ακραία» προφίλ

Στον Πίνακα 7 δίνονται τα χαρακτηριστικά των δύο «ακραίων» προφίλ των μαθητριών, όπως αυτά προέκυψαν από την επίδοσή τους στα έργα του πρώτου δοκιμίου.

Πίνακας 7: «Ακραία» προφίλ όπως προέκυψαν από την επίδοση στα έργα του πρώτου δοκιμίου

	«Διαδικαστικό» Προφίλ» (Μαθήτρια B_2)	**«Εννοιολογικό» Προφίλ (Μαθήτρια C_1)**
Επίδοση σε έργα που εξετάζουν διαδικαστική γνώση	Επιτυχία σε όλα τα έργα αυτής της κατηγορίας	Αποτυχία σε όλα τα έργα αυτής της κατηγορίας εκτός από τον πολ/μό κλασμάτων
Επίδοση σε έργα που μπορούν να αντιμετωπιστούν με	Εφαρμογή **διαδικαστικών στρατηγικών** (σε έργα σύγκρισης κλασμάτων,	Εφαρμογή **εννοιολογικών στρατηγικών** (σε έργα σύγκρισης κλασμάτων,

διαδικαστικές ή εννοιολογικές στρατηγικές	διάταξης ρητών) ή **μνημονικών κανόνων** χωρίς αντίστοιχη εννοιολογική κατανόηση	διάταξης ρητών)
Επίδοση σε έργα που εξετάζουν απλή εννοιολογική γνώση	Αποτυχία σε όλα τα έργα αυτής της κατηγορίας	Επιτυχία σε όλα τα έργα αυτής της κατηγορίας
Επίδοση σε έργα που εξετάζουν προχωρημένη εννοιολογική γνώση ή απαιτούν συνδυασμό διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης	Αποτυχία σε όλα τα έργα αυτής της κατηγορίας	Επιτυχία σε όλα σχεδόν τα έργα αυτής της κατηγορίας

3.2. Αποτελέσματα της $2^{ης}$ Φάσης της έρευνας

Στον Πίνακα 8 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητριών B_2 και C_1 στο 2^o δοκίμιο. Με πλάγια γράμματα και σε αγκύλες συμπληρώνονται τα λόγια των μαθητριών με όποια πληροφορία είναι απαραίτητη για την πλήρη διατύπωση της πρότασης, ώστε ο αναγνώστης να έχει μια όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένη εικόνα της ερώτησης που απαντά η μαθήτρια και του συγκεκριμένου τρόπου με τον οποίο την απάντησε. Για παράδειγμα, στην πρόταση «[*Όταν πρωτοσυνάντησα τα κλάσματα στο Δημοτικό, μου φάνηκαν*] Εύκολα και μ' άρεσαν κιόλας», μέσα στις αγκύλες παρουσιάζεται η ερώτηση στην οποία απαντά η μαθήτρια, ενώ η ακριβής της απάντηση είναι «Εύκολα και μ' άρεσαν κιόλας». Οι απαντήσεις έχουν αριθμηθεί και στα επόμενα δηλώσεις των μαθητριών που εμφανίζονται στο σύνολο της συνέντευξης (και όχι σε κάθε μία ερώτηση ξεχωριστά) αξιοποιούνται ώστε να αναδειχθεί η προσέγγιση της κάθε μιας μαθήτριας στη μελέτη των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τα χαρακτηριστικά της επιφανειακής και βαθιάς προσέγγισης σε τρεις άξονες: στόχοι, χρήση στρατηγικών, μεταγνωστική επίγνωση (βλ. Πίνακα 3).

Η απόκλιση των δύο μαθητριών στον τρόπο που προσεγγίζουν τη μελέτη των μαθηματικών είναι εμφανής σε όλες τις σχετικές ερωτήσεις που τους τέθηκαν. **Στόχος της μελέτης** για τη B_2 φαίνεται να είναι η υψηλή σχολική επίδοση ή η απλή διεκπεραίωση των σχολικών καθηκόντων της. Πράγματι, η B_2 συνιστά τη μελέτη των θεμάτων που είναι πιθανό να ζητηθούν σε διαγώνισμα (Δ.2), ενώ θεωρεί ότι το διάβασμα πρέπει να επικεντρώνεται στα συγκεκριμένα πράγματα που είναι απαραίτητα για να λυθούν οι ασκήσεις (Δ.4). Αντίθετα, το ζητούμενο της μελέτης για την C_1 δεν είναι η απλή διεκπεραίωση (επίλυση ασκήσεων) αλλά η κατανόηση. Η C_1, θεωρεί ότι η επίλυση ασκήσεων προϋποθέτει απαραίτητα την κατανόηση της θεωρίας (Ε.4). Χαρακτηριστικά, στο λόγο της εμφανίζονται συχνά οι λέξεις «νόημα», «έννοια» σε σχέση με την κατανόηση (Ε.3, Ε.7, Ε.19). Ενδεικτική είναι η αναφορά της στο πώς απέκτησαν νόημα τα κλάσματα για την ίδια, μέσα από τη σύνδεσή τους με τη μουσική (Ε.12).

Η βασική **στρατηγική μελέτης** στην οποία αποδίδει αξία η B_2 βασίζεται στην απομνημόνευση. Πράγματι, η αξία του να διαβάζει και να ξαναλύνει κανείς τις λυμένες ασκήσεις με στόχο να θυμάται πώς λύνονται εμφανίζεται σε διάφορα σημεία στη συνέντευξή της, όπως και η αξία του να θυμάται κανείς κανόνες απέξω (Δ.3, Δ.5, Δ.7, Δ.10, Δ.12, Δ.14, Δ.18, Δ.19). Η αξία που αποδίδει στην εκμάθηση των κανόνων διαφαίνεται και στη δήλωση Δ.22. Παρά το γεγονός ότι αρχικά διστάζει να απαξιώσει τον τρόπο μελέτης της υποθετικής φίλης στο σενάριο της Q.2.3, στη συνέχεια παραδέχεται ότι για την ίδια αυτού του είδους το μελέτης δεν είναι αποδοτικό (Δ.7). Αντίθετα, η μαθήτρια C_1 αποδίδει αξία σε στρατηγικές μελέτης που υποστηρίζουν την κατασκευή νοήματος και συνδέσεων, όπως αυτή του υποθετικού κοριτσιού, αν και αναγνωρίζει ότι η ίδια δε μελετά πάντα με αυτόν τον τρόπο (Ε.5). Δίνει έμφαση στη μελέτη της θεωρίας και στην αυτόνομη επίλυση ασκήσεων (Ε1, Ε2) εκφράζοντας την απαρέσκειά της για την απομνημόνευση (Ε.3, Ε.18), ενώ παραδέχεται ότι κάποια διαδικαστικά πράγματα δεν τα θυμάται και γι' αυτό αποτυγχάνει (Ε.17). Αναφέρει, ωστόσο, ότι κάποιους κανόνες δε χρειάζεται να τους θυμάται απέξω, γιατί τα καταφέρνει και χωρίς αυτούς (Ε.15, Ε.16).

Το τελευταίο μας φέρνει στον άξονα της **μεταγνωστικής επίγνωσης**, στον οποίο οι δύο μαθήτριες διαφοροποιήθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Η B_2 θεωρεί ότι δεν υπάρχει κάτι σχετικό με τα κλάσματα το οποίο δεν έχει καταλάβει (Δ.16, Δ.19). Επιπλέον, όταν της ζητήθηκε να αξιολογήσει τις απαντήσεις της στα έργα του πρώτου δοκιμίου για τους ρητούς, η B_2 δε φάνηκε να προβληματίζεται ή να αμφιβάλλει για κάποια από αυτές (Δ.23, Δ.24), παρά το γεγονός ότι είχε επιτύχει μόνο στα έργα που μπορούσαν να λυθούν με εφαρμογές διαδικασιών. Αντίθετα, η C_1 ανακάλεσε τη δυσκολία που της προκάλεσαν τα κλάσματα στη σχολική της πορεία (Ε.12, Ε.13), υπέδειξε τι δε θυμόταν (Ε.17) με μεγάλη συνέπεια σε σχέση με την επίδοσή της στο πρώτο δοκίμιο. Επιπλέον, όταν κλήθηκε να αξιολογήσει την απάντησή της σε κάθε ένα από τα έργα του πρώτου δοκιμίου, η C_1, εντόπισε σχεδόν όλα τα έργα στα οποία είχε κάνει λάθη, σχολιάζοντας ότι δεν είναι σίγουρη για την ορθότητα της απάντησής της (Ε.20, Ε.21).

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι στον τρόπο προσέγγισης της μελέτης των μαθητριών B_2 και C_1 μπορούν να αποδοθούν τα χαρακτηριστικά που συνθέτουν την επιφανειακή και τη βαθιά προσέγγιση, αντίστοιχα, και στους τρεις άξονες (στόχοι, στρατηγικές, μεταγνωστική επίγνωση).

Εξετάζοντας τις απαντήσεις των δύο μαθητριών υπό ένα ευρύτερο πρίσμα, διαφαίνονται διαφορές και σε άλλου είδους πεποιθήσεις σχετικά με τα μαθηματικά, όπως πού αποδίδουν την ικανότητα και την επίδοση στα μαθηματικά και τι θεωρούν οι ίδιες ως ενδιαφέρον έργο στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, η B_2 θεωρεί ότι η ικανότητα στα μαθηματικά σχετίζεται με τον υψηλό δείκτη νοημοσύνης (Δ.11) είτε με την ικανότητα απομνημόνευσης (Δ.13). Στη δήλωση Δ.13 η μαθήτρια συνδέει την καλή επίδοση στα μαθηματικά και με το «καλύτερο διάβασμα», το οποίο όμως, σε συνέπεια με τη στρατηγική μελέτης που η ίδια προκρίνει, περιορίζεται στην επίλυση των ασκήσεων «πολλές φορές» με στόχο την απομνημόνευσή τους. Για τη C_1, η καλή επίδοση στα μαθηματικά συνδέεται με ένα μείγμα ταλέντου και προσπάθειας (Ε.8). Δεν είναι ξεκάθαρο τι εννοεί με την έκφραση «ταλέντο», ωστόσο διευκρινίζει ότι δεν έχει να κάνει με την ευφυΐα (Ε.9). Αντίθετα, η προσπάθεια με τη μορφή του χρόνου που αφιερώνεται στο αντικείμενο φαίνεται σημαντική στη συγκεκριμένη μαθήτρια, ενώ ιδιαίτερη έμφαση δίνει στα εσωτερικά κίνητρα (αγάπη και ενδιαφέρον για το αντικείμενο, Ε.10).

Τέλος, είναι εντυπωσιακή η διαφοροποίηση των δύο μαθητριών ως προς το τι θεωρεί η κάθε μια ενδιαφέρον έργο στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, η B_2 προτιμά ένα έργο για το οποίο θα γνωρίζει εκ των προτέρων τη διαδικασία που απαιτείται για την επίλυσή του, λαμβάνοντας υπόψη και το πώς θα κριθεί/βαθμολογηθεί το αποτέλεσμα (Δ.21). Αντίθετα, η C_1 επιλέγει ένα έργο το οποίο απαιτεί να σκεφτεί κάτι καινούργιο, εκφράζοντας ρητά την έλλειψη ενδιαφέροντος για τα έργα που απαιτούν την εφαρμογή κανόνων και διαδικασιών (Ε.18).

Πίνακας 8: Αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις της 2ης φάσης της έρευνας

Ερώτηση	«Διαδικαστικό» προφίλ		«Εννοιολογικό» προφίλ	
Q. 2.1	**[Δ.1]**	Να κοιτάζει τις ασκήσεις που κάνει στο μάθημα ή άμα κάνει κάποιο ιδιαίτερο, να τις λύνει για να δει αν όντως τα ξέρει.	**[Ε.1]**	Να διαβάσει θεωρία και να λύνει ασκήσεις μόνη της.
	[Δ.2]	Αυτό και να διαβάζει ότι είναι σημαντικό ή ότι τους λένε ότι είναι ΣΟΣ.	**[Ε.2]**	Να λύνει και ασκήσεις εκτός από αυτές που έχουν για το σχολείο.
Q. 2.2	**[Δ.3]**	Στα μαθηματικά κοιτάζω αυτά που έχουμε κάνει και τα ξανακάνω και μετά βλέπω αν είναι σωστά.	**[Ε.3]**	[*Στα μαθηματικά*] Σκέφτεσαι, δεν είναι παπαγαλία. Δεν είναι κάνω κάτι και τέρμα, πρέπει να βάλεις κάτω το μυαλό σου να σκεφτεί. […] Πρέπει να καταλαβαίνουμε το νόημα σ' αυτό που κάνουμε.[…] Πρέπει να τα καταλάβεις καλά [τη θεωρία] και όταν σου βάλουν μία άσκηση να μπορείς να τη λύσεις. […] Αν δε διαβάσεις θεωρία, πώς θα λύσεις ασκήσεις;
	[Δ.4]	Συμφωνώ [*ότι είναι αρκετό κάποιος να ξέρει συγκεκριμένα πράγματα για να λύνει τις ασκήσεις*]. Αυτά που χρειάζονται διαβάζουμε.	**[Ε.4]**	Δε συμφωνώ [*ότι είναι αρκετό κάποιος να ξέρει συγκεκριμένα πράγματα για να λύνει τις ασκήσεις*]. Όλα πρέπει να τα ξέρει και τον τρόπο που λύνονται οι ασκήσεις και τη θεωρία. […]
Q. 2.3	**[Δ.5]**	Εγώ κοιτάζω αυτά που κάνουμε αλλά και τις ασκήσεις, χρειάζονται κι αυτές πώς τις λύνουμε για να θυμάμαι τι κάνουμε.	**[Ε.5]**	Μια χαρά τα κάνει, μακάρι να διάβαζα κι εγώ έτσι...
	[Δ.6]	[*Ο τρόπος που μελετά η υποθετική κοπέλα*] Είναι κι αυτός ένας τρόπος, βασικά εξαρτάται κι από το παιδί, σε τι έχει κενό ή πώς θα διαβάζει καλύτερα.		
	[Δ.7]	Και το να διαβάζεις θεωρία, κι αυτό καλό είναι γιατί ουσιαστικά τα μαθηματικά χωρίς θεωρία τις περισσότερες φορές δε λύνονται, καλύτερο είναι να κοιτάς και τις ασκήσεις γιατί βλέπει ότι τα ξέρει, αλλά στην πραγματικότητα μπορεί να μην τα ξέρει.		
		Είναι πιο αποδοτικό να ξέρουμε αυτά που χρειάζονται να λύνουμε τις ασκήσεις.		
Q. 2.4	**[Δ.8]**	Δε μου έχει τύχει ποτέ [*να αφιερώσω πολύ χρόνο για ένα διαγώνισμα και να μη γράψω καλά*]. Εντάξει,	**[Ε.6]**	[*Μπορεί*] ο καθηγητής να βάζει ασκήσεις γιατί προτιμάει να σκεφτείς παρά να κάνεις κάτι, εκείνη την ώρα δεν

		βασικά δεν έχω πρόβλημα. Αν πάει κάτι στραβά θα είναι είτε απροσεξία μου, ή δε θα 'χω διαβάσει καλά αυτό το σημείο. Δηλαδή, νομίζω ότι το ξέρω και δεν το κοιτάζω. Νομίζω ότι το ξέρω, ενώ στην πραγματικότητα δεν το θυμάμαι καλά.		μπορείς να σκεφτείς είναι τόσο το άγχος για το πώς θα γράψεις, κολλάς. […] [*Αν άλλαζα κάτι στο διάβασμά μου*] Αν έχω διαβάσει 4 ώρες, είναι ήδη πολύ.
	[Δ.9]	[*Ο λόγος που το υποθετικό παιδί δεν τα πήγε καλά*] Μπορεί να είναι το άγχος του, αφού έχει διαβάσει καλά. Το άγχος του πιστεύω ότι είναι.	**[Ε.7]**	[*Ίσως*] Να λύσω πιο πολλές ασκήσεις; Να καταλάβω πιο πολύ την έννοια... Ε ναι, αυτό πιστεύω...
	[Δ.10]	Και μπορεί να μη διαβάζει κι όπως πρέπει. Δηλαδή, να μην κοιτάζει τις ασκήσεις, να νομίζει ότι τις ξέρει αλλά να μην τις λύνει. Αν κάνει αυτό μάλλον θα τα πάει καλύτερα.		
Q. 2.5	**[Δ.11]**	[*Θεωρώ ότι το παιδί που είναι πολύ καλό στα μαθηματικά τα πηγαίνει τόσο καλά γιατί*] έχει καλό I.Q. Μπορεί να σκέφτεται πιο έξυπνα	**[Ε.8]**	[*Θεωρώ ότι το παιδί που είναι πολύ καλό στα μαθηματικά τα πηγαίνει τόσο καλά*] […]Πιστεύω ότι έχει ταλέντο στα μαθηματικά. Αλλά χρειάζεται και ταλέντο και προσπάθεια.
	[Δ.12]	…να θυμάται πιο πολλά από έναν άλλον, ή να διαβάζει πολύ καλύτερα από έναν άλλον. [*Δηλαδή να διαβάζει*] πιο προσεκτικά...σκέφτεται εκεί και δε σκέφτεται άλλα πράγματα και είναι πιο συγκεντρωμένος.	**[Ε.9]**	Δε νομίζω [*ότι έχει ιδιαίτερη ευφυΐα*].
	[Δ.13]	[*Κι εγώ θα μπορούσα να γίνω τόσο καλή όσο αυτός*] αν διαβάζω με τον ίδιο τρόπο που διαβάζει κι αυτός.	**[Ε.10]**	Γιατί ασχολείται πάρα πολλές ώρες με αυτό [*Διαφέρει από κάποιο άλλο παιδί που αφιερώνει τον ίδιο χρόνο με λιγότερα αποτελέσματα γιατί*] αγαπάει αυτό που κάνει, βρίσκει ενδιαφέρον αλλιώς δε θα αφιέρωνε τόσο χρόνο.
	[Δ.14]	Ή μπορεί να κάνει και κάτι διαφορετικό [*που ίσως είναι*] ότι λύνει τις ασκήσεις πολλές φορές.		
Q. 2.6	**[Δ.15]**	Μας λέει τη θεωρία και μετά μας λύνει ασκήσεις και μας ρωτάει αν έχουμε απορίες.	**[Ε.11]**	Λέει τη θεωρία για 5', λύνει την ευκολότερη άσκηση και μετά μας δίνει ασκήσεις και ότι δεν έχουμε καταλάβει, πηγαίνουμε την επόμενη μέρα και της το λέμε και το εξηγεί.
Q. 2.7	**[Δ.16]**	[*Όταν πρωτοσυνάντησα τα κλάσματα στο Δημοτικό, μου φάνηκαν*] Εύκολα και μ' άρεσαν κιόλας	**[Ε.12]**	[*Όταν πρωτοσυνάντησα τα κλάσματα στο Δημοτικό, μου φάνηκαν*] αρκετά δύσκολα, αλλά τα είχα καταλάβει, πήγαινα και μουσική, μου τα εξηγούσαν συνέχεια και

				συνέχεια στη θεωρία.
			[Ε.13]	Οι διαδικασίες να τα λύσουμε [*ήταν δύσκολες*], έκανα λάθη σε πράξεις των κλασμάτων τακτικά – και στο Γυμνάσιο στην αρχή έκανα αρκετά λάθη, μετά εντάξει...
Q. 2.8	**[Δ.17]**	**[** Η ύλη για τα κλάσματα στο σχολείο] μου φάνηκε χρήσιμη, μπορεί γιατί τα κλάσματα είναι μες τη ζωή μας, τα χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα	**[Ε.14]**	*[Έχει περισσότερο ενδιαφέρον]* σε σχέση με άλλα, όπως π.χ. επίλυση εξισώσεων με διακρίνουσα και αυτά που κάνουμε φέτος
Q. 2.9	**[Δ.18]**	Δεν είχα καμία [*δυσκολία με τα κλάσματα*]. [*Μαθαίνω τους κανόνες απέξω γιατί*] Μπορεί κάποιες φορές που είναι σχετικά δύσκολο να χρειάζεται να ξέρεις για να το κάνεις. […]	**[Ε.15]**	[*Τους κανόνες σύγκρισης*] Δεν τους θυμάμαι να τους πω, αλλά όταν έχω κλάσματα να συγκρίνω, εντάξει ξέρω πώς να το κάνω.
Q. 2.10	**[Δ.19]**	Δεν είναι τίποτα δύσκολοι οι κανόνες, απλά τους θυμάμαι .	**[Ε.16]**	Όχι, [*δεν τους χρησιμοποιώ πάντα αυτούς τους κανόνες*]. Όταν έχω να συγκρίνω δύο άσχετα κλάσματα αυτοί οι δύο κανόνες δεν παίζουν κάποιο ρόλο. Μπορώ να εφαρμόσω κάτι πιο συγκεκριμένο.
	[Δ.20]	Όχι, [*δεν υπάρχει κάτι στα κλάσματα που θεωρώ ότι δεν έχω καταλάβει*]. Όχι, [*δεν υπάρχει κάποια γνώση που θεωρώ ότι μου λείπει, κάτι που με δυσκολεύει*]	**[Ε.17]**	Στις πράξεις, δε θυμάμαι τη διαδικασία που γίνεται...αυτό. Αν κάποιος μου το υπενθύμιζε, θα τα έλυνα....
Q. 2.11	**[Δ.21]**	Μάλλον την πρώτη γιατί θα είχε πράξεις και είναι πράγματα τα οποία τα ξέρω ήδη, ενώ στη δεύτερη μπορεί να υπήρχε κάτι που δεν ξέρω. Ναι, [*η πρώτη επιλογή είναι πιο ασφαλής*] και θα είναι πιο καλή εργασία από τη δεύτερη.	**[Ε.18]**	Τη δεύτερη...Η πρώτη δεν... Είναι πιο ωραίο να σκεφτείς κάτι καινούριο, παρά να κάνεις τα ίδια και τα ίδια, στο τέλος έτσι και είναι σωστό αυτό που σκέφτηκες νιώθεις πιο ωραία**.** Η εφαρμογή κανόνων και διαδικασιών...εμένα δε μου λέει κάτι...δεν το βρίσκω ενδιαφέρον. Είναι σαν μία παπαγαλία, ξέρω ’γω..., ένα σύστημα που κάνουμε και λύνουμε ασκήσεις, τίποτα παραπάνω
Q. 2.12	**[Δ.22]**	Θα του έλεγα να τα κάνει ομώνυμα, δηλαδή να κάνει και τα δύο κλάσματα με τον ίδιο παρανομαστή και θα φανεί ποιο είναι μεγαλύτερο. [*Στην περίπτωση που είναι ομώνυμα θα του έλεγα*] ότι μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο	**[Ε.19]**	Να καταλάβαινε την έννοια των κλασμάτων...δεν ξέρω...Ο καθένας έτσι όπως σκέφτεται. [*Εννοώ ότι*] θα του έλεγα κάποιους κανόνες πάνω στα κλάσματα, αλλά όταν είναι διαφορετικά τα κλάσματα, αν έχει καταλάβει την έννοια των κλασμάτων πιστεύω πως μπορεί να τα

		αριθμό.		συγκρίνει
Q. 2.13	**[Δ.23]**	Δεν πιστεύω πως έχω κάνει λάθος σε καμία, εκτός από την τελευταία που «δε μου βγαίνει»	**[Ε.20]**	Η πιο δύσκολη από αυτές ήταν αυτή που δεν έλυσα... η τελευταία (Q. 19-επίδραση των πράξεων στους αριθμούς)
Q. 2.14	**[Δ.24]**	Σχετικά με τις ερωτήσεις που με δυσκόλεψαν, συνέβη επειδή δε θυμόμουν συγκεκριμένα πράγματα από τα κλάσματα	**[Ε.21]**	Δε θυμάμαι πώς να κάνω πράξεις…

4. Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τρία ερευνητικά ερωτήματα: Υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση για τους ρητούς συνδυάζονται από τους μαθητές; Και αν ναι, πόσο ευρείες μπορεί να είναι; Και σε τι μπορεί να οφείλονται;

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε στην εργασία αυτή είναι συμβατά με την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά συνδυάζουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση (Hallet et al., 2010). Ενδεχομένως, αυτός να είναι και ένας λόγος που να εξηγεί γιατί τα ευρήματα της πληθώρας των ερευνών που έχουν διεξαχθεί, για το ποιο είδος γνώσης προηγείται ή είναι περισσότερο ανεπτυγμένο, δε συμφωνούν. Ο σχεδιασμός της ποιοτικής μας έρευνας που περιλάμβανε εις βάθος συνεντεύξεις ήταν καθοριστικής σημασίας, αφού μας έδωσε τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε τις στρατηγικές (διαδικαστικές ή εννοιολογικές) που ακολουθούν τα υποκείμενα στα έργα για τους ρητούς αφού είναι αμφίβολο αν είναι δυνατό να σχεδιαστούν έργα που να μετρούν αποκλειστικά διαδικαστική ή εννοιολογική γνώση (Schneider, & Stern, 2010).

Επιπλέον, τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την υπόθεσή μας ότι οι ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης είναι δυνατόν να είναι ευρείες, δηλαδή να υπάρχουν «ακραίες» περιπτώσεις στις οποίες η εννοιολογική γνώση υπερτερεί εμφανώς της διαδικαστικής και αντίστροφα. Οι μαθητές κατατάχθηκαν σε τρεις ομάδες (A, B, C) ανάλογα με την επίδοση τους στα έργα του πρώτου δοκιμίου καθώς και με το είδος των στρατηγικών διαδικαστικών ή εννοιολογικών που ακολούθησαν. Όπως είχε προβλεφθεί, βρέθηκαν «ακραία» προφίλ, «διαδικαστικό» και «εννοιολογικό». Οι μαθητές με το «διαδικαστικό» προφίλ (ομάδα A) ολοκλήρωσαν με επιτυχία όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση (π.χ. πράξεις κλασμάτων), χρησιμοποίησαν μόνο διαδικαστικές στρατηγικές στα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι» και απέτυχαν σε όλα τα όλα που εξέταζαν που εξέταζαν στοιχειώδη και προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση. Αντίθετα, η μαθήτρια με το «εννοιολογικό» προφίλ (ομάδα C) απέτυχε σε όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση, εφάρμοσε επιτυχώς εννοιολογικές στρατηγικές σε όλα τα έργα που μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με «χαρτί και μολύβι», ολοκλήρωσε όλα σχεδόν τα έργα που εξέταζαν απλή/προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση και απέτυχε στα έργα που απαιτούσαν συνδυασμό διαδικαστικής ευχέρειας και εννοιολογικής γνώσης.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας, αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τις αιτίες για τις ατομικές διαφορές που προέκυψαν στην πρώτη φάση της έρευνας. Ένας παράγοντας που υποθέσαμε ότι σχετίζεται με τη δημιουργία τέτοιων διαφορών είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο μελετούν. Το είδος προσέγγισης της μελέτης των μαθηματικών, με τη σειρά του, επηρεάζει το επίπεδο κατανόησης των ρητών αριθμών από τους μαθητές. Μελετώντας περαιτέρω τις περιπτώσεις δύο μαθητριών, της B_2 από την ομάδα B με το «διαδικαστικό προφίλ» και της C_1, από την ομάδα C με το «εννοιολογικό» προφίλ, όσον αφορά την αίσθηση του ρητού, δείξαμε ότι οι διαφορές στον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπισαν το πρώτο δοκίμιο συνοδεύονται από διαφορές και στον τρόπο που προσεγγίζουν τα μαθηματικά και τη μελέτη τους. Η B_2 φαίνεται να έχει ως στόχο την επιτυχία στα σχολικά της καθήκοντα και στην εξέταση και ακολουθεί ως βασική της στρατηγική στη μελέτη το διάβασμα λυμένων ασκήσεων. Η C_1, από την άλλη μεριά, φαίνεται να έχει ως στόχο την προσωπική κατασκευή νοήματος, στόχος της είναι να κατανοήσει καλά της έννοιες και στη συνέχεια να προχωρήσει στην επίλυση ασκήσεων. Η B_2 φαίνεται να υιοθετεί την απομνημόνευση ως στρατηγική μάθησης, σε αντίθεση με την C_1 που ακολουθεί στρατηγικές μάθησης που υποστηρίζουν τη σύνδεση ιδεών. Η «απλοϊκή» και «εκλεπτυσμένη» προσέγγιση των B_2 και C_1 αντίστοιχα διαφαίνεται και από τους παράγοντες στους οποίους οι δύο μαθήτριες αποδίδουν την καλή επίδοση στα μαθηματικά. Η B_2 αποδίδει την καλή επίδοση στα μαθηματικά στην ικανότητα του υποκειμένου να μπορεί να απομνημονεύει εύκολα διαδικασίες ή στον υψηλό δείκτη νοημοσύνης ενώ η C_1 την αποδίδει σε εσωτερικά κίνητρα, στο ενδιαφέρον για την ενασχόληση με τα μαθηματικά. Ανάλογα συμπεράσματα για το είδος την προσέγγισης στη μελέτη που ακολουθούν οι δύο μαθήτριες προέκυψαν και για τις ερωτήσεις ήταν εστιασμένες στο αντικείμενο των ρητών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, όταν ζητήθηκε από τις δύο μαθήτριες να αξιολογήσουν τις απαντήσεις τους στα έργα του πρώτου δοκιμίου προέκυψε ότι η B_2 δεν έχει μεταγνωστική επίγνωση για την κατανόησή της στους ρητούς, υποστηρίζοντας ότι δεν υπάρχει κάτι που θεωρεί ότι δεν ξέρει ή δεν έχει καταλάβει σε αντίθεση με την C_1 της οποίας οι απαντήσεις ήταν ενδεικτικές της υψηλής μεταγνωστικής επίγνωσης της κατανόησής της για τους ρητούς. Η απόκλιση των πεποιθήσεών τους σχετικά με το αντικείμενο των ρητών φάνηκε από το είδος των μαθηματικών έργων που προτιμούν που επηρεάζει τις στρατηγικές που επιλέγουν να ακολουθούν στα έργα σύγκρισης των ρητών. Η B_2 εκδηλώνει την προτίμησή της για τα έργα που απαιτούν τη χρήση κανόνων και διαδικασιών και ακολουθεί διαδικαστικές στρατηγικές στα έργα της σύγκρισης κλασμάτων. Διαμετρικά αντίθετη είναι η θέση της C_1 η οποία προτιμά έργα για τα οποία θα χρειαστεί να επιστρατεύσει ό,τι έχει καταλάβει για τα κλάσματα και επιλέγει την εφαρμογή εννοιολογικών στρατηγικών στα έργα σύγκρισης. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά διακρίνουν την επιφανειακή από τη βαθιά προσέγγιση στη μελέτη και είναι, σύμφωνα με τη Σταθοπούλου (2006), ενδεικτικά της επίδρασης διαφορετικών πεποιθήσεων για το γνωστικό αντικείμενο, εν προκειμένω τα μαθηματικά. Οι πεποιθήσεις των μαθητών για το αντικείμενο των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα για τους ρητούς καθορίζουν τον τρόπο που το αντιμετωπίζουν κατά της διάρκεια της μελέτης. Οι «απλοϊκές» πεποιθήσεις για το αντικείμενο για παράδειγμα η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και διαδικασιών συνδέονται με επιφανειακές προσεγγίσεις στη μελέτη, και άρα με το έλλειμμα εννοιολογικής κατανόησης. Αντίθετα, οι πιο «εκλεπτυσμένες», σύμφωνα με τις οποίες τα μαθηματικά είναι σώμα γνώσης στο οποίο οι έννοιες και οι διαδικασίες διασυνδέονται, ενθαρρύνουν πιο βαθιές προσεγγίσεις στη μελέτη και συνεπάγονται εννοιολογική κατανόηση στους ρητούς.

5. Κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα έρευνα, επεκτείνοντας τον προβληματισμό των Hallet et al. (2010), αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τις αιτίες που προκαλούν τις ατομικές διαφορές που αναμένουμε στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τη διαδικαστική-εννοιολογική γνώση. Τα ευρήματά μας δίνουν μία ένδειξη ότι υπάρχει σχέση μεταξύ της προσέγγισης που ακολουθούν οι μαθητές στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών και τις διαδικαστικές/εννοιολογικές προσεγγίσεις για τους ρητούς.

Φυσικά, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχουμε δείξει μια αιτιώδη σχέση ανάμεσα στο προφίλ των μαθητών (διαδικαστικό/εννοιολογικό) και τις προσεγγίσεις τους στη μελέτη των μαθηματικών. Ωστόσο, τα ευρήματά μας μπορούν να αξιοποιηθούν ως βάση για τη διατύπωση εύλογων υποθέσεων που θα ελεγχθούν με περαιτέρω έρευνα.

6. Βιβλιογραφία

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15* (5), 323-341.

Berch, D. B. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children with Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38* (4) (August 1): 333-339.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology, 27* (5), 777-786.

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development, 7,* 235-257.

Burns, M. (1989). Teaching for understanding: A focus on Multiplication. In Trafton, P. R, & Shulte, A. P. (Ed). *New Directions for Elementary School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM; 123-134.

Clarke, D. M., & Roche A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72* (1) (June 12): 127-138.

Cowan, R., & Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Childrens' use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology, 16,* 409-422

De Lange, J. (1999). Mathematics Literacy. OECD/PISA Project.

Dixon, J. A., & Moore, C. F. (1996). The developmental role of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology, 32* (2), 241-253.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Dordrecht, 95-123.

Fuson, K. C. (1988). *Children' s counting and concept of number.* New York: Springer.

Geary, D. C. (1994). Children's mathematical development: Research and practical implications. Washington, DC: American Psychological Association.

Gelman, R., & Williams, E. M. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesis. In D. Kuhn & R. S. Siegler (Eds.), Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language (5th ed., Vol. 2, pp. 575-630). New York: Wiley.

Goldstone, R. L., & Kersten, A. (2003). *Concepts and categorization.* In I. B. Weiner (Ed.), Handbook of psychology (Vol. 4, pp. 599–621). Hoboken, NJ: Wiley

Gray, E., Tall. D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A Proceptual view of simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education 25* (2) (March): 116.

Haapasalo, L. (2003). *The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa?* In L. Haapasalo and K. Sormunen (Eds.) Towards Meaningful Mathematics and Science Education. Proceedings of the 19th FAMSER Symposium. University of Joensuu. Bulletins of the Faculty of Education 86, pp.1-20.

Halford, G. S. (1993). *Children's understanding: The development of mental models.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hallet, D., Nunes, T., Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Phychology, 102,* 345-406.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert and P. Lefevre (Eds.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition & Instruction, 14* (3), 251-283.

Howden, H (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 36* (6), *6-11*

Hoyles, C, Alison W., Susan M., & Phillip K., (2002). Mathematical Skills in the Workplace Final Report to the Science, Technology and Mathematics Council. *Health Care* (June).

Kadijevich, Dj. (2003). *Linking Procedural and Conceptual Knowledge.* In L. Haapasalo & K. Sormunen (eds*.)* Towards Meaningful Mathematics and Science Education. Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. University of Joensuu. Bulletins of the Faculty of Education 86, 21-28.

Kaminski, E. (2002). Promoting Mathematical Understanding: Number Sense in Action. *Mathematics Education Research Journal, 14 (2):* 133-149.

Karmiloff-Smith, A. (1992). Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science (2nd Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A.Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 49–84). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Meausurement and implications for motivation, In G, C. Leder, E. Pehkonen, & G, Torner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? (pp. 247-269). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Leutzinger, L. P., & Bertheau, M. (1989). Making sense of numbers. Dalam: Trafton, P.R, & Shulte, A.P. (Ed). *New Directions for Elementary School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM; 111-123

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

Medin, D. L. (1989). Concepts and conceptual structure. *American Psychologist, 44,* 1469–1481.

Moss, J., Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 122-147.

Moss, J. (2005). *Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system*. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), How students learn: Mathematics in the classroom (pp. 121–162). Washington, DC: National Academic Press.

National Research Council (NRC). (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* National Academy Press, Washington, D.C.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40,* 27–52.

Op 't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students 'mathematics–related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp.13-17). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2003). The PISA 2003 Assessment Framework—Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. OECD, Paris.

Paulos, J. A. (1988*). Innumeracy: mathematical illiteracy and its consequences.* New York: Hill and Wang.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In T. Carpenter, E. F, & Harel, G. (In press). Designing instructionally relevant assessment reports. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. Lawrence Erlbaum and Associates.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romburg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 136–155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reys, R, Reys, B., Yang. D., C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education 29,* (2) (March): 225.

Reys, R, Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson B., McIntosh, A., & Yang. D., C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics 99,* (2) (February): 61-70.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relations between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skill* (pp. 75-110). Hove, England: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B, & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of Mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91* (1), 175-189.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346-362.

Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach, *Developmental Psychology, 46*, 178-192.

Schneider, S. B., & Thompson, C. S. (2000). Incredible equations develop incredible number sense. *Teaching Children Mathematics, 7* (3), 146-148,165-168.

Schull, R. M. (1998). Investigation of the development of number sense in seventh grade and eleventh grade students over a three year period of time. Doctoral dissertation, University of Missouri – Columbia, 1998. Dissertation Abstracts International, 9901281

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22:* 1±3.

Siegler, R. S., & Crowley, K. (1994). Constraints on learning in nonprivileged domains. *Cognitive Psychology, 27,* 194–226.

Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology:* General, *127,* 377–397.

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert and P. Lefevre (Eds.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* New Jersey: Erlbaum Associates.

Smith, J. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction, 13* (1), 3-50.

Sophian, C. (1997). Beyond competence: The significance of performance for conceptual development. *Cognitive Development, 12,* 281–303.

Sowder, J., & Schappelle, B. (1994). Number sense making. *Arithmetic Teacher, 41* (6), 342-345.

Steen, L. A. (ed.) (2001). Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy. National Council on Education and the Disciplines, Princeton, New Jersey.

Tall, D., Gray, E. M., Bin Ali, M., Crowley L., Demarois, P, Pitta-Pantazi, D., & Pinto M. (1995). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Environment* (figure 1): 1-25.

Turkel, S., & Newman, C. (1988). What's your number? Developing number sense. *Arithmetic Teacher, 36* (6), 53-55.

Vamvakoussi, X , Christou, K. P, Mertens, L, & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21,* (5), 676-685.

Verschaffel, L., De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education,. Part I* (pp. 99-138). Dordrecht: Klawer.

Yang. D., C., Reys, R., & Reys, B. (2007). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 383-403.

Σταθοπούλου, Χ. (2006). Διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη σχετική με τη φυσική προσωπική επιστημολογία και τη μάθηση της Φυσικής. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, ΕΚΠΑ.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών.* Αθήνα: Ατραπός.

7. Παράρτημα Ι

7.1. 1η φάση της έρευνας: Ερωτηματολόγιο Ι

Q.1.1. Να συμπληρώσεις τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:

α. $\frac{5}{4} = \frac{\dots}{\dots}$ **β.** $\frac{7}{12} = \frac{\dots}{\dots}$

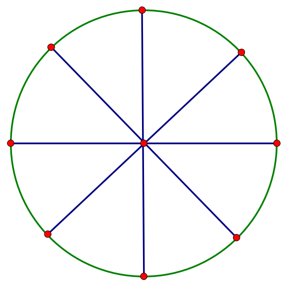
Q.1.2. Να κάνεις τις πράξεις:

α. $\frac{5}{9} + \frac{3}{9}$ **β.** $\frac{24}{21} - \frac{5}{7}$ **γ.** $\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{7}$ **δ.** $6\frac{2}{5} : \frac{3}{8}$

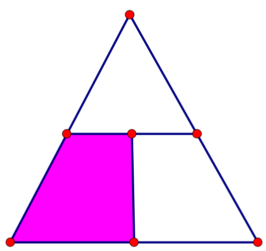
Q.1.3. Να συγκρίνεις τους αριθμούς.

Σύγκριση κλασμάτων		**Εξήγηση**
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	
$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	
$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{11}$	

Q.1.4. (i) Γραμμοσκίασε το $\frac{1}{4}$ της ολικής επιφάνειας στο παρακάτω σχήμα.



(ii) Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του τριγώνου παριστάνει το $\frac{1}{3}$ της ολικής του επιφάνειας. Σωστό η λάθος;



Q.1.5. Δείξε με ένα σχήμα το $\frac{2}{3}$. Στη συνέχεια δείξε με ένα άλλο σχήμα το $\frac{5}{3}$.

Q.1.6. Η Στέλλα και ο Γιώργος διαλύουν σιρόπι βύσσινο σε νερό και φτιάχνουν βυσσινάδα. Η κούπα του Γιώργου περιέχει 600 ml νερό. Το ποτήρι της Στέλλας περιέχει 200 ml νερό. Η Στέλλα ρίχνει στο ποτήρι της 50 γραμμάρια σιρόπι βύσσινο. Ο Γιώργος βάζει 100 γραμμάρια βύσσινο στην κούπα του. Ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα;

Q.1.7. (i) Διάταξε τα 3/2, 1/9, 0.7

(ii) Τοποθέτησε τους παραπάνω αριθμούς στην αριθμογραμμή.

Q.1.8. (i) Ποιο από τα κλάσματα $\frac{3}{8}$**,** $\frac{7}{13}$ είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$ και γιατί;

(ii) Ποια από τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{7}$ είναι πιο κοντά στο 1; Μπορείς να παραστήσεις τους αριθμούς πάνω στον άξονα;

Q.1.9. Να συγκρίνεις τα κλάσματα χωρίς να τα κάνετε ομώνυμα, εξηγώντας αναλυτικά πώς εργάστηκες.

Σύγκριση κλασμάτων		**Εξήγηση**
$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{4}$	
$\frac{123}{220}$	$\frac{6}{5}$	
$\frac{6}{14}$	$\frac{5}{8}$	
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	

$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{9}$	
$\frac{8}{10}$	$\frac{10}{12}$	

Q.1.10. Είναι το παρακάτω άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

$$\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$$

Q.1.11. Μπορείς να εκτιμήσεις το αποτέλεσμα της πράξης $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$;

Q.1.12. Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το $\frac{1}{4}$. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Μπορείς να ξέρεις ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;

Q.1.13. Αν κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;

Q.1.14. Ο Κώστας λέει: Έφαγα τα 3/4 της πίτσας μου. Η Μαρία λέει: Άρα, έφαγες τρία κομμάτια. Συμφωνώ / Δε συμφωνώ με το συμπέρασμα της Μαρίας.

Q.1.15. Πόσα ζευγάρια α, β μπορείς να βρεις ώστε να ισχύει $\alpha \cdot \beta = 3$;

Q.1.16. Ποια πράξη πρέπει να γίνει, ώστε να ισχύει η ανισότητα; Επίλεξε με ✓

	Πολλαπλασιασμός (×)	**Διαίρεση (:)**
3 **…**10 > 3	❑	❑
5 **…** 2 < 5	❑	❑
$10 \ldots \frac{1}{2} < 10$	❑	❑
$10 \ldots \frac{3}{4} > 10$	❑	❑

Q.1.17. Μπορείς να προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;

Q.1.18. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$; (Αν ναι, πόσοι;)

Q.1.19. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς που λείπουν;

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\ldots\right).\frac{1.000}{\ldots}=1$$

Γιατί αυτοί οι αριθμοί που βρήκες δεν είναι μοναδικοί;

7.2. 2η Φάση της έρευνας: Ερωτηματολόγιο ΙΙ

Q.2.1. Αν έπρεπε να συμβουλεύσεις ένα μικρότερο παιδί πώς πρέπει να διαβάζει μαθηματικά, τι θα θεωρούσες πολύ σημαντικό να του πεις;

Q.2.2. Διαβάζεις μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο που διαβάζεις και τα άλλα μαθήματα; Υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές; Ένα παιδί μου είπε ότι τα μαθηματικά είναι πιο πρακτικά από άλλα μαθήματα. Δε χρειάζεται να ασχολείσαι τόσο με τη θεωρία, αρκεί να ξέρεις τι πρέπει να χρησιμοποιήσεις για να λύνεις ασκήσεις. Συμφωνείς;

Q.2.3. Παρατηρείς μια φίλη που μελετά μαθηματικά χωρίς να λύνει ασκήσεις. Τη βλέπεις να αφιερώνει πολύ χρόνο διαβάζοντας τη θεωρία, να φτιάχνει διαγράμματα, να γυρνά πίσω σε προηγούμενες ενότητες, να κρατά σημειώσεις. Μοιάζει με τον τρόπο που μελετάς εσύ μαθηματικά; Έχεις κάτι να τη συμβουλεύσεις;

Q.2.4. Σου έχει συμβεί να έχεις αφιερώσει πολύ χρόνο για να προετοιμαστείς για ένα διαγώνισμα μαθηματικών και να μην τα πας καλά; Γιατί πιστεύεις ότι συνέβη αυτό; Υπάρχει περίπτωση να μην είχες μελετήσει σωστά; Τι θα άλλαζες;

Q.2.5. Γνωρίζεις κάποιο παιδί, αγόρι ή κορίτσι, που θεωρείς ότι είναι πολύ καλό στα μαθηματικά; Γιατί το θεωρείς πολύ καλό στα μαθηματικά; Σε σχέση με αυτό, εσύ είσαι ισάξια; Καλύτερη; Γιατί; Θα μπορούσες να γίνεις το ίδιο καλή στα μαθηματικά; Πώς;

Q.2.6. Πώς σας διδάσκει ο καθηγητής στο σχολείο μια καινούρια έννοια (σας δίνει έτοιμους τους τύπους και λύνει ασκήσεις); Τι σας λέει να διαβάσετε για την επόμενη φορά; Πώς σας εξετάζει (ρωτάει κανόνες, ελέγχετε τις ασκήσεις). Τι θέματα σας βάζει στα διαγωνίσματα (υπολογιστικές ασκήσεις, προβλήματα);

Q.2.7. Συνάντησες τα κλάσματα πρώτη φορά στο δημοτικό. Σου φάνηκαν εύκολα, δύσκολα; Άλλαξε κάτι τα επόμενα χρόνια; Γιατί;

Q.2.8. Η ύλη για τα κλάσματα στο σχολείο σου φαίνεται ενδιαφέρουσα/ χρήσιμη; Τι θα άλλαζες στη διδασκαλία για να γίνει πιο ενδιαφέρουσα/ χρήσιμη;

Q.2.9. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυσκολία που συνάντησες με τα κλάσματα; Τι έκανες για να την ξεπεράσεις; Στην προηγούμενη συνέντευξη ένα παιδί της ηλικίας σου μου είπε ότι τα κλάσματα δεν είναι δύσκολα, απλώς πρέπει να θυμάσαι περισσότερους κανόνες. Για παράδειγμα, όταν έχεις να συγκρίνεις δυο κλάσματα πρέπει να θυμάσαι ότι αλλιώς συγκρίνονται τα ομώνυμα και αλλιώς τα ετερώνυμα και να θυμάσαι τους κανόνες για τη σύγκριση των ετερωνύμων. Συμφωνείς; Εσύ θυμάσαι τους κανόνες σύγκρισης απ' έξω; Πώς τους θυμάσαι; Τους χρησιμοποιείς πάντα;

Q.2.10. Υπάρχει κάτι για τα κλάσματα που δεν έχεις καταλάβει; Υπάρχει κάτι που ξέρεις ότι δεν το είχες καταλάβει στην αρχή, αλλά τώρα το έχεις καταλάβει καλά; Πώς είσαι σίγουρη ότι το κατάλαβες καλά;

Q.2.11. Η καθηγήτριά σου στο σχολείο σου δίνει την ευκαιρία να επιλέξεις ανάμεσα σε δύο εργασίες για τα κλάσματα. Καμία από τις δύο δεν είναι απλή - και οι δύο απαιτούν σκέψη και προσοχή. Η μία μπορεί να λυθεί με βάση τις μεθόδους που έχεις διδαχτεί, αλλά είναι σύνθετη γιατί απαιτεί την εφαρμογή πολλών κανόνων και διαδικασιών (π.χ. πράξεων). Στην άλλη δε χρειάζεται να εφαρμόσεις κανόνες, πράξεις και άλλες διαδικασίες, αλλά θα χρειαστεί να επιστρατεύσεις ό,τι έχεις καταλάβει για τα κλάσματα μέχρι τώρα για να σκεφτείς κάτι καινούργιο. Με ποια από τι δύο θα προτιμούσες να ασχοληθείς; Γιατί; (αν η εργασία δεν καθόριζε το βαθμό σου για το τρίμηνο)

Q.2.12. Το μικρό σου αδερφάκι/ένα μικρότερο παιδί ζητά τη βοήθειά σου γιατί δεν καταλαβαίνει τη σύγκριση κλασμάτων. Τι θα έκανες για να το βοηθήσεις; (Διαγράμματα; Εξάσκηση;)

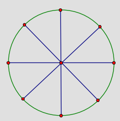
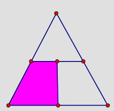
Q.2.13. Στο ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσες, για ποιες ερωτήσεις είσαι σίγουρη ότι έχεις απαντήσει. σωστά; Για ποιες δεν είσαι σίγουρη; Ποια δραστηριότητα σου φάνηκε πιο απαιτητική; Γιατί; Δε θυμόσουν; Δεν το είχες ξαναδεί; Δεν το είχες ξανασκεφτεί;

Q.2.14. Σχετικά με τις ερωτήσεις που σε δυσκόλεψαν, πιστεύεις ότι αυτό συνέβη επειδή δε θυμόσουν συγκεκριμένα πράγματα από τα κλάσματα ή επειδή δεν μπορούσες να συνδυάσεις τις γνώσεις σου;

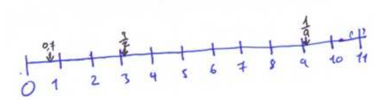
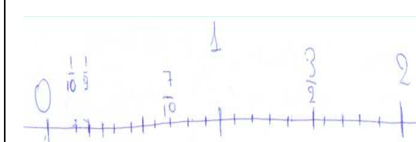
8. Παράρτημα II

8.1. Συνοπτική παρουσίαση των απαντήσεων των μαθητών της ομάδας Α

	A_1	**A_2**	**A_3**
Q.1.1. Ισοδύναμα κλάσματα $\frac{5}{4}=\frac{\dots}{\dots}$ $\frac{7}{12}=\frac{\dots}{\dots}$	**Σωστή απάντηση**	**Σωστή απάντηση**	**Σωστή απάντηση**
Q.1.2. Πράξεις με κλάσματα	**Σωστή απάντηση** Δεν απλοποίησε το αποτέλεσμα στις περιπτώσεις που το κλάσμα που προέκυπτε δεν ήταν ανάγωγο.	**Σωστή απάντηση** (δε θυμόταν πώς μετατρέπουμε τον μεικτό σε κλάσμα)	**Σωστή απάντηση**
Q.1.3. Σύγκριση κλασμάτων (με όμοιους αριθμητές-παρανομαστές)	**Σωστή απάντηση** «Από τα ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή, και από τα κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρανομαστή.»	**Σωστή απάντηση** Εννοιολογική στρατηγική του «αριθμού αναφοράς» (benchmarking).	**Σωστή απάντηση** «Από τα ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή και από τα ετερώνυμα κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρανομαστή.» (συνοδευόταν από εννοιολογική κατανόηση)

	A_1	A_2	A_3
Q.1.4. i) Γραμμοσκίαση του ¼ της επιφάνειας) 	**Σωστή απάντηση** «Χωρίζουμε τον κύκλο σε 4 ίσα κομμάτια και παίρνουμε το 1 από τα 4, δηλαδή το ¼.»	**Σωστή απάντηση** «Χωρίζουμε τον κύκλο σε 4 ίσα κομμάτια και παίρνουμε το 1 από τα 4, δηλαδή το ¼.»	**Σωστή απάντηση** «Χωρίζουμε τον κύκλο σε 4 ίσα κομμάτια και παίρνουμε το 1 από τα 4, δηλαδή το ¼.»
ii) Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του τριγώνου παριστάνει το 1/3 της ολικής του επιφάνειας.  Σωστό η λάθος;	**Σωστή απάντηση** «Άγνωστο επειδή δεν μπορούμε να ξέρουμε αν τα κομμάτια είναι ίσα ή όχι.»	**Σωστή απάντηση** «Όχι, γιατί δεν ξέρουμε αν χωρίζεται το σχήμα σε 3 ίσα μέρη, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τρίγωνο με τραπέζιο.»	**Σωστή απάντηση** « Το τρίγωνο δεν έχει χωριστεί σε 4 ίσα μέρη.»
Q.1.5. Δείξε με ένα σχήμα το 2/3, στη συνέχεια με ένα άλλο σχήμα το 5/3.	**Σωστή απάντηση** **2/3**: Χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε 3 ίσα κομμάτια και παίρνει τα 2. **5/3**: Φτιάχνει 2 κυκλικούς δίσκους, παίρνει τον 1 ολόκληρο και τα 2 από τα 3 κομμάτια του άλλου.	**Σωστή απάντηση** Ομοίως με τον A_1	**Σωστή απάντηση** Ομοίως με τον A_1

	A_1	**A_2**	**A_3**
Q.1.6. Η Στέλλα και ο Γιώργος διαλύουν σιρόπι βύσσινο σε νερό και φτιάχνουν βυσσινάδα. Η κούπα του Γιώργου περιέχει 600 ml νερό. Το ποτήρι της Στέλλας περιέχει 200 ml νερό. Η Στέλλα ρίχνει στο ποτήρι της 50 γραμμάρια σιρόπι βύσσινο. Ο Γιώργος βάζει 100 γραμμάρια βύσσινο στην κούπα του. Ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα;	**Σωστή απάντηση** «600ml 200ml 100g 50g $\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$, $\frac{50}{200}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ Άρα η Στέλλα έχει την πιο γλυκιά βυσσινάδα (1/4) επειδή έβαλε αναλογικά περισσότερα γραμμάρια βύσσινου από το Γιώργο (1/6).»	**Σωστή απάντηση** «Στέλλα: $\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$ Γιώργος: $\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$, αφού το ¼ είναι πιο κοντά στη μονάδα. Άρα η Στέλλα έχει την πιο γλυκιά βυσσινάδα.»	**Σωστή απάντηση** «Ο Γιώργος έχει 3 φορές περισσότερο νερό και 2 φορές περισσότερο βύσσινο από τη Στέλλα. Για να είναι το ίδιο γλυκιά πρέπει να βάλει 3 φορές περισσότερο βύσσινο από την Στέλλα. Άρα η Στέλλα έχει τη πιο γλυκιά βυσσινάδα».

	A_1	A_2	A_3
Q.1.7. i) Διάταξη των 3/2, 1/9, 0.7 ii) Τοποθέτηση στην αριθμογραμμή	**i) Σωστή απάντηση** Μετατροπή του 0,7 σε 7/10 και διάταξη των 3 κλασμάτων με σχηματική αναπαράσταση (3/2 παριστάνει 1 κύκλο και το μισό ενός άλλου κλπ) **ii) Λανθασμένη** αναπαράσταση στον άξονα του: -3/2 (λίγο μεγαλύτερο από το 3) -1/9 (λίγο μεγαλύτερο από το 9) 	**i) Σωστή απάντηση** Benchmarking to 1, 1/2 $\frac{3}{2} > 1$ $\frac{7}{10} > \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{9} < \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$. Άρα μεταβατικά προκύπτει: $\frac{1}{9} < \frac{7}{10} < \frac{3}{2}$ **ii) Σωστή απάντηση** 	**i) Σωστή απάντηση** $\frac{1}{9} < \frac{7}{10} < \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} > 1$, αφού ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρανομαστή. $\frac{1}{9} < 1$ και το μικρότερο από όλα τα κλάσματα, αφού ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρανομαστή με τη «μεγαλύτερη διαφορά». **ii) Σωστή απάντηση** 
Q.1.8.i) Ποιο από τα κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{13}$ είναι πιο κοντά στο ½ και γιατί;	**i) Σωστή απάντηση** με σχηματική αναπαράσταση **ii) Σωστή απάντηση** με σχηματική αναπαράσταση	**i) Σωστή απάντηση** «Το $\frac{7}{13} = \frac{14}{26}$ είναι πιο κοντά στο $\frac{13}{26}$ από το $\frac{6}{16}$ που είναι πιο μακριά από	**i) Λανθασμένη απάντηση** Είναι το ίδιο κοντά στο 1/2, διότι τα αποτελέσματα των πράξεων είναι 0,53 και 0,37. Και τα δύο

είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$ και γιατί; ii) Ποια από τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{7}$ είναι πιο κοντά στο 1; Μπορείς να παραστήσεις τους αριθμούς πάνω στον άξονα;	**Λάνθασμένη αναπαράσταση** στην αριθμογραμμή.	το $\frac{8}{16}$.» **ii) Σωστή απάντηση** Σωστή αναπαράσταση αριθμών πάνω στον άξονα	απέχουν 1,3 , (+), ή (-) **ii) Σωστή απάντηση** Και στα δύο κλάσματα ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρανομαστή κατά 1, αλλά το 6/7 έχει μεγαλύτερους όρους. 
Q.1.9. Σύγκριση κλασμάτων	**A$_1$**	**A$_2$**	**A$_3$**
$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{4}$	**Σωστή απάντηση** Χρήση του 1 ως «αριθμού αναφοράς» $\frac{8}{9}<\frac{5}{4}$ αφού $\frac{8}{9}<1$, $\frac{5}{8}>1$	**Σωστή απάντηση** «Το $\frac{5}{4}$ είναι καταχρηστικό, ενώ το $\frac{8}{9}$ είναι μικρότερο της μονάδας.»	**Σωστή απάντηση** «Το $\frac{5}{4}$ είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα αντίθετα με το $\frac{8}{9}$.»
$\frac{123}{220}$ $\frac{6}{5}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{123}{220}<\frac{6}{5}$. Χρήση του 1 ως «αριθμού αναφοράς».	**Σωστή απάντηση** Χρήση του 1 ως «αριθμού αναφοράς».	**Σωστή απάντηση** Χρήση του 1 ως «αριθμού αναφοράς».
$\frac{6}{14}$ $\frac{5}{8}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{6}{14}<\frac{5}{8}$ Με σχηματική αναπαράσταση.	**Σωστή απάντηση** Χρήση του ½ ως «αριθμού αναφοράς.	**Σωστή απάντηση** Χρήση του ½ ως «αριθμού αναφοράς.

		$\frac{6}{14} < \frac{7}{14}$, ενώ $\frac{5}{8} > \frac{4}{8}$	$\frac{6}{14} < \frac{7}{14}$, ενώ $\frac{5}{8} > \frac{4}{8}$
	A_1	**A_2**	**A_3**
$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{3}{5} > \frac{1}{3}$ Με σχηματική αναπαράσταση.	**Σωστή απάντηση** Χρήση του ½ ως «αριθμού αναφοράς». $\frac{3}{5} > \frac{2,5}{5}$, ενώ $\frac{1}{3} < \frac{1,5}{3}$	**Σωστή απάντηση** Χρήση του ½ ως «αριθμού αναφοράς».
$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Με σχηματική αναπαράσταση.	**Σωστή απάντηση** «Το $\frac{3}{4}$ είναι πιο μακριά από το 0,5 απ' ότι το $\frac{2}{3}$».	**Σωστή απάντηση** «Και στα δύο κλάσματα ο αριθμητής είναι κατά 1 μικρότερος από τον παρανομαστή αλλά ο $\frac{3}{4}$ έχει μεγαλύτερους όρους.»
$\frac{3}{8}$ $\frac{2}{7}$	**Λανθασμένη απάντηση** $\frac{3}{8} > \frac{2}{7}$. Με σχηματική αναπαράσταση.	**Σωστή απάντηση** Το $\frac{3}{8}$ είναι πιο κοντά στο $\frac{4}{8}$, απ' ότι το $\frac{2}{7}$ στο $\frac{3,5}{7}$.	**Σωστή απάντηση** «Και στα δύο κλάσματα ο αριθμητής είναι κατά 5 μικρότερος από τον παρανομαστή αλλά ο $\frac{2}{7}$ έχει μικρότερους όρους.»

$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ (ισοδύναμα)	**Σωστή απάντηση** «Πολ/ζω κάθε όρο του 2/3 με το 3 και προκύπτουν ισοδύναμα κλάσματα.»	**Σωστή απάντηση** Ισοδύναμα κλάσματα αφού $2\cdot 9=3\cdot 6$
	A_1	**A_2**	**A_3**
$\frac{8}{10}$ $\frac{10}{12}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{8}{10}<\frac{10}{12}$. Με σχηματική αναπαράσταση.	**Σωστή απάντηση** **(residual thinking)** «Το $\frac{2}{10}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{2}{12}$, άρα $\frac{8}{10}<\frac{10}{12}$»	**Σωστή απάντηση** «Και στα δύο κλάσματα ο αριθμητής είναι κατά 2 μικρότερος από τον παρανομαστή αλλά ο $\frac{10}{12}$ έχει μεγαλύτερους όρους.»
Q.1.10. Είναι το παρακάτω άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου. $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$	**Λανθασμένη απάντηση** «Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα αφού δεν μπορούμε να κάνουμε την πράξη.»	**Σωστή απάντηση** «Και τα δύο κλάσματα είναι μικρότερα του 1/2 , άρα και το άθροισμά τους θα είναι μικρότερο της μονάδας.»	**Σωστή απάντηση** «Και τα δύο κλάσματα είναι μικρότερα του μισού, άρα εάν τα προσθέσουμε το άθροισμα είναι μικρότερο της μονάδας.»
Q.1.11. Μπορείς να εκτιμήσεις το αποτέλεσμα της	**Λανθασμένη απάντηση** «Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν	**Σωστή απάντηση** «Το κάθε κλάσμα είναι μικρότερο	**Σωστή απάντηση** «Από 0,8 έως 1. Και τα δύο

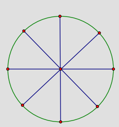
πράξης $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$	είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα αφού δεν μπορούμε να κάνουμε την πράξη.»	του 0,5 «για λίγο», άρα το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι μεγαλύτερο του 0,5 και μικρότερο του 1.»	κλάσματα είναι μικρότερα από το μισό άρα βγάζουμε αυτό το αποτέλεσμα.»
	A_1	**A_2**	**A_3**
Q.1.12. Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Μπορείς να ξέρεις ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;	**Σωστή απάντηση** «Όχι, γιατί δεν έφαγαν από την ίδια πίτσα. Αν έτρωγαν από τη ίδια θα έμενε κι ένα κομμάτι.»	**Σωστή απάντηση** «Όχι, γιατί δεν έφαγαν από την ίδια πίτσα.»	**Σωστή απάντηση** «Όχι, γιατί δεν έφαγαν από την ίδια πίτσα.»
Q.1.13. Αν κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε	**Σωστή απάντηση** «Δεν μπορώ να ξέρω, μπορεί να είναι κομμένη σε 4, 8 κομμάτια κ.ο.κ.»	**Σωστή απάντηση** «Δεν μπορούμε να ξέρουμε ούτε πόσα κομμάτια έφαγε, ούτε πόσα κομμάτια είχε η πίτσα αφού: $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}$ »	**Σωστή απάντηση** « Όχι, γιατί μπορεί να είχε φάει τα 2 από τα 8 κομμάτια.»

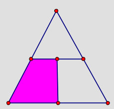
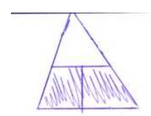
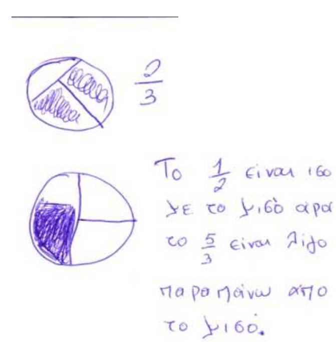
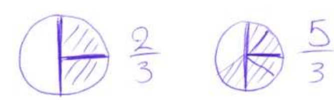
όλη η πίτσα;			
	A$_1$	**A$_2$**	**A$_3$**
Q.1.14. Ο Κώστας λέει: Έφαγα τα 3/4 της πίτσας μου. Η Μαρία λέει: Άρα, έφαγες τρία κομμάτια. Συμφωνώ / Δε συμφωνώ με το συμπέρασμα της Μαρίας.	**Σωστή απάντηση** «Δεν μπορώ να ξέρω, μπορεί να είναι κομμένη σε 4, 8 κομμάτια κ.ο.κ.»	**Σωστή απάντηση** «Δε συμφωνώ αφού $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}$ »	**Σωστή απάντηση** «Δε συμφωνώ. Δεν ξέρουμε σε πόσα κομμάτια ήταν χωρισμένη η πίτσα.»
Q.1.15. Πόσα ζευγάρια α, β μπορείς να βρεις ώστε να ισχύει $\alpha \cdot \beta = 3$;	**Σωστή απάντηση** «Άπειρα ζευγάρια αριθμών. α=3 β=1 α=1 β=3 $\alpha=\frac{1}{3}, \beta=\frac{3}{1}$ Και γενικά όλοι οι αντίστροφοι αριθμοί, αφού έχουν γινόμενο 1.»	**Σωστή απάντηση** «Υπάρχουν άπειρα ζευγάρια αριθμών, π.χ: $1 \cdot 3 = 3$ $(-1)\cdot(-3)=3$ $3 \cdot 1 = 3$ $(-3)\cdot(-1)=3$ Αν όμως βάλουμε και δεκαδικούς μπορούμε να βρούμε άπειρα ζευγάρια αριθμών, π.χ.: $6 \cdot 0,5 = 3$ $12 \cdot 0,25 = 3$	**Σωστή απάντηση** «Υπάρχουν τα ακόλουθα ζευγάρια αριθμών: $1 \cdot 3 = 3$ $3 \cdot 1 = 3$ Μπορώ να βρω και πολλά άλλα…άπειρα είναι.»

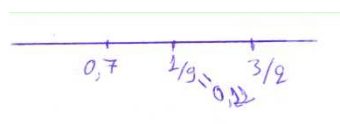
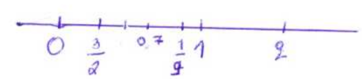
	A_1	A_2	A_3
Q.1.16. 3 …10 > 3 5 … 2 < 5 10… $\frac{1}{2}$< 10 10…$\frac{3}{4}$> 10	**Λανθασμένη απάντηση**	**Σωστή απάντηση**	**Σωστή απάντηση**
Q.1.17.Μπορείς να προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;	«0,000....1 (άπειρα μηδενικά και στο τέλος 1) Δεν ξέρω ποιος είναι, ούτε ο Η/Υ δεν μπορεί να τον βρει, ούτε τα μισά νούμερα δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε, είναι ένας αριθμός που έχει για δεκαδικά ψηφία άπειρα μηδενικά, κι αν ποτέ υπάρξει τέλος, τελευταίο νούμερο το 1.»	**Σωστή απάντηση** «Δεν υπάρχει, οι δεκαδικοί είναι άπειροι.»	**Σωστή απάντηση** «Δεν υπάρχει, δεν τελειώνουν οι δεκαδικοί.»
Q.1.18.Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$; (Αν ναι, πόσοι;)	**Σωστή απάντηση** «Υπάρχουν άπειροι. Δεν μπορώ να το εξηγήσω, δεν είναι συγκεκριμένοι.»	**Σωστή απάντηση** «Είναι άπειροι, π. χ: $\frac{2{,}9}{5},\frac{2{,}99}{5},\frac{2{,}999}{5},\frac{2{,}999...}{5}$ »	**Σωστή απάντηση** «Ναι, υπάρχουν αριθμοί και είναι άπειροι διότι μπορούμε να γράψουμε κλάσματα με πολύ

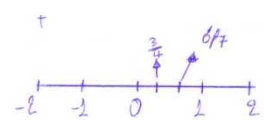
	π.χ $\cfrac{2}{\cfrac{2}{5}},\cfrac{3}{\cfrac{2}{5}},\cfrac{\cfrac{1}{3}}{\cfrac{2}{5}},\cfrac{\cfrac{1}{\cfrac{1}{3}}}{\cfrac{2}{5}}$»		μεγαλύτερους όρους και να βρούμε πολλά κλάσματα ανάμεσα.»
	A_1	**A_2**	**A_3**
Q.1.19. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς που λείπουν; $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-...\right).\frac{1.000}{...}=1$ Γιατί αυτοί οι αριθμοί που βρήκες δεν είναι μοναδικοί;	**Σωστή απάντηση** $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-...\right).\frac{1.000}{...}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{75}{100}-\frac{74}{100}\right).\frac{1.000}{10}=1 \Leftrightarrow$ $\frac{1\cdot 1000}{100\cdot 10}=1 \Leftrightarrow \frac{1000}{1000}=1$ «Δεν είναι οι μοναδικοί αριθμοί. Δεν μπορούμε να βάλουμε αρνητικούς, μόνο θετικούς μέχρι το 74/100.»	**Σωστή απάντηση** $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-...\right).\frac{1.000}{...}=1$ $\left(\frac{100}{200}+\frac{50}{200}-0\right).\frac{1.000}{x}=1 \Leftrightarrow$ $\frac{150}{200}\cdot\frac{1000}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{150000}{200x}=1 \Leftrightarrow$ $\frac{1500}{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=1500 \Leftrightarrow x=750$ «Δεν είναι οι μοναδικοί αριθμοί, υπάρχουν άπειροι αριθμοί που μπορώ να συμπληρώσω στο ένα από τα δύο κενά και να έχω έναν άγνωστο, τον οποίο και μπορώ να υπολογίσω.»	**Δεν μπόρεσε να απαντήσει**

8.2. Συνοπτική παρουσίαση των απαντήσεων των μαθητών της ομάδας Β

	B_1	B_2	B_3
Q.1.1.Ισοδύναμα κλάσματα $\frac{5}{4}=\frac{...}{...}$ $\frac{7}{12}=\frac{...}{...}$	Αρχικά είχε γράψει ότι $\frac{5}{4}=\frac{4}{5}$, στη συνέχεια έκανε χιαστί και κατέληξε ότι δεν είναι ισοδύναμα.	**Σωστή απάντηση**	**Σωστή απάντηση**
Q.1.2.Πράξεις με κλάσματα	**Σωστή απάντηση**	**Σωστή απάντηση**	**Σωστή απάντηση**
Q.1.3.Σύγκριση κλασμάτων (με όμοιους αριθμητές-παρανομαστές)	**Σωστή απάντηση** Χρήση μνημονικού κανόνα που δε συνοδευόταν από αντίστοιχη εννοιολογική κατανόηση. «Από τα ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή και τα ετερώνυμα πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα για να μπορέσουμε να τα συγκρίνουμε.»		
Q.1.4.i) Γραμμοσκίαση του ¼ της επιφάνειας) 	**Σωστή απάντηση** «Επειδή το σχήμα έχει 8 κομμάτια, το ¼ της ολικής του επιφάνειας είναι τα 2/8.»	**Λανθασμένη απάντηση** Χώρισε τον κυκλικό δίσκο στα δύο και πήρε το ¼ του μισού. 	**Λανθασμένη απάντηση** Αμφιταλαντευόταν μεταξύ των επιλογών 1 ή 2 κομμάτια από τα 8, τελικά επέλεξε 1 κομμάτι.
ii) Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του τριγώνου παριστάνει το 1/3 της ολικής του επιφάνειας.	**Λανθασμένη απάντηση** «Είναι σωστό αφού, το τρίγωνο έχει 3 κομμάτια άρα το 1/3 της ολικής επιφάνειας είναι αυτό που δείχνει το σχήμα.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Είναι σωστό … το τρίγωνο χωρίζεται σε 3 μέρη από τα οποία είναι το 1 γραμμοσκιασμένο.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Είναι σωστό αφού το τρίγωνο χωρίζεται σε 3 μέρη από τα οποία είναι το 1 γραμμοσκιασμένο.»

 Σωστό η λάθος;			
	B_1	**B_2**	**B_3**
Q.1.5. Δείξε με ένα σχήμα το 2/3, στη συνέχεια με ένα άλλο σχήμα το 5/3.	**Λανθασμένη απάντηση** **2/3**: Χωρίζει το τρίγωνο σε 3 ίσα κομμάτια και παίρνει τα 2.  **5/3:** Δεν μπόρεσε να απαντήσει	 	**Λανθασμένη απάντηση** 
Q.1.6. Η Στέλλα και ο Γιώργος διαλύουν σιρόπι βύσσινο σε νερό και φτιάχνουν βυσσινάδα. Η κούπα του Γιώργου περιέχει 600 ml νερό. Το ποτήρι της Στέλλας περιέχει 200 ml νερό.	**Λανθασμένη απάντηση** «Ο Γιώργος έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα γιατί είχε σε 600ml νερό, 100g βύσσινο: $\frac{600}{100} = 6$ ml, ενώ η Στέλλα: $\frac{200}{50} = 4$ ml»	**Λανθασμένη απάντηση** «Το παιδί που έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα είναι η Στέλλα, γιατί έβαλε μικρότερη ποσότητα νερό απ' ότι ο Γιώργος και λιγότερο βύσσινο. Άρα θα είναι πιο γλυκιά η βυσσινάδα της, γιατί οι ποσότητες νερού-βύσσινου είναι σχετικά κοντά, δηλ. δεν περιέχουν ανάμεσα πολλούς	**Λανθασμένη απάντηση** Ο Γιώργος έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα αφού: $\frac{600}{100}, \frac{200}{50}$ $\frac{600}{100} > \frac{400}{100}$

Η Στέλλα ρίχνει στο ποτήρι της 50 γραμμάρια σιρόπι βύσσινο. Ο Γιώργος βάζει 100 γραμμάρια βύσσινο στην κούπα του. Ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα;		αριθμούς όπως το 600 με το 100.»	
	B$_1$	**B$_2$**	**B$_3$**
Q.1.7. i) Διάταξη των 3/2, 1/9, 0.7 ii) Τοποθέτηση στην αριθμογραμμή	**i) Σωστή απάντηση** - Μετατροπή του 0,7 σε 7/10 - $\frac{1}{9} = 0{,}11$ - $\frac{3}{2} > \frac{2}{2} = 1$ **ii)** 	**i) Λανθασμένη απάντηση** Πιο κοντά στο ½ είναι το 3/8 γιατί ο παρανομαστής 8 είναι πιο κοντά στο 2. **ii)** 	**i) Δεν απάντησε** Αδύνατον να κάνει τη σύγκριση χωρίς να κάνει τη διαίρεση και να μετατρέψει τα κλάσματα σε δεκαδικούς. **ii) Δεν απάντησε**

	B_1	B_2	B_3
Q.1.8. i) Ποιο από τα κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{13}$ είναι πιο κοντά στο ½ και γιατί; ii) Ποια από τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{7}$ είναι πιο κοντά στο 1; Μπορείς να παραστήσεις τους αριθμούς πάνω στον άξονα;	**i) Σωστή απάντηση** Εκτέλεση διαιρέσεων $\frac{3}{8}=0,375$ $\frac{7}{13}=0,53$ **ii) Σωστή απάντηση** Λανθασμένη παράσταση αριθμών πάνω στον άξονα (παρά τη σωστή σύγκριση). 	**i) Λανθασμένη απάντηση** Πιο κοντά στο ½ είναι το 3/8 γιατί ο παρανομαστής 8 είναι πιο κοντά στο 2. **ii) Λανθασμένη απάντηση** Πιο κοντά στο 1 είναι το 6/7. Το 7 είναι μεγαλύτερο από το 4, άρα πιο κοντά στο 1.	Αδύνατον να κάνει τη σύγκριση χωρίς να κάνει τη διαίρεση και να μετατρέψει τα κλάσματα σε δεκαδικούς.
Q.1.9. Σύγκριση κλασμάτων	B_1	B_2	B_3
$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{4}$	**Λανθασμένη απάντηση** «Τα κλάσματα $\frac{8}{9}$ και $\frac{5}{4}$ δεν έχουν κοινό παρανομαστή άρα το κλάσμα με το μικρότερο αριθμητή θα είναι το μεγαλύτερο.»	**Λανθασμένη απάντηση** (αριθμητής, παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου	**Λανθασμένη απάντηση** (αριθμητής, παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου
$\frac{123}{220}$ $\frac{6}{5}$	**Λανθασμένη απάντηση**	**Λανθασμένη απάντηση** (αριθμητής και ο παρανομαστής του	**Λανθασμένη απάντηση** (αριθμητής και ο παρανομαστής

	$\frac{123}{220} > \frac{6}{5}$ Ομοίως («Δεν έχουν κοινό παρανομαστή άρα το κλάσμα με το μικρότερο αριθμητή θα είναι το μεγαλύτερο.»)	ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου)	του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου)
	B_1	**B_2**	**B_3**
$\frac{6}{14}$ $\frac{5}{8}$	**Λανθασμένη απάντηση** Ομοίως με τη δικαιολόγηση της προηγούμενης ερώτησης.	**Λανθασμένη απάντηση** $\frac{6}{14} < \frac{5}{8}$ (ο αριθμητής και παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι από του άλλου)	**Λανθασμένη απάντηση** $\frac{6}{14} < \frac{5}{8}$ «5/8: Αν από τα 8 κομμάτια πάρουμε τα 5 μένουν 3 6/14: Αν από τα 14 κομμάτια πάρουμε τα 6 μένουν 8, δηλ. περισσότερα.»
$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$	**Λανθασμένη απάντηση** Ομοίως	**Λανθασμένη απάντηση**	**Λανθασμένη απάντηση** Όμοίως με την δικαιολόγηση της προηγούμενης ερώτησης
$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$	**Λανθασμένη απάντηση** Ομοίως	**Λανθασμένη απάντηση**	**Δεν απάντησε**
$\frac{3}{8}$ $\frac{2}{7}$	**Λανθασμένη απάντηση** Ομοίως	**Λανθασμένη απάντηση**	**Δεν απάντησε**
$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$	**Λανθασμένη απάντηση**	**Λανθασμένη απάντηση**	**Λανθασμένη απάντηση**

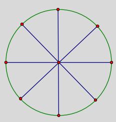
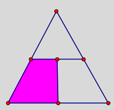
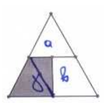
	Ομοίως	$\frac{2}{3} < \frac{6}{9}$ (ο αριθμητής και ο παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου)	(ο αριθμητής και ο παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου)
$\frac{8}{10}$ $\frac{10}{12}$	**Λανθασμένη απάντηση** Ομοίως	**Λανθασμένη απάντηση** (ο αριθμητής και παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου	**Λανθασμένη απάντηση** (ο αριθμητής και παρανομαστής του ενός κλάσματος είναι μεγαλύτεροι του άλλου)
	B_1	**B_2**	**B_3**
Q.1.10. Είναι το παρακάτω άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου. $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$	**Λανθασμένη απάντηση** «Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα αφού δεν μπορούμε να κάνουμε την πράξη.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Μεγαλύτερο από το 1 κατά 2, ή 3 μονάδες γιατί είναι μεγάλα τα κλάσματα, δηλ. ο αριθμητής και ο παρανομαστής.»	«Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα αφού δεν μπορούμε να κάνουμε την πράξη.»
Q.1.11. Μπορείς να εκτιμήσεις το αποτέλεσμα της πράξης $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$	**Λανθασμένη απάντηση** Το αποτέλεσμα της πράξης θα είναι 3 ή 4, μπορεί και 2	«Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα αφού δεν μπορούμε να κάνουμε την πράξη.»	

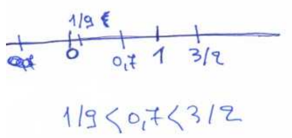
	B_1	B_2	B_3
Q.1.12. Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Μπορείς να ξέρεις ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;	**Λανθασμένη απάντηση** «Ο Κώστας έφαγε περισσότερη πίτσα, γιατί έφαγε το ½, δηλαδή τη μισή πίτσα ενώ η Μαρία έφαγε το ¼, δηλ. λιγότερο από το μισή.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Η Μαρία κατανάλωσε την περισσότερη πίτσα γιατί ο Κώστας έφαγε τη μισή πίτσα.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Η Μαρία κατανάλωσε την περισσότερη πίτσα γιατί ο Κώστας έφαγε τη μισή πίτσα, ενώ το ¼ δεν είναι ούτε μισή.»
Q.1.13. Αν κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;	**Λανθασμένη απάντηση** «Αν η πίτσα είχε 4 κομμάτια, τότε το ¼ είναι 1 κομμάτι από την πίτσα.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Αυτός έφαγε 1 κομμάτι από τα 4.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Έφαγε 1 κομμάτι από τα 4.»
Q.1.14. Ο Κώστας λέει: Έφαγα τα 3/4 της πίτσας μου. Η Μαρία	**Λανθασμένη απάντηση** «Συμφωνώ, γιατί αν η πίτσα είχε 4 κομμάτια τότε ο Κώστας θα	**Λανθασμένη απάντηση** «Συμφωνώ, γιατί η πίτσα είχε 4 κομμάτια κι ο Κώστας έφαγε τα 3.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Συμφωνώ, γιατί αφού η πίτσα είχε 4 κομμάτια ο Κώστας έφαγε

λέει: Άρα, έφαγες τρία κομμάτια. Συμφωνώ / Δε συμφωνώ με το συμπέρασμα της Μαρίας.	είχε φάει τα 3 κομμάτια δηλαδή τα ¾ της πίτσας»		τα 3.»
	B_1	**B_2**	**B_3**
Q.1.15. Πόσα ζευγάρια α, β μπορείς να βρεις ώστε να ισχύει $\alpha \cdot \beta = 3$;	**Λανθασμένη απάντηση** α=3 β=1 α=1 β=3 $\alpha = -1$ $\beta = -3$ $\alpha = -3$ $\beta = -1$	**Λανθασμένη απάντηση** α=3 β=1 α=1 β=3 «Μπορώ να βάλω στη θέση του 1, κλάσματα με ίδιο αριθμητή και παρανομαστή και στη θέση του 3 κλάσμα με παρανομαστή το 1.»	**Λανθασμένη απάντηση** Μόνο ένα ζευγάρι αριθμών α=3 β=1.
Q.1.16. 3 **…**10 > 3 5 **…** 2 < 5 $10 \ldots \frac{1}{2} < 10$ $10 \ldots \frac{3}{4} > 10$	**Σωστή απάντηση** με χρήση *διαδικαστικών* στρατηγικών (νοερά)	**Λανθασμένη απάντηση**	**Λανθασμένη απάντηση**

	B_1	B_2	B_3
Q.1.17. Μπορείς να προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;	**Λανθασμένη απάντηση** «Ο μικρότερος θετικός αριθμός είναι ο 0,1.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Το 1.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Το 0,1.»
Q.1.18. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$; (Αν ναι, πόσοι;)	**Λανθασμένη απάντηση** «Δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$»	**Λανθασμένη απάντηση** «Υπάρχουν ακριβώς 9.Αυτοί είναι οι: $\frac{2,1}{5},\frac{2,2}{5},\ldots,\frac{2,9}{5}$. Το 2,11/5 έχει περάσει το 3/5.»	**Λανθασμένη απάντηση** «Μεταξύ του 2/5 και του 3/5, μάλλον είναι 9 οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα.»
Q.1.19. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς που λείπουν; $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\ldots\right).\frac{1.000}{\ldots}=1$ Γιατί αυτοί οι αριθμοί που βρήκες δεν είναι μοναδικοί;	**Λανθασμένη απάντηση** $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\ldots\right).\frac{1.000}{\ldots}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{50}{100}+\frac{25}{100}-\ldots\right).\frac{1.000}{10}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{75}{100}-\frac{25}{100}\right)\cdot\frac{1000}{1000}=1 \Leftrightarrow$ $\frac{100}{100}\cdot\frac{1000}{1000}=1$ Τελικά δεν μπόρεσε να καταλήξει σε κάτι που ισχύει.	**Λανθασμένη απάντηση** $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\frac{100}{100}\right).\frac{1.000}{\ldots}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{150}{200}-\frac{200}{200}\right).\frac{1.000}{\ldots}=1 \Leftrightarrow$ $-\frac{50}{200}\cdot\frac{1000}{?}=1$ Τελικά δεν μπόρεσε να καταλήξει σε κάτι που ισχύει.	**Λανθασμένη απάντηση** $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\frac{\ldots}{\ldots}\right).\frac{1.000}{\ldots}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{50}{200}+\frac{25}{100}-\frac{\ldots}{100}\right).\frac{1000}{1000}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{75}{100}-\frac{?}{100}\right)\cdot\frac{1000}{1000}=1$ Τελικά δεν μπόρεσε να καταλήξει σε κάτι που ισχύει.

8.3. Συνοπτική παρουσίαση των απαντήσεων της μαθήτριας της ομάδας C

	C_1
Q.1.1.Ισοδύναμα κλάσματα $\frac{5}{4} = \frac{...}{...}$ $\frac{7}{12} = \frac{...}{...}$	Δεν θυμόταν ποια κλάσματα ονομάζουμε ισοδύναμα. Ωστόσο μπόρεσε να συμπληρώσει τις ισότητες, προσεγγίζοντάς τες εννοιολογικά.
Q.1.2. Πράξεις με κλάσματα	**Λανθασμένη απάντηση** (εκτός από τον πολ/μό κλασμάτων)
Q.1.3. Σύγκριση κλασμάτων (με όμοιους αριθμητές-παρανομαστές)	**Σωστή απάντηση** «Από τα ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή, και από τα κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρανομαστή.»
Q.1.4.i) Γραμμοσκίαση του ¼ της επιφάνειας) 	**Σωστή απάντηση** «Χωρίζουμε τον κύκλο σε 4 ίσα κομμάτια και παίρνουμε μόνο το 1 από τα 4, δηλαδή το ¼. Άρα τελικά 2 από τα 8 κομμάτια.»
ii) Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του τριγώνου παριστάνει το 1/3 της ολικής του επιφάνειας.  Σωστό η λάθος;	**Σωστή απάντηση** «Δεν μπορεί να είναι ίσα και τα τρία κομμάτια αφού το α είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο ενώ τα β και γ ένα ισοσκελές και ορθογώνιο μαζί […] Είναι το 1/4 , το 1/3 δεν είναι. Περισσεύει ένα κομματάκι. Αν το χωρίσουμε εδώ, βγαίνουν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα. Άρα είναι το ¼». 
Q.1.5.Δείξε με ένα σχήμα το 2/3, στη συνέχεια με ένα άλλο σχήμα το 5/3.	**Σωστή απάντηση** **2/3**: Χωρίζει ένα ορθογώνιο σε 3 ίσα κομμάτια και παίρνει τα 2 **5/3**: Φτιάχνει 2 ορθογώνια εκ των οποίων επιλέγει και το ένα ολόκληρο και από το άλλο επιλέγει δύο κομμάτια.
Q.1.6. Η Στέλλα και ο Γιώργος διαλύουν σιρόπι βύσσινο σε νερό και φτιάχνουν βυσσινάδα. Η κούπα του	**Σωστή απάντηση** Γιώργος: $\frac{100}{600}$

Γιώργου περιέχει 600 ml νερό. Το ποτήρι της Στέλλας περιέχει 200 ml νερό. Η Στέλλα ρίχνει στο ποτήρι της 50 γραμμάρια σιρόπι βύσσινο. Ο Γιώργος βάζει 100 γραμμάρια βύσσινο στην κούπα του. Ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα;	Στέλλα: $\frac{50}{200}$ «Τα 50g που έβαλε η Στέλλα στη βυσσινάδα είναι τα μισά των 100g που έβαλε ο Γιώργος στα 600g. Άρα πολλαπλασιάζουμε x2 το $\frac{50}{200}=\frac{100}{400}$.Το $\frac{100}{400}$ είναι πιο πολύ σιρόπι από το $\frac{100}{600}$! Άρα πιο γλυκιά η βυσσινάδα της Στέλλας.»
Q.1.7. i) Διάταξη των 3/2, 1/9, 0.7 ii) Τοποθέτηση στην αριθμογραμμή	**i) Σωστή απάντηση** - Εκτίμηση του 0,7 μεγαλύτερου του ½=0,5 - Εκτίμηση του 3/2 ως αριθμού μεγαλύτερου του 1 - Εκτίμηση του 1/9 ως αριθμού μικρότερου του 1/2 **ii)** Σωστή τοποθέτηση στην αριθμογραμμή. 
Q.1.8. Ποιο από τα κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{13}$ είναι πιο κοντά στο ½ και γιατί; ii) Ποια από τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{6}{7}$ είναι πιο κοντά στο 1; Μπορείς να παραστήσεις τους αριθμούς πάνω στον άξονα;	**i)** ½=0,5. Το 7/13 με το 7/14 δεν έχουν μεγάλη διαφορά, άρα είναι πιο κοντά στο ½ γιατί 7/14=0,5 **ii) Λανθασμένη απάντηση** (residual thinking) «Είναι ίσα γιατί θέλουν 1 ακόμα για να βγάλουν αποτέλεσμα 1» Λανθασμένη αναπαράσταση στην αριθμογραμμή.»
Q.1.9. Σύγκριση κλασμάτων	**C_1**
$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{4}$	**Σωστή απάντηση** (Χρήση του 1 ως «αριθμού αναφοράς») $\frac{8}{9}<\frac{5}{4}$ αφού $\frac{8}{9}<1$, $\frac{5}{8}>1$
$\frac{123}{220}$ $\frac{6}{5}$	**Σωστή απάντηση** (Χρήση του 1 ως «αριθμού αναφοράς»)

	$\frac{123}{220} < \frac{6}{5}$
$\frac{6}{14}$ $\frac{5}{8}$	**Σωστή απάντηση** (Χρήση του ½ ως «αριθμού αναφοράς») $\frac{6}{14} < \frac{5}{8}$ αφού: $\frac{6}{14} < \frac{1}{2}$, $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$
$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$	**Σωστή απάντηση** (Χρήση του ½ ως «αριθμού αναφοράς») $\frac{3}{5} > \frac{1}{3}$
$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$	**Λανθασμένη απάντηση** (κατά τη διάρκεια της συνέντευξης εντόπισε το λάθος της) $\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ Είναι ίσα γιατί θέλουν ακόμα 1 και τα δύο για να βγάλουν αποτέλεσμα 1 (residual - gap thinking)
$\frac{3}{8}$ $\frac{2}{7}$	**Λανθασμένη απάντηση** (κατά τη διάρκεια της συνέντευξης εντόπισε το λάθος της) $\frac{3}{8} > \frac{2}{7}$ «Το 3 είναι μεγαλύτερο του 2 κατά 1 και το ίδιο ισχύει για τους παρανομαστές.»
$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$	**Σωστή απάντηση** $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ (ισοδύναμα)
$\frac{8}{10}$ $\frac{10}{12}$	**Λανθασμένη απάντηση** (κατά τη διάρκεια της συνέντευξης εντόπισε το λάθος της) $\frac{8}{10} = \frac{10}{12}$ (έχουν διαφορά 2 από τον παρανομαστή και τα δύο κλάσματα -gap thinking)
Q.1.10. Είναι το παρακάτω άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου. $\frac{7}{15} + \frac{5}{12}$	«Το 7/14 είναι 0,5, το 7/15 είναι 0,4. Το 5/10 είναι 0,5 άρα το 5/12 είναι λίγο μικρότερο από το 0,5. Είναι μικρότερο από τη μονάδα. Νομίζω ότι βγαίνει περίπου 0,9 όλο μαζί.»

Q.1.11. Μπορείς να εκτιμήσεις το αποτέλεσμα της πράξης $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$	
Q.1.12. Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Μπορείς να ξέρεις ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;	**Σωστή απάντηση** «Μπορεί η μία να είναι μια πίτσα μεγάλη κι η άλλη μια πίτσα μικρή, οπότε δεν ξέρουμε τι έχει καταναλώσει ο καθένας.»
Q.1.13. Αν κάποιος έφαγε το 1/4 μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;	**Σωστή απάντηση** «Δεν μπορώ να ξέρω, γιατί δε μου λέει πόσα κομμάτια είναι όλη η πίτσα, αλλά αν είχε 4 κομμάτια τότε είχε φάει το 1.»
Q.1.14. Ο Κώστας λέει: Έφαγα τα 3/4 της πίτσας μου. Η Μαρία λέει: Άρα, έφαγες τρία κομμάτια. Συμφωνώ / Δε συμφωνώ με το συμπέρασμα της Μαρίας.	**Σωστή απάντηση** «Δεν ξέρω πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα, αλλά αν είχε 4, τότε ο Κώστας έφαγε τα 3.»
Q.1.15. Πόσα ζευγάρια α, β μπορείς να βρεις ώστε να ισχύει $\alpha \cdot \beta = 3$;	**Σωστή απάντηση** «Άπειρα ζευγάρια αριθμών.»
Q.1.16. $3 \ldots 10 > 3$ $5 \ldots 2 < 5$ $10 \ldots \frac{1}{2} < 10$ $10 \ldots \frac{3}{4} > 10$	**Σωστή απάντηση** Μπόρεσε κατόπιν πειραματισμών με αριθμούς να καταλήξει στον εξής κανόνα κατά τη διάρκεια της συνέντευξης: «Όταν έναν αριθμό α τον πολλαπλασιάζουμε με ένα κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος του α, ενώ όταν το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας προκύπτει αριθμός μικρότερος του α.»
Q.1.17. Μπορείς να προσδιορίσεις ποιος είναι ο μικρότερος	**Σωστή απάντηση** «Αυτός που είναι ένα ‘τσικ’ από το 0. Όλοι οι αριθμοί πάνω

θετικός αριθμός;	από το 0.[…] π.χ. το 0,1, κι ακόμα πιο μικρός το 0,00 1. Υπάρχουν κι άλλοι πιο μικροί..»
Q.1.18. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$; (Αν ναι, πόσοι;)	**Σωστή απάντηση** «Υπάρχουν άπειροι [...] Αν τους βάλουμε στον άξονα, σίγουρα θα υπάρχει κάποιο κενό. Στο κενό αυτό περιέχονται άπειροι αριθμοί.»
Q.1.19. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς που λείπουν; $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-...\right).\frac{1.000}{...}=1$ Γιατί αυτοί οι αριθμοί που βρήκες δεν είναι μοναδικοί;	**Λανθασμένη απάντηση** $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-...\right).\frac{1.000}{...}=1 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{25}{100}-\frac{1}{2}\right).\frac{1.000}{4000}=1$ αφού $(0,5+0,25-0,5)\cdot\frac{1000}{4000}=1$ Τελικά δεν μπόρεσε να καταλήξει σε κάτι που ισχύει.