ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας κατά Hilbert στο πνεύμα των Στοιχείων του Ευκλείδη»

ΓΑΛΙΟΥΔΑΚΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ

Α.Μ. 200815

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Στυλιανός Νεγρεπόντης (επιβλέπων Καθηγητής)	Ομότιμος Καθηγητής	…………….
2) Βασιλική Φαρμάκη	Καθηγήτρια	……….….
3) Νικόλαος Παπαναστασίου	Αναπληρωτής Καθηγητής	……….…..

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη, ομότιμο Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ, για την βοήθειά του, το χρόνο που αφιέρωσε και τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις που μου παρείχε.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια του τμήματος Μαθηματικών κ. Βασιλική Φαρμάκη και τον αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών κ. Νικόλαο Παπαναστασίου που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την αδελφή μου Στέλλα, τη Ματούλα, τον Παναγιώτη και τη Διονυσία για τη σημαντική τους υποστήριξη, κατανόηση και υπομονή στην προσπάθεια ολοκλήρωσης των σπουδών μου και εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, και ιδιαίτερα η γεωμετρία, είχαν αναπτυχθεί για τρεις περίπου αιώνες από τον Θαλή τον Μιλήσιο, τους Πυθαγόρειους, τον Ιπποκράτη τον Χίο, τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο και τελικά την Ακαδημία Πλάτωνος, όπου και τελειοποιήθηκαν με τη βασική συμβολή των δύο μεγάλων μαθηματικών της Ακαδημίας, τον Θεαίτητο τον Αθηναίο και τον Εύδοξο τον Κνίδιο και τους μαθητές τους. Ο Ευκλείδης, στην Αλεξάνδρεια, οργάνωσε αυτό το υλικό σε μαθηματική λογική σειρά και συνέθεσε τα *Στοιχεία*. Τα *Στοιχεία* αποτελούνται από 13 Βιβλία στα οποία αναφέρονται οι Ορισμοί, τα Αιτήματα, οι Κοινές έννοιες και οι Προτάσεις. Οι ορισμοί των βασικών εννοιών, ιδίως του σημείου και της ευθείας, έχουν φιλοσοφική, δηλαδή Πλατωνική, προέλευση. Φιλοσοφική είναι και η επίμονη αντίληψη των αρχαίων, η οποία είχε επικρατήσει μέχρι τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, οπότε και αποδείχθη εσφαλμένη, ότι το πέμπτο Αίτημα έχει κάποιου είδους απόδειξη.

Για πολλούς αιώνες τα *Στοιχεία* θεωρήθηκαν το πρότυπο της μαθηματικής τελειότητας. Όμως ιδίως μετά την απόδειξη της ύπαρξης και μη Ευκλείδειων γεωμετριών, είχε αρχίσει να παρατηρείται ότι υπάρχουν κάποια λογικά κενά, ιδίως στη θεμελίωση και στον κατάλογο των Αιτημάτων, ο οποίος εμφανίστηκε ελλιπής. Αυτό συνέβη κατανοώντας ότι κάποιες από τις Προτάσεις των *Στοιχείων* βασίζονται όχι στα Αιτήματα και στις κοινές έννοιες αλλά στη διαίσθηση και στο σχήμα. Για παράδειγμα στην Πρόταση Ι.1 (κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου με δοθείσα βάση) του πρώτου Βιβλίου των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης δεν αιτιολογεί για ποιο λόγο οι κύκλοι που γράφει μέσω του Αιτήματος 3 τέμνονται, αλλά βασίζεται στο σχήμα. Αδυναμίες εμφανίζονται και στις Προτάσεις των *Στοιχείων* στις οποίες ο Ευκλείδης επικαλείται τον διαχωρισμό του επιπέδου σε ημιεπίπεδα και την ύπαρξη σημείων σε αυτά (π.χ. Πρόταση Ι.9) καθώς επίσης και πότε ένα σημείο ανήκει μεταξύ άλλων ή ανήκει στο εσωτερικό μιας γωνίας.

Μετά από αρκετά ενδιάμεσα βήματα αναζήτησης μιας βελτιωμένης αξιωματικής θεμελίωσης με σκοπό τη συμπλήρωση όλων των κενών που εμφανίζονται στα *Στοιχεία*, η αξιωματική θεμελίωση η οποία θεωρήθηκε πληρέστερη δόθηκε από τον David Hilbert τα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Μία καλή πηγή για την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert είναι το βιβλίο του Hartshorne, *Euclid and Beyond*.

Στην παρούσα εργασία εισάγουμε τις διορθωτικές αλλαγές του Hilbert, όχι συλλήβδην από την αρχή, αλλά έχοντας ως επίκεντρο τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη βαθμιαία και σύμφωνα (κατά το δυνατόν) με τη σειρά και τις ανάγκες των *Στοιχείων*.

Σε γενικές γραμμές, η εργασία έχει την ακόλουθη διάταξη:

Στο Κεφάλαιο 0 διατυπώνονται οι βασικοί Όροι του πρώτου Βιβλίου των *Στοιχείων* για έννοιες τις οποίες κατά τη θεμελίωση της γεωμετρίας ο Hilbert, δεν δίνει ορισμούς π.χ. σημείου, ευθείας. Στα Κεφάλαια 1 έως 3 παρατίθενται τα αξιώματα **σύνδεσης** (Ι.1-Ι.3), **μεταξύ** (Β.1-Β.2) και **εφαρμογής για ευθύγραμμα τμήματα** (C.1-C.3) της θεμελίωσης Hilbert, με διαφορετική σειρά παρουσίασης και χρήσης τους από εκείνη στην οποία εμφανίζονται στο βιβλίο του Hartshorne. Συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2 τοποθετούμε τα αξιώματα **εφαρμογής για ευθύγραμμα τμήματα** (C.1-C.3) πριν από το αξίωμα του Pasch (Β.4) με αποτέλεσμα η συγκεκριμένη αξιωματική θεμελίωση να είναι πολύ πιο κοντά στο πνεύμα των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Κατά αυτό τον τρόπο ο χωρισμός σε ημιεπίπεδα και σε ημιευθείες που βασίζονται στο αξίωμα του Pasch χρησιμοποιεί το αξίωμα ($C.2^*$), το οποίο θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 3, που είναι ουσιαστικά το Αίτημα 2 και δεν χρειάζεται πουθενά την απειρία της ευθείας προκειμένου να χωριστούν σε ημιεπίπεδα και σε ημιευθείες. Με αυτή τη προσέγγιση τα *Στοιχεία* μπορούν να συμπληρωθούν ως προς τον ακριβή ορισμό και ύπαρξη των ημιεπιπέδων.

Στα Κεφάλαια 4, 5 παρουσιάζεται το αξίωμα της **Πληρότητος** το οποίο μας επιτρέπει να γνωρίζουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις δύο κύκλοι τέμνονται καλύπτοντας το κενό που εμφανίζεται στην απόδειξη της Πρότασης Ι.1 των *Στοιχείων* και αποδεικνύονται οι Προτάσεις Ι.1-Ι.3.

Στα Κεφάλαια 6, 7 τα οποία είναι πολύ σημαντικά για τη θεμελίωση κατά Hilbert και ιδίως η έννοια εσωτερικού σημείου γωνίας, έννοια η οποία λαμβάνεται διαισθητικά ως προφανής στα Στοιχεία, γεγονός που αποτελεί μία από τις κύριες αδυναμίες της αξιωματικής θεμελίωσης κατά Ευκλείδη, διατυπώνεται ο ορισμός της γωνίας και το Θεώρημα Crossbar το οποίο είναι συνέπεια του αξιώματος Pasch (Β.4). Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τα αξιώματα **εφαρμογής για γωνίες** (C.4-C.6) της θεμελίωσης Hilbert, μας οδηγούν στις αποδείξεις των Προτάσεων Ι.4-Ι.10 των *Στοιχείων*.

Μετά από αυτή τη μαλλον κοπιώδη προετοιμασία στα Κεφάλαια 8, 9 δίνεται ο ορισμός ορθής γωνίας, αποδεικνύεται το τέταρτο Αίτημα των *Στοιχείων*, η Πρόταση τομή ευθείας-κύκλου (δεύτερο αξίωμα Πληρότητος) και αποδεικνύονται χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα πλέον οι Προτάσεις Ι.11-Ι.26.

Στο Κεφάλαιο 10 εμφανίζεται η έννοια λόγων μεγεθών και αποδεικνύονται οι Προτάσεις V.1-V.25 με αναφορά όμως στα ευθύγραμμα τμήματα και όχι γενικά στα μεγέθη όπως γίνεται στα *Στοιχεία*. Εδώ βρίσκεται και η κυριότερη διαφοροποίηση σε σχέση με την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert καθώς οι αλγεβρικές πράξεις (πραγματικών αριθμών) που ορίζει δεν έχουν αντιστοιχία σε πράξεις λόγων μεγεθών. Μόνο η ισότητα και η ανισότητα (δηλαδή διάταξη) παίζουν ρόλο για τα οποία όμως αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει λόγος να αποστούμε από τα Βιβλία V και VI των *Στοιχείων*.

Στο Κεφάλαιο 11 ορίζονται οι παράλληλες ευθείες και διατυπώνεται το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων*. Παράλληλα, αποδεικνύονται οι Προτάσεις Ι.27-Ι.33 βάσει της αξιωματικής θεμελίωσης Hilbert με τη διαφορά ότι χρησιμοποιείται το πέμπτο Αίτημα και όχι το ισοδύναμό του αξίωμα (P) του Playfair, όπως εμφανίζεται στον Hartshorne, παραμένοντας έτσι και πάλι πιο κοντά στο πνεύμα των *Στοιχείων*.

Στα Κεφάλαια 12, 13 εισάγεται η έννοια του περιεχομένου για ευθύγραμμα χωρία της θεμελίωσης Hilbert. Βάσει αυτής της θεωρίας αποδεικνύουμε στη συνέχεια τις Προτάσεις Ι.34-Ι.48 και ΙΙ.1-ΙΙ.14 των *Στοιχείων*. Επίσης παρουσιάζεται το αξίωμα του Zolt χωρίς το οποίο δε θα μπορούσαμε να έχουμε σχέση διάταξης στα περιεχόμενα ευθυγράμμων χωρίων.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 14 αποδεικνύεται η Πρόταση VI.1, οι βασικές ιδιότητες του Βιβλίου V (π.χ. σύνθεση, διαίρεση, δι’ ίσου, εναλλάξ) για ευθύγραμμα χωρία και στη συνέχεια οι Προτάσεις VI.2-VI.13 του έκτου Βιβλίου των *Στοιχείων*. Σημειώνουμε ότι στις περιπτώσεις που δεν θα είναι εφικτή η απόδειξη της ζητούμενης ιδιότητας μέσω του Ορισμού της αναλογίας, όπως για παράδειγμα στην Πρόταση V.8 (για ευθύγραμμα χωρία), θα επικαλούμαστε την Πρότασης Ι.45 ώστε να τοθετήσουμε μεταξύ παραλλήλων υπό συγκεκριμένη γωνία τυχαία ευθύγραμμα χωρία με τα προκύπτοντα ευθύγραμμα χωρία να είναι ορθογώνια και ισο-περιεχομενικά με τα αρχικά. Κατόπιν χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ευθυγράμμων χωρίων και στηριζόμενοι κατά κύριο λόγο στο αξίωμα Zolt θα οδηγούμαστε στις πλευρές (των οποίων τη θεωρία λόγων έχουμε αναπτύξει στο Κεφάλαιο 10) των αντίστοιχων ευθυγράμμων χωρίων και μέσω της Πρότασης VI.1 θα αναγόμαστε στη θεωρία λόγων των ευθυγράμμων χωρίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Στην θεμελίωση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη ορίζονται οι βασικές έννοιες σημείο (α), ευθεία γραμμή (δ), επίπεδη επιφάνεια (ζ), με τους επτά πρώτους όρους:

α. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
β. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
δ. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
ε. ᾽Επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
στ. ᾽Επιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
ζ. ᾽Επίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Οι ορισμοί αυτοί δεν χρησιμοποιούνται στα *Στοιχεία* και γι' αυτό είναι ερώτημα ποια είναι η χρησιμότητα τους. Πρέπει να αποτελούν μια γέφυρα μεταξύ της Πλατωνικής φιλοσοφίας και των πέντε Αιτημάτων. Ο Πρόκλος, στα *Σχόλια* του στο *Πρώτο Βιβλίο* των *Στοιχείων* περιγράφει πως οι μεν Όροι περιγράφουν τη μέθεξη των βασικών γεωμετρικών εννοιών στα νοητά Πλατωνικά όντα, τα δε Αιτήματα παράγονται από αυτούς τους ορισμούς.
Αντίθετα στη σύγχρονη θεμελίωση Hilbert της γεωμετρίας οι βασικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο και ακόμη χωρίς ορισμό γίνονται γίνονται δεκτές,
μια διμελή σχέση σημείου επί ευθείας,
μια διμελή σχέση ευθείας επί επιπέδου,
μια τριμελή σχέση «μεταξύ» για τριάδες σημείων επί ευθείας,
μια διμελή σχέση για ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων, και
μια διμελή σχέση για ζεύγη γωνιών.
Οι αόριστες αυτές έννοιες και σχέσεις πρέπει να υπακούουν στα αξιώματα που θα διατυπωθούν στα επόμενα κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Αξιώματα σύνδεσης Ι (Ι.1-Ι.3) και *μεταξύ Β (Β.1-Β.2)* της θεμελίωσης Hilbert και το *πρώτο Αίτημα* των *Στοιχείων.*

Αξιώματα σύνδεσης Ι Hilbert

Αξίωμα Ι.1. Για κάθε δύο σημεία Α, Β διαφορετικά μεταξύ τους ($A \neq B$) υπάρχει μοναδική ευθεία α ώστε $A \in \alpha$, $B \in \alpha$.

Αξίωμα Ι.2. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους.

Αξίωμα Ι.3. Υπάρχουν τρία σημεία στο επίπεδο που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Σημείωση. Με ευθεία ο Hilbert εννοεί την «άπειρη ευθεία» και όχι το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ο Ευκλείδης ορίζει ως ευθεία.

Πρόταση 1.1. Δύο διαφορετικές ευθείες μπορούν να έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Απόδειξη. Έστω λ, μ δύο ευθείες οι οποίες περιέχουν και οι δύο τα σημεία Α, Β με $A \neq B$. Σύμφωνα με το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία η οποία περιέχει ταυτόχρονα τα Α, Β, επομένως θα πρέπει οι λ, μ να είναι ίδιες.

Αξιώματα μεταξύ, διάταξης Β Hilbert

Οι γεωμετρικές έννοιες της διάταξης και του διαχωρισμού θα βασίζονται σε μία μοναδική μη ορισμένη σχέση που υπόκειται σε τέσσερα αξιώματα. Θεωρούμε μία *σχέση* μεταξύ διατεταγμένων τριάδων Α, Β, Γ, που ονομάζεται «το Β βρίσκεται μεταξύ του Α και του Γ». Η σχέση αυτή υπόκειται στα επόμενα αξιώματα.

Αξίωμα Β.1. Αν Α, Β, Γ είναι τρία σημεία διαφορετικά μεταξύ τους και ισχύει $\mathrm{A}*\mathrm{B}*\Gamma$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι επί της αυτής ευθείας και επίσης ισχύει $\Gamma*\mathrm{B}*\mathrm{A}$.

Αξίωμα Β.2. Αν Α, Β, Γ είναι τρία σημεία μίας ευθείας διαφορετικά μεταξύ τους, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις εξής σχέσεις: $\Gamma*\mathrm{A}*\mathrm{B}$ ή $\mathrm{A}*\Gamma*\mathrm{B}$ ή $\mathrm{A}*\mathrm{B}*\Gamma$.

Ορισμός ευθυγράμμου τμήματος

Έστω Α, Β δύο διαφορετικά σημεία. Ορίζουμε το **ευθύγραμμο τμήμα** ΑΒ ως το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία Α, Β και όλα τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στο Α και στο Β. Δηλαδή, $\mathrm{AB}=\{\Gamma:\mathrm{A}*\Gamma*\mathrm{B}\}\cup\{\mathrm{A}\}\cup\{\mathrm{B}\}$.

Σημείωση. Δεν είναι καθόλου σαφές ότι το ΑΒ περιέχει και σημεία γνησίως μεταξύ Α και Β. Αυτό θ' αποδειχθεί παρακάτω με τη χρήση πρόσθετου αξιώματος (Β4).

Το αξίωμα (Ι.2) χρησιμοποιείται στην Πρόταση Ι.1 καθώς με δεδομένο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο οποίο ανήκουν τα διαφορετικά σημεία Α, Β ο Ευκλείδης κατασκευάζει ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς ΑΒ.

Το αξίωμα (Ι.3) χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην Πρόταση Ι.1 καθώς αν δεν υπήρχαν τρία σημεία στο επίπεδο που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία τότε όλα τα σημεία του επιπέδου θα ανήκαν στην ίδια ευθεία και άρα ενώ θα πληρούνταν οι προυποθέσεις του αξιώματος πληρότητας οι κύκλοι που κατασκευάζει ο Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* δεν θα τέμνονταν.

Αίτημα 1.

Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Σημείωση. Το πρώτο Αίτημα των Στοιχείων δεν ταυτίζεται με το αξίωμα (Ι.1) Hilbert, καθώς οι ευθείες του Ευκλείδη είναι ευθύγραμμα τμήματα ενώ οι ευθείες του Hilbert είναι άπειρες ευθείες. Για την διατύπωση του πρώτου Αιτήματος είναι αναγκαία και η μεταξύ σχέση Β.

Ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μοναδικό έπεται από το αξίωμα (Ι.1) Hilbert. Αντίθετα, το πρώτο Αίτημα δεν αναφέρει ρητά τη μοναδικότητα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, η οποία πάντως χρειάζεται και συνάγεται στην απόδειξη της Πρότασης Ι.4, από τον αναπάντεχο ισχυρισμό ότι «δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αξιώματα εφαρμογής (C.1-C.3) για ευθύγραμμα τμήματα και *B.3* της θεμελίωσης Hilbert, *Αίτημα 2,* *Κοινές έννοιες α΄, β΄, γ΄, για ευθύγραμμα τμήματα* των *Στοιχείων.*

Στο σημείο αυτό διαφοροποιούμαστε κατά τη σειρά που εμφανίζονται τα αξιώματα στην θεμελίωση Hilbert καθώς παραθέτουμε τα αξιώματα εφαρμογής (C.1) – (C.3) πριν από το αξίωμα B.4 και κατά τη διατύπωση του αξιώματος εφαρμογής C.2 του Hilbert, το οποίο αντικαθιστούμε με το αξίωμα $C.2^*$ ώστε να μην υπάρχει αναφορά στην έννοια της ημιευθείας. Το αξίωμα C.2 είναι άμεση συνέπεια του $C.2^*$ και της έννοιας της ημιευθείας (και διατυπώνεται στο επόμενο Κεφάλαιο 3). Με αποτέλεσμα η συγκεκριμένη αξιωματική θεμελίωση να είναι πολύ πιο κοντά στο πνεύμα των *Στοιχείων* του Ευκλείδη απ' ότι η αρχική αξιωματική θεμελίωση Hilbert. Κατά αυτό τον τρόπο ο χωρισμός σε ημιεπίπεδα και σε ημιευθείες που βασίζονται στο αξίωμα του Pasch χρησιμοποιεί το αξίωμα ($C.2^*$) που είναι ουσιαστικά το Αίτημα 2 (και δεν χρειάζεται πουθενά την απειρία της ευθείας προκειμένου να χωριστούν σε ημιεπίπεδα και σε ημιευθείες). Με αυτή τη προσέγγιση τα *Στοιχεία* μπορούν να συμπληρωθούν ως προς τον ακριβή ορισμό και ύπαρξη των ημιεπιπέδων.

Αξιώματα εφαρμογής C για ευθύγραμμα τμήματα στη θεμελίωση Hilbert

Στις προηγούμενες μη ορισμένες έννοιες του σημείου, της ευθείας και της διάταξης και στα προηγούμενα αξιώματα (I.1) – (I.3), (B.1) – (B.2) προσθέτουμε την μη ορισμένη έννοια της εφαρμογής για ευθύγραμμα τμήματα και τα αξιώματα (C.1) – (C.3) που αφορούν την έννοια αυτή. Η εφαρμογή είναι αυτή που ο Ευκλείδης αποκαλούσε ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων. Θεωρούμε την μη ορισμένη **σχέση της εφαρμογής** μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΓΔ και συμβολίζεται $AB \cong \Gamma\Delta$. Αυτή η μη ορισμένη **σχέση** $\cong$ υπόκειται στα ακόλουθα τρία αξιώματα.

Αξίωμα C.1. Αν $AB \cong \Gamma\Delta$ και $AB \cong EZ$ τότε $\Gamma\Delta \cong EZ$. Επίσης για κάθε ΑΒ ισχύει $AB \cong AB$.

Πρόταση 2.1. Η εφαρμογή για ευθύγραμμα τμήματα είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ευθυγράμμων τμημάτων.

Απόδειξη. Για να είναι η εφαρμογή σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να ικανοποιεί τρεις ιδιότητες.

(1) Ανακλαστικότητα: κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι εφαρμόσιμο στον εαυτό του, το οποίο αναφέρεται ρητά στο αξίωμα (C.1).

(2) Συμμετρία: Αν $AB \cong \Gamma\Delta$ τότε $\Gamma\Delta \cong AB$. Το οποίο είναι συνέπεια από το αξίωμα (C.1): Έστω $AB \cong \Gamma\Delta$, τότε από την ανακλαστικότητα θα ισχύει $AB \cong AB$, επομένως από το αξιωμα (C.1) έπεται ότι $\Gamma\Delta \cong AB$.

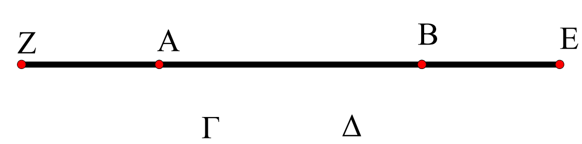
(3) Μεταβατικότητα: αν $AB \cong \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta \cong EZ$, τότε $AB \cong EZ$. Το οποίο έπεται από τη χρήση της συμμετρίας για να δείξουμε ότι $\Gamma\Delta \cong AB$ και από το αξίωμα (C.1).

Σχόλια: Η ανακλαστικότητα και η συμμετρία θεωρούνται προφανή από τον Ευκλείδη. Η μεταβατικότητα όμως αναφέρεται στην κοινή έννοια α΄.

Αξίωμα C.2*. Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ υπάρχουν μοναδικά σημεία Ε, Ζ ώστε:

i) $A * B * E$ και $BE \cong \Gamma\Delta$

ii) $Z * A * B$ και $ZA \cong \Gamma\Delta$



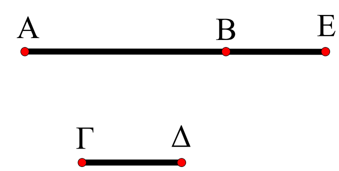
Αξίωμα Β.3. Αν Α, Β είναι δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους ($A \neq B$) τότε υπάρχει σημείο Γ ώστε $A * B * \Gamma$.

Σημείωση. Το αξίωμα (Β.3) περιέχει μία πολύ ασθενή μορφή του δεύτερου Αιτήματος των *Στοιχείων* καθώς ακόμη και αν λάβουμε ένα σημείο Γ για το οποίο ισχύει $A * B * \Gamma$ και εφαρμόσουμε διαδοχικές φορές το αξίωμα (Β.3) τότε τα σημεία τα οποία προκύπτουν ενδέχεται να φράσσονται από ένα άλλο σημείο στην ίδια ευθεία και τελικά το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να μην προεκτείνεται **συνεχώς** και ευθυγράμμως. Η πλήρης μορφή του δευτέρου Αιτήματος προκύπτει στη θεμελίωση Hilbert από τα αξιώματα εφαρμογής των ευθυγράμμων τμημάτων. Επιπλέον παραθέτοντας το αξίωμα ($C.2^*$) πριν από το (Β.3) διαπιστώνουμε ότι το (Β.3) ουσιαστικά υπερκαλείπτεται από το ($C.2^*$).

Αξίωμα C.3. Δοθέντων τριών σημείων Α, Β, Γ με $A * B * \Gamma$ και τριών σημείων Α΄, Β΄, Γ΄ με $A' * B' * \Gamma'$ και αν $AB \cong A'B'$, $B\Gamma \cong B'\Gamma'$ τότε $A\Gamma \cong A'\Gamma'$.

Ορισμός πρόσθεσης ευθυγράμμων τμημάτων.

Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα, από το αξίωμα ($C.2^*$), υπάρχει μοναδικό σημείο Ε, ώστε $A * B * E$ και $\Gamma\Delta \cong BE$. Ορίζουμε ΑΕ το **άθροισμα** ΑΒ+ΓΔ.



Πρόταση 2.2 (Εφαρμογή αθροισμάτων για ευθύγραμμα τμήματα). Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, Α΄Β΄, ΓΔ, Γ΄Δ΄ με $AB \cong A'B'$ και $\Gamma\Delta \cong \Gamma'\Delta'$, τότε $AB + \Gamma\Delta \cong A'B' + \Gamma'\Delta'$.

Απόδειξη. Από τον Ορισμό
υπάρχει σημείο Ε΄ ώστε να είναι σημείο της ευθείας που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄, τέτοιο ώστε $A'E' \cong A'B' + \Gamma'\Delta'$ και
υπάρχει σημείο Ε της ευθείας που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ώστε να ισχύει $AE \cong AB + \Gamma\Delta$.

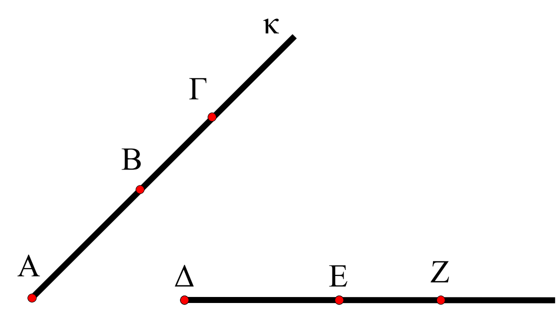
Τότε ισχύει $A * B * E$, από την κατασκευή του αθροίσματος ΑΒ + ΓΔ, διότι το σημείο Ε ανήκει στην αντίθετη πλευρά του Β ως προς το Α. Όμοια θα ισχύει $A' * B' * E'$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι, $AB \cong A'B'$ και $\Gamma\Delta \cong \Gamma'\Delta'$ και επιπλέον $\Gamma\Delta \cong BE$ και $\Gamma'\Delta' \cong B'E'$ λόγω της κατασκευής των Ε, Ε΄.

Επομένως από την Πρόταση 2.1 προκύπτει ότι $BE \cong B'E'$ και

άρα από το αξίωμα (C.3) έπεται ότι $AE \cong A'E'$.

Πρόταση 2.3 (Διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων). Έστω τρία σημεία Α, Β, Γ για τα οποία ισχύει ότι το Β είναι μεταξύ των Α, Γ ($A * B * \Gamma$) και ΔΕ είναι ευθύγραμμο τμήμα και Ζ σημείο της ευθείας που καθορίζεται από Δ, Ε ώστε $\Delta * E * Z$ ή $\Delta * Z * E$. Αν $AB \cong \Delta E$ και $A\Gamma \cong \Delta Z$, τότε το σημείο Ε θα βρίσκεται μεταξύ των σημείων Δ, Ζ ($\Delta * E * Z$) και $B\Gamma \cong EZ$.

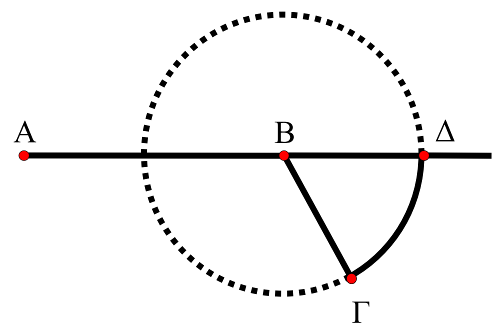


Απόδειξη. Έστω Ζ΄ το μοναδικό σημείο για το οποίο ισχύει $\Delta * E * Z'$ ώστε $B\Gamma \cong EZ'$, αξίωμα ($C.2^*$). Από την υπόθεση ισχύει ότι $AB \cong \Delta E$ και $B\Gamma \cong EZ'$, άρα από το αξίωμα (C.3) συμπεραίνουμε ότι $A\Gamma \cong \Delta Z'$. Όμως τα σημεία Ζ, Ζ΄ ανήκουν στην ίδια ευθεία με $\Delta * E * Z'$ και από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι για τα Ε, Ζ ισχύει $\Delta * E * Z$ ή $\Delta * Z * E$ και αφού για τα Ζ, Ζ΄ ισχύει $A\Gamma \cong \Delta Z$ και $A\Gamma \cong \Delta Z'$ τότε από το αξίωμα (C.1) έπεται $\Delta Z \cong \Delta Z'$ και από τη μοναδικότητα που αναφέρει το αξίωμα ($C.2^*$) συμπεραίνουμε ότι $Z = Z'$. Άρα $\Delta * E * Z$ και $B\Gamma \cong EZ$.

Σημείωση. Το αξίωμα εφαρμογής C.1 αντιστοιχεί στην κοινή έννοια α΄ των Στοιχείων για την περίπτωση της ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων. Όπως θα δούμε παρακάτω την κοινή έννοια α΄ ο Ευκλείδης την χρησιμοποιεί τόσο για την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων όσο γωνιών και εμβαδών.

Κοινή έννοια α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Σημείωση. Από την χρήση του Αιτήματος 2 στις Προτάσεις Ι.2 , Ι.16, Ι.44, ΙΙ.10 των *Στοιχείων* προκύπτει ότι το περιεχόμενο του (το οποίο είναι διατυπωμενο με ασαφή τρόπο στα *Στοιχεία*) είναι το εξής: για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΑΒΔ ώστε ΒΔ=ΒΓ και αντίστοιχα από το σημείο Α. Είναι σαφές ότι αυτή η ερμηνεία του δεύτερου Αιτήματος είναι ειδική περίπτωση του αξιώματος C.2* Hilbert, ωστόσο με την Πρόταση Ι.2 ο Ευκλείδης λαμβάνει την πλήρη μορφή του C.2*.



Αίτημα 2.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

Σημείωση. Το αξίωμα (C.3) Hilbert και η Πρόταση 2.2 αντιστοιχούν στην κοινή έννοια β΄ των Στοιχείων για την περίπτωση αθροίσματος ευθυγράτων τμημάτων. Την κοινή έννοια β΄ ο Ευκλείδης, όπως θα δούμε παρακάτω, την χρησιμοποιεί τόσο για τα ευθύγραμμα τμήματα όσο για τις γωνίες και τα εμβαδά.

Κοινή έννοια β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Σημείωση. Στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert η πρόταση που αντιστοιχεί στην κοινή έννοια γ΄ για ευθύγραμμα τμήματα είναι η Πρόταση 2.3 με την διαφορά ότι η κοινή έννοια γ΄ δεν αναφέρεται ρητά στα ευθύγραμμα τμήματα και όπως θα δούμε αργότερα ο Ευκλείδης την επικαλείται τόσο για τις γωνίες όσο για τα εμβαδά.

Επιπλέον στην απόδειξη της Πρότασης 2.3 παίζει σημαντικό ρόλο η μοναδικότητα η οποία αναφέρεται στο αξίωμα $(C.2^{*})$ και την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε αντίστοιχη της κοινής έννοιας ε΄ (το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους). Καθώς αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει $A*B*\Gamma$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν μπορεί να είναι εφαρμόσιμο με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, διότι τα σημεία Β, Γ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας $A*B*\Gamma$ σε σχέση με το Α και άρα από τη μοναδικότητα θα ίσχυε Β=Γ.

Κοινή έννοια γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

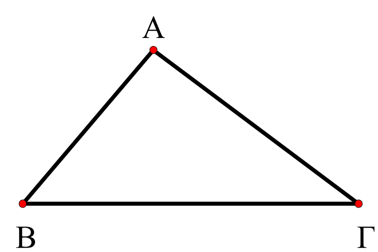
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αξίωμα Β.4 (Pasch) της θεμελίωσης Hilbert, χωρισμός επιπέδου σε ημιεπίπεδα από ευθεία, χωρισμός ευθείας σε ημιευθείες από σημείο, *Κοινή έννοια ε΄*

Το Κεφάλαιο 3 είναι αφιερωμένο στο τέταρτο αξίωμα (Β.4), το αξίωμα Pasch, της ομάδας των μεταξύ αξιωμάτων της θεμελίωσης Hilbert και στις συνέπειες του (διαχωρισμός σε ημιεπίπεδα και ημιευθείες). Μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί τον βασικό πυρήνα της θεμελίωσης Hilbert. Στα *Στοιχεια* ο διαχωρισμός σε ημιεπίπεδα από ευθεία χρησιμοποιείται στον ορισμό των παραλλήλων ευθειών, στις Προτάσεις Ι.7 (προκειμένου να θεωρηθούν σημεία στο ίδιο ημιεπίπεδο), Ι.12 (επιλέγοντας σημείο στο αντικείμενο ημιεπίπεδο), λαμβανόμενος ως διαισθητικά προφανής.

Ορισμός τριγώνου

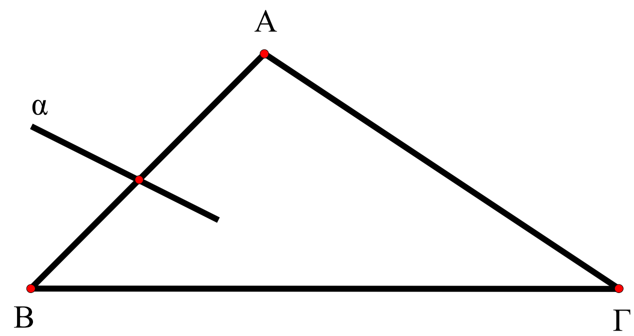
Ορίζουμε ένα **τρίγωνο** ως την ένωση των τριών ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ, όπου Α, Β, Γ μη συνευθειακά σημεία. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι οι **κορυφές** του τριγώνου και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ είναι οι **πλευρές** του τριγώνου.



Σημείωση. Ο ορισμός τριγώνου στα Στοιχεία δίδεται στον Όρο ιθ΄. Σύμφωνα με αυτόν τρίγωνο, ή τρίπλευρο, είναι το ευθύγραμμο χωρίο το οποίο περιλαμβάνεται από τρία ευθύγραμμα τμήματα, και όχι το σύνολο που αποτελείται από αυτά τα ευθύραμμα τμήματα, όπως στον Hilbert.

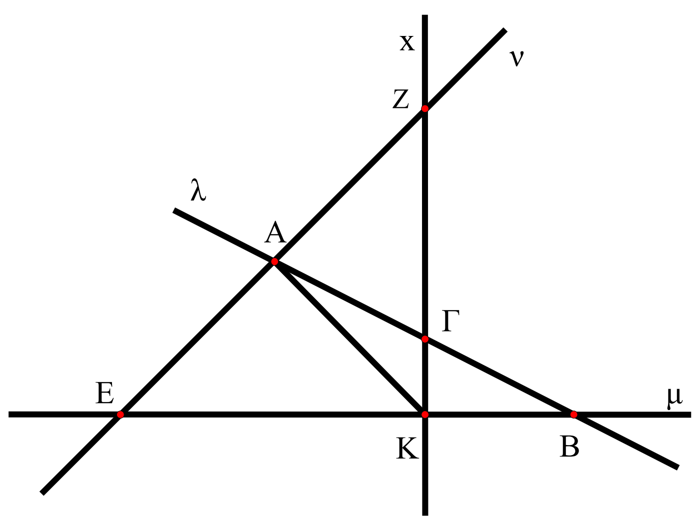
Όρος ιθ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα,
τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν,
τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων,
πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Αξίωμα Β.4 (Αξίωμα Pasch). Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και α μία ευθεία η οποία δεν περιέχει κανένα από τα σημεία Α, Β, Γ. Αν η α τέμνει μία από τις πλευρές του τριγώνου, έστω την ΑΒ, τότε κατ' ανάγκην θα τέμνει ή την ΒΓ ή την ΑΓ αλλά όχι και τις δύο.



Πρόταση 3.1. Αν Α, Β είναι δύο διαφορετικά σημεία, τότε υπάρχει σημείο Γ ώστε να ισχύει $A * \Gamma * B$.

Απόδειξη. Έστω Α, Β δύο διαφορετικά σημεία.
Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει ευθεία λ έτσι ώστε τα Α, Β να είναι σημεία της λ.
Από το αξίωμα (Ι.3) υπάρχει σημείο Κ που δεν είναι σημείο της λ.
Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει ευθεία μ στην οποία ανήκουν τα Κ, Β.
Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Ε τέτοιο ώστε να ισχύει $E * K * B$.

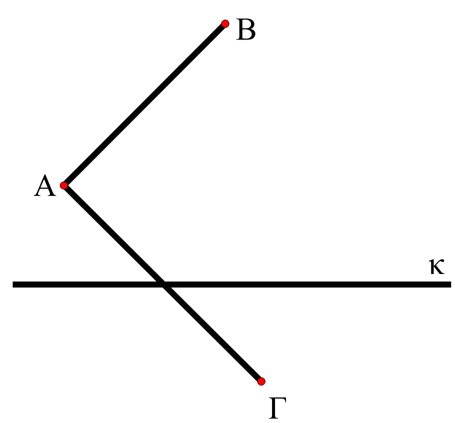


Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει ευθεία ν στην οποία ανήκουν τα Α, Ε.
Άρα από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Ζ τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathrm{E} * \mathrm{A} * \mathrm{Z}$.
Από το αξίωμα Pasch (Β.4), στο τρίγωνο ΑΕΒ η μοναδική ευθεία x στην οποία ανήκουν τα Κ, Ζ (μοναδική από το αξίωμα (Ι.1)) θα τέμνει είτε την πλευρά του τριγώνου ΑΒ, είτε την πλευρά ΕΑ, διότι το σημείο Κ ανήκει στην μ και ισχύει $\mathrm{E} * \mathrm{K} * \mathrm{B}$.
Όμως το ευθύγραμμο τμήμα ΚΖ τέμνει την ν στο Ζ, για το οποίο ισχύει $\mathrm{E} * \mathrm{A} * \mathrm{Z}$ και άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΚΖ δεν μπορεί να έχει άλλο κοινό σημείο με την ευθεία ν διότι τότε το ΚΖ θα ανήκε στην ν.
Όμως το σημείο Κ δεν είναι σημείο της ν, διότι αν ήταν σημείο της ν και αφού ισχύει $\mathrm{E} * \mathrm{K} * \mathrm{B}$ τότε τα Α, Κ, Β θα ήταν συνευθειακά, δεδομένου ότι το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ν, άτοπο από την επιλογή του Κ.
Επομένως η ευθεία x θα τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, έστω Γ το σημείο τομής της x με το ΑΒ και άρα θα ισχύει $\mathrm{A} * \Gamma * \mathrm{B}$.

Σχόλια. Ο Ευκλείδης στις αποδείξεις των προτάσεων των *Στοιχείων* δέχεται ότι υπάρχει σημείο Γ ώστε να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ χωρίς όμως να ελέγχει την ύπαρξή του.

Σημείωση. Βάσει των αξιωμάτων σύνδεσης και διάταξης θα εξάγουμε συμπεράσματα για τον διαχωρισμό του επιπέδου από μια ευθεία καθώς επίσης και για τον διαχωρισμό μιας ευθείας από ένα σημείο, έννοιες με κυρίαρχη θέση στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert.

Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου). Έστω μία ευθεία κ, τότε το σύνολο των σημείων που δεν ανήκουν στην κ μπορεί να χωριστεί σε δύο μη κενά υποσύνολα S_1, S_2, ***τα αντικείμενα ημιεπίπεδα ως προς την κ*** ώστε:



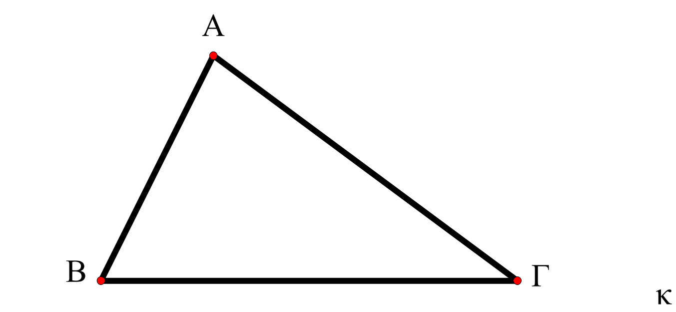
(α) αν δύο σημεία Α, Β δεν ανήκουν στην κ, τότε θα ανήκουν στο ίδιο σύνολο (S_1 ή S_2) αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν τέμνει την κ.

(β) αν δύο σημεία Α, Γ δεν ανήκουν στην κ, τότε θα ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα (το ένα στο S_1, το άλλο στο S_2) αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ τέμνει την κ σε ένα σημείο.

Σημείωση. Η συνθήκη (α) σημαίνει ότι η βασική ιδιότητα των συνόλων S_1 και S_2, τα οποία καλούνται ημιεπίπεδα, είναι η **κυρτότητα** τους.

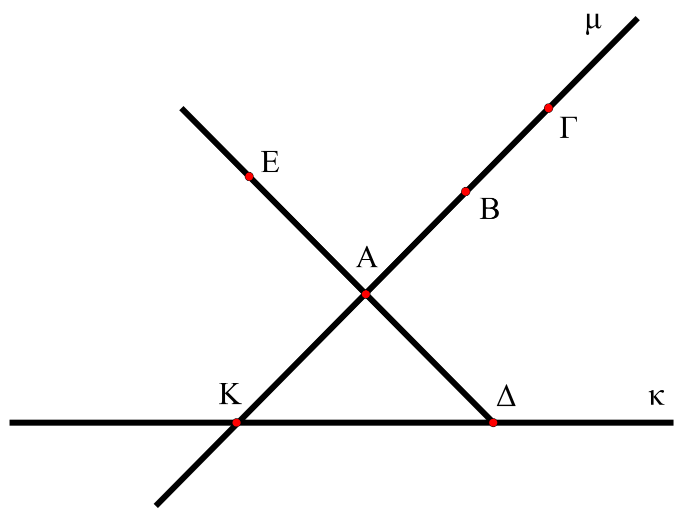
Απόδειξη. Ορίζουμε τη σχέση ~ μεταξύ των σημείων που δεν ανήκουν στην κ.
Θα λέμε Α ~ Β αν είτε Α = Β, είτε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν συναντά την κ (πρβλ. την επόμενη Σημείωση).
Αρχικά θα δείξουμε ότι
η σχέση ~ είναι σχέση ισοδυναμίας.
Προφανώς Α ~ Α, αφού Α = Α, και Α ~ Β συνεπάγεται Β ~ Α, καθώς τα σημεία που ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν εξαρτώνται από τη σειρά με την οποία γράφουμε τα Α, Β.
Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι η σχέση ~ είναι μεταβατική : αν Α ~ Β και Β ~ Γ τότε Α ~ Γ. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Υποθέτουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ δεν ανήκουν σε μία ευθεία.
Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Αφού Α ~ Β και Β ~ Γ, τότε η κ δεν συναντά τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ, αντίστοιχα.



Από το αξίωμα του Pasch (Β.4) έπεται ότι η αν κ έτεμνε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, τότε θα έτεμνε και την ΑΒ ή ΒΓ, αφού ΑΒΓ τρίγωνο. Άτοπο, επομένως Α ~ Γ.

Περίπτωση 2. Υποθέτουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ ανήκουν σε μία ευθεία μ.



Αφού τα Α, Β, Γ δεν ανήκουν στην κ, τότε η κ είναι διαφορετική της μ. Επομένως η κ και η μ θα έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο. Όμως από το αξίωμα (Ι.2) κάθε ευθεία έχει τουλάχιστον δύο σημεία. Αν Κ είναι το κοινό σημείο των κ, μ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στην κ, έστω Δ, ώστε το Δ δεν ανήκει στην μ (διότι αν ανήκε στην μ τότε θα ίσχυε ότι κ = μ).

Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει ένα σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Delta * A * E$ και από το αξίωμα (Β.1) τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. Επομένως Ε δεν ανήκει στην κ και η ευθεία $\Delta * A * E$ τέμνει την κ στο σημείο Δ.

Επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ δεν συναντά την κ, διότι αν τη συναντούσε τότε το μοναδικό σημείο τομής της $\Delta * A * E$ με την κ, που είναι το Δ, θα έπρεπε να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Α και Ε. Όμως από την κατασκευή του Ε ισχύει $\Delta * A * E$ επομένως από το αξίωμα (Β.2) το σημείο Δ δε μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Ε και άρα $A \sim E$ αφού $AE \cap \kappa = \varnothing$. Επιπλέον το σημείο Ε δεν ανήκει στην μ διότι αν το Ε ανήκε στην μ τότε η ευθεία ΑΕ θα ήταν ίση με την μ (αφού θα είχαν δύο κοινά σημεία, τα Α, Ε) και άρα το σημείο Δ θα ανήκε και αυτό στην μ κάτι το οποίο δε μπορεί να ισχύει λόγω της επιλογής του Δ ως σημείο εκτός της μ. Ως εκ τούτου, τα Α, Β, Ε είναι τρία μη συνευθειακά σημεία με $A \sim E$ και $A \sim B$. Επομένως από την *Περίπτωση 1* προκύπτει $B \sim E$. Επιπλέον, αφού $B \sim E$ και $B \sim \Gamma$ πάλι από την *Περίπτωση 1* έχουμε ότι $\Gamma \sim E$. Τέλος από το γεγονός ότι Α, Γ, Ε είναι μη συνευθειακά σημεία και αφού $A \sim E$ και $\Gamma \sim E$ τότε $A \sim \Gamma$ (λόγω της *Περίπτωσης 1*).

Δείξαμε λοιπόν ότι η σχέση ~ είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

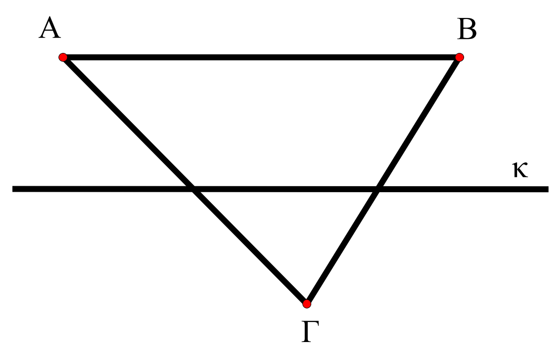
Μία σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο χωρίζει το σύνολο αυτό σε μία ξένη ένωση κλάσεων ισοδυναμίας οι οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα (α) εξ ορισμού. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να αποδείξουμε **ότι υπάρχουν ακριβώς δύο κλάσεις ισοδυναμίας S_1, S_2 για τη σχέση ~ .**

Άρα το να λέμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ συναντά την ευθεία κ (ισοδύναμα, Α $\nsim$ Γ) είναι το ίδιο με το να πούμε ότι τα Α, Γ ανήκουν στα αντίθετα σύνολα.

Από το αξίωμα (Ι.3) υπάρχει ένα σημείο εκτός της κ έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μία κλάση ισοδυναμίας S_1. Έστω Α $\in S_1$ και Δ ένα οποιοδήποτε σημείο της κ. Τότε από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε Α$*$Δ$*$Γ. Επομένως θα υπάρχουν το πολύ δύο κλάσεις ισοδυναμίας S_1 και S_2 διότι τα Α $\nsim$ Γ και Β $\nsim$ Γ, τότε Α ~ Β. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

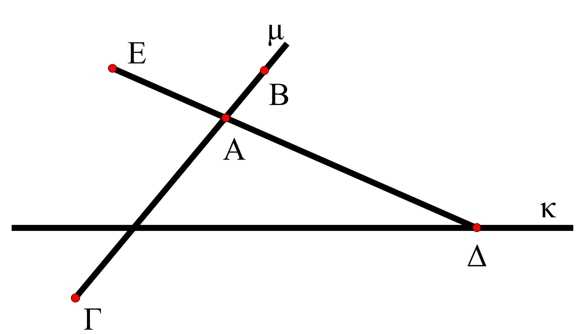
Περίπτωση 1. Έστω τα σημεία Α, Β, Γ τα οποία είναι μη συνευθειακά.

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Αφού Α $\nsim$ Γ και Β $\nsim$ Γ συμπεραίνουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΓ τέμνουν την κ. Επομένως από το (Β.4) έπεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ δεν τέμνει την κ και άρα Α ~ Β.



Περίπτωση 2. Έστω ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Τότε από την *Περίπτωση 2* του πρώτου μέρους της απόδειξης επιλέγουμε ένα σημείο Δ που ανήκει στην κ αλλά όχι στην μ, και από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Ε τέτοιο ώστε Δ$*$Α$*$Ε. Επομένως Α ~ Ε.



Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι Α $\nsim$ Γ και Α ~ Ε οπότε συμπεραίνουμε ότι Γ $\nsim$ Ε, καθώς αν ίσχυε ότι Γ ~ Ε, τότε από τη μεταβατικότητα της σχέσης ισοδυναμίας ~ θα είχαμε και Α ~ Γ, άτοπο. Επομένως για τα τρία μη συνευθειακά σημεία Β, Γ, Ε ισχύει ότι Ε $\nsim$ Γ και Β $\nsim$ Γ, οπότε από την *Περίπτωση 1* συμπεραίνουμε ότι Β ~ Ε. Επίσης ισχύει Α ~ Ε και άρα από τη μεταβατικότητα της σχέσης ισοδυναμίας ~ έπεται ότι Α ~ Β.

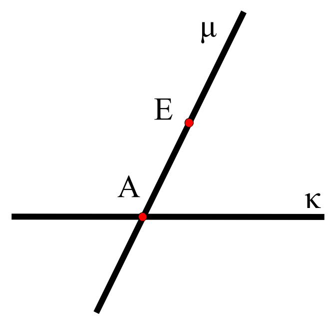
Σημείωση. Αν α είναι μια δοθείσα ευθεία και Α, Β δύο σημεία όχι στην ευθεία τότε πως μπορεί να αποφασιστεί αν ανήκουν στο ίδιο ή στα διαφορετικά ημιεπίπεδα.
Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε τα Α, Β ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο αν, $AB \cap \{\text{κάθε επέκταση της } \alpha\} = \varnothing$. Αυτό δεν οδηγεί σε πρόβλημα χωρίς λύση διότι αρκεί να ελέγξουμε επιλέγοντας ένα σημείο Χ στην α, αν μια επέκταση της α κατά μήκος που είναι =max{ΑΧ, ΒΧ} τέμνει το ΑΒ, κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με μια εφαρμογή του δεύτερου Αιτήματος.
Άρα ο διαχωρισμός σε ημιεπίπεδα όπως αποδεικνύεται στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert από το (Β.4) ισχύει και για τον Ευκλείδη παρόλο που ο μεν Hilbert μιλάει για άπειρες ευθείες ενώ ο Ευκλείδης για πεπερασμένες. Επομένως το δεύτερο Αίτημα μπορεί να επεκταθεί κατά δοθέν πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα.
Επιπλέον κατά τον ορισμό της παραλληλίας στα *Στοιχεία* δύο ευθείες είναι παράλληλες αν προεκτεινόμενες ουδέποτε συναντώνται. Είναι σαφές ότι κατά τα *Στοιχεία* δύο ευθείες είναι παράλληλες αν προεκτεινόμενες κατά το δεύτερο Αίτημα είναι ασφαλώς προέκταση κατά πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα.
Επομένως με τον ορισμό του Ευκλείδη το πρόβλημα του πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες γενικά δεν είναι επιλύσιμο. Δεν δημιουργείται όμως πρόβλημα διότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την έννοια της παραλληλίας μόνο εν σχέσει με το πέμπτο αίτημα και άρα εκεί δεν χρειάζεται η επ' άπειρο διαδικασία.

Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας). Έστω Α ένα σημείο πάνω σε μία ευθεία κ. Τότε το σύνολο των σημείων της κ που είναι διαφορετικά του Α μπορεί να χωριστεί σε δύο μη κενά υποσύνολα S_1, S_2, ***τις αντικείμενες ημιευθείες*** με αρχή το Α πάνω στην κ, έτσι ώστε:

(α) Τα Β, Γ βρίσκονται στην ίδια πλευρά του Α αν και μόνο αν το Α δεν ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

(β) Τα Β, Δ βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του Α αν και μόνο αν το Α ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ.

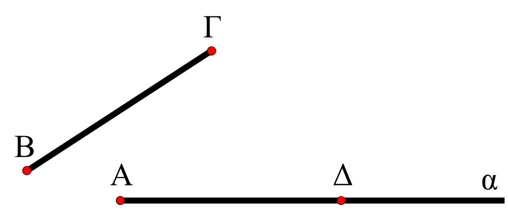
Απόδειξη. Δοθέντων μιας ευθείας κ και ενός σημείου Α πάνω στην κ γνωρίζουμε από το αξίωμα (Ι.3) ότι υπάρχει σημείο Ε εκτός της κ και από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει ευθεία μ στην οποία ανήκουν τα σημεία Α, Ε. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) η μ έχει δύο πλευρές $S_1^{'}$, $S_2^{'}$ και ορίζουμε τα S_1, S_2 ως τις τομές των $S_1^{'}$, $S_2^{'}$ με την κ. Τα S_1, S_2 είναι μη κενά αφού από το αξίωμα (Ι.2) υπάρχει ένα σημείο Β, διαφορετικό του Α, το οποίο ανήκει στην κ και από το (Β.3) υπάρχει ένα σημείο Δ έτσι ώστε $B * A * \Delta$, επομένως το Δ θα βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά του Α σε σχέση με το Β και θα ανήκει στην κ. Οι ιδιότητες (α), (β) έπονται άμεσα από την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου).



Σχόλια: Στα *Στοιχεία* δεν υπάρχει κάποιος αντίστοιχος ορισμός για αντικείμενες ημιευθείες. Εμείς χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.3 στην Πρόταση 3.4 που ακολουθεί και την οποία χρησιμοποιούμε σε Προτάσεις που πραγματεύονται διάταξη σημείων που ανήκουν στην ίδια ευθεία. Επιπλέον ο Ευκλείδης δεν αναφέρει σε κανέναν ορισμό, αξίωμα ή πρόταση κάποια διάταξη ανάμεσα σε σημεία που ανήκουν στην ίδια ευθεία, ενώ τη χρησιμοποιεί μέσω της κοινής έννοιας ε΄.

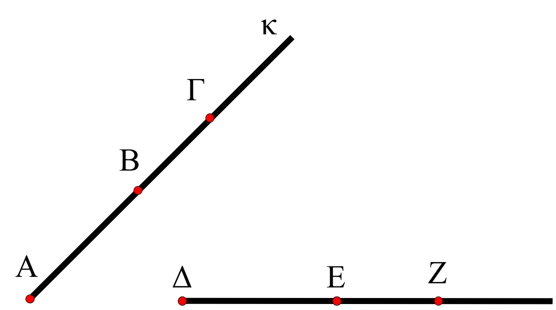
Σημείωση. Τώρα μπορούμε να συνάγουμε ως συνέπεια του αξιώματος C.2* και της κατασκευής ημιευθείας (Πρόταση 3.3), το αξίωμα εφαρμογής C.2 στην αρχική μορφή του Hilbert. Κατόπιν θα αποδείξουμε την Πρόταση 2.3 (Διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων) του Κεφαλαίου 2 με αναφορά πλέον στις ημιευθείες. Δηλαδή στη μορφή την οποία θα επικαλούμαστε στις προτάσεις που ακολουθούν.

C.2. Για κάθε ημιευθεία α με κορυφή (αρχικό σημείο) το Α και κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ υπάρχει μοναδικό σημείο Δ στην ημιευθεία α ώστε ΑΔ $\cong$ ΒΓ.



Πρόταση 2.3 (Διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων). Έστω τρία σημεία Α, Β, Γ για τα οποία ισχύει ότι το Β είναι μεταξύ των Α, Γ ($Α * Β * Γ$) και Ε, Ζ σημεία μιας ημιευθείας με αρχή το σημείο Δ. Αν ΑΒ $\cong$ ΔΕ και ΑΓ $\cong$ ΔΖ, τότε το σημείο Ε θα βρίσκεται μεταξύ των σημείων Δ, Ζ ($Δ * Ε * Ζ$) και ΒΓ $\cong$ ΕΖ.

Απόδειξη. Έστω Ζ΄ το μοναδικό σημείο της ημιευθείας με αρχή το Ε, το οποίο βρισκεται στην αντίθετη πλευρά του Ε ως προς το Δ ($Δ * Ε * Ζ΄$), τέτοιο ώστε ΒΓ $\cong$ ΕΖ΄. Από την υπόθεση ισχύει ότι ΑΒ $\cong$ ΔΕ και ΒΓ $\cong$ ΕΖ΄, άρα από το αξίωμα (C.3) συμπεραίνουμε ότι ΑΓ $\cong$ ΔΖ΄. Όμως τα σημεία Ζ, Ζ΄ ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με αρχή το σημείο Δ, διότι το Ζ΄ ανήκει στην ημιευθεία με αρχή το Ε και ισχύει $Δ * Ε * Ζ΄$ και από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι τα Ε, Ζ ανήκουν στην ημιευθεία με αρχή το Δ και άρα τα Ζ, Ζ΄ ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με αρχή το Δ.



Ακόμη ισχύει $ΑΓ \cong ΔΖ$ και $ΑΓ \cong ΔΖ'$, επομένως από το αξίωμα (C.1) έπεται $ΔΖ \cong ΔΖ'$ και αφού τα Ζ, Ζ΄ ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με αρχή το Δ τότε από τη μοναδικότητα (αξίωμα (C.2)) συμπεραίνουμε ότι $Z = Z'$. Άρα $Δ * Ε * Ζ$ και $ΒΓ \cong ΕΖ$.

Πρόταση 3.4. Έστω Α, Β, Γ, Δ τέσσερα συνευθειακά σημεία, ισχύει:

α) αν $Α * Β * Γ$ και $Α * Γ * Δ$ τότε $Β * Γ * Δ$ και $Α * Β * Δ$.

β) αν $Α * Β * Γ$ και $Β * Γ * Δ$ τότε $Α * Β * Δ$ και $Α * Γ * Δ$.

γ) αν $Α * Β * Δ$ και $Β * Γ * Δ$ τότε $Α * Β * Γ$ και $Α * Γ * Δ$.

Απόδειξη. α) Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $Α * Β * Γ$ και $Α * Γ * Δ$. Από το αξίωμα (Β.1) τα σημεία Α, Β, Γ, ανήκουν στην ίδια ευθεία, έστω κ η ευθεία αυτή, επιπλέον αφού ισχύει $Α * Γ * Δ$ τότε τα σημεία Α, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Όμως τα σημεία Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία με το Α, ακόμη τα σημεία Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία με το Δ, επομένως τα Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά και άρα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ανήκουν στην ευθεία κ.

Δεδομένου ότι $Α * Β * Γ$ τότε από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Α, Β ανήκουν στην ίδια μεριά της κ σε σχέση με το Γ.

Επιπλέον ισχύει ότι $Α * Γ * Δ$ και άρα από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Α, Δ ανήκουν στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Γ.

Από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο μεριές της ευθείας κ σε σχέση με το Γ και άρα αφού τα σημεία Α, Β βρίσκονται στην ίδια μεριά της κ σε σχέση με το Γ και τα σημεία Α, Δ βρίσκονται στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Γ τότε σημεία Β, Δ ανήκουν στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Γ. Επομένως θα ισχύει $Β * Γ * Δ$.

Δεδομένου ότι έχουμε ήδη δείξει ότι ισχύει $Β * Γ * Δ$ τότε όμοια αποδεικνύεται ότι $Α * Β * Δ$ αν διαχωρίσουμε την ευθεία κ σε σχέση με το σημείο Β.

β) Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $Α*Β*Γ$ και $Β*Γ*Δ$. Από το αξίωμα (Β.1) τα σημεία Α, Β, Γ, ανήκουν στην ίδια ευθεία, έστω κ η ευθεία αυτή, επιπλέον αφού ισχύει $Β*Γ*Δ$ τότε τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Όμως τα σημεία Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία με το Α, ακόμη τα σημεία Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία με το Δ, επομένως τα Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά και άρα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ανήκουν στην ευθεία κ.

Δεδομένου ότι $Α*Β*Γ$ τότε από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Α, Γ ανήκουν στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Β.

Επιπλέον ισχύει ότι $Β*Γ*Δ$ και άρα από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στην ίδια μεριά της κ σε σχέση με το Β.

Από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο μεριές της ευθείας κ σε σχέση με το Β και άρα αφού τα σημεία Α, Γ βρίσκονται στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Β και τα σημεία Γ, Δ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας σε σχέση με το Β τότε σημεία Α, Δ ανήκουν στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Β. Επομένως θα ισχύει $Α*Β*Δ$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $Α*Γ*Δ$ αν διαχωρίσουμε την ευθεία κ σε σχέση με το σημείο Γ.

γ) Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $Α*Β*Δ$ και $Β*Γ*Δ$. Από το αξίωμα (Β.1) τα σημεία Α, Β, Δ ανήκουν στην ίδια ευθεία, έστω κ η ευθεία αυτή, επιπλέον αφού ισχύει $Β*Γ*Δ$ τότε τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Όμως τα σημεία Β, Δ ανήκουν στην ίδια ευθεία με το Α, ακόμη τα σημεία Β, Δ ανήκουν στην ίδια ευθεία με το Γ, επομένως τα Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά και άρα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ανήκουν στην ευθεία κ.

Δεδομένου ότι $Α*Β*Δ$ τότε από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Α, Δ ανήκουν στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Β.

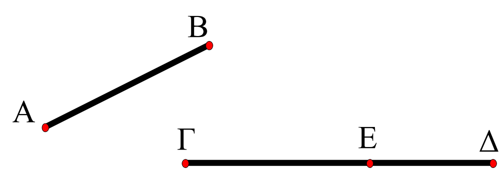
Επιπλέον ισχύει ότι $Β*Γ*Δ$ και άρα από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στην ίδια μεριά της κ σε σχέση με το Β.

Από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο μεριές της ευθείας κ σε σχέση με το Β και άρα αφού τα σημεία Α, Δ βρίσκονται στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Β και τα σημεία Γ, Δ βρίσκονται στην ίδια μεριά της ευθείας σε σχέση με το Β τότε σημεία Α, Γ ανήκουν στις αντίθετες μεριές της κ σε σχέση με το Β. Επομένως θα ισχύει $Α*Β*Γ$.

Δεδομένου ότι έχουμε ήδη αποδείξει ότι ισχύει $Α*Β*Γ$ τότε όμοια αποδεικνύεται ότι $Α*Γ*Δ$ αν διαχωρίσουμε την ευθεία κ σε σχέση με το σημείο Γ.

Ορισμός διάταξης ευθυγράμμων τμημάτων.

Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Θα λέμε ότι το ΑΒ είναι **μικρότερο** του ΓΔ και θα γράφουμε $ΑΒ < ΓΔ$, αν υπάρχει σημείο Ε ανάμεσα στα Γ και Δ έτσι ώστε $ΑΒ \cong ΓΕ$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε επίσης ότι το ΓΔ είναι **μεγαλύτερο** του ΑΒ και θα γράφουμε $ΓΔ > ΑΒ$.



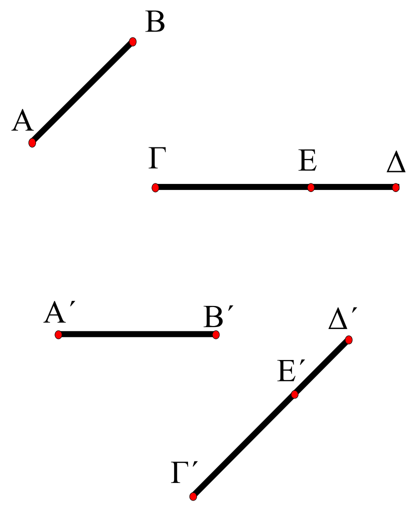
Πρόταση 3.5. (α) Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ \cong Α΄Β΄$ και $ΓΔ \cong Γ΄Δ΄$, τότε $ΑΒ < ΓΔ$ αν και μόνο αν $Α΄Β΄ < Γ΄Δ΄$.

(β) Η σχέση < δίνει μία σχέση διάταξης στα ευθύγραμμα τμήματα με την ακόλουθη έννοια:

(i) Αν $ΑΒ < ΓΔ$ και $ΓΔ < ΕΖ$, τότε $ΑΒ < ΕΖ$.

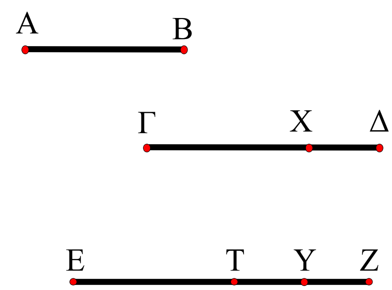
(ii) Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, μία και μόνο μία απο τις επόμενες τρεις σχέσεις ισχύει : $ΑΒ < ΓΔ$, $ΑΒ \cong ΓΔ$, $ΑΒ > ΓΔ$.

Απόδειξη. (α) Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ \cong Α'Β'$ και $ΓΔ \cong Γ'Δ'$, υποθέτουμε ότι $ΑΒ < ΓΔ$. Τότε υπάρχει σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΒ \cong ΓΕ$ και $Γ * Ε * Δ$. Έστω Ε΄ το μοναδικό σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{Γ'Δ'}$ τέτοιο ώστε $ΓΕ \cong Γ'Ε'$. Από την Πρόταση 2.3 έπεται ότι $Γ' * Ε' * Δ'$. Επιπλέον από την μεταβατικότητα της εφαρμογής για τα ευθύγραμμα τμήματα έπεται ότι $Α'Β' \cong Γ'Ε'$ και άρα $Α'Β' < Γ'Δ'$. Το αν και μόνο αν έπεται εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα υποθέτοντας $Α'Β' < Γ'Δ'$.

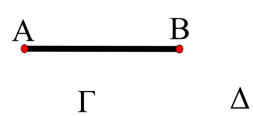


(β)

i. Έστω ότι ισχύει $ΑΒ < ΓΔ$ και $ΓΔ < ΕΖ$. Τότε από τον ορισμό , υπάρχει σημείο Χ το οποίο ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέτοιο ώστε $ΑΒ \cong ΓΧ$. Όμοια υπάρχει σημείο Υ το οποίο ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ τέτοιο ώστε $ΓΔ \cong ΕΥ$ και $Ε * Υ * Ζ$. Έστω Τ σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{ΕΖ}$ τέτοιο ώστε $ΓΧ \cong ΕΤ$. Τότε από την Πρόταση 2.3 έχουμε $Ε * Τ * Υ$ και από την Πρόταση 3.4 έπεται ότι $Ε * Τ * Ζ$ και ότι $ΑΒ \cong ΕΤ$. Επομένως από τον ορισμό ισχύει $ΑΒ < ΕΖ$.



ii. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και Ε το μοναδικό σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{ΓΔ}$ για το οποίο ισχύει $ΑΒ \cong ΓΕ$. Τότε είτε θα ισχύει Δ=Ε, είτε $Γ * Ε * Δ$ είτε $Γ * Δ * Ε$. Δεν μπορούμε να έχουμε $Δ * Γ * Ε$ διότι Δ και Ε βρίσκονται στην ίδια μεριά του Γ. Αυτές οι σχέσεις είναι ισοδύναμες με τις $ΑΒ \cong ΓΔ$, $ΑΒ < ΓΔ$, $ΑΒ > ΓΔ$ αντίστοιχα, από τις οποίες μία και μόνο μία μπορεί να ισχύει.



Σημείωση. Όπως θα συναντήσουμε αργότερα στις αποδείξεις των Προτάσεων των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης επικαλείται ότι ανάμεσα σε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ μονάχα μία από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει: ΑΒ < ΓΔ, ΑΒ > ΓΔ, ΑΒ = ΓΔ χωρίς όμως να το αναφέρει σε κάποιο αξίωμα, κοινή έννοια ή να το αποδεικνύει σε κάποια Πρόταση. Με βάσει όμως την αξιωματική θεμελίωση Hilbert ο παραπάνω ισχυρισμός έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.5.

Σημείωση. Ο ορισμός της διάταξης ευθηγράμμων τμημάτων αντιστοιχεί στην κοινή έννοια ε΄, με την διαφορά ότι στην κοινή έννοια δεν διευκρινίζονται έννοιες όπως όλον και μείζον. Όπως θα συναντήσουμε στις αποδείξεις των Προτάσεων των *Στοιχείων* η χρήση της βασίζεται στη διαίσθηση που αναπαριστάται ενώ ο ορισμός της θεμελίωσης Hilbert στηρίζεται στην διάταξη των σημείων και όπως αυτή έχει καθοριστεί από τα αξιώματα και τις προτάσεις που έχουμε αναπτύξει.

Κοινή έννοια ε΄. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

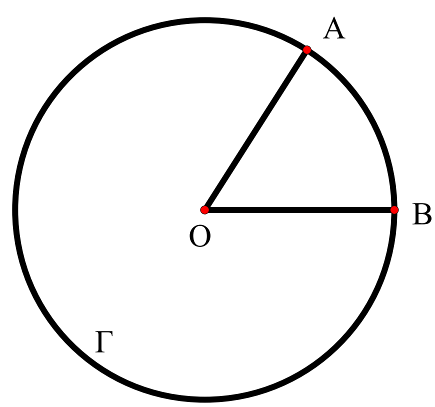
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αξίωμα πληρότητος Ε
της θεμελίωσης Hilbert,
Αίτημα 3 των *Στοιχείων*

Στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός του κύκλου καθώς επίσης και το αξίωμα (Ε) το οποίο θα μας εξασφαλίσει την τομή δύο κύκλων και την τομή ευθείας-κύκλου, η οποία θα αποδειχθεί μετά την Πρόταση Ι.19 των *Στοιχείων* (Κεφάλαιο 9).

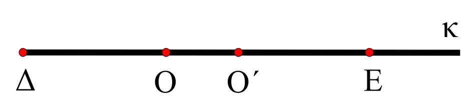
Ορισμός κύκλου

Δοθέντων δύο διαφορετικών σημείων Ο, Α, ορίζουμε τον **κύκλο** Γ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ΟΑ ως το σύνολο όλων των σημείων Β έτσι ώστε $ΟΑ \cong ΟΒ$. Το σημείο Ο είναι το **κέντρο** του κύκλου και το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ η **ακτίνα** του.



Πρόταση 4.1. Έστω ένας κύκλος Γ με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ, και ένας κύκλος Γ΄ με κέντρο Ο΄ και ακτίνα Ο΄Α΄. Αν ισχύει ότι Γ = Γ΄ (ως σύνολο σημείων) τότε θα ισχύει Ο = Ο΄, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου ορίζεται κατα μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη. Έστω ότι $Ο \neq Ο΄$. Τότε θα υπάρχει ευθεία κ στην οποία θα ανήκουν τα σημεία Ο, Ο΄. Εφόσον η κ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου Γ, τότε θα τέμνει τον Γ σε δύο σημεία Δ, Ε για τα οποία θα ισχύει $Δ * Ο * Ε$ και $ΟΔ \cong ΟΕ$.



Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι Γ = Γ΄ και άρα τα σημεία Ε, Δ θα είναι και σημεία του κύκλου Γ΄, επομένως θα ισχύει ότι $Ο΄Δ \cong Ο΄Ε$ και $Δ * Ο΄ * Ε$. Έστω ότι ισχύει $Δ * Ο * Ο΄$, τότε θα ισχύει ότι $Ο * Ο΄ * Ε$. Επομένως $ΟΔ < Ο΄Δ \cong Ο΄Ε < ΟΕ$, άτοπο διότι $ΟΔ \cong ΟΕ$. Άρα Ο=Ο΄. Όμοια αποδεικνύεται το ζητούμενο αν υποθέσουμε ότι $Δ * Ο΄ * Ο$.

Ορισμός

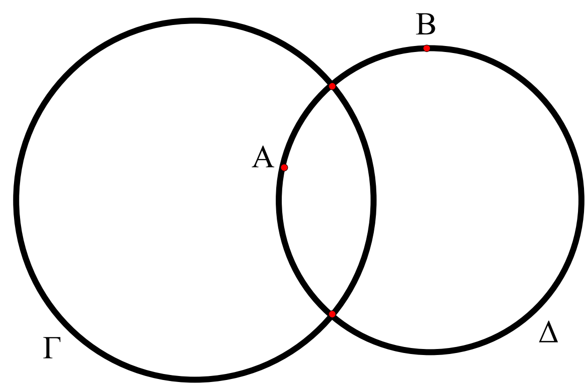
Έστω κύκλος Γ με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ.

Το σημείο Β είναι **εσωτερικό** σημείο του Γ (ή ότι βρίσκεται **εσωτερικά** του Γ) αν Β = Ο ή ΟΒ < ΟΑ.

Ένα σημείο Δ είναι **εξωτερικό** σημείο του Γ (ή ότι βρίσκεται **εξωτερικά** του Γ) αν ΟΑ < ΟΔ.

Αξίωμα πληρότητος Ε

Δοθέντων δύο κύκλων Γ, Δ, αν ο Δ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο στο εσωτερικό του Γ και ο Δ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο εξωτερικά του Γ, τότε οι κύκλοι Γ, Δ τέμνονται.



Το αξίωμα (Ε) είναι εκείνο το οποίο λείπει από τον Ευκλείδη στην απόδειξη της Πρότασσης Ι.1 ώστε οι κύκλοι που γράφει μέσω του τρίτου Αιτήματος των *Στοιχείων* να τέμνονται. Επιπλέον οι κύκλοι που πληρούν τις προυποθέσεις του αξιώματος (Ε) τέμνονται σε ακριβώς δύο σημεία.

Σημείωση. Για τον Ευκλείδη ο κύκλος είναι βασικό σχήμα του επιπέδου όπως είναι το σημείο και το ευθύγραμμο τμήμα και για αυτό δεν αρκούν οι ορισμοί αλλά θα πρέπει να κατοχυρώσει την κατασκευή-ύπαρξη τους. Αυτός είναι και ο λόγος που υπάρχει το Αίτημα 3 στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Αντίθετα για τον Hilbert τα βασικά αντικείμενα για το επίπεδο του είναι τα σημεία και οι ευθείες. Ενώ ο κύκλος είναι καθαρά παράγωγο σχήμα για το οποίο το μόνο που απαιτείται είναι ο ορισμός του.

Αίτημα 3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Σημείωση. Σύμφωνα με τον ορισμό του κύκλου από τον Ευκλείδη και από τον Hilbert, παρατηρούμε ότι άλλος είναι ο κύκλος του Ευκλείδη και άλλος του Hilbert. Ο Ευκλείδης στον ορισμό του αναφέρεται στο περιεχόμενο του κύκλου ενώ ο Hilbert στα σημεία που ανήκουν στην περιφέρεια του.

Όροι ιδ΄, ιε΄, ις΄, ιζ΄, ιη΄.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ις΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

Σημείωση. Από τον ορισμό του κύκλου ένας κύκλος έχει τουλάχιστον δύο σημεία καθώς αν μία ευθεία διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου τότε από το αξίωμα (C.2) υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία στις αντίθετες μεριές του Ο τα οποία είναι σημεία της ευθείας και ανήκουν στον κύκλο. Επιπλέον από τον παραπάνω ορισμό δεν είναι φανερό ότι το κέντρο ενός κύκλου είναι μοναδικό, κάτι το οποίο αποδεικνύεται στην Πρόταση 4.1. Ο Ευκλείδης στη θεμελίωση των *Στοιχείων* δεν ορίζει το εσωτερικό και το εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, ορισμοί οι οποίοι έχουν κυρίαρχο ρόλο στην θεωρία του Hilbert αφού χρησιμοποιούνται στο αξίωμα (Ε) όπως επίσης και στην Πρόταση 9.1 (τομή ευθείας-κύκλου).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Προτάσεις Ι.1-Ι.3 των *Στοιχείων*

Έχοντας πλέον παραθέσει στα προηγούμενα Κεφάλαια τα αξιώματα σύνδεσης, μεταξύ, εφαρμογής καθώς επίσης και το αξίωμα πληρότητος μπορούμε να αποδείξουμε τις Προτάσεις Ι.1-Ι.3 των *Στοιχείων*. Επιπλέον τοποθετούμε τις συγκεκριμένες Προτάσεις πριν από τα αξιώματα εφαρμογής για γωνίες και τις προτάσεις που έπονται από αυτές διότι οι Προτάσεις Ι.1-Ι.3 πραγματεύονται ευθύγραμμα τμήματα.

Ορισμός ισοπλεύρου και ισοσκελούς τριγώνου

Ισόπλευρο τρίγωνο είναι αυτό που έχει εφαρμόσιμες τις τρεις πλευρές του. **Ισοσκελές** τρίγωνο είναι αυτό που έχει μόνο τις δύο πλευρές του εφαρμόσιμες.

Όρος κ΄. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸτὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

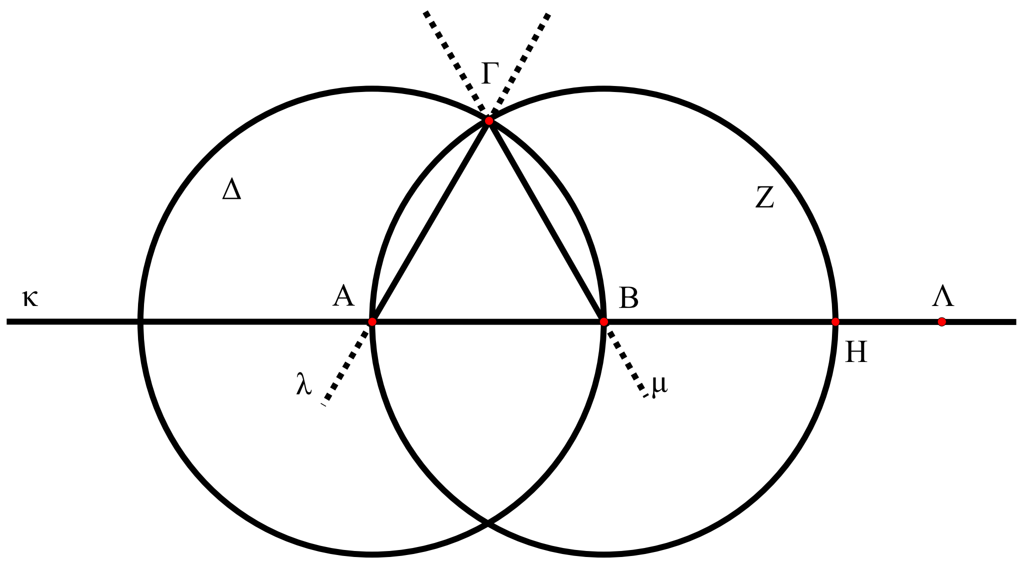
Λήμμα. Για κάθε δύο σημεία Α, Β υπάρχει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Απόδειξη. Έστω Α, Β δύο σημεία. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία κ ώστε $A \in \kappa$ και $B \in \kappa$. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα.

Πρόταση Ι.1. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Απόδειξη. Έστω το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε από τον ορισμό του κύκλου γράφουμε κύκλο Δ με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Πάλι από τον ορισμό του κύκλου γράφουμε κύκλο Ζ με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα ΒΑ. Το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου Ζ και βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου Δ αφού είναι το κέντρο του κύκλου Δ. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία κ η οποία περιέχει τα σημεία Α, Β. Εν συνεχεία από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Η ώστε

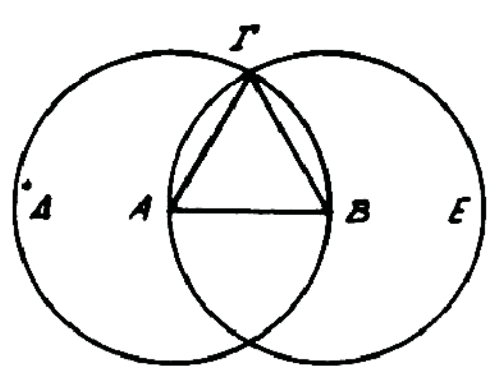
$Α * Β * Η$ και $ΑΒ \cong ΒΗ$. Επομένως για τα σημεία Α, Β, Η ισχύει $Α * Β * Η$ και $ΑΒ \cong ΒΗ$ και άρα το Η ανήκει στην ευθεία κ και εξ ορισμού είναι σημείο του κύκλου Ζ. Επομένως στον κύκλο Ζ ανήκει το σημείο Α το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου Δ, ως



κέντρο του κύκλου Δ και επιπλέον το σημείο Η είναι σημείο του κύκλου Ζ το οποίο είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου Δ διότι ΑΗ > ΑΒ, αφού για τα σημεία Α, Β, Η ισχύει $Α * Β * Η$. Συνεπώς από το αξίωμα (Ε) έπεται ότι οι κύκλοι Δ, Ζ τέμνονται, έστω Γ το σημείο τομής.

Από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ για τα οποία θα ισχύει $ΑΓ \cong ΑΒ$, αφού εξ ορισμού οι ακτίνες ενός κύκλου είναι εφαρμόσιμες, ακόμη $ΓΒ \cong ΒΑ$, ως ακτίνες του κύκλου Ζ και άρα από το αξίωμα (C.1) θα ισχύει ότι $ΑΓ \cong ΑΒ \cong ΒΓ$. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Σχόλια. Στην απόδειξη την οποία παραθέτει ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* δεν αιτολογεί ότι οι δύο κύκλοι Δ, Ε τέμνονται στο σημείο Γ και άρα θα ισχύει $ΑΓ \cong ΓΒ$, κάτι το οποίο προκύπτει από το αξίωμα (Ε). Επιπλέον για να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα (Ε) απαιτείται να βρούμε δύο σημεία



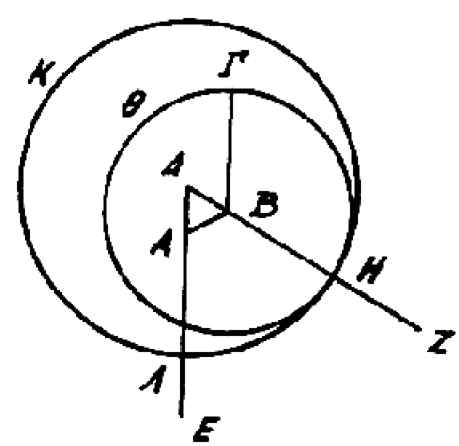
του κύκλου Ζ για τα οποία θα ισχύει ότι το ένα είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου Δ και το άλλο εξωτερικό σημείο του κύκλου Δ. Για να αποδείξουμε ότι το σημείο Η είναι σημείο του κύκλου Ζ και εξωτερικό σημείο του κύκλου Δ χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα (C.2) έτσι ώστε να βρούμε ένα σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}$ για το οποίο θα ισχύει $\mathrm{AB} \cong \mathrm{BH}$, καθώς επίσης και τα αξιώματα διάταξης για να συμπεράνουμε ότι ΑΗ > ΑΒ δεδομένου ότι $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{H}$. Τέλος από το αξίωμα (C.1) συμπεράναμε ότι $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{\Gamma B} \cong \mathrm{AB}$, έχοντας ήδη αποδείξει από τον Ορισμό του κύκλου ότι $\mathrm{\Gamma B} \cong \mathrm{AB}$ και $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{AB}$.

Σημείωση. Στην Πρόταση Ι.1 γίνεται για πρώτη φορά σε Προτάσεις των Στοιχείων η χρήση των αξιωμάτων (Ι.1), (Ι.2), (Β.3), (C.1), (C.2), (Ε).

Σχόλια. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ενώ ο Ευκλείδης ξεκινάει τις Προτάσεις των Στοιχείων με την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου δεν αναφέρει πουθενά την κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου η οποία, δεδομένης της κατασκευής ισοπλεύρου, προκύπτει άμεσα. Μία απόδειξη της κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου χωρίς τη χρήση του αξιώματος πληρότητας θα δοθεί παρακάτω και συγκεκριμένα μετά την Πρόταση Ι.6 των *Στοιχείων*.

Πρόταση Ι.2. Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Απόδειξη. Έστω το δοθέν σημείο Α και το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, θα κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΛ εφαρμόσιμο με το ΒΓ.

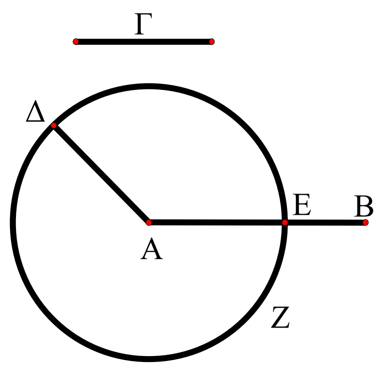


Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και από την Πρόταση Ι.1 κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ και από το αξίωμα (Ι.1) και την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός ευθείας) θεωρούμε τις ημιευθείες $\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$, $\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}}$. Κατόπιν θεωρούμε τον κύκλο Θ με κέντρο το σημείο Β ακτίνας ΒΓ και από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Η στη $\overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$ με $\mathrm{BH} \cong \mathrm{B\Gamma}$. Κατόπιν θεωρούμε τον κύκλο Κ με κέντρο το σημείο Δ ακτίνας ΔΗ και από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Λ στην $\overrightarrow{\Delta A}$ με $\Delta\Lambda \cong \Delta H$. Επομένως $BH \cong B\Gamma$ ως ακτίνες του κύκλου Θ και $\Delta H \cong \Delta\Lambda$ ως ακτίνες του κύκλου Κ. Όμως $\Delta B \cong \Delta A$ διότι ΑΒΔ ισόπλευρο και επιπλέον $\Delta * B * H$ και $\Delta * A * \Lambda$, επομένως από την Πρόταση 2.3 ισχύει $A\Lambda \cong BH$ και αφού $BH \cong B\Gamma$ τότε από το αξίωμα (C.1) θα ισχύει $A\Lambda \cong B\Gamma$.

Σημείωση. Η Πρόταση Ι.2 στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert έπεται άμεσα από το αξίωμα (C.2).

Πρόταση Ι.3. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Απόδειξη.
Αξίωμα (C.2)



Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης δεν αιτιολογεί ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα Γ τέμνει το ΑΒ στο Ε και άρα θα ισχύει $\Gamma \cong AE$. Η συγκεκριμένη πρόταση στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert αποτελεί αξίωμα και είναι το αξίωμα (C.2).

Σημείωση. Το αξίωμα (C.2) όπως αναφέρουμε προηγουμένως αντιστοιχεί στην κατασκευαστική Πρόταση Ι.3 των *Στοιχείων* με τη διαφορά ότι στο αξίωμα (C.2) είναι η ύπαρξη του σημείου Δ την οποία δεχόμαστε ως αξίωμα καθώς ο Hilbert δεν χρησιμοποιεί κανόνα και διαβήτη στο να το κατασκευάσει. Έτσι μπορούμε να σκεφτούμε το αξίωμα (C.2) ως ένα εργαλείο μεταφοράς ευθυγράμμων τμημάτων σε δοθείσεις ευθείες.

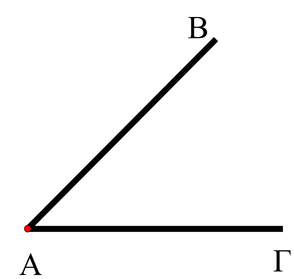
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ορισμός γωνίας και *Θεώρημα Cross-Bar*

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη η έννοια του εσωτερικού μιας γωνίας λαμβάνεται διαισθητικά ως προφανής και δεν ορίζεται με αυστηρότητα με αποτέλεσμα ένα μεγάλο μερος των αποδείξεων του πρώτου μέρους Ι.1-Ι.26 του πρώτου Βιβλίου των *Στοιχείων* να παρουσιάζει αδυναμίες. Στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert αυτή η αδυναμία αντιμετωπίζεται με το βασικό θεώρημα Crossbar theorem (Πρόταση 6.2) το οποίο είναι συνέπεια του θεωρήματος διαχωρισμού και σε τελική ανάλυση του αξιώματος Pasch (Β.4).

Ορισμός γωνίας

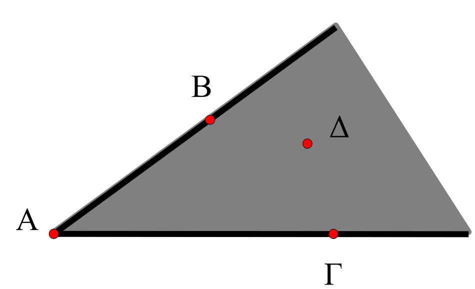
Μία **γωνία** ορίζεται ως η ένωση δύο ημιευθειών $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ με αρχή το ίδιο σημείο, την **κορυφή** της, οι οποίες δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Σημείωση. Σύμφωνα με τον ορισμό της γωνίας δεν υπάρχει η μηδενική γωνία και η ευθεία γωνία. Σημειώνουμε επίσης ότι η κορυφή μιας ημιευθείας ή μιας γωνίας ορίζεται μονοσήμαντα από την ημιευθεία ή την γωνία. Ο ορισμός γωνίας στα *Στοιχεία* δίνεται από τους όρους η΄, θ΄, που αναφέρονται στο τέλος του παρόντος Κεφαλαίου.

Ορισμός εσωτερικού - εξωτερικού γωνίας

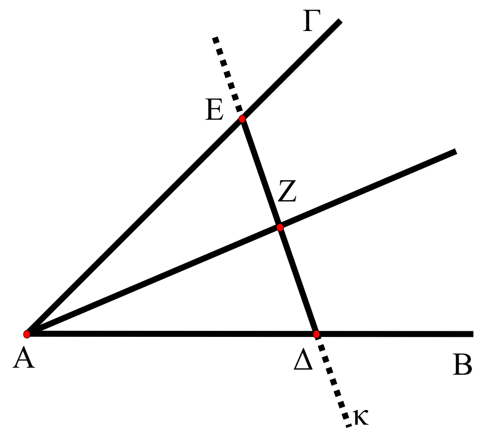
Ορίζουμε ως **εσωτερικό** μίας γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ το σύνολο των σημείων Δ έτσι ώστε τα Δ, Γ να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ΑΒ και τα Δ, Β να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ΑΓ.



Ορίζουμε ως **εξωτερικό** μιας γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία δεν ανήκουν στο εσωτερικό της γωνίας και δεν είναι σημεία των ημιευθειών $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Σημείωση. Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* δεν ορίζει το εσωτερικό ή το εξωτερικό σημείο γωνίας. Ορισμοί με περίοπτη θέση στη θεμελίωση Hilbert καθώς μέσω αυτών θα εισαχθεί η έννοια της διάταξης για γωνίες.

Πρόταση 6.1. Σε κάθε γωνία υπάρχει σημείο το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της.

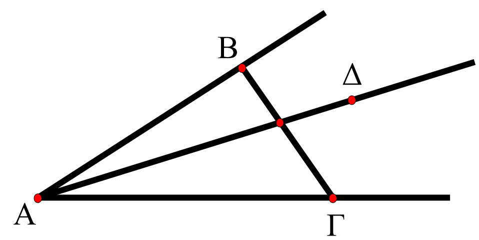


Απόδειξη. Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και Δ, Ε σημεία των ημιευθειών $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει ευθεία κ στην οποία ανήκουν τα Δ, Ε και άρα από την Πρόταση 3.1 υπάρχει σημείο Ζ το οποίο ανήκει στην κ τέτοιο ώστε $\Delta * Z * E$. Όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΕΔ εκτός του Ε ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει η $\overrightarrow{A\Gamma}$ όπως το Δ, διότι το Ε ανήκει στην $\overrightarrow{A\Gamma}$. Αν δεν ανήκαν στο ίδιο ημιεπίπεδο τότε θα υπήρχε και άλλο κοινό σημείο του ΕΔ με την $\overrightarrow{A\Gamma}$, διαφορετικό του Ε. Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα ΕΔ και η ημιευθεία $\overrightarrow{A\Gamma}$ θα είχαν δύο κοινά σημεία και άρα όλα τα σημεία του ΕΔ θα ανήκαν στην $\overrightarrow{A\Gamma}$. Άτοπο, διότι το σημείο Δ εξ υποθέσεως ανήκει στην $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AB}$ διαφορετική της $\overrightarrow{A\Gamma}$ αφού $B\hat{A}\Gamma$ γωνία.

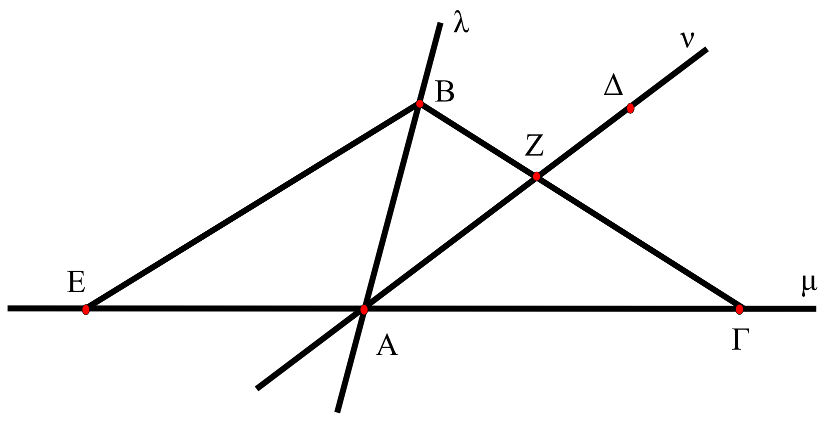
Επιπλέον όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ εκτός του Δ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει η $\overrightarrow{AB}$ όπως το Ε, διότι το Δ ανήκει στην $\overrightarrow{AB}$. Αν δεν ανήκαν στο ίδιο ημιεπίπεδο τότε θα υπήρχε και άλλο κοινό σημείο του

ΔΕ με την $\overrightarrow{AB}$, διαφορετικό του Δ. Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και η $\overrightarrow{AB}$ θα είχαν δύο κοινά σημεία και άρα όλα τα σημεία του ΔΕ θα ανήκαν στην $\overrightarrow{AB}$. Άτοπο, διότι το σημείο Ε εξ υποθέσεως ανήκει στην $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ διαφορετική της $\overrightarrow{A\Gamma}$ αφού $B\hat{A}\Gamma$ γωνία. Επομένως όλα τα σημεία του ΕΔ εκτός των Δ, Ε ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που ορίζουν ταυτόχρονα οι $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Άρα από τον ορισμό του εσωτερικού γωνίας το σημείο Ζ ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

Πρόταση Crossbar theorem 6.2. Έστω μία γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και Δ ένα σημείο στο εσωτερικό της γωνίας. Τότε η ημιευθεία $\overrightarrow{A\Delta}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.



Απόδειξη. Από το αξίωμα (Ι.1) θεωρούμε τις ευθείες ΑΒ = λ, ΑΓ = μ, ΑΔ = ν. Τότε από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Ε που ανήκει στην μ έτσι ώστε $E*A*\Gamma$ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Εφαρμόζουμε το αξίωμα Pasch (Β.4) για το τρίγωνο ΒΓΕ και την ευθεία ν. Από την κατασκευή της ν η ευθεία συναντά την πλευρά ΓΕ στο Α. Επιπλέον από την Πρόταση 1.1 γνωρίζουμε ότι δύο διαφορετικές ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο επομένως η ν δεν μπορεί να διέρχεται από το σημείο Β διότι συναντά την ευθεία λ στο Α. Θα δείξουμε ότι η ν δεν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ και άρα από το αξίωμα (Β.4) θα διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.



Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ συναντά την ευθεία λ στο Β, επομένως όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος, εκτός από το Β, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, διότι το Β είναι σημείο της λ. Αν δεν ανήκαν θα υπήρχε και άλλο κοινό σημείο του ΒΕ με την λ, διαφορετικό του Β. Επομένως όλα τα σημεία του ΒΕ θα ανήκαν στην λ και άρα τα σημεία Α, Β, Ε θα ήταν συνευθειακά και αφού επιπλέον ισχύει $E*A*\Gamma$ τότε τα Α, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι $B\hat{A}\Gamma$ γωνία.

Ακόμη εχουμε υποθέσει ότι $E*A*\Gamma$ και αφού το σημείο Α ανήκει στην ευθεία λ, τότε από την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) έπεται ότι το Γ θα βρίσκεται στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ σε σχέση με το Ε. Επομένως όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΒΕ, εκτός από το Β, θα ανήκουν στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ σε σχέση με το Γ. Όμως αφού το Δ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{A\Delta}$, εκτός από το Α, θα βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, όπως το Γ. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ δεν τέμνει την ημιευθεία $\overrightarrow{A\Delta}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ούτε η αντικείμενη ημιευθεία της $\overrightarrow{A\Delta}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ.

Το ΒΕ τέμνει την μ στο σημείο Ε, επομένως όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος, εκτός από το Ε, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Β. Διότι αν υπήρχε και άλλο κοινό σημείο της μ με το ΒΕ εκτός του Ε τότε όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΕΒ θα ανήκαν στην μ. Επιπλέον τα σημεία Α, Γ ανήκουν στην μ από την κατασκευή της και άρα τα σημεία Α, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι $B\hat{A}\Gamma$ γωνία.

Όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{A\Delta}$, εκτός από το Α, ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Β, αφού το Δ από την υπόθεση είναι εσωτερικό σημείο της $B\hat{A}\Gamma$ και στην μ ανήκουν τα σημεία Α, Γ. Επομένως όλα τα σημεία της αντικείμενης ημιευθείας της $\overrightarrow{A\Delta}$, εκτός από το Α, θα βρίσκονται στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ σε σχέση με το Β οπότε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ δε μπορεί να τέμνει την αντικείμενη ημιευθεία της $\overrightarrow{A\Delta}$. Αφού ούτε η $\overrightarrow{A\Delta}$ ούτε η αντικείμενη ημιευθεία της $\overrightarrow{A\Delta}$ τέμνει το ΒΕ τότε η ευθεία ν δεν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Άρα από το αξίωμα (Β.4) συμπεραίνουμε ότι στο τρίγωνο ΕΒΓ η ν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ σε ένα σημείο Ζ. Μένει να δείξουμε ότι το σημείο Ζ ανήκει στην ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ της ευθείας ν. Πράγματι, τα σημεία Β, Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ καθώς επίσης και τα σημεία Β και Δ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, οπότε από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) τα σημεία Δ και Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ και έτσι τα Δ, Ζ θα βρίσκονται στην ίδια μεριά του Α πάνω στην ευθεία μ ($\mathrm{A} * \mathrm{Z} * \Delta$). Επομένως το Ζ θα είναι σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$.

Όροι η΄, θ΄.

η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

Ο ορισμός η΄ δεν μας ενδιαφέρει διότι οι γωνίες με τις οποίες θα αχοληθούμε δημιουργούνται από «ευθείες». Ενώ όσον αφορά τον ορισμό ευθύγραμμης γωνίας θ΄ είναι ατελής διότι δεν αναφέρεται στην έννοια της ημιευθείας.
Ακόμη ο μη αυστηρός ορισμός στα *Στοιχεία* του εσωτερικού σημείου γωνίας είναι ένα από τα βασικά προβλήματα της αξιωμαιτκής θεμελίωσης των *Στοιχείων*. Ο Hilbert βασισμένος στο αξίωμα Pasch (Β.4) δίνει αυστηρό ορισμό της έννοιας του εσωτερικού σημείου, όπως ορίστηκε παραπάνω στο παρόν Κεφάλαιο 6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

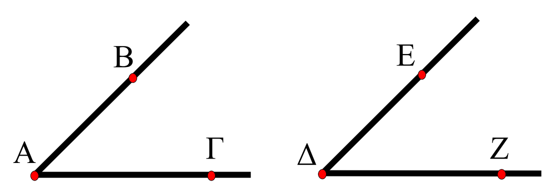
Αξιώματα εφαρμογής (C.4-C.6) για γωνίες της θεμελίωσης Hilbert, *Κοινές έννοιες α΄, β΄, γ΄, δ΄, ε΄* για γωνίες, *Προτάσεις Ι.4- Ι.10* των *Στοιχείων*.

Στο παρόν Κεφάλαιο παραθέτουμε τα αξιώματα εφαρμογής Hilbert για γωνίες καθώς επίσης διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε προτάσεις οι οποίες έπονται από αυτά και θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη των Προτάσεων των *Στοιχείων*. Ακόμη εισάγουμε την έννοια της διάταξης γωνιών, έννοια ιδιαίτερα σημαντική καθώς μέσω αυτής θα αιτιολογήσουμε όλα εκείνα τα σημεία των αποδείξεων των Προτάσεων των *Στοιχείων* όπου ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την κοινή έννοια ε΄ για γωνίες (το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους).

Αξιώματα εφαρμογής C για γωνίες στη θεμελίωση Hilbert

Θεωρούμε τη μη ορισμένη έννοια της εφαρμογής για γωνίες, που γράφεται $\cong$, η οποία υπόκειται στα ακόλουθα τρία αξιώματα.

C.4 Δοθέντων μιας γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και μιας ημιευθείας, $\overrightarrow{\Delta Z}$ υπάρχει μοναδική ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta E}$ σε δεδομένο ημιεπίπεδο της ευθείας ΔΖ έτσι ώστε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{E\hat{\Delta}Z}$.



C.5 Για κάθε τρεις γωνίες α, β, γ, αν $\alpha \cong \beta$ και $\alpha \cong \gamma$ τότε $\beta \cong \gamma$. Επίσης για κάθε γωνία α ισχύει $\alpha \cong \alpha$.

Σημείωση. Στα αξιώματα εφαρμογής για γωνίες δεν υπάρχει κάποιο αντίστοιχο αξίωμα του αξιώματος (C.3), άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων, καθώς το άθροισμα γωνιών σύμφωνα με τον ορισμό της γωνίας δεν είναι πάντοτε γωνία.

Πρόταση 7.1. Η εφαρμογή για γωνίες είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των γωνιών.

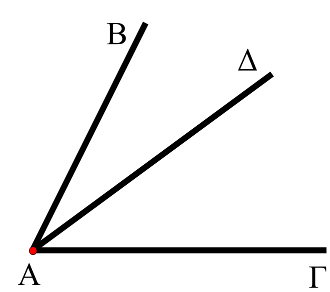
Απόδειξη. Για να είναι η εφαρμογή σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να ικανοποιεί τρεις ιδιότητες.

(1) Ανακλαστικότητα : κάθε γωνία είναι εφαρμόσιμη στον εαυτό της, το οποίο αναφέρεται ρητά στο αξίωμα (C.5).

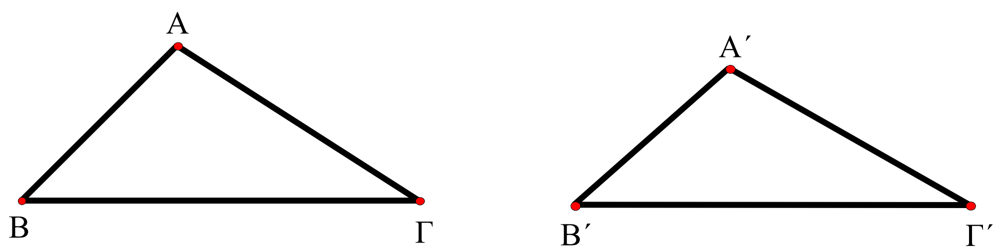
(2) Συμμετρία : Αν $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ τότε $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} \cong \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$. Το οποίο είναι συνέπεια από το αξίωμα (C.5) : έστω $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$, τότε από την ανακλαστικότητα θα ισχύει $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$, επομένως από το αξίωμα (C.5) έπεται ότι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} \cong \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.

(3) Μεταβατικότητα : αν $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ και $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} \cong \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K}$, τότε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K}$. Το οποίο έπεται από τη χρήση της συμμετρίας για να δείξουμε ότι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} \cong \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και από το αξίωμα (C.5).

Παρατήρηση. Αν $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι γωνία και αν η ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$ ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$, τότε θα λέμε ότι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι το άθροισμα των $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ και $\mathrm{B\hat{A}}\Delta$ και θα γράφουμε ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \mathrm{B\hat{A}}\Delta$.

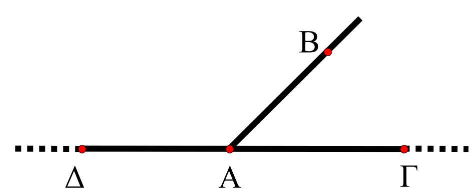


C.6 Αν ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ δύο τρίγωνα ώστε ΑΒ≅Α΄Β΄, ΑΓ≅Α΄Γ΄ και $B\hat{A}\Gamma \cong B'\hat{A}'\Gamma'$ τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εφαρμόσιμα, δηλαδή θα ισχύει ΒΓ≅Β΄Γ΄, $A\hat{\Gamma}B \cong A'\hat{\Gamma}'B'$ και $\Gamma\hat{B}A \cong \Gamma'\hat{B}'A'$.



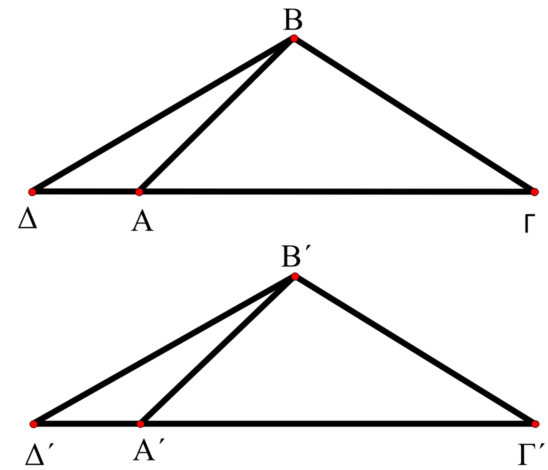
Ορισμός

Έστω γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και Δ ένα σημείο της ευθείας ΑΓ με Δ να ανήκει στην αντίθετη μεριά που ορίζει το Α σε σχέση με το Γ, τότε οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $B\hat{A}\Delta$ ονομάζονται **παραπληρωματικές**.



Σημείωση. Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* δεν έχει κάποιο αντίστοιχο ορισμό ή κάποια πρόταση για τις παραπληρωματικές γωνίες. Εμείς τον χρειάζομαστε καθώς σε συνδυασμό με την Πρόταση 7.2 θα αποδείξουμε Προτάσεις των *Στοιχείων* οι οποίες πραγματεύονται αθροίσματα γωνιών και εφαρμογή αυτών με 2 ορθές, π.χ. Προτάσεις Ι.13, Ι.14, Ι.17, διότι στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert τα αθροίσματα γωνιών ορίζονται σε συγκεκριμένο πλαίσιο, η γενίκευση του οποίου δεν οδηγεί πάντοτε σε γωνία.

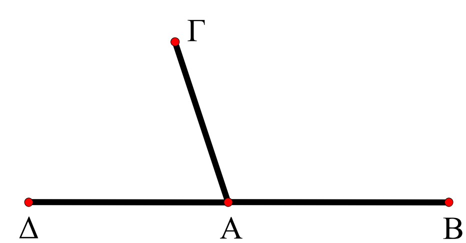
Πρόταση 7.2. Αν οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}\Delta$ είναι παραπληρωματικές και αν επιπλέον οι γωνίες $B'\hat{A}'\Gamma'$, $B'\hat{A}'\Delta'$ είναι παραπληρωματικές και ισχύει ότι $B\hat{A}\Gamma \cong B'\hat{A}'\Gamma'$ τότε θα ισχύει επίσης ότι $B\hat{A}\Delta \cong B'\hat{A}'\Delta'$.



Απόδειξη. Αντικαθιστούμε τα σημεία Β΄, Γ΄, Δ΄ με άλλα σημεία στις ίδιες ευθείες για τα οποία θα ισχύει ότι $ΑΒ \cong Α΄Β΄$, $ΑΓ \cong Α΄Γ΄$ και $ΑΔ \cong Α΄Δ΄$ (αξίωμα C.2) και από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΒΔ, Β΄Γ΄ και Β΄Δ΄. Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, ισχύει από την υπόθεση $ΑΒ \cong Α΄Β΄$, $ΑΓ \cong Α΄Γ΄$ και $Β\hat{Α}Γ \cong Β΄\hat{Α}΄Γ΄$. Επομένως από το αξίωμα (C.6) θα ισχύει ότι $ΒΓ \cong Β΄Γ΄$ και $Β\hat{Γ}Α \cong Β΄\hat{Γ}΄Α΄$.

Εν συνεχεία για τα τρίγωνα ΒΓΔ, Β΄Γ΄Δ΄ ισχύει $ΓΔ \cong Γ΄Δ΄$ διότι $ΑΓ \cong Α΄Γ΄$, $ΑΔ \cong Α΄Δ΄$ με $Γ * Α * Δ$ και $Γ΄ * Α΄ * Δ΄$ άρα από το αξίωμα (C.3) συμπεραίνουμε ότι $ΓΔ \cong Γ΄Δ΄$. Επιπλέον ισχύει ότι $ΒΓ \cong Β΄Γ΄$ και $Β\hat{Γ}Α \cong Β΄\hat{Γ}΄Α΄$, το οποίο αποδείξαμε παραπάνω. Επομένως από το αξίωμα (C.6) θα ισχύει ότι $ΒΔ \cong Β΄Δ΄$ και $Β\hat{Δ}Α \cong Β΄\hat{Δ}΄Α΄$.

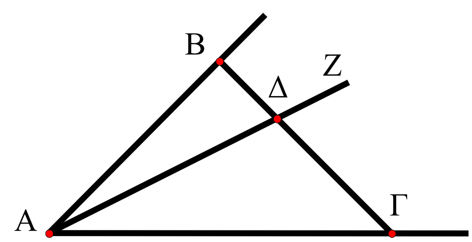
Τέλος για τα τρίγωνα ΒΔΑ, Β΄Δ΄Α΄ ισχύει $ΒΔ \cong Β΄Δ΄$, $Β\hat{Δ}Α \cong Β΄\hat{Δ}΄Α΄$ και $ΔΑ \cong Δ΄Α΄$, από την υπόθεση. Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΒΔΑ και Β΄Δ΄Α΄ θα ισχύει $Β\hat{Α}Δ \cong Β΄\hat{Α}΄Δ΄$.



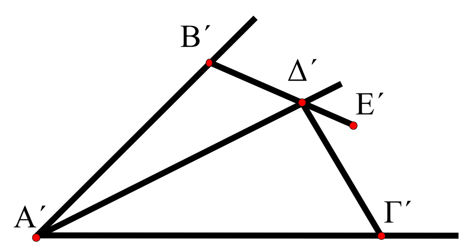
Σημείωση. Σύμφωνα με τον ορισμό της γωνίας το άθροισμα δύο γωνιών δεν είναι πάντα γωνία καθώς δεν υπάρχει η μηδενική γωνία και η ευθεία γωνία. Έτσι στις προτάσεις που ακολουθούν όταν για δύο τυχαίες γωνίες $Β\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ γράφουμε $Β\hat{Α}Γ + Δ\hat{Α}Γ \cong 2$ ορθές, τότε είτε οι $Β\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ είναι παραπληρωματικές είτε κάθε μία από τις $Β\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ είναι εφαρμόσιμη με την παραπληρωματική της άλλης και αντίστροφα. Επιπλέον αν για δύο τυχαίες γωνίες $Β\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ γράφουμε $Β\hat{Α}Γ + Δ\hat{Α}Γ < 2$ ορθές τότε κάθε μία από τις $Β\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ θα είναι μικρότερη από την παραπληρωματική της άλλης και αντίστροφα.

Πρόταση 7.3 (Εφαρμογή αθροισμάτων για γωνίες). Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και η ημιευθεία $\overrightarrow{AZ}$ η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Υποθέτουμε ότι $\Delta'\hat{A}'\Gamma' \cong \Delta\hat{A}\Gamma$ και $B'\hat{A}'\Delta' \cong B\hat{A}\Delta$ και ότι οι ημιευθείες $\overrightarrow{A'B'}$ και $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ ανήκουν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $A'\Delta'$. Τότε οι ημιευθείες $\overrightarrow{A'B'}$ και $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ σχηματίζουν την γωνία $B'\hat{A}'\Gamma'$ με $B'\hat{A}'\Gamma' \cong B\hat{A}\Gamma$ και η ημιευθεία $\overrightarrow{A'\Delta'}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $B'\hat{A}'\Gamma'$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Τότε από την Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem) η ημιευθεία $\overrightarrow{AZ}$ θα τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στο σημείο Δ. Επομένως τα σημεία Β, Δ, Γ θα ανήκουν στην ίδια ευθεία και θα ισχύει ότι $B*\Delta*\Gamma$. Εν συνεχεία αντικαθιστούμε τα σημεία Β΄, Γ΄, Δ΄ με σημεία που ανήκουν στις ίδιες ευθείες με τα προηγούμενα έτσι ώστε $AB \cong A'B'$, $A\Gamma \cong A'\Gamma'$ και $A\Delta \cong A'\Delta'$ (αξίωμα C.2). Επιπλέον ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta \cong B'\hat{A}'\Delta'$ και $\Delta\hat{A}\Gamma \cong \Delta'\hat{A}'\Gamma'$. Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΒΑΔ και Β΄Α΄Δ΄ θα



ισχύει $B\Delta \cong B'\Delta'$ και $B\hat{\Delta}A \cong B'\hat{\Delta}'A'$. Ακόμη από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΔΑΓ και Δ΄Α΄Γ΄ θα ισχύει $\Delta\Gamma \cong \Delta'\Gamma'$ και $A\hat{\Delta}\Gamma \cong A'\hat{\Delta}'\Gamma'$.

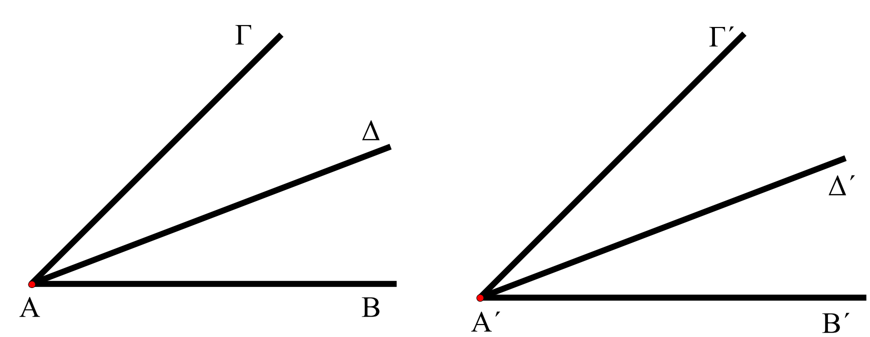


Έστω Ε΄ ένα σημείο της ευθείας Β΄Δ΄ με $B'*\Delta'*E'$. Τότε η γωνία $A'\hat{\Delta}'E'$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $A'\hat{\Delta}'B'$, για την οποία ισχύει ότι $A'\hat{\Delta}'B' \cong A\hat{\Delta}B$. Επομένως από την Πρόταση 7.2 και την μεταβατικότητα της εφαρμογής για γωνίες έχουμε ότι $A'\hat{\Delta}'E' \cong A'\hat{\Delta}'\Gamma'$. Όμως οι γωνίες αυτές βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που ορίζει η ευθεία Α΄Δ΄ και άρα από την μοναδικότητα την οποία αναφέρει το αξίωμα (C.4) οι δύο αυτές γωνίες είναι οι ίδιες γωνίες, επομένως τα τρία σημεία Β΄, Δ΄, Γ΄ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Ακόμη από το αξίωμα (C.3) συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B\Gamma} \cong \mathrm{B'\Gamma'}$ και έχουμε δείξει ότι $\mathrm{A\hat{B}\Delta} \cong \mathrm{A'\hat{B}'\Delta'}$ και $\mathrm{AB} \cong \mathrm{A'B'}$. Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ θα ισχύει $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{B'\hat{A}'\Gamma'}$. Επιπλέον αφού τα σημεία Β΄, Δ΄, Γ΄ είναι συνευθειακά και η Δ΄Α΄Γ΄ είναι γωνία έπεται ότι τα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ είναι μη συνευθεικά και άρα η Β΄Α΄Γ΄ είναι γωνία. Τα σημεία Β΄, Γ΄ βρίσκονται στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία Α΄Δ΄ και άρα θα ισχύει ότι $\mathrm{B'} * \mathrm{\Delta'} * \mathrm{\Gamma'}$, επομένως η ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{A'\Delta'}}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\mathrm{B'\hat{A}'\Gamma'}$.

Πρόταση 7.4 (Διαφορά γωνιών). Δοθέντων δύο γωνιών $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και $\mathrm{B'\hat{A}'\Gamma'}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{B'\hat{A}'\Gamma'}$ και μιας ημιευθείας $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ η οποία ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ τότε υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{A'\Delta'}}$ στο εσωτερικό της $\mathrm{B'\hat{A}'\Gamma'}$ ώστε να ισχύει $\mathrm{B\hat{A}\Delta} \cong \mathrm{B'\hat{A}'\Delta'}$ και $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{\Delta'\hat{A}'\Gamma'}$.

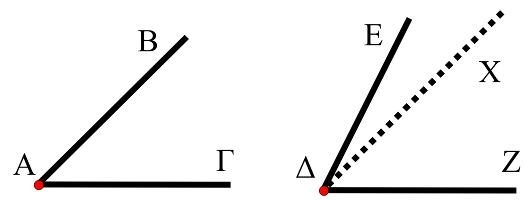
Απόδειξη. Από το αξίωμα (C.4) θεωρούμε την ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma''}}$ η οποία ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει η $\overrightarrow{\mathrm{A'\Delta'}}$ σε σχέση με την $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ για την οποία ισχύει $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{\Delta'\hat{A}'\Gamma''}$. Από την υπόθεση ισχύει ότι $\mathrm{B\hat{A}\Delta} \cong \mathrm{B'\hat{A}'\Delta'}$ και $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{\Delta'\hat{A}'\Gamma''}$, άρα από την Πρόταση 7.3 συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{B'\hat{A}'\Gamma''}$.



Ακόμη $B\hat{A}\Gamma \cong B'\hat{A}'\Gamma'$ και $B\hat{A}\Gamma \cong B'\hat{A}'\Gamma''$ επομένως από το αξίωμα (C.5) έπεται ότι $B'\hat{A}'\Gamma' \cong B'\hat{A}'\Gamma''$ και αφού $\overrightarrow{A'\Gamma'}$, $\overrightarrow{A'\Gamma''}$ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει η $A'B'$ από τη μοναδικότητα (αξίωμα (C.4)) συμπεραίνουμε ότι $\overrightarrow{A'\Gamma'} = \overrightarrow{A'\Gamma''}$. Άρα η $\overrightarrow{A'\Delta'}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $B'\hat{A}'\Gamma'$ και $\Delta\hat{A}\Gamma \cong \Delta'\hat{A}'\Gamma'$.

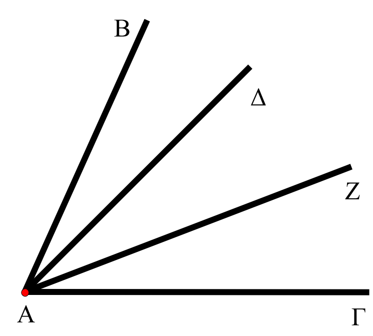
Ορισμός διάταξης γωνιών

Έστω οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}Z$. Θα λέμε ότι η $B\hat{A}\Gamma$ είναι **μικρότερη** της $E\hat{\Delta}Z$ και θα γράφουμε ότι $B\hat{A}\Gamma < E\hat{\Delta}Z$ αν υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta X}$ στο εσωτερικό της $E\hat{\Delta}Z$ ώστε να ισχύει $B\hat{A}\Gamma \cong X\hat{\Delta}Z$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε επίσης ότι η $E\hat{\Delta}Z$ είναι **μεγαλύτερη** της $B\hat{A}\Gamma$.



Πρόταση 7.5. Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ για την οποία ισχύει ότι η $\overrightarrow{A\Delta}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Gamma$ και ότι η $\overrightarrow{AZ}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Delta\hat{A}\Gamma$, τότε η $\overrightarrow{A\Delta}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}Z$ και η $\overrightarrow{AZ}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Gamma$.

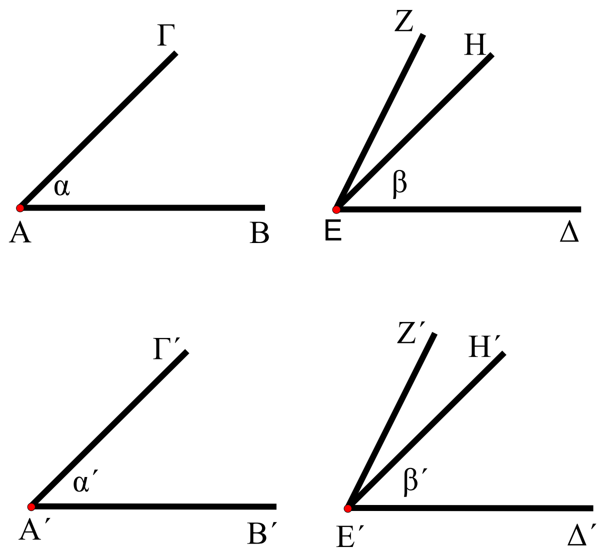
Απόδειξη. Αφού η $\overrightarrow{A\Delta}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Gamma$ τότε οι $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ανήκουν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η κ, όπου κ η ευθεία στην οποία ανήκει η ημιευθεία $\overrightarrow{A\Delta}$. Επιπλέον η $\overrightarrow{AZ}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Delta\hat{A}\Gamma$ και άρα οι $\overrightarrow{AZ}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ. Από την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός επιπέδου) τα ημιεπίπεδα που ορίζει η κ είναι ακριβώς δύο και άρα οι $\overrightarrow{AZ}$, $\overrightarrow{AB}$ ανήκουν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η κ. Επομένως η $\overrightarrow{A\Delta}$ ανήκει στο εσωτερικό της $B\hat{A}Z$.



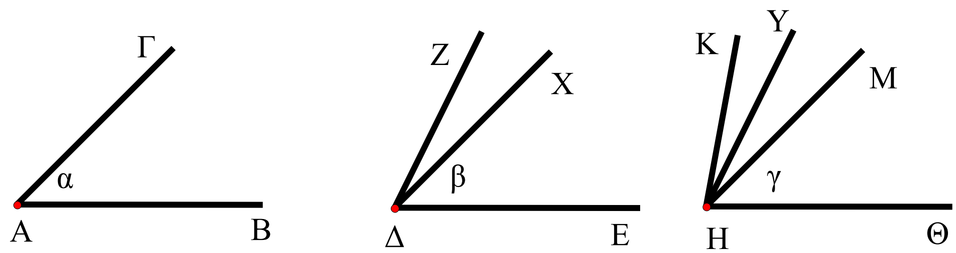
Όμοια αποδεικνύεται ότι η $\overrightarrow{AZ}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Gamma$ αν διαχωρίσουμε τα επίπεδα σε σχέση με την ευθεία στην οποία ανήκει η $\overrightarrow{AZ}$.

Πρόταση 7.6. (α) Αν ισχύει ότι $\alpha \cong \alpha'$ και $\beta \cong \beta'$, τότε $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\alpha' < \beta'$.
(β) Η σχέση < δίνει μια σχέση διάταξης στις γωνίες με την ακόλουθη έννοια:
(i). Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha < \gamma$.
(ii). Για κάθε δύο γωνίες α, β μία και μόνο μία από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει : $\alpha < \beta$, $\alpha \cong \beta$, $\alpha > \beta$.

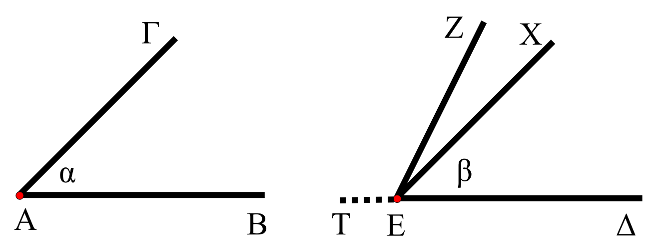
Απόδειξη. (α) Έστω οι γωνίες α, α', β, β' με $\alpha \cong \alpha'$ και $\beta \cong \beta'$. Υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$. Τότε εξ ορισμού υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{EH}$ στο εσωτερικό της β τέτοια ώστε $\alpha \cong \Delta\hat{E}H$. Έστω $\overrightarrow{E'H'}$ η ημιευθεία για την οποία ισχύει $\Delta'\hat{E}'H' \cong \Delta\hat{E}H$. Από την Πρόταση 7.4 έπεται ότι η $\overrightarrow{E'H'}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Delta'\hat{E}'Z'$. Επομένως από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει ότι $B'\hat{A}'\Gamma' \cong \Delta'\hat{E}'H'$ και άρα $\alpha' < \beta'$. Το αν και μόνο αν έπεται εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία αν υποθέσουμε $\alpha' < \beta'$.



(β)
(i). Έστω $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$. Τότε υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta X}$ στο εσωτερικό της $E\hat{\Delta}Z$ τέτοια



ώστε $E\hat{\Delta}X \cong \alpha$. Επιπλέον αφού β < γ τότε υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{HY}$ στο εσωτερικό της $\Theta\hat{H}Y \cong \Theta\hat{H}K$ τέτοια ώστε $\Theta\hat{H}Y \cong \beta$. Έστω η ημιευθεία $\overrightarrow{HM}$ για την οποία, από τον Ορισμό, ισχύει $E\hat{\Delta}X \cong \Theta\hat{H}M$, τότε από την Πρόταση 7.4 θα ισχύει ότι η $\overrightarrow{HM}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Theta\hat{H}Y$. Επομένως από την Πρόταση 7.5 έπεται ότι η $\overrightarrow{HM}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Theta\hat{H}K$ και ότι $B\hat{A}\Gamma \cong \Theta\hat{H}M$, συνεπώς α < γ.



(ii). Έστω οι γωνίες α, β και $\overrightarrow{EX}$ η μοναδική ημιευθεία τέτοια ώστε $\alpha \cong \Delta\hat{E}X$. Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Τ ώστε να ισχύει $\Delta * E * T$. Επομένως θα ισχύει είτε $\overrightarrow{EX} \cong \overrightarrow{EZ}$, είτε η $\overrightarrow{EX}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Delta\hat{E}Z$, είτε θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $Z\hat{E}T$. Δε μπορεί να ισχύει κάτι άλλο διότι οι $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{EX}$ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η $\overrightarrow{E\Delta}$. Οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες με τις σχέσεις α = β ή α < β ή α > β, από τις οποίες μία και μόνο μία μπορεί να ισχύει.

Σημείωση. Όπως θα συναντήσουμε αργότερα στις αποδείξεις των Προτάσεων των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης επικαλείται ότι ανάμεσα σε δύο γωνίες α, β μονάχα μία από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει: α <β, $\alpha \cong \beta$, α > β χωρίς όμως να το αναφέρει σε κάποιο αξίωμα, κοινή έννοια ή να το αποδεικνύει σε κάποια πρόταση. Με βάσει όμως την αξιωματική θεμελίωση Hilbert ο παραπάνω ισχυρισμός έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 7.6.

Σημείωση. Το αξίωμα εφαρμογής C.4 Hilbert αντιστοιχεί στην κοινή έννοια α΄ των Στοιχείων για την περίπτωση της ισότητας γωνιών. Επιπλέον όπως εχουμε αναφέρει ήδη την κοινή έννοια α΄ ο Ευκλείδης την χρησιμοποιεί τόσο για την ισότητα γωνιών όσο ευθυγράμμων τμημάτων και εμβαδών.

Κοινή έννοια α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Σημείωση. Η πρόταση η οποία αντιστοιχεί στην κοινή έννοια β΄ είναι η Πρόταση 7.3. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την κοινή έννοια β΄ τόσο για τα ευθύγραμμα τμήματα όσο για τις γωνίες και τα εμβαδά, ενώ με βάση την αξιωματική θεμελίωση Hilbert θα την αποδείξουμε για κάθε μία από τις παραπάνω έννοιες ξεχωριστά και σύμφωνα με τους όρους που αυτές έχουν οριστεί. Καθώς αν δοθούν δύο γωνίες τότε είτε το άθροισμα τους μπορεί να δημιουργήσει μία ευθεία γωνία δηλαδή να είναι ίσο με δύο ορθές είτε να είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές, περίπτωση στην οποία δημιουργείται γωνία στο εσωτερικό όμως της οποίας δεν ανήκουν οι αρχικές. Επομένως όσον αφορά αθροίσματα γωνιών θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί.

Κοινή έννοια β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Σημείωση. Στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert η πρόταση που αντιστοιχεί στην κοινή έννοια γ΄ για γωνίες είναι η Πρόταση 7.4. Στην απόδειξη της συγκεκριμένης πρότασης κυρίαρχο ρόλο έχει η μοναδικότητα η οποία αναφέρεται στο αξίωμα (C.5) και την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε αντίστοιχη της κοινής έννοιας ε΄ (το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους).

Κοινές έννοιες γ΄, ε΄

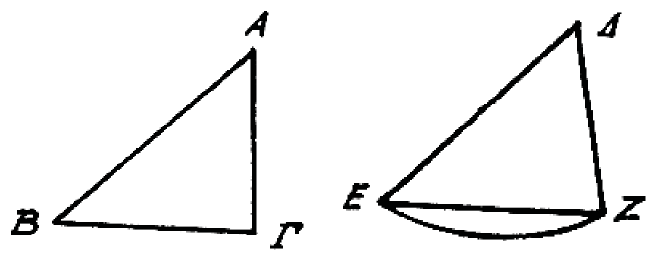
γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενάἐστιν ἴσα.
ε΄ Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

Προτάσεις Ι.4-Ι.10 των *Στοιχείων*

Έχοντας πλέον διατυπώσει τα αξιώματα εφαρμογής για γωνίες Hilbert μπορούμε να αποδείξουμε με επάρκεια τις Προτάσεις Ι.4-Ι.10 των *Στοιχείων*, αντιμετωπίζοντας τις όποιες αδυναμίες εμφανίζονται στις αποδείξεις αυτών στα *Στοιχεία*.

Πρόταση Ι.4. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Απόδειξη. Αξίωμα (C.6)



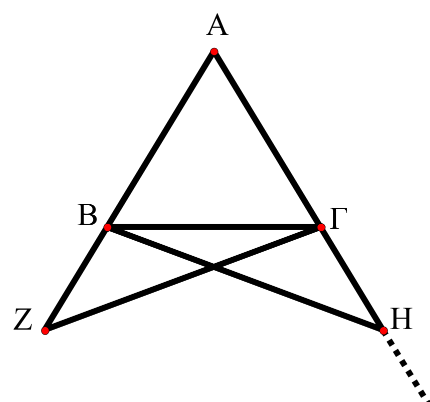
Σχόλια. Η απόδειξη της Πρότασης Ι.4 όπως εμφανίζεται στα *Στοιχεία* στηρίζεται στην μεταφορά και στην εφαρμογή. Ο Ευκλείδης αναφέρει ότι αν μεταφέρουμε την πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ στην πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΔΕΖ , την ΑΓ στην ΔΖ και την γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ στην $\mathrm{\Delta\hat{E}Z}$ τότε θα ισχύει $\mathrm{B\Gamma} \cong \mathrm{EZ}$ καθώς αν δεν ίσχυε θα οδηγούμασταν σε άτοπο διότι δύο ευθύγραμμα τμήματα δεν περικλείουν επιφάνεια. Για τον Hilbert η μέθοδος της μεταφοράς και της εφαρμογής δεν αποτελεί αποδεικτική μέθοδο και αφού δε μπορεί να αποδειχθεί μέσω των υπάρχοντων αξιωμάτων αποτελεί αξίωμα, το αξίωμα (C.6).
Ακόμη αυτό το οποίο αναφέρει ο Ευκλείδης ως «δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια» στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert έπεται από τη μοναδικότητα της ευθείας που διέρχεται από δύο διαφορετικά σημεία, την οποία αναφέρει το αξίωμα (Ι.1), γεγονός το οποίο υποδεικνύει τη σημαντικότητα της ρητής αναφοράς της μοναδικότητας ενός αντικειμένου, κάτι το οποίο σπάνια εμφανίζεται στα *Στοιχεία*.

Σημείωση. Χρήση για πρώτη φορά του αξιώματος (C.6).

Σημείωση. Σύμφωνα με τον Hartshorne η χρήση της μεταφοράς και της εφαρμογής από τον Ευκλείδη μας δίνει μία καλύτερη οπτική για την έννοια της «ισότητας» ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών. Καθώς στην κοινή έννοια δ΄ ο Ευκλείδης αναφέρει ότι τα αντικείμενα που εφαρμόζουν είναι μεταξύ τους ίσα ενώ στην απόδειξη της Πρότασης Ι.4 χρησιμοποιεί το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν οι γωνίες ή τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα τότε θα εφαρμόζουν επάλληλα. Ενδεχομένως λοιπόν ο Ευκλείδης να θεωρούσε ότι ευθύγραμμα τμήματα (ή γωνίες) ήταν εφαρμόσιμα αν και μόνο αν μπορούσαν να τοποθετηθούν σε κατάλληλες θέσεις ώστε να συμπίπτουν.

Κοινή έννοια δ΄. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Πρόταση Ι.5. Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ τρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

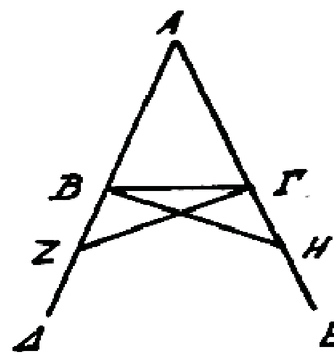


Απόδειξη. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ \cong ΑΓ$. Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Ζ τέτοιο ώστε να ισχύει $Α*Β*Ζ$. Στην ημιευθεία $\overrightarrow{ΑΓ}$ υπάρχει μοναδικό σημείο Η με $Α*Γ*Η$ και $ΑΖ \cong ΑΗ$, αξίωμα (C.2). Διότι αν δεν ίσχυε ότι $Α*Γ*Η$ τότε είτε θα ίσχυε $Α*Η*Γ$ είτε Γ=Η. Έστω ότι $Α*Η*Γ$ τότε από τον ορισμό θα ισχύει $ΑΗ < ΑΓ$, όμως $ΑΓ \cong ΑΒ$ και $ΑΒ < ΑΖ$ $(Α*Β*Ζ)$ επομένως από την Πρόταση 3.5 (β.i) θα ισχύει $ΑΗ < ΑΖ$, άτοπο από την επιλογή του Η. Έστω τώρα ότι Η = Γ τότε θα ισχύει ότι $ΑΓ \cong ΑΗ$ και $ΑΒ \cong ΑΓ$, επομένως από το αξίωμα (C.1) θα ισχύει $ΑΒ \cong ΑΗ$. Επιπλέον $ΑΒ < ΑΖ$, από την κατασκευή του ΑΖ, και $ΑΖ \cong ΑΖ$, επομένως από την Πρόταση 3.5 (α) θα ισχύει ότι $ΑΗ < ΑΖ$, άτοπο αφού από την επιλογή του Η θα ισχύει $ΑΗ \cong ΑΖ$ και άρα για τα συνευθειακά σημεία Α, Γ, Η ισχύει $Α*Γ*Η$.

Για τα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΗΒ ισχύει $ΑΖ \cong ΑΗ$ από την επιλογή του Η, $ΑΒ \cong ΑΓ$ διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $Β\hat{Α}Γ \cong Β\hat{Α}Γ$ από το αξίωμα (C.5). Επομένως από το αξίωμα (C.6) έπεται ότι $ΖΓ \cong ΗΒ$ και $Γ\hat{Ζ}Β \cong Β\hat{Η}Γ$.

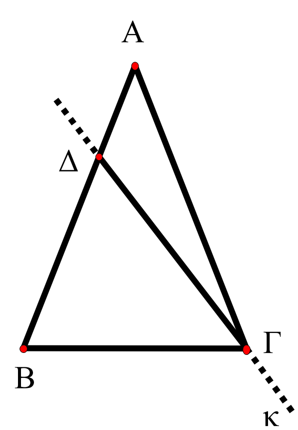
Επιπλέον για τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΗΒΓ ισχύει $ΖΓ \cong ΗΒ$, $Γ\hat{Ζ}Β \cong Β\hat{Η}Γ$, και από την Πρόταση 2.3 $ΒΖ \cong ΓΗ$ διότι $ΑΖ \cong ΑΗ$ και $ΑΒ \cong ΑΓ$. Επομένως από το αξίωμα (C.6) και τα υπόλοιπα στοιχεία των τριγώνων θα είναι μεταξύ τους εφαρμόσιμα άρα $Ζ\hat{Γ}Β \cong Η\hat{Β}Γ$.

Συνεπώς από τα παραπάνω προκύπτει ότι $Α\hat{Β}Η \cong Α\hat{Γ}Ζ$ και $Ζ\hat{Γ}Β \cong Η\hat{Β}Γ$, άρα από την Πρόταση 7.4 θα ισχύει $Α\hat{Β}Η - Η\hat{Β}Γ \cong Α\hat{Γ}Ζ - Ζ\hat{Γ}Β \Rightarrow Α\hat{Β}Γ \cong Α\hat{Γ}Β$.



Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί ότι υπάρχει σημείο Ζ τέτοιο ώστε να ισχύει $Α * Β * Ζ$ χωρίς όμως να το αιτιολογεί, ενώ στην αξιωματικη θεμελίωση Hilbert προκύπτει από το αξίωμα (B.3). Επιπλέον στην απόδειξη των Στοιχείων χρησιμοποιείται η κοινή έννοια γ΄, η οποία αναφέρει ότι αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα τα καταλειπόμενα μέρη είναι ίσα, κάτι το οποίο θεμελίωση Hilbert αποτελεί αποδειχθείσα πρόταση τόσο για τα ευθύγραμμα τμήματα όσο για τις γωνίες και τα περιεχόμενα ευθυγράμμων χωρίων.
Επιπλέον στην Πρόταση Ι.5 γίνεται για πρώτη φορά χρήση του αξιώματος (C.5).

Πρόταση Ι.6. Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $Α\hat{Β}Γ \cong Α\hat{Γ}Β$, θα δείξουμε ότι $ΑΒ \cong ΑΓ$. Υποθέτουμε ότι τα ΑΒ, ΑΓ δεν είναι εφαρμόσμα, τότε από την Πρόταση 3.5 (β.ii) θα ισχύει είτε ότι ΑΒ > ΑΓ είτε ότι ΑΒ < ΑΓ. Έστω ότι ΑΒ >ΑΓ, επομένως υπάρχει σημείο Δ το οποίο ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ τέτοιο ώστε $ΔΒ \cong ΑΓ$ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ. Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ ισχύει $ΒΓ \cong ΒΓ$ από το αξίωμα (C.1), $ΔΒ \cong ΑΓ$ από την επιλογή του Δ και $Δ\hat{Β}Γ \cong Α\hat{Γ}Β$ από το αξίωμα (C.5), άρα από το αξίωμα (C.6) θα ισχύει ότι $Δ\hat{Γ}Β \cong Α\hat{Β}Γ$. Επιπλέον από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Γ}Β \cong Α\hat{Β}Γ$, επομένως από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει ότι $Α\hat{Γ}Β \cong Δ\hat{Γ}Β$. Άτοπο, διότι από το αξίωμα (C.4) υπάρχει μοναδική ημιευθεία στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η $\overrightarrow{ΓΒ}$ σε σχέση με το Α, ώστε να ισχύει $Δ\hat{Γ}Β \cong Α\hat{Β}Γ$. Επομένως οι ημιευθείες $\overrightarrow{ΓΑ}$, $\overrightarrow{ΓΒ}$ είναι οι ίδιες ημιευθείες και Α=Δ, άρα $ΑΒ \cong ΑΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

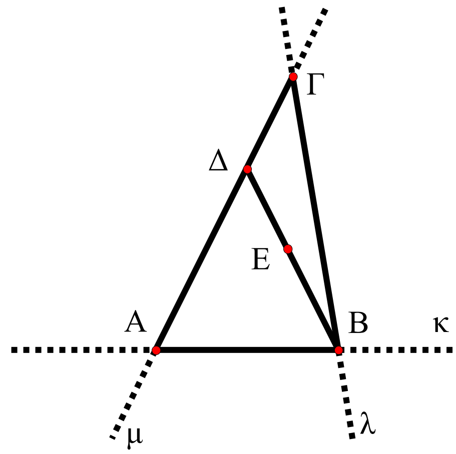
Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης υποθέτει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ είναι άνισα και άρα θα ισχύει είτε ότι ΑΒ > ΑΓ είτε ΑΒ < ΑΓ, χωρίς όμως να έχει αναφέρει προηγουμένως ότι για οποιαδήποτε δύο ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να ισχύει ακριβώς μία από τις παραπάνω σχέσεις (Πρόταση 3.5). Ακόμη οδηγείται σε άτοπο μέσω της κοινής έννοιας ε΄ καθώς αναφέρει ότι το μικρότερο τρίγωνο δε μπορεί να είναι ίσο με το μεγαλύτερο. Ενώ με βάση τη θεμελίωση Hilbert οδηγούμαστε σε άτοπο αφού από το αξίωμα (C.4) υπάρχει μοναδική ημιευθεία στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ όπως το Α ώστε να ισχύει $Δ\hat{Γ}Β \cong Α\hat{Β}Γ$ και άρα οι ημιευθείες $\overrightarrow{ΓΑ}$, $\overrightarrow{ΓΒ}$ είναι οι αυτές ημιευθείες με Α=Δ.

Σημείωση. Χρήση των αξιωμάτων (C.1), (C.4), (C.5) και (C.6).

Πόρισμα 7.7 (κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου, χωρίς το αξίωμα πληρότητας). Δοθέντος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο με βάση το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

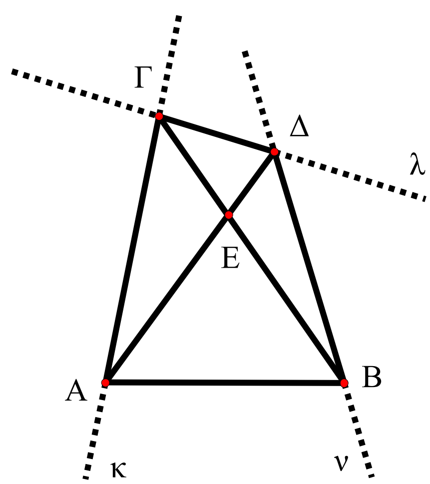
Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει ευθεία κ στην οποία ανήκουν τα Α, Β και από το αξίωμα (Ι.3) υπάρχει σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην κ. Θεωρούμε τις ευθείες λ, μ στις οποίες ανήκουν τα σημεία Γ, Β και Γ, Α αντίστοιχα (αξίωμα (C.1)). Αν για τις γωνίες $Γ\hat{Α}Β$, $Γ\hat{Β}Α$ του τριγώνου ΑΓΒ ισχύει

$\Gamma\hat{B}A \cong \Gamma\hat{A}B$ τότε από την Πρόταση Ι.6 θα ισχύει ότι $B\Gamma \cong A\Gamma$ και άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



Έστω ότι δεν ισχύει ότι $\Gamma\hat{B}A \cong \Gamma\hat{A}B$, επομένως από την Πρόταση 7.6 (β.ii) θα ισχύει είτε $\Gamma\hat{B}A$ > $\Gamma\hat{A}B$ είτε $\Gamma\hat{B}A$ < $\Gamma\hat{A}B$. Υποθέτουμε ότι $\Gamma\hat{B}A$ > $\Gamma\hat{A}B$ και άρα εξ Ορισμού υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{BE}$ στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{B}A$ τέτοια ώστε $\Gamma\hat{A}B \cong E\hat{B}A$. Άρα κάθε σημείο της ημιευθείας θα ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{B}A$, επομένως από την Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem) η ημιευθεία $\overrightarrow{BE}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, έστω Δ το σημείο τομής της ημιευθείας $\overrightarrow{BE}$ και του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ. Συνεπώς για τις γωνίες $\Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{A}B$ του τριγώνου ΔΑΒ θα ισχύει ότι $\Delta\hat{A}B \cong \Delta\hat{B}A$ και άρα από την Πρόταση Ι.6 το τρίγωνο ΔΒΑ είναι ισοσκελές με $\Delta A \cong \Delta B$.

Πρόταση Ι.7. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει σημείο Δ το οποίο να ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σε σχέση με το σημείο Γ για το οποίο να ισχύει $A\Gamma \cong A\Delta$ και $B\Gamma \cong B\Delta$.

Έστω ότι υπάρχει σημείο Δ στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ως προς το Γ, έτσι ώστε $A\Gamma \cong A\Delta$ και $B\Gamma \cong B\Delta$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ είναι ισοσκελή και άρα από την

Πρόταση Ι.5 θα ισχύει $A\hat{\Gamma}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma$ και $\Gamma\hat{\Delta}B \cong B\hat{\Gamma}\Delta$.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η ημιευθεία $\overrightarrow{A\Delta}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}B$ και ότι το σημείο Δ είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε η ημιευθεία $\overrightarrow{\Gamma B}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ και η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta A}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}B$.

Αφού η $\overrightarrow{A\Delta}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Gamma$ τότε κάθε σημείο της θα βρίσκεται στο εσωτερικό της $B\hat{A}\Gamma$ και άρα το σημείο Δ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, επομένως από την Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem) η $\overrightarrow{A\Delta}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Όμως το Δ είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως υπάρχει σημείο Ε διαφορετικό του Δ, το οποίο είναι το κοινό σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{A\Delta}$ και του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

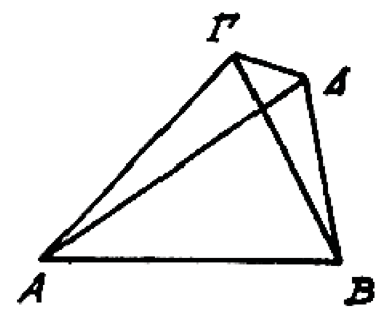
Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν οι ευθείες κ, λ, ν έτσι ώστε στην κ να ανήκουν τα σημεία Α, Γ, στην λ να ανήκουν τα σημεία Γ, Δ και στη ν να ανήκουν τα σημεία Β, Δ.

Όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{\Gamma B}$, εκτός του Γ, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ διότι Γ σημείο της κ. Διότι διαφορετικά η $\overrightarrow{\Gamma B}$ και η κ θα είχαν και άλλο κοινό σημείο, οπότε όλα τα σημεία της $\overrightarrow{\Gamma B}$ θα ήταν σημεία της κ και άρα τα σημεία της Α, Γ, Β θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι ΑΒΓ τρίγωνο. Επιπλέον όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{\Gamma B}$, εκτός του Γ, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, διότι διαφρετικά το σημείο Δ θα ανήκε στο ΓΒ, άτοπο από την υπόθεση. Επομένως όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{\Gamma B}$, εκτός του Γ, θα ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες κ, λ και άρα η $\overrightarrow{\Gamma B}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

Ακόμη όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{\Delta A}$, εκτός του Δ, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ καθώς αν δεν ανήκαν τότε τα σημεία Α, Γ, Δ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο από την υπόθεση. Επιπλέον όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{\Delta A}$, εκτός του Δ θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ν καθώς αν δεν ανήκαν τότε τα σημεία Α, Β, Δ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο από την υπόθεση. Επομένως όλα τα σημεία της ημιευθείας $\overrightarrow{\Delta A}$, εκτός του Δ, θα ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που ορίζουν ταυτόχρονα οι λ, ν και άρα η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta A}$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}B$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έπεται ότι $\Gamma\hat{\Delta}B > \Gamma\hat{\Delta}A$ διότι η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta A}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Gamma\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Gamma}\Delta > B\hat{\Gamma}\Delta$ διότι η ημιευθεία $\overrightarrow{\Gamma B}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $A\hat{\Gamma}\Delta$. Όμως έχουμε δείξει ότι $A\hat{\Gamma}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma$ και ότι $\Gamma\hat{\Delta}B \cong B\hat{\Gamma}\Delta$ συνεπώς από την Πρόταση 7.6 (β.i) έπεται ότι $B\hat{\Gamma}\Delta < A\hat{\Gamma}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma < \Gamma\hat{\Delta}B$, άτοπο διότι $\Gamma\hat{\Delta}B \cong B\hat{\Gamma}\Delta$.

Σχόλια. Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται για την περίπτωση στην οποία το σημείο Δ είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ και η ημιευθεία $\overrightarrow{A\Delta}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Οι συγκεκριμένες πρυποθέσεις είναι ίδιες με εκείνες που λαμβάνει ο Ευκλείδης για την απόδειξη της στα *Στοιχεία*. Όσον αφορά την απόδειξη της Πρότασης Ι.7 ο Ευκλείδης δέχεται ότι η $\overrightarrow{A\Delta}$ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε, χωρίς όμως να το αιτιολογεί, ενώ εμείς οδηγηθήκαμε στο παραπάνω συμπέρασμα βασισμένοι στην Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem). Ακόμη έχοντας υποθέσει ότι η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta A}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $\Gamma\hat{\Delta}B$ και ότι η ημιευθεία $\overrightarrow{\Gamma B}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $A\hat{\Gamma}\Delta$ οδηγούμαστε στο ότι $\Gamma\hat{\Delta}B > \Gamma\hat{\Delta}A$ και $A\hat{\Gamma}\Delta > B\hat{\Gamma}\Delta$ χρησιμοποιώντας τον Ορισμό της μικρότερης-μεγαλύτερης γωνίας και μέσω αυτού καταλήξαμε σε άτοπο. Αντίστοιχα ο Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* καταλήγει σε άτοπο χρησιμοποιώντας την κοινή έννοια ε΄, δηλαδή ότι το όλο είναι μεγαλύτερο του μέρους.



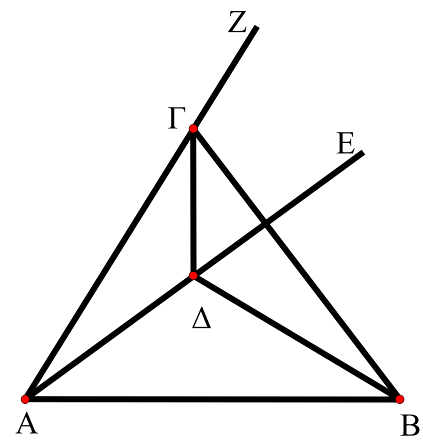
Σημείωση. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.7 στα *Στοιχεία* ο Ευκλείδης παραθέτει μονάχα μία από τις περιπτώσεις που ισχύουν για το σημείο Δ. Οι άλλες περιπτώσεις οι οποίες θα πρέπει να μελετηθούν είναι οι εξής:

i) Για το σημείο Δ να ισχύει $A * \Delta * \Gamma$ ή $A * \Gamma * \Delta$.

ii) Το σημείο Δ να ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ.

Στην περίπτωση (i) η Πρόταση Ι.7 αποδεικνύεται άμεσα χρησιμοποιώντας την διάταξη των σημείων και τον ορισμό μικρότερου-μεγαλύτερου ευθύγραμμου τμήματος.

Όσον αφορά την περίπτωση (ii) η απόδειξη της Πρότασης Ι.7 δεν είναι στοιχειώδης και για το λόγο αυτό την παραθέτουμε ακολούθως.

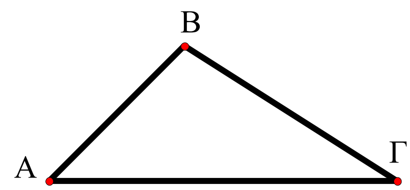


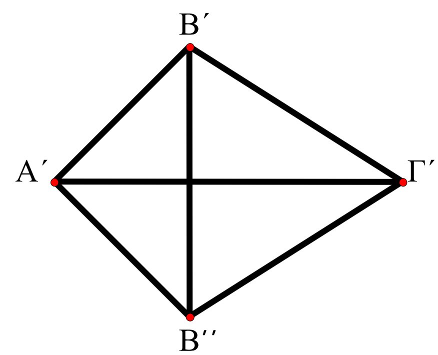
Έστω ότι το σημείο Δ ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ ώστε $ΑΓ \cong ΑΔ$ και $ΒΓ \cong ΒΔ$. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ και από το αξίωμα (C.2) θεωρούμε τα σημεία Ε, Ζ για τα οποία ισχύει $Α * Δ * Ε$ και $Α * Γ * Ζ$. Αφού $ΑΓ \cong ΑΔ$ τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και άρα από την Πρόταση Ι.5 ισχύει $Α\hat{Γ}Δ \cong Α\hat{Δ}Γ$. Συνεπώς από την Πρόταση 7.2 έπεται ότι $Ζ\hat{Γ}Δ \cong Γ\hat{Δ}Ε$. Ακόμη το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές και άρα από την Πρόταση Ι.5 θα ισχύει $Β\hat{Δ}Γ \cong Β\hat{Γ}Δ$. Όμως δεδομένης της επιλογής του σημείου Δ έπεται ότι $Β\hat{Γ}Δ < Ζ\hat{Γ}Δ \cong Γ\hat{Δ}Ε < Β\hat{Δ}Γ$, άτοπο.

Αποδεικνύοντας αυτές τις περιπτώσεις της Πρότασης Ι.7, όπως αναφέρει ο Πρόκλος η συγκεκριμένη Πρόταση γίνεται καθολικά αποδεκτή. Επιπλέον σύμφωνα με τον Heath η «παράλειψη» της αναφοράς των άλλων περιπτώσεων της Πρότασης Ι.7 στα Στοιχεία συνδέεται με την γενικη πρακτική του Ευκλείδη να παραθέτει κάθε φορά μία από τις περιπτώσεις κάθε Πρότασης, την πιο δύσκολη, και οι άλλες να αφήνονται στον αναγνώστη.

Τέλος όπως πολύ σωστά σημειώνει ο Heath είναι λάθος να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η μοναδική χρήση της Πρότασης Ι.7 βρίσκεται στην Πρόταση Ι.8. Διότι μέσω της Πρότασης Ι.7 αποδεικνύεται η μοναδικότητα των τριγώνων που κατασκευάζονται, με δοθείσα βάση και σε συγκεκριμένο ημιεπίπεδο, στις Προτάσεις Ι.1 και Ι.22.

Πρόταση Ι.8. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

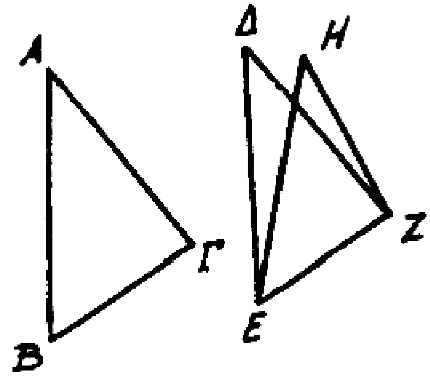




Απόδειξη. Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ τα οποία έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα εφαρμόσιμες, τότε θα δείξουμε ότι ισχύει $B\hat{A}\Gamma \cong B'\hat{A}'\Gamma'$. Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα (C.2) και (C.4) κατασκευάζουμε γωνία $\Gamma'\hat{A}'B''$, με Β΄΄ να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει η $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ σε σχέση με το Β΄ ώστε να ισχύει $B''\hat{A}'\Gamma' \cong B\hat{A}\Gamma$ και $A'B'' \cong AB$. Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄΄Γ΄, ισχύει $A'B'' \cong AB$ από την κατασκευή του Α΄Β΄΄, $B''\hat{A}'\Gamma' \cong B\hat{A}\Gamma$ από την κατασκευή της $B''\hat{A}'\Gamma'$ και $A'\Gamma' \cong A\Gamma$ από την υπόθεση. Επομένως από το αξίωμα (C.6), για τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄΄Γ΄ έπεται ότι $B\Gamma \cong B''\Gamma'$. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα Β΄΄Β΄ και από την υπόθεση έχουμε ότι $AB \cong A'B''$ και $AB \cong A'B'$ οπότε από το αξίωμα (C.1) έπεται ότι $A'B' \cong A'B''$. Επομένως το τρίγωνο Α΄Β΄Β΄΄ είναι ισοσκελές και άρα από την Πρόταση Ι.5 θα ισχύει $A\hat{B}B'' \cong A\hat{B}'B'$. Ακόμη ισχύει ότι $B'\Gamma' \cong B''\Gamma'$ και άρα το τρίγωνο Γ΄Β΄΄Β΄ είναι ισοσκελές, συνεπώς $B'\hat{B}\Gamma' \cong B\hat{B}'\Gamma'$ και άρα από την Πρόταση 7.3 προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma' \cong A\hat{B}'\Gamma'$.

Ακόμη έχουμε δείξει ότι για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄΄Γ΄ ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong A\hat{B}'\Gamma'$ και αφού $A'\hat{B}''\Gamma' \cong A'\hat{B}\Gamma'$ τότε από τη μεταβατικότητα των εφαρμόσιμων γωνιών έχουμε ότι $A\hat{B}\Gamma \cong A\hat{B}\Gamma'$. Συνεπώς για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύει $AB \cong A'B'$, $A\hat{B}\Gamma \cong A\hat{B}\Gamma'$ και $B\Gamma \cong B'\Gamma'$ επομένως από το αξίωμα (C.6) θα ισχύει $B\hat{A}\Gamma \cong B'\hat{A}\Gamma'$.

Σχόλια. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.8 των *Στοιχείων* όπως επίσης και στην απόδειξη της Πρότασης Ι.4 ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη μεταφορά και την εφαρμογή. Αναφέρει ότι αν εφαρμόσουμε το ΒΓ στο ΕΖ τότε από την Πρόταση Ι.7 δεν μπορεί να υπάρχει σημείο Η στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΕΖ όπως το Δ το οποίο να είναι διαφορετικό του Δ και να ισχύει $HE \cong AB$ και $HZ \cong A\Gamma$ δεδομένου ότι



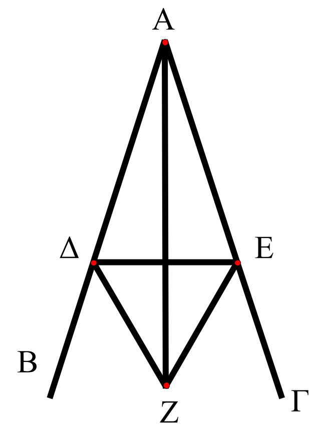
$AB \cong \Delta E$ και $A\Gamma \cong \Delta Z$, επομένως και η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ θα είναι εφαρμόσιμη στην $E\hat{\Delta}Z$. Σύμφωνα με την αξιωματική θεμελίωση Hilbert η συγκεκριμένη μέθοδος της μεταφοράς και της εφαρμογής, όπως και για στην Πρόταση Ι.4, δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή. Έτσι αποδείξαμε την Πρόταση Ι.8 χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) και τα αξιώματα (C.2) και (C.4) για να κατασκευάσουμε εφαρμόσιμο τρίγωνο Α΄Β΄΄Γ΄ με το ΑΒΓ, με Β΄΄ να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει το Α΄Γ΄ σε σχέση με το Β΄. Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας το αξίωμα (C.6), την Πρόταση Ι.5 και την Πρόταση 7.3 (εφαρμογή αθροισμάτων για γωνίες) οδηγηθήκαμε στο ζητούμενο.

Σημείωση. Στην Πρόταση Ι.8 όπως και προηγουμένως, κυρίως σε προτάσεις που συνάγονται από την αξιωματική θεμελίωση Hilbert τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη προτάσεων των *Στοιχείων*, γίνεται φανερή η αδυναμία του Ευκλείδη στο να μιλήσει για τα επίπεδα, τα ημιεπίπεδα και για το πολύ σημαντικό αξίωμα του Pasch (Β.4). Ενώ φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι υποθέσεις οι οποίες πραγματοποιεί και οι αποδείξεις των Προτάσεων των *Στοιχείων* οδηγούν σε σωστά συμπεράσματα.

Πρόταση Ι.9. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Απόδειξη. Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$, η γωνία που θα διχοτομήσουμε. Από την Πρόταση 3.1 υπάρχει σημείο Δ τέτοιο ώστε $A * \Delta * B$ και από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ε της

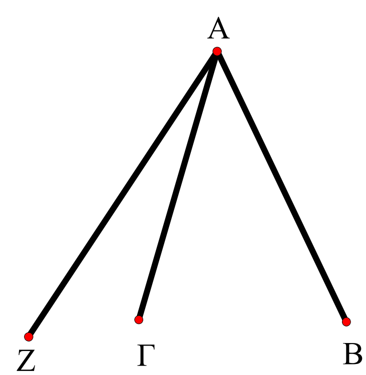
$\overrightarrow{A\Gamma}$ τέτοιο ώστε $AE \cong A\Delta$. Εν συνεχεία από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και από το Πόρισμα 7.7 κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΔΖΕ με $\Delta Z \cong EZ$ και Ζ να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία Δ, Ε σε σχέση με το Α. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΕΖ έχουν $A\Delta \cong AE$ λόγω κατασκευής, $\Delta Z \cong EZ$ λόγω κατασκευής και $AZ \cong AZ$ από το αξίωμα (C.1). Άρα από την Πρόταση I.8 για τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΖΑΓ θα ισχύει ότι $B\hat{A}Z \cong \Gamma\hat{A}Z$.



Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης δεν ελέγχει με κάποιο τρόπο την ύπαρξη του σημείου Δ για το οποίο ισχύει $A * \Delta * B$ κάτι το οποίο αποδεικνύεται στην Πρόταση 3.1. Επιπλέον χρησιμοποιεί την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου ενώ η συγκεκριμένη πρόταση μπορεί να αποδειχθεί ακόμη και αν κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο.

Σημείωση. Η Πρόταση I.9 μπορεί να αποδειχθεί ακόμη και αν αντί για ισόπλευρο τρίγωνο κατασκευάσουμε ισοσκελές. Το ερώτημα το οποίο τίθεται είναι γιατί ο Ευκλείδης πράττει κάτι τέτοιο δεδομένης της γενικότερης φιλοσοφίας η οποία διέπει τα *Στοιχεία* και είναι η χρήση των λιγότερων δυνατών εργαλείων.

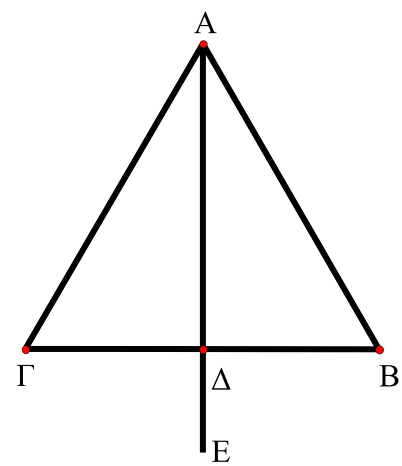
Σημείωση. Από την απόδειξη της Πρότασης I.9 δεν είναι φανερό ότι η διχοτόμος ΑΖ, της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, ανήκει στο εσωτερικό της. Κάτι όμως το οποίο προκύπτει από το αξίωμα (C.4), διότι αν οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ ανήκαν στο ίδιο ημιεπίπεδο το οποίο ορίζει η ΑΖ τότε θα ίσχυε $\Gamma\hat{A}Z \cong B\hat{A}Z$. Άτοπο, από τη μοναδικότητα της ημιευθείας που αναφέρει το αξίωμα (C.4).



Επομένως κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας, εκτός από το κοινό τους σημείο, ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας.

Πρόταση Ι.10. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, από το Πόρισμα 7.7 κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} \cong \text{ΑΓ}$ και από την Πρόταση Ι.9 κατασκευάζουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$, την ημιευθεία $\overrightarrow{\text{ΑΕ}}$. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας και άρα από την Πρόταση 6.2 (Crossbar theorem) στη γωνία η ημιευθεία $\overrightarrow{\text{ΑΕ}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, έστω Δ το σημείο τομής. Για τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΔ ισχύει $\text{ΑΒ} \cong \text{ΑΓ}$ διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ} \cong \text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Δ}$ διότι ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$ και $\text{ΑΔ} \cong \text{ΑΔ}$ από το αξίωμα (C.1). Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΔ θα ισχύει ότι $\text{ΒΔ} \cong \text{ΔΓ}$.



Σχόλια. Στη Πρόταση Ι.10 των *Στοιχείων* όπως και στην Πρόταση Ι.9 ο Ευκλείδης για την απόδειξή της κατασκευάζει ισόπλευρο τρίγωνο ενώ αποδεικνύεται ακόμη και αν κατασκευάσουμε ισοσκελές. Επιπλέον ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί ότι η ημιευθεία $\overrightarrow{\text{ΑΕ}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ στο σημείο Δ χωρίς να το αιτιολογεί κάτι το οποίο στη θεμελίωση Hilbert προκύπτει από την Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem).

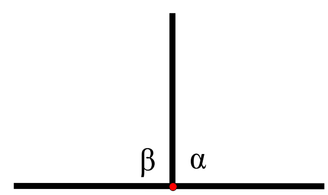
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ορθή γωνία, Άιτημα 4,
Προτάσεις Ι.11- Ι.14
των *Στοιχείων*

Το παρόν Κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην έννοια της ορθής γωνίας, το Αίτημα 4 και τις Προτάσεις Ι.11-14 των *Στοιχείων* οι οποίες συνδέονται με την έννοια της. Ακόμη με την διατύπωση και απόδειξη των Προτάσεων που ακολουθούν θα είμαστε σε θέση στο Κεφάλαιο 9 να αποδείξουμε και τις υπόλοιπες Προτάσεις Ι.15-26 του πρώτου μέρους του βιβλίου Ι των *Στοιχείων*.

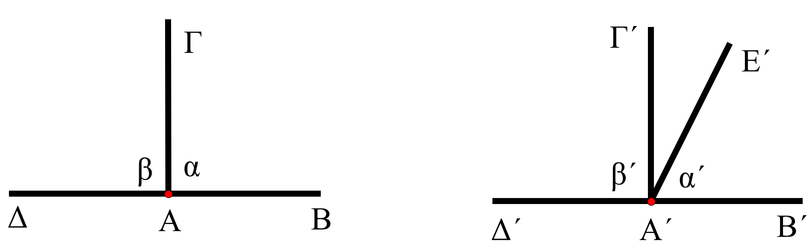
Ορισμός

Ορθή είναι η γωνία η οποία είναι εφαρμόσιμη με την παραπληρωματική της.



Πρόταση 8.1 (Αίτημα 4). Όλες οι ορθές γωνίες είναι εφαρμόσιμες μεταξύ τους.

Απόδειξη. Έστω $\alpha = \Gamma\hat{A}B$ και $\alpha' = \Gamma'\hat{A}'B'$ ορθές γωνίες, τότε από τον ορισμό θα είναι εφαρμόσιμες με τις παραπληρωματικές τους γωνίες β και β΄, αντίστοιχα. Έστω ότι α και



α΄ δεν είναι εφαρμόσιμες. Τότε από την Πρόταση 7.6 (β.ii) θα ισχύει είτε $\alpha < \alpha'$, είτε $\alpha' < \alpha$. Υποθέτουμε ότι $\alpha < \alpha'$ και άρα υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{A'E'}$ στο εσωτερικό της γωνίας α΄ τέτοια ώστε $\alpha \cong E'\hat{A}'B'$.

Η ημιευθεία $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $E'\hat{A}'\Delta'$. Επομένως, $\beta' < E'\hat{A}'\Delta'$, όμως η $E'\hat{A}'\Delta'$ είναι παραπληρωματική της $E'\hat{A}'B'$, η οποία είναι εφαρμόσιμη με την α. Συνεπώς από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει ότι $E'\hat{A}'\Delta' \cong \beta$, ως παραπληρωματικές γωνίες εφαρμόσιμων γωνιών και από την Πρόταση 7.6 (α) έπεται ότι $\beta' < \beta$. Όμως $\alpha \cong \beta$ και $\alpha' \cong \beta'$ και άρα $\alpha' \cong \beta' < \beta \cong \alpha$, άτοπο.

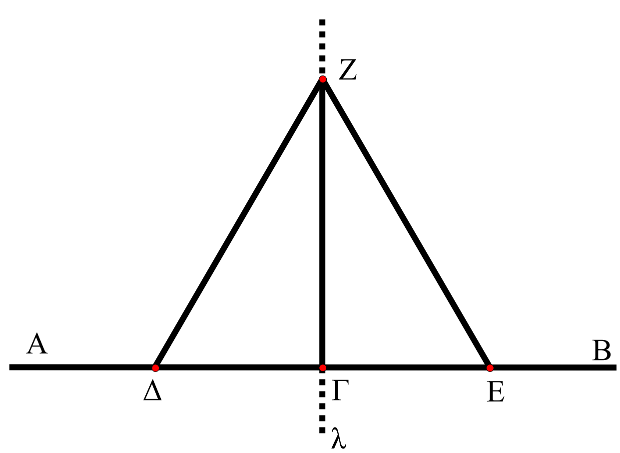
Όρος ι΄. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Αίτημα 4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Σημείωση. Το Αίτημα 4 στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert αποτελεί αποδειχθείσα Πρόταση, την Πρόταση 8.1. Σημειώνουμε ότι η ιδέα αυτής της απόδειξης εμφανίζεται ήδη στον Πρόκλο.

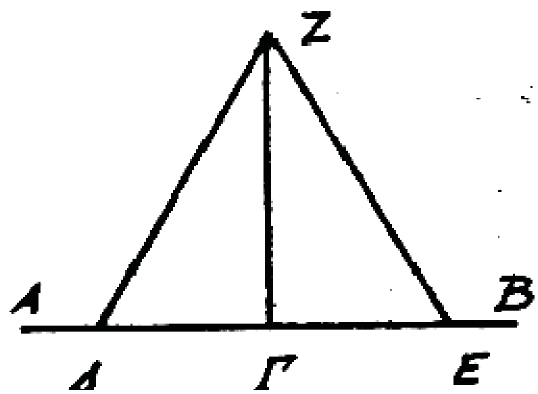
Προτάσεις I.11- I.14 των *Στοιχείων*

Πρόταση I.11. Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το δοθέν σημείο Γ, το οποίο ανήκει στο ΑΒ. Από την Πρόταση 3.5 (β.ii) θα ισχύει ή ότι $A\Gamma < \Gamma B$ ή ότι $A\Gamma \cong \Gamma B$ ή ότι $A\Gamma > \Gamma B$. Έστω ότι $A\Gamma < \Gamma B$, τότε από την Πρόταση 3.1 υπάρχει σημείο Δ ώστε να ισχύει $A * \Delta * \Gamma$. Εν συνεχεία από το αξίωμα (C.2) υπάρχει μοναδικό σημείο Ε, με $\Delta * \Gamma * E$, τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma \cong \Gamma E$. Από το Πόρισμα 7.7 κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ με $\Delta Z \cong EZ$ και από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία λ στην οποία ανήκουν τα σημεία Ζ, Γ. Τα τρίγωνα ΔΖΓ και ΖΓΕ έχουν $\Delta\Gamma \cong \Gamma E$ λόγω κατασκευής, $\Delta Z \cong ZE$ διότι το τρίγωνο ΖΔΕ είναι ισοσκελές και $Z\Gamma \cong Z\Gamma$ από το αξίωμα (C.1). Επομένως από την Πρόταση Ι.8 για τα τρίγωνα ΖΓΔ και ΖΓΕ ισχύει $Z\hat{\Gamma}\Delta \cong Z\hat{\Gamma}E$ και άρα εξ Ορισμού έπεται ότι κάθε μία από τις γωνίες $Z\hat{\Gamma}\Delta, Z\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.

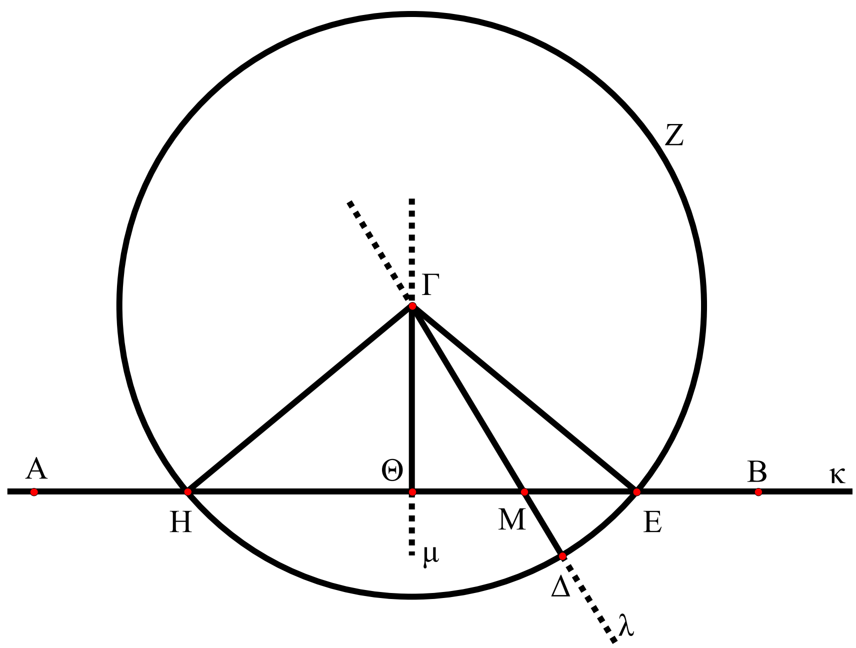
Όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση στην οποία ΑΓ≅ΓΒ, ενώ στην περίπτωση κατά την οποία ΑΓ > ΓΒ θεωρούμε ότι για το σημείο Δ θα ισχύει $\Gamma * \Delta * B$ και το μοναδικό σημείο Ε για το οποίο θα ισχύει $\Delta\Gamma \cong \Gamma E$ θα ανήκει στην αντίθετη πλευρά που ορίζει το Γ ως προς το Δ (Πρόταση Διαχωρισμού Ευθείας).



Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης λαμβάνει το σημείο Δ μεταξύ των σημείων Α, Γ χωρίς όμως να ελέγχει την ύπαρξη του ενώ στη θεμελίωση Hilbert αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Γ διαφορετικά μεταξύ τους υπάρχει σημείο Δ ώστε να ισχύει $A * \Delta * \Gamma$. Επιπλέον με τον τρόπο τον οποίο λαμβάνει το σημείο Δ υπάρχει περίπτωση το σημείο Ε για το οποίο ισχύει $\Delta\Gamma \cong \Gamma E$ να μην ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να ισχύει $A * B * E$. Επομένως προτού λάβουμε το σημείο Δ θα πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει ΑΓ < ΓΒ ή ΑΓ > ΓΒ ή $A\Gamma \cong \Gamma B$, δεδομένου ότι στην Πρόταση 3.5 (β.ii) έχει αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε δύο ευθύγραμμα τμήματα μονάχα μία από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να ισχύει. Έτσι επιλέγουμε το σημείο Δ στο μικρότερο από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΑΒ για να εξασφαλίσουμε ότι το σημείο Ε ανήκει και αυτό στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Εν συνεχεία ο Ευκλείδης για την απόδειξη της Πρότασης Ι.11 των *Στοιχείων* χρησιμοποιεί ότι $\Gamma Z \cong \Gamma Z$ μέσω της κοινής έννοιας δ΄ ενώ στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert αποτελεί αξίωμα, το αξίωμα (C.1).

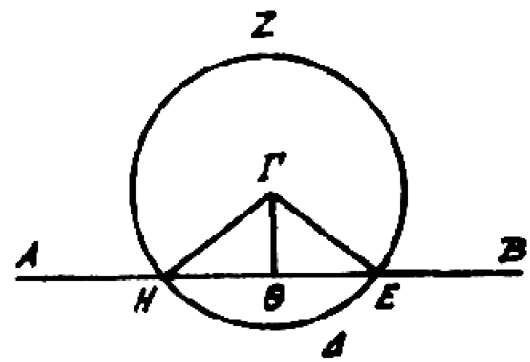
Πρόταση Ι.12. Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Απόδειξη. Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ = κ και ένα σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην κ (αξίωμα Ι.3). Τότε από την Πρόταση Διαχωρισμού του Επιπέδου υπάρχει σημείο Δ το οποίο ανήκει στο άλλο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ σε σχέση με το Γ. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία λ στην οποία ανήκουν τα σημεία Γ, Δ και από τον Ορισμό του κύκλου θεωρούμε τον κύκλο Ζ με κέντρο Γ και ακτίνα ΓΔ. Δεδομένου ότι τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η κ τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ θα τέμνει την κ σε ένα σημείο, έστω Μ, με Γ∗Μ∗Δ. Επομένως από τη διάταξη των ευθυγράμμων τμημάτων ισχύει ότι ΓΜ < ΓΔ και άρα το Μ ανήκει στην κ και βρίσκεται



στο εσωτερικό του κύκλου Ζ. Επομένως από το δεύτερο αξίωμα πληρότητος Hilbert η ευθεία κ τέμνει τον κύκλο Ζ σε ακριβώς δύο σημεία. Έστω Η, Ε τα σημεία τομής. Από την Πρόταση Ι.10 διχοτομούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΗΕ έτσι ώστε ΗΘ $\cong$ ΘΕ και από το αξίωμα (Ι.1) γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία μ στην οποία ανήκουν τα σημεία Γ, Θ. Τα τρίγωνα ΓΘΗ και ΓΘΕ έχουν ΓΗ $\cong$ ΓΕ ως ακτίνες του κύκλου Ζ, ΗΘ $\cong$ ΘΕ από την κατασκευή του Θ και ΓΘ $\cong$ ΓΘ από το αξίωμα (C.1). Επομένως από την Πρόταση Ι.8

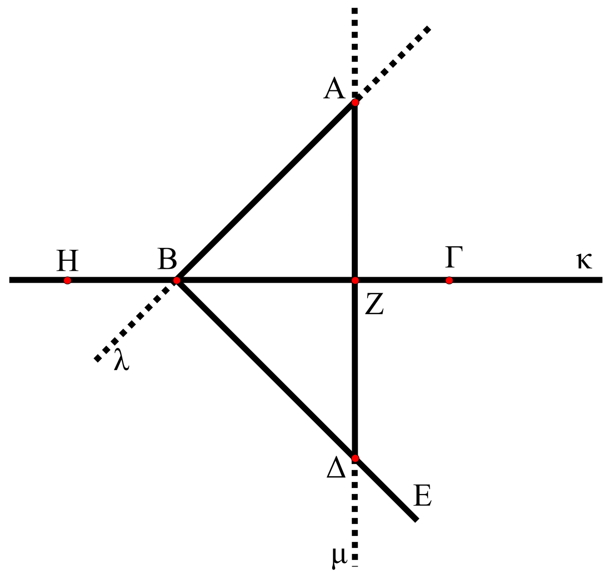
για τα τρίγωνα ΓΗΘ και ΓΘΕ ισχύει ότι $\Gamma\hat{\Theta}\mathrm{H} \cong \Gamma\hat{\Theta}\mathrm{E}$ και άρα από τον Ορισμό της ορθής γωνίας έπεται ότι κάθε μία από τις γωνίες $\Gamma\hat{\Theta}\mathrm{H}$ και $\Gamma\hat{\Theta}\mathrm{E}$ είναι ορθή.



Σχόλια. Ο Ευκλείδης στην απόδειξη της Πρότασης Ι.12 των *Στοιχείων* αναφέρει ότι υπάρχει σημείο Δ το οποίο βρίσκεται στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ σε σχέση με το Γ χωρίς να ελέγχει την ύπαρξη του και άρα γίνεται φανερή η σημαντικότητα της Πρότασης 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) Hilbert. Ακόμη κατασκευάζει κύκλο Ζ με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα ΓΔ και αναφέρει ότι η ευθεία κ θα τέμνει τον κύκλο Ζ σε δύο σημεία. Επομένως χρειαζόμαστε την Πρόταση Τομή Ευθείας –Κύκλου και άρα θα πρέπει να βρούμε ένα σημείο το οποίο να ανήκει στην ευθεία κ και να είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου Ζ, το οποίο προκύπτει από τα αξιώματα Διάταξης καθώς θα ισχύει $\Gamma * \mathrm{M} * \Delta$, $\Gamma\mathrm{M} < \Gamma\Delta$. Παρόλα αυτά δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση Τομή Ευθείας – Κύκλου διότι όπως θα δούμε και στο Κεφάλαιο 9 για την απόδειξη της χρειαζόμαστε την κατασκευή καθέτου από σημείο εκτός ευθείας πάνω στην ευθεία, δηλαδή την Πρόταση Ι.12 καθώς επίσης και την Πρόταση Ι.19. Διέξοδο από το πρόβλημα αυτό αποτελεί η απόδειξη της Ι.12 χωρίς την χρήση του δεύτερου αξιώματος της Πληρότητος.

Απόδειξη (χωρίς τη χρήση των αξιωμάτων πληρότητας)

Έστω η ευθεία κ και Α σημείο το οποίο δεν ανήκει στην κ. Από το αξίωμα (Ι.2) Hilbert υπάρχουν σημεία Β, Γ τα οποία ανήκουν στην ευθεία κ, αφού κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Επιπλέον από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Η τέτοιο ώστε $\Gamma * \mathrm{B} * \mathrm{H}$ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Αν ισχύει ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} \cong \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τότε κάθε μία από τις γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H}, \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι εφαρμόσιμη με μία ορθή και άρα προκύπτει το ζητούμενο. Έστω ότι δεν ισχύει $A\hat{B}H \cong A\hat{B}\Gamma$ τότε από το αξίωμα (C.4) υπάρχει ημιευθεία $\overrightarrow{BE}$ ώστε να ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong E\hat{B}\Gamma$, με Ε να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ σε σχέση με το Α. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Δ στην ημιευθεία $\overrightarrow{BE}$ με $AB \cong B\Delta$ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ. Όμως τα σημεία Α, Δ ανήκουν στα αντίθετα ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία κ και άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ τέμνει την ευθεία κ, έστω Ζ το σημείο τομής. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΒΖ έχουν $A\hat{B}Z \cong \Delta\hat{B}Z$ λόγω κατασκευής, $AB \cong B\Delta$ λόγω κατασκευής και $BZ \cong BZ$ από το αξίωμα (C.1). Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΒΖ θα ισχύει $A\hat{Z}B \cong \Delta\hat{B}Z$ και άρα κάθε μία από τις γωνίες $A\hat{Z}B, \Delta\hat{B}Z$ είναι εφαρμόσιμη με μία ορθή.



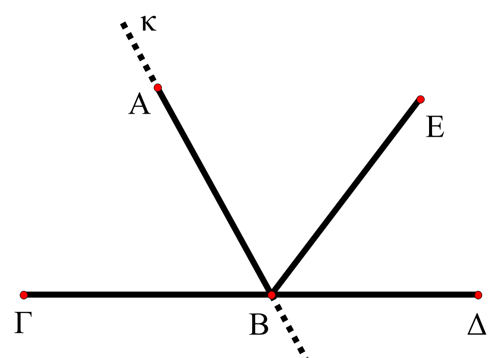
Πρόταση Ι.13. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Απόδειξη. Δεδομένου ότι στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert το άθροισμα γωνιών δεν είναι πάντοτε γωνία στις Προτάσεις στις οποίες χρησιμοποιείται η Ι.13 π.χ. στην Πρόταση Ι.15, θα αντικαθίσταται από την Πρόταση 7.2 της θεμελίωσης Hilbert, η οποία αναφέρει ότι αν δύο γωνίες είναι εφαρμόσιμες τότε οι παραπληρωματικές τους γωνίες θα είναι εφαρμόσιμες.

Πρόταση Ι.14. Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Απόδειξη. Όπως και στην Πρόταση Ι.13 των *Στοιχείων* επειδή στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert το άθροισμα γωνιών δεν έχει πάντοτε νόημα θα διατυπώσουμε ισοδύναμο ισχυρισμό και την απόδειξη του, ώστε η Πρόταση Ι.14 των *Στοιχείων* να αποκτήσει.

Αναδιατύπωση της Ι.14. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ ένα σημείο το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ = κ, τότε αν η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι παραπληρωματική της $A\hat{B}\Gamma$ θα δείξουμε ότι τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά, δηλαδή $\Gamma * B * \Delta$.



Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα σημεία Γ, Β, Δ δεν είναι συνευθειακά. Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Ε τέτοιο ώστε να ισχύει $\Gamma * B * E$. Δεδομένου ότι το σημείο Γ δεν ανήκει στην ΑΒ=κ έπεται από τον ορισμό των παραπληρωματικών γωνιών ότι οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{B}E$ είναι παραπληρωματικές. Επιπλέον τα σημεία Ε, Δ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ με Ε, Δ διαφορετικά μεταξύ τους. Καθώς έχουμε υποθέσει ότι τα σημεία Γ, Β, Δ δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία και ότι τα σημεία Γ, Β, Ε ανήκουν στην ίδια ευθεία και άρα θα ισχύει είτε ότι το σημείο Ε ανήκει στο εσωτερικό της $\Delta\hat{B}A$ είτε ότι το σημείο Δ θα ανήκει στο εσωτερικό της $E\hat{B}A$. Έστω ότι το σημείο Ε ανήκει στο εσωτερικό της $\Delta\hat{B}A$, όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση στην οποία το σημείο Δ ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{B}E$. Ακόμη γνωρίζουμε ότι η γωνία $\Delta\hat{B}A$ είναι παραπληρωματική της $A\hat{B}\Gamma$ καθώς επίσης και ότι η $E\hat{B}A$ είναι παραπληρωματική της $A\hat{B}\Gamma$ και άρα από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει ότι $\Delta\hat{B}A \cong E\hat{B}A$, άτοπο διότι το σημείο Ε ανήκει στο εσωτερικό της $\Delta\hat{B}A$, επομένως ισχύει $E\hat{B}A < \Delta\hat{B}A$. Συνεπώς για τα σημεία Γ, Β, Δ θα ισχύει $\Gamma * B * \Delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Προτάσεις Ι.15-Ι.26

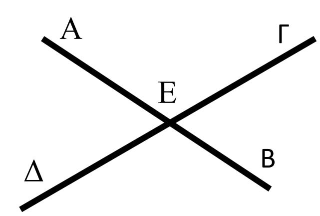
των *Στοιχείων*

Σύμφωνα με τη μέχρι τώρα παρουσίαση της αξιωματικής θεμελίωσης Hilbert μπορούμε να αποδείξουμε πλήρως τις Προτάσεις των *Στοιχείων* μέχρι και την Ι.26. Ο μοναδικός επιπρόσθετος ορισμός που θα παρατεθεί στο Κεφάλαιο 9 είναι ο ορισμός εσωτερικού σημείου ενό τριγώνου. Η ύπαρξη του οποίου θα ελεγχεί για την πλήρη αιτιολόγηση όλων των βημάτων της απόδειξης της Πρότασης Ι.21 των *Στοιχείων*. Επιπλέον αμέσως μετά την απόδειξη της Πρότασης Ι.19 των *Στοιχείων* θα δοθεί και η απόδειξη της Πρότασης τομή ευθείας-κύκλου (δεύτερου αξιώματος Πληρότητος).

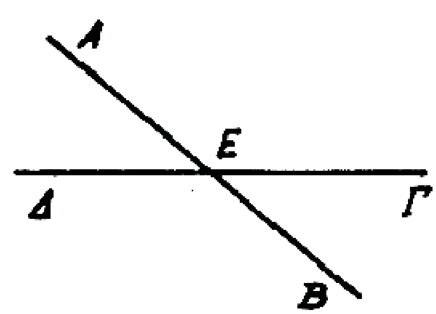
Προτάσεις Ι.15- Ι.26 των *Στοιχείων*

Πρόταση Ι.15. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴνγωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Απόδειξη. Κάθε μία από τις κατακορυφήν γωνίες $\Gamma\hat{E}A$ και $\Delta\hat{E}B$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $A\hat{E}\Delta$ και από το αξίωμα (C.5) ισχύει $A\hat{E}\Delta \cong A\hat{E}\Delta$ επομένως από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει ότι $\Gamma\hat{E}A \cong \Delta\hat{E}B$.

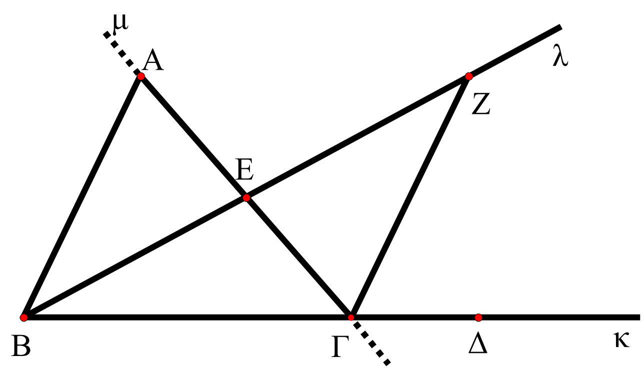


Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης εφαρμόζει διαδοχικά την Πρόταση Ι.13 και οδηγείται στο ότι το άθροισμα των γωνιών $\Gamma\hat{E}A$ και $A\hat{E}\Delta$ ισούται με δύο ορθές, όπως επίσης και στο ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{E}B$ ισούται με δύο ορθές. Εν συνεχεία καταλήγει στο



ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι εφαρμόσιμες χρησιμοποιώντας την κοινή έννοια γ΄ η οποία αναφέρει ότι αν από ίσα αφαιρέσουμε ίσα τότε τα καταλειπόμενα μέρη θα είναι ίσα. Ενώ εμείς οδηγούμαστε στο ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι εφαρμόσιμες βασιζόμενοι στο αξίωμα (C.5) και στην Πρόταση 7.2 η οποία αναφέρει ότι οι παραπληρωματικές γωνίες εφαρμόσιμων γωνιών είναι εφαρμόσιμες.

Πρόταση Ι.16. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσηςἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶνμείζων ἐστίν.

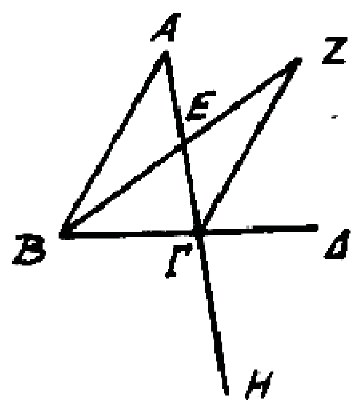


Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και $\vec{\kappa}$ η ημιευθεία με αρχή το Β και η οποία διέρχεται από το σημείο Γ. Από το αξίωμα (B.3) υπάρχει σημείο Δ, ώστε να ισχύει $B*\Gamma*\Delta$. Από την Πρόταση Ι.10 διχοτομούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, έστω Ε σημείο το οποίο ανήκει στο ΑΓ με ισχύει $AE \cong E\Gamma$. Εν συνεχεία θεωρούμε την ημιευθεία $\vec{\lambda}$ με αρχή το Β η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ζ τέτοιο ώστε $BE \cong EZ$. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.15 για τις γωνίες $A\hat{E}B$ και $Z\hat{E}\Gamma$ ισχύει ότι $A\hat{E}B \cong Z\hat{E}\Gamma$, ως κατακορυφήν. Από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΖΕΓ θα ισχύει $B\hat{A}E \cong E\hat{\Gamma}Z$.

Από το αξίωμα (I.1) υπάρχει μοναδική ευθεία μ στην οποία ανήκουν τα σημεία Α, Γ και αφού το σημείο Δ ανήκει στην $\vec{\kappa}$ με $B*\Gamma*\Delta$ και ΑΒΓ τρίγωνο τότε τα σημεία Β, Δ ανήκουν στα αντίθετα ημιεπίπεδα που ορίζει η μ. Επίσης από την κατασκευή του Ζ έχουμε ότι τα Β, Ζ ανήκουν στα αντίθετα ημιεπίπεδα που ορίζει η μ, αφού το σημείο Ε ανήκει στην μ και ισχύει $B*E*Z$. Επομένως από την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) έπεται ότι τα Δ, Ζ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο της μ.

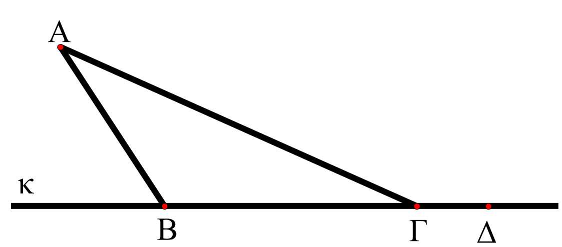
Θεωρούμε τα ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει το ΒΓ. Δεδομένου ότι ισχύει $B*E*Z$ τότε τα σημεία Ε, Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ.

Ακόμη ισχύει $A * E * \Gamma$ και άρα τα σημεία Α, Ε ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ, επομένως από την μεταβατικότητα της Πρότασης 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) έπεται ότι τα σημεία Α, Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η $B * \Gamma * \Delta$.
Συνολικά το σημείο Ζ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΓ όπως το Δ και το σημείο Ζ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεί η $B * \Gamma * \Delta$ όπως το Α. Επομένως το σημείο Ζ ανήκει στο εσωτερικό της $A\hat{\Gamma}\Delta$ και άρα όλα τα σημεία του ΓΖ, εκτός του Γ, ανήκουν στο εσωτερικό της $A\hat{\Gamma}\Delta$, επομένως από τον ορισμό θα ισχύει $E\hat{\Gamma}Z < E\hat{\Gamma}\Delta$. Επιπλέον $B\hat{A}E \cong E\hat{\Gamma}Z$ και από το αξίωμα (C.5) $E\hat{\Gamma}\Delta \cong E\hat{\Gamma}\Delta$ άρα από την Πρόταση 7.6 (β.i) έπεται ότι $B\hat{A}E < E\hat{\Gamma}\Delta$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $A\hat{B}\Gamma < A\hat{\Gamma}\Delta$.



Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης οδηγείται στο ζητούμενο καθώς θεωρεί ότι η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{\Gamma}Z$ μέσω της κοινής έννοιας ε΄ και άρα θα είναι μεγαλύτερη και από την $B\hat{A}\Gamma$, καθώς έχει δείξει ότι η $B\hat{A}\Gamma$ είναι εφαρμόσιμη με την $A\hat{\Gamma}Z$. Με βάση τη θεμελίωση Hilbert για να δείξουμε ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{\Gamma}Z$ χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) ώστε να δείξουμε ότι το ΓΖ ανήκει στο εσωτερικό της $A\hat{\Gamma}\Delta$. Συνεπώς από τον ορισμό θα ισχύει ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{\Gamma}Z$ και άρα από την Πρόταση 7.6 (β.i) θα είναι μεγαλύτερη και από την $B\hat{A}\Gamma$, δεδομένου ότι $B\hat{A}\Gamma \cong A\hat{\Gamma}Z$.

Πρόταση Ι.17. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῇ μεταλαμβανόμεναι.

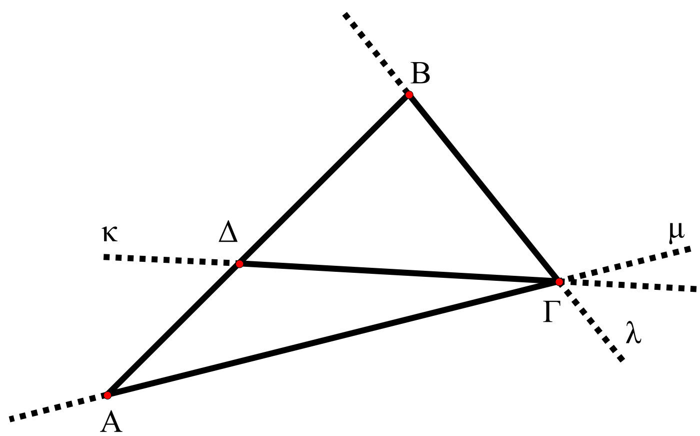


Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και κ η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία Β, Γ τότε από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Δ της κ τέτοιο ώστε $Β * Γ * Δ$. Από την Πρόταση Ι.16 η γωνία $Δ\hat{Γ}Α$ είναι μεγαλύτερη της $Α\hat{Β}Γ$ και άρα από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει $Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β < 2$ ορθές. Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης για να αποδείξει ότι $Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β < 2$ ορθές χρησιμοποιεί την Πρόταση Ι.13 καθώς $Α\hat{Γ}Δ + Α\hat{Γ}Β \cong 2$ ορθές ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 7.2 και τις συνέπειες της καθώς το άθροισμα γωνιών δεν είναι πάντοτε γωνία.

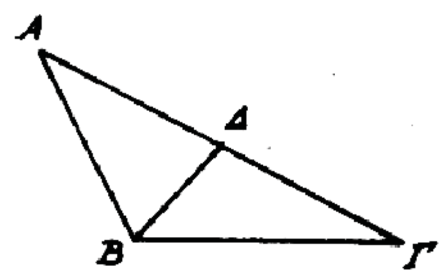
Πρόταση Ι.18. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ότι ΒΓ<ΑΒ, θα δείξουμε ότι $Γ\hat{Α}Β < Α\hat{Γ}Β$. Δεδομένου ότι ΑΒ > ΒΓ από το αξίωμα (C.2) υπάρχει μοναδικό σημείο Δ στην ημιευθεία $\overrightarrow{ΒΑ}$, με $Β * Δ * Α$ τέτοιο ώστε $ΒΔ \cong ΒΓ$. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία κ στην οποία ανήκουν τα σημεία Γ, Δ. Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με $ΒΔ \cong ΒΓ$ και άρα από την Πρόταση Ι.5 έπεται ότι $Β\hat{Δ}Γ \cong Β\hat{Γ}Δ$. Επιπλέον από την επιλογή του σημείου Δ ισχύει ότι $Β * Δ * Α$ και άρα η γωνία $Γ\hat{Δ}Β$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΓΔΑ, επομένως από την Πρόταση Ι.16 έπεται ότι $Γ\hat{Α}Β < Γ\hat{Δ}Β$.



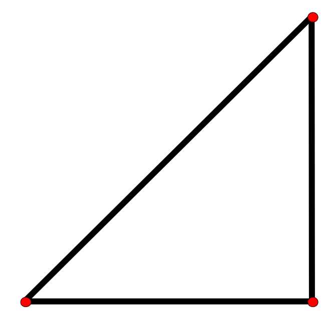
Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν οι ευθείες λ, μ στις οποίες ανήκουν τα σημεία Β, Γ και Α, Γ αντίστοιχα. Το σημείο Δ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ όπως το Β αφού ισχύει $Β * Δ * Α$ και Α σημείο της μ. Καθώς αν τα σημεία Δ, Β ανήκαν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η μ τότε η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία Β, Δ θα είχε και άλλο κοινό σημείο με την μ, εκτός του Α και άρα θα ήταν οι αυτές ευθείες, επομένως τα σημεία Α, Δ, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι ΑΒΓ τρίγωνο.

Επιπλέον το σημείο Δ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ όπως το Α αφού ισχύει $\mathrm{B} * \Delta * \mathrm{A}$ και Β σημείο της λ. Καθώς αν τα σημεία Δ, Α δεν ανήκαν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ τότε η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία Δ, Α θα είχε και άλλο κοινό σημείο με την λ και άρα θα ήταν οι αυτές ευθείες, επομένως τα σημεία Α, Δ, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι ΑΒΓ τρίγωνο. Επομένως το σημείο Δ θα ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ και άρα όλα τα σημεία του ΓΔ, εκτός του Γ, θα ανήκουν στο εσωτερικό της $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Διότι αν δεν ανήκαν θα υπήρχε και άλλο κοινό σημείο του ΓΔ, εκτός του Γ, με τη μ και άρα το ΓΔ και η μ θα είχαν δύο κοινά σημεία, επομένως όλα τα σημεία του ΓΔ θα ανήκαν στην μ. Άτοπο, διότι το σημείο Δ δεν ανήκει στην μ αφού δείξαμε ότι είναι εσωτερικό σημείο της $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι η ΓΔ δεν μπορεί να έχει άλλο κοινό σημείο με την λ. Επομένως από τον ορισμό έπεται ότι $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} < \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Συνολικά θα ισχύει $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} < \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{B}$, $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{B} \cong \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$, επομένως από την Πρόταση 7.6 (β.i) έπεται ότι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$.



Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} < \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{B}$ και ότι $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{B} \cong \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις Ι.16 και Ι.5 αντίστοιχα, ενώ αναφέρει ότι $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ καθώς από την κοινή έννοια ε΄ το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους. Σύμφωνα με τα παραπάνω οδηγείται στο ότι θα ισχύει $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ χωρίς όμως να το αιτιολογεί. Με βάση τη θεμελίωση Hilbert αποδείξαμε ότι η ΓΔ ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ στηριζόμενοι στην Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) και άρα θα ισχύει $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$. Επιπλέον για να οδηγηθούμε στο ότι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} < \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 7.6 (β.i) η οποία αναφέρει ότι αν για τις γωνίες α, β, γ, σχύει ότι α<β και β<γ τότε θα ισχύει α<γ.

Πρόταση Ι.19. Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο ισχύει $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma > \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$, θα δείξουμε ότι ΑΓ >ΑΒ. Διότι αν δεν ισχύει ότι ΑΓ >ΑΒ από την Πρόταση 3.5 (β.ii) θα ισχύει ή ότι $\mathrm{A}\Gamma \cong \mathrm{AB}$ ή ότι ΑΓ <ΑΒ.

Έστω ότι $\mathrm{A}\Gamma \cong \mathrm{AB}$ τότε από την Πρόταση Ι.5 έπεται ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma \cong \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$, άτοπο διότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma > \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$.

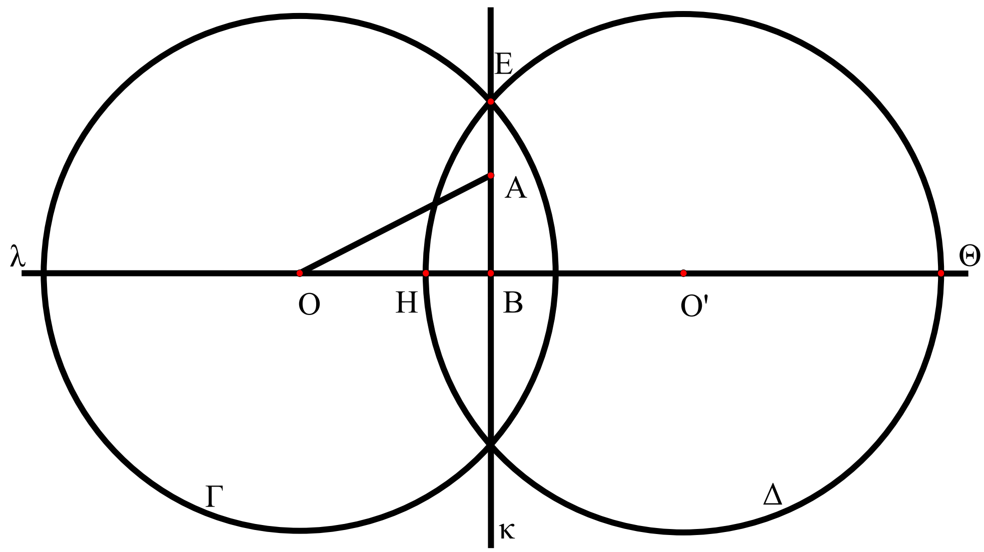
Έστω ότι ΑΓ < ΑΒ τότε από την Πρόταση Ι.18 έπεται ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma < \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$, άτοπο διότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma > \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$.

Επομένως αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma > \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ τότε θα ισχύει επιπλέον ότι ΑΓ > ΑΒ.

Σχόλια. Στη συγκεκριμένη Πρόταση το μοναδικό σημείο το οποίο δεν αιτιολογείται επαρκώς από τον Ευκλείδη στην απόδειξη των *Στοιχείων* είναι ότι αν δεν ισχύει ΑΓ > ΑΒ τότε θα ισχύει είτε $\mathrm{A}\Gamma \cong \mathrm{AB}$ είτε ΑΓ < ΑΒ, κάτι το οποίο στη θεμελίωση Hilbert αποδεικνύεται στην Πρόταση 3.5 (β.ii).

Πρόταση 9.1 (Τομή ευθείας-κύκλου). Αν ένα σημείο Α ανήκει σε μία ευθεία κ και είναι εσωτερικό σημείο ενός κύκλου Γ, τότε η κ θα τέμνει τον Γ (η ευθεία κ θα τέμνει τον κύκλο Γ σε ακριβώς δύο σημεία).

Απόδειξη. Έστω η ευθεία κ στην οποία ανήκει το σημείο Α και το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου Γ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ. Θα κατασκευάσουμε κύκλο Δ και θα δείξουμε ότι το σημείο τομής των κύκλων θα ανήκει στην κ. Έστω ότι το σημείο Ο ανήκει στην ευθεία κ τότε από τον ορισμό του κύκλου και το αξίωμα (C.2) η ευθεία κ τέμνει τον κύκλο Γ. Υποθέτουμε τώρα ότι το σημείο Ο δεν ανήκει στην ευθεία κ τότε από την Πρόταση Ι.12 φέρνουμε από το σημείο Ο την κάθετο ΟΒ=λ στην ευθεία κ. Αφού το σημείο Ο δεν ανήκει στην κ, τότε θεωρούμε σημείο Ο΄ το οποίο ανήκει στην λ ώστε $\mathrm{O'B} \cong \mathrm{OB}$ και Ο΄ να ανήκει στο άλλο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ σε σχέση με το Ο και θεωρούμε Δ τον κύκλο με κέντρο το σημείο Ο΄ και ακτίνα ρ, ίση με την ακτίνα του κύκλου Γ. Από τον ορισμό του κύκλου και το αξίωμα (C.2) η ευθεία λ τέμνει τον κύκλο σε δύο ακριβώς σημεία Η, Θ, με τα σημεία Η, Ο να βρίσκονται στην ίδια μεριά της ημιευθείας που ορίζει το σημείο Ο΄ και το σημείο Θ από την άλλη.



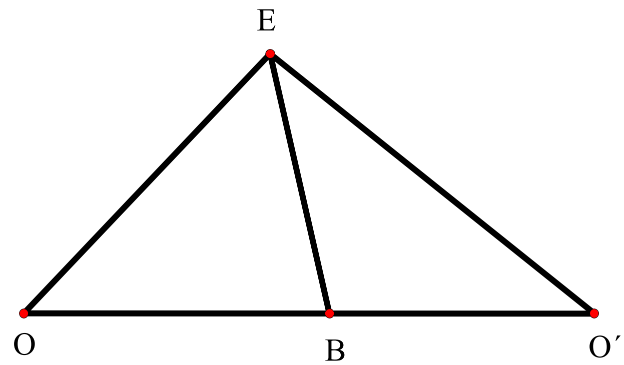
Από την υπόθεση το σημείο Α ανήκει στην κ και είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου Γ και άρα θα ισχύει ΟΑ<ρ. Επιπλέον ισχύει ότι $O\hat{B}A \cong 1$ ορθή και άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ θα ισχύει ΟΒ<ΟΑ, διότι από την Πρόταση Ι.19 σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία. Αφού ΟΑ<ρ και $OB < OA$ τότε από την Πρόταση 3.5 (α) θα ισχύει ΟΒ<ρ. Ακόμη $OB \cong O΄B$, Ο΄Β<ρ και $O΄H \cong \rho$ επομένως Ο΄Β<Ο΄Η και άρα τα σημεία Ο΄ και Η ανήκουν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η κ και τα σημεία Ο, Η ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σημείο Η ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου Γ.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Αν $O * H * B$, τότε ΟΗ<ΟΒ<ρ και άρα το σημείο Η είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου Γ.

Περίπτωση 2. Αν $H * O * B$, τότε θα ισχύει $H * O * O΄$ και άρα ΟΗ<Ο΄Η=ρ και άρα το σημείο Η ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου Γ.

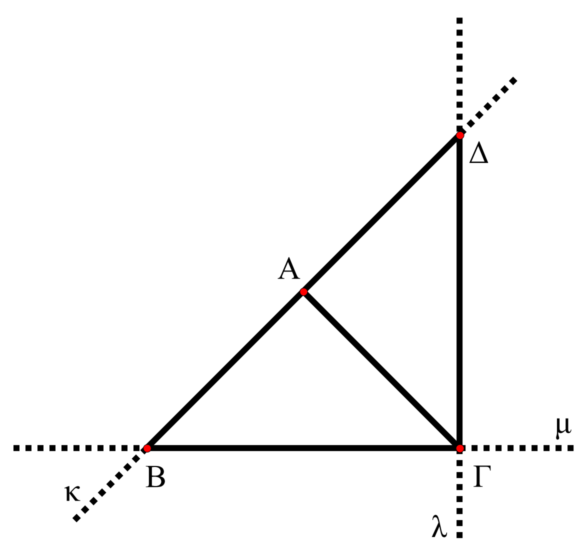
Για το σημείο Θ, ισχύει ότι $Ο*Ο΄*Θ$ και άρα ΟΘ > Ο΄Θ=ρ. Επομένως το σημείο Θ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου Γ. Επομένως πληρούνται οι προϋποθέσεις του αξιώματος (Ε) και άρα οι κύκλοι Γ, Δ τέμνονται, έστω Ε το σημείο τομής τους. Θα δείξουμε ότι σημείο



Ε ανήκει στην ευθεία κ. Για τα τρίγωνα ΟΒΕ και Ο΄ΒΕ ισχύει ότι $ΟΕ \cong ρ \cong Ο΄Ε$, $ΟΒ \cong Ο΄Β$ από την κατασκευή του Ο΄Β και $ΒΕ \cong ΒΕ$ από το αξίωμα (C.1), επομένως από την Πρόταση Ι.8 θα ισχύει $Ο\hat{Β}Ε \cong Ο΄\hat{Β}Ε$, όμως για τα σημεία Ο, Β, Ο΄ ισχύει $Ο*Β*Ο΄$ και άρα κάθε μία από τις γωνίες $Ο\hat{Β}Ε, Ο΄\hat{Β}Ε$ είναι εφαρμόσιμη με 1 ορθή. Επιπλέον από την κατασκευή του ΟΒ είναι κάθετο στην κ και άρα το σημείο Ε ανήκει στην κ. Ακόμη γνωρίζουμε ότι το σημείο Ε είναι σημείο του κύκλου Γ και άρα το σημείο Ε ανήκει ταυτόχρονα στην ευθεία κ και στον κύκλο Γ.

Πρόταση Ι.20. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και κ η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία Β, Α. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Δ με $Β*Α*Δ$. και $ΑΔ \cong ΑΓ$. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν ευθείες λ, μ στις οποίες ανήκουν τα σημεία Δ, Γ και Β, Γ αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με $ΑΓ \cong ΑΔ$ και άρα από την Πρόταση Ι.5 θα ισχύει ότι $Α\hat{Γ}Δ \cong Γ\hat{Δ}Α$.



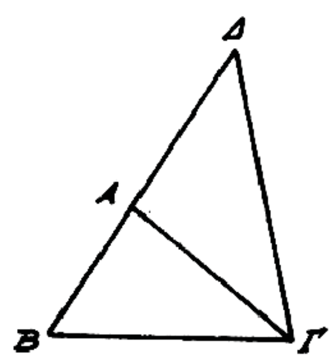
Όλα τα σημεία του ΓΑ, εκτός του Γ, ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ όπως το Δ, αφού το σημείο Γ είναι σημείο της μ και ισχύει $B * A * \Delta$ με Β σημείο της μ. Επομένως τα σημεία Α, Δ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ. Διότι αν δεν ανήκαν θα υπήρχε και άλλο κοινό σημείο της του ΓΑ με την μ και άρα το ΓΑ και η μ θα είχαν δύο κοινά σημεία και άρα όλα τα σημεία του ΓΑ θα ανήκαν στην μ, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά. Άτοπο, αφού ΑΒΓ τρίγωνο.

Όμοια όλα τα σημεία του ΓΑ, εκτός του Γ, ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ όπως το Β, διότι το σημείο Γ ανήκει στην λ και επιπλέον ισχύει $B * A * \Delta$, με Δ να ανήκει στην λ. Επομένως το ΓΑ ανήκει στο εσωτερικό της $B\hat{\Gamma}\Delta$ και άρα από τον Ορισμό της διάταξης των γωνιών έπεται ότι $B\hat{\Gamma}\Delta > A\hat{\Gamma}\Delta$, όμως ισχύει επιπλέον ότι $A\hat{\Gamma}\Delta \cong \Gamma\hat{\Delta}A$ και από το αξίωμα (C.5) $B\hat{\Gamma}\Delta \cong B\hat{\Gamma}\Delta$, συνεπώς από την Πρόταση 7.6 (α) έπεται ότι $B\hat{\Gamma}\Delta > \Gamma\hat{\Delta}A$.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει ότι $B\hat{\Gamma}\Delta > \Gamma\hat{\Delta}A$, άρα από την πρόταση Ι.19 έπεται ότι ΔΒ > ΒΓ. Ακόμη ισχύει ότι $\Delta A \cong A\Gamma$ και άρα από την Πρόταση 2.2 (άθροισμα ευθύγραμμων τμημάτων) θα ισχύει $\Delta A + AB \cong A\Gamma + AB$, όμως $\Delta B \cong \Delta A + AB$ και ΔΒ > ΒΓ, επομένως από την Πρόταση 3.5 (α) θα ισχύει ΑΓ + ΑΒ > ΒΓ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

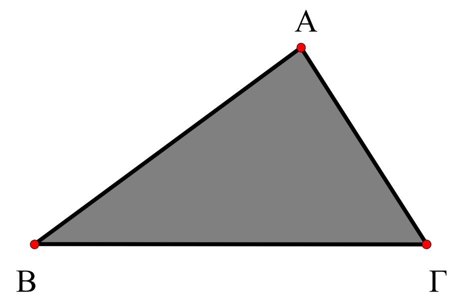
Σχόλια. Στην Πρόταση Ι.20 όπως και στην Πρόταση Ι.18 ο Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* χρησιμοποεί την κοινή έννοια ε΄ για να οδηγηθεί στο ότι $B\hat{\Gamma}\Delta > A\hat{\Gamma}\Delta$, ενώ βάσει της θεμελίωσης Hilbert χρησιμοπιήσαμε την Πρόταση 3.2 (Διαχωρισμός Επιπέδου) και τα αξιώματα διάταξης για να δείξουμε ότι το ΓΑ ανήκει στο εσωτερικό της $B\hat{\Gamma}\Delta$ και άρα από τον ορισμό θα ισχύει $B\hat{\Gamma}\Delta > A\hat{\Gamma}\Delta$. Επιπλέον ο Ευκλείδης οδηγείται στο ότι $B\hat{\Gamma}\Delta > \Gamma\hat{\Delta}A$ δεδομένου ότι $A\hat{\Gamma}\Delta \cong \Gamma\hat{\Delta}A$ χωρίς όμως να το αιτιολογεί με κάποιο τρόπο, ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 7.6 (α). Τέλος καταλήγει στο ότι



ΑΒ + ΑΓ >ΒΓ αφού ΔΒ>ΒΓ και ΔΒ ≅ ΔΑ+ΑΒ ≅ ΑΓ+ΑΒ, επίσης χωρίς να το αιτιολογεί ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 3.5 (α).

Ορισμός του εσωτερικού ενός τριγώνου

Ορίζουμε ως **εσωτερικό** ενός τριγώνου ΑΒΓ το σύνολο των σημείων που βρίσκονται ταυτόχρονα στα εσωτερικά των τριών γωνιών $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$, $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$, $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$.



Ορισμός του εξωτερικού ενός τριγώνου

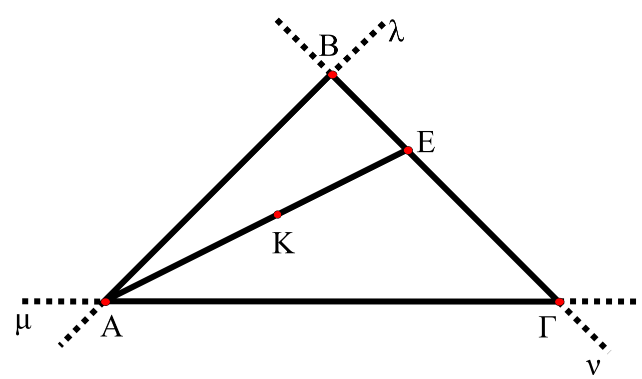
Ορίζουμε ως **εξωτερικό** ενός τριγώνου ΑΒΓ το σύνολο των σημείων που δεν ανήκουν στο εσωτερικό του τριγώνου και δεν είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Σημείωση. Ο Ευκλείδης δεν ορίζει το εσωτερικό και το εξωτερικό ενός τριγώνου. Ενώ στην Πρόταση Ι.21 δέχεται ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου χωρίς όμως να ελέγχει την ύπαρξη του.

Πρόταση 9.2. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχει εσωτερικό σημείο.

Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε από την Πρόταση 3.1 θα υπάρχει σημείο Ε ανάμεσα στα Β, Γ έτσι ώστε να ισχύει Β∗Ε∗Γ. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ και από την Πρόταση 3.1 υπάρχει σημείο Κ ώστε να ισχύει Α∗Κ∗Ε.

Δεδομένου ότι ισχύει Α∗Κ∗Ε, έπεται ότι όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ, εκτός του Α, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, διότι Α σημείο της λ, επομένως το Κ



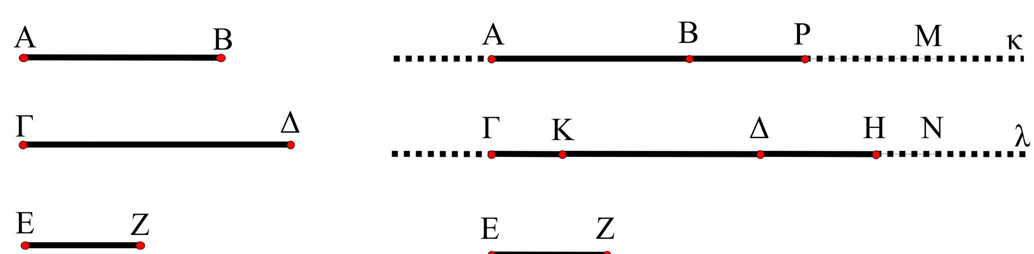
ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, όπως το Ε. Επιπλέον όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, εκτός του Β, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, διότι Β σημείο της λ και άρα το Ε ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, όπως το Γ και αφού το Κ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, όπως το Ε, τότε το Κ θα ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ, όπως το Γ.

Επιπλέον, δεδομένου ότι ισχύει $Α*Κ*Ε$ όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ, εκτός του Α θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, διότι Α σημείο της μ. Επομένως το Κ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Ε. Ακόμη, όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, εκτός του Γ, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, διότι Γ σημείο της μ. Άρα το σημείο Ε ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Β. Έτσι αφού το Κ ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Ε και το Ε ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Β, τότε το Κ θα ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, όπως το Β.

Τέλος, αφού ισχύει $Α*Κ*Ε$ και το Ε σημείο του ΒΓ, τότε όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ, εκτός του Ε, θα ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ν και άρα τα σημεία Κ, Α ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ν. Επομένως, από τα παραπάνω έπεται ότι το σημείο Κ ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν ταυτόχρονα οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και άρα το σημείο Κ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόταση 9.3. Αν σε μη εφαρμόσιμα ευθύγραμμα τμήματα προσθέσουμε εφαρμόσιμα ευθύγραμμα τμήματα τότε τα προκύπτοντα είναι με όμοιο τρόπο μη εφαρμόσιμα.

Απόδειξη. Έστω τα δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ με $ΑΒ < ΓΔ$ και ΕΖ το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θα προσθέσουμε στα ΑΒ και ΓΔ. Από την Πρόταση 3.5 (α) θα ισχύει $ΑΒ < ΔΓ$ και από τον ορισμό υπάρχει μοναδικό σημείο Κ με $Δ*Κ*Γ$ τέτοιο ώστε $ΔΚ \cong ΑΒ$. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν μοναδικές ευθείες κ, λ στις οποίες

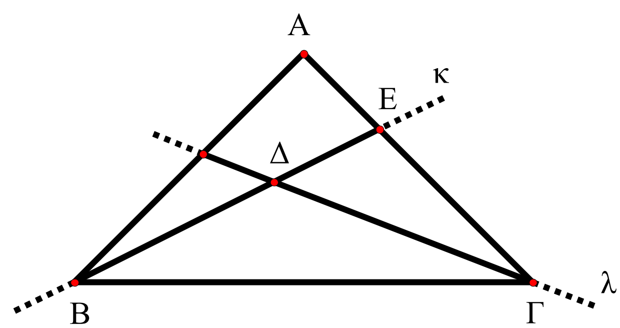


ανήκουν τα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Επιπλέον θεωρούμε την ημιευθεία $\overrightarrow{BM}$ η οποία ανήκει στην κ και το σημείο Μ να ανήκει στην άλλη μεριά της ευθείας που ορίζει το Β σε σχέση με το σημείο Α (Πρόταση 3.3). Ακόμη θεωρούμε την ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta N}$ η οποία ανήκει στην λ και το σημείο Ν να ανήκει στην άλλη μεριά της ευθείας που ορίζει το Δ σε σχέση με το σημείο Γ (Πρόταση 3.3). Εξ Ορισμού υπάρχουν μοναδικά σημεία Ρ, Η τα αποία ανήκουν αντίστοιχα στις ημιευθείες $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{\Delta N}$ και για τα οποία ισχύει $B P \cong E Z$ και $\Delta H \cong E Z$, τότε από την Πρόταση 2.2 θα ισχύει ότι $AB+EZ \cong AP$ και $\Gamma\Delta+EZ \cong \Gamma H$. Ακόμη έχουμε ότι $AB \cong K\Delta$, $BP \cong \Delta H$ και $A * B * P$, επομένως $K * \Delta * H$ και άρα από το αξίωμα (C.3) θα ισχύει

$$AB + EZ \cong AP < H\Gamma \cong \Gamma H \cong \Gamma\Delta + EZ.$$

Πρόταση Ι.21. Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

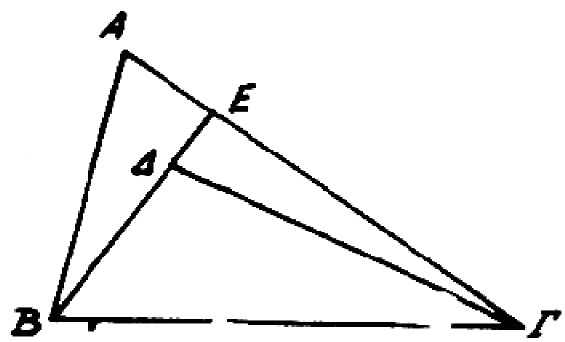
Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε από την Πρόταση 9.1 υπάρχει σημείο Δ στο εσωτερικό του τριγώνου και από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν μοναδικές ευθείες κ, λ στις οποίες ανήκουν τα σημεία Β, Δ και Δ, Γ αντίστοιχα, επομένως οι ευθείες κ, λ τέμνονται στο Δ. Θα δείξουμε ότι το άθροισμα των πλευρών ΒΔ, ΔΓ είναι μικρότερο από το άθροισμα των πλευρών



ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ περιέχουν όμως τη γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ η οποία είναι μεγαλύτερη της $B\hat{A}\Gamma$. Το σημείο Δ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ και άρα ανήκει στο εσωτερικό της $A\hat{B}\Gamma$, επομένως από την Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem) η ΒΔ τέμνει την ΑΓ, έστω Ε το σημείο τομής. Από την Πρόταση Ι.20 το άθροισμα των πλευρών ΑΒ, ΑΕ του τριγώνου ΑΒΕ είναι μεγαλύτερο από την πλευρά ΒΕ. Προσθέτουμε σε αυτές την ΕΓ και άρα από την Πρόταση 9.3 προκύπτει ότι οι $BA + A\Gamma > BE + E\Gamma$.

Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση Ι.20 στο τρίγωνο ΓΕΔ το άθροισμα των πλευρών ΓΕ, ΕΔ είναι μεγαλύτερο από την πλευρά ΓΔ. Προσθέτουμε σε αυτές την ΔΒ και άρα από την Πρόταση 9.3 προκύπτει ότι οι ΒΕ+ΕΓ > ΓΔ +ΔΒ. Όμως έχουμε δείξει προηγουμένως ότι ΒΑ+ΑΓ > ΒΕ+ΕΓ και ότι οι ΒΕ+ΕΓ > ΓΔ+ΔΒ. Επομένως από την Πρόταση 3.5 (β.i) θα ισχύει ότι ΒΑ+ΑΓ > ΒΔ+ΔΓ.

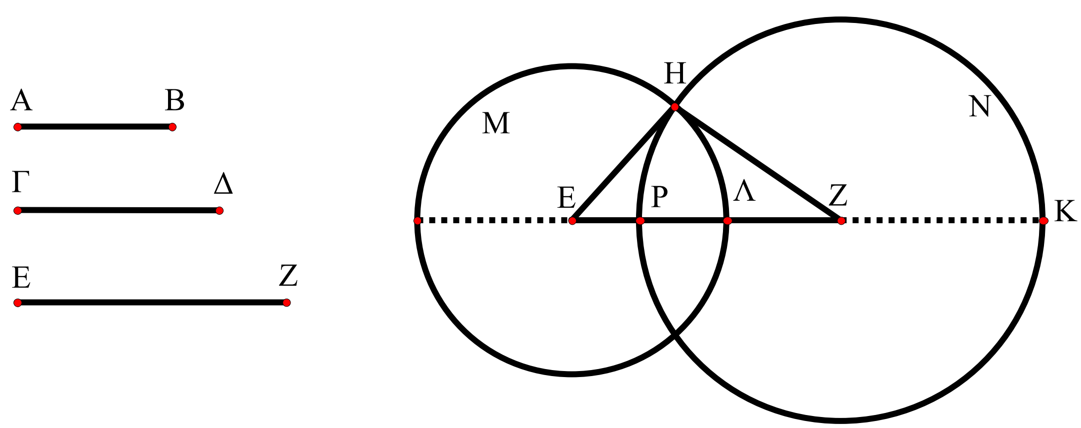
Από την Πρόταση Ι.16 γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές, επομένως η εξωτερική γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι μεγαλύτερη της $\Gamma\hat{E}\Delta$. Για τον ίδιο λόγο, η εξωτερική γωνία $\Gamma\hat{E}B$ του τριγώνου ΑΒΕ είναι μεγαλύτερη της $B\hat{A}\Gamma$, όμως δείξαμε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη της $\Gamma\hat{E}B$ και άρα από την Πρόταση 7.6 (β.i) θα ισχύει $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Gamma$.



Σχόλια. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.21 των Στοιχείων ο Ευκλείδης δεν ελέγχει την ύπαρξη του εσωτερικού σημείου του τριγώνου ΑΒΓ (Πρόταση 9.2). Επιπλέον αναφέρει ότι η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε χωρίς όμως να το αιτιολογεί, ενώ με βάση τη θεμελίωση Hilbert χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 6.2 (Crossbar Theorem) δεδομένου ότι το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$, αφού εξ υποθέσεως το σημείο Δ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Ακόμη ο Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* μέσω της Πρότασης Ι.20 συμπεραίνει ότι ΑΒ+ΑΕ >ΒΕ και καταλήγει στο ότι ΑΒ+ΑΕ+ΕΓ > ΒΕ+ΕΓ $\Rightarrow$ ΒΑ+ΑΓ > ΒΕ+ΕΓ χωρίς όμως να το αιτιολογεί, ενώ εμείς για την απόδειξη αυτού χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 9.3. Με όμοιο τρόπο ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι ΒΕ+ΕΓ > ΓΔ+ΔΒ και αφού επιπλέον έχει δείξει ότι ΒΑ+ΑΓ > ΒΕ+ΕΓ συμπεραίνει ότι θα ισχύει ΒΑ+ΑΓ > ΓΔ+ΔΒ, ενώ εμείς για να οδηγηθούμε στο συγκεκριμένο συμπέρασμα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 3.5 (β.i). Εν συνεχεία ο Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* χρησιμοποιεί διαδοχικές φορές την Πρόταση Ι.16 και άρα θα ισχύει ότι $B\hat{\Delta}\Gamma > \Gamma\hat{E}\Delta$ και $\Gamma\hat{E}\Delta > B\hat{A}\Gamma$ επομένως $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Gamma$ χωρίς όμως να το αιτιολογεί με κάποιο τρόπο, ενώ εμείς οδηγηθήκαμε στο ότι $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Gamma$ μέσω της Πρότασης 7.6 (β.i).

Πρόταση Ι.22. Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

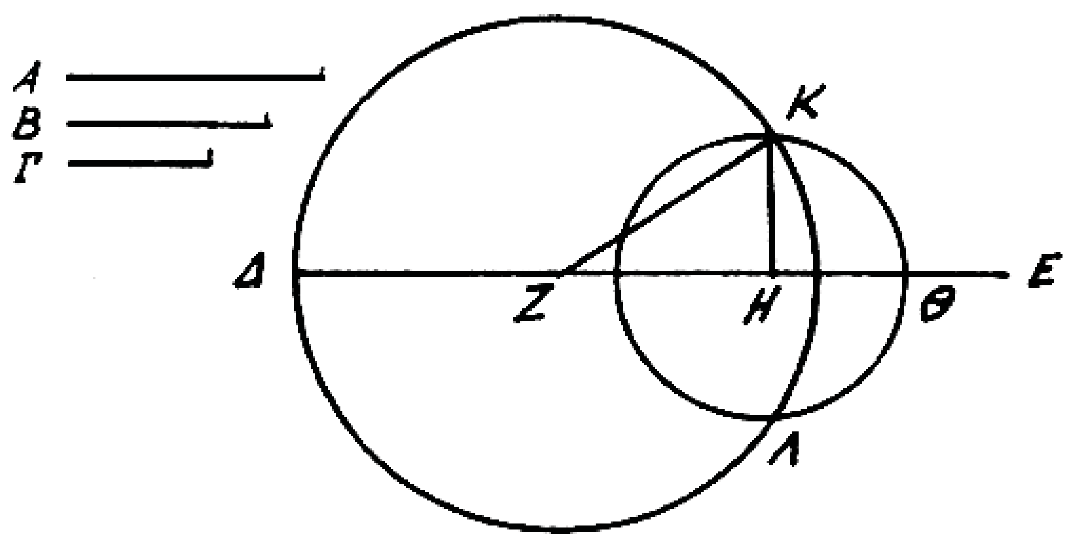
Απόδειξη. Έστω τρία ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ για τα οποία ισχύει ΑΒ < ΓΔ+ΕΖ, ΓΔ < ΕΖ+ΑΒ και ΕΖ < ΑΒ+ΓΔ. Επιπλέον θεωρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο ή εφαρμόσιμο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ και ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι μικρότερο ή εφαρμόσιμο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ.



Θεωρούμε τον κύκλο Μ = {Λ : ΕΛ $\cong$ ΑΒ}, με κέντρο το σημείο Ε και ακτίνα το ΑΒ και τον κύκλο Ν = {Κ : ΖΚ $\cong$ ΓΔ}, με κέντρο το σημείο Ζ και ακτίνα το ΓΔ. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ρ το οποίο ανήκει στην $\overrightarrow{ZE}$ και για το οποίο ισχύει $PZ \cong \Gamma\Delta$, επομένως από τον ορισμό του κύκλου το σημείο Ρ ανήκει στον κύκλο Ν και αφού ισχύει ΓΔ < ΕΖ τότε θα ισχύει $E * P * Z$.

Ακόμη ισχύει ότι ΕΖ < ΑΒ+ΓΔ και άρα ΕΡ+ΡΖ$\cong$ΕΖ < ΑΒ+ΓΔ$\cong$ΑΒ+ΡΖ, επομένως θα ισχύει ότι ΕΡ < ΑΒ και άρα το σημείο Ρ ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου Μ. Από την Πρόταση 3.3 (Διαχωρισμός Ευθείας) και το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Κ το οποίο ανήκει στην αντίθετη μεριά της $\overrightarrow{ZE}$ σε σχέση με το Ε ώστε να ισχύει ΖΚ$\cong$ ΓΔ. Από τον Ορισμό του κύκλου το σημείο Κ ανήκει στον κύκλο Ν και ισχύει Ε$*$Ζ$*$Κ, επομένως θα ισχύει ΕΚ$\cong$ΕΖ+ΓΔ>ΑΒ και άρα το σημείο Κ θα ανήκει στο εξωτερικό του κύκλου Μ. Επομένως πληρούνται οι προυποθέσεις του αξιώματος (Ε) και άρα οι κύκλοι Μ, Ν θα τέμνονται. Έστω Η το σημείο τομής των κύκλων και από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΗ και ΗΖ. Για το τρίγωνο ΕΖΗ θα ισχύει ΕΗ$\cong$ΑΒ διότι το σημείο Η ανήκει στον κύκλο Μ, ΖΗ$\cong$ΓΔ διότι το σημείο Η ανήκει στον κύκλο Ν και ΕΖ$\cong$ΕΖ από το αξίωμα (C.1). Επομένως οι τρεις πλευρές του τριγώνου ΕΖΗ είναι 1-1 αντίστοιχα εφαρμόσιμες με τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ.

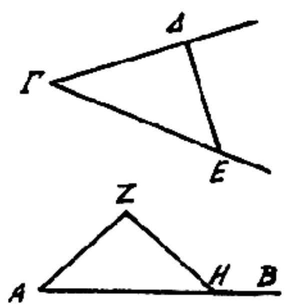
Σχόλια. Στην απόδειξη των Στοιχείων ο Ευκλείδης τοποθετεί διαδοχικά τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ έτσι ώστε με Α$\cong$ΔΖ, Β$\cong$ΖΗ και Γ$\cong$ΗΘ και γράφει τον κύκλο με κέντρο το σημείο Ζ και ακτίνα ΔΖ όπως επίσης και τον κύκλο με κέντρο το σημείο Η και ακτίνα ΖΗ. Εν συνεχεία δέχεται ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται χωρίς όμως να το ελέγχει.



Ενώ εμείς τοποθετήσαμε τα δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα με τρόπο ώστε όταν κατασκευάσουμε τους αντίστοιχους κύκλους να υπάρχουν δύο σημεία του ενός, ώστε το ένα να ανήκει στο εσωτερικό του άλλου και το άλλο σημείο να ανήκει στο εξωτερικό του άλλου κύκλου. Επομένως να πληρούνται οι προυποθέσεις του αξιώματος (Ε) και άρα οι κύκλοι να τέμνονται και να δημιουργείται το ζητούμενο τρίγωνο με πλευρές εφαρμόσιμες προς τις δοθείσης.

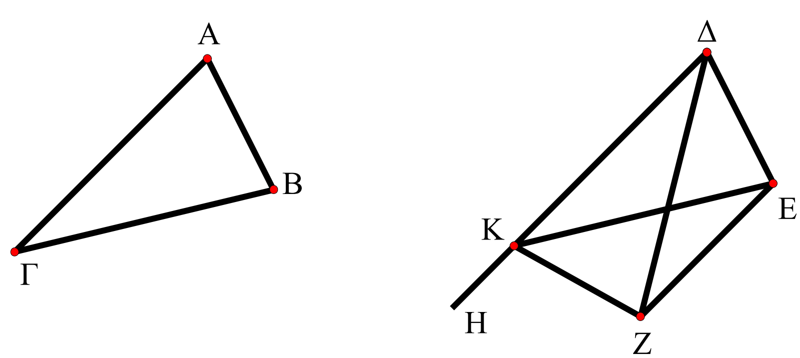
Πρόταση Ι.23. Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Απόδειξη. Αξίωμα (C.4)



Πρόταση Ι.24. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία ισχύει ότι $AB \cong \Delta E$, $A\Gamma \cong \Delta Z$ και $B\hat{A}\Gamma > E\hat{\Delta}Z$, τότε θα δείξουμε ότι ΒΓ > ΕΖ. Από το αξίωμα (C.4) κατασκευάζουμε



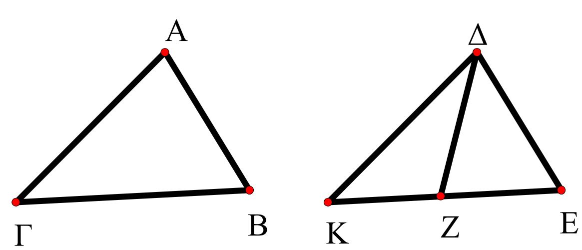
γωνία $E\hat{\Delta}H$ με $E\hat{\Delta}H \cong B\hat{A}\Gamma$ και η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta H}$ να ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ όπως το Ζ. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει μοναδικό σημείο Κ το οποίο ανήκει στην ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta H}$ ώστε να ισχύει $\Delta K \cong \Delta Z$, όμως $A\Gamma \cong \Delta Z$ και άρα από το αξίωμα (C.1) θα ισχύει ότι $A\Gamma \cong \Delta K$. Από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΚ, ΕΖ και ΖΚ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΚ έχουν $AB \cong \Delta E$ από την υπόθεση, $A\Gamma \cong \Delta K$ λόγω κατασκευής και $E\hat{\Delta}K \cong B\hat{A}\Gamma$ λόγω κατασκευής, επομένως από το αξίωμα (C.6) έπεται ότι $KE \cong \Gamma B$. Επιπλέον επειδή $\Delta K \cong \Delta Z$ από την Πρόταση Ι.5 έπεται ότι $\Delta\hat{K}Z \cong \Delta\hat{Z}K$.

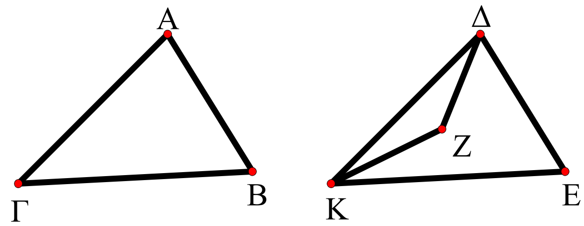
Ακόμη όλα τα σημεία του ΚΕ, εκτός του Κ, ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει η $\overrightarrow{\Delta H}$ όπως το Ζ και όλα τα σημεία του ΚΕ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία στην οποία ανήκει το ΚΖ, όπως το Δ. Επομένως το ΚΕ ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν ταυτόχρονα οι $\overrightarrow{\Delta H}$ και ΚΖ και άρα το ΚΕ ανήκει στο εσωτερικό της $\Delta\hat{K}Z$. Συνεπώς από τον Ορισμό της διάταξης για γωνίες θα ισχύει ότι $E\hat{K}Z < \Delta\hat{K}Z$, όμως $\Delta\hat{K}Z \cong \Delta\hat{Z}K$ και άρα από την Πρόταση 7.6 (β.i) έπεται ότι $E\hat{K}Z < E\hat{Z}K$. Από την Πρόταση Ι.19 στο τρίγωνο ΕΚΖ έπεται ότι ΕΚ >ΕΖ, δεδομένου ότι $E\hat{K}Z < E\hat{Z}K$, όμως έχουμε δείξει ότι $EK \cong \Gamma B$, επομένως από την Πρόταση 3.5 (β.i) προκύπτει ότι ΓΒ > ΕΖ.

Σημείωση. Στην Πρόταση Ι.24, όπως και στην Πρόταση Ι.7, ο Ευκλείδης μελετά μονάχα μία από τις περιπτώσεις που ισχύουν για το σημείο Ζ. Έτσι στην απόδειξη των Στοιχείων το σημείο Ζ ανήκει το αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΚΕ σε σχέση με το σημείο Δ. Οι άλλες περιπτώσεις είναι:

i) Το σημείο Ζ να ανήκει στο ΚΕ και άρα να ισχύει $K * Z * E$, περίπτωση όμως κατά την οποία η απόδειξη της Ι.24 ολοκληρώνεται χωρίς πρόβλημα χρησιμοποιώντας την διάταξη των σημείων και τον ορισμό του μικρότερου-μεγαλύτερου ευθύγραμμου τμήματος.

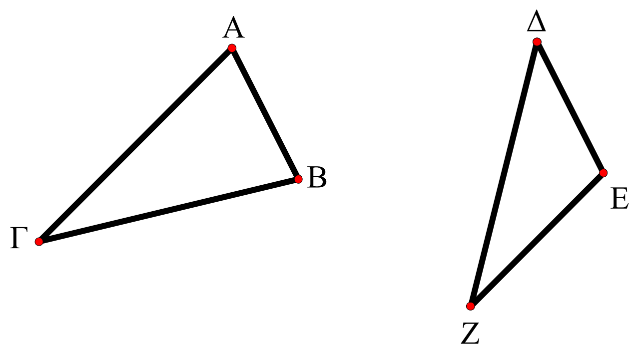


ii) Το σημείο Ζ να ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου ΔΚΕ. Περίπτωση στην οποία αποδεικνύεται άμεσα ότι ΚΖ<ΚΕ χρησιμοποιώντας την Πρόταση Ι.21 των *Στοιχείων*.



Πρόταση Ι.25. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ με ΑΒ$\cong$ΔΕ, ΑΓ$\cong$ΔΖ και ΒΓ > ΕΖ θα δείξουμε ότι $B\hat{A}\Gamma > E\hat{\Delta}Z$. Έστω ότι δεν ισχύει $B\hat{A}\Gamma > E\hat{\Delta}Z$ τότε από την Πρόταση 7.6 (β.ii) θα ισχύει ή ότι $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ ή ότι $B\hat{A}\Gamma < E\hat{\Delta}Z$.



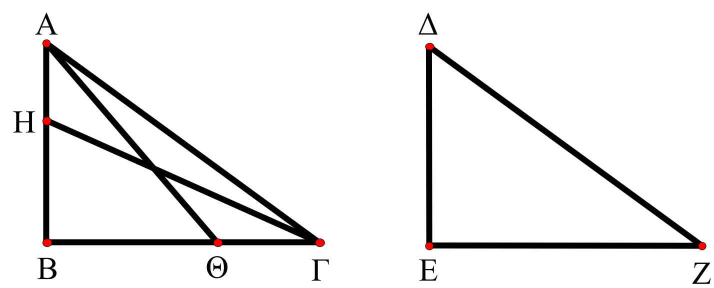
Υποθέτουμε ότι $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$, αφού επιπλέον ισχύει ΑΒ$\cong$ΔΕ και ΑΓ$\cong$ΔΖ τότε από το αξίωμα (C.6) έπεται ότι ΒΓ $\cong$ΕΖ, άτοπο.

Έστω ότι $B\hat{A}\Gamma < E\hat{\Delta}Z$, αφού επιπλέον ισχύει ΑΒ$\cong$ΔΕ και ΑΓ$\cong$ΔΖ τότε από την Πρόταση Ι.24 προκύπτει ότι ΒΓ < ΕΖ, άτοπο.
Επομένως αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ισχύει ΑΒ$\cong$ΔΕ, ΑΓ$\cong$ΔΖ και ΒΓ > ΕΖ τότε θα ισχύει επιπλέον ότι $B\hat{A}\Gamma > E\hat{\Delta}Z$.

Σχόλια. Στη Πρόταση Ι.25 το μοναδικό σημείο το οποίο δεν αιτιολογείται επαρκώς από τον Ευκλείδη στην απόδειξη των *Στοιχείων* είναι ότι αν η $B\hat{A}\Gamma$ δεν είναι μεγαλύτερη από την $E\hat{\Delta}Z$ τότε θα είναι είτε μικρότερη είτε εφαρμόσιμη της, το οποίο με βάση τη θεμελίωση Hilbert έχουμε αποδείξει στην Πρόταση 7.6 (β.ii).

Πρόταση Ι.26. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ για τα οποία ισχύει $Α\hat{Β}Γ \cong Δ\hat{Ε}Ζ$, $Α\hat{Γ}Β \cong Δ\hat{Ζ}Ε$ και ΒΓ$\cong$ΕΖ, θα δείξουμε ότι και οι άλλες πλευρές των τριγώνων είναι αντίστοιχα εφαρμόσιμες καθώς επίσης και $Β\hat{Α}Γ \cong Ε\hat{Δ}Ζ$. Διότι αν δεν ισχύει ΑΒ$\cong$ΔΕ τότε από την Πρόταση 3.5 (β.ii) θα ισχύει ή ότι ΑΒ > ΔΕ ή ΑΒ < ΔΕ.



Έστω ότι ΑΒ > ΔΕ τότε από το αξίωμα (C.2) υπάρχει μοναδικό σημείο Η ώστε να ισχύει ΒΗ$\cong$ΔΕ και Β$*$Η$*$Α. Το σημείο Η είναι διαφορετικό του σημείου Α, καθώς αν ίσχυε Η = Α τότε θα ίσχυε ΒΑ $\cong$ΒΗ και αφού ΒΑ > ΔΕ τότε από την Πρόταση 3.5 (α) θα ισχύει ΒΗ > ΔΕ, άτοπο λόγω της επιλογής του Η. Επιπλέον δεν μπορεί να ισχύει Β$*$Α$*$Η καθώς τότε θα ίσχυε ΒΗ > ΒΑ και αφού ΒΑ > ΔΕ τότε από την Πρόταση 3.5 (β.i) θα ίσχυε ΒΗ > ΔΕ, άτοπο λόγω της επιλογής του Η. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΗΓ. Για τα τρίγωνα ΗΒΓ, ΔΕΖ ισχύει ΒΓ$\cong$ΕΖ από την υπόθεση, $Η\hat{Β}Γ \cong Δ\hat{Ε}Ζ$ από την υπόθεση και ΒΗ$\cong$ΔΕ, λόγω κατασκευής. Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΗΒΓ και ΔΕΖ έπεται ότι $Η\hat{Γ}Β \cong Δ\hat{Ζ}Ε$. Ακόμη από την υπόθεση ισχύει ότι $Α\hat{Γ}Β \cong Δ\hat{Ζ}Ε$ και άρα από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει $Η\hat{Γ}Β \cong Α\hat{Γ}Β$. Άτοπο, καθώς όλα τα σημεία του ΓΗ, εκτός του Γ, ανήκουν στο εσωτερικό της γωνίας και άρα από τον ορισμό θα ισχύει $Η\hat{Γ}Β < Α\hat{Γ}Β$. Αφού το Β είναι σημείο της ευθείας ΒΓ = κ και επιπλέον ισχύει Β$*$Η$*$Α, επομένως τα σημεία Η, Α ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ, αφού αν ανήκαν στα αντίθετα ημιεπίπεδα της κ τότε η Β$*$Η$*$Α = λ θα είχε και άλλο κοινό σημείο με την κ, εκτός του

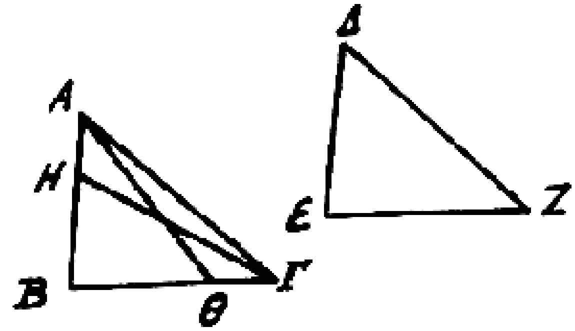
Β και άρα θα ίσχυε κ = λ, επομένως τα σημεία Β, Α, Γ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι ΑΒΓ τρίγωνο.

Όμοια το Α είναι σημείο της ΑΓ = μ και επιπλέον ισχύει $Α*Η*Β$. Επομένως τα σημεία Η, Β ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η μ, αφού αν ανήκαν στα αντίθετα ημιεπίπεδα της μ τότε η $Α*Η*Β = λ$ θα είχε και άλλο κοινό σημείο με την μ, εκτός του Α, και άρα θα ίσχυε μ = λ, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο διότι ΑΒΓ τρίγωνο. Συνεπώς το σημείο Η ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν ταυτόχρονα οι ευθείες κ, μ και άρα το σημείο Η θα ανήκει στο εσωτερικό της $Α\hat{Γ}Β$. Επομένως όλα τα σημεία του ΓΗ, εκτός του Γ, ανήκουν στο εσωτερικό της $Α\hat{Γ}Β$ και άρα $Α\hat{Γ}Β > Η\hat{Γ}Β$. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει ΑΒ < ΔΕ.

Έστω ότι $Α\hat{Γ}Β \cong Δ\hat{Ζ}Ε$, $Α\hat{Β}Γ \cong Δ\hat{Ε}Ζ$ και $ΑΒ \cong ΔΕ$, θα δείξουμε ότι επιπλέον ισχύει $ΒΓ \cong ΕΖ$, $ΑΓ \cong ΔΖ$ και $Β\hat{Α}Γ \cong Ε\hat{Δ}Ζ$. Υπόθετουμε ότι δεν ισχύει ΒΓ $\cong$ ΕΓ, τότε από την Πρόταση 3.5 (β.ii) θα ισχύει είτε ΒΓ < ΕΖ είτε ΒΓ > ΕΖ. Έστω ότι ΒΓ > ΕΖ τότε από το αξίωμα (C.2) υπάρχει μοναδικό σημείο Θ ώστε να ισχύει $ΒΘ \cong ΕΖ$ και $Β*Θ*Γ$. Διότι το σημείο Θ είναι διαφορετικό του Γ καθώς αν ίσχυε Θ = Γ τότε θα ίσχυε $ΒΓ \cong ΒΘ$ και αφού ΒΓ > ΕΖ τότε από την Πρόταση 3.5 (α) θα ισχύει ΒΘ > ΕΖ, άτοπο λόγω της επιλογής του Θ. Επιπλέον δεν μπορεί να ισχύει $Β*Γ*Θ$ καθώς τότε θα ίσχυε ΒΘ > ΒΓ και αφού ΒΓ > ΕΖ από την Πρόταση 3.5 (β.i) θα ίσχυε ΒΘ > ΕΖ, άτοπο λόγω της επιλογής του Θ. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΘ.

Για τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΘ ισχύει, $ΑΒ \cong ΔΕ$ από υπόθεση, $Α\hat{Β}Γ \cong Δ\hat{Ε}Ζ$ και $ΒΘ \cong ΕΖ$ λόγω κατασκευής. Άρα από το αξίωμα (C.6) έπεται ότι $Α\hat{Θ}Β \cong Δ\hat{Ζ}Ε$. Όμως από την υπόθεση ισχύει $Α\hat{Γ}Β \cong Δ\hat{Ζ}Ε$ και άρα από το αξίωμα (C.5) έπεται ότι $Α\hat{Θ}Β \cong Α\hat{Γ}Β$. Άτοπο, διότι η $Α\hat{Θ}Β$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΘΓ και άρα από την Πρόταση Ι.16 έχουμε ότι $Α\hat{Θ}Β > Θ\hat{Γ}Α$. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει ΒΓ < ΕΖ, επομένως $ΒΓ \cong ΕΖ$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω για τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ θα ισχύει το αξίωμα (C.6) καθώς $AB \cong \Delta E$, $EZ \cong B\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{E}Z$, συνεπώς θα ισχύει ότι $B\Gamma \cong EZ$, $A\Gamma \cong \Delta Z$ και $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$.



Σχόλια. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.26 στα *Στοιχεία* ο Ευκλείδης αναφέρει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΔΕ δεν είναι εφαρμόσιμα και άρα είτε το ΑΒ θα είναι μεγαλύτερο του ΔΕ είτε θα είναι μικρότερο, χωρίς όμως να το αιτιολογεί. Ενώ εμείς στην Πρόταση 3.5 (β.ii) έχουμε δείξει ότι για οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα μονάχα μία από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να ισχύει. Στην συνέχεια μέσω της Πρότασης Ι.4 δείχνει ότι θα ισχύει $H\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$, όμως επιπλέον ισχύει ότι $A\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$ και άρα από την κοινή έννοια α΄ θα ισχύει $A\hat{\Gamma}B \cong H\hat{\Gamma}B$ και από την κοινή έννοια ε΄ οδηγείται σε άτοπο καθώς το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους. Με βάση τη θεμελίωση Hilbert δείξαμε ότι $A\hat{\Gamma}B \cong H\hat{\Gamma}B$ από το αξίωμα (C.5) και καταλήξαμε σε άτοπο καθώς το ΓΗ ανήκει στο εσωτερικό της $A\hat{\Gamma}B$ και άρα από τον Ορισμό της διάταξης για γωνίες θα σχύει $H\hat{\Gamma}B < A\hat{\Gamma}B$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $B\Gamma \cong EZ$, $A\Gamma \cong \Delta Z$ και $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$. Τέλος δείχνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει $A\hat{\Theta}B \cong A\hat{\Gamma}B$ διότι από την Πρόταση Ι.16 η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Θεωρία Λόγων ευθυγράμμων τμημάτων

Βιβλίο V των *Στοιχείων*.

Στο Βιβλίο V, το οποίο οφείλεται στον μεγάλο μαθηματικό Εύδοξο και περιλαμβάνει 18 ορισμούς, 25 προτάσεις, αναπτύσσεται η θεωρία λόγων για όλα τα μεγέθη, όχι μόνο τα ευθύγραμμα τμήματα. Οι θεμελιώδεις έννοιες του λόγου και της αναλογίας μεγεθών δίδονται στους ορισμούς δ΄ και ε΄ του Βιβλίου V, αντίστοιχα, και είναι εκείνες στις οποίες θα στηριχτούμε κυρίως για την απόδειξη των προτάσεων στο παρόν Κεφάλαιο. Σύμφωνα με τον ορισμό V.ε΄, δύο λόγοι α:β και γ:δ ομογενών μεγεθών α,β και γ,δ (δηλαδή, ευθυγράμμων τμημάτων, κυκλικών τμημάτων, εμβαδών ή όγκων) έχουν τον ίδιο λόγο, α:β=γ:δ, αν για οποιαδήποτε πολλαπλάσια n των α, γ και για οποιαδήποτε πολλαπλάσια m των β, δ, ισχύει ότι:

$n\alpha > m\beta$ αν και μόνο αν $n\gamma > m\delta$ ή $n\alpha = m\beta$ αν και μόνο αν $n\gamma = m\delta$ ή $n\alpha < m\beta$ αν και μόνο αν ή $n\gamma < m\delta$.

Με την συνθήκη Ευδόξου-Αρχιμήδους V.δ΄, ο ορισμός αναλογίας του Ευδόξου είναι ισοδύναμος με την πρόταση:

Η τομή Dedekind $D(\alpha,\beta)=\{m/n: n\alpha > m\beta\}$, $E(\alpha,\beta) =\{m/n: n\alpha < m\beta \text{ ή } n\alpha = m\beta\}$ η οποία καθορίζεται από τον λόγο α:β είναι ίση με την τομή Dedekind $D(\gamma,\delta)=\{m/n: n\gamma > m\delta\}$, $E(\gamma,\delta)=\{m/n: n\gamma < m\delta \text{ ή } n\gamma = m\delta\}$ η οποία καθορίζεται από τον λόγο γ:δ.

Επομένως ο ορισμός αναλογίας λόγων μεγεθών από τον Εύδοξο χρησιμοποιεί τις τομές Dedekind πολύ πριν από τον ορισμό των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind.

Η διαφορά του Ευδόξου από τον Dedekind είναι ότι από τον Εύδοξο λείπει η ιδιότητα της πληρότητος (supremum). Ο Εύδοξος χρησιμοποίησε τις τομές Dedekind για να εξισώσει ή να διακρίνει τους λόγους που προέκυπταν φυσιολογικά στη γεωμετρία του, π.χ. τους λόγους των ευθυγράμμων τμημάτων που λαμβάνονταν από τις κατασκευές, και όχι για να ισχυρισθεί, μέσω τομών Dedekind, την ύπαρξη νέων λόγων (κατ' ουσίαν πραγματικών αριθμών).

Στο παρόν Κεφάλαιο αναπτύσσουμε τη θεωρία λόγων **ευθυγράμμων τμημάτων**, ακολουθώντας πιστά το Βιβλίο V των *Στοιχείων*. Θα στηριχτούμε στη θεωρία των ευθυγράμμων τμημάτων όπως αυτή έχει αναπτυχθεί στα Κεφάλαια 1 εως 9 με βάση την αξιωματική θεμελίωση Hilbert. Η θεωρία λόγων ευθυγράμμων χωρίων αναβάλλεται για το Κεφάλαιο 14, αφού προηγουμένως θεμελιωθεί κατά Hilbert η θεωρία των ευθυγράμμων χωρίων, στα Κεφάλαια 12 και 13.

Όρος α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

Σχόλια. Η λέξη *μέρος* εδώ χρησιμοποιείται με την έννοια ενός υποπολλαπλασίου σε αντίθεση με την πιο γενική έννοια με την οποία χρησιμοποιείται στην κοινή έννοια *ε΄* η οποία αναφέρει ότι “το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους”. Χρησιμοποιείται με την ίδια έννοια στον ορισμό 3 του Βιβλίου VII ο οποίος είναι ο ίδιος ορισμός με αυτόν με τη λέξη *αριθμός* να αντικαθιστά τη λέξη *μέγεθος*. Στο Βιβλίο VII ο ορισμός 4 αναφέρει ότι όταν ένας αριθμός δεν μετράει έναν άλλο αριθμό, είναι *μέρη*, όχι ένα μέρος αυτού. Έτσι ο αριθμός 1, ο αριθμός 2 ή ο αριθμός 3 είναι μέρος του 6 αλλά ο αριθμός 4 είναι μέρη του 6, όχι μέρος [Hea].

Όροι β΄, γ΄

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.
γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

Όρος δ΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Σχόλια. Ο παραπάνω ορισμός υπονοεί ότι τα μεγέθη είναι του ίδιου είδους, αλλά δε μπορεί να είναι μονάχα αυτό. Ο ορισμός μοιάζει να εννοεί ότι εξαιρεί τη σχέση ενός πεπερασμένου μεγέθους με ένα μέγεθος ίδιου είδους το οποίο είναι είτε απείρως μεγάλο είτε απείρως μικρό .

Όρος ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καί τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Σχόλια. Το σημείο κλειδί του Βιβλίου V είναι ο Ορισμός ε΄, ο οποίος αποτελεί το κριτήριο για το πότε μεγέθη (τα οποία θα μπορούσαν να είναι ευθύγραμμα τμήματα, εμβαδά ή οτιδήποτε) έχουν τον ίδιο λόγο. Συμβολικά για τα τέσσερα μεγέθη α, β, γ, δ θα ισχύει α:β = γ:δ αν για οποιαδήποτε ίσα ακέραια πολλαπλάσια (π.χ. n πολλαπλάσια) των α, γ και για οποιαδήποτε ίσα ακέραια πολλαπλάσια (π.χ. m πολλαπλάσια) των β, δ ισχύει nα>mβ ή nα=mβ ή nα<mβ αν και μόνο αν nγ>mδ ή nγ=mδ ή nγ<mδ αντίστοιχα. Στον παραπάνω ορισμό φαίνεται και η σημαντικότητα του δεύτερου Αιτήματος των *Στοιχείων*, δίοτι η πρόσθεση ακέραιων πολλαπλάσιων ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα δεν θα ήταν εφικτή χωρίς τη συνεχή και ευθύγραμμη επέκταση που αναφέρει το Αίτημα 2.

Όρος ς΄. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

Όρος ζ΄. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Σχόλια. Όπως παρατηρεί ο De Morgan, ο έλεγχος της μη αναλογίας μεγεθών είναι απλούστερος από αυτόν της αναλογίας, ενώ ο Saccheri αναφέρει ότι ο λόγος του πρώτου μεγέθους προς το δεύτερο θα είναι μεγαλύτερος από το λόγο του τρίτου προς το τέταρτο αν, ενώ το πολλαπλάσιο του πρώτου είναι ίσο με το πολλαπλάσιο του δεύτερου, το πολλαπλάσιο του τρίτου είναι μικρότερο από το πολλαπλάσιο του τέταρτου, μία περίπτωση που δεν αναφέρεται στον ορισμό του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον Heath, ο Ευκλείδης πιθανώς δεν ανέφερε το δεύτερο πιθανό κριτήριο για μεγαλύτερο λόγο και τον ορισμό ενός μικρότερου λόγου, επειδή ήθελε να μειώσει τους ορισμούς στους ελάχιστους απαραίτητους για τον σκοπό του και να αφήσει τα υπόλοιπα να συναχθούν μόλις η ανάπτυξη των προτάσεων του Βιβλίου V επέτρεπε να γίνει αυτό χωρίς δυσκολία.

Όροι η΄, θ΄, ι΄, ια΄.

η΄. ᾿Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.
θ΄. ῞Οταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.
ι΄. ῞Οταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία
ια΄. ῾Ομόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

Όρος ιβ΄. ᾿Εναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

Σχόλια. Ερχόμαστε τώρα σε έναν αριθμό εκφράσεων για τον μετασχηματισμό των λόγων ή των αναλογιών. Η πρώτη είναι η *εναλλάξ* η οποία θα μπορούσε καλύτερα να περιγραφεί με αναφορά σε μια αναλογία τεσσάρων όρων παρά με αναφορά σε λόγο. Αλλά πιθανότατα ο Ευκλείδης όρισε όλους τους μετασχηματισμούς στους ορισμούς ιβ΄-ις΄ με αναφορά στους λόγους γιατί αν τους όριζε στις αναλογίες θα έμοιαζε σαν να υποθέτει αυτό που πρέπει να αποδειχθεί, δηλαδή την ισχύ των διαφόρων μετασχηματισμών των αναλογιών [Hea].

Όροι ιδ΄, ιε΄

ιδ΄. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.
ιε΄. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Σχόλια. Η σύνθεση λόγου σημαίνει τον μετασχηματισμό, π.χ. του λόγου του Α προς το Β στον λόγο Α+Β προς το Β και η διαίρεση λόγου κατά αντιστοιχία σημαίνει τον μετασχηματισμό του ίδιου λόγου στον λόγο Α-Β προς το Β. Έτσι, όπως ο νέος αριθμητής στη μία περίπτωση δίνεται προσθέτοντας (συνθέτοντας) τον αρχικό αριθμητή με τον αρχικό παρονομαστή, έτσι ο αριθμητής στην άλλη περίπτωση δίνεται αφαιρώντας τον αρχικό παρονομαστή από τον αρχικό αριθμητή.

Όρος ιϛ΄. ᾿Αναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

Όρος ιζ΄. Δι᾿ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾿ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Σχόλια. *Δι' 'ισου* σημαίνει σε ίση απόσταση ή διάστημα, δηλαδή μετά από ίσο αριθμό παρεμβαλλόμενων βημάτων. Η διατύπωση του ορισμού υπονοεί ότι αυτό που ορίζεται είναι μάλλον μια “δι' ίσου αναλογία” παρά ένας “δι' ίσου λόγος”. Το νόημα είναι αρκετά ξεκάθαρο, αν α, β, γ, δ,... είναι ένα σύνολο μεγεθών και Α, Β, Γ, Δ,... ένα άλλο σύνολο μεγεθών έτσι ώστε:

Ο λόγος του α προς το β να είναι ίσος με τον λόγο του Α προς το Β,
ο λόγος του β προς το γ να είναι ίσος με τον λόγο του Β προς το Γ,
και ούτω καθεξής, με την τελευταία αναλογία να είναι π.χ.
ο λόγος του ψ προς το ω να είναι ίσος με τον λόγο του Ψ προς το Ω,
τότε το συμπέρασμα “δι' ίσου” είναι ότι
ο λόγος του α προς το ω είναι ίσος με τον λόγο του Α προς το Ω.

Όρος ιη΄. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτωςἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

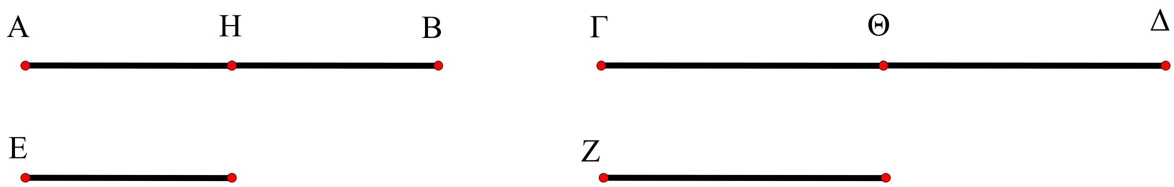
Σχόλια. Αν και ο συγκεκριμένος ορισμός δεν αναφέρεται ρητά στην έννοια δι' ίσου μας δίνει μια περιγραφή περίπτωσης στην οποία η δι' ίσου ισχύει. Η τεταραγμένη αναλογία είναι μία έκφραση κατά την οποία υπάρχουν τρία μεγέθη α, β, γ και άλλα τρία Α, Β, Γ ώστε ο λόγος του α προς το β να είναι ίσος με το λόγο του Β προς το Γ και ο λόγος του β προς το γ να είναι ίσος με το λόγο του Α προς το Β.

Προτάσεις V.1-V.25 των *Στοιχείων*

Πρωτού διατυπώσουμε και αποδείξουμε τις προτάσεις του πέμπτου Βιβλίου των *Στοιχείων* θα πρέπει να υπογραμμίσουμε τον εξαιρετικά σημαντικό ρόλο του δεύτερου Αιτήματος των *Στοιχείων*, στις αποδείξεις αυτών. Διότι χωρίς το Αίτημα 2 των *Στοιχείων* δε θα μπορούσαμε να θεωρούμε ακέραια πολλαπλάσια ενός ευθυγράμμου τμήματος ως επέκταση σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Έτσι και όπως θα διαπιστώσουμε στις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν η χρήση του δεύτερου Αιτήματος των *Στοιχείων* κρίνεται αναγκαία.

Πρόταση V.1. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των τυχαίων μεγεθών Ε, Ζ. Θα δείξουμε ότι όσα πολλαπλάσια είναι το ΑΒ του Ε τόσα πολλαπλάσια θα είναι και το άθροισμα ΑΒ+ΓΔ του αθροίσματος Ε+Ζ.

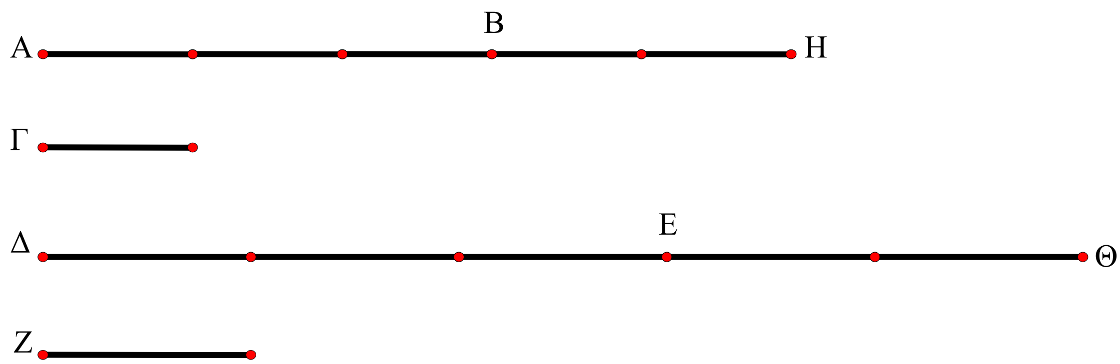


Επειδή το ΑΒ είναι τόσα πολλαπλάσια του Ε όσα και τα πολλαπλάσια του Ζ στο ΓΔ, τότε όσα μεγέθη υπάρχουν στο ΑΒ εφαρμόσιμα με το Ε άλλα τόσα μεγέθη υπάρχουν στο ΓΔ εφαρμόσιμα με το Ζ. Διαιρούμε το ΑΒ στα εφαρμόσιμα προς το Ε μεγέθη, τα ΑΗ, ΗΒ και το ΓΔ στα εφαρμόσιμα προς το Ζ μεγέθη τα ΓΘ, ΘΔ, τότε το πλήθος των μεγεθών ΑΗ, ΗΒ θα είναι ίσο προς το πλήθος των μεγεθών ΓΘ, ΘΔ. Ακόμη το ΑΗ είναι εφαρμοσίμο με το Ε και το ΓΘ είναι εφαρμόσιμο με το Ζ επομένως θα ισχύει ΑΗ+ΓΘ$\cong$Ε+Ζ. Για τον ίδιο λόγο θα ισχύει ΗΒ+ΘΔ$\cong$Ε+Ζ και αφού ΑΗ+ΓΘ+ΗΒ+ΘΔ$\cong$ ΑΒ+ΓΔ τότε όσα μεγέθη Ε περιέχονται στο ΑΒ άλλα τόσα μεγέθη Ε+Ζ περιέχονται στο άθροισμα ΑΒ+ΓΔ. Επομένως όσα πολλαπλάσια είναι το ΑΒ του Ε άλλα τόσα πολλαπλάσια είναι το άθροισμα ΑΒ+ΓΔ του αθροίσματος Ε+Ζ.

Σχόλια. Στη γενική της μορφή και με αλγεβρικούς συμβολισμούς η Πρόταση V.1 ισχυρίζεται ότι αν mα, mβ, mγ... είναι ίσα πολλαπλάσια των α, β, γ... αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι $m\alpha + m\beta + m\gamma + \ldots = m(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης αποδεικνύει τη συγκεκριμένη πρόταση για δύο μεγέθη των οποίων παίρνει τα αντίστοιχα ίσα πολλαπλάσια.

Πρόταση V.2. Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Απόδειξη. Έστω πρώτο το μέγεθος ΑΒ το οποίο είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ όσα και τα πολλαπλάσια του τρίτου ΔΕ του τετάρτου Ζ. Επιπλέον θεωρούμε το πέμπτον ΒΗ το οποίο είναι τόσα πολλαπλάσια του Γ όσα και τα πολλαπλάσια του έκτου ΕΘ του τετάρτου Ζ, θα δείξουμε ότι το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου ΑΒ+ΒΗ$\cong$ΑΗ είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ όσα και τα πολλαπλάσια του αθροίσματος του τρίτου και του έκτου ΔΕ+ΕΘ$\cong$ΔΘ του τετάρτου Ζ.



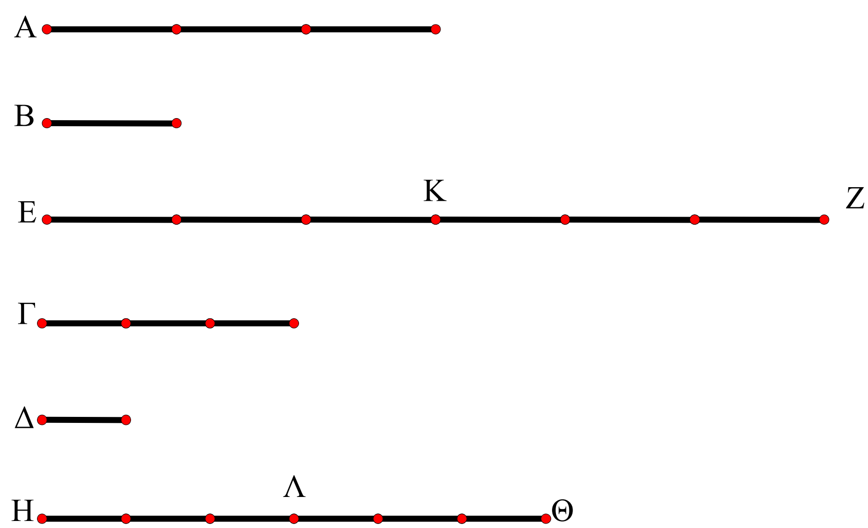
Επειδή το ΑΒ είναι τόσα πολλαπλάσια του Γ όσα και τα πολλαπλάσια του Ζ στο ΔΕ, άρα όσα μεγέθη Γ περιέχονται στο ΑΒ άλλα τόσα μεγέθη Ζ περιέχονται στο ΔΕ. Για τον ίδιο λόγο όσα μεγέθη Γ περιέχονται στο ΒΗ άλλα τόσα μεγέθη Ζ περιέχονται στο ΕΘ, συνεπώς όσα μεγέθη Γ περιέχονται στο όλον ΑΗ άλλα τόσα μεγέθη Ζ περιέχονται στο όλον ΔΘ. Επομένως όσα πολλαπλάσια είναι το μέγεθος ΑΗ του Γ άλλα τόσα πολλαπλάσια είναι το μέγεθος ΔΘ του Ζ.

Άρα το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου, το ΑΗ είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του αθροίσματος του τρίτου και του έκτου ΔΘ του τετάρτου Ζ.

Σχόλια. Η Πρόταση V.2 και η αντίστοιχη της Πρόταση V.6 με την αφαίρεση να παίρνει τη θέση της πρόσθεσης, όπως και οι Προτάσεις V.3, V.5 μελετούν αθροίσματα και διαφορές ευθυγράμμων τμημάτων και των πολλαπλασίων τους.

Πρόταση V.3. Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

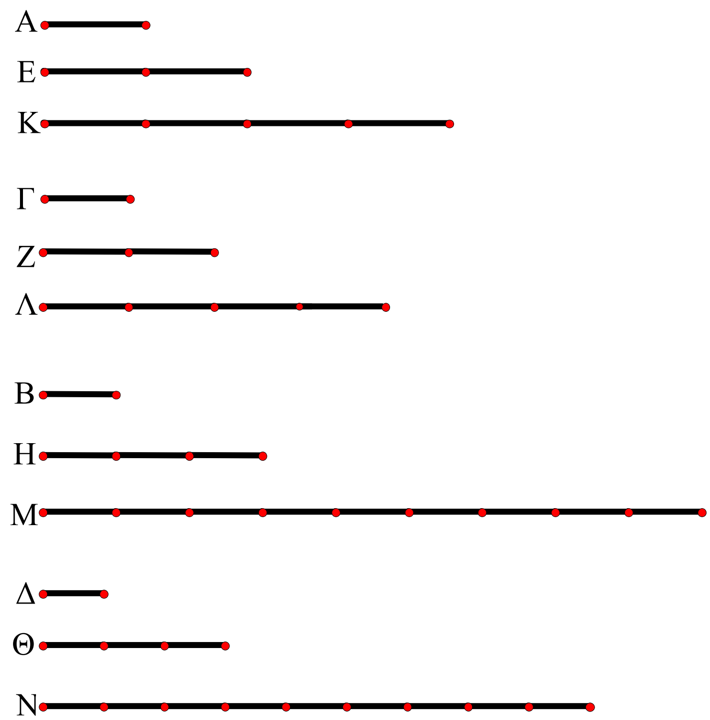
Απόδειξη. Έστω το πρώτο μέγεθος Α το οποίο είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Β όσα είναι και τα πολλαπλάσια του τρίτου Γ του τετάρτου Δ και ας ληφθούν τα μεγέθη ΕΖ, ΗΘ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Γ, θα δείξουμε ότι το μέγεθος ΕΖ είναι τόσα πολλαπλάσια του Β όσα είναι και τα πολλαπλάσια του Δ στο ΗΘ.



Επειδή το ΕΖ είναι τόσα πολλαπλάσια του Α όσα είναι και τα πολλαπλάσια του Γ στο ΗΘ, τότε όσα μεγέθη Α περιέχονται στο ΕΖ άλλα τόσα μεγέθη Γ περιέχονται στο ΗΘ. Διαιρούμε το ΕΖ στα εφαρμόσιμα μεγέθη προς το Α τα ΕΚ και ΚΖ και το ΗΘ στα εφαρμόσιμα μεγέθη προς το Γ τα ΗΛ, ΛΘ. Επειδή $Α \cong ΕΚ$ και $Γ \cong ΗΛ$ και τα μεγέθη Α, Γ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ τότε τα μεγέθη ΕΚ, ΗΛ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ. Όμοια τα μεγέθη ΚΖ, ΛΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ. Άρα το πρώτο μέγεθος ΕΚ είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Β όσα είναι και τα πολλαπλάσια του τετάρτου Δ στο μέγεθος ΗΛ και ακόμη το πέμπτο μέγεθος ΚΖ είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Β όσα είναι και τα πολλαπλάσια του τετάρτου Δ στο έκτο μέγεθος ΛΘ τότε από την Πρόταση V.2 το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου $ΕΚ+ΚΖ \cong ΕΖ$ είναι τόσα πολλαπλάσια του δευτέρου Β όσα είναι και τα πολλαπλάσια του τετάρτου Δ στο άθροισμα του τρίτου και του έκτου $ΗΛ+ΛΘ \cong ΗΛ$.

Πρόταση V.4. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Απόδειξη. Έστω ότι έχει τον ίδιο λόγο το πρώτο μέγεθος Α προς το δεύτερο Β με το τρίτο μέγεθος Γ προς το τέταρτο Δ και ας ληφθούν ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Γ τα μεγέθη Ε, Ζ καθώς επίσης και τα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ τα μεγέθη Η, Θ. Θα δείξουμε ότι ο λόγος του Ε προς το Η είναι ίδιος με τον λόγο του Ζ προς το Θ.

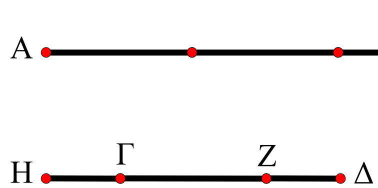


Διότι ας ληφθούν τα ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ τα μεγέθη Κ, Λ όπως επίσης και τα ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Η, Θ τα τυχόντα μεγέθη Μ, Ν.

Το μέγεθος Ε είναι τόσα πολλαπλάσια του μεγέθους Α όσα είναι και τα πολλαπλάσια του μεγέθους Γ στο μέγεθος Ζ καθώς επίσης και το μέγεθος Κ είναι τόσα πολλαπλάσια του μεγέθους Ε όσα είναι και τα πολλαπλάσια του μεγέθους Ζ στο μέγεθος Λ, επομένως από την Πρόταση V.3 το μέγεθος Κ είναι τόσα πολλαπλάσια του μεγέθους Α όσα είναι και τα πολλαπλάσια του μεγέθους Γ στο μέγεθος Λ. Όμοια τα μεγέθη Μ, Ν είναι τα ίδια πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίδιος με το λόγο του Γ προς το Δ και αφού ελήφθησαν τα ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Γ τα μεγέθη Κ, Λ όπως επίσης και τα ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ τα τυχόντα μεγέθη Μ, Ν, τότε από τον Ορισμό V.ε΄ εάν υπερέχει το Κ του Μ θα υπερέχει και το Λ του Ν, εάν είναι ίσο τότε θα είναι ίσο και εάν είναι μικρότερο τότε θα είναι μικρότερο. Επιπλέον τα μεγέθη Κ, Λ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ και τα μεγέθη Μ, Ν άλλα τυχόντα ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Η, Θ, επομένως ο λόγος του Ε προς το Η είναι ίδιος με τον λόγο του Ζ προς το Θ.

Πρόταση V.5. Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Απόδειξη. Έστω το μέγεθος ΑΒ το οποίο είναι τόσα πολλαπλάσια του μεγέθους ΓΔ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του αφαιρούμενου μεγέθους ΓΖ στο αφαιρούμενο μέγεθος ΑΕ. Θα δείξουμε ότι και το υπόλοιπο μέγεθος ΕΒ είναι τόσα πολλαπλάσια του υπόλοιπου ΖΔ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του ΓΔ στο ΑΒ.



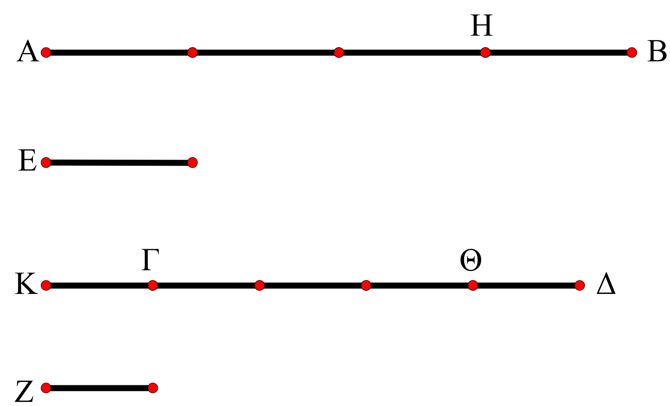
Δημιουργούμε το μέγεθος ΓΗ (αξίωμα C.2) ώστε όσα πολλαπλάσια είναι το μέγεθος ΑΕ του μεγέθους ΓΖ τόσα να είναι τα πολλαπλάσια του ΓΗ στο ΕΒ. Αφού το ΑΕ είναι τόσα πολλαπλάσια του ΓΖ όσα είναι το ΕΒ του ΗΓ έπεται ότι το ΑΕ είναι τόσα πολλαπλάσια του ΓΖ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του ΗΖ στο ΑΒ (Πρόταση V.1).

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι τα ΑΒ, ΑΕ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΔ, ΓΖ και άρα το ΑΒ είναι ίσο πολλαπλάσιο των μεγεθών ΗΖ, ΓΔ επομένως το μέγεθος ΗΖ είναι εφαρμόσιμο με το μέγεθος ΓΔ. Από την Πρόταση 2.3 αφαιρούμε το κοινό ΓΖ και άρα το υπόλοιπο ΗΓ είναι εφαρμόσιμο με το υπόλοιπο ΖΔ. Ακόμη γνωρίζουμε ότι το ΑΕ είναι τόσα πολλαπλάσια του ΓΖ όσα και τα πολλαπλάσια ΗΓ στο ΕΒ, όμως το ΗΓ είναι εφαρμόσιμο με το ΖΔ, επομένως το ΑΕ είναι τόσα πολλαπλάσια του ΓΖ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του ΖΔ στο ΕΒ. Επιπλέον από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι το ΑΕ είναι τόσα πολλαπλάσια του ΓΖ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του ΓΔ στο ΑΒ. Επομένως τα μεγέθη ΕΒ, ΑΒ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΖΔ, ΓΔ.

Σχόλια. Η Πρόταση V.5 είναι η αντίστοιχη της Πρότασης V.1, με την διαφορά ότι η αφαίρεση παίρνει τη θέση της πρόσθεσης, στην οποία αποδεικνύεται ότι $m\alpha - m\beta = m(\alpha\text{-}\beta)$.

Πρόταση V.6. Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶτὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ αντίστοιχα, αν επιπλέον τα αφαιρεθέντα από τα αρχικά μεγέθη ΑΗ, ΚΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ τότε τα υπόλοιπα μεγέθη ΗΒ, ΘΔ είτε θα είναι εφαρμόσιμα με τα Ε, Ζ είτε θα είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ.

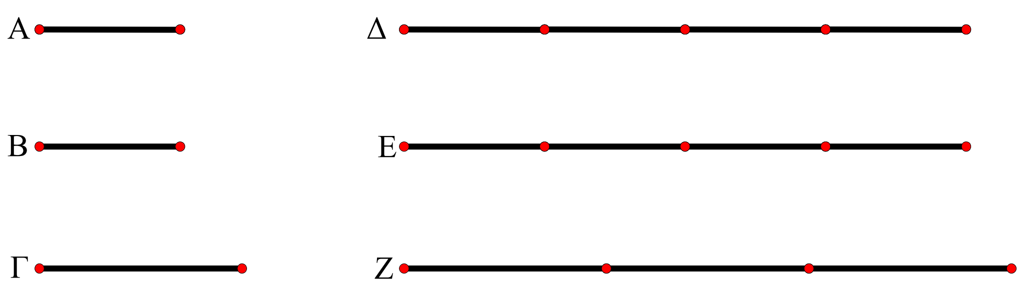


Έστω ότι το ΗΒ είναι εφαρμόσιμο με το Ε, τότε θα δείξουμε ότι και το ΘΔ θα είναι εφαρμόσιμο με το Ζ. Από το αξίωμα (C.2) λαμβάνουμε το μέγεθος ΓΚ εφαρμόσιμο με το Ζ και επειδή από την υπόθεση τα ΑΗ, ΓΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ και επιπλέον το ΗΒ είναι εφαρμόσιμο με το Ε καθώς επίσης και το ΚΓ είναι εφαρμόσιμο με το Ζ, τότε από την Πρόταση V.2 τα μεγέθη ΑΒ, ΚΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ. Επιπλέον τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ, επομένως τα μεγέθη ΚΘ, ΓΔ είναι ίσα πολλαπλάσια του μεγέθους Ζ και άρα $K\Theta \cong \Gamma\Delta$. Στη συνέχεια αφαιρούμε το κοινό ΓΘ και άρα θα ισχύει $K\Gamma \cong \Theta\Delta$ (Πρόταση 2.3). Όμως $K\Gamma \cong Z$ και άρα από το αξίωμα (C.1) θα ισχύει $\Theta\Delta \cong Z$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το ΗΒ είναι πολλαπλάσιο του Ε τότε και το ΘΔ θα είναι ίδιο το πλήθος πολλαπλάσια του Ζ.

Πρόταση V.7. Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Απόδειξη. Έστω τα εφαρμόσιμα μεγέθη Α, Β και ένα τυχαίο μέγεθος Γ. Θα δείξουμε ότι καθένα από τα μεγέθη Α, Β έχει τον ίδιο λόγο προς το μέγεθος Γ, καθώς επίσης και το μέγεθος Γ έχει τον ίδιο λόγο προς κάθε ένα από τα μεγέθη Α, Β.
Θεωρούμε τα μεγέθη Δ, Ε ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Β και λαμβάνουμε και ένα τυχαίο πολλαπλάσιο του μεγέθους Γ το μέγεθος Ζ. Επειδή τα



μεγέθη Δ, Ε είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Β και επιπλέον τα μεγέθη Α, Β είναι εφαρμόσιμα τότε τα μεγέθη Δ, Ε είναι εφαρμόσιμα (Πρόταση 2.2). Ακόμη το μέγεθος Ζ είναι τυχαίο πολλαπλάσιο του μεγέθους Γ και άρα αν το μέγεθος Δ υπερέχει του μεγέθους Ζ τότε και το Ε υπερέχει του Ζ, αν είναι ίσο τότε και το Ε είναι ίσο με το Ζ και αν το Δ είναι μικρότερο του Ζ τότε και το Ε θα είναι μικρότερο του Ζ (Πρόταση 3.5). Τα μεγέθη Δ, Ε είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Β και το μέγεθος Ζ είναι τυχαίο πολλαπλάσιο του μεγέθους Γ, επομένως από τον Ορισμό V.ε΄ ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με το λόγο του Β προς το Γ.
Θα δείξουμε τώρα ότι και ο λόγος του Γ προς το Α είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Β. Διότι αφού κατασκευάσουμε με όμοιο τρόπο τα μεγέθη Δ, Ε, Ζ τότε από την Πρόταση 2.2 έπεται ότι τα Δ, Ε είναι εφαρμόσιμα και καθώς έχει ληφθεί ένα τυχαίο πολλαπλάσιο του μεγέθους Γ, το μέγεθος Ζ, τότε αν το Ζ υπερέχει του Δ θα υπερέχει και του Ε, αν είναι ίσο με το Δ τότε θα είναι ίσο και με το Ε και αν είναι μικρότερο του Δ θα είναι μικρότερο και από το Ε. Ακόμη, αφού το Ζ είναι πολλαπλάσιο του μεγέθους Γ και τα

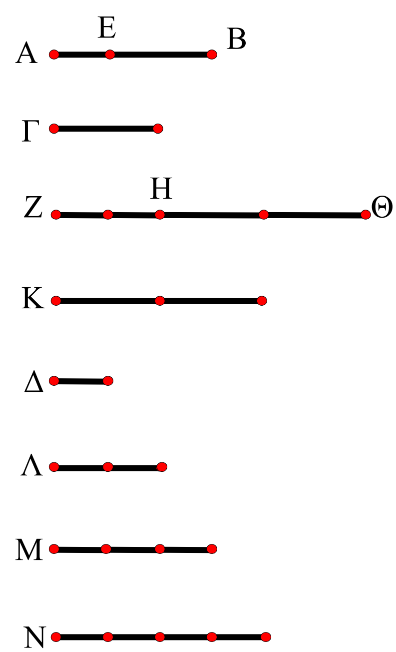
τυχόντα Δ, Ε είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Β τότε από τον Ορισμό V.ε΄ ο λόγος του Γ προς το Α είναι ίσος με το λόγο του Γ προς το Β.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση V.8. Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Απόδειξη. Έστω τα άνισα μεγέθη ΑΒ, Γ με ΑΒ μεγαλύτερο του Γ και Δ ένα τυχαίο μέγεθος, θα δείξουμε ότι ο λόγος του ΑΒ προς το Δ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Δ, καθώς επίσης και ότι ο λόγος του Δ προς το Γ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Δ προς το ΑΒ.



Επειδή το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το Γ τότε εξ ορισμού υπάρχει σημείο Ε το οποίο ανήκει στο ΑΒ τέτοιο ώστε $ΒΕ \cong Γ$, στη συνέχεια θεωρούμε το μικρότερο από τα μεγέθη ΑΕ, ΒΕ το οποίο από τον Ορισμό V.δ΄ πολλαπλασιασμένο θα γίνει μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήμα Δ. Έστω ΑΕ<ΒΕ, το οποίο πολλαπλασιασμένο θα γίνει μεγαλύτερο από το Δ και θεωρούμε ΖΗ το πρώτο πολλαπλάσιο του ΑΕ για το οποίο ισχύει ΖΗ>Δ. Εν συνεχεία κατασκευάζουμε τα μεγέθη ΖΗ, ΗΘ, Κ ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΑΕ, ΕΒ, Γ. Ακόμη λαμβάνουμε το μέγεθος Λ ώστε να είναι διπλάσιο του Δ, το μέγεθος Μ να είναι τριπλάσιο του Δ και συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία ώσπου να βρούμε το πρώτο μέγεθος το οποίο να είναι μεγαλύτερο του μεγέθους Κ. Έστω Ν το ζητούμενο μέγεθος, το οποίο θεωρούμε ότι είναι το τετραπλάσιο του μεγέθους Δ.

Επειδή το Ν είναι το πρώτο μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του Κ, τότε το Κ δεν θα είναι μικρότερο του Μ. Επιπλέον αφού τα μεγέθη ΖΗ, ΗΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΑΕ, ΕΒ αντίστοιχα τότε από την Πρόταση V.1 τα μεγέθη ΖΗ, ΖΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΑΕ και ΑΒ αντίστοιχα. Ακόμη τα μεγέθη ΖΗ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΑΕ και Γ αντίστοιχα, συνεπώς τα μεγέθη ΖΘ και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΑΒ, Γ. Επιπλέον τα μεγέθη ΗΘ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΕΒ, Γ και το ΕΒ είναι εφαρμόσιμο με το Γ, τότε τα μεγέθη ΗΘ, Κ είναι εφαρμόσιμα (Πρόταση 2.2). Το Κ όμως δεν είναι μικρότερο του Μ και άρα ούτε το ΗΘ είναι μικρότερο του Μ (Πρόταση 3.5). Ακόμη το ΖΗ είναι μεγαλύτερο από το Δ, επομένως το $ΖΘ \cong ΖΗ+ΗΘ$ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των Δ, Μ (Πρόταση 9.3). Όμως το μέγεθος Μ είναι τριπλάσιο του Δ και το Ν είναι τετραπλάσιο του Δ, συνεπώς από την Πρόταση 2.2 το άθροισμα των Δ, Μ είναι εφαρμόσιμο με το Ν. Επιπλέον το ΖΘ είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των Δ, Μ και άρα το ΖΘ υπερέχει του Ν και το Κ δεν υπερέχει του Ν και αφού τα ΖΘ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, Γ και Ν άλλο τυχαίο πολλαπλάσιο του Δ τότε από τον Ορισμό V.ζ΄ ο λόγος του ΑΒ προς το Δ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Δ.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο λόγος του Δ προς το Γ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Δ προς το ΑΒ.

Ακολουθούμε την παραπάνω κατασκευή και δείχνουμε με όμοιο τρόπο ότι το Ν υπερέχει του Κ και ότι το Ν δεν υπερέχει του ΖΘ. Το Ν όμως είναι πολλαπλάσιο του Δ και τα ΖΘ, Κ άλλα τυχόντα ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, Γ και άρα από τον Ορισμό V.ζ΄ ο λόγος του Δ προς το Γ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Δ προς το ΑΒ.

Υποθέτουμε τώρα ότι το ΑΕ είναι μεγαλύτερο του ΕΒ. Από τον Ορισμό V.δ΄ το ΕΒ πολλαπλασιασμένο θα γίνει μεγαλύτερο από το μέγεθος Δ, έστω ΗΘ πολλαπλάσιο του ΕΒ με $ΗΘ>Δ$. Θεωρούμε τα μεγέθη ΗΘ, ΖΗ, Κ ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΑΕ και Γ. Όμοια με το πρώτο μέρος της απόδειξης τα ΖΘ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, Γ και ας ληφθεί το μέγεθος Ν το πρώτο πολλαπλάσιο του Δ που είναι μεγαλύτερο από το ΖΗ, με ΖΗ να μην είναι μικρότερο του Μ. Ακόμη το ΗΘ είναι μεγαλύτερο από το Δ και άρα το $ΖΘ \cong ΖΗ+ΗΘ$ υπερέχει του αθροίσματος των Μ, Δ δηλαδή του Ν. Το Κ όμως δεν υπερέχει του Ν διότι το ΖΗ είναι μεγαλύτερο του ΗΘ, δηλαδή του Κ , δεν υπερέχει του Ν. Στη συνέχεια ακολουθώντας τους συλλογισμούς του πρώτου μέρους της απόδειξης προκύπτει το ζητούμενο.

Σχόλια. Στην Πρόταση V.8 των *Στοιχείων* μελετώνται δύο περιπτώσεις για τους λόγους των ΑΒ, Γ και Δ σε σχέση με το ποιο από τα ΑΒ, Γ είναι μεγαλύτερο. Είναι απαραίτητο σε κάθε περίπτωση να επιλεχθεί το μικρότερο από τα δύο τμήματα ΑΕ, ΕΒ του ΑΒ με σκοπό να πάρουμε ένα πολλαπλάσιό του που να είναι μεγαλύτερο του Δ. Επομένως, στην πρώτη περίπτωση επιλέγεται το ΑΕ<ΕΒ ενώ στη δεύτερη το ΕΒ>ΑΕ. Αλλά, ενώ στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε διαδοχικά πολλαπλάσια του Δ ώστε να βρούμε το πρώτο πολλαπλάσιο που είναι μεγαλύτερο του ΗΘ, στη δεύτερη περίπτωση επιλέγεται το πολλαπλάσιο που είναι το πρώτο μεγαλύτερο του ΖΗ. Αυτή η διαφορά όπως επισημαίνει ο Heath δεν είναι απαραίτητη, διότι το πρώτο πολλαπλάσιο του Δ που είναι μεγαλύτερο του ΗΘ θα μας εξυπηρετούσε το ίδιο στη δεύτερη περίπτωση, ενώ η χρήση του μεγέθους Κ μπορεί παραλειφθεί και στις δύο περιπτώσεις [HEA].

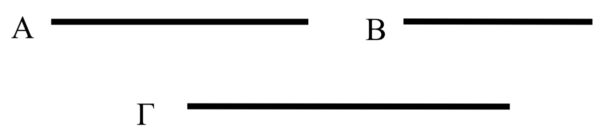
Πρόταση V.9. Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λὸγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ με Α, Β να έχουν τον ίδιο λόγο προς το μέγεθος Γ, τότε θα δείξουμε ότι τα μεγέθη Α, Β είναι εφαρμόσιμα. Διότι αν τα μεγέθη Α, Β δεν είναι εφαρμόσιμα τότε από την Πρόταση V.8 δεν θα είχαν τον ίδιο λόγο προς το μέγεθος Γ, άτοπο.

Έστω τώρα το μέγεθος Γ το οποίο έχει τον ίδιο λόγο προς τα μεγέθη Α, Β τότε τα μεγέθη Α, Β είναι εφαρμόσιμα.

Διότι αν δεν είναι εφαρμόσιμα από την Πρόταση V.8 το Γ δεν θα είχε τον ίδιο λόγο προς τα μεγέθη Α, Β, άτοπο

Πρόταση V.10. Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.



Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ με τον λόγο Α προς Γ να είναι μεγαλύτερος από τον λόγο Β προς Γ τότε θα δείξουμε ότι το Α είναι μεγαλύτερο του Β. Ενώ αν ο λόγος του Γ προς το Α είναι μικρότερος από τον λόγο του Γ προς το Β τότε το Α είναι μεγαλύτερο του Β.

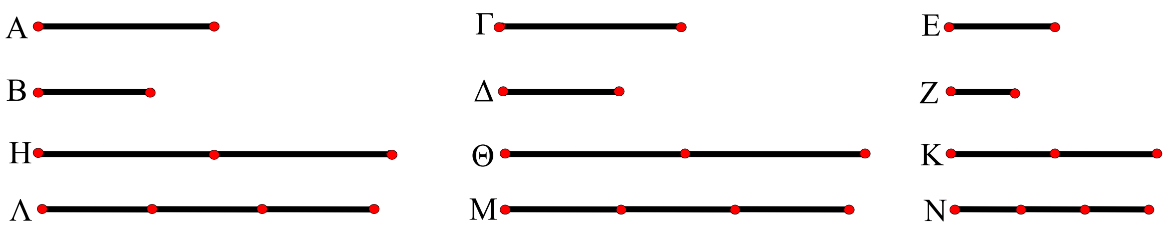
Έστω ότι ο λόγος του Α προς το Γ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Β προς Γ τότε αν το Α δεν είναι μεγαλύτερο του Β είτε θα είναι μικρότερο είτε θα είναι εφαρμόσιμο με το Β (Πρόταση 3.5). Εφαρμόσιμο δεν μπορεί να είναι καθώς τότε από την Πρόταση V.7 ο λόγος του Α προς το Γ θα ήταν ίσος με τον λόγο του Β προς το Γ, άτοπο. Επιπλέον δε μπορεί να είναι ούτε μικρότερο, διότι αν ήταν μικρότερο από την Πρόταση V.8 το μέγεθος Α προς το Γ θα είχε μικρότερο λόγο από τον λόγο του Β προς το Γ, άτοπο.

Έστω τώρα ότι ο λόγος του Γ προς το Β είναι μεγαλύτερος από το λόγο του Γ προς το Α, τότε θα δείξουμε ότι το Β είναι μικρότερο από το Α. Διότι αν δεν είναι μικρότερο θα είναι είτε μεγαλύτερο είτε εφαρμόσιμο (Πρόταση 3.5). Εφαρμόσιμο όμως δεν είναι καθώς τότε από την Πρόταση V.7 ο λόγος του Γ προς το Β θα ήταν μικρότερος από τον λόγο του Γ προς το Α, άτοπο από την υπόθεση. Έστω ότι το Β είναι μεγαλύτερο από το Α, από την Πρόταση V.8 το Γ προς το Β θα είχε μικρότερο λόγο από τον λόγο του Γ προς το Α, άτοπο από την υπόθεση. Επομένως αφού το Β δεν είναι ούτε εφαρμόσιμο ούτε μεγαλύτερο του Α τότε θα είναι μικρότερο του Α.

Σημείωση. Για πρώτη φορά ο Ευκλείδης στο πέμπτο βιβλίο των *Στοιχείων* αποδεικνύει κάποια πρόταση ξεκινώντας με την υπόθεση ότι κάποιος λόγος είναι μεγαλύτερος από κάποιον άλλο.

Πρόταση V.11. Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Αν ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ και ο λόγος του Γ προς το Δ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ, τότε ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς Ζ.



Θεωρούμε τα μεγέθη Η, Θ, Κ ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Γ, Ε και τα μεγέθη Λ, Μ, Ν ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ, Ζ αντίστοιχα. Αφού το Α προς το Β έχει τον ίδιο λόγο με το Γ προς το Δ και ελήφθησαν τα Η, Θ ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ και τα Λ, Μ ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ τότε από τον Ορισμό V.ε΄ αν το Η υπερέχει του Λ θα υπερέχει και το Θ του Μ, αν είναι ίσο τότε θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο τότε θα είναι μικρότερο. Όμοια επειδή το Γ προς το Δ έχει τον ίδιο λόγο με το Ε προς το Ζ και ελήφθησαν τα Θ, Κ ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ε και τα Μ, Ν ίσα πολλαπλάσια των Δ, Ζ τότε από τον Ορισμό V.ε΄ αν υπερέχει το Θ του Μ θα υπερέχει και το Κ του Ν, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο. Αλλά αν υπερέχει το Θ του Μ θα υπερέχει και το Η του Λ, αν είναι ίσο τότε θα είναι ίσο και αν είναι θα είναι μικρότερο. Ώστε αν υπερέχει το Η του Λ τότε θα υπερέχει και το Κ του Ν, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο. Επιπλέον τα Η, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Ε και τα Λ, Ν είναι ίσα πολλαπλάσια των Β, Ζ και άρα από τον Ορισμό V.ε΄ το Α προς το Β θα έχει τον ίδιο λόγο με το Ε προς το Ζ. Επομένως οι λόγοι οι οποίοι είναι ίσοι προς ένα λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι.

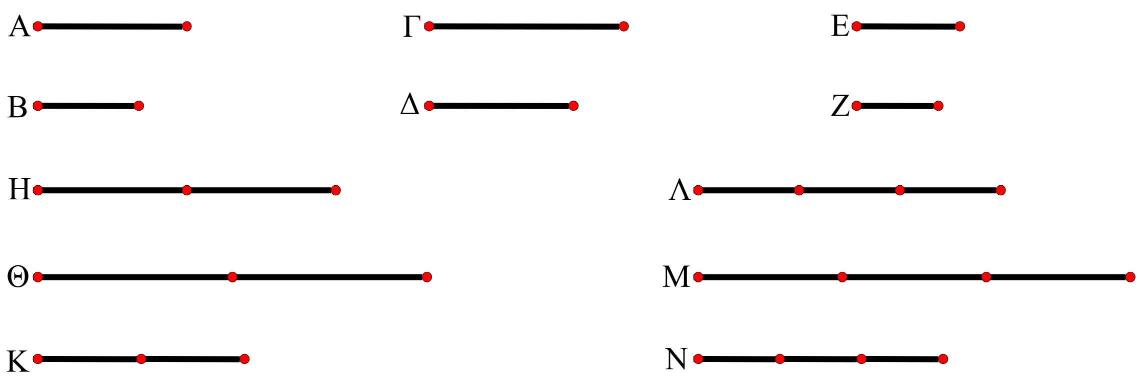
Σχόλια. Στην Πρόταση V.11 ο Ευκλείδης αποδεικνύει την ισχύ της μεταβατικότητας των ίσων λόγων (για μεγέθη). Η συγκεκριμένη πρόταση είναι ιδιαίτερα σημαντική για την θεωρία λόγων όπως αναπτύσσεται στα *Στοιχεία*, καθώς όπως θα δούμε και παρακάτω χρησιμοποιείται στις περισσότερες από τις προτάσεις που ακολουθούν.

Η αλγεβρική έκφραση της Πρότασης V.11 για τα μεγέθη α, β, γ, δ, ε, ζ είναι:

Αν $\alpha:\beta = \gamma:\delta$ και $\gamma:\delta = \varepsilon:\zeta$ τότε θα ισχύει $\alpha:\beta = \varepsilon:\zeta$.

Πρόταση V.12. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

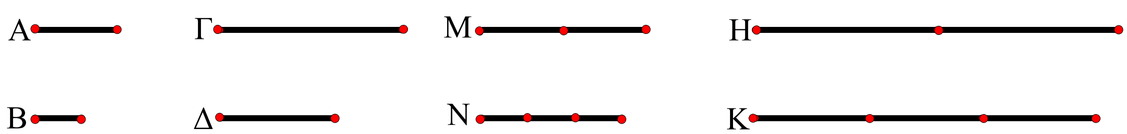
Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ώστε οι λόγοι του Α προς το Β, του Γ προς το Δ και του Ε προς το Ζ να είναι ίσοι, τότε θα δείξουμε ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος Α+Γ+Ε προς το άθροισμα Β+Δ+Ζ.
Θεωρούμε τα μεγέθη Η, Θ, Κ ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Γ, Ε



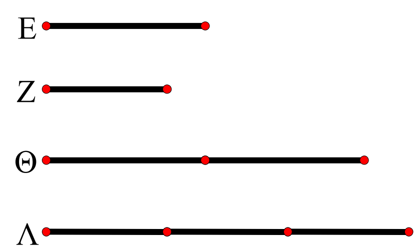
και τα μεγέθη Λ, Μ, Ν ώστε να είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Β, Δ, Ζ. Αφού το Α προς το Β έχει τον ίδιο λόγο με το Γ προς το Δ και με το Ε προς το Ζ και αφού ελήφθησαν τα Η, Θ, Κ ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ, Ε και τα Λ, Μ, Ν ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ, Ζ τότε από τον Ορισμό V.ε΄ αν υπερέχει το Η του Λ θα υπερέχει και το Θ του Μ και το Κ του Ν, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο. Ώστε αν υπερέχει το Η του Λ τότε από την Πρόταση 9.3 θα υπερέχει και το άθροισμα Η+Θ+Κ του αθροίσματος Λ+Μ+Ν, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο (Ορισμός V.ε΄). Επιπλέον τα Η, Θ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ, Ε και άρα από την Πρόταση V.1 το άθροισμα Η+Θ+Κ είναι τόσα πολλαπλάσια του αθροίσματος Α+Γ+Ε όσα είναι και τα πολλαπλάσια του Α στο Η. Όμοια και το άθροισμα Λ+Μ+Ν είναι τόσα πολλαπλάσια του αθροίσματος Β+Δ+Ζ όσα είναι και τα πολλαπλάσια του Β στο Λ και άρα ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος Α+Γ+Ε προς το άθροισμα Β+Δ+Ζ.

Πρόταση V.13. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ για τα οποία ισχύει ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ και ότι ο λόγος του Γ προς το Δ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ε προς το Ζ. Θα δείξουμε ότι ο λόγος του Α προς το Β



είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ε προς το Ζ. Επειδή ο λόγος του Γ προς το Δ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ε προς το Ζ τότε από τον Ορισμό V.ζ΄ υπάρχουν μεγέθη Η, Θ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Γ, Ε καθώς επίσης και μεγέθη Κ, Λ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Δ, Ζ για τα οποία

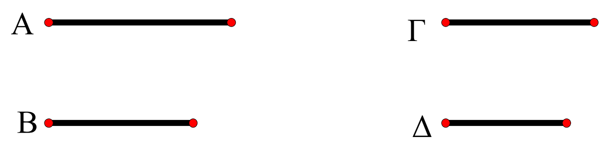


ισχύει ότι το αν το Η υπερέχει του Κ τότε το Θ δεν υπερέχει του Λ. Ακόμη θεωρούμε τα μεγέθη Μ, Ν για τα οποία ισχύει ότι τα μεγέθη Η, Μ είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Γ, Α και τα μεγέθη Κ, Ν είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Δ, Β.

Επειδή ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ και επιπλέον ελήφθησαν τα Μ, Η ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ καθώς επίσης και τα μεγέθη Ν, Κ ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ τότε αν το Μ υπερέχει του Ν, θα υπερέχει και το Η του Κ, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο (Ορισμός V.ε΄). Υπερέχει όμως το Η του Κ, άρα υπερέχει και το Μ του Ν. Το Θ όμως δεν υπερέχει του Λ (Ορισμός V.ζ΄) και τα μεγέθη Μ, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Ε και τα Ν, Λ είναι ίσα πολλαπλάσια των Β, Ζ. Επομένως ο λόγος του Α προς τα Β είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ε προς το Ζ.

Πρόταση V.14. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

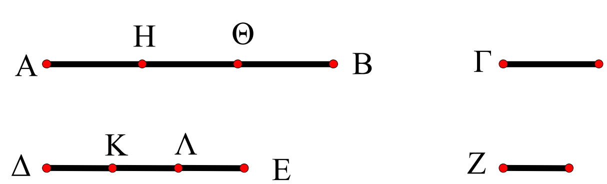
Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ και αν επιπλέον το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ τότε θα δείξουμε ότι το Β είναι μεγαλύτερο από το Δ.



Επειδή το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ και Β ένα τυχόν μέγεθος, τότε από την Πρόταση V.8 ο λόγος του Α προς το Β είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Β. Όμως ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ επομένως από την Πρόταση V.13 ο λόγος του Γ προς το Δ είναι μεγαλύτερος από το λόγο του Γ προς το Β. Συνεπώς από την Πρόταση V.10 το Β είναι μεγαλύτερο από το Δ.
Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το Α είναι ίσο με το Γ τότε το Β είναι ίσο με το Δ και ότι αν το Α είναι μικρότερο από το Γ το Β θα είναι μικρότερο από το Δ.

Πρόταση V.15. Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

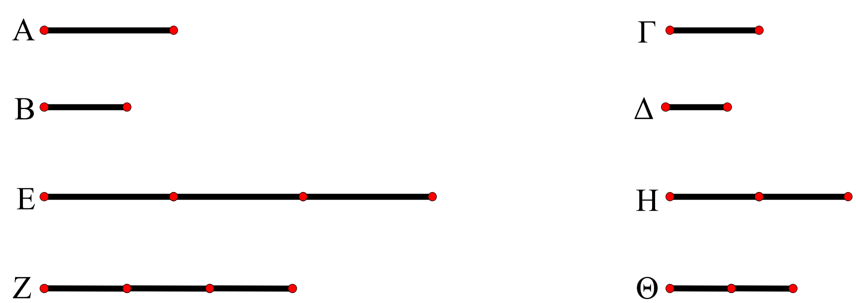
Απόδειξη. Έστω ΑΒ, ΔΕ ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ζ αντίστοιχα, τότε θα δείξουμε ότι ο λόγος του Γ προς το Ζ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΒ προς το ΔΕ.



Επειδή τα ΑΒ, ΔΕ είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ζ αντίστοιχα, τότε όσα μεγέθη εφαρμόσιμα με το Γ περιέχονται στο ΑΒ, τόσα θα είναι και τα μεγέθη εφαρμόσιμα με το Ζ που περιέχονται στο ΔΕ. Θεωρούμε τα μεγέθη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τα οποία ανήκουν στο ΑΒ και τα οποία είναι εφαρμόσιμα προς το Γ καθώς επίσης και τα εφαρμόσιμα μεγέθη προς το Ζ, τα ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ με ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ να είναι ίσα με το πλήθος των ΔΚ, ΚΛ και ΛΕ. Ακόμη τα ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ είναι εφαρμόσιμα μεταξύ τους όπως επίσης και τα ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ επομένως από την Πρόταση V.7 ο λόγος του ΑΗ προς το ΔΚ είναι ίσος με το λόγο του ΗΘ προς το ΚΛ και τον λόγο του ΘΒ προς το ΛΕ. Επομένως από την Πρόταση V.12 ο λόγος του ΑΗ προς το ΔΚ είναι ίσος με το λόγο του ΑΒ προς το ΔΕ, όμως το ΑΗ είναι εφαρμόσιμο με το Γ και το ΔΚ είναι εφαρμόσιμο με το Ζ και άρα ο λόγος του Γ προς το Ζ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΒ προς το ΔΕ.

Πρόταση V.16. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ, τότε θα δείξουμε ότι ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με το λόγο του Β προς το Δ.

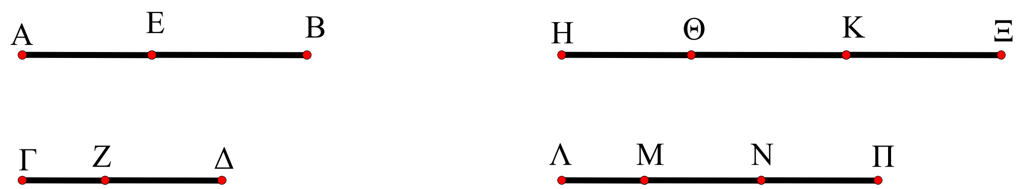


Θεωρούμε τα μεγέθη Ε, Ζ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β, και τα μεγέθη, Η, Θ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Δ. Αφού τα Ε, Ζ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β τότε από την Πρόταση V.15 ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ. Επιπλέον ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος του Γ προς το Δ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ. Όμοια από την Πρόταση V.15 ο λόγος του Η προς το Θ είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Δ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος του Ε προς το Ζ είναι ίσος με τον λόγο του Η προς το Θ, διότι ο λόγος του Γ προς το Δ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ. Στη συνέχεια από την Πρόταση V.14 στα τέσσερα μεγέθη Ε, Η, Ζ, Θ αν το υπερέχει Ε του Η θα υπερέχει και το Ζ του Θ, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο. Όμως τα Ε, Ζ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β καθώς επίσης και τα Η, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Δ και άρα ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Β προς το Δ.

Σχόλια. Η αλγεβρική έκφραση της παραπάνω πρότασης για τέσσερα μεγέθη α, β, γ, δ είναι: Αν α:β = γ:δ τότε α:γ = β:δ.

Πρόταση V.17. Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ και ΔΖ ώστε ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς το ΔΖ, θα δείξουμε ότι ο λόγος του ΑΕ προς το ΒΕ είναι ίσος με τον λόγο ΓΖ προς το ΔΖ.



Θεωρούμε τα μεγέθη ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ και ΜΝ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ και ΖΔ αντίστοιχα, καθώς επίσης και τα μεγέθη ΚΞ, ΝΠ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών ΕΒ, ΖΔ. Επειδή τα ΗΘ, ΘΚ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΕΒ τότε από την Πρόταση V.1 τα ΗΘ, ΗΚ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΑΒ. Επιπλέον τα ΗΘ, ΛΜ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΓΖ και άρα το ΗΚ είναι τόσα πολλαπλάσια του ΑΒ όσα και το ΛΜ του ΓΖ. Ακόμη τα ΛΜ, ΜΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ, ΖΔ και άρα από την Πρόταση V.1 τα ΛΜ, ΛΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ, ΓΔ. Επομένως τα ΗΚ, ΛΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, ΓΔ.

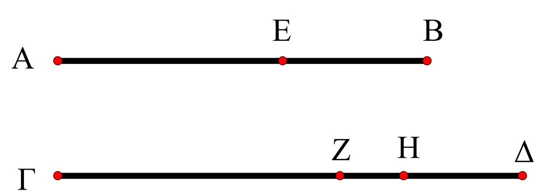
Στη συνέχεια επειδή τα ΘΚ, ΜΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ καθώς επίσης και τα ΚΞ, ΝΠ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ τότε από την Πρόταση V.2 τα ΘΞ, ΜΠ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ. Αφού ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς το ΖΔ και επιπλέον ελήφθησαν τα ΗΚ, ΛΝ ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, ΓΔ καθώς επίσης και τα ΘΞ, ΜΠ ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ τότε αν υπερέχει το ΗΚ του ΘΞ, θα υπερέχει και το ΛΝ του ΜΠ, αν είναι ίσο τότε θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο τότε θα είναι μικρότερο (Ορισμός V.ε΄).

Έστω ότι το ΗΚ υπερέχει του ΘΞ, αφαιρούμε το κοινό ΘΚ και άρα το ΗΘ υπερέχει του ΚΞ. Όμως αν υπερέχει το ΗΚ του ΘΞ τότε θα υπερέχει και το ΛΝ του ΜΠ, αφαιρούμε το κοινό ΜΝ και άρα το ΛΜ υπερέχει του ΝΠ. Επομένως αν υπερέχει το ΗΘ του ΚΞ υπερέχει και το ΛΜ του ΝΠ. Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το ΗΘ είναι ίσο με το ΚΞ τότε το ΛΜ είναι ίσο με το ΝΠ και αν το ΗΘ είναι μικρότερο του ΚΛ τότε το ΛΜ είναι μικρότερο του ΝΠ. Όμως τα ΗΘ, ΛΜ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΓΖ και τα ΚΞ, ΝΠ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ και άρα ο λόγος του ΑΕ προς το ΕΒ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΖ προς το ΖΔ.

Σχόλια. Στην Πρόταση V.17 των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι αν έχουμε δύο μεγέθη που αποτελούνται από δύο μέρη με τον λόγο του πρώτου μεγέθους προς το ένα μέρος του να είναι ίσος με τον λόγο του δευτέρου μεγέθους προς το ένα μέρος του, τότε ο λόγος του άλλου μέρους του πρώτου μεγέθους προς το πρώτο μέρος είναι ίσος με τον λόγο του άλλου μέρους του δεύτερου μεγέθους προς το πρώτο μέρος. Επειδή η παραπάνω πρόταση όπως διατυπώνεται μπορεί να μη γίνει πλήρως κατανοητή ακολουθεί η αλγεβρική έκφρασή της μέσω της οποίας θα την κατανοήσουμε καλύτερα.
Έστω τα μεγέθη α, β, γ, δ με (α+β):β=(γ+δ):δ τότε α:β=γ:δ.

Πρόταση V.18. Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Απόδειξη.Έστω τα διαιρεθέντα μεγέθη ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ώστε ο λόγος του ΑΕ προς το ΕΒ να είναι ίσος με τον λόγο του ΓΖ προς το ΖΔ, θα δείξουμε ότι και ο λόγος του ΑΒ προς το ΕΒ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς το ΖΔ.

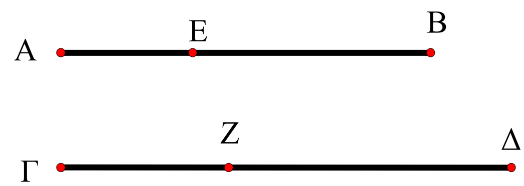


Διότι αν ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ δεν είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς το ΔΖ τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ θα είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς ένα μικρότερο μέγεθος του ΔΖ είτε προς ένα μεγαλύτερο μέγεθος του ΔΖ. Έστω ότι ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς το ΔΗ ώστε ΔΗ < ΔΖ και $Ζ*Η*Δ$. Επομένως από την Πρόταση V.17 ο λόγος του ΑΕ προς το ΕΒ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΗ προς το ΗΔ. Επιπλέον από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος του ΑΕ προς το ΕΒ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΖ προς το ΖΔ.

Επομένως από την Πρόταση V.11 ο λόγος του ΓΗ προς το ΗΔ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΖ προς το ΖΔ, όμως το πρώτο μέγεθος ΓΗ είναι μεγαλύτερο του τρίτου ΓΖ και άρα από την Πρόταση V.14 το δεύτερο μέγεθος ΗΔ είναι μεγαλύτερο του τετάρτου ΖΔ. Άτοπο, διότι ΗΔ < ΖΔ. Όμοια αποδεικνύουμε και ότι ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ δεν είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς ένα μεγαλύτερο μέγεθος του ΖΔ και άρα ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΕ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΔ προς το ΖΔ.

Πρόταση V.19. Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Απόδειξη. Έστω ότι ο λόγος του όλου ΑΒ προς το όλον ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του αφαιρεθέντος ΑΕ προς το αφαιρεθέν ΓΖ, θα δείξουμε ότι και ο λόγος του υπόλοιπου ΕΒ προς το υπόλοιπο ΖΔ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΒ προς το ΓΔ.



Αφού ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΕ προς το ΓΖ τότε από την Πρόταση V.16 (εναλλάξ) ο λόγος του ΒΑ προς το ΑΕ είναι ίσος με τον λόγο του ΔΓ προς το ΓΖ. Επιπλέον από την Πρόταση V.17 (στα προστεθέντα μεγέθη ΑΕ, ΕΒ και ΓΖ, ΖΔ) ο λόγος του ΒΕ προς το ΕΑ είναι ίσος με τον λόγο του ΔΖ προς το ΓΖ και άρα από την εναλλάξ ο λόγος του ΒΕ προς το ΔΖ είναι ίσος με το ΕΑ προς το ΖΓ. Από την υπόθεση όμως ισχύει ότι ο λόγος του ΑΕ προς το ΓΖ είναι ίσος με τον λόγο ΑΒ προς το ΓΔ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος του υπόλοιπου ΕΒ προς το υπόλοιπο ΖΔ είναι ίσος με τον λόγο του όλου ΑΒ προς το όλον ΓΔ.

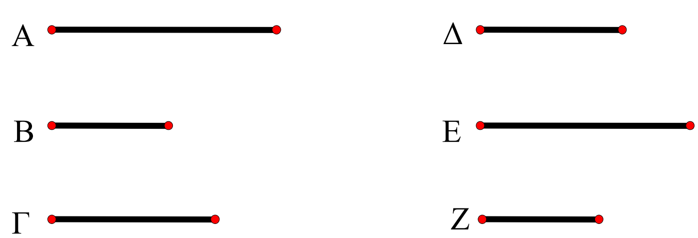
Πρόταση V.20. Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγω, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Απόδειξη. Έστω τρία μεγέθη Α, Β, Γ και άλλα τόσα μεγέθη Δ, Ε, Ζ ώστε ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε και ο λόγος του Β προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ, θα δείξουμε ότι αν το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ τότε και το Δ είναι μεγαλύτερο από το Ζ, αν το Α είναι ίσο με το Γ τότε το Δ είναι ίσο με το Ζ και αν το Α είναι μικρότερο από το Γ τότε το Δ είναι μικρότερο από το Ζ.

Έστω ότι το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ, τότε από την Πρόταση V.8 ο λόγος του Α προς το Β είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Β. Ακόμη ο λόγος του Β προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ, επομένως από την Πρόταση V.7 (Πόρισμα) ο λόγος του Γ προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Ζ προς το Ε και άρα ο λόγος του Α προς το Β είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ζ προς το Ε. Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε και άρα ο λόγος του Δ προς το Ε είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ζ προς το Ε. Επομένως από την Πρόταση V.10 το Δ είναι μεγαλύτερο από το Ζ. Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το Α είναι ίσο με το Γ τότε και το Δ είναι ίσο με το Ζ και αν το Α είναι μικρότερο από το Γ τότε το Δ είναι μικρότερο του Ζ.

Πρόταση V.21. Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

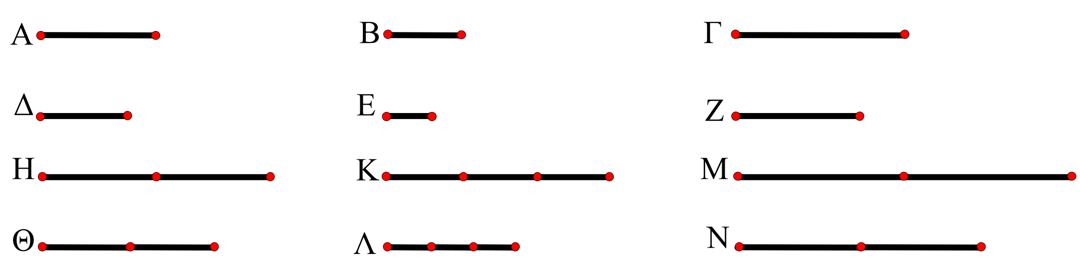
Απόδειξη. Έστω τρία μεγέθη Α, Β, Γ και άλλα τόσα μεγέθη Δ, Ε, Ζ ώστε ο λόγος του Α προς το Β να είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ και ο λόγος του Β προς το Γ να είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε, θα δείξουμε ότι αν το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ τότε και το Δ είναι μεγαλύτερο του Ζ και αν το Α είναι ίσο με το Γ τότε το Δ είναι ίσο με το Ζ και αν το Α είναι μικρότερο από το Γ τότε το Δ είναι μικρότερο από το Ζ.



Έστω ότι το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ τότε από την Πρόταση V.8 ο λόγος του Α προς το Β είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Β. Επιπλέον από την υπόθεση έχουμε ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ και από την Πρόταση V.7 (πόρισμα) ο λόγος του Γ προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε και άρα ο λόγος του Ε προς το Ζ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Ε προς το Δ. Επομένως από την Πρόταση V.10 θα ισχύει ότι το Ζ είναι μικρότερο από το Δ και άρα το Δ είναι μεγαλύτερο από το Ζ, όμοια αποδεικνύονται και οι περιπτώσεις στις οποίες είτε το Α είναι ίσο με το Γ είτε το Α είναι μικρότερο από το Γ.

Πρόταση V.22. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύν δυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ και τα ίσα σε πλήθος μεγέθη Δ, Ε, Ζ ώστε ο λόγος του Α προς το Β να είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε καθώς επίσης και ο λόγος του Β προς το Γ να είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ, θα δείξουμε ότι και ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ζ.



Έστω τα μεγέθη Η, Θ, Κ, Λ, Μ και Ν για τα οποία ισχύει ότι τα Η, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Δ, τα Κ, Λ είναι ίσα πολλαπλάσια των Β, Ε και τα Μ, Ν είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ και Ζ. Αφού ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε και επιπλέον ελήφθησαν τα ίσα πολλαπλάσια Η, Θ, Κ, Λ των μεγεθών Α, Δ, Β και Ε αντίστοιχα τότε από την Πρόταση V.4 ο λόγος του Η προς το Κ είναι ίσος με τον λόγο του Θ προς το Λ. Όμοια ο λόγος του Κ προς το Μ είναι ίσος με τον λόγο του Λ προς το Ν. Επειδή λοιπόν υπάρχουν τρία μεγέθη Η, Κ, Μ και άλλα τόσα στο πλήθος Θ, Λ, Ν και ληφθέντα ανά δύο έχουν τον ίδιο λόγο τότε από την Πρόταση V.20 αν το Η υπερέχει του Μ θα υπερέχει και το Θ του Ν, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο. Όμως τα Η, Θ, Μ και Ν είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Δ, Γ και Ζ αντίστοιχα επομένως από τον Ορισμό V.ε΄ ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ζ.

Σχόλια. Ο Ευκλείδης διατυπώνει την Πρόταση V.22 ως αληθή για κάθε πλήθος μεγεθών δημιουργώντας δύο σύνολα συνδεδεμένα με τον τρόπο που περιγράφηκε, αλλά η απόδειξή του είναι περιορισμένη στην περίπτωση στην οποία κάθε σύνολο αποτελείται από τρία μεγέθη μόνο. Η επέκταση σε οποιοδήποτε πλήθος μεγεθών, παρ' όλα αυτά, είναι εύκολη και γίνεται από τον Simson.

Έστω ότι έχουμε τέσσερα μεγέθη A, B, C, D και άλλα τέσσερα E, F, G, H έτσι ώστε

Το A προς το B να είναι ίσο με το E προς το F,

το B προς το C να είναι ίσο με το F προς το G και

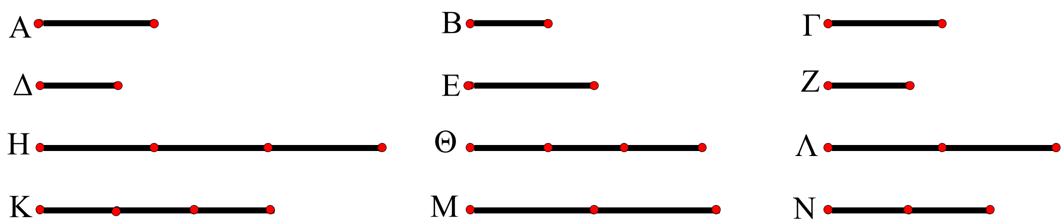
το C προς το D να είναι ίσο με το G προς το H, τότε το A προς το D θα είναι ίσο με το E προς το H.

Επειδή τα A, B, C είναι τρία μεγέθη και τα E, F, G άλλα τρία τα οποία ανά δύο έχουν τον ίδιο λόγο, από την προηγούμενη περίπτωση, το A προς το C είναι ίσο με το E προς το G [S].

Πρόταση V.23. Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ και τα ίσα κατά πλήθος μεγέθη Δ, Ε, Ζ, για τα οποία ισχύει ότι ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ και ότι ο λόγος του Β προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε, θα δείξουμε ότι ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ζ.

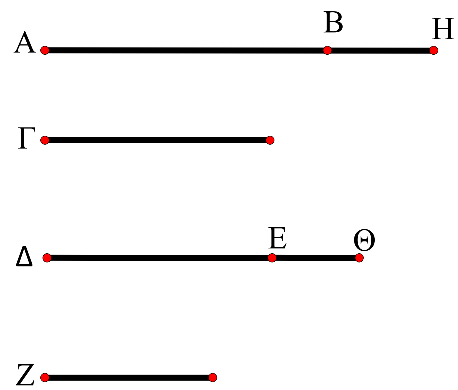
Έστω τα μεγέθη Η, Θ, Κ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Α, Β, Δ και τα Λ, Μ, Ν ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Γ, Ε, Ζ. Επειδή τα Η, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β από την Πρόταση V.15 ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Η προς το Θ, όμοια ο λόγος του Ε προς το Ζ είναι ίσος με τον λόγο του Μ προς το Ν. Ακόμη από την υπόθεση ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ, επομένως από την Πρόταση V.11 ο λόγος του Η προς το Θ είναι ίσος με τον λόγο Μ προς το Ν. Στη συνέχεια επειδή ο λόγος του Β προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε τότε από την Πρόταση V.16 (εναλλάξ) ο λόγος του Β προς το Δ είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Ε.



Επιπλέον τα Θ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ επομένως από την Πρόταση V.15 ο λόγος του Β προς το Δ είναι ίσος με τον λόγο του Θ προς το Κ. Από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος του Β προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ε και άρα από την Πρόταση V.16 ο λόγος του Β προς το Δ είναι ίσος με τον λόγο του Γ προς το Ε. Ακόμη από την Πρόταση V.15 ο λόγος του Γ προς το Ε είναι ίσος με τον λόγο του Λ προς το Μ. Από την Πρόταση V.11 ο λόγος του Γ προς το Ε είναι ίσος με τον λόγο του Θ προς το Κ και άρα πάλι από την Πρόταση V.11 ο λόγος του Θ προς το Κ είναι ίσος με τον λόγο του Λ προς το Μ και από την Πρόταση V.16 (εναλλάξ) ο λόγος του Θ προς το Λ είναι ίσος με τον λόγο του Κ προς το Μ. Δείξαμε όμως ότι ο λόγος του Η προς το Θ είναι ίσος με τον λόγο του Μ προς το Ν και άρα τα μεγέθη Η, Θ, Λ και τα ίσα κατά πλήθος μεγέθη αυτών Κ, Μ, Ν ανά δύο έχουν ίσους λόγους και η αναλογία αυτών είναι τεταραγμένη, τότε από τον ορισμό 8 ισχύει η δι' ίσου, επομένως από την Πρόταση V.21 αν υπερέχει το Η του Λ θα υπερέχει και το Κ του Ν, αν είναι ίσο θα είναι ίσο και αν είναι μικρότερο θα είναι μικρότερο. Όμως τα Η, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Δ και τα Λ, Ν είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Ζ. Επομένως από τον ορισμό 5 ο λόγος του Α προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του Δ προς το Ζ.

Πρόταση V.24. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη ΑΒ, Γ, ΔΕ, Ζ, ΒΗ και ΕΘ για τα οποία ισχύει ότι ο λόγος του ΑΒ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο ΔΕ προς το Ζ καθώς επίσης ο λόγος του ΒΗ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του ΕΘ προς το Ζ. Θα δείξουμε ότι ο λόγος του αθροίσματος των ΑΒ+ΒΗ ≅ ΑΗ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος ΔΕ+ΕΘ ≅ ΔΘ προς το Ζ.

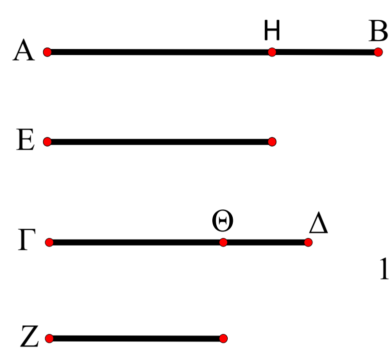


Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο λόγος του ΒΗ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του ΕΘ προς το Ζ, επομένως από την Πρόταση V.7 (Πόρισμα) ο λόγος του Γ προς το ΒΗ είναι ίσος με τον λόγο του Ζ προς το ΕΘ. Επιπλέον ο λόγος του ΑΒ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του ΔΕ προς το Ζ και αφού ο λόγος του Γ προς το ΒΗ είναι ίσος με τον λόγο του Ζ προς το προς το ΕΘ από την Πρόταση V.22 ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΗ είναι ίσος με τον λόγο του ΔΕ προς το ΕΘ. Ακόμη από την Πρόταση V.18 έπεται ότι ο λόγος του αθροίσματος ΑΒ+ΒΗ ≅ ΑΗ προς το ΗΒ είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος ΔΕ+ΕΘ ≅ ΔΘ προς το ΘΕ όμως ο λόγος του ΒΗ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του ΕΘ προς το Ζ και άρα από την Πρόταση V.22 ο λόγος του ΑΗ προς το Γ είναι ίσος με τον λόγο του ΔΘ προς το Ζ.

Πρόταση V.25. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ, Ε και Ζ ώστε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ, επιπλέον υποθέτουμε ότι το μεγαλύτερο από τα δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα είναι το ΑΒ και μικρότερο το Ζ. Θα δείξουμε ότι το άθροισμα ΑΒ+Ζ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα ΓΔ+Ε.

Αφού ΑΒ>Ε και ΓΔ>Ζ τότε εξ ορισμού υπάρχουν σημεία Η, Θ τα οποία ανήκουν στα ΑΒ, ΓΔ



αντίστοιχα τέτοια ώστε $AH \cong E$ και $\Gamma\Theta \cong Z$. Επειδή λοιπόν ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του Ε προς το Ζ και αφού $AH \cong E$ και $\Gamma\Theta \cong Z$ τότε ο λόγος του ΑΒ προς το ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΗ προς το ΓΘ. Στη συνέχεια αφού ο λόγος του όλου ΑΒ προς το όλον ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΗ προς το ΓΘ τότε από την Πρόταση V.19 και ο λόγος του υπολοίπου ΗΒ προς το υπόλοιπο ΘΔ είναι ίσος με τον λόγο του ΑΒ προς το ΓΔ. Όμως το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ άρα το ΗΒ είναι μεγαλύτερο από του ΘΔ και επειδή $AH \cong E$ και $\Gamma\Theta \cong Z$ τότε $AH + Z \cong \Gamma\Theta + E$. Ακόμη ΗΒ>ΘΔ, επομένως από την Πρόταση 9.3 έπεται ότι ΒΗ+ΑΗ+Ζ>ΘΔ+ΓΘ+Ε και άρα ΑΒ+Ζ>ΓΔ+Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Ορισμός παραλλήλων,
πέμπτο Αίτημα
και *Προτάσεις Ι.27-Ι.33*
των *Στοιχείων*.

Το παρόν Κεφάλαιο πραγματεύεται την έννοια των παράλληλων ευθειών σύμφωνα με τον ορισμό που εμφανίζεται στα *Στοιχεία*. Ακόμη διατυπώνουμε το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων* και θα αποδείξουμε τις Προτάσεις Ι.27-Ι.33 με βάση την αξιωματική θεμελίωση Hilbert με τη διαφορά ότι θα χρησιμοποιήσουμε το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων* και όχι το ισοδύναμο του, αξίωμα του Playfair (P) όπως πράττει ο Hilbert στην αξιωματική του θεμελίωση.

Ορισμός παραλλήλων

Δύο διαφορετικές ευθείες είναι παράλληλες αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Θα λέμε επίσης ότι κάθε ευθεία είναι παράλληλη στον εαυτό της.

Ὅρος κγ΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Όσον αφορά την έννοια των παραλλήλων για τον Αριστοτέλη είναι των ευθειών που δεν τέμνονται, όπως και στον Ευκλείδη. Έτσι ο Αριστοτέλης παρατηρεί ότι δεν υπάρχει τίποτα που θα έπρεπε να μας εκπλήσσει στο ότι διαφορετικές υποθέσεις μπορούν να οδηγούν στο ίδιο σφάλμα, αφού κάποιος μπορεί να οδηγηθεί στο συμπέρασμα ότι παράλληλες μπορεί να τέμνονται αν ξεκινήσει είτε από την υπόθεση:
(α) ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από κάποια απ᾽ τις απέναντι εσωτερικές, είτε (β) ότι οι γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από δύο ορθές.

Ένας άλλος ορισμός αποδίδεται από τον Πρόκλο στον Ποσειδώνιο, σύμφωνα με τον οποίο "*παράλληλες είναι εκείνες οι οποίες, όντας στο ίδιο επίπεδο, ούτε συγκλίνουν, ούτε αποκλίνουν, αλλά έχουν όλες τις κάθετες που φέρονται από τα σημεία της μίας ευθείας προς την άλλη, ίσες*, ενώ οι ευθείες που κάνουν τις κάθετες συνεχώς να μικραίνουν συγκλίνουν μεταξύ τους. Διότι η κάθετη αρκεί για να ορίσει τις αποστάσεις μεταξύ ευθειών. Για το λόγο αυτό, όταν οι κάθετες είναι ίσες, οι αποστάσεις μεταξύ των ευθειών είναι ίσες, αλλά όταν μεγαλώνουν και μικραίνουν, το διάστημα ελαττώνεται και οι ευθείες συγκλίνουν μεταξύ τους στην κατεύθυνση στην οποία βρίσκονται οι μικρότερες κάθετες."

Για να έρθουμε τώρα στη σύγχρονη περίοδο, κατά τον Heath μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους διαφορετικούς ορισμούς που έχουν δοθεί για τις παράλληλες σε τρεις κατηγορίες.

Οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Κάτω από αυτή τη γενική αντίληψη μπορούν να συμπεριληφθούν οι ακόλουθες παραλλαγές:

(α) *δεν τέμνονται,*

(β) *συναντιούνται στο άπειρο*

(γ) *έχουν κοινό σημείο στο άπειρο.*

Οι παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια, ή όμοια, κατεύθυνση ή κατευθύνσεις, μέσα στην οποία κλάση ορισμών πρέπει να συμπεριληφθούν και εκείνοι που εισάγουν τις τέμνουσες και λένε ότι οι παράλληλες *δημιουργούν ίσες γωνίες με μια τέμνουσα*.

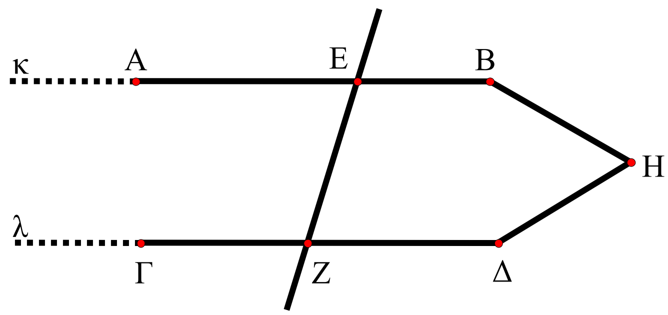
Οι παράλληλες ευθείες έχουν την μεταξύ τους απόσταση σταθερή. Με αυτή την κατηγορία μπορούμε να συνδέσουμε την προσπάθεια να εξηγηθεί μια παράλληλη ως *ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που ισαπέχουν από μια ευθεία.*

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Ι.27-Ι.33 των Στοιχείων

Στη συνέχεια ακολουθούν οι Προτάσεις Ι.27-Ι.33 των *Στοιχείων* καθώς επίσης και το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων* το οποίο θα διατυπωθεί πριν την Πρόταση Ι.29, σε εκείνο δηλαδή το σημείο στο οποίο χρησιμοποιείται για πρώτη φορά.

Πρόταση Ι.27. Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ έτσι ώστε $A*E*B$ και $\Gamma*Z*\Delta$ με Ε, Ζ διαφορετικά μεταξύ τους. Αν ισχύει $A\hat{E}Z \cong E\hat{Z}\Delta$ τότε θα δείξουμε ότι οι ευθείες στις οποίες ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα Β, ΓΔ είναι παράλληλες.

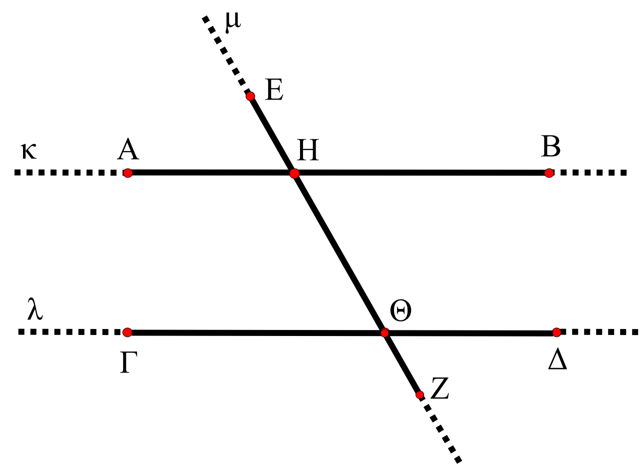


Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν οι μοναδικές ευθείες κ, λ ώστε στην κ να ανήκουν τα σημεία Α, Β και στην λ να ανήκουν τα σημεία Γ, Δ. Έστω ότι οι κ, λ δεν είναι παράλληλες, τότε θα τέμνονται σε ένα σημείο, έστω Η το σημείο τομής. Τότε στο τρίγωνο ΕΖΗ από την υπόθεση θα ισχύει $A\hat{E}Z \cong E\hat{Z}H$. Άτοπο, διότι από την Πρόταση Ι.16 σε κάθε τρίγωνο η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές, επομένως οι κ, λ είναι παράλληλες.

Σχόλια. Η απόδειξη που παραθέτουμε με βάση την αξιωματική θεμελίωση Hilbert δεν διαφοροποιείται σε κανένα σημείο από εκείνη των *Στοιχείων* εκτός από το σημείο ύπαρξης των ευθειών κ, λ μέσω του αξιώματος (Ι.1).

Πρόταση Ι.28. Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και ΗΘ έτσι ώστε $Α*Η*Β$, $Γ*Θ*Δ$ με Η, Θ διαφορετικά μεταξύ τους. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν ευθείες κ, λ, μ ώστε στην κ να ανήκουν τα Α, Β στην λ να ανήκουν τα Γ, Δ και στην μ να ανήκουν τα Η, Θ. Τότε από το αξίωμα (Β.3) υπάρχουν σημεία Ζ, Ε τα οποία ανήκουν στην μ και για τα οποία ισχύει $Η*Θ*Ζ$ και $Θ*Η*Ε$.



Αν επιπλέον ισχύει ότι $Ε\hat{Η}Β \cong Η\hat{Θ}Δ$ θα δείξουμε ότι οι κ, λ είναι παράλληλες. Διότι από την Πρόταση Ι.15 θα ισχύει $Ε\hat{Η}Β \cong Α\hat{Η}Θ$, ως κατακορυφήν, και αφού $Ε\hat{Η}Β \cong Η\hat{Θ}Δ$ τότε από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει $Α\hat{Η}Θ \cong Η\hat{Θ}Δ$ και άρα από την Πρόταση Ι.27 έπεται ότι οι κ, λ είναι παράλληλες.

Έστω τώρα ότι $Β\hat{Η}Θ + Η\hat{Θ}Δ \cong$ 2 ορθές, επομένως από την Πρόταση 7.2 η $Η\hat{Θ}Δ$ είναι εφαρμόσιμη με την παραπληρωματική της $Β\hat{Η}Θ$, $Α\hat{Η}Θ \cong Η\hat{Θ}Δ$ και άρα από την Πρόταση Ι.27 έπεται ότι κ, λ παράλληλες.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μεταβατικότητα των γωνιών μέσω της κοινής έννοιας α΄, ενώ εμείς οδηγούμαστε στο ότι $Α\hat{Η}Θ \cong Η\hat{Θ}Δ$ δεδομένου ότι $Ε\hat{Η}Β \cong Α\hat{Η}Θ$ και $Ε\hat{Η}Β \cong Η\hat{Θ}Δ$ μέσω του αξιώματος (C.5). Επιπλέον ισχύει $Β\hat{Η}Θ + Η\hat{Θ}Δ \cong$ 2 ορθές και $Α\hat{Η}Θ + Β\hat{Η}Θ \cong$ 2 ορθές επομένως ο Ευκλείδης χρημοποιώντας την κοινή έννοιας γ΄ συμπεραινει ότι $Α\hat{Η}Θ \cong Η\hat{Θ}Δ$, ενώ με βάση τη θεμελίωση Hilbert οδηγούμαστε στο παραπάνω συμπέρασμα μέσω της Πρότασης 7.2 στην οποία έχουμε δείξει ότι οι παραπληρωματικές γωνίες εφασμόσιμων γωνιών είναι εφαρμόσιμες.

Αίτημα 5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Σημείωση. Στη λίστα των Αιτημάτων των *Στοιχείων* το πέμπτο Αίτημα είναι εκείνο το οποίο έχει δεχθεί τις περισσότερες ανεπιτυχείς προσπάθειες απόδειξης του κάτι το οποίο καταδεικνύει την ευφυΐα εκείνου του οποίου διέκρινε ότι οφείλει να συμπεριληφθεί ως αξίωμα.

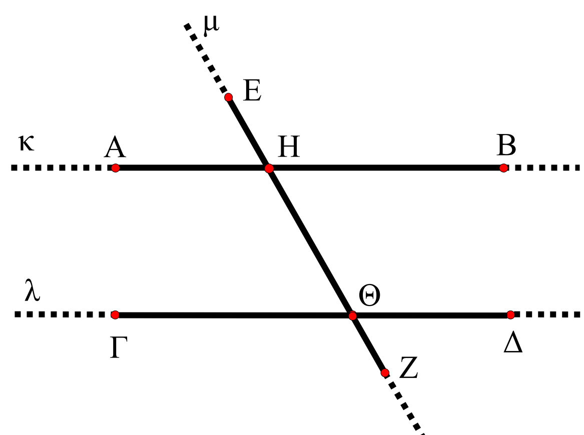
Χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην Πρόταση Ι.29 η οποία είναι η αντίστροφη της Ι.27, αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες. Διότι αν δεν είναι ίσες από το πέμπτο Αίτημα οι ευθείες θα τέμνονται. Εντύπωση όμως προκαλεί η θέση της Ι.31, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται παράλληλη προς την ευθεία, η οποία τοποθετείται από τον Ευκλείδη μετά την Ι.29 δεδομένου ότι δεν χρησιμοποιεί Αίτημα 5. Ενδεχόμενη απάντηση στην παραπάνω παρατήρηση είναι ότι ακόμη και αν δεν το αναφέρει ο Ευκλείδης, μέσω της Ι.29 μπορεί να αποδειχθεί η μοναδικότητα της παράλληλης από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία. Επομένως χρησιμοποιώντας το πέμπτο Αίτημα μπορούμε να αποδείξουμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Ρ. Για κάθε σημείο Α και ευθεία λ, υπάρχει μοναδική παράλληλη η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τη λ.

Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι γνωστός ως το αξίωμα του Playfair, αν και ήδη εμφανίζεται στα σχόλια του Πρόκλου για τα *Στοιχεία*. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert χρησιμοποιείται το αξίωμα Ρ, ενώ εμείς μη παρεκκλίνοντας από το πνεύμα των Στοιχείων ει δυνατόν χρησιμοποιούμε το πέμπτο Αίτημα .

Πρόταση Ι.29. Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Απόδειξη. Έστω οι παράλληλες ευθείες ΑΒ = κ, ΓΔ = λ και η ευθεία ΗΘ = μ η οποία τέμνει την κ στο σημείο Η και την λ στο σημείο Θ. Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχουν τα σημεία Ε, Ζ τα οποία ανήκουν στην μ και για τα οποία ισχύει $\Theta * H * E$ και $H * \Theta * Z$. Θα δείξουμε ότι $A\hat{H}\Theta \cong H\hat{\Theta}\Delta$, $E\hat{H}B \cong H\hat{\Theta}\Delta$ και ότι οι γωνίες $B\hat{H}\Theta$ και $H\hat{\Theta}\Delta$ έχουν άθροισμα δύο ορθές.



Έστω ότι οι γωνίες $A\hat{H}\Theta$ και $H\hat{\Theta}\Delta$ δεν είναι εφαρμόσιμες, τότε από την Πρόταση 7.6 (β.ii) θα ισχύει είτε $A\hat{H}\Theta > H\hat{\Theta}\Delta$ είτε $A\hat{H}\Theta < H\hat{\Theta}\Delta$, υποθέτουμε ότι $A\hat{H}\Theta > H\hat{\Theta}\Delta$, επομένως για την $H\hat{\Theta}\Delta$ και την παραπληρωματική της $A\hat{H}\Theta$ την $B\hat{H}\Theta$ θα ισχύει $H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta < 2$ ορθές (Πρόταση 7.2). Συνεπώς από το πέμπτο Αίτημα οι ευθείες ΑΒ = κ και ΓΔ = λ τέμνονται. Άτοπο, διότι από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι οι ευθείες κ, λ είναι παράλληλες. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει $A\hat{H}\Theta < H\hat{\Theta}\Delta$ και άρα θα ισχύει ότι $A\hat{H}\Theta \cong H\hat{\Theta}\Delta$.

Επιπλέον από την Πρόταση Ι.15 ισχύει $A\hat{H}\Theta \cong E\hat{H}B$, όμως δείξαμε προηγουμένως ότι $A\hat{H}\Theta \cong H\hat{\Theta}\Delta$ και άρα από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει $E\hat{H}B \cong H\hat{\Theta}\Delta$. Τέλος, αφού η $H\hat{\Theta}\Delta$ είναι εφαρμόσιμη με την παραπληρωματική της $B\hat{H}\Theta$ τότε θα ισχύει ότι $H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta \cong 2$ ορθές (Πρόταση 7.2).

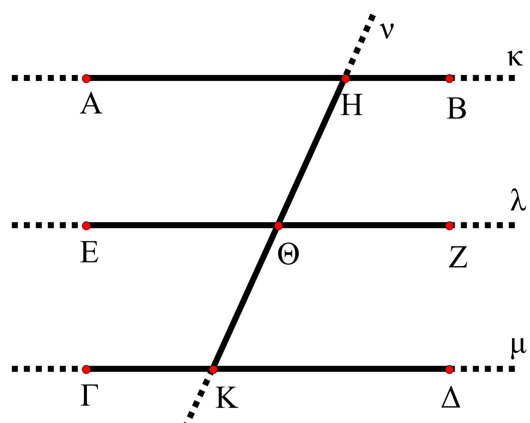
Σχόλια. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.29 των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης υποθέτει ότι οι γωνίες $A\hat{H}\Theta$ και $H\hat{\Theta}\Delta$ είναι άνισες και άρα θα ισχύει είτε $A\hat{H}\Theta > H\hat{\Theta}\Delta$ είτε $A\hat{H}\Theta <$

$\mathrm{H\hat{\Theta}\Delta}$ χωρίς όμως να έχει αναφέρει προηγουμένως ότι για οποιεσδήποτε δύο γωνίες μπορεί να ισχύει ακριβώς μία από τις παραπάνω σχέσεις. Κάτι το οποίο για εμάς αποτελεί πρόταση την οποία έχουμε αποδείξει. Στη συνέχεια ο Ευκλείδης οδηγείται στο ότι $\mathrm{H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta} < 2$ ορθές και άρα από το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων* οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται μέσω της κοινής έννοιας β΄ και της Πρότασης Ι.13. Εμείς στηριχτήκαμε στην Πρόταση 7.2 καθώς όπως αναφέρουμε και προηγουμένως στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert το άθροισμα γωνιών δεν είναι πάντοτε γωνία. Επιπλέον στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης οδηγείται στο ότι $\mathrm{E\hat{H}B \cong H\hat{\Theta}\Delta}$ και στο ότι $\mathrm{H\hat{\Theta}\Delta + B\hat{H}\Theta} \cong$ 2 ορθές μέσω των κοινών εννοιών α΄ και β΄ και της Πρότασης Ι.13, ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα (C.5) και την Πρόταση 7.2.

Σημείωση. Χρήση για πρώτη φορά του πέμπτου Αιτήματος των *Στοιχείων*.

Πρόταση Ι.30. Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

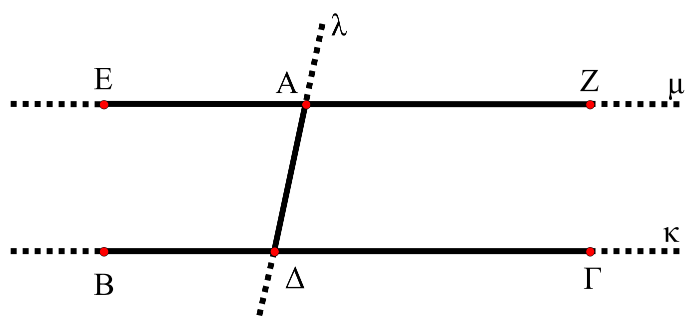
Απόδειξη. Έστω οι ευθείες ΑΒ = κ, ΕΖ = λ και ΓΔ = μ, για τις οποίες ισχύει ότι η κ είναι παράλληλη στην λ και ότι η λ είναι παράλληλη στην μ και οι οποίες τέμνονται από την ΗΚ = ν, ώστε η ν να τέμνει την κ στο Η, την λ στο Θ και την μ στο Κ. Επειδή οι ευθείες κ, λ είναι παράλληλες και τέμνονται από την ν τότε από την Πρόταση Ι.29 ισχύει $\mathrm{A\hat{H}\Theta \cong H\hat{\Theta}Z}$. Ακόμη επειδή οι ευθείες λ, μ είναι παράλληλες και τέμνονται από την ν από την Πρόταση Ι.29 ισχύει $\mathrm{H\hat{\Theta}Z \cong \Theta\hat{K}\Delta}$. Αφού $\mathrm{A\hat{H}\Theta \cong H\hat{\Theta}Z}$ και $\mathrm{H\hat{\Theta}Z \cong \Theta\hat{K}\Delta}$ τότε από την Πρόταση 7.1 (μεταβατικότητα για γωνίες) θα ισχύει $\mathrm{A\hat{H}\Theta \cong \Theta\hat{K}\Delta}$, επομένως από την Πρόταση Ι.27 έπεται ότι οι ευθείες κ, μ είναι παράλληλες.



Σχόλια. Στο μοναδικό σημείο το οποίο διαφοροποιείται η απόδειξη η οποία παραθέτουμε εμείς με βάση τη θεμελίωση Hilbert σε σχέση με εκείνη των *Στοιχείων* είναι ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μεταβατικότητα των γωνιών μέσω της κοινής έννοιας α΄, ενώ εμείς οδηγούμαστε στο ότι $A\hat{H}\Theta \cong \Theta\hat{K}\Delta$ μέσω του αξιώματος (C.5).

Πρόταση Ι.31. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

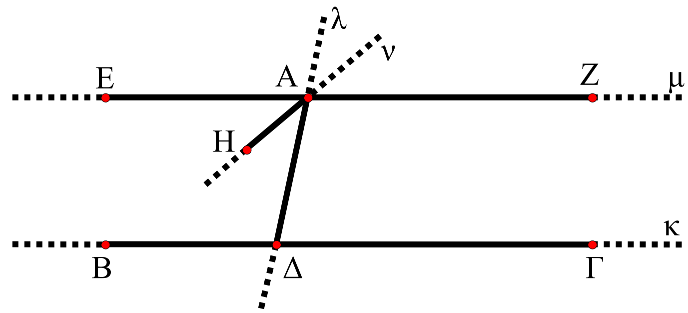
Απόδειξη. Έστω η ευθεία ΒΓ =κ και το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην κ. Από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Δ το οποίο ανήκει στην κ ώστε να ισχύει $B * \Delta * \Gamma$. Από το αξίωμα (I.1) υπάρχει μοναδική ευθεία λ στην οποία ανήκουν τα Α, Δ και



επιπλέον θεωρούμε την ημιευθεία $\overrightarrow{A\Delta}$. Στη συνέχεια από το αξίωμα (C.4) κατασκευάζουμε την γωνία $E\hat{A}\Delta$ για την οποία ισχύει $E\hat{A}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma$ και Ε να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ σε σχέση με το Γ.
Από το αξίωμα (I.1) υπάρχει μοναδική ευθεία μ στην οποία ανήκουν τα Α, Ε. Επομένως για τις ευθείες κ, μ οι οποίες τέμνονται από την λ στα σημεία Α, Δ αντίστοιχα ισχύει $E\hat{A}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma$ και άρα από την Πρόταση Ι.27 οι κ, μ είναι παράλληλες.

Επιπλέον θα δείξουμε ότι από το σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη προς την ευθεία.

Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ν διαφορετική της μ στην οποία ανήκει το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την κ. Από το αξίωμα (I.2) υπάρχει σημείο Η το οποίο ανήκει στην ν και είναι διαφορετικό του Α, με Η να ανήκει στο ίδιο ημεπίπεδο που ορίζει η λ σε σχέση με το Ε. Αφού οι ευθείες ν, μ είναι διαφορετικές και τα σημεία Ε, Η ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ τότε θα ισχύει είτε ότι το σημείο Η ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{E\hat{A}\Delta}$ είτε ότι

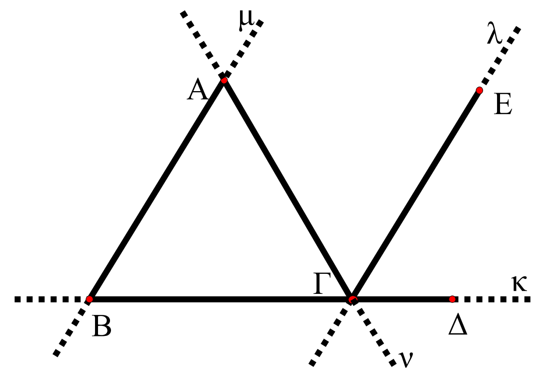


το σημείο Ε ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{H\hat{A}\Delta}$. Υποθέτουμε ότι το σημείο Η ανήκει στο εσωτερικό της $\mathrm{E\hat{A}\Delta}$, όμοια αποδεικνύεται και η άλλη περίπτωση. Αφού οι ευθείες ν, κ είναι παράλληλες τότε από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει $\mathrm{H\hat{A}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma}$. Όμως από την κατασκευή της $\mathrm{E\hat{A}\Delta}$ ισχύει ότι $\mathrm{E\hat{A}\Delta \cong A\hat{\Delta}\Gamma}$ και άρα από το αξίωμα (C.5) έπεται ότι $\mathrm{H\hat{A}\Delta \cong E\hat{A}\Delta}$. Άτοπο, διότι το σημείο Η ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $\mathrm{E\hat{A}\Delta}$ και άρα εξ ορισμού θα ισχύει $\mathrm{H\hat{A}\Delta < E\hat{A}\Delta}$. Επομένως από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.

Σχόλια. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.31 των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης δέχεται ότι υπάρχει σημείο Δ το οποίο ανήκει στο ΒΓ χωρίς όμως να ελέγχει την ύπαρξη του, ενώ εμείς στηριχτήκαμε στην Πρόταση 3.3 καθώς έχουμε αποδείξει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία Β, Γ υπάρχει σημείο Δ ώστε να ισχύει $\mathrm{B * \Delta * \Gamma}$. Επιπλέον ο Ευκλείδης κατασκευάζει τη γωνία $\mathrm{E\hat{A}\Delta}$ μέσω της Πρότασης Ι.23 χωρίς όμως να αναφέρει σε ποιο ημιεπίπεδο που ορίζει η λ θα ανήκει το σημείο Ε. Τέλος αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ο Ευκλείδης δεν αναφέρει τίποτα για την μοναδικότητα της παράλληλης ευθείας η οποία διέρχεται από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία ενώ η απόδειξη της είναι στοιχειώδης.

Πρόταση Ι.32. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία κ στην οποία ανήκουν τα σημεία Β, Γ και θεωρούμε την ημιευθεία $\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ στην οποία ανήκει το σημείο Γ. Επιπλέον από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει μοναδική ευθεία μ στην οποία ανήκουν τα σημεία Α, Β.



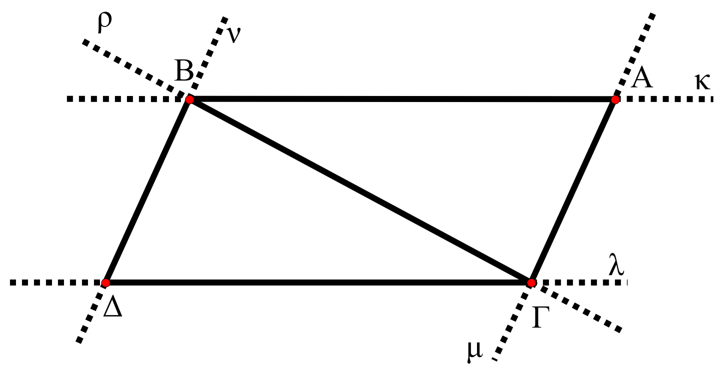
Από την Πρόταση Ι.31 κατασκευάζουμε την ευθεία ΓΕ = λ η οποία είναι παράλληλη στην μ, διότι εξ υποθέσεως το ΑΒΓ είναι τρίγωνο και άρα το Γ δεν ανήκει στην μ. Από την Πρόταση Ι.29 στις παράλληλες μ, λ οι οποίες τέμνονται από την ΑΓ = ν θα ισχύει $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} \cong \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Ε}$. Όμοια στις παράλληλες μ, λ οι οποίες τέμνονται από την κ στα σημεία Β, Γ θα ισχύει $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} \cong \text{Ε}\hat{\text{Γ}}\text{Δ}$. Επομένως από την Πρόταση 7.1 θα ισχύει $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} + \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} \cong \text{Ε}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} + \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Ε}$ και άρα $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} + \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} \cong \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Δ}$. Συνεπώς η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών.

Στη συνέχεια λόγω του ότι το άθροισμα γωνιών δεν είναι πάντοτε γωνία αναδιατυπώνουμε τον ισχυρισμό της Πρότασης Ι.32 ότι το άθροισμα των τριών γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές με τον ισοδύναμο ισχυρισμό ότι το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι εφαρμόσιμο με την παραπληρωματική της τρίτης. Η απόδειξη της αναδιατύπωσης του ισχυρισμού έπεται άμεσα από το πρώτο μέρος της απόδειξης και άρα $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} + \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} + \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β} \cong$ 2 ορθές.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης οδηγείται στο ότι $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} + \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} \cong \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Δ}$ μέσω της κοινής έννοιας β΄ ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 7.1. Στη συνέχεια αποδεικνύει ότι $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} + \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} + \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β} \cong 2$ ορθές χρησιμοποιώντας την κοινή έννοια β΄ και την Πρόταση Ι.13, ενώ εμείς αναδιατυπώσαμε και αποδείξαμε τον παραπάνω ισχυρισμό με ισοδύναμο του καθώς στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert τα αθροίσματα γωνιών δεν είναι πάντοτε γωνίες.

Πρόταση Ι.33. Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Απόδειξη. Έστω ότι $AB \cong \Gamma\Delta$ και ότι οι ευθείες κ, λ οι οποίες διέρχονται από τα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα είναι παράλληλες. Θα δείξουμε ότι $A\Gamma \cong B\Delta$ και ότι οι ευθείες ΑΓ = μ και ΒΔ = ν είναι παράλληλες. Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχει



μοναδική ευθεία ΒΓ = ρ. Τότε από την Πρόταση Ι.29 στις παράλληλες ευθείες κ, λ οι οποιες τέμνονται από την ρ θα ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}\Delta$. Άρα για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ ισχύει $AB \cong \Gamma\Delta$ από την υπόθεση, $A\hat{B}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\Gamma \cong B\Gamma$ από το αξίωμα (C.1) άρα από το αξίωμα (C.6) θα ισχύει $B\hat{\Gamma}A \cong \Gamma\hat{B}\Delta$ και $A\Gamma \cong B\Delta$. Συνεπώς από την Πρόταση Ι.27 θα ισχύει ότι οι ευθείες ΒΔ = ν και ΑΓ = μ είναι παράλληλες. Συνολικά θα ισχύει ότι $A\Gamma \cong B\Delta$ και ότι ΒΔ, ΑΓ είναι παράλληλες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Θεωρία περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων στη θεμελιώση Hilbert.

Η θεωρία του Ευκλείδη για τα εμβαδά ξεκινάει με την Πρόταση Ι.35, συνεχίζεται μέχρι το τέλος του Βιβλίου Ι και στο Βιβλίο ΙΙ. Δεδομένου ότι ο Ευκλείδης δεν ορίζει την ισότητα σχημάτων, θεωρούμε ότι τη δέχεται σαν ακόμα μια μη-ορισμένη έννοια, όπως και την έννοια της εφαρμογής για ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες, την οποία καλούμε **ίσα περιεχόμενα**. Ο Ευκλείδης εφαρμόζει τις κοινές έννοιες για τα περιεχόμενα ευθυγράμμων χωρίων και έτσι μπορούμε να πούμε ότι τις θεωρεί ως περαιτέρω αξιώματα. Για παράδειγμα, «σχήματα που έχουν ίσα περιεχόμενα με ένα τρίτο, έχουν ίσα περιεχόμενα και μεταξύ τους».

Ο Hilbert έδειξε ότι δεν είναι απαραίτητο να βλέπουμε την έννοια των ίσων περιεχομένων σαν μια μη-ορισμένη έννοια που υπόκειται σε περαιτέρω αξιώματα. Αντ' αυτού δείχνει ότι μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ίσου περιεχομένου για ευθύγραμμα χωρία (κόβοντας, αναδιατάσσοντας, προσθέτοντας και αφαιρώντας), και έπειτα να αποδείξουμε τις ιδιότητες που εισάγονται από τις κοινές έννοιες του Ευκλείδη.

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε επαρκώς τις Προτάσεις Ι.35-Ι.48 του Βιβλίου Ι και τις Προτάσεις ΙΙ.1-ΙΙ.14 του Βιβίου ΙΙ των Στοιχείων θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ιδιότητες, όπως:

1. Εφαρμόσιμα σχήματα έχουν ίσα περιεχόμενα.
2. Αθροίσματα σχημάτων με ίσα περιεχόμενα έχουν ίσα περιεχόμενα.
3. Διαφορές σχημάτων με ίσα περιεχόμενα έχουν ίσα περιεχόμενα.
4. Τα μισά σχημάτων με ίσα περιεχόμενα έχουν ίσα περιεχόμενα.
5. Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.
6. Τετράγωνα με ίσα περιεχόμενα έχουν τις πλευρές τους εφαρμόσιμες.

Οι ιδιότητες 1, 2 και 3 χρησιμοποιούνται για την απόδειξη της Πρότασης Ι.35 των *Στοιχείων*. Η ιδιότητα 4 εμφανίζεται στην απόδειξη της Πρότασης Ι.37 και η ιδιότητα 5

εμφανίζεται στην απόδειξη της Ι.39. Ενώ η ιδιότητα 6 χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Πρότασης Ι.48.
Αξίζει να σημειωθεί ότι η θεωρία των ίσων περιεχομένων όπως εμφανίζεται στο παρόν Κεφάλαιο επαρκή για την απόδειξη των ιδιοτήτων 1 έως 3 χωρίς την εισαγωγή κάποιου επιπλέον αξιώματος. Όσον αφορά όμως τις ιδιότητες 4-6 φαίνεται απαραίτητη η εισαγωγή του αξιώματος Zolt.
Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη θεωρία των περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων, οι Προτάσεις Ι.35-Ι.48 του Βιβλίου Ι έπονται χωρίς δυσκολία. Όπως επίσης χωρίς κάποιο πρόβλημα έπονται και οι Προτάσεις ΙΙ.1-ΙΙ.14 του δεύτερου Βιβλίου των *Στοιχείων*, οι οποίες εκφράζουν σχέσεις μεταξύ περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων.

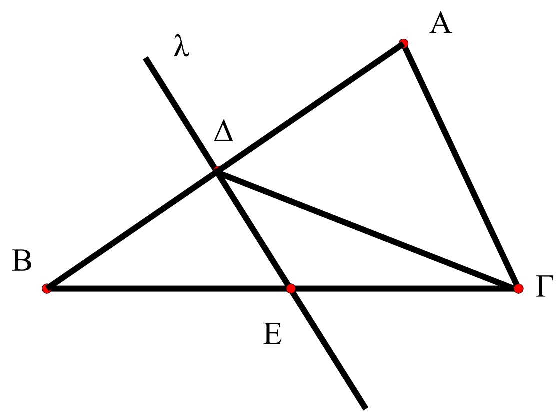
Σημείωση. Όπως αναφέρουμε και προηγούμενως διαφοροποιούμαστε (ελάχιστα) από τον Hilbert στη θεωρία των περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων στο ότι ορίζουμε τα ίσα περιεχόμενα μέσω τριγώνων ενώ ο Hilbert διατυπώνει τον αντίστοιχο ορισμό για ευθύγραμμα χωρία (τα οποία όμως ορίζονται ως πεπερασμένη ένωση μη επικαλυπτόμενων τριγώνων). Αυτό διότι στις Προτάσεις των *Στοιχείων* θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με σχέσεις περιεχομένων τριγώνων. Έτσι για να κινηθούμε όσο το δυνατό περισσότερο στο πνεύμα των *Στοιχείων* σε όλες τις σχέσεις που θα αποδείξουμε μεταξύ περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων θα τις ανάγουμε σε σχέσεις μεταξύ τριγώνων μέσω των εκλεπτίνσεων που θα ορίσουμε στα ευθύγραμμα χωρία.

Ορισμός

Ένα ευθύγραμμο χωρίο (σχήμα) είναι ένα υποσύνολο του επιπέδου το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως πεπερασμένη ένωση μη επικαλυπτόμενων τριγώνων. Ένα σημείο Δ ανήκει στο εσωτερικό του ευθύγραμμου χωρίου Ρ, αν υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο ΑΒΓ το οποίο ανήκει στο Ρ τέτοιο ώστε το σημείο Δ να είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ.
Επιπλέον δύο ευθύγραμμα χωρία είναι μη επικαλυπτόμενα αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Σημειώνουμε ότι ο ορισμός ενός ευθύγραμμου χωρίου περιλαμβάνει τις πλευρές του και όλα τα εσωτερικά του σημεία.

Πρόταση 12.1. Η τομή δύο οποιονδήποτε ευθύγραμμων χωρίων είναι ευθύγραμμο χωρίο. Η ένωση δύο οποιονδήποτε ευθύγραμμων χωρίων είναι ευθύγραμμο χωρίο. Το συμπλήρωμα ενός ευθύγραμμου χωρίου του οποίου η τομή με ένα άλλο ευθύγραμμο χωρίο είναι μη κενή, είναι ευθύγραμμο χωρίο.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του ευθύγραμμου χωρίου κάθε ευθύγραμμο χωρίο μπορεί να εκφραστεί ως πεπερασμένη ένωση μη επικαλυπτόμενων τριγώνων. Έτσι λοιπόν θα αποδείξουμε την Πρόταση 12.1 για ένα τρίγωνο κάθε φορά.



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και λ ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Τότε το ΒΔΕ είναι τρίγωνο και άρα ευθύγραμμο χωρίο. Από το Λήμμα στο συμπλήρωμα ΑΔΕΓ του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ και έτσι προκύπτουν τα μη επικαλυπτόμενα τρίγωνα ΑΔΓ, ΔΓΕ και άρα από τον ορισμό του ευθύγραμμου χωρίου το ΑΔΕΓ είναι ευθύγραμμο χωρίο καθώς μπορεί να εκφραστεί ως μη επικαλυπτόμενη ένωση τριγώνων. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο.

Ορισμός

Δύο τρίγωνα ονομάζονται εφαρμόσιμα όταν έχουν όλα τους τα στοιχεία σε 1-1 αντιστοιχία εφαρμόσιμα.

Ορισμός

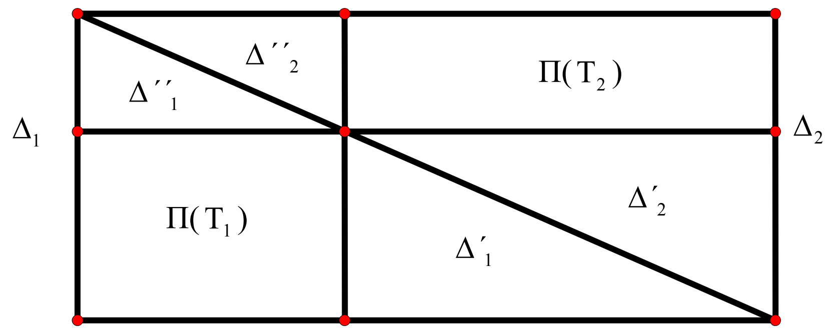
Δύο τρίγωνα T_1, T_2 έχουν ίσα περιεχόμενα αν υπάρχουν τρίγωνα Δ_1, Δ'_1, Δ''_1 και Δ_2, Δ'_2, Δ''_2 ώστε:

1) $\Pi(T_1)+\Delta'_1+\Delta''_1= \Delta_1$ και $\Pi(T_2)+\Delta'_2+\Delta''_2=\Delta_2$

2) Δ_1, Δ_2 εφαρμόσιμα.

3) Δ'_1, Δ'_2 εφαρμόσιμα.

4) Δ''_1, Δ''_2 εφαρμόσιμα.



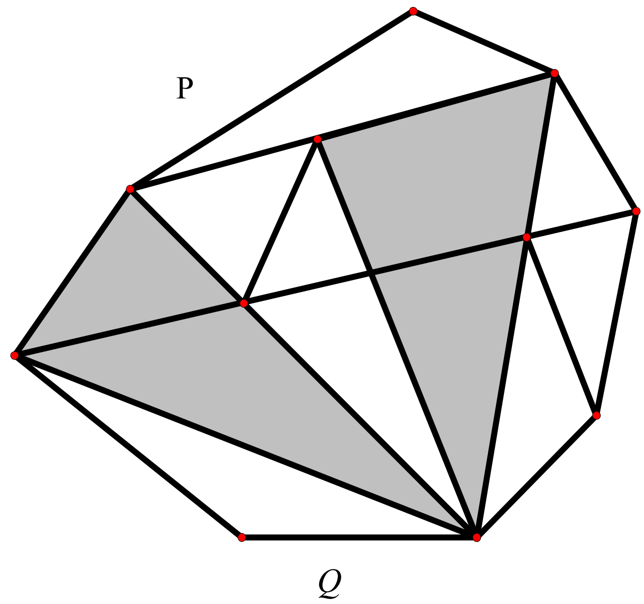
Ορισμός

Για κάθε διαμέριση Δ του P και E του P´, με P, P´ ισο-περιεχομενικά, υπάρχουν εκλεπτίνσεις Δ', E' της Δ και της E αντίστοιχα ώστε τα τρίγωνα της Δ' και E' είναι 1-1, με κάθε τρίγωνο της Δ' έχει ίσο περιεχόμενο με το αντίστοιχο τρίγωνο της E'.

Πρόταση 12.2. Έστω P, Q δύο ευθύγραμμα χωρία με Q να περιέχεται στο P ($Q \subset P$) τότε για κάθε διαμέριση Δ του P υπάρχει εκλέπτινση E του Δ με $E = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ ώστε κάθε T_i είτε περιέχεται στο Q είτε είναι ξένο προς το Q.

Απόδειξη. Έστω Δ μία διαμέριση του P, τότε υπάρχει εκλέπτινση E<Δ ώστε $E = \cup K_i$, με K_i τρίγωνα που περιέχονται στο P. Τότε υπάρχουν τρίγωνα K_i τα οποία περιέχονται ολόκληρα στο P-Q και τρίγωνα K_i τα οποία περιέχονται ολόκληρα στο Q. Με αυτά τα τρίγωνα εμείς δεν θα ασχοληθούμε καθώς μας ενδιαφέρουν εκείνα τα τρίγωνα K_i για τα οποία ισχύει:

$K_i \cap (P - Q) \neq \varnothing$ και $K_i \cap Q \neq \varnothing$ (1)



Επειδή Q ευθύγραμμο χωρίο υπάρχει διαμέριση Δ΄ του Q και Ε΄ εκλέπτινση της Δ΄ ώστε $\mathrm{E}'=\cup \mathrm{K}'_i$ με K'_i τρίγωνα τα οποία περιέχονται στο Q.

Θεωρούμε όλα τα K_i για τα οποία ισχύει η (1) και άρα

$\mathrm{K}_i \cap (\mathrm{P}-\mathrm{K}'_i) \neq \varnothing$ και $\mathrm{K}_i \cap \mathrm{K}'_i \neq \varnothing$.

Όμως η τομή τριγώνων είναι ευθύγραμμο χωρίο και άρα θεωρούμε τη διαμέριση Ζ΄ με $\mathrm{Z}'=\cup(\mathrm{K}_i \cap \mathrm{K}'_i)$. Ακόμη το συμπλήρωμα τριγώνων είναι ευθύγραμμο χωρίο και θεωρούμε τη διαμέριση Ζ με $\mathrm{Z}=\cup(\mathrm{K}_i \cap (\mathrm{P}-\mathrm{K}'_i))$.

Επομένως αφού Ζ, Ζ΄ διαμερίσεις ευθύγραμμων χωρίων τότε υπάρχουν εκλεπτίνσεις Η, Η΄ των Ζ, Ζ΄ ώστε $\mathrm{Z}=\cup \mathrm{H}_i$ και $\mathrm{Z}'=\cup \mathrm{H}'_i$. Συνολικά το ευθύγραμμο χωρίο Ρ μπορεί να γραφτεί

$\mathrm{P}=\cup(\mathrm{K}_i \cup \mathrm{H}_i \cup \mathrm{K}'_i \cup \mathrm{H}'_i)$, με K_i να περιέχονται ολόκληρα στο Ρ-Q

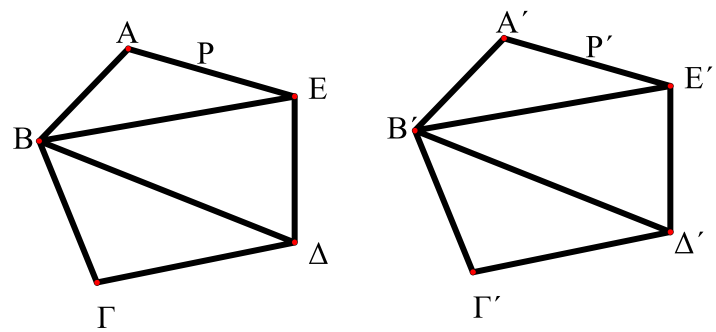
K'_i να περιέχονται ολόκληρα στο Q

H_i να περιέχονται ολόκληρα στο Ρ-Q

H'_i να περιέχονται ολόκληρα στο Q, όπου K_i, K'_i, H_i, H'_i μη επικαλυπτόμενα

Πρόταση 12.3. Τα εφαρμόσιμα σχήματα έχουν ίσα περιεχόμενα.

Απόδειξη. Έστω τα τυχόντα εφαρμόσιμα ευθύγραμμα χωρία Ρ, Ρ΄, θα δείξουμε ότι έχουν ίσα περιεχόμενα. Αρκεί να βρούμε εκλεπτίνσεις των Ρ, Ρ΄ σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.



Σε κάθε ένα από τα τυχόντα ευθύργαμμα χωρία P, P΄ δημιουργούμε τα μη επικαλύπτομενα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΕΔ, ΒΓΔ και Α΄Β΄Ε΄, Β΄Ε΄Δ΄, Β΄Γ΄Δ΄. Δεδομένου ότι τα P, P΄ είναι εφαρμόσιμα θα ισχύει $ΑΒ \cong Α΄Β΄$, $ΑΕ \cong Α΄Ε΄$ και $Α\hat{Β}Ε \cong Α΄\hat{Β}΄Ε΄$ και άρα από το αξίωμα C.6 για τα τρίγωνα ΑΒΕ, Α΄Β΄Ε΄ θα ισχύει $ΑΒΕ \cong Α΄Β΄Ε΄$. Όμοια θα ισχύει $ΒΔΕ \cong Β΄Δ΄Ε΄$ και $ΒΔΓ \cong Β΄Δ΄Γ΄$. Επομένως υπάρχουν εκλεπτίνσεις των P, P΄ σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα και άρα τα P, P΄ έχουν ίσα περιεχόμενα.

Πρόταση 12.4. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία P, Q και R για τα οποία ισχύει P=Q και Q=R, τότε θα δείξουμε ότι P=R.

Απόδειξη. Έστω τα P, Q και R ευθύγραμμα χωρία για τα οποία ισχύει:

P, Q έχουν ίσα περιεχόμενα και Q, R έχουν ίσα περιεχόμενα, τότε θα δείξουμε ότι τα P, R έχουν ίσα περιεχόμενα. Αρκεί να βρούμε εκλεπτίνσεις των P, R σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.

Αφού P, Q έχουν ίσα περιεχόμενα τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ, Ε των P, Q και εκλεπτίνσεις Δ΄, Ε΄ των Δ, Ε ώστε να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα. Όμοια αφού τα Q, R έχουν ίσα περιεχόμενα τότε υπάρχουν διαμερίσεις $Ε_1$, Ζ των Q, R και εκλεπτίνσεις $Ε_1΄$, Ζ΄ των $Ε_1$, Ζ ώστε να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα. Αν Ε΄, $Ε_1΄$ είναι οι ίδιες εκλεπτίνσεις του Q τότε οι εκλεπτίνσεις Δ΄, Ζ΄ των P, R είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα και άρα τα P, R έχουν ίσα περιεχόμενα.

Έστω ότι Ε΄, $Ε_1΄$ διαφορετικές εκλεπτίνσεις του Q. Τότε δεδομένου ότι η τομή των σχημάτων είναι σχήμα (Πρόταση 12.1) θεωρούμε Η΄ εκλέπτινση του Q ώστε να ισχύει $Η΄ = Ε΄ \cap Ε_1΄$. Επιπλέον αφού P, Q έχουν ίσα περιεχόμενα και Η΄ εκλέπτινση του Qτότε υπάρχει εκλέπτινση Κ΄ του P ώστε οι εκλεπτίνσεις Η΄και Κ΄ των P, Q να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα. Όμοια υπάρχει εκλέπτινση Λ΄ του R ώστε οι εκλεπτίνσεις Η΄, Λ΄ των Q, R να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα. Επομένως αφού Η΄, Κ΄, Λ΄ ίδιες εκλεπτίνσεις των P, Q και R σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα έπεται ότι Κ΄, Λ΄ εκλεπτίνσεις των P, R σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα και άρα τα ευθύγραμμα χωρία P, R έχουν ίσα περιεχόμενα.

Σημείωση. Η Πρόταση 12.4 αντιστοιχεί στην κοινή έννοια δ΄ των *Στοιχείων*.

Πρόταση 12.5. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία P, P_1 και Q με P, Q και P_1, Q μη επικαλύπτομενα, αν επιπλέον P, P_1 ισο-περιεχομενικά τότε τα $\mathrm{P}\cup Q$ και $\mathrm{P}_1\cup Q$ είναι ισο-περιεχομενικά.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία P, P_1 και Q με P, P_1 ισο-περιεχομενικά. Γνωρίζουμε ότι οι πεπερασμένες ενώσεις ευθύγραμμων χωρίων είναι ευθύγραμμο χωρίο και άρα τα $\mathrm{P}\cup Q$ και $\mathrm{P}_1\cup Q$ είναι σχήματα και άρα υπάρχουν διαμερίσεις Δ, Δ_1 των $\mathrm{P}\cup Q$ και $\mathrm{P}_1\cup Q$ αντίστοιχα. Αρκεί να βρούμε εκλεπτίνσεις των Δ, Δ_1 ώστε να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.
Από την Πρόταση 12.2 υπάρχουν εκλεπτίνσεις Ε, Ζ της Δ ώστε κάθε τρίγωνο της Ε να ανήκει στο P και είναι ξένο προς το Q και κάθε τρίγωνο της Ζ να ανήκει στο Q και να είναι ξένο προς το P, με $\Delta=\mathrm{E}\cup\mathrm{Z}$. Όμοια θεωρούμε τις εκλεπτίνσεις E_1 και Z_1 της Δ_1 ώστε κάθε τρίγωνο της E_1 να ανήκει στο P_1 και να είναι ξένο προς το Q και κάθε τρίγωνο της Z_1 να ανήκει στο Q και να είναι ξενο προς το P_1, με $\Delta_1=\mathrm{E}_1\cup\mathrm{Z}_1$. Από την υπόθεση ισχύει P=P_1 και Q=Q και άρα θα ισχύει Ε=E_1 και Ζ=Z_1. Θέτουμε $\mathrm{H}=\mathrm{E}\cup\mathrm{Z}$ και $\mathrm{H}'=\mathrm{E}_1\cup\mathrm{Z}_1$, εκλεπτίνσεις των Δ και Δ_1 αντίστοιχα οι οποίες αποτελούνται από τρίγωνα σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα, επομένως $\mathrm{P}\cup Q$ και $\mathrm{P}_1\cup Q$ ισο-περιεχομενικά.

Σημείωση. Η Πρόταση 12.5 αντιστοιχεί στην κοινή έννοια β΄ των *Στοιχείων*.

Πρόταση 12.6. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία P, P_1, Q, Q_1 για τα οποία ισχύει :

P, P_1 ισο-περιεχομενικά

Q, Q_1 ισο-περιεχομενικά

$Q \subset \mathrm{P}$ και $Q_1 \subset \mathrm{P}_1$ τότε θα δείξουμε ότι $\mathrm{P} - Q$ και $\mathrm{P}_1 - Q_1$ ισο-περιεχομενικά.

Απόδειξη. Αφού $\mathrm{P} - Q$ και $\mathrm{P}_1 - Q_1$ μη κενά ευθύγραμμα χωρία τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ, Δ_1 των $\mathrm{P} - Q$ και $\mathrm{P}_1 - Q_1$ αντίστοιχα, αρκεί να βρούμε εκλεπτίνσεις των Δ, Δ_1 ώστε τα τρίγωνα των εκλεπτίνσεων να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.

Εφόσον Q και Q_1 είναι ευθύγραμμα χωρία με ίσα περιεχόμενα υπάρχουν εκλεπτίνσεις E, E_1 ώστε να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.

Τότε $\Delta \cup \mathrm{E}$ είναι διαμέριση του P και $\Delta_1 \cup \mathrm{E}_1$ είναι διαμέριση του P_1.

Εφόσον P, P_1 έχουν ίσα περιεχόμενα υπάρχουν Z, Z_1 εκλεπτίνσεις των $\Delta \cup \mathrm{E}$ και $\Delta_1 \cup \mathrm{E}_1$ αντίστοιχα, ώστε τα τρίγωνα των Z, Z_1 να είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.

Από την Πρόταση 12.2 θέτουμε Η όλα τα τρίγωνα της Ζ που είναι ξένα προς το Q και H_1 όλα τα τρίγωνα του Z_1 που είναι ξένα προς το Q_1, τότε H, H_1 είναι εκλεπτίνσεις των Δ, Δ_1 αντίστοιχα που αποτελούνται από τρίγωνα σε 1-1 αντιστοιχία με ίσα περιεχόμενα.

Σημείωση. Η Πρόταση 12.6 αντιστοιχεί στην κοινή έννοια γ΄ των *Στοιχείων*.

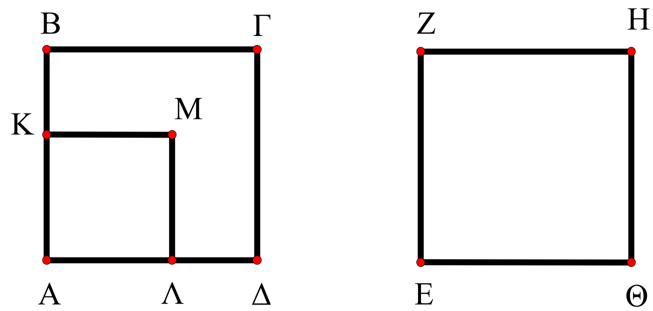
Ορισμός

Δοθέντων δύο ευθύγραμμων χωρίων P, Q θα γράφουμε $Q < \mathrm{P}$ αν υπάρχει $Q_1 \subset \mathrm{P}$ ώστε τα Q, Q_1 είναι ισο-περιεχομενικά και το $\mathrm{P} - Q_1$ είναι μη κενό.

Αξίωμα ZOLT

Αν Q είναι ευθύγραμμο χωρίο το οποίο περιέχεται σε ένα ευθύγραμμο χωρίο P και αν το $\mathrm{P}-Q$ έχει μη κενό περιεχόμενο, τότε τα ευθύγραμμα χωρία P, Q δεν έχουν ίσα περιεχόμενα.

Πρόταση 12.7. Έστω τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ τα οποία είναι ισο-περιεχομενικά, τότε θα δείξουμε ότι $\mathrm{AB} \cong \mathrm{EZ}$.

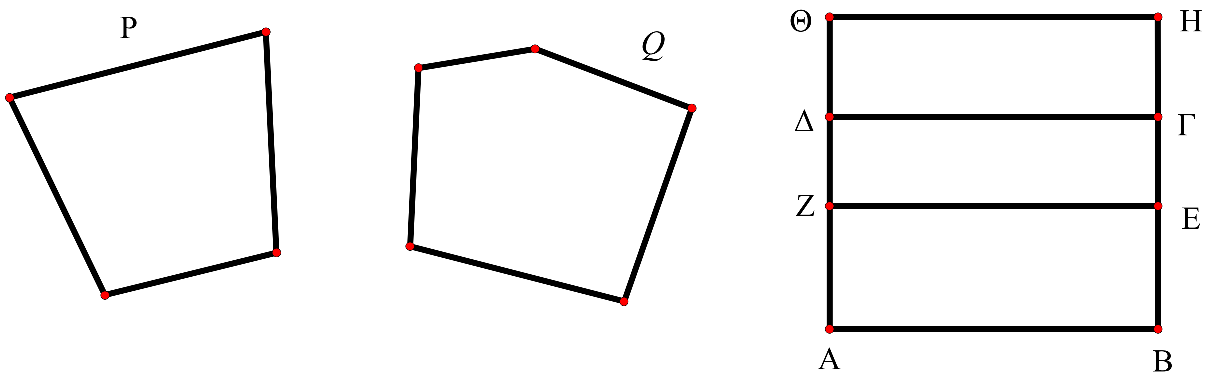


Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι μη εφαρμόσιμα τότε θα ισχύει είτε ΑΒ<ΕΖ είτε ΑΒ>ΕΖ. Έστω ότι ΑΒ>ΕΖ, τότε υπάρχει σημείο Κ με $\mathrm{A}*\mathrm{K}*\mathrm{B}$ ώστε ΑΚ≅ΕΖ. Όμοια υπάρχει σημείο Λ με $\mathrm{A}*\Lambda*\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\Lambda \cong \mathrm{EZ}$. Το τετράγωνο ΑΚΜΛ περιέχεται στο τετράγωνο ΑΒΓΔ καθώς αν το σημείο Μ ανήκε στο άλλο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΓΔ σε σχέση με το σημείο Κ θα ίσχυε ΚΜ>ΑΒ, άτοπο διότι ΑΒ>ΕΖ≅ΚΜ. Όμοια το σημείο Μ δεν μπορεί να ανήκει στο άλλο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ σε σχέση με το Λ.

Επομένως το τετράγωνο ΑΚΜΛ το οποίο είναι ισο-περιεχομενικό με το ΕΖΗΘ (αφού από την Πρόταση 12.3 τα εφαρμόσιμα σχήματα έχουν ίσα περιεχόμενα) περιέχεται στο ΑΒΓΔ και άρα από τον ορισμό το (ΑΒΓΔ)-(ΑΚΜΛ) είναι μη κενό. Επομένως από το αξίωμα του Zolt τα ευθύγραμμα χωρία ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ δεν έχουν ίσα περιεχόμενα, άτοπο, συνεπώς $\mathrm{AB} \cong \mathrm{EZ}$.

Πρόταση 12.8. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία P, Q θα δείξουμε ότι μονάχα μία από τις σχέσεις P<Q, P>Q και P=Q μπορεί να ισχύει.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Ρ, Q για τα οποία ισχύει Ρ<Q και Q<Ρ. Από την Πρόταση Ι.44 υπάρχει ορθογώνιο ΑΒΓΔ ισο-περιεχομενικό με το ευθύγραμμο χωρίο Ρ με δοθείσα βάση ΑΒ. Όμως Q<Ρ και άρα υπάρχει ορθογώνιο ΑΒΕΖ ισο-περιεχομενικό



με το Q με δοθείσα βάση ΑΒ ώστε $\mathrm{ΑΒΕΖ} \subset \mathrm{ΑΒΓΔ}$ και $\mathrm{ΑΒΓΔ} - \mathrm{ΑΒΕΖ} \neq \varnothing$.

Ακόμη για τα ευθύγραμμα χωρία Ρ, Q ισχύει Ρ<Q και άρα υπάρχει ορθογώνιο ΑΒΗΘ ισο-περιεχομενικό με το Q με δοθείσα βάση ΑΒ ώστε $\mathrm{ΑΒΓΔ} \subset \mathrm{ΑΒΗΘ}$ και $\mathrm{ΑΒΗΘ} - \mathrm{ΑΒΓΔ} \neq \varnothing$.

Επομένως για τα ευθύγραμμα χωρία ΑΒΗΘ και ΑΒΕΖ ισχύει $\mathrm{ΑΒΗΘ} - \mathrm{ΑΒΕΖ} \neq \varnothing$ και άρα από το αξίωμα Zolt τα ευθύγραμμα χωρία ΑΒΗΘ=Q και ΑΒΕΖ=Q δεν έχουν ίσα περιεχόμενα, άτοπο. Συνεπώς για τα ευθύγραμμα χωρία Ρ, Q μονάχα μία από τις σχέσεις Ρ<Q και Q<Ρ μπορεί να ισχύει.

Όμοια αποδεικνύεται ότι μονάχα μία από τις σχέσεις Ρ<Q και Ρ=Q μπορεί να ισχύει.

Σημείωση. Η Πρόταση 12.8 αντιστοιχεί στην κοινή έννοια ε΄ των *Στοιχείων*.

Πρόταση 12.9. Έστω Ρ, Q δύο ισο-περιεχομενικά ευθύγραμμα χωρία. Αν $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2$ με $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ και $Q = Q_1 \cup Q_2$ με $Q_1 = Q_2$, τότε $\mathrm{P}_1 = Q_1$.

Απόδειξη. Έστω Ρ, Q δύο ισο-περιεχομενικά ευθύγραμμα χωρία ώστε $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2$ με $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ και $Q = Q_1 \cup Q_2$ με $Q_1 = Q_2$. Υποθέτουμε ότι $Q_1 < \mathrm{P}_1$, τότε υπάρχει $Q_1' = Q_1$

ώστε $Q_1' \subset \mathrm{P}_1$ και άρα $\mathrm{P}_1 - Q_1' \neq \varnothing$. Όμως $Q_1 = Q_2$ και $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ και άρα υπάρχει $Q_2' =$ Q_2 ώστε $Q_2' \subset \mathrm{P}_2$ με $\mathrm{P}_2 - Q_2' \neq \varnothing$. Επιπλέον $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2$ και $Q = Q_1 \cup Q_2 = Q_1' \cup Q_2'$ με $\mathrm{P}_1 - Q_1' \neq \varnothing$ και $\mathrm{P}_2 - Q_2' \neq \varnothing$, επομένως $\mathrm{P} - Q \neq \varnothing$ και άρα από το αξίωμα Zolt τα P, Q δεν έχουν ίσα περιεχόμενα, άτοπο. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει και η περίπτωση $\mathrm{P}_1 < Q_1$. Επομένως από την Πρόταση 12.8 $\mathrm{P}_1 = Q_1$.

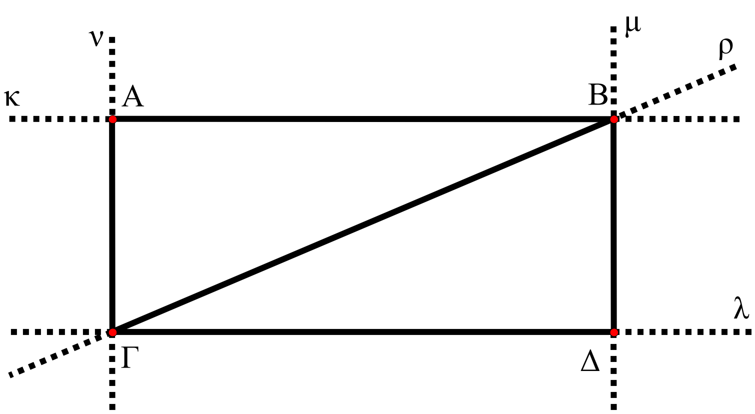
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Προτάσεις Ι.34-Ι.48 και *ΙΙ.1-ΙΙ.14* των *Στοιχείων*

Με τη θεμελίωση Hilbert του Κεφαλαίου 12 είναι τώρα δυνατόν να αποδειχθούν με αυστηρότητα οι Προτάσεις Ι.34-Ι.48 και ΙΙ.1-ΙΙ.14 των *Στοιχείων*.

Πρόταση Ι.34. Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Απόδειξη. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΔΓ και η διαγώνιος αυτού ΒΓ, θα δείξουμε ότι $AB \cong \Gamma\Delta$, $B\Delta \cong A\Gamma$ και ότι η ΒΓ χωρίζει το περιεχόμενο του παραλληλογράμμου σε δύο ίσα περιεχόμενα.



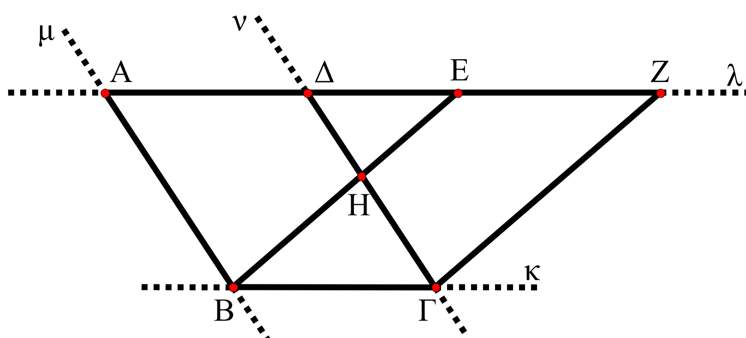
Από το αξίωμα (Ι.1) υπάρχουν ευθείες ΑΒ = κ, ΓΔ = λ, ΒΔ = μ, ΑΓ = ν και ΓΒ = ρ. Οι ευθείες κ, λ είναι παράλληλες και τέμνονται από την ρ στα σημεία Β, Γ άρα από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει ότι $A\hat{B}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}\Delta$. Επιπλέον αφού οι ευθείες μ, ν είναι παράλληλες και τέμνονται από την ρ στα σημεία Β, Γ από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει $\Gamma\hat{B}\Delta \cong B\hat{\Gamma}A$. Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}\Delta$, $\Gamma\hat{B}\Delta \cong B\hat{\Gamma}A$ και $B\Gamma \cong B\Gamma$ από το αξίωμα (C.1), επομένως από την Πρόταση Ι.26 θα ισχύει ότι $AB \cong \Gamma\Delta$, $A\Gamma \cong B\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma \cong \Gamma\hat{\Delta}B$. Επιπλέον ισχύει ότι $A\hat{B}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta \cong B\hat{\Gamma}A$, επομένως $A\hat{B}\Delta \cong A\hat{\Gamma}\Delta$ (Πρόταση 7.3). Ακόμη για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ ισχύει $AB \cong \Gamma\Delta$,

$A\hat{B}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\Gamma \cong B\Gamma$ επομένως από το αξίωμα (C.6) έπεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι εφαρμόσιμα.

Σχόλια. Στην απόδειξη της Πρότασης Ι.34 των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ενώ έχει δείξει για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ ότι ισχύουν $AB \cong \Gamma\Delta$, $A\Gamma \cong B\Delta$, $A\hat{\Gamma}B \cong \Gamma\hat{B}\Delta$, $\Gamma\hat{B}A \cong B\hat{\Gamma}\Delta$ και ότι $\Gamma\hat{A}B \cong \Gamma\hat{\Delta}B$, για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι ίσα (ισεμβαδικά) ξανασυγκρίνει τα τρίγωνα και οδηγείται στην ισότητα των περιεχομένων τους μέσω της Πρότασης Ι.4. Ενδεχομένως ο Ευκλείδης να πράττει κάτι τέτοιο διότι μπορεί να έβλεπε πόσο ισχυρή είναι η συγκεκριμένη Πρόταση η οποία στην αξιωματική θεμελίωση Hilbert είναι αξίωμα. Επιπλέον η Πρόταση Ι.4 είναι η μοναδική από εκείνες τις προτάσεις που αποδεικνύουν 1-1 εφαρμογή στοιχείων δυο τριγώνων η οποία αναφέρει ισότητα τριγώνων, κάτι το οποίο προκαλεί εντύπωση, δεδομένου ότι τόσο στην Ι.8 όσο και στην Ι.26 θα μπορούσε να οδηγηθεί στο παραπάνω συμπέρασμα.

Πρόταση Ι.35. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ τα οποία έχουν κοινή βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων λ, κ. Θα δείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ έχουν ίσα περιεχόμενα. Για τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΖ ισχύει, $AE \cong \Delta Z$ διότι $AE \cong A\Delta + \Delta E \cong \Delta E + EZ \cong \Delta Z$, $B\hat{A}E \cong \Gamma\hat{\Delta}Z$ (Πρόταση Ι.29) και $AB \cong \Delta\Gamma$ (Πρόταση Ι.34), επομένως από το αξίωμα (C.6) τα τρίγωνα ΑΒΕ και

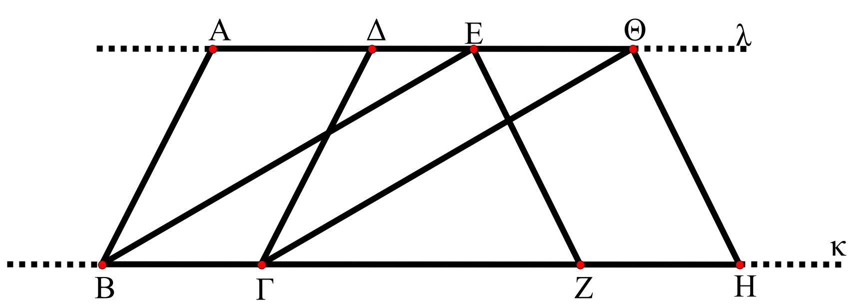


ΔΓΖ είναι εφαρμόσιμα και άρα από την Πρόταση 12.4 έχουν ίσα περιεχόμενα. Στη συνέχεια σε κάθε ένα από τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΖ προσθέτουμε το τρίγωνο ΗΒΓ και άρα από την Πρόταση 12.5 τα σχήματα ΑΒΓΗΕ και ΔΗΒΓΖ έχουν ίσα περιεχόμενα. Όμως ΑΒΓΗΕ=ΑΒΓΔ+ΔΗΕ και ΔΗΒΓΖ=ΕΒΓΖ+ΔΗΕ με ΔΗΕ ισο-περιεχομενικό με το ΔΗΕ και ΑΒΓΗ ισο-περιεχομενικό με το ΔΗΒΓΖ, επομένως από τον ορισμό των ίσων περιεχομένων έπεται ότι ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ έχουν ίσα περιεχόμενα.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης μέσω της Πρότασης Ι.4 δείχνει ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΖ είναι ίσα (ισεμβαδικά) και αφαιρεί από κάθε ένα από αυτά το κοινό τρίγωνο ΔΗΕ και άρα από την κοινή έννοια γ΄ τα καταλειπόμενα τραπέζια ΑΒΗΔ και ΕΗΓΖ θα είναι ίσα. Στη συνέχεια προσθέτει σε κάθε ένα από τα παραπάνω τραπέζια το τρίγωνο ΗΒΓ και άρα από την κοινή έννοια β΄ τα προκύπτοντα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ είναι ίσα. Ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε αρχικά το αξίωμα (C.6) για να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΖ είναι εφαρμόσιμα και άρα έχουν ίσα περιεχόμενα και στη συνέχεια την Πρόταση 12.5 για να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα χωρία ΑΒΓΗΕ και ΔΗΒΓΖ έχουν ίσα περιεχόμενα. Τέλος οδηγηθήκαμε στο ότι τα ευθύγαμμα χωρία ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ έχουν ίσα περιεχόμενα μέσω του ορισμού των ίσων περιεχομένων.

Πρόταση Ι.36. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ για τα οποία ισχύει ΒΓ$\cong$ΖΗ και τα οποία βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΗ = κ και ΑΘ = λ θα δείξουμε ότι τα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι ισο-περιεχομενικά.



Από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΓΘ. Δεδομένου ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο τότε από την Πρόταση Ι.34 θα ισχύει ΖΗ$\cong$ΕΘ. Από την υπόθεση ισχύει ότι ΖΗ$\cong$ΒΓ και άρα από το αξίωμα (C.2) έπεται ότι ΒΓ $\cong$ ΕΘ. Ακόμη οι ευθείες ΕΘ = λ και ΒΓ = κ είναι παράλληλες και άρα από την Πρόταση Ι.33 οι ΒΕ και ΓΘ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες, επομένως το ΕΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο.
Από την Πρόταση Ι.35 τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΘ έχουν ίσα περιεχόμενα, διότι έχουν κοινή βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Όμοια τα παραλληλόγραμμα ΕΖΗΘ και ΕΒΓΘ έχουν ίσα περιεχόμενα διότι έχουν κοινή βάση ΕΘ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Επομένως από την Πρόταση 12.4 τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν ίσα περιεχόμενα.

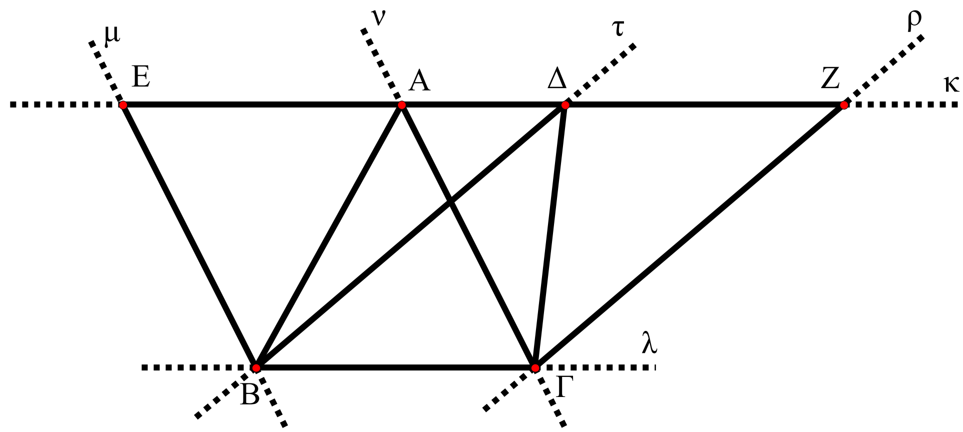
Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης οδηγείται στο ότι ΒΓ$\cong$ΕΘ μέσω της κοινής έννοιας α΄, ενώ εμείς δείξαμε ότι ισχύει ΒΓ$\cong$ΕΘ από το αξίωμα (C.2). Στη συνέχεια χρησιμοποιεί εκ νέου την μεταβατικότητα από την κοινή έννοια α΄ αλλά αυτή τη φορά σε εμβαδά σχημάτων, καθώς από την Πρόταση Ι.35 τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΘ είναι ισεμβαδικά όπως επίσης και τα παραλλήλογραμμα ΕΖΗΘ και ΕΒΓΘ. Συνεπώς τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι ισεμβαδικά. Ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε την μεταβατικότητα των σχημάτων με ίσα περιεχόμενα από την Πρόταση 12.4, καθώς έχουμε δείξει ότι η σχέση μεταξύ σχημάτων με ίσα περιεχόμενα είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση Ι.37. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ τα οποία έχουν την ίδια βάση και τα οποία βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΑΔ = κ και ΒΓ = λ, τότε θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα.
Από το σημείο Β το οποίο δεν ανήκει στην ΑΓ = ν διότι ΑΒΓ τρίγωνο, φέρνουμε ευθεία ΒΕ = μ παράλληλη προς την ν (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την κ στο Ε, καθώς το σημείο Α είναι το σημείο τομής των ευθειών κ, ν και η ευθεία μ είναι παράλληλη της ν, από την κατασκευή της. Επομένως οι ευθείες μ, κ θα τέμνονται διότι διαφορετικά από το

σημείο Α θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την μ, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31.

Όμοια από το σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην ΒΔ = τ διότι ΒΓΔ τρίγωνο, φέρνουμε



ευθεία ΓΖ = ρ η οποία είναι παράλληλη προς την τ (Πρόταση Ι.31) και η οποία τέμνει την κ στο Ζ, καθώς το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών τ, κ και η ευθεία ρ είναι παράλληλη της τ, από την κατασκευή της. Επομένως οι ευθείες ρ, κ θα τέμνονται διότι διαφορετικά από το σημείο Δ θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την ρ, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31.

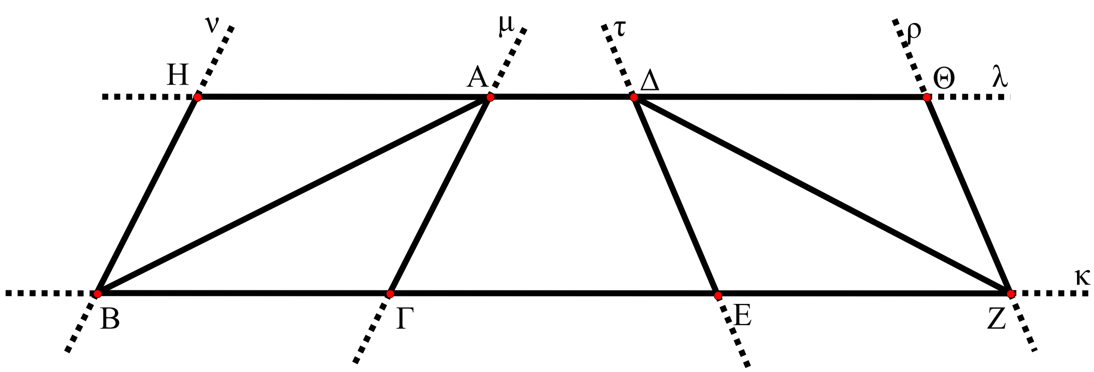
Από την Πρόταση Ι.35 τα παραλληλόγραμμα ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ έχουν ισα περιεχόμενα, διότι έχουν την ίδια βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων λ, κ. Επιπλέον η ΑΒ είναι διαγώνιος του ΕΒΓΑ και άρα από την Πρόταση Ι.34 το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περιεχόμενο ίσο με το μισό του περιεχομένου του ΕΒΓΑ. Όμοια από την Πρόταση Ι.34 για το παραλληλόγραμμο ΔΒΓΖ το τρίγωνο ΔΒΓ θα έχει περιεχόμενο ίσο με το μισό του περιεχομένου του ΔΒΓΖ. Όμως δείξαμε ότι τα παραλληλόγραμμα ΕΒΓΑ και ΔΒΓΖ έχουν ίσα περιεχόμενα και άρα από την Πρόταση 12.9, τα μισά περιεχόμενα των σχημάτων με ίσα περιεχόμενα είναι μεταξύ τους ίσα, έπεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης μέσω της Πρότασης Ι.35 δείχνει ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΓΒΕ και ΔΒΓΖ είναι ίσα (ισεμβαδικά) και στη συνέχεια από την

Πρόταση Ι.34 αναφέρει ότι το περιεχόμενο του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το μισό του περιεχομένου του παραλληλογράμμου ΕΑΒΓ, όπως επίσης και το περιεχόμενο του τριγώνου ΔΒΓ με το μισό του ΔΒΓΖ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα, χωρίς όμως να το αιτιολογεί. Εμείς οδηγηθήκαμε στο παραπάνω συμπέρασμα μέσω της Πρότασης 12.9, η οποία αναφέρει ότι τα μισά περιεχόμενα των σχημάτων με ίσα περιεχόμενα είναι μεταξύ τους ίσα.

Πρόταση Ι.38. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ για τα οποία ισχύει ΒΓ$\cong$ΕΖ και τα οποία βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΖ = κ, ΑΔ = λ τότε θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ έχουν ίσα περιεχόμενα.



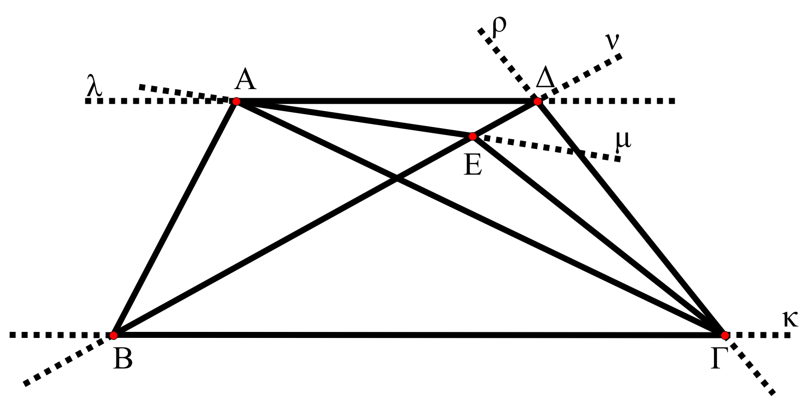
Το σημείο Β δεν ανήκει στην ΑΓ = μ διότι ΑΒΓ τρίγωνο και άρα από την Πρόταση Ι.31 φέρνουμε την ΒΗ = ν παράλληλη προς την μ και η οποία τέμνει την λ στο Η, καθώς το σημείο Α είναι το σημείο τομής των ευθειών λ, μ και η ευθεία ν είναι παράλληλη της μ, από την κατασκευή της. Επομένως οι ευθείες ν, λ τέμνονται, διότι διαφορετικά από το σημείο Α θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την ν, άτοπο από τη μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31.

Όμοια από το σημείο Ζ το οποίο δεν ανήκει στην ΔΕ = τ, διότι ΔΕΖ τρίγωνο, φέρνουμε ευθεία ΖΘ = ρ η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία τ (Πρόταση Ι.31) και η οποία τέμνει την λ στο Θ, καθώς το Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών τ, λ και η ευθεία ρ είναι παράλληλη προς την ευθεία τ, από την κατασκευή της. Επομένως οι ευθείες ρ, λ τέμνονται, διότι διαφορετικά από το σημείο Δ θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την ρ, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31. Επομένως τα ΗΒΓΑ και ΔΕΖΘ είναι παραλληλόγραμμα για τα οποία ισχύει ΒΓ$\cong$ΕΖ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων άρα από την Πρόταση Ι.36 τα παραλληλόγραμμα ΗΒΓΑ και ΔΕΖΘ έχουν ίσα περιεχόμενα. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περιεχόμενο ίσο με το μισό του περιεχομένου του ΗΒΓΑ καθώς ΑΒ διαγώνιος του ΗΒΓΑ. Όμοια από την Πρόταση Ι.34 το τρίγωνο ΔΕΖ έχει περιεχόμενο ίσο με το μισό του περιεχομένου του ΔΕΖΘ καθώς ΔΖ διαγώνιος του ΔΕΖΘ. Όμως έχουμε δείξει ότι τα παραλληλόγραμμα ΗΒΓΑ και ΔΕΖΘ έχουν ίσα περιεχόμενα και άρα από την Πρόταση 12.9 τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ίσα περιεχόμενα, διότι τα μισά περιεχόμενα των σχημάτων με ίσα περιεχόμενα έχουν ίσα περιεχόμενα.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης κατασκευάζει τα παραλληλόγραμμα ΗΑΓΒ και ΔΘΖΕ τα οποία έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων και άρα από την Πρόταση Ι.36 τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα (ισεμβαδικά). Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα με τα μισά των παραλληλογράμμων ΗΑΓΒ και ΔΘΖΕ αντίστοιχα και άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, χωρίς όμως να το αιτιολογεί. Ενώ εμείς δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ίσα περιεχόμενα ως μισά σχημάτων με ίσα περιεχόμενα (Πρόταση 12.9).

Πρόταση Ι.39. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ τα οποία έχουν ίσα περιεχόμενα, την ίδια βάση ΒΓ και τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ = κ, θα δείξουμε ότι τα διαφορετικά σημεία Α, Δ ανήκουν στην ίδια ευθεία ΑΔ = λ η οποία θα είναι παράλληλη προς την κ. Έστω ότι δεν ανήκουν μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, τότε από την Πρόταση Ι.31 φέρνουμε από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην κ, διότι ΑΒΓ τρίγωνο, ΑΕ = μ παράλληλη προς την κ η οποία τέμνει την ΒΔ = ν στο Ε, καθώς το σημείο Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ν, κ και η ευθεία μ είναι παράλληλη της ευθείας κ από την κατασκευή της. Επομένως οι ευθείες μ και ν θα τέμνονται, διότι διαφορετικά από το σημείο Β θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την μ, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31. Επιπλέον υποθέτουμε ότι για το σημείο Ε ισχύει $Β*Ε*Δ$, όμοια



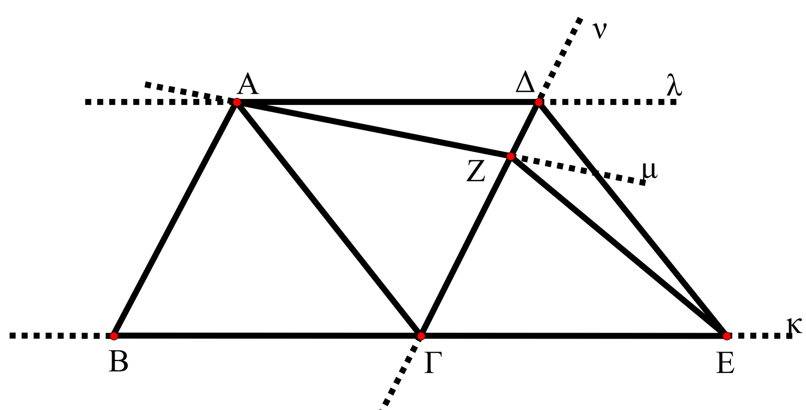
αποδεικνύεται και η περίπτωση κατά την οποία θα ισχύει $Β*Δ*Ε$. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ και άρα από την Πρόταση Ι.37 τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα διότι έχουν κοινή βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Όμως από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ίσο περιεχόμενο με το τρίγωνο ΔΒΓ, επομένως από την μεταβατικότητα των ίσων περιεχομένων (Πρόταση 12.4) τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα. Άτοπο, διότι τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΒΓ δεν μπορεί να έχουν ίσα περιεχόμενα καθώς το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους Πρόταση 12.8.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης υποθέτει ότι η ΑΔ = λ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ = κ και άρα από το σημείο Α θα διέρχεται άλλη ευθεία ΑΕ = μ διαφορετική της λ και η οποία θα τέμνει την ΒΔ = ν στο σημείο Ε, χωρίς όμως να αιτιολογεί γιατί αυτές οι ευθείες τέμνονται. Κάτι το οποίο προέκυψε για εμάς από την μοναδικότητα της παράλληλης από σημείο εκτός ευθείας προς την ευθεία, συνέπεια της Πρότασης Ι.31. Στη συνέχεια ο Ευκλείδης δείχνει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ισεμβαδικά και δεδομένου ότι τα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ισεμβαδικά τότε από την κοινή έννοια α΄ τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΒΓ είναι ισεμβαδικά. Ενώ εμείς δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα καθώς από την Πρόταση 12.4 η σχέση σχημάτων με ίσα περιεχόμενα αποτελεί σχέση ισοδυναμίας. Τέλος στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης οδηγείται σε άτοπο καθώς τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΒΓ δεν μπορεί να είναι ίσα διότι από την κοινή έννοια ε΄ το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους, ενώ εμείς οδηγηθήκαμε σε άτοπο μέσω της Πρότασης 12.8.

Πρόταση Ι.40. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ τα οποία έχουν ίσα περιεχόμενα, ΒΓ ≅ ΓΕ και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΕ = κ, θα δείξουμε ότι τα σημεία Α, Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΔ = λ η οποία είναι παράλληλη προς την κ.

Έστω ότι δεν ανήκουν μεταξύ των ίδιων παραλλήλων τότε από την Πρόταση Ι.31 φέρνουμε από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην κ, διότι ΑΒΓ τρίγωνο, ευθεία



ΑΖ = μ παράλληλη προς την κ η οποία τέμνει την ευθεία ΓΔ = ν στο Ζ, καθώς το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ν, κ και η ευθεία μ είναι παράλληλη της κ.

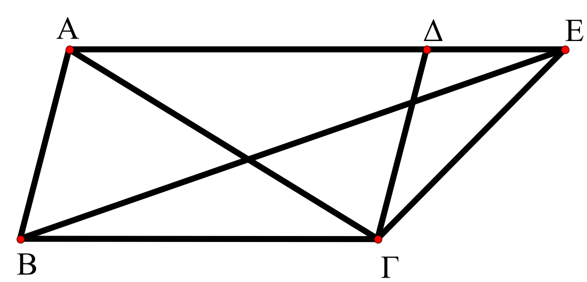
Επομένως οι ευθείες μ, ν θα τέμνονται , διότι διαφορετικά από το σημείο Γ θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την μ, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31. Επιπλέον υποθέτουμε

ότι για το σημείο Ζ ισχύει $\Gamma * Z * \Delta$, όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση κατά την οποία ισχύει $\Gamma * \Delta * Z$.
Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ και άρα από την Πρόταση Ι.38 τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΓΕ έχουν ίσα περιεχόμενα δεδομένου ότι από την υπόθεση ισχύει $B\Gamma \cong \Gamma E$ και οι ευθείες μ, κ είναι παράλληλες από την κατασκευή της μ. Επιπλέον από την υπόθεση ισχύει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ίσο περιεχόμενο με το τρίγωνο ΔΓΕ και άρα από την μεταβατικότητα των ίσων περιεχομένων (Πρόταση 12.4) τα τρίγωνα ΔΓΕ και ΖΓΕ έχουν ίσα περιεχόμενα. Άτοπο, διότι από την Πρόταση 12.8 τα τρίγωνα ΖΓΕ και ΔΓΕ δεν μπορεί να έχουν ίσα περιεχόμενα καθώς το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

Σχόλια. Όπως και στην Πρόταση Ι.39 η ουσιαστική διαφορά στην απόδειξη που παραθέτουμε εμείς σε σχέση με εκείνη των *Στοιχείων* έγκειται στη χρήση του αξιώματος Zolt. Ο Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* οδηγείται σε άτοπο χρησιμοποιώντας την κοινή έννοια ε΄, ενώ με βάση την αξιωματική θεμελίωση Hilbert οδηγηθήκαμε στο ζητούμενο χρησιμοποιώντας το αξίωμα Zolt καθώς μέσω αυτού έχουμε αποδείξει ότι ανάμεσα σε δύο ευθύγραμμα χωρία P, Q μονάχα μία από τις σχέσεις $P > Q$, $P = Q$ και $P < Q$ μπορεί να ισχύει.

Πρόταση Ι.41. Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Απόδειξη. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που έχει την ίδια βάση με το τρίγωνο ΕΒΓ την ΒΓ και τα οποία βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Θα δείξουμε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει διπλάσιο περιεχόμενο του περιεχομένου του ΕΒΓ.

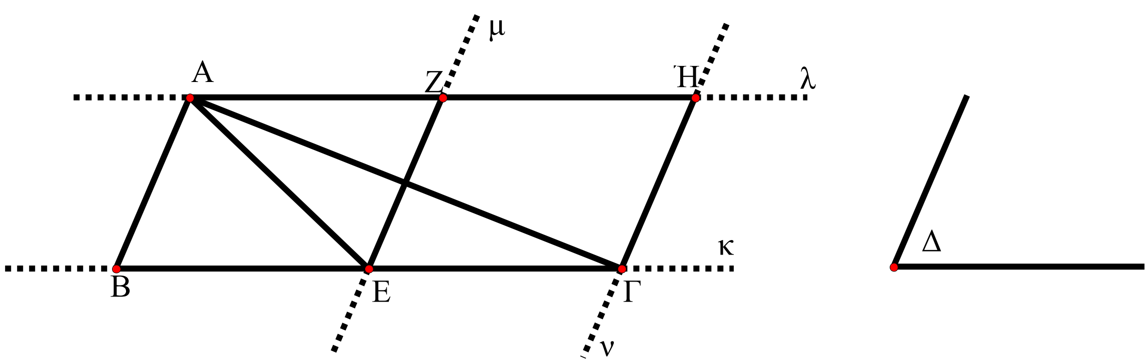


Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και από την Πρόταση Ι.37 τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ έχουν ίσα περιεχόμενα, διότι έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Από την Πρόταση Ι.34 το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει διπλάσιο περιεχόμενο από το περιεχόμενο του τριγώνου ΑΒΓ, διότι ΑΓ διαγώνιος του ΑΒΓΔ και αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΕ είναι ισο-περιεχομενικά τότε από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του τριγώνου ΒΓΕ, ΑΒΓΔ=ΒΓΕ+ΒΓΕ.

Σχόλια. Στο μοναδικό σημείο που διαφοροποιείται η απόδειξη των *Στοιχείων* σε σχέση με αυτή που παραθέτουμε εμείς είναι ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μεταβατικότητα στα ευθύγραμμα χωρία με ίσα περιεχόμενα μέσω της κοινής έννοιας α΄ ενώ εμείς οδηγηθήκαμε στο παραπάνω συμπέρασμα μέσω της Πρότασης 12.4.

Πρόταση Ι.42. Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και η δοθείσα γωνία $\hat{\Delta}$, θα κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο ΓΕΖΗ ίσου περιεχομένου με το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\Gamma\hat{E}Z \cong \hat{\Delta}$. Από την Πρόταση Ι.10 θεωρούμε Ε το μέσο του ΒΓ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



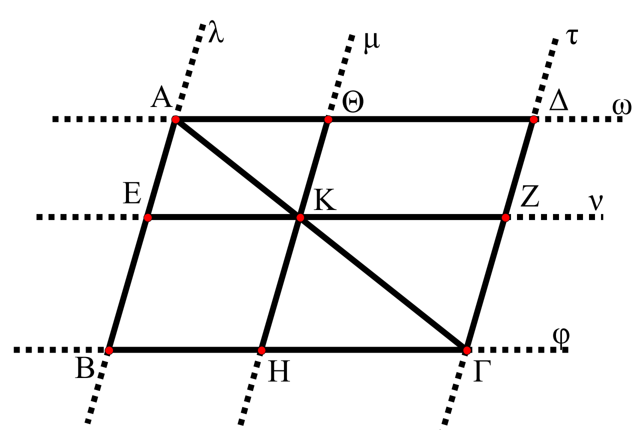
Από το αξίωμα (C.4) στην ημιευθεία $\overrightarrow{E\Gamma}$ κατασκευάζουμε γωνία $\Gamma\hat{E}Z \cong \hat{\Delta}$ με το σημείο Ζ να ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ΒΓ = κ όπως το Α. Από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην κ, διότι ΑΒΓ τρίγωνο, φέρνουμε την ευθεία ΑΖ = λ η οποία είναι παράλληλη με την κ (Πρόταση Ι.31). Εν συνεχεία από το σημείο Γ το οποίο δεν

ανήκει στην ΕΖ = μ φέρνουμε ευθεία ΓΗ = ν παράλληλη προς την μ η οποία τέμνει την λ στο σημείο Η, καθώς το σημείο Ζ είναι το σημείο τομής των ευθειών μ, λ. Επομένως οι ευθείες ν, λ τέμνονται, διότι διαφορετικά από το σημείο Ζ θα έπρεπε να διέρχονται δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την ν, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31 και άρα ΓΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
Επιπλέον από την Πρόταση Ι. 38 τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΓ έχουν ίσα περιεχόμενα, διότι για τις βάσεις τους ισχύει ΒΕ ≅ ΕΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων λ, κ.
Για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΑΒΓ=ΑΒΕ+ΑΕΓ, όμως από την Πρόταση Ι.37 τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΓ είναι ισο-περιεχομενικά και άρα από την Πρόταση 12.5 θα ισχύει ΑΒΕ+ΑΕΓ=ΑΕΓ+ΑΕΓ, επομένως από την Πρόταση 12.4 θα ισχύει ΑΒΓ=ΑΕΓ+ΑΕΓ. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.41 ισχύει ΖΗΓΕ=ΑΕΓ+ΑΕΓ και άρα από τη μεταβατικότητα των σχημάτων με ίσα περιεχόμενα έπεται ότι ΑΒΓ=ΖΗΓΕ.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης κατασκευάζει την γωνία $\Gamma\hat{E}Z \cong \hat{\Delta}$ μέσω της Πρότασης Ι.23, ενώ εμείς κάνοντας χρήση του αξιώματος (C.4). Στη συνέχεια οδηγούμαστε στο ζητούμενο χρησιμοποιώντας αλλεπάλληλες φορές την Πρόταση 12.4 ενώ ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την κοινή έννοια α΄.

Πρόταση Ι.43. Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Απόδειξη. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΑΓ η διαγώνιος του. Από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Κ ώστε να ισχύει Α∗Κ∗Γ και από το σημείο Κ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΒ = λ φέρνουμε ευθεία Θ∗Κ∗Η = μ παράλληλη προς την λ (Πρόταση Ι.31) η οποία θα τέμνει την ευθεία ΑΔ = ω στο Θ και την ευθεία ΒΓ = φ στο Η,



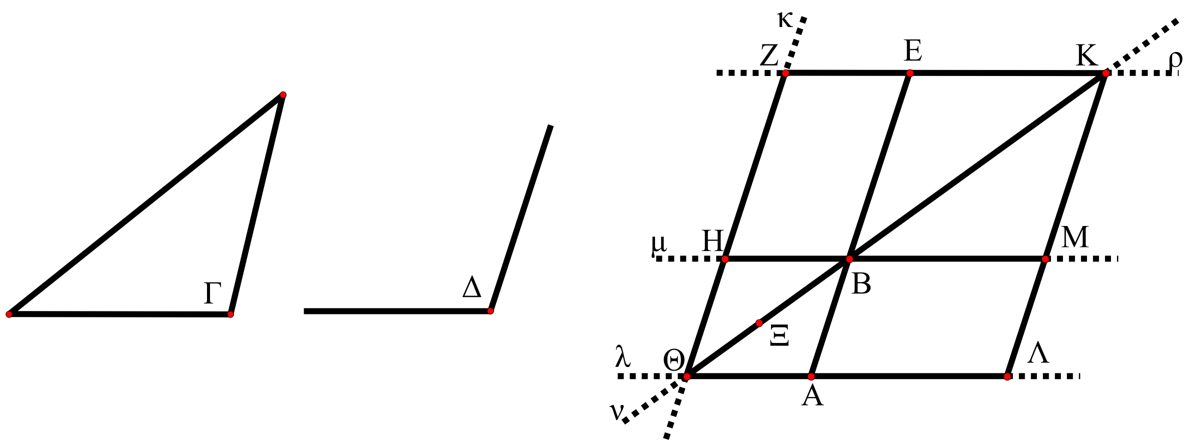
καθώς το σημείο Α είναι το σημείο τομής των ευθειών λ, ω και η ευθεία λ είναι παράλληλη της ευθείας μ. Επομένως οι ευθείες μ, ω θα τέμνονται, διότι διαφορετικά από το σημείο Α θα διέρχονταν δύο διαφορετικές ευθείες παράλληλες με την μ, άτοπο από τη μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31. Όμοια αποδεικνύεται ότι οι ευθείες μ, φ τέμνονται στο σημείο Η. Από το σημείο Κ το οποίο δεν ανήκει στην φ φέρνουμε ευθεία $\mathrm{E} * \mathrm{K} * \mathrm{Z}$ = ν παράλληλη προς την φ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ευθεία λ στο Ε και την ευθεία τ στο Ζ, δεδομένου ότι το σημείο Β είναι το σημείο τομής των ευθειών φ, λ και η ευθεία φ είναι παράλληλη της ευθείας ν. Επομένως οι ευθείες ν, λ τέμνονται , διότι διαφορετικά από το σημείο Β θα διέρχονταν δύο διαφορετικές ευθείες παράλληλες προς την ν, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31. Όμοια αποδεικνύεται και ότι η ευθεία ν τέμνει την ευθεία τ στο Ζ.
Επομένως δημιουργούνται τα παραλληλόγραμμα ΑΕΚΘ και ΚΗΓΖ και θεωρούμε τα ΕΒΗΚ και ΘΚΖΔ τα παραπληρώματα αυτών τα οποία θα αποδείξουμε ότι έχουν ίσα περιεχόμενα. Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ ισχύει ΑΒΓ=ΒΗΚΕ+ΑΕΚ+ΚΗΓ και ΑΔΓ=ΘΔΖΚ+ΑΘΚ+ΚΖΓ, όμως από την Πρόταση Ι.34 ισχύει $\mathrm{A\Delta} \cong \mathrm{B\Gamma}$ και τα τρίγωνα βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, επομένως από την Πρόταση Ι.41 τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ισο-περιεχομενικά. Όμοια το τρίγωνο ΑΕΚ έχει ίσο περιεχόμενο με το τρίγωνο ΑΘΚ καθώς επίσης και το τρίγωνο ΚΗΓ έχει ίσο περιεχόμενο με το τρίγωνο ΚΖΓ, επομένως από τον ορισμό των ίσων περιεχομένων έπεται ότι τα παραπληρώματα ΒΗΚΕ και ΘΔΖΚ έχουν ίσα περιεχόμενα.

Σχόλια. Στο μοναδικό σημείο στο οποίο διαφοροποιείται η απόδειξη η οποία παραθέτουμε εμείς σε σχέση με εκείνη των *Στοιχείων* είναι ότι στην απόδειξη μας το ζητούμενο έπεται άμεσα από τον ορισμό των ισο-περιεχομενικών ευθυγράμμων χωρίων, ενώ ο Ευκλείδης χρησιμοποεί τις κοινές έννοιες β΄ και γ΄.

Πρόταση Ι.44. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το δοθέν τρίγωνο Γ και η δοθείσα γωνία Δ, θα κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο ΑΒΜΛ ίσου περιεχομένου με το τρίγωνο Γ με $A\hat{B}M \cong \Delta$.

Από την Πρόταση Ι.42 κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΒΕΖΗ ίσου περιεχομένου με το τρίγωνο Γ και για το οποίο ισχύει $E\hat{B}H \cong \Delta$ έτσι ώστε για το σημείο Ε να ισχύει $A * B * E$. Από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην ΒΗ = μ φέρνουμε ευθεία ΑΘ = λ παράλληλη προς την μ η οποία τέμνει την ΖΗ = κ στο σημείο Θ, καθώς το σημείο Η είναι το σημείο τομής των ευθειών μ, κ και λ είναι ευθεία παράλληλη στην μ. Επομένως



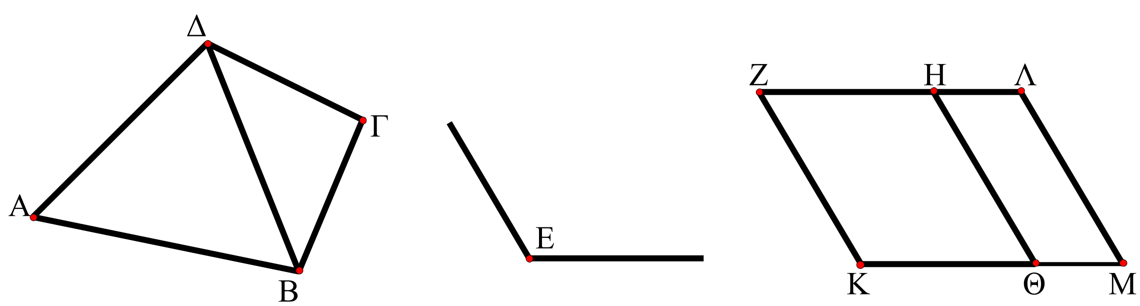
οι ευθείες κ, λ θα τέμνονται στο σημείο Θ, διότι διαφορετικά από το σημείο Η θα διέρχονταν δύο διαφορετικές παράλληλες ευθείες προς την λ, άτοπο από τη μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31.

Από το αξίωμα (Ι.1) φέρνουμε ευθεία ΘΒ = ν. Επειδή η ΑΘ = λ είναι παράλληλη προς την ΗΒ = μ και η μ είναι παράλληλη προς την ΖΕ = ρ δεδομένου ότι ΗΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, τότε από την Πρόταση Ι.30 οι ευθείες λ, ρ είναι παράλληλες και άρα από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει $A\hat{\Theta}Z + \Theta\hat{Z}E \cong$ 2 ορθές. Από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Ξ τέτοιο ώστε να ισχύει $\Theta * \Xi * B$. Θα δείξουμε ότι το τυχόν σημείο Ξ ανήκει στο εσωτερικό της $A\hat{\Theta}H$ και άρα όλα τα σημεία του ΘΒ, εκτός του Θ, θα ανήκουν στο εσωτερικό της $A\hat{\Theta}H$. Διότι ισχύει $\Theta * \Xi * B$ και το σημείο Θ ανήκει στην ΘΗ = κ και άρα τα σημεία Ξ, Β ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κ, διότι αν ανήκαν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, τότε το ΘΒ και η κ θα είχαν και άλλο κοινό σημείο, εκτός του Θ, και άρα όλα τα σημεία του ΘΒ θα ήταν σημεία της κ. Άτοπο, διότι το ΑΘΗΒ είναι παραλληλόγραμμο και άρα τα σημεία Θ, Η, Β δεν είναι συνευθειακά. Όμοια τα σημεία Ξ, Β ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΘΑ = λ, διότι αν ανήκαν στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η λ τότε το ΘΒ και η λ θα είχαν και άλλο κοινό σημείο, εκτός του Θ, και άρα όλα τα σημεία του ΘΒ θα ήταν σημεία της λ. Άτοπο, διότι το ΑΘΗΒ είναι παραλληλόγραμμο και άρα τα σημεία Θ, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Επομένως όλα τα σημεία του ΘΒ, εκτός του Θ, ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζουν ταυτόχρονα οι ευθείες κ, λ και άρα θα ανήκουν στο εσωτερικό της $\mathrm{A\hat{\Theta}H}$. Συνεπώς από τον ορισμό ισχύει ότι $\mathrm{B\hat{\Theta}H} < \mathrm{A\hat{\Theta}Z}$ και άρα $\mathrm{B\hat{\Theta}H} + \mathrm{\Theta\hat{Z}E} <$ 2 ορθές (Πρόταση 7.2), επομένως από το πέμπτο Αίτημα οι ευθείες ν, ρ θα τέμνονται, έστω Κ το σημείο τομής. Από το σημείο Κ το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία κ φέρνουμε την ΚΛ η οποία είναι παράλληλη προς την κ (Πρόταση Ι.31) με Λ το σημείο τομής των ΚΛ, ΘΑ. Επομένως από την Πρόταση Ι.43 στο παραλληλόγραμμο ΘΖΚΛ τα παραπληρώματα ΗΖΕΒ και ΒΜΛΑ έχουν ίσα περιεχόμενα με $\mathrm{E\hat{B}H} \cong \mathrm{A\hat{B}M}$ (Πρόταση Ι.15). Όμως έχουμε δείξει ότι το τρίγωνο Γ έχει ίσο περιεχόμενο με το ΗΖΒΕ και άρα από τη μεταβατικότητα των ίσων περιεχομένων (Πρόταση 12.4) έπεται ότι το τρίγωνο Γ έχει ίσο περιεχόμενο με το παραλληλόγραμμο ΑΒΜΛ γωνίας $\mathrm{A\hat{B}M} \cong \Delta$.

Σχόλια. Στην απόδειξη των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης χρησιμοποιώντας το Αίτημα 5 δείχνει ότι οι ΘΒ, ΖΕ τέμνονται χωρίς όμως να αιτιολογεί επαρκώς ότι το άθροισμα των γωνιών $\mathrm{B\hat{\Theta}H}, \mathrm{H\hat{Z}E}$, είναι μικρότερο των δύο ορθών. Ενώ εμείς οδηγηθήκαμε στο παραπάνω συμπέρασμα στηριζόμενοι στον διαχωρισμό των επιπέδων και της Πρότασης 7.2 (παραπληρωματικές γωνίες εφαρμόσιμων γωνιών είναι εφαρμόσιμες). Τέλος για την ολοκλήρωση της απόδειξης κάνουμε χρήση της μεταβατικότητας των ίσων περιεχομένων, Πρόταση 12.4, ενώ ο Ευκλείδης οδηγείται στο ζητούμενο μέσω της κοινής έννοιας α΄.

Πρόταση Ι.45. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Απόδειξη. Έστω το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα ΑΒΓΔ και η δοθείσα γωνία Ε. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΒ και από την Πρόταση Ι.42 το παραλληλόγραμμο ΖΗΘΚ το οποίο έχει ίσο περιεχόμενο με το τρίγωνο ΑΒΔ και για το οποίο ισχύει $\Theta\hat{K}Z \cong E$. Στη συνέχεια από την Πρόταση Ι.44 επί της πλευράς ΗΘ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΗΛΘΜ το οποίο έχει ίσο περιεχόμενο με το τρίγωνο ΔΓΒ και για το οποίο ισχύει $H\hat{\Theta}M \cong E$ ώστε το σημείο Μ να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΗΘ σε σχέση με το σημείο Κ.



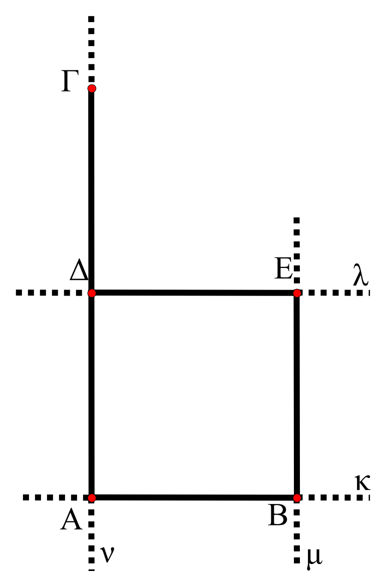
Από το αξίωμα (C.5) έπεται ότι $H\hat{\Theta}M \cong Z\hat{K}\Theta$ και άρα αφού η $Z\hat{K}\Theta$ είναι εφαρμόσιμη με την παραπληρωματική της $H\hat{\Theta}K$ από την Πρόταση Ι.14 για τα σημεία Κ, Θ, Μ ισχύει $K*\Theta*M$. Επιπλέον από την Πρόταση Ι. 29 στις παράλληλες ΚΜ και ΖΗ, διότι ΖΗΘΚ παραλληλόγραμμο, οι οποίες τέμνονται από την ΗΘ θα ισχύει $H\hat{\Theta}M \cong Z\hat{H}\Theta$ και άρα αφού η $H\hat{\Theta}M$ είναι εφαρμόσιμη με την παραπληρωματική της $\Theta\hat{H}\Lambda$ από την Πρόταση Ι.14 για τα σημεία Ζ, Η, Λ θα ισχύει $Z*H*\Lambda$. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 στα παραλληλόγραμμα ΖΗΘΚ και ΗΘΜΛ ισχύει $ZK \cong H\Theta$ και $H\Theta \cong \Lambda M$. Επομένως από την Πρόταση 2.2 ισχύει $ZK \cong \Lambda M$ και από την Πρόταση Ι.30 θα ισχύει ότι ΖΚ και ΛΜ είναι παράλληλες και αφού επιπλέον ισχύει $K*\Theta*M$ και $Z*H*\Lambda$ και ΖΗ, ΚΘ παράλληλες έπεται ότι το ΖΛΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Όμως το περιεχόμενο του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσο με το περιεχόμενο του παραλληλογράμμου ΖΗΘΚ και το περιεχόμενο του τριγώνου ΒΔΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του παραλληλογράμμου ΗΛΜΘ. Επομένως από την Πρόταση 12.5 έπεται ότι το άθροισμα των περιεχομένων των τριγώνων ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων των παραλληλογράμμων ΖΗΘΚ και ΗΛΜΘ. Συνολικά το περιεχόμενο του ΑΒΓΔ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ΖΚΜΛ με $\Theta\hat{K}Z \cong E$.

Σχόλια. Η απόδειξη της Πρότασης Ι.45 με βάση την αξιωματική θεμελίωση Hilbert διαφοροποιείται από την απόδειξη των *Στοιχείων* σε δύο σημεία. Αρχικά για την μεταβατικότητα των εφαρμόσιμων ευθυγράμμων τμημάτων χρησιμοποιούμε το αξίωμα (C.1) και δεύτερον στα αθροίσματα ευθυγράμμων χωρίων με ίσα περιεχόμενα χρησιμοποιούμε την Πρόταση 12.5. Ο Ευκλείδης στα παραπάνω σημεία της απόδειξης χρησιμοποιεί αντίστοιχα τις κοινές έννοιες α΄ και β΄.

Πρόταση Ι.46. ᾿Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Απόδειξη. Έστω το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, θα κατασκευάσουμε τετράγωνο πλευράς ΑΒ.



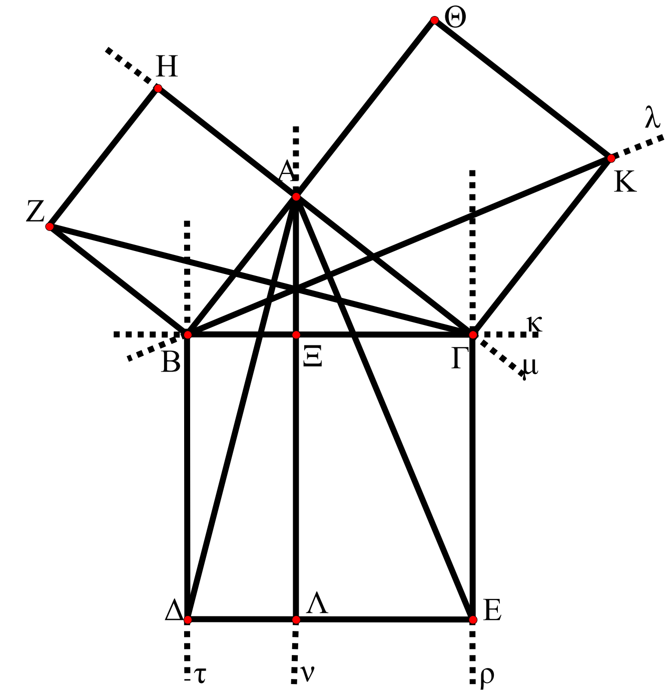
Από την Πρόταση Ι.11 φέρνουμε την κάθετο $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ στο σημείο Α και από το αξίωμα (C.2) θεωρούμε Δ το σημείο το οποίο ανήκει στην $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και για το οποίο ισχύει $\mathrm{A\Delta} \cong \mathrm{AB}$. Το σημείο Δ δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ = κ διότι αν ανήκε τότε η $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και η κ θα είχαν δύο κοινά σημεία και άρα όλα τα σημεία της $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ θα ανήκαν στην κ, άτοπο καθώς η ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι κάθετη στην κ.

Από την Πρόταση Ι.31 φέρνουμε την ευθεία ΔΕ = λ η οποία είναι παράλληλη προς την κ. Επιπλέον από το σημείο Β φέρνουμε την ευθεία ΒΕ = μ η οποία είναι παράλληλη προς την $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και τέμνει την λ στο σημείο Ε. Διότι αν δεν την έτεμνε οι ευθείες μ, λ θα ήταν παράλληλες και άρα από το σημείο Δ, το οποίο είναι σημείο τομής των $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ = ν και λ, θα διέρχονταν δύο διαφορετικές ευθείες οι οποίες θα ήταν παράλληλες προς την μ, άτοπο από την μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31. Επομένως το ΑΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο και άρα από την Πρόταση Ι.34 θα ισχύει $ΑΒ \cong ΔΕ$ και $ΑΔ \cong ΕΒ$. Ακόμη γνωρίζουμε ότι $ΑΒ \cong ΑΔ$ και άρα από το αξίωμα (C.1) θα ισχύει $ΑΔ \cong ΔΕ$ και συνολικά θα έχουμε $ΑΒ \cong ΑΔ \cong ΔΕ \cong ΕΒ$. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΔΒΕ έχει όλες τις πλευρές του εφαρμόσιμες μεταξύ τους. Απομένει να δείξουμε ότι κάθε μία από τις γωνίες του είναι εφαρμόσιμη με μία ορθή. Διότι από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει $Β\hat{Α}Δ + Α\hat{Δ}Ε \cong 2$ ορθές, όμως από την κατασκευή της $Β\hat{Α}Δ$ ισχύει $Β\hat{Α}Δ \cong 1$ ορθή και άρα από την Προταση 7.2 θα ισχύει $Α\hat{Δ}Ε \cong 1$ ορθή. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 θα ισχύει $Β\hat{Α}Δ \cong Β\hat{Ε}Δ$ και $Α\hat{Δ}Ε \cong Ε\hat{Β}Α$ επομένως από το αξίωμα (C.5) κάθε μία από τις γωνίες $Β\hat{Α}Δ$, $Α\hat{Δ}Ε$, $Β\hat{Ε}Δ$ και $Ε\hat{Β}Α$ είναι εφαρμόσιμη με μία ορθή. Συνεπώς το ΑΔΕΒ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ.

Σχόλια. Στην απόδειξη των Στοιχείων ο Ευκλείδης λαμβάνει το σημείο Δ με $ΑΔ \cong ΑΒ$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση Ι.2 και στη συνέχεια οδηγείται στο ζητούμενο μέσω της κοινής έννοιας α΄. Ενώ εμείς για την ύπαρξη του σημείου Δ με $ΑΔ \cong ΑΒ$ χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα (C.2) και οδηγηθήκαμε στο ότι $ΑΒ \cong ΑΔ \cong ΔΕ \cong ΕΒ$ και στο ότι $Β\hat{Α}Δ \cong Α\hat{Δ}Ε \cong Β\hat{Ε}Δ \cong Ε\hat{Β}Α \cong 1$ ορθή μέσω των αξιωμάτων (C.1) και (C.5) αντίστοιχα.

Πρόταση Ι.47. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Απόδειξη. Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Β\hat{Α}Γ \cong 1$ ορθή, θα δείξουμε ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων πλευράς ΑΒ και ΑΓ. Από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΒΓΕΔ πλευράς ΒΓ με τα σημεία Ε, Δ να ανήκουν στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΓ = κ σε σχέση με το σημείο Α. Όμοια κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΖΗ και ΑΓΚΘ πλευράς ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με τα σημεία Ζ, Η να ανήκουν στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σε σχέση με το σημείο Γ και τα σημεία Θ, Κ να ανήκουν στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ΑΓ = μ σε σχέση με το σημείο Β.



Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία ΑΛ = ν η οποία είναι παράλληλη προς την ΒΔ = τ (Πρόταση Ι.31). Επιπλέον το ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο και η άρα η ΒΔ = τ είναι παράλληλη προς την ΓΕ=ρ. Επομένως από την Πρόταση Ι.30 έπεται ότι η ΑΛ = ν είναι παράλληλη προς την ΓΕ = ρ και από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΖΓ. Ακόμη κάθε μία από τις γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και $\mathrm{B\hat{A}H}$ είναι εφαρμόσιμη με μία ορθή καθώς η $\mathrm{B\hat{A}H}$ είναι γωνία του τετραγώνου ΒΑΗΖ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong$ 1ορθή από την υπόθεση και άρα από την Πρόταση Ι.14 τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΑ, ΑΗ ανήκουν στην ίδια ευθεία. Όμοια τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΑ, ΑΘ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

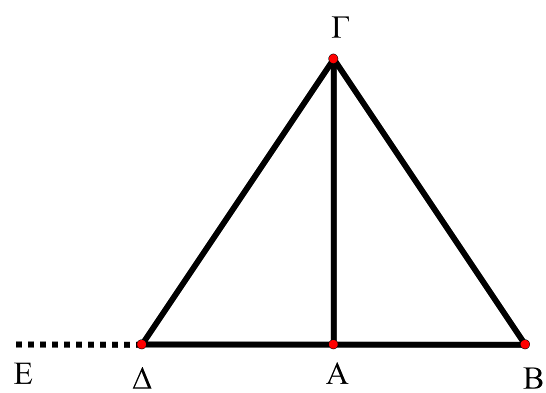
Για τις γωνίες $\mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{Z\hat{B}A}$ ισχύει $\mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma} \cong$1ορθή και $\mathrm{Z\hat{B}A} \cong 1$ ορθή ως γωνίες τετραγώνων, ακόμη από το αξίωμα (C.5) ισχύει $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} \cong \mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και άρα από την Πρόταση 7.3 έπεται ότι $\mathrm{\Delta\hat{B}A} \cong \mathrm{Z\hat{B}\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει ότι $\mathrm{B\Gamma} \cong \mathrm{B\Delta}$ διότι ΒΔΕΓ τετράγωνο και $\mathrm{AB} \cong \mathrm{B\Gamma}$ διότι ΑΒΖΗ τετράγωνο. Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΑΒΔ έπεται ότι $\mathrm{Z\Gamma} \cong \mathrm{A\Delta}$ και ότι τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΑΒΔ είναι εφαρμόσιμα. Ακόμη από την Πρόταση Ι.41 το παραλληλόγραμμο ΒΔΛΞ έχει διπλάσιο περιεχόμενο από το περιεχόμενο του τριγώνου ΑΒΔ, καθώς έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΔ = τ και ΑΛ = ν. Όμοια το τετράγωνο ΗΖΒΑ έχει διπλάσιο περιεχόμενο του περιεχομένου του τριγώνου $\mathrm{Z\hat{B}\Gamma}$ καθώς έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΖΒ και ΗΓ, όμως έχουμε δείξει ότι τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΑΒΔ είναι εφαρμόσιμα και άρα από την Πρόταση 12.3 θα έχουν ίσα περιεχόμενα. Επομένως και τα διπλάσια τους περιεχόμενα των σχημάτων ΒΔΛΞ και

ΗΖΒΑ θα είναι ίσα. Όμοια αποδεικνύεται ότι το παραλληλόγραμμο ΓΞΛΕ έχει ίσο περιεχόμενο με το τετράγωνο ΑΘΚΓ. Επομένως από την Πρόταση 12.5 θα ισχύει ότι το άθροισμα των περιεχομένων των ΗΖΒΑ και ΘΑΓΚ, δηλαδή το περιεχόμενο του τετράγωνου ΓΒΔΕ, είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχόμενων των τετραγώνων ΗΖΒΑ και ΘΑΓΚ.

Σχόλια. Η απόδειξη η οποία παραθέτουμε εμείς σε σχέση με εκείνη των *Στοιχείων*, διαφοροποιείται στο ότι χρησιμοποιήσαμε τη μεταβατικότητα των εφαρμόσιμων γωνιών μέσω του αξιωμάτος (C.5) καθώς επίσης για να οδηγηθούμε στο ότι το περιεχόμενο του τετράγωνου ΓΒΔΕ, είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχόμενων των τετραγώνων ΗΖΒΑ και ΘΑΓΚ χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 12.5. Στην απόδειξη των Στοιχείων ο Ευκλείδης για την αιτιολόγηση των παραπάνω χρησιμοποιεί τις κοινες έννοιες α΄ και β΄ αντίστοιχα.

Πρόταση Ι.48. Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Απόδειξη. Έστω το αναγραφόμενο τετράγωνο πλευράς ΒΓ και το οποίο έχει ίσο περιεχόμενο με το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων πρευράς ΑΒ και ΑΓ, θα δείξουμε ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong 1$ ορθή.



Από την Πρόταση Ι.11 θεωρούμε την ημιευθεία $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ώστε να είναι κάθετη προς την ΑΓ στο σημείο Α, με Ε να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΓ σε σχέση με το Β. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Δ το οποίο ανήκει στην $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta} \cong \mathrm{AB}$ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Δεδομένου ότι $\mathrm{A\Delta} \cong \mathrm{AB}$ το τετράγωνο πλευράς ΑΔ θα είναι εφαρμόσιμο με το τετράγωνο πλευράς ΑΒ και άρα από την Πρόταση 12.3 τα παραπάνω τετράγωνα θα έχουν ίσα περιεχόμενα. Αν επιπλέον προσθέσουμε σε κάθε ένα από αυτά τα τετράγωνα το τετράγωνο πλευράς ΑΓ τότε από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΑΓ θα είναι ίσο με το περιεχόμενο των τετραγώνων πλευράς ΑΒ και ΑΓ. Ακόμη ισχύει ότι $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} \cong 1$ ορθή από την κατασκευή της και άρα από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΔΓ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΑΓ. Όμως έχουμε δείξει ότι το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΑΓ ισούται με το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων ΑΒ και ΑΓ και από την υπόθεση ισχύει ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων πλευράς ΑΒ και ΑΓ. Επομένως από την Πρόταση 12.7 για τα τετράγωνα πλευράς ΔΓ και ΒΓ θα ισχύει ότι $\mathrm{\Delta\Gamma} \cong \mathrm{B\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει $\mathrm{A\Delta} \cong \mathrm{AB}$ από την κατασκευή του ΑΔ και $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{A\Gamma}$ από το αξίωμα (C.1) και άρα από την Πρόταση Ι.8 έπεται ότι $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} \cong \mathrm{\Gamma\hat{A}B}$. Όμως από την κατασκευή της $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta}$ ισχύει $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} \cong 1$ ορθή και άρα $\mathrm{\Gamma\hat{A}B} \cong 1$ ορθή.

Σχόλια. Η σημαντική διαφορά της απόδειξης των *Στοιχείων* σε σχέση με εκείνη που παραθέτουμε εμείς βρίσκεται στη χρήση των προτάσεων που αφορούν περιεχόμενα ευθυγράμμων χωριών. Συγκεκριμένα για την απόδειξη της Ι.48 χρησιμοποιήσαμε ότι τα εφαρμόσιμα σχήματα έχουν ίσα περιεχόμενα (Πρόταση 12.3), το οποίο όμως δεν αιτιολογείται στην απόδειξη των *Στοιχείων* με κάποιο τρόπο, καθώς επίσης και την Πρόταση 12.5 (αθροίσματα ίσων περιεχομένων). Το σημείο όμως στο οποίο αξίζει να σταθεί κάποιος είναι ότι Ευκλείδης στην απόδειξη των *Στοιχείων* δεν αιτιολογεί με κάποιο τρόπο ότι αν τα τετράγωνα είναι «ίσα» τότε θα είναι και οι πλευρές τους «ίσες», ενώ εμείς χρησιμοποιήσαμε για πρώτη φορά την Πρόταση 12.7. Για την απόδειξη της οποίας είναι απαραίτητη η χρήση του αξιώματος Zolt.

ΒΙΒΛΙΟ ΙΙ

Με βάση τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει στα προηγούμενα κεφάλαια χρησιμοποιώντας πάντοτε την αξιωματική θεμελίωση Hilbert μπορούμε να αποδείξουμε και όλες τις Προτάσεις του δεύτερου Βιβλίου των *Στοιχείων*.

Το Βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων περιλαμβάνει 2 Ορισμούς και 14 Προτάσεις και πραγματεύεται σχέσεις περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων. Για το λόγο αυτό όπως προκύπτει και από τις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν χρησιμοποιούμε κυρίως τη θεωρία των περιεχομένων ευθυγράμμων χωρίων που έχουμε αναπτύξει στο κεφάλαιο 12.

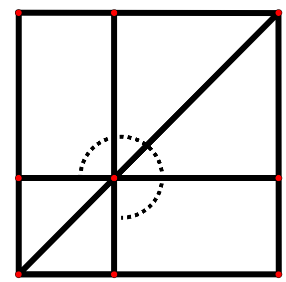
Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το Βιβλίο ΙΙ περιλαμβάνει μονάχα δύο ορισμούς σε αντίθεση με το πρώτο βιβλίο των Στοιχείων το οποίο περιλαμβάνει 23. Η διαφορά αυτή αιτιολογείται από το αντικείμενο το οποίο πραγματεύεται το βιβλίο ΙΙ, καθώς αφενός δεν εισάγονται καινούριες έννοιες, εξαιρουμένου του γνώμονα, και αφετέρου η πλειοψηφία των προτάσεων (εκτός της ΙΙ.14) αποδεικνύονται επαρκώς για τον Ευκλείδη μέσω του πρώτου Βιβλίου των Στοιχείων.

Όρος α΄. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶνεὐθειῶν.

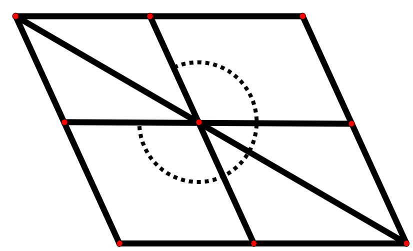
Σχόλια. Στον ορισμό α΄ ορίζεται το ορθογώνιο μέσω των πλευρών που σχηματίζουν την ορθή γωνία και αυτό διότι ο Ευκλείδης τον χρησιμοποιεί κατά κόρον στις Προτάσεις ΙΙ.1 - ΙΙ.14 οι οποίες αφορούν κυρίως ορθογώνια και τετράγωνα. Όπως παρατηρεί ο Heath το χαρακτηριστικό στη φρασεολογία του Ευκλείδη είναι ότι πάντα όταν περιγράφει ένα ορθογώνιο χρησιμοποιεί τις λέξεις «υπό των ΒΑ, ΑΓ» ενώ χρησιμοποιεί τη φράση «υπό ΒΑΓ» για να περιγράψει μια γωνία. Από την άλλη, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος συχνά χρησιμοποιούν την έκφραση «το υπό ΒΑΓ» για το ορθογώνιο ΒΑ, ΑΓ, όπως ακριβώς χρησιμοποιούν την έκφραση «η υπό ΒΑΓ» για τη γωνία ΒΑΓ.

Όρος β΄. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

Ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται και χρησιμοποιείται ο γνώμονας στο δεύτερο βιβλίο των Στοιχείων παραπέμπει στο ευθύγραμμο χωρίο που προκύπτει από ένα τετράγωνο όταν λάβουμε τα δύο παραπληρώματα ως προς τη διαγώνιο μαζί με το ένα από τα τετράγωνα.

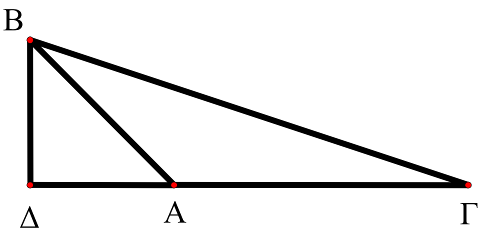


Παρ’ όλα αυτά στον ορισμό που διατυπώνει ο Ευκλείδης επεκτείνεται η έννοια του γνώμονα και στο ευθύγραμμο χωρίο που προκύπτει από ένα παραλληλόγραμμο όταν λάβουμε τα δύο παραπληρώματα ως προς τη διαγώνιο μαζί με το ένα από τα παραλληλόγραμμα. Σύμφωνα με τον Heath φαίνεται ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε τη λέξη αυτή με την ευρεία της έννοια για πρώτη φορά.

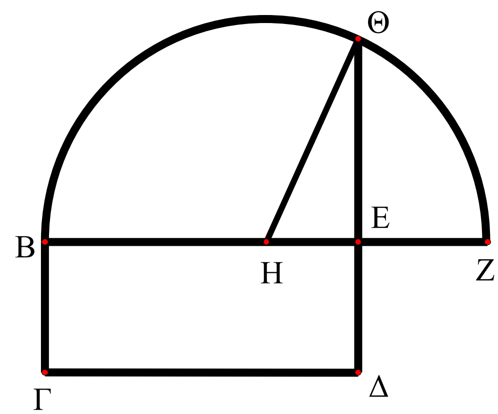


Όσον αφορά τις προτάσεις του δεύτερου Βιβλίου των *Στοιχείων* οι Προτάσεις ΙΙ.2 και ΙΙ.3 είναι ειδικές περιπτώσεις της Πρότασης ΙΙ.1. Αναμφίβολα ο Ευκλείδης τις διατύπωσε χωριστά για να είναι άμεσα διαθέσιμες για χρήση στη συνέχεια. Αν δεν είχαν διατυπωθεί ξεχωριστά δε θα ήταν ιδιαίτερα πρακτικό να γίνει αναφορά σε αυτές σε επόμενες προτάσεις χωρίς να πρέπει να εξηγηθεί ταυτόχρονα ότι περιλαμβάνονται στην ΙΙ.1 ως ειδικές περιπτώσεις. Και ενώ οι προτάσεις αυτές δε χρησιμοποιούνται από τον Ευκλείδη στις μετέπειτα προτάσεις του Βιβλίου ΙΙ, γίνεται χρήση τους αργότερα στην XIII.10 και IX.15. Επιπλέον είναι άξιο αναφοράς ότι, ενώ οι πρώτες οκτώ αποδεικνύονται χωρίς την χρήση της Πρότασης Ι.47, όλες οι υπόλοιπες προτάσεις αποδεικνύονται μέσω αυτής.

Στις Προτάσεις ΙΙ.12 και ΙΙ.13 είναι η πρώτη φορά που στα *Στοιχεία* γίνεται ρητή αναφορά σε αμβλεία και οξεία γωνία αντίστοιχα. Όσον αφορά την Πρόταση ΙΙ.12 ο Ευκλείδης δεδομένης της αμβλείας γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ φέρνει μέσω της Πρότασης Ι.12 την κάθετο ΒΔ από το σημείο Β προς την ΑΓ. Στη συνέχεια θεωρεί ότι η ΒΔ και η ευθεία στην οποία ανήκει η ΑΓ τέμνονται στο σημείο Δ ώστε $\Delta * A * \Gamma$, χωρίς όμως να το αιτιολογεί. Εμείς διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε πριν από την Πρόταση ΙΙ.12 τον παραπάνω ισχυρισμό και οδηγούμαστε στην ισχύ της συγκεκριμένης διάταξης των Δ, Α, Γ μέσω του αξιώματος (Β.2) και της Πρότασης Ι.16.



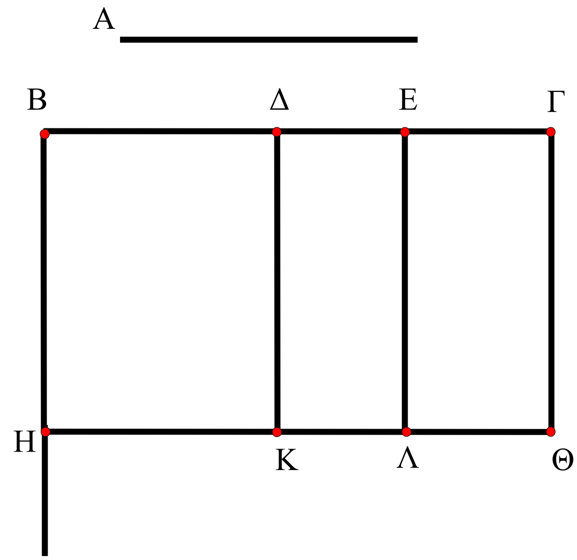
Τέλος η πολύ σημαντική Πρόταση ΙΙ.14 (με δοθέν ευθύγραμμο χωρίο κατασκευάζεται τετράγωνο ίσου περιεχομένου) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την Πρόταση 9.1 (τομή ευθείας-κύκλου) και συνεπώς το αξίωμα (Ε). Διότι χωρίς τη χρήση του αξιώματος (Ε) και άρα του γεγονότος ότι το σημείο Ε είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ότι η ευθεία ΘΕ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Θ.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΙΙ.1-ΙΙ.14

Πρόταση ΙΙ.1. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

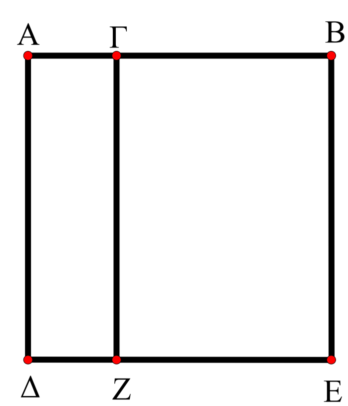
Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα Α, ΒΓ. Από το σημείο Β φέρνουμε την ημιευθεία $\overrightarrow{BZ}$ η οποία είναι κάθετη στο ΒΓ στο σημείο Β (Πρόταση Ι.11). Εν συνεχεία από το αξίωμα (C2) υπάρχει σημείο Η της $\overrightarrow{BZ}$ τέτοιο ώστε $BH \cong A$. Από το σημείο Η φέρνουμε παράλληλη ΗΘ προς την ΒΓ (Πρόταση Ι.31) και από την Πρόταση 3.1 υπάρχουν σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε να ισχύει $B * \Delta * \Gamma$ και $\Delta * E * \Gamma$. Κατόπιν από τα σημεία Δ, Ε, Γ φέρνουμε ευθείες ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ παράλληλες προς την ΒΗ (Πρόταση Ι.31) οι οποίες τέμνουν την ΗΘ στα σημεία Κ, Λ και Θ αντίστοιχα. Το ορθογώνιο ΒΓΘΗ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα Α, ΒΓ διότι από την κατασκευή της ΒΗ ισχύει $\mathrm{BH}\cong\mathrm{A}$. Το ορθογώνιο ΒΔΚΗ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ, ΒΗ με $\mathrm{BH}\cong\mathrm{A}$. Ακόμη το ορθογώνιο ΔΕΛΚ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΔΚ. Όμως από την Πρόταση Ι.34 στο ορθογώνιο ΒΔΚΗ ισχύει $\mathrm{BH}\cong\Delta\mathrm{K}$ και από την



κατασκευή της ΒΗ ισχύει $\mathrm{BH}\cong\mathrm{A}$. Επομένως από το αξίωμα (C.1) ισχύει $\Delta\mathrm{K}\cong\mathrm{A}$. Επομένως το ορθογώνιο ΔΕΛΚ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, Α. Όμοια το ορθογώνιο ΕΓΘΛ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΓ, Α. Όμως για το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ισχύει $\mathrm{B\Gamma}\cong\mathrm{B\Delta}+\Delta\mathrm{E}+\mathrm{E\Gamma}$ και άρα το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΒΓΘΗ με πλευρές $\mathrm{BH}\cong\mathrm{A}$ και ΒΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των ορθογωνίων ΒΔΚΗ, ΔΕΛΚ και ΕΓΘΛ, πλευρών $\mathrm{BH}\cong\mathrm{A}$ και ΒΔ, $\Delta\mathrm{K}\cong$ Α και ΔΕ , $\mathrm{E\Lambda}\cong\mathrm{A}$ και ΕΓ αντίστοιχα.

Πρόταση ΙΙ.2. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

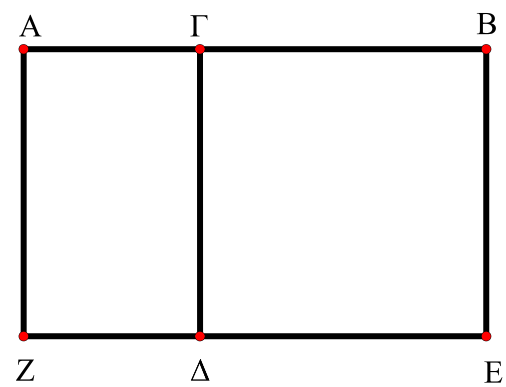
Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΕΔ, πλευράς ΑΒ. Από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathrm{A}*\Gamma*\mathrm{B}$ και από το σημείο Γ φέρνουμε την ευθεία ΓΖ η οποία είναι παράλληλη προς την ΑΔ (Πρόταση Ι.31) και η οποία τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ. Από την



Πρόταση ΙΙ.1 το περιεχόμενο του ΑΒΕΔ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων των ορθογωνίων ΑΓΖΔ και ΓΒΕΖ. Το ορθογώνιο ΑΓΖΔ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΑΔ με $ΑΔ \cong ΑΒ$, διότι ΑΒΕΔ τετράγωνο πλευράς ΑΒ και το ορθογώνιο ΓΒΕΖ σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ και ΒΕ, με $ΒΕ \cong ΑΒ$ διότι ΑΒΕΔ τετράγωνο. Επομένως το άθροισμα των περιεχομένων των ορθογωνίων ΑΓΖΔ και ΓΒΕΖ έχει ίσο περιεχόμενο με το τετράγωνο ΑΒΕΔ πλευράς ΑΒ.

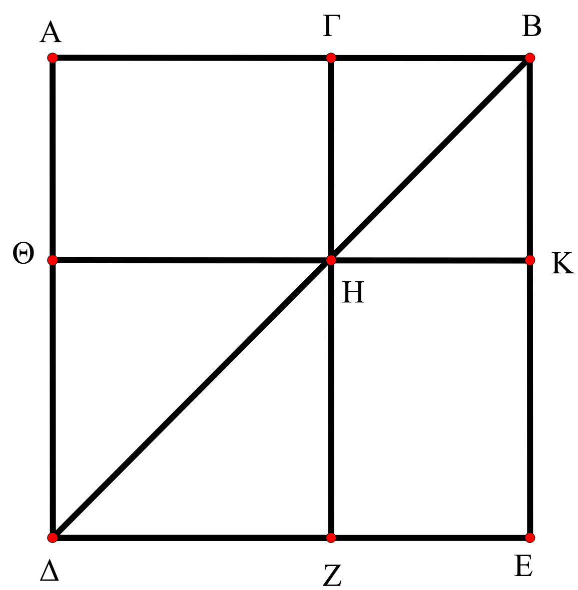
Πρόταση ΙΙ.3. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Γ για το οποίο ισχύει $Α*Γ*Β$, θα δείξουμε ότι το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα του ορθογωνίου πλευρών ΑΓ, ΓΒ και του τετραγώνου πλευράς ΒΓ.



Από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς ΒΓ και από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στη ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΕ η οποία τέμνει την ευθεία στην οποία ανήκει η ΔΕ στο σημείο Ζ, με ΑΖ παράλληλη προς την ΓΔ διότι ΓΒΕΔ τετράγωνο (Πρόταση Ι.31). Το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΑΒΕΖ, πλευρών ΑΒ, ΒΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο το αθροίσματος των ορθογωνίων ΑΓΔΖ και ΓΒΕΔ πλευρών ΑΓ, ΓΔ και ΓΒ, ΒΕ. Όμως $ΓΒ \cong ΒΕ$ και $ΓΔ \cong ΓΒ$ διότι ΓΒΕΔ τετράγωνο από την κατασκευή του. Επομένως το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΓΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος του ορθογωνίου πλευρών ΑΓ, ΓΒ και του τετραγώνου πλευράς ΓΒ.

Πρόταση ΙΙ.4. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΕΔ πλευράς ΑΒ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ. Από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Γ ώστε να ισχύει $Α*Γ*Β$ και από το σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΔ φέρνουμε ευθεία ΓΖ η οποία είναι παράλληλη προς την ΑΔ (Πρόταση Ι.31) και η οποία τέμνει την ΔΕ στο Ζ. Επιπλέον το ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο και άρα από την Πρόταση Ι.30 η ΓΖ είναι παράλληλη και προς την ΒΕ. Η ΓΖ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Η, διότι ΓΖ παράλληλη προς την ΑΔ και άρα αν δεν την έτεμνε από το σημείο Δ θα διέρχονταν δύο διαφορετικές ευθείες παράλληλες προς την ΓΖ. Ακόμη από την Πρόταση Ι.31 φέρνουμε ευθεία ΘΗ παράλληλη προς την ΑΒ η οποία τέμνει την ΑΔ στο σημείο Θ και την ΒΕ στο σημείο Κ. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.30 η ΘΚ είναι παράλληλη και προς την ΔΕ, διότι ΑΒΕΔ τετράγωνο και από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει $Γ\widehat{Η}Β \cong Α\widehat{Δ}Β$, διότι ΓΖ παράλληλη προς την ΑΔ. Ακόμη $ΑΒ \cong ΑΔ$, αφού ΑΒΕΔ τετράγωνο επομένως από την Πρόταση Ι.5 θα ισχύει $Α\widehat{Δ}Β \cong Α\widehat{Β}Δ$. Συνεπώς από το αξίωμα (C.5) ισχύει $Γ\widehat{Η}Β \cong Γ\widehat{Β}Η$ και άρα από την Πρόταση Ι.6 θα ισχύει $ΓΒ \cong ΓΗ$. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 ισχύει ότι $ΓΒ \cong ΗΚ$ και $ΓΗ \cong ΒΚ$ διότι ΓΒΚΗ παραλληλόγραμμο από την κατασκευή του, αφού ΓΗ παράλληλη προς την ΒΚ και ΗΚ παράλληλη προς την ΓΒ. Όμως δείξαμε ότι $ΓΒ \cong ΓΗ$ και άρα από την Πρόταση 2.2 θα ισχύει $ΓΒ \cong ΒΚ$ και συνολικά θα ισχύει $ΓΗ \cong ΒΚ \cong ΓΒ \cong ΗΚ$.

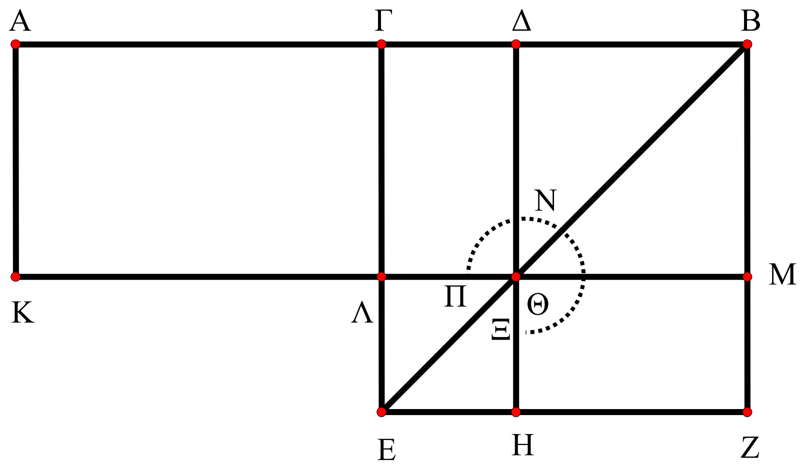
Από την Πρόταση Ι.29 ισχύει $\mathrm{K\hat{B}\Gamma + H\hat{\Gamma}B} \cong 2$ ορθές, όμως $\mathrm{K\hat{B}\Gamma} \cong 1$ ορθή και από την Πρόταση Ι.34 στο παραλληλόγραμμο ΓΒΚΗ ισχύει $\mathrm{K\hat{B}\Gamma} \cong \mathrm{K\hat{H}\Gamma}$ και $\mathrm{H\hat{\Gamma}B} \cong \mathrm{H\hat{K}B}$ και άρα από την Πρόταση 7.1 έπεται ότι $\mathrm{H\hat{\Gamma}B} \cong \mathrm{\Gamma\hat{B}K} \cong \mathrm{H\hat{K}B} \cong \mathrm{K\hat{H}\Gamma} \cong 1$ ορθή. Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΓΒΗΚ έχει όλες τις πλευρές του εφαρμόσιμες και όλες τις γωνίες του εφαρμόσιμες με μία ορθή, επομένως ΓΒΗΚ τετράγωνο πλευράς ΓΒ. Όμοια αποδεικνύεται ότι ΘΗΖΔ τετράγωνο πλευράς ΘΗ, όμως από την Πρόταση Ι.34 ισχύει $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{\Theta H}$, διότι ΑΓΗΘ παραλληλόγραμμο και άρα ΘΗΖΔ τετράγωνο πλευράς ΑΓ.

Για το ορθογώνιο ΑΓΗΘ ισχύει $\mathrm{\Gamma H} \cong \mathrm{\Gamma B}$ διότι ΓΗΚΒ τετράγωνο πλευράς ΓΒ και για το ορθογώνιο ΗΚΕΖ ισχύει $\mathrm{HZ} \cong \mathrm{A\Gamma}$ διότι ΘΗΖΔ τετράγωνο πλευράς ΑΓ. Ακόμη από την Πρόταση Ι.43 τα ορθογώνια ΑΓΗΘ και ΗΚΕΖ έχουν ίσα περιεχόμενα και άρα το περιεχόμενο του αθροίσματος των ορθογωνίων ΑΓΗΘ και ΗΚΕΖ ισούται με δύο φορές το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΓ και ΓΒ.

Συνεπώς το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΓΒ συν δύο φορές το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΓ και ΓΒ.

Πρόταση ΙΙ.5. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.10 υπάρχει σημείο Γ το οποίο ανήκει στο ΑΒ και για το οποίο ισχύει $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{\Gamma B}$. Επιπλέον από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma * \Delta * \mathrm{B}$, από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο ΓΒΖΕ πλευράς ΓΒ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Κατόπιν από το σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στην ΓΕ φέρνουμε ευθεία ΔΗ παράλληλη προς την ΓΕ (Πρόταση Ι.31) με ΔΗ παράλληλη και προς την ΒΖ (Πρόταση Ι.30) διότι ΓΒΖΕ τετράγωνο από την κατασκευή του. Ακόμη οι ευθείες ΔΗ και ΒΕ τέμνονται διότι ΔΗ παράλληλη προς την ΓΕ με Ε το σημείο τομής των ΕΓ και ΕΒ. Θεωρούμε Θ το σημείο τομής της ΔΗ με το ΕΒ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΒ και φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΒΖ στο Μ και την ΓΕ στο Λ. Επιπλέον από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην ΔΗ φέρνουμε ευθεία ΑΚ παράλληλη προς την ΔΗ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ευθεία στην οποία ανήκει το ΘΜ στο σημείο Κ.

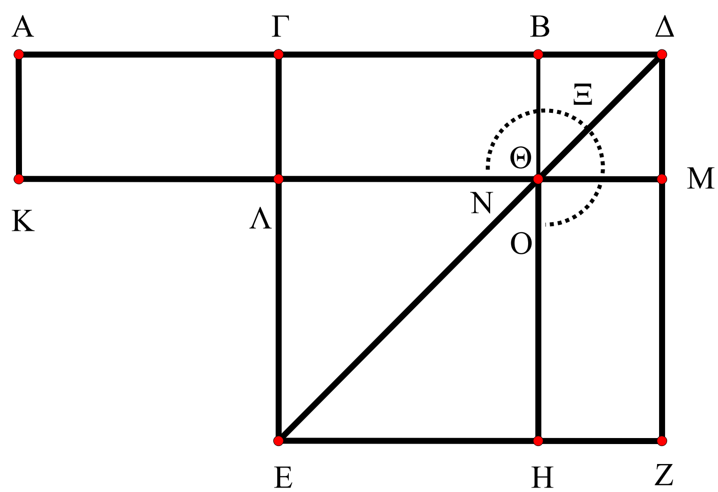


Από την Πρόταση Ι.43 τα παραπληρώματα ΓΔΘΛ και ΘΜΖΗ του τετραγώνου ΓΒΖΕ έχουν ίσα περιεχόμενα και από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος των ορθογωνίων ΓΔΘΛ και ΔΒΜΘ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των ορθογωνίων ΘΜΖΗ και ΔΒΜΘ. Επομένως το ορθογώνιο ΓΒΜΛ έχει ίσο περιεχόμενο με το ορθογώνιο ΔΒΖΗ. Ακόμη από την Πρόταση 12.3 το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΓΒΜΛ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΑΓΛΚ, διότι από την επιλογή του Γ ισχύει $\mathrm{A\Gamma} \cong \Gamma\mathrm{B}$ και από την Πρόταση Ι.34 και το αξίωμα (C.1) έπεται ότι $\mathrm{AK} \cong \mathrm{BM}$. Επομένως από την Πρόταση 12.4 το ορθογώνιο ΑΓΛΚ έχει ίσο περιεχόμενο με το ορθογώνιο ΔΒΖΗ. Σε κάθε ένα από τα ορθογώνια ΑΓΛΚ και ΔΒΖΗ προσθέτουμε το ορθογώνιο ΓΔΘΛ και άρα από την Πρόταση 12.5 το ορθογώνιο ΑΔΘΚ έχει ίσο περιεχόμενο με το ΓΒΖΗΘΛ, όμως $\Delta\Theta \cong \Delta\mathrm{B}$ και άρα το ορθογώνιο με πλευρές ΑΔ και ΔΒ έχει ίσο περιεχόμενο με τον γνώμονα ΠΝΞ. Επιπλέον σε κάθε ένα από τα ευθύγραμμα χωρία ΑΔΘΚ και ΠΝΞ προσθέτουμε το τετράγωνο ΛΘΗΕ πλευράς $\Lambda\Theta \cong \Gamma\Delta$ και άρα από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος του ορθογωνίου ΑΔΘΚ και του τετραγώνου ΛΘΗΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου ΓΒΖΕ πλευράς ΓΒ.

Συνεπώς το περιεχόμενο του αθροίσματος του ορθογωνίου πλευρών ΑΔ, ΔΘ και του τετραγώνου πλευράς ΓΔ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου ΓΒΖΕ πλευράς ΓΒ.

Πρόταση ΙΙ.6. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.10 υπάρχει σημείο Γ το οποίο ανήκει στο ΑΒ με $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{\Gamma B}$. Από το αξίωμα (Β.3) υπάρχει σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma * \mathrm{B} * \Delta$ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ. Από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΓΔΖΕ πλευράς ΓΔ και από το Λήμμα δημιουργούμε

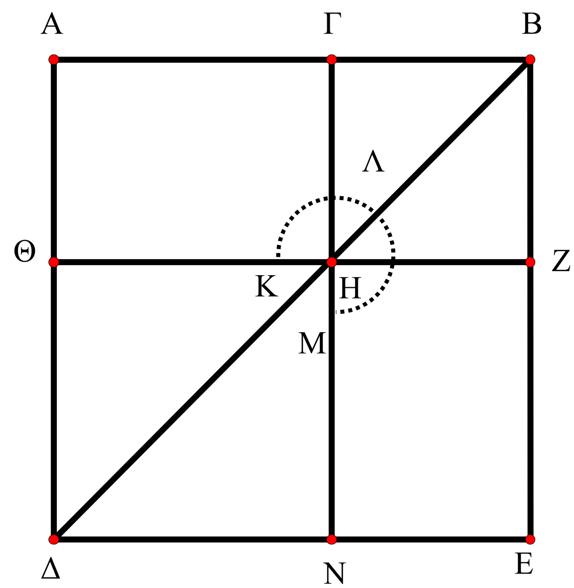


το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ. Εν συνεχεία από το σημείο Β το οποίο δεν ανήκει στην ΔΖ φέρνουμε ευθεία ΒΗ παράλληλη προς την ΔΖ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΕΖ στο Η και την ΕΔ στο Θ και η οποία είναι παράλληλη προς την ΓΕ (Πρόταση Ι.30) διότι ΓΔΖΕ τετράγωνο. Από το σημείο Θ το οποίο δεν ανήκει στην ΓΔ φέρνουμε ευθεία ΘΜ παράλληλη προς την ΓΔ (Πρόταση Ι.31), η οποία τέμνει την ΔΖ στο Μ και την ΓΕ στο Λ και η οποία είναι παράλληλη προς την ΕΖ (Πρόταση Ι.30) διότι ΓΔΖΕ είναι τετράγωνο. Επιπλέον από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην ΔΖ φέρνουμε ευθεία ΑΚ παράλληλη προς την ΔΖ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΘΜ στο Κ και η οποία είναι παράλληλη προς την ΓΕ (Πρόταση Ι.30) διότι ΓΔΖΕ τετράγωνο. Από την επιλογή του Γ ισχύει $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{\Gamma B}$ και από την Πρόταση Ι.34 και το αξίωμα (C.1) έπεται ότι $\mathrm{AK} \cong \mathrm{B\Theta}$, επομένως από την Πρόταση 12.3 τα ορθογώνια ΑΓΛΚ και ΓΒΘΛ έχουν ίσα περιεχόμενα. Όμως από την Πρόταση Ι.43 τα παραπληρώματα ΓΒΘΛ και ΘΜΖΗ του

τετραγώνου ΓΔΖΕ έχουν ίσα περιεχόμενα και άρα από την Πρόταση 12.4 τα ορθογώνια ΑΓΛΚ και ΘΜΖΗ έχουν ίσα περιεχόμενα. Στη συνέχεια σε κάθε ένα από τα ορθογώνια ΑΓΛΚ και ΘΜΖΗ προσθέτουμε το ορθογώνιο ΓΔΜΛ και άρα από την Πρόταση 12.5 το ορθογώνιο ΑΔΜΚ έχει ίσο περιεχόμενο με τον γνώμονα ΝΞΟ. Από την Πρόταση Ι.29 θα ισχύει $\Theta\hat{\mathrm{E}}\Lambda \cong \Delta\hat{\Theta}\mathrm{B}$, διότι ΕΖ παράλληλη προς την ΛΜ. Ακόμη $\Gamma\Delta \cong \Gamma\mathrm{E}$, αφού ΓΔΖΕ τετράγωνο επομένως από την Πρόταση Ι.5 θα ισχύει $\Theta\hat{\mathrm{E}}\Lambda \cong \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$. Συνεπώς από το αξίωμα (C.5) ισχύει $\Delta\hat{\Theta}\mathrm{B} \cong \Theta\hat{\Delta}\mathrm{B}$ και άρα από την Πρόταση Ι.6 θα ισχύει $\mathrm{B}\Delta \cong \mathrm{B}\Theta$.
Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 ισχύει ότι $\mathrm{B}\Delta \cong \Theta\mathrm{M}$ και $\mathrm{B}\Theta \cong \Delta\mathrm{M}$ διότι ΒΔΜΘ παραλληλόγραμμο από την κατασκευή του. Όμως δείξαμε ότι $\mathrm{B}\Delta \cong \mathrm{B}\Theta$ και άρα από την Πρόταση 2.1 θα ισχύει $\mathrm{B}\Delta \cong \Theta\mathrm{M} \cong \mathrm{B}\Theta \cong \Delta\mathrm{M}$. Από την Πρόταση Ι.29 ισχύει $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Theta + \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} \cong 2$ ορθές, όμως $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Theta \cong 1$ ορθή και άρα από την Πρόταση Ι.34 στο παραλληλόγραμμο ΒΔΜΘ ισχύει $\Delta\widehat{\mathrm{B}\Theta} \cong \Theta\widehat{\mathrm{M}\Delta}$ και $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} \cong \mathrm{M}\widehat{\Theta}\mathrm{B}$ επομένως από την Πρόταση 7.1 έπεται ότι $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Theta \cong \Theta\hat{\mathrm{M}}\Delta \cong \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} \cong \mathrm{M}\hat{\Theta}\mathrm{B} \cong 1$ ορθή. Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΒΔΜΘ έχει όλες τις πλευρές του εφαρμόσιμες και όλες τις γωνίες του εφαρμόσιμες με μία ορθή, επομένως ΒΔΜΘ τετράγωνο πλευράς ΒΔ.
Αφού λοιπόν ισχύει ότι το ορθογώνιο ΑΔΜΚ έχει ίσο περιεχόμενο με τον γνώμονα ΝΞΟ και $\Delta\mathrm{M} \cong \mathrm{B}\Delta$, τότε το ορθογώνιο με πλευρές ΑΔ και ΒΔ έχει ίσο περιεχόμενο με τον γνώμονα ΝΞΟ. Στη συνέχεια προσθέτουμε σε κάθε ένα από τα ευθύγραμμα χωρία ΑΔΜΚ και ΝΞΟ το τετράγωνο ΛΘΗΕ πλευράς $\Lambda\Theta \cong \Gamma\mathrm{B}$ (Πρόταση Ι.34) και συνεπώς από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος του ορθογωνίου πλευρών ΑΔ, ΔΒ και του τετραγώνου πλευράς ΓΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΓΔ.

Πρόταση ΙΙ.7. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

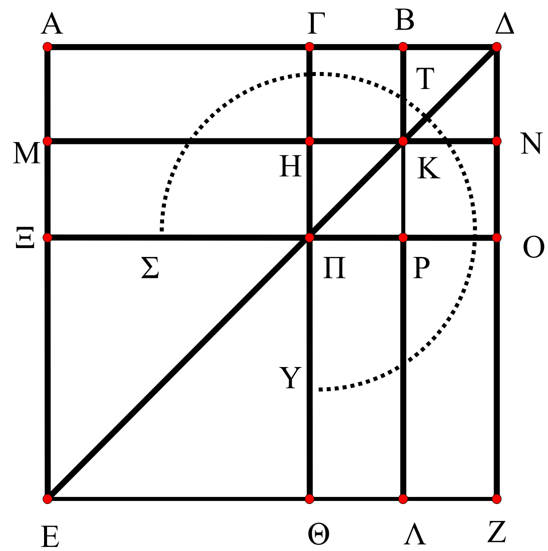
Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Γ τέτοιο ώστε $Α*Γ*Β$. Από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΕΔ πλευράς ΑΒ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΒ. Εν συνεχεία από το σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην ΒΕ φέρνουμε ευθεία ΓΝ παράλληλη προς την ΒΕ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΔΒ στο Η και την ΔΕ στο Ν και η οποία είναι παράλληλη προς την ΑΔ (Πρόταση Ι.30) διότι ΑΒΕΔ τετράγωνο.



Από το σημείο Η το οποίο δεν ανήκει στην ΑΒ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ (Πρόταση Ι.31), η οποία τέμνει την ΑΔ στο Θ και την ΒΕ στο Ζ και η οποία είναι παράλληλη προς την ΒΕ (Πρόταση Ι.30) διότι ΑΒΕΔ τετράγωνο.

Στη συνέχεια από την Πρόταση Ι.43 τα παραλληλόγραμμα ΑΓΗΘ και ΗΖΕΝ έχουν ίσα περιεχόμενα και σε κάθε ένα από αυτά προσθέτουμε το τετράγωνο ΓΒΖΗ πλευράς ΓΒ και άρα από την Πρόταση 12.5 το ΑΒΖΘ έχει ίσο περιεχόμενο με το ΓΒΕΝ. Συνεπώς το περιεχόμενο των ΑΒΖΘ και ΓΒΕΝ είναι διπλάσιο του περιεχομένου ΑΒΖΘ. Άρα το περιεχόμενο του αθροίσματος του γνώμονα ΚΛΜ και του τετραγώνου ΓΒΖΗ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του ορθογωνίου ΑΒΖΘ, πλευρών ΑΒ και ΒΖ. Όμως $ΒΖ \cong ΓΒ$ και άρα το περιεχόμενο του αθροίσματος του γνώμονα ΚΛΜ και του τετραγώνου ΓΒΖΗ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του ορθογωνίου ΑΒΖΘ, πλευρών ΑΒ και ΒΓ. Έπειτα προσθέτουμε στα παραπάνω ευθύγραμμα χωρία το τετράγωνο ΘΗΝΔ πλευράς $ΑΓ \cong ΘΗ$ και άρα από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος του τετραγώνου πλευράς ΑΒ και του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος του διπλάσιου ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΒΓ και του τετραγώνου πλευράς ΑΓ.

Πρόταση ΙΙ.8. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Γ ώστε να ισχύει $Α*Γ*Β$ και από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Δ το με $Γ*Β*Δ$ και $ΒΔ \cong ΓΒ$. Κατόπιν από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΖΕ πλευράς ΑΔ.

Από το σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΕ φέρνουμε ευθεία ΓΘ παράλληλη προς την ΑΕ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΕΖ στο Θ και την ΕΔ στο Π. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.30 η ΓΘ είναι παράλληλη προς την ΔΖ διότι ΑΔΖΕ είναι τετράγωνο. Όμοια φέρνουμε την ΒΛ παράλληλη προς τις ΑΕ, ΓΘ, ΔΖ η οποία τέμνει την ΕΖ στο Λ και την ΕΔ στο Κ.

Ακόμη από το σημείο Κ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΔ φέρνουμε ευθεία ΚΝ παράλληλη προς την ΑΔ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ, την ΔΖ στο Ν και την ΓΘ στο Η. Από την Πρόταση Ι.30 η ΚΝ είναι παράλληλη προς την ΕΖ διότι ΑΔΖΕ τετράγωνο. Όμοια φέρνουμε ΠΡ παράλληλη προς τις ΑΔ, ΚΝ, ΕΖ η οποία τέμνει την ΑΕ στο Ξ, την ΒΛ στο Ρ και την ΔΖ στο Ο.

Από την υπόθεση ισχύει $ΒΔ \cong ΓΒ$ και άρα από την Πρόταση Ι.34 στα ορθογώνια ΓΒΚΗ, ΒΔΝΚ, ΗΚΡΠ και ΚΝΟΡ ισχύει

$ΒΔ \cong ΚΝ, ΓΒ \cong ΗΚ, ΚΝ \cong ΡΟ, ΗΚ \cong ΠΡ$ και

$ΓΗ \cong ΒΚ, ΒΚ \cong ΔΝ, ΗΠ \cong ΚΡ, ΚΡ \cong ΟΝ$.

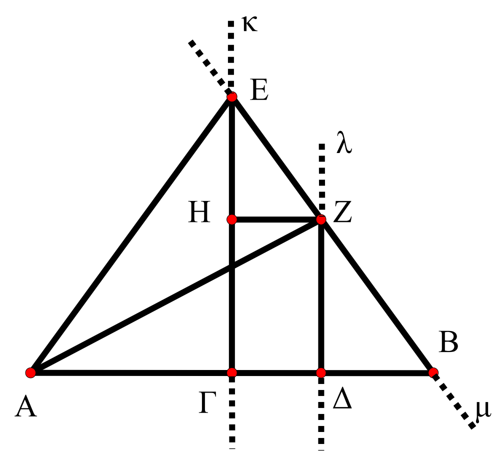
Επομένως από την Πρόταση 12.3 το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΓΒΚΗ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΒΔΝΚ και το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΗΚΡΠ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου ΚΝΟΡ. Ακόμη από την Πρόταση Ι.43 τα παραπληρώματα ΓΒΚΗ και ΚΝΟΡ του ορθογωνίου ΓΔΟΠ έχουν ίσα περιεχόμενα. Επομένως από την Πρόταση 12.4 τα ορθογώνια ΓΒΚΗ, ΒΔΝΚ, ΗΚΡΠ και ΚΝΟΡ έχουν ίσα περιεχόμενα και άρα το περιεχόμενο του ΓΔΟΠ είναι τετραπλάσιο του περιεχομένου του ΓΒΚΗ καθώς

$\Gamma\Delta\text{O}\Pi \cong \Gamma\text{BKH} + \text{B}\Delta\text{NK} + \text{HKP}\Pi + \text{KNOP}.$

Ακόμη ισχύει $\Gamma\text{B} \cong \text{B}\Delta$, όμως $\text{B}\Delta \cong \text{BK}$, διότι ΒΔΝΚ τετράγωνο και $\text{BK} \cong \Gamma\text{H}$ (Πρόταση Ι.34), άρα από την Πρόταση 2.1 θα ισχύει $\Gamma\text{B} \cong \Gamma\text{H}$. Επιπλέον $\Gamma\text{B} \cong \text{HK}$ και $\text{HK} \cong \text{H}\Pi$ άρα από την Πρόταση 2.1 θα ισχύει $\Gamma\text{B} \cong \text{H}\Pi$ και συνολικά $\Gamma\text{H} \cong \text{H}\Pi$. Επομένως τα παραλληλόγραμμα ΑΓΗΜ και ΜΗΠΞ έχουν ίσα περιεχόμενα καθώς βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΑΞ, ΓΠ και ισχύει $\Gamma\text{H} \cong \text{H}\Pi$ (Πρόταση Ι.36). Όμοια θα ισχύει $\Pi\text{P} \cong \text{PO}$ και άρα από την Πρόταση Ι.36 τα παραλληλόγραμμα ΠΡΛΘ και ΡΟΖΛ έχουν ίσα περιεχόμενα. Επιπλέον από την Πρόταση Ι.43 τα παραπληρώματα ΜΗΠΞ και ΠΡΛΘ του ορθογωνίου ΜΚΛΕ έχουν ίσα περιεχόμενα και άρα από την Πρόταση 12.4 τα ορθογώνια ΑΓΗΜ και ΡΟΖΛ έχουν ίσα περιεχόμενα. Επομένως για τα παραλληλόγραμμα ΑΓΗΜ, ΜΗΠΞ, ΠΡΛΘ και ΡΟΖΛ θα ισχύει $\text{A}\Gamma\text{HM} \cong \text{MH}\Pi\Xi \cong \Pi\text{P}\Lambda\Theta \cong \text{POZ}\Lambda$ και άρα το περιεχόμενο του αθροίσματος των τεσσάρων ευθυγράμμων χωρίων είναι τετραπλάσιο του περιεχομένου του ΑΓΗΜ. Όμως έχουμε δείξει προηγουμένως ότι το περιεχόμενο του αθροίσματος των ΓΒΚΗ, ΒΔΝΚ, ΗΚΡΠ και ΚΝΟΡ είναι τετραπλάσιο του περιεχομένου του ΓΒΚΗ. Επομένως το περιεχόμενο του ευθυγράμμου χωρίου (γνώμονα) ΑΔΖΘΠΞ είναι τετραπλάσιο του περιεχομένου του ορθογωνίου ΑΒΚΜ. Όμως $\text{BK} \cong \text{B}\Delta$ και άρα το τετραπλάσιο του περιεχόμενου του ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΒΔ είναι ίσο με το τετραπλάσιο του περιεχομένου του ορθογωνίου ΑΒΚΜ. Επομένως από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του γνώμονα ΣΤΥ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραπλάσιου του ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ, ΒΔ. Στη συνέχεια προσθέτουμε στα παραπάνω ευθύγραμμα χωρία το τετράγωνο ΞΠΘΕ πλευράς $\Xi\Pi \cong \text{A}\Gamma$ και άρα από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος του τετραπλάσιου του ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΒΓ και του τετραγώνου πλευράς ΑΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ.

Πρόταση ΙΙ.9. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.10 υπάρχει σημείο Γ το οποίο ανήκει στο ΑΒ και για το οποίο ισχύει $ΑΓ \cong ΓΒ$. Στη συνέχεια από την Πρόταση Ι.11 φέρνουμε την ευθεία ΓΕ=κ η οποία διέρχεται από το σημείο Γ και είναι κάθετη στο ΑΒ. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ε το οποίο ανήκει στην κ και για το οποίο ισχύει $ΓΕ \cong ΑΓ \cong ΓΒ$ και από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΒ.



Από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Δ για το οποίο ισχύει $Γ*Δ*Β$ και φέρνουμε ΔΖ=λ παράλληλη προς την κ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΕΒ = μ στο Ζ. Διότι αν δεν τέμνονταν τότε από το κοινό σημείο Ε των ευθειών κ, μ θα διέρχονταν δύο διαφορετικές παράλληλες προς την ΔΖ, άτοπο από τη μοναδικότητα της παράλληλης που δείξαμε στην Πρόταση Ι.31.

Επιπλέον ισχύει $ΑΓ \cong ΓΕ$ και άρα από την Πρόταση Ι.5 θα ισχύει $Ε\hat{Α}Γ \cong Α\hat{Ε}Γ$. Από την Πρόταση Ι.32 ισχύει $Ε\hat{Α}Γ + Α\hat{Ε}Γ \cong Ε\hat{Γ}Β$, όμως από την κατασκευή της $Ε\hat{Γ}Β$ ισχύει $Α\hat{Γ}Ε \cong 1$ ορθή και άρα $Ε\hat{Α}Γ + Α\hat{Ε}Γ \cong 1$ ορθή. Επομένως κάθε μία από τις εφαρμόσιμες γωνίες $Ε\hat{Α}Γ$ και $Α\hat{Ε}Γ$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής. Όμοια κάθε μία από τις γωνίες $Γ\hat{Ε}Β$ και $Ε\hat{Β}Γ$ του ισοσκελούς τριγώνου ΓΕΒ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής. Συνεπώς $Γ\hat{Ε}Β + Α\hat{Ε}Γ \cong 1$ ορθή και άρα $Α\hat{Ε}Β \cong 1$ ορθή. Από το σημείο Ζ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΒ φέρνουμε ευθεία ΖΗ παράλληλη προς την ΑΒ η οποία τέμνει την ΓΕ στο Η.

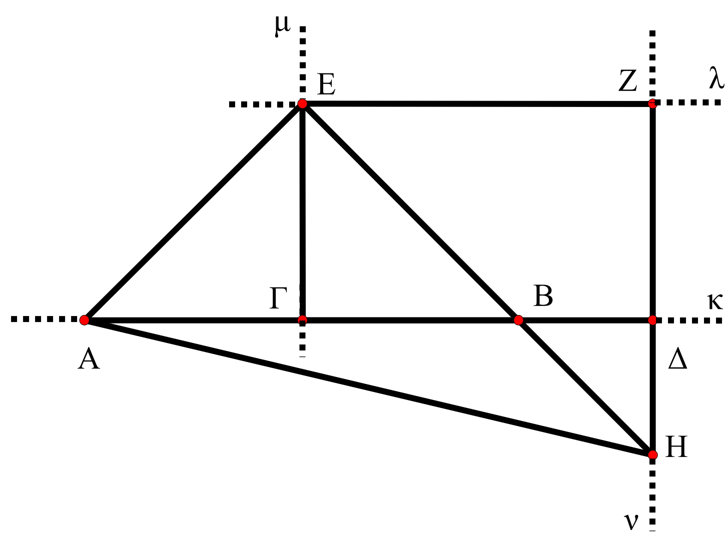
Από την Πρόταση Ι.29 στις παράλληλες ΑΒ, ΖΗ οι οποίες τέμνονται από την κ θα ισχύει $\mathrm{E\widehat{H}Z} \cong \mathrm{E\widehat{\Gamma}B}$, όμως $\mathrm{E\widehat{\Gamma}B} \cong 1$ ορθή από την κατασκευή της και άρα $\mathrm{E\widehat{H}Z} \cong 1$ορθή. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{E}B}$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής, επομένως $\mathrm{H\hat{E}Z} \cong \mathrm{E\hat{Z}H}$ και άρα από την Πρόταση Ι.6 στο τρίγωνο ΕΖΗ θα ισχύει $\mathrm{HE} \cong \mathrm{HZ}$. Όμοια στο τρίγωνο ΒΔΖ ισχύει $\mathrm{Z\hat{\Delta}B} \cong 1$ορθή και $\mathrm{Z\hat{B}\Delta}$ εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής, επομένως $\mathrm{Z\Delta} \cong \mathrm{\Delta B}$.

Ακόμη ισχύει $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{\Gamma E}$ άρα από την Πρόταση 12.3 τα τετράγωνα με πλευρές ΑΓ και ΓΕ έχουν ίσα περιεχόμενα, επομένως το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων με πλευρές ΑΓ και ΓΕ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του τετραγώνου πλευράς ΑΓ. Όμως $\mathrm{A\widehat{\Gamma}E} \cong 1$ ορθή από την κατασκευή της και άρα από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΑ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΓΕ, συνεπώς από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΑ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του τετραγώνου πλευράς ΑΓ. Όμοια στο τρίγωνο ΕΗΖ το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΖ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του τετραγώνου πλευράς $\mathrm{HZ} \cong \mathrm{\Gamma\Delta}$, διότι $\mathrm{E\widehat{H}Z} \cong 1$ορθή και $\mathrm{HE} \cong \mathrm{HZ}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΕΑ, ΕΖ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ, ΓΔ.

Ακόμη έχουμε δείξει ότι $\mathrm{A\hat{E}B} \cong 1$ ορθή και άρα από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΕΑ και ΕΖ. Συνεπώς από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΖ είναι διπλάσιο του περιεχομένου των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΓΔ. Επιπλέον $\mathrm{A\hat{\Delta}Z} \cong 1$ ορθή και άρα από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΖ και άρα από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων ΑΔ και ΔΖ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ, ΓΔ. Συνεπώς το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ, $\Delta B \cong \Delta Z$ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ, ΓΔ

Πρόταση ΙΙ.10. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.10 θεωρούμε το σημείο Γ το οποίο ανήκει στο ΑΒ με $A\Gamma \cong \Gamma B$. Από την Πρόταση Ι.11 και το αξίωμα (C.2) φέρνουμε ΓΕ κάθετη προς το ΑΒ στο σημείο Γ ώστε $\Gamma E \cong A\Gamma \cong \Gamma B$. Από το αξίωμα (Β.3) θεωρούμε το σημείο Δ για το οποίο ισχύει $A * B * \Delta$ και από το σημείο Ε το οποίο



δεν ανήκει στην ΑΒ=κ φέρνουμε ευθεία ΕΖ=λ παράλληλη προς την κ (Πρόταση Ι.31). Όμοια από το σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στην ΕΓ=μ φέρνουμε ευθεία ΔΖ=ν παράλληλη προς την μ.

Ακόμη από την Πρόταση Ι.29 στις παράλληλες ΕΓ, ΖΔ οι οποίες τέμνονται από την ΕΖ θα ισχύει ότι οι γωνίες $\Gamma\hat{E}Z$ και $E\hat{Z}\Delta$ έχουν άθροισμα δύο ορθές και άρα για τις γωνίες $B\hat{E}Z$ και $E\hat{Z}\Delta$ θα ισχύει $B\hat{E}Z + E\hat{Z}\Delta < 2$ ορθές, διότι $B\hat{E}Z < \Gamma\hat{E}Z$ καθώς ΒΕ ανήκει στο εσωτερικό της $\Gamma\hat{E}Z$. Επομένως από το πέμπτο Αίτημα οι ΕΒ=ρ και ΖΗ=ν τέμνονται, έστω Η το σημείο τομής τους και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

Επιπλέον από την Πρόταση Ι.5 στο τρίγωνο ΕΑΓ θα ισχύει $A\hat{E}\Gamma \cong E\hat{A}\Gamma$ και από την κατασκευή της $E\hat{\Gamma}A$ ισχύει $E\hat{\Gamma}A \cong 1$ ορθή, επομένως κάθε μία από τις γωνίες $A\hat{E}\Gamma, E\hat{A}\Gamma$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής, διότι $A\hat{E}\Gamma + E\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Gamma}B$ (Πρόταση Ι.32) και $E\hat{\Gamma}B \cong 1$ ορθή. Όμοια κάθε μία από τις γωνίες $B\hat{E}\Gamma, E\hat{B}\Gamma$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής, επομένως $A\hat{E}B \cong 1$ ορθή. Επιπλέον έχουμε δείξει ότι η $E\hat{B}\Gamma$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής και άρα από την Πρόταση Ι.15 η γωνία $H\hat{B}\Delta$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής.

Από την Πρόταση Ι.29 στις παράλληλες μ, ν οι οποίες τέμνονται από την κ θα ισχύει $H\hat{\Delta}B \cong E\hat{\Gamma}\Delta$, όμως $E\hat{\Gamma}\Delta \cong 1$ ορθή και άρα $H\hat{\Delta}B \cong 1$ ορθή. Στο τρίγωνο ΔΒΗ ισχύει επιπλέον ότι η γωνία $H\hat{B}\Delta$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής και άρα $B\hat{H}\Delta$ εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής (Πρόταση Ι.32). Επομένως από την Πρόταση Ι.6 θα ισχύει $B\Delta \cong \Delta H$.

Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 στο παραλληλόγραμμο ΕΖΔΓ, διότι μ παράλληλη προς την ν και λ παράλληλη προς την κ από τη κατασκευή τους, θα ισχύει $E\hat{Z}\Delta \cong E\hat{\Gamma}\Delta \cong 1$ ορθή. Επομένως στο τρίγωνο ΕΖΗ και δεδομένου ότι η $E\hat{H}Z$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής θα ισχύει ότι η $H\hat{E}Z$ είναι εφαρμόσιμη με το μισό μιας ορθής (Πρόταση Ι.32) και άρα από την Πρόταση Ι.6 θα ισχύει $EZ \cong ZH$.

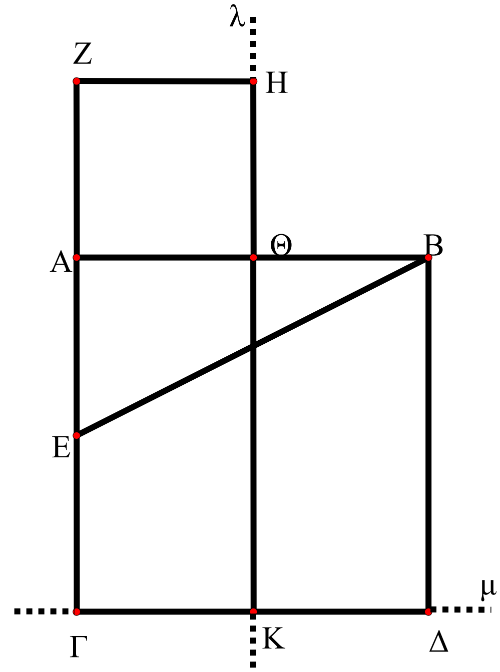
Ακόμη ισχύει ότι $E\Gamma \cong A\Gamma$ και άρα από την Πρόταση 12.3 τα τετράγωνα πλευράς ΕΓ, ΑΓ έχουν ίσα περιεχόμενα όμως $E\hat{\Gamma}A \cong 1$ ορθή, επομένως από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΕΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΕ και άρα το τετράγωνο πλευράς ΑΕ έχει διπλάσιο περιεχόμενο από το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΓ. Όμοια από τη Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΕΖ και ΖΗ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΗ και αφού $EZ \cong ZH$ το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΗ είναι διπλάσιο από το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΖ.

Επιπλέον από την Πρόταση Ι.34 στο παραλληλόγραμμο ΕΖΔΓ θα ισχύει $ΕΖ \cong ΓΔ$ και άρα από την Πρόταση 12.3 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΓΔ. Επομένως από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΗ είναι διπλάσιο από το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΓΔ. Επίσης έχουμε δείξει ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΕ είναι διπλάσιο από το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΓ και άρα από την Πρόταση 12.5 το άθροισμα των περιεχομένων των τετραγώνων πλευράς ΑΕ και ΕΗ είναι διπλάσιο από το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΓΔ. Επιπλέον επειδή $Α\hat{Ε}Η \cong 1$ ορθή από την Πρόταση Ι.47 θα ισχύει ότι το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΕ και ΕΗ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΗ και άρα από τη Πρόταση 12.4 θα ισχύει ότι το τετράγωνο πλευράς ΑΗ είναι διπλάσιο από το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευρών ΑΓ και ΓΔ. Ακόμη από την Πρόταση Ι.29 $Ε\hat{Ζ}Δ \cong Γ\hat{Δ}Η \cong 1$ ορθή επομένως από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΗ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΗ και άρα από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΗ είναι διπλάσιο του περιεχομένου του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΓΔ. Όμως $ΔΒ \cong ΔΗ$ και άρα το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΒ είναι διπλάσιο του περιεχομένου των αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΓ και ΓΔ.

Πρόταση ΙΙ.11. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από την Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΔΓ πλευράς ΑΒ και θεωρούμε Ε το σημείο το οποίο ανήκει στο ΑΓ με $ΑΕ \cong ΕΓ$ (Πρόταση Ι.10) και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Εν συνεχεία από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ζ με $Γ * Α * Ζ$ και $ΕΖ \cong ΒΕ$. Από την

Πρόταση Ι.46 κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΖΗΘ πλευράς ΑΖ. Επιπλέον από το αξίωμα (Ι.1) θεωρούμε την ευθεία ΗΘ=λ η οποία τέμνει την ΓΔ=μ στο Κ. Αφού Ε το μέσο του ΓΑ και επιπλέον ισχύει $\Gamma * \mathrm{A} * \mathrm{Z}$ τότε από την Πρόταση ΙΙ.6 ισχύει ότι το περιεχόμενο του αθροίσματος του ορθογωνίου πλευρών ΓΖ, ΑΖ και του τετραγώνου πλευράς ΑΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΖ. Όμως από την Πρόταση 12.3 τα περιεχόμενα των τετραγώνων πλευράς ΕΖ και ΕΒ είναι ίσα επομένως από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του



αθροίσματος του ορθογωνίου πλευρών ΓΖ, ΑΖ και του τετραγώνου πλευράς ΑΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΒ. Ακόμη ΑΒΔΓ τετράγωνο και άρα $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} \cong 1$ ορθή, επομένως από την Πρόταση Ι.47 στο τρίγωνο ΑΕΒ θα ισχύει ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΒ και ΑΕ. Επομένως από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων των πλευρών ΑΒ και ΑΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος του ορθογωνίου πλευρών ΓΖ, ΑΖ και του τετραγώνου πλευράς ΑΕ. Συνεπώς από την Πρόταση 12.6 θα ισχύει ότι το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΓΖ, ΑΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΒ.

Ακόμη από την Πρόταση 12.3 το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΓΖ, ΑΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΓΖ, ΖΗ καθώς $\Gamma\mathrm{Z} \cong \Gamma\mathrm{Z}$ από το αξίωμα (C.1) και $\mathrm{AZ} \cong \mathrm{ZH}$ διότι ΑΖΗΘ τετράγωνο. Επομένως το ορθογώνιο πλευρών ΓΖ, ΖΗ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΒ. Από την Πρόταση 12.6 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΘ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΘΒ, ΒΔ. Όμως $\mathrm{B}\Delta \cong \mathrm{AB}$ διότι ΑΒΓΔ τετράγωνο και άρα από την Πρόταση 12.3 το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΘΒ, ΒΔ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΘΒ. Άρα από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΘ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΒ, ΒΘ.

Στη συνέχεια ακολουθούν οι ορισμοί της αμβλείας και της οξείας γωνίας οι οποίοι διατυπώνονται στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων και εμφανίζονται για πρώτη φορά σε κάποια πρόταση των Στοιχείων στις Προτάσεις ΙΙ.12 και ΙΙ.13 αντίστοιχα, που ακολουθούν. Πριν όμως διατυπώσουμε και αποδείξουμε τις αναφερθείσες προτάσεις αποδεικνύουμε την Πρόταση 13.1 η οποία θα μας βοηθήσει στην πλήρη αιτιολόγηση όλων των βημάτων των αποδείξεων αυτών των δύο προτάσεων.

Όροι ια΄, ιβ΄

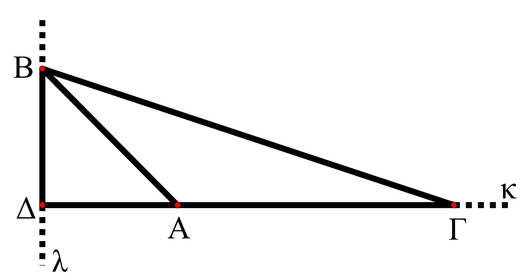
ια΄. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.
ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

Πρόταση 13.1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ:

αν $B\hat{A}\Gamma > 1$ ορθή και ΒΔ=κ κάθετη στην ΑΓ=λ με Δ το σημείο τομής των κ, λ, τότε για τα σημεία Α, Γ, Δ ισχύει $\Delta * A * \Gamma$.

αν $B\hat{A}\Gamma < 1$ ορθή και ΒΔ=κ κάθετη στην ΑΓ=λ με Δ το σημείο τομής των κ, λ, τότε για τα σημεία Α, Γ, Δ ισχύει $A * \Delta * \Gamma$.

Απόδειξη. i) Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ με $B\hat{A}\Gamma > 1$ ορθή. Από το σημείο Β το οποίο δεν ανήκει στην ΑΓ=λ διότι ΑΒΓ τρίγωνο φέρνουμε την κάθετο ΒΔ=λ (Πρόταση Ι.12) η οποία τέμνει την ΑΓ=κ στο σημείο Δ. Υποθέτουμε ότι για το σημείο Δ ισχύει



$A * \Delta * \Gamma$ τότε στο τρίγωνο ΒΑΔ από την Πρόταση Ι.16 θα ισχύει $B\hat{\Delta}\Gamma > B\hat{A}\Delta$, άτοπο διότι $B\hat{\Delta}\Gamma \cong 1$ ορθή από την κατασκευή της και $B\hat{A}\Gamma > 1$ ορθή από την υπόθεση.

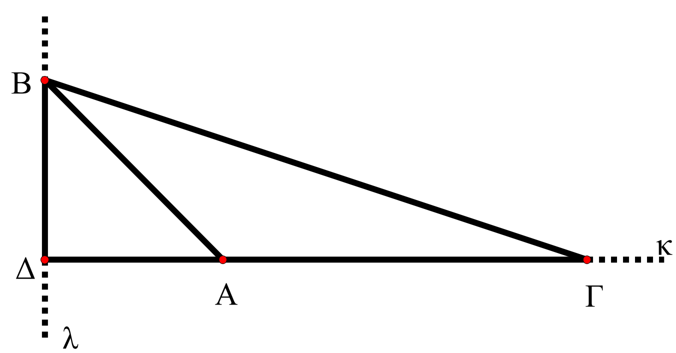
Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει $Α*Γ*Δ$ και ότι δεν μπορεί το σημείο Δ να συμπίπτει με κάποιο από τα Α, Γ. Επομένως από το αξίωμα (Β.2) για τα συνευθειακά σημεία Α, Γ, Δ θα ισχύει $Δ*Α*Γ$.

ii) Αποδεικνύεται όμοια, υποθέτουμε ότι ισχύει $Α*Γ*Δ$ ή $Δ*Α*Γ$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Πρόταση ΙΙ.12. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

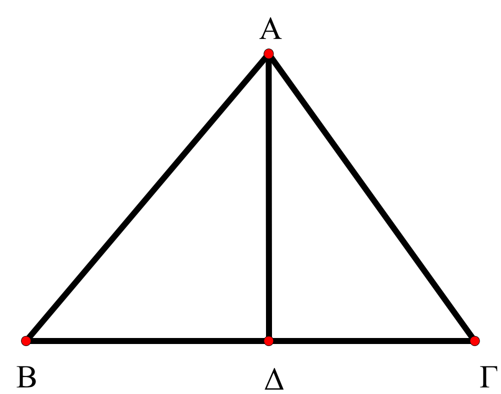
Απόδειξη:

Έστω το αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Β\hat{Α}Γ$ αμβλεία γωνία. Από την Πρόταση Ι.12 φέρνουμε από το σημείο Β το οποίο δεν ανήκει στην ΑΓ=κ, διότι ΑΒΓ τρίγωνο, την κάθετο ΒΔ=λ προς την ΑΓ με Δ το σημείο τομής των ευθειών λ, κ. Αφού $Β\hat{Α}Γ$ αμβλεία



γωνία τότε από την Πρόταση 13.1 για τα σημεία Δ, Α, Γ θα ισχύει είτε $Δ*Α*Γ$ είτε $Α*Γ*Δ$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $Δ*Α*Γ$ και άρα το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΔΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΔΑ, ΑΓ συν το διπλάσιο του ορθογωνίου πλευρών ΓΑ, ΑΔ (Πρόταση ΙΙ.4). Στη συνέχεια προσθέτουμε σε κάθε ένα από τα προκύπτοντα ισο-περιεχομενικά ευθύγραμμα χωρία το τετράγωνο πλευράς ΔΒ και άρα από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΔΓ και ΔΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΔΑ, ΑΓ και ΔΒ συν το διπλάσιο περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΓΑ, ΑΔ. Ακόμη $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma \cong 1$ορθή, από την κατασκευή της, και άρα από την Πρόταση Ι.47 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΔΓ και ΔΒ. Όμοια από την Πρόταση Ι.47 στο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΒ. Συνεπώς από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΒ και ΑΓ συν το διπλάσιο του ορθογωνίου πλευρών ΓΑ, ΑΔ και άρα το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι μεγαλύτερο του περιεχομένου του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΒ και ΑΓ κατά το διπλάσιο περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΑΓ, ΑΔ (αξίωμα Zolt).

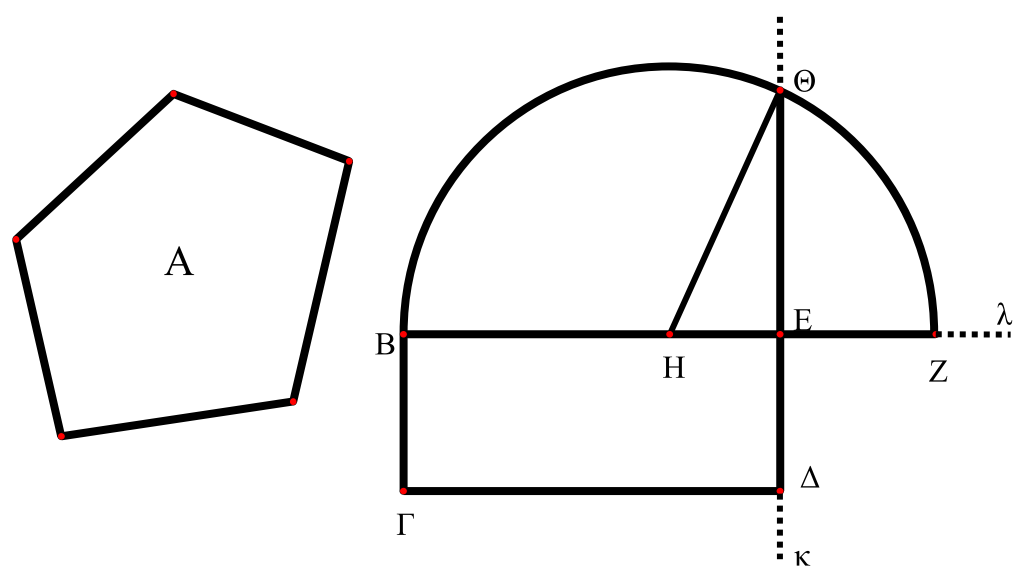
Πρόταση ΙΙ.13. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τε τραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴνὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.



Απόδειξη. Έστω το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ οξεία. Τότε από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στην ΒΓ, διότι ΑΒΓ τρίγωνο, φέρνουμε την κάθετο προς την ΒΓ=λ με Δ σημείο τομής των κ, λ (Πρόταση Ι.12). Για τα σημεία Β, Δ, Γ ισχύει $\mathrm{B} * \Delta * \Gamma$ (Πρόταση 13.1) άρα από την Πρόταση ΙΙ.7 θα ισχύει ότι το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων ΓΒ, ΒΔ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος του τετραγώνου πλευράς ΔΓ συν το διπλάσιο περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΓΒ, ΒΔ. Σε κάθε ένα από τα παραπάνω αθροίσματα των ευθυγράμμων χωρίων προσθέτουμε το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΔΑ και άρα από την Πρόταση 12.5 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ, ΔΓ συν το διπλάσιο του περιεχομένου του ορθογωνίου ΓΒ, ΒΔ. Ακόμη το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} \cong 1$ ορθή και άρα από την Πρόταση Ι.47 στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΒ. Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει ότι το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΑΔ και ΔΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΑΓ. Συνεπώς από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΓΒ και ΑΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος του τετραγώνου πλευράς ΑΓ συν το διπλάσιο περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΓΒ, ΒΔ. Επομένως το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΓΒ, ΑΒ είναι μεγαλύτερο του περιεχομένου του τετραγώνου πλευράς ΑΓ κατά το διπλάσιο του περιεχομένου του ορθογωνίου πλευρών ΓΒ, ΒΔ (αξίωμα Zolt).

Πρόταση ΙΙ.14. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Απόδειξη. Έστω το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο Α, θα κατασκευάσουμε τετράγωνο ισο-περιεχομενικό με το Α. Από την Πρόταση Ι.45 κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΕΔΓ ίσου περιεχομένου με το περιεχόμενο του σχήματος Α και αν ισχύει ότι $\mathrm{BE} \cong \mathrm{E\Delta}$ τότε είναι το ζητούμενο τετράγωνο. Έστω ότι δεν ισχύει $\mathrm{BE} \cong \mathrm{E\Delta}$ τότε από την Πρόταση 3.5 (β.ii) θα ισχύει είτε ότι ΒΕ>ΕΔ είτε ότι ΒΕ<ΕΔ.



Υποθέτουμε ότι ΒΕ>ΕΔ τότε από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ζ ώστε $B*E*Z$ και $EZ \cong E\Delta$. Στη συνέχεια από την Πρόταση Ι.10 θεωρούμε Η σημείο το οποίο ανήκει στο ΒΖ ώστε $BH \cong HZ$. Ακόμη από την Πρόταση Ι.1 κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Η και ακτίνα ΗΒ και από το αξίωμα (Ι.1) θεωρούμε την ευθεία ΕΔ=κ η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία (Πρόταση 9.1), διότι Ε εσωτερικό σημείο του κύκλου,διότι $H*E*Z$. Έστω Θ το σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία κ, το οποίο βρίσκεται στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΖ=λ σε σχέση με το σημείο Δ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΗΘ.

Δεδομένου ότι $BH \cong HZ$ και ότι για το σημείο Ε ισχύει $B*H*E*Z$ τότε ΕΒ>ΕΖ, επομένως από την Πρόταση ΙΙ.5 έπεται ότι το περιεχόμενο του αθροίσματος του τετραγώνου πλευράς ΕΗ συν το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΗΖ. Επιπλέον ισχύει ότι $H\Theta \cong HZ$, ως ακτίνες κύκλου και άρα από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΗ συν το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΗΘ.

Ακόμη για τα σημεία Δ, Ε, Θ ισχύει $\Delta*E*\Theta$ και άρα από την Πρόταση Ι.13 ισχύει $\Theta\hat{E}B \cong 1$ορθή, διότι $\Delta\hat{E}B \cong 1$ ορθή ως γωνία ορθογωνίου. Επομένως από την Πρόταση Ι.47 στο ορθογώνιο τρίγωνο ΘΕΗ με $\Theta\hat{E}H \cong 1$ ορθή έπεται ότι το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΘΗ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΘΕ, ΕΗ. Συνεπώς από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του αθροίσματος του τετραγώνου πλευράς ΗΕ συν το ορθογώνιο πλευρών ΒΕ, ΕΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του αθροίσματος των τετραγώνων πλευράς ΘΕ, ΕΗ. Αν αφαιρέσουμε το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΗΕ από κάθε ένα από τα παραπάνω ίσα περιεχόμενα τότε από την Πρόταση 12.6 το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΕΘ. Όμως από την κατασκευή της ΕΖ ισχύει ότι $EZ \cong E\Delta$ και άρα από την Πρόταση 12.3 το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΔ. Επομένως από την Πρόταση 12.4 το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΘΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΔ. Όμως το περιεχόμενο του ορθογωνίου πλευρών ΒΕ, ΕΔ είναι ίσο με το περιεχόμενο του ευθυγράμμου σχήματος Α και άρα από την Πρόταση

12.4 το περιεχόμενο του ευθύγραμμου σχήματος Α είναι ίσο με το περιεχόμενο του τετραγώνου πλευράς ΘΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Θεωρία Λόγων ευθυγράμμων χωρίων και *Προτάσεις VI.1-VI.13* των *Στοιχείων*

Η θεωρία λόγων ευθυγράμμων τμημάτων σύμφωνα με το Βιβλίο V (Κεφάλαιο 10) επεκτείνεται εδώ για ευθύγραμμα χωρία, βάσει της θεωρίας ευθυγράμμων χωρίων (Κεφάλαια 12 και 13) και της Πρότασης VI.1 των *Στοιχείων* με σκοπό να μην παρεκκλίνουμε από το πνεύμα των *Στοιχείων*. Σε αντίθεση ο Hartshorne βάσει της αξιωματικής θεμελίωσης Hilbert διατυπώνει τη θεωρία όμοιων τριγώνων μέσω της αριθμητικής ευθυγράμμων τμημάτων.

Αρχικά θα ορίσουμε τους ίσους λόγους ευθυγράμμων χωρίων χρησιμοποιώντας τον ορισμό ε΄ του Βιβλίου V των Στοιχείων με τη διαφορά ότι πλέον τα μεγέθη που αναφέρονται στον ορισμό θα αντιστοιχούν σε ευθύγραμμα χωρία. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε την Πρόταση VI.1 η οποία είναι μείζονος σημασίας για τη διαδικασία που θα ακολουθηθεί στην απόδειξη των προτάσεων που έπονται και θα διατυπώσουμε το αξίωμα του Ευδόξου-Αρχιμήδη για ευθύγραμμα χωρία. Έτσι θα μελετήσουμε την ισχύ των ιδιοτήτων όπως για παράδειγμα σύνθεση λόγου, διαίρεση λόγου, δι’ίσου αυτή τη φορά όμως για ευθύγραμμα χωρία.

Όπως θα διαπιστώσουμε στις προτάσεις που ακολουθούν επικαλούμαστε την Πρόταση I.45 ώστε να τοποθετήσουμε μεταξύ παραλλήλων υπό συγκεκριμένη γωνία τυχαία ευθύγραμμα χωρία με τα προκύπτοντα ευθύγραμμα χωρία να είναι ορθογώνια και ισοπεριεχομενικά με τα αρχικά. Στη συνέχεια μέσω της θεωρίας των ευθυγράμμων χωρίων και στηριζόμενοι κατά κύριο λόγο στο αξίωμα Zolt θα οδηγούμαστε στις πλευρές (των οποίων τη θεωρία λόγων έχουμε αναπτύξει) των αντίστοιχων ευθυγράμμων χωρίων και μέσω της Πρότασης VI.1 θα αναγόμαστε στη θεωρία λόγων των ευθυγράμμων χωρίων.

Σκοπός όμως για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων των λόγων ευθυγράμμων χωρίων είναι να στηριχτούμε όσο το δυνατόν λιγότερο στην αναγωγή στα ευθύγραμμα τμήματα και θα τις αποδείξουμε χρησιμοποιώντας κυρίως τον ορισμό της αναλογίας για ευθύγραμμα χωρία. Στις περιπτώσεις όμως που δεν θα είναι εφικτή η απόδειξη της ζητούμενης ιδιότητας μέσω του Ορισμού V.ε΄, όπως για παράδειγμα στην Πρόταση V.8 (για ευθύγραμμα χωρία), θα ανάγουμε το πρόβλημα στα ευθύγραμμα χωρία με την παραπάνω διαδικασία και το ζητούμενο θα προκύπτει μέσα από την ισχύ της αντίστοιχης ιδιότητας στα ευθύγραμμα τμήματα και την Πρόταση VI.1.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι διαδικασίες απόδειξης που θα ακολουθηθούν.

Αρχική διαδικασία απόδειξης

Ιδιότητα προς απόδειξη $\xrightarrow{\text{Ορισμός ε΄}}$ Ισχύ της ιδιότητας.

Εναλλακτική διαδικασία

Ιδιότητα προς απόδειξη $\longrightarrow$ Πρόταση I.45 $\longrightarrow$ Αντίστοιχη ιδιότητα για ευθύγραμμα τμήματα $\longrightarrow$ Πρόταση VI.1 $\longrightarrow$ Ισχύ της ιδιότητας.

Όρος ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καί τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Σημείωση. Δεδομένου ότι ο Ορισμός ε΄ του Βιβλίου V των Στοιχείων του Ευκλείδη αναφέρεται σε μεγέθη μπορούμε να τον επικαλούμαστε και για ευθύγραμμα χωρία. Έτσι τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται σε αναλογία αν $\mathrm{A}:\mathrm{B}=\Gamma:\Delta$.
Πρωτού διατυπώσουμε και αποδείξουμε την Πρόταση VI.1 των *Στοιχείων* θα αποδείξουμε τις Προτάσεις V.11 και V.15 (για ευθύγραμμα χωρία) οι οποίες χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της Πρότασης VI.1 των *Στοιχείων* και είναι

ανεξάρτητες αυτής. Επιπλέον παραθέτουμε τον όρο δ΄ του Βιβλίου VI των *Στοιχείων* διότι η έννοια του ύψους χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη πρόταση.

Πρόταση V.11 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ με $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ και $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{E}{Z}$ τότε $\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}$.

Απόδειξη. Αφού $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ τότε από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία υπάρχουν m πολλαπλάσια των Α, Γ και n πολλαπλάσια των Β, Δ ώστε αν mΑ<nΒ τότε mΓ<nΔ όμως $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{E}{Z}$ και άρα από τον Ορισμό V.ε΄ αν mΓ<nΔ τότε mΕ<nΖ.

Επομένως αν mΑ<nΒ τότε mΕ<nΖ και άρα από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}$.

Πρόταση V.15 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β τότε $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, mΑ και mΒ. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$ και άρα θα ισχύει είτε $\frac{A}{B}<\frac{mA}{mB}$ είτε $\frac{A}{B}>\frac{mA}{mB}$. Έστω ότι $\frac{A}{B}<\frac{mA}{mB}$, τότε υπάρχουν q πολλαπλάσια των Α, mΑ και p πολλαπλάσια των Β, mΒ ώστε qΑ<pΒ και pmΒ<qmΑ, διότι διαφορετικά από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία ο λόγος του Α προς το Β θα ήταν ίσος με τον λόγο του mΑ προς το mΒ.

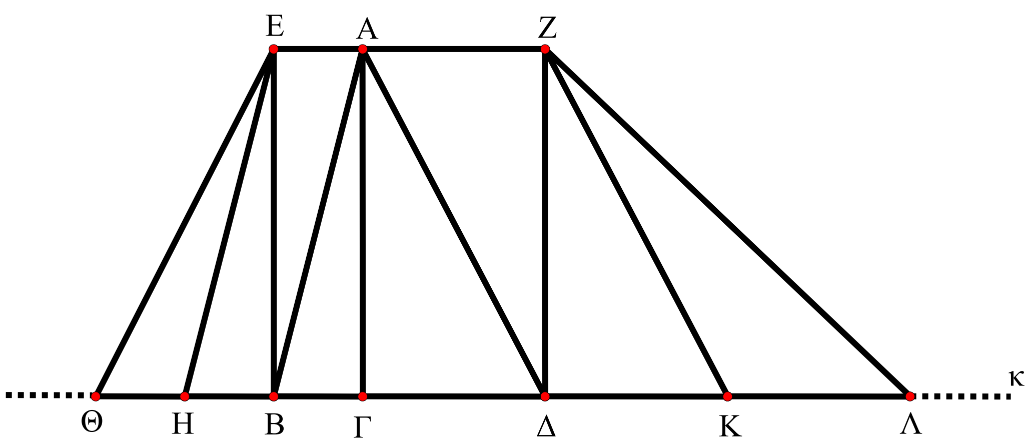
Αφού m(pΒ)<m(qΑ) τότε από την Πρόταση 14.3 θα ισχύει pΒ<qΑ, άτοπο διότι qΑ<pΒ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει $\frac{A}{B}>\frac{mA}{mB}$ και άρα $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$.

Όρος δ΄. Ὕψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Πρόταση VI.1. Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ και τα παραλληλόγραμμα ΒΓΑΕ, ΔΓΑΖ, τα οποία έχουν αντίστοιχα την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Θα δείξουμε ότι ο λόγος της βάσης ΒΓ προς τη βάση ΓΔ είναι ίσος με τον λόγο του τριγώνου ΑΒΓ προς το λόγο του τριγώνου ΑΓΔ καθώς επίσης και με το λόγο του παραλληλογράμμου ΒΓΑΕ προς το παραλληλόγραμμο ΔΓΑΖ.



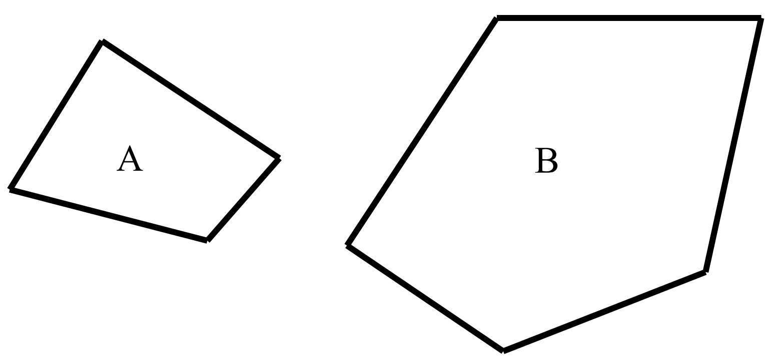
Από το αξίωμα (I.1) θεωρούμε την ευθεία ΒΓ=κ η οποία διέρχεται από τα σημεία Β, Γ και από το αξίωμα (C.2) υπάρχουν τα σημεία Θ, Η, Κ και Λ τα οποία ανήκουν στην ευθεία κ και για τα οποία ισχύει $ΘΗ \cong ΗΒ \cong ΒΓ$ και $ΓΔ \cong ΔΚ \cong ΚΛ$ με $Θ * Η * Β * Γ$ και $Γ * Δ * Κ * Λ$. Από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΘ, ΕΗ, ΖΚ, ΖΛ.

Δεδομένου ότι $ΘΗ \cong ΗΒ \cong ΒΓ$, $ΓΔ \cong ΔΚ \cong ΚΛ$ και ότι τα τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ και ΑΒΓ βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων τότε από την Πρόταση I.38 τα τρίγωνα έχουν ίσα περιεχόμενα. Όμως $ΘΓ \cong ΘΗ + ΗΒ + ΒΓ$ και $ΑΘΓ \cong ΑΘΗ + ΑΗΒ + ΑΒΓ$ επομένως όσα πολλαπλάσια είναι η βάση ΘΓ της βάσης ΒΓ τόσα είναι και τα πολλαπλάσια του τριγώνου ΑΒΓ στο τρίγωνο ΑΘΓ. Όμοια όσα πολλαπλάσια είναι η βάση ΓΛ της βάσης ΓΔ τόσα είναι και τα πολλαπλάσια του τριγώνου ΑΓΔ στο τρίγωνο ΑΛΓ. Άρα αν η βάση ΘΓ υπερέχει της βάσης ΓΛ τότε θα υπερέχει και το τρίγωνο ΑΘΓ του τριγώνου ΑΓΛ, αν η βάση ΘΓ είναι ίση της βάσης ΓΛ τότε τα τρίγωνα είναι ίσα και αν η βάση ΘΓ είναι μικρότερη της βάσης ΓΛ τότε το τρίγωνο ΑΘΓ θα είναι μικρότερο του τριγώνου ΑΓΛ. Επομένως από τον Ορισμό V.ε΄ ο λόγος του ΒΓ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του τριγώνου ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ.

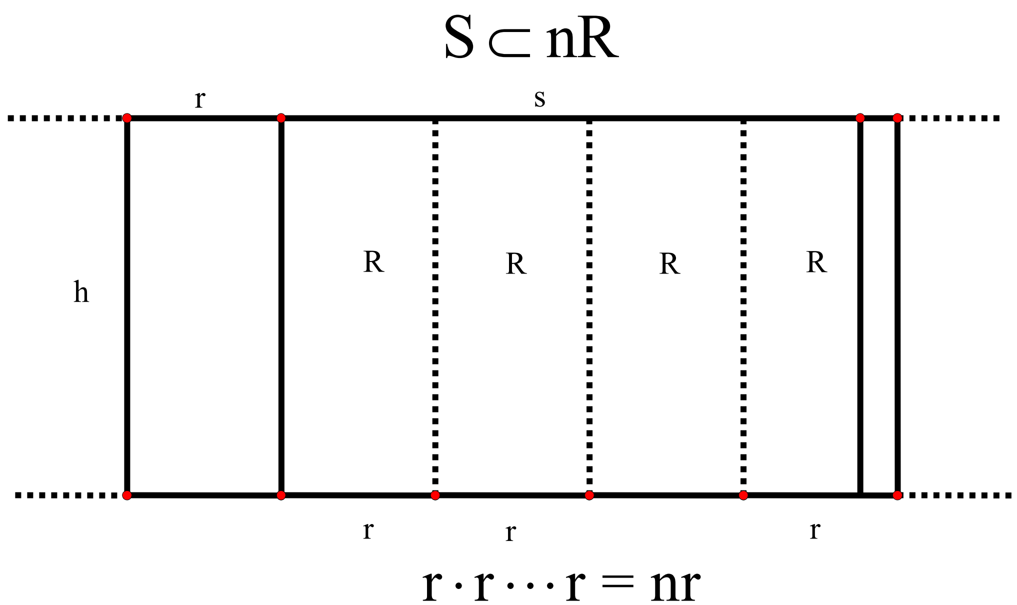
Στη συνέχεια από την Πρόταση Ι.34 το παραλληλόγραμμο ΒΓΑΕ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ καθώς επίσης και το παραλληλόγραμμο ΔΓΑΖ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΓΔ και άρα από την Πρόταση V.15 (για ευθύγραμμα χωρία) ο λόγος του τριγώνου ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ίσος με το λόγο του παραλληλογράμμου ΒΓΑΕ προς το παραλληλόγραμμο ΔΓΑΖ. Όμως από το πρώτο μέρος της απόδειξης ο λόγος του ΒΓ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του τριγώνου ΑΒΓ προς το τρίγωνο ΑΓΔ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος του ΒΓ προς το ΓΔ είναι ίσος με το λόγο του παραλληλογράμμου ΒΓΑΕ προς το παραλληλόγραμμο ΔΓΑΖ.

Αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου (για ευθύγραμμα χωρία)

Για κάθε δύο ευθύγραμμα χωρία Α, Β με Α<Β υπάρχει ακέραιο πολλαπλάσιο nA του Α ώστε nA>B.

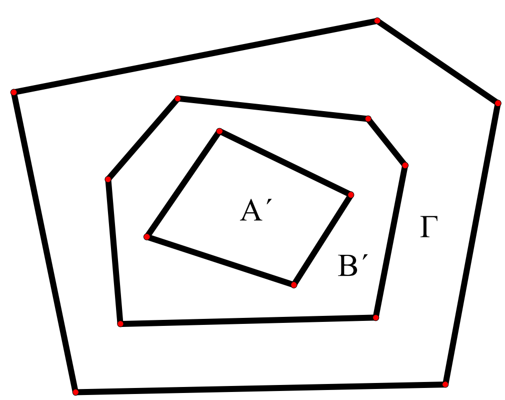


Έστω Α, Β ευθύγραμμα χωρία, τότε από την Πρόταση Ι.45 υπάρχουν R, S ισο-περιεχομενικά χωρία των Α, Β αντίστοιχα με R, S να βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων με δοθείσα πλευρά h. Αν r, s οι άλλες πλευρές των R, S τότε από το αξίωμα (C.2) τοποθετώντας τις r, s διαδοχικά υπάρχει nr πολλαπλάσιο της r ώστε να ισχύει nr>s (αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου για ευθύγραμμα τμήματα) και άρα από το αξίωμα Zolt το συντεθέν ευθύγραμμο χωρίο nR=nA θα είναι μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο χωρίο S. Δηλαδή το ευθύγραμμο χωρίο S=B θα περιέχεται ολόκληρο στο ευθύγραμμο χωρίο nR.



Στη συνέχεια ακολουθούν οι αποδείξεις των προτάσεων για ευθύγραμμα χωρία και οι οποίες έχουν αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 10 για ευθύγραμμα τμήματα.

Πρόταση 14.1. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ με Α<Β και Β<Γ τότε θα ισχύει Α<Γ.



Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ με Α<Β και Β<Γ. Αφού Β<Γ υπάρχει χωρίο Β΄ ισο-περιεχομενικό με το Β το οποίο περιέχεται στο Γ ($B' \subset \Gamma$) επομένως θα ισχύει ότι $\Gamma - B' \neq \varnothing$. Ακόμη ισχύει ότι Α<Β και αφού Β=Β΄ τότε υπάρχει ευθύγραμμο χωρίο Α΄ ισο-περιεχομενικό με Α το οποίο περιέχεται στο Β΄($A' \subset B'$) επομένως $B' - A' \neq \varnothing$. Επομένως το ευθύγραμμο χωρίο Α΄=Α περιέχεται στο Β΄=Β το οποίο περιέχεται στο Γ με $\Gamma - A' \neq \varnothing$, δεδομένου ότι $\Gamma - B' \neq \varnothing$ και $B' - A' \neq \varnothing$, άρα από το αξίωμα Zolt θα ισχύει ότι $A = A' \subset \Gamma \Rightarrow A<\Gamma$.

Πρόταση V.7 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω Α, Β, Γ ευθύγραμμα χωρία με Α=Β και Γ τυχαίο, τότε $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$ και $\frac{\Gamma}{A} = \frac{\Gamma}{B}$.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$ τότε είτε ο λόγος του Α προς το Γ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Β προς το Γ είτε ο λόγος του Α προς το Γ είναι μικρότερος από τον λόγο του Β προς το Γ. Υποθέτουμε ότι $\frac{A}{\Gamma} < \frac{B}{\Gamma}$ τότε υπάρχουν n πολλαπλάσια των ευθύγραμμων χωρίων Α, Β και m πολλαπλάσια του ευθύγραμμου χωρίου Γ ώστε nΑ<mΓ και mΓ<nΒ, διότι διαφορετικά από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία ο λόγος του Α προς το Γ θα ήταν ίσος με τον λόγο του Β προς Γ. Επομένως θα ισχύει nΑ<nΒ (Πρόταση 14.1), άτοπο διότι Α=Β και άρα nΑ=nΒ ως αθροίσματα χωρίων με ίσα περιεχόμενα.

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\frac{\Gamma}{A} = \frac{\Gamma}{B}$,

έστω ότι δεν ισχύει $\frac{\Gamma}{A} = \frac{\Gamma}{B}$ τότε είτε ο λόγος του Γ προς το Α είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Β είτε ο λόγος του Γ προς το Α είναι μικρότερος από τον λόγο του Γ προς το Β. Υποθέτουμε ότι $\frac{\Gamma}{A} < \frac{\Gamma}{B}$ τότε υπάρχουν n πολλαπλάσια των ευθύγραμμου χωρίου Γ και m πολλαπλάσια των ευθύγραμμων χωρίων Α, Β ώστε να ισχύει nΓ<mΑ και mΒ<nΓ, όμως mΑ=mΒ ως αθροίσματα χωρίων με ίσα περιεχόμενα και άρα nΓ<nΓ (Πρόταση 14.1), άτοπο.

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει $\frac{\Gamma}{A} > \frac{\Gamma}{B}$.

Πρόταση V.8 (για ευθύγραμμα χωρία)

Έστω Α, Β, Γ ευθύγραμμα χωρία με Α>Β, τότε $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$ και $\frac{\Gamma}{B} > \frac{\Gamma}{A}$.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ με Α>Β τότε θα δείξουμε ότι $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$ και $\frac{\Gamma}{B} > \frac{\Gamma}{A}$.

Έστω p, q δύο παράλληλες ευθείες με απόσταση h, τότε από την Πρόταση Ι.45 υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ τα οποία ανήκουν στην p και για τα οποία ισχύει

Α= $h \cdot \alpha$

Β= $h \cdot \beta$

Γ= $h \cdot \gamma$

Εφόσον Α>Β τότε από το αξίωμα Zolt θα ισχύει α>β και άρα από την Πρόταση V.8 για ευθύγραμμα τμήματα θα ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Ακόμη από την Πρόταση VI.1 ισχύει ότι $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A}{\Gamma}$ και $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{B}{\Gamma}$ και άρα $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\frac{\Gamma}{B} > \frac{\Gamma}{A}$.

Πρόταση V.9 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα μεγέθη Α, Β, Γ με $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$ τότε Α=Β και αν $\frac{\Gamma}{A} = \frac{\Gamma}{B}$ τότε Α=Β.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ για τα οποία ισχύει $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Gamma}$, θα δείξουμε ότι Α=Β.

Αν Α διαφορετικό του Β, τότε από την Πρόταση 12.8 θα ισχύει είτε ότι Α>Β είτε Α<Β. Υποθέτουμε ότι Α>Β τότε από την Πρόταση V.8 για ευθύγραμμα χωρία ο λόγος του Α προς το Γ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Β προς το Γ, άτοπο διότι $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει Α<Β.

Έστω ότι για τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ ισχύει $\frac{\Gamma}{A}=\frac{\Gamma}{B}$ τότε θα δείξουμε ότι Α=Β.

Αν Α διαφορετικό του Β, τότε από την Πρόταση 12.8 θα ισχύει είτε ότι Α>Β είτε Α<Β. Υποθέτουμε ότι Α<Β τότε από την Πρόταση V.8 για ευθύγραμμα χωρία ο λόγος του Γ προς το Α είναι μεγαλύτερος από τον λόγο του Γ προς το Β, άτοπο διότι $\frac{\Gamma}{A}=\frac{\Gamma}{B}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει Α<Β.

Επομένως αν για τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ ισχύει είτε ότι $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Gamma}$ είτε $\frac{\Gamma}{A}=\frac{\Gamma}{B}$ τότε θα ισχύει Α=Β.

Πρόταση V.10 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ ώστε $\frac{A}{\Gamma}>\frac{B}{\Gamma}$ ή $\frac{\Gamma}{A}<\frac{\Gamma}{B}$ τότε Α>Β.

Απόδειξη. Έστω ότι $\frac{A}{\Gamma}>\frac{B}{\Gamma}$. Υποθέτουμε ότι το Α δεν είναι μεγαλύτερο του Β τότε από την Πρόταση 12.8 θα ισχύει είτε Α=Β είτε Α<Β.

Αν Α=Β τότε από την Πρόταση V.7 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Gamma}$, άτοπο. Αν Α<Β τότε από την Πρόταση V.8 θα ισχύει $\frac{A}{\Gamma}<\frac{B}{\Gamma}$, άτοπο. Επομένως Α>Β.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\frac{\Gamma}{A}<\frac{\Gamma}{B}$, θα δείξουμε ότι Α>Β. Υποθέτουμε ότι το Α δεν είναι μεγαλύτερο του Β τότε από την Πρόταση 12.8 θα ισχύει είτε Α=Β είτε Α<Β.

Αν Α=Β τότε από την Πρόταση V.7 θα ισχύει $\frac{\Gamma}{A}=\frac{\Gamma}{B}$, άτοπο. Αν Α<Β τότε από την Πρόταση V.8 θα ισχύει $\frac{\Gamma}{A}>\frac{\Gamma}{B}$, άτοπο. Επομένως Α>Β.

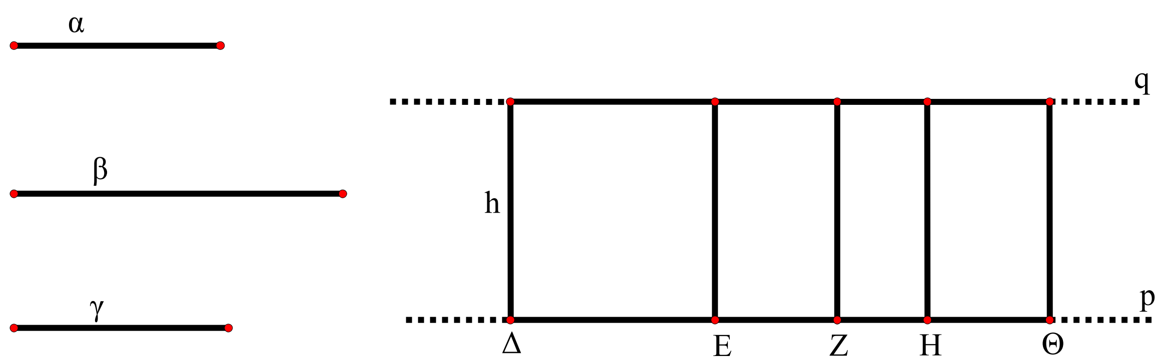
Πρόταση 14.2. Έστω Α, Β, Γ ευθύγραμμα χωρία με Α<Β τότε Α+Γ<Β+Γ.

Απόδειξη. Έστω Α, Β, Γ ευθύγραμμα χωρία με Α<Β τότε θα δείξουμε ότι Α+Γ<Β+Γ.
Έστω p, q δύο παράλληλες ευθείες, με απόσταση h, τότε από την Πρόταση Ι.45 υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ τα οποία ανήκουν στην p ώστε

$Α= h\cdot α$

$Β= h\cdot β$

$Γ= h\cdot γ$ και α<β (Zolt).



Στη συνέχεια από το αξίωμα (C.2) θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα α=ΔΕ, β=ΔΖ και γ=ΕΗ=ΖΘ και άρα από την Πρόταση 9.3 θα ισχύει ΔΗ=α+γ<β+γ=ΔΘ, επομένως από το αξίωμα Zolt θα ισχύει Α+Γ<Β+Γ.

Πρόταση 14.3. Αν για τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β ισχύει nA<nB τότε Α<Β.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, nA και nB, με nA<nB, τότε θα δείξουμε ότι Α<Β.
Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει, τότε από την Πρόταση 12.8 θα ισχύει είτε Α=Β είτε Α>Β. Αν Α=Β τότε nA=nB, ως αθροίσματα χωρίων με ίσα περιεχόμενα, άτοπο.
Ακόμη αν Α>Β τότε από την Πρόταση 14.2 (αν σε άνισα προσθέσουμε ίσα τότε τα προκύπτοντα είναι με τον ίδιο τρόπο άνισα) έπεται ότι nA>nB, άτοπο. Επομένως αν nA<nB τότε Α<Β.

Πρόταση 14.4. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει Α<Β και Γ<Δ, τότε Α+Γ<Β+Δ.

Απόδειξη. Έστω ότι Α, Β, Γ, Δ ευθύγραμμα χωρία με Α<Β και Γ<Δ. Αφού Α<Β τότε από την Πρόταση 14.2 θα ισχύει Α+Γ<Β+Γ. Επιπλέον για τα ευθύγραμμα χωρία Γ, Δ ισχύει Γ<Δ και άρα Β+Γ<Β+Δ. Επομένως από την Πρόταση 14.1 θα ισχύει Α+Γ<Β+Δ

Πρόταση V.12 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ με $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}$ τότε $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}+\Gamma+\mathrm{E}}{\mathrm{B}+\Delta+\mathrm{Z}}$.

Απόδειξη. Αφού $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}$ τότε από τον ορισμό V.5 για ευθύγραμμα χωρία αν mΑ<nΒ τότε mΓ<nΔ και mΕ<nΖ. Αρκεί να δείξουμε ότι αν mΑ<nΒ τότε mΑ+mΓ+mΕ<nΒ+nΔ+nΖ.

Από την υπόθεση ισχύει ότι αν mΑ<nΒ τότε mΓ<nΔ και mΕ<nΖ και άρα από την Πρόταση 14.4 θα ισχύει mΑ+mΓ+mΕ<nΒ+nΔ+Ζn, επομένως από τον ορισμό V.5 θα ισχύει $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}+\Gamma+\mathrm{E}}{\mathrm{B}+\Delta+\mathrm{Z}}$.

Πρόταση V.14 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ με $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ και ότι Α>Γ τότε Β>Δ.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ και Α>Γ τότε από την Πρόταση V.8 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}>\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}$ όμως $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ και άρα $\frac{\Gamma}{\Delta}>\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}$, επομένως από την Πρόταση V.10 (για ευθύγαμμα χωρία) έπεται ότι Β>Δ.

Πρόταση V.16 (εναλλάξ για ευθύγραμμα χωρία). Έστω Α, Β, Γ, Δ ευθύγραμμα χωρία με $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ τότε $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Delta}$.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ με $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ τότε θα δείξουμε ότι $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Delta}$. Θεωρούμε τα χωρία mA και mB και από την Πρόταση V.15 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει ότι $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$, όμως από την υπόθεση ισχύει $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ και άρα από την Πρόταση V.11 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{mA}{mB}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Όμοια για τα ευθύγραμμα χωρία Γ, Δ θεωρούμε τα χωρία nΓ και nΔ. Από την Πρόταση V.15 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{n\Gamma}{n\Delta}$ και άρα από την Πρόταση V.11 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{mA}{mB}=\frac{n\Gamma}{n\Delta}$. Συνεπώς από την Πρόταση V.14 για ευθύγραμμα χωρία αν $mA<n\Gamma$ τότε $mB<n\Delta$ και άρα από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει $\frac{A}{\Gamma}=\frac{B}{\Delta}$.

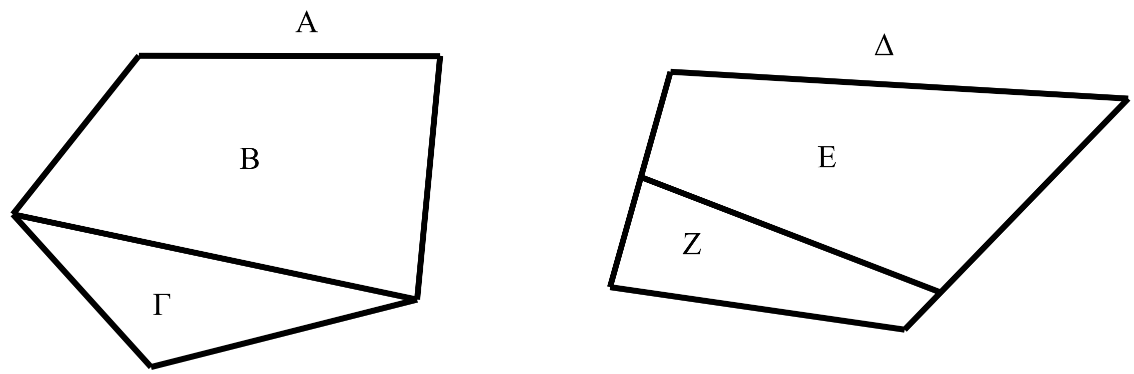
Πρόταση V.17 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ για τα οποία ισχύει:

i) $B\subset A$, $\Gamma\subset A$ και $A=B\cup\Gamma$, με Β, Γ μη επικαλυπτόμενα

ii) $E\subset\Delta$, $Z\subset\Delta$ και $\Delta=E\cup Z$, με Ε, Ζ μη επικαλυπτόμενα

iii) $\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{Z}$,

τότε ισχύει ότι $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$.



Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Δ με $A = B \cup \Gamma$, $\Delta = E \cup Z$ και $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$, θα δείξουμε ότι:

αν mB<nΓ $\Rightarrow$ mE<nZ, όμως $A = B \cup \Gamma$ και $\Delta = E \cup Z$ και άρα

m(Α-Γ)<nΓ $\Rightarrow$ m(Δ-Ζ)<nZ ακόμη από την Πρόταση 14.2 έπεται ότι

m(Α-Γ)+ mΓ< nΓ+mΓ $\Rightarrow$ m(Δ-Ζ)+mZ<nZ+mZ,

όμως m(Α-Γ)+ mΓ= mΑ και m(Δ-Ζ)+mZ= mΔ άρα

mΑ<(m+n)Γ $\Rightarrow$ mΔ<(m+n)Ζ, το οποίο όμως ισχύει εφόσον $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$, συνεπώς θα ισχύει ότι $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z}$.

Πρόταση V.20 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ώστε $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$ και $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z}$ τότε:

i) αν Α>Γ τότε Δ>Ζ

ii) αν Α=Γ τότε Δ=Ζ

iii) αν Α<Γ τότε Δ<Ζ.

Απόδειξη. Δίνονται τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ με $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$ και $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$. Έστω ότι Α>Γ τότε από την Πρόταση V.8 για τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ θα ισχύει $\frac{A}{B}>\frac{\Gamma}{B}$. Όμως $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$ και άρα $\frac{\Delta}{E}>\frac{\Gamma}{B}$. Ακόμη ισχύει ότι $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$ επομένως από την Πρόταση V.7 θα ισχύει $\frac{\Gamma}{B}=\frac{Z}{E}$ και αφού $\frac{\Delta}{E}>\frac{\Gamma}{B}$ τότε $\frac{\Delta}{E}>\frac{Z}{E}$ και άρα από την Πρόταση V.10 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει Δ>Ζ.

Όμοια αποδεικνύονται και οι ιδιότητες (ii) και (iii)

Πρόταση V.22 (για ευθύγραμμα χωρία). Έστω τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ για τα οποία ισχύει $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$ και $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$ τότε $\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{Z}$.

Απόδειξη. Δίνονται τα ευθύγραμμα χωρία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ για τα οποία ισχύει $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$ και $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$. Αφού $\frac{A}{B}=\frac{\Delta}{E}$ τότε από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία υπάρχουν m πολλαπλάσια των Α, Δ και n πολλαπλάσια των Β, Ε ώστε αν mΑ<nΒ τότε mΔ<nΕ. Ακόμη ισχύει $\frac{B}{\Gamma}=\frac{E}{Z}$ και άρα από τον Ορισμό V.ε΄ για ευθύγραμμα χωρία υπάρχουν n πολλαπλάσια των Β, Ε και m πολλαπλάσια των Γ, Ζ ώστε αν nΒ<mΓ τότε nΕ<mΖ και άρα από την Πρόταση V.20 για τα ευθύγραμμα χωρία mΑ, nΒ, mΓ, mΔ, nΕ, mΖ θα ισχύει ότι : αν mΑ<mΓ τότε mΔ<mΖ και άρα $\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{Z}$.

Σημείωση. Βάσει των ιδιοτήτων που έχουμε αποδείξει για τους λόγους ευθυγράμμων χωρίων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα βρίσκονται σε αναλογία αν και μόνο αν τα αντίστοιχα τετράγωνα με πλευρές τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα βρίσκονται σε αναλογία.

Πρόταση 14.5. Αν α, β, γ, δ ευθύγραμμα τμήματα τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$.

Απόδειξη. Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε θα δείξουμε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$.

Από την Πρόταση VI.1 ισχύει ότι $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ και ότι $\frac{\alpha\beta}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta}$, επομένως από τη μεταβατικότητα των ίσων λόγων για ευθύγραμμα χωρία έπεται ότι $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta}$. Όμοια θα ισχύει $\frac{\gamma^2}{\gamma\delta}=\frac{\gamma\delta}{\delta^2}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και άρα πάλι από τη μεταβατικότητα των ίσων λόγων θα ισχύει $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{\gamma^2}{\gamma\delta}$ και $\frac{\alpha\beta}{\beta^2}=\frac{\gamma\delta}{\delta^2}$ επομένως από τη δι' ίσου για ευθύγραμμα χωρία έπεται ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$ και θα δείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$,

έστω ότι δεν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε θα υπάρχει κάποιο ευθύγραμμο τμήμα δ_1 διαφορετικό του δ για το οποίο από το α΄ μέρος της απόδειξης θα ισχύει $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta_1^2}$ και αφού από την υπόθεση ισχύει $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$, τότε από τη μεταβατικότητα των ίσων λόγων για ευθύγραμμα χωρία έπεται ότι $\frac{\gamma^2}{\delta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta_1^2}$ και άρα από την Πρόταση V.9 για ευθύγραμμα χωρία ισχύει ότι $\delta^2=\delta_1^2$ συνεπώς από το αξίωμα Zolt έπεται ότι $\delta=\delta_1$.

Σημείωση. Έχοντας πλέον αποδείξει τις ιδιότητες του πέμπτου βιβλίου των *Στοιχείων* αυτή τη φορά για ευθύγραμμα χωρία θα διατυπώσουμε τους όρους του έκτου βιβλίου των *Στοιχείων* και θα αποδείξουμε τις Προτάσεις VI.2-VI.13. Αξίζει να σημειωθεί ότι το βιβλίο VI των *Στοιχείων* περιλαμβάνει 5 όρους εκ των οποίων ο δ΄ έχει ήδη διατυπωθεί δεδομένου ότι χρησιμοποιείται στην Πρόταση VI.1 την οποία έχουμε αποδείξη παραπάνω.

Όροι α΄, β΄, γ΄, ε΄.

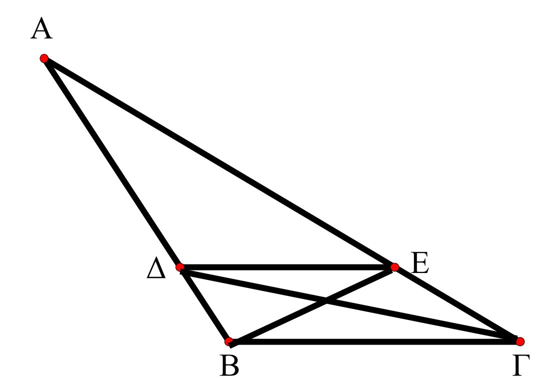
α΄. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

[β΄. Ἀντιπεπονθότα δέ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.]

γ΄. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττὸν.

[ε΄. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα].

Πρόταση VI.2. Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦτριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπι ζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.



Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο του ΑΒ με $Α*Δ*Β$ (Πρόταση 3.1). Το σημείο Δ δεν ανήκει στο ΒΓ, διότι ΑΒΓ και άρα αν άνηκε στην ΒΓ τα σημεία Α, Β, Γ, Δ θα ήταν συνευθειακά, άτοπο. Επομένως από το σημείο Δ φέρνουμε ΔΕ παράλληλη προς τη ΒΓ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε, καθώς αν δεν την έτεμνε από το σημείο Γ θα διέρχονταν δύο διαφορετικές παράλληλες ΓΒ, ΓΑ προς την ΔΕ, άτοπο από τη μοναδικότητα της παράλληλης που έχουμε δείξει στην Πρόταση Ι.31. Θα δείξουμε ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΑ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΕ προς το ΕΑ. Από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ, ΒΕ και από την Πρόταση Ι.38 τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ έχουν ίσα περιεχόμενα, διότι έχουν κοινή βάση την ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ. Ακόμη από την Πρόταση V.7 για ευθύγραμμα χωρία ο λόγος του ΒΔΕ προς το ΑΔΕ είναι ίσος με τον λογο του ΓΔΕ προς το ΑΔΕ.

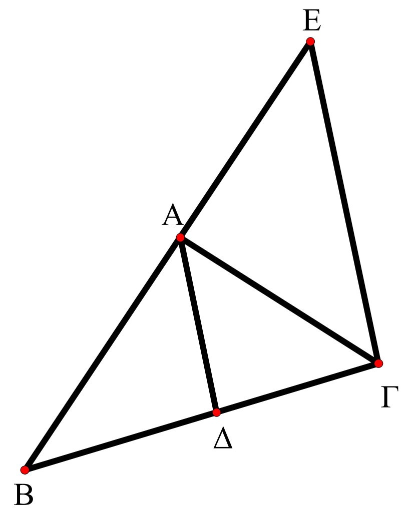
Από την Πρόταση VI.1 ο λόγος του ΒΔΕ προς το ΑΔΕ είναι ίσος με το λόγο του ΒΔ προς το ΔΑ. Όμοια ο λόγος του τριγώνου ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσος με τον λόγο του ΓΕ προς το ΕΑ. Επομένως από την Πρόταση V.11 για ευθύγραμμα χωρία θα ισχύει ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΑ είναι ίσος με το λόγο του ΓΕ προς το ΕΑ.

Αντίστροφο. Έστω τώρα το τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε σημεία των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΑ να είναι ίσος με το λόγο του ΓΕ προς το ΕΑ. Θα δείξουμε ΔΕ, ΒΓ παράλληλες.

Από το Λήμμα δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ, ΓΔ και από την Πρόταση VI.1 ισχύει ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΑ είναι ίσος με τον λόγο του τριγώνου ΒΔΕ προς το τρίγωννο ΑΔΕ και ότι ο λόγος του ΓΕ προς το ΕΑ είναι ίσος με το λόγο του τριγώνου ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ. Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΑ είναι ίσος με το λόγο του ΓΕ προς το ΕΑ και άρα από την Πρόταση V.11 για ευθύγραμμα χωρία ο λόγος του ΒΔΕ προς το ΑΔΕ είναι ίσος με το λόγο του ΓΔΕ προς το ΑΔΕ. Επομένως κάθε ένα από τα τρίγωνα ΒΔΕ, ΓΔΕ έχει τον ίδιο λόγο προς το τρίγωνο ΑΔΕ. Συνεπώς από την Πρόταση V.9 για ευθύγραμμα χωρία τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ έχουν ίσα περιεχόμενα. Επιπλέον αφού έχουν κοινή βάση την ΔΕ τότε από την Πρόταση Ι.39 ΔΕ παράλληλη προς τη ΒΓ.

Πρόταση VI.3. Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Απόδειξη. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ (Πρόταση Ι.9) η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ με $\mathrm{B*\Delta*\Gamma}$ (Πρόταση 6.2 Cross-bar theorem). Θα δείξουμε ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΓ είναι ίσος με το λόγο του ΑΒ προς το ΑΓ. Από το σημείο Γ το οποίο δεν ανήκει στην ΑΔ διότι ΑΔ διχοτόμος της $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΔ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΒΑ στο σημείο Ε με $\mathrm{B*A*E}$ (Πρόταση Διαχωρισμού επιπέδου).



Αφού ΑΔ, ΓΕ παράλληλες που τέμνονται από την ΑΓ τότε $\mathrm{A\hat{\Gamma}E \cong \Gamma\hat{A}\Delta}$ (Πρόταση Ι.29). Όμως ισχύει $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma \cong B\hat{A}\Delta}$, διότι ΑΔ διχοτόμος της $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και άρα από το αξίωμα (C.4) θα ισχύει $\mathrm{B\hat{A}\Delta \cong A\hat{\Gamma}E}$. Πάλι από την Πρόταση Ι.29 στις παράλληλες ΑΔ, ΓΕ θα ισχύει $\mathrm{B\hat{A}\Delta \cong A\hat{E}\Gamma}$ και άρα από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει $\mathrm{A\hat{E}\Gamma \cong A\hat{\Gamma}E}$. Επομένως από την Πρόταση Ι.6 έχουμε ότι $\mathrm{AE \cong A\Gamma}$ και επειδή στο τρίγωνο ΒΓΕ η ΑΔ είναι παράλληλη προς την ΕΓ από την Πρόταση VI.2 θα ισχύει ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΓ είναι ίσος με το λόγο του ΒΑ προς το ΑΕ. Όμως έχουμε δείξει ότι $\mathrm{AE \cong A\Gamma}$ και άρα ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΓ είναι ίσος με τον λόγο του ΒΑ προς το ΑΓ.

Αντίστροφο. Έστω ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΓ είναι ίσος με το λόγο του ΒΑ προς το ΑΓ και ότι ΑΔ παράλληλη προς την ΕΓ, θα δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.

Αφού ΑΔ παράλληλη προς την ΕΓ τότε από την Πρόταση VI.2 στο τρίγωνο ΒΓΕ ισχύει ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΓ είναι ίσος με το λόγος του ΒΑ προς το ΑΕ. Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος του ΒΔ προς το ΔΓ είναι ίσος με το λόγο του ΒΑ προς το ΑΓ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος του ΒΑ προς το ΑΕ είναι ίσος με το λόγο του του ΒΑ προς το ΑΓ. Συνεπώς από την Πρόταση V.9 θα ισχύει $\mathrm{AE \cong A\Gamma}$ και άρα

$A\hat{E}\Gamma \cong A\hat{\Gamma}E$ (Πρόταση Ι.5). Ακόμη από την Πρόταση Ι.29 ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta \cong A\hat{E}\Gamma$ και ότι $A\hat{\Gamma}E \cong \Gamma\hat{A}\Delta$, άρα από το αξίωμα (C.5) έπεται ότι $\Delta\hat{A}\Gamma \cong B\hat{A}\Delta$.

Πρόταση VI.4. Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

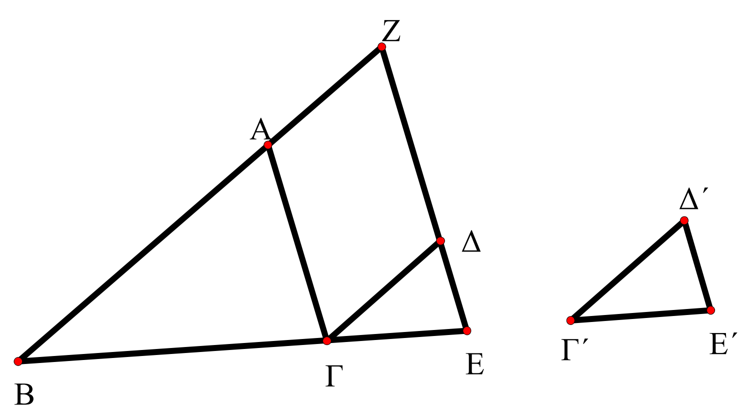
Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και Δ΄Ε΄Γ΄ για τα οποία ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta'\hat{\Gamma}'E', B\hat{A}\Gamma \cong \Gamma'\hat{\Delta}'E'$ και $A\hat{\Gamma}B \cong \Gamma'\hat{E}'\Delta'$. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ε για το οποίο ισχύει $B*\Gamma*E$ και $\Gamma E \cong \Gamma'E'$. Επιπλέον από τα αξιώματα (C.4) και (C.2) υπάρχει σημείο Δ το οποίο ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΒΕ σε σχέση με το σημείο Α με $\Delta\hat{\Gamma}E \cong \Delta'\hat{\Gamma}'E'$ και $\Gamma\Delta \cong \Gamma'\Delta'$. Επομένως από το αξίωμα (C.6) για τα τρίγωνα Δ΄Ε΄Γ΄ και ΔΕΓ ισχύει $\Delta E \cong \Delta'E'$. Θα δείξουμε ότι:

i) ο λόγος του ΒΑ προς το ΑΓ είναι ίσος με το λόγο του ΓΔ προς το ΔΕ,

ii) ο λόγος του ΑΓ προς το ΓΒ είναι ίσος με το λόγο του ΔΕ προς το ΕΓ και

iii) ο λόγος του ΓΒ προς το ΒΑ είναι ίσος με το λόγο του ΕΓ προς το ΓΔ.

Από την Πρόταση Ι.17 θα ισχύει $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B < 2$ ορθές, όμως από την υπόθεση ισχύει $A\hat{\Gamma}B \cong \Gamma\hat{E}\Delta$ και άρα από το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων* οι ΒΑ, ΕΔ τέμνονται, έστω Ζ το σημείο τομής τους. Επιπλέον από την υπόθεση ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{\Gamma}E$ και άρα

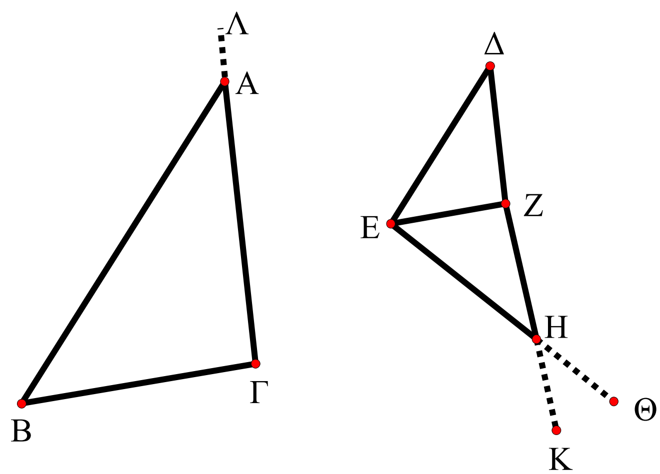


οι ΒΖ, ΓΔ παράλληλες (Πρόταση Ι.28). Όμοια, αφού $A\hat{\Gamma}B \cong \Gamma\hat{E}\Delta$ τότε ΑΓ, ΖΕ παράλληλες (Πρόταση Ι.28). Επομένως ΖΑΓΔ παραλληλόγραμμο και άρα θα ισχύει $ZA \cong \Delta\Gamma$ και $A\Gamma \cong Z\Delta$ (Πρόταση Ι.34).

Στο τρίγωνο ΖΒΕ η ΑΓ είναι παράλληλη προς τη ΖΕ και άρα από την Πρόταση VI.2 ο λόγος του ΒΑ προς το ΑΖ είναι ίσος με το λόγο του ΒΓ προς το ΓΕ. Όμως $ZA \cong \Delta\Gamma$ και άρα ο λόγος του ΒΑ προς το ΔΓ είναι ίσος με το λόγο του ΒΓ προς το ΓΕ. Επομένως από την Πρόταση V.16 ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΓ είναι ίσος με το λόγο του ΓΔ προς το ΓΕ. Επιπλέον ΓΔ παράλληλη προς τη ΒΖ και άρα ο λόγος του ΒΓ προς το ΓΕ είναι ίσος με το λόγο ΖΔ προς το ΔΕ (Πρόταση VI.2), συνεπώς ο λόγος του ΒΓ προς το ΓΕ είναι ίσος με το λόγο του ΑΓ προς το ΔΕ, διότι $\mathrm{A\Gamma} \cong \mathrm{Z\Delta}$. Επομένως από την Πρόταση V.16 ο λόγος του ΒΓ προς το ΑΓ είναι ίσος με το λόγο του ΓΕ προς το ΔΕ. Επειδή λοιπόν ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΓ είναι ίσος με το λόγο του ΔΓ προς το ΓΕ και ο λόγος του ΒΓ προς το ΓΑ είναι ίσος με το λόγο του ΓΕ προς το ΔΕ, τότε από την Πρόταση V.22 (δι' ίσου) έπεται ότι ο λόγος του ΒΑ προς το ΑΓ είναι ίσος με το λόγο του ΓΔ προς το ΔΕ.

Πρόταση VI.5. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

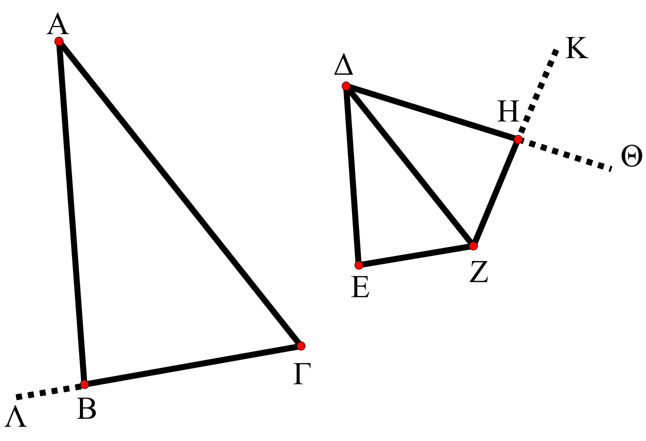
Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ για τα οποία ισχύει ότι λόγος της ΑΒ προς την ΒΓ είναι ίσος με τον λόγο της ΔΕ προς την ΕΖ, ο λόγος της ΒΓ προς την ΓΑ είναι ίσος με τον λόγο της ΕΖ προς την ΖΔ και ότι ο λόγος της ΓΑ προς την ΑΒ είναι ίσος με τον λόγο της ΕΔ προς την ΔΖ. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} \cong \mathrm{\Delta\hat{E}Z}, \mathrm{B\hat{\Gamma}A} \cong \mathrm{E\hat{Z}\Delta}$ και



ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} \cong \mathrm{E\hat{\Delta}Z}$. Από το αξίωμα C.4 κατασκευάζουμε $\mathrm{Z\hat{E}\Theta} \cong \mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{E\hat{Z}K} \cong \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ με Θ, Κ να ανήκουν στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΕΖ σε σχέση με το Δ. Οι ΕΘ, ΖΚ από το πέμπτο Αίτημα τέμνονται στο Η διότι $\mathrm{Z\hat{E}\Theta} \cong \mathrm{A\hat{B}\Gamma}$, $\mathrm{E\hat{Z}K} \cong \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ και $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{A\hat{\Gamma}B} < 2$ ορθές (Πρόταση Ι.17) με $\mathrm{E\hat{H}Z} \cong \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$. Καθώς από την Πρόταση Ι.32 στα τρίγωνα ΕΗΖ, ΑΒΓ ισχύει $\mathrm{K\hat{H}E} \cong \mathrm{H\hat{E}Z} + \mathrm{E\hat{Z}H}$ και $\mathrm{\Lambda\hat{A}B} \cong \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$. Όμως $\mathrm{Z\hat{E}H} \cong \mathrm{A\hat{B}\Gamma}$, $\mathrm{E\hat{Z}H} \cong \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ και άρα από την Πρόταση 7.3 έπεται ότι $\mathrm{K\hat{H}E} \cong \mathrm{\Lambda\hat{A}B}$, συνεπώς από την Προταση 7.2 ισχύει $E\hat{H}Z \cong B\hat{A}\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΗ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και άρα από την Πρόταση VI.4 θα ισχύει ότι ο λόγος της ΑΒ προς την ΒΓ είναι ίσος με τον λόγο ΗΕ προς την ΕΖ. Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος της ΑΒ προς τη ΒΓ είναι ίσος με τον λόγο της ΔΕ προς την ΕΖ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος της ΔΕ προς την ΕΖ είναι ίσος με τον λόγο της ΗΕ προς την ΕΖ. Επομένως από την Πρόταση V.9 θα ισχύει $\Delta E \cong HE$. Όμοια θα ισχύει επιπλέον ότι $\Delta Z \cong HZ$. Επειδή λοιπόν $\Delta E \cong HE$, $\Delta Z \cong HZ$ και $EZ \cong EZ$ αξίωμα C.1 τότε από την Πρόταση Ι.8 θα ισχύει $\Delta\hat{E}Z \cong H\hat{E}Z, E\hat{Z}\Delta \cong H\hat{Z}E$ και $E\hat{\Delta}Z \cong E\hat{H}Z$. Όμως $Z\hat{E}H \cong A\hat{B}\Gamma$ από την κατασκευή της και άρα από τη μεταβατικότητα ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{E}Z$. Όμοια θα ισχύει ότι $A\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$ και $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ και άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους μία προς μία εφαρμόσιμες.

Πρόταση VI.6. Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ’ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ώστε $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ και ο λόγος της ΒΑ προς την ΑΓ είναι ίσος με τον λόγο της ΕΔ προς την ΔΖ. Θα δείξουμε ότι $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{E}Z$ και $A\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$. Από το αξίωμα (C.4) κατασκευάζουμε $Z\hat{\Delta}\Theta \cong B\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{Z}K \cong A\hat{\Gamma}B$ με Θ, Κ να ανήκουν στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΔΖ σε σχέση με το Ε. Επιπλέον οι

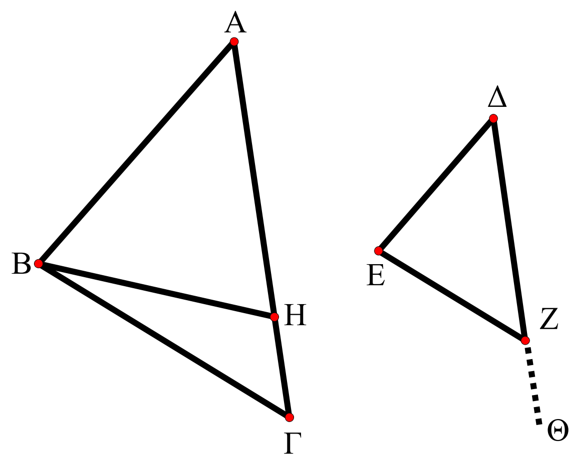


ΔΘ, ΖΚ από το πέμπτο Αίτημα των *Στοιχείων* τέμνονται στο Η διότι $Z\hat{\Delta}\Theta \cong B\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{Z}K \cong A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}B < 2$ ορθές (Πρόταση Ι.17) με $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{H}Z$. Καθώς από την Πρόταση Ι.32 στα τρίγωνα ΔΗΖ, ΑΒΓ ισχύει $K\hat{H}\Delta \cong H\hat{\Delta}Z + \Delta\hat{Z}H$ και

$\Lambda\hat{B}A \cong B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$. Όμως $H\hat{\Delta}Z \cong B\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{Z}H \cong A\hat{\Gamma}B$ και άρα από την Πρόταση 7.3 έπεται ότι $K\hat{H}\Delta \cong \Lambda\hat{B}A$, συνεπώς από την Προταση 7.2 ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{H}Z$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΗΖ έχουν όλες τις γωνίες τους εφαρμόσιμες μία προς μία και άρα από την Πρόταση VI.4 ο λόγος της ΒΑ προς την ΑΓ είναι ίσος με τον λόγο της ΗΔ προς την ΔΖ. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο λόγος της ΒΑ προς την ΑΓ είναι ίσος με τον λόγο της ΕΔ προς την ΔΖ και άρα από την Πρόταση V.11 θα ισχύει ότι ο λόγος της ΕΔ προς την ΔΖ είναι ίσος με το λόγο της ΗΔ προς την ΔΖ, επομένως $\Delta E \cong \Delta H$ (Πρόταση V.9). Για τα τρίγωνα ΕΔΖ και ΗΔΖ ισχύει ότι $\Delta Z \cong \Delta Z, E\hat{\Delta}Z \cong H\hat{\Delta}Z$ και $\Delta E \cong \Delta H$ συνεπώς από το αξίωμα (C.6) ισχύει $\Delta\hat{Z}H \cong \Delta\hat{Z}E$. Όμως $\Delta\hat{Z}H \cong A\hat{\Gamma}B$ άρα από το αξίωμα (C.5) θα ισχύει $A\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$. Επιπλέον αφού στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ τότε από την Πρόταση Ι.32 και την Πρόταση 7.2 θα ισχύει ότι $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{E}Z$.

Πρόταση VI.7. Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ και ο λόγος της ΑΒ προς την ΒΓ είναι ίσος με το λόγο της ΕΔ προς την ΕΖ.

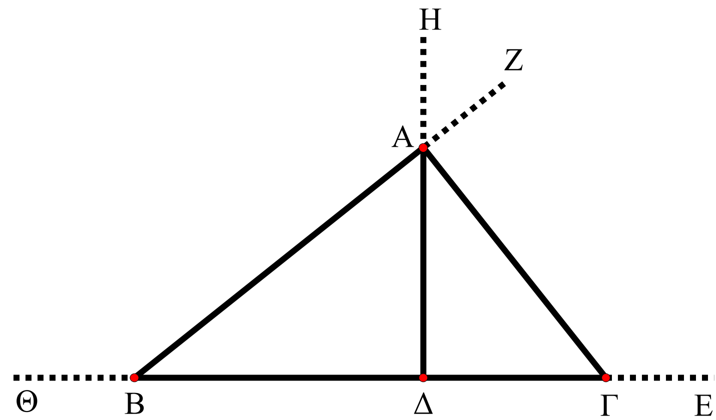


Υποθέτουμε ότι κάθε μία από τις γωνίες $A\hat{\Gamma}B, \Delta\hat{Z}E$ είναι μικρότερη της ορθής και ότι η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ δεν είναι εφαρμόσιμη με την $\Delta\hat{E}Z$. Από την Πρόταση 7.6 (β.ii) θα ισχύει είτε ότι $A\hat{B}\Gamma > \Delta\hat{E}Z$ είτε ότι $A\hat{B}\Gamma < \Delta\hat{E}Z$. Έστω ότι ισχύει $A\hat{B}\Gamma > \Delta\hat{E}Z$, τότε υπάρχει ημιευθεία ΒΗ στο εσωτερικό της $A\hat{B}\Gamma$ ώστε $A\hat{B}H \cong \Delta\hat{E}Z$, με Η το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ (Πρόταση 6.2 Crossbar theorem), ακόμη από την υπόθεση ισχύει ότι $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ και άρα θα ισχύει $A\hat{H}B \cong \Delta\hat{Z}E$. Διότι από την Πρόταση I.32 στα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΖ ισχύει $B\hat{H}\Gamma \cong B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}H$ και $\Theta\hat{Z}E \cong E\hat{\Delta}Z + Z\hat{E}\Delta$. Όμως $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{B}H \cong \Delta\hat{E}Z$ και άρα από την Πρόταση 7.3 έπεται ότι $B\hat{H}\Gamma \cong \Theta\hat{Z}E$, συνεπώς από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει $A\hat{H}B \cong \Delta\hat{Z}E$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΖ έχουνν 1-1 τις γωνίες τους εφαρμόσιμες και άρα από την Πρόταση VI.4 ο λόγος της ΑΒ προς την ΒΗ είναι ίσος με τον λόγο της ΕΔ προς την ΕΖ. Όμως από την υπόθεση ισχύει ότι ο λόγος της ΕΔ προς την ΕΖ είναι ίσος με τον λόγο της ΑΒ προς την ΒΓ και άρα από την Πρόταση V.11 ο λόγος της ΑΒ προς την ΒΓ είναι ίσος με τον λόγο της ΑΒ προς την ΒΗ. Επομένως ισχύει ότι $B\Gamma \cong BH$ (Πρόταση V.9) και άρα από την Πρόταση I.5 έχουμε ότι $B\hat{H}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}H$. Επιπλέον από την υπόθεση ισχύει ότι $B\hat{\Gamma}A < 1$ ορθή και άρα από την Πρόταση 7.6 (α) και την Πρόταση I.13 ισχύει $A\hat{H}B > 1$ ορθή. Όμως $A\hat{H}B \cong \Delta\hat{Z}E$, δηλαδή $\Delta\hat{Z}E > 1$ ορθή, άτοπο διότι από την υπόθεση ισχύει $\Delta\hat{Z}E < 1$ ορθή. Συνεπώς $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{E}Z$ και από την Πρόταση I.32 και την Πρόταση 7.2 ισχύει $A\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$ και άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν 1-1 τις γωνίες τους εφαρμόσιμες.

Έστω τώρα ότι κάθε μία από τις γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{Z}E$ είναι μεγαλύτερη από μια ορθή. Αφού κάνουμε την κατασκευή του πρώτου μέρους της απόδειξης δείχνουμε με όμοιο τρόπο ότι $B\Gamma \cong BH$, επομένως $B\hat{H}\Gamma \cong B\hat{\Gamma}H$, όμως κάθε μία από τις γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{Z}E$ είναι μεγαλύτερη από μια ορθή και άρα στο τρίγωνο ΒΗΓ ισχύει $B\hat{H}\Gamma + B\hat{\Gamma}H > 2$ ορθές, άτοπο από την Πρόταση I.17. Επομένως $A\hat{B}\Gamma \cong \Delta\hat{E}Z$ και αφού $B\hat{A}\Gamma \cong E\hat{\Delta}Z$ τότε από την Πρόταση I.32 και την Πρόταση 7.2 ισχύει $A\hat{\Gamma}B \cong \Delta\hat{Z}E$ και άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν 1-1 τις γωνίες τους εφαρμόσιμες.

Πρόταση VI.8. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Απόδειξη. Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $B\hat{A}\Gamma \cong 1$ ορθή. Από το σημείο Α το οποίο δεν ανήκει στη ΒΓ, διότι ΑΒΓ τρίγωνο, φέρνουμε ΑΔ κάθετη στη ΒΓ (Πρόταση Ι.12). Θα δείξουμε ότι κάθε ένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοιο προς το ΑΒΓ.

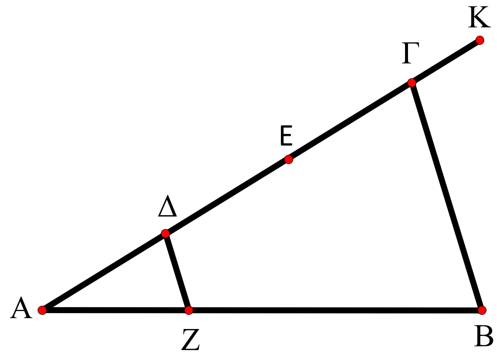


Κάθε μία από τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma, A\hat{\Delta}B$, είναι εφαρμόσιμη με μία ορθή, επομένως από την Πρόταση 8.1 θα ισχύει $B\hat{A}\Gamma \cong A\hat{\Delta}B$. Επιπλέον στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ ισχύει $A\hat{B}\Gamma \cong A\hat{B}\Delta$ (αξίωμα C.5) και άρα $B\hat{\Gamma}A \cong B\hat{A}\Delta$. Διότι από την Πρόταση Ι.32 στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ ισχύει $A\hat{\Gamma}E \cong A\hat{B}\Gamma + B\hat{A}\Gamma$ και $Z\hat{A}\Delta \cong A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B$. Όμως $B\hat{A}\Gamma \cong A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{B}\Gamma \cong A\hat{B}\Delta$ και άρα από την Πρόταση 7.3 έπεται ότι $A\hat{\Gamma}E \cong Z\hat{A}\Delta$, συνεπώς από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει $A\hat{\Gamma}B \cong B\hat{A}\Delta$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν 1-1 τις πλευρές τους εφαρμόσιμες και άρα ο λόγος της ΒΓ προς την ΒΑ είναι ίσος με το λόγο της της ΑΒ προς τη ΒΔ καθώς επίσης και με τον λόγο της ΑΓ προς την ΑΔ (Πρόταση VI.4). Συνεπώς από τον Ορισμό V.α΄ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι όμοια.

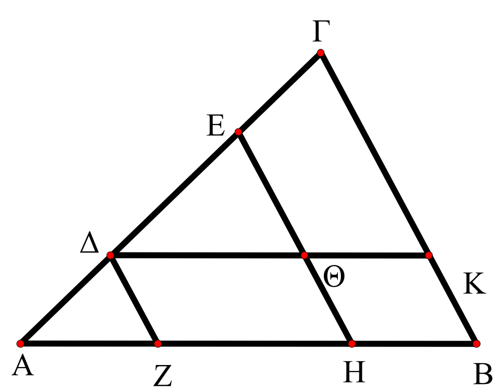
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι και μεταξύ τους όμοια. Ισχύει ότι $B\hat{\Delta}A \cong A\hat{\Delta}\Gamma \cong 1$ ορθή, επιπλέον έχουμε δείξει ότι $B\hat{A}\Delta \cong \Delta\hat{\Gamma}A$ και άρα $A\hat{B}\Delta \cong \Delta\hat{A}\Gamma$. Διότι από την Πρόταση Ι.32 στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ ισχύει $A\hat{B}\Theta \cong B\hat{A}\Delta + A\hat{\Delta}B$ και $H\hat{A}\Gamma \cong A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Delta$. Όμως $B\hat{A}\Delta \cong A\hat{\Gamma}\Delta$ και $A\hat{\Delta}B \cong A\hat{\Delta}\Gamma$, άρα από την Πρόταση 7.3 έπεται ότι $A\hat{B}\Theta \cong H\hat{A}\Gamma$, συνεπώς από την Πρόταση 7.2 θα ισχύει $A\hat{B}\Delta \cong \Delta\hat{A}\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν 1-1 τις πλευρές τους εφαρμόσιμες και άρα ο λόγος της ΒΔ προς την ΑΔ είναι ίσος με το λόγο της ΑΒ προς την ΑΓ καθώς επίσης και με τον λόγο της ΑΔ προς την ΔΓ (Πρόταση VI.4). Άρα από τον Ορισμό V.α΄ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια.

Πρόταση VI.9. Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.



Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Από το αξίωμα (Ι.3) υπάρχουν τρία σημεία στο επίπεδο τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Έστω Κ σημείο το οποίο δεν ανήκει στο ΑΒ και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ. Ακόμη από την Πρόταση 3.3 υπάρχει σημείο Δ ώστε $Α*Δ*Κ$ και από το αξίωμα (C.2) υπάρχει σημείο Ε στο ΔΚ για το οποίο ισχύει $ΔΕ \cong ΑΔ$. Όμοια υπάρχει σημείο Γ στο ΔΚ ώστε $ΕΓ \cong ΔΕ \cong ΑΔ$. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ΒΓ και από το σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στην ΓΒ φέρνουμε παράλληλη ΔΖ προς το ΓΒ (Πρόταση Ι.31). Επειδή λοιπόν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΓ, ΖΔ παράλληλες τότε από την Πρόταση VI.2 ο λόγος της ΓΔ προς την ΔΑ είναι ίσος με τον λόγο της ΒΖ προς την ΖΑ. Όμως $ΕΓ \cong ΔΕ \cong ΑΔ$ και άρα $ΔΓ \cong ΑΔ + ΑΔ$. Επομένως η ΒΖ θα είναι διπλάσια της ΑΖ, $ΒΖ \cong ΑΖ + ΑΖ$ και άρα $ΒΑ \cong ΑΖ + ΑΖ + ΑΖ$.

Πρόταση VI.10. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

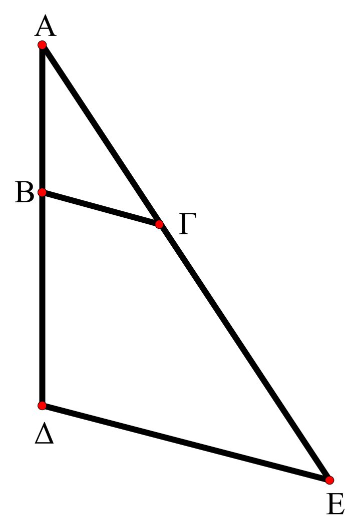


Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ τα οποία σχηματίζουν την τυχούσα γωνία $Β\hat{Α}Γ$ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύει $Α*Δ*Ε*Γ$ (Πρόταση 3.1). Από το Λήμμα δημιουργούμε το ΓΒ και από τα σημεία Δ, Ε φέρνουμε ΔΖ, ΕΗ παράλληλες προς την ΒΓ (Πρόταση Ι.31) οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα. Στη συνέχεια από το σημείο Δ φέρνουμε ΔΚ παράλληλη προς την ΑΒ (Πρόταση Ι.31) η οποία τέμνει την ΓΒ στο Κ και την ΕΗ στο Θ. Επομένως κάθε ένα από τα ΔΘΗΖ και ΘΚΒΗ είναι παραλληλόγραμμο και άρα θα ισχύει $\Delta\Theta \cong ZH$ και $\Theta K \cong HB$ (Πρόταση Ι.34). Στο τρίγωνο ΔΚΓ ισχύει ΘΕ παράλληλη προς την ΚΓ και άρα ο λόγος της ΓΕ προς την ΕΔ είναι ίσος με τον λόγο της ΚΘ προς την ΘΔ (Πρόταση VI.2). Όμως ισχύει ότι $\Theta K \cong HB$ και $\Delta\Theta \cong ZH$, άρα ο λόγος της ΓΕ προς την ΕΔ είναι ίσος με τον λόγο της ΒΗ προς την ΗΖ. Όμοια στο τρίγωνο ΑΗΕ οι ΗΕ, ΖΔ είναι παράλληλες και άρα ο λόγος της ΕΔ προς την ΔΑ είναι ίσος με τον λόγο της ΗΖ προς την ΖΑ (Πρόταση VI.2). Επομένως ο λόγος της ΓΕ προς την ΕΔ είναι ίσος με τον λόγο της ΒΗ προς την ΗΖ και ο λόγος της ΕΔ προς την ΔΑ είναι ίσος με τον λόγο της ΗΖ προς την ΖΑ.

Πρόταση VI.11. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

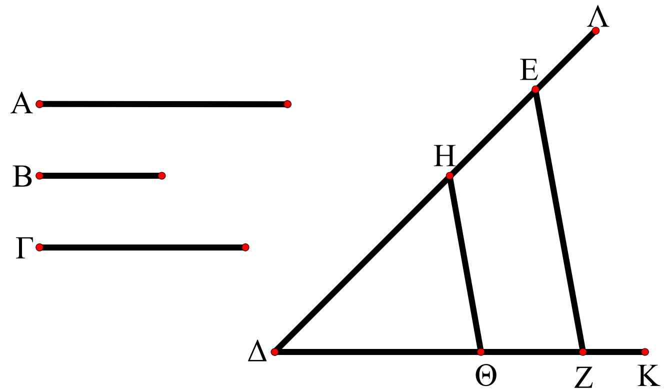
Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ τα οποία σχηματίζουν την τυχούσα γωνία $B\hat{A}\Gamma$. Θα κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ ώστε ο λόγος της ΑΒ προς την ΑΓ να είναι ίσος με τον λόγο της ΑΓ προς την ΓΕ.

Από το αξίωμα C.2 υπάρχει σημείο Δ, με $A * B * \Delta$ και $B\Delta \cong A\Gamma$. Κατόπιν από το σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στη ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΓ (αξίωμα (Β.3)) στο σημείο Ε με $A * \Gamma * E$ (Πρόταση Διαχωρισμού Επιπέδου). Επειδή λοιπόν στο τρίγωνο ΑΔΕ η ΒΓ είναι παράλληλη προς την ΔΕ τότε ο λόγος της ΑΒ προς την ΒΔ είναι ίσος με τον λόγο της ΑΓ προς την ΓΕ (Πρόταση VI.2). Όμως $B\Delta \cong A\Gamma$ και άρα ο λόγος της ΑΒ προς την ΑΓ είναι ίσος με το λόγο της ΑΓ προς την ΓΕ.



Πρόταση VI.12. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Απόδειξη. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα Α, Β, Γ θα κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ ώστε ο λόγος της Α προς την Β να είναι ίσος με το λόγο της Γ προς την ΘΖ.



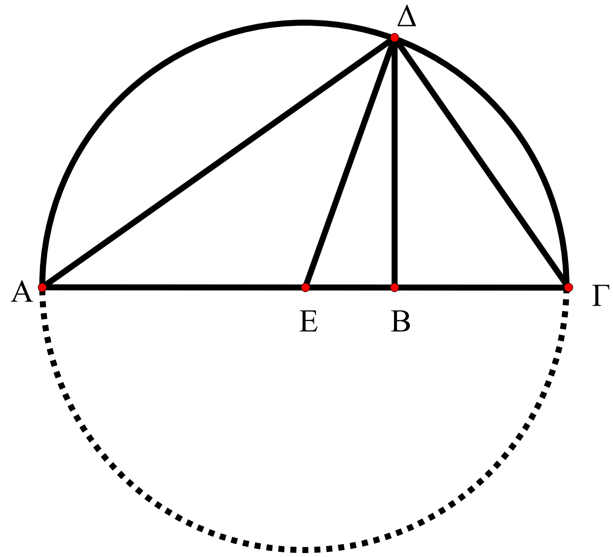
Από το αξίωμα (Ι.3) υπάρχουν τρία σημεία στο επίπεδο που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Έστω Κ, Δ, Λ τα σημεία αυτά και από το Λήμμα δημιουργούμε τη γωνία $\mathrm{K}\hat{\Delta}\Lambda$. Από το αξίωμα (C.2) υπάρχουν σημεία Η, Ε με $\Delta\mathrm{H} \cong \mathrm{A}$, $\mathrm{HE} \cong \mathrm{B}$ και $\Delta * \mathrm{H} * \mathrm{E}$. Ακόμη υπάρχει σημείο Θ στο ΔΚ με $\Delta\Theta \cong \Gamma$ (αξίωμα (C.2)) και από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΗΘ. Από το σημείο Ε φέρνουμε ΕΖ παράλληλη προς την ΗΘ η οποία τέμνει την ΔΚ στο Ζ (Πρόταση Ι.31). Επειδή λοιπόν στο τρίγωνο ΔΕΖ η ΗΘ είναι παράλληλη προς την ΕΖ τότε από την Πρόταση VI.2 ο λόγος του ΔΗ προς την ΗΕ είναι ίσος με τον λόγο της ΔΘ προς την ΘΖ. Όμως από την κατασκευή των ΔΗ, ΗΕ, ΔΘ ισχύει $\Delta\mathrm{H} \cong \mathrm{A}$, $\mathrm{HE} \cong \mathrm{B}$ και $\Delta\Theta \cong \Gamma$, επομένως ο λόγος της Α προς την Β είναι ίσος με το λόγο της Γ προς την ΘΖ.

Πρόταση VI.13. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και Β σημείο για το οποίο ισχύει $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \Gamma$, τότε για τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ θα βρούμε μέση ανάλογο, δηλαδή θα βρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ ώστε ο λόγος του ΑΒ προς το ΒΔ να είναι ίσος με το λόγο του ΒΔ προς το ΒΓ.

Από την Πρόταση Ι.10 υπάρχει σημείο Ε το οποίο ανήκει στο ΑΓ και για το οποίο ισχύει $\mathrm{AE} \cong \mathrm{E}\Gamma$, επιπλέον το σημείο Β ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και άρα θα ισχύει

$A*E*B$ ή $A*B*E$ ή Β=Ε. Έστω ότι ισχύει $A*E*B$, όμοια αποδεικύεται η πρόταση και για τις άλλες περιπτώσεις.



Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο Ε ακτίνας ΑΕ και από την Πρόταση Ι.11 φέρνουμε την ΒΔ κάθετη στο ΒΓ στο σημείο Β. Επιπλέον αφού $A*B*\Gamma$ (ΑΒ<ΑΓ) τότε εξ ορισμού το σημείο Β είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου και άρα από το δεύτεροο αξίωμα πληρότητας η ΒΔ τέμνει τον κύκλο, έστω Δ το σημείο τομής. Από το Λήμμα δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και αφού στο τρίγωνο ΑΔΕ ισχύει $AE \cong E\Delta$ (ως ακτίνες κύκλου) τότε από την Πρόταση Ι.5 για τις γωνίες $E\hat{\Delta}A$ και $E\hat{A}\Delta$ ισχύει $E\hat{\Delta}A \cong E\hat{A}\Delta$, όμοια στο τριγωνο ΔΕΓ ισχύει $E\hat{\Delta}\Gamma \cong E\hat{\Gamma}\Delta$. Ακόμη από την Πρόταση Ι.32 στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει $A\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}A \cong 2$ ορθές και αφού $A\hat{\Delta}\Gamma \cong A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}A \cong E\hat{A}\Delta$, $E\hat{\Delta}\Gamma \cong E\hat{\Gamma}\Delta$ τότε $A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma \cong 2$ ορθές και άρα $A\hat{\Delta}\Gamma \cong 1$ ορθή. Επομένως από την Πρόταση VI.8 τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΒΓ είναι όμοια και ο λόγος του ΑΒ προς το ΔΒ είναι ίσος με το λόγο του ΔΒ προς το ΒΓ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ α΄.

Ὅροι

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε΄. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ς΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί. only.

ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι΄. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

ια΄. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ΄. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ις΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ΄. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα΄ Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ΄. Τὼν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα

α΄. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον 1εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι

α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ΄. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

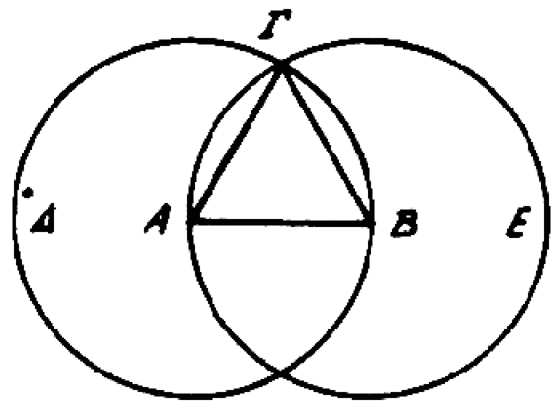
ε΄. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

α΄.

᾽Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

῎Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

᾽Ισόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

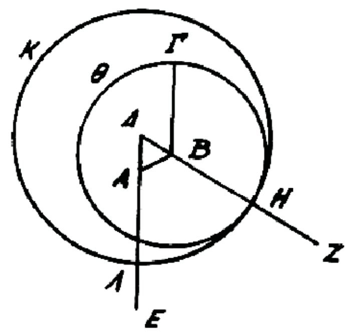
β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

῎Εστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

᾽Επεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπί τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

᾿Επεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση.



Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

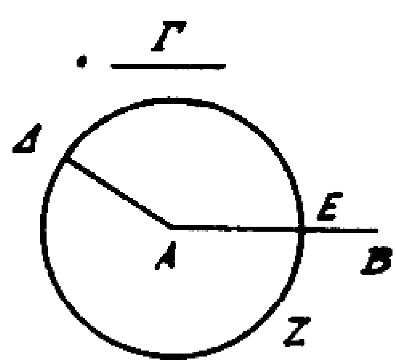
γ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

῎Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

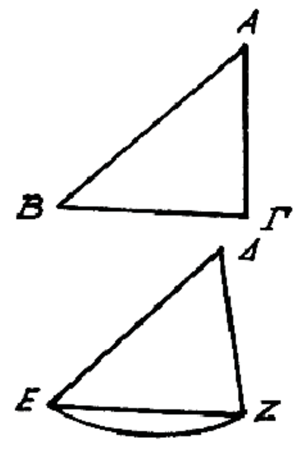
Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.



Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



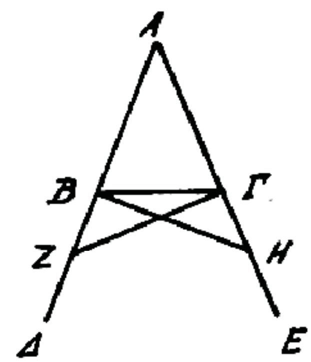
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ spectivelyκαὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖοντῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ ΑΒ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ τρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



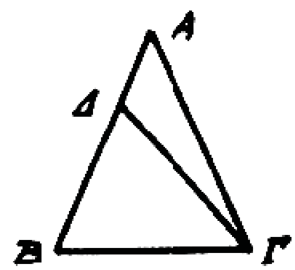
Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

᾽Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τη ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

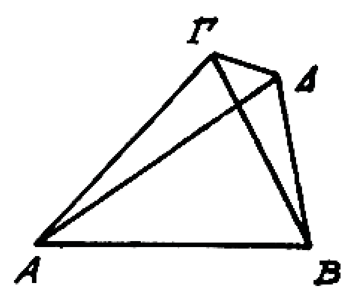
Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.
Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



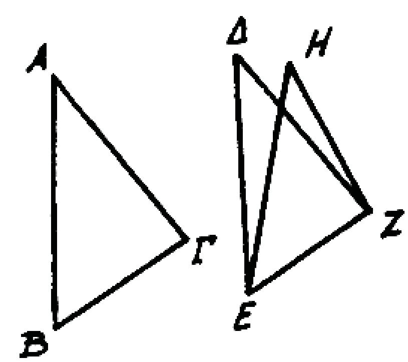
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστί τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



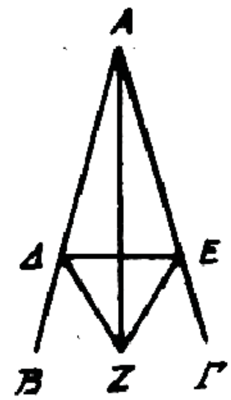
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ

ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθωἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

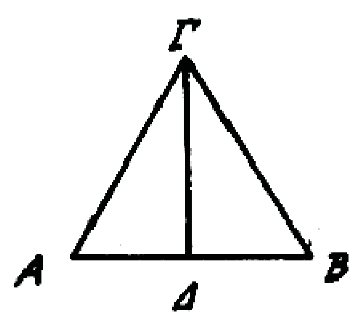


Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.
Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.



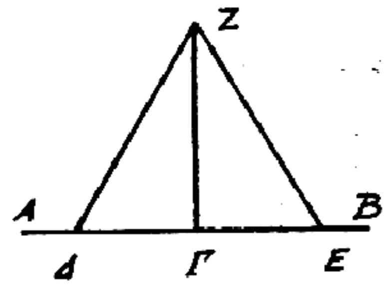
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια΄.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου [τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν· καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

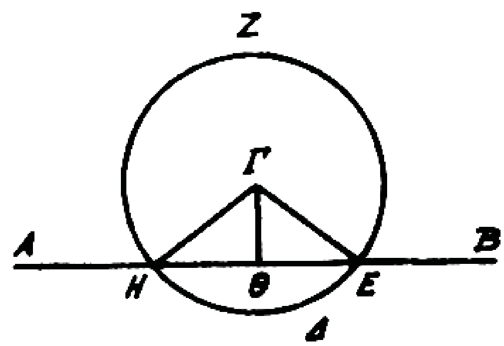
Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ΄.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲνσημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾿ αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾿ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾿ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.



᾿Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύοδὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση. καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾿ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ᾿ ἣν ἐφέστηκεν.

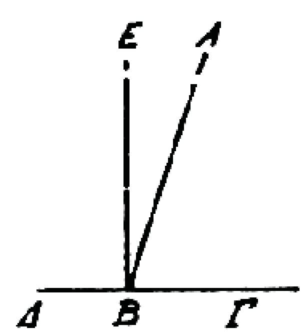
᾿Επὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾿ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ΄.

᾿Εὰν εὐθεῖα ἐπ᾿ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ᾿ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσαγωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λὲγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ



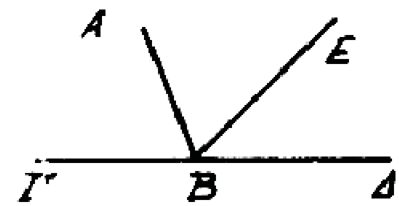
ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

᾿Εὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ᾿ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοιδύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

᾿Εὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾿ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ᾿ εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.



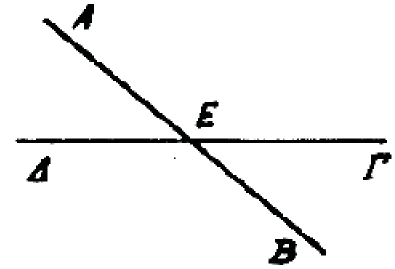
Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ᾿ εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ᾿ εὐθείας ἡ ΒΕ. ᾿Επεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ᾿ εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ᾿ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ᾿ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

᾿Εὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾿ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

᾿Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

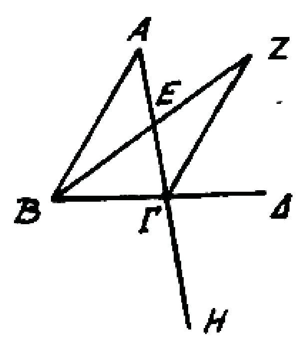
[**Πόρισμα**

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν].

ις΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λὲγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.



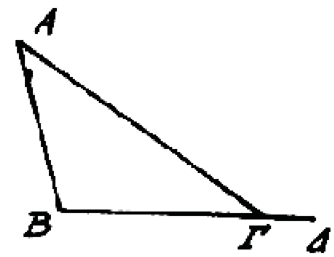
Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ

ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶγωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕτῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.
Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῇ μεταλαμβανόμεναι.

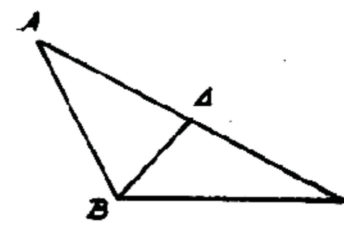
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓκοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.
Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῇ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.



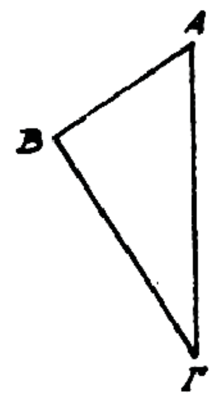
Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.



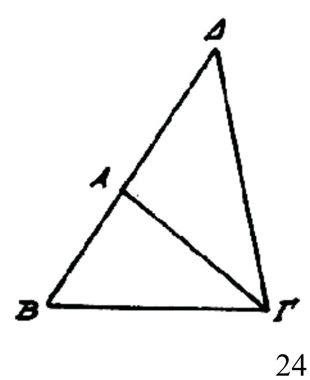
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, ὅτιοὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.



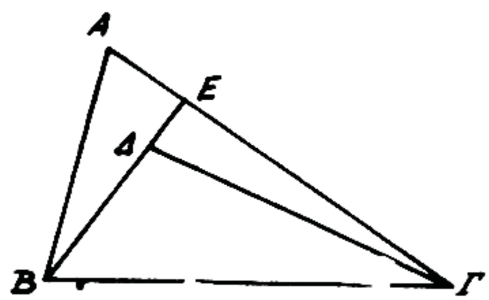
Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ,ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.᾽Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν τοῦ τριγώνου δύοπλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

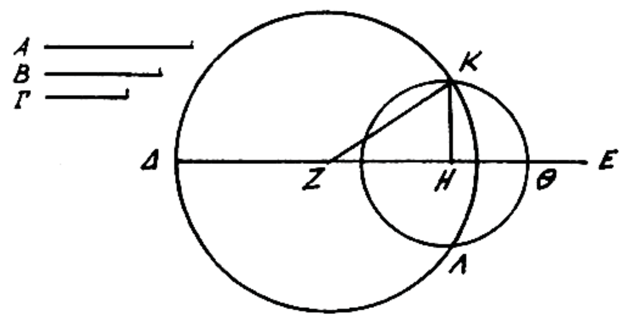
Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

᾽Εκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.



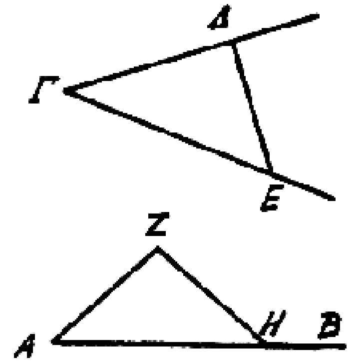
᾽Εκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ. ᾽Επεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

᾽Εκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνονσυνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ΄.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

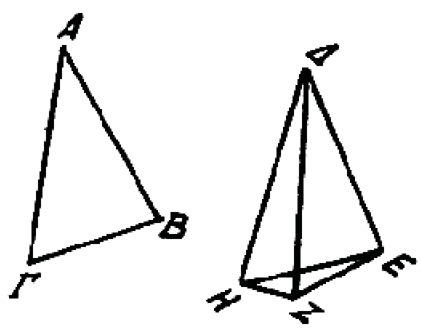
᾽Επεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ΄.

᾽Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

῎Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.



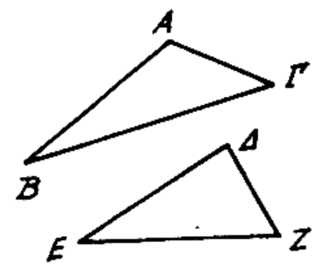
᾽Επεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

᾽Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴσῃ· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.

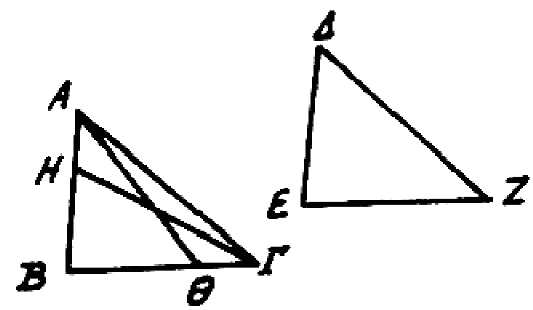
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκάτερᾳ, τὴν δὲ βασίν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ [ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

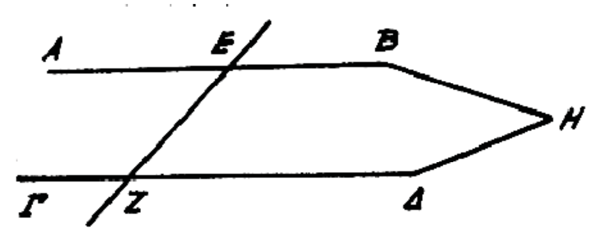
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν· ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπὲι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκαρέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



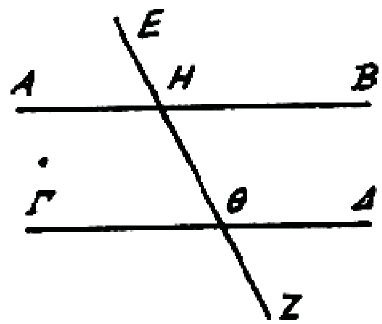
Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΔΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

᾿Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



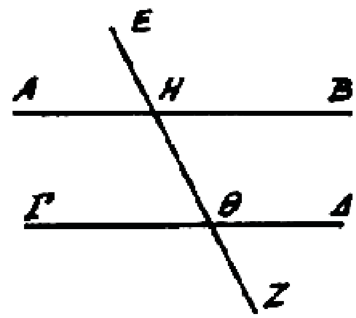
᾿Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

᾿Εὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσηνποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

῾Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



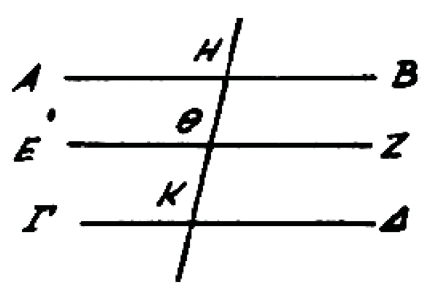
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.



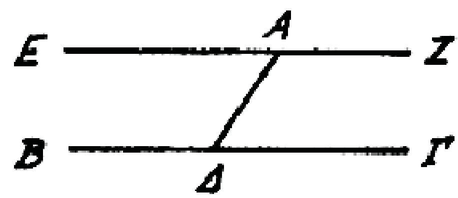
Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλονεὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

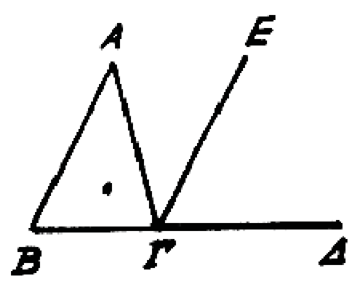


Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.
Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδειποιῆσαι.

λβ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



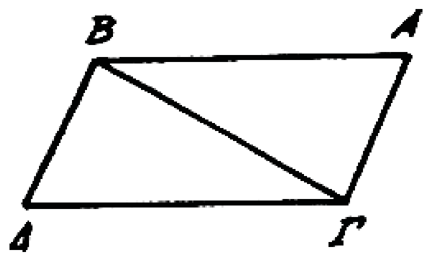
Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ,

ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.
Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

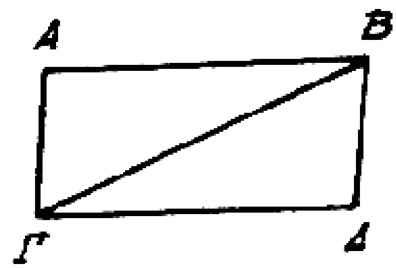


᾿Επεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς to γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.
Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση. Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

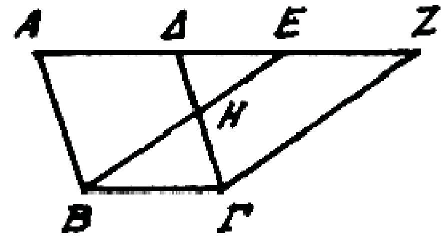
Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.



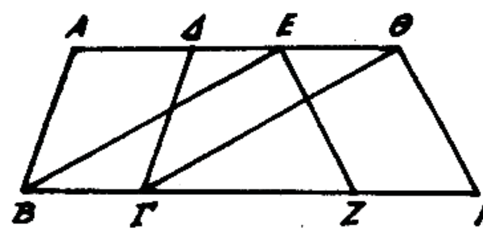
Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.



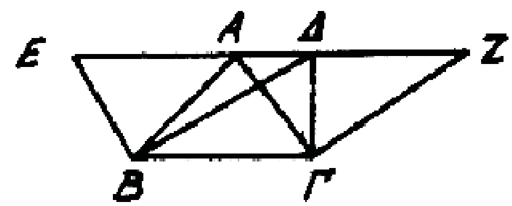
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι [καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι]. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

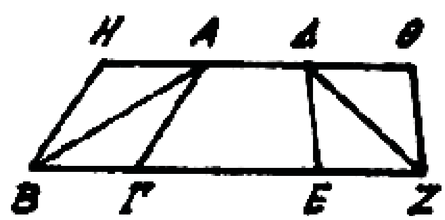


Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, δὶα δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. [τὰ δὲτῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



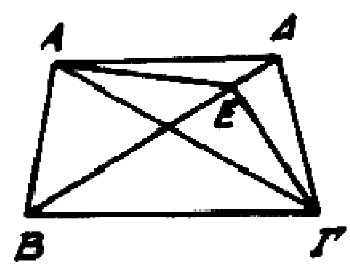
Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, δὶα δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ δίαμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.
Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

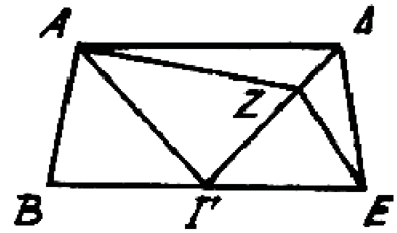


Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστι παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



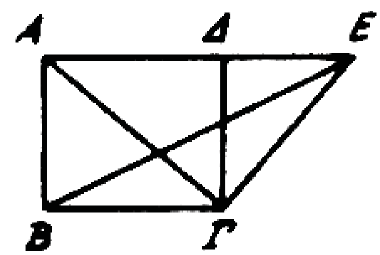
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ [τρίγωνῳ]· καὶ τὸ ΔΓΕ ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

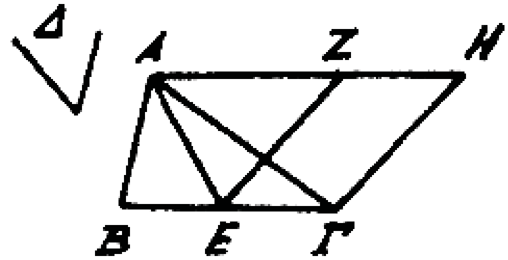
Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ,



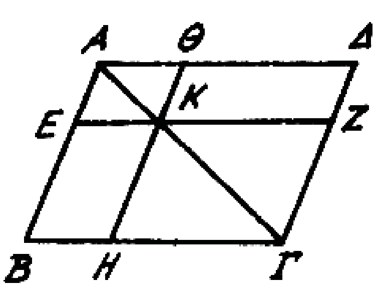
ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

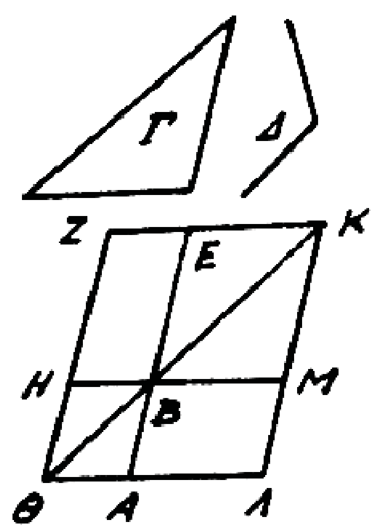


Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



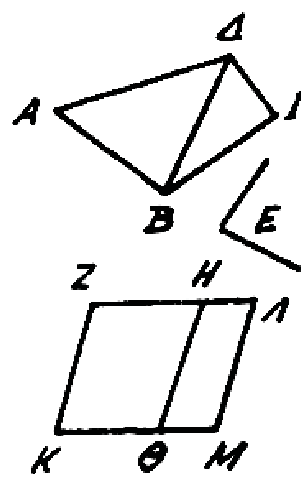
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ. Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντιτριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

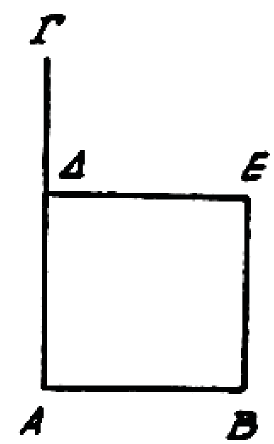


Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθεῖᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μς΄.

᾽Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι. ῞

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.



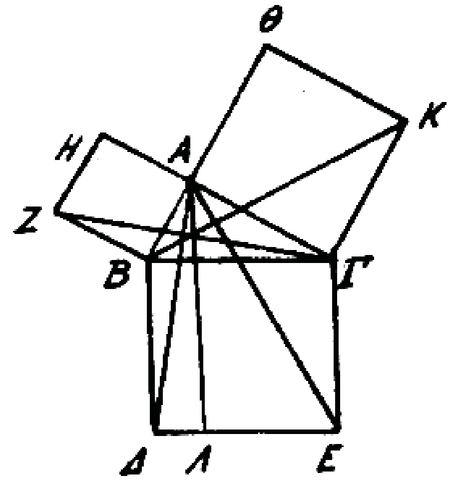
Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαιδύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ΄.

᾽Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.



᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾿ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ ΒΑ, αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ᾿ εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καί [ἐστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

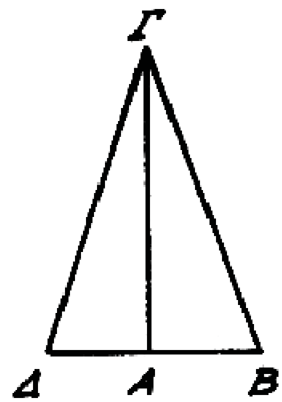
᾿Εν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη΄.

᾿Εὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

῎Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ



τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστιν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

᾿Εὰν ἀρὰ τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ β΄.

Ὅροι

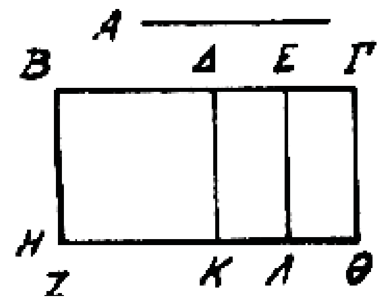
α΄. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β΄. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

α΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχομένον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.



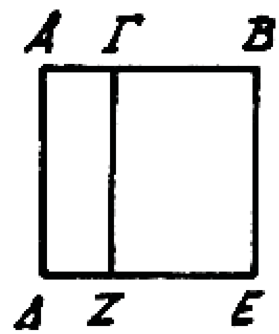
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α. τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ· ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β΄.

᾿Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

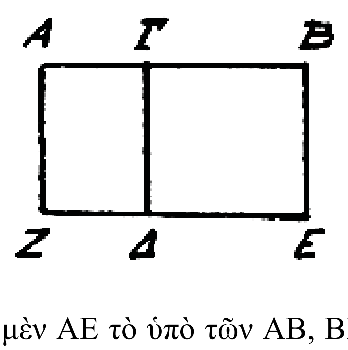
Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.



᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ. Ἴσον δή ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ ΑΒ. τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.
᾿Εὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ΄.

᾿Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.



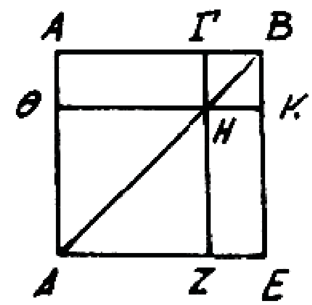
Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου. ᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, [ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, F, ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ

ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.
᾿Εὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ´.

᾿Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνιά τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση· ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΚΒ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ], αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστιν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΚΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

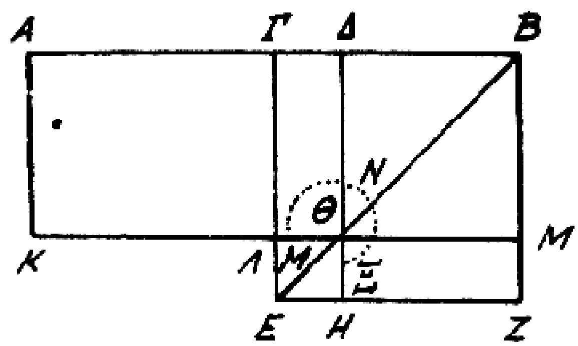
[ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν].

ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ



ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, [ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος πάλιν ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΜΝΞ γνώμονι ἴσον ἐστίν.

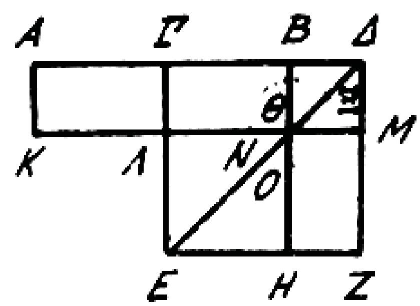
ἀλλὰ τὸ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆςΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.



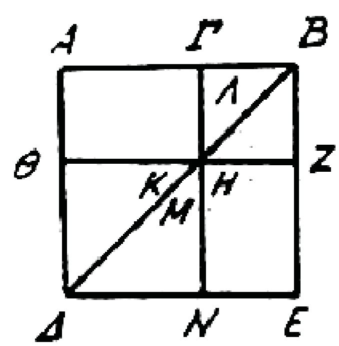
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛτῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ

ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.
᾿Εὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾿ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

᾿Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾿ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.



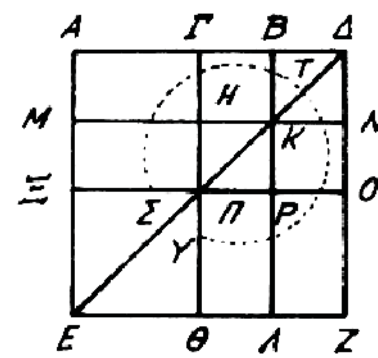
᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ᾿Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστι γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΗ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ CF, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ
τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς τετραγώνῳ.



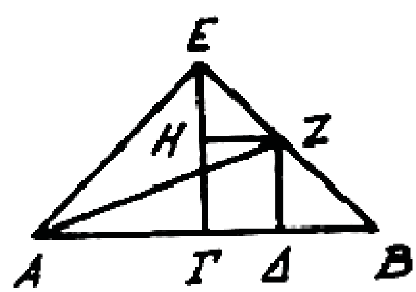
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας [τῇ ΑΒ εὐθεῖα] ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τὴ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ. ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΚΔ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ, ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ ἐστι τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ· ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσου ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.



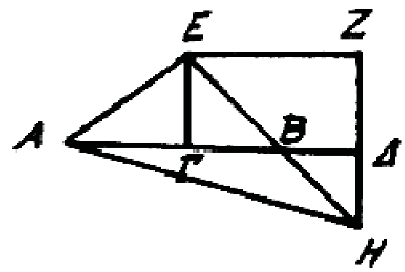
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καί εἰσιν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ Β τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετράγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.



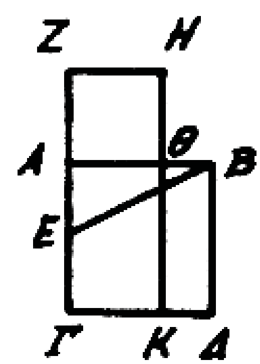
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστιν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ], ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προ σκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



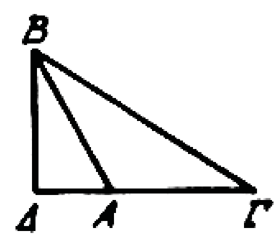
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΖΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ τὸ ΖΚ·

ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. κοινὸν ἀρῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ ὥστε on τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ΄.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.



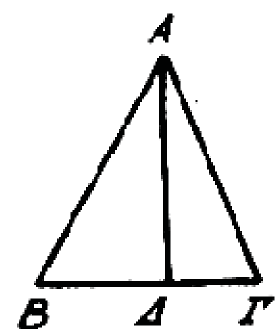
Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ προς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶνπλευρῶν τετραγώνων τῷ περιχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



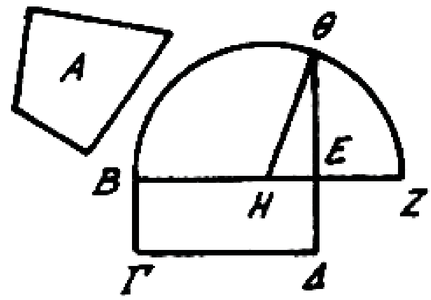
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνιος. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστιτῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσαςθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.



Συνεστάτω γὰρ τῷ Α ἐυθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὄρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ. καὶ τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ε΄.

Ὅροι

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

δ΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καί τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ς΄. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

ζ΄. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

η΄. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

θ΄. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ι΄. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία

ια΄. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιβ΄. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιγ΄. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιδ΄. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιε΄. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις΄. ᾿Αναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιζ΄. Δι᾿ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρωνκαθ᾿ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

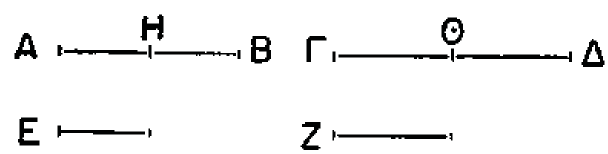
ιη΄. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

α΄.

᾿Εὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

᾿Επεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ.



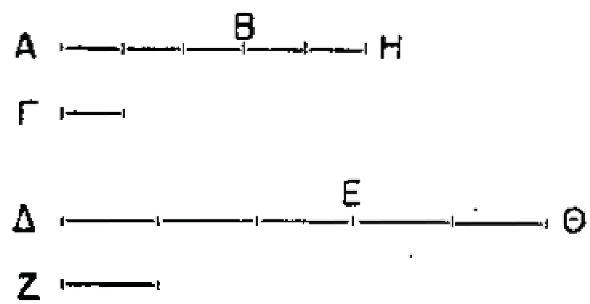
διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ ἴσα τοῖς Ε, Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

᾿Εὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β΄.

᾿Εὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.



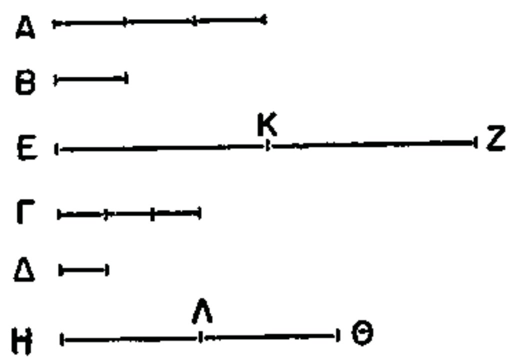
᾿Επεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ. καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

᾿Εὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ΄.

᾿Εὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι᾿ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.



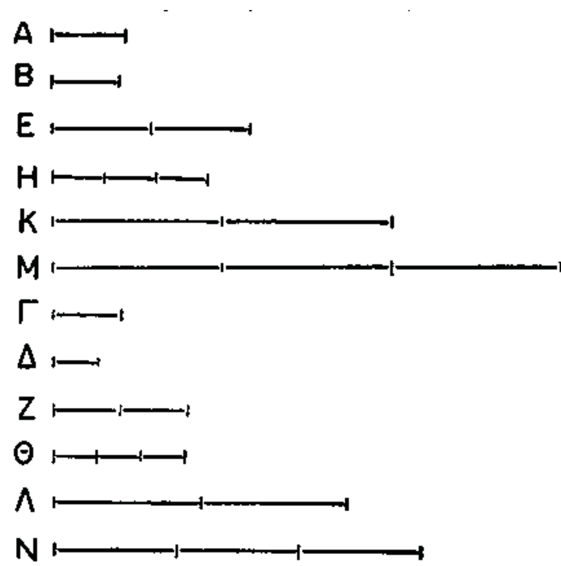
Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἴσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

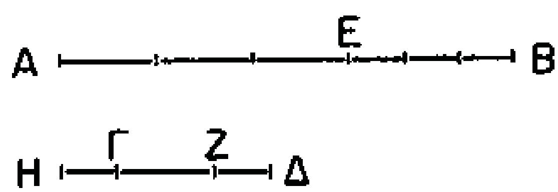


Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν. [Καὶ] ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἴσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἴσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε´.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.



Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ

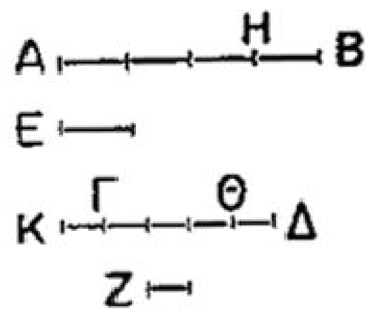
τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ. κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τὸ ΗΓ τῷ ΔΖ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ
πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.



Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἴσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ Ζ τῷ ΚΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

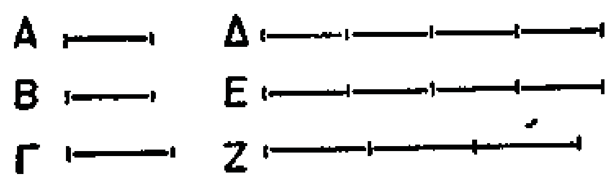
῾Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι, κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

᾿Εὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι, ὃ ἔτυχεν, μέγεθος τὸ Γ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον τὸ Ζ. ᾿Επεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δέ, ὅ ἔτυχεν, τὸ Ζ. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

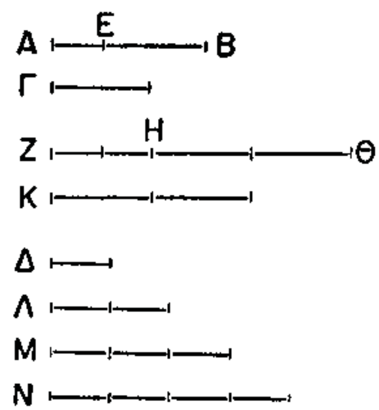
Πόρισμα

᾿Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

῎Εστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.



᾿Επεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ· τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.

᾿Επεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὔκ ἐστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὔκ ἐστιν ἔλαττον· οὐδ᾿ ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστιν. μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστιν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστιν, συναμφότερα δὲ τὰ Μ, Δ τοῦ Δ ἐστι τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Μ, Δ μεῖζόν ἐστιν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει· τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

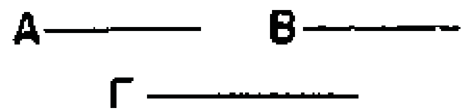
᾿Αλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω. τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ οὔκ ἐστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ, τουτέστι τοῦ Ν, ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τοῦ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λὸγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

᾿Εχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



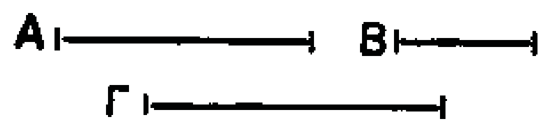
Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

᾿Εχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν Β λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.



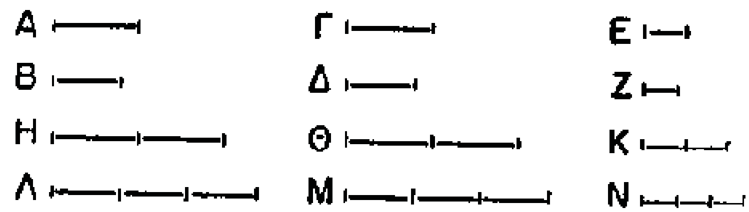
᾿Εχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὔκ ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β· τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β. ᾿Εχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὔκ ἐστι τὸ Β τῷ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.
Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλλατον, ἔλαττον. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

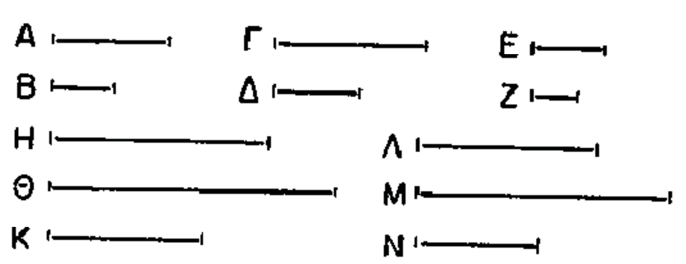
Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ΄.

᾿Εὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

῎Εστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς το Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ



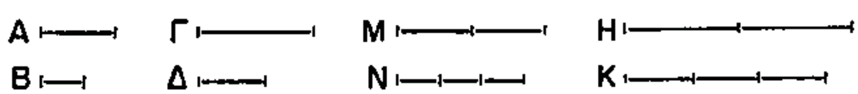
Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ,Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττονα. καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

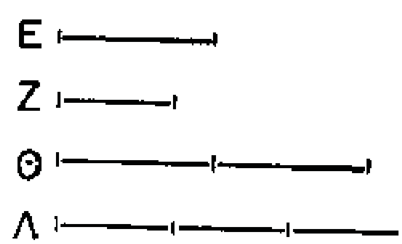
ιγ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω



λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. Ἐπεὶ γὰρ ἔστι τινὰ



τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δπολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ

Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλλατον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἒχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, [μέγεθος] τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

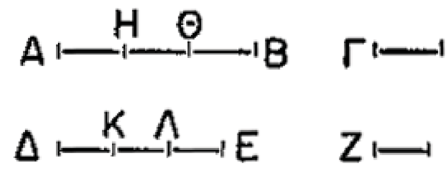
Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ, κἄν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ το ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.



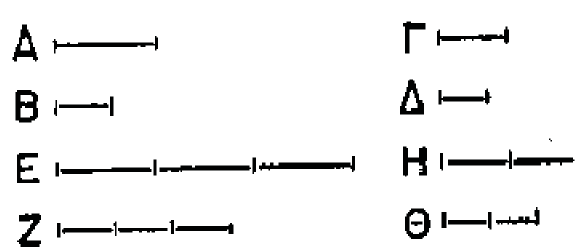
Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγουμένα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ [ἀνάλογον] ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, [οὕτως] τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἄν ἔλαττον, ἔλαττον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

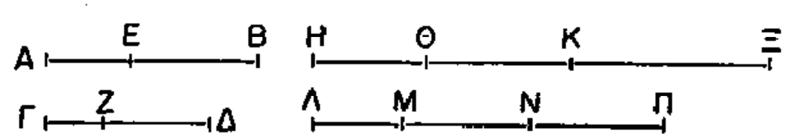
᾿Εὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

᾿Εὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ.



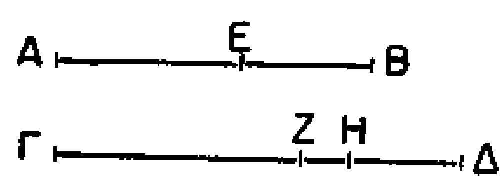
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλασίον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ, καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ

πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλα εἰ ὑπερεῖχε τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.
Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

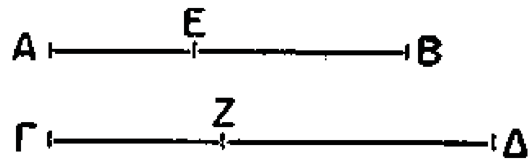


Εἰ γὰρ μή ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ ἢ πρὸς μεῖζον.
Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.



Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφειρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.
Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸςἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].
[Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι].

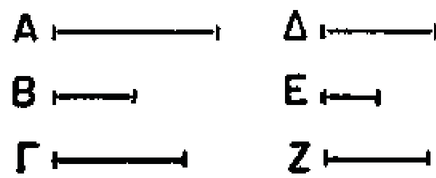
Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγω, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δι᾽ ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.



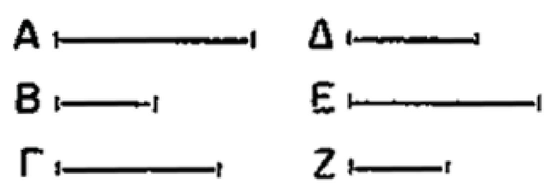
Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β [οὕτως] τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν. μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθοςσύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγω, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂνἒλαττον, ἒλαττον.



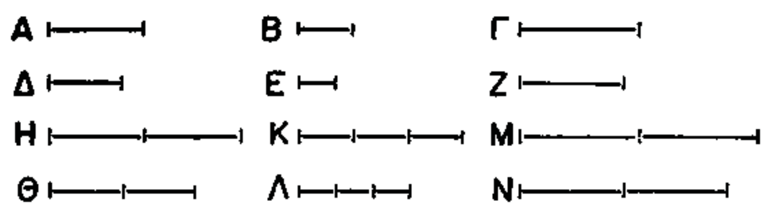
Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς

τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.
Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῳ λόγῳ ἔσται.

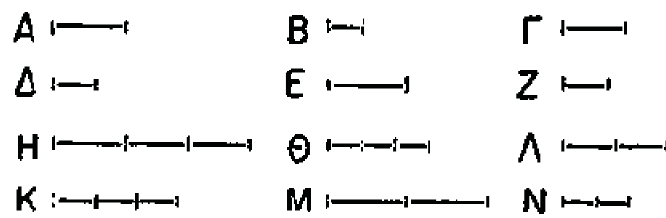


Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.
Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Θ, Λ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

᾿Εὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾿ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ΄.

᾿Εὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾿ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.



῎Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοὶς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ. ἀλλ᾿ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστι πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. ἀλλ᾿ ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοις ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Κ, Μ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, δι᾿ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ

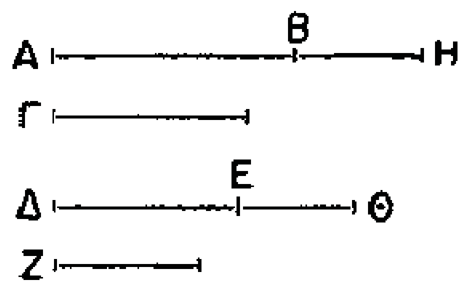
Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

᾿Εὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένηαὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾿ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ΄.

᾿Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύρερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ, ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.



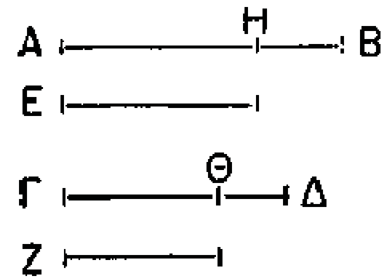
᾿Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ, δι᾿ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι᾿ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

᾿Εὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεὶξαι.

κε΄.

᾿Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

῎Εστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστιν.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ. ᾿Επεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. καὶ [ἐπεὶ] ἐὰν [ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισά ἐστιν, ἐὰν ἄρα] τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ τῷ μὲν ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε.

᾿Εὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ς΄.

Ὅροι

α΄. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

[β΄. Ἀντιπεπονθότα δέ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.]

γ΄. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττὸν.

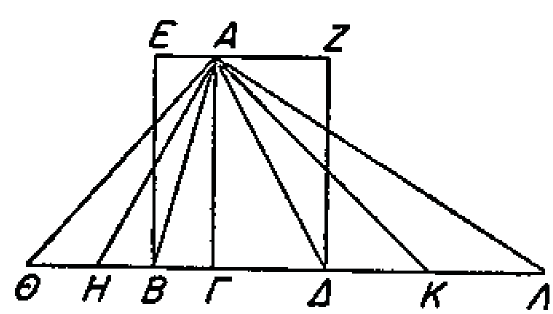
δ΄. Ὕψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

[ε΄. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα].

α΄.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσις, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι [ὁσαιδηποτοῦν] (αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυ ταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῳ ΑΓΛ τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΛ τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἥ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΛΓ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου, καί εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσων, ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

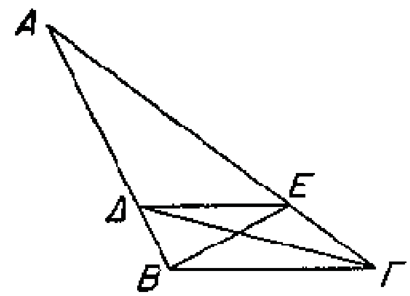
Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β΄.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ· ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. αλλ᾽



ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

᾽Αλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτιπαράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

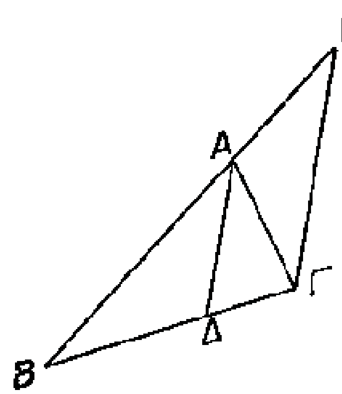
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ - ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

᾽Εὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ΄.

᾽Εὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

῎Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

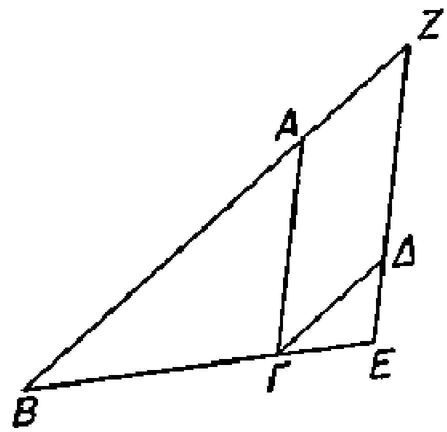


Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.
Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.
᾿Αλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ [ἐστιν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.
᾿Εὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.



Κείσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

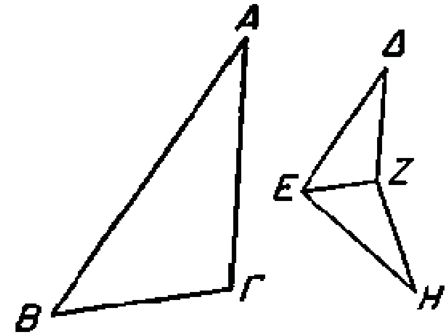
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἐστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.



Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Α λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἐστιν ἴση.

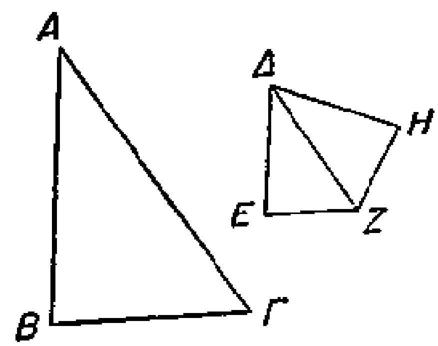
Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, [οὕτως] ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΗ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν.

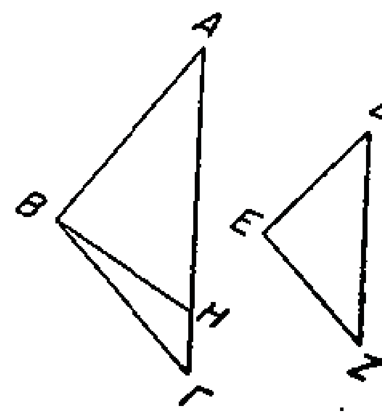
Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ· καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσας εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΔΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσας ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπο ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖτῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

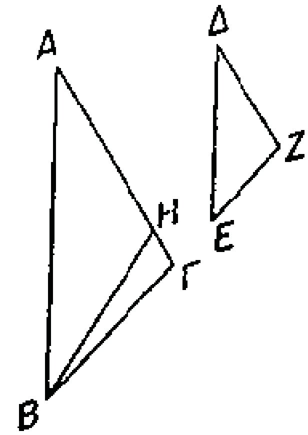


Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖτριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, [οὕτως] ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ὑπὸ ΒΗΓ· ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ· οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὔκ εἰσιν ἐλάττονες· ὅπερἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



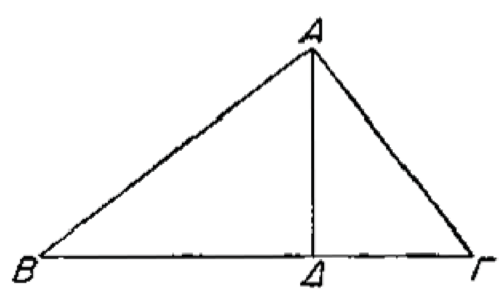
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπό τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓτριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπο ΒΑΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν



ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει.

ὅμοιον ἅμα [ἐστὶ] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β, καὶ ἔτι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

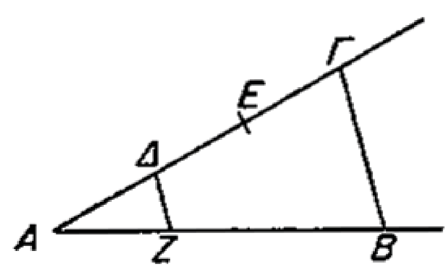
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνάις ἐπὶ τὴν βάσις κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήθχω τις ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα ἡ ΑΓ γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.

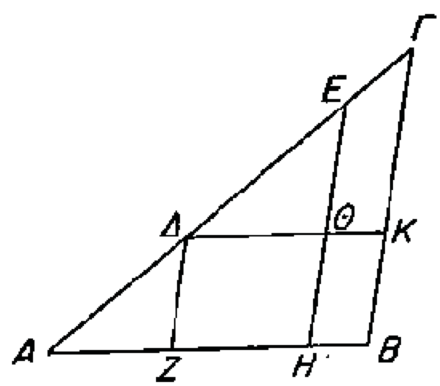


Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.
Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

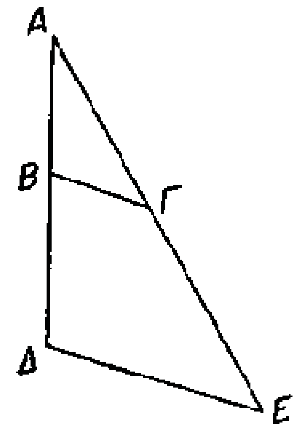
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.
Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι·

ια΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

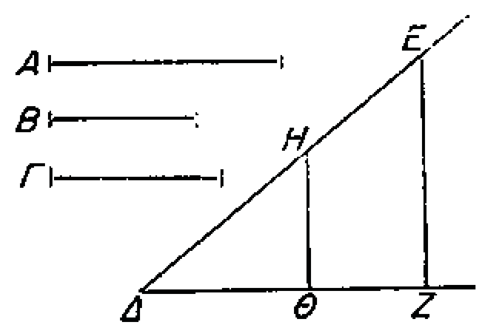
Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ΄.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετράτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουςαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

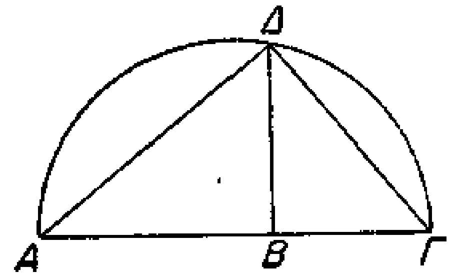
Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.



᾽Επεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ, ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

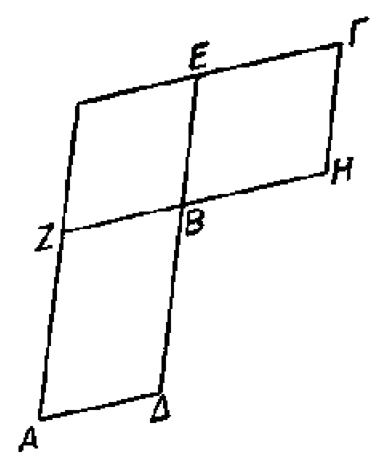
Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδ΄

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσο γωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ

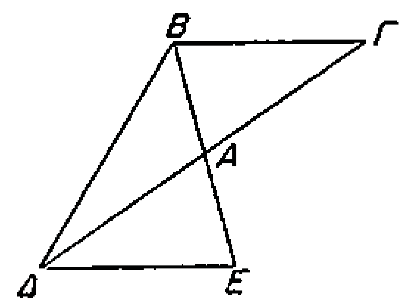


πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ᾿Αλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.
᾿Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ᾿ ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.
Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

῞Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾿ εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ᾿ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. ᾿Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΒΑΔ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἀλλ᾿ ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

᾿Αλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

᾿Επιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ᾿ ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγονἴσων ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ [τρίγωνον] τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

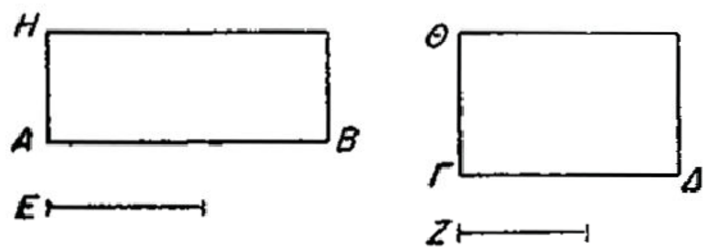
Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧς μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις´.

᾿Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

῎Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

῎Ηχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνάις, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· ἴση γὰρ ἡ is Ε τῇ ΓΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί ἐστιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

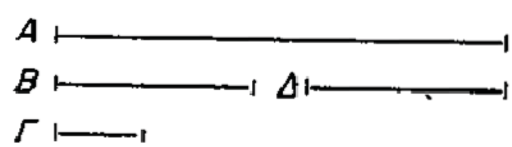
Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

᾽Αλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον.

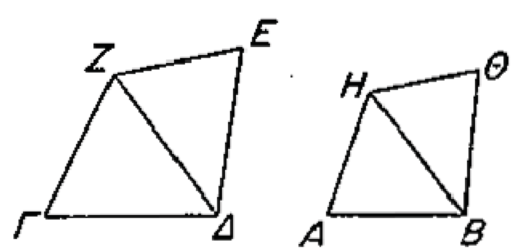
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

᾽Εὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

᾽Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

῎Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



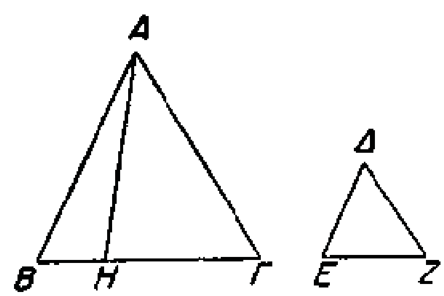
᾽Επεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἔτι ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΘΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ· καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

᾿Απὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιθ΄.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

῎Εστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

᾿Επεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ᾿ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἐστιν ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνάις. ὧν δὲ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνάις, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. [ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

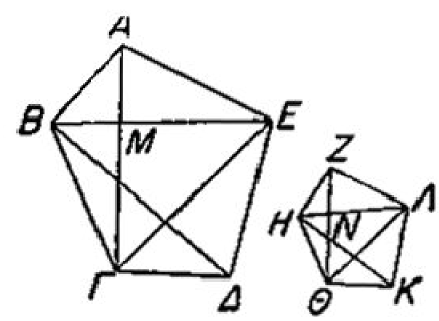
Πόρισμα

᾿Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. ᾿Επεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.



Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνάις τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ Ι ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

᾽Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ (ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· (ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΜ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπόμενων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. αλλ᾽ ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον.

ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα α΄.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

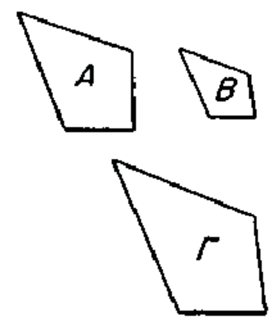
[Πόρισμα β΄.

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΒΑ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. ἔχει δ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ε δος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.]

κα΄.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

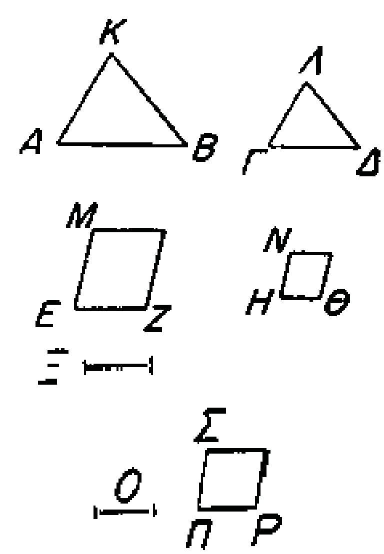
Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστιν ὅμοιον.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίαςπλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾽ εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.



Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως [καὶ] τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα Ο, τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

᾿Αλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ. ᾿Επεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

᾿Εὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾿ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ᾿ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

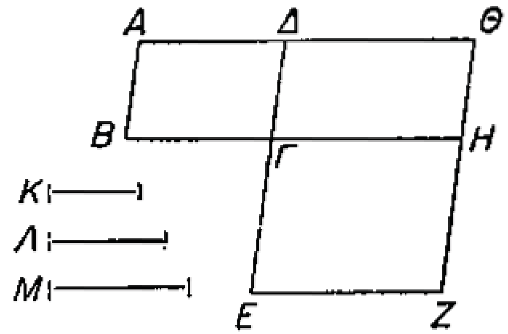
[Λῆμμα]

[῞Οτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, δείξομεν οὕτως. ῎Εστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ. Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσιν, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ, μείζων δ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ. ἀλλὰ καὶ ἴσον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

κγ΄.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.



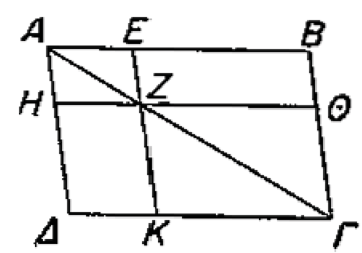
Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ. Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ᾽ ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.



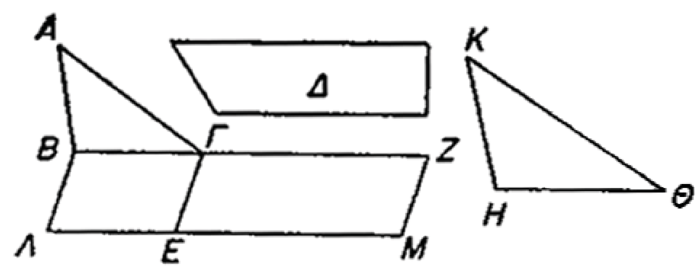
Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΑ· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ [παραλληλογράμμῳ] ὅμοιόν ἐστιν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

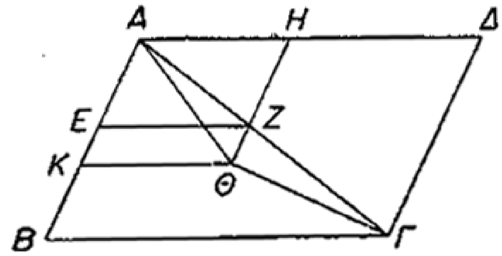


Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κς΄.

᾿Εὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.



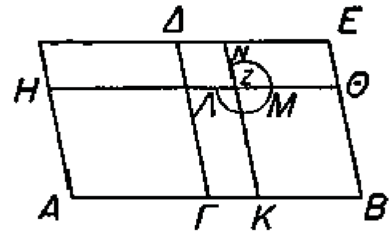
᾿Απὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ.
Μὴ γάρ, ἀλλ᾿ εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁπορέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.
᾿Επεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὔκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΖ παραλληλογράμμῳ.
᾿Εὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμμαντι.

῎Εστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν

ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔΒ μέγιστόν ἐστι τὸΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.



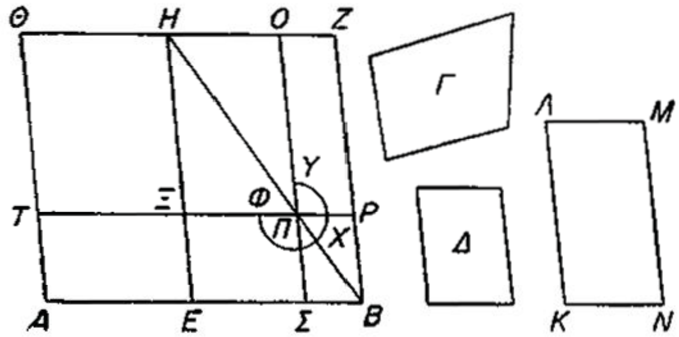
Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΒ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν].

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ μὴ μεῖζον [ὂν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴπαρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον. Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΗΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἔστω τὸ ΘΕ τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ [ἐστιν] ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστιν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τὴ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστι [τὸ ΗΠ] τῷ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν]. καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

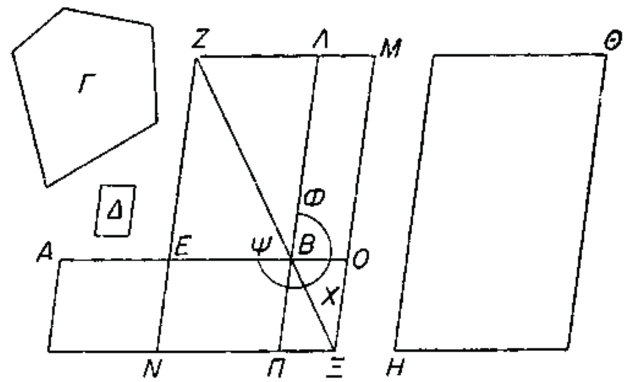
᾿Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστιν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΧΦ γνόμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΦΧΥ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλ᾽ ὁ ΦΧΥ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ [ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κθ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.



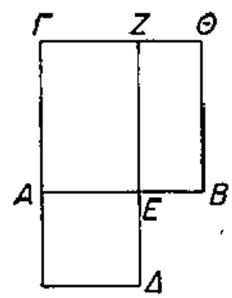
Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τὴς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον·καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστίν. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ τῷ Γ ἴσος ἐστίν· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον τὸ ΟΠ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λ΄

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



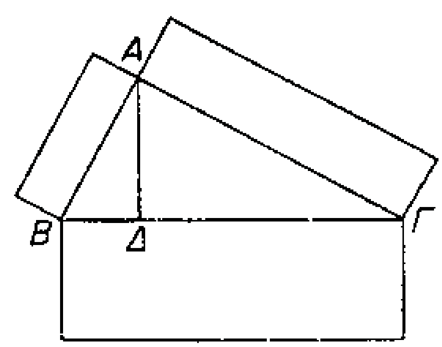
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ. Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστι καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λα΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



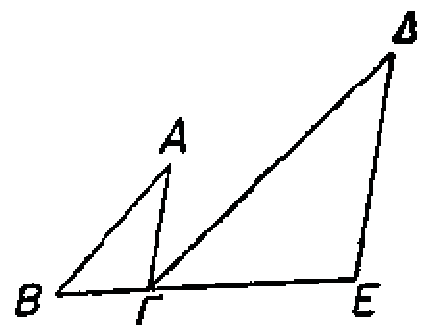
Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸςτὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἄπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΓ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ

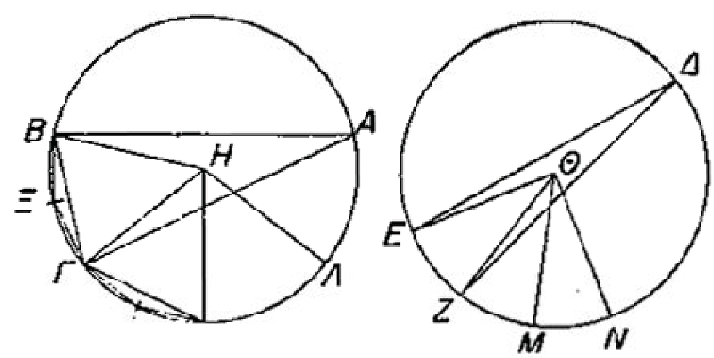


γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνάις τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. ᾿Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄

᾿Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

῎Εστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ. Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ



ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ. ᾿Επεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰαὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΝΘΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥ τε ΕΝ περιφέρια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπο ΕΘΝ γωνίας, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

᾿Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[F] Fowler, D., *The Mathematics of Plato's Academy*, *a new reconstruction*, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[Har1] Hartshorne, R., *Teaching Geometry according to Euclid*, Notices of the American Mathematical Society 47, 460-465, 2000.

[Har2] Hartshorne, R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.

[Hea] Heath, T.L., *The thirteen Books of Euclid's Elements*, Three Volumes, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1926.

[Hilb] Hilbert, D., *The Foundation of Geometry*, translated by Townsend E.J., reprint edition, Open Court, La Salle Illinois, 1950 (first published 1899).

[dMo] de Morgan, A., *The Connection of Number and Magnitude: An Attempt to Explain the Fifth Book of Euclid*. Taylor and Walton, London, 1836.

[Mor] Morrow, G.R., *Proclus A Commentary on the first book of Euclid's Elements*, Translated with Introduction and Notes, Princeton University Press, Princeton, 1992.

[N] Νεγρεπόντης, Σ., Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών», ΠΜΣ Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών, 2011-2012.

[R] Russell, B., *The Teaching of Euclid*, The Mathematical Gazette **2** (33), 165-167, 1902.

[P] Playfair, J., *Elements of Geometry, containing the first six books of Euclid*, W. E. Dean Printer & Publisher, New York, 1846.

[S] Simson, R., *The Elements of Euclid, viz. the first six books, together with the eleventh and twelfth. The errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these books, are corrected, and some of Euclid's demonstrations are restored*. Desilver, Thomas and co, Philadelphia, 1838

[Στ] Σταμάτης, *Ε. Ευκλείδου Στοιχεία, τόμοι I, II, V, VI* (*Εισαγωγή, Αρχαίο Κείμενο, Μετάφρασις, Επεξηγήσεις*) ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1975.

[vdW] Van der Waerden, B., Science Awakening, Kluwer, 1963, (Μετάφραση στα Ελληνικά: Η Αφύπνιση της Επιστήμης, Ι. Χριστιανίδης, Π.Ε. Κρήτης, 2000).

Πηγές Αρχαίων Ελληνικών κειμένων

Τα Αρχαία κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν, προέρχονται από τη ηλεκτρονική βάση δεδομένων TLG (Θησαυρός της Ελληνικής Γλώσσας).