

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Η ΒΑΘΜΩΤΗ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ
ΕΞΙΣΩΣΗ HELMHOLTZ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΕΦΑΝΙΑ-ΜΑΡΙΑ ΖΩΗ

ΑΘΗΝΑ 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τις μεταπτυχιακές μου σπουδές με τη συγγραφή της διπλωματικής αυτής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου Κυρία Ε. Κόττα-Αθανασιάδου για την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Κύριο Χριστόδουλο Αθανασιάδη για τη βοήθειά του στην παρούσα εργασία και γενικότερα στις μεταπτυχιακές μου σπουδές.

Τέλος, ευχαριστώ τα αγαπημένα μου πρόσωπα για τη συμπαράστασή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κεντρικό θέμα την εξίσωση Helmholtz στη βαθμωτή και διανυσματική μορφή της. Σκοπός είναι η ανάδειξη των εφαρμογών της εξίσωσης αυτής στα ακουστικά, ηλεκτρομαγνητικά και ελαστικά κύματα με αρμονική χρονική εξάρτηση. Στην πρώτη περίπτωση τα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων περιγράφονται από τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων εμφανίζεται η διανυσματική εξίσωση Helmholtz. Έμφαση δίνεται στη μελέτη των ιδιοτήτων της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz και στη χρήση αυτών στην επίλυση των προβλημάτων σκέδασης ακουστικών κυμάτων.

ABSTRACT

The main subject of this study is the Helmholtz equation in scalar and vector form. The purpose is to show the application of this equation to the acoustic, electromagnetic and elastic waves with harmonic time dependence. In the first case the acoustic scattering problems are described by the scalar Helmholtz equation, while in the two other cases the vector Helmholtz equation appears in the electromagnetic and elastic scattering problems. Emphasis is placed on studying the properties of the scalar Helmholtz equation and their use in solving problems of acoustic wave scattering.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1. Εξίσωση Helmholtz	4
1.1. Εξίσωση Συνέχειας	4
1.2. Εξίσωση Euler	5
1.3. Γραμμικοποίηση	7
1.4. Κυματική Εξίσωση	8
1.5. Αρμονική χρονική εξάρτηση	9
2. Σκέδαση ακουστικών κυμάτων.....	12
2.1. Επίπεδα και σφαιρικά ακουστικά κύματα.....	13
2.2. Συνοριακές συνθήκες.....	16
2.3. Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.....	18
2.4. Τα βασικά προβλήματα ακουστικής σκέδασης	20
2.5. Θεωρήματα Green και Ολοκληρωτικές αναπαράστασεις.....	24
2.6. Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος.....	39
2.7. Θεωρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης των προβλημάτων συνοριακών τιμών.....	41
3. Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων	59
3.1. Χρονικά εξαρτημένες εξισώσεις Maxwell.....	61
3.2. Αρμονική χρονική εξάρτηση.....	62
3.3. Διανυσματική εξίσωση Helmholtz.....	63
3.4. Επίπεδα και σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα.....	65
3.5. Συνοριακές συνθήκες.....	66
3.6. Συνθήκη ακτινοβολίας Silver-Müller.....	69
3.7. Τα βασικά προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.....	70
3.8. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χειρόμορφο υλικό.....	72
3.9. Πεδία Beltrami.....	75
4. Σκέδαση ελαστικών κυμάτων.....	81
4.1. Εξίσωση Navier.....	82
4.2. Ανάλυση Helmholtz.....	83
4.3. Επίπεδα και σφαιρικά ελαστικά κύματα.....	85

4.4.	Συνοριακές συνθήκες.....	86
4.5.	Συνθήκες ακτινοβολίας	89
4.6.	Τα βασικά προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων.....	90
5.	Εφαρμογές.....	94
5.1.	Διάφορες εφαρμογές	94
5.2.	Το Sonar και οι Υπέρηχοι.....	98
5.3.	Οι Βασικότερες μέθοδοι επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης.....	99
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		103

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

A. Χώροι

D = σκεδαστής

∂D = επιφάνεια (σύνορο) του σκεδαστή

$\bar{D} = D \cup \partial D$ = κλειστότητα του σκεδαστή

\mathbb{R} = Ευκλείδειος χώρος μιας διάστασης / χώρος των πραγματικών αριθμών

\mathbb{R}^3 = Ευκλείδειος χώρος τριών διαστάσεων

\mathbb{C} = χώρος των μιγαδικών αριθμών

$C \equiv C^0$ = σύνολο των συνεχών συναρτήσεων

C^1 = σύνολο των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων

C^2 = σύνολο των δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: |\mathbf{x}| = 1\}$ = μοναδιαία σφαίρα

$S(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3: |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r\}$ = σφαίρα κέντρου \mathbf{x} και ακτίνας r

B. Τελεστές

Για $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbf{x}) \equiv f(x_1, x_2, x_3)$

- Κλίση (gradient)

$$\nabla f \equiv \text{grad}f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{k},$$

με $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$.

- Λαπλασιανή ή τελεστής Laplace (Laplacian)

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Για $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x) \equiv (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$

- Απόκλιση (divergence)

$$\nabla \cdot \mathbf{f} \equiv \operatorname{div} \mathbf{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

- Στροβιλισμός (curl)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{f} \equiv \operatorname{curl} \mathbf{f} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{f} &:= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \\ &\equiv \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

με $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$.

Για $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ και $g \equiv (g_1, g_2, g_3)$

- Εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \equiv (\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \sqrt{f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3}$$

- Μέτρο

$$|\mathbf{f}| \equiv \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \equiv (\mathbf{f}, \mathbf{f}) := \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

Για $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε μια επιφάνεια έστω S

- Κάθετη παράγωγος (normal derivative)

$$\frac{\partial f}{\partial n} := \mathbf{n} \cdot \nabla f \equiv (\mathbf{n}, \nabla f)$$

Γ. Διανυσματικές ταυτότητες και σχέσεις

Για $f \in \mathbb{R}^3$ και $a \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής ταυτότητες

$$\nabla \times (\nabla a) = 0 \tag{0.1}$$

$$\nabla \cdot (\nabla a) = \Delta a \tag{0.2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f} \quad (0.3)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0 \quad (0.4)$$

Δ. Ορισμοί

Για $f, g: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in \bar{\Omega}$

$$1) \quad f(x) = O(g(x)), z \rightarrow z_0$$

αν υπάρχει σταθερά $a > 0$ και περιοχή V_0 του z_0 έτσι ώστε

$$|f(z)| \leq a|g(z)|, \forall z \in V_0 \cap \Omega \quad (0.5)$$

$$2) \quad f(x) = o(g(x)), z \rightarrow z_0$$

αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει περιοχή V_0 του z_0 έτσι ώστε

$$|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|, \forall z \in V_0 \cap \Omega \quad (0.6)$$

Αν $|g(z)| \neq 0$ και $z \in V_0$ τότε

$$f(x) = o(g(x)), z \rightarrow z_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0$$

Γενικοί

t = χρόνος

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) =$ διάνυσμα θέσης στον τρισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3

$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) =$ διάνυσμα θέσης στον τρισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3

ω = κυκλική συχνότητα

$\delta(\mathbf{x})$ = συναρτησιακό Dirac

D = σκεδαστής

$S = \partial D =$ σύνορο σκεδαστή

\mathbf{n} = μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂D

$\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ = ο χώρος εκτός του σκεδαστή D

$\mathbb{R}^3 \setminus D$ = η ένωση του χώρου εκτός του σκεδαστή D και του συνόρου του σκεδαστή

$Re(z)$ = πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού z

$Im(z)$ = φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού z

Ακουστικά κύματα

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ = διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ = πυκνότητά του ρευστού

$p = p(\mathbf{x}, t)$ = πίεση του ρευστού

\mathbf{f} = εξωτερικές δυνάμεις

\mathbf{F} = ολική δύναμη

c_0 = ταχύτητα ακουστικών κυμάτων

$\varphi(\mathbf{x}, t)$ = δυναμικό ταχύτητας

k = κυματικός αριθμός του κύματος

$u^i(\mathbf{x})$ = προσπίπτον ακουστικό πεδίο

$u^s(\mathbf{x})$ = σκεδασμένο ακουστικό πεδίο

$u^t(\mathbf{x})$ = ολικό ακουστικό πεδίο

$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = θεμελιώδης λύση

$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = θεμελιώδης λύση

λ = (δοσμένη) μιγαδική συνάρτηση

μ_1, μ_2 = δοσμένες μιγαδικές παράμετροι

ρ_1, ρ_2 = δοσμένες παράμετροι

$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x})$ = κάθετη παράγωγος του u

$\Omega_{\mathbf{x}, r}$ = σφαίρα κέντρου \mathbf{x} και ακτίνας r

Ω_R = σφαίρα κέντρου μηδέν και ακτίνας R

D_R = σύνολο των σημείων που δεν ανήκουν στο σκεδαστή αλλά ανήκουν στο εσωτερικό της σφαίρας Ω_R

z = μιγαδικός αριθμός ή μιγαδική συνάρτηση

\bar{z} = συζυγής του z

Δ_y = τελεστής Laplace ως προς τη μεταβλητή y

∇_x = κλίση ως προς τη μεταβλητή x

k, k_1, k_2 = κυματικοί αριθμοί

u_+, u_-, v_+, v_- = συνοριακές τιμές

K, K', T, S = ολοκληρωτικοί τελεστές

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

ε = διηλεκτρική σταθερά μέσου διάδοσης

μ = μαγνητική διαπερατότητα μέσου διάδοσης

σ = αγωγιμότητα μέσου διάδοσης

β = παράμετρος χειρομορφίας

$k = \sqrt{\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)\mu\omega^2}$ = κυματικός αριθμός

$Z = \frac{\mu\omega}{\sqrt{\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)\mu\omega^2}} = \frac{\mu\omega}{k}$ = χαρακτηριστική αντίσταση

Z_s = χαρακτηριστική επιφανειακή αντίσταση

$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)\mu\omega^2}}{\mu\omega} = \frac{k}{\mu\omega}$ = χαρακτηριστική αγωγιμότητα

$\varepsilon^+, \mu^+, Z^+, Y^+, k^+$ = οι παραπάνω παράμετροι στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$

$\varepsilon^-, \mu^-, \sigma^-, Z^-, Y^-, k^-$ = οι παραπάνω παράμετροι στο D

$\eta = \frac{k^-}{k^+} = \sqrt{\frac{\mu^- \varepsilon^-}{\mu^+ \varepsilon^+}} \sqrt{1 + i \frac{\sigma^-}{\varepsilon^- \omega}}$ = σχετικός δείκτης διάθλασης

$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ = διάνυσμα έντασης ηλεκτρικού πεδίου

$\mathcal{B}(\mathbf{r}, t)$ = διάνυσμα πυκνότητας μαγνητικής ροής

$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ = διάνυσμα έντασης μαγνητικού πεδίου

$\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ = διάνυσμα πυκνότητας ηλεκτρικής ροής

$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ = διάνυσμα πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος.

$E(\mathbf{r}) =$ χωρικό μέρος του $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$

$B(\mathbf{r}) =$ χωρικό μέρος του $\mathcal{B}(\mathbf{r}, t)$

$H(\mathbf{r}) =$ χωρικό μέρος του $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$

$D(\mathbf{r}) =$ χωρικό μέρος του $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$

$J(\mathbf{r}) =$ χωρικό μέρος του $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$

$E^i(\mathbf{r}) =$ προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο

$E^s(\mathbf{r}) =$ σκεδασμένο ηλεκτρικό πεδίο

$E^t(\mathbf{r}) =$ ολικό ηλεκτρικό πεδίο

$H^i(\mathbf{r}) =$ προσπίπτον μαγνητικό

$H^s(\mathbf{r}) =$ σκεδασμένο ηλεκτρικό πεδίο

$H^t(\mathbf{r}) =$ ολικό ηλεκτρικό πεδίο

$E_1(\mathbf{r}) =$ ολικό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

$H_1(\mathbf{r}) =$ ολικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

$E_2(\mathbf{r}) =$ ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

$H_2(\mathbf{r}) =$ ολικό εσωτερικό μαγνητικό πεδίο

$\tilde{\mathbf{I}} =$ μοναδιαίος πίνακας 3×3

$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) =$ θεμελιώδης λύση

$\gamma = \sqrt{\frac{k^2}{(1-\beta^2 k^2)}} =$ κυματικός αριθμός

$\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R =$ πεδία Beltrami

$\gamma_L = \frac{k}{1-k\beta} =$ κυματικός αριθμός του \mathbf{Q}_L

$\gamma_R = \frac{k}{1+k\beta} =$ κυματικός αριθμός του \mathbf{Q}_R

Ελαστικά κύματα

$U(\mathbf{r}, t) =$ ελαστικό πεδίο

$\rho =$ πυκνότητα μάζας

$\lambda, \mu =$ σταθερές Lamé

Δ^* = τελεστής Lamé

u^p = διαμήκες κύμα

u^s = εγκάρσιο κύμα

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \text{φασική ταχύτητα του } u^p$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \text{φασική ταχύτητα του } u^s$$

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} = \text{κυματικός αριθμός του } u^p$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κύμα ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο. Συνήθως χαρακτηρίζουμε τη μεταφορά της διαταραχής αυτής διαμέσου ενός υλικού μέσου ως παλμική κίνηση μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου. Ορισμένα κύματα όμως, όπως τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, μπορούν να διαδίδονται και στο κενό. Τα κύματα κατηγοριοποιούνται βάση διαφόρων κριτηρίων (π.χ. το μέσο διάδοσης, τη διεύθυνση της διαταραχής κ.ά.) και επομένως είναι διαφόρων ειδών.

Σκέδαση κυμάτων ονομάζεται το φαινόμενο το οποίο εμφανίζεται όταν στο χώρο διάδοσης ενός κύματος υπάρχει ένα εμπόδιο που ονομάζεται *σκεδαστής* είτε όταν το μέσο διάδοσης του κύματος είναι *μη ομογενές* δηλαδή οι φυσικές του παράμετροι δεν είναι σταθερές αλλά είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις η διάδοση του κύματος διαταράσσεται, δηλαδή αλλάζει η ταχύτητα και η διεύθυνση διάδοσής του και αποτέλεσμα αυτής της διαταραχής είναι η δημιουργία ενός κύματος που ονομάζεται σκεδασμένο. Εμείς θα μελετήσουμε την περίπτωση που στο μέσο διάδοσης υπάρχει ένας σκεδαστής και θα θεωρήσουμε τις φυσικές παραμέτρους (π.χ. την πυκνότητα) του μη φραγμένου χώρου διάδοσης των κυμάτων και του σκεδαστή ως σταθερές δηλαδή ως *ομογενή μέσα*. Τα προβλήματα κυματικής σκέδασης γενικά ανήκουν στην κατηγορία των μαθηματικών προβλημάτων συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου. Εμείς όμως θα ασχοληθούμε με προβλήματα στα οποία τα πεδία χαρακτηρίζονται από αρμονική χρονική εξάρτηση και επομένως η μεταβλητή του χρόνου απαλείφεται και τα προβλήματα είναι ελλειπτικού τύπου.

Τα προβλήματα κυματικής σκέδασης χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στα ευθέα και στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης. *Ευθύ πρόβλημα σκέδασης* ονομάζεται ένα πρόβλημα στο οποίο το προσπίπτον στο σκεδαστή κυματικό πεδίο και οι φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή (επομένως και οι συνοριακές συνθήκες) είναι γνωστά και αναζητάμε το σκεδασμένο κυματικό πεδίο. *Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης* ονομάζεται ένα πρόβλημα στο οποίο το προσπίπτον κυματικό πεδίο και το σκεδασμένο κυματικό πεδίο είναι γνωστά και αναζητάμε πληροφορίες για τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του σκεδαστή. Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με τα ευθέα προβλήματα σκέδασης.

Το αντικείμενο της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η *βαθμωτή και διανυσματική εξίσωση Helmholtz* η οποία είναι μια εξίσωση ελλειπτικού τύπου και δεύτερης τάξης. Η εξίσωση Helmholtz είναι μια χρονικά ανεξάρτητη κυματική εξίσωση στην οποία οδηγούμαστε θεωρώντας αρμονική χρονική εξάρτηση διαφόρων κυματικών πεδίων και είναι μια από τις βασικότερες εξισώσεις στη θεωρία της κυματικής διάδοσης. Θα αναφερθούμε σε τρεις βασικές κατηγορίες κυμάτων στις οποίες η εξίσωση Helmholtz εμφανίζεται. Οι κατηγορίες αυτές είναι τα ακουστικά κύματα, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και τα ελαστικά κύματα. Στην περίπτωση των ακουστικών κυμάτων τα κυματικά πεδία είναι βαθμωτά και επομένως η εξίσωση Helmholtz εμφανίζεται στη βαθμωτή μορφή της ενώ στις περιπτώσεις των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και των ελαστικών κυμάτων τα κυματικά πεδία είναι διανυσματικά και επομένως η εξίσωση Helmholtz εμφανίζεται στη διανυσματική μορφή της.

Περισσότερη έμφαση θα δοθεί στα ακουστικά κύματα και στα προβλήματα σκέδασης τους διότι σε αυτά η εξίσωση Helmholtz που μας ενδιαφέρει κατέχει κεντρικό ρόλο αφού τα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση είναι στην ουσία εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz.

Περιληπτικά σε κάθε κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής εργασίας θα συναντήσουμε τα παρακάτω.

Θα αφιερώσουμε το 1^ο κεφάλαιο στην απόδειξη της εξίσωσης Helmholtz στη βαθμωτή μορφή της, όπως αυτή εμφανίζεται στα προβλήματα σκέδασης των ακουστικών κυμάτων, μελετώντας τις βασικές εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο της διάδοσης του κύματος και εφαρμόζοντας τις αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής (βλ. [1]).

Στο 2^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα ακουστικά κύματα και τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση. Αρχικά θα εισάγουμε τις έννοιες των επίπεδων και των σφαιρικών ακουστικών κυμάτων. Εν συνεχεία, θα περιγράψουμε τις διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων και που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, θα ορίσουμε τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld η οποία είναι απαραίτητη για την 'καλή τοποθέτηση' των προβλημάτων σκέδασης ακουστικών κυμάτων και έπειτα θα διατυπώσουμε και θα περιγράψουμε τα βασικότερα προβλήματα ακουστικής σκέδασης (βλ. [6],[7]). Εν συνεχεία, θα διατυπώσουμε τα θεωρήματα Green και με τη βοήθειά τους θα αποδείξουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές ολοκληρωτικές αναπαράστασεις των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz (βλ. [6],[7]). Τέλος, θα εισάγουμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος με τη βοήθεια των οποίων θα αποδείξουμε τα θεωρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης των βασικών προβλημάτων ακουστικής σκέδασης (βλ. [6],[7]). Η μελέτη των βασικών προβλημάτων σκέδασης ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση θα αποτελέσει το μεγαλύτερο κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής εργασίας καθότι σε αυτά τα προβλήματα η (βαθμωτή) εξίσωση Helmholtz κατέχει κεντρική θέση αφού τα προβλήματα ακουστικής σκέδασης είναι στην ουσία εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz και σε αυτά είναι απαραίτητο να ικανοποιείται η εξίσωση Helmholtz όχι μόνο από το προσπίπτον ακουστικό πεδίο αλλά και από το σκεδασμένο (άρα και από το άθροισμά τους δηλαδή από το ολικό πεδίο).

Στο 3^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και τη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση. Αρχικά θα αναφερθούμε στις εξισώσεις Maxwell και στις καταστατικές σχέσεις (βλ. [9]). Κατόπιν, κάνοντας απαλοιφή στις εξισώσεις Maxwell θα καταλήξουμε στις διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz. Έπειτα, θα εισάγουμε τις έννοιες των επίπεδων και των σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Εν συνεχεία, θα περιγράψουμε τις βασικότερες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, θα ορίσουμε τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller (μια για το

σκεδασμένο ηλεκτρικό πεδίο και μια για το σκεδασμένο μαγνητικό πεδίο) οι οποίες είναι απαραίτητες για την ‘καλή τοποθέτηση’ των προβλημάτων σκέδασης και έπειτα θα διατυπώσουμε και θα περιγράψουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (βλ. [9]). Εν συνεχεία, θα αναφερθούμε σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χειρόμορφο περιβάλλον. Θα περιγράψουμε τις εξισώσεις που αυτά ικανοποιούν μέσα σε ένα τέτοιου είδους μέσο (βλ. [23],[17]) και θα αποδείξουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Helmholtz τις οποίες ικανοποιούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Τέλος, θα εισάγουμε τα πεδία Beltrami, θα αποδείξουμε ότι και αυτά ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz με το δικό του κυματικό αριθμό το καθένα, έπειτα θα εκφράσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης ως γραμμικούς συνδυασμούς των πεδίων Beltrami και εν συνεχεία θα αποδείξουμε τις συνθήκες ακτινοβολίας που τα πεδία Beltrami ικανοποιούν (βλ. [17]). Τέλος, θα διατυπώσουμε τα θεωρήματα των εσωτερικών και εξωτερικών ολοκληρωτικών αναπαράστασεων των πεδίων Beltrami (βλ. [2]).

Στο 4^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα ελαστικά κύματα και τη σκέδαση ελαστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση. Αρχικά θα αναφερθούμε στην εξίσωση Navier και τη λεγόμενη ανάλυση Helmholtz βάση της οποίας κάθε ελαστικό κύμα που είναι λύση της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Navier μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός διαμήκους και ενός εγκάρσιου κύματος, τα οποία με τη σειρά τους θα αποδείξουμε ότι ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz με το δικό του κυματικό αριθμό το καθένα (βλ. [9]). Εν συνεχεία θα εισάγουμε τις έννοιες των επίπεδων και των σφαιρικών ελαστικών κυμάτων. Έπειτα, θα περιγράψουμε τις διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων και που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, έπειτα θα ορίσουμε τις συνθήκες ακτινοβολίας που το σκεδασμένο πεδίο (δηλαδή το διαμήκες και το εγκάρσιο κύμα που αθροιστικά αποτελούν το σκεδασμένο ελαστικό κύμα) πρέπει να ικανοποιεί και που είναι απαραίτητες για την ‘καλή τοποθέτηση’ των προβλημάτων σκέδασης και τέλος θα διατυπώσουμε και θα περιγράψουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων (βλ. [9]).

Στο 5^ο και τελευταίο κεφάλαιο θα αναφέρουμε διάφορες εφαρμογές της κυματικής σκέδασης και θα περιγράψουμε με λόγια δύο διαδεδομένες και σημαντικές εφαρμογές ακουστικής σκέδασης, το Sonar και το υπερηχογράφημα (βλ. [32]). Το Sonar και το υπερηχογράφημα αποτελούν εφαρμογές αντίστροφων προβλημάτων ακουστικής σκέδασης και για το λόγο αυτό θα αφιερώσουμε την τελευταία παράγραφο της εργασίας αυτής για να αναφέρουμε επιγραμματικά τις βασικότερες μεθόδους επίλυσης των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης (βλ. [1],[4],[22]).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1⁰

Εξίσωση Helmholtz

Η εξίσωση Helmholtz είναι μια από τις βασικότερες εξισώσεις που εμφανίζονται στη θεωρία των κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση. Κεντρικό ρόλο έχει στα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων και σε αυτό το κεφάλαιο βασικός στόχος μας θα είναι η απόδειξη της βαθμωτής μορφής της μελετώντας τις βασικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των συνεχών μέσων, δηλαδή τις εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο της διάδοσης του κύματος μέσα σε ένα ρευστό στην περίπτωση μας, εφαρμόζοντας τις αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής.

Έστω ένα συνεχές ρευστό μέσο στο \mathbb{R}^3 . Θέτουμε $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ το πεδίο της ταχύτητας του ρευστού, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ την πυκνότητά του ρευστού και $p = p(\mathbf{x}, t)$ την πίεση του ρευστού στη θέση $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ τη χρονική στιγμή t .

Θεωρούμε τη διάδοση ενός ακουστικού κύματος μέσα στο ρευστό και επιπλέον θεωρούμε ότι μέσα στο ρευστό υπάρχει ένα φραγμένο απλά συνεκτικό πεδίο D με επιφάνεια S (δηλαδή $S = \partial D$).

1.1 Εξίσωση Συνέχειας

Η μάζα m του ρευστού μέσα στο D δίνεται από τη σχέση

$$m = \int_D \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1.1)$$

Η μεταβολή της μάζας σε μικρό χρονικό διάστημα δt , αφού το D παραμένει σταθερό, είναι

$$(\delta t) \frac{d}{dt} \int_D \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = (\delta t) \int_D \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} \quad (1.2)$$

Υποθέτουμε ότι η μεταβολή της μάζας στο D οφείλεται σε ροή ρευστού μέσω της επιφάνειας S και συγκεκριμένα έχουμε ότι η μάζα που θα μεταφερθεί μέσω της επιφάνειας dS σε χρόνο dt θα περιέχεται σε ένα κύλινδρο με όγκο ίσο με

$$(\mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (1.3)$$

όπου με \mathbf{n} συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D .

Επομένως η μάζα που θα μεταφερθεί είναι

$$-(\delta t) \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1.4)$$

Από την αρχή διατήρησης της μάζας και από (1.2),(1.4) έχουμε ότι

$$(\delta t) \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = -(\delta t) \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1.5)$$

Διαιρώντας με δt παίρνουμε

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1.6)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της (1.6) παίρνουμε

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dx \quad (1.7)$$

Επομένως από (1.6),(1.7) παίρνουμε

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = - \int_D \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dx \quad (1.8)$$

Επειδή το D είναι αυθαίρετο πεδίο παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.9)$$

η οποία ονομάζεται **εξίσωση συνέχειας** για τη ροή ρευστών στο \mathbb{R}^3 .

1.2 Εξίσωση Euler

Η εξίσωση Euler (ή αλλιώς εξίσωση κίνησης) οφείλεται στις δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό οι οποίες είναι είτε δυνάμεις πεδίου δηλαδή εξωτερικές δυνάμεις (π.χ. βαρύτητας) τις οποίες συμβολίζουμε με \mathbf{f} , είτε επιφανειακές δυνάμεις (π.χ. δυνάμεις που οφείλονται στην πίεση) τις οποίες συμβολίζουμε με $-\rho \mathbf{n} \, ds$. Να σχολιάσουμε ότι το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι το κάθετο στην επιφάνεια S μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} έχει όπως προαναφέραμε φορά προς το εξωτερικό του D .

Η ολική δύναμη \mathbf{F} που δρά στο D είναι ίση με

$$\mathbf{F} = \int_D \rho \mathbf{f} \, dx - \int_S \rho \mathbf{n} \, ds \quad (1.10)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της (1.10) παίρνουμε

$$\int_S p \mathbf{n} ds = \int_D \nabla p dx \quad (1.11)$$

Επομένως από (1.10),(1.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_D \rho \mathbf{f} dx - \int_D \nabla p dx \\ &= \int_D (\rho \mathbf{f} - \nabla p) dx \end{aligned} \quad (1.12)$$

Επίσης, η ορμή του D είναι

$$\int_D \rho \mathbf{v} dx \quad (1.13)$$

Η μεταβολή της ορμής του D σε χρόνο dt , αφού ο όγκος του D μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου, είναι ίση με

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \mathbf{v} dx = \int_D \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dx + \int_D \mathbf{v} \frac{d}{dt}(\rho dx) \quad (1.14)$$

Επειδή όμως ρdx είναι η μάζα του όγκου dx και παραμένει σταθερή έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt}(\rho dx) = 0 \quad (1.15)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε ότι η ολική δύναμη \mathbf{F} που ασκείται στο D ισούται με τη ταχύτητα της μεταβολής της ορμής του D .

Επομένως, από (1.12),(1.14),(1.15) παίρνουμε

$$\int_D (\rho \mathbf{f} - \nabla p) dx = \int_D \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dx \quad (1.16)$$

Επειδή το D είναι αυθαίρετο πεδίο παίρνουμε

$$\rho \mathbf{f} - \nabla p = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Διαιρώντας με το ρ παίρνουμε

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \quad (1.17)$$

Επειδή τώρα ισχύει η σχέση

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.18)$$

Από (1.17),(1.18) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.19)$$

η οποία ονομάζεται **εξίσωση Euler**.

1.3 Γραμμικοποίηση

Στην παράγραφο αυτή θα γραμμικοποιήσουμε τις βασικές εξισώσεις της κίνησης των ρευστών καθώς η χρήση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων έναντι των μη γραμμικών δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στις εφαρμογές.

Θεωρούμε ότι οι βασικές εξισώσεις της κίνησης των ρευστών είναι οι ακόλουθες τρείς.

Εξίσωση συνέχειας (1.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Εξίσωση Euler (1.19) στην ομογενή μορφή της

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

Καταστατική εξίσωση

$$p = K(\rho), \quad (1.21)$$

όπου K είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από το υλικό.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της γραμμικοποίησης στις εξισώσεις (1.9), (1.20), (1.21) υποθέτοντας ότι έχουμε μικρές αποκλίσεις από τις σταθερές $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \rho_0, p_0 = K(\rho_0)$ και συμβολίζοντας τις αποκλίνουσες τιμές με \mathbf{v}, ρ, p αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι

Γραμμικοποιημένη εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.22)$$

Γραμμικοποιημένη ομογενής εξίσωση Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \delta = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

Γραμμικοποιημένη καταστατική εξίσωση

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2 \delta, \quad (1.24)$$

όπου δ είναι η συμπύκνωση και δίνεται από τον τύπο

$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (1.25)$$

και c_0 είναι η ταχύτητα του ήχου δηλαδή η ταχύτητα των ακουστικών κυμάτων και δίνεται από τον τύπο

$$c_0^2 = K'(\rho_0) \quad (1.26)$$

1.4 Κυματική Εξίσωση

Κάθε κύμα μπορεί να περιγραφεί από την κυματική του εξίσωση. Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω γραμμικοποιημένες εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο της διάδοσης του κύματος για να κατασκευάσουμε την κυματική εξίσωση των ακουστικών κυμάτων.

Από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση Euler (1.23) υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση που ονομάζεται **δυναμικό ταχύτητας** $\varphi(x, t)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{v} = c_0^2 \nabla \varphi \quad (1.27)$$

Παραγωγίζοντας ως προς t την (1.27) παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial (\nabla \varphi)}{\partial t} \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = c_0^2 \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1.29)$$

Από τις σχέσεις (1.23) και (1.29) παίρνουμε ότι

$$\delta = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.30)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.22) τα \mathbf{v} και δ από τις σχέσεις (1.27),(1.30) παίρνουμε

$$\frac{\partial \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial t} + c_0^2 \nabla \cdot (\nabla \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c_0^2 \nabla \cdot (\nabla \varphi) = 0 \quad (1.31)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (0.2) για το φ , δηλαδή τη σχέση

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi$$

Παίρνουμε

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c_0^2 \Delta \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1.32)$$

η οποία ονομάζεται **κυματική εξίσωση**.

1.5 Αρμονική χρονική εξάρτηση

Η κυματική εξίσωση (1.32) είναι μια διαφορική εξίσωση υπερβολικού τύπου δηλαδή είναι μια εξίσωση με μεταβλητές τη μετατόπιση x και το χρόνο t .

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να απλοποιήσουμε την κυματική εξίσωση απαλείφοντας το χρόνο t και να καταλήξουμε σε μια διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου δηλαδή μιας εξίσωσης όπου μοναδική μεταβλητή είναι η μετατόπιση x .

Θεωρούμε ακουστικά κύματα με **αρμονική χρονική εξάρτηση** της μορφής

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (1.33)$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος με $\omega > 0$ και $u(\mathbf{x})$ είναι το χωρικό μέρος του κύματος.

Παραγωγίζοντας την (1.33) δύο φορές ως προς t παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 u(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \quad (1.34)$$

Παραγωγίζοντας την (1.33) δύο φορές ως προς τη x_j συντεταγμένη του x παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_j^2} e^{-i\omega t}, j = 1, 2, 3 \quad (1.35)$$

Από τον ορισμό του τελεστή Laplace Δ , δηλαδή από τον τύπο

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j^2} \quad (1.36)$$

Παίρνουμε ότι

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} \Delta u(\mathbf{x}) \quad (1.37)$$

Επομένως η κυματική εξίσωση (1.32) από τις σχέσεις (1.34),(1.37) γίνεται

$$e^{-i\omega t} \Delta u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c_0^2} \omega^2 u(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

η οποία διαιρώντας με $e^{-i\omega t}$ παίρνει τη μορφή

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c_0^2} \omega^2 u(\mathbf{x}) \quad (1.38)$$

Θέτουμε

$$k = \frac{\omega}{c_0}, \quad (1.39)$$

όπου k ο κυματικός αριθμός με $k \neq 0$.

Από τις (1.38),(1.39) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.40)$$

η οποία ονομάζεται **βαθμωτή εξίσωση Helmholtz** ή αλλιώς *κανονικοποιημένη κυματική εξίσωση*.

Παρατήρηση 1.A

Το χωρικό μέρος $u(\mathbf{x})$ του ακουστικού κύματος είναι μία συνάρτηση από το \mathbb{R}^2 ή το \mathbb{R}^3 στο \mathbb{R} ή το \mathbb{C} . Εμείς θα ασχοληθούμε με τον τρισδιάστατο χώρο δηλαδή με πεδία μετατόπισης $u(\mathbf{x})$ τέτοια ώστε

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C} \quad (1.41)$$

Παρατήρηση 1.B

Ως συνέπεια της παρατήρησης 1.A πρέπει να σχολιάσουμε ότι παρόλο που τα πεδία μετατόπισης $u(\mathbf{x})$ ενδέχεται να ανήκουν στο χώρο των μιγαδικών \mathbb{C} , κάνουμε την παραδοχή ότι η εξίσωση Helmholtz και σε αυτές τις περιπτώσεις θα ονομάζεται και θα θεωρείται βαθμωτή εξίσωση.

Παρατήρηση 1.Γ

Στη σχέση (1.34) που αφορά την αρμονική χρονική εξάρτηση του κύματος, σε μερικά βιβλία εμφανίζεται στο δεξιό μέλος ο τελεστής Re ο οποίος δίνει ως αποτέλεσμα το πραγματικό μέρος της συνάρτησης στην οποία εφαρμόζεται.

Βάση αυτού η σχέση (1.34) θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = Re\{u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}$$

Παρ'όλ'αυτά σε αυτήν την εργασία θα κάνουμε την ευρέως αποδεκτή σύμβαση να γράφουμε τις σχέσεις της αρμονικής χρονικής εξάρτησης χωρίς τον τελεστή Re με την κατανόηση ότι στις περιπτώσεις που οι σχέσεις μας αφορούν φυσικά μεγέθη (όπως π.χ. η πίεση και η ταχύτητα) τότε οι ποσότητες αυτές θα αντιστοιχούν στα πραγματικά μέρη.

Παρατήρηση 1.Δ

Στα ακουστικά κύματα συνήθως υποθέτουμε ότι $Im(k) \geq 0$, όπου k ο κυματικός αριθμός του κύματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Σκέδαση ακουστικών κυμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση.

Η μελέτη των βασικών προβλημάτων σκέδασης ακουστικών κυμάτων θα αποτελέσει το μεγαλύτερο κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής εργασίας καθώς σε αυτά τα προβλήματα η (βαθμωτή) εξίσωση Helmholtz κατέχει κεντρική θέση αφού τα προβλήματα ακουστικής σκέδασης με αρμονική χρονική εξάρτηση είναι στην ουσία εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz.

Αρχικά θα εισάγουμε τις έννοιες των επίπεδων και των σφαιρικών ακουστικών κυμάτων. Αυτά τα δύο είδη αποτελούν μια κατηγοριοποίηση των ακουστικών κυμάτων στην οποία θα αναφερθούμε στα προβλήματα σκέδασης και επίσης αποτελούν βασικές λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz που μελετάμε.

Εν συνεχεία, θα περιγράψουμε τις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων και που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, θα ορίσουμε μια συνθήκη ακτινοβολίας, τη λεγόμενη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, η οποία είναι απαραίτητη για την 'καλή τοποθέτηση' των προβλημάτων σκέδασης και τέλος θα διατυπώσουμε και θα περιγράψουμε τα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.

Εν συνεχεία, θα διατυπώσουμε τα θεωρήματα Green και με τη βοήθειά τους θα αποδείξουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές ολοκληρωτικές αναπαράστασεις των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz.

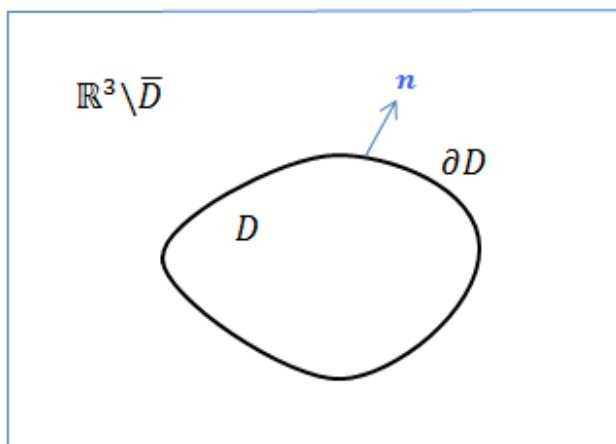
Τέλος, θα εισάγουμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, με τη βοήθεια των οποίων θα αποδείξουμε τα θεωρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης των βασικών προβλημάτων ακουστικής σκέδασης.

Θεωρούμε τη διάδοση ενός ακουστικού κύματος σε ένα ομογενές, ιστροπικό, συνεχές ρευστό μέσο στο \mathbb{R}^3 .

Θεωρούμε μέσα στο ρευστό δηλαδή μέσα στο μέσο διάδοσης του κύματος ένα φραγμένο εμπόδιο D με σύνορο ∂D .

Αυτό το εμπόδιο D είναι ένα μη κενό, φραγμένο χωρίο το οποίο ονομάζουμε **σκεδαστή** και το σύνορό του, ∂D , είναι μια επιφάνεια που χωρίζει τα δύο διαφορετικά μέσα και θεωρείται τόσο λείο ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν πάνω του τα θεωρήματα των Gauss και Green και τέτοιο ώστε να υπάρχουν οι οριακές τιμές των ποσοτήτων του κυματικού πεδίου σε αυτό με την κλασσική έννοια.

Στο κεφάλαιο αυτό θα συμβολίζουμε με x το διάνυσμα της θέσης ($x \in \mathbb{R}^3$), με t το χρόνο ($t \in \mathbb{R}$) και με n το μοναδιαίο κάθετο ως προς το σύνορο του σκεδαστή διάνυσμα το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή.



Σχήμα 2.1

Καθώς το κύμα, το οποίο προέρχεται από το χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, συναντά κατά τη διάδοση του το σύνορο του σκεδαστή, η ταχύτητα και η διεύθυνση διάδοσης του αλλάζουν και ως αποτέλεσμα η διάδοση του κύματος διαταράσσεται και το κύμα σκεδάζεται.

Ονομάζουμε το αρχικό κυματικό πεδίο **προσπίπτων κύμα** και το συμβολίζουμε με u^i και ονομάζουμε το κυματικό πεδίο που δημιουργείται ως αποτέλεσμα της σκέδασης **σκεδασμένο κύμα** και το συμβολίζουμε με u^s . Τέλος ονομάζουμε το άθροισμά τους **ολικό κύμα** και το συμβολίζουμε με u^t .

Επομένως στο χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ για τα ακουστικά κυματικά πεδία μετατόπισης ισχύει η σχέση

$$u^t(x) = u^i(x) + u^s(x), x \in \mathbb{R}^3 \setminus D \quad (2.1)$$

Να υπενθυμίσουμε ότι στα ακουστικά κύματα συνήθως υποθέτουμε ότι $Im(k) \geq 0$, όπου k ο κυματικός αριθμός του κύματος (βλέπε παρατήρηση 1.Δ).

2.1 Επίπεδα και Σφαιρικά ακουστικά κύματα

Μια κατηγοριοποίηση των ακουστικών κυμάτων είναι σε επίπεδα και σε σφαιρικά κύματα. Αυτά τα δύο είδη ακουστικών κυμάτων εμφανίζονται στα προβλήματα σκέδασης που θα μελετήσουμε παρακάτω και αποτελούν λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz.

A. Επίπεδα ακουστικά κύματα

Επίπεδα ακουστικά κύματα ονομάζουμε κύματα της μορφής

$$u(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{p}}) = e^{ik\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.2)$$

όπου $\hat{\mathbf{p}} \in S^2$ είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος και S^2 η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 .

Τα επίπεδα ακουστικά κύματα είναι κλασικές λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz σε όλο το \mathbb{R}^3 , δηλαδή ισχύει ότι

$$\Delta u(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{p}}) + k^2 u(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{p}}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

B. Σφαιρικά ακουστικά κύματα

Θεωρούμε σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{y} από την οποία εκπέμπεται σφαιρικό ακουστικό κύμα με τύπο

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.4)$$

Η συνάρτηση $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ είναι η **θεμελιώδης λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz**.

Να αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ονομάζεται θεμελιώδης λύση (fundamental solution) ενός γραμμικού μερικού διαφορικού τελεστή L όταν ικανοποιεί την εξίσωση

$$L\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.5)$$

όπου $\delta(\mathbf{x})$ είναι το συναρτησιακό Dirac με ιδιότητες

$$\delta(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \neq 0 \quad (2.6)$$

και
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.7)$$

Το \mathbf{y} ονομάζεται πόλος ή ανώμαλο σημείο της Φ και θεωρείται σαν παράμετρος της λύσης και η ισότητα της εξίσωσης (2.5) είναι την ουσία ισότητα της δράσης των δύο μελών της εξίσωσης πάνω σε μία δοκιμαστική συνάρτηση (test function).

Στην περίπτωση μας ο τελεστής L δίνεται από τη σχέση $L = -\Delta_x - k^2$, όπου με Δ_x συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace όταν η παραγωγή γίνεται ως προς την \mathbf{x} μεταβλητή.

Επομένως η Φ είναι λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz με την έννοια των κατανομών

$$\Delta_x \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.8)$$

Αξίζει να σχολιάσουμε ότι θεμελιώδης λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz είναι επίσης η συνάρτηση

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{4\pi}{ik} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.9)$$

όπου Φ όπως έχει οριστεί στη σχέση (2.4).

Η G είναι λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz με την έννοια των κατανομών

$$\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{4\pi}{ik} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.10)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ως θεμελιώδη λύση τη συνάρτηση Φ ενώ στο 3^ο και 4^ο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε ως θεμελιώδη λύση τη συνάρτηση G .

Γενικά, σφαιρικά ακουστικά κύματα ονομάζουμε κύματα που εκπέμπονται από μια σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{y} και είναι της μορφής

$$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = A \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.11)$$

όπου A μιγαδική σταθερά κανονικοποίησης.

Τα σφαιρικά ακουστικά κύματα είναι κλασικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\}$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\Delta u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) + k^2 u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\} \quad (2.12)$$

Γ. Σχέση μεταξύ σφαιρικών και επίπεδων ακουστικών κυμάτων

Έστω ένα προσπίπτον σφαιρικό ακουστικό κύμα, έστω $u_{\mathbf{y}}^i$, όπως στη (2.11) με

$$A = ye^{-iky}, \quad (2.13)$$

$$\text{όπου} \quad y = |\mathbf{y}| \quad (2.14)$$

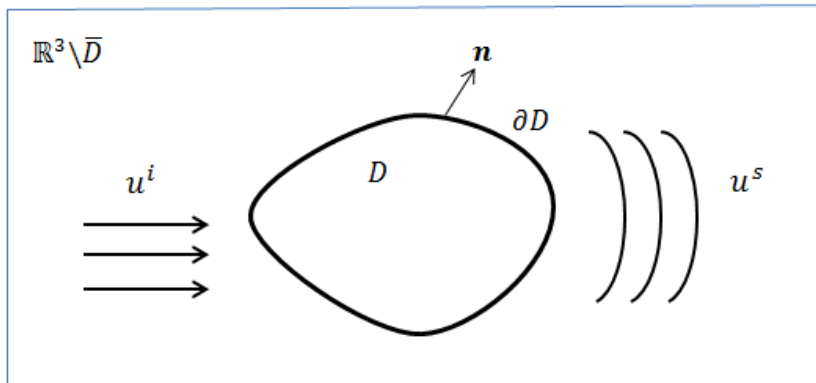
και έστω ότι μέσα στο ρευστό υπάρχει ένα φραγμένο χωρίο το οποίο ονομάζουμε σκεδαστή. Όταν η απόσταση της σημειακής πηγής από το σκεδαστή γίνεται πολύ μεγάλη τότε το σφαιρικό κύμα γίνεται επίπεδο κύμα με διεύθυνση διάδοσης $-\hat{\mathbf{y}}$ δηλαδή από την πηγή προς το σκεδαστή.

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u_{\mathbf{y}}^i(\mathbf{x}) = e^{-ik\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} \equiv u^i(\mathbf{x}; -\hat{\mathbf{y}}) \quad (2.15)$$

Παρατήρηση 2.A

Τα προσπίπτοντα πεδία μπορεί να είναι είτε επίπεδα κύματα είτε σφαιρικά κύματα είτε γραμμικός συνδυασμός τους.

Τα σκεδασμένα πεδία είναι πάντοτε σφαιρικά κύματα.



Σχήμα 2.2

Στο σχήμα 2.2 έχουμε θεωρήσει το προσπίπτον κύμα ως επίπεδο και το σκεδασμένο κύμα ως σφαιρικό

2.2 Συνοριακές συνθήκες

Οι σκεδαστές χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στους **διαπερατούς** και στους **μη διαπερατούς σκεδαστές**. Στην πρώτη περίπτωση το κύμα δεν εισέρχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή ενώ στη δεύτερη εισέρχεται.

Ανεξαρτήτως από το σε ποια κατηγορία από τις παραπάνω δύο ανήκει ο σκεδαστής, το κυματικό πεδίο μετατόπισης πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή. Αυτές οι συνθήκες ονομάζονται **συνοριακές συνθήκες** και εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

Να ορίσουμε αρχικά την έννοια της κάθετης παραγώγου που θα συναντήσουμε παρακάτω. Η **κάθετη παράγωγος** ενός πεδίου, έστω u , είναι στην ουσία μια κατευθυνόμενη παράγωγος ως προς το \mathbf{n} μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla (u(\mathbf{x} \pm h\mathbf{n}(\mathbf{x}))), \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.16)$$

όπου τον τελευταίο όρο με '+' παίρνουμε αν το κύμα βρίσκεται στον εξωτερικό του σκεδαστή χώρο ενώ τον τελευταίο όρο με '-' παίρνουμε αν το κύμα βρίσκεται στο εσωτερικό του σκεδαστή.

Στην περίπτωση μη διαπερατού σκεδαστή έχουμε τρία είδη διαφορετικών συνοριακών συνθηκών.

1) Συνθήκη Dirichlet

$$u^t(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.17)$$

Στην περίπτωση αυτή πάνω στο σύνορο του σκεδαστή δημιουργούνται συνθήκες μηδενισμού της ολικής πίεσης του ρευστού. Αυτού το είδους ο σκεδαστής ονομάζεται **ηχητικά μαλακός σκεδαστής** (*sound soft obstacle*).

2) Συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u^t(\mathbf{x})}{\partial n} = 0, \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.18)$$

Στην περίπτωση αυτή πάνω στο σύνορο του σκεδαστή η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του ολικού κύματος δηλαδή η κάθετη παράγωγος του είναι μηδέν. Αυτού το είδους ο σκεδαστής ονομάζεται **ηχητικά σκληρός σκεδαστής** (*sound hard obstacle*).

3) Συνθήκη Robin

$$\frac{\partial u^t(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u^t(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.19)$$

όπου λ (δοσμένη) μιγαδική συνάρτηση του $\mathbf{x} \in \partial D$.

Στην περίπτωση αυτή πάνω στο σύνορο του σκεδαστή υπάρχουν δυνάμεις τριβής του ιξώδους, δηλαδή ο σκεδαστής προβάλλει αντίσταση στην είσοδο του ακουστικού κύματος στο εσωτερικό του. Αυτού το είδους ο σκεδαστής ονομάζεται **σκεδαστής με αντίσταση ή ανθεκτικός σκεδαστής** (*impedance obstacle*).

Παρατήρηση 2.B

Να σχολιάσουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες (2.17),(2.18),(2.19) είναι μη ομογενείς συνθήκες ως προς το σκεδασμένο u^s πεδίο καθώς ως προς αυτό μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$u^s(\mathbf{x}) = -u^i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.17)'$$

$$\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial n} = -\frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial n}, \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.18)'$$

$$\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u^s(\mathbf{x}) = -\frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial n} - \lambda u^i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.19)'$$

αντίστοιχα.

Στην περίπτωση διαπερατού σκεδαστή έχουμε ένα είδος συνθηκών.

4) Συνθήκες διαπερατότητας ή συνθήκες μεταφοράς

Θέτοντας u_1 το ολικό εξωτερικό και u_2 το ολικό εσωτερικό πεδίο έχουμε τις εξής δύο συνθήκες

$$\mu_1 u_1(\mathbf{x}) = \mu_2 u_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.21)$$

όπου μ_1, μ_2 είναι δοσμένες μιγαδικές παράμετροι.

Ένας άλλος τρόπος γραφής των συνοριακών συνθηκών διαπερατότητας, που συναντάται συχνά και με τον οποίο μπορούν να αντικατασταθούν οι παραπάνω συνθήκες (2.20),(2.21), είναι ο ακόλουθος

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.23)$$

όπου ρ_1, ρ_2 είναι δοσμένες παράμετροι που αντιστοιχούν στις πυκνότητες του υλικού εκτός και εντός του σκεδαστή αντίστοιχα.

Στην περίπτωση αυτή πάνω στο σύνορο του σκεδαστή οι ολικές πιέσεις του ρευστού και οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας του κύματος από το εξωτερικό και από το εσωτερικό του σκεδαστή είναι ίσες.

2.3 Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

Ένα πρόβλημα σκέδασης για να είναι καλά τοποθετημένο πρέπει να ικανοποιεί επιπρόσθετα από τις συνοριακές συνθήκες και μια συνθήκη στο άπειρο. Αυτή η συνθήκη στα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση ονομάζεται συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, αφορά το σκεδασμένο κυματικό πεδίο u^s και δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u^s(\mathbf{x}) - iku^s(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.24)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

ή ισοδύναμα

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - iku^s(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (2.25)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$.

$$\text{Όπου} \quad r = |\mathbf{x}|, \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (2.27)$$

και S^2 η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 .

Η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld περιγράφει τη συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου u^s στο άπειρο και εξασφαλίζει ότι αυτό θα διαδίδεται από το σκεδαστή (που δρα σαν πηγή) προς το άπειρο και θα έχει ασυμπτωτική τάξη εξασθένισης με την απόσταση από τον σκεδαστή δηλαδή θα εξασθενεί ασυμπτωτικά με την αύξηση της απόστασης $|\mathbf{x}|$ από το σκεδαστή. Αυτή η ιδιότητα όχι μόνο έχει φυσικό νόημα αλλά επίσης είναι απαραίτητη για να μοντελοποιηθεί η διαδικασία της σκέδασης σαν ένα καλώς ορισμένο μαθηματικό μοντέλο.

Παρατήρηση 2.Γ

Να σχολιάσουμε ότι όσον αφορά τη συνθήκη ακτινοβολίας στη μορφή (2.25) ισχύει το εξής

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u^s(\mathbf{x}) - iku^s(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{x}) - iku^s(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty,$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} - iku^s(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty,$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} - iku^s(\mathbf{x}) \right) = 0,$$

$$\text{καθώς} \quad |\mathbf{x}| = r, \quad \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \hat{\mathbf{x}} \equiv \hat{\mathbf{r}},$$

$$\text{και} \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{x}) = \frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}$$

Παρ'όλα αυτά στα περισσότερα βιβλία είναι γραμμένη στη μορφή

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - iku^s(\mathbf{x}) \right) = 0,$$

με τη κατανόηση ότι με τον όρο $\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r}$ εννοούμε τη κατευθυνόμενη παράγωγο ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}} \equiv \hat{\mathbf{r}}$.

Παρατήρηση 2.Δ

Τα επίπεδα ακουστικά κύματα (2.2) δεν ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.

Τα σφαιρικά ακουστικά κύματα (2.11) και ειδικότερα οι θεμελιώδεις λύσεις της εξίσωσης Helmholtz Φ, G των σχέσεων (2.4),(2.9) ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.

2.4 Τα βασικά προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα συλλέξουμε τα αποτελέσματα των παραπάνω δύο παραγράφων 2.2 και 2.3 και θα διατυπώσουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση.

Τα προβλήματα αυτά είναι στην ουσία εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών ελλειπτικού τύπου για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz.

1) Μαλακός σκεδαστής (Πρόβλημα Dirichlet)

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου u^i , να βρεθεί το ολικό κύμα $u^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για το οποίο ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \Delta u^t(\mathbf{x}) + k^2 u^t(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ u^t(\mathbf{x}) &= u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ u^t(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \partial D \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - i k u^s(\mathbf{x}) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$.

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό ακουστικό πεδίο u^t το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (1.44) στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, τη σχέση (2.1) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, τη Dirichlet συνοριακή συνθήκη (2.17) στο σύνορο του σκεδαστή ∂D και του οποίου το σκεδασμένο πεδίο u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.25).

2) Σκληρός σκεδαστής (Πρόβλημα Neumann)

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου u^i , να βρεθεί το ολικό κύμα $u^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για το οποίο ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \Delta u^t(\mathbf{x}) + k^2 u^t(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ u^t(\mathbf{x}) &= u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \frac{\partial u^t(\mathbf{x})}{\partial n} &= 0, \mathbf{x} \in \partial D \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - iku^s(\mathbf{x}) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$.

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό ακουστικό πεδίο u^t το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (1.44) στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, τη σχέση (2.1) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, τη συνοριακή συνθήκη Neumann (2.18) στο σύνορο του σκεδαστή ∂D και του οποίου το σκεδασμένο πεδίο u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.25).

3) Ανθεκτικός σκεδαστής (Πρόβλημα Robin ή Πρόβλημα Εμπέδησης)

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου u^i , να βρεθεί το ολικό κύμα $u^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για το οποίο ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \Delta u^t(\mathbf{x}) + k^2 u^t(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ u^t(\mathbf{x}) &= u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \frac{\partial u^t(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u^t(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \partial D \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - iku^s(\mathbf{x}) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$.

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό ακουστικό πεδίο u^t το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (1.44) στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, τη σχέση (2.1) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, τη συνοριακή συνθήκη Robin (2.19) στο σύνορο του σκεδαστή ∂D και του οποίου το σκεδασμένο πεδίο u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.25).

Τα παραπάνω προβλήματα (2.28)-(2.30) είναι **εξωτερικά** (*exterior*) προβλήματα συνοριακών τιμών για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Ονομάζονται εξωτερικά προβλήματα διότι το ζητούμενο ολικό πεδίο ανήκει στο εξωτερικό του σκεδαστή (π.χ.

$u^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$) και η εξίσωση Helmholtz ικανοποιείται στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρου, δηλαδή στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Παρατήρηση 2.Ε

Από μαθηματικής άποψης μπορούν να οριστούν και τα αντίστοιχα **εσωτερικά** (*interior*) προβλήματα συνοριακών τιμών για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Σε αυτά το ζητούμενο πεδίο, έστω u , ανήκει στο εσωτερικό του σκεδαστή D (π.χ. $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$) και η εξίσωση Helmholtz ικανοποιείται στο εσωτερικό του σκεδαστή D .

Επειδή τα προβλήματα σκέδασης είναι εν γένει εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών όμως, στη συνέχεια της διπλωματικής αυτής εργασίας θα δώσουμε περισσότερο έμφαση σε αυτά και λιγότερο στα εσωτερικά.

4) Διαπερατός σκεδαστής (Πρόβλημα Μεταφοράς)

Θέτουμε u_1 το ολικό εξωτερικό και u_2 το ολικό εσωτερικό κυματικό πεδίο ως προς τον σκεδαστή.

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου u^i , να βρεθούν το ολικό εξωτερικό κύμα $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και το ολικό εσωτερικό κύμα $u_2 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ για τα οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

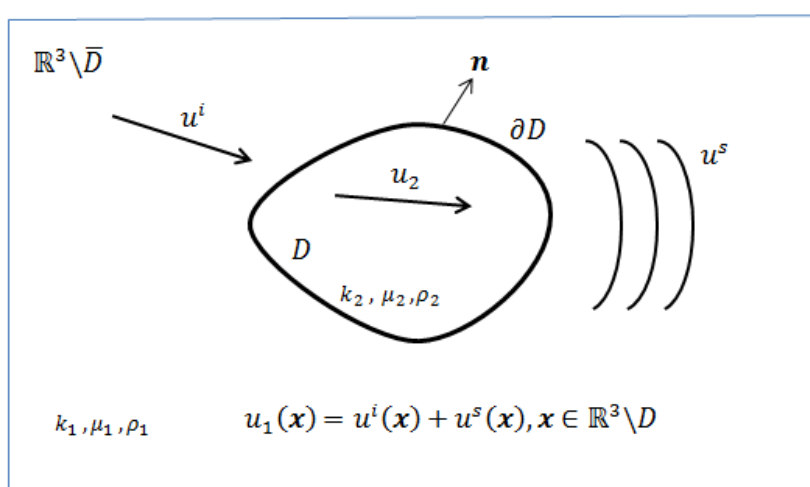
$$\begin{aligned} \Delta u_1(\mathbf{x}) + k_1^2 u_1(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ \Delta u_2(\mathbf{x}) + k_2^2 u_2(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in D \\ u_1(\mathbf{x}) &= u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \mu_1 u_1(\mathbf{x}) &= \mu_2 u_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \\ \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} &= \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \mathbf{x} \in \partial D \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - ik_1 u^s(\mathbf{x}) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$.

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό εξωτερικό ακουστικό πεδίο u_1 το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (1.44) με κυματικό αριθμό k_1 στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και τη σχέση (2.1) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και του οποίου το σκεδασμένο πεδίο u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.25) και επίσης να βρεθεί το ολικό εσωτερικό ακουστικό πεδίο u_2 το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (1.44) με κυματικό αριθμό k_2 στο εσωτερικό του σκεδαστή D και για τα οποία u_1, u_2 ικανοποιούνται οι συνθήκες διαπερατότητας (2.20),(2.21).

Το πρόβλημα μεταφοράς (2.31) θα μπορούσε ισοδύναμα να γραφτεί ομοίως με παραπάνω έχοντας αντικαταστήσει τις συνοριακές συνθήκες (2.20),(2.21) με τις συνοριακές συνθήκες (2.22),(2.23).

Το πρόβλημα μεταφοράς (2.31) είναι ένα **μικτό** πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Ονομάζεται μικτό καθώς το ένα ζητούμενο πεδίο, το ολικό εξωτερικό πεδίο u_1 , ανήκει στο εξωτερικό του σκεδαστή και πιο συγκεκριμένα $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, ενώ το δεύτερο ζητούμενο πεδίο, το ολικό εσωτερικό πεδίο u_2 , ανήκει στο εσωτερικό του σκεδαστή D και πιο συγκεκριμένα $u_2 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ και ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο εσωτερικό του σκεδαστή D .



Σχήμα 2.3

Το σχήμα 2.3 αφορά την περίπτωση διαπερατού σκεδαστή με συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας

Παρατήρηση 2.ΣΤ

Το προσπίπτον κύμα u^i ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Στα προβλήματα σκέδασης αναζητάμε το σκεδασμένο πεδίο u^s το οποίο πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Επομένως από τη σχέση (2.1) προκύπτει ότι και το ολικό πεδίο u^t θα ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Παρατήρηση 2.2

Να σχολιάσουμε ότι το ζητούμενο πεδίο των ευθέων (εξωτερικών) προβλημάτων σκέδασης θεωρείται συνήθως το σκεδασμένο πεδίο u^s . Για το λόγο αυτό, πολλές φορές στα προβλήματα σκέδασης οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι γραμμένες ως προς το σκεδασμένο πεδίο u^s αντί να είναι γραμμένες ως προς το ολικό πεδίο u^t όπως τις διατυπώσαμε εμείς στα προβλήματα (2.28),(2.29),(2.30) παραπάνω. Λόγω της σχέσης (2.1) όμως και επειδή το προσπίπτον πεδίο είναι γνωστό, αν γνωρίζουμε το σκεδασμένο πεδίο τότε γνωρίζουμε και το ολικό πεδίο και αντίστροφα. Επομένως για το λόγο αυτό οι δύο τρόποι γραφής των προβλημάτων (δηλαδή είτε οι σχέσεις είναι γραμμένες ως προς το σκεδασμένο πεδίο u^s είτε είναι γραμμένες ως προς το ολικό πεδίο u^t) είναι ισοδύναμοι.

Παραδειγματικά, το πρόβλημα ανθεκτικού σκεδαστή (2.30) θα μπορούσε να έχει γραφτεί ισοδύναμα ως εξής:

Να βρεθεί το σκεδασμένο κύμα $u^s \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για το οποίο ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}\Delta u^s(\mathbf{x}) + k^2 u^s(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ u^s(\mathbf{x}) &= u^t(\mathbf{x}) - u^i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\ \frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u^s(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial n} - \lambda u^i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - i k u^s(\mathbf{x}) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

ομοίωμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$.

Αντίστοιχα μπορούν να γραφτούν και τα προβλήματα (2.28)-(2.29) ως προς το σκεδασμένο πεδίο χρησιμοποιώντας ομοίως απλώς τη σχέση (2.1) και τις συνοριακές συνθήκες γραμμένες στη μορφή (2.17)', (2.18)'.

Όσον αφορά τώρα το (μικτό) πρόβλημα μεταφοράς (2.31), να σχολιάσουμε ότι τα ζητούμενα πεδία είναι το ολικό εξωτερικό πεδίο u_1 και το ολικό εσωτερικό πεδίο u_2 οπότε είναι πάντα γραμμένο στη μορφή (2.31).

2.5 Θεωρήματα Green και Ολοκληρωτικές αναπαράστασεις

Σε αυτήν την παράγραφο θα διατυπώσουμε τα δύο θεωρήματα του Green και κατόπιν με τη βοήθειά τους θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης των (εσωτερικών ή εξωτερικών αντίστοιχα) λύσεων της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz.

Αυτές οι ολοκληρωτικές αναπαράστασεις θα αποδειχθούν πολύ χρήσιμες στην παράγραφο 2.7 που περιλαμβάνει τις αποδείξεις των θεωρημάτων που αφορούν τις λύσεις των προβλημάτων σκέδασης που διατυπώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο 2.4.

Στα παρακάτω θεωρήματα και τις αποδείξεις τους, με $\Delta_y \phi$ και $\nabla_y \phi$ θα συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace ή την κλίση της συνάρτησης $\phi(x, y)$ αντίστοιχα όταν οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς τη y μεταβλητή.

Θεώρημα 2.1 (Πρώτο θεώρημα Green)

Έστω D ένα χωρίο κλάσης C^1 με σύνορο ∂D και έστω \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο στο σύνορο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D .

Για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ ισχύει ότι

$$\int_D u \Delta v \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.33)$$

Θεώρημα 2.2 (Δεύτερο θεώρημα Green)

Έστω D ένα χωρίο κλάσης C^1 με σύνορο ∂D και έστω \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο στο σύνορο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D .

Για $u, v \in C^2(\bar{D})$ ισχύει ότι

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.34)$$

Θεώρημα 2.3 (Θεώρημα εσωτερικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης)

Έστω D ένα χωρίο κλάσης C^2 με σύνορο ∂D και έστω \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂D του D με φορά προς το εξωτερικό του D .

Έστω $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ συνάρτηση που κατέχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο με την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbf{n}(x) \cdot \nabla u(x - h\mathbf{n}(x)), \, x \in \partial D \quad (2.35)$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D .

Τότε ισχύει η σχέση

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) - \int_D (\Delta u(\mathbf{y}) - k^2 u(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx, \quad (2.36)$$

η οποία ονομάζεται **τύπος του Green**.

Αν επιπλέον το u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εσωτερικό του D δηλαδή

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in D$$

Τότε ισχύει η σχέση

$$\int_{\partial D} \left(u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \right) ds(\mathbf{y}) = \begin{cases} -u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (2.37)$$

η οποία ονομάζεται **εσωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση του u** .

Απόδειξη:

Αρχικά να σχολιάσουμε ότι η κάθετη παράγωγος του u είναι μια κατευθυνόμενη παράγωγος στην ουσία και επομένως δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \partial D \quad (2.38)$$

Αντιστοίχως, η κάθετη παράγωγος του Φ δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \partial D \quad (2.39)$$

Πρώτη περίπτωση: Έστω $\mathbf{x} \in D$.

Θεωρούμε $\mathbf{x} \in D$ ένα αυθαίρετο σταθερό σημείο και μια σφαίρα ακτίνας r με κέντρο αυτό το σταθερό σημείο \mathbf{x} , την οποία συμβολίζουμε ως

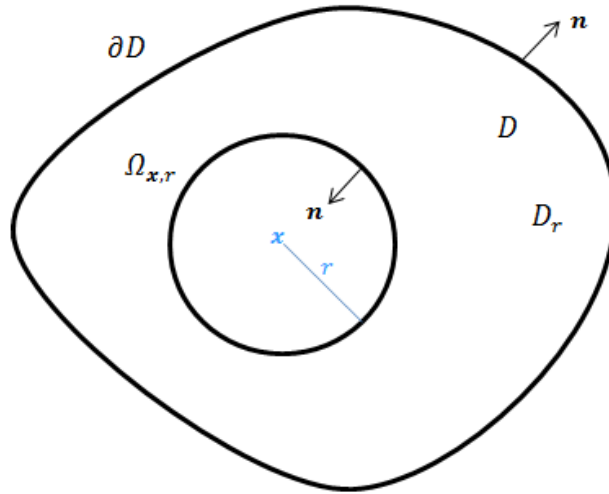
$$\Omega_{\mathbf{x},r} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r\} \quad (2.40)$$

Παίρνουμε την ακτίνα r τόσο μικρή έτσι ώστε όλη η σφαίρα να είναι εντός του σκεδαστή, δηλαδή $\Omega_{\mathbf{x},r} \subset D$ και θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σφαίρας $\Omega_{\mathbf{x},r}$.

Επίσης θεωρούμε το χωρίο

$$D_r = \{\mathbf{y} \in D : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > r\} \quad (2.41)$$

που συμβολίζει το χώρο εντός του σκεδαστή D αλλά εκτός της σφαίρας $\Omega_{\mathbf{x},r}$. Προφανώς $D_r \subset D$.



Σχήμα 2.4

Εφαρμόζοντας το δεύτερο θεώρημα του Green (2.34) για τις συναρτήσεις $u(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ στο χωρίο D_r και επειδή το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό του συνόρου ∂D αλλά προς το εσωτερικό της σφαίρας $\Omega_{x,r}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_r} (\Delta u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\
 &+ \int_{\Omega_{x,r}} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Από την υπόθεση του θεωρήματος η συνάρτηση u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D άρα και στο $D_r \subset D$ και επιπλέον η θεμελιώδης λύση Φ είναι πάντα λύση της εξίσωσης Helmholtz $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, επομένως το αριστερό μέλος της (2.42) ισούται με μηδέν καθώς

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_r} (\Delta u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{y} = \\
 &= \int_{D_r} (-k^2 u(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + u(\mathbf{y})k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{y} = 0 \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Επομένως η (2.42) γίνεται

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\
&+ \int_{\Omega_{x,r}} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\
&:= I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

όπου θέσαμε τα δυο ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της (2.44) ως I_1 και I_2 αντίστοιχα.

Θα ασχοληθούμε με το ολοκλήρωμα I_2 .

Πάνω στη σφαίρα $\Omega_{x,r}$ (όπου $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$) η θεμελιώδης λύση Φ μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \mathbf{y} \in \Omega_{x,r} \tag{2.45}$$

Θα βρούμε το $\nabla_{\mathbf{y}}(\Phi)$ πάνω στη σφαίρα Ω_r , όπου $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ και

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \right) \tag{2.46}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y_i}, i = 1,2,3 \tag{2.47}$$

όπου

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \tag{2.48}$$

$$\text{και } \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \frac{ike^{ikr}r - e^{ikr}}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}(ikr - 1)}{r^2} \tag{2.49}$$

$$\text{και } \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{1}{2r} 2(x_i - y_i)(-1) = \frac{(y_i - x_i)}{r} \tag{2.50}$$

Άρα η (2.47) από τις (2.49),(2.50) ισούται με

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}(ikr - 1)(y_i - x_i)}{r^3}, i = 1,2,3 \tag{2.51}$$

Και επομένως η (2.46) από τη (2.51) είναι ίση με

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}(ikr - 1)}{r^3} (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3) \tag{2.52}$$

Θέτοντας $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}(ikr-1)}{r^3}(-\mathbf{r}) \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.53)$$

Θέτοντας $\hat{\mathbf{r}}$ μοναδιαίο διάνυσμα ίσο με

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}\quad (2.54)$$

Έχουμε τελικά τη σχέση

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \hat{\mathbf{r}}\quad (2.55)$$

Τώρα, επειδή στην επιφάνεια της σφαίρας ισχύει ότι

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{r}}}\quad (2.56)$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\Phi = \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\Phi,\quad (2.57)$$

Καταλήγουμε τελικά στη σχέση

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \mathbf{n}(\mathbf{y})\quad (2.58)$$

Καθώς για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} ισχύει ότι

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = |\mathbf{n}(\mathbf{y})|^2 = 1\quad (2.59)$$

και για το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ ισχύει ότι

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = |\hat{\mathbf{r}}|^2 = 1\quad (2.60)$$

Το ολοκλήρωμα I_2 από τις (2.39),(2.44),(2.58),(2.59) παίρνει τη μορφή

$$I_2 = \int_{\Omega_{x,r}} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} - u(\mathbf{y}) \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) ds(\mathbf{y})\quad (2.61)$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα στη (2.61) βάση του οποίου

$$\int_{\partial A} f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = E(A)f(\mathbf{x}),\quad (2.62)$$

όπου με f συμβολίζουμε ότι υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα I_2 της (2.61), με ∂A συμβολίζουμε τη σφαίρα $\Omega_{x,r}$ και με $E(A)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν που περικλείει η σφαίρα το οποίο είναι ίσο με $4\pi r^2$

Παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= 4\pi r^2 \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} - u(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \\ &= r \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} e^{ikr} - u(\mathbf{x}) e^{ikr} + ikru(\mathbf{x}) e^{ikr} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Σκοπός μας τώρα είναι να εξαλείψουμε τη σφαίρα $\Omega_{x,r}$ που εισάγαμε στην αρχή της απόδειξης και αυτό επιτυγχάνεται παίρνοντας την ακτίνα της να τείνει στο μηδέν.

Η (2.63) για $r \rightarrow 0$ γίνεται

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} e^{ikr} - u(\mathbf{x}) e^{ikr} + ikru(\mathbf{x}) e^{ikr} \right) = -u(\mathbf{x}) \quad (2.64)$$

Δηλαδή

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_2 = -u(\mathbf{x}) \quad (2.65)$$

Επομένως από τις (2.44), (2.65) παίρνουμε τελικά ότι

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in D \quad (2.66)$$

Επομένως για $\mathbf{x} \in D$ αποδείχθηκε η ζητούμενη σχέση (2.37).

Δεύτερη περίπτωση: Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο θεώρημα του Green (2.34) για τις συναρτήσεις $u(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ στο D , όπου το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό του συνόρου του ∂D , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\int_D \left(\Delta u(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Από την υπόθεση του θεωρήματος η συνάρτηση u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D και επιπλέον η θεμελιώδης λύση Φ είναι πάντα λύση της εξίσωσης Helmholtz $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ άρα και στο D επομένως το αριστερό μέλος της (2.67) ισούται με μηδέν καθώς

$$\begin{aligned} &\int_D \left(\Delta u(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int_D \left(-k^2 u(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + u(\mathbf{y}) k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Επομένως η (2.67) γίνεται

$$0 = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (2.69)$$

Επομένως για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ αποδείχθηκε η ζητούμενη σχέση (2.37).

Τελικά από (2.66),(2.69) αποδείχθηκε η ζητούμενη σχέση (2.37) για κάθε \mathbf{x} .

Λήμμα 2.4

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ συνάρτηση που κατέχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο με την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x} + h\mathbf{n}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.70)$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D .

Επίσης, έστω ότι είναι λύση της συνθήκης ακτινοβολίας Sommerfeld, δηλαδή

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Τότε ισχύει η σχέση

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds = 0 \quad (2.71)$$

Επιπλέον, αν η u ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο εξωτερικό του D , δηλαδή

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

Τότε ισχύει επίσης η σχέση

$$\int_{|y|=R} |u|^2 ds = O(1), R \rightarrow \infty \quad (2.72)$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε μια σφαίρα με κέντρο το σημείο μηδέν $\mathbf{0}$ και ακτίνα R την οποία συμβολίζουμε ως

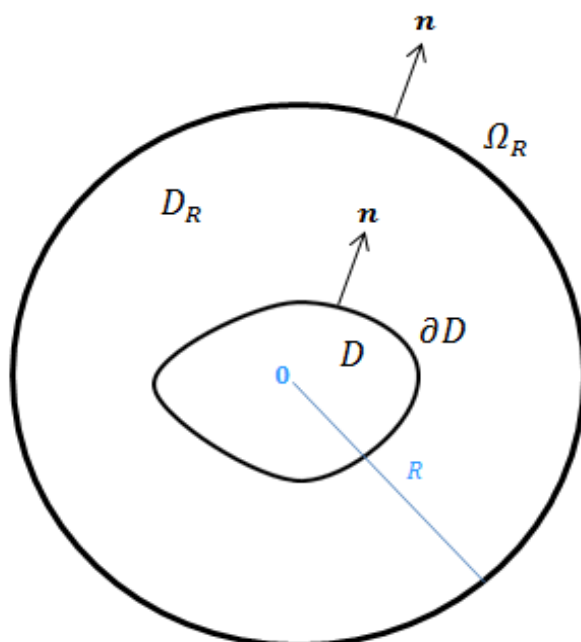
$$\Omega_R := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3: |\mathbf{y}| = R\} \quad (2.73)$$

και παίρνουμε την ακτίνα R τόσο μεγάλη ώστε όλη η σφαίρα να βρίσκεται εκτός του χωρίου D δηλαδή $\Omega_R \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Επίσης θεωρούμε το χωρίο

$$D_R := \{y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} : |y| < R\}, \quad (2.74)$$

δηλαδή το σύνολο των σημείων που δεν ανήκουν στο σκεδαστή αλλά ανήκουν στο εσωτερικό της σφαίρας.



Σχήμα 2.5

Θέτουμε $\mathbf{x} = R \mathbf{n}(\mathbf{x})$, όπου $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη σφαίρα Ω_R .

Αντικαθιστώντας το \mathbf{x} στη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld παίρνουμε ότι

$$\frac{R \mathbf{n}(\mathbf{x})}{R} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{R}\right), R \rightarrow \infty,$$

$$\Rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{R}\right), R \rightarrow \infty,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{R}\right), R \rightarrow \infty \quad (2.75)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x})| = 1 \quad (2.76)$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) \quad (2.77)$$

Επομένως από τη (2.75) παίρνουμε ότι

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - iku(\mathbf{x}) \right|^2 = o\left(\frac{1}{R^2}\right), R \rightarrow \infty, \quad (2.78)$$

Επομένως ολοκληρώνοντας πάνω στη σφαίρα Ω_R και χρησιμοποιώντας τη (2.62) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - iku(\mathbf{x}) \right|^2 ds &= o\left(\frac{1}{R^2} \int_{|y|=R} 1 ds\right) \\ &= o\left(\frac{1}{R^2} 4\pi R^2\right) = o(1) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - iku(\mathbf{x}) \right|^2 ds &= o(1) \\ \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - iku(\mathbf{x}) \right|^2 ds &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως αποδείχθηκε η πρώτη ζητούμενη σχέση (2.71).

Τώρα, χρησιμοποιώντας τη (2.71) θα αποδείξουμε τη (2.72).

Από τη (2.71) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - iku \right) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial n} - iku \right)} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - iku \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + i\bar{k}\bar{u} \right) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + k\bar{k}u\bar{u} + i\bar{k}\bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} - iku \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 + \left[i \left(\bar{k}\bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} - ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right] \right) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 + 2\text{Im}\left(ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) ds \end{aligned} \quad (2.80)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial n} = \overline{\frac{\partial z}{\partial n}}, \quad (2.82)$$

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (2.83)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z), \quad (2.84)$$

για κάθε z μιγαδικό αριθμό της μορφής $z = a + bi$ όπου με \bar{z} συμβολίζουμε τον συζυγή αριθμό του που είναι της μορφής $\bar{z} = a - bi$.

Εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα του Green (2.33) για τις συναρτήσεις ku, \bar{u} στο χωρίο D_R και καθώς τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα \mathbf{n} είναι προς το εξωτερικό των επιφανειών (συνόρων) $\partial D, \Omega_R$ παίρνουμε ότι

$$k \int_{D_R} (u \Delta \bar{u} + \nabla u \cdot \nabla \bar{u}) \, d\mathbf{y} = k \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds - k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds$$

Δηλαδή

$$k \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds = k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds + k \int_{D_R} (u \Delta \bar{u} + \nabla u \cdot \nabla \bar{u}) \, d\mathbf{y} \quad (2.85)$$

$$= k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds - \bar{k} |k|^2 \int_{D_R} |u|^2 \, d\mathbf{y} + k \int_{D_R} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{y} \quad (2.86)$$

Όπου χρησιμοποίησαμε τη (2.81) και ότι

$$\overline{\Delta u} = \Delta \bar{u}, \quad \overline{\nabla u} = \nabla \bar{u} \quad (2.87)$$

$$\overline{k^2} = (\bar{k})^2, \quad k(\bar{k})^2 = k\bar{k}\bar{k} = |k|^2 \bar{k} \quad (2.88)$$

και ότι η \bar{u} ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta \bar{u} + (\bar{k})^2 \bar{u} = 0, \quad (2.89)$$

καθώς από την εξίσωση Helmholtz της u και τις (2.87),(2.88) έχουμε ότι

$$0 = \Delta u + k^2 u \Rightarrow 0 = \overline{\Delta u + k^2 u} = \overline{\Delta u} + \overline{k^2 u} = \Delta \bar{u} + \bar{k}^2 \bar{u} = \Delta \bar{u} + (\bar{k})^2 \bar{u}$$

Τώρα, παίρνοντας το φανταστικό μέρος των δύο μελών της (2.86) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left(k \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds \right) = \\ & = \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds \right) + \operatorname{Im} \left(-\bar{k} |k|^2 \int_{D_R} |u|^2 \, d\mathbf{y} \right) \\ & \quad + \operatorname{Im} \left(k \int_{D_R} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) + \left(|k|^2 \int_{D_R} |u|^2 dy \right) \operatorname{Im}(-\bar{k}) \\
&\quad + \left(\int_{D_R} |\nabla u|^2 dy \right) \operatorname{Im}(k) \\
&= \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) + \operatorname{Im}(k) \int_{D_R} (|k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dy, \tag{2.90}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.90) στη (2.80) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 \right) ds + 2 \operatorname{Im}(k) \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right] \\
&\quad + 2 \operatorname{Im}(k) \int_{D_R} (|k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dy \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 \right) ds + 2 \operatorname{Im}(k) \int_{D_R} (|k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dy \right] \\
= -2 \operatorname{Im}(k) \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \tag{2.92}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι 4 όροι του αριστερού μέλους της (2.92) είναι μη αρνητικοί καθώς ισχύει $\operatorname{Im}(k) \geq 0$.

Επομένως, καθένας από αυτούς τους όρους πρέπει να είναι φραγμένος καθώς το $R \rightarrow \infty$, δηλαδή καθένας τους πρέπει να είναι τάξης $O(1)$, εφόσον το άθροισμά τους τείνει σε πεπερασμένο όριο από την (2.92).

Επομένως

$$\int_{|y|=R} |u|^2 ds = O(1), R \rightarrow \infty$$

αποδείχθηκε η δεύτερη ζητούμενη σχέση (2.72).

Λήμμα 2.5

Για τη θεμελιώδη λύση Φ της εξίσωσης Helmholtz ισχύουν οι εξής ασυμπτωτικές σχέσεις

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - ik \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \tag{2.93}$$

$$\text{και} \quad \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) - ik \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \tag{2.94}$$

$\forall \mathbf{y} \in \partial D$ και ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Επίσης, αν $\mathbf{y} \in \Omega_R := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y}| = R\}$ τότε

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (2.95)$$

και
$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (2.96)$$

Θεώρημα 2.6 (Θεώρημα εξωτερικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης)

Έστω D ένα χωρίο με σύνορο ∂D , το οποίο είναι ένα ανοικτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και έστω \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂D με φορά προς το εξωτερικό του D .

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ συνάρτηση που κατέχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο με την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x} + h\mathbf{n}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.97)$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D .

Επίσης, έστω ότι είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό του D δηλαδή

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

και έστω ότι είναι λύση της συνθήκης ακτινοβολίας Sommerfeld, δηλαδή

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Τότε ισχύει η εξίσωση

$$\int_{\partial D} \left(u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \right) ds(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in D \\ u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (2.98)$$

η οποία ονομάζεται **εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση του u** .

Απόδειξη:

Ομοίως με την απόδειξη του Λήμματος 2.4, θεωρούμε μια σφαίρα με κέντρο το σημείο μηδέν $\mathbf{0}$ και ακτίνα R την οποία συμβολίζουμε ως

$$\Omega_R := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y}| = R\}$$

και παίρνουμε την ακτίνα R τόσο μεγάλη ώστε όλη η σφαίρα να βρίσκεται εκτός του σκεδαστή, δηλαδή $\Omega_R \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Επίσης θεωρούμε το χωρίο

$$D_R := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} : |\mathbf{y}| < R\},$$

δηλαδή το σύνολο των σημείων που δεν ανήκουν στο σκεδαστή αλλά ανήκουν στο εσωτερικό της σφαίρας.

(Βλέπε Σχήμα 2.5 του Λήμματος 2.4)

Παρατηρούμε την απλή ταυτότητα

$$\begin{aligned} & \int_{|\mathbf{y}|=R} \left(u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \right) ds(\mathbf{y}) \\ &= \int_{|\mathbf{y}|=R} u(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}) \\ & \quad - \int_{|\mathbf{y}|=R} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - iku(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}) := I_1 - I_2, \end{aligned} \quad (2.99)$$

όπου θέσαμε τα δυο ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της (2.99) ως I_1 και I_2 αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Schwartz στο I_1 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.72), (2.96), παίρνουμε

$$\begin{aligned} |I_1|^2 &\equiv \left| \int_{|\mathbf{y}|=R} u(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}) \right|^2 \\ &\leq \int_{|\mathbf{y}|=R} |u|^2 ds \int_{|\mathbf{y}|=R} \left| \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right|^2 ds(\mathbf{y}) \\ &= O(1)O\left(\frac{1}{R^4} 4\pi R^2\right) = O(1)O\left(\frac{1}{R^2}\right) = O\left(\frac{1}{R^2}\right), R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.100)$$

Δηλαδή

$$|I_1|^2 = O\left(\frac{1}{R^2}\right), R \rightarrow \infty$$

Επομένως

$$I_1 = O\left(\frac{1}{R}\right), R \rightarrow \infty \quad (2.101)$$

Επίσης, εφαρμόζοντας την ανισότητα Schwartz στο I_2 και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.71),(2.95) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |I_2|^2 &\equiv \left| \int_{|y|=R} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - iku(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}) \right|^2 \\ &\leq \int_{|y|=R} |\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 ds(\mathbf{y}) \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} - iku(\mathbf{y}) \right|^2 ds(\mathbf{y}) \\ &= O\left(\frac{1}{R^2} 4\pi R^2\right) o(1) = O(1)o(1) = o(1) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Δηλαδή

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_2|^2 = 0$$

Επομένως

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0 \quad (2.103)$$

Τελικά από τις (2.99),(2.102),(2.103) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} \left(u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \right) ds(\mathbf{y}) &= I_1 - I_2 \\ &= O\left(\frac{1}{R}\right) - o(1) = O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Σκοπός μας τώρα είναι να 'διώξουμε' τη σφαίρα Ω_R που εισάγαμε στην αρχή της απόδειξης και αυτό επιτυγχάνεται παίρνοντας την ακτίνα της να τείνει στο άπειρο.

Η σχέση (2.104) για $R \rightarrow \infty$ γίνεται

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} \right) ds(\mathbf{y}) = 0 \quad (2.105)$$

Τέλος, για να καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση (2.98) πρέπει

για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ να εφαρμόσουμε το δεύτερο θεώρημα Green (2.34) για τις συναρτήσεις u, Φ στο χωρίο

$$A_r := \{\mathbf{y} \in D_R : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > r\} \quad (2.106)$$

και να εργαστούμε ομοίως με το Θεώρημα 2.3,

ενώ για $\mathbf{x} \in D$ να εφαρμόσουμε το δεύτερο θεώρημα Green (2.34) για τις συναρτήσεις u, Φ στο χωρίο D_R και να εργαστούμε ομοίως με το Θεώρημα 2.3.

Να σχολιάσουμε ότι τα θεωρήματα 2.3 και 2.6 ονομάζονται επίσης **Θεωρήματα αναπαράστασης Green** (*Green's representation theorems*). Είναι δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα διότι βάση αυτών αν γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης u

πάνω στο σύνορο ∂D και την τιμή της κάθετης παραγώγου της u (δηλαδή της $\frac{\partial u}{\partial n}$) πάνω στο σύνορο ∂D τότε γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης u σε όλο το D ή το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ανάλογα με το αν έχουμε εσωτερική ή εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση αντίστοιχα.

Να σχολιάσουμε επίσης ότι εφόσον το σκεδασμένο πεδίο είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, ικανοποιεί την εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση (2.98).

2.6 Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε δύο συναρτήσεις σε ολοκληρωτική μορφή και θα αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες τους.

Τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος κατέχουν πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία της σκέδασης καθώς σε αυτά αναζητούμε, όπως θα δούμε παρακάτω στην παράγραφο 2.7, τις λύσεις των προβλημάτων ακουστικής σκέδασης που ορίσαμε την παράγραφο 2.4.

A. Δυναμικό απλού στρώματος

Έστω ένα χωρίο D το οποίο είναι ανοικτό συμπλήρωμα ενός η φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και έστω ∂D το σύνορο του.

Για δοσμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\varphi \in C(\partial D)$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D, \quad (2.107)$$

η οποία ονομάζεται **δυναμικό απλού στρώματος** με πυκνότητα φ .

Το δυναμικό απλού στρώματος είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D και στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.

Θεώρημα 2.7

Έστω ∂D ένα σύνορο κλάσης C^2 και έστω φ συνεχής συνάρτηση.

Το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα φ είναι συνεχές σε όλο το \mathbb{R}^3 καθώς μπορεί να επεκταθεί και στο σύνορο ∂D με συνοριακό τύπο

$$u_+(x) = u_-(x) = u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (2.108)$$

όπου με u_+, u_- συμβολίζουμε τα πλευρικά όρια του δυναμικού απλού στρώματος που ορίζονται ως

$$u_+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}} u(x), \quad u_-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in D}} u(x), \quad x \in \partial D$$

Επίσης, θέτοντας

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbf{n}(x) \cdot \nabla u(x \pm h\mathbf{n}(x)) \quad (2.109)$$

Ισχύει ο συνοριακός τύπος

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial n} = \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(x, \mathbf{y})}{\partial n(x)} ds(\mathbf{y}) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D \quad (2.110)$$

Επομένως, ικανοποιείται στο σύνορο η σχέση

$$\frac{\partial u_+(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_-(x)}{\partial n} = -\varphi(x), \quad x \in \partial D \quad (2.111)$$

Η σχέση (2.111) ονομάζεται **σχέση άλματος** (*jump relation*) για το δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα φ .

Η σχέση άλματος στην ουσία δείχνει την ασυνέχεια της κάθετης παραγώγου του δυναμικού απλού στρώματος στο σύνορο ∂D καθώς τα πλευρικά όρια $\frac{\partial u_+}{\partial n}, \frac{\partial u_-}{\partial n}$ δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

B. Δυναμικό διπλού στρώματος

Έστω ένα χωρίο D το οποίο είναι ανοικτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και έστω ∂D το σύνορο του.

Για δοσμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\psi \in C(\partial D)$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(x) := \int_{\partial D} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(x, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D, \quad (2.112)$$

η οποία ονομάζεται **δυναμικό διπλού στρώματος** με πυκνότητα ψ .

Το δυναμικό διπλού στρώματος είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D και στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.

Θεώρημα 2.8

Το δυναμικό διπλού στρώματος v με πυκνότητα ψ μπορεί να επεκταθεί στο σύνορο, δηλαδή από το D στο \bar{D} και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, με οριακές τιμές

$$v_{\pm}(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0^+} v(\mathbf{x} \pm h\mathbf{n}(\mathbf{x})) \quad (2.113)$$

Για αυτές τις οριακές τιμές του δυναμικού διπλού στρώματος, ισχύει ο συνοριακός τύπος

$$v_{\pm}(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}) \pm \frac{1}{2} \psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.114)$$

Επομένως, ικανοποιείται η σχέση

$$v_+(\mathbf{x}) - v_-(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.115)$$

Η σχέση (2.115) ονομάζεται **σχέση άλματος** (*jump relation*) για το δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητα ψ .

Η σχέση άλματος στην ουσία δείχνει την ασυνέχεια του δυναμικού διπλού στρώματος στο σύνορο ∂D καθώς τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.

Παρατήρηση 2.Η

Βάση των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων (2.37) και (2.98), κάθε λύση της εξίσωσης Helmholtz μπορεί να γραφτεί σαν συνδυασμός των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος (2.107) και (2.112).

2.7 Θεωρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης των προβλημάτων συνοριακών τιμών

Σε αυτήν την παράγραφο θα διατυπώσουμε τα θεωρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης των εσωτερικών, εξωτερικών και μικτών προβλημάτων συνοριακών τιμών που αντιστοιχούν στα προβλήματα συνοριακών τιμών που διατυπώσαμε στην παράγραφο 2.4. Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.4, στη θεωρία σκέδασης ασχολούμαστε με εξωτερικά ή μικτά προβλήματα συνοριακών τιμών για την (βαθμωτή) εξίσωση Helmholtz, σε αυτή τη παράγραφο όμως θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε επιπλέον και τα θεωρήματα που αφορούν τα εσωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann.

Επίσης θα διατυπώσουμε μερικά βοηθητικά θεωρήματα και πορίσματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στις αποδείξεις των θεωρημάτων μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης των προβλημάτων ακουστικής σκέδασης.

Να σχολιάσουμε ότι τις λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών θα αναζητήσουμε σε μορφή δυναμικών απλού και διπλού στρώματος και σε γραμμικούς συνδυασμούς τους.

Στις αποδείξεις των θεωρημάτων που αφορούν την εύρεση λύσεων των προβλημάτων συνοριακών τιμών θα συναντήσουμε κάποιους διαφορικούς τελεστές τους οποίους θα ορίσουμε αμέσως παρακάτω.

Θεωρούμε το χώρο \mathfrak{S} με τον οποίο συμβολίζουμε το γραμμικό χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων ψ με την ιδιότητα το δυναμικό διπλού στρώματος u με πυκνότητα ψ όπως έχει οριστεί στη σχέση (2.107) να έχει συνεχείς κάθετες παραγώγους και στις δύο πλευρές του συνόρου ∂D (βλέπε Παρατήρηση 2.Γ).

Ορίζουμε τους τελεστές $S, K, K': C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ και $T: \mathfrak{S}(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ έτσι ώστε

$$(K\psi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y), x \in \partial D \quad (2.116)$$

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} \varphi(y) ds(y), x \in \partial D \quad (2.117)$$

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in \partial D \quad (2.118)$$

$$(T\psi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial n(x)} \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y) \right), x \in \partial D \quad (2.119)$$

Θεώρημα 2.9 (Θεώρημα μοναδικότητας λύσης των εσωτερικών προβλημάτων Dirichlet και Neumann)

Με την προϋπόθεση ότι $\text{Im}(k) > 0$ το εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet και το εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann ακουστικών κυμάτων έχουν το πολύ μια λύση.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι τα ομογενή προβλήματα έχουν μοναδική λύση την τετριμμένη δηλαδή τη μηδενική $u(x) \equiv 0$ το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι τα αντίστοιχα μη ομογενή προβλήματα έχουν μοναδική λύση.

Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα Green όπως δίνεται από τον τύπο (2.33) για τις συναρτήσεις \bar{u}, u στο χωρίο D και παίρνουμε ότι

$$\int_{\partial D} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_D (\bar{u} \Delta u + \nabla \bar{u} \cdot \nabla u) dx \quad (2.120)$$

Χρησιμοποιώντας ότι η u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D και ότι ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet ή ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη Neumann

αντίστοιχα, δηλαδή ότι $\Delta u + k^2 u = 0, x \in D$ και $u = 0, x \in \partial D$ (άρα και $\bar{u} = 0, x \in \partial D$)
 ή $\frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, x \in \partial D$ αντίστοιχα, παίρνουμε ότι

$$0 = \int_D (\bar{u}(-k^2 u) + \nabla \bar{u} \cdot \nabla u) dx \quad (2.121)$$

$$= \int_D (-k^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dx \quad (2.122)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες (2.87) και

$$\nabla \bar{u} \cdot \nabla u = |\nabla u|^2 \quad (2.123)$$

και

$$u\bar{u} = |u|^2 \quad (2.124)$$

Έστω τώρα ότι θέτουμε $k = Re(k) + Im(k)i =: a + bi$ τότε

$$k^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad (2.125)$$

Τότε η (2.122) γίνεται

$$0 = \int_D -(a^2 - b^2 + 2abi)|u|^2 + |\nabla u|^2 dx$$

Δηλαδή

$$0 + 0i = \left(\int_D |\nabla u|^2 - (a^2 - b^2)|u|^2 dx \right) + \left(\int_D 2ab|u|^2 dx \right) i \quad (2.126)$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά μέλη μεταξύ τους και τα φανταστικά μέλη μεταξύ τους παίρνουμε

$$0 = \int_D |\nabla u|^2 - (a^2 - b^2)|u|^2 dx \quad (2.127)$$

$$0 = \int_D 2ab|u|^2 dx \quad (2.128)$$

Από υπόθεση έχουμε $Im(k) \equiv b > 0$.

Αν επιπλέον $Re(k) \equiv a \neq 0$, τότε από την εξίσωση (2.128) έχουμε

$$\int_D |u|^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow |u|^2 = 0, x \in D \quad (2.129)$$

$$\Rightarrow u = 0, x \in D \quad (2.130)$$

Δηλαδή $u = 0$ στο D .

Ενώ αν επιπλέον $Re(k) \equiv a = 0$, τότε από την εξίσωση (2.127) έχουμε

$$\int_D |\nabla u|^2 - (0 - b^2)|u|^2 dx = 0 \quad (2.131)$$

$$\Rightarrow \int_D |\nabla u|^2 + b^2|u|^2 dx = 0 \quad (2.132)$$

$$\Rightarrow |\nabla u| = 0, |u| = 0, x \in D \quad (2.133)$$

$$\Rightarrow u = 0, x \in D \quad (2.134)$$

Δηλαδή $u = 0$ στο D .

Όπου και τις δύο παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε ότι το μέτρο κάθε συνάρτησης είναι μη αρνητικό, δηλαδή ότι

$$|u| \geq 0, |\nabla u| \geq 0 \quad (2.135)$$

Επομένως, από τις (2.130) και (2.134) αποδείξαμε ότι τα ομογενή εσωτερικά προβλήματα συνοριακών συνθηκών Dirichlet και Neumann με την προϋπόθεση ότι $Im(k) > 0$ έχουν μοναδική λύση την τετριμμένη $u \equiv 0$. Συνεπώς, τα μη ομογενή εσωτερικά προβλήματα συνοριακών συνθηκών Dirichlet και Neumann με την προϋπόθεση ότι $Im(k) > 0$ έχουν μοναδική λύση.

Λήμμα 2.10

Έστω k πραγματικός θετικός κυματικός αριθμός (δηλαδή $k > 0$) και έστω ένα πεδίο $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ που είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.24) και έστω ότι ικανοποιεί επιπλέον τη συνθήκη

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |u|^2 ds = 0, \quad (2.136)$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Θεώρημα 2.11

Έστω ένα πεδίο $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που κατέχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο με την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x} + h\mathbf{n}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \partial D$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D .

Επίσης, έστω ότι είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και έστω ότι είναι λύση της συνθήκης ακτινοβολίας Sommerfeld (2.24)

Επιπλέον, έστω ότι ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\operatorname{Im}(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds) \geq 0 \quad (2.137)$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2.4, επομένως ικανοποιείται η σχέση (2.92), δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 \right) ds + 2 \operatorname{Im}(k) \int_{D_R} (|k|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) d\mathbf{y} \right] \\ = -2 \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right), \end{aligned}$$

όπου D_R όπως στη (2.74).

Επιπλέον, από την υπόθεση (2.137) του θεωρήματος έχουμε ότι

$$-2 \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) \leq 0 .$$

Επομένως, αν $\operatorname{Im}(k) > 0$ έχουμε ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} |u|^2 dx = 0 \quad (2.138)$$

Επομένως $u = 0$ στο $x \in D_R, R \rightarrow \infty$

Επομένως $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$

Αν $\operatorname{Im}(k) = 0$ τότε έχουμε ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|y|=r} |u|^2 ds = 0 \quad (2.139)$$

Επομένως $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ από το Λήμμα 2.10 (για $k > 0$).

Θεώρημα 2.12 (Θεώρημα μοναδικότητας λύσης των εξωτερικών προβλημάτων Dirichlet και Neumann)

Το εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet και το εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann ακουστικών κυμάτων έχουν το πολύ μια λύση.

Απόδειξη:

Το θεώρημα αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.11.

Αναλυτικότερα, θα αποδείξουμε ότι τα ομογενή προβλήματα Dirichlet και Neumann έχουν μοναδική λύση τη μηδενική το οποίο συνεπάγεται ότι τα μη ομογενή προβλήματα Dirichlet και Neumann έχουν μοναδική λύση.

Τα ομογενή εξωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.11 καθώς από τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες τους (δηλαδή τις συνθήκες (2.17)' και (2.18)' με δεξιό μέλος ίσο με το μηδέν) ικανοποιείται η προϋπόθεση (1.133), δηλαδή έχουμε

$$\operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) = \operatorname{Im}(0) = 0 \geq 0 \quad (2.140)$$

Από τη (2.140) και το θεώρημα 2.11 λοιπόν έχουμε ότι $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Επομένως αποδείξαμε ότι τα ομογενή εξωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann έχουν μοναδική λύση τη μηδενική, το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι τα αντίστοιχα μη ομογενή εξωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann έχουν μοναδική λύση.

Θεώρημα 2.13 (Θεώρημα μοναδικότητας λύσης του εξωτερικού προβλήματος Robin)

Με την προϋπόθεση ότι $\operatorname{Im}(\bar{k}\lambda) \geq 0$ το εξωτερικό πρόβλημα Robin ακουστικών κυμάτων έχει το πολύ μια λύση.

Απόδειξη:

Το θεώρημα αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 2.11.

Αναλυτικότερα, θα δείξουμε ότι το ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι το αντίστοιχο μη ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Τα ομογενές πρόβλημα Robin ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.11 καθώς από την ομογενή συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται η προϋπόθεση (1.137), δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) &= \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u(-\bar{\lambda}u) ds \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(-\bar{\lambda}k \int_{\partial D} |u|^2 ds \right) \\ &= \operatorname{Im}(-\bar{\lambda}k) \left(\int_{\partial D} |u|^2 ds \right) \\ &= \operatorname{Im}(\lambda\bar{k}) \left(\int_{\partial D} |u|^2 ds \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.141)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$u\bar{u} = |u|^2$$

και χρησιμοποιήσαμε ότι από τη συνοριακή συνθήκη Robin έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u(\mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow \overline{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u(\mathbf{x})} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}(\mathbf{x})}{\partial n} + \bar{\lambda} \bar{u}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \quad (2.142)$$

και επίσης ότι

$$\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}k) = -\operatorname{Im}(\bar{\lambda}k) = \operatorname{Im}(\overline{\bar{\lambda}k}) = \operatorname{Im}(\lambda\bar{k}), \quad (2.143)$$

όπου από την υπόθεση του θεωρήματος έχουμε $\operatorname{Im}(\lambda\bar{k}) \geq 0$.

Επομένως από τη (2.141) και το Θεώρημα 2.11 έχουμε ότι $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Επομένως αποδείξαμε ότι το ομογενές πρόβλημα Robin έχει μοναδική λύση την μηδενική το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι το αντίστοιχο μη ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Θεώρημα 2.14 (Θεώρημα μοναδικότητας λύσης του προβλήματος μεταφοράς)

Το πρόβλημα μεταφοράς ακουστικών κυμάτων έχει το πολύ μια λύση για συγκεκριμένη επιλογή των k_1, k_2, μ_1, μ_2 .

Απόδειξη:

Έστω το πρόβλημα μεταφοράς (2.31).

Θα αποδείξουμε ότι το ομογενές πρόβλημα μεταφοράς έχει μοναδική λύση τη μηδενική το οποίο συνεπάγεται ότι το μη ομογενές πρόβλημα μεταφοράς έχει μοναδική λύση.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση για την οποία ισχύει

$$\mu_1, \mu_2, k_1 \in \mathbb{R}, k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \geq 0 \text{ και } \operatorname{Im}(k_2^2) > 0.$$

Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα του Green (2.34) για τις συναρτήσεις $k_1 u_2, \bar{u}_2$ στο χωρίο D και παίρνουμε ότι

$$\int_D (k_1 u_2 \Delta \bar{u}_2 - \bar{u}_2 \Delta(k_1 u_2)) dx = \int_{\partial D} \left(k_1 u_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n} - \bar{u}_2 \frac{\partial(k_1 u_2)}{\partial n} \right) ds \quad (2.144)$$

Επειδή το u_2 ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz $\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0$ έχουμε ότι

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \Rightarrow \overline{\Delta u_2 + k_2^2 u_2} = 0 \Rightarrow \overline{\Delta u_2} + \overline{k_2^2} \overline{u_2} = 0$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις

$$\overline{\Delta u_2} = \Delta \overline{u_2} \quad (2.145)$$

$$\overline{k_2^2} = (\overline{k_2})^2 \quad (2.146)$$

Έχουμε τελικά ότι το $\overline{u_2}$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta \overline{u_2} + \overline{k_2^2} \overline{u_2} = \Delta \overline{u_2} + (\overline{k_2})^2 \overline{u_2} = 0 \quad (2.147)$$

Επίσης από τις συνοριακές συνθήκες (2.20),(2.21) έχουμε ότι

$$\mu_1 \overline{u_1}(\mathbf{x}) = \mu_2 \overline{u_2}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.148)$$

$$\frac{\partial \overline{u_1}(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial \overline{u_2}(\mathbf{x})}{\partial n}, \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.149)$$

Επομένως η (2.144) από τις (2.146)-(2.149) και από τις συνοριακές συνθήκες (2.20),(2.21) γίνεται

$$\begin{aligned} & \int_D \left(k_1 u_2 (-\overline{k_2^2} \overline{u_2}) - \overline{u_2} k_1 (-k_2^2 u_2) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial D} \left(k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial n} - k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \overline{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\Leftrightarrow k_1 (k_2^2 - \overline{k_2^2}) \int_D |u_2|^2 d\mathbf{x} = k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{\partial D} \left(u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial n} - \overline{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds \quad (2.151)$$

$$\Leftrightarrow k_1 2i \operatorname{Im} \left(k_2^2 \right) \int_D |u_2|^2 d\mathbf{x} = k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{\partial D} 2i \operatorname{Im} \left(u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial n} \right) ds$$

$$\Leftrightarrow k_1 \operatorname{Im} \left(k_2^2 \right) \int_D |u_2|^2 d\mathbf{x} = k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{\partial D} \operatorname{Im} \left(u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial n} \right) ds \quad (2.152)$$

Από την υπόθεση της απόδειξης ότι $\mu_1, \mu_2, k_1 \in \mathbb{R}$ η (2.152) παίρνει τη μορφή

$$\left(k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_D |u_2|^2 d\mathbf{x} \right) \operatorname{Im} \left(k_2^2 \right) = k_1 \int_{\partial D} \operatorname{Im} \left(u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial n} \right) ds \quad (2.153)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} \left(\left[k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_D |u_2|^2 d\mathbf{x} \right] k_2^2 \right) = \operatorname{Im} \left(k_1 \int_{\partial D} u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial n} ds \right) \quad (2.154)$$

Και πιο συγκεκριμένα από την υπόθεση της απόδειξης ότι $\operatorname{Im} \left(k_2^2 \right) > 0$ και $k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \geq 0$ έχουμε για το αριστερό μέλος ότι

$$Im \left(\left[k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_D |u_2|^2 dx \right] k_2^2 \right) \geq 0$$

Επομένως από τη (2.147)

$$Im \left(k_1 \int_{\partial D} u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} ds \right) = Im \left(\left[k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_D |u_2|^2 dx \right] k_2^2 \right) \geq 0 \quad (2.155)$$

Όπου χρησιμοποίησαμε τις ταυτότητες

$$u_2 \bar{u}_2 = |u_2|^2 \quad (2.156)$$

$$\bar{u}_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \overline{u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n}} \quad (2.157)$$

και
$$z - \bar{z} = 2i Im(z), \quad (2.158)$$

για $z = k_2^2$ και $z = u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n}$.

Επειδή τώρα το Θεώρημα 2.11 μπορεί να επεκταθεί και στο σύνορο δηλαδή έτσι ώστε να δίνει την τιμή 0 στην συνάρτηση για όλο το $\mathbb{R}^3 \setminus D$ έχουμε από τη (2.155) για το $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ ότι $u_1 = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και επομένως και $\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$. Τότε από τις ομογενείς συνθήκες μεταφοράς (2.20),(2.21) παίρνουμε ότι $u_2 = 0$ και $\frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$ στο σύνορο ∂D και επομένως από την εσωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση (2.37) για το u_2 καταλήγουμε ότι $u_2(x) = 0$ στο D , καθώς

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u_2(\mathbf{y})}{\partial n} \Phi(x, \mathbf{y}) - u_2(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(x, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial D} 0 = 0, \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Επομένως αποδείχθηκε ότι το ομογενές πρόβλημα μεταφοράς ακουστικών κυμάτων με την προϋπόθεση ότι $\mu_1, \mu_2, k_1 \in \mathbb{R}$, $Im(k_2^2) > 0$ και $k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \geq 0$ έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική με $u_1 = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και $u_2 = 0$ στο D . Συνεπώς το μη ομογενές πρόβλημα μεταφοράς ακουστικών κυμάτων με την προϋπόθεση ότι $\mu_1, \mu_2, k_1 \in \mathbb{R}$, $Im(k_2^2) > 0$ και $k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \geq 0$ έχει μοναδική λύση.

Θεώρημα 2.15 (Θεώρημα ύπαρξης λύσης του εσωτερικού και του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet)

Έστω το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet με συνοριακή συνθήκη

$$u(x) = f(x), \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.159)$$

όπου f δοσμένη συνεχής συνάρτηση.

Το δυναμικό διπλού στρώματος με συνεχή πυκνότητα $\psi \in C(\partial D)$, όπως δίνεται από τον τύπο (2.112) δηλαδή

$$v(x) := \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

είναι λύση του εσωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Dirichlet μέσα στο D αν η πυκνότητα ψ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\psi(x) - 2 \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) = -2f(x), x \in \partial D \quad (2.160)$$

Επίσης είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Dirichlet στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ αν η πυκνότητα ψ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\psi(x) + 2 \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) = 2f(x), x \in \partial D \quad (2.161)$$

Απόδειξη:

Έστω το εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet (2.28).

Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό διπλού στρώματος είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η οριακή τιμή $v_+(x)$ του $v(x)$ ικανοποιεί τη σχέση (2.114), δηλαδή

$$v_+(x) = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) + \frac{1}{2} \psi(x), x \in \partial D$$

Αν το $v(x)$ είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Dirichlet τότε η οριακή του τιμή $v_+(x)$ ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$v_+(x) = f(x), x \in \partial D \quad (2.162)$$

Επομένως από (2.114) και (2.162) έχουμε ότι

$$f(x) = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) + \frac{1}{2} \psi(x), x \in \partial D \quad (2.163)$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 2 \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) + \psi(x), x \in \partial D \quad (2.164)$$

Από τον ορισμό (2.116) του ολοκληρωτικού τελεστή K του ψ , δηλαδή

$$K\psi(x) = 2 \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y),$$

η (2.164) παίρνει τη μορφή

$$2f(x) = K\psi(x) + \psi(x), x \in \partial D \quad (2.165)$$

$$\Rightarrow 2f(x) = (K + I)\psi(x), x \in \partial D \quad (2.166)$$

Η εξίσωση (2.166) έχει λύση $\psi(x)$ από τη θεωρία ολοκληρωτικών τελεστών Riesz-Fredholm. Δηλαδή ο τελεστής $(K + I)$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως η (2.161) ικανοποιείται, δηλαδή το δυναμικό διπλού στρώματος $v(x)$ είναι όντως λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Dirichlet.

Τελείως αντιστοίχως αποδεικνύεται το θεώρημα ύπαρξης λύσης του εσωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Dirichlet με την διαφορά ότι θα πάρουμε την οριακή τιμή $v_-(x)$ του $v(x)$ όπως αυτή δίνεται από τον τύπο (2.114) και θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία ολοκληρωτικών τελεστών Riesz-Fredholm. για τον τελεστή $(K - I)$.

Θεώρημα 2.16 (Θεώρημα ύπαρξης λύσης του εσωτερικού και του εξωτερικού προβλήματος Neumann)

Έστω το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann με συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), x \in \partial D, \quad (2.167)$$

όπου g δοσμένη συνεχής συνάρτηση.

Το δυναμικό απλού στρώματος με συνεχή πυκνότητα $\varphi \in C(\partial D)$ όπως δίνεται από τον τύπο (2.107) δηλαδή

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

είναι λύση του εσωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Neumann μέσα στο D αν η πυκνότητα φ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y) = 2g(x), x \in \partial D \quad (2.168)$$

Επίσης είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Neumann στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ αν η πυκνότητα φ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y) = -2g(x), x \in \partial D \quad (2.169)$$

Απόδειξη:

Έστω το εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann (2.29).

Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό απλού στρώματος είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η εξωτερική κάθετη παράγωγος του που δίνεται από τον τύπο (2.109) ικανοποιεί τη σχέση (2.110), δηλαδή

$$\frac{\partial u_+(x)}{\partial n} = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y) - \frac{1}{2} \varphi(x), x \in \partial D$$

Αν το $u(x)$ είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Neumann τότε η εξωτερική κάθετη παράγωγος $\frac{\partial u_+(x)}{\partial n}$ του $u(x)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{\partial u_+(x)}{\partial n} = g(x), x \in \partial D \quad (2.170)$$

Επομένως από (2.110) και (2.170) έχουμε

$$g(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y) - \frac{1}{2} \varphi(x), x \in \partial D \quad (2.171)$$

$$\Rightarrow 2g(x) = 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y) - \varphi(x), x \in \partial D \quad (2.172)$$

Από τον ορισμό (2.117) του ολοκληρωτικού τελεστή K' του φ , δηλαδή

$$K' \varphi(x) = 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y),$$

η (2.172) παίρνει τη μορφή

$$2g(x) = K' \varphi(x) - \varphi(x), x \in \partial D \quad (2.173)$$

$$\Rightarrow 2g(x) = (K' - I) \varphi(x), x \in \partial D \quad (2.174)$$

Η εξίσωση (2.174) έχει λύση $\varphi(x)$ από τη θεωρία ολοκληρωτικών τελεστών Riesz-Fredholm. Δηλαδή ο τελεστής $(K' - I)$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως η (2.169) ικανοποιείται, δηλαδή το δυναμικό απλού στρώματος $u(x)$ είναι όντως λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Neumann.

Τελείως αντιστοίχως αποδεικνύεται το θεώρημα ύπαρξης λύσης του εσωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Neumann με την διαφορά ότι θα πάρουμε την εσωτερική κάθετη παράγωγο $\frac{\partial u_-(x)}{\partial n}$ του $u(x)$ όπως αυτή δίνεται από τον τύπο (2.109) και θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία ολοκληρωτικών τελεστών Riesz-Fredholm. για τον τελεστής $(K' + I)$.

Θεώρημα 1.17 (Θεώρημα ύπαρξης λύσης του εξωτερικού προβλήματος Robin)

Έστω το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Robin με συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.175)$$

όπου q δοσμένη συνεχής συνάρτηση.

Το δυναμικό απλού στρώματος με συνεχή πυκνότητα $\varphi \in C(\partial D)$ όπως δίνεται από τον τύπο (2.107) δηλαδή

$$u(\mathbf{x}) := \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Robin στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ αν η πυκνότητα φ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) - 2 \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} ds(\mathbf{y}) \\ - 2\lambda \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = -2q(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned} \quad (2.176)$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό απλού στρώματος είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η εξωτερική κάθετη παράγωγος του που δίνεται από τον τύπο (2.109) ικανοποιεί τη σχέση (2.110), δηλαδή

$$\frac{\partial u_+(\mathbf{x})}{\partial n} = \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} ds(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D$$

Αν το $u(\mathbf{x})$ είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Robin τότε για τη $\frac{\partial u_+}{\partial n}$ κάθετη παράγωγο του u στο σύνορο και για την επέκταση u_+ του δυναμικού απλού στρώματος στο σύνορο από τη σχέση (2.108) θα έχουμε ότι

$$\frac{\partial u_+(\mathbf{x})}{\partial n} + \lambda u_+(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.177)$$

Επομένως από (2.110) και (2.177) έχουμε

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} ds(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{x}) \\ + \lambda \left(\int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right), \mathbf{x} \in \partial D \end{aligned} \quad (2.178)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
-2q(x) &= \varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} ds(y) \\
&\quad - 2\lambda \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), x \in \partial D
\end{aligned} \tag{2.179}$$

Από τους ορισμούς (2.117) και (2.118) των ολοκληρωτικών τελεστών K', S του φ δηλαδή

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} \varphi(y) ds(y), x \in \partial D,$$

και $(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in \partial D,$

η (2.179) γράφεται στη μορφή

$$\varphi(x) - (K'\varphi)(x) - (S\varphi)(x) = -2q(x), x \in \partial D \tag{2.180}$$

$$\Rightarrow (I - K' - S)\varphi(x) = -2q(x), x \in \partial D \tag{2.181}$$

Η εξίσωση (2.181) έχει λύση $\varphi(x)$ από τη θεωρία ολοκληρωτικών τελεστών Riesz-Fredholm. Δηλαδή ο τελεστής $(I - K' - S)$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως η (2.176) ικανοποιείται, δηλαδή το δυναμικό απλού στρώματος $u(x)$ είναι όντως λύση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών Robin.

Θεώρημα 1.18 (Θεώρημα ύπαρξης λύσης του προβλήματος Μεταφοράς)

Έστω το πρόβλημα μεταφοράς με συνοριακές συνθήκες

$$\mu_1 u_1(x) - \mu_2 u_2(x) = f(x), x \in \partial D, \tag{2.182}$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial n} = g(x), x \in \partial D, \tag{2.183}$$

όπου f, g δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις u_1, u_2 που είναι γραμμικοί συνδυασμοί δυναμικών απλού και διπλού στρώματος με συνεχείς πυκνότητες $\varphi, \psi \in C(\partial D)$ και δίνονται από τους τύπους

$$u_1(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) + \mu_1 \Phi_1(x, y) \varphi(y) \right) ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{2.184}$$

$$u_2(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) + \mu_2 \Phi_2(x, y) \varphi(y) \right) ds(y), x \in D, \tag{2.185}$$

αποτελούν λύσεις του προβλήματος μεταφοράς αν οι πυκνότητες φ, ψ είναι λύσεις των ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$(\mu_1 + \mu_2)\psi + (\mu_1 K_1 - \mu_2 K_2)\psi + (\mu_1^2 S_1 - \mu_2^2 S_2)\varphi = 2f, \quad (2.186)$$

$$(\mu_1 + \mu_2)\varphi - (T_1 - T_2)\psi - (\mu_1 K_1' - \mu_2 K_2')\varphi = -2g, \quad (2.187)$$

όπου $K_i, K_i', S_i, T_i, i = 1, 2$ είναι οι τελεστές που δίνονται από τις σχέσεις (2.116)-(2.119) με τη διαφορά ότι στους τύπους τους έχει αντικατασταθεί η θεμελιώδης λύση Φ με την $\Phi_i, i = 1, 2$, όπου Φ_i όπως δίνεται στη (2.4) με τη διαφορά ότι αντί για k έχει k_1 ή k_2 αντίστοιχα στον τύπο της.

Απόδειξη:

Θέτουμε τις συναρτήσεις

$$u^{(i)} = \int_{\partial D} \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), i = 1, 2, \quad (2.188)$$

$$v^{(i)} = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), i = 1, 2, \quad (2.189)$$

οι οποίες είναι τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος με τη διαφορά ότι στους τύπους τους έχει αντικατασταθεί η θεμελιώδης λύση Φ με την $\Phi_i, i = 1, 2$.

Τότε ισχύει από (2.184)-(2.185) και (2.188)-(2.189) ότι

$$u_1(\mathbf{x}) = v^{(1)} + \mu_1 u^{(1)}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (2.190)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = v^{(2)} + \mu_2 u^{(2)}, \mathbf{x} \in D, \quad (2.191)$$

Οι u_1, u_2 είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και στο D αντίστοιχα αφού είναι συνδυασμοί δυναμικών απλού και διπλού στρώματος. Επίσης το εξωτερικό πεδίο u_1 ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld αφού είναι συνδυασμός δυναμικού απλού και διπλού στρώματος.

Αν υποθέσουμε ότι οι πυκνότητες φ, ψ των u_1, u_2 ικανοποιούν τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.186),(2.187), τότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.188),(2.189), τους τελεστές (2.116)-(2.119), τις ιδιότητες των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος (2.110),(2.114) και το γεγονός ότι το δυναμικό απλού στρώματος επεκτείνεται και στο σύνορο από τη σχέση (2.108) δηλαδή συμβολικά μπορούμε να πούμε ότι

$$u^{(i)} = u_+^{(i)} = u_-^{(i)}, \mathbf{x} \in \partial D, i = 1, 2 \quad (2.192)$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \mu_1 u_{1+}(\mathbf{x}) - \mu_2 u_{2-}(\mathbf{x}) = \\ & = \mu_1 \left(v_+^{(1)}(\mathbf{x}) + \mu_1 u_+^{(1)}(\mathbf{x}) \right) - \mu_2 \left(v_-^{(2)}(\mathbf{x}) + \mu_2 u_-^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \\ & = \mu_1 v_+^{(1)}(\mathbf{x}) + \mu_1^2 u_+^{(1)}(\mathbf{x}) - \mu_2 v_-^{(2)}(\mathbf{x}) - \mu_2^2 u_-^{(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_1 \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \psi(\mathbf{x}) \right) + \mu_1^2 \left(\int_{\partial D} \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) \\
&- \mu_2 \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \psi(\mathbf{x}) \right) - \mu_2^2 \left(\int_{\partial D} \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) \\
&= \frac{1}{2} (\mu_1 K_1 \psi + \mu_1 \psi + \mu_1^2 S_1 \varphi - \mu_2 K_2 \psi + \mu_2 \psi - \mu_2^2 S_2 \varphi) \\
&= \frac{1}{2} ((\mu_1 + \mu_2) \psi + (\mu_1 K_1 - \mu_2 K_2) \psi + (\mu_1^2 S_1 - \mu_2^2 S_2) \varphi) = f, \mathbf{x} \in \partial D
\end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mu_1 u_{1+}(\mathbf{x}) - \mu_2 u_{2-}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.193)$$

Αντιστοίχως, χρησιμοποιώντας τώρα επιπλέον τη σχέση (2.110) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{1+}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\partial u_{2-}(\mathbf{x})}{\partial n} = \\
&= \frac{\partial (v_+^{(1)}(\mathbf{x}) + \mu_1 u_+^{(1)}(\mathbf{x}))}{\partial n} - \frac{\partial (v_-^{(2)}(\mathbf{x}) + \mu_2 u_-^{(2)}(\mathbf{x}))}{\partial n} \\
&= \frac{\partial v_+^{(1)}(\mathbf{x})}{\partial n} + \mu_1 \frac{\partial u_+^{(1)}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\partial v_-^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial u_-^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial n} \\
&= \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) + \mu_1 \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \varphi \right) \\
&- \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \right) - \mu_2 \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \varphi \right) \\
&= \frac{1}{2} (T_1 \psi + \mu_1 K_1' \varphi - \mu_1 \varphi - T_2 \psi - \mu_2 K_2' \varphi - \mu_2 \varphi) \\
&= \frac{1}{2} ((-\mu_1 - \mu_2) \varphi + (T_1 - T_2) \psi + (\mu_1 K_1' - \mu_2 K_2') \varphi) \\
&- \frac{1}{2} ((\mu_1 + \mu_2) \varphi - (T_1 - T_2) \psi - (\mu_1 K_1' - \mu_2 K_2') \varphi) = g
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\frac{\partial u_{1+}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\partial u_{2-}(\mathbf{x})}{\partial n} = g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2.194)$$

Επομένως από (2.193), (2.194) αποδείξαμε ότι αν τα πεδία u_1, u_2 ικανοποιούν τις ολοκληρωτικές αναπαράστασεις (2.186), (2.186) τότε ικανοποιούν τις συνθήκες

διαπερατότητας (2.182)-(2.183), δηλαδή το ζεύγος (u_1, u_2) αποτελεί λύση του (μη ομογενούς) προβλήματος μεταφοράς.

Παρατήρηση 2.Θ

Στα θεωρήματα ύπαρξης λύσης των προβλημάτων ακουστικής σκέδασης με αρμονική χρονική εξάρτηση, δηλαδή στα θεωρήματα (2.8)-(2.12), αποδεικνύουμε την ύπαρξη λύσης κάθε προβλήματος σε μορφή δυναμικού απλού ή διπλού στρώματος ή σε γραμμικό συνδυασμό τους. Μέσω των ιδιοτήτων των δυναμικών αυτών δηλαδή μέσω των σχέσεων (2.110) και (2.114) μετασχηματίζουμε κάθε πρόβλημα σε μια ολοκληρωτική εξίσωση (ή σε ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων στην περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς). Επομένως το δυναμικό ή ο συνδυασμός δυναμικών που είναι λύση της έκαστης ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι λύση και του αντίστοιχου προβλήματος που έχει μετασχηματιστεί σε αυτήν.

Παρατήρηση 2.Ι

Με λύση u στα παραπάνω θεωρήματα αν αναφερόμαστε σε προβλήματα σκέδασης μη διαπερατού σκεδαστή δηλαδή σε εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών θα εννοούμε το σκεδασμένο πεδίο u^s .

Παραδειγματικά η μη ομογενής συνθήκη Dirichlet (2.159) του θεωρήματος 2.15 για το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet είναι

$$u^s = f \Leftrightarrow u^s = -u^i \Leftrightarrow u^t = 0, x \in \partial D, \quad (2.195)$$

δηλαδή η δοσμένη συνεχής συνάρτηση f στην περίπτωση των προβλημάτων σκέδασης θα είναι το δοσμένο $-u^i$ και το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα θα έχει ομογενής συνθήκη τη

$$u^s = 0, x \in \partial D, \quad (2.196)$$

Ομοίως, για το εξωτερικό μη ομογενές πρόβλημα Neumann η μη ομογενής συνθήκη είναι η

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} = g \Leftrightarrow \frac{\partial u^s}{\partial n} = -\frac{\partial u^i}{\partial n} \Leftrightarrow \frac{\partial u^t}{\partial n} = 0, x \in \partial D \quad (2.197)$$

δηλαδή η δοσμένη συνεχής συνάρτηση g στην περίπτωση των προβλημάτων σκέδασης θα είναι η $-\frac{\partial u^i}{\partial n}$, όπου το u^i είναι το δοσμένο προσπίπτον πεδίο και το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα θα έχει ομογενής συνθήκη τη

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} = 0 \quad (2.198)$$

Ομοίως, για το εξωτερικό μη ομογενές πρόβλημα Robin η μη ομογενής συνθήκη είναι η

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} + \lambda u^s = q \Leftrightarrow \frac{\partial u^s}{\partial n} + \lambda u^s = -\frac{\partial u^i}{\partial n} - \lambda u^i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u^t}{\partial n} + \lambda u^t = 0, \mathbf{x} \in \partial D \quad (2.199)$$

δηλαδή η δοσμένη συνεχής συνάρτηση q στην περίπτωση των προβλημάτων σκέδασης θα είναι η $-\frac{\partial u^i}{\partial n} - \lambda u^i$, όπου το u^i είναι το δοσμένο προσπίπτον πεδίο και το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα θα έχει ομογενής συνθήκη τη

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} + \lambda u^s = 0 \quad (2.200)$$

Υπενθυμίζουμε ότι όσον αφορά την περίπτωση διαπερατού σκεδαστή όμως, δηλαδή όσον αφορά το πρόβλημα μεταφοράς (2.31), οι λύσεις είναι το ολικό εξωτερικό πεδίο u_1 και το ολικό εσωτερικό πεδίο u_2 , επομένως οι συνοριακές συνθήκες σε αυτό αφορούν τα ολικά πεδία και όχι το σκεδασμένο πεδίο όπως στα προβλήματα μη διαπερατού σκεδαστή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Αρχικά, θα αναφερθούμε στις χρονικά εξαρτημένες εξισώσεις Maxwell και στις χρονικά εξαρτημένες καταστατικές σχέσεις.

Έπειτα, θα ορίσουμε αρμονική χρονική εξάρτηση και μέσω των χρονικά ανεξάρτητων καταστατικών σχέσεων θα καταλήξουμε στις χρονικά ανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell.

Εν συνεχεία, κάνοντας απαλοιφή του μαγνητικού και αντίστοιχα του ηλεκτρικού πεδίου στις χρονικά ανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell θα καταλήξουμε στις διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz των οποίων λύσεις είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης.

Έπειτα, θα εισάγουμε τις έννοιες των επίπεδων και των σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Εν συνεχεία, θα περιγράψουμε τις βασικότερες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή. Έπειτα θα ορίσουμε δύο συνθήκες ακτινοβολίας (μια για το σκεδασμένο ηλεκτρικό πεδίο και μια για το σκεδασμένο μαγνητικό πεδίο), τις λεγόμενες συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller, οι οποίες είναι απαραίτητες για την 'καλή τοποθέτηση' των προβλημάτων σκέδασης. Και τέλος θα διατυπώσουμε και θα περιγράψουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση.

Εν συνεχεία, θα αναφερθούμε σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χειρόμορφο περιβάλλον. Θα περιγράψουμε τις εξισώσεις που αυτά ικανοποιούν μέσα σε ένα τέτοιου είδους μέσο και θα αποδείξουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Helmholtz των οποίων λύσεις είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης.

Τέλος, θα εισάγουμε τα πεδία Beltrami. Θα αποδείξουμε ότι και αυτά ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz με το δικό τους κυματικό αριθμό το καθένα. Έπειτα θα εκφράσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης ως γραμμικούς συνδυασμούς των πεδίων Beltrami και θα αποδείξουμε τις συνθήκες ακτινοβολίας που τα πεδία Beltrami ικανοποιούν. Ο λόγος της εισαγωγής των πεδίων Beltrami είναι ότι η χρήση τους στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε χειρόμορφα υλικά είναι σημαντική καθώς οδηγεί σε απλούστερες και βολικότερες σχέσεις. Τέλος, θα διατυπώσουμε τα θεωρήματα των εσωτερικών και εξωτερικών ολοκληρωτικών αναπαράστασεων των πεδίων Beltrami.

Θεωρούμε τη διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος μέσα σε ένα γραμμικό, ομογενές, ιστροπικό μέσο στο \mathbb{R}^3 .

Στο κεφάλαιο αυτό, με \mathbf{r} θα συμβολίζουμε το διάνυσμα της θέσης (με $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$) και με t το χρόνο ($t \in \mathbb{R}$).

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες από τις παραμέτρους που θα συναντήσουμε σ αυτό το κεφάλαιο.

ε : η διηλεκτρική σταθερά του μέσου διάδοσης

μ : η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου διάδοσης

σ : η αγωγιμότητα του μέσου διάδοσης

k : ο κυματικός αριθμός που δίνεται από τον τύπο

$$k^2 = \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2, \quad (3.1)$$

όπου στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συνήθως υποθέτουμε ότι $Im(k) \geq 0$.

Z : η χαρακτηριστική αντίσταση που δίνεται από τον τύπο

$$Z = \frac{\mu \omega}{\sqrt{\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2}} = \frac{\mu \omega}{k} \quad (3.2)$$

Z_s : η χαρακτηριστική επιφανειακή αντίσταση

Y : η χαρακτηριστική αγωγιμότητα που δίνεται από τον τύπο

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2}}{\mu \omega} = \frac{k}{\mu \omega} \quad (3.3)$$

Παρατήρηση 3.A

Οι παραπάνω παράμετροι παίρνουν διαφορετικές τιμές ανάλογα με τα αν βρισκόμαστε στον εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ή στο εσωτερικό του σκεδαστή D . Για να ξεχωρίζουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις θα συμβολίζουμε τις παραμέτρους που αφορούν το εξωτερικό του σκεδαστή είτε όπως παραπάνω είτε με έναν εκθέτη + ενώ θα συμβολίζουμε τις παραμέτρους που αφορούν το εσωτερικό του σκεδαστή πάντα με έναν εκθέτη - .

Πιο συγκεκριμένα, για ευκολία συμβολισμού, ο εκθέτης + θα παραλείπεται στις περισσότερες περιπτώσεις με βασική εξαίρεση τις περιπτώσεις διαπερατού σκεδαστή όπου θα εμφανίζονται πάντα οι εκθέτες +, - .

Επίσης, παρακάτω αναφέρουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις που θα συναντήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

\mathcal{E} : το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου

\mathcal{B} : το διάνυσμα της πυκνότητας της μαγνητικής ροής,

\mathcal{H} : το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου

\mathcal{D} : το διάνυσμα της πυκνότητας της ηλεκτρικής ροής

\mathcal{J} : το διάνυσμα της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος.

και με $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ θα συμβολίσουμε τα αντίστοιχα χωρικά μέρη των παραπάνω συναρτήσεων.

3.1 Χρονικά εξαρτημένες εξισώσεις Maxwell

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ικανοποιούν δύο θεμελιώδεις εξισώσεις οι οποίες ονομάζονται (*χρονικά εξαρτημένες*) **Εξισώσεις Maxwell** και αποτελούνται από

τη διαφορική μορφή του νόμου του Faraday

$$\nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathcal{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.4)$$

και τη διαφορική μορφή του νόμου του Ampere

$$\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

Σε ένα γραμμικό, ομογενές, ιστροπικό μέσο ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}, \quad (3.8)$$

οι οποίες ονομάζονται (*χρονικά εξαρτημένες*) **καταστατικές σχέσεις**.

Επομένως, μέσα σε ένα τέτοιο μέσο οι χρονικά εξαρτημένες εξισώσεις Maxwell (3.4)-(3.5) μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$\nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.10)$$

3.2 Αρμονική χρονική εξάρτηση

Θεωρούμε αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.15)$$

Όπου οι ποσότητες $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις θέσης και χρησιμοποιούνται παγκοσμίως στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Οι χρονικά εξαρτημένες εξισώσεις Maxwell (3.4)-(3.5) μέσω των (3.11)-(3.15) παίρνουν την ακόλουθη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

Σε ένα γραμμικό, ομογενές, ιστροπικό μέσο ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \quad (3.20)$$

οι οποίες ονομάζονται (χρονικά ανεξάρτητες) **καταστατικές σχέσεις**.

Επομένως, σε ένα τέτοιο μέσο, οι εξισώσεις Maxwell (3.16)-(3.17) παίρνουν τη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = (-i\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

Οι εξισώσεις (3.21)-(3.22) ονομάζονται **χρονικά ανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell**.

Παρατήρηση 3.B

Στις σχέσεις (3.11)-(3.15), που αφορούν αρμονική χρονική εξάρτηση, σε μερικά βιβλία εμφανίζεται στο δεξιό μέλος ο τελεστής Re ο οποίος δίνει ως αποτέλεσμα το πραγματικό μέρος της συνάρτησης στην οποία εφαρμόζεται.

Παρ'όλα αυτά σε αυτήν την εργασία θα κάνουμε την ευρέως αποδεκτή σύμβαση να γράφουμε τις σχέσεις της αρμονικής χρονικής εξάρτησης χωρίς τον τελεστή Re με την κατανόηση ότι στις περιπτώσεις που οι σχέσεις μας αφορούν φυσικά μεγέθη τότε οι ποσότητες αυτές θα αντιστοιχούν στα πραγματικά μέρη.

3.3 Διανυσματική εξίσωση Helmholtz

Σε αυτήν την παράγραφο θα κάνουμε απαλοιφή του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου στις χρονικά ανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell με σκοπό να κατασκευάσουμε τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz, την οποία ικανοποιεί και το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης όπως θα δούμε παρακάτω.

Από εδώ και στο εξής σε όλο το 3^ο κεφάλαιο θεωρούμε ότι το μέσο διάδοσης είναι ένα μη αγώγιμο μέσο και επομένως έχουμε $\sigma = 0$.

Σε αυτήν την περίπτωση οι χρονικά ανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell (3.21)-(3.22) και ο κυματικός αριθμός (3.1) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2\tag{3.24}$$

Εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στην εξίσωση Maxwell (3.21) με σκοπό την απαλοιφή του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

Χρησιμοποιώντας την (3.23) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Χρησιμοποιώντας την (3.24) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}),\tag{3.25}$$

η οποία ονομάζεται **τροποποιημένη διανυσματική εξίσωση Helmholtz**.

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (0.3) για το \mathbf{E} , δηλαδή

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r})\tag{3.26}$$

Παίρνουμε

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}),\tag{3.27}$$

Επίσης, από τη σχέση (3.23) και τη διανυσματική ταυτότητα (0.4) για το \mathbf{H} , δηλαδή

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.28)$$

Έχουμε ότι

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) = \nabla \cdot (-i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})) = -i\omega\epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Επομένως η σχέση (3.27) μέσω της (3.30) παίρνει την τελική μορφή

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

η οποία ονομάζεται **διανυσματική εξίσωση Helmholtz**.

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο μετατόπισης $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ είναι λύση της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz με κυματικό αριθμό k .

Τελείως αντιστοίχως, εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στην εξίσωση Maxwell (3.23) με σκοπό την απαλοιφή του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.32)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.21) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H}(\mathbf{r})$$

Χρησιμοποιώντας τη (3.24) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = k^2\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.33)$$

η οποία ονομάζεται **τροποποιημένη διανυσματική εξίσωση Helmholtz**.

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (0.3) για το \mathbf{H} , δηλαδή

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})) - \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.34)$$

Παίρνουμε

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})) - \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = k^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.35)$$

Επίσης, από τη σχέση (3.21) και τη διανυσματική ταυτότητα (0.4) για το \mathbf{E} , δηλαδή

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.36)$$

Έχουμε ότι

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \nabla \cdot (i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r})) = i\omega\mu\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})) = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

Επομένως η σχέση (3.35) μέσω της (3.38) παίρνει την τελική μορφή

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.39)$$

η οποία ονομάζεται **διανυσματική εξίσωση Helmholtz**.

Επομένως το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ είναι λύση της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz με κυματικό αριθμό k .

3.4 Επίπεδα και Σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Μια κατηγοριοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι αυτή σε επίπεδα και σφαιρικά κύματα. Αυτά τα δύο είδη κυμάτων θα αναφερθούν στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που θα μελετήσουμε παρακάτω.

A. Επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Επίπεδα ηλεκτρικά και μαγνητικά κύματα ονομάζουμε αντίστοιχα κύματα της μορφής

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{a}} e^{ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{b}} \gamma e^{ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.41)$$

όπου $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ διανύσματα πόλωσης και $\hat{\mathbf{d}}$ η διεύθυνση διάδοσης τέτοια ώστε $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{d}}$ και επομένως $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$.

B. Σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Θεωρούμε κύματα που εκπέμπονται είτε από ένα ηλεκτρικό δίπολο είτε από ένα μαγνητικό δίπολο.

Θέτουμε $\tilde{\mathbf{I}}$ το ταυτοτικό δυαδικό

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.42)$$

και επίσης συμβολίζουμε με G τη θεμελιώδη λύση της (βαθμωτής) εξίσωσης Helmholtz όπως αυτή έχει οριστεί στη σχέση (2.9) του Κεφαλαίου 2 δηλαδή

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) := \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (3.43)$$

Αρχικά, θεωρούμε κύματα που εκπέμπονται από ένα ηλεκτρικό δίπολο που βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_0 , με μονάδα ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\hat{\mathbf{p}}$.

Τα κύματα αυτά είναι της μορφής

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{ik}{4\pi\epsilon} (k^2 \tilde{\mathbf{I}} + \nabla_r \nabla_r) \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{p}}] \quad (3.44)$$

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{k\omega}{4\pi} \nabla_r \times [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{p}}] \quad (3.45)$$

Αντιστοίχως, θεωρούμε κύματα που εκπέμπονται από ένα μαγνητικό δίπολο, που βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_0 , με μονάδα μαγνητικής διπολικής ροπής $\hat{\mathbf{m}}$.

Τα κύματα αυτά είναι της μορφής

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{k\omega\mu}{4\pi} \nabla_r \times [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{m}}] \quad (3.46)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{ik}{4\pi} (k^2 \tilde{\mathbf{I}} + \nabla_r \nabla_r) \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{m}}] \quad (3.47)$$

Επιπλέον θέτουμε

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{k^2} (\nabla_r \nabla_r + k^2 \tilde{\mathbf{I}}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (3.48)$$

Όπου η συνάρτηση $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ είναι η **δυναμική θεμελιώδης λύση της τροποποιημένης διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz** καθώς ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla_r \times (\nabla_r \times \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) - k^2 \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{4\pi}{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tilde{\mathbf{I}}, \quad (3.49)$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ όπως δίνεται στη σχέση (3.42) και όπου δ το συναρτησιακό Dirac με τις ιδιότητες (2.6)-(2.7) όπως αυτές δίνονται στο κεφάλαιο 2.

Τα διπολικά κύματα \mathbf{E}_e και \mathbf{H}_m που ορίσαμε παραπάνω στις σχέσεις (3.44),(3.47), μπορούν να εκφραστούν μέσω της θεμελιώδους λύσης της τροποποιημένης διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz $\tilde{\mathbf{G}}$ ως εξής

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{ik^3}{4\pi\epsilon} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{ik^3}{4\pi} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{m}} \quad (3.51)$$

3.5 Συνοριακές συνθήκες

Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση σε ένα γραμμικό, ομογενές, ιστροπικό μέσο διάδοσης στο \mathbb{R}^3 για το οποίο ισχύει ότι $\sigma = 0$.

Θεωρούμε μέσα σε αυτό το μέσο ένα εμπόδιο. Αυτό το εμπόδιο είναι ένα φραγμένο χωρίο D το οποίο ονομάζουμε σκεδαστή και με ∂D συμβολίζουμε το σύνορό του.

Με \mathbf{n} συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο ως προς το σύνορο του σκεδαστή διάνυσμα το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή.

Ονομάζουμε το αρχικό κυματικό πεδίο **προσπίπτον κύμα** και το συμβολίζουμε με $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ και ονομάζουμε το κυματικό πεδίο που δημιουργείται ως αποτέλεσμα της σκέδασης **σκεδασμένο κύμα** και το συμβολίζουμε με $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$. Τέλος ονομάζουμε το άθροισμά τους **ολικό κύμα** και το συμβολίζουμε με $(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t)$.

Επομένως, στο χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \quad (3.52)$$

$$\mathbf{H}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \quad (3.53)$$

Όσον αφορά το σύνορο του σκεδαστή τώρα, οι συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα χωρικά τμήματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου δηλαδή τα πεδία μετατόπισης $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ πάνω στην επιφάνεια (σύνορο) του σκεδαστή ονομάζονται **συνοριακές συνθήκες** και εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

Οι σκεδαστές χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στους **διαπερατούς** και στους **μη διαπερατούς σκεδαστές**. Στην πρώτη περίπτωση το κύμα δεν εισέρχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή ενώ στη δεύτερη εισέρχεται.

Στην περίπτωση διαπερατού σκεδαστή έχουμε δύο είδη συνοριακών συνθηκών.

1) Τέλειος αγωγός (Perfectly conducting surface)

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.54)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^t(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.55)$$

Στην περίπτωση αυτή η επαπτομενική συνιστώσα του ολικού ηλεκτρικού πεδίου μετατόπισης είναι ίση με μηδέν πάνω στην αγωγίμη επιφάνεια (σύνορο) του σκεδαστή.

2) Σκεδαστής με αντίσταση (Impedance surface)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r})) = -Z_s Z^+ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^t(\mathbf{r})), \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.56)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = +Z_s Z^+ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^t(\mathbf{r})), \mathbf{r} \in \partial D, \quad (3.57)$$

όπου με Z_s συμβολίζουμε την επιφανειακή αντίσταση και με Z^+ την αντίσταση του μέσου στο χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή αυτού του Κεφαλαίου και στην Παρατήρηση 3.A.

Η χρήση αυτής της συνοριακής συνθήκης έχει επεκταθεί με τα χρόνια και αφορά την περίπτωση όπου το αρχικό (προσπίπτον) ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει στο σύνορο ενός σκεδαστή που δεν είναι τέλεια αγωγή αλλά δεν αφήνει το πεδίο να εισχωρήσει βαθιά στο εσωτερικό του.

Στην περίπτωση διαπερατού σκεδαστή έχουμε ένα είδος συνοριακών συνθηκών.

3) Συνθήκες διαπερατότητας ή συνθήκες μεταφοράς (transmission conditions)

Θέτοντας $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ το ολικό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ το ολικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ το ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και $\mathbf{H}_2(\mathbf{r})$ το ολικό εσωτερικό μαγνητικό πεδίο, έχουμε τις εξής συνθήκες

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.58)$$

$$\varepsilon^+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \varepsilon^- \left(1 + \frac{i\sigma^-}{\varepsilon^- \omega} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.59)$$

είτε $Y^+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \eta Y^- \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.60)$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.61)$$

$$\mu^+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mu^- \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.62)$$

είτε $Z^+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \eta Z^- \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D, \quad (3.63)$

όπου η είναι ο σχετικός δείκτης διάθλασης και δίνεται από τον τύπο

$$\eta = \frac{k^-}{k^+} = \sqrt{\frac{\mu^- \varepsilon^-}{\mu^+ \varepsilon^+}} \sqrt{1 + i \frac{\sigma^-}{\varepsilon^- \omega}} \quad (3.64)$$

και όπου τα $\varepsilon, \mu, \sigma, \omega, Y, Z$ με τους αντίστοιχους + ή/και - εκθέτες είναι παράμετροι που έχουν οριστεί στην εισαγωγή αυτού του Κεφαλαίου και στην Παρατήρηση 3.Α.

Δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις (3.58) και (3.61), μια εκ των (3.59)-(3.60) και τέλος μια εκ των (3.62)-(3.63), δηλαδή συνολικά 4 συνθήκες.

Σε αυτήν την περίπτωση οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ολικού ηλεκτρικού και του ολικού μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι συνεχείς στο σύνορο του σκεδαστή δηλαδή οι εφαπτομενικές συνιστώσες των ολικών εξωτερικών πεδίων πρέπει να είναι ίσες με αυτές των ολικών εσωτερικών πεδίων πάνω στο σύνορο του σκεδαστή.

Παρατήρηση 3.Γ

Τα προσπίπτοντα πεδία μπορεί να είναι είτε επίπεδα κύματα είτε σφαιρικά κύματα είτε γραμμικός συνδυασμός τους.

Τα σκεδασμένα πεδία είναι πάντοτε σφαιρικά κύματα.

3.6 Συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller

Ένα πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για να είναι καλά τοποθετημένο πρέπει να ικανοποιεί επιπρόσθετα από τις συνοριακές συνθήκες και δύο συνθήκες στο άπειρο, μια που αφορά το σκεδασμένο ηλεκτρικό πεδίο και μια που αφορά το σκεδασμένο μαγνητικό πεδίο. Αυτές οι συνθήκες στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ονομάζονται **συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller**, αφορούν το σκεδασμένο πεδίο $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ και δίνονται από τους τύπους

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r})) + ikr\mathbf{E}^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.65)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r})) + ikr\mathbf{H}^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.66)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

ή ισοδύναμα

$$Z^+ \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty, \quad (3.67)$$

$$Y^+ \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} - \mathbf{H} = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty, \quad (3.68)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$.

Όπου
$$r = |\mathbf{r}| \quad (3.69)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.70)$$

και S^2 η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 .

Οι συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ στο άπειρο και εξασφαλίζουν ότι αυτό θα διαδίδεται από το σκεδαστή (που δρα σαν πηγή) προς το άπειρο και θα έχει ασυμπτωτική τάξη εξασθένισης με την απόσταση από τον σκεδαστή δηλαδή θα εξασθενεί ασυμπτωτικά με την αύξηση της απόστασης $|r|$ από το σκεδαστή.

Παρατήρηση 3.Δ

Τα επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (3.40)-(3.41) δεν ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller.

Τα σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα (3.44)-(3.47) ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller.

3.7 Τα βασικά προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα συλλέξουμε τα αποτελέσματα των παραπάνω παραγράφων 3.5 και 3.6 και θα διατυπώσουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση.

1) Πρόβλημα σκέδασης από έναν τέλειο αγωγό (The perfect conductor problem)

Δεδομένου των προσπιπτόντων πεδίων E^i, H^i και των $\omega, \varepsilon^+, \mu^+$ (άρα και των Z^+, Y^+, k), αναζητάμε τα ολικά πεδία $E^t, H^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για τα οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις.

$$\begin{aligned}
 E^t(\mathbf{r}) &= E^i(\mathbf{r}) + E^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\
 H^t(\mathbf{r}) &= H^i(\mathbf{r}) + H^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\
 \nabla \times E^s(\mathbf{r}) &= i\omega\mu H^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\
 \nabla \times H^s(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon E^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\
 \mathbf{n} \times E^t(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D \\
 \mathbf{n} \cdot H^t(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times E^s(\mathbf{r})) + ikrE^s(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}, \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times H^s(\mathbf{r})) + ikrH^s(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}, \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

ομοίωμα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Με άλλα λόγια να βρεθεί το ολικό ηλεκτρικό πεδίο E^t και το ολικό μαγνητικό πεδίο H^t τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις (3.52) και (3.53) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και τις συνοριακές συνθήκες ενός τέλει αγωγού (3.54) και (3.55) στο σύνορο του σκεδαστή ∂D και των οποίων τα σκεδασμένα πεδία E^s, H^s ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell (3.21) και (3.23) στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller (3.65) και (3.66).

2) Πρόβλημα σκέδασης με αντίσταση (The impedance problem)

Δεδομένου των προσπιπτόντων πεδίων E^i, H^i και των $\omega, \varepsilon^+, \mu^+$ (άρα και των Z^+, Y^+, k), αναζητάμε τα ολικά πεδία $E^t, H^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για τα οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις.

$$\begin{aligned}
 E^t(\mathbf{r}) &= E^i(\mathbf{r}) + E^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\
 H^t(\mathbf{r}) &= H^i(\mathbf{r}) + H^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\
 \nabla \times E^s(\mathbf{r}) &= i\omega\mu H^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\
\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r})) &= -Z_s Z^+ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^t(\mathbf{r})), \mathbf{r} \in \partial D \\
\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r})) + ikr\mathbf{E}^s(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r})) + ikr\mathbf{H}^s(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}, \tag{3.72}
\end{aligned}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Με άλλα λόγια να βρεθεί το ολικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^t και το ολικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}^t τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις (3.52) και (3.53) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και τη συνοριακή συνθήκη ενός σκεδαστή με αντίσταση (3.56) στο σύνορο του σκεδαστή ∂D και των οποίων τα σκεδασμένα πεδία $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell (3.21) και (3.23) στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller (3.65) και (3.66).

Το πρόβλημα σκέδασης με αντίσταση μετατρέπεται σε πρόβλημα σκέδασης από έναν τέλειο αγωγό καθώς η επιφανειακή αντίσταση Z_s τείνει στο μηδέν.

3) Πρόβλημα μεταφοράς (The Transmission Problem)

Θέτουμε $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ το ολικό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ το ολικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ το ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και $\mathbf{H}_2(\mathbf{r})$ το ολικό εσωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Δεδομένου των προσπιπτόντων πεδίων $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$ και των $\omega, \varepsilon^+, \mu^+, \varepsilon^-, \mu^-, \sigma^-$ (άρα και των $Z^+, Y^+, Z^-, Y^-, k, \eta$), αναζητάμε τα ολικά εξωτερικά πεδία $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και τα ολικά εσωτερικά πεδία $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ για τα οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\
\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \\
\nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mathbf{H}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\
\nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}^s(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\
\nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mathbf{H}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D \\
\nabla \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D \\
\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \\
\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \\
Y^+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \eta Y^- \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= \eta Z^- \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \\
\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r})) + ikr \mathbf{E}^s(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r})) + ikr \mathbf{H}^s(\mathbf{r})] &= \mathbf{0}, \tag{3.73}
\end{aligned}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in \mathcal{S}^2$.

Με άλλα λόγια να βρεθεί το ολικό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_1 και το ολικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}_1 τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις (3.52) και (3.53) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και των οποίων τα σκεδασμένα πεδία $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell (3.21) και (3.23) στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller (3.65) και (3.66). Επίσης να βρεθεί το ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_2 και το ολικό εσωτερικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}_2 που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell (3.21) και (3.23) στο εσωτερικό του σκεδαστή D και έτσι ώστε να ικανοποιούνται επίσης οι συνθήκες διαπερατότητας (3.58),(3.60),(3.61),(3.63) στο σύνορο του σκεδαστή ∂D .

Παρατήρηση 3.Ε

Ένα πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μπορεί να γραφτεί ως προς το ένα πεδίο μόνο (είτε το ηλεκτρικό είτε το μαγνητικό) κάνοντας απαλοιφή στις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούνται (πιο συγκεκριμένα στις εξισώσεις Maxwell και στις συνοριακές συνθήκες). Με τον τρόπο αυτό ζητούμενο θα είναι μόνο το ένα πεδίο και η εύρεση του θα αρκεί για την εύρεση και του άλλου πεδίου καθώς το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους πεδία αλλά αντιθέτως γνωρίζοντας το ένα μπορούμε να βρούμε και το άλλο μέσω των εξισώσεων Maxwell (3.21) και (3.23). Στην περίπτωση αυτή η τάξη παραγωγίσισης αυξάνει κατά ένα.

3.8 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χειρόμορφο υλικό

Η χειρομορφία είναι μια ιδιότητα που συναντάται συχνά στη φύση και εκφράζει την ασυμμετρία ως προς τη χωρική αναστροφή δηλαδή η διάταξη των ατόμων ενός χειρόμορφου υλικού παρουσιάζει ασυμμετρία με αποτέλεσμα τα μόρια του να μην συμπίπτουν με το είδωλο τους στον καθρέφτη.

Σε αυτήν την παράγραφο θα υποθέσουμε ότι το μέσο διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ένα χειρόμορφο μέσο και θα αναφέρουμε τις εξισώσεις που τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ικανοποιούν όταν διαδίδονται μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον.

Θεωρούμε πάλι αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής (3.11)-(3.15).

Σε ένα γραμμικό, ομογενές και ισοτοπικό χειρόμορφο μέσο με παράμετρο χειρομορφίας β ισχύουν οι εξισώσεις

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \beta \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (3.74)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \beta \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})), \quad (3.75)$$

οι οποίες ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις Drude-Born-Fedorov** και εκφράζουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συναρτήσει της παραμέτρου χειρομορφίας β .

Οι εξισώσεις Maxwell (3.16)-(3.17) μέσω των καταστατικών εξισώσεων Drude-Born-Fedorov (3.74)-(3.75) σε ένα μη αγώγιμο μέσο διάδοσης δηλαδή με $\sigma = 0$ ($\mathcal{J} = 0$) παίρνουν τη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \beta \gamma^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.76)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \beta \gamma^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega\varepsilon \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.77)$$

όπου $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ (3.78)

και $\gamma^2 = \frac{k^2}{(1 - \beta^2 k^2)}$ (3.79)

με $|\beta k| < 1$, (3.80)

οι οποίες (3.76)-(3.77) ονομάζονται **τροποποιημένες εξισώσεις Maxwell**.

Η παράμετρος k στις παραπάνω εξισώσεις (3.76)-(3.80) δεν είναι κυματικός αριθμός αλλά μια παράμετρος χωρίς φυσική σημασία.

Αντιθέτως, στη μη χειρόμορφη περίπτωση ($\beta = 0$) με αρμονική χρονική εξάρτηση (όπως είχαμε στις παραγράφους 3.1-3.7 αυτού του κεφαλαίου) η παράμετρος k είναι ο κυματικός αριθμός.

Εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στην εξίσωση Maxwell (3.76) με σκοπό την απαλοιφή του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \beta \gamma^2 \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (3.81)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.77), (3.78), (3.79) και τη σχέση (3.76) λυμένη ως προς το πεδίο \mathbf{H} , παίρνουμε ότι

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \beta \gamma^2 \nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \left[\beta \gamma^2 \mathbf{H} - i\omega\varepsilon \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{E} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\beta\gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{H} + \omega^2\varepsilon\mu \left(\frac{\gamma}{k}\right)^4 \mathbf{E} \\
&= \beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\beta\gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{H} + \kappa^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^4 \mathbf{E} \\
&= \beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\beta\gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{E} \\
&= \beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\beta\gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \left[\frac{\nabla \times \mathbf{E} - \beta\gamma^2\mathbf{E}}{i\omega\mu \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2} \right] \\
&+ \gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \mathbf{E} \\
&= 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + \left(\gamma^2 \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 - \beta^2\gamma^4\right) \mathbf{E} \\
&= 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + \gamma^4 \left(\frac{1}{k^2} - \beta^2\right) \mathbf{E} \\
&= 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + \gamma^4 \left(\frac{1 - \beta^2k^2}{k^2}\right) \mathbf{E} \\
&= 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + \gamma^4 \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{E} = 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E} + \gamma^2\mathbf{E}
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \gamma^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (3.26) και τη σχέση (3.29) παίρνουμε

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \gamma^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.83)$$

η οποία ονομάζεται **τροποποιημένη διανυσματική εξίσωση Helmholtz**.

Να σχολιάσουμε ότι στη μη χειρόμορφη περίπτωση ($\beta = 0$) η εξίσωση (3.83) παίρνει τη μορφή

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \gamma^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

<=>

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.84)$$

καθώς από τη σχέση (3.79) για $\beta = 0$ έχουμε ότι $\gamma = k$, η οποία είναι η *συνήθης διανυσματική εξίσωση Helmholtz* που έχουμε ήδη δει στην παράγραφο 3.3.

Τελείως αντιστοίχως, εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στην εξίσωση Maxwell (3.77) με σκοπό την απαλοιφή του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega\mu \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.85)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.76),(3.78),(3.79) και τη σχέση (3.77) λυμένη ως προς το \mathbf{E} , παίρνουμε τελικά τη σχέση

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - 2\beta\gamma^2\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \gamma^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.86)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (3.34) και τη σχέση (3.37) παίρνουμε τελικά την εξίσωση

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + 2\beta\gamma^2 \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \gamma^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.87)$$

η οποία ονομάζεται **τροποποιημένη διανυσματική εξίσωση Helmholtz**.

Ομοίως να αναφέρουμε ότι στη μη χειρόμορφη ($\beta = 0$) περίπτωση η εξίσωση (3.87) γίνεται

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \gamma^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.88)$$

$$\Leftrightarrow \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

καθώς από τη σχέση (3.79) για $\beta = 0$ έχουμε ότι $\gamma = k$, η οποία είναι η *συνήθης διανυσματική εξίσωση Helmholtz* που έχουμε ήδη δει στην παράγραφο 3.3.

Παρατήρηση 3.ΣΤ

Αντιστοίχως με την Παρατήρηση 3.Ε έτσι και στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε χειρόμορφο περιβάλλον μπορούμε να κάνουμε απαλοική στις σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται (πιο συγκεκριμένα στις τροποποιημένες εξισώσεις Maxwell και στις συνοριακές συνθήκες) με σκοπό να μελετήσουμε το πρόβλημα ως προς ένα άγνωστο πεδίο μόνο. Η εύρεση ενός εκ των δύο πεδίων (ηλεκτρικό ή μαγνητικό) συνεπάγεται την εύρεση του άλλου χάρη στις τροποποιημένες εξισώσεις Maxwell (3.76)-(3.77). Στην περίπτωση αυτή η τάξη παραγωγίσις αυξάνει κατά ένα.

3.9 Πεδία Beltrami

Σε αυτήν την παράγραφο θα μιλήσουμε για τα πεδία Beltrami. Η χρήση των πεδίων Beltrami στα προβλήματα σκέδασης σε χειρόμορφα υλικά οδηγεί σε απλούστερες και βολικότερες σχέσεις καθώς οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες εμπλέκονται τα πεδία Beltrami είναι πρώτης τάξεως ενώ συνήθως στα προβλήματα σκέδασης ασχολούμαστε με συνήθεις και διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξεως. Επίσης οι περισσότερες εξισώσεις που ικανοποιούν τα πεδία Beltrami, όπως παραδειγματικά οι εξισώσεις ακτινοβολίας τους όπως θα δούμε παρακάτω, συνήθως αφορούν το καθένα τους ξεχωριστά κάτι τα οποίο είναι πολύ χρήσιμο για την μελέτη του σκεδασμένου πεδίου μακριά από το σκεδαστή.

Θεωρούμε ότι έχουμε διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ένα χειρόμορφο ομογενές, ιστροπικό μέσο. Μέσα σε ένα τέτοιο μέσο το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από μια αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένη συνιστώσα την οποία ονομάζουμε **LCP** (*Left-Circularly Polarized*) και μια δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένη

συνιστώσα την οποία ονομάζουμε **RCP** (*Right-Circularly Polarized*). Οι LCP και RCP συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχουν διαφορετικούς κυματικούς αριθμούς, ανεξάρτητες διευθύνσεις διάδοσης και διαφορετικές πολώσεις. Όταν ένα LCP ή ένα RCP ή ένας γραμμικός συνδυασμός τους προσπέσει πάνω σε ένα χειρόμορφο σκεδαστή τότε το σκεδασμένο κύμα που δημιουργείται αποτελείται και από LCP και από RCP συνιστώσες.

Θεωρούμε τώρα, δύο πεδία $\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R$ τα οποία ονομάζονται **πεδία Beltrami** και για τα οποία ισχύει ότι το \mathbf{Q}_L είναι ένα LCP ενώ το \mathbf{Q}_R είναι ένα RCP κύμα.

Η εύρεση των πεδίων Beltrami σχετίζεται με την αναζήτηση ενός πεδίου \mathbf{Q} παράλληλο με το $\nabla \times \mathbf{Q}$, δηλαδή ενός πεδίου \mathbf{Q} που ικανοποιεί τη σχέση

$$\nabla \times \mathbf{Q} = p\mathbf{Q}, \quad (3.89)$$

όπου p παράμετρος με $p \neq 0$.

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (0.4) για το ζητούμε αυτό διανυσματικό πεδίο \mathbf{Q} , δηλαδή την ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) = 0, \quad (3.90)$$

παίρνουμε ότι

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) = \nabla \cdot (p\mathbf{Q}) = p(\nabla \cdot \mathbf{Q})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0 \quad (3.91)$$

Επομένως παρατηρούμε ότι ένα πεδίο που ικανοποιεί τη σχέση (3.89) θα ικανοποιεί επίσης τη σχέση (3.91).

Όταν δεν έχουμε πηγές ισχύει ότι τα πεδία Beltrami ικανοποιούν τη σχέση (3.89) ως εξής

$$\nabla \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) = \gamma_L \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) \quad (3.92)$$

$$\nabla \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) = -\gamma_R \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}), \quad (3.93)$$

$$\text{όπου} \quad \gamma_L = \frac{k}{1 - k\beta} \quad (3.94)$$

$$\text{και} \quad \gamma_R = \frac{k}{1 + k\beta}, \quad (3.95)$$

όπου γ_L, γ_R είναι οι κυματικοί αριθμοί των $\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R$ αντίστοιχα, για τους οποίους θεωρούμε ότι

$$\text{Im}(\gamma_L) \geq 0, \text{Im}(\gamma_R) \geq 0, \text{Re}(\gamma_L) \geq 0, \text{Re}(\gamma_R) \geq 0 \quad (3.96)$$

και για τους οποίους μέσω της (3.79) βλέπουμε ότι

$$\gamma^2 = \gamma_L \gamma_R \quad (3.97)$$

Για το λόγο αυτό η εξίσωση (3.89) ονομάστηκε **εξίσωση Beltrami**.

Επομένως, τα πεδία Beltrami ικανοποιούν επίσης τη σχέση (3.91), δηλαδή

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.98)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.99)$$

Εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στις σχέσεις (3.92),(3.93) παίρνουμε ότι

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) = \gamma_L \nabla \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) \quad (3.100)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) = -\gamma_R \nabla \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}), \quad (3.101)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (0.3) για τα $\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R$, δηλαδή τις ταυτότητες

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_L = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_L) - \Delta \mathbf{Q}_L$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_R = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_R) - \Delta \mathbf{Q}_R$$

παίρνουμε ότι

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_L(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) = \gamma_L \nabla \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) \quad (3.102)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}_R(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) = \gamma_R \nabla \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) \quad (3.103)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.92),(3.93) και (3.98),(3.99) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\Delta \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) + \gamma_L^2 \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.104)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) + \gamma_R^2 \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.105)$$

οι οποίες ονομάζονται **διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz**.

Επομένως αποδείξαμε ότι τα πεδία Beltrami είναι λύσεις των διανυσματικών εξισώσεων Helmholtz (3.104)-(3.105) με κυματικούς αριθμούς γ_L, γ_R αντίστοιχα.

Τώρα, θα εκφράσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, τα οποία που έχουν LCP και RCP συνιστώσες, ως γραμμικούς συνδυασμούς των πεδίων Beltrami.

Οι τροποποιημένες εξισώσεις Maxwell (3.76),(3.77) μπορούν να οδηγήσουν στον ακόλουθο μετασχηματισμό των πεδίων $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = a_L \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) + a_R \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) \quad (3.106)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = c_L \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) + c_R \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}), \quad (3.107)$$

όπου a_L, a_R, c_L, c_R κατάλληλοι συντελεστές, ο οποίος ονομάζεται **μετασχηματισμός του Bohren**.

Ειδικότερα θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό του Bohren

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) - i\eta\mathbf{Q}_R(\mathbf{r}) \quad (3.108)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\eta}\mathbf{Q}_L(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_R(\mathbf{r}), \quad (3.109)$$

όπου
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (3.110)$$

για το οποίο θεωρούμε ότι

$$\text{Re}(\eta) \geq 0 \quad (3.111)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του Bohren (3.108)-(3.109) για το σκεδασμένο ηλεκτρικό και το σκεδασμένο μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα παίρνουμε

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) - i\eta\mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) \quad (3.112)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\eta}\mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) \quad (3.113)$$

Στα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα σκέδασης, τα σκεδασμένα ηλεκτρομαγνητικά πεδία ικανοποιούν στο άπειρο τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) + \eta\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.114)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$,

η οποία μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) - \eta\mathbf{H}^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.115)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$,

όπου $r, \hat{\mathbf{r}}$ όπως δίνονται από τις σχέσεις (3.69), (3.70) και S^2 η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 .

Η σχέση (3.114) ή ισοδύναμα (3.115) ονομάζεται **συνθήκη ακτινοβολίας Silver-Müller**.

Στα προβλήματα σκέδασης σε χειρόμορφα μέσα αρκεί μόνο μια εκ των δύο εξισώσεων ακτινοβολίας Silver-Müller (3.114),(3.115).

Αν αντικαταστήσουμε τα σκεδασμένα ηλεκτρομαγνητικά πεδία από τις σχέσεις (3.108),(3.109) στις εξισώσεις (3.114),(3.115) και πολλαπλασιάσουμε με i παίρνουμε τις σχέσεις

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[i\mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + \eta\mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + i\eta\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.116)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[-\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + i\eta\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) - i\mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + \eta\mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.117)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Προσθέτοντάς τώρα τις σχέσεις (3.116) και (3.117) γίνεται απαλοιφή του \mathbf{Q}_R και οδηγούμαστε σε μια συνθήκη ακτινοβολίας που περιέχει μονό το \mathbf{Q}_L ενώ αφαιρώντας τις σχέσεις (3.116) και (3.117) γίνεται απαλοιφή του \mathbf{Q}_L και οδηγούμαστε σε μια συνθήκη ακτινοβολίας που περιέχει μονό το \mathbf{Q}_R . Οι σχέσεις αυτές είναι οι εξής

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + i\mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.118)$$

και
$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) - i\mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r})] = \mathbf{0}, \quad (3.119)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) + i\mathbf{Q}_L^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right), |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (3.120)$$

και
$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) - i\mathbf{Q}_R^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right), |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (3.121)$$

Οι εξισώσεις (3.118)-(3.119) ή ισοδύναμα (3.19)-(3.20) ονομάζονται **συνθήκες ακτινοβολίας για τα πεδία Beltrami**.

Θέτουμε

$$\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\gamma_i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, i = L, R \quad (3.122)$$

τις θεμελιώδεις λύσεις των βαθμωτών εξισώσεων Helmholtz με κυματικούς αριθμούς $\gamma_i, i = R, L$ αντίστοιχα, δηλαδή των εξισώσεων

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \gamma_i^2 u(\mathbf{x}) = 0, i = L, R \quad (3.123)$$

όπου $\gamma_i, i = L, R$, όπως δίνονται από τις σχέσεις (3.94) και (3.95) αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.1 (Εσωτερικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των πεδίων Beltrami)

Έστω $\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ που ικανοποιούν αντίστοιχα τις εξισώσεις (3.92),(3.93) μέσα στο D .

Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$-\nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{y})) \Phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})$$

$$-\frac{1}{\gamma_L} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{y})) \Phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})$$

$$= \begin{cases} \mathbf{Q}_L(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (3.124)$$

και

$$\begin{aligned} & -\nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{y})) \Phi_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & + \frac{1}{\gamma_R} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{y})) \Phi_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & = \begin{cases} \mathbf{Q}_R(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.125)$$

Οι εξισώσεις (3.124),(3.125) ονομάζονται αντίστοιχα **εσωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση του \mathbf{Q}_L** και **εσωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση του \mathbf{Q}_R** .

Θεώρημα 3.2 (Εξωτερικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των πεδίων Beltrami)

Έστω $\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που ικανοποιούν αντίστοιχα τις εξισώσεις (3.92),(3.93) στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και επιπλέον ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας (3.118),(3.119).

Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} & \nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{y})) \Phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & + \frac{1}{\gamma_L} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_L(\mathbf{y})) \Phi_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{Q}_L(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.126)$$

και

$$\begin{aligned} & \nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{y})) \Phi_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & - \frac{1}{\gamma_R} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{Q}_R(\mathbf{y})) \Phi_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{Q}_R(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Οι εξισώσεις (3.126),(3.127) ονομάζονται αντίστοιχα **εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση του \mathbf{Q}_L** και **εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση του \mathbf{Q}_R** .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4⁰

Σκέδαση ελαστικών κυμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα ελαστικά κύματα. Η ελαστικότητα μελετάει το πώς ένα υλικό παραμορφώνεται όταν ασκηθούν σε αυτό καθορισμένες τάσεις. Πιο συγκεκριμένα στη γραμμική ελαστικότητα με την οποία θα ασχοληθούμε εμείς, όταν ασκηθούν τάσεις σε ένα ελαστικό υλικό, προκαλούνται σε αυτό μικρές παραμορφώσεις οι οποίες δεν είναι μόνιμες αλλά αντιθέτως εξαφανίζονται όταν η επιβαλλόμενη πίεση αφαιρεθεί έχοντας ως αποτέλεσμα το υλικό αυτό να γυρνάει στην αρχική του διαμόρφωση. Ένα κύμα που διαδίδεται σε ένα τέτοιο μέσο ονομάζεται (γραμμικά) ελαστικό κύμα.

Αρχικά θα αναφερθούμε στην εξίσωση Navier, θα θέσουμε αρμονική χρονική εξάρτηση και θα οδηγηθούμε στην χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Navier.

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε τη λεγόμενη ανάλυση Helmholtz βάση της οποίας κάθε λύση της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Navier μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα ενός διαμήκους (ή αλλιώς P) και ενός εγκάρσιου (ή αλλιώς S) κύματος, τα οποία P και S κύματα θα αποδείξουμε ότι είναι λύσεις της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz με το δικό του κυματικό αριθμό το καθένα ξεχωριστά.

Έπειτα, θα εισάγουμε τις έννοιες των επίπεδων και των σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών που συναντάμε στα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων και που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, κατόπιν θα ορίσουμε τις συνθήκες ακτινοβολίας που το σκεδασμένο πεδίο και πιο συγκεκριμένα το διαμήκες και το εγκάρσιο κύμα που αθροιστικά αποτελούν το σκεδασμένο ελαστικό κύμα πρέπει να ικανοποιούν και οι οποίες είναι απαραίτητες για την 'καλή τοποθέτηση' των προβλημάτων σκέδασης και τέλος θα διατυπώσουμε και θα περιγράψουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση.

Θεωρούμε τη διάδοση ενός ελαστικού κύματος μέσα σε ένα γραμμικό, ομογενές, ιστροπικό, ελαστικό μέσο.

Ένα τέτοιο υλικό χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα μάζας ρ (όπου συνήθως χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\rho = 1$) και από τις ελαστικές ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται από τις **σταθερές Lamé** λ, μ .

Στο κεφάλαιο αυτό, με \mathbf{r} θα συμβολίζουμε το διάνυσμα της θέσης (με $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$) και με t το χρόνο ($t \in \mathbb{R}$).

4.1 Εξίσωση Navier

Η βασική εξίσωση που ικανοποιεί το διανυσματικό ελαστικό πεδίο $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ είναι η

$$\mu \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

Θέτουμε

$$\Delta^* = c_p^2 \nabla (\nabla \cdot) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times) = (c_p^2 - c_s^2) \nabla (\nabla \cdot) + c_s^2 \Delta, \quad (4.2)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη διανυσματική ταυτότητα (0.3) για το \mathbf{U} δηλαδή την ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla (\nabla \cdot) - \Delta$$

και όπου έχουμε θέσει

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (4.3)$$

$$\text{και} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.4)$$

Τότε η εξίσωση (4.1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\Delta^* \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Ο τελεστής Δ^* ονομάζεται **τελεστής Lamé** και η εξίσωση (4.1) ή ισοδύναμα (4.5) ονομάζεται (γραμμικά εξαρτημένη) **εξίσωση Navier ή εξίσωση κίνησης** της γραμμικής ελαστικότητας.

Θεωρούμε αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (4.6)$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα και $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ το χωρικό τμήμα του ελαστικού πεδίου.

Τότε η εξίσωση Navier (4.5) παίρνει τη μορφή

$$\Delta^* \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})) - \frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) \quad (4.8)$$

Η εξίσωση (4.7) ή αλλιώς (4.8) ονομάζεται **φασματική ή στατική ή χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Navier**.

4.2 Ανάλυση Helmholtz

Μια κατηγοριοποίηση κυμάτων έχοντας ως κριτήριο τη διεύθυνση της διαταραχής είναι αυτή σε διαμήκη και σ εγκάρσια κύματα. *Διαμήκη* ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής είναι παράλληλη με την κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος ενώ *εγκάρσια* ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής είναι κάθετη στη διεύθυνση της διάδοσης του κύματος.

Κάθε λύση \mathbf{u} της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Navier μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα ενός διαμήκους κύματος έστω \mathbf{u}^p και ενός εγκάρσιου κύματος έστω \mathbf{u}^s ως εξής

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s, \quad (4.9)$$

όπου
$$\mathbf{u}^p = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.10)$$

και
$$\mathbf{u}^s = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.11)$$

Η ανάλυση (4.9) ονομάζεται **ανάλυση Helmholtz**.

Εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στη σχέση (4.10) και απόκλιση $\nabla \cdot$ στη σχέση (4.11) παίρνουμε ότι

$$\nabla \times \mathbf{u}^p = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \quad (4.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^s = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) \quad (4.13)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (0.1) για το $\nabla \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}$ και την ταυτότητα (0.4) για το $\nabla \times \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ έχουμε τις ακόλουθες διανυσματικές ταυτότητες

$$\nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

και
$$\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) = 0, \quad (4.15)$$

Επομένως οι (4.12),(4.13) μέσω των (4.14),(4.15) γίνονται

$$\nabla \times \mathbf{u}^p = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0 \quad (4.17)$$

Εφαρμόζοντας στροβιλισμό $\nabla \times$ στην (4.16) και κλίση ∇ στην (4.17) παίρνουμε ότι

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^p) = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^s) = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

Τελικά, οι σχέσεις (4.10),(4.11) από τις (4.9), (4.16)-(4.19) και τη διανυσματική ταυτότητα (0.3) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^p &= -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s)) = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^p) \\ &= -\frac{c_p^2}{\omega^2} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^p) + \Delta \mathbf{u}^p) = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \Delta \mathbf{u}^p\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^s &= \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s)) = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^s) \\ &= \frac{c_s^2}{\omega^2} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^s) - \Delta \mathbf{u}^s) = -\frac{c_s^2}{\omega^2} \Delta \mathbf{u}^s\end{aligned}$$

Δηλαδή το \mathbf{u}^p ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta \mathbf{u}^p + \frac{\omega^2}{c_p^2} \mathbf{u}^p = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

και το \mathbf{u}^s ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta \mathbf{u}^s + \frac{\omega^2}{c_s^2} \mathbf{u}^s = \mathbf{0}, \quad (4.21)$$

οι οποίες μπορούν να γραφτούν και ως

$$\Delta \mathbf{u}^p + k_p^2 \mathbf{u}^p = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

$$\Delta \mathbf{u}^s + k_s^2 \mathbf{u}^s = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

όπου

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad (4.24)$$

και

$$k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (4.25)$$

Οι εξισώσεις (4.22)-(4.23) ονομάζονται **διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz**.

Οι ποσότητες c_p, c_s είναι οι φασικές ταχύτητες του διαμήκους και του εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα και οι k_p, k_s είναι οι κυματικοί αριθμοί τους αντίστοιχα

Επομένως αποδείξαμε ότι το διαμήκες \mathbf{u}^p και το εγκάρσιο κύμα \mathbf{u}^s της ανάλυσης Helmholtz του ελαστικού κύματος \mathbf{u} είναι λύσεις των διανυσματικών εξισώσεων Helmholtz με κυματικούς αριθμούς k_p, k_s αντίστοιχα.

.

Παρατήρηση 4.A

Η κύρια δυσκολία στη σκέδαση ελαστικών κυμάτων σε σχέση με τις περιπτώσεις των ακουστικών και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ότι το διαμήκες κύμα και το

εγκάρσιο κύμα όχι μόνο ταξιδεύουν με διαφορετικές φασικές ταχύτητες αλλά επιπλέον είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους με αποτέλεσμα αν γνωρίζουμε το ένα από τα δύο να μην μπορούμε να βρούμε το δεύτερο κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

4.3 Επίπεδα και Σφαιρικά ελαστικά κύματα

Μια κατηγοριοποίηση των ελαστικών κυμάτων είναι αυτή σε επίπεδα και σφαιρικά κύματα. Αυτά τα δύο είδη κυμάτων θα αναφερθούν στα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων που θα μελετήσουμε παρακάτω.

A. Επίπεδα ελαστικά κύματα

Επίπεδα ελαστικά κύματα ονομάζουμε κύματα της μορφής

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = a_p \hat{\mathbf{d}} e^{ik_p \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} + a_s \hat{\mathbf{b}} e^{ik_s \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.26)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}}$ η διεύθυνση διάδοσης, $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$ και a_p, a_s είναι τα πλάτη του διαμήκους και του εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα.

Να σχολιάσουμε ότι στην περίπτωση που έχουμε $a_p \neq 0, a_s = 0$ ή $a_p = 0, a_s \neq 0$ τότε το επίπεδο κύμα περιορίζεται σε ένα μόνο διαμήκες ή ένα μόνο εγκάρσιο κύμα αντίστοιχα.

B. Σφαιρικά ελαστικά κύματα

Θεωρούμε μια σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{r}_0 από την οποία εκπέμπεται σφαιρικό ελαστικό κύμα $\tilde{\Gamma}$ της μορφής

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (4.27)$$

όπου το $\tilde{\Gamma}^p$ είναι ένα διαμήκες κύμα και το $\tilde{\Gamma}^s$ είναι ένα εγκάρσιο κύμα τα οποία δίνονται από τους τύπους

$$\tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{ik_p}{\rho\omega^2} \nabla_r \nabla_r G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (4.28)$$

$$\tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{ik_s}{\rho\omega^2} (\nabla_r \nabla_r + k_s^2 \tilde{\mathbf{I}}) G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (4.29)$$

Όπου G_p, G_s είναι η θεμελιώδης λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz όπως αυτή έχει οριστεί στη σχέση (2.9) του κεφαλαίου 2 για k_p, k_s κυματικούς αριθμούς αντίστοιχα, δηλαδή

$$G_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{e^{ik_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{ik_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.30)$$

$$G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{e^{ik_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{ik_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \quad (4.31)$$

Η συνάρτηση $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ είναι ένα συμμετρικό δυαδικό και είναι η **θεμελιώδης λύση της φασματικής εξίσωσης Navier** καθώς ικανοποιεί τη σχέση

$$\Delta^* \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \omega^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tilde{\mathbf{I}}, \quad (4.32)$$

όπου Δ^* όπως δίνεται στη σχέση (4.2), $\tilde{\mathbf{I}}$ όπως δίνεται στη σχέση (3.42) του Κεφαλαίου 3 και δ το συναρτησιακό Dirac με ιδιότητες (2.6)-(2.7) όπως δίνονται στο Κεφάλαιο 2.

Παρατήρηση 4.B

Αξίζει να σχολιάσουμε ότι μεταξύ του εγκάρσιου τμήματος $\tilde{\mathbf{T}}^s$ της θεμελιώδους λύσης στα ελαστικά κύματα και της θεμελιώδους λύσης $\tilde{\mathbf{G}}$ των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων όπως δίνεται στη σχέση (3.48) αν πάρουμε για κυματικό αριθμό τον εγκάρσιο κυματικό αριθμό k_s έναντι του k ισχύει η σχέση

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\rho\omega^2}{ik_s} \tilde{\mathbf{T}}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (4.33)$$

Αυτό αποδεικνύει την ομοιότητα μεταξύ των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και των εγκάρσιων ελαστικών κυμάτων.

4.4 Συνοριακές συνθήκες

Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε τη διάδοση ενός ελαστικού κύματος μέσα σε ένα γραμμικό, ομογενές, ιστροπικό, ελαστικό μέσο.

Θεωρούμε μέσα στο ελαστικό μέσο διάδοσης ένα εμπόδιο. Αυτό το εμπόδιο είναι ένα φραγμένο χωρίο D το οποίο ονομάζουμε σκεδαστή και με ∂D συμβολίζουμε το σύνορό του.

Με \mathbf{n} συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο ως προς το σύνορο του σκεδαστή διάνυσμα το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή.

Στα προβλήματα σκέδασης που θα ασχοληθούμε μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε το πώς διαταράσσει ο σκεδαστής ένα γνωστό πεδίο. Καθώς το κύμα, το οποίο προέρχεται από το χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, συναντά κατά τη διάδοση του το σύνορο του σκεδαστή, η ταχύτητα διάδοσης του αλλάζει και ως αποτέλεσμα η διάδοση του κύματος διαταράσσεται και το κύμα σκεδάζεται.

Ονομάζουμε το αρχικό κυματικό πεδίο **προσπίπτον κύμα** και το συμβολίζουμε με \mathbf{u}^i και ονομάζουμε το κυματικό πεδίο που δημιουργείται ως αποτέλεσμα της σκέδασης **σκεδασμένο κύμα** και το συμβολίζουμε με \mathbf{u}^{sct} . Τέλος ονομάζουμε το άθροισμά τους **ολικό κύμα** και το συμβολίζουμε με \mathbf{u}^t .

Επομένως στο χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ για το ελαστικό κυματικό πεδίο (μετατόπισης) ισχύει η σχέση

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D \quad (4.34)$$

Να σχολιάσουμε ότι στα ελαστικά κύματα συμβολίζουμε με \mathbf{u}^{sct} το σκεδασμένο ελαστικό πεδίο, σε αντίθεση με τα ακουστικά κύματα που το είχαμε συμβολίζει με \mathbf{u}^s , επειδή στην παράγραφο 4.2 αυτού του Κεφαλαίου έχουμε συμβολίσει ήδη με \mathbf{u}^s τα εγκάρσια κύματα.

Ορίζουμε την **επιφανειακή τάση** η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = T\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{n}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (3.45)$$

όπου ο τελεστής $T\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{n}\right)$ ονομάζεται **τελεστής επιφανειακής τάσης** και δίνεται από τον τύπο

$$T\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{n}\right) = 2\mu \mathbf{n} \cdot \nabla + \lambda \mathbf{n}(\nabla \cdot) + \mu \mathbf{n} \times (\nabla \times) \quad (4.36)$$

Παρατήρηση 4.Γ

Οι παράμετροι και οι τελεστές παίρνουν ή αντίστοιχα δίνουν διαφορετικές τιμές ανάλογα με τα αν βρισκόμαστε στον εξωτερικό του σκεδαστή χώρο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ή στο εσωτερικό του σκεδαστή D . Για να ξεχωρίζουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις θα συμβολίζουμε τις παραμέτρους που αφορούν το εξωτερικό του σκεδαστή είτε χωρίς κανέναν εκθέτη είτε με έναν εκθέτη + ενώ θα συμβολίζουμε τις παραμέτρους που αφορούν το εσωτερικό του σκεδαστή πάντα με έναν εκθέτη -. Πιο συγκεκριμένα, για ευκολία συμβολισμού, παρακάτω στις περιπτώσεις μη διαπερατού σκεδαστή ο εκθέτης + για τον τελεστή Navier Δ^* και τους κυματικούς αριθμούς k_p, k_s θα παραλείπεται.

Όταν το ελαστικό κύμα κατά τη διάδοση του προσπέσει πάνω στην επιφάνεια (σύνορο) του σκεδαστή πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες πάνω στο σύνορο.

Αυτές οι συνθήκες ονομάζονται **συνοριακές συνθήκες** και εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

Οι σκεδαστές χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στους **διαπερατούς** και στους **μη διαπερατούς σκεδαστές**. Στην πρώτη περίπτωση το κύμα δεν εισέρχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή ενώ στη δεύτερη εισέρχεται.

Στην περίπτωση μη διαπερατού σκεδαστή έχουμε δύο είδη συνοριακών συνθηκών που αντιστοιχούν σε δύο είδη υλικών (σκεδαστές) με πολύ διαφορετικά φυσικά χαρακτηριστικά.

1) Ακαμπτη/Στέρεα επιφάνεια (The rigid surface)

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D \quad (4.37)$$

Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ένα σκεδαστή του οποίου η επιφάνεια δεν παραμορφώνεται από την πίεση που παράγεται από την πρόσπτωση του προσπίπτοντος πεδίου \mathbf{u}^i πάνω του. Ένα τέτοιο σώμα ονομάζεται **άκαμπτος σκεδαστής**. Παρόλο που ένας άκαμπτος σκεδαστής δεν μπορεί να παραμορφωθεί η πρόσπτωση ενός κύματος \mathbf{u}^i πάνω στην επιφάνεια του προκαλεί την παραμόρφωση του γύρω ελαστικού μέσου προκαλώντας τη δημιουργία ενός σκεδασμένου πεδίου \mathbf{u}^s .

2) Κοιλότητα (The cavity or stress-free surface)

$$T^+ \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D, \quad (4.38)$$

όπου βάση της Παρατήρησης 4.Γ ο τελεστής $T^+ \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right)$ είναι ο τελεστής επιφανειακής τάσης (4.36) για $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D$.

Αυτή η περίπτωση είναι πολύ διαφορετική από την προηγούμενη. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ένα σκεδαστή του οποίου η επιφάνεια είναι ανίκανη να διατηρήσει οποιοσδήποτε τάσεις. Ένας τέτοιος σκεδαστής ονομάζεται **κοιλότητα**. Η επιφάνεια μιας κοιλότητας υφίσταται μικρές διακυμάνσεις και αποτέλεσμα αυτών των διακυμάνσεων είναι η δημιουργία ενός σκεδασμένου πεδίου \mathbf{u}^s .

Στην περίπτωση διαπερατού σκεδαστή έχουμε ένα είδος συνοριακών συνθηκών.

3) Συνθήκες διαπερατότητας ή συνθήκες μεταφοράς (Transmission conditions)

Θέτοντας \mathbf{u}_1 το ολικό εξωτερικό και \mathbf{u}_2 το ολικό εσωτερικό κύμα έχουμε τις εξής δύο σχέσεις

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (4.39)$$

$$T^+ \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = T^- \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D, \quad (4.40)$$

Στην περίπτωση αυτή το ελαστικό πεδίο μετατόπισης και η επιφανειακή τάση από το εξωτερικό του σκεδαστή και από το εσωτερικό του σκεδαστή είναι ίσες πάνω στο σύνορο του σκεδαστή.

Παρατήρηση 4.Δ

Συγκρίνοντας τη συνοριακή συνθήκη (4.40) με την αντίστοιχη συνθήκη (2.21) στην περίπτωση των ακουστικών κυμάτων παρατηρούμε ότι οι συντελεστές λ, μ του γραμμικού συνδυασμού που αποτελούν τον τελεστή της επιφανειακής τάσης T διαφέρουν στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του σκεδαστή, γεγονός που προκαλεί μεγάλη δυσκολία στην εξέταση προβλημάτων μεταφοράς στα ελαστικά κύματα.

Οι διαφορές στα δύο μέσα, δηλαδή στον χώρο εκτός του σκεδαστή $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και στο χώρο εντός του σκεδαστή D , μπορούν να εκφραστούν με τους **σχετικούς δείκτες διάθλασης**

$$\eta_p = \frac{c_p^+}{c_p^-} = \frac{k_p^-}{k_p^+} \quad (4.41)$$

για τα διαμήκη κύματα

$$\text{και} \quad \eta_s = \frac{c_s^+}{c_s^-} = \frac{k_s^-}{k_s^+} \quad (4.42)$$

για τα εγκάρσια κύματα.

Παρατήρηση 4.Ε

Τα προσπίπτοντα πεδία μπορεί να είναι είτε επίπεδα κύματα είτε σφαιρικά κύματα είτε γραμμικός συνδυασμός τους ενώ τα σκεδασμένα πεδία είναι πάντοτε σφαιρικά κύματα.

4.5 Συνθήκες ακτινοβολίας

Όπως σε όλα τα προβλήματα σκέδασης, επιπρόσθετα από τις συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στο σύνορο του σκεδαστή, πρέπει να ικανοποιείται και μια συνθήκη στο άπειρο από το σκεδασμένο πεδίο. Το σκεδασμένο ελαστικό πεδίο πρέπει να έχει την ιδιότητα να διαδίδεται από το σκεδαστή (που δρα σαν πηγή) προς το άπειρο και να υφίσταται ασυμπτωτικής τάξης εξασθένηση καθώς διαδίδεται μακριά

από το σκεδαστή προς το άπειρο, δηλαδή να εξασθενεί ασυμπτωτικά με την αύξηση της απόστασης $|r|$ από το σκεδαστή.

Στην διάδοση ελαστικών κυμάτων έχουμε όπως είδαμε δύο ειδών κύματα, τα διαμήκη και τα εγκάρσια.

Οι συνθήκες ακτινοβολίας τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί το σκεδασμένο πεδίο και πιο συγκεκριμένα τα διαμήκες και το εγκάρσιο κύμα που αθροιστικά το αποτελούν είναι οι εξής

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (4.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{r})}{\partial r} - ik_p \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad (4.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (4.45)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^s(\mathbf{r})}{\partial r} - ik_s \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad (4.46)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Όπου
$$r = |\mathbf{r}| \quad (4.47)$$

και
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.48)$$

και S^2 η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 .

Παρατήρηση 4.ΣΤ

Τα επίπεδα ελαστικά κύματα (4.26) δεν ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας ενώ η θεμελιώδης λύση $\tilde{\Gamma}$ που είναι σφαιρικό ελαστικό κύμα και συγκεκριμένα το διαμήκες $\tilde{\Gamma}^p$ και το εγκάρσιο $\tilde{\Gamma}^s$ κύμα που την αποτελούν ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας.

4.6 Τα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα συλλέξουμε τα αποτελέσματα των παραπάνω παραγράφων 4.4 και 4.5 και θα διατυπώσουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση.

1) Άκαμπτος σκεδαστής (The rigid problem)

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου \mathbf{u}^i , της επιφάνειας ∂D , της συχνότητας ω και των παραμέτρων ρ^+, λ^+, μ^+ (επομένως και των k_p, k_s, c_p^+, c_s^+), να βρεθεί το ολικό κύμα $\mathbf{u}^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για το οποίο ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\Delta^* \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

όπου

$$\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{r})}{\partial n} - ik_p \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^s(\mathbf{r})}{\partial n} - ik_s \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0}, \quad (4.49)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό ελαστικό πεδίο \mathbf{u}^t το οποίο ικανοποιεί την σχέση (4.34) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και τη συνοριακή συνθήκη ενός άκαμπτου σκεδαστή (4.37) στο σύνορο το σκεδαστή ∂D και του οποίου το σκεδασμένο ελαστικό πεδίο \mathbf{u}^{sct} (το οποίο αποτελεί άθροισμα ενός διαμήκους \mathbf{u}^p και ενός εγκάρσιου \mathbf{u}^s κύματος) ικανοποιεί τη φασματική εξίσωση Navier (4.7) στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ δηλαδή στο εξωτερικό του σκεδαστή και του οποίου σκεδασμένου πεδίου το διαμήκες και το εγκάρσιο κύμα ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας (4.43)-(4.46).

2) Κοιλότητα

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου \mathbf{u}^i , της επιφάνειας ∂D , της συχνότητας ω και των παραμέτρων ρ^+, λ^+, μ^+ (επομένως και των k_p, k_s, c_p^+, c_s^+), να βρεθεί το ολικό κύμα $\mathbf{u}^t \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για το οποίο ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\Delta^* \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

όπου

$$\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
T^+ \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial D \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{r})}{\partial n} - ik_p \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) \right) &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^s(\mathbf{r})}{\partial n} - ik_s \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \right) &= \mathbf{0}, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό ελαστικό πεδίο \mathbf{u}^t το οποίο ικανοποιεί την σχέση (4.34) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και τη συνοριακή συνθήκη μιας κοιλότητας (4.38) στο σύνορο το σκεδαστή ∂D και του οποίου το σκεδασμένο ελαστικό πεδίο \mathbf{u}^{sct} (το οποίο αποτελεί άθροισμα ενός διαμήκους \mathbf{u}^p και ενός εγκάρσιου \mathbf{u}^s κύματος) ικανοποιεί τη φασματική εξίσωση Navier (4.7) στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ δηλαδή στο εξωτερικό του σκεδαστή και του οποίου σκεδασμένου πεδίου το διαμήκως και το εγκάρσιο κύμα ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας (4.43)-(4.46).

3) Πρόβλημα μεταφοράς

Θέτουμε \mathbf{u}_1 το ολικό εξωτερικό και \mathbf{u}_2 το ολικό εσωτερικό κυματικό πεδίο ως προς τον σκεδαστή.

Δεδομένου του προσπίπτοντος πεδίου \mathbf{u}^i , της επιφάνειας ∂D , της συχνότητας ω και των παραμέτρων $\rho^+, \lambda^+, \mu^+, \rho^-, \lambda^-, \mu^-$ (επομένως και των $k_p, k_s, c_p^+, c_s^+, k_p^-, k_s^-, c_p^-, c_s^-$), να βρεθεί το ολικό εξωτερικό κύμα $\mathbf{u}_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και το ολικό εσωτερικό κύμα $\mathbf{u}_2 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ για τα οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\Delta^* \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

όπου

$$\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{r})$$

$$\Delta^{*-} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D$$

$$T^+ \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = T^- \left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{r})}{\partial n} - ik_p \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) \right) &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \\
\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}^s(\mathbf{r})}{\partial n} - ik_s \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \right) &= \mathbf{0}, \tag{4.51}
\end{aligned}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$.

Όπου (βάση της Παρατήρησης 4.Γ) με Δ^{*-} συμβολίζουμε τον τελεστή Lamé στο εσωτερικό του σκεδαστή D και δίνεται από τον τύπο

$$\Delta^{*-} = \left((c_p^-)^2 - (c_s^-)^2 \right) \nabla(\nabla \cdot) + (c_s^-)^2 \Delta$$

Δηλαδή, να βρεθεί το ολικό εξωτερικό ελαστικό πεδίο \mathbf{u}_1 το οποίο ικανοποιεί την σχέση (4.34) στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και του οποίου το σκεδασμένο ελαστικό πεδίο \mathbf{u}^{sct} (το οποίο αποτελεί άθροισμα ενός διαμήκους \mathbf{u}^p και ενός εγκάρσιου \mathbf{u}^s κύματος) ικανοποιεί τη φασματική εξίσωση Navier (4.7) στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ δηλαδή στο εξωτερικό του σκεδαστή και του οποίου σκεδασμένου πεδίου το διαμήκες και το εγκάρσιο κύμα ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας (4.43)-(4.46) και επίσης να βρεθεί το ολικό εσωτερικό ελαστικό πεδίο \mathbf{u}_2 που να ικανοποιεί τη φασματική εξίσωση Navier (4.7) στο D δηλαδή στο εσωτερικό του σκεδαστή και έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας (3.39)-(3.40) στο σύνορο το σκεδαστή ∂D .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Εφαρμογές

5.1 Διάφορες εφαρμογές

Βάσει ορισμένων κριτηρίων, τα κύματα είναι πολλών ειδών (μηχανικά, ηλεκτρομαγνητικά, γραμμικά, επιφανειακά ή επίπεδα, χώρου ή σφαιρικά, εγκάρσια, διαμήκη, τρέχοντα, στάσιμα κ.α.)

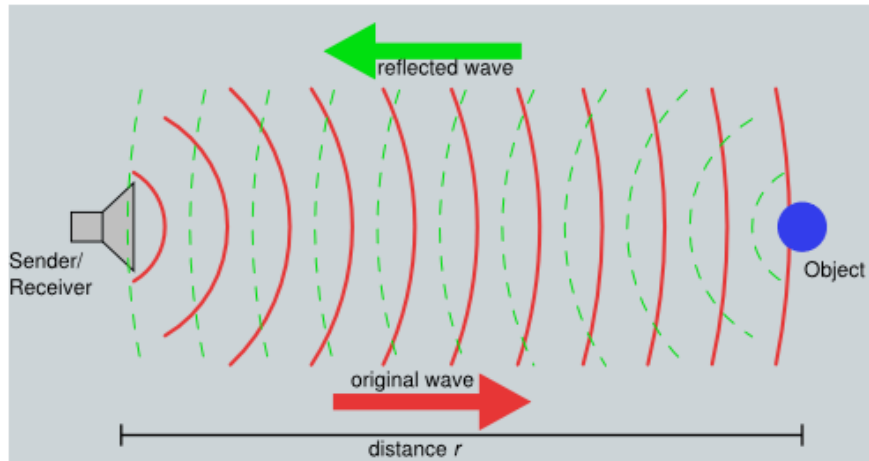
Θέτοντας ως κριτήριο το μέσον διάδοσης, δηλαδή το εάν το κύμα διαδίδεται μέσα σε κάποιο μέσο και αν ναι σε μέσο με τι ιδιότητες ή χωρίς μέσο δηλαδή στο κενό, τα κύματα διακρίνονται κυρίως σε μηχανικά και σε ηλεκτρομαγνητικά.

Τα μηχανικά κύματα μεταφέρουν μηχανική ενέργεια και χρειάζονται κάποιο ελαστικό μέσο για να διαδοθούν, ενώ τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου χωρίς να απαιτείται η ύπαρξη ελαστικού μέσου, διαδίδονται δε άριστα και στο κενό.

Η σκέδαση των παραπάνω δύο κατηγοριών κυμάτων καταλήγει σε μια σειρά εφαρμογών στη ζωή του ανθρώπου. Λόγω της πληθώρας των εφαρμογών, επιλέγουμε ένα είδος κυμάτων, τα ακουστικά. Αυτά είναι κύματα που ανήκουν στα μηχανικά και έχουν πεδία εφαρμογής στη φυσική ακουστική, στη βιολογική ακουστική και στην ακουστική μηχανολογία. Κάθε πεδίο έχει υποπεδία εφαρμογών. Για παράδειγμα στο πεδίο της φυσικής ακουστικής ανήκουν τα υποπεδία της ατμοσφαιρικής ακουστικής, της ακουστικής δομικών κατασκευών και ελέγχου κραδασμών/δονήσεων, της υδροακουστικής ή υποβρύχιας ακουστικής, κ.α. Κάθε υποπεδίο έχει και αυτό με τη σειρά του διάφορα άλλα επιμέρους πεδία εφαρμογών. Για παράδειγμα στο υποπεδίο της υδροακουστικής υπάρχουν εφαρμογές που αφορούν τα ηχοεντοπιστικά συστήματα (sonar), την υποβρύχια επικοινωνία και πλοήγηση, τις σεισμικές έρευνες, την ωκεανογραφία, τη θαλάσσια βιολογία, την παρακολούθηση του κλίματος, τον ανθυποβρυχιακό πόλεμο. Σε ένα άλλο πεδίο π.χ. αυτό της ακουστικής μηχανολογίας, μεταξύ πολλών άλλων υποπεδίων εφαρμογών όπως είναι η σεισμοακουστική, η ηχορρύπανση, η ακουστική χώρων κ.λ.π., ανήκουν οι υπέρηχοι. Στο πεδίο της βιολογικής ακουστικής ανήκει η μουσική.

Αναφερόμενοι τώρα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, βλέπουμε ότι και αυτά έχουν ένα επίσης ευθύ πεδίο εφαρμογών. Καταρχήν τα κύματα αυτά ανάλογα με την περιοχή του φάσματος τους διαχωρίζονται σε ραδιοκύματα, μικροκύματα, υπέρυθρα, ορατό φως, υπεριώδης ακτινοβολία, ακτίνες χ, ακτίνες γ. Το ραδιόφωνο και η τηλεόραση (ραδιοκύματα), το ραντάρ αλλά και ο φούρνος (μικροκύματα), η ακτινογραφία (ακτίνες χ) είναι μερικές από τις πολλές εφαρμογές τους. Κάθε μια εφαρμογή έχει πολλές υποεφαρμογές. Για παράδειγμα έχουμε ραντάρ ανιχνεύσεως επιφάνειας (για ασφαλή ναυσιπλοΐα και εντοπισμό πλοίων και αντικειμένων), ραντάρ ανιχνεύσεως αέρα (για ασφαλή εναέρια κυκλοφορία και εντοπισμό εχθρικών αεροσκαφών), ραντάρ ελέγχου προσγειώσεως, υψομετρικά ραντάρ (μέτρησης ύψους πτήσεων αεροσκαφών), μετεωρολογικά ραντάρ, ραντάρ ελέγχου πυρός (για

τηλεκατευθυνόμενα βλήματα), ραντάρ μετρήσεως ταχύτητας (για διαπίστωση τήρησης ορίου ταχύτητας οχημάτων) , ραντάρ ανίχνευσης κίνησης (για ενεργοποίηση φώτων και συναγερμών όταν χρειαστεί).



Σχήμα 5.1

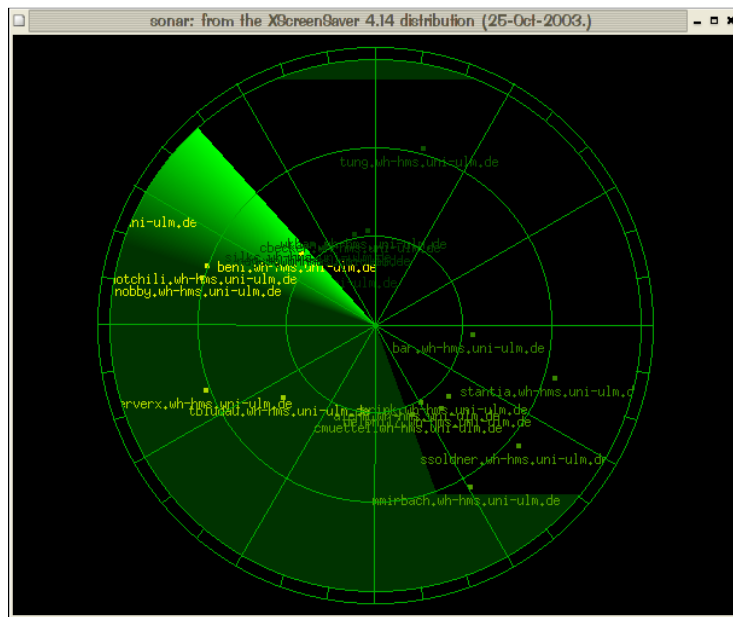
Radar

Εκπομπή και λήψη αντανακλώμενων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων



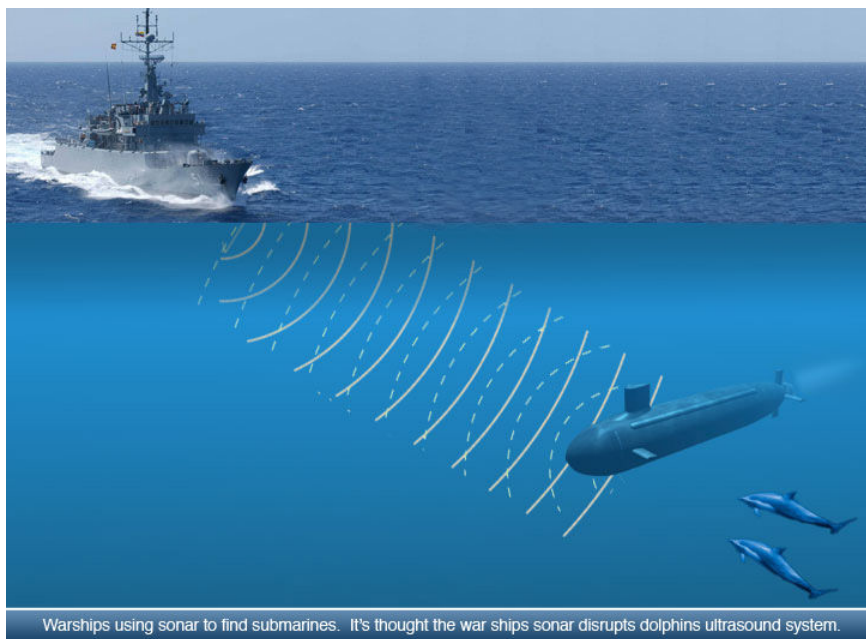
Σχήμα 5.3

Radar



Σχήμα 5.3

Sonar



Σχήμα 5.4

Sonar

Εκπομπή και λήψη αντανακλώμενων ακουστικών κυμάτων



Σχήμα 5.5
Υπερηχογράφοι



Σχήμα 5.6
Υπέρηχος εμβρύου

5.2 Το Sonar και οι Υπέρηχοι

Επανερχόμενοι στα ακουστικά κύματα και συγκεκριμένα στο πεδίο της φυσικής ακουστικής, επιλέγουμε το υποπεδίο της υδροακουστικής ή υποβρύχιας ακουστικής στο οποίο, ως μια εφαρμογή, ανήκει και το sonar. Η υδροακουστική είναι κλάδος που ασχολείται με τη μελέτη της διάδοσης του ήχου μέσα σε υδάτινο περιβάλλον. Το sonar είναι ηχοεντοπιστικό σύστημα που χρησιμοποιεί ηλεκτροακουστικές συσκευές, οι οποίες εκμεταλλεύονται τη διάδοση των κυμάτων ηχητικής ενέργειας μέσα στη θαλάσσια μάζα. Σκοπός των συστημάτων sonar είναι ο εντοπισμός/ανίχνευση, αναγνώριση/ταξινόμηση και παρακολούθηση υποβρυχίων σκαφών και άλλων αντικειμένων, η ακουστική χαρτογράφηση/τομογραφία του βυθού, η ναυτιλία πλοίων επιφανείας και υποβρυχίων και η υποθαλάσσιες επικοινωνίες. Υπάρχουν τα ενεργητικά και τα παθητικά sonar. Ο ενεργητικός ηχοεντοπισμός χρησιμοποιεί μια συσκευή που εκπέμπει ακουστική ενέργεια η οποία ανακλάται στα υποβρύχια αντικείμενα και επιστρέφει στο δέκτη. Ο παθητικός ηχοεντοπισμός συνίσταται την παθητική λήψη της ακουστικής ενέργειας που παράγεται από κάποια άλλη πηγή, η οποία έτσι εντοπίζεται.

Σε αντίθεση με το sonar, το ραντάρ στο οποίο αναφερθήκαμε παραπάνω είναι ραδιοεντοπιστικό σύστημα που εκμεταλλεύεται τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ατμόσφαιρα και γενικά στον ελεύθερο χώρο. Είναι σύστημα εντοπισμού και παρακολούθησης ακίνητων και κινητών στόχων σε αποστάσεις και συνθήκες φωτισμού απαγορευτικές για οπτικό εντοπισμό από το ανθρώπινο μάτι ή από οπτικά όργανα (όπως τα κιάλια).

Επιλέγοντας τώρα ένα άλλο πεδίο εφαρμογής ακουστικών κυμάτων, αυτό της ακουστικής μηχανολογίας, συναντάμε μια σημαντική εφαρμογή στην ιατρική, τους υπέρηχους. Ο υπέρηχος είναι ένα μηχανικό κύμα με συχνότητα μεγαλύτερη από αυτήν που μπορεί να ακούσει ο άνθρωπος (περίπου 20.000 Hz) δηλαδή είναι ένας ήχος τόσο ψηλός που δεν μπορεί να ακουστεί από το ανθρώπινο αυτί, ενώ μπορεί να ακουστεί από κάποια ζώα όπως ο σκύλος. Ο υπέρηχος χρησιμοποιείται σε συσκευές απεικόνισης του εσωτερικού του ανθρώπου, του γήινου φλοιού και άλλων αντικειμένων. Σημαντική εφαρμογή του, είναι η απεικόνιση του εμβρύου στις έγκυες γυναίκες. Ο υπέρηχος παράγεται από ένα κρύσταλλο που δονείται. Μέσα στο σώμα ο υπέρηχος ανακλάται σε περιοχές όπου υπάρχει μεγάλη αλλαγή στην πυκνότητα. Ο παλμός που ανακλάται επιστρέφει στον κρύσταλλο, ο οποίος πάλλεται και παράγει μια ηλεκτρική ώθηση που απεικονίζεται με κατάλληλη συσκευή δηλαδή με οθόνη. Πιο συγκεκριμένα, η υπερηχογραφία είναι μια διαγνωστική μέθοδος απεικόνισης των ιστών του σώματος, στην οποία δεν χρησιμοποιείται η ιοντίζουσα ακτινοβολία αλλά υπέρηχοι δηλαδή όπως είπαμε, ήχοι υψηλής συχνότητας (άνω των 20.000 Hz ανά δευτερόλεπτο). Οι υπέρηχοι μπορούν να διαπερνούν τους ιστούς του σώματος και να ανακλώνται εν μέρει όταν συναντούν ζώνη διαφορετικής πυκνότητας. Οι υπέρηχοι που ανακλώνται συλλέγονται και καταγράφονται από ειδικό ευαίσθητο δέκτη και στη συνέχεια μετατρέπονται σε ηλεκτρικά κύματα. Με την επεξεργασία των ηλεκτρικών αυτών κυμάτων που προέρχονται από τους ανακλώμενους υπέρηχους, παράγονται εικόνες της εξεταζόμενης περιοχής του σώματος, που μπορούν να μελετηθούν και να φωτογραφηθούν. Η διαδικασία γίνεται με τον υπερηχογράφο που είναι μια συσκευή εκπομπής και συλλογής υπερήχων. Οι υπέρηχοι εκπέμπονται υπό μορφή λεπτής

δέσμης και διαπερνούν τους ιστούς του σώματος από το ειδικό σύστημα παραγωγής και εκπομπής υπερήχων, το οποίο παράγει και εκπέμπει υπερήχους αλλά και συλλέγει τους ανακλώμενους. Οι υπέρηχοι μεταδίδονται πολύ καλά στις μεγάλες πυκνότητες (στερεά, υγρά) όπου υπάρχει συγκέντρωση μοριακής μάζας, απορροφώνται δε τελείως από τα οστά. Οι συχνότητες που χρησιμοποιούνται στην ιατρική είναι μεταξύ 2,5-7,5 εκατομμυρίων Hz το δευτερόλεπτο. Με την υπερηχογραφία εντοπίζεται πχ στον οφθαλμό ένα ξένο σώμα ή ένα αιμάτωμα ή μια αποκόλληση του αμφιβληστροειδούς, ενώ στην περιοχή της κοιλίας γίνεται διάγνωση των ενδοκοιλιακών οργάνων (ήπαρ, πάγκρεας, σπλήνα, νεφρά). Εκτός από την παρακολούθηση της εγκυμοσύνης, η υπερηχογραφία μπορεί να διαγνώσει όγκους στα γυναικεία αναπαραγωγικά όργανα (ωοθήκες, μήτρα). Στην καρδιολογία χρησιμοποιείται για τη μελέτη των καρδιακών κοιλοτήτων και βαλβίδων. Τέλος η υπερηχογραφία χρησιμοποιείται στη διάγνωση διαφόρων παθήσεων μέσω προληπτικής εξέτασης (όγκος μαστών). Το βασικό πλεονέκτημα είναι ότι δεν υπάρχει κίνδυνος ακτινοβολίας, άρα η εξέταση μπορεί να επαναλαμβάνεται συχνά. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές υπερηχογραφίας δηλαδή διάφοροι τρόποι καταγραφής των ανακλώμενων κυμάτων.

5.3 Οι βασικότερες μέθοδοι επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης

Οι παραπάνω δύο εφαρμογές της παραγράφου 5.2, δηλαδή το Sonar και το υπερηχογράφημα, ανήκουν στην κατηγορία των αντίστροφων προβλημάτων ακουστικής σκέδασης. Μέχρι στιγμής στην εργασία αυτή δεν έχουμε αναφερθεί ιδιαίτερα στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης καθώς επιλέξαμε να δώσουμε έμφαση και να αναλύσουμε τα ευθέα προβλήματα σκέδασης.

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναφέρουμε επιγραμματικά τις βασικότερες μεθόδους επίλυσης των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης.

Υπενθυμίζουμε ότι *αντίστροφο πρόβλημα σκεδασης* ονομάζεται ένα πρόβλημα στο οποίο το προσπίπτον κυματικό πεδίο και το σκεδασμένο κυματικό πεδίο είναι γνωστά και αναζητάμε πληροφορίες για τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του σκεδαστή.

Αρχικά θα αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες, συναρτήσεις και τελεστές που συναντώνται στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης.

Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στο δισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 .

Δύο βασικοί χώροι με τις αντίστοιχες νόρμες τους που συναντάμε συχνά στις διαδικασίες επίλυσης των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης είναι οι ακόλουθοι.

Ο χώρος $L^2[0,2\pi]$ είναι ο χώρος Hilbert των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με νόρμα που δίνεται από τον τύπο

$$\|\varphi\|_{L^2[0,2\pi]} = [(\varphi, \varphi)_{L^2[0,2\pi]}]^{\frac{1}{2}} := \left[\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.1)$$

για $\varphi \in L^2[0,2\pi]$.

Επίσης, ο χώρος $H^1(D)$ για ένα φραγμένο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ με σύνορο κλάσης C^k με $k \geq 1$ είναι ένας χώρος Sobolev με νόρμα που δίνεται από τον τύπο

$$\|u(x)\|_{H^1(D)} = \left[\int_D (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2)$$

για $u \in H^1(D)$.

Θεωρούμε τη διάδοση ακουστικών κυμάτων σε ένα μέσο διάδοσης στο οποίο υπάρχει ένας σκεδαστής D με σύνορο ∂D .

Όπως στο 2^ο Κεφάλαιο των ακουστικών κυμάτων, συμβολίζουμε το προσπίπτον κύμα με u^i , το σκεδασμένο κύμα με u^s , το ολικό κύμα με u^t και με \mathbf{n} συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο ως προς το σύνορο του σκεδαστή διάνυσμα το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή.

Η θεμελιώδης λύση της (βαθμωτής) εξίσωσης Helmholtz στο δισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 όπου βρισκόμαστε τώρα, διαφέρει από τη θεμελιώδη λύση της (βαθμωτής) εξίσωσης Helmholtz στον τρισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3 όπως την ορίσαμε στο 2^ο Κεφάλαιο των ακουστικών κυμάτων στη σχέση (2.4).

Στο δισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι η

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (5.3)$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η λεγόμενη **κυλινδρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης**.

Επίσης, η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στο δισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 διαφέρει από τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στον τρισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3 όπως την ορίσαμε στο 2^ο Κεφάλαιο των ακουστικών κυμάτων στη σχέση (2.25).

Η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στο δισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s(\mathbf{x})}{\partial r} - iku^s(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (5.4)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} \in S^2$,

$$\text{όπου} \quad |\mathbf{x}| = r, \quad \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \hat{\mathbf{x}} \equiv \hat{\mathbf{r}}$$

(και βλέπε Παρατήρηση 2.Γ).

Θεωρούμε επιπλέον ότι το προσπίπτον κύμα είναι ένα επίπεδο κύμα της μορφής

$$u^i(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}} \quad (5.5)$$

και θέτουμε το διάνυσμα διάδοσης του επίπεδου προσπίπτοντος κύματος $\hat{\mathbf{p}}$ ως

$$\hat{\mathbf{p}} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \quad (5.6)$$

Επίσης θέτουμε (r, θ) τις πολικές συντεταγμένες του $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ και (r_y, θ_y) τις πολικές συντεταγμένες του $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Τότε, το σκεδασμένο πεδίο u^s έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά στο άπειρο

$$u^s(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} u_\infty(\theta, \varphi) + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (5.7)$$

όπου $u_\infty(\theta, \varphi)$ είναι το **πλάτος σκέδασης ή μακρινό πεδίο** (*far field pattern or scattering amplitude*) το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$u_\infty(\theta, \varphi) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left(u^s \frac{\partial e^{-ikr_y \cos(\theta-\theta_y)}}{\partial n(\mathbf{y})} - e^{-ikr_y \cos(\theta-\theta_y)} \frac{\partial u^s}{\partial n} \right) ds(\mathbf{y}), \quad (5.8)$$

Το πλάτος σκέδασης $u_\infty(\theta, \varphi)$ είναι μια από τις βασικότερες συναρτήσεις στη θεωρία της σκέδασης και παίζει βασικό ρόλο στην επίλυση των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης.

Επίσης, ορίζουμε τον **τελεστή μακρινού πεδίου** (*far field operator*) $F: L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$, ο οποίος όταν εφαρμοστεί σε μια συνάρτηση g δίνεται από τον τύπο

$$(Fg)(\theta) = \int_0^{2\pi} u_\infty(\theta, \varphi) g(\varphi) d\varphi \quad (5.9)$$

Επίσης, ορίζουμε την **κυματική συνάρτηση Herglotz** με τύπο

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{S^2} h(\hat{\mathbf{q}}) e^{ik\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{x}} ds(\hat{\mathbf{q}}), \quad (5.10)$$

όπου $h(\hat{\mathbf{q}})$ ο πυρήνας της u_h με $h \in L^2(S^2)$ και $\hat{\mathbf{q}}$ μοναδιαίο διάνυσμα. Οι συναρτήσεις Herglotz είναι υπέρθεση των επίπεδων κυμάτων με συνάρτηση βάρους $h \in L^2(S^2)$ και είναι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης Helmholtz.

Τέλος, αν θέσουμε $\hat{\mathbf{x}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ και $\Phi_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ το μακρινό πεδίο της θεμελιώδους λύσης (έστω $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$) της εξίσωσης Helmholtz στο \mathbb{R}^2 όπως δίνεται από τη σχέση (5.3) έχουμε ότι

$$\Phi_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{z}} \quad (5.11)$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις βασικότερες μεθόδους επίλυσης των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης οι οποίες αποσκοπούν στην αναγνώριση του σχήματος και του υλικού του αγνώστου αντικειμένου (σκεδαστή) μέσω προσεγγίσεων.

Με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει επιτευχθεί η προσομοίωση της διαδικασίας της σκέδασης. Η ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων έχει βοηθήσει πολύ στη μελέτη και εύρεση λύσεων των προβλημάτων σκέδασης. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης, οι βασικότερες εκ των οποίων είναι οι παρακάτω τρεις. Η μέθοδος *Colton-Monk* ή αλλιώς μέθοδος *δυναμικού χώρου* (*dual space method*), η μέθοδος *Potthast* ή αλλιώς μέθοδος *σημειακής πηγής* (*point-source method*) και η μέθοδος *Colton-Kirsch* ή αλλιώς *γραμμική δειγματοληπτική μέθοδος* ή *LSM* (*linear sampling method*). Την τελευταία χρησιμοποίησαν οι Colton και Kirsch παραδειγματικά στην περίπτωση μη διαπερατού σκεδαστή ακουστικών κυμάτων και στην περίπτωση μη-ομογενούς μέσου. Οι πρώτες δύο μέθοδοι ανήκουν στην κατηγορία των *μεθόδων διάσπασης* ή αλλιώς *μεθόδων αναλυτικής συνέχισης*. Οι μέθοδοι διάσπασης επαναπροσδιορίζουν το σκεδασμένο πεδίο από το λεγόμενο *τελεστή μακρινού πεδίου* (βλέπε σχέση 5.9) και κατόπιν χρησιμοποιούν τη συνοριακή συνθήκη με σκοπό την εύρεση του σχήματος του σκεδαστή. Τα πλεονεκτήματα αυτής της κατηγορίας μεθόδων είναι ότι δεν χρειάζεται να λυθεί το ευθύ πρόβλημα για ανακατασκευές και ότι μπορούν να επαναπροσδιορίσουν ορισμένα τμήματα του σκεδαστή αλλά να αγνοήσουν κάποια άλλα. Ο περιορισμός σε αυτή τη κατηγορία είναι ότι χρειάζεται να γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες των (αγνώστων) σκεδαστών δηλαδή χρειαζόμαστε πληροφορίες που μπορεί να μην είναι διαθέσιμες. Η τρίτη μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των *δειγματοληπτικών και διερευνητικών μεθόδων* οι οποίες επίσης δεν λύνουν το ευθύ πρόβλημα για ανακατασκευές αλλά ορίζουν μια δείκτρια συνάρτηση η οποία παρέχει πληροφορίες για τη θέση, το σχήμα και τις ιδιότητες του σκεδαστή. Βασικό πλεονέκτημα αυτής της κατηγορίας μεθόδων είναι ότι δουλεύουν χωρίς να είναι γνωστές οι συνοριακές συνθήκες ή οι φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή. Στην περίπτωση όμως που θέσουμε σαν δείκτρια το ολικό ή το σκεδασμένο πεδίο τότε είναι απαραίτητη η γνώση της συνοριακής συνθήκης για την εύρεση του σχήματος του σκεδαστή. Βασικό μειονέκτημα τους είναι ότι απαιτούν τη γνώση του λεγόμενου *πλάτους σκέδασης* (βλέπε σχέση 5.8) για ένα μεγάλο αριθμό προσπιπτόντων κυμάτων, γεγονός το οποίο προσπαθούμε να αλλάξουμε στους αλγόριθμους αυτούς. Δεν θα κάνουμε μεγαλύτερη ανάλυση των μεθόδων αυτών καθότι δεν αποτελούν το κεντρικό θέμα της διπλωματικής αυτής εργασίας, αναλυτικότερα όμως υπάρχουν στο βιβλίο [22].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Αθανασιάδης Χ. και Στρατής Ι. Γ., *Τα Βασικά Θεωρήματα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων*, Σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος Μαθηματικά μοντέλα Στις Φυσικές Επιστήμες Μέρος Β', ΕΚΠΑ Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα 2000.
- [2] Athanasiadis C. and Costakis G. and Stratis I. G., *On Some Properties Of Beltrami Fields In Chiral Media*, Reports On Mathematical Physics No2 Vol. 45 (2000).
- [3] Burton A.J. and Miller G.F., *The Application Of Integral Equation Methods To The Numerical Solution Of Some Exterior Boundary-Value Problems*, Proc. Royal Soc. London A323, 201-220 (1971)
- [4] Cakoni F. and Colton D., *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*, An Introduction, ed. Springer, Berlin Heidelberg 2006.
- [5] Colton D., *The Inverse Scattering Problem For Acoustic Waves*, Proc. Dundee Conference On Ordinary And Partial Differential Equations, Springer-Verlag Lecture Notes In Mathematics, Vol. 964, (1982)
- [6] Colton D. and Kress R., *Integral Equation methods In Scattering Theory*, ed. John Wiley And Sons, New York 1983
- [7] Colton D. and Kress R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Second Edition, ed. Springer, Berlin Heidelberg 1998.
- [8] Colton D. and Kress R., *The Impedance Boundary Value Problem For The Time Harmonic Maxwell Equations*, Math. Meth. In the Appl. Sci. 3, 475-487 (1981)
- [9] Dassios G. and Kleinman R., *Low Frequency Scattering*, Clarendon Press, Oxford 2000.
- [10] Dolph C.L., *The Integral Equation Method In Scattering Theory*, In Problems in Analysis, Gunning R.C., Princeton University Press 1970
- [11] Giroire J., *Integral Equations For Exterior Problems For The Helmholtz Equation*, Ecole Polytechnique, Palisau, France, Rapport Interne No. 40 (1978)
- [12] Giroire J. and Nedeelee J.C., *Numerical Solution Of An Exterior Neumann Problem Using A Double Layer Potential*, Math. Comp. 32, 973-990 (1978)
- [13] Greenspan D. and Werner P., *A Numerical Method For The Exterior Dirichlet Problem For The Reduced Wave Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. 23, 288-316 (1966)

- [14] Hartman P. and Wilcox C., *On Solutions Of The Helmholtz Equation In Exterior Domains*, Math. Zeit. 75, 228-255 (1961)
- [15] Jones D.S., *Integral Equations For The Exterior Acoustic Problem*, Q. J. Mech. Appl. Math. 27, 129-142 (1974)
- [16] Jones D.S., *Acoustic And Electromagnetic Scattering*, Clarendon Press, Oxford, 1986
- [17] Καρδάση Ελένη, *Οι Συναρτήσεις Herglotz Στην Επίλυση Του Αντίστροφου Προβλήματος Σκέδασης Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων Σε Χειρόμορφα Υλικά*, Διδακτορική διατριβή, ΕΚΠΑ Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα 2004.
- [18] Kirsch A. and Grinberg N., *The Factorization Method For Inverse Problems*, Oxford University Press 2008.
- [19] Kirsch A., *An Introduction To The Mathematical Theory Of Inverse Problems*, ed. Springer 1996
- [20] Kleinman R.E., *Iterative Solutions Of Boundary Value Problems*, In Springer-Verlag Lecture Notes In Mathematics, Vol . 561, Function Theoretic Methods For Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 298-313 (1976)
- [21] Kleinman R.E. and Roach G.F., *Boundary Integral Equations For The Three-Dimensional Helmholtz Equation*, SIAM Review 16, 214-236 (1974)
- [22] Potthast R., *A Survey On Sampling And Probe Methods For Inverse Problems*, 2006
- [23] Roach G.F. , Stratis I.G. , Yannacopoulos A.N., *Mathematical Analysis Of Deterministic And Stochastic Problem In Complex Media Electromagnetics*, Princeton University Press 2012.
- [24] Kress R. and Roach G.F. , *Transmission Problems For The Helmholtz Equation*, J. Math. Phys. 19, 1433-1437 (1978)
- [25] Kupradse W.D., *Existence And Uniqueness Theorems In Diffraction Theory*, Doklady, Akad. Nauk. USSR 5 1-5 (1934)
- [26] Lax P.D. and Phillips R.S., *Scattering Theory*, Academic Press, New York (1967)
- [27] Meyer W.L., Bell W.A., Zinn B.T., Stallybrass M.P., *Boundary Integral Solution Of Three Dimensional Acoustic Radiation Problems*, J. of Sound and Vibration 59, 245-262 (1978)

- [28] Stakgold I., *Boundary Value Problems Of Mathematical Physics , Vol.2*, Macmillan, New York (1968)
- [29] Stakgold I., *Green's Functions And Boundary Value Problems*, Wiley, New York (1979)
- [30] Ursell F., *On The Exterior Problems Of Acoustics*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 74, 117-125 (1973)
- [31] Ursell F., *On The Exterior Problems Of Acoustics II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 84, 545-548 (1978)
- [32] www.wikipedia.org