ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η Επίδραση της Πληροφόρησης στη Στρατηγική Συμπεριφορά των Πελατών σε Συστήματα Εξυπηρέτησης

Διπλωματική εργασία για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών με Κατεύθυνση την Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

Μαρία Γρηγορίου

Επιβλέπων καθηγητής: Αντώνης Οικονόμου

Αθήνα, 2013

Στην οικογένειά μου.

“A man should look for what is, and not for what he thinks should be.”

$\sim$ Albert Einstein $\sim$

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Εγκρίθηκε στις .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης	Αναπληρωτής Καθηγητής	....
Απόστολος Μπουρνέτας	Καθηγητής	....
Αντώνης Οικονόμου (Επιβλέπων)	Αναπληρωτής Καθηγητής	....

Στο βιβλίο τους "To Queue or Not To Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems", οι Rafael Hassin και Moshe Haviv, εξέτασαν δύο περιπτώσεις συστημάτων εξυπηρέτησης, στις οποίες οι πελάτες δεν είναι "παθητικές οντότητες" που απλά φτάνουν στο σύστημα με μια διαδικασία άφιξης και φεύγουν από αυτό αφού εξυπηρετηθούν μέσω μιας διακασίας εξυπηρέτησης, αλλά "παίκτες" (με την έννοια της Θεωρίας Παιγνίων), οι οποίοι παίρνουν αποφάσεις (χρησιμοποιούν στρατηγικές) με σκοπό να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους. Μία περίπτωση που μελέτησαν οι Hassin και Haviv είναι αυτή στην οποία οι πελάτες παίρνουν την απόφαση να μπουν ή να μην μπουν στο σύστημα αφού δουν πόσο είναι το μήκος ουράς (περίπτωση των παρατηρούντων πελατών) ενώ μια άλλη περίπτωση είναι αυτή στην οποία οι πελάτες δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος ουράς πριν αποφασίσουν ποιά στρατηγική να χρησιμοποιήσουν και έτσι η απόφαση που πρέπει να πάρουν δεν είναι αν θα μπουν ή όχι στο σύστημα, αλλά με ποιά πιθανότητα θα μπουν (περίπτωση των μη-παρατηρούντων πελατών). Ο κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να προσπαθήσουμε να δούμε τί συμβαίνει όταν συνδυάσουμε αυτές τις περιπτώσεις, όταν δηλαδή δεν είναι όλοι οι πελάτες παρατηρούντες ή όλοι μη-παρατηρούντες, αλλά ένα ποσοστό, έστω p, είναι παρατηρούντες και ένα ποσοστό $1-p$ είναι μη-παρατηρούντες. Το πρόβλημα της μελέτης αυτής μου το έθεσε ο επιβλέπων καθηγητής μου, κ. Αντώνης Οικονόμου, τον οποίο και θα ήθελα να ευχαριστήσω για την πολύτιμη βοηθειά του κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον κ. Κωνσταντίνο Μηλολιδάκη και τον κ. Απόστολο Μπουρνέτα που δέχτηκαν να είναι μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας

Η εργασία αυτή αποτελείται από τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο είναι χωρισμένο σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος παραθέτει κάποια βασικά στοιχεία της Θεωρίας των Ουρών Αναμονής, το δεύτερο παραθέτει κάποια βασικά στοιχεία της Θεωρίας Παιγνίων και το τρίτο παρουσιάζει βασικά στοιχεία της μίξης των δύο αυτών περιοχών των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (δηλαδή εξετάζουμε $M|M|1$ ουρές αναμονής, στις οποίες οι πελάτες είναι παίκτες). Πιο συγκεκριμενα, στο τρίτο μέρος παρουσιάζονται οι δύο περιπτώσεις (των παρατηρούντων και των μη-παρατηρούντων πελατών) που αναφέραμε προηγουμένως, καθώς επίσης και η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ωφέλειας και του κέρδους του διαχειριστή του συστήματος (profit maximization). Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζουμε τη μίξη (που αναφέραμε προηγουμένως) των περιπτώσεων $M|M|1$ ουρών αναμονής με παρατηρούντες πελάτες και $M|M|1$ ουρών αναμονής με μη-παρατηρούντες πελατες, την κοινωνική ωφέλεια και το κέρδος του διαχειριστή του συστήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια σχετικά τα αποτελέσματα με θέμα την επίδραση της πληροφορίας στο κέρδος του διαχειριστή του συστήματος, που αναπτύσονται στην εργασία του Rafael Hassin (2007) με τίτλο "Information and Uncertainty in a Queuing System". Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τί γίνεται με το ρυθμό κέρδους του διαχειριστή του συστήματος, όταν είτε το κέρδος των πελατών (μη-παρατηρούντων) από την εξυπηρέτησή τους, είτε το κόστος ανά μονάδα παραμονής τους στο σύστημα, είτε ο ρυθμός εξυπηρέτησης, δεν είναι γνωστή σταθερά (όπως τη θεωρούσαμε ως τώρα), αλλά τυχαία μεταβλητή. Εξετάζουμε τρείς περιπτώσεις:
α) Οι πελάτες είναι απληροφόρητοι (uninformed customers), δηλαδή δεν γνωρίζουν την τιμή της τυχαίας μεταβλητής.
β) Οι πελάτες είναι πληροφορημένοι (informed customers), δηλαδή γνωρίζουν την τιμή της τυχαίας μεταβλητής, και ο διαχειριστής του συστήματος διαλέγει διαφορετικές τιμές εισόδου, ανάλογα με την τιμή της τυχαίας μεταβλητής (δύο τιμές εισόδου (two prices)).
γ) Οι πελάτες είναι πληροφορημένοι και ο διαχειριστής του συστήματος διαλέγει μια τιμή εισόδου, την οποία δεν μπορεί να αλλάξει μετά την παρατήρηση της τιμής της τυχαίας μεταβλητής (μία τιμή εισόδου (single price)).
Τέλος απαντάμε στο ερώτημα "Πότε συμφέρει τον διαχειριστή του συστήματος να αποκαλύψει την τιμή της τυχαίας μεταβλητής στους πελάτες και πότε όχι;".

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικά στοιχεία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά κάποια βασικά στοιχεία από τη Θεωρία Παιγνίων (Game Theory)[1], τη Θεωρία Ουρών Αναμονής (Queueing Theory)[2] και τον συνδυασμό τους[3]. Θεωρείται ότι ο αναγνώστης έχει ήδη γνώσεις πάνω στη Θεωρία Παιγνίων και στις Ουρές Αναμονής. Το κεφάλαιο αυτό έχει ως σκοπό απλά να υπενθυμίσει κάποια βασικά στοιχεία των περιοχών αυτών, και σε καμία περίπτωση δεν καλύπτεται όλη η Θεωρία Παιγνίων και όλη η Θεωρία Ουρών Αναμονής, οι οποίες είναι ιδιαίτερα ανεπτυγμένες περιοχές των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

1.1 Βασικά στοιχεία Ουρών Αναμονής

Μια **ουρά αναμονής ή σύστημα εξυπηρέτησης** (queueing system) είναι ένα σύστημα (π.χ. ιατρείο), που παρέχει **εξυπηρέτηση** (π.χ. θεραπεία) σε **πελάτες** (π.χ. ασθενείς), ο οποίοι προσέρχονται στο σύστημα για να εξυπηρετηθούν. Οι πελάτες φεύγουν από το σύστημα αμέσως μετά το τέλος της εξυπηρέτησής τους. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε μια ουρά αναμονής ως ένα σύστημα εισόδου-εξόδου.

Μια ουρά αναμονής αποτελείται από:
α) έναν **χώρο εξυπηρέτησης**, στον οποίο υπάρχουν ένας ή περισσότεροι **υπηρέτες** (π.χ. γιατροί), που εξυπηρετούν τους πελάτες και
β) ίσως έναν **χώρο ανομονής**, στον οποίο περιμένουν οι πελάτες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως.

Γενικά, οι διαδοχικοί **χρόνοι αφίξεων** και οι διάρκειες των **χρόνων εξυπηρέτησης** των πελατών είναι τυχαίες μεταβλητές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το **μήκος ουράς** (δηλαδή ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα) να μεταβάλλεται συνεχώς με τυχαίο τρόπο. Άρα, λοιπόν, το μήκος ουράς είναι μια στοχαστική διαδικασία[4].

Τα κύρια χαρακτηριστικά μιας ουράς αναμονής είναι η **διαδικασία αφίξεων**, ο **μηχανισμός εξυπηρέτησης** και η **πειθαρχία ουράς**.

[1] Βλ. Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης, *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντελα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. Εκδόσεις Σοφία, Αθήνα, 2009.

[2] Βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση.

[3] Βλ. Rafael Hassin and Moshe Haviv, *To Queue or Not To Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

[4] Η τυχαιότητα των διαδοχικών χρόνων αφίξεων και των χρόνων εξυπηρέτησης δεν μας επιτρέπει να προβλέψουμε επακριβώς την εξέλιξη του συστήματος μέσα στον χρόνο. Έτσι, για να μελετήσουμε την εξέλιξη αυτή, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε κάποια κατάλληλη στοχαστική διαδικασία (π.χ. το μήκος ουράς).

Η διαδικασία αφίξεων

Η διαδικασία αφίξεων περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο φτάνουν στο σύστημα οι διαδοχικοί πελάτες, έστω $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$.

Αν συμβολίσουμε με $t_0 = 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le \ldots$ τις χρονικές στιγμές άφιξης στο $[0, \infty)$ των πελατών $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ αντίστοιχα, τότε, η διαδικασία αφίξεων ορίζεται από την κατανομή των χρονικών αυτών στιγμών ή ισοδύναμα από τη στοχαστική εξάρτηση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης $T_n = t_n - t_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Οι κυριότερες διαδικασίες αφίξεων είναι οι εξής:
α) **Poisson διαδικασία αφίξεων** (**συμβολικά: M**[5]): Η διαδικασία Poisson [6] είναι το κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για την περιγραφή γεγονότων που συμβαίνουν εντελώς τυχαία στο χρόνο, και γι' αυτό η Poisson διαδικασία αφίξεων ονομάζεται και εντελώς τυχαία διαδικασία αφίξεων. Η Poisson διαδικασία αφίξεων είναι η απλούστερη και πιο συχνά εμφανιζόμενη στην πράξη διαδικασία αφίξεων. Είναι το κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο αφίξεων για συστήματα στα οποία το πλήθος των δυνητικών πελατών είναι μεγάλο και κάθε πελάτης τα χρησιμοποιεί σε αραιά χρονικά διαστήματα και ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες.
β) **Σταθερή διαδικασία αφίξεων** (**συμβολικά: D**[7]): Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $T_n = a$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (με πιθανότητα 1), δηλαδή οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα ο ένας μετά τον άλλο, σε ίσα χρονικά διαστήματα μήκους a. Είναι το κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή και μελέτη συστημάτων που παρέχουν εξυπηρέτηση με ραντεβού.
γ) **Γενικές ανεξάρτητες αφίξεις** (**συμβολικά: GI**[8]): Αυτή είναι η περίπτωση, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν κάποια γενική (αυθαίρετη) κατανομή, έστω $A(x)$, $x \ge 0$, με πεπερασμένη μέση τιμή $a = \int_0^\infty x dA(x) = \int_0^\infty (1 - A(x))dx = \int_0^\infty A^c(x)dx$.

Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda} = 1/a$ είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου και ονομάζεται **ρυθμός αφίξεων**.

Η D διαδικασία αφίξεων είναι η ειδική περίπτωση της GI, στην οποία $A(x) = 0$, αν $x < a$, και $A(x) = 1$, αν $x \ge a$, ενω η M είναι η ειδική περίπτωση της GI , στην οποία $A(x) = 0$, $x \le 0$ και $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ (δηλαδή οι $T_1, T_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με την εκθετική κατανομή).

Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης

Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο εξυπηρετούνται οι πελάτες από τους υπηρέτες. Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης ορίζεται από τον αριθμό, έστω k ($k \in \{1, 2, \ldots\} \bigcup \{\infty\}$), των υπηρετών και από την κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης.

Συμβολίζουμε με X_n τον χρόνο εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη που φτάνει στο σύστημα και υποθέτουμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Οι κυριότεροι χρόνοι εξυπηρέτησης που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές είναι:
α) **Εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης** (**συμβολικά: M**): Οι χρόνοι εξυπηρέτη-

[5] Από το Memoryless ή Markovian (property).
[6] Για περισσότερες πληροφορίες για την διαδικασία Poisson βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση.
[7] Από το Deterministic.
[8] Από το General Independent.

σης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.
β) **Σταθεροί χρόνοι εξυπηρέτησης** (**συμβολικά: D**): Εδώ έχουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι σταθεροί, δηλαδή $X_n = b$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (με πιθανότητα 1).
γ) **Γενικοί χρόνοι εξυπηρέτησης** (**συμβολικά: G**): Σε αυτήν την περίπτωση οι χρόνοι εξυπηρέτησης $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γενική (αυθαίρετη) κατανομή, έστω $B(x),\ x \geq 0$, με πεπερασμένη μέση τιμή $b = \int_0^\infty x dB(x) = \int_0^\infty (1 - B(x))dx = \int_0^\infty B^c(x)dx$.

Για ουρές με έναν υπηρέτη, η παράμετρος $\boldsymbol{\mu} = 1/b$ εκφράζει το μέσο αριθμό αναχωρήσεων ή εξυπηρετήσεων στη μονάδα του χρόνου, όσο είναι συνεχώς απασχολημένος, και ονομάζεται **ρυθμός εξυπηρέτησης**.

Το D είναι η ειδική περίπτωση του G, στην οποία $B(x) = 0$, αν $x < b$, και $B(x) = 1$, αν $x \geq b$, ενω το M είναι η ειδική περίπτωση του G, στην οποία $B(x) = 0$, $x \leq 0$ και $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$.

Η πειθαρχία ουράς

Με τον όρο πειθαρχία ουράς εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται για να εξυπηρετηθούν οι πελάτες που βρίσκονται στον χώρο αναμονής. Δύο σημαντικές πειθαρχίες ουράς είναι η **FCFS** (First-Come-First-Served), στην οποία κάθε πελάτης εξυπηρετείται σύμφωνα με τη σειρά που φτάνει στο σύστημα, και η **LCFS** (Last-Come-First-Served), όπου κάθε φορά που ένας υπηρέτης είναι ελεύθερος, επιλέγει να εξυπηρετήσει τον πελάτη που έφτασε τελευταίος στο σύστημα. Η FCFS είναι η συνήθης πειθαρχία ουράς.

Οι FCFS και LCFS δεν λαμβάνουν υπόψη τους τους συγκεκριμένους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών που περιμένουν στον χώρο αναμονής. Υπάρχουν, όμως, και πειθαρχίες ουράς οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τους αυτούς τους χρόνους. Ένα παράδειγμα είναι η **SSTF** (Shortest-Service-Time-First), όπου ο υπηρέτης που ελευθερώνεται προτιμά να εξυπηρετήσει πρώτα τον πελάτη με τον μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης.

Υπάρχουν πειθαρχίες ουράς, οι οποίες βάζουν **προτεραιότητες** για συγκεκριμένους τύπους πελατών. Αυτές οι πειθαρχίες διακρίνονται σε **διακόπτουσες**, στις οποίες διακόπτεται η εξυπηρέτηση ενός πελάτη που εξυπηρετείται, προκειμένου να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης που μόλις μπήκε και έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα, και **μη-διακόπτουσες**, όπου δεν διακόπτεται η εξυπηρέτηση του πελάτη με την άφιξη ένος άλλου, μεγαλύτερης προτεραιότητας, πελάτη. Οι διακόπτουσες πειθαρχίες ουράς διακρίνονται σε **συντηρητικές**, στις οποίες κάθε εξυπηρέτηση που έχει διακοπεί, συνεχίζει από το σημείο που διακόπηκε, και σε **μη-συντηρητικές**, στις οποίες μια εξυπηρέτηση που διακόπηκε ξαναρχίζει από την αρχή.

Ένα παράδειγμα διακόπτουσας συντηρητικής πειθαρχίας ουράς είναι η **LCFS/P-R** (Last-Come-First-Served/Preemptive-Resume). Σύμφωνα με την LCFS/P-R, όταν φτάσει ένας πελάτης στο σύστημα, διακόπτεται η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται τότε, και ο πελάτης του οποίου η εξυπηρέτηση διακόπηκε, επιστρέφει στην ουρά και περιμένει εκεί μέχρι να επιλεγεί σύμφωνα με την LCFS πειθαρχία ουράς για να συνεχίσει την εξυπηρέτησή του από το σημείο που διακόπηκε.

Σύμφωνα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά (διαδικασία αφίξεων, μηχανησμός εξυπηρέτησης και πειθαρχία ουράς), για την ταξινόμηση των ουρών αναμονής έχει επικρατήσει η **συντομογραφία** $\boldsymbol{A|B|k}$, όπου το $\boldsymbol{A}$ αναφέρεται στη **διαδικασία αφίξεων**, το $\boldsymbol{B}$ αναφέρεται στο **μηχανισμό εξυπηρέτησης** και το $\boldsymbol{k}$ είναι ο **αριθμός των υπηρετών** που λειτουργούν παράλληλα. Αν η **χωρητικότητα του συστήματος** είναι πεπερασμένη, έστω $\boldsymbol{s} < \infty$, τότε εισάγουμε στη συντομογραφία και ένα τέταρτο σύμβολο, το οποίο δηλώνει την χωρητικότητα του συστήματος, δηλαδή η **συντομογραφία** γίνεται $\boldsymbol{A|B|k|s}$, και αν η πειθαρχία ουράς δεν είναι η FCFS, τότε αυτό το δηλώνουμε γράφοντας στο τέλος της συντομογραφίας το όνομα της πειθαρχίας που χρησιμοποιείται μέσα σε παρένθεση. Για παράδειγμα με $M|G|2$ (LCFS) συμβολίζεται η ουρά αναμονής με Poisson διαδικασία αφίξεων, γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης, 2 υπηρέτες, χώρο αναμονής με άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς την LCFS, και με $D|M|9|23$ συμβολίζεται η ουρά αναμονής με σταθερή διαδικασια αφίξεων, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης, 9 υπηρέτες, 14 θέσεις στον χώρο αναμονής (δηλαδή η χωρητικότητα του συστήματος είναι 9+14=23) και πειθαρχία ουράς την FCFS.

1.1.1 Συνήθη μέτρα απόδοσης μιας ουράς

Για κάθε $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, συμβολίζουμε με:
– S_j τον **χρόνο παραμονής** στο σύστημα του πελάτη C_j
– W_j τον **χρόνο αναμονής** στην ουρά του πελάτη C_j
– X_j τον **χρόνο εξυπηρέτησης** του πελάτη C_j
Προφανώς ισχύει $S_j = W_j + X_j$, για κάθε $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Για κάθε $t \geq 0$, συμβολίζουμε με:
– $Q(t)$ τον **αριθμό των πελατών στο σύστημα** τη χρονική στιγμή t (**μήκος ουράς**)
– $Q_q(t)$ τον **αριθμό πελατών στο χώρο αναμονής** τη χρονική στιγμή t
– $Q_s(t)$ τον **αριθμό πελατών που εξυπηρετούνται** τη χρονική στιγμή t
Προφανώς ισχύει $Q(t) = Q_q(t) + Q_s(t)$, για κάθε $t \geq 0$.

Οι **βασικές στοχαστικές διασικασίες** για τη μελέτη μιας ουράς είναι οι $\{Q(t) : t \geq 0\}$, $\{Q_q(t) : t \geq 0\}$, $\{S_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ και $\{W_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$.

Έστω:

– $\overline{Q} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t Q(x)dx$ το (μακροπρόθεσμο) **μέσο μήκος ουράς**

– $\overline{Q}_q = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t Q_q(x)dx$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος αριθμός πελατών στον χώρο αναμονής**

– $\overline{Q}_s = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t Q_s(x)dx$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται**

Προφανώς τα $\overline{Q}$, $\overline{Q}_q$ και $\overline{Q}_s$ είναι μέσοι ως προς τον χρόνο (**χρονικοί μέσοι**).

Έστω επίσης:

– $\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος χρόνος παραμονής**

– $\overline{W} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} W_j$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος χρόνος αναμονής**

– $\overline{X} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος χρόνος εξυπηρέτησης**

Προφανώς τα $\overline{S}$, $\overline{W}$ και $\overline{X}$ είναι μέσοι ως προς τους πελάτες (**πελατειακοί μέσοι**).

Οι ποσότητες $\overline{Q}$, $\overline{Q}_q$, $\overline{S}$ και $\overline{W}$ αποτελούν τα συνήθη **μέτρα απόδοσης** μιας ουράς.

Όταν οι στοχαστικές διασικασίες $\{Q(t) : t \geq 0\}$, $\{Q_q(t) : t \geq 0\}$, $\{Q_s(t) : t \geq 0\}$, $\{S_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, $\{W_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ και $\{X_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ είναι αναγεννητικές[9] (πράγμα που ισχύει για τις $GI|G|k$ ουρές), τότε τα $\overline{Q}$, $\overline{Q}_q$, $\overline{Q}_s$, $\overline{S}$, $\overline{W}$ και $\overline{X}$ συμπίπτουν (με πιθανότητα 1) με τις μέσες τιμές των αντίστοιχων οριακών τυχαίων μεταβλητών, έστω Q, Q_q, Q_s, S, W και X.

1.1.2 Το μήκος ουράς

Η πιο χρήσιμη στοχαστική διαδικασία για την περιγραφή και μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς μιας ουράς είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, η διαδικασία μήκους ουράς $\{Q(t) : t \geq 0\}$. Επομένως, μας ενδιαφέρει να βρούμε τη **μεταβατική κατανομή** της $\{Q(t)\}$, δηλαδή τις πιθανότητες $p_j(t)$, $j \in \mathbb{N}$ (ως συναρτήσεις του t), όπου:
$p_j(t) = P(Q(t) = j) = P($να υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή $t)$.

Επειδή συχνά συμβαίνει να είναι δύσκολο ή αδύνατο να βρούμε την αναλυτική μορφή της μεταβατικής κατανομής της $\{Q(t)\}$, και επειδή, μετά από παρέλευση μικρού σχετικά χρόνου, η $\{Q(t)\}$ παύει ουσιαστικά να επιδεικνύει μεταβατική συμπεριφορά, δηλαδή φτάνει σε **κατάσταση στατιστικής ισορροπίας**, στρέφουμε το ενδιαφέρον μας στην εύρεση της αντίστοιχης **οριακής κατανομής**:

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t),\ j \in \mathbb{N}.$$

Αυτό το κάνουμε γιατί η οριακή κατανομή είναι ανεξάρτητη του t, οπότε είναι πολύ πιο εύκολο να τη βρούμε.

Γενικά, για κάθε ουρά της οποίας η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων ή η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης είναι συνεχής ή έχει ένα συνεχές τμήμα (κάτι που ισχύει για όλες τις ουρές που εμφανίζονται στις εφαρμογές), η οριακή κατανομή ορίζεται. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ισχύει ακριβώς μία από τις επόμενες προτάσεις, και μάλιστα ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση $Q(0)$:
(i) Η $\{Q(t)\}$ **έχει ακριβώς μία γνήσια οριακή κατανομή** $\{p_j\}$.
(ii) Η $\{Q(t)\}$ **αποκλίνει**, δηλαδή η οριακή κατανομή είναι το μηδενικό διάνυσμα.

[9] Για τις αναγεννητκές διαδικασίες βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση, σελ. 36-39.

Για ουρές με πεπερασμένη χωρητικότητα ισχύει πάντα η πρώτη πρόταση, ενώ για ουρές με άπειρη χωρητικότητα, η βασική παράμετρος που μας δείχνει ποιά από τις παραπάνω δύο προτάσεις ισχύει είναι ο **ρυθμός (ή ένταση) συνωστισμού**:

$$\rho = \lambda b.$$

Για την ακρίβεια[10], ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η πρόταση (i) για τη μη-ντετερμινιστική $GI|G|k$ ουρά είναι η σχέση:

$$\rho < k.$$

Αποδεικνύεται ότι όταν ισχύει η πρόταση (i) για την $GI|G|1$ ουρά, η οριακή πιθανότητα το σύστημα να είναι κενό είναι $p_0 = 1 - \rho$, $\rho < 1$.

Εμφυτευμένες διαδικασίες στο μήκος ουράς

Όταν η $\{Q(t)\}$ έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα[11], η μελέτη της είναι πολύ πιο εύκολη. Έτσι, σε περιπτώσεις που δεν είναι εύκολη η μελέτη της $\{Q(t)\}$, προσπαθούμε να επιλέξουμε κατάλληλες διακεκριμένες χρονικές στιγμές στο $[0, \infty)$, τέτοιες ώστε η $\{Q(t)\}$ να έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα αν την εξετάσουμε μόνο σε αυτές τις χρονικές στιγμές. Αυτές οι κατάλληλες χρονικές στιγμές είναι συνήθως οι **στιγμές διαδοχικών αφίξεων** και οι **στιγμές διαδοχικών αναχωρήσεων** πελατών από το σύστημα.

Αν συμβολίσουμε με t_n τη χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_n στο σύστημα και με τ_n τη χρονική στιγμή αναχώρησής του από το σύστημα, τότε ορίζουμε τις εξής τυχαίες μεταβλητές:
– $Q_n^- = Q(t_n^-), n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ = μήκος ουράς αμέσως πριν την $n-$οστή άφιξη στο $[0, \infty)$
– $Q_n^+ = Q(\tau_n^+), n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ = μήκος ουράς αμέσως μετά την $n-$οστή αναχώρηση στο $[0, \infty)$

Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{Q_n^- : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{Q_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$, που περιγράφουν το σύστημα αποκλειστικά σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, ονομάζονται **εμφυτευμένες διαδικασίες** στην $\{Q(t) : t \geq 0\}$.

Αν συμβολίσουμε με:
$r_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^- = j), j \in \mathbb{N}$
$d_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^+ = j), j \in \mathbb{N}$
τις οριακές κατανομές των $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ αντίστοιχα και αν έχουμε μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις, τότε για τις $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ ισχύει:
$r_j = d_j, j \in \mathbb{N}$.

Ιδιότητα PASTA

Γενικά δεν ισχύει ότι $p_j = r_j$ (ή $p_j = d_j$), $j \in \mathbb{N}$, δηλαδή η οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο γενικά δεν συμπίπτει με την οριακή κατανομή σε στιγμές αφίξεων (ή αναχωρήσεων). Υπάρχει, όμως, μια ειδική περίπτωση στην οποία $p_j = r_j$, $j \in \mathbb{N}$. Αυτή είναι η περίπτωση που η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως **Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)**.

[10] Για περισσότερες πληροφορίες για τον ρυθμό συνωστισμού βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση, σελ. 107.

[11] **Μαρκοβιανή (ή Αμνήμονη) Ιδιότητα:** Λέμε ότι μια στοχαστική $\{X(t) : t \in T\}$ έχει τη Μαρκοβιανή Ιδιότητα (και τότε ονομάζεται Μαρκοβιανή διαδικασία) όταν έχει την ιδιότητα ότι δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ (παρόν), οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(u) : u > t\}$ (μέλλον) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τυχαίες μεταβλητές $\{X(s) : s < t\}$ (παρελθόν). Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες με διακριτό χώρο καταστάσεων ονομάζονται Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Αποτέλεσμα του Little

Διαισθητικά περιμένουμε ότι το μήκος ουράς και ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά είναι ποσότητες ανάλογες, δηλαδή αν σε μια ουρά το μήκος ουράς είναι μεγάλο, τότε και ο μέσος χρόνος παραμονής είναι μεγάλος. Αυτό όντως ισχύει. Για την ακρίβεια, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα το οποίο καλείται **αποτέλεσμα του Little**:

$$\overline{Q} = \lambda \overline{S} \text{ (με πιθανότητα 1).}$$

Το αποτέλεσμα του Little εκφράζει το γεγονός ότι ασυμπτωτικά, ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα, ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων επί τον μέσο χρόνο παραμονής σε αυτό, σχεδόν για κάθε πραγματοποίηση της διαδικασίας.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν οι οριακές κατανομές των στοχαστικών διαδικασιών $\{Q(t) : t \geq 0\}$ και $\{S_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ και είναι γνήσιες, και συμβολίζοντας με Q και S τις αντίστοιχες οριακές τυχαίες μεταβλητές, έχουμε ότι $E(Q) = \overline{Q}$ και $E(S) = \overline{S}$, οπότε το Αποτέλεσμα του Little παίρνει την εναλλακτική μορφή:

$$E(Q) = \lambda E(S).$$

Αν κοιτάξει κανείς την απόδειξη του αποτελέσματος του Little[12], θα δει ότι για την απόδειξή του δεν χρειάστηκε να περιγραφεί πλήρως το σύστημα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το αποτελέσμα του Little να ισχύει ακόμα και αν θεωρήσουμε ως σύστημα μόνο το χώρο αναμονής ή μόνο τον χώρο εξυπηρέτησης. Αν θεωρήσουμε ως σύστημα μόνο τον χώρο αναμονής, το αποτελέσμα του Little γίνεται:

$$E(Q_q) = \lambda E(W),$$

όπου Q_q και W είναι οι οριακές τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τον αριθμό των πελατών στον χώρο αναμονής και τον χρόνο που περιμένουν οι πελάτες στον χώρο αναμονής αντίστοιχα, ενώ αν ως σύστημα θεωρήσουμε μόνο τον χώρο εξυπηρέτησης, το αποτελέσμα του Little γίνεται:

$$E(Q_s) = \lambda E(X) = \lambda b = \rho,$$

όπου $E(X) = b$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και Q_s είναι η οριακή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται ταυτόχρονα (ή ισοδύναμα των απασχολημένων υπηρετών).

1.1.3 Η M|M|1 ουρά

Διαδικασίες Γέννησης-Θανάτου

Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα[13] με χώρο καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ ή $S = \{0, 1, \ldots, s\}$, στην οποία οι μόνες μεταβάσεις από μια κατάσταση n είναι είτε προς την $n-1$ με ρυθμό μ_n είτε προς την $n+1$ με ρυθμό λ_n. Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda_{n-2}"] & (n-1) \arrow[l, bend left, "\mu_{n-1}"] \arrow[r, bend left, "\lambda_{n-1}"] & (n) \arrow[l, bend left, "\mu_n"] \arrow[r, bend left, "\lambda_n"] & (n+1) \arrow[l, bend left, "\mu_{n+1}"] \arrow[r, bend left, "\lambda_{n+1}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu_{n+2}"]
\end{tikzcd}$$

[12] βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση, σελ. 111-113.

[13] Δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία με διακριτό χώρο καταστάσεων, η οποία έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ λέγεται **διαδικασία Γέννησης-Θανάτου** με **ρυθμούς γέννησης $\boldsymbol{\lambda_n}$** $(n = 0, 1, \ldots)$ και **ρυθμούς θανάτου $\boldsymbol{\mu_n}$** $(n = 1, 2, \ldots)$. Υποθέτουμε ότι η $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι κανονική[14] και αδιαχώριστη.

Η (μοναδική) γνήσια κατανομή p_n, $n \in S$, υπάρχει αν και μόνο αν:

$$B^{-1} = \sum_{n \in S} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} < \infty,$$

και τότε έχουμε:

$$p_n = B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} > 0, \; n \in S$$

και η $\{X(t)\}$ είναι θετικά επαναληπτική. Όταν $B^{-1} = \infty$, τότε $p_n = 0$, $n \in S$ και η $\{X(t)\}$ είναι μηδενικά επαναληπτική ή παροδική.

M|M|1 ουρά

Μια $M|M|1$ ουρά λειτουργεί ως εξής: Οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson (λ) και αν βρουν τον (μοναδικό) υπηρέτη απασχολημένο, περιμένουν σε ένα χώρο αναμονής άπειρης χωρητικότητας μέχρι να έρθει η σειρά τους να τους εξυπηρετήσει. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με την Εκθετική (μ) κατανομή και είναι ανεξάρτητοι από τους χρόνους αφίξεων. Όταν τελειώσει η εξυπηρέτηση ενός πελάτη, τότε ο πελάτης φεύγει αμέσως από το σύστημα και ο υπηρέτης επιλέγει από τον χωρο αναμονής τον επόμενο πελάτη που θα εξυπηρετήσει (σύμφωνα με την FCFS πειθαρχία ουράς, εκτός και αν δηλώνεται κάποια άλλη πειθαρχία ουράς).

Έστω $Q(t)$ το μήκος ουράς την χρονική στιγμή t. Τότε η $\{Q(t) : t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων $S = \mathbb{N}$. Μάλιστα είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αφού οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων και οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Εκθετική (λ) κατανομή και την Εκθετική (μ) κατανομή αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την περιγραφή της $M|M|1$ που δώσαμε, έχουμε ότι το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n-1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n+1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Άρα, η $\{Q(t) : t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Γέννησης-Θανάτου με ρυθμούς γέννησης $\lambda_n = \lambda$, $n \in \mathbb{N}$ και ρυθμούς θανάτου $\mu_n = \mu$, $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Επομένως, η (μοναδική) οριακή κατανομή της $\{Q(t) : t \geq 0\}$ υπάρχει αν και μόνο αν:

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty,$$

όπου $\rho = \lambda / \mu$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού.

[14] Δηλαδή δεν είναι δυνατό να υπάρξουν άπειρες στο πλήθος μεταβάσεις σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Η τελευταία συνθήκη ισχύει αν και μόνο αν $\rho < 1$ και τότε:

$$B^{-1} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Άρα, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η $\{Q(t) : t \geq 0\}$ γνήσια οριακή κατανομή είναι $\rho < 1$ και τότε η οριακή κατανομή είναι $p_n = (1-\rho)\rho^n$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η Γεωμετρική (ρ) κατανομή. Αν $\rho \geq 1$, τότε $p_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν συμβολίσουμε με Q και S τις οριακές τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν το μήκος ουράς και τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (όταν $\rho < 1$), τότε:
– Η Q έχει την Γεωμετρική (ρ) κατανομή, οπότε:

$$E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho} \text{ και } V(Q) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

– Από το αποτέλεσμα του Little έχουμε:

$$E(Q) = \lambda E(S) \Rightarrow E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Για την Q έχουμε επίσης τα εξής:
– $p_0 = P(Q = 0) = 1 - \rho$
– $P(Q \geq k) = \rho^k$, $k \in \mathbb{N}$.

1.2 Βασικά στοιχεία Θεωρίας Παιγνίων

Όπως λέει και το όνομά της, η Θεωρία Παιγνίων ασχολείται με παιχνίδια. Κάθε παιχνίδι (game) περιλαμβάνει ένα σύνολο από (τουλάχιστον 2) **"λογικούς"**[15] **παίκτες**, καθένας από τους οποίους διαθέτει ένα σύνολο (όχι αναγκαστικά ίδιο για όλους τους παίκτες) από (καθαρές) **στρατηγικές**. Μια στρατηγική (strategy) ενός παίκτη είναι ένα **πλήρες σχέδιο δράσης**, που υπαγορεύει στον παίκτη τί πρέπει να κάνει μέσα στο παιχνίδι, καλύπτοντας όλες τις πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο παίκτης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού[16].

Εκτός από το σύνολο των στρατηγικών, σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί και μια **συνάρτηση ωφέλειας** (όχι αναγκαστικά ίδια για όλους τους παίκτες), δηλαδή μια συνάρτηση η οποία δείχνει ποιό θα είναι το κέρδος (αν είναι θετική) ή το κόστος (αν είναι αρνητική) του κάθε παίκτη στο τέλος του παιχνιδιού. Το ποιά θα είναι η ωφέλεια του κάθε παίκτη, εξαρτάται από τη στρατηγική που χρησιμοποίησε ο ίδιος και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι άλλοι παίκτες στο παιχνίδι.

1.2.1 Παιχνίδια χωρίς συνεργασία και στρατηγικές

Υπάρχουν παιχνίδια, στα οποία οι παίκτες δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, οπότε δεν μπορούν να συνεργαστούν (**παιχνίδια χωρίς συνεργασία** (non cooperative games)) και παιχνίδια στα οποία οι παίκτες μπορούν να επικοινωνήσουν και να συνάψουν συμμαχίες (**παιχνίδια σε συμμαχική μορφή** (cooperative games))[17]. Εμάς, στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, μας ενδιαφέρουν μόνο τα πρώτα.

Για τα παιχνίδια χωρίς συνεργασία έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

[15] Με την έννοια ότι, αν ένας παίκτης ξέρει ότι μια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα γι' αυτόν, τότε θα διαλέξει αυτήν τη στρατηγική.

[16] Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης, *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντελα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. Εκδόσεις Σοφία, Αθήνα, 2009.

[17] Υπάρχουν και άλλοι τύποι παιχνιδιών π.χ. τα παιχνίδια διαπραγμάτευσης (bargaining games).

Ορισμός 1. *Ένα παιχνίδι χωρίς συνεργασία ορίζεται από:*
α) Ένα **σύνολο παικτών**, *έστω* $\mathbf{\Pi = \{1, \ldots, N\}}$.
β) Ένα σύνολο (άπειρο ή πεπερασμένο) από αποφάσεις/ενέργειες για κάθε παίκτη, που ονομάζονται **καθαρές στρατηγικές** *(pure strategies), έστω* $A_1, \ldots, A_N$.
γ) Μια **συνάρτηση ωφέλειας** *(payoff function)*[18] *για κάθε παίκτη, έστω* $\boldsymbol{F_1, \ldots, F_N}$.

Παρατήρηση 1. *Το* Π *μπορεί να είναι και άπειρο σύνολο. Μάλιστα, το κεντρικό κομμάτι αυτής της εργασίας έχει να κάνει με παιχνίδια με άπειρους παίκτες (για την ακρίβεια, οι παίκτες είναι πελάτες που φτάνουν σε μια* $M|M|1$ *ουρά).*

Εκτός από τις καθαρές στρατηγικές, υπάρχουν και οι **μεικτές στρατηγικές** (mixed strategies). Μια μεικτή στρατηγική ενός παίκτη είναι ένα διάνυσμα που δίνει σε κάθε καθαρή στρατηγική του παίκτη μία πιθανότητα (την πιθανότητα να χρησιμοποιήσει ο παίκτης την αντίστοιχη καθαρή στρατηγική). Για παράδειγμα, αν το σύνολο των καθαρών στρατηγικών ενός παίκτη είναι $A = \{a_1, \ldots, a_4\}$, τότε μερικές μεικτές στρατηγικές του παίκτη αυτού είναι: $m_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $m_2 = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$, $m_3 = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, 0\right)$ (η $j-$οστή συντεταγμένη κάθε m_i είναι η πιθανότητα που δίνει η m_i στην a_j).
Προφανώς, οι συντεταγμένες κάθε μεικτής στρατηγικής αθροίζουν στο 1.

Έστω $M_1, \ldots, M_N$ τα σύνολα των μεικτών στρατηγικών των παικτών. Αν το σύνολο των καθαρών στρατηγικών του παίκτη i είναι $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{in_i}\}$, τότε το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του είναι $M_i = \{(p_1, \ldots, p_{n_i}) : \sum\limits_{k=1}^{n_i} p_k = 1\}$.

Για κάθε καθαρή στρατηγική ενός παίκτη i, υπάρχει μια μεικτή που αντιστοιχεί σ' αυτή. Πράγματι, η a_{ij} αντιστοιχεί στην $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in M_i$, η οποία έχει το 1 στην $j-$οστή θέση και η οποία λέει στον παίκτη να επιλέξει την στρατηγική a_{ij} με πιθανότητα 1.

Ορισμός 2. *Το σύνολο* $\boldsymbol{M = M_1 \times \ldots \times M_N} = \{(m_1, \ldots, m_N) : m_1 \in M_1, \ldots, m_N \in M_N\}$ *λέγεται* **σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων** *του παιχνιδιού. Κάθε* $m \in M$ *λέγεται* **στρατηγική κατάσταση** *(strategy profile) και καθορίζει μια στρατηγική για κάθε παίκτη.*

1.2.2 Συνάρτηση ωφέλειας και σημεία στρατηγικής ισορροπίας

Η συνάρτηση ωφέλειας $F_i(s)$ ενός παίκτη i είναι μια συνάρτηση, που δείχνει ποιά θα είναι η πληρωμή (κέρδος ή κόστος) του παίκτη i, δεδομένου ότι χρησιμοποιείται από τους παίκτες η στρατηγική κατάσταση s.

Συμβολίζουμε με m_{-i} το διάνυσμα που περιέχει τις στρατηγικές των παικτών $\Pi \backslash \{i\}$, δηλαδή αν $m = (m_1, \ldots, m_N)$, τότε $m_{-i} = (m_1, ..., m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_N)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $m = (m_i, m_{-i})$.

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε για τη συνάρτηση ωφέλειας F_i του παίκτη i, ότι είναι μια συνάρτηση από το σύνολο M στο $\mathbb{R}$:
$F_i : m = (m_i, m_{-i}) \to r_i$.

Υποθέτουμε ότι κάθε F_i είναι γραμμική συνάρτηση ως προς τη στρατηγική m_i, δηλαδή:

[18] Θα τις δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω.

Αν $m_i = p \cdot a + (1-p) \cdot b$, για $p \in [0,1]$ και $a, b \in M_i$, τότε $F_i(m_i, m_{-i}) =$
$= p \cdot F_i(a, m_{-i}) + (1-p) \cdot F_i(b, m_{-i})$.

Ορισμός 3. *Λέμε ότι μια στρατηγική m_i^1* **κυριαρχεί ασθενώς***(weakly dominates) επί μιας στρατηγικής m_i^2, αν για κάθε m_{-i} ισχύει $F_i(m_i^1, m_{-i}) \geq F_i(m_i^2, m_{-i})$ και η ανισότητα είναι γνήσια για τουλάχιστον ένα m_{-i}. Επίσης, μια στρατηγική λέγεται* **ασθενώς κυριαρχούσα** *(weakly dominant), αν κυριαρχεί ασθενώς επί όλων των άλλων στρατηγικών του M_i.*

Ορισμός 4. *Λέμε ότι μια στρατηγική m_i^* είναι μια* **βέλτιστη απάντηση** *(best response) του παίκτη i κατά της στρατηγικής κατάστασης $\hat{m} \in M$, όταν $m_i^* \in \arg\max_{m_i \in M_i} F_i(m_i, \hat{m}_{-i})$. Δηλαδή η m_i^* μεγιστοποιεί την ωφέλεια του παίκτη i, όταν οι υπόλοιποι παίκτες χρησιμοποιούν την $\hat{m}_{-i}$.*

Θα συμβολίζουμε με $BR_i(\hat{m})$ το σύνολο που περιέχει όλες τις βέλτιστες απαντήσεις του παίκτη i, όταν οι υπόλοιποι παίκτες χρησιμοποιούν την $\hat{m}_{-i}$, δηλαδή $BR_i(\hat{m}) = \{m_i^* : F_i(m_i^*, \hat{m}_{-i}) \geq F_i(m_i, \hat{m}_{-i}),\ \forall m_i \in M_i\} = \arg\max_{m_i \in A_i} F(m_i, \hat{m}_{-i})$.

Ορισμός 5. *Λέμε ότι μια στρατηγική κατάσταση $\tilde{m}$ είναι* **σημείο στρατηγικής ισορροπίας (σ.σ.ι.)** *σε καθαρές στρατηγικές ή σημείο Nash (equilibrium), αν ισχύει $\tilde{m}_i \in BR_i(\tilde{m})$, για κάθε $i \in \Pi$, δηλαδή κάθε $\tilde{m}_i$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{m}$.*

Έστω ένα παιχνίδι με άπειρους στο πλήθος παίκτες, οι οποίοι είναι **όμοιοι** μεταξύ τους, δηλαδή οι οποίοι έχουν την ίδια συνάρτηση ωφέλειας και το ίδιο σύνολο στρατηγικών. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{F}$ την **κοινή συνάρτηση ωφέλειας** και με A το **κοινό σύνολο στρατηγικών**, τότε το $F(a,b)$, όπου $a, b \in A$, είναι η ωφέλεια ενός παίκτη που χρησιμοποιεί την στρατηγική a, όταν όλοι οι άλλοι παίκτες χρησιμοποιούν την στρατηγική b. Με βάση αυτά, έχουμε τον επόμενο Ορισμό:

Ορισμός 6. *Η $\hat{m} \in A$ ονομάζεται* **(συμμετρικό) σ.σ.ι (symmetric equillibrium)***, αν $\hat{m} \in BR(\hat{m}) = \arg\max_{m \in A} F(m, \hat{m})$, δηλαδή αν η $\hat{m}$ είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της.*

Παρατήρηση 2. *Αν μια βέλτιστη απάντηση είναι μίξη στρατηγικών έναντι μια στρατηγικής, τότε όλες αυτές οι στρατηγικές είναι επίσης βέλτιστες απαντήσεις στην ίδια στρατηγική. Αυτό δεν ισχύει για τα σ.σ.ι., δηλαδή αν ένα σημείο στρατηγικής ισορροπίας είναι μίξη δύο στρατηγικών, τότε οι στρατηγικές αυτές δεν είναι απαραίτητα σ.σ.ι..*

1.3 Θεωρία Παιγνίων και Ουρές Αναμονής

Έστω μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Σε όλη την υπόλοιπη εργασία, υποθέτουμε ότι $\lambda < \mu$.

Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης που φτάνει στο σύστημα δεν είναι ο "τυπικός" πελάτης που γνωρίζουμε από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής, αλλά ένας παίκτης (με την έννοια της Θεωρίας Παιγνίων), που πρέπει να επιλέξει κάποια από τις διαθέσιμες σ' αυτόν στρατηγικές, με σκοπό να μεγιστοποιήσει την (προσωπική[19]) ωφέλειά του. Το **κέρδος** ενός πελάτη από την ολοκλήρωση της **εξυπηρέτησής** του είναι $\boldsymbol{R}$ και το

[19] Όπως θα δούμε αργότερα, υπάρχει και η κοινωνική ωφέλεια.

κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής του στο σύστημα είναι C. Ως **κατάσταση του συστήματος** ορίζουμε το μήκος ουράς, έστω $Q(t)$.

Έχουμε λοιπόν, ένα **παιχνίδι με άπειρους στο πλήθος και όμοιους μεταξύ τους παίκτες**, δηλαδή παίκτες με το **ίδιο σύνολο στρατηγικών**, έστω S, και την **ίδια συνάρτηση ωφέλειας**, έστω F.

1.3.1 Στρατηγικές κατωφλίου

Ο επόμενος ορισμός εισάγει ένα είδος στρατηγικών που θα μας χρειαστούν παρακάτω:

Ορισμός 7.
(i) *Μια* **καθαρή στρατηγική (ή πολιτική) κατωφλίου** *(pure threshold strategy) με κατώφλι $n \in \mathbb{N}$, καθορίζει μια ενέργεια A για τις καταστάσεις $0, 1, \ldots, n-1$ του συστήματος και μια άλλη ενέργεια B για τις υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος (δηλαδή τις $n, n+1, \ldots$).*
(ii) *Μια* **μεικτή στρατηγική (ή πολιτική) κατωφλίου** *(mixed threshold strategy) με κατώφλι $r = n + p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1)$, ορίζει μια μίξη μεταξύ των δύο καθαρών στρατηγικών κατωφλίου n και $n+1$, έτσι ώστε η στρατηγική n να έχει πιθανότητα $1-p$ και η στρατηγική $n+1$ να έχει πιθανότητα p, με αποτέλεσμα η r να καθορίζει:*
– μια ενέργεια A για τις καταστάσεις του συστήματος $0, 1, \ldots, n-1$
– τυχαία επιλογή μεταξύ των A και B (η A επιλέγεται με πιθανότητα p και η B με πιθανότητα $1-p$), όταν η κατάσταση του συστήματος είναι n
– μια ενέργεια B για τις υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος (δηλαδή τις $n+1, n+2, \ldots$).

Άρα λοιπόν:
– Μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου n λέει στον πελάτη να δράσει ως εξής:
Αν η κατάσταση του συστήματος είναι $< n$, διάλεξε το A, και αν η κατάσταση του συστήματος είναι $\geq n$, διάλεξε το B.
– Μια μεικτή στρατηγική κατωφλίου $r = n + p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1)$, λέει στον πελάτη: Αν η κατάσταση του συστήματος είναι $< n$, διάλεξε το A, αν η κατάσταση του συστήματος είναι n, διάλεξε το A με πιθανότητα p και το B με πιθανότητα $1-p$, και αν η κατάσταση του συστήματος είναι $> n$, διάλεξε το B.

Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:
(α) Ουρές με παρατηρούντες πελάτες (Observable Queues): Είναι η περίπτωση όπου οι πελάτες (τους οποίους ονομάζουμε **παρατηρούντες**) παρατηρούν πρώτα το μήκος ουράς και μετά αποφασίζουν αν θα μπουν ή όχι. Άρα, οι **στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι παρατηρούντες πελάτες** μπορεί να είναι **στρατηγικές κατωφλίου** (δηλαδή ο πελάτης επιλέγει ως στρατηγική έναν φυσικό αριθμό n, και αν παρατηρήσει μήκος ουράς $< n$, τότε μπαίνει στο σύστημα, διαφορετικά δεν μπαίνει).
(β) Ουρές με μη-παρατηρούντες πελάτες (Unobservable Queues): Σε αυτή την περίπτωση, οι πελάτες (τους οποίους ονομάζουμε **μη-παρατηρούντες**) δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος ουράς πριν εισέλθουν στο σύστημα. Οι μη-παρατηρούντες πελάτες αποφασίζουν αν θα μπουν στο σύστημα επιλέγοντας μια πιθανότητα εισόδου, έστω q (δηλαδή οι **διαθέσιμες στρατηγικές για τους μη-παρατηρούντες πελάτες** είναι όλα τα $\boldsymbol{q} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$).

1.3.2 Στασιμότητα

Στις ουρές με παρατηρούντες πελάτες, κάθε καθαρή στρατηγική ορίζει μια επιλογή (π.χ. "θα μπω στην ουρά" ή "δεν θα μπω στην ουρά") για κάθε κατάσταση του συστήματος. Μια στρατηγική κατάσταση και μια αρχική κατάσταση $Q(0)$ επάγουν μια κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις του συστήματος. Έτσι, **η ωφέλεια ενός πελάτη εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, την στρατηγική που ακολουθεί ο ίδιος και τις στρατηγικές που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες**, και κάθε πελάτης ενδιαφέρεται για τη δική του αναμενόμενη ωφέλεια (τη μέση τιμή την παίρνουμε πάνω στις καταστάσεις του συστήματος και τις ενέργειες που καθορίζει για την κάθε κατάσταση η στρατηγική που χρησιμοποιεί ο πελάτης).

Έστω ότι η ωφέλεια ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική $a \in M$, όταν οι υπόλοιποι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική $b \in M$, $a, b \in M$, είναι $F(a, b)$. Όταν υπολογίζουμε την αναμενόμενη ωφέλεια ένος πελάτη, υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι σε **κατάσταση στασιμότητας**. Ο όρος "κατάσταση στασιμότητας" έχει τη συνήθη έννοια, δηλαδή σημαίνει ότι η κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις του συστήματος είναι η οριακή κατανομή. Ένας πελάτης λοιπόν, υποθέτει ότι **η κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις του συστήματος είναι η οριακή κατανομή**[20].

Παράδειγμα 1. *Θεωρείστε μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, στην οποία κάθε πελάτης που φτάνει στο σύστημα, παρατηρεί πρώτα το μήκος ουράς και μετά αποφασίζει αν θα μπει στην ουρά για να εξυπηρετηθεί ή όχι (είμαστε δηλαδή στην περίπτωση των παρατηρούντων πελατών). Άρα, το σύνολο των αποφάσεων/ενεργειών των πελατών είναι $A = \{a_1, a_2\}$, όπου a_1 = "Θα μπω στην ουρά." και a_2 = "Δεν θα μπω στην ουρά.".*
Έστω $b \in M$ και ας συμβολίσουμε με $b(n)$ την επιλογή που κάνει ένας πελάτης που χρησιμοποιεί την b, όταν η κατάσταση του συστήματος είναι η $n \in \mathbb{N}$. Για ευκολία ας θεωρήσουμε ότι η b είναι καθαρή στρατηγική, δηλαδη σε κάθε κατάσταση n, το $b(n)$ είναι ειτε η a_1 είτε η a_2.
Αν όλοι οι πελάτες χρησιμοποιούν την b, τότε η b καθορίζει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων του συστήματος π.χ. αν $b(n) = a_2$, για $n \in \mathbb{N}$, τότε κανείς πελάτης δεν μπαίνει στο σύστημα και η κατάσταση του συστήματος είναι πάντα η 0, ενώ αν $b(n) = a_1$, για $n < 10$ και $b(n) = a_2$, για $n \geq 10$, τότε ένας πελάτης θα μπει στην ουρά μόνο αν το μήκος ουράς είναι < 10.
Έστω $p_n(b)$ η οριακή πιθανότητα της κατάστασης n, δεδομένης μιας οποιασδήποτε αρχικής κατάστασης και δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την στρατηγική b. Τότε ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική a είναι:

$$E(W) = \sum_{n:a(n)=a_1} p_n(b) \frac{n+1}{\mu}.$$

1.3.3 Μαζί με το πλήθος και Αντίθετα από το πλήθος

Σε πολλά μοντέλα ουρών, οι στρατηγικές μπορούν να παρασταθούν από έναν αριθμό, π.χ. στις ουρές με παρατηρούντες πελάτες, οι στρατηγικές κατωφλίου αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς, και στις ουρές με μη-παρατηρούντες πελάτες, οι στρατηγικές παριστάνονται με σημεία του [0,1]. Σε τέτοια μοντέλα, όπου ο χώρος των διαθέσιμων στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος, έχει νόημα να θέτουμε ερωτήματα της μορφής "Είναι η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη σε μια στρατηγική κατάσταση αύξουσα (ή

[20] Δηλαδή $P(Q(t) = n) = P(Q = n) = p_n$ (σύμφωνα με τον συμβολισμό της Ενότητας 1.1).

φθίνουσα) συνάρτηση της στρατηγικής που χρησιμοποιούν οι άλλοι πελάτες;".

Έστω ότι ένας πελάτης χρησιμοποιεί τη στρατηγική $a \in M$, ενώ όλοι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική $b \in M$. Τότε η ωφέλεια του πελάτη αυτού είναι $F(a,b)$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε b υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη απάντηση $a(b) : a(b) = \arg\max_a F(a,b)$ στην b και ότι η $a(b)$ είναι γνησίως μονότονη. Όταν η $a(b)$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα), τότε όσο πιο μεγάλο είναι το b, τόσο πιο μεγάλη (αντίστοιχα μικρή) είναι η βέλτιστη απάντηση του πελάτη στην b, δηλαδή, όπως λέμε, ο πελάτης ακολουθεί το πλήθος (αντίστοιχα αποφεύγει το πλήθος), δηλαδή κάνει ό,τι κάνουν και οι άλλοι πελάτες (αντίστοιχα κάνει το αντίθετο από αυτό που κάνουν οι άλλοι πελάτες). Έτσι, η περίπτωση που η $a(b)$ είναι γνησίως αύξουσα καλείται **Σύμφωνα με το πλήθος (ΣΜΤΠ (Follow The Crowd))** και η περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα καλείται **Αντίθετα από το πλήθος (ΑΑΤΠ (Avoid The Crowd))**.

Ένα σ.σ.ι. b ικανοποιεί την $a(b) = b$, δηλαδή είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης a. **Στην περίπτωση ΣΜΤΠ είναι δυνατόν να υπάρχουν πάνω από ένα σ.σ.ι., ενώ στην περίπτωση ΑΑΤΠ υπάρχει το πολύ ένα σ.σ.ι..**

1.3.4 Η M|M|1 ουρά με παρατηρούντες πελάτες

Έστω μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, στην οποία φτάνουν πελάτες, οι οποίοι αποφασίζουν αν θα μπουν στο σύστημα αφού δουν ποιό είναι το μήκος ουράς. Ένας πελάτης που μπαίνει στο σύστημα, δεν μπορεί να φύγει πριν εξυπηρετηθεί. Έστω R το κέρδος που έχει ένας πελάτης από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του και C το κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής στο σύστημα. Έστω ότι ένας πελάτης φτάνει στο σύστημα και βλέπει ότι το μήκος ουράς είναι n. Αν ο πελάτης αποφασίσει να μπει στο σύστημα, τότε ο αναμενόμενος χρόνος που θα παραμείνει στο σύστημα είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκονται στην ουρά τη στιγμή που φτάνει στο σύστημα[21] (που είναι ο αναμενόμενος χρόνος που θα περιμένει ο πελάτης στην ουρά) συν τον δικό του χρόνο εξυπηρέτησης, δηλαδή ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής του στο σύστημα είναι όσος και ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης $n+1$ πελατών, δηλαδή:

$$E(S) = \frac{n+1}{\mu},$$

όπου S είναι η οριακή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον χρόνο παραμονής ενός τέτοιου πελάτη στο σύστημα. Έτσι, η **αναμενόμενη ωφέλεια** του πελάτη, αν αποφασίσει να μπει, είναι:

$$F(n) = R - C \cdot E(S) = R - C \cdot \frac{n+1}{\mu}.$$

Άρα, για να τον συμφέρει να μπεί στην ουρά, θα πρέπει το μήκος να είναι μικρό (τόσο μικρό ώστε η F να είναι θετική ή στη χειρότερη περίπτωση 0[22]), ενώ θα τον συμφέρει να μην μπει όταν είναι μεγάλο (τόσο μεγάλο ώστε η F να είναι αρνητική). Είναι φανερό, λοιπόν, ότι οι βέλτιστες στρατηγικές των πελατών είναι στρατηγικές κατωφλίου.

[21] Λόγω της Αμνήμονης Ιδιότητας της Εκθετικής κατανομής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται, μόλις άρχισε.

[22] Σε όλη την εργασία θεωρούμε ότι αν η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα είναι 0, τότε ο πελάτης θα προτιμήσει να μπει στην ουρά.

Επίσης, από την παραπάνω ανάλυση, είναι φανερό ότι **η καλύτερη στρατηγική που μπορεί να χρησιμοποιήσει ένας πελάτης που φτάνει στο σύστημα, εξαρτάται μόνο από το μήκος ουράς και όχι από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι άλλοι πελάτες**. Αφού οι πελάτες είναι όμοιοι μεταξύ τους, αν συμφέρει έναν πελάτη που παρατηρεί μήκος ουράς n, να μπει στην ουρά, τότε θα συμφέρει και όλους τους άλλους πελάτες που βρίσκουν μήκος ουράς n όταν φτάνουν στο σύστημα. Έτσι, για να βρούμε το (συμμετρικό) σ.σ.ι., έστω n_e, αρκεί να κοιτάξουμε πότε συμφέρει έναν πελάτη να μπει στην ουρά και πότε όχι.

Προφανώς, ένας πελάτης θα προτιμήσει να μπει στην ουρά αν το μήκος ουράς n που παρατηρεί είναι τέτοιο ώστε:

$$F(n) \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{R\mu}{C} - 1.$$

Άρα, θα ακολουθήσει μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι:

$$n_e = \left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor,$$

δηλαδή αν ένας πελάτης παρατηρήσει μήκος ουράς $< n_e$, τότε θα μπει στην ουρά, ενώ αν παρατηρήσει μήκος ουράς $\geq n_e$, τότε δεν θα μπει. Άρα, το μεγαλύτερο μήκος ουράς που μπορεί να παρατηρήσει ένας πελάτης, όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν την βέλτιστη γι' αυτούς στρατηγική, είναι n_e. Έχουμε δηλαδή μια $M|M|1|n_e$ ουρά.

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας ουράς με παρατηρούντες πελάτες, οι οποίοι ακολουθούν τη στρατηγική κατωφλίου n_e είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n_e - 1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n_e) \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

1.3.5 Η M|M|1 ουρά με μη-παρατηρούντες πελάτες

Έστω μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα, δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος ουράς πριν αποφασίσουν αν θα μπουν ή όχι. Ένας πελάτης που μπαίνει στο σύστημα, δεν μπορεί να φύγει πριν εξυπηρετηθεί. Έστω R το κέρδος που έχει ένας πελάτης από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του και C το κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής στο σύστημα.

Αφού οι πελάτες δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος ουράς, η απόφαση που παίρνει ένας μη-παρατηρών πελάτης που φτάνει στην ουρά είναι με ποιά πιθανότητα, έστω q, να μπει στο σύστημα. Άρα, το **σύνολο των στρατηγικών** των μη-παρατηρούντων πελατών είναι το $\mathbf{[0,1]}$.

Έστω ένας πελάτης που υποθέτει ότι οι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική $q \in [0,1]$. Αν ο πελάτης αποφασίσει να μπει στην ουρά (δηλαδή να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $p = 1$), τότε ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα είναι ο μέσος συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκονται στην ουρά τη στιγμή που φτάνει στο σύστημα (που είναι ο αναμενόμενος χρόνος που θα περιμένει ο πελάτης στην ουρά) συν τον δικό του μέσο χρόνο εξυπηρέτησης. Ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στην ουρά είναι $E(Q)$, όπου Q είναι η οριακή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μήκος ουράς. Έτσι, ο αναμενόμενος χρόνος που θα περιμένει ο πελάτης στον χώρο αναμονής αν μπει τελικά στο σύστημα, είναι όσος και ο αναμενόμενος συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης $E(Q)$ πελατών, δηλαδή:

$$E(W) = \frac{E(Q)}{\mu},$$

όπου W είναι η οριακή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον χρόνο που περιμένει ένας πελάτης στον χώρο αναμονής. Άρα, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής του στο σύστημα είναι:

$$E(S) = E(W) + E(X) = \frac{E(Q)}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{E(Q)+1}{\mu},$$

όπου X και S είναι οι οριακές τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τον χρόνο εξυπηρέτησης και τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα αντίστοιχα.

Επειδή οι άλλοι πελάτες μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα q, το σύστημα συμπεριφέρεται σαν μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λq και ρυθμό εξυπηρέτησης μ.

Άρα, για το αναμενόμενο μήκος ουράς έχουμε ότι:

$$E(Q) = \frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}.$$

Άρα:

$$E(S) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda q}{\mu - \lambda q} + 1\right) = \frac{1}{\mu - \lambda q}.$$

Έτσι, η **αναμενόμενη ωφέλεια** του πελάτη, αν αυτός αποφασίσει να μπει στο σύστημα και δεδομένου ότι οι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική q, είναι:

$$F(q) = R - C \cdot E(S) = R - C \cdot \frac{1}{\mu - \lambda q}.$$

Βασιζόμενοι στα παραπάνω, θα εξετάσουμε αν υπάρχουν σ.σ.ι..

Κατ' αρχάς, σημειώνουμε ότι αφού οι πελάτες είναι όμοιοι, αν μια επιλογή συμφέρει έναν πελάτη, τότε συμφέρει και τους υπόλοιπους.

Παρατηρείστε ότι η F είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του q. Πράγματι:

$$\begin{aligned} F'(q) &= \frac{d}{dq}\left(R - C \cdot \frac{1}{\mu - \lambda q}\right) = \\ &= -C \cdot \frac{\lambda}{(\mu - \lambda q)^2} < 0 \end{aligned}$$

Επομένως:

– Αν $F(0) \leq 0$, τότε $F(q) \leq 0$, για κάθε $q \in [0,1]$, οπότε αν ο πελάτης μπει τότε, ανεξάρτητα με το τι κάνουν οι άλλοι πελάτες, θα κερδίσει κάτι μη θετικό, ενώ αν δεν μπει, θα κερδίσει 0. Άρα, συμφέρει τον πελάτη να μην μπει, δηλαδή να διαλέξει τη στρατηγική $q = 0$. Επειδή, οι πελάτες είναι όμοιοι, το ίδιο συμφέρει και τους άλλους πελάτες. Έτσι, το (μοναδικό) σ.σ.ι. είναι το $q_e = 0$.

– Αν $F(1) \geq 0$, τότε $F(q) \geq 0$, για κάθε $q \in [0,1]$, οπότε αν ο πελάτης μπει τότε, ανεξάρτητα με το τι κάνουν οι άλλοι πελάτες, θα κερδίσει κάτι μη αρνητικό, ενώ αν δεν μπει, θα κερδίσει 0. Άρα, τον συμφέρει να μπει, δηλαδή να διαλέξει τη στρατηγική $q = 1$. Επειδή οι πελάτες είναι όμοιοι, το ίδιο ισχύει και για τους άλλους πελάτες. Έτσι, το (μοναδικό) σ.σ.ι. είναι το $q_e = 1$.

– Αν $F(1) < 0 < F(0)$, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο q^*, στο οποίο ισχύει $F(q^*) = 0$. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, αν ο πελάτης αποφασίσει να μπει στο σύστημα, τότε:
-Αν οι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν στρατηγική $\tilde{q} < q^*$, θα κερδίσει κάτι θετικό. Οπότε, τον συμφέρει να μπει, δηλαδή να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $q = 1 \neq \tilde{q}$. Άρα, τα $q < q^*$ δεν είναι σ.σ.ι..
-Αν οι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν στρατηγική $\tilde{q} > q^*$, τότε, θα κερδίσει κάτι αρνητικό. Οπότε, τον συμφέρει να μην μπει, δηλαδή να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $q = 0 \neq \tilde{q}$. Άρα, τα $q > q^*$ δεν είναι σ.σ.ι..
-Αν οι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική q^*, τότε θα κερδίσει 0, ό,τι και να κάνει. Άρα, όλα τα $q \in [0, 1]$ είναι βέλτιστες απαντήσεις στην q^*. Επομένως, το q^* είναι βέλτιστη απάντηση στο q^*, και άρα το $q_e = q^*$ είναι (το μοναδικό) σ.σ.ι..

Συνοψίζοντας:
– Αν $F(0) \leq 0$, τότε το (μοναδικό) **σ.σ.ι.** είναι το $\boldsymbol{q_e = 0}$.
– Αν $F(1) \geq 0$, τότε, το (μοναδικό) **σ.σ.ι.** είναι το $\boldsymbol{q_e = 1}$.
– Αν $F(1) < 0 < F(0)$, τότε το (μοναδικό) **σ.σ.ι.** είναι το $\boldsymbol{q_e = q^*}$.

Παρατηρείστε ότι και στις 3 περιπτώσεις υπάρχει σ.σ.ι. και είναι μοναδικό. Είμαστε στην **περίπτωση ΑΑΤΠ**.

1.3.6 Κοινωνική ωφέλεια και Τίμημα της Αναρχίας

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι οι πελάτες ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν την προσωπική τους ωφέλεια. Όμως, κάθε επιλογή στρατηγικής από ένα πελάτη έχει και κάποιο αντίκτυπο στους άλλους πελάτες. Πιο συγκεκριμένα, αν ένας πελάτης που φτάνει στο σύστημα, μπει στην ουρά, τότε ναι μεν η είσοδός του δεν θα επηρεάσει την προσωπική ωφέλεια των πελατών που βρίσκονται μπροστά του στην ουρά (αφού δεν προσθέτει και δεν αφαιρεί τίποτα στο χρόνο παραμονής τους), αλλά θα επηρεάσει την προσωπική ωφέλεια των πελατών που θα μπουν μετά από αυτόν, αφού η παρουσία του στην ουρά αυξάνει τον χρόνο παραμονής τους κατά 1 χρόνο εξυπηρέτησης και άρα η ωφέλεια του καθενός από αυτούς τους πελάτες μειώνεται. Έτσι, η είσοδος αυτού του πελάτη στην ουρά έχει αντίκτυπο στην κοινωνική ωφέλεια.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι οι πελάτες ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν την **κοινωνική ωφέλεια** (δηλαδή τη συνολική αναμενόμενη καθαρή ωφέλεια των μελών της κοινωνίας, και των υπηρετών και των πελατών) και όχι την ατομική τους ωφέλεια. Τότε, μια πληρωμή που μεταφέρεται μεταξύ των ατόμων του πληθυσμού, έχει μηδενική καθαρή επίδραση στην κοινωνική ωφέλεια, και άρα δεν έχει επίδραση στη βελτιστοποίηση του συστήματος. Έτσι, ο στόχος της κοινωνίας είναι να μεγιστοποιήσει το άθροισμα των κερδών από την εξυπηρέτηση μείον τα λειτουργικά κόστη και τα κόστη παραμονής στο σύστημα.

Για ό,τι ακολουθεί θεωρούμε μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ (άρα, ρυθμό συνωστισμού $= \rho = \lambda/\mu$), κέρδος από την εξυπηρέτηση R και κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής C. Υποθέτουμε επίσης ότι οι συναρτήσεις ωφέλειας των πελατών ταυτίζονται και είναι προσθετικές (όταν τις βλέπουμε από την οπτική γωνία της κοινωνίας).

Παρατηρούντες πελάτες

Έστω ότι οι πελάτες που φτάνουν στη ουρά είναι παρατηρούντες. Ο Naor (1969) παρατήρησε ότι στις ουρές με παρατηρούντες πελάτες, η απόφαση ενός πελάτη που θέλει να μεγιστοποιήσει την προσωπική του ωφέλεια, αποκλίνει από την κοινωνικά προτιμώμενη απόφαση. Αυτό συμβαίνει διότι, όπως είδαμε και πριν, η είσοδος ενός πελάτη στην ουρά σημαίνει αύξηση του χρόνου παραμονής στο σύστημα πελατών που θα μπουν στο σύστημα μετά από αυτόν. Ένας πελάτης που σκέφτεται την ατομική του ωφέλεια, δεν λαμβάνει υπόψη του αυτό το γεγονός. Το αποτέλεσμα είναι ο ρυθμός αφίξεων όταν χρησιμοποιείται ως στρατηγική το σ.σ.ι. να είναι μεγαλύτερος από τον κοινωνικά επιθυμητό.

Υπενθυμίζουμε ότι το σ.σ.ι. όταν οι πελάτες αποφασίζουν με βάση το ατομικό τους κέρδος είναι:

$$n_e = \left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor .$$

Όταν οι πελάτες αποφασίζουν με βάση την κοινωνική ωφέλεια, τότε υπάρχει μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου, η οποία είναι κοινωνικά βέλτιστη.

Έστω ότι όλοι οι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική $\tilde{n}$. Τότε, αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{G_O}$ την **αναμενόμενη κοινωνική ωφέλεια ανά μονάδα χρόνου**, έχουμε:

$$G_O = \lambda R P(Q < \tilde{n}) - CE(Q),$$

όπου Q είναι η οριακή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μήκος ουράς.

Παρατηρήστε ότι έχουμε μια $M|M|1|\tilde{n}$ ουρά, διότι αν ένας πελάτης παρατηρήσει μήκος ουράς $\tilde{n}$, δεν θα μπει στο σύστημα. Άρα, η οριακή κατανομή της Q είναι:

$$p_n = P(Q = n) = \begin{cases} B\rho^n, & \text{αν} \quad 0 \le n \le \tilde{n} \\ 0, & \text{αν} \quad n > \tilde{n} \end{cases}$$

όπου:

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\tilde{n}} \rho^n = \frac{1-\rho^{\tilde{n}+1}}{1-\rho}.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} P(Q < \tilde{n}) &= \sum_{n=0}^{\tilde{n}-1} p_n \\ &= \sum_{n=0}^{\tilde{n}-1} B\rho^n \\ &= \frac{1-\rho^{\tilde{n}}}{1-\rho^{\tilde{n}+1}}. \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\sum_{n=0}^{\tilde{n}} \rho^n = \frac{1-\rho^{\tilde{n}+1}}{1-\rho}$$

$$\xRightarrow{\text{Παραγωγίζουμε}} \sum_{n=0}^{\tilde{n}} n\rho^{n-1} = \frac{\tilde{n}\rho^{\tilde{n}+1} - \tilde{n}\rho^{\tilde{n}} - \rho^{\tilde{n}} + 1}{(1-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\tilde{n}} n\rho^n = \frac{\tilde{n}\rho^{\tilde{n}+2} - \tilde{n}\rho^{\tilde{n}+1} - \rho^{\tilde{n}+1} + \rho}{(1-\rho)^2}.$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
E(Q) &= \sum_{n=0}^{\tilde{n}} np_n \\
&= B\sum_{n=0}^{\tilde{n}} n\rho^n \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{\tilde{n}+1}} \frac{\tilde{n}\rho^{\tilde{n}+2} - \tilde{n}\rho^{\tilde{n}+1} - \rho^{\tilde{n}+1} + \rho}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\tilde{n}\rho^{\tilde{n}+2} - \tilde{n}\rho^{\tilde{n}+1} - \rho^{\tilde{n}+1} + \rho}{(1-\rho)(1-\rho^{\tilde{n}+1})} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(\tilde{n}+1)\rho^{\tilde{n}+1}}{1-\rho^{\tilde{n}+1}}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$G_O = \lambda R \frac{1-\rho^{\tilde{n}}}{1-\rho^{\tilde{n}+1}} - C\left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(\tilde{n}+1)\rho^{\tilde{n}+1}}{1-\rho^{\tilde{n}+1}}\right).$$

Έστω $\boldsymbol{n^*}$ η στρατηγική που μεγιστοποιεί την G_O. Ο Naor απέδειξε ότι $n^* < n_e$. Έτσι, **το κοινωνικά βέλτιστο μέγιστο μήκος ουράς είναι μικρότερο από το μέγιστο μήκος ουράς που μπορεί να δημιουργηθεί όταν οι πελάτες δρουν σκεπτόμενοι την προσωπική τους ωφέλεια**[23].

Μη-παρατηρούντες πελάτες

Έστω ότι οι πελάτες που φτάνουν στη ουρά είναι μη-παρατηρούντες και ότι ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν την κοινωνική ωφέλεια.

Έστω ότι όλοι οι πελάτες χρησιμοποιούν την στρατηγική q. Τότε, αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{G_U}$ την **αναμενόμενη κοινωνική ωφέλεια ανά μονάδα χρόνου**, έχουμε ότι:

$$G_U = \lambda qR - C\cdot E(Q) = \lambda qR - C\frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}.$$

[23]Όταν (όλοι) οι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική n, το μέγιστο μήκος ουράς που μπορεί να υπάρξει είναι n, διότι αν κάποιος πελάτης που φτάνει στο σύστημα δει ότι το μήκος ουράς είναι n, τότε δεν θα μπει στο σύστημα.

$$\frac{dG_U}{dq} = \lambda R - C\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda q)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\mu-\lambda q)^2 = \frac{C\mu}{R}$$
$$\Leftrightarrow \lambda q = \mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}} \text{ ή } \lambda q = \mu + \sqrt{\frac{C\mu}{R}}$$

Η $\lambda q = \mu + \sqrt{\frac{C\mu}{R}}$ απορρίπτεται διότι θέλουμε $\lambda < \mu$. Άρα, η:

$$q^* = \frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{C\mu}{R}}$$

είναι ένα πιθανό σημείο μεγίστου της G_U.

$$\frac{d^2G_U}{dq^2} = -C\frac{2\lambda^2\mu}{(\mu-\lambda q)^3} < 0, \text{ για κάθε } q \in [0,1]$$

Συνεπώς η $\boldsymbol{q^*}$ είναι **κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική**, δηλαδή μεγιστοποιεί την G_U.

Έστω $\boldsymbol{q_e}$ το **σ.σ.ι., όταν οι πελάτες ενδιαφέρονται για την προσωπική τους ωφέλεια**.

Αποδεικνύεται ότι $q^* \leq q_e$. Άρα, όπως και στην περίπτωση των παρατηρούντων πελατών, **όταν οι πελάτες αποφασίζουν με βάση την προσωπική τους ωφέλεια, δημιουργούνται ουρές με μεγαλύτερο από το κοινωνικά επιθυμητό μήκος ουράς**.

Τίμημα της Αναρχίας

Το **Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy)** είναι μια έννοια της Θεωρίας Παιγνίων, η οποία μετράει πόσο μειώνεται η αποτελεσματικότητα ενός συστήματος εξ' αιτίας της ιδιοτελούς συμπεριφοράς των αντιπροσώπων του[24]. Στη δική μας περίπτωση, το Price of Anarchy (P.o.A.) είναι ο **λόγος του κοινωνικής ωφέλειας όταν οι πελάτες ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν το κοινωνικό κέρδος** (δηλαδή όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν ως στρατηγική τη στρατηγική που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια) **προς τη κοινωνική ωφέλεια όταν οι πελάτες ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν την προσωπική τους ωφέλεια** (δηλαδή όταν χρησιμοποιούν ως στρατηγική το αντίστοιχο σ.σ.ι.).

Έτσι, στην περίπτωση των παρατηρούντων πελατών έχουμε:

$$P.o.A. = \frac{G_O(n^*)}{G_O(n_e)}.$$

1.3.7 Μεγιστοποίηση του κέρδους του διαχειριστή (profit maximization)

Υποθέστε τώρα ότι ο διαχειριστής του συστήματος αποφασίζει να θέσει μια **τιμή εισόδου στο σύστημα**, έστω f, και ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση που οι πελάτες ενδιαφέρονται για την κοινωνική ωφέλεια (όπου τα κέρδη που συλλέγονται

[24]Πηγή: *http://en.wikipedia.org/wiki/Price_of_anarchy*

θεωρούνται μεταφορές πληρωμών), **τα κέρδη που συλλέγονται είναι κέρδη του διαχειριστή του συστήματος**. Έστω ότι η τιμή εισόδου ανακοινώνεται στους πελάτες που φτάνουν στο σύστημα και, με βάση αυτή, οι πελάτες αποφασίζουν ποιά στρατηγική θα ακολουθήσουν.

Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε το σύστημα από την οπτική γωνία του διαχειρστή του συστήματος, δηλαδή μας ενδιαφέρει να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος (profit) του διαχειριστή.

Παρατηρούντες πελάτες

Έστω ότι βρισκόμαστε στην περίπτωση της $M|M|1$ ουράς με παρατηρούντες πελατες και έστω ότι ένας τέτοιος πελάτης φτάνει στο σύστημα. Για να επιλέξει ο πελάτης να μπει στο σύστημα, πρέπει η αναμενόμενη ωφέλειά του να είναι ≥ 0. Έτσι, αν παρατηρήσει n πελάτες στο σύστημα, θα μπει αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} & R - f - C\frac{n+1}{\mu} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow n \leq \frac{(R-f)\mu}{C}. \end{aligned}$$

Άρα, το σ.σ.ι. είναι:

$$n_0 = \left\lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \right\rfloor.$$

Ο διαχειριστής του συστήματος επιλέγει ένα επιθυμητό κατώφλι, έστω n, και διαλέγει τη μέγιστη τιμή εισόδου που επάγει αυτό το κατώφλι, δηλαδή επιλέγει:

$$f = R - \frac{Cn}{\mu}.$$

Ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_O(n) = \lambda P(Q < n) f = \lambda P(Q < n \left(R - \frac{Cn}{\mu}\right).$$

Όπως είδαμε στην §1.3.6, ισχύει:

$$P(Q < n) = \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}}.$$

Συνεπώς:

$$K_O(n) = \lambda \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} \left(R - \frac{Cn}{\mu}\right) = \lambda R \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho^{n+1}} \frac{\nu_e - n}{\nu_e},$$

όπου:

$$\nu_e = \frac{R\mu}{C}.$$

Για ένα μεγιστοποιόν το κέρδος (profit maximizing) κατώφλι, έστω n, δηλαδή ένα n

που μεγιστοποιεί το K_O, ισχύει $K_O(n) > K_O(n-1)$ και $K_O(n) \geq K_O(n+1)$.

$$
\begin{aligned}
& K_O(n) > K_O(n-1) \\
& \Leftrightarrow \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \frac{\nu_e - n}{\nu_e} > \lambda R \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n} \frac{\nu_e - n + 1}{\nu_e} \\
& \Leftrightarrow \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}(\nu_e - n) > \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n}(\nu_e - n + 1) \\
& \Leftrightarrow \frac{(1-\rho^n)^2 - (1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho^n)(1-\rho^{n+1})}(\nu_e - n) > \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n} \\
& \Leftrightarrow \nu_e - n > \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho^n)^2 - (1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})} \\
& \overset{\rho<1}{\Longleftrightarrow} \nu_e - n > \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \quad (1)
\end{aligned}
$$

Ομοίως:

$$
\begin{aligned}
& K_O(n) \geq K_O(n+1) \\
& \Leftrightarrow \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \frac{\nu_e - n}{\nu_e} \geq \lambda R \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+2}} \frac{\nu_e - n - 1}{\nu_e} \\
& \Leftrightarrow \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+2}}(\nu_e - n - 1) \\
& \Leftrightarrow \nu_e - n - 1 \leq \frac{(1-\rho^{n+2})(1-\rho^n)}{(1-\rho^{n+1})^2 - (1-\rho^n)(1-\rho^{n+2})} \\
& \Leftrightarrow \nu_e - n - 1 \leq \frac{(1-\rho^{n+2})(1-\rho^n)}{\rho^n(1-\rho)^2} \quad (2)
\end{aligned}
$$

Από (1) και (2), έχουμε:

$$
n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} < \nu_e \leq n + 1 + \frac{(1-\rho^{n+2})(1-\rho^n)}{\rho^n(1-\rho)^2}.
$$

Έστω μια μεταβλητή $\nu \geq 1$ με:

$$
\nu_e = \nu + \frac{(1-\rho^{\nu-1})(1-\rho^{\nu+1})}{\rho^{\nu-1}(1-\rho)^2}, \text{ με } \rho > 0 \quad (3).
$$

Για δεδομένα ν_e και ρ, το δεξί μέλος της (3), είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του ν. Άρα, η (3) έχει μοναδική λύση, έστω ν_m.

Θέτοντας:

$$
n_m = \lfloor \nu_m \rfloor,
$$

έχουμε ότι ο μέγιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$
K_O(n_m) = \lambda \frac{1-\rho^{n_m}}{1-\rho^{n_m+1}} \left(R - \frac{n_m C}{\mu} \right).
$$

Η αντίστοιχη **μεγιστοποιούσα το κέρδος τιμή εισόδου** είναι:

$$
f_m = R - \frac{C n_m}{\mu}.
$$

Λόγω της (3), έχουμε $\nu_m \leq \nu_e \Rightarrow n_m \leq n_e$. Επίσης, ο Naor απέδειξε ότι $n_m \leq n^* \leq n_e$.

Μη-παρατηρούντες πελάτες

Στην περίπτωση της $M|M|1$ ουράς με μη-παρατηρούντες πελατες, οι οποίοι χρησιμοποιούν το σ.σ.ι. q_e, θεωρούμε έναν μονοπωλιακό διαχειριστή συστήματος που θέτει μια μεγιστοποιούσα το κέρδος τιμή εισόδου, έστω f_m. Η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα είναι:

$$F(q_e) = R - f_m - \frac{C}{\mu - \lambda q_e} = R - f_m - \frac{C}{\mu - \lambda_e}.$$

και ο ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_m = \lambda_e f_m.$$

Ένα μονοπώλιο **δεν αφήνει θετικό περίσσευμα τους πελάτες**, δηλαδή:

$$R = f_m + C\frac{1}{\mu - \lambda_e}.$$

Αυτό συμβαίνει διότι στην περίπτωση που αφήνει θετικό περίσσευμα στους πελάτες, η τιμή εισόδου μπορεί να αυξηθεί χωρίς να μειωθεί ο ρυθμός αφίξεων λ_e.

Στόχος του διαχειριστή είναι να μεγιστοποιήσει το K_m, δεδομένου ότι:

$$0 \leq \lambda_e \leq \lambda \text{ και } f_m = R - C\frac{1}{\mu - \lambda_e},$$

δηλαδή ο στόχος του διαχειριστή του συστήματος είναι να μεγιστοποιήσει το:

$$\lambda_e\left(R - C\frac{1}{\mu - \lambda_e}\right).$$

Παρατηρείστε ότι αν υποθέσουμε ότι ο διαχειριστής του συστήματος θέτει τιμή εισόδου f_m και ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q_e, η κοινωνική ωφέλεια είναι:

$$\lambda_e f_m + \lambda_e\left(R - C\frac{q_e}{\mu - \lambda_e} - f_m\right) = \lambda_e\left(R - C\frac{q_e}{\mu - \lambda_e}\right).$$

Έτσι, το κοινωνικό πρόβλημα είναι η μεγιστοποιήση του:

$$\lambda_e\left(R - C\frac{q_e}{\mu - \lambda_e}\right),$$

δεδομένου ότι $0 \leq \lambda_e < \lambda$.

Άρα, **τα συμφέροντα του διαχειριστή και της κοινωνίας συμπίπτουν**.

Ο κοινωνικά βέλτιστος ρυθμός εισόδου (και άρα ο ρυθμός εισόδου που μεγιστοποιεί το K_m) $\lambda_m = \lambda q^*$ μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή κατάλληλης τιμής εισόδου.

Για $\lambda_m < \lambda$, αυτή η τιμή εισόδου είναι:

$$f_m = R - \sqrt{\frac{RC}{\mu}}$$

και τότε ο (βέλτιστος) ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_m = f_m(\mu - \frac{C}{R - f_m}) = (\sqrt{R\mu} - \sqrt{C})^2.$$

Για $\lambda_m = \lambda$, ο διαχειριστής επιλέγει ως τιμή εισόδου:

$$f_m = R - C\frac{1}{\mu - \lambda},$$

η οποία είναι η μέγιστη τιμή εισόδου που επάγει τον ρυθμό άφιξης λ.

Συνοψίζοντας, ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_m = \begin{cases} (\sqrt{R\mu} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad R \geq \frac{C}{\mu} \\ 0, & \text{αν} \quad R < \frac{C}{\mu} \end{cases}.$$

Κεφάλαιο 2

M|M|1 ουρά με παρατηρούντες και μη-παρατηρούντες πελάτες

2.1 Ποιό είναι το πρόβλημα;

Έστω μια $M|M|1$ **ουρά** με **ρυθμό αφίξεων $\boldsymbol{\lambda}$**, **ρυθμό εξυπηρέτησης $\boldsymbol{\mu}$** και **ρυθμό συνωστισμού $\boldsymbol{\rho}$** $= \lambda/\mu$.

Υποθέτουμε οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα είναι δύο τύπων:

- **Παρατηρούντες (τύπου I)**, οι οποίοι χρησιμοποιούν στρατηγικές κατωφλίου. Το **κέρδος εξυπηρέτησης των πελατών τύπου I** είναι $\boldsymbol{R_o}$ και το **κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής** είναι $\boldsymbol{C_o}$[1].
- **Μη-παρατηρούντες (τύπου II)**, των οποίων οι στρατηγικές είναι όλα τα q $\in$[0,1] (κάθε q είναι η πιθανότητα εισόδου στο σύστημα). Το **κέρδος εξυπηρέτησης των πελατών τύπου II** είναι $\boldsymbol{R_u}$ και το **κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής** είναι $\boldsymbol{C_u}$[2].

(Τα R_o και R_u δεν είναι απαραίτητα ίσα. Το ίδιο ισχύει και για τα C_o και C_u.)

Έστω ότι το **ποσοστό των πελατών τύπου I** που φτάνουν στο σύστημα είναι $\boldsymbol{p}$ (και άρα το ποσοστό των πελατών τύπου II είναι $1 - p$).

Σημείωση: Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $p \neq 0$ και $p \neq 1$, μια και τις περιπτώσεις αυτές τις έχουμε ήδη δει. Το μόνο που θα εξετάσουμε είναι αν τα αποτελέσματά μας ταιριάζουν με αυτά του προηγούμενου κεφαλαίου όταν $p \to 0$ και $p \to 1$.

2.2 Σ.σ.ι.

Το πρώτο πράγμα που θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο είναι να βρούμε τα **σ.σ.ι.**, με δεδομένο ότι όλοι οι πελάτες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν το **ατομικό τους κέρδος**[3].

[1] o από το observable = παρατηρήσιμος
[2] u από το unobservable = μη παρατηρήσιμος
[3] Αργότερα θα δούμε και τι γίνεται με τις βέλτιστες στρατηγικές όταν οι πελάτες δεν ενδιαφέρονται για το ατομικό τους κέρδος αλλά για το κοινωνικό.

Το παιχνίδι έχει άπειρους στο πλήθος παίκτες (πελάτες) και οι πελάτες τύπου I (αντίστοιχα τύπου II) είναι όμοιοι μεταξύ τους. Έτσι, ενδιαφερόμαστε για τα **συμμετρικά σ.σ.ι.**.

2.2.1 Σ.σ.ι.: Παρατηρούντες πελάτες

Οι βέλτιστες στρατηγικές των παρατηρούντων πελατών **δεν εξαρτώνται** από τη στρατηγική που χρησιμοποιούν οι μη-παρατηρούντες πελάτες. Αυτό συμβαίνει διότι οι παρατηρούντες πελάτες παίρνουν την απόφασή τους **αφού** δουν ποιό είναι το μήκος ουράς, οπότε, η στρατηγική που ακολουθούν οι μη-παρατηρούντες πελάτες, δεν επηρεάζει την απόφασή τους[4].

Έτσι, η βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου των παρατηρούντων πελατών, έστω n_e, είναι η ίδια με αυτή της περίπτωσης όπου $p = 1$ (δηλαδή όταν όλοι οι πελάτες είναι παρατηρούντες).

Οπότε:

$$n_e = \left\lfloor \frac{R_o \mu}{C_o} \right\rfloor .$$

2.2.2 Σ.σ.ι.: Μη-παρατηρούντες πελάτες

Μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων

Πριν προσπαθήσουμε να δούμε τί γίνεται με τα σ.σ.ι. όσον αναφορά τους μη-παρατηρούντες πελάτες, ας δούμε πρώτα πώς διαμορφώνονται οι ρυθμοί των μεταβάσεων από μία κατάσταση[5] σε μία άλλη, θεωρώντας ως δεδομένα:
α) ότι οι πελάτες τύπου I ακολουθούν στρατηγική n_e (δηλαδή μπαίνουν στο σύστημα όταν παρατηρούν το πολύ $n_e - 1$ (χωρίς τον εαυτό τους), και δεν μπαίνουν όταν δουν από n_e και πάνω) και
β) ότι οι πελάτες τύπου II ακολουθούν μια στρατηγική $q \in [0, 1]$.

Πρώτα απ' όλα, ο **ρυθμός άφιξης των πελατών τύπου I** είναι λp, εφόσον το μήκος ουράς είναι μικρότερο του n_e (αφού ο (συνολικός) ρυθμός άφιξης στην ουρά είναι λ και το ποσοστό των παρατηρούντων είναι p), και **των πελατών τύπου II** είναι $\lambda(1 - p)q$ (αφού ο (συνολικός) ρυθμός άφιξης στην ουρά είναι λ, το ποσοστό των πελατών τύπου II είναι $(1 - p)$ και η πιθανότητα να μπει ένας πελάτης τύπου II είναι q).

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(α) Όταν το μήκος ουράς είναι $n < n_e$, τότε ένας πελάτης τύπου I που φτάνει, θα μπει στην ουρά, και ένας πελάτης τύπου II που φτάνει, θα μπει στην ουρά με πιθανότητα q. Άρα, για $n < n_e$, ο ρυθμός μετάβασης από την n στην $n+1$ είναι $\lambda_1 = \lambda p + \lambda(1-p)q$.
(β) Όταν το μήκος ουράς είναι $n \geq n_e$, τότε ένας πελάτης τύπου I που φτάνει, δεν θα μπει στην ουρά, και ένας πελάτης τύπου II που φτάνει, θα μπει στην ουρά με πιθανότητα q. Άρα, για $n \geq n_e$, ο ρυθμός μετάβασης από την n στην $n + 1$ είναι $\lambda_2 = \lambda(1 - p)q$.
Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι πάντα μ. Άρα, ο ρυθμός μετάβασης από την $n+1$ στην n είναι μ.

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι έχουμε μια **διαδικασία γέννησης-θανάτου** με ρυθμούς γεννήσεων:

[4]Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο για τους μη-παρατηρούντες πελάτες.
[5]Όπου ως κατάσταση εννοούμε το μήκος ουράς.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_1, & \text{αν} \quad 0 \leq n < n_e \\ \lambda_2, & \text{αν} \quad n \geq n_e \end{cases},$$
όπου $\lambda_1 = \lambda p + \lambda(1-p)q$ και $\lambda_2 = \lambda(1-p)q$, και ρυθμούς θανάτου $\mu_n = \mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & (n_e-1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & (n_e) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & (n_e+1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Η οριακή κατανομή

Για την οριακή κατανομή της αλυσίδας έχουμε: Έστω Q το μήκος ουράς. Θέτουμε $\rho_1 = \lambda_1/\mu$ και $\rho_2 = \lambda_2/\mu$.

Αφού έχουμε μια διαδικασία γέννησης-θανάτου, για τον υπολογισμό της οριακής κατανομής θα ακολουθήσουμε τη συνήθη μέθοδο.

Έχουμε:

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{n_e} \rho_1^n + \sum_{n=n_e+1}^{\infty} \rho_1^{n_e} \rho_2^{n-n_e} = \frac{1-\rho_1^{n_e+1}}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1^{n_e}\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{1-\rho_1^{n_e+1} - \rho_2 + \rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}$$

Άρα η οριακή κατανομή είναι:

$$p_n = P(Q=n) = \begin{cases} B\rho_1^n, & \text{αν} \quad 0 \leq n \leq n_e \\ B\rho_1^{n_e}\rho_2^{n-n_e}, & \text{αν} \quad n \geq n_e \end{cases}$$

Συνάρτηση μέσης ωφέλειας μη-παρατηρούντων πελατών

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένας πελάτης τύπου II φτάνει στο σύστημα. Συμβολίζουμε με $G(n_e, q)$ τη συνάρτηση (ως προς q) που δίνει τη μέση ωφέλεια ενός πελάτη τύπου II, ο οποίος αποφασίζει να μπει στο σύστημα, όταν γνωρίζει ότι οι υπόλοιποι πελάτες τύπου II ακολουθούν τη στρατηγική q και οι πελάτες τύπου I τη στρατηγική n_e.

Επειδή έχουμε μεμονωμένες Poisson αφίξεις (και αναχωρήσεις), ισχύει η ιδιότητα PASTA.

Έτσι, έχουμε για την G:

$$G(n_e, q) = R_u - \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1),$$

όπου $E(Q)$ είναι η αναμενόμενη τιμή του μήκους ουράς.

Δηλαδή, η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη τύπου II που μπαίνει στο σύστημα, όταν οι υπόλοιποι πελάτες τύπου II ακολουθούν τη στρατηγική q και οι πελάτες τύπου I τη στρατηγική n_e, είναι το κέρδος εξυπηρέτησης μείον το κόστος/μονάδα χρόνου παραμονής επί τον μέσο χρόνο παραμονής $E(S)$, ο οποίος είναι ίσος με τον χρόνο αναμονής στην ουρά, που είναι ο χρόνος εξυπέρητησης των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα λίγο πριν μπει ο πελάτης, συν τον χρόνο εξυπηρέτησης, δηλαδή είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης $E(Q)+1$ πελατών[6] και άρα:

$$E(S) = \frac{E(Q)+1}{\mu}.$$

[6]Το ότι ο πελάτης που φτάνει στο σύστημα περιμένει ότι οι πελάτες που βρίσκονται σε αυτό τη στιγμή άφιξής του είναι $E(Q)$ το ξέρουμε λόγω της ιδιότητας PASTA.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την επόμενη Πρόταση:

Πρόταση 1. *Η συνάρτηση της μέσης ωφέλειας ενος μη-παρατηρούντος πελάτη, ο οποίος αποφασίζει να μπει, όταν οι παρατηρούντες πελάτες χρησοποιούν τη στρατηγική n_e και οι υπόλοιποι μη-παρατηρούντες χρησιμοποιούν τη στρατηγική q, είναι:*

$$G(n_e,q)=R_u-\frac{C_u}{\mu}\left(1+B\left(\frac{n_e\rho_1^{n_e+2}-(n_e+1)\rho_1^{n_e+1}+\rho_1}{(1-\rho_1)^2}+\frac{n_e\rho_1^{n_e}\rho_2}{1-\rho_2}+\frac{\rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\right)\right),$$

όπου:

$$B^{-1}=\frac{1-\rho_1^{n_e+1}-\rho_2+\rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)},\ \rho_1=\frac{\lambda p+\lambda(1-p)q}{\mu},\ \textit{και}\ \rho_2=\frac{\lambda(1-p)q}{\mu}.$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε ισχύει:

$$G(n_e,q)=R_u-\frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1). \tag{1}$$

Άρα, αρκεί να υπολογίσουμε την $E(Q)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(Q)&=\sum_{n=0}^{\infty}np_n\\
&=\sum_{n=0}^{n_e}nB\rho_1^n+\sum_{n=n_e+1}^{\infty}nB\rho_1^{n_e}\rho_2^{n-n_e}\\
&=B\left(\sum_{n=0}^{n_e}n\rho_1^n+\rho_1^{n_e}\sum_{n=n_e+1}^{\infty}n\rho_2^{n-n_e}\right)\\
&=B\left(\sum_{n=0}^{n_e}n\rho_1^n+\rho_1^{n_e}\sum_{n=1}^{\infty}(n+n_e)\rho_2^{n}\right)\\
&=B\left(\sum_{n=0}^{n_e}n\rho_1^n+\rho_1^{n_e}\sum_{n=1}^{\infty}n\rho_2^{n}+n_e\rho_1^{n_e}\sum_{n=1}^{\infty}\rho_2^n\right)
\end{aligned}$$

Όμως:

α)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{n_e}\rho_1^n=\frac{1-\rho_1^{n_e+1}}{1-\rho_1}\\
&\xRightarrow{\text{Παραγωγίζουμε}}\sum_{n=0}^{n_e}n\rho_1^{n-1}=\frac{-(n_e+1)\rho_1^{n_e}(1-\rho_1)+1-\rho_1^{n_e+1}}{(1-\rho_1)^2}\\
&\Rightarrow\rho_1\sum_{n=0}^{n_e}n\rho_1^{n-1}=\rho_1\frac{-(n_e+1)\rho_1^{n_e}(1-\rho_1)+1-\rho_1^{n_e+1}}{(1-\rho_1)^2}\\
&\Rightarrow\sum_{n=0}^{n_e}n\rho_1^{n}=\frac{-(n_e+1)\rho_1^{n_e+1}(1-\rho_1)+\rho_1-\rho_1^{n_e+2}}{(1-\rho_1)^2},
\end{aligned}$$

οπότε:

$$\sum_{n=0}^{n_e} n\rho_1^n = \frac{n_e\rho_1^{n_e+2} - (n_e+1)\rho_1^{n_e+1} + \rho_1}{(1-\rho_1)^2}. \tag{2}$$

β)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho_2^n = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}\sum_{n=1}^{\infty} n\rho_2^{n-1}(1-\rho_2) = \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2} \tag{3}$$

(Η τελευταία ισότητα προέκυψε χρησιμοποιώντας τον τύπο της μέσης τιμής της Γεωμετρικής κατανομής.)

γ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_2^n = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \tag{4}$$

Από (2), (3) και (4), η $E(Q)$ γίνεται:

$$E(Q) = B\left(\frac{n_e\rho_1^{n_e+2} - (n_e+1)\rho_1^{n_e+1} + \rho_1}{(1-\rho_1)^2} + \frac{n_e\rho_1^{n_e}\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\right).$$

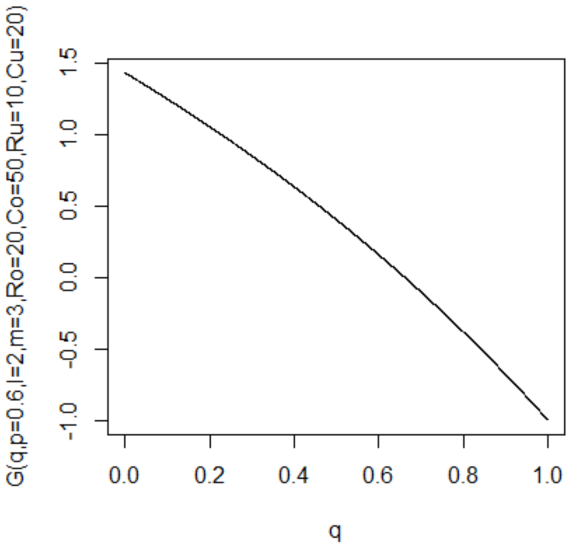
Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (1) παίρνουμε την:

$$G(n_e,q) = R_u - \frac{C_u}{\mu}\left(1 + B\left(\frac{n_e\rho_1^{n_e+2} - (n_e+1)\rho_1^{n_e+1} + \rho_1}{(1-\rho_1)^2} + \frac{n_e\rho_1^{n_e}\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\right)\right),$$

που είναι η ζητούμενη. □

2.2.3 Σ.σ.ι.: Μη-παρατηρούντες πελάτες

Χρησιμοποιώντας κάποιο πρόγραμμα (π.χ. Matlab), μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της G στο διάστημα [0,1] για διάφορες τιμές των παραμέτρων p, λ, μ, R_o, C_o, R_u και C_u. Αν τη σχεδιάσουμε (βλ. Σχήμα 2.1), θα δούμε ότι είναι μια **κοίλη και φθίνουσα συνάρτηση** του q (**γνησίως φθίνουσα** για $p \neq 1$). Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς περιμένουμε ότι όταν αυξάνεται το q, αυξάνεται ο μέσος αριθμός των πελατών που μαζεύονται στην ουρά, δηλαδή αυξάνεται η $E(Q)$, και έτσι μεγαλώνει ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα, οπότε αυξάνεται το αναμενόμενο κόστος που θα πληρώσει ο πελάτης, με αποτέλεσμα να μειώνεται η μέση ωφέλειά του, δηλαδή η $G(n_e,q)$.



Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση G.

Έτσι, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $G(n_e, 0) \leq 0$, τότε, αφού η G είναι φθίνουσα, έχουμε ότι $G(n_e, q) \leq 0$, $\forall q \in [0,1]$. Αυτό σημαίνει ότι αν ο πελάτης (τύπου II) μπει στο σύστημα, θα έχει αρνητική ωφέλεια, ό,τι κι αν έχουν διαλέξει οι υπόλοιποι πελάτες τύπου II. Άρα, τον συμφέρει να μην μπει (δηλαδή τον συμφέρει να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $q = 0$) ό,τι κι αν κάνουν οι άλλοι πελάτες τύπου II. Επειδή οι πελάτες ίδιου τύπου είναι όμοιοι, θα ισχύει το ίδιο και για τους άλλους πελάτες τύπου II. Έτσι, το $(n_e, 0)$ είναι σ.σ.ι..

   Ισχύει, όμως, και το αντίστροφο. Δηλαδή αν το $(n_e, 0)$ είναι σ.σ.ι., τότε $G(n_e, 0) \leq 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί αν ήταν $G(n_e, 0) > 0$ τότε το $q = 0$ δεν θα ήταν βέλτιστη απάντηση στο $(n_e, 0)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι άλλοι πελάτες τύπου II ακολουθούν στρατηγική $q = 0$ και ότι $G(n_e, 0) > 0$, τότε αν ο πελάτης ακολουθήσει $q = 0$, θα έχει ωφέλεια 0, ενώ αν ακολουθήσει τη στρατηγική $q = 1$, θα έχει θετική ωφέλεια. Άρα το $q = 0$ δεν είναι βέλτιστη απάντηση στο $(n_e, 0)$ και άρα το $(n_e, 0)$ δεν είναι σ.σ.ι..

   Άρα, το $q = 0$ είναι βέλτιστη απάντηση στο $(n_e, 0) \Leftrightarrow G(n_e, 0) \leq 0$ (προφανώς το 0 είναι το μοναδικό σ.σ.ι..).

   Έχουμε την επόμενη Πρόταση:

   Πρόταση 2. *Το $(n_e, 0)$ είναι σ.σ.ι. $\Leftrightarrow R_u \leq R_1^*$, όπου:*

$$R_1^* = \frac{C_u}{\mu}\left(\frac{1-\rho p}{1-(\rho p)^{n_e+1}}\left(\frac{n_e(\rho p)^{n_e+2} - (n_e+1)(\rho p)^{n_e+1} + \rho p}{(1-\rho p)^2}\right) + 1\right).$$

   Απόδειξη. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι $\rho = \lambda/\mu$.

Όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

$$\begin{aligned}
&(n_e, 0) \text{ σ.σ.ι.} \Leftrightarrow G(n_e, 0) \le 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R_u - \frac{C_u}{\mu}(E(Q(0)) + 1) \le 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow R_u \le \frac{C_u}{\mu}(E(Q(0)) + 1) := R_1^*
\end{aligned}$$

Όμως, για $q = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \lambda p + \lambda(1-p)q = \lambda p \Rightarrow \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \rho p \\
&\lambda_2 = \lambda(1-p)q = 0 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = 0
\end{aligned}$$

Άρα:

$$B^{-1} = \frac{1 - \rho_1^{n_e+1} - \rho_2 + \rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} = \frac{1 - (\rho p)^{n_e+1}}{1 - \rho p}$$

$$\begin{aligned}
E(Q(0)) &= B\left(\frac{n_e\rho_1^{n_e+2} - (n_e+1)\rho_1^{n_e+1} + \rho_1}{(1-\rho_1)^2} + \frac{n_e\rho_1^{n_e}\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\right) = \\
&= \frac{1-\rho p}{1-(\rho p)^{n_e+1}}\left(\frac{n_e(\rho p)^{n_e+2} - (n_e+1)(\rho p)^{n_e+1} + \rho p}{(1-\rho p)^2}\right)
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$R_1^* = \frac{C_u}{\mu}\left(\frac{1-\rho p}{1-(\rho p)^{n_e+1}}\left(\frac{n_e(\rho p)^{n_e+2} - (n_e+1)(\rho p)^{n_e+1} + \rho p}{(1-\rho p)^2}\right) + 1\right)$$

□

2. Αν $G(n_e, 1) \ge 0$ τότε, αφού η G είναι φθίνουσα ως προς q, έχουμε ότι $G(n_e, q) \ge 0$, για κάθε $q \in [0, 1]$. Αυτό σημαίνει ότι αν ο πελάτης μπει στο σύστημα, θα έχει θετική ωφέλεια, ανεξάρτητα από τη στρατηγική που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες τύπου ΙΙ. Άρα, τον συμφέρει να μπει (δηλαδή τον συμφέρει να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $q = 1$) ό,τι κι αν κάνουν οι άλλοι πελάτες τύπου ΙΙ. Επειδή οι πελάτες ίδιου τύπου είναι όμοιοι, θα ισχύει το ίδιο και για τους άλλους πελάτες τύπου ΙΙ και άρα το $(n_e, 1)$ είναι σ.σ.ι..

   Ισχύει, όμως, και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν το $(n_e, 1)$ είναι σ.σ.ι., τότε $G(n_e, 1) \ge 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί αν ήταν $G(n_e, 1) < 0$, τότε το $(n_e, 1)$ δεν θα ήταν σ.σ.ι.. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι άλλοι πελάτες τύπου ΙΙ ακολουθούν τη στρατηγική $q = 1$ και ότι $G(n_e, 1) < 0$, τότε αν ο πελάτης ακολουθήσει $q = 1$, θα έχει αρνητική ωφέλεια, ενώ αν ακολουθήσει τη στρατηγική $q = 0$, θα έχει ωφέλεια 0. Άρα, το $q = 1$ δεν είναι βέλτιστη απάντηση στο $(n_e, 1)$ και άρα το $(n_e, 1)$ δεν είναι σ.σ.ι..

   Άρα, το $(n_e, 1)$ είναι σ.σ.ι. $\Leftrightarrow G(n_e, 1) \ge 0$ (προφανώς το 1 είναι το μοναδικό σ.σ.ι.).

   Έχουμε την εξής Πρόταση:

   Πρόταση 3. *Το $q = 1$ είναι σ.σ.ι. $\Leftrightarrow R_u \ge R_2^*$, όπου:*

$$R_2^* = \frac{C_u}{\mu}\left(B\left(\frac{n_e\rho^{n_e+2} - (n_e+1)\rho^{n_e+1} + \rho}{(1-\rho)^2} + \frac{n_e\rho^{n_e}\rho(1-p)}{1-\rho(1-p)} + \frac{\rho^{n_e}\rho(1-p)}{(1-\rho(1-p))^2}\right) + 1\right).$$

Απόδειξη. Ισχύει:

$$\begin{aligned}&(n_e,1) \text{ σ.σ.ι.} \Leftrightarrow G(n_e,1) \geq 0 \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow R_u - \frac{C_u}{\mu}(E(Q(1))+1) \geq 0 \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow R_u \geq \frac{C_u}{\mu}(E(Q(1))+1) := R_2^*\end{aligned}$$

Όμως, για $q = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}&\lambda_1 = \lambda p + \lambda(1-p)q = \lambda p + \lambda(1-p) = \lambda \Rightarrow \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \rho\\&\lambda_2 = \lambda(1-p)q = \lambda(1-p) \Rightarrow \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \rho(1-p),\end{aligned}$$

οπότε:

$$B^{-1} = \frac{1-\rho_1^{n_e+1} - \rho_2 + \rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)} = \frac{1-\rho^{n_e+1} - \rho(1-p) + \rho^{n_e+1}(1-p)}{(1-\rho)(1-\rho(1-p))}$$

$$\begin{aligned}E(Q(1)) &= B\left(\frac{n_e\rho_1^{n_e+2} - (n_e+1)\rho_1^{n_e+1} + \rho_1}{(1-\rho_1)^2} + \frac{n_e\rho_1^{n_e}\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_1^{n_e}\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\right)\\&= B\left(\frac{n_e\rho^{n_e+2} - (n_e+1)\rho^{n_e+1} + \rho}{(1-\rho)^2} + \frac{n_e\rho^{n_e+1}(1-p)}{1-\rho(1-p)} + \frac{\rho^{n_e+1}(1-p)}{(1-\rho(1-p))^2}\right)\end{aligned}$$

Τελικά:

$$R_2^* = \frac{C_u}{\mu}\left(B\left(\frac{n_e\rho^{n_e+2} - (n_e+1)\rho^{n_e+1} + \rho}{(1-\rho)^2} + \frac{n_e\rho^{n_e+1}(1-p)}{1-\rho(1-p)} + \frac{\rho^{n_e+1}(1-p)}{(1-\rho(1-p))^2}\right) + 1\right)$$

□

3. Αν $G(n_e,1) < 0 < G(n_e,0)$ τότε, αφού η G είναι φθίνουσα ως προς q, υπάρχει $q_e \in (0,1) : G(n_e,q_e) = 0$. Τότε το (n_e,q_e) είναι το (μοναδικό όπως θα δούμε παρακάτω) σ.σ.ι.. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι υπόλοιποι πελάτες τύπου ΙΙ ακολουθούν τη στρατηγική q_e τότε, αν ο πελάτης επιλέξει να μην μπει στην ουρά, θα έχει ωφέλεια 0, και αν επιλέξει να μπει, θα έχει πάλι ωφέλεια 0. Του είναι λοιπόν αδιάφορο το αν θα μπει ή όχι στην ουρά, αφού και στις 2 περιπτώσεις θα έχει ωφέλεια 0. Άρα, όλα τα $q \in [0,1]$ είναι βέλτιστες απαντήσεις στην (n_e,q_e) και άρα η q_e είναι βέλτιστη απάντηση στο (n_e,q_e), δηλαδή το (n_e,q_e) είναι σ.σ.ι..

   Αντίστροφα, αν το (n_e,q_e) είναι σ.σ.ι. τότε $G(n_e,1) < 0 < G(n_e,0)$. Πράγματι, αν δεν ισχύει $G(n_e,1) < 0 < G(n_e,0)$, δηλαδή αν η G δεν μηδενίζεται, τότε είτε $G(n_e,0) \leq 0$, οπότε είμαστε στην περίπτωση 1 (στην οποία το 0 είναι το μοναδικό σ.σ.ι.), είτε $G(n_e,1) \geq 0$, οπότε είμαστε στην περίπτωση 2 (στην οποία το 1 είναι το μοναδικό σ.σ.ι.).

   Άρα, το (n_e,q_e) είναι σ.σ.ι. $\Leftrightarrow G(n_e,1) < 0 < G(n_e,0)$.

   Μάλιστα είναι το μοναδικό σ.σ.ι., αφού αν υπήρχε κι άλλο σ.σ.ι., έστω (n_e,q_e^*), τότε θα είχαμε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

   - $q_e^* < q_e$: Τότε $G(n_e,q_e^*) > 0$ και αν υποθέσουμε ότι οι υπόλοιποι πελάτες τύπου ΙΙ ακολουθούν τη στρατηγική q_e^*, τότε αν ο πελάτης μπει, θα έχει θετική ωφέλεια ενώ αν δεν μπει θα έχει ωφέλεια 0. Άρα, τον συμφέρει να μπει, δηλαδή να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $q^* = 1 \neq q_e^*$[7].

[7] $q_e^* \neq 1$ διότι $q_e^* < q_e < 1$.

- $q_e^* > q_e$: Τότε $G(n_e, q_e^*) < 0$ και αν υποθέσουμε ότι οι υπόλοιποι πελάτες τύπου ΙΙ ακολουθούν τη στρατηγική q_e^*, τότε αν ο πελάτης μπει, θα έχει αρνητική ωφέλεια ενώ αν δεν μπει θα έχει ωφέλεια 0. Άρα τον συμφέρει να μην μπει, δηλαδή να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική $q^* = 0 \neq q_e^*$[8].

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $q^* \neq q_e^*$. Άρα, το (n_e, q_e^*) δεν είναι σ.σ.ι..

Έχουμε την εξής Προταση:

Πρόταση 4. *Το (n_e, q_e) είναι σ.σ.ι. $\Leftrightarrow R_1^* < R_u < R_2^*$, όπου τα R_1^* και R_2^* είναι αυτά που είδαμε στις περιπτώσεις 1 και 2.*

Απόδειξη. (n_e, q_e) σ.σ.ι. $\Leftrightarrow G(n_e, 1) < 0 < G(n_e, 0) \Leftrightarrow R_1^* < R_u < R_2^*$. □

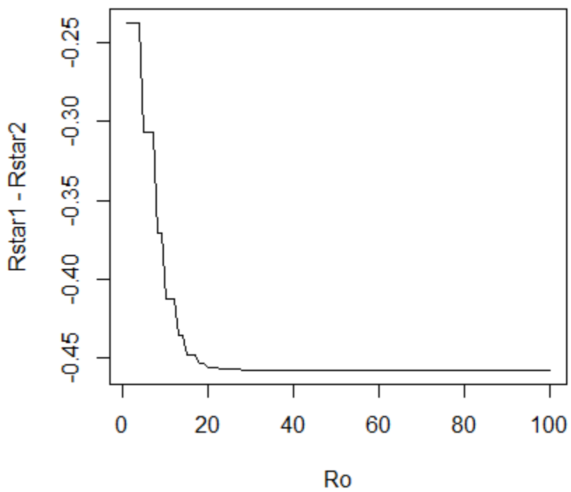
Παρατηρήστε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το σ.σ.ι. είναι μοναδικό (και για τους παρατηρούντες και για τους μη-παρατηρούντες). Αυτό συμβαίνει διότι είμαστε στην **περίπτωση ΑΑΤΠ**.

Χρησιμοποιώντας κάποιο πρόγραμμα στον υπολογιστή (π.χ. Matlab), μπορούμε να δούμε ότι $R_1^* \leq R_2^*$ για όλες τις τιμές των $p, \lambda, \mu, R_u, R_o, C_u$ και C_o (βλ. Σχήμα 2.2, Σχήμα 2.3 και Σχήμα 2.4). Αυτό συμβαίνει διότι αν ίσχυε $R_1^* > R_2^*$ για κάποιες τιμές των παραμέτρων, τότε θα είχαμε μία από τις επόμενες περιπτώσεις:

(α) Αν $R_u < R_2^*$ τότε $R_u < R_1^*$, οπότε και το $(n_e, 0)$ και το (n_e, q_e) είναι σ.σ.ι., άτοπο λόγω μοναδικότητας του σ.σ.ι..

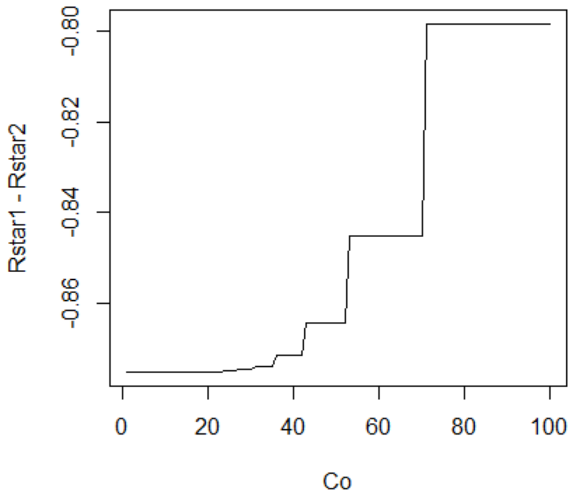
(β) Αν $R_u > R_1^*$ τότε $R_u > R_2^*$, οπότε και το $(n_e, 1)$ και το (n_e, q_e) είναι σ.σ.ι., άτοπο λόγω μοναδικότητας του σ.σ.ι...

(γ) Αν $R_2^* < R_u < R_1^*$ τότε και το $(n_e, 0)$ και το $(n_e, 1)$ είναι σ.σ.ι., άτοπο λόγω μοναδικότητας του σ.σ.ι..

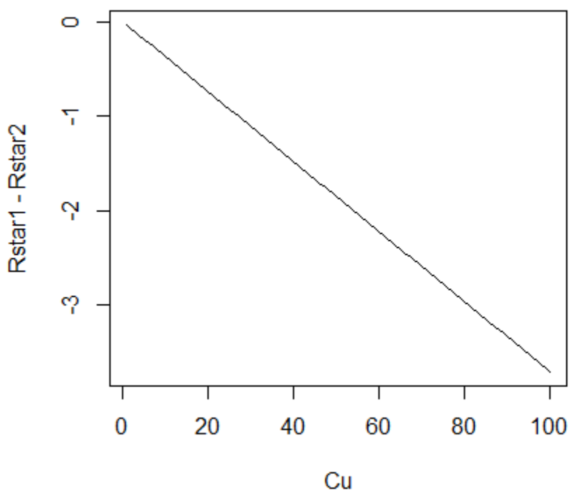


Σχήμα 2.2: Η διαφορά $R_1^* - R_2^*$ για $C_o = 20$, $C_u = 15$, $p = 0.7$, $\lambda = 3$, $\mu = 8$ και για R_o από 0 ως 100.

[8] $q_e^* \neq 0$ διότι $q_e^* > q_e > 0$.



Σχήμα 2.3: Η διαφορά $R_1^* - R_2^*$ για $R_o = 30$, $C_u = 20$, $p = 0.3$, $\lambda = 2$, $\mu = 7$ και για C_o από 0 ως 100.



Σχήμα 2.4: Η διαφορά $R_1^* - R_2^*$ για $R_o = 10$, $C_o = 30$, $p = 0.6$, $\lambda = 4$, $\mu = 9$ και για C_u από 0 ως 100.

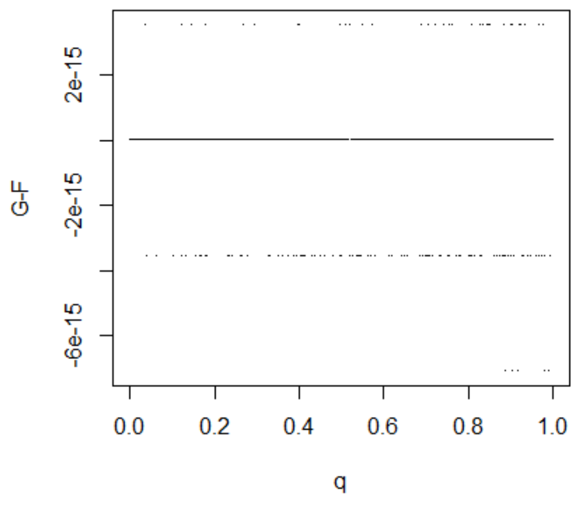
Συνοψίζοντας τις 3 παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε τα εξής συμπεράσματα για τα σ.σ.ι. των μη-παρατηρούντων πελατών:

Συμπεράσματα:

1. Ισχύουν:
(α) $G(n_e, 0) \leq 0 \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το $(n_e, 0)$.
(β) $G(n_e, 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το $(n_e, 1)$.
(γ) $G(n_e, 1) < 0 < G(n_e, 0) \Leftrightarrow$ το σ.σ.ι. είναι το σημείο $(\boldsymbol{n_e}, \boldsymbol{q_e})$ στο οποίο μηδενίζεται η $G(n_e, q)$.

2. Επίσης:
(α) $R_u \leq R_1^* \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το $(n_e, 0)$.
(β) $R_u \geq R_2^* \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το $(n_e, 1)$.
(γ) $R_1^* < R_u < R_2^* \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το σημείο $(\boldsymbol{n_e}, \boldsymbol{q_e})$ στο οποίο μηδενίζεται η $G(n_e, q)$.

Σημείωση: Για όσα προηγήθηκαν είχαμε υποθέσει ότι $p \neq 0$ και $p \neq 1$. Τι γίνεται όμως όταν $p \to 0$ και όταν $p \to 1$; Ταιριάζουν τα αποτελέσματά μας για τη συνάρτηση μέσης ωφέλεια των μη-παρατηρούντων πελατών με αυτά των περιπτώσεων όπου υπάρχουν μόνο μη-παρατηρούντες και μόνο παρατηρούντες πελάτες αντίστοιχα; Η απάντηση για τη δεύτερη περίπτωση είναι ότι δεν έχει νόημα το ερώτημα αφού δεν υπάρχουν μη-παρατηρούντες πελάτες, και για την πρώτη περίπτωση είναι ότι η διαφορά των συναρτήσεων μέσης ωφέλειας (δηλαδή των G και F[9]) τείνει στο 0. Αυτό μπορούμε να το δούμε και μέσω κάποιου προγράμματος στον υπολογιστή (βλ. Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Η διαφορά των $G(q, p = 0, \lambda = 2, \mu = 3, R_o = 20, C_o = 50, R_u = 30, C_u = 10)$ και $F(q, \lambda = 2, \mu = 3, R_u = 30, C_u = 10)$.

[9] Υπενθυμίζουμε ότι η F είναι η αναμενόμενη ωφέλεια των μη-παρατηρούντων πελατών στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο παρατηρούντες πελάτες στο σύστημα (βλ. §1.3.5).

2.2.4 Η επίδραση των παραμέτρων στα σ.σ.ι. των πελατών και στη μέση ωφέλεια των μη-παρατηρούντων πελατών

Η επίδραση των παραμέτρων στη συνιστώσα του σ.σ.ι. των παρατηρούντων πελατών είναι προφανής, αφού έχουμε ότι:

$$n_e = \left\lfloor \frac{R_o \mu}{C_o} \right\rfloor .$$

Όσον αφορά την επίδραση των παραμέτρων στο μέσο κέρδος G των μη-παρατηρούντων πελατών έχουμε τα εξής[10]:
(α) Όσο αυξάνεται το λ, αυξάνεται ο μέσος αριθμός πελατών στη ουρά, δηλαδή η $E(Q)$, και άρα μεγαλώνει ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα, οπότε αυξάνεται το αναμενόμενο κόστος που θα πληρώσει ο πελάτης, με αποτέλεσμα να μειώνεται η G.
(β) Όσο αυξάνεται το μ, μειώνεται η $E(Q)$, και έτσι μειώνεται ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα, οπότε μειώνεται το αναμενόμενο κόστος που θα πληρώσει ο πελάτης, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η G.
(γ) Κοιτώντας (μέσω προγράμματος στον υπολογιστή) τη μεταβολή των τιμών της G καθώς αυξάνει το p για διάφορες (σταθερές κάθε φορά) τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων και για διάφορες (επίσης σταθερές κάθε φορά) τιμές του q, παρατηρούμε ότι ο τρόπος που μεταβάλονται οι τιμές αυτές εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων και του q.
(δ) Για R_o σταθερό, όσο αυξάνεται το R_u, η G αυξάνεται (προφανώς).
(ε) Για R_u σταθερό, όσο αυξάνεται το R_o, αυξάνεται η $E(Q)$, οπότε μεγαλώνει ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα, και έτσι αυξάνεται το αναμενόμενο κόστος που θα πληρώσει ο πελάτης, με αποτέλεσμα να μειώνεται η G.
(στ) Για C_o σταθερό, όσο αυξάνεται το C_u, το G μειώνεται (προφανώς).
(ζ) Για C_u σταθερό, όσο αυξάνεται το C_o, μειώνεται η $E(Q)$, οπότε μειώνεται ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα, και έτσι μειώνεται το αναμενόμενο κόστος που θα πληρώσει ο πελάτης, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η G.

Η επίδραση των παραμέτρων στη συνιστώσα του σ.σ.ι. των μη-παρατηρούντων πελατών είναι η ίδια την αντίστοιχη επίδραση στη G, αφού η G είναι φθίνοσα και κοίλη συνάρτηση του q (οπότε όσο πιο "πάνω"είναι η G (δηλαδή όσο πιο μεγάλες ειναι οι τιμές της) τόσο πιο μεγάλο είναι το q_e).

2.3 Βέλτιστες κοινωνικά στρατηγικές

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με τα σ.σ.ι. των πελατών, υποθέτοντας ότι αυτοί ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν την προσωπική τους ωφέλεια. Όμως, όπως είπαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ιδιοτελής αυτή συμπεριφορά των πελατών, έχει αντίκτυπο στην κοινωνία.

Σε αυτή την ενότητα λοιπόν, θα προσπαθήσουμε να δούμε ποιές είναι οι βέλτιστες στρατηγικές όχι για την προσωπική ωφέλεια αλλά για την κοινωνική. Θα εξετάσουμε τί συμφέρει την κοινωνία: αν είναι καλύτερο γι' αυτή να ξέρουν οι πελάτες ποιό είναι το μήκος της ουράς πριν επιλέξουν στρατηγική ή να μην ξέρουν. Τέλος, θα εξετάσουμε το λεγόμενο "τίμημα της αναρχίας".

[10] Τα παρακάτω μπορούμε να τα δούμε χρησιμοποιώντας κάποιο πρόγραμμα στον υπολογιστή.

2.3.1 Συνάρτηση μέσης κοινωνικής ωφέλειας

Έστω (για ευκολία) ότι $C_o = C_u = C$. Η συνάρτηση που δίνει τη **μέση κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα**, έστω $\boldsymbol{G_{soc}}$, όταν οι παρατηρούντες πελάτες ακολουθούν στρατηγική $\tilde{n}$ και οι μη-παρατηρούντες, στρατηγική $\tilde{q}$ είναι:

$$G_{soc}(\tilde{n},\tilde{q}) = \lambda(1-p)\tilde{q}R_u + \left(\lambda p \sum_{n=0}^{\tilde{n}-1} p_n\right) R_o - C\cdot E(Q),$$

δηλαδή είναι το μέσο κέρδος από τους μη-παρατηρούντες πελάτες, συν το μέσο κέρδος από τους παρατηρούντες, μείον το μέσο κόστος για την αναμονή των μη-παρατηρούντων, μείον το μέσο κόστος για την αναμονή των παρατηρούντων.

Ας σχεδιάσουμε τώρα την G_{soc} (στον υπολογιστή) ως συνάρτηση του p για διάφορες τιμές των παραμέτρων[11]:

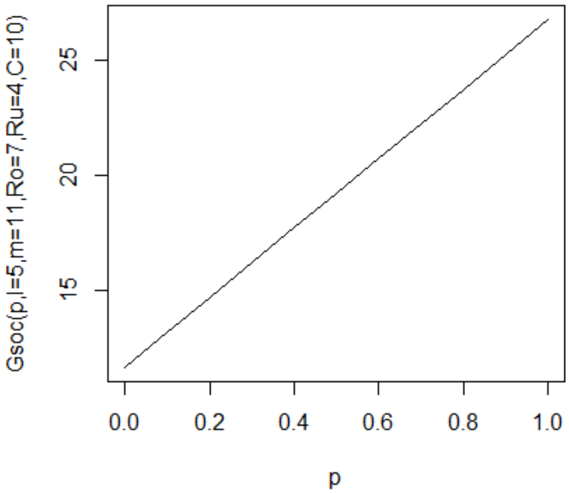
- Για $\mu = 11$, $C = 10$, $\tilde{n} = n_e$ και $\tilde{q} = q_e$ και για διάφορες τιμές (σταθερές κάθε φορά) για τις υπόλοιπες παραμέτρους με $\lambda = 1$ ως $\lambda = 8$, έχουμε:

  α) Για $R_o > R_u$, η G_{soc} είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.6). Άρα, συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι παρατηρούντες.

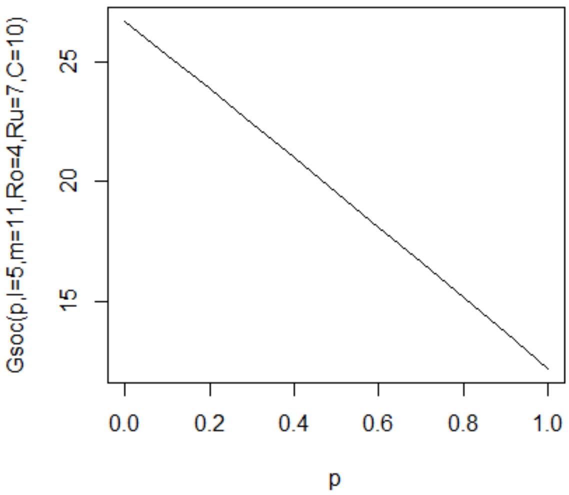
  β) Για $R_o < R_u$ με R_o και R_u μικρά , η G_{soc} είναι φθίνουσα για μικρά λ (βλ. Σχήμα 2.7) και κοίλη για μεγάλα λ (βλ. Σχήμα 2.8). Άρα, συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι μη-παρατηρούντες για μικρά λ και για μεγάλα λ, υπάρχει ένα $0 < p < 1$, για το οποίο η κοινωνική ωφέλεια είναι η μέγιστη δυνατή. Ενώ, για μεγάλα R_o και R_u ή για R_o μικρό και R_u μεγάλο, η G_{soc} είναι φθίνουσα (βλ. Σχήμα 2.9 και Σχήμα 2.10) και άρα συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι μη-παρατηρούντες

  γ) Για $R_o = R_u$ με R_o και R_u μικρά, η G_{soc} είναι αύξουσα (Σχήμα 2.11). Άρα, συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι παρατηρούντες. Ενώ, για μεγάλα R_o και R_u, η G_{soc} είναι σταθερή (βλ. Σχήμα 2.12) και άρα η κοινωνία δεν επηρεάζεται από το ποσοστό των παρατηρούντων πελατών.

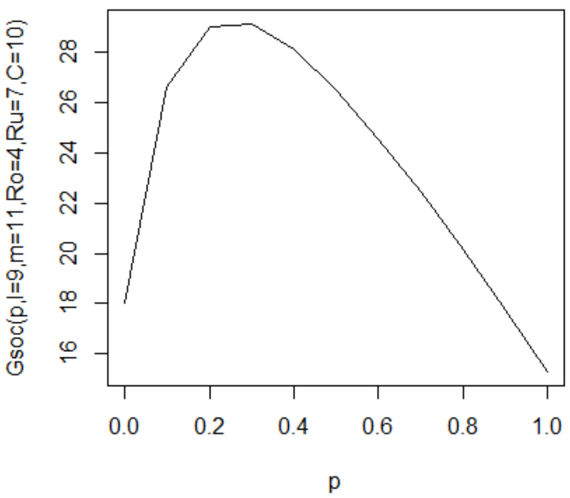
[11]Όταν θα λέμε «για μικρά» ή «για μεγάλα» R_o και R_u, θα εννοούμε μικρά ή μεγάλα σε σχέση με το C.



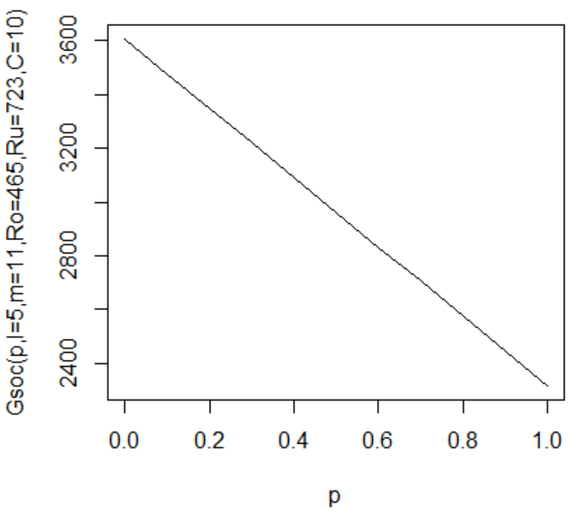
Σχήμα 2.6: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 7, R_u = 4, C = 10)$.



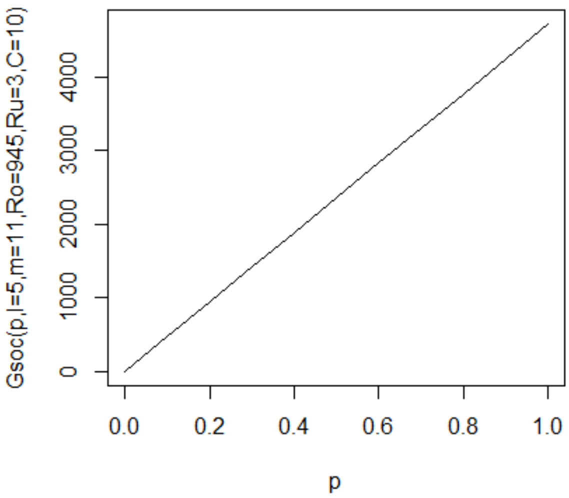
Σχήμα 2.7: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 4, R_u = 7, C = 10)$.



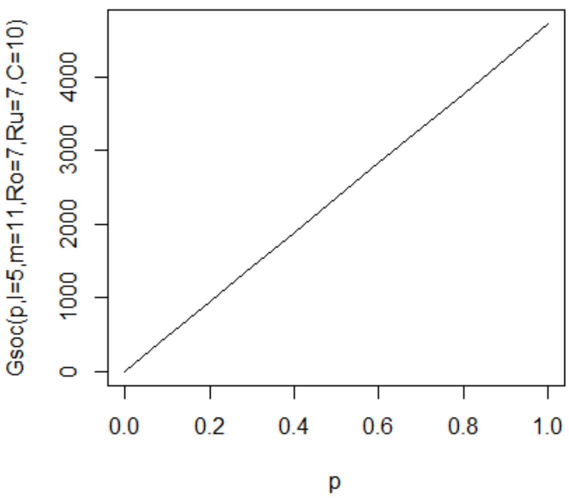
Σχήμα 2.8: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 9, \mu = 11, R_o = 4, R_u = 7, C = 10)$.



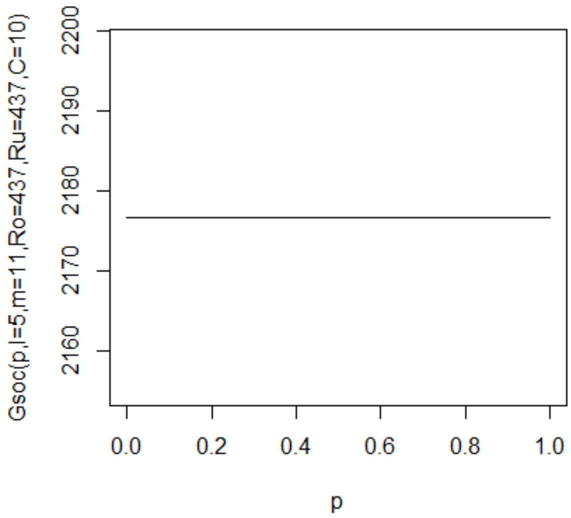
Σχήμα 2.9: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 465, R_u = 723, C = 10)$.



Σχήμα 2.10: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 945, R_u = 3, C = 10)$.



Σχήμα 2.11: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 7, R_u = 7, C = 10)$.



Σχήμα 2.12: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 437, R_u = 437, C = 10)$.

- Για $\mu = 11$, $C = 100$, $\tilde{n} = n_e$ και $\tilde{q} = q_e$ και για διάφορες τιμές (σταθερές κάθε φορά) για τις υπόλοιπες παραμέτρους με $\lambda = 1$ ως $\lambda = 8$, έχουμε:

  α) Για R_o και R_u μικρά, η G_{soc} είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.13, Σχήμα 2.14 και Σχήμα 2.15). Άρα, συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι παρατηρούντες.

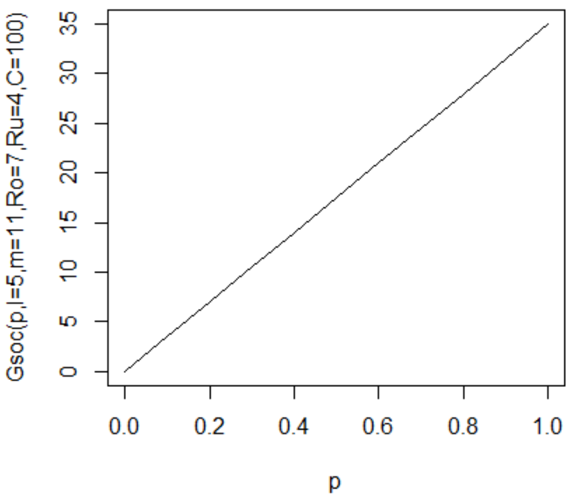
  β) Για R_o και R_u μεγάλα με $R_o > R_u$, η G_{soc} είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.16). Άρα, συμφέρει την κονωνία όλοι οι πελάτες να είναι παρατηρούντες.

  γ) Για R_o και R_u μεγάλα με $R_o < R_u$, η G_{soc} είναι φθίνουσα (βλ. Σχήμα 2.17). Άρα, συμφέρει την κονωνία όλοι οι πελάτες να είναι μη-παρατηρούντες.

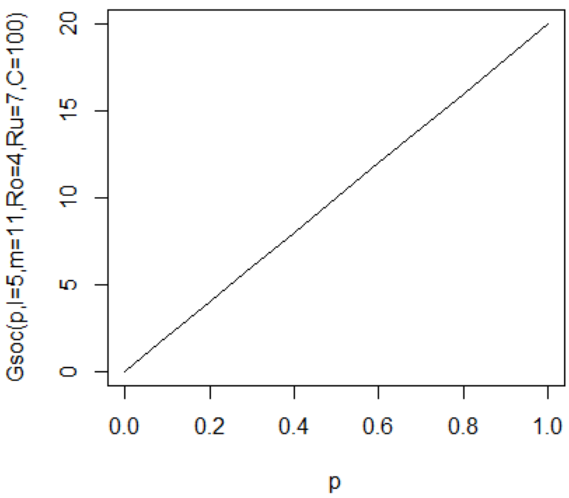
  δ) Για R_o και R_u μεγάλα με $R_o = R_u$, η G_{soc} είναι σταθερή για μικρά λ (βλ. Σχήμα 2.18) και αύξουσα για μεγάλα λ (βλ. Σχήμα 2.19). Άρα, η κοινωνία δεν επηρεάζεται από το ποσοστό των παρατηρούντων πελατών για μικρά και για μεγάλα λ την συμφέρει να είναι όλοι οι πελάτες παρατηρούντες.

  ε) Για R_o μεγάλο και R_u μικρό, η G_{soc} είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.20). Άρα, συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι παρατηρούντες.

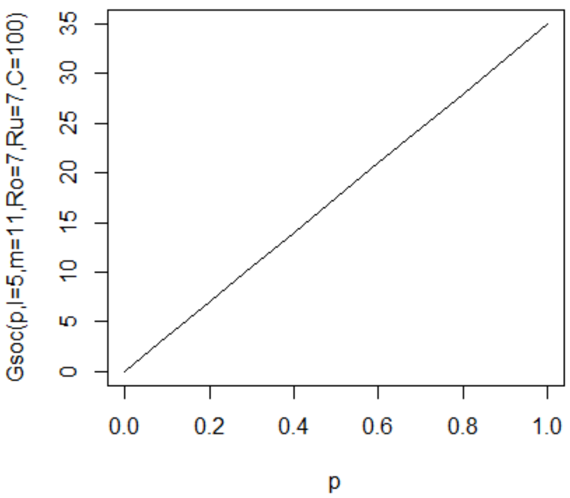
  στ) Για R_o μικρό και R_u μεγάλο, η G_{soc} είναι φθίνουσα για μικρά λ (βλ. Σχήμα 2.21) και κοίλη ή φθίνουσα για μεγάλα λ (βλ. Σχήμα 2.22 και Σχήμα 2.23). Άρα, την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι παρατηρούντες για μικρά και για μεγάλα λ, είτε υπάρχει ένα $0 < p < 1$, για το οποίο η κοινωνική ωφέλεια είναι η μέγιστη δυνατή είτε συμφέρει την κοινωνία να είναι όλοι οι πελάτες μη-παρατηρούντες.



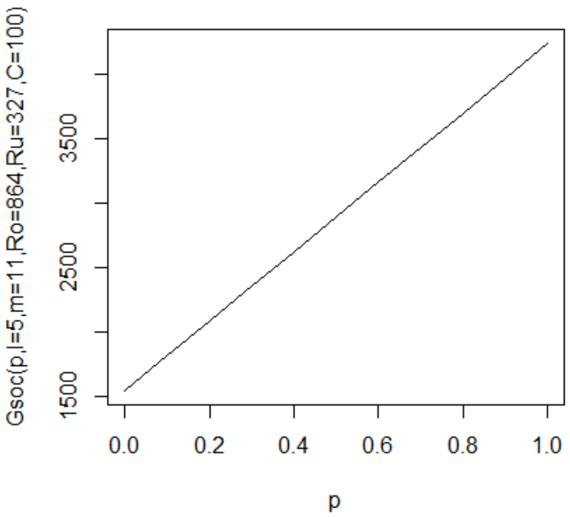
Σχήμα 2.13: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 7, R_u = 4, C = 100)$.



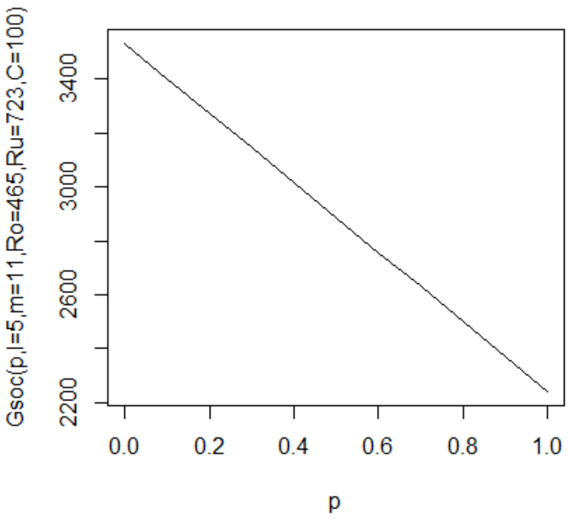
Σχήμα 2.14: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 4, R_u = 7, C = 100)$.



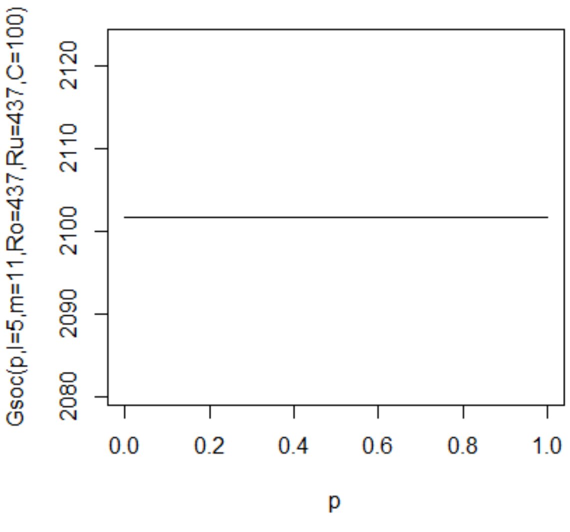
Σχήμα 2.15: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 7, R_u = 7, C = 100)$.



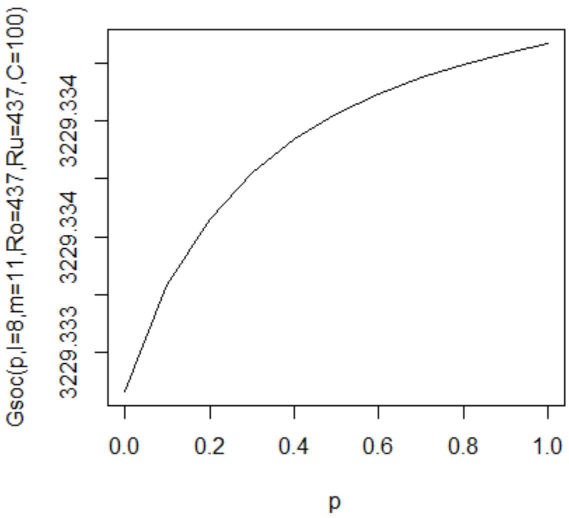
Σχήμα 2.16: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 864, R_u = 327, C = 100)$.



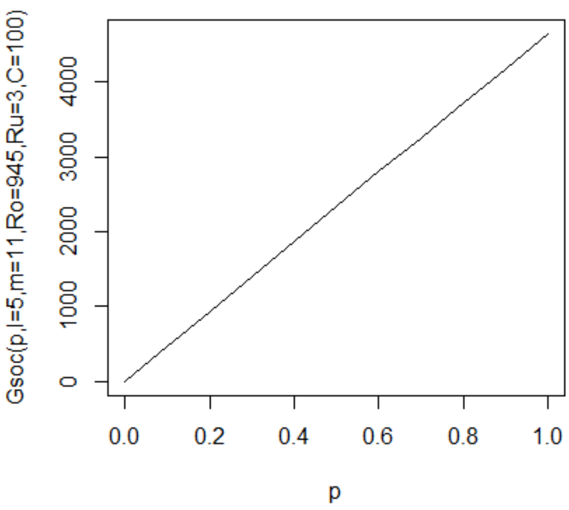
Σχήμα 2.17: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 465, R_u = 723, C = 100)$.



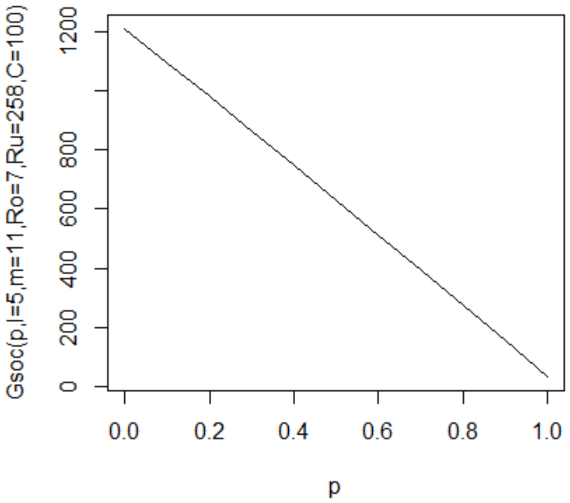
Σχήμα 2.18: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 437, R_u = 437, C = 100)$.



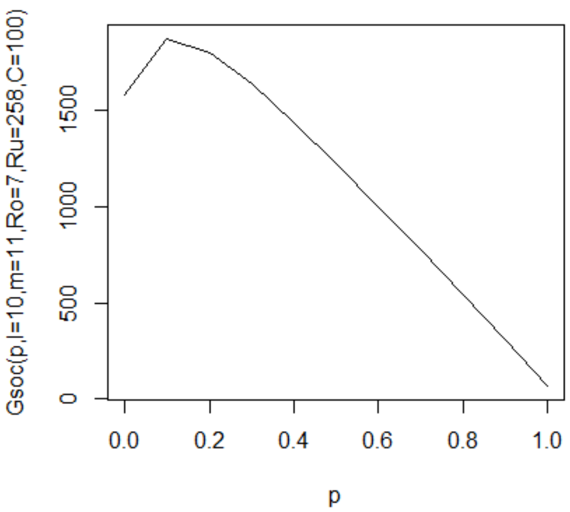
Σχήμα 2.19: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 8, \mu = 11, R_o = 437, R_u = 437, C = 100)$.



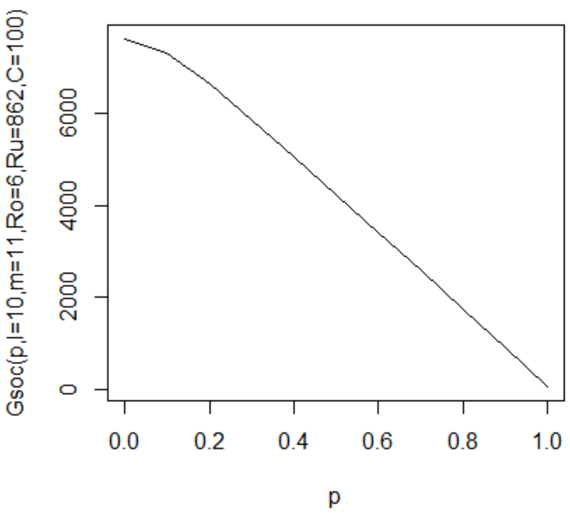
Σχήμα 2.20: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 945, R_u = 3, C = 100)$.



Σχήμα 2.21: H $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 5, \mu = 11, R_o = 7, R_u = 258, C = 100)$.



Σχήμα 2.22: H $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 10, \mu = 11, R_o = 7, R_u = 258, C = 100)$.



Σχήμα 2.23: Η $G_{soc}(p, \tilde{n} = n_e, \tilde{q} = q_e, \lambda = 10, \mu = 11, R_o = 6, R_u = 862, C = 100)$.

2.3.2 Τίμημα της Αναρχίας

Μέσω υπολογιστή μπορούμε να υπολογίσουμε σε ποιό σημείο (n, q) μεγιστοποιείται η G_{soc} για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Ας συμβολίσουμε με (n_{soc}, q_{soc}) αυτό το σημείο. Τότε το **Τίμημα της Αναρχίας** (P.o.A.) είναι:

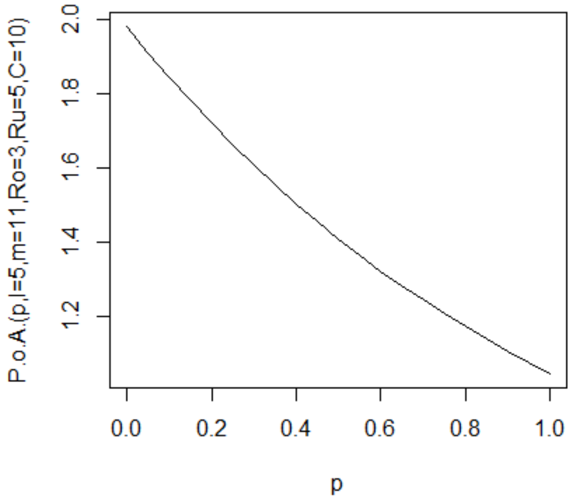
$$P.o.A. = \frac{G_{soc}(n_{soc}, q_{soc})}{G_{soc}(n_e, q_e)}.$$

Σχεδιάζοντας το P.o.A. στον υπολογιστή ως συνάρτηση του p για διάφορες τιμές των παραμετρων, έχουμε:

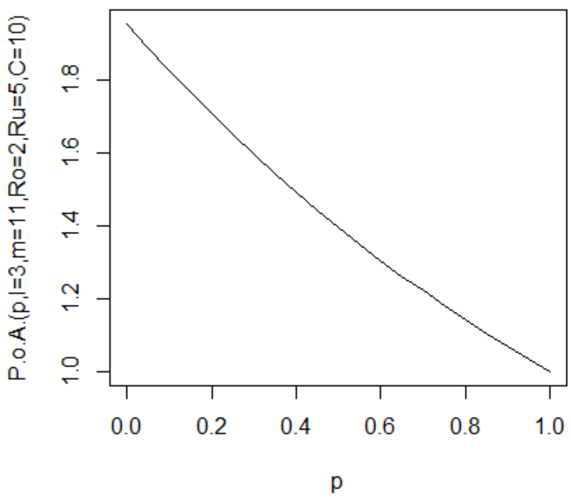
- Για $\mu = 11$, $C = 10$ και για διάφορες τιμές (σταθερές κάθε φορά) για τις υπόλοιπες παραμέτρους έχουμε[12]:

  – Για μικρά R_o και R_u με $R_o < R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
  α) Για $R_o = 3$ και $R_u = 5$ έχουμε ότι η συνάρτηση του P.o.A. είναι φθίνουσα και κυρτή για $\lambda = 1$ ως $\lambda = 8$ (βλ. Σχήμα 2.24).
  β) Για $R_o = 2$ και $R_u = 5$ έχουμε ότι:
  -Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 5$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.25).
  -Για $\lambda = 6$ με $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα και κυρτή στην αρχή και μετά σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.26).

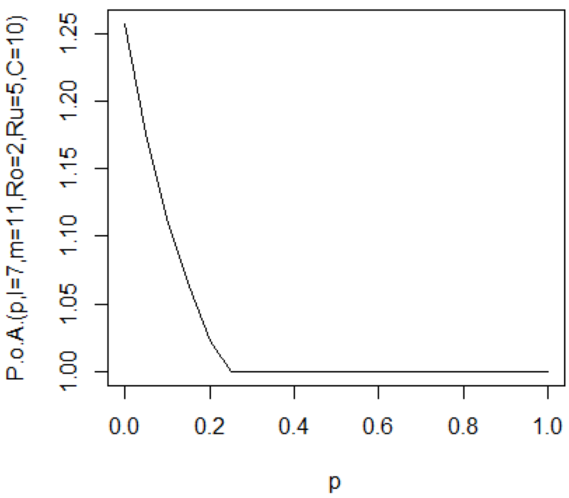
[12]Όταν θα λέμε «για μικρά» ή «για μεγάλα» R_o και R_u, θα εννοούμε μικρά ή μεγάλα σε σχέση με το C.



Σχήμα 2.24: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 3$, $R_u = 5$, $C = 10$.

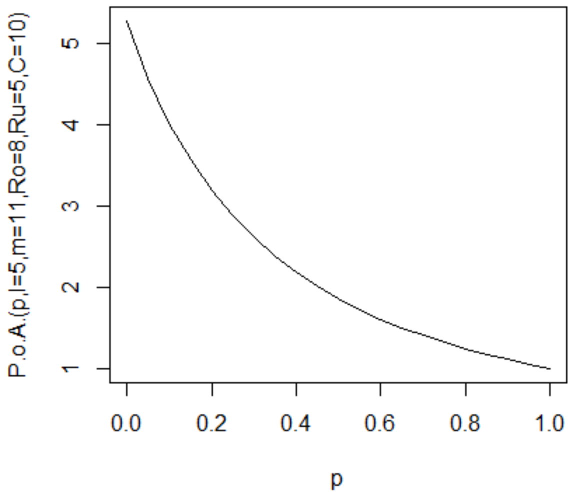


Σχήμα 2.25: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 2$, $R_u = 5$, $C = 10$.

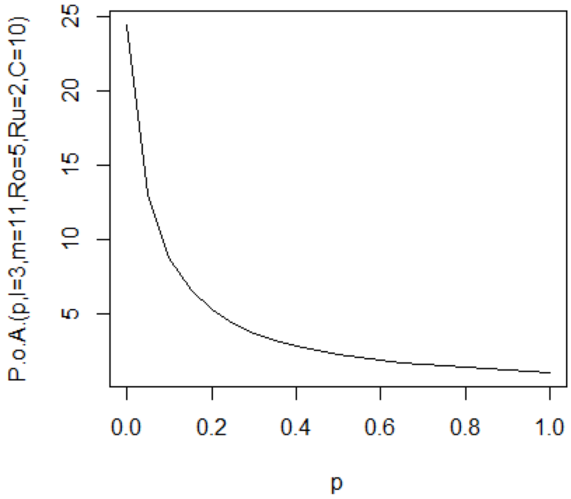


Σχήμα 2.26: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 2$, $R_u = 5$, $C = 10$.

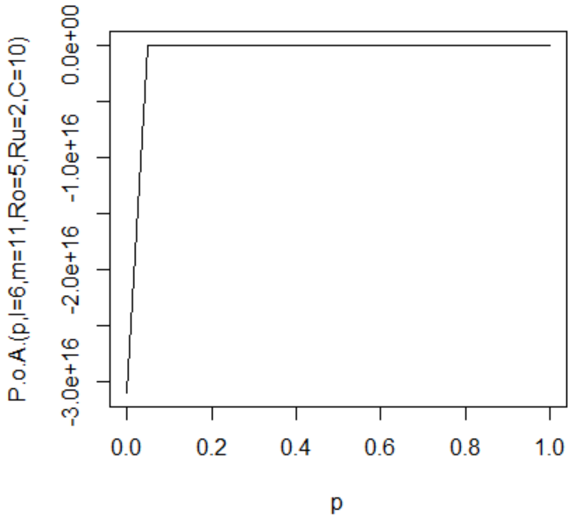
– Για μικρά R_o και R_u με $R_o > R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 8$ και $R_u = 5$ η συνάρτηση του P.o.A.είναι φθίνουσα και κυρτή για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ (βλ. Σχήμα 2.27).
β) Για $R_o = 5$ και $R_u = 2$ έχουμε ότι:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 5$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.28).
-Για $\lambda = 6$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή και στη συνέχεια μειώνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.29).



Σχήμα 2.27: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 8$, $R_u = 5$, $C = 10$.

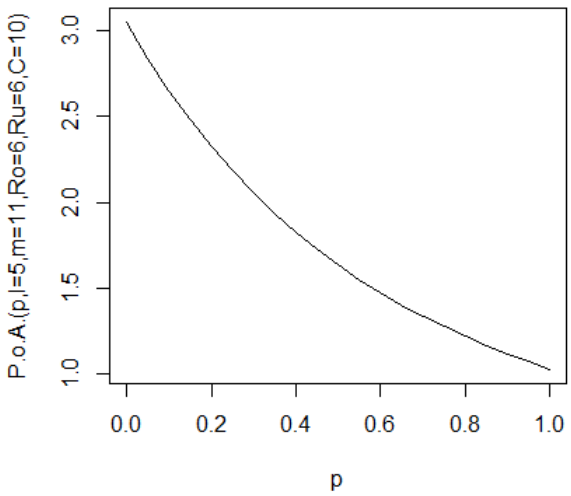


Σχήμα 2.28: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 5$, $R_u = 2$, $C = 10$.



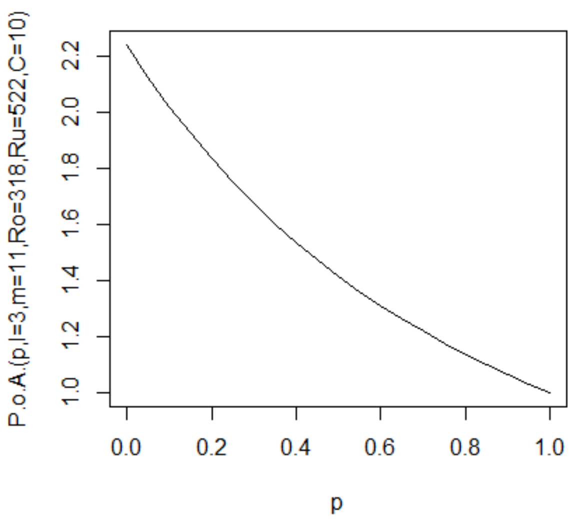
Σχήμα 2.29: Το P.o.A. για $\lambda = 6$, $\mu = 11$, $R_o = 5$, $R_u = 2$, $C = 10$.

– Για μικρά R_o και R_u με $R_o = R_u$: Η συνάρτηση του P.o.A. είναι φθίνουσα και κυρτή για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ (βλ. Σχήμα 2.30).

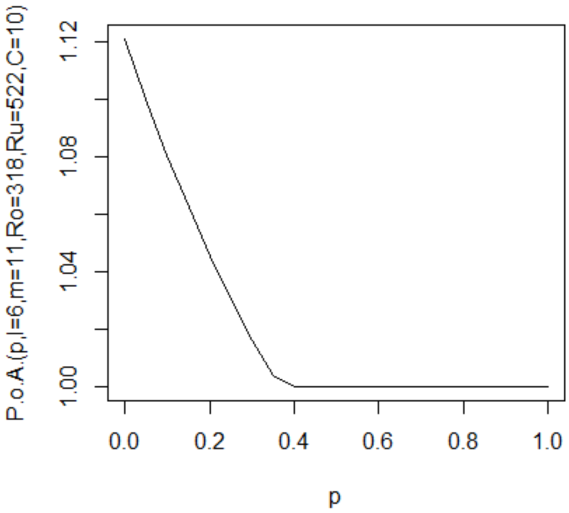


Σχήμα 2.30: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 6$, $R_u = 6$, $C = 10$.

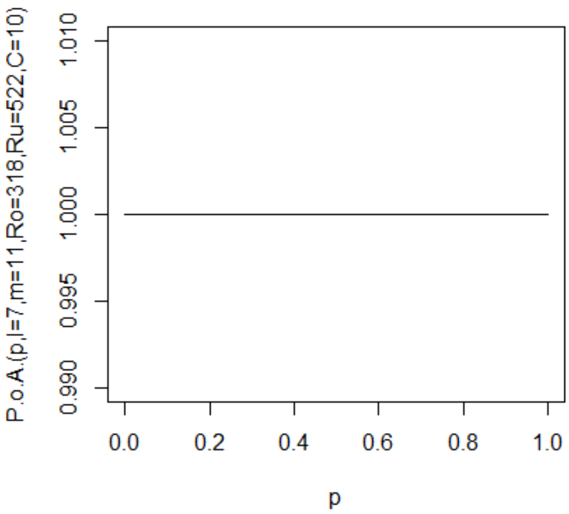
– Για μεγάλα R_o και R_u με $R_o < R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 318$ και $R_u = 522$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 5$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.31).
-Για $\lambda = 6$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.32).
-Για $\lambda = 7$ είναι σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.33).
-Για $\lambda = 8$ και $\lambda = 9$ είναι αύξουσα και κυρτή με τιμές πολύ κοντά στο 1 (βλ. Σχήμα 2.34).
-Για $\lambda = 10$ είναι αύξουσα με τιμές κοντά στο 1 (βλ. Σχήμα 2.35).
β) Για $R_o = 769$ και $R_u = 986$ έχουμε ότι:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 6$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.36).
-Για $\lambda = 7$ και $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.37).
-Για $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα στην αρχή με τιμές κοντά στο 1 και μετά σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.38).
-Για $\lambda = 10$ είναι αύξουσα με τιμές κοντά στο 1 (βλ. Σχήμα 2.39).



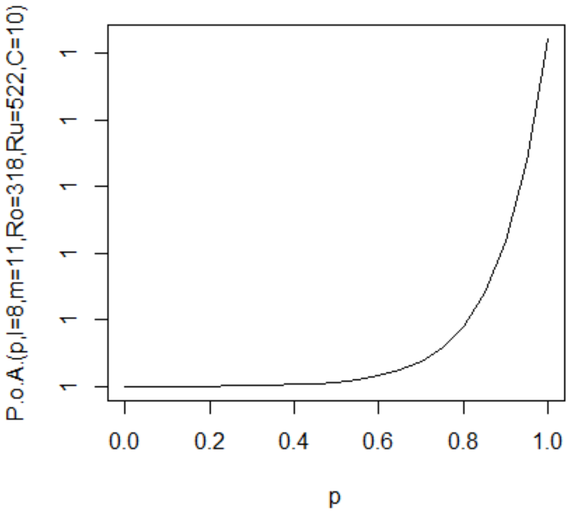
Σχήμα 2.31: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 318$, $R_u = 522$, $C = 10$.



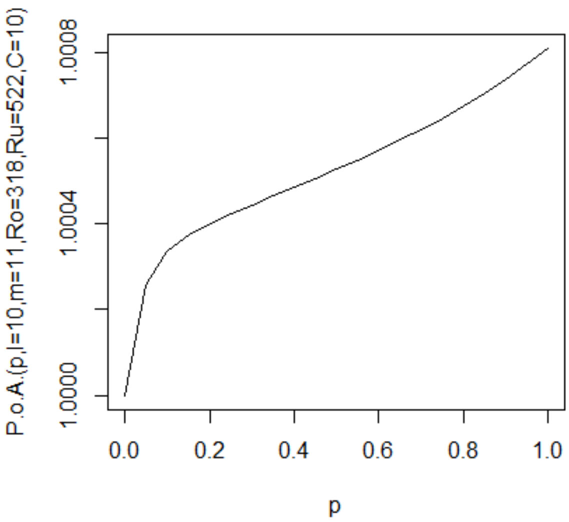
Σχήμα 2.32: Το P.o.A. για $\lambda = 6$, $\mu = 11$, $R_o = 318$, $R_u = 522$, $C = 10$.



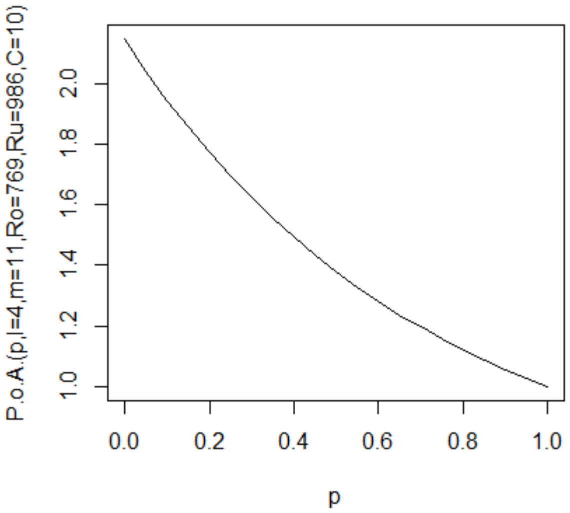
Σχήμα 2.33: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 318$, $R_u = 522$, $C = 10$.



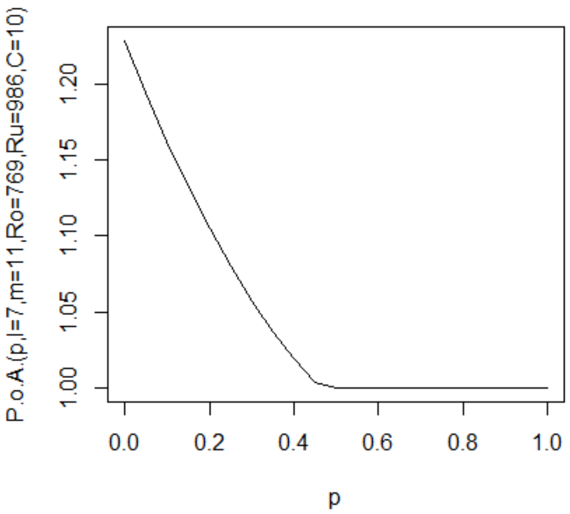
Σχήμα 2.34: Το P.o.A. για $\lambda = 8$, $\mu = 11$, $R_o = 318$, $R_u = 522$, $C = 10$.



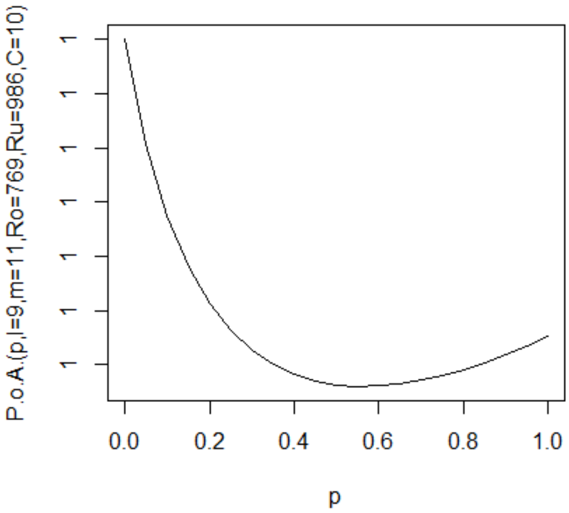
Σχήμα 2.35: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 318$, $R_u = 522$, $C = 10$.



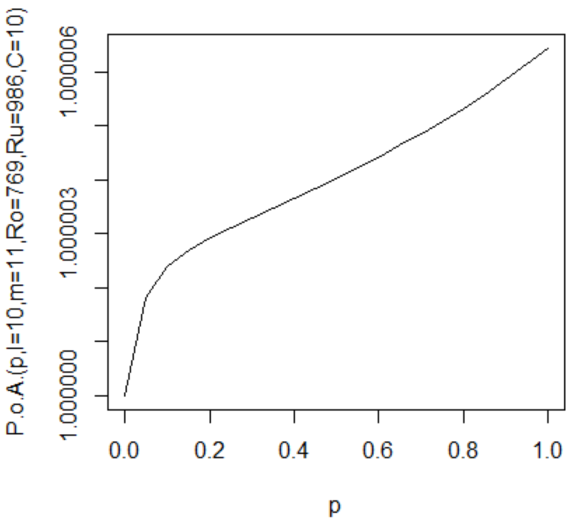
Σχήμα 2.36: Το P.o.A. για $\lambda = 4$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 10$.



Σχήμα 2.37: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 10$.

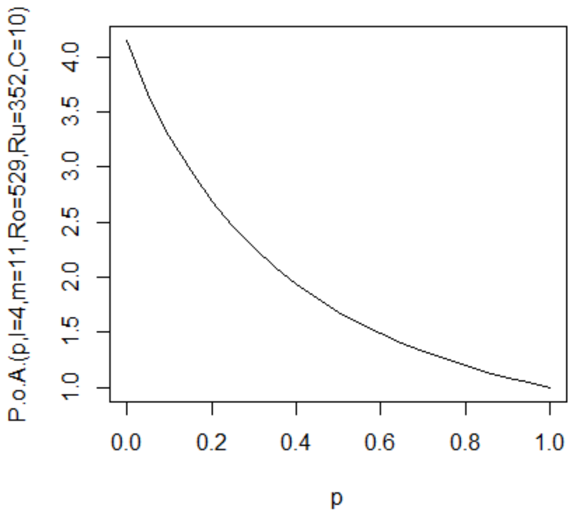


Σχήμα 2.38: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 10$.

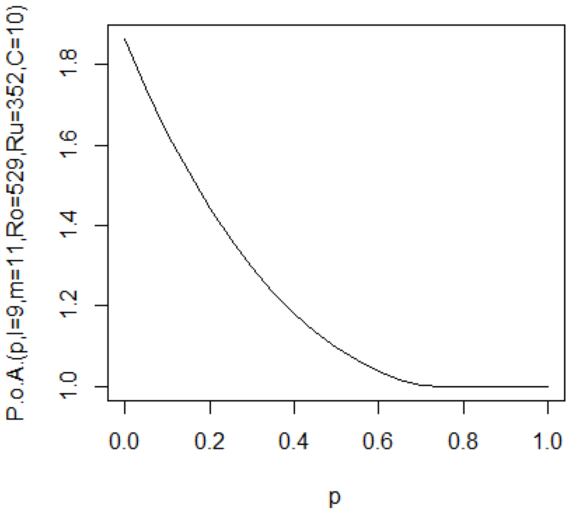


Σχήμα 2.39: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 10$.

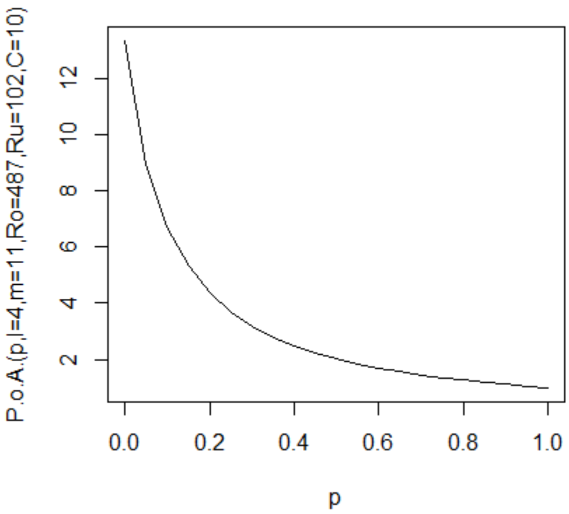
– Για μεγάλα R_o και R_u με $R_o > R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 529$ και $R_u = 352$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.40).
-Για $\lambda = 9$ και $\lambda = 10$ είναι φθίνουσα και κυρτή στην αρχή και μετά αυξάνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.41).
β) Για $R_o = 487$ και $R_u = 102$ έχουμε ότι για $\lambda = 1$ με $\lambda = 10$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.42).



Σχήμα 2.40: Το P.o.A. για $\lambda = 4$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 352$, $C = 10$.

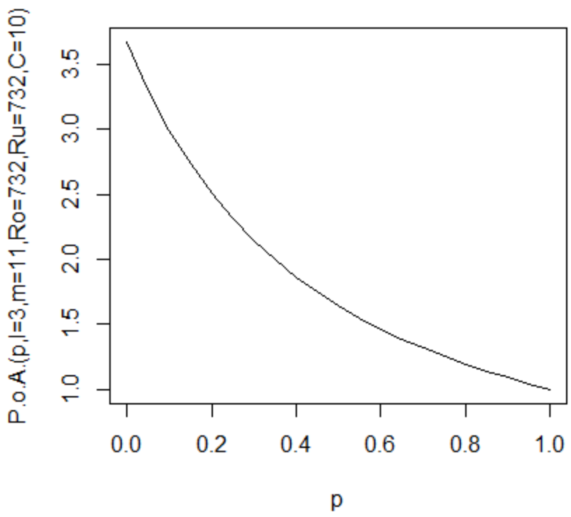


Σχήμα 2.41: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 352$, $C = 10$.

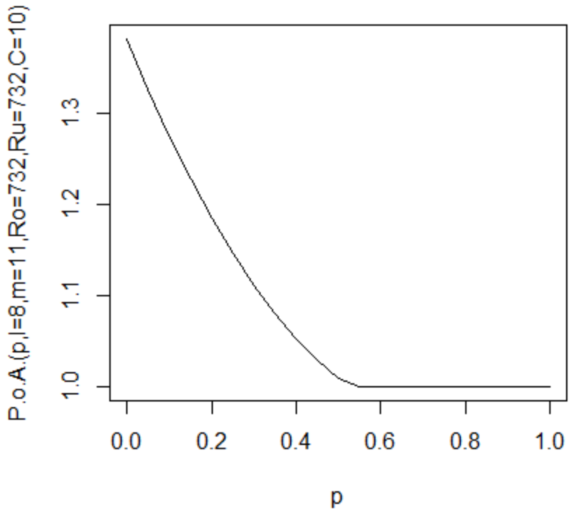


Σχήμα 2.42: Το P.o.A. για $\lambda = 4$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 102$, $C = 10$.

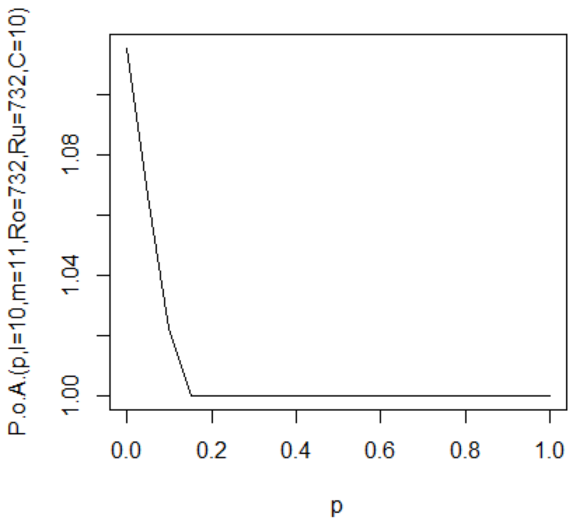
– Για μεγάλα R_o και R_u με $R_o = R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 732$ και $R_u = 732$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 7$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.43).
-Για $\lambda = 8$ και $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.44).
-Για $\lambda = 10$ μειώνεται αργά στην αρχή και μετά αυξάνεται γρήγορα (βλ. Σχήμα 2.45).
β) Για $R_o = 174$ και $R_u = 174$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 7$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.46).
-Για $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.47).
-Για $\lambda = 9$ και $\lambda = 10$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά αυξάνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.48).



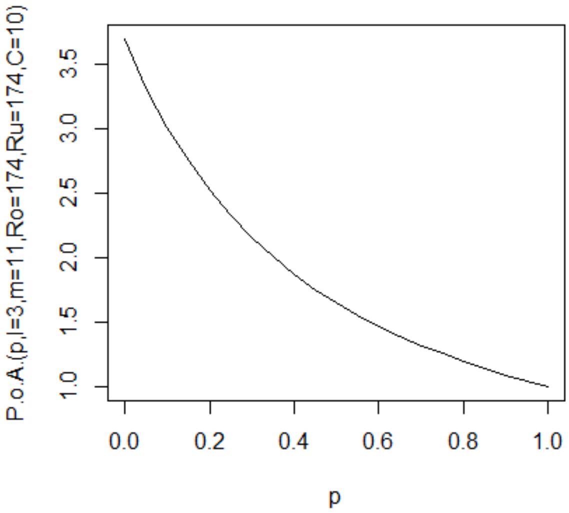
Σχήμα 2.43: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 732$, $R_u = 732$, $C = 10$.



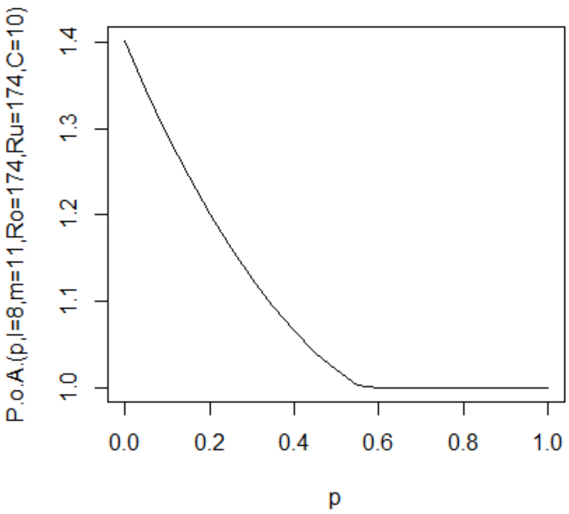
Σχήμα 2.44: Το P.o.A. για $\lambda = 8$, $\mu = 11$, $R_o = 732$, $R_u = 732$, $C = 10$.



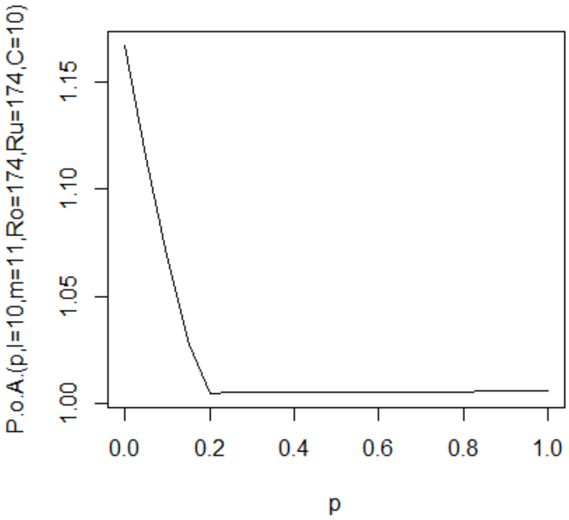
Σχήμα 2.45: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 732$, $R_u = 732$, $C = 10$.



Σχήμα 2.46: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 174$, $R_u = 174$, $C = 10$.

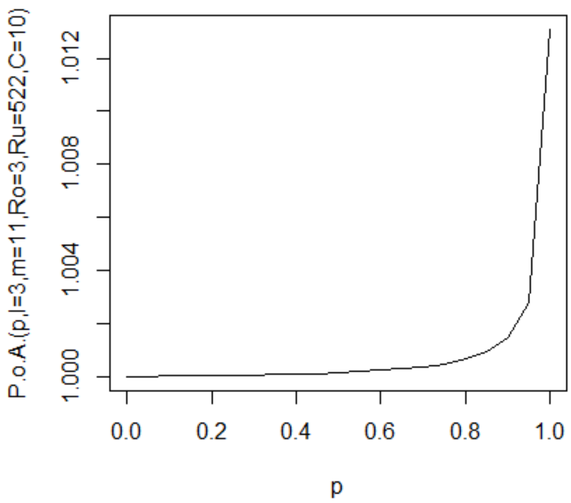


Σχήμα 2.47: Το P.o.A. για $\lambda = 8$, $\mu = 11$, $R_o = 174$, $R_u = 174$, $C = 10$.

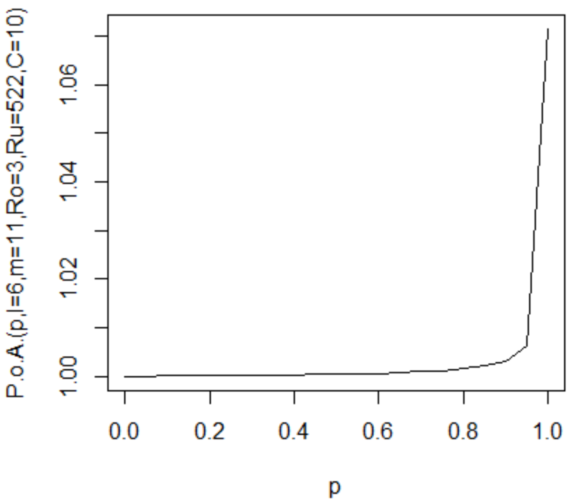


Σχήμα 2.48: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 174$, $R_u = 174$, $C = 10$.

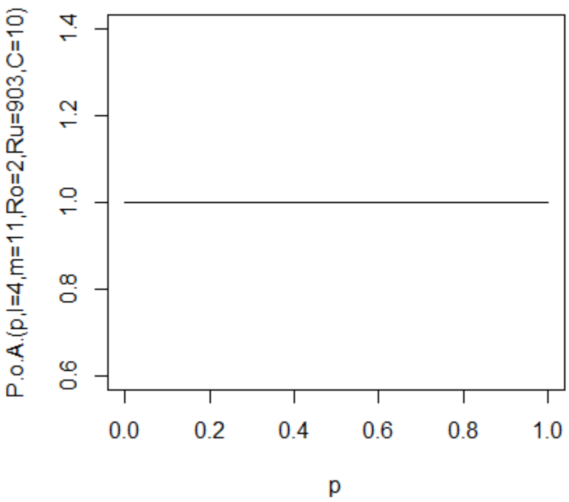
– Για R_o μικρό και R_u μεγάλο: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του Ρ.ο.Α. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 3$ και $R_u = 522$ έχουμε για τη συνάρτηση του Ρ.ο.Α.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 3$ είναι αύξουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.49).
-Για $\lambda = 4$ και $\lambda = 10$ αυξάνεται αργά στην αρχή και μετά αυξάνεται γρήγορα (βλ. Σχήμα 2.50).
β) Για $R_o = 2$ και $R_u = 903$ έχουμε για τη συνάρτηση του Ρ.ο.Α.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ είναι σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.51).
-Για $\lambda = 9$ και $\lambda = 10$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή και οι τιμές της είναι κοντά στο 1, μετά μειώνεται γρήγορα και οι τιμές της είναι κοντά στο 1 και στο τέλος είναι σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.52).



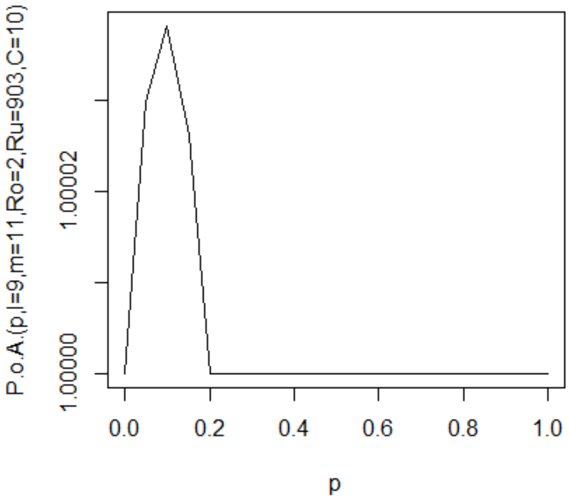
Σχήμα 2.49: Το Ρ.ο.Α. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 3$, $R_u = 522$, $C = 10$.



Σχήμα 2.50: Το P.o.A. για $\lambda = 6$, $\mu = 11$, $R_o = 3$, $R_u = 522$, $C = 10$.

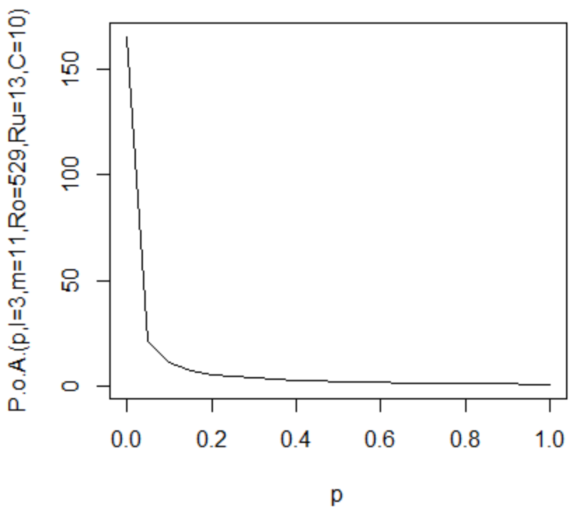


Σχήμα 2.51: Το P.o.A. για $\lambda = 4$, $\mu = 11$, $R_o = 2$, $R_u = 903$, $C = 10$.

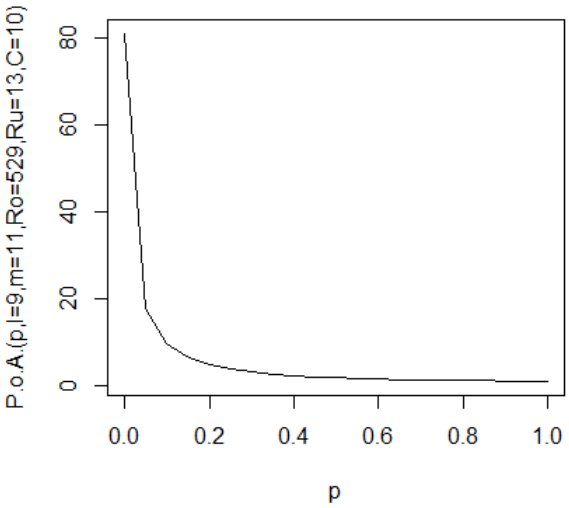


Σχήμα 2.52: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 2$, $R_u = 903$, $C = 10$.

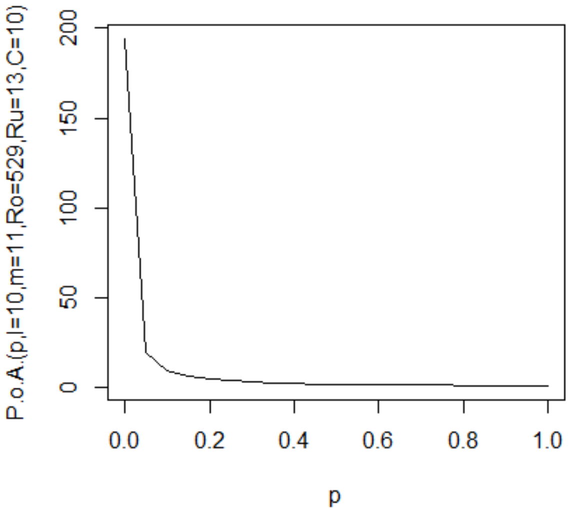
– Για R_o μεγάλο και R_u μικρό: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 529$ και $R_u = 13$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 5$ μειώνεται γρήγορα στην αρχή και μετά είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.53).
-Για $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.54).
-Για $\lambda = 10$ μειώνεται γρήγορα στην αρχή και μετά μειώνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.55).
β) Για $R_o = 487$ και $R_u = 11$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 5$ μειώνεται γρήγορα στην αρχή και μετά μειώνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.56).
-Για $\lambda = 6$ με $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.57).
-Για $\lambda = 10$ μειώνεται γρήγορα στην αρχή και μετά μειώνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.58).



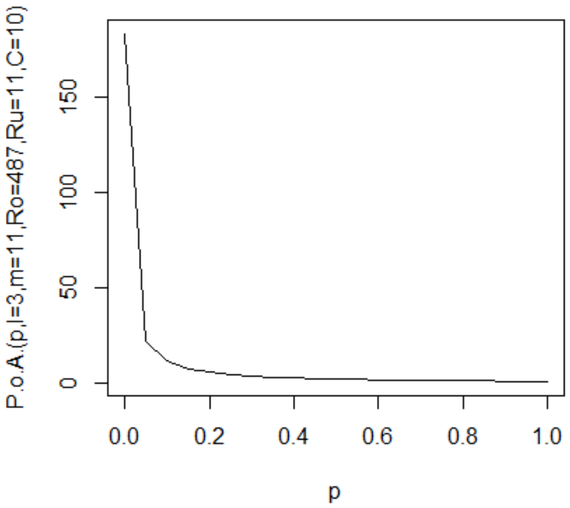
Σχήμα 2.53: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 13$, $C = 10$.



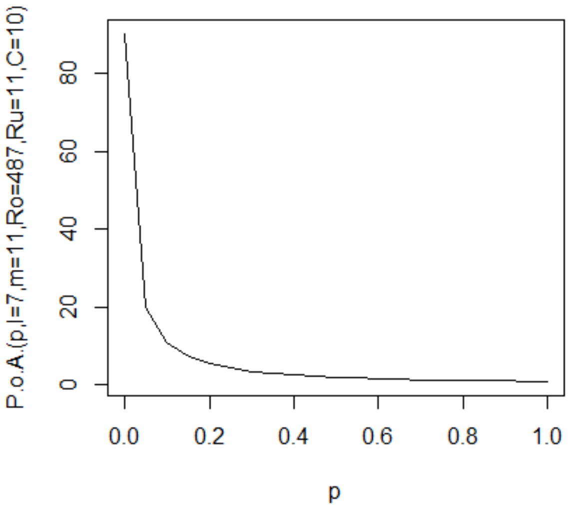
Σχήμα 2.54: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 13$, $C = 10$.



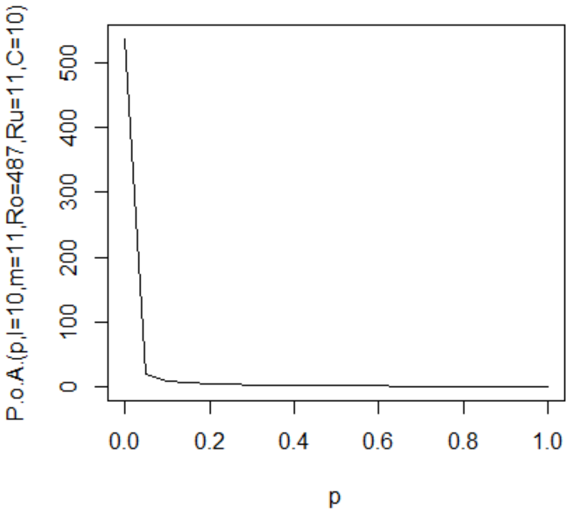
Σχήμα 2.55: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 13$, $C = 10$.



Σχήμα 2.56: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 11$, $C = 10$.



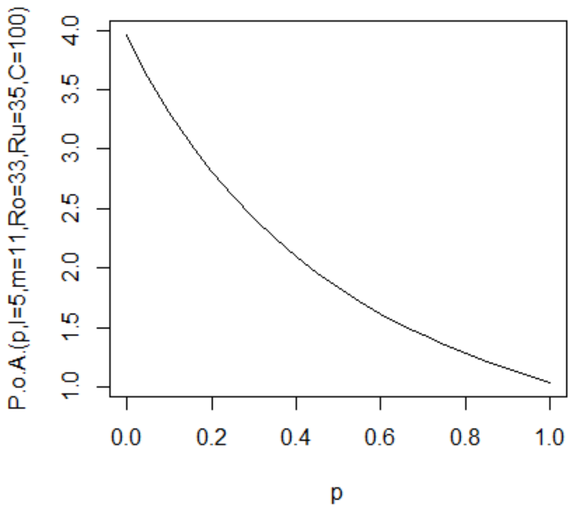
Σχήμα 2.57: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 11$, $C = 10$.



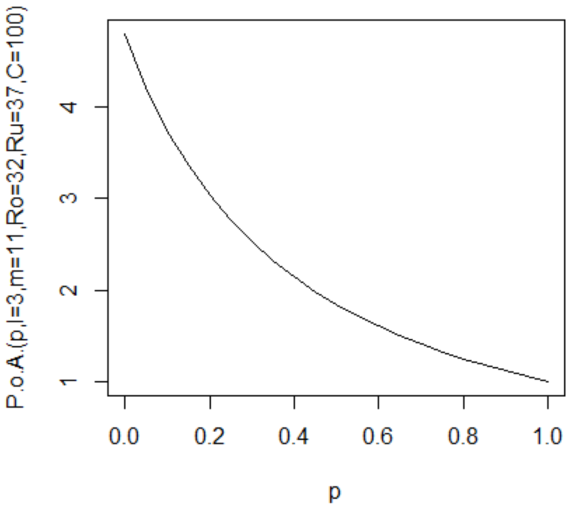
Σχήμα 2.58: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 11$, $C = 10$.

- Για $\mu = 11$, $C = 100$ και για διάφορες τιμές (σταθερές κάθε φορά) για τις υπόλοιπες παραμέτρους με $\lambda = 1$ ως $\lambda = 10$:

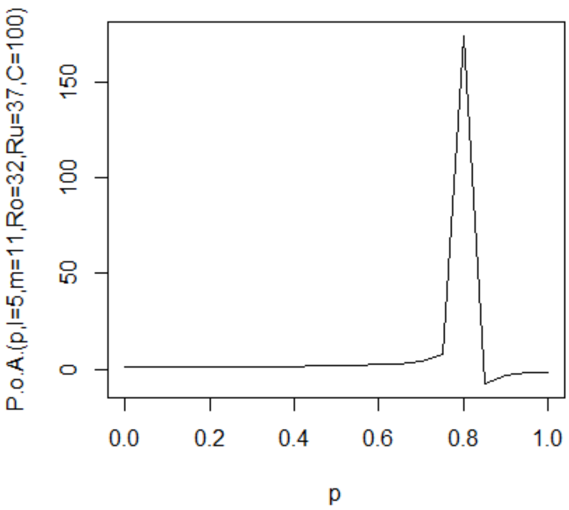
  – Για μικρά R_o και R_u με $R_o < R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
  α) Για $R_o = 33$ και $R_u = 35$ έχουμε ότι η συνάρτηση του P.o.A., για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$, είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.59).
  β) Για $R_o = 32$ και $R_u = 37$ έχουμε ότι:
  -Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 4$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.60).
  -Για $\lambda = 5$ και $\lambda = 6$ είναι αύξουσα και κυρτή στην αρχή, μετά μειώνεται γρήγορα και τέλος είναι αύξουσα και κοίλη (βλ. Σχήμα 2.61).
  -Για $\lambda = 7$ είναι αύξουσα και κυρτή στην αρχή και μετά ειναι αύξουσα και κοίλη (βλ. Σχήμα 2.62).
  -Για $\lambda = 8$ είναι κυρτή στην αρχή, μετά μειώνεται γρήγορα και στο τέλος είναι αύξουσα και κοίλη (βλ. Σχήμα 2.63).



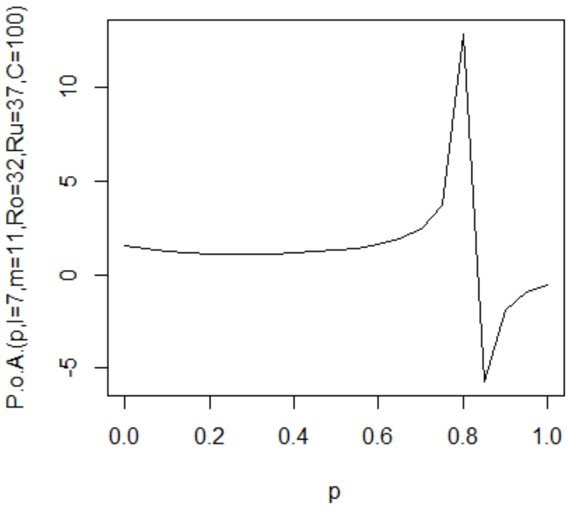
Σχήμα 2.59: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 33$, $R_u = 35$, $C = 100$.



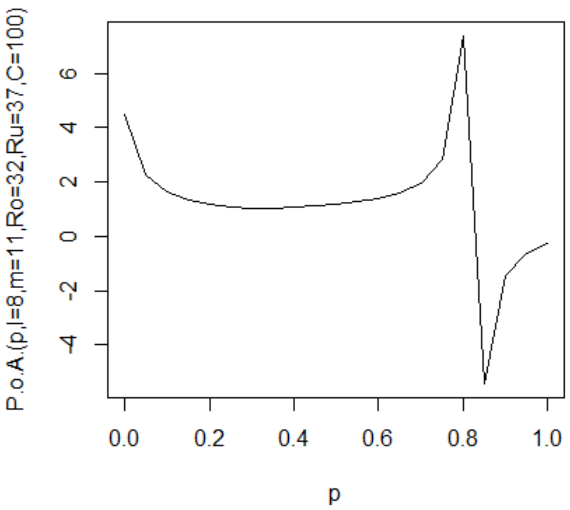
Σχήμα 2.60: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 32$, $R_u = 37$, $C = 100$.



Σχήμα 2.61: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 32$, $R_u = 37$, $C = 100$.

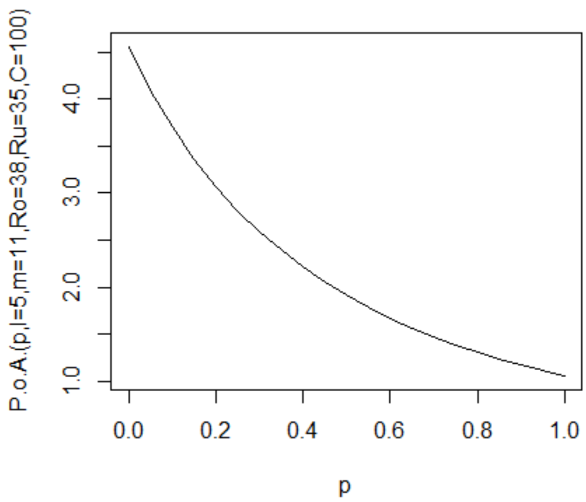


Σχήμα 2.62: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 32$, $R_u = 37$, $C = 100$.



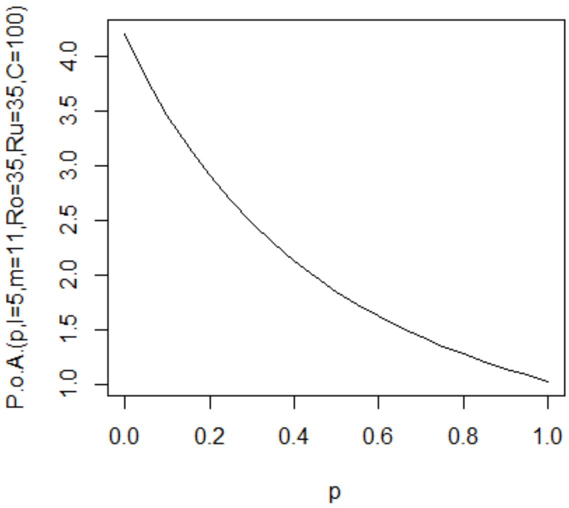
Σχήμα 2.63: Το P.o.A. για $\lambda = 8$, $\mu = 11$, $R_o = 32$, $R_u = 37$, $C = 100$.

– Για μικρά R_o και R_u με $R_o > R_u$ έχουμε ότι η συνάρτηση του P.o.A., για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.64).



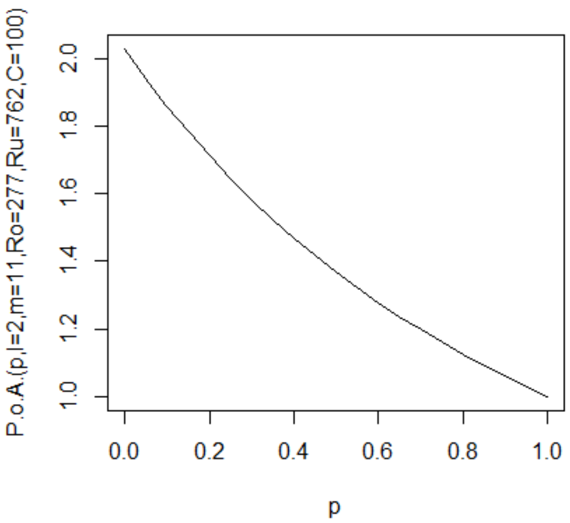
Σχήμα 2.64: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 38$, $R_u = 35$, $C = 100$.

– Για μικρά R_o και R_u με $R_o = R_u$ έχουμε ότι η συνάρτηση του P.o.A., για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.65).

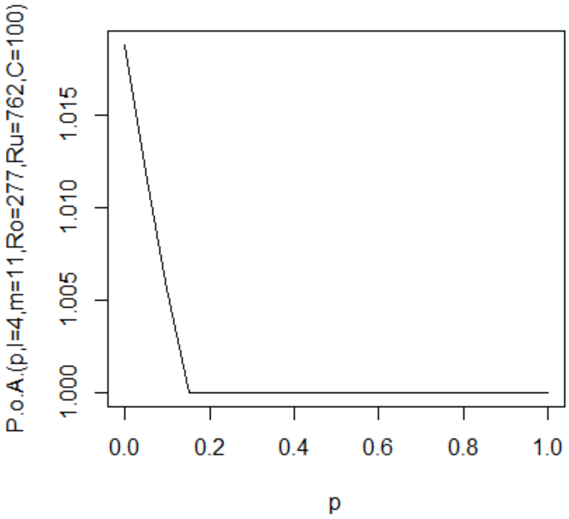


Σχήμα 2.65: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 35$, $R_u = 35$, $C = 100$.

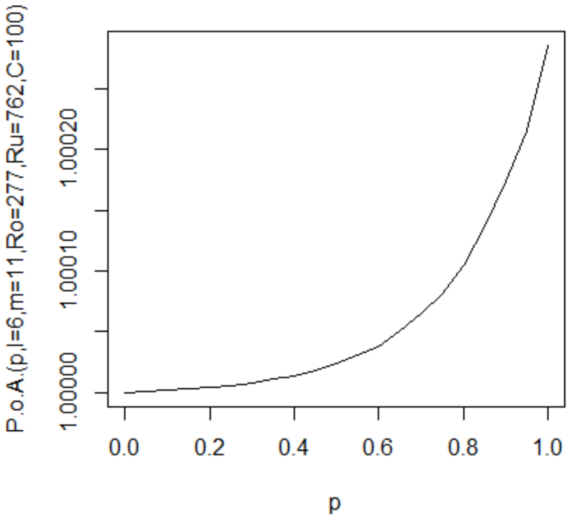
– Για μεγάλα R_o και R_u με $R_o < R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 277$ και $R_u = 762$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 3$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.66).
-Για $\lambda = 4$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά αυξάνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.67).
-Για $\lambda = 5$ με $\lambda = 7$ είναι αύξουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.68).
-Για $\lambda = 8$ με $\lambda = 10$ είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.69).
β) Για $R_o = 769$ και $R_u = 986$ έχουμε ότι:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 6$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.70).
-Για $\lambda = 7$ και $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά αυξάνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.71).
-Για $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα στην αρχή και μετά είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.72).
-Για $\lambda = 10$ και είναι αύξουσα (βλ. Σχήμα 2.3).



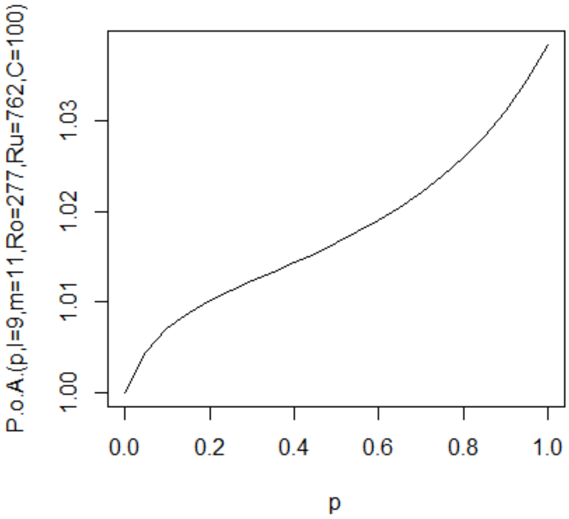
Σχήμα 2.66: Το P.o.A. για $\lambda = 2$, $\mu = 11$, $R_o = 277$, $R_u = 762$, $C = 100$.



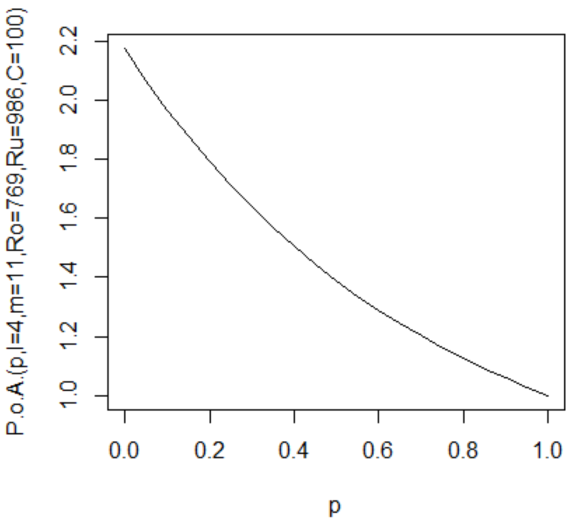
Σχήμα 2.67: Το P.o.A. για $\lambda = 4$, $\mu = 11$, $R_o = 277$, $R_u = 762$, $C = 100$.



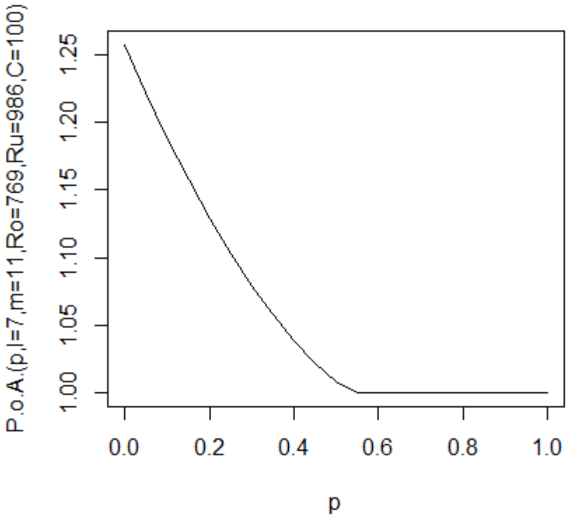
Σχήμα 2.68: Το P.o.A. για $\lambda = 6$, $\mu = 11$, $R_o = 277$, $R_u = 762$, $C = 100$.



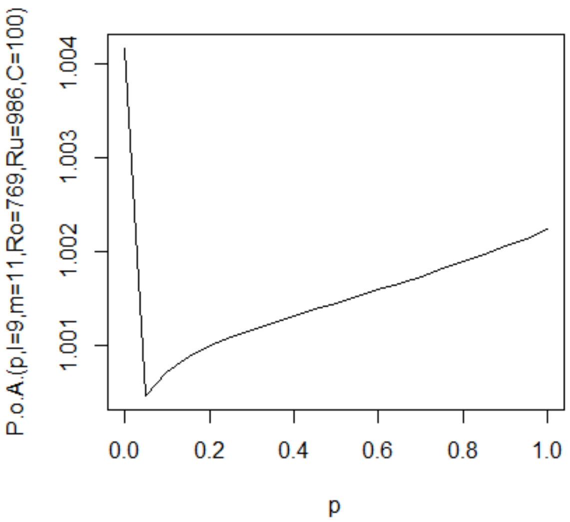
Σχήμα 2.69: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 277$, $R_u = 762$, $C = 100$.



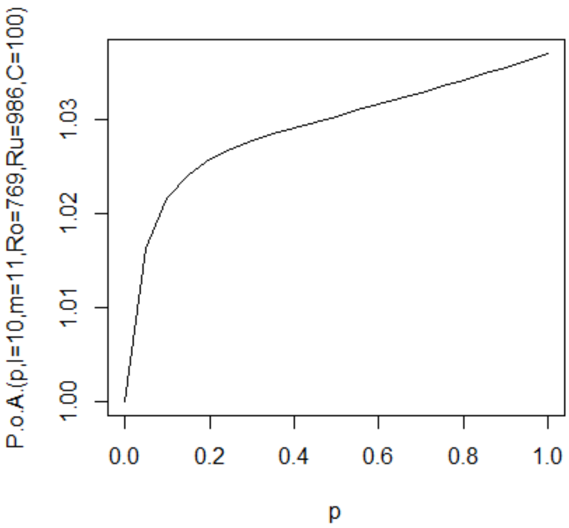
Σχήμα 2.70: Το P.o.A. για $\lambda = 4$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 100$.



Σχήμα 2.71: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 100$.

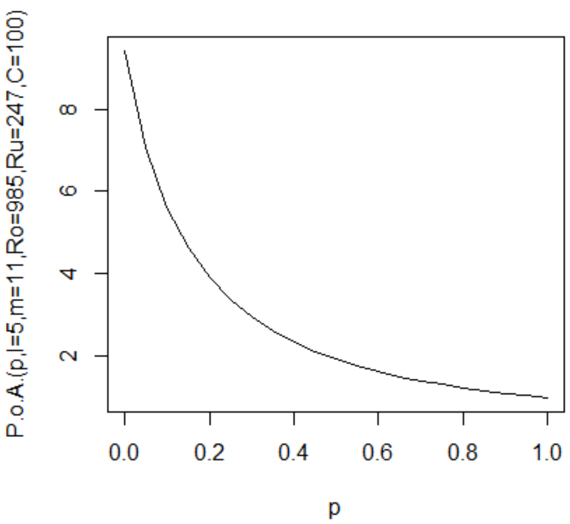


Σχήμα 2.72: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 100$.

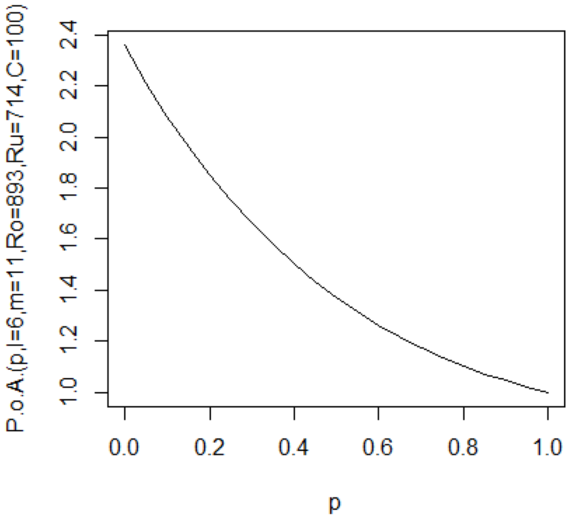


Σχήμα 2.73: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 769$, $R_u = 986$, $C = 100$.

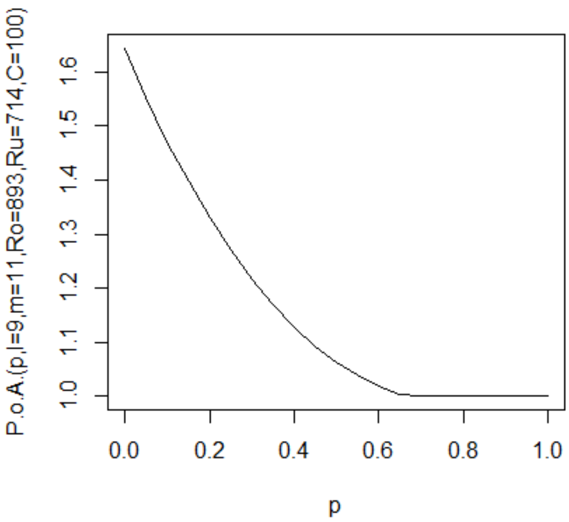
– Για μεγάλα R_o και R_u με $R_o > R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 985$ και $R_u = 247$ η συνάρτηση του P.o.A.,για $\lambda = 1$ με $\lambda = 10$, είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.74).
β) Για $R_o = 893$ και $R_u = 714$ έχουμε ότι:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 8$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.75).
-Για $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα και κυρτή στην αρχή και μετά αυξάνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.76).
-Για $\lambda = 9$ είναι φθίνουσα και κυρτή στην αρχή και μετά μειώνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.77).



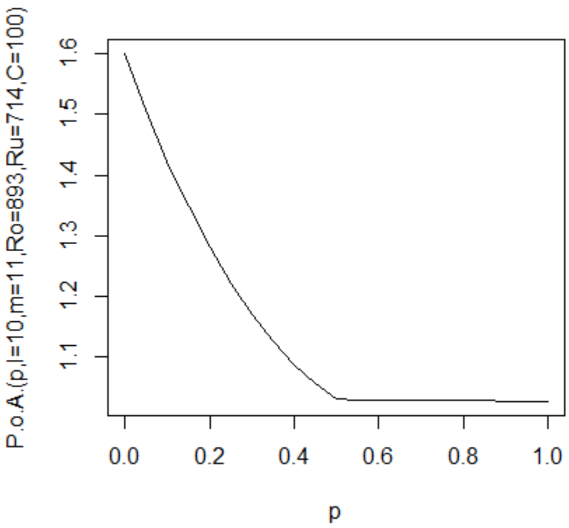
Σχήμα 2.74: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 985$, $R_u = 247$, $C = 100$.



Σχήμα 2.75: Το P.o.A. για $\lambda = 6$, $\mu = 11$, $R_o = 893$, $R_u = 714$, $C = 100$.

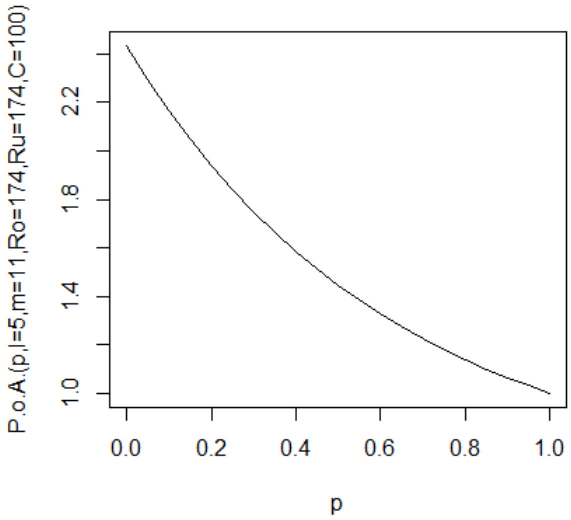


Σχήμα 2.76: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 893$, $R_u = 714$, $C = 100$.

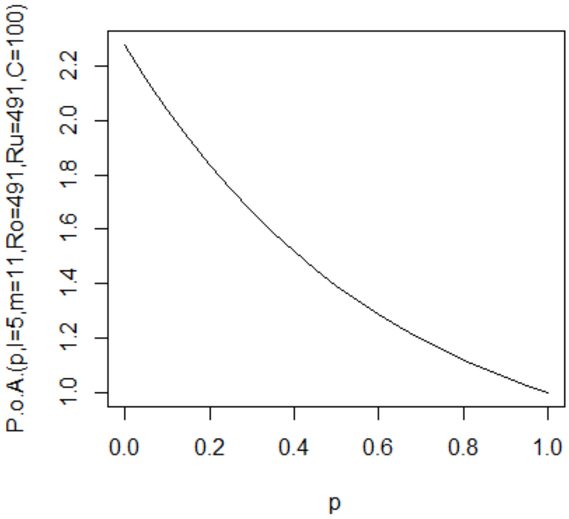


Σχήμα 2.77: Το P.o.A. για $\lambda = 10$, $\mu = 11$, $R_o = 893$, $R_u = 714$, $C = 100$.

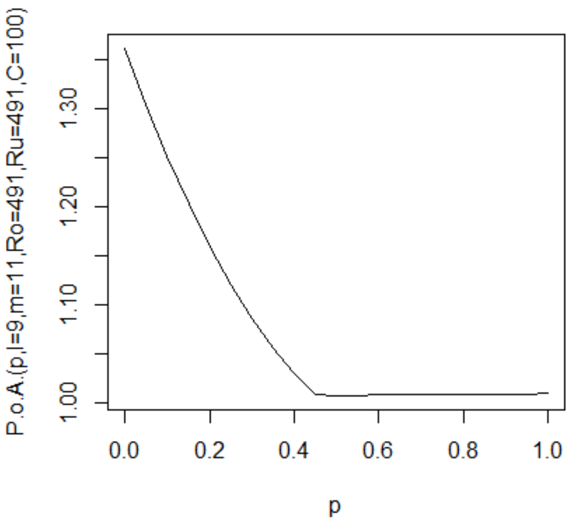
– Για μεγάλα R_o και R_u με $R_o = R_u$: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 174$ και $R_u = 174$ η συνάρτηση του P.o.A., για $\lambda = 1$ με $\lambda = 10$, είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.78).
β) Για $R_o = 491$ και $R_u = 491$ έχουμε ότι:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 7$ είναι φθίνουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.79).
-Για $\lambda = 8$ με $\lambda = 10$ είναι φθίνουσα και κυρτή στην αρχή και μετά είναι αυξάνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.80).



Σχήμα 2.78: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 174$, $R_u = 174$, $C = 100$.

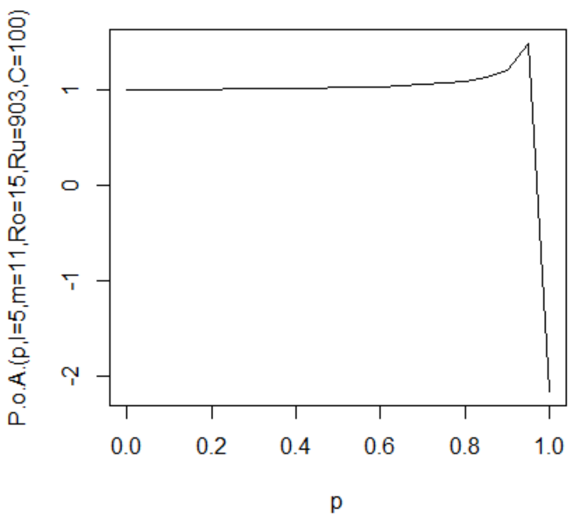


Σχήμα 2.79: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 491$, $R_u = 491$, $C = 100$.

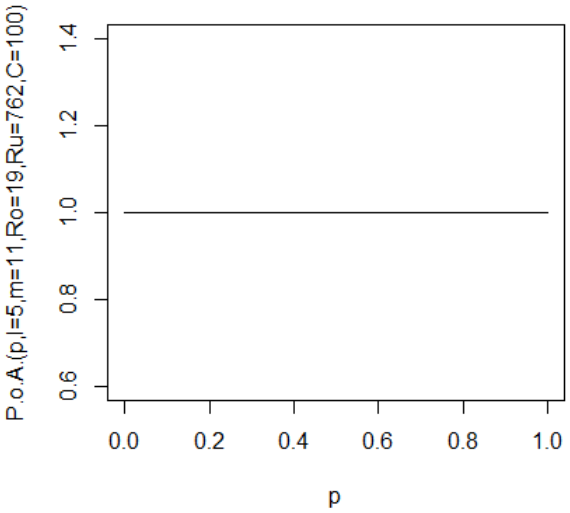


Σχήμα 2.80: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 491$, $R_u = 491$, $C = 100$.

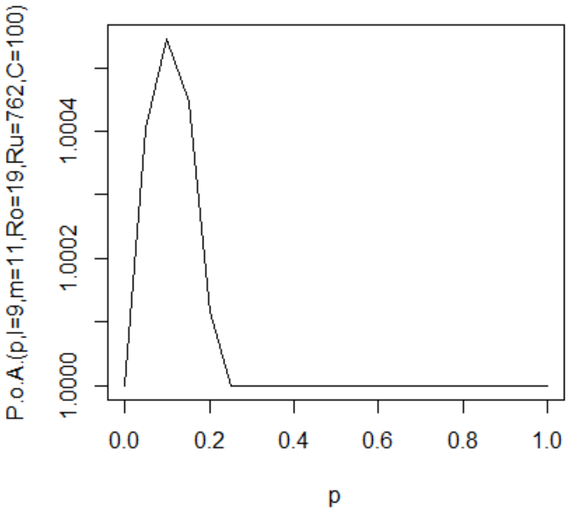
– Για R_o μικρό και R_u μεγάλο: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 15$ και $R_u = 903$ η συνάρτηση του P.o.A., για $\lambda = 1$ με $\lambda = 10$ είναι αύξουσα και κυρτή στην αρχή και μετά μειώνται γρήγορα (βλ. Σχήμα 2.81).
β) Για $R_o = 19$ και $R_u = 762$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ με $\lambda = 7$ είναι σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.82).
-Για $\lambda = 8$ και $\lambda = 10$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή, μετά μειώνεται γρήγορα και οι τιμές της είναι κοντά στο 1 και στο τέλος είναι σταθερή και ίση με 1 (βλ. Σχήμα 2.83).



Σχήμα 2.81: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 15$, $R_u = 903$, $C = 100$.

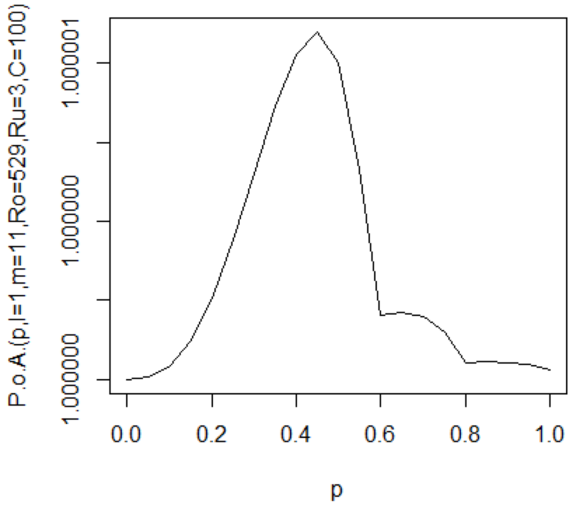


Σχήμα 2.82: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 19$, $R_u = 762$, $C = 100$.

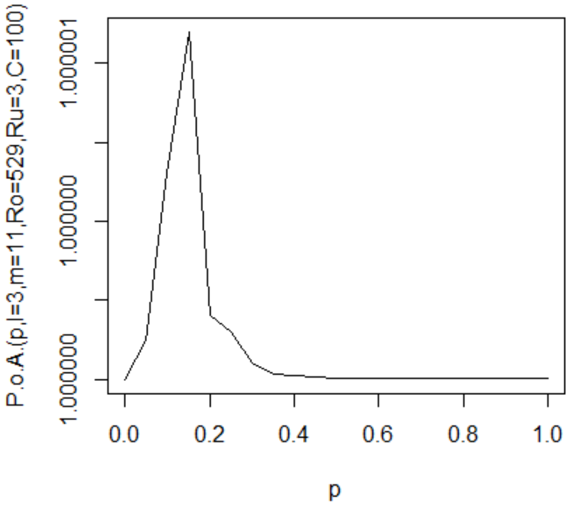


Σχήμα 2.83: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 19$, $R_u = 762$, $C = 100$.

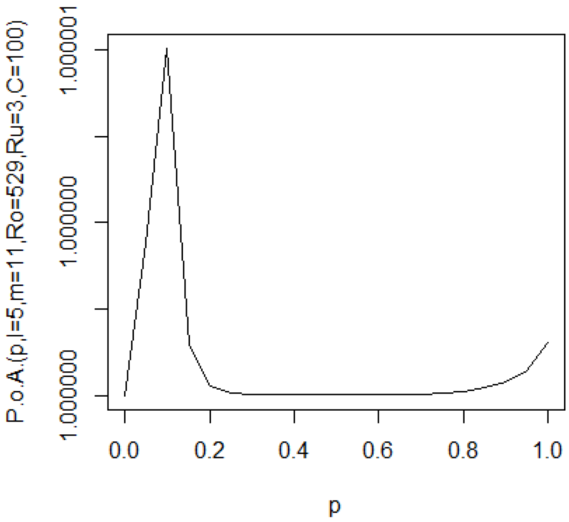
– Για R_o μεγάλο και R_u μικρό: Η μεταβολή της μορφής της συνάρτησης του P.o.A. καθώς μεγαλώνει το λ, εξαρτάται από τις τιμές των R_o και R_u. Για παράδειγμα:
α) Για $R_o = 529$ και $R_u = 3$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ είναι κοίλη στην αρχή, μετά είναι φθίνουσα και κοίλη και στο τέλος είναι πάλι φθίνουσα και κοίλη (βλ. Σχήμα 2.84).
-Για $\lambda = 2$ με $\lambda = 4$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή, μετά μειώνεται γρήγορα και στο τέλος μειώνεται αργά (βλ. Σχήμα 2.85).
-Για $\lambda = 5$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή, μετά μειώνεται γρήγορα και στο τέλος είναι κυρτή (βλ. Σχήμα 2.86).
-Για $\lambda = 6$ μειώνεται γρήγορα στην αρχή και μετά είναι κυρτή (βλ. Σχήμα 2.87).
-Για $\lambda = 7$ με $\lambda = 10$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή, μετά μεώνεται γρήγορα και στο τέλος είναι αύξουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.88).
β) Για $R_o = 487$ και $R_u = 1$ έχουμε για τη συνάρτηση του P.o.A.:
-Για $\lambda = 1$ είναι κοίλη στην αρχή, μετά είναι φθίνουσα και κοίλη και στο τέλος είναι φθίνουσα (βλ. Σχήμα 2.89).
-Για $\lambda = 2$ και $\lambda = 3$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή, μετά μειώνεται γρήγορα και στο τέλος μειώνεται αργά βλ. Σχήμα 2.90).
-Για $\lambda = 4$ με $\lambda = 6$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή και μετά είναι κυρτή (βλ. Σχήμα 2.91).
-Για $\lambda = 7$ με $\lambda = 10$ αυξάνεται γρήγορα στην αρχή και έχει τιμές πολύ κοντά τσο 1,μετά μειώνεται γρήγορα και στο τέλος είναι αύξουσα και κυρτή (βλ. Σχήμα 2.92).



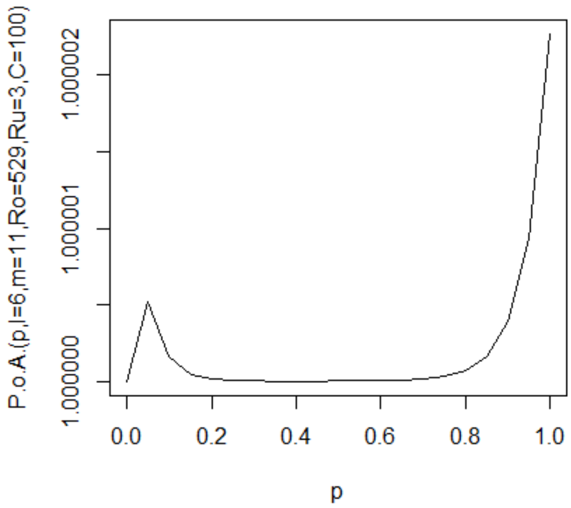
Σχήμα 2.84: Το P.o.A. για $\lambda = 1$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 3$, $C = 100$.



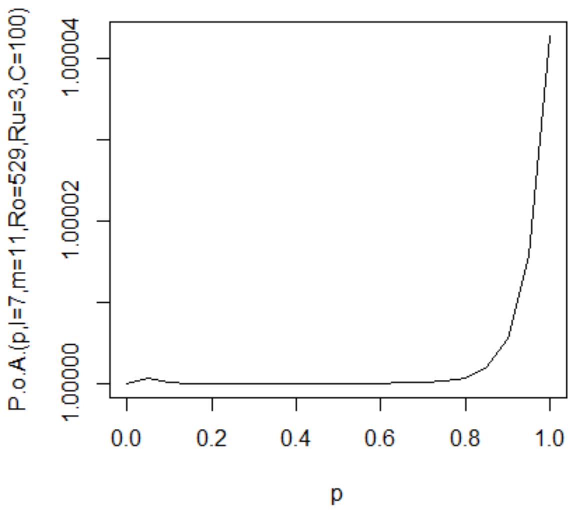
Σχήμα 2.85: Το P.o.A. για $\lambda = 3$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 3$, $C = 100$.



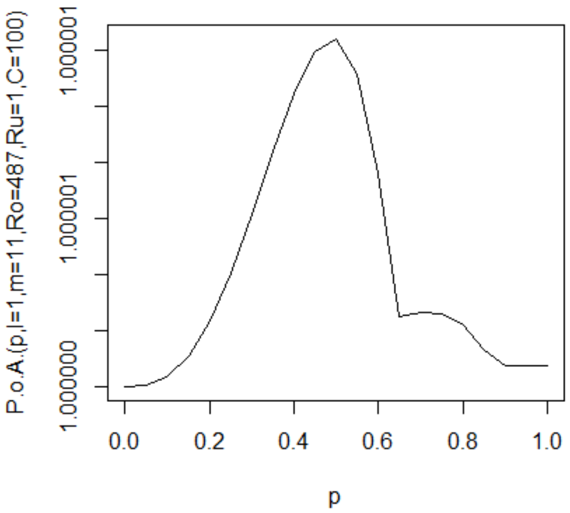
Σχήμα 2.86: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 3$, $C = 100$.



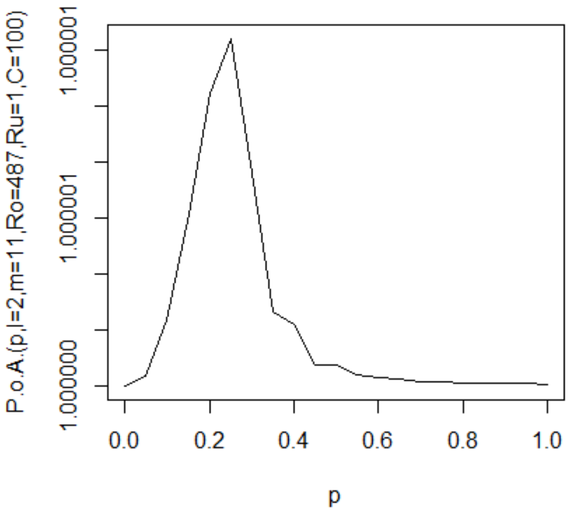
Σχήμα 2.87: Το P.o.A. για $\lambda = 6$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 3$, $C = 100$.



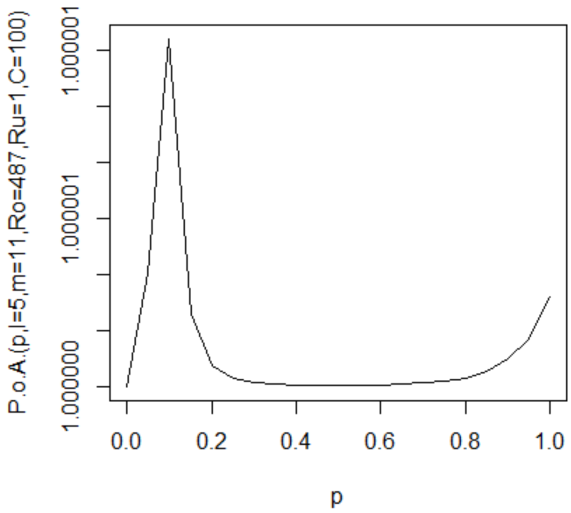
Σχήμα 2.88: Το P.o.A. για $\lambda = 7$, $\mu = 11$, $R_o = 529$, $R_u = 3$, $C = 100$.



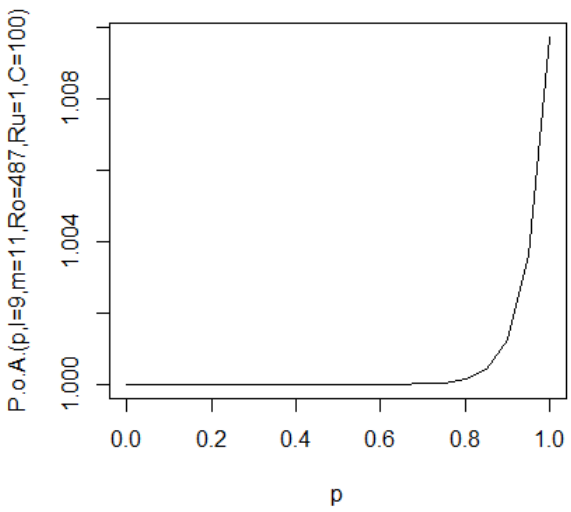
Σχήμα 2.89: Το P.o.A. για $\lambda = 1$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 1$, $C = 100$.



Σχήμα 2.90: Το P.o.A. για $\lambda = 2$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 1$, $C = 100$.



Σχήμα 2.91: Το P.o.A. για $\lambda = 5$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 1$, $C = 100$.



Σχήμα 2.92: Το P.o.A. για $\lambda = 9$, $\mu = 11$, $R_o = 487$, $R_u = 1$, $C = 100$.

Παρατήρηση: Παρατηρείστε ότι, στις περισσότερες περιπτώσεις, η συνάρτηση του P.o.A. ως προς p παρουσιάζει φθίνουσα συμπεριφορά. Αυτό σημαίνει ότι, στις περισσότερες περιπτώσεις, όσο περισσότεροι είναι οι παρατηρούντες πελάτες τόσο το καλύτερο για την κοινωνία. Όταν η συνάρτηση του P.o.A. ως προς p παρουσιάζει αύξουσα συμπεριφορά, τότε αυτό συμβαίνει συνήθως για μεγάλα λ. Προφανώς, σε αυτές τις περιπτώσεις συμφέρει την κοινωνία όλοι οι πελάτες να είναι μη-παρατηρούντες.

2.4 Μεγιστοποίηση του κέρδους του διαχειριστή (profit maximization)

Ας υποθέσουμε ότι ο διαχειριστής του συστήματος θέτει τιμή εισόδου f για τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα.

2.4.1 Σ.σ.ι.

Θέτοντας $R'_o = R_o - f$ και $R'_u = R_u - f$, είναι ευκολο να δούμε ότι οι συνιστώσες των σ.σ.ι. των πελατών, και των παρατηρούντων και των μη-παρατηρούντων, μπορούν να βρεθούν όπως στην §2.2, θέτοντας όπου R_o το R'_o και όπου R_u το R'_u. Άρα, η συνηστώσα του **σ.σ.ι. των παρατηρούντων πελατών** είναι:

$$n'_e = \left\lfloor \frac{R'_o \mu}{C_o} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(R_o - f)\mu}{C_o} \right\rfloor$$

και, αν συμβολίσουμε με:

$$(B')^{-1} = \frac{1 - \rho_1^{n'_e+1} - \rho_2 + \rho_1^{n'_e}\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}$$

$$p'_n = P(Q=n) = \begin{cases} B'\rho_1^n, & \text{αν} \quad 0 \le n \le n'_e \\ B'\rho_1^{n'_e}\rho_2^{n-n'_e}, & \text{αν} \quad n \ge n'_e \end{cases} \quad \textbf{(οριακή κατανομή)}$$

$$G'(n'_e, q) = R'_u - \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1)$$ (**συνάρτηση** (ως προς q) **μέσης ωφέλειας μη-παρατηρούντων πελατών**)

(όπου $E(Q)$ είναι η αναμενόμενη τιμή του μήκους ουράς[13]), τότε έχουμε ότι η G' είναι φθίνουσα ως προς q και ότι για το σ.σ.ι. ισχύουν τα παρακάτω:
(α) $G'(n'_e, 0) \le 0 \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το $(n'_e, 0)$.
(β) $G'(n'_e, 1) \ge 0 \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το $(n'_e, 1)$.
(γ) $G'(n'_e, 1) < 0 < G'(n'_e, 0) \Leftrightarrow$ το **σ.σ.ι.** είναι το σημείο (n'_e, q'_e) στο οποίο μηδενίζεται η $G'(n'_e, q)$.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & (n'_e - 1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & (n'_e) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & (n'_e + 1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο **ρυθμός εισόδου των παρατηρούντων πελατών** στο σύστημα (αν οι τιμές των παραμέτρων και του f είναι τέτοιες ώστε να μην έχουν αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια αν μπουν στο σύστημα), όταν αυτοί χρησιμοποιούν ως στρατηγική την αντίστοιχη συνιστώσα του σ.σ.ι. τους (το οποίο προκύπτει

[13] Η $E(Q)$ υπολογίζεται όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1 στην §2.2.2 και είναι ίση με:

$$E(Q) = B'\left(\frac{n'_e\rho_1^{n'_e+2} - (n'_e+1)\rho_1^{n'_e+1} + \rho_1}{(1-\rho_1)^2} + \frac{n'_e\rho_1^{n'_e}\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_1^{n'_e}\rho_2}{(1-\rho_2)^2} \right).$$

από την τιμή εισόδου που θέτει ο διαχειριστής του συστήματος) είναι:

$$\lambda_e^o = \lambda p \sum_{n=0}^{n'_e-1} p'_n$$
$$= \lambda p B' \frac{\rho_1^{n'_e} - \rho_1^{n'_e}\rho_2^{n'_e+1}}{\rho_2^{n'_e} - \rho_2^{n'_e+1}}.$$

και ο **ρυθμός εισόδου των μη-παρατηρούντων πελατών** στο σύστημα (αν οι τιμές των παραμέτρων και του f είναι τέτοιες ώστε να να μην έχουν αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια αν μπουν στο σύστημα), όταν αυτοί χρησιμοποιούν ως στρατηγική την αντίστοιχη συνιστώσα του σ.σ.ι. (το οποίο προκύπτει από την τιμή εισόδου που θέτει ο διαχειριστής του συστήματος) είναι:

$$\lambda_e^u = \lambda(1-p)q'_e.$$

2.4.2 Συνάρτηση ρυθμού κέρδους του διαχειριστή του συστήματος

Υποθέτουμε ότι οι πελάτες (και των 2 τύπων) χρησιμοποιούν τις στρατηγικές του σ.σ.ι. (που προκύπτουν από την τιμή εισόδου που θέτει ο διαχειριστής του συστήματος).

Αν $\lambda_e^o > 0$ και $\lambda_e^u > 0$, τότε η συνάρτηση (ως προς f) του ρυθμού κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$K(f) = \lambda_e^o \cdot f + \lambda_e^u \cdot f$$
$$= \lambda p B' \frac{\rho_1^{n'_e} - \rho_1^{n'_e}\rho_2^{n'_e+1}}{\rho_2^{n'_e} - \rho_2^{n'_e+1}} f + \lambda(1-p)q'_e f.$$

Αν $\lambda_e^o = 0$ και $\lambda_e^u = 0$, ο ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι 0.

Αν $\lambda_e^o > 0$ και $\lambda_e^u = 0$, η συνάρτηση (ως προς f) του ρυθμού κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$K(f) = \lambda_e^o \cdot f$$
$$= \lambda p B' \frac{\rho_1^{n'_e} - \rho_1^{n'_e}\rho_2^{n'_e+1}}{\rho_2^{n'_e} - \rho_2^{n'_e+1}} f.$$

Αν $\lambda_e^o = 0$ και $\lambda_e^u > 0$, η συνάρτηση (ως προς f) του ρυθμού κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$K(f) = \lambda_e^u \cdot f$$
$$= \lambda(1-p)q'_e f.$$

Πότε, όμως έχουμε $\lambda_e^o = 0$ ή/και $\lambda_e^u = 0$;

Για να έχουμε $\lambda_e^o = 0$, πρέπει οι παρατηρούντες πελάτες να μην έχουν ποτέ λόγο να μπουν στο σύστημα, δηλαδή αν μπουν στο σύστημα, να έχουν αρνητική ωφέλεια ακόμα και αν το μήκος ουράς είναι 0, δηλαδή:

$$R'_o - \frac{C_o}{\mu} < 0 \Leftrightarrow R'_o < \frac{C_o}{\mu},$$

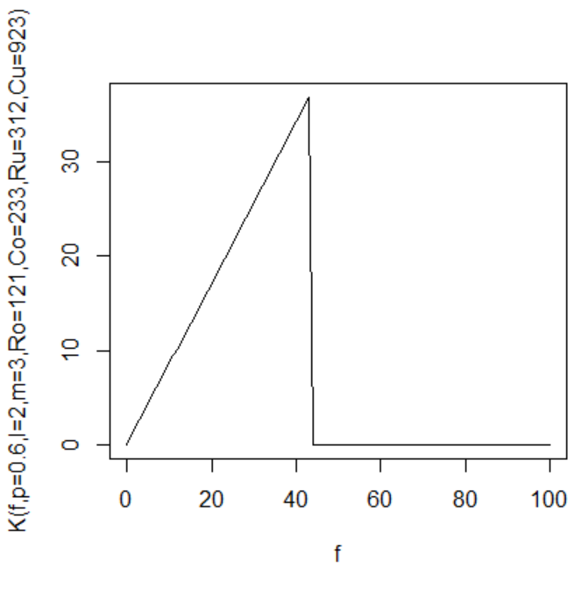
και για να έχουμε $\lambda_e^u = 0$, πρέπει οι μη-παρατηρούντες να μην έχουν λόγο να μπουν στο σύστημα, δηλαδή η αντίστοιχη συνιστώσα του σ.σ.ι. τους να είναι το $q'_e = 0$, δηλαδή:

$$G'(n'_e, 0) \leq 0 \Leftrightarrow R'_u \leq \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1).$$

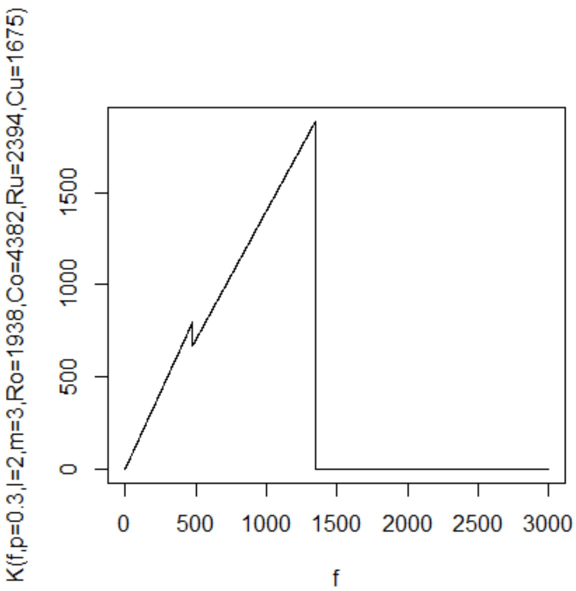
Άρα, η **συνάρτηση του ρυθμού κερδους του διαχειριστή** είναι:

$$K(f) = \begin{cases} \lambda p B' \frac{\rho_1^{n'_e} - \rho_1^{n'_e}\rho_2^{n'_e+1}}{\rho_2^{n'_e} - \rho_2^{n'_e+1}} f + \lambda(1-p)q'_e f, & \text{αν} \quad R'_o \geq \frac{C_o}{\mu} \quad \text{και} \quad R'_u > \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1) \\ \lambda p B' \frac{\rho_1^{n'_e} - \rho_1^{n'_e}\rho_2^{n'_e+1}}{\rho_2^{n'_e} - \rho_2^{n'_e+1}} f, & \text{αν} \quad R'_o \geq \frac{C_o}{\mu} \quad \text{και} \quad R'_u \leq \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1) \\ \lambda(1-p)q'_e f, & \text{αν} \quad R'_o < \frac{C_o}{\mu} \quad \text{και} \quad R'_u > \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1) \\ 0, & \text{αν} \quad R'_o < \frac{C_o}{\mu} \quad \text{και} \quad R'_u \leq \frac{C_u}{\mu}(E(Q)+1) \end{cases}$$

Μέσω προγραμμάτων στον υπολογιστή μπορούμε να σχεδιάσουμε την $K(f)$ (βλ. Σχήμα 2.97 και Σχήμα 2.98) και να υπολογίσουμε την τιμή εισόδου για την οποία μεγιστοποιείται (π.χ. για την K του Σχήματος 2.97, το πρόγραμμα δίνει ότι η K μεγιστοποιείται για $f = 43.333$ περίπου και η μέγιστη τιμή της είναι $K = 37.1426$ περίπου, και για την K του Σχήματος 2.98, το πρόγραμμα δίνει ότι η K μεγιστοποιείται για $f = 1347.12$ περίπου και η μέγιστη τιμή της είναι $K = 1885.968$ περίπου).).



Σχήμα 2.93: Η K για $p = 0.6$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $R_o = 121$, $C_o = 233$, $R_u = 312$, $C_u = 923$.



Σχήμα 2.94: Η K για $p = 0.3$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $R_o = 1938$, $C_o = 4382$, $R_u = 2394$, $C_u = 1675$.

Κεφάλαιο 3

Η M|M|1 ουρά με άγνωστο ρυθμό εξυπηρέτησης, ρυθμο κόστους παραμονής ή κέρδους εξυπηρέτησης

Θεωρείστε μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, στην οποία οι πελάτες που μπαίνουν στο σύστημα πληρώνουν μια τιμή εισόδου f, δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος ουράς πριν αποφασίσουν αν θα μπουν (μη-παρατηρούντες) και δεν μπορούν να φύγουν από το σύστημα πριν εξυπηρετηθούν. Έστω R το κέρδος που έχει ένας πελάτης από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του και C το κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής στο σύστημα.

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι η μόνη πληροφορία που ενδέχεται να είναι άγνωστη στους πελάτες (ή σε ένα ποσοστό των πελατών) είναι το μήκος ουράς. Έτσι, ως πληροφορημένους πελάτες θεωρούσαμε τους παρατηρούντες και ως απληροφόρητους, τους μη-παρατηρούντες. Τί γίνεται όμως όταν εκτός από το μήκος ουράς, οι πελάτες δεν γνωρίζουν επακριβώς και κάποια άλλη πληροφορία που αφορά κάποια παράμετρο του συστήματος όπως π.χ. το κέρδος από την εξυπηρέτηση; Σε αυτό το ερώτημα προσπάθησε να απαντήσει ο Hassin στην εργασία του με τίτλο "Information and Uncertainty in a Queuing System"(2007)[1].

Ο Hassin εξέτασε $M|M|1$ ουρές με μη-παρατηρούντες πελάτες, όπου **η άγνωστη πληροφορία** (εκτός από το μήκος ουράς) **είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης, το κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής ή το κέρδος από την εξυπηρέτηση**. Την άγνωστη πληροφορία τη θεώρησε ως μια (**δίτιμη** για ευκολία) **τυχαία μεταλητή**, της οποία η τιμή είναι **γνωστή στον διαχειριστή του συστήματος και άγνωστη στους πελάτες**. Έθεσε το ερώτημα, πότε συμφέρει τον διαχειριστή να φανερώσει στους πελάτες την τιμή της τυχαίας μεταβλητής και πότε όχι.

Για να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα, μελέτησε την επίδραση της πληροφόρησης (το αν γνωρίζει ή όχι ο πελάτης την τιμή της τυχαίας μεταβλητής) στον ρυθμό κέρδους (rate of profit) του διαχειριστή του συστήματος. Συγκεκριμένα, διέκρινε 3 περιπτώσεις:

[1] Για ό,τι ακολουθεί Rafael Hassin, *Information and Uncertainty in a Queuing System.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, Volume 21, 2007, σελ. 361 - 380.

(A) Οι πελάτες είναι **απληροφόρητοι** (uninformed customers), δηλαδή δεν γνωρίζουν την τιμή της τυχαίας μεταβλητής.
(B) Οι πελάτες είναι **πληροφορημένοι** (informed customers), δηλαδή γνωρίζουν την τιμή της τυχαίας μεταβλητής, και ο διαχειριστής του συστήματος διαλέγει **διαφορετικές τιμές εισόδου**, **ανάλογα με την τιμή της τυχαίας μεταβλητής** (**δύο τιμές εισόδου** (two prices)).
(Γ) Οι πελάτες είναι **πληροφορημένοι** και ο διαχειριστής του συστήματος διαλέγει μια τιμή εισόδου, την οποία **δεν μπορεί να αλλάξει** μετά την παρατήρηση της τιμής της τυχαίας μεταβλητής (**μία τιμή εισόδου** (single price)).

Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα, χρησιμοποιούν ως στρατηγική το σ.σ.ι. q_e (το οποίο εξαρτάται από τις τιμές των R, C, λ, μ και f) και είναι αδιάφοροι ως προς το αν θα μπουν στο σύστημα ή όχι[2]. Έτσι, στις περιπτώσεις (A) και (B), η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που θα μπει στο σύστημα (δηλαδή το $R - f - C \cdot E(S)$, όπου $E(S)$ είναι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα[3]) είναι 0. Άρα, σε αυτές τις περιπτώσεις, τα συμφέροντα του διαχειριστή συμπίπτουν με αυτά της κοινωνίας, και άρα οι αποφάσεις του διαχειριστή είναι κοινωνικά βέλτιστες. Αυτά όμως δεν ισχύουν στην περίπτωση (Γ), καθώς, σε αυτή την περίπτωση, οι πελάτες ενδέχεται να έχουν θετική μέση ωφέλεια (λόγω του ότι ο διαχειριστής του συστήματος δεν μπορεί να αλλάξει την τιμή εισόδου μετά την παρατήρηση της τιμής της τυχαίας μεταβλητής).

Υπενθυμίζουμε[4] ότι ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_m = \begin{cases} (\sqrt{R\mu} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad R \geq \frac{C}{\mu} \\ 0, & \text{αν} \quad R < \frac{C}{\mu} \end{cases} \tag{3.1}$$

και ότι η τιμη εισόδου που αντιστοιχει σε αυτό είναι:

$$f_m = R - \sqrt{\frac{RC}{\mu}}. \tag{3.2}$$

Θέτουμε:

$$\upsilon = \frac{R-f}{C} \text{ και } r = \frac{R}{C}.$$

3.1 Απληροφόρητοι πελάτες

Έστω ότι οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα, δεν πληροφορούνται την τιμή της παραμέτρου που θεωρείται τυχαία (μ, C ή R). Αυτό σημαίνει ότι ο διαχειριστής θέτει μία τιμή εισόδου, την οποία δεν αλλάζει μετά την παρατήρηση της τιμής της τυχαίας μεταβλητής διότι οι πελάτες μπορεί να θεωρούσαν την αλλαγή αυτή ως σημάδι για την τιμή της άγνωστης παραμέτρου. Έστω K_{un} ο **αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος**.

[2] Αν η ωφέλεια τους είναι 0 είτε μπουν στο σύστημα είτε όχι, τότε θα προτιμήσουν να μπουν.
[3] Υπενθυμίζουμε ότι:

$$E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda q},$$

όπου q είναι η στρατηγική που χρησιμοποιούν οι πελάτες.
[4] Βλ. §1.3.6.

3.1.1 Άγνωστος ρυθμός εξυπηρέτησης

Έστω ότι ο ρυθμός εξυπηρέτησης (μ) δεν είναι μία σταθερά αλλά μία τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει δύο τιμές, έστω μ_1 με πιθανότητα p και μ_2 με πιθανότητα $1-p$, όπου $\mu_1 > \mu_2$.

Για να έχει θετικό ρυθμό κέρδους ο διαχειριστής, πρέπει οι πελάτες να μην έχουν αρνητική αναμενόμενη ωφέλεια αν μπουν στο σύστημα, δηλαδή πρέπει $q_e \neq 0$, και άρα $\lambda_e = \lambda q_e \neq 0$.

Η αναμενόμενη ωφέλεια ενός πελάτη που μπαίνει στο σύστημα, όταν η τιμή εισόδου που θέτει ο διαχειριστής του συστήματος είναι f, είναι:

$$F(q_e) = R - f - C \cdot E\left(\frac{1}{\mu - \lambda q_e}\right) = R - f - C \cdot E\left(\frac{1}{\mu - \lambda_e}\right).$$

Για να έχουν οι πελάτες λόγο να μπουν στο σύστημα, πρέπει η $F(q)$ να μην είναι αρνητική για κάθε $q \in [0,1]$, δηλαδή:

$$R - f \geq C \cdot E\left(\frac{1}{\mu}\right) = C\left(p\frac{1}{\mu_1} + (1-p)\frac{1}{\mu_2}\right).$$

Άρα, η συνθήκη για να έχει ο διαχειριστής του συστήματος θετικό ρυθμό κέρδους είναι:

$$\upsilon \geq p\frac{1}{\mu_1} + (1-p)\frac{1}{\mu_2}.$$

Διαφορετικά, ο ρυθμός κέρδους του είναι 0.

Ο Hassin απέδειξε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 1. *Η τιμή ισορροπίας του υ είναι μια λύση της εξίσωσης:*

$$\begin{aligned}
&(\mu_1-\mu_2)^2[(\mu_1+\mu_2)^2-(\mu_1-\mu_2)^2]\upsilon^4\\
&\quad + 2(1-2p)(\mu_1-\mu_2)[(\mu_1+\mu_2)^2-(\mu_1-\mu_2)^2]\upsilon^3\\
&\quad + [(\mu_1+\mu_2)^2 - 2r(\mu_1-\mu_2)^2\\
&\quad \times [\mu_1+\mu_2+(1-2p)(\mu_1-\mu_2)] - (1-2p)^2(\mu_1-\mu_2)^2]\upsilon^2\\
&\quad + 2r(\mu_1-\mu_2)[-2(1-2p)(\mu_1+\mu_2)-(1-2p)^2(\mu_1-\mu_2)-(\mu_1-\mu_2)]\upsilon\\
&\quad + r[r(\mu_1-\mu_2)^2 - 2(\mu_1+\mu_2) - r(1-2p)^2(\mu_1-\mu_2)^2\\
&\quad - 2(1-2p)(\mu_1-\mu_2)] = 0.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Σε κατάσταση ισσοροπίας έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\upsilon = \frac{p}{\mu_1-\lambda_e} + \frac{1-p}{\mu_2-\lambda_e}\\
&\Leftrightarrow \upsilon(\mu_1-\lambda_e)(\mu_2-\lambda_e) = p(\mu_2-\lambda_e) + (1-p)(\mu_1-\lambda_e)\\
&\Leftrightarrow \upsilon\lambda_e^2 + \lambda_e(1-\upsilon\mu_1-\upsilon\mu_2) + \upsilon\mu_1\mu_2 - p\mu_1 - (1-p)\mu_1 = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda_e = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\upsilon} + \mu_1 + \mu_2 \pm \sqrt{\frac{1}{\upsilon^2} + (\mu_1+\mu_2)^2 + \frac{2}{\upsilon}(1-2p)(\mu_1-\mu_2)}\right) \quad (1).
\end{aligned}$$

Η τετραγωνική ρίζα στην (1) ελαχιστοποιείται για $p = 1$ (αφού $\mu_1 > \mu_2$) και τότε έχουμε:

$$\lambda_e = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\upsilon} + \mu_1 + \mu_2 \pm \sqrt{\frac{1}{\upsilon^2} + (\mu_1+\mu_2)^2 + \frac{2}{\upsilon}(\mu_2-\mu_1)}\right).$$

Η ρίζα που αντιστοιχεί στο + είναι μεγαλύτερη από το μ_2, άρα απορρίπτεται. Συνεπώς έχουμε:

$$\lambda_e = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\upsilon} + \mu_1 + \mu_2 - S\right),$$

όπου $S = \sqrt{\frac{1}{\upsilon^2} + (\mu_1+\mu_2)^2 + \frac{2}{\upsilon}(1-2p)(\mu_1-\mu_2)}$.

Ισχύει:

$$S = \sqrt{\frac{1}{\upsilon^2} + (\mu_1+\mu_2)^2 + \frac{2}{\upsilon}(1-2p)(\mu_1-\mu_2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\upsilon} - \mu_2 + \mu_1\right)^2 + 4(1-p)\frac{\mu_1-\mu_2}{\upsilon}} > 0,$$

διότι $p \in (0,1)$ και $\mu_1 > \mu_2$.

Έχουμε ότι:

$$\frac{d\lambda_e}{d\upsilon} = \frac{1}{2\upsilon^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{\upsilon} + (1-2p)(\mu_1-\mu_2)}{S}\right)$$

και

$$\frac{d\lambda_e}{df} = \frac{d\lambda_e}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{df} = -\frac{1}{2C\upsilon^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{\upsilon} + (1-2p)(\mu_1-\mu_2)}{S}\right).$$

Ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι $K_{un} = \lambda_e f$.

Έχουμε:

$$\frac{dK_{un}}{df} = -\frac{f}{2C\upsilon^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{\upsilon} + (1-2p)(\mu_1-\mu_2)}{S}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\upsilon} + \mu_1 + \mu_2 - S\right).$$

Η πρώτη συνθήκη βελτιστοποίησης είναι:

$$\begin{aligned}
&\frac{dK_{un}}{df} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{f}{2C\upsilon^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{\upsilon} + (1-2p)(\mu_1-\mu_2)}{S}\right) + \lambda_e = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\upsilon} + \mu_1 + \mu_2 - S\right) = 0 \\
&\xLeftrightarrow{S>0 \text{ και } f = R - \upsilon C} S\left(-\frac{R}{C\upsilon^2 + \mu_1 + \mu_2}\right) = \frac{R}{C\upsilon^3} + R(1-2p)\frac{\mu_1-\mu_2}{C\upsilon^2} \\
&+ (1-2p)\frac{\mu_1-\mu_2}{\upsilon} + (\mu_1-\mu_2)^2.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $r = \frac{R}{C}$, πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση με υ^3, υψώνοντας στο τετράγωνο και διαιρώντας με υ^2, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(\mu_1-\mu_2)^2[(\mu_1+\mu_2)^2 - (\mu_1-\mu_2)^2]\upsilon^4 \\
&\quad + 2(1-2p)(\mu_1-\mu_2)[(\mu_1+\mu_2)^2 - (\mu_1-\mu_2)^2]\upsilon^3 \\
&\quad + [(\mu_1+\mu_2)^2 - 2r(\mu_1-\mu_2)^2 \\
&\quad \times [\mu_1+\mu_2 + (1-2p)(\mu_1-\mu_2)] - (1-2p)^2(\mu_1-\mu_2)^2]\upsilon^2 \\
&\quad + 2r(\mu_1-\mu_2)[-2(1-2p)(\mu_1+\mu_2) - (1-2p)^2(\mu_1-\mu_2) - (\mu_1-\mu_2)]\upsilon \\
&\quad + r[r(\mu_1-\mu_2)^2 - 2(\mu_1+\mu_2) - r(1-2p)^2(\mu_1-\mu_2)^2 \\
&\quad - 2(1-2p)(\mu_1-\mu_2)] = 0.
\end{aligned}$$

□

Αν συμβολίσουμε με υ_m το υ του παραπάνω Λήμματος, με f_m την αντίστοιχη τιμή εισόδου και με λ_m τον αντίστοιχο ρυθμό εισόδου, τότε ο (βέλτιστος) αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι $K_{un} = \lambda_m f_m = \lambda_m(R - C\upsilon_m)$.

Άρα, ο **βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή** είναι:

$$K_{un} = \begin{cases} \lambda_m(R - C\upsilon_m), & \text{αν} \quad \upsilon_m \geq p\frac{1}{\mu_1} + (1-p)\frac{1}{\mu_2} \\ 0, & \text{αν} \quad \upsilon_m < p\frac{1}{\mu_1} + (1-p)\frac{1}{\mu_2} \end{cases}. \tag{3.3}$$

3.1.2 Άγνωστος ρυθμός κόστους παραμονής

Έστω ότι το κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής (C) δεν είναι μία σταθερά αλλά μία τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει δύο τιμές, έστω C_1 με πιθανότητα p και C_2 με πιθανότητα $1-p$, όπου $C_1 < C_2$.

Για να μην έχει μηδενικό ρυθμό κέρδους ο διαχειριστής του συστήματος, πρέπει $\lambda_e \neq 0$ και τότε έχουμε:

$$\lambda_e = \mu - \frac{E(C)}{R-f} = \mu - \frac{pC_1 + (1-p)C_2}{R-f}.$$

Σύμφωνα με την (3.1), ο **βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή** είναι:

$$K_{un} = \begin{cases} (\sqrt{R\mu} - \sqrt{E(C)})^2, & \text{αν} \quad R\mu \geq E(C) \\ 0, & \text{αν} \quad R\mu < E(C) \end{cases}. \tag{3.4}$$

3.1.3 Άγνωστο κέρδος εξυπηρέτησης

Έστω ότι το κέρδος του πελάτη από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του (R) δεν είναι μία σταθερά αλλά μία τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει δύο τιμές, έστω R_1 με πιθανότητα p και R_2 με πιθανότητα $1-p$, όπου $R_1 > R_2$.

Για να μην έχει μηδενικό ρυθμό κέρδους ο διαχειριστής του συστήματος, πρέπει $\lambda_e \neq 0$ και τότε έχουμε:

$$\lambda_e = \mu - \frac{C}{E(R)-f} = \mu - \frac{C}{pR_1 + (1-p)R_2 - f}.$$

Σύμφωνα με την (3.1), ο **βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή** είναι:

$$K_{un} = \begin{cases} (\sqrt{E(R)\mu} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad E(R)\mu \geq C \\ 0, & \text{αν} \quad E(R)\mu < C \end{cases}. \tag{3.5}$$

3.2 Πληροφορημένοι πελάτες-Δύο τιμές εισόδου

Έστω ότι οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα, πληροφορούνται για την τιμή της παραμέτρου που θεωρείται τυχαία (μ, C ή R) και ότι ο διαχειριστής του συστήματος επιλέγει την τιμή εισόδου ανάλογα με την τιμή της τυχαίας μεταβλητής. Έστω K_{in}^2 ο **αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος**.

3.2.1 Άγνωστος ρυθμός εξυπηρέτησης

Έστω ότι το μ είναι μία δίτιμη τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει τις τιμές μ_1 με πιθανότητα p και μ_2 με πιθανότητα $1 - p$, όπου $\mu_1 > \mu_2$.

Διακρίνουμε τις εξής 3 περιπτώσεις:

- Αν τα μ_1 και μ_2 είναι τέτοια ώστε να μην συμφέρει του πελάτες να μπουν στο σύστημα, δηλαδή αν:

  $$R < \frac{C}{\mu_1} \Leftrightarrow r < \frac{1}{\mu_1},$$

  τότε ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή θα είναι 0 (αφού κανένας πελάτης δεν θα μπει στο σύστημα).

- Αν ισχύει:

  $$r \geq \frac{1}{\mu_2},$$

  τότε έχουμε:

  Οι δύο πιθανοί ρυθμοί εισόδου στο σύστημα είναι:

  $$\lambda_e^1 = \mu_1 - \frac{C}{R - f_1} \text{ (με πιθανότητα } p)$$

  και

  $$\lambda_e^2 = \mu_2 - \frac{C}{R - f_2} \text{ (με πιθανότητα } 1 - p),$$

  όπου f_1 και f_2 είναι οι τιμές εισόδου που θέτει ο διαχειριστής του συστήματος όταν $\mu = \mu_1$ και $\mu = \mu_2$ αντίστοιχα.

  Αν ο ρυθμός εισόδου στο σύστημα ήταν πάντα $\lambda_e = \lambda_e^1$ (δηλαδή αν το μ δεν ήταν τυχαία μεταβλητή), τότε, με βάση την (3.1), ο βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος θα ήταν:

  $$K_m^2 = (\sqrt{R\mu_1} - \sqrt{C})^2$$

  ενώ αν ο ρυθμός εισόδου στο σύστημα ήταν πάντα $\lambda_e = \lambda_e^2$, ο αναμενόμενος βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος θα ήταν:

  $$K_m^2 = (\sqrt{R\mu_2} - \sqrt{C})^2.$$

  Άρα, με πιθανότητα p ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι K_m^1 και με πιθανότητα $1 - p$ είναι K_m^2. Οπότε, ο αναμενόμενος βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

  $$K_{in}^2 = p \cdot K_m^1 + (1-p) \cdot K_m^2 = p(\sqrt{R\mu_1} - \sqrt{C})^2 + (1-p)(\sqrt{R\mu_2} - \sqrt{C})^2.$$

- Αν:

  $$\frac{1}{\mu_1} < r < \frac{1}{\mu_2},$$

τότε, όταν οι πελάτες παρατηρούν $\mu = \mu_2$, δεν μπαίνουν στο σύστημα, ενώ όταν παρατηρούν $\mu = \mu_1$, μπαίνουν. Έτσι, με βάση την (3.1) και σύμφωνα με όσα είπαμε και στην προηγούμενη περίπτωση, ο βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$K_{in}^2 = p \cdot K_m^1 + (1-p) \cdot 0 = p(\sqrt{R\mu_1} - \sqrt{C})^2.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι ο **βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος** είναι:

$$K_{in}^2 = \begin{cases} p(\sqrt{R\mu_1} - \sqrt{C})^2 + (1-p)(\sqrt{R\mu_2} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad r \geq \frac{1}{\mu_2} \\ p(\sqrt{R\mu_1} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad \frac{1}{\mu_1} < r < \frac{1}{\mu_2} \\ 0, & \text{αν} \quad r \leq \frac{1}{\mu_1} \end{cases} . \quad (3.6)$$

3.2.2 Άγνωστος ρυθμός κόστους παραμονής

Έστω ότι το C είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει δύο τιμές, έστω C_1 με πιθανότητα p και C_2 με πιθανότητα $1-p$, όπου $C_1 < C_2$.

Δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη περίπτωση και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1), καταλήγουμε στον εξής τύπο για τον **βέλτιστο αναμενόμενο ρυθμό κέρδους του διαχειριστή του συστήματος**:

$$K_{in}^2 = \begin{cases} p(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C_1})^2 + (1-p)(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C_2})^2, & \text{αν} \quad R\mu \geq C_2 \\ p(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C_1})^2, & \text{αν} \quad C_1 < R\mu < C_2 \\ 0, & \text{αν} \quad R\mu \leq C_1 \end{cases} . \quad (3.7)$$

3.2.3 Άγνωστο κέρδος εξυπηρέτησης

Έστω ότι το R είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει τις τιμές R_1 με πιθανότητα p και R_2 με πιθανότητα $1-p$, όπου $R_1 > R_2$.

Δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του άγνωστου ρυθμού εξυπηρέτησης και με βάση τη σχέση (3.1), καταλήγουμε στον εξής τύπο για τον **βέλτιστο αναμενόμενο ρυθμό κέρδους του διαχειριστή του συστήματος**:

$$K_{in}^2 = \begin{cases} p(\sqrt{R_1\mu} - \sqrt{C})^2 + (1-p)(\sqrt{R_2\mu} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad R_2 \geq \frac{C}{\mu} \\ p(\sqrt{R_1\mu} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad R_2 < \frac{C}{\mu} < R_1 \\ 0, & \text{αν} \quad R_1 \leq \frac{C}{\mu} \end{cases} . \quad (3.8)$$

3.3 Πληροφορημένοι πελάτες-Μία τιμή εισόδου

Έστω ότι οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα, πληροφορούνται για την τιμή της παραμέτρου που θεωρείται τυχαία (μ, C ή R) και ότι ο διαχειριστής του συστήματος δεν μπορεί να αλλάξει την τιμή εισόδου μετά την παρατήρηση της τιμής τυχαίας μεταβλητής. Έστω K_{in}^1 ο **αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος**.

3.3.1 Άγνωστος ρυθμός εξυπηρέτησης

Έστω ότι το μ είναι τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει τις τιμές μ_1 με πιθανότητα p και μ_2 με πιθανότητα $1-p$, όπου $\mu_1 > \mu_2$.

– Αν:

$$r < \frac{1}{\mu_1},$$

τότε δεν συμφέρει ποτέ τους πελάτες να μπουν στο σύστημα, όποια τιμή εισόδου κι αν θέσει ο διαχειριστής, και άρα ο ρυθμός εισόδου στο σύστημα ειναι $\lambda_e = 0$. Συνεπώς, ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος θα είναι 0.

– Αν:

$$r \geq \frac{1}{\mu_1},$$

τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν ο διαχειριστής του συστήματος θέσει τιμή εισόδου f τέτοια ώστε:

  $$r - \frac{f}{C} \geq \frac{1}{\mu_2} \geq \frac{1}{\mu_1} \quad (\Sigma 1),$$

  τότε, ο μέσος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

  $$\begin{aligned}\lambda_e &= p\left(\mu_1 - \frac{C}{R-f}\right) + (1-p)\left(\mu_2 - \frac{C}{R-f}\right)\\ &= \overline{\mu} - \frac{C}{R-f},\end{aligned}$$

  όπου $\overline{\mu} = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$, και ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος θα είναι:

  $$K_{in}^1(f) = \lambda_e f = \left(\overline{\mu} - \frac{C}{R-f}\right) f.$$

  Παραγωγίζοντας ως προς f, παίρνουμε:

  $$\begin{aligned}\frac{d}{df}K_{in}^1(f) &= \frac{d}{df}\left(\overline{\mu} f - \frac{fC}{R-f}\right)\\ &= \overline{\mu} - \frac{C}{R-f} - \frac{Cf}{(R-f)^2}.\end{aligned}$$

  Θέτοντας την τελευταία ίση με 0, παίρνουμε την:

  $$\frac{\overline{\mu}(R-f)^2}{C} - R = 0,$$

  από την οποία προκύπτει:

  $$f_m = R - \sqrt{\frac{RC}{\overline{\mu}}} \quad \text{ή} \quad f_m = R + \sqrt{\frac{RC}{\overline{\mu}}}.$$

  Επειδή θέλουμε $f < R$ (διαφορετικά οι πελάτες θα έχουν πάντα αρνητική ωφέλεια και έτσι ο αναμενόμενος ρυθμός εισόδου (και άρα και ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος) θα είναι 0), δεχόμαστε μόνο τη ρίζα με το $-$.

Η δεύτερη παράγωγος της $K_{in}^1(f)$ ως προς f είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{df^2}K_{in}^1(f) &= \frac{d}{df}\left(\overline{\mu} - \frac{C}{R-f} - \frac{Cf}{(R-f)^2}\right)\\ &= -\frac{C}{(R-f)^2} - C\frac{R+f}{(R-f)^3} < 0, \text{ για καθε } f > 0.\end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{d}{df}K_{in}^1(f_m) = 0 \quad \text{ και } \quad \frac{d^2}{df^2}K_{in}^1(f_m) < 0.$$

Άρα, ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή μεγιστοποιείται για:

$$f_m = R - \sqrt{\frac{RC}{\overline{\mu}}}$$

και ο αντίστοιχος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

$$\lambda_e = \overline{\mu} - \sqrt{\frac{\overline{\mu}C}{R}}.$$

Άρα, ο βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}K_{in}^1 &= \lambda_e f_m\\ &= \left(\overline{\mu} - \sqrt{\frac{\overline{\mu}C}{R}}\right)\left(R - \sqrt{\frac{RC}{\overline{\mu}}}\right)\\ &= C\left(\sqrt{\frac{\overline{\mu}R}{C}} - 1\right)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

- Αν ο διαχειριστής του συστήματος θέσει τιμή εισόδου f τέτοια ώστε:

  $$\frac{1}{\mu_1} \leq r - \frac{f}{C} < \frac{1}{\mu_2} \quad (\Sigma 2),$$

  τότε οι πελάτες δεν θα μπαίνουν στο σύστημα όταν $\mu = \mu_2$.

  Για να συμφέρει τον διαχειριστή να επιλέξει μια τέτοια τιμή που ικανοποιεί την $(\Sigma 2)$ έναντι μια τιμής που ικανοποιεί την $(\Sigma 1)$, θα πρέπει ο μέγιστος ρυθμός κέρδους του υπό την $(\Sigma 2)$ να είναι μεγαλύτερος από τον μέγιστο ρυθμό κέρδους του υπό την $(\Sigma 1)$.

  Ας βρούμε, λοιπόν, τον μέγιστο ρυθμό κέρδους του διαχειριστή του συστήματος υπό την $(\Sigma 2)$.

  Πρώτα απ' όλα, ο μέσος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

  $$\lambda_e = p\left(\mu_1 - \frac{C}{R-f}\right).$$

  και ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

  $$K_{in}^1(f) = \lambda_e f = p\left(\mu_1 - \frac{C}{R-f}\right)f.$$

Δουλεύοντας όπως πριν, έχουμε ότι ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή μεγιστοποιείται για:

$$f_m = R - \sqrt{\frac{RC}{\mu_1}}$$

και ότι ο αντίστοιχος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

$$\lambda_e = p\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{C\mu_1}{RC}}\right).$$

Άρα, ο βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος υπό την ($\Sigma 2$) είναι:

$$\begin{aligned} K_{in}^1 &= \lambda_e f_m \\ &= p\left(\mu_1 + \sqrt{\frac{C\mu_1}{R}}\right)\left(R - \sqrt{\frac{RC}{\mu_1}}\right) \\ &= pC\left(\sqrt{\frac{\mu_1 R}{C}} - 1\right)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Ο διαχειριστής του συστήματος συγκρίνει τις τιμές του αναμενόμενου κέρδους που δίνονται από τις (1) και (2) και επιλέγει ως τιμή εισόδου εκείνη που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη από αυτές.

Τα (1) και (2) ειναι ίσα αν:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{\frac{\overline{\mu}R}{C}} - 1\right)^2 = p\left(\sqrt{\frac{\mu_1 R}{C}} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\overline{\mu}r - 1} = \sqrt{p}(\sqrt{\mu_1} - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r = \left(\frac{1 - \sqrt{p}}{\sqrt{\overline{\mu}} - \sqrt{\mu_1 p}}\right)^2 := \eta. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\eta > \frac{1}{\mu_2} > \frac{1}{\mu_1}. \tag{3.9}$$

Άρα, λοιπόν, ο **βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος** είναι:

$$K_{in}^1 = \begin{cases} C\left(\sqrt{\frac{\overline{\mu}R}{C}} - 1\right)^2, & \text{αν} \quad r \geq \eta \\ pC\left(\sqrt{\frac{\mu_1 R}{C}} - 1\right)^2, & \text{αν} \quad \frac{1}{\mu_1} \leq r \leq \eta \\ 0, & \text{αν} \quad r \leq \frac{1}{\mu_1} \end{cases}. \tag{3.10}$$

3.3.2 Άγνωστος ρυθμός κόστους παραμονής

Έστω ότι το C είναι μια δίτιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές C_1 (με πιθανότητα p) και C_2 (με πιθανότητα $1-p$), όπου $C_1 < C_2$.

– Αν:

$$R\mu < C_1,$$

τότε οι πελάτες δεν μπαίνουν στο σύστημα και άρα ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι 0.

– Αν:

$$R\mu \geq C_1,$$

τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν ο διαχειριστής του συστήματος θέσει τιμή εισόδου f τέτοια ώστε:

$$f < R - \frac{C_2}{\mu} < R - \frac{C_1}{\mu} \quad (\Sigma 3),$$

τότε ο μέσος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\lambda_e &= p\left(\mu - \frac{C_1}{R-f}\right) + (1-p)\left(\mu - \frac{C_2}{R-f}\right)\\ &= \mu - \frac{\overline{C}}{R-f},\end{aligned}$$

όπου $\overline{C} = pC_1 + (1-p)C_2$ και ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$\begin{aligned}K_{in}^1 &= \lambda_e f\\ &= \left(\mu - \frac{\overline{C}}{R-f}\right) f\\ &= \mu f - \frac{\overline{C} f}{R-f}.\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι η τελευταία σχέση είναι η ίδια με της περίπτωσης των απληροφόρητων πελατών. Οπότε, ο βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_{in}^1 = (\sqrt{R\mu} - \sqrt{\overline{C}})^2. \tag{3}$$

- Αν ο διαχειριστής του συστήματος θέσει τιμή εισόδου f τέτοια ώστε:

$$R - \frac{C_2}{\mu} < f < R - \frac{C_1}{\mu} \quad (\Sigma 4),$$

τότε ο μέσος ρυθμός εισόδου είναι:

$$\lambda_e = \left(\mu - \frac{C_1}{R-f}\right).$$

Για να συμφέρει τον διαχειριστή να επιλέξει μια τέτοια τιμή που ικανοποιεί την (Σ4) έναντι μια τιμής που ικανοποιεί την (Σ3), θα πρέπει ο μέγιστος ρυθμός κέρδους του υπό την (Σ4) να είναι μεγαλύτερος από τον μέγιστο ρυθμό κέρδους του υπό την (Σ3).

Για τον μέγιστο αναμενόμενο ρυθμό κέρδος του διαχειριστή υπό την (Σ4), έχουμε:

Ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι:

$$K_{in}^1(f) = p\left(\mu - \frac{C_1}{R-f}\right)f$$

Η $K_{in}^1(f)$ μεγιστοποιείται για:

$$f_m = R - \sqrt{\frac{RC_1}{\mu}},$$

και ο αντίστοιχος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_{in}^1 = p\left(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C_1}\right)^2. \tag{4}$$

Ο διαχειριστής του συστήματος συγκρίνει τις τιμές του αναμενόμενου κέρδους που δίνονται από τις (3) και (4) και επιλέγει ως τιμή εισόδου εκείνη που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη από αυτές.

Οι δύο τιμές στις (3) και (4) ειναι ίσες αν:

$$(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C})^2 = p\left(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C_1}\right)^2 \Leftrightarrow R\mu = \left(\frac{\sqrt{C} - \sqrt{pC_1}}{1-\sqrt{p}}\right)^2 := \gamma.$$

Παρατηρείστε ότι $\gamma > C_1$, αφού $C_1 < C_2$.

Συνοψίζοντας, ο **βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος** είναι:

$$K_{in}^1 = \begin{cases} (\sqrt{R\mu} - \sqrt{C})^2, & \text{αν} \quad R\mu \geq \gamma \\ p\left(\sqrt{R\mu} - \sqrt{C_1}\right)^2, & \text{αν} \quad C_1 < R\mu < \gamma \\ 0, & \text{αν} \quad R\mu \leq C_1 \end{cases}. \tag{3.11}$$

3.3.3 Άγνωστο κέρδος εξυπηρέτησης

Έστω ότι το R είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει τις τιμές R_1 (με πιθανότητα p) και R_2 (με πιθανότητα $1-p$), όπου $R_1 > R_2$.

– Αν:

$$\frac{C}{\mu} > R_1,$$

τότε ο βέλτιστος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή είναι 0.

– Αν:

$$\frac{C}{\mu} \leq R_1,$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν ο διαχειριστής του συστήματος θέσει τιμή εισόδου f τέτοια ώστε:

$$f < R_2 - \frac{C}{\mu} < R_1 - \frac{C}{\mu}$$

τότε ο μέσος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\lambda_e &= p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right) + (1-p)\left(\mu - \frac{C}{R_2 - f}\right) \\ &= \mu - p\frac{C}{R_1 - f} - (1-p)\frac{C}{R_2 - f}.\end{aligned}$$

Ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_{in}^1(f) = \lambda_e f = \mu f - Cf\left(p\frac{1}{R_1 - f} + (1-p)\frac{1}{R_2 - f}\right).$$

Παραγωγίζοντας την $K_{in}^1(f)$ ως προς f και θέτοντας την ίση με 0, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{df}K_{in}^1(f) &= \frac{d}{df}\left(\mu f - Cf\left(p\frac{1}{R_1 - f} + (1-p)\frac{1}{R_2 - f}\right)\right) \\ &= \mu - C\left(p\frac{1}{R_1 - f} + (1-p)\frac{1}{R_2 - f}\right) \\ &\quad - Cf\left(p\frac{1}{(R_1 - f)^2} + (1-p)\frac{1}{(R_2 - f)^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με $(R_1 - f)^2(R_2 - f)^2$ και διαιρώντας με C, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{C}(R_1 - f)^2(R_2 - f)^2 - \big(p(R_1 - f)(R_2 - f)^2 + (1-p)(R_1 - f)^2(R_2 - f)\big) \\ &- f\left(p(R_2 - f)^2 + (1-p)(R_1 - f)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu}{C}(R_1 - f)^2(R_2 - f)^2 - pR_1(R_2 - f)^2 - (1-p)R_2(R_1 - f)^2 = 0.\end{aligned}$$

Η τελευταία μας δίνει το εξής πολυώνυμο ως προς f:

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{C}f^4 - 2\frac{\mu}{C}(R_1 + R_2)f^3 + \left(\frac{\mu}{C}(R_1^2 + R_2^2 + 4R_1R_2) - \overline{R}\right)f^2 \\ &+ 2R_1R_2\left(1 - \frac{\mu}{C}(R_1 + R_2)\right)f + R_1R_2\left(\frac{\mu}{C}R_1R_2 - pR_2 - (1-p)R_1\right) = 0,\end{aligned}$$

όπου $\overline{R} = pR_1 + (1-p)R_2$.

- Αν ο διαχειριστής του συστήματος θέσει τιμή εισόδου f τέτοια ώστε:

$$R_2 - \frac{C}{\mu} < f < R_1 - \frac{C}{\mu},$$

τότε ο μέσος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

$$\lambda_e = p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right).$$

Ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$K_{in}^1(f) = \lambda_e f = p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right)f.$$

Παραγωγίζουμε την $K_{in}^1(f)$ ως προς f:

$$\begin{aligned}\frac{d}{df}K_{in}^1(f) &= \frac{d}{df}\left(p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right)f\right)\\ &= p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right) - \frac{pCf}{(R_1 - f)^2}\end{aligned}$$

και τη θέτουμε την ίση με 0:

$$\begin{aligned}&p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right) - \frac{pCf}{(R_1 - f)^2} = 0\\ &\Leftrightarrow \mu f^2 - 2R_1\mu f + \mu R_1^2 - CR_1 = 0.\end{aligned}$$

Από την τελευταία παίρνουμε:

$$f_m = R_1 - \sqrt{\frac{R_1 C}{\mu}} \quad \text{ή} \quad f_m = R_1 + \sqrt{\frac{R_1 C}{\mu}}.$$

Επειδή θέλουμε $f < R$, δεχόμαστε μόνο τη ρίζα με το $-$.

Η δεύτερη παράγωγος της $K_{in}^1(f)$ ως προς f είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{df^2}K_{in}^1(f) &= \frac{d}{df}\left(p\left(\mu - \frac{C}{R_1 - f}\right) - \frac{pCf}{(R_1 - f)^2}\right)\\ &= -\frac{pC}{(R_1 - f)^2}) - pC\frac{R_1 + f}{(R_1 - f)^3} < 0,\ \text{για καθε } f > 0.\end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{d}{df}K_{in}^1(f_m) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d^2}{df^2}K_{in}^1(f_m) < 0.$$

Άρα, ο αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή μεγιστοποιείται για:

$$f_m = R_1 - \sqrt{\frac{R_1 C}{\mu}}$$

και ο αντίστοιχος ρυθμός εισόδου στο σύστημα είναι:

$$\lambda_e = p\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R_1}}\right).$$

Άρα, ο βέλτιστος αναμενόμενος ρυθμός κέρδους του διαχειριστή του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}K_{in}^1 &= \lambda_e f_m\\ &= p\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R_1}}\right)\left(R_1 - \sqrt{\frac{R_1 C}{\mu}}\right)\\ &= p(\sqrt{R_1\mu} - \sqrt{C})^2.\end{aligned}$$

Σχόλιο: Όταν η διαφορά μεταξύ των δύο πιθανών τιμών του R είναι μεγάλη, η βέλτιστη τιμή εισόδου είναι τόσο μεγάλη ώστε κανένας πελάτης δεν θα μπαίνει στο σύστημα αν η τιμή του R είναι η μικρότερη.

3.4 Σύγκριση των 3 ρυθμών κέρδους του διαχειριστή του συστήματος

Κατ' αρχάς παρατηρείστε ότι $K_{in}^2 \geq K_{in}^1$, αφού η επιπλέον πληροφόρηση του διαχειριστή αυξάνει τον ρυθμό κέρδους του. Επίσης, $K_{in}^2 \geq K_{un}$ διότι αφού ο ρυθμός εισόδου των πελατών στο σύστημα (όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν ως στρατηγική το σ.σ.ι.) κάτω από την πολιτική μεγιστοποίησης του κέρδους του διαχειριστή (profit maximizing policy), είναι κοινωνικά βέλτιστος, οι επιπλέον πληροφορίες στους πελάτες αυξάνουν την κοινωνική ωφέλεια.

Δυστυχώς, για τη σχέση των K_{in}^1 και K_{un} δεν έχουμε μια γενική σχέση. Πιο συγκεκριμένα, όπως θα δούμε παρακάτω, όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το μ ή το C, τότε $K_{in}^1 \geq K_{un}$, ενώ όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το R τότε η τελευταία ανισότητα δεν ισχύει γενικά (για την ακρίβεια, όταν το C είναι αρκετά μικρό, τότε $K_{in}^1 \leq K_{un}$).

Άγνωστος ρυθμός εξυπηρέτησης

Ο Hassin απέδειξε ότι όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το μ, τότε συμφέρει τον διαχειριστή του συστήματος να πληροφορήσει τους πελάτες την τιμή της τυχαίας μεταβλητής όχι μόνο όταν επιλέγει ο ίδιος (κατά βέλτιστο για αυτόν τρόπο) την τιμή εισόδου στο σύστημα, αλλά ακόμα και όταν η τιμή εισόδου είναι φιξαρισμένη από κάποιον εκτός συστήματος και δεν είναι η βέλτιστη για αυτόν (δηλαδή για τον διαχειριστή του συστήματος)[5]. Συγκεκριμένα, απέδειξε[6] το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 1. *Έστω $\lambda_e^{un}(f)$ και $\lambda_e^{in}(f)$ οι ρυθμοί εισόδου στο σύστημα (όταν οι πελάτες χρησιμοποιούν ως στρατηγική το σ.σ.ι.) στις περιπτώσεις των απληροφόρητων και των πληροφορημένων πελατών αντίστοιχα και έστω ότι τα p, μ_1 και μ_2 είναι σταθερά. Τότε για κάθε τιμή εισόδου f με:*

$$0 < f < R - C\left(\frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2}\right),$$

ισχύει $\lambda_e^{un}(f) \leq \lambda_e^{in}(f)$.

Η **σχέση μεταξύ των τριών συναρτήσεων ρυθμού κέρδους του διαχειριστή του συστήματος** εξαρτάται από την τιμή του r. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τα ακόλουθα:

– Αν:

$$r \in \left(0, \frac{1}{\mu_1}\right),$$

τότε $K_{un} = K_{in}^1 = K_{in}^2 = 0$.

– Αν:

$$r \in \left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2}\right),$$

τότε $0 = K_{un} < K_{in}^1 = K_{in}^2$.

[5] Σε μια τέτοια περίπτωση, τα συμφέροντα του διαχειριστή του συστήματος και της κοινωνίας δεν συμπίπτουν και οι πελάτες έχουν θετική ωφέλεια.

[6] Βλ. Rafael Hassin, *Information and Uncertainty in a Queuing System.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, Volume 21, 2007, σελ. 361 - 380, σελ. 368.

– Αν:

$$r \in \left(\frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_2}\right),$$

τότε $0 < K_{un} < K_{in}^1 = K_{in}^2$.

– Αν:

$$r \in \left(\frac{1}{\mu_2}, \infty\right),$$

τότε $0 < K_{un} < K_{in}^1 < K_{in}^2$ και $K_{in}^2 - K_{in}^1 = kC\sqrt{r}$, όπου $k = 2(\sqrt{\mu} - p\sqrt{\mu_1} - (1-p)\sqrt{\mu_2})$.

Σχόλιο: Όταν $p = 1$, έχουμε ότι $K_{un} = K_{in}^1 = K_{in}^2$, αφού τόσο οι πελάτες όσο και ο διαχειριστής του συστήματος ουσιαστικά γνωρίζουν την τιμή του μ. Όμως, $\lim_{p \to 1} K_{un}(p) < K_{un}(1)$, ενώ $\lim_{p \to 1} K_{in}^1(p) = K_{in}^1(1)$ και $\lim_{p \to 1} K_{in}^2(p) = K_{in}^2(1)$. Αυτό συμβαίνει διότι όταν $p = 1$, μπορούμε να έχουμε $\mu_2 < \lambda_e < \mu_1$ (αφού η τιμή μ_2 έχει πιθανότητα 0), ενώ αν $p < 1$, θα πρέπει να έχουμε $\lambda_e < \mu_2$ για να εξασφαλίσουμε ότι ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής στην ουρά θα είναι πεπερασμένος.

Άγνωστος ρυθμός κόστους παραμονής

Όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το C και για τιμές εισόδου που επάγουν θετική ζήτηση στην περίπτωση της μη πληροφόρησης, το ίδιο επίπεδο κοινωνικής ωφέλειας επιτυγχάνεται ασχέτως με το αν οι πελάτες πληροφορούνται ή όχι, αλλά μπορεί να συμφέρει να πληροφορηθούν οι πελάτες όταν μία από τις πιθανές τιμές του C είναι τόσο μεγάλη ώστε αν οι πελάτες είναι απληροφόρητοι, κανένας πελάτης να μην μπαίνει στο σύστημα.

Η **σχέση μεταξύ των τριών συναρτήσεων ρυθμού κέρδους του διαχειριστή του συστήματος** εξαρτάται από την τιμή του $R\mu$. Για την ακρίβεια, για $0 \le C_1 \le \overline{C} \le C_2 \le \gamma < \infty$, έχουμε:

– Αν $R\mu \in (0, C_1)$ τότε $K_{un} = K_{in}^1 = K_{in}^2 = 0$.

– Αν $R\mu \in (C_1, \overline{C})$ τότε $0 = K_{un} < K_{in}^1 = K_{in}^2$.

– Αν $R\mu \in (\overline{C}, C_2)$ τότε $0 < K_{un} < K_{in}^1 = K_{in}^2$.

– Αν $R\mu \in (C_2, \gamma)$ τότε $0 < K_{un} < K_{in}^1 < K_{in}^2$.

– Αν $R\mu \in (\gamma, \infty)$ τότε $0 < K_{un} = K_{in}^1 < K_{in}^2$. Η διαφορά $K_{in}^2 - K_{in}^1 = \kappa\sqrt{R\mu}$, όπου $\kappa = 2(\sqrt{\overline{C}} - p\sqrt{C_1} - (1-p)\sqrt{C_2})$.

Λήμμα 2. *Ισχύει $K_{in}^2 \ge K_{in}^1 \ge K_{un}$. Άρα, συμφέρει τον διαχειριστή του συστήματος να αποκαλύψει στους πελάτες την τιμή του C.*

Άγνωστο κέρδος εξυπηρέτησης

Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή είναι το R, όταν το C είναι κοντά στο 0, τότε $K_{un} = K_{in}^2 = \mu\overline{R} \ge \mu(max(R_2, pR_1)) = K_{in}^1$ (βλ. σχέση (3.4), σχέση (3.7) και §3.3.3). Άρα, για μικρά C, στην περίπτωση που ο διαχειριστής δεν μπορεί αλλάξει την τιμή εισόδου μετά την παρατήρηση της τιμής του R (single price), συμφέρει τον διαχειριστή να κρύψει από τους πελάτες την τιμή του R. Αντίθετα, για μεγάλα C, τον συμφέρει να την αποκαλύψει.

Άρα, λοιπόν, στο ερώτημα "Πότε συμφέρει τον διαχειριστή του συστήματος να αποκαλύψει την τιμή της τυχαίας μεταβλητής στους πελάτες και πότε όχι;", η απάντηση είναι:
Όταν βρισκόμαστε **στην περίπτωση των δύο τιμών εισόδου**, **συμφέρει πάντα** (δηλαδή όποια και αν είναι η τυχαία μεταβλητή) τον διαχειριστή του συστήματος να αποκαλύψει στους πελάτες την τιμή της τυχαίας μεταβλητής, ενώ όταν βρισκόμαστε **στην περίπτωση της μίας τιμής εισόδου** τότε **συμφέρει** τον διαχειριστή του συστήματος να αποκαλύψει στους πελάτες την τιμή της τυχαίας μεταβλητής **όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το μ ή το C και όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το R και το C είναι μεγάλο**, ενώ **δεν τον συμφέρει** να αποκαλύψει στους πελάτες την τιμή της τυχαίας μεταβλητής **όταν η τυχαία μεταβλητή είναι το R και το C είναι κοντά στο 0**.

Βιβλιογραφία

[1] Rafael Hassin and Moshe Haviv, *To Queue or Not To Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

[2] Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση.

[3] Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης, *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντελα Σύγκρουσης και Συνεργασίας.*. Εκδόσεις Σοφία, Αθήνα, 2009.

[4] Rafael Hassin, *Information and Uncertainty in a Queuing System.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, Volume 21, 2007, σελ. 361 - 380.