

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΤΖΩΡΤΖΑΚΗΣ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ DESSINS
D'ENFANTS ΤΟΥ GROTHENDIECK

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 27 Φεβρουαρίου 2014

Εισηγητής: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπή

Ολυμπία Ταλέλλη

Μιχάλης Μαλιάκας

Στην οικογένεια μου

"This discovery made a very strong impression on me, and it represents a shift in particular of my centre of interest in mathematics. I do not believe that a mathematical fact has ever struck me quite so strongly as this one, nor had a comparable psychological impact. This is surely because of the very familiar, non-technical nature of the objects considered, of which any child's drawing (dessin d'enfant) scrawled on a bit of paper gives a perfectly explicit example."

-Alexander
Grothendieck-

Περιεχόμενα

Εισαγωγή ix

1 Βασικές Έννοιες 1

- 1.1 Βασικοί Ορισμοί 1
- 1.2 Τοπολογία Επιφανειών 5
- 1.3 Μιγαδικές Καμπύλες 11

2 Η Απόλυτη Ομάδα Galois 15

- 2.1 Εισαγωγικά 15
- 2.2 Προπεπερασμένες ομάδες 17

3 Το Θεώρημα του Belyi 21

- 3.1 Σώματα ορισμού 21
- 3.2 Η κατεύθυνση $(a) \Rightarrow (b)$ 22
- 3.3 Αλγεβρικός χαρακτηρισμός ολομόρφων συναρτήσεων 25
- 3.4 Δράση Galois 27
- 3.5 Σημεία και Διακριτές Εκτιμήσεις 28
- 3.6 Αναλλοίωτες της δράσης της $\text{Gal}(\mathbb{C})$ 33
- 3.7 Κριτήριο ορισιμότητας πάνω απ' το $\overline{\mathbb{Q}}$ 35
- 3.8 Η κατεύθυνση $(b) \Rightarrow (a)$ 38
- 3.9 Που κολλάει η Εικασία abc? 39

4 Τα Παιδιά Ζωγραφίζουν 43

- 4.1 Dessins και μεταθέσεις 43
- 4.2 Αντιστοιχία μεταξύ Dessins και ζευγών Belyi 46
- 4.3 Δράση Galois 51
- 4.4 Πιστότητα της δράσης Galois στο γένος 0 54
- 4.5 Πιστότητα της δράσης για $g \geq 1$ 56

Βιβλιογραφία 59

Εισαγωγή

Αυτό το κείμενο αποτελεί μια προσπάθεια εισαγωγής στον παιχνιδιάρικο κόσμο των Dessins d'Enfants. Η θεωρία των dessins ανήκει στον ευρύτερο κλάδο των Γεωμετρικών Δράσεων Galois, ο οποίος (χονδρικά μιλώντας) βρίσκεται κάπου στην τομή της Θεωρίας Αριθμών και της Αλγεβρικής Γεωμετρίας.

Το παραμύθι αυτό ξεκινάει από την διαβόητη απόλυτη ομάδα Galois $G_{\mathbb{Q}}$. Η τερατώδης αυτή ομάδα αποτελείται από τις συμμετρίες των αλγεβρικών αριθμών και κωδικοποιεί όλη την "Galois πληροφορία" του σώματος των ρητών. Πολλά ενδιαφέροντα ερωτήματα αριθμητικής φύσεως σχετίζονται άμεσα ή κωδικοποιούνται μέσω της ομάδας αυτής σε βαθμό που κάποιοι (υπερβολικοί) την αποκαλούν το πιο ενδιαφέρον αντικείμενο στα Μαθηματικά! Κάποιοι άλλοι (πιο προσγειωμένοι) την αποκαλούν απλώς το πιο ενδιαφέρον αντικείμενο στη Θεωρία Αριθμών. Η μελέτη και η βαθύτερη κατανόηση της απόλυτης ομάδας Galois αποτελεί ενός είδους Ιερό Δισκοπότηρο για πολλούς μαθηματικούς!

Η μελέτη της απόλυτης ομάδας Galois αποδείχτηκε ιδιαίτερα γόνιμη, και διάφοροι κλάδοι αναπτύχθηκαν στην προσπάθεια κατανόησης της (Συνομολογία Galois, Αναπαραστάσεις Galois κτλ). Μια από τις προσεγγίσεις αυτές ήταν η εύρεση δράσεων της $G_{\mathbb{Q}}$ σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα, η προσπάθεια δηλαδή να την δούμε ως συμμετρίες άλλων αντικειμένων. Έτσι αναπτύχθηκε ο κλάδος των Γεωμετρικών Δράσεων Galois, δηλαδή δράσεων της $G_{\mathbb{Q}}$ πάνω σε γεωμετρικά αντικείμενα. Τα dessins είναι ένα από αυτά τα γεωμετρικά αντικείμενα.¹

Μια προφανής δράση της απόλυτης ομάδας Galois είναι αυτή στα πολυώνυμα με συντελεστές στο $\overline{\mathbb{Q}}$. Συνεπώς επάγεται μια δράση στις αλγεβρικές καμπύλες που ορίζονται πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$. Οι καμπύλες όμως αυτές παραμένουν ένα δύσβατο και δυσνόητο αντικείμενο. Για την ευρύτερη κλάση των καμπυλών πάνω από το \mathbb{C} , ήταν γνωστό ότι αντιστοιχούν στις συμπαγείς και συνεκτικές επιφάνειες Riemann, είχαν δηλαδή μια γεωμετρική ερμηνεία. Άραγε οι καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$ μπορούσαν να ξεδιαλεχτούν με κάποιο τρόπο ανάμεσα στις επιφάνειες Riemann;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δόθηκε από τον Genady Belyi το 1979 [2]. Ο Belyi έδωσε έναν καθαρά αναλυτικό χαρακτηρισμό των συμπαγών επιφανειών που αντιστοιχούν σε καμπύλες πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$! (θεώρημα 3.1)

Το τελικό σύνθημα όμως έδωσε ένας συνήθης ύποπτος του δεύτερου μισού του 20ου αιώνα, ο θρυλικός Alexander Grothendieck. Ο Grothendieck, στο περίφημο *Esquisse d'un Programme* (1984) [6], παρατήρησε ότι ο χαρακτηρισμός του Belyi μπορούσε να περιγραφεί με συνδυαστικό τρόπο. Όρισε λοιπόν την αντιστοιχία Grothendieck, μια περιγραφή του χαρακτηρισμού του Belyi με διχρωματισμένα γραφήματα πάνω σε συμπαγείς επιφάνειες. Το γεγονός ότι αθώα σχήματα, που μοιάζουν με ζωγραφιές παιδιών (dessins d'enfants στα Γαλλικά), μπορούσαν

¹Για περισσότερες γεωμετρικές δράσεις βλέπε [22], [23].

να αποτελέσουν το μέσο για να "δει" κάποιος με απτό τρόπο τη δράση της G_Q στις καμπύλες έκανε τόσο μεγάλη εντύπωση στον Grothendieck ώστε να γράψει το απόσπασμα που βρίσκεται πριν τα περιεχόμενα, στο *Esquisse*.

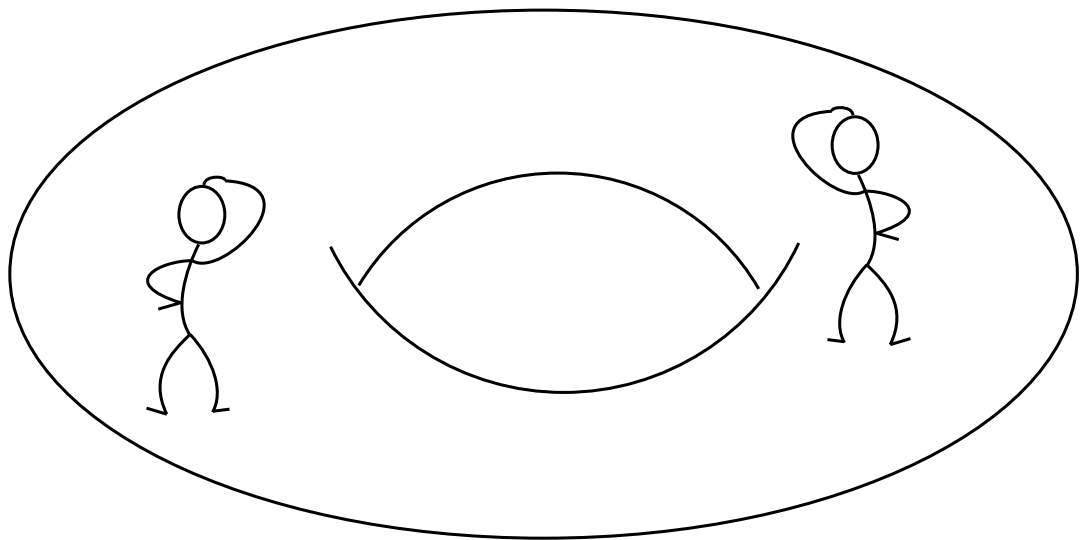
Εξ' αρχής η θεωρία των dessins είχε σκοπό την δράση Galois και την μελέτη των επιφανειών Riemann αλλά με τον καιρό έχει αποκτήσει διασυνδέσεις με διάφορους κλάδους και αντικείμενα στα Μαθηματικά όπως η διάσημη Εικασίας abc (βλέπε κεφάλαιο 3) , αλλά και κάποιες απροσδόκητες γέφυρες με κλάδους της Φυσικής, όπως η Κβαντική Θεωρία Πεδίου [13]. Σήμερα αποτελεί μια ενεργή περιοχή σύγχρονης έρευνας με τα δικά της προβλήματα και κατευθύνσεις.

Ως προς τη σειρά παρουσίασης, στο κεφάλαιο 1 ορίζουμε τις βασικές έννοιες τοπολογίας και επιφανειών Riemann που θα χρειαστούμε στην συνέχεια και αναφέρουμε την αντιστοιχία μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann και μιγαδικών καμπυλών . Στο κεφάλαιο 2 , ορίζουμε τις απόλυτες ομάδες Galois και αναδεικνύουμε την τοπολογική υφή τους. Στο κεφάλαιο 3 διατυπώνουμε το θεώρημα του Belyi και δίνουμε μια στοιχειώδη απόδειξη του. Το κεφάλαιο 4 είναι το σημείο που τα dessins κάνουν την εμφάνιση τους και παρουσιάζονται η αντιστοιχία Grothendieck με τα ζεύγη Belyi καθώς και ένας χαρακτηρισμός τους μέσω μεταθέσεων. Τέλος, ορίζεται η δράση Galois στα dessins και αποδεικνύονται κάποια αποτελέσματα για την πιστότητα της δράση αυτής σε συγκεκριμένες κλάσεις των dessin.

Στο ευχάριστο κομμάτι των ευχαριστιών, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της επιτροπής, Ολυμπία Ταλέλλη και Μιχάλη Μαλιάκα, οι οποίοι όχι μόνο συνέβαλλαν σημαντικά στην μαθηματική μου εκπαίδευση αλλά και μου προσέφεραν πρόθυμα και γενναϊόδωρα την υποστήριξη τους οποτεδήποτε τη χρειάστηκα. Επίσης θέλω μέσα από την καρδιά μου να ευχαριστήσω το δάσκαλο μου και φίλο, Αριστείδη Κοντογεώργη, ο οποίος μου προσέφερε απλόχερα το χρόνο του και την ενέργεια του, κάποιες φορές κάτω από αντίξοες συνθήκες. Δεν μπορώ να μην επαινέσω την ικανότητα του να μας ανοίγει παράθυρα σε συναρπαστικούς μαθηματικούς κόσμους. Το παρόν κείμενο δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ματιά μέσα από ένα τέτοιο παράθυρο. Τέλος, να ευχαριστήσω το αγαπητό μας Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ) μιας και η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έγινε στο πλαίσιο της υλοποίησης του μεταπτυχιακού προγράμματος το οποίο συγχρηματοδοτήθηκε μέσω της Πράξης « Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ με διαδικασία εξατομικευμένης αξιολόγησης ακαδ. έτους 2012-2013 » από πόρους του Ε.Π. « Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση » του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) και του ΕΣΠΑ (2007-2013).

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες



Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε έννοιες και θα διατυπώσουμε αποτελέσματα που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Θα μιλήσουμε για την θεμελιώδη έννοια της επιφάνειας Riemann και θα επεκτείνουμε τις βασικές έννοιες της Μιγαδικής Ανάλυσης σε αυτές. Μετά θα αναφερθούμε στην τοπολογία των επιφανειών για να καταλήξουμε στην συγκεκριμένη τοπολογική φύση των ολομόρφων απεικονίσεων. Τέλος θα αποκαλύψουμε τον λόγο που τα κάνουμε όλα αυτά, ότι δηλαδή οι συμπαγείς επιφάνειες Riemann έχουν μια σύμφυτη αλγεβρική υφή και θα διατυπώσουμε μια αντιστοιχία τους με αλγεβρικά αντικείμενα.

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 1.1 Μια (τοπολογική) επιφάνεια (topological surface) είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος S εφοδιασμένος με ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i \in I}$ και συνεχείς απεικονίσεις (που καλούνται **χάρτες** (charts))

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$$

έτσι ώστε

i) Η ϕ να είναι ομοιομορφισμός $U_i \rightarrow \phi(U_i), i \in I$

ii) Οι απεικονίσεις

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j), i, j \in I$$

οι οποίες λέγονται **απεικονίσεις μεταφοράς** (transition maps) να είναι ομοιομορφισμοί. Μια τέτοια συλλογή απεικονίσεων μαζί με το ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}$ θα λέγεται **άτλαντας**.

(Είναι δηλαδή αυτό που αποκαλούμε 2-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα) Μια επιφάνεια θα λέγεται **επιφάνεια Riemann** αν επιπλέον οι απεικονίσεις μεταφοράς είναι αμφιολόμορφες (μιγαδική πολλαπλότητα διάστασης 1). Όλες οι επιφάνειες θα θεωρούνται συνεκτικές.

Παραδείγματα 1.2 (i) Το μιγαδικό επίπεδο με μοναδικό χάρτη την ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

είναι η πιο απλή επιφάνεια Riemann.

(ii) Ομοίως οποιοδήποτε ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{C} είναι επιφάνεια Riemann με χάρτη την ταυτοτική απεικόνιση.

Πχ τα σύνολα

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$$

(iii) Θα δώσουμε δομή επιφάνειας Riemann στη σφαίρα \mathbb{S}^2 , αρχικά την ταυτίζουμε ως σύνολο με το $\tilde{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$ μέσω της στερεογραφικής προβολής. Έπειτα θεωρούμε το ανοιχτό κάλυμμα $\{U = \mathbb{C}, V = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\}$ και τους χάρτες

$$\phi_U : U \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z$$

$$\phi_V : V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \begin{cases} 1/z, & z \neq \infty \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

εύκολα βλέπουμε ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς είναι αμφιολόμορφες.

Ένας άλλος τρόπος να βλέπουμε την σφαίρα είναι ως την προβολική μιγαδική ευθεία $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ και από δω και στο εξής αυτός θα είναι ο συμβολισμός της. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim$$

όπου $[z_1, z_2] \sim [w_1, w_2]$ αν υπάρχει $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $(z_1, z_2) = c(w_1, w_2)$ και άρα

$$\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \{[1, z] | z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0, 1]\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Με εντελώς φυσιολογικό τρόπο μπορούν να οριστούν έννοιες Μιγαδικής Ανάλυσης στις επιφάνειες Riemann.

Ορισμός 1.3 Μια απεικόνιση $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ από μια επιφάνεια Riemann S θα λέγεται **ολόμορφη** (αντ. **μερόμορφη**) όταν για κάθε χάρτη ϕ η απεικόνιση $f \circ \phi^{-1}$ είναι ολόμορφη (αντ. μερόμορφη) με την συνήθη έννοια. Μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δυο επιφανειών Riemann S, S'

$$f : S \rightarrow S'$$

θα λέγεται **ολόμορφη** ή **μορφισμός** αν για κάθε δυο χάρτες ϕ_1, ϕ_2 η απεικόνιση $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ είναι ολόμορφη με την συνήθη έννοια.

Αμφιμονοσήμαντοι μορφισμοί θα λέγονται **ισομορφισμοί**, ενώ ισομορφισμοί από μια επιφάνεια στον εαυτό της θα λέγονται **αυτομορφισμοί**. Για μια επιφάνεια Riemann S οι αυτομορφισμοί της αποτελούν ομάδα, την οποία συμβολίζουμε με $\text{Aut}(S)$. Οι μορφισμοί ανάμεσα σε δυο επιφάνειες θα συμβολίζονται με $\text{Mor}(S, S')$, ενώ οι μερόμορφες με $\mathcal{M}(S)$.

Από εδώ και πέρα όταν αναφερόμαστε σε μορφισμούς θα εννοούμε μη σταθερούς εκτός αν δηλώνεται σαφώς κάτι άλλο.

Παρατήρηση 1.4 (i) Είναι γνωστό από την Μιγαδική Ανάλυση ότι κάθε (μη-σταθερή) ολόμορφη απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό είναι ανοιχτή¹ (Open mapping theorem). Εύκολα επαληθεύει κανείς ότι αυτό ισχύει και για τις επιφάνειες Riemann. Δηλαδή αν $f : S \rightarrow S'$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ επιφανειών Riemann τότε είναι ανοιχτός.

(ii) Αν $f : S \rightarrow S'$ ένας μορφισμός με την S να είναι συμπαγής τότε ο f είναι επί. Πράγματι, από το i) το $f(S)$ είναι ανοιχτό και ταυτόχρονα είναι συμπαγές άρα κλειστό, από συνεκτικότητα έχουμε ότι $f(S) = S'$.

Παραδείγματα 1.5 Οι επιφάνειες \mathbb{H}, \mathbb{D} είναι ισόμορφες μέσω του ισομορφισμού

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Γενικότερα υπενθυμίζουμε ότι το Riemann mapping theorem μας πληροφορεί ότι κάθε ανοιχτό και συνεκτικό γνήσιο υποσύνολο του \mathbb{C} (ανοιχτή υποπολλαπλότητα) που είναι απλά συνεκτικό (για τον ορισμό του απλά συνεκτικού βλέπε 1.14), είναι ισόμορφο με τον \mathbb{D} . Από την άλλη κάθε μορφισμός απ' το \mathbb{C} στον \mathbb{D} είναι σταθερός απ' το θεώρημα του Liouville² και άρα ως επιφάνειες Riemann τα \mathbb{C}, \mathbb{D} δεν είναι ισόμορφα (ενώ είναι αμφιδιαφορικά). Επιπλέον η σφαίρα $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ είναι συμπαγής και άρα δεν είναι ισόμορφη με κανένα απ' τα \mathbb{C}, \mathbb{D} . Αυτές οι τρεις επιφάνειες $\mathbb{C}, \mathbb{D} = \mathbb{H}, \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ όπως θα δούμε στην συνέχεια είναι κατά μια έννοια πρωταρχικές (θεώρημα 1.36).

Παρατήρηση 1.6 Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι από Μιγαδική Ανάλυση είναι γνωστό ότι $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = \mathbb{C}(z)$, το σώμα των ρητών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ομάδες αυτομορφισμών για τις τρεις πρωταρχικές επιφάνειες Riemann.

¹Μια απεικόνιση λέγεται **ανοιχτή** αν απεικονίζει ανοιχτά σε ανοιχτά.

²Το θεώρημα Liouville λέει ότι μια φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση είναι σταθερή.

Πρόταση 1.7 Για τις ομάδες αυτομορφισμών των $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{H}, \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έχουμε

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{D}) &= \{z \mapsto e^{it} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{z \mapsto \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{bz + a}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1\} \end{aligned}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, ab, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\} = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) &= \{z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\} = \\ &= \text{PSL}(2, \mathbb{C}), \text{ η ομάδα των μετασχηματισμών Möbius} \end{aligned}$$

Απόδειξη: Για την $S = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έχουμε για μια $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ ότι είναι ρητή συνάρτηση (από παρατήρηση 1.7) και επειδή είναι 1-1 και επί έπεται ότι και ο αριθμητής και ο παρονομαστής της έχουν βαθμό 1. Άρα

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

και επιπλέον πρέπει

$$ad - bc \neq 0$$

διότι αλλιώς η f θα ήταν σταθερή. Επιπλέον, πολλαπλασιασμός με μια σταθερά των a, b, c, d θα όριζε πάλι την ίδια απεικόνιση f και άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία

$$\begin{aligned} \text{PGL}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

που εύκολα βλέπουμε ότι είναι ισομορφισμός ομάδων.

Για την $S = \mathbb{C}$, θεωρούμε πάλι έναν $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Τότε είτε επεκτείνεται σε έναν $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ με $\tilde{f}(\infty) = \infty$, είτε το ∞ είναι ουσιώδης ανωμαλία της f . Αν επεκτείνεται τότε η επέκταση είναι της μορφής $\frac{az+b}{cz+d}$ και επειδή στέλνει το ∞ στο ∞ έχουμε ότι $c = 0$. Αν είναι πάλι το ∞ είναι ουσιώδης ανωμαλία τότε από θεώρημα Casorati-Weierstrass³ η εικόνα μέσω της f μιας περιοχής του ∞ θα είναι πυκνή το οποίο είναι άτοπο.

Για τον $S = \mathbb{D}$, έστω $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ και $a := f(0)$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Möbius $M(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ και παρατηρούμε ότι $M(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Τώρα ορίζουμε την απεικόνιση

$$h := M \circ f$$

και εφαρμόζουμε για τις h, h^{-1} το Λήμμα του Schwarz⁴. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $|h(z)| = |z|$ για $z \in \mathbb{D}$ και ότι $h = e^{i\theta}z$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$. Συνεπώς

$$f(z) = h \circ M^{-1} = \frac{e^{i\theta}z + a}{1 + \bar{a}e^{i\theta}z} = e^{i\theta} \frac{z + e^{-i\theta}a}{1 + \bar{a}e^{i\theta}z}$$

³Το θεώρημα Casorati-Weierstrass είναι θεώρημα της Μιγαδικής Ανάλυσης και μας πληροφορεί ότι μια ολόμορφη απεικόνιση ορισμένη σε ένα $U \setminus \{P\}$ όπου το P δεν είναι ούτε επουσιώδης ανωμαλία ούτε πόλος (είναι ουσιώδης δηλαδή) τότε η εικόνα μέσω της f κάθε περιοχής του P είναι πυκνή.

⁴Το λήμμα του Schwarz λέει ότι για μια ολόμορφη απεικόνιση f ορισμένη στον δίσκο \mathbb{D} με $f(0) = 0$ και $|f(z)| \leq 1$ ισχύει ότι $|f'(0)| \leq 1$ και $|f(z)| \leq |z|$. Αν επιπλέον $|f'(0)| = 1$ ή $|f(z)| = |z|$ για κάποιο $z \neq 0$, τότε υπάρχει $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$ έτσι ώστε $f(z) = wz$.

το οποίο είναι όπως το θέλαμε. Για την δεύτερη περιγραφή αρκεί να γράψουμε

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}$$

και μετά διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τον πραγματικό αριθμό $\sqrt{1 - |a|^2}$.

Τέλος για την $S = \mathbb{H}$, παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ είναι αυτομορφισμοί ως περιορισμοί μετασχηματισμών Möbius που διατηρούν το \mathbb{H} . Αντίστροφα, αν $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ και $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ο ισομορφισμός μεταξύ \mathbb{H} και \mathbb{D} , έχουμε ότι ο $T \circ f \circ T^{-1}$ είναι στοιχείο της $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ και άρα μετασχηματισμός Möbius. Συνεπώς και ο f είναι μετασχηματισμός Möbius, και επειδή διατηρεί την πραγματική ευθεία ανήκει στην $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Ορισμός 1.8 Έστω ένας μορφισμός $f : S \rightarrow S'$, ορίζουμε τον **δείκτη διακλάδωσης** $e_f(P)$ της f σ'ένα σημείο $P \in S$ ως εξής: θεωρούμε έναν χάρτη ϕ γύρω απ'το P , με $\phi(P) = 0$ και έναν χάρτη ψ γύρω απ'το $f(P)$ με $\psi(f(P)) = 0$

$$e_f(P) := \mathrm{ord}_{\psi \circ f \circ \phi^{-1}}(0)$$

είναι δηλαδή η τάξη της ρίζας της $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ στο 0. Διαισθητικά είναι η πολλαπλότητα με την οποία η f παίρνει την τιμή $f(P)$ στο σημείο P . Ένα $P \in S$ με $e_f(P) > 1$ θα λέγεται **σημείο διακλάδωσης** (ramification/branch point) ή **κρίσιμο σημείο** (critical point) της f , ενώ το $f(P)$ λέγεται **κρίσιμη τιμή** (critical value). Οποιαδήποτε τιμή δεν είναι κρίσιμη λέγεται **φυσιολογική τιμή** (regular value). Μια απεικόνιση με τουλάχιστον ένα σημείο διακλάδωσης θα λέμε ότι **διακλαδίζεται** (ramifies).

Παρατήρηση 1.9 Εύκολα βλέπει κανείς ότι οι παραπάνω ορισμοί δεν εξαρτώνται από την επιλογή των χαρτών. Τα σύνολα των σημείων διακλάδωσης και των κρίσιμων τιμών είναι διακριτά (από την ιδιότητα των ολομόρφων συναρτήσεων να έχουν μεμονωμένες ρίζες) και άρα είναι πεπερασμένα στις συμπαγείς επιφάνειες.

1.2 Τοπολογία Επιφανειών

Σ αυτήν την παράγραφο θα αναφερθούμε επιγραμματικά στην τοπολογία των επιφανειών ορίζοντας τις έννοιες της θεμελιώδους ομάδας, των χώρων επικάλυψης και της δράσης μονοδρομίας.

Ορισμός 1.10 Έστω μια επιφάνεια S , ένα μονοπάτι στην S θα είναι μια συνεχής απεικόνιση

$$\gamma : I = [0, 1] \rightarrow S$$

θα ταυτίζουμε συχνά την απεικόνιση γ με την εικόνα της $\gamma(I)$.

Αν $\gamma(0) = \gamma(1) = P$ τότε θα λέμε ότι το γ είναι **βρόγχος** (loop) με βάση το P . Δυο βρόγχοι γ_0 και γ_1 με βάση P θα λέγονται **ομοτοπικοί** (homotopical) αν υπάρχει μια ομοτοπία μεταξύ τους που να διατηρεί τα άκρα σταθερά, δηλαδή μια συνεχής απεικόνιση

$$H : I \times I \rightarrow S$$

με $H(0, t) = \gamma_0(t)$, $H(1, t) = \gamma_1(t)$, $\forall t \in I$ και $H(s, 0) = H(s, 1) = P$, $\forall s \in I$. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να παραμορφώσουμε με συνεχή τροπο το γ_0 μέχρι να ταυτιστεί με το γ_1 .

Η σχέση ομοτοπικότητας είναι σχέση ισοδυναμίας και άρα το σύνολο των βρόγχων σ'ένα σημείο P διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας που τις συμβολίζουμε με $[\gamma]$.

Για δυο βρόγχους γ, γ' με βάση το ίδιο σημείο P μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια σύνθεσης $\gamma\gamma'$ να είναι το μονοπάτι που διατρέχει πρώτα το γ και μετά το γ' . Φορμαλιστικά:

$$\gamma\gamma' : I \rightarrow S, \gamma\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ακόμη για ένα σημείο P συμβολίζουμε τον σταθερό βρόγχο $\gamma(t) = P, t \in [0, 1]$ πάλι με P . Επίσης ορίζουμε για έναν βρόγχο γ τον αντίστροφο του γ^{-1} με $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, διαισθητικά δηλαδή την ίδια διαδρομή ξεκινώντας απ'το τέλος.

Έχουμε τώρα την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 1.11 Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύουν

- i) Η πράξη της σύνθεσης βρόγχων είναι καλά ορισμένη στις κλάσεις ομοτοπίας, δηλαδή αν θέσουμε

$$[\gamma][\gamma'] = [\gamma\gamma']$$

τότε το δεξί μέλος δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους στο αριστερό.

- ii) Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας βρόγχων με βάση ένα συγκεκριμένο P , με πράξη τη σύνθεση που ορίστηκε στο i) αποτελεί ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο την κλάση του σταθερού βρόγχου και αντίστροφο μιας κλάσης $[\gamma]$ την κλάση $[\gamma^{-1}]$.

Αυτή η ομάδα συμβολίζεται $\pi_1(S, P)$ και λέγεται **θεμελιώδης ομάδα** της επιφάνειας S με βάση P . (Ο δείκτης 1 απλώς υπονοεί ότι υπάρχουν και άλλες τέτοιες ομάδες, οι λεγόμενες ανώτερες ομάδες ομοτοπίας που αποτελούνται από βρόγχους μεγαλύτερων διαστάσεων)

- iii) Αν P, Q είναι δυο διακεκριμένα σημεία μιας επιφάνειας S , και έστω β ένα μονοπάτι από το P στο Q , δηλαδή με $\beta(0) = P, \beta(1) = Q$ (πάντα υπάρχουν τέτοια μονοπάτια στις συνεκτικές πολλαπλότητες). Τότε η απεικόνιση

$$\pi_1(S, P) \rightarrow \pi_1(S, Q)$$

$$[\gamma] \mapsto [\beta^{-1}\gamma\beta]$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. Με άλλα λόγια η θεμελιώδης ομάδα είναι ανεξάρτητη του σημείου βάσης και συμβολίζεται επίσης με $\pi_1(S)$.

Πρόταση 1.12 Αν $f : S_1 \rightarrow S_2$ είναι μια συνεχής απεικόνιση και $P \in S_1$ με $f(P) = Q$. Τότε επάγεται ένας μορφισμός μεταξύ των θεμελιωδών ομάδων ως εξής

$$\pi_1(f) : \pi_1(S_1, P) \rightarrow \pi_1(S_2, Q)$$

$$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

και ισχύουν

i) Αν $S_2 \xrightarrow{g} S_3$ με $g(Q) = R$ τότε

$$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$$

δηλαδή ο π_1 είναι συναρτητής.

ii) Αν ο f είναι ομοιομορφισμός τότε ο $\pi_1(f)$ είναι ισομορφισμός. Δηλαδή η θεμελιώδης ομάδα είναι μια αναλλοίωτη που εξαρτάται από την τοπολογία του χώρου.

Ορισμός 1.13 Μια επιφάνεια S λέγεται **απλά συνεκτική** αν έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα, δηλαδή $\pi_1(S) = 1$.

Παραδείγματα 1.14 Παραδείγματα απλά συνεκτικών επιφανειών είναι το επίπεδο \mathbb{C} , η σφαίρα $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ο δίσκος \mathbb{D} και γενικότερα άλλα υποσύνολα του επιπέδου "χωρίς τρύπες".

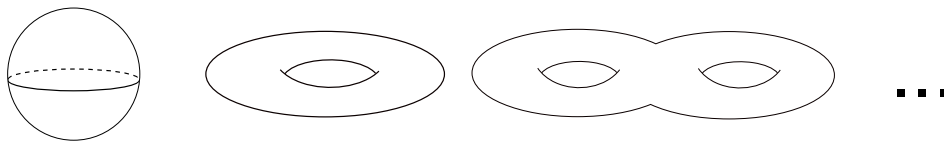
Ορισμός 1.15 Μια επιφάνεια λέγεται **προσανατολίσιμη** αν οι απεικονίσεις μεταφοράς έχουν θετικές ορίζουσες Jacobi. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι μπορεί να οριστεί πάνω στην επιφάνεια μια έννοια δεξιόστροφης περιστροφής γύρω από ένα σημείο (προσανατολισμός). Μια προσανατολίσιμη επιφάνεια, επιδέχεται ακριβώς δυο προσανατολισμούς.

Πρόταση 1.16 Οι επιφάνειες Riemann είναι προσανατολίσιμες.

Απόδειξη: Οι ολόμορφες συναρτήσεις έχουν θετικές Jacobian ορίζουσες λόγω των εξισώσεων Cauchy-Riemann.

Είναι γνωστή η παρακάτω ταξινόμηση των προσανατολισίμων συμπαγών επιφανειών:

Πρόταση 1.17 Κάθε συμπαγής (και συνεκτική) προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με έναν "λουκουμά με g τρύπες" (για $g = 0$ είναι απλά μια σφαίρα). Ο αριθμός g λέγεται **γένος (genus)** της επιφάνειας (Σχήμα 1.1)



Σχήμα 1.1: Οι συμπαγείς προσανατολίσιμες επιφάνειες

Παρατήρηση 1.18 Άρα τοπολογικά κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann είναι ένας λουκουμάς με g τρύπες, αλλά κάθε λουκουμάς με g τρύπες δεν επιδέχεται μοναδική δομή επιφάνειας Riemann όπως θα δούμε, εκτός από την ίδια την σφαίρα ($g = 0$). Ήδη για $g = 1$ έχουμε μια μεγάλη οικογένεια επιφανειών Riemann, όλες ομοιομορφικές με τον torus, τις λεγόμενες ελλειπτικές καμπύλες.

Στην συνέχεια ορίζουμε την θεμελιώδη έννοια του τοπολογικού καλύμματος, που θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα την δομή των ολομόρφων απεικονίσεων.

Ορισμός 1.19 Έστω μια συνεχής απεικόνιση $f : S \rightarrow S'$ μεταξύ δυο επιφανειών λέγεται **προβολή κάλυψης** (covering projection) αν για κάθε $P \in S'$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά U του P έτσι ώστε το $p^{-1}(U)$ να είναι ξένη ένωση ανοικτών $U_i, i \in I$ με την $p|_{U_i}$ να είναι ομοιομορφισμός. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η S' είναι **χώρος κάλυψης** (covering space) της S .

Τοπολογικά μονοπάτια σ'ένα χώρο μπορούν να "ανυψωθούν" στα καλύμματα του.

Ορισμός 1.20 Έστω $f : S \rightarrow S'$ μια προβολή κάλυψης, ένα μονοπάτι $\gamma : I \rightarrow S$ λέγεται **ανύψωση** (lifting) ενός μονοπατιού γ' στην S' αν ισχύει $f \circ \gamma = \gamma'$ δηλαδή το

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & S \\ & \searrow \gamma' & \downarrow f \\ & & S' \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Πρόταση 1.21 Έστω $f : S \rightarrow S'$ μια προβολή κάλυψης, ένα μονοπάτι $\gamma : I \rightarrow S'$ με $\gamma(0) = P$ και ένα $Q \in f^{-1}(P)$. Τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση γ' του γ , με $\gamma'(0) = Q$.

Πρόταση 1.22 Έστω $f : S \rightarrow S'$ μια προβολή κάλυψης, με $f(Q) = P$. Τότε ο επαγόμενος μορφισμός

$$\pi_1(f) : \pi_1(S, Q) \rightarrow \pi_1(S', P)$$

είναι μονομορφισμός και η εικόνα $\text{Im}(\pi_1(f))$ αποτελείται από τους βρόγχους με βάση το P που ανυψώνονται σε βρόγχους με βάση το Q . Αυτή η πρόταση μας λέει ότι ένας χώρος κάλυψης είναι ένα "ξετύλιγμα" της επιφάνειας S' όπου κάποιοι βρόγχοι έχουν ξετυλιχτεί σε μονοπάτια μεταξύ διαφορετικών προ-εικόνων του P .

Πρόταση 1.23 Έστω $f : S \rightarrow S'$ μια προβολή κάλυψης, τότε ο αριθμός $|f^{-1}(P)|$ είναι σταθερός και ίσος με τον δείκτη $[\pi_1(S') : \pi_1(S)]$, και λέγεται **βαθμός** (degree) του καλύμματος και συμβολίζεται $\deg f$. Δηλαδή η S είναι ένα "ξετύλιγμα" της S' σε $\deg f$ αντίτυπα της.

Θεώρημα 1.24 Για κάθε επιφάνεια S υπάρχει ένας χώρος κάλυψης \tilde{S} με $\pi_1(\tilde{S}) = 1$. Ο \tilde{S} λέγεται **καθολικός χώρος κάλυψης** (universal covering space) της S . Δηλαδή κάθε επιφάνεια μπορεί να "ξετυλιχτεί" πλήρως.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε μια όμορφη αντιστοιχία μεταξύ υποομάδων της θεμελιώδους ομάδας και των καλυμμάτων, αρχίζουμε με την πρόταση:

Πρόταση 1.25 Για κάθε υποομάδα $H \leq \pi_1(S)$, υπάρχει χώρος κάλυψης $f_H : S_H \rightarrow S$ τέτοιος ώστε $\text{Im}(\pi_1(f_H)) = H$.

Χρειαζόμαστε έναν τρόπο να συγκρίνουμε καλύμματα :

Ορισμός 1.26 Έστω δυο χώροι κάλυψης $f_1 : S_1 \rightarrow S$, $f_2 : S_2 \rightarrow S$ μια συνεχής απεικόνιση $f : S_1 \rightarrow S_2$ θα λέγεται **μορφισμός χώρων κάλυψης** αν $f_2 \circ f = f_1$ δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \\ & \searrow f_1 & \downarrow f_2 \\ & & S \end{array}$$

Ένας μορφισμός θα λέγεται **ισομορφισμός χώρων κάλυψης** αν επιπλέον είναι ομοιομορφισμός και **αυτομορφισμός** χώρων κάλυψης αν επιπλέον $S_1 = S_2$.

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το ακόλουθο στοιχειώδες θεώρημα Αλγεβρικής Τοπολογίας:

Θεώρημα 1.27 Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ χώρων κάλυψης και κλάσεων συζυγίας υποομάδων της θεμελιώδους ομάδας. (οι κλάσεις συζυγίας αντανακλούν το γεγονός ότι αλλάζοντας σημείο βάσης καταλήγουμε σε συζυγή υποομάδα.)

Επιπλέον, κατά αντιστοιχία με την θεωρία Galois, η πληροφορία που χάνεται από την μεταφορά στην θεμελιώδη ομάδα ενός καλύμματος, διατηρείται μέσω των μετασχηματισμών κάλυψης.

Ορισμός 1.28 Έστω $f : S \rightarrow S'$ μια απεικόνιση κάλυψης, οι αυτομορφισμοί χώρων κάλυψης $g : S \rightarrow S$ λέγονται και **μετασχηματισμοί κάλυψης** (deck transformations), συμβολίζουμε την ομάδα των αυτομορφισμών αυτών με $G(S)$.

Ορισμός 1.29 Ένας χώρος κάλυψης $f : S \rightarrow S'$ λέγεται **κανονικός** αν για κάθε $Q \in S'$ και για κάθε $P_1, P_2 \in f^{-1}(Q)$ υπάρχει $g \in G(S)$ τέτοιο ώστε $gP_1 = P_2$.

Οι κανονικοί χώροι κάλυψης είναι για τα καλύμματα ότι είναι οι επεκτάσεις Galois για τις πεπερασμένες επεκτάσεις.

Πρόταση 1.30 Έστω ένας χώρος κάλυψης $f : S \rightarrow S'$ με $f(P) = Q$, και $H = \text{Im}\pi_1(f) \leq \pi_1(S', Q)$. Τότε:

- (i) S είναι κανονικός αν και μόνο αν $H \triangleleft \pi_1(S', Q)$
- (ii) $G(S) = N(H)/H$ όπου $N(H)$ είναι η κανονικοποιούσα της H στην $\pi_1(S', Q)$.
Ειδικότερα αν ο S είναι κανονικός τότε $G(S) = \pi_1(S', Q)/H$.

Η σχέση μεταξύ των τοπολογικών καλυμμάτων και των ολομόρφων απεικονίσεων γίνεται φανερή από την παρακάτω πρόταση :

Πρόταση 1.31 Έστω μια ολόμορφη (μη-σταθερή) απεικόνιση $f : S \rightarrow S'$ μεταξύ δυο συμπαγών επιφανειών Riemann και $\text{crit } f$ είναι το σύνολο των κρίσιμων τιμών της. Τότε ισχύουν

- (i) ο περιορισμός

$$f| : S \setminus f^{-1}(\text{crit } f) \rightarrow S' \setminus \text{crit } f$$

είναι τοπολογικό κάλυμμα. Οι απεικονίσεις που είναι τοπολογικά καλύμματα μετά την αφαίρεση πεπερασμένων σημείων θα λέγονται **διακλαδιζόμενα καλύμματα** (ramified coverings).

- (ii) Για κάθε σημείο $P \in S$, $f(P) = Q$ υπάρχουν ανοικτές γειτονιές U, V των P, Q αντίστοιχα, και χάρτες ϕ, ψ , έτσι ώστε

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^{e_f(P)}$$

- (iii) Ο αριθμός

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_f(P)$$

δεν εξαρτάται από το $Q \in S'$ και λέγεται **βαθμός (degree)** της f και είναι ίσος με τον βαθμό του καλύμματος στο (i).

Ορισμός 1.32 Έστω ένα διακλαδιζόμενο κάλυμμα $f : S \rightarrow S'$ μεταξύ δυο συμπαγών επιφανειών και $y \in S'$ μια κανονική τιμή και μια αρίθμηση των προ-εικόνων του $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, τότε ένας βρόγχος $a \in \pi_1(S' \setminus \text{crit } f)$ ανυψώνεται με μοναδικό τρόπο σε ένα μονοπάτι με αρχή κάποιο x_i και τέλος κάποιο $x_{\sigma(i)}$, έχουμε δηλαδή ένα στοιχείο $\sigma = \sigma_a \in S_d$ την συμμετρική ομάδα σε d σύμβολα. Θεωρούμε τον μορφισμό

$$M_f : \pi_1(S' \setminus (\text{crit } f)) \rightarrow S_d \\ a \longmapsto \sigma_a^{-1}$$

ο οποίος ονομάζεται **μορφισμός μονοδρομίας (monodromy morphism)** που επάγει η f . Έχουμε δηλαδή μια δράση της θεμελιώδους ομάδας στο $f^{-1}(y)$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι αν και ο μορφισμός μονοδρομίας εξαρτάται από την αρίθμηση, είναι καλά ορισμένος ως προς συζυγία.

Το επόμενο θεώρημα μας χαρακτηρίζει τα καλύμματα με ίδιες κρίσιμες τιμές μέσω μονοδρομίας.

Θεώρημα 1.33 Έστω $f_1 : S_1 \rightarrow S$ και $f_2 : S_2 \rightarrow S$ δυο μορφισμοί, με ίδιες κρίσιμες τιμές ($\text{crit } f_1 = \text{crit } f_2$). Τότε οι μορφισμοί μονοδρομίας τους είναι οι ίδιοι (συζυγείς) αν και μόνο αν είναι ισόμορφοι ως διακλαδιζόμενα καλύμματα.

Τα σημεία διακλάδωσης και οι κρίσιμες τιμές συμπεριφέρονται καλά ως προς την σύνθεση απεικονίσεων :

Πρόταση 1.34 Έστω δυο μορφισμοί $f : S \rightarrow S', g : S' \rightarrow S''$ τότε ισχύουν

- (i) Για ένα $P \in S$,

$$e_{g \circ f}(P) = e_f(P)e_g(f(P))$$

- (ii) $\text{crit}(g \circ f) = \text{crit}(g) \cup g(\text{crit}(f))$

Για μια ολόμορφη απεικόνιση όπως παραπάνω μπορούμε συγκρίνοντας τις χαρακτηριστικές Euler των δυο επιφανειών να καταλήξουμε στην πολύ χρήσιμη ταυτότητα Riemann-Hurwitz.

Θεώρημα 1.35 (Ταυτότητα Riemann-Hurwitz) Έστω ένας μορφισμός $f : S \rightarrow S'$ με βαθμό $\deg f$ και $g_S, g_{S'}$ τα γένη των επιφανειών, τότε ισχύει

$$2g_S - 2 = \deg f(2g_{S'} - 2) + \sum_{P \in S} (e_f(P) - 1)$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος είναι πεπερασμένο αφού υπάρχουν μόνο πεπερασμένα σημεία διακλάδωσης.

Φυσικά μια έστω και σύντομη αναφορά στις επιφάνειες Riemann δε θα μπορούσε να μην περιέχει το Θεώρημα Uniformization το οποίο ταξινομεί πλήρως τις απλά συνεκτικές επιφάνειες Riemann.

Θεώρημα 1.36 (Uniformization) *Αν S είναι μια απλά συνεκτική επιφάνεια Riemann τότε:*

$$S \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{C} \quad \text{ή} \quad S \simeq \mathbb{C} \quad \text{ή} \quad S \simeq \mathbb{H} \simeq \mathbb{D}$$

Τέλος καταγράφουμε μια πρόταση που θα χρειαστεί σε επόμενο κεφάλαιο και αφορά τις ολόμορφες με συγκεκριμένες κρίσιμες τιμές.

Πρόταση 1.37 *Έστω S μια συμπαγής επιφάνεια Riemann, $B \subset S$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο της και $d \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα ζεύγη (S', f) , με S' συμπαγή επιφάνεια Riemann, και $f : S' \rightarrow S$ μορφισμό βαθμού d που να έχει $\text{crit}(f) = B$.*

Αναλυτικότερα για την Τοπολογία θα μπορούσε να συμβουλευτεί κανείς το [9], ενώ για τις επιφάνειες Riemann το [4].

1.3 Μιγαδικές Καμπύλες

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε μια όμορφη τριπλή αντιστοιχία μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann, μιγαδικών καμπυλών και σωμάτων συναρτήσεων.

Στην πραγματικότητα η σωστή διατύπωση θα ήταν προβολικών, non-singular μιγαδικών καμπυλών αλλά για λόγους απλότητας θέλουμε να μην μπλέξουμε με ορολογία Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Για εμάς μια **μιγαδική καμπύλη** (complex curve) θα είναι το "σύνολο ριζών ενός ανάγωγου πολυωνύμου δυο μιγαδικών μεταβλητών $F(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ ". Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τα εισαγωγικά είναι ότι η καμπύλη δεν θα είναι ακριβώς αυτό το σύνολο αλλά θα εξαιρούνται κάποια σημεία (που ενδεχομένως να δημιουργούν singularities) και επισυνάπτονται κάποια άλλα "σημεία στο ∞ " (στην πραγματικότητα είναι τα έξτρα σημεία στον προβολικό χώρο). Μια μιγαδική καμπύλη που προέρχεται από ένα πολώνυμο $F(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ θα την συμβολίζουμε με $\{F = 0/\mathbb{C}\}$.

Λήμμα 1.38 *Έστω ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα $K \leq \mathbb{C}$, και δυο (ανάγωγα) πολώνυμα $F(X, Y), G(X, Y) \in K[X, Y]$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

- (i) *(Ασθενής μορφή του Θεωρήματος του Bezout) Αν τα F, G είναι σχετικά πρώτα, τότε οι καμπύλες $\{F = 0/\mathbb{C}\}, \{G = 0/\mathbb{C}\}$, τέμνονται σε το πολύ πεπερασμένο πλήθος σημείων τα οποία έχουν συντεταγμένες στο K .*
- (ii) *(Ασθενής μορφή του Nullstellensatz) Αν $\{F = 0/\mathbb{C}\} \subset \{G = 0/\mathbb{C}\}$, τότε το F διαιρεί το G .*

Θεώρημα 1.39 *Έστω ένα ανάγωγο πολώνυμο δυο μεταβλητών*

$$F(X, Y) = p_0(X)Y^n + p_1(X)Y^{n-1} + \dots + p_n(X) = q_0(Y)X^m + q_1(Y)X^{m-1} + \dots + q_m(Y)$$

αν $m \geq 1$ ορίζουμε

$$S_F^X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0, F_X(x, y) \neq 0, p_0(x) \neq 0\}$$

όμοια αν $n \geq 1$ ορίζουμε S_F^Y και ισχύουν :

- (i) Τα σύνολα S_F^X, S_F^Y είναι συνεκτικές επιφάνειες Riemann και οι συντεταγμένες απεικονίσεις (coordinate functions)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : S_F^X &\rightarrow \mathbb{C} & \mathbf{y} : S_F^Y &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x & (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

είναι ολόμορφες.

- (ii) Υπάρχει μοναδική συμπαγής επιφάνεια Riemann S_F που περιέχει τις S_F^X, S_F^Y .
 (iii) Οι απεικονίσεις \mathbf{x}, \mathbf{y} επεκτείνονται σε μερόμορφες στην S_F .
 (iv) Τα σημεία διακλάδωσης της των \mathbf{x}, \mathbf{y} περιέχονται στα $S_F \setminus S_F^X, S_F \setminus S_F^Y$ αντίστοιχα.

Έχουμε λοιπόν ένα κανόνα για να αντιστοιχούμε ανάγωγα πολυώνυμα (καμπύλες) σε συμπαγείς επιφάνειες Riemann, τον $F \mapsto S_F$. Στη συνέχεια εισάγουμε το τρίτο συστατικό τα σώματα συναρτήσεων.

Ορισμός 1.40 Μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{C}(z)$ θα λέγεται **σώμα συναρτήσεων** (function field).

Παρατήρηση 1.41 Αν υπάρχει μια (μη-τετριμμένη) ολόμορφη $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ τότε το σώμα $\mathcal{M}(S)$ των μερόμορφων είναι ένα σώμα συναρτήσεων αφού έχουμε τον μορφισμό σωμάτων

$$g \in \mathbb{C}(z) \mapsto g \circ f$$

και τέτοιες υπάρχουν όπως μας πληροφορεί το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.42 Έστω δυο σημεία P, Q μιας συμπαγούς επιφάνειας Riemann, τότε υπάρχει μια μερόμορφη απεικόνιση f με $f(P) = 0, f(Q) = \infty$. Δηλαδή οι μερόμορφες απεικονίσεις διαχωρίζουν σημεία.

Το παραπάνω θεώρημα είναι ουσιωδώς μη-τετριμμένο, για παράδειγμα υπενθυμίζουμε ότι δεν υπάρχουν μη-τετριμμένες ολόμορφες $f : S \rightarrow \mathbb{C}$.

Θεώρημα 1.43 Έστω $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(f, g)$ και $F(X, Y)$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο έτσι ώστε $F(f, g) = 0$ τότε η παρακάτω απεικόνιση είναι ισομορφισμός

$$\Phi : S \rightarrow S_F$$

$$P \mapsto (f(P), g(P))$$

Πόρισμα 1.44 Έστω (F) το ιδεώδες που παράγει το πολυώνυμο F (F όπως παραπάνω) τότε ισχύουν:

- (i) Η αντιστοιχία

$$X \mapsto f \quad Y \mapsto g$$

ορίζει έναν ισομορφισμό \mathbb{C} -αλγεβρών από το σώμα πηλίκων της $\mathbb{C}[X, Y]/(F)$ στην $\mathcal{M}(S)$

- (ii) Η αντιστοιχία

$$X \mapsto \mathbf{x}, Y \mapsto \mathbf{y}$$

ορίζει έναν ισομορφισμό \mathbb{C} -αλγεβρών από το σώμα πηλίκων της $\mathbb{C}[X, Y]/(F)$ στην $\mathcal{M}(S_F)$, συγκεκριμένα $\mathcal{M}(S_F) = \mathbb{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

- (iii) Το πολυώνυμο $F(\mathbf{x}, Y) \in \mathbb{C}(\mathbf{x})[Y]$ (αντ. $F(f, Y)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του \mathbf{y} πάνω από το $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ (αντ. του h πάνω από το $\mathbb{C}(f)$).
- (iv) $\deg f = [M(S) : \mathbb{C}(f)]$.

Συνεπώς έχουμε καταλήξει στο

Θεώρημα 1.45 Υπάρχει μια τριπλή αντιστοιχία μεταξύ των ακόλουθων αντικειμένων:

- (i) Συμπαγείς επιφάνειες Riemann
- (ii) Σώματα συναρτήσεων μιας μεταβλητής, δηλαδή πεπερασμένες επεκτάσεις του $\mathbb{C}(z)$.
- (iii) Μιγαδικές καμπύλες $\{F(X, Y) = 0\}$.

Από το (i) στο (ii): $S \mapsto \mathcal{M}(S)$.

από το (ii) στο (iii): $\mathcal{M} = \mathbb{C}(f, h)/\mathbb{C}(z) \mapsto F$, όπου $F(f, h) = 0$ και F ανάγωγο.
(αυτή η αντιστοιχία είναι συναρτητικής φύσεως)

από το (iii) στο (i): $F \mapsto S_F$.

Μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε την αντιστοιχία αυτή για να ορίσουμε πότε δυο καμπύλες είναι ισόμορφες, όταν οι αντίστοιχες επιφάνειες Riemann είναι ισόμορφες.

Παραδείγματα 1.46 Οι καμπύλες που ορίζονται από τα πολυώνυμα $F(X, Y) = Y^2 - X^3 + \pi^3$ και $G(X, Y) = Y^2 - X^3 + 1$ είναι ισόμορφες, δηλαδή οι επιφάνειες S_F, S_G είναι ισόμορφες ως επιφάνειες Riemann και ο ισομορφισμός δίνεται από την

$$S_F \longrightarrow S_G$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\pi}, \frac{y}{\pi\sqrt{\pi}} \right)$$

Κεφάλαιο 2

Η Απόλυτη Ομάδα Galois

Η απόλυτη ομάδα Galois ενός σώματος κουβαλάει την πληροφορία όλων των πεπερασμένων Galois επεκτάσεων και συνεπώς παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην μελέτη του εν λόγω σώματος. Τέτοιες ομάδες πολλές φορές είναι συναρπαστικές και μυστηριώδεις, ειδικά η απόλυτη ομάδα των ρητών αριθμών. Πολλά ανοιχτά προβλήματα και εικασίες σχετίζονται άμεσα με τις απόλυτες ομάδες.

2.1 Εισαγωγικά

Για αρχή υπενθυμίζουμε κάποιες έννοιες από την θεωρία Galois.

Ορισμός 2.1 Ένα σώμα λέγεται K **αλγεβρικά κλειστό** (algebraically closed) αν κάθε πολυώνυμο με συντελεστές από το K γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων με συντελεστές στο K . Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Zorn, μπορεί να δείξει κανείς ότι κάθε σώμα L έχει μια (μοναδική) ελαχιστική επέκταση που είναι αλγεβρικά κλειστή η οποία ονομάζεται **αλγεβρική θήκη** (algebraic closure) του L και συμβολίζεται \bar{L} ή L^{alg} . Ένα σώμα L είναι αλγεβρικά κλειστό αν και μόνο αν $L = L^{alg}$.

Ορισμός 2.2 Ένα ανάγωγο πολυώνυμο λέγεται $p(X) \in K[X]$ με συντελεστές σε ένα σώμα K λέγεται **διαχωρίσιμο** (separable) αν γράφεται ως γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων πολυωνύμων με συντελεστές στην K^{alg} . Ένα στοιχείο του K λέγεται διαχωρίσιμο αν είναι ρίζα διαχωρίσιμου πολυωνύμου. Το σύνολο των διαχωρίσιμων στοιχείων αποτελεί υπόσωμα της K^{alg} και συμβολίζεται με K^{sep} . Ένα σώμα λέγεται **διαχωριστικά κλειστό** (separably closed) αν $L = L^{sep}$.

Ορισμός 2.3 Έστω K ένα σώμα, η **απόλυτη ομάδα Galois** (absolute Galois group) ορίζεται ως η $\text{Gal}(K^{sep}/K)$ όπου K^{sep} είναι η διαχωρίσιμη θήκη του K , και συμβολίζεται με G_K .

Στην καθημερινή ζωή σχεδόν όλα τα σώματα (χαρακτηριστικής 0, πεπερασμένα κτλ) είναι **τέλεια** (perfect), δηλαδή όλες οι αλγεβρικές επεκτάσεις τους είναι διαχωρίσιμες και συνεπώς η K^{sep} ταυτίζεται με την K^{alg} την αλγεβρική θήκη. Στην περίπτωση αυτή η απόλυτη ομάδα Galois είναι ίση με $\text{Gal}(K^{alg}/K)$ και για αυτό το λόγο καμιά φορά ορίζεται στη βιβλιογραφία κατευθείαν με αυτόν τον τρόπο.

Παραδείγματα 2.4 (i) Αν το K είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε $G_K = 1$.

(ii) Για $K = \mathbb{R}$ είναι $G_{\mathbb{R}} = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, s\}$ όπου s είναι η μιγαδική συζυγία.

Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι οι απόλυτες ομάδες Galois μπορεί να είναι πεπερασμένες, όμως μπορεί να αποδειχτεί ότι τα 1, 2 είναι οι μοναδικοί δυνατοί πεπερασμένοι πληθάρημοι.

Θεώρημα 2.5 (Artin-Schreier) Έστω K ένα σώμα, ώστε η G_K να είναι πεπερασμένη, τότε είτε το K είναι διαχωριστικά κλειστό (και άρα $G_K = 1$), είτε το K είναι πραγματικά κλειστό¹ και τότε η G_K είναι κυκλική τάξης 2. [14]

(iii) Αν το F είναι πεπερασμένο σώμα, τότε $G_F = \widehat{\mathbb{Z}}$ ($= \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, βλέπε ορισμό πιο κάτω), από αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι μη ισόμορφα σώματα μπορεί να έχουν την ίδια απόλυτη ομάδα Galois. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί στα σώματα αριθμών όπως μας πληροφορεί το ακόλουθο θεώρημα των Neukirch-Ushida.

Θεώρημα 2.6 (Neukirch-Ushida) Έστω L, K πεπερασμένες επεκτάσεις του \mathbb{Q} , με $G_K \simeq G_L$ τότε $K \simeq L$. [16]

Η Απόλυτη Ομάδα Galois των Ρητών: Η $G_{\mathbb{Q}}$, η απόλυτη ομάδα Galois των ρητών είναι σίγουρα η διασημότερη τέτοια ομάδα, και όπως είπαμε και στην εισαγωγή, αποτέλεσε κίνητρο για την ανάπτυξη διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών. Πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά για αυτήν την ομάδα στην πραγματικότητα δεν μπορούμε να γράψουμε ούτε ένα μη τετριμμένο στοιχείο της εκτός από την μιγαδική συζυγία!

Εκ πρώτης όψεως αυτό φαίνεται παράξενο. Για παράδειγμα κάποιος θα μπορούσε να προσπαθήσει την εξής προσέγγιση: ας θεωρήσουμε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{Q}[X]$. Ένα στοιχείο της $G_{\mathbb{Q}}$ πρέπει να απεικονίζει κάθε ρίζα ενός ανάγωγου πολυωνύμου σε ρίζα του ίδιου πολυωνύμου, συνεπώς δεν θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ένα στοιχείο της $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ ως μια άπειρη ακολουθία μεταθέσεων; Η απάντηση είναι όχι μιας και η σ πρέπει να είναι και ομομορφισμός και άρα οι επιλογές σε κάθε ανάγωγο δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Μερικοί λένε ότι αυτή η ομάδα κρύβει μέσα της όλη τη Θεωρία Αριθμών, για αυτό και αποκαλείται το πιο ενδιαφέρον μαθηματικό αντικείμενο στον κλάδο αυτό! Πράγματι μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι αν έχουμε μια πεπερασμένη επέκταση Galois των ρητών L/\mathbb{Q} , τότε η ομάδα Galois της είναι πηλίκο της απόλυτης ομάδας Galois, αφού

$$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq G_{\mathbb{Q}}/\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$$

Υπό αυτήν την έννοια εμπεριέχει μέσα της όλη την "Galois πληροφορία" των σωμάτων αριθμών και άρα όλη την Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών. Ένα επιπλέον πρόβλημα που σχετίζεται με την απόλυτη ομάδα Galois είναι το Αντίστροφο Πρόβλημα της Θεωρίας Galois (Inverse Galois Problem).

Αντίστροφο Πρόβλημα Θεωρίας Galois: Θεωρούμε μια πεπερασμένη ομάδα G , υπάρχει άραγε πεπερασμένη επέκταση Galois L/\mathbb{Q} με $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = G$;

¹Έννοια της Θεωρίας Μοντέλων, ένα σώμα λέγεται πραγματικά κλειστό (real closed field) αν έχει τις ίδιες ιδιότητες στην πρωτοβάθμια λογική με το σώμα των πραγματικών αριθμών.

Ισοδύναμα, μπορούμε να προσδιορίσουμε όλα τα πεπερασμένα πηλίκα της $G_{\mathbb{Q}}$; Η απάντηση στο Αντίστροφο Πρόβλημα της Θεωρίας Galois είναι θετική αν η G είναι επιλύσιμη όπως έδειξε ο Shafarevitch στο [18] και έχουν κατασκευαστεί τέτοιες επεκτάσεις για διάφορες συγκεκριμένες ομάδες (πχ για όλες τις σποραδικές εκτός από την ομάδα Mathieu M_{23} [11]) αλλά το γενικό πρόβλημα παραμένει ανοιχτό. Η στοιχειώδης διατύπωση του παραπάνω προβλήματος και η δυσκολία του είναι ενδεικτική της μυστηριώδους φύσης της απόλυτης ομάδας Galois.

Είναι συνήθης πρακτική, όταν δεν καταλαβαίνουμε μια ομάδα να βρίσκουμε δράσεις της πάνω σε άλλα, ενδεχομένως απλούστερα, αντικείμενα προκειμένου να αποκτήσουμε μια καλύτερη διαισθητική εικόνα της δομής της και να χρησιμοποιήσουμε τεχνογνωσία από άλλους κλάδους στην μελέτη της. Διάφοροι κλάδοι έχουν γεννηθεί με αυτόν τον τρόπο όπως οι αναπαραστάσεις Galois. Ένας από αυτούς είναι και η Θεωρία των Dessins που διαπραγματευόμαστε σε αυτό το κείμενο. Στο κεφάλαιο 4 θα ορίσουμε μια δράση της απόλυτης ομάδας Galois στα dessins και θα αποδείξουμε ότι είναι πιστή δηλαδή δεν "χάνεται πληροφορία" μέσω της δράσης αυτής.

2.2 Προπεπερασμένες ομάδες

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι απόλυτες ομάδες Galois ανήκουν πάντα σε μια συγκεκριμένη οικογένεια τοπολογικών ομάδων, τις προπεπερασμένες ομάδες.

Ορισμός 2.7 Έστω μια οικογένεια από ομάδες $G_i, i \in I$, όπου το I είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο, έχει δηλαδή μια σχέση \leq αυτοπαθή, μεταβατική και με την ιδιότητα ότι κάθε δυο στοιχεία έχουν άνω φράγμα.

Έστω ακόμα μια οικογένεια μορφισμών $f_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ αν $i \geq j$. Το ζεύγος $(G_i, f_{ij})_I$ θα λέγεται ένα **αντίστροφο (ή προβολικό) σύστημα ομάδων** (inverse or projective system of groups) αν ισχύουν:

- (i) $f_{ii} = id_{G_i}$
- (ii) $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ για όλα τα $k \leq j \leq i$.

Δηλαδή όλα τα διαγράμματα :

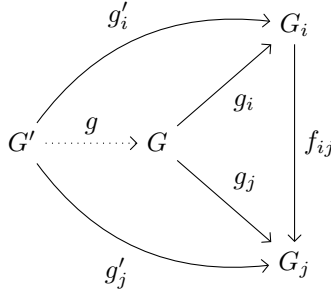
$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{f_{ij}} & G_j \\ & \searrow f_{ik} & \downarrow f_{jk} \\ & & G_k \end{array}$$

να είναι μεταθετικά.

Ορισμός 2.8 Έστω τώρα ένα αντίστροφο σύστημα $(G_i, f_{ij})_I$, ένα ζεύγος $(G, (g_i)_I)$ μιας ομάδας G και μιας οικογένειας ομομορφισμών $g_i : G \rightarrow G_i$ λέγεται **αντίστροφο (ή προβολικό) όριο** (inverse or projective limit) του $(G_i, f_{ij})_I$ αν ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική συνθήκη:

- (i) $f_{ij} \circ g_i = g_j$, για όλα τα $j \leq i$.
- (ii) Για κάθε άλλο τέτοιο ζεύγος $(G', g'_i)_I$ με $f_{ij} \circ g'_i = g'_j$ υπάρχει μοναδικός $g : G' \rightarrow G$ με $g_i \circ g = g'_i$, για όλα τα $i \in I$.

Σχηματικά:



Η ομάδα G συμβολίζεται με $\varprojlim G_i$, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το ζεύγος $(\varprojlim G_i, g_i)$ είναι μοναδικό ως προς φυσικό ισομορφισμό. Ανάλογα μπορούν να οριστούν αντίστροφα συστήματα και αντίστροφα όρια για άλλες κατηγορίες πχ δακτυλίου, πρότυπα κτλ.

Πρόταση 2.9 Έστω ένα αντίστροφο σύστημα ομάδων $(G_i, f_{ij})_I$, τότε το αντίστροφο όριο υπάρχει και είναι:

$$\varprojlim G_i = \{(a_i)_I \in \prod_I G_i \mid a_j = f_{ij}(a_i), i \geq j\}$$

Ορισμός 2.10 Μια ομάδα λέγεται **προπεπερασμένη** (profinite) αν είναι αντίστροφο όριο ενός αντίστροφου συστήματος που οι G_i είναι όλες πεπερασμένες. (Αντίστοιχα για δακτυλίου, πρότυπα κτλ.)

Παραδείγματα 2.11 (i) Οι πεπερασμένες ομάδες είναι προπεπερασμένες κατά τετριμμένο τρόπο.

(ii) Θεωρούμε το σύστημα των φυσικών μορφισμών $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, m \geq n$, όπου p ένας πρώτος αριθμός. Από την Πρόταση 2.9, μπορούμε να περιγράψουμε το αντίστροφο όριο αυτού του συστήματος με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i \mid 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}$$

Πρόκειται δηλαδή για τον (προπεπερασμένο) δακτύλιο των τυπικών δυναμοσειρών στον πρώτο p ο οποίος καλείται **ο δακτύλιος των ακεραίων p -αδικών** και συμβολίζεται με \mathbb{Z}_p . Οι p -αδικοί ακεραίοι παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία Αριθμών και αποτελούν τυπικό παράδειγμα προπεπερασμένης ομάδας.

(iii) Έστω τώρα το σύστημα των φυσικών μορφισμών $\mathbb{Z}/g^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/g^n\mathbb{Z}, m \geq n$, όπου g ένας αυθαίρετος φυσικός αριθμός. Συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}_g := \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/g^m\mathbb{Z}$ και παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{Z}_g = \prod_{p|g} \mathbb{Z}_p$$

(ως τοπολογικοί δακτύλιοι).

(iv) Για το σύστημα: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, n|m$ ορίζουμε το

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Όπως και στα παραπάνω παραδείγματα έχουμε έναν καλό τρόπο να περιγράψουμε τα στοιχεία του $\widehat{\mathbb{Z}}$:

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \{a_1 + a_2 2! + \dots + a_n n! + \dots \mid 0 \leq a_i \leq i\}$$

αλλά και να τον δούμε ως

$$\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{p \text{ πρώτος}} \mathbb{Z}_p$$

(v) Ο βασικός λόγος όμως που αρχίσαμε να μιλάμε για προπεπερασμένες ομάδες είναι ότι οι απόλυτες ομάδες Galois είναι τέτοια παραδείγματα. Έστω σώμα K και το σύστημα όλων των

$$\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(M/K).$$

$$s \mapsto s|_M$$

για $K \subseteq M \subseteq L$ και $M/K, L/K$ πεπερασμένες Galois επεκτάσεις. Τότε βλέπουμε ότι

$$G_K = \varprojlim \text{Gal}(L/K)$$

Το 1974 ο Waterhouse στο [26] έδειξε ότι όλες οι προπεπερασμένες ομάδες είναι ομάδες Galois κάποιας επέκτασης Galois πάνω από κάποιο σώμα K , χωρίς όμως να μπορέσει να ελέγξει το K , από την άλλη δεν είναι σωστό ότι κάθε προπεπερασμένη ομάδα εμφανίζεται ως απόλυτη ομάδα Galois (πχ λόγω του θεωρήματος Artin-Schreier). Για δοσμένο K δεν είναι γνωστό ποιες ομάδες εμφανίζονται ως ομάδες Galois πάνω από αυτό, ούτε καν ποιες πεπερασμένες ομάδες εμφανίζονται με αυτό τον τρόπο (Inverse Galois Problem).

Παρατήρηση 2.12 Μια πεπερασμένη ομάδα μπορεί να θεωρηθεί ως τοπολογικός χώρος με την διακριτή τοπολογία, άρα και το γινόμενο τέτοιων εφοδιάζεται με τοπολογία και μάλιστα είναι συμπαγές από το θεώρημα Tychonoff. Συμπεραίνουμε λόγω της Πρότασης 2.9 ότι οι προπεπερασμένες ομάδες εφοδιάζονται με την σχετική τοπολογία και είναι συμπαγείς ως κλειστά υποσύνολα συμπαγούς.

Στην μελέτη των προπεπερασμένων ομάδων η τοπολογία τους "πάει πακέτο" με την ομαδοθεωρητική δομή τους. Στην πραγματικότητα υπάρχει ένας καθαρά τοπολογικός χαρακτηρισμός.

Πρόταση 2.13 Έστω G μια τοπολογική ομάδα, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) $H G$ είναι προπεπερασμένη.

(b) $H G$ είναι Hausdorff, συμπαγής και εντελώς ασυνεκτική (totally disconnected, δηλαδή οι συνεκτικές συνιστώσες της είναι σημεία).

Ένας τοπολογικός χώρος που ικανοποιεί τη συνθήκη (b) λέγεται και **χώρος του Stone**.

Ας δούμε την τοπολογία σε μερικά απ' τα παραπάνω παραδείγματα

Παραδείγματα 2.14 (i) Η τοπολογία του \mathbb{Z}_p ως προπεπερασμένη ομάδα, συμπίπτει με την τοπολογία που ορίζει η p -αδική απόλυτη τιμή:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

όπου $ord_p x = \max\{n \in \mathbb{N}; p^n | x\}$.

(ii) Η τοπολογία της G_K είναι η λεγόμενη **τοπολογία Krull** και μια ανοιχτή βάση περιοχών ενός $s \in G_K$ είναι η $U_M(s) = \{t \in G_K; t|_M = s|_M\}$ όπου το M τρέχει στις πεπερασμένες επεκτάσεις Galois του K . Δηλαδή δυο στοιχεία της G_K είναι κοντά στην τοπολογία Krull αν συμφωνούν σε μεγάλες πεπερασμένες επεκτάσεις του K .

Θα δούμε τώρα πως από μια αυθαίρετη ομάδα μπορούμε "πληρώνοντας τη" να φτιάξουμε μια προπεπερασμένη ομάδα.

Ορισμός 2.15 Έστω G ομάδα, θεωρούμε το αντίστροφο σύστημα πάνω στα πηλίκα G/N , όπου N κανονική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη, και τους φυσικούς μορφισμούς $G/N \rightarrow G/K$ όταν $N \subseteq K$. Το αντίστροφο όριο αυτού του συστήματος το ονομάζουμε **προπεπερασμένη πλήρωση της G** (profinite completion), και το συμβολίζουμε

$$\widehat{G} := \varprojlim_{N \triangleleft_f G} G/N$$

Από την καθολική συνθήκη του αντίστροφου ορίου υπάρχει ένας φυσικός μορφισμός $f : G \rightarrow \widehat{G}$ του οποίου η εικόνα είναι πυκνή στην \widehat{G} , για αυτό το λόγο η \widehat{G} λέγεται "πλήρωση". Όμως ο f δεν είναι πάντα μονομορφισμός. Συγκεκριμένα είναι 1-1 αν η G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.² Ο f ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική συνθήκη:

Για οποιαδήποτε προπεπερασμένη ομάδα H , και ομομορφισμό $g : G \rightarrow H$, υπάρχει μοναδικός συνεχής μορφισμός $h : \widehat{G} \rightarrow H$ έτσι ώστε $g = h \circ f$, δηλαδή έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow f & \searrow g & \\ \widehat{G} & \xrightarrow{h} & H \end{array}$$

Ο συμβολισμός αυτός είναι συμβιβαστός με την ομάδα που ορίσαμε πιο πάνω ως $\widehat{\mathbb{Z}}$ μιας και πράγματι αποτελεί την προπεπερασμένη πλήρωση του \mathbb{Z} .

Η πλήρωση μιας ομάδας είναι αρκετά πιο περίπλοκη από την ίδια την ομάδα. Για παράδειγμα η \widehat{F}_2 η πλήρωση της ελεύθερης ομάδας σε δυο γεννήτορες παραμένει δυσνόητη και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από την σκοπιά της απόλυτης ομάδας Galois μιας και μπορεί να αποδειχτεί [7] ότι υπάρχει ένας μονομορφισμός:

$$G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Out}(\widehat{F}_2) = \text{Aut}(\widehat{F}_2)/\text{Inn}(\widehat{F}_2)$$

²Μια ομάδα G λέγεται **προσεγγιστικά πεπερασμένη** (residually finite), αν για κάθε στοιχείο της $g \in G$, υπάρχει μορφισμός $f : G \rightarrow F$ με $f(g) \neq 1$ και F πεπερασμένη ομάδα. Ισοδύναμα όταν $\bigcap N = 1$ όλων των κανονικών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη.

Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα του Belyi

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε το περίφημο Θεώρημα του Belyi, το οποίο αποτελεί και το έναυσμα για τη θεωρία των dessins. Αρχικά θα ορίσουμε τις έννοιες που χρειαζόμαστε και θα διατυπώσουμε το Θεώρημα του Belyi. Στη συνέχεια θα δώσουμε την απόδειξη της μιας κατεύθυνσης, η οποία είναι στοιχειώδης και είναι αυτό που απέδειξε ο G. Belyi. Για την άλλη κατεύθυνση θα χρειαστούμε κάποια προεργασία. Τέλος, θα καταγράψουμε μια σύνδεση με την περίφημη εικασία abc .

3.1 Σώματα ορισμού

Όπως είδαμε συμπαγείς επιφάνειες Riemann αντιστοιχούν σε μιγαδικές καμπύλες. Όμως τα πολυώνυμα που ορίζουν τις καμπύλες μπορεί να έχουν συντελεστές μέσα σε ένα σώμα αριθμών και άρα θα δρα πάνω τους η απόλυτη ομάδα Galois! Συνεπώς οι επιφάνειες που θα προκύπτουν από τέτοια πολυώνυμα θα πρέπει να έχουν αριθμητική σημασία.

Μια επιφάνεια Riemann S θα λέμε ότι **ορίζεται πάνω από το** (defined over) σώμα K ή ότι το σώμα K είναι ένα **σώμα ορισμού** (field of definition) της S αν υπάρχει πολυώνυμο $F(X, Y) \in K[X, Y]$ έτσι ώστε $S = S_F$ (βλέπε θεώρημα 1.40). Παρατηρούμε ότι μια επιφάνεια που ορίζεται μέσω ενός πολυωνύμου με υπερβατικούς συντελεστές, ενδέχεται στην πραγματικότητα να μπορεί να οριστεί πάνω από το \mathbb{Q} .

Πχ Η S_F με $F = Y^2 - X^3 + \pi^3$ είναι ισόμορφη (όπως είδαμε στο παράδειγμα 1.47) με την S_G όπου $G = Y^2 - X^3 + 1$ και άρα ορίζεται πάνω από το \mathbb{Q} .

Το θεώρημα του Belyi χαρακτηρίζει τις επιφάνειες που ορίζονται πάνω από το \mathbb{Q} με έναν απροσδόκητα κομψό τρόπο. [2]

Θεώρημα 3.1 (Belyi, 1979) Έστω X μια συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια Riemann, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η X ορίζεται πάνω απ το \mathbb{Q} (ισοδύναμα πάνω από ένα σώμα αριθμών).

(b) Υπάρχει $X \xrightarrow{t} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ολόμορφη με το πολύ 3 κρίσιμες τιμές. (Ισοδύναμα με τις κρίσιμες τιμές της να περιέχονται στο $\{0, 1, \infty\}$.)

Λόγω του θεωρήματος δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.2 (i) Αν X είναι μια επιφάνεια Riemann και μια $X \xrightarrow{t} \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ολόμορφη με το πολύ 3 κρίσιμες τιμές τότε η t θα λέγεται **απεικόνιση Belyi**, ενώ το (X, t) θα λέγεται **ζεύγος Belyi**.

(ii) Ένας **μορφισμός (αντ. ισομορφισμός) Belyi ζευγών** $(X_1, t_1) \xrightarrow{f} (X_2, t_2)$ είναι μια ολόμορφη (αντ. αμφιολόμορφη) απεικόνιση $f : X_1 \rightarrow X_2$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow t_1 & \downarrow t_2 \\ & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Η ύπαρξη των Belyi pairs ήταν γνωστή στον Riemann και στον Klein τον 19ο αιώνα, αλλά όχι του θεωρήματος και παραδόξως πέρασαν πάνω από εκατό χρόνια μέχρι να ανακαλυφθεί.

3.2 Η κατεύθυνση $(a) \Rightarrow (b)$

Η κατεύθυνση $(a) \Rightarrow (b)$ είναι σαφώς πιο εύκολη και είναι το αποτέλεσμα που απέδειξε ο Belyi το 1979. Αποτελείται στην ουσία από έναν αλγόριθμο που κατασκευάζει μια ολόμορφη απεικόνιση f με το πολύ 3 κρίσιμες τιμές από μια επιφάνεια Riemann που ορίζεται πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία στάδια:

- 1) Κατασκευάζουμε μια ολόμορφη $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έτσι ώστε οι κρίσιμες τιμές της να ανήκουν στο $\mathbb{P}^1\overline{\mathbb{Q}}$.
- 2) Τη συνθέτουμε με μια απεικόνιση $g : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έτσι ώστε η σύνθεση να έχει τις κρίσιμες τιμές της στο $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$.
- 3) Τέλος κάνουμε μια ακόμη σύνθεση με μια $h : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έτσι ώστε οι κρίσιμες τιμές ολόκληρης της σύνθεσης να ανήκουν στο $\{0, 1, \infty\}$.

Αρκεί δηλαδή να αποδείξουμε τα ακόλουθα Λήμματα:

Λήμμα 3.3 Έστω μια επιφάνεια Riemann X που ορίζεται πάνω απ'το $\overline{\mathbb{Q}}$, τότε υπάρχει μια ολόμορφη απεικόνιση $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ με $\text{crit}(f) \subset \mathbb{P}^1\overline{\mathbb{Q}}$.

Απόδειξη: Έστω ότι η X είναι ισόμορφη με την X_F όπου $F[X, Y] \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$, και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο βαθμός του F ως προς Y είναι θετικός. Τότε το F γράφεται $F(X, Y) = p_n(X)Y^n + \dots + p_1(X)Y + p_0(X)$. Θεωρούμε τον μορφισμό

$$\begin{aligned} X_F &\xrightarrow{x} \mathbb{P}^1\mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

που ξέρουμε ότι είναι ολόμορφη απεικόνιση (Θεώρημα 1.40). Τότε πάλι από Θεώρημα 1.40 κάθε κρίσιμη τιμή αυτής της απεικόνισης είναι είτε ρίζα του $p_n(X)$, είτε ∞ είτε κοινή ρίζα των F_Y, F . Από Λήμμα 1.39 όλες οι κρίσιμες τιμές βρίσκονται στο $\mathbb{P}^1\overline{\mathbb{Q}}$

Λήμμα 3.4 Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ τότε υπάρχει μια ολόμορφη απεικόνιση $g : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έτσι ώστε $\text{crit}(g) \cup g(S) \subset \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το ελάχιστο πολυώνυμο $m_1 = m_{S, \mathbb{Q}}$ του συνόλου S πάνω απ' το \mathbb{Q} , δηλαδή το γινόμενο των διακεκριμένων ελαχίστων πολυωνύμων των στοιχείων του S . Τότε $m_1(S) = \{0\} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ ενώ για τις κρίσιμες τιμές του έχουμε

$$\text{crit}(m_1) = m_1(\{a \in \mathbb{C} \mid m_1'(a) = 0\})$$

Θεωρούμε το σύνολο :

$$B_1 := \text{crit}m_1 \cup \{0\}$$

Προφανώς για ένα $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ είναι

$$\mathbb{Q}(m_1(a)) \subset \mathbb{Q}(a) \Rightarrow [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] \geq [\mathbb{Q}(m_1(a)) : \mathbb{Q}]$$

και συνεπώς $\deg m_{a, \mathbb{Q}} \geq \deg m_{m_1(a), \mathbb{Q}}$. Επιπλέον το πλήθος κλάσεων συζυγίας δεν αυξάνεται μιας και αν $a = \sigma b$ για μια $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ τότε $m_1(a) = \sigma m_1(b)$. Άρα τελικά

$$\deg m_{B_1, \mathbb{Q}} \leq \deg m_1' < \deg m_1$$

θέτουμε $B_n = m_n(a \in \mathbb{C} \mid m_{n-1}'(a) = 0)$ και $m_{n+1}(x) = m_{B_n, \mathbb{Q}}$, οπότε έχουμε

$$\deg m_{n+1} < \deg m_n < \dots < \deg m_1$$

Άρα κάποια στιγμή μετά από πεπερασμένα βήματα το σύνολο B_n θα πέσει μέσα στο \mathbb{Q} μιας και ο "βαθμός" του ως προς \mathbb{Q} μικραίνει συνεχώς. Για κάποιο n_0 θα έχουμε $B_{n_0} \subset \mathbb{Q}$ και τότε η απεικόνιση

$$g := m_{n_0} \circ m_{n_0-1} \circ \dots \circ m_1$$

κάνει τη δουλειά.

Λήμμα 3.5 Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset \mathbb{Q}$ τότε υπάρχει μια ολόμορφη απεικόνιση $h : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ έτσι ώστε $\text{crit}(h) \cup h(T) \subset \{0, 1, \infty\}$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\{0, 1, \infty\} \subset T$, μιας και θα περιγράψουμε μια διαδικασία κατά την οποία το σύνολο μας θα μικραίνει και άρα θα τερματίζει σε πεπερασμένα βήματα. Συνθέτοντας με κατάλληλο μετασχηματισμό Μόδβιους μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_1 \in (0, 1)$. Συνεπώς μπορεί να γραφτεί στη μορφή $t_1 = m/m + n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο

$$P_{m,n}(X) = P_{t_1}(X) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} X^m (1-X)^n$$

και παρατηρούμε ότι

$$P_{m,n}(0) = P_{m,n}(1) = 0, P_{m,n}\left(\frac{m}{m+n}\right) = 1, P_{m,n}(\infty) = \infty$$

ενώ τα σημεία διακλάδωσης του είναι οι ρίζες του $P'_{m,n}$, οι οποίες είναι οι ρίζες του

$$X^{m-1}(1-X)^{n-1}((m+n)X - m) = 0$$

δηλαδή οι $0, 1, \infty, \frac{m}{m+n}$. Έχουμε δηλαδή ότι

$$P_{t_1}(\{0, 1, \infty, t_1\}) \cup \text{crit}(P_{t_1}) \subset \{0, 1, \infty\}$$

Συνεχίζοντας συνθέτοντας με το P_{t_2} κτλ, επαγωγικά καταλήγουμε στο $\{0, 1, \infty\}$.

2η απόδειξη: Το 1997 πάλι ο Belyi [3] παρατήρησε ότι η απόδειξη αυτή θα μπορούσε να γίνει και σε ένα βήμα, δηλαδή συνθέτοντας μόνο με έναν μορφισμό. Συνθέτοντας με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό Möbius $z \mapsto Nz$ για απαλείψουμε τους παρονομαστές μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_i \in \mathbb{Z}$ με $t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Για $i = 1, 2, \dots, k$ θέτουμε

$$b_i = \frac{1}{\prod_{j, j \neq i} (t_i - t_j)} \text{ και } a_i = V(t_1, \dots, t_k) b_i$$

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει:

$$V(t_1, \dots, t_k) := \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{k-1} \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_k & \dots & t_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (t_j - t_i)$$

και η $V(t_1, \dots, t_k)$ λέγεται **ορίζουσα Vandermonde** των t_i . Θεωρούμε τώρα την ρητή συνάρτηση

$$G(x) = \prod_i (x - t_i)^{a_i} \in \mathbb{Q}(x)$$

Προφανώς

$$G(\{t_1, \dots, t_k, \infty\}) = \{0, \infty, G(\infty)\}$$

Για τα σημεία διακλάδωσης έχουμε ότι

$$\frac{G(x)}{G'(x)} = \sum_i \frac{a_i}{x - t_i} = \sum_i \frac{V b_i}{x - t_i} = \frac{V}{\prod_i (t_i - x)}$$

και άρα τα σημεία διακλάδωσης της G περιέχονται στο $\{t_1, \dots, t_k, \infty\}$ Τέλος δείχνουμε ότι $G(\infty) = 1$. Πράγματι έχουμε ότι

$$G(\infty) = 1 \Leftrightarrow \sum_i a_i = 0$$

αλλά είναι:

$$\sum_i a_i = \sum_i V b_i = \sum_i (-1)^{i-1} V(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k)$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι 0 μιας και είναι ίσο με το ανάπτυγμα της ακόλουθης ορίζουσας αν την αναπτύξουμε ως προς την πρώτη στήλη:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & t_1 & \dots & t_1^{k-2} \\ 1 & 1 & t_2 & \dots & t_2^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & t_k & \dots & t_k^{k-2} \end{vmatrix} = 0$$

(είναι 0 αφού έχει δυο ίσες στήλες).

Απόδειξη (a) \Rightarrow (b) του Θεωρήματος 3.1:

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα και την Πρόταση 1.35 η απόδειξη είναι άμεση. Από το Λήμμα 3.3 υπάρχει μια f με $\text{crit}(f) \subset \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.4 για το $S = \text{crit}(f)$ και έχουμε ότι $\text{crit}(gf) = \text{crit}g \cup g(\text{crit}f) \subset \mathbb{P}^1\mathbb{Q}$. Τέλος εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.5 για το σύνολο $T = \text{crit}(gf)$ και έτσι

$$\text{crit}(h \circ g \circ f) = h(\text{crit}g \circ f) \cup \text{crit}h = h(T) \cup \text{crit}h \subset \{0, 1, \infty\}$$

Άρα το ζεύγος $(X, hg f)$ είναι ένα ζεύγος Belyi.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε την κατεύθυνση (b) \Rightarrow (a). Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστεί να κάνουμε μια σειρά από βήματα το πρώτο εκ των οποίων είναι να δώσουμε μια αλγεβρική περιγραφή των ολομόρφων συναρτήσεων μεταξύ δύο συμπαγών επιφανειών Riemann.

3.3 Αλγεβρικός χαρακτηρισμός ολομόρφων συναρτήσεων

Η αλγεβρική υφή των συμπαγών επιφανειών Riemann θα μας επιτρέψει να μιλήσουμε για τις ολόμορφες συναρτήσεις στη γλώσσα των πολυωνύμων. Όπως έχουμε ήδη δει στην Παράγραφο 1.3, αν δυο μερόμορφες συναρτήσεις f_1, f_2 μιας επιφάνειας Riemann X ικανοποιούν μια πολυωνυμική ταυτότητα

$$G(f_1, f_2) \equiv 0$$

για κάποιο ανάγωγο πολυώνυμο $G(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$, τότε ορίζουν ένα μορφισμό

$$f = (f_1, f_2) : X \rightarrow X_G$$

Αντίστροφα, ένας (μη-σταθερός) μορφισμός $f : X \rightarrow X_G$ καθορίζεται από το ζεύγος μερομόρφων (f_1, f_2) που προκύπτουν απ' τη σύνθεση της f με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της X_G .

Έστω τώρα ένα (ανάγωγο) πολυώνυμο $F(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ με $X \simeq X_F$, άρα $M(X) = \mathbb{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$f_1 = R_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{P_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{Q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, f_2 = R_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{P_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{Q_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

για κάποια πολυώνυμα $P_i, Q_i \in \mathbb{C}[X, Y]$ με $Q_i \notin (F)$.

Συνεπώς έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό

Πρόταση 3.6 *Ο προσδιορισμός μιας ολόμορφης απεικόνισης $f : X_F \rightarrow X_G$ είναι ισοδύναμος με τον προσδιορισμό 2 ρητών συναρτήσεων (R_1, R_2) όπου*

$$R_1(X, Y) = \frac{P_1(X, Y)}{Q_1(X, Y)}, R_2(X, Y) = \frac{P_2(X, Y)}{Q_2(X, Y)}$$

όπου $P_1(X, Y), Q_1(X, Y), P_2(X, Y), Q_2(X, Y) \in \mathbb{C}[\cdot, \cdot], Q_i \notin (F)$ και

$$Q_1^n Q_2^m G(R_1, R_2) = HF$$

για κάποιο $H \in \mathbb{C}[X, Y]$ και $n = \deg_X G, m = \deg_Y G$.

Απόδειξη: Απαλείφοντας τους παρονομαστές στην ταυτότητα

$$G(R_1, R_2) = 0$$

παίρνουμε την

$$Q_1^n Q_2^m G(R_1, R_2) = 0$$

η οποία από Λήμμα 1.39 είναι ισοδύναμη με την

$$Q_1^n Q_2^m G(R_1, R_2) = HF$$

Κάνοντας μερικές ακόμα πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα, που κωδικοποιεί στη γλώσσα των πολυωνύμων τις συνθήκες υπό τις οποίες ένας μορφοισμός είναι ισομορφισμός:

Θεώρημα 3.7 Οι επιφάνειες Riemann X_F, X_G είναι ισόμορφες αν και μόνο αν υπάρχουν πολυώνυμα $P_i, Q_i, U_i, V_i, H_i, H, T$ έτσι ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες:

$$(3.1) \quad Q_1^n Q_2^m G(R_1, R_2) = HF$$

$$(3.2) \quad V_1^s V_2^t F(W_1, W_2) = TG$$

$$(3.3) \quad Q_1^d Q_2^k (U_1(R_1, R_2) - XV_1(R_1, R_2)) = H_1 F$$

$$(3.4) \quad Q_1^d Q_2^k (U_2(R_1, R_2) - YV_2(R_1, R_2)) = H_2 F$$

όπου $s = \deg_X F, t = \deg_Y F, d = \deg_X (U_i - XV_i), k = \deg_Y (U_i - XV_i)$ και $W_i = U_i/V_i$. Ο ισομορφισμός δίνεται απ' το ζεύγος $(P_1/Q_1, P_2/Q_2)$.

Παρατήρηση 3.8 Θα μας χρειαστεί αργότερα να ξέρουμε τι συμβαίνει με την παραγοντοποίηση ενός μορφοισμού ως σύνθεση δυο άλλων. Για μορφοισμούς

$$f : S_F \rightarrow S_G, h : S_G \rightarrow S_D, u : S_F \rightarrow S_D$$

όπου δίνονται από τα ζεύγη

$$f = (R_1, R_2) = (P_1/Q_1, P_2/Q_2)$$

$$h = (W_1, W_2) = (U_1/V_1, U_2/V_2)$$

$$u = (Z_1, Z_2) = (L_1/M_1, L_2/M_2)$$

το να είναι το διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccc} S_F & \xrightarrow{f} & S_G \\ & \searrow u & \downarrow h \\ & & S_D \end{array}$$

μεταθετικό, είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη δυο ταυτοτήτων της μορφής :

$$Q_1^d Q_2^k (U_1(R_1, R_2)M_1 - V_1(R_1, R_2)L_1) = H_1^1 F$$

$$Q_1^{d'} Q_2^{k'} (U_2(R_1, R_2)M_2 - V_2(R_1, R_2)L_2) = H_1^2 F$$

Παρατηρούμε ότι για $u = (X, Y)$ αυτές οι σχέσεις γίνονται οι σχέσεις του θεωρήματος 3.7.

3.4 Δράση Galois

Θα συμβολίζουμε με $\text{Gal}(\mathbb{C})$ την ομάδα $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ των αυτομορφισμών του \mathbb{C} .

Παρατήρηση 3.9 Η $\text{Gal}(\mathbb{C})$ είναι μια "τεράστια" ομάδα, για παράδειγμα παρατηρούμε ότι για κάθε υπόσωμα K του \mathbb{C} , κάθε $a \in \mathbb{C}$ και μονομορφισμό $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει επέκταση $\sigma : K(a) \rightarrow \mathbb{C}$.

Αν το a είναι αλγεβρικό, τότε για κάθε ρίζα b του ελαχίστου πολυωνύμου του a πάνω απ' το K , μπορούμε να απεικονίσουμε το a στο $\sigma(b)$, κι έτσι έχουμε έναν μονομορφισμό $\sigma : K(a) \rightarrow \mathbb{C}$.

Από την άλλη αν το a είναι υπερβατικό πάνω απ' το K τότε $K(a) \simeq K(X)$ και άρα μπορούμε να ορίσουμε μια επέκταση $\sigma : K(a) \rightarrow \mathbb{C}$ στέλλοντας το a σε οποιονδήποτε υπερβατικό.

Ισχυρότερα, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 3.10 Έστω $K \leq \mathbb{C}$ υπόσωμα, και $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$ μονομορφισμός. Τότε ο σ επεκτείνεται σε

- (i) αυτομορφισμό του \overline{K} .
- (ii) αυτομορφισμό του \mathbb{C} .

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο

$$\{(L, t) : K \leq L \leq \overline{K}, t : L \rightarrow \mathbb{C}, t|_K = \sigma\}$$

με την διάταξη

$$(L_1, t_1) \leq (L_2, t_2) \Leftrightarrow L_1 \leq L_2, t_2|_{L_1} = t_1$$

και παρατηρούμε ότι είναι επαγωγικό. Άρα από Λήμμα του Zorn περιέχει μεγιστικό στοιχείο (L, t) . Έστω ότι υπάρχει $a \in \overline{K} - L$ τότε από Παρατήρηση 3.9 ο t επεκτείνεται στο $L(a)$ το οποίο αντιφάσκει την μεγιστικότητα του L . Τελικά $L = \overline{K}$. Εντελώς όμοια αποδεικνύεται το ii).

Ορισμός 3.11 Αν $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ θα γράφουμε a^σ αντί για $\sigma(a)$. Επιπλέον:

- (i) Για ένα πολυώνυμο

$$P = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \in \mathbb{C}[X, Y] \text{ ορίζουμε } P^\sigma := \sum_{i,j} a_{ij}^\sigma X^i Y^j.$$

Αντίστοιχα για ρητές συναρτήσεις

$$R = P(X, Y)/Q(X, Y), R^\sigma = P^\sigma(X, Y)/Q^\sigma(X, Y)$$

Έτσι η σ επάγει αυτομορφισμούς στους δακτυλίους $\mathbb{C}[X, Y], \mathbb{C}(X, Y)$.

- (ii) Για μια επιφάνεια Riemann $S \simeq S_F$ ορίζουμε $S^\sigma = S_{F^\sigma}$.
- (iii) Για έναν μορφισμό $f : S_F \rightarrow S_G$ που δίνεται από το ζεύγος (R_1, R_2) ορίζουμε $f^\sigma : S_{F^\sigma} \rightarrow S_{G^\sigma} = (R_1^\sigma, R_2^\sigma)$.
- (iv) Για μια κλάση ισοδυναμίας (S, f) διακλαδιζόμενα καλυμμάτων της σφαίρας ορίζουμε (S^σ, f^σ) .

Διατυπώνουμε τώρα υπό τη μορφή λήμματος το καλά ορισμένο της δράσης αυτής.

Λήμμα 3.12 (i) Αν $Q(x, y) \in M(S_F)$, τότε $Q \neq 0 \Rightarrow Q^\sigma \neq 0$.

(ii) Αν

$$\frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)} = \frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)} \in M(S_F)$$

τότε

$$\frac{P_1^\sigma(x, y)}{Q_1^\sigma(x, y)} = \frac{P_2^\sigma(x, y)}{Q_2^\sigma(x, y)} \in M(S_{F^\sigma})$$

(iii) Αν $f : S_F \rightarrow S_G$ είναι ένας μορφισμός (αντ. ισομορφισμός) που μετατρέπει την $R_2(x, y) \in M(S_G)$ στην $R_1(x, y) \in M(S_F)$ τότε ο f^σ είναι ένας μορφισμός (αντ. ισομορφισμός) που μετατρέπει την $R_2^\sigma(x, y) \in M(S_{G^\sigma})$ στην $R_1^\sigma(x, y) \in M(S_{F^\sigma})$.

Απόδειξη: (i) Από Λήμμα 1.39, $Q \equiv 0$ αν και μόνο αν $Q(X, Y) = HF$ για κάποιο $H(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$. Αλλά τότε $Q^\sigma = H^\sigma F^\sigma$ το ποίο είναι ισοδύναμο με το $Q^\sigma \equiv 0$.

(ii) Όμοια με το (i), μια σχέση της μορφής

$$P_1(x, y)Q_2(x, y) - P_2(x, y)Q_1(x, y) \equiv 0$$

στην S_F , αν και μόνο αν

$$P_1(x, y)Q_2(x, y) - P_2(x, y)Q_1(x, y) = HF$$

(iii) Όμοια εφαρμόζουμε την σ στις σχέσεις του Θεωρήματος 3.7 και την Παρατήρηση 3.8.

3.5 Σημεία και Διακριτές Εκτιμήσεις

Σ' αυτή την παράγραφο θα εισάγουμε ένα σημαντικό εργαλείο της Αριθμητικής Γεωμετρίας, τις διακριτές εκτιμήσεις. Το σημαντικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι μια αντιστοιχία μεταξύ των σημείων μιας επιφάνειας Riemann και των διακριτών εκτιμήσεων στο function field της. Αυτό θα μας επιτρέψει αργότερα να επεκτείνουμε την δράση Galois σε όλα τα σημεία μιας επιφάνειας Riemann.

Ορισμός 3.13 Έστω L μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{C}(x)$, μια απεικόνιση $v : L^\times \rightarrow \mathbb{Z}$, θα λέγεται **διακριτή εκτίμηση (discrete valuation)** αν για κάθε $a, b \in L^\times$

$$i) \quad v(ab) = v(a) + v(b)$$

$$ii) \quad v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$$

$$iii) \quad H \quad v \text{ δεν είναι τετριμμένη, δηλαδή } v(L) \neq 0.$$

$$iv) \quad v(z) = 0, c \in \mathbb{C}^x$$

Συνήθως επεκτείνουμε την v σε όλο το L θέτοντας $v(0) = \infty$.

Πρόταση 3.14 Ισχύουν τα ακόλουθα

$$i) \quad \text{Το σύνολο } \mathcal{O} = \{f \in L : v(f) \geq 0\} \text{ αποτελεί δακτύλιο.}$$

- ii) $f \in \mathcal{O}$ αντιστρέφεται $\Leftrightarrow v(f) = 0$.
- iii) Τα μη-αντιστρέψιμα στοιχεία του $M_v = \{f \in L : v(f) > 0\}$ αποτελούν ένα ιδεώδες του \mathcal{O} και άρα ο \mathcal{O} είναι **τοπικός δακτύλιος** (δηλαδή έχει μοναδικό μεγιστικό ιδεώδες).
- iv) Αν $v(L^\times) = m_v \mathbb{Z}$, τότε $f \in \mathcal{O} \setminus M \Leftrightarrow v(f) = m$. Το f θα λέγεται μια **uniformizing parameter** του \mathcal{O} .

Αποδειξη: Εύκολη

Συχνά είναι βολικό οι εκτιμήσεις που χρησιμοποιούμε να είναι επί, για το λόγο αυτό από μια εκτίμηση v μπορούμε να ορίσουμε την κανονικοποίηση της ως $v^* = v/m_v$. Προφανώς αυτή η κανονικοποίηση δεν αλλάζει τον τοπικό δακτύλιο ούτε το μεγιστικό του ιδεώδες. Θα λέμε ότι 2 εκτιμήσεις είναι **ισοδύναμες** αν οι κανονικοποιήσεις τους συμπίπτουν. Η επόμενη πρόταση μας δείχνει πως εμφανίζονται φυσιολογικά οι εκτιμήσεις στη μελέτη των επιφανειών Riemann:

Πρόταση 3.15 Κάθε σημείο P μιας συμπαγούς και συνεκτικής επιφάνειας Riemann ορίζει μια κανονικοποιημένη εκτίμηση v_P στο σώμα $\mathcal{M}(S)$, μέσω του τύπου $v_P(f) = \text{ord}_P(f)$. Δηλαδή παίρνει τιμή m αν η f έχει ρίζα τάξης m στο P , $-m$ αν έχει πόλο τάξης m και 0 αλλιώς.

Απόδειξη: Άμεση από της ιδιότητες της τάξης και το γεγονός ότι για κάθε σημείο P υπάρχει μερόμορφη με ρίζα στο P .

Επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε και το αντίστροφο αυτής της πρότασης, δηλαδή ότι όλες οι εκτιμήσεις του $\mathcal{M}(S)$ προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο. Έτσι θα έχουμε δημιουργήσει μια αντιστοιχία μεταξύ σημείων και εκτιμήσεων και θα μπορέσουμε επιτέλους να επεκτείνουμε την δράση της $\text{Gal}(\mathbb{C})$ σ' όλα τα $P \in S$ μέσω του τύπου

$$v_{P^\sigma}(f^\sigma) = v_P(f)$$

Πριν την γενική περίπτωση θα αποδείξουμε την αντιστοιχία για την $S = \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$.

Πρόταση 3.16 Κάθε εκτίμηση του $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1 \mathbb{C}) = \mathbb{C}(x)$ είναι ισοδύναμη με μια της μορφής v_z για κάποιο $z \in \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$.

Απόδειξη: Έστω v μια εκτίμηση και $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1 \mathbb{C})$, τότε είναι της μορφής

$$f = c \frac{\prod_i (x - a_i)^{n_i}}{\prod_j (x - b_j)^{m_j}}$$

και άρα

$$v(f) = \sum_i n_i v(x - a_i) - \sum_j m_j v(x - b_j)$$

συνεπώς η v καθορίζεται πλήρως από την τιμή της στα πρωτοβάθμια πολυώνυμα $x - a$. Διακρίνουμε τώρα 2 περιπτώσεις

- i) Για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $v(x - a) \geq 0$. Αφού η v δεν είναι τετριμμένη υπάρχει $b \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε $v(x - b) = k > 0$. Τότε ισχυριζόμαστε ότι $v = kv_b$. Πράγματι αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $a \neq b$ τότε $v(x - a) = 0$, διότι διαφορετικά θα είχαμε

$$k = v(x - b) = v(x - a + a - b) = \min(v(x - a), 0) = 0$$

το οποίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $k > 0$.

ii) Υπάρχει ένα $a \in \mathbb{C}$, $v(x - a) = k < 0$. Τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$v = -kv_\infty$$

Πράγματι, έστω $b \neq a$ τότε

$$k = v(x - a) = v(x - b + b - a) \geq \min(v(x - b), 0)$$

άρα αν $v(x - b) = 0 \Rightarrow k \geq 0$, άτοπο. Συνεπάγεται ότι $v(x - b) = k = -kv_\infty(x - b)$.

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι όπως οι μερόμορφες συναρτήσεις διαχωρίζουν τα σημεία μιας επιφάνειας (Θεώρημα 1.43), το ίδιο κάνουν και οι εκτιμήσεις.

Λήμμα 3.17 Έστω δυο κανονικοποιημένες εκτιμήσεις v_1, v_2 ενός σώματος L . Τότε

$$v_1 = v_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_2}$$

Απόδειξη: Αν $\mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_2}$, τότε $M_{v_1} = M_{v_2} = (f) \Leftrightarrow v_1(f) = v_2(f) = 1$. Για ένα οποιοδήποτε στοιχείο g του L^\times , έχουμε

$$v_1(g) = n \Leftrightarrow v_1(f^n/g) = 0 \Leftrightarrow f^n/g \in \mathcal{O}_{v_1}^\times \Leftrightarrow f^n/g \in \mathcal{O}_{v_2}^\times \Leftrightarrow v_2(f^n/g) = 0 \Leftrightarrow v_2(g) = n.$$

Πρόταση 3.18 Για κάθε δυο διακεκριμένες εκτιμήσεις v_1, v_2 , υπάρχει $f \in L$, έτσι ώστε $v_1(f) \geq 0, v_2(f) < 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι δεν ισχύει η πρόταση, αυτό θα σήμαινε ότι $\mathcal{O}_{v_1} \subset \mathcal{O}_{v_2}$. Από το προηγούμενο Λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_2}$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι τα μεγιστικά τους ιδεώδη είναι ίσα, $M_{v_1} = M_{v_2}$. Έστω ένα $y \in M_{v_2}/M_{v_1}$ και άρα $v_2(y) > 0 \Rightarrow v_2(1/y) < 0 \Rightarrow 1/y \notin \mathcal{O}_{v_2}$. Από την άλλη $v_1(y) \leq 0 \Rightarrow v_1(y) \geq 0 \Rightarrow 1/y \in \mathcal{O}_{v_2}$, το οποίο είναι άτοπο. Τελικά $M_{v_2} \subset M_{v_1}$.

Τώρα θα δείξουμε ότι μια uniformizing parameter $f \in \mathcal{O}_{v_1}$, ανήκει στο M_{v_2} και άρα

$$M_{v_1} = f\mathcal{O}_{v_1} \subset \mathcal{O}_{v_2} = M_{v_2}$$

Έστω ότι $f \in \mathcal{O}_{v_2} \setminus M_{v_2}$, δηλαδή είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του \mathcal{O}_{v_2} . Αλλά τότε για ένα μη μηδενικό $y \in M_{v_2}$ θα είχαμε ότι $y = uf^k$ όπου το u είναι αντιστρέψιμο στον \mathcal{O}_1 άρα και στον \mathcal{O}_2 , το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος αν u είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathcal{O}_2^\times/\mathcal{O}_1^\times$ τότε $v_1(u) < 0 \Rightarrow v_1(1/u) > 0$ και άρα $1/u \in M_{v_1} = M_{v_2}$ το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Πόρισμα 3.19 Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 2$ διακεκριμένες εκτιμήσεις ενός σώματος L . Τότε:

i) $\exists y \in L$ έτσι ώστε $v_1(y) > 0$ και $v_i(y) < 0$ για $i \geq 2$.

ii) $\exists w \in L$ έτσι ώστε $v_1(w) = 0$ και $v_k(w)$ είναι οσοδήποτε μεγάλο για $k \geq 2$.

Απόδειξη:

i) Με επαγωγή. Για $n = 2$, από την Πρόταση 3.18 υπάρχει μια y_1 και μια y_2 , έτσι ώστε

$$v_1(y_1) \geq 0, v_2(y_1) < 0, v_2(y_2) < 0, v_2(y_2) \geq 0$$

Συνεπώς, $v_1(y_1/y_2) > 0$ ενώ $v_2(y_1/y_2) < 0$.

Για την επαγωγή, έστω $f \in L$, με $v_1(f) > 0, v_i < 0, i = 2, 3, \dots, n-1$. Επιπλέον, υπάρχει $g \in L$ με $v_1(g) > 0, v_n(g) < 0$. Θέτουμε $y = f + g^r$ και τότε για αρκετά μεγάλο r έχουμε

$$v_n(y) = v_n(f + g^r) = \min(v_n(f), v_n(g^r)) = rv_n(z) < 0$$

και όμοια $v_1(y) > 0$ και $v_k(y) < 0$ για $k = 2, 3, \dots, n-1$. (Όλα με κατάλληλο r)

ii) Έστω ένα y όπως στο i), τότε θέτουμε $z = 1 + y^d$. Τότε, $v_1(1/z) = -v_1(z) = v_1(1) = 0$. Ενώ, για $k \geq 2$,

$$v_k(1/z) = -v_k(z) = -v_k(1 + y^d) = -v_k(y^d) = d(-v_k(y))$$

το οποίο γίνεται οσοδήποτε μεγάλο μεγαλώνοντας το d .

Έστω $L_1 \subset L_2$ μια πεπερασμένη επέκταση ενός function field L_1 . Μια εκτίμηση v στο L_2 επάγει μια εκτίμηση στο L_1 με την $v|_{L_1}$. Η τελευταία βέβαια δεν είναι κανονικοποιημένη πάντα, ακόμα και αν η v είναι κανονικοποιημένη. Στην πραγματικότητα, για μια κανονικοποιημένη v έχουμε ότι $v(L_1^x) = m\mathbb{Z}$ όπου $m = [v(L_2^x : v(L_1)^x)]$.

Θεώρημα 3.20 Έστω μια επέκταση $L_1 \subset L_2$ όπως πριν και v_1, v_2, \dots, v_n διακεκριμένες κανονικοποιημένες εκτιμήσεις στο L_2 , έτσι ώστε οι περιορισμοί τους να είναι ισοδύναμες στο L_1 . Και έστω $e_k := [\mathbb{Z} : v_k(L_1^x)]$. Τότε:

$$\sum_k e_k \leq [L_2 : L_1]$$

Απόδειξη: Έστω f_1, \dots, f_n uniformizing parameters των εκτιμήσεων v_1, \dots, v_n . Από το Πρόσλημα 3.19 υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in L_2$ ώστε $v_k(y_k) = 0$ και $v_i(y_j) \geq N_{ij}, i \neq j$ για οποιαδήποτε επιλογή N_{ij} . Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι τα $\sum_k e_k$ στοιχεία

$$\begin{aligned} & y_1 f_1, y_1 f_1^2, \dots, y_1 f_1^{e_1} \\ & y_2 f_2, y_2 f_2^2, \dots, y_2 f_2^{e_2} \\ & \vdots \\ & y_n f_n, y_n f_n^2, \dots, y_n f_n^{e_n} \end{aligned}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το L_1 . Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός τους

$$\sum c_{ij} y_i f_i^j$$

και έστω c_{rs} ο συντελεστής που η v παίρνει ελάχιστη τιμή. Διαιρώντας τους συντελεστές με c_{rs} , μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο c_{11} είναι 1 και οι υπόλοιποι ικανοποιούν $v(c_{kl}) \geq 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} v_1(y_1 f_1) &= 1 \\ v_1(c_{12} y_1 f_1^2) &= v(c_{12}) + 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$v_1(c_{1e_1}y_1f_1^{e_1}) = v(c_{1e_1}) + e_1$$

που είναι διαφορετικές ανά δυο τιμές και άρα $v_1(\sum c_{1j}y_1f_1^j) = v_1(y_1f_1) = 1$. Επιπλέον, είναι για $k \geq 2$

$$v_1(c_{kj}y_kf_k^j) = v_1(c_{kj}) + v_1(y_k) + jv_1(f_k) \geq N_{1k} + jv_1(f_k) \geq 2$$

για κατάλληλη επιλογή N_{jk} . Άρα εφαρμόζοντας v_1 στην ταυτότητα

$$\sum c_{1j}y_1f_1^j = - \sum_{k \geq 2} c_{kj}y_kf_k^j$$

έχουμε

$$1 = v_1(\sum c_{1j}y_1f_1^j) = v_1(\sum_{k \geq 2} c_{kj}y_kf_k^j) \geq \min_k(v_1(c_{kj}y_kf_k^j)) \geq 2$$

που είναι άτοπο.

Ειδικότερα στην περίπτωση που $L_1 = \mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ και η επέκταση $L_2 = \mathcal{M}(S)/L_1$ προέρχεται από έναν μορφισμό $f : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, έχουμε την εμφύτευση

$$f^* : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}(S)$$

$$r \mapsto r \circ f$$

Όπως έχουμε δει από το κεφάλαιο 1 η επέκταση είναι βαθμού $\deg f$. Αν επιλέξουμε ένα σημείο $a \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ και έστω P_1, P_2, \dots, P_r οι προ-εικόνες του με δείκτες διακλάδωσης m_1, \dots, m_r . Τότε η τιμή μιας εκτίμησης v_{P_i} σε μια $r \in L_1$ υπολογίζεται μέσω της εμφύτευσης

$$v_{P_i}(r) = v_{P_i}(f^*(r)) = v_{P_i}(r \circ f) = \text{ord}_{P_i}(f) \text{ord}_a(r) = m_i \text{ord}_a(r)$$

και καταλήγουμε στο ότι $v_{P_i} | = m_i v_a$. Συμπερασματικά, ο περιορισμός κάθε $v_{P_i} |$ είναι εκτίμηση ισοδύναμη με την v_a και ο δείκτης $e_i = [v_{P_i}(L_2^x) : v_{P_i}(L_1^x)]$ είναι ίσος με m_i . Έχουμε σχεδόν αποδείξει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.21 Για μια επιφάνεια Riemann S η απεικόνιση

$$P \in S \mapsto v_P$$

είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της S και των εκτιμήσεων του $\mathcal{M}(S)$.

Απόδειξη: Το 1-1 είναι άμεσο απ' το γεγονός ότι οι μερόμορφες απεικονίσεις διαχωρίζουν σημεία (Πρόταση 1.43), άρα μένει να δείξουμε ότι είναι επί.

Έστω μια αυθαίρετη εκτίμηση v και ένας μορφισμός $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Συνεπώς έχουμε μια εμφύτευση του $\mathcal{M}(S)$ στο $\mathbb{C}(x)$. Έτσι η v περιορίζεται σε μια εκτίμηση στο $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$. Από Πρόταση 3.16 η $v |$ είναι της μορφής v_a για κάποιο $a \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\exists i : v = v_{P_i}$ όπου P_1, P_2, \dots είναι οι προ-εικόνες του a . Αρκεί να δείξουμε ότι οι v_{P_i} είναι οι μόνες επεκτάσεις της v_a . Πράγματι από Θεώρημα 3.20,

$$\sum_i m_i + \sum (\text{δείκτες από άλλες επεκτάσεις}) \leq \deg(f)$$

Αλλά ξέρουμε από Πρόταση 1.32, ότι ήδη $\deg f = \sum_i m_i$ και άρα άλλες επεκτάσεις δεν υπάρχουν.

Παρατήρηση 3.22 Υπενθυμίζουμε ότι η συμπαγής επιφάνεια S_F , κατασκευάστηκε από μια μη-συμπαγή επιφάνεια S_F^X με την επισύναψη πεπερασμένων σημείων με έναν "παράξενο" τρόπο. Για ένα $P = (a, b) \in S_F^X \subset \mathbb{C}^2$ μπορούμε να ορίζουμε εύκολα την δράση της $\text{Gal}(\mathbb{C})$, θέτοντας $P^\sigma = (a, b)^\sigma = (a^\sigma, b^\sigma)$. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι αυτός ο κανόνας δημιουργεί μια αντιστοιχία μεταξύ της S_F^X και της $S_{F^\sigma}^X$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.21 για τις εκτιμήσεις μπορούμε να επεκτείνουμε την δράση αυτή και στα επιπλέον σημεία.

Ορισμός 3.23 Αν v είναι μια εκτίμηση στο $\mathcal{M}(S)$ τότε ορίζουμε μια εκτίμηση v^σ στο $\mathcal{M}(S^\sigma)$ ως εξής

$$v^\sigma := v \circ \sigma^{-1}$$

οπότε

$$v^\sigma(f^\sigma) = v(f), f \in \mathcal{M}(S)^\times$$

Ανάλογα, ορίζουμε για ένα σημείο $P \in S$ το P^σ ως το μοναδικό σημείο Q της S^σ έτσι ώστε $(v_P)^\sigma = v_Q$.

Πρόταση 3.24 i) Για κάθε $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$, η απεικόνιση $P \mapsto P^\sigma$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ S και S^σ .

ii) Στα σημεία $P \in S_F^X$ ο παραπάνω ορισμός συμφωνεί με τον ορισμό της Παρατήρησης 3.22.

iii) Ειδικότερα, $a^\sigma = a$ για όλα τα $a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ και κάθε $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$.

Απόδειξη: i) Η αντίστροφη δίνεται από τον τύπο $Q \mapsto Q^{\sigma^{-1}}$.

ii) Θεωρούμε την εμφύτευση $\mathbb{C}(\mathbf{x}) \hookrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Έστω ένα σημείο $P = (a, b) \in S_F^X$, τότε έχουμε

$$(v_P)^\sigma(\mathbf{x} - a^\sigma) = v_P(\mathbf{x} - a) = 1$$

και άρα ο περιορισμός της $(v_P)^\sigma$ συμπίπτει με την v_{a^σ} . Αυτό σημαίνει, όπως και στην απόδειξη του 3.21 ότι η $(v_P)^\sigma$ είναι μια από τις $n = \deg_{\mathbf{y}} F$ εκτιμήσεις που αντιστοιχούν στις προ-εικόνες του a^σ , σημεία δηλαδή της μορφής (a^σ, y) . Η μοναδική από αυτές που παίρνει θετική τιμή στο $\mathbf{y} - b^\sigma$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στο (a^σ, b^σ) .

iii) Μένει να το δείξουμε για $a = \infty$, είναι

$$v_\infty^\sigma(\mathbf{x} - a) = v_\infty(\mathbf{x} - a^\sigma) = -1 = v_\infty(\mathbf{x} - a)$$

3.6 Αναλλοίωτες της δράσης της $\text{Gal}(\mathbb{C})$

Οι επιφάνειες S και S^σ δεν είναι κατ' ανάγκη ισόμορφες, μιας και η αντιστοιχία που ορίζει μια σ δεν είναι ολόμορφη, στην πραγματικότητα δεν είναι καν συνεχής αν εξαιρέσει κανείς την μιγαδική συζυγία. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν διάφορα χαρακτηριστικά που μένουν αναλλοίωτα μέσω της δράσης στα καλύμματα (S, f) της σφαίρας.

Θεώρημα 3.25 Για την δράση της $\text{Gal}(\mathbb{C})$ στα καλύμματα $(S, f)^\sigma = (S^\sigma, f^\sigma)$, ισχύουν

i) $\deg(f^\sigma) = \deg(f)$.

$$ii) (f(P))^\sigma = f^\sigma(P^\sigma).$$

$$iii) ord_{P^\sigma}(f^\sigma) = ord_P(f).$$

$$iv) a \in \mathbb{P}^1\mathbb{C} \text{ είναι κρίσιμη του } f \text{ ανν } a^\sigma \in \text{crit}(f^\sigma).$$

$$v) g(S) = g(S^\sigma), \text{ δηλαδή οι } S, S^\sigma \text{ είναι ομοιομορφικές.}$$

vi) Η απεικόνιση

$$\text{Aut}(S, f) \rightarrow \text{Aut}(S^\sigma, f^\sigma)$$

$$h \mapsto h^\sigma.$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

vii) Οι αντίστοιχες ομάδες μονοδρομίας $\text{Mon}(f), \text{Mon}(f^\sigma)$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη: i) Μιας και η σ είναι αυτομορφισμός έχουμε

$$\deg f = [\mathcal{M}(S) : \mathcal{M}(f)] = [\mathcal{M}(S^\sigma) : \mathcal{M}(f^\sigma)] = \deg(f^\sigma)$$

ii), iii) Όπως έχουμε δει $f(P) = a$ σημαίνει

$$v_P(R \circ f) = e_f(P) ord_a(R)$$

για κάθε ρητή συνάρτηση R . Άρα το να δείξουμε ότι $f^\sigma(P^\sigma) = a^\sigma$ είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι

$$v_{P^\sigma}(R^\sigma \circ f^\sigma) = e_{f^\sigma}(P^\sigma) ord_{a^\sigma}(R^\sigma)$$

για κάθε ρητή συνάρτηση R^σ . Αλλά

$$v_{P^\sigma}(R^\sigma \circ f^\sigma) = v_{P^\sigma}((R \circ f)^\sigma) = v_P(R \circ f) = e_f(P) ord_a(R) = e_{f^\sigma}(P^\sigma) ord_{a^\sigma}(R^\sigma)$$

μιας και

$$ord_{P^\sigma}(f^\sigma) = v_{P^\sigma}(f^\sigma) = v_P(f) = ord_P(f)$$

και όμοια

$$ord_{a^\sigma}(R^\sigma) = v_{a^\sigma}(R^\sigma) = v_a(R) = ord_a(R)$$

iv) Προφανής συνέπεια των ii), iii).

v) Από i) και iii) (ίδιοι δείκτες διακλάδωσης για f, f^σ) παρατηρούμε ότι η ταυτότητα Riemann-Hurwitz είναι ίδια για τις f, f^σ και άρα το γένος της S είναι ίσο με της S^σ .

vi) Αν $h \in \text{Aut}(S, f)$ τότε

$$f^\sigma = (f \circ h)^\sigma = f^\sigma \circ h^\sigma$$

vii) Εφαρμόζουμε το vi) στις κανονικοποιήσεις των $(S, f), (S^\sigma, f^\sigma)$.

3.7 Κριτήριο ορισιμότητας πάνω απ' το $\overline{\mathbb{Q}}$

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα κριτήριο για το αν μια επιφάνεια Riemann ορίζεται πάνω απ' το $\overline{\mathbb{Q}}$. Αν μια επιφάνεια Riemann X ορίζεται πάνω από ένα σώμα αριθμών, δηλαδή αν υπάρχει ένα πολυώνυμο $F(x) \in \overline{\mathbb{Q}}$ τέτοιο ώστε $X = X_F$ τότε η τροχιά του $\{F^\sigma\}_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})}$ είναι πεπερασμένη άρα και οι κλάσεις ισομορφίας επιφανειών Riemann X_{F^σ} είναι πεπερασμένες. Όπως θα δούμε αυτή είναι και ικανή συνθήκη για να ορίζεται μια X πάνω απ' το $\overline{\mathbb{Q}}$.

Θεώρημα 3.26 (κριτήριο ορισιμότητας) Για μια συμπαγή και συνεκτική επιφάνεια Riemann τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η X ορίζεται πάνω απ' το $\overline{\mathbb{Q}}$
- (ii) Η τροχιά $\{X^\sigma\}_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})}$ είναι πεπερασμένη. (ως προς ισομορφία επιφανειών Riemann)

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποια Λήμματα και να υπενθυμίσουμε κάποια πράγματα από τις υπερβατικές επεκτάσεις

Ορισμός 3.27 i) Έστω μια επέκταση L/K . Ένα περασμένο σύνολο $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subset L$ λέγεται **αλγεβρικά ανεξάρτητο (πάνω από το K)** αν δεν υπάρχει μη-μηδενικό πολυώνυμο $f(X_1, \dots, X_k) \in K[X_1, \dots, X_k]$ με $f(z_1, \dots, z_k) = 0$. Για $k = 1$ το z είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο πάνω απ το K αν και μόνο αν είναι υπερβατικό. Όταν δεν αναφέρεται το σώμα K εννοούμε ότι $K = \mathbb{Q}$.

ii) Ένας μορφισμός \mathbb{Q} -αλγεβρών

$$s : \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, z_k] \rightarrow \mathbb{C}$$

όπου $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ αλγεβρικά ανεξάρτητο θα λέγεται **εξειδίκευση (specialization)**. Ο αριθμός

$$\max_i (|z_i - s(z_i)|)$$

θα λέγεται **απόσταση (distance)** της ειδικεύσεως.

iii) Για μια ειδικεύση s και ένα πολυώνυμο $F(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ορίζουμε το

$$F^s := F(s(z_1), s(z_2), \dots, s(z_k))$$

Λήμμα 3.28 Έστω $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ αλγεβρικά ανεξάρτητα ένα $u \in \mathbb{C}$ αλγεβρικό πάνω απ' το $\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k]$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_u^s(X)$ και μια ειδικεύση

$$s : \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k] \rightarrow \mathbb{C}$$

η s επεκτείνεται σε έναν μορφισμό

$$s_b : \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k, u] \rightarrow \mathbb{C}$$

θέτοντας $s_b(u) = b$ όπου b οποιαδήποτε ρίζα του πολυωνύμου m_u^s .

Απόδειξη: Για κάθε στοιχείο $x = \sum a_i u^i$, $a_i \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k]$ ορίζουμε

$$s_b(x) = \sum a_i^s b^i$$

που είναι μορφισμός \mathbb{Q} -αλγεβρών, εάν δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή ότι δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη αναπαράσταση του x .

Έστω $x = x = \sum c_i u^i$ μια άλλη αναπαράσταση του x , τότε $\sum (a_i - c_i) u^i = 0$ που συνεπάγεται ότι $\sum (a_i - c_i) X^i = p(X) m_u(X)$ για κάποιο πολυώνυμο $p \in \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n)[X]$. Από το Λήμμα του Gauss έχουμε ότι $p \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n][X]$. Άρα

$$0 = p^s(b) m_u^s(b) = \sum a_i^s b^i - \sum c_i^s b^i$$

και άρα

$$\sum a_i^s b^i = \sum c_i^s b^i$$

Λήμμα 3.29 Έστω $u = u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του $m_u(X)$ και $\delta = \min_{k,l} (|u_k - u_l|)$. Τότε υπάρχει $\epsilon(u) > 0$ τέτοιο ώστε αν

$$s : \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k] \rightarrow \mathbb{C}$$

μια ειδίκευση όπως παραπάνω τότε με

$$\max_i (|z_i - s(z_i)|) < \epsilon(u)$$

τότε το πολυώνυμο $m_u^s(X)$ έχει μοναδική ρίζα u_s με την ιδιότητα

$$|u - u_s| < \delta$$

Απόδειξη: Γράφουμε $m_u(X)$ στη μορφή $m_u(X) = a_n \prod (X - u_i)$ και έστω (q_1, \dots, q_n) μια ειδίκευση απόστασης ϵ . Όσο το ϵ μικραίνει, οι συντελεστές του m_u^s πλησιάζουν τους συντελεστές του m_u . Άρα $a_n^s \neq 0$ και γράφουμε $m_u^s = a_n^s \prod (X - c_i)$. Επιπλέον η διαφορά

$$|m_u(u_j) - m_u^s(u_j)| = |m_u^s(u_j)| = |a_n^s| \prod |u_j - c_i|$$

γίνεται οσοδήποτε μικρή και άρα ένας παράγοντας έστω ο $|u_j - c_j|$ πρέπει να γίνεται και αυτός οσοδήποτε μικρός. Συνεπώς για αρκετά μικρό ϵ έχουμε ότι για κάθε u_j υπάρχει ένα a_s πούμε c_j ρίζα του m_u^s με

$$|u_j - c_j| < \delta/2$$

θέτουμε τώρα $u_s = c_1$ και παρατηρούμε ότι

$$|u_1 - c_2| < \delta/2$$

τότε

$$|u_1 - u_2| \leq |u_1 - c_2| + |u_2 - c_2| < 2 \frac{\delta}{2} = \delta$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ορισμός 3.30 Μια ειδίκευση θα λέγεται **απειροστή (infinitesimal)** αν η απόσταση της είναι μικρότερη από το $\epsilon(u)$ όπως αυτό ορίστηκε στο προηγούμενο λήμμα.

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Κριτηρίου

Απόδειξη Θεωρήματος 3.26: Έστω $\Sigma_1 = \{z_1, \dots, z_d\}$ ένα μεγιστικό υποσύνολο αλγεβρικά ανεξάρτητων στοιχείων των συντελεστών του $F(X, Y)$. Από το Θεώρημα Πρωταρχικού στοιχείου για τις διαχωρίσιμες επεκτάσεις έχουμε ότι η επέκταση που παράγεται από όλους τους συντελεστές του F είναι της μορφής

$$K_1 = \mathbb{Q}(\Sigma_1, v)$$

για κάποιο v αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{Q}(\Sigma_1)$ με ελάχιστο πολυώνυμο

$$m_v(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Q}[\Sigma_1]$$

Για ένα στοιχείο $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$, ορίζουμε το σώμα

$$K_2 = \sigma(K_1) = \mathbb{Q}(\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_d), \sigma(v))$$

που παράγεται από τους συντελεστές του F^σ . Θεωρούμε τώρα εκείνα τα $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε το σύνολο

$$\Sigma_2 = \{z_1, z_2, \dots, z_d, z_{d+1} := \sigma(z_1) \dots z_{2d} := \sigma(z_d)\}$$

να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο. Από την συνθήκη του κριτηρίου για τις πεπερασμένες κλάσεις, έχουμε ότι υπάρχουν αρκετά $\tau, \beta \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ για τα οποία υπάρχει ισομορφισμός

$$\Phi : S_{F^\tau} \rightarrow S_{F^\beta}$$

και άρα ισομορφισμός

$$\Psi = \Phi^{\tau^{-1}} \rightarrow S_{F^\sigma}$$

για $\sigma = \tau^{-1} \circ \beta$.

Στη συνέχεια επεκτείνουμε κι άλλο το σύνολο Σ_2 προσθέτοντας συντελεστές από όλα τα πολυώνυμα

$$P_i, Q_i, U_i, V_i, T, H_i, H$$

τα οποία εμπλέκονται στις αντίστοιχες εξισώσεις για τον Φ όπως στην Πρόταση 3.6 και το Θεώρημα 3.7. Συγκεκριμένα, θεωρούμε $\Sigma_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ μια μεγιστική τέτοια επέκταση ώστε το σύνολο να παραμένει αλγεβρικά ανεξάρτητο και θεωρούμε το σώμα που παράγεται από τα K_1, K_2 και όλους αυτούς τους συντελεστές το οποίο θα είναι της μορφής

$$K_3 = \mathbb{Q}(\Sigma_3, u)$$

Για $j = d+1, \dots, n$, έστω $q_j \in \mathbb{Q}(i)$ έτσι ώστε η ειδίκευση

$$s : \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, z_n, u] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z_j \mapsto q_j$$

να είναι απειροστή. Θεωρούμε τον T υποδακτύλιο του $K_3 = \mathbb{Q}(z_1, z_2, \dots, z_n, v)$ των στοιχείων

$$z = \frac{A(z_1, z_2, \dots, z_n, v)}{B(z_1, z_2, \dots, z_n, v)}$$

όπου A, B πολυώνυμα που $s(B) \neq 0$. Τότε η s επεκτείνεται μοναδικά σε

$$s : T \rightarrow \mathbb{C}$$

θέτοντας $s(A/B) := s(A)/s(B)$. Και επιπλέον σε

$$s : T[X, Y] \rightarrow \mathbb{C}[X, Y]$$

Τώρα αν επιλέξουμε τα q_i έτσι ώστε να είναι αρκετά κοντά στα z_i δηλαδή η απόσταση της s να είναι αρκετά μικρή, τότε το σύνολο των συντελεστών των

$$P_i, Q_i, U_i, V_i, T, H_i, H$$

θα ανήκει στον T και άρα θα μπορούμε να εφαρμόσουμε την s σε ταυτότητες με αυτά τα πολυώνυμα.

Από Θεώρημα 3.7 και ένα κάρο τέτοιες πολυωνυμικές ταυτότητες συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Psi^s : S_{F^s} \rightarrow S_{(F^\sigma)^s}$$

Εκ κατασκευής, οι συντελεστές του $(F^\sigma)^s$, ανήκουν στο σώμα που παράγεται από τους q_j μαζί με το $s(\sigma(v))$ το οποίο πρέπει να είναι ρίζα του $(m_v^\sigma)^s \in \mathbb{Q}(i)[X]$ και άρα είναι αλγεβρικός. Άρα $(F^\sigma)^s \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$.

Τέλος, $F^s = F$ αφού το $s(v)$ πρέπει να είναι ρίζα του $m_v(X) = m_v^s(X)$. Έχουμε ότι για αρκετά μικρή απόσταση της ειδικεύσης s το $s(v)$ πηγαίνει όσο κοντά θέλουμε στο v και άρα συμπίπτει με το v .

3.8 Η κατεύθυνση $(b) \Rightarrow (a)$

Με το θεώρημα 3.26 πλέον στο οπλοστάσιο μας μπορούμε να ολοκληρώσουμε την άλλη κατεύθυνση του θεωρήματος του Belyi.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 : $(b) \Rightarrow (a)$

Λόγω του Θεωρήματος 3.26 αρκεί να δείξουμε οι υπάρχον πεπερασμένες κλάσεις ισομορφίας. Έστω $t : X \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ένα Belyi ζεύγος με βαθμό $\deg t = d$. Τότε για κάθε $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ από Θεώρημα 3.25 ο

$$t^\sigma : X^\sigma \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$$

είναι μορφισμός Belyi βαθμού πάλι d (με τις ίδιες κρίσιμες τιμές). Άρα η οικογένεια $\{f^\sigma\}_\sigma$ επάγει πεπερασμένους διαφορετικούς μορφισμούς μονοδρομίας

$$M_{f^\sigma} : \pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \Sigma_d$$

και άρα από θεώρημα 1.34 οι κλάσεις ισομορφίας είναι πεπερασμένες.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα μπορούμε επιπλέον να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 3.31 Έστω (S, f) ένα ζεύγος Belyi, τότε το (S, f) ορίζεται πάνω απ' το $\overline{\mathbb{Q}}$.

Απόδειξη: Έστω (S, f) ένα ζεύγος Belyi, με $S = S_F$ για και

$$f(x, y) = \frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα ανάγωγο πολυώνυμο G με συντελεστές σε ένα σώμα αριθμών, ένας ισομορφισμός

$$\Phi = (V_1/W_1, V_2/W_2) : S_F \rightarrow S_G$$

και μια απεικόνιση $h \in \mathcal{M}(S_G)$ που να ορίζεται πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} S_F & \xrightarrow{\Phi} & S_G \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array}$$

Για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να μιμηθούμε αυτά που κάναμε στην απόδειξη του κριτηρίου ορισιμότητας. Έστω $K_1 = \mathbb{Q}(z_1, z_2, \dots, z_d, v)$ το σώμα που παράγεται από τους συντελεστές των F, P_1, Q_1 και θεωρούμε ένα $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ με

$$\{z_1, z_2, \dots, z_d, \sigma(z_1), \sigma(z_2), \dots\}$$

αλγεβρικά ανεξάρτητο. Επίσης το σώμα που παράγεται από τους συντελεστές των F^σ, f^σ είναι το

$$K_2 = \mathbb{Q}(z_{d+1}, \dots, z_{2d}, \sigma(v))$$

Μιας και όλα τα καλύμματα $(S_{f^\sigma}, f^\sigma), \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ έχουν τον ίδιο βαθμό και τις ίδιες κρίσιμες τιμές, τότε από Πρόταση 1.38 υπάρχουν πεπερασμένες κλάσεις ισομορφίας. Άρα υπάρχει ένα $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C})$ έτσι ώστε τα $(S_F, f), (S_{F^\sigma}, f^\sigma)$ αν είναι ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει ισομορφισμός

$$\Phi = \left(\frac{V_1}{W_1}, \frac{V_2}{W_2} \right) : S_F \rightarrow S_{F^\sigma}$$

έτσι ώστε να ισχύει $f^\sigma \circ \Phi = f$. Με παρόμοια επιχειρηματολογία όπως στην παράγραφο 3.3 μπορούμε να δούμε ότι η ταυτότητα αυτή είναι ισοδύναμη με μια της μορφής

$$(3.5) \quad W_1^k W_2^d (P_1^\sigma(V_1/W_1, V_2/W_2)Q_1 - Q_1^\sigma(V_1/W_1, V_2/W_2)P_1) = HF$$

(μαζί φυσικά με τις ταυτότητες που εκφράζουν το ότι ο Φ είναι ισομορφισμός. Έστω τώρα

$$K_3 = \mathbb{Q}(z_1, z_2, \dots, z_r, u)$$

το σώμα που παράγεται από τους συντελεστές των (3.1) - (3.5). Θεωρούμε πάλι την ειδίκευση

$$s : \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_r) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z_j \mapsto q_j$$

για $j = d+1, \dots, 2d$. Με $q_j \in \mathbb{Q}(i)$ έτσι ώστε η s να αποτελεί απειροστή ειδίκευση. Όπως στη απόδειξη του κριτηρίου εφαρμόζουμε την s αν έχει αρκετά μικρή απόσταση σε όλες τις ταυτότητες (3.1) - (3.5) και παίρνουμε ένα κάλυμμα $(S_G, h) = ((S_{F^\sigma})^s, S_{f^\sigma})^s$ που λύνει το αρχικό πρόβλημα.

3.9 Που κολλάει η Εικασία abc?

Παρόλο που το βασικό ενδιαφέρον για τις απεικονίσεις Belyi έχει να κάνει με τα dessins και την δράση Galois, υπάρχουν διάφορες συνδέσεις τους με άλλα μαθηματικά αντικείμενα φαινομενικά άσχετα όπως το Θεώρημα Davenport-Stothers-Zanier, τα πολυώνυμα Jacobi, την καμπύλη του Fermat, τα σύνολα της Julia, την

εξίσωση του Pell κτλ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο εξαιρετικό [13].

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε εν συντομία μια αναπάντεχη σύνδεση με την περιβόητη Εικασία abc.

Ξεκινάμε με 3 ακέραιους αριθμούς $a, b, c \in \mathbb{N}$ που δεν έχουν κανέναν κοινό πρώτο παράγοντα (η Εικασία πήρε το όνομα της από την συνήθη επιλογή γραμμάτων για τις μεταβλητές) και ικανοποιούν την εξίσωση

$$a + b = c$$

Υπενθυμίζουμε ότι το **ριζικό** ενός αριθμού $n \in \mathbb{N}$ είναι το γινόμενο των διακεκριμένων πρώτων παραγόντων του και συμβολίζεται με $\text{rad}(n)$. Δηλαδή αν η ανάλυση του n σε πρώτους είναι

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

τότε $\text{rad}(n) = p_1 p_2 \cdots p_k$.

Η Εικασία abc μας προκαλεί να συγκρίνουμε το c με το $\text{rad}(abc)$. Κάποιος θα περίμενε εκ πρώτης όψεως το c να είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερο μιας και το c είναι πολύ πιο μεγάλο απ' το $\text{rad}(c)$ και το $\text{rad}(abc)$ είναι το $\text{rad}c$ πολλαπλασιασμένο με τους διακεκριμένους πρώτους παράγοντες των a, b .

Κι όμως! Η Εικασία abc ισχυρίζεται ακριβώς το αντίθετο! Λέει ότι αν υψώσουμε το $\text{rad}(abc)$ σε μια δύναμη ελάχιστα μεγαλύτερη του 1, τότε ξεπερνάει το c εκτός από πεπερασμένα αντιπαραδείγματα.

Συγκεκριμένα:

Εικασία abc (Oesterle-Masser 1985) Για κάθε $\epsilon > 0$, για όλες, εκτός από πεπερασμένες, τις τριάδες θετικών ακεραίων (a, b, c) που δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα και ικανοποιούν

$$a + b = c$$

ισχύει

$$c < \text{rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

Ορισμός 3.32 Έστω (a, b, c) όπως παραπάνω τότε ορίζουμε την ποσότητα

$$q := \frac{\log c}{\log \text{rad}(abc)}$$

η Εικασία abc λέει ότι τριάδες με $q > 1 + \epsilon$ είναι σπάνιες.

Παρατήρηση 3.33 Υπάρχουν ακολουθίες τριάδων με $q > 1$ και άρα δεν μπορούμε να γλυτώσουμε το ϵ στην εκφώνηση της Εικασίας. Για παράδειγμα, θεωρούμε την

$$1 + (2^k - 1) = 2^k$$

τότε $\text{rad}(abc) = 2\text{rad}(2^k - 1)$ και αν θέσουμε $k = 6n$ τότε το $63 = 2^6 - 1 \mid 2^k - 1$ και άρα $9 \mid 2^k - 1$ συνεπώς $2\text{rad}(2^k - 1) \leq 2/3(2^k - 1) < 2^k - 1$ και άρα για κάθε n , $\text{rad}(abc) < c$.

Ένα εντυπωσιακό διαισθητικό συμπέρασμα από την Εικασία abc είναι ότι αν κατασκευάσουμε έναν τεράστιο αριθμό c παίρνοντας μικρούς πρώτους και υψώνοντας το γινόμενο τους σε πολύ μεγάλες δυνάμεις, τότε αν γράψουμε το c ως

άθροισμα, οι όροι του αθροίσματος θα πρέπει να διαιρούνται με μεγάλους (σχετικά με το c) πρώτους! Η Εικασία abc είναι από αυτές τις πολύ σπάνιες προτάσεις που συνδέουν την προσθετική με την πολλαπλασιαστική δομή των αριθμών.

Η Εικασία abc θεωρείται πολύ σημαντική διότι έχει ήδη έναν μακρύ κατάλογο συνεπειών που αποτελείται από γνωστά αποτελέσματα όπως η εικασία του Mordell και μια ασθενή μορφή του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat, αλλά και πολλά ανοιχτά προβλήματα και εικασίες όπως η Εικασία του Szpiro, η Εικασία Erdos-Woods, η Εικασία Fermat-Catalan κτλ.

Τον Αύγουστο του 2012 ο Shinichi Mochizuki, ένας Ιάπωνας μαθηματικός που δουλεύει απομονωμένος από τους συναδέλφους του, ανέβασε μια σειρά άρθρων με μια νέα μαθηματική θεωρία που εκτός των άλλων ισχυρίζεται ότι συνεπάγεται την Εικασία abc. Μέχρι τώρα (Δεκέμβριος 2013), η μαθηματική κοινότητα δεν έχει καταφέρει να επιβεβαιώσει ή να καταρρίψει τον ισχυρισμό αυτόν.

Ας δούμε πως η Εικασία abc συνεπάγεται άμεσα μια ασθενή μορφή του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat

Πρόταση 3.34 *Αν ισχύει η Εικασία abc τότε όλες μαζί οι εξισώσεις*

$$x^n + y^n = z^n$$

για $n \geq 4$ έχουν το πολύ πεπερασμένες ρίζες. (μια τριάδα (x, y, z) θεωρείται λύση αν οι x, y, z είναι πρώτοι μεταξύ τους)

Απόδειξη: Έστω μια λύση (x, y, z) , τότε $\text{rad}(x^n y^n z^n) \leq xyz < z^3$, και άρα

$$q(x^n, y^n, z^n) = \frac{\log z^n}{\log \text{rad}(x^n y^n z^n)} > \frac{\log z^n}{\log z^3} = n/3 > 1$$

Και άρα υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες τέτοιες λύσεις.

Από υπολογιστικής σκοπιάς το μόνο που θα μπορούσε να κάνει κανείς είναι να ψάξει τριάδες (a, b, c) με μεγάλο $q(a, b, c)$. Το ρεκόρ μέχρι τώρα (Δεκέμβριος, 2013), είναι η

$$2 + 3^{10} 109 = 23^5$$

με $q = 1.6299 \dots$. Για $c < 10^{18}$ έχουν βρεθεί μόλις 160 τριάδες με $q > 1.4$ και γενικά τριάδες με $q > 1.2$ θεωρούνται σπάνιες.

Παραδείγματα 3.35 Τα καλά παραδείγματα όπως παραπάνω πρέπει να παραγοντοποιούνται με καλό τρόπο, κάποιιο ερευνητές όπως ο N. Magot [15] σκέφτηκαν ότι οι απεικονίσεις Belyi πάνω απ' το \mathbb{Q} είναι ήδη καλά παραγοντοποιημένες και άρα ίσως με αντικατάσταση και λίγη τύχη ίσως δώσουν ενδιαφέροντα παραδείγματα. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το παράδειγμα

$$f(x) = \frac{64x^3}{(x+9)(x+1)}, f(x) - 1 = -\frac{(x^2 - 18x - 27)^2}{(x+9)^3(x+1)}$$

αν ο x είναι ρητός $x = a/b$ τότε οι παραπάνω ισότητες γίνονται

$$64a^3b + (a^2 - 18ab - 27b^2)^2 = (a + 9b)^3(a + b)$$

αντικαθιστώντας με $(a, b) = (-32, 23)$ παίρνουμε

$$11^2 + 3^2 5^6 7^3 = 2^{21} 23$$

με $q = 1.62599\dots$, το δεύτερο μεγαλύτερο ρεκόρ τριάδας ως τώρα! Η παραπάνω απεικόνιση έχει παράξει ως τώρα 43 τριάδες με $q > 1.2$ εκ των οποίων οι 11 ήταν καινούργιες. Με παρόμοιες μεθόδους ο L.Habsieger [13] βρήκε μερικές εκατοντάδες καινούργιες τριάδες με $q > 1.2$. Παρόλα αυτά η ακριβής σύνδεση της Εικασίας abc και των ζευγών Belyi παραμένει ένα μυστήριο.

Κεφάλαιο 4

Τα Παιδιά Ζωγραφίζουν

Στο κεφάλαιο αυτό, οι πρωταγωνιστές επιτέλους κάνουν την εμφάνιση τους. Ορίζουμε τα *dessins* και δίνουμε έναν χαρακτηρισμό τους μέσω μεταθέσεων. Στη συνέχεια αποκαλύπτεται η πραγματική τους φύση, είναι απλά ένας συνδυαστικός τρόπος να περιγραφούν τα ζεύγη Belyi! Περιγράφουμε την κομψή αυτή αντιστοιχία και στην συνέχεια παραθέτουμε τον πραγματικό λόγο για τον οποίο ενδιαφέρεται κανείς για αυτά, την δράση της απόλυτης ομάδας Galois. Στις ενότητες 4.4, 4.5 αναφέρονται τα πρώτα ενδιαφέροντα αποτελέσματα της θεωρίας που είναι η πιστότητα της δράσης αυτής στα *dessins* γένους g .

4.1 Dessins και μεταθέσεις

Ορισμός 4.1 Ένα **(Grothendieck) dessin d'enfant** ή απλώς *dessin* είναι ένα ζεύγος (S, D) , όπου S είναι μια προσανατολισμένη, συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια, D ένα πεπερασμένο γράφημα πάνω στην S , έτσι ώστε:

- (i) Το D είναι συνεκτικό.
- (ii) Το D είναι διμερές και χρωματισμένο με δυο χρώματα μαύρο και λευκό.
- (iii) Το $S \setminus D$ είναι (τοπολογικά) μια ξένη ένωση δίσκων. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $S \setminus D$ θα λέγεται **όψη** (*face*) του *dessin*.

Στον παραπάνω ορισμό επιτρέπεται τα γραφήματα να έχουν πολλαπλές ακμές μεταξύ δυο κορυφών καθώς και ακμές με ένα άκρο (βρόγχους).

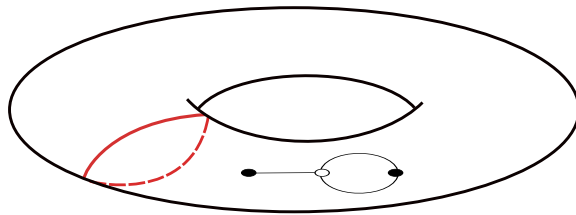
Το γένος του *dessin* θα είναι απλά το γένος της S . Δυο *dessins* $(S_1, D_1), (S_2, D_2)$ θα λέγονται ισοδύναμα αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός από την S_1 στην S_2 που διατηρεί τον προσανατολισμό και ο περιορισμός στο D_1 επάγει ισομορφισμό μεταξύ των D_1, D_2 (ως χρωματισμένα γραφήματα).

Παρατήρηση 4.2 Στην πραγματικότητα η συνθήκη (i) είναι συνέπεια της συνθήκης (iii), μιας και ένα μονοπάτι που συνδέει δυο σημεία του D πάνω στην επιφάνεια S , είναι ομοτοπικό με ένα μονοπάτι πάνω στο σύνορο των όψεων και άρα ομοτοπικό με ένα μονοπάτι πάνω στο D .

Παρατήρηση 4.3 Μερικές φορές η συνθήκη (ii) παραλείπεται, και θεωρούνται *dessins* οποιαδήποτε γραφήματα μιας και κάθε γράφημα μπορεί να γίνει διχρωματισμένο

προσθέτοντας στο μέσο κάθε ακμής μια (λευκή) κορυφή. Τα *dessins* που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο βέβαια έχουν όλες τις λευκές κορυφές τους με βαθμό 2. Αλλά αυτό δεν είναι τόσο περιοριστικό όσο φαίνεται (βλέπε παρατήρηση 4.14). Τα εμβαπτισμένα γραφήματα πάνω σε επιφάνειες αναφέρονται συχνά στη βιβλιογραφία ως *maps*, ενώ τα διχρωματισμένα ως *hypermaps*.

Παρατήρηση 4.4 Τι μπορεί να πάει στραβά όταν εμφυτεύσουμε ένα διχρωματισμένο γράφημα σε μια συμπαγή επιφάνεια ώστε να μην αποτελεί *dessin*; Από την παρατήρηση 4.2 μόνο η συνθήκη (iii) μπορεί να παραβιαστεί. Πράγματι ενδέχεται κάποια συνεκτική συνιστώσα του $S \setminus D$ να μην είναι ομοιομορφική με δίσκο. Για παράδειγμα στο σχήμα 4.1 η εξωτερική συνιστώσα δεν είναι απλά συνεκτική (ο κόκκινος βρόγχος είναι μη-τετριμμένος):



Σχήμα 4.1: Αυτό δεν είναι *dessin*

Παραδείγματα 4.5 Όταν ένα *dessin* είναι εμβαπτισμένο πάνω στη σφαίρα τότε μπορούμε να το σχεδιάσουμε στο επίπεδο θεωρώντας την εμφύτευση του επιπέδου στη σφαίρα μέσω της στερεογραφικής προβολής. Από δω και πέρα όλα τα *dessins* που σχεδιάζονται χωρίς υποκείμενη επιφάνεια θα θεωρούνται πάνω στην $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Από το σχήμα 4.2 παίρνουμε μια πρώτη γεύση από *dessins* πάνω στη σφαίρα. Επιπλέον το ίδιο αφηρημένο γράφημα μπορεί να εμφανίζεται σε διαφορετικές επιφάνειες όπως στο σχήμα 4.3.

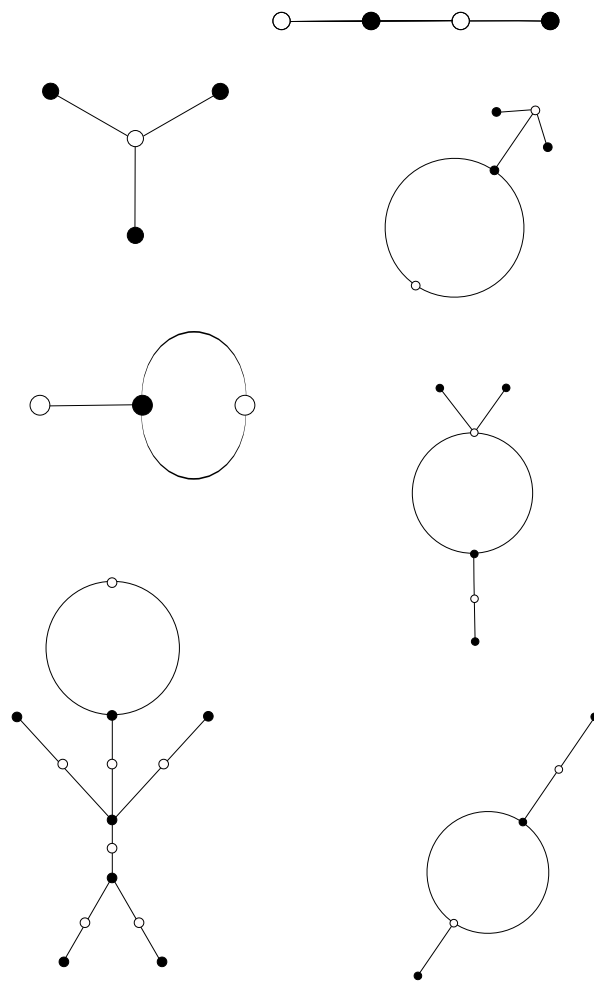
Ορισμός 4.6 Έστω (S, D) ένα *dessin*, με m το πλήθος ακμές τις οποίες αριθμούμε με τους $1, 2, \dots, m$. Ορίζουμε δυο μεταθέσεις σ_0, σ_1 στην S_m , την συμμετρική ομάδα σε m σύμβολα. Θεωρούμε μικρές ανοικτές γειτονιές γύρω από τις λευκές κορυφές έτσι ώστε να μην περιέχουν άλλη κορυφή και ορίζουμε $\sigma_0(i) = j$ αν σε μια περιστροφή γύρω από την λευκή κορυφή της ακμής i μέσα στην γειτονιά, με την θετική φορά, συναντάμε την ακμή j . Όμοια για τις μαύρες κορυφές σχηματίζουμε την σ_1 . Το ζεύγος (σ_0, σ_1) λέγεται **αναπαράσταση μεταθέσεων** (*permutation representation*) του (S, D) .

Παρατήρηση 4.7 Οι κύκλοι της σ_0 είναι σε αντιστοιχία με τις λευκές κορυφές του D , ενώ οι κύκλοι της σ_1 με τις μαύρες αντίστοιχα. Επιπλέον, κύκλοι της $\sigma_0\sigma_1$ αντιστοιχούν στις όψεις του D , ενώ η συνεκτικότητα του γραφήματος συνεπάγεται ότι η ομάδα που παράγεται από τις σ_0, σ_1 δρα μεταβατικά στις ακμές.

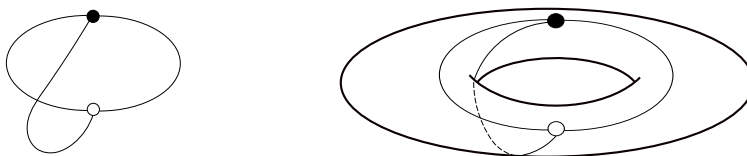
Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να υπολογίσουμε το γένος ενός *dessin* D από την αναπαράσταση μεταθέσεων του χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική Euler.

Πρόταση 4.8 Έστω (S, D) ένα *dessin* με γένος g και αναπαράσταση μεταθέσεων (σ_0, σ_1) , $\sigma_i \in S_m$ τότε ισχύει:

$$2 - 2g = |\text{κύκλοι της } \sigma_0| + |\text{κύκλοι της } \sigma_1| - m + |\text{κύκλοι της } \sigma_0\sigma_1|$$



Σχήμα 4.2: Μερικά παραδείγματα dessins



Σχήμα 4.3: Δύο διαφορετικά dessins με το ίδιο υποκείμενο γράφημα

Παρατήρηση 4.9 Τι συμβαίνει όμως στην αναπαράσταση μεταθέσεων αν αλλάξουμε την αρίθμηση των ακμών; Αν θεωρήσουμε μια νέα αρίθμηση μετονομάζοντας τις ακμές με μια $\sigma \in S_m$ τότε για το νέο ζεύγος αναπαράστασης μεταθέσεων έχουμε

$$(\sigma'_0, \sigma'_1) = (\sigma^{-1}\sigma_0\sigma, \sigma^{-1}\sigma_1\sigma)$$

Το ζεύγος λοιπόν είναι καλά ορισμένο μόνο ως προς κλάσεις συζυγίας.

Πρόταση 4.10 Έστω ένα ζεύγος $\sigma_0, \sigma_1 \in S_m$ με την ομάδα την οποία παράγουν να δρα μεταβατικά στα m σύμβολα. Τότε υπάρχει ένα dessin S, D με αναπαράσταση μεταθέσεων (σ_0, σ_1) . Επιπλέον, κάθε δυο dessins με συζυγή αναπαράσταση μεταθέσεων είναι ισοδύναμα.

4.2 Αντιστοιχία μεταξύ Dessins και ζευγών Belyi

Ορισμός 4.11 Έστω (S, D) ένα dessin, σε κάθε όψη διαλέγουμε ένα (εσωτερικό) σημείο και το μαρκάρουμε με $*$. Ενώνουμε κάθε $*$ με όλες τις κορυφές του συνόρου της όψης με ακμές που δεν τέμνονται στο εσωτερικό της όψης. Έτσι δημιουργείται ένα κάλυμμα της S από τρίγωνα, το οποίο θα λέγεται τριγωνική αποσύνθεση του D και θα συμβολίζεται $\mathcal{T}(D)$ (η αποσύνθεση αυτή δεν αποτελεί τριγωνοποίηση με την τοπολογική έννοια μιας και τα τρίγωνα επιτρέπεται να τέμνονται σε πάνω από μια ακμές). Τα τρίγωνα είναι δυο ειδών: αυτά που η καμπύλη

$$\circ \rightarrow \bullet \rightarrow * \rightarrow \circ$$

είναι θετικά προσανατολισμένη ως σύνορο του τριγώνου και λέμε ότι είναι τύπου $+$, ενώ τα υπόλοιπα λέμε ότι είναι τύπου $-$. Λόγω κατασκευής σε κάθε ακμή του D εφάπτονται δυο τρίγωνα διαφορετικού τύπου. Τώρα για κάθε τρίγωνο $T^+ \in \mathcal{T}(D)$, τύπου $+$ θεωρούμε έναν ομοιομορφισμό

$$f_{T^+} : T \rightarrow \overline{\mathbb{H}^+} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \infty$$

με

$$(4.1) \quad f(\circ) = 0, f(\bullet) = 1, f(*) = \infty$$

και ο περιορισμός στο ∂T να είναι ομοιομορφισμός στο $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Αντίστοιχα για τρίγωνα $-$ τύπου $-$, θεωρούμε ομοιομορφισμούς

$$f_{T^-} : T^- \rightarrow \overline{\mathbb{H}^-}$$

όπου $\overline{\mathbb{H}^-}$ είναι το κλειστό κάτω ημιεπίπεδο, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (4.1) και ο περιορισμός στο ∂T^- να είναι ομοιομορφισμός με το $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Επιπλέον θέλουμε όταν δυο τρίγωνα T_1, T_2 διαφορετικού τύπου τέμνονται σε μια ακμή e του dessin, τότε στην τομή τους $T_1 \cap T_2$ οι f_{T_1}, f_{T_2} να συμπίπτουν.

Πρόταση 4.12 Υπάρχει οικογένεια ομοιομορφισμών f_T που να πληρεί τις προϋποθέσεις όπως παραπάνω και μια συνεχής απεικόνιση $f_{\mathcal{T}(D)} : S \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ που να συμφωνεί με την $\{f_T\}$ στα τρίγωνα και ο περιορισμός

$$f_{\mathcal{T}(D)}| : S \setminus f^{-1}\{0, 1, \infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$$

να είναι τοπολογικό κάλυμμα, δηλαδή ένα ζεύγος Belyi. Επιπλέον, για κάποια άλλη επιλογή ομοιομορφισμών $f'_{\mathcal{T}(D)}$ προκύπτει ένα ισοδύναμο διακλαδιζόμενο κάλυμμα, δηλαδή η κλάση ισοδυναμίας του $(S, f_{\mathcal{T}(D)})$ εξαρτάται μόνο απ' την κλάση ισοδυναμίας του D , και άρα την γράφουμε f_D .

Απόδειξη: Θα σκιαγραφήσουμε τις κύριες ιδέες της απόδειξης. Αρχικά κάθε ομοιομορφισμός από μια ακμή της ενός τριγώνου T σε ένα τμήμα του $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό από ολόκληρο το ∂T στο $\partial\mathbb{H}$. Επιπλέον, κάθε ομοιομορφισμός από

$$\partial T \rightarrow \partial\mathbb{H}$$

επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό

$$T \rightarrow \mathbb{H}$$

Συνεπώς μπορούμε να "κολλήσουμε" αρχικά μεταξύ τους τους περιορισμούς των αυτομορφισμών πάνω στις ακμές και στη συνέχεια να τους επεκτείνουμε στο εσωτερικό της κάθε όψης. Άρα εξαιρώντας τις κορυφές, μπορούμε να μαζέψουμε τους ομοιομορφισμούς σε ένα τοπολογικό κάλυμμα. Θεωρώντας στην S την (μοναδική) δομή επιφάνειας Riemann ώστε η f να είναι ολόμορφη έχουμε ότι το (S, f) είναι ζεύγος Belyi.

Έστω τώρα μια άλλη επιλογή τριγώνων $\mathcal{L}(D) = \{L_i^\pm\}$ και ομοιομορφισμών

$$h_L^\pm : L \rightarrow \partial\mathbb{H}^\pm$$

με $h_{\mathcal{L}(D)} : S \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ τον μορφισμό που επάγουν. Η τριγωνική αποσύνθεση θα είναι στην ουσία η ίδια υπό την έννοια ότι θα υπάρχουν ομοιομορφισμοί

$$F_i^\pm : T_i^\pm \rightarrow L_i^\pm$$

που ορίζονται από την σχέση

$$F_i^\pm = (h_i^\pm)^{-1} \circ f_i^\pm$$

οι οποίοι αν κολληθούν δημιουργούν έναν ομοιομορφισμό $F : S \rightarrow S$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{F} & S \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array}$$

δηλαδή ο F είναι ισομορφισμός ζευγών Belyi και άρα η f δεν εξαρτάται από την επιλογή των τριγώνων και των ομοιομορφισμών f_i^\pm και άρα μπορούμε να γράφουμε f_D αντί για $f_{\mathcal{T}(D)}$.

Έχουμε καταφέρει δηλαδή να δείξουμε τη μια κατεύθυνση της αντιστοιχίας που στοχεύουμε.

Πόρισμα 4.13 Υπάρχει μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\{ \text{Κλάσεις ισοδυναμίας των Dessins} \} \rightarrow \{ \text{Κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών Belyi} \}$$

$$(S, D) \mapsto (S, f_D)$$

Έστω τώρα ένα ζεύγος Belyi (S, f) ορίζουμε $D_f = f^{-1}([0, 1])$, και χρωματίζουμε τα σημεία $f^{-1}(0)$ λευκά και τα σημεία $f^{-1}(1)$ μαύρα.

Πρόταση 4.14 (i) Το (S, D_f) είναι ένα dessin d'enfant.

(ii) Κάθε ένα από τα σύνολα

$$f^{-1}[\infty, 0], f^{-1}[0, 1], f^{-1}[1, \infty]$$

είναι ένωση τοπολογικών διαστημάτων που όλα μαζί αποτελούν τις ακμές της τριγωνικής αποσύνθεσης $\mathcal{T}(D_f)$.

(iii) $f = f_{D_f}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.32, έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

(a) Για κάθε $P \in f^{-1}[0, 1]$, έχουμε έναν (τοπολογικό) δίσκο Δ_P γύρω από το P , με την f να είναι στο Δ_P της μορφής $z \mapsto z^{e_f(P)}$. Άρα για ϵ αρκετά μικρό, το

$$f^{-1}[0, \epsilon] \cap \Delta_P$$

είναι μια συλλογή ξένων διαστημάτων που αρχίζουν από το P .

(b) Το $f^{-1}(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus [0, 1]) = S \setminus D_f$ είναι μια ξένη ένωση (τοπολογικών) δίσκων με κέντρα $q_i \in f^{-1}(\infty)$ και σε κάθε τέτοιο δίσκο ο περιορισμός της f είναι της μορφής

$$z \mapsto z^{e_f(q_i)}$$

(c) Η f επάγει μια προβολή κάλυψης

$$f| : S \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$$

Για το (i), σίγουρα το D_f είναι ένα διχρωματισμένο γράφημα και από το (b) είναι dessin.

Για τα (ii), (iii) θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^+ \setminus \{0, 1, \infty\} & \xrightarrow{\tilde{i}} & S \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \\ & \searrow i & \downarrow f \\ & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array}$$

όπου \tilde{i} είναι μια ανύψωση της εμφύτευσης

$$i : \mathbb{H}^+ \setminus \{0, 1, \infty\} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$$

Η μεταθετικότητα του διαγράμματος συνεπάγεται ότι η \tilde{i} είναι 1-1. Επιπλέον, η \tilde{i} επεκτείνεται ως εξής, θεωρούμε το σημείο $P \in f^{-1}(0)$ με $\tilde{i}(\epsilon) \in \Delta_P$ όπως στο (a). Αντίστοιχα ορίζουμε τα $\tilde{i}(1), \tilde{i}(\infty)$ και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε το τρίγωνο

$$T := \tilde{i}(\mathbb{H}^+)$$

Με την ίδια διαδικασία για ανυψώσεις του \mathbb{H}^- παίρνουμε τρίγωνα τύπου -. Μαζεύοντας τα όλα μαζί έχουμε μια τριγωνική αποσύνθεση της S με $f = f_D$.

Πόρισμα 4.15 Η παρακάτω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη

$$\{\text{Κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών Belyi}\} \rightarrow \{\text{Κλάσεις ισοδυναμίας Dessins}\}$$

$$(S, f) \mapsto (S, D_f)$$

Δηλαδή το (S, D_f) είναι ένα dessin και η κλάση ισοδυναμίας του εξαρτάται από την κλάση ισοδυναμίας του (S, f) .

Συνδυάζοντας τα πορίσματα 4.13, 4.15 καταλήγουμε στην αντιστοιχία:

Θεώρημα 4.16 (Αντιστοιχία Grothendieck) Οι παρακάτω απεικονίσεις είναι η μια αντίστροφη της άλλης.

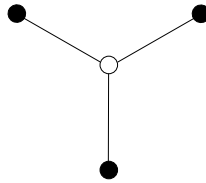
$$\{\text{Κλάσεις ισοδυναμίας των Dessins}\} \longleftrightarrow \{\text{Κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών Belyi}\}$$

$$(S, D) \longmapsto (S, f_D)$$

$$(S, D_f) \longleftarrow (S, f)$$

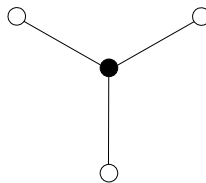
Παραδείγματα 4.17 Ας δούμε μερικά dessins που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένα ζεύγη Belyi.

(i) Για $S = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, $f_1(z) = z^3$ το αντίστοιχο dessin είναι:



Σχήμα 4.4:

(ii) $f_2(z) = 1 - z^3 = 1 - f_1(z)$



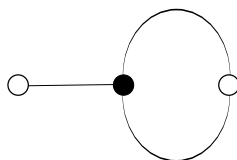
Σχήμα 4.5:

(iii) $f_3(z) = \frac{(4-z)(1+2z)^2}{27z}$ (Σχήμα 4.6)

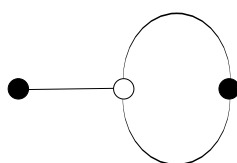
(iv) $f_4(z) = \frac{4(z-1)^3}{27z} = 1 - f_3(z)$ (Σχήμα 4.7)

(v) $f_5(z) = \frac{z^3+3z^2}{4}$ (Σχήμα 4.8)

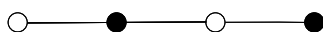
(vi) $f_6(z) = \frac{z^3}{z^3-1}$ (Σχήμα 4.9)



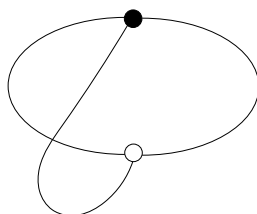
Σχήμα 4.6:



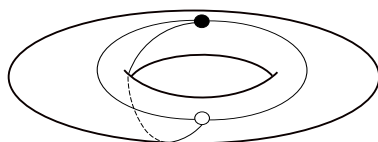
Σχήμα 4.7:



Σχήμα 4.8:



Σχήμα 4.9:



Σχήμα 4.10:

(vii) Θεωρούμε την επιφάνεια S που αντιστοιχεί στην ελλειπτική καμπύλη

$$C : \{y^2 = x^3 + 1\}$$

και την απεικόνιση $f_7(x, y) = \frac{1}{2}(1 + y)$ (Σχήμα 4.10).

Παρατήρηση 4.18 Τα *dessins* που όλες οι λευκές τους κορυφές έχουν βαθμό δυο θα λέγονται **clean**. Για αυτού του είδους τα *dessins* έγραψε ο Grothendieck. Ξεκινώντας με ένα αυθαίρετο *dessin* (S, D) , μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα *clean dessin* (S, D^c) στην ίδια επιφάνεια με έναν απλό τρόπο.

Θεωρούμε το αντίστοιχο ζεύγος *Belyi* (S, f_D) . Η συνδυαστική διαδικασία κατά την οποία θεωρούμε όλες τις αρχικές κορυφές του D μαύρες και προσθέτουμε μια λευκή κορυφή στο μέσο κάθε ακμής μπορεί να υλοποιηθεί φορμαλιστικά ως εξής:

Θεωρούμε το *dessin* (S, D^c) που αντιστοιχεί στο ζεύγος *Belyi*

$$(S, g = 1 + 4f(f - 1))$$

Δηλαδή $g = c \circ f$ όπου

$$c(x) = 1 + 4x(x - 1) = 4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

παρατηρούμε ότι

$$c(0) = c(1) = 1, \quad c(\infty) = \infty$$

και η μοναδική κρίσιμη τιμή του c είναι το 0 , μιας και το μοναδικό σημείο διακλάδωσης του είναι το $\frac{1}{2}$. Από την πρόταση 1.35 παίρνουμε για τις κρίσιμες τιμές της g :

$$\text{crit}(g) = \text{crit}(c \circ f) = \text{crit}(c) \cup c(\text{crit} f) = \{0, 1, \infty\}$$

και συνεπώς είναι μορφισμός *Belyi*. Επιπλέον για κάθε $P \in g^{-1}(0)$, είναι $f(P) = \frac{1}{2}$ και άρα ο δείκτης διακλάδωσης πάλι από 1.35 είναι

$$e_g(P) = e_f(P)e_c(f(P)) = 1 \cdot e_c\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

δηλαδή όλες οι λευκές κορυφές έχουν βαθμό 2.

4.3 Δράση Galois

Όπως έχουμε ήδη δει, η ομάδα $\text{Gal}(\mathbb{C})$ δρα πάνω στις επιφάνειες Riemann και τους μορφισμούς. Μιας και τα ζεύγη *Belyi* ορίζονται πάνω από το \mathbb{Q} επάγεται μια δράση της απόλυτης ομάδας Galois $G_{\mathbb{Q}}$ και άρα μια δράση πάνω στα *dessins*. Για ένα *dessin* (S, D) και ένα στοιχείο $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ το $(S, D)^\sigma$ ορίζεται μέσω του κανόνα:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & D^\sigma \\ \downarrow & & \uparrow \\ (S_D, f_D) & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & (S_D^\sigma, f_D^\sigma) \end{array}$$

όπου (S_D, f_D) είναι το ζεύγος Belyi που αντιστοιχεί στο D , οπότε ορίζουμε το D^σ να είναι το dessin που αντιστοιχεί στο συζυγές ζεύγος (S_D^σ, f_D^σ) .

Θεώρημα 4.19 Έστω D ένα dessin, τότε τα ακόλουθα μένουν αναλλοίωτα υπό τη δράση της απόλυτης ομάδας Galois $G_{\mathbb{Q}}$.

- (i) Το πλήθος των ακμών,
- (ii) Το πλήθος των λευκών κορυφών, των μαύρων κορυφών και των όψεων.
- (iii) Ο βαθμός των λευκών και των μαύρων κορυφών καθώς και ο βαθμός των όψεων.
- (iv) Το γένος.
- (v) Η ομάδα μονοδρομίας.
- (vi) Η ομάδα αυτομορφισμών.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.25.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε την πιστότητα της δράσης Galois στα dessins γένους g . Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $g = 0$.

Παραδείγματα 4.20 Θεωρούμε τα dessins που μοιάζουν με τα σύμβολα του αρσενικού και του θηλυκού. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι δεν είναι στην ίδια τροχιά Galois μιας και οι λίστες των βαθμών τους δεν συμπίπτουν. Ας δούμε ποια είναι απεικόνιση Belyi που αντιστοιχεί στο σύμβολο του θηλυκού.

Επιλέγουμε τις λευκές κορυφές του να είναι το 0 και το 1 όπως φαίνεται στο σχήμα και το κέντρο της εξωτερικής συνιστώσας να είναι το ∞ (υπενθυμίζουμε ότι η επιφάνεια είναι η $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$). Έστω ακόμα b να είναι το εσωτερικό σημείο της φραγμένης συνιστώσας με $f(b) = \infty$.

Από τις προ-εικόνες του 0, έχουμε ότι ως προς πολλαπλασιασμό με σταθερά θα πρέπει

$$f(z) = \frac{z^4(z-1)^2}{P(z)}$$

μιας και οι λευκές κορυφές έχουν βαθμούς (και άρα δείκτες διακλάδωσης) 4,2. Και $P(z)$ κάποιο πολυώνυμο. Αφού η όψη του b έχει βαθμό 2 έχουμε ότι το $z-b$ διαιρεί το $P(z)$ αλλά το $(z-b)^2$ όχι. Επιπλέον η εξωτερική όψη έχει βαθμό 10 άρα το $z = \infty$ είναι προ-εικόνα του ∞ με πολλαπλότητα 5, άρα στο $z = \infty$ έχει πόλο τάξης 5.

Συμπεραίνουμε ότι

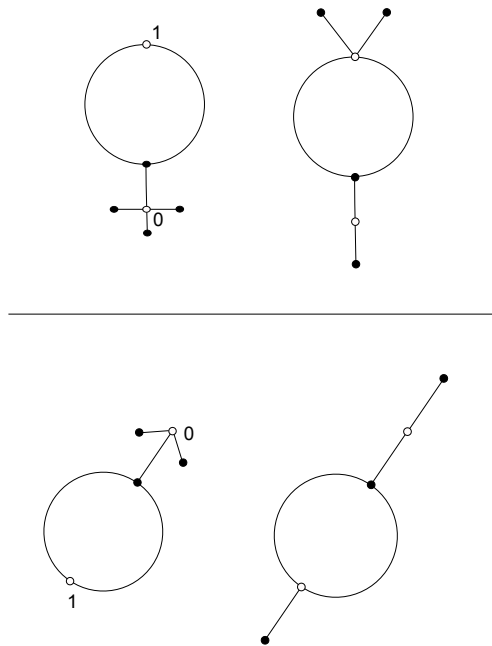
$$f(z) = \frac{z^4(z-1)^2}{z-b}$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$f'(z) = \frac{z^3(z-1)(5z^2 + (-3-6b)z + 4b)}{(z-b)^2}$$

και μιας και πρέπει η $f'(z)$ να έχει διπλή ρίζα (λόγω της μαύρης κορυφής βαθμού 3) πρέπει η διακρίνουσα του $5z^2 + (-3-6b)z + 4b$ πρέπει αν είναι 0 και άρα

$$36b^2 - 44b + 9 = 0$$



Σχήμα 4.11: Τα σύμβολα του αρσενικού και του θηλυκού ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές Galois κάθε μια από τις οποίες έχει δυο στοιχεία

άρα

$$b = \frac{-9 + 2\sqrt{10}}{18} \quad \text{ή} \quad b = \frac{-9 - 2\sqrt{10}}{18}$$

Παρατηρώντας το διπλανό dessin στο σχήμα 4.11 έχουμε ότι ισχύουν τα ίδια επιχειρήματα και συνεπώς κάθε μια επιλογή του b αντιστοιχεί σε ένα από αυτά τα δυο. Επιπλέον ένα στοιχείο της ομάδας Galois δρα στην f αν και μόνο αν ικανοποιεί

$$\sqrt{10} \mapsto -\sqrt{10}$$

και άρα στέλνει το ένα στο άλλο. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι η εν λόγω τροχιά Galois περιέχει ακριβώς δυο στοιχεία!

Για το σύμβολο του αρσενικού, με παρόμοια επιχειρήματα έχουμε

$$f(z) = \frac{z^3(z-1)^2}{z-b}$$

και παραγωγίζοντας

$$f'(z) = \frac{z^2(z-1)(4z^2 + (-2-5b)z + 3b)}{(z-b)^2}$$

και μιας και πάλι υπάρχει διπλή ρίζα, η διακρίνουσα που μηδενίζεται είναι

$$25b^2 - 28b + 4 = 0$$

και καταλήγουμε και πάλι σε μια τροχιά Galois με δυο στοιχεία όπως πριν.

4.4 Πιστότητα της δράσης Galois στο γένος 0

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πιστότητας μιας δράσης:

Ορισμός 4.21 "Εστω μια δράση μιας ομάδας G σε ένα σύνολο X , αυτή θα λέγεται **πιστή** (faithful) αν δεν υπάρχουν μη-ταυτοτικά στοιχεία της G που να δρουν τετριμμένα σε όλο τον χώρο δηλαδή αν $g \in G$ με

$$\forall x \in X, \quad gx = x$$

τότε $g = 1$.

Οι πιστές δράσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία μιας και αφού κανένα στοιχείο δεν δρα τετριμμένα, "καμία πληροφορία" για την ομάδα δε χάνεται μέσω της δράσης κι έτσι μπορούμε να "δούμε" ολόκληρη την ομάδα μέσω της δράσης αυτής.

Ισχυρότερα, θα δείξουμε ότι η δράση Galois είναι πιστή πάνω στα δέντρα (dessins με μόνο μια όψη). Το γένος των δέντρων είναι 0 αφού έχουν μόνο μια όψη και μπορούν παρασταθούν ως πολυώνυμα με το πολύ δυο (πεπερασμένες) κρίσιμες τιμές και φυσικά τον πόλο στο άπειρο.

Ορισμός 4.22 Ένα πολυώνυμο λέγεται **πολυώνυμο Shabat**, αν έχει το πολύ δυο πεπερασμένες κρίσιμες τιμές.

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα, καταγράφουμε ένα τεχνικό λήμμα που θα χρειαστεί

Λήμμα 4.23 (i) Έστω δυο μονικά πολυώνυμα $h_1, h_2 \in k[x]$ ίδιου βαθμού, όπου k ένα υπόσωμα του \mathbb{C} , με $h_1(0) = h_2(0)$. Και δυο άλλα πολυώνυμα g_1, g_2 με

$$g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$$

Τότε $h_1 = h_2$.

(ii) Έστω δυο πολυώνυμα $h_1, h_2 \in k[x]$ ίδιου βαθμού. Και δυο άλλα πολυώνυμα g_1, g_2 με

$$g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$$

τότε υπάρχουν σταθερές $c, d \in k^\times$ με $h_2 = ch_1 + d$.

Απόδειξη: (i) Έστω

$$h_1(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z$$

$$h_2(z) = z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z$$

$$g_1(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0$$

$$g_2(z) = d_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + d_1z + d_0$$

Τότε

$$g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2 \Leftrightarrow$$

$$c_n(z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z)^n + c_{n-1}(z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z)^{n-1} + \dots + c_0 = \\ = d_n(z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z)^n + d_{n-1}(z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z)^{n-1} + \dots + d_0$$

Συγκρίνοντας μεγιστοβάθμιους συντελεστές παίρνουμε $c_n = d_n$. Ενώ για τους συντελεστές βαθμού $nm - 1$, παίρνουμε

$$nc_n a_{m-1} = nd_n b_{m-1} \Rightarrow a_{m-1} = b_{m-1}$$

και παρόμοια για βαθμού $nm - 2$

$$c_n \binom{n}{2} a_{m-1}^2 + na_{m-2} = d_n \binom{n}{2} b_{m-1}^2 + nb_{m-2} \Rightarrow a_{m-2} = b_{m-2}$$

επαγωγικά βλέπει κανείς ότι ο συντελεστής του $nm - j$ όρου του $g_1 \circ h_1$ είναι πολυώνυμο στους συντελεστές με δείκτες μεγαλύτερους του $nm - j$ και γραμμικό στον a_{nm-j} , άρα η αντίστοιχη σχέση για το $g_2 \circ h_2$ συνεπάγεται τελικά ότι

$$a_{nm-j} = b_{nm-j}$$

(ii) Έστω

$$h_1(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z$$

$$h_2(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z$$

και g_1, g_2 όπως παραπάνω. Θεωρούμε τα

$$\tilde{h}_1 := (h_1 - a_0)/a_m \quad \tilde{h}_2 := (h_2 - b_0)/b_m$$

$$\tilde{g}_1(x) := a_m x + a_0 \quad \tilde{g}_2(x) := b_m x + b_0$$

και βλέπουμε ότι

$$\tilde{g}_1 \circ \tilde{h}_1 = g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2 = \tilde{g}_2 \circ \tilde{h}_2$$

και άρα από (i) έχουμε ότι $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2$ που δίνει

$$h_1 = a_m \tilde{h}_1 + a_0 = a_m \tilde{h}_2 + a_0 = a_m (h_2 - b_0)/b_m + a_0$$

δηλαδή υπάρχουν σταθερές όπως θέλαμε.

Θεώρημα 4.24 Η δράση της απόλυτης ομάδας Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ στα δέντρα (ισοδύναμα στα πολυώνυμα Shabat) είναι πιστή. Ειδικότερα, η δράση στα dessins γένους 0 είναι πιστή.

Απόδειξη: (Lenstra) Έστω ένα μη τετριμμένο $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ και ένα $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ με $\sigma(a) \neq a$. Θα κατασκευάσουμε ένα δέντρο το οποίο δεν σταθεροποιείται από την σ .

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $f_a \in \mathbb{Q}(a)[x]$ με

$$f'_a(x) = x(x-1)(x-a)$$

δηλαδή διακλαδίζεται πάνω στο $\{0, 1, a\}$. Από Λήμματα 3.4, 3.5 υπάρχει ένα πολυώνυμο $q \in \mathbb{Q}[x]$ με

$$F_a = q \circ f_a$$

να είναι πολυώνυμο Shabat. Τώρα δρώντας η σ έχουμε

$$F_a^\sigma = q^\sigma \circ f_a^\sigma = q \circ f_{\sigma(a)}$$

Έστω τώρα ότι τα ζεύγη $(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, F_a), (\mathbb{P}^1\mathbb{C}, F_a^\sigma)$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει ένα μετασχηματισμός T με το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1\mathbb{C} & \xrightarrow{T} & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \\ & \searrow F_a & \downarrow F_a^\sigma \\ & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Μιας και $T(\infty) = \infty$ έχουμε ότι $T(z) = cz + d$. Και άρα

$$q \circ f_a(cz + d) = F_a(cz + d) = F_a^\sigma = q \circ f_{\sigma(a)}(z)$$

Από το λήμμα 4.23, έχουμε ότι υπάρχουν e, f έτσι ώστε

$$f_a(cz + d) = e f_{\sigma(a)}(z) + f$$

Από κατασκευή, τα σημεία διακλάδωσης του f_a έχουν δείκτες διακλάδωσης 2,3 και 4. Το δεξί μέλος έχει τα ίδια σημεία διακλάδωσης με το $f_{\sigma(a)}$ ενώ το αριστερό έχει ως σημεία διακλάδωσης τις εικόνες των 0, 1, a μέσω του T^{-1} . Και επειδή οι δείκτες διακλάδωσης είναι διαφορετικοί, ξέρουμε ποιο σημείο απεικονίζεται σε ποιο. Συγκεκριμένα αν x_1, x_2, x_3 είναι τα σημεία διακλάδωσης της $f_a(cz + d)$ τότε

$$cx_1 + d = 0, cx_2 + d = 1, cx_3 + d = a$$

οπότε αφού συμπίπτουν με τα σημεία διακλάδωσης του $e f_{\sigma(a)}(z) + f$ έχουμε ότι

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \sigma(a)$$

και άρα συμπεραίνουμε ότι

$$c = 1, d = 0$$

που δίνουν

$$\sigma(a) = a$$

το οποίο είναι άτοπο.

4.5 Πιστότητα της δράσης για $g \geq 1$

Πρώτα θα αποδείξουμε την περίπτωση $g = 1$ (ελλειπτικές καμπύλες). Αυτό είναι ένα εύκολο συμπέρασμα από την ταξινόμηση των καμπυλών αυτών μέσω της j -invariant. Έστω C/\mathbb{C} μια ελλειπτική καμπύλη, υπενθυμίζουμε ότι: [17]

(i) Ορίζεται ένας μιγαδικός αριθμός $j(C)$ που είναι ρητή συνάρτηση των συντελεστών του πολυωνύμου που ορίζει την C και λέγεται **j -invariant** της καμπύλης.

(ii) Μια άλλη καμπύλη C' είναι ισόμορφη με την C αν και μόνο αν

$$j(C') = j(C)$$

δηλαδή η j -invariant είναι μια πλήρης αναλλοίωτη.

(iii) Για κάθε μιγαδικό αριθμό j υπάρχει καμπύλη C με $j(C) = j$.

Πρόταση 4.25 Η δράση της $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ στα *dessins* γένους 1 είναι πιστή

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλώς η παρατήρηση ότι η $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ δρα στην j -invariant της αντίστοιχης καμπύλης. Δηλαδή

$$j(C^\sigma) = \sigma(j(C))$$

Άρα αν $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$, με $\sigma(a) \neq a$ και ένα *dessin* με καμπύλη C έτσι ώστε $j(C) = a$. Τότε $j(C^\sigma) = \sigma(j(C)) = \sigma(a)$ άρα η C, C^σ δεν είναι ισόμορφες, συνεπώς ούτε τα *dessins* τους.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την περίπτωση $g > 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη ένα αποτέλεσμα από την θεωρία των υπερελλειπτικών καμπυλών, το οποίο ξεκαθαρίζει πότε δυο τέτοιες καμπύλες είναι ισόμορφες. [5]

Θεώρημα 4.26 Έστω δυο υπερελλειπτικές καμπύλες

$$\{y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i)\} \quad \text{και} \quad \{y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - b_i)\}$$

είναι ισόμορφες αν και μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός Möbius $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, με

$$M(\{a_1, a_2, \dots, a_{2g+2}\}) = \{b_1, b_2, \dots, b_{2g+2}\}$$

Θεώρημα 4.27 Η δράση της $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ στις υπερελλειπτικές καμπύλες γένους $g > 1$ είναι πιστή. Ειδικότερα, η δράση στα *dessins* γένους g είναι πιστή. [5]

Απόδειξη: Έστω ένα $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ με $\sigma \neq 1$, και ένα $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ με $\sigma(a) \neq a$. Θεωρούμε την οικογένεια υπερελλειπτικών καμπυλών:

$$C_n := \{y^2 = (x-1)(x-2)\dots(x-(2g+1)(x-(a+n)))\}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε η C_n να μην είναι ισόμορφη με την C_n^σ .

Έστω πως δεν υπάρχει, δηλαδή για κάθε n οι C_n, C_n^σ είναι ισόμορφες. Άρα από θεώρημα 4.26, υπάρχει $M_n \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ μετασχηματισμός Möbius με

$$M_n(\{1, 2, \dots, 2g+1, a+n\}) = \{1, 2, \dots, 2g+1, \sigma(a)+n\}$$

Αφού ο M_n απεικονίζει τρία ρητά σημεία σε ρητά σημεία, μπορούμε να τον γράψουμε με ρητούς συντελεστές, $M_n \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$.

Επίσης μιας και $a+n \notin \mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$M_n(a+n) = \sigma(a)+n$$

Από την άλλη, επειδή ένας μετασχηματισμός Möbius καθορίζεται πλήρως από το που στέλνει τρία σημεία, έχουμε ότι το σύνολο

$$\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$$

περιλαμβάνει πεπερασμένους τέτοιους.

Θεωρούμε τρεις διακεκριμένους ακεραίους p, q, r με $M_p = M_q = M_r$. Ορίζουμε επίσης τον $M(z) := M_p(a+z) - \sigma(a)$, και βλέπουμε ότι

$$M(p) = M_p(a+p) - \sigma(a) = p$$

$$M(q) = M_p(a+q) - \sigma(a) = M_q(a+q) - \sigma(a) = q$$

$$M(r) = M_p(a+r) - \sigma(a) = M_r(a+r) - \sigma(a) = r$$

δηλαδή ο M συμφωνεί με τον ταυτοτικό μορφισμό σε τρία σημεία και άρα είναι ο ταυτοτικός μορφισμός. Άρα

$$M_p(a+z) = z + \sigma(a) \Rightarrow M_p(z) = z + \sigma(a) - a$$

Συνεπώς έχουμε

$$M_p(i) = i + \sigma(a) - a := l_i \in \{1, 2, \dots, 2g+1\}, i = 1, 2, \dots, 2g+1$$

και άρα

$$\sigma(a) - a = l_1 - 1 = l_2 - 2 = \dots = l_{2g+1} - (2g+1)$$

αλλά $l_1 - 1 \geq 0$ ενώ $l_{2g+1} - (2g+1) \leq 0$! Άρα όλες οι παραπάνω ισότητες είναι 0, και άρα και $\sigma(a) = a$ που αποτελεί αντίφαση.

Κάπου εδώ τελειώνει η προσπάθεια εισαγωγής στο κόσμο των dessins, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [13] το οποίο αναδεικνύει τις διάφορες πτυχές των dessins και τις συνδέσεις τους με άλλους κλάδους των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Βιβλιογραφία

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- [2] G.V. Belyi, *On Galois Extensions of a Maximal Cyclotomic Field*, Mathematics of the USSR-Izvestiya 14 (2): 247, 1979.
- [3] G. V. Belyi, *Another proof of three points theorem*, preprint MPI-1997-46, 1997. Available at <http://www.mpim-bonn.mpg.de>. A version of this has appeared in print: *Mat. Sb.* 193 (2002), 21–24.
- [4] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer Graduate Texts in Mathematics, 1999.
- [5] E. Gironde, G. Gonzalez-Diez *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessin d'Enfants*, London Mathematical Society Student Texts 79, 2012.
- [6] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, Geometric Galois actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, With an English translation on pp. 243–283, pp. 5–48.
- [7] P. Guillot, *An Elementary Approach to Dessin d'Enfants and Grothendieck-Teichmuller Group*, 2013.
- [8] W. Goldring, *Unifying Themes Suggested by Belyi's Theorem*, Number Theory, Analysis and Geometry. In Memory of Serge Lang, Springer, pp. 181–214, 2009.
- [9] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [10] Y. Ihara, *On the embedding of $Gal(Q=Q)$ into GT* , The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 200, Cambridge Univ. Press, Cambridge, , pp. 289–321, 1994.
- [11] Christian U. Jensen, A. Ledet, N. Yui, *Generic Polynomials, Constructive Aspects of the Inverse Galois Problem*, Cambridge University Press, 2002.
- [12] B. Köck, *Belyi's Theorem Revisited*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 2001.
- [13] S. Lando, A. Svonkin *Graphs on Surfaces and their Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 141, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [14] S. Lang, *Algebra*, 3rd revised ed., Springer-Verlag, New York, 2002.

- [15] N. Magot, *Cartes planaires et fonctions de Belyi: Aspects Algorithmiques et experimentaux*, These Universite Bordeaux I, 1997.
- [16] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 323, Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [17] J. Silverman,). *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 106. Springer-Verlag, 1986.
- [18] I.R. Shafarevich, *The imbedding problem for splitting extensions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 120 , 1217-1219, 1958.
- [19] L. Schneps, *Dessin d'Enfants on the Riemann Sphere*, The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 200, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 47–77, 1994.
- [20] L. Schneps, *The Grothendieck-Teichmüller groupd GT: a survey*, Geometric Galois actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 183–203, 1997.
- [21] L. Schneps, *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 1994.
- [22] L. Schneps (Editor), P. Lochak (Editor) , *Geometric Galois Actions: Volume 1, Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme* (London Mathematical Society Lecture Note Series), 1997.
- [23] L. Schneps (Editor), P. Lochak (Editor) , *Geometric Galois Actions: Volume 2, The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups* (London Mathematical Society Lecture Note Series), 1997.
- [24] D. Singerman, R. Syddall, *The Riemann Surface of a Uniform Dessin*, Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), 44 (2): 413–430, 2003.
- [25] G. Shabat, V. Voevodsky, *Drawing Curves over Number Fields*, The Grothendieck Festschrift Volume III, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, pp. 199–227, 1990.
- [26] W. Waterhouse, *Profinite groups are Galois groups*, Proceedings of the American Mathematical Society (American Mathematical Society) 42 (2): 639–640, 1974.
- [27] J. Wolfart, *The “obvious” part of Belyi’s theorem and Riemann surfaces with many automorphisms*, Geometric Galois actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 97–112, 1997.
- [28] L. Zapponi, *What is a Dessin d'Enfant?* , Notices of the American Mathematical Society 50 (7): 788–789, 2003.