ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

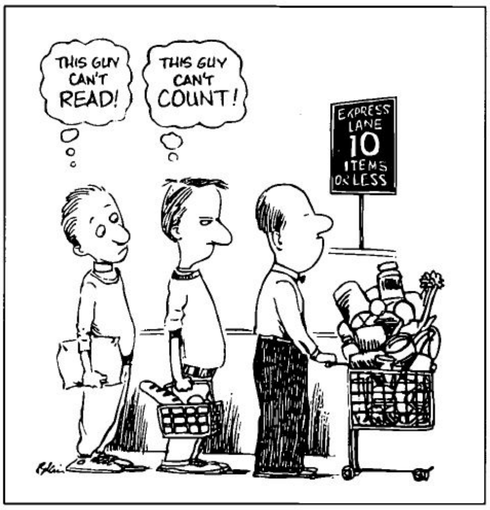
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

<u>ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>



Η κατανόηση του μαθηματικού κειμένου του σχολικού εγχειριδίου από τους μαθητές: Πόσο εύκολο είναι το θέμα της θεωρίας;

Ευγενία Αβούρη

Α.Μ. Δ201211

<u>Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής</u>

Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση — Επ. Καθηγήτρια, Π.Τ.Ν. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων]

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση (Επιβλέπουσα)	Επ. Καθηγήτρια, Π.Τ.Ν. Παν. Ιωαννίνων
▪	
▪ Δέσποινα Πόταρη	Αν. Καθηγήτρια, τμ. Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
▪ Γιώργο Ψυχάρη	Λέκτορα, τμ. Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση (Επιβλέπουσα)	Επ. Καθηγήτρια, Π.Τ.Ν. Παν. Ιωαννίνων
▪ Δέσποινα Πόταρη	Αν. Καθηγήτρια, τμ. Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
▪ Θεοδόση Ζαχαριάδη	Καθηγητή, τμ. Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα,

Την καθηγήτρια Ξένια Βαμβακούση γιατί μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον και σημαντικό θέμα, για την πολύτιμη ενθάρρυνση και καθοδήγηση της στην έρευνα και την δομή της εργασίας.

Τη σύμβουλο σπουδών μου καθηγήτρια Δέσποινα Πόταρη για τη στήριξη και γιατί μέσα από τις διαλέξεις της μου έμαθε πώς να ακούω τους μαθητές μου.

Τον καθηγητή Θεοδόση Ζαχαριάδη που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» για τις πολύτιμες γνώσεις που μου άνοιξαν νέους ορίζοντες στο διδακτικό μου έργο.

Τη Διονυσία Μπακογιάννη και την Ελένη Κλή για την άμεση και άψογη ενημέρωση και την αμέριστη βοήθειά τους τα δυο αυτά χρόνια των σπουδών μου στο ΠΜΣ.

Τη συνάδελφο Γεωργία που με παρότρυνε να ξεκινήσω αυτή την τόσο αναζωογονητική εμπειρία.

Τους συμφοιτητές μου για τις ωραίες στιγμές που περάσαμε και τις φιλίες που δημιουργήσαμε, και

την οικογένειά μου που είναι πάντα δίπλα μου, στηρίζει τις επιλογές μου και με βοηθάει να κάνω τα όνειρα μου πραγματικότητα.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.

Το διάβασμα (η ανάγνωση), όπως διατυπώνει ο Ediger (1997), είναι μια γνωστική διαδικασία με την οποία επιτελείται επικοινωνία, κατανόηση και μάθηση μέσα από γραπτό κείμενο. Υπάρχει μια ουσιαστική αλληλεπίδραση μεταξύ γλώσσας και σκέψης κατά την διαδικασία της ανάγνωσης. «Ο συγγραφέας κωδικοποιεί τη σκέψη σε γραπτό λόγο και ο αναγνώστης αποκωδικοποιεί τον γραπτό λόγο σε σκέψη» (Goodman, 1998 σελ12).

Διαφοροποιείται ο ορισμός αυτός όταν αφορά ένα μαθηματικό κείμενο; Μπορούμε να *μάθουμε* μαθηματικά διαβάζοντας;

Η δεξιότητα αυτή είναι σίγουρα απαραίτητη σε έναν φοιτητή μαθηματικών ή θετικών επιστημών, και θα πρέπει να την έχει μάθει στο σχολείο μαζί με άλλες βασικές γνώσεις της επιστήμης που σπουδάζει. Στη σχολική τάξη, στο μάθημα των μαθηματικών η έμφαση δίνεται στη τάξη σε δραστηριότητες που σκοπό έχουν κυρίως να προτρέψουν τον μαθητή να χρησιμοποιήσει τις μαθηματικές του γνώσεις, με την λύση ασκήσεων, συζήτηση, παρουσίαση τεχνικών επίλυσης προβλημάτων, εν τούτοις η επιτυχία της προσπάθειας εξασφαλίζεται με το «διάβασμα» στο σπίτι. Η γνώση του *πώς να μαθαίνουμε μέσα από τα βιβλία*, ανοίγει τον δρόμο προς την κατανόηση της μαθηματικής θεωρίας παράλληλα με την κατάκτηση τεχνικών διαπραγμάτευσης ασκήσεων και προβλημάτων. Το διάβασμα των μαθηματικών δημιουργεί *ανεξάρτητους μαθητές* (independent readers), μαθητές που έχουν αυτονομία και μπορούν να ορίζουν μόνοι τους τι μαθαίνουν (Shepherd, 2005).

Το σχολικό εγχειρίδιο περιέχει όλα όσα πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής, και γίνονται προσπάθειες από τους συγγραφείς, ώστε να είναι κατάλληλο για την ηλικία ή τη βαθμίδα της εκπαίδευσης και να διευκολύνει τον μαθητή στο διάβασμά του. Ο καλός δάσκαλος εφοδιάζει τους μαθητές του με τις κατάλληλες σημειώσεις, οι οποίες θα διευκολύνουν ακόμη περισσότερο το διάβασμα του σχολικού βιβλίου, εντοπίζοντας προβληματικά σημεία και υπογραμμίζοντας τα κύρια. Μερικές φορές μια πιο «χαλαρή» διατύπωση ακολουθεί έναν ορισμό ή μια πρόταση που είναι διατυπωμένη σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα. Τελευταίως με την ανάπτυξη των υπηρεσιών της εξ αποστάσεως ή διαδικτυακής εκπαίδευσης, και την στροφή προς την εκτός του σχολείου εκπαίδευση (π.χ home schooling), οι εκπαιδευτικές πλατφόρμες προσφέρουν, παράλληλα με τα βίντεο και τις εφαρμογές, ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας σε γραπτή μορφή, είτε πρόκειται για διαδραστικά on-line κείμενα είτε για απλά κείμενα σε ηλεκτρονική μορφή.

Οι εξετάσεις των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά συχνά και στη τριτοβάθμια, αξιολογούν δύο πράγματα. Αξιολογείται η γνώση της «θεωρίας», όπου ο μαθητής καλείται να διατυπώσει, αποδείξει ή να σχολιάσει μια πρόταση ή ένα θεώρημα που περιέχεται στο εγχειρίδιο του μαθήματος, ενώ στο δεύτερο μέρος καλείται να εφαρμόσει τη θεωρία λύνοντας κάποια προβλήματα ή ασκήσεις. Αξιολογούνται δηλαδή ο δύο άξονες της μαθηματικής γνώσης η ουσιαστική και λειτουργική διαδικαστική. Ειδικά όσον αφορά στα μαθηματικά του λυκείου, η αξιολόγηση της κατανόησης των περιεχομένων του σχολικού εγχειριδίου, συμμετέχει με 25% στο βαθμό των απολυτηρίων και εισαγωγικών εξετάσεων, με το λεγόμενο «πρώτο θέμα» ή «θέμα θεωρίας». Σε όλες τις γραπτές εξετάσεις όλων των κλάδων των μαθηματικών που διδάσκονται στο γυμνάσιο και στο λύκειο στο «πρώτο θέμα», αξιολογείται αν ο μαθητής έχει κατακτήσει το απολύτως βασικό επίπεδο γνώσεων για την τάξη στην οποία φοιτά. Σύμφωνα με τις οδηγίες του υπουργείου, σε αυτό *ζητείται η απόδειξη μίας απλής πρότασης που είναι αποδεδειγμένη στο σχολικό εγχειρίδιο*. (Π.Δ. 68/7-5-2014 ΦΕΚ 110 τ. Α). Λόγω της θέσης του στο ιεραρχημένης δυσκολίας διαγώνισμα μαθηματικών, θεωρείται το «πιο εύκολο» στη διαπραγμάτευση αλλά και το ελάχιστο απαιτούμενο από τον μαθητή. Η αποτυχία στο πρώτο θέμα θεωρείται από πολλούς καθηγητές αποτέλεσμα της πλήρους αδιαφορίας του μαθητή για το μάθημα, είναι για αυτούς ο μαθητής που «δεν άνοιξε βιβλίο».

Κι όμως, ο Θωμαΐδης (2000, σελ.21) σχολιάζοντας τα αποτελέσματα των (πανελλήνιων) προαγωγικών εξετάσεων στη γεωμετρία 130 μαθητών ενός Λυκείου, διαπιστώνει ότι «*45% των μαθητών, σε επίσημες και προγραμματισμένες εξετάσεις αδυνατεί <u>να αναπαράγει</u> με σωστό τρόπο τις* *αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που αποτελούν τα 2/3 της ύλης του σχολικού βιβλίου*» (η υπογράμμιση δεν υπάρχει στο πρωτότυπο). Είναι λοιπόν οι μισοί σχεδόν μαθητές μας «αδιάβαστοι» ή δεν έχουν αναπτύξει τις απαιτούμενες δεξιότητες για την κατανόηση κειμένου και ειδικά του μαθηματικού κειμένου;

Αν κρίνουμε από την προσφορά φροντιστηριακής βοήθειας για τα μαθηματικά τόσο στο γυμνάσιο και στο λύκειο αλλά ακόμα και στα πανεπιστήμια, θα λέγαμε ότι οι μαθητές και οι φοιτητές δυσκολεύονται να μάθουν μαθηματικά από το βιβλίο. Η χρήση του βιβλίου απαιτεί αρκετές δεξιότητες (λεξιλόγιο, ερμηνεία συμβόλων λέξεων και σχημάτων, διασταύρωση της πληροφορίας που δίνεται σε κείμενο και πληροφορίας που δίνεται σε εικόνα διάγραμμα ή σε άλλο σημείο του βιβλίου), και κυρίως απαιτεί την χρήση κατάλληλων στρατηγικών ανάγνωσης και αρκετά αναπτυγμένες μεταγνωστικές δεξιότητες ώστε να είναι σε θέση ο μαθητής να γνωρίζει *αν* κατάλαβε το κείμενο και αν όχι, *τι δεν κατάλαβε. Η δεξιότητα του «να μαθαίνω διαβάζοντας» (reading to learn*) μπορεί να καλλιεργηθεί και να αποτελέσει αντικείμενο μαθήματος (Borasi, 1990).

Με την εργασία αυτή γίνεται προσπάθεια να διερευνηθεί το πώς και πόσο κατανοείται από τους μαθητές λυκείου το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου της γεωμετρίας. Μαθητές της Α τάξης Λυκείου, που είχαν διδαχθεί το θέμα της εφαπτομένης κύκλου, κλήθηκαν να σχολιάσουν ένα πόρισμα, ένα σχήμα του σχολικού βιβλίου, και την απόδειξη ενός γεωμετρικού προβλήματος από την ενότητα αυτή, με σκοπό να διερευνηθεί αν οι μαθητές «διαβάζουν» αποτελεσματικά το σχολικό βιβλίο. Στη συνέχεια το ίδιο εργαλείο δόθηκε σε τρεις μαθήτριες, με την οδηγία να «σκέφτονται φωναχτά», δηλαδή να εργαστούν ομαδικά. Η συζήτησή τους μαγνητοφωνήθηκε. Έγινε προσπάθεια να ανιχνευτούν χαρακτηριστικά που μπορεί να είναι δείκτες της ύπαρξης η μη δεξιοτήτων κατανόησης και της χρήσης ή όχι συγκεκριμένων στρατηγικών ανάγνωσης. Στο τέλος τους ζητήθηκε να αξιολογήσουν το πόσο βέβαιες ήταν για την ορθότητα των απαντήσεών τους και να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικές με την χρήση του σχολικού βιβλίου.

Το πρώτο κεφάλαιο, αναφέρεται στις θεωρίες που αφορούν στην ανάγνωση και την κατανόηση κειμένου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επισημαίνονται οι ιδιαιτερότητες των μαθηματικών κειμένων και οι διαφορές τους σε σχέση με τα απλά κείμενα πληροφόρησης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η πρώτη και η δεύτερη φάση της έρευνας και συζητούνται τα ευρήματα και τα αποτελέσματά της.

Θεωρίες Ανάγνωσης και Κατανόησης κειμένου

Η ανάγνωση είναι μια πολύπλοκη γνωστική διεργασία κατά την οποία αποκωδικοποιούνται γραπτά σύμβολα με στόχο την κατασκευή ή εξαγωγή νοήματος. Προϋποθέτει την ύπαρξη τριών οντοτήτων: του αναγνώστη, του κείμενου και της αλληλεπίδρασης των δύο ή του μηχανισμού της κατανόησης.

Για τον μηχανισμό της κατανόησης, έχουν εκφραστεί πολλές απόψεις χωρίς να έχει επιτευχθεί απόλυτη συμφωνία γιατί η έννοια της κατανόησης κειμένου είναι ένα μέρος ευρύτερης συζήτησης που αφορά το είδος και την φύση των επικοινωνιακών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των προθέσεων του συγγραφέα (ή του ομιλητή), το περιεχόμενο του κειμένου (ή του μηνύματος), τις ικανότητες και τους σκοπούς του αναγνώστη (ή ακροατή) και το πλαίσιο μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση.

Οι όροι *ανάγνωση* (reading), *κατανόηση κειμένου* (reading comprehension) και *γραμματισμός* (literacy) έχουν χρησιμοποιηθεί με την πάροδο του χρόνου για να περιγράψουν το ίδιο φαινόμενο, ανάλογα με το θεωρητικό πρίσμα μέσα από το οποίο ερευνάται και τη σημασία που δίνεται στις διάφορες συνιστώσες του (Israel & Duffy, 2014). Ο όρος ανάγνωση αναφέρεται στην αποκωδικοποίηση των γραπτών συμβόλων και την κατανόηση του μηνύματος που μεταφέρει ο συγγραφέας. Η κατανόηση κειμένου αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο κατανοείται από τον αναγνώστη το γραπτό κείμενο, ενώ ο όρος γραμματισμός στην ικανότητα να διαβάζεις να κατανοείς και να μαθαίνεις από το γραπτό κείμενο (McKenna & Robinson, 1990).

Η ανάγνωση εμπεριέχει τις έννοιες του συλλογισμού, της κριτικής σκέψης, της κατανόησης, της επικοινωνίας, είναι απαιτούμενο σε όλες σχεδόν τις ανώτερες γνωστικές λειτουργίες όπως λύση προβλημάτων, και η λήψη αποφάσεων (McNamara, 2009). Επιπλέον, αποτελεί σήμερα τον κυριότερο τρόπο μάθησης και απόκτησης γνώσεων (Πόρποδας, 2003).

Ανάλογα με τις διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις, έχουν διαμορφωθεί και τα βασικά μοντέλα ή θεωρίες για τον τρόπο που διεκπεραιώνεται η γνωστική λειτουργία της ανάγνωσης (Κουμπιάς, 2010, Βαμβουκας, 2004)

Το κλασικό μοντέλο ή «από κάτω προς τα πάνω» (bottom-up), βασισμένο στον μπηχεβιορισμό, θεωρεί ότι η διαδικασία της ανάγνωσης ακολουθεί ιεραρχικά στάδια από χαμηλότερες διαδικασίες επεξεργασίας πληροφοριών προς τις ανώτερες.

Η ανάγνωση γίνεται γραμμικά, από δεξιά προς αριστερά και ο αναγνώστης αποκωδικοποιεί κάθε μια λέξη, οι λέξεις συνδέονται σε φράσεις και τελικά σε προτάσεις που έχουν κάποιο νόημα. Το νόημα εμπεριέχεται στο κείμενο και ο αναγνώστης το εξάγει από αυτό λαμβάνοντας υπόψη, όχι μόνο το νόημα των ίδιων των λέξεων, αλλά και το περιβάλλον στο οποίο βρίσκονται, το συντακτικό, τη δομή του κειμένου. Η έμφαση δίνεται στο κείμενο, και ο αναγνώστης έχει μάλλον παθητική συμπεριφορά στη προσπάθειά του να το κατανοήσει.

Το «από πάνω προς τα κάτω» (top-down) μοντέλο, έχει τη βάση του στις γνωσιακές θεωρίες μάθησης και υποστηρίζει ότι οι ανώτερες γνωστικές λειτουργίες είναι εκείνες που καθοδηγούν τις χαμηλότερες. Σε αντίθεση με το προαναφερθέν μοντέλο, η ανάγνωση είναι μια ενεργητική διαδικασία κατά την οποία ο αναγνώστης προσπαθεί να «μαντέψει» το νόημα του κειμένου κάνοντας υποθέσεις, βασιζόμενος στην προϋπάρχουσα γνώση του, τις οποίες στη συνέχεια δέχεται ή απορρίπτει, κάνει νέες υποθέσεις κοκ. Ο αναγνώστης δεν εξάγει απλά το νόημα από τις λέξεις, αλλά εμπλέκεται σε μια διαδικασία σύνδεσης της πληροφορίας που περιέχεται στο κείμενο με εκείνη που ανακαλεί από τη μνήμη του. Η διαδικασία της ανάγνωσης αφορά περισσότερο τον αναγνώστη παρά το κείμενο αφού, η προϋπάρχουσα γνώση του αναγνώστη είναι εκείνη που δίνει το νόημα. Επειδή οι γνώσεις και οι εμπειρίες διαφέρουν από άτομο σε άτομο, μπορεί το ίδιο κείμενο να οδηγήσει στην κατασκευή διαφορετικών νοημάτων.

Αντιρρήσεις διατυπώθηκαν και για τα δύο μοντέλα: στο από-κάτω-προς-τα-πάνω, BU, μοντέλο υπάρχει ο περιορισμός της σειριακής επεξεργασίας, και υποβαθμίζεται ο ρόλος του αναγνώστη καθώς δεν λαμβάνεται υπ όψη η προϋπάρχουσα γνώση του, και το από-πάνω-προς-τα-κάτω, TD, είναι δύσκολο να εξηγήσει την περίπτωση που ο αναγνώστης συναντά ένα εντελώς ξένο προς αυτόν κείμενο όποτε είναι αναποτελεσματική αν όχι αδύνατη η «πρόβλεψη» για το νόημα του κειμένου.

Έτσι στη διάρκεια των δεκαετιών του 70 και 80, σε μια σειρά σημαντικών δημοσιεύσεων, παρουσιάστηκαν μικτά, ταυτοχρόνως BU και TD, διαδραστικά (interactive) μοντέλα ανάγνωσης. O Rumelhart, το 1977 παρουσίασε το μοντέλο επεξεργασίας της πληροφορίας, ο Stanovich, το 1980 το διαδραστικό-αντισταθμιστικό μοντέλο (interactive-compensatory model), ο Andesron, το 1977 το μοντέλο των νοητικών σχημάτων (schema theory), οι Kintsch και Van Dijk το 1983 και αργότερα ο Kintsch to 1988 το μοντέλο δόμησης-ολοκλήρωσης (construction-integration model). Τα μοντέλα αυτά εστιάζουν κυρίως σε βαθύτερα επίπεδα κατανόησης , στο ρόλο της μνήμης και τους μηχανισμούς κατανόησης και όχι στα επιφανειακά επίπεδα κατανόησης όπως είναι η λεκτική επεξεργασία, η συντακτική ανάλυση, και η ερμηνεία-μετάφραση του κειμένου.

Στη *θεωρία σχημάτων* (schema theory), η ανάγνωση και η κατανόηση του κειμένου, υπαγορεύεται από τον έλεγχο ενός σχήματος (scheme), το οποίο λειτουργεί ως ένα αντιληπτικό φίλτρο μέσω του οποίου αντιλαμβανόμαστε το νόημα των λέξεων και του κειμένου. Τα νοητικά σχήματα είναι εννοιολογικές δομές στις οποίες οργανώνονται στη μνήμη οι γνώσεις και εμπειρίες και αποτελούν ένα επεξηγηματικό πλαίσιο, βάσει του οποίου γίνεται κατανοητή η νέα πληροφορία. Κατά την ανάγνωση, επιλέγεται το πλέον κατάλληλο να υποστηρίξει την νέα πληροφορία νοητικό σχήμα, αναγνωρίζοντας στοιχεία του κειμένου που είναι συνεπή με αυτό. Το κείμενο κατανοείται όταν η νέα πληροφορία ενσωματώνεται στο ήδη υπάρχον νοητικό σχήμα είτε επεκτείνοντας το, είτε τροποποιώντας το κατάλληλα. Έτσι το νόημα του κειμένου εξαρτάται από την προσωπική εμπειρία και ιστορία του αναγνώστη. Σε ένα πείραμα που διεξήγε ο Anderson το 1976, φοιτητές από διαφορετικές σχολές κλήθηκαν να διαβάσουν το ίδιο κείμενο το οποίο ήταν αρκετά ασαφές ή διφορούμενο, έτσι ώστε να μπορεί να ενταχτεί σε διαφορετικά νοητικά σχήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρή σχέση μεταξύ του τρόπου που κατανοήθηκε το κείμενο από τους φοιτητές και της σχολής στην οποία φοιτούσαν. Επιπλέον οι περισσότεροι δεν

είχαν αντιληφθεί ότι το κείμενο δέχεται και διαφορετική από την δική τους ερμηνεία.
Οι Kintsch και Van Dijk ανέπτυξαν μια θεωρία με την οποία περιγράφεται πλήρως η διαδικασία ανάγνωσης, από την αναγνώριση των λέξεων, έως την κατασκευή της αναπαράστασης του νοήματος του κειμένου. Το 1988 ο Kintsch επέκτεινε την θεωρία αυτή, παρουσιάζοντας το *μοντέλο δόμησης-ολοκλήρωσης*, του οποίου βασικό στοιχείο είναι η διάκριση δύο διαφορετικών επιπέδων της νοητικής αναπαράστασης που δομεί ο αναγνώστης κατά τη διαδικασία κατανόησης ενός κειμένου.
Σύμφωνα με τους Kintsch και Van Dijk, ο αναγνώστης αρχικά αντιλαμβάνεται το περιεχόμενο του κειμένου μέσα από μια κυκλική διαδικασία μετατροπής ενός επιφανειακού κώδικα, που αποτελεί τις αναπαραστάσεις των λέξεων και προτάσεων του κειμένου όπως είναι, και που υπόκειται στους περιορισμούς της βραχύχρονης μνήμης, σε ένα μοντέλο κειμένου (text base) το οποίο διατηρείται στη μνήμη όχι όμως όπως στη μορφή του επιφανειακού κώδικα αλλά σε μια πιο αφαιρετική μορφή.
Το μοντέλο κειμένου (text base) είναι μια τοπικά και ολικά καλά δομημένη νοητική αναπαράσταση η οποία περιλαμβάνει τις πληροφορίες που περιέχονται άμεσα στο κείμενο, τις λέξεις τις προτάσεις και τις μεταξύ τους σχέσεις, με την διάταξη που εμφανίζονται σε αυτό. Έχει μια μικροδομή η οποία εκφράζει τις σημασιολογικές λεπτομέρειες του κειμένου και μια μακροδομή που εκφράζει τις κύριες ιδέες που συνδέουν μεγαλύτερες ενότητες του κειμένου.
Οι Kintsch και Van Dijk αναφέρουν ότι η κατανόησή των μαθηματικών αρχών ίσως να οργανώνονται ξεχωριστά από τις λέξεις, αλλά εστιάζουν, με τα πειράματα ανάγνωσης που διεξάγουν, στη λεκτική γνώση γιατί αποτελεί πολύ πιθανόν τη μορφή κατανόησης που απορρέει από την ανάγνωση.
Για την κατασκευή του μοντέλου του κειμένου, απαιτείται η γνώση της σημασίας των λέξεων του κειμένου αλλά και μια γενικότερη γνώση γύρω από το θέμα που διαπραγματεύεται το κείμενο. Έχοντας οικοδομήσει την αναπαράσταση αυτή, ο αναγνώστης γνωρίζει το κείμενο και είναι σε θέση να απαντήσει σε ερωτήσεις που

αφορούν στο κείμενο αυτό, να κάνει μια περίληψη, να επιβεβαιώσει αν ένας ισχυρισμός περιέχεται σε αυτό ή όχι. Όμως ο αναγνώστης δεν έχει κατανοήσει στο κείμενο σε ένα βαθύτερο επίπεδο.

Η βαθύτερη κατανόηση ολοκληρώνεται με την δόμηση της νοητικής αναπαράστασης του καταστασιακού μοντέλου (situation model). Ειδικά στην περίπτωση τεχνικών ή επιστημονικών κειμένων, των οποίων ο σκοπός είναι συνήθως η πληροφόρηση και η μάθηση, ο αναγνώστης πρέπει να παράγει νόημα συνδυάζοντας τις πληροφορίες οι οποίες αναφέρονται ρητά στο κείμενο με τις γνώσεις που έχει σχετικά με την περιοχή του θέματος που διαπραγματεύεται το κείμενο. Οι νέες γνώσεις δομούνται πάνω στη βάση των όσων ήδη καταλαβαίνουμε και πιστεύουμε (Vosniadou et al, 2008).

Ο Osterholm (2008), αναφέρει τρία επίπεδα κατανόησης κειμένου όπως τα ορίζει ο Kintsch, κάθε ένα από τα οποία συνιστά το νοητικό σχήμα του κειμένου:

Επιφανειακό (surface component), όταν υπάρχει η κατανόηση των μεμονωμένων λέξεων ή φράσεων ή διαγραμμάτων χωρίς να έχει γίνει κατανοητή η βαθύτερη σημασία τους. Αν έχει επιτευχθεί αυτό το επίπεδο κατανόησης ο μαθητής μπορεί να θυμάται κάποιες λέξεις ή φράσεις του κειμένου.

Βασικό (textbase component) είναι η σημασιολογική δομή που προκύπτει από το κείμενο αυτό καθεαυτό, χωρίς την προσθήκη άλλων στοιχείων που δεν περιέχονται στο ίδιο κείμενο. Σε αυτή τη περίπτωση μπορεί να αποδοθεί το νόημα του κειμένου χωρίς να χρειαστεί να ανακληθούν από τη μνήμη οι ακριβείς λέξεις ή οι φράσεις του κειμένου

Καταστασιακό (situation model), για να κατανοήσει πλήρως την σημασία του κειμένου χρειάζεται ο αναγνώστης να το συνδέσει με την γνώση που ήδη κατέχει για την έννοια που διαπραγματεύεται το κείμενο και να κατασκευάσει έτσι ένα πλήρες και συνεκτικό νοητικό σχήμα για την κατάσταση που μελετά. Σε αυτή τη περίπτωση ο μαθητής μπορεί να απαντήσει σωστά σε ερωτήσεις που αφορούν την κατάσταση στην οποία αναφέρεται το κείμενο χωρίς πολλές φορές να θυμάται το τι διάβασε.

Για το θέμα του αριθμού των νοητικών αναπαραστάσεων που οικοδομεί ο αναγνώστης και το κατά πόσο αποτελούν διακριτά επίπεδα αναπαράστασης ή αν η διάκριση γίνεται για τις ανάγκες της ανάλυσης, έχουν διατυπωθεί αρκετές απόψεις σε έρευνες που αφορούν σε διαφορετικά κείμενα, για παράδειγμα κείμενα που περιγράφουν την πλοήγηση μιας διαδρομής (Perrig & Kintsch, 1985), ένα έργο προγραμματισμού υπολογιστή (Schmalhofer & Glavanof, 1986) και αιτιολόγησης συμπερασμού (Mannes & Kintsch, 1987). Όλοι όμως φαίνεται να συμφωνούν για τον ρόλο της προϋπάρχουσας γνώσης του αναγνώστη. Η άποψη ότι, η επικάλυψη περιεχομένου ανάμεσα στο κείμενο και στις γνώσεις του αναγνώστη ίσως να αποτελεί αναγκαία συνθήκη για μάθηση από κείμενο είναι τόσο ισχυρή που έχει οδηγήσει ερευνητές όπως οι McNamara et al (1993) να κάνουν αναφορές σε ζώνες ετοιμότητας εκμάθησης (learnability).

> *Βασικά, ο αναγνώστης που κατανοεί, αυτομάτως θα συνδέσει την πληροφορία που περιέχεται στο κείμενο με τις γνώσεις του σε τομείς όπου έχει ένα καλά δομημένο γνωστικό υπόβαθρο και εμπειρία. Η επιτυχής σύνδεση μεταξύ των πληροφοριών του κειμένου και του γνωστικού υπόβαθρου του αναγνώστη είναι κρίσιμης σημασίας για την βαθιά κατανόηση του κειμένου και για την εκμάθηση από το κείμενο, δηλαδή, για το αν ο αναγνώστης αποκτήσει την ικανότητα να χρησιμοποιήσει την πληροφορία που περιέχεται στο κείμενο με άλλους, νέους τρόπους και να την ενσωματώσει με την προϋπάρχουσα γνώση του. Αν η ενσωμάτωση δεν επιτευχθεί, η νοητική αναπαράσταση του κειμένου παραμένει αδρανής - αρκεί για να είναι σε θέση ο αναγνώστης να αναπαράγει το κείμενο, αλλά όχι για να αξιοποιήσει τις πληροφορίες αλλιώς. Ένας αναγνώστης του οποίου η κατανόηση φτάνει μόνο έως το επίπεδο κειμένου (textbase) θα είναι σε θέση να θυμάται και να αναγνωρίζει το κείμενο για ένα διάστημα αλλά, στο τέλος η σκέψη, η ικανότητα του στην επίλυση προβλήματος και η κατανόηση του θα μείνουν ανεπηρέαστα. Αντίθετα, ο αναγνώστης που θα μπορέσει*

να δομήσει ένα καλά οργανωμένο μοντέλο κατάστασης, θα είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει τις πληροφορίες που περιέχονται στο κείμενο και αργότερα αν χρειαστεί, ακόμα και όταν το ίδιο το κείμενο έχει ξεχαστεί (Kintsch, 2002, p.159).

Η ανάγνωση δεν είναι μια απλή διαδικασία αποκωδικοποίησης λέξεων ή φράσεων αλλά μια πολύπλοκη γνωστική διεργασία κατά την οποία ο αναγνώστης κατασκευάζει νόημα από τις λέξεις και τις προτάσεις του κειμένου αλλά και από τις ιδέες τις εμπειρίες και τη γνώση που οι λέξεις αυτές του φέρνουν στο μυαλό. Αν και το διάβασμα θεωρείται μια μοναχική, απλή και παθητική απασχόληση, στην πραγματικότητα είναι μια ενεργητική και πλούσια σε πολυφωνία απόψεων *συζήτηση* μεταξύ του συγγραφέα, του αναγνώστη και όλων των άλλων που ο αναγνώστης έχει διαβάσει ή συναντήσει (Schoenbach et al, 1999).

Η κονστρουβιστική θεώρηση της ανάγνωσης και κατανόησης κειμένου, μετέφερε το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών από το ίδιο το κείμενο, με την αξιολόγηση της δυσκολίας που παρουσιάζει στους μαθητές (text difficulty) και τους δείκτες αναγνωσιμότητας (readability), στους μηχανισμούς κατανόησης του μαθητή. Δεν αγνοεί όμως το ρόλο του κειμένου. Αντίθετα οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να εξετάζουν τα κείμενα από τη σκοπιά της υπάρχουσας γνώσης και του πολιτισμικού υπόβαθρου των μαθητών, προκειμένου να αξιολογήσουν αν θα είναι οι μαθητές σε θέση να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των εννοιών που καταγράφονται στο κείμενο και του νοητικού σχήματος που θα ανακαλέσουν για να επιτευχθεί το έργο της ανάγνωσης. Ανοίγει όμως το ερώτημα του πού ακριβώς εδράζεται το *νόημα.* Στο μυαλό του συγγραφέα, όπως καταγράφεται στο κείμενο, στο μυαλό του αναγνώστη, με την εννοιολογική δομή που κατασκευάζει κατά την ανάγνωση, ή στην ίδια την αλληλεπίδραση μεταξύ αναγνώστη και κειμένου. Η κοντρουβιστική θεώρηση μάλλον είναι υπέρ της τρίτης θέσης αφού υποστηρίζει ότι η κατανόηση του κειμένου εδράζεται στην τομή του αναγνώστη, του κειμένου και του περιεχόμενου (εικόνα 1).

Εικόνα 1

Εκτός από την θεώρηση του αναγνώστη ως «κατασκευαστή» νοημάτων, εξίσου ισχυρή είναι και η θεώρησή του ως «επισκευαστή» ή «λύτη προβλημάτων» που επισκευάζει κάθε αστοχία στην κατανόηση με τη βοήθεια της εργαλειοθήκης τεχνικών και στρατηγικών που διαθέτει. Την δεκαετία του 70, μια νέα κατεύθυνση εμφανίζεται στη σκηνή των ερευνών με το ελκυστικό όνομα *μεταγνώση* και εστιάζει σε τέσσερις κυρίως έννοιες: *επίγνωση* (awareness), *παρακολούθηση* (monitoring), *έλεγχο* (control), και *αξιολόγηση* (evaluation). Στην έρευνα για την μεταγνώση επικρατούν δύο μεγάλες κατευθύνσεις, οι έρευνες στην μεταμνήμη των Flavel και Wellman (1975) και οι έρευνες των Brown και Campione (1981) για τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι αναγνώστες για την παρακολούθηση, την αξιολόγηση και την διόρθωση της κατανόησής τους.

Ο αποτελεσματικός αναγνώστης όταν διαβάζει, κατασκευάζει πρώτα μια νοητική παράσταση του κειμένου, την *ουσία* του (gist), η οποία θα αποτελέσει το εξελισσόμενο πλαίσιο πάνω στο οποίο θα κατασκευάσει το νόημα και του υπόλοιπου κειμένου. Καθώς διαβάζει, ελέγχει το νόημα και αξιολογεί τη κατανόηση του εντοπίζοντας τις αναντιστοιχίες που προκύπτουν. Σε περίπτωση που η κατανόηση του κειμένου κριθεί ελλιπής, ανατρέχει σε στρατηγικές που θα τον βοηθήσουν να διορθώσει τις ασάφειες και θα του επιτρέψουν να κατανοήσει καλλίτερα το κείμενο (Paris, Lipson & Wixson, 1983).

Οι Afflerbach et al (2008) διακρίνουν τις αναγνωστικές δεξιότητες (skills) από τις αναγνωστικές στρατηγικές (strategies) : οι δεξιότητες είναι αυτόματες διαδικασίες ενώ οι στρατηγικές σκόπιμες, ελεγχόμενες ενέργειες που και οι δύο αποσκοπούν στην την αποκωδικοποίηση και κατανόηση του κειμένου με ταχύτητα, αποτελεσματικότητα και ευχέρεια και συνήθως συμβαίνουν χωρίς έλεγχο. Η επιτυχημένη ανάγνωση, με την έννοια της κατανόησης του κειμένου, απαιτεί την ισορροπία μεταξύ της αυτόματης εφαρμογής και χρήσης των αναγνωστικών δεξιοτήτων και της επίπονης και σκόπιμης ενασχόλησης με την αξιοποίηση των κατάλληλων για το κείμενο αναγνωστικών τεχνικών και επιπλέον την ικανότητα να μεταφέρεται η προσοχή απρόσκοπτα μεταξύ των δύο.

Οι στρατηγικές ανάγνωσης κατηγοριοποιούνται σε γνωστικές, μεταγνωστικές και κοινωνικές (Anastasiou & Griva, 2009; Sheorey & Mokhtari, 2001). Μεταγνωστικές στρατηγικές αφορούν στον σχεδιασμό, στην παρακολούθηση και στη ρύθμιση και λαμβάνουν χώρα πριν, κατά τη διάρκεια, και μετά από οποιαδήποτε πράξη σκέψης όπως η ανάγνωση. Αντίθετα οι γνωστικές στρατηγικές αφορούν στην ενσωμάτωση νέας πληροφορίας με την προηγούμενη γνώση.

Σύμφωνα με τους Baker και Brown (1984) η *αναγνωστική επίγνωση*, δηλαδή η επίγνωση των στόχων της ανάγνωσης από τον αναγνώστη και η επίγνωση των δυνατοτήτων του, η *παρακολούθηση* της πορείας της ανάγνωσης, η γνώση και η επιλογή κατάλληλων *στρατηγικών* που θα οδηγήσουν στην κατανόηση καθώς και η *αυτοαξιολόγηση* για το βαθμό που πραγματοποιήθηκε ο στόχος της ανάγνωσης, δηλαδή οι μεταγνωστικές δεξιότητες είναι εκείνες που διακρίνουν τον αποτελεσματικό ή «έμπειρο» αναγνώστη. Οι αδύναμοι αναγνώστες, όπως παρατηρούν οι Garner και Reis (1981) φαίνεται να μην καταλαβαίνουν ότι δεν έχουν κατανοήσει το κείμενο που διαβάζουν.

Όμως ένας έμπειρος αναγνώστης δεν είναι κατ’ ανάγκη αποτελεσματικός αναγνώστης σε όλα τα είδη κειμένων. Ένας μηχανικός αυτοκινήτων μπορεί να κατανοήσει πλήρως τις οδηγίες που περιέχονται σε ένα τεχνικό φυλλάδιο το οποίο μπορεί να προκαλέσει αμηχανία σε έναν φιλόλογο, και να μην μπορεί να καταλάβει το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου της χημείας για να βοηθήσει το παιδί του.

Αν η ανάγνωση ειδωθεί σαν εμπλαισωμένο (contextual) φαινόμενο, τότε θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι ο αναγνώστης αντιλαμβάνεται το νόημα του κειμένου σύμφωνα με το πλαίσιο και την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Το 1989 οι Brown, Collins και Duguid (1989) υποστήριξαν ότι ο τρόπος που προσπαθούμε να προάγουμε την γνώση μέσα από τα σχολικά βιβλία είναι τόσο αφηρημένος και ξεκομμένος από την πραγματικότητα, ώστε θέτει φραγές στην προσπάθεια κατανόησης του κειμένου από τον αναγνώστη και δεν προάγει γενικώς την κατανόηση είτε του συγκεκριμένου κειμένου είτε του γενικότερου πεδίου στο οποίο το κείμενο αναφέρεται.

Ο αποτελεσματικός αναγνώστης έχει κίνητρα, στόχους και συγκεκριμένες προσδοκίες από το κείμενο που τον οδηγούν κατά τη διάρκεια του διαβάσματος στον διάλογο του με το κείμενο (Ruddell & Unrau, 1994).

Το 2001 ο Smagorinsky εμπνεόμενος από την παράδοση της θεωρίας του Vygotsky και της θεωρίας της δραστηριότητας (activity theory) διατύπωσε μια κοινωνικο-πολιτισμική άποψη για την ανάγνωση σύμφωνα με την οποία το νόημα δεν εδράζεται ούτε στο κείμενο ούτε στον αναγνώστη ή την μεταξύ τους αλληλεπίδραση (interaction) αλλά στη ζώνη συνδιαλλαγής (transaction) μέσα στην οποία ο αναγνώστης το κείμενο και το περιεχόμενο συναντώνται και συνδιαλέγονται ώστε στο τέλος προκύπτει κάτι νέο μεγαλύτερο από το άθροισμα ή την ένωση των συνιστωσών του. Το βασικό επιχείρημα στο μοντέλο του Smagorinsky είναι ότι οι αναγνώστες συνθέτουν, στη κυριολεξία, νέα κείμενα κατά την συνδιαλλαγή τους με το κείμενο που διαβάζουν με βάση τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες τους, μέσα στο πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται η ανάγνωση και το οποίο επίσης διαμορφώνει το είδος και τον τρόπο που ερμηνεύεται αυτό.

Συνοψίζοντας, το «διάβασμα» και ειδικά η μάθηση μέσα από το βιβλίο, η γραπτό κείμενο, είναι δυνατόν να επιτευχθεί σε επιφανειακό ή σε πιο βαθύ επίπεδο με το δεύτερο βέβαια να είναι το ζητούμενο στο μάθημα των μαθηματικών. Με κριτήριο τους στόχους, το διάβασμα στην βαθιά προσέγγιση στοχεύει στην κατασκευή προσωπικού νοήματος, ενώ στην επιφανειακή, στόχος είναι η υψηλές αποδόσεις σε διαγωνίσματα ή και η απλή διεκπεραίωση της εργασίας που έχει ανατεθεί. Με κριτήριο τη χρήση στρατηγικών, στη βαθιά προσέγγιση επιστρατεύονται στρατηγικές που θα επιτρέψουν την σύνδεση του περιεχομένου του κειμένου με τις υπάρχουσες γνώσεις ενώ στην επιφανειακή στρατηγικές απομνημόνευσης και αποστήθισης. Με κριτήριο την μεταεννοιολογική επίγνωση, στην βαθιά προσέγγιση υπάρχει επίγνωση στόχων, ικανοτήτων και αποτελέσματος ενώ στην επιφανειακή δεν υπάρχει (Βαμβακούση, 2014).

Το Μαθηματικό κείμενο

Το σχολικό βιβλίο

Ένας από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως περιγράφονται στο ενιαίο πλαίσιο σπουδών αφορά στη γλωσσική διάσταση των μαθηματικών, δηλαδή *την καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.* Αυτό, μεταξύ άλλων σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να *είναι ικανοί να διαβάζουν και να ερμηνεύουν μαθηματικά κείμενα που είναι διατυπωμένα σε προφορική, διαγραμματική ή συμβολική μορφή.*

Τι μπορεί να χαρακτηριστεί όμως ως μαθηματικό κείμενο; Είναι ένα κείμενο που περιέχει μαθηματικά σύμβολα, διαγράμματα, πίνακες και γεωμετρικά σχήματα ή ένα κείμενο που αναφέρεται σε μαθηματικά αντικείμενα;

Το μαθηματικό κείμενο μπορεί να είναι

- ✓ η διατύπωση ενός ορισμού, ενός θεωρήματος ή πρότασης ή ιδιότητας,
- ✓ η εξήγηση με ή χωρίς τη χρήση διαγραμμάτων, σχημάτων ή άλλων εικόνων ενός από τα παραπάνω,
- ✓ η διατύπωση συλλογισμών,
- ✓ η αφήγηση του τρόπου με τον οποίο ιστορικά εξελίχτηκαν και διαμορφώθηκαν μαθηματικές έννοιες,
- ✓ η παρουσίαση εφαρμογών,
- ✓ η επίδειξη της τεχνικής της επίλυσης ενός συγκεκριμένου προβλήματος ή άσκησης
- ✓ η απόδειξη μιας πρότασης.

Τέτοια κείμενα μπορεί να είναι πραγματείες (exposition), άρθρα, σχολικά εγχειρίδια, σημειώσεις μαθήματος, συλλογές ασκήσεων, φύλλα εργασίας, περιεχόμενο ιστοσελίδων με μαθηματικό περιεχόμενο αλλά επίσης μπορεί να είναι, θεωρούν πολλοί, και κείμενα *για* τα μαθηματικά, όπως ιστορικά και φιλοσοφικά κείμενα, βιογραφίες μαθηματικών, εφαρμογές των μαθηματικών στη καθημερινή ζωή και γενικά *οποιοδήποτε κείμενο μπορεί να συμβάλλει στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών (*Borasi& Siegel, 1990).

Η Sierpinska (1997) ονομάζει τα κείμενα που προορίζονται για χρήση από τους μαθητές ή τους καθηγητές διδακτικά (didactics), και αναγνωρίζει σε αυτά δύο επίπεδα ένα *μαθηματικό* και ένα *διδακτικό.* Το πρώτο μεταφέρει την καθαρά μαθηματική πληροφορία, ενώ το δεύτερο στοχεύει να διαμορφώσει τη συμπεριφορά του αναγνώστη ως μαθητή που χρησιμοποιεί το κείμενο για να μάθει, και να τον βοηθήσει στη ερμηνεία του. Από αυτήν την άποψη, ιδιαίτερα σημαντικό για το ρόλο του ως διαμεσολαβητικό μέσο προς τη μάθηση, είναι το *σχολικό εγχειρίδιο* γιατί είναι το βασικό κείμενο με το οποίο έρχεται σε επαφή ο μαθητής, τον επηρεάζει στο τρόπο προσέγγισης και οργάνωσης της μαθηματικής γνώσης, περιέχει, σύμφωνα με τις εκάστοτε οδηγίες, όλη την διδακτέα ύλη, και επηρεάζει την εκπαιδευτική πρακτική που υιοθετεί ο δάσκαλος στην τάξη. Το σχολικό εγχειρίδιο είναι ο ενδιάμεσος κρίκος ανάμεσα στο αναλυτικό πρόγραμμα και την σχολική τάξη (Καφούση, 2009).

Για τους λόγους αυτούς, το σχολικό εγχειρίδιο έχει απασχολήσει την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις: (Osterlhom, 2003)

a-priori: αναλύεται το περιεχόμενο και η δομή του, η ποιότητα των εξηγήσεων, ο ρόλος των συμβόλων ή η λειτουργία των εικόνων, το είδος των παραδειγμάτων

a-tempo: μελετάται ο τρόπος χρήσης του από τους μαθητές ή τους δασκάλους κατά τη διδακτική διαδικασία, αξιολογείται η κατανόηση του περιεχομένου

posteriori: ερευνώνται τα διδακτικά αποτελέσματα της χρήσης τους

Σε έρευνες a-tempo συχνά γίνεται σύντομη ανάλυση του χρησιμοποιούμενου κειμένου και a-priori γιατί η γνώση των προθέσεων του συγγραφέα και το κατά πόσον αυτές εξυπηρετούνται από τη δομή και την οργάνωση του κειμένου καθώς και τα σημεία που μπορεί να προκαλέσουν δυσκολίες στην κατανόησή του από τους μαθητές, διευκολύνει την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας.

Αντιστοίχως, στις περιπτώσεις ερευνών a-tempo στις οποίες μελετάται η κατανόηση του κειμένου, δεδομένου ότι η κατανόηση είναι μια διαδικασία αδιαφανής, οι ισχυρισμοί διατυπώνονται με παρατήρηση των αποτελεσμάτων της ανάγνωσης του κειμένου πράγμα το οποίο είναι στοιχείο της posteriori έρευνας

Οι ιδιαίτερες δυσκολίες του Μαθηματικού κειμένου

Η κατανόηση των Μαθηματικών έχει και γλωσσικό και εννοιολογικό σκέλος (Vergnaud, 1998) για αυτό, η κατανόηση του γραπτού λόγου έχει μεγάλη σημασία στη διδακτική των μαθηματικών. Ο δάσκαλος των μαθηματικών γίνεται και δάσκαλος της ανάγνωσης αφού μεγάλο μέρος της ύλης που πρέπει να μάθουν οι μαθητές, αφορά στην αναγνώριση αφηρημένων συμβόλων.

Οι Brunner (1976), Hubbard (1990), Osterholm (2003), αναφερόμενοι στις ιδιαιτερότητες που παρουσιάζουν τα μαθηματικά κείμενα, συνοψίζουν τα βασικά τους χαρακτηριστικά:

Ακρίβεια: η μαθηματική ορολογία και τα σύμβολα και η σύνταξη των προτάσεων έχουν μια πολύ αυστηρά ορισμένη σημασία.

Πυκνότητα: Το μαθηματικό κείμενο είναι γραμμένο με περιεκτικό και συνοπτικό τρόπο, πολλή πληροφορία περιέχεται σε σύντομες προτάσεις ώστε η εξαγωγή συμπερασμάτων από τα συμφραζόμενα είναι δύσκολη έως αδύνατη.

Συνοχή: Οι νέες έννοιες χτίζονται πάνω στις προηγούμενες, ισχυρισμοί και ορισμοί που μπορεί να αναφέρονται στην αρχή του κειμένου έχουν ισχύ μέχρι το τέλος του.

Οι δυσκολίες που παρουσιάζει η ανάγνωση και η κατανόηση μαθηματικών κειμένων έχουν μελετηθεί κυρίως στα πλαίσια ερευνών που αφορούν στην επίλυση προβλήματος (De Corte et al, 1985; Bilsky et al,1986; Silver et al 1993). Μελετήθηκαν τα εμπόδια που μπορεί να προκαλέσει η έλλειψη λεξιλογίου και δεξιοτήτων της ανάγνωσης και προτάθηκαν στρατηγικές ανάγνωσης, με στόχο βέβαια την ανάπτυξη την ικανότητας των μαθητών στη λύση προβλημάτων.

Η αναγνωστική δεξιότητα των μαθητών σχετίζεται με την απόδοσή τους στην αριθμητική Όταν ο μαθητής συναντά άγνωστη λέξη, εξηγεί ο Ediger (1997), δημιουργείται μια χρονική καθυστέρηση μέχρι να μπορέσει να την διαβάσει, με αποτέλεσμα το διάβασμα να γίνεται αργό και κουραστικό μέχρις του σημείου η κατανόηση του κειμένου να γίνεται εντελώς αδύνατη, αφού ο μαθητής δεν μπορεί να θυμηθεί τι διάβασε.

Οι ερευνητές είναι διχασμένοι ως προς εξηγήσεις τους για το ποιες ικανότητες έχουν αναπτύξει οι αποδοτικοί λύτες προβλημάτων, με άλλους να αποδίδουν την καλή επίδοση στις αναπτυγμένες λογικο-μαθηματικές γνώσεις και άλλους στις αναπτυγμένες γλωσσικές δεξιότητες κατανόησης (Cummins, Kintsch, Reusser, & Weimer, 1988)

Από την άποψη της γλωσσικής ανάπτυξης, οι μαθητές δυσκολεύονται στην λύση των προβλημάτων γιατί περιέχουν γλωσσικές δομές που δεν αντιστοιχούν άμεσα στις υπάρχουσες εννοιολογικές δομές των μαθητών. Για παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να καταλάβει σχέσεις μέρους-συνόλου, είναι αβέβαιο όμως αν καταλαβαίνει την λεκτική μορφή της σύγκρισης (π.χ. Πόσα περισσότερα είναι τα Χ από Υ). Αν συμβαίνει αυτό, σημαίνει ότι ο μαθητής δεν έχει κατασκευάσει ένα ερμηνευτικό πλαίσιο για αυτές τις λεκτικές δομές και για αυτό οι ασκήσεις με προβλήματα αποτελούν τόσο δοκιμασίες λεκτικής επιδεξιότητας όσο και λογικο-μαθηματική γνώσης. Κατά συνέπεια, τα λάθη στη λύση προβλημάτων μπορεί να αντανακλούν ανεπάρκειες σε σημασιολογική γνώση, λογικο-μαθηματική γνώση, ή και στα δύο.

Ακόμα όμως και σε έναν γλωσσικά επιδέξιο αναγνώστη, το μαθηματικό κείμενο μπορεί να παρουσιάσει αξεπέραστες δυσκολίες στην κατανόησή του. Εκτός από την δυσνόητη πολλές φορές μαθηματική ορολογία, έχουν εντοπιστεί και άλλα χαρακτηριστικά του μαθηματικού κειμένου που μπορεί να δυσκολέψουν τον μη έμπειρο αναγνώστη.

Η φορά που διαβάζεται το μαθηματικό κείμενο, όπως παρατηρούν στην εισαγωγή του βιβλίου τους οι Bardon και Heidema (2000) διαφέρει από τον σειριακό τρόπο που διαβάζεται το απλό κείμενο, αφού πολλές φορές η φορά του διαβάσματος δεν είναι η από αριστερά προς τα δεξιά, αλλά μπορεί να είναι και ανάποδα, από δεξιά προς τα αριστερά όταν «διαβάζεται» η ευθεία των πραγματικών αριθμών, από πάνω προς τα κάτω στην απόδειξη μιας πρότασης, διαγώνια στο «διάβασμα» της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, όλα μαζί κατά το διάβασμα ενός πίνακα ή να ακολουθείται συγκεκριμένη ιεραρχία όπως στον υπολογισμό της τιμής μιας αριθμητικής παράστασης.

Ο ρυθμός ανάγνωσης είναι συχνά πιο αργός γιατί τα μαθηματικά κείμενα περιέχουν περισσότερες έννοιες ανά λέξη, ανά πρόταση, ανά παράγραφο από οποιοδήποτε άλλο είδος κειμένου (Brennan & Dunlap, 1985, Culyer, 1988, Thomas, 1988). Επιπλέον, αυτές οι έννοιες είναι συχνά αφηρημένες, γι 'αυτό είναι δύσκολο για τους αναγνώστες να αναπαραστήσουν το νόημά τους.

Ο τρόπος γραφής των μαθηματικών κειμένων είναι λακωνικός, πυκνός και ακριβής. Η ακρίβεια επιτυγχάνεται εν μέρει με τη μείωση του αριθμού των συνδηλωτικών λέξεων στο κείμενο, με αποτέλεσμα να μην εκφράζονται καθαρά τα λεπτά σημεία του νοήματος. Δεν υπάρχει περίσσια πληροφορία, κάθε λέξη μεταφέρει ουσιαστική αποκλειστική πληροφορία, έτσι που με μια γρήγορη ανάγνωση είναι δυνατό να παραβλεφτούν σημαντικές λεπτομέρειες, επεξηγήσεις ακόμη και να χαθεί η πορεία των συλλογισμών.

Πολύ συχνά το κείμενο στο σχολικό εγχειρίδιο υπερβαίνει το γνωστικό επίπεδο των μαθητών. Η Hubbard (1992, p. 81) γράφει:

> *« η απαίτηση να είναι το κείμενο απόλυτα σωστό και πλήρες από μαθηματικής άποψης, ώστε να αντέχει στη κριτική των μαθηματικών, οδηγεί τους συγγραφείς στο να γράφουν ένα κείμενο που απευθύνεται σε ειδικούς (μαθηματικούς) αντί σε μαθητές»*

Τα μαθηματικά κείμενα χαρακτηρίζονται από υψηλό βαθμό συνοχής. Οι νέες έννοιες χτίζονται πάνω σε παλιότερες, από τους ορισμούς προκύπτουν θεωρήματα και ιδιότητες, σε αυτά στηρίζονται μέθοδοι διαπραγμάτευσης προβλημάτων. Αν και δεν αποκλείεται να διαβαστεί ένα βιβλίο αποσπασματικά, κυρίως στη περίπτωση που ο αναγνώστης θέλει να επαναλάβει ή να εμβαθύνει σε ένα συγκεκριμένο σημείο, εντούτοις είναι σπάνια αποδοτικό να αρχίσει την ανάγνωση από τη μέση. Όχι μόνο υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να χαθεί στις λέξεις και τους άγνωστους όρους, αλλά είναι σχεδόν αδύνατο να παρακολουθήσει την εξέλιξη των συλλογισμών. Ένα απόσπασμα από το κείμενο ή το βιβλίο μπορεί να περιέχει σοβαρές ασάφειες και η προσπάθεια να κατανοηθεί μια μαθηματική έννοια από τη μελέτη μόνο του αποσπάσματος μπορεί να οδηγήσει και σε παρανοήσεις. Για παράδειγμα, συχνά αρκεί στην αρχή ενός βιβλίου η φράση «στο σύνολο των πραγματικών» ώστε σε όλο το υπόλοιπο κείμενο να μην ξαναγίνει αναφορά για το ποιους αριθμούς συμβολίζουν τα γράμματα. Ο αναγνώστης θα αναγκαστεί κάποια στιγμή να γυρίσει πίσω στην αρχή του κεφαλαίου ή ακόμα και στην αρχή του βιβλίου προκειμένου να μπορέσει να βρει την εξήγηση των όρων και το νόημα που θέλει να μεταδώσει ο συγγραφέας.

Η βιβλιογραφική έρευνα αποκαλύπτει απόψεις, πεποιθήσεις και δοξασίες σχετικά με τον ιδιαίτερο χαρακτήρα των μαθηματικών κειμένων που επηρεάζει τον τρόπο που αναγιγνώσκονται και απαιτεί ειδικές δεξιότητες για την κατανόηση τους. Έχουν διατυπωθεί απόψεις για την ειδική ορολογία των μαθηματικών και την σημασία ορισμένων λέξεων, την σύνταξη των προτάσεων ακόμα και την δομή του κειμένου. Πολλές όμως από αυτές τις απόψεις, επισημαίνει ο Osterholm (2006), δεν προκύπτουν σαν αποτέλεσμα των συγκεκριμένων ερευνών, αλλά χρησιμοποιούνται ως γενικά αποδεκτές αλήθειες κατά την εξήγηση και συζήτηση των αποτελεσμάτων τους. Επιπλέον, συνεχίζει, οι διαφορές και ιδιαιτερότητες του μαθηματικού κειμένου προκύπτουν από τη σύγκρισή του με το «απλό» κείμενο και όχι με τεχνικά κείμενα άλλων πεδίων όπως είναι η φυσική.

Η Μαθηματική ορολογία

Το λεξιλόγιο των μαθηματικών μπορεί να δυσκολέψει τον αναγνώστη (Shuard & Rothery, 1984) γιατί περιλαμβάνει λέξεις που:

ανήκουν στην μαθηματική ορολογία και δεν απατώνται στο καθημερινό λεξιλόγιο, όπως για παράδειγμα ο όρος «αριθμητής». Σε περίπτωση που ο μαθητής δεν γνωρίζει τη σημασία μιας τέτοιας λέξης στο κείμενο που διαβάζει, θα πρέπει να ανατρέξει σε προηγούμενο σημείο του κειμένου όπου εισάγεται συνήθως ο όρος ή και σε άλλο κείμενο, αν ο συγγραφέας έχει θεωρήσει ότι ο όρος είναι γνωστός στον αναγνώστη.

ανήκουν στην μαθηματική ορολογία και απαντώνται στο καθημερινό λεξιλόγιο με την ίδια σημασία. Οι λέξεις αυτές θα λέγαμε ότι δεν δημιουργούν εμπόδιο στη μάθηση των μαθηματικών, δεν πρέπει να παραβλέπεται όμως ο κοινωνικοπολιτιστικός παράγοντας. Λέξεις που είναι άγνωστες στον πολιτισμικό περίγυρο των μαθητών, μπορεί να προκαλέσουν εμπόδια στην κατανόηση του μαθηματικού κειμένου.

ανήκουν στην μαθηματική ορολογία και απατώνται στο καθημερινό λεξιλόγιο αλλά στα μαθηματικά έχουν άλλη, εντελώς διαφορετική ή πιο στενή και συγκεκριμένη σημασία, όπως η λέξη «γωνία», η «ανάλογα».

Στο βιβλίο των Kenney et al (2005) ειδική μνεία δίνεται και στις «μικρές λέξεις που κάνουν μεγάλη διαφορά». Η λέξη «του» για παράδειγμα στη φράση «*οι προς τη βάση γωνίες* ***του*** *ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες*» δεν αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο όπως κατανοείται η γενική στη φυσική γλώσσα αλλά σε «όλα τα» ισοσκελή τρίγωνα. Αναφέρουν ότι η έρευνα της Sullivan (1982) έδειξε ότι ακόμα και ένα σύντομο εκπαιδευτικό πρόγραμμα τριών εβδομάδων με σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να διακρίνουν τη μαθηματική χρήση των "μικρών" λέξεων (π.χ. «αν», «για κάθε», «υπάρχει») βελτίωσε σημαντικά την επίδοση των μαθητών στη λύση προβλημάτων.

Σημαντικές διαφορές παρουσιάζει και η χρήση των ποσοδεικτών στα μαθηματικά. Στην καθημερινή γλώσσα για παράδειγμα λέξεις όπως «όλοι σχεδόν», «η πλειοψηφία» «αμέτρητοι» εκφράζουν διαφόρων εντάσεων καθολικότητα, ενώ στα μαθηματικά υπάρχει ένας καθολικός ποσοδείκτης. Επιπλέον η σύνταξη των ποσοδεικτών στα μαθηματικά έχει ακριβή και πολύπλοκη σημασία, η αλλαγή της θέσης μπορεί να οδηγήσει σε τελείως διαφορετικές προτάσεις (Bruner, 1976).

Τα σύμβολα

Τα σύμβολα είναι τόσο συνδεδεμένα με τα μαθηματικά που συχνά γίνεται ταύτιση των μαθηματικών με το συμβολικό τους σύστημα (Morgan, 1998). Η άγνοια των συμβόλων μπορεί να οδηγήσει όχι μόνο σε σύγχυση, αλλά και σε σοβαρές μαθηματικές παρανοήσεις.

Η κατανόηση πολλών μαθηματικών συμβόλων έχει μελετηθεί από ερευνητές στα πλαίσια γενικότερα της διδακτικής των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα, η χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα (Christou etal, 2007, Van Dooren, Christou & Vamvakoussi, 2010), οι δυσκολίες στην αναγνώριση του τύπου συνάρτησης (Zachariades et al, 2002), η κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010), η χρήση του συμβόλου της ισότητας (Kieran, 1981).
Οι έρευνες αυτές αποδεικνύουν ότι η κατανόηση των μαθηματικών συμβόλων, πάει πέρα από την απλή αποκωδικοποίηση και ερμηνεία και εγείρει ζητήματα εννοιολογικών πλαισίων μέσω των οποίων γίνεται αντιληπτό το σύμβολο. Η αποκωδικοποίηση των λέξεων στηρίζεται στην φωνολογική τους αναπαράσταση, ενώ τα σύμβολα αντιστοιχούν σε μαθηματικά αντικείμενα ή διαδικασίες, και για την κατανόηση τους χρειάζεται *και* η γνώση της έννοιας που συμβολίζει *και* η λεκτική της παράσταση.

Οι Gray & Tall (1994) μελετώντας τις διαδοχικές αλλαγές στη χρήση συμβόλων της άλγεβρας και της ανάλυσης παρατηρούν ότι τα σύμβολα αυτά πολύ συχνά έχουν διπλή υπόσταση, αναφέρονται τόσο στην μαθηματική έννοια, όσο και στη διαδικασία για τον χειρισμό της και εισάγουν τον όρο «procept» *διαδικασιοέννοια* για να χαρακτηρίσουν την διπλή, ως διαδικασία και ως έννοια, σημασία των συμβόλων. Αναφέρουν για παράδειγμα την έκφραση 5+3 που μπορεί να γίνει κατανοητή και σαν διαδικασία πρόσθεσης αλλά και σαν αριθμός, αποτέλεσμα της πρόσθεσης.
Επιπλέον, πολλά σύμβολα έχουν περισσότερες από μία εξηγήσεις. Για παράδειγμα ένα κλάσμα (το 3/5) μπορεί να ερμηνευτεί ως «3 από τα 5», «3 ανά 5», «3 διά 5» «*ένας* ρητός αριθμός», «ο ρητός 0,6» και δεν μπορούμε να λέμε ότι ένας μαθητής μπορεί επιτυχώς να «διαβάσει» το κλάσμα αυτό, αν δεν έχει κατασκευάσει ένα πλαίσιο στο οποίο όλες οι από τις παραπάνω έννοιες να αποτελούν διαφορετικές πτυχές της ίδιας έννοιας και όχι μεμονωμένες ιδέες.
Βέβαια ο μαθητής δεν είναι δυνατόν να μάθει όλες τις διαφορετικές σημασίες ενός συμβόλου ταυτόχρονα. Το σύνηθες είναι να γίνει μια πρώτη γνωριμία με ένα

σύμβολο σε μικρότερες τάξεις και στις επόμενες να παρουσιαστούν και οι άλλες του χρήσεις. Αυτό μπορεί να προκαλέσει σοβαρές επιπλοκές στην κατανόησή του σε περίπτωση που το εννοιολογικό πλαίσιο που έχει κατασκευάσει ο μαθητής στις μικρότερες τάξεις δεν μπορεί να φιλοξενήσει και την νέα πτυχή της έννοιας (Βοσνιάδου, Βαμβακούση & Σκοπελίτη, 2008). Τότε απαιτείται η διόρθωση ή ακόμα και η πλήρης ανακατασκευή του εννοιολογικού πλαισίου που αντιστοιχεί στο σύμβολο, και είναι συζητήσιμο το αν και με ποιο τρόπο μπορεί το σχολικό βιβλίο ή άλλο *κείμενο*, να προκαλέσει και να υποβοηθήσει σε αυτή την εννοιολογική αλλαγή.

Η σύνταξη των προτάσεων

Η γνώση της μαθηματικής ορολογίας και του νοήματος των μαθηματικών συμβόλων είναι αναμφίβολα απαραίτητη προκειμένου να γίνει κατανοητό ένα μαθηματικό κείμενο όμως δεν εξασφαλίζει την κατανόηση του. Αυτό εν μέρει οφείλεται, σύμφωνα με τους MacGregor και Price (1999), στη διαφορετική σύνταξη των προτάσεων.

Σύμφωνα με την Bruner (1976) η γλώσσα στα μαθηματικά κείμενα, είναι διττή, *αντικειμενική* γλώσσα (object language) και *μεταγλώσσα*. (meta-language). Η αντικειμενική γλώσσα είναι συνήθως φορμαλιστική, χρησιμοποιείται στη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών και περιλαμβάνει τα μαθηματικά σύμβολα και τη μαθηματική ορολογία. Η μεταγλώσσα είναι πιο κοντά στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιείται στη συζήτηση *για* τις μαθηματικές έννοιες δηλαδή στην διαπραγμάτευση των αντικειμένων-εννοιών.

Για παράδειγμα, η φράση (1) «ο π είναι ρητός αριθμός» είναι μια πρόταση στην αντικειμενική γλώσσα και η φράση (2) «(1) είναι λάθος» είναι η πρόταση στη μεταγλώσσα.

Αυτός είναι ίσως ένας από τους λόγους που δυσκολεύονται (Hershkowitz et al, 1990) οι μαθητές να κατανοήσουν τον ρόλο των αξιωμάτων, των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων στη γεωμετρία. Η φράση «οι γωνίες τριγώνου έχουν άθροισμα 180^o» στην αντικειμενική γλώσσα είναι μια ιδιότητα των γωνιών ενός τριγώνου, στην μεταγλώσσα είναι μια υποθετική πρόταση η αλήθεια της οποίας μένει να αποδειχτεί.

Στα μαθηματικά κείμενα ακολουθούνται διάφορες συμβάσεις προκειμένου να γίνει ο διαχωρισμός μεταξύ των δύο γλωσσών. Η χρήση εισαγωγικών, πλάγιας γραμματοσειράς ή ακόμη και ενός πλαισίου το οποίο πολλές φορές έχει και τίτλο σηματοδοτεί τη φράση που αντιστοιχεί στην αντικειμενική γλώσσα ενώ συμβατικά ακολουθεί η συζήτηση στη μεταγλώσσα με την απόδειξη της πρότασης, ή με διευκρινήσεις, εξηγήσεις και την παροχή παραδειγμάτων (Hubbard, 1990). Συχνά ο τίτλος του πλαισίου χρησιμοποιείται σαν αναφορά αντί της φράσης στην αντικειμενική γλώσσα σε όλο το μετέπειτα κείμενο. (για παράδειγμα, σε αποδείξεις, το βιβλίο της γεωμετρίας του Λυκείου αναφέρεται το *κριτήριο ΠΓΠ*)

Τα διαγράμματα και τα σχήματα.

Τα μαθηματικά κείμενα περιέχουν συχνά διάφορα είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων όπως εικόνες, διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις και σχήματα με σκοπό την προώθηση της κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου, οι οποίες όμως απαιτούν και διαφορετικούς τρόπους αποκωδικοποίησης και επεξεργασίας από τον αναγνώστη.

Ειδικά το γεωμετρικό κείμενο είναι συνδυασμός τριών εξωτερικών αναπαραστάσεων, λεκτικών (π.χ η διατύπωση μιας μαθηματικής πρότασης σε φυσική γλώσσα που περιλαμβάνει όμως μαθηματικούς όρους και λεξιλόγιο), οπτικών (γεωμετρικό σχήμα) και συμβολικών (εξειδικευμένες προτάσεις όπως ΑΒ=ΓΔ ή Β=1∟) και η κατανόησή του επιτυγχάνεται με την συσχέτιση και μετάβαση από τη μία παράσταση στην άλλη. (Lesh et al., 1987, Κολέζα, 2003) .

Η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος έχει απασχολήσει την έρευνα μέσα σε μελέτες για τη διδασκαλία και την κατανόηση της γεωμετρίας (Owens και Outhred, 2006; Schoenfeld, A. (1986).). Ο Arcavi (2003) περιγράφει παραστατικά τον ρόλο των διαγραμμάτων και γεωμετρικών σχημάτων ως «*οπτική εικόνα των αόρατων*» 'seeing the unseen', αναφερόμενος στον αφηρημένο κόσμο των μαθηματικών που, από τη φύση του καθιστά αναγκαία την προσφυγή σε οπτικές αναπαραστάσεις διαφόρων ειδών. Σε διαφορετικά πλαίσια ανάγνωσης, ακόμα και οι έμπειροι αναγνώστες μπορεί να ερμηνεύσουν διαφορετικά τα ίδια οπτικά αντικείμενα.

Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αντιληπτή μια εξωτερική αναπαράσταση βασίζεται στις νοητικές αναπαραστάσεις που έχουν ήδη οικοδομηθεί ως αποτέλεσμα προηγούμενων εμπειριών και γνώσεων και για αυτό το λόγο η ερμηνεία της είναι ούτε αντικειμενική ούτε απόλυτη (Kaput, 1987).

Για να περιγράψει την πολύπλοκη σημασία των σχημάτων και ειδικά του γεωμετρικού σχήματος ο Fischbein (1993) εισάγει την έννοια του εννοιολογικού σχήματος θεωρώντας ότι στο γεωμετρικό σχήμα συνυπάρχουν *ο ορισμός* (definition), και *η εικόνα* (image). Για παράδειγμα το τετράγωνο είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που καθορίζεται από την θεωρία με τις ιδιότητές του αλλά έχει και μια εικόνα. Και τα δύο μαζί συνιστούν το *εννοιολογικό σχήμα* (figural concept). Συνακόλουθα, το γεωμετρικό σχήμα δεν αποτελεί μια γνήσια έννοια, αλλά υπερτερεί μιας απλής οπτικής εικόνας, αφού αποτελεί νοερή δομή και αναπαριστά νοερές κατασκευές που ταυτόχρονα εμπεριέχουν «εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες». Έτσι η ανάγνωση του γεωμετρικού σχήματος χωρίς την κατανόηση της συγκεκριμένης εννοιολογικής δομής με τους κανόνες και τους περιορισμούς της, δεν μπορεί να είναι αποτελεσματική (Kupla, 2004).

Ο Duval (1995) έδωσε ένα αναλυτικό πλαίσιο που αφορά στη κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων. Σε αυτό το πλαίσιο προσδιορίζει τέσσερα επίπεδα γνωστικής αντίληψης cognitive apprehension”. Αυτά είναι:

Οπτική αντίληψη: perceptual apprehension αυτό είναι που αναγνωρίζεται με την πρώτη ματιά, η συνολική μορφή του σχήματος, ο προσανατολισμός του, βασικά του στοιχεία τα οποία δεν σχετίζονται απαραίτητα με την θεωρητική γεωμετρική έννοια που παριστά.

Διαδικαστική αντίληψη: sequential apprehension αναγνωρίζεται η τρόπος δόμησης ή κατασκευής με γεωμετρικά όργανα του σχήματος.

Γλωσσική αντίληψη: αναγνωρίζονται οι γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος οι οποίες διατυπώνονται λεκτικά.

Λειτουργική αντίληψη: αφορά στον νοητικό ή όχι χειρισμό του σχήματος ο οποίος μπορεί να οδηγήσει στον σχεδιασμό της πορείας της λύσης ενός προβλήματος.

Η λειτουργική αντίληψη δεν είναι ανεξάρτητη των άλλων, μάλιστα συχνά εμποδίζεται από περιορισμούς που θέτει η μη κατανόηση στο λεκτικό και αντιληπτικό επίπεδο.

Η έρευνα έχει καταγράψει αρκετές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση και διαπραγμάτευση του γεωμετρικού σχήματος. Για παράδειγμα οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος και να τις αντιστοιχήσουν σε γεωμετρικά αντικείμενα (Laborde & Capponi, 2002), έχουν περιορισμένη αντίληψη των γεωμετρικών εννοιών γιατί τους χορηγείται περιορισμένος αριθμός παραδειγμάτων (Battista, 2001), αδυνατούν να αναγνωρίσουν ένα γεωμετρικό σχήμα αν δεν μοιάζει με το πρότυπο που έχουν δημιουργήσει (Hershkowitz, 1989), δυσκολεύονται να κινήσουν την προσοχή τους και να εστιάσουν σε συγκεκριμένα στοιχεία του σχήματος και όχι στο σχήμα στην ολότητά του (Yerushalmy & Chazan, 1990), εστιάζουν την προσοχή τους και την τεκμηρίωσή τους στο συγκεκριμένο σχήμα το οποίο διαπραγματεύονται, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη λεκτική διατύπωση ή την γεωμετρική έννοια που αυτό αναπαριστά (Mesquita, 1994).

Ο ρόλος της οπτικοποίησης στην διδασκαλία και κατανόηση των μαθηματικών αμφισβητείται από κάποιους ερευνητές, καθώς το διάγραμμα ή το γεωμετρικό σχήμα μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα ή να υποβαθμίσει τη σημασία της απόδειξης (Barwise & Etchemendy, 1991) και οι ερευνητές στρέφουν το ενδιαφέρον τους στο ερώτημα κατά πόσο τα διαδραστικά λογισμικά γεωμετρίας είναι δυνατό να συμβάλλουν στην ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών με τη βοήθεια του μετασχηματισμού των γεωμετρικών σχημάτων και της κίνησης (Lopez & Leung, 2006).

Πάντως ο σημαντικός ρόλος της οπτικοποίησης στη μάθηση και τη διδασκαλία δεν μπορεί να αγνοηθεί γιατί είναι η αναπαράσταση που μας επιτρέπει να διακρίνουμε και να αναγνωρίσουμε το αναπαριστώμενο αλλά και γιατί δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς την οπτικοποίηση (Duval, 1999). Το σχήμα δίνει νόημα στις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και τις σχέσεις μεταξύ τους, αποτελεί εργαλείο για τη διερεύνηση των μαθηματικών προβλημάτων και ενισχύει τη μαθηματική ανακάλυψη. (Fujita, Jones & Yamamoto, 2004).

Αν και τα σχήματα, όπως και τα διαγράμματα και οι εικόνες σκοπό έχουν να διευκολύνουν τον αναγνώστη να κατανοήσει καλλίτερα το κείμενο, πολλές φορές έχουν το αντίθετο αποτέλεσμα, δηλαδή προκαλούν επιπλέον δυσκολία στη περίπτωση που ο αναγνώστης δεν κατέχει τις κατάλληλες δεξιότητες για την ερμηνεία του. Αν το ίδιο το διάγραμμα ή το σχήμα, αν η δομή του ή η λειτουργία του δεν είναι ξεκάθαρη, μπορεί να επιβάλλει τους δικούς του περιορισμούς (Fischbein, 2002). Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις συμβάσεις που ισχύουν για το ρόλο και την χρήση των σχημάτων και να μπορούν να αναγνωρίζουν και να ξεχωρίζουν τα σημαντικά στοιχεία τους από εκείνα που δεν έχουν κρίσιμη σημασία (Hershkowitz, 1989; Dvora & Dreyfus, 2004).

Οι ορισμοί και τα θεωρήματα ως μαθηματικό κείμενο.

Τα βιβλία των μαθηματικών αναπόφευκτα περιέχουν ορισμούς μαθηματικών εννοιών οι οποίοι συχνά συνοδεύονται από διαγράμματα, σχήματα ή παραδείγματα προκειμένου να μπορέσει ο αναγνώστης να κατασκευάσει μια ολοκληρωμένη εικόνα έννοιας (concept image). Δεν είναι σπάνιο όμως, ειδικά σε εξειδικευμένα πανεπιστημιακά βιβλία μαθηματικών, να δίνεται ο ορισμός μιας έννοιας (concept definition) χωρίς άλλες εξηγήσεις ή εικόνες. Η απλή κατανόηση των λέξεων ή της φράσης του ορισμού ή και η αποστήθισή του δεν σημαίνει ότι έχει αυτός γίνει κατανοητός, ότι δηλαδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί αργότερα από τον αναγνώστη με λειτουργικό τρόπο. Η κατανόηση έγκειται στον σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας που μπορεί να είναι μια εσωτερική οπτική αναπαράσταση ή μια συλλογή εντυπώσεων (Ζαχαριάδης 2004).

Παραδοσιακά οι μαθητές ενθαρρύνονται να απομνημονεύσουν τους ορισμούς, ειδικά όταν προετοιμάζονται για διαγωνίσματα που αξιολογείται η γνώση της θεωρίας. Όταν όμως θα χρειαστεί να τον ανακαλέσουν, αυτό που θα θυμηθούν θα είναι η εικόνα της έννοιας και όχι ο ορισμός. Είναι αναγκαίο επομένως κατά το διάβασμα του ορισμού να μπορούν να κατασκευάσουν μια εικόνα για αυτόν, αλλιώς το διάβασμα γίνεται χωρίς νόημα (Cunningham & Roberts, 2010).

Το διάβασμα των μαθηματικών δεν προσθέτει τίποτε στον αναγνώστη που δεν δουλεύει πάνω το κείμενο καθώς διαβάζει, και αυτό ισχύει όχι μόνο για τους ορισμούς αλλά και για τα θεωρήματα και τις ιδιότητες που συχνά θεωρούνται από τους μαθητές ότι αποτελούν την ύλη που πρέπει να μάθουν «λέξη προς λέξη». Πως αλλιώς μπορεί να εξηγηθεί το συχνό φαινόμενο επιμελείς μαθητές που γνωρίζουν τους μαθηματικούς όρους του βιβλίου, παρακολουθούν τα μαθήματα και θεωρούν ότι προετοιμάζονται σωστά για ένα διαγώνισμα, να αποτυγχάνουν σε αυτό. «*Στο σπίτι τα διαβάζω και τα καταλαβαίνω, αλλά στο διαγώνισμα κάτι γίνεται και δεν καταλαβαίνω τίποτε*» , είναι μια φράση που ακούμε συχνά από τους μαθητές. Το φαινόμενο *test effect θ*εωρείται ότι οφείλεται στην σοβαρή αδυναμία των μαθητών *να καταλάβουν ότι δεν κατάλαβαν*, στο γεγονός ότι δεν έχουν αναπτύξει μεταγνωστικές δεξιότητες, που θα τους επιτρέψουν να ελέγξουν τι και αν έμαθαν, και στη περίπτωση που κάτι δεν έχουν μάθει να επιλέξουν και να εφαρμόσουν την κατάλληλη στρατηγική ανάγνωσης για να το καταλάβουν.

Η Borasi (1990) θεωρεί ότι εκείνο που χαρακτηρίζει ένα μαθηματικό κείμενο δεν είναι μόνο το μαθηματικό περιεχόμενο αλλά κυρίως το ότι αυτό απαιτεί μια διαφορετική ανάγνωση, με «μολύβι και χαρτί», καθώς ο αναγνώστης δουλεύει μόνος του βήμα-βήμα τους συλλογισμούς και τα επιχειρήματα που περιγράφει ο συγγραφέας.

> *Όταν ένας μαθητής διαβάζει για πρώτη φορά έναν ορισμό, θα πρέπει να αναλογιστεί για το νόημά του: Να αποφασίσει γιατί το επεξηγηματικό παράδειγμα αντιστοιχεί στον ορισμό αυτό. Να* εργαστεί με μολύβι και χαρτί προκειμένου να βρει πρόσθετα *παραδείγματα, σχεδιαγράματα, επεκτάσεις. Τυπικά, ένας αναγνώστης πρέπει να ξεψαχνίσει τον ορισμό εξετάζοντας τις συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, να σκεφτεί παραδείγματα στα οποία κάποια από τις συνθήκες δεν ισχύει, να αναρωτηθεί αν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη ή όχι. Να σκεφτεί τις*

συνέπειες του ορισμού και να ψάξει άλλους τρόπους διατύπωσης του ίδιου ορισμού. Να αναρωτηθεί γιατί ο ορισμός δίνεται στο κείμενο με τον συγκεκριμμένο τρόπο. Να καταλάβει τα κίνητρα για την κατασκευή του και ακόμα γιατί είναι ανάγκη να οριστεί η συγκεκριμένη έννοια (Brunner, 1976 pg.211).

Οι Simonson και Gouvea (2011) προτρέπουν τους μαθητές να συμμετέχουν σε κάθε στάδιο του διαβάσματος κρίνοντας εάν ή όχι η ιδέα που παρουσιάζεται είναι σαφής και προτείνουν μια σειρά ερωτήσεων που μπορεί να κάνει ο αναγνώστης στον εαυτό του προς τον σκοπό αυτό:

- ✓ *Γιατί είναι αληθής αυτή η πρόταση;*
- ✓ *Εγώ προσωπικά πιστεύω ότι αληθεύει;*
- ✓ *Είμαι σε θέση να πείσω κάποιον άλλο για την αλήθεια της πρότασης;*
- ✓ *Γιατί χρησιμοποιεί ο συγγραφέας αυτά τα επιχειρήματα και όχι άλλα;*
- ✓ *Μπορώ να σκεφτώ μια καλλίτερη απόδειξη/ επιχείρημα*
- ✓ *Γιατί δεν το εξηγεί ο συγγραφέας με τον τρόπο που εγώ το αντιλαμβάνομαι;*
- ✓ *Είναι ο δικός μου τρόπος λάθος;*
- ✓ *Είμαι σίγουρος ότι έχω κατανοήσει την ιδέα;*
- ✓ *Μου διαφεύγει κάποια λεπτομέρεια;*
- ✓ *Μήπως ο συγγραφέας παραλείπει κάποια λεπτομέρεια;*
- ✓ *Αν δεν μπορώ να καταλάβω αυτό που εισηγείται ο συγγραφέας, μήπως μπορώ να καταλάβω μία παρόμοια αλλά πιο απλή έννοια/ παράδειγμα;*
- ✓ *Ποια μπορεί να είναι αυτή η απλούστερη έννοια/ παράδειγμα;*
- ✓ *Είναι πραγματικά απαραίτητο να καταλάβω αυτό το σημείο;*
- ✓ *Μπορώ να αποδεχθώ την αλήθεια της πρότασης χωρίς να καταλαβαίνω όλες τις λεπτομέρειες της τεκμηρίωσης της αλήθειας της;*
- ✓ *Θα μπορέσω να καταλάβω το νόημα του κειμένου αν δεν κατανοήσω πλήρως γιατί η πρόταση* αυτή είναι αληθής;

Οι αναγνώστες των ορισμών, θεωρημάτων και άλλων προτάσεων, πρέπει όχι μόνο να κατανοήσουν και να θυμούνται το κείμενο, αλλά επίσης να είναι σε θέση να αξιολογήσουν αν έχουν κατανοήσει το νόημα του κειμένου και κατά πόσο οι πληροφορίες που αντλούνται από αυτό είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν προς την επίτευξη των στόχων τους. Το σωστό διάβασμα προϋποθέτει ότι ο αναγνώστης γνωρίζει τις κατάλληλες στρατηγικές ανάγνωσης και μπορεί να τις αξιοποιήσει, αλλά επίσης ότι έχει επίγνωση του αν και ποια στρατηγική χρησιμοποιεί και για ποιο σκοπό.

Η απόδειξη ως μαθηματικό κείμενο

Η έρευνα έχει ασχοληθεί εκτενώς με την δυσκολία που παρουσιάζει η κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και της απόδειξης στους μαθητές και φοιτητές. Ένα μέρος της δυσκολίας αυτής οφείλεται στη δυσκολία κατανόησης του κειμένου της γραπτής απόδειξης. Η έρευνα του Schoenfeld (1986) για παράδειγμα, έδειξε ότι ένας από τους λόγους που οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη φύση, το νόημα ή και τη δομή της αποδεικτικής διαδικασίας στη γεωμετρία είναι η αυστηρότητα στη γλώσσα και ο συμβολισμός των μαθηματικών κειμένων.

Το ζητούμενο για την κατανόηση μιας απόδειξης, δεν είναι μόνο να γίνει κατανοητό το λεκτικό περιεχόμενο της αλλά το γιατί οι συλλογισμοί που διατυπώνονται στα διαδοχικά βήματα της απόδειξης είναι σωστοί, αν οδηγεί όντως στην απόδειξη της αλήθειας του ζητούμενου, κατά πόσο μπορεί να γίνει αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα, με λίγα λόγια κρίσιμο σημείο για την κατανόηση της απόδειξης είναι ο έλεγχος (Yang & Lin, 2008).

Πολλοί μαθητές αποδέχονται μια απόδειξη ως έγκυρη μόνο επειδή περιέχεται στο βιβλίο ή την γράφει στον πίνακα ο καθηγητής, χωρίς να μπορούν μόνοι τους να την ελέγξουν. Ακόμα και πολλοί απόφοιτοι διδασκαλικών σχολών, σύμφωνα με την έρευνα των Martin και Harel (1989) χαρακτηρίζουν ως έγκυρη μια απόδειξη όταν είναι γραμμένη σε δύο στήλες (ισχυρισμός – αιτιολόγηση) και την απορρίπτουν αν παρουσιάζεται αλλιώς, ανεξάρτητα από το μαθηματικό της περιεχόμενο.

Οι Selden and Selden (2003) έδειξαν ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν το αποδεικτικό κείμενο και συχνά αδυνατούν να ξεχωρίσουν μια έγκυρη απόδειξη από μια άνευ νοήματος αλληλουχία συμβολικών χειρισμών.

Τείνουν να εστιάζουν στα επιφανειακά στοιχεία των επιχειρημάτων και έχουν περιορισμένη ικανότητα ελέγχου της εγκυρότητας τους.

Οι ερευνητές σε μεγάλο βαθμό συμφωνούν ότι κριτικό θέμα στην κατανόηση της γραπτής απόδειξης είναι η χρήση των κατάλληλων γνωστικών και μεταγνωστικών τεχνικών. Οι Selden and Selden (2003) αναφέρουν ότι οι φοιτητές μαθηματικών σχολών ελέγχουν τις αποδείξεις βήμα-βήμα, παρακολουθούν την λογική των επιχειρημάτων, σκέφτονται παραδείγματα και σιγουρεύονται για την εγκυρότητα κάθε φράσης. Η έρευνα των Weber, Brophy και Lin (2008) έδειξε ότι οι πιο αποδοτικοί τελειόφοιτοι χρησιμοποιούν στρατηγικές όπως την αναδιατύπωση της πρότασης και τον προβληματισμό για την υπόθεση και το συμπέρασμα .

Στην έρευνα των Inglis και Alcock, (2012), οι έμπειροι αναγνώστες (απόφοιτοι μαθηματικής σχολής) διαβάζουν διαφορετικά τις αποδείξεις από ότι οι μη έμπειροι (φοιτητές) όπως φάνηκε από την καταγραφή των κινήσεων των ματιών τους. Οι φοιτητές αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο εστιάζοντας σε επιφανειακά στοιχεία της απόδειξης σε αντιδιαστολή με τους πτυχιούχους των οποίων το βλέμμα πήγαινε πάνω-κάτω ανάμεσα στις γραμμές της απόδειξης πράγμα που δείχνει ότι αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο στην προσπάθεια να ελέγξουν την εγκυρότητά της

Η Yang (2012) στην έρευνά της σε δείγμα 533 μαθητών 14-15 χρόνων, διατυπώνει ότι οι αποτελεσματικοί αναγνώστες αποδεικτικού κειμένου τείνουν να χρησιμοποιούν περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές ανάγνωσης που στοχεύουν στο σχεδιασμό και έλεγχο της κατανόησης και περισσότερες γνωστικές στρατηγικές ανάγνωσης που αφορούν στην εκπόνηση της απόδειξης από ότι οι μέτριας απόδοσης μαθητές οι οποίοι με τη σειρά τους χρησιμοποιούν τις μεταγνωστικές και γνωστικές στρατηγικές περισσότερο από τους μη αποτελεσματικούς. Στο συμπέρασμα αυτό φτάνει καταγράφοντας τις γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές που οι ίδιοι οι μαθητές ανέφεραν ότι χρησιμοποιούν και τις συγκεντρώνει σύμφωνα με πίνακες στρατηγικών των Αναστασίου και Γρίβα (2009).

Οι *γνωστικές στρατηγικές* αφορούν στην άμεση αλληλεπίδραση με το κείμενο και διευκολύνουν την κατανόηση του κειμένου. Τέτοιες είναι η υπογράμμιση, η προσεκτική ανάγνωση της εκφώνησης, η κατασκευή κατάλληλου σχήματος και η σήμανση σύμφωνα με την εκφώνηση, ο σχεδιασμός των βημάτων της απόδειξης από το σχήμα, το διάβασμα όλης της απόδειξης για να γίνει εντοπισμός των κύριων βημάτων, η υπογράμμιση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων, η αρίθμηση των βημάτων της απόδειξης, η χρήση λεξικού ορολογίας, η αναδιατύπωση, η ενεργοποίηση πρότερης γνώσης, ο εντοπισμός λέξεων-κλειδιών, η παράβλεψη των δύσκολων σημείων και άλλες.

Οι *μεταγνωστικές στρατηγικές* είναι ανώτερες νοητικές τακτικές που αφορούν στο σχεδιασμό και την οργάνωση του διαβάσματος, τον αυτό- έλεγχο την αυτό-αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και την ανατροφοδότηση της διαδικασίας του διαβάσματος και περιλαμβάνει: την επιβεβαίωση ότι έχουν σωστά κατανοηθεί οι υποθέσεις και τα συμπέρασμα, την πρόβλεψη μιας πιθανής ροής της απόδειξης, την επιμονή πάνω στα δύσκολα σημεία της απόδειξης, την ομαδοποίηση των βημάτων σε κύριες ενότητες, την κατανόηση του πως συνδέονται τα βήματα μεταξύ τους, αναδιατύπωση του πώς ξεκίνησε και πως τελείωσε η απόδειξη, η αξιολόγηση της εγκυρότητας της απόδειξης και άλλα.

Συγκεντρώνοντας την έρευνα πάνω στην κατανόηση της απόδειξης, οι Yang και Lin, (2008) συνοψίζουν, από τις εργασίες των Duval (1998, 2002), Fawcett (1938), Healy & Hoyles (2000), Lakatos (1976) Selden and Selden (1995, 2003), τις στρατηγικές που είναι αναγκαίο να γνωρίζει και να ενεργοποιήσει κάποιος προκειμένου να επιτευχθεί αυτή.

- ✓ *Να αναγνωριστεί η σημασία των όρων, συμβόλων και των σχημάτων.*
- ✓ *Να προσδιοριστεί ποιές είναι οι υποθέσεις και ποιά τα συμπεράσματα της υπό απόδειξη πρότασης.*
- ✓ *Να αναγνωριστεί η κύρια ιδέα της συγκεκριμένης απόδειξης.*
- ✓ *Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως ορισμός, ιδιότητα, εικασία, ή συμπέρασμα.*

- ✓ *Να γίνει έλεγχος, αν κάθε βήμα προκύπτει από προηγούμενα σύμφωνα με τους αποδεικτικούς κανόνες.*
- ✓ *Να γίνει έλεγχος της εγκυρότητας της απόδειξης.*
- ✓ *Να κριθεί η αλήθεια της πρότασης.*
- ✓ *Να κριθεί η γενικότητα της πρότασης.*
- ✓ *Να αναδιατυπωθεί η προς απόδειξη πρόταση*
- ✓ *Να εντοπιστούν οι πιθανές διαφορές μεταξύ της γραπτής απόδειξης και της απόδειξης που αναμένει να διαβάσει ο αναγνώστης.*
- ✓ *Να διευκρινιστούν ασαφή σημεία της απόδειξης.*

Οι Dreyfus et al. (1990) από την ανασκόπηση ερευνών που έκαναν, συνοψίζουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές σχετικά με την κατανόηση της απόδειξης, στην αδυναμία κατανόησης της αναγκαιότητας και της λογικής της συνέπειας και επιπλέον στην δυσκολία διατύπωσης.

Οι Healy & Hoyles, (1998), διαπιστώνουν ότι οι μαθητές στο μάθημα της γεωμετρίας δεν μπορούν να αντιληφθούν τον λόγο διδασκαλίας της απόδειξης και τη θεωρούν μια δυσνόητη διαδικασία που επιβάλλεται μέσα από τη Γεωμετρία.

Όσον αφορά την διδακτική προσέγγιση της αποδεικτικής διαδικασίας, έχουν προταθεί μεταξύ άλλων η προσεκτική παρακολούθηση του δάσκαλου, η συζήτηση στη τάξη, το γράψιμο, ή ο πειραματισμός με κατάλληλα λογισμικά. Αλλά η εφαρμογή όλων έχει και όρια. Για παράδειγμα, η παρακολούθηση και η συζήτηση στη τάξη μπορεί να συμβάλουν στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας στα μαθηματικά (Balacheff, 1991), αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις η υποκειμενικότητα των μαθητών μπορεί να φτάσει σε ακραία επίπεδα ανεπίτρεπτα για την μαθηματική ακρίβεια (Harel & Sowder, 1998, Sfard 2000). Σύμφωνα με την παραδοσιακή διδασκαλία οι μαθητές παροτρύνονται αντιγράφουν, να επαναλαμβάνουν και να γράφουν (Grossman, Smith, & Miller ,1993; Sipka, 1990; Morgan, 1998) δικές τους αποδείξεις για να εξοικειωθούν, όμως πολλές φορές αποδίδουν καλά μόνο όταν αντιμετωπίζουν συνηθισμένες καταστάσεις (Heinze et al., 2004), και συχνά αξιολογούν ως έγκυρη μια απόδειξη αν δίνεται με φορμαλιστικό τρόπο ανεξαρτήτως των συλλογισμών που διατυπώνονται σε αυτή (Lin et al., 2004). Οι δραστηριότητες με τα γεωμετρικά λογισμικά βοηθάνε στην διατύπωση εικασιών, όμως οι μαθητές περιορίζονται στον χειρισμό φυσικών μοντέλων ή γεωμετρικών σχημάτων με αποτέλεσμα να επικεντρώνονται στην οπτικοποίηση και να φτάνουν στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι «ότι φαίνεται, ισχύει» (Schoenfeld, 1994). Προς αποφυγή λοιπόν αυτών των συνεπειών θα λέγαμε ότι απαιτείται συνολική θεώρηση και συντονισμός μεταξύ των διαφόρων προσεγγίσεων χωρίς να παραλείψουμε και τη σημασία του διαβάσματος.

Αν και η κατανόηση της γραπτής απόδειξης σιωπηρά θεωρείται βασική προϋπόθεση για την παραγωγή, την ερμηνεία και την αξιολόγηση των επιχειρημάτων, εν τούτοις λίγες έρευνες έχουν πρόσφατα ασχοληθεί συστηματικά με αυτήν (Pressley, Harris & Marks 1992b, Lin et al, 2002; Selden & Selden, 2003; Lithner, 2003; Yang & Lin, 2008; Duke & Pearson 2008; Mejia-Ramos et al, 2012; Yang, 2012).

Σύνοψη

Ο γλωσσικός και αριθμητικός γραμματισμός συχνά αντικρίζονται ως δύο ξεχωριστά γνωρίσματα που περιγράφουν μέρος των γνώσεων, ικανοτήτων και δεξιοτήτων του που αναμένεται να κατακτήσουν οι μαθητές. Οι πλέον βασικές εξ αυτών θεωρούνται η ικανότητα ανάγνωσης και η ικανότητα εκτέλεσης πράξεων.

Σύμφωνα με τις σύγχρονες θεωρίες, η ικανότητα ανάγνωσης δεν θεωρείται πλέον φυσικό αποτέλεσμα της αποκωδικοποίησης του γραπτού λόγου και της γνώσης της προφορικής γλώσσας, αλλά ως δεξιότητα κατανόησης κειμένου θεωρείται πολύ πιο πολύπλοκη νοητική ικανότητα στην οποία εμπλέκονται τόσο η γνώση, η εμπειρία, η κριτική σκέψη και η διδασκαλία. Απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση ενός κειμένου είναι η γνώση, όχι μόνο των λέξεων και των όρων που περιέχονται στο κείμενο αλλά η ευρύτερη γνώση για την μορφή, το είδος και το περιεχόμενο του κειμένου. Για την επίτευξη της απαιτούνται η επαγωγική σκέψη ώστε να γίνουν οι απαραίτητες συνδέσεις, η αξιολόγηση όχι μόνο του περιεχομένου αλλά και του επιπέδου κατανόησης του ίδιου του αναγνώστη και η χρήση στρατηγικών προκειμένου να επιτευχθεί το επιθυμητό επίπεδο κατανόησης και να διορθωθούν τα τυχόν λάθη. Επιπλέον η ικανότητα κατανόησης κειμένου μπορεί να διδαχθεί άμεσα (Israel & Duffy, 2014).

Το μαθηματικό κείμενο, ως γραπτός λόγος μέσα από τον οποίο μαθαίνουμε ή εφαρμόζουμε μαθηματικά, απαιτεί για την κατανόησή του τις ίδιες αναγνωστικές δεξιότητες και ικανότητες. Όμως συχνά η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Ο λόγος είναι ότι για την ανάγνωση μαθηματικών κειμένων απαιτούνται επιπλέον, ειδικές για τον κλάδο των μαθηματικών, δεξιότητες και στρατηγικές (Barton & Heidema, 2000).

Στις έρευνες που αφορούν στην επίλυση προβλημάτων γίνεται αναφορά στις ιδιαιτερότητες του μαθηματικού κειμένου και στις δυσκολίες που μπορεί να προκαλέσει η ανάγνωση και κατανόηση του. Συχνά εξετάζεται η αποτελεσματικότητα διαφόρων στρατηγικών που οδηγούν στην κατανόηση του προβλήματος όπως περιγράφεται στο κείμενο, τον εντοπισμό των δεδομένων και των ζητουμένων η ακόμα και λέξεων που αναγνωρίζονται ως κλειδιά και μπορεί να οδηγούν στην επιλογή των κατάλληλων βημάτων προς τη επίλυση (Barton & Heidema, 2000). Από αυτή την άποψη, το διάβασμα αντιμετωπίζεται περισσότερο σαν εμπόδιο κατά την διαδικασία κατάκτησης της μαθηματικής γνώσης (Borasi & Seigel, 1990). Τελευταίως, η έρευνα εστιάζει στην κατανόηση κειμένου όχι μόνο ως αποκωδικοποίηση και εξαγωγή του νοήματος από τον γραπτό λόγο, αλλά στη σημασία της διαδικασίας της ανάγνωσης ως γνωστικής διεργασίας, ενεργητικής εμπλοκής του αναγνώστη με το κείμενο, η οποία καταλήγει στη μάθηση των μαθηματικών. Από αυτή την άποψη η ανάγνωση δεν αποτελεί εμπόδιο, αντίθετα είναι το εφαλτήριο για την δημιουργία νέων νοημάτων και εννοιών (Borasi & Seigel, 1990, Ostelholm, 2006).

Η έρευνα στο πεδίο της κατανόησης κειμένου έχει δείξει ότι η χρήση στρατηγικών ανάγνωσης βελτιώνει την αναγνωστική κατανόηση (Israel & Duffy, 2014). Πολλοί μαθητές ενώ κατανοούν το νόημα των μεμονωμένων λέξεων ακόμα και προτάσεων, αδυνατούν να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των προτάσεων και το νόημα του κειμένου στο σύνολό του. Οι ικανοί αναγνώστες από την άλλη, είναι συχνά σε θέση να παρακολουθούν και να αξιολογούν την κατανόησή τους, να αξιοποιούν τις κατάλληλες στρατηγικές ανάγνωσης, όπως είναι η προεπισκόπηση, η πρόβλεψη, η εξαγωγή των κύριων σημείων, η σύνδεση με το γνωστικό υπόβαθρο, η περίληψη ώστε να υπερπηδήσουν τα προβλήματα κατανόησης. Η διδασκαλία στρατηγικών ανάγνωσης αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική στην περίπτωση μαθητών που δυσκολεύονται να κατανοήσουν το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων λόγω είτε έλλειψης γνώσεων του πεδίου είτε λόγω μειωμένης ανάπτυξης δεξιοτήτων ανάγνωσης (McNamara, 2007).

Η διδασκαλία και η ανάπτυξη τεχνικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων ανάγνωσης αποκτούν ιδιαίτερη σημασία και στη διδακτική των μαθηματικών. Έχουν προταθεί ειδικές στρατηγικές που μπορεί να αξιοποιηθούν για την καλύτερη κατανόηση των ορισμών και των θεωρημάτων, των αποδείξεων και των προβλημάτων ακόμη και των διαγραμμάτων και των σχημάτων (Weber, Brophy & Lin, 2008; Inglis & Alcock, 2012; Yang, 2012; Osterholm, 2006; Borasi, 1990; Hershkowitz, 1989).

Η άποψη ότι η ανάπτυξη δεξιοτήτων κατανόησης του γραπτού λόγου είναι έργο των καθηγητών των γλωσσικών σπουδών και δεν αφορά στη διδασκαλία των μαθηματικών εγκαταλείπεται, και συζητείται όλο και περισσότερο ο ρόλος του δάσκαλου των μαθηματικών και η ανάγκη να συμπεριλάβει στην διδασκαλία των μαθηματικών και στρατηγικές ανάγνωσης των μαθηματικών κειμένων (Cowen, 1991).

Η Πόταρη (2001) εξετάζοντας το πώς αντιλαμβάνονται οι μελλοντικοί δάσκαλοι το θέμα του μαθηματικού αλφαβητισμού μέσα από τις διδακτικές τους επιλογές, διαπιστώνει ότι πολύ λίγοι εστιάζουν τους διδακτικούς τους στόχους στην ανάπτυξη δεξιοτήτων έκφρασης και επικοινωνίας, εκφράζοντας έτσι μια παραδοσιακή αντίληψη ότι η κατανόηση των εννοιών οδηγεί «αυτόματα» και στην συνειδητοποίηση του ρόλου της Γεωμετρίας στο εύρος των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις η ικανότητα έκφρασης και επικοινωνίας των μαθηματικών και επομένως η ικανότητα κατανόησης μαθηματικού κειμένου θεωρείται ότι είναι μια σημαντική συνιστώσα του μαθηματικού γραμματισμού και υποστηρίζεται η άποψη ότι οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να αναγνωρίσουν ότι οι μαθητές τους χρειάζονται την βοήθειά τους για να μάθουν, εκτός των άλλων, και το πώς να διαβάζουν το μαθηματικό περιεχόμενο, να τους ενθαρρύνουν να μην παπαγαλίζουν αλλά να στοχεύουν στο να καταλάβουν. Οι Kenney et al (2005) προτείνουν στους δασκάλους να μην εξηγούν τι λέει το βιβλίο, αλλά να κάνουν τις κατάλληλες ερωτήσεις που θα διευκολύνουν τους μαθητές τους να καταλάβουν τι λέει, με απώτερο στόχο οι μαθητές να εσωτερικεύσουν αυτές τις ερωτήσεις ώστε να τις χρησιμοποιούν στο διάβασμά τους.

Όλο και συχνότερα τα πανεπιστήμια στον τομέα των μαθηματικών προσφέρουν μαθήματα στρατηγικών αποτελεσματικής ανάγνωσης, πολλοί καθηγητές μαθηματικών συμπεριλαμβάνουν στο μάθημά τους αντίστοιχες συμβουλές και οι συγγραφείς συχνά δίνουν οδηγίες για το πώς αναμένουν να διαβαστεί το βιβλίο τους (Barton & Heidema, 2000; Adams, 2003).

Στις θεωρίες τις προσανατολισμένες προς τον αναγνώστη (reader oriented theories) ο αναγνώστης κατασκευάζει ενεργά νόημα κατά την αναγνωστική διεργασία ή οποία καθορίζεται από τις προθέσεις του συγγραφέα, τις πεποιθήσεις του αναγνώστη, και τις ιδιότητες ενός ιδεατού αναγνώστη στον οποίο το κείμενο απευθύνεται. Τα σχολικά εγχειρίδια έχουν πληροφοριακό και διδακτικό χαρακτήρα αλλά οι μαθητές που καλούνται να μάθουν από αυτά μπορεί να μην έχουν αναπτύξει τις αναγκαίες δεξιότητες (Weinberg & Wiesner, 2011; Weinberg et.al., 2012). Στα συγγράμματα παρουσιάζονται οι πληροφορίες σύμφωνα με την συμβατική μαθηματική γλώσσα, αλλά οι μαθητές που τα διαβάζουν ίσως να μην κατέχουν τους κώδικες που θα τους επιτρέψουν να συμμετάσχουν στον μαθηματικό συνδιάλογο που θα τους οδηγήσει στην απόκτηση της μαθηματικής γνώσης.

Οι διαλεκτικές στρατηγικές ανάγνωσης μπορεί να προκαλέσουν την συζήτηση στη τάξη και να ενισχύσουν την κατασκευή νοήματος από τους μαθητές (Borasi, et.al., 1998; Borasi & Siegel 2007). Το μαθηματικό κείμενο πέρα από ένα σύνολο αυστηρών και προκαθορισμένων κανόνων, αποτελεί πηγή πληροφοριών για την διαδικασία κατασκευής της μαθηματικής γνώσης, έναυσμα για προβληματισμό για τους τυχόν περιορισμούς που ισχύουν για τους μαθηματικές θεωρίες και τις εφαρμογές τους και αφορμή για να *βιωθεί* η μαθηματική πράξη σε όλες τις συναισθηματικές και γνωστικές διαστάσεις της.

Διερευνητική Έρευνα

Σκοπός και ερωτήματα

Σύμφωνα με τον νόμο τα επίσημα διαγωνίσματα των μαθηματικών στο λύκειο αποτελούνται από 4 θέματα διαβαθμισμένης δυσκολίας εκ των οποίον το πρώτο, και άρα το ευκολότερο, αξιολογεί στην ουσία το κατά πόσον έχει κατανοηθεί από τους μαθητές το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου, και μάλιστα τμήματος αυτού ανάλογα με την εξεταστέα ύλη. Οι οδηγίες για την διδασκαλία του μαθήματος, ενώ αναφέρουν σαν σκοπό της διδασκαλίας «την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν στη μαθηματική γλώσσα», ωστόσο δεν αναφέρουν σαφώς αν και πως μπορεί ο δάσκαλος των μαθηματικών να βοηθήσει τους μαθητές να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά το βιβλίο. Σιωπηρώς θεωρείται το διάβασμα του σχολικού βιβλίου ελάχιστη αυτονόητη υποχρέωση χωρίς να εξετάζεται η δυσκολία που μπορεί να παρουσιάζει η δραστηριότητα αυτή για τον μαθητή.

Με την εργασία αυτή γίνεται προσπάθεια να διερευνηθεί το πώς και πόσο κατανοείται από τους μαθητές λυκείου το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου της γεωμετρίας. Η κατανόηση κειμένου είναι από τη φύση του ένα φαινόμενο το οποίο δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθεί άμεσα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε μόνο τις έμμεσες συνέπειες, τα αποτελέσματα ή κάποιες ενδείξεις ότι έχει αυτή έχει επιτευχθεί. Ο ίδιος ο αναγνώστης μπορεί ερωτηθεί για το κατά πόσο, σύμφωνα με την προσωπική του γνώμη και αίσθηση έχει κατανοήσει ένα κείμενο, αν υπήρξαν σημεία που τον δυσκόλεψαν, αν η ανάγνωση του προκάλεσε αμηχανία, αν διευκρίνισε ή συσκότισε τις απόψεις του για κάποιο θέμα. Ποιο συχνά όμως ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει σε κάποιες ερωτήσεις που αφορούν στο κείμενο με σκοπό να αξιολογηθεί κατά πόσο μπορεί να ανακαλέσει τη βασική ιδέα και τα κύρια σημεία του κειμένου, αν εντόπισε λεπτά σημεία που αφορούν συγκεκριμένες έννοιες μέσα στο κείμενο, αν μπορεί να κρίνει, να ερμηνεύσει ή να εφαρμόσει κάποιες αρχές ή ιδιότητες στις οποίες γίνεται αναφορά. Με αυτόν τον τρόπο ανιχνεύονται τα αποτελέσματα της ανάγνωσης.

Η έρευνα αυτή είναι μια εμπειρική μελέτη που διεξήχθη σε δύο φάσεις με ποσοτικό και ποιοτικό σκέλος με στόχο να διερευνηθεί κατά πόσο μαθητές της Α τάξης Λυκείου «διαβάζουν» αποτελεσματικά το σχολικό βιβλίο της γεωμετρίας.

Στην πρώτη φάση συλλέχτηκαν οι απαντήσεις μαθητών της Α λυκείου σε 3 ερωτήσεις που τους τέθηκαν και αφορούσαν σε συγκεκριμένες σελίδες του σχολικού εγχειριδίου, προκειμένου να διερευνηθεί αν και κατά πόσο υπάρχει δυσκολία κατανόησης του περιεχομένου του βιβλίου της γεωμετρίας.

Στην δεύτερη φάση τις έρευνας οι ίδιες ερωτήσεις δόθηκαν σε 3 μαθήτριες, με την οδηγία να χρησιμοποιήσουν το βιβλίο για να απαντήσουν αφού πρώτα συζητήσουν μεταξύ τους τον τρόπο διαπραγμάτευσης. Στο τέλος τους ζητήθηκε από την ερευνήτρια να σχολιάσουν κατά πόσο ήταν βέβαιες για την ορθότητα των απαντήσεων τους και να περιγράψουν τον τρόπο που χρησιμοποιούν το βιβλίο στην προετοιμασία τους. Σκοπός της δεύτερης φάσης της έρευνας ήταν να διαπιστωθεί αν και κατά πόσον αξιοποιούν οι μαθητές τις κατάλληλες τεχνικές και μεταγνωστικές στρατηγικές ανάγνωσης στη προσπάθειά τους να κατανοήσουν το κείμενο του σχολικού βιβλίου.

Ο στόχος της έρευνας είναι να διερευνηθεί αν και κατά πόσο υπάρχει δυσκολία κατανόησης του περιεχομένου του βιβλίου της γεωμετρίας από τους μαθητές και οι ενδεχόμενοι παράγοντες στους οποίους μπορεί να οφείλεται αυτή. Γίνανε προσπάθειες να διερευνηθεί ο τρόπος που διαβάζεται από τους μαθητές το σχολικό εγχειρίδιο της γεωμετρίας, ο βαθμός δυσκολίας που αντιμετωπίζουν, αν και ποιες αναγνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές χρησιμοποιούν στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν το κείμενο του σχολικού βιβλίου και συγκεκριμμένα:

1. αν και πως κατανοείται το κείμενο μιας πρότασης που περιέχεται στο βιβλίο της γεωμετρίας,
2. αν έχουν οι μαθητές την ικανότητα να αναγνωρίσουν τις συνδέσεις ανάμεσα στις εικόνες και στο επεξηγηματικό κείμενο και να εξάγουν συμπεράσματα,

3. αν και πώς μπορούν οι μαθητές να παρακολουθήσουν και να κατανοήσουν τα βήματα μιας γραπτής απόδειξης.
4. αν και ποιές στρατηγικές ανάγνωσης αξιοποιούν οι μαθητές τις στη προσπάθειά τους να κατανοήσουν το μαθηματικό κείμενο του σχολικού εγχειριδίου της γεωμετρίας.

Υλικό

Για τις ανάγκες της έρευνας, σχεδιάστηκε ένα φύλλο 3 ερωτήσεων που αντιστοιχούν στις συνήθεις πρακτικές και διαδικασίες ανάγνωσης του μαθηματικού κειμένου, προκειμένου να διερευνηθεί ο τρόπος που γίνεται κατανοητό το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου. Οι μαθητές κλίθηκαν να εργαστούν ατομικά και να χρησιμοποιήσουν το σχολικό τους βιβλίο, «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου» των Αργυρόπουλου, Βλάμου, Κατσούλη, Μαρκάτη και Σίδερη (εκδ. 2012). Το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές καθώς και οι σελίδες του σχολικού βιβλίου στις οποίες αναφέρονται οι ερωτήσεις δίνονται στο παράρτημα 1.

Με τη πρώτη ερώτηση διερευνάται η κατανόηση του κειμένου ενός πορίσματος, το οποίο δίνεται στο βιβλίο χωρίς απόδειξη, μόνο με λεκτική διατύπωση, χωρίς το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα και χωρίς να αναφέρονται συμβολικά οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα. Οι μαθητές καλούνται να παρουσιάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα, μια σχηματική παράσταση του πορίσματος, πάνω στο οποίο να σημειώσουν μόνο τα συμπεράσματά του. Σκοπός της δραστηριότητας είναι να διερευνηθεί πως κατανοούν ο μαθητές την λεκτική διατύπωση μιας πρότασης, αν διαθέτουν τις απαιτούμενες δεξιότητες για να μεταφέρουν-μεταφράσουν το λεκτικό περιεχόμενο σε ένα γεωμετρικό σχήμα, αν και κατά πόσο αντιλαμβάνονται το κείμενο ως υποθετική πρόταση, αν μπορούν να διακρίνουν την υπόθεση από τα συμπεράσματα, και αν μπορούν να εκφράσουν κάποιες προτάσεις και συγκεκριμένα τα συμπεράσματα με συμβολικό τρόπο ως ισότητες στοιχείων του σχήματος.

Η δεύτερη είναι μια ανοικτή ερώτηση, ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τι πληροφορίες παίρνουν παρατηρώντας ένα σχήμα του βιβλίου όπου παρουσιάζονται οι σχετικές θέσεις 2 κύκλων και η αντίστοιχη σχέση των ακτίνων και της διακέντρου. Και αυτή η δραστηριότητα μιμείται μια τυπική διαδικασία κατά την ανάγνωση του βιβλίου γεωμετρίας, δηλαδή την προσεκτική παρατήρηση του σχήματος, την αναζήτηση σε άλλο μέρος του βιβλίου των εξηγήσεων, την αναγνώριση των κύριων στοιχείων, την εξαγωγή του νοήματος και την περιγραφή του σχήματος σε φυσική ή/και σε συμβολική μαθηματική γλώσσα.

Στην τρίτη ερώτηση τέλος, δόθηκε μια άσκηση και η απόδειξή της από την οποία έλειπαν κάποια τμήματα και ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν την απόδειξη. Με την ερώτηση αυτή διερευνάται αν και κατά πόσο είναι σε θέση οι μαθητές να παρακολουθήσουν την ροή μιας γραπτής απόδειξης, με σκοπό να μπορούν στο τέλος να την αναπαράγουν. Το ερώτημα περιέχει αρκετά υποερωτήματα-βήματα της αποδεικτικής διαδικασίας, ώστε να διερευνηθεί αν κατά πόσο οι μαθητές έχουν αναπτύξει τις βασικές δεξιότητες που είναι αναγκαίες για την κατανόηση κειμένου απόδειξης όπως αναφέρονται στο θεωρητικό μέρος. Ο λόγος που δόθηκε άγνωστη άσκηση και όχι ένα από τα θεωρήματα που αναφέρονται στο βιβλίο είναι ότι οι αποδείξεις της ενότητας είχαν διδαχθεί και δεν θα ήταν δυνατό να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα.

Το ίδιο εργαλείο χρησιμοποιήθηκε και στη Β φάση της έρευνας.

Α φάση έρευνας

Συμμετέχοντες

Η πρώτη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε μέσα στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας της Α τάξης Γενικού Λυκείου της Αθήνας, σε τρία τμήματα από τα οποία στα δύο διδάσκει η ερευνήτρια. Συμμετείχαν 67 μαθητές, 28 κορίτσια και 39 αγόρια. Το σχολείο έχει σχετικά καλή παράδοση στις επιτυχίες μαθητών του στη τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η έρευνα έγινε το Φεβρουάριο, στο μέσον σχεδόν του σχολικού έτους, και αφού τα παιδιά είχαν διδαχθεί ολόκληρο το τρίτο κεφάλαιο της γεωμετρίας που έχει τον τίτλο «Τρίγωνα», αφορά κυρίως την ισότητα των τριγώνων και στο τέλος του περιλαμβάνει τις παραγράφους που αναφέρονται στις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου. Στο μάθημα πριν την διεξαγωγή της έρευνας, οι μαθητές αφού είχαν ολοκληρώσει την μελέτη των παραγράφων «*εφαπτόμενα τμήματα*», «*σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου*» και «*σχετικές θέσεις δύο κύκλων*» ασχολήθηκαν με δραστηριότητες που περιλάμβαναν επαναληπτικές ασκήσεις γεωμετρίας και τους είχε δοθεί η οδηγία στα πλαίσια της επανάληψης να «διαβάσουν καλά» τη θεωρία και να μελετήσουν την σελίδα της «Ανακεφαλαίωσης» του βιβλίου ώστε στο επόμενο μάθημα να γίνει μια αξιολόγηση και να λυθούν οι τυχόν απορίες τους σε αυτό το κεφάλαιο.

Διαδικασία

Η έρευνα έγινε στην σχολική τάξη την ώρα το μαθήματος της γεωμετρίας. Αν και η αρχική πρόβλεψη για την έρευνα ήταν να διαρκέσει μία διδακτική ώρα, οι μαθητές δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν τις εργασίες οπότε η έρευνα παρατάθηκε άλλη μια διδακτική ώρα, δηλαδή συνολικά μιάμιση ώρα περίπου.

Τα γραπτά των μαθητών μελετήθηκαν και οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν. Οι κατηγορίες προέκυψαν από την πρώτη μελέτη των γραπτών και ήταν διαφορετικές για κάθε ερώτημα.

Αποτελέσματα.

Αποτελέσματα 1ου ερωτήματος

Η πρώτη ερώτηση του εργαλείου της έρευνας, αναφέρεται στο πόρισμα της σελ 62 του σχολικού βιβλίου της γεωμετρίας:

> *Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του: (i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,*
>
> *(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.*

Από τους μαθητές ζητείται να σχεδιαστεί ένας κύκλος, οι εφαπτόμενες από εξωτερικό σημείο του κύκλου, η διακεντρική ευθεία και η χορδή με άκρα τα σημεία επαφής. Πάνω στο σχήμα έπρεπε να σημειωθούν τα συμπεράσματα του πορίσματος, δηλαδή να δηλωθεί η ορθή γωνία και σημαδευτούν ίσα τμήματα της χορδής και οι ίσες γωνίες. Μετά ζητήθηκε να γραφούν τα συμπεράσματα σαν ισότητες στοιχείων του σχήματος πχ ΑΜ=ΜΒ.

Διακρίθηκαν τρεις άξονες στο ερώτημα αυτό. Ο πρώτος αξιολογεί την μετάφραση του λεκτικού περιεχομένου σε σχήμα στο επίπεδο της αντιληπτικής κατανόησης. Ο δεύτερος εξετάζει αν κατανοείται η πρόταση ως υποθετική και αν διακρίνονται η υπόθεση από το συμπέρασμα, αν υπάρχει η ικανότητα να εντοπίσουν τα μέρη του σχήματος και τις μαθηματικές σχέσεις που δεν προσδιορίζονται μόνο από το σχήμα αλλά απαιτείται και έλεγχος λεκτικών δηλώσεων και ο τρίτος άξονας αφορά στην μετάφραση σε συμβολικό τρόπο των σχέσεων των στοιχείων του σχήματος

Οι κωδικοί, η περιγραφή τους και τα ποσοστό των μαθητών που εμπίπτει στον αντίστοιχο κωδικό παρουσιάζονται στον πίνακα 1. Οι κωδικοί 1 και 2 αναφέρονται στο σχήμα ενώ οι κωδικοί 3 στην συμβολική απόδοση των συμπερασμάτων του πορίσματος.

Κωδικός		*Περιγραφή*	*Ποσοστό εμφανίσεων*
1	*ΣΧ*	*Σωστό σχήμα*	*56,72%*
	ΕΣΧ	*Δεν έχουν σχεδιαστεί στοιχεία όπως η διάκεντρος ή η χορδή*	*25,37%*
	ΛΣΧ	*Λανθασμένο σχήμα, η δεν έχουν σχεδιαστεί σωστά οι ακτίνες ή οι εφαπτόμενες.*	*16,42%*
2	*ΣΗ*	*Σωστή σήμανση*	*13,43%*
	ΕΣΗ	*Ελλιπής σήμανση, σημειώνονται κανένα ή μερικά μόνο από τα συμπεράσματα*	*41,79%*
	ΥΣΗ	*Υπερβολική σήμανση, σημειώνονται και άλλες σχέσεις που ισχύουν αλλά δεν αναφέρονται ως συμπεράσματα στο πόρισμα*	*35,82%*
	ΠΣΗ	*«Παράλογη» σήμανση, σημειώνονται σχέσεις που δεν ισχύουν*	*4,48%*
	ΔΑ	*Δεν απάντησαν*	*4,48%*
3	*ΑΛ*	*Σωστή συμβολική διατύπωση όλων των συμπερασμάτων*	*16,42%*

	του πορίσματος	
ΕΑΛ	*Ελλιπής διατύπωση, αναφέρονται κανένα ή μερικά μόνο από τα συμπεράσματα*	*58,21%*
ΥΑΛ	*Υπερβολική διατύπωση, διατυπώνονται (και) άλλες σχέσεις που ισχύουν αλλά δεν αναφέρονται ως συμπεράσματα στο πόρισμα*	*5,97%*
ΠΑΛ	*«Παράλογες» ή ασύντακτες ισότητες*	*5,97%*
ΑΑΛ	*Αντί της απλής διατύπωσης συμπερασμάτων γίνεται προσπάθεια να αποδειχθεί το πόρισμα*	*26,87%*
ΒΑΛ	*Λεκτικά η ίδια ή λίγο διαφορετική διατύπωση του πορίσματος*	*5,97%*
ΔΑ	*Δεν απάντησαν*	*10,45%*

Πίνακας 1: Αποτελέσματα του πρώτου ερωτήματος

Πάνω από τους μισούς (56,72%, κωδ. ΣΧ) μαθητές σχεδίασαν το σχήμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα και τα συμπεράσματα του πορίσματος, ενώ το ένα τέταρτο (25,37%, κωδ. ΕΣΧ) σχεδιάζουν μόνο την κατάσταση που περιγράφεται δηλαδή ένα κύκλο και τις δύο εφαπτόμενες από σημείο εκτός αυτού, παραλείπουν δε στο σχέδιο την διακεντρική ευθεία ή τη χορδή ή και τα δύο που αφορούν στα συμπεράσματα του πορίσματος. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι στην ίδια σελίδα του βιβλίου που παρουσιάζεται το πόρισμα, υπάρχουν δύο σχήματα ένα το οποίο αντιστοιχεί στο θεώρημα «*τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από το σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους*» και δεν σημειώνεται η χορδή, και ένα το οποίο αντιστοιχεί σε άσκηση η οποία ελέγχει την κατανόηση του πορίσματος του ερωτήματος 1 της παρούσας έρευνας.

Ένα σημαντικό 16,42% (κωδ. ΛΣΧ) σχεδιάζουν ένα κύκλο αλλά οι εφαπτόμενες, αν έχουν σχεδιαστεί, άλλοτε *τέμνουν* οι ίδιες ή φανερά οι προεκτάσεις τους τον κύκλο, άλλοτε εφάπτονται μεν αλλά οι ακτίνες φέρονται όχι προς το σημείο επαφής αλλά προεκτεινόμενες τέμνονται με τις εφαπτόμενες έξω από τον κύκλο.

Αν και 38 (κωδ. ΣΧ) μαθητές αποτύπωσαν σωστά τα γεωμετρικό σχήμα, μόνο 9 ποσοστό 13,43% (κωδ. ΣΗ) σημείωσαν σωστά επάνω του τα συμπεράσματα του πορίσματος ενώ οι 24 (κωδ. ΥΣΗ) σημειώνουν στο σχήμα και άλλες πληροφορίες όπως την ισότητα των ακτίνων, ή των εφαπτομένων, που ισχύουν μεν άλλα δεν είναι συμπεράσματα του πορίσματος, ή σημειώνουν ισότητα τόξων που προκύπτει έμμεσα από το πόρισμα αλλά δεν είναι συμπέρασμα που αναφέρεται στη διατύπωση του.

Τέλος στην συντριπτική τους πλειοψηφία οι μαθητές απέτυχαν να διατυπώσουν σε μαθηματική γλώσσα ως ισότητες τα συμπεράσματα του πορίσματος, μόνο 16,42% (κωδ. ΑΛ) κατάφερε να διατυπώσει τα συμπεράσματα και μόνο αυτά. Η διατύπωση των συμπερασμάτων ως ισότητες είναι σχεδόν πάντα προϋπόθεση για να ξεκινήσει η απόδειξη μιας πρότασης γιατί έτσι διευκρινίζεται το ζητούμενο και η αποδεικτική διαδικασία αποκτά νόημα.

Ενδιαφέρον είναι ότι πολλοί μαθητές (26,87%) αδυνατούν να διατυπώσουν το συμπέρασμα του πορίσματος και αντί για αυτό, κάνουν προσπάθεια να το *αποδείξουν.* Δεν προκαλεί έκπληξη ότι από τους 18 που το προσπάθησαν κανείς δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη επιτυχώς, ενώ στη πλειοψηφία τους, οι 13, δίνουν την απόδειξη του θεωρήματος που βρίσκεται στην ίδια σελίδα και είναι μία από τις αποδείξεις «εντός ύλης».

Αποτελέσματα 2ου ερωτήματος

Στο δεύτερο ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν ένα σχήμα του βιβλίου στο οποίο φαίνονται οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων και σημειώνονται τα μήκη των ακτινών και της διακέντρου. Στην προηγούμενη σελίδα και σε στήλη δίπλα στο σχήμα περιγράφεται αναλυτικά η σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων σε κάθε περίπτωση, με αναφορά στο σχήμα μέσα σε παρένθεση. Προφορικά δόθηκε η οδηγία να γράψουν τι πληροφορία πιστεύουν ότι ήθελε ο συγγραφέας του βιβλίου να τους μεταφέρει με αυτό το σχήμα.

Διακρίθηκαν δύο βασικοί άξονες στο ερώτημα αυτό. Ο πρώτος αφορά στην ακρίβεια, και πληρότητα της περιγραφής της πληροφορίας που περιέχει το σχήμα και ο δεύτερος την γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή του σχήματος. Οι κωδικοί, η περιγραφή τους και το ποσοστό των μαθητών που εμπίπτει στον αντίστοιχο κωδικό παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

Κωδικός		Περιγραφή	Ποσοστό εμφανίσεων
1	*ΛΠ*	*Λανθασμένη περιγραφή λάθος σχέσεις διακέντρου ακτίνας*	*2,99%*
	ΕΠ	*Επιφανειακή περιγραφή χωρίς αναφορά στις σχέσεις διακέντρου-ακτίνων*	*43,28%*
	ΠΠ	*Πλήρης περιγραφή με αναφορά στις σχέσεις διακέντρου-ακτίνων*	*25,37%*
	Α	*Άλλο*	*7,46%*
	ΠΒ	*Παράθεση κατά λέξη του αντίστοιχου κειμένου του βιβλίου*	*10,45%*
2	*ΦΓ*	*Φυσική κυρίως γλώσσα*	*20,90%*
	ΛΟ	*Λάθος ορολογίες, ανακρίβειες*	*8,96%*
	ΑΟ	*Ακριβείς όροι και ορολογίες, σχέσεις περιγράφονται λεκτικά*	*31,34%*
	ΣΓ	*Σχέσεις περιγράφονται συμβολικά*	*28,36%*
	ΔΑ	*Δεν απάντησαν*	*10,00%*

Πίνακας 2: Αποτελέσματα του δεύτερου ερωτήματος

Το ένα τέταρτο των μαθητών (25,37%, κωδ. ΠΠ) έδωσε μια πλήρη περιγραφή της κατάστασης που περιγράφει το σχήμα και αναφέρθηκε και στη σχέση της διακέντρου και των ακτίνων είτε με λεκτική περιγραφή ή με αναγραφή των ισοτήτων και ανισοτήτων χρησιμοποιώντας τα σύμβολα δ, R και ρ όπως εμφανίζονται στο σχήμα.

Σχεδόν οι μισοί μαθητές (43,28%, κωδ. ΕΠ) αγνοούν την πληροφορία που αφορά στη σχέση της διακέντρου και των ακτίνων, ενώ κάποιοι (10,45%) αντιγράφουν κατά λέξη από το βιβλίο όλο ή μέρος του επεξηγηματικού κειμένου. Μόνο δύο μαθητές (2,99%, κωδ. ΛΠ) είτε δεν μεταφέρουν σωστά τις σχέσεις, είτε περιγράφουν λανθασμένα το σχήμα. Τέλος 5 μαθητές (7,46%, κωδ. Α) δίνουν την δική τους ερμηνεία για το σχήμα που χωρίς να μπορεί να χαρακτηριστεί λάθος απάντηση στην ανοιχτού τύπου ερώτηση όπως τέθηκε, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρης. Δηλαδή είτε αναφέρονται μόνο οι ισότητες και ανισότητες μεταξύ των δ, R και ρ συμβολικά και χωρίς εξήγηση, ή δίνεται ένας σαφής τίτλος:

«Στο σχήμα περιγράφονται οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων»

ή μια ατομική ερμηνεία:

«Στο σχήμα φαίνεται ένας εσωτερικός κύκλος να απομακρύνεται από το κέντρο του μεγάλου κύκλου κατά μήκος μιας ευθείας που ενώνει τα δύο κέντρα»

Ως προς τη γλώσσα που χρησιμοποιούν στη περιγραφή τους, το 31,34% (κωδ. ΑΟ) χρησιμοποιεί με ακρίβεια γεωμετρική ορολογία, και προτιμά να περιγράψει τις σχέσεις λεκτικά, για παράδειγμα:

«η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων των δύο κύκλων»

ενώ το 28,36% (κωδ. ΣΓ) παραθέτουν τις ισότητες και ανισότητες και σε συμβολική ή μόνο σε συμβολική γραφή.

Το 20,90% (κωδ. ΦΓ) χρησιμοποιεί κυρίως φυσική γλώσσα με κατ΄ανάγκη κάποιους γεωμετρικούς όρους όπως *«εφάπτονται»*, ή *«ακτίνες»* ενώ οι προτάσεις μπορεί να είναι αδέξιες:

«οι κύκλοι ενώνονται με μια γραμμή».

Πολύ λίγοι, 8,96% στον κωδ. ΛΟ έχουν ασάφειες στη διατύπωση, δίνουν λάθος τις σχέσεις διακέντρου και ακτίνων:

«η διάκεντρος είναι πιο μικρή από τις ακτίνες»,

ή χρησιμοποιούν όρους που δεν υπάρχουν:

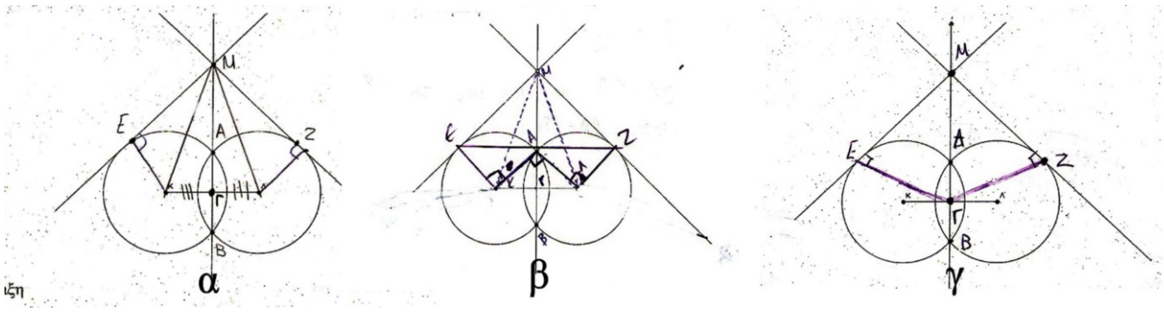
«περιγράφεται η τέμνωση των κύκλων».

Τέλος 10% δεν απάντησε στην ερώτηση.

Αποτελέσματα 3ου ερωτήματος

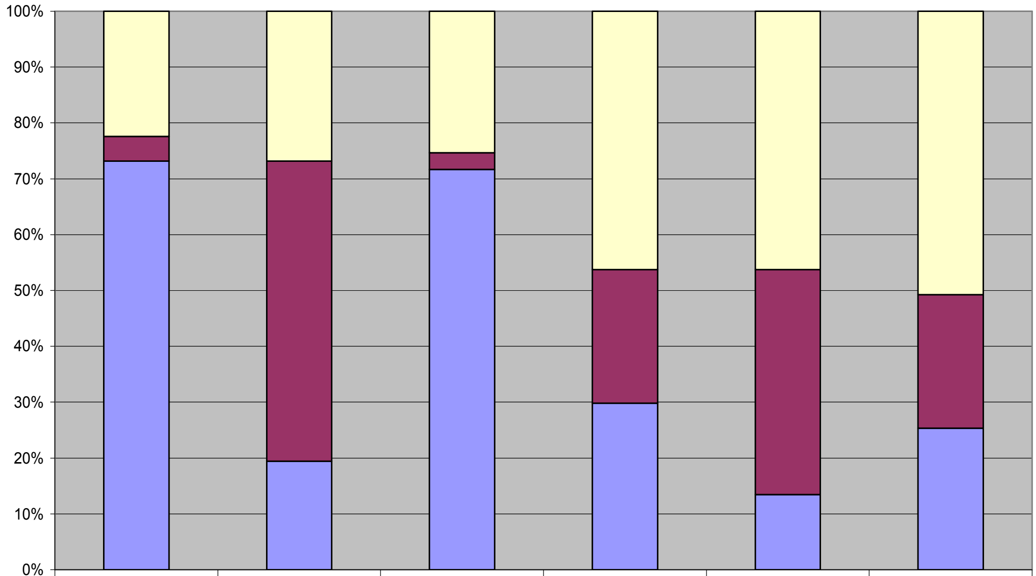
Στο τρίτο ερώτημα δόθηκε η εκφώνηση ενός γεωμετρικού προβλήματος, από την ενότητα της εφαπτόμενης κύκλου και το αντίστοιχο σχήμα. Από το σχήμα έλλειπαν οι ονομασίες των σημείων και κάποια ευθύγραμμα τμήματα που αναφέρονταν είτε στα δεδομένα είτε στα αποδεικτικά βήματα. Επίσης δόθηκε μία απόδειξη σε δύο στήλες (ισχυρισμός – τεκμηρίωση) αρκετών βημάτων που οδηγούσε στην απόδειξη του ζητούμενου της άσκησης. Σε κάποια από τα βήματα υπήρχε κενό στη θέση του ισχυρισμού ή της τεκμηρίωσης. Ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν το σχήμα και την απόδειξη. Η προφορική οδηγία ήταν ότι κάποιος είχε αποδείξει την άσκηση αλλά είχαν σβηστεί τα σημεία που υπάρχει πλαγιογραφή και πρέπει να συμπληρώσουν ό,τι έλλειπε.

Όσον αφορά στην συμπλήρωση του σχήματος, σχεδόν όλοι σημείωσαν τις ονομασίες των στοιχείων του σχήματος σωστά, σύμφωνα με τις υποδείξεις της εκφώνησης της άσκησης. Μόνο 10 από τα 67 παιδιά έφεραν αυθαίρετα επιπλέον γραμμές παρόλο που δεν αναφέρονται ούτε στην εκφώνηση, ούτε σε κάποιο από τα βήματα της απόδειξης, ενώ 15 παιδιά δεν έφεραν τμήματα ή πλευρές τριγώνων που χρειάστηκαν στην απόδειξη (εικ 2).



Εικόνα 2
Το σχήμα της άσκησης (α), σχήμα με επιπλέον γραμμές (β) και σχήμα όπου λείπουν δεδομένα (γ)

Όσον αφορά στην συμπλήρωση των τμημάτων που έλλειπαν από την απόδειξη, (αντιστοιχούν στα βήματα 1,2,4,5,6,7) αναλυτικά τα αποτελέσματα για κάθε ένα από τα 6 παραλειπόμενα στοιχεία φαίνονται στο διάγραμμα 1.



	1	2	4	5	6	7
ΔΑ	15	18	17	31	31	34
ΛΑΘΟΣ	3	36	2	16	27	16
ΣΩΣΤΑ	49	13	48	20	9	17

Διάγραμμα 1. Αποτελέσματα απαντήσεων στα βήματα 1, 2, 4, 5, 6, 7 της απόδειξης (στον πίνακα τα αποτελέσματα αφορούν στον αριθμό των μαθητών που έδωσαν την αντίστοιχη απάντηση)

Στο βήμα 1 καλούνται οι μαθητές να εντοπίσουν στο βιβλίο το θεώρημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τεκμηρίωση μιας καθετότητας, ότι η διάκεντρος δύο κύκλων είναι κάθετη στην κοινή τους χορδή (σελ 64 του σχ. βιβλίου). Σωστά εντόπισαν το θεώρημα 73% των μαθητών. Μια δυσκολία στην διαπραγμάτευση αυτού του υποερωτήματος μπορεί να είναι το γεγονός ότι στην άσκηση η κοινή χορδή προεκτείνεται μέχρι τη τομή των εφαπτομένων και πιθανόν να μην αναγνωρίστηκε από τους υπόλοιπους μαθητές.

Στο βήμα 2, οι μαθητές καλούνται να τεκμηριώσουν ότι δύο τμήματα είναι ίσα. Στο σχήμα τα τμήματα είναι εμφανώς ίσα όμως η απόδειξη (με όποιο τρόπο κι αν γίνει) απαιτεί πέρα από τη συνολική κατανόηση την διάκριση μερών του σχήματος (υποσχημάτων). Μόνο 13 από τους 67 μαθητές μπόρεσαν να τεκμηριώσουν με αυστηρότητα ή και λιγότερο αυστηρά την πρόταση.

Το βήμα 4 απαντήθηκε σωστά από όλους σχεδόν τους μαθητές που το διαπραγματεύτηκαν, οι μαθητές εντοπίσανε στο σχήμα την κοινή πλευρά των δύο τριγώνων.

Στο βήμα 5 καλούνται οι μαθητές να εντοπίσουν στο βιβλίο το κατάλληλο κριτήριο ισότητας τριγώνων σαν καταληκτικό βήμα ενός τμήματος της απόδειξης. Το σωστό κριτήριο ανέφεραν μόνο 20, ενώ οι 16 τεκμηριώνουν αυθαίρετα και 31 εγκαταλείπουν την προσπάθεια σε αυτό το βήμα.

Για την διαπραγμάτευση του βήματος 6, οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν προτάσεις που έχουν αποδειχτεί σε προηγούμενα βήματα της απόδειξης για να τεκμηριώσουν την ισότητα δύο τριγώνων. Ήδη όμως από το προηγούμενο βήμα πολλοί έχουν εγκαταλείψει την προσπάθεια παρακολούθησης της απόδειξης και μόνο 9 ολοκληρώνουν με επιτυχία και αυτό το βήμα. Χαρακτηριστικό είναι ότι στην τεκμηρίωση της ισότητας των τριγώνων, οι 27 χρησιμοποιούν ως υπόθεση το συμπέρασμα της άσκησης του οποίου η τεκμηρίωση ζητείται στο αμέσως επόμενο βήμα της απόδειξης.

Στο τελικό βήμα της απόδειξης, το βήμα 7, ζητείται να τεκμηριωθεί η ισότητα δύο τμημάτων. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι από τους 17 μαθητές που τεκμηριώνουν «σωστά», αναφέρουν δηλαδή ότι είναι αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων, οι 8 αγνοούν το γεγονός ότι την ίδια πρόταση είχαν χρησιμοποιήσει ως υπόθεση για την ισότητα των τριγώνων αυτών.

Σκοπός της ερώτησης 3 του ερευνητικού εργαλείου, ήταν να διερευνηθεί αν είναι σε θέση οι μαθητές να παρακολουθήσουν την πορεία μιας γραπτής απόδειξης, οπότε διερευνήθηκαν και άλλα στοιχεία στις απαντήσεις, όπως η θέση των απαντήσεων, αν χρησιμοποιούνται οι προτάσεις των οποίων η αλήθεια είχε αποδειχθεί σε προηγούμενα βήματα ως υπόθεση για τα επόμενα, αν οι εξηγήσεις ή η τεκμηρίωση των μαθητών στηρίζεται μάλλον στο σχήμα, αν χρησιμοποιήθηκαν στη τεκμηρίωση ως υπόθεση τα ζητούμενα και χαρακτηρίστηκαν τα γραπτά και με τους παρακάτω κωδικούς.

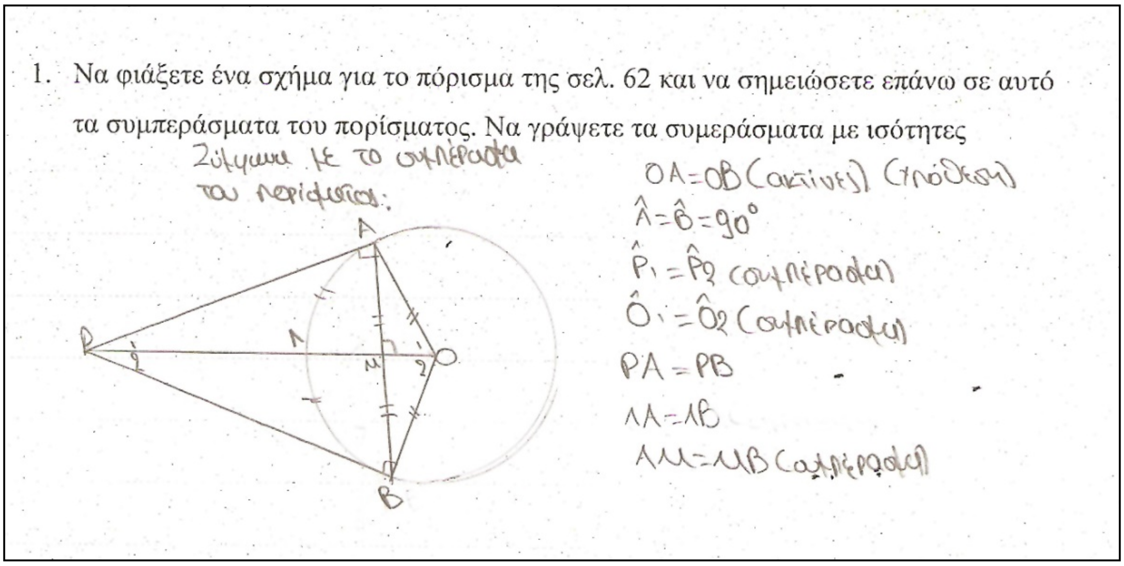
Κωδικός	Περιγραφή	Αριθμός εμφανίσεων	Ποσοστό
Α	Ικανότητα παρακολούθησης της ροής της απόδειξης, συνέπεια στους ισχυρισμούς, σωστή, εκτός μικρών εξαιρέσεων, τεκμηρίωση (αφορά κυρίως το ερ 2)	9	13,43%
ΑΣ	Γίνεται προσπάθεια να απαντηθούν αποσπασματικά κάποια ερωτήματα κυρίως τα προφανή (ερ 4), η τεκμηρίωση βασίζεται κυρίως στο σχήμα, χρησιμοποιούνται σαν υπόθεση τα ζητούμενα	33	49,25%
Λ	Λανθασμένοι ή και «παράλογοι» ισχυρισμοί λάθος διαπραγμάτευση	17	25,37%
ΔΑ	Δεν απάντησαν σε καμία υποερώτηση	8	11,94%

Πίνακας 3: Αποτελέσματα του τρίτου ερωτήματος

Συζήτηση για την Α φάση της έρευνας

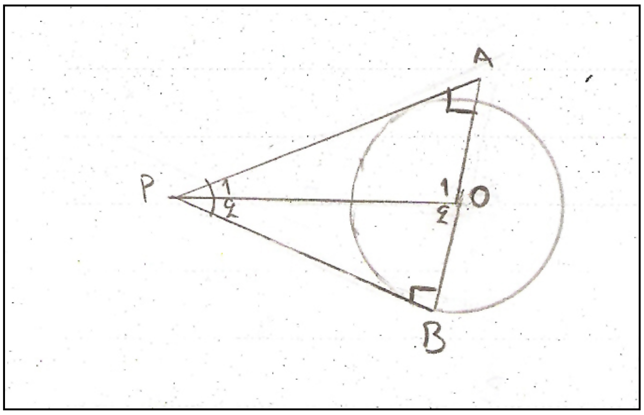
Συζήτηση για το 1ο Ερώτημα.

Μόνο οι μισοί μαθητές μπόρεσαν να σχεδιάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα σύμφωνο τη λεκτική αναπαράσταση του πορίσματος και από αυτούς μόνο 9 σημειώνουν σωστά τα συμπεράσματα του πορίσματος και μόνο αυτά. Οι υπόλοιποι φαίνεται ότι σημειώνουν *όλα όσα γνωρίζουν* για την εφαπτόμενη κύκλου ανεξάρτητα αν αυτά είναι τα συμπεράσματα του πορίσματος ή όχι. Φαίνεται ότι πράγματι το γεωμετρικό σχήμα ενσωματώνει πολλές πληροφορίες της έννοιας και αποτελεί την εικόνα του εννοιολογικού σχήματος κατά Fischbein (1993). Για παράδειγμα, στην εικόνα 4, μαθήτρια που γνωρίζει όσα ορίζει η διδακτέα ύλη για το θέμα της εφαπτομένης, πρώτα σχεδιάζει το γεωμετρικό σχήμα και σημειώνει πάνω του και δίπλα με ισότητες όλες τις σχέσεις που ισχύουν, αποτυπώνοντας έτσι το εννοιολογικό σχήμα που έχει κατασκευάσει για το θέμα και *κατόπιν* προσδιορίζει ποιες από τις σχέσεις που ανέφερε είναι συμπεράσματα του πορίσματος (Εικ.3).



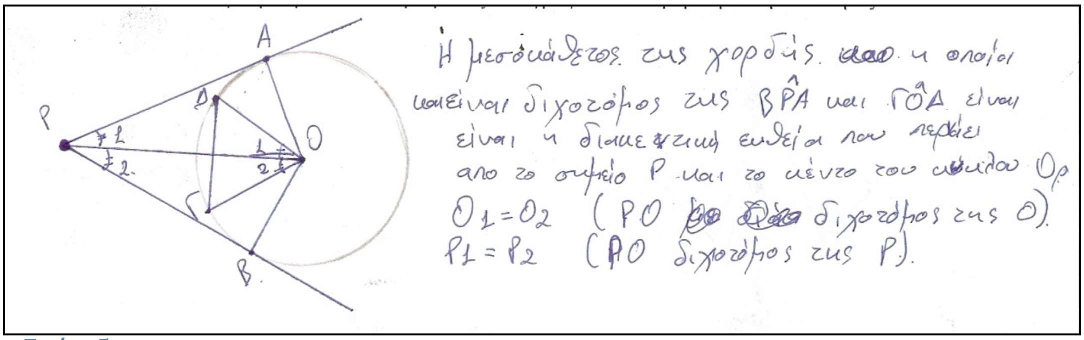
Εικόνα 3

Μαθητές που δεν έχουν σχηματίσει την σωστή έννοια για την εφαπτόμενη δεν μπορούν να κατανοήσουν σε βάθος ούτε τη λεκτική διατύπωση μιας πρότασης και κατ' επέκταση δεν μπορούν να τη «μεταφράσουν» σε οπτική παράσταση. Το γεωμετρικό τους σχήμα αντανακλά το νοητικό σχήμα που έχουν για αυτήν. Στην *εικόνα 4* ένας μαθητής που δεν έχει κατανοήσει σωστά την έννοια της εφαπτόμενης σημειώνει την πληροφορία που γνωρίζει, ότι δηλαδή η εφαπτόμενη είναι κάθετη προς την ακτίνα στο σημείο επαφής αλλά με τον δικό του τρόπο, που κάνει φανερό ότι ασύνδετες πληροφορίες και έννοιες δεν αποτελούν γνώση.



Εικόνα 4

Η προσεκτική την εξέταση των απαντήσεων των μαθητών αποκαλύπτει ενδείξεις ότι τα πρωτοτυπικά σχήματα με τα οποία επεξηγούνται οι γεωμετρικές έννοιες στο βιβλίο, είναι δυνατό να λειτουργούν σαν εμπόδιο αντί να διευκολύνουν την κατανόηση του γεωμετρικού κειμένου. Κατά την διαδικασία της εξεικόνισης οι μαθητές αναγνωρίζουν ένα σχήμα βασιζόμενοι στην ομοιότητά του με το πρωτοτυπικό σχήμα που έχουν διαμορφώσει για την έννοια (Duval, 2004; Mesquita, 1994). Στο πόρισμα του ερωτήματος 1, ένα από τα συμπεράσματα είναι ότι η διακεντρική ευθεία, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες και τη γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες προς το σημείο επαφής. Όμως 20 από τους 50 μαθητές που σημείωσαν στο σχήμα ή με ισότητες τη διχοτόμο των εφαπτομένων δεν σημειώνουν την διχοτόμο της γωνίας των ακτίνων. *Σε όλους συμβαίνει η γωνία αυτή να είναι αμβλεία.* Ίσως το πρωτοτυπικό μοντέλο που έχουν για την διχοτόμο να είναι αυτό μιας οξείας γωνίας και είναι τόσο ισχυρό που τους εμποδίζει να δεχτούν ότι η υπάρχει στο σχήμα διχοτόμος αμβλείας γωνίας αν και καθαρά διατυπώνεται και η ύπαρξη δεύτερης γωνίας στα συμπεράσματα του πορίσματος. Έτσι μπορεί να ερμηνευτεί το «παράδοξο» εκ πρώτης όψεως σχήμα του μαθητή (εικ. 5) που μικραίνει αυθαίρετα την γωνία των ακτίνων ώστε να μπορέσει να σημαδέψει τη διχοτόμο της.



Εικόνα 5

Μία άλλη εξήγηση του φαινομένου αυτού είναι το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο, το διακεντρικό τμήμα PO, είναι διχοτόμος και της μιας και της άλλης γωνίας. Η παραγνώριση από τους μαθητές της μιας από τις δύο ιδιότητες ίσως να οφείλεται σε αδυναμία, σύμφωνα με ανάλογα συμπεράσματα των (Hershkowitz, 1989; Dvora & Dreyfus, 2004), των μαθητών να ξεφύγουν από την συνολική εποπτεία του σχήματος και να επικεντρωθούν σε τμήματα αυτού.

Από τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στο ερώτημα 1 του εργαλείου, διαπιστώνεται η αδυναμία των μαθητών να κατασκευάσουν ένα σχήμα που να είναι αντίστοιχο της λεκτικής διατύπωσης ενός πορίσματος. Αυτή η διαπίστωση είναι κοινός τόπος στους εκπαιδευτικούς του μαθήματος της γεωμετρίας στην Ελλάδα. Ο σχολικός σύμβουλος των μαθηματικών Δ. Σπαθάρας στις οδηγίες για τις προαγωγικές εξετάσεις αναφέρει σχετικά με τα γεωμερικά σχήματα των θεμάτων (Σπαθάρας, 2015, σελ.13):

> «*Η κατασκευή ενός σχήματος, με βάση τα δεδομένα, ίσως δυσκολέψει πολλούς μαθητές και είναι καλύτερα να δοθεί.*»

Ενώ οι μαθητές φαίνεται να έχουν μερική οπτική και λεκτική αντίληψη του σχήματος δεν μπορούν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των δύο, τους λείπει η διαδικαστική αντίληψη.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα προκύπτει από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της Α φάσης: Ακόμα και αν δεχθούμε την δυσκολία των μαθητών της Α λυκείου να παραστήσουν με σχήμα την λεκτική διατύπωση μιας πρότασης, γιατί το ένα τέταρτο των μαθητών της έρευνας ενώ μπορεί να σχεδιάσει τον κύκλο και τις εφαπτόμενες από κοινό σημείο έξω του κύκλου, αδυνατεί να σχεδιάσει την χορδή με άκρα τα σημεία επαφής; Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η σχεδίαση έστω και ενός σκαριφήματος των εφαπτομένων είναι πολύ πιο περίπλοκη από την σχεδίαση ενός ευθύγραμμου τμήματος με γνωστά άκρα. Προκύπτει επομένως η ανάγκη περεταίρω έρευνας προκειμένου να διαπιστωθεί που οφείλεται η δυσκολία αυτή των μαθητών.

Συζήτηση για το 2ο Ερώτημα.

Φαίνεται ότι η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η μετάφραση από το σχήμα σε λεκτική περιγραφή, να δυσκολεύει πολύ λιγότερο τους μαθητές, αφού ένα μεγάλο ποσοστό περίπου 70% μπόρεσε, άλλος με μεγαλύτερη άλλος με μικρότερη ακρίβεια, να περιγράψει το νόημα του σχήματος.

Αρκετοί μαθητές αναφέρθηκαν στην σχέση ακτίνων και διακέντρου. Η σχέση αυτή δεν είναι σαφής στο σχήμα, αλλά θα έπρεπε κάποιος να ανατρέξει και στο επεξηγηματικό κείμενο του βιβλίου σε διπλανές στήλες και στην προηγούμενη σελίδα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι με το ερώτημα ελέγχθηκε αν οι μαθητές ανατρέχουν στο κείμενο του βιβλίου για να βρουν την εξήγηση του σχήματος, και αυτή είναι μια δεξιότητα που φαίνεται να κατέχουν. Αυτό όμως δεν είναι ένα ασφαλές συμπέρασμα.

Κάποιοι μαθητές δεν αναφέρουν τις σχέσεις διακέντρου – ακτίνων, αλλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν αυτοί οι μαθητές ανατρέξανε στο κείμενο αλλά δεν θεώρησαν σημαντική τη πληροφορία αυτή και γι αυτό επέλεξαν να μην την αναφέρουν.

Αντίστοιχα δεν είναι δυνατό να εξακριβωθεί αν οι μαθητές που συμπεριέλαβαν τις σχέσεις αυτές στην απάντηση, τις γνώριζαν και το σχήμα λειτούργησε περισσότερο σαν ενεργοποιητής της μνήμης παρά σαν πληροφορία.

Ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών, κάτω από 3% χωρίς αμφιβολία αδυνατεί να κατανοήσει το σχήμα όπως φαίνεται από τις περιγραφές τους:

> «Στο σχήμα α ο μικρός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό και έχουν σαν κέντρο το Κ και οι δύο»

> «Στο σχήμα γ οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και εξωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και δ=R+ρ»

> «Στο σχήμα ε υπάρχει η διάκεντρος που ενώνει το κύκλο KR με τον ΛR»

Και πάλι όμως, δεν είναι σαφές αν αυτό οφείλεται στην αδυναμία τους να εντοπίσουν το επεξηγηματικό κείμενο στο βιβλίο, ή στην αδυναμία τους να το κατανοήσουν.

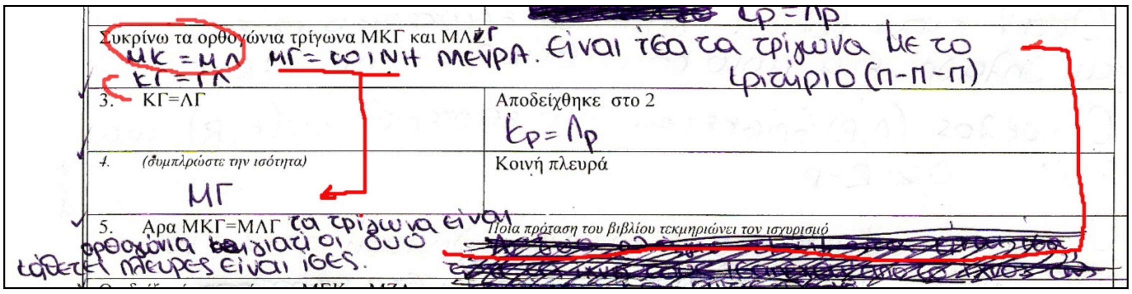
Συζήτηση για το 3ο Ερώτημα 3.

Το ερώτημα 3 αποδείχτηκε αρκετά δύσκολο για τους μαθητές, αφού μόνο 9 από τους 67 κατάφεραν να παρακολουθήσουν την ροή της απόδειξης μέχρι το τέλος. Σχεδόν οι μισοί μαθητές περίπου, 33 άτομα, απαντούν αποσπασματικά σε κάποια βήματα-υποερωτήματα και 17 διατυπώνουν αυθαίρετους ή παράλογους συλλογισμούς ασύνδετους με την αποδεικτική ροή, στηριζόμενοι κυρίως στο σχήμα. Σταδιακά, ξεκινώντας από τους 8 που δεν διαπραγματεύθηκαν κανένα υποερώτημα, εγκαταλείπουν τη προσπάθεια 34 άτομα.

Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την απόδειξη σαν μια συνεκτική αλληλουχία ισχυρισμών που οδηγεί στην απόδειξη του ζητούμενου. Το ίδιο διαπιστώνουν οι Inglis και Alcock, (2012) κρίνοντας από την καταγραφή των κινήσεων των ματιών φοιτητών και πτυχιούχων κατά το διάβασμα αποδείξεων. Οι αποτελεσματικοί αναγνώστες μεταφέρανε το βλέμμα τους πάνω-κάτω ανάμεσα στις γραμμές της απόδειξης ενώ οι λιγότερο αποτελεσματικοί αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο εστιάζοντας σε επιφανειακά στοιχεία της απόδειξης.

Στην παρούσα έρευνα ενδείξεις ότι οι μαθητές παρακολουθούν τα βήματα της απόδειξης αποσπασματικά είναι:

Πρώτον, από τη θέση που συμπληρώνονται οι απαντήσεις, διαπιστώνεται ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν κάθε βήμα σαν να είναι αποκομμένο από τα άλλα. Σε πολλές περιπτώσεις καταγράφουν την τεκμηρίωση τους για την ισότητα δύο τριγώνων δίπλα στην επεξηγηματική πρόταση που λειτουργεί σαν τίτλος για το επόμενο τμήμα της απόδειξης, και επαναλαμβάνουν τα ίδια παρακάτω. Δεν είναι σαφές αν αντιλαμβάνονται την επανάληψη αργότερα, όμως αυτό είναι μια ένδειξη ότι δεν έγιναν προσπάθειες να επισημανθούν τα κύρια σημεία-βήματα της απόδειξης. Στην εικόνα 6 παρουσιάζεται ένα χαρακτηριστικό και συχνό δείγμα.

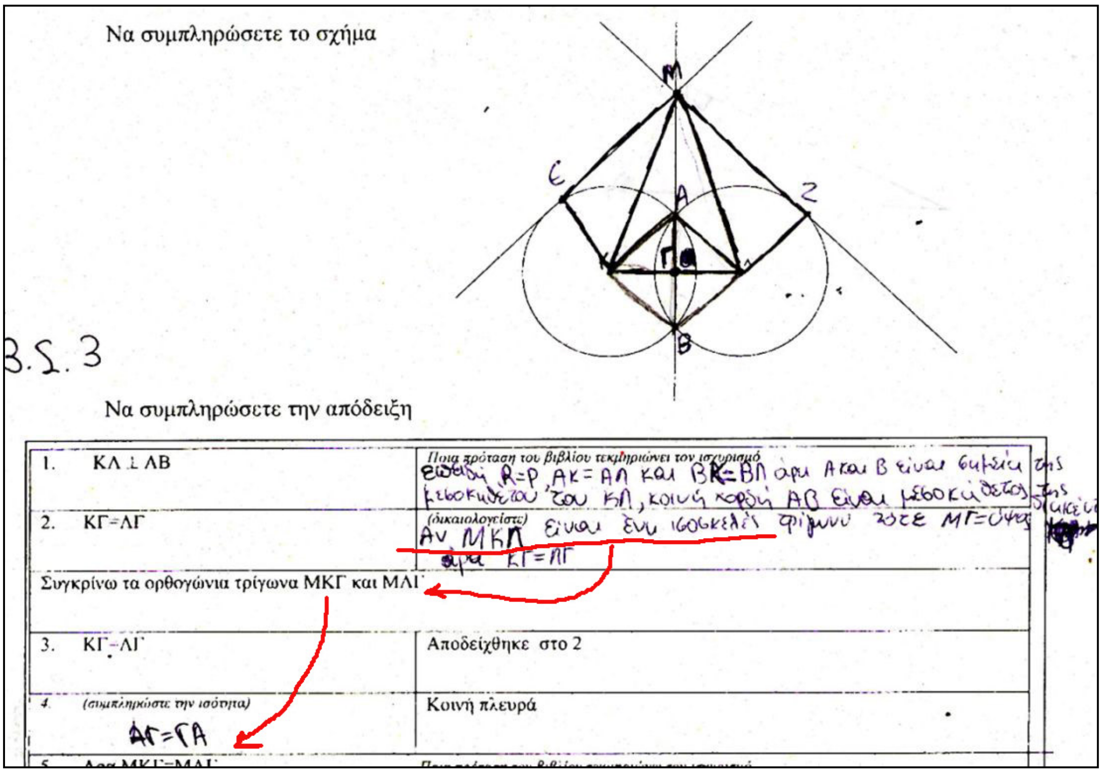


Εικόνα 6.

Δεύτερη ένδειξη ότι κάθε βήμα αντιμετωπίζεται όχι ως η συνέχεια των προηγούμενων συλλογισμών αλλά αποκομμένο από αυτούς φαίνεται και από το γεγονός ότι 17 μαθητές (25%) διατυπώνουν αυθαίρετους ισχυρισμούς επειδή έτσι φαίνεται να ισχύει στο σχήμα, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη το κείμενο της απόδειξης στο σύνολό του. (Εικ. 7)

Τρίτον, δεν γίνονται προσπάθειες να χρησιμοποιηθούν προτάσεις που τεκμηριώνονται σε προηγούμενα βήματα της απόδειξης στην τεκμηρίωση των νέων προτάσεων Από τους 19 μαθητές που διαπραγματεύτηκαν το 6ο βήμα ανεπιτυχώς, οι 13 δεν χρησιμοποιούν το συμπέρασμα του προηγούμενου βήματος της απόδειξης .

Τέταρτο και πιο χαρακτηριστικό είναι ότι, στο βήμα 6 της απόδειξης χρησιμοποιούν το ζητούμενο της άσκησης, ότι τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα, σαν δεδομένο για να αποδείξουν την ισότητα τριγώνων που θα τους οδηγήσει στην απόδειξη του τελικού συμπεράσματος. Στο αμέσως επόμενο βήμα που είναι και το τελικό συμπέρασμα της άσκησης, χρησιμοποιούν την ισότητα τριγώνων του προηγούμενου βήματος για να τεκμηριώσουν ότι τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα. Διατυπώνουν δηλαδή την ίδια πρόταση και στις υποθέσεις και στο συμπέρασμα χωρίς να αντιλαμβάνονται την αντίφαση.



Εικόνα 7

Η απόδειξη δεν γίνεται αντιληπτή σαν ένα συνεκτικό σύνολο βημάτων που έχει ένα συγκεκριμένο στόχο. Κατά την διαπραγμάτευση της άσκησης, οι μαθητές καταλήγουν (λανθασμένα) ότι το τελικό ζητούμενο αποδεικνύεται ανεξάρτητα από τους συλλογισμούς που έχουν προηγηθεί χωρίς αυτό να ενεργοποιεί διαδικασίες αυτορρύθμισης. Η παρατήρηση αυτή εκτός του ότι αποτελεί μια ένδειξη αδυναμίας παρακολούθησης της ροής της απόδειξης, είναι επίσης μια ισχυρή ένδειξη ότι δεν έγιναν προσπάθειες να διακριθεί η υπόθεση από τα συμπεράσματα της άσκησης.

Μια αδυναμία του εργαλείου της έρευνας είναι ότι δεν μπορεί να διαγνώσει με σαφήνεια αν και ποιες γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές στη προσπάθειά τους να κατανοήσουν το κείμενο της απόδειξης. Στην βιβλιογραφία καταγράφονται οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν συχνά οι αποδοτικοί αναγνώστες των αποδείξεων και καθόλου η λιγότερο συχνά οι αδύναμοι αναγνώστες.

Από την παρούσα έρευνα διαφαίνεται ότι οι μαθητές ανατρέχουν στο σχήμα για να βελτιώσουν την κατανόηση, το συμπληρώνουν με στοιχεία που χρησιμοποιούνται στην αποδεικτική διαδικασία και ονομάζουν τα στοιχεία του σωστά. Δεν σημειώνουν με σαφήνεια τις υποθέσεις και το συμπέρασμα της άσκησης πριν ξεκινήσουν την ανάγνωση της απόδειξης.

Β φάση της έρευνας.

Κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της πρώτης φάσης της έρευνας, δημιουργήθηκαν νέα ερωτήματα που αφορούσαν κυρίως την ερμηνεία τους. Γιατί για παράδειγμα πολλοί μαθητές σχεδιάζουν στο ερώτημα 1 περισσότερα στοιχεία από τα ζητούμενα; Με ποιο τρόπο χρησιμοποιούν το βιβλίο κατά την διαπραγμάτευση του ερωτήματος 2; Γιατί δεν ολοκληρώνουν την απόδειξη του ερωτήματος 3; Αντιλαμβάνονται ή όχι ότι χρησιμοποιούν συμπεράσματα ως υποθέσεις. Προκειμένου να ανιχνευθούν οι απαντήσεις σε τέτοιου είδους θεωρήματα, σχεδιάστηκε το ποιοτικό μέλος της έρευνας κατά το οποίο 3 μαθήτριες κλίθηκαν να διαπραγματευτούν «φωναχτά» το ίδιο φυλλάδιο. Η οδηγία ήταν να συζητήσουν μεταξύ τους προκειμένου να καταλήξουν στον σωστό κατά την γνώμη τους τρόπο διαπραγμάτευσης. Η χρήση των πρωτοκόλλων συζήτησης στη προσπάθεια να διερευνηθούν ο τρόπος με τον οποίο κατανοείται το κείμενο και οι στρατηγικές ανάγνωσης που υιοθετεί ο αναγνώστης έχει υιοθετηθεί από ερευνητές όπως οι Magliano, Trabasso & Graesser, (1999; Magliano & Millis, (2003); Trabasso, Magliano & Graesser (1996); Österholm, (2003); McNamara, (2004); McNamara, Boonthum, Levinstein & Millis, (2007). Στα πρωτόκολλα καταγράφονται είτε συζητήσεις μεταξύ δύο αναγνωστών είτε επεξηγήσεις που δίνονται στους ερευνητές.

Οι συζητήσεις των μαθητριών περιέχουν ανολοκλήρωτες, χωρίς γραμματική συνέπεια φράσεις σε φυσικό λόγο. Κατά την ανάλυση έγινε προσπάθεια να ανιχνευτούν χαρακτηριστικά που μπορεί να είναι δείκτες της ύπαρξης η μη δεξιοτήτων κατανόησης και της χρήσης ή όχι συγκεκριμένων στρατηγικών ανάγνωσης.

Συμμετέχοντες

Η δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε την επόμενη σχολική χρονιά από εκείνη που πραγματοποιήθηκε η πρώτη φάση. Έλαβαν μέρος τρείς μαθήτριες της Β Λυκείου, οι οποίες δεν είχαν λάβει μέρος στην πρώτη φάση. Και οι τρεις μαθήτριες έχουν θέσει υψηλούς στόχους όσον αφορά την εκπαίδευση τους, αφού προετοιμάζονται ήδη από τη Β λυκείου για τις πανελλήνιες εξετάσεις με σκοπό την εισαγωγή τους σε ΑΕΙ. Στις αποφάσεις τους για την σχολή που επιθυμούν να σπουδάσουν εκτός από τα προσωπικά τους ενδιαφέροντα, σημαντικό ρόλο παίζει η αξιολόγηση των δυνατοτήτων τους και η πρόβλεψη για την βαθμολογία τους στις εισαγωγικές εξετάσεις. Η Βασιλική είναι άριστη μαθήτρια, προβιβάστηκε στην Β λυκείου με γενικό βαθμό πάνω από 19 και θέλει να εισαχθεί σε ιατρική σχολή. Δηλώνει ότι δεν θα διαγωνισθεί στα μαθηματικά γιατί «*δεν μπορεί να είναι σίγουρη ότι θα γράψει άριστα*». Η Γωγώ είναι επιμελής μαθήτρια της θεωρητικής κατεύθυνσης, με άριστη απόδοση στα θεωρητικά μαθήματα. Από την Γ γυμνασίου η αποδόσεις της στα μαθηματικά φθίνουν και κάποιες φορές παρά το συστηματικό διάβασμα και τη βοήθεια στο σπίτι, «*κατάφερε μόλις να γράψει τη βάση*». Και αυτή, αν και ενδιαφέρεται και για οικονομικές σχολές θα αποφύγει στις εισαγωγικές εξετάσεις στα μαθηματικά γιατί «*με αυτά δεν ξέρεις ποτέ τι σου γίνεται*». Τέλος η Άννα, μαθήτρια της τεχνολογικής κατεύθυνσης, αφιερώνει αρκετές ώρες στο διάβασμα των μαθηματικών τόσο για το σχολείο όσο και για το φροντιστήριο προετοιμασίας για τις εισαγωγικές εξετάσεις με πολύ καλά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τις μέχρι τώρα επιδόσεις της, η εισαγωγή της σε μια από τις σχολές του φυσικομαθηματικού αποτελεί εφικτό στόχο, αν και δεν εκφράζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη σχολή των Μαθηματικών. Η Άννα αντίθετα από τις άλλες δύο, θεωρεί ότι πιο ασφαλές για τις εξετάσεις είναι το μάθημα των μαθηματικών γιατί «αν έχεις καταλάβει πως λύνονται οι ασκήσεις δεν χρειάζεται να θυμάσαι κατά λέξη τι λέει το βιβλίο».

Οι τρείς μαθήτριες επιλέχτηκαν γιατί είναι και οι τρείς πολύ επιμελείς, αφιερώνουν πολύ χρόνο στο διάβασμα και εκ των αποτελεσμάτων (επιτυχία, βαθμός προαγωγής) είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι έχουν αναπτύξει δεξιότητες που τους επιτρέπουν να μπορούν μάθουν διαβάζοντας.

Διαδικασία

Η έρευνα έγινε στο σπίτι της ερευνήτριας, η όλη διαδικασία καταγράφηκε με κάμερα, και μαγνητόφωνο επικουρικά, ενώ η ερευνήτρια ήταν παρούσα χωρίς να συμμετέχει και κρατούσε σημειώσεις. Έγινε προσπάθεια η κάμερα να καταγράψει τις κινήσεις των μαθητριών σε σχέση με τη χρήση του βιβλίου. Η διαδικασία διαπραγμάτευσης των 3 ερωτημάτων κράτησε 48 λεπτά. Οι μαθήτριες είχαν ενημερωθεί ότι παίρνουν μέρος σε έρευνα για την χρήση και κατανόηση του βιβλίου της γεωμετρίας, και για το λόγο αυτό τους ζητήθηκε να «σκέφτονται φωναχτά» δηλαδή να συζητούν μεταξύ τους πριν απαντήσουν στα ερωτήματα του φυλλαδίου.

Στο τέλος οι μαθήτριες συζήτησαν με την ερευνήτρια για την εμπειρία τους αυτή και για τον τρόπο που διαβάζουν μαθηματικά. Η συνέντευξη καταγράφηκε με την κάμερα και το μαγνητόφωνο. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης της δίνονται ξεχωριστά στο παράρτημα.

Αποτελέσματα

Κάθε μία από τις 3 μαθήτριες παρέδωσε ένα φυλλάδιο με τις απαντήσεις της στα 3 ερωτήματα του εργαλείου της έρευνας, όπως τις διαμόρφωσε κατόπιν συζήτησης και συνεργασίας με τις άλλες δύο. Όπως ήταν αναμενόμενο οι απαντήσεις και των 3 συγκλίνουν και διαφέρουν μόνο στον τρόπο διατύπωσης ή παρουσίασης (πχ λεκτικά ή συμβολικά).

Στο πρώτο ερώτημα, όσον αφορά το σχήμα οι απαντήσεις εμπίπτουν στους κωδικούς (ΕΣΧ) «δεν έχουν σχεδιαστεί στοιχεία όπως η διάκεντρος ή η χορδή» και (ΕΣΗ) «ελλιπής σήμανση, σημειώνονται κανένα ή μερικά μόνο από τα συμπεράσματα». Τα συμπεράσματα του πορίσματος διατυπώνονται ελλιπώς και σε συμβολική μορφή. Μόνο η Άννα, εκτός της προσπάθειας να διατυπώσει τις προτάσεις του συμπεράσματος με ισότητες στοιχείων του σχήματος, παραθέτει και αυτούσιο το κείμενο του πορίσματος που αντιστοιχεί στο συμπέρασμα.

Το ερώτημα 2 απαντάται πλήρως (κωδ. ΠΠ: «πλήρης περιγραφή με αναφορά στις σχέσεις διακέντρου-ακτίνων») και με συμβολικό τρόπο (κωδ. ΣΓ: «σχέσεις περιγράφονται συμβολικά») από τις 2 μαθήτριες και κάπως επιπόλαια από την Γωγώ αφού παραλείπει κάποια σχήματα και στοιχεία.

Τέλος κατά την διαπραγμάτευση της απόδειξης του 3^{ου} ερωτήματος, και οι 3 συμπληρώνουν σωστά τα υποερωτήματα 1,2,4, και 5. Οι απαντήσεις εμπίπτουν στον κωδικό ΑΣ: «γίνεται προσπάθεια να απαντηθούν αποσπασματικά κάποια ερωτήματα, η τεκμηρίωση βασίζεται κυρίως στο σχήμα, χρησιμοποιούνται σαν υπόθεση τα ζητούμενα».

Τα σημαντικά συμπεράσματα όμως προκύπτουν από την ανάλυση των συζητήσεων που διαμείφθηκαν μεταξύ των τριών μαθητριών, από τις οποίες φαίνονται οι στρατηγικές ανάγνωσης που χρησιμοποίησαν για την διαπραγμάτευση των ερωτήσεων, καθώς και οι απόψεις τους για το διάβασμα των μαθηματικών και τη χρήση του βιβλίου όπως αποτυπώνονται στη συνέντευξη με την ερευνήτρια.

Αποτελέσματα 1ου ερωτήματος

Όπως φάνηκε από την παρακολούθηση της διαπραγμάτευσης του ερωτήματος αυτού στην Β φάση της έρευνας, οι μαθήτριες δεν έκαναν καμία προσπάθεια να «κατασκευάσουν»* το σχήμα. Αντίθετα, πολύ γρήγορα αφότου διάβασαν το ερώτημα αποφάσισαν χωρίς πολύ σκέψη, ότι ένα από τα σχήματα που δίνονταν στην ίδια σελίδα του βιβλίου με το υπό διαπραγμάτευση πόρισμα ήταν το ζητούμενο.

2:59	*Ερ.*	*Ναι, ξεκινήστε από το 1*
3:15	*Άννα*	*Το σχήμα είναι αυτό που είναι στο βιβλίο;*
3:16	*Βάσω*	*Ναι όντως!*
	Ερ.	*Από τώρα δεν μιλάω γιατί θα χαλάσει το πείραμα*
	Γωγώ	*(χαμογελάει)*
	Άννα	*Ναι αυτό είναι (δείχνει το σχήμα του βιβλίου)*
	Βάσω	*Ναι, ναι*
3:20		*Σιωπηλά σχεδιάζουν κάθε μία το σχήμα*

Η Άννα προέτρεξε προφανώς να θεωρήσει ότι το σχήμα για το πόρισμα δίνεται στο βιβλίο και επιλέγει το σχήμα που γειτνιάζει περισσότερο στη λεκτική διατύπωση. Η απόφασή της, ίσως γιατί από την ομάδα θεωρείται ως έμπειρη στα μαθηματικά, έγινε αμέσως δεκτή από τις άλλες δύο χωρίς προβληματισμό. Οι

* ο όρος είναι σε εισαγωγικά γιατί δεν αναφέρεται σε γεωμετρική κατασκευή

μαθήτριες επέλεξαν το σχήμα στο οποίο δεν σημειώνεται η χορδή, με συνέπεια να μην μπορούν να σημειώσουν το συμπέρασμα του πορίσματος σε αυτό.

Η Άννα, παραθέτει και την λεκτική διατύπωση του συμπεράσματος στην απάντησή της. Από την χαμηλόφωνη συζήτηση μεταξύ τους μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αντιλαμβάνονται την πρόταση ως υποθετική και ξεχωρίζουν την υπόθεση από το συμπέρασμα. Το σχήμα όμως *αποτελεί μια ξεχωριστή από τη λεκτική διατύπωση και αυτούσια οντότητα*. Δεν γίνεται προσπάθεια να συμπληρωθεί φέροντας την χορδή που είναι απαραίτητη προκειμένου να σημειωθούν τα συμπεράσματα είτε στο σχήμα, είτε συμβολικά σαν ισότητες στοιχείων του σχήματος. Σαν αποτέλεσμα η φράση της Βάσως μένει μετέωρη

«PO είναι μεσοκάθετος της… ».

Αντίστροφα, και οι τρείς σημειώνουν την ισότητα των εφαπτόμενων τμημάτων που αποτελεί προφανή πληροφορία αντλούμενη από το σχήμα (και μόνο από αυτό), χωρίς να εξετάζουν αν αποτελεί πληροφορία αντλούμενη και από το κείμενο.

Το πρωτοτυπικό σχήμα της διχοτόμου γωνίας ίσως λειτούργησε και στην περίπτωση των μαθητριών στην Β φάση της έρευνας σαν εμπόδιο στην αναγνώριση της διχοτόμου της αμβλείας γωνίας. Η Άννα αγνοεί αυτή τη πληροφορία εντελώς, η Γεωργία σημειώνει τις γωνίες στο σχήμα αλλά δεν διατυπώνει την ισότητα και μόνο η Βάσω σημειώνει και την ισότητα αυτών των γωνιών μεταφράζοντας πλήρως τη λεκτική διατύπωση του πορίσματος σε συμβολική.

Όταν ζητήθηκε από την ερευνήτρια, να αξιολογήσουν την ορθότητα της απάντησης τους οι τρεις μαθήτριες απάντησαν ότι είναι σίγουρες έως πολύ σίγουρες.

47:03	*Ερ.*	*Θέλω να γυρίστε πίσω στα χαρτιά σας και να βαθμολογήσετε τη σιγουριά. Πόσο σίγουρες είστε ότι απαντήσατε σωστά. Από 1 καθόλου σίγουρη ως 5 απολύτως σίγουρη* *(Σκέφτονται και σημειώνουν)*
48:24	*Ερ*	*Άννα γιατί έβαλες αυτό το βαθμό ότι είσαι 3 σίγουρη*

	Άννα	*Γιατί ξέρω ότι έγραψα σωστά τη σχέση, δηλαδή έγραψα το συμπέρασμα αλλά δεν ξέρω ότι είναι σωστά ότι…*
	Ερ	*Ξέρεις ποιο είναι το συμπέρασμα αλλά δεν ξέρεις αν έγραψες σωστά το συμπέρασμα;*
	Άννα	*Ναι με τα … ναι με τα γράμματα*
	Ερ	*Εσύ;*
	Βάσω	*Εγώ έβαλα 4. Βασικά νομίζω ότι έκανα σωστά το σχήμα, ε… βρήκα τη σχέση, απλά μου λείπει μία, δεν ξέρω πώς να τη γράψω*
	Ερ	*Την ξέρεις την σχέση αλλά δεν ξέρεις πώς να την εκφράσεις*
	Γωγώ	*Και γω δεν είμαι σίγουρη για το συμπέρασμα*
	Ερ	*Δεν ξέρεις ποιο είναι το συμπέρασμα ή δεν ξέρεις πώς να πεις το συμπέρασμα*
49:28	*Γωγώ*	*Πώς να το πω*
	Ερ	*Το γεγονός ότι είχατε το βιβλίο ανοιχτό μπροστά σας αύξησε τη σιγουριά;*
	Γωγώ	*Ναι*
	Βάσω & Άννα	*Ναι, ναι*

Από την συζήτηση προκύπτει ότι και οι τρεις προβληματίζονται για το γεγονός ότι δεν κατάφεραν να σημειώσουν στο σχήμα κάποια από τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην λεκτική διατύπωση του πορίσματος. Αναγνωρίζουν δηλαδή το «ελάττωμα» στην κατανόηση του κειμένου, χωρίς να διαθέτουν τα κατάλληλα εργαλεία για να το διορθώσουν. Οι μαθήτριες δεν φαίνεται να εφαρμόζουν τις στρατηγικές ανάγνωσης ορισμών και θεωρημάτων που αναφέρονται στο θεωρητικό μέρος.

Αποτελέσματα 2ου ερωτήματος

Στην Β φάση της έρευνας, οι μαθήτριες αρχικά χρειάστηκαν διευκρίνιση για το τι ζητάει η άσκηση να κάνουν. Η διευκρίνιση που δόθηκε από την ερευνήτρια ήταν ότι πρέπει να γράψουν τι πληροφορία κατά την γνώμη τους ήθελε ο συγγραφέας να τους μεταφέρει με το σχήμα αυτό. Συνέχισαν εντοπίζοντας στο βιβλίο το κείμενο που αντιστοιχεί στο σχήμα από τις κοινές αναφορές, και κατόπιν αφιέρωσαν αρκετό χρόνο μελετώντας εναλλάξ μια το σχήμα και μια το κείμενο για να καταλάβουν και να παρουσιάσουν την πληροφορία με τον τρόπο που έγινε αντιληπτή σε αυτές. Αναρωτήθηκαν ποια είναι η κύρια πληροφορία και συζήτησαν για τις διαφορετικές περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα. Αναγνώρισαν τρεις γενικές κατηγορίες ανάλογα με τον αριθμό των κοινών σημείων, κατέληξαν ότι είναι σημαντική η αναφορά στα μήκη διακέντρου και ακτινών και αποφάσισαν τον τρόπο που θα παρουσιάσουν την λύση.

Χρησιμοποίησαν αρκετές τεχνικές ανάγνωσης και κατανόησης κειμένου, όπως η αντιπαραβολή διαφορετικών τμημάτων του κειμένου, η εξαγωγή του κύριου νοήματος, η εξαγωγή περίληψης, η αναδιατύπωση.

Παρότι διαπραγματεύθηκαν με απόλυτη επιτυχία το δεύτερο ερώτημα του φυλλαδίου της έρευνας, η βεβαιότητα τους για την απόδοση τους δεν ήταν μεγαλύτερη από αυτήν του πρώτου. Στην ερώτηση αν είναι σίγουρες για τις απαντήσεις τους, και οι τρείς βαθμολόγησαν με 3 ή 4 και αυτή τη φορά τη βεβαιότητά τους ότι είχαν διαπραγματευθεί σωστά.

49:38	*Ερ*	*Θα ξεκινήσω τώρα με τη Γωγώ. Τι βαθμό έβαλες (στη $2^{η}$);*
	Γωγώ	*Τρία*
	Ερ	*Τρία;*
	Γωγώ	*Γιατί δεν είμαι σίγουρη άμα απάντησα σε αυτά που ζήταγε ακριβώς*
	Ερ	*Αν απάντησες σε αυτό που σου ζήταγε;*
	Γωγώ	*Ναι*
	Ερ	*Είχες καταλάβει αυτό που ζήταγε η ερώτηση;*
	Γωγώ	*Νομίζω πως κατάλαβα αλλά νομίζω πως έβαλα παραπάνω. Εννοώ μπορεί να μην έπρεπε να βάλω τα σχήματα*
50:03	*Ερ*	*Εσύ Βάσω, τι βαθμό σιγουριάς έβαλες;*
	Βάσω	*(Δείχνει)*
	Ερ	*Τέσσερα*
	Βάσω	*Νομίζω ότι τα έγραψα σωστά. Απλά έχω κάποιες αμφιβολίες για τα σχήματα*
	Ερ	*Ότι δεν έκανες καλά τα σχήματα;*
	Βάσω	*Ναι*
	Ερ	*Όταν είδες το την ερώτηση, και πήγες στο σχέδιο (του βιβλίου), σου έδωσε μια ιδέα το σχέδιο τι είναι ή πήγες και στο κείμενο, στα λόγια ας πούμε;*
	Βάσω	*Στα λόγια*

	Ερ	*Από τα λόγια του σχεδίου βγήκε το νόημα;*
	Βάσω	*Ναι*
50:43	*Ερ*	*Τώρα θα ρωτήσω εσένα (Άννα). Τι βαθμό έβαλες;*
	Άννα	*Τέσσερα. Δεν ξέρω αν τα εξήγησα σωστά τα σχήματα.*
	Ερ	*Δηλαδή για τη διατύπωσή σου έχεις αμφιβολίες ή για το τι λες;*
	Άννα	*Το τι λέω πιστεύω ότι είναι σωστό γιατί ισχύουν σε σχέση με τα σχήματα που έχω κάνει όλα. Τα έχω εξηγήσει σωστά. Τα έγραψα και με διαφορετικό τρόπο δηλαδή γράψαμε με λόγια τις σχέσεις…. (…)*
51:23	*Ερ*	*Όταν πρωτοκοιτάξατε το σχήμα, τι ήταν αυτό που με την πρώτη ματιά σας φάνηκε πιο σημαντικό στοιχείο του σχήματος.*
	Άννα	*Τι δηλαδή τους τύπους που βγάζουμε;*
	Ερ	*Όχι, τι κέντρισε την προσοχή σου περισσότερο, τι θεώρησες ότι είναι το σημείο κλειδί.*
	Άννα	*Εεεε η θέση των κύκλων (δείχνει με τα χέρια)*
	Ερ	*Η θέση των κύκλων που αλλάζει;*
	Άννα	*Μμμμ*
	Ερ	*Εσένα;*
	Άννα	*Εμένα νομίζω είναι η διάκεντρος που αλλάζει… δηλαδή η απόσταση*
	Ερ	*Η απόσταση των κέντρων;;*
	Άννα	*Ναι*
	Ερ	*Εσένα Γωγώ;*
	Γωγώ	*Άμα εφάπτονται…. Πόσα σημεία….*
52:27	*Ερ*	*Τα γράμματα που σημειώνονται στο σχέδιο, σας φάνηκαν σημαντικά, ή τα αγνοήσατε για λίγο*
	Βάσω	*Ήταν γιατί μας βοήθησαν να εξηγήσουμε τι βλέπουμε*
	Ερ	*Αυτά σας βοήθησαν να συνδέσετε με το κείμενο; Στην αρχή σας φάνηκαν σημαντικά;*
	Βάσω	*Τα γράμματα όχι… γιατί το βλέπαμε ότι ήταν η διάκεντρος*

Και σε αυτό το ερώτημα οι μαθήτριες βαθμολογούν την βεβαιότητα τους με ένα «ουδέτερο» 3 παρόλο που από τα λόγια τους φαίνεται να είναι απόλυτα σίγουρες για την ορθότητα των απαντήσεών τους.

Αποτελέσματα 3ου ερωτήματος

Κατά τη διαπραγμάτευση του ερωτήματος 3 του εργαλείου, οι ομάδα των τριών μαθητριών παραδίνει τα ηνία στην Άννα, η οποία σιωπηλώς ίσως θεωρήθηκε η πλέον έμπειρη ως μαθήτρια της τεχνολογικής κατεύθυνσης. Η Άννα καθοδηγεί στα βήματα της απόδειξης και είναι εκείνη που επικυρώνει τη ορθότητα της λύσης, ακόμα και διατυπώνοντας τις αμφιβολίες της:

> *«Τέλος πάντων (να το γράψουμε έτσι) ας πάμε παρακάτω και ξαναγυρίζουμε μετά»*

Οι άλλες δύο μαθήτριες, παρόλο που έλαβαν μέρος στη συζήτηση ενεργά και διατύπωσαν με σαφή και ουσιαστικό τρόπο τις αντιρρήσεις και τις προτάσεις τους φαίνεται να μην έχουν εμπιστοσύνη στον εαυτό τους και χρειάζονται την επιβεβαίωση μιας αυθεντίας, στη περίπτωση αυτή μιας πιο έμπειρης κατά τη γνώμη τους μαθήτριας.

Οι μαθήτριες αφιέρωσαν 5 λεπτά στην αντιπαραβολή μεταξύ του σχήματος και της εκφώνησης ώστε να βεβαιωθούν ότι το σχήμα και η σήμανση ανταποκρίνεται στα δεδομένα της εκφώνησης.

19:25		*(Ξεκινούν την ανάγνωση … ασχολούνται με το σχήμα Διαβάζουν χαμηλόφωνα)*
22:02	*Γωγώ*	*Ποιος είναι ο ΚΛ αα! ναι*
	Βασω	*ΑΒ, κάτσε να δούμε*
		(διαβάζουν την εκφώνηση)
22:18	*Γωγώ*	*Η χορδή….. εε αυτή*
	Βάσω	*Ναι ποια είναι η χορδή;….*
	Άννα	*Μήπως είναι αυτή;*
	Γωγώ	*Ναι αυτή …. (Μιλάνε χαμηλόφωνα)*
		(ξαναδιαβάζουν την εκφώνηση και κάνουν υποθέσεις, ακούγεται πολλές φορές το ΑΒ)
22 :50	*Βάσω*	*Ναι ΑΒ και αυτή θα είναι … να το γράψουμε;*
	Άννα	*Ναι, γιατί κοιτάξτε τι λέει… (το βήμα 1 στο κείμενο της απόδειξης) η ΚΛ είναι κάθετη με την ΑΒ άρα αυτή είναι η ΑΒ*
	Γωγώ	*Ναι γιατί το Μ είναι στη προέκταση*
		(Συνεχίζουν την αντιπαραβολή πληροφορίας της εκφώνησης με στοιχεία του σχήματος μέχρι και το συμπέρασμα)
24:10	*Άννα*	*Ε υπάρχει κάποιο θεώρημα; …*
		(Αρχίζουν να ξεφυλλίζουν το βιβλίο. Δείχνουν η μια στην άλλη θεωρήματα και συζητούν)

Αφού ολοκλήρωσαν το διάβασμα της εκφώνησης και τη σήμανση του σχήματος, χρησιμοποίησαν το βιβλίο της γεωμετρίας για να θυμηθούν τι είχαν μάθει για το θέμα της εφαπτομένης και να το συνδέσουν με την άσκηση. Εντόπισαν στο βιβλίο θεωρήματα και προτάσεις των οποίων το σχήμα ήταν παρόμοιο με της άσκησης και συζήτησαν για κάθε ένα αν ήταν σχετικό ή όχι. Οι μαθήτριες αντιμετώπισαν διαφορετικά το κείμενο της εκφώνησης της άσκησης από το κείμενο του πορίσματος. Στο διάβασμα της εκφώνησης της άσκησης η τεχνική της απομνημόνευσης εγκαταλείπεται, γίνεται προσπάθεια κατ΄αρχήν να ενεργοποιηθεί η υπάρχουσα γνώση και προτιμούνται ίσως αυτόματα τεχνικές επίλυσης προβλήματος.

Για την απάντηση του βήματος 1 επιλέχτηκε ένα από τα θεωρήματα που είχαν προηγουμένως συζητήσει. Η επιλογή βασίστηκε στο σχήμα, και στον εντοπισμό κοινών στοιχείων ή λέξεων μεταξύ του θεωρήματος και της εκφώνησης.

Στο βήμα 2 επέλεξαν με τον ίδιο τρόπο ένα κατάλληλο παράδειγμα από το βιβλίο, επανήλθαν πίσω στην εκφώνηση για να επιβεβαιώσουν την κατανόηση των δεδομένων. Έδειξαν να είναι βέβαιες για το τι συνιστά τεκμηρίωση μιας πρότασης, έλεγξαν τα θεωρήματα και πορίσματα που θεώρησαν ότι μπορούν να δικαιολογήσουν την πρόταση χρησιμοποιώντας λέξεις-κλειδιά, αναρωτήθηκαν για την συνάφειά τους με την υπό απόδειξη πρόταση και εξέτασαν αν ισχύουν οι προϋποθέσεις.

26:00	*Άννα*	*(διαβάζει το βήμα 2) Τώρα ΚΛ=ΛΓ*
	Βάσω	*Αυτό δεν φαίνεται από αυτή τη σχέση; Μήπως είναι από δω; (δείχνει ένα θεώρημα στο σχολικό βιβλίο)*
	Άννα	*Μμμ νομίζω πως…*
	Γωγώ	*Είναι οι ακτίνες που ήτανε….*
	Βάσω	*Παιδιά, το Γ!...*
	Άννα	*Όχι γιατί δω πέρα δεν είναι (οι ακτίνες)...*
	Γωγώ	*Αφού ακουμπάνε!... (σημ. ερευνήτριας το άθροισμα των ακτίνων είναι μικρότερο της διακέντρου)*
	Άννα	*Ναι ακουμπάνε*
	Γωγώ	*Αυτό είναι το Γ!*
		(Ψάχνουν στο βιβλίο και συζητούν επικεντρώνουν τη συζήτηση στο σημείο Γ)

26:25	*Άννα*	*(διαβάζει από το βιβλίο στο κεφάλαιο σχετικές θέσεις δύο κύκλων σελ 64) οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία αν και μόνο αν…* *(Διαβάζουν μαζί)*
26:32	*Βάσω*	*Ναι αυτό είναι (δείχνει στο σχήμα 64 του βιβλίου δύο τεμνόμενους κύκλους που έχουν άνισες ακτίνες)*
	Άννα	*Αυτό όμως…*
	Γωγώ	*Καλέ … όχι το 64*
		(ξεφυλλίζουν το βιβλίο)
26:57	*Άννα*	*Α νάτο!*
	Γωγώ	*ναι το 65 είναι (αναφέρεται στο σχήμα του βιβλίου)*
	Άννα	*(διαβάζει) στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι είναι ίσοι δηλαδή έχουν Ρ=ρ….* *(Διαβάζουν την παρατήρηση του βιβλίου που αντιστοιχεί στο σχήμα 65 και συζητούν τον τρόπο που τεκμηριώνεται στο βιβλίο. Μετά ελέγχουν αν το ίδιο σκεπτικό μπορεί να εφαρμοστεί και στην άσκηση.)*
28:12	*Γωγώ*	*Είναι ίσοι οι κύκλοι;*
		(Έχουν συμφωνήσει ότι στο σχήμα φαίνονται ίσες οι ακτίνες, αλλά ανατρέχουν στην εκφώνηση)
	Άννα	*Ναι μωρέ αφού λέει κύκλοι (Κ,ρ) (,Λ,ρ)* *(Συνεχίζουν την διαπραγμάτευση και αποφασίζουν πως θα απαντήσουν. Γράφουν την απάντηση κάθε μία μόνη της)*
29:40		*Ολοκληρώνουν το βήμα 2*

Οι μαθήτριες δεν αφιέρωσαν χρόνο για να διατρέξουν τα βήματα της απόδειξης ώστε να έχουν ένα γενικό πλάνο της πριν ξεκινήσουν την διαπραγμάτευση κάθε βήματος χωριστά. Μόλις διάβασαν την πρόταση «*Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα…*» η οποία λειτουργούσε στην απόδειξη σαν επεξηγηματικός τίτλος για τα επόμενα βήματα (3,4,5) της απόδειξης, οι μαθήτριες αμέσως άρχισαν να συγκρίνουν στοιχεία των τριγώνων και έγραψαν την απόδειξη στο κενό μεταξύ των γραμμών. Μετά συνέχισαν με τα βήματα της απόδειξης…

Άννα	*…. Αρα (τα τρίγωνα) είναι ίσα.*
	(βημα 3 της απόδειξης) Τώρα ΚΓ=ΛΓ
Βάσω	*Τι, αυτό το ξαναζητάει;*
Άννα	*Α! ναι λέει από το 2*
Γωγώ	*(βήμα 4 της απόδειξης) Κοινή πλευρά; Τι λέει*

μπερδεύτηκα!

Άννα *Ναι να το βάλουμε σαν ισότητα*

Γωγώ *(βήμα 5 της απόδειξης) ΜΚΓ=ΜΛΓ Α! καλέ εμείς το βάλαμε αλλού!*

Στην διαπραγμάτευση του βήματος 6, οι τρεις μαθήτριες της Β φάσης της έρευνας κάνουν το ίδιο λάθος με τους περισσότερους μαθητές της Α φάσης. Στην τεκμηρίωση της ισότητας δύο τριγώνων που χρειάζονται για να τεκμηριώσουν την ισότητα δύο ευθ. τμημάτων, χρησιμοποιούν την ζητούμενη ισότητα. Παρόλο που διατυπώθηκαν ερωτηματικά:

Αννα *...(για την ισότητα των τριγώνων) θα μας <u>βόλευε</u> να ήταν ίσα τα ΜΕ και ΜΖ*

Βάσω *Αλλά μπορούμε; Εδώ λέει <u>να δείξετε</u> ότι ΜΕ=ΜΖ*

και έγινε μεγάλη συζήτηση μεταξύ τους επί 6 λεπτά, δεν μπόρεσαν να αξιοποιήσουν τις αντιφάσεις για να διορθώσουν το σφάλμα τους. Αντί να επιβεβαιώσουν ότι έχουν σωστά κατανοηθεί οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα, να επιμείνουν πάνω στα δύσκολα σημεία της απόδειξης, να αποσαφηνίσουν πώς αρχίζει και πώς τελειώνει η απόδειξη, αναλώθηκαν στο να διαπιστώσουν αν ήταν έγκυρη η τεκμηρίωσή τους για την ισότητα των ζητουμένων, αν δηλαδή είχαν επιλέξει το σωστό θεώρημα από το βιβλίο. Παρά τις αμφιβολίες που διατυπώθηκαν και για αυτό,

Βάσω *Ναι (διαβάζει από το βιβλίο) τα ΡΑ και ΡΒ λέγονται <u>εφαπτόμενα</u> τμήματα και είναι ίσα*

Γωγώ *Αλλά εδώ είναι <u>ένας</u> κύκλος*

πάλι δεν οδηγήθηκαν στη διόρθωση και αλλαγή της πορείας της απόδειξης. Παρά τις αμφιβολίες οι μαθήτριες ολοκλήρωσαν την απόδειξη χωρίς να ανακεφαλαιώσουν, και χωρίς να κάνουν συζήτηση για την ορθότητα ή την εγκυρότητά της.

Στην ερώτηση της ερευνήτριας για το πόσο βέβαιες είναι για τις απαντήσεις τους οι μαθήτριες βαθμολογούν και αυτή τη φορά με 3 η 4.

Ερ. *Πόσο σιγουριά έχετε για αυτό το θέμα*

Γωγώ *Στο, 3, .. γιατί μπορεί να ήθελε του βιβλίου την απόδειξη*

Ερ. *Δηλαδή;*

Γωγώ *(Κάτι της λέει η Βάσω) Α ! ναι στο 5*

Ερ. *Στο 5 γιατί βρήκατε το σωστό κριτήριο αλλά …(δεν βρήκατε στο βιβλίο το κριτήριο ΠΓΠ)*

Γωγώ *Ότι λύθηκε, λύθηκε από ότι κατάλαβα, απλώς μπορεί να ήθελε με άλλο τρόπο να το γράψουμε*

Βάσω *Και γω νομίζω κάτι στο 5, γι αυτό έβαλα 3 (στη βεβαιότητα), επειδή δεν είμαι σίγουρη. Κατά τα άλλα τα έκανα, αλλά…ε χμμ…*

Ερ. *Σε ποια σημεία έχεις αμφιβολία;*

Βάσω *(σκέφτεται) έχω αμφιβολίες για το 6. Το 5-6 εκεί πέρα που λέει να αποδείξουμε τα τρίγωνα*

Ερ. *Για το κριτήριο;*

Βάσω *Μμμ*

Άννα *Εγώ έχω αμφιβολίες και για το 7*

Ερ. *Γιατί το 7, ποιο ήταν το πρόβλημα;*

Άννα *Γιατί δεν ξέρω αν εξηγήσαμε σωστά… ότι είναι ίσα, είναι…*

Ερ. *Πριν όταν συζήταγες, σε άκουσα που έλεγες ότι το ΜΕ και το ΜΖ δεν πρέπει να το βάλουμε εδώ γιατί μας το ζητάει παρακάτω. Τι εννοούσες;*

Άννα *(Σκέφτεται) …. Ότι έπρεπε να το γράψουμε, <u>έπρεπε</u> να το γράψουμε. Την <u>εξήγηση</u> δεν ξέρω αν έπρεπε να γράψουμε*

Ερ. *Ναι;*

Άννα *Γιατί μετά… το εξηγούμε εδώ πέρα ουσιαστικά (δείχνει στο βήμα 6 την δικαιολόγηση της ισότητας τριγώνων Χαμηλώνει τη φωνή σαν να σκέφτεται δυνατά)*

αλλά το εξηγούμε και δω πέρα…

(δείχνει το βήμα 7 στο συμπέρασμα)

….Δεν ξέρω!

Παρά τις σοβαρές αμφιβολίες που διατυπώθηκαν στη μεταξύ τους συζήτηση κατά τη διαπραγμάτευση της απόδειξης, δεν είναι σε θέση να τις διατυπώσουν σαφώς κατά την αξιολόγηση των απαντήσεών τους. Αναγνωρίζουν ότι δεν είναι σύνηθες κατά την διαπραγμάτευση μιας άσκησης να ζητείται η απόδειξη της ίδιας πρόταση δύο φορές, ενώ δεν κάνουν προσπάθεια να διορθώσουν αυτή την ατέλεια. Δεν συζητούν καθόλου για το πλάνο της απόδειξης, δεν ελέγχουν αν έχουν κατανοήσει σωστά την υπόθεση και τα συμπεράσματα της άσκησης. Το κυριότερο δεν ελέγχουν αν τα βήματα της απόδειξης οδηγούν με έγκυρο τρόπο στην τεκμηρίωση του ζητούμενου.

Χρήση του σχολικού εγχειριδίου

Οι απαντήσεις των μαθητριών της Β φάσης της έρευνας ως προς την χρήση του σχολικού εγχειριδίου της γεωμετρίας και της άλγεβρας, ήταν ομόφωνες χωρίς ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των μαθητριών της θετικής και θεωρητικής κατεύθυνσης.

Και οι τρεις μαθήτριες δήλωσαν ότι όταν προετοιμάζονται για εξετάσεις στα μαθηματικά, «μαθαίνουν απέξω» τη θεωρία και δηλώνουν σίγουρες ότι αυτό είναι το σωστό. Μάλιστα η μαθήτρια της θετικής κατεύθυνσης, δηλώνει ότι προτιμάει να χρησιμοποιεί για τον σκοπό αυτό τις φροντιστηριακές σημειώσεις γιατί δεν περιέχουν «περιττές» πληροφορίες. Το επεξηγηματικό κείμενο θεωρείται περισσότερο σαν «βαρίδι» στο διάβασμα, παρά σαν σκαλωσιά που θα βοηθήσει στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Ερ	*Όταν προετοιμάζεστε για ένα διαγώνισμα στα μαθηματικά, πως διαβάζετε; Διαβάζετε το βιβλίο;*
Γωγώ	*Ε ναι, Από το βιβλίο πρώτα*
Ερ	*Πως διαβάζετε από το βιβλίο*
Γωγώ	*Ε το διαβάζω μια φορά όλο*
Ερ	*Μια φορά μόνο; Όλο;*
Γωγώ	*(γελάει) τρόπος του λέγειν… Ε τα διαβάζω μια φορά όλα, όσα είναι (στην ύλη) ε, και μετά γράφω τα θεωρήματα για να τα θυμάμαι*
Ερ	*Όταν λες όλα, εννοείς όλα-όλα δηλαδή όλη τη σελίδα από την αρχή, τίτλος κείμενο και τα λοιπά;*
Γωγώ	*Εντάξει τα βασικά*
Ερ	*Ποια θεωρείς ότι είναι σημαντικά;*
Γωγώ	*Τη θεωρία, τη σημαντική*
Ερ	*Δηλαδή, για να καταλάβω, από αυτή τη σελίδα (δείχνει μια σελίδα του βιβλίου της γεωμετρίας) τι είναι σημαντικό;*
Γωγώ	*Κυρίως τα μαύρα γράμματα και τα θεωρήματα (δείχνει)*

Ερ *Αυτά που είναι μέσα σε πλαίσιο δηλαδή.*

Γωγώ *Ε καλά άμα δεν θυμάμαι τι είναι το θεώρημα μπορεί να διαβάσω και τα άλλα για να μπω στο νόημα*

Ερ *Εσύ Βάσω;*

Βάσω *Και γω διαβάζω τα θεωρήματα, μετά τα γράφω, για να τα θυμάμαι, και τα σχήματα, ε και μετά κοιτάω τις ασκήσεις που έχουμε κάνει*

Άννα *Εγώ διαβάζω τις σημειώσεις του φροντιστηρίου που έχει όλα τα θεωρήματα και τις αποδείξεις όπως είναι εδώ, ε και μετά κάνω μερικές δύσκολες ασκήσεις που δεν έχω καταλάβει και τις κάνω όσες φορές χρειάζεται*

Ερ *Οπότε σε διευκολύνουν οι σημειώσεις του φροντιστηρίου που δεν έχουν λόγια, μόνο τα θεωρήματα*

Άννα *Ναι ακριβώς αυτό που είναι το σημαντικό*

Οι μαθήτριες στην συνέντευξή τους παραδέχονται ότι δεν μπορούν να μάθουν τα μαθηματικά από το βιβλίο.

Ερ *Αν κάποια φορά χάσετε ένα μάθημα στο σχολείο, πως το αναπληρώνετε; Ας πούμε χάσατε το μάθημα στους λογάριθμους… (σημ. ερευνητή: οι μαθήτριες είχαν αναφέρει νωρίτερα ότι την περίοδο που έγινε η έρευνα, μελετούσαν τους λογαρίθμους στο σχολείο) Μπορείτε να καλύψετε το κενό μόνες σας ή πρέπει να περιμένετε να τα ξαναπεί ο δάσκαλος στο σχολείο ή το φροντιστήριο;*

Άννα *Θα ανοίξω το βιβλίο να δω τι λέει, αλλά άμα δεν το καταλάβω θα ρωτήσω στο φροντιστήριο, όχι στο δάσκαλο*

Ερ *Τι είναι πιο πιθανό: να καταλάβεις ή όχι από το βιβλίο*

Άννα *Εξαρτάται, υπάρχουνε κεφάλαια που είναι μόνο τύποι και τους μαθαίνεις απέξω και μπορώ να το καταλάβω, αν είναι ας πούμε οι λογάριθμοι και τους έχω χάσει στο σχολείο, αποκλείεται να τους καταλάβω.*

Ερ *Από ασκήσεις;*

Άννα *Διαβάζω τις εφαρμογές*

Γωγώ *και γω*

Η αδυναμία να κατανοηθεί το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου, δεν θεωρείται έλλειψη δεξιοτήτων ανάγνωσης του μαθηματικού κειμένου, αλλά όπως και στην περίπτωση της αποτυχίας στις εξετάσεις θεωρείται από τους μαθητές ότι αποτελεί εγγενή ιδιότητα των μαθηματικών.

Ερ	*Φανταστείτε ότι έχετε εξετάσεις και έχετε διαβάσει καλά, δηλαδή έχετε κάνει ότι μπορείτε για αν προετοιμαστείτε όσο καλύτερα γίνεται. Σας έχει τύχει να πάτε στις εξετάσεις σίγουρες ότι θα γράψετε καλά και να τα πάτε χάλια;* *Γέλια και από ας τρεις*
Ερ	*Ρωτάω πρώτα τη Γωγώ που έβαλε τα γέλια*
Γωγώ	*Ναι πολλές φορές*
Ερ	*Είχες διαβάσει καλά;*
Γωγώ	*Ναι αλλά μπορεί να έχω διαβάσει μια άσκηση, και να βάλει μια παρόμοια, λίγο πιο δύσκολη, και να μην μπορώ να αυτοσχεδιάσω και να βρω τη λύση*
Ερ	*Αυτά για ας ασκήσεις, τη θεωρία;*
Γωγώ	*Ε θεωρία όχι, αυτή τη διαβάζεις*
Ερ	*Δεν σου έχει τύχει να μη γράψεις θεωρία ποτέ;*
Γωγώ	*Εεε.. τα σωστά-λάθος μπορεί να μην έχω κάνει σωστά.*
	…
Βάσω	*Ε μια φορά μου έτυχε να μη γράψω και θεωρία, νομίζω μια απόδειξη την είχα μπερδέψει με μια άλλη και με μπέρδεψε…* *…*
Αννα	*Εγώ βασικά βασίζομαι στην ασκήσεις και όχι στη θεωρία, γιατί με τη θεωρία μπορεί να τη γράφω ξανά και ξανά και μετά να ξεχάσω μια λέξη, γιατί στο σπίτι διαβάζω αλλά στο διαγώνισμα μπορεί να μην μπορέσω να συγκεντρωθώ…*
Ερ	*Σε άλλα μαθήματα, ας πούμε στην Ιστορία ή σε άλλα, σας συμβαίνει αυτό; Να πάτε σίγουρες ότι θα γράψετε και να μην…*
Γωγώ	*Α ναι, στη φυσική, βασικά στα θετικά μαθήματα γιατί όσο και να διαβάσεις, μπορεί να πέσει κάτι περίεργο και να μην μπορείς να το λύσεις Και στην Ιστορία που είναι οι πηγές μπορεί να γράψεις κάτι που νομίζεις ότι είναι σωστό και να βγει τελείως λάθος*
Βάσω	*Νομίζω κυρίως στη φυσική και στην άλγεβρα και σ αυτά*
Άννα	*Εγώ στα αρχαία και κυρίως στην Ιστορία που είναι απέξω και δεν μπορώ με τίποτα..*
Ερ.	*Ενώ τα μαθηματικά δεν είναι απέξω;*
Άννα	*Ναι γιατί καταλαβαίνω τι συμβαίνει, ας πούμε σε μια άσκηση, και μπορώ να το εφαρμόσω, ενώ στην ιστορία πρέπει να το γράψω τόσες φορές, που κάποια στιγμή κουράζομαι γιατί μου τελειώνουν και τα τετράδια όλα, και τα παρατάω… δηλαδή γίνεται και το κεφάλι μου χάλια*

Αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι και για τις τρεις μαθήτριες, το θέμα της θεωρίας στα μαθηματικά, αντιμετωπίζεται με διαφορετικό τρόπο, σαν το κομμάτι της μαθηματικής παιδείας που προσομοιάζει με τα άλλα μαθήματα του σχολείου και επομένως για την διαπραγμάτευση του χρησιμοποιούνται οι τεχνικές απομνημόνευσης που θεωρούνται, καλώς ή κακώς, κατάλληλες και στα άλλα. Έτσι αποδεσμεύεται από τις δυσκολίες που παρουσιάζουν τα υπόλοιπα μαθηματικά, και θεωρείται όντως ως το κομμάτι των μαθηματικών που μπορεί να προσεγγιστεί από όλους, ανεξάρτητα από τις μαθηματικές τους επιδόσεις.

Ερ.	*Και το τελευταίο μου ερώτημα: Στο διαγώνισμα των μαθηματικών, το θέμα της θεωρίας, σας φαίνεται ότι είναι όντως το πιο εύκολο;*
Γωγώ	*Ναι!*
Βάσω	*Ναι, ναι!*
Αννα	*Εξαρτάται, καμιά φορά αν είναι μια άσκηση απλή εφαρμογή τύπων, μπορεί να είναι πιο εύκολη και από τη θεωρία, αν έχει δύσκολη απόδειξη* *.*

Συμπεράσματα - Συζήτηση για την Β φάση της έρευνας

Συζήτηση για το 1ο Ερώτημα.

Κατά τη διαπραγμάτευση του ερωτήματος 1, οι μαθήτριες δεν κάνουν προσπάθεια να «*μεταφράσουν*» το λεκτικό περιεχόμενο του πορίσματος σε κατάλληλο γεωμετρικό σχήμα. Αντίθετα προσπάθησαν, και κάπως εσπευσμένα θα λέγαμε, να *αντιστοιχήσουν* κάποιο από τα σχήματα που γειτνίαζαν στο βιβλίο με το πόρισμα. Για την αντιστοίχιση, εκτός της θέσης του σχήματος λήφθηκαν υπόψη και λέξεις-κλειδιά στη διατύπωση του πορίσματος.

Οι μαθήτριες από τη στιγμή που θεωρούν ότι έχουν αντιστοιχίσει το σωστό σχήμα στη λεκτική διατύπωση, δεν τοποθετούνται κριτικά απέναντι στην επιλογή τους αυτή, δεν αμφισβητούν την πρόταση ούτε αναρωτιούνται για την αλήθεια της. Παρόλο που φαίνεται να κατανοούν ποια είναι τα συμπεράσματα του πορίσματος, δεν κάνουν προσπάθειες να συμπληρώσουν το σχήμα. Οι μαθήτριες, όπως φάνηκε κατά τη διαπραγμάτευση της άσκησης του 3ου ερωτήματος είναι εξοικειωμένες με την συμπλήρωση γεωμετρικού σχήματος και είναι σε θέση να αντιπαραθέτουν το λεκτικό με το σχηματικό περιεχόμενο του προβλήματος. Όμως δεν κάνουν προσπάθεια θα αξιοποιήσουν αυτή τους τη δεξιότητα κατά τη διαπραγμάτευση του πορίσματος. Οι μαθήτριες παρατηρούν ότι δεν μπορούν να σημειώσουν όλα τα συμπεράσματα στο σχήμα, αλλά αυτό δεν ενεργοποιεί μηχανισμούς αυτορρύθμισης και διόρθωσης.

Κατά την συζήτηση που ακολούθησε δεν ήταν είναι σε θέση να διατυπώσουν σαφώς την δυσκολία τους αυτή, και αρκούνται και οι τρείς στο να διατυπώσουν το φόβο τους ότι μπορεί «*να μην το έχουν διατυπώσει όπως θα ήθελε (ο δάσκαλος)*».

Οι μαθήτριες εργάστηκαν σιωπηλά κατά τη διαπραγμάτευση του ερωτήματος 1, χωρίς μεταξύ τους συζήτηση εκτός της αρχικής, όπου συμφώνησαν ποιο σχήμα αντιστοιχεί στο πόρισμα. Φαίνεται ότι η κύρια προσπάθεια από κει και πέρα ήταν να αναπαράγουν, χωρίς να κρίνουν και να κατανοούν πλήρως, το περιεχόμενο του βιβλίου.

Η Ιγγλέζου (2014) στη διπλωματική της εργασία, κρίνοντας από συζητήσεις που γίνονται μέσα στην τάξη του μαθήματος της γεωμετρίας, αναφέρει ότι στα πλαίσια της διδασκαλίας η κύρια νοητική ικανότητα που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι αυτή της απομνημόνευσης. Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές (και αρκετοί καθηγητές) φαίνεται να συμφωνούν στο ότι, για να αντεπεξέλθει κάποιος με επιτυχία στα διαγωνίσματα, αρκεί να θυμάται τη θεωρία και τις ασκήσεις που ήδη έχει διδαχθεί, είτε στη τάξη είτε στο φροντιστήριο. Όμως για την διαπραγμάτευση ακόμα και της θεωρίας δεν αρκεί μόνο η επιμέλεια του μαθητή για να καταφέρει να την κατανοήσει σε βάθος. Όπως επισημαίνει ο Schoenfeld (1986) η διδασκαλία της Γεωμετρίας με στόχο τις εξετάσεις, έχει σαν αποτέλεσμα να αγνοούνται οι μαθηματικές, παιδαγωγικές και επιστημολογικές συνιστώσες του μαθήματος

Συζήτηση για το 2ο Ερώτημα.

Οι μαθήτριες που έλαβαν μέρος στην Β φάση της έρευνας φαίνεται να έχουν αναπτύξει αρκετές αγνωστικές δεξιότητες. Όπως φάνηκε από τον τρόπο που εργάστηκαν, προκειμένου να κατανοήσουν τη σημασία του σχήματος του ερωτήματος 2, έχουν γνώση του τρόπου με τον οποίο παρουσιάζονται οι πληροφορίες στο βιβλίο, αναγνωρίζουν την λειτουργία της λεζάντας, ανατρέχουν στις γύρω σελίδες για επεξηγήσεις, αναδιατυπώνουν, εντοπίζουν τα κύρια σημεία του κειμένου, μπορούν να κάνουν κατηγοριοποίηση (Afflerbach et al 2008, Anastasiou & Griva, 2009).

Παρόλο που διαπραγματεύονται σωστά το ερώτημα 2 του εργαλείου της έρευνας, και παρόλο που φαίνεται να είναι απόλυτα σίγουρες για τις απαντήσεις τους διστάζουν να αξιολογήσουν με ψηλό βαθμό την βεβαιότητά τους. Στην συζήτηση που ακολούθησε, οι μαθήτριες αδυνατούν να αξιολογήσουν τις απαντήσεις τους και δηλώνουν το ίδιο «*σχεδόν βέβαιες*» για την ορθότητα των απαντήσεών τους .

Δικαιολογούν την αξιολόγηση τους αυτή «*κατάλαβα την ερώτηση, έχω απαντήσει σωστά αλλά δεν ξέρω αν το θέλει έτσι».* Η ορθότητα ή όχι των απαντήσεων τους κρίνεται από τον δάσκαλο, πολλές φορές με τρόπο ανεξήγητο (για τις μαθήτριες), υπονοώντας ότι άλλη μπορεί να είναι η αλήθεια της μαθηματικής πρότασης και άλλη η αλήθεια του δάσκαλου.

Κατά τη διαπραγμάτευση του ερωτήματος αυτού, δεν παρουσιάστηκαν δυσκολίες ή αντιφάσεις όμως και σε αυτή την περίπτωση φάνηκε η έλλειψη μεταγνωστικών δεξιοτήτων αφού οι μαθήτριες δείχνουν να μην έχουν καταλάβει τι δεν κατάλαβαν (Garner και Reis 1981).

Θα μπορούσαμε ίσως να συμπεράνουμε ότι η χρήση στρατηγικών ανάγνωσης γίνεται ασυναίσθητα χωρίς να υπάρχει ικανότητα αξιολόγησης της καταλληλότητας τους σε κάθε περίπτωση. Άλλη εξήγηση μπορεί να είναι ότι δεν θεωρούν ότι στρατηγικές ανάγνωσης κειμένου που χρησιμοποιούν σε άλλα μαθήματα είναι το ίδιο αποτελεσματικές και για το μαθηματικό κείμενο.

Συζήτηση για το 3ο Ερώτημα.

Για την διαπραγμάτευση του 3ου ερωτήματος, όπου ελέγχεται η κατανόηση ενός αποδεικτικού κειμένου, οι μαθήτριες εγκαταλείπουν τις στρατηγικές ανάγνωσης που χρησιμοποίησαν για την διαπραγμάτευση των προηγούμενων δύο ερωτημάτων και ανασύρουν τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Όπως έχει διαπιστωθεί σε έρευνες που αφορούσαν στην επίλυση προβλημάτων οι μαθητές προσεγγίζουν διαφορετικά το κείμενο του προβλήματος (Bilsky et al,1986; Silver et al. 1993; De Corte et al., 1985).

Ενώ στο ερώτημα 1 παρουσιάζουν αδυναμία να κατασκευάσουν ένα σχήμα που να αντιστοιχεί στη λεκτική διατύπωση του πορίσματος και μόνο σε αυτή, στη διαπραγμάτευση της άσκησης του ερωτήματος 3, δείχνουν ότι έχουν την δεξιότητα να εξετάσουν εναλλάξ τη διατύπωση του προβλήματος και το σχήμα, να ονομάσουν σωστά τα στοιχεία του και να συμπληρώσουν το σχήμα όταν απαιτείται κατά την αποδεικτική διαδικασία. Προσεγγίζουν δηλαδή διαφορετικά τα σχήματα των θεωρημάτων από αυτά των ασκήσεων.

Οι μαθήτριες μπορούν να διακρίνουν τους ισχυρισμούς από την τεκμηρίωση και κατανοούν τι συνιστά τεκμηρίωση. Αυτό φάνηκε από τις διεξοδικές τους συζητήσεις κατά τη προσπάθειά τους να εντοπίσουν στο σχολικό βιβλίο της πρόταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τεκμηρίωση και να ελέγξουν την καταλληλότητα και συνάφειά της με το υπό διαπραγμάτευση ερώτημα.

Όπως και οι μαθητές της Α φάσης της έρευνας, και οι μαθήτριες της Β φάσης διαπραγματεύονται κάθε βήμα της απόδειξης ξεχωριστά, αποκομμένα από την υπόλοιπη απόδειξη. Δεν συζητούν για την σημασία του κάθε ισχυρισμού και τις προοπτικές που ανοίγει η απόδειξή του. Για την τεκμηρίωση ενός βήματος της απόδειξης χρησιμοποιούν το ίδιο το ζητούμενο, και αναλώνουν πολύ χρόνο για να τεκμηριώσουν ότι ισχύει ανεξάρτητα από τους συλλογισμούς που έχουν προηγηθεί χωρίς αυτό να ενεργοποιεί διαδικασίες αυτορρύθμισης. Στις έρευνες των Österholm (2003), Inglis & Alcock, (2012), οι λιγότερο αποτελεσματικοί αναγνώστες επικεντρώνονται σε λεπτομέρειες του κειμένου της απόδειξης χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη θέση τους στο γενικότερο πλαίσιο του κειμένου.

Οι μαθήτριες δεν διέτρεξαν τα βήματα της απόδειξης, δεν συζήτησαν για το πλάνο της ή τη ροή της δεν έλεγξαν την συνοχή της ούτε προβληματίστηκαν αν ήταν δυνατό η άσκηση να αποδειχτεί διαφορετικά. Έδειξαν να έχουν σοβαρές ελλείψεις μεταγνωστικών δεξιοτήτων αναγκαίων για την κατανόηση του αποδεικτικού κειμένου όπως αυτές που αναφέρουν οι Yang & Lin, (2008) και Weber etal.,(2008) Αν και από τη συζήτηση τους κατά τη διαπραγμάτευση της άσκησης, φάνηκε ότι εντόπισαν την ύπαρξη της ανακολουθίας, φάνηκε να μην διαθέτουν τις κατάλληλες στρατηγικές για την διόρθωση της. Στην αξιολόγηση της εργασίας τους δεν μπόρεσαν καν να διατυπώσουν τις αμφιβολίες τους με σαφήνεια. Οι αδύναμοι αναγνώστες, όπως παρατηρούν οι Garner και Reis (1981) φαίνεται να μην καταλαβαίνουν ότι δεν έχουν κατανοήσει το κείμενο που διαβάζουν.

Συζήτηση για τη χρήση του σχολικού εγχειριδίου.

Οι μαθήτριες παραδέχτηκαν ότι όταν μελετάνε μαθηματικά από το βιβλίο απομονώνουν τους ορισμούς, τα θεωρήματα και τις ιδιότητες γιατί αυτό είναι το περιεχόμενο του βιβλίου που κατά την γνώμη τους πρέπει να γνωρίζουν. Στο επεξηγηματικό κείμενο ανατρέχουν σπάνια, αφού παραδέχονται ότι δεν μπορεί να τους βοηθήσει να καταλάβουν τα μαθηματικά. Όταν το μάθημα απαιτεί εκτός της απομνημόνευσης και την κατανόηση ή εφαρμογή της θεωρίας οι μαθήτριες επαφίενται στον δάσκαλο και κυρίως στον φροντιστή.

Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουν και οι έρευνες των Weinberg, Wiesner, Benesh και Boester, (2012), που έγιναν σε 1156 προπτυχιακούς φοιτητές μαθηματικών τάξεων, οι οποίοι εστιάζουν στα «μαύρα γράμματα» των βιβλίων και σημειώσεων, αγνοούν το επεξηγηματικό κείμενο και προστρέχουν στα παραδείγματα των ασκήσεων προκειμένου να κατανοήσουν το περιεχόμενο του βιβλίου. Ενώ όμως στην έρευνα των παραπάνω οι μαθητές αγνοούν τα σκοτεινά σημεία των ορισμών και προσπαθούν να κατανοήσουν το νόημά τους από τις εφαρμογές τους, τις ασκήσεις και τα παραδείγματα του βιβλίου, στην προκείμενη έρευνα, οι μαθήτριες θεωρούν ότι πρέπει και αρκεί να απομνημονεύσουν το κείμενο των ορισμών και θεωρημάτων ακόμη και αν δεν κατανοούν το περιεχόμενό του. Ο δάσκαλος ή ο φροντιστής θα τους δείξει πώς να εφαρμόσουν αυτούς τους ορισμούς και τα θεωρήματα για να λύνουν ασκήσεις.

Γενικά Συμπεράσματα -Συζήτηση

Ανάγνωση είναι η διαδικασία εξαγωγής νοήματος από το γραπτό λόγο. Ανάγνωση είναι όμως και ένας τρόπος του σκέπτεσθαι. Η κατασκευή νοήματος δεν περιλαμβάνει μόνο την αποκωδικοποίηση, αλλά σε μεγαλύτερο βαθμό αποτελεί μια δυναμική νοητική διεργασία, ένα τρόπο σκέψης που συμπεριλαμβάνει την προγενέστερη γνώση και τις προσωπικές εμπειρίες του αναγνώστη. Οι αναγνώστες αλληλεπιδρούν με αυτό που διαβάζουν. Δεν προσλαμβάνουν παθητικά το νόημα, το κατασκευάζουν. Χρησιμοποιούν ότι γνωρίζουν για το περιεχόμενο του κειμένου, για το πλαίσιο που περιγράφεται, τον τρόπο που είναι δομημένα τα κείμενα του ίδιου είδους, και για το ιδιαίτερο λεξιλόγιο (συμπεριλαμβανομένων των εξειδικευμένων όρων). Πρέπει συνεχώς να εξάγονται συμπεράσματα για το νόημα των λέξεων, να διατυπώνονται υποθέσεις για τα ασαφή σημεία, να αναγνωρίζονται τα υπονοούμενα σε κάθε φράση αλλά και στο σύνολο του κειμένου. Για τους ικανούς αναγνώστες, όλα αυτά γίνονται αβίαστα και κατά ένα μεγάλο μέρος ασυναίσθητα. Στη δυσκολία και την πολυπλοκότητα αυτής της διεργασίας πρέπει να συμπεριληφθεί και ο μεταγνωστικός έλεγχος των αναγνωστών που διευκολύνει και καθοδηγεί την ανάγνωση. Η μεταγνωστική συνείδηση των στρατηγικών με τις οποίες προσεγγίζεται το κείμενο καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τις διαδρομές της σκέψης.

Με την έρευνα αυτή διερευνήθηκαν οι τρόποι που αναγιγνώσκεται το μαθηματικό κείμενο του βιβλίου της γεωμετρίας από μαθητές της Α Λυκείου. Συγκεκριμένα διερευνήθηκε ο τρόπος που διαβάζεται από τους μαθητές το σχολικό βιβλίο, ο βαθμός δυσκολίας που αντιμετωπίζουν, αν και ποιες αναγνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές χρησιμοποιούν στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν το κείμενο και ειδικά :

1. αν και πως κατανοείται το κείμενο μιας πρότασης που περιέχεται στο βιβλίο της γεωμετρίας,
2. αν έχουν οι μαθητές την ικανότητα να αναγνωρίσουν τις συνδέσεις ανάμεσα στις εικόνες και στο επεξηγηματικό κείμενο και να εξάγουν συμπεράσματα,

3. αν και πώς μπορούν οι μαθητές να παρακολουθήσουν και να κατανοήσουν τα βήματα μιας γραπτής απόδειξης.
4. αν και ποιές στρατηγικές ανάγνωσης αξιοποιούν οι μαθητές τις στη προσπάθειά τους να κατανοήσουν το μαθηματικό κείμενο του σχολικού εγχειριδίου της γεωμετρίας.

Συμπεράσματα – Συζήτηση για το 1ο ερώτημα

Για τη διερεύνηση του πρώτου ερωτήματος επιλέχτηκε ένα πόρισμα που δίνεται στο βιβλίο μόνο με την λεκτική του διατύπωση. Η διατύπωση είναι απλή, χωρίς δύσκολα συντακτικά στοιχεία, διακρίνονται σαφώς σε διαφορετικές παραγράφους οι υποθέσεις από τα συμπεράσματα, τα οποία δίνονται μάλιστα και αριθμημένα. Οι μαθητές όμως στη συντριπτική τους πλειοψηφία φαίνεται ότι δεν μπορούν να αντιστοιχήσουν την λεκτική περιγραφή σε ισότητες στοιχείων του σχήματος, σε σημείο που δεν είναι προφανές αν κατανοούν σε βάθος ακόμα και την λεκτική διατύπωση. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν μπόρεσε να αναγνώσει αποτελεσματικά το πόρισμα του βιβλίου, αφού δεν είναι σε θέση να το αναδιατυπώσει ή να δώσει ένα παράδειγμα.

Η έρευνα αυτή επιβεβαιώνει την αδυναμία των μαθητών στην κατασκευή σχημάτων ή σκαριφημάτων (Θωμαϊδης & Πούλος, 2000, Θωμαΐδης, 1991). Από τη μελέτη των αποτελεσμάτων φαίνεται ότι πολλοί μαθητές δεν κάνουν προσπάθεια να *μεταφράσουν* την λεκτική πληροφορία στο σχήμα, αντίθετα προτιμούν να *αντιστοιχήσουν* στο κείμενο κάποιο από τα σχήματα που έχουν συναντήσει κατά την διαπραγμάτευση της σχετικής έννοιας.

Πράγματι, στην ίδια σελίδα του βιβλίου που παρουσιάζεται το πόρισμα, υπάρχουν δύο σχήματα ένα το οποίο αντιστοιχεί στο θεώρημα «*τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από το σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους*», στο αντίστοιχο σχήμα δεν σημειώνεται η χορδή με άκρα τα σημεία επαφής, και ένα το οποίο αντιστοιχεί σε άσκηση, στο οποίο σημειώνονται η χορδή καθώς και οι ισότητες τόξων. Ισχυρή ένδειξη ότι οι μαθητές επέλεξαν, ορθά ή εσφαλμένα, ένα από τα δύο σχήματα είναι η διάταξη των σχημάτων που κατασκευάζουν. Οι 47 από τους 67 μαθητές σχεδιάζουν την διακεντρική ευθεία οριζόντια και το σημείο από το οποίο φέρονται οι εφαπτόμενες στα αριστερά του κέντρου του κύκλου, όπως ακριβώς και στα δύο σχήματα που παρατίθενται στο βιβλίο. Από την Β φάση της έρευνας επιβεβαιώνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών μάλλον επέλεξαν ένα από τα δύο σχήματα του βιβλίου αντί να προσπαθήσουν να σχεδιάσουν μόνοι τους το σχήμα.

Η ίδια σε πολλούς μαθητές διάταξη των σχημάτων όμως, μπορεί να συμβαίνει γιατί αυτή είναι η διάταξη των εφαπτομένων με την οποία είναι περισσότερο εξοικειωμένοι οι μαθητές. Από την έρευνα προκύπτουν ενδείξεις ότι τα πρωτοτυπικά σχήματα με τα οποία επεξηγούνται οι γεωμετρικές έννοιες στο βιβλίο, είναι πολύ ισχυρά τόσο που μερικές φορές λειτουργούν σαν εμπόδιο αντί να διευκολύνουν την κατανόηση του γεωμετρικού κειμένου(Duval, 2004; Mesquita, 1994). Αυτό φάνηκε από την αδυναμία της πλειοψηφίας των μαθητών να σημειώσουν την διχοτόμο της αμβλείας γωνίας ενώ σημειώνουν την διχοτόμο της οξείας.

Το γεωμετρικό σχήμα που έδωσαν οι μαθητές στην ερώτηση 1, σε πολλές περιπτώσεις ενσωματώνει πολλές πληροφορίες για την έννοια της εφαπτομένης, αποτελεί την εικόνα του εννοιολογικού σχήματος κατά Fischbein (1993) και όχι αυστηρή μετάφραση της λεκτικής διατύπωσης του πορίσματος. Επιπλέον μαθητές με ελλιπή γνώση για τις συναφείς με την εφαπτομένη έννοιες, δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν ακόμη και ένα σαφώς διατυπωμένο κείμενο, όπως φαίνεται από τα παράλογα σχήματα που παραθέτουν. Οι μαθητές δεν φάνηκε ότι είναι σε θέση να ανατρέχουν σε άλλα σημεία του βιβλίου προκειμένου να αποσαφηνίσουν ή να μάθουν πληροφορίες για την έννοια που τους προβληματίζει. Ίσως ακόμη να μην έχουν τις μεταγνωστικές δεξιότητες για να καταλάβουν ότι δεν έχουν σχηματίσει ολοκληρωμένη γνώση για την έννοια αυτή.

Αναλύοντας σύμφωνα με τα επίπεδα κατανόησης κατά Duval, οι μαθητές φαίνεται να έχουν μερική οπτική και λεκτική αντίληψη του σχήματος χωρίς να μπορούν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των δύο, ενώ τους λείπει η διαδικαστική αντίληψη. Το τελευταίο πιθανόν να είναι συνέπεια του γεγονότος ότι δεν διδάσκονται καθόλου γεωμετρικές κατασκευές και αυτό ίσως λειτουργεί σε βάρος της κατανόησης της γεωμετρίας (Θωμαΐδης, 1991).

Η *γνώση που ήδη κατέχει ο μαθητής φαίνεται να παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο* στην κατανόηση των περιεχόμενων του σχολικού εγχειριδίου, και δεν θα ήταν σωστό να θεωρήσουμε ότι η διαπραγμάτευση του θέματος της θεωρίας είναι η ελάχιστη απαίτηση που μπορεί να έχουμε από τον μαθητή, εκτός και αν μπορούμε να δεχτούμε ότι η οπτική αποτύπωση όλων των περιεχομένων του βιβλίου μπορεί να συγκαταλέγεται στις δεξιότητες που πρέπει να αποκτήσει.

Στο πρώτο ερώτημα του ερευνητικού εργαλείου η πλειοψηφία των μαθητών δείχνει αδυναμία να συμπληρώσει το σχήμα καταλλήλως, παρόλο που στο τρίτο ερώτημα η αντιστοίχιση του κειμένου της άσκησης με στοιχεία του ημιτελούς σχήματος και η συμπλήρωσή του φαίνεται να μην τους δυσκολεύει ιδιαίτερα. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές επιλέγουν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης των θεωρημάτων και άλλο για την διαπραγμάτευση των ασκήσεων.

Οι έρευνες που αφορούσαν στην λύση προβλήματος, έδειξαν ότι οι μαθητές επεξεργάζονται διαφορετικά το απλό κείμενο από ότι το μαθηματικό κείμενο όπως είναι η εκφώνηση ενός προβλήματος. Για παράδειγμα οι μαθητές στην πρώτη περίπτωση εστιάζουν στο περιεχόμενο, ενώ στη δεύτερη στα αριθμητικά στοιχεία (Bilsky et al,1986). Επίσης κατά την διαπραγμάτευση προβλημάτων τους απασχολεί περισσότερο η διατύπωση και η μορφή του κειμένου (ο μαθηματικός φορμαλισμός) παρά το νόημα (Silver et al. 1993, De Corte et al., 1985).

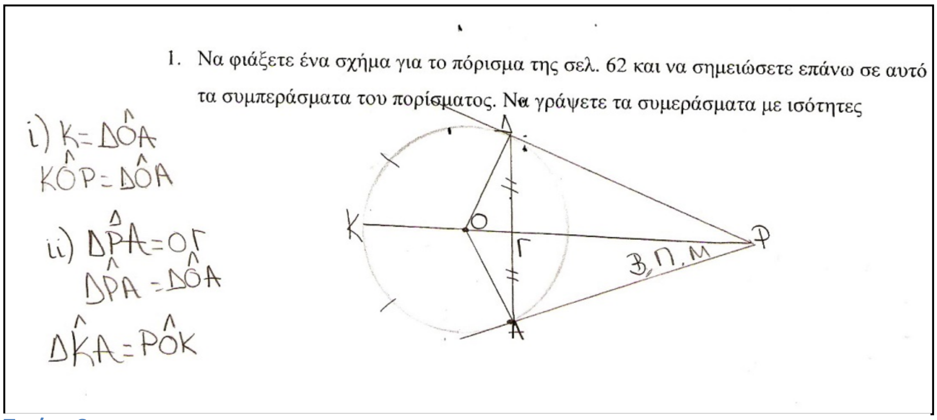
Σε συμφωνία με τα παραπάνω, η έρευνα αυτή έδειξε ότι οι μαθητές υιοθετούν διαφορετικές στρατηγικές για την ανάγνωση των ορισμών και θεωρημάτων από αυτές που χρησιμοποιούν όταν διαβάζουν ασκήσεις. Κατά την μελέτη των ορισμών και θεωρημάτων καταβάλουν προσπάθεια να αναπαράγουν το κείμενο που διάβασαν παρά να το κατανοήσουν. Στη προσπάθειά τους αυτή δεν τοποθετούνται κριτικά απέναντι στο περιεχόμενο του βιβλίου, δεν κάνουν προσπάθειες παρακολούθησης και αυτορρύθμισης της κατανόησής τους.

Αγνοούν τα σκοτεινά σημεία ή τις αντιφάσεις αντί να επιμένουν σε αυτά. Το ίδιο επισημαίνει και ο Österholm (2003) παρατηρώντας δύο ζευγάρια μαθητών κατά τη προσπάθειά τους να κατανοήσουν την έννοια της απόλυτης τιμής διαβάζοντας και συζητώντας το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου. Το ζευγάρι των λιγότερο έμπειρων στα μαθηματικά, έτεινε την προσοχή του σε συγκεκριμένα σημεία του κειμένου διαβάζοντας στην ουσία αποσπασματικά. Επιπλέον απέφευγε να συζητήσει τα δύσκολα σημεία προτιμώντας να τα αγνοήσει τελείως, σε σημείο που να αποφασίσει κάποτε ότι το σύμβολο της απόλυτης τιμής είναι ένα άλλο σύμβολο για την παρένθεση. Σε αντίθεση το ζευγάρι των έμπειρων μαθητών, αρχίζει τη συζήτηση ακόμα και πριν ξεκινήσει το διάβασμα και συζητά διεξοδικά μια-μια τις προτάσεις του κειμένου.

Επιπλέον η παρούσα έρευνα ανέδειξε ένα χαρακτηριστικό τρόπο προσέγγισης των ορισμών και θεωρημάτων, που δεν τονίζουν στα συμπεράσματά τους οι προηγούμενες έρευνες. Οι μαθητές φαίνονται διατεθειμένοι να αποστηθίσουν το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου ακόμη και αν δεν κατανοούν το περιεχόμενό του και δεν έχουν επίγνωση του σκοπού της μελέτης τους. Χαρακτηριστικό είναι το μεγάλο ποσοστό, 27%, των μαθητών που προσπάθησε, ανεπιτυχώς, *να αποδείξει* το θεώρημα αν και δεν είχε ζητηθεί. Οι μαθητές αυτοί δεν κατάλαβαν ποιο ήταν το ζητούμενο στην δραστηριότητα αυτή αλλά ίσως δεν καταλαβαίνουν τη σημασία των αποδείξεων ή ακόμη δεν έχουν ξεκάθαρη άποψη για το σκοπό και το περιεχόμενο του ίδιου το μαθήματος. Ίσως έχει σχηματιστεί από την πρακτική στη τάξη και από τον τρόπο προετοιμασίας γα τις εξετάσεις, ένα μοντέλο διαπραγμάτευσης της θεωρίας σύμφωνα με το οποίο, *μαθαίνουμε κάποιες ισότητες που κάπως οδηγούν στην λύση.* Ο Freudenthal (1971) αναφέρει οι μαθητές δεν μπορούν να επινοήσουν τον παραγωγικό χαρακτήρα της ευκλείδειας γεωμετρίας και εκεί οφείλεται η αποτυχία στη διδασκαλία της.

Παρόλα αυτά το ένα τέταρτο των μαθητών δείχνει πρόθυμο να «παπαγαλίσει» την απόδειξη ενός θεωρήματος έστω και αν δεν καταλαβαίνει την σημασία της ούτε τη χρησιμότητά της. Δεκαέξι από τους 21 μαθητές που προσπάθησαν να αποδείξουν το πόρισμα αντί να διατυπώσουν τα συμπεράσματά του, διάλεξαν να γράψουν σαν απάντηση την απόδειξη του άλλου θεωρήματος που ήταν στην ύλη του μαθήματος.

Πρόθυμοι είναι επίσης να αποστηθίσουν το περιεχόμενο του βιβλίου και το 9% περίπου των μαθητών που επαναλαμβάνει τη λεκτική διατύπωση των συμπερασμάτων του πορίσματος χωρίς προσπάθεια να τα σημειώσει στο σχήμα ή να τα παρουσιάσει σε συμβολική μορφή. Τέλος σε αυτή την κατηγορία μαθητών πρέπει ίσως πρέπει να συμπεριληφθούν και εκείνοι (6%) που διατυπώνουν παράλογες ισότητες. Οι μαθητές αυτοί αδιαφορούν για το νόημα των μαθηματικών προτάσεων και αρκούνται στο φορμαλισμό τους. Μιμούνται και παραθέτουν άνευ νοήματος συμβολικές παραστάσεις που έχουν την χαρακτηριστική μορφή των ισοτήτων (εικ 8).



Εικόνα 8

Συμπεραίνοντας θα λέγαμε ότι χωρίς τις κατάλληλες στρατηγικές ανάγνωσης των μαθηματικών προτάσεων, δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ουσιαστική μάθηση από το διάβασμα (Simonson & Gouvea, 2011). Οι μαθητές, όταν διαβάζουν την θεωρία από το βιβλίο, εφαρμόζουν κυρίως την στρατηγική της αποστήθισης η οποία μπορεί να είναι μια αποτελεσματική στρατηγική προετοιμασίας για εξετάσεις, η αποδοχή της όμως ως τεχνική ανάγνωσης του βιβλίου των μαθηματικών όχι μόνο δεν προωθεί, αντίθετα εμποδίζει την μάθηση.

> *Πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι να κάτι βοηθάει στο να θυμόμαστε ένα κείμενο δεν βοηθάει κατ' ανάγκη και στο να το καταλάβουμε* (Kintsch, 1994, σελ. 296).

Συμπεράσματα – Συζήτηση για το 2ο ερώτημα

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος, οι μαθητές, τουλάχιστον οι επιμελείς εξ αυτών, φάνηκε ότι έχουν γνώση του τρόπου με τον οποίο παρουσιάζονται οι πληροφορίες στα σχήματα του βιβλίου, αναγνωρίζουν την λειτουργία των δεικτών και της λεζάντας, ανατρέχουν στις γύρω σελίδες για επεξηγήσεις, αναδιατυπώνουν, εντοπίζουν τα κύρια σημεία του κειμένου και γενικά φάνηκε να είναι αρκετά εξοικειωμένοι με την διαδικασία αυτή του διαβάσματος, η οποία είναι κοινή σε όλα σχεδόν μαθήματα και δεν αποτελεί αποκλειστικότητα του διαβάσματος των μαθηματικών. Τις γνώσεις αυτές έχουν δομήσει από την ενασχόλησή τους με τα θεωρητικά λεγόμενα μαθήματα και ίσως ασυναίσθητα, τις χρησιμοποιούν και στα μαθηματικά.

Και σε αυτή τη περίπτωση όμως η γνώση που ήδη κατέχει ο μαθητής καθορίζει το επίπεδο κατανόησης. Σχεδόν ο μισοί μαθητές αν και επιτυχώς εντόπισαν το επεξηγηματικό κείμενο στο βιβλίο, αγνοούν τη σημαντική γεωμετρική πληροφορία που αφορά στη σχέση ακτίνων και διαμέτρου, αν και είναι σαφώς σημειωμένη τόσο στο σχήμα αλλά και στο κείμενο.

Όπως φάνηκε, κυρίως από τη συζήτηση με τις μαθήτριες της Β φάσης, οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει ικανοποιητικά δεξιότητες και στρατηγικές παρακολούθησης και αξιολόγησης της κατανόησής τους και δεν μπορούν να αξιολογήσουν το αποτέλεσμα της ανάγνωσης. Η παρατήρηση ότι, οι μαθήτριες δεν μπορούν να είναι βέβαιες για τις απαντήσεις τους, είτε έχουν απαντήσει σωστά (ερώτηση 2), είτε έχουν σοβαρές αμφιβολίες (ερώτηση 3), είτε έχουν εντοπίσει αντιφάσεις που δεν μπόρεσαν να δικαιολογήσουν (ερώτηση 1) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει έλλειψη μεταγνωστικών δεξιοτήτων και στρατηγικών.

Οι Borasi και Siegel (1990, 2007) αναφέρουν ότι οι τεχνικές και στρατηγικές ανάγνωσης *μαθαίνονται* και για αυτό είναι δυνατό να γίνουν αντικείμενο διδασκαλίας στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών. Παρόλο που οι στρατηγικές ανάγνωσης διδάσκονται κυρίως από του καθηγητές των θεωρητικών μαθημάτων, ερευνητές στον τομέα της διδακτικής μαθηματικών θεωρούν ότι και οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να βοηθούν τους μαθητές τους ώστε αυτοί να μπορέσουν να διαμορφώσουν μια διαδικασία αποτελεσματικής ανάγνωσης (Bruner, 1976; Simonson & Gouvea, 2011). Μπορούν να εφοδιάσουν τους μαθητές τους με τις στρατηγικές που είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν πριν, κατά και μετά το διάβασμα κάνοντας τις κατάλληλες ερωτήσεις σε δραστηριότητες ανάγνωσης στη τάξη. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι όμως να δίνουν έμφαση στο γεγονός ότι το μαθηματικό κείμενο πρέπει να «βγάζει νόημα». Οι δάσκαλοι πρέπει να παρέχουν στους αναγνώστες μαθηματικού κειμένου εμπειρίες υποβοήθησης (scaffolding) προκειμένου να τους βοηθήσουν να μάθουν πώς να μαθαίνουν από το κείμενο (Kenney et al, 2005).

Θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν και με ποιον τρόπο διδάσκονται οι τεχνικές αυτές στην Ελλάδα και επιπλέον ποιοι μπορεί να είναι οι πιο αποτελεσματικοί τρόποι διδασκαλίας τους.

Συμπεράσματα – Συζήτηση για το 3ο ερώτημα

Όσον αφορά στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα, η έρευνα επιβεβαιώνει ότι υπάρχει μεγάλη δυσκολία παρακολούθησης του αποδεικτικού κειμένου από τους μαθητές. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην γενικότερη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της απόδειξης και τον τρόπο που λειτουργεί. (Selden & Selden, 2003; Dreyfus et al., 1990; Healy & Hoyles, 1998)

Η πλειοψηφία των μαθητών φαίνεται ότι είναι σε θέση να διακρίνει τι συνιστά τεκμηρίωση ειδικά στην περίπτωση μεμονωμένων ισχυρισμών όπως είναι τα βήματα 1, 4, και 5. Φαίνεται ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την απόδειξη σαν μια συνεκτική αλληλουχία ισχυρισμών που οδηγεί στην απόδειξη του ζητούμενου, αλλά εξετάζουν κάθε βήμα σαν να είναι αποκομμένο από τα προηγούμενα ή τα επόμενα.

Το ίδιο διαπιστώνει και ο Lithner, (2003) που εξετάζει την επιχειρηματολογία φοιτητών κατά το διάβασμα της λύσης ασκήσεων όπως καταγράφονται στις μεταξύ τους συζητήσεις. Οι φοιτητές εστιάζουν σε κάθε μία πρόταση ξεχωριστά και την εξετάζουν τοπικά. Επίσης ο Österholm (2003) καταγράφοντας τη συζήτηση δύο φοιτητών κατά την προσπάθειά τους να καταλάβουν μια εφαρμογή των απολύτων τιμών, παρατηρεί ότι επικεντρώνονται σε λεπτομέρειες του κειμένου χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη θέση τους στο γενικότερο πλαίσιο του κειμένου της άσκησης.

Ίσως οι μαθητές στην έρευνα αυτή να καθοδηγήθηκαν από τη μορφή, σε δύο στήλες, με την οποία δόθηκε η απόδειξη. Όμως οι μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα είναι λίγο εξοικειωμένοι με αυτήν την μορφή απόδειξης, όπως δείχνει το γεγονός ότι σε πολλά σημεία δεν ακολουθούν την φόρμα και συμπληρώνουν την απάντηση όπου υπάρχει χώρος. Άλλωστε και στο σχολικό βιβλίο οι αποδείξεις δίνονται σε αφηγηματική μορφή, τα προφανή βήματα παραλείπονται, η σύνταξη των αποδείξεων είναι πολλές φορές αρκετά πολύπλοκη, έτσι ώστε να μην είναι εύκολο να την παρακολουθήσει κάποιος.

Οι έρευνες των Selden and Selden (2003) και Weber, Brophy και Lin (2008) αναφέρουν ότι οι πιο αποδοτικοί αναγνώστες ελέγχουν τις αποδείξεις βήμα-βήμα, παρακολουθούν την λογική των επιχειρημάτων, σκέφτονται παραδείγματα, σιγουρεύονται για την εγκυρότητα κάθε φράσης και χρησιμοποιούν στρατηγικές όπως την αναδιατύπωση της πρότασης και τον προβληματισμό για την υπόθεση και το συμπέρασμα . Χωρίς τη γνώση κατάλληλων στρατηγικών ανάγνωσης είναι δύσκολο αν όχι αδύνατο να κατανοηθούν βασικά στοιχεία της απόδειξης, δηλαδή πως εξελίσσεται από την υπόθεση στα συμπεράσματα, γιατί είναι έγκυρη και επιπλέον τι ακριβώς αποδεικνύει (Weber, Brophy & Lin , 2008; Yang 2012).

Εκ του αποτελέσματος φαίνεται ότι οι μαθητές στο σύνολό τους δεν διατρέχουν αρχικά το κείμενο της απόδειξης προκειμένου να οργώσουν το πλάνο της, ούτε ελέγχουν στο τέλος την συνοχή της. Τέλος δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι γίνεται προσπάθεια από κάποιον μαθητή να αποδείξει την άσκηση ακολουθώντας την δική του διαδρομή, ούτε αμφισβητεί με κάποιο τρόπο την δοσμένη. Το γεγονός ότι η πολύ μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιεί το ζητούμενο στην απόδειξη, εκτός του ότι αποτελεί μια ένδειξη αδυναμίας παρακολούθησης της ροής της, είναι επίσης μια ισχυρή ένδειξη ότι δεν γίνονται προσπάθειες να διακριθεί η υπόθεση από τα συμπεράσματα της άσκησης.

Αρκετοί ερευνητές, όπως οι Grossman, Smith, και Miller (1993), Sipka, (1990), Morgan, (1998), έχουν καταδείξει ότι το *γράψιμο* των αποδείξεων, οδηγεί στην καλλίτερη κατανόηση τους γιατί αποτελεί και αυτό μια μορφή σκέψης. Το ίδιο όμως ισχύει και για το *διάβασμα* των αποδείξεων εφόσον αυτό γίνεται με ουσιαστικό τρόπο. Υπάρχουν αρκετές έρευνες όπως των Yang & Lin (2008), Duke & Pearson (2008), Pressley, Harris & Marks (1992b) για παράδειγμα, που δείχνουν ότι η διδασκαλία στρατηγικών ανάγνωσης έχει θετικό αποτέλεσμα γιατί βελτιώνει την κατανόηση των αποδείξεων και την επιτυχία στη λύση προβλημάτων.

Συμπεράσματα – Συζήτηση για το 4ο ερώτημα

Όσον αφορά τον τρόπο προσέγγισης του σχολικού εγχειριδίου από τους μαθητές, αυτό που προκύπτει τόσο από την πολύ χαμηλή απόδοση των μαθητών της Α φάσης της έρευνας, όσο και από τη συζήτηση με τις μαθήτριες της Β φάσης, είναι ότι οι μαθητές αδυνατούν να εφαρμόσουν τις κατάλληλες τεχνικές και στρατηγικές ανάγνωσης προκειμένου να κατανοήσουν το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου όταν μελετάνε μαθηματικά. Η επίγνωση των γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών έχει μεγάλη συμβολή στην κατανόηση γραπτού λόγου, ακόμη μεγαλύτερη από την ακρίβεια και την ευχέρεια της ανάγνωσης (Anastasiou, D., & Griva, E., 2009)

Το βιβλίο δεν φαίνεται να αποτελεί για τους μαθητές το εργαλείο για μάθηση, αλλά λειτουργεί σαν ένας διεξοδικός κατάλογος των θεμάτων που πρέπει κάποιος να γνωρίζει προκειμένου να πιστοποιηθούν οι γνώσεις του με τις εξετάσεις.

Από το βιβλίο απομονώνονται, όπως επισημαίνουν και οι Weinberg, Wiesner, Benesh και Boester, (2012), οι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι ιδιότητες που κατά σύμβαση στο μαθηματικό κείμενο συχνά παρουσιάζονται με έντονη γραφή ή μέσα σε πλαίσιο, από το επεξηγηματικό κείμενο που προηγείται ή ακολουθεί. Στη

μελέτη τους εστιάζουν κυρίως στις υποδειγματικές λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου. Ίσως αυτό να οφείλεται στο ότι στην τάξη δίνεται μεγαλύτερη σημασία στην διαδικαστική από ότι στην εννοιολογική διάσταση των μαθηματικών.
Κι όμως στην Ελλάδα είναι απαιτούμενο να γνωρίζουν οι μαθητές τις αποδείξεις που περιέχονται στο βιβλίο ακόμη και αν στη πλειοψηφία τους δεν μπορούν να διακρίνουν τα συμπεράσματα από την υπόθεση, πόσο μάλλον να παρακολουθήσουν και να κατανοήσουν την ροή της απόδειξης. Καλλιεργείται έτσι η ικανότητα στο γράψιμο αποδείξεων με κριτήριο τις απαιτήσεις των εξετάσεων παραμελώντας τις βασικές μαθηματικές και παιδαγωγικές συνιστώσες του μαθήματος.
Η έρευνα αυτή ανέδειξε ένα χαρακτηριστικό τρόπο προσέγγισης του βιβλίου, που δεν τονίζουν στα συμπεράσματά τους οι προηγούμενες έρευνες. Πολλοί μαθητές θεωρούν ότι αρκεί να απομνημονεύσουν το «σημαντικό» κείμενο και αδιαφορούν για το αν «βγαίνει νόημα» από αυτό. Η αποδοχή και η ενίσχυση τέτοιων αναγνωστικών πρακτικών, ακυρώνει τις προσπάθειες δασκάλων και συγγραφέων που αναζητούν τρόπους ώστε οι μαθηματικές έννοιες να μην δίνονται αυθαίρετα αλλά να έχουν νόημα για τους μαθητές. Είναι αναγκαίο και οι τρεις συμμέτοχοι στη διαδικασία της μάθησης στο σχολείο να έχουν κοινούς σκοπούς και στόχους. Ο εξεταστοκεντρικός χαρακτήρας του σχολείου στην Ελλάδα, καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη διδακτική πράξη και διαμορφώνει, ανεξάρτητα από τις προθέσεις των συμμετεχόντων, κατά κύριο βάρος το διδακτικό συμβόλαιο. Η αποτυχία στα μαθηματικά εκλαμβάνεται σαν εγγενές στοιχείο των μαθηματικών, και δεν δημιουργούνται αμφιβολίες για την ορθότητα του τρόπου προσέγγισης τους.

Είναι προφανές από τις απαντήσεις των μαθητριών, αλλά και από την σημασία που δίνεται στην Ελλάδα στην αναγκαιότητα των φροντιστηρίων, ότι οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες δεξιότητες για να μπορούν να διαβάζουν μόνοι τους μαθηματικά. Κι όμως η αυτονομία και ανεξαρτησία στη μάθηση, συγκαταλέγεται σήμερα στις βασικές δεξιότητες του μαθηματικού γραμματισμού (literacy) και πρέπει να είναι αναγκαίο προαπαιτούμενο για τους φοιτητές θετικών και μαθηματικών σχολών (Brown, Campione & Day, 1981; Borasi & Siegel, 1990; Cowen, 1991; Kenney, et al., 2005; Magliano & Millis, 2003).

Στην παρούσα έρευνα, η επιλογή του κειμένου της γεωμετρίας έγινε με το σκεπτικό ότι το κείμενο στο βιβλίο της γεωμετρίας, έχει πολλά κοινά στοιχεία με κείμενα από βιβλία άλλων μαθημάτων, εκτενές αφηγηματικό και επεξηγηματικό κείμενο, σχήματα που διευκολύνουν την κατανόηση του κειμένου, βασικές μαθηματικές συμβολικές παραστάσεις, καθαρές αποδεικτικές διεργασίες. Αυτό καταρχήν θεωρήθηκε ότι θα περιόριζε το «θόρυβο» που θα προκαλούσε στα ερευνητικά στοιχεία η ιδιαίτερη δυσκολία που μπορεί να παρουσιάζει για τους μαθητές ένα αυστηρό και μεστό σε συμβολισμούς κείμενο. Εκ των υστέρων αποδεικνύεται ότι ίσως η επιλογή του κειμένου της γεωμετρίας να είναι ένας από τους περιορισμούς της έρευνας, αφού δεν ελήφθη υπόψη η διαπιστωμένα μεγάλη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν τον ρόλο των αξιωμάτων, των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων και των αποδείξεων (Lesh et.al., 1987; Hershkowitz e.tal., 1990; Mesquita, 1994; Κολέζα, 2003; Owens & Outhred, 2006;). Θα είχε ενδιαφέρον να εξεταστεί αν η χρήση ενός κειμένου από το βιβλίο της Άλγεβρας θα έδινε τα ίδια αποτελέσματα.

Σε όλα τα επίπεδα της μαθηματικής παιδείας, οι εξετάσεις έχουν συνήθως δύο άξονες. Εξετάζονται η γνώση της θεωρίας, και η δυνατότητα εφαρμογής της. Όσον αφορά στον πρώτο άξονα, ζητείται συνήθως από τους μαθητές ή και τους φοιτητές να διατυπώσουν, να αποδείξουν ή να σχολιάσουν ορισμούς θεωρήματα ή ιδιότητες που περιέχονται στη βιβλιογραφία του μαθήματος. Στον δεύτερο άξονα εξετάζεται κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την δυνατότητα εφαρμογής τους κατά την λύση προβλημάτων και ασκήσεων. Η γνώση της θεωρίας θεωρείται συχνά ότι είναι θέμα συνέπειας και επιμέλειας του μαθητή και η αποτυχία στις εξετάσεις στη θεωρία ένδειξη ότι ο μαθητής δεν έχει διαβάσει. Αυτή είναι όμως μια μάλλον επιπόλαια προσέγγιση αν σκεφτούμε ότι το διάβασμα δεν είναι μια απλή διαδικασία. Η κατανόηση κειμένου είναι μια μορφή κατανόησης και σαν τέτοια είναι μια πολύπλοκη και πολυπαραγοντική διεργασία. Η επιτυχής διεξαγωγή του διαβάσματος των μαθηματικών απαιτεί την χρήση ειδικών τεχνικών ανάγνωσης και μεταγνωστικών στρατηγικών που μετατρέπουν το «διαβάζω μαθηματικά» σε «κάνω μαθηματικά». Ίσως θα έπρεπε να δούμε με πιο μεγάλη προσοχή το «θέμα θεωρίας» των εξετάσεων και στην περίπτωση που δεχτούμε την αξία του, θα έπρεπε να εξετάσουμε το ενδεχόμενο να συμπεριλάβουμε στο μάθημα των μαθηματικών και την διδασκαλία τεχνικών και στρατηγικών ανάγνωσης του σχολικού εγχειριδίου.

Βιβλιογραφία

Acuna C., (2010). Gestalt Configurations In Geometry, Proceedings of CERME 6, Working Group 5, January 28th-February 1st 2009, © INRP 2010

Acuña, C. (2009). Gestalt configurations in geometry learning. *InProceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*(pp. 706-716).

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say.*The Reading Teacher*, 786-795.

Afflerbach, P., Pearson, P. D., & Paris, S. G. (2008). Clarifying differences between reading skills and reading strategies. *The Reading Teacher*, 364-373.

Anastasiou, D., & Griva, E. (2009). Awareness of reading strategy use and reading comprehension among poor and good readers. Elementary Education Online, 8(2), 283–297.

Anderson, R. C. (1977). Schema – directed provesses in language comprehension, Technical Report No. 50, in A. Lesgold, J. Pelligreno, S. Fokkema, and R. Glaser (Eds.) Cognitive psychology and instruction, New York

Anderson, R.C., Hiebert, E.H., Scott, J.A., Wilkinson, I.A.G. (1985). *Πώς να δημιουργήσουμε ένα έθνος από αναγνώστες* (μτφρ. Αρχοντίδου, Α., Μπίμπου, Ι., Παπαδημητρίου, Φ., & Βοσνιάδου, Σ.). Αθήνα: Gutenberg (2000).

Arcavi A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Baker, L., & Brown, A. L.,(1984). Metacognitive skills and reading. Handbook of reading research. P. D. Pearson. New York, Longman.: 353-394.

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: A deadlock from educational research on proof. In F. L. Lin (Ed.), International conference on mathematics – “Understanding proving and proving tounderstand” (pp. 23–44). Taipei: National Science Council and National Taiwan Normal University.

Barton, M. L., & Heidema, C. (2000). Teaching Reading in Mathematics: A Supplement to" Teaching Reading in the Content Areas Teacher's Manual .".

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1991, February). Visual information and valid reasoning. In *Visualization in teaching and learning mathematics*, 9-24. Mathematical Association of America.

Battista, M. T. (2001). A research-based perspective on teaching school geometry. In J. Brophy (Ed.), Subject-specific instructional methods and activities: Advances in research on teaching, 8 (pp.145-185). Amsterdam: Jai Press/Elsevier Science.

Bilsky, Linda Hickson, Blachman, Sheila, Chi, Chris, Chan-Mui, Athena, & Winter,Phoebe. (1986). Comprehension strategies in math problem and story contexts. *Cognition and Instruction*, *3*, 109-126.

Borasi, R., & Siegel, M. (1990). Reading to learn mathematics: New connections, new questions, new challenges. *For the learning of mathematics*, 9-16.

Borasi, R., & Siegel, M. (2000). *Reading Counts: Expanding the Role of Reading in Mathematics Classrooms*. Teachers College Press, 1234 Amsterdam Avenue, New York, NY 10027.

Borasi, R., Sheedy, J., & Siegel, M., (1990). The Power of Stories in Learning Mathematics. Language Arts, 67 (2).

Boscolo, P., & Mason, L. (2003). Topic knowledge, text coherence, and interest: How they interact in learning from instructional texts. *The Journal of Experimental Education*, *71*(2), 126–148.

Brennan, A. D., & Dunlap, W.P. (1985). What are the prime factors of reading mathematics ?Reading Improvement, 22, 152-159.

Brown, A. L., Campione, J. C., & Day, J. D. (1981). Learning to learn: On training students to learn from texts. *Educational researcher*, 14-21.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational researcher*, *18* (1), 32-42.

Brunner, R., B., (1976) Reading Mathematical Exposition, Educational Research, 18:3, 208-213

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction*, 283-297.

Cowen, C. C. (1991). Teaching and testing mathematics reading. *American Mathematical Monthly*, 50-53.

Culyer, R. C. (1988). Reading and mathematics go hand in hand. Reading Improvement, 25, 189-195.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive psychology*, *20*(4), 405-438

Cunningham, R. F., & Roberts, A. (2010). Reducing the Mismatch of Geometry Concept Definitions and Concept Images Held by Pre-Service Teachers. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1.

De Corte, Erik, Verschaffel, Lieven, & De Win, Luc. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, *77*, 460-470.

Dreyfus T., Hadas N. (1988). Euclid May Stay-and Even Be Taught, *National Council of Teachers of Mathematics*, Year Book, USA, 47-58.

Duke, N. K., & Pearson, P. D. (2002). Effective practices for developing reading comprehension.*In What Research Has to Say About Reading Instruction*, *3*, 205-242.

Duval, R., (1995a). 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing, in R. Suttherland and J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlin, pp. 142–157.

Duval, R., (1998). Geometry from a cognitive of view. Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21stcentury (pp. 37–51). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students? In F. L. Lin (Ed.) Proceedings of the international conference on mathematics– "Understanding proving and proving to understand" (pp. 61–77). Taipei: National Science Council and National Taiwan Normal University.

Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Dvora, T. & Dreyfus, T. (2004). Unjustified assumptions based on diagrams in geometry. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.2, 311-318.

Ediger, M. (1997). Reading in Mathematics. ERIC

Ediger, Marlow (1985). Teaching Mathematics in the ElementarySchool (A Collection of Essays), ERIC Clearing House Resources inEducation.

Fawcett, H. (1938). The nature of proof. The National Council of Teachers of Mathematics Thirteenth Yearbook, Bureau of Publications of Teachers College, Columbia University, New York.

Fischbein E. (2002). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48 (309-329). Kluwer Academic Publishers. Nederlands

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162.

Flavell, J. H., & Wellman, H. M. (1975). Metamemory.

Freudenthal H., (1971), Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3*, 413-435

Fujita T., Jones K. , Yamamoto S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching of Geometry. Paper presented to Topic Study Group 10 at the 10th International Congress on Mathematical Education. Conpenhagen, Denmark

Garner, R. (1987). *Metacognition and reading comprehension*. Ablex Publishing.

Goodman, K. S. (1997). The reading process. In *Encyclopedia of language and education* (pp. 1-7). Springer Netherlands.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Grossman, F., Smith, B, & Miller, C. (1993). Did you say "write" in mathematics class? *Journal of Development Education,* 22(4), 2-6.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education III (pp.234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics* (End of Award Report to ESRC). London: Institute of Education, University of London.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 396-428.

Heinze, A., Cheng, Y. H., & Yang, K. L. (2004). Students' performance in reasoning and proof in Taiwanand Germany: Results, paradoxes and open questions. Zentalbatt fur Didaktik der Mathematik, 36(5),162–171.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 61-76.

Hershkowitz, R. et al. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In: P. Nesher & G. Kilpatrick [eds.] Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 70-95. Cambrige: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Duval, R., Bussi, M. G. B., Boero, P., Lehrer, R., Romberg, T., & Jones, K. (1998). Reasoning in Geometry. In *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 29-83). Springer Netherlands.

Hubbard, R. (1990). Teaching mathematics reading and study skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*,*21*(2), 265-269.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 358-390.

Israel, S. E., & Duffy, G. G. (Eds.), (2014). Handbook of research on reading comprehension. Routledge.

Kaput, J., (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Eds), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (159-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kenney, J. M., Hancewicz, E., Heuer, L., Metsisto, D., & Tuttle, C. L. (2005). *Literacy Strategies for Improving Mathematics Instruction*. ASCD. 1703 North Beauregard Street, Alexandria, VA 22311-1714.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kintsch, W. (1988). The use of knowledge in discourse processing: A construction-integration model. *Psychological Review, 95,*163-182.

Kintsch, W. (2002). On the notions of theme and topic in psychological process models of text comprehension. In M. Louwerse & W. van Peer (Eds.),

Kintsch, W., & Van Dijk, T. A. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Kulpa, Z. (2004). On Diagrammatic Representation of Mathematical Knowledge. *Mathematical Knowledge Management*, 3119.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317.

Lakatos, I. (1976).*Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge university press.

Leary, A. K. (2004). The Status of Literature in the Secondary Mathemmatics Classroom. Thesis presented to the faculty of the College of Education University of Alaska Anchorage for the Degree of Master of Education, UMI Number: 1421665

Lin, F. L., & Yang, K. L. (2007). The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(4), 729-754.

Lin, F. L., Yang, K. L., & Chen, C. Y. (2004). The features and relationships of explanation, understandingproof and reasoning in number pattern. International Journal of Science and Mathematics Education,2(2), 227–256.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises *Educational studies in mathematics*, *52*(1), 29-55.

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 665-679.

MacGregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 449-467.

Magliano, J. P., & Millis, K. K. (2003). Assessing reading skill with a think-aloud procedure and latent semantic analysis. *Cognition and Instruction*, *21*(3), 251-283.

Magliano, J. P., Trabasso, T., & Graesser, A. C. (1999). Strategic processing during comprehension. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 615.

Mannes, S. M., & Kintsch, W. (1987). Knowledge organization and text Organization. *Cognition and instruction*, *4*(2), 91-115.

Martin, W. G. & Harel, G. (1989). Proof frames of pre-service elementary teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), 41-51

McKenna, M.C. and Robinson, R.D.: 1990, 'Content literacy: a definition and implications' *Journal of Reading* 34, 184-186.

McNamara, D. S., Kintsch, E., Songer, N. B., & Kintsch, W. (1996). Are good texts always better? Interactions of text coherence, background knowledge, and levels of understanding in learning from text. *Cognition and instruction*,*14*(1), 1-43.

McNamara, D. S. (2004). SERT: Self-explanation reading training. *Discourse processes*, *38*(1), 1-30.

McNamara, D. S., Boonthum, C., Levinstein, I. B., & Millis, K. (2007). Evaluating self-explanations in iSTART: Comparing word-based and LSA algorithms. *Handbook of latent semantic analysis*, 227-241.

McNamara, D. S., & Magliano, J. (2009). Toward a comprehensive model of comprehension. *Psychology of learning and motivation*, *51*, 297-384.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18.

Mesquita, A. L. (1994). On the utilization of non-standard representations in geometrical problems. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference,* 3,271-278.

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: The discourse of investigation*. New York: Taylor & Francis.

Österholm, M. (2003). Learning mathematics by reading-A study of students interacting with a text. Report, Available from: 2012-03-22 at http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A243565&dswid=2876 accessed: February 2013

Österholm, M., (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts, Educational Studies in Mathematics, (63), 3, 325-346.

Österholm M., (2006). Metacognition and Reading – Criteria for Comprehension of Mathematics Texts, in Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 289-296. Prague: PME. 4 – 289

Österholm M., (2008). Reading Mathematical Texts: Cognitive Processes and Mental Representations, in Mogens Niss (ed) *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education, 4-11 July, 2004*, Discussion Group 14: Focus on the development and research of mathematics textbooks.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future, 83-115.

Paris, S. G., Lipson, M. Y., & Wixson, K. K. (1983). Becoming a strategic reader. *Contemporary educational psychology*, *8*(3), 293-316.

Perrig, W., & Kintsch, W. (1985). Propositional and situational representations of text. *Journal of Memory & Language,* 24, 503-518.

Pressley, M., Harris, K. R., & Marks, M. B. (1992b). But good strategy instructors areconstructivists! *Educational Psychology Review, 4*(1), 3-31.

Ruddell, R. B., & Unrau, N. J. (1994). Reading as a meaning-construction process: The reader, the text, and the teacher.

Rumelhart, D.E., (1977). *Toward an interactive model of reading*. In S. Dornic (Ed.), Attention and performance VI. Hillsdale, NJ: Erlbaum,.

Schmalhofer, F. & Glavanov, D. (1986) Three components of understanding a programmers manual: verbatim, propositional, and situational representations*.* *Journal of Memory and Language*, 25, 279-294.

Schoenbach, R., Greenleaf, C., Cziko, C., & Hurwitz, L. (1999). *Reading for Understanding: A Guide to Improving Reading in Middle and High School Classrooms. The Jossey-Bass Education Series*. Jossey-Bass Inc, Publishers, 350 Sansome St., San Francisco, CA 94104-1342.

Schoenfeld, A. (1986). On having and using geometric knowledge. J. Hiebert [ed] *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics.* Hillsdale NJ. 225-264.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.),Mathematical thinking and problem solving (pp. 53–70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? Journal of Research in Mathematics Education, 34, 4–36.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. Educational Studies in Mathematics, 29(2), 123–151.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *The mathematics teacher*, 448-456.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. Mathematical Thinking and Learning, 2(3), 157–189.

Sheorey, R., & Mokhtari, K. (2001). Differences in the metacognitive awareness of reading strategies among native and nonnative readers. System, 29(4), 431–449.

Shepherd, M. D. (2005). Encouraging students to read mathematics. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *15*(2), 124-144

Shuard, H., & Rothery, A. (Eds.). (1984b). *Children Reading Mathematics*. John Murray.

Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). *Supporting students' mathematical inquiries through reading. Journal for research in mathematics education*, 378-413.Leary, A. K. (2004). The Status of Literature in the Secondary Mathemmatics Classroom. Thesis presented

Siegel, M., Borasi, R., Fonzi, J., & Smith, C.F. (1996). *Beyond wordproblems and textbooks: Using reading generatively in the mathematics classroom*, National Science Foundation, Arlington, V.A.

Sierpinska, A. (1997). Formats of interaction and model readers. *For the learning of mathematics*, 3-12.

Silver, Edward A., Shapiro, Lora J., & Deutsch, Adam. (1993). Sense making and thesolution of division problems involving remainders: An examination of middle schoolstudents' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal forResearch in Mathematics Education*, *24*, 117-135.

Simonson, S. (2011).*Rediscovering mathematics: you do the math*. Mathematical Assosiation of America.

Sipka, (1990), Writing in mathematics: a plethora of possibilities. In A. Sterrett (Ed.), *Using Writing to teach mathematics* (pp. 11-14). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Smagorinsky, P. (2001). If meaning is constructed, what is it made from? Toward a cultural theory of reading. *Review of educational research*, *71*(1), 133-169.

Stanovich, K. E. (1980). *Toward an interactive-compensatory model of individual differences in the development of reading fluency*. Reading Research Quarterly, 16, 32-71

Tall, D, (2004), Thinking Through Three Worlds of Mathematics. in M. J. Heines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 281-288.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thomas, D. A. (1988). Reading and reasoning skills for mathematics problem solvers, Journal ofReading, 32, 244-249.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209

Van Dooren, W., Christou, K.P., & Vamvakoussi, X. (2010). Greek and Flemish students' interpretation of the literal symbols as variables. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), Mathematics in different settings – *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education (Vol. 4, pp. 257-264)*. Belo Horizonte, Brazil: PME

Vergnaud, G. (1998). Towards a cognitive theory of practice. In *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 227-240). Springer Netherlands.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. *International handbook of research on conceptual change*, 3-34.

Weber, K., Brophy, A., & Lin, K. (2008). Learning advanced mathematical concepts by reading text. Paper presented at Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, San Diego, CA

Weinberg, A., & Wiesner, E. (2011). Understanding mathematics textbooks through reader-oriented theory. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 49-63.

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B., & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *PRIMUS*, *22*(2), 152-175.

Wiest, L. (2003). Comprehension of mathematical text. *Philosophy of mathematics education journal*, *17*.

Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 307-326.

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 59-76.

Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. Educational Studies in Mathematics, 21, 199-219

Zachariades, T., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2002, July). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. In *Proceedings in the 10th ICME Conference, Crete, Greece*.

Βαμβακούση (2014), Σημειώσεις μαθήματος «Γνωστική Ψυχολογία - Ψυχολογία μάθησης», ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Βάμβουκας, Μ. (2007). Ψυχοπαιδαγωγική Θεώρηση της Κατανόησης των Αναγνωσμάτων. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη

Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., & Σκοπελίτη, Ε. (2008). Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην ψυχολογία. *Νόησις,*3(1), 137-180.

Ζαχαριάδης, (2014) σημειώσεις μαθήματος «Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού», ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Θωμαϊδης Ι., Πούλος Α., (2000). Διδακτική της Ευκλείδιας Γεωμετρίας, εκδόσεις Ζητη.

Θωμαΐδης, Γ. (1991). Οι συντεταγμένες της σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, (61), 27-38.

Ιγγλέζου, Α., (2014). Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα, Διπλωματική Εργασία, ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ. & Τάτσης, Κ. (2009). Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού. Ευκλείδης Γ΄, 71, 42-62

Κολέζα Ε., (2003). *Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών* Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Πόρποδας, Κ., (2002). Η ανάγνωση. Πάτρα

Πόρποδας, Κ., (2003). Διαγνωστική Αξιολόγηση και Αντιμετώπιση των Μαθησιακών Δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο (Ανάγνωση, Ορθογραφία, Δυσλεξία, Μαθηματικά

Πόταρη, Δ.,(2001) "Μαθηματικός αλφαβητισμός και Γεωμετρία: Αντιλήψεις και διδακτικές επιλογές των μελλοντικών εκπαιδευτικών." 18ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας : 390-401. <http://eudml.org/doc/235976>.

Σπαθάρας, Δ., (2015). Οδηγός για τις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις στα Μαθηματικά των Α και Β τάξεων Ημερ. Γενικού Λυκείου Περιόδου Μαΐου- Ιουνίου 2015

Η εικόνα του εξώφυλλου είναι από το βιβλίο:

Barton, Mary Lee, Clare Heidema, and Deborah Jordan. "Teaching Reading in Mathematics and Science." Educational leadership 60.3 (2002): 24-28. Διαθέσιμο από: http://valees.org/pdf/math_teaching_reading_barton2002_sample_chapters.pdf

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

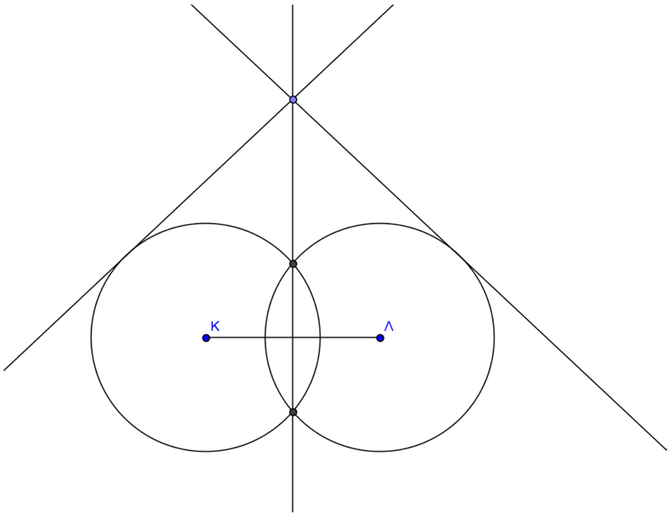
ΥΛΙΚΟ

1. Να φτιάξετε ένα σχήμα για το πόρισμα της σελ. 62 και να σημειώσετε επάνω σε αυτό τα συμπεράσματα του πορίσματος. Να γράψετε τα συμπεράσματα με ισότητες

2. Να εξηγήσετε το σχήμα 62 της σελίδας 64

3. Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) τέμνονται. Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη προέκταση της κοινής τους χορδής ΑΒ προς τη μεριά του Α. Τα ΜΕ και ΜΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το Μ στους κύκλους (Κ,ρ) και (Λ,ρ) αντίστοιχα. Τα τμήματα ΚΛ και ΑΒ τέμνονται στο σημείο Γ Να δείξετε ότι ΜΕ=ΜΖ

Να συμπληρώσετε το σχήμα



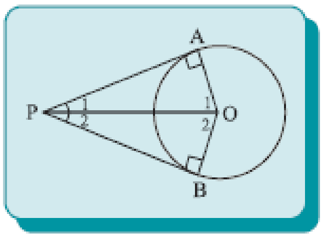
Να συμπληρώσετε την απόδειξη

1. ΚΛ ⊥ ΑΒ	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό;*
2. ΚΓ=ΛΓ	*(δικαιολογείστε)*
Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΓ και ΜΛΓ	
3. ΚΓ=ΛΓ	Αποδείχθηκε στο 2
4. (συμπληρώστε την ισότητα)	Κοινή πλευρά
5. Αρα ΜΚΓ=ΜΛΓ *Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό;*	
Θα δείξω ότι τα τρίγωνα ΜΕΚ = ΜΖΛ	
6. *(αποδείξτε την πιο πάνω πρόταση)*	
7. ΜΕ=ΜΖ	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται *εφαπτόμενα τμήματα* του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ *διακεντρική ευθεία* του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

Θεώρημα ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A}=\hat{B}=90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

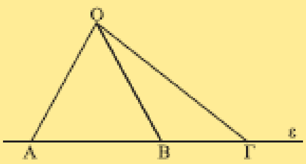
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

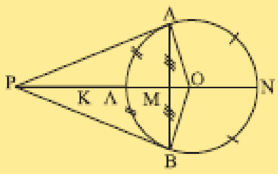
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;*

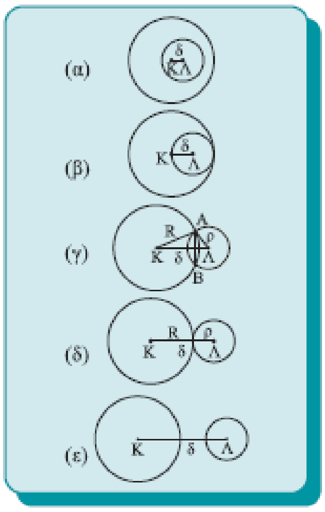
2. *Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*



3. *Στο παρακάτω σχήμα τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, η ΡΚ διχοτόμος της $A\hat{P}B$, τα Λ, Ν μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AΛB}$, $\overset{\frown}{ANB}$ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:*



i) ΡΑ = ΡΒ.	Σ	Λ
ii) Η ΡΚ διέρχεται από το Ο.	Σ	Λ
iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν.	Σ	Λ
iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$.	Σ	Λ

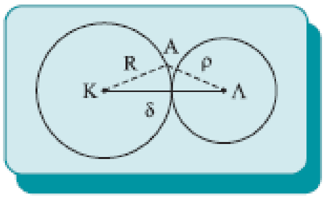


Σχήμα 62

και μόνο αν **δ < R – ρ** (σχ.62α).
(ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν **δ > R + ρ** (σχ.62ε).

• Εφαπτόμενοι κύκλοι

(i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν **δ = R – ρ** (σχ.62β).
(ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν **δ = R + ρ** (σχ.62δ).
Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται ***σημείο επαφής*** και είναι σημείο της διακέντρου.
Πράγματι, αν το σημείο επαφής Α (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ, δηλαδή δ < R + ρ, που είναι άτοπο.



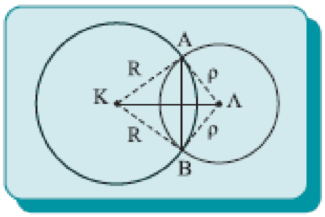
Σχήμα 63

• Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν **R – ρ < δ < R + ρ** (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

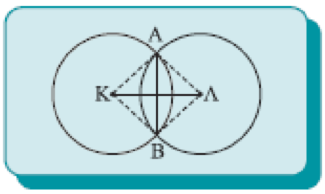
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 64

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) του σχ.64 και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή ΚΑ = ΚΒ = R, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την ΛΑ = ΛΒ = ρ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.



Σχήμα 65

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν R = ρ, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.
Πράγματι, επειδή R = ρ, θα είναι ΑΚ = ΑΛ και ΒΚ = ΒΛ. Άρα τα Α και Β είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΚΛ και επομένως η κοινή χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ

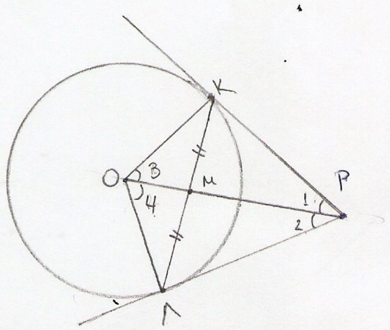
(Β φάση της έρευνας)

1. Με κλίμακα από το 1έως το 5 βαθμολογήσετε πόσο σίγουρες είστε ότι απαντήσατε σωστά Από 1 καθόλου σίγουρη ως 5 απολύτως σίγουρη
2. Όταν προετοιμάζεστε για ένα διαγώνισμα στα μαθηματικά, πως διαβάζετε; Διαβάζετε από το βιβλίο και πως;
3. Αν κάποια φορά χάσετε ένα μάθημα στο σχολείο, πως το αναπληρώνετε; Μπορείτε να καλύψετε το κενό μόνες σας ή πρέπει να περιμένετε να τα ξαναπεί ο δάσκαλος στο σχολείο;
4. Φανταστείτε ότι έχετε εξετάσεις και έχετε διαβάσει καλά, δηλαδή έχετε κάνει ότι μπορείτε για αν προετοιμαστείτε όσο καλύτερα γίνεται. Σας έχει τύχει να πάτε στις εξετάσεις σίγουρες ότι θα γράψετε καλά και να μην τα καταφέρετε;
5. Στο διαγώνισμα των μαθηματικών, το θέμα της θεωρίας, σας φαίνεται ότι είναι όντως το πιο εύκολο;

ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

ΣΤΟ 1ο ΚΑΙ 2ο ΕΡΩΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ

1. Να φιάξετε ένα σχήμα για το πόρισμα της σελ. 62 και να σημειώσετε επάνω σε αυτό τα συμπεράσματα του πορίσματος. Να γράψετε τα συμεράσματα με ισότητες



(i) $KM = MΛ$
$OP \perp KΛ$.

(ii) $P_1 = P_2$
$O_3 = O_4 \Rightarrow$
ΟΡ διχοτόμος των $\hat{P}$ και $\hat{O}$

2. Να εξηγείσετε το σχήμα 62 της σελίδας 64

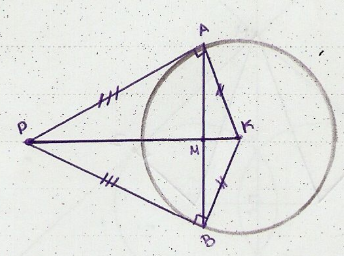
Το σχήμα 62 της σελίδα 64 αναφέρεται στη σχετική θέση δύο κύκλων και της διακέντρου, και διακρίνει 3 περιπτώσεις:

(i) κύκλοι χωρίς κοινά σημεία — α) εσωτερικοί κύκλοι, ε) εξωτερικοί κύκλοι

(ii) εφαπτόμενοι κύκλοι — β) εσωτ. κύκλοι, δ) εξωτ. κύκλοι

(iii) τεμνόμενοι κύκλοι (γ)

1. Να φιάξετε ένα σχήμα για το πόρισμα της σελ. 62 και να σημειώσετε επάνω σε αυτό τα συμπεράσματα του πορίσματος. Να γράψετε τα συμεράσματα με ισότητες



KA = KB ακτινες ιδιου κύκλου
PA = PB επειδή είναι εφαπτόμενες ιδιου κύ-
κλου απο το ιδιο ση-
μειο P.

συγκρήνω $A\hat{K}P$ και $B\hat{K}P$ που είναι ορθογώνια
KP = PK κοινή πλευρά
AK = KB ακτινες
Άρα $A\hat{K}P = B\hat{K}P$ αφου (K, Y)

2. Να εξηγήσετε το σχήμα 62 της σελίδας 64

α) Στην εικονα 62α. παρατηρώ 2 κύκλους, ο ένας είναι εσω-
τερικά του δευτερου. Η διάκεντρός τους είναι μικρότερη
απο την ακτηνα του πρώτου και του δευτερου. Αυτό γίνεται
επειδή και τα δύο κέντρα βρίσκονται εσωτερικά του εσωτε-
ρικού κέντρου. $(\delta < R - \rho.)$

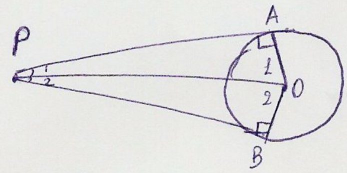
β) Στην εικόνα 62β παρατηρώ δύο κύκλους, ο ένας είναι εσωτε-
ρικά του δευτερου. Το κέντρο του μεγάλου είναι σημείο του μι-
κρού. Η διάκεντρός τους είναι ίση με την
ακτίνα του εσωτερικού κύκλου. $\cancel{(\delta = R + \rho)}$ $(\delta = R - \rho)$

γ) Στην εικονα 62γ παρατηρώ 2 κύκλους οι οποίοι τέμνονται
και έχουν δύο σημεία τομής, A και B. Η διάκεντρός τους είναι
μεγαλύτερη απο τις ακτίνες τους. Είναι ίση με το ά-
θροισμα των ακτίνων τους. $(R - \rho < \delta < R + \rho)$

δ) Οι κύκλοι στην εικόνα εφάπτονται εξωτερικά, έχουν ένα
μόνο κοινό σημείο, ενω ο μικρός βρίσκεται στο εξωτερικό
του άλλου. Η διάκεντρος τους είναι ίση με το άθροισμα των
ακτίνων τους $(\delta = R + \rho)$

ε) Οι κύκλοι δεν εφάπτονται ούτε τέμνονται, ~~εξωτερ~~
το μικρό κύκλο είναι στο εξωτερικό του μεγάλου. Επί-
σης η διάκεντρός τους είναι μεγαλύτερη απο το ά-
θροισμα των ακτίνων τους $(\delta > R + \rho)$

1. Να φτιάξετε ένα σχήμα για το πόρισμα της σελ. 62 και να σημειώσετε επάνω σε αυτό τα συμπεράσματα του πορίσματος. Να γράψετε τα συμπεράσματα με ισότητες



▷ PO : μεσοκάθετος τυς

▷ $P\hat{1} = P\hat{2}$ και $O\hat{1} = O\hat{2}$

(4)

▷ PA=PB

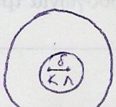
2. Να εξηγήσετε το σχήμα 62 της σελίδας 64

Π Π ΦΓ / ΣΓ

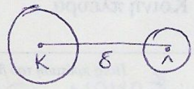
~~Δύο κύκλοι χωρίς κοινά σημεία~~

~~(Κ,R) κύκλος (Λ,ρ) βρίσκεται~~

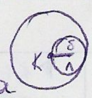
▷ Όταν ένας κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου και δεν έχουν κοινά σημεία, τότε $δ < R-ρ$. ⇝



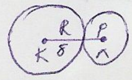
ενώ όταν βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου ισχύει: $δ > R+ρ$ ⇝



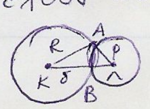
▷ Όταν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο τότε: $δ = R-ρ$ ⇝



ενώ όταν εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο τότε: $δ = R+ρ$ ⇝



▷ Όταν οι κύκλοι τέμνονται, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία αν και μόνο αν $R-ρ < δ < R+ρ$ ⇝



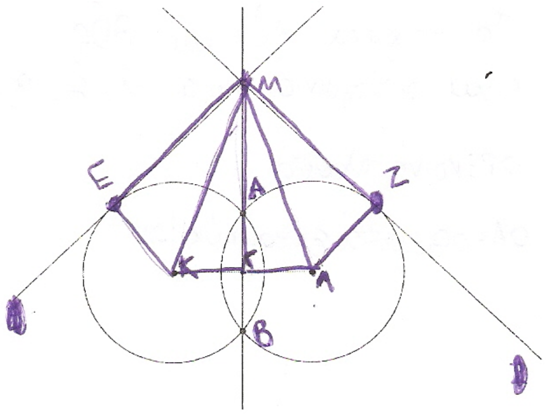
(4)

ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

ΣΤΟ 3ο ΕΡΩΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ

3. Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) τέμνονται. Ενα σημείο Μ βρίσκεται στη προέκταση της κοινής τους χορδής ΑΒ προς τη μεριά του Α. Τα ΜΕ και ΜΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το Μ στους κύκλους (Κ,ρ) και (Λ,ρ) αντίστοιχα. Τα τμήματα ΚΛ και ΑΒ τέμνονται στο σημείο Γ Να δείξετε ότι ΜΕ=ΜΖ

Να συμπληρώσετε το σχήμα

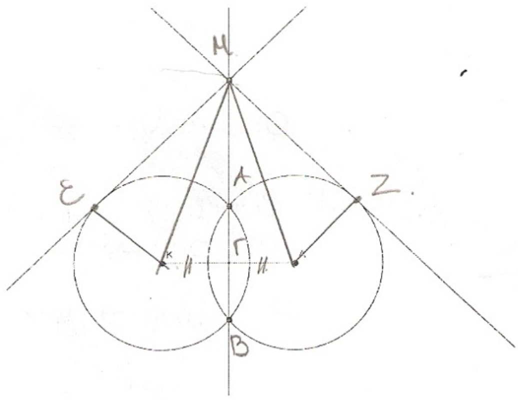


Λ

1. ΚΛ ⊥ ΑΒ Είναι.	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό*
2. ΚΓ=ΛΓ Είναι	*(δικαιολογείστε)* κάθετες στο σημείο τομής
Συκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΓ και ΜΛΓ	
3. ΚΓ=ΛΓ	Αποδείχθηκε στο 2
4. *(συμπλρώστε την ισότητα)* ΜΓ	Κοινή πλευρά
5. Αρα ΜΚΓ=ΜΛΓ	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό* Το σημέιο Γ είναι σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.
Θα δείξω ότι τα τρίγωνα ΜΕΚ = ΜΖΛ	
6. *(αποδείξτε την πιο πάνω πρόταση)* α) ΜΚ=ΜΛ β) Ê=Ẑ=1L	→διάκεντροι των κύκλων.
7. ΜΕ=ΜΖ Ισχύει	*(δικαιολογείστε)* είναι εφαπτομένες του κύκλου

3. Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) τέμνονται. Ενα σημείο Μ βρίσκεται στη προέκταση της κοινής τους χορδής ΑΒ προς τη μεριά του Α. Τα ΜΕ και ΜΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το Μ στους κύκλους (Κ,ρ) και (Λ,ρ) αντίστοιχα. Τα τμήματα ΚΛ και ΑΒ τέμνονται στο σημείο Γ Να δείξετε ότι ΜΕ=ΜΖ

Να συμπληρώσετε το σχήμα

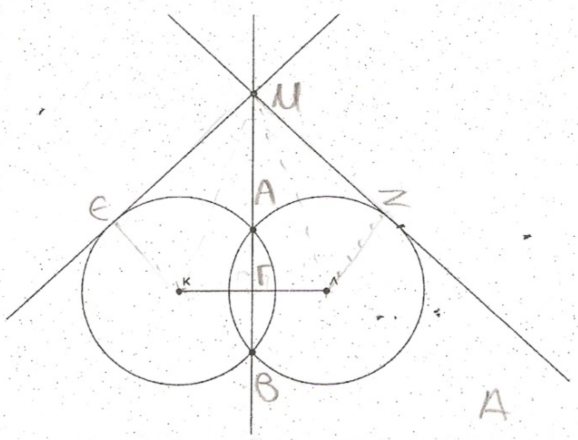


ΑΣ

1. ΚΛ ⊥ ΑΒ	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό* το Θεώρημα της σελ. 64 Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
2. ΚΓ=ΛΓ	*(δικαιολογείστε)* ΑΒ μεσοκάθετος* => Γ μέσο του ΚΛ * σύμφωνα με το Θεώρημα σελ. 64
Συκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΓ και ΜΛΓ	
3. ΚΓ=ΛΓ	Αποδείχθηκε στο 2
4. *(συμπλρώστε την ισότητα)* ΜΓ	Κοινή πλευρά
5. Αρα ΜΚΓ=ΜΛΓ	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό*
Θα δείξω ότι τα τρίγωνα ΜΕΚ = ΜΖΛ	
6. *(αποδείξτε την πιο πάνω πρόταση)* ΕΚ=ΛΖ ΚΜ=ΛΜ ΜΕ=ΜΖ	ακτίνες ίσων κύκλων πλευρές ίσων τριγώνων (αποδείχτηκε στο 5) εφαπτόμενα τμήματα ίσων και τεμνόμενων κύκλων που άγονται από σημείο της
μεσοκαθέτου, της	κοινής τους χορδής, έξω από αυτούς
7. ΜΕ=ΜΖ	*(δικαιολογείστε)* αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων.

3. Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) τέμνονται. Ενα σημείο Μ βρίσκεται στη προέκταση της κοινής τους χορδής ΑΒ προς τη μεριά του Α. Οι ΜΕ και ΜΖ είναι οι εφαπτόμενες από το Μ στους κύκλους (Κ,ρ) και (Λ,ρ) αντίστοιχα. Τα τμήματα ΚΛ και ΑΒ τέμνονται στο σημείο Γ Να δείξετε ότι ΜΕ=ΜΖ

Να συμπληρώσετε το σχήμα



Να συμπληρώσετε την απόδειξη

1. ΚΛ ⊥ ΑΒ	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό* Θεώρημα σελ. 64
2. ΚΓ=ΛΓ	*(δικαιολογείστε)* Επειδή οι ακτίνες των δύο κύκλων είναι ίσες
Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΓ και ΜΛΓ	
3. ΚΓ=ΛΓ	Αποδείχθηκε στο 2
4. *(συμπληρώστε την ισότητα)* ΜΓ=ΜΓ	Κοινή πλευρά
5. Αρα ΜΚΓ=ΜΛΓ	*Ποια πρόταση του βιβλίου τεκμηριώνει τον ισχυρισμό*
Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία	
Θα δείξω ότι τα τρίγωνα ΜΕΚ = ΜΖΛ	
Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΜΕΚ}$ και $\overset{\Delta}{ΜΖΛ}$	
6. *(αποδείξτε την πιο πάνω πρόταση)* Ε = Ζ = 90° (από υπόθεση) ΜΚ=ΜΛ (από προηγ. σύγκρ.)	ΕΚ=ΛΖ ως ακτίνες άρα τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες
7. ΜΕ=ΜΖ	*(δικαιολογείστε)*
Επειδή τα τρίγωνα ΜΕΚ=ΜΖΛ έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα άρα ΜΕ=ΜΖ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου	