ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
*"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"*

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Η ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΠΟ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

Αποστολάκη Ελένη
ΑΜ: Δ201010

Επιβλέπων Καθηγητής
Γεώργιος Ψυχάρης

Αθήνα
Ιούλιος, 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

| Ονοματεπώνυμο | Βαθμίδα | Υπογραφή |
|---|---|---|
| 1) Γεώργιος Ψυχάρης (επιβλέπων Καθηγητής) | Λέκτορας | ……………. |
| 2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης | Καθηγητής | ………..… |
| 3) Έλενα Ναρδή | Καθηγήτρια | ………..…. |

Στους γονείς μου,
Ρίτσα Καρνιωτάκη και Κώστα Αποστολάκη

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς:

Τον κ. Γ. Ψυχάρη που δέχτηκε να είναι επιβλέπων της διπλωματικής εργασίας μου και με βοήθησε με την καθοδήγηση και τις συμβουλές του. Τον ευχαριστώ για τις ουσιώδεις και ακριβείς παρατηρήσεις του, για το κουράγιο που μου έδινε, για την πίστη του στις ικανότητές μου και προπάντων για την υπομονή και την ευγένειά του.

Την κα. Ε. Ναρδή γιατί εκείνη αρχικά μου παρουσίασε τον κόσμο της Διδακτικής των Μαθηματικών το έτος 2008. Την ευχαριστώ για τη βοήθειά της στην εργασία μου, την ώθηση και τη στήριξη και κυρίως για την απλότητα στις κατευθύνσεις που μου έδινε.

Τον κ. Θ. Ζαχαριάδη για τη συνεισφορά του στην εργασία μου και κυρίως γιατί μέσα από τη Διδακτική του Απειροστικού με έκανε να αναθεωρήσω τις γνώσεις μου πάνω στον Απειροστικό και να αποφασίσω να ασχοληθώ με αυτό το μαθηματικό αντικείμενο.

Τη θαυμάσια ομάδα των φοιτητών που δέχτηκαν με χαρά να βοηθήσουν στην έρευνά μου. Τους ευχαριστώ για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν, χωρίς αυτούς η εργασία μου δε θα μπορούσε να γίνει.

Τους φίλους μου Γιώργο Κοζυράκη και Χρύσα Παπαδάκη για την ξεχωριστή τους βοήθεια στην εργασία μου. Επίσης, τους φίλους μου: Αρετή, Βασίλη, Βάσω, Γιάννη, Έλενα, Νίκο, Σίσσυ, Ελένη, Βασίλη, Κοσμά, Άννα, Δήμο και Μάριο που με την αγάπη τους και τη συμπαράστασή τους μου έδιναν κουράγιο να φτάσω στο τέλος.

Τέλος, του γονείς μου για την αγάπη και τις αξίες που μου χάρισαν, για την αμέριστη και έμπρακτη στήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ελένη Αποστολάκη,
Ιούλιος 2014

# Περιεχόμενα

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά σε ένα ανεξάρτητο διδακτικό πείραμα με πέντε προπτυχιακούς φοιτητές μαθηματικού τμήματος σχετικά με τη νοηματοδότηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού, χρησιμοποιώντας τα ψηφιακά εργαλεία GeoGebra. Το πείραμα χωρίστηκε σε τέσσερεις φάσεις, εκ των οποίων η πρώτη ήταν εισαγωγική, η δεύτερη αφορούσε στην έννοια του ρυθμού μεταβολής, η τρίτη στην ολοκλήρωση και η τέταρτη στο Θεώρημα. Για κάθε φάση σχεδιάστηκαν δραστηριότητες με και χωρίς τη χρήση του λογισμικού. Εξετάζουμε τη νοηματοδότηση στο Θεώρημα και στις επιμέρους έννοιες που σχετίζονται με αυτό, με βάση την *επικοινωνιογνωστική προσέγγιση*, τις *νοητικές εικόνες* των φοιτητών και τις *τοπικές αφαιρέσεις* που κάνουν κατά την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες. Η ανάλυση των δεδομένων βασίζεται στην επιλογή κρίσιμων συμβάντων. Τα αποτελέσματα επικεντρώνονται στις δυσκολίες των φοιτητών στη νοηματοδότηση του Θεωρήματος. Αυτές, σχετίζονται με ασθενείς νοηματοδοτήσεις στις έννοιες: του ρυθμού μεταβολής, του ορίου, της συναρτησιακής συμμεταβολής και της πολλαπλασιαστικής κατασκευής ποσοτήτων και έρχονται σε συμφωνία με προϋπάρχουσες έρευνες.

**Λέξεις κλειδιά**: Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, ρυθμός μεταβολής, επικοινωνιογνωστική προσέγγιση, GeoGebra

## ABSTRACT

The present study concerns a teaching experiment conducted independently with five undergraduate students regarding their understanding of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) using the GeoGebra tools. The experiment is structured in four phases, including a warm up session in the first phase, concepts of rate of change and accumulation in the second and third phases accordingly and the FTC in the fourth phase. Tasks with and without the use of digital tools were constructed for each phase. We examine students' construction of meanings for the FTC and its closely related concepts through the *commognitive framework*, through students' *images* and their *situated abstractions* while using the digital tools. Data analysis is based on a selection of critical incidents. Conclusions include students' difficulties in conceptualizing the FTC which stem from impoverished meanings of the concepts of rate of change, limit, functional covariation and multiplicatively constructed quantities. These conclusions concur with findings from previous studies.

**Key words**: Fundamental Theorem of Calculus, rate of change, commognition, GeoGebra

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού αποτελεί το επιστέγασμα των σύνθετων μαθηματικών εννοιών που συναντάμε στη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού. Είναι αξιοσημείωτο ότι η κατανόηση των φοιτητών για το Θεμελιώδες Θεώρημα καταλαμβάνει σημαντικό μέρος της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών. Σε αυτή την έρευνα εξετάζουμε τη νοηματοδότηση πέντε φοιτητών ενός μαθηματικού τμήματος για το Θεμελιώδες Θεώρημα, μέσα από ένα διδακτικό πείραμα που βασίστηκε στη χρήση ψηφιακών εργαλείων. Διερευνούμε λοιπόν τα παρακάτω ερωτήματα: Η κατανόηση των φοιτητών για το Θεμελιώδες Θεώρημα είναι εννοιολογική (conceptual) ή διαδικαστική (procedural); Πώς νοηματοδοτούν οι φοιτητές το Θεώρημα, μέσα από τη μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης, που αναπαριστούμε σε υπολογιστικό περιβάλλον; Με ποιους τρόπους κατανοούν τις επιμέρους έννοιες που απαρτίζουν το Θεώρημα; Αναγνωρίζουν τις συνδέσεις που τις διέπουν;

### Συνοπτική εννοιολογική ανάλυση του Θεμελιώδους Θεωρήματος

Αναμφισβήτητα, η ιστορία του Θεμελιώδους Θεωρήματος και τα επιστημονικά επιτεύγματα που ακολούθησαν χάρη στη δημιουργία του, αποτελούν πλούσια και ενδιαφέροντα θέματα μελέτης. Πριν προβούμε σε μια συνοπτική ανασκόπηση της θεμελίωσης του Θεωρήματος, ας δούμε πώς διατυπώνεται η σχέση ανάμεσα στην *παράγωγο* και το *ολοκλήρωμα* στα σύγχρονα μαθηματικά εγχειρίδια:

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω ότι η $f$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

I) Αν η συνάρτηση $F$ ορίζεται ως

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

για κάθε $x$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε η $F$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$.

II) Αν $G$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$$

Σχετικά με το πρώτο μέρος του Θεωρήματος, ο Thompson (1994), ψάχνοντας τρόπους να περιγράψει το θεώρημα με έναν εύληπτο τρόπο σε κάποιον που στοχάζεται πάνω στη σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος, επιχειρεί την εξής προσέγγιση: 'Αν μια ποσότητα $A$ έχει μέτρο $t$ που κυμαίνεται από $\alpha$ έως $\beta$, και μια ποσότητα $B$ έχει μέτρο $f(t)$ θεωρούμενη ως συνάρτηση του μέτρου του $A$, και αν $AB$ είναι μια ποσότητα που κατασκευάζεται πολλαπλασιαστικά από τις ποσότητες $A$ και $B$, τότε καθώς η ποσότητα $AB$ συσσωρεύεται ενόσω μεταβάλλεται η ποσότητα $A$ (και άρα και η B), η συσσώρευση της ποσότητας $AB$ μεταβάλλεται με ρυθμό που είναι πανομοιότυπος με το μέτρο της ποσότητας B, δηλαδή με το $f(t)$, στο απώτατο άκρο της συσσώρευσής της' (σελ 234).

Θα μπορούσαμε ακόμα να ερμηνεύσουμε διαισθητικά το θεώρημα ως εξής: 'Σε μια μεταβαλλόμενη ποσότητα που προκύπτει από το γινόμενο δύο άλλων, η ολική συσσώρευση της ποσότητας αυτής, μεταβάλλεται όπως ο λόγος των αυξήσεων των ποσοτήτων που τη συνθέτουν' (Thompson, 1994, σελ 235).

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχετε ταξιδέψει με ένα αυτοκίνητο, $x$ χιλιόμετρα και ότι τα επόμενα 0.0001 δευτερόλεπτα, η μέση ταχύτητά σας είναι 93 km/hr. Κατά τη διάρκεια των 0.0001 δευτερολέπτων η συνολική απόσταση που έχετε διανύσει (συσσωρευμένη ποσότητα) μεταβάλλεται με ρυθμό 93 km/hr – ανεξάρτητα από το πόσο μακριά έχετε φτάσει. Αν φανταστούμε ότι κατά τη διάρκεια κάθε απειροελάχιστης χρονικής περιόδου οδηγούσατε με κάποια μέση ταχύτητα και αν μπορούσαμε να γνωρίζουμε κάθε μια από αυτές τις μέσες ταχύτητες, θα μπορούσαμε να ανασκευάσουμε τη συνολικά διανυθείσα απόσταση σε κάθε απειροελάχιστη χρονική περίοδο. Έτσι, αν γνωρίζαμε μια αναλυτική έκφραση που θα μας έδινε την ταχύτητα σας σε κάθε απειροελάχιστη χρονική περίοδο, θα μπορούσαμε κατ' αρχήν να καλύψουμε τη συνάρτηση της απόστασης που διανύσατε. Το πρόβλημα απαιτεί μια τεχνική: να κατασκευάσουμε μια αναλυτική συνάρτηση, της οποίας ο ρυθμός μεταβολής διαφέρει, το πολύ απειροελάχιστα, από τους ρυθμούς μεταβολής που γνωρίζουμε ότι είχατε. Η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση της ταχύτητας και της απόστασης αλλά σε κάθε περίπτωση που μια ποσότητα προκύπτει από το γινόμενο δυο άλλων ποσοτήτων- εκ των οποίων η μια είναι ο ρυθμός μεταβολής της (Thompson, 1994, σελ 236).

**Σύντομη ιστορική ανασκόπηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος**

Αξίζει να επισημανθεί ότι η σύλληψη του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού, έλαβε χώρα ξεχωριστά από τον Isaac Newton και τον Gottfied Leibniz στα τέλη του 1600. Συγκεκριμένα, ο Newton τον Οκτώβριο του 1666 σε ένα χειρόγραφο του με τίτλο «Η μπροσούρα του Οκτωβρίου του 1666 για τις ροές», παρουσιάζει το Θεμελιώδες Θεώρημα στη μορφή $\frac{dE}{dx} = y$, όπου Ε το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$, βρίσκοντας έτσι τη διαδικασία που οδηγεί στο ορισμένο ολοκλήρωμα. Ο Leibniz το 1674 γνωστοποίησε με επιστολή του στον

Oldenburg, γραμματέα της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου, την ανακάλυψη του Θεωρήματος που έγινε γνωστό με την ονομασία «Θεώρημα Μετασχηματισμού», όπου υπολογίζει εμβαδά καμπυλόγραμμων σχημάτων με χρήση απειροστών ορθογωνίων και απειροστών τριγώνων (Γιαννακούλιας, 2007). Ο Courant αναφέρει ότι το Θεμελιώδες Θεώρημα αποτελεί την 'κεντρική ιδέα ολόκληρου του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού' (Courant, 1937, σελ 111). Η δημιουργία του κατέστησε δυνατή την αλγοριθμική ανάπτυξη αυτού που σήμερα ονομάζουμε Απειροστικό Λογισμό. Παράλληλα, προκάλεσε μια πολιτιστική αναγκαιότητα για τη βαθύτερη διερεύνηση, αλλά και την επίλυση των σχέσεων ανάμεσα σε διακριτά και συνεχόμενα μεγέθη, από όπου προήλθε η τυποποίηση του συστήματος των πραγματικών αριθμών (Baron 1969, Boyer, 1959).

Πριν από την σύλληψη του Θεμελιώδους Θεωρήματος από τους Newton και Leibniz, αυτό που σήμερα ονομάζουμε *ολοκλήρωση* θεωρούνταν ο καθορισμός ενός συσσωρευμένου μεγέθους (cumulative amount), δηλαδή μιας ποσότητας όπως το μήκος τόξου, το εμβαδό, ο όγκος ή η μάζα. Από την άλλη πλευρά, *παραγώγιση* θεωρούταν ο καθορισμός της γωνιακής ταχύτητας, της εφαπτομενικότητας ή της καμπυλότητας. Οι δύο παραπάνω κλάσεις προβλημάτων, εξετάζονταν ξεχωριστά και κάθε φορά διερευνούνταν με τεχνικές περιορισμένες στον τύπο του προβλήματος που απευθύνονταν (Thompson, 1994, σελ 235).

Η εστίαση στις δύο κλάσεις προβλημάτων αναπτύχθηκαν σαν φυσική απόρροια της συνειδητοποίησης ότι η συμμεταβολή δύο μεγεθών μπορεί να απεικονιστεί γραφικά, έτσι ώστε κάθε πρόβλημα *συσσώρευσης* να αναπαρασταθεί σαν πρόβλημα καθορισμού εμβαδού, ενώ κάθε πρόβλημα *ρυθμού μεταβολής* να μπορεί να αναπαρασταθεί σαν πρόβλημα εφαπτομενικότητας (Boyer, 1959). Από τα παραπάνω, έπεται ότι η αρχική ανάπτυξη των ιδεών του Απειροστικού Λογισμού έγινε από μαθηματικούς που είχαν μια πολύ ισχυρή κατανόηση, ότι παρόλο που εστιαζόμαστε αποκλειστικά σε εφαπτόμενες καμπυλών ή σε εμβαδά που φράσσονται από καμπύλες, στην πραγματικότητα ψάχνουμε γενικές λύσεις σε κάθε πρόβλημα συσσώρευσης ή ρυθμού μεταβολής, που θα μπορούσε να εκφραστεί με αναλυτικό τρόπο (Boyer, 1959, Baron, 1969).

Στις σχέσεις που ανέπτυξε ο Newton ανάμεσα στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα, έχουμε μια έκφραση για το εμβαδόν η οποία δεν προέκυψε από τον καθορισμό του αθροίσματος απειροστών εμβαδών αλλά ούτε και από ισοδύναμες μεθόδους που αναπτύχθηκαν από προγενέστερους του Newton, όπως ο Αντίφωνας και ο Pascal. Απεναντίας, κατακτήθηκε από την παρατήρηση και τον υπολογισμό της στιγμιαίας αύξησης του εμβαδού στο ζητούμενο σημείο. Με άλλα λόγια, ενώ πρωτύτερα η εύρεση εμβαδού γινόταν μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος- που ορίζεται ως όριο αθροίσματος- ο Newton προσδιόρισε πρώτα τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και μετά βρήκε το ίδιο το εμβαδόν– μέσα από αυτό που σήμερα ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και αναπαρίσταται μέσω της τεταγμένης της συνάρτησης ολοκλήρωσης. Να σημειωθεί επιπλέον ότι η διαδικασία που είναι θεμελιώδης σε αυτή την πρόταση είναι ο καθορισμός του ρυθμού μεταβολής. Με άλλα λόγια, αυτό που τώρα ονομάζουμε παράγωγο θεωρείται ως η βασική ιδέα και το ολοκλήρωμα ορίζεται μέσα από αυτή (Thompson, 1994, σελ 235).

Ο Newton στην εργασία του με τίτλο ‘Μέθοδος των ροών και άπειρες σειρές’ (Method of fluxions and infinite series, 1671), αναφέρει:

«Θεωρώ εδώ ότι τα μαθηματικά μεγέθη δεν συντίθενται από τα μικρότερα δυνατά τμήματα, αλλά ότι αποδίδονται από μια συνεχή κίνηση. Οι γραμμές, έχοντας ήδη περιγραφεί, παράγονται όχι με παράθεση τμημάτων, αλλά από τη συνεχή κίνηση σημείων. Οι επιφάνειες παράγονται από την κίνηση γραμμών, τα στερεά από την κίνηση επιφανειών, οι γωνίες από την περιστροφή των πλευρών τους, ο χρόνος από μια συνεχή ροή… Η παραγωγή των πραγμάτων μ’ αυτό τον τρόπο κατέχει μια πραγματική θέση στη φύση και την παρατηρούμε καθημερινά στην κίνηση των σωμάτων» (Newton, 1671, σελ 236).

Ο ίδιος λοιπόν, με θεωρητική αφετηρία τη συνεχόμενη κίνηση, όπως φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα, οραματιζόταν τους ρυθμούς μεταβολής ποσοτήτων ως *ροές* (*fluxions*) και αυτό που σήμερα ονομάζουμε συναρτήσεις, ως *ρέοντα* (*fluents*) (ρευστές ποσότητες που δημιουργούνται από ροές). Η παραπάνω θεώρηση του Newton, είναι και ο κύριος λόγος που η ενόραση του ήταν τόσο σπουδαία. Η μέθοδος του ίδιου ήταν να ξεκινήσει από την αναλυτική έκφραση μιας συνάρτησης $f$ - που δίνει το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας- και να παραγωγίσει την αναλυτική έκφραση μιας συνάρτησης $F$ - που δίνει τη συσσώρευση αυτής της ποσότητας.

**Το Θεμελιώδες Θεώρημα όπως προσεγγίζεται στην παρούσα εργασία**

Η εννοιολογική προσέγγιση του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού, αποτέλεσε πρόκληση και πηγή κινήτρων για την ίδια την ερευνήτρια. Σε αυτή την εργασία, επιχειρούμε να αναπαραστήσουμε τα ‘κινούμενα μέρη’ του Θεμελιώδους Θεωρήματος μέσω των εργαλείων δυναμικού χειρισμού GeoGebra και αναρωτιόμαστε: Ποιά είναι τα νοήματα που κατασκευάζουν οι φοιτητές γύρω από την έννοια του *ρυθμού μεταβολής* μιας ποσότητας, όταν την προσεγγίζουν με δυναμικό τρόπο; Πώς νοηματοδοτούν τη *συσσώρευση* μιας ποσότητας μέσα από τη δυναμική της αναπαράσταση; Με ποιό τρόπο κατανοούν το *ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης* μιας ποσότητας μέσα από τη μοντελοποίηση ενός φυσικού φαινομένου σε υπολογιστικό περιβάλλον; Τέλος, πώς αυτά τα νοήματα συνεισφέρουν δυνητικά, στην εννοιολογική κατανόηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος;

Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΕΙΝΑΙ Η ΑΚΟΛΟΥΘΗ:

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τις τρεις θεωρητικές αφετηρίες στις οποίες στηρίζεται η έρευνα. Αυτές αφορούν σε θεωρίες μάθησης και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και στη νοηματοδότηση τους μέσα από υπολογιστικά περιβάλλοντα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, επιχειρούμε μια βιβλιογραφική επισκόπηση για τις δυσκολίες των μαθητευόμενων γύρω από τις έννοιες-κλειδιά του Απειροστικού Λογισμού, με έμφαση στις δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τη μεθοδολογία της παρούσας έρευνας. Εκεί, περιγράφουμε τις δραστηριότητες που δώσαμε στους φοιτητές, οι οποίες σχεδιάστηκαν στο λογισμικό GeoGebra και χωρίστηκαν σε τέσσερεις φάσεις. Η πρώτη φάση ήταν εισαγωγική, η δεύτερη φάση αφορούσε στην έννοια του ρυθμού μεταβολής, η τρίτη φάση στην έννοια της συσσώρευσης μια ποσότητας και η τέταρτη φάση στο Θεμελιώδες Θεώρημα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, περιγράφουμε και αναλύουμε τις απαντήσεις των φοιτητών κατά την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες και στο πέμπτο κεφάλαιο συζητούμε πάνω στα συμπεράσματα της έρευνας.

# 1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα έρευνα στηρίζεται σε τρεις θεωρητικές αφετηρίες. Αυτές είναι, πρώτον, η *επικοινωνιογνωστική προσέγγιση* (*commognitive approach*) της Sfard (2008) για τη μάθηση των μαθηματικών. Δεύτερον, το μοντέλο των *τοπικών αφαιρετικών διαδικασιών* (*situated abstraction*) των Noss και Hoyles (1996), ως απόρροια της ευρύτερης θεωρίας που ονομάζεται *constructionism* (Papert, 1991) σχετικά με το ρόλο των υπολογιστικών εργαλείων στη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών. Τρίτον, η θεώρηση των μαθηματικών ιδεών ως *νοητικών εικόνων* (*images*/ *imagery*) μέσα από το μοντέλο των Tall και Vinner (1981) *εικόνα έννοιας* και *ορισμός έννοιας* (*concept image, concept definition*), αλλά και η ευρύτερη έννοια του όρου *εικόνα* όπως την ορίζει ο Thompson (1994).

## 1.1 Η επικοινωνιογνωστική προσέγγιση (commognitive approach)

Η Sfard υποστηρίζει ότι η επικοινωνία είναι 'σχεδόν ισοδύναμη με την ίδια τη σκέψη', ορίζοντας κατά συνέπεια τη μάθηση ως την αλλαγή που επέρχεται σε κάποιον κατά τη συμμετοχή του σε καλώς ορισμένες μορφές δραστηριότητας (Kieran et al., 2002, σελ 13). Σύμφωνα με τη Sfard, ο λόγος δεν αντιμετωπίζεται απλά ως ένα παράθυρο στη σκέψη, αλλά ως ένα θεμελιώδες στοιχείο της, καθιστώντας έτσι το λόγο και τη σκέψη ως δύο αδιαχώριστες έννοιες. Με αυτή την αφετηρία, προκύπτει η ορολογία «επικοινωνιογνωστική προσέγιση» που έχει οριστεί από τη Sfard (2008), ως υβριδικός όρος προερχόμενος από το συνδυασμό των λέξεων «επικοινωνία» ("communication") και «γνώση» ("cognition").

Ορίζοντας το διάλογο (discourse) ως τον τύπο επικοινωνίας που χαρακτηρίζει μία συγκεκριμένη κοινότητα (λ.χ. μία ομάδα επιστημόνων), τότε σε ένα διάλογο ο συνομιλητής επηρεάζεται από της συνθήκες υπό τις οποίες διαδραματίζεται ο διάλογος και με τη σειρά του τις επηρεάζει. Μέσα από ένα τέτοιου είδους διάλογο προκύπτει και η μάθηση των μαθηματικών. Η επικοινωνία των συνομιλητών μέσω του γραπτού ή του προφορικού λόγου και η διαχείριση αντικειμένων και τεχνουργημάτων είναι τα κύρια μέσα για τους διαλογικούς (discursive) σκοπούς της διδασκαλίας και της μάθησης. Η Sfard (2002) αναφέρει ότι η μύηση σε ένα διάλογο καθορίζεται από κάποιους παράγοντες, δύο εκ των οποίων είναι τα *διαμεσολαβητικά εργαλεία (mediating tools)* και οι *μετα-διαλογικοί κανόνες (meta-discursive rules)*, οι οποίοι διαμορφώνουν τα τέσσερα χαρακτηριστικά του μαθηματικού διαλόγου (Nardi et al., 2014, σελ 3):

*1. Χρήση λέξεων (word use)*

Χρήση μαθηματικής ορολογίας αλλά και καθημερινών – μη αμιγώς μαθηματικών λέξεων που αποκτούν μαθηματική έννοια κατά τη χρήση τους σε έναν μαθηματικό διάλογο (λ.χ. ανοιχτό, συνεχής, όριο κ.λπ.).

*2. Οπτικοί διαμεσολαβητές (visual mediators)*

Διαμεσολαβητές μαθηματικού νοήματος (λ.χ. γραφήματα, διαγράμματα, σύμβολα), αλλά και φυσικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται ως βοηθήματα για τη μάθηση των μαθηματικών (λχ. Πλατωνικά στερεά).

*3. Επικυρωμένα/Υποστηρικτικά αφηγήματα (endorsed narratives)*

Κείμενα τα οποία περιγράφουν μαθηματικά αντικείμενα και διαδικασίες αλλά και σχέσεις μεταξύ τους. Αποτελούν αντικείμενα υπό εξέταση (αποδοχή, απόρριψη, τροποποίηση), βάσει των νορμών που έχουν οριστεί από τη μαθηματική κοινότητα (λ.χ. ορισμοί, θεωρήματα κ.λπ.).

*4. Ρουτίνες (Routines)*

Συχνά χρησιμοποιούμενες και καλώς ορισμένες πρακτικές οι οποίες χρησιμοποιούνται με διακριτούς, χαρακτηριστικούς τρόπους από την κοινότητα (όπως διαδικασίες παραγωγής ορισμού, υπόθεσης και απόδειξης, υπολογισμός, γενίκευση και αφαίρεση). Η Sfard διακρίνει τρία είδη ρουτινών (Sfard, 2008, σελ 223-245):

- *πράξεις (deeds)*
- *τυπικές διαδικασίες (rituals)*
- *διερευνήσεις (explorations)*, δηλαδή ρουτίνες που έχουν σκοπό να παράγουν νέα αφηγήματα και οι οποίες διακρίνονται σε:
    - *κατασκευές (constructions)*
    - *τεκμηριώσεις (substantiations)*
    - *εξερευνήσεις ανάκλησης (recall explorations).*

Η Sfard αναφέρει ότι οι *μετα-διαλογικοί κανόνες (meta-discursive rules)* είναι εκείνοι που καθορίζουν τη γενική ροή των επικοινωνιακών πρακτικών, δηλαδή εκείνοι που διαπλάθουν, υποβοηθούν και κατευθύνουν ένα διάλογο (Sfard, 2002, σελ 28). Είναι κυρίως αόρατοι και δρουν 'πίσω από τη σκηνή'(σελ 29). Η ίδια αναφέρει ότι ένας μετά-κανόνας πρέπει να κατανοείται ως μια επεξηγηματική υπόθεση που κατασκευάζεται από το στοχαστή ώστε να εξηγήσει κάτι που βλέπει, παρά κάτι που είναι 'πραγματικά εκεί'(σελ 30). Στην περίπτωση του μαθηματικού διαλόγου, αυτή η κατηγορία κανόνων περιλαμβάνει του κανόνες εκείνους που αποτελούν θεμέλιο των μοναδικών τρόπων ορισμού και απόδειξης. Οι μετά-κανόνες, αποτελούν ένα σύστημα στο οποίο κωδικοποιούνται οι κοινωνικές νόρμες, οι αξίες και οι πεποιθήσεις των ατόμων (Sfard, 2002, σελ 30).

Σύμφωνα με τη Sfard, μέσα από τις διαδικασίες μαθηματικού διαλόγου που αναφέραμε παραπάνω, η μάθηση που μπορεί να προκύψει όσον αφορά τα μαθηματικά μπορεί να περιγραφεί με βάση δύο επίπεδα (Nardi et al., 2014, σελ 3):

- Το επίπεδο της *δημιουργίας νέων μαθηματικών αντικειμένων (object-level)*, το οποίο αναφέρεται στην αύξηση στο πλήθος και την πολυπλοκότητα των επικυρωμένων αφηγημάτων και των ρουτινών.
- Το επίπεδο της *εστίασης στους μετα-κανόνες (meta-level)*, το οποίο εκφράζεται μέσα από την αλλαγή στους μετα-κανόνες του διαλόγου.

Αυτό συμβαίνει διότι μέσα από τη μαθηματική επικοινωνία δημιουργείται μία σχέση συνεχούς ανατροφοδότησης των σημαινόντων μέσα από οντότητες τις οποίες η Sfard ονομάζει *εμφάνιση των σημαινόντων (realizations of the signifiers)*, και οι οποίες είναι λέξεις ή σύμβολα που «λειτουργούν ως ουσιαστικά» και είναι αντιληπτικά προσβάσιμες οντότητες που μπορεί να είναι λεκτικές (λ.χ. ομιλούμενες λέξεις) ή οπτικές (λ.χ. γραπτές λέξεις, σύμβολα) (Nardi et al., 2014, σελ 3).

Οι *συμβολικές εμφανίσεις* (symbolic realizations) είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας στα μαθηματικά διότι, κατά τη Sfard, 'Με τη βοήθεια των συμβολικών αρχείων ο εκ φύσεως παροδικός διάλογος αποκτά μονιμότητα και τα διαφορετικά διαλογικά στοιχεία (discursive elements) γίνονται ταυτοχρόνως παρόντα' (Sfard 2008, σελ 159). Η συμβολική διαμεσολάβιση πριμοδοτεί το διάλογο, διότι 'ένας συμβολικά κωδικοποιημένος μαθηματικός διάλογος μπορεί να μετατραπεί σε ένα αντικείμενο μετα-διαλογικής δραστηριότητας' (σελ 159).

Η *τεκμηρίωση ενός αφηγήματος* (*substantiation of a narrative*) είναι η διαδικασία μέσα από την οποία κάποιος πείθεται ότι το αφήγημα μπορεί να είναι *επικυρωμένο* (*endorsed*). Μια μορφή- κλειδί της τεκμηρίωσης στα μαθηματικά είναι η παραγωγή μιας απόδειξης, η οποία στην ουσία είναι 'μια ακολουθία *επικυρωμένων αφηγημάτων,* κάθε ένα από τα οποία συμπεραίνεται επαγωγικά από προηγούμενα και το τελευταίο από αυτά αποτελεί το *αφήγημα* που εδώ θεωρούμε ως *επικυρωμένο*' (Sfard 2008, σελ 232).

***Διαλογικά Αντικείμενα (Discoursive objects)***

Αναφέραμε παραπάνω ότι ο λόγος, και κατ' επέκταση ο μαθηματικός διάλογος, είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τη μάθηση των μαθηματικών. Σε αντίθεση όμως με τους καθημερινούς διαλόγους που κάνουμε όλοι μας, οι μαθηματικοί διάλογοι περιλαμβάνουν διαλογικά αντικείμενα, δηλαδή αντικείμενα μαθηματικής συναλλαγής. Τα αντικείμενα αυτά δεν έχουν υλική υπόσταση και χαρακτηρίζονται από κάτι που μπορεί πιθανώς να παρασταθεί με οπτικά μέσα χωρίς όμως να φανερώνονται ποτέ στην πραγματικότητα. Σύμφωνα με τη Sfard, τα διαλογικά αντικείμενα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά (Nardi et al., 2014, σελ 4):

1. είναι προσωπικά κατασκευάσματα, παρόλο που μπορεί να προκύπτουν από εξωτερικευμένους διαλόγους,
2. η συνειδητοποίηση τους παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για τον ατομικευμένο διάλογο
3. είναι εξαρτημένα σε μεγάλο βαθμό από την κατάσταση στην οποία διαδραματίζονται (highly situated)
4. τέλος, διαφορετικοί συνομιλητές μπορεί να αντιλαμβάνονται το ίδιο σημαίνον με διαφορετικούς τρόπους.

Για να μεταφέρει την ιδέα της γύρω από το πώς δημιουργούνται τα *διαλογικά αντικείμενα*, η Sfard ορίζει τα *πρωταρχικά αντικείμενα* (*primary objects*) ως ‘μια αντιληπτικά προσβάσιμη οντότητα που υπάρχει ανεξάρτητα από τους ανθρώπινους διαλόγους’. Έτσι, ένα *διαλογικό αντικείμενο* δημιουργείται ως αποτέλεσμα της ‘αντικειμενοποίησης ενός συνόλου *πρωταρχικών αντικειμένων,* ή από προηγουμένως δημιουργημένα *διαλογικά αντικείμενα* με ένα μόνο *πρωταρχικό αντικείμενο*’.

### *Επικοινωνιογνωστική Σύγκρουση (Commognitive conflict)*

Ο μαθηματικός διάλογος που προκύπτει ανάμεσα σε δύο ή περισσότερους συνομιλητές δεν είναι πάντα της ίδιας μορφής. Η Sfard αναφέρει δύο τύπους μαθηματικών διαλόγων (Nardi et al., 2014, σελ 3):

- *Άτυπος διάλογος* (*colloquial*) : Τύπος διαλόγου που χρησιμοποιείται στην καθημερινότητα και εξελίσσεται αυθόρμητα, διαμεσολαβούμενος οπτικά κυρίως μέσα από *πρωταρχικά αντικείμενα* που προϋπάρχουν του διαλόγου.

- *Επίσημος διάλογος* (*literate*) : Τύπος διαλόγου διαμεσολαβούμενου κυρίως από συμβολικά τεχνουργήματα που δημιουργούνται ειδικώς χάριν της επικοινωνίας.

Από το γεγονός των διαφορετικών αυτών τύπων μαθηματικού διαλόγου, έπεται ότι η μαθηματική επικοινωνία εξαρτάται άμεσα και σε μεγάλο βαθμό από το χειρισμό των σημαινόντων από τους συνομιλητές, όπως για παράδειγμα η χρήση των λέξεών τους. Από τη διαφοροποιημένη χρήση των λέξεων από μέρους των διαφορετικών συνομιλητών προκύπτει μία μεγάλη πρόκληση για τη μαθηματική επικοινωνία. Το είδος αυτό της πρόκλησης, ονομάζει η Sfard *επικοινωνιογνωστική σύγκρουση* (*commognitive conflict).*Η Nardi και οι συνεργάτες της (2014) αναφέρουν ότι η διαφορά στα διαλογικά αντικείμενα

– που περικλείουν αλλαγές στους μετα-διαλογικούς κανόνες, στην χρήση των λέξεων και στους οπτικούς διαμεσολαβητές- είναι στην καρδιά των επικοινωνιογνωστικών συγκρούσεων που χαρακτηρίζουν τη μετάβαση στον επίσημο μαθηματικό διάλογο (σελ 13).

Η επικοινωνιογνωστική σύγκρουση δεν αναγνωρίζεται πάντα από τους συνομιλητές και συχνά επιλύεται με ένα ανεπαίσθητο τρόπο, μέσα από μια σταδιακή αμοιβαία προσαρμογή των διαλογικών τρόπων των συμμετεχόντων. Αυτή η προσαρμογή περιλαμβάνει μια εξουσιαστικής σχέσης παραχώρηση σε έναν από τους παρόντες διαλόγους (discourses), ολοκληρωτικά αποδεκτή από τους συνομιλητές ως προνομιούχα και παραδειγματική (για παράδειγμα την αναγνώριση του διδάσκοντος ως τον ‘απόλυτο βεβαιωτή’,(‘ultimate substantiaor’, Sfard 2008, σελ 234)). Μια επιτυχημένη έκθεση και μια επίλυση της σύγκρουσης απαιτεί την εθελοντική ευθυγράμμιση των συνομιλητών (σελ 283). Σύμφωνα με τη Sfard, η επικοινωνιογνωστική έρευνα είναι στην ουσία η αναζήτηση των διαλογικών (discursive) τρόπων που θα επιφέρουν την καλύτερη αυτή μαθηματική επικοινωνία.

Σε αυτή την έρευνα ενστερνιζόμαστε την άποψη της Sfard ότι η επικοινωνία είναι σχεδόν ισοδύναμη με τη σκέψη. Χρησιμοποιούμε τα θεωρητικά εργαλεία του παραπάνω πλαισίου για να εξετάσουμε αν και με ποιους τρόπους οι φοιτητές νοηματοδοτούν το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

## 1.2 Τα υπολογιστικά εργαλεία και η νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών: constructionism και situated abstraction

Ο όρος constructionism (Papert & Harel, 1991) αναφέρεται σε μια θεωρία μάθησής που βασίζεται στον Κονστρουκτιβισμό του Piaget με την έννοια της μάθησης ως « οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης» ("building knowledge structures") μέσα από τη σταδιακή εσωτερίκευση των δράσεων, σε ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές συνειδητά εμπλέκονται με την κατασκευή αντικειμένων σε ψηφιακά περιβάλλοντα.

Ο Papert δίνει έμφαση στον «διάλογο» του μαθητή με το αντικείμενο που κατασκευάζει (artifact). Ο διάλογος αυτός είναι που αποκαλύπτει τον τρόπο που σκέφτηκε εκείνος που το έφτιαξε, είτε πρόκειται για κατασκευή, είτε για ανακατασκευή, αλλά και αποδόμηση του αντικειμένου. Αυτό που μας βοηθά να καταλάβουμε μια τέτοια οπτική είναι ο τρόπος που οι ιδέες παίρνουν μορφή ή αναδιαμορφώνονται, όταν εκφράζονται μέσω κατασκευών που υλοποιούνται σε συγκεκριμένο περιεχόμενο από συγκεκριμένους ανθρώπους. Οι μαθητές αντιμετωπίζοντας ένα πρόβλημα, εφευρίσκουν εργαλεία και μέσα, που υποστηρίζουν τη διερεύνησή τους, στην κατεύθυνση που οι ίδιοι επιθυμούν. Συνεπώς η μάθηση, πηγάζει από την διερευνητική φύση του ανθρώπου.

Το αντικείμενο που κατασκευάζει ο μαθητής μπορεί στη συνέχεια να το περιεργαστεί και να το μετατρέψει. Ο τρόπος που σκέφτηκε και ο μηχανισμός που δημιούργησε τα δικά του νοήματα μπορεί να γίνει αντιληπτός από έναν ερευνητή που γνωρίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο δούλεψε ο μαθητής. Έτσι το πλαίσιο αυτό δε διαμεσολαβεί μόνο ανάμεσα στο μαθητή και τις ιδέες του, αλλά είναι και χρήσιμο εργαλείο που έχει στα χέρια του ο ερευνητής για να εξάγει τα συμπεράσματά του.

Ο Papert υποστηρίζει ότι οι μαθητευόμενοι μπορούν να κάνουν μαθηματικές αφαιρέσεις, αν έρθουν σε επαφή με κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα, συμφωνούν οι Noss και Hoyles (1996) που τονίζουν ότι οι αφαιρέσεις αυτές δεν είναι καθολικές, αλλά αφορούν τα χαρακτηριστικά του μαθησιακού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αναδύονται. Για να περιγράψουν τη διαδικασία αφαίρεσης και γενίκευσης εννοιών υπό αυτό το πρίσμα, διατύπωσαν το θεωρητικό μοντέλων των «τοπικών αφαιρετικών διαδικασιών» (situated abstractions), για να περιγράψουν με ποιο τρόπο ακολουθούν την προσέγγιση της πλαισιοθετημένης μάθησης (situated learning). Η τοπική αφαιρετική διαδικασία αφορά καταρχήν σε μια ευκρινή δήλωση, μια πεποίθηση του μαθητευόμενου που ανακύπτει στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασής του με τα διαθέσιμα εργαλεία αλλά και άλλους μαθητευόμενους ή τον εκπαιδευτικό. Ταυτόχρονα μια τοπική αφαιρετική διαδικασία σηματοδοτεί μια εξελισσόμενη διαδικασία νοηματοδότησης που η μορφή της εξαρτάται από το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο ενεργεί ο μαθητευόμενος.

Μια τοπική αφαιρετική διαδικασία (situated abstraction) περιγράφει πώς οι μαθητευόμενοι κατασκευάζουν μαθηματικές ιδέες αντλώντας πληροφορίες από τους γλωσσικούς και εννοιολογικούς διαθέσιμους πόρους ώστε να τους εκφράσουν σε ένα συγκεκριμένο υπολογιστικό περιβάλλον. Ένα βασικό αξίωμα της τοπικής αφαιρετικής διαδικασίας είναι ότι τα υπολογιστικά εργαλεία, με την σειρά τους, διαμορφώνουν τους τρόπους που οι ιδέες εκφράζονται και έτσι, το αντίστοιχο υπολογιστικό περιβάλλον μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα μέσω του οποίου μπορούν να εκφραστούν τα ίδια τα μαθηματικά. Έτσι, τα υπολογιστικά εργαλεία προσανατολίζουν τους μαθητές σε μια μαθηματική κατεύθυνση, η οποία μπορεί να αναγνωρισθεί όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν τα εργαλεία για να αναπτύξουν μια σαφή εκτίμηση των εμπλεκόμενων σχέσεων και της σημασιολογίας τους (semantics), δηλαδή της νοηματοδότησης των εμπλεκόμενων σχέσεων.

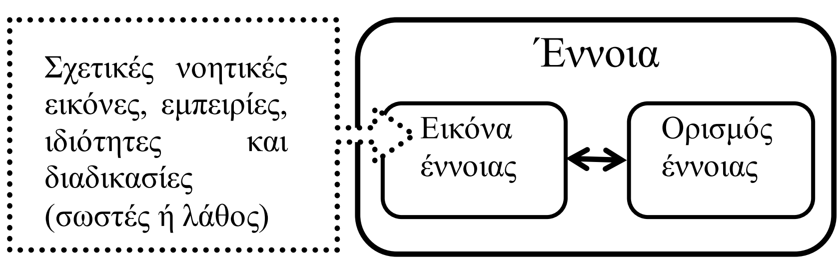
Γενικότερα, στη θεώρηση των Noss και Hoyles η αφαιρετική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί περισσότερο σαν μια διαδικασία τοποθέτησης νοημάτων το ένα πάνω στο άλλο, σε στρώματα, παρά σαν αντικατάσταση των νοημάτων που αναφέρονται στην συγκεκριμένη κατάσταση (ειδικά) με αποπλαισιοποιημένα νοήματα (γενικά). Η υπόθεση είναι ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να συμβεί ιδιαίτερα πετυχημένα σε υπολογιστικά περιβάλλοντα, στα οποία η νοηματοδότηση επαναπροσδιορίζεται, καθώς οι μαθητευόμενοι εστιάζουν την προσοχή τους σε νέα αντικείμενα και σχέσεις όπως αναπαριστώνται μέσα σε αυτό το περιβάλλον.

Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκαν δραστηριότητες σε υπολογιστικό περιβάλλον, με σκοπό να διερευνήσουμε τη νοηματοδότηση των φοιτητών γύρω από τις έννοιες- κλειδιά του Απειροστικού Λογισμού (λ.χ. ρυθμός μεταβολής και συσσώρευση). Το παραπάνω πλαίσιο μας επιτρέπει να εξετάσουμε τις αφαιρετικές διαδικασίες που κάνουν οι φοιτητές κατά τις εμπλοκές τους με τις δραστηριότητες.

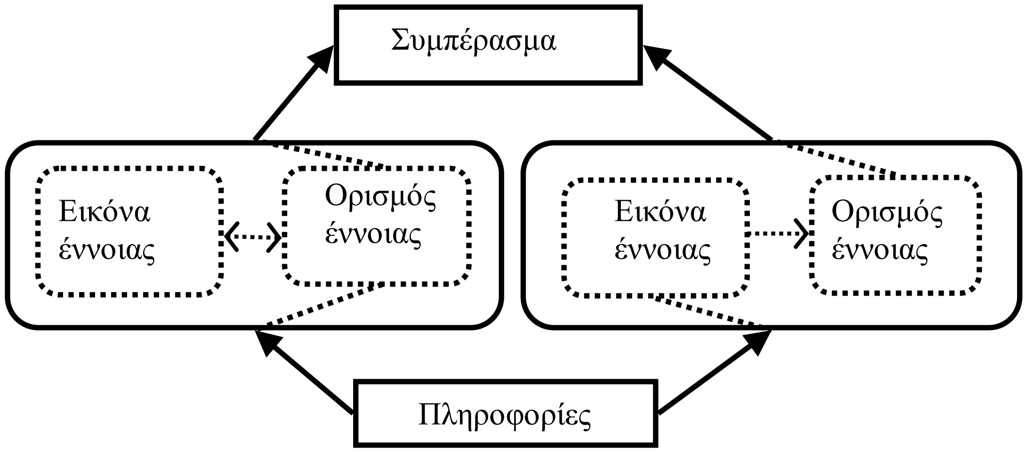
### 1.3 Νοητικές εικόνες

Οι Tall και Vinner (1981), καθιστούν τους όρους *ορισμός έννοιας* (concept definition) και *εικόνα έννοιας* (concept image), οι οποίοι έχουν διαφοροποιημένο περιεχόμενο. Ο Tall (1991) ισχυρίζεται ότι μια μαθηματική έννοια, στο μέτρο που είναι αποτέλεσμα της αντιληπτικής εμπειρίας ενός ατόμου, διαθέτει εκτός από τον ορισμό της (concept definition) και μια εικονική πλευρά (concept image), που δημιουργείται από την συνύπαρξη νοητικών εικόνων (εσωτερικών αναπαραστάσεων) και ιδιοτήτων (βλ. Σχήμα 1). Ενώ ο *ορισμός της έννοιας* αναφέρεται στο μαθηματικό νόημα που καθορίζεται στο πλαίσιο τυπικών συμβολισμών, η *εικόνα της έννοιας*, περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, τις οπτικές αναπαραστάσεις, τις εμπειρίες, τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια και ενυπάρχουν στο νου ενός ατόμου. Άρα, ενώ ο ορισμός έχει μια φαινομενολογική διάσταση, η εικόνα είναι προσωπική δημιουργία κάθε ατόμου και ωριμάζει μαζί με τις εμπειρίες του. Είναι αντιληπτό ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για μια έννοια ως αναλλοίωτη αλήθεια, αλλά στο πλαίσιο που αυτή κατασκευάζεται από το άτομο. Μεταξύ της εικόνας της έννοιας και του ορισμού της υπάρχει αλληλεπίδραση. Δηλαδή ο ορισμός συνεισφέρει στη διαμόρφωση της εικόνας, μέσα από εμπλοκή σε δραστηριότητες και εμπειρίες και η εικόνα δίνει προσωπικό νόημα για τον μαθητευόμενο στον τυπικό ορισμό.

Για την επίλυση προβλημάτων ακολουθούνται διάφορα σχήματα, όπως η αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας και ορισμού ή η αρχική χρήση της εικόνας και έπειτα η μετάβαση στον ορισμό κλπ (βλ. Σχήμα 2). Η χρήση μόνο της εικόνας μιας έννοιας, χωρίς πέρασμα από τον ορισμό της συνιστά διαισθητική κι όχι μαθηματική αντιμετώπιση ενός προβλήματος, αλλά αυτό είναι κάτι που συμβαίνει συχνά.




**Σχήμα1: Η δομή της έννοιας σύμφωνα με τους Tall και Vinner**




**Σχήμα 2: Δύο τρόποι λειτουργίας του σχήματος εικόνα έννοιας-ορισμός έννοιας. Αριστερά φαίνεται η αλληλεπίδραση ορισμού και εικόνας της έννοιας, για την αντιμετώπιση κάποιας κατάστασης, ενώ δεξιά εισάγονται πληροφορίες και μέσω εποπτείας μαθηματικοποιούνται.**

Ωστόσο, ο Thompson (1994) ορίζει την *εικόνα* (image) με διαφοροποιημένο τρόπο από την *εικόνα έννοιας* (concept image) των Vinner και Dreyfus (1989), αλλά όχι ανακόλουθο. Ο ίδιος αναφέρει ότι η ιδέα του Vinner για την *εικόνα έννοιας* επικεντρώνεται στη συνένωση των νοητικών εικόνων σε κατηγορίες που αντιστοιχούν στο τυπικό μαθηματικό λεξιλόγιο, ενώ ο όρος *εικόνα* που ο ίδιος αναπτύσσει επικεντρώνεται στη δυναμική των πνευματικών διεργασιών. Η *εικόνα* σύμφωνα με τον Thompson είναι μια έννοια δυναμική, που εκφράζεται κιναισθητικά, μέσα από σωματικές ενέργειες και κινήσεις προσοχής · είναι ταυτόχρονα η πηγή και ο φορέας πνευματικών λειτουργιών.

Στην έρευνά μας αναζητούμε τις εικόνες των φοιτητών γύρω από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, όπως ορίστηκαν σε αυτή την υποενότητα. Αναζητούμε, δηλαδή, όλες εκείνες τις νοητικές εικόνες και τη δυναμική των πνευματικών διεργασιών των φοιτητών για τις μαθηματικές έννοιες που εξετάζουμε. Η ερευνήτρια μέσα από συνεχείς διευκρινιστικές ερωτήσεις στόχευε σε μια όσο το δυνατόν λεκτική παρουσίαση των νοητικών διεργασιών των φοιτητών κατά την εξαγωγή των συμπερασμάτων τους. Η χρήση των λέξεων, οι εκφράσεις και οι χειρονομίες των συμμετεχόντων παρατηρούνται, μεταφράζονται και αναλύονται ως ενδείξεις των νοητικών τους εικόνων.

# 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

## 2.1 Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ο David Tall (2002), σχετικά με τη χρήση νέων τεχνολογιών στη μάθηση των μαθηματικών, αναφέρει ότι η άφιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών δίνει νέες δυνατότητες. Ένας υπολογιστής περιλαμβάνει μια διεπαφή γραφικών (graphical interface), η οποία επιτρέπει στο χρήστη να αλληλεπιδρά με αυτή με φυσικό τρόπο με το να δείχνει, να επιλέγει και να σύρει αντικείμενα στην οθόνη ώστε να επεκτείνει το *ενσαρκωμένο*[1] περιεχόμενο (*embodied* context) του Απειροστικού Λογισμού στον πραγματικό κόσμο (real world calculus). Ο ίδιος, διατείνεται ότι για να αποδώσουμε στον Απειροστικό ένα φυσικό ανθρώπινο νόημα, πρέπει να επωφεληθούμε από τη διαδραστική διεπαφή – που πλέον είναι εφικτή - και να επανεξετάσουμε τον Απειροστικό για να διευρύνουμε τους τυπικούς γραφικούς και συμβολικούς τρόπους σκέψης. Πρέπει να τους διευρύνουμε ώστε, αφ' ενός να εκμεταλλευτούμε τους ενσαρκωμένους τρόπους (embodied modes), αφ' εταίρου να εξετάσουμε πώς κάτι τέτοιο μπορεί να αποτελέσει βάση ενός φορμαλιστικού τρόπου σκέψης για εκείνους τους μαθητευόμενους που θα επωφεληθούν από περεταίρω μελέτη (Tall, 2002, σελ 9) .

Παράλληλα, οι Thompson, et al. (2013) αναφέρουν ότι ο Απειροστικός Λογισμός μπορεί να διδαχθεί απευθύνοντας δύο θεμελιώδης ερωτήσεις : (α) γνωρίζετε πόσο γρήγορα μεταβάλλεται μια ποσότητα και θέλετε να μάθετε πόση ποσότητα υπάρχει ακόμα, και (β) γνωρίζετε πόση ποσότητα υπάρχει και θέλετε να μάθετε πόσο γρήγορα μεταβάλλεται. Φαίνεται ότι αυτές οι καταστάσεις είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος και η συνειδητοποίηση αυτής της ιδέας ήταν καταλυτική για το Λογισμό του Νεύτωνα (Thompson 1994a). Οι τυπικές προσεγγίσεις του Απειροστικού Λογισμού αναπτύσσουν αυτά τα δύο κομμάτια ξεχωριστά και τα ενώνουν με το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (ΘΘΟΛ). Μια κοινή έκβαση παρόλα αυτά είναι ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται την παράγωγο σαν κάτι που λαμβάνουμε εφαρμόζοντας κανόνες παραγώγισης  και ότι η ολοκλήρωση αφορά στην εύρεση εμβαδών που φράσσονται από καμπύλες. Το ΘΘΟΛ είναι περιττό για την κατανόηση τους και για τις δύο έννοιες. Οι παράγωγοι δεν έχουν να κάνουν με ρυθμό μεταβολής και τα ολοκληρώματα δεν αφορούν στη συσσώρευση, όπως αναφέρει ένας μαθητής για την ολοκλήρωση 'Δεν καταλαβαίνω πώς γίνεται μια απόσταση να είναι εμβαδό' (Thompson, Byerly, Hatfield 2013, σελ 125).

[1] Ο όρος *ενσαρκωμένο* δεν πρέπει να αναφέρεται σε όλη τη μαθηματική σκέψη αλλά σε εκείνη τη βασική μαθηματική σκέψη που στηρίζεται στην αντίληψη μέσω των αισθήσεων και διακρίνεται από τη συμβολική και μαθηματική σκέψη (Gray&Tall,2001, Tall,2002).

Με αυτές τις παρατηρήσεις, οι Thompson, et al. (2013) προτείνουν μια προσέγγιση για την εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό, που αποσκοπεί στην κατασκευή νοημάτων από τους μαθητές μέσα από την αυτοπαθή σχέση των εννοιών της συσσώρευσης και του ρυθμού μεταβολής, μέσω του συμβολισμού αυτής της σχέσης και τέλος της επέκτασης των παραπάνω ιδεών ώστε να έχουν ευρύτερη εμβέλεια. Οι συγγραφείς διατείνονται ότι αυτή η ριζική αναδιάρθρωση των ιδεών του Απειροστικού, είναι πλέον δυνατή μέσα από τη χρήση νέων τεχνολογιών. Συγκεκριμένα, οι ίδιοι δομούν την παραπάνω προσέγγιση μέσα από ένα μάθημα ενός εξαμήνου που χωρίζεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, οι μαθητευόμενοι αναπτύσσουν συναρτήσεις συσσώρευσης μέσα από συναρτήσεις ρυθμού μεταβολής και στη δεύτερη φάση αναπτύσσουν συναρτήσεις ρυθμού μεταβολής μέσα από συναρτήσεις συσσώρευσης. Οι συγγραφείς σημειώνουν ότι η συσσώρευση και ο ρυθμός μεταβολής δεν εξετάζονται ποτέ ξεχωριστά · αναφέρουν ότι οι ιδέες του ρυθμού μεταβολής είναι κεντρικές στην κατασκευή νοημάτων για τη συσσώρευση και αντίστροφα, οι ιδέες της συσσώρευσης είναι κεντρικές στην κατασκευή νοημάτων για το ρυθμό μεταβολής. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο, το ΘΘΟΛ είναι παρόν σε καθημερινή βάση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στο παραπάνω πλαίσιο (Thompson, Byerlry & Hatfield 2013, σελ 125).

## 2.2 Δυσκολίες των μαθητευόμενων στις βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού

Εν γένει, ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητευόμενοι τις βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού έχει γίνει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Το γεγονός αυτό έγκειται στο πολυσύνθετο του συγκεκριμένου γνωστικού πεδίου, στη φύση των νοημάτων του και στη δυσκολία που βιώνουν οι μαθητευόμενοι όταν προσπαθούν να το προσεγγίσουν. Σύμφωνα με τον Tall (1990), η διερεύνηση των ιδεών και της κατανόησης των μαθητών στις κεντρικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού αποκάλυψε θεμελιώδεις ασυνέπειες. Οι μαθητές μάθαιναν να απαντούν σε τυπικές (standard) ερωτήσεις, όμως, στις περιπτώσεις που η κατανόησή τους εξετάστηκε συστηματικά, αποκαλύφθηκαν δυσκολίες που δεν ήταν νωρίτερα εμφανείς.

Οι Jacobs και Trigueros (Jacobs,2002, Trigueros & Jacobs, 2008) έδειξαν ότι ακόμα και οι καλύτεροι μαθητές στον Απειροστικό Λογισμό, όπως παρουσιάζεται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, έχουν πολύ αδύναμη κατανόηση γύρω από την έννοια της μεταβλητής. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές φάνηκε να μη ‘μεταβάλλονται’ στη σκέψη εκείνων των μαθητών. Έτσι, μια μεταβλητή νοηματοδοτούνταν ως μια σταθερά που αναπαρίσταται με ένα γράμμα και αυτή η σταθερά απλώς *αντικαθιστάται* αντί να *μεταβάλλεται* (Thompson, et al. 2013, σελ 129). Όμως, ο Thompson και οι συνεργάτες του (2013) αναφέρουν οτι ο Απειροστικός Λογισμός είναι τα μαθηματικά της μεταβολής. Συνεπώς, η νοηματοδότηση της μεταβλητής ως σταθερά είναι ασύμβατη με την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης του Απειροστικού (σελ 129). Ωστόσο, για τη νοηματοδότηση της *μεταβλητής* ως *κάτι που μεταβάλλεται* και όχι ως *κάτι σταθερό*, πρέπει πρώτα να υπάρχει μια ξεκάθαρη εικόνα της έννοιας *ποσότητα*. Οι Thompson κ.ά. (2013) αναφέρουν ότι η ποσότητα είναι ένα νοητικό κατασκεύασμα, δηλαδή ένα αντικείμενο που νοηματοδοτείται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει ένα ή περισσότερα ποιοτικά χαρακτηριστικά που είναι μετρήσιμα. Μια μεταβλητή, σε σχέση με τις ποσότητες, είναι ένα γράμμα που αναπαριστά την τιμή μιας ποσότητας της οποίας το μέγεθος μεταβάλλεται · όπως για παράδειγμα το ύψος. Αν θεωρήσουμε το ύψος σας από τη στιγμή που γεννηθήκατε έως σήμερα και το συμβολίσουμε με h, τότε αντιλαμβανόμαστε ότι το h μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο μέσα στο χρόνο. Έτσι, η χρήση του h για το ύψος εκ φύσεως φέρει την κατανόηση ότι η μεταβλητή h *μεταβάλλεται* (Thompson, Byerly, Hatfield 2013, σελ 129).

Σχετικά με την έννοια του ορίου, οι Davis και Vinner (1986) ισχυριστήκαν ότι η θεώρηση που περιγράφεται ως ‘πλησιάζει όλο και πιο κοντά’ είναι ένας αναπόφευκτος τρόπος να σκεφτόμαστε τα όρια. Άλλες μελέτες που ακολούθησαν, επαληθεύουν τα ευρήματα των Davis και Vinner (λ.χ. Ferrini – Mundy & Grahaman, 1994, Oehrtman, 2009, Roh, 2008) και τονίζουν ότι, όσο καλή και να είναι η προσπάθειά μας στη νοηματοδότηση του ορίου, φαίνεται ότι η εννοιολογική κατανόηση του ορισμού του ορίου παραμένει δύσκολο έργο για τους περισσότερους φοιτητές του Απειροστικού Λογισμού. Για παράδειγμα, οι Cottrill et al (1996), αναφέρουν ότι η δυναμική κατανόηση του ορίου είναι πολύ πιο σύνθετη από την διαδικασία εσωτερίκευσης και αφομοίωσης ενεργειών όπως ο τυπικός ορισμός. Αντίθετα από ορισμένους ερευνητές που πιστεύουν ότι η δυναμική κατανόηση μπορεί να εμποδίσει τη διαδικασία της τυπικής κατανόησης του ορίου, στην συγκεκριμένη εργασία ασπάζονται το αντίθετο, πιστεύοντας ότι η δυσκολία να κινηθούμε προς μια πιο τυπική ανάπτυξη της έννοιας, είναι τουλάχιστον εν μέρει, αποτέλεσμα της ανεπαρκούς δυναμικής κατανόησης. Επίσης, η Jordaan (2005) διερευνώντας τις παρανοήσεις σπουδαστών μιας πολυτεχνικής σχολής γύρω από την έννοια του ορίου, παρατήρησε ότι έβλεπαν το όριο σαν κάτι μη δυνάμενο να το φτάσει κανείς και απέδωσε το φαινόμενο αυτό στην γλώσσα που χρησιμοποιούν τα βιβλία με την χρήση των λέξεων «τείνει στο» και «προσεγγίζει». Ενδεχομένως, κάτι τέτοιο δικαιολογεί και την άποψη της πλειοψηφίας των μαθητών ότι το όριο είναι μια διαδικασία και όχι ένα αντικείμενο.

Αναμφίβολα, η μελέτη των δυσκολιών των μαθητευόμενων γύρω από την έννοια της συνάρτησης είναι πυκνή στη βιβλιογραφία. Οι Oehrtman, Carlson και Thompson (2008, σελ 151) αναφέρουν ότι οι μαθητευόμενοι που σκέφτονται για τις συναρτήσεις μόνο σε όρους συμβολικών χειρισμών και διαδικαστικών τεχνικών, αδυνατούν να κατανοήσουν μια γενικότερη αντιστοίχηση ενός συνόλου τιμών εισόδου (input) σε ένα σύνολο τιμών εξόδου (output). Επίσης, δεν κατέχουν τις εννοιολογικές δομές για τη μοντελοποίηση συναρτησιακών σχέσεων στις οποίες η τιμή της συνάρτησης μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο ταυτόχρονα με τις συνεχής μεταβολές στη μεταβλητή εισόδου (Carlson 1998, Monk & Nemirovsky, 1994, Thompson 1994). Μάλιστα, ο Thompson (1994), διατείνεται ότι οι μαθητευόμενοι συχνά βλέπουν τις συναρτήσεις απλώς ως δύο εκφράσεις που διαχωρίζονται από το σύμβολο της ισότητας και οι Oehrtman κ.α. (2008, σελ 152), συμπληρώνουν ότι αυτή η πενιχρή κατανόηση των συναρτήσεων είναι ανεπαρκής για να λειτουργήσει ως βάση για μια πλούσια κατανόηση ανώτερων μαθηματικών εννοιών.

Μια ακόμα παρανόηση σχετικά με την έννοια της συνάρτησης αφορά στο γεγονός ότι οι μαθητευόμενοι τείνουν να πιστεύουν ότι όλες οι συναρτήσεις πρέπει να ορίζονται μέσα από ένα μόνο αλγεβρικό τύπο. Αυτή η εστίαση συνήθως δυσχεράνει έναν ευέλικτο τρόπο σκέψης για τις συναρτήσεις και μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, όπως για παράδειγμα ότι κάθε συνάρτηση πρέπει να συμπεριφέρεται 'σωστά' (Breidenbach et al., 1992). Αρκετοί φοιτητές δυσκολεύονται να σκεφτούν ότι διαφορετικοί τύποι αναπαριστούν την ίδια συνάρτηση, όπως στα παραδείγματα $f_1(n) = n^2$ και $f_2(n) = \sum_{k=1}^{n}\left[2k-1\right]$ που ορίζουν την ίδια συνάρτηση στους φυσικούς αριθμούς, μέσα από εντελώς διαφορετικές αλγεβρικές πράξεις (Oehrtman et al., 2008, σελ 152). Επιπλέον, οι Oehrtman et al. (2008), αναφέρουν ότι οι φοιτητές συχνά σκέφτονται για το γράφημα μιας συνάρτησης σαν να πρόκειται για την εικόνα μιας φυσικής κατάστασης, παρά ως μια αντιστοίχηση ενός συνόλου τιμών εισόδου (input) σε ένα σύνολο τιμών εξόδου (output). Κατά την ενασχόληση με συναρτήσεις που μοντελοποιούν απτές καταστάσεις, υπάρχουν συνήθως τοπογραφικές δομές στο πραγματικό περιβάλλον (λ.χ. οι καμπύλες ενός δρόμου, το σχήμα ενός δοχείου που γεμίζει με υγρό), που οι μαθητευόμενοι θεωρούν ότι αντανακλώνται στο γράφημα της συνάρτησης. Η θεωρούμενη διάκριση τέτοιων φυσικών χαρακτηριστικών συχνά προκαλεί παρανοήσεις, ακόμα και σε μαθητευόμενους που κατέχουν μια ισχυρή κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Διάφορες παρανοήσεις μπορούν να προκύψουν από τη συγχώνευση του σχήματος ενός γραφήματος με οπτικά γνωρίσματα της πραγματικής κατάστασης (Carlson 1998, Monk & Nemirovsky, 1994). Ωστόσο, η ανάπτυξη της κατανόησης μιας συνάρτησης που μοντελοποιεί μια πραγματική κατάσταση με δυναμικές μεταβολές, γεφυρώνει την επιτυχή νοηματοδότηση ανώτερων μαθηματικών εννοιών (Oehrtman et al, 2008, σελ 154). Επιπρόσθετα, η πενιχρή εικόνα των μαθητευόμενων για τη συνάρτηση, συχνά αποκαλύπτεται όταν ο ίδιοι αδυνατούν να κατασκευάσουν νοήματα για σύνθετες και αντίστροφες συναρτήσεις και όταν αδυνατούν να εφαρμόσουν σύνθεση συναρτήσεων για να ορίσουν έναν αλγεβρικό τύπο για μια πραγματική κατάσταση (λ.χ. να ορίσουν εμβαδό σαν συνάρτηση του χρόνου ενός κύκλου του οποίου η ακτίνα επεκτείνεται 7 cm το δευτερόλεπτο) (Oehrtman et al.,2008, σελ 156).

Οι Dubinsky και Harel (1992) διαχωρίζουν τη θεώρηση της συνάρτησης από τους μαθητευόμενους ως *δράση* (action view) και ως *διαδικασία* (process view). Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι η θεώρηση της συνάρτησης ως *δράση* περιλαμβάνει την ικανότητα εισαγωγής αριθμών σε μια αλγεβρική έκφραση και του υπολογισμού της. Πρόκειται για μια στατική θεώρηση, με την έννοια ότι ο χρήστης τείνει να τη σκέφτεται με 'ένα βήμα τη φορά' (λ.χ. ένας υπολογισμός της έκφρασης). Απεναντίας, η θεώρηση της συνάρτησης ως *διαδικασία*, περιέχει ένα δυναμικό μετασχηματισμό ποσοτήτων σύμφωνα με κάποια επαναλαμβανόμενα μέσα, με τα οποία δεδομένης της αρχικής ποσότητας θα παράγει πάντα την ίδια μετασχηματισμένη ποσότητα. Για παράδειγμα, θεωρώντας τη συνάρτηση ως *δράση* οι μαθητευόμενοι τη νοηματοδοτούν στατικά, ενώ ως *διαδικασία* η συνάρτηση νοηματοδοτείται δυναμικά. Επίσης, στη θεώρηση ως *δράση*, το γράφημα μιας συνάρτησης αντιμετωπίζεται σαν ένα γεωμετρικό σχήμα, ενώ στη *διαδικαστική* θεώρηση το γράφημα μιας συνάρτησης ορίζει μια συγκεκριμένη αντιστοίχηση ενός συνόλου τιμών εισόδου (input) σε ένα σύνολο τιμών εξόδου (output). Όμως, η θεώρηση της συνάρτησης ως *διαδικασία* είναι κρίσιμη στην κατανόηση των κύριων εννοιολογικών αξόνων του Απειροστικού Λογισμού (Breidenbach et al., 1992, Thompson, 1994a). Για παράδειγμα, η ικανότητα συντονισμού των μεταβλητών εισόδου και εξόδου μιας συνάρτησης, αποτελεί μια ουσιώδη συλλογιστική ικανότητα (reasoning ability) για τα όρια, τις παραγώγους και τα ορισμένα ολοκληρώματα (Oehrtman et al.,2008, σελ 160).

Ο Orton (1983) στη μελέτη του σχετικά με την κατανόηση της παραγώγου από τους φοιτητές, εντοπίζει ότι ο κανόνας της διαίρεσης της διαφοράς των $y$ ως προς τη διαφορά των $x$ ώστε να υπολογιστεί ένας ρυθμός, δεν ήταν τετριμμένος για ένα μεγάλο αριθμό φοιτητών. Ο ίδιος, αναφέρει ότι ενδεχομένως 'ένα από τα προβλήματα στη μάθηση του ρυθμού μεταβολής είναι ότι οι βασικές ιδέες στηρίζονται στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας' (σελ 243). Από την άλλη ,ο Thompson (1994) αναφέρει ότι οι αναπαραστάσεις των μαθητών για το μέσο ρυθμό μεταβολής, δεν είναι ενεργητικές και λειτουργικές σε τέτοια έκταση ώστε να μπορούν να αφομοιώσουν κάθε μεταβολή ενός μεγέθους που προκύπτει πολλαπλασιαστικά από δύο άλλα μεγέθη. Βλέπουν τη μεταβολή του ενός μεγέθους ανεξάρτητα από τη μεταβολή του άλλου και αυτό δημιουργεί περαιτέρω δυσκολίες στην κατανόηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού. Επιπρόσθετα, οι Carlson, Jacobs, Coe, Larsen και Hsu (2002) σε μια μελέτη με 20 φοιτητές υψηλών επιδόσεων στον Απειροστικό Λογισμό, αποκαλύπτει ότι οι περισσότεροι φοιτητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες σε δραστηριότητες που αφορούν στο μέσο και στο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Παρόλο που οι περισσότεροι φοιτητές 'ήταν συχνά σε θέση να συντονίσουν εικόνες του ποσού της μεταβολής (amount of change) της μεταβλητής εξόδου καθώς λαμβάνουν υπ' όψιν τις μεταβολές στη μεταβλητή εισόδου', στην ουσία τους ήταν τυπικά αδύνατο να συντονίσουν τις μεταβολές στο μέσο ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης με τις ομοιόμορφες μεταβολές στη μεταβλητή εισόδου (Carlson κ.α., 2002, σελ 372). Οι περισσότεροι φοιτητές δεν κατανοούσαν καταστάσεις όπου οι ρυθμοί πρέπει να θεωρούνται ως πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις των μεταβολών των δύο μεταβλητών. Επιτύγχαναν να περιγράψουν ρυθμούς μεταβολής ως αθροιστικές μεταβολές στη μεταβλητή εξόδου.

Ακόμα, ο Castillo- Garsow (2010) παρέχει ένα μοντέλο νοηματοδότησης για το ρυθμό μεταβολής μιας μαθήτριας της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με υψηλές επιδόσεις, το οποίο θα μπορούσε να εξηγήσει γιατί η κατανόηση του ρυθμού μεταβολής αποτελεί μια πρόκληση για τους μαθητές. Η συγκεκριμένη μαθήτρια, θεωρούσε ότι το επιτόκιο (interest rate) αφορά στο πόσα χρήματα θα προσθέσει σε ένα τραπεζικό λογαριασμό κάθε χρόνο. Σκεπτόμενοι το ρυθμό ως ένα ποσό που προστίθεται, έχει ως αποτέλεσμα τη σωστή ερμηνεία καταστάσεων, αρκεί να θεωρούμε ομοιόμορφες μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Η μαθήτρια ξαναδούλεψε πάνω σε προβλήματα με κλασματικά μέρη του έτους, δηλαδή σε ακέραιους αριθμούς μηνών, έτσι ώστε ο παρονομαστής του προβλήματος διαίρεσης (μεταβολή στα χρήματα)/(μεταβολή στο χρόνο) να είναι μια μονάδα. Αυτό της επέτρεψε να αγνοήσει τη διαίρεση και να θεωρήσει προσθετικές μεταβολές στο ισοζύγιο συναλλαγών. Οι Simon και Blume (1994) συγκεντρώνουν αποτελέσματα ερευνών οι οποίες δείχνουν ότι πολλοί μαθητές σκέφτονται αθροιστικά σε καταστάσεις όπου η πράξη του πολλαπλασιασμού φαίνεται πιο κατάλληλη. Επιπλέον, ο Coe (2007) σε μια μελέτη με τρείς καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποκαλύπτει ότι πεπειραμένοι καθηγητές δεν ήταν πάντα σε θέση να εκφράσουν συνεκτικές συνδέσεις ανάμεσα στις έννοιες της διαίρεσης, του ρυθμού και της κλίσης. Για μια καθηγήτρια, την Peggy, ‘η κλίση μιας εφαπτομένης δίνει μια απότομη διαβάθμιση (steepness) που συνδέεται με την ταχύτητα σε ορισμένα πλαίσια’ (Coe, 2007, σελ 237).

Οι Byerley, Hatfield και Thompson (2012) αναφέρουν πως οι μελέτες του Castillo- Garsow (2010) και της Carlson et al. (2002) δείχνουν ότι οι μαθητές και οι φοιτητές σκέφτονται για το ρυθμό μεταβολής αθροιστικά. Σε προβλήματα που παροτρύνουν ένα πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης (multiplicative thinking), οι μαθητές επικαλούνται εναλλακτικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν τη θεώρηση ρυθμών μεταβολής μόνο ως προσαυξήσεις ίσου μεγέθους (συνήθως 1) και τη θεώρηση της ταχύτητας και της κλίσης περισσότερο ως δείκτες λοξότητας (κλίσης μιας ευθείας) παρά ως λόγους. Επιπλέον, οι Byerley, Hatfield και Thompson (2012) αναφέρουν ότι η κατανόηση της διαίρεσης ως ένα αναλογικό / συσχετιστικό μέγεθος (relative size) είναι μια βασική συνιστώσα σε πολλά προβλήματα που έχουν εντοπισθεί σαν εμπόδια για τους μαθητές. Οι ίδιοι πιστεύουν ότι η νοηματοδότηση της διαίρεσης και των ρυθμών ως μια πολλαπλασιαστική σύγκριση σχετικού μεγέθους, είναι απαραίτητο για την κατανόηση της παραγώγου ως ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης.

Έπειτα, ο Park (2013) εξέτασε την μάθηση σε *επίπεδο δημιουργίας νέων μαθηματικών αντικειμένων* (object – level learning) των εισαχθέντων προπτυχιακών φοιτητών για την παράγωγο, μέσα από τη χρήση του λόγου τους και τους οπτικούς διαμεσολαβητές. Ο ίδιος παρατηρεί ότι η χρήση της λέξης ‘παράγωγος’ αναφέρεται ταυτόχρονα και στην ‘παράγωγο συνάρτηση’ και στην ‘παράγωγο σε σημείο’. Για τον Park (2013) αυτό συνδέεται στενά με ενδείξεις ότι οι φοιτητές δεν εκτιμούσαν την παράγωγο σε σημείο ως έναν αριθμό και την παράγωγο συνάρτηση ως μια συνάρτηση και με το γεγονός ότι οι φοιτητές συχνά περιέγραφαν την παράγωγο ως την ίδια την εφαπτομένη- αντί να βλέπουν την τιμή της παραγώγου σε σημείο ως μια τιμή που καθορίζει την κλίση της εφαπτομένης σε εκείνο το σημείο. Για παράδειγμα ορισμένοι φοιτητές προσπάθησαν να αναγνωρίσουν την f(x) ολοκληρώνοντας τη γραμμική έκφραση της εφαπτομένης και έδειχναν το γράφημα της εφαπτομένης ως οπτική τεκμηρίωση της ίδιας της παραγώγου. Επιπλέον ένα σύνηθες *επικυρωμένο αφήγημα* (*endorsed narrative*) ήταν ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης αυξάνει/φθίνει όταν και μόνο όταν η ίδια η συνάρτηση αυξάνει / φθίνει.

Όπως αναφέρεται σε ένα μεγάλο κομμάτι της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του ολοκληρώματος (λ.χ. Orton, 1983, Grundmeier, Heinsen, Sousa, 2006). Οι Rasslan & Tall (2002) διαπιστώνουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών (7/41) ηλικίας 16-18 δεν γνώριζε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, ενώ οι Grundmeier, Heinsen & Sousa (2006) αναφέρουν ότι η κατανόηση του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος δεν συνεπάγονταν αντίστοιχα την άνεση στην εφαρμογή διαδικασιών και αλγορίθμων και ότι οι μαθητές δεν κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στον ορισμό και τις διαδικασίες στον ολοκληρωτικό λογισμό. Επιπλέον αρκετοί μαθητές και φοιτητές έχουν την τάση να θεωρούν τον ολοκληρωτικό λογισμό ως μια σειρά από διαδικασίες και αλγόριθμους, συνεπώς δεν αναπτύσσουν μια εννοιολογική θεώρηση που θα τους προσέφερε την επιθυμητή καθολικότητα και ευστροφία στη σκέψη (Thompson 1994). Έτσι, αντί να έχουν μια θεώρηση *διεργασίας- έννοιας*[2] (*proceptual*), οι μαθητές/φοιτητές έχουν μια θεώρηση που προσανατολίζεται περισσότερο στις διεργασίες. Η Yerushalmy (2011), επισημαινει ότι το ολοκλήρωμα πρόκειται για μια πολύπλοκη έννοια αφού μπορεί να μεταφραστεί με διαφορετικούς τρόπους: ως μια διαδικασία αντι-παραγώγισης που οδηγεί στο αόριστο ολοκλήρωμα, ως εμβαδό που φράσσεται από ένα γράφημα και τον άξονα των x, ως άθροισμα Riemann που αναπαριστά μήκος, εμβαδό ή όγκο και τέλος ως τη συνάρτηση συσσώρευσης στην οποία το άνω όριο x είναι μια μεταβλητή και το κάτω όριο είναι μια σταθερή (fixed) παράμετρος (Yerushalmy 2011, σελ 3). Προκειμένου λοιπόν, να δημιουργηθεί ένα πρόσφορο έδαφος, μια βελτιωμένη γνωστική βάση, για την επιθυμητή *κατανόηση με διεργασίες- έννοιες* (*proceptual understanding*, Gray & Tall, 1994) του ολοκληρώματος, έχει προταθεί μια εστίαση στην έννοια της *συσσώρευσης* ως κεντρική ιδέα (Thompson, 1994, Kouropatov & Dreyfus, 2009). Όσον αφορά στους προπτυχιακούς φοιτητές οι Thompson & Silverman (2008) πιστεύουν ότι ‘η κατανόηση της συσσώρευσης… μπορεί να αποτελέσει μέρος ενός συνεκτικού Λογισμού, που επικεντρώνεται στο να δουν οι φοιτητές συνδέσεις ανάμεσα στο ρυθμό μεταβολής ποσοτήτων και στη συσσώρευση ποσοτήτων’ (σελ 13).

Μέρος της έρευνας στη Διδακτική των μαθηματικών αποτελεί η μελέτη του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού (λ.χ. Thompson, 1994, Carlson, Smith & Persson, 2003, Dreyfus & Kouropatov, 2013). Ο Thompson (1994) μελέτησε τις εικόνες (images) 19 προπτυχιακών και μεταπτυχιακών φοιτητών για το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού μέσα από ένα διδακτικό πείραμα. Ο ίδιος, αναφέρει ότι οι δυσκολίες των φοιτητών για το Θεώρημα πηγάζουν από μια φτωχή νοηματοδότηση του ρυθμού μεταβολής και από ανεπαρκώς ανεπτυγμένες και ασθενώς συντονισμένες εικόνες συναρτησιακής συμμεταβολής και ποσοτήτων που κατασκευάζονται πολλαπλασιαστικά. Για παράδειγμα, στο πλαίσιο εκείνης της έρευνας, οι φοιτητές συμπέραναν ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ως προς το ύψος σε ένα κώνο ήταν ίσος με το εμβαδό της επιφάνειας μιας οριζόντιας τομής διότι *καθώς μικραίνεις μια προσαύξηση του ύψους, ο αυξανόμενος κύλινδρος του όγκου προσεγγίζει όλο και περισσότερο το εμβαδό* (Thompson, 1994).

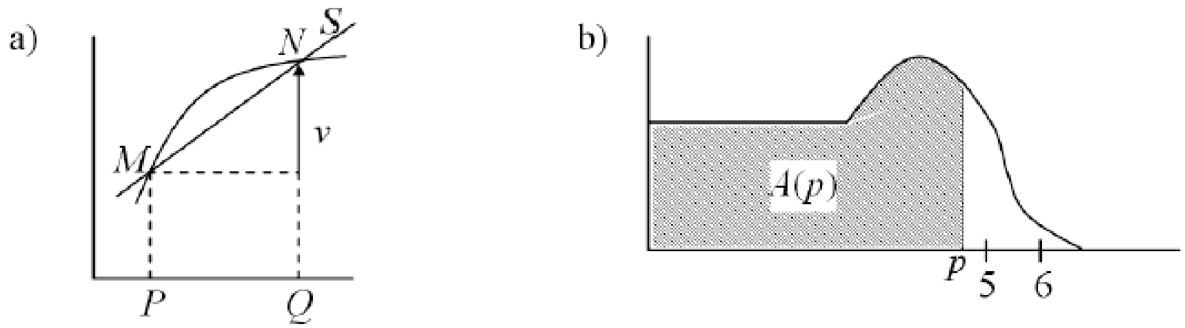
[2] Οι Gray & Tall (1994) δημιούργησαν τον όρο *διεργασία- έννοια* (*procept*) από το συνδυασμό των λέξεων *διεργασία* (*process*) και *έννοια* (*concept*). Σκοπός τους ήταν να περιγράψουν το μίγμα της διεργασίας και της αντίστοιχης έννοιας που χρησιμοποιούν κοινό συμβολισμό. Επίσης, ορίζουν την *σκέψη με διεργασίες-έννοιες* (*proceptual thinking*) ως την ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται το συμβολισμό ευέλικτα, άλλοτε ως διεργασία και άλλοτε ως έννοια, αλλάζοντας με ευχέρεια διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο.

## 2.3 Η συμμεταβολή στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών

Οι Carlson κ.ά. (2002) ορίζουν τη νοηματοδότηση δυναμικών φαινόμενων μέσα από τη συμμεταβολή (covariational reasoning) ως τις γνωστικές διεργασίες που περιλαμβάνονται στο συντονισμό δυο ποσοτήτων που μεταβάλλονται, παρακολουθώντας τους τρόπους με τους οποίους αλλάζει η μια σε σχέση με την άλλη (Carlson et al. 2002, σελ 354). Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι ο τρόπος με τον οποίο οι φοιτητές (college students) ερμηνεύουν και αναπαριστούν δυναμικά φαινόμενα που περιέχουν συναρτησιακές σχέσεις, αποτελεί αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας (λ.χ. Carlson 1998, Monk, 1994 Thompson, 1994). Εξετάζοντας το συλλογισμό των φοιτητών που επιχειρούν να ερμηνεύσουν τη μεταβλητή φύση του ρυθμού μεταβολής σε διαστήματα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, διάφορες έρευνες αποκαλύπτουν ότι αυτή η ικανότητα αναπτύσσεται αργά, με ιδιαίτερα προβλήματα στην ικανότητα των φοιτητών να ερμηνεύουν τις πληροφορίες που υπάρχουν στη γραφική αναπαράσταση μιας συνάρτησης (Carlson et al. 2002, σελ 354). Μελέτες των Monk (1992) και Kaput(1992) αναδεικνύουν ότι οι φοιτητές του Απειροστικού έχουν την τάση να αποσπώνται από το μεταβαλλόμενο σχήμα ενός γραφήματος και γενικά φαίνεται να μη βλέπουν το γράφημα μιας συνάρτησης ως μέσο για να ορίσουν μιας σχέση συμμεταβολής ανάμεσα σε δύο μεταβλητές.

Επιπρόσθετα, οι δυσκολίες των μαθητευόμενων στη μάθηση της έννοιας του ορίου, έχει συνδεθεί με την πενιχρή νοηματοδότηση της συμμεταβολής. Οι Cottrill κ.ά. (1996) προτείνουν ότι η έννοια του ορίου πρέπει να ξεκινάει με την ανεπίσημη δυναμική έννοια 'των τιμών μιας συνάρτησης που προσεγγίζουν μια οριακή τιμή καθώς οι τιμές στο πεδίο ορισμού της προσεγγίζουν κάποια ποσότητα' (σελ 6). Η ανάπτυξη αυτού του 'συντονισμένου' διαδικαστικού σχήματος ('coordinated' process schema) του ορίου βρέθηκε ότι δεν ήταν τετριμμένο για τους μαθητευόμενους και η δυσκολία τους στη σύλληψη του, έχει θεωρηθεί ως εμπόδιο στη μετεξέλιξη της νοηματοδότησής τους για το όριο (Carlson et al. 2002, σελ 356).

Ακόμα, για να κατανοήσει κάποιος τη σχέση του μέσου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής και- αναλόγως γραφικά, τη σχέση της τέμνουσας και της εφαπτομένης- θα πρέπει να συλλάβει μια εικόνα όπως στο σχήμα 3(a) (Monk 1987). Μέσα από τη μεταχείριση της συμμεταβολής (λ.χ. το συντονισμό μιας εικόνας δυο μεταβαλλόμενων ποσοτήτων και την εστίαση στον τρόπο που μεταβάλλεται η μια σε σχέση με την άλλη), ο μαθητευόμενος μπορεί να μετασχηματίσει την εικόνα και να κρίνει για τις τιμές διάφορων παραμέτρων καθώς το σχήμα (3(a)) μεταβάλλεται. Το να είναι σε θέση κάποιος να απαντάει σε ερωτήσεις που αφορούν σε δύο συμμεταβαλλόμενες ποσότητες- όπως για παράδειγμα στο σχήμα 3(a) :'όταν το σημείο Q πλησιάζει το P, τότε η κλίση αυξάνεται ή μειώνεται;'- είναι σαφώς πιο δύσκολο από το να απαντάει σε ερωτήσεις για την τιμή μιας συνάρτησης σε ένα σημείο (Oehrtman et al.,2008, σελ 155).




**Σχήμα 3: Θεμελιώδεις εικόνες για τους ορισμούς a) της παραγώγου και b) του ορισμένου ολοκληρώματος**

Επίσης, Σχετικά με την έννοια της συσσώρευσης, οι Oehrtman κ.ά. (2008) αναφέρουν ότι στις τυπικές προσεγγίσεις του Απειροστικού, η έννοια της συσσώρευσης παρουσιάζεται με όρους προσδιορισμού στατικών ποσοτήτων – όπως το εμβαδό ενός ακαθόριστου χωρίου του επιπέδου ή ως την απόσταση που διανύθηκε σε ένα σταθερό χρονικό διάστημα δεδομένης της μεταβαλλόμενης ταχύτητας. Οι μαθητευόμενοι φαντάζονται ότι προσεγγίζουν το εμβαδό ενός χωρίου. Το εμβαδό τυχαίνει να ορίζεται μέσω ενός γραφήματος, όμως η δραστηριότητα για εκείνους είναι ίδια με την προσέγγιση ενός εμβαδού κύκλου με τρίγωνα, που η κορυφή τους είναι το κέντρο του κύκλου. Εξίσου σημαντικό όμως, είναι μια δυναμική αναπαράσταση στην οποία η συνολική συσσώρευση μεταβάλλεται μέσα από συνεχή σωρευόμενα μέρη της (accruals). Για παράδειγμα, σε μια τυπική προσέγγιση εύρεσης συνάρτησης εμβαδού έως το υπό εξέταση σημείο (‘area so far’ function), όπως στο Σχήμα 3(b), πρέπει κάποιος να μπορεί να φανταστεί το σημείο p να κινείται δεξιά, προσθέτοντας ‘κομμάτια’ εμβαδού σε ρυθμό ανάλογο του ύψους του γραφήματος. Αυτό, απαιτεί από τους μαθητευόμενους να εμπλακούν με τις έννοιες της συμμεταβολής (Carlson et al., 2003) και είναι σημαντικά πιο δύσκολο για τους μαθητευόμενους από ότι ο υπολογισμός, ακόμα και η σύγκριση, εμβαδών σε δεδομένα σημεία (Monk, 1987), καθώς, αντί να τους ρωτάμε να αντιληφθούν έναν αριθμό: m= $\int_a^b f(x)dx$ τους ζητάμε να κατανοήσουν μια συνάρτηση: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (Oehrtman et al.,2008, σελ 156).

Ο Thompson (1994) αναφέρει ότι η νοηματοδότηση δυναμικών φαινομένων μέσα από τη συμμεταβολή (covariational reasoning) είναι θεμελιώδης στην κατανόηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος: ‘Το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού- η συνειδητοποίηση ότι η συσσώρευση μιας ποσότητας και ο ρυθμός μεταβολής της συσσώρευσής της, είναι στενά συνδεδεμένες έννοιες- αποτελεί ένα από τα διανοητικά ιδιώματα της ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού’ (σελ 130).

Στην παρούσα εργασία, επιζητούμε μέσα από τις δραστηριότητες που δόθηκαν στους φοιτητές να συνδέσουμε τις έννοιες της συσσώρευσης και του ρυθμού μεταβολής. Με έρεισμα την έρευνα του Thompson (1994), κατασκευάστηκαν στο λογισμικό GeoGebra κατάλληλες δραστηριότητες, ώστε να ερευνήσουμε αν και με ποιους τρόπους αναδύονται εννοιολογικές δυσκολίες όπως αυτές που αναφέρθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Με εχέγγυα τα ευρήματα των παραπάνω μελετών, επιχειρούμε μια περεταίρω συνεισφορά στη νοηματοδότηση των φοιτητών για το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

## 3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### 3.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας είναι αφενός *η διερεύνηση των νοητικών εικόνων* που έχουν οι φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος για το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, αφετέρου *ο τρόπος με τον οποίο οι φοιτητές δημιουργούν νοήματα* όταν δουλεύουν διερευνητικά σε δραστηριότητες με περιεχόμενο την έννοια του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού. Για το σκοπό αυτό, σχεδιάστηκε μια σειρά από δομήματα στο λογισμικό GeoGebra, όπου οι συμμετέχοντες καλούνται να εμπλακούν με προβλήματα και δραστηριότητες πάνω σε έννοιες του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώνονται ως εξής:

**1. Αν και με ποιους τρόπους οι φοιτητές κατανοούν τις επιμέρους έννοιες που απαρτίζουν το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού και αναγνωρίζουν τις συνδέσεις που τις διέπουν.**

**2. Με ποιους τρόπους οι φοιτητές κατασκευάζουν νοήματα για το Θεμελιώδες Θεώρημα όταν χρησιμοποιούν εργαλεία με πολλαπλές και διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις.**

### 3.2 Το πλαίσιο της έρευνας

Τα παραπάνω ζητήματα εξετάστηκαν με τη διεξαγωγή ενός διδακτικού πειράματος (teaching experiment) (Steffe, 1991, Steffe & Thompson, 2000) με αποκλειστικό σκοπό τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Δηλαδή, οι παρεμβάσεις με τους φοιτητές πραγματοποιήθηκαν εκτός τυπικών μαθημάτων. Το διδακτικό πείραμα είναι μια ερευνητική μεθοδολογία, που σχεδιάστηκε για να διερευνά και να κατανοεί τις μαθηματικές δραστηριότητες των μαθητών. Αποτελεί μια μορφή της τεχνικής των κλινικών συνεντεύξεων, με τη διαφορά ότι πέρα από το να κατανοήσει την υπάρχουσα γνώση των μαθητευόμενων, αποσκοπεί να κατανοήσει την πρόοδο που κάνουν οι μαθητές σε μια εκτεταμένη χρονική περίοδο. Στα πλαίσια της παρέμβασης με τους μαθητευόμενους ο ρόλος του ερευνητή είναι διττός, αφού έχει ταυτόχρονα και διδακτικό στόχο. Έπειτα, ο στόχος του ερευνητή σε ένα διδακτικό πείραμα είναι να κατασκευάσει 'τα μαθηματικά των μαθητών' (Steffe & Thompson, 2000).

Στην παρούσα εργασία φάνηκε κατάλληλη η επιλογή της συγκεκριμένης μεθόδου, αφού η έρευνα αφορά στην εννοιολογική προσέγγιση του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού μέσα από τη νοηματοδότηση των φοιτητών και διερευνά πως οι ίδιοι κατασκευάζουν νοήματα μέσα από ένα πλήθος αναπαραστάσεων. Η πορεία κατασκευής νοημάτων και ο τρόπος που οι φοιτητές πραγματοποιούν τις απαιτούμενες εννοιολογικές συνδέσεις δεν παρατηρούνται φαινομενολογικά. Εντούτοις, η έρευνα έχει παρεμβατικό χαρακτήρα που συνίσταται στη χρήση του λογισμικού και στο διάλογο (discourse) με την ερευνήτρια.

Τόσο επιστημολογικά όσο και διδακτικά, όπως φάνηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια της εργασίας, το Θεμελιώδους Θεωρήματος περιλαμβάνει – από τη φύση τουτην πλειονότητα των μαθηματικών εννοιών που θα συναντήσει κάποιος μελετώντας τον Απειροστικό Λογισμό. Από την άλλη μεριά, η προσέγγισή του στη βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι πυκνή (Thompson, 1994, Dreyfus & Kouropatov, 2013, Thompson et al., 2013). Συνεπώς, πριν καταλήξουμε σε μια άμεση διερεύνηση νοημάτων για το Θεμελιώδες Θεώρημα, θα έπρεπε πρώτα να επιχειρήσουμε ορισμένες παρεμβάσεις που αποσκοπούν στον εμπλουτισμό των αναπαραστάσεων των επιμέρους εννοιών που συνθέτουν το θεώρημα, ώστε να φανεί αν και πώς φτάνουν οι φοιτητές στην κατανόησή του σε ένα περιβάλλον όπως το GeoGebra.

Η χρήση νέων τεχνολογιών κρίθηκε απαραίτητη για την εν λόγω έρευνα: ο στόχος των παρεμβάσεων ήταν η δημιουργία σχημάτων νοήματος που δυνητικά προσφέρουν συνοχή στη σκέψη των φοιτητών πάνω στις έννοιες του *ρυθμού μεταβολής* και της *συσσώρευση* λόγω της δυναμικής αναπαράστασης των εννοιών (βλ Ενότητα 3.4). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και θα εξηγήσουμε περισσότερο παρακάτω, η τεχνολογία παίζει διαμεσολαβητικό ρόλο για την επίτευξη αυτού του στόχου, καθιστά δυνατή την εννοιολογική ανάπτυξη. Για παράδειγμα, οι συμμετέχοντες μπορούν να αναπαριστούν συναρτήσεις ανοικτού τύπου με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπεριφέρονται όπως οικίες σε αυτούς συναρτήσεις [3].

Ειδικότερα, η έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσα από μια σειρά παρεμβάσεων και χωρίστηκε σε τέσσερεις φάσεις, όπως όρισαν οι διαφορετικές θεματικές που θα αναλύσουμε στη συνέχεια. Το πλαίσιο της έρευνας γνωστοποιήθηκε στους φοιτητές έπειτα από σχετική ανακοίνωση που είχε αναρτηθεί στο Μαθηματικό Τμήμα, σε προπτυχιακό μάθημα σχετικά με την πρακτική άσκηση στη Διδακτική των Μαθηματικών, αλλά και από διαπροσωπικές επαφές. Σε αυτό το στάδιο έγινε σαφές ότι η απαίτηση για τη συμμετοχή των φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος στην έρευνα, ήταν να έχουν εξετασθεί επιτυχώς στο μάθημα Απειροστικός Λογισμός Ι και να βρίσκονται τουλάχιστον στο 4$^{ο}$ εξάμηνο φοίτησης.

---

[3] Η έκφραση ανοικτού τύπου $\int_0^x \cos(t)dt$ αναπαριστά την ακριβή συσσώρευση μιας ποσότητας που μεταβάλλεται στο ρυθμό της $\cos(t)$ στο διάστημα $0 \le t \le x$, και είναι πανομοιότυπη με την έκφραση κλειστού τύπου $\sin(x)$.

Οι φοιτητές που δήλωσαν ενδιαφέρον ήρθαν σε άμεση επαφή με την ερευνήτρια, όπου ενημερώθηκαν αναλυτικά για τη διαδικασία και το περιεχόμενο της έρευνας στην οποία αν επιθυμούσαν, θα συμμετείχαν. Επιπλέον, έγινε σαφές στους συμμετέχοντες ότι τα ονόματα των ίδιων δε θα γίνουν γνωστά, ούτε και θα χρησιμοποιηθούν στην πρωτότυπη μορφή τους στη διπλωματική εργασία, για λόγους που προστάζει το πλαίσιο ηθικής και δεοντολογίας μίας έρευνας.

Τέλος, οι συμμετέχοντες ερωτήθηκαν αν είχαν ή όχι αντίρρηση για τη μαγνητοσκόπηση κατά τη διάρκεια των συναντήσεων. Φυσικά, έγινε και πάλι σαφές στους φοιτητές ότι τα βίντεο των συναντήσεων θα είναι για την προσωπική χρήση της ερευνήτριας στη διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων και δεν θα προβληθούν μπροστά σε τρίτους.

### 3.2.1 Συμμετέχοντες

Οι πέντε φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα βρίσκονταν σε διαφορετικά έτη σπουδών ($4^{ο}$- $8^{ο}$, ηλικίες 22-26 ετών), και στην πλειοψηφία τους (4/5) είχαν ολοκληρώσει το μεγαλύτερο μέρος των μαθημάτων για την απόκτηση πτυχίου. Επιπλέον 4/5 είχαν επιλέξει ειδίκευση στη Διδακτική των Μαθηματικών και 2/5 διδάσκουν ή έχουν διδάξει Απειροστικό Λογισμό σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Το γεγονός αυτό, αποτέλεσε ένα επιπλέον κίνητρο για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας καθώς οι περισσότεροι συμμετέχοντες (3/5) παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον για τις ιδέες και τις εφαρμογές του κλάδου της Διδακτικής των Μαθηματικών. Μέσα από διαπροσωπικές συζητήσεις φάνηκε να τους απασχολούν ζητήματα όπως: οι εννοιολογικές συνδέσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, η χρήση νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση, η ιστορική πλαισίωση μαθηματικών εννοιών κ.α.. Αφετέρου η πλειονότητα των συμμετεχόντων πιθανότατα θα διδάξει μελλοντικά (ήδη ορισμένοι διδάσκουν) Απειροστικό Λογισμό στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η εστίαση στο Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού φαίνεται να ταιριάζει σε αυτή τη δομή.

Οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν η Νίκη, ο Δήμος και ο Πάρις ($1^{η}$ ομάδα), η Τάνια και ο Κοσμάς ($2^{η}$ ομάδα).

## 3.3 Συλλογή δεδομένων

Οι συναντήσεις με τους συμμετέχοντες πραγματοποιήθηκαν σε διάρκεια ενός μήνα και κάθε συνέντευξη αποτελούνταν από μια ομάδα φοιτητών και την ερευνήτρια. Κάθε φάση της έρευνας αντιστοιχούσε σε μια συνάντηση με τους φοιτητές, συνεπώς πραγματοποιήθηκαν συνολικά τέσσερεις συναντήσεις με κάθε ομάδα.

Πρέπει να αναφερθεί ότι υπήρξαν κάποιες αποκλίσεις από το αρχικό πλάνο σχεδιασμού. Αρχικά, ενώ οι συμμετέχοντες ήταν συνολικά έξι φοιτητές (τρεις ομάδες των δύο ατόμων), τελικά ολοκλήρωσαν και τις τέσσερεις συνεντεύξεις πέντε φοιτητές (δύο ομάδες των δύο ατόμων και ένα άτομο). Επιπλέον, είχε σχεδιαστεί αρχικά οι συνεντεύξεις να έχουν μικρότερη χρονική απόσταση μεταξύ τους και να έχουν ολοκληρωθεί μέσα σε δυο εβδομάδες περίπου. Τα παραπάνω οφείλονται επίσης στο γεγονός είχε ήδη ξεκινήσει η εξεταστική περίοδος των φοιτητών για το εαρινό εξάμηνο (Μάιος- Ιούνιος 2013). Ακόμα, ορισμένες φορές χρειάστηκε να πραγματοποιηθούν κάποιες μικρές αλλαγές στις δραστηριότητες, όπως η αναδιατύπωση ερωτημάτων είτε η προσθήκη νέων, στα διαστήματα που μεσολαβούσαν από τη μια συνάντηση στην άλλη. Ο λόγος που συνέβη αυτό είναι είτε γιατί παρουσιάστηκαν νέες παράμετροι μέσα από την ανατροφοδότηση με τους φοιτητές κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, είτε γιατί εν γένει χρειάστηκε να γίνει αναθεώρηση των ερευνητικών υποθέσεων σε ορισμένα σημεία. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα γίνει αναλυτικότερη αναφορά σε αυτά τα ζητήματα. Σαν συνέπεια των παραπάνω, υπήρξαν συναντήσεις όπου χρειάστηκε να επιστρέψουμε σε δραστηριότητες προηγούμενων φάσεων ώστε να δοθούν ορισμένες διευκρινήσεις πάνω στις απαντήσεις των φοιτητών.

Η διάρκεια κάθε συνάντησης ήταν περίπου μια με μιάμιση ώρα. Το μεγαλύτερο μέρος των συνεντεύξεων έλαβε χώρα στον υπολογιστή, καθώς οι συμμετέχοντες εμπλέκονταν με τις δραστηριότητες στο λογισμικό Geogebra. Συνήθως η ερευνήτρια ξεκινούσε με μια συνοπτική περιγραφή της δραστηριότητας και στη συνεχεία, με οδηγό τα φύλλα εργασίας, εξηγούσε τι ακριβώς καλούνται να κάνουν οι φοιτητές. Έπειτα δίνονταν στους συμμετέχοντες ο απαιτούμενος χρόνος για να διαβάσουν και να κατανοήσουν καλύτερα τα ζητούμενα κάθε προβλήματος. Ακολουθούσε μια εξερεύνηση στο λογισμικό από τους ίδιους, όπου εξέφραζαν προφορικά τις σκέψεις τους μέχρι να οδηγηθούν στις τελικές απαντήσεις τους μέσα από τη συζήτηση με την ερευνήτρια. Σε συγκεκριμένες δραστηριότητες φάνηκε αναγκαίο να δοθούν γραπτές απαντήσεις ώστε οι φοιτητές να τεκμηριώσουν το συλλογισμό τους και να οδηγηθούν σε κάποιο αποτέλεσμα. Σε ορισμένα σημεία δηλαδή, η χρήση του λογισμικού ήταν συμπληρωματική και όχι υποκατάστατο των συμβατικών μέσων όπως ‘το χαρτί και το μολύβι’.

Όπως αναφέραμε νωρίτερα ο ρόλος του ερευνητή στο διδακτικό πείραμα είναι διττός. Δεν ήταν λίγες οι φορές, όπου χρειάστηκε να γίνει υπενθύμιση σχετικών ορισμών και θεωρημάτων και που οι ίδιοι οι συμμετέχοντες αντιμετώπιζαν την ερευνήτρια πρωτίστως ως διδάσκουσα. Μια ακόμα εναλλαγή στο ρόλο της ερευνήτριας, συνέβαινε σε ορισμένα σημεία όπου οι συμμετέχοντες αποκρίνονταν χρησιμοποιώντας εργαλεία από διαφορετικό μαθηματικό πεδίο είτε όταν παρουσιαζόταν μια νέα προοπτική στο λογισμικό. Σε αυτά τα σημεία η ίδια η ερευνήτρια εμπλέκονταν με τις δραστηριότητες σε αναζήτηση απαντήσεων σε έκτακτα ζητήματα που προέκυπταν. Όμως, κατά κύριο λόγο ο ρόλος της ερευνήτριας ήταν να ζητά διευκρινήσεις στις απαντήσεις των συμμετεχόντων και να θέτει ερωτήσεις κατ επανάληψη στην προσπάθεια να εκμαιεύσει όσο το δυνατό περισσότερα από το συλλογισμό και τις νοητικές διεργασίες τους.

Τελικά, ο όγκος των δεδομένων που συλλέχθηκαν με το πέρας των συνεντεύξεων είχε συνολική διάρκεια 12 ώρες. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε από την ίδια την ερευνήτρια, καθώς δεν υπήρχε κάποιο πρόσωπο που θα έπαιζε το ρόλο του παρατηρητή του πειράματος και γενικότερα που θα εξυπηρετούσε πρακτικούς ερευνητικούς σκοπούς.

Τέλος, οι συνεντεύξεις με τους φοιτητές βιντεοσκοπήθηκαν με *δύο κάμερες* . Η μια εστιάστηκε στην οθόνη του υπολογιστή, όπου κατέγραφε τις ενέργειες των φοιτητών στο λογισμικό κατά την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες και η δεύτερη στους ίδιους τους φοιτητές. Επιπλέον, καταγράφονταν *σημειώσεις πεδίου* από την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Τέλος, ερευνητικά εργαλεία αποτέλεσαν τα *φύλλα εργασίας* σε κάθε συνάντηση στα οποία οι συμμετέχοντες απαντούσαν προφορικά είτε γραπτά όπου κρινόταν αναγκαίο και ένα *ερωτηματολόγιο*, που συμπληρώθηκε από τους συμμετέχοντες στην πρώτη συνάντηση που ήταν και εισαγωγική.

### 3.4 Δραστηριότητες

Το διδακτικό πείραμα υλοποιήθηκε σε τέσσερεις φάσεις. Η πρώτη φάση ήταν εισαγωγική και αποσκοπούσε στη χαρτογράφηση της υπάρχουσας γνώσης των φοιτητών και στην εξοικείωση με το λογισμικό GeoGebra.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας εστιάζουμε στην έννοια του ρυθμού μεταβολής καθώς και σε συναρτήσεις που δίνουν μέσους ρυθμούς μεταβολής σε διαστήματα σταθερού πλάτους. Η τρίτη φάση του πειράματος επικεντρώνεται στην έννοια της *συσσώρευσης* μιας ποσότητας και στα αθροίσματα Riemann.

Τέλος, στην τέταρτη φάση της έρευνας, εξετάζουμε τις σχέσεις ανάμεσα σε μια μεταβαλλόμενη ποσότητα, στη συσσώρευση αυτής και στο ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης της. Ο στόχος εδώ ήταν να συγκεντρώσουμε τις έννοιες που ασχοληθήκαμε στις προηγούμενες φάσεις σε ένα περιεχόμενο που αναδεικνύει τη σχέση αντιστροφής ανάμεσα στη συσσώρευση μιας ποσότητας και στο ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης αυτής, ώστε να διαπιστώσουμε αν και με ποιους τρόπους οι φοιτητές θα συνδέσουν τις συγκεκριμένες διαδικασίες με το ΘΘΟΛ.

Εν γένει, παρόλο που ελπίζαμε να πραγματοποιηθούν οι αναφερθείσες συνδέσεις από τους φοιτητές για το ΘΘΟΛ, ο ευρύτερος στόχος του διδακτικού πειράματος ήταν να επισημάνουμε κάποιες πτυχές των νοημάτων ή των παρανοήσεων που έχουν οι ίδιοι γύρω από τις εμπλεκόμενες έννοιες, οι οποίες ενδεχομένως διευκολύνουν ή παρεμποδίζουν τη νοηματοδότηση του Θεωρήματος.

Το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων σε κάθε φάση της έρευνας φαίνεται πιο αναλυτικά στις ενότητες που ακολουθούν.

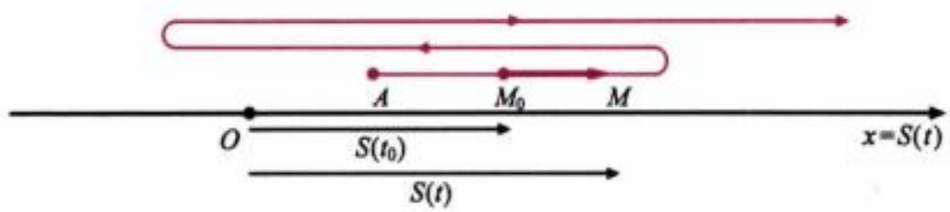
#### 3.4.1 Φάση Ι: Χαρτογράφηση υπάρχουσας γνώσης και εξοικείωση με το λογισμικό GeoGebra.

Στην πρώτη συνάντηση με κάθε ομάδα, οι φοιτητές συμπλήρωσαν ατομικά ένα ερωτηματολόγιο που περιείχε ερωτήσεις σχετικές με το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης (ερωτήματα Α), την παράγουσα μιας συνάρτησης, τον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος (ερωτήματα Β), και τέλος τη σχέση ανάμεσα στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα (ερωτήματα Γ). Έπειτα, με εργαλείο το λογισμικό GeoGebra δόθηκαν κάποιες απαντήσεις σε ζητήματα που αναδείχθηκαν στο ερωτηματολόγιο, μέσω της δυναμικής αναπαράστασης των προβλημάτων που περιείχε.

Παρακάτω φαίνεται το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε στην εισαγωγική φάση.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ**

**Α.1.** Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή $t$.




Η συνάρτηση θέσης $S$ καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t$.

Ας υποθέσουμε ότι κάποια χρονική στιγμή $t_0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $M_0$ και ότι μετά από παρέλευση χρόνου $h$, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση $M$.

i. Γράψτε τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα από $t_0$ έως $t$.
ii. Γράψτε τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t_0$.

**Α.2.** Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου $t$ ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας $E$ και του όγκου $V$ της μπάλας, όταν t=1sec (θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

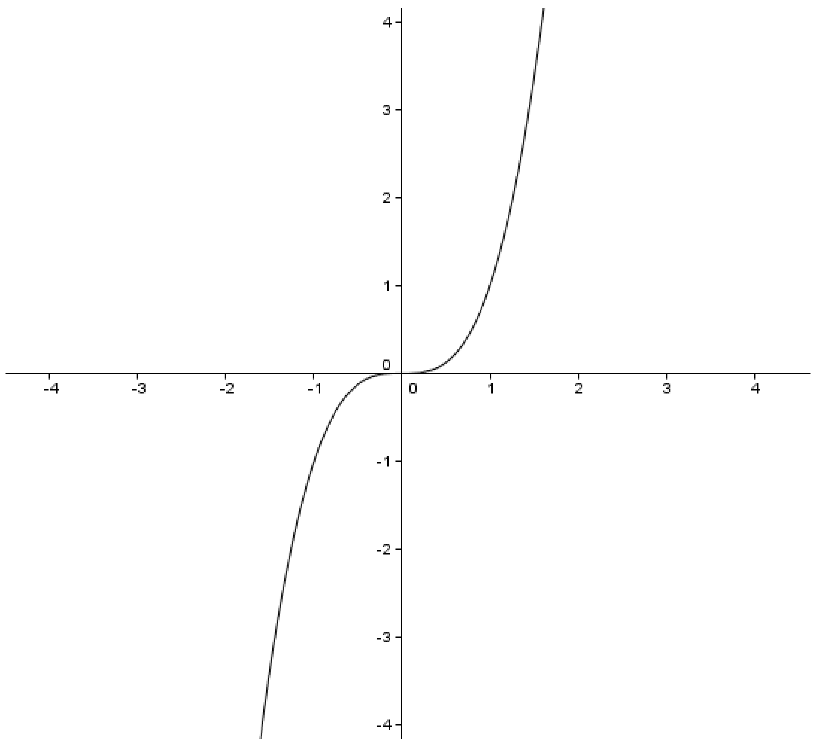
**Α.3.** Δώστε τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής του $y$ ως προς $x$ στο σημείο $x_0$, αν $x, y$ είναι δυο μεταβλητά μεγέθη που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$.

**Β.1.**

**i.** Υπολογίστε το $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$

**ii.** Χρησιμοποιήστε ένα γράφημα της συνάρτησης $\sin(x)$ για να εξηγήσετε τη λύση σας

**B.2.** Παρακάτω φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^3$. Πώς θα έμοιαζε το γράφημα της αντιπαραγώγου της $f$ ; (Σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων)




**B.3.** Με μια ή δυο προτάσεις, δώστε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, περισσότερο περιγραφικά παρά με μαθηματικά σύμβολα.

**Γ.1.** Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο ολοκλήρωσης για να λύστε τα παρακάτω προβλήματα;

i. Γνωρίζουμε την ταχύτητα ενός κινητού και ψάχνουμε τη θέση του σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Σ / Λ

ii. Γνωρίζουμε το ρυθμό μεταβολής με τον οποίο τρέχει το νερό από μια βρύση και ψάχνουμε την ποσότητα του νερού που έτρεξε σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Σ / Λ

**Γ.2.** Τοποθετήστε το γράμμα που λείπει στην έκφραση: $F(...) = \int_a^x f(t)dt$ .

### 3.4.2 Φάση ΙΙ: Ρυθμός μεταβολής

Η δεύτερη φάση της έρευνας επικεντρώνεται στο να εμπλουτίσουν οι φοιτητές τις εικόνες που έχουν γύρω από το μέσο ρυθμό ώστε να μπορέσουν να τον εκφράσουν σαν ένα πηλίκο διαφορών που αναπαριστά το μέσο ρυθμό μεταβολής μιας μικρής προσαύξησης της ποσότητας. Συγκεκριμένα τους ζητείται να κατασκευάσουν μια συνάρτηση $Df$ που δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής μιας αρχικής, δοθείσας, συνάρτησης $f$ η οποία μοντελοποιεί ένα φυσικό φαινόμενο.

Σε αυτή, τη φάση επιχειρούμε να διερευνήσουμε: τις εικόνες που έχουν οι φοιτητές γύρω από την έννοια του ρυθμού μεταβολής, τα νοήματα που κατασκευάζουν κατά την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα και τέλος, αποσκοπεί στο να εξοικειωθούν οι ίδιοι με την κατασκευή αντίστοιχων συναρτήσεων που θα τους ζητηθεί στην τέταρτη φάση του πειράματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι μέρος του σχεδιασμού αυτής της φάσης στηρίχθηκε σε δραστηριότητες που δόθηκαν σε αντίστοιχη έρευνα του Thompson (1994). Ο ίδιος, ακολουθεί μια εναλλακτική προσέγγιση για την έννοια του ρυθμού, που προτάθηκε από τον Tall (1988), μέσω ενός παραδείγματος στο οποίο το x μεταβάλλεται για κάθε τιμή του h. Ο Thompson αναφέρει ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης συνήθως προσεγγίζεται με εστίαση στη σημειακή σύγκλιση. Δηλαδή, ορίζεται μέσω της κατανόησης ότι το x στην έκφραση $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι σταθερό σε σχέση με το h.

Συγκεκριμένα επιχειρούμε την ερμηνεία της συνάρτησης $f_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ με δύο τρόπους:

1. Για μια σταθερή τιμή του $h$, η συνάρτηση $f_h(x)$ δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής της $f$ σε κάθε διάστημα μήκους $h$ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $f$.
2. Η $f_h(x)$ δίνει τις κλίσεις για κάθε τέμνουσα που συνδέει τα σημεία $(x, f(x))$ και $(x+h, f(x+h))$.

Η δεύτερη ερμηνεία υποστηρίζει την εικόνα μιας ‘ολισθαίνουσας τέμνουσας’ σε ένα διάστημα μήκους $h$ στο πεδίο ορισμού της $f$. Καθώς μεταβάλλεται το μήκος του διαστήματος, μεταβάλλεται και η κλίση της τέμνουσας στο αντίστοιχο διάστημα. Καθώς το $h$ προσεγγίζει το 0, παράγεται μια οικογένεια συναρτήσεων που συγκλίνουν στην συνάρτηση που δίνει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της $f$ όπου υπάρχει το σημειακό όριο (Thompson,1994).

Στη δεύτερη φάση χρησιμοποιήθηκε το ακόλουθο φύλλο εργασίας.

Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τη συνάρτηση $f(t)$,όπου $t$ χρόνος σε sec.

Στο αρχείο αυτό φαίνονται:

- η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)=2-t^2$
- τα σημεία Α και Β που κινούνται κατά μήκος του άξονα $t't$.
- τα σημεία Γ και Δ που ανήκουν στην καμπύλη $f$ και έχουν ίδιες τετμημένες με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, και τεταγμένες τις εικόνες των Α και Β μέσω της $f$.

Α. Βρείτε το μέσο ρυθμό μεταβολής της ακτίνας της μπάλας μεταξύ των:

i. 1,1 και 1,2 sec
ii. 1,2 και 1,3 sec
iii. 1,15 και 1,25 sec

*Παρατηρείστε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ, για τη διευκόλυνση των αλγεβρικών πράξεων. Έπειτα πιέστε το κουμπί κλίση.*

Α.1. Τι παρατηρείτε;
Τι πιστεύετε ότι συμβολίζει ο αριθμός *κλίση*;

Β. Προσδιορίστε τη συνάρτηση που εκφράζει το μέσο ρυθμό μεταβολής της ακτίνας για κάθε διάστημα πλάτους $\frac{1}{10}$ του δευτερολέπτου (πχ $[0,0.1],[0.1,0.2],[0.2,0.3]$ κλπ).

*Ονομάστε τη συνάρτηση που κατασκευάσατε $Df$ και πληκτρολογήστε αυτή στο αντίστοιχο κουτί εισαγωγής.*

Β.1. Τι αναπαριστά το σημείο $Df(0.5)$;

Γ. Γενικεύστε την απάντησή σας εισάγοντας μια παράμετρο $h$ και παρατηρείστε τον αντίστοιχο δρομέα που εμφανίζεται στην οθόνη. Προσδιορίστε δηλαδή, το μέσο ρυθμό μεταβολής της ακτίνας πάνω σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους $h$.
Γ.1. Τι αναπαριστά το σημείο $Df_h(0.5)$;

*Κινείστε το δρομέα h που εμφανίζεται και παρατηρείστε την κίνηση της $Df$ .Ενεργοποιείστε το ίχνος της $Df$ .*

Γ.2.Σε ποια οικογένεια συναρτήσεων ανήκουν οι συναρτήσεις που διαγράφονται κατά την κίνηση του δρομέα $h$;
Γ.3.Πού συγκλίνουν οι συναρτήσεις αυτές καθώς το $h$ τείνει στο 0;

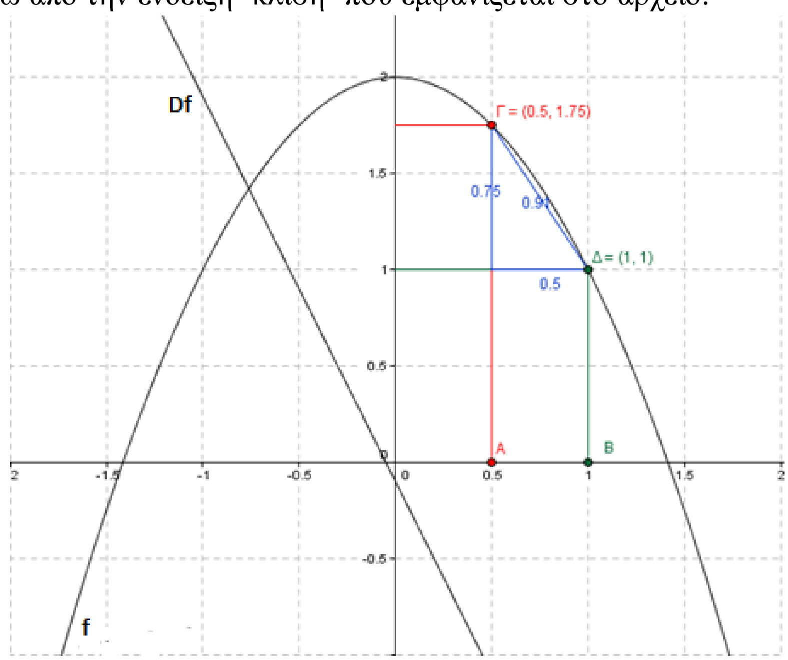
*Πιέστε το κουμπί 'ΕΡ Γ.4' και παρατηρείστε την κίνηση του σημείου Η, το οποίο έχει την ίδια τετμημένη με το σημείο Α.*

Γ.4.Τι συμβολίζει η τεταγμένη του σημείου Η;

Πριν προβούμε στην ανάλυση της δραστηριότητας αναφέρουμε την προστιθέμενη αξία του λογισμικού στα εξής:

- Δυναμική κίνηση τέμνουσας και δυνατότητα διερεύνησης της συμπεριφοράς της τέμνουσας μέσω οπτικής αναπαράστασης, σε αρκούντως μικρά διαστήματα μήκους $h$.
- Κατανόηση οριακής θέσης τέμνουσας ως εφαπτομένης σε ένα σημείο.
- Παρατήρηση της δημιουργίας μια οικογένειας συναρτήσεων μέσω του ίχνους της $Df$ για κάθε $h$.
- Ταυτόχρονη συμμεταβολή της τέμνουσας στο $[A, A+h]$ και της $Df(t)=\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ στο $[A, A+h]$ κατά την κίνηση του δρομέα $h$ σε διάστημα σταθερού πλάτους.

Στο ερώτημα Α του φύλλου εργασίας οι συμμετέχοντες καλούνται να κινήσουν τα σημεία Α και Β (βλ. Σχήμα 4), ώστε να λάβουν τις ζητούμενες τιμές και να κατασκευάσουν κλάσματα διαφορών της μορφής $\dfrac{f(B)-f(A)}{B-A}, B-A=0.1$ . Για τη διευκόλυνση των αλγεβρικών πράξεων έχει επιλεχθεί να εμφανίζονται οι συντεταγμένες των σημείων. Έπειτα, πιέζοντας το κουμπί *κλίση*, εμφανίζεται στο αρχείο η κλίση της τέμνουσας που συνδέει τα σημεία $\Gamma=(\mathrm{A}, f(A))$ και $\Delta=(\mathrm{B}, f(\mathrm{B}))$, ώστε οι συμμετέχοντες να επαληθεύσουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους. Κατά το σχεδιασμό, επιλέχθηκε να μην εμφανίζεται στην οθόνη η ευθεία αυτή ώστε οι συμμετέχοντες να οδηγηθούν μέσα από την παρατήρηση στη γεωμετρική ερμηνεία του μέσου ρυθμού μεταβολής ως κλίση τέμνουσας. Για το λόγο αυτό, ακολούθησε μια συζήτηση γύρω από την ένδειξη 'κλίση' που εμφανίζεται στο αρχείο.



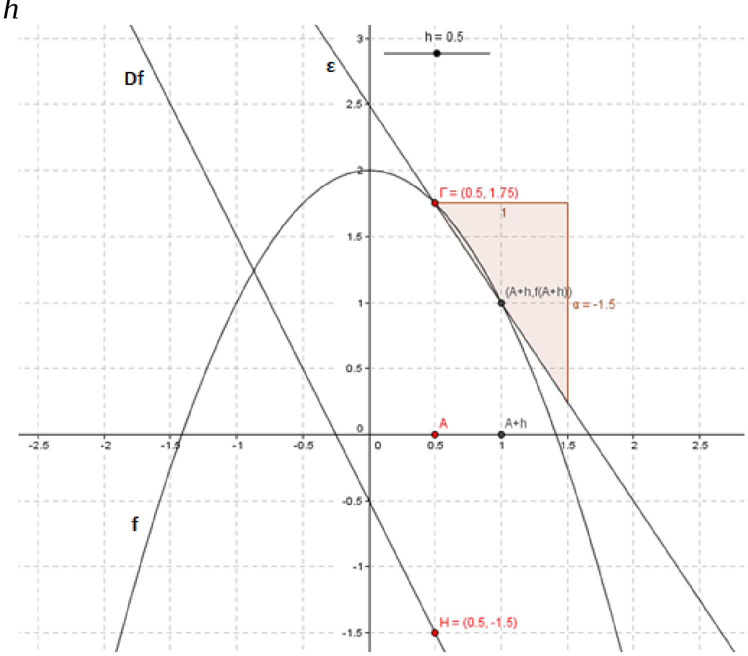

**Σχήμα 4: Τα σημεία Α και Β κινούνται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, ενώ φαίνονται οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ της καμπύλης f και οι τιμές των διαφορών f(B)-f(A) και B-A, που χρησιμεύουν στον υπολογισμό πηλίκων διαφορών της μορφής (f(B)-f(A))/(B-A), με B-A=0.1. Η ευθεία Df δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής σε διαστήματα πλάτους B-A=0.1.**

Στο ερώτημα Β, ζητείται από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν τη συνάρτηση $Df(t) = \dfrac{f(t+0.1) - f(t)}{0.1}$ και να παρατηρήσουν το γράφημα αυτής (βλ. Σχήμα 4).

Στο ερώτημα Γ, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν την συνάρτηση $Df(t) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$, για οποιοδήποτε διάστημα πλάτους $h$ και αφού την εισάγουν, να κινήσουν το δρομέα $h$ που εμφανίζεται στην οθόνη, με $h \in (0,1]$ (βλ. Σχήμα 5). Κατά τη φθίνουσα μεταβολή του $h$ στο $(0,1]$, διαγράφονται οι συναρτήσεις $Df_h(t) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ στο $[t, t+h]$ οι οποίες συγκλίνουν στη συνάρτηση $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$. Η κίνηση του δρομέα αποτέλεσε εφαλτήριο για συζήτηση σχετικά με τη συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών.

Στο ερώτημα Γ.4 εμφανίζεται το σημείο Η που ανήκει στην $Df$ και έχει την ίδια τετμημένη του με το σημείο Α και τεταγμένη την κλίση της τέμνουσας στα σημεία με τετμημένες τα άκρα του διαστήματος $[A, A+h]$ και τεταγμένες τις εικόνες τους μέσω της $f$ (βλ. Σχήμα 5). Το ερώτημα αυτό, αποτέλεσε κριτήριο για την κατανόηση της $Df$, καθώς μέσα από την κίνηση του δρομέα $h$ εξετάζουμε τη συμπεριφορά της για τη σταθερή τιμή $t_0 = A$ και τη μεταβολή του μήκους $h$ του διαστήματος $[A, A+h]$.

Τέλος, πιέζοντας το κουμπί '*Κλίση Τέμνουσας*' (βλ. Σχήμα 5), οι συμμετέχοντες παρατηρούν την ταυτόχρονη συμμεταβολή της τέμνουσας και της $Df(t) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ στο $[A, A+h]$ κατά την κίνηση του δρομέα $h$ στο $(0,1]$.




**Σχήμα 5: Συμμεταβολή της τέμνουσας ε και της συνάρτησης Df που δίνει κλίσεις τεμνουσών με την κίνηση του δρομέα h.**

### 3.4.3 Φάση ΙΙΙ: Συσσώρευση μεταβαλλόμενης ποσότητας

Η τρίτη φάση της έρευνας αποσκοπεί σε μια διαισθητική κατανόηση της διαδικασίας προσέγγισης του ζητουμένου εμβαδού μέσω των αθροισμάτων Riemann και στη θεώρηση των αθροισμάτων ως συναρτήσεων που περιγράφουν μια κατά προσέγγιση συσσώρευση μιας ποσότητας σε σχέση με τη μεταβολή μιας άλλης.

Εστιάζουμε αφενός στον υπολογισμό του εμβαδού ενός μη ευθυγράμμου επιπέδου χωρίου, αφ’εταίρου στον υπολογισμό του όγκου ενός στερεού μέσω των αθροισμάτων Riemann. Συγκεκριμένα ζητήθηκε αρχικά από τους συμμετέχοντες να υπολογίσουν το εμβαδό του χωρίου που φράσσεται από μια συνάρτηση $f$, τις ευθείες $x = x_1$ και $x = x_2$ και τον άξονα $x'x$, μέσα από όλο και καλύτερες προσεγγίσεις με χρήση των αθροισμάτων Riemann, έως ότου λάβουν ακριβή τιμή για το ζητούμενο εμβαδό μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος. Έπειτα ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να υπολογίσουν τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή της $f$ γύρω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ μέσα από όλο και καλύτερες προσεγγίσεις με χρήση των αθροισμάτων Riemann στην υπάρχουσα διαμέριση του διαστήματος $[x_1, x_2]$. Τέλος, η φάση αυτή εστιάστηκε στη θεώρηση των αθροισμάτων Riemann ως μια συνάρτηση η οποία προσεγγίζει το εμβαδό και τον όγκο που συζητήθηκαν παραπάνω και στοχεύει στο συντονισμό της εικόνας μιας συναρτησιακής συμμεταβολής δυο ποσοτήτων με την εικόνα της συσσώρευσης μιας ποσότητας ως σώρευσης ‘κομματιών’ που την απαρτίζουν.

Στην τρίτη φάση χρησιμοποιήθηκε το ακόλουθο φύλλο εργασίας:

Phase 3.i

Στο αρχείο αυτό φαίνονται:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$
- Τα σημεία $x_1, x_2$ που κινούνται κατά μήκος του άξονα $x'x$
- Ο δρομέας '*Πλήθος ορθογωνίων*' που καθορίζει το πλήθος των υποδιαστημάτων της διαμέρισης του διαστήματος $[x_1, x_2]$
- Οι ενδείξεις '*Άθροισμα ορθογωνίων*', '*Εμβαδό χωρίου*' και '*Δx*'

Α. Στόχος μας είναι να βρούμε μια όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση για το εμβαδό Ε που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x)=x^2$, τον άξονα $x$, και τις ευθείες $x_1=0$ και $x_2=4$.

Α.1.Γράψτε μια 1η προσέγγιση για το Ε για n=8 (όπου n πλήθος των ορθογωνίων)
Ε $\approx$ ………..

Α.2.Τι εμβαδό θα είχε το τυχαίο ορθογώνιο $R_i$;
$E_i =$ …….

Κινείστε το δρομέα '*Πλήθος ορθογωνίων*' και παρατηρείστε τις ενδείξεις '*Άθροισμα ορθογωνίων*' και '*Εμβαδό χωρίου*'.

Α.3.Πώς θα λαμβάναμε μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδό;
$\int_0^4 f(x)dx \approx$ ……..

Α.4.Μπορεί αυτή η διαδικασία της άθροισης κατά Riemann να μας δώσει το ακριβές εμβαδό;

*Φανταστείτε ότι η συνάρτηση* $f(x)=x^2$ *περιστρέφεται γύρω από τον άξονα* $x'x$*, στο διάστημα* $[0,4]$*.Τι θα συμβεί;*

Phase 3.ii

*Πιέστε το κουμπί 'Περιστροφή'.*
*Εισάγετε επίσης τις συναρτήσεις*

- $x^2$
- $\sin x+1$
- $x$

*στο αντίστοιχο πεδίο εισαγωγής.*

Phase 3.iii

Στη δεξιά οθόνη του αρχείου αυτού φαίνονται:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x$
- Τα σημεία $x_1, x_2$ που κινούνται κατά μήκος του άξονα $x'x$
- Ο δρομέας '*Πλήθος ορθογωνίων*' που καθορίζει το πλήθος των υποδιαστημάτων της διαμέρισης του διαστήματος $[x_1, x_2]$
- Οι ενδείξεις '*Προσέγγιση Όγκου*'και 'Όγκος Στερεού'
- Τα κουμπιά 'Σημείο Α' και 'Συσσώρευση Όγκου'

Β. Στόχος μας είναι να βρούμε μια όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση για τον όγκο του στερεού που δημιουργείται κατά την περιστροφή της $f$ γύρω από τον άξονα $x'x$.

Β.1.Τι συμβαίνει κατά την περιστροφή για το τυχαίο ορθογώνιο $R_i$;

Β.2. Γράψτε μια $1^{η}$ προσέγγιση για τον ζητούμενο όγκο V για n=8 (όπου n το πλήθος των ορθογωνίων)
V=………

*Κινείστε το δρομέα 'Πλήθος ορθογωνίων' και παρατηρείστε τις ενδείξεις 'Προσέγγιση όγκου' και 'Όγκος στερεού'.*

Β.3. Πώς θα λαμβάναμε μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση του όγκου V;

$\int_0^4$ …………….=…………….

*Πιέστε το κουμπί 'Σημείο Α', κινείστε το σημείο $x_2$ κατά μήκος του άξονα χ και παρατηρείστε την κίνηση του σημείου Α. Το σημείο αυτό έχει ως*:

- *τετμημένη την τετμημένη του σημείου $x_2$ και*
- *τεταγμένη το άθροισμα κατά Riemann των όγκων των στερεών που παράγονται για $n = n_0$ στη θέση που βρίσκεται το σημείο $x_2$. Δηλαδή η τεταγμένη του σημείου Α, είναι ο αριθμός 'Προσέγγιση όγκου' που αναγράφεται στην ένδειξη.*

Β.4. Μπορείτε να φανταστείτε τι συμβολίζει το ίχνος του σημείου αυτού καθώς αυξάνεται το $x_2$;

Πριν προβούμε στην ανάλυση της δραστηριότητας αναφέρουμε την προστιθέμενη αξία του λογισμικού στα εξής:

- Δυναμική κίνηση του πλήθους ορθογωνίων.
- Οπτικοποίηση της περιστροφής της συνάρτησης.
- Οπτικοποίηση της κατασκευής του όγκου, μέσω αθροισμάτων Riemann σε αντιστοιχία με την κατασκευή του εμβαδού και μέσω της ταυτόχρονης προβολής δυο γραφικών. Κάθε ορθογώνιο παράγει ένα κύλινδρο κατά την περιστροφή του.
- Αναπαράσταση αθροισμάτων Riemann ως συναρτήσεις.

Στα ερωτήματα Α.1 και Α.2 του φύλλου εργασίας ζητείται από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν μια 1η προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδό της μορφής $E \approx E_1 + ... + E_8$, με $\mathrm{E}_i = f(\xi_i)\Delta x$, $\xi_i \in [(i-1)\Delta x, i\Delta x]$.

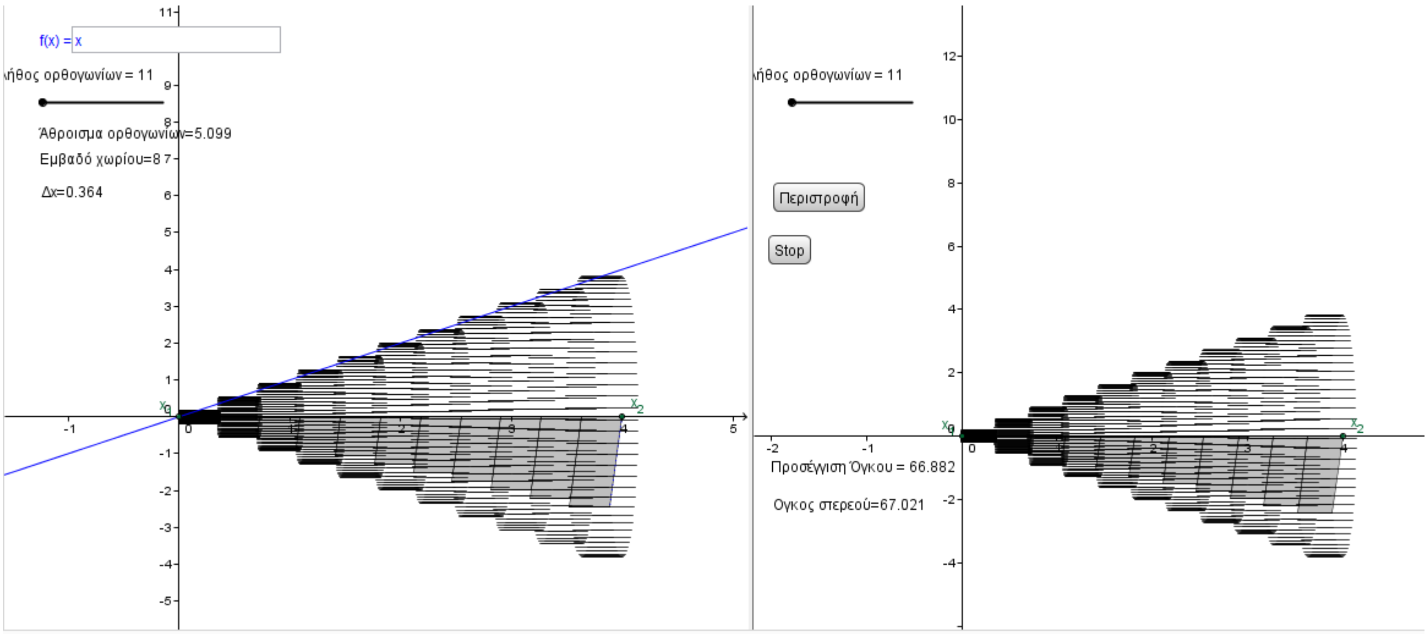
Στο ερώτημα Α.3 συζητάμε αν το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$, $\Delta x = \dfrac{x_2 - x_1}{n}$, $\xi_i \in [(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, αποτελεί μια καλή προσέγγιση του Ε.

Στο ερώτημα Α.4 γίνεται μια συζήτηση για τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε μέσω αυτής της διαδικασίας να πάρουμε το ακριβές εμβαδό, όπου και εμπλέκεται η έννοια της οριακής διαδικασίας και οδηγεί στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

Τα ερωτήματα Β, αφορούν στην περιστροφή της συνάρτησης $f$ γύρω από τον x-άξονα. Στο υπάρχον αρχείο παρουσιάζονται τα ‘γραφικά 2’, όπου γίνεται δυνατή η οπτικοποίηση της περιστροφής και οι συμμετέχοντες κάνουν διάφορες εικασίες για το στερεό που παράγεται ανάλογα με τον το τύπο της $f$. Ο στόχος είναι να κατασκευάσουμε τον όγκο του στερεού μέσω των αθροισμάτων Riemann και η συνάρτηση που δίνεται σε αυτό το στάδιο είναι η $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ που παράγει ένα κώνο κατά την περιστροφή της (βλ. Σχήμα 6).

Στο ερώτημα Β.1 επικεντρωνόμαστε στο τυχαίο ορθογώνιο $R_i$ της υπάρχουσας διαμέρισης το οποίο, καθώς περιστρέφεται, παράγει ένα κύλινδρο ύψους $\Delta x$ και εμβαδού επιφάνειας $E_i = \pi r_i^2$ (βλ. Σχήμα 6). Η ακτίνα περιστροφής $r_i$ για κάθε ορθογώνιο δίνεται από την αντίστοιχη τιμή του $\xi_i$ μέσω της $f$, δηλαδή $r_i = f(\xi_i)$, $\xi_i \in [(i-1)\Delta x, i\Delta x]$. Ο όγκος του τυχαίου κυλίνδρου είναι $V_i = E_i \cdot \Delta x$.

Μια πρώτη προσέγγιση του όγκου για n=8 θα ήταν $V \approx V_1 + ... + V_8$ και τελικά το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x$ θα αποτελούσε μια όλο και καλύτερη προσέγγιση για το ζητούμενο όγκο, για αρκετά μεγάλο n. Η συζήτηση αυτή γίνεται στα ερωτήματα Β.2 και Β.3 όπου οι συμμετέχοντες παρατηρούν τις ενδείξεις *‘Προσέγγιση όγκου’* και *‘Όγκος στερεού’* καθώς μεταβάλλουν το πλήθος n των ορθογωνίων με τον αντίστοιχο δρομέα (βλ. Σχήμα 6).




**Σχήμα 6: Περιστροφή της f γύρω από τον άξονα των x. Κάθε ορθογώνιο της υπάρχουσας διαμέρισης, παράγει ένα κύλινδρο κατά την περιστροφή του.**

Στο ερώτημα Β.4 γίνεται λόγος για τη συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{i}\frac{x}{n})\cdot\frac{x}{n}$ , όπου $g(\mathrm{x}) = \pi f^2(\mathrm{x})$. Το σημείο Α σε αυτό το ερώτημα έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε το ίχνος του να διαγράφει την παραπάνω συνάρτηση κατά την κίνηση του σημείου $x_2$ , που είναι η τετμημένη του Α (βλ. *Φύλλο Εργασίας*). Οι συμμετέχοντες καλούνται να ανακαλύψουν τη συνάρτηση αυτή καθώς παρατηρούν το ίχνος του σημείου Α, και να γίνει μια συζήτηση για τις πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε από μια συνάρτηση τέτοιου τύπου. Η $\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{i}\frac{x}{n})\cdot\frac{x}{n}$ αποτελεί μια προσέγγιση του όγκου του κώνου καθώς το x διατρέχει τον x-άξονα, δηλαδή μια προσέγγιση της συνάρτησης ολοκλήρωσης $\int_0^x g(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$.

Η συνάρτηση αυτή δίνει ένα σταθερό πλήθος υποδιαστημάτων για οποιαδήποτε διαμέριση του $[0,\mathrm{x}]$· καθώς μεταβάλλεται το $\mathrm{x}$, το πλήθος των υποδιαστημάτων της διαμέρισης παραμένει το ίδιο, αλλά τα μήκη των υποδιαστημάτων αυξάνονται κατ' αναλογία με την αύξηση του $\mathrm{x}$.

Σύμφωνα με τον Thompson (1994) η ερμηνεία της $\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{i}\frac{x}{n})\cdot\frac{x}{n}$ αποτελεί δύσκολο έργο · μπορούμε να φανταστούμε τη διαδικασία της άθροισης να συμβαίνει τόσο γρήγορα, ώστε το $\mathrm{x}$ να μεταβάλλεται ελεύθερα και η διαδικασία αυτή να ακολουθεί το ρυθμό του. Καθώς μεταβάλλεται το $\mathrm{x}$ η άθροιση γίνεται για κάθε τιμή του, και γίνεται τόσο γρήγορα ώστε να μην επιβραδύνει το $\mathrm{x}$. Μπορούμε δηλαδή να κινήσουμε το $\mathrm{x}$ στο πεδίο ορισμού του χωρίς να νιώθουμε καμία 'αντίσταση' από τη διαδικασία που προσπαθεί να συγχρονιστεί.

### 3.4.4 Φάση IV: Το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Στην τελευταία φάση της παρέμβασης, δόθηκε στους φοιτητές το εξής πρόβλημα πλαισίου (context problem) (λχ Gravemeijer, K. and Doorman, D., 1999) :

‘Μια κωνική δεξαμενή έχει διάμετρο βάσης Η *m* και ύψος Η *m*· είναι ανεστραμμένη και γεμίζει με νερό σε σταθερό ρυθμό. Εστιάζουμε στο πρόβλημα τη χρονική στιγμή που η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος h *m* (ως μονάδα μέτρησης των διαστάσεων θεωρούμε το *μέτρο m*).’

Για τις ανάγκες της έρευνας είχε κατασκευαστεί μια αναπαράσταση του προβλήματος στο GeoGebra και ζητούνταν από τους φοιτητές να εκφράσουν τον όγκο του νερού ως μια συνάρτηση του ύψους του.

Ο στόχος εδώ ήταν να χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες φάσεις για την επίλυση του προβλήματος και κάπως έτσι να ξεκινήσουμε μια συζήτηση γύρω από το ΘΘΟΛ. Αυτό θα γινόταν ως εξής: θα κατασκευάζαμε μια συνάρτηση $f(x)$ που δίνει το εμβαδό της επιφάνειας του νερού ως συνάρτηση του ύψους του από τη βάση της δεξαμενής , έπειτα από το γράφημα αυτής, θα κατασκευάζαμε μια νέα συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, η οποία θα μας έδινε τον όγκο (συσσώρευση) του νερού ως συνάρτηση του ύψους. Τέλος θα κατασκευάζαμε τη $Dg(x)=\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ και μέσα από το γράφημα της θα βλέπαμε, προσεγγιστικά, πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του. Τα γραφήματα των συναρτήσεων $Dg(x)$ και $f(x)$ είναι πανομοιότυπα για αρκούντως μικρό $\Delta x$. Η καταλυτική ερώτηση θα ήταν ‘Γιατί τα δύο γραφήματα είναι ακριβώς τα ίδια; Υπάρχει κάποιος λόγος για αυτό ή θα λέγατε ότι είναι απλώς μια σύμπτωση;’.

Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιήθηκε το ακόλουθο φύλλο εργασίας:

Phase4.i

Μια κωνική δεξαμενή έχει διάμετρο βάσης Η *m*και ύψος Η *m*· είναι ανεστραμμένη και γεμίζει με νερό σε σταθερό ρυθμό. Εστιάζουμε στο πρόβλημα τη χρονική στιγμή που η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος h *m* (ως μονάδα μέτρησης των διαστάσεων θεωρούμε το *μέτρο m*).

Α. Κατασκευάστε μια συνάρτηση που δίνει το εμβαδό της επιφάνειας του νερού (μιας οριζόντιας τομής), σαν συνάρτηση του ύψους h του νερού.
*Κινείστε το δρομέα 'νερό' και παρατηρείστε τη συμμεταβολή του ύψους h και της ακτίνας r της επιφάνειας του νερού.*

Phase4.ii

*Ονομάστε τη συνάρτηση που κατασκευάσατε A(h) και εισάγετε αυτή στο αντίστοιχο κουτί εισαγωγής.*

*Κινείστε το σημείο h κατά μήκος του οριζόντιου άξονα και παρακολουθείστε την τιμή 'O=' η οποία δίνει το εμβαδό που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη Α για διάφορες τιμές του h.*

Β.1.Τι πληροφορίες μας δίνει για το πρόβλημα η τιμή O;

Β.2. Τι συμβολίζει το χωρίο αυτό για κάθε τιμή του h; (πχ για h=2)

*Παρατηρείστε το ίχνος που διαγράφεται κατά την κίνηση του h.*

Β.3. Ποια είναι η συνάρτηση που διαγράφεται;

*Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση που κατασκευάσατε στο ερώτημα Α*

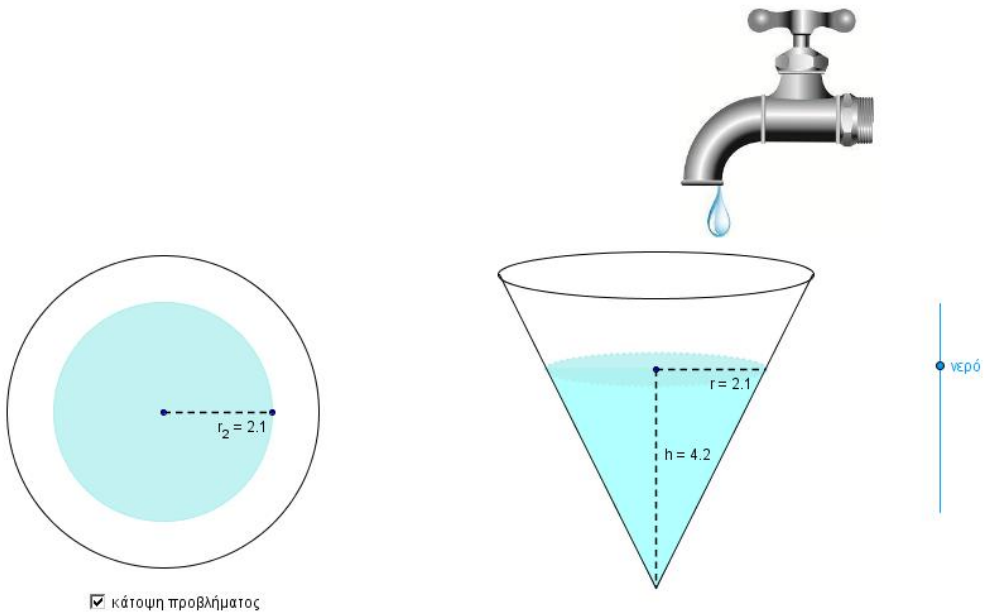
(Σε μια ομάδα χρησιμοποιήθηκε και το ερώτημα Β.4. Κατασκευάστε μια συνάρτηση που προσεγγίζει τη συνάρτηση στο Β.3)

Γ. Κατασκευάστε μια συνάρτηση που δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου του νερού ως προς το ύψος του.
(Εναλλακτική διατύπωση: Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του; Κατασκευάστε μια συνάρτηση η οποία προσεγγίζει αυτό το ρυθμό.)

*Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση που κατασκευάσατε στα ερωτήματα Β. Εισάγετε τη νέα συνάρτηση στο αντίστοιχο κουτί εισαγωγής.*
*Κινείστε το δρομέα Δh, ο οποίος παίρνει τιμές στο διάστημα [0,2].*

Γ.1.Τι συμβαίνει όταν Δh→0;

Για το ερώτημα Α οι συμμετέχοντες κινούν το δρομέα 'νερό' και παρατηρούν τη συμμεταβολή της ακτίνας $r$ της κυκλικής επιφάνειας του νερού και του ύψους $h$ της στάθμης του νερού από το κάτω μέρος της δεξαμενής, καθώς αυτή 'γεμίζει'. Από τα χαρακτηριστικά της κωνικής δεξαμενής (ύψος h = H m = 2r : διάμετρος κυκλικής βάσης του κώνου), προκύπτει η αναλογική σχέση $r = \frac{h}{2}$, μεταξύ των μεταβλητών $r$ και $h$. Συνεπώς η συνάρτηση που εκφράζει εμβαδό της επιφάνειας του νερού (μιας οριζόντιας τομής), σαν συνάρτηση του ύψους $h$ του νερού είναι η $A(h) = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$.



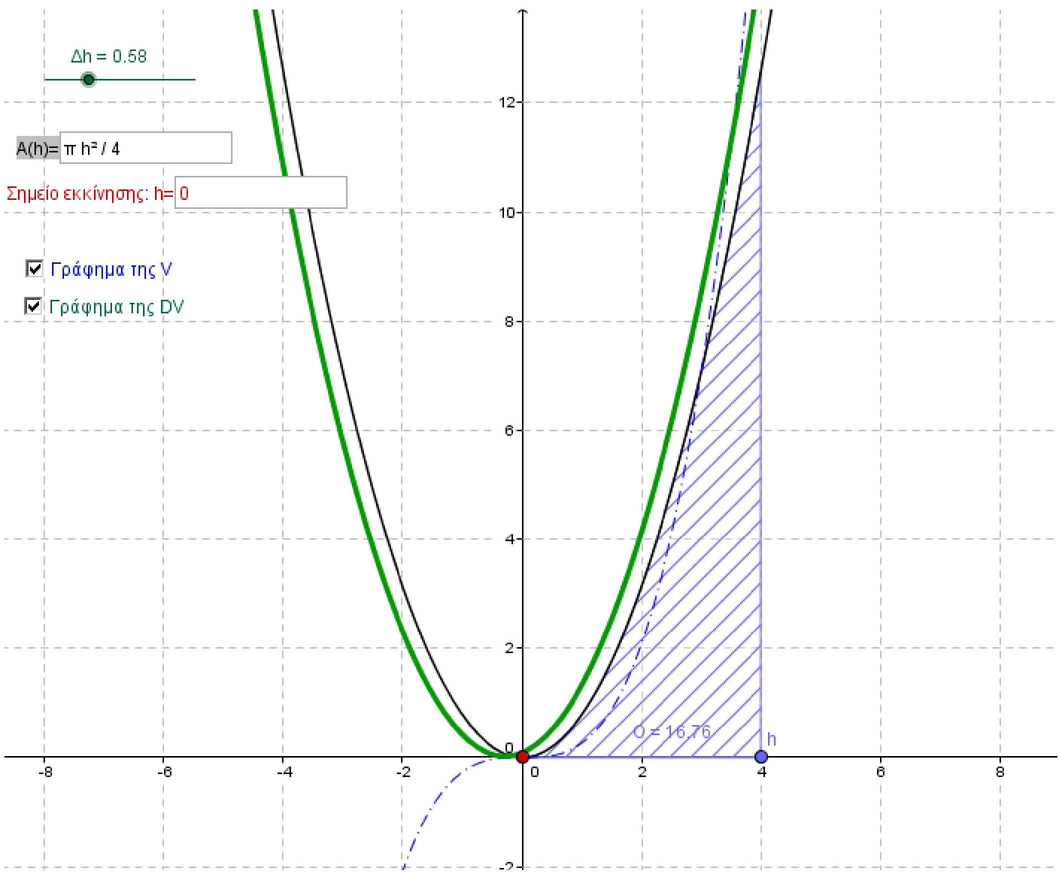

**Σχήμα 7: Αναπαράσταση της δεξαμενής, πρόσοψη και κάτοψη. Τα r και h συμμεταβάλλονται με την κίνηση του δρομέα 'νερό'.**

Στα ερωτήματα Β, γίνεται λόγος για τη συνάρτηση $V(h) = \int_0^h A(t)dt$ η οποία δίνει τον όγκο του νερού στη δεξαμενή όταν αυτό βρίσκεται στο ύψος $h$, μέσα από το γράφημα αυτής. Μέσα από την παρατήρηση και τη διερεύνηση για τον τρόπο που κατασκευάζεται η συνάρτηση του όγκου $V(h)$ σαν συνάρτηση του ύψους $h$ του νερού μέσω της συνάρτησης εμβαδού $A(h)$ (βλ. Σχήμα 8), γίνεται μια συζήτηση που μας πηγαίνει πίσω στην τρίτη φάση του πειράματος. Οι ερωτήσεις εδώ είναι της μορφής:

'Για $h = h_0$,τι συμβολίζει η ποσότητα $V(h_0)$;', 'Τι συμβολίζει η ποσότητα $V(h_0 + 0.01)$;', 'Τι αναπαριστά η ποσότητα $V(h_0 + 0.01) - V(h_0)$;'.

Το ερώτημα Γ αφορά στην κατασκευή της συνάρτησης $DV(h)=\dfrac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$ δηλαδή μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου του νερού ως προς το ύψος $h$ του νερού σε διάστημα πλάτους Δh (βλ. Σχήμα 8). Η δημιουργία αντίστοιχων συναρτήσεων είχε συζητηθεί στη δεύτερη φάση του πειράματος.

Σε αντίστοιχη έρευνα του Thompson (1994), φάνηκε ότι οι συμμετέχοντες δεν κατανοούν ότι η έκφραση $\dfrac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$ περιέχει ταυτόχρονα και σε συσχέτιση μεταξύ τους, μια σειρά από συμμεταβαλλόμενες δράσεις. Στο παραπάνω πηλίκο διαφορών, μπορούμε να δούμε αφ' ενός έναν 'αυξανόμενο κύλινδρο' (accrual), δηλαδή ένα πολλαπλασιαστικό συνδυασμό ποσοτήτων (εμβαδό x ύψος) που αυξάνεται σε σταθερό ρυθμό (αφού $\dfrac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}\approx\dfrac{A(h)\cdot\Delta h}{\Delta h}=A(h)$), ταυτόχρονα όπως μπορούμε να δούμε ότι ο συνολικός όγκος συσσωρεύεται αυξητικά (incrementally), όπου κάθε επαύξηση δημιουργείται από μια αύξηση (accrual) της ποσότητας σε σταθερό ρυθμό.




**Σχήμα 8: Το γράφημα της DV συμπίπτει με το γράφημα της A καθώς κινούμε το δρομέα Δh**

Τέλος, στο ερώτημα Γ.1 ζητείται από τους συμμετέχοντες να παρατηρήσουν το γράφημα της $DV$ καθώς κινούν το δρομέα $\Delta h$ που παίρνει τιμές στο διάστημα [0,2].

Καθώς το $\Delta h \to 0$ το γράφημα της $DV$ συμπίπτει με το γράφημα της Α(βλ. Σχήμα 8). *'Γιατί το εμβαδό της επιφάνειας του νερού σαν συνάρτηση του ύψους του είναι πανομοιότυπος με το ρυθμό που μεταβάλλεται ο όγκος του νερού σε σχέση με το ύψος του;'.* Το ερώτημα αυτό περικλείει τη στόχευση της παρούσας έρευνας, καθώς αποτελεί εφαλτήριο για μια συζήτηση γύρω από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

### 3.5 Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Με το πέρας κάθε συνάντησης με τους φοιτητές, η ερευνήτρια παρακολουθούσε την βιντεοσκοπημένη συνέντευξη με κάθε ομάδα, καταγράφοντας σε μορφή σημειώσεων (memoranda) τις απαντήσεις των συμμετεχόντων. Η εστίαση σε αυτή τη φάση ήταν ο αναστοχασμός στις ερευνητικές υποθέσεις και ορισμένες φορές περιλάμβανε την προσθήκη νέων δομημάτων στο υπολογιστικό περιβάλλον και την επανεξέταση αντίστοιχων ερωτημάτων σε επόμενες συναντήσεις με τους φοιτητές.

Με το πέρας της υλοποίησης του πειράματος συνολικά, απομαγνητοφωνήθηκαν οι βιντεοσκοπημένες συζητήσεις με τους φοιτητές και στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η αναγνώριση των κρίσιμων περιστατικών (critical incidents) (Maher, 2002). Τα κρίσιμα περιστατικά στην παρούσα εργασία, περιλάμβαναν συνήθως επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις (commognitive conflicts) (Sfard, 2008, Nardi et al. 2014), που σχετίζονται με τη διαφορετική χρήση των λέξεων (word use) από τους συνομιλητές, την εναλλαγή στους οπτικούς διαμεσολαβητές (visual mediators) και προκύπτουν από τους διαφορετικούς μετα-διαλογικούς κανόνες (meta-discoursive rules) που φέρουν οι συνομιλητές. Επίσης, επιλέχθηκαν περιστατικά μέσα από τα οποία αναδεικνύονται οι εικόνες των φοιτητών για τις υπο εξέταση μαθηματικές έννοες και αποτελούν σημεία στα οποία οι φοιτητές εκτελούν τοπικές αφαιρετικές διαδικασίες. Τέλος, ορισμένα περιστατικά θεωρήθηκαν ως κρίσιμα καθώς απαντούν ευθέως στα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Η ανάλυση των κρίσιμων περιστατικών πραγματοποιήθηκε βάσει του θεωρητικού πλαισίου της παρούσας εργασίας και συγκεκριμένα με βάση την επικοινωνιογνωστική προσέγγιση (commognitive approach), το μοντέλο των τοπικών αφαιρετικών διαδικασιών (situated abstractions) και των νοητικών εικόνων που φέρουν οι φοιτητές.

Τέλος, η ανάλυση των δεδομένων κατέληξε στη δημιουργία κατηγοριών, οι οποίες χαρακτηρίζουν τις απαντήσεις που συγκροτήθηκαν για τα ερευνητικά ερωτήματα.

## 4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Με επικοινωνιογνωστικούς όρους, θα λέγαμε ότι το διδακτικό πείραμα με τους φοιτητές ήταν *επιπέδου εστίασης στους μετα-κανόνες (meta-level)*, μιας και αφορούσε σε έννοιες ήδη γνωστές στους ίδιους. Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της έρευνας, μέσα από κάποιες περιγραφές των παρεμβάσεων και μέσα από αποσπάσματα διαλόγων, τα οποία στη συνέχεια αναλύουμε. Στο εξής οι αναφορές στην ερευνήτρια γίνονται σε πρώτο ενικό πρόσωπο και στα αποσπάσματα που θα ακολουθήσουν, αναφέρεται με το γράμμα ‘Ε’.

### 4.1 Αποτελέσματα των απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο

Ξεκινώντας το κεφάλαιο αυτό, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν κάποιες παρατηρήσεις που προκύπτουν από το ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν οι φοιτητές στη $1^{η}$ φάση της έρευνας (βλ. Ενότητα 3.4.1 ).

Ορισμένοι (3/6), φάνηκε να έχουν δυσκολίες στην έκφραση για τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού (Ερ. Α1). Κάποιοι (2/6), έγραψαν μια έκφραση η οποία δεν περιέχει όριο αλλά ούτε και μεταβολή. Για παράδειγμα ένας φοιτητής, ο Δήμος, εξέφρασε τη μέση ταχύτητα του κινητού ως ‘ $\frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}_0}{t_0+h-t_0}$ ’ ενώ τη στιγμιαία ταχύτητα ως ‘ $\frac{\mathrm{M}_0}{t_0}$ ’. Ακόμα, ορισμένοι φάνηκε να έχουν δυσκολίες σε πρόβλημα που αφορούσε στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης (Ερ. Α2) και οδηγήθηκαν σε λανθασμένα αριθμητικά αποτελέσματα (3/6). Για παράδειγμα, η Νίκη έγραψε μια έκφραση για τη συνάρτηση $\frac{d}{dt}E(r(t))$, η οποία περιείχε δύο μεταβλητές r και t, και αυτό την απέτρεψε από την εξαγωγή ενός ορθού αριθμητικού αποτελέσματος.

Έπειτα, σε συζήτηση που ακολούθησε μετά από τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, αρκετοί ανέφεραν ότι είχαν δυσκολίες να αναπαραστήσουν το γράφημα μιας παράγουσας συνάρτησης, δεδομένου του γραφήματος της παραγώγου. Επίσης, κάποιοι φοιτητές (3/6) περιέγραψαν το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, σε ερώτηση που αφορούσε στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος (Ερ Β3). Τέλος, ορισμένοι φοιτητές απάντησαν, λανθασμένα, ότι δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ολοκλήρωσης για να βρούμε τη θέση ενός κινητού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, αν γνωρίζουμε την ταχύτητα του (3/6) και για να βρούμε την ποσότητα του νερού που έτρεξε μια δεδομένη χρονικά στιγμή από μια βρύση, αν γνωρίζουμε το ρυθμό μεταβολής του καθώς τρέχει από τη βρύση (2/6).

### 4.2 Νοηματοδότηση μεγεθών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα στο λογισμικό

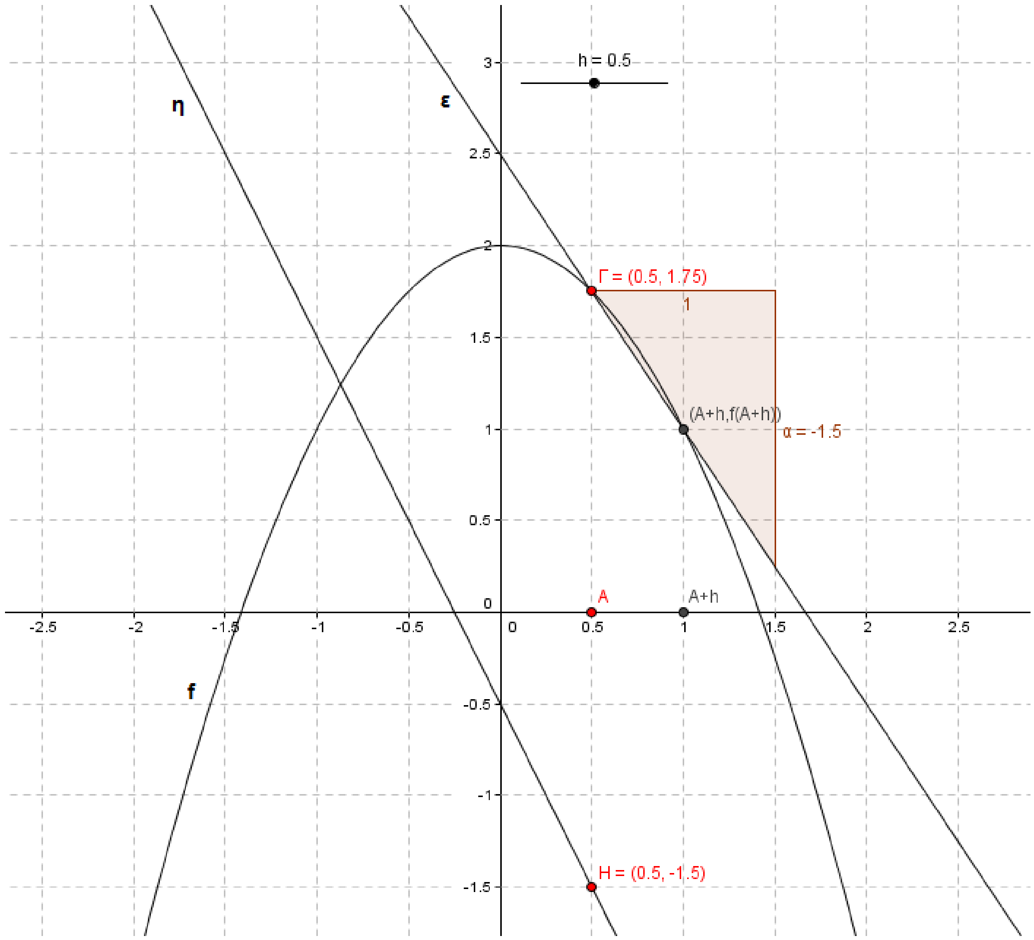
Μια γενική παρατήρηση αφορά στις δυσκολίες που είχαν οι συμμετέχοντες στη νοηματοδότηση της συμμεταβολής, η οποία στις δραστηριότητες, ήρθε στο προσκήνιο με δύο τρόπους: πρώτον, μέσα από δραστηριότητες με μεγέθη που μεταβάλλονται ταυτόχρονα και συνδέονται με κάποια μαθηματική σχέση, την οποία έπρεπε να ανακαλύψουν οι φοιτητές, και δεύτερον, μέσα από αναπαραστάσεις φαινόμενων μέσω του λογισμικού, στα οποία έπρεπε να παρατηρήσουν τη συμμεταβολή των εμπλεκόμενων μεγεθών ώστε να δημιουργήσουν ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο (λ.χ. μια συνάρτηση).

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο περιστατικά που αφορούν σε αυτούς τους δύο τρόπους με τους οποίους συναντάται η συμμεταβολή στην έρευνα. Το πρώτο αφορά στην ταυτόχρονη μεταβολή του γραφήματος μιας συνάρτησης Df και της γεωμετρικής αναπαράστασης μιας τιμής της $Df(t_0)$, όπου: η συνάρτηση Df με τύπο $Df(t) = \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, δίνει τις κλίσεις των τεμνουσών της f στο διάστημα $[t, t+\Delta t]$ για κάθε t στο πεδίο ορισμού της Df, και η γεωμετρική αναπαράσταση της τιμής της $Df(t_0)$, είναι η κλίση της τέμνουσας της f που συνδέει τα σημεία $(t_0, f(t_0))$ και $(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t))$ της f. Το δεύτερο, αφορά στη συμμεταβολή δύο μεγεθών x και y που συνδέονται με τη σχέση y=g(x) και έπειτα στην κατασκευή της συνάρτησης f(g(x)) – όπου οι συμμετέχοντες έπρεπε να θεωρήσουν τη μεταβολή της g(x) ως το όρισμα της f.

#### 4.2.1 Νοηματοδότηση της συμμεταβολής του γραφήματος μιας συνάρτησης Df και της γεωμετρικής αναπαράστασης μιας τιμής της $Df(A_0)$:

Στη $2^η$ φάση της έρευνας παρουσίασα στους φοιτητές το αρχείο που φαίνεται στο Σχήμα 9 περιέχει:

- την καμπύλη $f$
- την ευθεία $Df(A) = \dfrac{f(A+h) - f(A)}{h}$ (ευθεία η) που δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής της f σε κάθε διάστημα πλάτους h=0.5 που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της.
- την ευθεία που είναι μια τέμνουσα της καμπύλης (ευθεία ε). Η κλίση της τέμνουσας είναι η τιμή $Df(0.5) = \dfrac{f(0.5+h) - f(0.5)}{h}$ όταν h=0.5.




**Σχήμα 9: Συμμεταβολή τέμνουσας και συνάρτησης που δίνει κλίση τεμνουσών με την κίνηση του δρομέα h**

Το σημείο Η που ανήκει στην ευθεία η, δείχνει με ποιο τρόπο συνδέονται οι δύο ευθείες, αφού έχει ως τετμημένη το σημείο $A_0$ και ως τεταγμένη την κλίση α= -1.5 της τέμνουσας της καμπύλης που συνδέει τα σημεία $(A_0,f(A_0))$ και $(A_0+h, f(A_0+h))$. Καθώς κινούμε το δρομέα h, οι δύο ευθείες μεταβάλλονται ταυτόχρονα.

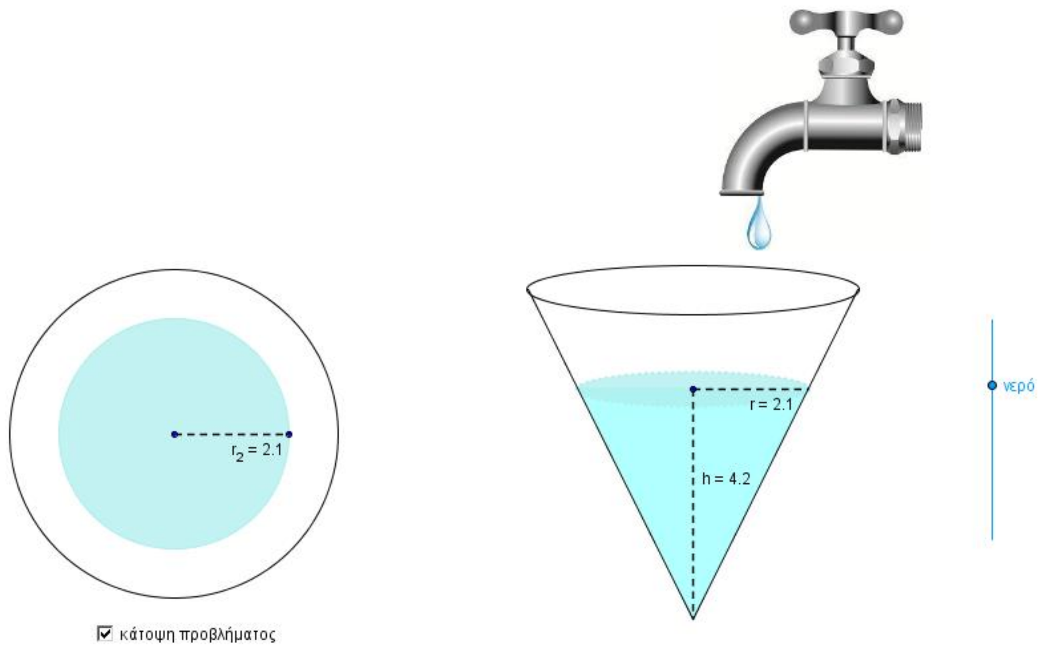
Οι φοιτητές δυσκολεύτηκαν να βρουν τη σύνδεση των δύο ευθειών που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, παρόλο που οι ίδιοι σταδιακά κατασκεύασαν πρώτα την τέμνουσα και έπειτα τη συνάρτηση (βλ Ενότητα 3.4.2). Οι περισσότεροι φοιτητές (4/5) δεν κατάφεραν να κάνουν μια ορθή τεκμηρίωση του φαινομένου (εξαιρουμένης της Νίκης), δηλώνοντας ότι ‘μπερδεύονται’ με τα ‘πολλά κινούμενα μέρη’ της συγκεκριμένης αναπαράστασης, όπως λόγου χάριν ο Κοσμάς. Συγκεκριμένα, ορισμένοι προσπαθούσαν να βρουν ‘πότε οι δύο ευθείες θα γίνουν παράλληλες’, όπως η Νίκη η οποία κάνοντας μια τοπική αφαιρετική διαδικασία (situated abstraction), δηλώνει ότι ‘είναι παράλληλες όταν h=0’. Άλλοι, επικεντρώθηκαν στην αναζήτηση της κλίσης της ευθείας $Df$ , ώστε να συγκρίνουν τις κλίσεις των δύο ευθειών και εν γένει είναι αβέβαιο αν οι φοιτητές τελικά κατανόησαν ποια από τις δύο ευθείες είναι ‘η συνάρτηση’ και ποια ‘η τέμνουσα’.

Με επικοινωνιογνωστικούς όρους, θα χαρακτηρίζαμε τις δυσκολίες των φοιτητών ως επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις, που οφείλονται στην αλλαγή στους οπτικούς διαμεσολαβητές. Στην περίπτωση μας οι οπτικοί διαμεσολαβητές είναι οι αλγεβρικοί συμβολισμοί Df και Df($A_0$), και η δυναμική γεωμετρική αναπαράσταση των Df και Df($A_0$). Σε αντίστοιχη μελέτη του Park (2013) φάνηκε ότι οι φοιτητές που συμμετείχαν σε εκείνη την έρευνα δεν εκτιμούσαν την παράγωγο σε σημείο ως έναν αριθμό και την παράγωγο συνάρτηση ως μια συνάρτηση. Αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι οι φοιτητές συχνά περιέγραφαν την παράγωγο ως την ίδια την εφαπτομένη- αντί να βλέπουν την τιμή της παραγώγου σε σημείο ως μια τιμή που καθορίζει την κλίση της εφαπτομένης σε εκείνο το σημείο (Park, 2013).

### 4.2.2 Επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις: πώς θα εκφράζαμε μια συνάρτηση, της οποίας το όρισμα είναι μια άλλη συνάρτηση;

Σε αυτή την υποενότητα, θα αναλύσουμε ένα απόσπασμα από τη συζήτηση που είχαμε με τον Δήμο και τον Πάρη στην $4^η$ φάση της έρευνας. Αφορά στη νοηματοδότηση ενός φαινομένου που περιέχει μεγέθη που συμμεταβάλλονται και φέρνει στην επιφάνεια μια σειρά από ζητήματα που σχετίζονται με την εστίαση στην έννοια της συνάρτησης. Αναδεικνύει τις δυσκολίες των φοιτητών να εκφράσουν ένα δυναμικό φαινόμενο μέσω μιας συνάρτησης, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνάρτηση ήταν σύνθετη.

Στην $4^η$ φάση της έρευνας ζήτησα από τους φοιτητές να παρατηρήσουν στην οθόνη πώς ‘γεμίζει’ μια δεξαμενή κινώντας το δρομέα ‘νερό’ και να προσπαθήσουν να εκφράσουν μέσα από μια συνάρτηση το εμβαδό επιφάνειας (μιας οριζόντιας τομής) του νερού, όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος h. Δηλαδή, τους ζήτησα να κατασκευάσουν τη συνάρτηση $A(h)=\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$, παρατηρώντας τη συμμεταβολή ύψους-ακτίνας $r(h)=\frac{h}{2}$, καθώς κινούν το δρομέα και ‘γεμίζει’ η δεξαμενή με νερό (Σχήμα 10) ( βλ Ενότητα 3.4.4, Φ.Ε., ερ. Α).




**Σχήμα 10: Αναπαράσταση της δεξαμενής, πρόσοψη και κάτοψη. Τα r και h συμμεταβάλονται με την κίνηση του δρομέα 'νερό'.**

Ο Πάρις κατασκεύασε με ευκολία τη συνάρτηση Α, αλλά ο Δήμος διαφωνεί με τον τρόπο κατασκευής της. Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνονται τα σημεία που διαφωνεί ο Δήμος: αρχικά διαπιστώνει ότι τα μεγέθη r και h συμμεταβάλλονται, έπειτα φαίνεται να θεώρει ότι νοερά έχουμε σταθεροποιήσει το r, στη συνέχεια ότι έχουμε σταθεροποιήσει το h και τελικά αναρωτιέται για τη σχέση που έχει το ύψος h με τη συνάρτηση εμβαδού Α.

1. Δ: .. Δηλαδή καθώς μεταβάλλεται το r, μεταβάλλεται και το h [κινεί το δρομέα και παρακολουθεί τη συμμεταβολή ύψους – ακτίνας στην πρόσοψη της δεξαμενής]
2. Ε: μμ [καταφατικά]
3. Δ: δηλαδή δεν είναι ότι παραμένει σταθερό [το r]
4. Π: Ναι αλλά έχουμε φτιάξει την συνάρτηση την προηγούμενη [A(h)]
5. Δ: ναι εδώ, δεν… δεν έκανες κάτι ….
6. Π: ναι, η μεταβολή του r θα είναι μέσα σ' αυτή τη συνάρτηση!
7. Δ: …εδώ; [δείχνει την $A(h) = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$, που είναι γραμμένη στο χαρτί]
8. Π: ναι, αφού το χουμε βάλει στην αρχή [ $r = \frac{h}{2}$ ]

9. Δ: [σκέφτεται]… ναι συναρτήσει όμως του h.

10. Π: ε ναι… τις δυο μεταβλητές τις κάναμε μια… δε…

11. Δ: ναι.. εδώ σ’ αυτό σταθεροποιείς το h [δείχνει την κάτοψη του προβλήματος]

….

12. Δ: ωραία, Εσύ τι θέλεις εδώ να υπολογίσεις [αναφέρεται στο αρχικό ερώτημα]; Το εμβαδό.

13. Ε: ακριβώς

14. Δ: ωραία, άρα; Με ποια σταθερά κινείται; Με το r… δεν κινείται με το h.

15. Ε: μεταβλητή…

16. Δ: με… με ποια μεταβλητή.

17. Ε: Με το r

18. Δ: ωραία. Το h τι σχέση έχει;

Ο Δήμος στο [1], περιγράφει ένα επικυρωμένο αφήγημα: ‘καθώς μεταβάλλεται το r, μεταβάλλεται και το h’, το οποίο ακολουθείται από τη δική μου θετική ανατροφοδότηση [2]. Στο [3] ο Δήμος συνεχίζει με ένα ακόμα επικυρωμένο αφήγημα : ‘το r δεν είναι σταθερό’, το οποίο πυροδοτεί μια διαπραγμάτευση του νοήματος της A ανάμεσα στον ίδιο και τον Πάρη [3]-[11]. Συγκεκριμένα, ο Πάρης στα [4],[6] και [8] τεκμηριώνει για την A μέσω του αφηγήματος: ‘η μεταβολή του r είναι μέσα ’ στην A αφού το ‘ έχουμε βάλει στην αρχή’ μέσα από την έκφραση $r = \frac{h}{2}$. Παράλληλα, ο Δήμος αρχικά φαίνεται να δυσανασχετεί με την κατασκευή της A [5], έπειτα στοχάζεται στην τεκμηρίωση του Πάρη [7], [9] και τελικά φαίνεται ότι δεν πείθεται αφού επισημαίνει ότι εκφράσαμε την A ‘συναρτήσει *όμως* του h’ [9]. Στο [10] ο Πάρης επαναδιατυπώνει την τεκμηρίωση του με τη φράση ‘τις δυο μεταβλητές τις κάναμε μια’ και στο τέλος της διαπραγμάτευσης ο Δήμος περιγράφει ένα νέο επικυρωμένο αφήγημα, παρακολουθώντας την κάτοψη του προβλήματος: ‘εδώ σταθεροποιείς το h’ [11].

Η διαπραγμάτευση νοήματος στα αποσπάσματα [1-11], αφορά στην εμφάνιση του σημαίνοντος $\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$. Οι οπτικοί διαμεσολαβητές στο [1-10] είναι η εικονική αναπαράσταση της δεξαμενής (πρόσοψη) και ο αλγεβρικός τύπος της A. Αφενός στην πρώτη διαμεσολάβηση, ο Δήμος παρατηρεί τη συμμεταβολή ύψους - ακτίνας [1], αφ’ εταίρου στη δεύτερη θεωρεί ότι έχουμε ‘σταθεροποιήσει’ το r γιατί η $A(h) = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$ έχει σαν όρισμα μόνο το h [3], [9]. Η εναλλαγή στους οπτικούς διαμεσολαβητές προκαλεί μια επικοινωνιογνωστική σύγκρουση ανάμεσα στο Δήμο και τον Πάρη. Ακόμα, μια δεύτερη σύγκρουση προκαλεί η εναλλαγή των διαμεσολαβητών πρόσοψη- κάτοψη · βλέποντας την κάτοψη του προβλήματος, όπου φαίνεται η μεταβολή του εμβαδού σε δυο διαστάσεις, ο Δήμος μέσα από μια τοπική αφαιρετική διαδικασία θεωρεί ότι 'σταθεροποιούμε' το h [11]. Δηλαδή, ο ίδιος, ενώ παρατηρεί τη συμμεταβολή r και h στην εικονική αναπαράσταση του φαινομένου, φαίνεται να μη μπορεί να βρει μια κλειστή έκφραση - μια συνάρτηση- που περικλείει αυτή τη συμμεταβολή στο όρισμα της.

Έπειτα, στο απόσπασα [12-18], ανάμεσα σε μένα και το Δήμο, τα σχόλια του ίδιου [14] και [18] προσανατολίζονται σε μια ιδέα για τον 'υπολογισμό' του εμβαδού χρησιμοποιώντας τον τύπο $\pi r^2$. Φαίνεται γενικά ότι αναφέρεται στη μεταβολή μιας ποσότητας που είναι το 'εμβαδό', δηλαδή στο δεξί μέλος της συνάρτησης Α και όχι στη συμμεταβολή δύο ποσοτήτων. Η χρήση της λέξης 'σταθερά' στο [14], παραπέμπει στην εικόνα της μεταβλητής ως αντικαθιστάμενη σταθερά που εντοπίζουν οι Jacobs και Trigueros (Jacobs,2002, Trigueros & Jacobs, 2008).

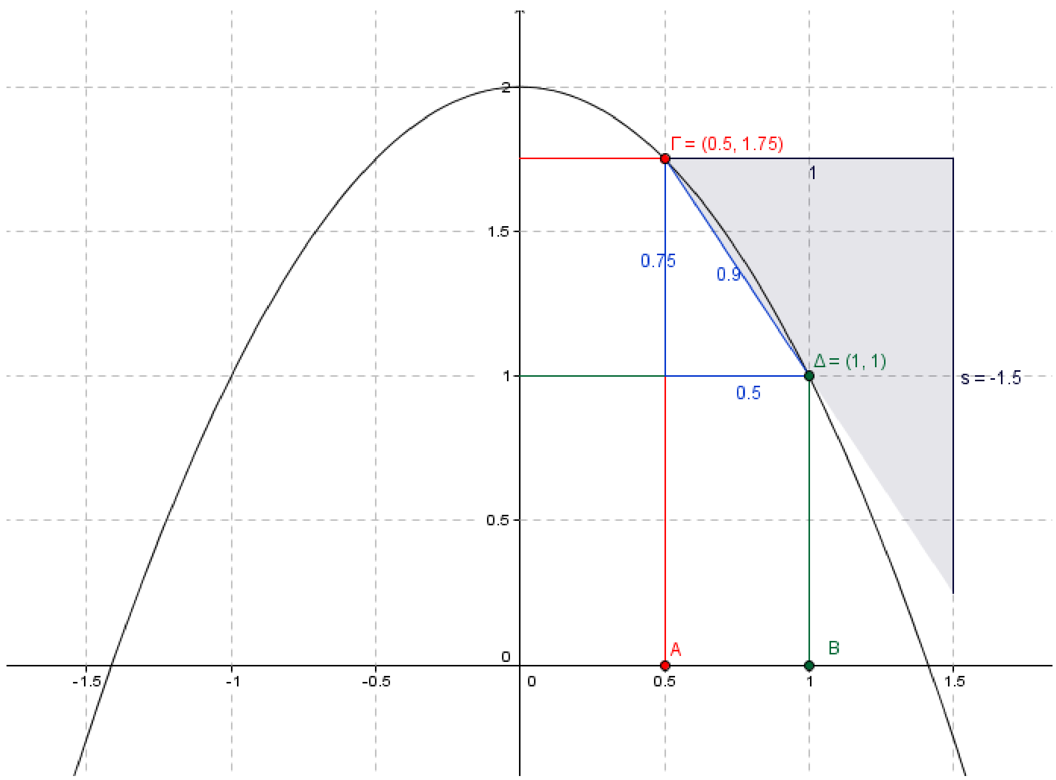
Εν κατακλείδι, το διαλογικό αντικείμενο του Δήμου- που διαφοροποιείται από αυτό του Πάρη- περιγράφεται μέσα από την ασθενή νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης. Σε συμφωνία με τις νοηματοδοτήσεις του Δήμου, ο Thompson (1994) παρατηρεί ότι οι φοιτητές της αντίστοιχης έρευνας θεωρούσαν ότι η συμπεριφορά μιας συνάρτησης μπορεί να αναλυθεί ανεξάρτητα από το όρισμα της, και αυτό εμφανίστηκε πολύ καθαρά όταν η υπό εξέταση συνάρτηση ήταν σύνθεση συναρτήσεων. Ακόμα, φαίνεται ότι ο Δήμος κατέχει μια θεώρηση για την έννοια της συνάρτησης, περισσότερο ως δράση (action view) παρά ως διαδικασία (process view) (Dubinsky& Harel, 1992). Έτσι, ο ίδιος, ενδεχομένως να νοηματοδοτεί μια συνάρτηση στατικά και κάτι τέτοιο τον απομακρύνει από την κατασκευή νοημάτων ενός δυναμικού φαινομένου – όπως αυτό στη δεξαμενή- και της αναπαράστασής του μέσω μιας συνάρτησης. Στη θεώρηση της συνάρτησης ως διαδικασία, η σύνθεση είναι ένας συντονισμός δυο διαδικασιών εισόδου-εξόδου (input-output)· η μεταβολή στο όρισμα θεωρείται ως μια συναρτησιακή διαδικασία και η μεταβλητή εξόδου θεωρείται ως μια δεύτερη συναρτησιακή διαδικασία. Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι ο συντονισμός των δύο αυτών διαδικασιών αποτελεί δύσκολο έργο για το Δήμο.

### 4.3 Η νοηματοδότηση των φοιτητών για την γεωμετρική αναπαράσταση του μέσου ρυθμού μεταβολής

Η γεωμετρική ερμηνεία του μέσου ρυθμού μεταβολής ως 'κλίση τέμνουσας' δύο σημείων του γραφήματος μιας συνάρτησης φάνηκε να αποτελεί δύσκολο έργο για τους συμμετέχοντες. Συγκριμένα, στη $2^{η}$ φάση του πειράματος, παρουσίασα στους φοιτητές το αρχείο στο σχήμα 11 και τους ζήτησα να βρουν το μέσο ρυθμό μεταβολής της f (της καμπύλης στους άξονες) στο διάστημα [Α,Β] ( βλ Ενότητα 3.4.2, Φ.Ε., ερ. Α). Οι φοιτητές κατασκεύασαν το κλάσμα διαφορών $\frac{f(B)-f(A)}{B-A}$ για Α=0.5 και Β=1 και διαπίστωσαν ότι η τιμή που βρήκαν στο χαρτί τους ήταν ίδια με την κλίση που φαίνεται στην οθόνη (s=-1.5). Όμως, οι ίδιοι δυσκολεύτηκαν να συνδέσουν το γεγονός ότι ο αριθμός -1.5 που βρήκαν μέσα από πράξεις (αλγεβρική αναπαράσταση) είναι στην ουσία η κλίση της τέμνουσας της καμπύλης f στα σημεία Γ και Δ (γεωμετρική αναπαράσταση).

Οι φοιτητές έκαναν διάφορες εικασίες που έχουν ενδιαφέρον. Για παράδειγμα η Νίκη, πεπεισμένη ότι πρόκειται για την κλίση κάποιας εφαπτομένης της καμπύλης f, προσπαθούσε να βρει ‘σε ποιο σημείο [του γραφήματος] πάει και βρίσκει [το λογισμικό] την εφαπτομένη’. Έπειτα μέσω μιας τοπικής αφαιρετικής διαδικασίας (situated abstraction), είκασε ότι ενδεχομένως πρόκειται για το μέσο του διαστήματος ΑΒ, του οποίου η εικόνα μέσω της f είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

Από την άλλη μεριά ο Πάρις είκασε ότι μπορεί να πάρει τις εφαπτόμενες στα άκρα του τόξου, δηλαδή την εφαπτομένη στο σημείο Γ και την εφαπτομένη στο σημείο Δ και έπειτα να βρει τη ‘μέση τιμή’ των κλίσεων των δύο εφαπτόμενων.




**Σχήμα 11: Η καμπύλη f και η κλίση της τέμνουσας στα σημεία Γ και Δ της καμπύλης.**

Οι εικασίες του Πάρη και της Νίκης - αναφορικά με το ότι η ‘κλίση’ στο λογισμικό είναι η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης- δεν είναι σε καμία περίπτωση λανθασμένες. Αντιθέτως, αποτελούν μια άτυπη μορφή (colloquial) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την παράγωγο, το οποίο λέει το εξής:

ΘΜΤ: Αν η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [a,b] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (a,b), τότε υπάρχει κάποιος αριθμός c στο [a,b], ώστε $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής συνδέεται άμεσα με ο ΘΜΤ. Όμως, φαίνεται ότι ορισμένοι φοιτητές στην ερευνά μας ταύτιζαν, εννοιολογικά, το μέσο ρυθμό με το αριστερό μέλος της ισότητας $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ στο ΘΜΤ. Η εικόνα των φοιτητών για το μέσο ρυθμό – που παρατηρήθηκε μέσα απο τη χρήση των λέξεων (word use) από τους ίδιους - φαίνεται να αφορά αποκλειστικά σε έναν ‘αριθμό’ που είναι ‘η παράγωγος’, ή ‘η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο’ και μας δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε ένα διάστημα είτε σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Αυτό αποτελεί μια γενική παρατήρηση στα στενά πλαίσια της παρούσας έρευνας, στην οποία η νοηματοδότητση του μέσου ρυθμού ως συνάρτηση (λ.χ. $Df(t)=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$) είναι συστατικό στοιχείο των μετέπειτα κατανοήσεων του Θεμελιώδους Θεωρήματος (αφού αντίστοιχα έργα κατασκευής ζητούνται και στην 4η φάση). Συνεπώς η λανθασμένη εικόνα για το μέσο ρυθμό όπως περιγράφεται εδώ, αποτελεί εμπόδιο στην εννοιολογική κατανόηση του Θεωρήματος όπως παρουσιάζεται στην ερευνά μας.

### 4.4 Επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις: διαφορετική χρήση των λέξεων ‘ρυθμός μεταβολής’ και ‘μέσος ρυθμός μεταβολής’ αναφορικά με το σημαίνον του πηλίκου $\frac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$.

Στο προηγούμενο περιστατικό φαίνεται ότι ορισμένοι φοιτητές αναφερόμενοι στο *μέσο* ρυθμό συχνά χρησιμοποιούσαν φράσεις που υπονοούν ‘μέσο όρο’ κάποιων τιμών (όπως αναφέρει ο Πάρης), είτε τη ‘μέση τιμή παραγώγων’. Από την άλλη, θεωρούσαν ως ρυθμό μεταβολής το ‘κλάσμα της παραγώγου’, όπως αναφέρει ο Κοσμάς, το οποίο μας δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα. Οι περιγραφές αυτές παραπέμπουν στην έννοια του *μέσου* ρυθμού μεταβολής τον οποίο ορισμένοι φοιτητές στην έρευνα ονόμαζαν ‘παράγωγο’ και το μετέφραζαν ‘πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση’.

Στην 4$^{η}$ φάση του πειράματος, η Νίκη έχει ήδη κατασκευάσει τη συνάρτηση V(h), που δίνει τον όγκο του νερού στη δεξαμενή όταν αυτό είναι σε ύψος h (βλ Σχήμα 10) και τη συνάρτηση $DV(h)=\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$ που είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ως προς το ύψος h. Στο απόσπασμα που ακλουθεί διαπραγματευόμαστε με τη Νίκη αν το κλάσμα $\frac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$ μας δίνει το *μέσο* ρυθμό ή το ρυθμό μεταβολής του όγκου.

19. Ε: Τι πληροφορίες μας δίνει το κλάσμα $\frac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$;

20. Ν: Είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου

21. Ε: Ο ρυθμός μεταβολής ή ο μέσος ρυθμός μεταβολής;

22. Ν: [μεγάλη παύση] Όχι, όχι είναι ο ρυθμός μεταβολής όταν είμαι κοντά στο h0.[παύση]. Ισχυρίζεσαι εσύ δηλαδή ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου είναι ίδιος εδώ με εδώ [δείχνει πρώτα ένα σημείο χαμηλά σε έναν κώνο που (βλ. Σχήμα 10) και μετά ένα σημείο πιο ψηλά, κοντά στο άνοιγμα]; Μπορεί και να είναι αλλά εδώ όπως το έχουμε φτιάξει είναι για όταν είμαι κοντά στο h0

…

23. Ε: εε θυμάσαι τι είχαμε κάνει στη 2η φάση; Δηλαδή.. μάλλον όχι.. πάμε να το δούμε στο γράφημα της V. Έστω ότι εδώ κάπως έτσι είναι το γράφημα της V… [σχεδιάζω πρόχειρα την καμπύλη όπως φαίνεται στο σχήμα 12]

24. Ν: Ναι

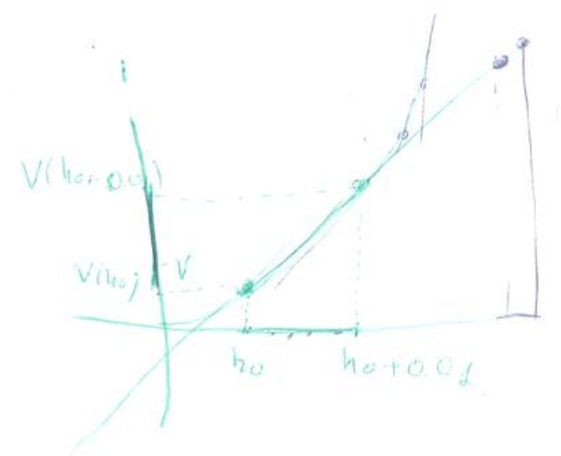
25. Ε: Και άρα το $\frac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$ είναι…[σχεδιάζω την τέμνουσα της καμπύλης στο σχήμα 12 και ταυτόχρονα εξηγώ]

26. Ε: Τι πληροφορίες μας δίνει;

27. Ν: Ναι είναι ο ρυθμός μεταβολής

28. Ε: Δεν θα ήταν ουσιαστικά η κλίση της τέμνουσας;

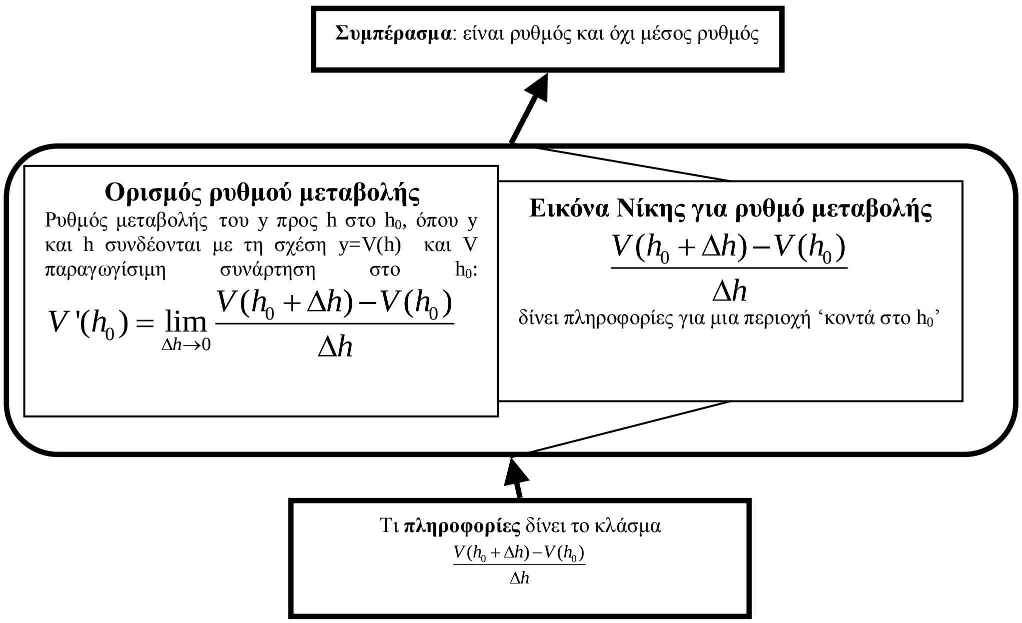
29. Ν: Ε βέβαια, αφού είναι η παράγωγος, ναι βέβαια θα είναι .



**Σχήμα 12: Πρόχειρο γράφημα της V και της τέμνουσας σε δύο σημεία της**

Στο παραπάνω απόσπασμα, ζητάω από τη Νίκη μια τεκμηρίωση (substantiation) για το κλάσμα $\dfrac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$ [19]. Η Νίκη ισχυρίζεται ότι το κλάσμα αναπαριστά το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης όγκου V(h) [20]. Στη συνέχεια, προσπαθώ να κατανοήσω ποιο είναι το διαλογικό αντικείμενο της Νίκης ( [21] : είναι ‘ο ρυθμός μεταβολής ή ο μέσος ρυθμός μεταβολής;’). Η Νίκη ορίζει το ‘ρυθμό μεταβολής’, ως διαλογικό αντικείμενο της συζήτησης και επιμένει στην αρχική της άποψη: το $\dfrac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$ ‘είναι ο ρυθμός μεταβολής όταν είμαι κοντά στο $h_0$’ [22]. Μάλιστα στη συνέχεια του [22], φαίνεται να ‘διαφωνεί’ μαζί μου στην υπόνοια ότι το κλάσμα αυτό αφορά το μέσο ρυθμό, και ισχυρίζεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού ως προς το ύψος του h δε μπορεί να είναι σταθερός (‘ίδιος’ [22]), κατά μήκος του κώνου (βλ Σχήμα 12). Τέλος ισχυρίζεται ότι ίσως και να είναι σταθερός, αλλά όπως και να χει το εν λόγω κλάσμα μας δίνει πληροφορίες για το γίνεται ‘κοντά στο $h_0$’.

Το απόσπασμα [19-22], αφορά στο σημαίνον του κλάσματος $\dfrac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$. Το δικό μου διαλογικό αντικείμενο είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής, ενώ της Νίκης είναι ο ρυθμός μεταβολής. Αυτή η διαφορά των διαλογικών αντικειμένων προκαλεί μια επικοινωνιογνωστική σύγκρουση ανάμεσα μας. Παρόλο που η Νίκη, χρησιμοποιεί τη λέξη ‘ρυθμός’, οι περιγραφές της παραπέμπουν στο σημαίνον του μέσου ρυθμού ( [22]: ‘όταν είμαι κοντά στο $h_0$’). Η εικόνα της Νίκης για την έννοια του ‘ρυθμού μεταβολής’ (concept image ) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




**Σχήμα 13:** ***Εικόνα έννοιας*** **και** ***ορισμός έννοιας*** **της Νίκης για το 'ρυθμό μεταβολής'.**

Από την άλλη μεριά, στο απόσπασμα [22], το γεγονός ότι η Νίκη διαφωνεί ότι το πηλίκο $\frac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$ είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής στο διάστημα [$h_0$, $h_0+\Delta h$], ενδεχομένως να πηγάζει από μια εικόνα ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης είναι ένας *αριθμός* που μας πληροφορεί για τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού της.

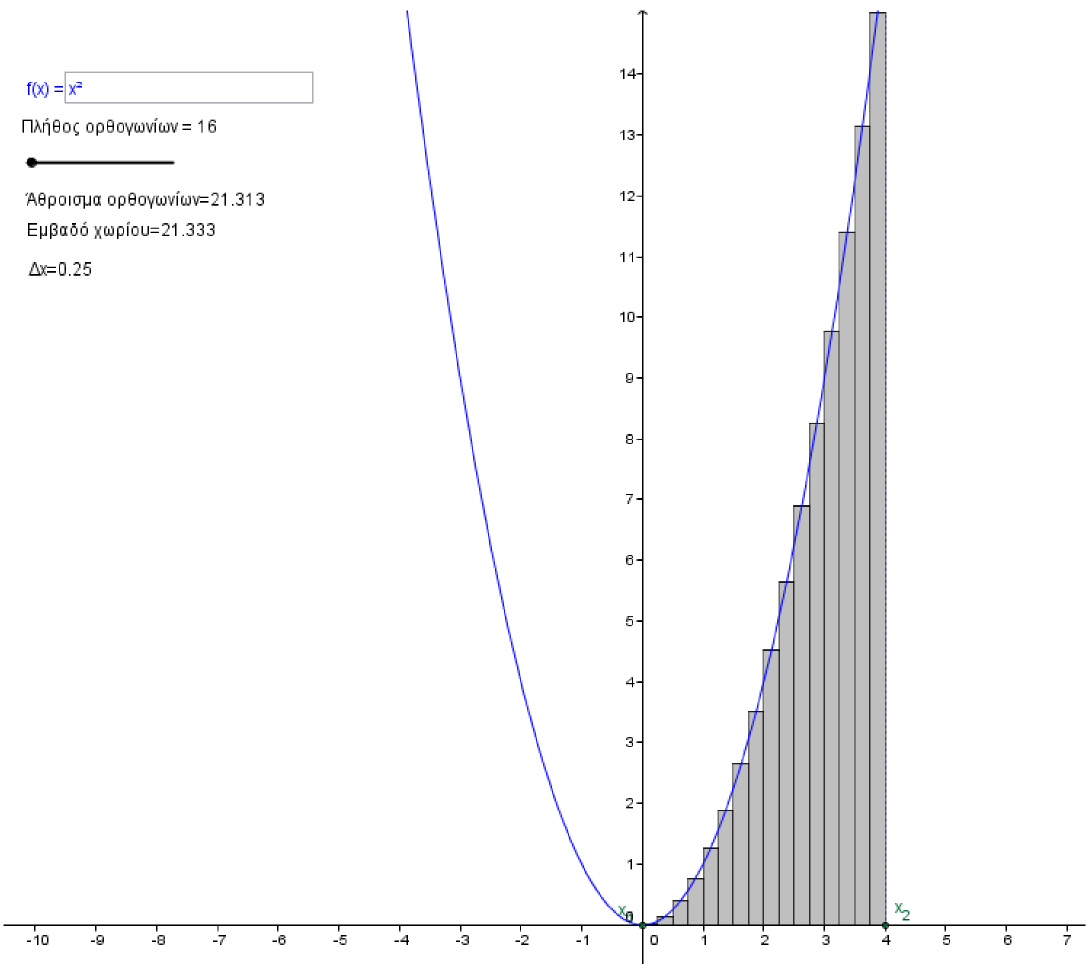
Στα αποσπάσματα [23] και [25], θυμίζω στη Νίκη τις διερευνήσεις (explorations) που κάναμε στη $2^{η}$ φάση της έρευνας. Εκεί διαπιστώσαμε τη γεωμετρική ερμηνεία του μέσου ρυθμού μεταβολής $\frac{V(h_0+\Delta h)-V(h_0)}{\Delta h}$ ως την κλίση της τέμνουσας των σημείων $(h_0, V(h_0))$ $(h_0+\Delta h, V(h_0+\Delta h))$. Στο [27] η Νίκη εξακολουθεί να συγχέει τις λέξεις 'μέσος ρυθμός' και 'ρυθμός' και στο [29] τις λέξεις 'κλίση τέμνουσας' και 'παράγωγος'.

### 4.5 Σύνδεση αθροισμάτων Riemann και ορισμένου ολοκληρώματος. Αποτελεί ο ορισμένο ολοκλήρωμα μια προσέγγιση του εμβαδού;

Σε αυτή την υποενότητα εστιαζόμαστε στη νοηματοδότηση δύο φοιτητών σχετικά με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, η οποία περιγράφεται μέσα από τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο και της συζήτησης στην $3^{η}$ φάση της έρευνας.

Παρουσίασα στο Δήμο και τον Πάρη το αρχείο που φαίνεται στο σχήμα 14 και τους είπα ότι ο στόχος μας είναι να βρούμε μια όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση για το εμβαδό Ε που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x)=x^2$, τον άξονα $x$, και τις ευθείες $x_1=0$ και $x_2=4$.

Αφού διαπίστωσαν, άτυπα (colloquially), ότι το άθροισμα Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$, $\Delta x=\frac{x_2-x_1}{n}$, $\xi_i \in [(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ αποτελεί μια καλή μέθοδο για την προσέγγιση του εμβαδού, τους ρώτησα αν 'μπορεί αυτή η διαδικασία της άθροισης κατά Riemann να μας δώσει το ακριβές εμβαδό'.




**Σχήμα 14: Προσέγγιση του εμβαδού κάτω από την καμπύλη της f.**

Αναφέρουμε εδώ ότι σε σχετική ερώτηση για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος στο ερωτηματολόγιο ( βλ Ενότητα 3.4.1,Β3 ερ. Α), ο Δήμος έγραψε:

‘Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] ισούται με την παράγουσα της συνάρτησης στο σημείο β μείον την παράγουσα της συνάρτησης στο σημείο α’.

Ο ίδιος αναφέρει ότι δεν είναι ‘σίγουρος για το ποια είναι η σύνδεση’ ανάμεσα στο ολοκλήρωμα ($\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$) και στο όριο αθροίσματος ($\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$) . Ο Δήμος φαίνεται να θεωρεί το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ακριβές, ενώ το όριο αθροίσματος αποτελεί μια προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Καταλήγει ότι μπορεί το όριο αθροισμάτων να δώσει ακριβές αποτέλεσμα του εμβαδού ‘αν οι άπειρες διαμερίσεις τείνουν να είναι ίσες με το ολοκλήρωμα’.

Αντίστοιχα, ο Πάρις στο ερωτηματολόγιο έγραψε:

‘Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ συμβολίζει το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x= β’.

Ο Πάρις βλέπει την ισότητα $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ ως μια ‘διαδικασία’ που δεν θα δώσει ποτέ ακριβές αποτέλεσμα, αλλά είναι μια πολύ καλή προσέγγιση, μια διαδικασία που ‘μας κάνει’. Μάλιστα κάνει ένα παραλληλισμό με το εμβαδό του κύκλου, ισχυριζόμενος ότι ‘δεν το γνωρίζουμε ποτέ ακριβώς, γιατί έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία’.

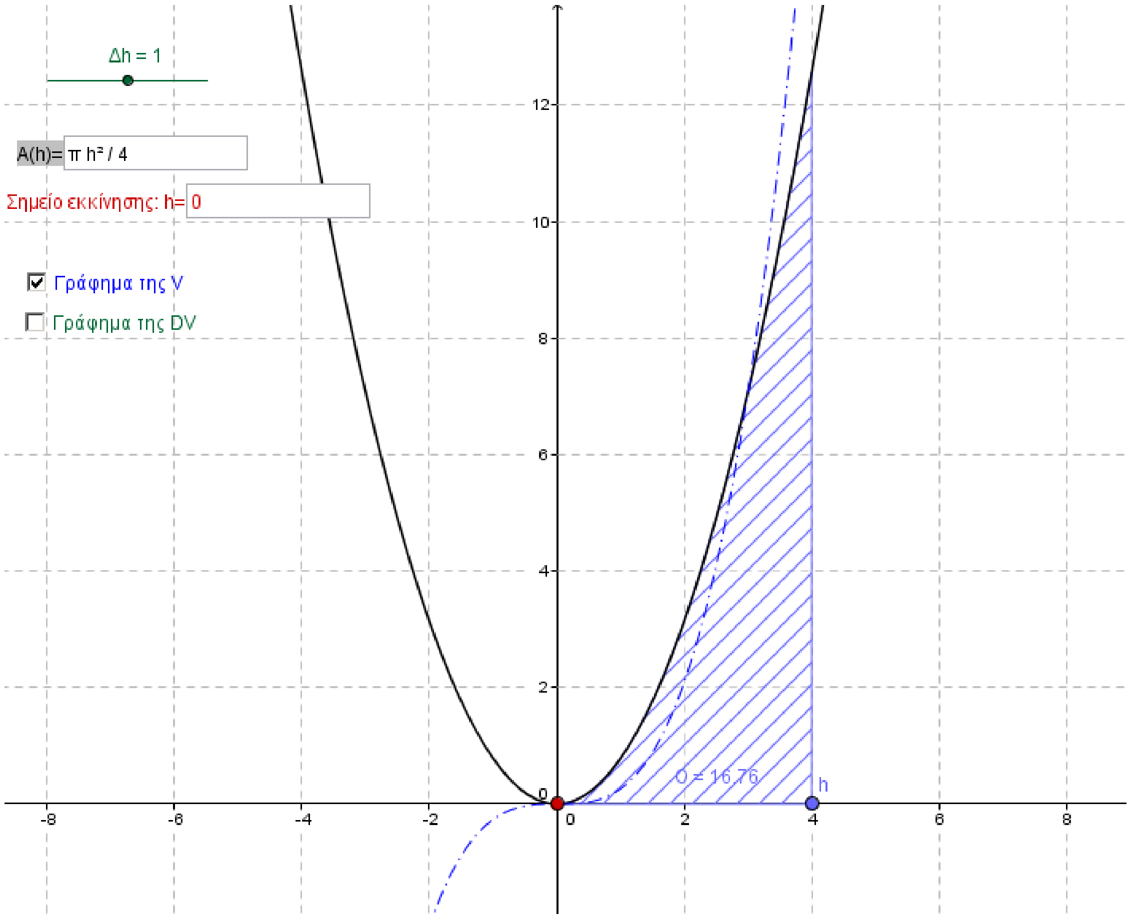
Τα αφηγήματα (narratives) του Δήμου και του Πάρη θυμίζουν τις παρανοήσεις των σπουδαστών μιας πολυτεχνικής σχολής γύρω από την έννοια του ορίου στην μελέτη της Jordaan (2005). Η ίδια παρατήρησε ότι οι σπουδαστές έβλεπαν το όριο σαν κάτι μη δυνάμενο να το φτάσει κανείς και το απέδωσε στη χρήση των λέξεων ‘τείνει στο’ και ‘προσεγγίζει’ που χρησιμοποιούνται στα αντίστοιχα μαθηματικά εγχειρίδια. Θα μπορούσαμε επίσης να παραλληλίσουμε το Δήμο και τον Πάρη με τους μαθητές του Orton (1983), οι οποίοι στην πλειοψηφία τους (69/110) δήλωσαν ότι παίρνοντας ολοένα και περισσότερα ορθογώνια κάτω από την καμπύλη $y=x^2$ θα μπορούσαν να πετύχουν ολοένα και καλύτερες προσεγγίσεις αλλά μια τέτοια διαδικασία ποτέ δε θα μας οδηγούσε στη σωστή απάντηση. Αντίθετα η μειοψηφία (10/110) των μαθητών του Orton, δήλωσε ότι η οριακή διαδικασία ήταν απαραίτητη και η μόνη που μπορεί να δώσει το ακριβές αποτέλεσμα.

## 4.6 Δυσκολίες στη διάκριση των εννοιών μεταβολή του όγκου - ρυθμός μεταβολής του όγκου.

Σε αυτή την υποενότητα αναδεικνύονται οι ασθενείς εικόνες που είχαν οι συμμετέχοντες γύρω από τη νοηματοδότηση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής ως αναλογικό / συσχετιστικό μέγεθος. Επίσης, αφορά στις δυσκολίες της θεώρησης της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής ως μια συνάρτηση που είναι αποτέλεσμα της συμμεταβολής του ορίσματος της με το ρυθμό μεταβολής της αρχικής συνάρτησης. Τα παραπάνω θα περιγραφούν μέσω ενός αποσπάσματος με συνομιλητές εμένα και τη Νίκη και εντοπίζεται στην 4η φάση της έρευνας.

Εστιάζουμε στο σημείο της 4η φάσης του πειράματος, όπου η Νίκη, είχε ήδη κατασκευάσει τη συνάρτηση $A(h)=\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$ που εκφράζει εμβαδό επιφάνειας (μιας οριζόντιας τομής) του νερού, όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος h. Επίσης, είχε κατασκευάσει τη συνάρτηση της συσσώρευσης του όγκου το νερού $V(h)=\int_0^h A(t)dt$ όταν αυτό βρίσκεται σε ύψος h.

Το απόσπασμα που ακολουθεί αφορά στην κατασκευή μιας 3ης συνάρτησης (βλ Ενότητα 3.4.4, Φ.Ε., ερ. Γ). Η ζητούμενη συνάρτηση είναι $DV(h)=\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$, που θα μας έδινε το μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου του νερού ως προς το ύψος $h$ του νερού . Το παρακάτω απόσπασμα ξεκινάει με την απάντηση της Νίκης στην ερώτηση ‘Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του;’




**Σχήμα 15: Τα γραφήματα των συναρτήσεων A και V.**

30. Ν: Αυτή θα είναι 2ου βαθμού [δείχνει την A(h)], αυτή θα βγει 3ου [δείχνει την V(h)] … άρα όταν μεταβάλλουμε κατά x μονάδες μεταβάλλεται κατά x3 μονάδες [κάνει παύση και με κοιτάει με αβεβαιότητα],

31. Ε: Αυτό πως το σκέφτηκες; Δηλαδή τι προσπαθείς να..

32. Ν: Να… εδώ [δείχνει την V(h)] είναι το.. το ολοκλήρωμα της…

33. Ε: Μιας συνάρτησης που είναι 2ου βαθμού [της A(h)]

34. Ν: [Γνεύει καταφατικά] Ωραία, άρα ο όγκος συναρτήσει του ύψους με το νερό θα ναι μια συνάρτηση 3ου βαθμού [εννοεί τη συνάρτηση V(h)].

35. Ε: Ωραία

36. Ν: Άρα αν για παράδειγμα μεταβάλλουμε κατά 0.3 μέτρα το ύψος θα αυξηθεί κατά μηδέν κόμμα …σε… [κάνει παύση και ανεβάζει το χέρι της προς τα πάνω].. εις την τρίτη ας πούμε.

37. Ε: Κυβικά μέτρα εννοείς;

38. Ν: Μπράβο ναι.

39. Ε: Αυτό δηλαδή πώς…

40. Ν: 3η δύναμη είναι δηλαδή

41. Ε: Ναι αλλά πώς το σκέφτεσαι… πώς σε βοηθάει… γιατί να γίνει αυτός ο συλλογισμός;

42. Ν: Για να δούμε πώς μεταβάλλεται. Αφού έχουμε τη συνάρτηση μπορούμε να δούμε έτσι πώς μεταβάλλεται

43. Ε: α ωραία οκ.. εμ… στη συνέχεια θέλουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση η οποία προσεγγίζει αυτή τη μεταβολή

44. Ν: ε θα είναι μια διαφορά; προς.. εε θα είναι το ολοκλήρωμα x, x και… [μεγάλη παύση, σκέφτεται]…τι να..

45. Ε: πες μου πρώτα το συλλογισμό ολόκληρο..

46. Ν: εδώ x, εδώ x και κάτι.. και θα διαιρέσουμε με τη διαφορά τους.

Αρχικά, η Νίκη στο [30] φαίνεται να μην έχει καταλάβει ότι η ερώτηση υπονοεί ρυθμό μεταβολής. Ναι μεν, φαίνεται να προσπαθεί να βρει κάποια σχέση ανάμεσα στη μεταβολή του όγκου και τη μεταβολή του ύψους $\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$, εξετάζοντας όμως ξεχωριστά τον αριθμητή και τον παρονομαστή αυτού του πηλίκου. Φαίνεται να έχει στρέψει την προσοχή της στη μεταβολή του όγκου $V(h+\Delta h)-V(h)$ [30],[36],[40] και όχι στο ποσό της μεταβολής του όγκου σε σχέση με το ποσό της μεταβολής του ύψους . Περισσότερο ίσως περιγράφει μια συναρτησιακή συμμεταβολή των h και V(h)) [42], παρά ρυθμό μεταβολής, δηλαδή ένα ποσό της μεταβολής μιας ποσότητας σε σχέση με το ποσό της μεταβολής της άλλης.

Από την άλλη μεριά, εγώ σκεπτόμενη ότι ενδεχομένως η Νίκη δεν έχει κατανοήσει την αρχική ερώτηση ‘πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του;’ αποφασίζω να μην διορθώσω την παρανόηση της και συνεχίζω στην επόμενη ερώτηση που αφορά στη κατασκευή μιας συνάρτησης η οποία προσεγγίζει αυτή τη μεταβολή [43]. Η ίδια αβίαστα αναφέρει ότι θα έχει τη μορφή ενός κλάσματος διαφορών [44], [46]. Συνεπώς η αρχική μου υπόθεση, διαψεύδεται.

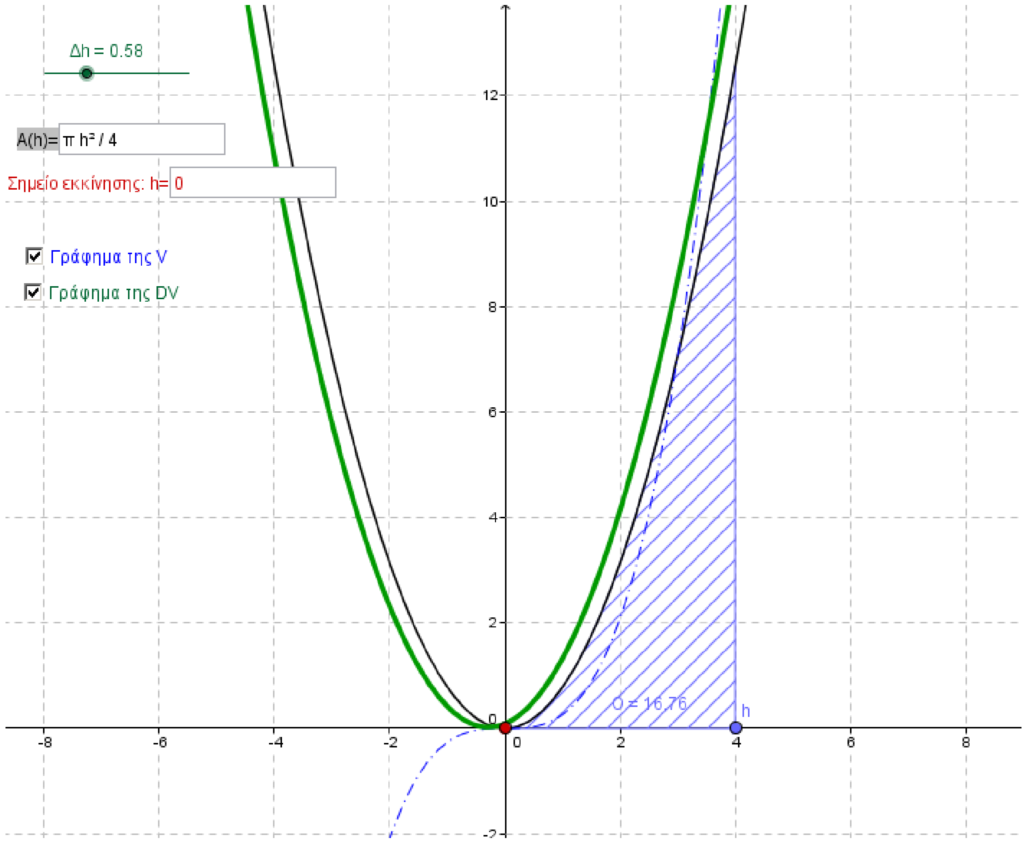
Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε τις μαθηματικές σχέσεις που περιγράφει άτυπα (colloquially) η Νίκη ως εξής: $\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}=V(h+\Delta h)-V(h)$ [30], [40] και άρα για $\Delta h=0.3$, $\frac{V(h+0.3)-V(h)}{0.3}=V(h+0.3)-V(h)$ [36], δύο ισότητες που στερούνται μαθηματικού νοήματος.

Ακόμα, η χρήση των λέξεων στο [30] ‘όταν μεταβάλλουμε κατά x μονάδες’ και στο [36], ‘αν για παράδειγμα μεταβάλλουμε κατά 0.3 μέτρα το ύψος’, θεωρούμε ότι παραπέμπουν σε μια εικόνα διακριτών και ομοιόμορφων μεταβολών του ορίσματος h της συνάρτησης DV, αντί μιας εικόνας που υποστηρίζει συνεχείς μεταβολές στα μεγέθη DV και h.

Τελικά, η Νίκη φαίνεται να αγνοεί τη διαίρεση στο πηλίκο διαφορών και να θεωρεί προσθετικές μεταβολές στη συσσώρευση του όγκου. Γενικά, η ίδια φαίνεται να θεωρεί τους ρυθμούς μεταβολής μόνο ως προσαυξήσεις ίσου μεγέθους. Τα παραπάνω συμπεράσματα για τη Νίκη θυμίζουν, τους φοιτητές της Carlson και των συνεργατών της (2002) σε μια αντίστοιχη μελέτη με 20 φοιτητές υψηλών επιδόσεων στον Απειροστικό Λογισμό. Οι συγγραφείς καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι περισσότεροι φοιτητές αντιμετώπιζαν αρκετές δυσκολίες σε δραστηριότητες που αφορούν το μέσο και το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Παρόλο που οι περισσότεροι φοιτητές 'ήταν συχνά σε θέση να συντονίσουν εικόνες του ποσού της μεταβολής της μεταβλητής εξόδου καθώς λαμβάνουν υπ' όψιν τις μεταβολές στη μεταβλητή εισόδου', στην ουσία τους ήταν τυπικά αδύνατο να συντονίσουν τις μεταβολές στο μέσο ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης με τις μεταβολές στη μεταβλητή εισόδου (Carlson κ.α., 2002, σελ 372). Οι περισσότεροι φοιτητές δεν κατανοούσαν καταστάσεις όπου οι ρυθμοί πρέπει να θεωρούνται ως πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις των μεταβολών των δύο μεταβλητών. Επιτύγχαναν να περιγράψουν ρυθμούς μεταβολής ως αθροιστικές μεταβολές στη μεταβλητή εξόδου.

### 4.7 Επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις: Γιατί συμπίπτουν τα γραφήματα των συναρτήσεων $DV$ και Α, καθώς το $\Delta h \to 0$;'

Σε αυτή την υποενότητα φαίνεται πώς το υπό εξέταση φαινόμενο αφορά σε μια εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού και το αντίστοιχο περιστατικό εντοπίζεται στην 4η φάση της έρευνας. Η Τάνια και ο Κοσμάς έχουν κατασκευάσει τη συνάρτηση εμβαδού $A(h)=\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2$, τη συνάρτηση όγκου $V(h)=\int_0^h A(t)dt$ και τη συνάρτηση του μέσου ρυθμού μεταβολής του όγκου $DV(h)=\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$. Στη συνέχεια εισάγουν τη συνάρτηση $DV$ στο GeoGebra, παρατηρούν το γράφημα και τους παροτρύνω να κινήσουν το δρομέα $\Delta h$ που παίρνει τιμές στο διάστημα [0,2] (βλ. Ενότητα 3.4.4, Φ.Ε., ερ. Γ1, και Σχήμα 16). Καθώς το '$\Delta h \to 0$' το γράφημα της $DV$ συμπίπτει με το γράφημα της αρχικής συνάρτησης εμβαδού Α.




**Σχήμα 16: Το γραφήματα της DV συμπίπτει με το γράφημα A καθώς κινούμε το δρομέα Δh.**

Το απόσπασμα που ακολουθεί ξεκινάει με την απάντηση του Κοσμά στην ερώτηση ‘Γιατί συμπίπτουν τα γραφήματα των συναρτήσεων $DV$ και A, καθώς το $\Delta h \to 0$;’

47. Κ: Είναι το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού …

48. Ε: ΧΜ, δηλαδή;

49. Κ: [γελάει] Η παράγωγος του ολοκληρώματος κάνει τη… συνάρτηση.

50. Ε: [γελάω] Τάνια;

51. Τ: εε.. είναι λογικό γιατί στην ουσία είναι η παράγωγος του εμβαδού.. ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου.. όχι;

52. Ε: είναι η παράγωγος του εμβαδού..;

53. Τ: όχι δεν είναι παράγωγος του εμβαδού.. είναι [παύση].. ναι! Όπως η ταχύτητα είναι η παράγωγος της μετατόπισης, έτσι και… ο όγκος θα ’ναι η παράγωγος του εμβαδού.. όχι;

54. Κ: Ο όγκος θα ‘ναι.. το ολοκλήρωμα [του εμβαδού].

55. Τ: το ολοκλήρωμα ναι… τι λέω!

Στο παραπάνω απόσπασμα, ο Κοσμάς, αβίαστα απαντάει ότι το φαινόμενο που εξετάζουμε τεκμηριώνεται με ένα επικυρωμένο αφήγημα (endorsed narrative), δηλαδή το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού [47]. Στη δική μου έκκληση για τεκμηρίωση [48], παρατηρούμε ότι το επικυρωμένο αφήγημα του Κοσμά, δίνει τώρα τη θέση του σε μία ευρέως χρησιμοποιούμενη ρουτίνα : η παράγωγος του ολοκληρώματος μας επιστρέφει στην αρχική συνάρτηση [49]. Στη συνέχεια η Τάνια, τεκμηριώνει το φαινόμενο ισχυριζόμενη, λανθασμένα, οτι: ‘ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου’ είναι ‘η παράγωγος του εμβαδού’ [51]. Η Τάνια συνεχίζει, κάνοντας έναν, ατυχή, παραλληλισμό του φαινομένου με ένα πιο οικείο φαινόμενο για την ίδια: ‘όπως η ταχύτητα είναι η παράγωγος της μετατόπισης, έτσι και… ο όγκος θα ’ναι η παράγωγος του εμβαδού’. Στο [54] ο Κοσμάς, παίρνει το ρόλο του απόλυτου τεκμηριωτή (ultimate substantiator) με τη δήλωση ότι ‘ο όγκος θα ‘ναι.. το ολοκλήρωμα’ του εμβαδού. Η δήλωση του Κοσμά φαίνεται να είναι ολοκληρωτικά αποδεκτή από την Τάνια [55] και έτσι το απόσπασμα κλείνει με την, εκούσια, ευθυγράμμιση των απόψεων της Τάνιας στη δήλωση του Κοσμά.

Το παραπάνω απόσπασμα αναδεικνύει την επικοινωνιογνωστική σύγκρουση της Τάνιας στην προσπάθεια της να τεκμηριώσει το υπο εξέταση φαινόμενο: ‘γιατί συμπίπτουν τα γραφήματα των συναρτήσεων $DV$ και Α, καθώς το $\Delta h \to 0$’. Η σύγκρουση της Τάνιας φαίνεται να οφείλεται στην απαιτούμενη αλλαγή των μετα-διαλογικών κανόνων (meta-discursive rules). Η νοηματοδότηση της σχέσης ‘ρυθμός μεταβολής όγκου- εμβαδό’ συνιστά ένα νέο μετα-κανόνα που περικλείει τη συνοχή ενός νέου αφηγήματος με ήδη υπάρχοντα επικυρωμένα αφηγήματα (endorsed narratives), δηλαδή την οικία, διαισθητικά, σχέση: ‘ρυθμός μεταβολής μετατόπισης –ταχύτητα’. Φαινομενικά, η επικοινωνιογνωστική σύγκρουση της Τάνιας, λαμβάνει τέλος, μέσα από την αμοιβαία προσαρμογή των διαλογικών τρόπων (discursive ways) της ίδιας και του Κοσμά : ‘ο όγκος θα είναι το ολοκλήρωμα του εμβαδού’.

Τώρα, ας εστιάσουμε την προσοχή μας στα σχόλια του Κοσμά [47,49,54]. Στη συνέχεια του διαλόγου (discourse) με την Τάνια και τον Κοσμά, που παραλείπεται εδώ, και αφορά σε μια περεταίρω και εις βάθος τεκμηρίωση του φαινομένου από τους φοιτητές, ο Κοσμάς αναφέρει : ‘δε βλέπω κάτι ποιοτικό.. μονό αλγεβρικά εντάξει, το βρήκαμε. Δε μπορώ να καταλάβω τι άλλο… ’ . Σε αυτή τη φράση, ο Κοσμάς αναφέρει ότι δε βλέπει ‘κάτι ποιοτικό’ αναφορικά με την ποιοτική σχέση των συναρτήσεων DV και Α, και συνεχίζει ότι οι ίδιοι έχουν «βρει» τη σύνδεση των συναρτήσεων αυτών αλγεβρικά ( $DV(h) = \frac{V(h+\Delta h) - V(h)}{\Delta h} \approx \mathrm{A}(h)$ ) και γεωμετρικά (ταύτιση γραφημάτων $DV$ και Α, καθώς το $\Delta h \to 0$). Τέλος με τη φράση ‘Δε μπορώ να καταλάβω τι άλλο…’, ο Δήμος εννοεί ότι δεν καταλαβαίνει τι άλλο έπρεπε να απαντήσουν σχετικά με την τεκμηρίωση του φαινομένου. Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Κοσμάς παρουσιάζει μια ψευδοεννοιολογική συμπεριφορά (pseudo-conceptual behavior) (Vinner, 1997), στην τεκμηρίωση του Θεμελιώδους Θεωρήματος. Στο [47], χρησιμοποιεί τις λέξεις ‘παράγωγος’ και ‘ολοκλήρωμα’ (αντί λ.χ. ‘ρυθμός μεταβολής’ και ‘συσσώρευση’ όπως συνηθίζαμε να χρησιμοποιούμε στη συζήτηση μέχρι εκείνη τη στιγμή) και εν γένει τεκμηριώνει το φαινόμενο *επιφανειακά* με αλγεβρικά και γεωμετρικά επιχειρήματα.

Αν επιχειρούσαμε ένα παραλληλισμό του προβλήματος, όπως αυτόν της Τάνιας, με ένα πιο οικείο, διαισθητικά, πρόβλημα ταχύτητας-μετατόπισης ως συναρτήσεις του χρόνου, θα είχαμε τι σχέσεις που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| | |
|---|---|
| $\mathrm{A}(h)$<br>εμβαδό συναρτήσει του ύψους | $u(t)$<br>ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου |
| $V(h)=\int_0^h A(t)dt$<br>όγκος συναρτήσει του ύψους | $x(t)=\int_0^t u(y)dy$<br>μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου |
| $DV(h)=\dfrac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}\approx \mathrm{A}(h)$<br>ρυθμός μεταβολής του όγκου ως προς το ύψος | $Dx(t)=\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\approx u(t)$<br>ρυθμός μεταβολής μετατόπισης ως προς το χρόνο |

Στα πλαίσια του προβλήματος ταχύτητας-μετατόπισης θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα ως εξής: Αν σκεφτόμαστε μια συνολική συσσώρευση της απόστασης, συναρτήσει του χρόνου, και αν θεωρήσουμε ότι μέσα σ' ένα, πολύ μικρό, χρονικό διάστημα η απόσταση αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, τότε ανεξάρτητα από το πόση απόσταση έχει συσσωρευτεί πριν από αυτό το χρονικό διάστημα, η συνολικά σωρευόμενη απόσταση μεταβάλλεται με αυτό το σταθερό ρυθμό σ 'αυτό το χρονικό διάστημα. Δανειζόμαστε ένα παράδειγμα από τον Thompson (1994), ο οποίος αναφέρει το εξής: φανταστείτε ότι έχετε οδηγήσει x km και το επόμενο 0.0001 sec έχετε μέση ταχύτητα 93 km/h, δηλαδή $\dfrac{x(t+0.0001)-x(t)}{0.0001}\approx 93$ km/h. Κατά τη διάρκεια των 0.0001 sec, η συνολική απόσταση που έχετε οδηγήσει μεταβάλλεται με ρυθμό 93 km/h, ανεξάρτητα από το πόσο μακριά έχετε φτάσει.

Αντίστοιχα, στο δικό μας πρόβλημα, ο συνολικός όγκος του νερού μεταβάλλεται στο μέσο ρυθμό που μεταβάλλεται ο 'κύλινδρος' $V(h_0+\Delta h)-V(h_0)$. Ο ρυθμός αυτός είναι απλά ο όγκος του κυλίνδρου δια το ύψος $\Delta h$ του κυλίνδρου, δηλαδή $\dfrac{\mathrm{A}(h_0)\cdot\Delta h}{\Delta h}$. Τα παραπάνω παραδείγματα, αναδεικνύουν δύο σημαντικές εικόνες που είναι απαραίτητες στην εννοιολογική κατανόηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού: 1$^{ον}$ να σκεφτόμαστε ότι οι ποσότητες συντίθενται πολλαπλασιαστικά από δυο άλλες ποσότητες (λ.χ. f ταχύτητα, x χρόνος, f(c)·Δx μετατόπιση ή f εμβαδό, x ύψος, f(c)·Δx όγκος, για κάποιο $c\in[x,x+\Delta x]$), και 2$^{ον}$ να σκεφτόμαστε με όρους απειροστών ( $\Delta x$ ή $\Delta h$ ).

## 4.8 Γιατί συμπίπτουν τα γραφήματα των συναρτήσεων $DV$ και Α, καθώς το $\Delta h \to 0$;'Η ερμηνεία της Νίκης

Σε αυτό το σημείο, θα συνεχίσουμε με μια γενική περιγραφή της συζήτησης με τους φοιτητές στην 4ης φάσης της έρευνας. Η συζήτηση, έπειτα από τη διαπίστωση ότι τα γραφήματα της DV και Α είναι πανομοιότυπα για αρκούντως μικρό $\Delta h$, συνεχίστηκε με μια προσπάθεια να κατανοήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό, στα πλαίσια του προβλήματος. Δηλαδή 'γιατί το γράφημα της συνάρτησης του μέσου ρυθμού μεταβολής του όγκου σε σχέση με το ύψος του νερού ($DV(h) = \dfrac{V(h+\Delta h) - V(h)}{\Delta h}$, όπου $V(h) = \int_0^h A(t)dt$) είναι ίδιο με το γράφημα της συνάρτησης εμβαδού μιας οριζόντιας τομής της δεξαμενής όταν το νερό βρίσκεται σε ύψος h ($A(h) = \pi \left(\dfrac{h}{2}\right)^2$), για αρκούντως μικρό $\Delta h$;'.

Αρκετές συγκρούσεις που ήρθαν στην επιφάνεια νωρίτερα, αναδύονται και σε αυτό το σημείο του διαλόγου με τους φοιτητές. Περισσότερο από ποτέ, εδώ εντοπίστηκαν συγκρούσεις που προκύπτουν από τη διαφοροποιημένη χρήση των λέξεων 'μεταβάλλεται' και 'ρυθμός που μεταβάλλεται' και το χειρισμό των σημαινόντων 'ποσότητα' και 'μεταβολή της ποσότητας' (βλ. 4.6).

Με τους φοιτητές εξετάσαμε το πηλίκο $\dfrac{V(h_0 + 0.01) - V(h_0)}{0.01}$ το οποίο στη συνέχεια γενικεύσαμε με το πηλίκο $\dfrac{V(h_0 + \Delta h) - V(h_0)}{\Delta h}$, του οποίου ο αριθμητής θα ήταν ένα κομμάτι του όγκου, δηλαδή ένας κύλινδρος με ύψος $\Delta h$ και εμβαδό $\mathrm{A}(h_0)$. Συνεπώς, μια προσέγγιση του όγκου του κυλίνδρου θα ήταν $V(h_0 + \Delta h) - V(h_0) \approx \mathrm{A}(h_0)\Delta h$. Έτσι, αν διαιρέσουμε με το $\Delta h$ την τελευταία σχέση, βλέπουμε τώρα και αλγεβρικά, αυτό που παρατηρούμε στη γεωμετρική αναπαράσταση του αρχικού προβλήματος της δεξαμενής.

Οι εξερευνήσεις της προηγούμενης παραγράφου έλαβαν χώρα στη μορφή σκαλωσιάς (scaffolding) από εμένα προς τους φοιτητές (λ.χ. 'Τι θα ήταν το ' $V(h_0 + 0.001) - V(h_0)$ '/ 'θα έχει πάχος [ο κύλινδρος];'/ 'πως αλλιώς μπορούμε να τον εκφράσουμε'). Οι οπτικοί διαμεσολαβητές στον παραπάνω διάλογο (discourse) περιορίστηκαν σε σχεδιαγράμματα και συμβολισμούς στο χαρτί .

Στο απόσπασμα που ακολουθεί η Νίκη επιχειρεί μια τεκμηρίωση (substantiation) στην ερώτηση που θέτω για 2η φορά : 'Γιατί συμπίπτουν τα δυο γραφήματα όταν το Δh τείνει στο 0;'

56. Ν: Γιατί αυτή [η V]είναι 3ου βαθμού, θα έλεγα στα παιδιά, κι αυτή [η Α] είναι 2ου, ε κι άμα την παραγωγίσεις [τη V] θα βγουν πανομοιότυπες. Τώρα η εξήγηση μάλλον είναι εκείνη που σου πα πριν : ότι όσο μικραίνουμε το Δh, η μεταβολή του … αυτή [η DV] πλησιάζει να είναι ένας… ένας κύλινδρος που έχει τόσο λεπτό ας πούμε πάχος που μοιάζει με κυκλικό δίσκο… μοιάζει, με κυκλικό δίσκο [εννοεί μοιάζει, αλλά δε θα γίνει ποτέ]… και ίσως γι αυτό προσεγγίζει [η DV προσεγγίζει την Α].

57. Ε: Ναι αλλά … πλέον δεν το προσεγγίζει για αρκούντως μικρό Δh είναι ακριβώς το ίδιο [το γράφημα της DV είναι ίδιο με το γράφημα της Α].

58. Ν: μμ [συμφωνεί, γνεύει καταφατικά]

59. Ε: Δηλαδή εσύ πως αντιλαμβάνεσαι ας πούμε καθώς…

60. Ν: Και εξηγείται έτσι: ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου θα είναι η παράγωγος αυτού, που θα ναι και αυτή DV [μπερδεμένα] … και μοιάζουν και οι δυο συναρτήσεις αυτές από την κατασκευή τους [δε δείχνει κάπου συγκεκριμένα]. Δηλαδή η μια φτιάχνεται από το ολοκλήρωμα και την παράγωγο της άλλης, αφού αυτή είναι αυτή επί το ύψος και τα λοιπά [δε δείχνει κάπου συγκεκριμένα].

Η Νίκη ανοίγει τη συζήτηση, περιγράφοντας ένα επικυρωμένο αφήγημα (endorsed narrative): «η παράγωγος μιας συνάρτησης 3$^{ου}$ βαθμού, είναι μια συνάρτηση 2$^{ου}$ βαθμού» [56]. Στη συνέχεια του [56] η Νίκη τεκμηριώνει το υπό εξέταση φαινόμενο με το εξής αφήγημα: «‘όσο μικραίνουμε το Δh’ η συνάρτηση DV ‘πλησιάζει να είναι […] ένας κύλινδρος’ με ‘τόσο λεπτό […] πάχος που μοιάζει με κυκλικό δίσκο’» και άρα ‘ίσως γι αυτό’ η DV ‘προσεγγίζει’ την Α. Στο [57], κάνω μια παρατήρηση για το φαινόμενο επιχειρώντας μια διαλογική αλλαγή (discursive shift): «το γράφημα της DV είναι ‘ακριβώς το ίδιο’ με το γράφημα της Α», αντί «το γράφημα της DV ‘προσεγγίζει’ το γράφημα της Α». Η Νίκη δέχεται την παρατήρηση μου [59], αλλά συνεχίζει σε μια περαιτέρω τεκμηρίωση του φαινομένου [60]. Συγκεκριμένα στο [60], η Νίκη φαίνεται να επανεξετάζει άτυπα (colloquially), τη σύνδεση των εμπλεκόμενων συναρτήσεων Α, V και DV. Τα λεγόμενα της Νίκης στο [60] μπορούν να αποδοθούν άτυπα με δύο τρόπους: Πρώτον, «η V ‘φτιάχνεται’ από το ολοκλήρωμα της Α» και «η Α ‘φτιάχνεται’ από την παράγωγο της V». Δεύτερον: «στον τύπο της $DV(h)=\dfrac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$, περιέχεται ο τύπος της Α, αφού $V(h)=\int_0^h A(t)dt$ ».

Τα σχόλια της Νίκης [56] σχετικά με τον κύλινδρο ‘που έχει τόσο λεπτό πάχος’ ώστε να ‘μοιάζει με κυκλικό δίσκο’ καθώς ‘μικραίνουμε το Δh’, μπορούν να αποτυπωθούν πιο αυστηρά ως: $\lim_{\Delta h\to 0} V(h+\Delta h)-V(h)=A(h)$, κάτι που θα σήμαινε : $\lim_{\Delta h\to 0}\dfrac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to 0}\dfrac{A(h)}{\Delta h}$, δύο ισότητες που στερούνται μαθηματικού νοήματος. Ενδεχομένως η Νίκη παρατηρώντας το γράφημα της DV να συμπίπτει με το γράφημα της Α καθώς το $\Delta x\to 0$ (βλ. Σχήμα 16), εκτελεί μια τοπική αφαιρετική διαδικασία (situated abstraction), η οποία –μέσα από τα λεγόμενα της- περιγράφεται ως μια οριακή διαδικασία στην οποία όσο μικραίνουμε το ύψος Δh του κυλίνδρου, ο κύλινδρος *τείνει* να γίνει κυκλικός δίσκος.

Η Νίκη φαίνεται να μη σκέφτεται τον 'κύλινδρο'- ως ένα αυξητικά σωρευόμενο κομμάτι (accrual) του όγκου που συντίθεται πολλαπλασιαστικά – σε σχέση με τη μεταβολή στο ύψος. Δηλαδή η Νίκη - όπως και στην ενότητα 4.6 - δε σκέφτεται τη μεταβολή του όγκου σε σχέση με τη μεταβολή του ύψους στην αναλογική σχέση ' $\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$ ' · με άλλα λόγια νοηματοδοτεί το κλάσμα αυτό χωρίς να λαμβάνει υπ' όψιν τον παρονομαστή $\Delta h$. Επιπλέον, φαίνεται να νοηματοδοτεί τον 'κύλινδρο' *στατικά*, και όχι ως μια ποσότητα που συσσωρεύεται αυξητικά και συντίθεται πολλαπλασιαστικά από δυο άλλες ποσότητες (εμβαδό x ύψος).

Τα σχόλια της Νίκης στα [56] και [60] που αφορούν στη σχέση των εμπλεκομένων συναρτήσεων A, V και DV και την αντίστροφη φύση τους, θυμίζουν τα σχόλια του Κοσμά στο [49], τα οποία - όπως ερμηνευτήκαν στο αντίστοιχο απόσπασμα - αντικατοπτρίζουν μια ψευδοεννοιολογική κατανόηση του φαινομένου, δηλαδή του Θεμελιώδους Θεωρήματος.

Μια φυσική ερμηνεία του πηλίκου διαφορών $\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$ σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης, είναι ότι αναπαριστά το μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου στο διάστημα [h, h+Δh], όπου ο όγκος υπολογίζεται από το άθροισμα Riemann $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(\mathrm{i}\frac{h}{n})\cdot\frac{h}{n}$. Στο παραπάνω διάστημα ο όγκος αυξάνει εκτείνοντας κάθετα το στοιχειώδη κύλινδρο που έχει βάση A(h), το εμβαδό δηλαδή της οριζόντιας τομής του νερού σε ύψος h, και η βάση αυτή παραμένει σταθερή κατά μήκος της αύξησης στο διάστημα [h, h+Δh]· έτσι, ο όγκος αυξάνει με ρυθμό A(h) (Thompson, 1994). Είναι δε, και ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνει συνολικά ο συσσωρευμένος όγκος του νερού, ανεξάρτητα από την ποσότητα που έχει πιο πριν συσσωρευτεί.

Η ερμηνεία της Νίκης για το πηλίκο διαφορών $\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$ σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης – ή με άλλα λόγια η ερμηνεία της προσεγγιστικής σχέσης $\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}\approx A(h)$- θυμίζει την ερμηνεία των υπολοίπων συμμετεχόντων που παραλείπεται εδώ. Λόγου χάρη, ο Πάρις τεκμηριώνει (substantiates) το φαινόμενο αναφέροντας ότι 'ο όγκος θα εκφυλιστεί σε εμβαδό' και η Τάνια αναφέρει ότι 'ο κύλινδρος τείνει να γίνει κύκλος'. Ο Oehrtman (2002) χαρακτηρίζει αυτό τον τρόπο σκέψης 'εκφυλιστική μεταφορά' ('the collapsing metaphor'), που σημαίνει ότι το υπο εξέταση αντικείμενο (στην περίπτωση μας ο κύλινδρος) πλησιάζει ένα άλλο αντικείμενο που έχει μια λιγότερη διάσταση (έναν κυκλικό δίσκο).

Ο Oehrtman (2002) διαπίστωσε ότι το 1/3 των συμμετεχόντων στην ερευνά του, χρησιμοποιούσαν αυτή τη μεταφορά σε διαφορετικές περιπτώσεις, όπου απαιτούνταν ανάλογες ερμηνείες με αυτές στην ερευνά μας. Ο ίδιος αναφέρει ότι παρόλο που η ‘εκφυλιστική μεταφορά’ είναι μαθηματικά λανθασμένη, μερικές φορές βοηθάει τους φοιτητές να εξάγουν ορθά μαθηματικά αποτελέσματα, μέσα από λανθασμένη αιτιολόγηση. Οι Thompson και Silverman (2008) σχολιάζουν τα παραπάνω ευρήματα του Oehrtman (2002) συμπληρώνοντας ότι, οι φοιτητές μερικές φορές, νοηματοδοτούν το Θεμελιώδες Θεώρημα μέσα από τη λανθασμένη αιτιολόγηση ότι καθώς το πλάτος του διαστήματος μειώνεται, το ορθογώνιο εκφυλίζεται στο ύψος του. Με άλλα λόγια, εξηγούν ότι το $\Delta x \to 0$, υποδηλώνει ότι το $f(c)\Delta x \to f(c)$, για κάποιο $c \in [x, x+\Delta x]$. Δηλαδή οι φοιτητές σκέφτονται μια εικόνα (λ.χ. ένα ορθογώνιο), αντί μιας ποσότητας (λ.χ. ένα ηλεκτρικό φορτίο) και της τιμής του μέτρου της. Οι Thompson και Silverman (2008) σημειώνουν ότι παρόλο που η ‘εκφυλιστική μεταφορά’ βοηθά τους φοιτητές στη διαισθητική – πλην λανθασμένη- νοηματοδότηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος, παράλληλα τους απομακρύνει από την εννοιολογική κατανόηση του Θεωρήματος – σχετικά με τις ιδέες του ρυθμού μεταβολής.

Με επικοινωνιογνωστικούς όρους, θα λέγαμε ότι το τελευταίο απόσπασμα αναδεικνύει μια επικοινωνιογνωστική σύγκρουση της Νίκης στην τεκμηρίωση του φαινομένου που σχετίζεται με την αλλαγή μετα-διαλογικών κανόνων (meta- discursive rules). Οι μετα- κανόνες που θα υποστήριζαν μια ορθή νοηματοδότηση του φαινομένου, αφορούν στην κατανόηση ότι η μέση μεταβολή μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα (λ.χ. $V(h_0+\Delta h)-V(h_0)$) ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής επί την ποσότητα της μεταβολής στην ανεξάρτητη μεταβλητή (λ.χ. $\mathrm{A}(h_0)\cdot\Delta h$). Επίσης, αφορούν στην κατανόηση ότι η πολλαπλασιαστική σχέση που αναπαριστά ένα σωρευόμενο ‘κομμάτι’ που μεταβάλλεται σε ένα διάστημα (λ.χ. $\mathrm{A}(h)\cdot\Delta h$), μπορεί να αναπαρασταθεί ως εμβαδό. Ακόμα, οι μετα-κανόνες που υποστηρίζουν την τεκμηρίωση του φαινομένου συνίστανται σε εννοιολογικές συνδέσεις και στο συντονισμό αντίστοιχων δράσεων που περιέχονται στο Θεμελιώδες Θεώρημα ώστε να δημιουργηθεί ένα σχήμα που παραμένει σε *ισορροπία*. Συγκεκριμένα, όπως αναφέρουν οι Carlson κ.ά. (2003), συνίστανται στο συντονισμό της συσσώρευσης διακριτών μεταβολών του ορίσματος μιας συνάρτησης, με τη συσσώρευση του μέσου ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης σε σταθερά διαστήματα του πεδίου ορισμού της. Έπειτα, αφορούν στο συντονισμό της συσσώρευσης όλο και μικρότερων διαστημάτων του ορίσματος, με τη συσσώρευση του μέσου ρυθμού μεταβολής σε κάθε διάστημα. Τέλος, συνίστανται στο συντονισμό της συσσώρευσης του ορίσματος με το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης από μια σταθερή αρχική τιμή σε μια συγκεκριμένη τιμή (Carlson et al., 2003).

# 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, διεξήχθη ένα διδακτικό πείραμα (teaching experiment) που χωρίστηκε σε τέσσερεις φάσεις και συμμετείχαν πέντε φοιτητές μαθηματικού τμήματος. Η πρώτη φάση ήταν εισαγωγική, η δεύτερη αφορούσε στην έννοια του ρυθμού μεταβολής και η τρίτη στην έννοια της συσσώρευσης. Στην τέταρτη φάση, με εφαλτήριο την έρευνα του Thompson (1994a), αναπαραστάθηκε στο λογισμικό GeoGebra ένα πραγματικό φαινόμενο που απαιτούσε μαθηματική τεκμηρίωση.

Συγκεκριμένα, ζητήθηκε από τους φοιτητές να κατασκευάσουν διαδοχικά και με τη σειρά που φαίνονται παρακάτω, τρεις συναρτήσεις:

(1) $f(x)$

(2) $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

(3) $Dg(x)=\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

και μέσω του λογισμικού αναπαραστάθηκαν τα γραφήματά τους. Όταν το $\Delta x$ στην τελευταία συνάρτηση (3) τείνει στο 0, μέσα από έναν αντίστοιχο δρομέα στην οθόνη, το γράφημα της συνάρτησης (3), συμπίπτει με το γράφημα της αρχικής συνάρτησης (1). Η συνάρτηση (1) αναπαριστά εμβαδό επιφάνειας συναρτήσει του ύψους, η συνάρτηση (2) αναπαριστά συσσώρευση όγκου συναρτήσει του ύψους και η (3) δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης σε διαστήματα πλάτους $\Delta x$. Για την προφανή σχέση των τριών συναρτήσεων και τη νοηματοδότησή τους ως αναπαραστάσεων ενός δυναμικού φαινομένου, απαιτούνταν μια ισχυρή εννοιολογική κατανόηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού. Οι νοηματοδοτήσεις των φοιτητών για το Θεώρημα, όπως παρουσιάστηκε σε αυτή την εργασία, φάνηκε να συγκλίνουν. Στις επόμενες παραγράφους παρατίθενται τα σημεία σύγκλισης.

Ειδικότερα, κάποιοι φοιτητές (2/5) φάνηκε να έχουν μια *εικόνα* ότι όγκος στη συνάρτηση (2) συσσωρεύεται *αθροιστικά* μέσα από στατικά κομμάτια (*κυλίνδρους*) - σε στρώματα ή 'τόσο λεπτά [ύψους $\Delta x$] σαν φύλλα χαρτί το ένα πάνω στο άλλο', όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο ένας εκ των δύο φοιτητών. Παρόλο που οι υπόλοιποι φοιτητές δεν κατέληξαν –ρητά- σε ανάλογες διαπιστώσεις, φάνηκε ότι και εκείνοι δε νοηματοδοτούσαν τον *κύλινδρο* ( $f(c)\Delta x$ ) ως ποσότητα του όγκου που συσσωρεύεται αυξητικά καθώς συντίθεται πολλαπλασιαστικά, ώστε να συνεισφέρει στη συνολική συσσώρευση του όγκου ($\int f(x)\Delta x$). Αντ' αυτού οι φοιτητές (4/5) στην παρούσα έρευνα φάνηκε να νοηματοδοτούν τον *κύλινδρο* ως μεμονωμένο αντικείμενο (Thompson, 1994) του οποίου, όσο μειώνεται το ύψος Δx, ο όγκος του κυλίνδρου τείνει στο εμβαδό της βάσης του. Με άλλα λόγια, ένα *επικυρωμένο αφήγημα (endorsed narrative)* των φοιτητών για τη νοηματοδότηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος, ήταν ότι 'όταν $\Delta x \to 0$ τότε $f(c)\Delta x \to f(c)$, για κάποιο $c \in [x, x+\Delta x]$', κάτι που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως 'εκφυλιστική μεταφορά' ('collapsing metaphor'), και έχει μελετηθεί από τους Oehrtman (2002) και Thompson (1994). Ακόμα, ορισμένοι φοιτητές (2/5) ανέφεραν λεκτικά ότι το υπό εξέταση φαινόμενο αποτελεί μια εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος. Άλλοι (2/5), τεκμηρίωσαν το φαινόμενο αναφερόμενοι στην αντίστροφη φύση της δομής των συναρτήσεων $g$ ($g(x) = \int f(x)dx$) και $f$ ($f(x) = \frac{d}{dx}g(x)$) χωρίς ρητή αναφορά στο Θεώρημα. Τέλος, ένας φοιτητής νοηματοδότησε το φαινόμενο 'διαισθητικά', όπως ανέφερε ο ίδιος, θεωρώντας ότι δεν τεκμηριώνεται μέσα από κάποια ευρύτερη θεωρία.

Όμως, γιατί οι φοιτητές έβλεπαν τον 'κύλινδρο' ως μεμονωμένο αντικείμενο; Το γεγονός αυτό, φαίνεται να συνδέεται με τις εικόνες των φοιτητών για το ρυθμό, τη συσσώρευση και το όριο. Όπως και οι φοιτητές των Carlson κ.ά. (2002), φαίνεται ότι οι φοιτητές εδώ είχαν μια εικόνα για το ρυθμό που προσιδιάζει περισσότερο σε μια ποσοτική μεταβολή παρά σε ένα σχετικό/ συσχετιστικό μέγεθος (relative size). Με άλλα λόγια, δεν κατανοούσαν ότι στη συγκεκριμένη κατάσταση οι ρυθμοί πρέπει να θεωρούνται ως πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις των μεταβολών των δύο μεταβλητών (Thompson et al, 2012), δηλαδή του όγκου και του ύψους. Οι φοιτητές επιτύγχαναν να περιγράψουν ρυθμούς μεταβολής ως αθροιστικές μεταβολές στη μεταβλητή εξόδου (Castillo- Garsow 2010, Thompson et al, 2012). Παράλληλα, φαίνεται ότι οι φοιτητές σκέφτονταν το άθροισμα Riemann σα να ήταν κάτι σταθερό. Παρόλο που το όρισμα στη συνάρτηση συσσώρευσης μπορεί να άλλαζε και άρα μπορούσε να υπολογιστεί με νέο όρισμα, φαίνεται ότι σκέφτονταν το άθροισμα Riemann ως άθροισμα αμετάβλητων 'κομματιών' (Thompson, 1994). Δηλαδή, οι εικόνες των φοιτητών για τα αθροίσματα Riemann ήταν ανεπαρκής για να υποστηρίξουν τη συλλογιστική τους για το ρυθμό μεταβολής του αθροίσματος (Thompson, 1994). Τέλος, βάζοντας ως παράμετρο και την ασθενή νοηματοδότηση του ορίου από τους φοιτητές, φαίνεται για εκείνους ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής δεν ήταν ακριβώς στιγμιαίος. Στο πλαίσιο της νοηματοδότησης των φοιτητών, φαίνεται να αποκτά συνοχή το γεγονός ότι *καθώς το* $\Delta x \to 0$*, μειώνεται το ύψος του κυλίνδρου, λαμβάνοντας ένα κύλινδρο που έχει τόσο λεπτό πάχος ώστε μετά βίας διαχωρίζεται από κυκλικό δίσκο.*

Γενικά, πώς συνδέεται η νοηματοδότηση των φοιτητών για το Θεμελιώδες Θεώρημα, όπως περιγράφηκε παραπάνω, με τα υπάρχοντα νοήματα τους για τις επιμέρους μαθηματικές έννοιες που ενυπάρχουν στο Θεώρημα; Στις επόμενες παραγράφους περιγράφονται τα νοήματα των φοιτητών για τις μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με το Θεμελιώδες Θεώρημα.

Μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών, φάνηκε ότι οι ίδιοι αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης. Κάποιοι, φάνηκε να τη θεωρούν περισσότερο ως δράση (action view) παρά ως διαδικασία. Συγκεκριμένα, κάτι τέτοιο φάνηκε στη δυσκολία των φοιτητών στην κατασκευή σύνθετης συνάρτησης (υποενότητες 4.1, 4.2.2). Ακόμα, φάνηκε στις δυσκολίες στη θεώρησης της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής ως μια συνάρτηση που είναι αποτέλεσμα της συμμεταβολής του ορίσματος της με το ρυθμό μεταβολής της αρχικής συνάρτησης, όπως αναφέρει η Zandieh (2000) (υποενότητα 4.6). Τέλος οι περισσότεροι φοιτητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στη νοηματοδότηση της συνάρτησης συσσώρευσης. Δηλαδή, οι εικόνες τους για τη συνάρτηση συσσώρευσης φαίνεται να μην περιέχουν την αίσθηση της κίνησης, είτε στο όρισμα είτε στην τιμή της. Φάνηκε ότι μια μεταβολή στο όρισμα του ήταν περισσότερο σαν να αντικαθιστούμε μια νέα τιμή στο όρισμα παρά μια συνεχόμενη μεταβολή στην τιμή του (Thompson 1994) (υποενότητα 4.8).

Επιπλέον, φάνηκε ότι οι φοιτητές είχαν δυσκολίες στη νοηματοδότηση του ορίου ως αντικειμένου. Οι ίδιοι, είχαν μια εικόνα της έννοιας του ορίου σαν κάτι μη δυνάμενο να το φτάσει κανείς, σαν μια διαδικασία που δίνει ένα προσεγγιστικό αποτέλεσμα. Κάτι τέτοιο, φάνηκε αφενός στην ασθενή νοηματοδότηση της εφαπτομένης ως οριακής θέσης τέμνουσας, δηλαδή της στιγμιαίας ταχύτητας ως όριο μέσων ταχυτήτων (υποενότητα 4.4), και αφετέρου στη νοηματοδότηση του ορισμένου ολοκληρώματος ως μη δυνάμενο να δώσει ακριβές αποτέλεσμα (υποενότητα 4.5).

Μια ακόμα παράμετρος η οποία ενδεχομένως παρεμποδίζει την ορθή νοηματοδότηση του Θεωρήματος φαίνεται να συνδέεται με την απαιτούμενη συλλογιστική που υποστηρίζει το συντονισμό συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων (covariational reasoning) (υποενότητα 4.8). Όπως αναφέρουν οι Carlson κ.ά. (2003), προκειμένου να νοηματοδοτηθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα είναι απαραίτητος ο συντονισμός της μεταβολής του ορίσματος της συνάρτησης συσσώρευσης με το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης με σταθερή τιμή στο κάτω όριο (σταθερά εκκίνησης συσσώρευσης).

Κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, οι φοιτητές αντιμετώπιζαν μια σειρά από δυσκολίες στο συμβολισμό. Κάτι τέτοιο, φάνηκε κυρίως μέσα από το ερωτηματολόγιο και όποτε χρειάστηκε να δοθεί κάποια γραπτή απάντηση για την τεκμηρίωση. Κατά κύριο λόγο οι δυσκολίες εντοπίστηκαν στην κατασκευή και στο συμβολισμό αθροισμάτων Riemann. Επιπλέον, εντοπίσθηκαν δυσκολίες στη σύνδεση αναπαραστάσεων. Αυτές αφορούσαν στο πέρασμα από τις αναπαραστάσεις μέσω του λογισμικού στον αυστηρό συμβολισμό, δηλαδή στην αναπαράσταση δυναμικών φαινομένων με μια μαθηματική έκφραση (λ.χ. υποενότητα 4.2). Αντίστροφα, αφορούσαν στο πέρασμα από μια αλγεβρική σχέση που κατασκεύασαν, στη γεωμετρική της αναπαράσταση στο λογισμικό (λ.χ. ορισμένοι φοιτητές φάνηκε να εκπλήσσονται με τη μορφή και τη θέση ενός γραφήματος στους άξονες με το που εισήγαγαν μια συνάρτηση στο πληκτρολόγιο. Βλ. και υποενότητα 4.3).

Επιπρόσθετα, φάνηκε ότι η αποδοχή του λογισμικού από τους φοιτητές, έγινε σταδιακά κατά τη διάρκεια του πειράματος. Στην πρώτη φάση της έρευνας, οι ίδιοι απέφευγαν να χρησιμοποιούν το λογισμικό και φαίνονταν αρκετά διστακτικοί, παρά την παρότρυνση της ερευνήτριας, ίσως επειδή οι ίδιοι δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων. Στις επόμενες φάσεις της έρευνας, αυτό το εμπόδιο ξεπεράστηκε και οι τεκμηριώσεις των φοιτητών ερχόταν συνήθως ως αποτέλεσμα διερεύνησης με τη χρήση των εργαλείων GeoGebra. Για παράδειγμα, οι ίδιοι κινούσαν δρομείς παρατηρώντας *τι μεταβάλλεται* και *τι παραμένει αναλλοίωτο* (λ.χ. μεταβάλλοντας το άνω όριο αθροίσματος σε μια προσέγγιση της συσσώρευσης χωρίου μέσω αθροίσματος Riemann μεταβάλλεται το πλάτος Δx των ορθογωνίων και όχι το πλήθος τους) ή εισήγαγαν διάφορες συναρτήσεις στο πεδίο εισαγωγής για να δουν τη συμπεριφορά τους σε κάποιο φαινόμενο που εξετάζονταν (λ.χ. περιστροφή συνάρτησης γύρω από τον άξονα x'x). Το γεγονός αυτό, περιγράφεται στη βιβλιογραφία με τον όρο *instrumentation* (λ.χ. Artigue 2002, Verillon & Rabadel, 1995), και εστιάζεται στην παρατήρηση ότι οι άνθρωποι μαθαίνουν ένα αντικείμενο ή ένα τεχνούργημα χρησιμοποιώντας το, στο σημείο που οι προσφερόμενες δυνατότητες και οι περιορισμοί του γίνονται μέρος της σκέψης τους και της συλλογιστικής τους (Verillon & Rabadel, 1995).

Κατά κύριο λόγο η εμπλοκή των φοιτητών με τις δραστηριότητες και κατ' επέκταση με το λογισμικό ήταν ενεργή. Υπήρχαν σημεία όπου, για παράδειγμα, μια φοιτήτρια, η Νίκη, ξεφεύγοντας από την προσχεδιασμένη πορεία του πειράματος, κατέφευγε σε περαιτέρω διερευνήσεις και εικασίες ανεξάρτητα από τα φύλλα εργασίας και τη συνολική στόχευση της ερευνήτριας. Φαινόταν να ανακαλύπτει τις ευρείες προοπτικές του λογισμικού (λ.χ. πειραματισμός, δυναμικές αναπαραστάσεις κ.ά.) κάτι που οι ίδια θεώρησε αρκετά ελκυστικό σύμφωνα με τα λεγόμενά της. Η συνολική εικόνα που αποκομίσαμε ήταν ένας ενθουσιασμός από μεριάς των φοιτητών σχετικά με την προσέγγιση της παρούσας εργασίας, αφού οι ίδιοι δήλωσαν οτι τη βρήκαν πολύ ενδιαφέρουσα, ή ανέφεραν με προβληματισμό ότι *δεν το είχαν σκεφτεί ποτέ έτσι*. Από ερευνητικής άποψης, οι δραστηριότητες σε συνδυασμό με τα φύλλα εργασίας φάνηκε να αποτελούν πλούσιο έδαφος για τη διερεύνηση των νοημάτων των φοιτητών. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τους θεωρητικούς πυλώνες της έρευνας και τη χρήση των θεωρητικών τους εργαλείων στην ανάλυση των αποτελεσμάτων, μας επέτρεψε μια ευρεία πρόσβαση στα νοήματα που κατασκευάζουν οι φοιτητές, στις εικόνες τους για τις εμπλεκόμενες έννοιες και στους δικούς τους μετά- κανόνες (meta-rules).

Από την άλλη μεριά, υπήρχαν ορισμένα σημεία κατά τη διεξαγωγή του πειράματος που η συμμετοχή των φοιτητών και η εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες δεν ήταν τόσο ενεργή. Ακόμα, υπήρξε μια μεμονωμένη περίπτωση φοιτητή του οποίου η εμπλοκή με το λογισμικό ήταν περιορισμένη (λ.χ. περιορίστηκε στην εισαγωγή συναρτήσεων μέσω του πληκτρολογίου). Το γεγονός αυτό αποτέλεσε εμπόδια για την ερευνήτρια τόσο στη διαχείριση κατά τη διάρκεια του πειράματος- καθώς προσπαθούσε να βρει ισορροπίες ανάμεσα στους δύο ρόλους, ως διδάσκουσα και ως ερευνήτρια, με τρόπο ώστε ο ένας ρόλος να μην επισκιάσει τον άλλο – όσο και στη μετέπειτα ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών. Θα λέγαμε λοιπόν, ότι υπήρξε ένα δίπολο στην εμπλοκή των φοιτητών με τις δραστηριότητες και κατ' επέκταση στην παρούσα προσέγγιση. Ακόμα, η συνεισφορά του πειράματος ως *διδακτικό* παραμένει αμφιλεγόμενη. Το γεγονός αυτό οφείλεται σε μια σειρά από ζητήματα ένα από τα οποία αφορά στις δυσκολίες στην ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών- όπως τη μη προβλεπόμενη εξέλιξη του καλά δομημένου σχεδίου μαθήματος (Biza, 2011). Παρόλο που η παρούσα εργασία δεν εξετάζει το ρόλο της ερευνήτριας στην εξέλιξη του πειράματος, θα ήταν παράλειψη αν δεν θίγαμε, τουλάχιστον λεκτικά, το ζήτημα της απειρίας της τόσο ως διδάσκουσα αλλά και ως ερευνήτρια. Δε μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα την έκβαση της κατασκευής νοημάτων των φοιτητών μέσα από τις παρεμβάσεις ενός έμπειρου ερευνητή, ο οποίος -ως διδάσκων- ενδεχομένως να διεκπεραίωνε με επιτυχία το ρόλο του απόλυτου τεκμηριωτή (ultimate substantiator)!

Καταλήγοντας, σε αυτή την εργασία κατασκευάστηκαν δραστηριότητες που προσιδιάζουν σε ορισμένες που αναφέρονται στον Thompson (1994), με τη διαφορά ότι αναπαραστάθηκαν δυναμικά. Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν εδώ εξακολουθούσαν να απατούν ισοδύναμη εννοιολογική δράση, από τους φοιτητές στη νοηματοδότηση τους, με τις αντίστοιχες που χρησιμοποιήθηκαν σε εκείνη την έρευνα. Αναλύσαμε τις απαντήσεις των φοιτητών χρησιμοποιώντας κυρίως το επικοινωνιογνωστικό πλαίσιο και καταλήξαμε σε ευρήματα που ταυτίζονται με προϋπάρχουσες έρευνες. Οι Nardi κ.ά. (2014) αναφέρουν ότι η επικοινωνιογνωστική προσέγγιση επιτυγχάνει να περιγράψει σε βάθος τις λεπτομέρειες που κρύβονται στην αλληλεπίδραση μέσα στο πλαίσιο των ανώτερων μαθηματικών και διατείνονται ότι αυτός είναι ο λόγος που οι ερευνητές της διδακτικής των ανώτερων μαθηματικών βρίσκουν αυτή την προσέγγιση ελκυστική. Πράγματι, η ανάλυση των επεισοδίων στην παρούσα έρευνα με τη χρήση των εργαλείων του επικοινωνιογνωστικού πλαισίου φάνηκε να αποδίδει καρπούς και να ανοίγει νέες μεθοδολογικές προοπτικές (λ.χ. Stahl 2008) και στη διδακτική ανώτερων μαθηματικών, παρόλο που ακόμα βρίσκεται σε 'εμβρυακό στάδιο' (Nardi et al., 2014).

Σαφέστατα, υπάρχει περιθώριο για την εύρεση νέων ιδεών σε δραστηριότητες με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων που βοηθούν καλύτερα τους μαθητευόμενους να αναπτύξουν κατανοήσεις και συλλογιστικές ικανότητες για τη νοηματοδότηση του

Θεμελιώδους Θεωρήματος και κατ' επέκταση του Απειροστικού, μιας και αυτά τα δύο φαίνεται να συμβαδίζουν και να συμπράττουν σε μια εννοιολογική κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης (λ.χ. Thompson et al. 2013). Φαίνεται όμως, ότι έχουν προταθεί τέτοιες δραστηριότητες και σχέδια μαθημάτων (curricula) -σε μορφή εισαγωγής στον Απειροστικό Λογισμό (precalculus)- προς αυτή την κατεύθυνση (λ.χ Carlson et al., 2002, Carlson et al., 2003, Thompson et al. 2013) που παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον τόσο στη δομή τους όσο και στη διερεύνηση της αποτελεσματικότητάς τους. Παράλληλα, το πλαίσιο της επικοινωνιογνωστικής προσέγγισης, φαίνεται προσοδοφόρο για να ανακαλύψουμε αν και με ποιους τρόπους οι φοιτητές νοηματοδοτούν ανώτερες μαθηματικές έννοιες στον τομέα του Απειροστικού Λογισμού. Συνεπώς, θα είχε ενδιαφέρον να επανεξετάζαμε τις νοηματοδοτήσεις σε ένα μεγαλύτερο δείγμα φοιτητών και σε μεγαλύτερη χρονική διάρκεια.

Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις θετικές αντιδράσεις των φοιτητών για την πρωτοτυπία της προσέγγισης στις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η χρήση νέων τεχνολογιών στα ανώτερα μαθηματικά φαίνεται να είναι προσοδοφόρα. Ωστόσο, η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση ανώτερων μαθηματικών εννοιών εγείρει μια σειρά από ζητήματα προς διερεύνηση. Όπως αναφέρουν οι Lagrange κ.ά. (2003):

> « [Υπάρχουν] έρευνες που προσφέρουν μια πληθώρα ιδεών και προτάσεων που είναι ενδιαφέρουσες και κινητήριες, όμως η διάχυση είναι προβληματική επειδή δίνουν λίγη προσοχή στις πιθανές δυσκολίες. Η διδακτική έρευνα πρέπει να εστιάζεται σε πιο καθιερωμένες χρήσεις της τεχνολογίας προκειμένου να αποκτηθεί βαθιά γνώση που υποστηρίζεται καλύτερα από τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό. Πρέπει να σκεφτούμε αυτές τις δύο τάσεις ως συμπληρωματικές και όχι ως αντιφατικές » (σελ. 256).

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**


1. Asiala, M., Dubinsky, E., Cottrill, J., & Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399-431.

2. Baron, M.: 1969, The origins of infinitesimal calculus, Pergamon Press, New York.

3. Biza, H. (2011). Students' Evolving Meaning About Tangent Line with the Mediation of a Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space. *Technology, Knowledge and Learning*, 16(2), 125-15.

4. Boyer, C. B.: 1959, The history of the calculus and its conceptual development, Dover, NewYork.

5. Breidenbach, Danny, Dubinsky, Ed, Hawks, Julie, & Nichols, Devilyna (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23, 247–285.

6. Byerley, C., Hatfield, N., Thompson, P. W. (2012). Calculus students' understandings of division and rate. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.) Proceedings of τhe 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp.358-363). Portland, OR: SIGMAA/RUME.

7. Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education, III. Issues in Mathematics Education, 7, 115-162.

8. Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378.

9. Carlson, M. P., Smith, N., & Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. Paper presented at the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA, Honolulu, HI.

10. Castillo-Garsow, C. (2010). Teaching the Verhulst Model: A Teaching Experiment in Covariational Reasoning and Exponential Growth. ARIZONA STATE UNIVERSITY.

11. Cottrill, Jim, Dubinsky, Ed, Nichols, Devilyna, Schwingendorf, Keith, Thomas, Karen & Vidakovic, Draga (1996). Understanding the limit concept: Beginning

with a co-ordinated process schema. Journal of Mathematical Behavior, 15,167–192.

12. Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. In: A. E. Kelly, & R. Lesh (Eds.), Handbook of research data design in mathematics and science education (pp. 547–589). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

13. Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. Kelly R. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 307-326). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

14. Coe, E. E. (2007). Modeling Teachers' Ways of Thinking About Rate of Change. Arizona State University.

15. Cornu, Bernard (1992). Limits. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 153–166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

16. Courant, R.: 1937, Differential and integral calculus, Interscience, New York.

17. Davis, Robert & Vinner, Sholomo (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. Journal of Mathematical Behavior, 5, 281–303.

18. Dubinsky, Ed & Harel, Guershon (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes No. 25 (pp. 85–106). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

19. Gravemeijer, K. and Doorman, D.: 1999, 'Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example', Educational Studies in Mathematics 39,111–129.

20. Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 116–140.

21. Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3, 65-72. Utrecht, The Netherlands.

22. Grundmeier, T. A., J. Hansen, and E. Sousa. 2006. An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. Primus. 16(2):14.

23. Jacobs, S. (2002). Advanced placement BC calculus students' ways of thinking about variable. (Unpublished PhD dissertation). Arizona State University, Tempe, AZ.

24. Jordaan, T. (2005).Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students. Unpublished Master of Science Dissertation, University of South Africa.

25. Kaput, J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes, 25.

26. Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (Eds.). (2002). Learning discourse: Discursive approach to research in mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic.

27. Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2009). Integral as accumulation: a didactical perspective for school mathematics. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 417-424). Thessaloniki, Greece: PME.

28. Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 44, 641-651.

29. Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003).Technology and mathematics education: Multidimensional overview of recent research and innovation. In F. K. S. Leung (Ed.), Second International Handbook of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 237-270). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

30. Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes, 25, 175–193).

31. Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994) The Case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. In E. Dubinsky, J. Kaput, & A. Schoenfeld (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 1. Providence, RI: American Mathematics Society, 139-168.

32. Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., Viirman, O. (2014) Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education 16* (2).

33. Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997) The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic, Educational Studies in Mathematics, 33, 203-233.

34. Noss, R. & Hoyles, C. (1996) Windows on Mathematical Meanings, Kluwer Academic Publishers.

35. Oehrtman, M. C. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. Journal for Research in Mathematics Education, 40(4), 396–426.

36. Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Key aspects of knowing and learning the concept of function. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematical and Education. Washington, DC: Mathematical Association of America.

37. Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. Educational Studies in Mathematics, 14(3), 235-250.

38. Orton, Anthony (1983). Students' understanding of integration. Educational Studies in Mathematics, 14,1–18.

39. Papert, S., & Harel, I. (1991). *Situating Comstructionism.* Ablex Publishing Corpotation.

40. Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 624‐640.

41. Powell, A. B., Francisco, J. M., Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners‟ mathematical ideas and reasoning using videotape data. Journal of Mathematical Behaviour, 22, 405-435.

42. Rasslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Norwich, UK), 4, 89–96.

43. Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. In C. Kieran, E. Forman, & A. Sfard (Eds.), Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education (pp. 13‐57). Dordrecht: Kluwer Academic.

44. Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing. New York, NY: Cambridge University Press.

45. Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. The Journal of Mathematical Behavior, 13(2), 183-197. doi:10.1016/0732-3123(94)90022-1.

46. Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). In Children's Fractional Knowledge. New York, NY. Springer.

47. Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh &A. E. Kelly (Eds.),

Research design in mathematics and science education (pp. 267-307).Hillsdale, NJ: Erlbau.

48. Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis. Published in Focus ,12, 3&4, 49-63.

49. Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Στο D. Tall (Επιμ.), *Advanced Mathematical Thinking* (σσ. 4-21). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

50. Tall, D. O. (2002). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil

51. Tall, D. O. (2010, September). A sensible approach to the calculus. Paper presented at the the National and International Meeting on the Teaching of Calculus, Pueblo,Mexico.

52. Tall, D. and Vinner, S.: 1981, 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', Educational Studies in Mathematics 12,151–169.

53. Tallman, M., & Carlson, M. P. (2012). A Characterization of Calculus I Final Exams in U.S. colleges and Universities. In Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 217–226). Portland, OR: Portland State University.

54. Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 229-274.

55. Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research andteaching in undergraduate mathematics (Vol. 73, pp. 43–52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

56. Thompson, P. W., Byerly, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. Computers in Schools, 30, 124-147.

57. Trigueros, M., & Jacobs, S. (2008). On developing a rich conception of variable. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education (Vol. 73, pp. 3–13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

58. Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education, 10(1), 77–101.

59. Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20(4), 356-366.

60. Vinner, S.: 1991 ‘The role of definitions in the teaching and learning of mathematics’, in D. Tall (ed.) Advanced mathematical thinking, pp. 65–81, Kluwer, Dordrecht.

61. Yerushalmy, M., & Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. Educational Studies in Mathematics, 80(3), p. 287-306.

62. Spivak M. (2004). Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

63. Αργυράκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2001). Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Ενιαίου Λυκείου. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

64. Γιαννακούλιας, Ε. (2007). Απειροστικός Λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον πέμπτο π.Χ. έως και τον δέκατο ένατο αιώνα. Συμμετρία, Αθήνα.