Η Φυσική των Classicalons

Άρης-Σπυρίδων Κάτσης

Διπλωματική Εργασία για το ΜΔΕ
Πυρηνική Φυσική και Στοιχειώδη Σωμάτια

Τμήμα Φυσικής
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Ελλάδα
2015

Περίληψη

Η εργασία πραγματεύεται την φυσική που σχετίζεται με το φαινόμενο της classicalization: τις ενδείξεις για την ύπαρξή του, την σημασία του και στις εφαρμογές του. Αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ιδέα της classicalization. Το φαινόμενο έχει προταθεί από τους G. Dvali, C. Gomez, G.F. Giudice et al. και αφορά την εμφάνιση ενός κλασικού μήκους (r_0) στην σκέδαση υψηλών ενεργειών για κάποιες ειδικές θεωρίες με όρους υψηλότερων παραγώγων, καθώς και για την βαρύτητα Einstein. Αυτό το μήκος έχει προταθεί ότι προστατεύει την εσωτερική περιοχή ($r \ll r_0$) αυτών των θεωριών πεδίου από πολύ ενεργητικά βλήματα κατά την διαδικασία σκέδασης. Οι σχηματισμοί που ευθύνονται για τέτοιες σκεδάσεις θα μπορούσαν να είναι ιδιαιτέρως εκτεταμένοι, πολύ μεγαλύτεροι από τις κβαντικές κλίμακες της θεωρίας και ονομάζονται classicalons. Στην περίπτωση της βαρύτητας Einstein η αντίστοιχη ακτίνα είναι η ακτίνα Schwarzschild και οι εκτεταμένοι σχηματισμοί είναι οι μελανές οπές. Μέσω της βαρύτητας Einstein προσδιορίζονται τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει μία θεωρία για να εμφανίζει το φαινόμενο της classicalization. Μελετώνται μερικές από αυτές τις θεωρίες. Από ένα σημείο και μετά, η πρόσθετη ενέργεια που δίνουμε στο βλήμα της σκέδασης πηγαίνει στην δημιουργία ολοένα βαρύτερων classicalons. Του στερεί συνεπώς την δυνατότητα να διερευνήσει κλίμακες αυθαίρετα μικρού μήκους. Η πρόταση αυτή οδηγεί σε μία αξιοπρόσεκτη αντιστοιχία της σκέδασης σε υψηλές ενέργειες με σκέδαση σε μεγάλες αποστάσεις. Υπό αυτή την έννοια συνάγεται ένα εναλλακτικό μονοπάτι για την συμπλήρωση (ή καλύτερα αυτό-συμπλήρωση) στο υπεριώδες (UV) κάποιων θεωριών που θεωρούνταν αφύσικες και εμφανίζουν παθολογίες: Αν οι θεωρίες με την προαπαιτούμενη δομή που προσδιορίσαμε θα συμπληρώνονται στο υπεριώδες μέσω classicalization ή ασθενώς συζευγμένης φυσικής (τύπου Higgs) κατά την συμβατική Wilsonian προσέγγιση στο υπεριώδες εξαρτάται από το πρόσημο ενός όρου της Λαγκραντζιανής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικές από τις σημαντικότερες και πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές-συνέπειες που θα μπορούσε να έχει το φαινόμενο της classicalization. Οι εφαρμογές αυτές αποτέλεσαν κίνητρο για την μελέτη του συγκεκριμένου θέματος και μας βοηθούν να δούμε κάποια θέματα από διαφορετική σκοπιά. Η πιο αξιοσημείωτη εφαρμογή είναι η πρόταση αυτό-συμπλήρωσης του καθιερωμένου προτύπου μέσω της classicalization της διαμήκους συνιστώσας των W μποζονίων και όχι μέσω μηχανισμού Higgs. Εφόσον το σωμάτιο Higgs ανιχνεύτηκε και ταυτοποιήθηκε, μπορούμε να υ-

ποθέσουμε εναλλακτικά ότι το πεδίο Higgs είναι το πεδίο που παρουσιάζει classicalization και εκτεταμένες διατάξεις (Higgsions). Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε σημαντικά αποτελέσματα για το πρόβλημα της ιεράρχησης (hierarchy problem). Μία ακόμη ενδιαφέρουσα εφαρμογή που πραγματεύεται το συγκεκριμένο κεφάλαιο είναι η εντροπία μελανής οπής. Η εκθετική καταστολή που παρουσιάζουν οι σκεδάσεις θεωριών με classicalization σε διαδικασίες $2 \to 2$ μπορεί να συνδεθεί με την ύπαρξη κάποιας μορφής εντροπίας. Εκμεταλλευόμενοι έτσι την αντιστοιχία του φαινομένου της classicalization ανάμεσα στην βαρύτητα Einstein και άλλες θεωρίες που το παρουσιάζουν, μπορούμε τα ορίσουμε κάποια αντίστοιχη εντροπία για αυτές τις θεωρίες και να εξάγουμε πληροφορία για το τι αντιπροσωπεύει αυτή η εντροπία. Τέλος γίνεται μία σύντομη αναφορά στην περιορισμένη αντιστοιχία που εμφανίζει η κβαντική χρωμοδυναμική όταν περιλαμβάνει στο φάσμα της εκτεταμένους σωλήνες ροής (flux tubes) με κάποια classicalons.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται πιο ενδελεχώς θεωρίες Dirac-Born-Infeld (DBI) και κάποιες παραλλαγές τους που θα μπορούσαν να σχετίζονται με το φαινόμενο της classicalization. Αρχικά λύνοντας τις κλασικές εξισώσεις κίνησης μπορούμε να βρούμε τις κλασικές λύσεις. Στην συνέχεια μελετώντας την δομή των συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων ακολουθώντας την δουλειά των N. Tetradis et al. προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα: Η classicalization συνδέεται με αλλαγή του τύπου της διαφορικής εξίσωσης από υπερβολική σε ελλειπτική σε αποστάσεις αντίστοιχες του r_0. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις δεν μπορούν να διαδίδονται για αποστάσεις μικρότερες του r_0, μια και οι ελλειπτικές εξισώσεις δεν έχουν λύσεις διαδιδόμενα κύματα. Τα συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου επαληθεύουν τα όσα αναλύθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο περί της φύσης της classicalization και ποιές θεωρίες περιμένουμε να την εμφανίζουν και ποιές όχι. Η θεωρία wrong-sign-DBI είναι αυτή που περιμένουμε να αυτό-συμπληρώνεται στο υπεριώδες μέσω classicalization ενώ η DBI έχει διαφορετική συμπεριφορά. Επιπροσθέτως, με στόχο να γίνει καλύτερη κατανόηση της δυναμικής της classicalization αναλύεται ένα κβαντομηχανικό πρότυπο που έχει την ίδια συμπεριφορά με την wrong-sign-DBI. Τα πορίσματα του προτύπου αυτού όχι μόνο συμφωνούν με την προηγούμενη ανάλυση αλλά επιπλέον ρίχνουν φως στην φύση του μηχανισμού της classicalization. Συγκεκριμένα, παρά το όνομα που έχει, φαίνεται ότι είναι κβαντικής φύσης και σχετίζεται με φαινόμενα σήραγγας στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή $r \ll r_0$ για μεγάλες ενέργειες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο ελέγχεται κατά πόσο η ιδιαίτερη δομή των θεωριών που σχετίζονται με τον σχηματισμό classicalon διατηρείται μετά από τις

κβαντικές διορθώσεις. Για αυτό τον υπολογισμό χρησιμοποιείται η μέθοδος heat-kernel και καταλήγουμε στις κβαντικές διορθώσεις στην ενεργό δράση σε επίπεδο ενός βρόχου. Η ανάλυση γίνεται για μία ευρύτερη ομάδα θεωριών και τελικός στόχος είναι να υπολογιστεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η κλασική τους λύση ώστε οι κβαντικές διορθώσεις να περιορίζονται σημαντικά. Τέλος, όταν εφαρμοστεί ο παραπάνω υπολογισμός στην περίπτωση της wrong-sign DBI , δείχνουμε ότι οι κβαντικές διορθώσεις περιορίζονται στο εσωτερικό των classicalons.

Περιεχόμενα

1 Η ιδέα της classicalization. 5

1.1 Η πληρότητα της βαρύτητας Einstein. 5
1.2 Το φαινόμενο της Classicalization και τα Classicalons. 11
1.3 Σκέδαση Goldstone. 19
1.4 Σκέδαση Βαρυτονίων. 22
1.5 Σύγκριση και σχολιασμός για την σκέδαση βαρυτονίων και Goldstone. 25
1.6 Συμπλήρωση στο υπεριώδες και classicalization. 27

2 Εφαρμογές της classicalization. 34

2.1 Καθιερωμένο Πρότυπο 34
2.2 Classicalization Window και κβαντική χρωμοδυναμική. 41
2.3 Εφαρμογή των classicalons σε εντροπία και ολογραφία. 43

3 Αναζήτηση λύσεων. 46

3.1 Κλασικές λύσεις θεωριών DBI και Classicalon. 46
3.2 Κβαντομηχανικό πρότυπο για την ws-DBI. 52

4 Κβαντικές διορθώσεις 63

4.1 Κβαντικές διορθώσεις στην ενεργό δράση. 63
4.2 Το υπόβαθρο Classicalon. 66
4.3 Υπολογισμός με heat-kernel διαταρακτικά. 68
4.4 Υπολογισμός για wrong-sign DBI και classicalon. 73
4.5 Διερεύνηση για τις λοιπές υπεριώδεις αποκλίσεις. 75

5 Επίλογος 78

1 Η ιδέα της classicalization.

1.1 Η πληρότητα της βαρύτητας Einstein.

Στην τετραδιάστατη θεώρηση της βαρύτητας Einstein, ο μόνος βαθμός ελευθερίας που διαδίδεται κάτω από την κλίμακα Planck είναι το άμαζο βαρυτόνιο h_{mn} με σπιν-2. Αν θεωρήσουμε όλες τις πηγές εκτός αυτών που αποτελούνται από τα ίδια τα βαρυτόνια εξωτερικές, και ότι δεν συνεισφέρουν στη θεωρία με νέους βαθμούς ελευθερίας ή μορφή δράσης που προκύπτει είναι η γνωστή Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \int {M_p}^2 d^4x\sqrt{-g}R \tag{1.1}$$

Για ευκολία έχουμε θέσει την κοσμολογική σταθερά ίση με μηδέν. Θα θεωρούμε πάντα παρατηρητές σε ασυμπτωτικά επίπεδους χώρους. Η κλίμακα Planck ορίζει την σύζευξη του βαρυτονίου με πηγές ενέργειας-ορμής καθολικά στην βαρύτητα Einstein: $h_{mn}\frac{T^{mn}}{M_P}$.

Αυτή ή καθολικότητα ισχύει για όλες τις τάξεις μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων του βαρυτονίου ως αλληλεπίδραση είτε με εξωτερικές πηγές είτε με τον ίδιο του τον τανυστή ενέργειας ορμής. Δηλαδή η βαρύτητα Einstein ως μία κβαντική θεωρία πεδίου έχει μία καθολική, ισχυρή κλίμακα ζεύξης M_P. Το πρόβλημα της συγκεκριμένης θεωρίας είναι ότι δεν είναι αυτοσυνεπής στο υπεριώδες (UV), ή ισοδύναμα σε αποστάσεις πολύ μικρότερες της κλίμακας Planck, και πρέπει να συμπληρωθεί από μία ευρύτερη θεωρία που θα αποκαθιστά την συνέπεια σε αυτές τις κλίμακες. Το ερώτημα που θέτουμε σε αυτή την πρώτη ενότητα είναι το εξής: Θα μπορούσε η βαρύτητα Einstein να είναι πλήρης ως κβαντική θεωρία πεδίου παρά την προαναφερθείσα ασυνέπεια; Για να απαντηθεί αυτή η ερώτηση θα χρειαστεί πρώτα να εξετάσουμε ένα ιδιαίτερο σημείο αυτής της θεωρίας, την προέλευση της κλίμακας Planck.

Ένα φανταστικό πείραμα σκέδασης που έχει σκοπό να αναλύσει τη φυσική σε κλίμακα L θα συμπεριλάμβανε μία διαδικασία σκέδασης, κατά την οποία πρέπει να συγκεντρωθεί (ή εντοπιστεί) ενέργεια E μεγαλύτερη από το αντίστροφο της κλίμακας L μέσα σε ένα χωροχρονικό κουτί πλευράς L. Σε αυτή την ποσότητα τοπικά εντοπισμένης ενέργειας αντιστοιχεί μία ακτίνα Schwarzschild R(L), τέτοια ώστε: $R(L) = \frac{{L_P}^2}{L}$.

Στην περίπτωση που η κλίμακα L είναι πολύ μικρότερη από την κλίμακα Planck, η ακτίνα Schwarzschild που θα προκύψει από τον παραπάνω τύπο

θα είναι μεγαλύτερη και από την κλίμακα L και από την κλίμακα Planck. Οπότε κάθε προσπάθεια να διερευνηθούν αποστάσεις πολύ μικρότερες από την κλίμακα Planck απαιτεί εντοπισμό ενέργειας σε χώρο πολύ μικρότερο από την ακτίνα Schwarzschild που θα αντιστοιχούσε σε αυτή την ενέργεια. Δηλαδή η συγκεκριμένη διαδικασία μέτρησης θα οδηγούσε στην δημιουργία μιας μακροσκοπικής μελανής οπής, πριν το βλήμα να μπορέσει να "αναλύσει" την απόσταση L. Θα μπορούσε αυτό να σημαίνει ότι η μέγιστη πληροφορία που μπορούμε να πάρουμε από μετρήσεις αποστάσεων L μικρότερων της κλίμακας Planck είναι ίση με τις πληροφορίες που είναι κωδικοποιημένες στον ορίζοντα μίας κλασικής μελανής οπής μεγέθους $\frac{{L_P}^2}{L}$; Κάτι τέτοιο πάντως θα ήταν σε συμφωνία με τις ιδέες της ολογραφίας. Μάλιστα φαίνεται ότι θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο παραπάνω συμπέρασμα ανεξαρτήτως της φυσικής που διέπει αποστάσεις μικρότερες της κλίμακας Planck. Αν για παράδειγμα αλλάζαμε τους νόμους της βαρύτητας για αποστάσεις πολύ μικρές, εισάγοντας νέους βαθμούς ελευθερίας με μάζες m πολύ μεγαλύτερες από την μάζα Planck, θα ήταν σαν να δημιουργούμε νέους πόλους στον διαδότη του βαρυτονίου για $p^2 = m^2 \gg {M_P}^2$:

$$\frac{1}{{M_P}^2} T^{mn} < h_{mn} h_{ab} > t^{ab} = \frac{1}{{M_P}^2} \left(\frac{T_{mn} t^{mn} - \frac{1}{2} T^m_m t^n_n}{p^2} + \frac{a T_{mn} t^{mn} - \frac{b}{3} T^m_m t^n_n}{p^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2} \right) \tag{1.2}$$

Στην σύζευξη του διαδότη με τις δύο πηγές T_{mn}, t_{mn} παρατηρούμε τον πόλο για $p^2 = 0$ (άμαζο βαρυτόνιο Einstein) και τον νέο πόλο για $p^2 = m^2$. Για να εξερευνήσουμε την περιοχή γύρω από αυτόν τον νέο πόλο χρειαζόμαστε ένα πείραμα με ανταλλαγή ορμής τάξης m. Με άλλα λόγια θα χρειαστεί να εντοπιστεί ενέργεια $1/L$ σε απόσταση πολύ μικρότερη από την L_P. Αλλά όπως προαναφέρθηκε κάτι τέτοιο είναι αδύνατο χωρίς να σχηματιστεί πρώτα μία κλασική μελανή οπή μεγέθους $R(L) \gg L_P$. Το γενικό συμπέρασμα αυτού του σκεπτικού είναι ότι ο πόλος για $L \ll L_P$ θωρακίζεται από την δημιουργία μελανής οπής και είναι απολύτως απρόσιτος. Η συνεισφορά ενός τέτοιου πόλου περιμένουμε να περιορίζεται εκθετικά, με παράγοντα καταστολής: $exp\left(-\frac{{L_P}^2}{L}\right)$. Ένας τέτοιος παράγοντας είναι συνεπής με την καταστολή Boltzmann στην εξάχνωση μίας μελανής οπής ή την καταστολή εντροπίας, σύμφωνα με την εντροπία μελανής οπής των Hawking-Bekenstein. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα αργότερα σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια.

Ισχυριζόμαστε ότι αυτοί οι πόλοι στον διαδότη του βαρυτονίου (για $L \ll$

L_P) περιγράφουν πλέον κλασικές καταστάσεις και όχι κβαντικούς βαθμούς ελευθερίας που διαδίδονται. Το αποτέλεσμα που συνάγουμε είναι ότι στην βαρύτητα Einstein δεν υπάρχουν κβαντικοί βαθμοί ελευθερίας πάνω από την μάζα Planck. Αντί αυτού, κυριαρχούν κλασικές καταστάσεις που περιγράφονται πλήρως από άλλους ελαφρύτερους βαθμούς ελευθερίας. Άλλωστε οι κλασικές καταστάσεις εξ' ορισμού δεν είναι ανεξάρτητες υπάρξεις αλλά περιγράφονται πλήρως (ασχέτως του πόσο δύσκολη ή ασύμφορη μπορεί να είναι στην πράξη μία τέτοια περιγραφή) από κβαντικούς βαθμούς ελευθερίας. Οι καταστάσεις αυτές δεν μπορούν να εξερευνήσουν (διεγείρουν) αποστάσεις πιο μικρές από το χαρακτηριστικό μήκος κύματος των κβαντικών σωματιδίων που τις συγκροτούν, που προσεγγιστικά είναι αντίστοιχο του μεγέθους της εν λόγω κλασικής κατανομής.

Σε μία συμβατική κβαντική θεωρία πεδίου μπορεί κάποιος να συμπεριλάβει στο φάσμα του (με τις κατάλληλες προσαρμογές) αυθαίρετα βαριούς κβαντικούς βαθμούς ελευθερίας. Δίνοντάς τους ολοένα μεγαλύτερη μάζα θα περίμενει ότι θα μπορούν να εξερευνήσουν μικρότερες και μικρότερες κλίμακες. Ακόμα και αν αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας σταδιακά αποσυζεύγνυνται από τους αντίστοιχους των χαμηλών ενεργειών, εν γένει θα μπορούσαν να μετρηθούν σε πολύ ακριβή πειράματα.

Εδώ είναι που η βαρύτητα Einstein είναι θεμελιακά διαφορετική. Στην περίπτωση της βαρύτητας Einstein τα σωμάτια που γίνονται βαρύτερα από την M_P παύουν να υπάρχουν ως ανεξάρτητοι κβαντικοί βαθμοί ελευθερίας και γίνονται κλασικές καταστάσεις που περιγράφονται από ελαφριούς βαθμούς ελευθερίας, θεμελιώδεις, που ήδη υπάρχουν στο φάσμα σε χαμηλότερες ενέργειες, όπως το βαρυτόνιο.

Τέλος, περιμένουμε στο όριο των δύο περιοχών αυτών (κβαντική και κλασική) να υπάρχουν στην βαρύτητα Einstein κάποιοι κβαντικοί βαθμοί ελευθερίας με μάζα κοντά στην M_P, ώστε να είναι δυνατή η ομαλή μετάβαση ανάμεσα στα κβαντικά σωμάτια και τις μελανές οπές. Η ύπαρξη των συγκεκριμένων βαθμών ελευθερίας δεν περιμένουμε ωστόσο να είναι σημαντική για την περιγραφή της θεωρίας στο βαθύ υπεριώδες ή στο βαθύ υπέρυθρο. Έχοντας εντοπίσει την προέλευση του ελάχιστου μήκους στην βαρύτητα Einstein και την θεμελιακή της διαφορά με άλλες κβαντικές θεωρίες πεδίου φτάνουμε στην απάντηση του ερωτήματος που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου αυτής περί της πληρότητας της βαρύτητας Einstein. Σύμφωνα με την αντίληψη του Wilson, μπορούμε να ορίσουμε μία κβαντική θεωρία πεδίου ως μία σημαντική (relevant) διαταραχή μίας σύμμορφης θεωρίας πεδίου (CFT) ορισμένης σε ένα σταθερό σημείο (fixed point) στο υπεριώδες. Η σύμμορφη αυτή

θεωρία πεδίου στο υπεριώδες ορίζει τους πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας καθώς και αυτούς που χρειάζονται για να γίνει μοναδιακός ο πίνακας σκέδασης S σε υψηλές ενέργειες. Αν ξεκινήσουμε με δεδομένη την φυσική σε μία χαμηλότερη κλίμακα, η αντίστοιχη θεωρία που είναι πλήρης στο υπεριώδες προκύπτει όταν εμφυτεύσουμε την κατάλληλη δυναμική συμπεριφορά στο υπέρυθρο (IR) στην κβαντική θεωρία πεδίου που θα ρέει από το υπεριώδες σταθερό σημείο.

Η πρόταση είναι, ότι η παρουσία του φράγματος της μελανής οπής στην βαρύτητα Einstein για κλίμακες μικρότερες από το μήκος Planck κάνει μοναδιακά τα πλάτη σκέδασης στις υψηλές ενέργειες δημιουργώντας μελανές οπές. Προφανώς ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ταιριάζει με τις υπεριώδεις σύμμορφες θεωρίες πεδίου της αντίληψης του Wilson. Όμως οι μελανές οπές φέρουν εντροπία. Οπότε η περιγραφή του Wilson με σύμμορφη θεωρία πεδίου στο υπεριώδες για την κβαντική βαρύτητα θα πρέπει να μπορεί να υπολογίσει την εντροπία Bekenstein της μελανής οπής. Η εντροπία μελανής οπής για ασυμπτωτικά επίπεδους χώρους σε διάσταση d έχει βρεθεί ότι εξαρτάται από την ενέργεια στη δύναμη $\frac{d-2}{d-3}$ ενώ για τις σύμμορφες θεωρίες πεδίου η δύναμη είναι $\frac{d-1}{d}$. Μήπως η συγκεκριμένη διαπίστωση μπορεί να είναι ένδειξη ότι η κβαντική βαρύτητα δεν είναι μία κβαντική θεωρία πεδίου που ακολουθεί την αντίληψη του Wilson;

Αν θέλει κανείς να περιγράψει την κβαντική βαρύτητα στο υπεριώδες με μελανές οπές με μάζες μεγαλύτερες από την M_P, οι συγκεκριμένοι βαθμοί ελευθερίας είναι (σε αντίθεση με ότι συμβαίνει για θεωρίες πεδίου που συμπληρώνονται κατά Wilson στο υπεριώδες) καλά ορισμένες καταστάσεις χαμηλής ενέργειας στη θεωρία. Οπότε μπορούμε να αποδώσουμε τους βαθμούς ελευθερίας της βαρύτητας στο υπεριώδες στον ίδιο το χώρο καταστάσεων που περιγράφουν την βαρύτητα στο υπέρυθρο. Υπό αυτή την έννοια η βαρύτητα Einstein 'αυτόσυμπληρώνεται' και είναι πλήρης στο υπεριώδες. Οποιοσδήποτε κβαντικός βαθμός ελευθερίας εισέρχεται στην 'φραγμένη' περιοχή κάτω από το ελάχιστο μήκος Planck μετατρέπεται σε κλασική κατάσταση που ανήκει στο βαθύ υπέρυθρο φάσμα της θεωρίας.

Προκύπτει μεταξύ άλλων η εύλογη απορία γιατί η φυσική αποστάσεων μικρότερων από την L_P να μην μπορεί να έχει παρατηρήσιμα αποτελέσματα μακριάς εμβέλειας σε κάποια πολύ ακριβή μέτρηση, όπως για παράδειγμα να τροποποιεί την μετρική των βαρυτικών πηγών και να επηρεάζει έτσι την δημιουργία μελανών οπών. Η απάντηση είναι επειδή οι βαθμοί ελευθερίας που συσχετίζονται με αποστάσεις μικρότερες από την Planck δεν είναι δια-

ταρακτικές κβαντικές καταστάσεις. Η μόνη φυσική πληροφορία που μπορούν να φέρουν είναι του μακροσκοπικού αντικειμένου που ανήκει στην βαθιά υπέρυθρη περιοχή της θεωρίας.

Το επόμενο βήμα είναι να διερευνηθεί κατά πόσον αυτή η συμπεριφορά της βαρύτητας Einstein είναι μοναδική, ή συναντάται και σε άλλες βαρυτικές θεωρήσεις. Οι θεωρίες πεδίου χαρακτηρίζονται από τους βαθμούς ελευθερίας που διαδίδονται και τις αλληλεπιδράσεις τους. Το ενδιαφέρον μας προς το παρόν θα επικεντρωθεί σε θεωρίες που διαδίδουν μόνο βαρυτικούς βαθμούς ελευθερίας. Βαρυτικοί βαθμοί ελευθερίας είναι οι βαθμοί ελευθερίας που πηγάζουν από τον διατηρούμενο τανυστή ενέργειας-ορμής και οι οποίοι στο κλασικό όριο για εντοπισμένες πηγές αντιστοιχούν στην τοπική παραμόρφωση μίας ασυμπτωτικά επίπεδης μετρικής: $g_{mn} = \eta_{mn} + \tilde{h}_{mn}$

Ενδιαφερόμαστε να εντοπίσουμε, αν υπάρχει για αυτή τη θεωρία κάποιο μέγεθος αντίστοιχο του L_P που εκφράζει την ελάχιστη παρατηρήσιμη απόσταση. Ορίζουμε Λ_{str} τη μικρότερη ενεργειακή κλίμακα στην οποία κάποιος από τους βαρυτικούς βαθμούς ελευθερίας αποκτά ισχυρή σύζευξη. Η ισχύς της γραμικοποιημένης βαρύτητας έχει βρεθεί ότι μεγαλώνει σε μικρές κλίμακες. Το άνω φράγμα είναι η M_P, επειδή ακόμα και αν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας παραμείνουν ασθενώς συζευγμένοι, το βαρυτόνιο Einstein παραμένει ισχυρά συζευγμένο σε ενέργειες Planck. Λογικά μερικές από τις αλληλεπιδράσεις γίνονται ισχυρές σε κλίμακα $\Lambda_{str} < M_P$ και η θεωρία χρειάζεται συμπλήρωση στο υπεριώδες για αποστάσεις $L \ll \frac{1}{\Lambda_{str}}$. Σύμφωνα με το σκεπτικό που αναπτύξαμε πριν, το όριο σχηματισμού μελανής οπής προστατεύει κάποιες αποστάσεις και η θεωρία αυτό-συμπληρώνεται. Θα προσπαθήσουμε τώρα να δούμε συγκεκριμένα σε ποιες περιπτώσεις αυτή η προστασία είναι αρκετή και σε ποιες όχι. Εφόσον μας ενδιαφέρουν θεωρίες που ρέουν προς την βαρύτητα Einstein με μόνο διαδιδόμενο βαθμό ελευθερίας το βαρυτόνιο βαθειά στο υπέρυθρο, υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ένα κενό μάζας στο φάσμα $M_c = \frac{1}{R_c}$ που αντιστοιχεί στην πρώτη έμμαζη διέγερση.

Για τις κλίμακες ισχύει ότι: $L_P \leq \frac{1}{\Lambda_{str}} \leq R_c$. Στο όριο $R \gg R_c$ ανακτούμε την βαρύτητα Einstein. Πρέπει να υπάρχουν μελανές οπές Schwarzschild ακτίνας $R \gg R_c$ με $R(M) = ML_P^2$. Εφόσον $R \gg L_P$, έχουμε $R \gg M^{-1}$. Αν μειώνουμε την παράμετρο M του προβλήματος θα φτάσουμε στο σημείο όπου το $R(M)$ γίνεται μικρότερο από την R_c και δεν είμαστε πια στην περιοχή Einstein. Το σημείο όπου $R(M) = M^{-1}$ για κάποια μάζα $M = M_0$ σηματοδοτεί την αρχή του φράγματος μελανής οπής. Η αντίστοιχη κλίμακα μήκους $L_0 = M_0^{-1}$ θα είναι το πιο μικρό παρατηρήσιμο μήκος για αυτή τη θεωρία, και

θα έχει το ρόλο του μήκους Planck στην βαρύτητα Einstein. Η προσπάθεια μέτρησης μικρότερου μήκους $L \ll L_0$ θα οδηγεί στην δημιουργία μελανής οπής μεγέθους $R(\frac{1}{L}) > L_0$. Οπότε η κρίσιμη πληροφορία που ψάχνουμε είναι αν το $R(M)$ συναντάει το M^{-1} πριν το $R(M)$ περάσει από την τιμή $\frac{1}{\Lambda_{str}}$.

Για $M_0 < \Lambda_{str}$ ικανοποιείται η συνθήκη, και περιμένουμε η θεωρία να είναι πλήρης στο υπεριώδες επειδή όλη η κρίσιμη περιοχή προστατεύεται από το φράγμα της μελανής οπής. Για $M_0 \gg \Lambda_{str}$ ή αλληλεπίδραση αποκτά ισχυρή ζεύξη πριν να προλάβει το φράγμα της μελανής οπής να αποκαταστήσει την πληρότητα.

Παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης είναι οι θεωρίες Kaluza-Klein. Σε αυτές η ζεύξη γίνεται ισχυρή σε κλίμακα:

$$\Lambda_{str}^3 = \frac{M_P^2}{R_c}$$

Σε αυτή την περίπτωση η ίδια κλίμακα θέτει το σημείο συνάντησης της ακτίνας Schwarzschild της μελανής οπής και του αντιστρόφου της μάζας, $R(M^2) = M\frac{R_c}{M_P^2}$ και η θεωρίες είναι πλήρεις στο βαθύ υπεριώδες. Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και οι θεωρίες καθαρής υπερβαρύτητας (pure supergravity) σε D διαστάσεις, μια και από την υπερσυμμμετρία η μόνη ισχυρή κλίμακα ζεύξης για όλους τους βαθμούς ελευθερίας είναι η D-διάστατη κλίμακα Planck. Παράδειγμα βαρυτικών θεωριών που δεν αυτό-συμπληρώνονται στο υπεριώδες είναι το μη-γραμμικο sigma-model με κλίμακα $\Lambda_{str} \ll M_P$ σε σύζευξη με βαρύτητα Einstein. (δηλαδή πιόνια συζευγμένα με βαρύτητα) Οι αλληλεπιδράσεις των πιονίων γίνονται ισχυρές για ενέργειες μεγαλύτερες από την σταθερά διάσπασης πιονίων f_π (τάξης GeV) και άρα χρειάζεται συμπλήρωση στο υπεριώδες για αποστάσεις πολύ μικρότερες του f_π^{-1}. Η βαρύτητα Einstein δεν μπορεί να προσφέρει την απαιτούμενη συμπλήρωση εφόσον αποστάσεις πολύ μικρότερες από την L_P μπορούν να εξερευνηθούν χωρίς να εμποδίζονται από κανένα φράγμα μελανής οπής.

1.2 Το φαινόμενο της Classicalization και τα Classicalons.

Ορμώμενοι από την έννοια της αυτό-συμπλήρωσης της βαρύτητας Einstein στο υπεριώδες, θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνήσουμε κατά πόσον και άλλες θεωρίες, μη-βαρυτικές αυτή τη φορά, ενδέχεται να εμφανίζουν αντίστοιχη συμπεριφορά. Σύμφωνα με την προσέγγιση του Wilson για την συμπλήρωση των κβαντικών θεωριών στο υπεριώδες, οι μη-κανονικοποιήσιμες θεωρίες με σημείο αποκοπής (cutoff) $M_0 = L_0^{-1}$ υποχρεωτικά παραβιάζουν την μοναδιακότητα (unitarity) πάνω από την κλίμακα M_0 και για να την επανακτήσουν χρειάζεται να ενσωματωθεί σε αυτές κάποιος εξωτερικός, ασθενώς συζευγμένος, βαθμός ελευθερίας. Αν μελετήσουμε τη διαδικασία σκέδασης $2 \Rightarrow 2$ σε μία μη-επανακανονικοποιήσημη θεωρία (οι αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων έχουν σταθερά ζεύξης με μονάδες αντίστροφης μάζας) θα παρατηρήσουμε ότι το διαταρακτικό πλάτος σκέδασης μεγαλώνει σαν θετική δύναμη της κινηματικής παραμέτρου s και η σκέδαση γίνεται μη-μοναδιακή στην κλίμακα M_0. Αυτή η προσέγγιση βασίζεται στην ιδέα ότι σε μία διαδικασία σκέδασης σε ολοένα υψηλότερες ενέργειες $\sqrt{s} \gg M_0$, μπορούμε να μελετούμε ολοένα μικρότερες αποστάσεις $L \sim \frac{1}{\sqrt{s}} \ll L_0$. Εναλλακτικά, ίσως θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η παρατηρούμενη παραβίαση της μοναδιακότητας οφείλεται στην διαταρακτική προσέγγιση που χρησιμοποιούμε. Σε κάθε περίπτωση πλέον δεν έχουμε μελανές οπές, οπότε το λογικό θα είναι να μπορούμε πράγματι να παίρνουμε πληροφορίες για αυθαίρετα μικρές αποστάσεις στη θεωρία μας. Ωστόσο, ακόμα και χωρίς βαρύτητα, ίσως είναι αρκετό να απαιτήσουμε ότι η αποθήκευση ενός συγκεκριμένου είδους πληροφορίας σε πηγές για κάποιους correlators ή πλάτη σκέδασης με πολύ κακή συμπεριφορά έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία εκτενών κλασικών αντικειμένων. Στις επόμενες σελίδες θα προσπαθήσουμε να δούμε πως θα μπορούσαν να γίνουν μοναδιακά τα πλάτη σκέδασης σε αυτές τις θεωρίες. Στην μελέτη τους θα ανακαλύψουμε κάποια ενδιαφέροντα στοιχεία για την συμπεριφορά τους, την σημασία των οποίων θα επισημάνουμε μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ας δούμε για αρχή πως και αν μπορεί να προκύψει κάποιο τέτοιο αντικείμενο. Θεωρούμε μποζονικό πεδίο ϕ που πηγάζει από τελεστή J (που μπορεί εν γένει να εξαρτάται από το ϕ ή άλλα πεδία) μέσα από την αλληλεπίδραση $J\phi$. Σε διαταρακτικό επίπεδο αυτή η θεωρία θα υποθέσουμε ότι είναι προβληματική σε υψηλές ενέργειες εξαιτίας της κακής συμπεριφοράς της συνάρτησης συσχετισμού $< JJ >$. Αν αυτές οι συναρτήσεις συσχετισμού έχουν ολοκληρώσεις πάνω σε πηγές που δημιουργούν κλασικές διατάξεις των ϕ, τότε πιθανόν ο κακός χαρακτήρας που παρατηρούμε να οφείλεται

στην διαταρακτική αντιμετώπιση που εφαρμόζουμε. Αν συνυπολογίζαμε ότι οι ποσότητες που ολοκληρώνουμε είναι κλασικά αντικείμενα, η ολοκλήρωση θα έδινε εκθετικό περιορισιμό. Υποθέτουμε λοιπόν ένα πεδίο classicalizer ϕ που δημιουργεί εκτεταμένα αντικείμενα όταν πηγάζει από τελεστή J, που γίνεται ισχυρός όταν τα σωμάτια εντοπίζονται σε μικρές αποστάσεις, και r_c την ενεργή έκταση του κλασικού πεδίου ϕ γύρω από την πηγή.

$$L(\phi, J) = L(\phi) + \frac{\phi}{M_0} J \tag{1.3}$$

Μία λαγκραντιζανή που οδηγεί την παραβίαση της μοναδιακότητας για $L_0^{-1} = M_0 \ll \sqrt{s}$ σε διαταρακτικό επίπεδο όπως συζητήθηκε παραπάνω είναι η:

$$L(\phi) = (\partial_m \phi)^2 + \frac{1}{M_0}\phi(\partial_m \phi)^2 + \frac{1}{M_0^5}\phi(\partial_m \phi)^4 + ... \tag{1.4}$$

Σε σκέδαση κυματοπακέτων του πεδίου ϕ με ενέργεια κέντρου μάζας $\sqrt{s} \gg M_0$, για να προκύψει σκέδαση με μεταφορά ορμής $\frac{1}{L}$, πρέπει αυτά να πλησιάσουν σε απόσταση L. Διαταρακτικά, φαίνεται ότι όσο $L > L_0$, αυτά τα κυματοπακέτα περιγράφονται καλά σαν κβαντικές καταστάσεις. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει όμως απαραίτητα. Για να εντοπιστούν τα κυματοπακέτα αυτά σε απόσταση $r_0 \sim L_0^2\sqrt{s}$ σχηματίζεται μια κλασική διάταξη ακτίνας r_0. Έτσι, εξαιτίας της self-sourcing ο εντοπισμός κβάντων ενέργειας $\sqrt{s} \gg M_0$ είναι αδύνατος για αποστάσεις μικρότερες από την αντίστοιχη r_0. Επιστρέφοντας στο προηγούμενο μποζονικό πεδίο ϕ, ας φανταστούμε ότι τα σωμάτια με ενέργεια κέντρου μάζας $\sqrt{s} = \frac{1}{L} << M_0$ είναι εντοπισμένα μέσα σε σφαίρα ακτίνας $R \ll r_0$. Λόγω των κυβικών αλληλεπιδράσεων, μπορούμε να υποθέσουμε οτι αυτός ο εντοπισμός παράγει μία ενεργή εντοπισμένη πηγή του πεδίου ϕ με ολοκληρωμένη τιμή $J \sim \frac{1}{LM_0}$. Άρα, μακριά από την περιοχή εντοπισμού, η δυναμική του ασθενούς πεδίου ϕ πρέπει να περιγράφεται καλά από την γραμμικοποιημένη εξίσωση:

$$\Box\phi + ... = \delta(r)\frac{L_0}{L} \tag{1.5}$$

Επειδή το ϕ πηγάζει από την ενέργεια, ο εντοπισμός των κβάντων συνεπάγεται την ύπαρξη γκαουσιανής ροής της βαθμίδας $\bigtriangledown\phi$ στο άπειρο, και το ϕ μεγαλώνει ως $\frac{L_0}{rL}$ καθώς πλησιάζουμε την περιοχή που είναι εντοπισμένο. Οι μη-γραμμικές αλληλεπιδράσεις δεν μπορούν να εμποδίσουν αυτή την αύξηση, μέχρι που το ϕ γίνεται τάξης M_0, που συμβαίνει σε κλίμακα αποστάσεων

$r_0(L) \sim \frac{L_0^2}{L}$. Δηλαδή η πηγή ενέργειας $\sqrt{s} = \frac{1}{L} \gg M_0$ αποκτά ενεργό μέγεθος $r_0 \gg L_0$ και γίνεται κλασικό αντικείμενο. Το αποτέλεσμα είναι ότι στη σκέδαση σε υψηλές ενέργειες $\sqrt{s} \gg M$ κυριαρχεί ο σχηματισμός κλασικών αντικειμένων ακτίνας $r_0 = \frac{L_0^2}{\sqrt{s}}$, που ονομάζονται classicalons. Αυτή η ιδιότητα κάποιων θεωριών να αποκρίνονται σε εντοπισμένες πηγές με την δημιουργία εκτενών κλασικών αντικειμένων ονομάζεται classicalization, και μετατρέπει φυσική υψηλών ενεργειών σε φυσική μακρινών αποστάσεων! Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι η ακτίνα Schwarzschild της μελανής οπής στην βαρύτητα, στην οποία ήδη αναφερθήκαμε. Η διάσπαση ενός κλασικού αντικειμένου σε κατάσταση 2 σωματιδίων περιμένουμε να περιορίζεται εκθετικά :

$$A_{2\to 2} \sim \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{M_0}\right)^c \tag{1.6}$$

Αντί αυτού σε υψηλές ενέργειες s κυριαρχούν μαλακές διαδικασίες με μικρή μεταφορά ορμής $\sim \frac{1}{r_0} \ll M_0$ που είναι κάτω από το όριο της unitarity. Μπορούμε δηλαδή υποθέτοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε τελικά να επανακτήσουμε την unitarity σε αυτές τις θεωρίες. Το συμπέρασμα είναι, ότι αν και η classicalization πηγών σε $\sqrt{s} = \frac{1}{L} \gg M_0$ είναι φαινόμενο πολύ υψηλών ενεργειών, με το παραπάνω σκεπτικό θα μπορούσε να κυριαρχείται πλήρως από δυναμική μεγάλων αποστάσεων που αντιστοιχούν σε ορμές $\frac{1}{r_0} \ll M_0$.

Υπάρχουν φυσικά και όροι υψηλότερης τάξης παραγώγων στην λαγκραντζιανή, μορφής: $\frac{1}{M_0^{n+4k-4}} \phi^n (\partial_m \phi \partial^m \phi)^k$ με ασυμπτωτική συμπεριφορά $\phi(r) \sim (M_0 L r)^{-1}$ αλλά αυτοί περιμένουμε ότι δεν θα αλλάζουν την δυναμική της classicalization. Σε υψηλές ενέργειες οι όροι θα συμπεριφέρονται ως:

$$\frac{1}{M_0^{n+4k-4}} \phi^n (\partial_m \phi \partial^m \phi)^k \sim (M_0^{2n+6k-4} L^{2k+n} r^{4k+n})^{-1} \tag{1.7}$$

Η ακτίνα $r_{n,k}$ στην οποία ένας δεδομένος μη γραμμικός όρος γίνεται συγκρίσιμος με τον γραμμικό όρο (n=0, k=1) είναι:

$$r_{n,k} = L_0 \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2k+n-2}{2k+n-4}} \tag{1.8}$$

Το r_0 αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη κλίμακα από αυτές τις $r_{n,k}$. Για $k > 1$ παρατηρούμε ότι όλα τα $r_{n,k}$ είναι μικρότερα από το r_0. Συμπεραίνουμε ότι η κλίμακα r_0 καθορίζεται από τον πρώτο μη-γραμμικό όρο, ενώ οι υψηλότεροι όροι επηρεάζουν μόνο την συμπεριφορά του ϕ σε μικρότερες αποστάσεις $r \ll$

r_0, και άρα δεν μπορούν να επηρεάσουν το μέγεθος της κλασικής διάταξης και δεν διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη σκέδαση σε υψηλές ενέργειες.

Για να γίνει καλύτερα κατανοητό το φαινόμενο της classicalization που ισχυριζόμαστε, έχει νόημα να δούμε την φύση των διαφόρων μεγεθών που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς που προηγήθηκαν. Θεωρώντας την απλοποιημένη λαγκραντζιανή:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 + G_\phi O_{n,k} \tag{1.9}$$

όπου $G_\phi = M_0^{4-n-2k}$ και $O_{n,k} \sim \partial^{2k}\phi^n$ μπορούμε με διαστατική ανάλυση να συμπεράνουμε τα εξής:

$$[\hbar] = Ml, \quad [L] = Ml^{-3}, \quad [\phi] = M^{1/2}l^{-1/2}, \quad [\sqrt{s}] = M, \quad [G_\phi] = M^{\frac{2-n}{2}} l^{\frac{n+4k-6}{2}}$$

Από αυτά οι κλίμακες μήκους που μπορούμε να φτιάξουμε είναι 3:

- Η κλίμακα όπου τα κβαντικά φαινόμενα της αλληλεπίδρασης του ϕ γίνονται σημαντικά:

$$L_0 = G_\phi^{\frac{1}{n+2k-4}} \hbar^{\frac{n-2}{2(n+2k-4)}}$$

- Το μήκος κύματος de Broglie της πηγής, που εκφράζει την απόσταση στη οποία οι κβαντικές ιδιότητες των εντοπισμένων κυμάτων γίνονται σημαντικές:

$$L = \frac{\hbar}{\sqrt{s}}$$

- Η απόσταση στην οποία η κλασική αλληλεπίδραση του ϕ γίνεται σημαντική:

$$r_0 = G_\phi^{\frac{n}{n+4k-6}} \sqrt{s}^{\frac{n-2}{n+4k-6}}$$

Πρόκειται για ένα κλασικό μήκος, που ονομάζεται και ακτίνα classicalization, και δίνει την απόσταση στην οποία μία φυσική ποσότητα που σχετίζεται με ένα παρατηρήσιμο μέγεθος γίνεται τάξης ένα σε μονάδες M_0.

Έχοντας ρίξει φως στα βασικά σημεία του φαινομένου της classicalization θα επαναλάβουμε την διερεύνηση για θεωρία με βολικότερη μορφή που εμφανίζει το ίδιο φαινόμενο.

$$S = (\partial_m \phi)^2 \Big(\frac{1}{2} + \frac{L_0^3}{4} \Box \phi \Big) + \phi J \tag{1.10}$$

Αν υποθέσουμε μία πηγή εντοπισμένη σε κλίμακα $L \ll L_0$, τότε αυτή σε αποστάσεις $r \gg L$ θα μπορεί να προσεγγιστεί ως $\frac{4\pi\delta(r)}{M_0 L}$. Οι εξισώσεις κίνησης για το πεδίο ϕ είναι:

$$\Box\phi + \frac{L_0^3}{2} \Big[(\Box\phi)^2 - (\partial_m \partial_n \phi)^2 \Big] = J \tag{1.11}$$

και με την συγκεκριμένη προσέγγιση της πηγής γίνονται:

$$\partial_j \Big[\partial_j \phi(r) - \frac{x_j}{r^2} L_0^3 (\partial_r \phi)^2 \Big] = -4\pi\delta(r) \frac{L_0}{L} \tag{1.12}$$

$$\partial_m \phi - L_0^3 \frac{(\partial_r \phi)^2}{r} + \frac{L_0}{L r^2} = 0 \tag{1.13}$$

$$\partial_m \phi = \frac{r}{2L_0^3} \Big(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4r_0^3}{r^3}} \Big) \tag{1.14}$$

Παρατηρούμε συνεπώς την ακόλουθη συμπεριφορά για το πεδίο ϕ:

- για $r \gg r_0 = L_0 (L_0/L)^{\frac{1}{3}}$ έχουμε $\phi \sim \frac{L_0}{Lr}$
- για $r \ll r_0$ έχουμε $\phi \sim \sqrt{\frac{r}{L}} L_0^{-1}$

Το r_0 είναι η απόσταση στην οποία ο πρώτος όρος της λαγκραντζιανής γίνεται συγκρίσιμος με τον δεύτερο. Για $r = r_0$ οι δύο παραπάνω λύσεις αν συνδυαστούν δίνουν $r_0 \sim L_0 (\frac{L_0}{L})^{1/3}$. Συμπεραίνουμε ότι η θεωρία αυτή θα εμφανίζει classicalization σε αποστάσεις μικρότερες από L_0. Επειδή όπως είπαμε το ϕ γίνεται κλασικό σε απόσταση r_0 (για πηγές ισχύος $\frac{1}{L}$ εντοπισμένες σε μήκος L), κυματοπακέτα του ϕ που εντοπίζονται σε κλίμακα $L \ll L_0$ οδηγούν στην δημιουργία κλασικών αντικειμένων μεγέθους $r_0 \sim L_0 \Big(\frac{L_0}{L} \Big)^{\frac{1}{3}}$.

Ας αναλογιστούμε τι θα συνέβαινε σε σκέδαση δύο εντοπισμένων κυματοπακέτων από κβάντα ϕ ή άλλα σωμάτια που είναι πηγή για τα ϕ. Έστω

για παράδειγμα ότι έχω για πηγή του ϕ το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής ενός άλλου σωματιδίου ψ: $L_0\phi T^m_m(\psi)$. Διαταρακτικά, η ανταλλαγή ϕ κβάντων παραβιάζει την unitarity για σκέδαση ψ σωματιδίων με μεταφορά ορμής πάνω από M_0. Μη διαταρακτικά ωστόσο, όσο η παράμετρος κρούσης είναι μέσα στη ακτίνα r_0 μίας ενεργής πηγής, η σκέδαση περιμένουμε να κυριαρχείται από τον σχηματισμό κλασικών σχηματισμών του πεδίου ϕ. Όταν τα σχετικιστικά κυματοπακέτα ψ πλησιάζουν σε απόσταση L και μεταφέρεται ορμή $\frac{1}{L}$ σε κλίμακα χρόνου επίσης L προσεγγιστικά είναι σαν να έχουμε μία στατική πηγή μάζας $\frac{1}{L}$ και μεγέθους L. Το πεδίο που δημιουργείται από μία τέτοια πηγή έχει μία ακτίνα $r_0 \sim L_0(\frac{L_0}{L})^{\frac{1}{3}}$ που υπερβαίνει το L_0 όταν $L < L_0$. Περιμένουμε λοιπόν ότι η σκέδαση θα classicalize σε κλίμακες πάνω από M_0. Το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για τα δυνητικά κβάντα που αποτελούν πηγή για το πεδίο ϕ. Όπως βλέπουμε, βασικό συστατικό της classicalization είναι η ύπαρξη καταλλήλων αλληλεπιδράσεων που οδηγούν στην δημιουργία r_0 ακτίνας και προαπαιτούν την ύπαρξη καταλλήλων μη-επανακανονικοποιήσιμων τελεστών.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον παράδειγμα θεωρίας που εμφανίζει τέτοια συμπεριφορά, και στην οποία θα επανέλθουμε αργότερα στην συγκεκριμένη εργασία, είναι ένα βαθμωτό πεδίο με δράση τύπου Dirac-Born-Infeld (DBI).

$$S = M_0^4\sqrt{1 + L_0^4(\partial_m\phi)^2} + \frac{\phi}{M_0}J \tag{1.15}$$

Όροι αλληλεπίδρασης με ϕ που δεν είναι σε παράγωγο απαγορεύονται αν θέλουμε να διατηρήσουμε την συμμετρία μεταθέσεων του ϕ που έχει η θεωρία. Για πηγή $J(r) = \frac{\delta(r)4\pi}{L}$ στο όριο $\frac{1}{L} \gg M_0$ προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης:

$$\partial^m\left(\frac{\partial_m\phi}{\sqrt{1 + L_0^4(\partial_m\phi)^2}}\right) = \frac{J}{M_0} \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial_m\phi}{\sqrt{1 + L_0^4(\partial_m\phi)^2}} = -\frac{L_0}{r^2L} \tag{1.17}$$

Αυτές δίνουν $\partial_r\phi(r) = M_0^2\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r}{r_0})^4}}$ για $r_0 = L_0\sqrt{\frac{L_0}{L}}$. Αν έχουμε και έναν επιπλέον όρο αλληλεπίδρασης της μορφής:

$$M_0^4\sum_{n>2,k>0} I_{n,n+k}[\partial^k, (\partial\phi)^n] + \frac{\phi}{M_0}J \tag{1.18}$$

επειδή η λύση της ϕ θα συμπεριφέρεται ως:

$$\partial_r \phi(r)]_{r \gg r_0} \sim M_0^2 \frac{r_0^2}{r^2} \tag{1.19}$$

$$\partial_r \phi(r)]_{r \ll r_0} \sim M_0^2 \left(1 - \frac{r^4}{2r_0^4}\right) \tag{1.20}$$

ο επιπλέον όρος αλληλεπίδρασης θα συμπεριφέρεται:

$$\frac{\partial^k}{M_0^k} [\partial\phi(r)]^n]_{r \gg r_0} \sim [\partial\phi(r)]^n \frac{L_0^k}{r^k} \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial^k}{M_0^k} [\partial\phi(r)]^n]_{r \ll r_0} \sim [\partial\phi(r)]^n \frac{L_0^k}{r_0^4 r^{k-4}} \tag{1.22}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης είναι αμελητέες για $r \gg L_0$. Η προσθήκη n παραγώγων σε ένα αναλλοίωτο συνεπάγεται την ελάττωση της τιμής του κατά $\frac{L_0}{r}$, μειώνοντας δραστικά την σημασία του για την περιοχή $r \gg L_0$ όπου σχηματίζεται το classicalon.

Υπάρχει και ένα ακόμα βασικό στοιχείο που πρέπει να επισημανθεί. Η classicalization εξαρτάται ουσιαστικότατα από την φύση της πηγής. Θα συμβαίνει όταν η δύναμη της πηγής που είναι εντοπισμένη σε περιοχή μεγέθους L μεγαλώνει ως μία θετική δύναμη του $\frac{1}{L}$, όπως ισχύει για τις πηγές ορμής-ενέργειας. Για άλλους τύπους αλληλεπιδράσεων, επειδή η ακτίνα r_0 ελαττώνεται με την ενέργεια, το σύστημα δεν classicalizes γενικά. Ας δούμε ένα παράδειγμα θεωρίας που δεν εμφανίζει το φαινόμενο της classicalization:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{1.23}$$

Πρόκειται για άμαζο βαθμωτό πεδίο με επανακανονικοποιήσιμη αλληλεπίδραση με ασθενή ζεύξη ($\lambda \ll 1$). Οι εξισώσεις κίνησης για τα σκεδαζόμενα κυματοπακέτα του πεδίου ϕ είναι:

$$\Box\phi = -\lambda\phi^3 \tag{1.24}$$

Για $r \to \infty, \quad t \to -\infty$ το ϕ προσεγγίζεται καλά από ένα σφαιρικό κύμα συχνότητας ω, και πλάτους $A \sim 1$ (με μικρό αριθμό κατάληψης). Η λύση των εξισώσεων κίνησης για ελεύθερο πεδίο είναι $\phi_0 = \frac{\psi(\omega(r+t))^3}{r^3}$. Μπορούμε να

λύσουμε το πρόβλημα επαναληπτικά, αναπτύσσοντας το ϕ σε σειρά ολοένα λιγότερο σημαντικών διορθώσεων: $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \ldots$ Τότε θα έχουμε:

$$\Box\phi_1 = -\lambda\phi_0^3 = -\lambda\frac{\psi(\omega(r+t))^3}{r^3} \tag{1.25}$$

Η λύση θα συμπεριφέρεται για $\omega \gg r^{-1}$ ως εξής:

$$\phi_1 \simeq -\frac{\lambda}{2}\int_0^{r+t}\frac{\psi(\omega y)^3 dy}{r^2} \tag{1.26}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η $\psi(\omega y)$ είναι περιοδική συνάρτηση με πλάτος ~ 1 και συχνότητα ω, έχουμε κατά μέσο όρο:

$$\int_0^{r+t}\psi(\omega y)^3 dy \sim \frac{1}{\omega}\psi(\omega(r+t)) \sim \frac{1}{\omega} \tag{1.27}$$

Καταλήγουμε δηλαδή στο ότι $\phi_1 \sim \phi_0\frac{\lambda}{\omega r}$, που σημαίνει ότι το κύμα διαδίδεται ελεύθερα μέχρι απόσταση $r_0 = \frac{\lambda}{\omega}$. Οι τρόποι ταλάντωσης με υψηλότερη συχνότητα εισχωρούν λιγότερο στο υπεριώδες πριν να αντιληφθούν την αλληλεπίδραση, άρα η σκέδαση γίνεται λιγότερο σημαντική για μεγαλύτερες ενέργειες. Δηλαδή η ενεργός διατομή μικραίνει για μεγαλύτερες ενέργειες και τα κυματοπακέτα μεγάλης συχνότητας μπορούν να μελετούν ολοένα μικρότερες αποστάσεις. Προφανώς η συγκεκριμένη θεωρία δεν μπορεί να classicalize.

Συγκεντρώνοντας τα πορίσματα αυτής της παραγράφου, έχουμε ότι για θεωρίες που εμφανίζουν το φαινόμενο της classicalization:

• Περιμένουμε η σκέδαση να γίνεται μοναδιακή μέσω διαδικασιών $2 \to N$.

• Κυριαρχεί ο σχηματισμός κλασικών αντικειμένων ακτίνας $r_0 = L_0^2\sqrt{s}$, που ονομάζονται classicalons.

• Με σκέδαση ολοένα μεγαλύτερων ενεργειών δεν μπορούμε να αναλύσουμε αποστάσεις πολύ μικρότερες από την r_0, επειδή δημιουργούμε σταδιακά τα classicalons.

• Έχουμε μετάβαση από φυσική μεγάλων ενεργειών σε φυσική μεγάλων αποστάσεων.

• Για να συμβαίνει πρέπει η δύναμη της πηγής που είναι εντοπισμένη σε περιοχή μεγέθους L μεγαλώνει ως μία θετική δύναμη του $\frac{1}{L}$.

• Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ύπαρξη καταλλήλων αλληλεπιδράσεων που οδηγούν στην δημιουργία ακτίνας r_0 και προαπαιτούν την ύπαρξη καταλλήλων μη-επανακανονικοποιήσιμων τελεστών.

1.3 **Σκέδαση** Goldstone.

Μπορούμε αν προετοιμάσουμε ένα κυματοπακέτο με πολύ μεγάλη ενέργεια $\sqrt{s} \gg M_0$ και μικρό αριθμό κατάληψης. Σύμφωνα με τα λεγόμενα της προηγούμενης παραγράφου, θα παρατηρήσουμε πώς σχηματίζεται η κλασική διάταξη για ακτίνα $r_0 \gg L_0$. Η γεωμετρική ενεργός διατομή του προβλήματος ορίζεται από την ακτίνα r_0, την μικρότερη απόσταση για την οποία τα κυματοπακέτα της εν λόγω σκέδασης διαδίδονται ελεύθερα χωρίς να αισθάνονται σημαντική αλληλεπίδραση:

$$\sigma \sim r_0^2(\sqrt{s})$$

Η σχέση αυτή ισχύει τόσο για classicalizing όσο και για ασθενώς συζευγμένες θεωρίες. Για παράδειγμα σε σκέδαση Thomson, το r_0 είναι η κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου. Για θεωρίες που οδηγούν στην δημιουργία classicalon το r_0 μεγαλώνει με την ενέργεια $(\sqrt{s})$ και τελικά γίνεται μακροσκοπικό, με αποτέλεσμα η σκέδαση να γίνεται ήδη στο r_0, ακόμα και όταν η ενέργεια αντιστοιχεί σε μικρότερες αποστάσεις. Αντιθέτως, για θεωρίες όπου το r_0 ελαττώνεται αυξανόμενης της ενέργειας, τα σωμάτια 'βλέπουν' ολοένα μικρότερες αποστάσεις πριν να σκεδαστούν και δεν περιμένουμε να σχηματίζονται classicalons.

Η διαδικασία που θα μελετηθεί σε αυτό το κεφάλαιο είναι η σκέδαση ενός βαθμωτού ϕ με αλληλεπιδράσεις παραγώγων:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 + \frac{L_0^4}{4}\Big((\partial_m \phi)^2)\Big)^2 \tag{1.28}$$

Αυτή η λαγκραντζιανή θα μπορούσε να είναι το όριο αποσύζευξης ($g \to 0$, $L_0 = \frac{g}{M_w}$ σταθερό) της Proca,

$$L = -\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{2}m_w^2 W_m W^m + \frac{g^4}{4}(W_m W^m)^2 \tag{1.29}$$

όπου $W_m = \tilde{W_m} - \frac{1}{M_w}\partial_m \phi$. Επίσης θα μπορούσε να περιγράφει σωμάτιο Goldstone που αλληλεπιδρά με τον εαυτό του, ή και τη διαμήκη συνιστώσα έμμαζου διανυσματικού πεδίου. Θα την χαρακτηρίζουμε λοιπόν (όπως φαίνεται ήδη από τον τίτλο) ως σκέδαση Goldstone. Διαταρακτικά, σε συχνότητα ω το πλάτος σκέδασης $2 \to 2$ συμπεριφέρεται ως $A_{2\to 2} \sim \omega^4 L_0^4$, και άρα θα περιμέναμε ενεργό διατομή $\sigma_{2\to 2} \sim L_0^4 \omega^6$ που παραβιάζει την unitarity για $\omega \gg L_0$. Οι εξισώσεις κίνησης του ϕ είναι:

$$\partial^m \left(\partial_m \phi \left(1 + L_0^4 (\partial_r \phi)^2\right)\right) = 0 \tag{1.30}$$

Θα υποθέσουμε ότι για $r = \infty$, $t = -\infty$ το ϕ δίνεται προσεγγιστικά από ένα σφαιρικό κύμα συχνότητας ω και πλάτους $A \sim 1$ και θα λύσουμε το πρόβλημα με επαναληπτική μέθοδο $(\phi = \phi_0 + \phi_1 + \dots)$. Η εξίσωση για την πρώτη διόρθωση στο ελεύθερο κύμα θα είναι:

$$\Box \phi_1 = -L_0^4 \partial^m \left(\partial_m \phi_0 (\partial_n \phi_0)^2\right)$$

Αν επίσης λάβουμε υπόψη τις ιδιότητες του κύματος $\psi(\omega(t+r))$ για $\omega \gg r$, η πρώτη διόρθωση θα είναι:

$$\Box \phi_1 = -\frac{L_0^4}{r^5} (2\psi^2 \psi'' + 8\psi \psi'^2) \tag{1.31}$$

πού δίνει λύση:

$$\phi_1 \simeq -f(\omega(r+t)) \frac{L_0^4}{6r^4} \tag{1.32}$$

Αν συνυπολογίσουμε και ότι η $\psi(\omega y)$ είναι περιοδική συνάρτηση συχνότητας ω με πλάτος ~ 1, θα προκύψει ότι:

$$\phi_1 \sim \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \phi_0, \quad r_0 \equiv L_0 (\omega L_0)^{\frac{1}{3}} \tag{1.33}$$

Η σκέδαση των Goldstone ξεκινάει ήδη σε απόσταση r_0 που μεγαλώνει για μεγάλα ω. Μάλιστα για $\omega \gg L_0$ η σκέδαση σωματιδίων $2 \to 2$ κυριαρχείται από πολύ μικρή μεταφορά ορμής $\sim r_0^{-1}$, και άρα συμπεριφέρεται ως $A_{2\to 2} \sim \left(\frac{L_0}{r_0}\right)^4$. Εξαιτίας του ότι το ϕ πηγάζει από την ενέργεια μέσω αυτό-αλληλεπίδρασης, το αρχικό κύμα ξανά-σκεδάζεται και μέχρι να φτάσει στο r_0 η διόρθωση στο ελεύθερο κύμα γίνεται σημαντικότατη.

Η ακτίνα του classicalon r_0 μπορεί να υπολογιστεί ως η ακτίνα r για την οποία $\phi_0 = \phi_1$. Για $\sqrt{s} \sim \omega$ προκύπτει ότι είναι:

$$r_0(s) \sim L_0 (L_0 \sqrt{s})^{\frac{1}{3}} \tag{1.34}$$

Και οπότε η γεωμετρική ενεργός διατομή είναι:

$$\sigma \sim L_0^2 (L_0 \sqrt{s})^{\frac{2}{3}} \tag{1.35}$$

Το μέγεθος της κλασικής διάταξης μεγαλώνει καθώς αυξάνεται η ενέργεια κέντρου μάζας, που υπονοεί ότι σκεδάσεις από λίγα σε λίγα σωμάτια μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο για μικρή μεταφερόμενη ορμή. Η σκέδαση κυριαρχείται από παραγωγή πολλών σωματιδίων από την διάσπαση της κλασικής διάταξης.

1.4 Σκέδαση Βαρυτονίων.

Επειδή και η βαρύτητα θα μπορούσε να εμφανίζει το φαινόμενο της classicalization όπως αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε την αντίστοιχη σκέδαση βαρυτονίων. Η κατάρρευση μίας σφαιρικής πηγής οδηγεί στην δημιουργία μελανής οπής για κλασικές πηγές, όταν δηλαδή ο αριθμός κατάληψης του αρχικού κυματοπακέτου είναι τόσο μεγάλος που μπορούμε να το θεωρήσουμε κλασικό αντικείμενο. Αυτό που θέλουμε να εξετάσουμε τώρα είναι, το κατά πόσον η ίδια διαδικασία σκέδασης για μικρό αρχικό αριθμό κατάληψης μπορεί να οδηγήσει σε φαινόμενο classicalization, με r_0 την ακτίνα Schwarzschild που αντιστοιχεί στην ενέργεια του κυματοπακέτου. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιηθεί η θεωρία με ένα βαρυτόνιο Einstein h_{mn} και ένα βαθμωτό Goldstone ϕ. Για τα ελεύθερα πεδία θα έχουμε:

$$L_{free} = -\frac{1}{2} h^{mn} \epsilon^{ab}_{mn} h_{ab} + \frac{1}{2} (\partial_m \phi)^2 \tag{1.36}$$

όπου ϵ^{ab}_{mn} είναι ο γραμμικοποιημένος τανυστής Einstein και ισχύει:

$$\epsilon^{ab}_{mn} h_{ab} = \Box h_{mn} - \eta_{mn} \Box h - \partial_m \partial^a h_{an} - \partial_n \partial^a h_{am} + \eta_{mn} \partial^a \partial^b h_{ab} + \partial_m \partial_n h \tag{1.37}$$

Η συγκεκριμένη δράση δεν περιλαμβάνει στο φάσμα καταστάσεις-φαντάσματα, διαδίδει 2 βαθμούς ελευθερίας και είναι αναλλοίωτη υπό την μετάθεση $\delta h_{mn} = \partial_m \xi_n + \partial_n \xi_n$. Οι όροι αλληλεπίδρασης που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι μία κυβικής τάξης αλληλεπίδραση στα πεδία και σύζευξη του βαρυτονίου με τον τανυστή ενέργειας ορμής του συστήματος:

$$L_{interaction} = L_P h_{mn} T^{mn}(\phi) + L_P O(h^3) \tag{1.38}$$

$$T_{mn}(\phi) = \partial_m \phi \partial_n \phi - \frac{1}{2} \eta_{mn} (\partial_a \phi \partial^a \phi) \tag{1.39}$$

όπου $O(h^3)$ ο κυβικός όρος της δράσης Einstein. Ο υπολογισμός θα γίνει στην αρμονική βαθμίδα: $\partial^m h_{mn} = \frac{1}{2} \partial_r h$ όπου θα έχω τις εξισώσεις κίνησης για το βαρυτόνιο:

$$\Box h_{mn} = -L_P \left(T_{mn} - \frac{1}{2} \eta_{mn} T^a_a \right), \quad T_{mn} \equiv T_{mn}(\phi) + T_{mn}(h) \tag{1.40}$$

και για τον τανυστή ενέργειας ορμής:

$$T_{mn}(h) =$$
$$= -\frac{1}{2}h^{ab}\Big(\partial_m\partial_n h_{ab}+\partial_a\partial_b h_{mn}-\partial_a(\partial_n h_{mb}+\partial_m h_{nb})\Big)-\frac{1}{2}\partial_a h_{bn}\partial^a h^b_m+\frac{1}{2}\partial_a h_{bn}\partial^b h^a_m$$
$$-\frac{1}{4}\partial_m h_{ab}\partial_n h^{ab}-\frac{1}{4}\eta_{mn}\left(\partial_a h_{bc}\partial^b h^{ac}-\frac{3}{2}\partial_a h_{bc}\partial^a h^{bc}\right)-\frac{1}{4}h_{mn}\Box h+\frac{1}{2}\eta_{mn}h_{ab}\Box h^{ab} \tag{1.41}$$

Εφόσον ήδη αναφερθήκαμε στα βαθμωτά ϕ θα επικεντρωθούμε τώρα στο βαρυτόνιο και μόνο στους δικούς του όρους αλληλεπίδρασης. Το σύστημα ξεκινάει για $t=-\infty$ και $r=\infty$ ως εισερχόμενη κατάσταση χωρίς βαρυτόνια, με μόνο ένα ελεύθερο κυματοπακέτο $\phi=\phi_0$, με ενέργεια μεγαλύτερη από την μάζα Planck, που καταρρέει προς το κέντρο των αξόνων και έχει μικρό αριθμό κατάληψης. Διαταρακτικά, μία τέτοια σκέδαση ϕ, λόγω της ανταλλαγής βαρυτονίων, θα παραβίαζε την unitarity για $\sqrt{s}\gg M_P$. Θα αναζητήσουμε την λύση για το βαρυτόνιο σε μορφή αναπτύγματος: $h_{mn}=h^{(0)}_{mn}+h^{(1)}_{mn}$, όπου με $^{(0)}$ είναι η λύση της γραμμικής εξίσωσης που συνυπολογίζει το ότι το βαρυτόνιο πηγάζει από το $T_{mn}(\phi)$ αλλά αγνοεί την αυτό-αλληλεπίδραση και με $^{(1)}$ η πρώτης τάξης διόρθωση λόγω της αυτό-αλληλεπίδρασης μέσω του $T_{mn}(h)$. Η ακτίνα r_0 θα είναι η ακτίνα στην οποία $h^{(0)}_{mn}\sim h^{(1)}_{mn}\sim M_P$. Επιλέγουμε για ϕ ένα σφαιρικό πακέτο πλάτους A και ενεργείας κέντρου μάζας $M\sim\frac{A^2}{\alpha}$: $\phi_0=\frac{\psi(r+t)}{r}$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.48) και (1.49) παίρνουμε:

$$\Box h^{(0)}_{mn}=-L_P(\partial_m\phi_0\partial_n\phi_0) \tag{1.42}$$

όπου ο τόνος πάντα συμβολίζει παραγώγιση ως προς το όρισμα. Για σφαιρικό κυματοπακέτο επιλέγουμε την συνιστώσα του βαρυτονίου, που στο κλασικό όριο θα αναπαρήγαγε το Νευτώνειο δυναμικό κλασικής πηγής:

$$\Box h^{(0)}_{00}=-L_P\frac{\psi'^2}{r^2} \tag{1.43}$$

Για εντοπισμένο κυματοπακέτο συνολικής ενέργειας κέντρου μάζας M, έξω από την πηγή το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό θα συμπεριφέρεται ως: $h^{(0)}_{00}\sim L_P\frac{M}{r}$. Από αυτό φαίνεται ήδη ότι η ακτίνα classicalization θα δίνεται από την ακτίνα Schwarzschild που σχετίζεται με την συγκεκριμένη ενέργεια κέντρου μάζας M. θεωρώντας γκαουσιανό προφίλ για την ψ:

$$\phi_0=\frac{\psi(r+t)}{r}=A\frac{\exp\left[-\frac{(r+t)^2}{2\alpha^2}\right]}{\pi^{\frac{1}{4}}r} \tag{1.44}$$

παίρνουμε οτι:

$$\Box h_{00}^{(0)} = -2L_P M \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\partial_t^2\right)\frac{\exp\left[-\frac{(r+t)^2}{\alpha^2}\right]}{\pi^{\frac{1}{2}}\alpha} \tag{1.45}$$

Στο όριο όπου $\alpha \to 0$ και $\frac{A^2}{\alpha}$ είναι σταθερό, αν χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξής αναπαράσταση της δ-συνάρτησης:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(r+t)^2}{2\alpha^2}\right] = \delta(r+t) \tag{1.46}$$

Θα προκύψει:

$$\Box h_{00}^{(0)} = -2L_P\frac{M}{r^2}\delta(r+t) \tag{1.47}$$

$$h_{00}^{(0)} = \frac{L_P M}{r}\Theta(r+t)\ln(r-t) \tag{1.48}$$

Παρατηρούμε αμέσως σε αντιπαραβολή με τα πορίσματα της προηγούμενης παραγράφου ότι στην βαρύτητα τον ρόλο του L_0 έχει το L_P. Αντίστοιχα στην βαρύτητα έχουμε την ακτίνα Schwarzschild στην θέση του r_0. Η ακτίνα classicalization προκύπτει από την συνθήκη $h_{mn}^{(0)} \sim M_P$, που ικανοποιείται όταν $r_0 \sim L_P^2 M$ και δεν είναι παρά η ακτίνα Schwarzschild μελανής οπής μάζας M. Αν υπολογίσουμε τον $T_{mn}(h)$ για το $h_{00}^{(0)}$ και βάλουμε το αποτέλεσμα στην (1.49) θα πάρουμε την εξής συνθήκη:

$$\frac{h_{00}}{M_P} \sim \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{r^2} \tag{1.49}$$

Τώρα φαίνεται ότι και οι δύο συνθήκες που θέσαμε για τον υπολογισμό του r_0 ικανοποιούνται για $r \sim r_0$.

Θα μπορούσαμε αντί του παραπάνω υπολογισμού να μελετήσουμε την σκέδαση βαρυτονίων μόνο, αντικαθιστώντας το εισερχόμενο πεδίο ϕ με βαρυτόνιο, και να λύσουμε ξανά επαναληπτικά την εξίσωση παίρνοντας ως $h_{mn}^{(0)}$ το ελεύθερο εισερχόμενο κυματοπακέτο βαρυτονίων. Ο συγκεκριμένος υπολογισμός είναι πολύ πιο σύνθετος αλλά υπάρχει στην βιβλιογραφία και δίνει κατά προσέγγιση πάλι αντίστοιχο αποτέλεσμα για την ακτίνα classicalization: $r_0 \sim r_g = \sqrt{s}L_P^2$.

1.5 Σύγκριση και σχολιασμός για την σκέδαση βαρυτονίων και Goldstone.

Παίρνοντας αφορμή από την αντιστοιχία που διαπιστώθηκε ανάμεσα στην βαρύτητα και κατάλληλα βαθμωτά πεδία τύπου Goldstone, ας μελετήσουμε τις ομοιότητες και διαφορές αυτών των περιπτώσεων πιο συστηματικά. Βρήκαμε ότι r_0 είναι η ενεργή εμβέλεια της αλληλεπίδρασης, η αλλιώς η απόσταση όπου η προσέγγιση ελευθέρου κύματος παύει να ισχύει. Εξετάζουμε κατά πόσον η σκέδαση κβάντων υψηλής ενέργειας οδηγεί στην δημιουργία διατάξεων μεγέθους r_0 του κλασικού πεδίου, χωρίς βέβαια ακόμα να απαιτούμε να αντιστοιχούν σε κάποια στατική σφαιρικά συμμετρική λύση. Ποιά θα είναι η εξέλιξη των πεδίων μετά από την classicalization; Στην μεν περίπτωση της βαρύτητας η classicalization πρέπει να είναι προπομπός της δημιουργίας μελανής οπής Schwarzschild όπως απορρέει από την συμμετρία του προβλήματος και το θεώρημα του Birkhoff. Στην δε περίπτωση των βαθμωτών πεδίων το αντίστοιχο θα ήταν στατικές ανώμαλες (singular) λύσεις, ανάλογες με τις μελανές οπές, τα classicalons. Ωστόσο δεν είναι σαφές αν και κατά πόσον μπορούν οι χρονοεξαρτώμενες διατάξεις classicalon να έχουν τέτοια κατάληξη. Το συγκεκριμένο θέμα θα αναλυθεί στο 3ο μέρος της εργασίας. Αξίζει να επισημανθεί, ότι από την οπτική γωνία της unitarization δεν φαίνεται απαραίτητο να υπάρχει κάποια σταθερή ή μακρόβια λύση. Μας αρκεί να σχηματιστεί το classicalon.

Γενικά καταλήξαμε νωρίτερα ότι για θεωρίες που εμφανίζουν το φαινόμενο της classicalization βρίσκουμε ένα χαρακτηριστικό μήκος (ακτίνα του classicalon) $r_0(s) = L_0(\sqrt{s}L_0)^{\alpha}$. Το α αυτό είναι θετικό για classicalizing θεωρίες και η ακριβής του τιμή εξαρτάται από την αυτό-αλληλεπίδραση από την οποία πηγάζει το πεδίο. Για την περίπτωση του βαρυτονίου βρήκαμε συγκεκριμένα $\alpha = 1$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι για θεωρίες με αναλλοιότητα Poincare και βαθμωτό classicalizing πεδίο το $\alpha < 1$.

Για θεωρία όπου το πεδίο ϕ πηγάζει από αυτό-αλληλεπίδραση μέσω τελεστή με $2k$ δυνάμεις παραγώγων και ν δυνάμεις του βαθμωτού πεδίου ϕ, δηλαδή $G_\phi \partial^{2k}\phi^n$, η σταθερά ζεύξης G_ϕ θα έχει διαστάσεις $[m]^{\frac{2-n}{2}}[l]^{\frac{n+4k-6}{2}}$. Αυτή η σταθερά ορίζει την κβαντική κλίμακα μήκους $L_0 = G_\phi^{\frac{1}{(n+2k-4)}}\hbar^{\frac{n-2}{2(n+2k-4)}}$ που σηματοδοτεί την κατάρρευση της διαταρακτικής unitarity. Η ακτίνα r_0 αυτού του αντικειμένου μπορεί να εκτιμηθεί εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι το μόνο κλασικό μήκος που μπορούμε να κατασκευάσουμε από την κλίμακα L_0 και το μήκος κύματος de Broglie του πακέτου $\alpha = \frac{\hbar}{\sqrt{s}}$ είναι: $r_0 = L_0(\frac{L_0}{\alpha})^{\frac{n-2}{n+4k-6}}$.

Όταν ο παραπάνω τελεστής οδηγεί σε classicalization και επειδή $k \geq 2$ προκύπτει οτι $\alpha = \frac{n-2}{n+4k-6} < 1$.

Τελικά προκύπτει ότι η βαρύτητα είναι η πιο αποτελεσματική θεωρία ως προς το φαινόμενο της classicalization, επειδή η ακτίνα του classicalon (r_0) μεγαλώνει ως συνάρτηση του κέντρου μάζας πιο γρήγορα στην βαρύτητα από όλες τις άλλες θεωρίες.

1.6 Συμπλήρωση στο υπεριώδες και classicalization.

Έφτασε στιγμή να επιστρέψουμε στην αρχική υπόθεση, ότι δηλαδή η classicalization μπορεί να προταθεί ως εναλλακτικός δρόμος για την συμπλήρωση στο υπεριώδες για μη-επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες, στις οποίες η ισχύς της αλληλεπίδρασης καθορίζεται από θετικές δυνάμεις του στοιχειώδους μήκους L_0. Τέτοιου είδους αλληλεπιδράσεις είναι γνωστό ότι παραβιάζουν την διαταρακτική unitarity για ενέργειες πάνω από L_0^{-1}. Η καθιερωμένη (ή κατά Wilson) αντιμετώπιση των συγκεκριμένων θεωριών είναι να τις βλέπουμε ως ενεργή περιγραφή κάποιας πιο στοιχειώδους, ασθενώς συζευγμένης κβαντικής θεωρίας που ισχύει για αποστάσεις μικρότερες από L_0. Σύμφωνα με αυτή την εικόνα νέα φυσική με ασθενή σύζευξη εμφανίζεται σε κάποια ενδιάμεση απόσταση m^{-1}, και αποκαθιστά την διαταρακτική unitarity. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι κάποιες από αυτές τις θεωρίες γίνονται unitary μέσω του φαινομένου της classicalization, δηλαδή με διαδικασίες σκέδασης: $2 \to$ κλασική διάταξη $\to$ πολλά σωμάτια. Για αυτές τις θεωρίες ήδη συμπεράναμε ότι υπάρχει η επιπλέον προϋπόθεση η ακτίνα r_0 της κλασικής διάταξης να μεγαλώνει αυξανόμενης της ενέργειας, μέχρι που μετά από κάποια κρίσιμη ενέργεια φτάνει να ξεπερνάει κάθε κβαντική κλίμακα μήκους του συστήματος, δηλαδή $r_0 \sim L_0(L_0\sqrt{s})^{\alpha}$ με $\alpha > 0$ να καθορίζεται από τον σημαντικότερο τελεστή που λειτουργεί ως πηγή για το πεδίο ϕ.

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, η κάθε θεωρία δεν μπορεί παρά να ακολουθεί έναν από τους δύο παραπάνω δρόμους: είτε της classicalization είτε της συμπλήρωσης κατά Wilson. Σε θεωρίες που δημιουργούν classicalons οι μεγάλες αποστάσεις δεν αντιστοιχούν απαραίτητα μόνο σε μικρές ενέργειες, αλλά και σε μεγάλες μέσω των εκτεταμένων διατάξεων. Έτσι σε κλίμακα r_0 αντιστοιχούν και ενέργειες στις οποίες 'η θεωρία ήδη γνωρίζει' αν υπάρχει ή όχι ασθενώς συζευγμένη φυσική που εξασφαλίζει την unitarity, με αποτέλεσμα να μην δημιουργούνται τελικά classicalons. Αυτή η πληροφορία βρίσκεται κωδικοποιημένη στους τελεστές που είναι λιγότερο σημαντικοί σε χαμηλές ενέργειες, φέρουν ωστόσο την πληροφορία για την ύπαρξη ή μη-ύπαρξη τέτοιων διαδιδόμενων βαθμών ελευθερίας στο υπεριώδες.

Ας μελετήσουμε την εξής λαγκραντζιανή:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 + \epsilon \frac{L_0^4}{4}(\partial_m \phi)^4, \quad \epsilon \pm 1 \tag{1.50}$$

Το συγκεκριμένο σύστημα έχει εξισώσεις κίνησης:

$$\partial^m \left[\partial_m \phi + \epsilon L_0^4 \partial_m \phi (\partial_n \phi)^2\right] = 0 \tag{1.51}$$

Αν αναζητήσουμε στατικές, σφαιρικά συμμετρικές λύσεις στο κενό, αυτές θα πρέπει να ικανοποιούν την αλγεβρική εξίσωση:

$$\partial_r \phi \left(1 - \epsilon L_0^4 (\partial_r \phi)^2\right) = M \frac{L_0}{r^2} \tag{1.52}$$

όπου το ML_0 είναι η σταθερά ολοκλήρωσης και r η ακτινική συντεταγμένη. Εμφανίζονται δύο ξεχωριστές περιοχές:

$$\phi(r \to \infty) \sim \frac{r_0^2}{L_0^2} \frac{1}{r} \tag{1.53}$$

$$\phi(r \to 0) \sim \frac{r_0}{L_0^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.54}$$

Τότε r_0 θα είναι η απόσταση στην οποία η συνεισφορά από τις μη-γραμμικότητες που εμφανίζεται σε μικρές αποστάσεις γίνεται ίση με την γραμμική συνεισφορά, δηλαδή οι λύσεις στις δύο περιοχές συγκρίσιμες: $r_0 = (ML_0)^{\frac{1}{2}} L_0$. Αν λύσουμε αναλυτικά την (1.61) ως προς $\partial_r \phi$ κάνοντας τις αντικαταστάσεις $r \to \rho = \frac{r}{r_0}$ και $\phi \to \frac{L_0^2}{r_0} \phi$ προκύπτουν τα παρακάτω σχήματα:

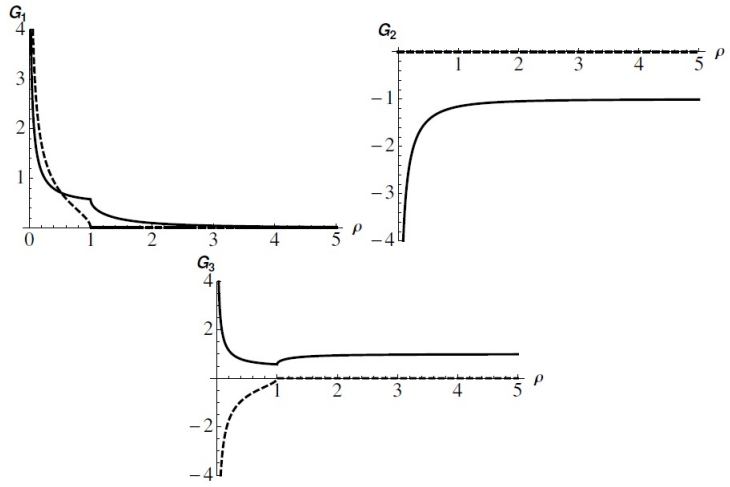

Figure 1: Solutions of (9) with $\epsilon = +1$ for $\partial_r \phi$, where the thick line is the real part and the dashed line is the imaginary part of the solution.

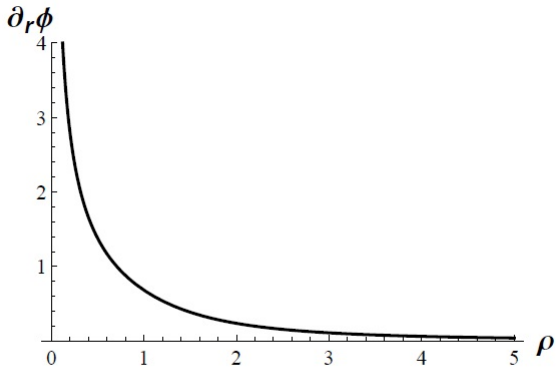

Figure 2: Classicalon solution for $\epsilon = -1$.

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι για $\epsilon = 1$ (σ1) η μόνη λύση που παραμένει πραγματική είναι μη-φυσική λύση εφόσον αποκλίνει για $t \to \infty$ καθώς $\partial_r \phi \to L_0^{-1}$. Αντιθέτως για $\epsilon = -1$ έχουμε μία στατική διάταξη της οποίας η συμπεριφορά φαίνεται στο σχήμα (σ2). Συνεχής λύση classicalon προκύπτει μόνο για $\epsilon = -1$.

Θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να αλλάξουμε αυτή την συμπεριφορά προσθέτοντας στη θεωρία τελεστές υψηλότερης τάξης, δηλαδή κόμβους $(d\phi)^{2n}$ που περιορίζονται από κλίμακα Λ.

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 + \epsilon \frac{L_0^4}{4}(\partial_m \phi)^4 + \frac{\epsilon_n}{\Lambda^{4n-4}}(\partial_m \phi)^{2n}, \quad \epsilon \pm 1 \tag{1.55}$$

Ακόμα και αν μπορούμε να κάνουμε unitary τον κόμβο $(d\phi)^{2n}$ πάνω από την κλίμακα Λ εμφυτεύοντας στη θεωρία ασθενώς συζευγμένη φυσική, αυτό θα λειτουργήσει αποτελεσματικά μόνο για το πλάτος σκέδασης διαδικασιών με $2n$ ή περισσότερα πόδια, και όχι για το πλάτος $2 \to 2$ που προέρχεται από τον κυβικό όρο. Για $\epsilon = -1$ η θεωρία συμπληρώνεται στο υπεριώδες με αυτόσυμπλήρωση μέσω classicalization.

Ας επιστρέψουμε οπότε στην θεωρία (1.59) και ας την εμβαπτίσουμε σε ένα ασθενώς συζευγμένο sigma-model:

$$L = |\partial_m \Phi|^2 - \frac{\lambda}{8}(2|\Phi|^2 - v^2)^2 \tag{1.56}$$

Το Φ είναι μιγαδικό βαθμωτό πεδίο που φέρει 2 πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας και η (1.65) είναι αναλλοίωτη στον καθολικό $U(1)$ μετασχηματισμό:

$\Phi \to \exp(i\theta)\Phi$. Στην θεμελιώδη κατάσταση αυτή η συμμετρία σπάει αυθόρμητα από την αναμενόμενη τιμή του πεδίου Φ: $<\Phi^*\Phi>=\frac{1}{2}v^2$. Αν ρ είναι ο ακτινικός βαθμός ελευθερίας (Higgs') και ϕ το μποζόνιο Goldstone που μετασχηματίζεται ως $\frac{\phi}{v} \to \frac{\phi}{v}+\theta$:

$$\phi = \frac{1}{2}(v+\rho)\exp\left(\frac{i\phi}{v}\right) \tag{1.57}$$

Το ρ παίρνει μάζα $m = \lambda v$:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \rho)^2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho}{v}\right)^2(\partial_m\phi)^2 - \frac{\lambda^2}{8}(\rho^2+2\rho v)^2 \tag{1.58}$$

Για ενέργειες $E \ll \lambda v$ μπορούμε να ολοκληρώσουμε στο ρ χρησιμοποιώντας την γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησής του:

$$[\Box - m^2]\rho = \frac{1}{v}(\partial_m\phi)^2 \tag{1.59}$$

και καταλήγουμε στην ενεργό εξίσωση (σε πρώτη τάξη) για το ϕ σε χαμηλές ενέργειες:

$$\partial^m\left[\partial_m\phi\left(1+L_0^4\frac{m^2}{\Box+m^2}(\partial_n\phi)^2\right)\right] = 0) \tag{1.60}$$

Το L_0 είναι το μήκος αποκοπής $L_0^2 = \sqrt{s}(mv)^{-1}$. Στο όριο χαμηλών ενεργειών $\Box \ll m^2$ παίρνουμε την αρχική εξίσωση με $\epsilon = 1$. Αν θέλαμε να πάρουμε την ίδια ενεργή λαγκραντζιανή σε χαμηλές ενέργειες για $\epsilon = -1$ θα έπρεπε να αλλάξουμε το πρόσημο του όρου με το m^2 στην (1.68). Αλλά αυτό θα ήταν ισοδύναμο με το να ολοκληρώνουμε πάνω σε ταχυόνιο, ενέργεια που δεν θα είχε νόημα. Αυτός είναι ο λόγος που θεωρίες που παρουσιάζουν classicalization δεν μπορούν να προκύψουν ως το όριο σε χαμηλές ενέργειες μίας θεωρίας με ασθενώς συζευγμένη συμπλήρωση στο υπεριώδες. Εμβαπτίζοντας την αρχική θεωρία (1.59) στο sigma-model καταστρέψαμε την δυνατότητα της για αυτό-συμπλήρωση στο υπεριώδες μέσω classicalization. Η μόνη δυνατότητα που μένει είναι μία συμβατικότερη συμπλήρωση κατά Wilson και αυτή απαιτεί $\epsilon = +1$. Το φαινόμενο αυτό, ότι δηλαδή ενσωματώνοντας στην θεωρία ασθενώς συζευγμένη φυσική χαλάει η classicalization ονομάζεται de-classicalization, με αντίστοιχη ακτίνα r_d. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι για σκέδαση με μεγάλη ενέργεια κέντρου μάζας η αυτό-αλληλεπίδραση από οποία πηγάζει το πεδίο σβήνει ήδη σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από την r_0 (ακτίνα του υποτιθέμενου classicalon) και τα κύματα σκεδάζονται χωρίς ποτέ

να φτάνουν σε classicalization. Η ακτίνα r_0 πλέον ελαττώνεται σε μεγάλες ενέργειες ως $r_0 \to \frac{\lambda}{\omega}$.

Αντίστοιχα αν εμβαπτίσουμε μοντέλο Goldstone στην D.B.I. θεωρία:

$$L_{DBI} = \epsilon_1 L_0^{-4} \sqrt{1 + \epsilon_2 L_0^4 (\partial_m \phi)^2}, \quad \epsilon_{1,2} = \pm 1 \tag{1.61}$$

Για $\epsilon_1 = \epsilon_2$ έχω λύσεις τύπου classicalon (με r_0 σταθερά ολοκλήρωσης):

$$\partial\phi = \frac{r_0^2}{L_0^2} \frac{1}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \tag{1.62}$$

Η (1.70) μπορεί να προκύψει ως μία ενεργός θεωρία που περιγράφει σε χαμηλές ενέργειες την εμβάπτιση μίας τρισδιάστατης μεμβράνης σε πενταδιάστατο χωροχρόνο, με ϕ τύπου Goldstone αναλλοίωτο σε μεταθέσεις. Για να ενσωματώσουμε ασθενώς συζευγμένη θεωρία υποχρεωτικά πρέπει να είναι $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$. Αναπτύσσοντας την ρίζα παίρνουμε:

$$L = \epsilon_1 L_0^{-4} = \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{1}{2} (\partial_m \phi)^2 - \epsilon_1 \epsilon_2^2 \frac{L_0^4}{4} (\partial_m \phi)^4 + ... \tag{1.63}$$

Ο πρώτος όρος είναι η τάση της μεμβράνης αν θέσουμε $\epsilon_1 = -1$. Για να πάρουμε θετικό κινητικό όρο πρέπει να θέσουμε επίσης $\epsilon_2 = -1$. Σε αυτή την περίπτωση το πρόσημο του τρίτου όρου έχει ήδη καθοριστεί και είναι αυτό που δεν επιτρέπει λύσεις classicalon. Παρατηρούμε ξανά το ίδιο: ασθενώς-συζευμένη συμπλήρωση στο υπεριώδες είναι δυνατή μόνο για το πρόσημο που δεν επιτρέπει classicalons και αντίστροφα.

Έγινε νωρίτερα αναφορά και σε ένα φαινόμενο, που ονομάστηκε declassicalization. Αυτό επιτυγχάνεται όταν ενσωματώσουμε στην θεωρία μας ασθενώς-συζευμένη συμπλήρωση στο υπεριώδες και καθιστά αναποτελεσματική και άρα αδύνατη την δημιουργία classicalons. Θα μπορούσε τότε να υπάρξει και η περίπτωση το σύστημα να εμφανίζει classicalization για ένα πεπερασμένο διάστημα ενεργειών και οπότε αυξανόμενης της ενέργειας να μεταβαίνει από την κβαντική στην κλασική περιοχή και πάλι πίσω στην κβαντική; Μέσα σε αυτό το πεπερασμένο διάστημα (classicality window) θα ισχύει $r_0 \gg r_d, L_0$. Οι θεωρίες που εμφανίζουν το φαινόμενο της classicalization υπό αυτό το πρίσμα θα είναι μία ειδική ομάδα θεωριών στην οποία το classicality window είναι άπειρο και η παραπάνω συνθήκη ισχύει αυθαιρέτως βαθειά στο υπεριώδες.

Ας πάρουμε λοιπόν για παράδειγμα μία θεωρία με εξισώσεις κίνησης (1.69). Στο όριο $m \to \infty$ έχουμε classicalization για $\omega \gg L_0^{-1}$. Για πεπερασμένη μα μεγάλη μάζα $m \gg L_0^{-1}$ παύει να προκαλείται classicalization σε σκέδαση για συχνότητες πάνω από μία κρίσιμη ενέργεια κατωφλίου ω_d. Για ελεύθερο σφαιρικό κύμα που καταρρέει ισχύει ότι:

$$\partial^m \left[\partial_m \phi \left(1 + 2L_0^4 \frac{m^2}{\Box + m^2} (\partial_m \phi)^2 \right) \right] = 0 \tag{1.64}$$

Έτσι για δεδομένη ω, στον διαδότη κυριαρχεί το $\Box$ σε αποστάσεις $r \ll r_d(\omega) = \omega / m^2$ που θα είναι και η ακτίνα της de-classicalization (κβαντικό μήκος). Για να έχουμε classicalization στο σύστημα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $r_d(\omega) \ll r_0(\omega)$. Αν $r_d(\omega) \gg r_0(\omega)$ προκύπτει κβαντικό σύστημα. Άρα το πάνω όριο του classicality window είναι αυτό για το οποίο $r_d(\omega_d) = r_0(\omega_d)$. Το classicality window λοιπόν δεν είναι άλλο από το: $L_0^{-1} < \omega < \omega_d$. Η ακριβής τιμή του ω_d εξαρτάται από το μοντέλο και στο δικό μας παράδειγμα είναι $\omega_d = L_0^2 m^3$. Για ενέργειες μεγαλύτερες από την w_d δεν έχω πλέον classicalization και η θεωρία γίνεται κβαντική ξανά.

Συνοψίζοντας την εικόνα που προέκυψε από την ιδέα του classicality window: Σε χαμηλές ενέργειες ($\omega \ll L_0^{-1}$) έχουμε κβαντική θεωρία πεδίου που διαδίδεται ένας ασθενώς συζευγμένος βαθμός ελευθερίας, το ϕ. Σε ενέργειες μεγαλύτερες από το L_0^{-1} η θεωρία εισέρχεται σε μία κλασική περιοχή. Η σκέδαση λαμβάνει χώρα σε μακροσκοπική απόσταση r_0 που είναι μεγαλύτερη από όλες τις κβαντικές κλίμακες μήκους του προβλήματος. Η σκέδαση σε τέτοιες ενέργειες κυριαρχείται από την δημιουργία εκτενών διατάξεων του ϕ, που συγκροτούνται από πολλά κβάντα ϕ σε coherent υπέρθεση. Εξαιτίας του ότι τα κβάντα αυτά πηγάζουν από την αυτό-αλληλεπίδραση ενέργειας σε υψηλότερες ενέργειες τείνουν να γίνονται ολοένα μεγαλύτερα. Στην περίπτωση άπειρης μάζας (ή $\omega_d \to \infty$) έχουμε θεωρία που εμφανίζει classicalization με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Αν ή μάζα είναι πεπερασμένη (πεπερασμένη ω_d) η θεωρία πρέπει να ξαναγίνεται κβαντική πάνω από την κλίμακα ω_d. Η κβαντική θεωρία χρειάζεται βέβαια τους αντίστοιχους κβαντικούς βαθμούς ελευθερίας, και αυτοί δεν μπορούν να είναι τα κβάντα ϕ, μια και σε τέτοιες ενέργειες η ενεργή τους σύζευξη θα είναι ισχυρότατη, καθώς ενισχύεται από δυνάμεις $(L_0 \omega_d)^2$.

Τέλος, ίσως αρμόζει και ένα σχόλιο περί της superluminality που παρουσιάζουν τέτοιες θεωρίες. Συνήθως θεωρούμε οτι το πρόβλημα της superluminality είναι οτι επιτρέπεται ο σχηματισμός κλειστών χρονοειδών καμπηλών, και ένας παρατηρητής μπορεί να στείλει σήματα στο παρελθόν του. Για να

συμβεί κάτι τέτοιο πρέπει κάποιος από του παρατηρητές να προωθηθεί με πολύ μεγάλη ταχύτητα σε σχέση με το υπόβαθρο, για την ακρίβεια με ταχύτητα πάνω από το όριο αποκοπής. Πρέπει όμως να βεβαιωθούμε οτι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στον παρατηρητή και το υπόβαθρο επιτρέπει την εν λόγο προώθηση. Για συμπλήρωση στο υπεριώδες με Wilsonian, ασθενώς συζευγμένη φυσική επιτρέπεται, επειδή η ενεργός διατομή μικραίνει σημαντικά σε μεγάλες ενέργειες. Αντιθέτως για θεωρίες που δίνουν classicalization δεν επιτρέπεται επειδή η προώθηση θα προκαλεί σε μεγάλες ενέργειες δημιουργία πολλών μαλακών κβάντων που θα την περιορίζουν.

2 Εφαρμογές της classicalization.

2.1 Καθιερωμένο Πρότυπο

Ένα από τα σημαντικότερα κίνητρα για την θεμελίωση της όλης θεωρίας περί classicalization αποτέλεσε η εκτίμηση ότι θα μπορούσε να είναι μία εναλλακτική λύση για την συμπλήρωση του Καθιερωμένου Προτύπου στο υπεριώδες. Αυτή η εναλλακτική πρόταση διατυπώθηκε πριν ανακαλυφθεί το μποζόνιο Higgs στον LHC, έχει ενδιαφέρον όμως να παρακολουθήσουμε το σκεπτικό της, μια και αποτελεί την πιο διδακτική και σαφή εφαρμογή του φαινομένου. Ακόμα και στην εποχή όπου το Higgs έχει ανακαλυφθεί, το φαινόμενο της classicalization (εφόσον συμβαίνει) θα μπορούσε να στοχεύσει πλέον το πρόβλημα της ιεραρχίας, και να δώσει μία διαφορετική οπτική γωνία.

Πρώτα θα μελετήσουμε πως θα ήταν το Καθιερωμένο Πρότυπο χωρίς το Higgs. Για το διαμήκες διανυσματικό πεδίο W_m με την παρουσία του Higgs θα έχουμε:

$$L = -\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + D_m H^* D^m H + \frac{1}{v^4}(D_m H^* D^m H)^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(H^* H - \frac{v^2}{2}\right)^2 \quad (2.1)$$

όπου η συναλλοιωτή παράγωγος είναι: $D_m = \partial_m - igW_m$ και ως προς τους βαθμούς ελευθερίας Higgs (ρ) και Goldstone (ϕ) έχουμε:

$$\Phi \to H = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \exp \frac{i\phi(x)}{v} \quad (2.2)$$

Το μποζόνιο βαθμίδας παίρνει μάζα $m_w = gv$ και το Higgs έχει μάζα $mH = \lambda v$. Η διαταρακτική μοναδιακότητα παραβιάζεται σε κλίμακα $M_0 = v = \frac{m_w}{g}$. Κρατώντας τις κλίμακες m_w, M_0 σταθερές παίρνουμε το όριο όπου το Higgs έχει αποσυζευχτεί όταν $\lambda \to \infty$:

$$L = -\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{2}m_w^2 W_m W^m + \frac{g^4}{4}\left(W_m W^m\right)^2 - gW_m j^m \quad (2.3)$$

Αυτή δεν είναι παρά η λαγκραντζιανή Proca για διανυσματικό πεδίο W_m :

$$L = -\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{2}m_w^2 W_m W^m \quad (2.4)$$

μαζί με την αλληλεπίδραση:

$$\frac{g^4}{4}\left(W_m W^m\right)^2 - g W_m j^m \tag{2.5}$$

Χωρίς την αλληλεπίδραση διαδίδονται 3 βαθμοί ελευθερίας. Μπορούμε να αναλύσουμε το πεδίο ως:

$$W_m = \tilde{W}_m + \frac{1}{m_w}\partial_m \phi \tag{2.6}$$

που τώρα $W_m = \tilde{W}_m + \frac{1}{m_w}\partial_\phi$ η κάθετη και η διαμήκης πόλωση αντίστοιχα. Το πεδίο Stuckelberg ϕ παίρνει κινητικό όρο από τον όρο μάζας για τα W. Οι εξισώσεις κίνησης για την (2.3) είναι:

$$\partial^m \left[W_m\left(m_w^2 + g^4 W_n W^n\right)\right] = g\partial^m j_m \tag{2.7}$$

Η 4ης δύναμης αλληλεπίδραση δημιουργεί την ακόλουθη σύζευξη για τις διαμήκεις συνιστώσες:

$$\frac{g^4}{4m_w^4}\left(\partial_m \phi \partial^m \phi\right)^2 \tag{2.8}$$

και η ανταλλαγή W-μποζονίων επάγει την αλληλεπίδραση:

$$\frac{g^2 \partial^m j_m \partial^n j_n}{m_w^2\left(m_w^2 + \Box\right)} \tag{2.9}$$

Οι (2.8) και (2.9) παραβιάζουν την διαταρακτική μοναδιακότητα για αποστάσεις μικρότερες από $L_0 = \frac{g}{m_w}$. Αν υποθέσουμε ότι ένα πεδίο ϕ δημιουργείται από σημειακή πηγή ισχύος $\frac{1}{L}$ της μορφής $\partial^m J_m = \frac{\delta(r)}{L}$, μπορούμε να αποσυζεύξουμε το κάθετο πεδίο βαθμίδας παίρνοντας το όριο $g \to 0$ και $L_0 =$ σταθερό. Σε αυτή την περίπτωση θα πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\partial_m \phi\left[1 + L_0^4 (\partial_n \phi)^2\right] = \frac{Q}{r^2} \tag{2.10}$$

που οδηγούν σε λύση που υποδηλώνει ότι οι πηγές γίνονται κλασικές σε απόσταση $r_0 = L_0\sqrt{\frac{L_0}{L}}$. Παρόλο που η σκέδαση W μποζονίων διαταρακτικά παραβιάζει την μοναδιακότητα σε αποστάσεις μικρότερες από $\frac{g}{m_w}$, μηδιαταρακτικά παρατηρούμε ότι σε μικρότερες αποστάσεις η αλληλεπίδραση γίνεται κλασική και στην σκέδαση κυριαρχεί η δημιουργία εκτεταμένων αντικειμένων. Οπότε, στο Καθιερωμένο Πρότυπο χωρίς το Higgs περιμένουμε η

συμπλήρωση στο υπεριώδες να γίνεται μέσα από την classicalization των W μποζονίων.

Προφανώς στο πραγματικό Καθιερωμένο Πρότυπο έχουμε πιο πολύπλοκη δομή από αυτή που μελετήθηκε και μη-αβελιανή θεωρία.

$$\partial_m H^{\alpha *} \partial^m H_\alpha - \frac{\lambda^2}{2}\left(H^{\alpha *} H_\alpha - \frac{v^2}{2}\right)^2 - H_\alpha \bar{\psi}^a \psi + i\bar{\psi}\gamma_m \partial^m \psi_\alpha + ... \tag{2.11}$$

Για να οδηγηθούμε σε classicalization πρέπει να προσθέσουμε στην δράση του καθιερωμένου προτύπου αναλλοίωτα της μορφής:

$$v^{-4}(D_m U^+ D_m U) + \frac{1}{4}(D_m U^+ D_m U)^2 + ... \tag{2.12}$$

Όπου τα $U(x)_a$ με $(a = 1,2)$ είναι η διπλέτα $SU(2)$ Stuckeberg που προκύπτει μετά από τον τοπικό μετασχηματισμό $SU(2)$ σε μία σταθερή διπλέτα $(0, v)$. Στην συνέχεια παίρνουμε το όριο $\lambda \to \infty$ κρατώντας το v σταθερό. Σε αυτό το όριο ο ακτινικός βαθμός ελευθερίας ρ (Higgs) αποσυζεύγνυται μεταμορφώνοντας την διπλέτα Higgs σε διπλέτα Stuckelberg $H_\alpha \to \frac{v_\alpha v}{\sqrt{2}}$, και έχουμε στο Καθιερωμένο Πρότυπο:

$$\frac{v^2}{2}(D_m U^+ D_m U) + \frac{1}{4}(D_m U^+ D_m U)^2 + ... \tag{2.13}$$

Οι διαδιδόμενοι βαθμοί ελευθερίας είναι και πάλι οι ίδιοι χωρίς το Higgs. Η unitarity παραβιάζεται διαταρακτικά πάνω από κλίμακα v αλλά βαθειά στο υπεριώδες την επανακτάμε λόγω classicalization. Η θεωρία πάνω από αυτή την κλίμακα δεν είναι πλέον κβαντική θεωρία πεδίου με Wilsonian συμπεριφορά, αλλά θεωρία εκτεταμένων κλασικών αντικειμένων. Αν αγνοήσουμε τα φερμιόνια, το μέρος του καθιερωμένου προτύπου που εξαρτάται από το Higgs είναι:

$$\frac{1}{2}(\partial_m \rho)^2 + \frac{\rho^2}{2}(D_m U^+ D_m U) - \frac{\lambda^2}{8}(\rho^2 - v^2)^2 \tag{2.14}$$

Αν ολοκληρώσουμε πάνω στο Higgs χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης $\rho^2 = v^2 + \frac{2}{\lambda^2}(D_m U^+ D_m U)$ προκύπτει :

$$\frac{v^2}{2}(D_m U^+ D_m U) + \frac{1}{2\lambda^2}(D_m U^+ D_m U)^2 \tag{2.15}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος περιορίζεται κατά λ^2, και άρα στο όριο της άπειρης μάζας Higgs θα εξαφανίζεται στο κανονικό Καθιερωμένο Πρότυπο. Η classicalization αντιστοιχεί άρα στην περίπτωση που παρόλο που δεν έχουμε πλέον το ίδιο το Higgs, έχουμε την αλληλεπίδραση που αυτό θα μετέδιδε. Για σκέδαση της διαμήκους συνιστώσας των W, που ισοδυναμεί με μποζόνιο Goldstone, η λαγκραντζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου θα ισοδυναμεί (gaugeless limit) με πρότυπο Goldstone με αυθόρμητη ρήξη της καθολικής $SU(2)$ συμμετρίας:

$$\partial_m H^{\alpha *} \partial^m H_\alpha - \frac{\lambda^2}{2}\left(H^{\alpha *} H_\alpha - \frac{v^2}{2}\right)^2 \tag{2.16}$$

όπου $H_{\alpha=1,2}$ είναι διπλέτα $SU(2)$ βαθμωτών πεδίων. Αν αναπαραστήσουμε την διπλέτα αυτή μέσω των βαθμών ελευθερίας Higgs και Goldstone:

$$H_\alpha = v_\alpha(x)\frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} = \Big(\cos\theta \exp(i\alpha), -\sin\theta\exp(-i\beta)\Big)\frac{\rho}{\sqrt{2}} \tag{2.17}$$

όπου α, β, θ είναι τα 3 πεδία Goldstone της $SU(2)$ θα καταλήξουμε στην εξής λαγκραντζιανή για το Higgs:

$$\frac{1}{2}(\partial_m \rho)^2 + \frac{\rho^2}{2}(\partial_m U^+ \partial_m U) - \frac{\lambda^2}{8}(\rho^2 - v^2)^2 \tag{2.18}$$

όπου ισχύει: $(\partial_m U^+ \partial_m U) = \left[(\partial_m\theta)^2 + \cos^2\theta(\partial_m\alpha)^2 + \sin^2\theta(\partial_m\beta)^2\right]$

Η εξίσωση κίνησης του Higgs εκφυλίζεται στις χαμηλές ενέργειες στον αλγεβρικό περιορισμό: $\rho^2 = v^2 + \frac{2}{\lambda^2}(\partial_m U^+ \partial_m U)$. Αν την χρησιμοποιήσουμε για να ολοκληρώσουμε στο Higgs, κάνοντας επίσης την αντικατάσταση $U \to vU$ προκύπτει η ενεργή θεωρία:

$$\frac{1}{2}(D_m U^+ D_m U) + \frac{1}{2\lambda^2 v^4}(D_m U^+ D_m U)^2 \tag{2.19}$$

Αυτή είναι αντίστοιχη της (1.37) με $\epsilon = 1$ και $L_0^4 = \frac{2}{\lambda^2 v^2}$. Μπορούμε να επαναφέρουμε την βαθμίδα αντικαθιστώντας την κανονική παράγωγο με τις συναλλοιωτές της ομάδας $SU(2)xU(1)$.

Ας δούμε τώρα τι διαφορές θα έδινε αυτό το Καθιερωμένο Πρότυπο χωρίς το Higgs από φαινομενολογική σκοπιά. Το πεδίο classicalizer (διαμήκες W) θα θεωρηθεί προσεγγιστικά άμαζο για τις ενέργειες που εξετάζουμε. Είναι καταρχήν σημαντικό να αναφερθούμε στην δυναμική των καταστάσεων κοντά στην κλίμακα L_0. Σε κάθε θεωρία που δίνει classicalization πάνω από

μία ενέργεια $\frac{1}{L_0}$ πρέπει να υπάρχουν και κβαντικοί συντονισμοί με μάζες σε αυτή την περιοχή για να γίνεται αυτή η μετάβαση από κβαντικό σε κλασικό επίπεδο. Συγκεκριμένα αναμένουμε μία σειρά συντονισμών που ξεκινά από M_0. Οι καταστάσεις γίνονται ολοένα πιο κλασικές όσο η μάζα αυξάνεται, και οι ιδιότητές τους ολοένα λιγότερο ευαίσθητες στα αναλλοίωτα υψηλότερης τάξης στη δράση. Η unitarization της σκέδασης σε υψηλές ενέργειες δεν εξαρτάται από την δομή των τελεστών υψηλότερων διαστάσεων επειδή προέρχεται πλήρως από φυσική μεγάλων αποστάσεων. Η ακριβής δομή αυτών των τελεστών είναι ωστόσο καθοριστική για το φάσμα των κβαντικών συντονισμών κοντά στην κλίμακα M_0. Οι συντονισμοί που είναι πολύ βαρύτεροι από M_0 δεν επηρεάζουν τα παρατηρήσιμα μεγέθη της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης αλλά είναι απαραίτητοι για την επανάκτηση της unitarity σε υψηλές ενέργειες. Αντιθέτως οι συντονισμοί με μάζα κοντά στο M_0 δεν διαδραματίζουν κανένα ρόλο στην σκέδαση σε ενέργειες πολύ μεγαλύτερες από M_0 αλλά δίνουν σημαντικές συνεισφορές στις παραμέτρους ακρίβειας της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης. Το πείραμα βεβαίως είναι αυτό που θα καθορίσει αν η συμπλήρωση του καθιερωμένου προτύπου στο υπεριώδες γίνεται μέσω Higgs ή classicalization. Αν η σκέδαση των διαμήκων W γίνεται unitary μέσω Higgs , το πρόσημο της σύζευξης με τις τέσσερεις παραγώγους θα είναι θετικό. Στην αντίθετη περίπτωση η θεωρία θα αυτό-προστατεύεται με την δημιουργία classicalon. Το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό: το πρόσημο είναι θετικό και το Καθιερωμένο Πρότυπο συμπληρώνεται στο υπεριώδες με ασθενώς συζευγμένη θεωρία κατά Wilson, το Higgs.

Εφόσον υπάρχει το Higgs, μπορούμε να υποθέσουμε τώρα ότι αυτό είναι το πεδίο classicalizer, και τα classicalons που δημιουργεί είναι τα Higgsions. Δηλαδή το πεδίο Higgs θα συνεχίσει να θεωρείται θεμελιακό πεδίο, αλλά θα το χρησιμοποιήσουμε και ως πηγή της classicalization. Αυτό που χρειαζόμαστε σε αυτή την περίπτωση είναι το πεδίο Higgs να γίνεται κλασικό όταν ολοκληρώνουμε πάνω σε πηγές με ορμή που ξεπερνάει την M_0. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί προσθέτοντας τελεστές που θα κάνουν το Higgs να πηγάζει από τον τανυστή ενέργειας-ορμής κάποιου σωματιδίου του καθιερωμένου προτύπου. Η πιο απλή καθολική αλληλεπίδραση που μπορούμε να γράψουμε είναι οπότε η:

$$L_{int} = \frac{\kappa}{M_0^2} H^+ H T_m^m \tag{2.20}$$

Στην παραπάνω εξίσωση T_m^m είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής των πεδίων του καθιερωμένου προτύπου που πρέπει να υπολογιστεί τάξη προς τάξη σε

$\frac{1}{M_0}$, και κ μία σταθερά σύζευξης. Αν υποθέσουμε ένα εντοπισμένο προφίλ για τον T_m^m και κανονικοποίηση τέτοια ώστε η σφαιρικά ολοκληρωμένη του τιμή να είναι $\frac{1}{L}$, και ορίσουμε επίσης $2H^+H = [v+\rho(r)]^2$ προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης του Higgs παρουσία της πηγής:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \lambda^2 v^2\right)\rho(r) - \frac{\lambda^2}{2}[3v\rho^2(r) + \rho^3(r)] + ... = -\frac{3\kappa}{M_0^2 L^4}\Theta(L-r)[v+\rho(r)] \tag{2.21}$$

(έχουμε παραλείψει τις συζεύξεις υψηλότερης τάξης στην σχέση αυτή). Για επιλογή συνοριακής συνθήκης $\rho(\infty) = 0$, μικρό r και ασθενή σύζευξη παίρνουμε ασυμπτωτικά την λύση:

$$\rho(r) = \frac{\kappa v L_0^2}{rL}\exp(-\lambda v r) \tag{2.22}$$

Υπάρχουν σε αυτό το σημείο δύο ξεχωριστές υποπεριπτώσεις: Η πρώτη είναι να ισχύει $\kappa < 0$. Τότε η πηγή σπρώχνει το $\rho(r)$ σε αρνητικές τιμές καθώς $r \to 0$, αλλά αυτό δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από την τιμή $-v$ επειδή η αναμενόμενη τιμή του Higgs μηδενίζεται σε αυτό το σημείο. Η κλασική διάταξη είναι σαν σφαίρα ακτίνας $r_0 \sim \frac{L_0^2}{L}$ μέσα στην οποία η αναμενόμενη τιμή του Higgs μηδενίζεται. Η δεύτερη περίπτωση είναι να ισχύει $\kappa > 0$. Τότε το $\rho(r)$ παίρνει θετικές τιμές για $r \to 0$, και η αναμενόμενη τιμή του Higgs αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε την πηγή. Η αύξηση αυτή εξισορροπείται από τις αλληλεπιδράσεις υψηλότερης τάξης σε απόσταση $r_0 \to v\frac{L_0^3}{L}$. Σε κάθε περίπτωση αυτές οι τιμές του r_0 είναι μόνο αποδεκτές όσο είναι μικρότερες από το μήκος κύματος Compton του σωματιδίου Higgs στο κενό: $m_H^{-1} = (\lambda v)^{-1}$. Αυτό αυτόματα σημαίνει ότι θα πρέπει να έχουμε:

$$\lambda \ll \frac{L}{L_0^2 v} \quad , \quad \kappa < 0 \tag{2.23}$$

$$\lambda \ll \frac{L}{L_0^3 v^2} \quad , \quad \kappa > 0 \tag{2.24}$$

Με άλλα λόγια, η classicalization του Higgs απαιτεί κάποια ιεράρχηση ανάμεσα στην μάζα του Higgs και την κλίμακα M_0. Είναι προτιμότερο ένα ελαφρύ Higgs συνεπώς, αν θέλουμε η classicalization να λύνει το πρόβλημα της ιεραρχίας σε κλίμακα TeV. Αν το Higgs είναι το πεδίο classicalizer, για σκεδάσεις

ενέργειας $\sqrt{s} \gg M_0$ τα σωμάτια του καθιερωμένου προτύπου θα πρέπει να δίνουν κυρίως Higgsions με συνολική (περιεκτική) ενεργό διατομή:

$$\sigma \sim r_0^{-2} \simeq s L_0^4 \quad , \quad \kappa < 0 \tag{2.25}$$

$$\sigma \sim r_0^{+2} \simeq s v^2 L_0^6 \quad , \quad \kappa > 0 \tag{2.26}$$

Αυτή η ενεργός διατομή είναι αύξουσα συνάρτηση του $\sqrt{s}$, μέχρι να παγώσει στην τιμή $\sigma \sim mH^{-2}$ όταν η ενέργεια θα είναι $\sqrt{s} \sim \frac{1}{mHL_0^2}$ για $\kappa < 0$. Πάνω από αυτή την κλίμακα, η παραπάνω ενέργεια που βάζουμε στο σύστημα θα προκαλεί την παραγωγή ολοένα και βαρύτερων Higgsions, χωρίς ταυτόχρονα να μεγαλώνει το μέγεθός τους.

Τέλος, πρέπει να κάνουμε ένα σχόλιο για την μορφή της σύζευξης του Higgs με τα σωμάτια του καθιερωμένου προτύπου. Η μορφή αυτή περιορίζεται από την διατήρηση της γεύσης. Η πιο ασφαλής επιλογή θα ήταν λοιπόν να θεωρήσουμε καθολική σύζευξη του Higgs με τα σωμάτια του καθιερωμένου προτύπου. Τότε η παραγωγή Higgsions θα είναι καθολική ιδιότητα της σκέδασης με οποιοδήποτε σωμάτιο του καθιερωμένου προτύπου και τα Higgsions θα έχουν περίπου ίση πιθανότητα παραγωγής των διαφόρων ειδών σωματιδίων κατά την διάσπασή τους.

2.2 Classicalization Window και κβαντική χρωμοδυναμική.

Θεωρίες όπως η κβαντική χρωμοδυναμική εμφανίζουν ενδιαφέρουσες αναλογίες με το classicalization window. Τέτοιες θεωρίες, όπου οι μάζες των quark (m_q) είναι μεγαλύτερες από την κλίμακα Λ_{QCD} και εμφανίζουν το φαινόμενο του εγκλωβισμού, περιέχουν εκτεταμένα αντικείμενα, τους ηλεκτρικούς σωλήνες ροής ($fluxtubes$) της QCD. Αυτοί οι σωλήνες μπορεί να είναι είτε κλειστοί είτε να καταλήγουν σε βαριά quark. Ένας μακρύς σωλήνας μπορεί να σπάσει κβαντομηχανικά δημιουργώντας ζεύγη quark-antiquark, αλλά επειδή αυτά είναι βαριά η διαδικασία περιορίζεται εκθετικά . Το γεγονός όμως ότι έχουμε μη-μηδενική πιθανότητα διάσπασης περιορίζει το μέγεθος των σωλήνων και δημιουργεί μία κλίμακα αντίστοιχη με το πάνω όριο του classicality window, r_d. Για να ορίσουμε αυτό τον σωλήνα ως κλασικό αντικείμενο θα πρέπει ο χρόνος ζωής του να είναι πολύ μεγαλύτερος από το χαρακτηριστικό μήκος του. Έτσι θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε τον αναμενόμενο χρόνο ζωής και να προσδιορίσουμε την κλίμακα μήκους L_d πάνω από την οποία ο σωλήνας παύει να είναι κλασικός. Τότε θα πάρουμε μία εικόνα αντίστοιχη του classicality window:

$$\Lambda_{QCD} < \omega < \omega_d = L_d \Lambda_{QCD}^2 \tag{2.27}$$

Πρόκειται δηλαδή για μία μικροσκοπική θεωρία με ενεργή συμπεριφορά στην υψηλές ενέργειες που παραπέμπει σε μεγάλες αποστάσεις, και μπορεί να κατανοηθεί ως μία μετάβαση από κβαντικό σε κλασικό και ύστερα πίσω σε κβαντικό επίπεδο. Η τελική μετάβαση προκαλείται από την αστάθεια των εκτεταμένων αντικειμένων πάνω από ένα κρίσιμο μέγεθος (αντίστοιχα ενέργεια). Η σημαντική διαφορά είναι ωστόσο ότι στην QCD υψηλών ενεργειών τα βαριά quark μπορούν να σκεδαστούν σε οσοδήποτε μικρές αποστάσεις. Επειδή στην QCD δεν υπάρχουν άμαζα quark προκύπτει ένα χάσμα μάζας, και δεν υπάρχουν βαθμοί ελευθερίας που διαδίδονται στο βαθύ υπέρυθρο. Συνεπώς η classicalization των σωλήνων ροής στην οποία αναφερόμαστε δεν αποτελεί κάποιου είδους συμπλήρωση στο υπεριώδες θεωρίας τύπου Goldstone στις χαμηλές ενέργειες.

Για να κάνουμε την αναλογία ισχυρότερη πρέπει να πάρουμε quark με μικρές μάζες, πολύ μικρότερες της Λ_{QCD}. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια υπάρχει ήδη καλή περιγραφή της ενεργού θεωρίας σε χαμηλές ενέργειες μέσω μίας chiral λαγκραντζιανής για πιόνια. Η classicalization τώρα αναιρείται

για άλλο λόγο: οι σωλήνες ροής πλέον είναι πολύ ασταθείς. Και οι τρείς χαρακτηριστικές κλίμακες του classicality window γίνονται της ίδιας τάξης με αποτέλεσμα αυτό να καταρρέει και να εκφυλίζεται σε ένα σημείο.

2.3 Εφαρμογή των classicalons σε εντροπία και ολογραφία.

Είδαμε ήδη πως όταν σχηματιστεί μία μελανή οπή στην βαρύτητα Einstein, η διάσπασή της σε κβαντική κατάσταση λίγων σωματιδίων καταστέλλεται εκθετικά. Μπορούμε να κατανοήσουμε αυτή την καταστολή από τις ιδιότητες της εντροπίας και της θερμικότητας. Η πιθανότητα παραγωγής ζεύγους σωματιδίων υψηλής ενέργειας σε διαδικασία θερμικής εξάχνωσης μελανής οπής που θα αντιστοιχεί σε όλη την μάζα της μελανής οπής (M_{BH}) και θερμοκρασίας $T_H^{-1} \sim M_{BH}L_P^2$ καταστέλλεται τουλάχιστον από ένα παράγοντα Boltzmann :

$$\Gamma_{BH\to 2} \sim \exp -\frac{M_{BH}}{T_H} \sim \exp(-M_{BH}L_P)^2 \tag{2.28}$$

Η καθοριστική ιδιότητα μίας τέτοιας καταστολής είναι η classicality. Αν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο κλασικό, τότε η καταστολή των διασπάσεων σε ζεύγη σωματιδίων είναι φυσικό επακόλουθο. Η ισχυρότερη ένδειξη ότι το αντικείμενο αυτό είναι κλασικό, είναι ότι η μάζα της διάταξης είναι πολύ μεγαλύτερη από το αντίστροφο της ακτίνας του, r_0^{-1}, που σημαίνει ότι έχουμε να κάνουμε με coherent υπέρθεση πολλών μαλακών κβάντων. Τότε η διάσπαση μίας coherent κατάστασης N-σωματιδίων σε δύο κβάντα είναι $G_{N\to 2} \sim \exp(-N)$, και αναπαράγει σωστά τον παράγοντα Boltzmann (εντροπίας) για μελανές οπές, αλλά έχει γενικότερο νόημα.

Μία ενδιαφέρουσα ιδέα θα ήταν λοιπόν να ορίσουμε, με αφορμή τα classicalons, τον αριθμό των μαλακών κβάντων που παράγονται σε μία διαδικασία classicalization ως 'προάγγελο' της εντροπίας. Η προέλευση της εντροπίας της μελανής οπής υπό αυτή την έννοια, θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα της classicalization. Ο απλούστερος τρόπος να αποδώσουμε εντροπία σε μία μελανή οπή είναι να υπολογίσουμε πρώτα την θερμοκρασία ακτινοβολίας Hawking T_H και στην συνέχεια να ορίσουμε την εντροπία με τον κανόνα του Clausius: $T_H = \frac{\partial M}{\partial S_{BH}}$. Σε αυτό το σημείο δεν είναι όμως αυτονόητο τι θα επιλέξουμε να ορίσουμε ως εντροπία μελανής οπής. Αν ερμηνεύσουμε την μελανή οπή μάζας M ως μία μη-διαταρακτική κατάσταση του φάσματος της βαρύτητας Einstein, η σχετική εντροπία θα οριστεί ως ο λογάριθμος του αριθμού των κβαντικών καταστάσεων του συνόλου των αλληλεπιδρώντων κβάντων μήκους κύματος $\to r_0(M)$, που μπορούν να παραχθούν σε ενέργεια M. Επιλέξαμε τα συγκεκριμένα κβάντα με το φυσικό επιχείρημα ότι αυτά είναι οι κυρίαρχοι συντελεστές της classicalization σε απόσταση r_0. Ο αριθ-

μός αυτών των κβάντων είναι: $N(M) = Mr_0(M)$. Συνεπώς, η διάσταση του χώρου Hilbert των καταστάσεων που προκύπτει θα είναι $d = \xi N$, όπου ξ είναι αριθμός τάξης 1 που θα καθορίζεται από τον αριθμό καταστάσεων των περιεχομένων κβάντων της θεωρίας (πχ ελικότητες). Τότε οδηγούμαστε σε εντροπία $S(M) = N(M)ln(\xi)$, που σημαίνει ότι μπορούμε να την υπολογίσουμε όταν ξέρουμε την ακτίνα classicalization της βαρύτητας, που με τη σειρά της δίνεται από την ακτίνα Schwarzschild μάζας M.

Αυτή η προσέγγιση είναι αμιγώς στατιστική, χωρίς αναφορές σε ορίζοντες ή γεωμετρικές έννοιες. Το τελικό μας συμπέρασμα είναι ότι ο νόμος του Clausius που συσχετίζει την θερμοκρασία με την εντροπία εμφανίζεται ως συνέπεια της εκθετικής καταστολής διαδικασιών διάσπασης N μαλακών κβάντων σε λίγα σκληρά κβάντα $\sim (ML_P)^{-N(M)}$. Αν οριστεί έτσι όμως, η εντροπία μελανής οπής γενικεύεται για όλες τις κβαντικές θεωρίες πεδίου: Μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση εντροπίας $S(M)$ που εξαρτάται από την ενέργεια ως $Mr_0(M)$. Για τις επανακανονικοποιήσιμες θεωρίες θα έχουμε $r_0(M) \sim \frac{g}{M} \quad (g \ll 1)$ που συνεπάγεται ότι $S \sim 1$. Για αυτές τις θεωρίες δεν φαίνεται να έχει νόημα η ιδέα της εντροπίας. Για θεωρίες που εμφανίζουν το φαινόμενο της classicalization ωστόσο η $r_0(M)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του M για $M \gg L_0^{-1}$. Έτσι η εντροπία αρχίζει να σχηματίζεται όταν περάσουμε το όριο M_0 όπου παραβιάζεται η διαταρακτική unitarity.

Θα μπορούσαμε ίσως τότε να συμπεράνουμε κάτι και για το ολογραφικό όριο για την αποθήκευση πληροφοριών; Σε θεωρίες που εμφανίζουν classicalization, είδαμε ήδη ότι εμφανίζεται η χαρακτηριστική ακτίνα $r_0 = L_0(L_0\sqrt{s})^{\alpha}$, ας δούμε τώρα πως γίνεται ο εντοπισμός πληροφορίας σε περιοχή μεγέθους r. Επειδή η πληροφορία είναι κωδικοποιημένη σε σωμάτια, ένας τέτοιος εντοπισμός θα κόστιζε ενέργεια τουλάχιστον $\frac{1}{r}$. Συνεπώς για N τέτοια κομμάτια πληροφορίας η συνολική ενέργεια θα ήταν $\sqrt{s} \sim Nr$. Αυτό θα αποτελεί και το χαμηλότερο όριο της ενέργειας που απαιτείται, ασχέτως του πως αλληλεπιδρούν τα σωμάτια. Σε θεωρίες με ασθενή σύζευξη που δεν εμφανίζουν classicalization μπορούμε να αποθηκεύσουμε όσο μεγάλη ποσότητα πληροφορίας θέλουμε σε μία καθορισμένη περιοχή r, δίνοντας της την κατάλληλη ποσότητα ενέργειας. Σε μία θεωρία που εμφανίζει την ιδιότητα της classicalization ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό, επειδή η απαιτούμενη ενέργεια προκαλεί αύξηση της ακτίνας r_0 της εν λόγω πληροφορίας, που την κάνει να αντιστέκεται στον εντοπισμό. Η αποθηκευμένη ενέργεια θα είναι $r_0(N) = L_0(\frac{L_0 N}{r})^{\alpha}$. Μία δεδομένη ποσότητα πληροφορίας (N-κομμάτια) μπορεί να περιέχεται σε όγκο ακτίνας r μόνο εφόσον $r < r_0(N)$. Τότε η μέγιστη δυνατή ποσότητα πληρο-

φορίας που μπορεί να περιέχεται σε αυτό τον όγκο είναι: $N = (\frac{r}{L_0})^{1+\frac{1}{\alpha}}$. Αυτή η πληροφορία είναι η ελάχιστη δυνατή στην περίπτωση της βαρύτητας, όπου $\alpha = 1$ και για θεωρίες με ασθενή σύζευξη, χωρίς classicalization αντιστοιχεί στην τιμή $\alpha = 0$. Όσο αποτελεσματικότερο είναι το πεδίο classicalizer, τόσο περισσότερο περιορισμένη είναι η πληροφορία που χωράει σε δεδομένο όγκο. Ταυτόχρονα, ισχύει:

$$\Gamma_{classicalon \to few} \sim \exp(-\sqrt{s} r_0) \tag{2.29}$$

$$r_0(s) = L_0(\sqrt{(s)} L_0)^{\alpha}$$

$$\Gamma_{classicalon \to few} \sim \exp - \left(\frac{r_0}{L_0}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} \tag{2.30}$$

Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των classicalon, για δεδομένο μέγεθος, οι μελανές οπές είναι αυτές των οποίων η διάσπαση σε καταστάσεις λίγων σωματιδίων καταστέλλεται λιγότερο. Αυτό συμβαίνει επειδή όπως είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο οι μελανές οπές απαρτίζονται από τον μικρότερο αριθμό μαλακών κβάντων.

3 Αναζήτηση λύσεων.

3.1 Κλασικές λύσεις θεωριών DBI και Classicalon.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, για να παρουσιαστεί το φαινόμενο της classicalization χρησιμοποιήθηκαν κάποια παραδείγματα ιδεατής σκέδασης, μέσα από τα οποία παρατηρήσαμε σε ποιο μήκος r_0 οι διορθώσεις από την σκέδαση στο αρχικό κυματοπακέτο γίνονται σημαντικές. Η λύση που χρησιμοποιήθηκε τότε ήταν μία προσεγγιστική λύση των εξισώσεων κίνησης. Ήρθε η ώρα να αναζητήσουμε μία λύση με πιο συστηματικό τρόπο. Άλλωστε περιμένει κανείς ότι η μορφή των διαφορικών εξισώσεων κίνησης και οι λύσεις τους θα μας δίνουν έστω κάποια στοιχεία για να κρίνουμε κατά πόσον η σκέδαση μπορεί να δώσει πληροφορία για μήκος μικρότερο από το r_0. Η μελέτη θα επικεντρωθεί σε δύο από τις σημαντικότερες θεωρίες που εμφανίζουν classicalization: την DBI (1.24) και την Classicalon (1.37).

Ξεκινώντας από την λαγκραντζιανή για την Classicalon

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 - \delta_1 \frac{L_0^4}{4}\left((\partial_m \phi)^2\right)^2 \tag{3.1}$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης:

$$\partial^m \left[\partial_m \phi \left(1 - \delta_1 L_0^4 (\partial_n \phi)^2\right)\right] = 0 \tag{3.2}$$

βρήκαμε ότι σε διαδικασία σκέδασης με σφαιρικό κύμα που καταρρέει προς την αρχή των αξόνων της μορφής

$$\phi_0(t,r) = \frac{A}{r}\exp\left[-\frac{(r+t-r_0)^2}{\alpha^2}\right] \tag{3.3}$$

Αναπτύσσοντας την ϕ σε σειρά ολοένα λιγότερο σημαντικών διορθώσεων (ϕ_i) πάνω στην ελεύθερη λύση (ϕ_0) διαταρακτικά προκύπτει η απόσταση r_0 όπου θα ισχύει $\phi_0 \sim \phi_1$ (classicalization radius) :

$$r_0 \sim L_0 \left(\frac{A^2 L_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.4}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν την μορφή:

$$(1 - 3\lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2)\phi_{tt} - (1 - \lambda\phi_t^2 + 3\lambda\phi_r^2)\phi_{rr} + 4\lambda\phi_r\phi_t\phi_{tr} = \frac{2\phi_r}{r}(1 - \lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2) \tag{3.5}$$

όπου $\lambda = \delta L_0^4$ και οι κάτω δείκτες συμβολίζουν μερικές παραγώγους.

Εξετάζουμε την περίπτωση που $\lambda < 0$ γιατί, σύμφωνα με την ανάλυση του πρώτου μέρους, αυτό είναι το κατάλληλο πρόσημο που θα δώσει ολοκλήρωση στο υπεριώδες μέσω classicalization. Οι αρχικές συνθήκες για την συγκεκριμένη λύση είναι:

$$\phi(0,r) = \phi_0(0,r) \quad , \quad \partial_t\phi(0,r) = \partial_t\phi_0(0,r) \tag{3.6}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το r_0 είναι μεγαλύτερο από κάθε άλλη φυσική κλίμακα.

Δεν μπορούμε να εμπιστευτούμε την λύση που προκύπτει από το διαταρακτικό ανάπτυγμα από το σημείο r_0 και μετά (ενδεχομένως και ακόμα νωρίτερα), επειδή οι μη-γραμμικότητες γίνονται πολύ σημαντικές. Άλλωστε έτσι ακριβώς ορίσαμε την απόσταση r_0! Μας ενδιαφέρει η μετεξέλιξη του συστήματος, τι αλλάζει στο αρχικό κυματοπακέτο μετά από την απόσταση r_0. Υπάρχει σκέδαση στο r_0; Σκέδαση και για $r < r_0$; Διάδοση για αποστάσεις $r < r_0$; Για να απαντήσουμε τα παραπάνω ερωτήματα ας γράψουμε πρώτα την διαφορική εξίσωση στην τυποποιημένη μορφή για μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

$$A(\phi_t,\phi_r)\phi_{tt} + B(\phi_t\phi_r)\phi_{tr} + C(\phi_t,\phi_r)\phi_{rr} = D(\phi_t,\phi_r,r), \tag{3.7}$$

$$A(\phi_t,\phi_r) = 1 - 3\lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2$$
$$B(\phi_t\phi_r) = 4\lambda\phi_t\phi_r$$
$$C(\phi_t,\phi_r) = -(1 - \lambda\phi_t^2 + 3\lambda\phi_r^2)$$
$$D(\phi_t,\phi_r,r) = \frac{2\phi_r}{r}(1 - \lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2)$$

Ο τύπος αυτής της εξίσωσης καθορίζεται από την διακρίνουσα

$$\Delta = B^2 - 4AC = 12\left(\frac{1}{3} - \lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2\right)(1 - \lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2) \tag{3.8}$$

Όταν ισχύει $\Delta > 0$ η εξίσωση είναι υπεροβολική και έχει κυματοειδείς λύσεις που εκφράζουν διαδιδόμενα κύματα. Για $\Delta = 0$ η εξίσωση είναι παραβολική. Τέλος για $\Delta < 0$ η εξίσωση είναι ελλειπτική και δεν έχει λύσεις διαδιδόμενα κύματα. Η εξίσωση αυτή ανάλογα με την επιλογή της $\phi(r,t)$ μπορεί να εντάσσεται σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω κατηγορίες. Επίσης κατά την χρονική της εξέλιξη μπορεί να αλλάζει τύπο και συμπεριφορά, είναι

δηλαδή μεικτού τύπου. Η περιοχή στην οποία η εξίσωση γίνεται ελλειπτική αντιστοιχεί στην γραμμοσκιασμένη περιοχή στο επίπεδο (t, r). Η απόσταση στην οποία η εξίσωση αλλάζει τύπο θα δίνεται για $\Delta = 0$ χρησιμοποιώντας την μορφή (3.3) για την λύση ϕ:

$$\tilde{r}^4 = -k\tilde{\lambda}A^2 \exp\left(-2\tilde{\epsilon}^2\right)(1 + 4\tilde{r}\tilde{\epsilon}) \tag{3.9}$$

όπου $\tilde{r} = \frac{r}{\alpha}$, $\tilde{r}_0 = \frac{r_0}{\alpha}$, $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha^4}$, $\tilde{\epsilon} = \tilde{r} + \tilde{t} - \tilde{r}_0$ και το k παίρνει τιμές 1 ή 3. Αν υποθέσουμε ότι $\tilde{r}|\tilde{\epsilon}| \gg 1$ και $\epsilon \simeq 1$. Η λύση που προκύπτει είναι:

$$\tilde{r_0} \simeq \left(|\tilde{\lambda}|A^2\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.10}$$

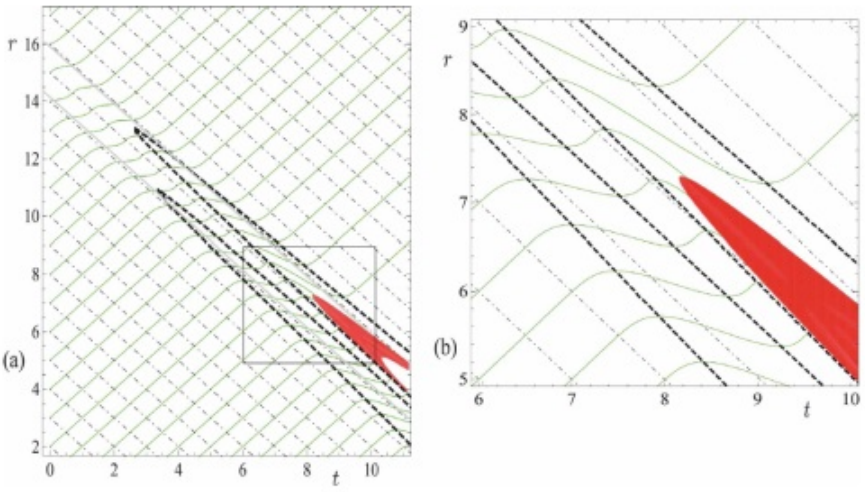

FIG. 2: The characteristics of the field equation (8) for $a = 1$, $A = 10$, $r_0 = 15$ and $\lambda = -1$. The panel (b) is a magnification of the area denoted by a square in panel (a).

Η μορφή των χαρακτηριστικών για πρότυπο με $\alpha = 1$, $A = 10$, $r_0 = 15$ και $\lambda = -1$ απεικονίζεται στο σχήμα. Οι εισερχόμενες χαρακτηριστικές παραμένουν σε καλή προσέγγιση γραμμικές και παύουν να υπάρχουν στην γραμμοσκιασμένη περιοχή. Οι εξερχόμενες χαρακτηριστικές παραμορφώνονται σημαντικά κοντά στην γραμμοσκιασμένη περιοχή. Επίσης, ενώ κοντά στον άξονα r οι χαρακτηριστικές ισαπέχουν, καθώς προσεγγίζουμε την γραμμοσκιασμένη περιοχή παρατηρούμε ότι πλησιάζουν μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι διακριτά σημεία της εξερχόμενης διάταξης τείνουν να συσσωρεύονται χωρικά όταν περνούν από την εν λόγω περιοχή, σχηματίζεται δηλαδή κάτι σαν μέτωπο κρουστικού κύματος (shock front). Για μεγάλους χρόνους t τα

σημεία απομακρύνονται ξανά. Η ταχύτητα $\frac{dr}{dt}$ μηδενίζεται στα σημεία των χαρακτηριστικών όπου $C = 0$ (παχιές διακεκομμένες γραμμές).

Αυτό που μπορούμε μέχρι στιγμής να συμπεράνουμε είναι ότι κατά την μετάβαση από υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις σε ελλειπτικές που παρατηρείται στα παραπάνω σχήματα για την συγκεκριμένη θεωρία περιμένουμε να έχουμε αντίστοιχα μετάβαση από διάδοση σε σκέδαση. Αν η σκέδαση στην γραμμοσκιασμένη περιοχή μας απαγορεύει να δούμε τι συμβαίνει σε αποστάσεις μικρότερες της r_0 η σκέψη περί classicalization φαίνεται να έχει βάση και για τις πλήρεις λύσεις.

Ας μελετήσουμε τώρα την θεωρία τύπου DBI. Σύμφωνα με την ανάλυση του πρώτου μέρους η κανονική DBI δεν επιδέχεται συμπλήρωση στο υπεριώδες μέσω classicalization. Δεν περιμένουμε να έχει λύσεις classicalons και θα πρέπει η σκέδαση να μπορεί φτάσει σε αυθαιρέτως μικρές αποστάσεις για μεγάλες ενέργειες. Αναζητούμε αν με μία ανάλυση της μορφής των διαφορικών μπορούμε να εξάγουμε κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα όπως έγινε πριν με την Classicalon. Η λαγκρατζιανη είναι η:

$$L = -\frac{1}{\delta_2 L_0^4}\sqrt{1-\delta_2 L_0^4(\partial_m\phi)^2} \tag{3.11}$$

με $\delta = \pm 1$ και οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης:

$$\partial^m\left[\frac{\partial_m\phi}{\sqrt{1-\delta_2 L_0^4(\partial_n\phi)^2}}\right] \tag{3.12}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή:

$$(1+\lambda\phi_r^2)\phi_{tt} - (1-\lambda\phi_t^2)\phi_{rr} - 2\lambda\phi_r\phi_t\phi_{tr} = \frac{2\phi_r}{r}(1-\lambda\phi_t^2+\lambda\phi_r^2) \tag{3.13}$$

όπου $\lambda = L_0^4$ και έχουμε υποθέσει ότι :

$$1-\lambda\phi_t^2+\lambda\phi_r^2 \geq 0 \tag{3.14}$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (7) με:

$$A(\phi_t,\phi_r) = 1+3\lambda\phi_r^2$$
$$B(\phi_t\phi_r) = -2\lambda\phi_t\phi_r$$

$$C(\phi_t, \phi_r) = -(1 - \lambda\phi_t^2)$$

$$D(\phi_t, \phi_r, r) = \frac{2\phi_r}{r}(1 - \lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2)$$

Ο τύπος της διαφορικής εξίσωσης καθορίζεται από την διακρίνουσα

$$\Delta = \frac{1}{4}(B^2 - 4AC) = 1 - \lambda\phi_t^2 + \lambda\phi_r^2 \tag{3.15}$$

Μπορούμε να βρούμε αναλυτικές λύσεις $\phi = \phi(r)$ για αυτή την εξίσωση που θα είναι της μορφής

$$\phi_r = \pm\frac{c}{\sqrt{r^4 - \lambda c^2}} \tag{3.16}$$

όπου $c > 0$ μία σταθερά ολοκλήρωσης. Μπορούμε επίσης να ολοκληρώσουμε αριθμητικά τις διαφορικές εξισώσεις. Το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται είναι από αριθμητική ολοκλήρωση με μεταβλητό leap-frog scheme.

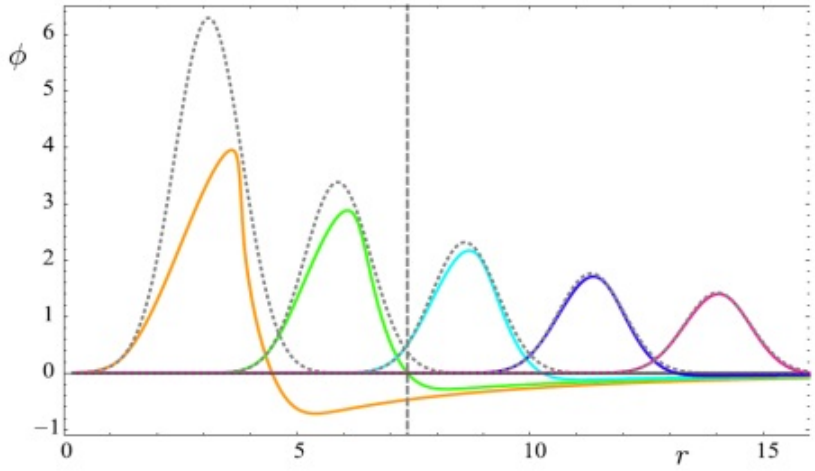

Figure 1. The nonlinear wavepacket at various times (solid lines) vs. the linear wavepacket (dotted lines), in the context of the DBI theory, described by eq. (3.1), with $\delta_2 = 1$, $L_* = 1$. The initial wavepacket has $A = 20$, $a = 1$. The vertical dashed line denotes the classicalization radius.

Αυτό το ιδεατό πείραμα σκέδασης δεν είναι μαθηματικά πολύ αυστηρά θεμελιωμένο. Προκύπτουν προβλήματα και δυσκολίες όπως ο σχηματισμός μετώπου κρουστικού κύματος από ένα σημείο και μετά (εκεί διακόπτεται η αριθμητική ολοκλήρωση). Απεικονίζεται η περίπτωση $\delta_2 = 1$ και $\lambda > 0$ με κανονικοποίηση $L_0 = 1$, $\alpha = 1$, $A = 20$. Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στο μη γραμμικό πεδίο $\phi(r, t)$ που προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης

(3.16). Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην εξέλιξη της αρχικής διάταξης $\phi_0(t,r)$ αν αγνοήσουμε τους μη-γραμμικούς όρους $(\lambda = 0)$.

Όπως ήταν αναμενόμενο, για μικρά t όπου $r \gg r_0$ οι δύο αυτές διατάξεις ταυτίζονται. Η μη-γραμμική διάταξη παραμορφώνεται εμφανώς καθώς το κύμα πλησιάζει στην απόσταση r_0. Στην τελική διάταξη στο σχήμα 1 βλέπουμε ότι το άκρο του κυματοπακέτου φτάνει σε αποστάσεις τάξης L_0. Το πίσω του μέρος εμφανίζει μακριά ουρά που εκτείνεται μέχρι αποστάσεις μεγαλύτερες από την r_0. Ταυτόχρονα το μέρος πίσω από την κορυφή του κύματος είναι πολύ απότομο, που είναι ένδειξη ότι σχηματίζεται μέτωπο κρουστικού κύματος. Συνεπώς, το αποτέλεσμα που προκύπτει από την ανάλυση είναι συμβατό με τις προβλέψεις του 1ου κεφαλαίου: η εσωτερική περιοχή $(r \ll r_0)$ δεν προστατεύεται σε διαδικασίες σκέδασης για την συγκεκριμένη επιλογή προσήμου.

Ας δούμε τώρα τι θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε για την wrong-sign-DBI $(\delta < 0)$. Αν εφαρμόζαμε την παραπάνω αριθμητική προσέγγιση θα παρατηρούσαμε ότι σε κάποιες χρονικές περιόδους δεν υπάρχει πραγματική λύση για ορσιμένες περιοχές του r. Μία ανάλυση για την μορφή των διαφορικών εξισώσεων, όπως προηγήθηκε για την classicalon, μπορεί να ρίξει λίγο παραπάνω φως σε αυτή την υπόθεση. Για $\Delta < 0$ η εξίσωση είναι υπερβολική ενώ για $\Delta = 0$ παραβολική. Δεν μπορεί να προκύψει $\Delta < 0$ αν απαιτήσουμε η λαγκραντζιανή πυκνότητα (3.11) να παραμένει θετική. Οι υπερβολικές εξισώσεις συνδέονται με διάδοση κύματος ενώ οι παραβολικές με διασκεδασμό. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση την οποία η Δ μηδενίζεται και η διαφορική εξίσωση αλλάζει τύπο (3.15) για την αρχική διάταξη (3.3). Προκύπτει ότι η Δ μηδενίζεται σε συγκεκριμένα σημεία όπου το r είναι το ακόλουθο:

$$r_0 \sim L_0 \left(\frac{A^2 L_0}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \sim L_0 (\sqrt{s} L_0)^{\frac{1}{3}} \tag{3.17}$$

Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με την ιδέα ότι η σκέδαση σε υψηλές ενέργειες δεν μπορεί να αναλύσει αποστάσεις $r \ll r_0$ για την συγκεκριμένη θεωρία. Πραγματικές κλασικές λύσεις των εξισώσεων παύουν να υπάρχουν. Σε αντίθεση με την περίπτωση $\delta > 0$ για την οποία βρήκαμε ότι η εσωτερική περιοχή $r \ll r_0$ μπορεί να αναλυθεί από το κυματοπακέτο, η εσωτερική περιοχή είναι απρόσιτη για $\delta < 0$. Η wrong-sign DBI είναι αυτή που περιμέναμε και βρήκαμε να δέχεται λύσεις μονότιμες και στατικές, τα classicalons.

3.2 Κβαντομηχανικό πρότυπο για την ws-DBI.

Για θεωρία τύπου DBI αναφέρθηκε ήδη ότι η κλασική εξέλιξη είναι παθολογική στην γραμμή $1+\lambda\phi^2-\lambda\phi_t^2=0$. Για την αρχική διάταξη (3.3) αυτή η συνθήκη ικανοποιείται όταν

$$\tilde{r}_0 \sim L_0\left(\frac{A^2L_0^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim L_0(\sqrt{s}L_0)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\sqrt{s}\sim\frac{A^2}{\alpha}$. Αν υποθέσουμε ότι το κυματοπακέτο έχει χαρακτηριστικό μήκος κύματος συγκρίσιμο με την L_0, παίρνουμε ότι :

$$\frac{\tilde{r}_0}{r_0} \sim (\sqrt{s}L_0)^{\frac{1}{6}} \tag{3.19}$$

Το γεγονός ότι για την wrong-sign DBI δεν έχουμε πραγματικές λύσεις για μία περιοχή του r δεν θα μπορούσε παρά να σημαίνει ότι η εξέλιξη των κυματοπακέτων είναι προβληματική σε κλασικό επίπεδο. Η απουσία διάδοσης από ένα σημείο και μετά βέβαια θα μπορούσε να είναι συνεπές με την πρόβλεψη ότι για κάποιο $\tilde{r}_0 \gg L_0$ η σκέδαση δεν προχωρά σε μικρότερες αποστάσεις όσο και αν αυξήσουμε την ενέργεια. Θα μπορούσε το συγκεκριμένο σύστημα να έχει κβαντική περιγραφή, του οποίου η λύση να συμπεριφέρεται σωστά και να δίνει την επιθυμητή αυτή ιδιότητα;

Για να αποκτήσουμε μία φυσική διαίσθηση του προβλήματος και του μήκους r_0 θα μελετήσουμε ένα απλουστευμένο κβαντομηχανικό πρότυπο που εμφανίζει την ίδια συμπεριφορά:

$$L = \sqrt{1+x'^2} - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{3.20}$$

όπου συνεχίζουμε να δουλέυουμε σε μονάδες $\hbar = 1$. Γενικά στην λαγκραντζιανή θα έπρεπε να έχουμε και έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα m αλλά θέτουμε $m=1$ και όλες οι ποσότητες με διαστάσεις είναι κανονικοποιημένες σε τέτοιες μονάδες. Είναι εμφανές ότι ο κινητικός όρος έχει την ίδια μορφή με την θεωρία ws-DBI με $\lambda=-1$ και $L_0=1$. Έτσι, το m έχει στο πρότυπο μας τον ρόλο του L_0^{-1} και και ορίζει την θεμελιώδη ενεργειακή κλίμακα της θεωρίας.

Ο όρος δυναμικού έχει προστεθεί ώστε να εισαγάγει εξωτερική δύναμη που επιταχύνει τα σωμάτια και αυξάνει την ορμή, και να πάρουμε μη-τετριμένη χρονική εξέλιξη. Στην θεωρία πεδίου δεν χρειαζόταν τέτοιος όρος επειδή

στο εισερχόμενο κυματοπακέτο η ενεργειακή πυκνότητα μεγαλώνει ήδη λόγω της συγκέντρωσης δυναμικής ενέργειας σε μία κεντρική περιοχή που συνεχώς συρρικνώνεται. Το μέγεθος $(\Delta\phi)^2$ μεγαλώνει καταστρέφοτνας τελικά την καλή κλασική συμπεριφορά.

Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν είναι:

$$x'' + (1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}\omega^2 x = 0 \tag{3.21}$$

Η διατηρούμενη ενέργεια είναι:

$$E = -\frac{1}{\sqrt{1 + x'^2}} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 \tag{3.22}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το σωμάτιο βρίσκεται σε ακινησία στο $x = x_0$. Η συζυγής ορμή θα είναι

$$p = \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \tag{3.23}$$

και το $|p|$ παίρνει μέγιστη δυνατή τιμή το 1 για $|x'| \to \infty$. Η χαμιλτονιανή είναι:

$$H = -\sqrt{1 - p^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{3.24}$$

Στην περιοχή $x_0^2 \leq \frac{2}{\omega^2}$ υπάρχει πάντα πραγματική λύση ταλαντωτή. Αντιθέτως, για $x_0^2 > \frac{2}{\omega^2}$ παύει να υπάρχει πραγματική λύση. Όταν το σωμάτιο φτάνει στο οριακό σημείο $x_f^2 = x_0^2 - \frac{2}{\omega^2}$ η ταχύτητα του αποκλίνει. Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια είναι άνω φραγμένη, με $|p| \leq 1$. Η κλασική εξέλιξη δεν μπορεί να ικανοποιεί την διατήρηση της συνολικής ενέργειας από το σημείο όπου $1 - p^2 = 0$ και μετά. Και αυτό βρίσκεται σε αντιστοιχία με την συμπεριφορά της ws-DBI ως θεωρία πεδίου.

Κβαντικά θα προσπαθήσουμε να απαλλαγούμε από τον περιορισμό $|p| \leq 1$ στην (3.24). Ωστόσο περιμένουμε ότι οι καταστάσεις που έχουν μη-μηδενική προβολή σε ιδιοκαταστάσεις ορμής με $|p| > 1$ θα εξελίσσονται με μιγαδική χαμιλτονιανή και δεν θα διατηρούν την συνολική ενέργεια του συστήματος. Θα θεωρήσουμε ότι η διατήρηση της ενέργειας προέρχεται από κάποιο μηχανισμό που βρίσκεται πίσω από την classicalization. Ορίζουμε λοιπόν κανονικές σχέσεις μετάθεσης στους τελεστές x, p αλλά υποθέτουμε ότι οι φυσικές καταστάσεις του συστήματος $|\psi>$ είναι αυτές που δεν έχουν συνεισφορά από ιδιοκαταστάσεις ορμής με $|p| > 1$. Αυτό σημαίνει ότι στον χώρο των ορμών

οι κυματοσυναρτήσεις $\psi(p) =< p||\psi >$ μηδενίζονται έξω από το διάστημα $|p| \leq 1$ και η συνέχεια της κυματοσυνάρτησης δίνει $\psi(-1) = \psi(1) = 0$. Στον χώρο ορμών η χαμιλτονιανή παίρνει τη μορφή:

$$H = -\frac{\omega^2}{2}\frac{d^2}{dp^2} + V(p) \tag{3.25}$$

με δυναμικό $V(p) = -\sqrt{1-p^2}$. Η απαιτούμενη συνθήκη $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ είναι ισοδύναμη με το να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειρα τοιχώματα για $p = \pm 1$. Η λύση που αναζητούμε είναι η λύση ενός απειρόβαθου πηγαδιού με πυθμένα αρμονικού ταλαντωτή. (σχήμα 2)

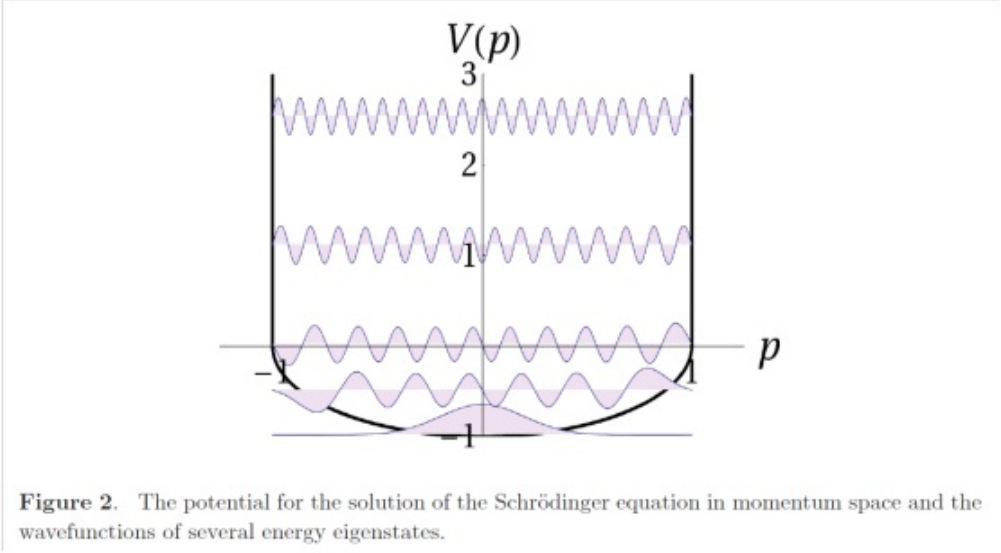

Figure 2. The potential for the solution of the Schrödinger equation in momentum space and the wavefunctions of several energy eigenstates.

Στο σχήμα 2 απεικονίζονται διάφορες κυματοσυναρτήσεις $\psi_i(p)$ της χαμιλτονιανής (3.25) με ιδιοτιμές E_i. Συγκεκριμένα πρόκειται για τις $i = 0, 11, 19, 30, 40$ με ενέργειες $E_0 = -0.980$, $E_{11} = -0.487$, $E_{19} = 0.018$, $E_{30} = 1.117$, $E_{40} = 2.539$. Είναι εμφανές ότι οι καταστάσεις χαμηλής ενέργειας μοιάζουν με αυτές του αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας $\omega = 0.04$ ενώ οι καταστάσεις υψηλής ενέργειας μοιάζουν με αυτές του σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού. Η απουσία ορμών $|p| > 1$ υποδηλώνει ότι αποστάσεις μικρότερες από 1 σε μονάδες m^{-1} δεν μπορούν να μελετηθούν. Η θεωρία αυτή αυτό-συμπληρώνεται στο υπεριώδες όπως η θεωρία πεδίου ws-DBI. Η classialization όμως όπως φαίνεται από το παράδειγμα αυτό είναι μία συμπεριφορά που παρά του ονόματος της δεν είναι αμιγώς κλασική!

Θέλουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη κατάστασης που αντιστοιχεί την λαγκραντζιανή (3.20) στην κατάλληλη περιοχή. Αυτή θα είναι ένα κυματο-

πακέτο που για $t = 0$ έχει την μορφή:

$$\psi_0(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{\frac{1}{2}}} = \exp\left[-\frac{p^2}{4\sigma^2} - i x_0 p\right] \tag{3.26}$$

Αυτό περιγράφει σωμάτιο με μηδενική μέση ορμή που βρίσκεται στην αρχική θέση x_0. Η διασπορά ορμής είναι ανάλογη του σ, και το πλάτος του κυματοπακέτου στον χώρο θέσεων είναι $\sim \frac{1}{\sigma}$. Για σ αρκετά μικρότερο του 1 (θα χρησιμοποιήσουμε 0.3) η κυματοσυνάρτηση μας προσεγγίζει ικανοποιητικά την επιθυμητή μορφή, παρόλο που δεν ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\psi_0(-1) = \psi_0(1) = 0$. Αν αναλύσουμε την $\psi_0(p)$ στις ιδιοκαταστάσεις της χαμιλτονιανής (3.25) μπορούμε να βρούμε τις προβολές τους ($< \psi_i || \psi_0 >= c_i$) στις 60 πρώτες ($\sum_i c_i \psi(p) \simeq \psi_0(p)$ για $|p| \leq 1$) ιδιοκαταστάσεις ενέργειας. Τότε η χρονική εξέλιξη του κυματοπακέτου δίνεται από την έκφραση:

$$\psi(p,t) = \sum_i c_i \psi_i(p) \exp(-i E_i t) \tag{3.27}$$

Στην συνέχεια μπορούμε να βρούμε την μορφή του στον χώρο ορμών με ένα μετασχηματισμό Fourier.

Ας δούμε πρώτα τι γίνεται στην περίπτωση $x_0^2 < \frac{2}{\omega^2}$. Στο σχήμα 3 απεικονίζεται η εξέλιξη κυματοπακέτου για $\omega = 0.04$ και αρχική θέση $x_0 = 15$. Το μέγεθος που απεικονίζεται είναι η πυκνότητα πιθανότητας $|\psi(x)|^2$ ως συνάρτηση της θέσης για ένα διάστημα χρόνου που αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση. Η κλασική κίνηση είναι ομαλή, και το κυματοπακέτο την αναπαράγει σε πολύ καλή προσέγγιση. Παρατηρούμε κάποιο άπλωμα του κυματοπακέτου όταν περνάει από την κεντρική περιοχή, ωστόσο ξαναπαίρνει το αρχικό του σχήμα περίπου μετά από κάθε ταλάντωση.

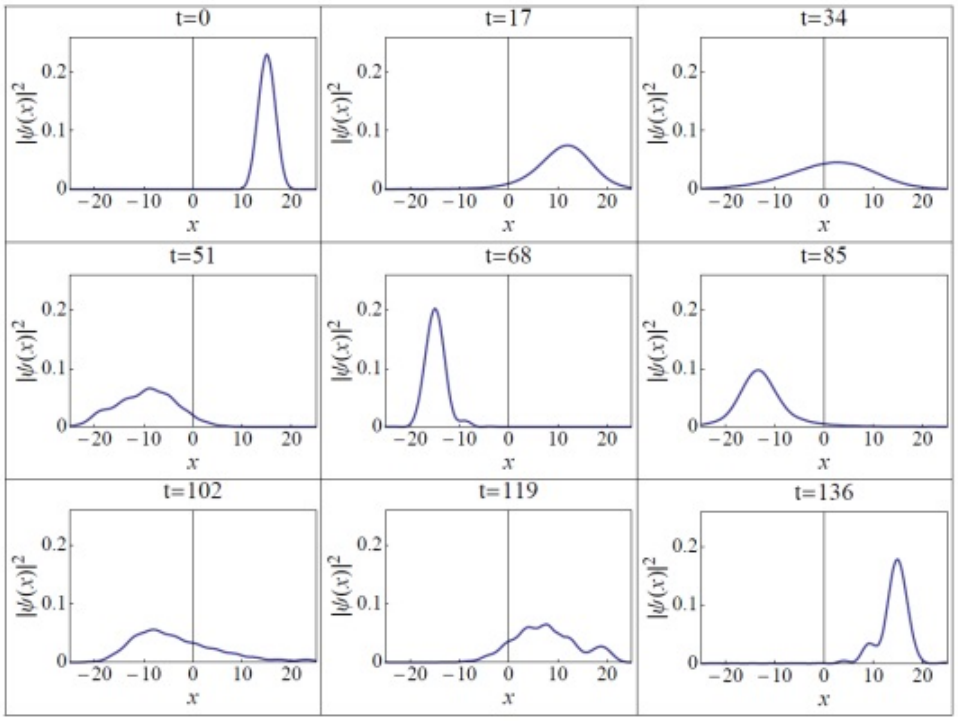

Figure 3. The evolution of a wavepacket initially located at $x_0 = 15$.

Στο σχήμα 4 απεικονίζεται η ποσότητα $|\psi(n)|^2 = |<n||\psi>|^2$ σε διάφορες χρονικές στιγμές. Η $|n>$ είναι ιδιοκατάσταση του κβαντικού αρμονικού ταλαντωστή συχνότητας ω και ενεργειακής στάθμης n. Βλέπουμε δηλαδή από ποιες ακριβώς ιδιοκαταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή αποτελείται η κατάσταση $\psi(p,t)$. Για μικρό x_0 και μικρή συνολική ενέργεια στο κυματοπακέτο συνεισφέρουν κυρίως χαμηλές ενεργειακά ιδιοκαταστάσεις της χαμιλτονιανής, που είναι παρεμφερείς με αυτές του αρμονικού ταλαντωτή. Έτσι η μορφή $|\psi(n)|^2$ δεν μεταβάλλεται σημαντικά με την πάροδο του χρόνου.

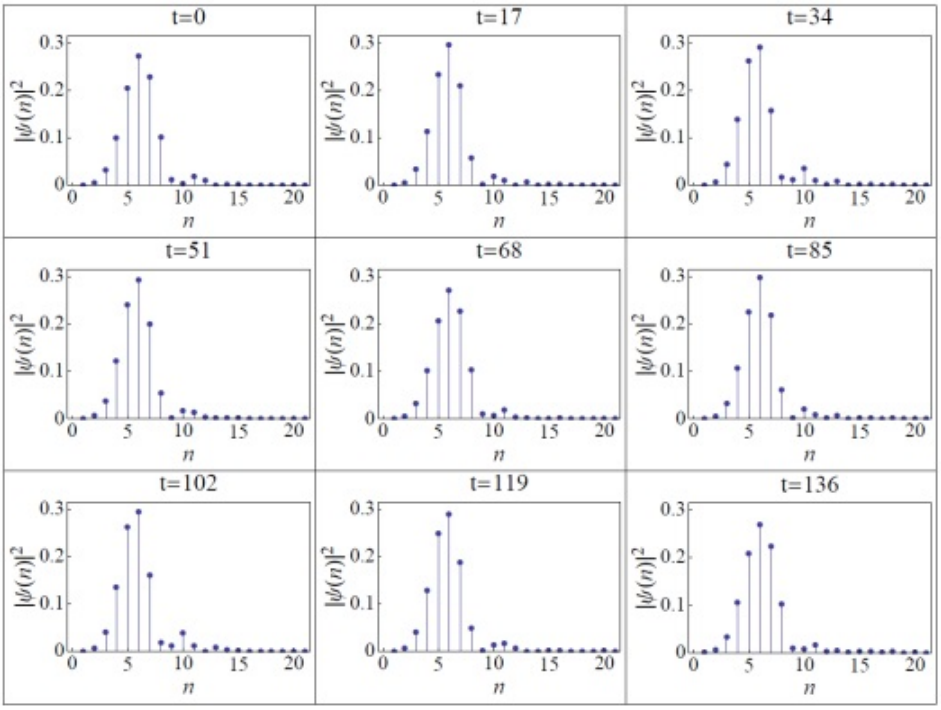

Figure 4. The decomposition of the wavepacket of fig. 3 in terms of eigenstates of the harmonic oscillator.

Ας μελετήσουμε τώρα και την περίπτωση όπου $x_0^2 < \frac{2}{\omega^2}$. Στο σχήμα 5 απεικονίζεται η εξέλιξη του κυματοπακέτου που ξεκινάει από αρχική θέση $x_0 = 40$, έτσι ώστε $x_0^2 < \frac{2}{\omega^2}$. Περιμένουμε η κλασική εξέλιξη να καταρρέει στη θέση $|x_f| = \sqrt{x_0^2 - \frac{2}{\omega^2}} \simeq 18.7$. Η κλασικά απαγορευμένη περιοχή αντιστοιχεί στην σκοτεινή περιοχή του κάθε διαγράμματος. Παρατηρούμε ότι το κυματοπακέτο αρχικά κινείται από δεξιά προς μικρότερες τιμές του x διατηρώντας το σχήμα του. Όταν πλησιάζει την κλασικά απαγορευμένη τιμή παραμορφώνεται ισχυρότατα. Στην συνέχεια σπάει σε δύο μικρότερα κομμάτια, ένα αριστερά και ένα δεξιά της κλασικά απαγορευμένης περιοχής. Τέλος το αρχικό κυματοπακέτο ανασυγκροτείται στην κλασικά επιτρεπόμενη περιοχή αριστερά, και εξελίσσεται κλασικά μέχρι να πλησιάσει ξανά στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή. Αυτή η χρονική εξέλιξη του κυματοπακέτου είναι πολύ ενδιαφέρουσα από φυσικής άποψης. Το κυματοπακέτο περνάει με φαινόμενο σήραγγας από την απαγορευμένη περιοχή. Το μέγεθος της κλασικά απαγορευμένης περιοχής έχει ιδιαίτερη σημασία. Δεν είναι της τάξης της

θεμελιώδους κλίμακας L_0 του προβλήματος (δηλαδή τάξης ~ 1) αλλά πολύ μεγαλύτερο (τάξης ~ 40). Παρατηρούμε επίσης ότι η περίοδος είναι περίπου η μισή από αυτή της προηγούμενης περίπτωσης. Αυτό πιθανότατα οφείλεται στο ότι το κυματοπακέτο ξεκινάει από μεγάλο x και άρα αποκτά γρήγορα πολύ μεγάλη ορμή που το κάνει να παρεκκλίνει από την κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή.

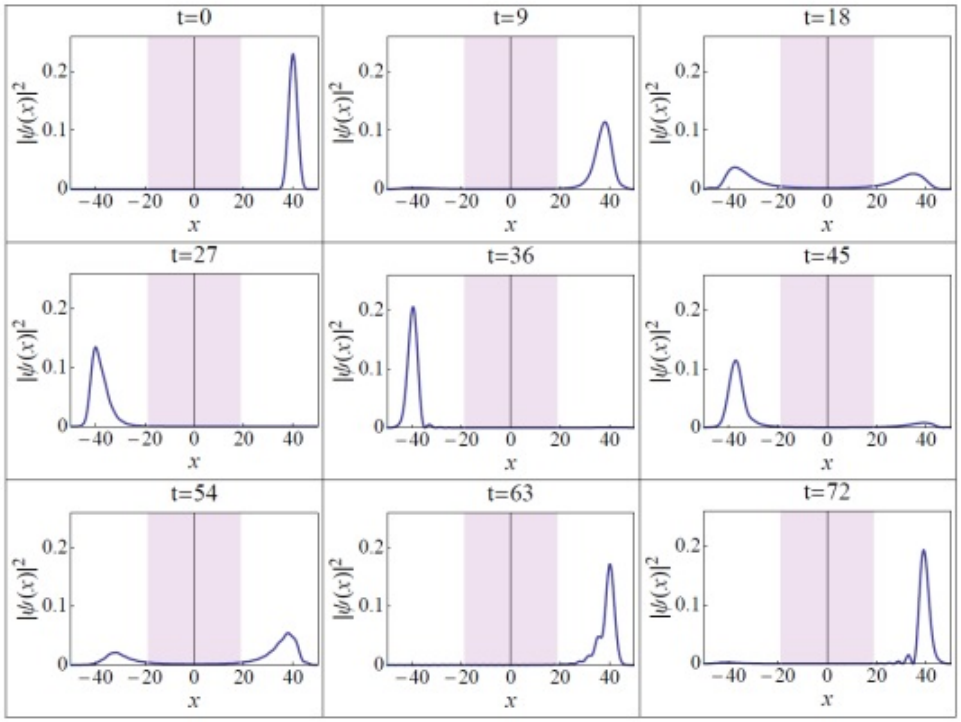

Figure 5. The evolution of a wavepacket initially located at $x_0 = 40$.

Στο σχήμα 6 απεικονίζεται η προβολή του κυματοπακέτου στις ιδιοκαταστάσεις αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας $\omega = 0.04$. Το αρχικό κυματοπακέτο αποτελείται κυρίως από ένα μικρό εύρος ιδιοκαταστάσεων υψηλής ενέργειας. Το ενδιαφέρον που παρατηρούμε τώρα είναι ότι, σε αντίθεση με το σχήμα 4, κατά την χρονική του εξέλιξη το κυματοπακέτο μετατοπίζεται σε ένα πολύ μεγαλύτερο εύρος ιδιοκαταστάσεων χαμηλότερης ενέργειας. Η μέγιστη μετατόπιση παρατηρείται την στιγμή όπου το κυματοπακέτο αποτελείται από δύο συγκρίσιμα μέρη εκατέρωθεν της κλασικά απαγορευμένης περιοχής. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ποιοτικά η μετάβαση μέσα από την κλασικά απαγορευμένη περιοχή γίνεται με την παραγωγή μεγάλου

αριθμού ενδιαμέσων καταστάσεων χαμηλής ενέργειας. Κάτι τέτοιο είναι σε απόλυτη συμφωνία, ποιοτικά τουλάχιστον, με τα πορίσματα του πρώτου μέρους περί του φαινομένου της classicalization. Πλέον έχουμε ισχυρότατες ενδείξεις ότι το φαινόμενο της classicalization είναι κβαντικής φύσης.

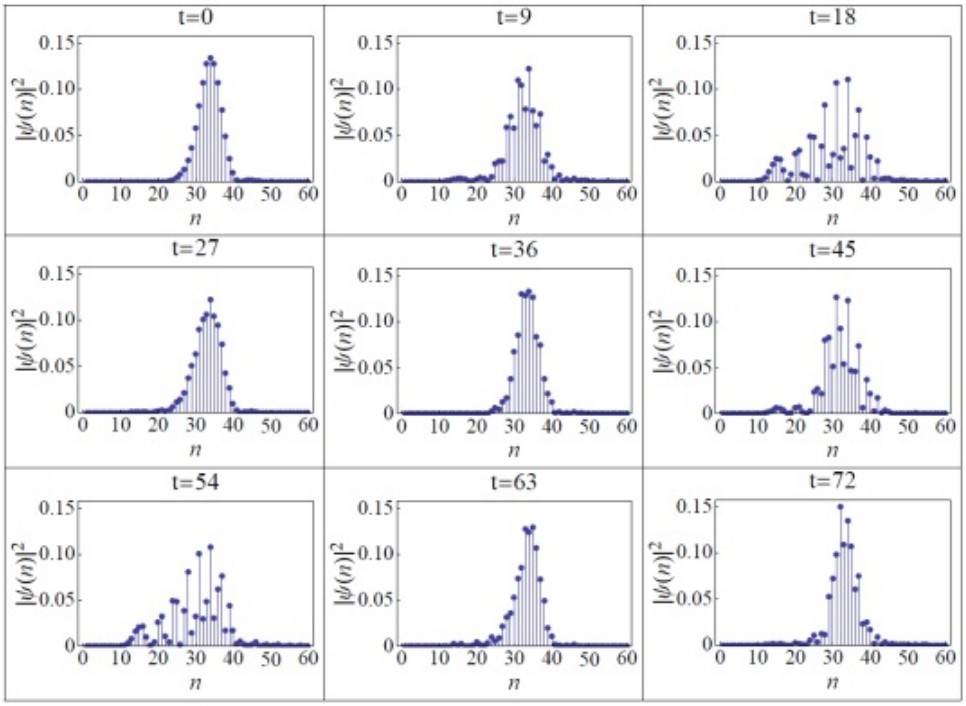

Figure 6. The decomposition of the wavepacket of fig. 5 in terms of eigenstates of the harmonic oscillator.

Η ανάλυση του πρώτου μέρους πραγματεύεται διαδικασίες σκέδασης όπου αρχικά σφαιρικά κύματα καταρρέουν προς την αρχή των αξόνων. Ας δούμε ποιο θα ήταν το ανάλογο στο συγκεκριμένο κβαντομηχανικό πρότυπο. Χρειαζόμαστε ένα τρισδιάστατο κβαντομηχανικό σύστημα με λαγκραντζιανή τύπου:

$$L = \sqrt{1+\vec{x}'^2} - \frac{1}{2}\omega^2\vec{x}^2 \tag{3.28}$$

με σφαιρική συμμετρία. Στην συνέχεια δεν έχουμε παρά να επαναλάβουμε τα αντίστοιχα βήματα που κάναμε στο μονοδιάστατο μοντέλο. Η συζυγής ορμή θα είναι:

$$\vec{p} = \frac{\vec{x}'}{\sqrt{1+\vec{x}'^2}} \tag{3.29}$$

όπου το $|p|$ παίρνει μέγιστη τιμή 1 για $|x'| \to \infty$. Η χαμιλτονιανή θα είναι η:

$$H = -\sqrt{1-\vec{p}^2} + \frac{1}{2}\omega^2\vec{x}^2 \tag{3.30}$$

που υποθέτοντας σφαιρική συμμετρία θα γίνεται στο χώρο των ορμών:

$$H = -\frac{\omega^2}{2}\frac{1}{p}\frac{d^2}{dp^2}p + V(p) \tag{3.31}$$

Με δυναμικό $V(p) = -\sqrt{1-p^2}$ στο διάστημα $0 \le p \le 1$. Για την κυματοσυνάρτηση $\psi(p)$ ισχύει ότι $\psi(1) = 0$ και $\frac{d\psi(0)}{dp} = 0$. Οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας $\psi_i(p)$ υπολογίζονται αριθμητικά όπως και πριν. Στις χαμηλές ενέργειες μοιάζουν με τις ιδιοκαταστάσεις του σφαιρικού αρμονικού ταλαντωτή ενώ στις υψηλές ενέργειες μοιάζουν με τις ιδιοκταστάσεις ενός απειρόβαθου σφαιρικού πηγαδιού. Θα μελετήσουμε την εξέλιξη ενός σφαιρικού κυματοπακέτου που έχει στο χώρο των ορμών αρχική μορφή:

$$\psi_0(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi^3}\sigma)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p}\exp\left[-\frac{p^2}{4\sigma^2}\right]\sin(pr_0) \tag{3.32}$$

Αντίστοιχα στον χώρο θέσεων θα είναι:

$$\psi_0(p) = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{r}\exp\left[-(r-r_0)^2\sigma^2\right] \tag{3.33}$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι $\sigma r_0 \gg 1$ για να εξασφαλίσουμε ότι η κυματοσυνάρτηση πέφτει απότομα εκθετικά για $p > 1$. Προβάλλουμε την $\psi_0(p)$ στις $\psi_i(p)$ και παίρνουμε την χρονική εξέλιξη του κυματοπακέτου από την (3.27). Στο σχήμα 9 παρουσιάζεται η εξέλιξη κυματοπακέτου με $\sigma = 0.3$, $r_0 = 15$ και $\omega = 0.04$. Απεικονίζεται η ποσότητα $4\pi r^2|\psi(r)|^2$, που αποτελεί την πυκνότητα πιθανότητας σε ακτίνα r. Παρατηρούμε την κίνηση του κυματοπακέτου προς την κεντρική περιοχή και την μετέπειτα επιστροφή του στην αρχική του μορφή. Όλα τα μέρη του σφαιρικού κυματοπακέτου περνούν από την αρχή των αξόνων και κατευθύνονται προς ένα σημείο συμμετρικό προς την αρχική τους θέση. Υπάρχει ισχυρή παρεμβολή όταν τα μέρη του κυματοπακέτου συγκλίνουν στο $r = 0$.

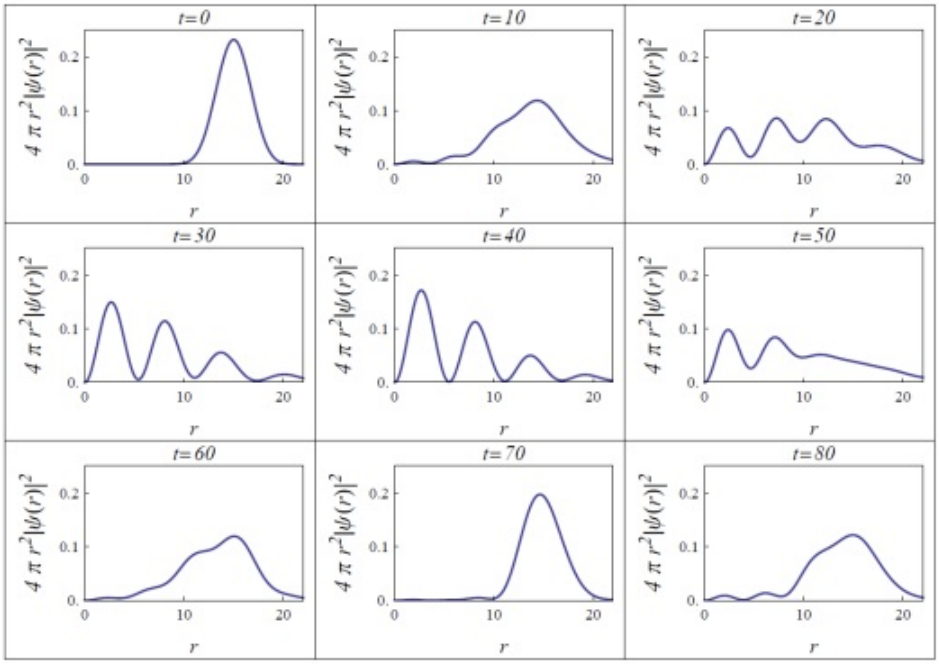

Figure 9. The evolution of a spherical wavepacket initially located at $r_0 = 15$.

Η αντίστοιχη εξέλιξη για $r_0 = 40$ παρουσιάζεται στο σχήμα 10. Η σκούρα περιοχή είναι η κλασικά απαγορευμένη, που αντιστοιχεί σε $r < r_f$ με $r_f^2 = r_0^2 - \frac{2}{\omega^2}$. Φαίνεται αμέσως ότι το κυματοπακέτο δεν μπορεί να εισέλθει στην περιοχή αυτή. Παρατηρούμε ξανά ισχυρή παρεμβολή στην περιοχή όπου τα εισερχόμενα και εξερχόμενα μέρη του κυματοπακέτου αλληλοεπικαλύπτονται. Η χρονική εξέλιξη του κυματοπακέτου μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως ανάκλαση είτε ως φαινόμενο σήραγγας στην κεντρική περιοχή. Επιλέγουμε την δεύτερη ερμηνεία επειδή ταιριάζει και με τα συμπεράσματα από το μονοδιάστατο πρότυπο.

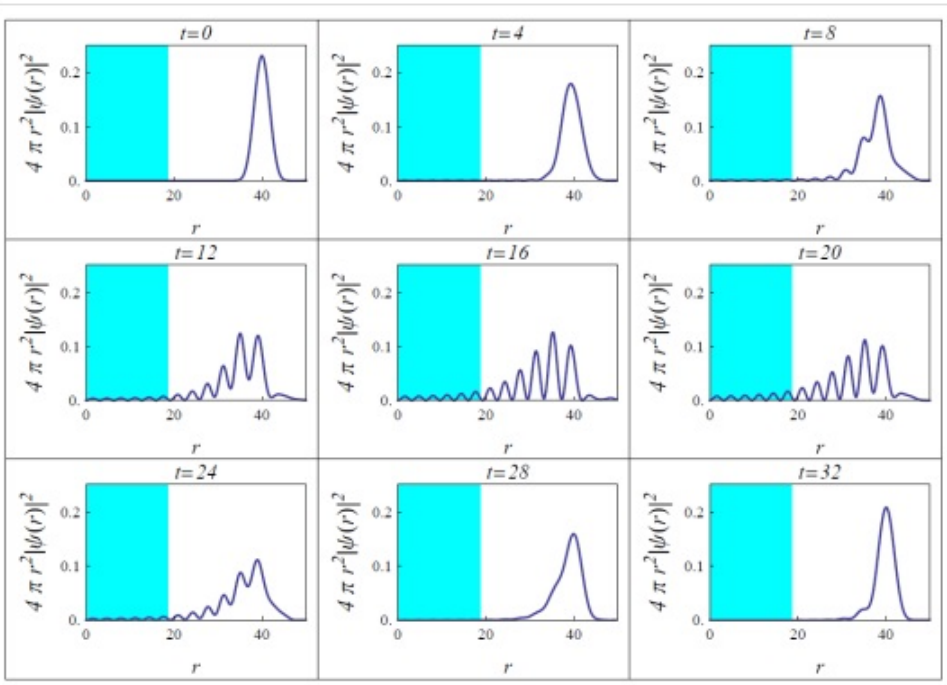

Figure 10. The evolution of a spherical wavepacket initially located at $r_0 = 40$.

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε από αυτό το σφαιρικό πρότυπο είναι πάλι το ίδιο. Παρά την ορολογία, το φαινόμενο της classicalization είναι κβαντικής φύσης. Συνδέεται με φαινόμενο σήραγγας σε περιοχή που είναι κλασικά απαγορευμένη. Το μέγεθος αυτής της περιοχής είναι ανάλογο με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειας και μπορεί να γίνει πολύ μεγαλύτερο από την θεμελιώδη κλίμακα της θεωρίας.

4 Κβαντικές διορθώσεις

4.1 Κβαντικές διορθώσεις στην ενεργό δράση.

Οι κβαντικές θεωρίες με υψηλότερες παραγώγους όπως αυτές που πραγματευτήκαμε στην εργασία είναι διαταρακτικά μη-επανακανονικοποιήσιμες. Το αποτέλεσμα είναι ότι δεν μπορούν να κάνουν προβλέψεις χωρίς να ενσωματωθούν άπειρος αριθμός counterterms για να απαλείψουν τις υπεριώδεις αποκλίσεις που προκύπτουν στις κβαντικές διορθώσεις. Συνήθως αντιλαμβανόμαστε αυτές τις θεωρίες ως ενεργές κάτω από μία κλίμακα Λ, που καταστέλλει τις συζεύξεις στους μη-κανονικοποιήσιμους όρους. Το φαινόμενο τις classicalization σχετίζεται με την πολύ συγκεκριμένη μορφή των θεωριών όπως η wrong-sign DBI. Σε κβαντικό επίπεδο οι αποκλίσεις στις κβαντικές διορθώσεις καταστρέφουν αυτή την ιδιαίτερη μορφή των θεωριών και ενδεχομένως την δυνατότητά τους να παράγουν εκτεταμένα classicalons. Ο στόχος σε αυτό το κεφάλαιο είναι να μελετήσουμε κατά πόσον αυτές οι θεωρίες έχουν έναν αυξημένο βαθμό αυτοσυνέπειας, που τους επιτρέπει να διατηρούν την μορφή τους και μετά από τις κβαντικές διορθώσεις.

Χωρίζοντας την λαγκραντζιανή μίας θεωρίας στο ομαλό κομμάτι και το αποκλίνον, εισάγουμε τους counterterms που σκοπό έχουν να απαλείψουν τις αποκλίσεις:

$$L = L_1 + \delta L \quad , \quad J = J_1 + \delta J \tag{4.1}$$

όπου το ρεύμα J οφείλει να ικανοποιεί την σχέση:

$$\left[\frac{\delta L_1}{\delta \phi}\right]_{\phi=\phi_{cl}} + J_1(x) = 0 \tag{4.2}$$

Το γενεσιουργό συναρτησιοειδές θα είναι τότε:

$$\exp(-iE[J]) = \int D\phi \exp\left(i\int d^4x (L_1[\phi] + J_1\phi)\right) \exp\left(i\int d^4x (\delta L[\phi] + \delta J\phi)\right) \tag{4.3}$$

και αν αναπτύξουμε γύρω από την κλασική λύση $\phi(x)$: $\phi(x) = \phi_{cl}(x) + \eta(x)$ θα καταλήξουμε στο συναρτησιοειδές:

$$\int \exp\left[i(L_1[\phi_{cl}] + J_1\phi_{cl})\right] d^4x \left(det\left[-\frac{\delta^2 L_1}{\delta\phi\delta\phi}\right]\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

και τους όρους της λαγκραντζιανής με τους counterterms. Η ενεργός δράση θα δίνεται τώρα από την σχέση:

$$-iE[J] = i\int d^4x(L_1[\phi_{cl}] + J_1\phi_{cl}) - \frac{1}{2}\log det\left[-\frac{\delta^2 L_1}{\delta\phi\delta\phi}\right] - i(connected) + \int d^4x\delta L[\phi_{cl}] \tag{4.5}$$

Ο όρος $-\frac{1}{2}\log det\left[-\frac{\delta^2 L_1}{\delta\phi\delta\phi}\right]$ είναι η πρώτης τάξης διόρθωση που μας ενδιαφέρει. Ο όρος $-i(connected)$ συναποτελείται από διαγράμματα χωρίς εξωτερικές γραμμές, τα απλούστερα των οποίων έχουν 2 βρόχους. Ο τελευταίος όρος θα παρέχει τους απαραίτητους counterterms που θα ακυρώνουν τις υπεριώδεις αποκλίσεις. Το τελευταίο περιμένουμε ότι θα επιτυγχάνεται εφόσον έχουμε του κατάλληλους counterterms και θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας μόνο στην πρώτης τάξης διόρθωση στην ενεργό δράση (σε επίπεδο ενός βρόχου). Αυτή θα είναι η Γ_1:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}tr\log\Delta \tag{4.6}$$

Θα μελετήσουμε μία οικογένεια θεωριών που θα μπορούσε υπό προϋποθέσεις να δίνει λύσεις classicalons:

$$S = \int d^4xK(X) \tag{4.7}$$

όπου $X = \frac{\partial_m\pi\partial^m\pi}{2}$. Στην σύμβαση που θα χρησιμοποιήσουμε η μετρική Minkowski θα είναι η $\eta_{mn} = diag[-1,1,1,1]$. Προφανώς για την wrong-sign DBI θα ισχύει:

$$K = \mu^{-1}\sqrt{1+2\mu X} \tag{4.8}$$

Στην περίπτωση μας υποθέτουμε ότι το σημείο αποκοπής στο υπεριώδες είναι το $\Lambda \sim \mu^{-\frac{1}{4}}$. Αν διαφορίσουμε την (4.7) δύο φορές θα πάρουμε την εξίσωση για τις κλασικές διακυμάνσεις $\delta\pi$:

$$\Delta_{cl}\delta\pi = 0$$

$$\Delta = -K_X\Box - K_{XX}\partial_m\pi\partial_n\pi\partial^m\partial^n$$
$$-(\partial_m K_X + \partial^n K_{XX}\partial_m\pi\partial_n\pi + K_{XX}\partial_m\partial^n\pi\partial_n\pi + K_{XX}\partial_m\pi\Box\pi)\partial^m \tag{4.9}$$

ή σε πιο συμπαγή συμβολισμό

$$\Delta = -G_{mn}\partial^m\partial^n - E_m\partial^m \tag{4.10}$$

$$E_m = (\partial_m K_X + \partial^n K_{XX}\partial_m\pi\partial_n\pi + K_{XX}\partial_m\partial^n\pi\partial_n\pi + K_{XX}\partial_m\pi\Box\pi) \tag{4.11}$$

$$G_{mn} = -K_X\eta_{mn} - K_{XX}\partial_m\pi\partial_n\pi \tag{4.12}$$

Η διόρθωση που αναζητούμε για την ενεργό δράση σε 1 βρόχο θα δίνεται συνεπώς από την σχέση:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}tr\log\Delta_{cl} \tag{4.13}$$

όπου το Δ_{cl} είναι ο τελεστής υπολογισμένος σε υποβαθρο classicalon.

4.2 Το υπόβαθρο Classicalon.

Η δράση για την wrong-sign DBI θα είναι:

$$K_1 = \frac{1}{\mu}\sqrt{1-2\mu X} \tag{4.14}$$

με $\mu > 0$. Η λύση της (4.23) θα είναι για αυτή τη θεωρία:

$$\pi'(w) = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{w^3+\mu c^2 w}} \tag{4.15}$$

Παρόμοιες ιδιότητες classicalon περιμένουμε να έχουν και οι λύσεις της:

$$K_2 = -X - \mu\frac{X^2}{2} \tag{4.16}$$

Αυτή προκύπτει αν από την wrong-sign DBI κρατήσουμε τους δύο πρώτους όρους στο ανάπτυγμα της ρίζας. Οι λύσεις της είναι πιο περίπλοκης μορφής:

$$\pi_2'(w) = \frac{2x3^{\frac{1}{3}}\mu w^4 - \left(-9\mu^2 c w^5 + \sqrt{\mu^3 w^{10}(24w^2+81\mu c^2)}\right)^{\frac{2}{3}}}{2x3^{\frac{2}{3}}\mu w^{\frac{5}{2}}\left(-9\mu^2 c w^5 + \sqrt{\mu^3 w^{10}(24w^2+81\mu c^2)}\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{4.17}$$

Στο σχήμα 1 απεικονίζουμε τις λύσεις $\pi_1'(w)$ (μπλέ) και $\pi_2'(w)$ (κόκκινες) για διάφορες τιμές της σταθεράς ολοκλήρωσης c. Όλα τα μεγέθη είναι σε μονάδες της θεμελιώδους κλίμακας της θεωρίας, έτσι ώστε να ισχύει $\mu = 1$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλα w και οι δύο λύσεις δίνονται προσεγγιστικά από την $\pi'(w) \simeq \frac{c}{2w^{\frac{3}{2}}}$, έτσι ώστε $\pi(r) = -\frac{c}{r}$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι και τα δύο προφίλ λύσεων που μας ενδιαφέρουν συμφωνούν με τις προβλέψεις της εξίσωσης (4.23). Αντιθέτως για $\mu > 0$ και μικρά w προκύπτουν:

$$\pi'(w) \simeq \frac{sign(c)}{2\sqrt{\mu w}}$$

$$\pi'(w) \simeq \frac{sign(c)|c|^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}w^{\frac{5}{6}}}$$

Η μετάβαση ανάμεσα σε αυτές τις δύο περιοχές γίνεται στην ακτίνα r_{cl} του classicalon : $r_{cl} = \sqrt{w_{cl}} \sim (c^2\mu)^{\frac{1}{4}}$. Δεν μελετάμε την δομή των classicalon σε αποστάσεις μικρότερες από $\mu^{\frac{1}{4}}$ επειδή η θεωρία έχει σημείο αποκοπής στο

υπεριώδες $\Lambda \sim \mu^{-\frac{1}{4}}$. Για $|c| \gg 1$ προκύπτει $r_{cl} \gg \Lambda$ και τα classicalons είναι καλά ορισμένα.

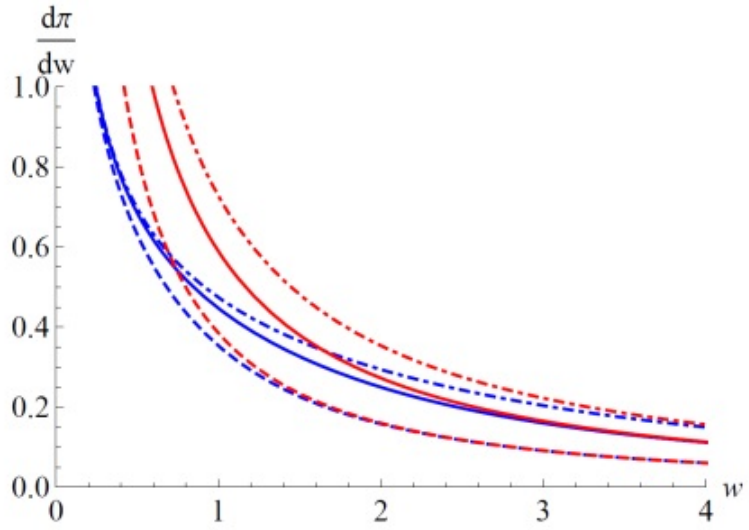

Figure 1: The classicalon solutions $\pi_1'(w)$ (blue lines) and $\pi_2'(w)$ (red lines) for $\mu = 1$ and $c = 1$ (dashed lines), $c = 2$ (solid lines), $c = 3$ (dot-dashed lines).

4.3 Υπολογισμός με heat-kernel διαταρακτικά.

Αν θεωρήσουμε τελεστή Δ σε Ευκλείδιο χώρο για τον οποίο ισχύει

$$\Delta|x>=\Delta_x|x>$$

(Δ_x είναι η αναπαράσταση του τελεστή στο χώρο θέσεων), μπορούμε να όρισουμε ως heat-kernel την εξίσωση:

$$h(\epsilon,x,x')=<x|\exp(-\epsilon\Delta)[x'>$$

Αναπτύσσοντας το εκθετικό σε δυνάμεις του Δ παίρνουμε ότι:

$$\exp(-\epsilon\Delta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\epsilon\Delta)^n}{n}=1-\epsilon\Delta+\frac{\epsilon^2}{2}\Delta^2+...$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$h(\epsilon,x,x')=<x|(1-\epsilon\Delta+\frac{\epsilon^2}{2}\Delta^2+...)[x'>$$

και συνεπώς:

$$h(\epsilon,x,x')=\exp(-\epsilon\Delta_x)<x|x'>$$

Στον χώρο των ορμών θα έχουμε:

$$h(\epsilon,x,x')=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\exp(-\epsilon\Delta_x)<x|k><k|x'>$$

όπου τελικά δίνει την επιθυμητή σχέση:

$$h(\epsilon,x,x')=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\exp(-ikx')exp(-\epsilon\Delta_x)\exp(ikx)$$

Τελικά δηλαδή, για να υπολογίσουμε το Γ_1 της σχέσης (4.13) με την μέθοδο heat-kernel αρκεί να μεταβούμε σε χώρο με Ευκλείδια υπογραφή μέσω του ορισμού $t=-ix^0$, και να υπολογίσουμε το:

$$h(x,x',\epsilon)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp(-ikx')\exp(-\epsilon\Delta_E)\exp(ikx) \tag{4.18}$$

Το Γ_1 θα προκύπτει όταν μεταβούμε στην Schwinger's proper time representation:

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty}\frac{d\epsilon}{\epsilon}tr\exp(-\epsilon\Delta)$$

και υπολογίσουμε το διαγώνιο μέρος του heat-kernel:

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty}\frac{d\epsilon}{\epsilon}\int d^4x h(x,x,\epsilon) \tag{4.19}$$

Για να υπολογίσουμε το εκθετικό του τελεστή στην προηγούμενη σχέση θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε τους κατάλληλους όρους με τις ιδιότητες των τελεστών σε μία δοκιμαστική συνάρτηση $f(x)$, την οποία θα θέσουμε στο τέλος μονάδα.

$$\exp(-ikx)(-\Box)\exp(ikx)f = k^2 - 2ik^m\partial_m - \Box$$

$$\exp(-ikx)(\partial_m\partial_n)\exp(ikx)f = ik_n\partial_m - k_nk_m + ik_m\partial_n + \partial_m\partial_n$$

$$\exp(-ikx)(\partial_m)\exp(ikx)f = ik_mf + \partial_mf$$

Επιπλέον, επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε τις υπεριώδεις αποκλίσεις που εμφανίζονται στο όριο $\epsilon \to 0$, θα επαναορίσουμε το k ως $k' = \sqrt{\epsilon}k$. Ενώνοντας το κομμάτια παίρνουμε τότε:

$$h(x,x,\epsilon) = \int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{\epsilon^2}\exp\Big(-\Big[(k^2 - 2\sqrt{\epsilon}ik^m\partial_m - \epsilon\Box)$$
$$+K_{XX}\partial^m\pi\partial^n\pi(i\sqrt{\epsilon}k_n\partial_m - k_nk_m + i\sqrt{\epsilon}k_m\partial_n + \epsilon\partial_m\partial_n + E^m(i\sqrt{\epsilon}k_m + \epsilon\partial_m)\Big]\Big) \tag{4.20}$$

Στην συνέχεια επιθυμούμε να απομονώσουμε τον όρο $\exp(-k^2)$ που θα είναι πολύ μεγαλύτερος και να αναπτύξουμε το υπόλοιπο εκθετικό σε σειρά με μικρή παράμετρο το ϵ. Η ολοκλήρωση στα k μπορεί να γίνει με τους τύπους:

$$\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\exp(-k^2)k^mk^nk^\rho k^\sigma = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{4}(g^{mn}g^{\rho\sigma} + g^{m\rho}g^{n\sigma} + g^{m\sigma}g^{n\rho})$$

$$\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\exp(-k^2)k^mk^n = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2}g^{mn}$$

$$\int \frac{d^4k'}{(\pi)^{n/2}} \exp(-k^2) k^a k^b k^c k^d k^e k^f =$$

$$\frac{1}{8}\left(g^{ab}g^{cd}g^{ef} + 2g^{ab}g^{ce}g^{df} + 2g^{ac}g^{bd}g^{ef} + 4g^{ac}g^{be}g^{df} + 2g^{ac}g^{bf}g^{de}\right) \tag{4.21}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι τα k είναι σε εσωτερικά γινόμενα με τανυστή συμμετρικό στην εναλλαγή των a,b και c,d. Η κυρίαρχη απόκλιση, δηλαδή ο όρος Λ^4, προκύπτει από την τάξη ϵ^0 στην (4.16). Θα χρησιμοποιούμε από εδώ και πέρα πάλι τον συμβολισμό k, αλλά θα αναφερόμαστε τα επανορισμένα k'.

Θα μελετήσουμε τώρα πως ο τελεστής Δ μπορεί να υπολογιστεί για ένα μη τετριμμένο υπόβαθρο π_{cl}. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η πιθανότητα το κλασικό υπόβαθρο γύρω από το οποίο αναπτύσσουμε τα πεδία να συρρικνώνει τις κβαντικές διορθώσεις. Προφανώς κάτι τέτοιο θα μπορούσε να πραγματοποιείται μόνο για ανομοιογενή υπόβαθρα, εφόσον με έναν επανορισμό των μεγεθών μπορούμε να απορροφήσουμε ένα ομοιογενές υπόβαθρο. Θα απαιτήσουμε επίσης ο τελεστής να είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή:

$$\partial^m G_{mn} = 0$$

Μετά από τον επανορισμό των ορμών k το διαγώνιο μέρος του heat-kernel θα είναι:

$$h(x,x,\epsilon) =$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} \exp\left[-G_{mn}k^m k^n + \epsilon G_{mn}\partial^m\partial^n + 2\sqrt{\epsilon} i G_{mn}k^m\partial^n + i\sqrt{\epsilon}E_m k^m + \epsilon E_m \partial^m\right] \tag{4.22}$$

Μπορούμε να απομονώσουμε το εκθετικό $\exp(G_{mn}k^m k^n)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο Baker-Campbell-Hausdorff:

$$\exp(X+Y) = \exp X \exp Y \exp\left(-\frac{1}{2}[X,Y]\right) \exp\left(\frac{1}{2}(2[Y,[X,Y]] + [X,[X,Y]])\right)... \tag{4.23}$$

Η μετρική G_{mn} πρέπει να διαγωνιοποιηθεί επανορίζοντας τις ορμές εκ νέου ως: $k^m = S^m_n k'^n$ με το S^m_n να ικανοποιεί την σχέση: $S^m_\rho G_{mn} S^n_\sigma = g_{\rho\sigma}$ που ταυτόχρονα δίνει $(detG)^{-\frac{1}{2}} = detS$.

Πρώτα επικεντρώνουμε την μελέτη μας στο όρο τάξης ϵ^0 που θα δίνει την κυρίαρχη υπεριώδη απόκλιση. Σε αυτή την τάξη το heat-kernel θα δίνει:

$$h(x,x,\epsilon) = \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\epsilon^2} detS \tag{4.24}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το G_{mn} από την εξίσωση (4.10) για την περίπτωση του γενικού $K(x)$. Για στατικές σφαιρικές λύσεις με $w = r^2$ μπορεί να δειχτεί ότι τα π' και K_X συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$K_X \pi' = \frac{c}{w^{\frac{3}{2}}} \tag{4.25}$$

όπου $\pi = \pi(w)$ και $\pi' = \frac{\partial \pi}{\partial w}$. Το c είναι μία (θετική ή αρνητική) σταθερά ολοκλήρωσης και $X = 2w\pi'^2$. Σε ευκλείδεια μετρική καταλήγουμε στο ότι για δράση της $K(X)$ και σφαιρικά συμμετρικό υπόβαθρο π_{cl} ισχύει:

$$G_{mn} = diag(K_X, K_X, K_X, K_X + K_{XX} 4w\pi'^2) \tag{4.26}$$

Χρησιμοποιούμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την αρχή του στο κέντρο του classicalon. Υπολογίζουμε την ορίζουσα σε σημείο του άξονα z. Από αυτόν τον γενικό τύπο συμπεραίνουμε ότι το αν οι υπεριώδεις αποκλίσεις θα ενισχύονται ή θα περιορίζονται εξαρτάται λόγω της (4.23) μόνο από την μορφή της κλασικής λύσης π (και των παραγώγων της) και το όρισμα w. Για να γίνει πιο προφανής η συγκεκριμένη διαπίστωση διαφορίζουμε την (4.23) και καταλήγουμε στην σχέση:

$$K_X \pi' X' + K_X \pi'' = -\frac{3}{2}\frac{c}{w^{\frac{5}{2}}} \tag{4.27}$$

Μετά από λίγες απλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στο:

$$\frac{K_{XX}}{K_X} = -\frac{1}{4\pi'^2 w}\left(\frac{3\pi' + 2\pi'' w}{\pi' + 2w\pi''}\right) \tag{4.28}$$

Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (4.24) για να απαλείψουμε τα K_X και K_{XX}. Το αποτέλεσμα είναι:

$$G_0 = \frac{c}{2w^{\frac{3}{2}}\pi'_{cl}} diag\left(1,1,1,1 - \frac{3\pi'_{cl} + 2w\pi''_{cl}}{\pi'_{cl} + 2w\pi''_{cl}}\right) \tag{4.29}$$

$$(detG_0)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2w^{\frac{3}{2}}\pi'_{cl}}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{3\pi'_{cl} + 2w\pi''_{cl}}{\pi'_{cl} + 2w\pi''_{cl}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

Η ορίζουσα του S^a_b που απαιτείται για την σχέση $S^m_\rho G_{mn} S^n_\sigma = g_{\rho\sigma}$ είναι:

$$detS = \left(\frac{w^3\pi'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{3\pi' + 2\pi'' w}{\pi' + 2w\pi''}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.31}$$

Δεδομένου του προφίλ της λύσης για την εκάστοτε θεωρία $K(X)$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε σε αυτή τη σχέση και να συμπεράνουμε αν ο όρος Λ^4 των κβαντικών διορθώσεων σε ένα βρόχο στην ενεργό δράση περιορίζεται. Ο παράγοντας της σχέσης (4.29) έχει ακτινική εξάρτηση. Σε μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο του classicalon, οι όροι υψηλότερων παραγώγων θα είναι λιγότερο σημαντικοί από τον κινητικό όρο και θα έχουμε $K_X \simeq 1$. Από την εξίσωση (4.23) παρατηρούμε ότι το πεδίο θα είναι προσεγγιστικά $\pi'_{cl} \simeq \frac{c}{2w^32}$. Έτσι για μεγάλα w θα προκύπτει $detG_0 \simeq 1$. Αντιθέτως, για μικρά w ο παράγοντας της σχέσης (4.29) περιμένουμε να γίνεται πολύ μικρός και να περιορίζει την κβαντική συνεισφορά στην ενέργεια κενού. Μία συνολική θετική δύναμη του w θα ισοδυναμεί με καταστολή επειδή το w είναι μικρή παράμετρος ($w \ll 1$) στο εσωτερικό του classicalon που μας ενδιαφέρει.

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε νωρίτερα στο πρώτο και το τρίτο μέρος της εργασίας, περιμένουμε οι σκληροί τρόποι ταλάντωσης να μην διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην σκέδαση σε υψηλές ενέργειες για θεωρίες που εμφανίζουν classicalization. Μέσα στο classicalon είδαμε μάλιστα ότι έχουμε κυρίως μαλακά κβάντα που προέρχονται από τα σκληρά κβάντα υψηλών ενεργειών μέσω διαδικασιών $2 \to N$. Οπότε η πιο αυτοσυνεπής επιλογή για τέτοιες θεωρίες είναι οι υπεριώδεις αποκλίσεις στις κβαντικές διορθώσεις να περιορίζονται. Υπό αυτή την έννοια η σχέση (4.29) αποτελεί σημαντική συνθήκη για το προφίλ των κλασικών λύσεων, αν θέλουμε η μορφή των classicalon να προστατεύεται μετά από τις κβαντικές διορθώσεις.

4.4 Υπολογισμός για wrong-sign DBI και classicalon.

Για την wrong-sign DBI βρίσκουμε ότι:

$$(detG_0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{w^3}{(w^2+c^2\mu)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.32}$$

Η καταστολή σε μικρά w είναι πολύ ισχυρή:

$$(detG_0)^{-\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{w}{w_{cl}}\right)^3 = \left(\frac{r}{r_{cl}}\right)^6 \tag{4.33}$$

Στην περίπτωση της άλλης θεωρίας (K_2) οι αναλυτικές εκφράσεις είναι περίπλοκες, ωστόσο ο παράγοντας καταστολής είναι:

$$(detG_0)^{-\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{w}{w_{cl}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{r}{r_{cl}}\right)^{\frac{8}{3}} \tag{4.34}$$

Και το μέρος της ενεργού δράσης που εξαρτάται από το πεδίο περιμένουμε να περιορίζεται από το υπόβαθρο. Θα το δείξουμε για την περίπτωση της θεωρίας K_2 για τις διορθώσεις που αποκλίνουν ως Λ^4. Μπορούμε να χωρίσουμε το πεδίο ως $\pi = \pi_{cl} + \delta\pi$ στο υπόβαθρο και μικρές διακυμάνσεις γύρω από αυτό. Τότε η ορίζουσα γράφεται ως:

$$det[G_0+\delta G] = detG_0\left(1 + tr[G_0^{-1}\delta G] - \frac{1}{2}tr\left[(G_0^{-1}\delta G)^2\right] + \frac{1}{2}\left(tr[G_0^{-1}\delta G]\right)^2 + ...\right) \tag{4.35}$$

με $G_0 = G(\pi_{cl})$, το δG ανάπτυγμα σε δυνάμεις $\delta\pi$ και g_{mn} την ευκλείδεια μετρική. Για διαγώνιο G_{mn} της μορφής (4.24) βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} det[G_0+\delta G] = detG_0\Big[1 + \mu(G_0^{-1})_{mn}\partial^m\delta\pi\partial^n\delta\pi + \frac{1}{2}\mu tr(G_0^{-1})\partial_m\delta\pi\partial^m\delta\pi \\ -4\mu^2 w{\pi'_{cl}}^2(G_0^{-1})_{33}(G_0^{-1})_{mn}\partial^m\delta\pi\partial^n\delta\pi + 2\mu^2 w{\pi'_{cl}}^2\Big([tr(G_0^{-1})]^2 - tr[(G_0^{-1})^2] \\ + 4tr(G_0^{-1})(G_0^{-1})_{33} - 2[(G_0^{-1})_{33}]^2\Big)\partial_3\delta\pi\partial^3\delta\pi\Big] \end{aligned} \tag{4.36}$$

Όπως και πριν χρησιμοποιούμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την αρχή του στο κέντρο του classicalon, και υπολογίζουμε την ορίζουσα κατά μήκος του άξονα z. Για μικρά w τα στοιχεία του G_0^{-1} και το ίχνος

του είναι της τάξης $\sim w^{\frac{2}{3}}$. Επίσης $[detG_0] \sim w^{-\frac{8}{3}}$ και $[w\pi'^2_{cl}] \sim w^{-\frac{2}{3}}$. Όταν θα αναπτύξουμε το $(det[G_0 + \delta G])^{-\frac{1}{2}}$ σε δυνάμεις του $\delta\pi$ θα πάρουμε ένα συνολικό παράγοντα καταστολής $(detG_0)^{-\frac{1}{2}} \sim w^{\frac{4}{3}}$. Όλοι οι όροι τάξης $(\delta\pi)^2$ περιορίζονται επιπλέον κατά $\sim w^{\frac{2}{3}}$.

Ακόμα και αν οι υπεριώδεις αποκλίσεις περιορίζονται οι θεωρίες παραμένουν τεχνικά μη-επανακανονικοποιήσιμες, εφόσον η εξάρτηση από το σημείο αποκοπής Λ δεν απαλείφεται εντελώς. Για να έχει νόημα η παραπάνω ανάλυση πρέπει το σημείο αποκοπής της θεωρίας στο υπεριώδες να είναι φυσικό. Σε αυτή την περίπτωση είδαμε ότι ένα μη-τετριμμένο ανομοιογενές υπόβαθρο classicalon μπορεί να δώσει σημαντικό παράγοντα καταστολής για τις κβαντικές διορθώσεις. Τα ευρήματα αυτού του υπολογισμού βρίσκονται σε σύμπνοια με την ιδέα ότι για θεωρίες που εμφανίζουν το φαινόμενο της classicalization η ευαισθησία στο υπεριώδες είναι μικρή, όταν οι σκεδάσεις σε υψηλές ενέργειες κυριαρχούνται από δημιουργία classicalon.

4.5 Διερεύνηση για τις λοιπές υπεριώδεις αποκλίσεις.

Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε αναλυτικά ότι η κυρίαρχη απόκλιση Λ^4 περιορίζονται από το υπόβαθρο τύπου classicalon. Ξεκινώντας από την σχέση (4.22) η απόκλιση αυτή προερχόταν από τους όρους τάξης ϵ^0 στο ανάπτυγμα του εκθετικού. Η απόκλιση Λ^2 θα προέρχεται ακολούθως από τους όρους τάξης ϵ^1 και η λογαριθμική απόκλιση $ln\Lambda$ από τους όρους ϵ^2 του εκθετικού. Το $G_{mn}k^m k^n$ δεν μετατίθεται τετριμμένα με τους υπόλοιπους όρους του εκθετικού, και το δεύτερο θα πρέπει οπότε να το αναπτύξουμε σύμφωνα με τον τύπο:

$$e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} e^{\frac{1}{6}(2[Y,[X,Y]]+[X,[X,Y]])} ... =$$
$$e^X \left[1 + \frac{Y^2}{2} - \frac{Y}{2}[X,Y] - \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{8}[X,Y][X,Y] - \frac{1}{3}[[X,Y],Y] - \frac{1}{6}[[X,Y],X] + O(\epsilon^{\frac{3}{2}})\right] \tag{4.37}$$

Θα κρατήσουμε όρους μέχρι τάξης ϵ. Θα χρειαστούμε για τον υπολογισμό να ορίσουμε τις ποσότητες X, Y:

$$X = -G_{\rho\sigma}k'^{\rho}k'^{\sigma} \tag{4.38}$$

$$Y = 2\sqrt{\epsilon}iG_{mn}k'^{n}\partial^m + \epsilon G_{mn}\partial^m\partial^n + i\sqrt{\epsilon}Ek'^{m}\epsilon E\partial^m \tag{4.39}$$

και να υπολογίσουμε όλους τους μεταθέτες που υπεισέρχονται στην (4.39) μέχρι την επιθυμητή τάξη.

$$[X,Y] = 2\sqrt{\epsilon}iG_{mn}k^n k^\rho k^\sigma \partial^m G_{\rho\sigma} + 2\epsilon G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma}\partial^n k^\rho k^\sigma + \epsilon G_{mn}\partial^m\partial^n G_{\rho\sigma}k^\rho k^\sigma + \epsilon E\partial^m G_{\rho\sigma}k^\rho k^\sigma$$

$$[[X,Y],X] = -2\epsilon\partial^n G_{ab}G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma}k^a k^b k^\rho k^\sigma$$

$$[[X,Y],Y] = 4\epsilon G_{\gamma\delta}\partial^\gamma G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma}k^\delta k^n k^\rho k^\sigma + 4\epsilon G_{\gamma\delta}\partial^\gamma\partial^m G_{\rho\sigma}G_{mn}k^\delta k^n k^\rho k^\sigma + O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$$

$$Y[X,Y] = (-4\epsilon G_{\gamma\delta}\partial^\gamma G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma} - 2\epsilon E G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma} - 4\epsilon G_{\gamma\delta}G_{mn}\partial^\gamma\partial^m G_{\rho\sigma})k^\delta k^n k^\rho k^\sigma + O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$$

$$Y^2 = 4\epsilon G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma}\partial^\sigma k^n k^\rho - \epsilon E^2 k^m k^n$$

$$[X,Y][X,Y] = -4\epsilon G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma} G_{ab}\partial^a G_{\gamma\delta} k^n k^\rho k^\sigma k^b k^\gamma k^\delta + O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$$

Το επόμενο βήμα είναι να επανορίσουμε τις ορμές ως:

$$k'^a = k^b S^a_b \quad , \quad dk' = (detS)dk$$

Το διαγώνιο μέρος του heat-kernel που προκύπτει θα έχει 9 όρους τελικά, για τους οποίους θα πρέπει να γίνουν ξεχωρίστα οι ολοκληρώσεις στα k με τις ταυτότητες (4.17). Μετά από αρκετή άλγεβρα αν προσθέσουμε όλες τις συνεισφορές θα πάρουμε τελικά σε τάξη ϵ:

$$h(x,x,\epsilon) = \frac{(detS)}{(4\pi\epsilon)^2}\Big[1 - \frac{\epsilon}{12}G_{mn}\partial^n\partial^m G_{\rho\sigma}T^{\rho\sigma} + \frac{\epsilon}{12}\partial^\rho G_{mn}\partial^m G_{\rho\sigma}T^{n\sigma} +$$

$$\frac{\epsilon}{24}\partial^n G_{ab}\partial^m G_{\rho\sigma}G_{mn}T^{ab}T^{\rho\sigma} - \frac{\epsilon}{4}E^2T^{mn} + \frac{\epsilon}{48}\partial^n G_{ab}\partial^m G_{\rho\sigma}G_{mn}T^{ab}T^{\rho\sigma} + O(\epsilon^{\frac{3}{2}})\Big] \tag{4.40}$$

όπου τα T ορίζονται από τα S μέσω της σχέσης $T = S^T S = G^{-1}$.

Τα G , T και E που υπεισέρχονται σε αυτή την σχέση έχουν κάποια ακτινική εξάρτηση όταν υπολογιστούν για κάποιο συγκεκρινένο προφίλ όπως στην προηγούμενη παράγραφο, πχ της wrong sign DBI. Τα G και T έχουν αντίθετη δύναμη r και οπότε αλληλοαναιρούνται. Οπότε σχηματικά μας μένουν όροι της μορφής $G\partial\partial$ και E^2T. Από την σχέση (4.10) παρατηρούμε οτι σχηματικα $E \sim G\partial$. Συνεπώς όλοι οι όροι είναι τελικά της μορφής $G\partial\partial$. Οι δύο παράγωγοι θα κατεβάζουν την δύναμη του r κατά δύο. Για την θεωρία K_1 (wrong-sign DBI) έχουμε οτι $G_0 \sim r^{-3}$ ενώ για την K_2 ότι $G_0 \sim r^{-\frac{4}{3}}$. Ταυτόχρονα έχουμε και τον παράγοντα καταστολής $(detS)$ που είναι r^6 για την K_1 και $r^{\frac{8}{3}}$ για την K_2. Τελικά όλοι οι όροι τάξης ϵ^2 σύμφωνα με αυτή την ανάλυση θα έχουν εξάρτηση r:

$$K_1 : \qquad \sim r \tag{4.41}$$

$$K_2 : \qquad \sim r^{-\frac{2}{3}} \tag{4.42}$$

Στο K_2 παρατηρούμε μία φαινομενική ενίσχυση επειδή το r έχει αρνητική δύναμη. Όταν ωστόσο πάμε να αναπτύξουμε σε $\delta\pi$ και να κρατήσουμε τους όρους $(\delta\pi)^2$ περιμένουμε να έχουμε έναν επιπλέον παράγοντα καταστολής

τύπου $r^{\frac{4}{3}}$ που θα δίνει συνολικά καταστολή. Πρέπει να τονίσουμε εδώ, οτι αυτοί οι όροι θα είναι αυτοί που περιορίζονται το δυνατόν λιγότερο. Θα υπάρχουν και άλλοι όροι που οι δύο παράγωγοι που συμβολίσαμε σχηματικά $\partial\partial$ δεν θα χτυπούν στο π_{cl} του G αλλά στα $\delta\pi$ που αναπτύσσουμε και οπότε θα αφαιρούμε μία ή δύο δυνάμεις του r λιγότερο. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι εφόσον και ο όρος του heat-kernel τάξης ϵ^2 περιορίζεται στο υπόβαθρο του classicalon, οι υπεριώδεις αποκλίσεις Λ^2 που θα περιορίζονται επίσης. Υπάρχουν και οι λογαριθμικές αποκλίσεις για τους όρους ϵ^2. Περιμένουμε οτι και αυτές θα περιορίζονται με παρόμοιο τρόπο, αλλά ο υπολογισμός συμπεριλαμβάνει πολλούς όρους (τάξης μέχρι ϵ^2 στην (4.39)!) και δύσκολες ολοκληρώσεις (με τύπους για περισσότερα k αντίστοιχες των (4.17)!) και δεν μπορεί να γίνει στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

5 Επίλογος

Αν και η μελέτη μου για την συγκεκριμένη εργασία διήρκησε περίπου ένα ακαδημαϊκό έτος, ευτυχώς ο συγκεκριμένος χρόνος επενδύθηκε σε μία ενδιαφέρουσα διαδρομή και ήταν, όπως κρίνω εκ των υστέρων, γόνιμος χρόνος. Το πρώτο μέρος της εργασίας συμπεριλάμβανε αρκετή βιβλιογραφική μελέτη από τις σχετικές δημοσιεύσεις των G. Dvali et al και N. Tetradis et al. Μετά από διευκρινιστικές (τολμώ να πω και διαφωτιστικές) συζητήσεις στο τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ επανέλαβα μερικούς από τους υπολογισμούς και έγραψα το αντίστοιχο κείμενο με γνώμονα πως εγώ καταλαβαίνω την ιδέα-μηχανισμό που προτείνεται. Ενδεχομένως να είναι εμφανές ότι προσπάθησα να ενσωματώσω στην εργασία κάποια φαινομενικά απόμακρα θέματα, όπως για παράδειγμα η εντροπία μελανής οπής και το Καθιερωμένο Πρότυπο. Το κίνητρο πίσω από αυτή μου την επιλογή ήταν το ειλικρινές ενδιαφέρον μου για τα συγκεκριμένα θέματα. Το ενδιαφέρον μου κέντρισε η εναλλακτική οδός που προτείνεται στην συγκεκριμένη ευρύτερη μελέτη για τα θέματα που πραγματεύεται. Την αντιμετώπισα ως μία επίδειξη 'in vitro' του τρόπου να αντιμετωπίζει κανείς με σκεπτικισμό παραδοσιακές και καθιερωμένες ιδέες την σύγχρονης φυσικής, με στόχο να καταλήξει σε πορίσματα που συμπληρώνουν την θεωρία, βελτιώνουν την φυσική μας διαίσθηση και ενδεχομένως προβλέπουν νέα φυσική. Παράλληλα, μου δόθηκε η ευκαιρία να εφαρμόσω σε υπολογισμούς πολλές από τις γνώσεις που πήρα σε αυτό το μεταπτυχιακό σε θεωρητικά θέματα, όπως οι υπολογισμοί σε βρόχους, η βαρύτητα ή το Καθιερωμένο Πρότυπο και να τα κατανοήσω ένα σκαλί περισσότερο από πριν. Για το τελευταίο κεφάλαιο έγιναν κάποιοι πρωτότυποι υπολογισμοί με τον επιβλέποντα μου Ν. Τετράδη. Για την κατανόηση της μεθόδου heat-kernel οφείλω επιπροσθέτως να ευχαριστήσω τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Ν. Μπρουζάκη για τον χρόνο που αφιέρωσε στις σχετικές συζητήσεις μας. Το πέρας αυτής της εργασίας με αφήνει ικανοποιημένο αφενός για την βιβλιογραφική μελέτη και αφετέρου για τους αυθεντικούς υπολογισμούς που έγιναν στο πλαίσιο της, παρά όποιες χωρο-χρονικές δυσκολίες συνάντησα τον τελευταίο αυτό χρόνο. Αδιαμφισβήτητα, οφείλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας μου Ν. Τετράδη τόσο για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος όσο και για την ευγενική του καθοδήγηση μέχρι την ολοκλήρωση της εργασίας.

Αναφορές

[1] Gia Dvali, Cesar Gomez and Alex Kehagias, *Classicalization of Gravitons and Goldstones*, 10.1007/JHEP11(2011)070, arXiv:1103.5963v1 [hep-th] 30 Mar 2011.

[2] G. Dvali C. Gomez R.S. Isermann, D. Lust and S. Stieberger, *Black Hole Formation and Classicalization in Ultra-Planckian 2 → N Scattering*, arXiv:1409.7405v1 [hep-th] 25 Sep 2014.

[3] Gia Dvali and Cesar Gomez, *Self-Completeness of Einstein Gravity.*, arXiv:1005.3497v1 [hep-th] 19 May 2010.

[4] Gia Dvali, *Classicalize or not to Classicalize?*, 10.1007/JHEP11(2012)030, arXiv:1101.2661v1 [hep-th] 13 Jan 2011.

[5] Gia Dvali and David Pirtskhalava, *Dynamics of Unitarization by Classicalization*, 10.1016/j.physletb.2011.03.054, 10.1007/JHEP04(2012)110, arXiv:1011.0114v1 [hep-ph] 30 Oct 2010.

[6] Gia Dvali, Andre Franca, Cesar Gomez, *Road Signs for UV-Completion*, arXiv:1204.6388v1 [hep-th] 28 Apr 2012.

[7] Gia Dvali, Gian F. Giudice, Cesar Gomez and Alex Kehagias, *UV-Completion by Classicalization*, 10.1007/JHEP08(2011)108, arXiv:1010.1415v2 [hep-ph] 26 Jan 2011.

[8] Eugeny Babichev, Viatcheslav Mukhanov, Alexander Vikman, *kEssence, superluminal propagation, causality and emergent geometry*, JHEP02(2008)101, arXiv:0708.0561v1 [hep-th] 3 Aug 2007.

[9] J. Rizos, N.Tetradis and G. Tsolias, *Classicalization as a tunnelling phenomenon*, 10.1007/JHEP08(2012)054, arXiv:1206.3785v2 [hep-th] 4 Jul 2012.

[10] J. Rizos and N. Tetradis, *Dynamical classicalization*, arXiv:1112.5546v2 [hep-th] 4 Apr 2012.

[11] N. Brouzakis, J. Rizos and N. Tetradis, *On the dynamics of classicalization*, 10.1016/j.physletb.2012.01.011, arXiv:1109.6174v3 [hep-th] 5 Apr 2012.

[12] Nikolaos Tetradis, *Classical Solutions of Higher-Derivative Theories*, arXiv:1212.6528v3 [hep-th] 28 Aug 2013.

[13] J. Rizos, N. Tetradis, *Shock waves as branes with throats*, 10.1007/JHEP02(2013)112, arXiv:1210.4730v2 [hep-th] 20 Feb 2013.

[14] Nikolaos Brouzakis, Nikolaos Tetradis, *Suppression of Quantum Corrections by Classical Backgrounds*, 10.1103/PhysRevD.89.125004, arXiv:1401.2775v2 [hep-th] 22 May 2014.

[15] N.Brouzakis, A.Codello, N.Tetradis, O.Zanusso, *Quantum corrections in Galileon theories*, 10.1103/PhysRevD.89.125017, arXiv:1310.0187 [hep-th] 26 Jan 2011.

[16] P. Asimakis, N. Brouzakis, A. Katsis and N. Tetradis, *Quantum Corrections in Classicalon Theories*, arXiv:1412.4275v2 [hep-th] 16 Dec 2014.

[17] Rafael I. Nepomechie, *Calculating heat-kernels*, 10.1103/PhysRevD.31.3291, 15 June 1985.

[18] Jean Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, 2002.