ΑΝΤΩΝΙΟΣ Η. ΨΑΛΛΙΔΑΣ

ΗΜΙΟΜΑΔΕΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ L^p

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘ. ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΜΠΑΡΜΠΑΤΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2012

Στις πολυαγαπημένες ανηψιές μου:

Ξένια, Μαρία
Δήμητρα, Νόρα
Κατερίνα, Διονυσία
και Μαρίνα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσης διπλωματικής εργασίας, Αναπλ. Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, αφενός για το εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα που μου εμπιστεύτηκε και αφετέρου για την πολύτιμη συμβολή του στη διαμόρφωση των αποδείξεων ορισμένων ιδιαιτέρως απαιτητικών τεχνικών αποτελεσμάτων.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τους Καθηγητές του ίδιου Τμήματος κ. Ιωάννη Στρατή και κ. Αριστείδη Κατάβολο που με τίμησαν με την παρουσία τους ως μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, πραγματοποιώντας εύστοχες και γόνιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η θεωρία ημιομάδων φραγμένων γραμμικών τελεστών σε χώρους Banach εμφανίστηκε το πρώτο μισό του 20ου αιώνα, απέκτησε τον πυρήνα της με το περίφημο θεώρημα παραγωγής των Hille-Yosida (1948) και βρήκε τον πρώτο οργανωμένο τρόπο έκφρασης με το βιβλίο των E. Hille και R.S. Phillips, Semigroups and Functional Analysis (1957). Ιδιαιτέρως αναπτύχθηκε τις δεκαετίες του εβδομήντα και του ογδόντα χάρη στις μονογραφίες από τους E.B. Davies (1980), A. Pazy (1983) και J.A. Goldstein (1985). Σήμερα αναγνωρίζεται ως ένας ζωντανός κλάδος των Μαθηματικών με εφαρμογές που δεν περιορίζονται απλώς στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και στις Στοχαστικές Διαδικασίες, αλλά επεκτείνονται στην Θεωρία Ελέγχου, στη δυναμική πληθυσμών, στη θεωρία μεταφοράς και στην Κβαντομηχανική.

Με την εργασία μας, φιλοδοξούμε αφενός να παρουσιάσουμε βασικά στοιχεία από τη πλουσιότατη Θεωρία Ημιομάδων σε χώρους Banach και αφετέρου να επικεντωθούμε στην μελέτη του προβλήματος φασματικής ανεξαρτησίας τελεστών που δρούν ταυτόχρονα σε χώρους L^p. Ήδη ο B. Simon, από το 1982, διατύπωσε την εικασία του περί ανεξαρτησίας από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$ του φάσματος ευρείας κλάσης τελεστών Schrödinger επί των χώρων $L^p(\mathbb{R}^n)$. Οι R. Hempel και J. Voigt έδωσαν καταφατική απάντηση (1986) για ελαφρώς διαφοροποιημένη κλάση τέτοιων τελεστών και, από τότε, το ζήτημα αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας πολλών μελών της διεθνούς μαθηματικής κοινότητας. Γνωρίζουμε ότι, εν γένει, το L^p-φάσμα τελεστών εξαρτάται από το p. Εύλογα, λοιπόν, προκύπτει το ερώτημα περί επιβολής καταλλήλων συνθηκών προκειμένου να εξασφαλιστεί φασματική ανεξαρτησία. Αφετηρία δεν είναι άλλη από την υπόθεση ότι ο A είναι κλειστός γραμμικός τελεστής ο οποίος παράγει μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα T στο χώρο Hilbert $L^2(\Omega, dx)$ όπου (Ω, Σ, dx) είναι κατάλληλος χώρος μέτρου. Ιδιαίτερα αποτελεσματική είναι η παραδοχή ότι η T απαρτίζεται από ολοκληρωτικούς τελεστές με πυρήνες που ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως 2 ή γενικότερα τάξεως m με $m > 1$. Εναλλακτικά χρησιμοποιούνται άλλα μεθοδολογικά εργαλεία όπως εκτιμήσεις μεταθετών και συναρτησιακός λογισμός. Σε κάθε περίπτωση αποδεικνύεται ότι επάγονται ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p επί των χώρων Banach $L^p(\Omega, dx)$, $1 \leq p < \infty$, σύμφωνα με τον τύπο

$$T_p(t)f = T(t)f \text{ για κάθε } t \geq 0 \text{ και } f \in L^p(\Omega, dx) \cap L^2(\Omega, dx)$$

Αν A_p είναι ο γεννήτορας της ημιομάδας T_p, επιβεβαιώνεται ότι το φάσμα είναι ανεξάρτητο από το $p \in [1, +\infty)$. Η περιγραφείσα διαδικασία εφαρμόζεται πλήρως σε αρκετές κλάσεις διαφορικών τελεστών, ενώ παρέχει και μια διαφορετική, από εκείνη των Hempel και Voigt, προσέγγιση της φασματικής ανεξαρτησίας τελεστών Schrödinger.

Ουσιαστικά, η εργασία μας αποτελείται από δυο μέρη. Στο πρώτο από αυτά συμπεριλαμβάνονται τα Κεφάλαια 1-4, στα οποία επιχειρείται μια, κατά το δυνατόν λεπτομερής, εισαγωγή στην γενική θεωρία ημιομάδων σε χώρους Banach με έμφαση στις κυρίαρχες έννοιες των ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών και των απειροστικών γεννητόρων αυτών. Στο Κεφάλαιο 1 συνοψίζονται πολλά αποτελέσματα που αφορούν φραγμένους και μη φραγμένους τελεστές σε χώρους Banach και Hilbert καθώς, και θέματα που άπτονται της θεωρίας των χώρων L^p και Sobolev. Για έναν καλό γνώστη Συναρτησιακής Ανάλυσης, πιθανότατα θα φανεί περισσότερο ενδιαφέρουσα η τελευταία παράγραφος του Κεφαλαίου, καθώς εκεί δικαιολογείται η στενή σύνδεση ανάμεσα στις τετραγωνικές μορφές και τους ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης.

Στην πρώτη παράγραφο του Κεφαλαίου 2 ορίζεται η έννοια της μονοπαραμετρικής ημιομάδας (αντίστοιχα ομάδας) σε έναν χώρο Banach X, ως οικογένειας $(T(t))_{t\geq 0}$ (αντίστοιχα $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$) φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του X οι οποίοι ικανοποιούν την συναρτησιακή εξίσωση

$$T(t+s) = T(t)T(s),\ T(0) = I \text{ για κάθε } t, s \in [0, +\infty)$$

(αντίστοιχα, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$). Παρουσιάζεται, επίσης, η κλάση των ομοιόμορφα συνεχών ημιομάδων που συγκεντρώνει, κυρίως, θεωρητικό ενδιαφέρον. Στη δεύτερη παράγραφο του ίδιου Κεφαλαίου εισάγονται οι ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες (αντίστοιχα ομάδες) σε χώρους Banach που θα μας απασχολήσουν καθόλη την έκταση της εργασίας μας. Αν X είναι χώρος Banach, μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα (αντίστοιχα ομάδα) επί του X χαρακτηρίζεται από τη συνέχεια της απεικόνισης $t \to T(t)$ από το διάστημα $[0, +\infty)$ (αντίστοιχα από το $\mathbb{R}$) στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(X)$ ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών. Επιπλέον ορίζεται με σαφήνεια ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας (αντίστοιχα ομάδας) σε έναν χώρο Banach X, ως ο μη φραγμένος, εν γένει, γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ όπου

$$Ax = \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

και

$$Dom(A) = \{x \in A : \exists \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}\}$$

(αντίστοιχα

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

και

$$Dom(A) = \{x \in A : \exists \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h}\})$$

Μελετώνται ακόμη, σημαντικές φασματικές ιδιότητες γεννητόρων ισχυρώς συνεχών ημιομάδων με τη βοήθεια της αναπαράστασης επιλυόντων τελεστών αυτών μέσω καταλλήλων γενικευμένων ολοκληρωμάτων Riemann. Στην τρίτη παράγραφο του Κεφαλαίου 2 παρουσιάζονται βασικές κατασκευές ισχυρών συνεχών ημιομάδων από ήδη υπάρχουσες.

Στο Κεφάλαιο 3 περιέχονται ορισμένα από τα πλέον αντιπροσωπευτικά παραδείγματα Ημιομάδων σε χώρους Banach. Στην πρώτη παράγραφο μπορεί κάποιος να αναζητήσει στοιχεία για τις ημιομάδες πινάκων με τις πολλές εφαρμογές στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και στη δεύτερη παράγραφο για τις πολλαπλασιαστικές ημιομάδες στον $C_0(\Omega)$ και στον $L^p(\Omega, \mu)$. Σειρά έχουν οι ημιομάδες μετατοπίσεων (ή μεταθέσεων) σε χώρους L^p στην τρίτη παράγραφο, ενώ ιδιαίτερη προσοχή αξίζει να δοθεί στην τέταρτη παράγραφο, όπου αναφερόμαστε στις συνελικτικές ημιομάδες. Η πιο χαρακτηριστική εξ αυτών, η ημιομάδα Gauss επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$, διαδραματίζει σημαίνοντα ρόλο στα επόμενα Κεφάλαια της εργασίας μας.

Στο Κεφάλαιο 4 αναπτύσσονται υποδειγματικά τα θεωρήματα παραγωγής ημιομάδων, δηλαδή τα αποτελέσματα εκείνα που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο παράγονται οι διάφορες κλάσεις ισχυρώς συνεχών ημιομάδων (ή και ομάδων) τελεστών. Στην πρώτη παράγραφο υπάρχει το Θεώρημα των Hille-Yosida. Σύμφωνα με αυτό, ο γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ αποτελεί απειροστικό γεννήτορα μίας συσταλτικής ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ (οπότε $||T(t)|| \leq 1$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$) σε έναν χώρο Banach X, αν και μόνο αν είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και ισχύουν είτε $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ και $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\lambda > 0$ (με $\rho(A)$ συμβολίζουμε το επιλύον σύνολο του A) είτε $\lambda \in \rho(A)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$ και $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\ \lambda}$ για τα συγκεκριμένα λ. Στην ίδια παράγραφο περιλαμβάνονται, επίσης, το γενικό θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ημιομάδων (Θεώρημα των Feller-Miyadera-Phillips) καθώς και το αντίστοιχο για ομάδες. Στη δεύτερη παράγραφο γίνεται αναφορά στους αποσβεστικούς τελεστές και διατυπώνεται το Θεώρημα των Lumer-Phillips για συσταλτικές ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες, το οποίο αποδεικνύεται στην πράξη προσφορότερο από τα προηγούμενα. Στην τρίτη παράγραφο ασχολούμαστε με τις δυϊκές ημιομάδες και διατυπώνουμε το Θεώρημα του Stone που χαρακτηρίζει τους γεννήτορες ισχυρώς συνεχών ομάδων από ορθομοναδιαίους τελεστές σε χώρους Hilbert.

Τα Κεφάλαια 5-7 συγκροτούν το δεύτερο μέρος της εργασίας. Σε αυτά η διαπραγμάτευση διεξάγεταιαποκλειστικά στα πλαίσια των χώρων L^p. Στην πρώτη παράγραφο του Κεφαλαίου 5 διατυπώνουμε τις συνθήκες Beurling-Deny, αποδεικνύουμε ότι αυτές ικανοποιούνται από ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης, σε μορφή απόκλισης, που υπόκεινται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet και ορίζουμε τις συμμετρικές ημιομάδες Markov. Πρόκειται για ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες επί του $L^2(\Omega, dx)$, όπου Ω τοπικά συμπαγής δεύτερος αριθμήσιμος χώρος Hausdorff και dx μέτρο Borel επί του Ω, οι οποίες παράγονται από τους τελεστές $-H$, με τον H να πληροί τις συνθήκες Beurling-Deny. Έχουν τη γενική μορφή e^{-Ht}. Στη δεύτερη παράγραφο του Κεφαλαίου 5 διασαφηνίζεται ο ρόλος της συμπάγειας των τελεστών που απαρτίζουν μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα στην ανεξαρτησία από τον αριθμό p του L^p-φάσματος των γεννητόρων της. Ακριβέστερα αποδεικνύεται ότι, εάν e^{-Ht} είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov με τους τελεστές που την απαρτίζουν συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^2(\Omega, dx)$ (αντίστοιχα επί του $L^1(\Omega, dx)$), τότε το L^p-φάσμα του $-H$, άρα και του H, είναι ανεξάρτητο του p, όπου $1 < p < +\infty$ (αντίστοιχα $1 \leq p \leq +\infty$). Ορίζονται και οι ultra-συσταλτικές ημιομάδες και διατυπώνεται κατάλληλο θεώρημα φασματικής ανεξαρτησίας και για αυτές.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάται η επίδραση άνω εκτιμήσεων Gauss στην ανεξαρτησία από τον αριθμό p του L^p-φάσματος (ελλειπτικών διαφορικών) τελεστών. Λέγοντας άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m εννοούμε μια εκτίμηση της μορφής

$$|K(t,x,y)| \leq c e^{\omega t} t^{-n/m} \exp(\frac{-b|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}})$$

για $c, b > 0, \omega \geq 0$ για κάθε $t > 0$, σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και για κάποιο $m > 1$. Για $m = 2$ λαμβάνουμε την αντίστοιχη εκτίμηση τάξεως 2. Οι τρείς πρώτες παράγραφοι του Κεφαλαίου αφιερώνονται στο άρθρο του W. Arendt, Gaussian estimates and Interpolation of the spectrum in L^p. Αρχικά παρατίθενται χρήσιμες φασματικές ιδιότητες συνεπών ημιομάδων και τελεστών, ενώ στη δεύτερη παράγραφο συμπεριλαμβάνονται συγκεκριμένα παραδείγματα διαφορικών τελεστών με φάσμα εξαρτώμενο από τον αριθμό p. Η τρίτη παράγραφος περιέχει τα βασικά αποτελέσματα της ερευνητικής προσπάθειας του Arendt. Το απόσταγμα αυτής συμπυκνώνεται στο Θεώρημα 6.3.10 και στο Πόρισμα 6.3.11. Έστω T ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του $L^2(\Omega, dx)$ αποτελούμενη από ολοκληρωτικούς τελεστές με πυρήνες $K(t,x,y)$ που ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης. Συμβολίζουμε με A το γεννήτορα αυτής. Επάγονται συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p με γεννήτορες A_p επί των χώρων Banach $L^p(\Omega, dx)$ ώστε $T_2 = T$ και με κατάλληλη συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\rho(A_p)$ ανεξάρτητη του $p \in [1, +\infty)$. Ειδικά αν ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής, τότε το φάσμα του A_p είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό p. Η τέταρτη παράγραφος του Κεφαλαίου είναι αφιερωμένη στο άρθρο του P.C. Kunstmann, Heat Kernel estimates and L^p-spectral independence of elliptic operators. Έχοντας υπόψιν το προαναφερθέν άρθρο του Arendt, ο Kunstmann πραγματοποιεί σειρά λεπτών και ευστόχων τροποποιήσεων στην επιχειρηματολογία του συναδέλφου του και επιτυγχάνει τεκμηρίωση φασματικής ανεξαρτησίας για γεννήτορες ισχυρώς συνεχών ημιομάδων, δίχως να υποθέσει ότι αυτοί είναι αυτοσυζυγείς, με μοναδική απαίτηση την ικανοποίηση μίας άνω εκτίμησης Gauss m τάξεως. Μάλιστα επεκτείνει τα αποτελέσματα του και στα πλαίσια χώρων L^p με βάρος μια συνάρτηση υποκείμενη σε συνθήκη υποεκθετικής αύξησης.

Το Κεφάλαιο 7 ολοκληρώνει την εργασία μας και βασίζεται στο άρθρο των M. Hieber, E. Schrohe, L^p-spectral independence of elliptic operators via commutator estimates. Σε αυτό αξιοποιούνται κατάλληλες εκτιμήσεις μεταθετών προκειμένου να εξαχθεί ανεξαρτησία του L^p-φάσματος (ελλειπτικών διαφορικών) τελεστών από τον αριθμό p. Το σχετικό αποτέλεσμα συνδυάζεται με την ικανοποίηση άνω εκτιμήσεων Gauss m τάξεως. Σημειώνουμε, καταληκτικά, ότι στο τέλος των Κεφαλαίων 6 και 7 υπάρχουν εφαρμογές της Θεωρίας σε συγκεκριμένες κλάσεις ελλειπτικών διαφορικών τελεστών.

Κεφάλαιο 1

Θέματα Συναρτησιακής Ανάλυσης

Σκοπός του παρόντος Κεφαλαίου είναι η περιεκτική παρουσίαση επιλεγμένων θεμάτων Συναρτησιακής Ανάλυσης, τα περισσότερα εκ των οποίων θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια της εργασίας μας. Ο χαρακτήρας του Κεφαλαίου είναι ξεκάθαρα πληροφοριακός. Ως εκ τούτου, δεν περιλαμβάνονται οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων. Ο αναγνώστης μπορεί να τις αναζητήσει σε οποιοδήποτε κλασσικό σύγγραμμα Συναρτησιακής Ανάλυσης και Θεωρίας Τελεστών.

Στην πρώτη παράγραφο δίνονται βασικά στοιχεία από την ευρύτατη περιοχή των χώρων Banach και Hilbert, με έμφαση στην φασματική θεωρία φραγμένων γραμμικών τελεστών και στους συμπαγείς τελεστές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζει ο ορισμός του ολοκληρώματος σε χώρους Banach.

Στη δεύτερη παράγραφο εισάγονται κεντρικές έννοιες και στοιχειοθετούνται σημαντικά αποτελέσματα από τη θεωρία των χώρων L^p εντός των πλαισίων των οποίων διαρθρώνεται το κύριο μέρος της εργασίας μας.

Σειρά στην τρίτη παράγραφο λαμβάνουν θέματα που αφορούν μη φραγμένους γραμμικούς τελεστές σε χώρους Banach και Hilbert, ενώ στην τέταρτη παράγραφο αναφερόμαστε στους ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης υπό το πρίσμα των τετραγωνικών μορφών.

1.1 Βασικά στοιχεία από τη θεωρία των χώρων Banach

Στις επόμενες σελίδες θα παρουσιάσουμε με περιεκτικό τρόπο βασικά αποτελέσματα από την περιοχή των χώρων Banach και των φραγμένων γραμμικών τελεστών σε χώρους Banach με έμφαση στην φασματική θεωρία αυτών.

Έστω, λοιπόν, X ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, εφοδιασμένος με μια νόρμα δηλαδή μία (ομοιόμορφα) συνεχή συνάρτηση $||\cdot|| : X \to$

$\mathbb{R}$ για την οποία ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:
(i) $||x|| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $||x|| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ για κάθε $x, y \in X$

Ο X καλείται χώρος Banach (Banach space) αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που επάγεται από την $||\cdot||$. Ο X καλείται πεπερασμένης διάστασης αν, ως διανυσματικός χώρος, έχει πεπερασμένη αλγεβρική διάσταση. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται απειροδιάστατος. Στην εργασία μας, όλοι οι θεωρούμενοι χώροι Banach θα υποτίθενται απειροδιάστατοι εκτός εαν ρητά αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Αν X είναι χώρος με νόρμα, τότε οι πράξεις του διανυσματικού χώρου

$$+ : X \times X \to X, \ \cdot : \mathbb{K} \times X \to X$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έπεται ότι ο X είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Για κάθε νορμαρισμένο χώρο X υπάρχει η πλήρωσή του (completion), δηλαδή ένας χώρος Banach με την ίδια νόρμα στον οποίο ο X εμφυτεύεται πυκνά και ισομετρικά. Αν $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach και Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X,τότε ο Y είναι ένας χώρος Banach με νόρμα τον περιορισμό της $||\cdot||$ σε αυτόν. Αν ο $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος με νόρμα και ο Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X, θέτουμε στο χώρο πηλίκο X/Y : $||x + Y|| = inf\{||x + y|| : y \in Y\}$ ορίζοντας μια νόρμα. Αν ο X είναι χώρος Banach, τότε και ο X/Y με την ορισθείσα νόρμα είναι χώρος Banach. Τέλος, ένας χώρος με νόρμα καλείται διαχωρίσιμος (separable) αν περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο.

Παραδείγματα 1.1.1 *(i) Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ με πράξεις κατά συντεταγμένες για $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε για $1 \leq p < +\infty$ και $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$:*

$$||z||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p \right)^{1/p}$$

Το ζεύγος $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$ είναι χώρος Banach. Επίσης για $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ θέτουμε

$$||z||_\infty = \max\{|z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Το ζεύγος $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_\infty)$ είναι χώρος Banach.
(ii) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ πεπερασμένο πλήθος νορμαρισμένων χώρων και $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Το σύνολο X με πράξεις κατά συντεταγμένες είναι διανυσματικός χώρος. Θέτουμε για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$:

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n} ||x_k||)^{1/p} \ (1 \leq p < +\infty)$$

και

$$||x||_\infty = \max\{||x_k|| : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

ορίζοντας νόρμες στο X. Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι χώροι Banach, τότε τα ζεύγη $(X, ||\cdot||_p)$ και $(X, ||\cdot||_\infty)$ είναι χώροι Banach.
(iii) Έστω $1 \leq p < +\infty$. Το σύνολο

$$\ell^p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένες είναι διανυσματικός χώρος. Για $x = (x_n) \in \ell^p$ θέτουμε

$$||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$$

και, μέσω της ανισότητας Minkowski, επιβεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση $||\cdot||_p$ είναι μια νόρμα ως προς την οποία ο ℓ^p καθίσταται χώρος Banach.
(iv) Το σύνολο

$$c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένες είναι διανυσματικός χώρος. Θέτουμε για $x = (x_n) \in c_0$

$$||x||_\infty = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}$$

και αποκτούμε μια νόρμα ως προς την οποία ο c_0 είναι χώρος Banach.
(v) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θέτουμε $\tilde{C}(X)$ για το σύνολο των φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στον X. Το σύνολο $\tilde{C}(X)$ με πράξεις κατά σημείο είναι διανυσματικός χώρος. Για $f \in \tilde{C}(X)$ ο τύπος

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

ορίζει μια νόρμα ως προς την οποία ο $\tilde{C}(X)$ αποτελεί χώρο Banach. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη και, άρα, το σύνολο $C[a, b]$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του $[a, b]$ ταυτίζεται με το χώρο $\tilde{C}[a, b]$. Έπεται ότι το ζεύγος $(C[a, b], ||\cdot||_\infty)$ είναι χώρος Banach. Για $f \in C[a, b]$ θέτουμε

$$||f||_1 = \int_a^b |f|$$

και, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann, αποδεικνύουμε ότι η $||\cdot||_1$ είναι μια νόρμα στον $C[a, b]$. Ωστόσο ο $C[a, b]$ δεν είναι πλήρης ως προς την μετρική που επάγεται από την $||\cdot||_1$ και, κατά συνέπεια, δεν αποτελεί χώρο Banach ως προς την συγκεκριμένη νόρμα. Η πλήρωση του $C[a, b]$ ως προς την $||\cdot||_1$ είναι ο χώρος $L^1[a, b]$ όλων των ισοδύναμων κλάσεων Lebesgue ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων επί του $[a, b]$.

Ελπίζοντας ότι δεν θα προκληθεί σύγχυση από την συνεχή χρήση του κοινού συμβόλου $||\cdot||$ προκειμένου για τις διαφορετικές, εν γένει, νόρμες δύο νορμαρισμένων χώρων εισάγουμε, στο σημείο αυτό, μια ιδιαιτέρως σημαντική έννοια

Ορισμός 1.1.2 *Έστω X και Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μια γραμμική συνάρτηση. Ισχύουν, δηλαδή, οι σχέσεις*

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ και } T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Η T καλείται φραγμένος γραμμικός τελεστής (bounded linear operator) αν, επιπλέον, υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$||T(x)|| \leq M||x|| \text{ για κάθε } x \in X.$$

Ισοδύναμα, ο γραμμικός τελεστής T είναι φραγμένος αν η εικόνα $T(\hat{B})$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y, όπου $\hat{B} = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X.

Αν ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, θέτουμε

$$||T|| = \{M > 0 : ||T(x)|| \leq M||x|| \text{ για } x \in X\}$$

Ο μη αρνητικός πεπερασμένος αριθμός $||T||$ είναι η νόρμα του τελεστή T (operator norm). Αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\{\frac{||T(x)||}{||x||} : x \in X, x \neq 0\} \\ &= \sup\{||T(x)|| : x \in X, ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{||T(x)|| : x \in X, ||x|| = 1\} \end{aligned}$$

Ακόμη $||T(x)|| \leq ||T|| ||x||$ για κάθε $x \in X$.

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται συστολή (contraction) εάν ισχύει $||T|| \leq 1$, ενώ ονομάζεται ισομετρία (isometry) αν $||T|| = 1$. Στην δεύτερη περίπτωση οι χώροι X και Y χαρακτηρίζονται γραμμικά ισομετρικοί. Ο T καλείται ισομετρική εμφύτευση εάν ειναι '1-1' και ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται γραμμικός ισομορφισμός αν είναι ισομορφική εμφύτευση και 'επί' του Y, με τους δύο χώρους να χαρακτηρίζονται γραμμικά ισομορφικοί. Αποδεικνύεται ότι, κάθε μιγαδικός (αντίστοιχα πραγματικός) χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι γραμμικά ισομορφικός με τον $\mathbb{C}^n$ (αντίστοιχα με τον $\mathbb{R}^n$) και, επομένως, χώρος Banach.

Παράδειγμα 1.1.3 *Ο τελεστής $V : C[a,b] \to C[a,b]$ με*

$$(Vf)(x) = \int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

όπου ο πυρήνας K είναι συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών επί του απλού χωρίου

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$$

είναι καλά ορισμένος, γραμμικός (άμεση επαλήθευση) και φραγμένος. Πράγματι υπάρχει το

$$sup_{(x,y)\in D}|K(x,y)| = \max_{(x,y)\in D} |K(x,y)| = M$$

και επιπλέον για κάθε $x \in [a,b]$ *ισχύει*

$$\begin{aligned} |Vf(x)| &= \left| \int_a^x K(x,y)f(y)dy \right| \\ &\leq \int_a^x |K(x,y)||f(y)|dy \\ &\leq M||f||_\infty \int_a^x dy \\ &= (x-a)M||f||_\infty \\ &\leq (b-a)M||f||_\infty \end{aligned}$$

Άρα $||Vf||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |(Vf)(x)| \leq (b-a)M||f||_\infty$.

Δηλαδή ο V*, ο οποίος καλείται ολοκληρωτικός τελεστής Volterra με συνεχή πυρήνα* K*, είναι φραγμένος με νόρμα* $||V||_\infty \leq (b-a)M$.

Πρόταση 1.1.4 *Έστω* X, Y *χώροι με νόρμα και* $T : X \to Y$ *γραμμικός τελεστής. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο T *ειναι φραγμένος.*
(β) Ο T *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*
(γ) Ο T *είναι συνεχής.*
(δ) Ο T *είναι συνεχής σε κάποιο σημείο* $x_0 \in X$.

Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα θέτουμε

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ φραγμένος γραμμικός τελεστής}\}$$

Ο $\mathcal{L}(X,Y)$ με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x),\ x \in X$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x), x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$$

είναι διανυσματικός χώρος ο οποίος, εφοδιασμένος με τη νόρμα τελεστή που ορίσαμε προηγουμένως, καθίσταται νορμαρισμένος. Αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι χώρος Banach.

Αν X, Y, Z είναι χώροι με νόρμα και $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ τότε ορίζεται το γινόμενο $ST : X \to Z$ (ή αλλιώς η σύνθεση $S \circ T$) από τον τύπο $(ST)(x) = S(T(x)), x \in X$ και αποτελεί φραγμένο γραμμικό τελεστή. Μάλιστα ισχύει

$$||S \circ T|| \leq ||S||||T|| \tag{1.1.1}$$

Αν $X = Y$, ο χώρος $\mathcal{L}(X)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to X$ είναι μια άλγεβρα Banach, καθώς αποτελεί άλγεβρα με τις πράξεις της πρόσθεσης, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του γινομένου τελεστών,ενώ ισχύει για την νόρμα τελεστή και η αντίστοιχη της (1.1.1) σχέση. Μοναδιαίο στοιχείο της $\mathcal{L}(X)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ με $I(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Προφανώς $||I|| = 1$.

Έστω X διανυσματικός χώρος. Δύο υπόχωροι E και F του X λέγονται συμπληρωματικοί αν $X = E + F$ και $E \cap F = \emptyset$. Τότε κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = y + z$ με $y \in E$ και $z \in F$. Επομένως η απεικόνιση $P : X \to X$ με $Px = y$ είναι καλά ορισμένη και, όπως άμεσα ελέγχεται, γραμμική. Επίσης $P^2 = P \circ P = P$, $ImP = E$ και $KerP = F$. Η P καλείται προβολή του X επί του E παράλληλα προς τον F. Αντίστροφα, έστω $P : X \to X$ μία γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει $P^2 = P$. Θέτοντας $E = ImP$ και $F = KerP$ βρίσκουμε ότι οι E και F είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του X και η P είναι η προβολή του X επί του E παράλληλα προς τον F. Αν X είναι χώρος με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to X$ με την ιδιότητα $P^2 = P$ ονομάζεται ταυτοδύναμος (idempotent).

Έστω X χώρος με νόρμα. Συμβολίζουμε με X^* το σύνολο $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και το ονομάζουμε συζυγή ή τοπολογικό δυικό χώρο (conjugate space ή topological dual space) του X. Τα στοιχεία του X^* καλούνται φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή. Η τιμή ενός $x^* \in X^*$ σε κάποιο $x \in X$ σημειώνεται με $x^*(x)$, αλλά στην πράξη αποδεικνύεται περισσότερο εύχρηστος ο συμβολισμός $\langle x, x^* \rangle$. Το σύμβολο $\langle , \rangle$ ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο ως προς την δυϊκότητα ή δυϊκό ζεύγος των X, X^*. Ο X εφοδιάζεται με την δυϊκή νόρμα $|| \cdot ||_{X^*}$, όπου

$$||x^*||_{X^*} = \sup\{|x^*(x)| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$$

Για τη δυϊκή νόρμα του $x^* \in X^*$ θα γράφουμε $||x^*||$ προς απλούστευση των συμβολισμών. Καλούμε δεύτερο συζυγή ή δεύτερο τοπολογικό δυϊκό χώρο του X τον $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$, όπου πάλι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Επαγωγικά ορίζουμε τον $n + 1$-οστό συζυγή του X από την σχέση $X^{(n+1)} = \mathcal{L}(X^{(n)}, \mathbb{K})$. Επειδή $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι χώροι Banach, καθίσταται φανερό ότι οι $X^*, X^{**}, \ldots, X^{(n)}, \ldots$ είναι επίσης χώροι Banach. Ισχύει $(\ell^p)^* = \ell^q$ για $1 < p < +\infty$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι το Θεώρημα Hahn-Banach. Το διατυπώνουμε ευθύς αμέσως μαζί με ορισμένες βασικές συνέπειές του.

Θεώρημα 1.1.5 *(Hahn-Banach) Έστω X διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και M είναι ένας υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι p είναι μια πραγματική συνάρτηση επί του X με τις εξής ιδιότητες:*
(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.
Αν $f : M \to K$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές έτσι ώστε να ισχύει $|f(m)| \leq p(m)$ για κάθε $m \in M$, τότε υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{K}$ που επεκτείνει το f (δηλαδή $F|_M = f$) και ισχύει $F(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Πόρισμα 1.1.6 *Έστω X χώρος με νόρμα και M διανυσματικός υπόχωρος του X. Αν $y^* : M \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (δηλαδή $y^* \in M^*$), τότε υπάρχει* *φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x^* : M \to \mathbb{K}$ (δηλαδή $x^* \in X^*$) που επεκτείνει το y^* (δηλαδή $x^*|_M = y^*$) και μάλιστα ισχύει $||x^*|| = ||y^*||$.*

Πόρισμα 1.1.7 *Έστω M διανυσματικός υπόχωρος ενός νορμαρισμένου χώρου X. Δοθέντος $x \in X$ με $d = dist(x, M) > 0$, υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι ώστε να ισχύουν $||x^*|| = 1, x^*|_M = 0$ και $x^*(x) = d$.*

Πόρισμα 1.1.8 *Έστω X χώρος με νόρμα. Δοθέντος $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι ώστε να ισχύουν $||x^*|| = 1$ και $x^*(x) = ||x||$. Ιδιαιτέρως αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι ώστε $0 \neq ||x - y|| = x^*(x) - x^*(y)$. Λέμε ότι ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.*

Πόρισμα 1.1.9 *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε να ισχύει $||x^*|| = ||x||$ και $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle = ||x||^2$.*

Πόρισμα 1.1.10 *Για κάθε $x \in X$ σε έναν χώρο με νόρμα X έχουμε*

$$||x|| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, ||x^*|| = 1\}$$

Πόρισμα 1.1.11 *Έστω X χώρος με νόρμα και M διανυσματικός υπόχωρος του X. Ο M είναι πυκνός στον X αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$, με $x^*(m) = 0$ για κάθε $m \in M$, ισχύει $x^* = 0$.*

Θεωρούμε δύο χώρους με νόρμα X και Y και έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : X \to Y$. Συζυγής ή δυϊκός τελεστής (adjoint operator ή dual operator) του T ονομάζεται ο τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(y^*) = y^* \circ T$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Προφανώς ο T^* είναι γραμμικός και φραγμένος ως σύνθεση τέτοιων τελεστών. Μάλιστα ισχύει $||T^*|| = ||T||$. Πράγματι, λαμβάνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} ||T^*|| &= \sup_{||y^*|| \le 1} ||T^*(y^*)|| \\ &= \sup_{||y^*|| \le 1} (sup_{||x|| \le 1} |y^*(T(x))|) \\ &= \sup_{||x|| \le 1} \sup_{||y^*|| \le 1} (|y^*(T(x))|) \\ &= \sup_{||x|| \le 1} ||T(x)|| = ||T|| \end{aligned}$$

Αν X και Y είναι χώροι με νόρμα και T,S στοιχεία του $\mathcal{L}(X, Y), \lambda \in \mathbb{C}$ τότε ορίζονται οι τελεστές $(T + S)^*$,$(\lambda T)^*$ και ανήκουν στον $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Ισχύουν οι σχέσεις

$$(T + S)^* = T^* + S^*, \ (\lambda T)^* = \lambda T^*$$

Αν Z είναι χώρος με νόρμα, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ και $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, τότε ορίζεται ο τελεστής $(ST)^* \in \mathcal{L}(Z^*, Y^*)$ και ισχύει

$$(ST)^* = T^* S^*$$

Έστω X χώρος με νόρμα. Καλούμε κανονική εμφύτευση το γραμμικό τελεστή $\phi : X \to X^{**}$ με

$$\phi(x)(x^*) = x^*(x) = \langle x, x^* \rangle, \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } x^* \in X^*$$

Η ϕ είναι ισομετρία, καθώς από το Πόρισμα 1.1.10 προκύπτει για $x \in X$:

$$||\phi(x)|| = \sup_{||x^*||=1} |\phi(x)(x^*)| = \sup_{||x^*||=1} |x^*(x)| = ||x||$$

Ορισμός 1.1.12 *Ένας χώρος με νόρμα X ονομάζεται αυτοπαθής (reflexive) αν η κανονική εμφύτευση ϕ είναι επί του X^{**}.*

Πρέπει να τονιστεί ότι ένας νορμαρισμένος χώρος X χαρακτηρίζεται αυτοπαθής μόνον αν η κανονική εμφύτευσή του στον X^{**} είναι 'επί'. Ο R.C. James (1950) έδωσε ένα παράδειγμα απειροδιάστατου χώρου με νόρμα X ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, αλλά ισχύει ότι $dim(X^{**}/\phi(X)) = 1$, όπου με $dim(F)$ συμβολίζουμε την αλγεβρική διάσταση του χώρου F. Κάθε αυτοπαθής χώρος με νόρμα είναι χώρος Banach, αφού είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δεύτερο συζυγή του που διαθέτει αυτή την ιδιότητα. Οι χώροι ℓ^p, για $1 < p < +\infty$, είναι αυτοπαθείς, ενώ ο ℓ^1 δεν είναι.

Θεμελιώδους σημασίας στα πλαίσια νορμαρισμένων χώρων είναι οι ασθενείς τοπολογίες. Αν X είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, μία συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}$ καλείται ημινόρμα (seminorm) αν
(i) $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.
(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Η ασθενής τοπολογία στον X είναι η μικρότερη τοπικά κυρτή τοπολογία που καθιστά συνεχείς τις ημινόρμες p_{x^*} $(x^* \in X^*)$ όπου $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ για $x \in X$. Μια βάση περιοχών του $0 \in X$, για την ασθενή τοπολογία, είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{W(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \epsilon) : n = 1, 2, \ldots, x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*, \epsilon > 0\}$$

όπου

$$W(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \epsilon) = \{x \in X : |x_k^*(x)| < \epsilon, k = 1, 2, \ldots, n\}$$

Ένα δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στον X συγκλίνει στο $x \in X$, ως προς την ασθενή τοπολογία, αν και μόνο αν $x^*(x_\delta) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Η ασθενής τοπολογία στον X συμβολίζεται με τ_W ή $\sigma(X, X^*)$ και είναι ασθενέστερη από την αντίστοιχη της νόρμας του X.

Αν X είναι χώρος με νόρμα, η ασθενής*-τοπολογία στον X^* συμβολιζόμενη με τ_{W^*} ή $\sigma(X^*, X)$ καλείται η μικρότερη τοπικά κυρτή τοπολογία που καθιστά συνεχείς τις ημινόρμες p_x $(x \in X)$ όπου $p_x(x^*) = |x^*(x)|$ για $x^* \in X^*$. Μια βάση περιοχών του $0 \in X^*$, για την ασθενή $^*-$τοπολογία, είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{W(x_1, x_2, \ldots, x_n, \epsilon) : n = 1, 2, \ldots, x_1, \ldots, x_n \in X, \epsilon > 0\}$$

όπου

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_k)| < \epsilon, k = 1, 2, \dots, n\}$$

Ένα δίκτυο $(x^*_\delta)_{\delta\in\Delta}$ στον X^* συγκλίνει στο $x^* \in X^*$ ως προς την ασθενή $^*-$τοπολογία, αν και μόνον αν $x^*_\delta(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Η ασθενής *-τοπολογία είναι ασθενέστερη από την αντίστοιχη της νόρμας του X^*. Αν X είναι χώρος με νόρμα, το κλασσικό θεώρημα του Αλάογλου αναφέρει πως η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leq 1\}$ του X^* είναι συμπαγές σύνολο ως προς την ασθενή*-τοπολογία.

Έστω X χώρος και $\mathcal{L}(X)$ η άλγεβρα Banach όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του X. Στην $\mathcal{L}(X)$, εκτός από την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα τελεστή ή αλλιώς ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών (norm topology ή uniform operator topology) ορίζονται και δύο άλλες τοπολογίες: η ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology) που δεν είναι διαφορετική από την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον $(X, ||\cdot||)$ και η ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology) που είναι η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον (X, τ_W). Οι τρείς συγκεκριμένες τοπολογίες τελεστών διαδραματίζουν πρωταρχικό ρόλο στη Θεωρία Ημιομάδων, κάτι που θα φανεί ήδη από τα πρώϊμα στάδια ανάπτυξης της εργασίας μας. Ένα δίκτυο $(T_\delta)_{\delta\in\Delta}$ στην $\mathcal{L}(X)$ (αντίστοιχα μια ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{L}(X)$) συγκλίνει στον $T \in \mathcal{L}(X)$
(i) ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών, αν $||T_\delta - T|| \to 0$ (αντίστοιχα αν $\lim_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0$)
(ii) ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών, αν $||T_\delta(x) - T(x)|| \to 0$ (αντίστοιχα αν $\lim_{n\to+\infty} ||T_n(x) - T(x)|| = 0$) για κάθε $x \in X$
(iii) ως προς την ασθενή τοπολογία τελεστών, αν $|\langle T_\delta(x) - T(x), x^*\rangle| \to 0$ (αντίστοιχα αν $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n(x), x^*\rangle = \langle T(x), x^*\rangle$) για κάθε $x \in X$ και $x^* \in X^*$.

Δοθέντων δύο νορμαρισμένων χώρων $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ το σύνολο $X \cap Y$ καθίσταται χώρος με νόρμα αν ορίσουμε για $z \in X \cap Y$:

$$||z||_{X\cap Y} = ||z||_X + ||z||_Y$$

Καθοριστικής σημασίας και λειτουργικότητας για την εργασία μας είναι η έννοια των συνεπών φραγμένων τελεστών, την οποία εισάγουμε ευθύς αμέσως.

Ορισμός 1.1.13 *(i) Έστω $(X_1, ||\cdot||_1)$ και $(X_2, ||\cdot||_2)$ δύο χώροι Banach. Οι X_1 και X_2 καλούνται συμβατοί (compatible) αν το σύνολο $X = X_1 \cap X_2$ είναι πυκνό σε καθέναν από αυτούς (δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $\overline{X_1 \cap X_2} = X_1$ και $\overline{X_1 \cap X_2} = X_2$) και, δοθείσης ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X για την οποία έχουμε $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x_1||_1 = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x_2||_2 = 0$, έπεται ότι $x_1 = x_2 \in X$. Ισοδύναμα, αν ο X είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζεται από την σχέση*

$$||x||_{X_1\cap X_2} = ||x||_1 + ||x||_2, \ x \in X$$

(ii) Έστω X_i, Y_i $(i = 1, 2)$ χώροι Banach με τους X_1 και X_2 συμβατούς. Δυο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $T_i : X_i \to Y_i$ λέγονται συνεπείς (consistent) εάν ισχύει $T_1(x) = T_2(x)$ για κάθε $x \in X_1 \cap X_2$.

Το θεώρημα κατηγορίας του Baire αναφέρει ότι, αν (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X, τότε το σύνολο $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Το πλήθος των εφαρμογών αυτού του σχετικά απλού, αλλά εξαιρετικά γόνιμου, θεωρήματος στη Μαθηματική Ανάλυση είναι απέραντο και η σημασία του τεράστια. Μεταξύ των εφαρμογών είναι ορισμένα αποτελέσματα, πραγματικοί πυλώνες της Συναρτησιακής Ανάλυσης (μαζί με το θεώρημα Hahn-Banach), που θα παραθέσουμε στις επόμενες γραμμές.

Θεώρημα 1.1.14 *(ανοικτής απεικόνισης, Banach) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του Y. Τότε ο T είναι ανοικτός, δηλαδή αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X έπεται ότι η εικόνα του $T(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.*

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της πληρότητας των χώρων και στο Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης είναι αναγκαία, ενώ για την απόδειξη του Θεωρήματος επιβεβαιώνουμε, αρχικά, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $B(0, \delta) \subset T(B(0, \epsilon))$.

Είδαμε, στο Παράδειγμα 1.1.1 (ii) ότι, αν X, Y είναι χώροι με νόρμα, τότε το καρτεσιανό τους γινόμενο $X \times Y$ γίνεται νορμαρισμένος χώρος αν ορίσουμε $||(x, y)|| = ||x|| + ||y||$ για κάθε $(x, y) \in X \times Y$. Μάλιστα, αν οι X και Y είναι χώροι Banach τότε το ίδιο συμβαίνει με τον $X \times Y$. Αν $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, ορίζεται το γράφημά του, δηλαδή το σύνολο

$$Gr(T) = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

Θεώρημα 1.1.15 *(κλειστού γραφήματος) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε το γράφημα του $Gr(T)$ να είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. Τότε ο T είναι φραγμένος τελεστής.*

Θεώρημα 1.1.16 *(αρχή ομοιομόρφου φράγματος) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y, ώστε $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < +\infty$ για κάθε $x \in X$. Τότε υπάρχει $M > 0$ για το οποίο ισχύει $||T_i|| < M$ για κάθε $i \in I$.*

Ως πόρισμα του Θεωρήματος 1.1.16 λαμβάνουμε το

Θεώρημα 1.1.17 *(Banach-Steinhaus) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y, έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της ακολουθίας $(T_n(x))$ για κάθε $x \in X$. Θέτουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$. Τότε ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Προκειμένου να ορίσουμε το φάσμα ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα που προκύπτει ως συνέπεια του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης.

Θεώρημα 1.1.18 *(αντίστροφης απεικόνισης, Banach) Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Αν ο T είναι '1-1' και 'επί', τότε αντιστρέφεται και ο τελεστής $T^{-1} : Y \to X$ είναι γραμμικός και φραγμένος.*

Αν X, Y είναι χώροι Banach, $\lambda \in \mathbb{C}$ και $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ τελεστές '1-1' και 'επί', τότε ορίζονται και είναι φραγμένοι οι τελεστές $(T+S)^{-1}, (\lambda T)^{-1} : Y \to X$. Επίσης, αν Z είναι χώρος Banach και οι $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ τελεστές '1-1' και 'επί', τότε ορίζεται και είναι φραγμένος ο $(ST)^{-1} : Z \to X$. Μάλιστα ισχύει $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Θεώρημα 1.1.19 *Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{L}(X)$. Καλούμε επιλύον σύνολο (resolvent set) του T και συμβολίζουμε με $\rho(T)$, το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία αντιστρέφεται ο τελεστής $\lambda I - T$. Ονομάζουμε φάσμα (spectrum) του T και συμβολίζουμε με $\sigma(T)$, το σύνολο $\mathbb{C} - \rho(T)$. Για κάθε $\lambda \in \rho(T)$ ο τελεστής $(\lambda I - T)^{-1}$ είναι φραγμένος (από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης) και καλείται επιλύων (resolvent operator) του T. Σημειώνεται με $R(\lambda, T)$.*

Έπονται χρήσιμα αποτελέσματα για τις έννοιες που εισάγονται στον προηγούμενο ορισμό.

Θεώρημα 1.1.20 *Έστω X χώρος Banach. Ισχύουν τα εξής:*
(i) Αν $T \in \mathcal{L}(X)$ με $||T|| < 1$, τότε ο τελεστής $I - T$ είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή $1 \in \rho(T)$) και μάλιστα

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

με τη σειρά να είναι συγκλίνουσα στην τοπολογία της νόρμας.
(ii) Το σύνολο G των φραγμένων αντιστρέψιμων τελεστών επί του X είναι ανοικτό. Ειδικότερα, αν $T \in G$ και $||S - T|| < ||T^{-1}||^{-1}$, τότε $S \in G$.

Θεώρημα 1.1.21 *Έστω X χώρος Banach, $T \in \mathcal{L}$ και $\lambda \in \rho(T)$. Έχουμε τότε*

$$||R(\lambda, T)|| \geq dist(\lambda, \sigma(T))^{-1}$$

όπου με $dist(\lambda, F)$ συμβολίζουμε την απόσταση του $\lambda \in \mathbb{C}$ από το σύνολο F.

Θεώρημα 1.1.22 *Κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής T σε έναν χώρο Banach X διαθέτει ένα μη κενό κλειστό φραγμένο (άρα συμπαγές) φάσμα για το οποίο ισχύει*

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ||T||\}$$

Αν $|\lambda| \geq ||T||$ τότε έχουμε $\lambda \in \rho(T)$ και μάλιστα

$$||R(\lambda, T)|| \leq (|\lambda| - ||T||)^{-1}$$

Ο επιλύων τελεστής είναι μια αναλυτική συνάρτηση του λ επί του $\rho(T)$. Αν $\lambda, \mu \in \rho(T)$ ισχύει η ταυτότητα (resolvent equation)

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T)$$

Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{L}(X)$. Ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι κάτω φραγμένος (υπό την έννοια ύπαρξης $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $||T(x)|| \geq \delta||x||$ για κάθε $x \in X$) και διαθέτει πυκνό σύνολο τιμών. Αποδεικνύεται ότι, αν ο $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι κάτω φραγμένος τότε είναι '1-1', με κλειστό σύνολο τιμών. Αν $\lambda \in \sigma(T)$ ενδέχεται ο γραμμικός τελεστής $\lambda I - T$ να μην είναι κάτω φραγμένος (ειδικότερα να μην είναι '1-1') ή να μην διαθέτει πυκνό σύνολο τιμών ή και τα δύο. Φυσιολογικά, λοιπόν, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 1.1.23 *Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{L}(X)$.*
(α) Καλούμε σημειακό φάσμα (point spectrum) του T και συμβολίζουμε με $\sigma_p(T)$ το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο τελεστής $\lambda I - T$ δεν ειναι '1-1'. Ισοδύναμα, $\lambda \in \sigma_p(T)$ αν ισχύει $Ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$, δηλαδή εαν υπάρχει $x \in X$ με $x \neq 0$ ώστε $T(x) = \lambda x$. Το λ ονομάζεται ιδιοτιμή (eigenvalue) και το αντίστοιχο μη μηδενικό x ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του X.
(β) Καλούμε προσεγγιστικά σημειακό φάσμα (approximate point spectrum) του T και συμβολίζουμε με $\sigma_{ap}(T)$ το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο τελεστής $\lambda I - T$ δεν είναι κάτω φραγμένος. Ισοδύναμα, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπαρχει $x_\epsilon \in X$ ώστε $||(\lambda I - T)x_\epsilon|| < \epsilon||x_\epsilon||$. Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X με $||x_n|| = 1$ για καθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\lim_{n\to\infty} ||(\lambda I - T)x_n|| = 0$.
(γ) Στο φάσμα συμπίεσης (compression spectrum) $\sigma_c(T)$ ή αλλιώς υπόλοιπο φάσμα (residual spectrum) $\sigma_{res}(T)$ του T ανήκουν τα $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία το σύνολο τιμών του γραμμικού τελεστή $\lambda I - T$ δεν είναι πυκνό στο X. Με άλλα λόγια $\lambda \in \sigma_c(T)$ ή $\lambda \in \sigma_{res}(T)$ αν ισχύει

$$\overline{(\lambda I - T)(X)} \neq X$$

Τα σύνολα $\sigma_{ap}(T)$ και $\sigma_c(T)$ δεν είναι ξένα εν γένει. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ίσα και ταυτίζονται με το σημειακό φάσμα $\sigma_p(T)$ του T. Σε απειροδιάστατους χώρους Banach μπορεί να μην ταυτίζονται. Πάντοτε, όμως, ισχύουν οι σχέσεις $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ και $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_c(T)$. Επίσης έχουμε ότι $\sigma(T) = \sigma(T^*), \sigma_p(T) = \sigma_c(T^*)$ και $\sigma_c(T) = \sigma_p(T^*)$.

Παράδειγμα 1.1.24 *Έστω $q \in C[a, b]$ σταθεροποιημένη συνάρτηση. Ορίζουμε $T = M_q : C[a, b] \to C[a, b]$ με $T(f) = M_q(f) = qf$ ή ισοδύναμα $M_q f(x) = q(x)f(x)$ για κάθε $f \in C[a, b]$ και $x \in [a, b]$. Πρόκειται για έναν φραγμένο γραμμικό πολλαπλασιαστικό τελεστή ο οποίος ορίζεται καλώς διότι το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Θα αποδείξουμε ότι*

$$\sigma(T) = \sigma(M_q) = q([a, b])$$

Θεωρούμε $\lambda \notin q([a,b])$ *οπότε* $q(x) \neq \lambda$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Από την σχέση* $(\lambda I - T)f = 0$ *παίρνουμε ότι* $\lambda f - Tf = 0$ *και ισοδύναμα* $\lambda f - qf = 0$ *ή* $(\lambda - q(x))f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Έπεται ότι* $f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Δηλαδή* $f = 0$ *και ο γραμμικός τελεστής* $\lambda I - T$ *είναι '1-1'. Παρατηρούμε, επιπλέον, πως για* $g \in C[a,b]$ *έχουμε* $g/(\lambda - q) \in C[a,b]$. *Εφόσον* $(\lambda I - T)f = \lambda f - qf = (\lambda - q)f$ *για κάθε* $f \in C[a,b]$ *λαμβάνουμε*

$$(\lambda I - T)(g/(\lambda - q)) = (\lambda - q)g/(\lambda - q) = g$$

Άρα ο τελεστής $\lambda I - T$ *είναι 'επί'. Συμπεραίνουμε ότι ο* $\lambda I - T$ *αντιστρέφεται για κάθε* $\lambda \notin q([a,b])$ *και, επομένως, ισχύει ο εγκλεισμός*

$$\mathbb{C} - q([a,b]) \subseteq \rho(T)$$

ή διαφορετικά

$$\sigma(T) \subseteq q([a,b]) \tag{1.1.2}$$

Έστω, περαιτέρω, $\lambda \in q([a,b])$. *Υπάρχει τότε* $\xi \in (a,b)$ *με* $q(\xi) = \lambda$. *Υποθέτουμε ότι ο τελεστής* $\lambda I - T$ *είναι 'επί', και θεωρούμε συνεχή συνάρτηση* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *με* $g(\xi) \neq 0$. *Από την υπόθεσή μας είναι δυνατός ο προσδιορισμός* $f \in C[a,b]$ *ώστε* $(\lambda I - T)f = g$ *οπότε παίρνουμε* $\lambda f - Tf = g$ *και* $(\lambda - q(x))f(x) = g(x)$ *για κάθε* $\xi \in [a,b]$. *Όμως για* $x = \xi$ *βρίσκουμε*

$$0 = (\lambda - q(\xi))f(\xi) = g(\xi) \neq 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι ο τελεστής $\lambda I - T$ *δεν είναι 'επί' και* $\lambda \in \sigma(T)$. *Με άλλα λόγια*

$$q([a,b]) \subseteq \sigma(T) \tag{1.1.3}$$

Οι σχέσεις (1.1.2),(1.1.3) δίνουν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Από την προηγηθείσα ανάλυση είναι φανερό πως $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Ένα σχετικά απλό αλλά με πληθώρα εφαρμογών αποτέλεσμα περιέχεται στο επόμενο

Θεώρημα 1.1.25 *(πολυωνυμικής φασματικής απεικόνισης) Έστω* X *χώρος Banach και* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Αν* p *είναι ένα πολυώνυμο τότε ισχύει*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

Ισοδύναμα $\sigma(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$

Ένας συναρτησιακός λογισμός είναι μια διαδικασία ορισμού τελεστή $f(T)$, δοθέντος ενός τελεστή T και μιας κλάσης μιγαδικών συναρτήσεων f επί του φάσματος του T. Απαιτείται ο $f(T)$ να πληροί συγκεκριμένες συνθήκες συμπεριλαμβανομένης και της (1.1.4) παρακάτω. Το ακόλουθο θεώρημα ορίζει ένα συναρτησιακό λογισμό για φραγμένους γραμμικούς τελεστές, αλλά θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτής της περιοχής εφαρμόζονται με ελάχιστες διαφορές και στην περίπτωση των μη φραγμένων τελεστών.

Θεώρημα 1.1.26 *Έστω X χώρος Banach και $T \in \mathcal{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι C είναι μια συμπαγής συνιστώσα του φάσματος $\sigma(T)$ του T και $f(\cdot)$ μια συνάρτηση αναλυτική σε κάποια περιοχή U της C. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στην U έτσι ώστε η C να βρίσκεται εντός της γ και το σύνολο $\sigma(T) - C$ εκτός αυτής. Τότε ο τύπος*

$$B := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} f(z) R(z,T) dz$$

ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή ο οποίος αντιμετατίθεται με τον T και είναι ανεξάρτητος απο την επιλογή της καμπύλης γ με τις προαναφερθείσες ιδιότητες. Γράφοντας τον B στη μορφή $f(T)$ έχουμε

$$f(T)g(T) = (fg)(T) \tag{1.1.4}$$

για κάθε δύο συναρτήσεις f, g του συγκεκριμένου τύπου. Η απεικόνιση $f \to f(T)$ είναι norm-συνεχής από την περιγραφείσα κλάση συναρτήσεων στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(X)$ και ισχύει $||f|| = \max\{|f(z)| : z \in \gamma\}$

Θεώρημα 1.1.27 *(Riesz) Έστω γ μια κλειστή καμπύλη που περικλείει τη συμπαγή συνιστώσα C του φάσματος $\sigma(T)$ ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή $T : X \to X$. Υποθέτουμε ότι το $G = \sigma(T) - C$ βρίσκεαι εκτός της γ. Τότε ο τύπος*

$$P := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} R(z,T) dz$$

ορίζει μια φραγμένη προβολή η οποία αντιμετατίθεται με τον T. Ο περιορισμός του T στο σύνολο $P(X)$ έχει φάσμα ίσο με C ενώ ο περιορισμός του T στο σύνολο $(I - P)(X)$ έχει φάσμα ίσο με G. Η P καλείται φασματική προβολή (spectral projection) του T σχετιζόμενη με τη συμπαγή συνιστώσα C.

Ιδιαίτερη θέση ανάμεσα στους φραγμένους γραμμικούς τελεστές μεταξύ χώρων Banach κατέχουν οι συμπαγείς τελεστές. Πριν δώσουμε το σχετικό Ορισμό, παραθέτουμε αυτόν του συμπαγούς συνόλου.

Ορισμός 1.1.28 *Έστω X χώρος με νόρμα και $F \subset X$. Το F καλείται συμπαγές (compact) αν οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων του διαθέτει υπακολουθία συγκλίνουσα εντός αυτού. Το F καλείται σχετικά συμπαγές (relatively compact) αν το $\overline{F}$ είναι συμπαγές.*

Ορισμός 1.1.29 *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ο T καλείται συμπαγής (compact operator) αν το σύνολο $T(\hat{B}_X)$ είναι σχετικά συμπαγές στον Y, όπου με $\hat{B}_X$ συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλα του χώρου X. Ισοδύναμα, ο T είναι συμπαγής τελεστής αν, δοθείσης υποιασδήποτε ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X με $||x_n|| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Y διαθέτει υπακολουθία συγκλίνουσα εντός αυτού.*

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}(X,Y)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών $T : X \to Y$. Αποδεικνύεται ότι, αν ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(X)$ είναι συμπαγής, τότε ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. Στην επόμενη πρόταση συνοψίζουμε βασικές ιδιότητες των συμπαγών τελεστών.

Πρόταση 1.1.30 *Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ισχύουν τα εξής:*
(i) Αν ο T είναι συμπαγής τότε, για κάθε $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, οι τελεστές $T+S$ και λS είναι συμπαγείς.
(ii) Αν ο T είναι συμπαγής τότε, για κάθε $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, ο τελεστής $ST : X \to Z$ είναι συμπαγής και, για κάθε $S \in \mathcal{L}(Z,X)$, ο τελεστής $TS : Z \to Y$ είναι επίσης συμπαγής.
(iii) Αν ο T είναι φραγμένος και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{K}(X,Y)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0$, τότε ο T είναι συμπαγής τελεστής.
(iv) Αν ο T είναι συμπαγής και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}, B$, στοιχεία του $\mathcal{L}(Y,Z)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} ||B_n y - By|| = 0$ για κάθε $y \in Y$ (δηλαδή η ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον B ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών), τότε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} ||B_n T - BT|| = 0$$

(v) Ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι συμπαγής.

Αν $X = Y = Z$ οι ισχυρισμοί (i),(ii), και (iii) της προηγούμενης πρότασης υποδηλώνουν ότι το σύνολο $\mathcal{K}(X)$ είναι ένα δίπλευρο ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{L}(X)$ κλειστό ως προς την τοπολογία της νόρμας.

Αν X και Y είναι χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, συμβολίζουμε με $Ran(T)$ το σύνολο τιμών αυτού. Ο T καλείται πεπερασμένης τάξης (operator of finite rank) αν το σύνολο $Ran(T)$ έχει πεπερασμένη αλγεβρική διάσταση. Αν X, Y είναι χώροι Banach, κάθε $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγής. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, το σύνολο $Ran(T)$ είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα και, άρα, γραμμικά ισόμορφος με τον $\mathbb{C}^n$. Επομένως διαθέτει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass. Αυτό σημαίνει ότι, δοθείσης οποιασδήποτε ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X με $||x_n|| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η φραγμένη ακολουθία $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Ran(T)$ έχει υπακολουθία συγκλίνουσα εντός αυτού. Δηλαδή ο T είναι, πράγματι, συμπαγής τελεστής.

Αν ο X είναι χώρος Banach και κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι όριο, στην τοπολογία της νόρμας, μίας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης, λέμε ότι ο X διαθέτει την ιδιότητα της προσέγγισης (approximation property). Όλοι οι κλασσικοί χώροι Banach διαθέτουν την ιδιότητα της προσέγγισης, ωστόσο υπάρχουν ορισμένοι χωρίς αυτήν. Το πιο χαρακτηριστικό αντιπαράδειγμα κατασκευάστηκε από τον Enflo (1973).

Θεώρημα 1.1.31 *Έστω ότι σε έναν χώρο Banach X υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τελεστών πεπερασμένης τάξης η οποία συγκλίνει στον I ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών. Τότε ο $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν αποτελεί όριο, ως προς την τοπολογία της νόρμας, μιας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Διατυπώνουμε, στη συνέχεια, το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach.

Θεώρημα 1.1.32 *(Riesz) Έστω T ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής που δρα σε κάποιον απειροδιάστατο χώρο Banach X. Το φάσμα του T περιέχει το 0, είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο και συνίσταται αποκλειστικά από ιδιοτιμές. Αν το σύνολο $\sigma(T)$ είναι αριθμήσιμο, τότε ισχύει*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

όπου $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. Κάθε μη μηδενικό στοιχείο λ του φάσματος σχετίζεται με μια φασματική προβολή P πεπερασμένης τάξης που αντιμετατίθεται με τον T. Ο περιορισμός του T στο σύνολο τιμών της P έχει φάσμα ίσο με $\{\lambda\}$.

Έστω X χώρος Banach και $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Μία συνάρτηση $f : I \to X$ λέγεται κλιμακωτή, εάν υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος ξένων μεταξύ τους υποδιαστημάτων $I_1, I_2, \ldots, I_n$ που καλύπτουν το I, έτσι ώστε, πάνω σε κάθε I_j η f να λαμβάνει σταθερή τιμή, έστω v_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Για μια κλιμακωτή συνάρτηση f ορίζουμε το ολοκλήρωμά της στο διάστημα $[a, b]$ από τον τύπο

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt := \sum_{j=1}^{n} \mu(I_j)v_j$$

όπου $\mu(I_j)$ είναι το μήκος του διαστήματος I_j.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι μια συνάρτηση $f : I \to X$ είναι ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλιμακωτών συναρτήσεων (αξίζει να τονίσουμε ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει οπωσδήποτε αν η f είναι συνεχής). Τότε η ακολουθία ολοκληρωμάτων $\int_a^b f_n$ συγκλίνει. Συμβολίζουμε το συγκεκριμένο όριο με $\int_a^b f$ και το ονομάζουμε ολοκλήρωμα της f. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ορισθέν ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που την προσεγγίζει.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι η επόμενη πολύ σημαντική

Πρόταση 1.1.33 *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής μεταξύ δύο χώρων Banach. Αν $f : [a, b] \to X$ είναι μια (κατά τμήματα) συνεχής συνάρτηση, τότε ισχύει*

$$T\int_a^b f(t)dt = \int_a^b [Tf(t)]dt$$

Ας θεωρήσουμε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο E εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης $\geq$, δηλαδή μια αυτοπαθή, αντισυμμετρική και μεταβατική διμελή σχέση επί του E με το συγκεκριμένο σύμβολο. Θα λέμε ότι το ζεύγος $(E, \geq)$ αποτελεί έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο (ordered vector space) αν η σχέση $\geq$ είναι συμβιβαστή με την

αλγεβρική δομή του E, υπό την έννοια της ικανοποίησης των ακόλουθων δύο αξιωμάτων:
(i) αν $x \geq y$ τότε $x + z \geq y + z$ για κάθε $z \in E$
(ii) αν $x \geq y$ τότε $\lambda x \geq \lambda y$ για κάθε $\lambda \geq 0$

Εναλλακτικά σημειώνουμε $y \leq x$ αντί για $x \geq y$. Ένα στοιχείο x σε έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο E καλείται θετικό (positive) αν ισχύει $x \geq 0$. Το σύνολο όλων των θετικών στοιχείων του E συμβολίζεται με E^+ και ονομάζεται θετικός κώνος (positive cone) του E.

Ορισμός 1.1.34 *Έστω $T : E \to F$ γραμμικός τελεστής μεταξύ δύο διατεταγμένων διανυσματικών χώρων. Λέμε ότι ο T είναι θετικός (positive operator) ή ότι διατηρεί την θετικότητα (positivity preserving operator) αν ισχύει $Tx \geq 0$ για κάθε $x \in E$ με $x \geq 0$. Συμβολίζουμε $T \geq 0$ ή $0 \leq T$.*

Προφανώς ένας γραμμικός τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ δύο διατεταγμένων διανυσματικών χώρων είναι θετικός αν και μόνο αν ισχύει $T(E^+) \subseteq F^+$ ή ακόμη αν και μόνο αν από την σχέση $x \leq y$, για $x, y \in E$, έπεται ότι $Tx \leq Ty$.

Ένας διανυσματικός σύνδεσμος (vector lattice) ή αλλιώς χώρος Riesz (Riesz space) είναι ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος E με την επιπρόσθετη ιδιότητα ότι, για κάθε δύο στοιχεία του x, y έχουμε ότι $\sup\{x, y\} \in E$ και $\inf\{x, y\} \in E$. Γράφουμε

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \text{ και } x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

Για κάθε στοιχείο x σε έναν διανυσματικό σύνδεσμο E ορίζουμε

$$x^+ := x \vee 0 (\text{θετικό μέρος του } x)$$
$$x^- := (-x) \vee 0 \ (\text{αρνητικό μέρος του } x)$$
$$|x| := x \vee (-x) \ (\text{απόλυτη τιμή του} x)$$

Στο ακόλουθο θεώρημα συνοψίζονται ορισμένες από τις βασικές σχέσεις που ικανοποιούν τα στοιχεία ενός διανυσματικού συνδέσμου.

Θεώρημα 1.1.35 *Έστω x, y, z τυχόντα στοιχεία σε έναν διανυσματικό σύνδεσμο E. Τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) $x = x^+ - x^-$
(ii) $|x| = x^+ + x^-$
(iii) $x^+ \wedge x^- = 0$
(iv) $x \vee y = (1/2)(x + y + |x - y|)$ *και* $x \wedge y = (1/2)(x + y - |x - y|)$
(v) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *(τριγωνική ανισότητα)*
(vi) $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ *και* $|x^- - y^-| \leq |x - y|$
(vii) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ *και* $|x \wedge y - y \wedge z| \leq |x - y|$ *(ανισότητες Birkhoff)*

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η επόμενη

Πρόταση 1.1.36 *Αν $T : E \to F$ είναι ένας θετικός τελεστής μεταξύ δυο διανυσματικών συνδέσμων, τότε για κάθε $x \in E$ έχουμε*

$$|Tx| \leq T|x|$$

Απόδειξη. Αν $x \in E$ ισχύουν $x \leq |x|$ και $-x \leq |x|$ και, από την θετικότητα του τελεστή T, προκύπτουν οι σχέσεις $Tx \leq T|x|$ και $-Tx \leq T|x|$, οι οποίες συνδυαζόμενες δίνουν $|Tx| \leq T|x|$.

Έστω τώρα, ένας διανυσματικός σύνδεσμος E. Μία νόρμα $||\cdot||$ επί του E καλείται νόρμα συνδέσμου (lattice norm) αν από την σχέση $|x| \leq |y|$, όπου x και y τυχόντα στοιχεία του E, συνεπάγεται ότι $||x|| \leq ||y||$. Ένας διανυσματικός σύνδεσμος εφοδιασμένος με μια νόρμα συνδέσμου ονομάζεται νορμαρισμένος διανυσματικός σύνδεσμος (normed vector lattice). Αν ένας νορμαρισμένος διανυσματικός σύνδεσμος είναι πλήρης ως προς την συγκεκριμένη νόρμα αναφέρεται ως σύνδεσμος Banach (Banach lattice).

Αν x και y είναι τυχόντα στοιχεία ενός συνδέσμου Banach E, ισχύουν οι σχέσεις

$$||x|| = ||\ |x|\ ||,\ \ ||x^+ - y^+|| = ||x - y||$$

και

$$||\ |x| - |y|\ || \leq ||x - y||$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα συνδέσμων Banach (αν και με κάποιες διαφορές μεταξύ τους) αποτελούν ο $C(X)$, όπου X συμπαγής μετρικός χώρος, καθώς και οι χώροι L^p στους οποίους θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο.

Θα ολοκληρώσουμε την Παράγραφο με μια αναφορά στους χώρους Hilbert.

Έστω λοιπόν E διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product,scalar product) επί του E είναι μια απεικόνιση

$$(,) : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε
(i) $(x, x) \geq 0$
(ii) $(x, x) = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$
(iii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
(iv) $(x_1 + \lambda x_2, y) = (x_1, y) + \lambda(x_2, y)$
για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.
Από τις (iii) και (iv) προκύπτει ότι
(iv') $(x, y_1 + \lambda y_2) = (x, y_1) + \bar{\lambda}(x, y_2)$, για κάθε $x, y_1, y_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} \tag{1.1.5}$$

για κάθε $x, y \in E$. Ισότητα στην σχέση (1.1.5) έχουμε αν και μόνον αν τα διανύσματα x και y είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Επίσης, η απεικόνιση

$$||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_+,\ \text{με}\ ||x|| = (x, x)^{1/2}$$

για κάθε $x, y \in E$ ορίζει μια νόρμα επί του E, ενώ η απεικόνιση εσωτερικού γινομένου είναι συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών. Δύο στοιχεία $x, y \in E$ για τα οποία ισχύει $(x, y) = 0$ καλούνται ορθογώνια ή κάθετα.

Πρόταση 1.1.37 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ισχύουν τα εξής:*
(i) (κανόνας παραλληλογράμμου)

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

για κάθε $x, y \in E$
(ii) (πυθαγόρειο θεώρημα) Αν $x, y \in E$ με $(x, y) = 0$ τότε $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Πρόταση 1.1.38 *Αν $|| \cdot ||$ είναι μια νόρμα σε έναν διανυσματικό χώρο E η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο $(,)$ στον E, τέτοιο ώστε $||x|| = (x, x)^{1/2}$ για κάθε $x \in E$. Επομένως ο κανόνας του παραλληλογράμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινομένου μεταξύ αυτών με νόρμα.*

Ορισμός 1.1.39 *Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο καλείται χώρος Hilbert (Hilbert space) αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Ένας χώρος Hilbert θα συμβολίζεται με $\mathcal{H}$.*

Παράδειγμα χώρου Hilbert αποτελεί ο ℓ^2 με εσωτερικό γινόμενο οριζόμενο από την σχέση

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \bar{y_k}$$

για κάθε $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$. Ωστόσο οι χώροι ℓ^p, για $p \neq 2$, δεν είναι Hilbert καθώς οι νόρμες τους δεν ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ορισμός 1.1.40 *Καλούμε ορθοκανονική βάση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο E μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ στοιχείων του E τέτοια ώστε*
(i) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$, δηλαδή $||e_i|| = 1$ για κάθε $i \in I$ και $(e_i, e_j) = 0$ για $i \neq j$.
(ii) η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλαδή $\overline{\{e_i : i \in I\}} = E$.

Αποδεικνύεται ότι, αν ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο διαθέτει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, τότε είναι διαχωρίσιμος. Επίσης, αποδεικνύεται ότι μια ορθοκανονική βάση σε έναν διαχωρίσιμο χώρο εσωτερικού γινομένου συμπεριφέρεται όπως η συνηθισμένη βάση του ℓ^2, δηλαδή η οικογένεια $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ με $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$, όπου η μονάδα βρίσκεται στην $k-$θέση.

Ακριβέστερα, αν $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σε εναν διαχωρίσιμο χώρο εσωτερικού γινομένου E, τότε για κάθε $x \in E$

(i) $x = \sum_{k=1}^{+\infty}(x, e_k)e_k$
(ii) $||x||^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}|(x, e_k)|^2$

Τέλος, κάθε απειροδιάστατος, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.

Χρήσιμες πληροφορίες για τον συζυγή ενός χώρου Hilbert παρέχονται από τα επόμενα αποτελέσματα.

Λήμμα 1.1.41 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f_x : E \to \mathbb{K} \text{ με } f_x(y) = (y, x)$$

για κάθε $y \in E$. Η f_X είναι γραμμική και συνεχής. Μάλιστα ισχύει $f_x = ||x||$.

Πρόταση 1.1.42 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Η απεικόνιση*

$$T : E \to E^* \text{ με } T(x) = f_x$$

για κάθε $x \in E$ είναι αντιγραμμική αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (δηλαδή ισχύει $T(x+\lambda y) = T(x)+\bar{\lambda}T(y)$ για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$) και γραμμική αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Είναι επίσης ισομετρική, δηλαδή $||T(x)|| = ||x||$ για κάθε $x \in E$.

Αν ο E δεν είναι πλήρης, η απεικόνιση T δεν είναι 'επί'. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι ο συζυγής ενός νορμαρισμένου χώρου είναι πλήρης. Επειδή η T είναι ισομετρία, αν ήταν και 'επί' του E^*, τότε οι χώροι E και E^* θα συνδέονταν μέσω ενός ισομετρικού ισομορφισμού, γεγονός που θα καθιστούσε τον E πλήρη, δηλαδή χώρο Hilbert. Αν ο E είναι πλήρης, τότε η T είναι 'επί', όπως βεβαιώνει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.1.43 *(αναπαράστασης, Riesz) Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Για κάθε $f \in \mathcal{H}^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{H}$ ώστε να ισχύει*

$$f(y) = (y, x), \ \forall y \in \mathcal{H}$$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.1.43 και την Πρόταση 1.1.42 λαμβάνουμε το εξής:

Θεώρημα 1.1.44 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ με $T(x) = f_x$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$ ειναι αντιγραμμική (αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ή γραμμική (αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ισομετρία επί του $\mathcal{H}^*$.*

Ουσιαστικά κάθε χώρος Hilbert είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach. Προκειμένου να ορίσουμε τον συζυγή ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή T επί ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ (δηλαδή ενός στοιχείου της $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) θα χρειαστούμε το επόμενο

Θεώρημα 1.1.45 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ώστε να ισχύει*

$$(T^*(x), y) = (x, T(y)) \tag{1.1.6}$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$

Ορισμός 1.1.46 *Ο συζυγής T^* ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή T σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ο μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής στον ίδιο χώρο που ορίζεται από την σχέση (1.1.6)*

Ορισμός 1.1.47 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ο τελεστής καλείται*
(i) αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$
(ii) φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$
(iii) ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I = TT^*$
(iv) θετικός (positive) ή μη αρνητικός (non negative) αν ισχύει $(Tx, x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$

Ορισμός 1.1.48 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ο T καλείται τελεστής Hilbert-Schmidt αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_i : i \in I\}$ του $\mathcal{H}$ ώστε $\sum_i ||Te_i||^2 < +\infty$*

Πρόταση 1.1.49 *Κάθε τελεστής Hilbert-Schmidt σε έναν χώρο Hilbert είναι συμπαγής.*

Έστω $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $C_2(\mathcal{H})$ το σύνολο όλων των τελεστών Hilbert-Schmidt στον $\mathcal{H}$. Για οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση (e_n) του $\mathcal{H}$ ισχύει

$$C_2(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : ||T||_{HS} := (\sum_{n=1}^{+\infty} ||Te_n||^2)^{1/2} < +\infty\}$$

και η ποσότητα $||\cdot||_{HS}$ ονομάζεται νόρμα Hilbert-Schmidt.

Αναφέρουμε, καταληκτικά, ότι, αν $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, έχουμε
(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$
(ii) $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T)\}$, $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T)\}$

1.2 Βασικά στοιχεία από τη θεωρία των χώρων L^p

Παρότι οι χώροι L^p συνιστούν μια μικρή μόνον ομάδα από το σύνολο των συναρτησιακών χώρων που έχουν χρησιμοποιηθεί σε πάμπολλες εφαρμογές, είναι με διαφορά οι πλέον σημαντικοί. Άλλωστε και το κύριο τμήμα της εργασίας μας, όπως μαρτυρά και ο τίτλος της, διαρθρώνεται στο πλαίσιο αυτών των χώρων . Κρίνεται σκόπιμη, επομένως, μια σύντομη εισαγωγή σε βασικά στοιχεία από τη θεωρία τους.

Ορίζουμε έναν χώρο μέτρου ως μια τριάδα (X, Σ, μ) αποτελούμενη από ένα σύνολο X, μια $\sigma-$άλγεβρα Σ μετρήσιμων υποσυνόλων του X και ένα μη αρνητικό αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο μ επί της Σ. Θα συμβολίζουμε, συνήθως, το μέτρο με dx. Όταν $X = \mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, \dots$ με dx εννοούμε το μέτρο Lebesgue. Κάποιες κεντρικές υποθέσεις που πραγματοποιούμε είναι οι ακόλουθες:
(i) Το μέτρο μ είναι $\sigma-$πεπερασμένο υπό την έννοια ύπαρξης μιας αύξουσας ακολουθίας από μετρήσιμα υποσύνολα X_n του X με πεπερασμένο μέτρο και ένωση ίση με X.
(ii) Κάθε σύνολο X_n είναι εφοδιασμένο με μια πεπερασμένη διαμέριση E_n, δηλαδή μια ακολουθία ξένων μετρήσιμων υποσυνόλων $\{E_1, E_2, \dots, E_{m(n)}\}$ του X καθένα εκ των οποίων έχει θετικό μέτρο $|E_r| = \mu(E_r)$. Η ένωση των υποσυνόλων E_r για $r = 1, 2, \dots, m(n)$ ισούται με X_n.
(iii) Για κάθε n η διαμέριση E_{n+1} είναι λεπτότερη από την E_n υπό την έννοια ότι κάθε υποσύνολο που ανήκει στην E_n είναι ένωση στοιχείων της E_{n+1}.
(iv) Ορίζουμε $\mathcal{L}_n$ να είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των συναρτήσεων $f = \sum_{r=1}^{m(n)} a_r \chi_r$, όπου με χ_r σημειώνουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου E_r της E_n. Από τη συνθήκη (iii) συμπεραίνουμε πως $\mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{L}_{n+1}$ για κάθε n.
(v) Η $\sigma-$άλγεβρα Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Συγκεκριμένα παράγεται από την ολότητα των συνόλων που ανήκουν στις διάφορες δυνατές διαμερίσεις E_n του X.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, αν $1 \leq p < +\infty$, η έκφραση $L^p(X, dx)$ ή συντομότερα $L^p(X)$ συμβολίζει το χώρο όλων των ισοδύναμων κλάσεων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_X |f(x)|^p dx < +\infty$$

Δύο στοιχεία του $L^p(X)$ ταυτίζονται αν είναι ίσα σχεδόν παντού, δηλαδή εάν διαφέρουν κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Αν $f, g \in L^p(X)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, η κατά σημείο ανισότητα

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)|^p \leq 2^p|\lambda|^p|f(x)|^p + 2^p|\mu|^p|g(x)|^p$$

υποδηλώνει ότι ο $L^p(X)$ είναι διανυσματικός χώρος. Θέτοντας

$$||f||_p := (\int_X |f(x)|^p dx)^{1/p}$$

για κάθε $f \in L^p(X)$, αποκτούμε μια νόρμα στον $L^p(X)$. Η συνθήκη (v) είναι ισοδύναμη με την πυκνότητα του $\cup_{n\geq 1}\mathcal{L}_n$ στον $L^p(X)$ για $1 \leq p < +\infty$. Έπεται ότι ο $L^p(X)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, εννοώντας πως περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο. Αν $f, g : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $fg \in L^1(X)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)g(x)dx$$

Λέμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentialy bounded) αν το σύνολο $\{x \in X : |f(x)| > c\}$ έχει μέτρο μηδέν για κάποια σταθερά c. Ο χώρος $L^\infty(X)$ (δηλαδή $p = +\infty$) ορίζεται ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων επί του X. Πάλι ταυτίζουμε δύο στοιχεία του $L^\infty(X)$ αν συμπίπτουν με εξαίρεση ένα σύνολο μηδενικού μέτρου. Ο $L^\infty(X)$ είναι διανυσματικός χώρος. Αν $f \in L^\infty(X)$ θέτουμε

$$||f||_\infty = \inf\{c : \mu[x \in X : |f(x)| > c] = 0\}$$

και λαμβάνουμε μια νόρμα στον $L^\infty(X)$ αποκαλούμενη ουσιώδες supremum (essential supremum). Ισοδύναμα, αν $f \in L^\infty(X)$

$$||f||_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ σχεδόν παντού στο } X\}$$

Αποδεικνύεται ότι, αν $f \in L^\infty(X)$ τότε ισχύει

$$|f(x)| \leq ||f||_\infty \text{ σχεδόν παντού στο } X$$

Τέλος, στην ειδική περίπτωση κατά την οποία το σύνολο X είναι φραγμένο ή έχει πεπερασμένο μέτρο, λαμβάνουν χώρα οι εξής εγκλεισμοί (μέσω συνεχών εμφυτεύσεων)

$$L^\infty(X) \subseteq \ldots \subseteq L^p(X) \subseteq L^{p-1}(X) \subseteq \ldots \subseteq L^2(X) \subseteq L^1(X)$$

Η παραπάνω ακολουθία εγκλεισμών δεν ισχύει εν γένει.

Έστω $1 < p < +\infty$. Καλούμε συζυγή εκθέτη του p τον αριθμό q για τον οποίο έχουμε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Προφανώς $1 < q < +\infty$. Οι αριθμοί $p = 1$ και $q = +\infty$ θεωρούνται συζυγείς εκθέτες. Ιδιαίτερα εύχρηστο είναι το αποτέλεσμα που περιγράφει η επόμενη.

Πρόταση 1.2.1 *(ανισότητα Hölder) Αν $1 \leq p \leq +\infty$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τότε $fg \in L^1(X)$ για κάθε $f \in L^p(X)$ και κάθε $g \in L^q(X)$. Επιπλέον ισχύει*

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

Ακολουθούν δύο ακόμη σημαντικά αποτελέσματα στα πλαίσια των L^p-χώρων .

Θεώρημα 1.2.2 *(ανισότητα παρεμβολής) Έστω $1 \leq p, q \leq +\infty$, $0 < \lambda < 1$ και*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{q}$$

Αν $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$, τότε $f \in L^r(X)$ και

$$||f||_r \leq ||f||_p^{1-\lambda} ||f||_q^\lambda$$

Θεώρημα 1.2.3 *Έστω $1 \leq p, q \leq +\infty$ και $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$. Υποθέτουμε ότι*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Τότε $fg \in L^r(X)$ και ισχύει $||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q$.

Παραθέτουμε, στο σημείο αυτό, δύο κλασσικά θεωρήματα από τη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 1.2.4 *(μονότονης σύγκλισης, Beppo Levi) Θεωρούμε μιαν αύξουσα ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $L^1(X)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\sup_n \int_X f_n < +\infty$. Τότε η ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο X σε ένα πεπερασμένο όριο, έστω $f(x)$. Επιπλέον $f \in L^1(X)$ και $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$.*

Θεώρημα 1.2.5 *(κυριαρχημένης σύγκλισης, Lebesgue) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του $L^1(X)$. Υποθέτουμε ότι:*
(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν παντού στο X.
(ii) Υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(X)$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο X. Τότε $f \in L^1(X)$ και $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$.

Είμαστε, πλέον, σε θέση να αποδείξουμε ότι κάθε χώρος L^p είναι Banach.

Θεώρημα 1.2.6 *(Riesz-Fischer) Για κάθε $1 \leq p \leq +\infty$ ο $L^p(X)$ εφοδιασμένος με την ορισθείσα νόρμα είναι πλήρης και, άρα, χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω αρχικά $p = +\infty$. θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $L^\infty(X)$. Για δεδομένο $k \geq 1$ υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $||f_n - f_m|| \leq 1/k$ για κάθε $n, m \geq n_k$. Κατά συνέπεια υπάρχει σύνολο M_k μηδενικού μέτρου ώστε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq 1/k \tag{1.2.7}$$

για κάθε $x \in X - M_k$ και για κάθε $n, m \geq n_k$. Θέτουμε $M = \cap_k M_k$ και παρατηρούμε ότι το σύνολο M έχει μηδενικό μέτρο, με την ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$, για κάθε $x \in X - M$. Επομένως συγκλίνει σε όριο $f(x)$ για κάθε $x \in X - M$. Λαμβάνοντας όρια καθώς $m \to \infty$ στη σχέση 1.2.7 παίρνουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/k \tag{1.2.8}$$

για κάθε $x \in X - M$ και για κάθε $n \geq n_k$. Επειδή η $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα, η σχέση (1.2.8) υποδηλώνει ότι $f \in L^\infty(X)$ και $||f_n - f||_\infty \leq 1/k$ για κάθε $n \geq n_k$. Καταλήγουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0$, κάτι που αποδεικνύει την πληρότητα του χώρου $L^\infty(X)$. Άρα ο $L^\infty(X)$ είναι χώρος Banach.

Υποθέτουμε, περαιτέρω, ότι $1 \leq p < +\infty$. Θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $L^p(X)$ και κατασκευάζουμε υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ αυτής τέτοια ώστε να ισχύει

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k},\ \forall k \geq 1$$

Η διαδικασία έχει ως εξής: Εφόσον η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^p(X)$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $||f_n - f_m||_p \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $n, m \geq n_1$. Επιλέγουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $||f_n - f_m||_p \leq \frac{1}{2^2}$ για κάθε $n, m \geq n_2$ κ.ο.κ. Προς απλούστευση των συμβολισμών γράφουμε f_k αντί f_{n_k}, οπότε έχουμε

$$||f_{k+1} - f_k||_p \leq \frac{1}{2^k},\ \forall k \geq 1$$

Θέτοντας $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ βρίσκουμε ότι $||g_n||_p \leq 1$. Συνεπώς $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(X)$ και, βέβαια, είναι αύξουσα ακολουθία με $\sup_n \int_X g_n < +\infty$. Από το Θεώρημα 1.2.4 συμπεραίνουμε ότι η $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο $g(x)$ με $g \in L^p(X)$. Εξάλλου για $n \geq m \geq 2$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_{n-1}(x)| + \ldots + |f_{m+1}(x) - f_m(x)| \\ &= g_n(x) - g_{m-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{m-1}(x) \end{aligned}$$

Έπεται ότι η $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ και, κατά συνέπεια, συγκλίνουσα με όριο $f(x)$. Προφανώς

$$|f_n(x) - f_m(x)| < g(x) \text{ για κάθε } n \geq m \geq 2 \tag{1.2.9}$$

Λαμβάνοντας όρια καθώς $m \to +\infty$, η σχέση (1.2.9) δίνει

$$|f_n(x) - f(x)| < g(x)$$

σχεδόν παντού στο X και για κάθε $n \geq 2$. Επομένως $f \in L^p(X)$. Επίσης $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|^p = 0$ σχεδόν παντού στο X και $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g(x)^p$ με $g \in L^1(X)$. Από το Θεώρημα 1.2.5 τεκμαίρεται ότι $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p^p = 0$ και τελικά $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p = 0$. Άρα ο $L^p(X)$ είναι πλήρης για $1 \leq p < +\infty$ και ο επιθυμητός ισχυρισμός επιβεβαιώνεται.

Θεώρημα 1.2.7 *Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $L^p(X)$ για $1 \leq p \leq +\infty$ και $f \in L^p(X)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p = 0$. Υπάρχει, τότε, υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο X
(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και σχεδόν παντού στο X, με $h \in L^p(X)$.

Για $f, g \in L^2(X)$ θέτουμε

$$(f, g) := \int_X f(x)\overline{g(x)}dx$$

ορίζοντας στον $L^2(X)$ ένα εσωτερικό γινόμενο. Η νόρμα του $L^2(X)$ προέρχεται από το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο καθώς, όπως αποδεικνύεται, ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Από το Θεώρημα 1.2.6 προκύπτει ότι ο $L^2(X)$ είναι χώρος Hilbert, κάτι που δεν συμβαίνει για τους χώρους $L^p(X)$ με $p \neq 2$.

Συνεχίζουμε την διαπραγμάτευση με ένα εξόχως σημαντικό αποτέλεσμα

Θεώρημα 1.2.8 *Αν $1 \leq p < +\infty$ τότε ο συζυγής χώρος του $L^p(X)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(X)$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (δηλαδή οι p, q είναι συζυγείς εκθέτες). Το φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\phi \in L^p(X)^*$ αντιστοιχεί στην συνάρτηση $g \in L^q(X)$ σύμφωνα με τον τύπο*

$$\phi(f) = \int_X f(x)g(x)dx, \ \forall f \in L^p(X)$$

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να γράψουμε, για $1 < p < +\infty$, ότι

$$L^p(X)^* = L^q(X), \text{ όπου } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

και, για $p = 1$, ότι $L^1(X)^* = L^\infty(X)$. Ωστόσο ο $L^\infty(X)^*$ περιέχει γνησίως τον $L^1(X)$, καθώς μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $\phi \in L^\infty(X)^*$ τα οποία δεν είναι της μορφής

$$\phi(f) = \int f(x)g(x)dx$$

για κάθε $f \in L^\infty(X)$ και για κάποιο $g \in L^1(X)$.

Όπως επιβεβαιώνεται, οι χώροι $L^p(X)$ είναι αυτοπαθείς όταν $1 < p < +\infty$. Οι $L^1(X)$ και $L^\infty(X)$ δεν είναι αυτοπαθείς. Μάλιστα ο χώρος $L^\infty(X)$ δεν είναι και διαχωρίσιμος.

Ιδιαίτερα εποικοδομητική είναι η μελέτη φραγμένων γραμμικών τελεστών που δρουν μεταξύ L^p-χώρων. Σπεύδουμε να επισημάνουμε ότι οι χώροι L^p είναι συμβατοί καθώς το p μεταβάλλεται στο διάστημα $[1, +\infty]$. Έτσι, δύο τελεστές $T \in \mathcal{L}(L^p(X))$ και $S \in \mathcal{L}(L^q(X))$ είναι συνεπείς, εαν ισχύει

$$Tf = Sf, \ \forall f \in L^p(X) \cap L^q(X)$$

Το επόμενο θεώρημα παρεμβολής θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην εργασία μας.

Θεώρημα 1.2.9 *(Riesz-Thorin) Έστω $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$ και $0 < \lambda < 1$. Ορίζουμε p και q από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &:= \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1} \\ \frac{1}{q} &:= \frac{1-\lambda}{q_0} + \frac{\lambda}{q_1} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής από το χώρο $L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$ στον $L^{q_0}(X) \cap L^{q_1}(X)$. Αν ισχύουν

$$\begin{aligned} ||Tf||_{q_0} &\leq c_0||f||_{p_0} \\ ||Tf||_{q_1} &\leq c_1||f||_{p_1} \end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$ τότε ο T δύναται να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον $L^p(X)$ στον $L^q(X)$ με νόρμα ίση το πολύ με $c_0^{1-\lambda}c_1^{\lambda}$.

Μία απλούστερη εκδοχή του θεωρήματος Riesz-Thorin αναφέρει ότι, αν ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^1(X)$ στον $L^1(X)$ και από τον $L^\infty(X)$ στον $L^\infty(X)$, τότε ο T είναι φραγμένος από τον $L^p(X)$ στον $L^p(X)$ για κάθε $1 < p < \infty$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει τελεστές Hilbert-Schmidt κατά τρόπο διαφορετικό από την Παράγραφο 1.1

Πρόταση 1.2.10 *Αν $K \in L^2(X \times X)$ τότε ο τύπος*

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy$$

ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή επί του χώρου Hilbert $L^2(X)$ και ισχύει $||T|| \leq ||K||_2$. Θέτουμε

$$||T||_{HS} := (\int_{X\times X} |K(x,y)|^2 dxdy)^{1/2}$$

για τη Hilbert-Schmidt ή Frobenius νόρμα του T.

Η Πρόταση 1.2.10 οδηγεί στα επόμενα δύο αξιοσημείωτα αποτελέσματα

Θεώρημα 1.2.11 *Αν $K \in L^2(X \times X)$ τότε ο τύπος*

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy$$

ορίζει έναν συμπαγή γραμμικό τελεστή επί του $L^2(X)$.

Θεώρημα 1.2.12 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο X έχει πεπερασμένο μέτρο και ο τελεστής $T : L^2(X) \to L^\infty(X)$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Τότε ο T είναι τελεστής Hilbert-Schmidt και, άρα, συμπαγής αν θεωρηθεί ότι δρα από τον $L^2(X)$ στον $L^2(X)$.*

Θεώρημα 1.2.13 *Αν $K : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών και*

$$c_1 = ess - sup_{y\in X} \int_X |K(x,y)|dx < +\infty$$

τότε ο τύπος

$$(Tf)(x) := \int_X K(x,y)f(y)dy$$

όριζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή επί του $L^1(X)$ και ισχύει $||T|| = c_1$.

Το παραπάνω είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος, το οποίο διατυπώνουμε άμεσα

Θεώρημα 1.2.14 *Αν B είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και η μετρήσιμη συνάρτηση $K : X \to B$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$c := ess - sup_{y\in X}||K(y)|| < +\infty$$

τότε ο τύπος

$$Tf := \int_X K(y)f(y)dy$$

οριζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον $L^1(X)$ στον B και ισχύει $||T|| = c$.

Δεν είναι αληθές ότι κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του $L^1(X)$ διαθέτει ολοκληρωτικό πυρήνα (αρκεί να θεωρήσει κάποιος των ταυτοτικό τελεστή) Λαμβάνει χώρα, όμως, το ακόλουθο αποτέλεσμα, επίκληση του οποίου θα πραγματοποιήσουμε αρκετές φορές στην εργασία μας.

Θεώρημα 1.2.15 *Ο τύπος $(Tf)(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy$ ορίζει μια '1-1' και 'επί' αντίστοιχία ανάμεσα στους φραγμένους γραμμικούς τελεστές*

$$T : L^1(X,dx) \to L^\infty(X,dx)$$

και τους φραγμένους ολοκληρωτικούς πυρήνες $K \in L^\infty(X \times X, d^2x)$. Επιπλέον ισχύει $||T|| = ||K||_\infty$.

Αφού επισημαίνουμε ότι οι L^p-χώροι αποτελούν συνδέσμους Banach, περατώνουμε την αναφορά μας στους φραγμένους γραμμικούς τελεστές που δρουν μεταξύ αυτών με την ακόλουθη πληροφορία

Θεώρημα 1.2.16 *Έστω (X,Σ,dx) χώρος μέτρου που ικανοποεί τις υποθέσεις (i)-(v) στην αρχή της Παραγράφου. Τότε ο χώρος $L^p(X,dx)$ διαθέτει την ιδιότητα της προσέγγισης για κάθε $p \in [1,+\infty)$. Συγκεκριμένα, ο τύπος*

$$P_{p,n}f := \sum_{r=1}^{m(n)} |E_r|^{-1}(f,\chi_{E_r})\chi_{E_r}$$

ορίζει μια συνεπή ακολουθία προβολών επί του $L^p(X,dx)$ πεπερασμένης τάξης και νόρμας ίσης με 1, η οποία συγκλίνει, καθώς $n \to \infty$ και για κάθε p, στον I ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών.

Για την συνέχεια, με Ω θα συμβολίζουμε ένα ανοιχτό υποσύνολο του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένου με το μέτρο Lebesgue dx και με $C_c(\Omega)$ το χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων της μορφής $f : \Omega \to \mathbb{K}$ (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) που διαθέτουν συμπαγή φορέα. Δηλαδή

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f(x) = 0 \ \forall x \in \Omega - K, \text{ όπου } K \subseteq \Omega, \ K \text{ συμπαγές}\}$$

Με $C^k(\Omega)$ συμβολίζουμε το χώρο όλων των συναρτήσεων της μορφής $f : \Omega \to \mathbb{K}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και τάξεως k, ενώ ορίζουμε το χώρο των άπειρα διαφορίσιμων συναρτήσεων $C^\infty(\Omega) = \cap_k C^k(\Omega)$ και το χώρο $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{K}$ ανήκει στο χώρο $L^p_{loc}(\Omega)$ αν $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Κάθε συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ καλείται τοπικά ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ αν ισχύει $\int_K |f(x)|dx < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Αποδεικνύεται ότι, αν $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $\int fu = 0$ για κάθε $u \in C_c(\Omega)$, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού στο Ω. Έχουμε το εξής βασικό

Θεώρημα 1.2.17 *Ο χώρος $C_c(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ $\forall 1 \leq p < +\infty$.*

Εισάγουμε ακολούθως την έννοια της συνέλιξης δύο συναρτήσεων με τη βοήθεια ορισμένων χαρακτηριστικών αποτελεσμάτων.

Θεώρημα 1.2.18 *Έστω $1 \leq p \leq +\infty$ και $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η συνάρτηση $y \to f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^n$. Θέτοντας*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

έχουμε ότι $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και επιπλέον

$$||f \star g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$$

Η συνάρτηση $f \star g$ καλείται συνέλιξη (convolution) των f και g.

Θεώρημα 1.2.19 *(Young) Έστω $1 \leq p \leq +\infty, 1 \leq q \leq +\infty$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύουν $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και*

$$||f \star g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$$

Πρόταση 1.2.20 *Έστω $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $f \star g \in C(\mathbb{R}^n)$.*

Καλούμε ομαλοποιητική ακολουθία (mollifiers) κάθε ακολουθία συναρτήσεων $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να ισχύουν

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \ supp\rho_n \subseteq B(0, 1/n), \ \int \rho_n = 1$$

και $\rho_n \geq 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Με $supp\rho_n$ σημειώνουμε τον φορέα της ρ_n.

Βεβαίως υπάρχουν ομαλοποιητικές ακολουθίες. Αρκεί να επιλέξουμε μια συνάρτηση $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $supp\rho \subseteq B(0,1)$, $\int \rho > 0$ και $\rho \geq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ και, στην συνέχεια, να θεωρήσουμε την ακολουθία $\rho_k(x) = Ck^n\rho(kx)$ με $C = (\int \rho)^{-1}$. Παράδειγμα κατάλληλης συνάρτησης αποτελεί η

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{e}^{|x|^2-1}}, \text{ αν } |x| < 1 \\ 0, \text{ αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Έχουμε, τώρα, τα εξής αποτελέσματα

Πρόταση 1.2.21 *Έστω $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\rho_n \star f \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Πρόταση 1.2.22 *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ με $1 \leq p < +\infty$. Τότε $\rho_n \star f \to f$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Πόρισμα 1.2.23 *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < +\infty$.*

Πρόταση 1.2.24 *Έστω $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ και $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. Υπάρχει, τότε, ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{p_i} = 0$$

ταυτόχρονα για $i = 1, 2$.

Ένας από τους σημαντικότερους λόγους για τη χρησιμότητα του μετασχηματισμού Fourier είναι η απλοποίηση, μέσω αυτού, της ανάλυσης διαφορικών τελεστών με σταθερούς συντελεστές. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση και $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι ένας πολυδείκτης μη αρνητικών ακεραίων αριθμών, γράφουμε $D^\alpha f$ για να δηλώσουμε το αποτέλεσμα της διαφόρισης της f a_r φορές ως προς τη μεταβλητή x_r για κάθε $1 \leq r \leq n$. Με άλλα λόγια

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1}\frac{\partial^{a_2}}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n} f$$

Η τάξη παραγώγου ορίζεται να είναι ίση με $|\alpha| := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Αν $|\alpha| = 0$, τότε συμβατικά θέτουμε $D^\alpha f = f$. Αν $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$x^\alpha := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

Ο χώρος Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται ως ο χώρος όλων των άπειρα διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε για κάθε πολυδείκτη α και για κάθε $m \geq 0$ να υπάρχουν σταθερές $c_{\alpha,m}$ που ικανοποιούν την συνθήκη

$$|D^\alpha f(x)| \leq c_{\alpha,m}(1 + |x|)^{-m}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Μια ισοδύναμη συνθήκη αναφέρεται στην ύπαρξη σταθερών α, β έτσι ώστε να ισχύει

$$|x^\beta D^\alpha f(x)| \leq c_{\alpha,\beta}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και πολυδείκτες α, β. Μπορούμε να εφοδιάσουμε το χώρο Schwartz με μια τοπολογία μέσω της αριθμήσιμης οικογένειας ημινορμών

$$p_{\alpha,\beta} := \sup\{|x^\beta D^\alpha f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ με τον όρο συνέλιξη αυτών εννοούμε την συνάρτηση $f \star g$ με τύπο

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \ x \in \mathbb{R}^n$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις διαφόρισης κάτω από το ολοκλήρωμα και ολοκλήρωσης κατά μέρη, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Είναι, εξάλλου, προφανές ότι $f \star g = g \star f$.

Για $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $x \cdot \xi$ το εσωτερικό τους γινόμενο. Δηλαδή $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$. Ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier transform) μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ δίνεται από τον τύπο

$$(\mathcal{F}(f))(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} dx$$

και απεικονίζει το χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Στη διεθνή βιβλιογραφία μπορεί κάποιος να συναντήσει διαφορετικούς τρόπους κανονικοποίησης για το μετασχηματισμό Fourier. Εμείς έχουμε υιοθετήσει αυτόν που χρησιμοποιεί στα βιβλία του ο E.B. Davies. Γεγονός είναι ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$(\mathcal{F} D^\alpha f)(\xi) = \mathrm{i}^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F} f)(\xi), \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$$

και

$$(\mathcal{F} Q^\alpha f)(\xi) = \mathrm{i}^{|\alpha|} (D^\alpha \mathcal{F} f)(\xi), \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$$

όπου $(Q^\alpha f)(x) := x^\alpha f(x)$. Απόρροια των παραπάνω είναι ο τύπος

$$(\mathcal{F} \Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 (\mathcal{F} f)(\xi), \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$$

στον οποίο με Δf συμβολίζουμε τη Λαπλασιανή της συνάρτησης f.

Λήμμα 1.2.25 *Αν $K_t(x) := (2\pi t)^{-n/2} \mathrm{e}^{-|x|^2/2t}$, τότε*

$$(\mathcal{F} K_t)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2/2}$$

και, αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $\lim_{t \to 0+} (K_t \star f)(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.2.26 *(Plancherel) Ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ επεκτείνεται, μέσω πλήρωσης, σε έναν ισομετρικό τελεστή επί του $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ο αντίστροφος του $\mathcal{F}$ (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier) δίνεται, για κάθε $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, από τον τύπο*

$$(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} d\xi$$

Θεώρημα 1.2.27 *(ανισότητα Hausdorff-Young) Άν $1 \leq p \leq 2$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε ισχύει $||\mathcal{F}f||_q \leq (2\pi)^{n/2-n/p}||f||_p$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Κατά συνέπεια, ο $\mathcal{F}$ δύναται να επεκταθεί σε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Έστω, περαιτέρω, X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και $f : X \to \mathbb{K}$ (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) συνεχής συνάρτηση .Λέμε ότι η f μηδενίζεται στο άπειρο, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K του X ώστε να ισχύει $|f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in X - K$. Το σύνολο των παραπάνω συναρτήσεων συμβολίζεται με $C_0(X)$ και αποτελεί χώρο Banach αν εφοδιαστεί με τη νόρμα $|| \cdot ||_\infty$, όπου

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

Ορίζουμε τώρα

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} dx = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}f)(\xi)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f \to \hat{f}$ είναι ένας γραμμικός τελεστής νόρμας ένα από τον $L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $C_0(\mathbb{R}^n)$. Η ίδια απεικόνιση αποτελεί ομομορφισμό αλγεβρών Banach αν $L^1(\mathbb{R}^n)$ ο εφοδιαστεί με τον συνελικτικό πολλαπλασιασμό και ο $C_0(\mathbb{R}^n)$ με τον πολλαπλασιασμό κατά σημείο. Ισχύει δηλαδή

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο με μια σύντομη αναφορά στους χώρους Sobolev. Θα χρειαστούμε την έννοια της κατανομής (distribution). Προς τούτο, θεωρούμε το χώρο $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ όλων των άπειρα διαφορίσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στο ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$, παίρνουν πραγματικές τιμές και διαθέτουν συμπαγή φορέα . Θα συμβολίζουμε περαιτέρω, το συγκεκριμένο χώρο με $D(\Omega)$ και θα ονομάζουμε τα στοιχεία του συναρτήσεις δοκιμής. Αν $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων του $D(\Omega)$, θα λέμε ότι συγκλίνει στην $\phi \in D(\Omega)$ αν
(i) υπάρχει ένα σταθεροποιημένο συμπαγές υποσύνολο K του Ω που περιέχει τους φορείς όλων των ϕ_n.
(ii) η ακολουθία $(D^\alpha\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του K στην $D^\alpha f$ για κάθε πολυδείκτη α.

Με τον όρο κατανομή επί του Ω εννοούμε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές του $D(\Omega)$. Με άλλα λόγια, κατανομή είναι μια συνεχής γραμμική απεικόνιση από τον

$D(\Omega)$ στο $\mathbb{R}$. Ως εκ τούτου, ο χώρος των κατανομών είναι ο τοπολογικός δυϊκός του $D(\Omega)$ και συμβολίζεται με $D'(\Omega)$. Λέγοντας ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής επί του $D(\Omega)$ εννοούμε ότι, για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $D(\Omega)$ με όριο ϕ, ισχύει

$$\langle f, \phi_n\rangle \to \langle f, \phi\rangle \text{ καθώς } n \to +\infty$$

Μια κατανομή F που σχετίζεται με μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f μπορεί να ορισθεί με φυσιολογικό τρόπο ως εξής

$$F : D(\Omega) \to \mathbb{R}, \langle F, \phi\rangle = \int_\Omega f\phi dx \ \forall\phi \in D(\Omega)$$

Αν ο φορέας της ϕ είναι το συμπαγές υποσύνολο K του Ω, έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle F, \phi\rangle| &= |\int_\Omega f\phi dx| \\ &= |\int_K f\phi dx| \\ &\leq \sup_{x\in K}|\phi(x)| \int_K |f(x)|dx < +\infty \end{aligned}$$

Άρα η ποσότητα που συμβολίσαμε με $\langle F, \phi\rangle$ έχει νόημα. Λέμε ότι η κατανομή F παράγεται από την συνάρτηση f χρησιμοποιώντας, συνήθως, το ίδιο σύμβολο και για τις δύο έννοιες. Μια κατανομή παραγόμενη από τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση αναφέρεται ως κανονική (regular), ενώ σε αντίθετη περίπτωση ως ιδιάζουσα (singular). Χαρακτηριστικό παράδειγμα ιδιάζουσας κατανομής αποτεελεί το δέλτα του Dirac.

Ορισμός 1.2.28 *Η γενικευμένη μερική παράγωγος (generalized partial derivative) α-τάξεως μιας κατανομής f είναι μια κατανομή συμβολιζόμενη με $D^\alpha f$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$\langle D^\alpha f, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha\phi\rangle, \ \forall\phi \in D(\Omega) \tag{1.2.10}$$

Στον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιήσαμε για τη γενικευμένη μερική παράγωγο μίας κατανομής το ίδιο σύμβολο με αυτό για τη συνηθισμένη μερική παράγωγο μίας συνάρτησης. Βεβαίως, αν η συνάρτηση ανήκει στον $C^m(\bar{\Omega})$, τότε η γενικευμένη παράγωγος συμπίπτει με την συνήθη μερική παράγωγο α-τάξεως για $|\alpha| \leq m$.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι μια συνάρτηση u ανήκει στον $L^1_{loc}(\Omega)$. Τότε παράγει μια κανονική κατανομή, συμβολιζόμενη επίσης με u, ώστε να ισχύει

$$\langle u, \phi\rangle = \int_\Omega u\phi dx, \ \forall\phi \in D(\Omega)$$

Επιπλέον η κατανομή u διαθέτει γενικευμένες μερικές παραγώγους κάθε τάξεως. Ιδιαιτέρως, η $D^\alpha u$ ορίζεται από την σχέση (1.2.10). Αν η $D^\alpha u$ είναι κανονική κατανομή, τότε παράγεται από μια συνάρτηση του $L^1_{loc}(\Omega)$ και ισχύει

$$\langle D^\alpha u, \phi\rangle = \int_\Omega D^\alpha u(x)\phi(x)dx, \ \forall\phi \in D(\Omega) \tag{1.2.11}$$

Από τις σχέσεις (1.2.11) και (1.2.10) προκύπτει ότι οι συναρτήσεις u και $D^\alpha u(x)$ συνδέονται μέσω του τύπου

$$\int u(x)D^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u(x)\phi(x)dx$$

για κάθε $\phi \in D(\Omega)$.

Ορισμός 1.2.29 *Έστω $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ και α είναι ένας πολυδείκτης. Λέμε ότι η v είναι η ασθενής μερικής παράγωγος (weak partial derivative) α-τάξεως της u και γράφουμε $D^\alpha u = v$ αν ισχύει*

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi dx,\ \forall\phi \in D(\Omega)$$

Αν $u \in C^m(\bar{\Omega})$ τότε οι ασθενείς παράγωγοι $D^\alpha u$ αυτής συμπίπτουν με τις κλασσικές μερικές παραγώγους α-ταξεως για $|\alpha| \leq m$. Αποδεικνύεται ότι, αν $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, μια ασθενής μερική παράγωγος α-τάξεως αυτής, στην περίπτωση που υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένη μέχρι συνόλου μέτρου μηδέν.

Παράδειγμα 1.2.30 *Έστω $n = 1, \Omega = (0,2)$ και*

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ορίζουμε

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Θα επιβεβαιώσουμε ότι $u' = v$ υπό την ασθενή έννοια . Επιλέγουμε, λοιπόν, τυχούσα $\phi \in D(\Omega)$ (οπότε $\phi(0) = \phi(2) = 0$) και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) \\ &= -\int_0^2 v\phi dx \end{aligned}$$

όπως ακριβώς επιθυμούσαμε.

Έστω $1 \leq p \leq +\infty$ σταθεροποιημένο και m ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός.

Ορισμός 1.2.31 *Ο χώρος Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L^p(\Omega)$, έτσι ώστε, για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq m$, υπάρχουν οι ασθενείς μερικές παράγωγοι $D^\alpha u$ και ανήκουν στον $L^p(\Omega)$.*

Παρατήρηση 1.2.32 *(i) Αν $p = 2$ γράφουμε συνήθως*

$$H^m(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)\ (m = 1, 2, \dots)$$

Προφανώς $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
(ii) Συναρτήσεις του $W^{m,p}(\Omega)$ που συμπίπτουν σχεδόν παντού ταυτίζονται.

Αν $u \in W^{m,p}(\Omega)$ ορίζουμε

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx)^{1/p}\ (1 \le p < +\infty) \\ \sum_{|\alpha|<m} esssup_\Omega |D^\alpha u|\ (p = +\infty) \end{cases}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ορισθείσες ποσότητες αποτελούν νόρμες για τους χώρους Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ $(1 \le p \le +\infty)$.

Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u \in W^{m,p}(\Omega)$ Λέμε ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην u επί του χώρου Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ και γράφουμε $u_n \to u$ στον $W^{m,p}(\Omega)$, αν ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u||_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$$

Επίσης γράφουμε ότι $u_n \to u$ επί του $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ εννοώντας ότι $u_n \to u$ στον $W^{m,p}(K)$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω.

Ορισμός 1.2.33 *Σημειώνουμε με $W^{m,p}_0(\Omega)$ την κλειστότητα του χώρου $C^\infty_c(\Omega)$ (ή $D(\Omega)$) στον $W^{m,p}(\Omega)$. Έτσι $u \in W^{m,p}_0(\Omega)$, αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $u_n \in C^\infty_c(\Omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $u_n \to u$ στον $W^{m,p}(\Omega)$. Ερμηνεύουμε το χώρο $W^{m,p}_0(\Omega)$ ως αποτελούμενο από εκείνες τις συναρτήσεις για τις οποίες έχουμε $D^\alpha u = 0$ επί του συνόρου $\partial\Omega$ του Ω για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \le m - 1$. Συνήθως $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$ $(m = 1, 2, \dots)$*

Παράδειγμα 1.2.34 *Ας θεωρήσουμε ως Ω την ανοικτή μοναδιαία μπάλα $B(0, 1)$ του $\mathbb{R}^n$ και την συνάρτηση u με*

$$u(x) = |x|^{-\lambda}\ (x \in \Omega, x \ne 0)$$

Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε για ποιές τιμές των παραμέτρων $\lambda > 0, n$ και p η συνάρτηση u ανήκει στο χώρο Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Αρχικά παρατηρούμε ότι η u είναι άπειρα διαφορίσιμη (εκτός του μηδενός στο οποίο, άλλωστε, δεν ορίζεται) και μάλιστα

$$u_{x_i}(x) = \frac{-\lambda x_i}{|x|^{\lambda+2}}\ (x \ne 0)$$

Επομένως $|Du(x)| = \frac{\lambda}{|x|^{\lambda+1}}$ $(x \ne 0)$.

Έστω $\phi \in D(\Omega)$ και σταθεροποιημένο $\epsilon > 0$. Τότε

$$\int_{\Omega - B(0,\epsilon)} u\phi_{x_i} dx = -\int_{\Omega - B(0,\epsilon)} u_{x_i}\phi dx + \int_{\partial B(0,\epsilon)} u\phi v^i ds$$

όπου $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ είναι το προς τα μέσα κατευθυνόμενο μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $\partial B(0,\epsilon)$. Αν $\lambda+1 < n$ έχουμε $|Du(x)| \in L^1(\Omega)$. Στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} |\int_{\partial B(0,\epsilon)} u\phi v^i ds| &\leq ||\phi||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial B(0,\epsilon)} \epsilon^{-\lambda} ds \\ &\leq c\epsilon^{n-1-\lambda} \to 0 \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_\Omega u\phi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{x_i}\phi dx$$

για κάθε $\phi \in D(\Omega)$, αρκεί $0 < \lambda < n-1$. Επιπλέον ισχύει $|Du(x)| \in L^p(\Omega)$ αν και μόνον αν $(\lambda+1)p < n$. Τελικά, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ αν και μόνον αν $0 < \lambda < \frac{n-p}{p}$. Ιδιαιτέρως $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ για κάθε $p \geq n$.

Θεώρημα 1.2.35 *Για κάθε $m = 1, 2, \ldots$ και $1 \leq p \leq +\infty$ ο χώρος Sobolev είναι πλήρης ως προς την ορισθείσα νόρμα και, άρα, χώρος Banach.*

Απόδειξη. (Η απόδειξη θα γίνει για $1 \leq p < +\infty$) Ας υποθέσουμε ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στον $W^{m,p}(\Omega)$. Τότε, για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq m$, η $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $L^p(\Omega)$. Επειδή ο $L^p(\Omega)$ είναι πλήρης χώρος, υπάρχουν συναρτήσεις $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ στον } L^p(\Omega) \text{ για κάθε } |\alpha| \leq m \tag{1.2.12}$$

Ειδικότερα, έχουμε $u_n \to u_{(0,0,\ldots,0)} =: u$ στον $L^p(\Omega)$. Ισχυριζόμαστε πως $u \in W^{m,p}(\Omega)$ και $D^\alpha u = u_\alpha$ για κάθε $|\alpha| \leq m$. Πράγματι, σταθεροποιώντας $\phi \in D(\Omega)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \phi dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \phi dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi dx \end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός μας επαληθεύεται . Η σχέση (1.2.12) δίνει τώρα ότι $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $|\alpha| \leq m$. Συμπεραίνουμε πως $u_n \to u$ στον $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Η απόδειξη μόλις ολοκληρώθηκε.

Αναφέρουμε καταληκτικά ότι, για κάθε $m = 1, 2, 3, \ldots$ ο χώρος Sobolev $L^p(\Omega)$ γίνεται χώρος Hilbert αν εφοδιαστεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u)(D^\alpha v) dx$$

για κάθε $u, v \in H^m(\Omega)$, το οποίο παράγει τη νόρμα

$$||u||_{H^m(\Omega)} := (\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^2 dx)^{1/2}$$

Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$||u||_{H^m(\Omega)} := (\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} dx)^{1/2}$$

1.3 Μη φραγμένοι γραμμικοί τελεστές σε χώρους Banach και χώρους Hilbert

Στις εφαρμογές κυρίαρχη θέση κατέχουν γραμμικοί τελεστές που είναι μη φραγμένοι ή που ορίζονται σε έναν διανυσματικό υπόχωρο του θεωρούμενου νορμαρισμένου χώρου.

Έστω, λοιπόν, δύο χώροι με νόρμα X και Y και ένας γραμμικός τελεστής $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$. Με $Dom(T)$ συμβολίζουυμε το πεδίο ορισμού του T. Θα χρησιμοποιήσουμε συχνά το συμβολισμό $(T, Dom(T))$. Τονίζουμε ότι το σύνολο $Dom(T)$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του X. Θα λέμε ότι ο T είναι φραγμένος αν υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$||Tx|| \leq M||x||, \ \forall x \in Dom(T)$$

Ισοδύναμα, ο T είναι φραγμένος αν ισχύει

$$\sup\{||Tx|| : x \in Dom(T), ||x|| = 1\} < +\infty$$

Σε αντίθετη περίπτωση ο T καλείται μη φραγμένος (unbounded linear operator). Ο T είναι πυκνά ορισμένος (densely defined) αν το πεδίο ορισμού είναι πυκνό στον X, δηλαδή αν $\overline{Dom(T)} = X$. Δύο γραμμικοί τελεστές $S : X \supseteq Dom(S) \to Y$ και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ θα λέγονται ίσοι (συμβολίζουμε $S = T$) αν $Dom(S) = Dom(T)$ και $Sx = Tx$ για κάθε $x \in Dom(S)$.

Αν $(T, Dom(T))$ και $(S, Dom(S))$ είναι δύο (μη φραγμένοι) γραμμικοί τελεστές μεταξύ των χώρων με νόρμα X και Y και $a \in \mathbb{K}$ (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), ορίζουμε τους γραμμικούς τελεστές

$$aT : X \supseteq Dom(aT) \to Y$$

και

$$T + S : X \supseteq Dom(T + S) \to Y$$

από τις σχέσεις

$$Dom(aT) = Dom(T), (aT)(x) = a(Tx), \ \forall x \in Dom(aT)$$

και

$$Dom(T + S) = Dom(T) \cap Dom(S), (T + S)(x) = Tx + Sx, \ \forall x \in Dom(T + S)$$

αντίστοιχα. Αν X, Y, Z είναι χώροι με νόρμα και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ και $S : Y \supseteq Dom(S) \to Z$, δύο (μη φραγμένοι) γραμμικοί τελεστές, ορίζουμε το γραμμικό τελεστή

$$ST : X \supseteq Dom(ST) \to Z$$

από τις σχέσεις

$$Dom(ST) = \{x \in Dom(T) : \ Tx \in Dom(S)\}, (ST)(x) = S(Tx), \ \forall x \in Dom(ST)$$

Παραδείγματα 1.3.1 *(i) Έστω*

$$Dom(A) = \{x = (x_k) \in \ell^2 : \exists k_x \text{ ώστε } x_k = 0 \ \forall k \geq k_x\}$$

και $A : \ell^2 \supseteq Dom(A) \to \ell^2$ με $A(x_k) = (kx_k)$ Άμεσα επιβεβαιώνεται ότι ο τελεστής A είναι καλά ορισμένος και γραμμικός. Θέτουμε $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ όπου η μονάδα βρίσκεται στην k-θέση. Γνωρίζουμε πως το σύνολο $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί τη συνήθη βάση του ℓ^2. Προφανώς $||e_k||_2 = 1$, αλλά $Ae_k = ke_k$ και

$$||Ae_k||_2 = ||ke_k||_2 = ||(0, 0, \ldots, k, 0, 0, \ldots)||_2 = k$$

Επειδή $\lim_{k\to+\infty} ||Ae_k||_2 = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής A είναι μη φραγμένος.
(ii) Έστω $Dom(T) = C^1[0, 1]$ και $T : C[0, 1] \supseteq C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ με $(Tf)(x) = f'(x), x \in [0, 1]$. Άμεσα επιβεβαιώνουμε ότι ο τελεστής T είναι καλά ορισμένος και γραμμικός. Για την ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $C^1[0, 1]$ με $f_n(x) = x^n$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &= \sup\{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} \\ &= \sup\{|x^n| : x \in [0, 1]\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} ||Tf_n||_\infty &= \sup\{|(Tf_n)(x)| : x \in [0, 1]\} \\ &= \sup\{|nx^{n-1}| : x \in [0, 1]\} \\ &= n \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to+\infty} ||Tf_n|| = +\infty$ καταλήγουμε ότι ο τελεστής T δεν είναι φραγμένος.

Θεμελιώδους σημασίας στη θεωρία μη φραγμένων γραμμικών τελεστών είναι η μελέτη των κλειστών τελεστών, καθώς, από τη μία, οι περισσότεροι γραμμικοί τελεστές είναι κλειστοί ή τουλάχιστον διαθέτουν κλειστή επέκταση και, από την άλλη, βασικά αποτελέσματα που αφορούν φραγμένους γραμμικούς τελεστές σε χώρους Banach ισχύουν και για αντίστοιχους κλειστούς. Προτού δόσουμε τον σχετικό ορισμό, εισάγουμε μια χρήσιμη έννοια

Ορισμός 1.3.2 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και γραμμικοί τελεστές $S : X \supseteq Dom(S) \to Y, T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ Λέμε ότι ο T αποτελεί επέκταση (extension) του S (συμβολ. $S \subset T$) αν ισχύουν $Dom(S) \subseteq Dom(T)$ και $Sx = Tx$ για κάθε $x \in Dom(S)$.*

Ορισμός 1.3.3 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται κλειστός (closed linear operator) αν το γράφημά του*

$$Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in Dom(T)\}$$

είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$. Ο T ονομάζεται κλείσιμος (closable linear operator) αν διαθέτει κλειστή γραμμική επέκταση. Η ελάχιστη δυνατή κλειστή επέκταση καλείται κλειστότητα (closure) του T και συμβολίζεται με $\bar{T}$.

Παρατήρηση 1.3.4 *(i) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T είναι κλειστός αν και μόνον αν, δοθείσης οποιαδήποτε ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Dom(T)$, από τις σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x \in X$ και $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = y \in Y$ συνεπάγεται ότι $x \in Dom(T)$ και $Tx = y$. Ο T είναι κλείσιμος αν και μόνον αν, δοθείσης οποιασδήποτε ακολουθίας στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $Dom(T)$, από τις σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = z \in Y$ έπεται ότι $z = 0$. Αν ο T είναι κλείσιμος ισχύει $Gr(T) = \overline{Gr(T)}$.*
(ii) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αναδιατύπωση του θεωρήματος κλειστού γραφήματος (βλ. Θεώρημα 1.1.15) αναφέρει ότι, αν ο T είναι κλειστός, τότε είναι φραγμένος.
(iii) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ '1-1', και κλειστός γραμμικός τελεστής. Τότε ορίζεται ο γραμμικός τελεστής $T^{-1} : Y \supseteq Ran(T) \to Dom(T)$ και αποδεικνύεται πως είναι κλειστός.

Παραδείγματα 1.3.5 *(i) Έστω $Dom(B) = \{x = (x_k) \in \ell^2 : \sum_{k=1}^n k^2|x_k|^2 < +\infty\}$ και $B : \ell^2 \supseteq Dom(B) \to \ell^2$ με $B(x_k) = (kx_k)$. Άμεσα επαληθεύεται ότι ο τελεστής B είναι μη φραγμένος (με διαδικασία όμοια εκείνης στο Παράδειγμα 1.3.1(i)). Θα δείξουμε ότι ο B είναι κλειστός.*

Πράγματι, θεωρούμε τυχόντα στοιχεία $x = (x_k)$ και $y = (y_k)$ του ℓ^2 και τυχούσα ακολουθία $(x_n) = (x_k^{(n)})$ του $Dom(B)$ έτσι ώστε να ισχύουν $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} Bx_n = y$. Αν $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι η συνηθισμένη βάση του ℓ^2 έχουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2|x_k|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2|x_k^{(n)}|^2 < +\infty$$

(διότι $x_n = (x_k^{(n)}) \in Dom(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και επιπλέον

$$\begin{aligned} y_k = (y, e_k) &= \lim_{n\to+\infty} (Bx_n, e_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} ((kx_k^{(n)}), e_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} kx_k^{(n)} \\ &= kx_k, \; k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Επομένως $x \in Dom(B)$ *και* $y = Bx$. *Από την Παρατήρηση 1.3.4 έπεται ότι ο* B *είναι κλειστός τελεστής.*
(ii) Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο τελεστής T *του Παραδείγματος 1.3.1(ii) είναι κλειστός. Αντιθέτως ο τελεστής* A *του Παραδείγματος 1.3.1(i) δεν είναι κλειστός. Ισχύει, ωστόσο, ότι* $A \subset B$ *και , όπως είδαμε, ο* B *είναι κλειστός τελεστής. Συμπεραίνουμε πως ο* A *είναι κλείσιμος.*
(iii) Συμβολίζοντας με $AC[0,1]$ *τις απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις επί του διαστήματος* $[0,1]$, *θεωρούμε το γραμμικό τελεστή* $S : L^2[0,1] \supseteq Dom(S) \to L^2[0,1]$ *όπου* $Dom(S) = \{f \in AC[0,1] : \exists f' \in L^2[0,1]\}$ *και* $(Sf)(x) = f'(x), x \in [0,1]$. *Μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι ο* S *είναι κλειστός τελεστής.*

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το σύνολο $Dom(T)$ γίνεται χώρος με νόρμα αν ορίσουμε

$$||x||_T = ||x|| + ||Tx||, \ \forall x \in Dom(T)$$

Η ποσότητα $||\cdot||_T$ ονομάζεται νόρμα γραφήματος τελεστή (graph norm).

Πρόταση 1.3.6 *Έστω* X, Y *χώροι Banach και* $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ *γραμμικός τελεστής. Ο* T *είναι κλειστός αν και μόνον αν το ζεύγος* $(Dom(T), ||\cdot||_T)$ *αποτελεί χώρο Banach.*

Θεώρημα 1.3.7 *Έστω* X, Y *χώροι Banach και* $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ *κλειστός γραμμικός τελεστής. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο T *είναι φραγμένος.*
(β) Το σύνολο $Dom(T)$ *είναι κλειστός υπόχωρος του* X.

Ας θεωρήσουμε, περαιτέρω, δύο χώρους Banach X και Y και έναν μη φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ πυκνά ορισμένο. Ορίζουμε έναν μη φραγμένο γραμμικό τελεστή $T^* : Y \supseteq Dom(T^*) \to X^*$ ως εξής: Θέτουμε

$$Dom(T^*) = \{y^* \in Y^* : \exists c \geq 0 \text{ ώστε } |\langle Tx, y^* \rangle| \leq c||x|| \ \forall x \in Dom(T)\}$$

Προφανώς το σύνολο $Dom(T^*)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του Y^*. Για δεδομένο $y^* \in Dom(T^*)$ θεωρούμε την απεικόνιση $g : Dom(T) \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \langle Tx, y^* \rangle, \ x \in Dom(T)$$

Η g είναι γραμμική και ισχύει $|g(x)| \leq c||x||$ για κάθε $x \in Dom(T)$. Από το θεώρημα 1.1.5 (Hahn-Banach) υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq c||x||$ για κάθε $x \in X$. Επομένως $f \in X^*$. Η συγκεκριμένη επέκταση της g είναι μοναδική διότι η f είναι συνεχής και το σύνολο $Dom(T)$ πυκνό στον X.

Θέτοντας $T^*y^* = f$ επαληθεύουμε άμεσα ότι ο T^* είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής αποκαλούμενος συζυγής (adjoint operator) του T. Οι T, T^* συνδέονται με την ακόλουθη βασική σχέση

$$\langle Tx, y^* \rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*y^* \rangle_{X,X^*}$$

για κάθε $x \in Dom(T)$ και για κάθε $y^* \in Dom(T^*)$. Συχνά, για τον συζυγή τελεστή $(T^*, Dom(T^*))$ του $(T, Dom(T))$ χρησιμοποιούνται οι εξής σχέσεις ορισμού:

$$T^* y^* = x^*$$

$$Dom(T^*) = \{y^* \in Y^* : \exists x^* \in X^* \text{ ώστε } \langle Tx, y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle, \ \forall x \in Dom(T)\}.$$

Παράδειγμα 1.3.8 *Αν $T_p := \frac{d}{dt}$ στο χώρο Banach $X_p := L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < +\infty$, με πεδίο ορισμού*

$$Dom(T_p) = \{f \in X_p : f \in AC \text{ και } f' \in X_p\}$$

μπορεί να αποδειχθεί ότι $T_p^* = -T_q$ επί του $X_q := L^q(\mathbb{R})$ με πεδίο ορισμου

$$Dom(T_p^*) = \{f \in X_q : f \in AC \text{ και } f' \in X_q\}$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Πρόταση 1.3.9 *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ γραμμικός τελεστής πυκνά ορισμένος. Τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \supseteq Dom(T^*) \to X^*$ είναι κλειστός.
(ii) Ο συζυγής τελεστής T^* είναι φραγμένος αν και μόνον αν το πεδίο ορισμού του $Dom(T^*)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y^*.

Θεωρούμε έναν χώρο Banach X και γραμμικό τελεστή $T : X \supseteq Dom(T) \to Y$ όχι κατ΄ ανάγκην πυκνά ορισμένο. Ο T αντιστρέφεται αν ειναι '1-1' και 'επί'. Υπάρχει, τότε, ο γραμμικός τελεστής $T^{-1} : X \to Dom(T)$ και ισχύουν $TT^{-1} = I_X, T^{-1}T = I_{Dom(T)}$. Το επιλύον σύνολο (resolvent set) $\rho(T)$ του T απαρτίζεται από όλα εκείνα τα $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία υπάρχει και είναι φραγμένος ο γραμμικός τελεστής $(\lambda I - T)^{-1}$. Αν $\lambda \in \rho(T)$, ο τελεστής

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} : X \to Dom(T)$$

καλείται επιλύων του T στο λ (resolvent operator at point λ) Άμεσα λαμβάνουμε ότι, για κάθε $\lambda \in \rho(T)$, ισχύει

$$TR(\lambda, T) = \lambda R(\lambda, T) - I$$

Αν $\lambda, \mu \in \rho(T)$ έχουμε ότι

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T) \tag{1.3.13}$$

Καλούμε φάσμα (spectrum) του T και συμβολίζουμε με $\sigma(T)$ το σύνολο $\mathbb{C} - \rho(T)$, ενώ ονομάζουμε σημειακό φάσμα (point spectrum) του T το σύνολο

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ δεν είναι } '1-1'\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\} \end{aligned}$$

Κάθε $\lambda \in \sigma_p(T)$ καλείται ιδιοτιμή (eigenvalue) του T και κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in X$ με $Tx = \lambda x$ ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Παρατηρούμε ότι, αν ο T είναι κλειστός τελεστής, τότε

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ υπάρχει ο } (\lambda I - T)^{-1}\}$$

καθώς το θεώρημα κλειστού γραφήματος δηλώνει ότι ο τελεστής $(\lambda I - T)^{-1}$ είναι φραγμένος.

Αν $\rho(T) \neq \emptyset$, λέμε ότι ο T διαθέτει συμπαγή επιλύοντα (compact resolvent) στην περίπτωση κατά την οποία ο $R(\lambda, T)$ είναι συμπαγής τελεστής για ένα, άρα και για κάθε (λόγω της Πρότασης 1.1.30 και της σχέσης (1.3.13)) $\lambda \in \rho(T)$. Τελεστές με συμπαγή επιλύοντα σε απειροδιάστατους χώρους Banach είναι οπωσδήποτε μη φραγμένοι.

Διατυπώνουμε, στο σημείο αυτό, ορισμένα χαρακτηριστικά αποτελέσματα

Πρόταση 1.3.10 *Έστω X χώρος Banach και $S, T : X \supseteq \mathcal{D} \to X$ γραμμικοί τελεστές με $\mathcal{D} = Dom(S) = Dom(T)$. Αν ο S έχει φραγμένο αντίστροφο και ισχύει*

$$||S - T|| \leq \frac{1}{||S^{-1}||}$$

τότε ο T είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση 1.3.11 *Έστω X χώρος Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to X$ κλειστός γραμμικός τελεστής. Τότε ισχύουν τα κάτωθι:*
(i) Το επιλύον σύνολο $\rho(T)$ του T είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$ και, αν $\mu \in \rho(T)$ έχουμε

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, T)^{n+1}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\mu - \lambda| \leq \frac{1}{||R(\mu,T)||}$.
(ii) Η απεικόνιση $\lambda \to R(\lambda, T)$ είναι τοπικά αναλυτική και

$$\frac{d^n}{dx^n} R(\lambda, T) = (-1)^n n! R(\lambda, T)^{n+1} \ (n \in \mathbb{N})$$

(ii) Αν $\lambda \in \rho(T)$ και $\mu \in \mathbb{C}$ ώστε

$$|\mu - \lambda| \leq \frac{1}{||R(\lambda, T)||}$$

τότε $\mu \in \rho(T)$.

Θεώρημα 1.3.12 *(Φασματικής απεικόνισης για τον επιλύοντα τελεστή) Έστω X χώρος Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to X$ κλειστός γραμμικός τελεστής με μη κενό επιλύον σύνολο $\rho(T)$. Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} \sigma(R(\lambda_0, T)) &= \{0\} \cup (\lambda_0 - \sigma(T))^{-1} \\ &= \{0\} \cup \{(\lambda_0 - \mu)^{-1} : \mu \in \sigma(T)\} \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Πρόταση 1.3.13 *Έστω X χώρος Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to X$ κλειστός γραμμικός τελεστής με $\rho(T) \neq \emptyset$. Αν ο T διαθέτει συμπαγή επιλύοντα, τότε ισχύει $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.*

Πρόταση 1.3.14 *Έστω X χώρος Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to X$ πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός γραμμικός τελεστής. Τότε ο αντίστροφος $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ του T υπάρχει αν και μόνον αν ο αντίστροφος $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$ του T^* υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή ισχύει*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Πόρισμα 1.3.15 *Έστω X χώρος Banach και $T : X \supseteq Dom(T) \to X$ πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός γραμμικός τελεστής. Τότε ισχύουν $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ και $R(\lambda, T)^* = R(\lambda, T^*)$ για κάθε $\lambda \in \rho(T)$.*

Θα πραγματοποιήσουμε, ακολούθως, μια παρέκβαση και θα αναφερθούμε σε φραγμένους γραμμικούς τελεστές οι οποίοι εξαρτώνται από μια μιγαδική παράμετρο και ικανοποιούν την εξίσωση επιλυόντων τελεστών (σχέση 1.3.13) αποτελώντας χρήσιμα εργαλεία τεχνικής φύσεως. Δίνουμε τον σχετικό ορισμό

Ορισμός 1.3.16 *Σε έναν χώρο Banach X θεωρούμε $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ και τελεστές $J(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Η οικογένεια $\{J(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ καλείται ένας ψευδοεπιλύων (pseudoresolvent) εάν ισχύει*

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda) J(\lambda) J(\mu)$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Λήμμα 1.3.17 *Έστω X χώρος Banach και $\Lambda \in \mathbb{C}$. Αν $J(\lambda)$ είναι ένας ψευδοεπιλύων επί του Λ, τότε ισχύουν τα παρακάτω:*
(i) $J(\lambda)J(\mu) = J(\mu)J(\lambda)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \Lambda$
(ii) Τα σύνολα $Ker(J(\lambda))$ και $Ran(J(\lambda))$ είναι ανεξάρτητα από την παράμετρο $\lambda \in \Lambda$
(iii) Το σύνολο $Ker(J(\lambda))$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X.

Θεώρημα 1.3.18 *Έστω X χώρος Banach και $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. Θεωρούμε έναν ψευδοεπιλύοντα $J(\lambda)$ επί του Λ. Τότε, ο $J(\lambda)$ αποτελεί επιλύοντα τελεστή ενός μοναδικού πυκνά ορισμένου κλειστού γραμμικού τελεστή T αν και μόνον αν $KerJ(\lambda) = \{0\}$ και το σύνολο $RanJ(\lambda)$ είναι πυκνό στον X.*

Θεώρημα 1.3.19 *Έστω X χώρος Banach, Λ μη φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $J(\lambda)$ ένας ψευδοεπιλύων επί του Λ. Αν το σύνολο $RanJ(\lambda)$ είναι πυκνό στον X και υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Λ έτσι ώστε να ισχύουν*

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty \text{ και } ||\lambda_n J(\lambda_n)|| \leq M$$

για κάποια σταθερά $M > 0$, τότε ο $J(\lambda)$ είναι επιλύοντας τελεστής ενός μοναδικού πυκνά ορισμένου κλειστού γραμμικού τελεστή T.

Πόρισμα 1.3.20 *Έστω X χώρος Banach, Λ μη φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $J(\lambda)$ ένας ψευδοεπιλύων επί του Λ. Αν υπάρχει ακολουθία στοιχείων $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του Λ ώστε να ισχύουν*

$$\lim_{n\to+\infty}|\lambda_n| = +\infty \text{ και } \lim_{n\to+\infty}\lambda_n J(\lambda_n)x = x \ \forall x \in X$$

τότε ο $J(\lambda)$ είναι επιλύοντας τελεστής ενός μοναδικού πυκνά ορισμένου κλειστού γραμμικού τελεστή T.

Ειδικά για τις αποδείξεις των αμέσως προηγούμενων αποτελεσμάτων παραπέμπουμε στο βιβλίο του A. Pazy.

Έστω, στην συνέχεια, χώροι Hilbert $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ και ένας πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{H}_1 \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}_2$. Προκειμένου να ορίσουμε τον συζυγή του T, θεωρούμε $y \in \mathcal{H}_2$ ώστε το γραμμικό συναρτησοειδές f_y με $f_y(x) = (Tx, y)$ για κάθε $x \in Dom(T)$ να είναι φραγμένο . Καθώς ισχύει $\overline{Dom(T)} = \mathcal{H}_1$, αυτό επεκτείνεται σε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του $\mathcal{H}_1$ θέτοντας

$$f_y(x) = \lim_{n\to+\infty} f_y(x_n)$$

για $x \in \overline{Dom(T)}$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Dom(T)$ με $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Από το Θεώρημα 1.1.43 (αναπαράστασης του Riesz), υπάρχει μοναδικό $z \in \mathcal{H}_1$ ώστε $f_y(x) = (x, z)$ για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ ή ισοδύναμα

$$(Tx, y) = (x, z) \ \forall x \in Dom(T)$$

Αν

$$\begin{aligned} Dom(T^*) &= \{y \in \mathcal{H}_2 : x \to (Tx, y) \text{ φραγμένο } \forall x \in Dom(T)\} \\ &= \{y \in \mathcal{H}_2 : \exists M > 0 \text{ ώστε } |(Tx, y)| \le M||x|| \ \forall x \in Dom(T)\} \end{aligned}$$

τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το ορισθέν σύνολο αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathcal{H}_2$ και η απεικόνιση $T^* : \mathcal{H}_2 \supseteq Dom(T^*) \to \mathcal{H}_1$ με $T^*y = z$ καλά ορισμένο γραμμικό τελεστή που καλείται συζυγής του T.

Παραδείγματα 1.3.21 *(i) Έστω $-\infty < a < b < +\infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $(T, Dom(T))$ με*

$$Dom(T) = \{f \in L^2(a, b) : f \in AC[a, b], f' \in L^2(a, b) \text{ και } f(a) = f(b) = 0\}, \ Tf = \mathrm{i}f'$$

Αποδεικνύεται ότι ο T είναι πυκνά ορισμένος με συζυγή τον τελεστή $(T^*, Dom(T^*))$ όπου

$$Dom(T^*) = \{f \in L^2(a, b) : f \in AC[a, b], f' \in L^2(a, b)\}, \ T^*f = \mathrm{i}f'$$

(ii) Έστω $-\infty < a < +\infty$ και ο γραμμικός τελεστής $(S, Dom(S))$ με

$$Dom(S) = \{f \in L^2(a, +\infty) : f \in AC[a, b] \ \forall b > a, f' \in L^2(a, +\infty) \text{ και } f(a) = 0\}, \ Sf = \mathrm{i}f'$$

Επιβεβαιώνεται ότι ο S είναι πυκνά ορισμένος με συζυγή τον τελεστή $(S^*, Dom(S^*))$, όπου

$$Dom(S^*) = \{f \in L^2(a, +\infty) : f \in AC[a, b] \ \forall b > a, f' \in L^2(a, +\infty)\}, \ S^*f = \mathrm{i}f'$$

Θεώρημα 1.3.22 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}$ πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ισχύει*

$$\mathcal{H} = \overline{RanT} \bigoplus KerT^*$$

Ορισμός 1.3.23 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}$ πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται*
(i) αυτοσυζυγής (self-adjoint operator) αν $T = T^*$ δηλαδή αν $Dom(T) = Dom(T^*)$ και $Tx = T^*x$ για κάθε $x \in Dom(T)$.
(ii) συμμετρικός (symmetric operator) αν $T \subset T^*$ δηλαδή εάν ισχύει $(Tx, y) = (x, Ty)$ για κάθε $x, y \in Dom(T)$

Προφανώς, κάθε (μη φραγμένος) αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής είναι κλειστός, ενώ κάθε συμμετρικός γραμμικός τελεστής είναι κλείσιμος. Επιπλέον ένας (μη φραγμένος) αυτοσυζυγής τελεστής είναι και συμμετρικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως δείχνει και το επόμενο

Παράδειγμα 1.3.24 *Έστω*

$$Dom(T) = \{f \in C^1[0,1] \subset L^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

και $(Tf)(x) = \mathrm{i}f'(x)$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι πυκνά ορισμένος. Για κάθε $f, g \in Dom(T)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(Tf, g) &= \int_0^1 \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \mathrm{i}f(x)g(x)|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{i}f(x)\overline{g'(x)}dx \\
&= \int_0^1 f'(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}dx \\
&= (f, Tg)
\end{aligned}$$

Άρα ο T είναι συμμετρικός τελεστής .

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
Dom(T^*) &= \{g \in L^2[0,1] : f \to (Tf, g) \text{ φραγμένο } \forall f \in Dom(T)\} \\
&= \{g \in L^2[0,1] : f \to (Tf, g) \text{ συνεχές } \forall f \in Dom(T)\}
\end{aligned}$$

Αλλά αν $g \in C^1[0,1]$, τότε το γραμμικό συναρτησοειδές

$$f \to (Tf, g) = (\mathrm{i}f', g) = \ldots = (f, ig')$$

είναι συνεχές για κάθε $f \in Dom(T)$. Δηλαδή $C^1[0,1] \subset Dom(T^*)$ και τελικά

$$Dom(T) \subsetneq C^1[0,1] \subset Dom(T^*)$$

Επομένως ο γραμμικός τελεστής T δεν είναι αυτοσυζυγής.

Προκειμένου να μελετήσουμε το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς (μη φραγμένου) τελεστή χρειαζόμαστε καποια προκαταρκτικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 1.3.25 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}$ πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ισχύει*

$$(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

Πόρισμα 1.3.26 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}$ αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ο γραμμικός τελεστής $\lambda I - T$ είναι αυτοσυζυγής.*

Πρόταση 1.3.27 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to H$ αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής. Ισχύουν τα εξής:*
(i) $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$
(ii) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του T είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Θεώρημα 1.3.28 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}$ αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής. Έχουμε τότε:*
(i) $\lambda \in \rho(T)$ αν και μόνον αν υπάρχει $\beta > 0$ ώστε

$$||(\lambda I - T)|| \geq \beta ||x||$$

για κάθε $x \in Dom(T)$
(ii) αν $\lambda \in \rho(T)$ ισχύει $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \beta\} \subseteq \rho(T)$
(iii) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (iii) θεωρούμε τυχόν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda = a + b\mathrm{i}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $b \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} ||(\lambda I - T)x||^2 &= ||(aI - T)x + b\mathrm{i}x||^2 \\ &= ||(aI - T)x||^2 + |b|^2||x||^2 \\ &\geq |b|^2||x||^2 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in Dom(T)$. Άρα $||(\lambda I - T)x|| \geq |b|||x||$, για κάθε $x \in Dom(T)$. Από τον ισχυρισμό (i) του ιδίου θεωρήματος συνάγεται ότι $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$ και το συμπέρασμα έπεται. Κλείνουμε την παράγραφο με έναν ορισμό

Ορισμός 1.3.29 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T : \mathcal{H} \supseteq Dom(T) \to \mathcal{H}$ (πυκνά ορισμένος) γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται θετικός (positive) ή μη αρνητικός (non negative) αν ισχύει $(Tx, x) \geq 0$ για κάθε $x \in Dom(T)$. Συμβολίζουμε $T \geq 0$. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής και θετικός γραμμικός τελεστής, ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα (square root) του T τον μοναδικό θετικό (όπως αποδεικνύεται) τελεστή S με $S^2 = T$. Συμβολίζουμε $T^{1/2}$ ή $\sqrt{T}$.*

1.4 Τετραγωνικές μορφές και ελλειπτικοί διαφορικοί τελεστές δεύτερης τάξης

Θα επιχειρήσουμε μια συνοπτική παρουσίαση βασικών στοιχείων από τη θεωρία των ελλειπτικών διαφορικών τελεστών δεύτερης τάξης μέσω τετραγωνικών μορφών.

Αν D είναι γραμμικός υπόχωρος του μιγαδικού χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, ορίζουμε μια συμμετρική (sesquilinear) μορφή επί του D, δηλαδή μια απεικόνιση $Q' : D \times D \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:
(i) $Q'(\lambda f + \mu g, h) = \lambda Q'(f,h) + \mu Q'(g,h)$.
(ii) $Q'(h, \lambda f + \mu g) = \bar{\lambda} Q'(h,f) + \bar{\mu} Q'(h,g)$.
(iii) $Q'(f,g) = \overline{Q'(g,f)}$
για κάθε $f, g, h \in D$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ο D είναι το πεδίο ορισμού της Q'. Η Q' είναι πυκνά ορισμένη αν $\overline{D} = \mathcal{H}$.

Ορίζουμε, περαιτέρω, την τετραγωνική μορφή (quadratic form) που σχετίζεται με την Q', δηλαδή την απεικόνιση $Q : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty)$ με

$$Q(f) = \begin{cases} Q'(f,f), & f \in D \\ +\infty, & f \notin D \end{cases}$$

Από την ταυτότητα πολικότητας

$$Q'(f,g) = \frac{1}{4}[Q'(f+g, f+g) - Q'(f-g, f-g) + \mathrm{i}Q'(f+\mathrm{i}g, f+\mathrm{i}g) - \mathrm{i}Q'(f-\mathrm{i}g, f-\mathrm{i}g)]$$

προκύπτει ότι η sesquilinear μορφή Q' καθορίζεται μονοσήμαντα από την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή Q.

Θα λέμε ότι η τετραγωνική μορφή Q είναι φραγμένη κάτω εάν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$Q(f) \geq c||f||^2, \ \forall f \in \mathcal{H} \tag{1.4.14}$$

Η Q καλείται μη αρνητική (non-negative) αν μπορούμε να θέσουμε $c = 0$ στη σχέση (1.4.14). Γράφουμε τότε $Q \geq 0$. Εάν η Q είναι φραγμένη κάτω θα καλείται κλειστή (closed) στην περίπτωση κατά την οποία, δοθείσης τυχαίας ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ στοιχείων του D, από τις σχέσεις

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0$$

και

$$\lim_{m,n\to+\infty} Q(f_m - f_n) = 0$$

συνεπάγεται ότι $f \in D$ και $\lim_{n\to+\infty} Q(f_n - f) = 0$. Η Q λέγεται κλείσιμη (closable) αν έχει κλειστή επέκταση και η κλειστότητα $\overline{Q}$ λαμβάνεται ως η ελάχιστη δυνατή κλειστή επέκταση της Q. Αν η Q είναι μη αρνητική τετραγωνική μορφή τότε το πεδίο ορισμού της D γίνεται χώρος εσωτερικού γινομένου αν ορίσουμε

$$(f,g)_Q = (f,g) + Q'(f,g), \ \forall f, g \in D$$

όπου με $(,)$ σημειώνουμε το εσωτερικό γινόμενο του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Έχουμε πληρότητα αν και μόνο αν η Q είναι κλειστή.

Ο ορισμός sectorial μορφών και το πρώτο θεώρημα αναπαράστασης βρίσκονται εκτός των πλαισιών αυτού του εισαγωγικού εδαφίου. Διατυπώνουμε, όμως, μια θεμελιώδη συνέπειά τους:

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και Q μια πυκνά ορισμένη κλειστή και κάτω φραγμένη (ιδιαιτέρως μη αρνητική) τετραγωνική μορφή στον $\mathcal{H}$. Υπάρχει ένας αυτοσυζυγής κάτω φραγμένος (ιδιαιτέρως μη αρνητικός) γραμμικός τελεστής H που σχετίζεται με την Q και είναι τέτοιος ώστε να ισχύουν*

$$Dom(H) \subseteq Dom(Q) \text{ και } Q(f) = (Hf, f),\ \forall f \in Dom(H)$$

Επειδή το πεδίο ορισμού του αυτοσυζυγούς τελεστή H είναι, εν γένει, γνήσιο υποσύνολο του $Dom(Q)$, η παραπάνω αναπαράσταση δεν είναι ικανοποιητική καθώς δεν ισχύει για όλα τα στοιχεία του $Dom(Q)$. Μια πληρέστερη αναπαράσταση της Q παρέχεται από το επόμενο

Θεώρημα 1.4.2 *(Δεύτερο θεώρημα αναπαράστασης τετραγωνικών μορφών) Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και Q μια πυκνά ορισμένη κλειστή μη αρνητική τετραγωνική μορφή στον $\mathcal{H}$. Αν H είναι ο σχετιζόμενος μη αρνητικός αυτοσυζυγής τελεστής, τότε έχουμε $Dom(Q) = Dom(H^{1/2})$ και*

$$Q(f) = \begin{cases} (H^{1/2}f, H^{1/2}f),\ f \in Dom(H^{1/2}) \\ +\infty,\ f \notin Dom(H^{1/2}) \end{cases} \tag{1.4.15}$$

Γράφουμε $Quad(H)$ για το σύνολο $Dom(H^{1/2})$.

Παρότι χρησιμοποιείται σε κάποιες πρακτικές εφαρμογές, η αναπαράσταση (1.4.15) έχει, κυρίως, θεωρητική αξία ακριβώς επειδή ο προσδιορισμός του τελεστή $H^{1/2}$ είναι, τις περισσότερες φορές, δυσχερέστατος. Για την απόδειξη των Θεωρημάτων 1.4.1 και 1.4.2 παραπέμπουμε στο βιβλίο του T. Kato [19], Ch. VI, Th. 2.6,2.23.

Μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο γενικότερο

Θεώρημα 1.4.3 *Έστω Q μη αρνητική τετραγωνική μορφή σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ με πεδίο ορισμού D. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Η Q είναι μορφή ενός μη αρνητικού αυτοσυζυγούς γραμμικού τελεστή H επί του $F = \overline{D}$.
(β) Η Q είναι κλειστή.
(γ) Η Q είναι κάτω ημισυνεχής ως συνάρτηση από τον $\mathcal{H}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.3 παραπέμπουμε στο [8], Th. 4.12, p.106.

Πόρισμα 1.4.4 *Αν A, B είναι δυο μη αρνητικοί αυτοσυζυγείς γραμμικοί τελεστές σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και το σύνολο*

$$\mathcal{D} = Quad(A) \cap Quad(B)$$

είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$, τότε υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένος μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής H, αποκαλούμενος άθροισμα τετραγωνικών μορφών (quadratic form sum) των A, B έτσι ώστε $Quad(H) = \mathcal{D}$ και

$$(H^{1/2}f, H^{1/2}f) = (A^{1/2}f, A^{1/2}g) + (B^{1/2}f, B^{1/2}g)$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{D}$

Αν $H \geq 0$ είναι ένας αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, ένας υπόχωρος D του $Quad(H)$ καλείται πυρήνας τετραγωνικής μορφής (quadratic form core) αν είναι πυκνός ως προς τη νόρμα $||\cdot||_Q$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(,)_Q$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $f \in Quad(H)$ υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του D ώστε να ισχύουν

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} Q(f_n - f) = 0$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $Dom(H)$ αποτελεί πυρήνα μορφής του H.

Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω το χώρο Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \ Df \in L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty\}$$

όπου Ω είναι ένα χωρίο (region) του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, ενώ η Df υπολογίζεται με την ασθενή έννοια. Ο $W^{1,p}$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα

$$||f|| = \left(||f||_p^p + ||Df||_p^p\right)^{1/p}$$

και, ειδικότερα, ο $W^{1,2}(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert. Κατά τα γνωστά από την Παράγραφο 1.2, με $W_0^{1,p}(\Omega)$ συμβολίζουμε την κλειστότητα του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ ως προς την παράπανω νόρμα. Γράφουμε $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ για την κλάση συναρτήσεων επί του Ω οι οποίες, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, συμπίπτουν με κάποιο στοιχείο του $W^{1,p}(\Omega)$.

Θα κατασκευάσουμε αυτοσυζυγείς μερικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης στον $L^2(\Omega)$ έχοντας ως αφετηρία τετραγωνικές μορφές επί του $C_c^\infty(\Omega)$ του τύπου

$$Q(f) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} dx \qquad (1.4.16)$$

όπου $a(x) = \{a_{ij}(x) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση επί του Ω (δηλαδή στοιχείο του $L_{loc}^1(\Omega)$) με τιμές στο χώρο των μη αρνητικών πραγματικών συμμετρικών πινάκων. Τα δυο θεωρήματα που ακολουθούν παρέχουν συνθήκες κάτω από τις οποίες η Q είναι κλείσιμη.

Θεώρημα 1.4.5 *Έστω $a \in W^{1,2}(\Omega)$. Τότε η τετραγωνική μορφή Q που δίνεται από τον τύπο (1.4.16) είναι κλείσιμη. Ο αυτοσυζυγής τελεστής H που σχετίζεται με την κλειστότητα της Q αποτελεί επέκταση του τελεστή L με*

$$Lf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

για κάθε $f \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Θεώρημα 1.4.6 *Έστω $a \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $a(x) \geq \theta_1(x)\mathbf{1}$ για κάθε $x \in \Omega$ όπου θ_1 είναι μια αυστηρά θετική συνεχής συνάρτηση. Τότε η τετραγωνική μορφή Q που δίνεται από τον τύπο (1.4.16) είναι κλείσιμη επί του $C_c^{\infty}(\Omega)$.*

Ας θεωρήσουμε τον μη αρνητικό αυτοσυζυγή τελεστή H που σχετίζεται με την $\overline{Q}$ και αποκτάται με τη διαδικασία του Θεωρήματος 1.4.6. Ο H καλείται ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης (second order elliptic operator) αν επιπλέον ισχύει

$$\theta_1(x)\ \mathbf{1} \leq a(x) \leq \theta_2(x)\ \mathbf{1} \tag{1.4.17}$$

για κάθε $x \in \Omega$, όπου θ_1 και θ_2 είναι αυστηρά θετικές συνεχείς συναρτήσεις. Ο H καλείται αυστηρώς ελλειπτικός (strictly elliptic) αν στη συνθήκη (1.4.17) μπορούμε να πάρουμε θ_1 να είναι μια γνήσια θετική σταθερά. Ο H λέγεται ομοιόμορφα ελλειπτικός (uniformly elliptic) αν στη συνθήκη (1.4.17) θ_1 και θ_2 είναι γνήσια θετικές σταθερές. Συνήθως η σχέση που καταδεικνύει την ομοιόμορφη ελλειπτικότητα απαντάται στην εξής μορφή:

$$0 < \theta_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \theta_2|\xi|^2 < +\infty$$

όπου $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Έπεται ένα χρήσιμο αποτέλεσμα

Θεώρημα 1.4.7 *Έστω H ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής δεύτερης τάξης επί του $L^2(\Omega)$. Έχουμε $f \in Dom(H)$ αν $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ και υπάρχει $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ώστε $Lf = g$, εννοώντας ότι ισχύει*

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}dx = \int_{\Omega} g\bar{u}dx$$

για κάθε $u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Παίρνουμε τότε $Hf = g$.

Η τετραγωνική μορφή Q, στα Θεωρήματα 1.4.5 και 1.4.6, είναι κλείσιμη στο χώρο $C_c^{\infty}(\Omega)$. Λέμε ότι ο αυτοσυζυγής (ομοιόμορφα) ελλεπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης H που σχετίζεται με την $\overline{Q}$ υπόκειται σε συνοριακές συνθήκες Dirichlet γενικευμένου τύπου. Όπως φαίνεται, έχει γενική μορφή

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{1.4.18}$$

Η (1.4.18) καλείται μορφή απόκλισης (divergence form) και είναι κατάλληλη για φασματική ανάλυση. Αν, ωστόσο, το χωρίο Ω έχει επαρκώς ομαλό σύνορο, και οι a_{ij} είναι ομαλές συναρτήσεις, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{1.4.19}$$

με κλασσικού τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Σε διαφορετική περίπτωση οι μορφές (1.4.18) και (1.4.19) δεν είναι ισοδύναμες. Αν ο H είναι αυστηρώς ελλειπτικός τελεστής δεύτερης τάξης με γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet ισχύει $Quad(H) \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$, ενώ εάν ο H είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός έχουμε

$$Dom(\overline{Q}) = Quad(H) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

Λήμμα 1.4.8 *Αν Ω είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $1 \le p < +\infty$ τότε ο χώρος $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$ ως προς τη νόρμα*

$$|||f||| = \left(||f||_p^p + ||Df||_p^p\right)^{1/p}$$

Αν $f \in W^{1,p}(\Omega)$ έχουμε $g = |f| \in W^{1,p}(\Omega)$ και $|||g||| \le |||f|||$, με ισότητα να ισχύει όταν η f είναι πραγματική.

Η διαδικασία που περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα οδηγεί σε έναν αυτοσυζυγή διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης, ο οποίος συχνά ταυτίζεται με έναν αντίστοιχο τελεστή που ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες Neumann με την κλασσική έννοια.

Θεώρημα 1.4.9 *Αν ισχύει $0 < \lambda\ \mathbf{1} \le a(x) \le \mu\ \mathbf{1} < +\infty$ για κάθε $x \in \Omega$ τότε η τετραγωνική μορφή*

$$Q(f) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} dx$$

είναι κλειστή στο χώρο Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. Αν $a \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ τότε ο αυτοσυζυγής ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής δεύτερης τάξης H που σχετίζεται με την Q δίνεται από τον τύπο

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

ερμηνευμένο με την ασθενή έννοια στο πεδίο ορισμού του. Λέμε ότι ο H υπόκειται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Neumann.

Πολύ συχνά με τις συνοριακές συνθήκες Neumann συνδέεται η ιδιότητα της επέκτασης (extension property) του χωρίου Ω. Έχουμε το εξής

Θεώρημα 1.4.10 *Αν Ω είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο και $1 \le p < +\infty$, τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής επέκτασης $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ έτσι ώστε να ισχύει $(Ef)(x) = f(x)$ για κάθε $f \in W^{1,p}(\Omega)$ και $x \in \Omega$.*

Ένα χωρίο του $\mathbb{R}^n$, για την οποία υπάρχει ο τελεστής E του προηγούμενου θεωρήματος, λέμε ότι διαθέτει την ιδιότητα της επέκτασης. Γενικά η ιδιότητα αυτή ισχύει για πολλά, όμως όχι όλα, τα χωρία του $\mathbb{R}^n$. Οπωσδήποτε ισχύει για φραγμένα κυρτά χωρία και για φραγμένα χωρία με κατά σημείο ομαλό ή και Lipschitz σύνορο. Αλλά, για παράδειγμα, αν $\beta > 1$ μπορεί να αποδειχθεί ότι το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον τύπο

$$\Omega_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^\beta\}$$

δεν διαθέτει την ιδιότητα της επέκτασης.

Κεφάλαιο 2

Ημιομάδες Τελεστών σε χώρους **Banach**

Με το παρόν Κεφάλαιο προχωρούμε στον ορισμό των κεντρικών εννοιών που θα μας απασχολήσουν σε όλη την έκταση της εργασίας μας και στην παράθεση βασικών αποτελεσμάτων που τις χαρακτηρίζουν.

Στην πρώτη παράγραφο εισάγεται η έννοια της μονοπαραμετρικής ημιομάδας (αντίστοιχα ομάδας) σε έναν χώρο Banach X ως μιας οικογένειας $(T(t))_{t\geq 0}$ (αντίστοιχα $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$) φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του X για τα οποία ικανοποιείται η συναρτησιακή εξίσωση

$$T(t+s) = T(t)T(s),\ T(0) = I$$

για κάθε $t, s \in [0, +\infty)$ (αντίστοιχα για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$) (Ορισμός 2.1.1). Ορίζονται οι ομοιόμορφα συνεχείς ημιομάδες, δηλαδή εκείνες που χαρακτηρίζονται από τη συνέχεια των απεικονίσεων $t \to T(t)$, από το διάστημα $[0, +\infty)$ στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(X)$, ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών (Ορισμός 2.1.3). Επιβεβαιώνουμε ότι η οικογένεια $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$, όπου A φραγμένος γραμμικός τελεστής, αποτελεί μια ομοιόμορφα συνεχή ημιομάδα (Πρόταση 2.1.4) και αποδεικνύουμε ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα σε έναν χώρο Banach X μπορεί να γραφεί στη μορφή $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάποιον $A \in \mathcal{L}(X)$ (Θεώρημα 2.1.6). Τέλος ορίζεται ο απειροστικός γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας και επισημαίνεται ότι πρόκειται για φραγμένο γραμμικό τελεστή (Ορισμός 2.1.7).

Η δεύτερη παράγραφος είναι αφιερωμένη στην κυρίαρχη έννοια των ισχυρώς συνεχών ημιομάδων, με τις απεικονίσεις $t \to T(t)$ από το διάστημα $[0, +\infty)$ στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(X)$ συνεχείς ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών ή ισοδύναμα με τις απεικονίσεις $t \to T(t)x$, από το διάστημα $[0, +\infty)$ στον χώρο Banach X συνεχείς σε κάθε t και για κάθε x. Αποδεικνύουμε ότι μπορούν να προσδιοριστούν σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t},\ \text{για κάθε } t \geq 0$$

(Πρόταση 2.2.4), ενώ στην Πρόταση 2.2.6 διατυπώνουμε δύο εξαιρετικά εύχρηστα κριτήρια για την απόδειξη της ιδιότητας της ισχυρής συνέχειας. Σειρά λαμβάνει ο ορισμός του απειροστικού γεννήτορα μίας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ σε κάποιον χώρο Banach X, δηλαδή του μη φραγμένου εν γένει γραμμικού τελεστή $(A, Dom(A))$ όπου

$$Ax = \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

για κάθε $x \in Dom(A) = \{x \in X : \exists \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x-x}{h}\}$. (Ορισμός 2.2.8). Αποδεικνύουμε, περαιτέρω, ότι ο απειροστικός γεννήτορας μίας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας είναι κλειστός τελεστής που καθορίζει μονοσήμαντα τη θεωρούμενη ημιομάδα (Πρόταση 2.2.14) και έχει πεδίο ορισμού έναν πυκνό υπόχωρο του χώρου Banach X, αναλλοίωτο από τη δράση της ημιομάδας (Πρόταση 2.2.12). Έπειτα απο μια σύντομη μελέτη του αφηρημένου ομογενούς προβλήματος Cauchy για μη φραγμένο τελεστή σε χώρο Banach (Πρόταση 2.2.15 και Θεώρημα 2.2.16), ορίζουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση (ή μετασχηματισμό Laplace) για τους επιλύοντες τελεστές του γεννήτορα A μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ και αποδεικνύουμε ότι, για τα κατάλληλα $\lambda \in \mathbb{C}$ κάθε φορά, ισχύει

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$$

(Θεώρημα 2.2.23 και Πόρισμα 2.2.24).

Στην τρίτη και τελευταία Παράγραφο του Κεφαλαίου, παρουσιάζονται ενδιαφέρουσες κατασκευές καινούριων ισχυρώς συνεχών ημιομάδων από ήδη υπάρχσουσες, με κυριότερη αυτήν που αναφέρεται στις όμοιες ημιομάδες. Επιθυμούμε να επισημάνουμε ότι, σκοπίμως και για λόγους αποσυμφόρησης του κειμένου, έχουν περιληφθεί ορισμένες μόνο αποδείξεις των παρατιθέμενων ισχυρισμών.

2.1 Ομοιόμορφα συνεχείς ημιομάδες τελεστών

Ξεκινούμε θεωρώντας έναν μιγαδικό χώρο Banach X εφοδιασμένο με νόρμα $||\cdot||$ και συμβολίζοντας με $\mathcal{L}(X)$ την άλγεβρα Banach όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του X εφοδιασμένη με τη νόρμα τελεστή, την οποία συμβολίζουμε επίσης με $||\cdot||$. Δίνουμε τον ορισμό της κυρίαρχης έννοιας της Εργασίας μας:

Ορισμός 2.1.1 *Καλούμε μονοπαραμετρική ημιομάδα* $(one-parameter\ semigroup)$ *σε έναν χώρο Banach X κάθε οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ επί του X που ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση:*

$$(S.E)\ \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s),\ \forall t,s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

Στην περίπτωση κατά την οποία η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε) ικανοποιείται για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, θα μιλάμε για την μονοπαραμετρική ομάδα (one-parameter group) τελεστών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επί του X.

Παρατήρηση 2.1.2 (i) *Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι, εάν* $(T(t))_{t\geq 0}$ *είναι μια ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach* X, *τότε το σύνολο* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *είναι μεταθετική υποημιομάδα της* $(\mathcal{L}(X), \cdot)$ *και η απεικόνιση* $t \to T(t)$ *είναι ένας ομομορφισμός από την προσθετική ημιομάδα* $(\mathbb{R}_+, +)$ *στην πολλαπλασιαστική ημιομάδα* $(\mathcal{L}(X), \cdot)$. *Έτσι είναι δικαιολογημένος ο χαρακτηρισμός της συναρτησιακής εξίσωσης (Σ.Ε) ως νόμου ημιομάδας (semigroup law).*
(ii) *Κάθε ημιομάδα τελεστών μπορεί να θεωρηθεί ως ένα (αφηρημένο) γραμμικό δυναμικό σύστημα αν δεχθούμε την μεταβλητή* t *ως 'χρόνο', την συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε) ως 'ντετερμινιστικό νόμο' και το σύνολο* $\{T(t)x : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ *ως τροχιά της αρχικής τιμής* x. *Από τη συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε) προκύπτει ότι μια αρχική κατάστση* x_0 *φθάνει έπειτα από χρόνο* $t+s$ *στην ίδια κατάσταση που φθάνει η αρχική κατάσταση* $y_0 = T(s)x_0$ *έπειτα από χρόνο* t.

Η πρώτη ενδιαφέρουσα, κυρίως από θεωρητικής πλευράς, κλάση ημιομάδων τελεστών είναι εκείνη των ομοιόμορφα συνεχών ημιομάδων. Δίνουμε άμεσα τον σχετικό Ορισμό:

Ορισμός 2.1.3 *Μια μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών* $(T(t))_{t\geq 0}$ *σε έναν χώρο Banach* X *καλείται ομοιόμορφα συνεχής (uniformly continuous) ή συνεχής ως προς τη νόρμα του χώρου* X *(norm continuous), εαν η απεικόνιση* $t \to T(t)$ *από το* $\mathbb{R}_+$ *στην άλγεβρα Banach* $\mathcal{L}(X)$ *είναι συνεχής ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών, δηλαδή αν* $\lim_{t\to t_0} ||T(t) - T(t_0)|| = 0, \ \forall t, t_0 \geq 0$

Ας θεωρήσουμε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή A επί του χώρου Banach X. Ορίζουμε μια εκθετική συνάρτηση τελεστών από την σχέση

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \ t \geq 0$$

όπου η σύγκλιση της σειράς που παρουσιάζεται λαμβάνει χώρα στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(X)$.

Πρόταση 2.1.4 *Έστω* A *φραγμένος γραμμικός τελεστής επί ενός χώρου Banach* X. *Η οικογένεια* $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ *είναι μια ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα τελεστών.*

Απόδειξη. Ασφαλώς ο τελεστής e^{tA} είναι γραμμικός για κάθε $t \geq 0$. Αν $x \in X$, τότε για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
||\mathrm{e}^{tA}x|| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left|\frac{t^k A^k x}{k!}\right|\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k ||A||^k ||x||}{k!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k ||A||^k}{k!}\right) ||x|| \\
&= \mathrm{e}^{t||A||}||x||.
\end{aligned}$$

Φυσικά $\mathrm{e}^{t||A||} < +\infty$. Έπεται ότι ο τελεστής e^{tA} είναι φραγμένος για κάθε $t \geq 0$ και μάλιστα ισχύει

$$||\mathrm{e}^{tA}|| \leq \mathrm{e}^{t||A||}, \ \forall\ t \geq 0.$$

Εφ'οσον η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k ||A||^k}{k!}$ συγκλίνει, μπορούμε να δείξουμε, ακριβώς όπως συμβαίνει και για το γινόμενο *Cauchy* αριθμητικών σειρών, ότι

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k A^k}{k!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{t^{n-k} s^k A^{n-k} A^k}{k!(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^k A^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ισχύει δηλαδή η σχέση $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}$ για κάθε $t, s \geq 0$ (προφανώς $\mathrm{e}^0 = I$). Άρα ικανοποιείται η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε.) και οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές e^{tA} συγκροτούν μια μονοπαραμετρική ημιομάδα $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$. Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση $t \to \mathrm{e}^{tA}$ είναι συνεχής ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών. Για $h > 0$ έχουμε

$$\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{hA} - \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}(\mathrm{e}^{hA} - I).$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
||\mathrm{e}^{hA} - I|| &= \left|\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} - h^0 A^0\right|\right| \\
&= \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!}\right|\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k ||A||^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{h||A||} - I
\end{aligned}$$

και βέβαια $\lim_{h\to 0+} \mathrm{e}^{h||A||} - I = 0$. Επομένως $\lim_{h\to 0+} ||\mathrm{e}^{hA} - I|| = 0$ και, επειδή $||\mathrm{e}^{tA}|| < +\infty$, λαμβάνουμε

$$\lim_{h\to 0+} ||\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}|| = 0 \tag{2.1.1}$$

Για $0 < h \leq t < +\infty$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{(t-h)A} &= \mathrm{e}^{(t-h+h)A} - \mathrm{e}^{(t-h)A} \\
&= \mathrm{e}^{(t-h)A}\mathrm{e}^{hA} - \mathrm{e}^{(t-h)A} \\
&= \mathrm{e}^{(t-h)A}(\mathrm{e}^{hA} - I)
\end{aligned}$$

και, καθώς $||\mathrm{e}^{(t-h)A}|| < +\infty$ και $||\mathrm{e}^{hA} - I|| = 0$ καταλήγουμε ότι

$$\lim_{h\to 0+} ||\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{(t-h)A}|| = 0 \tag{2.1.2}$$

Οι ισότητες (2.1.1) και (2.1.2) δηλώνουν ότι η συνάρτηση $t \to \mathrm{e}^{tA}$ είναι συνεχής ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών και, κατά συνέπεια, η ημιομάδα $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ιδιαιτέρως χαρακτηριστικά για την κλάση των ομοιόμορφα συνεχών ημιομάδων είναι τα δυο αποτελέσματα που ακολουθούν.

Πρόταση 2.1.5 *Η συνάρτηση $t \to T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ από το $\mathbb{R}_+$ στον $\mathcal{L}(X)$ είναι διαφορίσιμη και αποτελεί τη μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$(\Pi.A.T)\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \ t \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

Απόδειξη. Επειδή η οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ με $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t \geq 0$ συγκροτεί μια (ομοιόμορφα συνεχή) ημιομάδα, η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε.) δίνει για $h > 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \left(\frac{T(h) - I}{h} T(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0+} \left(\frac{T(h) - I}{h}\right) T(t), \ t \geq 0
\end{aligned}$$

Και ανάλογα

$$\lim_{h\to 0+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = T(t) \lim_{h\to 0+} \frac{T(h) - I}{h}, \ t \geq 0.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{T(h)-I}{h}-A\right|\right| &= \left|\left|\frac{T(h)-I-Ah}{h}\right|\right| \\
&= \left|\left|\frac{\mathrm{e}^{hA}-\mathrm{e}^{0A}-Ah}{h}\right|\right| \\
&= \left|\left|\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^kA^k}{k!}-h^0A^0-hA}{h}\right|\right| \\
&= \left|\left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\frac{h^kA^k}{k!}}{h}\right|\right| \\
&\le \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{h^{k-1}||A||^k}{k!} \\
&\le \frac{\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{h^k||A||^k}{k!}}{h} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{h||A||}-I-h||A||}{h} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{h||A||}-I}{h}-||A||
\end{aligned}$$

και βέβαια

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{h||A||}-I}{h}=||A||.$$

Άρα $\lim_{h\to 0+}\frac{T(h)-I}{h}=A$ και, κατά συνέπεια, ισχύει

$$\frac{d^+}{dt}T(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}=AT(t)=T(t)A, t\ge 0 \qquad (2.1.3)$$

Έστω $0<h\le t<+\infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<h\le t<1$, οπότε $0<t-h<1-h<1$ και

$$||\mathrm{e}^{(t-h)A}||<||\mathrm{e}^{A}||\le \mathrm{e}^{||A||}<+\infty$$

Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)-T(t-h)}{h}-T(t)A &= \frac{T(t-h+h)-T(t-h)}{h}-T(t-h)A+T(t-h)A-T(t)A \\
&= T(t-h)\frac{T(h)-I}{h}-T(t-h)A+(T(t-h)A-T(t)A) \\
&= \left(T(t-h)(\frac{T(h)-I}{h}-A)\right)+(T(t-h)A-T(t)A)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$||T(t-h)||=||\mathrm{e}^{(t-h)A}||<+\infty.$$

Επομένως ισχύει

$$\lim_{h\to 0+} ||T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h} - A\right)|| = 0$$

Επίσης $A \in \mathcal{L}(X)$ και η ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ με $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t \geq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς $\lim_{h\to 0+} ||T(h) - I|| = 0$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} ||T(t-h)A - T(t)A|| &= \lim_{h\to 0+} ||T(t-h)A(I - T(h))|| \\ &\leq \lim_{h\to 0+} ||T(t-h)A||||T(h) - I|| = 0 \end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0+} ||\frac{T(t) - T(t-h)}{h} - T(t)A|| = 0$$

και, άρα,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{T(t) - T(t-h)}{h} = T(t)A = AT(t),\ t \geq 0.$$

Δηλαδή

$$\frac{d^-}{dt}T(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{T(t) - T(t-h)}{h} = AT(t) = T(t)A,\ t \geq 0 \qquad (2.1.4)$$

Από τις σχέσεις (2.1.3) και (2.1.4) προκύπτει

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A,\ t \geq 0$$

Προφανώς $T(0) = \mathrm{e}^{0A} = I$.

Από την προηγηθείσα ανάλυση γίνεται σαφές ότι η συνάρτηση $t \to T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ είναι διαφορίσιμη και αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.). Έστω περαιτέρω μια δεύτερη διαφορίσιμη συνάρτηση $S(\cdot)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) Ορίζουμε

$$Q : [0,t] \to \mathcal{L}(X),\ Q(s) = T(s)S(t-s),\ 0 \leq s \leq t$$

και παρατηρούμε ότι πρόκειται για διαφορίσιμη, ως προς s, συνάρτηση με παράγωγο

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(s) &= \left(\frac{d}{dt}T(s)\right)S(t-s) + T(s)\left(\frac{d}{dt}S(t-s)\right) \\ &= AT(s)S(t-s) + T(s)(-AS(t-s)) \\ &= T(s)AS(t-s) - T(s)AS(t-s) = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή η $Q(\cdot)$ είναι σταθερή συνάρτηση, ανεξάρτητη της μεταβλητής s και, κατά συνέπεια, ισχύει $Q(0) = Q(t)$. Άρα έχουμε

$$T(0)S(t) = T(t)S(0) \text{ και } S(t) = T(t)$$

Καθώς το t διατρέχει το $\mathbb{R}_+$ καταλήγουμε ότι $S(t) = T(t)$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως η συνάρτηση $T(\cdot)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη ως λύση του (Π.Α.Τ.).

Θεώρημα 2.1.6 *Κάθε ομοιόμορφα συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών* $(T(t))_{t\geq 0}$ *σε έναν χώρο Banach* X*, δίνεται από τον τύπο* $T(t)=\mathrm{e}^{tA}$ *για κάθε* $t\geq 0$ *όπου* A *φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη. Καθώς η απεικόνιση $t\to T(t)$ από το $\mathbb{R}_+$ στον $\mathcal{L}(X)$ είναι συνεχής ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών, συμπεραίνουμε ότι οι τελεστές

$$V(t)=\int_0^t T(s)ds, t\geq 0$$

είναι καλώς ορισμένοι και διαφορίσιμοι με $\dot{V}(t)=T(t)$ για κάθε $t\geq 0$. Άρα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\left|\left|\frac{1}{t}V(t)-I\right|\right| &= \lim_{t\to 0+}\left|\left|\frac{1}{t}V(t)-T(0)\right|\right|\\ &= \lim_{t\to 0+}\left|\left|\frac{1}{t}V(t)-\dot{V}(0)\right|\right|\\ &= 0\end{aligned}$$

Τούτο σημαίνει ότι, για αρκούντως μικρό $t_0>0$, ισχύει $V(t_0)\neq 0$ και ο τελεστής $V(t_0)$ είναι αντιστρέψιμος. Η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε.) δίνει τώρα

$$\begin{aligned}T(t)=V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t) &= V(t_0)^{-1}\int_0^{t_0}T(s)dsT(t)\\ &= V(t_0)^{-1}\int_0^{t_0}T(s)T(t)dt\\ &= V(t_0)^{-1}\int_0^{t_0}T(s+t)dt\end{aligned}$$

Θέτοντας $s+t=\xi$ λαμβάνουμε

$$T(t)=V(t_0)^{-1}\int_t^{t+t_0}T(\xi)d\xi=V(t_0)^{-1}\{V(t+t_0)-V(t)\},\ \forall t\geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση $t\to T(t)$ είναι διαφορίσιμη με παράγωγο

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(t)=\frac{d^+}{dt}T(t) &= \lim_{h\to 0+}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0+}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)\\ &= \dot{T}^+(0)T(t),\ t\geq 0\end{aligned}$$

και αντίστοιχα $\frac{d}{dt}T(t)=T(t)\dot{T}^+(0),\ t\geq 0$. Ασφαλώς $T(0)=I$.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $t\to T(t)$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) της Πρότασης 2.1.5, απ΄ όπου προκύπτει ότι $T(t)=\mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t\geq 0$ με $A=\dot{T}^+(0)\in\mathcal{L}(X)$.

Είμαστε, πλέον, σε θέση να ορίσουμε με σαφήνεια μια καινούργια έννοια.

Ορισμός 2.1.7 *Καλούμε απειροστικό γεννήτορα (infinitesimal generator) ή απλώς γεννήτορα (generator) μιας ομοιόμορφα συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X, τον φραγμένο γραμμικό τελεστή A επί του X με*

$$A = \dot{T}^{+}(0) = \frac{d^{+}}{dt}T(t)\bigg|_{t=0} = \lim_{h\to 0+}\frac{T(h)-I}{h}.$$

Παρατήρηση 2.1.8 *(i) Ο απειροστικός γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας τελεστών είναι μονοσήμαντα ορισμένος όπως συνάγεται από την Πρόταση 2.1.5.*
(ii) Ο ορισμός που δώσαμε για τον τελεστή e^{tA}, η σχέση $||\mathrm{e}^{tA}|| \leq \mathrm{e}^{t||A||}$, η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε.) και η ιδιότητα της ομοιόμορφης συνέχειας ισχύουν και για $t \in \mathbb{R}$ (ακόμη και για $t \in \mathbb{C}$). Άρα κάθε ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια ομοιόμορφα συνεχή ομάδα $(T(t)_{t\in\mathbb{R}})$.
(iii) Από τη διαφορισιμότητα της απεικόνισης $t \to T(t)$ προκύπτει άμεσα και η διαφορισιμότητα για $x_0 \in X$ των απεικονίσεων $t \to T(t)x_0$ από το $\mathbb{R}_+$ στο χώρο Banach X. Επομένως, η διανυσματική συνάρτηση $x(t) = T(t)x_0$ είναι λύση (και μάλιστα αποδεικνύεται μοναδική) του ομογενούς αφηρημένου προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

όπου A φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του X και $x_0 \in X$.

2.2 Ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες τελεστών

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές η ομοιόμορφη συνέχεια είναι υπερβολικά ισχυρή απαίτηση για τις προκύπτουσες ημιομάδες τελεστών. Αντίθετα, μια άλλη ιδιότητα, αυτή της ισχυρής συνέχειας, χαρακτηρίζει τη συντριπτική πλειοψηφία των ημιομάδων που παρουσιάζουν ερευνητικό ενδιαφέρον και, κατά συνέπεια, επικεντρωνόμαστε εύλογα στη διεξοδική μελέτη της. Δίνουμε άμεσα στον σχετικό ορισμό.

Ορισμός 2.2.1 *Μια οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών σε έναν χώρο Banach X καλείται ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα (strongly continuous one-parameter semigroup of operators) ή απλώς C_0-ημιομάδα αν:*
(i) *Ικανοποιείται η συναρτησιακή εξίσωση*

$$\text{(Σ.Ε.)}\quad \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s)\ \forall t,s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

(ii) *Οι τροχιακές απεικονίσεις $t \to \xi_x(t) =: T(t)x$ από το $\mathbb{R}_+$ στον X είναι συνεχείς σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $x \in X$.*

Στην περίπτωση κατά την οποία οι συνθήκες **(i)** και **(ii)** ισχύουν για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ λαμβάνουμε μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών ή απλώς C_0- ομάδα τελεστών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Παρατήρηση 2.2.2 **(i)** *Η δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 2.1.13 προσδιορίζει την ιδιότητα της ισχυρής συνέχειας της θεωρούμενης ημιομάδας τελεστών και επιδέχεται την ακόλουθη αναδιατύπωση:*
Οι απεικονίσεις $t \to T(t)$ από το $\mathbb{R}_+$ στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(X)$ όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του X, είναι συνεχείς ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, η συνθήκη **(ii)** *του Ορισμού 2.2.1 παίρνει την εξής μορφή:*
Δεδομένου οποιουδήποτε $t \in [0, +\infty)$ και ακολουθίας $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $t_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} T(t_n)x = T(t)x \ \forall x \in X$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to+\infty} ||T(t_n)x - T(t)x|| = 0 \ \forall x \in X$$

(ii) *Μια μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X καλείται ασθενώς συνεχής (weakly continuous one-parameter semigroup of operators) αν οι απεικονίσεις*

$$t \to \langle T(t)x, x^* \rangle$$

από το $\mathbb{R}_+$ στο $\mathbb{C}$ είναι συνεχείς σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $x \in X$ και $x^* \in X^*$, όπου με X^* συμβολίζουμε τον τοπολογικό δυϊκό χώρο του X. Αποδεικνύεται ότι μια ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X είναι ισχυρώς συνεχής αν και μόνον αν είναι ασθενώς συνεχής. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [12, p. 40].

Δυο σημαντικές ιδιότητες των ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών εκφράζουν οι επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 2.2.3 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X. Για κάθε σταθερά K με $0 < K < +\infty$ και $t \in [0, K]$ υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M$. Δηλαδή η ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[0, +\infty]$.*

Απόδειξη. Λόγω της ιδιότητας της ισχυρής συνέχειας της θεωρούμενης ημιομάδας τελεστών, οι τροχιακές απεικονίσεις $\xi_x : [0, +\infty) \to X$ με $\xi_x(t) = T(t)x$ είναι συνεχείς σε κάθε $t \in [0, +\infty)$, άρα και σε κάθε $t \in [0, K]$ για κάθε $0 < K < +\infty$. Έπεται ότι η απεικόνιση $\xi_x(\cdot)$ είναι φραγμένη για κάθε $t \in [0, K]$. Ισχύει δηλαδή

$$\sup_{t\in[0,K]} ||T(t)x|| < +\infty, \ \forall \ x \in X$$

Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος (βλ. Θεώρημα 1.1.16) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$\sup_{t\in[0,K]} ||T(t)|| \leq M$$

ή ισοδύναμα

$$||T(t)|| \leq M, \ \forall\, t \in [0, K]$$

Πρόταση 2.2.4 *Έστω $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X. Υπάρχουν, τότε σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε να ισχύει*

$$||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \ \forall t \in [0, +\infty)$$

Δηλαδή, η ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι εκθετικά φραγμένη.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 2.2.3 υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \in [0, K]$ με $0 < K < +\infty$. Επειδή $||T(0)|| = ||I|| = 1$, λαμβάνουμε ότι $M \geq 1$.

Έστω τυχόν $t \geq 0$. Μπορούμε να γράψουμε ότι $t = nK + \gamma$ με $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και $0 \leq \gamma < K$. Θέτοντας $\omega = \frac{1}{k}\log M$ έχουμε ότι $\omega \geq 0$ και διαδοχικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||T(t)|| = ||T(nK+\gamma)|| &= ||T(nK)T(\gamma)|| \\ &\leq ||T(nK)||||T(\gamma)|| \\ &= ||T(K)^n||||T(\gamma)|| \\ &\leq M^n M = MM^n \end{aligned}$$

(διότι $K, \gamma \in [0, K]$). Εφ' όσον $t = nK + \gamma$ για $\gamma \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι $t \geq nK$. Δηλαδή $t/K \geq n$. Επιπλέον, αφού $\omega = \frac{1}{k}\log M$ προκύπτει ότι $\omega t = \frac{t}{k}\log M$ οπότε $\omega t = \log M^{\frac{t}{k}}$ και $M^{t/K} = \mathrm{e}^{\omega t}$. Έτσι λαμβάνουμε

$$||T(t)|| \leq MM^n \leq MM^{t/K} = M\mathrm{e}^{\omega t}$$

Αποδείχθηκε πλήρως ότι υπάρχουν σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$.

Ορμώμενοι από το συμπέρασμα της πρότασης δίνουμε τον ακόλουθο Ορισμό.

Ορισμός 2.2.5 *Έστω $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X.*
(i) Καλούμε αυξητικό φράγμα (growth bound) ή τύπο (type) της $\mathcal{T}$ τον αριθμό

$$\omega_0 = \omega_0(\mathcal{T}) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : (\exists M_\omega > 0) : ||T(t)|| \leq M_\omega \mathrm{e}^{\omega t}, \ \forall t \in [0, +\infty)\}$$

Προφανώς $\omega(\mathcal{T}) < +\infty$. *Είναι δυνατόν, ωστόσο, να προκύψει* $\omega(\mathcal{T}) = -\infty$. *Η οριακή αυτή περίπτωση λαμβάνεται για μια μηδενοδύναμη ημιομάδα τελεστών, όταν δηλαδή υπάρχει* $t_0 \in [0, +\infty)$ *ώστε να ισχύει* $T(t) = 0$ *για κάθε* $t \geq t_0$. *Ενδέχεται, επίσης, να υπάρχει ημιομάδα για την οποία το παραπάνω infimum να μην επιτυγχάνεται. Μπορεί να αποδειχθεί ότι*

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log ||T(t)|| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log ||T(t)||$$

(ii) Η ημιομάδα $\mathcal{T}$ *καλείται:*
· *φραγμένη (bounded) εάν υπάρχει σταθερά* $M \geq 1$ *ώστε να ισχύει*

$$||T(t)|| \leq M, \ \forall t \in [0, +\infty)$$

· *συσταλτική (contractive) αν ισχύει*

$$||T(t)|| \leq 1, \ \forall t \in [0, +\infty)$$

· *σχεδόν συσταλτική (quasicontractive) αν ισχύει*

$$||T(t)|| \leq \mathrm{e}^{\omega t}, \ \forall t \in [0, +\infty), \ \text{για κάποιο } \omega \in \mathbb{R}_+$$

· *ημιομάδα ισομετριών (semigroup of isometries) αν ισχύει*

$$||T(t)x|| = ||x||, \ \forall t \in [0, +\infty), \ x \in X$$

Η επόμενη Πρόταση καταδεικνύει ότι η καθοριστική συνέχεια των τροχιακών απεικονίσεων $t \to \xi_x(t) = T(t)x$ σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $x \in X$ δύναται να εξαχθεί και από σαφώς ασθενέστερες υποθέσεις για την θεωρούμενη ημιομάδα τελεστών.

Πρόταση 2.2.6 *Για μια μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών* $(T(t))_{t\geq0}$ *σε έναν χώρο Banach* X, *οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) *Η ημιομάδα τελεστών* $(T(t))_{t\geq0}$ *είναι ισχυρώς συνεχής.*
(β) *Ισχύει* $\lim_{t\to0+} T(t)x = x, \ \forall x \in X$.
(γ) **(i)** *Για κάθε* $t \in [0, K]$ *με* $0 < K < +\infty$ *ισχύει* $||T(t)|| \leq M$, *όπου* M *σταθερά μεγαλύτερη ή ίση του 1.*
(ii) $\lim_{t\to0+} T(t)x = x, \ \forall x \in D$ *όπου* D *πυκνό υποσύνολο του* X.

Απόδειξη. **(β)⇒ (α)** Υποθέτουμε ότι ισχύει $\lim_{t\to0+} T(t)x = x$ για κάθε $x \in X$ ή ισοδύναμα $\lim_{t\to0+} ||T(t)x - x|| = 0$ για κάθε $x \in X$. Έστω $h > 0$. Τότε έχουμε

$$T(t+h)x - T(t)x = T(t)T(h)x - T(t)x = T(t)(T(h)x - x)$$

οπότε λαμβάνουμε

$$||T(t+h)x - T(t)x|| \leq ||T(t)||||T(h)x - x||$$

και φυσικά

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}||T(t+h)x-T(t)x|| &\leq \lim_{t\to 0+}||T(t)||||T(h)x-x||\\ &= ||T(t)||\lim_{h\to 0+}||T(h)x-x||=0\end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim_{h\to 0+}||T(t+h)x-T(t)x||=0$, κάτι που αποδεικνύει την εκ δεξιών συνέχεια των τροχιακών απεικονίσεων $\xi_x(\cdot)$ Έστω $h>0$ ώστε $0<h\leq t<+\infty$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}T(t)x-T(t-h)x &= T(t-h+h)x-T(t-h)x\\ &= T(t-h)T(h)x-T(t-h)x\\ &= T(t-h)(T(h)x-x)\end{aligned}$$

και, κατά συνέπεια,

$$\lim_{h\to 0+}||T(t)x-T(t-h)x||\leq \lim_{h\to 0+}||T(t-h)||||T(h)x-x||$$

Ασφαλώς $\lim_{h\to 0+}||T(h)x-x||=0$. Θα αποδείξουμε ότι η ποσότητα $||T(t-h)||$ είναι φραγμένη για $0<h\leq t<+\infty$. Πράγματι, η υπόθεση της συνεπαγωγής διασφαλίζει την εξ δεξιών συνέχεια των απεικονίσεων $\xi_x(\cdot)$ στο $t=0$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε διάστημα της μορφής $[0,L]$ με $0<L<+\infty$ ισχύει $||T(t)||\leq M$, όπου M σταθερά μεγαλύτερη ή ίση του 1. Αν κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές, τότε υπάρχει ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του διαστήματος $[0,+\infty)$ με $\lim_{n\to+\infty}t_n=0$ ώστε $\lim_{n\to+\infty}T(t_n)=+\infty$. Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος προκύπτει η ύπαρξη $x\in X$ για το οποίο η ποσότητα $||T(t_n)x||$ δεν είναι φραγμένη κάτι που αντιβαίνει στην εκ δεξιών συνέχεια των απεικονίσεων $\xi_x(\cdot)$ στο $t=0$. Άρα υπάρχει σταθερά M με $||T(t)||\leq M$ για κάθε $t\in[0,L]$. Μάλιστα, επειδή $||T(0)||=||I||=1$, έπεται ότι $M\geq 1$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η επίκληση της Πρότασης 2.2.3 δεν είναι εφικτή καθώς εκεί η ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ υποτίθεται ισχυρώς συνεχής, κάτι που δεν υφίσταται στην υπόθεση της εξεταζόμενης συνεπαγωγής. Εφ'οσον $0<h\leq t$ έπεται ότι $0\leq t-h<t<L$ και, άρα $||T(t-h)||\leq M$ όπως επιθυμούσαμε. Τελικά ισχύει

$$\lim_{h\to 0+}||T(t)x-T(t-h)x||=0$$

και έτσι επιτυγχάνεται η εξ αριστερών συνέχεια των απεικονίσεων $\xi_x(\cdot)$.

Μ'αλλα λόγια, οι τροχιακές απεικονίσεις $t\to\xi_x(t)=T(t)x$ είναι συνεχείς σε κάθε $t\in[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in X$. Συνεπώς η ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής.

(β)$\Rightarrow$ **(γ)** Έστω ότι η ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής. Η Πρόταση 2.2.3 και η παρατήρηση ότι $M\geq 1$ της Πρότασης 2.2.4 επιβεβαιώνουν την ισχύ της συνθήκης **(i)** του Ισχυρισμού **(γ)**. Επίσης, οι τροχιακές απεικονίσεις $\xi_x(\cdot)$ είναι συνεχείς σε κάθε $t\in[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in X$. Επομένως για $t=0$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0+}T(t)x=T(0)x=Ix=x,\ \forall x\in X$$

Προφανώς $\lim_{t\to 0+}T(t)y=y$ και για όλα τα x που ανήκουν στο πυκνό υποσύνολο D του χώρου X. Έτσι, ικανοποιείται και η συνθήκη **(ii)** του Ισχυρισμού **(γ)**.

(γ)⇒ (β) Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση της συνεπαγωγής έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $||x - y|| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$ και $\lim_{t\to 0+} T(t)y = y$. Υπάρχει, δηλαδή, $t_0 \in [0, +\infty)$ ώστε για κάθε $t < t_0$ να ισχύει $||T(t)y - y|| < \frac{\epsilon}{2}$.

Θέτουμε $t_1 := \min\{t_0, K\}$ και για κάθε $t < t_1$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||T(t)x - x|| &= ||T(t)x - T(t)y + T(t)y - y + y - x|| \\ &\leq ||T(t)||||x - y|| + ||T(t)y - y|| + ||y - x|| \\ &= (||T(t)|| + 1)||x - y|| + ||T(t)y - y|| \\ &\leq (M+1)\frac{\epsilon}{2(M+1)} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{t\to 0+} ||T(t)x - x|| = 0$ και τελικά $\lim_{t\to 0+} T(t)x = x$ για κάθε $x \in X$.

Άρρηκτα συνδεδεμένη με μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα τελεστών είναι η έννοια του απειροστικού γεννήτορα αυτής, όπως άλλωστε συμβαίνει και στην περίπτωση των ομοιόμορφα συνεχών ημιομάδων που μελετήσαμε στην αρχή της παραγράφου. Πριν δώσουμε τον σχετικό ορισμό, διατυπώνουμε ένα χρήσιμο

Λήμμα 2.2.7 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X. Για τις τροχιακές απεικονίσεις $\xi_x : [0, +\infty) \to X$ με $\xi_x(t) = T(t)x$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$ και $x \in X$, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Η απεικόνιση $\xi_x(\cdot)$ είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $[0, \infty)$.
(β) Η απεικόνιση $\xi_x(\cdot)$ είναι εκ δεξιών διαφορίσιμη στο $t = 0$.

Απόδειξη. (α)⇒(β). Πρόκειται για συνεπαγωγή με τετριμμένη απόδειξη.
(β)⇒(α). Έστω $x \in X$ και $t > 0$. Καθώς η απεικόνιση $\xi_x(\cdot)$ είναι εκ δεξιών διαφορίσιμη στο $t = 0$, έχουμε

$$\dot{\xi}_x^+(0) = \frac{d^+}{dt}\xi_x(t)|_{t=0} = \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

Επιπλέον ισχύουν τα κάτωθι

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} T(t)\frac{T(h)x - T(t)x}{h} \\ &= T(t)\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - T(t)x}{h} \\ &= T(t)\dot{\xi}_x^+(0) \end{aligned}$$

Δηλαδή η απεικόνιση $\xi_x(\cdot)$ είναι εκ δεξιών διαφορίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ και μάλιστα

$$\dot{\xi}_x^+(t) = T(t)\dot{\xi}_x^+(0), \ \forall\, t \in [0, +\infty)$$

Έστω $h > 0$ ώστε $0 < h \leq t < +\infty$. Μπόρούμε να γράψουμε διαδοχικά το εξής

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\dot{\xi}_x^+(0) &= \frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} \\
&\quad -T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) + T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) - T(t)\dot{\xi}_x^+(0) \\
&= \left\{ \frac{T(t-h)T(h)x - T(t-h)x}{h} - T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) \right\} \\
&\quad +T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) - T(t)\dot{\xi}_x^+(0) \\
&= \left\{ T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - \dot{\xi}_x^+(0) \right) \right\} \\
&\quad +T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) - T(t)\dot{\xi}_x^+(0)
\end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\dot{\xi}_x^+(0) &= \lim_{h\to 0+} \left(T(t-h)(\frac{T(h)x - x}{h} - \dot{\xi}_x^+(0)) \right) \\
&\quad + \lim_{h\to 0+} \left(T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) - T(t)\dot{\xi}_x^+(0) \right)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{h\to 0+} \left(T(t-h) \left\{ \frac{T(h)x - x}{h} - \dot{\xi}_x^+(0) \right\} \right) = 0$$

διότι $\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x-x}{h} = \dot{\xi}_x^+(0)$ και $||T(t-h)|| \leq M$ καθώς ισχύει $0 \leq t-h < t$ και εφαρμόζεται το συμπέρασμα της Πρότασης 2.2.3. Επίσης

$$\lim_{h\to 0+} \left(T(t-h)\dot{\xi}_x^+(0) - T(t)\dot{\xi}_x^+(0) \right) = 0$$

επειδή $\dot{\xi}_x^+(0) \in X$ και η ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής. Άρα

$$\lim_{h\to 0+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} = T(t)\dot{\xi}_x^+(0)$$

κάτι που αποδεικνύει και την εξ' αριστερών διαφορισιμότητα της απεικόνισης $\xi_x(\cdot)$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Τελικά η απεικόνιση $\xi_x(\cdot)$ είναι διαφορίσιμη στο $[0, +\infty)$ και μάλιστα

$$\dot{\xi}_x(t) = T(t)\dot{\xi}_x^+(0), \ \forall t \in [0, +\infty)$$

Ορισμός 2.2.8 *Ο απειροστικός γεννήτορας (infinitesimal generator) ή απλώς γεννήτορας (generator) μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ σε έναν χώρο Banach X, είναι ο τελεστής $A : X \supseteq Dom(A) \to X$ που ορίζεται από την σχέση*

$$Ax := \dot{\xi}_x^+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0+} \left(\frac{T(h) - I}{h} x \right)$$

για κάθε

$$
\begin{aligned}
x \in Dom(A) &= \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \to 0+} \frac{T(h)x - x}{h} \right\} \\
&= \{x \in X : \exists \dot{\xi}_x^+(0)\} \\
&= \{x \in X : \exists \dot{\xi}_x^+(t), \ \forall t \in [0, +\infty)\}
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση 2.2.9 *(i) Από τον Ορισμό 2.2.8 προκύπτει άμεσα ότι ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών είναι και γραμμικός, εν γένει μη φραγμένος, τελεστής με πεδίο ορισμού έναν γραμμικό υπόχωρο του θεωρούμενου χώρου Banach.*
(ii) Έστω $(A, Dom(A))$ ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t \geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X. Ορίζουμε

$$
\tilde{A}x = w - \lim_{h \to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}
$$

για κάθε

$$
x \in Dom(\tilde{A}) = \left\{ x \in X : \exists \ w - \lim_{h \to 0+} \frac{T(h)x - x}{h} \right\}
$$

όπου το σύμβολο $w - \lim$ δηλώνει όριο ως προς την ασθενή τοπολογία που επάγεται στον X από τον δυικό του χώρο X^*. Καθώς η ύπαρξη ενός ορίου συνεπάγεται την ύπαρξη του αντίστοιχου ασθενούς ορίου, είναι φανερό πως ο γραμμικός τελεστής $\tilde{A}$ αποτελεί επέκταση του A. Αποδεικνύεται, ωστόσο, ότι $A = \tilde{A}$. Για την απόδειξη του Ισχυρισμού αυτού παραπέμπουμε στο [22, p.43]. Ο τελεστής $\tilde{A}$ καλείται ασθενής απειροστικός γεννήτορας (weak infinitesimal generator) της ημιομάδας $(T(t))_{t \geq 0}$.

Ορισμός 2.2.10 *Ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ομάδας τελεστών $(T(t))_{t \geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X είναι ο γραμμικός τελεστής $A : X \supseteq Dom(A) \to X$ που ορίζεται από την σχέση*

$$
Ax = \dot{\xi}_x(0) = \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{T(h) - I}{h} x \right)
$$

για κάθε

$$
x \in Dom(A) = \left\{ x \in X : \exists \ \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h} \right\} = \left\{ x \in X : \exists \ \dot{\xi}_x(0) \right\}
$$

Αν $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X, τότε οι οικογένειες $(T_+(t))_{t \geq 0}$ και $(T_-(t))_{t \geq 0}$, με $T_+(t) = T(t)$ και $T_-(t) = T(-t)$ για κάθε $t \geq 0$, αποτελούν ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες τελεστών επί του X, με απειροστικούς γεννήτορες $(A, Dom(A))$ και $(-A, Dom(-A))$ αντίστοιχα. Προφανώς $Dom(-A) = Dom(A)$.

Ακολουθούν προτάσεις που αφορούν τον απειροστικό γεννήτορα μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας τελεστών. Προτάσσουμε, ωστόσο, ένα Λήμμα τα αποτελέσματα του οποίου, θα επικαλεστούμε αρκετά συχνά.

Λήμμα 2.2.11 *Έστω X χώρος Banach και $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$. Τότε ισχύουν τα κάτωθι*

(i) $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\displaystyle\int_0^h T(t)xdt = x,\ \forall x \in X$

(ii) Για κάθε $x \in X$, το $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in Dom(A)$ και μάλιστα

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$$

Απόδειξη. (i) Επειδή η $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι C_0-ημιομάδα τελεστών, έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0+} ||T(t)x - x|| = 0,\ \forall x \in X$$

(βλ. Πρόταση 2.2.6). Ισοδύναμα, για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει $h > 0$ έτσι ώστε για κάθε t με $0 \leq t < h$ να ισχύει $||T(t)x - x|| < \epsilon$.
Έστω $x \in X$. Προφανώς $x = \frac{1}{h}\int_0^h xdt$ και, παρατηρώντας ότι

$$\frac{1}{h}\int_0^h T(t)xdt - x = \frac{1}{h}\int_0^h [T(t)x - x]dt$$

λαμβάνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{1}{h}\int_0^h T(t)xdt - x\right|\right| &= \left|\left|\frac{1}{h}\int_0^h [T(t)x - x]dt\right|\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^h ||T(t)x - x||dt \\
&< \frac{1}{h}\int_0^h \epsilon dt \\
&= \frac{1}{h}\epsilon(h - 0) = \epsilon
\end{aligned}$$

Άρα πράγματι έχουμε

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_0^h T(t)xdt = x$$

(ii) Έστω $x \in X$ και $h > 0$. Τότε παίρνουμε

$$\left[\frac{T(h) - I}{h}\right]\left(\int_0^t T(s)xds\right) = \frac{1}{h}\int_0^t (T(h) - I)T(s)xds$$

(διότι ο γραμμικός τελεστής $T(h) - I$ είναι φραγμένος). Άρα

$$\begin{aligned}
\left[\frac{T(h) - I}{h}\right]\left(\int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds
\end{aligned}$$

Θέτοντας $h+s=\omega$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]\left(\int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(\omega)xd\omega - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(\omega)xd\omega - \int_t^h T(\omega)xd\omega\right) \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{h+t} T(\omega)xd\omega - \frac{1}{h}\int_t^h T(s)xds \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\omega)xd\omega - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds\end{aligned}$$

Θέτοντας $\omega = t+\xi$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]\left(\int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^h T(t+\xi)xd\xi - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \\ &= T(t)\frac{1}{h}\int_0^h T(\xi)xd\xi - \frac{1}{h}\int_0^h T(\xi)xd\xi\end{aligned}$$

Από το αποτέλεσμα (i) του Λήμματος παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h T(\xi)xd\xi = x$$

και, επειδή οι τελεστές $T(t)$ είναι φραγμένοι (άρα και συνεχείς) για κάθε $t\geq 0$, λαμβάνουμε

$$\lim_{h\to 0+} T(t)\frac{1}{h}\int_0^h T(\xi)xd\xi = T(t)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h T(\xi)xd\xi = T(t)x$$

Συνοψίζοντας καταλήγουμε ότι ισχύει

$$\lim_{h\to 0+}\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x,\ \forall t\geq 0$$

κάτι που σημαίνει πως $\int_0^t T(s)xds \in Dom(A)$ για κάθε $x\in X$ και $t\geq 0$ και μάλιστα ισχύει

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x$$

(βλέπε και Ορισμό 2.2.8)

Πρόταση 2.2.12 *Έστω X χώρος Banach και $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$.*

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) Ο τελεστής $(A, Dom(A))$ είναι πυκνά ορισμένος.
(ii) Το πεδίο ορισμού $Dom(A)$ του τελεστή A είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$. Ισχύει δηλαδή ότι

$$T(t)Dom(A) \subseteq Dom(A),\ \forall t \in [0, +\infty)$$

Επιπλέον έχουμε

$$T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall x \in Dom(A),\ t \in [0, +\infty)$$

(iii) Για κάθε $x \in Dom(A)$ ισχύει

$$\dot{\xi}_x(t) = \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall t \in [0, +\infty)$$

(iv) Για κάθε $x \in Dom(A)$ έχουμε

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds,\ \forall t \in [0, +\infty)$$

(v) Για κάθε $x \in Dom(A)$ έχουμε

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\xi)Axd\xi = \int_s^t AT(\xi)xd\xi$$

Απόδειξη. (i) Έστω τυχόν στοιχείο $x \in X$. Θέτουμε $x(t) = \int_0^t T(s)xds$. Από το συμπέρασμα (ii) του προηγούμενου Λήμματος προκύπτει ότι $x(t) \in Dom(A)$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$, και μάλιστα ισχύει

$$Ax(t) = T(t)x - x$$

Εφ' όσον το πεδίο ορισμού $Dom(A)$ του A είναι γραμμικός υπόχωρος του X έπεται ότι $\frac{1}{t}x(t) \in Dom(A)$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Από το συμπέρασμα (i) του προηγούμενου Λήμματος έχουμε ότι

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}x(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds = x$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{t\to 0+} \left|\left|\frac{1}{t}x(t) - x\right|\right| = 0$$

Άρα το σύνολο $Dom(A)$ είναι πυκνός υπόχωρος του X και ο τελεστής $(A, Dom(A))$ πυκνά ορισμένος.

(ii) Έστω $x \in Dom(A)$ και $t \in [0,+\infty)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}\left[\frac{T(h)-I}{h}(T(t)x)\right] &= \lim_{h\to 0+}\frac{T(h+t)x-T(t)x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{T(t)(T(h)x-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+}T(t)\frac{T(h)x-x}{h} \\
&= T(t)Ax
\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει το $\lim_{h\to 0+}\left[\frac{T(h)-I}{h}(T(t)x)\right]$ και είναι ίσο με $T(t)Ax$. Με άλλα λόγια, το στοιχείο $T(t)x$ ανήκει στο $Dom(A)$ και μάλιστα ισχύει

$$AT(t)x = T(t)Ax$$

Εφ'οσον το στοιχείο $x \in Dom(A)$ επιλέχθηκε τυχόν, έπεται ότι ισχύει $T(t)Dom(A) \subseteq Dom(A)$ για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή το σύνολο $Dom(A)$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ και $T(t)Ax = AT(t)x$ για κάθε $x \in Dom(A)$ και $t \in [0,+\infty)$.

(iii) Έστω $x \in Dom(A)$ και $t \in [0,+\infty)$. Από το αποτέλεσμα (ii) της Πρότασης, προκύπτει ότι το στοιχείο $T(t)x$ ανήκει στο $Dom(A)$ και από την αποδεικτική διαδικασία που προηγήθηκε, έπεται ότι υπάρχει το $\lim_{h\to 0+}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}$. Δηλαδή η απεικόνιση $\xi_x(t)$ είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ και μάλιστα ισχύει

$$\dot{\xi}_x(t) = \frac{d}{dt}\xi_x(t) = \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)\dot{\xi}_x^+(0) = T(t)Ax$$

Πάλι από το αποτέλεσμα (ii) της Πρότασης έχουμε ότι

$$T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall x \in Dom(A),\ t \in [0,+\infty)$$

Άρα λαμβάνουμε

$$\dot{\xi}_x(t) = \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall x \in Dom(A),\ t \in [0,+\infty)$$

(iv) Έστω $x \in Dom(A)$. Με διαδικασία ανάλογη αυτής του αποτελέσματος (ii) της Πρότασης βρίσκουμε ότι

$$\lim_{h\to 0+}T(s)\left[\frac{T(h)x-x}{h}\right] = T(s)Ax$$

Τούτο σημαίνει ότι οι συναρτήσεις

$$s \to T(s)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]x$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο διάστημα $[0,t]$, καθώς $h \to 0+$, στην συνάρτηση $s \to T(s)Ax$. Επομένως παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}\left[\frac{T(h)-I}{h}\left(\int_0^t T(s)xds\right)\right] &= \lim_{h\to 0+}\int_0^t T(s)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right](x)ds \\
&= \int_0^t \lim_{h\to 0+}\left\{T(s)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right](x)ds\right\} \\
&= \int_0^t T(s)Axds
\end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε $x \in Dom(A)$ και $t \in [0,+\infty)$ ισχύει

$$A\int_0^t T(s)xds = \int_0^t T(s)Axds$$

Αλλά από το συμπέρασμα (ii) του Λήμματος 2.2.11 προκύπτει ότι

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x,\ \forall x \in X$$

άρα και για κάθε $x \in Dom(A) \subseteq X$. Ο ισχυρισμός είναι πλέον φανερός.
(**v**) Από τον ισχυρισμό (**iii**) της Πρότασης έχουμε

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall x \in Dom(A),\ t \in [0,+\infty)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή από s εώς t συνάγουμε ότι

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\xi)Axd\xi = \int_s^t AT(\xi)xd\xi$$

Παρατήρηση 2.2.13 *Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα* (ii) του Λήμματος 2.2.11 και (iv) της Πρότασης 2.2.12, για μια ισχυρώς μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε χώρο Banach X, έχουμε τα εξής.

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds,\ \forall x \in X, t \geq 0$$

και

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds,\ \forall x \in Dom(A), t \geq 0$$

Προφανώς για κάθε $x \in Dom(A)$ και $t \geq 0$ παίρνουμε

$$A\int_0^t T(s)xds = \int_0^t T(s)Axds$$

Πρόταση 2.2.14 *Ο απειροστικός γεννήτορας $(A, Dom(A))$ μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X είναι ένας κλειστός (γραμμικός) τελεστής ο οποίος καθορίζει μονοσήμαντα τη θεωρούμενη ημιομάδα.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη, ότι ο γραμμικός τελεστής A είναι πυκνά ορισμένος (βλ. Πρόταση 2.2.12). Θεωρούμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Dom(A)$ και $x, y \in X$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x, \ \lim_{n\to+\infty} Ax_n = y$$

Έχουμε τότε $T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \geq 0$ (βλ. Παρατήρηση 2.2.13). Επειδή η σύγκλιση της ακολουθίας $T(\cdot)Ax_n$ είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, t]$ με $t \geq 0$, καθώς $n \to +\infty$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \int_0^t T(s) \lim_{n\to+\infty} Ax_n ds \\ &= \int_0^t T(s)yds, \ \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Συνακόλουθα παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} = lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)yds = y$$

(βλ. Λήμμα 2.2.11(ii)). Άρα $x \in Dom(A)$ και $Ax = y$, κάτι που αποδεικνύει ότι ο απειροστικός γεννήτορας $(A, Dom(A))$ είναι κλειστός τελεστής. Έστω περαιτέρω, μια δεύτερη C_0-ημιομάδα τελεστών $(S(t))_{t\geq 0}$ επί του X με τον ίδιο απειροστικό γεννήτορα. Για $x \in Dom(A)$ και $t \geq 0$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$s \to \eta_x(s) := T(t-s)S(s)x$$

από το $[0, t]$ στον X και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(s+h) - S(s)x}{h} = AS(s)x.$$

Από την Πρόταση 2.2.12 προκύπτει ότι $S(s)x \in Dom(A)$ για κάθε $s \in [0, t]$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\eta_x(s) &= \left[\frac{d}{ds}T(t-s)\right] S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή η συνεχής απεικόνιση $s \to \eta_x(s)$ είναι σταθερή ανεξάρτητη της μεταβλητής s, οπότε για $s = 0$ και $s = t$ λαμβάνουμε $\eta_x(0) = \eta_x(t)$ ή ισοδύναμα $T(t)S(0)x = T(0)S(t)x$

και $T(t)x = S(t)x,\ \forall x \in Dom(A)$. Καθως το t διατρέχει το $\mathbb{R}_+$ παίρνουμε $T(t)x = S(t)x$ για κάθε $t \geq 0$ και $x \in Dom(A)$. Αλλά το πεδίο ορισμού $Dom(A)$ του A είναι πυκνός υπόχωρος του X και οι τελεστές $S(t)$ και $T(t)$ είναι συνεχείς σε κάθε $t \geq 0$. Επομένως ισχύει

$$T(t)x = S(t)x,\ \forall x \in X, t \geq 0$$

Έτσι $T(t) = S(t)$ για κάθε $t \geq 0$, κάτι που σημαίνει ότι οι C_0-ημιομάδες $(T(t))_{t\geq 0}$ και $(T(t))_{t\geq 0}$ ταυτίζονται. Άρα, πράγματι, ο απειροστικός γεννήτορας $(A, Dom(A))$ καθορίζει μονοσήμαντα τη θεωρούμενη C_0-ημιομάδα τελεστών.

Πρόταση 2.2.15 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Αν μια διανυσματική συνάρτηση $x : [0, a] \to Dom(A)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{dx(t)}{dx} = Ax(t),\ \forall t \in [0, a]$$

τότε ισχύει $x(a) = T(a)x(0)$.

Απόδειξη. Δοθείσης της διανυσματικής συνάρτησης $t \to x(t)$ από το διάστημα $[0, a]$ στο $Dom(A)$ και τυχόντος στοιχείο $\phi \in X^*$, όπου X^* είναι ο τοπολογικός δυϊκός χώρος του X, ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση $F : [0.a] \to \mathbb{C}$ με $F(t) = \langle T(t)x(a-t), \phi\rangle$ για κάθε $t \in [0, a]$. Υπολογίζουμε την εκ δεξιών παράγωγο της F:

$$\begin{aligned}
\frac{d^+}{dt}F(t) &= \lim_{h\to 0+}\left\langle \frac{T(t+h)x(a-t+h) - T(t)x(a-t)}{h}, \phi \right\rangle \\
&= \lim_{h\to 0+}\left\langle \frac{T(t+h)x(a-t+h) - T(t+h)x(a-t)}{h}, \phi \right\rangle \\
&\quad + \lim_{h\to 0+}\left\langle \frac{T(t+h)x(a-t) - T(t)x(a-t)}{h}, \phi \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{h\to 0+} T(t+h) \lim_{h\to 0+} \frac{x(a-t+h) - x(a-t)}{h}, \phi \right\rangle + \\
&\quad + \left\langle \lim_{h\to 0+} T(t)\frac{T(h)x(a-t) - x(a-t)}{h}, \phi \right\rangle \\
&= \left\langle T(t)\frac{d^+}{dt}x(a-t), \phi \right\rangle + \left\langle T(t) \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x(a-t) - x(a-t)}{h}, \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

Επειδή $0 \leq t \leq a$ έπεται $0 \leq a - t \leq a$ και, άρα, ισχύει

$$\frac{d^+}{dt}x(a-t) = -Ax(a-t).$$

Επίσης $x(a-t) \in Dom(A)$ και, κατά συνέπεια, έχουμε

$$\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x(a-t) - x(a-t)}{h} = Ax(a-t)$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$\frac{d^+}{dt}F(t) = \langle T(t)[-Ax(a-t)], \phi\rangle + \langle T(t)Ax(a-t), \phi\rangle = 0$$

Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης F, συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι σταθερή ανεξάρτητη της μεταβλητής t. Έτσι παίρνουμε $F(0) = F(a)$ και συνακόλουθα

$$\langle T(0)x(a-0), \phi\rangle = \langle T(a)x(a-a), \phi\rangle$$

και

$$\langle x(a), \phi\rangle = \langle T(a)x(0), \phi\rangle$$

Επειδή το στοιχείο $\phi \in X^*$ επιλέχθηκε τυχόν, γνωστό Πόρισμα του Θεωρήματος Hahn-Banach (βλ. Πόρισμα 1.1.8) δίνει ότι $x(a) = T(a)x(0)$.

Είμαστε, τώρα, σε θέση να διατυπώσουμε ένα αποτέλεσμα θεμελιώδους σημασίας στην Θεωρία Ημιομάδων, που αφορά το ομογενές αφηρημένο πρόβλημα Cauchy. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών σε έναν χώρο Banach X

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \ t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

όπου $A : X \supseteq Dom(A) \to X$ είναι γραμμικός μη φραγμένος τελεστής και $x_0 \in Dom(A)$ (σε αντιστοιχία με το πρόβλημα αρχικών τιμών που παρουσιάσαμε στην Παρατήρηση 2.1.8 για A φραγμένο γραμμικό τελεστή)

Για την ειδική περίπτωση κατά την οποία ο τελεστής $(A, Dom(A))$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας επί του X, έχουμε το επόμενο

Θεώρημα 2.2.16 *Έστω $(A, Dom(A))$ ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X. Τότε το παραπάνω ομογενές αφηρημένο πρόβλημα Cauchy (homogeneous abstract Cauchy problem) δέχεται μοναδική λύση, η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα και δίνεται από την σχέση*

$$x(t) = T(t)x_0, \ t \geq 0$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in Dom(A)$. Γνωρίζουμε (Πρόταση 2.2.12) ότι ισχύει $\frac{d}{dt}T(t)x_0 = T(t)Ax_0 = AT(t)x_0$. Είναι προφανές ότι $x(0) = T(0)x_0 = Ix_0 = x_0$. Άρα η διανυσματική συνάρτηση $t \to x(t) = T(t)x_0$ αποτελεί μια λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών. Η Πρόταση 2.2.15 επιβεβαιώνει τη συνεχή εξάρτηση της λύσης αυτής από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Προς απόδειξη της μοναδικότητας της προσδιορισθείσας λύσης, θεωρούμε μία δεύτερη λύση $y(t)$ του ίδιου προβλήματος, οπότε ισχύουν

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \ t \geq 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $s \to T(t-s)y(s)$ από το διάστημα $[0,t]$ στον X όπου $t \geq 0$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[T(t-s)y(s)] &= \left[\frac{d}{ds}T(t-s)\right] + T(t-s)\frac{dy(s)}{ds} \\ &= -T(t-s)Ay(s) + T(t-s)Ay(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Λόγω και της συνέχειάς της, η ορισθείσα συνάρτηση είναι σταθερή ανεξάρτητη της μεταβλητής s, οπότε για $s=0$ και $s=t$ παίρνουμε $T(t)y(0) = T(0)y(t)$ και $y(t) = T(t)x_0 = x(t)$. Καθώς το t διατρέχει το $\mathbb{R}_+$ τεκμαίρεται ότι $y(t) = x(t)$ για κάθε $t \geq 0$, και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζουμε ότι, αν X είναι χώρος Banach με νόρμα $||\cdot||$ τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ είναι χώρος Banach με νόρμα $||\cdot||_1$ που ορίζεται από τη σχέση

$$||(x,y)||_1 = ||x|| + ||y|| \ \forall (x,y) \in X \times X$$

Επιπλέον, το πεδίο ορισμού $Dom(A)$ ενός γραμμικού μη φραγμένου τελεστή $A : X \supseteq Dom(A) \to X$ γίνεται χώρος με νόρμα εάν ορίσουμε $||x||_A = ||x|| + ||Ax||$ για κάθε $x \in Dom(A)$. Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1.3, η $||\cdot||_A$ καλείται νόρμα γραφήματος τελεστή. Διατυπώνουμε την ακόλουθη

Πρόταση 2.2.17 *Έστω $(A, Dom(A))$ απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X. Τότε το πεδίο ορισμού $Dom(A)$ του A είναι πλήρης χώρος ως προς τη νόρμα γραφήματος τελεστή $||\cdot||_A$ και, άρα, χώρος Banach.*

Απόδειξη. Καθώς ο απειροστικός γεννήτορας μιας C_0-ημιομάδας τελεστών είναι κλειστός (γραμμικός) τελεστής, το συμπέρασμα της Πρότασης προκύπτει ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.3.6.

Γενικά, είναι επίπονος ο προσδιορισμός ολόκληρου του πεδίου ορισμού $Dom(A)$ ενός γραμμικού τελεστή $A :\supseteq Dom(A) \to X$ σε έναν χώρο Banach X. Αρκετές φορές, ωστόσο, είναι σχετικά εύκολο να υπολογίσουμε τις ποσότητες Ax για στοιχεία x κατάλληλου υπόχωρου του $Dom(A)$. Εισάγουμε, λοιπόν, μια έννοια η οποία επιτυγχάνει έναν διαχωρισμό μεταξύ 'μικρών' και 'μεγάλων' υποχώρων του $Dom(A)$.

Ορισμός 2.2.18 *Έστω X χώρος Banach με νόρμα $||\cdot||$. Ένας υπόχωρος D του πεδίου ορισμού $Dom(A)$ ενός γραμμικού τελεστή $A : X \supseteq Dom(A) \to X$, καλείται πυρήνας (core) για τον A αν είναι πυκνός στο $Dom(A)$ ως προς τη νόρμα γραφήματος τελεστή $||\cdot||_A$.*

Σημείωση Ο όρος 'πυρήνας ' χρησιμοποιείται προκειμένου και για τον μηδενοχώρο $Kerf$ μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V_1 \to V_2$, V_1,V_2 διανυσματικοί χώροι, όπου

$Kerf = \{x \in V_1 : f(x) = \mathbb{O}_{V_2}\}$. Στην περίπτωση αυτή με τον ελληνικό όρο ‘πυρήνας ’ μεταφράζουμε την αγγλική λέξη kernel. Επίσης ο όρος ‘πυρήνας ’ χρησιμοποιείται ευρύτατα και στο πλαίσιο των ολοκληρωτικών τελεστών και εξισώσεων προκειμένου να εκφράσει κάτι εντελώς διαφορετικό από τα προηγούμενα. Ελπίζουμε, στην συνέχεια της εργασίας μας, να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση.

Αν και συνήθως είναι δύσκολο να αποφανθούμε κατά πόσο ένα σύνολο αποτελεί πυρήνα για έναν τελεστή, τα πράγματα απλοποιούνται όταν ο συγκεκριμένος τελεστής είναι απειροστικός γεννήτορας μιας C_0-ημιομάδας. Διατυπώνουμε, λοιπόν, ένα εύχρηστο σχετικό κριτήριο

Πρόταση 2.2.19 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X με νόρμα $||\cdot||$. Ένας υπόχωρος D του $Dom(A)$, ο οποίος είναι $||\cdot||$-πυκνός και αναλλοίωτος από τη θεωρούμενη ημιομάδα, αποτελεί πυρήνα για τον τελεστή A.*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο $[9, Th.1.9, p.8]$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν ο τελεστής $(A, Dom(A))$ είναι κλειστός, μπορούμε να τον προσδιορίσουμε επακριβώς εάν γνωρίζουμε τον περιορισμό του σε έναν πυρήνα D. Συγκεκριμένα, η κλειστότητα του (A, D) γίνεται $(A, Dom(A))$.

Επιθυμούμε να συσχετίσουμε μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα με τους επιλύοντες τελεστές του απειροστικού της γεννήτορα προκειμένου να μελετήσουμε ενδιαφέρουσες φασματικές ιδιότητες. Θα προηγηθεί, ωστόσο, η λεπτομερής παρουσίαση μιας πολύ σημαντικής κατασκευής καινούριας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας δοθείσης μιας άλλης, η οποία αποδεικνύεται χρησιμότατη στην πράξη και φέρει την ονομασία rescaled semigroup.

Πρόταση 2.2.20 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Θέτουμε για $\mu \in \mathbb{C}$:*

$$S(t) = \mathrm{e}^{\mu t}T(t) \text{ για κάθε } t \geq 0$$

$$H(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}T(t) \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) Η οικογένεια $(S(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(B, Dom(B))$ όπου $B = A + \mu I$ και $Dom(B) = Dom(A)$. (ii) Η οικογένεια $(H(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(C, Dom(C))$ όπου $C = A - \mu I$ και $Dom(C) = Dom(A)$.

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \mathbb{C}$. Προφανώς $\mu = \mathrm{Re}\ \mu + \mathrm{iIm}\ \mu$ και $\mu t = t\mathrm{Re}\ \mu + \mathrm{i}t\mathrm{Im}\ \mu$ Επίσης

$$|\mathrm{e}^{\mu t}| = |\mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\ \mu}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{Im}\ \mu}| = \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\ \mu}$$

Έτσι, για κάθε $x \in X$ και $t \geq 0$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||S(t)x|| &= |\mathrm{e}^{\mu t}|||T(t)x|| \\ &\leq \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\,\mu}||T(t)||||x|| \\ &= p(t)||x|| \end{aligned}$$

όπου $p(t) := \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\,\mu}||T(t)|| < +\infty$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα οι γραμμικοί τελεστές $S(t)$ είναι φραγμένοι για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον έχουμε για $t, s \geq 0$

$$S(t+s) = \mathrm{e}^{\mu(t+s)}T(t+s) = \mathrm{e}^{\mu t}T(t)\mathrm{e}^{\mu s}T(s) = S(t)S(s)$$

και

$$S(0) = \mathrm{e}^{\mu 0}T(0) = I$$

Επομένως η οικογένεια $(S(t))_{t\geq 0}$ είναι μια μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του X. Επίσης για $x \in X$ και $t \geq 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} S(t)x &= \lim_{t\to 0+} \mathrm{e}^{\mu t}T(t)x \\ &= \lim_{t\to 0+} (\mathrm{e}^{\mu t}T(t)x - \mathrm{e}^{\mu t}x + \mathrm{e}^{\mu t}x) \\ &= \lim_{t\to 0+} \mathrm{e}^{\mu t} \lim_{t\to 0+} T(t)x - x + \lim_{t\to 0+} \mathrm{e}^{\mu t}x \\ &= x \end{aligned}$$

(Εφόσον η ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής επί του X, οπότε ισχύει $\lim_{t\to 0+} T(t)x = x$ από την Πρόταση 2.2.6). Συνεπώς $\lim_{t\to 0+} S(t)x = x$ για κάθε $x \in X$ και $t \geq 0$ και εξασφαλίζεται, από την ίδια Πρόταση, η ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(S(t))_{t\geq 0}$.

Έστω, περαιτέρω, ότι η $(S(t))_{t\geq 0}$ έχει απειροστικό γεννήτορα $(B, Dom(B))$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x \in Dom(B)$. Υπάρχει, τότε, το $\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x-x}{h}$ και λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} Bx &= \lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\mu h}T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\mu h}T(h)x - \mathrm{e}^{\mu h}x + \mathrm{e}^{\mu h}x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \mathrm{e}^{\mu h} \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &\quad + \lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\mu h}x - x}{h} \\ &= [\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}] + \mu x \end{aligned}$$

Έπεται η ύπαρξη του $\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x-x}{h}$, οπότε $x \in Dom(A)$ και μάλιστα $\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x-x}{h} = Ax$. Επομένως $Dom(B) \subseteq Dom(A)$ και $Bx = Ax + \mu x = (A + \mu I)x$ για κάθε

$x \in Dom(B)$. Με άλλα λόγια ισχύει $B \subset A + \mu I$. Με διαδικασία ακριβώς αντίστροφη της προηγηθείσας αποδεικνύουμε ότι $Dom(A) \subseteq Dom(B)$ Τελικά θα πάρουμε $B = A + \mu I$ και $Dom(B) = Dom(A)$.

(ii) Με ανάλογα επιχειρήματα, επιβεβαιώνουμε ότι η οικογένεια $(H(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του X με γεννήτορα $(C, Dom(C))$, όπου $C = A - \mu I$ και $Dom(C) = Dom(A)$.

Παρατήρηση 2.2.21 *(i) Αν* $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ *και η ισχυρώς συνεχής ημιομάδα* $(T(t))_{t\geq 0}$ *είναι συσταλτική (δηλαδή* $||T(t)|| \leq 1$ *για κάθε* $t \geq 0$*) τότε και η* $(H(t))_{t\geq 0}$ *είναι συσταλτική. Πράγματι* $|\mathrm{e}^{-\mu t}| = \mathrm{e}^{-t\mathrm{Re}\,\mu} \leq 1$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και, άρα, έχουμε*

$$||H(t)|| = ||\mathrm{e}^{-\mu t}T(t)|| = |\mathrm{e}^{-\mu t}|||T(t)|| \leq 1$$

για κάθε $t \geq 0$*, κάτι που επαληθεύει τον ισχυρισμό μας.*
(ii) Αν θεωρήσουμε τα φάσματα των τελεστών A, B *και* C *της προηγούμενης Πρότασης, βρίσκουμε άμεσα ότι*

$$\sigma(B) = \sigma(A) + \mu,\ \sigma(C) = \sigma(A) - \mu$$

Επίσης $R(\lambda, B) = R(\lambda - \mu, A)$ *για κάθε* $\lambda \in \rho(B)$ *και* $R(\lambda, C) = R(\lambda + \mu, A)$ *για κάθε* $\lambda \in \rho(C)$.
(iii) Αν $\mathrm{Re}\,\mu = -\omega_0$ *(αντίστοιχα αν* $\mathrm{Re}\,\mu < -\omega_0$*) όπου* ω_0 *είναι ο τύπος της ημιομάδας* $(T(t))_{t\geq 0}$ *τότε η ημιομάδα* $(S(t))_{t\geq 0}$ *έχει τύπο ίσο με μηδέν (αντίστοιχα μικρότερο του μηδενός).*

Πόρισμα 2.2.22 *Έστω* $(T(t))_{t\geq 0}$ *ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα* $(A, Dom(A))$ *σε έναν χώρο Banach* X*. Αν* $\mu \in \mathbb{C}$ *και* $t \geq 0$*, ισχύουν τα κάτωθι:*

$$\mathrm{e}^{\mu t}T(t)x - x = \int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}T(s)(A + \mu I)x ds,\ \textit{αν } x \in Dom(A)$$

και

$$\mathrm{e}^{\mu t}T(t)x - x = (A + \mu I)\int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}T(s)x ds,\ \textit{αν } x \in X$$

Αντιστοίχως

$$\mathrm{e}^{-\mu t}T(t)x - x = \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu s}T(s)(A - \mu I)x ds,\ \textit{αν } x \in Dom(A)$$

και

$$\mathrm{e}^{-\mu t}T(t)x - x = (A - \mu I)\int_0^t \mathrm{e}^{-\mu s}T(s)x ds,\ \textit{αν } x \in Dom(A)$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.20, οι οικογένειες $(S(t))_{t\geq 0}$ με $S(t) = \mathrm{e}^{\mu t}T(t)$ για κάθε $t \geq 0$ και $(H(t))_{t\geq 0}$ με $H(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}T(t)$ για κάθε $t \geq 0$, είναι ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες επί του X με γεννήτορες $(B, Dom(B))$ και $(C, Dom(C))$ αντίστοιχα,

όπου $B = A + \mu I$, $C = A - \mu I$ και $Dom(A) = Dom(B) = Dom(C)$.
Εφαρμόζοντας τα συμπεράσματα της Παρατήρησης 2.2.22 παίρνουμε

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Bxds, \text{ αν } x \in Dom(B)$$

$$S(t)x - x = B\int_0^t S(s)xds, \text{ αν } x \in X$$

$$H(t)x - x = \int_0^t H(s)Cxds, \text{ αν } x \in Dom(C)$$

$$H(t)x - x = C\int_0^t H(s)xds, \text{ αν } x \in X$$

απ'οπου τα συμπεράσματα του Πορίσματος προκύπτουν με απλή αντικατάσταση.

Θεώρημα 2.2.23 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X και σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη*

$$||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \text{ για κάθε } t \geq 0$$

(σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.4). Τότε ισχύουν τα εξής:
i) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ για το οποίο ορίζεται η ποσότητα

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \; (x \in X)$$

και είναι πεπερασμένος αριθμός, έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και μάλιστα

$$R(\lambda, A) = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)ds$$

(ολοκληρωτική αναπαράσταση του επιλύοντα τελεστή του απειροστικού γεννήτορα της ημιομάδας ή μετασχηματισμός Laplace). Σημειώνουμε ότι το εμφανιζόμενο ολοκλήρωμα πρέπει να εκληφθεί ως ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann, δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds$$

ii) Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, τότε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$R(\lambda, A) = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds$$

Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega}$$

Απόδειξη. i) Καθώς η απεικόνιση $s \to T(s)x$ είναι συνεχής και φραγμένη για κάθε $s \geq 0$, αντιλαμβανόμαστε πως οι γραμμικοί τελεστές $R(\lambda)$ είναι φραγμένοι για εκείνα τα $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ορίζονται και είναι πεπερασμένοι αριθμοί οι ποσότητες

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)xds \ (x \in X)$$

Στην συνέχεια της απόδειξης εργαζόμαστε με τους συγκεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς. Έστω $h > 0$. Για κάθε x και για τα θεωρούμενα λ έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}(T(h)-I)T(s)xds \\
&\overset{s=\xi-h}{=} \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(\xi-h)}T(\xi)xd\xi \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \\
&\quad -\int_0^{h} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds] \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \\
&\quad -\frac{1}{h}\mathrm{e}^{\lambda h}\int_0^{h} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{\lambda h}-1)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \lim_{h\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{h} \\
&= \lambda R(\lambda)x
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\mathrm{e}^{\lambda h}\int_0^{h} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds &= \lim_{h\to 0+}\mathrm{e}^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^{h} H(s)xds \\
&= x
\end{aligned}$$

όπου $H(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)$ για κάθε $t \geq 0$.
Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}[\frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds &- \frac{1}{h}\mathrm{e}^{\lambda h}\int_0^{h} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds \\
&= \lambda R(\lambda)x - x
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια
$$\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x,\ \forall x \in X$$
κάτι που σημαίνει ότι $R(\lambda)x \in Dom(A)$ για κάθε $x \in X$ και για κατάλληλα $\lambda \in \mathbb{C}$. Μάλιστα έχουμε
$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$$
οπότε
$$\lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = x$$
και
$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x,\ \forall x \in X \tag{2.2.5}$$
Έστω, περαιτέρω, τύχον $x \in Dom(A)$. Τότε $Ax \in X$ και παίρνουμε
$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds$$
$$R(\lambda)Ax = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)Axds = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)Axds$$
Αλλά η ημιομάδα $(H(t))_{t\geq 0}$ έχει απειροστικό γεννήτορα $(C, Dom(C))$ όπου $C = A - \lambda I$ και $Dom(C) = Dom(A)$. Από την παρατήρηση 2.2.13 προκύπτει ότι
$$C\int_0^t H(s)xds = \int_0^t H(s)Cxds$$
Άρα
$$\lim_{t\to+\infty} C\int_0^t H(s)xds = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t H(s)Cxds$$
και, επειδή ο γραμμικός τελεστής C είναι κλειστός, λαμβάνουμε
$$C\int_0^{+\infty} H(s)xds = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t H(s)Cxds$$
και
$$\begin{aligned}(A-\lambda I)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)(A-\lambda I)xds\\ &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)Axds\\ &\quad -\lambda\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)xds\\ &= R(\lambda)Ax - \lambda R(\lambda)x\\ &= R(\lambda)(A-\lambda I)x\end{aligned}$$
Επομένως για κάθε $x \in Dom(A)$ και για τα κατάλληλα $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε
$$(A-\lambda I)R(\lambda)x = R(\lambda)(A-\lambda I)x$$

και ισοδύναμα

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = R(\lambda)(\lambda I - A)x \tag{2.2.6}$$

Από την (2.2.5) και την σχέση (2.2.6) εφαρμοσμένη στα στοιχεία του $Dom(A)$ παίρνουμε

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \ \forall x \in Dom(A) \tag{2.2.7}$$

Οι σχέσεις (2.2.5) και (2.2.7) υποδηλώνουν ότι ο γραμμικός τελεστής $\lambda I - A : Dom(A) \to X$ επιδέχεται ως δεξιό και αριστερό αντίστροφο το φραγμένο γραμμικό τελεστή $R(\lambda)$, κάτι που σημαίνει ότι ορίζεται και είναι φραγμένος ο τελεστής

$$(\lambda I - A)^{-1} : X \to Dom(A)$$

Μάλιστα ισχύει $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)$ και, τελικά, κάθε θεωρούμενο $\lambda \in \mathbb{C}$ ανήκει στο $\rho(A)$ και επιπλέον

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$$

ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε $\lambda = \mathrm{Re}\ \lambda + \mathrm{iIm}\ \lambda$. Θεωρούμε και σταθερά $\omega \geq 0$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $t \geq 0$, όπου $M \geq 1$. Επιλέγουμε εκείνα τα $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ ή ισοδύναμα $\omega - \mathrm{Re}\ \lambda < 0$. Ασφαλώς $|\mathrm{e}^{-\lambda s}| = \mathrm{e}^{-s\mathrm{Re}\ \lambda}$. Έτσι λαμβάνουμε για $x \in X$

$$\begin{aligned}
||\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds|| &\leq \int_0^{+\infty} ||\mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x|| ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\mathrm{Re}\ \lambda} M \mathrm{e}^{\omega s} ||x|| ds \\
&= \frac{M||x||}{\omega - \mathrm{Re}\ \lambda} \int_0^{+\infty} (\omega - \mathrm{Re}\ \lambda) \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\ \lambda)s} ds \\
&= \frac{M||x||}{\omega - \mathrm{Re}\ \lambda} \int_0^{+\infty} [\frac{d}{ds} \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\ \lambda)s}] ds \\
&= \frac{M||x||}{\mathrm{Re}\ \lambda - \omega} < +\infty
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός το $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds$. Επομένως ορίζονται καλώς οι γραμμικοί τελεστές $R(\lambda)$ και ισχύει

$$||R(\lambda)x|| = ||\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds|| \leq \frac{M||x||}{\mathrm{Re}\ \lambda - \omega}$$

Με άλλα λόγια οι τελεστές $R(\lambda)$ είναι φραγμένοι και, ακολουθώντας συλλογιστική πορεία ανάλογη αυτής του ισχυρισμού (i), αποδεικνύεται ότι $\lambda \in \rho(A)$ και μάλιστα

$$R(\lambda, A) = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$$

Έπεται ότι

$$||R(\lambda, A)|| = ||R(\lambda)|| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\ \lambda - \omega}$$

Πόρισμα 2.2.24 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ φραγμένη ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών (δηλαδή υπάρχει σταθερά $M \geq 1$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \geq 0$) με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ τότε, θέτοντας για κάθε $x \in X$

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds$$

έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$R(\lambda, A)x = R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$$

Επιπλέον $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{\lambda}$
(ii) Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}\lambda > 0$ τότε, θέτοντας για $x \in X$

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds$$

έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$R(\lambda, A) = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$$

Επιπλέον $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda}$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} ||R(\lambda)x|| &\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} ||T(s)||||x|| ds \\ &\leq M||x|| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{-M||x||}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\frac{d}{ds}\mathrm{e}^{-\lambda s}) ds \\ &= \frac{M||x||}{\lambda} < \infty \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει, για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$, το $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds$ και είναι πεπερασμένος αριθμός Άρα ορίζονται καλώς και είναι φραγμένοι οι γραμμικοί τελεστές $R(\lambda)$. Μάλιστα ισχύει $||R(\lambda)x|| \leq \frac{M||x||}{\lambda}$ για κάθε $x \in X$.
Ακολουθώντας την αποδεικτική διαδικασία του ισχυρισμού (i) του Θεωρήματος 2.2.23, βρίσκουμε ότι $\lambda \in \rho(A)$ και

$$R(\lambda, A) = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$$

Επιπλέον $||R(\lambda, A)|| = ||R(\lambda)|| \leq \frac{M}{\lambda}$.
(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda > 0$. Πρόκειται για ειδική περίπτωση του ισχυρισμού (ii) του

Θεωρήματος 2.2.23 για $\omega = 0$. Έτσι λαμβάνουμε $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda, A) = R(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) ds$ και

$$||R(\lambda, A)|| = ||R(\lambda)|| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda}$$

Παρατήρηση 2.2.25 *Στην περίπτωση κατά την οποία η ισχυρώς συνεχής ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι συσταλτική, οπότε $||T(t)|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$, παραμένουν σε ισχύ τα συμπεράσματα του Πορίσματος 2.2.24 και οι σχετικές εκτιμήσεις παίρνουν την εξής μορφή:*

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

(όταν $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$) και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}$$

(όταν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$)

Πρόταση 2.2.26 *Έστω $(A, Dom(A))$ ο απειροστικός γεννήτορας μια ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X και σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη*

$$||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)^n &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) x ds \ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύουν οι εκτιμήσεις

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n} \ (n \in \mathbb{N})$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι, για κάθε κλειστό γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach Xμε μη κενό επιλύον σύνολο $\rho(A)$, ισχύει

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A) = (-1)^{n-1}(n-1)! R(\lambda, A)^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda \in \rho(A)$ (βλ. Πρόταση 1.3.11). Επομένως, όταν ο A είναι γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας (και, άρα, κλειστός τελεστής) και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, παίρνουμε ότι $\rho(A) \neq \emptyset$ (από το Θεώρημα 2.2.23) και συνακόλουθα

$$R(\lambda, A)^n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x$$

για κάθε $x \in X$.

Για $n = 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x &= \frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} [\mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x] ds \\ &= -\int_0^{+\infty} s\mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds \end{aligned}$$

Προχωρώντας επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds$$

οπότε

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds$$

για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Ασφαλώς

$$\begin{aligned} ||R(\lambda, A)^n x|| &\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda s} ||T(s)|| ||x|| ds \\ &\leq \frac{M||x||}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda s} \mathrm{e}^{\omega s} ds \\ &= \frac{M||x||}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} s^{n-1} \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\,\lambda)s} ds \end{aligned}$$

Για $n = 1$ έχουμε

$$||R(\lambda, A)x|| \leq \frac{M||x||}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega}$$

(βλ. Θεώρημα 2.2.23) και για $n = 2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||R(\lambda, A)^2 x|| &\leq M||x|| \int_0^{+\infty} s\mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\,\lambda)s} ds \\ &= \frac{M||x||}{\omega - \mathrm{Re}\,\lambda} \int_0^{+\infty} s[\frac{d}{ds} \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\,\lambda)s}] ds \\ &= -\frac{M||x||}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^2} \int_0^{+\infty} [\frac{d}{ds} \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\,\lambda)s}] ds \\ &= \frac{M||x||}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^2} \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο της επαγωγής καταλήγουμε ότι

$$||R(\lambda, A)^n x|| \leq \frac{M||x||}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, οπότε

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.

Από το Θεώρημα 2.2.23 προκύπτει ότι το φάσμα του απειροστικού γεννήτορα μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας περιέχεται σε κάποιο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ο αριθμός που καθορίζει τη μικρότερο δυνατό σχετικό ημιεπίπεδο αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό οποιουδήποτε γραμμικού τελεστή και ορίζεται ευθύς αμέσως

Ορισμός 2.2.27 *Για έναν γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X καλούμε φασματικό φράγμα (spectral bound) τον αριθμό*

$$s(A) = \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \ \lambda \in \sigma(A)\}$$

Πρόταση 2.2.28 *Έστω $(A, Dom(A))$ ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ σε κάποιον χώρο Banach X. Τότε ισχύει*

$$-\infty < s(A) \leq \omega_0(\mathcal{T}) < +\infty$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια των Ορισμών 2.2.5 και 2.2.27 και του Θεωρήματος 2.2.23. Σημειώνουμε ότι $s(A) = -\infty$ όταν $\sigma(A) = \emptyset$.

2.3 Βασικές κατασκευές ισχυρώς συνεχών ημιομάδων

Θα παρουσιάσουμε σε αυτή την παράγραφο ορισμένες βασικές κατασκευές καινούριων ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών σε έναν χώρο Banach, ξεκινώντας από ήδη υπάρχουσες. Μια τέτοια κατασκευή μελετήσαμε διεξοδικά στην Πρόταση 2.2.20. Κοινή αφετηρία σε όλες τις κατασκευές θα είναι μια C_0-ημιομάδα τελεστών $\mathcal{T}$ με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X.

(I) **Ημιομάδες υποχώρων** (subspace semigroups)

Έστω Y κλειστός υπόχωρος του X (άρα επίσης χώρος Banach) ο οποίος είναι $\mathcal{T}$-αναλλοίωτος (δηλαδή ισχύει $T(t)Y \subseteq Y$ για κάθε $t \geq 0$). Θεωρώντας τους περιορισμούς $T(t)|_Y$ των τελεστών $T(t)$ στον υπόχωρο Y για κάθε $t \geq 0$, κατασκευάζεται μια νέα ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών $(T(t)|_Y)_{t\geq 0}$ επί του Y αποκαλούμενη ημιομάδα υποχώρου.

Εισάγουμε, στο σημείο αυτό, μια έννοια που θα φανεί χρήσιμη και σε απόμενα Κεφάλαια της Εργασίας μας.

Ορισμός 2.3.1 *Έστω E και F χώροι Banach με τον F να εμφυτεύεται συνεχώς στον E (συμβολίζουμε $F \hookrightarrow E$). Αν $(A, Dom(A))$ είναι ένας γραμμικός τελεστής επί του E, καλούμε τμήμα (part) του A στον F τον γραμμικό τελεστή A_F με $A_F x := Ax$ για κάθε $x \in Dom(A_F) = \{x \in Dom(A) \cap F : Ax \in F\}$.*

Στο πλαίσιο της κατασκευής μας, έστω Y χώρος Banach που εμφυτεύεται συνεχώς στον X, χωρίς να έχει, κατ΄ ανάγκη, ως νόρμα του τον περιορισμό της νόρμας του X σε αυτόν. Με άλλα λόγια, ο Y δεν είναι, κατ΄ ανάγκη, κλειστός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε, όμως, ότι ο Y είναι $\mathcal{T}$-αναλλοίωτος και δεχόμαστε ότι ο περιορισμός της $\mathcal{T}$ σε αυτόν είναι ισχυρώς συνεχής ημιομάδα. Θα αποδείξουμε ότι ο απειροστικός γεννητορας $(B, Dom(B))$ της $(T(t)|_Y)_{t\geq 0}$ είναι ακριβώς το τμήμα $(A_Y, Dom(A_Y))$ του τελεστή $(A, Dom(A))$ στον Y.

Παρατηρούμε, κατ΄ αρχήν, ότι, εφόσον $Y \hookrightarrow X$, ισχύει $B \subset A_Y$. Δηλαδή ο B είναι ένας περιορισμός του A_Y. Άρα

$$Dom(B) \subseteq Dom(A_Y) \tag{2.3.8}$$

και $By = A_Y y$ για κάθε $y \in Dom(B)$. Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Από το Θεώρημα 2.2.23 παίρνουμε

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x ds, \ \forall x \in X$$

και

$$R(\lambda, B)y = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)y ds, \ \forall y \in Y$$

Τότε $R(\lambda, B)y = R(\lambda, A_Y)y$ για κάθε $y \in Y$. Έστω y_0 τυχόν στοιχείο του $Dom(A_Y)$. Προφανώς $y_0 \in Dom(A) \cap Y$ οπότε $y_0 \in Y$, ενώ και $A_Y y_0 = Ay_0 \in Y$. Άρα έχουμε

$$(\lambda I - A_Y)y_0 = \lambda y_0 - A_Y y_0 = \lambda y_0 - Ay_0 \in Y$$

Έτσι

$$y_0 = R(\lambda, A_Y)(\lambda I - A_Y)y_0 = R(\lambda, B)(\lambda I - A_Y)y_0$$

και, κατά συνέπεια, $y_0 \in Dom(B)$ καθώς $R(\lambda, B) : Y \hookrightarrow Dom(B)$. Λαμβάνουμε λοιπόν, τον εγκλεισμό

$$Dom(A_Y) \subseteq Dom(B) \tag{2.3.9}$$

Από τις σχέσεις (2.3.8) και (2.3.9) συνάγουμε ότι $Dom(A_Y) = Dom(B)$ και τελικα πράγματι $B = A_Y$.

Όπως προαναφέρθηκε, αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach X και $\mathcal{T}$-αναλλοίωτος, τότε η ημιομάδα υποχώρου $(T(t)|_Y)_{t\geq 0}$ είναι οπωσδήποτε ισχυρώς συνεχής. Βεβαίως για κάποια $y \in Y$ υπάρχει το $\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)y-y}{h} = z$ και $z \in Y$ (διότι $\bar{Y} = Y$). Φανερά $z \in X$ και, άρα, το τμήμα $(A_Y, Dom(A_Y))$ του απειροστικού γεννήτορα $(A, Dom(A))$ της $\mathcal{T}$ στον υπόχωρο Y είναι 'απλώς ' ένας περιορισμός αυτού. Έτσι, αν

$(B, Dom(B))$ είναι γεννήτορας της ημιομάδας υποχώρου, τότε $B = A_Y$ όπου $A_Y y = Ay$ για κάθε $y \in Dom(A_Y) = Dom(A) \cap Y$ (δεν χρειάζεται, δηλαδή, η συνθήκη $Ay \in Y$).

(II) **Ημιομάδες πηλίκα** (quotient semigroups)

Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach X και $\mathcal{T}$-αναλλοίωτος. Θεωρούμε τον χώρο Banach πηλίκο X/Y και την κανονική απεικόνιση $q : X \to X/Y$. Ορίζονται, τότε, καλώς οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $T(t)/q$ από την σχέση $T(t)/q(x) := q(T(t)x)$ για κάθε $x \in X$ και $t \geq 0$ και συγκροτούν μια νέα ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(T(t)/Y)_{t\geq 0}$ επί του X/Y, επονομαζόμενη ημιομάδα πηλίκο.

Ο απειροστικός γεννήτορας $(A, Dom(A))$ της καινούριας ημιομάδας δίδεται από τον τύπο $A/q(x) = q(Ax)$ για κάθε $x \in Dom(A) := q(Dom(A))$. Πράγματι, κάθε στοιχείο $\hat{x} := q(x) \in Dom(A)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{x} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)/\hat{y} ds$$

για κάποιο $\hat{y} = q(y) \in X/Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \omega_0(\mathcal{T})$. Επομένως

$$\hat{x} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} q(T(s)y) ds = q(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)y ds) = q(z)$$

με $z \in Dom(A)$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\hat{x} \in Dom(A)$, υπάρχει αντιπρόσωπος $z \in X$ ο οποίος ανήκει στο $Dom(A)$.

(III) **Όμοιες ημιομάδες** (similar semigroups)

Δοθέντος ενός δεύτερου χώρου Banach Y και ενός ισομορφισμού $V : Y \to X$ κατασκευάζεται μια καινούρια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ επί του Y εάν οριστεί

$$S(t) = V^{-1} T(t) V, \ \forall t \geq 0$$

Οι δύο ημιομάδες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{S}$ καλούνται όμοιες ή ισομορφικές Για την απόδειξη της ισχυρής συνέχειας της νέας ημιομάδας, παρατηρούμε ότι $Vy \in X$ για κάθε $y \in Y$ οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} ||S(t)y - y|| &= \lim_{t\to 0+} ||V^{-1}T(t)Vy - V^{-1}Vy|| \\ &\leq \lim_{t\to 0+} ||V^{-1}|| ||T(t)Vy - Vy|| \\ &= 0 \end{aligned}$$

(λόγω της ισχυρής συνέχειας της ημιομάδας $\mathcal{T}$). Άρα $\lim_{t\to 0+} S(t)y = y$ για κάθε $y \in Y$ και ο ισχυρισμός έπεται από την Πρόταση 2.2.6. Η νέα ημιομάδα έχει ως απειροστικό γεννήτορα τον τελεστή $(B, Dom(B))$, όπου $B = V^{-1}AV$ και $Dom(B) = \{y \in Y : Vy \in Dom(A)\}$. Βεβαίως $\sigma(B) = \sigma(A)$, καθώς ο $\lambda I - B$ αποτυγχάνει να είναι '1-1'και 'επί', για τα $\lambda \in \mathbb{C}$ αποτυχίας και του $\lambda I - A$, ενώ έχουμε επίσης $R(\lambda, B) = V^{-1}R(\lambda, A)V$ για κάθε $\lambda \in \rho(A)$, $s(A) = s(B)$ και $\omega_0(\mathcal{T}) = \omega_0(\mathcal{S})$.

Είναι δυνατόν να κατασκευαστεί C_0-ημιομάδα τελεστών όμοια της αρχικής επί του ίδιου χώρου Banach X, θεωρώντας ένας αυτομορφισμό $V : X \to X$ και συνεχίζοντας όπως προηγουμένως.

(IV) **Ημιομάδες γινόμενα** (product semigroups)
Έστω $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ μια δεύτερη ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του χώρου Banach X η οποία αντιμετατίθεται με την $\mathcal{T}$. Δηλαδή ισχύει $S(t)T(t) = T(t)S(t)$ για κάθε $t \geq 0$. Οι τελεστές $U(t) := S(t)T(t)$ είναι, προφανώς, γραμμικοί και φραγμένοι για κάθε $t \geq 0$ και συγκροτούν μια καινούρια C_0-ημιομάδα $(U(t))_{t\geq 0}$ επί του X που αποκαλείται ημιομάδα γινόμενο των $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$.

Καταρχήν είναι άμεσο ότι $U(0) = I$. Αποδεικνύουμε, περαιτέρω, ότι οι τελεστές $T(s)$ και $S(r)$ αντιμετατίθενται για κάθε $s, r \geq 0$. Έστω ότι $s, r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε $s = p_1/q$ και $r = p_2/q$ για $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$ και $q \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}$. Λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} S(r)T(s) &= S(p_2/q)T(p_1/q) \\ &= S(1/q)^{p_2}T(1/q)^{p_1} \\ &= T(1/q)^{p_1}S(1/q)^{p_2} \\ &= T(p_1/q)S(p_2/q) \\ &= T(s)S(r) \end{aligned}$$

Άρα $F(r, s) = G(r, s)$ για κάθε $s, r \in \mathbb{Q}_+$, όπου

$$F : [0, \infty) \times [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X),\ F(r, s) = S(r)T(s)$$

και

$$G : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X),\ G(r, s) = T(s)S(r)$$

Καθώς συμπίπτουν στο πυκνό υποσύνολο $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ του $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ και είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις F και G είναι ίσες στο πεδίο ορισμού τους. Έπεται ότι $S(r)T(s) = T(s)S(r)$ για κάθε $s, r \geq 0$. Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(s + r) &= S(s + r)T(s + r) \\ &= S(s)S(r)T(s)T(r) \\ &= S(s)T(s)S(r)T(r) \\ &= U(s)U(r) \end{aligned}$$

για κάθε $s, r \geq 0$. Από την προηγηθείσα ανάλυση συνάγεται πως η οικογένεια $(U(t))_{t\geq 0}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του X.

Διατυπώνουμε, στη συνέχεια, ένα χρήσιμο Λήμμα από τη Θεωρία Τελεστών

Λήμμα 2.3.2 *Έστω X χώρος Banach και J κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Αν $P, Q : J \to \mathcal{L}(X)$ είναι δύο ισχυρώς συνεχείς συναρτήσεις τελεστών, τότε και το γινόμενο τους $PQ : J \to \mathcal{L}(X)$ με $(PQ)(t) = P(t)Q(t)$ για κάθε $t \in J$ είναι ισχυρώς συνεχής συνάρτηση τελεστών.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x \in X$ και $t \in J$ και θεωρούμε ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του J με $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\{P(t_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ είναι φραγμένο. Κατά συνέπεια, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $||P(t_n)|| \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} ||(PQ)(t_n)x - (PQ)(t)x|| &= ||P(t_n)Q(t_n)x - P(t)Q(t)x|| \\ &\leq ||P(t_n)||||Q(t_n)x - Q(t)x|| \\ &\quad +||P(t_n)Q(t)x - P(t)Q(t)x|| \end{aligned}$$

Αλλά $\lim_{n\to+\infty} ||Q(t_n)x - Q(t)x|| = 0$, διότι η Q είναι ισχυρώς συνεχής συνάρτηση και

$$\lim_{n\to+\infty} ||P(t_n)Q(t)x - P(t)Q(t)x|| = 0$$

διότι $Q(t)x \in X$ και η P είναι ισχυρώς συνεχής. Επομένως

$$\lim_{n\to+\infty} ||(PQ)(t_n)x - (PQ)(t)x|| = 0$$

και το συμπέρασμα του Λήμματος έπεται.

Με άμεση εφαρμογή του προηγούμενου Λήμματος, εξασφαλίζεται η ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας γινόμενο $(U(t))_{t\geq 0}$.

Αν $(A, Dom(A))$ και $(B, Dom(B))$ είναι οι γεννήτορες των ημιομάδων $\mathcal{T}$ και $\mathcal{S}$ αντιστοίχως, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $Dom(A) \cap Dom(B)$ είναι $||\cdot||$-πυκνό στον X και $\mathcal{T}$-αναλλοίωτο. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.19 το συγκεκριμένο σύνολο αποτελεί πυρήνα (core) του απειροστικού γεννήτορα $(C, Dom(C))$ της ημιομάδας γινόμενο. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι η απεικόνιση $t \to U(t)x$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $x \in Dom(A) \cap Dom(B)$ και μάλιστα ισχύει

$$\frac{d}{dt}U(t)x|_{t=0} = Cx = Ax + Bx$$

Άρα $C = A+B$ επί του πυρήνα $Dom(A)\cap Dom(B)$. Για τις λεπτομέρειες των αποδείξεων των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο βιβλίο των K.J. Engel-R. Nagel, [12], p. 64 και p. 520.

Κεφάλαιο 3

Παραδείγματα Ημιομάδων Τελεστών

Έπειτα από την λεπτομερή εισαγωγή σε βασικές έννοιες από την Θεωρία Ημιομάδων που έλαβε χώρα στο προηγούμενο Κεφάλαιο, κρίνεται σκόπιμη η διεξοδική παρουσίαση ορισμένων αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων ημιομάδων φραγμένων γραμμικών τελεστών σε συγκεκριμένους, συχνά εμφανιζόμενους στην πράξη, χώρους Banach.

Στην πρώτη παράγραφο του παρόντος Κεφαλαίου γίνεται αναφορά στις ημιομάδες πινάκων με τις πολλές εφαρμογές στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$, όπου $M_n(\mathbb{C})$ ο χώρος όλων των μιγαδικών $n \times n$-πινάκων, τότε η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ με $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t \geq 0$ αποτελεί μια συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα πινάκων (Ορισμός 3.1.1) η οποία είναι ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος (Θεώρημα 3.1.6).

Στη δεύτερη Παράγραφο γίνεται εκτενής μελέτη των πολλαπλασιαστικών ημιομάδων στο χώρο Banach $C_0(\Omega)$. Αν Ω είναι τοπικά συμπαγής χώρος και η $q : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < +\infty$, τότε οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές που εισάγονται στον $C_0(\Omega)$, σύμφωνα με τον τύπο $T_q(t)f = \mathrm{e}^{tq} f$ για κάθε $t \geq 0$, συγκροτούν μια μονοπαραμετρική πολλαπλασιαστική ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ (Πρόταση 3.2.3) η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν η q είναι φραγμένη (Πρόταση 3.2.4). Η πολλαπλασιαστική ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ του $C_0(\Omega)$ είναι ισχυρώς συνεχής (Πρόταση 3.2.5) και έχει ως απειροστικό γεννήτορα το γραμμικό τελεστή $(M_q, Dom(M_q))$, όπου $M_q = qf$ και $Dom(M_q) = \{f \in C_0(\Omega) : \ qf \in C_0(\Omega)\}$ (Πρόταση 3.2.7). Τα ίδια αποτελέσματα, κατάλληλα προσαρμοσμένα, διατυπώνονται και στο πλαίσιο των χώρων L^p.

Σειρά στην τρίτη παράγραφο παίρνουν οι ημιομάδες που επάγονται στους χώρους L^p από τους τελεστές αριστερής (ή δεξιάς) μετατόπισης $T_l(t)$ με $(T_l(t)f)(s) = f(s + t), s \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}_+$ (ή $T_r(t)$ με $(T_r(t)f)(s) = f(s - t), s \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}_+$). Η ημιομάδα αριστερών μετατοπίσεων $(T_l(t))_{t\geq 0}$ στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R})$ είναι ισχυρώς συνεχής και ισομετρική (Πρόταση 3.3.1) με απειροστικό γεννήτορα το γραμμικό τελεστή

$(A, Dom(A))$, όπου $Af(x) = f'(x)$ και

$$Dom(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : \ f \text{ απόλυτα συνεχής και } f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

(Πρόταση 3.3.2).

Στην τέταρτη και τελευταία παράγραφο μελετώνται οι συνελικτικές ημιομάδες στον $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται (Θεώρημα 3.4.3) ότι ο τύπος

$$T(t)f = \begin{cases} K_t * f, \text{ αν } t > 0 \\ f, \text{ αν } t = 0 \end{cases}$$

όπου K_t μιγαδική συνάρτηση με συγκεκριμένες ιδιότητες, ορίζει ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$. Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στην Εφαρμογή 3.4.4, όπου παρουσιάζεται η σημαντικότατη, για την εργασία μας, ημιομάδα Gauss.

3.1 Δυναμικά συστήματα πεπερασμένης διάστασης. Ημιομάδες πινάκων

Έστω $M_n(\mathbb{C})$ ο χώρος όλων των μιγαδικών $n \times n$ πινάκων. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζεται ο εκθετικός πίνακας e^{tA} από την σχέση

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Λαμβάνοντας οποιαδήποτε νόρμα στον χώρο $\mathbb{C}^n$ και την αντίστοιχη νόρμα πινάκων στον $M_n(\mathbb{C})$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα της παραπάνω σειράς σχηματίζουν μια ακολουθία Cauchy. Άρα η σειρά συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $||\mathrm{e}^{tA}|| \leq \mathrm{e}^{t||A||}$, για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον η απεικόνιση $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ από το $\mathbb{R}_+$ στο $M_n(\mathbb{C})$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\begin{cases} (i) \ \mathrm{e}^0 = I \\ (ii) \ \mathrm{e}^{t+s} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA} \text{ για κάθε } t, s \geq 0 \end{cases}$$

Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών ακολουθεί τα βήματα των αναλόγων αποδείξεων για A φραγμένο γραμμικό τελεστή (Βλ. Παράγραφο 2.1).

Ουσιαστικά η απεικόνιση $t \mapsto T(t) := \mathrm{e}^{tA}$ είναι ένας ομομορφισμός από την προσθετική ημιομάδα $(\mathbb{R}_+, +)$ στην πολλαπλασιαστική ημιομάδα $(M_n(\mathbb{C}), \cdot)$. Στο σημείο αυτό δίνουμε τον εξής Ορισμό:

Ορισμός 3.1.1 *Καλούμε μονοπαραμετρική ημιομάδα πινάκων που παράγεται από τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ την οικογένεια $(T(t))_{t \geq 0}$ με $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t \geq 0$.*

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι δεν συντρέχουν ουσιαστικοί λόγοι περιορισμού της χρονικής παραμέτρου t στον $\mathbb{R}_+$. Ο ορισμός του εκθετικού πίνακα, η σχέση $||\mathrm{e}^{tA}|| \leq \mathrm{e}^{t||A||}$, η συνέχεια της απεικόνισης $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ και η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε.) ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (ακόμα και για $t \in \mathbb{C}$). Η απεικόνιση $T(\cdot) : t \mapsto T(t) := \mathrm{e}^{tA}$ επεκτείνεται σε έναν συνεχή (αντίστοιχα αναλυτικό) ομομορφισμό από την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ (αντίστοιχα $(\mathbb{C}, +)$) στην πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ όλων των αντιστρέψιμων μιγαδικών $n \times n$ πινάκων. Καλούμε, λοιπόν, μονοπαραμετρική ομάδα πινάκων που παράγεται από τον A την οικογένεια $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ με $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα 3.1.2 (i) *Η ημιομάδα πινάκων που παράγεται από έναν διαγώνιο πίνακα* $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$ *είναι η* $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ *με* $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{ta_1}, \mathrm{e}^{ta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{ta_n})$.

(ii) *Έστω ότι ο πίνακας A είναι ένα $k \times k$ Jordan block για ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλαδή*

$$A = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \mathbb{O} & \\ & & & 0 & \lambda & 1 \\ & \mathbb{O} & & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Προφανώς $A = D + N$ όπου $D = \lambda I$. Επιπλέον $N^k = 0$ και

$$\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & & \ldots & t \end{pmatrix}$$

Καθώς οι πίνακες D και N αντιμετατίθενται, κλασσική ιδιότητα της Ανάλυσης Πινάκων δίνει ότι $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\lambda}\mathrm{e}^{tN}$. Επομένως η ημιομάδα πινάκων που παράγεται απο τον A είναι η $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$.

Παρατηρούμε, βεβαίως, ότι οι ίδιες ακριβώς σχέσεις ορίζουν μονοπαραμετρικές ομάδες πινάκων στα Παραδείγματα (i) και (ii).

Για τυχόντες πίνακες A ο απευθείας υπολογισμός της e^{tA} είναι εργασία εξαιρετικά δύσκολη και κάποτε αδύνατη. Χάρη στην ύπαρξη της κανονικής μορφής Jordan, ωστόσο, το ακόλουθο λήμμα δείχνει ότι κατά κάποιο τρόπο τα Παραδείγματα (i) και (ii) αρκούν.

Λήμμα 3.1.3 *Έστω πίνακας $B \in M_n(\mathbb{C})$ και αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n(\mathbb{C})$. Τότε η ημιομάδα που παράγεται από τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ με $A = S^{-1}BS$ δίνεται από τον τύπο $\mathrm{e}^{tA} = S^{-1}\mathrm{e}^{tB}S,\ t \geq 0$.*

Απόδειξη. Η σχέση $A = S^{-1}BS$ συνεπάγεται ότι $A^k = S^{-1}B^kS$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή οι πίνακες S και S^{-1} είναι συνεχείς τελεστές, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k S^{-1} B^k S}{k!} \\
&= S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k B^k}{k!} \right) S \\
&= S^{-1} e^{tB} S, \ \forall\, t \geq 0
\end{aligned}$$

κάτι που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Ουσιαστικά, όμοιοι πίνακες παράγουν όμοιες ημιομάδες. Καθώς κάθε μιγαδικός $n \times n$ πίνακας είναι όμοιος προς ένα ευθύ άθροισμα από Jordan blocks, συμπεραίνουμε ότι κάθε ημιομάδα πινάκων είναι όμοια προς ένα ευθύ άθροισμα ημιομάδων σαν και αυτές που παρουσιάζονται στο Παράδειγμα 3.1.2 (ii).

Με αποδεικτική διαδικασία ανάλογη αυτής που ακολουθήσαμε για την Πρόταση 2.1.5 και το Θεώρημα 2.1.6, λαμβάνουμε τα ακόλουθα σημαντικά αποτελέσματα.

Πρόταση 3.1.4 *Έστω $T(t) = e^{tA}$ για κάποιον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$. Τότε η συνάρτηση $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to M_n(\mathbb{C})$ είναι διαφορίσιμη και αποτελεί τη μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\text{(Π.Α.Τ.)} \begin{cases} \frac{d}{dt}T(t) = AT(t), \ t \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

Μάλιστα ισχύει $A = \dot{T}(0) = \frac{d}{dt}T(t)|_{t=0}$.

Θεώρημα 3.1.5 *Έστω $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to M_n(\mathbb{C})$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση*

$$\text{(Σ.Ε.)} \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) \ \forall\, t, s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

Υπάρχει, τότε, πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ για τον οποίο ισχύει $T(t) = e^{tA}$ για κάθε $t \geq 0$.

Με το Θεώρημα 3.1.5 χαρακτηρίζουμε όλες τις συνεχείς μονοπαραμετρικές ημιομάδες στον $\mathbb{C}^n$ ως εκθετικές συναρτήσεις πινάκων $(e^{tA})_{t\geq 0}$.

Ενδιαφερόμαστε για την ποιοτική συμπεριφορά, κυρίως καθώς $t \to +\infty$, του εκθετικού πίνακα e^{tA}. Σύγκλιση, φράξιμο και ευστάθεια του e^{tA}, καθώς $t \to +\infty$, δύναται να εξεταστούν καλύτερα μέσω της επιρροής που έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες του πίνακα A σε αυτόν. Τούτο συμβαίνει γιατί, όπως έχουμε ήδη σημειώσει, ο ακριβής προσδιορισμός του πίνακα e^{tA} είναι εφικτός μόνο σε λίγες περιπτώσεις. Καλούμε μια συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα πινάκων $(e^{tA})_{t\geq 0}$ ευσταθή (stable) εάν ισχύει

$$\lim_{t\to+\infty} ||e^{tA}|| = 0$$

όπου $||\cdot||$ συμβολίζει οποιαδήποτε νόρμα πινάκων στον χώρο $M_n(\mathbb{C})$. Επειδή η ομοιόμορφη και η κατά σημείο σύγκλιση στον χώρο αυτό συμπίπτουν, η ευστάθεια της ημιομάδας πινάκων μπορεί να οριστεί από τη σχέση

$$\lim_{t\to+\infty}||\mathrm{e}^{tA}x||=0$$

για κάθε $x\in\mathbb{C}^n$. Το κλασσικό θεώρημα ευστάθειας Lyapunov χαρακτηρίζει την ευστάθεια της ημιομάδας $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ σε σύνδεση με τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Θεώρημα 3.1.6 *(Lyapunov, 1892)*
Για μια συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα πινάκων $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:
(α) Η ημιομάδα $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ είναι ευσταθής.
(β) Όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Απόδειξη. Θα παραθέσουμε μια ιδιαιτέρως απλή απόδειξη στην οποία κλειδί αποτελεί το γεγονός ότι η ευστάθεια παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας. Μπορούμε, δηλαδή, να υποθέσουμε ότι ο πίνακας A διαθέτει κανονική μορφή Jordan οπότε η ημιομάδα $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ που αυτός παράγει θα είναι ευσταθής αν και μόνον αν είναι ευσταθείς όλες οι ημιομάδες $(\mathrm{e}^{tA_k})_{t\geq 0}$ που παράγουν τα Jordan blocks A_k. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.2 (ii) ένα τυπικό στοιχείο του πίνακα e^{tA_k} έχει μορφή $\gamma t^r\mathrm{e}^{\lambda t}$ όπου $\gamma\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$ και λ είναι ιδιοτιμή του A. Θέτοντας $\lambda=a+b\mathrm{i}$ έχουμε $\lim_{t\to+\infty}||\mathrm{e}^{tA_k}||=0$ αν και μόνο αν

$$\lim_{t\to+\infty}\gamma t^r\mathrm{e}^{\lambda t}=\lim_{t\to+\infty}\gamma t^r\mathrm{e}^{at}(\cos(bt)+\mathrm{i}\sin(bt))=0$$

Ισοδύναμα, αν και μόνο αν $a<0$, και η ισοδυναμία των ισχυρισμών (α) και (β) καθίσταται φανερή.

Με ανάλογα επιχειρήματα μπορεί να αποδειχθεί το εξής

Πόρισμα 3.1.7 *Για την ημιομάδα $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ που παράγεται από τον πίνακα $A\in\mathbb{C}$, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Η ημιομάδα είναι φραγμένη, υπάρχει δηλαδή σταθερά $M\geq 1$ ώστε να ισχύει $||\mathrm{e}^{tA}||\leq M$ για κάθε $t\geq 0$.
(β) Για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A ισχύει $\mathrm{Re}\lambda\leq 0$ και όταν, ιδιαίτερα, έχουμε $\mathrm{Re}\lambda=0$ τότε η ιδιοτιμή λ είναι απλή (δηλαδή τα Jordan blocks που αντιστοιχούν σε αυτήν έχουν μέγεθος ένα).

3.2 Πολλαπλασιαστικές ημιομάδες στους χώρους $C_0(\Omega)$ και $L^p(\Omega,\mu)$.

Ξεκινούμε, θεωρώντας το χώρο $C_0(\Omega)$ όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων σε κάποιον τοπικά συμπαγή χώρο Ω που μηδενίζονται στο άπειρο. Ακριβέστερα

$$C_0(\Omega):=\{f\in C(\Omega):(\forall\epsilon>0)(\exists\ \text{συμπαγές}\ K_\epsilon\subset\Omega)||f(s)||<\epsilon,\ \forall\ s\in\Omega-K_\epsilon\}.$$

Εφοδιάζοντας τον $C_0(\Omega)$ με τη νόρμα $||\cdot||_\infty$ λαμβάνουμε έναν χώρο Banach. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2.1 *Ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_q που επάγεται στον χώρο $C_0(\Omega)$ από κάποια συνεχή συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$, ορίζεται από τη σχέση $(M_q)(f) := qf$, για κάθε f που ανήκει στο $Dom(M_q) := \{f \in C_0(\Omega) : qf \in C_0(\Omega)\}$.*

Το βασικότερο πλεονέκτημα των πολλαπλασιαστικών τελεστών M_q συνίσταται στο γεγονός ότι οι περισσότερες ιδιότητες τους χαρακτηρίζονται από αντίστοιχες ιδιότητες των συναρτήσεων q. Στην επόμενη πρόταση συνοψίζουμε κάποιες από αυτές τις ιδιότητες.

Πρόταση 3.2.2 *Έστω $(M_q, Dom(M_q))$ ο πολλαπλασιαστικός τελεστής που επάγεται στο χώρο $C_0(\Omega)$ από κάποια συνεχή συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν τα εξής:*
(α) *Ο γραμμικός τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός.*
(β) *Ο γραμμικός τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ είναι φραγμένος και $Dom(M_q) = C_0(\Omega)$ αν, και μόνο αν, η συνάρτηση q είναι φραγμένη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε*

$$||M_q|| = ||q|| := \sup_{s\in\Omega} |q(s)|$$

(γ) *Ο τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν, και μόνο αν, η συνάρτηση q έχει φραγμένο αντίστροφο $1/q$ (δηλαδή αν και μόνο αν $0 \notin \overline{q(\Omega)}$). Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M_q^{-1} = M_{\frac{1}{q}}$.*
(δ) *Το φάσμα του τελεστή $(M_q, Dom(M_q))$ είναι η κλειστή εικόνα της συνάρτησης q. Δηλαδή ισχύει $\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}$*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [12, *p.* 25].

Με κάθε συνεχή συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$ συσχετίζουμε, τώρα, την εκθετική συνάρτηση

$$\mathrm{e}^{tq} : s \mapsto \mathrm{e}^{tq(s)},\ \forall\ s \in \Omega,\ t \geq 0$$

και τους αντίστοιχους πολλαπλασιαστικούς τελεστές

$$T_q(t) = \mathrm{e}^{tq} f,\ \forall f \in C_0(\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι $T_q(0) = f$ για κάθε $f \in C_0(\Omega)$ και, άρα, έχουμε $T_q(0) = I$. Επιπλέον

$$T_q(t+s)f = \mathrm{e}^{(t+s)q} f = \mathrm{e}^{tq}\mathrm{e}^{sq} f = T_q(t)((T_q(s))f) = T_q(t)T_q(s)f,\ \forall\ f \in C_0(\Omega)$$

και, κατά συνέπεια, λαμβάνουμε

$$T_q(t+s) = T_q(t)T_q(s), \forall\ t, s \geq 0$$

Καθώς οι τελεστές $T_q(t)$ απεικονίζουν τον $C_0(\Omega)$ στον $C_0(\Omega)$, προκειμένου να λάβουμε μια μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του $C_0(\Omega)$, αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι οι συγκεκριμένοι γραμμικοί τελεστές είναι φραγμένοι για $t \geq 0$. Από την Πρόταση 3.2.2, τούτο ισχύει αν και μόνο αν οι εκθετικές συναρτήσεις $\mathrm{e}^{tq(s)}$ είναι φραγμένες για κάθε $t \geq 0$ και $s \in \Omega$, δηλαδή αν και μόνο αν έχουμε $\sup_{s\in\Omega} |\mathrm{e}^{tq(s)}| < +\infty$, για κάθε $t \in [0,+\infty)$. Αλλά

$$q(s) = \mathrm{Re}\, q(s) + i\mathrm{Im}\, q(s) \Rightarrow |\mathrm{e}^{tq(s)}| = \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\, q(s)}$$

Θα πρέπει λοιπόν

$$\sup_{s\in\Omega} \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\, q(s)} = \mathrm{e}^{t\sup_{s\in\Omega}\mathrm{Re}\, q(s)} < +\infty$$

και τελικά

$$\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$$

Η προηγηθείσα ανάλυση οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.2.3 *Έστω Ω τοπικά συμπαγής χώρος και $q : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει*

$$\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$$

Τότε οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές που ορίζονται από τη σχέση

$$T_q(t)f = \mathrm{e}^{tq}f,\ \forall\, t \in [0,+\infty),\ f \in C_0(\Omega)$$

συγκροτούν μια μονοπαραμετρική ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach $C_0(\Omega)$. Η $(T_q(t))_{t\geq 0}$ καλείται η πολλαπλασιαστική ημιομάδα (multiplicative semigroup) που παράγεται από την πολλαπλασιαστικό τελεστή T_q ή την συνάρτηση q.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.4 και το Θεώρημα 2.1.6 η ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ θα είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν είναι της μορφής $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ για κάποιο φραγμένο γραμμικό τελεστή A επί του $C_0(\Omega)$. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι κάτι τέτοιο μπορεί να εξαχθεί από την συνάρτηση q. Συγκεκριμένα έχουμε την ακόλουθη

Πρόταση 3.2.4 *Η πολλαπλασιαστική ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ επί του $C_0(\Omega)$ που παράγεται από μια συνεχή συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει $\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$, είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν η q είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $q : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Τότε και ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_q με $M_q f = qf$ για κάθε $f \in C_0(\Omega)$ είναι φραγμένος, από την Πρόταση 3.2.2. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tM_q}(f) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k M_q^k(f)}{k!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k M_q^k}{k!}\right) f \\ &= \mathrm{e}^{tq} f \\ &= T_q(t)f,\ \forall f \in C_0(\Omega) \end{aligned}$$

Δηλαδή η ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $T_q(t)f = \mathrm{e}^{tT_q(t)}, \forall t \geq 0$ και, άρα, είναι ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα τελεστών.

Έστω ότι η συνάρτηση q δεν είναι φραγμένη. Επιλέγουμε ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Ω τέτοια ώστε $|q(s_n)| \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$. Θέτουμε $t_n = \frac{1}{|q(s_n)|}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι $\lim t_n = 0$ καθώς $n \to +\infty$. Επειδή $\mathrm{e}^z \neq 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|1-\mathrm{e}^{t_n q(s_n)}| \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για συναρτήσεις f_n του $C_0(\Omega)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $||f_n|| = 1 = f_n(s_n)$ λαμβάνουμε, καθώς οι τελεστές $T_q(0)$ και $T_q(t_n)$ είναι φραγμένοι, ότι

$$\begin{aligned} ||T_q(0) - T_q(t_n)|| &\geq ||T_q(0)f_n - T_q(t_n)f_n|| \\ &= ||f_n - \mathrm{e}^{t_n q} f_n|| \\ &\geq |1 - \mathrm{e}^{t_n q(s_n)}| \\ &\geq \delta > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Άρα η ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, για κάθε συνεχή συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την σχέση $\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$ αλλά που δεν είναι φραγμένη, αποκτούμε μια ημιομάδα τελεστών η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τέτοιες ημιομάδες, ωστόσο, είναι ισχυρώς συνεχείς όπως αποδεικνύεται στην επόμενη

Πρόταση 3.2.5 *Έστω $q : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει*

$$\omega := \sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$$

και $(T_q(t))_{t\geq 0}$ η αντίστοιχη πολλαπλασιαστική ημιομάδα τελεστών επό του χώρου Banach $C_0(\Omega)$. Τότε οι απεικονίσεις $t \to T_q(t)f = \mathrm{e}^{tq}f$, από το $\mathbb{R}_+$ στο $C_0(\Omega)$ είναι συνεχείς σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $f \in C_0(\Omega)$ και, κατά συνέπεια, η ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $f \in C_0(\Omega)$ με $||f|| \leq 1$. Για $\epsilon > 0$ θεωρούμε ένα συμπαγές υποσύνολο K του Ω έτσι ώστε $|f(s)| < \frac{\epsilon}{2(\mathrm{e}^{|\omega|}+1)}$ για κάθε $s \in \Omega - K$. Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής σε συμπαγή σύνολα, υπάρχει $t_0 \in (0,1)$ ώστε να ισχύει $|\mathrm{e}^{tq(s)} - 1| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $s \in K$ και $0 \leq t \leq t_0$. Άρα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||\mathrm{e}^{tq}f - f|| &= \sup_{s\in K} |\mathrm{e}^{tq(s)}f(s) - f(s)| + \sup_{s\in\Omega-K} |\mathrm{e}^{tq(s)}f(s) - f(s)| \\ &= \sup_{s\in K}(|\mathrm{e}^{tq(s)} - 1||f(s)|) + \sup_{s\in\Omega-K}(|\mathrm{e}^{tq(s)} - 1||f(s)|) \\ &\leq \sup_{s\in K}(|\mathrm{e}^{tq(s)} - 1|) + (\mathrm{e}^{|\omega|}+1) \sup_{s\in\Omega-K} |f(s)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + (\mathrm{e}^{|\omega|}+1)\frac{\epsilon}{2(\mathrm{e}^{|\omega|}+1)} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Δηλαδή $||\mathrm{e}^{tq}f - f|| < \epsilon$ για $0 \leq t \leq t_0$ και $f \in C_0(\Omega)$ με $||f|| \leq 1$, οπότε οι απεικονίσεις $t \to T_q(t)f$ είναι συνεχείς σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ επί της κλειστής μοναδιαίας μπάλλας του $C_0(\Omega)$. Συνεπώς οι συγκεκριμένες απεικονίσεις είναι συνεχείς σε κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ επί του $C_0(\Omega)$ και η αντίστοιχη πολλαπλασιαστική ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής.

Στην προσπάθειά μας να προσδιορίσουμε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $T(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την συναρτησιακή εξίσωση

$$(\Sigma.\mathrm{E}.) \begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) \ \forall t, s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases}$$

θα πρέπει να ακολουθήσουμε συλλογιστική πορεία ανάλογη εκείνης που υιοθετήσαμε στην Παράγραφο 2.1, όταν αναφερθήκαμε στις ομοιόμορφα συνεχείς ημιομάδες, οπότε θα καταλήξουμε στην ύπαρξη μοναδικού μιγαδικού αριθμού a ώστε να ισχύει $T(t) = \mathrm{e}^{ta}$ για κάθε $t \geq 0$. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [12, *pp.* 2-4].

Ορμώμενοι από αυτή την παρατήρηση, αποδεικνύουμε στην συνέχεια ότι κάθε ισχυρώς συνεχής ημιομάδα από πολλαπλασιαστικούς τελεστές στον $C_0(\Omega)$, είναι μια πολλαπλασιαστική ημιομάδα με την έννοια της Πρότασης 3.2.3.

Πρόταση 3.2.6 *Για κάθε $t \geq 0$, έστω $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι αντίστοιχοι πολλαπλασιαστικοί τελεστές $T(t)$ με $T(t) = m_t f$ για κάθε $f \in C_0(\Omega)$ και $t \geq 0$ σχηματίζουν μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach $C_0(\Omega)$. Υπάρχει τότε, συνεχής συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την σχέση $\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$ και για την οποία ισχύει $m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)}$ για κάθε $s \in \Omega$ και $t \geq 0$.*

Απόδειξη. Για σταθεροποιημένο $s \in \Omega$, επιλέγουμε $f \in C_0(\Omega)$ τέτοια ώστε $f \equiv 1$ σε μια συμπαγή περιοχή αυτού. Από την υπόθεση, η απεικόνιση $\mathbb{R}_+ \ni t \to (T(t)f) = m_t(s)f(s) = m_t(s) \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε.) που διατυπώσαμε παραπάνω. Υπάρχει, συνεπώς, μοναδικό $q(s) \in \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει $m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)}$ για κάθε $t \geq 0$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για όλα τα στοιχεία του Ω, ορίζεται καλώς μια συνάρτηση $s \to q(s)$ απο το Ω στο $\mathbb{C}$ και μάλιστα $m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)}$ για κάθε $s \in \Omega$ και $t \geq 0$. Επειδή οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές $T(t)$ συγκροτούν μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα, έπεται ότι

$$\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, m_t(s) = \sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, e^{tq(s)} = \sup_{s\in\Omega} \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\, q(s)} = \sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) < +\infty$$

Επιπλέον, εφ'οσον η συνάρτηση $s \to m_t(s)$ από το Ω στο $\mathbb{C}$ συμπίπτει σε μιαν περιοχή του τυχόντος $s \in \Omega$ με την συνάρτηση $s \to (T(t)f)(s)$ απο το Ω στο $C_0(\Omega)$, συμπεραίνουμε ότι οι απεικονίσεις $s \to \mathrm{e}^{tq(s)}$ απο το Ω στο $\mathbb{C}$ είναι συνεχείς για κάθε $t \geq 0$.

Θέλουμε να επιβεβαιώσουμε την συνέχεια της συνάρτησης q. Προς τούτο, θα αποδείξουμε αρχικά πως η q είναι φραγμένη σε συμπαγή υποσύνολα του Ω. Πράγματι, εάν $K \subseteq \Omega$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε η οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών παράγει μια ημιομάδα $(T_K(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach $C(K)$ εάν θέσουμε:

$$(T_K(t)f)(s) = \mathrm{e}^{tq(s)}f(s), \ \forall f \in C(K), \ s \in K.$$

Με απλές πράξεις και, χρησιμοποιώντας ουσιωδώς ότι $\sup_{s\in K} \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}\, q(s)} < +\infty$, αποδεικνύουμε ότι η ημιομάδα αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όπως και στην Πρόταση 3.2.4 βρίσκουμε ότι η συνάρτηση q είναι φραγμένη στο K. Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση στην σχέση

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{tq(s)} - 1}{t} = q(s)$$

είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Αλλά κάθε στοιχείο του Ω διαθέτει μια συμπαγή περιοχή, αφού ο Ω είναι τοπικά συμπαγής χώρος. Έπεται ότι η q, ως ομοιόμορφο όριο (σε συμπαγή υποσύνολα) των συνεχών συναρτήσεων

$$s \to \frac{\mathrm{e}^{tq(s)} - 1}{t}$$

είναι επίσης συνεχής επί του Ω. Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η επόμενη

Πρόταση 3.2.7 *Έστω $q : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει*

$$\sup_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\; q(s) < +\infty$$

Ο απειροστικός γεννήτορας της ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής πολλαπλασιαστικής ημιομάδος $(T_q(t))_{t\geq 0}$ που ορίζεται στον χώρο Banach $C_0(\Omega)$ από την σχέση

$$T_q(t)f = \mathrm{e}^{tq} f,\ \forall f \in C_0(\Omega),\ s \in K.$$

είναι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ όπου $M_q f = qf$ για κάθε f που ανήκει στο $Dom(M_q) = \{f \in C_0(\Omega) :\ qf \in C_0(\Omega)\}$

Απόδειξη. Έστω $(A, Dom(A))$ ο απειροστικός γεννήτορας της ημιομάδας $(T_q(t))_{t\geq 0}$. Αν $f \in Dom(A) \subseteq C_0(\Omega)$ λαμβάνουμε

$$\lim_{t\to 0+} \left[\frac{\mathrm{e}^{tq} f - f}{t}(s)\right] = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{tq(s)} f(s) - f(s)}{t}(s) = q(s)f(s) = (qf)(s)$$

για κάθε $s \in \Omega$. Άρα $\lim_{t\to 0+} \frac{T_q(t)f - f}{t}(s) = qf$, οπότε $qf \in C_0(\Omega)$ και, κατά συνέπεια, $f \in Dom(M_q)$. Δηλαδή $Dom(A) \subseteq Dom(M_q)$ και επιπλέον $Af = qf = M_q f$ γα κάθε $f \in Dom(A)$, απ' όπου προκύπτει ότι $A \subset M_q$.

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ αρκετά μεγάλο, το Θεώρημα 2.2.23 και η Πρόταση 3.2.2 δηλώνουν ότι $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(M_q)$, άρα υπάρχουν οι γραμμικοί τελεστές

$$R(\lambda, A) : C_0(\Omega) \to Dom(A)$$

και

$$R(\lambda, M_q) : C_0(\Omega) \to Dom(M_q)$$

Παρατηρούμε ότι

$$C_0(\Omega) = (\lambda I - A)Dom(A) = (\lambda I - M_q)Dom(A)$$

και

$$Dom(A) = R(\lambda, M_q)C_0(\Omega) = Dom(M_q)$$

(διότι $\lambda I - A = \lambda I - M_q$ επί του $Dom(A)$). Επομένως $A = M_q$ και η απόδειξη της Πρότασης ολοκληρώνεται.

Περατώνουμε την μελέτη πολλαπλασιαστικών ημιομάδων στο χώρο Banach $C_0(\Omega)$ με ορισμένες απλές παρατηρήσεις και κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα.

- Σε έναν συμπαγή χώρο, κάθε πολλαπλασιαστικός τελεστής που επάγεται από μια συνεχή συνάρτηση είναι ήδη φραγμένος και, άρα, κάθε πολλαπλασιαστική ημιομάδα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

- Για $\Omega := \mathbb{N}$ κάθε μιγαδική ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζει έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή από την σχέση

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (q_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

στο χώρο Banach $C_0(\Omega) = c_0$, όπου c_0 είναι ο χώρος όλων των μηδενικών ακολουθιών. Για $q_n = \mathrm{i}n$ ($n \in \mathbb{N}$) αποκτούμε μια πολλαπλασιαστική ημιομάδα από ισομετρίες, σύμφωνα με τον τύπο

$$T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ t \in \mathbb{R}$$

ενώ για $q_n := -n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) αποκτούμε μια συσταλτική πολλαπλασιαστική ημιομάδα σύμφωνα με τον τύπο

$$T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathrm{e}^{-n^2 t} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ t \geq 0$$

- Στην περίπτωση κατά την οποία Ω είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ της μορφής $\{1, 2, \dots, m\}$, τότε $C_0(\Omega) = \mathbb{C}^m$ και ο πολλαπλασιαστικός τελεστής που ορίζεται από την σχέση

$$(x_k)_{1\leq k\leq m} \to (q_k x_k)_{1\leq k\leq m}$$

αντιστοιχεί στο διαγώνιο πίνακα $A = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m)$. Η επαγόμενη πολλαπλασιαστική ημιομάδα στον χώρο Banach $\mathbb{C}^m$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{tq_1}, \mathrm{e}^{tq_2}, \dots, \mathrm{e}^{tq_m}),\ t \geq 0$$

Επιθυμούμε, στην συνέχεια, να περιγράψουμε ακροθιγώς τον τρόπο εισαγωγής πολλαπλασιαστικών ημιομάδων στον χώρο Banach $L^p(\Omega,\mu)$ όπου $1 \leq p < \infty$ και (Ω, Σ, μ) είναι χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Υπενθυμίζουμε ότι ο συγκεκριμένος χώρος Banach αποτελείται από όλες τις ισοδύναμες κλάσεις p-ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων επί του Ω και είναι εφοδιασμένος με την p-νόρμα

$$||f||_p := \left(\int_\Omega |f(s)|^p d\mu(s) p\right)^{1/p},\ f \in L^p(\Omega,\mu)$$

Για μια μετρήσιμη συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$, καλούμε το σύνολο

$$q_{ess}(\Omega) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mu(\{s \in \Omega : |q(s) - \lambda| < \epsilon\} \neq 0) \ \forall \epsilon > 0\}$$

ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range) αυτής και ορίζουμε τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστικό τελεστή M_q από τις σχέσεις $M_q = qf$ για κάθε f που ανήκει στο $Dom(M_q) := \{f \in L^p(\Omega, \mu) : qf \in L^p(\Omega, \mu)\}$.

Σε αναλογία με τις Προτάσεις 3.2.2-3.2.7 και με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας προχωρημένη Θεωρία Μέτρου, τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Πρόταση 3.2.8 *Έστω $(M_q, Dom(M_q))$ ο πολλαπλασιαστικός τελεστής που επάγεται στον χώρο Banach $L^p(\Omega, \mu)$ από κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Ο γραμμικός τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ είναι κλειστός και πυκνά ορισμένος.
(ii) Ο τελεστής M_q είναι φραγμένος και $Dom(M_q) = L^p(\Omega, \mu)$ αν και μόνο αν η συνάρτηση q είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded). Δηλαδή εάν το σύνολο $q_{ess}(\Omega)$ είναι φραγμένο στο $\mathbb{C}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$||M_q|| = ||q||_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in q_{ess}(\Omega)\}$$

(iii) Ο τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνο αν $0 \notin q_{ess}(\Omega)$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $M_q^{-1} = M_r$ όπου $r : \Omega \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση, οριζόμενη από τον τύπο

$$r(s) := \begin{cases} 1/q(s), & q(s) \neq 0 \\ 0, & q(s) = 0 \end{cases}$$

(iv) Το φάσμα του τελεστή $(M_q, Dom(M_q))$ είναι το ουσιώδες σύνολο τιμών του. Δηλαδή $\sigma(M_q) = q_{ess}(\Omega)$.

Πρόταση 3.2.9 *Έστω $q : \Omega \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει*

$$\mathrm{esssup}_{s\in\Omega} \mathrm{Re}\, q(s) = \sup_{\lambda \in q_{ess}(\Omega)} \lambda < +\infty$$

Τότε οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $T_q(t)$ με $T_q(t)f = \mathrm{e}^{tq} f$ για κάθε $f \in L^p(\Omega, \mu)$ και $t \geq 0$ σχηματίζουν μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική πολλαπλασιαστική ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach $L^p(\Omega, \mu)$. Η ημιομάδα αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν η συνάρτηση q είναι ουσιωδώς φραγμένη.

Πρόταση 3.2.10 *Για κάθε $t \geq 0$ έστω $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι αντίστοιχοι (φραγμένοι) πολλαπλασιαστικοί τελεστές $T(t)$ με*

$$T(t)f := m_t f, \ \forall \ f \in L^p(\Omega, \mu), \ t \geq 0$$

σχηματίζουν μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach $L^p(\Omega,\mu)$. Υπάρχει, τότε, μετρήσιμη συνάρτηση $q:\Omega\to\mathbb{C}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$\text{esssup}_{s\in\Omega}\text{Re } q(s) = \sup_{\lambda\in q_{ess}(\Omega)} \lambda < +\infty$$

και για την οποία ισχύει $m_t = \mathrm{e}^{tq}$ σχεδόν παντού στο Ω και για κάθε $t\geq 0$.

Πρόταση 3.2.11 *Ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής πολλαπλασιαστικής ημιομάδας $(T_q(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach $L^p(\Omega,\mu)$ είναι ακριβώς ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $(M_q, Dom(M_q))$ με*

$$M_q f = qf,\ \forall f\in Dom(M_q) = \{f\in L^p(\Omega,\mu) : qf\in L^p(\Omega,\mu)\}.$$

3.3 Ημιομάδες μετατοπίσεων στους χώρους $L^p(\Omega,\mu)$.

Μια σημαντικότατη κατηγορία παραδειγμάτων ημιομάδων τελεστών έχει ως αφετηρία μετατοπίσεις αριστερά ή δεξιά μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων σε κατάλληλα υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Για κάθε f που ανήκει σε έναν χώρο συναρτήσεων X, καλούμε αριστερή μετατόπιση (ή αριστερή μετάθεση) κατά t (left translation of f by t), όπου $t\in\mathbb{R}_+$, το γραμμικό τελεστή $T_l(t)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$(T_l(t)f)(s) := f(s+t),\ f\in X, s\in\mathbb{R}$$

Επίσης καλούμε δεξιά μετατόπιση (ή δεξιά μετάθεση) της f κατά t (right translation of f by t), όπου $t\in\mathbb{R}_+$, το γραμμικό τελεστή $T_r(t)$ με

$$(T_r(t)f)(s) := f(s-t),\ f\in X, s\in\mathbb{R}$$

Έστω X ο χώρος $L^p(\mathbb{R},dx)$ όλων των ισοδύναμων κλάσεων p-ολοκληρώσιμων, ως προς το μέτρο Lebesgue dx, συναρτήσεων της μορφής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ για $1\leq p<+\infty$. Θεωρούμε τους τελεστές αριστερής μετατόπισης $T_l(t)$ με

$$(T_l(t)f)(s) = f(s+t),\ f\in L^p(\mathbb{R},dx), s\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}_+$$

και παρουσιάζουμε δυο σημαντικά αποτελέσματα.

Πρόταση 3.3.1 *Οι τελεστές αριστερής μετατόπισης συγκροτούν μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα ισομετριών $(T_l(t))_{t\geq 0}$ στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R},dx) = L^p(\mathbb{R})$, $1\leq p\leq +\infty$ αποκαλούμενη ημιομάδα αριστερών μετατοπίσεων (left translation semigroup).*

Απόδειξη. Παρατηρούμε, καταρχήν, ότι οι γραμμικοί τελεστές $T_l(t)$ είναι φραγμένοι για κάθε $t\geq 0$ και μάλιστα αποτελούν ισομετρίες του $L^p(\mathbb{R})$. Πράγματι, για κάθε

$f \in L^p(\mathbb{R})$ και $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε:

$$\begin{aligned} ||T_l(t)f||_p &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |(T_l(t)f)(s)|^p ds\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s+t)|^p ds\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|^p d\xi\right)^{1/p} \\ &= ||f||_p \end{aligned}$$

Επίσης για $f \in L^p(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$ και $t, \xi \in \mathbb{R}_+$ λαμβάνουμε

$$(T_l(t+\xi)f)(s) = T_l(t)(T_l(\xi)f)(s)$$

και

$$\begin{aligned} (T_l(t)T_l(\xi)f)(s) &= T_l(t)(T_l(\xi)f)(s) \\ &= (T_l(t)f)(s+\xi) \\ &= f(s+\xi+t) \\ &= f(s+t+\xi) \end{aligned}$$

Άρα $T_l(t+\xi) = T_l(t)T_l(\xi)$. Προφανώς ισχύει

$$(T_l(0)f)(s) = f(s+0) = f(s),\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$$

Επομένως $T_l(0) = I$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η οικογένεια $(T_l(t))_{t\geq 0}$ είναι μια μονοπαραμετρική ημιομάδα ισομετριών επί του $L^p(\mathbb{R})$.

Επειδή $||T_l(t)||_p = 1 < 2$ για κάθε $t \geq 0$ έπεται ότι η συγκεκριμένη ημιομάδα είναι (ομοιόμορφα) φραγμένη στο διάστημα $[0,1]$. Κάθε f που ανήκει στο χώρο $C_c(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα, είναι ομοιόμορφα συνεχής και, κατά συνέπεια, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} ||T_l(t)f - f||_\infty &= \lim_{t\to 0+} \sup_{s\in\mathbb{R}} |(T_l(t)f)(s) - f(s)| \\ &= \lim_{t\to 0+} \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s+t) - f(s)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Συνάγεται λοιπόν, ότι $\lim_{t\to 0+} ||T_l(t)f - f||_p = 0$, γιατί η τοπολογία που επάγει η p-νόρμα στον $C_c(\mathbb{R})$ είναι ασθενέστερη από την αντίστοιχη της $||\cdot||_\infty$. Άρα $\lim_{t\to 0+} T_l(t)f = f$ ως προς $||\cdot||_p$, για κάθε $f \in C_c(\mathbb{R})$. Εφόσον ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R})$ ως προς $||\cdot||_\infty$, εφαρμόζεται ένα από τα συμπεράσματα της Πρότασης 2.2.6 και τεκμαίρεται ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας αριστερών μετατοπίσεων στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.

Γνωρίζουμε ότι, αν $f \in L^1[a,b]$ και $F : [a.b] \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $F(x) = \int_a^x f dx$ (dx το μέτρο Lebesgue), τότε ισχύει $F' = f$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Τούτο γράφεται ισοδύναμα και ως εξής

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f dx = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f dx = f(x)$$

σχεδόν για κάθε $x \in [a,b]$. Κάθε τέτοιο x καλείται σημείο Lebesgue της f. Το σύνολο των σημείων του $[a,b]$ που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα έχει μέτρο μηδέν και κάθε σημείο συνεχείας της f είναι σημείο Lebesgue.

Πρόταση 3.3.2 *Απειροστικός γεννήτορας της ημιομάδας αριστερών μετατοπίσεων $(T_l(t))_{t\geq 0}$ στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$ είναι ο γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ που ορίζεται από τις σχέσεις*

$$Af(x) = f'(x),\ Dom(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f \text{ απόλυτα συνεχής και } f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

Απόδειξη. Έστω $(B, Dom(B))$ ο απειροστικός γεννήτορας της $(T_l(t))_{t\geq 0}$. Θα επιβεβαιώσουμε ότι $B = A$. Υποθέτουμε ότι $f \in Dom(B)$ και ισχύει $\lim_{h\to 0+} \frac{T_l(h)f - f}{h} = g$ με g στοιχείο του $L^p(\mathbb{R})$. Άμεσα βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}dx$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Επειδή η ολοκλήρωση είναι συνεχής και

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{T_l(h)f(x) - f(x)}{h}$$

λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0+} \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}dx = \int_a^b g(x)dx$$

Αλλά, σύμφωνα με τα σχόλια πριν από την διατύπωση της Πρότασης, έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0+} \left(\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx\right) = f(b) - f(a)$$

σχεδόν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Επομένως παίρνουμε

$$f(y) = \int_a^y g(x)dx + f(a),\ y \in \mathbb{R}$$

εξαιρώντας ένα μηδενικό σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι η f, που φυσικά ανήκει στον $L^p(\mathbb{R})$, είναι απόλυτα συνεχής συνάρτηση με παράγωγο σχεδόν παντού ίση με g. Καταλήγουμε ότι

$$Bf(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{T_l(h)f(x) - f(x)}{h} = g(x) = f'(x) = Af(x)$$

και $Dom(B) \subseteq Dom(A)$. Άρα $B \subset A$.

Από την άλλη, έστω f στοιχείο του $Dom(A)$, Δηλαδή $f \in L^p(\mathbb{R})$, f είναι απόλυτα συνεχής και $f' \in L^p(\mathbb{R})$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}}|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)|^p dx &= \lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{h}|\int_0^h[f'(x+\xi)-f'(x)]d\xi|^p dx\\ &\leq \lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}}\int_0^1|f'(x+uh)-f'(x)|^p du dx\\ &= \int_0^1[\lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}}|f'(x+uh)-f'(x)|^p dx]du\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα έπεται από αποτέλεσμα της Πραγματικής Ανάλυσης. Όμως

$$\lim_{h\to 0+}|f'(x+uh)-f'(x)|^p = 0$$

κατά σημείο και επιπλέον

$$|f'(x+uh)-f'(x)|^p \leq c_p[|f'(x+uh)|^p + |f'(x)|^p]$$

Προφανώς $\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^p dx < +\infty$ και $\int_{\mathbb{R}}|f'(x+uh)|^p dx < +\infty$ αφού $f' \in L^p(\mathbb{R})$. Έτσι

$$\int_{\mathbb{R}}|f'(x+uh)-f'(x)|^p dx < +\infty$$

και

$$|f'(x+uh)-f'(x)|^p \in L^1(\mathbb{R})$$

Από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\int_0^1 \lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}}|f'(x+uh)-f(x)|^p dx du = 0$$

και συνακόλουθα,

$$\lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}}|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)|^p dx = 0$$

Κατά συνέπεια, με νέα εφαρμογή του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0+}\frac{T_l f(x)-f(x)}{h} = f'(x)$$

οπότε $f \in Dom(B)$. Άρα $Dom(A) \subseteq Dom(B)$.
Από την προηγηθείσα ανάλυση συνάγεται το συμπέρασμα της Πρότασης.

Βασιζόμενοι στις δύο προηγούμενες Προτάσεις και με όσα αναφέραμε στην Παράγραφο 2.3 (ημιομάδες υποχώρων) θα προσδιορίσουμε τις ημιομάδες αριστερών μετατοπίσεων σε υπόχωρους του $L^p(\mathbb{R})$.

Έστω, λοιπόν, $X_1 = L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < +\infty$. Οι τελεστές αριστερής μετατόπισης $T_l(t)$ με

$$(T_l(t)f)(s) = f(s+t), \ \forall f \in X_1, s, t \in \mathbb{R}_+$$

συγκροτούν μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του χώρου Banach X_1 η οποία είναι συσταλτική καθώς έχουμε

$$\begin{aligned} ||T_l(t)f||_p &= \left(\int_0^{+\infty} |(T_l(t)f)(s)|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} |f(s+t)|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_t^{+\infty} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= ||f||_p \end{aligned}$$

για κάθε $f \in X_1$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Προφανώς ο X_1 είναι αναλλοίωτος ως προς τη συγκεκριμένη ημιομάδα και, κατά συνέπεια, ο απειροστικός γεννήτορας αυτής δεν είναι άλλος από τον περιορισμό στο χώρο X_1 του τελεστή A της Πρότασης 3.3.2.

Έστω, περαιτέρω, $X_2 = L^p([a, b])$, $1 \leq p < +\infty$. Λαμβάνουμε μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του χώρου Banach X_2 αν θέσουμε για $f \in X_2$ και $t \in \mathbb{R}_+$, $s \in [a, b]$:

$$(T_l(t)f)(s) = \begin{cases} f(s+t), \ a \leq s+t \leq b \\ 0, \ s+t > b \end{cases}$$

Η ημιομάδα αριστερών μετατοπίσεων του X_2 είναι μηδενοδύναμη αφού $T_l(t) = 0$ για κάθε $t \geq b - a$. Αυτό σημαίνει ότι το αυξητικό της φράγμα είναι ίσο με $-\infty$ (βλ. και Ορισμό 2.2.5). Επίσης είναι συσταλτική διότι $f(y) = f(s+t) = 0$ όταν $f \in X_2$ και $y > b$. Άρα θα πάρουμε

$$\begin{aligned} ||T_l(t)f||_p &= \left(\int_a^{b} |(T_l(t)f)(s)|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_a^{b} |f(s+t)|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{a+t}^{b+t} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_a^{b} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= ||f||_p \end{aligned}$$

για κάθε $f \in X_2$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Ο γεννήτορας της ημιομάδας εξακολουθεί να είναι ο τελεστής A με $Af(x) = f'(x)$ αλλά το πεδίο ορισμού του είναι, τώρα, το σύνολο

$$Dom(A) = \{f \in L^p([a,b]) : f \in AC, f' \in L^p([a,b]), f(b) = 0\}$$

Πράγματι, για κάθε $f \in Dom(A)$ ισχύει $T_l(t)f \in Dom(A)$ κάτι που σημαίνει ότι η $T_l(t)f$ είναι απόλυτα συνεχής συνάρτηση. Έπεται ότι η $T_l(t)f$ είναι συνεχής και, κατά συνέπεια, $f(b) = 0$.

Κλείνουμε την παράγραφο αναφέροντας ότι ενδιαφέροντα αποτελέσματα για την ημιομάδα δεξιών μετατοπίσεων του $L^p(\mathbb{R})$ περιλαμβάνονται στο επόμενο Κεφάλαιο της εργασίας μας.

3.4 Συνελικτικές ημιομάδες τελεστών

Ξεκινούμε την διαπραγμάτευση με δύο Λήμματα, από τα οποία το δεύτερο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον για τη Θεωρία Ημιομάδων.

Λήμμα 3.4.1 *Έστω X σύνολο και $1 \leq p < q \leq +\infty$ ώστε $f_t \in L^p(X,dx) \cap L^q(X,dx)$ για κάθε $t \in (0,1)$. Αν ισχύουν $\lim_{t\to 0} ||f_t||_p = 0$ και $\sup_{0<t<1} ||f_t||_q < +\infty$ τότε*

$$\lim_{t\to 0} ||f_t||_r = 0, \ \forall r \in (p,q)$$

Απόδειξη. Γράφοντας $r \in (p,q)$ εννούμε ισοδύναμα ότι $\frac{1}{r} \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$. Υπάρχει δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$ με $0 < \lambda < 1$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{q}$$

Από το Θεώρημα 1.2.2, παίρνουμε ότι $f_t \in L^r(X,dx)$ και

$$||f_t||_r \leq ||f_t||_p^{1-\lambda} ||f_t||_q^{\lambda}, \ \forall t \in (0,1)$$

Έπεται ότι

$$||f_t||_r \leq ||f_t||_p^{1-\lambda} \left(\sup_{0<t<1} ||f_t||_q^{1-\lambda}\right)$$

και τελικά

$$\lim_{t\to 0} ||f_t||_r = 0$$

Λήμμα 3.4.2 *Έστω X σύνολο και $1 \leq p_0 < +\infty$, $1 \leq p_1 < +\infty$. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών που δρα στο χώρο Banach $L^{p_0}(X,dx)$ και ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$||T(t)f||_{p_i} \leq M e^{at} ||f||_{p_i} \ (t \geq 0) \tag{3.4.1}$$

για $i = 0, 1$ *και για καθε* $f \in L^{p_0}(X, dx) \cap L^{p_1}(X, dx)$. *Τότε η ημιομάδα* $(T(t))_{t\geq 0}$ *επεκτείνεται συνεπώς σε μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα* $(\tilde{T}(t))_{t\geq 0}$ *που δρα στο χώρο Banach* $L^p(X, dx)$ *για όλα τα* p *για τα οποία ισχύει*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1},\ 0 < \lambda < 1$$

Απόδειξη. Σημειώνουμε με P το σύνολο των p που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος. Από τις σχέσεις (3.4.1) και το Θεώρημα Riesz-Thorin (βλ. Θεώρημα 1.2.9) συμπεραίνουμε ότι οι τελεστές $T(t)$ επεκτείνονται συνεπώς σε φραγμένους γραμμικούς τελεστές $\tilde{T}(t)$ που δρούν στους χώρους Banach $L^p(X, dx)$ για $p \in P$.

Εφ'οσον η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επι του $L^{p_0}(X, dx)$, έπεται πως ισχύουν οι σχέσεις

$$T(t+s)f = T(t)T(s)f,\ T(0)f = f$$

για κάθε $f \in L^{p_0}(X, dx)$ και $t, s \geq 0$. Οι ίδιες ακριβώς σχέσεις ισχύουν και για κάθε $f \in L^{p_0}(X, dx) \cap L^p(X, dx) \subseteq L^{p_0}(X, dx)$. Λόγω συνεπείας έχουμε

$$\tilde{T}(t+s)f = \tilde{T}(t)\tilde{T}(s)f,\ \tilde{T}(0)f = f$$

για κάθε $f \in L^{p_0}(X, dx) \cap L^p(X, dx)$ και $t, s \geq 0$. Επειδή το σύνολο $f \in L^{p_0}(X, dx) \cap L^p(X, dx)$ είναι πυκνό στο χώρο $L^p(X, dx)$ καταλήγουμε ότι η οικογένεια $(\tilde{T}(t))_{t\geq 0}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του $L^p(X, dx)$ για $p \in P$. Προφανώς

$$||\tilde{T}(t)||_p \leq M\mathrm{e}^{at},\ (t \geq 0)$$

για $p \in P$. Για την απόδειξη της ισχυρής συνέχειας θεωρούμε συνάρτηση $g \in L^{p_0}(X, dx) \cap L^{p_1}(X, dx)$ και θέτουμε $f_t = T(t)g - g$. Από τις σχέσεις (3.4.1) παίρνουμε για $0 < t < 1$ και $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} ||f_t||_{p_i} &= ||T(t)g - g||_{p_i} \\ &\leq ||T(t)g||_{p_i} + ||g||_{p_i} \\ &< M\mathrm{e}^a||g||_{p_i} + ||g||_{p_i} \\ &= (M\mathrm{e}^a + 1)||g||_{p_i} < +\infty \end{aligned}$$

Σηλαδή οι συναρτήσεις f_t είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς τις νόρμες των χώρων $L^{p_0}(X, dx)$ και $L^{p_1}(X, dx)$ όταν $t \in (0, 1)$. Επίσης, από την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ επί του $L^{p_0}(X, dx)$, βρίσκουμε πως $\lim_{t\to 0+} ||f_t||_{p_0} = 0$. Το Λήμμα 3.4.1 υποδηλώνει ότι

$$\lim_{t\to 0+} ||f_t||_p = \lim_{t\to 0+} ||T(t)g - g||_p = 0,\ p \in P$$

Αφού το σύνολο $L^{p_0}(X, dx) \cap L^{p_1}(X, dx)$ είναι πυκνό στο χώρο $L^p(X, dx)$ για κάθε $p \in P$ καταλαβαίνουμε ότι

$$\lim_{t\to 0+} ||\tilde{T}(t)g - g||_p = \lim_{t\to 0+} ||T(t)g - g||_p = 0$$

για κάθε $g \in L^p(X, dx)$ και $p \in P$. Μέσω της Πρότασης 2.2.6 τεκμαίρεται η ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(\tilde{T}(t))_{t\geq 0}$. Η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

Ας θεωρήσουμε, περαιτέρω, μιγαδικές συναρτήσεις K_t επί του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, όπου t είναι γνήσια θετική παράμετρος. Λέμε ότι η οικογένεια K_t σχηματίζει μια συνελικτική ημιομάδα (convolution semigroup) στον $\mathbb{R}^n$ αν πληροί τις ακολουθες συνθήκες:
(**i**) $K_t \star K_s = K_{t+s}$ για κάθε $t, s > 0$ με το σύμβολο $\star$ να δηλώνει συνέλιξη.
(**ii**) $||K_t||_1 \leq c$ για κάθε $t > 0$ και για κάποια θετική σταθερά c.
(**iii**) $\lim_{t\to 0} \int_{|x|>r} |K_t(x)|dx = 0$ για κάθε $r > 0$.
(**iv**) $\lim_{t\to 0} \int_{|x|<r} K_t(x)dx = 1$ για κάθε $r > 0$.

Η παραπάνω ορολογία δικαιολογείται από το επόμενο:

Θεώρημα 3.4.3 *Υποθέτουμε ότι για τις μιγαδικές συναρτήσεις K_t επί του $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούνται οι προηγούμενες συνθήκες (**i**)- (**iv**). Τότε ο τύπος*

$$T(t)f = \begin{cases} K_t \star f, \ t > 0 \\ f, \ t = 0 \end{cases}$$

ορίζει μιαν ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$.

Απόδειξη. Έστω $p \in [1, +\infty)$. Αν $t > 0$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Από την ανισότητα Young και την συνθήκη (**ii**), παίρνουμε

$$||T(t)f||_p = ||K_t \star f||_p \leq ||K_t||_1 ||f||_p \leq c||f||_p$$

Αν $t = 0$, τότε $||T(t)f||_p = ||f||_p < +\infty$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Με άλλα λόγια οι γραμμικοί τελεστές $T(t)$ είναι φραγμένοι για κάθε $t \geq 0$. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Αν $t, s > 0$ τότε $t + s > 0$ και, λόγω της συνθήκης (**i**), παίρνουμε

$$T(t+s)f = K_{t+s} \star f = K_t \star K_s \star f = K_t \star T(s)f = T(t)T(s)f$$

Αν $t > 0$ και $s = 0$ τότε $t + s = t > 0$ και έχουμε

$$T(t+s)f = K_{t+s} \star f = K_t \star f = T(t)f = T(t)T(0)f = T(t)T(s)f$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε όταν $t = 0$ και $s > 0$. Προφανώς $T(0) = I$. Ικανοποιείται, συνεπώς, η συναρτησιακή εξίσωση (Σ.Ε) του Ορισμού 2.2.1 και η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$.

Η ισχυρή συνέχεια της συγκεκριμένης ημιομάδας θα επιβεβαιωθεί αν αποδείξουμε ότι, για κάθε $L^1(\mathbb{R}^n)$, ισχύει

$$\lim_{t\to 0+} ||T(t)f - f||_1 = \lim_{t\to 0+} ||K_t \star f - f||_1 = 0,$$

οπότε η ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ θα είναι ισχυρώς συνεχής επί του $L^1(\mathbb{R}^n)$ και θα γίνει εφαρμογή του Λήμματος 3.4.2. Αρκεί να επαληθευτεί η παραπάνω σχέση για κάθε f που ανήκει στο πυκνό υποσύνολο $C_c(\mathbb{R}^n)$ του $L^1(\mathbb{R}^n)$. Προς τούτο, αποδεικνύουμε αρχικά ότι η συνάρτηση $K_t \star f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f καθώς $t \to 0$. Ασφαλώς η f, ως στοιχείο του $C_c(\mathbb{R}^n)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δεδομένου $\epsilon > 0$ υπάρχει, λοιπόν, $\delta > 0$ έτσι ώστε από την σχέση $|u - v| < \delta$ να έπεται $|f(u) - f(v)| \leq \frac{\epsilon}{c+1}$ για κάθε $u, v \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τυχόν $x \in \mathbb{R}^n$ και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
|(K_t \star f)(x) - f(x)| &= |(f \star K_t)(x) - f(x)| \\
&= \left| \int_{|y|\leq\delta} f(x-y)K_t(y)dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{|y|>\delta} f(x-y)K_t(y)dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{|y|\leq\delta} [f(x-y) - f(x)]K_t(y)dy \right. \\
&\quad + \int_{|y|\leq\delta} f(x)K_t(y)dy \\
&\quad \left. + \int_{|y|>\delta} f(x-y)K_t(y)dy - f(x) \right| \\
&\leq \int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)||K_t(y)|dy \\
&\quad + \int_{|y|>\delta} |f(x-y)||K_t(y)|dy \\
&\quad + \left| \left\{ \int_{|y|\leq\delta} K_t(y)dy - 1 \right\} f(x) \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{c+1} \int_{|y|\leq\delta} |K_t(y)|dy + ||f||_\infty \int_{|y|>\delta} |K_t(y)|dy \\
&\quad + ||f||_\infty \left| \int_{|y|\leq\delta} K_t(y)dy - 1 \right|
\end{aligned}$$

Με βάση τις συνθήκες (**iii**) και (**iv**) βρίσκουμε

$$\lim_{t\to 0} ||f||_\infty \int_{|y|>\delta} |K_t(y)|dy = 0$$

και

$$\lim_{t\to 0} ||f||_\infty \left| \int_{|y|\leq\delta} K_t(y)dy - 1 \right| = 0$$

Επίσης

$$\frac{\epsilon}{c+1} \int_{|y|\leq\delta} |K_t(y)|dy < \frac{\epsilon}{c+1} \int_{\mathbb{R}^n} |K_t(y)|dy = \frac{\epsilon}{c+1} ||K_t||_1 \leq \frac{c\epsilon}{c+1}$$

Άρα

$$\lim_{t\to 0}|(K_t\star f)(x)-f(x))|<\frac{c\epsilon}{c+1}+\frac{\epsilon}{c+1}=\frac{(c+1)\epsilon}{c+1}=\epsilon$$

και αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Αν η συνάρτηση f έχει φορέα στο σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le R\}$ τότε

$$\int_{|y|>R}|K_t(x-y)f(y)|dy=0$$

και παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\int_{|x|\ge 2R}|(K_t\star f)(x)-f(x))|dx &= \lim_{t\to 0}\int_{|x|\ge 2R}|(K_t\star f)(x)|dx\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{|x|\ge 2R}\int_{|y|\le R}|(K_t(x-y)f(y)|dydx\\
&\le \lim_{t\to 0}\int_{|u|\ge R}\int_{|y|\le R}|K_t(u)f(y)|dydu\\
&= ||f||_1\lim_{t\to 0}\int_{|u|\ge R}|K_t(u)|du=0
\end{aligned}$$

(λόγω της συνθήκης (**iii**).
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
||K_t\star f-f||_1 &\le \int_{|x|<2R}|(K_t\star f)(x)-f(x)|dx\\
&\quad+\int_{|x|\ge 2R}|(K_t\star f)(x)-f(x)|dx\\
&\le ||K_t\star f-f||_\infty|\{x:|x|<2R\}|\\
&\quad+\int_{|x|\ge 2R}|(K_t\star f)(x)-f(x)|dx
\end{aligned}$$

Έστω $\epsilon>0$. Τότε $\int_{|x|\ge 2R}|(K_t\star f)(x)-f(x)|dx<\frac{\epsilon}{2}$. Επίσης υπάρχει $t_0>0$ ώστε για κάθε $t<t_0$ να έχουμε

$$||K_t\star f-f||_\infty<\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{|\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<2R\}|}$$

Επομένως $\lim_{t\to 0+}||K\star f-f||_1=0$ και η απόδειξη του Θεωρήματος ολοκληρώνεται.

Κλείνουμε την παράγραφο με μιαν άκρως ενδιαφέρουσα
Εφαρμογή 3.4.4 Οι πυκνότητες Gauss (Gaussian densities)

$$K_t(x)=(4\pi t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\ (x\in\mathbb{R}^n)$$

παρέχουν το σημαντικότερο παράδειγμα συνελικτικής ημιομάδας στον $\mathbb{R}^n$ με πολλές εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Συγκεκριμένα ορίζουμε

$$G_2(t) = \begin{cases} K_t \star f, \ t > 0 \\ f, \ t = 0 \end{cases}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ όπου K_t είναι οι πυκνότητες Gauss. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.3, προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος εισάγει συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες τελεστών στους χώρους Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$ για $p \in [1, +\infty)$, αρκεί να επιβεβαιώσουμε την ισχύ των συνθηκών (i)-(iv).

Ειδικά για την συνθήκη (i), υπενθυμίζουμε (βλ. Παράγραφο 1.2) ότι

$$\hat{K}_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} dx = \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$$

Για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $t, s > 0$, μέσω στοιχειωδών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier, παίρνουμε

$$\hat{K}_{t+s}(\xi) = \mathrm{e}^{-(t+s)|\xi|^2} = \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\mathrm{e}^{-s|\xi|^2} = \hat{K}_t(\xi)\hat{K}_s(\xi)$$

Επιπλέον

$$\mathcal{F}(K_{t+s} \star f) = \hat{K}_{t+s}\hat{f} = \hat{K}_t\hat{K}_s\hat{f} = \widehat{K_t \star K_s}\hat{f} = \mathcal{F}((K_t \star K_s) \star f)$$

άρα $(K_t \star K_s) \star f = K_{t+s} \star f$ και $K_t \star K_s = K_{t+s}$. Παρατηρούμε, περαιτέρω, πως

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t} dx = (4\pi t)^{n/2}$$

Έτσι $||K_t||_1 = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t} dx = 1$. Ικανοποιείται, δηλαδή, η συνθήκη (ii) για $c = 1$.

Έστω $r > 0$. Θέτοντας $|x| = u$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{-n/2} \int_{|x|>r} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t} dx &= (4\pi t)^{-n/2} c_n \int_r^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/4t} u^{n-1} du \\ &= (4\pi t)^{-n/2} c_n \mathrm{e}^{-r^2/8t} \int_r^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/8t} u^{n-1} du \end{aligned}$$

Όμως $\lim_{t\to 0+} (4\pi t)^{-n/2} c_n \mathrm{e}^{-r^2/8t} = 0$ και, εκτελώντας το μετασχηματισμό $u/\sqrt{t} = v$ οπότε $du = \sqrt{t}dv$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_r^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/8t} u^{n-1} du &= t^{(n-1)/2} \int_{r/\sqrt{t}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2/8} v^{n-1} \sqrt{t} dv \\ &\leq t^{n/2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2/8} v^{n-1} dv \\ &= C t^{n/2} \end{aligned}$$

καθώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα που προκύπτει συγκλίνει.
Τελικά, για κάθε $r > 0$ ισχύει

$$\lim_{t\to 0+}\int_{|x|>r} K_t(x)dx = 0$$

Εφ'οσον $\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x)dx = 1$, θα πάρουμε

$$\lim_{t\to 0+}\int_{|x|<r} K_t(x)dx = 1,\ \forall r > 0$$

επαληθεύοντας τις συνθήκες (iii) και (iv).

Η ισχυρώς συνεχής ημιομάδα $(G_p(t))_{t\geq 0}$ που επάγεται στο χώρο $L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$ καλείται ημιομάδα Gauss (Gaussian semigroup) ή ημιομάδα του πυρήνα θερμότητας (heat Kernel semigroup). Είναι συσταλτική διότι, από την ανισότητα του Young και την συνθήκη (ii), ισχύει

$$||G_p(t)f||_p \leq ||K_t||_1||f||_p \leq ||f||_p$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Προφανώς η ημιομάδα Gauss διατηρεί τη θετικότητα (positivity preserving semigroup), υπό την έννοια ότι, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ με $f \geq 0$, έχουμε $G_p(t)f \geq 0$.

Επιθυμώντας να προσδιορίσουμε τον απειροστικό γεννήτορα της ημιομάδας $(G_p(t))_{t\geq 0}$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Εφόσον ο χώρος Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $p \in [1, +\infty)$ και παραμένει αναλλοίωτος από την $(G_p(t))_{t\geq 0}$, μελετούμε την οικογένεια $G_p(t)|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$. Παρατηρούμε ότι $(\mathcal{F}G_p(t)\mathcal{F}^{-1}g)(\xi) = \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}g(\xi)$ για κάθε $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $\xi \in \mathbb{R}^n$. Άρα ο μετασχηματισμός Fourier μετατρέπει την $G_p(t)|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ σε μια πολλαπλασιαστική ημιομάδα επί του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ που είναι κατά σημείο συνεχής ως προς την τοπολογία του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Απευθείας υπολογισμοί, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.7, δείχνουν ότι η δεξιά παράγωγος στο $t = 0$ είναι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής

$$Bg(\xi) := -|\xi|^2 g(\xi)\ (g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n)$$

Ανακαλώντας τις παραπάνω πληροφορίες μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier και, επειδή η τοπολογία του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι λεπτότερη από αυτήν που επάγεται από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$, σκιαγραφήσαμε με έναν δεύτερο τρόπο ότι η $(G_p(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, άρα και επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$. Κυρίως, ωστόσο, βρίσκουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του τελεστή B δεν είναι άλλος από την Λαπλασιανή Δg με $\Delta g(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial s_i^2}g(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ για $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως είδαμε στην Παράγραφο 1.2, ισχύει γενικά πως $(\mathcal{F}\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2(\mathcal{F}f)(\xi)$, για $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $\xi \in \mathbb{R}^n$. Αν $(-H_{0,p}, Dom(H_{0,p}))$ είναι ο γεννήτορας της ημιομάδας Gauss, καταλήξαμε ότι $-H_{0,p}f = \Delta f$ επί του χώρου $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ που αποτελεί πυρήνα του $-H_{0,p}$ (βλ. Πρόταση 2.2.19). Φυσιολογικά συμπεραίνουμε πως

$$Dom(H_{0,p}) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

και $-H_{0,p} = \bar{\Delta}$, όπου με $\bar{\Delta}$ συμβολίζουμε την κλειστότητα του τελεστή Δ. Στο άρθρο [15], Remarks 2.1,pp. 143 and 144 και για μια ελάχιστα διαφορετική κανονικοποίηση του τύπου ορισμού της ημιομάδας Gauss που δεν επηρεάζει το συμπέρασμα, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $Dom(H_{0,p})$ εμφυτεύεται συνεχώς στο χώρο Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ εάν $1 \leq p < \infty$. Ιδιαιτέρως, αν $1 < p < \infty$, τότε $Dom(H_{0,p}) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ με τη βοήθεια του αποτελέσματος που περιέχεται στο βιβλίο [26], Chapter III,Sect. 1.3, Proposition 3, p.59.

Επιθυμώντας, τέλος, να εκτιμήσουμε την ταχύτητα σύγκλισης στο μηδέν της ποσότητας $||G_p(t)f||$ για ένα πυκνό υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R}^n)$, θα αποδείξουμε την σχέση

$$||G_2(t)f||_2 \leq ct^{-n/4}||f||_1$$

για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ και $t > 0$. Πράγματι, μέσω βασικών αποτελεσμάτων που αφορούν τον μετασχηματισμό Fourier, έχουμε

$$\begin{aligned} ||G_2(t)f||_2 &= ||\mathcal{F}G_2(t)f||_2 \\ &= ||(2\pi)^{n/2}\hat{K}_t(\mathcal{F}f)||_2 \\ &\leq c_1||\hat{K}_t||_2||\mathcal{F}f||_\infty \\ &\leq c_1||\hat{K}_t||_2||f||_1 \end{aligned}$$

Εκτελώντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $|x| = r$ και $\frac{r}{\sqrt{2t}} = s$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||\hat{K}_t||_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |K_t(x)|^2|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}|^2dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |K_t(x)|^2dx \\ &= c_2\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2/2t}t^{-n}dx \\ &= c_3t^{-n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2t}r^{n-1}dr \\ &= c_4t^{-n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}(2t)^{(n-1)/2}(2t)^{1/2}s^{n-1}ds \\ &= c_5t^{-n/2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}s^{n-1}ds \\ &= c_6t^{-n/2} \end{aligned}$$

(αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμα που προκύπτει συγκλίνει). Έτσι, $||\hat{K}_t||_2 = c_7t^{-n/4}$, και ο ισχυρισμός μας έπεται.

Κεφάλαιο 4

Θεωρήματα παραγωγής ημιομάδων τελεστών

Τα κεντρικά Θεωρήματα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών αποτελούν το αντικείμενο του παρόντος Κεφαλαίου. Η ύλη διαρθρώνεται σε τρείς παραγράφους και έχει καταβληθεί προσπάθεια ώστε η παρουσίαση να γίνει με τρόπο αναλυτικό και εμπεριστατωμένο.

Στα πρώϊμα στάδια της πρώτης παραγράφου διατυπώνεται το περίφημο Θεώρημα των Hille-Yosida (Θεώρημα 4.1.3) που αφορά την παραγωγή ισχυρώς συνεχών συσταλτικών μονοπαραμετρικών ημιομάδων. Συνοδεύεται από ένα αποτέλεσμα (χωρίς απόδειξη) του Hormander (Θεώρημα 4.1.5) με το οποίο διαπιστώνουμε ορισμένες εγγενείς αδυναμίες του. Ακολουθεί η προπαρασκευαστική διαδικασία και η τελική διατύπωση του γενικού Θεωρήματος παραγωγής ισχυρώς συνεχών μονοπαραμετρικών ημιομάδων που οφείλεται στους Feller, Miyadera και Phillips (Θεώρημα 4.1.9). Οι συνθήκες του είναι σαφείς και τεχνικά άρτιες, ωστόσο η αξία του είναι κυρίως θεωρητική, αφού ο υπολογισμός n-οστών δυνάμεων επιλυόντων τελεστών που απαιτεί, το καθιστά ιδιαιτέρως δύσχρηστο στην πράξη. Στη συνέχεια περιλαμβάνονται αποτελέσματα που προετοιμάζουν το έδαφος για το γενικό θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών μονοπαραμετρικών ομάδων τελεστών (Θεώρημα 4.1.16). Υπάρχει και το Πόρισμα 4.1.15 που συμπληρώνει την ύλη της Παραγράφου 3.3 καθώς σχετίζεται με τις ημιομάδες δεξιών μετατοπίσεων στο πλαίσιο των L^p-χώρων.

Στη δεύτερη παράγραφο εισάγεται η έννοια των αποσβεστικών τελεστών (Ορισμός 4.2.2) και στην Πρόταση 4.2.5 παρατίθενται ορισμένες βασικές ιδιότητες αυτών. Κυρίαρχη θέση κατέχει το θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών συσταλτικών μονοπαραμετρικών ημιομάδων με γεννήτορες κατάλληλους αποσβεστικούς τελεστές, οφειλόμενο στους Lumer και Philips(Θεώρημα 4.2.6). Η διατύπωσή του γίνεται με μια σύγχρονη κατατοπιστική μορφή, από τις αρκετές που συναντώνται στη διεθνη βιβλιογραφία, ενώ στο τέλος της Παραγράφου βρίσκεται και η πρωτότυπη εκδοχή του από το περιοδικό

Pacific Journal of Mathematics. Το συγκεκριμένο θεώρημα είναι υπέρτερης πρακτικής αξίας από το αντίστοιχο αποτέλεσμα των Hille-Yosida.

Στη τρίτη Παράγραφο ασχολούμαστε με τις δυϊκές (η συζυγείς) ημιομάδες, θεμελιωτής της θεωρίας των οποίων υπήρξε ο R.S.Phillips. Τονίζεται ότι η δυϊκή ημιομάδα μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας τελεστών ενδέχεται να μην είναι ισχυρώς συνεχής και παρατίθεται ένα χαρακτηριστικό πειστήριο του ισχυρισμού αυτού (Παράδειγμα 4.3.1). Το πληρέστερο αποτέλεσμα της θεωρίας παρουσιάζεται στο Θεώρημα 4.3.3. Στην ειδική περίπτωση αυτοπαθών χώρων Banach (όπως είναι οι χώροι Hilbert) τα πράγματα απλουστεύονται και η δϋική ημιομάδα διατηρεί την καθοριστική ιδιότητα της ισχυρής συνέχειας (Πορίσματα 4.3.5 και 4.3.6). Σε αυτό το γεγονός βασίζεται και το κλασσικό Θεώρημα του Stone για την παραγωγή ισχυρώς συνεχών ομάδων από ορθομοναδιαίους τελεστές σε χώρους Hilbert (Θεώρημα 4.3.8). Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Φασματικού Θεωρήματος (Πρόταση 4.3.10).

4.1 Θεωρήματα παραγωγής ημιομάδων τελεστών τύπου Hille-Yosida

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια πειστική και τεκμηριωμένη απάντηση στο εξής πρόβλημα:

Να χαρακτηριστούν εκείνοι οι γραμμικοί τελεστές που είναι απειροστικοί γεννήτορες ισχυρώς συνεχών ημιομάδων σε χώρους Banach και να περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίον οι συγκεκριμένες ημιομάδες παράγονται.

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι οι γεννήτορες ισχυρώς συνεχών ημιομάδων είναι πυκνά ορισμένοι κλειστοί γραμμικοί τελεστές με φάσμα που περιέχεται σε κατάλληλο αριστερό ημιεπίπεδο (ή αριστερό ημιάξονα). Υπάρχουν, ωστόσο, παραδείγματα που καταδεικνύουν ότι οι πληροφορίες αυτές δεν αρκούν για να απαντήσουμε στο παραπάνω πρόβλημα ολοκληρωμένα.

Είναι σίγουρα εποικοδομητικό να σκεφτούμε την ημιομάδα που παράγεται από έναν μη φραγμένο γραμμικό τελεστή A ως μία ‘εκθετική συνάρτηση’, $t \to \mathrm{e}^{tA}$, κάτι που άλλωστε ισχύει στην περίπτωση φραγμένου τελεστή (βλ. Παράγραφο 2.1). Αποτελεί καλή ιδέα η προσπάθεια προσέγγισης του A από μία ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένων τελεστών ελπίζοντας ότι το όριο

$$\mathrm{e}^{tA} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{tA_n}$$

υπάρχει και ορίζει ισχυρώς συνεχή ημιομάδα. Την ιδέα αυτή υιοθέτησε ο K. Yosida (1948) και εμείς την παρουσιάζουμε διεξοδικά στην απόδειξη του περίφημου Θεωρήματος που φέρει το όνομά του.

Αφού επισημάνουμε ότι, συχνά και για λόγους απλότητας, θα παραλείπουμε το πεδίο ορισμού από το σύμβολο ενός γραμμικού τελεστή, ξεκινούμε την διαπραγμάτευση προτάσσοντας δυο αποτελέσματα που θα χρειαστούμε στα επόμενα.

Πρόταση 4.1.1 *Έστω X χώρος Banach. Σε φραγμένα υποσύνολα της $\mathcal{L}(X)$ συμπίπτουν:*
(i) Η ισχυρή τοπολογία τελεστών.
(ii) Η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης σε πυκνά υποσύνολα του X.
(iii) Η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης σε σχετικώς συμπαγή υποσύνολα του X.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [24],Sect. III, 4.5.

Λήμμα 4.1.2 *Έστω $(A, Dom(A))$ ένας πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής σε χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές $\omega \in \mathbb{R}$ και $M > 0$ έτσι ώστε $[\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ και $||\lambda R(\lambda, A)|| \leq M$ για κάθε $\lambda \geq \omega$. Τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$ *για κάθε $x \in X$*
(ii) $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda AR(\lambda, A)x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$
για κάθε $x \in Dom(A)$.

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\lambda R(\lambda, A) - R(\lambda, A)A = I = \lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) \tag{4.1.1}$$

για κάθε $\lambda \in \rho(A)$ άρα και για κάθε $\lambda \geq \omega$. Επομένως, αν $x \in Dom(A)$ λαμβάνουμε

$$\lambda R(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax + x$$

Αλλά

$$\begin{aligned} ||R(\lambda, A)Ax|| &\leq ||R(\lambda, A)||||Ax|| \\ &\leq \frac{M}{|\lambda|}||Ax|| \end{aligned}$$

και $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{M}{|\lambda|}||Ax|| = 0$. Συνεπώς παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty}(R(\lambda, A)Ax + x) &= x + \lim_{\lambda \to +\infty}(R(\lambda, A)Ax) \\ &= x \end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$ για κάθε $x \in Dom(A)$ και για κάθε $\lambda \geq \omega$.

Καθώς $\overline{Dom(A)} = X$ επιβεβαιώσαμε κατά σημείο σύγκλιση της ακολουθίας $\{\lambda R(\lambda, A)\}_{\lambda \geq \omega}$ σε πυκνό υποσύνολο του χώρου Banach X. Από την υπόθεση έχουμε ότι $||\lambda R(\lambda, A)|| \leq M$ για κάθε $\lambda \geq \omega$ και από την Πρόταση 4.1.1 προκύπτει ότι

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X, \lambda \geq \omega$$

(ii) Άμεση συνέπεια της σχέσης (4.1.1) και του ισχυρισμού (i) του Λήμματος, θέτοντας όπου $x \in X$ το $Ax \in X$ για $x \in Dom(A)$.

Θεώρημα 4.1.3 *(Hille-Yosida, 1948) Για έναν γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών επί του X.
(β) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

(γ) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}\lambda > 0$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$$

Απόδειξη. (α)⇒(γ) Το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 2.2.12, 2.2.14 και του Πορίσματος 2.2.24 (βλ. και Παρατήρηση 2.2.25).
(γ)⇒(β) Τετριμμένη απόδειξη. (β)⇒(α) Έστω $(A, Dom(A))$ πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής στο χώρο Banach X. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ ορίζουμε το φραγμένο γραμμικό τελεστή

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda[\lambda R(\lambda, A) - I] = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

ο οποίος καλείται προσέγγιση Yosida (Yosida approximation) του A. Από το Λήμμα 4.1.2 προκύπτει ότι

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda A R(\lambda, A)x = Ax \;\forall x \in Dom(A) \tag{4.1.2}$$

Η οικογένεια $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ με $T_\lambda(t) = \mathrm{e}^{tA_\lambda}$ για κάθε $t \geq 0$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του X με απειροστικό γεννήτορα A_λ (βλ. Παράγραφο 2.1). Επιπλέον για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} ||\mathrm{e}^{tA_\lambda}|| &\leq ||\mathrm{e}^{t\lambda^2 R(\lambda,A) - t\lambda I}|| \\ &= \mathrm{e}^{-t\lambda}||\mathrm{e}^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}|| \\ &\leq \mathrm{e}^{-t\lambda}\mathrm{e}^{t\lambda^2||R(\lambda,A)||} \end{aligned}$$

Επειδή $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$, παίρνουμε $||\mathrm{e}^{tA_\lambda}|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Κατά συνέπεια, η ημιομάδα $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ είναι συσταλτική.

Από τον τρόπο ορισμού τους, οι τελεστές $\mathrm{e}^{tA_\lambda}, \mathrm{e}^{tA_\mu}, A_\lambda$ και A_μ για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ και $\mu > 0$ αντιμετατίθενται ανά δύο. Εφαρμόζοντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού λογισμού (στη διανυσματική εκδοχή του) για τις συναρτήσεις

$$s \to T_\mu(t-s)T_\lambda(s)x,$$

όπου $0 \leq s \leq t < +\infty$ και $x \in Dom(A)$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T_\mu(t-s)T_\lambda(s)x)ds \\ &= \int_0^t (-A_\mu T_\mu(t-s)T_\lambda(s)x + T_\mu(t-s)T_\lambda(s)A_\lambda x)ds \\ &= \int_0^t T_\mu(t-s)T_\lambda(s)(A_\lambda x - A_\mu x)ds \end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$\mathrm{e}^{tA_\lambda}x - \mathrm{e}^{tA_\mu}x = \int_0^t \mathrm{e}^{tA_\mu}\mathrm{e}^{-sA_\mu}\mathrm{e}^{sA_\lambda}(A_\lambda x - A_\mu x)ds$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} ||\mathrm{e}^{tA_\lambda}x - \mathrm{e}^{tA_\mu}x|| &\leq \int_0^t ||\mathrm{e}^{tA_\mu}||\,||\mathrm{e}^{-sA_\mu}||\,||\mathrm{e}^{sA_\lambda}||\,||A_\lambda x - A_\mu x||ds \\ &\leq \int_0^t ||A_\lambda x - A_\mu x||ds \\ &= t||A_\lambda x - A_\mu x|| \\ &\leq t||A_\lambda x - Ax|| + ||Ax - A_\mu x|| \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0, \mu > 0$ και $x \in Dom(A)$. Παίρνοντας όρια καθώς $\lambda \to +\infty$ και $\mu \to +\infty$ και, λόγω της σχέσης (4.1.2), συνάγεται ότι η ακολουθία $(\mathrm{e}^{tA_\lambda}x)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Dom(A)$ είναι βασική εντός του χώρου Banach X. Έπεται ότι η συγκεκριμένη ακολουθία είναι κατά σημείο συγκλίνουσα επί του $Dom(A)$ και, μάλιστα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, t_0]$ με $t_0 > 0$. Εφ'οσον $\overline{Dom(A)} = X$ και $||\mathrm{e}^{tA_\lambda}|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$, από την Πρόταση 4.1.1 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών $(\mathrm{e}^{tA_\lambda}x)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in X$.

Θέτουμε

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}x = \lim_{\lambda\to\mathbb{N}} T_\lambda(t)x,\ \forall x \in X$$

Από το Θεώρημα Banach-Steinhaus (βλ. Θεώρημα 1.1.17) τεκμαίρεται ότι οι τελεστές $T(t)$ είναι καλά ορισμένοι γραμμικοί και φραγμένοι για κάθε $t \geq 0$. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} ||T(t)x|| &= ||T(t)x - T_\lambda(t)x + T_\lambda(t)x|| \\ &\leq ||T(t)x - T_\lambda(t)x|| + ||T_\lambda(t)||\,||x|| \\ &\leq ||T(t)x - T_\lambda(t)x|| + ||x|| \end{aligned}$$

και, λαμβάνοντας όρια καθώς $\lambda \to +\infty$, παίρνουμε

$$||T(t)x|| \leq ||x||,\ \forall x \in X$$

Δηλαδή ισχύει $||T(t)|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} T(0)x &= \lim_{\lambda \to +\infty} T_\lambda(0)x \\ &= x \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$. Άρα $T(0) = I$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} ||T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x|| &= ||T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T_\lambda(t)T(s)x + T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x|| \\ &\leq ||T_\lambda(t)||\,||T_\lambda(s)x - T(s)x|| + ||T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x|| \\ &\leq ||T_\lambda(s)x - T(s)x|| + ||T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x|| \end{aligned}$$

Επειδή $T(s)x \in X$ για κάθε $x \in X$, παίρνοντας όρια καθώς $\lambda \to +\infty$, συνάγουμε ότι

$$\lim_{\lambda \to +\infty} ||T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x|| = 0$$

ή ισοδύναμα

$$T(t)T(s)x = \lim_{\lambda \to +\infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x, \ \forall x \in X$$

Αλλά

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{\lambda \to +\infty} T_\lambda(t+s)x \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$. Άρα $T(t+s)x = T(t)T(s)x$ για κάθε $x \in X$ και, κατά συνέπεια, ισχύει $T(t+s) = T(s)T(x)$ για κάθε $t, s \geq 0$.

Τέλος, οι απεικονίσεις $t \to T(t)x$ είναι συνεχείς σε κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $x \in X$ ως ομοιόμορφο όριο των συνεχών συναρτήσεων $t \to \mathrm{e}^{tA_\lambda}x$.

Από την προηγηθείσα ανάλυση είναι σαφές ότι η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ αποτελεί μία ισχυρώς συνεχή συσταλτική μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών στο χώρο Banach X. Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι ο A είναι απειροστικός γεννήτορας αυτής της ημιομάδας. Έστω $x \in Dom(A)$. Λόγω της Πρότασης 2.2.12 (βλ. και Παρατήρηση 2.2.13) και, επειδή κάθε ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα είναι και ισχυρώς συνεχής, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \to +\infty} (\mathrm{e}^{tA_\lambda x} - x) \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ομοιόμορφη σύγκλιση της ποσότητας $\mathrm{e}^{tA_\lambda}A_\lambda x$ στην $T(t)Ax$ σε φραγμένα διαστήματα.

Ας υποθέσουμε ότι $(B, Dom(B))$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας της ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$. Διαιρώντας την ισότητα $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds$ με $t > 0$ και αφήνοντας $t \to 0+$ βλέπουμε ότι $x \in Dom(B)$ και $Ax = Bx$ για κάθε $x \in Dom(A)$ (βλ. και Λήμμα 2.2.11). Άρα $A \subset B$. Εφόσον ο B είναι γεννήτορας της $(T(t))_{t\geq 0}$ έπεται ότι $1 \in \rho(B)$. Από την υπόθεση της συνεπαγωγής όμως, ισχύει και $1 \in \rho(A)$. Εφόσον $A \subset B$, λαμβάνουμε

$$(I - B)Dom(A) = (I - A)Dom(A) = X$$

και συνακόλουθα $Dom(B) = (I - B)^{-1}X = Dom(A)$. Έτσι $A = B$ και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται.

Πόρισμα 4.1.4 *Έστω $(A.Dom(A))$ απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X. Αν A_λ είναι η προσέγγιση Yosida του A, τότε*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}x, \ \forall x \in X$$

Απόδειξη. Κατά την αποδεικτική διαδικασία του Θεωρήματος 4.1.3 είδαμε ότι, θέτοντας $S(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}x$ για κάθε $x \in X$, αποκτούμε μια ισχυρώς συνεχή συσταλτική ημιομάδα $(S(t))_{t\geq 0}$ με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$. Από την Πρόταση 2.2.14 προκύπτει ότι οι ημιομάδες $(S(t))_{t\geq 0}$ και $(T(t))_{t\geq 0}$ ταυτίζονται και το συμπέρασμα του πορίσματος έπεται.

Το Θεώρημα Hille-Yosida έχει τεράστια θεωρητική αξία και, οπωσδήποτε, είναι προσφορότερο στην πράξη από το γενικό θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ημιομάδων που θα αποδείξουμε στην συνέχεια της Παραγράφου. Αξίζει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι πρόκειται για ένα αριθμητικά ευαίσθητο αποτέλεσμα, καθώς αρκεί να μεταβάλλουμε κατά μια ελάχιστη ποσότητα την απαιτούμενη σε αυτό εκτίμηση προκειμένου να μην συνάγεται η ύπαρξη αντίστοιχης μονοπαραμετρικής ημιομάδας. Σχετικά, διατυπώνουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 4.1.5 *(Hormander,1963) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αυτοπαθής χώρος Banach X και ένας πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ στον X ώστε να ισχύουν τα εξής:*
(i) $\sigma(A) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$
(ii) $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1+\epsilon}{|\mathrm{Re}\ \lambda|}, \ \forall \lambda \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$
(iii) Ο A δεν είναι απειροστικός γεννήτορας κάποιας μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών στον X.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [8], p. 234.

Ας θεωρήσουμε μια ισχυρώς συνεχή σχεδόν συσταλτική ημιομάδα τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Τότε $||T(t)|| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$

για κάθε $t \geq 0$ και κάποιο $\omega \geq 0$ και, θέτοντας $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ για κάθε $t \geq 0$, λαμβάνουμε μια ισχυρώς συνεχή συσταλτική ημιομάδα με γεννήτορα $A - \omega I$. Από την άλλη, εάν ο τελεστής $(A, Dom(A))$ παράγει μιαν ισχυρώς συνεχή συσταλτική ημιομάδα $(S(t))_{t\geq 0}$ και θέσουμε $T(t) = e^{\omega t}S(t)$ για κάθε $t \geq 0$, βλέπουμε ότι ο $A + \omega I$ είναι γεννήτορας της ισχυρώς συνεχούς σχεδόν συσταλτικής ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$. Έτσι, από το Θεώρημα Hille-Yosida έπεται φυσιολογικά το επόμενο

Πόρισμα 4.1.6 *Για έναν γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ σε κάποιον χώρο Banach X και σταθερά $\omega \geq 0$, οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς σχεδόν συσταλτικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$||T(t)|| \leq \mathrm{e}^{\omega t},\ \forall t \geq 0$$

(β) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

(γ) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega}$$

Επιθυμούμε να χαρακτηρίσουμε τους απειροστικούς γεννήτορες γενικών ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ γνωρίζοντας ότι, για τέτοιες ημιομάδες, υπάρχουν σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $t \geq 0$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να χαρακτηρίσουμε τους γεννήτορες φραγμένων ισχυρώς συνεχών ημιομάδων οι οποίες, ως γνωστόν, ικανοποιούν την σχέση $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \geq 0$ και κάποιο $M \geq 1$. Τούτο επιτυγχάνεται ορίζοντας μια δεύτερη ισοδύναμη νόρμα στο χώρο Banach X ώστε η φραγμένη C_0-ημιομάδα να μετατραπεί, ως προς τη νέα νόρμα, σε μια συσταλτική C_0-ημιομάδα και να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε τα συμπεράσματα του Θεωρήματος Hille-Yosida (renorming procedure). Διατυπώνουμε ένα καθοριστικό

Λήμμα 4.1.7 *Έστω $(A, Dom(A))$ γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Banach X για τον οποίον ισχύει $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$. Αν*

$$||\lambda^n R(\lambda, A)^n|| \leq M$$

για $n = 1, 2, 3, \ldots$ και $\lambda > 0$, τότε υπάρχει μια δεύτερη νόρμα $|\cdot|$ στον X που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες

$$||x|| \leq |x| \leq M||x||\ \forall x \in X$$

(και άρα, η νέα νόρμα είναι ισοδύναμη με την αρχική νόρμα $||\cdot||$ του X) και

$$|\lambda R(\lambda, A)x| \leq |x|$$

για κάθε $x \in X$ και $\lambda > 0$.

Απόδειξη. Για τυχόν $\mu > 0$ ορίζουμε

$$||x||_\mu = \sup_{n\geq 1} ||\mu^n R(\mu, A)^n x|| \forall x \in X$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ποσότητα $||\cdot||_\mu$ είναι μια νόρμα στο χώρο Banach X. Ασφαλώς $||x||_\mu \geq ||\mu^n R(\mu, A)^n x||$ για κάθε $n \geq 0$, οπότε για $n = 0$ προκύπτει $||x||_\mu \geq ||x||$ για κάθε $x \in X$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} ||x||_\mu &\leq \sup_{n\geq 0} ||\mu^n R(\mu, A)^n x|| \\ &\leq M||x||, \ \forall x \in X \end{aligned}$$

Επομένως

$$||x|| \leq ||x||_\mu \leq M||x|| \tag{4.1.3}$$

για κάθε $x \in X$. Επίσης

$$\begin{aligned} ||\mu R(\mu, A)x||_\mu &= \sup_{n\geq 0} ||\mu^{n+1} R(\mu, A)^{n+1} x|| \\ &= \sup_{k\geq 1} ||\mu^k R(\mu, A)^k x|| \\ &\leq \sup_{k\geq 0} ||\mu^k R(\mu, A)^k x|| \\ &= ||x||_\mu, \ \forall x \in X \end{aligned}$$

Άρα

$$||\mu R(\mu, A)x||_\mu \leq 1 \tag{4.1.4}$$

Έστω $x \in X$. Θέτουμε $y := R(\lambda, A)x$ και από τη γνωστή εξίσωση των επιλυόντων τελεστών έχουμε

$$\begin{aligned} y &= R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)x \\ &= R(\mu, A)[x + (\mu - \lambda)y], \ 0 < \lambda \leq \mu, \forall x \in X \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.4) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||y||_\mu &\leq \frac{1}{\mu}||x||_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu}||y||_\mu \\ &= \frac{1}{\mu}||x||_\mu + (1 - \frac{\lambda}{\mu})||y||_\mu \end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\lambda}{\mu}||y||_\mu \leq \frac{1}{\mu}||x||_\mu$$

και

$$\lambda||y||_\mu \leq ||x||_\mu$$

για $0 < \lambda \leq \mu$.

Επομένως ισχύει
$$||\lambda R(\lambda, A)x||_\mu \leq ||x||_\mu, \ \forall x \in X \tag{4.1.5}$$
και για $0 < \lambda \leq \mu$ και συνακόλουθα
$$||\lambda R(\lambda, A)||_\mu \leq 1 \tag{4.1.6}$$
για $0 < \lambda \leq \mu$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.1.3) και (4.1.6) παίρνουμε
$$||\lambda^n R(\lambda, A)^n x|| \leq ||\lambda^n R(\lambda, A)^n x||_\mu \leq ||x||_\mu \tag{4.1.7}$$
για κάθε $x \in X$ και για $0 < \lambda \leq \mu$. Προφανώς η σχέση (4.1.7) δίνει
$$||x||_\lambda = \sup_{n \geq 0} ||\lambda^n R(\lambda, A)^n x|| \leq ||x||_\mu \tag{4.1.8}$$
για κάθε $\forall x \in X$ και για $0 < \lambda \leq \mu$.

Ορίζουμε $|x| = \lim_{\mu \to +\infty} ||x||_\mu$ για κάθε $x \in X$, παρατηρώντας ότι το όριο υπάρχει λόγω της σχέσης (4.1.8). Άμεσα επαληθεύεται ότι η ποσότητα $|\cdot|$ είναι μια νόρμα επί του X. Λαμβάνοντας όρια καθώς $\mu \to +\infty$ στη σχέση (4.1.3) βρίσκουμε ότι
$$||x|| \leq |x| \leq M||x||$$
για κάθε $x \in X$, και, άρα, οι νόρμες $|\cdot|$ και $||\cdot||$ είναι ισοδύναμες. Τέλος, αφήνοντας $\mu \to +\infty$ στην σχέση (4.1.5) συνάγουμε ότι
$$|\lambda R(\lambda, A)x| \leq |x|$$
για κάθε $x \in X$ και $\lambda > 0$.

Έστω $(T(t))_{t \geq 0}$ μια C_0-ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Αν εφοδιάσουμε τον X με μια νόρμα ισοδύναμη της αρχικής, τότε η οικογένεια $(T(t))_{t \geq 0}$ παραμένει C_0-ημιομάδα επί του X με τη νέα νόρμα. Ο γεννήτορας A δεν αλλάζει και συνεχίζει να είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός γραμμικός τελεστής. Οι παραπάνω είναι τοπολογικές ιδιότητες ανεξάρτητες από την ισοδύναμη νόρμα με την οποία είναι εφοδιασμένος ο χώρος X.

Με οδηγό τις σκέψεις αυτές διατυπώνουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.1.8 *Για έναν γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ σε κάποιον χώρο Banach X και σταθερά $M \geq 1$, οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(a) Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας φραγμένης ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t \geq 0}$ η οποία ικανοποιεί την σχέση
$$||T(t)|| \leq M, \ \forall t \geq 0$$
(β) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και
$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. (α)⇒(β) Έστω ότι ο γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ παράγει τη φραγμένη ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$. Ορίζουμε $|x| = \sup_{t\geq 0}||T(t)x||$ για κάθε $x \in X$. Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι η ποσότητα $|\cdot|$ είναι μια νόρμα επί του X. Είναι προφανές ότι ισχύει $||x|| \leq |x|$ (θέτοντας $t = 0$ στη σχέση ορισμού της $|\cdot|$) και επιπλέον $|x| \leq M||x||$ (επειδή $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \geq 0$). Συνεπώς

$$||x|| \leq |x| \leq M||x||, \forall x \in X \tag{4.1.9}$$

και, άρα, οι νόρμες $|\cdot|$ και $||\cdot||$ είναι ισοδύναμες.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |T(t)x| &= \sup_{s\geq 0}||T(s)T(t)x|| \\ &= \sup_{s\geq 0}||T(s+t)x|| \\ &= \sup_{\xi\geq t}||T(\xi)x|| \\ &\leq \sup_{\xi\geq 0}||T(\xi)x|| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Δηλαδή $|T(t)x| \leq |x|$ για κάθε $x \in X$, απ΄ όπου προκύπτει ότι $|T(t)| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$. Μ'αλλα λόγια, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν της διατύπωσης του Θεωρήματος, η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής συσταλτική ημιομάδα τελεστών επί του X εφοδιασμένου με τη νόρμα $|\cdot|$. Ο A συνεχίζει να είναι απειροστικός γεννήτορας της $(T(t))_{t\geq 0}$ και το Θεώρημα Hille-Yosida δηλώνει ότι πρόκειται για πυκνά ορισμένο κλειστό τελεστή που ικανοποιεί τις συνθήκες $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ και $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\lambda > 0$. Αλλά τότε $|R(\lambda, A)^n| \leq \frac{1}{\lambda^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επιπλέον

$$||R(\lambda, A)^n x|| \leq |R(\lambda, A)^n x| \leq \frac{1}{\lambda^n}|x| \leq \frac{M}{\lambda^n}||x||$$

για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{R}$ λόγω της σχέσεως (4.1.9).
Η απόδειξη της συνεπαγωγής είναι πλήρης.

(β)⇒(α) Από την υπόθεση της συνεπαγωγής και, σύμφωνα με το Λημμα 4.1.7, υπάρχει νόρμα $|\cdot|$ στον X ισοδύναμη της αρχικής για την οποία ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

$$||x|| \leq |x| \leq M||x||, \ \forall x \in X$$

και

$$|\lambda R(\lambda, A)x| \leq |x| \forall x \in X, \lambda > 0$$

Θεωρώντας το χώρο X με τη νόρμα $|\cdot|$, παρατηρούμε ότι ο A παραμένει πυκνά ορισμένος και κλειστός γραμμικός τελεστής, ισχύει $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ και $|R(\lambda, A)| \leq \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\lambda > 0$. Από το Θεώρημα Hille-Yosida προκύπτει ότι ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ επί του X εφοδιασμένου με τη νόρμα $|\cdot|$. Επιστρέφοντας στην αρχική νόρμα, ο A συνεχίζει να παράγει την $(T(t))_{t\geq 0}$ και μάλιστα

$$||T(t)x|| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M||x||$$

Δηλαδή $||T(t)x|| \leq M||x||$ για κάθε $x \in X$ και, άρα, $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \geq 0$, όπως επιθυμούσαμε.

Μπορούμε, στο σημείο αυτό, να παραθέσουμε το γενικό θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ημιομάδων.

Θεώρημα 4.1.9 *(Feller, Miyadera, Phillips 1952)*
Έστω $(A, Dom(A))$ γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Banach X και σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:
(α) Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $T(t))_{t\geq 0}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.
(β) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(γ) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. (α)⇒(γ) Προκύπτει ως άμεση συνέπεια των Προτάσεων 2.2.12 και 2.2.14 του Θεωρήματος 2.2.23 και του Πορίσματος 2.2.26.
(γ)⇒(β) Τετριμμένη απόδειξη.
(β)⇒(α) Υποθέτουμε ότι ο A είναι πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής για τον οποίο ικανοποιούνται οι συνθήκες $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$ και $||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$ για κάθε $\lambda \in \rho(A)$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον πυκνά ορισμένο κλειστό γραμμικό τελεστή $(B, Dom(B))$ με $B = A - \omega I$ και $Dom(B) = Dom(A)$.

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Τότε $\lambda + \omega > \omega$ και, από την υπόθεση της συνεπαγωγής, λαμβάνουμε $\lambda+\omega \in \rho(A)$ και $||R(\lambda+\omega, A)^n|| \leq \frac{M}{\lambda^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα υπάρχει και είναι φραγμένος ο γραμμικός τελεστής

$$\begin{aligned}[(\lambda+\omega)I - A]^{-1} &= (\lambda I + \omega I - A)^{-1} \\ &= [(\lambda I - (A - \omega I)]^{-1} \\ &= (\lambda I - B)^{-1}\end{aligned}$$

κάτι που σημαίνει ότι $\lambda \in \rho(B)$, ενώ παράλληλα ισχύει και

$$||R(\lambda, B)|| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Από το Θεώρημα 4.1.8 προκύπτει ότι ο τελεστης $(B, Dom(B))$ είναι απειροστικός γεννήτορας της ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας $(S(t))_{t\geq 0}$ με $||S(t)|| \leq M$

για κάθε $t \geq 0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.20, ο γραμμικός τελεστής $B + \omega I = A - \omega I + \omega I = A$ με πεδίο ορισμού $Dom(A)$ είναι απειροστικός γεννήτορας της ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ με $T(t) = \mathrm{e}^{\omega t}S(t), \forall t \geq 0$. Ασφαλώς έχουμε

$$||T(t)|| = \mathrm{e}^{\omega t}||S(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \forall t \geq 0$$

και η απόδειξη του Θεωρήματος ολοκληρώνεται.

Πόρισμα 4.1.10 *Έστω $(A, Dom(A))$ απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ σε κάποιον χώρο Banach X. Αν A_λ είναι η προσέγγιση Yosida του A, τοτε ισχύει*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}x, \forall x \in X$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [22], Chapter 1,Par. 5,Theorem 5.5,pp. 21-22.

Το Θεώρημα 4.1.9 είναι, δίχως αμφιβολία, ένα από τα πλέον κεντρικά αποτελέσματα στη Θεωρία Ημιομάδων. Χαρακτηρίζει πλήρως και με σαφήνεια τους γεννήτορες ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών, παρουσιάζει όμως ένα σημαντικό μειονέκτημα. Συγκεκριμένα, απαιτεί τον υπολογισμό όλων των δυνάμεων του επιλύοντα τελεστή του υποψηφίου απειροστικού γεννήτορα, ενώ στην συντριπτική πλειοψηφία των μη τετριμμένων περιπτώσεων κάτι τέτοιο είναι είναι εφικτό μόνο για $n = 1$. Φυσιολογικά, λοιπόν, το Θεώρημα Hille-Yosida έχει μεγαλύτερη πρακτική αξία.

Θα παραθέσουμε, περαιτέρω, ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν ομάδες τελεστών.

Παρατηρούμε, καταρχήν, ότι οι έννοιες 'ισχυρώς συνεχής συσταλτική ομάδα' και 'ισχυρώς συνεχής ομάδα ισομετριών' είναι ταυτόσημες. Κάθε ομάδα ισομετριών μπορεί να θεωρηθεί, τετριμμένα, συσταλτική. Από την άλλη, ας υποθέσουμε ότι $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής συσταλτική ομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Γνωρίζουμε, από την Παράγραφο 2.2, ότι θέτοντας $T_+(t) = T(t)$ για κάθε $t \geq 0$ και $T_-(t) = T(-t)$ για κάθε $t \geq 0$, αποκτούμε δύο ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες $(T_+(t))_{t\geq 0}$ και $(T_-(t))_{t\geq 0}$ με γεννήτορες A και $-A$ αντιστοίχως. Όταν $||T(t)|| \leq 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προφανώς ισχύουν $||T(t)|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$ και $||T(-t)|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$. Αλλά έχουμε

$$I = T(0) = T(t - t) = T(t)T(-t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$1 = ||I|| = ||T(t)T(-t)|| \leq ||T(t)||||T(-t)|| \leq 1$$

για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή $||T(t)|| = ||T(-t)|| = 1$ για κάθε $t \geq 0$ και τελικά $||T(t)|| = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα, πράγματι, η $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ομάδα ισομετριών.

Με κατάλληλες προσαρμογές και ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Hille-Yosida, παίρνουμε το εξής

Πόρισμα 4.1.11 *Έστω $(A, Dom(A))$ γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Banach X. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ομάδας από ισομετρίες επί του X.
(β) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

(γ) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C} - \mathrm{i}\mathbb{R}$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{|\mathrm{Re}\ \lambda|}$$

Ως προφανή αναδιατύπωση της Πρότασης 2.2.6, στο πλαίσιο των ομάδων τελεστών, λαμβάνουμε την ακόλουθη

Πρόταση 4.1.12 *Έστω $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(α) Η ομάδα $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ισχυρώς συνεχής.
(β) Ισχύει $\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)x$ για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in X$.
(γ) Υπάρχουν σταθερές $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ και $M > 0$ και ένα πυκνό υποσύνολο D του X ώστε να ισχύουν:
(i) $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \in [t_0, t_0 + \delta]$
(ii) $\lim_{t\to t_0+} T(t)x = T(t_0)x$ για κάθε $x \in D$.

Έπονται δύο χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 4.1.13 *Έστω $(A, Dom(A))$ και $(-A, Dom(A))$ απειροστικοί γεννήτορες των ισχυρώς συνεχών μονοπαραμετρικών ημιομάδων $(S(t))_{t\geq 0}$ και $(T(t))_{t\geq 0}$, αντιστοίχως, σε έναν χώρο Banach X. Τότε ο τύπος*

$$U(t) = \begin{cases} S(t), \ t \geq 0 \\ T(-t), \ t \leq 0 \end{cases}$$

ορίζει μίαν ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$.

Απόδειξη. Ασφαλώς οι τελεστές $U(t)$ είναι γραμμικοί και φραγμένοι για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $t, s \in \mathbb{R}$ με $t \geq 0$ και $s \geq 0$. Τότε $t + s \geq 0$ και

$$U(t + s) = S(t + s) = S(t)S(s) = U(t)U(s).$$

Αν $t, s \in \mathbb{R}$ με $t \leq 0$ και $s \leq 0$ τότε $t + s \leq 0$ και

$$U(t + s) = T(-(t + s)) = T(-t - s) = T(-t)T(-s) = U(t)U(s)$$

Προκειμένου να εξετάσουμε την περίπτωση πραγματικών αριθμών t και s με αντίθετα πρόσημα, χρειάζεται να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$T(t)S(t) = S(t)T(t) = I, \ \forall t \geq 0$$

Προς τούτο, έστω $x \in Dom(A)$ και $x(t) = T(t)S(t)x$ για κάθε $t \geq 0$. Από την Πρόταση 2.2.12 έχουμε ότι $S(t)x \in Dom(A)$ για κάθε $t \geq 0$ και, κατά συνέπεια

$$x(t) = T(t)(S(t)x) \in Dom(A), \ \forall t \geq 0$$

Στο διάστημα $[0, t_0]$ με $t_0 > 0$ η διανυσματική συνάρτηση $x(\cdot)$ είναι διαφορίσιμη με παράγωγο εκ δεξιών

$$\begin{aligned}
\frac{d^+}{dt}x(t) &= \lim_{h\to 0+} \frac{T(t+h)S(t+h)x - T(t)S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{T(t+h)S(t+h)x - T(t+h)S(t)x}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0+} \frac{T(t+h)S(t)x - T(t)S(t)x}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0+} T(t+h)\right) S(t) \left(\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h}\right) \\
&\quad + T(t) \left(\lim_{h\to 0+} \frac{T(h)x - x}{h}\right) S(t) \\
&= T(t)S(t)Ax + T(t)(-Ax)S(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση $x(\cdot)$ είναι σταθερή στο διάστημα $[0, t_0]$ και ισχύει $x(0) = x(t_0)$. Δηλαδή

$$T(t_0)S(t_0)x = x, \ \forall x \in Dom(A)$$

και, καθώς $\overline{Dom(A)} = X$, έχουμε $T(t_0)S(t_0)x = x$ για κάθε $x \in X$. Ισοδύναμα, $T(t_0)S(t_0) = I$ και, αφήνοντας το t_0 να διατρέξει το $\mathbb{R}_+$, λαμβάνουμε $T(t)S(t) = I$ για κάθε $t \geq 0$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $S(t)T(t) = I$ για κάθε $t \geq 0$.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, πραγματικούς αριθμούς $t \geq 0$ και $s \leq 0$ και ας υποθέσουμε ότι $t+s \geq 0$. Τότε $U(t+s) = S(t+s)$ και $U(t)U(s) = S(t)T(-s)$. Αλλά η σχέση $S(t+s) = S(t)T(-s)$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $S(t+s)S(-s) = S(t)T(-s)S(-s)$, δηλαδή με την $S(t) = S(t)$ που βέβαια αληθεύει για κάθε $t \geq 0$. Άρα $U(t+s) = U(t)U(s)$. Αν $t+s \leq 0$ τότε $U(t+s) = T(-(t+s))$ και $U(t)U(s) = S(t)T(-s)$. Παρατηρούμε ότι η σχέση $T(-(t+s)) = S(t)T(-s)$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $T(t)T(-t-s) = T(t)S(t)T(-s)$ δηλαδή με την $T(-s) = T(-s)$ που φυσικά αληθεύει για κάθε $s \leq 0$. Πάλι λοιπόν $U(t+s) = U(t)U(s)$. Ανάλογα εργαζόμαστε για $t \leq 0$ και $s \geq 0$.

Σε οποιαδήποτε περίπτωση πραγματικών αριθμών t και s επιβεβαιώσαμε ότι ισχύει

$$U(t+s) = U(t)U(s)$$

Προφανώς $U(0) = S(0) = T(0) = I$. Συνεπώς, η οικογένεια $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών.

Έστω τυχόν $x \in X$. Αν $t \geq 0$ τότε

$$\lim_{t\to 0+} U(t)x = \lim_{t\to 0+} S(t)x = x$$

(διότι η ημιομάδα $(S(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής). Αν $t \leq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0-} U(t)x &= \lim_{t\to 0-} T(-t)x = \\
&= \lim_{-\xi\to 0-} T(\xi)x \\
&= \lim_{\xi\to 0+} T(\xi)x \\
&= x
\end{aligned}$$

(διότι η ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής). Άρα ισχύει

$$\lim_{t\to 0} U(t)x = x, \ \forall x \in X$$

κάτι που σημαίνει ότι η ομάδα $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ισχυρώς συνεχής (βλ Πρόταση 4.1.12).

Τέλος, αν $x \in X$, λαμβάνουμε

$$\lim_{h\to 0+} \frac{U(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h} = Ax$$

και

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-} \frac{U(h)x - x}{h} &= \lim_{h\to 0-} \frac{T(-h)x - x}{h} \\
&= \lim_{-\xi\to 0-} \frac{T(\xi)x - x}{-\xi} \\
&= -\lim_{\xi\to 0+} \frac{T(\xi)x - x}{\xi} \\
&= -(-Ax) \\
&= Ax
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim_{h\to 0} \frac{U(h)x-x}{h} = Ax$. Αν $(B, Dom(B))$ είναι ο γεννήτορας της ομάδας $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ τότε μόλις αποδείξαμε ότι $B \subset A$. Με αντίστροφη συλλογιστική διαδικασία βρίσκουμε ότι $A \subset B$. Άρα $B = A$ και, πράγματι, απειροστικός γεννήτορας της $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ο τελεστής $(A, Dom(A))$.

Πρόταση 4.1.14 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορας $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Αν για κάθε $t > 0$ υπάρχει και είναι φραγμένος ο τελεστής $T(t)^{-1}$, τότε ο τύπος $S(t) = T(t)^{-1}$ για κάθε $t \geq 0$ ορίζει μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(S(t))_{t\geq 0}$ με απειροστικό γεννήτορα $(-A, Dom(A))$. Επιπλέον, αν*

$$U(t) = \begin{cases} S(t), \ t \geq 0 \\ T(-t)^{-1}, \ t \leq 0 \end{cases}$$

τότε η οικογένεια $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια ισχυρώς συνεχής ομάδα τελεστών με γεννήτορα* $(A, Dom(A))$.

Απόδειξη. Για κάθε $t, s \geq 0$ έχουμε

$$S(t+s) = S(s+t) = T(s+t)^{-1} = [T(s)T(t)]^{-1} = T(t)^{-1}T(s)^{-1} = S(t)S(s)$$

Επιπλέον $S(0) = T(0)^{-1} = I$. Άρα η οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $(S(t))_{t\geq 0}$ είναι μια μονοπαραμετρική ημιομάδα.

Για κάθε $s > 0$ ισχύει $Ran(T(s)) = X$. Έτσι, αν $x \in X$ και $s > 1$ υπάρχει $y \in X$ ώστε $T(s)y = x$. Για $0 < t < 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||T(t)^{-1}x - x|| &= ||T(t)^{-1}T(s)y - T(s)y|| \\ &= ||T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y|| \\ &= ||T(s-t)y - T(s)y|| \end{aligned}$$

Ασφαλώς $\lim_{t\to 0+} ||T(s-t)y - T(s)y|| = 0$ και, κατά συνέπεια, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0+} ||T(t)^{-1}x - x|| = 0$$

και

$$\lim_{t\to 0+} S(t)x = \lim_{t\to 0+} T(t)^{-1}x = x$$

για κάθε $x \in X$. Άρα η ημιομάδα $(S(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής.

Για κάθε $x \in Dom(A)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{S(h)x - x}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)^{-1}x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} T(h)\frac{T(h)^{-1}x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{x - T(h)x}{h} \\ &= -Ax \end{aligned}$$

Αν $(B, Dom(B))$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας της ημιομάδας $(S(t))_{t\geq 0}$ αποδείχθηκε ότι $B \subset -A$. Ανάλογα επιβεβαιώνεται ότι $-A \subset B$ και, επομένως, $B = -A$. Δηλαδή η $(S(t))_{t\geq 0}$ παραγεται από τον τελεστή $(-A, Dom(A))$.

Ο τελευταίος ισχυρισμός περί ορισμού της ομάδας $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ αποδεικνύεται ακριβώς όπως και ο αντίστοιχος της Πρότασης 4.1.13.

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια της Πρότασης 4.1.14 περιέχεται στο επόμενο Πόρισμα και αφορά της ημιομάδες δεξιών μετατοπίσεων στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R})$.

Πόρισμα 4.1.15 *Οι τελεστές δεξιάς μετατόπισης $T_r(t)$ στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R})$ που δίνονται από τον τύπο*

$$(T_r(t)f)(s) := f(s-t),\ f \in L^p(\mathbb{R}),\ s \in \mathbb{R}$$

ορίζουν μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα ισομετριών $(T_r(t))_{t\geq 0}$ επί του $L^p(\mathbb{R})$ η οποία καλείται ημιομάδα δεξιών μετατοπίσεων (right translation semigroup).
Ο απειροστικός γεννήτορας της $(T_r(t))_{t\geq 0}$ είναι ο γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ όπου

$$Af := -f',\ \forall f \in Dom(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : f \in AC(\mathbb{R}), f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

Θέτοντας

$$T_l(t) \quad = \quad \begin{cases} T_l(t),\ t \geq 0 \\ T_l(-t)^{-1},\ t \leq 0 \end{cases}$$

αποκτούμε μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ομάδα ισομετριών $(T_l(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επί του $L^p(\mathbb{R})$ η οποία καλείται ομάδα (αριστερών ή δεξιών) μετατοπίσεων και έχει απειροστικό γεννήτορα το τελεστή $(B, Dom(B))$ με $Bf = f'$ για κάθε

$$f \in Dom(B) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) :\ f \in AC(\mathbb{R}), f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε (βλ. Πρόταση 3.3.1) ότι οι τελεστές αριστερής μετατόπισης $T_l(t)$ του $L^p(\mathbb{R})$ συγκροτούν μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα ισομετριών $T_l(t)_{t\geq 0}$ επί του $L^p(\mathbb{R})$. Απειροστικός γεννήτορας της $T_l(t)_{t\geq 0}$ είναι ο τελεστής $(B, Dom(B))$ με $Bf = f'$ για κάθε

$$f \in Dom(B) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) :\ f \in AC(\mathbb{R}), f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

(βλ. Πρόταση 3.3.2). Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}(T_l(t)T_r(t)f)(s) &= T_l(t)(T_r(t)f)(s) \\ &= (T_l(t)f)(s-t) \\ &= f(s)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(T_r(t)T_l(t)f)(s) &= T_r(t)(T_l(t)f)(s) \\ &= (T_r(t)f)(s+t) \\ &= f(s)\end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ και $s \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια έχουμε

$$T_l(t)T_r(t) = I = T_r(t)T_l(t),\ \forall t \geq 0$$

Μ'αλλα λόγια $T_r(t) = T_l(t)^{-1}$. Όπως ακριβώς και στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.1 διαπιστωνεται ότι $||T_r(t)|| = 1$ για κάθε $t \geq 0$ και, άρα, οι τελεστές δεξιάς μετατόπισης είναι φραγμένοι (ειδικότερα ισομετρικοί). Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.14, η οικογένεια $(T_r(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα (από ισομετρίες) επί του $L^p(\mathbb{R})$ με απειροστικό γεννήτορα $A = -B$. Δηλαδή η ημιομάδα δεξιών μετατοπίσεων του $L^p(\mathbb{R})$ παραγεται από τον τελεστή $(A, Dom(A))$ όπου

$$Af = -f'$$

για κάθε

$$f \in Dom(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : \ f \in AC(\mathbb{R}), f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

Το τελευταίο συμπέρασμα του Πορίσματος προκύπτει από τον τελευταίο ισχυρισμό της Πρότασης 4.1.14.

Παραθέτουμε, καταληκτικά, το γενικό θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ομάδων τελεστών.

Θεώρημα 4.1.16 *Έστω $(A, Dom(A))$ γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Banach X και σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ομάδας τελεστών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ με

$$||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega|t|}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

(β) Οι τελεστές A και $-A$ είναι απειροστικοί γεννήτορες των ισχυρώς συνεχών ημιομάδων $(T_+(t))_{t\geq 0}$ και $(T_-(t))_{t\geq 0}$ αντίστοιχα, όπου $T_+(t) = T(t)$ και $T_-(t) = T(-t)$ για κάθε $t \geq 0$ και επιπλέον

$$||T_+(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \ ||T_-(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \ \forall t \geq 0$$

(γ) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(δ) Ο A είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\mathrm{Re}\,\lambda| > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. (α)$\Rightarrow$(β) Προκύπτει τετριμμένα από προηγούμενα σχόλια και παρατηρήσεις. (β)$\Rightarrow$(δ) Από την Παράγραφο 2.2 ο γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\mathrm{Re}\,\lambda| > \omega$. Υποθέτουμε, αρχικά, ότι $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Από το Θεώρημα 4.1.9 προκύπτει ότι $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(|\mathrm{Re}\,\lambda| - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω, τώρα, ότι $-\text{Re } \lambda = \text{Re } (-\lambda) > \omega$. Εφ' όσον ο τελεστής $(-A, Dom(A)$ είναι απειροστικός γεννήτορας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας τελεστών, πάλι από το Θεώρημα 4.1.9 έπεται ότι $-\lambda \in \rho(-A)$ και

$$||R(-\lambda, -A)^n|| \leq \frac{M}{(-\text{Re } \lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ισοδύναμα $\lambda \in \rho(A)$ και, καθώς $R(-\lambda, -A) = -R(\lambda, A)$,

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(-\text{Re } \lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Τελικά, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\text{Re } \lambda| > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\text{Re } \lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(δ)⇒(γ) Τετριμμένη απόδειξη.
(γ)⇒(α) Αν ο τελεστής $(A, Dom(A))$ είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός, το ίδιο συμβαίνει και για τον τελεστή $(-A, Dom(A))$. Από την υπόθεση της συνεπαγωγής, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \omega$ ισχύει $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Από το Θεώρημα 4.1.9 συνάγουμε ότι ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $(T_1(t))_{t\geq 0}$ επί του X με $||T_1(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $t \geq 0$.

Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $-\lambda > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A)$ ή ισοδύναμα $-\lambda \in \rho(-A)$. Καθώς $R(-\lambda, -A) = -R(\lambda, A)$ παίρνουμε

$$||R(-\lambda, -A)^n|| = ||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(-\lambda - \omega)^n}$$

Το Θεώρημα 4.1.9 δηλώνει ότι ο $-A$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας δεύτερης ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $(T_2(t))_{t\geq 0}$ επί του X με $||T_2(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $t \geq 0$. Θέτοντας

$$T(t) = \begin{cases} T_1(t), \ t \geq 0 \\ T_2(-t), \ t < 0 \end{cases}$$

αποκτούμε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.13, μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ που ικανοποιεί την συνθήκη

$$||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega|t|}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Παράδειγμα 4.1.17 *Θεωρούμε την ημιομάδα Gauss $(G_p(t))_{t\geq 0}$ επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $p \in [1, +\infty)$, που μελετήσαμε στην Εφαρμογή 3.4.4. Υπενθυμίζουμε ότι πρόκειται* *για μια συσταλτική ισχυρώς συνεχή ημιομάδα με γεννήτορα* $(-H_{0,p}, Dom(H_{0,p}))$ *όπου* $-H_{0,p}f = \bar{\Delta} f$ *και* $Dom(H_{0,p}) = \{f \in L^(\mathbb{R}^n) : \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. *Από το Θεώρημα Hille-Yosida προκύπτει ότι* $\sigma(-H_{0,p}) \subseteq (-\infty, 0]$. *Προκειμένου να αποδείξουμε ότι* $\sigma(-H_{0,p}) = (-\infty, 0]$ *αρκεί να κατασκευάσουμε ακολουθία* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *στοιχείων του* $Dom(H_{0,p})$ *για την οποία να ισχύει*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{||-H_{0,p}f_k - \mu f_k||_p}{||f_k||_p} = 0$$

για κάθε $\mu \leq 0$. *Αν συμβαίνει αυτό, τότε ο τελεστής* $R(\mu, -H_{0,p})$, *εφόσον υπάρχει, δεν είναι φραγμένος. Επομένως κάθε* $\mu \in \mathbb{R}$ *με* $\mu \leq 0$ *θα ανήκει στο φάσμα του* $-H_{0,p}$ *και θα έχουμε* $(-\infty, 0] \subseteq \sigma(-H_{0,p})$, *κάτι που θα επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό μας. Ισοδύναμα, αρκεί να προσδιορίσουμε ακολουθία* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *στοιχείων του* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ώστε να ισχύει*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{||\Delta f_k + |\xi|^2 f_k||_p}{||f_k||_p} = 0$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$, *παρατηρώντας ότι ο χώρος* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *αποτελεί πυρήνα (core) για τον* $-H_{0,p}$ *οπότε* $-H_{0,p}f_k = \Delta f_k$ $(k \in \mathbb{N})$ *σε αυτόν.*

Προς τούτο, θέτουμε $f_k(x) = \phi(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}$ *για* $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ *όπου η συνάρτηση* ϕ *ανήκει στον* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *και δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Με* $x \cdot \xi$ *σημειώνουμε το εσωτερικό γινόμενο των* x *και* ξ. *Έχουμε άμεσα ότι*

$$\begin{aligned} ||f_k||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x/k)|^p |\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}|^p dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| k^n dy\right)^{1/p} \\ &= k^{n/p}||\phi||_p \\ &= c_1 k^{n/p} \ (k \in \mathbb{N}) \text{ για } c_1 > 0 \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια του κανόνα του Leibniz υπολογίζουμε την ποσότητα $(\Delta f_k)(x) + |\xi|^2 f_k(x)$. *Θα πάρουμε*

$$\begin{aligned} (\Delta\phi)(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} &+ \phi(x/k)\Delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \\ &\quad +2(\nabla\phi)(x/k)\nabla\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} + |\xi|^2\phi(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\xi} \\ &= \frac{1}{k^2}(\Delta\phi)(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} - |\xi|^2\phi(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \\ &\quad +2\frac{1}{k}\mathrm{i}\xi(\nabla\phi)(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} + |\xi|^2\phi(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \\ &= \frac{1}{k^2}(\Delta\phi)(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} + 2\frac{1}{k}\mathrm{i}\xi(\nabla\phi)(x/k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} ||\Delta f_k + |\xi| f_k||_p &\leq c_2\frac{1}{k^2}||(\Delta\phi)(\cdot/k)||_p + c_3\frac{1}{k}||(\nabla\phi)(\cdot/k)||_p \\ &= c_4 k^{-2+n/p} + c_5 k^{-1+n/p} \end{aligned}$$

και τελικά $\lim_{k\to+\infty} \frac{c_4 k^{-2+n/p} + c_5 k^{-1+n/p}}{c_1 k^{n/p}} = 0$, *απ΄ όπου έπεται ο ισχυρισμός.*

4.2 Αποσβεστικοί τελεστές και το θεώρημα Lumer-Phillips

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε τον χαρακτηρισμό των Hille-Yosida για τους απειροστικούς γεννήτορες ισχυρώς συνεχών συσταλτικών μονοπαραμετρικών ημιομάδων. Στις επόμενες σελίδες θα παρουσιάσουμε μια διαφορετική προσέγγιση του ίδιου θέματος η οποία, ακριβώς επειδή δεν απαιτεί τον υπολογισμό των επιλυόντων τελεστών, είναι σαφώς πιο εύχρηστη στην πράξη.

Παραθέτουμε, καταρχήν, δυο καίριους Ορισμούς που εισάγουν τις βασικές έννοιες της Παραγράφου.

Ορισμός 4.2.1 *Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και X^* ο δυϊκός του. Κατά τα συνήθη, με $\langle , \rangle$ συμβολίζουμε τη δυϊκότητα μεταξύ των X και X^*, δηλαδή*

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x), \ \forall x \in X^*, x \in X$$

Για κάθε $x \in X$ θέτουμε

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}$$

και, παρατηρούμε ότι, λόγω του Πορίσματος 1.1.9 του Θεωρήματος Hahn-Banach, πρόκειται για σύνολο μη κενό. Το $J(x)$ καλείται σύνολο δυϊκότητας (duality set) του X και η πλειονότιμη συνάρτηση

$$J : X \to X^*, \ \text{με } x \to J(x), \ \forall x \in X$$

ονομάζεται απεικόνιση δυϊκότητας (duality map). Μια συνάρτηση $j : X \to X^*$ με $j(x) \in J(x)$ για κάθε $x \in X$ καλείται τμήμα δυϊκότητας (duality section) του X.

Ορισμός 4.2.2 *Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και $(A, Dom(A))$ γραμμικός τελεστής στον X. Ο A καλείται αποσβεστικός σε σχέση με το τμήμα δυϊκότητας j (dissipative with respect to the duality section j) αν ισχύει $\mathrm{Re}\ \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0$ για κάθε $x \in X$. Ο A καλείται αποσβεστικός (dissipative) αν είναι αποσβεστικός σε σχέση με κάποιο τμήμα δυϊκότητας j.*

Παρατήρηση 4.2.3 **(i)** *Από τον Ορισμό 4.2.2 είναι φανερό ότι ένας γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ σε μιγαδικό χώρο Banach X χαρακτηρίζεται ως αποσβεστικός αν και μόνο αν για κάθε $x \in Dom(A)$ υπάρχει $x^* \in J(x)$ ώστε να ισχύει*

$$\mathrm{Re}\ \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

(ii) *Έστω $\mathcal{H}$ μιγαδικός χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο συμβολιζόμενο με $(\cdot, \cdot)$. Έχοντας κατά νου την κανονική ταύτιση των $\mathcal{H}$ και $\mathcal{H}^*$ που επιτυγχάνεται μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz (βλ. Θεώρημα 1.1.43) μπορούμε να αποδείξουμε ότι $J(x) = \{x\}, \ \forall x \in H$. Έτσι, ένας γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ στον $\mathcal{H}$ είναι αποσβεστικός αν και μόνον αν ισχύει*

$$\mathrm{Re}\ \langle Ax, x \rangle \leq 0, \ \forall x \in Dom(A))$$

Στην συνέχεια όλοι οι χώροι Banach θα υποτίθενται μιγαδικοί. Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πρόταση 4.2.4 *Έστω X χώρος Banach και $(A, Dom(A))$ γραμμικός τελεστής στον X. Ο A είναι αποσβεστικός αν και μόνον αν ισχύει*

$$||(\lambda I - A)x|| \geq \lambda||x||, \ \forall x \in X, \lambda > 0$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [16], Chapter 1, Par. 4, Theorem 4.2, p.14.

Στην επόμενη Πρόταση συνοψίζουμε βασικές ιδιότητες των αποσβεστικών τελεστών.

Πρόταση 4.2.5 *Έστω $(A, Dom(A))$ αποσβεστικός γραμμικός τελεστής σε χώρο Banach X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*
*(**i**) Ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι '1-1' για κάθε $\lambda > 0$ και*

$$||(\lambda I - A)^{-1}y|| \leq \frac{1}{\lambda}||y||$$

για κάθε $y \in Ran(\lambda I - A) = (\lambda I - A)Dom(A)$.
*(**ii**) Ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι 'επί' του X, $\forall \lambda > 0$ αν και μόνον αν είναι 'επί', για κάποιο $\lambda_0 > 0$. Σ'αυτήν την περίπτωση έχουμε $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ και $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\lambda > 0$.*
*(**iii**) Ο A είναι κλειστός αν και μόνον αν το σύνολο $Ran(\lambda I - A)$ είναι κλειστό για κάποιο (άρα και για κάθε) $\lambda > 0$.*

Απόδειξη. (**i**) Από την Πρόταση 4.2.4 προκύπτει ότι ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι '1-1' για κάθε $\lambda > 0$. Επειδή ο τελεστής αυτός είναι 'επί' του συνόλου $Ran(\lambda I - A)$, για κάθε $y \in Ran(\lambda I - A)$ μπορούμε να βρούμε $x \in Dom(A)$ ώστε να ισχύει $y = (\lambda I - A)x$. Άρα $x = (\lambda I - A)^{-1}y$ και συνακόλουθα παίρνουμε $||y|| \geq \lambda||(\lambda I - A)^{-1}y||$. Δηλαδή $||(\lambda I - A)^{-1}y|| \leq \frac{1}{\lambda}||y||$ για κάθε $y \in Ran(\lambda I - A)$ και $\lambda > 0$.
(**ii**) Η μία κατεύθυνση του ισχυρισμού είναι τετριμμένη. Ας υποθέσουμε ότι ο τελεστής $\lambda_0 I - A$ είναι 'επί' του X για $\lambda_0 > 0$. Σε συνδυασμό με το (**i**) λαμβάνουμε ότι $\lambda_0 \in \rho(A)$ και $||R(\lambda_0, A)|| \leq \frac{1}{\lambda_0}$.
Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$. Τότε προφανώς ισχύει

$$||(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)|| = |\lambda - \lambda_0| ||R(\lambda_0, A)|| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} < 1$$

Άρα ο τελεστής $I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας Banach $\mathcal{L}(X)$. Κατά συνέπεια είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο και ο τελεστής

$$[I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)](\lambda_0 I - A) = \lambda_0 I - A + (\lambda - \lambda_0)I = \lambda I - A$$

Έπεται ότι $\lambda \in \rho(A)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$. Μ'αλλα λόγια $\lambda \in \rho(A)$ για κάθε $\lambda \in (0, 2\lambda_0)$. Πάλι από τον Ισχυρισμό (**i**) της Πρότασης έχουμε $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$ για κάθε

$\lambda \in (0, 2\lambda_0)$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία που μόλις περιγράψαμε για το $\frac{3\lambda_0}{2}$ στην θέση του λ_0, βρίσκουμε ότι $\lambda \in \rho(A)$ για κάθε $\lambda \in (0, 3\lambda_0)$. Με απλή επαγωγή καταλήγουμε ότι $\lambda \in \rho(A)$ για κάθε $\lambda \in (0, +\infty)$, οπότε και ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι 'επί' του X για κάθε $\lambda > 0$. Ασφαλώς ισχύει και η σχέση

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda},\ \forall \lambda > 0$$

(**iii**) Ο γραμμικός τελεστής A είναι κλειστός αν και μόνον αν ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι κλειστός για κάποιο (άρα και για κάθε) $\lambda > 0$. Τούτο είναι ισοδύναμο με την απαίτηση ο τελεστής $(\lambda I - A)^{-1} : Ran(\lambda I - A) \to Dom(A)$ να είναι κλειστός για κάποιο (άρα και για κάθε) $\lambda > 0$. Εφ'οσον από το (**i**) ο $(\lambda I - A)^{-1}$ είναι φραγμένος επί του $Ran(\lambda I - A)$, το Θεώρημα 1.3.7 υποδηλώνει ότι είναι κλειστός αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού του, δηλαδή το σύνολο $Ran(\lambda I - A)$, είναι κλειστό για κάποιο (άρα και για κάθε) $\lambda > 0$.

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της Παραγράφου

Θεώρημα 4.2.6 *(Lumer-Phillips, 1961) Έστω $(A, Dom(A))$ πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Banach X.*
*(**i**) Αν ο A είναι αποσβεστικός και $\exists \lambda_0 > 0$ ώστε να ισχύει $Ran(\lambda_0 I - A) = X$, τότε ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών επί του X.*
*(**ii**) Αν ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής ημιομάδας επί του X, τότε $Ran(\lambda I - A) = X,\ \forall \lambda > 0$ και ο A είναι αποσβεστικός για κάθε $x \in Dom(A)$ και κάθε $x^* \in J(x)$.*

Απόδειξη. (**i**) Έστω $\lambda_0 > 0$. Επειδή ο A είναι αποσβεστικός τελεστής, από τον ισχυρισμό (**i**) της Πρότασης 4.2.5 προκύπτει ότι ο τελεστής $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ είναι φραγμένος επί του συνόλου $Ran(\lambda_0 I - A)$. Καθώς $Ran(\lambda_0 I - A) = X$ έπεται ότι ο $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του X και, κατά συνέπεια, κλειστός. Αλλά τότε ο τελεστής $\lambda_0 I - A$, άρα και ο A, είναι κλειστός. Από τον ισχυρισμό (**ii**) της Πρότασης 4.2.5 συνάγονται τα εξής:

$$Ran(\lambda I - A) = X,\ \forall \lambda > 0,\ (0, +\infty) \subseteq \rho(A)$$

και $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda},\ \forall \lambda > 0$. Από τα παραπάνω, είναι σαφές ότι πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Hille-Yosida και ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών επί του X.
(**ii**) Έστω ότι ο A παράγει μια ισχυρώς συνεχή συσταλτική ημιομάδα $(T(t))_{t \geq 0}$ επί του X. Από το θεώρημα Hille-Yosida έχουμε $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ και, κατά συνέπεια, $Ran(\lambda I - A) = X,\ \forall \lambda > 0$. Επιπλέον, αν $x \in Dom(A)$ και $x^* \in J(x)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\ \langle T(t)x, x^* \rangle &\leq |\langle T(t)x, x^* \rangle| \\ &\leq ||T(t)x||||x^*|| \\ &\leq ||x||||x|| \\ &= ||x||^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \text{Re}\,\langle T(t)x - x, x^* \rangle &= \text{Re}\,\langle T(t)x, x^* \rangle - \text{Re}\,\langle x, x^* \rangle \\ &= \text{Re}\,\langle T(t)x, x^* \rangle - ||x||^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Διαιρώντας τη σχέση Re $\langle T(t)x - x, x^* \rangle \leq 0$ με $t > 0$ και αφήνοντας στη συνέχεια $t \to 0+$, βρίσκουμε ότι Re $\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Δηλαδή ο A είναι αποσβεστικός $\forall x \in Dom(A)$ και κάθε $x^* \in J(x)$.
Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Πόρισμα 4.2.7 *Έστω $(A, Dom(A))$ πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής σε χώρο Banach X. Αν οι τελεστές A και A^* είναι αποσβεστικοί τότε ο A αποτελεί απειροστικό γεννήτορα μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας επί του X.*

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος Lumer-Phillips, αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύει $Ran(I - A) = X$ (θεωρούμε, δηλαδή, στον ισχυρισμό (**i**) του Θεωρήματος $\lambda_0 = 1$).

Επειδή ο A είναι αποσβεστικός κλειστός γραμμικός τελεστής, από τον ισχυρισμό (**iii**) της Πρότασης 4.2.5, προκύπτει ότι το σύνολο $Ran(I - A)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Μ'αλλα λόγια, έχουμε $Ran(I - A) = \overline{Ran(I - A)}$. Αν υποτεθεί πως $Ran(I - A) \neq X$, από το Πόρισμα 1.1.11 του Θεωρήματος Hahn-Banach εξασφαλίζεται η ύπαρξη $x^* \in X^*$ με $x^* \neq 0$ ώστε να ισχύει

$$\langle (I - A)x, x^* \rangle = 0, \ \forall x \in Dom(A)$$

Άρα $x^* \in Dom(A)$ και $\langle x, (I - A)^* x^* \rangle = 0$ για κάθε $x \in Dom(A)$. Καθώς $\overline{Dom(A)} = X$ έπεται ότι $(I - A^*)x^* = 0$. Εφόσον ο A^* είναι αποσβεστικός τελεστής, το τελευταίο συμπέρασμα έρχεται σε αντίφαση με τον ισχυρισμό (**i**) της Πρότασης 4.2.5.

Συνεπώς $Ran(I - A) = X$ και ο A παράγει μιαν ισχυρώς συνεχή συσταλτική ημιομάδα επί του X.

Μπορεί κάποιος, ανατρέχοντας στη διεθνή βιβλιογραφία, να συναντήσει ποικιλία διατυπώσεων του Θεωρήματος 4.2.6. Εμείς παρουσιάζουμε την εκδοχή του A. Pazy ([22],Chapter 1,Par. 4,Theorem 4.3,p. 14-15). Αξίζει να σημειώθει ότι η πρωτότυπη διατύπωση του Θεωρήματος από τους G. Lumer και R.S. Phillips [20] είναι η ακόλουθη:

Ένας πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής A σε κάποιον μιγαδικό χώρο Banach X είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας επί του X αν και μόνο αν είναι αποσβεστικός και ισχύει $Ran(I - A) = X$.

Η έννοια αποσβεστικότητας που δίνουν είναι αυτή που αναφέρεται στον ισχυρισμό (**ii**) της εκδοχής που παρουσιάζουμε στην εργασία μας.

4.3 Δυϊκές ημιομάδες τελεστών και το θεώρημα του Stone

Στην παράγραφο αυτή αναφερόμαστε στις δυϊκές ημιομάδες τελεστών, η θεωρία των οποίων αναπτύχθηκε, κυρίως, χάρη στις εργασίες του R. S. Philips.

Ξεκινούμε θεωρώντας έναν (μιγαδικό) χώρο Banach X εφοδιασμένο με μια νόρμα $||\cdot||$ και υπενθυμίζοντας ότι για κάποιον πυκνά ορισμένο γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ στον X ορίζεται ο συζυγής του γραμμικός τελεστής $(A^*, Dom(A^*))$ από τις σχέσεις

$$A^*x^* = y^*,\ \forall x^* \in Dom(A^*) = \{x^* \in A^* : (\exists y^* \in X^*)\langle x^*, Ax\rangle = \langle y^*, x\rangle\ \forall x \in Dom(A)\}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3 ο συζυγής τελεστής A^* είναι κλειστός. Αν ο A είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής στον X, τότε ο συζυγής του A^* δίνεται από τον τύπο

$$A^*x^* = x^* \circ A$$

για κάθε $x^* \in X^*$ και είναι επίσης φραγμένος.

Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του X. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η οικογένεια $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ αποτελεί μια μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του X^*. Πράγματι, για κάθε $t \geq 0$ οι τελεστές $T(t)^*$ είναι γραμμικοί και φραγμένοι ενώ για κάθε $t \geq 0, s \geq 0$ και $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} T(t+s)^*x^* &= x^* \circ (T(t+s)) \\ &= x^* \circ (T(s) \circ T(t)) \\ &= (x^* \circ T(s)) \circ T(t) \\ &= (T(s)^*x^*) \circ T(t) \\ &= T(t)^*T(s)^*x^* \end{aligned}$$

και $T(0)^*x^* = x^* \circ T(0) = x^* \circ I = x^*$. Ο ισχυρισμός επιβεβαιώνεται.

Η οικογένεια $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ καλείται δυϊκή (dual) ή συζυγής (adjoint) της $(T(t))_{t\geq 0}$. Ωστόσο, η καινούρια ημιομάδα ενδέχεται να μην είναι ισχυρώς συνεχής επί του X όπως δείχνει και το ακόλουθο

Παράδειγμα 4.3.1 *Θεωρούμε τους τελεστές αριστερής μετατόπισης $T_l(t)$ στον χώρο Banach $L^1(\mathbb{R})$. Θέτοντας*

$$(T_l(t)f)(s) = f(s+t),\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}_+,\ s \in \mathbb{R}$$

αποκτούμε μιαν ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα από ισομετρίες (βλ. Πρόταση 3.3.1). Άμεσα επιβεβαιώνεται ότι $T_l(t)^* = T_r(t)$ $\forall t \geq 0$, όπου $T_r(t)$ είναι ο τελεστής δεξιάς μετατόπισης με πεδίο ορισμού τον χώρο Banach $L^\infty(\mathbb{R})$. Θέτοντας

$$(T_r(t)f)(s) = f(s-t),\ \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}_+,\ s \in \mathbb{R}$$

λαμβάνουμε μια μονοπαραμετρική ομάδα από ισομετρίες $(T_r(t))_{t\geq 0}$ η οποία, ωστόσο, δεν είναι ισχυρώς συνεχής. Πράγματι, για $f = \chi_{[0,t]}$ με $\chi_{[0,t]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και

$$\chi_{[0,t]}(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t \\ 0, & s < 0 \\ 0, & s > t \end{cases}$$

έχουμε ότι $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ αλλά

$$\lim_{t\to 0+} ||T_r(t)f - f||_{L^\infty(\mathbb{R})} \neq 0$$

Ακριβέστερα, η f είναι μετρήσιμη και $|f(s)| = |\chi_{[0,t]}(s)| \leq 1$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, οπότε $||f||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$. Αλλά

$$\begin{aligned} ||T_r(t)f - f||_{L^\infty(\mathbb{R})} &= ||T_r(t)\chi_{[0,t]} - \chi_{[0,t]}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &= \inf\{c : |\chi_{[0,t]}(s-t) - \chi_{[0,t]}(s)| \leq c \ \sigma.\pi. \ \sigma\tau o \ \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{c : |\chi_{[-t,0]}(s) - \chi_{[0,t]}(s)| \leq c \ \sigma.\pi. \ \sigma\tau o \ \mathbb{R}\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

και βέβαια $\lim_{t\to 0+} ||T_r(t)f - f||_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1 \neq 0$ Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.6, η ημιομάδα $(T_r(t))_{t\geq 0}$ στον $L^\infty(\mathbb{R})$ δεν είναι ισχυρώς συνεχής.

Επειδή η ημιομάδα $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ είναι, προφανώς, ασθενώς *-συνεχής υπό την έννοια ότι οι απεικονίσεις

$$t \to \xi_{x,x^*}(t) := \langle x, T(t)^* x^* \rangle = \langle T(t)x, x^* \rangle$$

είναι συνεχείς σε κάθε $t \in [0, +\infty)$ και για κάθε $x \in X, x \in X^*$ μπορούμε με φυσιολογικό τρόπο να ορίσουμε έναν ασθενή $*$-απειροστικό γεννήτορα για την $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A^\sigma x^* &= w^* - \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)^* x^* - x^*}{h} \ \forall x^* \in Dom(A^\sigma) \\ &= \left\{ x^* \in X^* : \exists \ w^* - \lim_{h\to 0+} \frac{T(h)^* x^* - x^*}{h} \right\} \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής $(A^\sigma, Dom(A^\sigma))$ είναι κλειστός, w^*-πυκνά ορισμένος στον X^* και συμπίπτει με τον συζυγή $(A^*, Dom(A^*))$ του τελεστή $(A, Dom(A))$.

Διατυπώνουμε ένα αποτέλεσμα ανεξαρτήτου ενδιαφέροντος που θα φανεί χρήσιμο στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3.

Θεώρημα 4.3.2 *(Τύπος αντιστροφής των Post-Widder) Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών στον χώρο Banach X. Αν $(A, Dom(A))$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας της $(T(t))_{t\geq 0}$ τότε ισχυούν οι σχέσεις*

$$T(t)x = \lim_{n\to+\infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A \right) \right]^n x$$

για κάθε $x \in X$ και τα όρια είναι ομοιόμορφα ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο ([22],Chapter 1,Par. 8,Theorem 8.3,p.33)

Το βασικό αποτέλεσμα της κατασκευής περικλείεται στο ακόλουθο

Θεώρημα 4.3.3 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Banach X. Αν $(A^*, Dom(A^*))$ είναι ο συζυγής τελεστής του $(A, Dom(A))$ και Y^* είναι η $||\cdot||$-κλειστότητα του $Dom(A^*)$ στον χώρο X^*, τότε ο περιορισμός $(\hat{T}(t))_{t\geq 0}$ της ημιομάδας $(T^*(t))_{t\geq 0}$ στο χώρο Banach Y^* είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών. Ο απειροστικός γεννήτορας $(\hat{A}, Dom(\hat{A}))$ της $(\hat{T}(t))_{t\geq 0}$ είναι το τμήμα του τελεστή $(A^*, Dom(A^*))$ στον υπόχωρο Y^*.*

Απόδειξη. Καθώς ο γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ παράγει την C_0-ημιομάδα $(T(t))_{t\geq 0}$, υπάρχουν σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ έτσι ώστε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ να ισχύει $\lambda \in \rho(A)$ και

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(βλ. Θεώρημα 4.1.9). Αλλά $||R(\lambda, A)|| = ||R(\lambda, A)^*||$ και, αν $\lambda \in \rho(A)$ τότε $\lambda \in \rho(A^*)$ και $R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^*$. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ έχουμε $\lambda \in \rho(A^*)$ και επιπλέον

$$||R(\lambda, A^*)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω $J(\lambda)$ ο περιορισμός του τελεστή $R(\lambda, A^*)$ στον υπόχωρο $Y^* = ||\cdot|| - cl_{X^*}(Dom(A^*))$. Είναι φανερό πως

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu)$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ και $\mathrm{Re}\,\mu > \omega$ αφού η αντίστοιχη σχέση ισχύει για τους επιλύοντες τελεστές. Δηλαδή ο $J(\lambda)$ είναι ο ψευδοεπιλύων τελεστής του A^* και φυσικά ισχύει

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda J(\lambda)y^* = y^*,\ \forall y^* \in Y^*$$

διότι η σχέση αυτή αποτελεί περιορισμό στον Y^* της αντίστοιχης σχέσης για τους επιλύοντες τελεστές στον X^*. Αρα ο $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής ενός κλειστού πυκνά ορισμένου γραμμικού τελεστή $(\hat{A}, Dom(\hat{A}))$ επί του Y^* (βλ. Πόρισμα 1.3.20) και μάλιστα

$$||J(\lambda)^n|| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Κατά συνέπεια, ο $(\hat{A}, Dom(\hat{A}))$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας $(\hat{T}(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Banach Y^* σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.9 (Feller-Miyadera-Phillips). Για κάθε $x \in X$ και $y^* \in Y^*$ έχουμε

$$\left\langle y^*, \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x \right\rangle = \left\langle \left(I - \frac{t}{n}\hat{A}\right)^{-n} y^*, x \right\rangle$$

Εφόσον $T(t)x = \lim_{n\to+\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x =$ για κάθε $x \in X$ και $t \geq 0$ (βλ. Θεώρημα 4.3.2), λαμβάνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, συμπεραίνουμε πως

$$\langle y^*, T(t)x\rangle = \langle \hat{T}(t)y^*, x\rangle$$

Έπεται ότι $T(t)^*y^* = \hat{T}(t)y^*$ για κάθε $y^* \in Y^*$ και $t \geq 0$ και, άρα, η C_0-ημιομάδα τελεστών $(\hat{T}(t))_{t\geq 0}$ είναι ο περιορισμός της ημιομάδας $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ στον Y^*.

Θα επιβεβαιώσουμε, καταληκτικά, ότι ο τελεστής $(\hat{A}, Dom(\hat{A}))$ είναι το τμήμα $(B, Dom(B))$ του $(A^*, Dom(A^*))$ στον υπόχωρο Y^*. Εφόσον η ασθενής*-τοπολογία επί του X^* (άρα και έπι του Y^*) είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας, οι επισημάνσεις και η ορολογία πριν από την διατύπωση του Θεωρήματος 4.3.2 καθιστούν σαφές ότι ο B είναι μια επέκταση του $\hat{A}$. Δηλαδή $Dom(\hat{A}) \subseteq Dom(B)$ και $\hat{A}y^* = By^*$ επί του $Dom(\hat{A})$. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ αρκετά μεγάλο μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\lambda \in \rho(\hat{A}) \cap \rho(B)$. Τότε $R(\lambda, \hat{A})y^* = R(\lambda, B)y^*$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο y_0^* του $Dom(B)$. Προφανώς $y_0^* \in Dom(A^*) \cap Y^*$ και $By_0^* = A^*y_0^* \in Y^*$. Επομένως

$$(\lambda I^* - B)y_0^* = (\lambda I - B)y_0^* \in Y^*$$

και επιπλέον

$$y_0^* = R(\lambda, B)(\lambda I - B)y_0^* = R(\lambda, \hat{A})(\lambda I - B)y_0^*$$

Έτσι $y_0^* \in Dom(\lambda I - \hat{A}) = Dom(\hat{A})$ και συνάγεται ο εγκλεισμός $Dom(B) \subseteq Dom(\hat{A})$. Τελικά προκύπτει $\hat{A} = B$ και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Αν θέσουμε

$$\hat{X}_A = \{x^* \in X^* : t \to T(t)^*x^* \text{ από τον } \mathbb{R}_+ \text{ στο } X^* \text{ είναι συνεχής}\}.$$

δηλαδή εάν X_A συμβολίζει το μεγαλύτερο υπόχωρο του X^* στον οποίο η δυϊκή ημιομάδα είναι ισχυρώς συνεχής, τότε το προηγούμενο θεώρημα υποδηλώνει ότι $X_A = Y^*$. Με άλλα λόγια ισχύει

$$\hat{X}_A = ||\cdot|| - cl_{X^*}(Dom(A^*))$$

Καλούμε το χώρο $\hat{X}_A$ A-δυϊκό (A-dual) του X ή δυϊκό του X υπό την έννοια της ημιομάδας (semigroup dual). Επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία με τα X_A και $(\hat{A}, Dom(\hat{A}))$ στη θέση των X και $(A, Dom(A))$ παίρνουμε τον A-δεύτερο δυϊκό (A-bidual) του X:

$$\hat{\hat{X}}_A = ||\cdot|| - cl_{\hat{X}_A^*}(Dom(\hat{A}^*))$$

Διατυπώνουμε, στην συνέχεια, ένα χρήσιμο λήμμα από την Συναρτησιακή Ανάλυση.

Λήμμα 4.3.4 *Αν X είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach και $(S, Dom(S))$ είναι ένας πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής στον X, τότε το πεδίο ορισμού $Dom(S^*)$ του συζυγούς τελεστή S^* είναι πυκνός υπόχωρος του X^*.*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [22],Ch. 1, Par. 10, Lemma 10.5,p.40.

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.3 και του Λήμματος 4.3.4 λαμβάνουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 4.3.5 *Έστω X αυτοπαθής χώρος Banachκαι $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιόμάδα τελεστών επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$. Τότε η δυϊκή ημιομάδα $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ της $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής στον X^* και έχει ως απειροστικό γεννήτορα τον συζυγή τελεστή $(A^*, Dom(A^*))$ του $(A, Dom(A))$.*

Ειναι γνωστό πως κάθε χώρος Hilbert είναι αυτοπαθής χώρος Banach. Αναδιατυπώνουμε στο πλαίσιο αυτό και, λόγω της σπουδαιότητάς του στα επόμενα, το Πόρισμα 4.3.5 ως εξής

Πόρισμα 4.3.6 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $(T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του X με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$. Τότε η δυϊκή ημιομάδα $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ της $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής στον $\mathcal{H}$ με απειροστικό γεννήτορα $(A^*, Dom(A^*))$.*

Υπενθυμίζουμε ότι, εάν $\mathcal{H}$ είναι ένας (μιγαδικός) χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(,)$, ένας γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ στον $\mathcal{H}$ καλείται αυτοσυζυγής αν είναι πυκνά ορισμένος και ισχύει $A = A^*$. Επίσης, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής U στον $\mathcal{H}$ καλείται ορθομοναδιαίος εάν ισχύει $UU^* = U^*U = I$ ή ισοδύναμα $U^* = U^{-1}$.

Ένας εύχρηστος χαρακτηρισμός των ορθομοναδιαίων τελεστών περιέχεται στο επόμενο

Λήμμα 4.3.7 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και U φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $\mathcal{H}$. Ο U είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί του $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [28, p.75].

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το περίφημο Θεώρημα του Stone το οποίο αποτέλεσε σημαντικότατο βήμα προόδου στην πορεία για την κατασκευή της εκθετικής συνάρτησης σε άπειρες διαστάσεις.

Θεώρημα 4.3.8 *(Stone,1932) Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $(A, Dom(A))$ πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής επί του $\mathcal{H}$. Ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ομάδας ορθομοναδιαίων τελεστών αν και μόνο αν ο γραμμικός (πυκνά ορισμένος) τελεστής* iA *είναι αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $(A, Dom(A))$ είναι απειροστικός γεννήτορας της C_0-ημιομάδας ορθομοναδιαίων τελεστών $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ στον $\mathcal{H}$. Από τον ορισμό μιας ομάδας τελεστών λαμβάνουμε τα ακόλουθα

$$I = U(0) = U(t - t) = U(t)U(-t)$$

και

$$I = U(0) = U(-t + t) = U(-t)U(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Άρα $U(-t) = U(t)^{-1}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αφού οι τελεστές $U(t)$ είναι ορθομοναδιαίοι, συμπεραίνουμε ότι $U(t)^* = U(t)^{-1}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι ο A είναι απειροστικός γεννήτορας για την C_0-ημιομάδα τελεστών $(U_+(t))_{t\geq 0}$ η οποία ταυτίζεται με την υποκείμενη C_0-ημιομάδα $(U(t))_{t\geq 0}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.3.6 ο γραμμικός τελεστής $(A^*, Dom(A^*))$ είναι απειροστικός γεννήτορας της C_0-ημιομάδας $(U(t)^*)_{t\geq 0}$. Επίσης ο $(-A, Dom(A))$ είναι απειροστικός γεννήτορας της C_0-ημιομάδας τελεστών $(U_-(t))_{t\geq 0}$ με $U_-(t) = U(-t)$ για κάθε $t \geq 0$. Από την προηγούμενη ανάλυση παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
-Ax &= \lim_{h\to 0+} \frac{U(-h)x - x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{U(h)^{-1}x - x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{U(h)^*x - x}{h} \\
&= A^*x, \ \forall x \in Dom(-A) = Dom(A)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή $Dom(A) \subseteq Dom(A^*)$ και $-Ax = A^*x$ επί του $Dom(A)$. Έπεται ότι $-A \subset A^*$ και με προφανή αντίστροφη διαδικασία προκύπτει $A^* \subset -A$. Τελικά $-A = A^*$ και, κατά συνέπεια, ισχύει $\mathrm{i}A = (\mathrm{i}A)^*$. Καθώς ο $\mathrm{i}A$ είναι πυκνά ορισμένος στον $\mathcal{H}$, καταλήγουμε ότι ο $\mathrm{i}A$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής.

Ας υποθέσουμε, στην συνέχεια, ότι ο γραμμικός τελεστής $(\mathrm{i}A, Dom(A)$ είναι αυτοσυζυγής. Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathrm{i}A$ είναι πυκνά ορισμένος στον $\mathcal{H}$ και επιπλέον $(\mathrm{i}A)^* = \mathrm{i}A$ ή ισοδύναμα $-A = A^*$. Έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
(Ax, x) &= (x, A^*x) \\
&= (x, -Ax) \\
&= -(x, Ax) \\
&= -\overline{(Ax, x)}
\end{aligned}
$$

οπότε $\mathrm{Re}\,(Ax, x) = 0$ για κάθε $x \in Dom(A)$. Εφόσον για κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει $J(x) = \{x\}$, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αποσβεστικός τελεστής (βλ. Παρατήρηση 4.2.3). Ανάλογα λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
(A^*x, x) &= (x, Ax) \\
&= (x, -A^*x) \\
&= -(x, A^*x) \\
&= -\overline{(A^*x, x)}
\end{aligned}
$$

οπότε $\mathrm{Re}\,(A^*x, x) = 0$ για κάθε $x \in Dom(A^*) = Dom(-A) = Dom(A)$ και ο τελεστής A^* είναι αποσβεστικός.

Εφόσον ο τελεστής $(A^*, Dom(A^*))$ είναι κλειστός και ισχύει $A^* = -A$ έπεται ότι και ο $(A, Dom(A))$ είναι κλειστός τελεστής. Ασφαλώς $(A^*)^* = A^{**} = A$. Εφόσον ο A είναι κλειστός και οι A, A^* αποσβεστικοί τελεστές, το Πόρισμα 4.2.7 δηλώνει ότι ο A είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας $(S(t))_{t\geq 0}$. Ομοίως, επειδή ο A^* είναι κλειστός τελεστής και οι $A^*, (A^*)^* = A$ αποσβεστικοί, συνάγεται ότι ο A^* δηλαδή ο $-A$, αποτελεί απειροστικό γεννήτορα μιας δεύτερης ισχυρώς συνεχούς συσταλτικής μονοπαραμετρικής ημιομάδας $(T(t))_{\geq 0}$. Θέτουμε

$$U(t) = \begin{cases} S(t), \ t \geq 0 \\ T(-t), \ t < 0 \end{cases}$$

και λαμβάνουμε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.13, μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ με απειροστικό γεννήτορα $(A, Dom(A))$. Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι οι $U(t)$ είναι ορθομοναδιαίοι τελεστές για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Όπως και στην αρχή της απόδειξης του Θεωρήματος, βρίσκουμε ότι $U(t)^{-1} = U(-t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αν $x \in \mathcal{H}$ τυχόν, τότε $U(-t)x \in \mathcal{H}$ και

$$\begin{aligned} U(t)(U(-t)x) &= U(t)U(t)^{-1}x \\ &= x \end{aligned}$$

Δηλαδή οι τελεστές $U(t)$ είναι επί του $\mathcal{H}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επιπλέον $||S(t)|| \leq 1$ και $||T(t)|| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$ εφόσον και οι δύο ημιομάδες είναι συσταλτικές. Στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.13 είδαμε ότι ισχύει

$$S(t)T(t) = T(t)S(t) = I, \ \forall t \geq 0$$

Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &= ||I|| \\ &= ||S(t)T(t)|| \\ &\leq ||S(t)||||T(t)|| \leq 1 \end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι $||S(t)|| = ||T(t)|| = 1$ για κάθε $t \geq 0$. Έστω $t \geq 0$. Τότε $U(t) = S(t)$ και, άρα, έχουμε $||U(t)|| = 1$. Αν $t < 0$ τότε $-t > 0$ και, επομένως, ισχύει $||T(-t)|| = 1$ ή ισοδύναμα $||U(t)|| = 1$. Μ'αλλα λόγια, γία κάθε $t \in \mathbb{R}$ οι τελεστές $U(t)$ είναι ισομετρικοί. Από το Λήμμα 4.3.7, συνάγουμε ότι οι τελεστές $U(t)$ είναι ορθομοναδιαίοι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Ας θεωρήσουμε τον χώρο Hilbert $L^2(\Omega, \mu)$ και τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $A := M_q$ για κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$. Αφού $A^* = M_{\overline{q}}$, ο A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν η συνάρτηση q είναι πραγματική. Σε αυτή την περίπτωση, το Θεώρημα του Stone υποδηλώνει ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα $(T_{\mathrm{i}q})_{t\in\mathbb{R}}$, που έχει απειροστικό γεννήτορα τον τελεστή $M_{\mathrm{i}q}$, είναι ορθομοναδιαία. Βεβαίως, αυτό συνάγεται αμεσότερα εάν παρατηρήσουμε

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{i}q}(t)^* &= T_{\overline{\mathrm{i}q}}(t) \\ &= T_{-\mathrm{i}q}(t) \\ &= T_{\mathrm{i}q}(-t) \\ &= T_{\mathrm{i}q}(t)^{-1}, \ \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Γενικά, παρόμοια επιχειρήματα για πολλαπλασιαστικούς τελεστές και ημιομάδες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δώσουν μια απλούστερη απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.8. Διατυπώνουμε, στο σημείο αυτό, το Φασματικό Θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.9 *Έστω $(A, Dom(A))$ ένας φυσιολογικός τελεστής σε κάποιον διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Υπάρχει, τότε, ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου (Ω, Σ, μ) και μια μετρήσιμη συνάρτηση $q : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_q στον χώρο $L^2(\Omega, \mu)$. Υπάρχει, δηλαδή, ορθομοναδιαίος φραγμένος γραμμικός τελεστής $U : \mathcal{H} \to L^2(\Omega, \mu)$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{array}{ccccc} H & \supseteq & Dom(A) & \xrightarrow{A} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle U} & & \Big\uparrow{\scriptstyle U^*=U^{-1}} \\ L^2(\Omega,\mu) & \supseteq & Dom(M_q) & \xrightarrow{M_q} & L^2(\Omega,\mu) \end{array}$$

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.9 μετασχηματίζει την ορθομοναδιαία ομάδα τελεστών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ και τον απειροστικό της γεννήτορα $(A, Dom(A))$ που ικανοποιεί την σχέση $A^* = -A$ σε τυχόντα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, σε πολλαπλασιαστικούς τελεστές σε κατάλληλο L^2-χώρο.

Παραθέτουμε, τώρα, έναν χαρακτηρισμό για ισχυρώς συνεχείς μονοπαραμετρικές ημιομάδες από αυτοσυζυγείς τελεστές (αυτοσυζυγείς ημιομάδες).

Πρόταση 4.3.10 *Ένας αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής $(A, Dom(A))$ σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς αυτοσυζυγούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{\geq 0}$, αν και μόνο αν είναι φραγμένος από πάνω, δηλαδή υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(Ax, x) \leq \omega ||x||^2$ για κάθε $x \in Dom(A)$.*

Απόδειξη. Ο αυτοσυζυγής τελεστής A στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ισομορφικός, μέσω του Φασματικού Θεωρήματος, με έναν (αυτοσυζυγή) πολλαπλασιαστικό τελεστή M_q στον χώρο $L^2(\Omega, \mu)$. Εργαζόμαστε με τον M_q. Η συνθήκη $(Ax, x) \leq \omega||x||^2$ για κάθε $x \in Dom(A)$ και για κάποιο $\omega \in \mathbb{R}$ είναι, για την πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση q, ισοδύναμη με την σχέση

$$\text{esssup}_{s\in\Omega}\text{Re }q(s) \leq \omega < +\infty$$

Η τελευταία εξασφαλίζει ότι ο M_q είναι απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής πολλαπλασιαστικής ημιομάδας $(T_q(t))_{t\geq 0}$ στον χώρο Hilbert $L^2(\Omega, \mu)$ (βλ. Προτάσεις 3.2.9 και 3.2.11). Θέτουμε $T_q(t) = T(t)$ για κάθε $t \geq 0$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.3.6 ο M_q^* παράγει την ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ στον $\mathcal{H}$. Εφόσον $M_q = M_q^*$ έπεται ότι $T(t) = T(t)^*$ για κάθε $t \geq 0$ και, άρα, η παραγόμενη ημιομάδα τελεστών είναι αυτοσυζυγής.

Υπενθυμίζουμε ότι, με τον όρο μη αρνητικός (ή θετικός) γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, εννοούμε έναν τελεστή A για τον οποίο ισχύει $(Ax, x) \geq 0$

για κάθε $x \in Dom(A)$. Θα ολοκληρώσουμε το Κεφάλαιο με έναν χαρακτηρισμό των γεννητόρων αυτοσυζυγών συσταλτικών ημιομάδων.

Θεώρημα 4.3.11 *Ο γραμμικός τελεστής $-A$ είναι απειροστικός γεννήτορας μιας αυτοσυζυγούς συσταλτικής ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ αν και μόνον αν ο A είναι μη αρνητικός και αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη. . Παραπέμπουμε στο βιβλίο [9], Chapter 4, Theorem 4.6, p. 99.

Κεφάλαιο 5

Συμμετρικές ημιομάδες Markov και ανεξαρτησία του φάσματος σε χώρους L^p

Το παρόν Κεφάλαιο σηματοδοτεί την απαρχή του δεύτερου και κυριότερου θεματικού κύκλου της εργασίας μας, που επικεντρώνεται στη μελέτη ημιομάδων τελεστών, σχεδόν αποκλειστικά, σε χώρους L^p. Σε πλήρη εναρμόνιση με τους στόχους που θέσαμε στον Πρόλογο, διατυπώνουμε τα πρώτα αποτελέσματα φασματικής ανεξαρτησίας για γεννήτορες ισχυρώς συνεχών ημιομάδων. Όπως είναι φυσικό, αυτά αφορούν ειδικές κλάσεις ημιομάδων και δεν διαθέτουν ιδιαίτερα μεγάλη εμβέλεια. Χαρακτηρίζονται, ωστόσο, από σαφήνεια και παρουσιάζουν αξιοσημείωτο θεωρητικό ενδιαφέρον.

Στην πρώτη παράγραφο, έπειτα από μια σύντομη αναφορά στις θετικές ημιομάδες (Ορισμός 5.1.1), αναλύουμε διεξοδικά τις συνθήκες Beurling-Deny (Θεωρήματα 5.1.4 και 5.1.5) και αποδεικνύουμε ότι αυτές ικανοποιούνται από ομοιόμορφα ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης που υπόκεινται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet (Θεώρημα 5.1.7). Ακολουθεί ο κρίσιμος ορισμός των συμμετρικών ημιομάδων Markov (Ορισμός 5.1.9) και μια σύνοψη βασικών ιδιοτήτων τους (Θεώρημα 5.1.10). Η παράγραφος ολοκληρώνεται με μια περιεκτική εισαγωγή στους τελεστές Schrödinger. Αποδεικνύουμε ότι, αν ο H είναι ένας μη αρνητικός αυτοσυζυγής τελεστής Schrödinger στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, τότε η οικογένεια $(\mathrm{e}^{-Ht})_{t\geq 0}$ είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov. (Θεώρημα 5.1.13)

Η δεύτερη παράγραφος ξεκινά με τους ορισμούς των τελικά συνεχών ως προς την τοπολογίας της νόρμας (Ορισμός 5.2.1) και των τελικά συμπαγών (Ορισμός 5.2.2) ισχυρώς συνεχών ημιομάδων. Αποδεικνύουμε ότι, κάθε τελικά συμπαγής ισχυρώς συνεχής ημιομάδα είναι και τελικά συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας (Θεώρημα 5.2.4). Έπεται ένας καίριος συνδιασμός αποτελεσμάτων (Θεώρημα 5.2.6 και Πόρισμα 5.2.7) που καταδεικνύουν την στενή σχέση ανάμεσα στο φάσμα μιας τελικά συνεχούς ως προς την τοπολογία της νόρμας ή μιας άμεσα συμπαγούς ημιομάδας και σε αυτό του απειροστικού της γεννήτορα. Το Θεώρημα 5.2.8 και το Πόρισμα 5.2.9 αφορούν σε συμπαγείς τελεστές σε χώρους L^p και προετοιμάζουν το έδαφος για την τεκμηρίωση της φασματικής ανεξαρτησίας γεννητόρων συγκεκριμένων κλάσεων ισχυρώς συνεχών ημιομάδων. Ακριβέστερα, αποδεικνύεται ότι, αν η e^{-Ht} είνα μια συμμετρική ημιομάδα Markov αποτελούμενη από τελεστές συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^2(\Omega)$ ή επί του $L^1(\Omega)$, όπου (Ω, Σ, dx) κατάλληλος χώρος μέτρου, τότε το L^p-φάσμα του τελεστή $-H$ (άρα και του H) είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό p (Θεωρήματα 5.2.10 και 5.2.11). Τέλος, ορίζονται οι ultra-συσταλτικές ημιομάδες (Ορισμός 5.2.12) και αποδεικνύεται ότι, αν η e^{-Ht} είναι μια ultra-συσταλτική ημιομάδα επί του $L^2(\Omega)$ με το μέτρο του Ω πεπερασμένο, τότε το L^p-φάσμα του H είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$ (Θεώρημα 5.2.14).

5.1 Συνθήκες Beurling-Deny και συμμετρικές ημιομάδες Markov

Σκοπός της Παραγράφου είναι η διατύπωση των συνθηκών Beurling-Deny και ο ορισμός των συμμετρικών ημιομάδων Markov. Κρίνεται απαραίτητη, ωστόσο, μια συντομότατη αναφορά στις θετικές ημιομάδες καθώς διαδραματίζουν ενεργό ρόλο στα επόμενα. Ο αναγνώστης παρακαλείται να ανατρέξει στα γραφόμενα στην Παράγραφο 1.1 περί συνδέσμων Banach.

Ορισμός 5.1.1 *Έστω $T = (T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί ενός συνδέσμου Banach X. Η T καλείται θετική ημιομάδα (positive semigroup) αν οι τελεστές $T(t)$ είναι θετικοί για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή αν, δοθείσης οποιασδήποτε συνάρτησης $f \in X$ με $f \geq 0$, ισχύει $T(t)f \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$.*

Πρόταση 5.1.2 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα με απειροστικό γεννήτορα A σε κάποιον σύνδεσμο Banach X. Η T είναι θετική ημιομάδα αν και μόνο αν ο τελεστής $R(\lambda, A)$ είναι θετικός για αρκούντως μεγάλα $\lambda \in \rho(A)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ημιομάδα T είναι θετική και θεωρούμε συνάρτηση $f \in X$ με $f \geq 0$ τυχούσα. Αν $\lambda \in \rho(A)$ με $\mathrm{Re}\ \lambda >> \omega_0(T)$, όπου $\omega_0(T)$ είναι το αυξητικό φράγμα της T, από την γνωστή αναπαράσταση του Θεωρήματος 2.2.23 παίρνουμε

$$R(\lambda, A)f = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) f dt$$

Εφ'οσον $T(t)f$ για κάθε $t \geq 0$, λαμβάνουμε $R(\lambda, A)f \geq 0$. Αρα ο τελεστής είναι θετικός για αρκούντως μεγάλα $\lambda \in \rho(A)$. Υποθέτουμε αντίστροφα, ότι ο τελεστής $R(\lambda, A)f$ είναι θετικός για αρκούντως μεγάλα $\lambda \in \rho(A)$ και θεωρούμε τυχούσα συνάρτηση $f \in X$ με $f \geq 0$. Από τον τύπο αντιστροφής των Post-Widder έχουμε

$$T(t)f = \lim_{n\to +\infty} \left(\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}, A) \right)^n f$$

για κάθε $t \geq 0$. Έπεται ότι $T(t)f \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$. Συνεπώς η T είναι θετική ημιομάδα.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (αντίστοιχα με $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$) το χώρο Banach όλων των πραγματικών (αντίστοιχα μιγαδικών) μετρήσιμων συναρτήσεων επί του Ω, όπου (Ω, Σ, dx) χώρος μέτρου, οι οποίες έχουν πεπερασμένες L^p-νόρμες για $1 \leq p < +\infty$. Κάθε πραγματικός γραμμικός τελεστής $T_{\mathbb{R}}$ επί του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ δύναται να επεκταθεί μονοσήμαντα σε έναν μιγαδικό γραμμικό τελεστή $T_{\mathbb{C}}$ επί του $\mathcal{B}_C$ έτσι ώστε να ισχύει

$$(\overline{T_{\mathbb{C}} f}) = T_{\mathbb{C}}(\bar{f})$$

για κάθε $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται μιγαδικοποίηση (complexification). Μπορεί να αποδειχτεί ότι, αν ο $T_{\mathbb{R}}$ είναι φραγμένος επί του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, τότε ο $T_{\mathbb{C}}$ είναι φραγμένος επί του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ και μάλιστα $||T_{\mathbb{R}}|| = ||T_{\mathbb{C}}||$. Για τις λεπτομέρειες της απόδειξης του τελευταίου ισχυρισμού, παραπέμπουμε στο βιβλίο του E. B. Davies, [9],Ch. 7, Lemma 7.5,p.175. Γενικά μπορούμε να γράψουμε πως $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ και η νόρμα του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} ||f + \mathrm{i}g||_p &= \left(c \int_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} |f \cos\theta + g \sin\theta|^p d\theta dx \right)^{1/p} \\ &= \left(c \int_{-\pi}^{\pi} ||f \cos\theta + g \sin\theta||_p^p d\theta \right)^{1/p} \end{aligned}$$

όπου $c^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos\theta|^p d\theta$ και $p \in [1, +\infty)$. Επισημαίνουμε ότι, στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικούς L^p-χώρους.

Για τη συνέχεια, υποθέτουμε ότι Ω είναι ένας τοπικά συμπαγής δεύτερος αριθμήσιμος χώρος Hausdorff και dx ένα μέτρο Borel επί του Ω. Με e^{-Ht} συμβολίζουμε την ισχυρώς συνεχή ημιομάδα επί του χώρου Hilbert $L^2(\Omega, dx)$ που παράγεται από τον κλειστό γραμμικό τελεστή $-H$. Αν ο $-H$ είναι μη αρνητικός, υπό την έννοια ότι ισχύει $(Hf, f) \geq 0$ για κάθε $f \in Dom(H)$ και αυτοσυζυγής τελεστής, τότε η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική και αποτελείται από αυτοσυζυγείς τελεστές επίσης (βλ. Θεώρημα 4.3.11).

Πριν διατυπώσουμε τα θεωρήματα που περιλαμβάνουν τις συνθήκες Beurling-Deny, παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα που θα επικαλεστούμε στο πρώτο από αυτά

Λήμμα 5.1.3 *Έστω Γ ένας κώνος σε κάποιον πραγματικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει $\tilde{f} \in \mathcal{H}$ έτσι ώστε να ισχύει $||\tilde{f}|| \leq ||f||$ και $(\tilde{f}, c) \geq |(f, c)|$ για κάθε $c \in \Gamma$. Τότε $f = \tilde{f}$ για κάθε $f \in \Gamma$ και $(f, g) \geq 0$ για κάθε $f, g \in \Gamma$.*

Απόδειξη. Αν $f \in C$, τότε $||\tilde{f}|| \leq ||f||$ και επιπλέον

$$||\tilde{f}||||f|| \leq ||f||^2 = |(f, f)| \leq (\tilde{f}, f) \leq |(\tilde{f}, f)| \leq ||\tilde{f}||||f||$$

(με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz). Επομένως $(\tilde{f}, f) = ||\tilde{f}||||f||$ οπότε $f = \lambda\tilde{f}$ για κάποιο $\lambda > 0$. Η σχέση $||\tilde{f}|| \leq ||f||$ δίνει $||\tilde{f}|| \leq ||\lambda\tilde{f}||$. Άρα $||\tilde{f}|| \leq \lambda||\tilde{f}||$ κάτι που σημαίνει ότι $\lambda \geq 1$. Από την άλλη, παίρνουμε $(\tilde{f}, c) \geq |(\lambda\tilde{f}, c)|$ και, άρα, $(\tilde{f}, c) \geq \lambda(\tilde{f}, c)$ για κάθε $c \in \Gamma$. Δηλαδή $\lambda \leq 1$. Τελικά $\lambda = 1$ και $\tilde{f} = f$ για κάθε $f \in \Gamma$. Αν $f, g \in \Gamma$, τότε έχουμε

$$(f, g) = (\tilde{f}, g) \geq |(f, g)| \geq 0$$

Θα χρειαστούμε, επίσης, μια εκδοχή του Φασματικού Θεωρήματος σαφέστατα προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις της παρούσας παραγράφου, για την απόδειξη της οποίας παραπέμπουμε στο βιβλίο του E. B. Davies, [9],Ch. 4, Theorem 4.4, p. 98. Έτσι, αν H είναι ένας (μη φραγμένος) αυτοσυζυγής τελεστής στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, υπάρχει ένας χώρος μέτρου (Ω, Σ, dx), μια ορθομοναδιαία ταύτιση του $\mathcal{H}$ με τον $L^2(\Omega, dx)$ και μια πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση h επί του Ω, ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$Dom(H) = \{f : \int_\Omega (1 + h(x)^2)|f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

και

$$(Hf)(x) = h(x)f(x),\ \forall x \in \Omega, f \in Dom(H)$$

Τα θεωρήματα 5.1.4 και 5.1.5 που ακολουθούν περιγράφουν τις συνθήκες (κριτήρια) Beurling-Deny. Πριν από την διατύπωσή τους επιθυμούμε να προβούμε σε ορισμένες διευκρινίσεις. Αν H είναι ένας πραγματικός τελεστής στον πραγματικό χώρο Hilbert $L^2(\Omega, dx)$ και $H_\mathbb{C}$ ο αντίστοιχος τελεστής που προκύπτει από την διαδικασία της μιγαδικοποίησης, τότε τα σύνολα $Dom(H_\mathbb{C})$ και $Quad(H_\mathbb{C})$ είναι αναλλοίωτα κάτω από μιγαδικούς συζυγείς. Μπορούμε λοιπόν, να ορίσουμε τα $DomH$ και $QuadH$ ως τα πραγματικά μέρη αυτών και τον τελεστή $H^{1/2}$ ως το πραγματικό μέρος του $H_\mathbb{C}^{1/2}$.

Επιπλέον, γράφοντας ότι ο H είναι μη αρνητικός ή ισοδύναμα θετικός επί του $L^2(\Omega, dx)$, θα εννοούμε ότι ισχύει $(Hf, f) \geq 0$ για κάθε $f \in Dom(H)$. Θα γράφουμε πως μια ημιομάδα τελεστών ή ένας απλός τελεστής διατηρούν τη θετικότητα (positivity preserving semigroup,operator) επί του $L^2(\Omega, dx)$, στην περίπτωση κατά την οποία θέλουμε να επισημάνουμε ότι αυτοί είναι θετικοί υπό την έννοια του Ορισμού 5.1.1.

Τέλος, για $f, g \in L^2(\Omega, dx)$ (ή γενικότερα σε κάποιον L^p-χώρο) θέτουμε

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

και

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

για κάθε $x \in \Omega$.

Θεώρημα 5.1.4 *Έστω H ένας μη αρνητικός πραγματικός αυτοσυζυγής τελεστής στον πραγματικό χώρο Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Omega, dx)$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(α) $u \in Quad(H)$ συνεπάγεται ότι $|u| \in Quad(H)$. Επίσης, αν $u \in Dom(H)$ και $f \in Quad(H)$ με $f \geq 0$, τότε

$$(H^{1/2}f, H^{1/2}|u|) \leq (f, \frac{u}{|u|}Hu)$$

(β) $u \in Quad(H)$ συνεπάγεται ότι $|u| \in Quad(H)$ και

$$(H^{1/2}|u|, H^{1/2}|u|) \leq (H^{1/2}u, H^{1/2}u)$$

(γ) Ο τελεστής $(H + aI)^{-1}$ διατηρεί τη θετικότητα για κάθε $a > 0$.
(δ) Η ημιομάδα e^{-Ht} διατηρεί τη θετικότητα για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη.
(α)⇒(β) Υποθέτουμε ότι $u \in Dom(H)$. Για $f = |u|$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}(H^{1/2}|u|, H^{1/2}|u|) &\leq (|u|, \frac{u}{|u|}(Hu)) \\ &= \frac{u}{|u|}(|u|, Hu) \\ &= (u, Hu) \\ &= (H^{1/2}u, H^{1/2}u)\end{aligned}$$

Έστω ότι $u \in Quad(H)$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο $Dom(H)$ είναι πυρήνας μορφής του H και, κατά συνέπεια, πυκνό στο $Quad(H)$. Υπάρχει, δηλαδή, ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Dom(H)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$. Από το Φασματικό Θεώρημα, στην εκδοχή που παραθέσαμε σε τούτη την Παράγραφο, συνάγεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty}(H^{1/2}u_n, H^{1/2}u_n) = (H^{1/2}u, H^{1/2}u)$$

Επειδή $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |u|$ και η τετραγωνική μορφή Q που σχετίζεται με τον H είναι κάτω ημισυνεχής (βλ. Θεώρημα 1.4.3), παίρνουμε

$$Q(|u|) \leq \liminf_{n\to+\infty} Q(|u_n|) \leq \limsup_{n\to+\infty} Q(|u_n|)$$

Δηλαδή

$$(H^{1/2}|u|, H^{1/2}|u|) \leq \limsup_{n\to+\infty}(H^{1/2}|u_n|, H^{1/2}|u_n|)$$

Αλλά $u_n \in Dom(H)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}(H^{1/2}|u_n|, H^{1/2}|u_n|) &\leq \limsup_{n\to+\infty}(H^{1/2}u_n, H^{1/2}u_n) \\ &= (H^{1/2}u, H^{1/2}u)\end{aligned}$$

Τελικά $(H^{1/2}|u|, H^{1/2}|u|) \leq (H^{1/2}u, H^{1/2}u)$ και η απόδειξη της συνεπαγωγής ολοκληρώνεται.

(β)⇒(γ) Τρέπουμε το σύνολο $Quad(H)$ σε χώρο Hilbert ορίζοντας εσωτερικό γινόμενο σύμφωνα με τον τύπο

$$(f,g)_1 = (H^{1/2}f, H^{1/2}g) + a(f,g)$$

για κάθε $f, g \in Quad(H)$ και $a > 0$. Η εμφύτεση $J : Quad(H) \to \mathcal{H}$ είναι φραγμένη και $J^*f = (H + aI)^{-1}f$ για κάθε $f \in \mathcal{H}$. θεωρούμε τον κώνο $\Gamma \subset Quad(H)$ όπου

$$\Gamma = \{J^*f : 0 \le f \in \mathcal{H}\}$$

Αν $f, g \in Quad(H)$ και $c \in \Gamma$ τότε $c = J^*g$ για κάποιο $0 \le g \in \mathcal{H}$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} (|f|, c)_1 &= (|f|, J^*g)_1 = (J|f|, g) \\ &= (|f|, g) \ge |(f,g)| \\ &= |(f, J^*g)_1| = |(f,c)_1| \end{aligned}$$

Επίσης, από την υπόθεση της συνεπαγωγής, αν $f \in Quad(H)$ τότε $|f| \in Quad(H)$ και ισχύει

$$\begin{aligned} ||\,|f|\,||_1^2 &= (H^{1/2}|f|, H^{1/2}|f|) + a||\,|f|\,||^2 \\ &\le (H^{1/2}f, H^{1/2}f) + a||f||^2 \\ &= ||f||_1^2 \end{aligned}$$

(καθώς $||\,|f|\,|| = ||f||$) από βασική ιδιότητα των L^p-χώρων ως συνδέσμων Banach). Από το Λήμμα 5.1.3 για $\tilde{f} = |f|$ συμπεραίνουμε ότι, αν $0 \le f \in \mathcal{H}$ τότε $||f||_1 = ||\,|f|\,||_1$ και ισοδύναμα $J^*f = |J^*f|$, οπότε

$$J^*f = (H + aI)^{-1}f \ge 0$$

Άρα ο τελεστής $(H + aI)^{-1}$ διατηρεί τη θετικότητα.
(γ)⇒(δ) Γνωρίζουμε (βλ. Θεώρημα 4.3.2) ότι

$$\mathrm{e}^{-Ht}f = \lim_{n\to+\infty}[\frac{n}{t}(\frac{n}{t}I + H)^{-1}]^n f$$

για κάθε $f \in \mathcal{H} = L^2(\Omega, dx)$. Από την υπόθεση της συνεπαγωγής, οι τελεστές

$$(\frac{n}{t}I + H)^{-1}$$

διατηρούν τη θετικότητα. Έπεται ότι και η ημιομάδα e^{-Ht} διατηρεί τη θετικότητα για κάθε $t \ge 0$.
(δ)⇒ (α) Έστω $f \in Quad(H)$. Τότε, λόγω θετικότητας, ισχύει

$$(\mathrm{e}^{-Ht}f, f) \le (\mathrm{e}^{-Ht}|f|, |f|)$$

Επομένως

$$(t^{-1}(I - \mathrm{e}^{-Ht})|f|, |f|) \le (t^{-1}(I - \mathrm{e}^{-Ht})f, f)$$

Αφήνοντας $t \to 0+$ και, επειδή πάντα ισχύει

$$Q(f) = \lim_{t\to 0+}(t^{-1}(I - \mathrm{e}^{-Ht})f, f)$$

λαμβάνουμε
$$\limsup_{t\to 0+}(t^{-1}(I-\mathrm{e}^{-Ht})|f|,|f|) \le (H^{1/2}f, H^{1/2}f)$$
Από το Φασματικό Θεώρημα, στην εκδοχή του αυτής της παραγράφου, προκύπτει ότι $|f| \in Quad(H)$ και
$$(H^{1/2}|f|, H^{1/2}|f|) \le (H^{1/2}f, H^{1/2}f)$$
Αν $u \in Dom(H), f \in Quad(H)$ και $f \ge 0$, τότε
$$|\frac{u}{|u|}(\mathrm{e}^{-Ht}u)| = |\mathrm{e}^{-Ht}u| \le \mathrm{e}^{-Ht}|u|$$
με την τελευταία ανισοτική σχέση να έπεται εφόσον η ημιομάδα e^{-Ht} διατηρεί τη θετικότητα για κάθε $t \ge 0$. Έτσι
$$|(f, \frac{u}{|u|}[\mathrm{e}^{-Ht}u])| \le (f, \mathrm{e}^{-Ht}|u|)$$
και συνακόλουθα
$$(f, t^{-1}(I-\mathrm{e}^{-Ht})|u|) \le (f, \frac{u}{|u|}t^{-1}(I-\mathrm{e}^{-Ht})u)$$
για κάθε $t > 0$. Αφήνοντας $t \to 0+$ καταλήγουμε ότι
$$(H^{1/2}f, H^{1/2}|u|) \le (f, \frac{u}{|u|}(Hu))$$
Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Θεώρημα 5.1.5 *Έστω H μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής επί του χώρου $\mathcal{H} = L^2(\Omega, dx)$ ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.4. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική επί του $L^\infty(\Omega, dx)$ για κάθε $t \ge 0$.
(β) Η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική επί του $L^p(\Omega, dx)$, για κάθε $p \in [1, +\infty]$ και για κάθε $t \ge 0$.
(γ) Έστω $f \in Quad(H)$ και $g \in L^2(\Omega, dx)$ για τις οποίες έχουμε:
$$|g(x)| \le |f(x)| \ \textbf{και}\ |g(x)-g(y)| \le |f(x)-f(y)|$$
για κάθε $x, y \in \Omega$. Τότε $g \in Quad(H)$ και $Q(g) \le Q(f)$.
(δ) Αν $0 \le f \in Quad(H)$, τότε $f \wedge \mathbf{1} \in Quad(H)$ και
$$Q(f \wedge \mathbf{1}) \le Q(f)$$
(όπου $(f \wedge \mathbf{1})(x) = \min\{f(x), \mathbf{1}\}$).

Επισημαίνουμε ότι, λέγοντας πως η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική επί του χώρου Banach $L^p(\Omega, dx)$ για $p \ne 2$, εννοούμε επακριβώς ότι η e^{-Ht}, η οποία κανονικά ορίζεται μόνον επί του $L^2(\Omega, dx)$, απεικονίζει τον χώρο $L^2(\Omega, dx) \cap L^p(\Omega, dx)$ στον εαυτό του και δύναται να επεκταθεί σε ημιομάδα συστολών επί του $L^p(\Omega, dx)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$. Η συγκεκριμένη επέκταση είναι μοναδική, λόγω πυκνότητας, για $1 \leq p < +\infty$, και επίσης μοναδική και για $p = +\infty$ αν επιβάλλουμε την επιπρόσθετη απαίτηση της ασθενούς $*-$συνέχειας.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Εφόσον η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική επί του $L^\infty(\Omega, dx)$ και απαρτίζεται από αυτοσυζυγείς τελεστές, αντιλαμβανόμαστε ότι, μέσω δυϊκότητας, η e^{-Ht} είναι συσταλτική και επί του $L^1(\Omega, dx)$. Από το Θεώρημα Riesz-Thorin έπεται ότι η e^{-Ht} είναι ημιομάδα συστολών επί του $L^p(\Omega, dx)$ για κάθε $p \in (1, +\infty)$ και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι σαφές.
(β)⇒(γ) Καθώς ισχύει

$$Q(f) = \lim_{t \to 0+} (t^{-1}(I - \mathrm{e}^{-Ht})f, f)$$

ανεξαρτήτως αν $f \in Quad(H)$ ή όχι, είναι αρκετό να επιβεβαιώσουμε ότι

$$((I - \mathrm{e}^{-Ht})g, g) \leq ((I - \mathrm{e}^{-Ht})f, f)$$

για κάθε $t > 0$.

Επειδή $f, g \to (\mathrm{e}^{-Ht}f, g)$ είναι μια θετική διγραμμική μορφή επί του $C_c(\Omega) \times C_c(\Omega)$, υπάρχει ένα συμμετρικό μέτρο Borel $\mu_t \geq 0$ επί του $\Omega \times \Omega$ έτσι ώστε

$$(\mathrm{e}^{-Ht}f, g) = \int_{\Omega \times \Omega} f(x)\overline{g(y)} d\mu_t(x, y)$$

για κάθε $f, g \in C_c(\Omega)$ και, άρα, για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, dx)$. Για μια απόδειξη αυτού του μετροθεωρητικού αποτελέσματος παραπέμπουμε στο βιβλίο του E.B. Davies, [10],p. 51. Για $f = \mathbf{1}$ και $g = \chi_E$ και, αφού η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική επί του $L^1(\Omega, dx)$, βρίσκουμε πως

$$0 \leq \mu_t(E \times \Omega) \leq \int_E dx$$

για κάθε σύνολο Borel E. Το θεώρημα Radon-Nikodym εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνάρτησης $\rho_t : \Omega \to [0, 1]$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{\Omega \times \Omega} h(x) d\mu_t(x, y) = \int_\Omega \rho_t(x) h(x) dx$$

για κάθε h. Παρατηρούμε ότι

$$((I - \mathrm{e}^{-Ht})f, f) = \int_\Omega |f(x)|^2 - \int_{\Omega \times \Omega} f(x)\overline{f(y)} d\mu_t(x, y)$$

Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \rho_t(x)|f(x)|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}|f(x)-f(y)|^2d\mu_t(x,y) &= \\
-\int_{\Omega\times\Omega}|f(x)|^2d\mu_t(x,y) + \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}[|f(x)|^2+|f(y)|^2-2f(x)\overline{f(y)}]d\mu_t(x,y) &= \\
-\int_{\Omega\times\Omega}|f(x)|^2d\mu_t(x,y) + \int_{\Omega\times\Omega}|f(x)|^2d\mu_t(x,y) - \int_{\Omega\times\Omega}f(x)\overline{f(y)}d\mu_t(x,y) &= \\
-\int_{\Omega\times\Omega}f(x)\overline{f(y)}d\mu_t(x,y)
\end{aligned}$$

Θα πάρουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
((I-\mathrm{e}^{-Ht})f,f) &= \int_\Omega (1-\rho_t(x))|f(x)|^2dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}|f(x)-f(y)|^2d\mu_t(x,y) \\
&\geq \int_\Omega (1-\rho_t(x))|g(x)|^2dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}|g(x)-g(y)|^2d\mu_t(x,y) \\
&= ((I-\mathrm{e}^{-Ht})g,g)
\end{aligned}$$

(από την υπόθεση της συνεπαγωγής) και ο ισχυρισμός (γ) έπεται.
(γ)⇒(δ) Άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η συνάρτηση $g = f \wedge \mathbf{1}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ισχυρισμού (γ), όπως προκύπτει με στοιχειώδεις υπολογισμούς.
(δ)⇒(α) Θεωρούμε $f \in L^2(\Omega, dx)$ με $0 \leq f \leq 1$ και θέτουμε $g = (I+sH)^{-1}f$ και $h = g \wedge \mathbf{1}$, όπου $0 < s < +\infty$. Τότε $g, h \in Quad(H)$ και

$$\begin{aligned}
||(I+sH)^{1/2}(g-h)||^2 &= ((I+sH)^{-1}f,f) - 2(f,h) \\
&\quad +||(I+sH)^{1/2}h||^2 \\
&\leq ((I+sH)^{-1}f,f) - ||f||^2 \\
&\quad +||f-h||^2 + sQ(h) \\
&\leq ((I+sH)^{-1}f,f) - ||f||^2 \\
&\quad +||f-g||^2 + sQ(g) \\
&= 0 \text{ (μετά από πράξεις)}
\end{aligned}$$

Επομένως $g = h$ και ισοδύναμα $0 \leq g \leq 1$ και

$$0 \leq (I+sH)^{-1}f \leq 1$$

Από τον γνωστό, πλέον, τύπο

$$\mathrm{e}^{-Ht}f = \lim_{n\to+\infty}(I+\frac{t}{n}H)^{-n}f$$

συμπεραίνουμε πως $0 \leq \mathrm{e}^{-Ht} f \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα η ημιομάδα e^{-Ht} είναι συσταλτική επί του $L^\infty(\Omega, dx)$. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Πολλές εφαρμογές και Θεωρημάτων 5.1.4 και 5.1.5 βασίζονται στο ακόλουθο

Λήμμα 5.1.6 *Υποθέτουμε ότι ο μη αρνητικός και αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής H διαθέτει έναν πυρήνα μορφής (form core) D τέτοιον ώστε, δοθείσης $f \in D$ να έπεται ότι $|f| \in Quad(H)$ και $Q(|f|) \leq Q(f)$. Τότε ο H ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.4. Αν επιπλέον, δοθείσης $f \in D$ παίρνουμε $\mathbf{0} \vee (f \wedge \mathbf{1}) \in Quad(H)$ και $Q(\mathbf{0} \vee (f \wedge \mathbf{1})) \leq Q(f)$, τότε ο H ικανοποιεί και τις συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.5.*

Απόδειξη. Έστω $f \in Quad(H)$ τυχούσα. Επειδή το σύνολο D αποτελεί πυρήνα μορφής του H, μπορούμε να προσδιορίσουμε ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{n \to +\infty} ||f_n - f|| = 0, \ \lim_{n \to +\infty} Q(f_n - f) = 0$$

έτσι ώστε $\lim_{n \to +\infty} Q(f_n) = Q(f)$. Προφανώς

$$\lim_{n \to +\infty} || \ |f_n| - |f| \ || = 0$$

και, επειδή η Q είναι κάτω ημισυνεχής συνάρτηση, λαμβάνουμε

$$Q(|f|) \leq \liminf_{n \to +\infty} Q(|f_n|)$$

Αλλά $Q(|f_n|) \leq Q(f_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εξ' υποθέσεως και

$$\lim_{n \to +\infty} \sup Q(|f_n|) \leq \lim_{n \to +\infty} \sup Q(f_n) = Q(f)$$

Καταλήγουμε ότι $|f| \in Quad(H)$ και $Q(|f|) \leq Q(f)$. Από την αναπαράσταση (1.4.15) προκύπτει πως

$$(H^{1/2}|f|, H^{1/2}|f|) \leq (H^{1/2} f, H^{1/2} f)$$

και, άρα, πληρούται η συνθήκη (β) του Θεωρήματος 5.1.4.

Έστω, περαιτέρω, $f \in Quad(H)$ με $f \geq 0$ και ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του D για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{n \to +\infty} ||f_n - f|| = 0, \ \lim_{n \to +\infty} Q(f_n - f) = 0$$

έτσι ώστε $\lim_{n \to +\infty} Q(f_n) = Q(f)$. Από την υπόθεση, η ακολουθία $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$g_n = \mathbf{0} \vee (f_n \wedge \mathbf{1})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκεται εντός του $Quad(H)$ και, καθώς $f_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμπεραίνουμε $g_n = f_n \wedge \mathbf{1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Επομένως $\lim_{n \to +\infty} ||g_n - f \wedge \mathbf{1}|| = 0$ και, εφόσον η Q είναι κάτω ημισυνεχής συνάρτηση, παίρνουμε

$$Q(f \wedge \mathbf{1}) \leq \lim_{n \to +\infty} inf Q(g_n)$$

Αλλά $Q(g_n) \le Q(f_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εξ υποθέσεως και

$$\lim_{n\to+\infty} \sup Q(g_n) \le \lim_{n\to+\infty} \sup Q(f_n) = Q(f)$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι $f \wedge \mathbf{1} \in Quad(H)$ και $Q(f\wedge \mathbf{1}) \le Q(f)$. Δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη (δ) του Θεωρήματος 5.1.5.

Ιδιαίτερης σημασίας είναι το επόμενο

Θεώρημα 5.1.7 *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και H ένας ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης επί του $L^2(\Omega)$, σε μορφή απόκλισης, που υπόκειται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Τότε ο H ικανοποιεί τις συνθήκες των Θεωρημάτων 5.1.4 και 5.1.5.*

Απόδειξη. Εφόσον ο H είναι διαφορικός τελεστής με τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στη διατύπωση του Θεωρήματος, θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.1.6 λαμβάνοντας ως πυρήνα μορφής του H το χώρο $C_c^\infty(\Omega)$.

Θεωρούμε $C^\infty-$συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ τέτοια ώστε να ισχύουν $\phi(0)=0$, $\phi(x) = |x|-1$ αν $|x| \ge 2$ και $|\phi'(x)| \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δοθείσης $f \in C_c^\infty(\Omega)$ θέτουμε για $\epsilon > 0$ τυχόν: $f_\epsilon = \epsilon\phi(\epsilon^{-1}f)$ και παρατηρούμε ότι $f_\epsilon(0) = 0,\ f_\epsilon(x) = |f(x)| - \epsilon$ αν $|f(x)| \ge 2\epsilon$.
Επίσης $supp(f_\epsilon) \subseteq supp(f)$ και, άρα, $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Επιπλέον η f_ϵ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $|f|$. Επομένως

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||\ f_\epsilon - |f|\ || = 0$$

Βεβαίως $f_\epsilon \in Quad(H)$ και

$$\frac{\partial f_\epsilon(x)}{\partial x_i} = \phi'(\epsilon^{-1}f(x))\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned}
Q(f_\epsilon) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial f_\epsilon(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{f_\epsilon(x)}}{\partial x_j}dx \\
&= \int_{|f(x)|\ge 2\epsilon} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_j}dx \\
&\quad + \int_{|f(x)|< 2\epsilon} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial f_\epsilon(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{f_\epsilon(x)}}{\partial x_j}dx
\end{aligned}$$

Επειδή η ϕ είναι πραγματική συνάρτηση παίρνουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|f(x)|< 2\epsilon} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\bigg(\frac{\partial f_\epsilon(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{f_\epsilon(x)}}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_j}\bigg)dx \\
&= \int_{|f(x)|< 2\epsilon} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_j}([\phi'(\epsilon^{-1}f(x))]^2 - 1)dx
\end{aligned}$$

Αλλά ο πίνακας $a_{ij}(x)$ είναι θετικά ορισμένος και $[\phi'(\epsilon^{-1}f(x))]^2 \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Προκύπτει λοιπόν $I \leq 0$ και συνακόλουθα

$$\begin{aligned} Q(f_\epsilon) &\leq \int_{|f(x)|\geq 2\epsilon} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_j} dx \\ &\quad + \int_{|f(x)|<2\epsilon} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_j} dx \\ &= Q(f) \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{\epsilon\to 0} ||\ f_\epsilon - |f|\ || = 0$ και η Q είναι κάτω ημισυνεχής συνάρτηση, λαμβάνουμε

$$Q(|f|) \leq \lim_{\epsilon\to 0}\inf Q(f_\epsilon) \leq \lim_{\epsilon\to 0}\sup Q(f_\epsilon) \leq Q(f)$$

Άρα $|f| \in Quad(H)$ και $Q(|f|) \leq Q(f)$ για κάθε $f \in D = C_c^\infty(\Omega)$. Από το Λήμμα 5.1.6, ο H ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.4. Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι αν $f \in C_c^\infty(\Omega)$, τότε $\mathbf{0} \vee (f \wedge \mathbf{1}) \in Quad(H)$ και $Q(\mathbf{0} \vee (f \wedge \mathbf{1})) \leq Q(f)$. Πάλι, από το Λήμμα 5.1.6, ο H ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.5.

Μπορεί να επιβεβαιωθεί πλήρωση της συνθήκης (β) του θεωρήματος 5.1.4 και της συνθήκης (δ) του θεωρήματος 5.1.5 και στην περίπτωση του μη αρνητικού αυτοσυζυγούς τελεστή H που περιγράφεται στο εξής

Θεώρημα 5.1.8 *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και H ομοιόμορφα ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης, σε μορφή απόκλισης, στο χώρο Hilbert $L^2(\Omega)$, υποκείμενος σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Neumann. Τότε ο H ικανοποιεί τις συνθήκες των Θεωρημάτων 5.1.4 και 5.1.5.*

Θα χρησιμοποιήσουμε, ακολούθως, τις συνθήκες Beurling-Deny προκειμένου να χαρακτηρίσουμε την ημιομάδα e^{-Ht} για έναν ελλειπτικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης H. Οι ιδιότητες της συγκεκριμένης ημιομάδας συνδέονται με μια πιθανοθεωρητική ερμηνεία κατάλληλης Μαρκοβιανής διαδικασίας που σχετίζεται με την όλη κατάσταση και δεν ισχύουν για ελλειπτικούς τελεστές ανώτερης τάξης.

Ακριβέστερα, έχουμε τον ακόλουθο καίριο

Θεώρημα 5.1.9 *Έστω H μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής που δρα στο χώρο Hilbert $L^2(\Omega)$ και ικανοποιεί τις συνθήκες των Θεωρημάτων 5.1.4 και 5.1.5 (συνθήκες Beurling-Deny). Τότε η ισχυρώς συνεχής ημιομάδα e^{-Ht} επί του $L^2(\Omega)$ που παράγεται από τον $-H$ καλείται συμμετρική ημιομάδα Markov (symmetric Markov semigroup).*

Από το Θεώρημα 4.3.11 προκύπτει ότι οι τελεστές που απαρτίζουν μία συμμετρική ημιομάδα Markov είναι αυτοσυζυγείς.

Θεώρημα 5.1.10 *Έστω* e^{-Ht} *συμμετρική ημιομάδα Markov επί του χώρου Hilbert* $L^2(\Omega)$. *Τότε ο χώρος* $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *παραμένει αναλλοίωτος από την* e^{-Ht} *και η συγκεκριμένη ημιομάδα δύναται να επεκταθεί από τον* $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *σε μία θετική συσταλτική ημιομάδα, συμβολιζόμενη με* $(T_p(t))_{t\geq 0}$, *επί του χώρου Banach* $L^p(\Omega)$ *για κάθε* $p \in [1, +\infty)$. *Οι ημιομάδες αυτές είναι συνεπείς, υπό την έννοια ότι ισχύει* $T_p(t)f = T_q(t)f$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και κάθε* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. *Επίσης, έχουμε* $T_p(t)^* = T_q(t)$ *για κάθε* $t \geq 0$, *αν* $1 \leq p < +\infty$ *και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ τυχούσα. Τότε $f \in L^1(\Omega)$ και, επειδή από την συνθήκη (β) του θεωρήματος 5.1.5, οι τελεστές e^{-Ht} είναι συστολές του χώρου $L^1(\Omega)$, βρίσκουμε ότι

$$||\mathrm{e}^{-Ht}f||_1 \leq ||f||_1 < +\infty, \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Επίσης $f \in L^\infty(\Omega)$ και οι τελεστές e^{-Ht} είναι συστολές του $L^\infty(\Omega)$ από την συνθήκη (α) του Θεωρήματος 5.1.5. Επομένως

$$||\mathrm{e}^{-Ht}f||_\infty \leq ||f||_\infty < +\infty, \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Τελικά

$$||\mathrm{e}^{-Ht}f||_{L^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)} = ||\mathrm{e}^{-Ht}f||_1 + ||\mathrm{e}^{-Ht}f||_\infty < +\infty$$

και ο χώρος $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ παραμένει αναλλοίωτος από τους τελεστές e^{-Ht}. Οι τελευταίοι επεκτείνονται, σύμφωνα με το Θεώρημα Riesz-Thorin, σε συστολές των χώρων Banach $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty]$. Οι συγκεκριμένες συστολές συμβολίζονται με $T_p(t)$. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$T_p(t)f = T_2(t)f = \mathrm{e}^{-Ht}f$$

για κάθε $t \geq 0$ και κάθε $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$. Καθώς η e^{-Ht} είναι ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του $L^2(\Omega)$, έχουμε

$$T_2(t+s)f = T_2(t)T_2(s)f \text{ και } T_2(0)f = f$$

για κάθε $t, s \geq 0$ και $f \in L^2(\Omega)$. Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για κάθε $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$. Λόγω συνεπείας παίρνουμε

$$T_p(t+s)f = T_p(t)T_p(s)f \text{ και } T_p(0)f = f$$

για κάθε $t, s \geq 0$ και $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Επειδή ο χώρος $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια $(T_p(t))_{t\geq 0}$ αποτελεί συσταλτική μονοπαραμετρική ημιομάδα του $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$. Από τον τρόπο ορισμού τους και, καθώς το p διατρέχει το διάστημα $[1, +\infty)$, οι ημιομάδες $(T_p(t))_{t\geq 0}$ είναι συνεπείς και απαρτίζονται από θετικούς τελεστές.

Θα αποδείξουμε ότι η $(T_p(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής επί του $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$. Πρός τούτο, θεωρούμε $f \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, όπου $f \geq 0$, φραγμένη και τέτοια ώστε να μηδενίζεται έξω από ένα σύνολο E πεπερασμένου μέτρου. Ισχύει

$$||T_1(t)f||_1 \leq ||f||_1$$

και

$$\lim_{t\to 0+} ||\chi_{\Omega-E}T_1(t)f||_1 \le \lim_{t\to 0+} ||\chi_{\Omega-E}f||_1 = 0$$

Επειδή η ημιομάδα $(T_2(t))_{t\ge 0}$ δεν είναι άλλη από τη συμμετρική ημιομάδα Markov e^{-Ht} επί του $L^2(\Omega)$, συνάγεται η ιδιότητα της ισχυρής συνέχειας για αυτήν. Έτσι, με τη βοήθεια της ανισότητας Hölder, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+} ||T_1(t)f - f||_1 &\le \lim_{t\to 0+} ||\chi_E(T_1(t)f - f)||_1 \\ &= \lim_{t\to 0+} (|T_1(t)f - f|, \chi_E) \\ &\le \lim_{t\to 0+} |E|^{1/2}||T_2(t)f - f||_2 = 0\end{aligned}$$

(Εφόσον $T_1(t)f = T_2(t)f$ λόγω συνεπείας). Άρα $\lim_{t\to 0+} ||T_1(t)f - f||_1 = 0$ για τις συγκεκριμένες f, το σύνολο των οποίων είναι πυκνό στο χώρο $L^1(\Omega)$. Αφού η $(T_1(t))_{t\ge 0}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα $[0,1]$ αποδείχθηκε, μέσω της Πρότασης 2.2.6, η ισχυρή συνέχεια αυτής στον $L^1(\Omega)$. Από το Θεώρημα παρεμβολής των Riesz-Thorin τεκμαίρεται η ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(T_p(t))_{t\ge 0}$ στον $L^p(\Omega)$ για $1 \le p \le 2$.

Επειδή ο $L^p(\Omega)$, όταν $1 < p < 2$, είναι αυτοπαθής, το πόρισμα 4.3.5 υποδηλώνει ότι η δυϊκή ημιομάδα $(T_p(t)^*)_{t\ge 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής επί του $L^p(\Omega)^*$. Αλλά $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για $p \in (1,2]$ έχουμε $q \in [2,+\infty)$. Θέτοντας $T_p(t)^* = T_q(t)$ για κάθε $t \ge 0$, επιβεβαιώνουμε την ισχυρή συνέχεια της $(T_q(t))_{t\ge 0}$ επί του $L^q(\Omega)$ για $q \in [2,+\infty)$. Συνοψίζοντας, η ημιομάδα $(T_p(t))_{t\ge 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής επί του χώρου Banach $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1,+\infty)$.

Εφόσον οι τελεστές $T_p(t)$ είναι θετικοί για κάθε $t \ge 0$, η συγκεκριμένη ημιομάδα είναι θετική για κάθε $p \in [1,\infty)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $T_p(t)^* = T_q(t)$ για κάθε $t \ge 0$, αν $p \in [1,+\infty)$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Οι γεννήτορες των ημιομάδων $(T_p(t))_{t\ge 0}$ του προηγούμενου θεωρήματος συμβολίζονται με $-H_p$ αλλά συχνά προτιμάται το σύμβολο $-H$ για συλλογική θεώρηση τους. Η ημιομάδα $(T_\infty(t))_{t\ge 0}$ στον $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι, εν γένει, ισχυρώς συνεχής. Ορίζουμε συμβατικά τον γεννήτορα της H_∞ από τη σχέση

$$(\lambda I + H_\infty)^{-1} = [(\lambda I + H_1)^{-1}]^*$$

για κάθε $\lambda > 0$ (ή $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$) και σχολιάζουμε ότι το πεδίο ορισμού αυτού, κανονικά, δεν είναι πυκνό στον $L^\infty(\Omega)$.

Στον ορισμό των συμμετρικών ημιομάδων Markov που δώσαμε, δεν υποθέσαμε ότι $\mathrm{e}^{-Ht}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ για κάθε $t > 0$, όπου με $\mathbf{1}$ σημειώνουμε τη σταθερή συνάρτηση με τιμή 1 στον $L^2(\Omega)$. Η συγκεκριμένη συνθήκη είναι συνήθως ακατάλληλη για τη μελέτη ελλειπτικών διαφορικών τελεστών δεύτερης τάξης με συνοριακές συνθήκες Dirichlet και πολλές φορές παραλείπεται. Ωστόσο χρησιμοποιείται σε κάποιες εφαρμογές. Παραθέτουμε ενδεικτικά το επόμενο αφηρημένο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.1.11 *Έστω μία συμμετρική ημιομάδα Markov $T = \mathrm{e}^{-Ht}$ επί του $L^2(\Omega)$ και ο τελεστής $R_\lambda = (\lambda I + H_p)^{-1}$ ορισμένος στο χώρο Banach $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$ και κάθε $\lambda > 0$ (ή $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$). Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) $T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ για κάποιο $t > 0$ (β) $T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ για κάθε $t > 0$ (γ) $R_\lambda \mathbf{1} = \lambda^{-1}\mathbf{1}$ για κάποιο $\lambda > 0$ (δ) $R_\lambda \mathbf{1} = \lambda^{-1}\mathbf{1}$ για κάθε $\lambda > 0$

Απόδειξη.
(α) $\Rightarrow$ (β) Έστω κάποιο $t_0 > 0$ για το οποίο ισχύει $T(t_0)\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Ο νόμος ημιομάδας (semigroup law) δίνει $T(nt_0)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ για όλους τους ακέραιους αριθμούς $n \geq 1$.
Αν θεωρήσουμε τυχόν $s > 0$ μπορούμε να προσδιορίσουμε ακέραιο n ώστε $0 < s \leq nt_0$. Τότε, επειδή η T είναι συσταλτική ημιομάδα επί του $L^2(\Omega)$, παίρνουμε

$$\mathbf{1} = T(nt_0)\mathbf{1} = T(nt_0 - s)T(s)\mathbf{1} \leq T(s)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$$

Επομένως $T(s)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ για κάθε $s > 0$.
(β)$\Rightarrow$ (δ) Λόγω συνεπείας των ημιομάδων $(T_p(t))_{t\geq 0}$ επί των χώρων $L^p(\Omega)$ για $p \in [1, +\infty)$, έχουμε

$$R_\lambda \mathbf{1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\mathbf{1} dt$$

για κάθε $\lambda > 0$, όπου το ολοκλήρωμα ερμηνεύεται με την έννοια της ασθενούς $*-$τοπολογίας του $L^\infty(\Omega)$. Αλλά, από την υπόθεση της συνεπαγωγής, ισχύει $T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ για κάθε $t > 0$.
Άρα

$$R_\lambda \mathbf{1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbf{1} dt = \lambda^{-1}\mathbf{1} \text{ για κάθε } \lambda > 0$$

(δ)$\Rightarrow$(γ) τετριμμένη απόδειξη.
(γ)$\Rightarrow$(α) Έχουμε $R_\lambda \mathbf{1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\mathbf{1} dt = \lambda^{-1}\mathbf{1}$ για κάποιο $\lambda > 0$ και βέβαια $\lambda^{-1}\mathbf{1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{1} dt$. Έτσι $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathbf{1} - T(t)\mathbf{1})dt = 0$ με την ολοκληρωτέα ποσότητα να είναι μη αρνητική, καθώς η ημιομάδα T είναι συσταλτική στον $L^2(\Omega)$. Επομένως λαμβάνουμε

$$T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1} \text{ σχεδόν για κάθε } t > 0$$

κάτι που αποδεικνύει την ορθότητα της συνεπαγωγής.

Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο με μια περιεκτική αναφορά στους τελεστές Schrödinger. Θα χρειαστούμε ένα κλασσικό αποτέλεσμα από την Προσεγγιστική Θεωρία Ημιομάδων.

Θεώρημα 5.1.12 *(τύπος γινομένου του Trotter)*
Έστω A, B, Z γεννήτορες συσταλτικών ισχυρώς συνεχών μονοπαραμετρικών ημιομάδων τελεστών σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι $Zx = Ax + Bx$ για κάθε x που ανήκει σε έναν πυρήνα (core) του Z. Τότε ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^{At/n}, \mathrm{e}^{Bt/n})^n x = \mathrm{e}^{Zt} x$$

για κάθε $x \in X$ και $0 \leq t < +\infty$

Ο τύπος γινομένου του Trotter εφαρμόζεται απευθείας σε αυτοσυζυγείς τελεστές, αλλά υπάρχει ένα καλύτερο σχετικό αποτέλεσμα που αποκτάται μέσω τετραγωνικών μορφών. Ας θεωρήσουμε δύο μη αρνητικούς αυτοσυζυγείς τελεστές A και B σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\mathcal{D} = Quad(A) \cap Quad(B)$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$. Έστω Z ο μή αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής ο οποίος αποτελεί άθροισμα μορφών των A και B και σχετίζεται με την, οριζόμενη στο $\mathcal{D}$, τετραγωνική μορφή Q. Τότε ισχύει ο τύπος

$$\mathrm{e}^{-Zt}x = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^{-At/n}, \mathrm{e}^{-Bt/n})^n x \tag{5.1.1}$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$ και $t \geq 0$. Μια αξιόλογη γενίκευση του τύπου 5.1.1 μπορεί κάποιος να βρει στο βιβλίο του E. B. Davies, [9],Theorem 4.3.6,p.121.

Θεωρούμε, στη συνέχεια, την τετραγωνική μορφή Q_0 με

$$Q_0(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx, \ f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι η Q_0 είναι κλείσιμη και ο μη αρνητικός αυτοσυζυγής τελεστής H_0 που σχετίζεται με την $\overline{Q_0}$ δίνεται από την σχέση

$$(\hat{H_0 f})(\xi) = |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$$

με πεδίο ορισμού αποτελούμενο από τις συναρτήσεις f του $L^2(\mathbb{R}^n)$ για τις οποίες ισχύει $|\xi|^2 \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Αυτό σημαίνει ότι ο H_0 ταυτίζεται με την κλειστότητα του τελεστή $-\Delta$.

Έστω περαιτέρω, μετρήσιμη συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αποκαλούμενη δυναμικό (potential). Ουσιαστικά η V λειτουργεί ώς πολλαπλασιαστικός τελεστής με πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + V(x))|f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

Ορίζουμε την τετραγωνική μορφή Q επί του $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ από τη σχέση

$$Q(f) = Q_0(f) + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|f(x)|^2 dx \tag{5.1.2}$$

Η Q συνδέεται με την τυπική έκφραση

$$Lf = -\Delta f + Vf$$

Ο L καλείται τελεστής Schrödinger. Το επόμενο Θεώρημα περιγράφει τη διαδικασία επέκτασης του L σε αυτοσυζυγή τελεστή στο χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 5.1.13 *Αν ο $0 \leq V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ τότε η τετραγωνική μορφή Q που εισάγεται απο τη σχέση (5.1.2) είναι κλείσιμη στον $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ και η κλειστότητά της $\overline{Q}$ είναι το άθροισμα των τετραγωνικών μορφών των τελεστών H_0 και V με πεδίο ορισμού παρεχόμενο από τη σχέση*

$$Dom(\overline{Q}) = Quad(H_0) \cap Quad(V) \tag{5.1.3}$$

Ο μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ που σχετίζεται με την $\overline{Q}$ δίνεται από τον τύπο

$$H = -\bar{\Delta} + V$$

και η οικογένεια $(\mathrm{e}^{-Ht})_{t\geq 0}$ είναι μια συμμετρική ημιομάδα Marcov.

Απόδειξη. Οι τελεστές H_0 και V είναι μη αρνητικοί και αυτοσυζυγείς και το άθροισμα μορφών τους H ικανοποιεί την (5.1.3). Ο τύπος (5.1.1) δίνει τώρα

$$\mathrm{e}^{-Ht}f = \lim_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{-H_0t/n}, \mathrm{e}^{-Vt/n})^n f \tag{5.1.4}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και $t \geq 0$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{e}^{-H_0t} = \mathrm{e}^{\bar{\Delta}t}$ για κάθε $t \geq 0$ και οι τελεστές $\mathrm{e}^{\bar{\Delta}t}$ απαρτίζουν την ημιομάδα Gauss του $L^2(\mathbb{R}^n)$. Άρα διατηρούν τη θετικότητα όπως διαπιστώσαμε στην Εφαρμογή 3.4.4. Το ίδιο συμβαίνει με τους τελεστές e^{-Vt} για κάθε $t \geq 0$. Από την (5.1.4) προκύπτει ότι οι e^{-Ht} διατηρούν τη θετικότητα για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, για τον H, πληρούται η συνθήκη (δ) του θεωρήματος 5.1.4. Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.11, οι οικογένειες $(\mathrm{e}^{-H_0t})_{t\geq 0}$ και $(\mathrm{e}^{-Vt})_{t\geq 0}$ είναι συσταλτικές (αυτοσυζυγείς) ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι οι τελεστές e^{-Ht} είναι συστολές του $L^2(\mathbb{R}^n)$ ως όρια ομοειδών τελεστών. Οι συγκεκριμένες συστολές επεκτείνονται σε αντίστοιχες του $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ με τον τρόπο που υποδείξαμε αμέσως μετά τη διατύπωση των συνθηκών του Θεωρήματος 5.1.5. Έτσι, για τον H, ικανοποιείται και η συνθήκη (α) του Θεωρήματος 5.1.5. Κατά συνέπεια, η οικογένεια $((\mathrm{e}^{-Ht}))_{t\geq 0}$ είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov. Βεβαίως $H = -\bar{\Delta} + V$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, διότι εκεί έχουμε $H_0 = -\bar{\Delta}$.

Απομένει να αποδείξουμε ότι ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυρήνας μορφής (quadratic form core)του H. Αρκεί να επιβεβαιώσουμε πως, αν $f \in Quad(H)$ με $f \geq 0$, τότε υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ώστε $f_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επιπλέον

$$\lim_{n\to+\infty}[||fn - f||_2^2 + ||H_0(f - f_n)||_2^2 + ||V^{1/2}(f - f_n)||_2^2] = 0$$

Στο βιβλίο του E. B. Davies, [9, Theorem 1.8.1,p.49] υπάρχουν οι λεπτομέρειες απόδειξης του τελευταίου ισχυρισμού.

Επισημαίνουμε,καταληκτικά ότι αν e^{-Ht} είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov στον $L^2(\Omega)$, τότε οι τελεστές που τη συγκροτούν είναι ολοκληρωτικοί με πυρήνα $K(t,\cdot,\cdot)$ ο οποίος καλείται πυρήνας Θερμοτητας (Heat kernel). Ο προσδιορισμός άνω και κάτω φραγμάτων αυτού είναι θεμελιώδους σημασίας για τη Θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών όπως οι Davies, Aronson, Auscher, Nash, Βαρόπουλος κ.α.

5.2 Συμπάγεια και φασματική ανεξαρτησία

Έννοια κλειδί της παρούσας παραγράφου αποτελεί αυτή της συμπάγειας τελεστών που απαρτίζουν μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα. Με τη βοήθειά της είναι εφικτή η διατύπωση των πρώτων, έστω και σχετικά περιορισμένης εμβελείας, αποτελεσμάτων φασματικής ανεξαρτησίας (διαφορικών) τελεστών. Παραθέτουμε άμεσα τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 5.2.1 *Έστω* $T = (T(t))_{t\geq 0}$ *ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach* X. *Η* T *καλείται τελικά συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας (eventually norm-continuous semigroup), αν υπάρχει* $t_0 \geq 0$ *έτσι ώστε η απεικόνιση* $t \to T(t)$ *από το διάστημα* $[t_0, +\infty)$ *στην άλγεβρα Banach* $\mathcal{L}(X)$ *να είναι συνεχής ως προς την ίδια τοπολογία (ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών). Η* T *καλείται άμεσα συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας (immediately norm-continuous), αν μπορούμε να λάβουμε* $t_0 = 0$.

Ορισμός 5.2.2 *Έστω* $T = (T(t))_{t\geq 0}$ *ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach* X. *Η* T *ονομάζεται άμεσα συμπαγής (immediately compact semigroup), αν οι τελεστές* $T(t)$ *είναι συμπαγείς για κάθε* $t > 0$. *Η* T *καλείται τελικά συμπαγής (eventually compact semigroup), αν υπάρχει* $t_0 > 0$ *έτσι ώστε οι τελεστές* $T(t)$ *να είναι συμπαγείς για κάθε* $t > t_0$.

Παρατήρηση 5.2.3 *Υποθέτουμε ότι η* $T = (T(t))_{t\geq 0}$ *είναι ισχυρώς συνεχής ημιομάδα σε έναν χώρο Banach* X.
(i) Εάν η T *είναι τελικά συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας, τότε δεν είναι τετριμμένη αφού δύναται να διαθέτει απειροστικό γεννήτορα μη φραγμένο. Μάλιστα, όπως θα δούμε παρακάτω, απολαμβάνει αξιοσημείωτων φασματικών ιδιοτήτων.*
(ii) Αν υποτεθεί ότι οι τελεστές $T(t)$ *είναι συμπαγείς για κάθε* $t \geq 0$, *τότε θα είναι συμπαγής και ο ταυτοτικός τελεστής* $I = T(0)$. *Αλλά κάτι τέτοιο σημαίνει ότι ο* X *είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, γεγονός που περιορίζει σημαντικά την εμβέλεια των αποτελεσμάτων.*
(iii) Αν ο τελεστής $T(t_0)$ *είναι συμπαγής για κάποιο* $t_0 > 0$, *τότε η* T *είναι τελικά συμπαγής ημιομάδα. Πράγματι, για κάθε* $t > t_0$ *έχουμε* $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$ *και* $T(t - t_0)$ *είναι φραγμένος. Από τον ισχυρισμό (ii) της Πρότασης 1.1.30 έπεται το συμπέρασμα.*
(iv) Δεν θα πρέπει να συγχέεται η έννοια συμπάγειας που περιγράφεται στον ορισμό 5.2.2 με εκείνη του συνόλου εφοδιασμένου με κάποια από τις γνωστές μας τοπολογίες τελεστών. Οι δύο έννοιες συνδέονται, πάντως, μεταξύ τους καθώς μπορεί να αποδειχθεί, για παράδειγμα, ότι αν η T *είναι τελικά συμπαγής ημιομάδα, τότε το σύνολο* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *είναι σχετικά συμπαγές στην* $\mathcal{L}(X)$ *ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών. Στα πλαίσια της εργασίας μας, λέγοντας (άμεσα, τελικά) συμπαγής ημιομάδα, θα εννοούμε αποκλειστικά ημιομάδα συμπαγών τελεστών.*

Ακολουθούν αξιόλογα αποτελέσματα από τη θεωρία των συμπαγών ημιομάδων.

Θεώρημα 5.2.4 *Έστω* $T = (T(t))_{t\geq 0}$ *ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach* X. *Αν υπάρχει* $t_0 > 0$ *έτσι ώστε οι* $T(t)$ *να είναι συμπαγείς για κάθε* $t > t_0$ *(δηλαδή η* T *είναι τελικά συμπαγής ημιομάδα), τότε η απεικόνιση* $t \to T(t)$ *από το διάστημα* $[t_0, +\infty)$ *στην άλγεβρα Banach* $\mathcal{L}(X)$ *είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας (δηλαδή η* T *είναι τελικά συνεχής ημιομάδα ως προς την τοπολογία της νόρμας).*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2.3, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένο. Λόγω συμπάγειας των τελεστών $T(t)$ για $t > t_0$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $U_t = \{T(t)x : x \in \hat{B}_X\}$ όπου $\hat{B}_X$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του χώρου X, αποτελεί σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X για $t > t_0$. Υπάρχουν, επομένως, στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \hat{B}_X$, ώστε οι ανοικτές μπάλες με κέντρα τα $T(t)x_j$, $1 \leq j \leq n$ και ακτίνες ίσες με $\frac{\epsilon}{2(M+1)}$ να καλύπτουν το U_t. Έτσι, αν $x \in X$ με $||x|| \leq 1$, μπορούμε να προσδιορίσουμε δείκτη j από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ και εξαρτώμενο από το x ώστε να ισχύει

$$||T(t)x - T(t)x_j|| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$$

Από την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας T, είναι ξεκάθαρη η ύπαρξη $0 < h_0 \leq 1$ ώστε

$$||T(t+h)x_j - T(t)x_j|| < \frac{\epsilon}{2},\ 0 < h \leq h_0$$

Άρα, για $x \in X$ με $||x|| \leq 1$ και για $0 \leq h \leq h_0 \leq 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||T(t+h)x - T(t)x|| &\leq ||T(h)|| ||T(t)x - T(t)x_j|| \\ &\quad + ||T(t+h)x_j - T(t)x_j|| + ||T(t)x_j - T(t)x|| \\ &< \frac{M\epsilon}{2(M+1)} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(M+1)} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, $\lim_{h \to 0+} ||T(t+h)x - T(t)x|| = 0$ ομοιόμορφα επί της $\hat{B}_X$ και τελικά $\lim_{h \to 0+} ||T(t+h)x - T(t)x|| = 0$, κάτι που αποδεικνύει την εκ δεξιών συνέχεια της απεικόνισης $t \to T(t)$ από το διάστημα $[t_0, +\infty)$ στην $\mathcal{L}(X)$ ως προς την τοπολογία της νόρμας. Ανάλογα επιβεβαιώνεται και η εξ αριστερών συνέχεια της ίδιας απεικόνισης στην τοπολογία της νόρμας και η απόδειξη του Θεωρήματος περατώνεται.

Πρόταση 5.2.5 *Έστω $T = (T(t))_{t \geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X με απειροστικό γεννήτορα A. Αν οι τελεστές $T(t)$ είναι συμπαγείς για κάθε $t > 0$ (δηλαδή η T είναι άμεσα συμπαγής ημιομάδα) τότε και ο γραμμικός τελεστής $R(\lambda, A)$ είναι συμπαγής για κάθε $\lambda \in \rho(A)$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2.4 έπεται η ύπαρξη $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε να ισχύει $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $t \geq 0$. Θεωρούμε, αρχικά, $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$. Το γενικό Θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ημιομάδων (Θεώρημα 4.1.9) υποδηλώνει ότι $\lambda \in \rho(A)$. Ορίζουμε για $n \geq 1$

$$R_{n,\lambda} = \int_{1/n}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) dt$$

Το Θεώρημα 5.2.4 εφαρμόζεται και στην περίπτωση μίας άμεσα συμπαγούς ημιομάδας και εξασφαλίζει τη συνέχεια της ολοκληρωτέας ποσότητας ως προς την τοπολογία της

νόρμας. Άρα το ολοκλήρωμα Riemann που εμφανίζεται, συγκλίνει στην ίδια τοπολογία και, κατά συνέπεια, οι τελεστές $R_{n,\lambda}$ είναι συμπαγείς.
Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n,\lambda} = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)dt = R(\lambda, A)$$

Ο ισχυρισμός (iii) της Πρότασης 1.1.30 επιβεβαιώνει τη συμπάγεια του $R(\lambda, A)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.

Έστω τυχούσα τιμή $\mu \in \rho(A)$. Για τα προηγούμενα λ, η γνωστή ταυτότητα

$$R(\mu, A) - R(\lambda, A) = (\lambda - \mu)R(\mu, A)R(\lambda, A)$$

και οι ισχυρισμοί (i) και (ii) της Πρότασης 1.1.30 αποδεικνύουν ότι ο τελεστής $R(\mu, A)$ είναι συμπαγής.

Θεώρημα 5.2.6 *Έστω $T = (T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X με απειροστικό γεννήτορα A. Αν η T είναι τελικά συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας, τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) $\sigma(T) = \{0\} \cup \mathrm{e}^{t\sigma(A)}$ $(t \geq 0)$
(ii) $s(A) = \omega_0(T)$
όπου $s(A)$ είναι το φασματικό φράγμα του τελεστή A (βλ. Ορισμό 2.2.27) και $\omega_0(T)$ είναι το αυξητικό φράγμα (τύπος) της ημιομάδας T.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο βιβλίο των K.J. Engel-R. Nagel, [12], Chapter IV, Theorem 3.10, p.280.

Θεώρημα 5.2.7 *Έστω $T = (T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών σε έναν χώρο Banach X, με απειροστικό γεννήτορα A. Αν η T είναι άμεσα συμπαγής, τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) $\sigma(T) = \{0\} \cup \mathrm{e}^{t\sigma(A)}$ $(t \geq 0)$
(ii) $s(A) = \omega_0(T)$ $(t \geq 0)$

Απόδειξη. Εφόσον η T είναι άμεσα συμπαγής, θα είναι, προφανώς, και τελικά συμπαγής ημιομάδα. Από το Θεώρημα 5.2.4 προκύπτει ότι η T είναι τελικά συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας . Οι ισχυρισμοί του Πορίσματος συνάγονται από τους αντίστοιχους του Θεωρήματος 5.2.6.

Ερχόμαστε, τώρα, στα πλαίσια των χώρων L^p. Θεωρούμε ένα σύνολο Ω μαζί με μια αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα Σ και ένα σ-πεπερασμένο μέτρο dx. Διατυπώνουμε δύο κρίσιμα αποτελέσματα.

Θεώρημα 5.2.8 *Έστω ότι $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq +\infty$. Υποθέτουμε ότι ο γραμμικός τελεστής $A : L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega) \to L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$ δύναται να επεκταθεί σε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον $L^{p_1}(\Omega)$ στον $L^{p_1}(\Omega)$ και σε έναν συμπαγή γραμμικό τελεστή από τον $L^{p_0}(\Omega)$ στον $L^{p_0}(\Omega)$. Τότε ο A μπορεί να επεκταθεί σε έναν συμπαγή γραμμικό τελεστή από τον $L^p(\Omega)$ στον $L^p(\Omega)$.*

Απόδειξη. Αν $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων της Σ θετικού πεπερασμένου μέτρου, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια προβολή P_q επί του $L^q(\Omega)$ για κάθε $q \in [1, +\infty]$ από τον τύπο

$$P_q(f) = \sum_{r=1}^{n} |E_r|^{-1} \int_{E_r} f(x) dx \chi_{E_r}$$

όπου με χ_{E_r} σημειώνουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου E_r. Η P_q είναι πεπερασμένης τάξης και αποτελεί συστολή του $L^q(\Omega)$ για κάθε $q \in [1, +\infty]$. Μάλιστα, καθώς το q μεταβάλλεται, οι συγκεκριμένες προβολές είναι συνεπείς. Οι υποθέσεις μας για το Ω εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας ακολουθίας $P_{q,n}$ τέτοιων προβολών η οποία συγκλίνει, ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών του $L^q(\Omega)$, στον ταυτοτικό τελεστή I για κάθε $q \in [1, +\infty]$. Για την απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών, παρακαλείται ο αναγνώστης να ανατρέξει στο Θεώρημα 1.2.16.

Επειδή ο A είναι συμπαγής τελεστής επί του $L^{p_0}(\Omega)$ και $\lim_{n\to+\infty} ||I - P_{p_0,n}||_{p_0,p_0} = 0$, από τον ισχυρισμό (iv) της Πρότασης 1.1.30 για $B = I$, λαμβάνουμε

$$\lim_{n\to+\infty} ||A - P_{p_0,n}A||_{p_0,p_0} = 0$$

σε έναν προφανή συμβολισμό. Επίσης, αφού ο A είναι φραγμένος επί του $L^{p_1}(\Omega)$ και οι προβολές $P_{p_1,n}$ συστολές του $L^{p_1}(\Omega)$, έχουμε

$$||A - P_{p_1,n}A||_{p_1,p_1} \leq ||A||_{p_1,p_1} + ||P_{p_1,n}A||_{p_1,p_1} \leq 2||A||_{p_1,p_1} < +\infty$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα παρεμβολής των Riesz-Thorin (Θεώρημα 1.2.9) για $p_0 \leq p < p_1$ (οπότε $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_0}$ για $\theta \in [0,1]$) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||A - P_{p,n}A||_{p,p} &\leq ||A - P_{p_0,n}A||^{\theta}_{p_0,p_0} ||A - P_{p_1,n}A||^{1-\theta}_{p_1,p_1} \\ &\leq ||A - P_{p_0,n}A||^{\theta}_{p_0,p_0} (2||A||_{p_1,p_1})^{1-\theta} \end{aligned}$$

Αφήνοντας $n \to +\infty$ και, εφόσον $\theta \in [0,1]$, καταλήγουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} ||A - P_{p,n}A||_{p,p} = 0$$

Αλλά οι τελεστές $P_{p,n}A$ είναι πεπερασμένης τάξης. Από το Θεώρημα 1.1.31 συνάγεται η συμπάγεια του τελεστή A επί του χώρου $L^p(\Omega)$ για $p \in [p_0, p_1]$.

Πόρισμα 5.2.9 *Κάτω από τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, το φάσμα του τελεστή A είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό p, όταν $p_0 \leq p < p_1$. Οι φασματικές προβολές που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A έχουν σύνολα τιμών ανεξάρτητα του p και περιεχόμενα στο χώρο $L^{p_0}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε την επέκταση του τελεστή A από τον χώρο $L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$ στον $L^p(\Omega)$ με A_p και ορίζουμε τον A_{p_0} ομοίως. Προφανώς, οι τελεστές A_{p_0} και A_p, για $p_0 \leq p < p_1$, είναι συμπαγείς και συνεπείς. Το σύνολο

$$S = \sigma(A_{p_0}) \cap \sigma(A_p)$$

είναι κλειστό, το πολύ αριθμήσιμο και περιέχει το 0 ως μοναδικό πιθανό οριακό σημείο (βλ. Θεώρημα 1.1.32). Το S είναι, λοιπόν, μη κενό και αποτελεί γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ καθώς το σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι το σύνολο $\rho(A_{p_0}) \cap \rho(A_p)$ είναι μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ εφόσον ισούται με $\mathbb{C} - S$. Υπάρχει, δηλαδή, στοιχείο $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ με $\lambda_0 \in \rho(A_{p_0}) \cap \rho(A_p)$. Επειδή οι τελεστές A_{p_0} και A_p είναι συνεπείς, συμπεραίνουμε το ίδιο και για τους τελεστές $R(\lambda_0, A_{p_0})$ και $R(\lambda_0, A_p)$ όπου $p \in [p_0, p_1)$. Επαγωγικά επιβεβαιώνεται η συνέπεια των τελεστών $R(\lambda_0, A_{p_0})^n$ και $R(\lambda_0, A_p)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$M_1 = \min\{||R(\lambda_0, A_{p_0})||^{-1}, ||R(\lambda_0, A_p)||^{-1}\}$$

Για $\mu \in \mathbb{C}$ με αρκούντως μεγάλο μέτρο και τέτοια ώστε να ισχύει $|\mu - \lambda_0| < M_1$, η γνωστή αναπαράσταση επιλυόντων τελεστών μέσω δυναμοσειρών δίνει για $f \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$:

$$R(\mu, A_{p_0})f = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A_{p_0})^{n+1} f$$

και

$$R(\mu, A_p)f = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A_p)^{n+1} f$$

Σαφέστατα, οι τελεστές $R(\mu, A_{p_0})$ και $R(\mu, A_p)$ είναι συνεπείς για τα θεωρούμενα $\mu \in \mathbb{C}$. Από την αρχή της αναλυτικής συνέχισης τεκμαίρεται η συνέπεια των ίδιων τελεστών και για τα υπόλοιπα $\mu \in \rho(A_{p_0}) \cap \rho(A_p)$ με $p \in [p_0, p_1)$.

Έστω $0 \neq \lambda \in S$ και γ αρκούντως μικρός κύκλος με κέντρο λ. Η φασματική προβολή για το λ και για συναρτήσεις $f \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ παρέχεται από τον τύπο

$$P_{p_0} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma R(z, A_{p_0}) f dz$$

Λόγω συνεπείας, παίρνουμε

$$P_{p_0} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma R(z, A_p) f dz = P_p f$$

Εφόσον ο χώρος $L^{p_0}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ είναι πυκνός τόσο στον $L^{p_0}(\Omega)$ όσο και στον $L^p(\Omega)$, καταλαβαίνουμε ότι οι φασματικές προβολές P_{p_0} και P_p, $p_0 \leq p < p_1$, έχουν τα ίδια πεπερασμένα σύνολα τιμών $P_{p_0}(L^{p_0}(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ που περιέχονται στο χώρο $L^{p_0}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Από το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς τελεστές (θεώρημα 1.1.32-Riesz) γνωρίζουμε ότι, αν λ είναι μη μηδενική ιδιοτιμή ενός συμπαγούς τελεστή, τότε ο περιορισμός

του τελεστή στο σύνολο τιμών της φασματικής προβολής που αντιστοιχεί στην λ έχει φάσμα ίσο με $\{\lambda\}$. Η αποδειχθείσα ανεξαρτησία από τον αριθμό p του συνόλου τιμών των φασματικών προβολών της μορφής P_p, υποδηλώνει ότι $\lambda \in \sigma(A_{p_0})$ αν και μόνο αν $\lambda \in \sigma(A_p)$ για $p \in [p_0, p_1)$. Ασφαλώς $0 \in \sigma(A_{p_0})$ και $0 \in \sigma(A_p)$ για $p \in [p_0, p_1)$, εκτός αν το Ω είναι πεπερασμένο σύνολο, οπότε το συμπέρασμα είναι τετριμμένο.
Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Μπορούμε, πλέον, να προχωρήσουμε στην διατύπωση των πρώτων αποτελεσμάτων L^p-φασματικής ανεξαρτησίας για γεννήτορες συγκεκριμένης κλάσης ισχυρώς συνεχών ημιομάδων. Με Ω συμβολίζουμε έναν τοπικά συμπαγή, δεύτερο αριθμήσιμο χώρο Hausdorff, ο οποίος εφοδιάζεται με έναν μέτρο Borel dx.

Θεώρημα 5.2.10 *Έστω e^{-Ht} συμμετρική ημιομάδα Markov με τους τελεστές που τη συγκροτούν συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^2(\Omega)$ (δηλαδή η e^{-Ht} είναι μια άμεσα συμπαγής ημιομάδα). Τότε οι τελεστές e^{-Ht} είναι συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^p(\Omega)$, όπου $1 < p < +\infty$ και το ίδιο συμβαίνει με τους τελεστές $(\lambda I + H_p)^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \rho(-H_p)$. Επιπλέον, το φάσμα του H_p είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in (1, +\infty)$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε, αρχικά, το Θεώρημα 5.2.8 για $p_0 = 2$ και $p_1 = +\infty$. Από τις υποθέσεις μας, οι τελεστές e^{-Ht} είναι για κάθε $t > 0$, συμπαγείς από τον $L^2(\Omega)$ στον $L^2(\Omega)$ και φραγμένοι (ως συστολές) από τον $L^\infty(\Omega)$ στον $L^\infty(\Omega)$. Έπεται ότι οι e^{-Ht} είναι συμπαγείς, για κάθε $t > 0$, επί του $L^p(\Omega)$, όπου $p \in [2, +\infty)$. Συμβολίζουμε τους συγκεκριμένους τελεστές με $\mathrm{e}^{-H_p t}$. Από τον ισχυρισμό (v) της Πρότασης 1.1.30, οι $(\mathrm{e}^{-H_p t})^*$ είναι συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^q(\Omega)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Από το Θεώρημα 5.1.10 έχουμε ισοδύναμα ότι οι $\mathrm{e}^{-H_p t}$ είναι συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^q(\Omega)$, όπου $q \in (1, 2]$. Συμπερασματικά, οι τελεστές $\mathrm{e}^{-H_p t}$ είναι συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^p(\Omega)$ με $p \in (1, +\infty)$. Από το Πόρισμα 5.2.5 συνάγεται η συμπάγεια και των τελεστών $(\lambda I + H_p)^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \rho(-H_p)$, $p \in (1, +\infty)$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 5.2.9 το σύνολο $\sigma(\mathrm{e}^{-H_p t})$ είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in (1, +\infty)$. Εφόσον οι ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες $\mathrm{e}^{-H_p t}$ είναι άμεσα συμπαγείς επί των χώρων Banach $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, το Πόρισμα 5.2.7 υποδηλώνει ότι

$$\sigma(\mathrm{e}^{-H_p t}) = \{0\} \cup \mathrm{e}^{t\sigma(-H_p)}$$

Είναι ξεκάθαρη, πλέον, η ανεξαρτησία του συνόλου $\sigma(-H_p)$ από τον αριθμό $p \in (1, +\infty)$. Επομένως και το φάσμα του H_p είναι ανεξάρτητο του $p \in (1, +\infty)$.

Θεώρημα 5.2.11 *Έστω e^{-Ht} συμμετρική ημιομάδα Markov με τους τελεστές που την απαρτίζουν συμπαγείς για κάθε $t > 0$ επί του $L^1(\Omega)$. Τότε οι e^{-Ht} είναι συμπαγείς τελεστές για κάθε $t > 0$ επί του $L^p(\Omega)$, όπου $1 \leq p \leq +\infty$ και το ίδιο συμβαίνει με τους τελεστές $(\lambda I + H_p)^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \rho(-H_p)$. Επιπλέον, το φάσμα του H_p είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty]$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.2.8 για $p_0 = 1$ και $p_1 = +\infty$ και, όπως στο προηγούμενο αποτέλεσμα, αποδεικνύουμε ότι οι τελεστές e^{-Ht} είναι συμπαγείς για κάθε

$t > 0$ επί του $L^p(\Omega)$, όπου $p \in [1, +\infty)$. Μέσω δυϊκότητας και, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\mathrm{e}^{-H_p t}$, λαμβάνεται η συμπάγεια των τελεστών αυτών για κάθε $t > 0$ και όταν $p = +\infty$. Συμπερασματικά, οι τελεστές $\mathrm{e}^{-H_p t}$ είναι, για κάθε $t > 0$, συμπαγείς επί των $L^p(\Omega)$ με $p \in [1, +\infty]$ και οι αντίστοιχες ημιομάδες άμεσα συμπαγείς. Με επιχειρηματολογία ανάλογη προς αυτήν που υιοθετήσαμε στο Θεώρημα 5.2.10, επιβεβαιώνουμε τους υπόλοιπους ισχυρισμούς.

Ας θεωρήσουμε τον ελλειπτικό διαφορικό τελεστή H με

$$Hf = \frac{1}{2}(-\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f - f)$$

στον $L^2(\mathbb{R})$ και πεδίο ορισμού το χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν $t > 0$ έτσι ώστε οι τελεστές e^{-Ht} να είναι συμπαγείς στον $L^1(\mathbb{R})$. Έτσι έχουμε

$$\sigma(H_p) = \sigma(H_2) = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

για $p \in (1, +\infty)$ ενώ $\sigma(H_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda \geq 0\}$. Με άλλα λογια, το φάσμα του H_1 είναι εντελώς διαφορετικό από αυτό του H_p για $p \in (1, +\infty)$, σε αντίθεση με το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.2.11. Άρα, η υπόθεση της L^1-συμπάγειας των τελεστών e^{-Ht} και μάλιστα για κάθε $t > 0$, στο ίδιο θεώρημα, δεν είναι δυνατόν να παραλειφθεί.

Μέχρι το τέλος του Κεφαλαίου, με e^{-Ht} θα συμβολίζουμε μια συμμετρική ημιομάδα Markov επί του χώρου Hilbert $L^2(\Omega, dx)$ με τις συνήθεις υποθέσεις για Ω και dx. Λέμε ότι η e^{-Ht} είναι υπερσυσταλτική (hypercontractive) αν υπάρχει $t > 0$ έτσι ώστε ο τελεστής e^{-Ht} να είναι φραγμένος από τον $L^2(\Omega, dx)$ στον $L^4(\Omega, dx)$. Αποδεικνύεται ότι, αν η ημιομάδα e^{-Ht} είναι υπερσυσταλτική και $1 < p \leq q < +\infty$, τότε υπάρχει $T(p, q) < +\infty$ ώστε οι τελεστές e^{-Ht} να είναι συστολές από τον $L^p(\Omega, dx)$ στον $L^q(\Omega, dx)$ για κάθε $t > T(p, q)$.

Παρότι η έννοια της υπερσυσταλτικότας έχει μεγάλη σημασία στην Κβαντομηχανική, θα μελετήσουμε ακροθιγώς μια ισχυρότερη ιδιότητα που χαρακτηρίζει πολύ συχνά ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης.

Ορισμός 5.2.12 *Έστω e^{-Ht} συμμετρική ημιομάδα Markov επί του $L^2(\Omega, dx)$. Η e^{-Ht} καλείται ultra-συσταλτική (ultracontractive) αν οι τελεστές e^{-Ht} είναι φραγμένοι από τον $L^2(\Omega, dx)$ στον $L^\infty(\Omega, dx)$ για κάθε $t > 0$.*

Αν η e^{-Ht} είναι ultra-συσταλτική ημιομάδα και ορίσουμε $||A||_{q,p}$ να είναι η νόρμα ενός τελεστή A από τον $L^p(\Omega, dx)$ στον $L^q(\Omega, dx)$, τότε σαφέστατα η ποσότητα

$$c_t = ||\mathrm{e}^{-Ht}||_{\infty,2}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Επιπλέον $c_t \to +\infty$ καθώς $t \to 0$, εκτός αν $L^2(\Omega, dx) \subseteq L^\infty(\Omega, dx)$, κάτι που συμβαίνει αν το μέτρο dx είναι καθαρά ατομικό. Περαιτέρω $L^p(\Omega, dx) = L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq +\infty$.

Πρόταση 5.2.13 *Έστω* e^{-Ht} *ultra-συσταλτική ημιομάδα επί του χώρου Hilbert* $L^2(\Omega)$. *Η* e^{-Ht} *διαθέτει έναν ολοκληρωτικό πυρήνα* $K(t,x,y)$ *για κάθε* $t>0$, *ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη*

$$0 \leq K(t,x,y) \leq c_{t/2}^2$$

σχεδόν παντού επί του Ω.

Απόδειξη. Θεωρώντας τους e^{-Ht} ως τελεστές από τον $L^1(\Omega)$ στον $L^\infty(\Omega)$, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\mathrm{e}^{-Ht} = T_1 T_2 \text{ για κάθε } t>0$$

όπου

$$T_1 = \mathrm{e}^{-Ht/2} : L^2(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$$

και

$$T_2 = \mathrm{e}^{-Ht/2} : L^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

Εφόσον $c_t = ||\mathrm{e}^{-Ht}||_{\infty,2}$ και οι τελεστές e^{-Ht} είναι αυτοσυζυγείς, λαμβάνουμε μέσω δυϊκότητας ότι

$$c_t = ||\mathrm{e}^{-Ht}||_{2,1}$$

Επομένως

$$||\mathrm{e}^{-Ht}||_{\infty,1} \leq ||\mathrm{e}^{-Ht/2}||_{\infty,2}||\mathrm{e}^{-Ht/2}||_{2,1} = c_{t/2}^2$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές e^{-Ht} είναι φραγμένοι από τον $L^1(\Omega)$ στον $L^\infty(\Omega)$. Από το Θεώρημα 1.2.15, οι e^{-Ht} διαθέτουν ολοκληρωτικό πυρήνα $K(t,x,y)$ του οποίου η L^∞-νόρμα ισούται με τη νόρμα τελεστή. Άρα

$$||K_t||_\infty = ||\mathrm{e}^{-Ht}||_{\infty,1} \leq c_{t/2}^2$$

Συνακόλουθα $K(t,x,y) \leq c_{t/2}^2$ σχεδόν παντού. Επειδή οι e^{-Ht}, ως τελεστές που απαρτίζουν μια συμμετρική ημιομάδα Markov, διατηρούν τη θετικότητα στον $L^2(\Omega)$, συμπεραίνουμε ότι $K(t,x,y) \geq 0$ σχεδόν παντού. Τελικά έχουμε

$$0 \leq K(t,x,y) \leq c_{t/2}^2$$

σχεδόν παντού επί του Ω.

Κλείνουμε το Κεφάλαιο με ένα αξιόλογο αποτέλεσμα φασματικής ανεξαρτησίας στα πλαίσια ultra-συσταλτικών ημιομάδων.

Πρόταση 5.2.14 *Έστω* e^{-Ht} *ultra-συσταλτική ημιομάδα επί του χώρου Hilbert* $L^2(\Omega)$ *με* $|\Omega| < +\infty$. *Τότε οι τελεστές* e^{-Ht} *είναι συμπαγείς για κάθε* $t>0$ *επί του* $L^p(\Omega)$, *όπου* $1 \leq p \leq +\infty$. *Επιπλέον το φάσμα του* H_p *είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό* $p \in [1,\infty]$.

Απόδειξη. Έστω $t>0$. Θεωρώντας τους e^{-Ht} ως τελεστές από τον $L^1(\Omega)$ στον $L^1(\Omega)$, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\mathrm{e}^{-Ht} = S_1 T S_2$$

όπου $S_1 = I : L^2(\Omega) \to L^1(\Omega)$, $T = \mathrm{e}^{-Ht/2} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ και $S_2 = \mathrm{e}^{-Ht/2} : L^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Επειδή, εξ υποθέσεως, οι τελεστές $\mathrm{e}^{-Ht/2}$ είναι φραγμένοι για κάθε $t > 0$ από τον $L^2(\Omega)$ στον $L^\infty(\Omega)$, συμπεραίνουμε, μέσω δυϊκότητας, ότι ο S_2 είναι φραγμένος. Καθώς, επιπροσθέτως, το μέτρο του Ω είναι πεπερασμένο, από το Θεώρημα 1.2.12 προκύπτει ότι οι e^{-Ht}, θεωρούμενοι ως τελεστές από τον $L^2(\Omega)$ στον $L^2(\Omega)$, είναι συμπαγείς για κάθε $t > 0$. Επομένως ο T είναι συμπαγής. Βεβαίως και ο S_1 είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Από τον ισχυρισμό (ii) της Πρότασης 1.1.30 έπεται η συμπάγεια για κάθε $t > 0$ των τελεστών e^{-Ht} επί του $L^1(\Omega)$. Αλλά, εξ ορισμού, η e^{-Ht} είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov επί του $L^2(\Omega)$. Δύναται να εφαρμοστεί, λοιπόν, το Θεώρημα 5.2.11 απο όπου συνάγονται η συμπάγεια για κάθε $t > 0$ των e^{-Ht} επί του χώρου Banach $L^p(\Omega)$ και η ανεξαρτησία του L^p-φάσματος του H από τον αριθμό $p \in [1, +\infty]$.

Κεφάλαιο 6

Ανώτερες Εκτιμήσεις Gauss και L^p−φασματική ανεξαρτησία διαφορικών τελεστών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε αποτελέσματα ανεξαρτησίας από τον αριθμό p για το L^p−φάσμα γεννητόρων συμπαγών συμμετρικών ημιομάδων Markov. Εύλογα μπορεί να αναρωτηθεί κάποιος για ανάλογα αποτελέσματα στην περίπτωση κλειστών διαφορικών τελεστών που εμφανίζονται ως απειροστικοί γεννήτορες γενικών ισχυρώς συνεχών ημιομάδων. Το ερώτημα αυτό προσέλκυσε καινούριο ενδιαφέρον μεταξύ των μελών της διεθνούς μαθηματικής κοινότητας έπειτα από την εικασία του B. Simon (1982) περί ανεξαρτησίας του φάσματος ευρείας κλάσης τελεστών Schrödinger που δρούν στους χώρους $L^p(\mathbb{R}^n)$ για $p \in [1, +\infty)$. Καταφατική απάντηση έδωσαν οι R.Hemplel και J.Voigt στο άρθρο τους [15].

Ακολουθώντας παρόμοια επιχειρηματολογία, ο K. Th. Sturm στο άρθρο του [27], απέδειξε ότι το L^p−φάσμα ομοιόμορφα ελλειπτικών διαφορικών τελεστών υπό μορφή απόκλισης, σε μια πλήρη πολλαπλότητα Riemann είναι ανεξάρτητο από το $p \in [1, +\infty]$ αν ο όγκος της πολλαπλότητας αυξάνεται ομοιόμορφα υποεκθετικά, όπως συμβαίνει για παράδειγμα όταν η καμπυλότητα Ricci είναι μη αρνητική. Από την άλλη, αν υποτεθεί η ύπαρξη πυκνότητας όγκου η οποία αυξάνεται εκθετικά προς κάθε κατεύθυνση, τότε το L^p-φάσμα εξαρτάται από τον αριθμό p. Έτσι, αν (M, g) είναι ο υπερβολικός χώρος διάστασης n με σταθερή καμπυλότητα τομής $-K < 0$ και p είναι οποιοσδήποτε αριθμός στο διάστημα $[1, +\infty)$ μπορεί να αποδειχθεί ότι το φάσμα του τελεστή $-\Delta$, ο οποίος δρα στο χώρο $L^p(M)$ είναι το σύνολο

$$\{\xi = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C} : v^2 \leq (u - (n-1)^2\frac{K}{p}(1 - \frac{1}{p}))(n-1)^2K(1 - \frac{2}{p})^2\}$$

δηλαδή εξαρτάται από το p. Ιδιαιτέρως το L^2-φάσμα είναι το πραγματικό διάστημα $[(n-1)^2\frac{K}{4}, +\infty]$, ενώ το L^1-φάσμα είναι το σύνολο εντός ή επί της παραβολής

$$\{\xi = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C} : v^2 = u(n-1)^2K\}$$

Γενικά το L^p-φάσμα διαφορικών τελεστών εξαρτάται από τον αριθμό p. Πρέπει, επομένως, να επιβληθούν κατάλληλες συνθήκες προκείμενου να επιτευχθεί φασματική ανεξαρτησία. Ένα από τα πλέον σημαντικά εργαλεία προς το σκοπό αυτό είναι οι ανώτερες εκτιμήσεις Gauss (upper Gaussian estimates) ή αλλιώς άνω φράγματα του πυρήνα θερμότητας (upper heat kernel bounds). Σε δύο εκ των κυριοτέρων πονημάτων απο τους W. Arendt (1994) και P.C. Kunstmann (1999) σχετικών με τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι αφιερωμένο το κεφάλαιο τούτο.

Στην πρώτη παράγραφο μελετώνται βασικές φασματικές ιδιότητες συνεπών ημιομάδων και τελεστών σε χώρους Banach. Μεταξύ άλλων, διατυπώνονται ένα κρίσιμο αποτέλεσμα συνεκτικότητας (Πρόταση 6.1.2), ένα αξιόλογο αποτέλεσμα φασματικής ανεξαρτησίας (Πρόταση 6.1.6) και ένα αποτέλεσμα μεγάλης χρησιμότητας για τα επόμενα εδάφια της εργασίας μας (Πρόταση 6.1.3).

Στη δεύτερη παράγραφο παρατίθενται ορισμένα απλά παραδείγματα διαφορικών τελεστών με L^p-φάσμα εξαρτώμενο από το $p \in (1, +\infty)$, τα οποία οφείλονται στον Arendt.

Στην τρίτη παράγραφο αναπτύσσεται ο πυρήνας της ερευνητικής προσπάθειας του Arendt. Αν Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι η ισχυρώς συνεχής ημιομάδα T στον $L^2(\Omega)$ ικανοποιεί μια ανω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης αν ισχύει η σχέση

$$|T(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t} G_2(bt)|f|, \ \forall t > 0 \tag{6.0.1}$$

για σταθερές $\omega \geq 0, c \geq 1$ και $b > 0$, όπου $(G_2(t))_{t \geq 0}$ είναι η ημιομάδα Gauss. Αποδεικνύεται (Πρόταση 6.3.3) ότι, από μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα T επί του χώρου Hilbert $L^2(\Omega)$ αποτελούμενη από ολοκληρωτικούς τελεστές που ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης, επάγονται συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p στούς χώρους Banach $L^p(\Omega)$ για $p \in [1, +\infty)$ ώστε $T_2 = T$ και για κάθε p οι τελεστές $T_p(t)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη άνω εκτίμηση Gauss. Το Λήμμα 6.3.5 και η τεχνική Πρόταση 6.3.6 μέσω κατάλληλα διαταραγμένων ημιομάδων, προετοιμάζουν το έδαφος για τα δύο κεντρικά αποτελέσματα του Arendt (Θεώρημα 6.3.10 και Πόρισμα 6.3.11). Στο δεύτερο από αυτά, μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα T στον $L^2(\Omega)$ από τελεστές που πληρούν την συνθήκη (6.0.1) και με γεννήτορα τον αυτοσυζυγή γραμμικό τελεστή A επάγει συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p στους χώρους $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < +\infty$ με γεννήτορες A_p και το σύνολο $\sigma(A_p)$ είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό p. Ακολουθούν εφαρμογές σε ποικιλία κλάσεων διαφορικών τελεστών.

Στην τέταρτη και τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου περιλαμβάνονται τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε ο Kunstmann βελτιώνοντας ουσιωδώς τα προαναφερθέντα. Πιο συγκεκριμένα απέδειξε (Θεώρημα 6.4.4) πως, απο μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα T επί του $L^2(\Omega)$ με απειροστικό γεννήτορα το γραμμικό, όχι κατ΄ ανάγκην αυτοσυζυγή, τελεστή A επάγονται συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p επί των χώρων $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < +\infty$, με γεννήτορες A_p ώστε $T_2 = T$ και με το σύνολο $\sigma(A_p)$ ανεξάρτητο από το p, υποθέτοντας μόνον ότι οι πυρήνες των ολοκληρωτικών τελεστών που απαρτίζουν την T, ικανοποιούν τη γενική μορφή άνω εκτίμησης Gauss

$$|K(t, x, y)| \leq ct^{-n/m} \mathrm{e}^{\omega t} \exp\left(\frac{-b|x - y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right), \ \forall t > 0 \tag{6.0.2}$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και για σταθερές $m > 1, \omega \geq 0, c > 0, b > 0$. Αποδεικνύεται (Θεώρημα 6.4.5) και ένα ανάλογο αποτέλεσμα φασματικής ανεξαρτησίας στα πλαίσια L^p-χώρων με συνάρτηση βάρους w υποκείμενη σε συνθήκη υποεκθετικής αύξησης.

6.1 Φασματικές ιδιότητες συνεπών τελεστών και ημιομάδων σε χώρους Banach

Έστω E, F μιγαδικοί χώροι Banach με τον F να είναι συνεχώς εμφυτευμένος υπόχωρος του E (συμβολίζουμε $F \hookrightarrow E$). Θεωρούμε έναν γραμμικό τελεστή $(A, Dom(A))$ στον E και υπενθυμίζουμε ότι, με τον όρο τμήμα του A στον υπόχωρο F, εννοούμε τον γραμμικό τελεστή $(A_F, Dom(A_F))$ όπου $A_F x = Ax$ για κάθε

$$x \in Dom(A_F) = \{x \in Dom(A) \cap F : Ax \in F\}$$

Πρόταση 6.1.1 *Με τους παραπάνω συμβολισμούς, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\mu \in \rho(A)$ έτσι ώστε $R(\mu, A)F \subset F$ και $k \in \mathbb{N}$ με $Dom(A^k) \subset F$. Τότε έχουμε $\sigma(A) = \sigma(A_F)$ και $R(\lambda, A_F) = R(\lambda, A)|_F$, για κάθε $\lambda \in \rho(A)$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \rho(A)$. Θα αποδείξουμε ότι $\lambda \in \rho(A_F)$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η εξίσωση των επιλυόντων τελεστών

$$R(\lambda, A) = R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A)[R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)] \\ &= (\mu - \lambda)^0 R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A)^2 + (\mu - \lambda)^2 R(\mu, A)^2 R(\lambda, A) \end{aligned}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (\mu - \lambda)^0 R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A)^2 + \\ &\quad +(\mu - \lambda)^2\{R(\mu, A)^2[R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)]\} \\ &= (\mu - \lambda)^0 R(\mu, A) + (\mu - \lambda)^1 R(\mu, A)^2 + (\mu - \lambda)^2 R(\mu, A)^3 + \\ &\quad +(\mu - \lambda)^3 R(\mu, A)^3 R(\lambda, A) \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, παίρνουμε

$$R(\lambda, A) = \sum_{j=1}^{k} (\mu - \lambda)^{j-1} R(\mu, A)^j + (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^k R(\lambda, A)$$

Επειδή $R(\mu, A)F \subseteq F$, έπεται ότι $R(\mu, A)^j F \subseteq F$ για $j = 1, 2, \ldots, k$ και καθώς $R(\mu, A)^k : E \to Dom(A^k)$ με $Dom(A^k) \subseteq F$, συνάγεται ότι $R(\mu, A)^k R(\lambda, A)F \subset F$. Άρα $R(\lambda, A)F \subseteq F$. Θα επιβεβαιώσουμε ότι

$$R(\lambda, A_F) = R(\lambda, A)|_F \tag{6.1.3}$$

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι αν $x \in F$, έχουμε $R(\lambda, A)x \in F$ και φυσικά $R(\lambda, A)|_F x = R(\lambda, A)x$. Εφόσον $A_F x = Ax$ για κάθε $x \in F$, βρίσκουμε ότι $(\lambda I - A_F)R(\lambda, A)|_F x = x$ για κάθε $x \in F$. Επιπλέον, εάν $x \in Dom(A_F)$ ισχύει $A_F x = Ax \in F$ και, κατά συνέπεια, $(\lambda I - A_F)x \in F$. Έτσι

$$R(\lambda, A)|_F(\lambda I - A_F)x = x, \ \forall x \in Dom(A_F)$$

Συνδιάζοντας τις προκύπτουσες σχέσεις, λαμβάνουμε την απόδειξη του ισχυρισμού μας.

Από την (6.1.3) καθίσταται σαφές ότι $\lambda \in \rho(A_F)$. Αφού $\rho(A) \subseteq \rho(A_F)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma(A_F) \subseteq \sigma(A) \tag{6.1.4}$$

Έστω αντίστροφα ότι $\lambda \in \rho(A_F)$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η ποσότητα

$$||x||_{Dom(A^k)} = ||(\mu I - A)^k x||_E$$

είναι μια νόρμα επί του $Dom(A^k)$ ως προς την οποία το πεδίο ορισμού του τελεστή A^k καθίσταται χώρος Banach. Μάλιστα $Dom(A^k) \hookrightarrow E$. Επειδή $F \hookrightarrow E$, με τη βοήθεια του θεωρήματος κλειστού γραφήματος, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $Dom(A^k) \hookrightarrow E$. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $R(\mu, A)^k$ είναι ένας ισομορφισμός του E επί του $Dom(A^k)$. Έτσι, ορίζοντας για $x \in E$

$$Qx := \sum_{j=1}^{k} (\mu - \lambda)^{j-1} R(\mu, A)^j x + (\mu - \lambda)^k R(\lambda, A_F) R(\mu, A)^k x$$

λαμβάνουμε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή επί του E. Εφόσον $R(\mu, A)^k x \in Dom(A^k) \subseteq Dom(A) \cap F$ έπεται ότι $R(\lambda, A_F)R(\mu, A)^k x \in Dom(A)$ για κάθε $x \in E$. Προφανώς $R(\mu, A)^j x \in Dom(A^j) \subseteq Dom(A)$ για κάθε $x \in E$ και για $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Επομένως $Qx \in Dom(A)$ για κάθε $x \in E$. Ακόμη έχουμε

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)Qx &= [(\lambda - \mu + \mu)I - A]Qx \\
&= [(\lambda - \mu)I]Qx + (\mu I - A)Qx \\
&= -\sum_{j=1}^{k} (\mu - \lambda)^j R(\mu, A)^j x - (\mu - \lambda)^{k+1} R(\lambda, A_F) R(\mu, A)^k x \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} (\mu - \lambda)^{j-1} R(\mu, A)^{j-1} x + (\mu - \lambda)^k (\mu I - A) R(\lambda, A_F) R(\mu, A)^k x \\
&= \sum_{j=1}^{k} [(\mu - \lambda)^{j-1} R(\mu, A)^{j-1} x - (\mu - \lambda)^j R(\mu, A)^j x] \\
&\quad + (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^k (\lambda I - A) R(\lambda, A_F) x \\
&= (\mu - \lambda)^0 x - (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^k x + (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^k x \\
&= x
\end{aligned}$$

Δηλαδή $(\lambda I - A)Qx = x$ για κάθε $x \in E$. Αφού κάθε γραμμικός τελεστής αντιμετατίθεται με τους επιλύοντές του στο πεδίο ορισμού του, προκύπτει εύκολα ότι $AQx = QAx$ για κάθε $x \in Dom(A)$. Άρα και $Q(\lambda I - A)x = x$ για κάθε $x \in Dom(A)$. Από την προηγηθείσα ανάλυση είναι φανερό ότι $\lambda \in \rho(A)$ και μάλιστα $R(\lambda, A) = Q$. Έτσι $\rho(A_F) \subseteq \rho(A)$ και συνακόλουθα

$$\sigma(A) \subseteq \sigma(A_F) \tag{6.1.5}$$

. Τελικά, από τις σχέσεις (6.1.4),(6.1.5) παίρνουμε $\sigma(A) = \sigma(A_F)$.

Υπενθυμίζουμε ότι, δοθέντων δυο συμβατών χώρων Banach E και F, δυο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές B_E και B_F επί των E και F αντίστοιχα καλούνται συνεπείς, εάν ισχύει $B_E x = B_F x$ για κάθε $x \in E \cap F$. Αποδεικνύουμε ευθύς αμέσως ένα αξιόλογο αποτέλεσμα συνεκτικότητας

Πρόταση 6.1.2 *Έστω E και F συμβατοί χώροι Banach. Θεωρούμε τους γραμμικούς τελεστές A_E και A_F επί των E και F αντίστοιχως. Το σύνολο $\mathcal{U}$ όλων των $\lambda \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ για τα οποία οι τελεστές $R(\lambda, A_E)$ και $R(\lambda, A_F)$ είναι συνεπείς, αποτελεί ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\rho(A_E) \cap \rho(A_F)$.*

Απόδειξη. Έστω $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του συνόλου $\mathcal{U}$ και $\lambda \in \rho(A_E)\cap\rho(A_F)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$. Τότε $R(\lambda_n, A_E)x = R(\lambda_n, A_F)x$ για κάθε $x \in E \cap F$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, παίρνοντας τα όρια καθώς $n \to +\infty$, προκύπτει ότι $R(\lambda, A_E)x = R(\lambda, A_F)x$ για κάθε $x \in E \cap F$. Δηλαδή οι τελεστές $R(\lambda, A_E)$ και $R(\lambda, A_F)$ είναι συνεπείς, οπότε $\lambda \in \mathcal{U}$. Άρα το $\mathcal{U}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\rho(A_E)\cap\rho(A_F)$. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{U}$ είναι και ανοικτό υποσύνολο του $\rho(A_E)\cap\rho(A_F)$. Έστω $\lambda_0 \in \mathcal{U}$. Τότε $\lambda_0 \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ και $R(\lambda_0, A_E)x = R(\lambda_0, A_F)x$ για κάθε $x \in E \cap F$. Ισχυριζόμαστε ότι οι τελεστές $R(\lambda_0, A_E)^n$ και $R(\lambda_0, A_F)^n$ είναι συνεπείς για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός αληθεύει. Υποθέτουμε ότι είναι αληθής και για $n = k$, δηλαδή έχουμε $R(\lambda_0, A_E)^k x = R(\lambda_0, A_F)^k x$ για κάθε $x \in E \cap F$. Τότε

$$\begin{aligned} R(\lambda_0, A_E)^{k+1}x &= R(\lambda_0, A_E)^k[R(\lambda_0, A_E)x] \\ &= R(\lambda_0, A_F)^k[R(\lambda_0, A_F)x] \\ &= R(\lambda_0, A_F)^{k+1}x \end{aligned}$$

για κάθε $x \in E \cap F$, εφ'οσον $R(\lambda_0, A_E)x$ και $R(\lambda_0, A_F)x$ ανήκουν στο $E \cap F$ για κάθε $x \in E \cap F$ και είναι ποσότητες ίσες μεταξύ τους. Ο ισχυρισμός επαγωγικά αποδείχθηκε.

Θέτουμε $\epsilon_1 = \frac{1}{||R(\lambda_0, A_E)||}$ και $\epsilon_2 = \frac{1}{||R(\lambda_0, A_F)||}$. Προφανώς $\epsilon_1 > 0$ και $\epsilon_2 > 0$. Λαμβάνουμε $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ και, καθώς το σύνολο $\rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ είναι ανοικτό, βρίσκουμε $V = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \epsilon\} \subseteq \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$. Το V είναι ανοικτό και $\lambda_0 \in V$. Θα δείξουμε ότι $V \subseteq \mathcal{U}$. Θεωρούμε τυχόν $\mu \in V$. Τότε $|\mu - \lambda_0| < \frac{1}{||R(\lambda_0, A_E)||}$ και $|\mu - \lambda_0| < \frac{1}{||R(\lambda_0, A_F)||}$ και, λόγω της γνωστής παράστασης των επιλυόντων τελεστών με μορφή δυναμοσειράς (βλ. Πρόταση 1.3.11), έχουμε

$$R(\mu, A_E)x = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A_E)^{n+1} x$$

και

$$R(\mu, A_F)x = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A_F)^{n+1} x$$

Εφ'οσον $R(\lambda_0, A_E)^{n+1}x = R(\lambda_0, A_F)^{n+1}x$ για κάθε $x \in E \cap F$ και $n \in \mathbb{N}$, καταλήγουμε στη σχέση $R(\mu, A_E)x = R(\mu, A_F)x$ για κάθε $x \in E \cap F$ απ'οπου προκύπτει ότι $\mu \in \mathcal{U}$. Επομένως το $\mathcal{U}$ είναι και ανοικτό υποσύνολο του $\rho(A_E) \cap \rho(A_F)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.11 ισχύει

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \ \forall x \in Dom(A), \ t \geq 0$$

όπου $(A, Dom(A))$ είναι ο απειροστικός γεννήτορας της ισχυρώς συνεχούς ημιομάδας τελεστών $(T(t))_{t\geq 0}$ σε έναν χώρο Banach X. Έτσι για $x, y \in X$ έχουμε $x \in Dom(A)$ και $Ax = y$ αν και μόνον αν

$$\int_0^t T(s)yds = T(t)x - x, \ \forall t \geq 0$$

Σε ότι ακολουθεί μέχρι το τέλος της Παραγράφου, υποθέτουμε ότι $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$ είναι συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες τελεστών με απειροστικούς γεννήτορες $(A_E, Dom(A_E))$ και $(A_F, Dom(A_F))$ επί των συμβατών χώρων Banach E και F αντιστοίχως. Ιδιαιτέρως ισχύει $\overline{E \cap F} = E$ και $\overline{E \cap F} = F$.

Πρόταση 6.1.3 *Θεωρούμε $\lambda \in \rho(A_E)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $Q \in \mathcal{L}(F)$ ο οποίος είναι συνεπής με τον τελεστή $R(\lambda, A_E)$. Τότε $\lambda \in \rho(A_F)$ και $R(\lambda, A_F) = Q$.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι $\lambda = 0$. Διαφορετικά, λαμβάνουμε την ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(S_E(t))_{t\geq 0}$ επί του E με $S_E(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}T_E(t)$ για κάθε $t \geq 0$ και απειροστικό γεννήτορα $A_E - \lambda I$. Εφ'οσον $0 \in \rho(A_E)$ έπεται ότι υπάρχει και είναι φραγμένος ο γραμμικός τελεστής $-A_E^{-1}$ (άρα και ο A_E^{-1}). Από την υπόθεση της Πρότασης συμπεραίνουμε ότι $-A_E^{-1}x = Qx$ για κάθε $x \in E \cap F$. Ισοδύναμα $A_E Qx = -x$ για κάθε $x \in E \cap F$. Έστω $y \in E \cap F \subseteq E$. Επειδή ο τελεστής A_E είναι επί του E, υπάρχει $x \in Dom(A_E)$ ώστε $A_E x = y$ (οπότε $x = A_E^{-1}y$). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^t T_E(s)yds &= T_E(t)x - x \\
&= T_E(t)A_E^{-1}y - A_E^{-1}y \\
&= -T_E(t)Qy + Qy, \ t \geq 0
\end{aligned}$$

και συνακόλουθα

$$\int_0^t T_E(s)(-y)ds = T_E(t)Qy - Qy, \ t \geq 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι $Qy \in Dom(A_E)$. Επειδή οι ημιομάδες $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$ είναι συνεπείς συνάγουμε

$$\int_0^t T_E(s)(-y)ds = T_F(t)Qy - Qy,\ t \geq 0$$

κάτι που σημαίνει ότι $Qy \in Dom(A_F)$ και $A_F Qy = -y$. Παρατηρούμε ότι για $y \in E \cap F$ ισχύει $Qy \in Dom(A_E)$ και άρα

$$T_E(t)A_E Qy = T_E(t) \lim_{h\to 0+} \frac{T_E(h)Qy - Qy}{h}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} -T_E(t)y = T_E(t)(-y) &= \lim_{h\to 0+} T_E(t)\frac{T_E(h)Qy - Qy}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{T_E(h)T_E(t)Qy - Qy}{h} \\ &= A_E T_E(t)Qy \end{aligned}$$

Μ' άλλα λόγια $T_E(t)Qy \in Dom(A_E)$ και μάλιστα

$$A_E T_E(t)Qy = -T_E(t)y,\ \forall y \in E \cap F$$

Έπεται ότι

$$T_E(t)Qy = -A_E^{-1}T_E(t)y = QT_E(t)y$$

για κάθε $y \in E \cap F$ και $t \geq 0$. Λόγω συνέπειας λαμβάνουμε

$$T_F(t)Qy = QT_F(t)y,\ \forall y \in F$$

Επιπλέον $Qy \in Dom(A_F)$ για κάθε $y \in E \cap F$ και, έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_F Qy &= \lim_{h\to 0+} \frac{T_F(h)Qy - Qy}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{QT_F(h)y - Qy}{h} \end{aligned}$$

(εφ'οσον $Dom(A_F) \subseteq F$)). Αλλά ο Q είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} A_F Qy &= Q\left(\lim_{h\to 0+} \frac{T_F(y)y - y}{h}\right) \\ &= QA_F y \end{aligned}$$

Δηλαδή $y \in Dom(A_F)$ και μάλιστα $QA_F y = A_F Qy$. Αφού $\overline{Dom(A_F)} = F$ συμπεραίνουμε ότι

$$QA_F y = A_F Qy,\ \forall y \in F$$

Ξεκινώντας από τυχόν στοιχείο $y \in E \cap F$ αποδείξαμε την ισχύ των σχέσεων $A_F Q y = -y$ και $Q A_F y = A_F Q y$. Επομένως $A_F Q y = -y$ και $Q A_F y = -y$ για κάθε $y \in E \cap F$ και, λόγω πυκνότητας, για κάθε $y \in F$. Άρα έχουμε $(-A_F)Qy = y$ και $Q(-A_F)y = y$, $\forall y \in F$, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο τελεστής $-A_F$ είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο Q. Έπεται ότι $0 \in \rho(A_F)$ και $-A_F^{-1} = Q$, οπότε οι τελεστές $R(0, A_F)$ και Q είναι συνεπείς. Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

Πρόταση 6.1.4 *Ας υποθέσουμε ότι $\lambda \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$. Αν ισχύει*

$$R(\lambda, A_F)(E \cap F) \subseteq E \cap F$$

τότε οι τελεστές $R(\lambda, A_E)$ και $R(\lambda, A_F)$ είναι συνεπείς.

Απόδειξη. Πάλι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Εφ'οσον $0 \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν και είναι φραγμένοι οι γραμμικοί τελεστές $-A_E^{-1}$ και A_F^{-1}. Έτσι, εαν $x \in E \cap F$ λαμβάνουμε $R(0, A_F)x \in E \cap F$ ή ισοδύναμα $-A_F^{-1}x \in E \cap F$ και τελικά $A_F^{-1}x \in E \cap F$. Ο τελεστής A_F είναι επί του F και άρα, αν $x \in E \cap F \subseteq F$ υπάρχει $y \in Dom(A_F)$ ώστε να ισχύει $x = A_F y$. Αλλά τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^t T_F(s)x ds &= T_F(t)y - y \\ &= T_F(t)A_F^{-1}x - A_F^{-1}x, \ t \geq 0 \end{aligned}$$

Καθώς οι ημιομάδες $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$ είναι συνεπείς και $A_F^{-1}x \in E \cap F$ για κάθε $x \in E \cap F$, προκύπτει

$$\int_0^t T_E(s)x ds = T_E(t)A_F^{-1}x - A_F^{-1}x, \ t \geq 0$$

Δηλαδή $A_F^{-1}x \in Dom(A)$ και $A_E(A_F^{-1}x) = x$. Επομένως

$$A_F^{-1}x = A_E^{-1}x$$

και αντίστοιχα

$$-A_F^{-1}x = -A_E^{-1}x, \forall x \in E \cap F$$

Μ' άλλα λόγια, οι τελεστές $R(0, A_F) = -A_F^{-1}$ και $R(0, A_E) = -A_E^{-1}$ είναι συνεπείς, και η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώνεται.

Πρόταση 6.1.5 *Για τις συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες τελεστών $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$ υποθέτουμε ότι:*
(i) $T_E(t)E \subseteq F$ για κάποιο $t > 0$, είτε
(ii)$Dom(A_E^k) \subseteq F$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
Τότε οι τελεστές $R(\lambda, A_E)$ και $R(\lambda, A_F)$ είναι συνεπείς για κάθε $\lambda \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $T_E(t)E \subseteq F$ για κάποιο $t > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να εργαστούμε για $\lambda = 0$. Αφού $0 \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ σαφέστατα υπάρχει και είναι φραγμένος και ο γραμμικός τελεστής $-A_E^{-1}$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x \in E \cap F$ ώστε $x = A_E y$ για κάποιο $y \in Dom(A_E)$ (η ύπαρξη σχετικού y εξασφαλίζεται από το επί του τελεστή A_E). Τότε ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^t T_E(s)xds &= T_E(t)y - y \\ &= T_E(t)A_E^{-1}x - A_E^{-1}x,\ t \geq 0\end{aligned}$$

Άρα $A_E^{-1}x = T_E(t)A_E^{-1}x - \int_0^t T_E(s)xds$ και, λόγω συνέπειας των ημιομάδων $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$, έχουμε

$$A_E^{-1}x = T_E(t)A_E^{-1}x - \int_0^t T_F(s)xds,\ \forall t \geq 0$$

Για $x \in E \cap F$, ασφαλώς $A_E^{-1}x \in E$ και επιπλέον $\int_0^t T_F(s)xds \in Dom(A_F)$ για κάθε $t \geq 0$ (βλ. Λήμμα 2.2.11). Μ' άλλα λόγια, $\int_0^t T_F(s)xds \in F$ για κάθε $t \geq 0$. Από την υπόθεση $T_E(t)A_E^{-1}x \in F$ για κάποιο $t > 0$. Έτσι το στοιχείο $T_E(t)A_E^{-1}x - \int_0^t T_F(s)xds$ ανήκει στο χώρο Banach F για κάποιο $t > 0$ και για κάθε $x \in E \cap F$. Δηλαδή $A_E^{-1}x \in F$ και τελικά $A_E^{-1}x \in E \cap F$ για κάθε $x \in E \cap F$. Ισοδύναμα $-A_E^{-1}x \in E \cap F$ για κάθε $x \in E \cap F$ και, άρα, ισχύει $R(0, A_E)(E \cap F) \subseteq E \cap F$. Από την Πρόταση 6.1.4 τεκμαίρεται ότι οι τελεστές $R(0, A_E)$ και $R(0, A_F)$ είναι συνεπείς.
(ii) Έστω $Dom(A_E^k) \subseteq F$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και $\mu \in \mathbb{C}$ με πραγματικό μέρος μεγαλύτερο από τα αυξητικά φράγματα των ημιομάδων $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$. Βεβαίως ισχύουν οι σχέσεις (βλ. Θεώρημα 2.2.23)

$$R(\mu, A_E)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu s} T_E(s)xds,\ x \in E$$

και

$$R(\mu, A_F)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu s} T_F(s)xds,\ x \in F$$

Δηλαδή $\mu \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ και, λόγω συνέπειας των δύο ημιομάδων, $R(\mu, A_E)x = R(\mu, A_F)x$ για κάθε $x \in E \cap F$. Άρα οι τελεστές $R(\mu, A_E)$ και $R(\mu, A_F)$ είναι συνεπείς. Ας θεωρήσουμε τυχαίο $\lambda \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 6.1.1 βρίσκουμε ότι

$$R(\lambda, A_E) = \sum_{j=1}^{k} (\mu - \lambda)^{j-1} R(\mu, A_E)^j + (\mu - \lambda)^k R(\mu, A_E)^k R(\lambda, A_E)$$

Έστω $x \in E \cap F$. Τότε $x \in E$ και $x \in F$. Από την συνέπεια των $R(\mu, A_E)$ και $R(\mu, A_F)$ προκύπτει η αντίστοιχη των τελεστών $R(\mu, A_E)^j$ και $R(\mu, A_F)^j$ για $j = 1, 2, \ldots, k$. Έτσι ισχύει $R(\mu, A_E)^j x = R(\mu, A_F)^j x$ για $j = 1, 2, \ldots, k$. Επιπλέον $R(\lambda, A_E)x \in E$ και, από την υπόθεση, συνάγεται πως $R(\mu, A_E)^k R(\lambda, A_E)x \in Dom(A_E^k) \subseteq F$. Είναι σαφές ότι $R(\lambda, A_E)x \in F$. Τελικά $R(\lambda, A_E)x \in E \cap F$. Εφ'οσον $R(\lambda, A_E)(E \cap F) \subseteq E \cap F$, εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.1.4, λαμβάνουμε το επιθυμητό συμπέρασμα.

Πρόταση 6.1.6 *Υποθέτουμε ότι οι τελεστές A_E και A_F έχουν συμπαγείς επιλύοντες. Τότε ισχύει $\sigma(A_E) = \sigma(A_F)$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ το σύνολο των $\lambda \in \rho(A_E) \cap \rho(A_F)$ για τα οποία οι τελεστές $R(\lambda, A_E)$ και $R(\lambda, A_F)$ είναι συνεπείς. Το $\mathcal{U}$ είναι μη κενό, καθώς κάποιος μιγαδικός αριθμός μ με Re μ μεγαλύτερο από τα αυξητικά φράγματα των ημιομάδων $(T_E(t))_{t\geq 0}$ και $(T_F(t))_{t\geq 0}$ ανήκει σε αυτό. Επειδή από την υπόθεση της πρότασης, το σύνολο $\rho(A_E)\cap\rho(A_F)$ είναι συνεκτικό και το $\mathcal{U}$ αποτελεί μη κενό ανοικτό και κλειστό υποσύνολο αυτού (βλ. Πρόταση 6.1.2), καταλαβαίνουμε πως οι τελεστές $R(\lambda, A_E)$ και $R(\lambda, A_F)$ είναι συνεπείς για κάθε $\lambda \in \rho(A_E)\cap\rho(A_F)$. Έστω $\lambda_0 \in \rho(A_F)$. Αφού το σύνολο $\rho(A_F)$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon_1 > 0$ ώστε $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon_1\} \subseteq \rho(A_F)$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_0 \in \sigma(A_E)$. Λόγω συμπάγειας του $R(\lambda_0, A_E)$, έπεται ότι το λ_0 είναι μεμονωμένο σημείο (και συγκεκριμένα ιδιοτιμή) του φάσματος (βλ. Θεώρημα 1.1.32), οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε $\epsilon_2 > 0$ ώστε να ισχύει $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon_2\} \subseteq \rho(A_E)$. Για $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ παίρνουμε

$$V = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon\} \subseteq \rho(A_F) \cap \rho(A_E)$$

Εφ'οσον το σύνολο V περιέχεται εξ ολοκλήρου στο $\rho(A_F)$, προκύπτει ότι

$$\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon} R(\lambda, A_F)d\lambda = 0$$

Λόγω συνέπειας ισχύει και

$$\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon} R(\lambda, A_E)d\lambda = 0$$

Αλλά, καθώς υποτέθηκε ότι $\lambda_0 \in \sigma(A_E)$, βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon} R(\lambda, A_E)d\lambda$$

ισούται με τη φασματική προβολή επί του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής λ_0 (δηλαδή επί του συνόλου $Ker((\lambda_0 I - A_E)))$ η οποία φυσικά δεν είναι τετριμμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο! Άρα αναγκαστικά $\lambda_0 \in \rho(A_E)$ και $\rho(A_F) \subseteq \rho(A_E)$. Δηλαδή $\sigma(A_E) \subseteq \sigma(A_F)$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\sigma(A_F) \subseteq \sigma(A_E)$. Τελικά έχουμε $\sigma(A_E) = \sigma(A_F)$.

6.2 Παραδείγματα διαφορικών τελεστών με L^p-φάσμα εξαρτώμενο από τον αριθμό p

Στις επόμενες σελίδες θα παρουσιάσουμε λεπτομερώς ορισμένα απλά παραδείγματα διαφορικών τελεστών που δρούν σε L^p χώρους και έχουν φάσμα εξαρτώμενο από τον αριθμό p. Στα συγκεκριμένα παραδείγματα, τα οποία οφείλονται στον W. Arendt, οι αποδείξεις των ισχυρισμών γίνονται με εύληπτο τρόπο και μέσω της θεωρίας ημιομάδων.

Παράδειγμα 6.2.1 *Στο χώρο Banach $L^p(0,+\infty)$, $1<p<+\infty$ θέτουμε*

$$T_p(t)f(x) = f(\mathrm{e}^{-t}x)$$

για $f \in L^p(0,+\infty)$ και $t \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε αναλυτικά τους ακόλουθους ισχυρισμούς:
*(**i**) Η οικογένεια $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών επί του $L^p(0,+\infty)$ για $1<p<+\infty$.*
*(**ii**) Αν A_p είναι ο απειροστικός γεννήτορας της $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$, τότε*

$$\sigma(A_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda = \frac{1}{p}\right\} = \left\{\frac{1}{p} + \mathrm{i}s : s \in \mathbb{R}\right\}$$

Δηλαδή το φάσμα του τελεστή A_p εξαρτάται από τον αριθμό $p \in (1,+\infty)$. Επιπλέον $\sigma(A_p) \cap \sigma(A_q) = \emptyset$ για $p,q \in (1,+\infty)$ με $p \neq q$.
*(**iii**) Οι τελεστές $R(\lambda, A_p)$ και $R(\lambda, A_q)$ δεν είναι συνεπείς για $p,q \in (1,+\infty)$ με $p<q$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\frac{1}{q} < \mathrm{Re}\,\lambda < \frac{1}{p}$.*
*(**iv**) Ο A_p ορίζεται επακριβώς από τις σχέσεις*

$$(A_p f)(x) = -xf'(x),\ Dom(A_p) = \{f \in L^p(0,+\infty) : f \in AC, x \mapsto xf'(x) \in L^p(0,+\infty)\}$$

Πρόκειται, με άλλα λόγια, για έναν διαφορικό τελεστή.

Καταρχήν , για $f \in L^p(0,+\infty)$ και $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} ||T_p(t)f||_p &= \left(\int_0^{+\infty} |T_p(t)f(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} |f(\mathrm{e}^{-t}x)|^p dx\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Θέτοντας $\mathrm{e}^{-t}x = y$ λαμβάνουμε $x = \mathrm{e}^t y$ και $dx = \mathrm{e}^t dy$. Επομένως

$$\begin{aligned} ||T_p(t)f||_p &= \left(\int_0^{+\infty} |f(y)|^p \mathrm{e}^t dy\right)^{1/p} \\ &= \mathrm{e}^{t/p}\left(\int_0^{+\infty} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} \\ &= \mathrm{e}^{t/p}||f||_p \end{aligned}$$

Δηλαδή $||T_p(t)||_p = \mathrm{e}^{t/p} < +\infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, κάτι που σημαίνει ότι οι γραμμικοί τελεστές $T_p(t)$ είναι φραγμένοι για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον για $f \in L^p(0,+\infty)$ και $t,s \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$(T_p(t+s)f)(x) = f(\mathrm{e}^{-(t+s)}x) = f(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-s}x)\ (x>0)$$

και

$$\begin{aligned} (T_p(t+s)f)(x) &= T_p(t)(T_p(s)f(x)) \\ &= T_p(t)(f(\mathrm{e}^{-s}x)) \\ &= f(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-s}x)\ (x>0) \end{aligned}$$

Άρα $T_p(t+s) = T_p(t)T_p(s)$ *για κάθε* $t, s \in \mathbb{R}$. *Προφανώς ισχύει και* $(T_p(0)f)(x) = f(x)$ *για κάθε* $f \in L^p(0, +\infty)$ *και, κατά συνέπεια,* $T_p(0) = I$.

Από την προηγηθείσα ανάλυση συνάγεται ότι η οικογένεια $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών επί του* $L^p(0, +\infty)$ *για* $1 < p < +\infty$. *Ασφαλώς και, καθώς το* p *διατρέχει το διάστημα* $(1, +\infty)$, *οι ομάδες αυτές είναι συνεπείς επί των αντιστοίχων χώρων Banach.*

Για την απόδειξη της ισχυρής συνέχειας της ομάδας $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *θεωρούμε στοιχείο* f *του χώρου* $C_c^\infty(0, +\infty)$ *όλων των άπειρα διαφορίσιμων συναρτήσεων επί του* $(0, +\infty)$ *με συνεχείς παραγώγους και συμπαγή φορέα. Υπάρχει, τότε,* $c > 0$ *ώστε να ισχύει* $f(x) = 0$ *για κάθε* $x > c$. *Θα εργαστούμε για* $t \in \mathbb{R}_+$ *με* $0 < t < \log 2$. *Παρατηρούμε ότι, για κάθε* $x > 0$ *έχουμε* $\lim_{t\to 0+} \mathrm{e}^{-t}x = x$ *και, άρα,* $\lim_{t\to 0+} f(\mathrm{e}^{-t}x) = f(x)$. *Ορίζουμε για κάθε* $x > 0$ *συνάρτηση* g *με*

$$g(x) = \begin{cases} ||f'||_\infty^p (2c)^p, \; x \leq 2c \\ 0, \; x > 2c \end{cases}$$

και επαληθεύουμε άμεσα ότι $g \in L^1(0, +\infty)$. *Από το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού εξασφαλίζεται η ύπαρξη* $\xi \in \mathbb{R}_+$ *μεταξύ των* $\mathrm{e}^{-t}x$ *και* x *για το οποίο ισχύουν τα εξής:*

$$\begin{aligned} |f(\mathrm{e}^{-t}x) - f(x)|^p &= |f'(\xi)(\mathrm{e}^{-t}x - x)|^p \\ &= |f'(\xi)|^p |\mathrm{e}^{-t} - 1|^p x^p \\ &\leq |f'(\xi)|^p x^p \end{aligned}$$

Αν $x \leq 2c$ *τότε*

$$|f(\mathrm{e}^{-t}x) - f(x)|^p \leq ||f'||_\infty^p (2c)^p = g(x)$$

Αν $x > 2c$ *έχουμε* $f(x) = 0$ *και επιπλέον*

$$\mathrm{e}^{-t}x > \mathrm{e}^{-\log 2}2c = \frac{1}{2}2c = c$$

οπότε $f(\mathrm{e}^{-t}x) = 0$. *Δηλαδή* $|f(\mathrm{e}^{-t}x) - f(x)|^p = 0 = g(x)$. *Σε κάθε περίπτωση, λαμβάνουμε*

$$|f(\mathrm{e}^{-t}x) - f(x)|^p \leq g(x) \; (x > 0)$$

Το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue υποδηλώνει πως για κάθε $f \in C_c^\infty(0, +\infty)$ *ισχύει*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} ||T_p(t)f - f||_p &= \lim_{t\to 0+} \left(\int |(T_p(t)f)(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \lim_{t\to 0+} \left(\int |f(\mathrm{e}^{-t}x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int \lim_{t\to 0+} |f(\mathrm{e}^{-t}x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Αλλά ο χώρος $C_c^\infty(0,+\infty)$ είναι πυκνός στον $L^p(0,+\infty)$ ως προς τη p-νόρμα και, έτσι, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0+}||T_p(t)f-f||_p = 0 \ \forall f\in L^p(0,+\infty),\ 1<p<+\infty$$

Ασφαλώς

$$||T_p(t)||_p = \mathrm{e}^{t/p} \leq \mathrm{e}^{1/p},\ \forall t\in[0,1]$$

*Από την Πρόταση 4.1.12 για $t_0=0$, $\delta=1$ και $M=\mathrm{e}^{1/p}$, τεκμαίρεται η ισχυρή συνέχεια της ομάδας $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επί του $L^p(0,+\infty)$,$1<p<+\infty$. Ο Ισχυρισμός (**i**) αποδείχθηκε πλήρως.*

Παρατηρούμε, περαιτέρω, ότι $||\mathrm{e}^{-t/p}T_p(t)||_p = 1$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Συνεπώς η οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $(\mathrm{e}^{-t/p}T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα ισομετριών επί του $L^p(0,+\infty)$ για $1<p<+\infty$. Το φάσμα του απειροστικού της γεννήτορα $A_p-\frac{1}{p}I$, όπου A_p είναι ο γεννήτορας της ομάδας $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$, περιέχεται στο σύνολο $\mathrm{i}\mathbb{R}$ σύμφωνα με το Πόρισμα 4.1.11. Άρα $\sigma(A_p)\subseteq\frac{1}{p}+\mathrm{i}\mathbb{R}$ και ισοδύναμα

$$\sigma(A_p)\subseteq\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\lambda=\frac{1}{p}\right\} \tag{6.2.6}$$

Έστω, τώρα, p και q από το διάστημα $(1,+\infty)$ με $p<q$ και $\lambda\in\mathbb{C}$ ώστε $\frac{1}{q}<$ $\mathrm{Re}\,\lambda<\frac{1}{p}$. Εφ'όσον $\mathrm{Re}\,\lambda>\frac{1}{q}$, για την υποκείμενη ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ με απειροστικό γεννήτορα A_q και αυξητικό φράγμα ίσο με $1/q$, το Θεώρημα 4.1.9 (Feller-Miyadera-Phillips) μας πληροφορεί ότι $\lambda\in\rho(A_q)$. Από την άλλη $\mathrm{Re}\,\lambda<\frac{1}{p}$ οπότε $\mathrm{Re}\,(-\lambda)=-\mathrm{Re}\,\lambda>-\frac{1}{p}$. Για την ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(T_p(-t))_{t\geq 0}$, με γεννήτορα $-A_p$ και αυξητικό φράγμα ίσο με $-\frac{1}{p}$, το ίδιο Θεώρημα δίνει ότι $-\lambda\in\rho(-A_p)$. Επομένως $\lambda\in\rho(A_p)$. Θεωρούμε τυχούσα συνάρτηση f του συνόλου $L^p(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ και λαμβάνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
R(\lambda,A_q)f(x) &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda s}(T_q(s)f)(x)ds\\
&= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s\mathrm{Re}\,\lambda}f(\mathrm{e}^{-s}x)ds\geq 0
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
R(\lambda,A_p)f(x) &= -R(-\lambda,-A_p)f(x)\\
&= -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda s}(T_p(-s)f)(x)ds\\
&= -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{s\mathrm{Re}\,\lambda}f(\mathrm{e}^{s}x)ds\leq 0
\end{aligned}$$

*Είναι φανερό πως οι τελεστές $R(\lambda,A_p)$ και $R(\lambda,A_q)$ δεν είναι συνεπείς. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εάν θεωρήσουμε $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\frac{1}{q}<\lambda<\frac{1}{p}$. Επιβεβαιώσαμε, λοιπόν, τον Ισχυρισμό (**iii**).*

Με βάση το τελευταίο αποτέλεσμα και την Πρόταση 6.1.2, μπορεί να αποδειχθεί ο εγκλεισμός

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda = \frac{1}{p}\right\} \subseteq \sigma(A_p)$$

Τελικά έχουμε

$$\sigma(A_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda = \frac{1}{p}\right\}$$

και επιβεβαιώνεται και ο ισχυρισμός **(ii)**.

*Για την απόδειξη του Ισχυρισμού (***iv***) θεωρούμε το γραμμικό τελεστή* C_p *με* $(C_pf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$, *όπου* $f \in L^p(0,+\infty)$ *για* $1 < p < +\infty$. *Για τα συγκεκριμένα* p *ο Ισχυρισμός (***ii***) υποδηλώνει ότι* $1 \in \rho(A_p)$. *Έτσι, για κάθε* f *του* $L^p(0,+\infty)$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}(R(1,A_p)f)(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}(T_p(s)f)(x)ds \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} f(\mathrm{e}^{-s}x)ds \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy \\ &= (C_pf)(x)\end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει από την εκτέλεση του μετασχηματισμού $\mathrm{e}^{-s}x = y$, *οπότε* $\mathrm{e}^{-s} = \frac{1}{x}y$ *και* $\mathrm{e}^{-s}ds = \frac{1}{x}dy$. *Επομένως* $R(1,A_p) = C_p$ *και, κατά συνέπεια, ο τελεστής* C_p *είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος. Παρατηρούμε ότι* $(I-A_p)C_p = I$ *και* $C_p - A_pC_p = I$, *οπότε* $A_pC_p = C_p - I$ *και ισοδύναμα* $A_p = (C_p - I)C_p^{-1} = I - C_p^{-1}$. *Υπολογίζουμε τον τελεστή* C_p^{-1} *για συναρτήσεις* f *του* $L^p(0,+\infty)$ *οι οποίες είναι απόλυτα συνεχείς και, άρα, διαφορίσιμες σχεδόν παντού. Θα πάρουμε*

$$(C_p^{-1}f)(x) = g(x)$$

και

$$f(x) = (C_pg)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(y)dy$$

Έτσι $xf(x) = \int_0^x g(y)dy$ *και τελικά* $g(x) = f(x) + xf'(x)$. *Δηλαδή* $(C_p^{-1}f)(x) = f(x) + xf'(x)$. *Λαμβάνουμε επομένως*

$$\begin{aligned}(A_pf)(x) &= [(I - C_p^{-1})f](x) \\ &= f(x) - (C_p^{-1}f)(x) \\ &= f(x) - f(x) - xf'(x) \\ &= -xf'(x)\end{aligned}$$

Σαφέστατα πρέπει η ποσότητα A_pf *να ανήκει στον* $L^p(0,+\infty)$ *για κάθε* $f \in L^p(0,+\infty)$, *που είναι απόλυτα συνεχής. Πρέπει, λοιπόν, η απεικόνιση* $x \mapsto xf'(x)$ *να είναι στοιχείο* *του χώρου $L^p(0,+\infty)$, $1<p<+\infty$. Συνοψίζοντας, ο τελεστής A_p ορίζεται από τις σχέσεις*

$$(A_pf)(x) = -xf'(x),\ Dom(A_p) = \{f \in L^p(0,+\infty) : f \in AC(0,+\infty), x \mapsto xf'(x) \in L^p(0,+\infty)\}$$

*Η απόδειξη του Ισχυρισμού (**iv**) περατώθηκε.*

Αξίζει να σημειωθεί, καταληκτικά, ότι ο τελεστής C_p έχει μελετηθεί διεξοδικά από τον D. W. Boyd στο άρθρο του [5]. Στο δικό μας πλαίσιο, αφού $C_p = R(1,A_p)$ και $||T_p(t)||_p = \mathrm{e}^{t/p}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||C_p||_p = ||R(1,A_p)|| &\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{s/p}ds \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{s(1-p)/p}ds \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \\ &= \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

Η εκτίμηση $C_p \leq \frac{p}{p-1}$ είναι γνωστή ως ανισότητα του Hardy. Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης για επιλύοντες τελεστές, (βλ. Θεώρημα 1.3.12) έχουμε

$$\sigma(R(1,A_p)) = \left\{\frac{1}{1-\lambda} : \lambda \in \sigma(A_p)\right\} \cup \{0\}$$

Εφ΄ όσον

$$\sigma(A_p) = \left\{\frac{1}{p} + \mathrm{i}s : s \in \mathbb{R}\right\},\ 1<p<+\infty$$

λαμβάνουμε

$$\sigma(C_p) = \left\{\frac{1}{1-\frac{1}{p}-\mathrm{i}s} : s \in \mathbb{R}\right\} \cup \{0\},\ 1<p<+\infty$$

Δηλαδή το L^p-φάσμα και του φραγμένου γραμμικού τελεστή C_p εξαρτάται από τον αριθμό $p \in (1,+\infty)$. Ασφαλώς ισχύει

$$\sigma(C_p) \cap \sigma(C_q) = \{0\}$$

αν $1<p,q<+\infty$ και $p \neq q$.

Παράδειγμα 6.2.2 *Θεωρούμε τον τελεστή A_p του προηγούμενου Παραδείγματος και θέτουμε $B_p = (A_p - \frac{1}{2}I)^2$. Για συναρτήσεις f που ανήκουν στο χώρο Banach $L^p(0,+\infty)$,*

$1 < p < +\infty$ *και είναι απόλυτα συνεχείς έχουμε:*

$$\begin{aligned}
(B_p f)(x) &= [(A_p - \frac{1}{2}I)^2 f](x) \\
&= (A_p - \frac{1}{2}I)[(A_p - \frac{1}{2}I)f](x) \\
&= (A_p - \frac{1}{2}I)[-xf'(x) - \frac{1}{2}f(x)] \\
&= A_p(-xf'(x)) - \frac{1}{2}(A_p f)(x) + \frac{1}{2}xf'(x) + \frac{1}{4}f(x) \\
&= -x[-xf'(x)]' - \frac{1}{2}[-xf'(x)] + \frac{1}{2}xf'(x) + \frac{1}{4}f(x) \\
&= x^2 f''(x) + 2xf'(x) + \frac{1}{4}f(x)
\end{aligned}$$

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned}
Dom(B_p) &= \{f \in Dom(A_p) : A_p f \in Dom(A_p)\} \\
&= \{f \in L^p(0,+\infty) : f \in AC, xf' \in L^p(0,+\infty), A_p f \in Dom(A_p)\}
\end{aligned}$$

Αλλά $A_p f \in Dom(A_p)$ *αν* $x(xf'(x))' \in L^p(0,+\infty)$, *δηλαδή αν*

$$x^2 f''(x) + xf'(x) \in L^p(0,+\infty),\ 1 < p < +\infty.$$

Συνοψίζοντας, ο τελεστής B_p *ορίζεται από τις σχέσεις*

$$(B_p f)(x) = x^2 f''(x) + 2xf'(x) + \frac{1}{4}f(x)$$

$Dom(B_p) = \{f \in L^p(0,+\infty) : f \in AC, xf'(x) \in L^p(0,+\infty), x^2 f'' \in L^p(0,+\infty)\}$ *Πρόκειται, συνεπώς, για έναν εκφυλισμένο ελλειπτικό διαφορικό τελεστή δευτέρας τάξης. Σύμφωνα με αποτέλεσμα της Θεωρίας Αναλυτικών Ημιομάδων, η οποία βρίσκεται εκτός πλαισίων της παρούσης εργασίας, ο* B_p *παράγει μια αναλυτική ημιομάδα γωνίας* $\pi/2$ *και είναι κλειστός γραμμικός τελεστής. Εφόσον*

$$\sigma(A_p) = \left\{\frac{1}{p} + \mathrm{i}s : s \in \mathbb{R}\right\}$$

παίρνουμε

$$\sigma\left(A_p - \frac{1}{2}I\right) = \left\{\frac{1}{p} + \mathrm{i}s - \frac{1}{2} : s \in \mathbb{R}\right\}$$

και

$$\sigma(B_p) = \left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}s\right)^2 : s \in \mathbb{R}\right\}$$

για $1 < p < +\infty$.

Άρα το L^p*-φάσμα του* B_p *εξαρτάται από τον αριθμό* p. *Ιδιαιτέρως ισχύει* $\sigma(B_2) = \{(\mathrm{i}s)^2 : s \in \mathbb{R}\} = \{-s^2 : s \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 0]$. *Έτσι* $\sigma(B_p) \cap \sigma(B_q) = \emptyset$ *όταν* $1 < p, q \leq 2$ *και* $p \neq q$.

Παράδειγμα 6.2.3 *Ορίζουμε το διαφορικό τελεστή $(\tilde{A}_p, Dom(\tilde{A}_p))$ στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)$, $1 < p < +\infty$ από τις σχέσεις*

$$(\tilde{A}_p f)(x) = -f'(x),\ Dom(\tilde{A}_p) = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx) : f \in AC, f' \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)\}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $U : L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx) \to L^p(0, +\infty)$ με $(Uf)(x) = (f \circ \log)(x)$ και παρατηρούμε ότι αποτελεί έναν ισομετρικό ισομορφισμό.

Έστω $(T_p(t))_{t\in\mathbb{R}}$ η ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα τελεστών του Παραδείγματος 6.2.1 και $(T_p(t))_{t\geq 0}$ υποκείμενη ισχυρώς συνεχή ημιομάδα με τον ίδιο απειροστικό γεννήτορα $(A_p, Dom(A_p))$. Θέτοντας

$$\tilde{T}_p(t) = U^{-1} T_p(t) U,\ \forall t \geq 0$$

αποκτούμε μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα τελεστών επί του $L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)$ που οριοθετείται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}_p(t) f)(x) &= (U^{-1} T_p(t) U f)(x) \\
&= (T_p(t) U f)(\mathrm{e}^x) \\
&= (Uf)(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^x) \\
&= f[\log(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^x)] \\
&= f[\log(\mathrm{e}^{-t}) + \log(\mathrm{e}^x)] \\
&= f(x-t)
\end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)$. Δηλαδή η $(\tilde{T}_p(t))_{t\geq 0}$ είναι η ημιομάδα δεξιών μετατοπίσεων του χώρου $L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)$. Με διαδικασία ανάλογη αυτής που περιγράφεται στην Πρόταση 3.3.2 και στο Πόρισμα 4.1.15 βρίσκουμε ότι ο απειροστικός γεννήτορας της $(\tilde{T}_p(t))_{t\geq 0}$ είναι ο τελεστής $(\tilde{A}_p, Dom(\tilde{A}_p))$. Ασφαλώς

$$\sigma(\tilde{A}_p) = \sigma(A_p) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda = \frac{1}{p}\right\} = \left\{\frac{1}{p} + \mathrm{i}s : s \in \mathbb{R}\right\}$$

και το φάσμα του $\tilde{A}_p$ εξαρτάται από τον αριθμό $p \in (1, +\infty)$.

Παρατηρούμε, τέλος, ότι ορίζεται ο τελεστής $\tilde{A}_p^2$ από τις σχέσεις

$$(\tilde{A}_p^2 f)(x) = f''(x),\ Dom(\tilde{A}_p^2) = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx) : f \in AC, f'' \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)\}$$

Ξεκάθαρα, $\sigma(\tilde{A}_p^2) = \left\{(\frac{1}{p} + \mathrm{i}s)^2 : s \in \mathbb{R}\right\}$. Άρα και το φάσμα του $\tilde{A}_p^2$ εξαρτάται από το $p \in (1, +\infty)$.

6.3 Άνω εκτιμήσεις Gauss δεύτερης τάξης και L^p-φασματική ανεξαρτησία αυτοσυζυγών τελεστών

Σε όλη την έκταση αυτής της παραγράφου θα συμβολίζουμε με Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και θα εργαζόμαστε με μια οικογένεια $T_p = (T_p(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχών μονοπαραμετρικών ημιομάδων τελεστών που δρούν συνεπώς σε αντίστοιχους συμβατούς L^p-χώρους και έχουν απειροστικούς γεννήτορες A_p, όπου $p \in [1, +\infty)$.

Πρόκειται να ακολουθήσουμε πιστά τη συλλογιστική πορεία που χάραξε ο W. Arendt στο άρθρο του [2] και να μελετήσουμε την επίδραση άνω εκτιμήσεων Gauss στην ανεξαρτησία του L^p-φάσματος διαφορικών τελεστών από τον αριθμό p. Θα αποδείξουμε ότι, αν η ημιομάδα T_2 ικανοποιεί μία άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης, κατάλληλη συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\rho(A_p)$ είναι ανεξάρτητη του p. Αν, επιπλέον, ο τελεστής A_2 είναι αυτοσυζυγής, τότε το φάσμα του A_p είναι ανεξάρτητο από το p.

Έστω, καταρχήν, $T = (T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών στο χώρο Hilbert $L^2(\Omega)$ με απειροστικό γεννήτορα A. Ταυτίζουμε τον $L^2(\Omega)$ με έναν διανυσματικό υπόχωρο του $L^2(\mathbb{R}^n)$ θεωρώντας για κάθε $f \in L^2(\Omega)$, τη συνάρτηση $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, όπου

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in \Omega \\ 0, \ x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με G_p την ημιομάδα Gauss στο χώρο Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. Δηλαδή η G_p ορίζεται από τον τύπο

$$G_p(t)f = \begin{cases} f, \ t = 0 \\ \ K_t \star f, \ t > 0 \end{cases}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου $K_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

Ορίζουμε άμεσα τη βασική έννοια της Παραγράφου

Ορισμός 6.3.1 *Με τους προηγηθέντες συμβολισμούς, θα λέμε ότι η ημιομάδα T ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης (upper Gaussian estimate of second order) αν υπάρχουν σταθερές $c \geq 1$ και $b > 0$ ώστε να ισχύει*

$$|T(t)f| \leq cG_2(bt)|f|, \ (0 \leq t \leq 1) \tag{6.3.7}$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega)$.

Ιδιαίτερα χρήσιμα είναι τα ακόλουθα δύο αποτελέσματα

Πρόταση 6.3.2 *Έστω ότι η ισχυρώς συνεχής ημιομάδα T στον $L^2(\Omega)$ ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης. Υπάρχει, τότε, μια σταθερά $\omega \geq 0$ ώστε να ισχύει*

$$|T(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t}G_2(bt)|f| \ (t \geq 0) \tag{6.3.8}$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 6.3.1 και το νόμο ημιομάδας (semigroup law) προκύπτει

$$\begin{aligned} |T(2)f| &= |T(1)T(1)f| \\ &\leq |T(1)|cG_2(b)|f| \\ &\leq cG_2(b)cG_2(b)|f| \\ &= c^2G_2(2b)|f| \end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega)$. Προχωρώντας επαγωγικά λαμβάνουμε

$$|T(n)f| \leq c^n G_2(nb)|f|, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f \in L^2(\Omega)$$

Έστω $t > 1$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $s = t - n \in (0, 1)$ και θέτουμε $\omega = \log c$. Αυτό σημαίνει ότι $\omega \geq 0$, ενώ $c^n = \mathrm{e}^{n\omega}$ και $n \leq t$ οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} |T(t)f| &= |T(n)T(s)f| \\ &\leq c^n G_2(nb)cG_2(bs)|f| \\ &= c\mathrm{e}^{n\omega}G_2(bt)|f| \\ &\leq c\mathrm{e}^{\omega t}G_2(bt)|f| \end{aligned}$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega)$. Για $0 \leq t \leq 1$ αποκτούμε την επιθυμητή εκτίμηση, αν στο δεξιό μέλος της ανισότητας (6.3.7) παρεμβάλλουμε τον όρο $\mathrm{e}^{\omega t}$ με $\omega = 0$. Συνοψίζοντας, για κάθε $f \in \text{Ł}^2(\Omega)$ και $t \geq 0$, έχουμε

$$|T(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t}G_2(bt)|f| \ (c \geq 1, \omega \geq 0)$$

Πρόταση 6.3.3 *Έστω T ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών επί του $L^2(\Omega)$ η οποία ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης. Υπάρχουν, τότε, συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες τελεστών T_p επί των χώρων Banach $Ł^p(\Omega)$, ώστε να ισχύει $T = T_2$ και επιπλέον*

$$|T_p(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t}G_p(bt)|f|, \ (t \geq 0) \tag{6.3.9}$$

για κάθε $f \in L^p(\Omega)$ και $t \geq 0$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η ημιομάδα $(G_2(t))_{t\geq 0}$ επεκτείνεται συνεπώς στους συμβατούς χώρους Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. Ασφαλώς το ίδιο συμβαίνει με την ημιομάδα $(G_2(bt))_{t\geq 0}$. Περιοριζόμενοι στον υπόχωρο $L^p(\Omega)$, αντιλαμβανόμαστε πως υπάρχουν συνεπείς τελεστές $T_p(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ ώστε $T_2(t) = T(t)$ για κάθε $t \geq 0$ και $|T_p(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t}G_p(bt)|f|$ για κάθε $f \in L^p(\Omega)$ και $t \geq 0$.

Επειδή η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια (ισχυρώς συνεχής) ημιομάδα στον $L^2(\Omega)$ και $T_2(t) = T(t)$ για κάθε $t \geq 0$, συμπεραίνουμε πως

$$T_2(t+s)f = T_2(t)T_2(s)f, \ T_2(0)f = f$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ και $t, s \geq 0$. Αν $f \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ έπεται, λόγω συνεπείας, ότι

$$T_p(t+s)f = T_p(t)T_p(s)f, \ T_p(0)f = f$$

για κάθε $t, s \geq 0$. Εφ΄ όσον το σύνολο $L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ είναι πυκνό στο χώρο $L^p(\Omega)$ καταλήγουμε στις αντίστοιχες σχέσεις για κάθε $f \in L^p(\Omega)$ και $t, s \geq 0$. Δηλαδή η οικογένεια $T_p = (T_p(t))_{t\geq 0}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του χώρου Banach $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < +\infty$.

Για την απόδειξη της ισχυρής συνέχειας της ημιομάδας T_p αρκεί να επιβεβαιώσουμε, με οδηγό την Πρόταση 2.2.6, ότι ισχύει $\lim_{t\to 0+} T_p(t)f = f$ ως προς τη νόρμα του $L^p(\Omega)$ για κάθε $f \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, μια συνάρτηση f του $L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ και ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του διαστήματος $[0, +\infty)$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Έστω $f_n = T_2(t_n)f$ και $g_n = ce^{\omega t_n} G_2(bt_n)|f|$ $(n \in \mathbb{N})$. Λόγω συνεπείας έχουμε $f_n = T_p(t_n)f$ $(n \in \mathbb{N})$. Παρατηρούμε ότι, για να αποδείξουμε πως $f_n \to f$ στον $L^p(\Omega)$, είναι αρκετό να επαληθεύσουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαθέτει με τη σειρά της υπακολουθία που συγκλίνει στην f ως προς τη νόρμα του $L^p(\Omega)$.

Πράγματι, αν ισχύει το τελευταίο και υποτεθεί πως $f_n \nrightarrow f$ στον $L^p(\Omega)$, τότε θα υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να ισχύει $||f_{n_k} - f||_{L^p(\Omega)} > \epsilon$. Επομένως, δεν θα είναι δυνατή η εύρεση υπακολουθίας $(f_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ της $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ με $f_{n_{k_l}} \to f$ στον $L^p(\Omega)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Εφ΄ όσον η $(T_2(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής ημιομάδα, έχουμε $f_n \to f$ στον $L^2(\Omega)$. Από το Θεώρημα 1.2.7 έπεται η ύπαρξη υπακολουθίας $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ σχεδόν παντού επί του Ω. Θεωρώντας νέα υπακολουθία $(f_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ της $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$, είναι άμεσο ότι $f_{n_{k_l}} \to f$ σχεδόν παντού επί του Ω. Μετά απο σχετικά απλούς υπολογισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε πως ισχύει

$$||g_{n_{k_l}} - g_{n_{k_{l-1}}}||_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-l} \ (l \in \mathbb{N})$$

Προς απλούστευση των συμβολισμών, αντικαθιστούμε τους όρους της μορφής $f_{n_{k_l}}$ με f_{n_k} και εκείνους της μορφής $g_{n_{k_l}}$ με g_{n_k}. Με αυτή τη σύμβαση, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$||g_{n_k} - g_{n_{k-1}}||_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-k} \ (k \in \mathbb{N})$$

Θέτουμε περαιτέρω $h = \sum_{k\geq 2} |g_{n_k} - g_{n_{k-1}}| + |g_{n_1}|$. Βεβαίως $|f_n| \leq g_n$ $(n \in \mathbb{N})$ επί του $L^2(\Omega)$. Μέσω της σχέσης (6.3.9), η οποία έχει ήδη αποδειχθεί, βρίσκουμε ότι $|f_n| \leq g_n$ $(n \in \mathbb{N})$ επί του $L^p(\Omega)$ και, συνακόλουθα, $|f_{n_k}| \leq g_{n_k}$ $(n \in \mathbb{N})$ επί του $L^p(\Omega)$. Επιπλέον

$$g_{n_k} \leq |g_{n_k}| \leq \sum_{k\geq 2} |g_{n_k} - g_{n_{k-1}}| + |g_{n_1}| = h$$

Τελικά προκύπτει $|f_{n_k}| \leq g_{n_k} \leq h$ $(k \in \mathbb{N})$. Αλλά $h \in L^p(\Omega)$, αφού

$$\begin{aligned} ||h||_{L^p(\Omega)} &= \left|\left| \sum_{k\geq 2} |g_{n_k} - g_{n_{k-1}}| + |g_{n_1}| \right|\right|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k\geq 2} ||g_{n_k} - g_{n_{k-1}}||_{L^p(\Omega)} + ||g_{n_1}||_{L^p(\Omega)} < +\infty \end{aligned}$$

Επειδή $h, f \in L^p(\Omega)$ συνάγεται ότι $h^p, |f|^p \in L^1(\Omega)$ και παίρνουμε

$$|f_{n_k} - f|^p \leq c_p(|f_{n_k}|^p + |f|^p) \leq c_p(h^p + |f|^p) \ (k \in \mathbb{N})$$

με $c_p(h^p+|f|^p)\in L^1(\Omega)$. Ακόμη $|f_{n_k}-f|^p\to 0$ σχεδόν παντού επί του Ω. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue λαμβάνουμε ότι

$$|f_{n_k}-f|^p\to 0$$

στον $L^1(\Omega)$. Ισοδύναμα $(\int_\Omega |f_{n_k}(x)-f(x)|^p dx)^{1/p}\to 0$ και, άρα, $f_{n_k}-f$ στον $L^p(\Omega)$. Με βάση προηγηθέντα σχόλια, τεκμαίρεται η ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(T_p(t))_{t\geq 0}$ επί του χώρου Banach $L^p(\Omega), 1\leq p<+\infty$.

Στο σημείο αυτό, πραγματοποιούμε μια αναγκαία παρέκβαση. Για $1\leq p,q<+\infty$, ένας τελεστής $B\in\mathcal{L}(L^p(\Omega),L^q(\Omega))$ καλείται ολοκληρωτικός, εάν υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών $K:\Omega\times\Omega$ αποκαλούμενη πυρήνας (Kernel) ώστε $K(x,\cdot)f(\cdot)\in L^1(\Omega)$ x-σχεδόν παντού και $(Bf)(x)=\int_\Omega K(x,y)f(y)dy$ x-σχεδόν παντού, για κάθε $f\in L^p(\Omega)$. Λέμε τότε, ότι ο B παριστάνεται από τον πυρήνα K και γράφουμε $B\sim K$. Προσθέτουμε πως, αν ο $|K|$ ορίζει έναν ολοκληρωτικό τελεστή στην άλγεβρα $\mathcal{L}(L^p(\Omega),L^q(\Omega))$, χαρακτηρίζουμε τον B ως κανονικό (regular integral operator). Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πρόταση 6.3.4 *Έστω $1\leq p,q<+\infty$ και $B\in\mathcal{L}(L^p(\Omega),L^q(\Omega))$ ένας ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα K. Αν $B_0\in\mathcal{L}(L^p(\Omega),L^q(\Omega))$ και ισχύει*

$$|B_0f|\leq B|f|,\ \forall f\in L^p(\Omega)$$

τότε ο B_0 είναι ένας κανονικός ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα K_0 και $|K_0(x,y)|\leq K(x,y)$ x,y-σχεδόν παντού.

Για την απόδειξη της Πρότασης παραπέμπουμε στο βιβλίο [23]. Κλείνουμε την παρένθεση αναφέροντας ότι, αν ο B είναι ολοκληρωτικός τελεστής και $B\sim K$, τότε $B\geq 0$ αν και μόνον αν $K(x,y)\geq 0$ x,y-σχεδόν παντού.

Συμβολίζουμε με A_p τον απειροστικό γεννήτορα της ημιομάδας $(T_p(t))_{t\geq 0}, 1\leq p<+\infty$. Θεωρούμε στοιχεία ε και x του $\mathbb{R}^n$ και σημειώνουμε με εx το εσωτερικό τους γινόμενο, δηλαδή $\varepsilon x=\sum_{j=1}^n\varepsilon_j x_j$. Έστω $L^p(\Omega,\mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx)$ ο χώρος όλων των μιγαδικών συναρτήσεων f επί του Ω για τις οποίες ισχύει

$$\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx<+\infty\ (1\leq p<+\infty)$$

Θέτοντας $(U_{\varepsilon,p}f)(x)=\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)$ ορίζουμε έναν ισομετρικό ισομορφισμό του $L^p(\Omega,\mathrm{e}^{-p\varepsilon x})$ επί του $L^p(\Omega)$. Πράγματι, άμεσα επαληθεύουμε ότι η απεικόνιση $U_{\varepsilon,p}$ είναι μια ισομετρία και, άρα, φραγμένος γραμμικός τελεστής και '1-1'. Παρατηρούμε ότι, για τυχούσα $f\in L^p(\Omega)$, η συνάρτηση $g:\Omega\to\mathbb{C}$ με $g(x)=\mathrm{e}^{\varepsilon x}f(x)$ ανήκει στο χώρο $L^p(\Omega,\mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx)$ καθώς

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g(x)|^p\mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx &= \int_\Omega \mathrm{e}^{p\varepsilon x}|f(x)|^p\mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx\\ &= \int_\Omega |f(x)|^p dx<+\infty\end{aligned}$$

Προφανώς $(U_{\varepsilon,p})g(x) = f(x)$ και η απεικόνιση $U_{\varepsilon,p}$ είναι 'επί'. Βεβαίως και η $U_{\varepsilon,p}^{-1}$ είναι μια ισομετρία και, επομένως, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τούτο συμπληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού μας.

Από την σχέση $\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t) = U_{\varepsilon,p}^{-1}T_p(t)U_{\varepsilon,p}$ για κάθε $t \geq 0$ και την Πρόταση 6.3.3, λαμβάνουμε μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα τελεστών $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ στο χώρο $L^p(\Omega, \mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx)$. Η σχέση (6.3.9) και η Πρόταση 6.3.4 υποδηλώνουν ότι οι $T_p(t)$ είναι κανονικοί ολοκληρωτικοί τελεστές με πυρήνες $K(t,\cdot,\cdot)$ ανεξάρτητους από το p. Επομένως $\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t) \sim K_\varepsilon(t,\cdot,\cdot)$ όπου $K_\varepsilon(t,x,y) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}K(t,x,y)$. Στο εξής $L^p = L^p(\Omega)$ και $L^p_\varepsilon = L^p(\Omega, \mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx)$. Επίσης ταυτίζουμε τον L^p_ε με έναν υπόχωρο του $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ θεωρώντας για κάθε $f \in L^p_\varepsilon$ τη συνάρτηση $\tilde{f}$ του $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ με

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in \Omega \\ 0\ , x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Τέλος, με $\tilde{A}_{\varepsilon,p}$ θα σημειώνουμε τον απειροστικό γεννήτορα της ημιομάδος $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{\varepsilon\geq 0}$.

Διατυπώνουμε ένα Λήμμα χρήσιμο στα επόμενα

Λήμμα 6.3.5 *Έστω $b > 0$ και $S_p(t) = G_p(bt)$ για κάθε $t \geq 0$ επί του χώρου Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$. Αν $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\tilde{U}_{\varepsilon,p} = L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

με $(\tilde{U}_{\varepsilon,p}f)(x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x),\ \forall f \in L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ και θέτουμε

$$\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t) = \tilde{U}_{\varepsilon,p}^{-1}S_p(t)\tilde{U}_{\varepsilon,p},\ \forall t \geq 0$$

Ισχύουν τα εξής:
(i) Η οικογένεια $(\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών στο χώρο Banach $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$.
(ii)

$$\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t) = \exp(bt\varepsilon^2)G_p(bt)V(2bt\varepsilon)\ (t \geq 0) \tag{6.3.10}$$

επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου $V(\alpha) : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ με $(V(\alpha)f)(x) = f(x-\alpha)$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $x, \alpha \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (i) Ακριβώς όπως προηγουμένως επιβεβαιώνουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{U}_{\varepsilon,p}$ αποτελεί έναν ισομετρικό ισομορφισμό του $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$. Έχοντας υπόψιν την ταύτιση του L^p_ε (αντίστοιχα του L^p) με έναν υπόχωρο του $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$(αντίστοιχα του $L^p(\mathbb{R}^n)$), συμπεραίνουμε ότι οι απεικονίσεις $U_{\varepsilon,p}$ που ορίστηκαν πριν από την διάτυπωση του Λήμματος δεν είναι τίποτε άλλο παρά περιορισμοί των $\tilde{U}_{\varepsilon,p}$ σε αυτούς ακριβώς τους υπόχωρους.

Η οικογένεια $(S_p(t))_{t\geq 0}$ με $S_p(t) = G_p(bt)$ για κάθε $t \geq 0$ και για $b > 0$ είναι, ασφαλώς, μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα τελεστών στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ αφού η $(G_p(t))_{t\geq 0}$ είναι

η ημιομάδα Gauss του $L^p(\mathbb{R}^n)$. Άρα και η οικογένεια $(\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$, από τον τρόπο ορισμού της, συνιστά μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα επί του $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Σαφέστατα οι $\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)$ είναι ολοκληρωτικοί τελεστές με πυρήνες της μορφής $\mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}K(bt,x,y)$, όπου $K(t,x,y)$ είναι ο πυρήνας των τελεστών που απαρτίζουν την ημιομάδα Gauss. Έτσι, για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $x\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$(\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)f)(x)=(4\pi bt)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}\mathrm{e}^{-(x-y)^2/4bt}f(y)dy$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}-(x-y)^2\frac{1}{4bt}+\varepsilon(x-y) &= -\frac{1}{4bt}((x-y)^2-4bt\varepsilon(x-y))\\ &= -\frac{1}{4bt}([(x-y)-2bt\varepsilon]^2-4b^2t^2\varepsilon^2)\\ &= -\frac{1}{4bt}[(x-2bt\varepsilon)-y]^2+bt\varepsilon^2\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει

$$\begin{aligned}(\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)f)(x) &= (4\pi bt)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\frac{1}{4bt}[(x-2bt\varepsilon)-y]^2)\exp(2bt\varepsilon^2)f(y)dy\\ &= (\exp(2bt\varepsilon^2)G_p(bt)V(2bt\varepsilon)f)(x)\end{aligned}$$

για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $x\in\mathbb{R}^n$, απ΄ όπου λαμβάνεται η επιθυμητή σχέση.

Καθοριστικής σημασίας για τη συνέχεια είναι η, τεχνικής φύσεως, Πρόταση που έπεται

Πρόταση 6.3.6 *Έστω $\varepsilon\in\mathbb{R}^n$ και $1\leq p<+\infty$. Με τους προηγηθέντες συμβολισμούς ισχύουν τα κάτωθι*
(i)
(α) $T_{\varepsilon,p}(t)(L^p_\varepsilon\cap L^p)\subseteq L^p_\varepsilon\cap L^p$ $(t\geq 0)$
(β) Υπάρχει μία ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ επί του L^p έτσι ώστε

$$T_{\varepsilon,p}(t)f=\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f,\ \forall f\in L^p_\varepsilon\cap L^p,\forall t\geq 0$$

Δηλαδή οι ημιομάδες $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ και $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ είναι συνεπείς.
(ii) Υπάρχουν σταθερές $M_1\geq 0$ και $\omega_1\geq 0$ έτσι ώστε

$$||T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}\leq M_1\mathrm{e}^{\omega_1 t},\ \forall t\geq 0,\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^n,|\varepsilon|\leq 1$$

(iii) Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda>\omega_1$ έχουμε

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0}||R(\lambda,A_{\varepsilon,p})-R(\lambda,A_p)||_{L^p}=0$$

όπου με $A_{\varepsilon,p}$ σημειώνουμε τον απειροστικό γεννήτορα της ημιομάδας $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$.

Απόδειξη. (i) Εφ'οσον ισχύει $|T_p(t)f| \leq ce^{\omega t}G_p(bt)|f|$ για κάθε $f \in L^p$ και $t \geq 0$ και επιπλέον $S_p(t) = G_p(bt)$ για κάθε $t \geq 0$, παίρνουμε

$$|T_p(t)f| \leq ce^{\omega t}S_p(t)|f|, \ \forall f \in L^p, \forall t \geq 0$$

Από την άλλη έχουμε $\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t) = \tilde{U}_{\varepsilon,p}^{-1}S_p(t)\tilde{U}_{\varepsilon,p}$ επί του $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ και, θεωρώντας τις απεικονίσεις $U_{\varepsilon,p} = \tilde{U}_{\varepsilon,p}\Big|_{L^p_\varepsilon}$ λαμβάνουμε

$$\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t) = U_{\varepsilon,p}^{-1}S_p(t)U_{\varepsilon,p}$$

επί του L^p_ε. Επίσης $\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t) = U_{\varepsilon,p}^{-1}T_p(t)U_{\varepsilon,p}$ επί του L^p_ε. Θεωρούμε τυχούσα συνάρτηση $f \in L^p_\varepsilon \cap L^p$ και βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}|\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f| &= |U_{\varepsilon,p}^{-1}T_p(t)U_{\varepsilon,p}f| \\ &\leq ce^{\omega t}U_{\varepsilon,p}^{-1}S_p(t)U_{\varepsilon,p}|f| \\ &= ce^{\omega t}\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)|f|\end{aligned}$$

Αφού $f \in L^p_\varepsilon \cap L^p$ έπεται ότι $f \in L^p_\varepsilon$ και $f \in L^p$. Από τον τρόπο ορισμού της ημιομάδας $(\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ και από τη σχέση (6.3.10), μέσω και της γνωστής ταύτισης των L^p_ε και L^p με υποχώρους των $L^p_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ και $L^p(\mathbb{R}^n)$ αντιστοίχως, προκύπτει ότι $\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)f \in L^p_\varepsilon \cap L^p$. Πράγματι, λοιπόν, έχουμε ότι $\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f \in L^p_\varepsilon \cap L^p$ και, καθώς η συνάρτηση επιλέχθηκε τυχούσα, επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός μας.

Έστω, τώρα, $f \in L^p$ και η επέκταση αυτής $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Επειδή το σύνολο $L^p_\varepsilon \cap L^p$ είναι πυκνό στον L^p και στον L^p_ε, μια που τόσο ο L^p όσο και ο L^p_ε περιέχουν ως πυκνό υποσύνολο το χώρο $C_c(\Omega)$, ο προηγούμενος υπολογισμός μεταφράζεται στην σχέση

$$|\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f| \leq ce^{\omega t}\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)|f| \tag{6.3.11}$$

για κάθε $f \in L^p$ και $t \geq 0$. Επίσης είναι φανερό πως ισχύει

$$||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)\hat{f}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = ||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)f||_{L^p}$$

Αλλά έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)\hat{f}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= ||\exp(bt\varepsilon^2)G_p(bt)V(2bt\varepsilon)\hat{f}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp(pbt\varepsilon^2)|G_p(bt)V(2bt\varepsilon)\hat{f}(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp(pbt\varepsilon^2)|G_p(bt)\hat{f}(x-2bt\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp(pbt\varepsilon^2)|G_p(bt)\hat{f}(y)|^p dy \\ &= \exp(pbt\varepsilon^2)||G_p(bt)\hat{f}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \exp(pbt\varepsilon^2)||G_p(bt)||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}||\hat{f}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \exp(pbt\varepsilon^2)||\hat{f}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

εφόσον η ημιομάδα Gauss του $L^p(\mathbb{R}^n)$ είναι συσταλτική. Βεβαίως

$$||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)\hat{f}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \exp(bt\varepsilon^2)||\hat{f}||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

και $\exp(bt\varepsilon^2) < +\infty$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Έπεται ότι οι γραμμικοί τελεστές $\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)$ είναι φραγμένοι στο χώρο $L^p(\mathbb{R}^n)$ και, συνακόλουθα, το ίδιο συμβαίνει και με τους τελεστές $S_{\varepsilon,p}(t)$ στο χώρο L^p. Από την σχέση (6.3.11) συνάγεται πως οι γραμμικοί τελεστές $\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)$ είναι φραγμένοι ως προς τη νόρμα του L^p για κάθε $t \geq 0$. Υπάρχουν, επομένως, τελεστές $T_{\varepsilon,p}(t) \in \mathcal{L}(L^p)$ για τους οποίους ισχύει

$$T_{\varepsilon,p}(t) = \tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f \tag{6.3.12}$$

για κάθε $f \in L^p_\varepsilon \cap L^p$ και $t \geq 0$.

Αφού η οικογένεια $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ είναι μια (ισχυρώς συνεχής) ημιομάδα επί του L^p_ε έχουμε

$$\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t+s)f = \tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)\tilde{T}_{\varepsilon,p}(s)f,\ \tilde{T}_{\varepsilon,p}(0)f = f$$

για κάθε $f \in L^p_\varepsilon$ και $t, s \geq 0$. Προφανώς οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για κάθε $f \in L^p_\varepsilon \cap L^p \subseteq L^p_\varepsilon$ και $t, s \geq 0$. Λόγω της (6.3.12) λαμβάνουμε

$$T_{\varepsilon,p}(t+s)f = T_{\varepsilon,p}(t)T_{\varepsilon,p}(s)f,\ T_{\varepsilon,p}(0)f = f$$

για κάθε $f \in L^p_\varepsilon \cap L^p$ και $t, s \geq 0$. Από την πυκνότητα του $L^p_\varepsilon \cap L^p$ στον L^p αποδεικνύεται ότι η οικογένεια $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ είναι μια μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών επί του L^p συνεπής ως προς την $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$. Φανερά η ημιομάδα $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα $[0,1]$ (με χρήση της ανισότητας Young). Άρα, για την ισχυρή συνέχεια αυτής, αρκεί να επαληθεύσουμε, με οδηγό την Πρόταση 2.2.6, πως $\lim_{t\to 0+} T_{\varepsilon,p}(t)f = f$ στον L^p για κάθε f που ανήκει στο χώρο $C_c(\Omega)$. Θεωρούμε, λοιπόν, συνεχή μιγαδική συνάρτηση f επί του Ω τέτοια ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Omega$ με $d(x) < r$ $(r > 0)$ και παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to 0+} ||T_{\varepsilon,p}(t)f - f||_p^p \ &\leq \ \limsup_{t\to 0+} \int_{x\in\Omega, d(x)>r} |\mathrm{e}^{\varepsilon x}T_p(t)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x) - f(x)|^p dx \\
&\quad + \limsup_{t\to 0+} \int_{d(x)<r} |T_{\varepsilon,p}(t)f(x)|^p dx \\
&\leq \ \lim_{t\to 0+} \left(\int_{x\in\Omega, d(x)>r} |\mathrm{e}^{p|\varepsilon||x|}|T_p(t)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x) - \mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)|^p dx \right. \\
&\quad \left. + \limsup_{t\to 0+} \int_{d(x)<r} |c\mathrm{e}^{\omega t}\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)|f|(x)|^p dx \right) \\
&= \ \lim_{t\to 0+} \left(\mathrm{e}^{p|\varepsilon||x|} \int_{x\in\Omega, d(x)>r} |T_p(t)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x) - \mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)|^p dx \right. \\
&\quad \left. + \limsup_{t\to 0+} \int_{d(x)<r} |c\mathrm{e}^{\omega t}\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)|f|(x) - c\mathrm{e}^{\omega t}|f|(x)|^p dx \right) \\
&\leq \ \lim_{t\to 0+} \left(\mathrm{e}^{p|\varepsilon||x|}||T_p(t)(e^{-\varepsilon\cdot}f) - \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot}f||_p^p \right. \\
&\quad \left. + c\mathrm{e}^{\omega t}||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)|f| - |f|||_p^p \right)
\end{aligned}$$

Από τα δεδομένα της πρότασης και, καθώς $\mathrm{e}^{-\varepsilon \cdot} f$, $|f| \in C_c(\Omega)$, συμπεραίνουμε πως $\limsup_{t\to 0+} ||T_{\varepsilon,p}(t)f - f||_p = 0$ για κάθε $f \in C_c(\Omega)$. Άρα η ημιομάδα $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής επί του χώρου Banach L^p και επιβεβαιώνεται και ο ισχυρισμός (β).

(ii) Κατά την αποδεικτική διαδικασία του Ισχυρισμού (i)(β) βρήκαμε ότι ισχύει

$$||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)\hat{f}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq exp(bt\varepsilon^2)||G_p(bt)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||\hat{f}||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Από τη γνωστή ταύτιση του L^p με έναν υπόχωρο του $L^p(\mathbb{R}^n)$ προκύπτει ότι

$$||\tilde{S}_{\varepsilon,p}(t)f||_{L^p} \leq exp(bt\varepsilon^2)||G_p(bt)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||f||_{L^p}$$

για κάθε $f \in L^p$. Είναι άμεσο πως

$$|T_{\varepsilon,p}(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t}\tilde{S}_{\varepsilon,x}(t)|f|$$

για κάθε $f \in L^p$. Με άλλα λόγια έχουμε

$$||T_{\varepsilon,p}(t)f||_{L^p} \leq c\mathrm{e}^{\omega t}exp(bt\varepsilon^2)||G_p(bt)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||f||_{L^p}$$

για κάθε $f \in L^p$ και για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα για $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ με $|\varepsilon| \leq 1$ λαμβάνουμε

$$||T_{\varepsilon,p}(t)f||_{L^p} \leq c\mathrm{e}^{\omega t}exp(bt)||G_p(bt)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||f||_{L^p}$$

Όμως $c > 1$ και $||G_p(bt)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Θέτοντας $c||G_p(bt)||_{\text{Ł}^p(\mathbb{R}^n)} = M_1$ και $\omega + b = \omega_1$ παίρνουμε $M_1 > 0, \omega_1 > 0$ και $||T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p} \leq M_1\mathrm{e}^{\omega_1 t}$ για κάθε $t \geq 0$.

(iii) Γνωρίζουμε ότι $T_p(t) \sim K(t,x,y)$ στον L^p και $\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t) \sim \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}K(t,x,y)$ στον L^p_ε. Από την συνέπεια των ημιομάδων $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ και $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ έπεται ότι $T_{\varepsilon,p}(t) \sim \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}K(t,x,y)$ στον L^p. Έτσι ισχύει

$$T_p(t) - T_{\varepsilon,p}(t) \sim K(t,x,y)(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)})$$

στον L^p. Έστω $0 < \delta < 1$. Επειδή

$$|K(t,x,y)(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)})| \leq c\mathrm{e}^{\omega t}(4\pi bt)^{-n/2}\mathrm{e}^{-(x-y)^2/4bt}|1 - \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}|$$

μπορούμε να παρατηρήσουμε πως για $\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}$ έχουμε $\delta \leq \frac{1}{t}$ και

$$|(T_p(t) - T_{\varepsilon,p}(t))f| \leq constQ_\varepsilon|f| \ (f \in L^p)$$

όπου $Q_\varepsilon g = q^\varepsilon \star g$ με $q^\varepsilon = \exp(-\delta x^2/4b)|1 - \mathrm{e}^{\varepsilon x}|$. Προφανώς $\lim_{|\varepsilon|\to 0} q^\varepsilon(x) = 0$. Επίσης

$$|q^\varepsilon(x)| \leq \exp(-\delta x^2/4b) + \exp([-\delta x^2/4b] + \varepsilon x)$$

και επιπλέον

$$\frac{-\delta x^2}{4b} + \varepsilon x = -\frac{\delta x^2}{8b} - \frac{\delta x^2}{8b} + \varepsilon x,$$

$$\begin{aligned}\frac{-\delta x^2}{8b}+\varepsilon x &= -\left[\frac{\delta x^2}{8b}-2\sqrt{\frac{\delta}{8b}}x\sqrt{\frac{8b}{\delta}}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{8b\varepsilon^2}{4\delta}\right]+\frac{8b\varepsilon^2}{4\delta}\\ &= -\left(\sqrt{\frac{\delta}{8b}}x-\sqrt{\frac{8b}{\delta}}\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\frac{2b\varepsilon^2}{\delta}\\ &\le \frac{2b\varepsilon^2}{\delta}\le\frac{2b}{\delta}\ (\varepsilon\in\mathbb{R}^n, |\varepsilon|\le 1)\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{-\delta x^2}{4b}+\varepsilon x\le\frac{-\delta x^2}{8b}+\frac{2b}{\delta}$$

και

$$\exp(\frac{-\delta x^2}{4b}+\varepsilon x)\le\exp(\frac{-\delta x^2}{8b}+\frac{2b}{\delta})$$

Είναι δεδομένο ότι $\exp(\frac{-\delta x^2}{4b})$ και $\exp(\frac{-\delta x^2}{8b}+\frac{2b}{\delta})$ ανήκουν στο χώρο $L^1(\mathbb{R}^n)$. Επομένως $q^\varepsilon\in L^1(\mathbb{R}^n)$ και, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, συνάγεται ότι $||q^\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\to 0$ καθώς $|\varepsilon|\to 0$. Έτσι παίρνουμε ότι

$$||q^\varepsilon||_{L^1}\to 0$$

καθώς $|\varepsilon|\to 0$ και, αφού

$$||[T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)]f||_{L^p}\le const||q^\varepsilon||_{L^1}||f||_{L^p}$$

από την ανισότητα του Young, καταλήγουμε στη σχέση

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0}\sup_{\delta\le t\le 1/\delta}||T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}=0\ (0<\delta<1)$$

Έστω, τώρα $\lambda\in\mathbb{R}$, με $\lambda>\omega_1$. Από τον τρόπο ορισμού της θετικής σταθεράς ω_1 προκύπτει ότι $\lambda>\omega$. Το Θεώρημα 4.1.9 (Feller-Miyadera-Phillips) υποδηλώνει ότι $\lambda\in\rho(A_p)\cap\rho(A_{\varepsilon,p})$. Για κάθε $\delta>0$ έχουμε

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0}||R(\lambda,A_p)-R(\lambda,A_{\varepsilon,p})||_{L^p}\le\limsup_{|\varepsilon|\to 0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}||T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}dt$$

Βεβαίως

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0}\int_\delta^{1/\delta}\mathrm{e}^{-\lambda t}||T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}dt=0$$

Επειδή $||T_p(t)||_{L^p}\le c e^{\omega t}$ και $||T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}\le M_1\mathrm{e}^{\omega_1 t}$, για κατάλληλη σταθερά $M\ge\max\{c,M_1\}>0$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{|\varepsilon|\to 0}\int_0^\delta\mathrm{e}^{-\lambda t}||T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}dt &\le \limsup_{|\varepsilon|\to 0}\int_0^\delta 2M\mathrm{e}^{(\omega_1-\lambda)t}dt\\ &\le 2M\delta\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\limsup_{|\varepsilon|\to 0}\int_{1/\delta}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}||T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p}dt &\leq \limsup_{|\varepsilon|\to 0}\int_{1/\delta}^{+\infty} 2M\mathrm{e}^{(\omega_1-\lambda)t}dt\\ &= 2M\frac{1}{\lambda-\omega_1}\mathrm{e}^{\frac{\omega_1-\lambda}{\delta}}\end{aligned}$$

Με αλλα λόγια

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0}||R(\lambda,A_p)-R(\lambda,A_{\varepsilon,p})||_{L^p}\leq 2M(\delta+\frac{1}{\lambda-\omega_1}\mathrm{e}^{\frac{\omega_1-\lambda}{\delta}})$$

Εφόσον το $\delta>0$ επιλεχθηκε τυχόν συμπεραίνουμε πως

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0}||R(\lambda,A_p)-R(\lambda,A_{\varepsilon,p})||_{L^p}=0$$

Είναι αξιοσημείωτο, ότι στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε εαν θεωρήσουμε $\lambda\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_1$ και ακολουθήσουμε ανάλογη συλλογιστική πορεία.

Εφόσον οι ημιομάδες $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ στον L^p και $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ στον L^p_ε είναι συνεπείς, συμπεραίνουμε πως οι τελεστές $R(\lambda,A_{\varepsilon,p})$ και $R(\lambda,\tilde{A}_{\varepsilon,p})$ είναι συνεπείς για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\ \lambda>\max\{\omega_0(T_{\varepsilon,p}),\omega_0(\tilde{T}_{\varepsilon,p})\}$, όπου $\omega_0(T_{\varepsilon,p})$ και $\omega_0(\tilde{T}_{\varepsilon,p})$ είναι τα αυξητικά φράγματα (τύποι) των δυο θεωρούμενων ημιομάδων. Για ανοικτό υποσύνολο Ξ του $\mathbb{C}$, συμβολίζουμε με Ξ_∞ τη συνεκτική συνιστώσα του Ξ που περιέχει ένα δεξιό ημιεπίπεδο της μορφής $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\ \lambda>\omega\}$ για κάποιο $\omega\in\mathbb{R}$. Τότε, από την Πρόταση 6.1.2, λαμβάνουμε την ακόλουθη

Πρόταση 6.3.7 *Οι τελεστές $R(\lambda,A_{\varepsilon,p})$ και $R(\lambda,\tilde{A}_{\varepsilon,p})$ είναι συνεπείς για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$ που ανήκει στο σύνολο $[\rho(A_{\varepsilon,p})\cap\rho(\tilde{A}_{\varepsilon,p})]_\infty$.*

Βεβαίως δεν γνωρίζουμε αν οι εν λόγω επιλύοντες τελεστές είναι συνεπείς για κάθε $\lambda\in\rho(A_{\varepsilon,p})\cap\rho(\tilde{A}_{\varepsilon,p})$, παρατηρούμε ωστόσο, ότι εκ κατασκευής ισχύει $\rho(A_p)=\rho(\tilde{A}_{\varepsilon,p})$ και

$$R(\lambda,\tilde{A}_{\varepsilon,p})f(x)=\mathrm{e}^{\varepsilon x}R(\lambda,A_p)(\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x))$$

όπου $f\in L^p_\varepsilon$ για κάθε $\lambda\in\rho(A_p)$. Επομένως, η Πρόταση 6.3.7 μπορεί να αναδιατυπωθεί γράφοντας ότι ισχύει

$$R(\lambda,A_{\varepsilon,p})f(x)=\mathrm{e}^{\varepsilon x}R(\lambda,A_p)(\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)) \tag{6.3.13}$$

όταν $f,\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot}f\in L^p$ και $\lambda\in[\rho(A_{\varepsilon,p})\cap\rho(\tilde{A}_{\varepsilon,p})]_\infty$.

Η Πρόταση που έπεται εκφράζει την άνω ημισυνέχεια του φάσματος για μη φραγμένους γραμμικούς τελεστές.

Πρόταση 6.3.8 *Έστω A γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Banach X, λ στοιχείο του $\rho(A)$ και K συμπαγές υποσύνολο του $\rho(A)$. Υπάρχουν, τότε, $\epsilon > 0$ και $c > 0$ έτσι ώστε, για κάθε γραμμικό τελεστή B επί του X με $\lambda \in \rho(B)$ και $||R(\lambda, B) - R(\lambda, A)|| < \epsilon$ να ισχύει $K \subseteq \rho(B)$ και επιπλέον*

$$\sup_{\mu \in K} ||R(\mu, B)|| \le c.$$

Απόδειξη. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\lambda = 0$. Θέτουμε $M = \sup_{\mu \in K} ||\mu I - \mu^2 R(\mu, A)||$ και $\epsilon = \frac{1}{2M}$. Δεχόμαστε ότι ο B είναι γραμμικός τελεστής επί του X έτσι ώστε $0 \in \rho(B)$ και $||A^{-1} - B^{-1}|| < \epsilon$. Έστω τυχόν στοιχείο $\mu \in K - \{0\}$. Τότε:

$$(\frac{1}{\mu} I - A^{-1})^{-1} = (\frac{1}{\mu}(A - \mu I) A^{-1}))^{-1} = -\mu A R(\mu, A)$$

Επειδή πάντα ισχύει $AR(\mu, A) = \mu R(\mu, A) - I$ παίρνουμε

$$(\frac{1}{\mu} I - A^{-1})^{-1} = \mu I - \mu^2 R(\mu, A)$$

Έτσι έχουμε

$$||(\frac{1}{\mu} I - A^{-1})^{-1} (A^{-1} - B^{-1})|| \le \frac{1}{2} < 1$$

Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής $Q = I - (\frac{1}{\mu} I - A^{-1})^{-1}(A^{-1} - B^{-1})$ είναι αντιστρέψιμος και $||Q^{-1}|| < 2$ (βλ. Θεώρημα 1.1.20)
Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
(\mu I - B) &= -\mu(\frac{1}{\mu} I - B^{-1}) B \\
&= -\mu(\frac{1}{\mu} I - A^{-1} + A^{-1} - B^{-1}) B \\
&= -\mu(\frac{1}{\mu} I - A^{-1})\{I - (\frac{1}{\mu} I - A^{-1})^{-1}(A^{-1} - B^{-1})\} B \\
&= -\mu(\frac{1}{\mu} I - A^{-1}) Q B
\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι ο τελεστής $\mu I - B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\begin{aligned}
(\mu I - B)^{-1} = -B^{-1} Q^{-1} \frac{1}{\mu} (\frac{1}{\mu} I - A^{-1})^{-1} &= -B^{-1} Q^{-1} \frac{1}{\mu} (\mu I - \mu^2 R(\mu, A)) \\
&= -B^{-1} Q^{-1} (I - \mu R(\mu, A))
\end{aligned}$$

Έπεται ότι ο τελεστής $(\mu I - B)^{-1}$ είναι φραγμένος, οπότε $\mu \in \rho(B)$. Επειδή το μ επιλέχθηκε τυχόν, καταλήγουμε ότι $K \subseteq \rho(B)$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}
||R(\mu, B)|| &= ||(\mu I - B)^{-1}|| \\
&\le 2||B^{-1}|| \sup_{\mu \in K} ||I - \mu R(\mu, A)||
\end{aligned}$$

Θέτοντας $c := 2||B^{-1}|| \sup_{\mu \in K} ||I - \mu R(\mu, A)||$ βρίσκουμε πως $||R(\mu, B)|| \leq c$ και η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

Ένα αποτέλεσμα, το οποίο θα επικαλεστούμε αρκετές φορές στα επομένα, περιέχεται στο εξής:

Λήμμα 6.3.9 *Αν $(T_p(t))_{t\geq 0}$ είναι οικογένεια ισχυρώς συνεχών μονοπαραμετρικών ημιομάδων τελεστών που δρούν συνεπώς στους χώρους Banach L^p, $1 \leq p < +\infty$, τότε για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$ ο τελεστής $\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt$ ανήκει στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(L^q)$ $(a > 0)$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του τελεστή $\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt$ επαληθεύεται άμεσα. Έστω $f \in L^p \cap L^q$ όπου $1 \leq p, q < +\infty$. Λόγω συνεπείας των ημιομάδων $(T_p(t))_{t\geq 0}$ και $(T_q(t))_{t\geq 0}$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||(\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt) f||_{L^p \cap L^q} &\leq \int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} ||T_p(t) f||_{L^p \cap L^q} dt \\ &= \int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} ||T_q(t) f||_{L^p \cap L^q} dt \end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο $L^p \cap L^q$ είναι πυκνό στο χώρο L^q ισχύει

$$||(\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt) f||_{L^q} \leq \int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} ||T_q(t) f||_{L^q} dt$$

Εφόσον η ημιομάδα $(T_q(t))_{t\geq 0}$ επί του L^q είναι ισχυρώς συνεχής, υπάρχουν σταθερές $M \geq 1$ και $\omega \geq 0$ ώστε

$$||T_q(t) f||_{L^q} \leq M \mathrm{e}^{\omega t} ||f||_{L^q}$$

Έτσι, όταν $\mathrm{Re}\, \mu \neq \omega$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||(\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt) f||_{L^q} &\leq M ||f||_{L^q} \int_0^a \mathrm{e}^{-t \mathrm{Re}\, \mu} \mathrm{e}^{\omega t} dt \\ &= \frac{M ||f||_{L^q}}{\omega - \mathrm{Re}\, \mu} \int_0^a (\frac{d}{dt} \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\, \mu) t}) dt \\ &= \frac{M (\mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\, \mu) a} - 1)}{\omega - \mathrm{Re}\, \mu} ||f||_{L^q} \end{aligned}$$

Θέτουμε $C = \frac{M(\mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\, \mu)a} - 1)}{\omega - \mathrm{Re}\, \mu}$ και βρίσκουμε

$$||(\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt) f||_{L^q} \leq C ||f||_{L^q}$$

Όταν $\mathrm{Re}\, \mu = \omega$, προφανέστατα προκύπτει

$$||(\int_0^a \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt) f||_{L^q} \leq M ||f||_{L^q}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, οι θεωρούμενος τελεστής είναι φραγμένος επί του L^q και, άρα, στοιχείο της $\mathcal{L}(L^q)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, τον ακόλουθο συμβολισμό:
Έστω $1 \leq p, q, r < +\infty$ και $B \in \mathcal{L}(L^p)$. Ορίζουμε

$$||B||_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} := \sup\{||Bf||_{L^r} : f \in L^p \cap L^q, ||f||_{L^q} \leq 1\}$$

Είμαστε, πλέον, σε θέση να διατυπώσουμε τα δύο βασικά αποτελέσματα της μελέτης του W. Arendt

Θεώρημα 6.3.10 *Έστω $T_p = (T_p(t))_{t\geq 0}$ οικογένεια συνεπών ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών, επί των χώρων Banach $L^p(\Omega) = L^p$, με απειροστικούς γεννήτορες A_p. Δεχόμαστε ότι $T_2 = T$ και υποθέτουμε ότι η ημιομάδα T ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης. Τότε το σύνολο $\rho_\infty(A_p)$ είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$, όπου με $\rho_\infty(A_p)$ σημειώνουμε τη συνεκτική συνιστώσα του $\rho(A_p)$ που περιέχει ένα δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο της μορφής $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\}$ για κάποιο $\omega \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε p και q από το διάστημα $[1, +\infty)$ με $p \neq q$ και στοιχείο μ του συνόλου $\rho_\infty(A_p)$ τυχόν. Θα δείξουμε ότι $\mu \in \rho(A_q)$. Βεβαίως $\mu \in \rho(A_p)$. Αρκεί, επομένως, να επιβεβαιώσουμε ότι $||R(\mu, A_p)||_{\mathcal{L}(L^q)} < +\infty$ και να εφαρμόσουμε το συμπέρασμα της Πρότασης 6.1.3.
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} R(\mu, A_p) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu} \mathrm{e}^{-\mu(t-1)} T_p(1) T_p(t-1) dt \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt + \mathrm{e}^{-\mu} T_p(1) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu s} T_p(s) ds \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt + \mathrm{e}^{-\mu} T_p(1) R(\mu, A_p) \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 6.3.9 προκύπτει πως $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mu t} T_p(t) dt \in \mathcal{L}(L^q)$ (για $a = 1$). Θα πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$||T_p(1) R(\mu, A_p)||_{\mathcal{L}(L^q)} < +\infty \tag{6.3.14}$$

Έστω K η εικόνα ενός συνεχούς μονοπατιού που συνδέει το μ με ένα σημείο του συνόλου $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega_1\}$, όπου $\omega_1 > 0$είναι η σταθερά του ισχυρισμού (ii) της Πρότασης 6.3.6. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό (iii) της ίδιας Πρότασης έχουμε

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0} ||R(\mu, A_{\varepsilon,p}) - R(\mu, A_p)||_{L^p} = 0$$

με $A_{\varepsilon,p}$ το γεννήτορα της ημιομάδας $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ επί του L^p.

Για το συμπαγές σύνολο K, η Πρόταση 6.3.8 υποδηλώνει την ύπαρξη $\epsilon_0 > 0$ ώστε να ισχύει $K \subseteq \rho(A_{\varepsilon,p})$ όταν $|\varepsilon| \leq \epsilon_0$. Άρα $\mu \in [\rho(A_{\varepsilon,p}) \cap \rho(\tilde{A}_{\varepsilon,p})]_\infty$
Επειδή, για κάθε $t \geq 0$ και $f \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ με $||f||_{L^p} \leq 1$ έχουμε

$$|\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)f| \leq c\mathrm{e}^{\omega t} exp(bt\varepsilon^2) G_p(bt) V(2bt\varepsilon)|f|,$$

η συνέπεια των ημιομάδων $(\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ και $(T_{\varepsilon,p}(t))_{t\geq 0}$ μας επιτρέπει να συμπεράνουμε πως

$$||T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2})||_{L^\infty} = c_1 < +\infty,\ ||T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2})||_{L^1} = c_2 < +\infty$$

Έτσι παίρνουμε

$$\sup_{|\varepsilon|\leq\epsilon_0} ||T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2})||_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} < +\infty,\ \sup_{|\varepsilon|\leq\epsilon_0} ||T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2})||_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} < +\infty$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
T_{\varepsilon,p}(1)R(\mu, A_{\varepsilon,p}) &= T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2})T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t} T_{\varepsilon,p}(t)dt \\
&= T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t} T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}+t)dt \\
&= T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t} T_{\varepsilon,p}(t+\frac{1}{2})dt \\
&= T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t} T_{\varepsilon,p}(t)dt T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}) \\
&= T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2}) R(\mu, A_{\varepsilon,p}) T_{\varepsilon,p}(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$c_3 := \sup_{|\varepsilon|\leq\epsilon_0} ||T_{\varepsilon,p}(1)R(\mu, A_{\varepsilon,p})||_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} < +\infty$$

Γνωρίζουμε πως ο τύπος

$$Bf = \int K(x,y)f(y)dy\ (f \in L^1(\Omega))$$

ορίζει ένα ισομετρικό ισομορφισμό του $L^\infty(\Omega\times\Omega)$ επί του χώρου $\mathcal{L}(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ (βλ. Θεώρημα 1.2.15). Έπεται ότι οι τελεστές $T_{\varepsilon,p}(1)R(\mu, A_{\varepsilon,p})$ παριστάνονται από έναν πυρήνα K_ε έτσι ώστε να ισχύει $|K_\varepsilon(x,y)| \leq c_3$, x,y-σχεδόν παντού. Ιδιαιτέρως $T_p(1)R(\mu, A_p) \sim K_0$

Επειδή $\mu \in [\rho(A_{\varepsilon,p}) \cap \rho(\tilde{A}_{\varepsilon,p})]_\infty$ η σχέση (6.3.13) δίνει

$$\begin{aligned}
T_{\varepsilon,p}(1)R(\mu, A_{\varepsilon,p})f(x) &= \mathrm{e}^{\varepsilon x} T_p(1) \mathrm{e}^{-\varepsilon x}(\mathrm{e}^{\varepsilon x} R(\mu, A_p)\mathrm{e}^{-\varepsilon x})f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\varepsilon x} T_p(1) R(\mu, A_p) \mathrm{e}^{-\varepsilon x} f(x)
\end{aligned}$$

όταν $f, \mathrm{e}^{-\varepsilon \cdot} f \in L^p$. Παίρνουμε λοιπόν

$$K_\varepsilon(x,y) = K_0(x,y)\mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)},\ x,y - \text{σχεδόν παντού}$$

και συνακόλουθα

$$|K_0(x,y)\mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}| \leq c_3,\ x,y - \text{σχεδόν παντού}$$

για $|\varepsilon| \leq \epsilon_0$. Άρα

$$|K_0(x,y)\mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}| \leq c_3,\ x,y - \text{σχεδόν παντού}$$

για $|\varepsilon| \leq \epsilon_0$, και τελικά

$$|K_0(x,y)| \leq c_3\mathrm{e}^{-\epsilon_0(x-y)},\ x,y - \text{σχεδόν παντού}$$

και για κάποιο $\epsilon_0 > 0$.

Με τη βοήθεια της ανισότητας Young υπολογίζουμε

$$||T_p(1)R(\mu, A_p)f||_{L^q} = ||K_0 \star f||_{L^q} \leq ||K_0||_{L^1}||f||_{L^q}$$

όπου $||K_0||_{L^1} < +\infty$ αφού

$$c_3 \int_\Omega \mathrm{e}^{-\epsilon_0|x|}dx \leq c_3 \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\epsilon_0|x|}dx < +\infty$$

Δηλαδή ο γραμμικός τελεστής $T_p(1)R(\mu, A_p)$ είναι φραγμένος στον L^q και επιβεβαιώνεται η ισχύς της συνθήκης (6.3.14). Με βάση την επιχειρηματολογία στα αρχικά στάδια της απόδειξης, συνάγουμε ότι $\rho_\infty(A_p) \subseteq \rho(A_q)$. Καθώς το σύνολο $\rho_\infty(A_p)$ είναι συνεκτικό και περιέχει το δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega_0(T_p)\}$, καταλήγουμε ότι $\rho_\infty(A_p) \subseteq \rho_\infty(A_q)$. Με ακριβώς αντίστροφη συλλογιστική διαδικασία αποδεικνύουμε ότι $\rho_\infty(A_q) \subseteq \rho_\infty(A_p)$. Συνοψίζοντας, ισχύει $\rho_\infty(A_q) = \rho_\infty(A_p)$ για κάθε $p, q \in [1, +\infty)$ με $p \neq q$.

Πόρισμα 6.3.11 *Έστω $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ οικογένεια ισχυρώς συνεχών ημιομάδων τελεστών επί των χώρων Banach L^p, $1 \leq p < +\infty$, με απειροστικούς γεννήτορες A_p. Δεχόμαστε ότι $T_2 = T$ και υποθέτουμε ότι η ημιομάδα T ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης. Αν ο γεννήτορας A_2 της ημιομάδας T είναι αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής, τότε το φάσμα $\sigma(A_p)$ του p είναι ανεξάρτητο απο τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$.*

Απόδειξη. Αφού ο A_2 είναι αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής, έπεται ότι $\sigma(A_2) \subseteq \mathbb{R}$. Άρα το σύνολο $\rho(A_2)$ είναι συνεκτικό και $\rho_\infty(A_2) = \rho(A_2)$. Από το Θεώρημα 6.3.10 προκύπτει ότι $\rho_\infty(A_2) = \rho_\infty(A_p)$ για $p \in [1, +\infty)$. Δηλαδή $\rho_\infty(A_p) = \rho(A_2)$ για $p \in [1, +\infty)$.

Έστω $p \in [1, +\infty)$ και $\lambda \in \sigma(A_p)$. Τότε $\lambda \notin \rho(A_p)$ και, ισοδύναμα, $\lambda \notin \rho_\infty(A_p)$. Επομένως $\lambda \notin \rho(A_2)$ κάτι που σημαίνει ότι $\lambda \in \sigma(A_2) \subseteq \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια $\sigma(A_p) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε το σύνολο $\rho(A_p)$ είναι συνεκτικό και ισχύει $\rho(A_p) = \rho_\infty(A_p) = \rho(A_2)$.

Καταληκτικά έχουμε $\sigma(A_p) = \sigma(A_2)$ για $p \in [1, +\infty)$ και το συμπέρασμα του Πορίσματος είναι, πλέον, ξεκάθαρο.

Στο τέλος της Παραγράφου θα παρουσιάσουμε ορισμένες εφαρμογές των προαναφερθέντων - ιδιαιτέρως του βασικότατου Πορίσματος 6.3.11 - σε συγκεκριμένες κλάσεις διαφορικών τελεστών. Υπενθυμίζουμε ότι η συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας για έναν διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης έχει τη μορφή

$$\theta_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \theta_2|\xi|^2$$

για κάθε $x \in \Omega$, όπου Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και για σταθερές $\theta_1, \theta_2 > 0$. Διατυπώνουμε δύο καίρια αποτελέσματα που θα επικαλεστούμε αμέσως μετά. Για την απόδειξή τους, παραπέμπουμε στο βιβλίο του E. B. Davies [7], Corollary 3.2.8, Theorem 3.2.9 p. 89-90.

Πρόταση 6.3.12 *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και*

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

ομοιόμορφα ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης, σε μορφή απόκλισης, ο οποίος υπόκειται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Τότε ο πυρήνας θερμότητας $K(t, \cdot, \cdot)$ της ημιομάδας e^{-Ht} στον $L^2(\Omega)$ ικανοποιεί την συνθήκη

$$0 \leq K(t, x, y) \leq c_{\delta,\theta_1} t^{-n/2} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4(1+\delta)\theta_2 t}\right) \tag{6.3.15}$$

για κάθε $0 < t < +\infty,\ 0 < \delta < 1$ και σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$

Πρόταση 6.3.13 *Έστω Ω φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ που διαθέτει την ιδιότητα της επέκτασης (βλ. Θεώρημα 1.4.10) και*

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

ομοιόμορφα ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης, σε μορφή απόκλισης, ο οποίος υπόκειται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Neumann. Τότε ο πυρήνας θερμότητας $K(t, \cdot, \cdot)$ της ημιομάδας e^{-Ht} στον $L^2(\Omega)$ ικανοποιεί την συνθήκη

$$0 \leq K(t, x, y) \leq c_{\delta,\theta_1,\Omega} \min\{t^{-n/2}, 1\} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4(1+\delta)\theta_2 t}\right) \tag{6.3.16}$$

για κάθε $0 < t < +\infty,\ 0 < \delta < 1$ και σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$

Παρατηρούμε ότι στις δύο παραπάνω Προτάσεις εμφανίζεται μια 'ενοχλητική' θετική σταθερά δ. Με προσεκτική εξέταση της επιχειρηματολογίας είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η ακριβής εξάρτηση της c_δ απο τη δ και να αποκτηθούν καλύτερα άνω φράγματα για τον πυρήνα θερμότητας μέσω βελτιστοποίησης επί της δ.

Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε έναν ομοιόμορφα ελλειπτικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης H σε μορφή απόκλισης υποκείμενο σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Ο H δρά στον $L^2(\Omega)$, δίνεται από τον τύπο

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

και σχετίζεται με την κλειστότητα της τετραγωνικής μορφής

$$Q(f) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}dx$$

όπου $a_{ij} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Η Q είναι κλείσιμη στο χώρο $C_c^\infty(\Omega)$ και ο H είναι μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής για τον οποίο ισχύει $Quad(H) = Dom(\bar{Q}) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.7 ο H πληροί τις συνθήκες Beurling-Deny και, άρα, η e^{-Ht} είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov, δηλαδή ισχυρώς συνεχής επί του $L^2(\Omega)$ με απειροστικό γεννήτορα τον αυτοσυζυγή τελεστή $-H$. Από τη σχέση (6.3.15) συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας θερμότητας της e^{-Ht} ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης της μορφής (6.3.10) για $\omega = 0$ και κατάλληλες σταθερές b και c. Συμβολίζουμε με T την ημιομάδα e^{-Ht} επί του $L^2(\Omega)$ και θέτουμε $A = -H$ για τον γεννήτορα αυτής. Επάγονται, τότε, συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p στους χώρους Banach $L^p(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$, με γεννήτορες A_p ώστε $T_2 = T$ (βλ. Πρόταση 6.3.3) . Το Πόρισμα 6.3.11 υποδηλώνει ότι το φάσμα $\sigma(A_p)$ του τελεστή A_p είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$. Άρα και το L^p-φάσμα του H είναι ανεξάρτητο του $p \in [1, +\infty)$.

Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ που διαθέτει την ιδιότητα της επέκτασης και H ομοιόμορφα ελλεπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης σε μορφή απόκλισης που ικανοποιεί γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Neumann. Ο H δρά στον $L^2(\Omega)$, δίνεται από τον τύπο

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

και σχετίζεται με την τετραγωνική μορφή

$$Q(f) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}dx$$

η οποία είναι κλειστή στον $W^{1,2}(\Omega)$. Ο H είναι μη αρνητικός αυτοσυζυγής τελεστής και, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.8, πληροί τις συνθήκες Beurling-Deny. Αυτό σημαίνει ότι η e^{-Ht} είναι μια συμμετρική ημιομάδα Markov, δηλαδή ισχυρώς συνεχής επί του $L^2(\Omega)$

με γεννήτορα $-H$. Από την σχέση (6.3.16) έπεται ότι ο πυρήνας θερμότητας της e^{-Ht} ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης της μορφής (6.3.10). Συμβολίζοντας με T την ημιομάδα e^{-Ht} επί του $L^2(\Omega)$ και θέτοντας $A = -H$ για τον γεννήτορά της, αποδεικνύουμε, όπως και προηγουμένως, ότι το L^p-φάσμα του H είναι ανεξάρτητο του $p \in [1, +\infty)$.

Η προηγηθείσα ανάλυση δύναται να εφαρμοστεί στην ειδική περίπτωση του αρνητικού τελεστή Laplace με συνοριακές συνθήκες Neumann (Neumann Laplacian). Ο $-\bar{\Delta}$ είναι μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής που σχετίζεται με την, κλειστή επί του $W^{1,2}(\Omega)$, τετραγωνική μορφή

$$Q(f) = \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx$$

Συνάγεται ότι το L^p-φάσμα του τελεστή $\bar{\Delta}$ είναι ανεξάρτητο του αριθμού $p \in [1, +\infty)$.

Έστω, περαιτέρω, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον τελεστή Schrödinger $H = -\frac{1}{2}\bar{\Delta} + V$ στο χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ο λόγος της εμφάνισης του συντελεστή $-\frac{1}{2}$, αντί για του συνηθισμένου -1, μπροστά από τη Λαπλασιανή θα εξηγηθεί παρακάτω. Ο H, με κατάλληλο πεδίο ορισμού, είναι μη αρνητικός αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής όπως είδαμε στην Παράγραφο 5.1. Ακολουθώντας τον B. Simon στο κλασσικό άρθρο του [25], ορίζουμε την κλάση δυναμικών K_n ως εξής: Μια πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση V επί του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ότι ανήκει στην κλάση K_n αν και μόνον αν
(i) για $n \geq 3$ ισχύει

$$\lim_{a \to 0+} (\sup_x \int_{|x-y| \leq a} |x-y|^{2-n} |V(y)| dy) = 0$$

(ii) για $n = 2$ ισχύει

$$\lim_{a \to 0+} (\sup_x \int_{|x-y| \leq a} \log(|x-y|^{-1}) |V(y)| dy) < +\infty$$

(ii) για $n = 1$ ισχύει

$$\sup_x \int_{|x-y| \leq 1} |V(y)| dy < +\infty$$

Λέμε ότι $V \in K_n^{loc}$ αν και μόνο αν $V\chi_R \in K_n$ για κάθε R, όπου χ_R είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$

Υποθέτουμε ότι $V = V^+ - V^-$ με $V^+, V^- \geq 0$ και τέτοια ώστε $V^- \in K_n$ και $V^+ \in K_n^{loc}$ (ή $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$). Αποδεικνύεται, τότε, ότι ο αυτοσυζυγής τελεστής $-H$ παράγει μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα e^{-Ht} στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ που ικανοποιεί τον τύπο των Feynmann-Kac

$$(\mathrm{e}^{-Ht} f)(x) = E_X(\exp(-\int_0^t V(b(s))ds) f(b(t)))$$

Στον τύπο αυτό, με E_X σημειώνουμε τη μέση τιμή της κίνησης Brown που ξεκινά από το $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, η $b(t)$ είναι μια διαδικασία Gauss με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$E_X(b_j(t)) = x_j, \ E_X([b_j(t) - x_j][b_k(s) - x_k]) = \delta_{jk} \min\{s, t\}$$

Με τη διαδικασία αυτή συνδέεται ουσιωδώς ο τελεστής $-\frac{1}{2}\Delta$ και οι παραπάνω σχέσεις απαιτούν την ύπαρξη του συντελεστή $-\frac{1}{2}$ μπροστά από τη Λαπλασιανή.

Στο άρθρο του B. Simon αποδεικνύεται [Proposition B.6.7] ότι, αν $K(t, x, y)$ είναι ο ολοκληρωτικός πυρήνας των τελεστών e^{-Ht}, τότε λαμβάνει χώρα, για κάθε $\epsilon > 0$, η ακόλουθη άνω εκτίμηση Gauss δεύτερης τάξης:

$$|K(t, x, y)| \leq c_\epsilon t^{-n/2} \mathrm{e}^{\omega t} \exp(-\frac{(x-y)^2}{2(1+\epsilon)t})$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάποιο $\omega \geq 0$. Συμβολίζουμε με T την ημιομάδα e^{-Ht} και θέτουμε $A = -H$ για το γεννήτορα αυτής. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.3, επάγονται συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p στους χώρους Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, με γεννήτορες A_p ώστε $T_2 = T$. Από το Πόρισμα 6.3.11 συνάγεται η ανεξαρτησία του φάσματος $\sigma(A_p)$ του τελεστή A_p από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$. Συμπερασματικά, το L^p-φάσμα του τελεστή Schrödinger H είναι ανεξάρτητο του $p \in [1, +\infty)$. Στο ίδιο αποτέλεσμα κατέληξαν οι R. Hempel και J. Voigt, ακολουθώντας βέβαια διαφορετική συλλογιστική πορεία, στο άρθρο τους [15].

Τέλος, ας θεωρήσουμε ως A οποιονδήποτε από τους αυτοσυζυγείς τελεστές, των οποίων τεκμηριώσαμε φασματική ανεξαρτησία, ενώ ας ορίσουμε $M_p \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ από τον τύπο $M_p f = mf$, όπου $m : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Θεώρημα 6.3.10 έπεται ότι το σύνολο $p_\infty(A_p + M_p)$ είναι ανεξάρτητο του $p \in [1, +\infty)$.

6.4 Άνω εκτιμήσεις Gauss τάξεως m και L^p-φασματική ανεξαρτησία τελεστών (γενική περίπτωση)

Η τελευταία Παράγραφος του Κεφαλαίου βασίζεται στο άρθρο του P.C. Kunstmann, [17]. Σε αυτό το άρθρο, ο Kunstmann πραγματοποιεί ορισμένες λεπτές τροποποιήσεις στην επιχειρηματολογία του W. Arendt, παρακάμπτοντας το σκόπελο της συνεκτικότητας και τεκμηριώνοντας L^p-φασματική ανεξαρτησία για αρκετές κλάσεις διαφορικών, όχι κατ΄ ανάγκην αυτοσυζυγών, τελεστών. Με Ω θα συμβολίζουμε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και με A έναν κλειστό γραμμικό τελεστή που δρα στο χώρο Hilbert $L^2(\Omega, dx) = L^2(\Omega)$ όπου dx δηλώνει το μετρο Lebesgue. Υποθέτουμε ότι ο A παράγει μια ισχυρώς συνεχή μονοπαραμετρική ημιομάδα $T = (T(t))_{t \geq 0}$ επί του $L^2(\Omega)$ η οποία ικανοποιεί μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m (ή γενικότερα μία άνω εκτίμηση πυρήνα θερμότητας τάξεως m), δηλαδή γενικότερης μορφής από εκείνη που θεωρεί ο Arendt. Ακριβέστερα, υποθέτουμε ότι οι $T(t)$ είναι ολοκληρωτικοί τελεστές με πυρήνες $K(t, \cdot, \cdot)$

για τους οποίους υπάρχουν σταθερές $c, b > 0$ και $\omega \geq 0$ καθώς και ακέραιος $m > 1$ ώστε να ισχύει

$$|K(t,x,y)| \leq ct^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t}\exp(-\frac{b|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}) \tag{6.4.17}$$

για κάθε $t > 0$ και σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$. Άμεσα παρατηρούμε ότι η σχέση (6.3.8) προκύπτει αν στην (6.4.17) θέσουμε $m = 2$. Θα αποδείξουμε ότι, δοθέντος $p \in [1, +\infty)$, ο τύπος $T_p(t)f = T(t)f$ για κάθε $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ και $t \geq 0$ ορίζει ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες $T_p = (T_p(t))_{t\geq 0}$ στους χώρους Banach $L^p(\Omega)$, συνεπείς μεταξύ τους, με απειροστικούς γεννήτορες A_p ώστε $T_2 = T$ και με το σύνολο $\sigma(A_p)$ ανεξάρτητο από τον αριθμό p. Λαμβάνοντας μια συνάρτηση βάρους w, δηλαδή μια θετική μετρήσιμη τοπικά φραγμένη συνάρτηση επί του Ω, η οποία είναι τοπικά φραγμένη και μακριά από το μηδέν και, υποθέτοντας ότι αυτή πληροί μια συνθήκη υποεκθετικής αύξησης, θα επεκτείνουμε τα συμπεράσματά μας και για τους χώρους Banach $L^p(\Omega, w(x)dx)$.

Η διαπραγμάτευση έχει ως σημείο εκκίνησης ένα αποτέλεσμα που γενικεύει την Πρόταση 6.3.3 και επιβεβαιώνει τον πρώτο από τους διατυπωθέντες ισχυρισμούς.

Πρόταση 6.4.1 *Έστω $T = (T(t))_{t\geq 0}$ μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του $L^2(\Omega)$ αποτελούμενη από ολοκληρωτικούς τελεστές των οποίων οι πυρήνες ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m (συνθήκη 6.4.17). Για $p \in [1, +\infty)$, ο τύπος*

$$T_p(t)f := T(t)f,\ f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega) \text{ και } t \geq 0$$

επάγει συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες $T_p = (T_p(t))_{t\geq 0}$ επί των χώρων Banach $L^p(\Omega)$ με αυξητικά φράγματα μικρότερα ή ίσα του w.

Απόδειξη. Μπορούμε, χωρίς βλάβη γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $w = 0$ στη συνθήκη (6.4.17), πολλαπλασιάζοντας, αν χρειαστεί, και τα δύο μέλη της επί τον παράγοντα $\mathrm{e}^{-\omega t}$ και δουλεύοντας με την ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $(S(t))_{t\geq 0}$ επί του $L^2(\Omega)$, όπου $S(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}T(t)$ $(t \geq 0)$

Για $b, t > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g_{b,t}$ στον $\mathbb{R}^n$ με

$$g_{b,t}(x) = c_{b,n}t^{-n/m}\exp(-\frac{b|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}})$$

γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και με τις σταθερές $c_{b,n} > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{b,1}(x)dx = 1$$

Έχοντας υπόψη τη γνωστή ταύτιση των $L^2(\Omega)$ και $L^p(\Omega)$ με υπόχωρους των $L^2(\mathbb{R}^n)$ και $L^p(\mathbb{R}^n)$ αντίστοιχα και, θεωρώντας για κάθε $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ την επέκταση $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
||T_p(t)f||_p^p &= ||T_p(t)\hat{f}||_p^p \\
&= ||T(t)\hat{f}||_p^p \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x,y)\hat{f}(y)dy|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{c} g_{b,t}(x-y)\hat{f}(y)dy|^p dx \\
&= \tilde{c}^p \int_{\mathbb{R}^n} |g_{b,t} \star \tilde{f}(x)|^p dx \\
&= c_1 ||g_{b,t} \star \hat{f}||_p^p \\
&\leq c_1 ||g_{b,t}||_1^p ||\hat{f}||_p^p \\
&= c_1 ||g_{b,t}||_1^p ||f||_p^p
\end{aligned}$$

(με χρήση της ανισότητας Young και για σταθερά $c_1 > 0$ εξαρτώμενη μόνον από τα b και n). Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$g_{b,t}(x) = t^{-n/m} g_{b,1}(\frac{x}{t^{1/m}}) \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

και επιπλέον

$$\begin{aligned}
||g_{b,t}||_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/m} g_{b,1}(\frac{x}{t^{1/m}}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g_{b,1}(y) dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

(με εκτέλεση του μετασχηματισμού $\frac{x}{t^{1/m}} = y$, οπότε $t^{-n/m}dx = dy$). Καταλήγουμε, επομένως, στην σχέση

$$||T_p(t)f||_p^p \leq c_1 ||f||_p^p$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ και για κάθε $t \geq 0$, απ΄ όπου προκύπτει, λόγω πυκνότητας, ότι οι τελεστές $T_p(t)$ είναι φραγμένοι ως πρις τη νόρμα του $L^p(\Omega)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $p \in [1, +\infty)$.

Βεβαίως, ακολουθώντας συλλογιστική πορεία ανάλογη αυτής σε αρκετές παρόμοιες καταστάσεις, αποδεικνύουμε ότι η οικογένεια $(T_p(t))_{t \geq 0}$ είναι μια μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του χώρου Banach $L^p(\Omega)$. Φανερά, καθώς το p διατρέχει το διάστημα $[1, +\infty)$, οι αντίστοιχες ημιομάδες είναι συνεπείς με αυξητικά φράγματα μικρότερα ή ίσα του μηδενός (έχουμε υποθέσει ότι $w = 0$).

Έστω, περαιτέρω, $p \in [1, 2)$ και συνάρτηση $f \in L^p(\Omega)$ συνεχής με συμπαγή φορέα, δηλαδή στοιχείο του $C_c(\Omega)$. Υπάρχει, τότε, $r > 0$ ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Omega$ με $d(x) < r$. Προφανώς $f \in L^2(\Omega)$ καθώς $C_c(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$. Θέτουμε

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{x \in \Omega : d(x) > r\} \text{ και } \Omega_2 = \Omega - \Omega_1$$

και, με τη βοήθεια της ανισότητας Hölder, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ||T_p(t)f - f||_{L^p(\Omega)} &\leq ||T_p(t)f - f||_{L^p(\Omega_1)} + ||T_p(t)f - f||_{L^p(\Omega_2)} \\ &\leq |\Omega_1|^{1/p-1/2}||T(t)f - f||_{L^2(\Omega_1)} + c_1||g_{b,t} \star |f|\ ||_{L^p(\Omega_2)} \\ &\leq |\Omega_1|^{1/p-1/2}||T(t)f - f||_{L^2(\Omega)} + c_1||g_{b,t} \star |f| - |f|\ ||_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Εφ'οσον η οικογένεια $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του $L^2(\Omega)$ παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0+} ||T(t)f - f||_{L^2(\Omega)} = 0$$

Όπως και στην απόδειξη της επιλυσιμότητας της εξίσωσης της θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{t\to 0+} ||g_{b,t} \star |f| - |f|\ ||_{L^p(\Omega)} = 0$$

Τελικά, $\lim_{t\to 0+} ||T_p(t)f - f||_{L^p(\Omega)} = 0$ για κάθε $f \in C_c(\Omega)$ και, επειδή η ημιομάδα $(T_p(t))_{t\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0,1]$, η Πρόταση 2.2.6 επιβεβαιώνει την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(T_p(t))_{t\geq 0}$ επί του L^p για $p \in [1.2)$.

Αν $p \in (2, +\infty)$ τότε οι συζυγείς τελεστές $T_p(t)^*$ των $T_p(t)$ παριστάνονται από πυρήνες της μορφής $\tilde{K}(t,x,y) = K(t,y,x)$, οι οποίοι, ασφαλώς, ικανοποιούν την συνθήκη (6.4.17). Από την προηγηθείσα ανάλυση συνάγεται ότι η οικογένεια $(T_p(t)^*)_{t\geq 0}$ συνιστά μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα στο χώρο $L^q(\Omega)$, όπου $q \in [1,2)$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αλλά ο χώρος $L^q(\Omega)$ είναι αυτοπαθής, οπότε με εφαρμογή του Πορίσματος 4.3.5, βρίσκουμε ότι η δυϊκή ημιομάδα $(T_p(t))_{t\geq 0}$ της $(T_p(t)^*)_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής επί του $L^p(\Omega)$ για $p \in (2, +\infty)$.
Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

Θεωρούμε, στη συνέχεια, διαταραγμένες ημιομάδες S στο χώρο Banach $L^p(\Omega)$ με πυρήνες της μορφής

$$\frac{w(x)}{w(y)}K(t,x,y) \tag{6.4.18}$$

όπου w είναι μια συνάρτηση βάρους επί του Ω, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{w(x)}{w(y)} \leq c' \mathrm{e}^{a|x-y|} \tag{6.4.19}$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$. Η ακόλουθη πρόταση είναι εξόχως χαρακτηριστική του συγκεκριμένου πλαισίου μελέτης.

Πρόταση 6.4.2 *Υποθέτουμε ότι η w είναι μια συνάρτηση βάρους επί του που Ω πληροί τη συνθήκη (6.4.19). Τότε οι πυρήνες της μορφής (6.4.18) ορίζουν συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες $S_p = (S_p(t))_{t\geq 0}$ στους χώρους $L^p(\Omega)$, για κάθε $p \in [1, +\infty)$, με αυξητικά φράγματα μικρότερα ή ίσα του αριθμού*

$$w(a,b) = (\frac{a}{m})^m (\frac{m-1}{b})^{m-1}$$

Επιπλέον, για κάθε $c \in (0,b)$, υπάρχει κάποιο $M_c > 0$ ώστε να ισχύει

$$||S_p(t)|| \leq M_c \mathrm{e}^{\omega(a,c)t}\ (t \geq 0, p \in [1, +\infty))$$

Απόδειξη. Έστω $c \in (0,b)$. Θέτουμε

$$w(c,t) = \sup_{s\geq 0}(as - ct^{-1/(m-1)}s^{m/(m-1)})$$

και, μετά απο σχετικά απλούς υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι

$$w(c,t) = t(\frac{a}{m})^m(\frac{m-1}{c})^{m-1}$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (6.4.17) και (6.4.19) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\left|\frac{w(x)}{w(y)}K(t,x,y)\right| &\leq c_2 t^{-n/m}\exp\left(wt + a|x-y|\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{b|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \\
&= c_2 t^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t}\exp\left(a|x-y| - \frac{c|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{(b-c)|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \\
&\leq c_2 t^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t} \\
&\quad \times \exp\left(\sup_{x,y}\left(a|x-y| - \frac{c|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{(b-c)|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \\
&= c_2 t^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t}\mathrm{e}^{\omega(c,t)}\exp\left(-\frac{(b-c)|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \\
&= c_2 t^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t}\exp\left(t(\frac{a}{m})^m(\frac{m-1}{c})^{m-1}\right)\times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{(b-c)|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \\
&= c_2 t^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega(a,c)t}\exp\left(-\frac{(b-c)|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right)
\end{aligned}$$

Αποδείχθηκε, δηλαδή, ότι οι πυρήνες $\frac{w(x)}{w(y)}K(t,x,y)$ ικανοποιούν μία άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m (συνθήκη (6.4.17)) με $\omega(a,c)$ αντί του ω και $b-c$ αντί του b.

Από την Πρόταση 6.4.1 έπεται ότι οι γραμμικοί τελεστές $S_p(t) : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ είναι φραγμένοι για κάθε $t \geq 0$. Έστω $f \in C_c(\Omega)$. Έχουμε, τότε, για $t \geq 0$ και $x,y \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
(wT_p(t)w^{-1}f)(x) &= w(x)(T_p(t)w^{-1}(x)f(x)) \\
&= w(x)\int_\Omega K(t,x,y)w^{-1}(y)f(y)dy \\
&= \int_\Omega w(x)K(t,x,y)w^{-1}(y)f(y)dy \\
&= (S_p(t)f)(x)
\end{aligned}$$

Άρα $S_p(t) = wT_p(t)w^{-1}$ επί του $C_c(\Omega)$. Εφόσον η οικογένεια $(T_p(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$, παίρνουμε για $f \in C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ και $t, s \geq 0$:

$$S_p(t+s)f = wT_p(t+s)w^{-1}f = wT_p(t)w^{-1}wT_p(s)w^{-1}f = S_p(t)S_p(s)f$$

και $S_p(0)f = wT_p(0)w^{-1}f = f$. Μέ άλλα λόγια και, καθώς ο χώρος $C_c(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, \infty)$, η οικογένεια $(S_p(t))_{t\geq 0}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ημιομάδα επί του $L^p(\Omega)$. Επειδή οι ημιομάδες $(T_p(t))_{t\geq 0}$ είναι συνεπείς, συμπεραίνουμε το ίδιο και για τις ημιομάδες $(S_p(t))_{t\geq 0}$.

Θέτουμε $\tilde{K} = \frac{w(x)}{w(y)} K(t, x, y)$. Από την ανισότητα Young παίρνουμε για $f \in L^p(\Omega)$:

$$\begin{aligned} ||S_p(t)f||_{L^p(\Omega)} &= ||\tilde{K}_t \star f||_{L^p(\Omega)} \leq ||\tilde{K}_t||_{L^1(\Omega)} ||f||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq ||\tilde{K}_t||_{L^1(\mathbb{R}^n)} ||f||_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Έστω

$$\tilde{I} = ct^{-n/m} \mathrm{e}^{\omega t} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(- \frac{b|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}} \right) dx$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες λαμβάνουμε

$$\tilde{I} = ct^{-n/m} \mathrm{e}^{\omega t} c_n \int_0^{+\infty} \exp\left(- \frac{br^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}} \right) r^{n-1} dr$$

Εκτελώντας το μετασχηματισμό $\frac{r^m}{t} = s$, οπότε $r = (st)^{1/m}$ και $dr = \frac{1}{m} t^{1/m} s^{(1-m)/m} ds$, έχουμε μετά απο απλοποιήσεις

$$\tilde{I} = \frac{1}{m} c \mathrm{e}^{\omega t} c_n \int_0^{+\infty} \exp(-bs^{1/(m-1)}) s^{(n-m)/m} ds$$

Αφού $(n-m)/m > -1$, το προκύπτον γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Ενοποιώντας όλες τις σταθερές, θα πάρουμε $\tilde{I} = M\mathrm{e}^{\omega t}$ για κάθε $\epsilon \geq 0$ και για κατάλληλη σταθερά $M > 0$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε με $\omega(a, c)$ και $b - c$ στη θέση των ω και b αντιστοίχως, βρίσκουμε

$$ct^{-n/m} \mathrm{e}^{\omega(a,c)t} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-(b-c)|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}} \right) dx = M_c \mathrm{e}^{\omega(a,c)t}$$

για κάθε $t \geq 0$ και για σταθερά M_c εξαρτώμενη μόνον από το c. Αλλά οι πυρήνες $\tilde{K}(t, x, y)$ ικανοποιούν την συνθήκη (6.4.17) με τις προηγούμενες σταθερές, οπως έχουμε ήδη αποδείξει. Επομένως,

$$||\tilde{K}_t||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M_c \mathrm{e}^{\omega(a,c)t}$$

και τελικά

$$||S_p(t)f||_{L^p(\Omega)} \leq M_c \mathrm{e}^{\omega(a,c)t} ||f||_{L^p(\Omega)}$$

για κάθε $t \geq 0$ και $p \in [1, +\infty)$, απ′ όπου προκύπτει η επιθυμητή εκτίμηση. Επειδή $c \in (0, b)$, ισχύει $\omega(a, b) < \omega(a, c)$. Άρα τα αυξητικά φράγματα των ημιομάδων $(S_p(t))_{t\geq 0}$ είναι μικρότερα ή ίσα του αριθμού $\omega(a, b)$.

Απομένει η απόδειξη της ισχυρής συνέχειας των ημιομάδων $(S_p(t))_{t\geq 0}$ επί των χώρων Banach $L^p(\Omega)$ για $p \in [1,+\infty)$. Θα επιβεβαιώσουμε, αρχικά, την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $(S_2(t))_{t\geq 0}$ επί του χώρου Hilbert $L^2(\Omega)$. Έστω, λοιπόν, $f \in L^2(\Omega)$ συνεχής με φορέα περιεχόμενο στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x) > r\}$ για κάποιο $r > 0$. Δηλαδή $f \in C_c(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το αυξητικό φράγμα της $(S_2(t))_{t\geq 0}$ είναι αρνητικό. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\Omega_1 := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : d(x) > r\} \text{ και } \Omega_2 := \Omega - \Omega_1$$

και επιλέγουμε στοιχείο c του διαστήματος $(0,b)$. Παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
||S_2(t)f - f||_{L^2(\Omega)} &\leq ||S_2(t)f - f||_{L^2(\Omega_1)} + ||S_2(t)f - f||_{L^2(\Omega_2)} \\
&= ||wT_2(t)w^{-1}f - f||_{L^2(\Omega_1)} + ||S_2(t)f - f||_{L^2(\Omega_2)} \\
&\leq ||w||_{L^\infty(\Omega_1)}||T_2(t)w^{-1}f - w^{-1}f||_{L^2(\Omega_1)} + \tilde{c}||g_{c,t} \star |f|||_{L^2(\Omega_2)} \\
&\leq ||w||_{L^\infty(\Omega_1)}||T_2(t)w^{-1}f - w^{-1}f||_{L^2(\Omega)} + \tilde{c}||g_{c,t} \star |f| - |f|||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

όπου $g_{c,t}$ όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.4.1. Ισχύει

$$\lim_{t\to 0+} \tilde{c}||g_{c,t} \star |f| - |f|||_{L^2(\Omega)} = 0$$

με επίκληση των μεθόδων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων στις οποίες αναφερθήκαμε στην Πρόταση 6.4.1. Επίσης, επειδή η συνάρτηση βάρους w είναι τοπικά φραγμένη επί του Ω (άρα και επί του Ω_1) λαμβάνουμε $||w||_{L^\infty(\Omega_1)} < +\infty$. Αφού η w είναι τοπικά φραγμένη και μακριά από το μηδέν, έπεται ότι $w^{-1}f \in L^2(\Omega)$. Επομένως λόγω και της ισχυρής συνέχειας της ημιομάδας $(T_2(t))_{t\geq 0}$ επί του $L^2(\Omega)$, έχουμε

$$\lim_{t\to 0+} (||w||_{L^\infty(\Omega_1)}||T_2(t)w^{-1}f - w^{-1}f||_{L^2(\Omega)}) = 0$$

Συνοψίζοντας,

$$\lim_{t\to 0+} ||S_2(t)f - f||_{L^2(\Omega)} = 0$$

για κάθε $f \in C_c(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Καθώς το σύνολο $C_c(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ είναι πυκνό στον $L^2(\Omega)$ και η ημιομάδα $(S_2(t))_{t\geq 0}$ ομοιόμορφα φραγμένη επί του διαστήματος $[0,1]$, από την Πρόταση 2.2.6 συνάγεται η ισχυρή συνέχεια της $(S_2(t))_{t\geq 0}$. Εφαρμόζοντας ένα από τα συμπεράσματα της Πρότασης 6.4.1, καταλήγουμε στην ισχυρή συνέχεια των ημιομάδων $(S_p(t))_{t\geq 0}$ επί των χώρων $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < +\infty$.
Η απόδειξη της Πρότασης είναι πλήρης.

Υποθέτουμε, περαιτέρω, ότι για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει συνάρτηση βάρους w_ε που ικανοποιεί την συνθήκη (6.4.19) για $c' = 1$ και $a(\varepsilon)$ στη θέση του a με $\lim_{|\varepsilon|\to 0} a(\varepsilon) = 0$. Συμβολίζουμε με $T_{\varepsilon,p}$ την ισχυρώς συνεχή ημιομάδα που επάγεται στο χώρο Banach $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1,+\infty)$ από τους πυρήνες της μορφής (6.4.18) με w_ε αντί του w. Σημειώνουμε το γεννήτορα αυτής με $A_{\varepsilon,p}$ και διατυπώνουμε την ακόλουθη κρίσιμη

Πρόταση 6.4.3 *Με τους προηγηθέντες συμβολισμούς, υπάρχουν $\epsilon_0 > 0$ και $M_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ με $|\varepsilon| \leq \epsilon_0$ και κάθε $p \in [1,+\infty)$ να ισχύει*

$$||T_{\varepsilon,p}(t)||_p \leq M_1 \mathrm{e}^{(\omega+1)t} \ (t \geq 0)$$

Αν $\lambda \in \rho(A_p)$, τότε υπάρχει $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ ώστε $\lambda \in \rho(A_p)$ για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ με $|\varepsilon| \leq \epsilon_1$ και μάλιστα

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0} ||R(\lambda, A_{\varepsilon,p}) - R(\lambda, A_\varepsilon)||_p = 0$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ημιομάδα $T_{\varepsilon,p}$ που επάγεται στο χώρο $L^p(\Omega)$ για κάθε $p \in [1, +\infty)$ από πυρήνες της μορφής

$$\hat{K}(t, x, y) = \frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)} K(t, x, y)$$

Όπως διαπιστώσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 6.4.2, οι συγκεκριμένοι πυρήνες ικανοποιούν την συνθήκη (6.4.17). Έστω $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ με $|\varepsilon| \leq \epsilon_0$ για κάποιο ϵ_0. Επειδή $\lim_{|\varepsilon|\to 0} a(\varepsilon) = 0$, μπορούμε να προσδιορίσουμε $\theta > 0$ ώστε $a(\varepsilon) \leq \theta$.

Θέτουμε

$$\hat{I} = ct^{-n/m} e^{\omega t} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\theta|x| - \frac{b|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) dx$$

Ισχυριζόμαστε ότι, για κάθε $b > 0$, υπάρχει $\hat{b} > 0$ ώστε να ισχύει

$$\theta|x| - \frac{b|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}} \leq t - \frac{\hat{b}|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}} \ (t \geq 0)$$

ή ισοδύναμα

$$\theta|x| \leq t + \frac{(b - \hat{b})|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}} \ (t \geq 0)$$

και

$$t^{1/(m-1)}|x| \leq \frac{1}{\theta} t^{m/(m-1)} + \frac{b - \hat{b}}{\theta} |x|^{m/(m-1)} \ (t \geq 0)$$

Πράγματι, από τον Απειροστικό Λογισμό είναι γνωστό ότι, για $b_1, b_2 \geq 0$ και $p, q > 0$ ισχύει

$$b_1^p b_2^q \leq \gamma_1 b_1^{p+q} + \gamma_2 b_2^{p+q}$$

για κατάλληλες σταθερές $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$. Άρα, προς απόδειξη του ισχυρισμού μας, αρκεί, θέτοντας $b_1 = t, b_2 = |x|, p = \frac{1}{m-1}$ και $q = 1$, να βρούμε σταθερές γ_1 και γ_2 ώστε $\gamma_1 < 1/\theta$ και $\gamma_2 < (b - \hat{b})/\theta$. Ασφαλώς κάτι τέτοιο είναι εφικτό και ο ισχυρισμός επιβεβαιώνεται.

Θέτουμε

$$\hat{I} = ct^{-n/m} e^{\omega t} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\theta|x| - \frac{b|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) dx$$

και παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\hat{I} &\leq ct^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(t-\frac{\hat{b}|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right)dx \\
&= ct^{-n/m}\mathrm{e}^{(\omega+1)t}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{\hat{b}|x|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right)dx \\
&= ct^{-n/m}\mathrm{e}^{(\omega+1)t}c_n\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{\hat{b}|r|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right)r^{n-1}dr \\
&= c\mathrm{e}^{(\omega+1)t}c_n\frac{1}{m}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\hat{b}s^{t^{1/(m-1)}}\right)s^{(n-m)/m}ds
\end{aligned}$$

(εκτελώντας το μετασχηματισμό $\frac{r^m}{t}=s$ οπότε $r=(st)^{1/m}$ και $dr=\frac{1}{m}t^{1/m}s^{(1-m)/m}ds$) Εφόσον $\frac{n-m}{m}>-1$, το προκύπτον γενικευμένο ολοκλήρωμα της τελευταίας παράστασης συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Ενοποιώντας όλες τις σταθερές, λαμβάνουμε $\hat{I}\leq M_1\mathrm{e}^{(\omega+1)t}$ για κάθε $t\geq 0$ και για κατάλληλη σταθερά $M_1>0$.

Η ανισότητα Young δίνει, τώρα, για $f\in L^p(\Omega)$ και $p\in[1,+\infty)$:

$$\begin{aligned}
||T_{\varepsilon,p}(t)f||_{L^p(\Omega)} &= ||\hat{K}_t\star f||_{L^p(\Omega)} \\
&\leq ||\hat{K}_t||_{L^1(\Omega)}||f||_{L^p(\Omega)} \\
&\leq ||\hat{K}_t||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||f||_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

ενώ έχουμε και ότι:

$$\begin{aligned}
|\hat{K}(t,x,y)| &= \hat{K}(t,x,y)=\left|\frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)}K(t,x,y)\right| \\
&= \frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)}\Big|K(t,x,y)\Big| \\
&= \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|}|K(t,x,y)| \\
&\leq \mathrm{e}^{\theta|x-y|}|K(t,x,y)|
\end{aligned}$$

Από την προηγηθείσα ανάλυση, είναι φανερό πως

$$||T_{\varepsilon,p}(t)f||_{L^p(\Omega)}\leq M_1\mathrm{e}^{(\omega+1)t}||f||_{L^p(\Omega)}$$

για κάθε $t\geq 0$ και $p\in[1,+\infty)$, απ΄ όπου συνάγεται η επιθυμητή εκτίμηση.

Για $t>0$ και για $\varepsilon\in\mathbb{R}^n$, οι τελεστές $T_p(t)-T_{\varepsilon,p}(t)$ είναι ολοκληρωτικοί με πυρήνες της μορφής $K(t,x,y)(1-w_\varepsilon(x)w_\varepsilon(y)^{-1})$.
Εναλλάσοντας στην σχέση

$$\frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)}\leq \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|}\ \texttt{(σχεδόν για κάθε } x,y\in\Omega\texttt{)}$$

τους ρόλους των x και y, παίρνουμε

$$\left(\frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)}\right)^{-1} = \frac{w_\varepsilon(y)}{w_\varepsilon(x)} \leq \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|} \text{ (σχεδόν για κάθε } x, y \in \Omega)$$

και ισοδύναμα

$$\mathrm{e}^{-a(\varepsilon)|x-y|} \leq \frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)} \leq \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|} \text{ (σχεδόν για κάθε } x, y \in \Omega)$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{e}^{-a(\varepsilon)|x-y|} - 1 \leq \frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)} - 1 \leq \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|} - 1 \text{ (σχεδόν για κάθε } x, y \in \Omega)$$

Στοιχειωδώς αποδεικνύεται ότι, αν $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ με $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, τότε $|a_2| \leq \max\{|a_1|, |a_3|\}$. Στην περίπτωσή μας θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)} - 1\right| &\leq \max\{|\mathrm{e}^{-a(\varepsilon)|x-y|} - 1|, |\mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|} - 1|\} \\ &= \max\{\mathrm{e}^{-a(\varepsilon)|x-y|}|1 - \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|}|, |\mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|} - 1|\} \\ &= |1 - \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|}| \end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$|1 - w_\varepsilon(x) w_\varepsilon(y)^{-1}| \leq |1 - \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x-y|}| \text{ (σχεδόν για κάθε } x, y \in \Omega)$$

Θεωρούμε $\delta \in (0,1)$ και $t \in (\delta, 1/\delta)$. Η αποδειχθείσα ανισοτική σχέση και η συνθήκη (6.4.17) παρέχουν την εκτίμηση

$$||T_p(t) - T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p(\Omega)} \leq c''||q_{\varepsilon,\delta}||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

όπου

$$q_{\varepsilon,\delta}(x) = \delta^{-n/m} \exp(-b\delta^{1/(m-1)}|x|^{m/(m-1)})|1 - \mathrm{e}^{a(\varepsilon)|x|}| \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

Προφανώς $q_{\varepsilon,\delta}(x) \to 0$ κατά σημείο καθώς $|\varepsilon| \to 0$, διότι $\lim_{|\varepsilon|\to 0} a(\varepsilon) = 0$. Είδαμε ότι, για $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ με $|\varepsilon| \leq \epsilon_0$ ισχύει $a(\varepsilon) \leq \theta$ με $\theta > 0$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned} |q_{\varepsilon,\delta}(x)| &\leq \delta^{-n/m} \exp(-b\delta^{1/(m-1)}|x|^{m/(m-1)}) \\ &+ \delta^{-n/m} \exp(-b\delta^{1/(m-1)}|x|^{m/(m-1)} + \theta|x|) \end{aligned}$$

Ο πρώτος προσθετέος της τελευταίας παράστασης είναι, βέβαια, συνάρτηση του $L^1(\mathbb{R}^n)$. Παρατηρούμε ακόμη ότι, θέτοντας $|x| = r$ παίρνουμε

$$\lim_{r\to+\infty} (-b\delta^{1/(m-1)} r^{m/(m-1)} + \theta r) = -\infty$$

Δηλαδή ο δεύτερος προσθετέος της ίδιας παράστασης φράσσεται από σταθερά $N > 0$ και, άρα, είναι στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^n)$ επίσης. Μπορούμε, λοιπόν, να εφαρμόσουμε το Θεώρημα

Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue και να συμπεράνουμε ότι $||q_{\varepsilon,\delta}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ όταν $\varepsilon \to 0$. Τελικά λαμβάνουμε

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} ||T_p(t) - T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p(\Omega)} = 0$$

ομοιόμορφα επί του διαστήματος $(\delta, 1/\delta)$ με $0 < \delta < 1$.

Έστω $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > \omega + 1$. Ιδιαιτέρως, $\lambda > \omega$. Εφόσον το αυξητικό φράγμα της ημιομάδας T_p είναι μικρότερο ή ίσο του ω (βλ. Πρόταση 6.4.1) και, επειδή για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ με $|\varepsilon| \leq \epsilon_1$, ισχύει η εκτίμηση

$$||T_{\varepsilon,p}(t)||_{L^p(\Omega)} \leq M_1 \mathrm{e}^{(\omega+1)t} \ (t \geq 0)$$

από το γενικό θεώρημα παραγωγής ισχυρώς συνεχών ημιομάδων (Θεώρημα 4.1.9) συνάγεται ότι $\lambda \in \rho(A_p) \cap \rho(A_{\varepsilon,p})$. Ασφαλώς ισχύουν

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} ||R(\lambda, A_{\varepsilon,p}) - R(\lambda, A_p)||_{L^p(\Omega)} = \limsup_{|\varepsilon|\to 0} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} ||T_{\varepsilon,p}(t) - T_p(t)|| dt$$

και

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} \int_\delta^{1/\delta} \mathrm{e}^{-\lambda t} ||T_{\varepsilon,p}(t) - T_p(t)||_{L^p(\Omega)} dt = 0$$

Από την Πρόταση 6.4.1 προκύπτει ότι

$$||T_p(t)||_{L^p(\Omega)} \leq c_1 \mathrm{e}^{\omega t} < c_1 \mathrm{e}^{(\omega+1)t} \ (t \geq 0)$$

Επιλέγοντας σταθερά $M_2 > \max\{c_1, M_1\}$, βρίσκουμε ακριβώς όπως και στα τελευταία στάδια της απόδειξης της Πρότασης 6.3.6:

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} \int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-\lambda t} ||T_{\varepsilon,p}(t) - T_p(t)||_{L^p(\Omega)} dt \leq 2M_2 \delta$$

και

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} \int_{1/\delta}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} ||T_{\varepsilon,p}(t) - T_p(t)||_{L^p(\Omega)} dt \leq \frac{2M_2 \mathrm{e}^{-(\lambda-(\omega+1))/\delta}}{\lambda - (\omega+1)}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} ||R(\lambda, A_{\varepsilon,p}) - R(\lambda, A_p)||_{L^p(\Omega)} \leq 2M_2 \left(\delta + \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda-(\omega+1))/\delta}}{\lambda - (\omega+1)} \right)$$

Αφού το δ επιλέχθηκε τυχόν, καταλήγουμε στην επιθυμητή σχέση

$$\limsup_{|\varepsilon|\to 0} ||R(\lambda, A_{\varepsilon,p}) - R(\lambda, A_p)||_{L^p(\Omega)} = 0$$

Η απόδειξη της Πρότασης ολοκληρώθηκε.

Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε τα κεντρικά αποτελέσματα της μελέτης του Kunstmann.

Θεώρημα 6.4.4 *Υποθέτουμε ότι η $(T(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του χώρου Hilbert$L^2(\Omega)$ αποτελούμενη από ολοκληρωτικούς τελεστές των οποίων οι πυρήνες ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m. Έστω $(T_p(t))_{t\geq 0}$ οι ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες που επάγονται συνεπώς στους χώρους Banach $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ μέσω του τύπου*

$$T_p(t)f = T(t)f,\ f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega),\ t \geq 0$$

και έχουν απειροστικούς γεννήτορες A_p. Τότε το φάσμα $\sigma(A_p)$ του τελεστή A_p είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$.

Απόδειξη. Για $\varepsilon, x \in \mathbb{R}^n$ σημειώνουμε με εx το εσωτερικό γινόμενο αυτών, δηλαδή $\varepsilon x = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j$. Θέτουμε

$$w_\varepsilon(x) := \mathrm{e}^{\varepsilon x}, v_\varepsilon(x) := \exp(\varepsilon x - |\varepsilon||x|)$$

για κάθε $x \in \Omega$. Παρατηρούμε ότι οι $w_\varepsilon, v_\varepsilon$ είναι συναρτήσεις βάρους επί του Ω και η πρώτη πληροί τη συνθήκη (6.4.19) με $c' = 1$ και $a = |\epsilon|$, ενώ η δεύτερη ικανοποιεί την ίδια συνθήκη με $c' = 1$ και $a = 2|\varepsilon|$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τα συμπεράσματα των Προτάσεων 6.4.2 και 6.4.3.

Σταθεροποιούμε $p, q \in [1, +\infty)$ με $q \neq p$ και συμβολίζουμε με $T_{\varepsilon,p}$ και $S_{\varepsilon,p}$ τις ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες επί του $L^p(\Omega)$ αποτελούμενες από ολοκληρωτικούς τελεστές των οποίων οι πυρήνες ικανοποιούν την συνθήκη (6.4.19) με τις w_ε και v_ε, αντιστοίχως, στη θέση της w. Έστω $A_{\varepsilon,p}$ και $B_{\varepsilon,p}$ οι γεννήτορες αυτών των ημιομάδων, αντίστοιχα. Ορίζουμε τους χώρους Banach $\tilde{L}^p_\varepsilon = L^p(\Omega, \mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx)$ και $\hat{L}^p_\varepsilon = L^p(\Omega, \mathrm{e}^{-p|\varepsilon||x|}dx)$ και στο εξής θέτουμε $L^p = L^p(\Omega, dx)$. Όπως και στην προηγούμενη Παράγραφο, επιβεβαιώνουμε ότι ο τύπος $W_{\varepsilon,p}f(x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)$ εισάγει έναν ισομετρικό ισομορφισμό του $\tilde{L}^p_\varepsilon$ επί του L^p. Άρα η σχέση

$$\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t) = W_{\varepsilon,p}^{-1} T_p(t) W_{\varepsilon,p}\ (t \geq 0)$$

οριοθετεί μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα τελεστών επί του $\tilde{L}^p_\varepsilon$.
Αν $\tilde{A}_{\varepsilon,p}$ είναι ο γεννήτορας αυτής, ισχύει προφανώς $\sigma(A_{\varepsilon,p}) = \sigma(A_p)$. Κατά τον ίδιο τρόπο, θέτοντας $V_{\varepsilon,p}f(x) := \mathrm{e}^{-|\varepsilon||x|}f(x)$ ορίζουμε έναν ορίζουμε έναν ισομετρικό ισομορφισμό του $\hat{L}^p_\varepsilon$ επί του L^p και, από τον τύπο

$$\hat{T}_{\varepsilon,p}(t) = V_{\varepsilon,p}^{-1} S_p(t) V_{\varepsilon,p}\ (t \geq 0)$$

αποκτούμε μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα επί του $\hat{L}^p_\varepsilon$. Αν $\hat{A}_{\varepsilon,p}$ είναι ο γεννήτορας αυτής, έχουμε $\sigma(\hat{A}_{\varepsilon,p}) = \sigma(B_{\varepsilon,p})$. Εύκολα διαπιστώνουμε πως οι ολοκληρωτικοί τελεστές $\tilde{T}_{\varepsilon,p}$ και $\hat{T}_{\varepsilon,p}$ παριστάνονται απο πυρήνες της μορφής $\mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)}K(t,x,y)$ και, ως εκ τούτου, είναι συνεπείς προς τους τελεστές $T_{\varepsilon,p}(t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Θεωρούμε τυχόν $\lambda \in \rho(A_p)$. Ανάλογα με τα αποδειχθέντα στο Θεώρημα 6.3.10 ισχύει

$$R(\lambda, A_p) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} T_p(t)dt + \mathrm{e}^{-\lambda} T_p(1) R(\lambda, A_p) \tag{6.4.20}$$

και, βέβαια, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} T_p(t)dt \in \mathcal{L}(L^q)$ μέσω του Λήμματος 6.3.9. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.4.3, επιλέγουμε $\epsilon_1 > 0$ ώστε $\lambda \in \rho(A_{\varepsilon,p}) \cap \rho(B_{\varepsilon,p})$ για $|\varepsilon| \le \epsilon_1$. Από τον ορισμό της συνάρτησης βάρους w_ε και, επειδή οι πυρήνες των ολοκληρωτικών τελεστών $T_{\varepsilon,p}(t)$ πληρούν την συνθήκη (6.4.17) όπως είδαμε στην Πρόταση 6.4.2, συμπεραίνουμε ότι

$$\sup_{|\varepsilon|\le\epsilon_1} (||T_{\varepsilon,p}(1/2)||_{\mathcal{L}(L^1,L^p)} + ||T_{\varepsilon,p}(1/2)||_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)}) < +\infty$$

Ασφαλώς $||R(\lambda, A_{\varepsilon,p})||_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} < +\infty$ και τελικά

$$c_2 := \sup_{|\varepsilon|\le\epsilon_1} (||T_{\varepsilon,p}(1)R(\lambda, A_{\varepsilon,p})||_{\mathcal{L}(L^1,L^p)}) < +\infty$$

Από το θεώρημα 1.2.15, οι τελεστές $T_{\varepsilon,p}(1)R(\lambda, A_{\varepsilon,p})$ παριστάνονται για $|\varepsilon| \le \epsilon_1$ από πυρήνες K_ε με

$$|K_\varepsilon(t,x,y)| \le c_2,\ x,y-\text{σχεδόν πανταχού}$$

Ιδιαιτέρως $T_p(1)R(\lambda, A_p) \sim K_0$.

Είναι σχεδόν άμεσο ότι $L^p \subseteq \hat{L}^p_\varepsilon$ και $\tilde{L}^p \subseteq \hat{L}^p_\varepsilon$ Πράγματι, αν $f \in L^p$ παίρνουμε

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{e}^{-p|\varepsilon||x|}dx \le \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty$$

οπότε $f \in \hat{L}^p_\varepsilon$, ενώ σν $f \in \tilde{L}^p_\varepsilon$ λαμβάνουμε

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{e}^{-p|\varepsilon||x|}dx \le \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{e}^{-p\varepsilon x}dx < +\infty$$

(διότι $\varepsilon x \le |\varepsilon x| \le |\varepsilon||x|$ και $p \in [1, +\infty)$). Άρα $f \in \hat{L}^p_\varepsilon$. Επιπλέον

$$T_{\varepsilon,p}(t)L^p \subseteq L^p \subseteq \hat{L}^p_\varepsilon\ (t > 0)$$

και

$$\tilde{T}_{\varepsilon,p}(t)\tilde{L}^p \subseteq \tilde{L}^p \subseteq \hat{L}^p_\varepsilon\ (t > 0)$$

(βλ. Πρόταση 2.2.12) Καθώς για $|\varepsilon| \le \epsilon_1$ έχουμε $\lambda \in \rho(A_{\varepsilon,p})$ και $\lambda \in \rho(B_{\varepsilon,p}) = \rho(\hat{A}_{\varepsilon,p})$, από την Πρόταση 6.1.5 έπεται ότι οι τελεστές $R(\lambda, A_{\varepsilon,p})$ και $R(\lambda, \hat{A}_{\varepsilon,p})$ είναι συνεπείς. Από την ίδια Πρόταση και, επειδή $\lambda \in \rho(A_p) = \rho(\hat{A}_{\varepsilon,p})$, προκύπτει η συνέπεια των τελεστών $R(\lambda, \hat{A}_{\varepsilon,p})$ και $R(\lambda, \tilde{A}_{\varepsilon,p})$. Καταλήγουμε ότι, για $|\varepsilon| \le \epsilon_1$ οι $R(\lambda, A_{\varepsilon,p})$ και $R(\lambda, \tilde{A}_{\varepsilon,p})$ είναι συνεπείς τελεστές. Επομένως οι σχέσεις

$$R(\lambda, \tilde{A}_{\varepsilon,p})f(x) = \mathrm{e}^{\varepsilon x}R(\lambda, A_p)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)\ (f \in \tilde{L}^p_\varepsilon)$$

και

$$R(\lambda, A_{\varepsilon,p})f(x) = \mathrm{e}^{\varepsilon x}R(\lambda, A_p)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)\ (f, \mathrm{e}^{-\varepsilon \cdot}f \in L^p)$$

δίνουν, όπως ακριβώς και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.10, ότι

$$T_{\varepsilon,p}(1)R(\lambda, A_{\varepsilon,p})f(x) = \mathrm{e}^{\varepsilon x}T_p(1)R(\lambda, A_p)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}f(x)$$

όταν $f, \mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot} f \in L^p$ και $|\varepsilon| \leq \epsilon_1$. Προκύπτει λοιπόν

$$K_\varepsilon(x,y) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)} K_0(x,y) \ x,y - \text{σχεδόν παντού}$$

και τελικά

$$|K_0(x,y)| \leq c_2 \mathrm{e}^{-\epsilon_1|x-y|} \ x,y - \text{σχεδόν παντού}$$

Με τη βοήθεια της ανισότητας Young, επιβεβαιώνουμε ότι ο τελεστής $T_p(1)R(\lambda, A_p)$ ανήκει στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(L^q)$. Λόγω της (6.4.20) συμπεραίνουμε ότι $R(\lambda, A_p) \in \mathcal{L}(L^q)$ και, από την Πρόταση 6.1.3, βρίσκουμε ότι $\lambda \in \rho(A_q)$. Άρα $\rho(A_p) \subseteq \rho(A_q)$

Με αντίστροφη συλλογιστική πορεία αποδεικνύεται ότι $\rho(A_q) \subseteq \rho(A_p)$. Έτσι $\rho(A_p) = \rho(A_q)$ για κάθε $p, q \in [1, +\infty)$ με $p \neq q$. Ισοδύναμα $\sigma(A_p) = \sigma(A_q)$ για τα ίδια p, q και συνάγεται η επιθυμητή ανεξαρτησία του φάσματος του τελεστή A_p από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$.

Θεώρημα 6.4.5 *Έστω $(T(t))_{t\geq 0}$ ισχυρώς συνεχής ημιομάδα επί του χώρου Hilbert $L^2(\Omega, dx) = L^2$ με απειροστικό γεννήτορα A αποτελούμενη από ολοκληρωτικούς τελεστές των οποίων οι πυρήνες ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m. Υποθέτουμε ότι η w είναι μια συνάρτηση βάρους στο Ω τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει $c_\epsilon > 0$ για το οποίο ισχύει*

$$\frac{w(x)}{w(y)} \leq c_\epsilon \mathrm{e}^{\varepsilon|x-y|} \ (\text{σχεδόν για κάθε} \ \ x, y \in \Omega) \tag{6.4.21}$$

Τότε η $(T(t))_{t\geq 0}$ επάγει, για $p \in [1, +\infty)$, συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες $(T_{p,w}(t))_{t\geq 0}$ επί των χώρων Banach $L^p(\Omega, w(x)dx)$ με απειροστικούς γεννήτορες $A_{p,w}$ και $\sigma(A_{p,w}) = \sigma(A)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε συναρτήσεις βάρους w, v στο Ω που ικανοποιούν την συνθήκη (6.4.21). Προφανώς πληρούται η συνθήκη (6.4.17) και, με συνδυασμό των Προτάσεων 6.4.2 και 6.4.3, συνάγεται η ύπαρξη, για κάθε $p \in [1, +\infty)$, συνεπών ισχυρώς συνεχών ημιομάδων $(T_{p,w}(t))_{t\geq 0}$ και $(T_{p,v}(t))_{t\geq 0}$ επί των χώρων Banach $L^p(\Omega, w(x)dx) = L^p_w$ και $L^p(\Omega, v(x)dx) = L^p_v$ αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $A_{p,w}$ και $A_{p,v}$ τους γεννήτορες των συγκεκριμένων ημιομάδων και παρατηρούμε ότι αυτές είναι και μεταξύ των συνεπείς.

Έστω $p, q \in [1, +\infty)$ με $p \neq q$ και $\lambda \in \rho(A_{p,w})$. Ανάλογα με το Θεώρημα 6.3.10 αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$R(\lambda, A_{p,w}) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} T_{p,w}(t) dt + \mathrm{e}^{-\lambda} T_{p,w}(1) R(\lambda, A_{p,w}) \tag{6.4.22}$$

Λόγω συνεπείας και, με οδηγό το Λήμμα 6.3.9, βρίσκουμε πως $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} T_{p,w}(t) dt \in \mathcal{L}(L^q_v)$. Μπορούμε να δούμε ότι ο τύπος $U_{p,w} f(x) = w(x)^{1/p} f(x)$ επάγει έναν ισομετρικό ισομορφισμό του L^p επί του L^p_w. Επομένως, θέτοντας για κάθε $t \geq 0$,

$$\tilde{T}_{p,w}(t) = U^{-1}_{p,w} T_{p,w} U_{p,w}$$

λαμβάνουμε μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα επί του L^p για κάθε $p \in [1, +\infty)$. Συμβολίζουμε με $\tilde{A}_{p,w}$ το γεννήτορα της καινούριας ημιομάδας. Είναι ξεκάθαρο ότι η $(\tilde{T}_{p,w}(t))_{t\geq 0}$ αποτελείται από ολοκληρωτικούς τελεστές με πυρήνες της μορφής

$$\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{1/p} K(t,x,y) \ (x,y \in \Omega)$$

Προφανώς $\sigma(A_{p,w}) = \sigma(\tilde{A}_{p,w})$. Από την σχέση (6.4.22) για $\tilde{A}_{p,w}$ και $\tilde{T}_{p,w}(t)$ αντί των $A_{p,w}$ και $\tilde{T}_{p,w}(t)$ και, ακολουθώντας συλλογιστική πορεία ανάλογη αυτής που υιοθετήσαμε στο Θεώρημα 6.4.4, συμπεραίνουμε πως οι τελεστές $\tilde{T}_{p,w}(1)R(\lambda, \tilde{A}_{p,w})$ παριστάνονται από πυρήνες K_0 για τους οποίους ισχύει

$$|K_0(x,y)| \leq c_2 \mathrm{e}^{-\epsilon_1|x-y|}$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και για κάποια $\epsilon_1 > 0$. Αλλά τότε οι τελεστές $T_{p,w}(1)R(\lambda, A_{p,w})$ παριστάνονται από πυρήνες της μορφής

$$\left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{-1/p} K_0(x,y) \ (x,y \in \Omega) \tag{6.4.23}$$

Θα δείξουμε ότι οι πυρήνες (6.4.23) ορίζουν έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή επί του L^q_v. Ισοδύναμα, θα πρέπει να δείξουμε ότι οι πυρήνες της μορφής

$$K_1(x,y) = \left(\frac{v(x)}{v(y)}\right)^{1/q} \left(\frac{w(x)}{w(y)}\right)^{-1/p} K_0(x,y) \tag{6.4.24}$$

$(x, y \in \Omega)$ ορίζουν έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή επί του L^q. Θέτουμε $\epsilon = \epsilon_1/3 > 0$ στην συνθήκη (6.4.18) τόσο για w όσο και για v και παίρνουμε καθώς $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < 0$

$$\begin{aligned} |K_1(x,y)| &\leq D \exp\left((\gamma \frac{\epsilon_1}{3} - \epsilon_1)|x-y| \right) \\ &\leq D \exp\left((\gamma - 1)\epsilon |x-y| \right) \\ &\leq D \mathrm{e}^{-\epsilon|x-y|} \end{aligned}$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και για κάποιο $D > 0$. Με τη βοήθεια της ανισότητας Young ο ισχυρισμός μας επιβεβαιώνεται. Έτσι $T_{p,w}(1)R(\lambda, A_{p,w}) \in \mathcal{L}(L^q_v)$.

Από την σχέση (6.4.22) έπεται ότι $R(\lambda, A_{p,w}) \in \mathcal{L}(L^q_v)$ και, από την Πρόταση 6.1.3, συνάγεται ότι $\lambda \in \rho(A_{q,v})$. Άρα $\rho(A_{p,w}) \subseteq \rho(A_{q,v})$. Με ανάλογα επιχειρήματα λαμβάνεται και ο αντίστροφος εγκλεισμός. Επομένως $\rho(A_{p,w}) = \rho(A_{q,v})$ και, συνακόλουθα, το φάσμα του τελεστή $A_{p,w}$ είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$ αλλα και από την συνάρτηση βάρους w. Καταλήγουμε, δηλαδή, πως $\sigma(A_{p,w}) = \sigma(A)$. Η απόδειξη του Θεωρήματος ολοκληρώνεται.

Προφανώς, για τις κλάσεις διαφορικών τελεστών με τις οποίες ασχοληθήκαμε στο τέλος της Παραγράφου 6.3, εφαρμόζονται πλήρως τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων

6.4.4 και 6.5.5. Μπορούμε, λοιπόν, να αναφερθούμε ακροθιγώς στα ελλειπτικά συστήματα Petrovskij.

Έστω $\Omega = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|\leq m} \xi_\alpha(x) D^\alpha$ ένα σύστημα διαφορικών τελεστών που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:
1. $\xi_\alpha \in B \cup C^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^N))$ για κάποιο $p \in [0,1]$ και κάθε α με $|\alpha| \leq m$. Με $B \cup C^p$ συμβολίζουμε το χώρο των φραγμένων ομοιόμορφα Hölder συνεχών συναρτήσεων.
2. $\sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\theta|=1} \operatorname{Re} \sigma(\sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha(x)(\mathrm{i}\theta)^\alpha) \leq -\delta$ για κάποιο $\delta > 0$.
Με σ δηλώνουμε το φάσμα στο χώρο $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$.

Για $1 \leq p < +\infty$ ορίζουμε την L^p-πραγματοποίηση A_p του συστήματος $\mathcal{A}$ από τις σχέσεις

$$A_p f = \mathcal{A} f, \ f \in Dom(A_p) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)^N$$

Στο άρθρο [1] αποδεικνύεται (Corollary 9.5) ότι ο A_p παράγει μία ισχυρώς συνεχή ημιομάδα τελεστών T_p στον $L^p(\mathbb{R}^n)^N$. Στο βιβλίο του A. Friedmann [14], αποδεικνύεται (Theorem 9.4.2) ότι η T_p παριστάνεται από έναν πυρήνα $K(t,\cdot,\cdot)$ που πληροί μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m. Ιδιαιτέρως τα παραπάνω ισχύουν για $p = 2$. Αυτό μας επιτρέπει να αποδείξουμε την συνέπεια της ημιομάδων T_p για $1 \leq p < +\infty$ και να τεκμηριώσουμε φασματική ανεξαρτησία για τον τελεστή A_p.

Θα κλείσουμε το Κεφάλαιο με μια αξιόλογη

Παρατήρηση 6.4.6 *Το θεώρημα 6.4.5 δεν ισχύει για εκθετικές συναρτήσεις βάρους. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την ημιομάδα Gauss του $L^p(\mathbb{R}, dx)$. Όπως διαπιστώσαμε στην Εφαρμογή 3.4.4, η $(G_p(t))_{t\geq 0}$ είναι ισχυρώς συνεχής για $p \in [1, +\infty)$, άρα και για $p = 2$. Η $(G_2(t))_{t\geq 0}$ επί του $L^2(\mathbb{R}, dx)$ αποτελείται από ολοκληρωτικούς τελεστές, των οποίων οι πυρήνες ικανοποιούν μια άνω εκτίμηση Gauss τάξεως m. Γεννήτορας της $(G_2(t))_{t\geq 0}$ είναι ο γραμμικός τελεστής $A_2 = -H_{0,2} = \bar{\Delta}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{f \in L^2(\mathbb{R}, dx) : \Delta f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$. Έστω $(G_{p,w}(t))_{t\geq 0}$ οι επαγόμενες συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες επί των χώρων Banach $L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$ για $w(x) = \mathrm{e}^x$. Συμβολίζουμε με $A_p = -H_{0,p,w}$ τους γεννήτορες αυτών. Είδαμε στην Παράγραφο 6.2 στο τρίτο παράδειγμα, ότι ο τελεστής Δ στον $L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx), f$* απόλυτα συνεχής, *$\Delta f \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x dx)$ διαθέτει p-εξαρτώμενο φάσμα ίσο με $\{(\frac{1}{p}+\mathrm{i}s)^2 : s \in \mathbb{R}\}$. Έπεται ότι το φάσμα του A_p εξαρτάται απο τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$, σε αντίφαση με το Θεώρημα 6.4.5.*

Κεφάλαιο 7

Εκτιμήσεις Μεταθετών και L^p-φασματική ανεξαρτησία διαφορικών τελεστών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε το ρόλο που διαδραματίζουν οι ανώτερες εκτιμήσεις Gauss στην ανεξαρτησία από τον αριθμό p, του L^p-φάσματος διαφορικών τελεστών. Το τελευταίο κεφάλαιο της Εργασίας μας είναι αφιερώμενο στο άρθρο [16], στο οποίο βασικό εργαλείο σπουδής αποτελούν κατάλληλες εκτιμήσεις μεταθετών. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μεταθέτες χρησιμοποιούνται ουσιωδώς και στο άρθρο [18], προκειμένου να εξεταστεί κατά πόσο το φάσμα συγκεκριμένης κλάσης ψευδοδιαφορικών τελεστών είναι ανεξάρτητο του p.

Και οι Hieber-Schrohe, δοθέντος ενός διαφορικού τελεστή A, όχι κατ΄ ανάγκη αυτοσυζυγούς, υιοθετούν την άποψη ότι αυτός θα πρέπει να παράγει μιαν ισχυρώς συνεχή ημιομάδα T επί του $L^2(\Omega)$, όπου Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με δυνατότητα να επεκταθεί συνεπώς στου χώρους Banach $L^p(\Omega)$ για $p \in [1, +\infty)$. Ακριβέστερα υποθέτουν ότι υπάρχουν ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p επί των χώρων $L^p(\Omega)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$T_p(t)f = T(t)f,\ f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega), t > 0$$

Ο γεννήτορας της ημιομάδας T_p σημειώνεται με A_p. Όπως είδαμε, ο W. Arendt υπέθεσε ότι οι $T(t)$ είναι ολοκληρωτικοί τελεστές με πυρήνες που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$|K(t, x, y)| \leq ct^{-n/2}\mathrm{e}^{\omega t} \exp(-a_1 \frac{|x - y|^2}{t}),\ (t > 0)$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και για κατάλληλες σταθερές $\omega \geq 0, a_1 > 0, c > 0$. Οι Hieber-Schrohe απέδειξαν πως ακόμα και από μία εκτίμηση ασθενέστερη της προηγούμενης, με πολυωνυμική μόνον κάθοδο σε $|x - y|$ κατάλληλης τάξης, μπορεί κάποιος να συμπεράνει ότι το φάσμα του A_p είναι ανεξάρτητο του p. Αρκεί να επιβληθούν συγκεκριμένες συνθήκες μεταθετών. Ειδικότερα, για στοιχείο λ του L^p-επιλύοντος συνόλου επιζητείται οι επαναληπτικοί μεταθέτες $ad^a x(\lambda I - A_p)^{-1}$ να είναι φραγμένοι επί του L^p για κάθε πολυδείκτη α με $|a| \leq n+1$ προκειμένου το λ να ανήκει και στο L^q-επιλύον σύνολο για τυχαίο q.

Τα βασικά αποτελέσματα του άρθρου περιέχονται στο Θεώρημα 7.1.1 και στο Πόρισμα 7.1.2. Ακολουθούν εφαρμογές στους ομοιόμορφα ελλειπτικούς τελεστές δεύτερης τάξης σε μορφή απόκλισης με πραγματικούς (όχι αναγκαία συμμετρικούς) ή μιγαδικούς συντελεστές.

7.1 Τα κεντρικά αποτελέσματα και μερικές Εφαρμογές

Σε όλη την έκταση της παραγράφου θα συμβολίζουμε με Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0$ ένας πολυδείκτης. Δοθέντος ενός τελεστή $S : C_c^\infty(\Omega) \to D'(\Omega)$ θέτουμε $ad^0 x_j(S) = S$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ και ορίζουμε τους μεταθέτες ανώτερης τάξης σύμφωνα με το επαναληπτικό σχήμα

$$ad^k x_j(S) = [x_j, ad^{k-1} x_j(S)],\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Εδώ με x_j σημειώνουμε τον τελεστή του πολλαπλασιασμού επί την $j-$οστή συνάρτηση συντεταγμένων ο οποίος άρα τόσο στον $C_c^\infty(\Omega)$ όσο και στο χώρο $D'(\Omega)$. Τέλος θέτουμε

$$ad^\alpha x(S) = ad^{a_1} x_1 ad^{a_2} x_2 \ldots ad^{a_n} x_n(S)$$

και επισημαίνουμε ότι στη θέση του τελεστή S θα μπορούσαμε να έχουμε ένα τετραγωνικό σύστημα τελεστών, οπότε θα ερμηνεύαμε τον παράγοντα x_j ως πολλαπλασιασμό επί $x_j I$ και θα χρησιμοποιούσαμε τους ίδιους συμβολισμούς.

Μπορούμε, στο σημείο αυτό, να διατυπώσουμε τα δύο κεντρικά αποτελέσματα των Hieber-Schrohe

Θεώρημα 7.1.1 *Έστω $1 \leq q_1, q_2 < \infty$, $q_1 \leq p_0 \leq q_2$ και A ο απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας τελεστών T στον L^{p_0}. Υποθέτουμε ότι $\{T_q : q_1 \leq q \leq q_2\}$ είναι μια οικογένεια συνεπών ισχυρώς συνεχών ημιομάδων στους χώρους Banach με γεννήτορες A_q. Δεχόμαστε ότι, για δεδομένο $p \in [q_1, q_2]$ δοθέν $\lambda \in \rho(A_p)$ και όλους τους πολυδείκτες α με $|\alpha| \leq n+1$, ισχύουν οι εξής συνθήκες:*
(A1) $\alpha d^\alpha x T_p(1) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^p(\Omega))$.
(A2) $\alpha d^\alpha x T_p(1) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^\infty(\Omega))$.
(A3) $\alpha d^\alpha x(\lambda I - A_p)^{-1} \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$.
Τότε $\lambda \in \rho(A_q)$. Ειδικότερα, το φάσμα του A_q είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό q για κάθε $q \in [q_1, q_2]$ στην περίπτωση κατά την οποία οι συνθήκες (A1),(A2) και (A3) ισχύουν για κάθε $p \in [q_1, q_2]$

Απόδειξη.
Έστω $\lambda \in \rho(A_p)$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A_p) &= (\lambda I - A_p)^{-1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds \\
&= \int_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds + \int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds \\
&= \int_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds + \int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda(s-2)} T_p(1) T_p(s-2) T_p(1) ds \\
&= \int_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds + \mathrm{e}^{-2\lambda} T_p(1) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T_p(t) dt T_p(1) \\
&= \int_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds + \mathrm{e}^{-2\lambda} T_p(1) (\lambda I - A_p)^{-1} T_p(1)
\end{aligned}$$

Ακριβώς όπως και στο Λήμμα 6.3.9, αποδεικνύεται ότι $\int_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda s} T_p(s) ds \in \mathcal{L}(L^q(\Omega))$. Προκειμένου να εφαρμόσουμε το συμπέρασμα της Πρότασης 6.1.3 και να καταλήξουμε ότι $\lambda \in \rho(A_q)$, αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι ο γραμμικός τελεστής $S_p = T_p(1)(\lambda I - A_p)^{-1} T_p(1)$ ανήκει στην άλγεβρα Banach $\mathcal{L}(L^q(\Omega))$.

Παρατηρούμε ότι, αν A, B, C είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, τότε

$$\begin{aligned}
[x_j, ABC] &= x_j ABC - ABC x_j \\
&= (x_j A - A x_j) BC + A(x_j B - B x_j) C + AB(x_j C - C x_j) \\
&= [x_j, A] BC + A[x_j, B] C + AB[x_j, C]
\end{aligned}$$

Παρουσιάζονται προφανείς αναλογίες με τον κανόνα του Leibnitz για την παραγώγιση γινομένου συναρτήσεων f, g, h. Δηλαδή $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Για τη n-οστή παράγωγο έχουμε

$$(fgh)^{(n)} = \sum_{i+j+k=n} c_{ikj} f^{(i)} g^{(j)} h^{(k)}$$

όπου $k = n - i - j$ και c_{ikj} είναι κατάλληλες σταθερές. Έτσι παίρνουμε

$$\alpha d^{\alpha} x(S_p) = \sum_{a_1+a_2+a_3 \leq \alpha} c_{a_1 a_2 a_3} \alpha d^{a_1} x(T_p(1)) \alpha d^{a_2} x(\lambda I - A_p)^{-1} \alpha d^{a_3} x(T_p(1)) \tag{7.1.1}$$

Γνωρίζουμε (βλ. Θεώρημα 1.2.15) ότι λαμβάνουμε έναν ισομετρικό ισομορφισμό μεταξύ των χώρων $\mathcal{L}(L^1(\Omega), L^{\infty}(\Omega))$ και $L^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ αν συσχετίσουμε κάποιον τελεστή $S \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^{\infty}(\Omega))$ με τον ολοκληρωτικό πυρήνα του. Τούτο, σε συνδυασμό με τις συνθήκες (A1) και (A2) εφαρμοσμένες για πολυδείκτες $\alpha = 0$, υποδηλώνει ότι ο τελεστής $S \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^{\infty}(\Omega))$ και παριστάνεται από έναν ολοκληρωτικό πυρήνα $K \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega)$. Ισχύει $|K(x, y)| \leq D_1$ σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$, όπου D_1 γνήσια θετική σταθερά. Ο επαναληπτικός μεταθέτης $\alpha d^{\alpha} x(S_p)$ έχει ολοκληρωτικό πυρήνα $K_a(x, y) = (x - y)^{\alpha} K(x, y)$ σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$. Από τη σχέση (7.1.1) και με εφαρμογή των συνθηκών (A1), (A2)και (A3), βρίσκουμε πως

$$\alpha d^{\alpha} x(S_p) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^{\infty}(\Omega)),\ |\alpha| \leq n + 1$$

Πάλι από το Θεώρημα 1.2.15, συμπεραίνουμε ότι $K_a \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq n+1$.

Αν $\alpha = (n+1, 0, 0, \ldots)$ υπάρχει $D_2 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|K_a(x,y)| = |x_j - y_j|^{n+1}|K(x,y)| \leq D_2$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και για κάθε $j = 1, 2, \ldots$. Αλλά

$$|x-y| = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leq n \max |x_j - y_j|$$

Επομένως

$$\begin{aligned} |x-y|^{n+1}K(x,y) &\leq n^{n+1} \max |x_j - y_j|^{n+1}|K(x,y)| \\ &\leq n^{n+1} D_2 \end{aligned}$$

και, θέτοντας $D_3 = n^{n+1}D_2$, παίρνουμε, $|K(x,y)| \leq D_3|x-y|^{-n-1}$ σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$. Έστω $D' = \max\{D_1, D_3\}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\leq D' + D'|x-y|^{-n-1} \\ &\leq D'(1 + |x-y|^{-n-1}) \\ &\leq D(1 + |x-y|)^{-n-1} \end{aligned}$$

όπου D γνήσια θετική σταθερά. Με τη βοήθεια της ανισότητας Young λαμβάνουμε.

$$||S_p f||_{L^q(\Omega)} = ||K \star f||_{L^q(\Omega)} \leq ||K||_{L^1(\Omega)}||f||_{L^q(\Omega)}$$

Παρατηρούμε ότι $||K||_{L^1(\Omega)} < +\infty$ διότι

$$\begin{aligned} \int_\Omega (1+|x|)^{-n-1}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1}dx \\ &= c_n \int_0^\infty (1+r)^{-n-1}r^{n-1}dr < +\infty \end{aligned}$$

Πράγματι, λοιπόν, ο τελεστής $S_p = T_p(1)(\lambda I - A_p)^{-1}T_p(1)$ είναι στοιχείο της άλγεβρας Banach $\mathcal{L}(L^q(\Omega))$ και, συνακόλουθα $(\lambda I - A_p)^{-1} \in \mathcal{L}(L^q(\Omega))$. Από την Πρόταση 6.1.3 καταλήγουμε ότι $\lambda \in \rho(A_q)$.
Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Πόρισμα 7.1.2 *Έστω A απειροστικός γεννήτορας μιας ισχυρώς συνεχούς μονοπαραμετρικής ημιομάδας T στο χώρο Hilbert $L^2(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι οι $T(t)$ είναι ολοκληρωτικοί τελεστές με πυρήνες $K(t,\cdot,\cdot)$ για τους οποίους ισχύει η εκτίμηση*

$$|K(1,x,y)| \leq C(1+|x-y|)^{-2n-2} \tag{7.1.2}$$

για κάποια σταθερά C και σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$. Έστω $\{T_p : 1 \leq p < +\infty\}$ οικογένεια συνεπών ισχυρώς συνεχών ημιομάδων στους χώρους Banach $L^p(\Omega)$ με γεννήτορες

A_p ώστε $T_2 = T$. Τότε πληρούνται οι συνθήκες (A1) και (A2) του προηγούμενου θεωρήματος και το φάσμα του A_p είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [1, +\infty)$ αν ικανοποιείται και η συνθήκη (A3) για κάθε $p \in [1, +\infty)$. Επίσης η εκτίμηση (7.1.2) ισχύει και όταν έχουμε το κλασσικό άνω φράγμα πυρήνα θερμότητας (ανώτερη εκτίμηση Gauss τάξεως m):

$$|K(t,x,y)| \leq Ct^{-n/m}\mathrm{e}^{\omega t}\exp\left(\frac{-b|x-y|^{m/(m-1)}}{t^{1/(m-1)}}\right) \tag{7.1.3}$$

για κάθε $t > 0$, σχεδόν για κάθε $x, y \in \Omega$ και κατάλληλες σταθερές $\omega \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$, και $m > 1$.

Απόδειξη.

Θα επιβεβαιώσουμε πλήρως την ισχύ της συνθήκης (A1). Για την απόδειξη της συνθήκης (A2) εργαζόμαστε ανάλογα.

Είναι προφανές ότι ο ολοκληρωτικός πυρήνας του τελεστή $\alpha d^\alpha x T_p(1)$ είναι ίσος με $(x-y)^\alpha K(1,x,y)$ όπου $|\alpha| \leq n+1$. Βεβαίως $(x-y)^\alpha \leq |x-y|^{|\alpha|}$ διότι

$$(x_1-y_1)^{a_1}(x_2-y_2)^{a_2}\dots(x_n-y_n)^{a_n} \leq |x-y|^{a_1+\dots+a_n}$$

Αρα θα πάρουμε από την ανισότητα (7.1.2)

$$|(x-y)^\alpha K(1,x,y)| \leq C(1+|x-y|)^{-2n-2}|x-y|^{|a|}$$

Έστω $f \in L^1(\Omega)$. Η ανισότητα Young δίνει

$$\begin{aligned} ||\alpha d^\alpha x T_p(1) f||_{L^p(\Omega)} &= ||[(x-y)^a K(1,x,y)] \star f||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq ||[(x-y)^a K(1,x,y)]||_{L^p(\Omega)} ||f||_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_\Omega ([1+|x|]^{-2n-2})^p |x|^{|\alpha|p} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} ([1+|x|]^{-2(n+1)})^p |x|^{|\alpha|p} dx$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} ([1+|x|]^{-2(n+1)})^p |x|^{|\alpha|p} dx < +\infty$$

αν και μόνον αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2(n+1)p+|\alpha|p} dx < +\infty$$

Επιλέγοντας πολικές συντεταγμένες λαμβάνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2(n+1)p+|\alpha|p} dx = c_n \int_0^{+\infty} r^{-2(n+1)p+|\alpha|p} r^{n-1} dr$$

Επειδή $|\alpha| \leq n+1$ έχουμε

$$\begin{aligned} -2(n+1)p+|\alpha|p+n-1 &\leq -2(n+1)p+(n+1)p+n-1 \\ &= -(n+1)p+n-1 \\ &= -np-p+n-1 \\ &< -1 \end{aligned}$$

αφού οπωσδήποτε ισχύει $n < np+p$. Επομένως

$$\int_0^{+\infty} r^{-2(n+1)p+|\alpha|p} r^{n-1} dr < +\infty$$

και τελικά

$$||(x-y)^\alpha K(1,x,y)||_{L^p(\Omega)} < +\infty$$

Είναι φανερό ότι $\alpha d^\alpha x T_p(1) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^p(\Omega))$. Δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη (A1). Δοθέντως ότι ανάλογα αποδεικνύεται πλήρωση της συνθήκης (A2), τεκμηριώνεται ανεξαρτησία του φάσματος του A_p από τον αριθμό p στην περίπτωση κατά την οποία ικανοποιείται και η συνθήκη (A3) για κάθε $p \in [1,+\infty)$, καθώς τότε θα εφαρμοστεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7.1.1.

Θέτοντας $t=1$ στο κλασσικό άνω φράγμα του πυρήνα θερμότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned} |K(1,x,y)| &\leq ce^\omega \exp(-b|x-y|^{m/(m-1)}) \\ &= D\exp(-b|x-y|^{m/(m-1)}) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(r) = \exp(-br^{m/(m-1)})(1+r)^{2n+2}$ και παρατηρούμε πως $f(0)=1$, $\lim_{r\to+\infty} f(r) = 0$. Έπεται ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη. Έτσι υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε να ισχύει

$$\exp(-br^{m/(m-1)})(1+r)^{2n+2} \leq C$$

ή ισοδύναμα $\exp(-br^{m/(m-1)}) \leq C(1+r)^{-2n-2}$. Άρα

$$\exp(-b|x-y|^{m/(m-1)}) \leq \frac{C}{D}(1+|x-y|)^{-2n-2}$$

και για $\tilde{C} = \frac{C}{D}$ λαμβάνουμε την εκτίμηση (7.1.2) και στην ειδική περίπτωση ολοκληρωτικού πυρήνα που εξετάζουμε.

Θα ολοκληρώσουμε το Κεφάλαιο με ορισμένες εφαρμογές της αναπτυχθείσας θεωρίας. Έστω, λοιπόν, $\Omega = \mathbb{R}^n$ και $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ για κάθε $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή Q επί του $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} dx \tag{7.1.4}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\theta_1 > 0$ για το οποίο ισχύει η συνθήκη ελλειπτικότητας

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta_1|\xi|^2 \tag{7.1.5}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με H τον μη αρνητικό αυτοσυζυγή γραμμικό τελεστή που σχετίζεται με την Q. Πρόκειται για έναν (αυστηρώς)ελλειπτικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης σε μορφή αποκλισης με πραγματικούς, όχι αναγκαία συμμετρικούς, συντελεστές που υπόκειται σε γενικευμένου τύπου συνοριακές συνθήκες Neumann και δίνεται από τη σχέση

$$Hf = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Ο $-H$ παράγει μια ισχυρώς συνεχή ημιομάδα $T = \mathrm{e}^{-Ht}$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Οι τελεστές $T(t)$ είναι ολοκληρωτικοί με πυρήνα $K(t,\cdot,\cdot)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 \leq K(t,x,y) \leq ct^{-n/2}\mathrm{e}^{\omega t}\exp(-b\frac{|x-y|^2}{t})$$

σχεδόν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ομοιόμορφα για κάθε $t > 0$ και για σταθερές $b, c > 0$ και $\omega \geq 0$. Η παραπάνω συνθήκη είναι μια ανώτερη εκτίμηση Gauss η οποία προκύπτει από την (7.1.3) θέτοντας $m = 2$. Η T επάγει συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p στους χώρους Banach με γεννήτορες $-H_p$. Για την απόδειξη αυτών των ισχυρισμών παραπέμπουμε στο άρθρο [3]. Σύμφωνα με το Πόρισμα (7.1.2) πληρούνται οι συνθήκες (A1) και (A2), οπότε αρκεί να επιβεβαιώσουμε την ισχύ της (A3) προκειμένου να τεκμηριώσουμε φασματική ανεξαρτησία.

Θεωρούμε τους χώρους

$$D_{p,c} = \{f \in Dom(H_p) : supp(f) \text{ συμπαγές}\}$$

$$R_{p,c} = (\lambda I + H_p)D_{p,c},\ \lambda \in \mathbb{C}$$

και υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη

$$(D1):\ x_j f \in Dom(H_p),\ \forall f \in D_{p,c},\ j = 1, 2, \ldots$$

Επειδή ο H_p δρα ως διαφορικός τελεστής στον $D_{p,c}$ έπεται ότι κάθε $f \in R_{p,c}$ έχει συμπαγή φορέα. Επομένως, παρατηρώντας ότι όλες οι προκύπτουσες συνθέσεις ορίζονται καλώς, έχουμε ότι η ποσότητα

$$\begin{aligned}
& (\lambda I + H_p)^{-1}[x_j, H_p](\lambda I + H_p)^{-1}f \\
= \;& (\lambda I + H_p)^{-1}x_j H_p(\lambda I + H_p)^{-1}f - (\lambda I + H_p)^{-1}H_p x_j(\lambda I + H_p)^{-1}f \\
& +(\lambda I + H_p)^{-1}x_j\lambda I(\lambda I + H_p)^{-1}f - (\lambda I + H_p)^{-1}x_j\lambda I(\lambda I + H_p)^{-1}f \\
= \;& -(\lambda I + H_p)^{-1}x_j(\lambda I + H_p)(\lambda I + H_p)^{-1}f \\
& +(\lambda I + H_p)^{-1}(\lambda I + H_p)x_j(\lambda I + H_p)^{-1}f \\
= \;& [x_j, (\lambda I + H_p)^{-1}]f
\end{aligned}$$

ανήκει στο χώρο $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ για $\lambda \in \rho(-H_p)$ και $f \in R_{p,c}$. Υποθέτοντας, επιπλέον, ότι πληρούνται οι συνθήκες
$(D2)$: ο χώρος $D_{p,c}$ είναι πυκνός στο $Dom(H_p)$ και
$(D3)$: $[x_j, H_p] \in \mathcal{L}(Dom(H_p), L^p(\mathbb{R}^n))$ για $j = 1, 2, \ldots$
συμπεραίνουμε ότι ο μεταθέτης $[x_j, (\lambda I + H_p)^{-1}]$ επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή επί του $L^p(\mathbb{R}^n)$. Με επαναληπτική διαδικασία λαμβάνουμε την (A3).

Συνοψίζοντας, αν οι συνθήκες $(D1)$,$(D2)$ και $(D3)$ ικανοποιούνται για κάθε $p \in [p_1, p_2]$ όπου $1 < p_2 < p_2 < \infty$, ισχύει $\lambda \in \rho(-H_q)$ για $q \in [p_1, p_2]$ και το φάσμα του $-H_p$ είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό p. Άρα και το L^p-φάσμα του H είναι ανεξάρτητο του p.

Έστω, τώρα $\Omega = \mathbb{R}^n$, για $n = 1, 2$ και $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\mu > 0$ έτσι ώστε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ να πληρούται η συνθήκη:

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2 \tag{7.1.6}$$

όπου $\xi \in \mathbb{C}^n$. Έστω H ο τελεστής ιδίου τύπου με την προηγούμενη εφαρμογή που σχετίζεται με την τετραγωνική μορφή Q οριζόμενη επί του $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ από τη σχέση (7.1.4). Αντιλαμβανόμαστε ότι πρόκειται για ελλειπτικό τελεστή με μιγαδικούς συντελεστές. Συμβολίζουμε με $T = \mathrm{e}^{-Ht}$ την ισχυρώς συνεχή ημιομάδα επί του $L^2(\mathbb{R}^n)$ που παράγεται από τον $-H$. Σύμφωνα με αποτελέσματα ευρισκόμενα στο άρθρο [4], οι $T(t)$ είναι ολοκληρωτικοί τελεστές με πυρήνες που ικανοποιούν μια εκτίμηση της μορφής (7.1.3), ενώ παράλληλα επάγονται συνεπείς ισχυρώς συνεχείς ημιομάδες T_p επί των χώρων Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου $1 < p < +\infty$, με γεννήτορες $-H_p$. Ακολουθώντας συλλογιστική πορεία ανάλογη αυτής που περιγράφουμε, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\sigma(H_p)$ είναι ανεξάρτητο από τον αριθμό $p \in [p_1, p_2]$, $1 < p_1, p_2 < +\infty$,αν ικανοποιούνται οι συνθήκες $(D1), (D2)$ και $(D3)$.

Στο άρθρο των Hieber-Schrohe υπάρχει εφαρμογή των κεντρικών αποτελεσμάτων τους και στην περίπτωση τελεστών Schrödinger και ελλειπτικών συστημάτων Petrovskij. Χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη θεωρία των αναλυτικών ημιομάδων επιτυγχάνεται φασματική ανεξαρτησία, μέσω εκτιμήσεων μεταθετών, για κατάλληλες πολλαπλασιαστικές διαταραχές του τελεστή Laplace Δ καθώς και για ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δευτέρης τάξης στον $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, που πληρούν τη συνθήκη Lopatinskij-Shapiro.

Βιβλιογραφία

[1] Amann H.,Hieber M., Simonett G.,, *Bounded $H_\infty-$calculus for elliptic operators.* Diff. and Int. Equations, Volume 7 (1994), pp 613-653.

[2] Arendt W., *Gaussian Estimates and Interpolation of the spectrum in L^p.* Diff. and Int. Equations, Volume 7, Number 5 (1994), pp 1153-1168.

[3] Arendt W., Elst, A.F.M. TER, *Gaussian Estimates for second order elliptic operators with boundary conditions.* J. of Op. Theory 38(1997), Th. 4.4, p. 107.

[4] Auscher P., McIntosh A., Tchamitchian P., *Noyau de la Chaleur d'operateurs elliptiques complexes.* Math Research Letters 1(1994), pp 35-44.

[5] Boyd D. W., *The spectrum of the Cesaro operator.* Acta Sci. Math. 29(1968), pp 31-34.

[6] Brezis H., *Συναρτησιακή Ανάλυση. Θεωρία και εφαρμογές.* Εκδόσεις ΕΜΠ, 1997.

[7] Davies E. B., *Heat Kernels and Spectral Theory.* Cambridge Univ. Press, 1989.

[8] Davies E. B., *Linear Operators and their spectra.* Cambridge Univ. Press, 2007.

[9] Davies E. B., *One-parameter semigroups.* Acad. Press, 1980.

[10] Davies E. B., *Quantum theory of open systems.* Acad. Press, 1976.

[11] Dunford N.- Schwartz J. T., *Linear Operators Vol. I.* Int. Publisher, 1958.

[12] Engel K. J.- Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer, 1999.

[13] Evans L., *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[14] Friedman. A., *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice Hall, Englewood NJ, 1964.

[15] Hempel H., Voigt J., *The spectrum of a Schrödinger operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ is p-independent.* Comm. Math. Phys. 104 (1986), pp. 243-250.

[16] Hieber H., Schrohe E., *L^p-spectral independence of elliptic operators via commutator estimates.* Positivity 3 (1999), pp. 259-272.

[17] Kunstmann. P. C., *Heat Kernel estimates and L^p-spectral independence of elliptic operators*. Bull. London Math. Soc. 31 (1999), pp. 345-353.

[18] Leopold L., Schrohe E., *Invariance of the L^p-spectrum for hypoelliptic operators via commutator estimates*. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), pp. 3679-3687.

[19] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, 1996.

[20] Lumer G., Phillips R.S., *Dissipative operators in Banach space,Pacific Journal Math. 1961, pp. 679-698*

[21] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β., *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*. Αίθρα, 1989.

[22] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.

[23] Schaefer H.H., *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer, 1974.

[24] Schaefer H.H., *Topological Vector Spaces*. Springer, 1980.

[25] Simon B., *Schrödinger semigroups*. Bull. Amer. Math. Soc., 1982.

[26] Stein E.M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of functions*. Princeton Univ. Press, 1970.

[27] Sturm K. Th., *On the $L^p(\mathbb{R}^n)$ spectrum of Uniformly Elliptic Operators on Riemannian Manifolds* . Journal of Funct. Anal. 118 (1993), pp. 442-453.

[28] Κατάβολος Α., *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*. Συμμετρία, 2008.