ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Φαλιάγκας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Για την απόκτιση Μεταπτυχιακού Δίπλώματος Ειδίκευσης στην κατεύθυνση των

Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Σύμφωνα με το ΦΕΚ Β 706/15-4-2009.

Εξεταστική Επιτροπή:

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Αλικάκος
Επίκουρη Καθηγήτρια Γεωργία Καραλή
Επίκουρος Καθηγητής Γεράσιμος Μπαρμπάτης

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στα…

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

που απονέμει το

Τμήμα Μαθηματικών

του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την 12/7/2012 από Εξεταστική Επιτροπή

αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Ν. ΑΛΙΚΑΚΟΣ (επιβλέπων Καθηγητής)	……………	……………
Γ. ΚΑΡΑΛΗ	……………	……………
Γ. ΜΠΑΡΜΠΑΤΗΣ	……………	……………

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Φαλιάγκας

29 Ιουνίου 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι τανυστές ορμής-ενέργειας παίζουν έναν θεμελιώδη ρόλο στη σύγχρονη φυσική (βλ. [28] κεφ. 3, ενότητα 6, σχόλιο 8 και αναφορές εκεί· [34]) εδώ και πάνω από 100 χρόνια. Σύμφωνα με την wikipedia[1] «*Ο τανυστής ορμής-ενέργειας είναι μια τανυστική ποσότητα της φυσικής που περιγράφει την πυκνότητα και τη ροή ενέργειας και ορμής στο χωροχρόνο, γενικεύοντας τον τανυστή της τάσης της νευτώνειας φυσικής. Είναι ένα χαρακτηριστικό της ύλης, της ακτινοβολίας και των μη-βαρυτικών δυναμικών πεδίων. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας είναι η πηγή του βαρυτικού πεδίου στις πεδιακές εξισώσεις της γενικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein, όπως η μάζα είναι η πηγή του βαρυτικού πεδίου στη νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας*».

Στα μαθηματικά, όπως φαίνεται, οι πρώτες σχετικές εργασίες με τους τανυστές ορμής-ενέργειας ήταν η ανάπτυξη του λογισμού των μετασχηματισμών Legendre για πολλαπλά ολοκληρώματα από τον Καραθεοδωρή κατά τα έτη 1922-1928 (βλ. [28], προηγούμενη αναφορά), όπου εμφανίζεται και ο γενικός ορισμός του τανυστή ορμής-ενέργειας. Βλ. σχετικά και [53].

Ο σκοπός της εργασίας αυτής ήταν αρχικά η συλλογή, με συστηματικό τρόπο, μεθόδων για την κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας που σχετίζονται με μεταβολικά προβλήματα, τόσο στα μαθηματικά όσο και τη

[1] http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stress%E2%80%93energy_tensor&oldid=495978391

φυσική, μέσω της ανασκόπισης γνωστών αποτελεσμάτων από τη βιβλιογραφία, με στόχο την ανάπτυξη ταυτοτήτων Derrick-Pohozaev και σχέσεων μονοτονίας για γενικευμένες μερικές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν στον λογισμό των μεταβολών και στη συνέχεια η εφαρμογή αυτών των αποτελεσμάτων στην θεωρία μη-ύπαρξης λύσεων αυτών των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ενας άλλος, ίσως λιγότερο σημαντικός στόχος ήταν η διερεύνηση του ερωτήματος αν οι έτσι κατασκευασμένοι τανυστές ορμής-ενέργειας έχουν κάποια φυσική ή γεωμετρική σημασία.

Το έναυσμα είχε δοθεί ήδη από το 2009 από τον R. Schoen[55], ο οποίος στις διαλέξεις του *Lecture notes on topics in differential geometry* στο πανεπιστήμιο του Stanford και ειδικότερα σε κάποια εκδοχή της Διάλεξης 3 «*Matter fields and the stress-energy tensor*» αναφέρεται στην κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας και στο «*...ενδιαφέρον να γίνει παραγωγή της Σχέσης Μονοτονίας για ελαχιστικές επιφάνειες από την ίδια μέθοδο θεώρησης*» (σ.σ. εννοεί την μέθοδο των τανυστών ορμής-ενέργειας).

Η πρώτη συστηματική χρήση των τανυστών ορμής-ενέργειας για την παραγωγή της ταυτότητας Derrick-Pohozaev και την ανάπτυξη της σχέσης μονοτονίας του συναρτησιακού της ενέργειας έγινε το 2011 από τον Αλικάκο [3] για το σύστημα της μη-γραμμικής εξίσωσης Poisson. Στο ίδιο πνεύμα οι Αλικάκος και Φαλιάγκας [5] το 2012 μελέτησαν την κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας για πιο πολύπλοκα συναρτησιακά και τη χρήση τους για την παραγωγή της ταυτότητας Derrick-Pohozaev. Η ταυτότητα αυτή είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την παραγωγή εκτιμήσεων σε προβλήματα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και Λογισμού των Μεταβολών (βλ. κεφ. 5 § 1 για περισσότερες λεπτομέρειες και αναφορές).

Κατά την μελέτη των πιο πάνω στόχων προέκυψε από τη μία μεριά ότι η έκταση των θεμάτων ήταν τέτοια που ξέφευγε από τα αρχικά όρια των στόχων που είχαν τεθεί στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας και από την άλλη μεριά ένας σημαντικός αριθμός νέων προβλημάτων και ερωτηματικών, η διερεύνηση των οποίων ήταν αδύνατο να ενσωματωθεί στην εργασία αυτή. Τα θέματα αυτά, για τα περισσότερα από τα οποία υπάρχουν τουλάχιστον ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα, συζητούνται εν συντομία στο τελευταίο κεφάλαιο. Αυτός είναι επίσης ο λόγος για τον οποίο η παρουσίαση ορισμένων αποτελεσμάτων δεν είναι πλήρης, όπως είναι για παράδειγμα οι τανυστές ορμής-ενέργειας υπό συνθήκες.

Το γενικό πλάνο παρουσίασης της εργασίας αυτής είναι ως εξής.

Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσουμε με λεπτομέρειες τις μεθόδους κατασκευής τανυστών ορμής-ενέργειας, δηλ. την μέθοδο των εσωτερικών μεταβολών, την μέθοδο των μετασχηματισμών Legendre και την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για προβλήματα υπό συνθήκες. Επίσης παρουσιάζουμε εν συντομία τη μέθοδο των γενικών μεταβολών ή του θεωρήματος Noether.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε με λεπτομέρειες κάποιες ιδιότητες των τανυστών ορμής-ενέργειας, ορισμένες από τις οποίες είναι απαραίτητες για τη συνέχεια της εργασίας αυτής ενώ άλλες θεωρούμε ότι είναι χρήσιμες για περαιτέρω ανάπτυξη θεμάτων της εργασίας αυτής.

Το κεφάλαιο 4 είναι αφιερωμένο σε παραδείγματα από την μηχανική και την φυσική. Εδώ εξετάζεται το ερώτημα αν οι τανυστές ορμής-ενέργειας έχουν κάποια φυσική ή γεωμετρική σημασία. Θεωρούμε παραδείγματα από την κβαντική θεωρία, την κλασσική ηλεκτρομαγνητική θεωρία και την θεωρία γραμμικής ελαστικότητας με κάποια επέκταση στην μη-γραμμική θεωρία ελαστικότητας.

Στο κεφάλαιο 5 αποδεικνύουμε με λεπτομέρειες την ταυτότητα Derrick-Pohozaev για το μη-γραμμικό σύστημα Poisson, ενός γενικευμένου μη-γραμμικού συστήματος και του γενικευμένου συστήματος της p-λαπλασιανής. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, για περαιτέρω σύγκριση, παρουσιάζουμε το θεώρημα Derrick στην αρχική του μορφή.

Στο κεφάλαιο 6 αποδεικνύονται οι σχέσεις μονοτονίας για τα συστήματα του κεφαλαίου 5. Τα αποτελέσματα εφαρμόζονται στην απόδειξη του θεωρήματος μη-ύπαρξης ακέραιων λύσεων πεπερασμένης ενέργειας.

Στο κεφάλαιο 7 συνοψίζουμε κάποια συμπεράσματα της εργασίας αυτής, παραθέτουμε μια λίστα των νέων προβλημάτων και ερωτηματικών που προέκυψαν, όπως αναφέραμε προηγουμένως, και δίνουμε κάποιες προοπτικές για περαιτέρω ανάπτυξη ορισμένων συναφών θεμάτων.

Κεφάλαιο 2

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις βασικές μεθόδους κατασκευής τανυστών ορμής-ενέργειας. Οι τρείς πρώτες ενότητες αφορούν τις μεθόδους των εσωτερικών μεταβολών, των μετασχηματισμών Legendre και των πολλαπλασιαστών Lagrange για προβλήματα υπό συνθήκες. Η παρουσίαση των μεθόδων αυτών γίνεται με όλες τις λεπτομέρειες. Στην τελευταία ενότητα παρουσιάζουμε εν συντομία τη μέθοδο των γενικών μεταβολών ή του θεωρήματος Noether χωρίς να υπεισέλθουμε στις λεπτομέρειες της θεωρίας των μεταβολών αυτών.

§ 1 ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στη θεώρηση μεταβολών του πεδίου ορισμού, δηλ. των ανεξάρτητων μεταβλητών της άγνωστης συνάρτησης ενός μεταβολικού προβλήματος. Οι μεταβολές γίνονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τα συνοριακά σημεία να παραμένουν αμετάβλητα. Μπορούμε να φανταστούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ως ένα παραμορφώσιμο στερεό σώμα και τις εσωτερικές μεταβολές ως παραμορφώσεις του σώματος τέτοιες ώστε η εξωτερική του επιφάνεια να παραμένει στη θέση της.

1.1 Εσωτερικές μεταβολές του πεδίου ορισμού διανυσματικών πεδίων.

Εστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε μία συνάρτηση Lagrange

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N \cdot M} \to \mathbb{R},$$

η οποία είναι συνεχώς διαφορίσιμη, $L \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N \cdot M})$ και ένα διανυσματικό πεδίο $v : \Omega \to \mathbb{R}^M$, $v \in C_c^\infty(\Omega)^M =: \mathcal{D}(\Omega)^M$([1]).

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε ότι ένα λείο διανυσματικό πεδίο $v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ προσδιορίζει μία εσωτερική μεταβολή του Ω (βλ. Ορισμό 1 πιο κάτω).

Λήμμα 1. *Για δεδομένο διανυσματικό πεδίο $v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, υπάρχει μία συλλογή C^∞-διαφορομορφισμών $(\xi^t)_{t \in \mathrm{I}}$, $\mathrm{I} =]-\delta, \delta[$,*

$$\xi^t : \Omega \to \Omega,$$

τέτοια ώστε η συνάρτηση $\xi : \Omega \times \mathrm{I} \to \Omega$, $\xi(x,t) = \xi^t(x)$ είναι C^∞-διαφορίσιμη και

(i) $\xi^0 = id_\Omega$, *δηλ.* $\xi^0(x) = x$ *στο* Ω.

(ii) $D_t \xi(x,0) = v(x)$ $\forall x \in \Omega$.

(iii) $\xi^t | \partial\Omega = id_\Omega$, *δηλ.* $\xi^t(x) = x$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την v με μηδέν στον $\mathbb{R}^N$ (συμβολίζουμε την επέκταση με το ίδιο σύμβολο) και θεωρούμε την συνάρτηση

$$\xi(x,t) := x + tv(x), \; t \in \mathrm{I} =]-\delta, \delta[, \tag{2.1}$$

όπου $\delta > 0$ μπορεί κατ΄ αρχήν να είναι οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός. Προφανώς η ξ είναι C^∞. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συλλογή συναρτήσεων

$$(\xi^t)_{t \in \mathrm{I}}, \; \xi^t(x) := \xi(x,t), \; x \in \mathbb{R}^N.$$

[1] Ο συναρτησιακός χώρος $C_c^\infty(\Omega)^M$ συμβολίζεται επίσης $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^M)$. Επειδή $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^M) \cong C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})^M$, στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αυτόν τον συμβολισμό για όλους τους συναρτησιακούς χώρους.

επαληθεύει τα (i), (ii), (iii) και $\xi^t \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ $\forall t \in I$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις ξ^t, $|t| \leqslant \delta$, είναι C^∞-διαφορομορφισμοί, περιορίζοντας κατάλληλα το δ.

Εχουμε

$$(\xi^t)'(x) = \xi_x(x,t) = I + tv'(x),$$

όπου $I = id_{\mathbb{R}^N}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του $\mathbb{R}^N$, $f'(x) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ η παράγωγος (Frechet) μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^N \supset \Omega \to \mathbb{R}^M$ ([21], κεφ. 8, ενότ. 1, πρότ. (8.1.1), σελ. 149) και $\xi_x(x,t) = D_1\xi(x,t)$ η μερική παράγωγος ([21], κεφ. 8, ενότ. 9, σελ. 172). Εστω

$$\left|v'(x)\right| \leqslant M_1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Τότε για δεδομένο $x \in \mathbb{R}^N$ η $(\xi^t)'(x) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ είναι αντιστρέψιμη αν ο όρος $tv'(x)$ έχει νόρμα[2] < 1 ([21], κεφ. 8, ενότ. 3, (8.3.2) και (8.3.2.1), σελ. 154), δηλ. αν $|t| < \delta$, όπου το δ έχει επιλεγεί έτσι ώστε

$$M_1\delta \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης ([21], (10.2.5), σελ. 273· [1], Th. 2.5.2, σελ. 102· [19], Th. 15.2, σελ. 149· [64], Th. 4.F, σελ. 172) έπεται ότι η ξ^t είναι τοπικός διαφορομορφισμός $\forall t \in I$, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ υπάρχει $U_x \in \mathcal{N}_0(x)$([3]) τέτοια ώστε ο περιορισμός $\xi^t|U_x$ είναι διαφορομορφισμός επί του $\xi^t(U_x)$.

Απομένει να δειχθεί ότι η ξ^t, $t \in I$, είναι καθολικός διαφορομορφισμός. Αυτό έπεται άμεσα από το θεώρημα καθολικής αντίστροφης απεικόνισης (Hadamard-Caccioppoli) λαμβάνοντας υπόψη ότι για δεδομένο $t \in I$

$$\left|\xi^t(x)\right| \to \infty, \quad |x| \to \infty$$

([1], Th. 2.5.17, σελ. 115· [64], Cor. 4.41(i) of Th. 4.G, σελ. 174· βλ. επίσης [19], Th. 15.4, σελ. 153, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$(\xi^t)'^{-1} \leqslant \frac{1}{1 - |t|\,\|v'\|} \leqslant 2).$$

□

[2] Θεωρούμε τη νόρμα supremum $\|v\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |v(x)|$.

[3] $\mathcal{N}_0(x)$ είναι η κλάση των ανοιχτών περιοχών του σημείου x.

Παρατηρήσεις 1. (i) Οπως προκύπτει από την απόδειξη του Λήμματος, οι διαφορομορφισμοί ξ^t είναι ορισμένοι σε όλο το $\mathbb{R}^N$, δηλ. είναι απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^N$ επί του $\mathbb{R}^N$.

(ii) Η απόδειξη του θεωρήματος καθολικής αντίστροφης απεικόνισης για τη γενική περίπτωση απεικονίσεων σε χώρους Banach δίνεται στην αναφορά [1], σελ. 115-117 και βασίζεται στο λήμμα ανεβάσματος ομοτοπίας (homotopy lifting) (βλ. αναφορά [1], 2.5.19, σελ. 116). Για την απόδειξη του Λήμματος, όπου έχουμε χώρους πεπερασμένης διάστασης, η απόδειξη ότι η ξ^t είναι καθολικός διαφορομορφισμός μπορεί να γίνει πιο απλά ως εξής (βλ. και αναφορά [19], Th. 11.2, σελ. 100): από τη σχέση

$$v(y)-v(x)=\int_0^1 v'(x+\lambda(y-x))\cdot(y-x)d\lambda \tag{2.3}$$

παίρνουμε

$$\left\langle \xi^t(y)-\xi^t(x),y-x\right\rangle = |y-x|^2+t\int_0^1 \langle y-x,v'(x+\lambda(y-x))\cdot(y-x)\rangle d\lambda.$$

Από τη σχέση αυτή, με βάση την ανισότητα Cauchy-Schwartz και λαμβάνοντας υπόψη την 2.2 έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left\langle \xi^t(y)-\xi^t(x),y-x\right\rangle &\geqslant |y-x|^2-|t||y-x||v'(x+\lambda(y-x))\cdot(y-x)|\\ &\geqslant |y-x|^2-|t||y-x|^2\left\|v'\right\|\\ &\geqslant |y-x|^2-M_1|t||y-x|^2\\ &\geqslant \frac{1}{2}|y-x|^2\end{aligned}$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}^N$.

Από την ανισότητα αυτή έπεται ότι η ξ^t είναι 1-1. Για να δείξουμε ότι η ξ^t είναι και επί αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\xi^t(\mathbb{R}^N)$ είναι ανοιχτό και κλειστό. Το γεγονός ότι το $\xi^t(\mathbb{R}^N)$ είναι ανοιχτό έπεται άμεσα από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης. Το $\xi^t(\mathbb{R}^N)$ είναι κλειστό διότι αν $y\in\overline{\xi^t(\mathbb{R}^N)}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)\subset\mathbb{R}^N$ τέτοια ώστε $\xi^t(x_n)\to y$. Η (x_n) είναι φραγμένη διότι αν $|x_n|\to\infty$, από την (2.1) έπεται ότι $\left|\xi^t(x_n)\right|\to\infty$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, περνώντας σε μία συγκλίνουσα

υπακολουθία (την οποία επίσης συμβολίζουμε x_n) $x_n \to x$, από τη συνέχεια της ξ^t παίρνουμε
$$y = \xi^t(x) \in \xi^t(\mathbb{R}^N).$$

Λήμμα 2. *Εστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 1. Για την αντίστροφη συνάρτηση $\eta^t : \Omega \to \Omega$ της ξ^t, για δεδομένο $t \in \mathrm{I}$, $\eta(y,t) := \eta^t(y)$, $y \in \Omega$, ισχύουν τα κάτωθι:*

(i) $\eta(y,t) = y - tv(y) + O(t^2)$,

(ii) $\eta_t(y,t) = -v(y) + O(t)$,

(iii) $\eta_y(y,t) = I - tv'(y) + O(t^2)$,

(iv) $\displaystyle \frac{d}{dt}\det \eta_y(y,t)\Big|_{t=0} = -\mathrm{div}\, v(y)$,

όπου οι συναρτήσεις $O(t)$, $O(t^2)$ στα (i), (ii), (iii) *μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι ανεξάρτητες*[4] *του y.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1(i) οι συναρτήσεις η^t μπορούν να θεωρηθούν ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}^N$. Από την (2.1) ισχύει
$$\eta(y,t) + tv(\eta(y,t)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N\ \forall t \in \mathrm{I}. \tag{2.4}$$
Για $t = 0$ παίρνουμε
$$\eta(y,0) = \eta^0(y) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Εστω
$$Y(y,t) := \eta(y,t) - y + tv(y). \tag{2.5}$$
Από τις (2.4) και (2.3) παίρνουμε
$$\begin{aligned} Y(y,t) &= -t(v(\eta(y,t)) - v(y)) \\ &= -t\int_0^1 v'(y + \lambda(\eta(y,t) - y)) \cdot (\eta(y,t) - y)d\lambda \\ &= t^2 \int_0^1 v'(y + \lambda(\eta(y,t) - y)) \cdot v(\eta(y,t))d\lambda, \end{aligned} \tag{2.6}$$

[4] Δηλ. υπάρχουν σταθερές M, M' ανεξάρτητες από το y, έτσι ώστε $|O(t)| \leqslant Mt$ και $|O(t^2)| \leqslant Mt^2$.

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η (2.4). Από τις εκτιμήσεις $\|v\| \leqslant M_0$, $\|v'\| \leqslant M_1$ έπεται

$$|Y(y,t)| \leqslant M_0 M_1 t^2$$

και από αυτή το (i).

Το (ii) έπεται από τον ορισμό του Y, (2.5), με μερική παραγώγιση ως προς t:

$$\eta_t(y,t) = -v(y) + Y_t(y,t),$$

όπου η σχέση $Y_t(y,t) = O(t)$ έπεται άμεσα από την (2.6).

Το (iii) έπεται παρόμοια με το (i). Πιο συγκεκριμένα, από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης (βλ. [1], Th. 2.5.2, σελ. 102) έπεται ότι η η^t είναι C^∞. Επομένως από την (2.4) παίρνουμε με μερική διαφόριση ως προς y:

$$\eta_y(y,t) + tv'(\eta(y,t))\eta_y(y,t) = I, \tag{2.7}$$

όπου $I := id_{\mathbb{R}^N}$. Η σχέση αυτή για $t = 0$ δίνει

$$\eta_y(y,0) = I.$$

Εστω

$$Y_1(y,t) := \eta_y(y,t) - I + tv'(y)\eta_y(y,t).$$

Από την (2.7) και την αντίστοιχη της (2.3) για την v' παίρνουμε

$$\begin{aligned} Y_1(y,t) :&= -t(v'(\eta(y,t)) - v'(y))\eta_y(y,t) \\ &= -t\left(\int_0^1 v''(y + \lambda(\eta(y,t) - y)) \cdot (\eta(y,t) - y) d\lambda\right)\eta_y(y,t) \\ &= t^2\left(\int_0^1 v''(y + \lambda(\eta(y,t) - y)) \cdot v(\eta(y,t)) d\lambda\right)\eta_y(y,t), \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η (2.4). Από τη σχέση αυτή με

$$\left\|v''\right\| =: M_2$$

παίρνουμε

$$|Y_1(y,t)| \leqslant t^2 M_0 M_2 |\eta_y(y,t)|.$$

Η εκτίμηση για το $|\eta_y(y,t)|$ λαμβάνεται από την (2.7):

$$\begin{aligned}|\eta_y(y,t)| &\leqslant \left|(I+tv'(\eta(y,t)))^{-1}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{1-|t|\|v'\|} \leqslant \frac{1}{1-\delta M_1} = 2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Επομένως

$$|Y_1(y,t)| \leqslant 2M_0M_2t^2 \tag{2.9}$$

και

$$\begin{aligned}\eta_y(y,t) &= I - tv'(y)\eta_y(y,t) + Y_1(y,t) \\ &= I - tv'(y) - tv'(y)(\eta_y(y,t)-I) + Y_1(y,t) \\ &= I - tv'(y) + t^2v'(y)v'(\eta(y,t))\eta_y(y,t) + Y_1(y,t)\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η (2.7). Το (iii) έπεται από την εκτίμηση (2.9) και την

$$|v'(y)v'(\eta(y,t))\eta_y(y,t)| \leqslant 2M_1^2,$$

όπου έγινε χρήση και της (2.8).

Για το (iv) με

$$\det \eta_y(y,t) = \begin{vmatrix} \eta_{1,1} & \eta_{1,2} & \cdots & \eta_{1,N} \\ \eta_{2,1} & \eta_{2,2} & \cdots & \eta_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{N,1} & \eta_{N,2} & \cdots & \eta_{N,N} \end{vmatrix}$$

από τον κανόνα παραγώγισης οριζουσών παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\det \eta_y(y,t) = \begin{vmatrix} \eta_{1,1t} & \eta_{1,2t} & \cdots & \eta_{1,Nt} \\ \eta_{2,1} & \eta_{2,2} & \cdots & \eta_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{N,1} & \eta_{N,2} & \cdots & \eta_{N,N} \end{vmatrix} + \cdots, \tag{2.10}$$

όπου $\eta_{i,jt} := \dfrac{\partial^2 \eta_i}{\partial y_j \partial t}$ και το άθροισμα στο δεύτερο μέλος εκτείνεται ως προς όλες τις ορίζουσες που λαμβάνονται με παραγώγιση της 1ης, 2ης κλπ μέχρι και της N-οστής γραμμής. Παραγωγίζοντας την (2.7) ως προς t και θέτοντας $t=0$ στη σχέση που προκύπτει παίρνουμε

$$\eta_{yt}(y,0) + v'(y) = 0 \quad \acute{\eta} \quad \eta_{i,jt}(y,0) = -v_{i,j}(y).$$

Θέτοντας $t = 0$ στην (2.10) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση αυτή και το (iii) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\det\eta_y(y,t)\Big|_{t=0} = \begin{vmatrix} -v_{1,1} & -v_{1,2} & \cdots & -v_{1,N} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \cdots$$
$$= -v_{1,1}(y) - v_{2,2}(y) \cdots - v_{N,N}(y)$$
$$= -\mathrm{div} v(y).$$

□

Παρατήρηση 2. Οπως προκύπτει από την πιο πάνω απόδειξη και την Παρατήρηση 1(i), τις συναρτήσεις ξ^t, η^t, $t \in \mathrm{I}$, μπορούμε να τις θεωρούμε ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}^N$:

$$\xi^t, \eta^t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \ (t \in \mathrm{I}).$$

Τα πιο πάνω λήμματα μας οδηγούν στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1. Εστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $v \in \mathcal{D}(\Omega)^M$. Μία συλλογή διαφορομορφισμών $(\xi^t)_{t\in\mathrm{I}}$ με τις ιδιότητες του Λήμματος 1 λέγεται *εσωτερική μεταβολή του* Ω στην κατεύθυνση v ή που ορίζεται από την v.

Παρατήρηση 3. Οι εσωτερικές μεταβολές *δεν είναι αλλαγές συστημάτων συντεταγμένων*, παρόλο που θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως τέτοιες. Ο λόγος είναι ότι αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ στο Ω και θεωρήσουμε μια εσωτερική μεταβολή του Ω, έστω ξ^t, τότε για το πεδίο f θεωρούμε ότι οι συνιστώσες του δεν μεταβάλλονται, αλλά παραμένουν οι ίδιες με τις αρχικές, δηλ. $f_i^t(x) = f_i(\xi^t(x))$. Μεταβολές, στις οποίες λαμβάνονται υπόψη και οι αντίστοιχες μεταβολές των συνιστωσών των διανυσματικών πεδίων είναι δυνατές, αλλά δεν θα θεωρήσουμε τέτοιες μεταβολές στην εργασία αυτή.

1.2 Εσωτερικές μεταβολές συναρτησιακών.

Θεωρούμε ένα (μη-γραμμικό) συναρτησιακό

(VF) $J : C^1(\overline{\Omega})^M \to \mathbb{R}$,

$$J(u) := \int_\Omega L(x, u(x), u'(x))dx,$$

όπου Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και $L(x, y, z)$ είναι μία συνάρτηση Lagrange,

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N \cdot M} \to \mathbb{R},$$

$L \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N \cdot M})$ και $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$. □

Σταθεροποιούμε ένα $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ και θεωρούμε τη συλλογή μεταβολών του u που ορίζεται από τη σχέση

$$\widetilde{u}(x, t) := u(\xi^t(x)), \quad t \in \mathrm{I} =]-\delta, \delta[$$

όπου $(\xi^t)_{t \in \mathrm{I}}$ είναι η συλλογή διαφορομορφισμών που ορίζονται από ένα δεδομένο πεδίο $v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ (βλ. Λήμμα 1). Εαν το u είναι κρίσιμο σημείο του J, τότε προφανώς

$$\frac{d}{dt} J(\widetilde{u}(x, t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} J(u \circ \xi^t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Κατ΄ αναλογία με τις συνηθισμένες μεταβολές του u έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2. Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί τη συνθήκη (VF), $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ και $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$. Η παράγωγος

$$\mathfrak{d} J(u)h := \frac{d}{dt} J(u \circ \xi_h^t)\bigg|_{t=0},$$

όπου $(\xi_h^t)_{t \in \mathrm{I}}$ είναι η συλλογή διαφορομορφισμών που ορίζονται από το h, λέγεται η *εσωτερική μεταβολή του συναρτησιακού J στη θέση u στην κατεύθυνση h*. Η συλλογή συναρτήσεων

$$u \circ \xi_h^t, \quad t \in \mathrm{I}$$

λέγεται η *εσωτερική μεταβολή της u στην κατεύθυνση h*.

Παρατηρήσεις 4. (i) Οπως θα δούμε στη συνέχεια η απεικόνιση

$$h \mapsto \frac{d}{dt} J(u \circ \xi_h^t)\Big|_{t=0}$$

είναι μία γραμμική φόρμα (με την αλγεβρική έννοια) στον $\mathcal{D}(\Omega)^N$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο συμβολίζουμε την εσωτερική μεταβολή του J στο u ως γραμμική απεικόνιση $\mathfrak{d}J(u) : h \mapsto \mathfrak{d}J(u)h$. Η εσωτερική μεταβολή του J είναι μια απεικόνιση

$$\mathfrak{d}J : C^1(\overline{\Omega}) \to \left(\mathcal{D}(\Omega)^N\right)',$$

όπου $(\cdot)'$ υποδηλώνει αλγεβρικά δυικό χώρο.

(ii) Το σύνολο των εσωτερικών μεταβολών $u \circ \xi^t$, $t \in \mathrm{I}$, του u είναι ένα υποσύνολο των αποδεκτών μεταβολών του u, έστω $\mathcal{A}$, και επομένως

$$\inf_{v \in \mathcal{D}(\Omega)^N} J(u \circ \xi_v^t) \geqslant \inf_{\widetilde{u} \in \mathcal{A}} J(\widetilde{u}).$$

Πρόταση 1. *Εστω $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ και J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί τη συνθήκη (VF). Η εσωτερική μεταβολή του J στο u δίνεται από τη σχέση*

$$\mathfrak{d}J(u)h = \int_\Omega \left(u_{k,i} \frac{\partial L}{\partial z_{kj}} h_{i,j} - L \operatorname{div} h - \frac{\partial L}{\partial x_i} h_i \right) dx, \quad h \in \mathcal{D}(\Omega)^N, \tag{2.11}$$

όπου τα L, $L_{x_i} := \dfrac{\partial L}{\partial x_i}$, $L_{z_{kj}} := \dfrac{\partial L}{\partial z_{kj}}$ λαμβάνονται στο σημείο $(x, u(x), \nabla u(x))$, δηλ. $L = L(x, u(x), \nabla u(x))$, $L_{x_i} = L_{x_i}(x, u(x), \nabla u(x))$ κλπ.

Απόδειξη. Εστω $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ και $(\xi^t)_{t \in \mathrm{I}}$ η εσωτερική μεταβολή του Ω που ορίζεται από το h. Είναι

$$\varphi(t) := J(u \circ \xi^t) = \int_\Omega L(x, u(\xi^t(x)), (u \circ \xi^t)'(x)) dx.$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(u \circ \xi^t)'(x) = u'(\xi^t(x))(\xi^t)'(x) = u'(\xi^t(x))\xi_x(x,t).$$

Αντικατάσταση στη σχέση που ορίζει το φ δίνει

$$\varphi(t) = \int_\Omega L(x, u(\xi^t(x)), u'(\xi^t(x))\xi_x(x,t))dx.$$

Παρατηρούμε ότι εάν παραγωγίσουμε κάτω από το ολοκλήρωμα, στη συνέχεια δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας διότι το u είναι μόνο μία φορά παραγωγίσιμο, $u \in C^1(\Omega)^M$ από την υπόθεση. Για το λόγο αυτό εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης $x = \eta^t(y)$, όπου η^t είναι η αντίστροφη συνάρτηση της ξ^t, οπότε

$$\varphi(t) = \int_\Omega L(\eta^t(y), u(y), u'(y) \cdot \xi_x(\eta^t(y), t)) \frac{\partial \eta^t}{\partial y} dy,$$

όπου $\dfrac{\partial \eta^t}{\partial y}$ είναι η ορίζουσα του μετασχηματισμού $x = \eta^t(y)$. Θέτοντας για συντομία

$$\widetilde{L}(y,t) = L(\eta(y,t), u(y), u'(y) \cdot \xi_x(\eta(y,t),t))$$

η σχέση αυτή γράφεται ως εξής:

$$\varphi(t) = \int_\Omega \widetilde{L}(y,t) \det \eta_y(y,t) dy, \tag{2.12}$$

Παραγώγιση της σχέσης που ορίζει το $\widetilde{L}$ ως προς t δίνει

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_t(y,t) &= \frac{\partial L}{\partial x_i}\eta_{i,t}(y,t) + \frac{\partial L}{\partial z_{kj}}\Big[u_{k,i}(y)\xi_{i,j}(\eta(y,t),t))\Big]_{,t} \\ &= L_{x_i}\eta_{i,t}(y,t) + L_{z_{kj}}u_{k,i}(y)\Big(\xi_{i,jt}(\eta(y,t),t)) + \xi_{i,jl}(\eta(y,t),t))\eta_{l,t}(y,t)\Big),\end{aligned}$$

όπου τα L_{x_i}, $L_{z_{kj}}$ αποτιμώνται στο σημείο $(x, u(x), \nabla u(x))$. Θέτοντας $t = 0$ στη σχέση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\eta_{i,t}(y,0) &= -h_i(y) \\ \xi_{i,jt}(y,0) &= h_{i,j}(y) \\ \xi_{i,jl}(y,0) &= 0\end{aligned}$$

από το Λήμμα 2 και τον ορισμό του ξ^t, σχέση (2.1), παίρνουμε

$$\widetilde{L}_t(y,0) = -L_{x_i}h_i(y) + L_{z_{kj}}u_{k,i}(y)h_{i,j}(y).$$

Παραγώγιση της (4.29) δίνει

$$\varphi'(0) = \int_\Omega \left(\widetilde{L}_t(y,0) \det \eta_y(y,0) + \widetilde{L}(y,0) \frac{\partial}{\partial t} \det \eta_y(y,t) \Big|_{t=0} \right) dy$$

Απο τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\eta_y(y,0) = I \\ &\eta(y,0) = y \\ &\xi_x(\eta(y,0),0) = \xi_x(y,0) = I, \\ &\frac{\partial}{\partial t} \det \eta_y(y,t) \Big|_{t=0} = -\mathrm{div} h(y) \end{aligned}$$

οι οποίες λαμβάνονται από τα Λήμματα 1 και 2 και την εξίσωση (2.1), έπονται οι σχέσεις

$$\widetilde{L}(y,0) = L(y,u(y),u'(y))$$

και

$$\varphi'(0) = \int_\Omega \Big(u_{k,i}(y) L_{z_{kj}} h_{i,j}(y) - L_{x_i} h_i(y) - L \mathrm{div} h(y) \Big) dy.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ο ισχυρισμός. □

Παρατηρήσεις 5. (i) Από την ανωτέρω πρόταση έπεται η γραμμικότητα της απεικόνισης

$$h \mapsto \mathfrak{d} J(u) h$$

(σύγκρινε με Παρατήρηση 4(i)).

(ii) Με χρήση του συμβολισμού

$$\mathfrak{d} L(u) h := u_{k,i} L_{z_{kj}}(\cdot,u,\nabla u) h_{i,j} - L(\cdot,u,\nabla u) h_{i,i} - L_{x_i}(\cdot,u,\nabla u) h_i \tag{2.13}$$

η εσωτερική μεταβολή του συναρτησιακού J δίνεται από τη σχέση

$$\mathfrak{d} J(u) h = \int_\Omega \mathfrak{d} L(u) h dx, \quad h \in \mathcal{D}(\Omega)^N. \tag{2.14}$$

(iii) Μπορούμε να περιορίσουμε τη χρήση δεικτών αν χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό: έστω

$$u := (u_{ij}),\ v := (v_{ij}).$$

Συμβολίζουμε

$$u : v = u_{ij} v_{ij}$$
$$u \dot{\otimes} v = (u_{ki} v_{kj})$$

Με $L_x = (L_{x_i})_{i=1,\cdots,N}$, $L_z = (L_{z_{ki}})$, $\nabla h = (h_{i,j})$ οι πιο πάνω σχέσεις γράφονται στη μορφή

$$\mathfrak{d}L(u)h = (\nabla u \dot{\otimes} L_z) : \nabla h - L\mathrm{div} h - L_x \cdot h.$$

(iv) Εαν $L_x = 0$ η σχέση (2.13) απλουστεύεται στην

$$\mathfrak{d}L(u)h := u_{k,i} L_{z_{kj}} h_{i,j} - L\delta_{ij} h_{i,j} = (u_{k,i} L_{z_{kj}} - L\delta_{ij}) h_{i,j}$$

και με τη χρήση συμβολισμού ελεύθερου δεικτών

$$\mathfrak{d}L(u)h = (\nabla u \dot{\otimes} L_z - LI) : \nabla h. \tag{2.15}$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση εντός των παρενθέσεων στο δεξιό μέλος της σχέσης αυτής είναι ανεξάρτητη του h.

Για πιό ομαλές συναρτήσεις έχουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 1. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση (VF), σελ. 19, $L \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{NM})$ και $u \in C^2(\Omega)^M$. Τότε ισχύει η επόμενη έκφραση για την εσωτερική μεταβολή του J στο u*

$$\mathfrak{d}J(u)h = -\int_\Omega \delta L(u) \cdot (\nabla u \cdot h) dx \tag{2.16}$$

όπου $\delta L(u)$ είναι η παράγωγος Euler-Lagrange του L στη θέση u, ή σε μορφή συντεταγμένων

$$\mathfrak{d}J(u)h = -\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_k} \right) u_{k,j} h_j dx$$

Απόδειξη. Παραγοντική ολοκλήρωση του πρώτου και δεύτερου όρου του β΄ μέλους της (2.11) δίνει

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}J(u)h &= \int_\Omega (-(u_{k,i} L_{z_{kj}})_{,j} h_i + L_{,i} h_i - L_{x_i} h_i) dx \\ &= \int_\Omega (-u_{k,ij} L_{z_{kj}} h_i - u_{k,i} (L_{z_{kj}})_{,j} h_i + L_{,i} h_i - L_{x_i} h_i) dx. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την

$$L_{,i}h_i = L_{x_i}h_i + L_{y_k}u_{k,i}h_i + L_{z_{kj}}u_{k,ji}h_i$$

δίνει την αποδεικταία σχέση. □

Παρατήρηση 6. Αξίζει να σημειωθεί η ομοιότητα της (2.16) με την σχέση που εκφράζει την (γενική) μεταβολή του J στη θέση u

$$\delta J(u)\phi = \int_\Omega \delta L(u)\cdot\phi dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^M.$$

Μια αξιοσημείωτη διαφορά είναι ότι

$$\phi := -u'\cdot h = -\nabla u \cdot h \in \mathcal{D}(\Omega)^M$$

ενώ $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$. Σημειώνεται ότι αν ίσχυε ότι η απεικόνιση

$$u' : \mathcal{D}(\Omega)^N \to \mathcal{D}(\Omega)^M, h \mapsto \nabla u \cdot h$$

είναι γραμμικός επιμορφισμός, τότε θα είχαμε ουσιαστικά ισοδυναμία των δύο τύπων μεταβολών, εσωτερικών και γενικών.

1.3 Ο τανυστής ορμής-ενέργειας ενός μεταβολικού προβλήματος.

Μετά την πιό πάνω προετοιμασία μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο ορισμό του τανυστή ορμής-ενέργειας.

Ορισμός 3 (Τανυστής ορμής-ενέργειας)**.** Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί τη συνθήκη (VF). Ο *τανυστής ορμής-ενέργειας* ή *τανυστής τάσης* ή *τανυστής Hamilton* του μεταβολικού προβλήματος που ορίζει το J, ορίζεται από τη σχέση

$$T_{ij}(x,y,z) = z_{ki}L_{z_{kj}}(x,y,z) - \delta_{ij}L(x,y,z) \tag{2.17}$$

ή σε συμβολισμό ελεύθερο δεικτών

$$T = z\dot{\otimes}L_z - LI, \tag{2.18}$$

όπου $x = (x_i)_{i=1,\cdots,N}$, $y = (y_k)_{k=1,\cdots,M}$, $z = (z_{ki})_{k=1,\cdots,M;i=1,\cdots,N}$, $I = id_{\mathbb{R}^N}$, $N = \dim\Omega$.

Παρατηρήσεις 7. (i) Ο ανωτέρω ορισμός ισχύει γενικά για μεταβλητές $(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{NM}$. Για ένα δεδομένο πεδίο $u \in C^1(\Omega)^M$ έχουμε το τανυστικό πεδίο

$$T_{ij}(x) = T_{ij}(x,u(x),\nabla u(x)) = u_{k,i} L_{z_{kj}}(x,u(x),\nabla u(x)) - \delta_{ij} L(x,u(x),\nabla u(x))$$

για το οποίο χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο. Σημειώνεται ότι για τον ανωτέρω ορισμό, εν γένει δεν είναι απαραίτητο το u να είναι λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος.

(ii) Η πιο πάνω διαδικασία παρέχει μια μέθοδο κατασκευής του τανυστή ορμής-ενέργειας. Εκτός αυτού δίνει μια μαθηματική σημασία στην έννοια του τανυστή ορμής-ενέργειας μέσω της σχέσης του με εσωτερικές μεταβολές του αντίστοιχου συναρτησιακού. Περισσότερα για το μαθηματικό περιεχόμενο του τανυστή ορμής-ενέργειας, τις ιδιότητές του και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εξαγωγή συμπερασμάτων, δίνονται στη συνέχεια της εργασίας αυτής.

§ 2 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LEGENDRE

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μια άλλη μέθοδο κατασκευής τανυστών ορμής-ενέργειας που στηρίζεται στον μετασχηματισμό Legendre. Θα χρειαστούμε επομένως ορισμένες βασικές έννοιες από τον μετασχηματισμό Legendre. Ακολουθούμε σε γενικές γραμμές τους Giaquinta-Hildebrandt ([29], κεφ. 7, εδάφ. 1, σελ. 1-26) και Evans ([24], κεφ. 1, ι¿œA, σελ. 16-17· [25], ι¿œ3.3.2, σελ. 121-123).

2.1 Βασικές έννοιες του μετασχηματισμού Legendre

Εστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές, ορισμένη σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι $f \in C^r(\Omega)$, όπου $r \geqslant 2$. Θεωρούμε την απεικόνιση βαθμίδας της f

$$\varphi := f' = \nabla f : \mathbb{R}^N \supset \Omega \to \mathbb{R}^N$$

για την οποία προφανώς έχουμε $\varphi \in C^{r-1}(\Omega)$. Επιπλέον υποθέτουμε η f ικανοποιεί τη *συνθήκη καθολικής αντιστρεψιμότητας*:

(GI-1) Η απεικόνιση βαθμίδας της f

$$\varphi := f' = \nabla f : \Omega \to \varphi(\Omega) =: \Omega^\star$$

είναι *καθολικά αντιστρέψιμη*, δηλ. υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση

$$\psi := \varphi^{-1} : \Omega^\star \to \Omega.$$

Παρατηρήσεις 8. (i) Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι το $\Omega^\star$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Επειδή το Ω υποτέθηκε ότι είναι χωρίο, το $\Omega^\star$ θα είναι επίσης χωρίο του $\mathbb{R}^N$.

(ii) Η αντίστροφη συνάρτηση $\psi : \Omega^\star \to \Omega$ είναι C^{r-1}-διαφορομορφισμός, όπως έπεται άμεσα από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης.

(iii) Αναγκαίες συνθήκες για να ικανοποιεί η f την συνθήκη GI-1 παρέχονται από τα θεωρήματα καθολικής αντίστροφης συνάρτησης ([1], Th. 2.5.17 & Rem. (i), σελ. 117, 119· [64], Th. 4.G, σελ. 174). Μία απλή συνθήκη που εγγυάται ότι η f ικανοποιεί την GI-1 είναι το Ω να είναι κυρτό και ο πίνακας Hess f'' να είναι θετικά ορισμένος (βλ. [29], κεφ. 1, ї¿œ1.1, Λήμμα 1, σελ. 6).

Εστω $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ και $\psi_1, \cdots, \psi_N$ οι συνιστώσες συναρτήσεις των φ και ψ αντίστοιχα.

Ορισμός 4. Εστω μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^r(\Omega)$, $r \geqslant 2$, η οποία ικανοποιεί την GI-1 και φ, ψ όπως στην (GI-1) (βλ. Παρατηρήσεις 8 (i) και (ii)). Η συνάρτηση

$$f^\star : \Omega^\star \to \Omega, \quad f^\star(\xi) = \xi \cdot x - f(x)\Big|_{x=\psi(\xi)} \tag{2.19}$$

λέγεται ο *μετασχηματισμός Legendre της f*. Οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου

$$\xi = \varphi(x) = \nabla f(x), \quad \xi_i = \varphi_i(x) = f_{,i}(x)$$

λέγονται *κανονικές ορμές* (canonical momenta) ή *συζυγείς μεταβλητές* (conjugate variables).

Παρατήρηση 9. Η συνάρτηση $f^\star$ είναι προφανώς η

$$f^\star(\xi) = \xi \cdot \psi(\xi) - f(\psi(\xi)) \tag{2.20}$$

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της σχέσης (2.19) για λόγους σαφέστερης παρουσίασης.

Οπως φαίνεται από τον ορισμό, ο μετασχηματισμός Legendre $f^\star$ μιας συνάρτησης $f \in C^r(\Omega)$ είναι C^{r-1}. Οπως δείχνει η επόμενη πρόταση όμως, η $f^\star$ έχει μεγαλύτερη ομαλότητα από την αναμενόμενη από τον ορισμό.

Πρόταση 2 (Ομαλότητα μετασχηματισμού Legendre)**.** *Εστω $f \in C^r(\Omega)$, $r \geqslant 2$, μια συνάρτηση όπως στον πιο πάνω ορισμό. Τότε ο μετασχηματισμός Legendre είναι επίσης κλάσης C^r, δηλ. $f^\star \in C^r(\Omega^\star)$.*

Απόδειξη. Παίρνοντας το διαφορικό της (2.20) έχουμε τη σχέση

$$df^\star(\xi) = \psi_i(\xi)d\xi_i + \xi_i d\psi_i(\xi) - f_{,i}(\psi(\xi))d\psi_i(\xi).$$

Οι δύο τελευταίοι όροι αναιρούνται διότι

$$f_{,i}(\psi(\xi)) = \varphi_i(\psi(\xi)) = \xi_i.$$

Επομένως $(f^\star)' \in C^{r-1}(\Omega^\star)$, επειδή $\psi \in C^{r-1}(\Omega^\star)$ (βλ. Παρατήρηση 8(ii)), από όπου έπεται ο ισχυρισμός. □

Πόρισμα 2. *Με τις υποθέσεις της πρότασης, για τον μετασχηματισμό Legendre $f^\star$ ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις*

(i) $\nabla f^\star = (f^\star)' = \psi$, *ή σε μορφή συνιστωσών* $f^\star_{,i} = \dfrac{\partial f^\star}{\partial \xi_i} = \psi_i$.

(ii) $f(x) + f^\star(\xi) = \xi \cdot x$, *όπου* $\xi = \nabla f(x) \Leftrightarrow x = \nabla f^\star(\xi)$.

(iii) $(f^\star)''(\xi) = f''(x)^{-1}$, *όπου* $\xi = \nabla f(x) \Leftrightarrow x = \nabla f^\star(\xi)$.

Απόδειξη. Η (i) έπεται άμεσα από την Πρόταση. Η (ii) έπεται από τον Ορισμό 4. Η (iii) έπεται με διαφόριση της σχέσης

$$\psi(\varphi(x)) = x.$$

□

Η επόμενη πρόταση παρέχει έναν χαρακτηρισμό του μετασχηματισμού Legendre κυρτών (αντίστοιχα κοίλων) συναρτήσεων με κάποια αρχή μεγίστου (αντίστοιχα ελαχίστου).

Πρόταση 3 (Αρχή μεγίστου για μετασχηματισμό Legendre)**.** *Εστω Ω κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και $f \in C^2(\Omega)$ τέτοια ώστε $f''(x) > 0$, δηλ. ο πίνακας Hess της f είναι θετικά ορισμένος. Τότε ο μετασχηματισμός Legendre $f^\star$ της f δίνεται από τη σχέση*

$$f^\star(\xi) = \max_{x\in\Omega}(\xi \cdot x - f(x)).$$

Απόδειξη. Εστω $\xi \in \Omega^\star$ ένα σταθερό σημείο. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : \Omega \to \mathbb{R},\ g(x) = \xi \cdot x - f(x)$$

για την οποία

$$\nabla g(x) = \xi - \nabla f(x), \quad g''(x) = -f''(x).$$

Η συνθήκη ύπαρξης ακρότατου της g στο Ω είναι

$$\nabla f(x) = \xi$$

η οποία έχει μοναδική λύση $x = x_0 \in \Omega$ και το μοναδικό ακρότατο είναι μέγιστο διότι η g'' είναι αρνητικά ορισμένη. Επομένως

$$\max_{x\in\Omega} g(x) = g(x_0) = \xi \cdot x_0 - f(x_0) = f^\star(\xi),$$

από τον ορισμό του μετασχηματισμού Legendre διότι $\nabla f(x_0) = \xi \Longleftrightarrow x_0 = \psi(\xi)$ (η ψ είναι η αντίστροφη της $\varphi = \nabla f$). □

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε την ημιγραμμική μερική διαφορική εξίσωση

$$a(f_x, f_y)f_{xx} + b(f_x, f_y)f_{xy} + c(f_x, f_y)f_{yy} = 0, \tag{2.21}$$

όπου $f \in C^2(\Omega)$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη GI-1. Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Legendre μετασχηματίζει την μη-γραμμική διαφορική εξίσωση (2.21) σε μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών

$$\xi = f_x(x,y),\ \eta = f_y(x,y)$$

και τον μετασχηματισμό Legendre της f

$$f^\star(\xi,\eta) := \xi x + \eta y - f(x,y),$$

όπου τα x, y εκφράζονται συναρτήσει των ξ, η μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$x = f^\star_\xi(\xi,\eta), \quad y = f^\star_\eta(\xi,\eta).$$

Εστω

$$d := \begin{vmatrix} f^\star_{\xi\xi} & f^\star_{\xi\eta} \\ f^\star_{\eta\xi} & f^\star_{\eta\eta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Από τη σχέση (iii) του Πορίσματος 2 παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^\star_{\xi\xi} & f^\star_{\xi\eta} \\ f^\star_{\eta\xi} & f^\star_{\eta\eta} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} f^\star_{\eta\eta} & -f^\star_{\eta\xi} \\ -f^\star_{\xi\eta} & f^\star_{\xi\xi} \end{pmatrix}$$

και από αυτή τις σχέσεις

$$f_{xx} = \frac{1}{d} f^\star_{\eta\eta},\ f_{xy} = -\frac{1}{d} f^\star_{\xi\eta},\ f_{yy} = \frac{1}{d} f^\star_{\xi\xi}$$

Επομένως αν η f είναι λύση της (2.21) και $f^\star$ ο μετασχηματισμός της, τότε η (2.21) μετασχηματίζεται στην

$$a(\xi,\eta) f^\star_{\eta\eta} + b(\xi,\eta) f^\star_{\xi\eta} + c(\xi,\eta) f^\star_{\xi\xi} = 0$$

η οποία είναι μία γραμμική μερική διαφορική εξίσωση.

Για περισσότερα παραδείγματα και τη γεωμετρική σημασία του μετασχηματισμού Legendre καθώς επίσης και εφαρμογή της αρχής μεγίστου για απλές αποδείξεις ανισοτήτων όπως η ανισότητα του Young, βλ. αναφορά [29], σελ. 9-16.

2.2 Μερικός μετασχηματισμός Legendre

Για την κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας θα χρειαστούμε ορισμένες γενικεύσεις του μετασχηματισμού Legendre.

Θεωρούμε ένα χωρίο $G = \Omega \times B$, όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^L$ χωρία, και μια συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^L \supset G \to \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι $f \in C^2(G)$. Θεωρώντας μεταβλητές $(x,y) \in \Omega \times B$, εισάγουμε νέες μεταβλητές (ξ,η) μέσω ενός μετασχηματισμού

$$T : G \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^L, \quad (x,y) \mapsto (x,\eta)$$

ο οποίος ορίζεται από τη σχέση

$$\eta = \varphi(x,y) := f_y(x,y). \tag{2.22}$$

Η απεικόνιση T υποτίθεται ότι είναι ένας C^1-διαφορομορφισμός επί ενός χωρίου $G^\star = \Omega \times B^\star$, όπου $B^\star$ είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^L$. Για τις συνιστώσες της T^{-1} χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$x = x, \quad y = \psi(x,\eta).$$

Από τις σχέσεις $T \circ T^{-1} = id_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^L}$, $T^{-1} \circ T = id_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^L}$, παίρνουμε τις

$$\varphi(x,\psi(x,\eta)) = \eta, \quad \psi(x,\varphi(x,y)) = y. \tag{2.23}$$

Συνοψίζουμε τα ανωτέρω στην πιο κάτω υπόθεση.

(GI-2) Η απεικόνιση $T : G \to G^\star, (x,y) \mapsto (x,\varphi(x,y))$ είναι *καθολικά αντιστρέψιμη*, δηλ. υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση

$$T^{-1} : G^\star \to G, (x,\eta) \mapsto (x,\psi(x,\eta))$$

Ορισμός 5. Εστω συνάρτηση $f \in C^2(G)$ όπως πιο πάνω που ικανοποιεί την (GI-2). Ο *μερικός μετασχηματισμός Legendre* $f^\star$ *της* f *ως προς τη μεταβλητή* y ορίζεται από τη σχέση

$$f^\star(x,\eta) = \eta \cdot y - f(x,y)\Big|_{y=\psi(x,\eta)}. \tag{2.24}$$

Η $f^\star$ λέγεται και απλά μετασχηματισμός Legendre της f όταν είναι σαφές σε ποιά ανεξάρτητη μεταβλητή της f αναφέρεται.

Κατ΄ αναλογία με την Πρόταση 2 έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα για την ομαλότητα του μερικού μετασχηματισμού Legendre.

Πρόταση 4 (Ομαλότητα μερικού μετασχηματισμού Legendre). *Εστω $f \in C^r(G)$, $r \geqslant 2$. Υποθέτουμε ότι η f είναι όπως στον πιο πάνω ορισμό (επομένως ικανοποιεί την συνθήκη (GI-2». Τότε ο μερικός μετασχηματισμός Legendre της f είναι επίσης κλάσης $C^r(G)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2. Από τον ορισμό του μερικού μετασχηματισμού Legendre έχουμε

$$f^\star(x,\eta) = \eta \cdot \psi(x,\eta) - f(x,\psi(x,\eta)). \tag{2.25}$$

Θεωρούμε ένα σταθερό $x \in \Omega$ και παίρνουμε το διαφορικό της $f^\star$:

$$\begin{aligned} df^\star(x,\eta) = &\psi_i(x,\eta)d\eta_i + \eta_i d\psi_i(x,\eta) - f_{x_i}(x,\psi(x,\eta))dx_i - \\ &f_{y_i}(x,\psi(x,\eta))d\psi_i(x,\eta) \end{aligned}$$

Ο δεύτερος και ο τελευταίος όρος της σχέσης αυτής αναιρούνται διότι

$$f_{y_i}(x,\psi(x,\eta)) = \varphi_i(x,\psi(x,\eta)) = \eta_i$$

από τις σχέσεις (2.23). Επομένως $f_\eta^\star \in C^{r-1}(G^\star)$, διότι $\psi \in C^{r-1}(G^\star)$, από όπου έπεται ο ισχυρισμός. □

Πόρισμα 3. *Με τις υποθέσεις της Πρότασης, για τον μερικό μετασχηματισμό Legendre της f ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις*

(i) $f_\eta^\star = \psi$, *ή σε μορφή συνιστωσών* $f_{\eta_i}^\star(x,\eta) = \psi_i(x,\eta)$.

(ii) $f_x^\star(x,\eta) = -f_x(x,y)$.

(iii) $f(x,y) + f^\star(x,\eta) = \eta \cdot y, \quad f_x(x,y) + f_x^\star(x,\eta) = 0.$

(iv) $f_{\eta\eta}^\star(x,\eta) = f_{yy}(x,y)^{-1}$.

όπου $\eta = \varphi(x,y) = f_y(x,y) \;\Leftrightarrow\; y = \psi(x,\eta) = f_\eta^\star(x,\eta)$ στις τρεις τελευταίες σχέσεις.

Απόδειξη. Η σχέση (i) έπεται άμεσα από την

$$df^\star(x,\eta) = \psi_i(x,\eta)d\eta_i - f_{x_i}(x,\psi(x,\eta))dx_i$$

(βλ. απόδειξη πρότασης).

Η σχέση (ii) έπεται από την (2.25) με παραγώγιση

$$f^\star_{x_i}(x,\eta) = \eta_j\psi_{j,x_i}(x,\eta) - f_{x_i}(x,\psi(x,\eta)) - f_{y_j}(x,\psi(x,\eta))\psi_{j,x_i}(x,\eta).$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος του β΄ μέλους αναιρούνται λόγω της (2.22), οπότε απομένει η (ii).

Οι σχέσεις (iii) έπονται από τον ορισμό και την (ii) αντίστοιχα με $y = \psi(x,\eta)$. Εξ ορισμού $\varphi(x,y) = f_y(x,y)$ και από την (i) $\psi(x,\eta) = f^\star_\eta(x,\eta)$. Συνδυασμός αυτών δίνει την (iii).

Η (iv) έπεται από τις (2.23) με παραγώγιση: από τη δεύτερη των (2.23) παίρνουμε

$$\psi_\eta(x,\varphi(x,y))\varphi_y(x,y) = I$$

(όπου $I = id_{\mathbb{R}^L}$). Χρήση της (i) και της $\varphi = f_y$ στην ισότητα αυτή δίνει

$$f^\star_{\eta\eta}(x,\varphi(x,y))f_{yy}(x,y) = I \tag{2.26}$$

Ομοίως η πρώτη των (2.23) δίνει

$$\varphi_y(x,\psi(x,\eta))\psi_\eta(x,\eta) = I$$

και με χρήση της (i) και της $\varphi = f_y$

$$f_{yy}(x,\psi(x,\eta))f^\star_{\eta\eta}(x,\eta) = I \tag{2.27}$$

Από τις (2.26), (2.27) έπεται η (iv). □

2.3 Εξισώσεις Hamilton

Στην υποενότητα αυτή παίρνουμε τη συνάρτηση Hamilton ως μερικό μετασχηματισμό Legendre της συνάρτησης Lagrange.

(H) Εστω Ω φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και G, $G^\star$ ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN}$ έτσι ώστε $pr_{\mathbb{R}^N}(G) = \Omega$ και $L(x,y,z)$ μια συνάρτηση Lagrange κλάσης C^1 ορισμένη στο $\Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN}$. Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός

$$G \to G^\star, (x,y,z) \mapsto (x,y,p) = (x,y,L_z(x,y,z)) =: (x,y,\varphi(x,y,z)) \tag{2.28}$$

είναι C^1-διαφορμορφισμός επί του $G^\star$.

Παρατήρηση 10. Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι το $G^\star$ είναι ανοιχτό, επομένως η απαίτηση το $G^\star$ να είναι ανοιχτό στην πιο πάνω υπόθεση είναι περιττή.

Ορισμός 6 (Συνάρτηση Hamilton)**.** Εστω $L(x,y,z)$ μια συνάρτηση Lagrange που ικανοποιεί την υπόθεση (H). Συμβολίζουμε με

$$G^\star \to G, (x,y,p) \mapsto (x,y,z) = (x,y,\psi(x,y,p)) \tag{2.29}$$

την αντίστροφη συνάρτηση της (2.28). Ο μερικός μετασχηματισμός Legendre $H(x,y,p)$ που ορίζεται κατ΄ αναλογία με την (2.24),

$$H(x,y,p) := z : p - L(x,y,z)\Big|_{z=\psi(x,y,p)}$$

όπου $z : p = z_{ki}p_{ki}$, λέγεται η *συνάρτηση Hamilton* ή *χαμιλτονιανή* που αντιστοιχεί στην L. Οι νέες μεταβλητές λέγονται *κανονικές ορμές* ή *συζυγείς μεταβλητές*.

Η Πρόταση 4 και το Πόρισμα 3 προφανώς ισχύουν για την ειδική περίπτωση του πιο πάνω ορισμού. Συνοψίζουμε για μελλοντική χρήση τις σχέσεις του Πορίσματος 3 με τον συμβολισμό του Ορισμού 6, στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5. *Με την υπόθεση του Ορισμού 6 ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις*

(i) $L_z(x,y,H_p(x,y,p)) = p$, $H_p(x,y,L_z(x,y,z)) = z$.

(ii) $H_p(x,y,p) = \psi(x,y,p)$.

(iii) $L(x,y,z) + H(x,y,p) = z : p$.

(iv) $L_x(x,y,z) + H_x(x,y,p) = 0$.

(v) $L_y(x,y,z) + H_y(x,y,p) = 0.$

όπου $p = \varphi(x,y,z) = L_z(x,y,z) \Leftrightarrow z = \psi(x,y,p) = H_p(x,y,p)$ *στις τέσσερις τελευταίες σχέσεις.*

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την συνάρτησηLagrange

$$L(u,z) := \frac{1}{2}z : z + G(u) = \frac{1}{2}z_{ki}z_{ki} + G(u)$$

Είναι $p = L_z(u,z) = z$ και επομένως η συνάρτηση (2.28) είναι η ταυτοτική απεικόνιση, η οποία είναι προφανώς αντιστρέψιμη. Επομένως υπάρχει ο μερικός μετασχηματισμός Legendre της L ως προς z, ο οποίος είναι εξ ορισμού η συνάρτηση Hamilton

$$H(u,p) = z : p - L(x,u,z)|_{z=p} = p : p - \frac{1}{2}p : p - G(u) = \frac{1}{2}p : p - G(u)$$

Επίσης έχουμε $p = z = \nabla u$, εαν το αντίστοιχο μεταβολικό συναρτησιακό είναι το $J = \int_\Omega L(u, \nabla u)dx$.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο στάδιο γενίκευσης του μετασχηματισμού Legendre θα δούμε εν συντομία τον μετασχηματισμό των εξισώσεων Euler-Lagrange ενός μεταβολικού προβλήματος μέσω του μετασχηματισμού Legendre.

Θεώρημα 1 (Εξισώσεις Hamilton)**.** *Εστω* $L(x,y,z)$ *μια συνάρτηση Lagrange και ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Ορισμού 6. Μια συνάρτηση* $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *τέτοια ώστε*

$$(x, u(x), \nabla u(x)) \in G, \quad \forall x \in \Omega$$

είναι λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange εαν και μόνο εάν ικανοποιεί το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, το οποίο λέγεται σύστημα των εξισώσεων Hamilton

$$\nabla u = H_p(x,u,p), \qquad \nabla p = -H_y(x,u,p),$$

ή σε μορφή συνιστωσών

$$u_{k,i} = H_{p_{ki}}(x,u,p), \qquad p_{ki,i} = -H_{y_k}(x,u,p).$$

Με άλλα λόγια οι εξισώσεις Euler-Lagrange και Hamilton είναι ισοδύναμες για $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Παρατήρηση 11. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση u, ενώ οι εξισώσεις Hamilton είναι ένα σύστημα 1ης τάξης για τις άγνωστες συναρτήσεις (u,p). Μπορούμε να πούμε ότι με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Legendre πετύχαμε να υποβιβάσουμε την τάξη ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων με το κόστος της εισαγωγής νέων συναρτήσεων.

Απόδειξη. Εστω οτι η u ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial z_{ki}}\right)\bigg|_{(x,u,\nabla u)} = \frac{\partial L}{\partial y_k}\bigg|_{(x,u,\nabla u)} \tag{2.30}$$

Θέτουμε $y = u(x)$, $z = \nabla u$ στην (2.28), δηλ.

$$p(x) = L_z(x,u(x),\nabla u(x)) \tag{2.31}$$

οπότε από την (2.29) έχουμε

$$\nabla u(x) = \psi(x,u(x),p(x)). \tag{2.32}$$

Από τη σχέση αυτή και το (ii) της Πρότασης 5 παίρνουμε την πρώτη σχέση των εξισώσεων Hamilton. Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange (2.30) και την (2.31) παίρνουμε

$$\nabla p(x) = -L_y(x,u(x),\nabla u(x)),$$

η οποία σε συνδυασμό με την Πρόταση 5(v) δίνει

$$\nabla p(x) = H_y(x,u(x),p(x)).$$

Για το αντίστροφο, έστω ότι οι u, p ικανοποιούν τις εξισώσεις Hamilton. Από την (v) της Πρότασης 5 με παίρνουμε

$$L_y(x,u(x),z) + H_y(x,u(x),p(x)) = 0,$$

οπου $z = H_p(x,u(x),p(x))$. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την δεύτερη των εξισώσεων Hamilton δίνει

$$L_y(x,u(x),z) = \nabla p(x), \tag{2.33}$$

οπου $z = H_p(x,u(x),p(x))$. Από την πρώτη των εξισώσεων Hamilton έχουμε

$$z = H_p(x,u(x),p(x)) = \nabla u(x). \tag{2.34}$$

Συνδυασμός των (2.33), (2.34) δίνει

$$L_y(x,u(x),\nabla u(x)) = \nabla p(x). \tag{2.35}$$

Από την σχέση (i) της Πρότασης 5

$$p = L_z(x,y,H_p(x,y,p)) \quad \forall (x,y,p) \in G^\star.$$

Για $y = u(x)$ λαμβάνοντας υπόψη την (2.34) παίρνουμε

$$p(x) = L_z(x,u(x),\nabla u(x)). \tag{2.36}$$

Συνδυασμός των (2.35), (2.36) δίνει τις εξισώσεις Euler-Lagrange. □

2.4 Τανυστικός μετασχηματισμός Legendre

Προχωράμε τώρα σε μια περαιτέρω γενίκευση του μετασχηματισμού Legendre, τον τανυστικό μετασχηματισμό Legendre, ο οποίος θα μας οδηγήσει με φυσικό τρόπο στον ορισμό του τανυστή ορμής-ενέργειας μέσω του μετασχηματισμού Legendre.

Ορισμός 7 (Τανυστικός μετασχηματισμός Legendre, τανυστής Hamilton)**.** Εστω $L(x,y,z)$ μια συνάρτηση Lagrange που ικανοποιεί την υπόθεση (H). Κάνοντας χρήση του συμβολισμού του Ορισμού 6, ορίζουμε τον τανυστή Hamilton που αντιστοιχεί στην L, από τη σχέση

$$H(x,y,p) := z \dot{\otimes} p - L(x,y,z) I \Big|_{z=\psi(x,y,p)} \tag{2.37}$$

η σε μορφή συνιστωσών

$$H_{ij}(x,y,p) := z_{ki} p_{kj} - \delta_{ij} L(x,y,z) \Big|_{z=\psi(x,y,p)} .$$

Παράδειγμα 3. Για την συνάρτηση Lagrange του Παραδείγματος 2, ο τανυστής Hamilton δίνεται από τη σχέση

$$\underline{H}(u,p) = \frac{1}{2}\, z\dot{\otimes}p - L(u,z)I\Big|_{z=p} = \frac{1}{2}p\dot{\otimes}p - (\frac{1}{2}p : p + G(u))I.$$

Για το ίδιο πρόβλημα ο τανυστής ορμής-ενέργειας που κατασκευάσαμε με τη μέθοδο των εσωτερικών μεταβολών, δίνεται από τη σχέση

$$T(u,z) = \frac{1}{2}z\dot{\otimes}z - L(u,z)I.$$

Δεδομένου ότι $z = p$ έχουμε $\underline{H}(u,p) = T(u,z)$, όπου $z = p$.

Οπως φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα για την ειδική περίπτωση της λαγρανζιανής του παραδείγματος αυτού, οι τανυστές ορμής-ενέργειας και Hamilton ταυτίζονται μέσω του μετασχηματισμού Legendre. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι αυτό συμβαίνει γενικά.

Πρόταση 6. *Εστω L μία συνάρτηση Lagrange που ικανοποιεί την (H). Οι τανυστές ορμής-ενέργειας και Hamilton ταυτίζονται μέσω του αντίστοιχου μετασχηματισμού Legendre, δηλ.*

$$\underline{H}(x,y,p) = T(x,y,z) \tag{2.38}$$

όταν $z = H_p(x,y,p) \;\Leftrightarrow\; p = L_z(x,y,z)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται άμεσα από τον ορισμό αν λάβουμε υπόψη στη σχέση (2.37) ότι

$$z = \psi(x,y,p) = H_p(x,y,p),$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την $p = L_z(x,y,z)$ (βλ. Πρόταση 5). □

Παρατηρήσεις 12. (i) Παρατηρούμε ότι οι τανυστές που κατασκευάσαμε με τη μέθοδο εσωτερικών μεταβολών και τη μέθοδο μετασχηματισμού Legendre είναι ισοδύναμοι. Αυτό είναι συνέπεια του γενικότερου δυισμού που υπάρχει μεταξύ των διατυπώσεων μεταβολικών προβλημάτων κατά Lagrange και κατά Hamilton. Επομένως από εδώ και στο εξής θα ανφερόμαστε στον τανυστή ορμής-ενέργειας.

(ii) Η γενική έκφραση του τανυστή ορμής-ενέργειας σε κανονικές μεταβλητές είναι
$$T(x,u,p) = H_p \dot{\otimes} p + (H - p : H_p)I$$
ή σε μορφή συντεταγμένων
$$T_{ij}(x,u,p) = H_{p_{ki}} p_{kj} + (H - H_{p_{kl}} p_{kl})\delta_{ij},$$
όπως αποδεικνύεται εύκολα.

(iii) Αρχή μεγίστου για τις συνιστώσες του τανυστικού μετασχηματισμού Legendre. Οπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή ορμής-ενέργειας ικανοποιούν την αρχή μεγίστου (αντίστοιχα ελαχίστου) αν η H_{pp} είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) ορισμένη.

(iv) Η σχέση (2.38), αν λάβουμε υπόψη την πρώτη εξίσωση Hamilton, γράφεται στη μορφή
$$\underline{H}(x,u(x),p(x)) = T(x,u(x),\nabla u(x))$$
δηλ. αν θεωρήσουμε τα τανυστικά πεδία
$$\widetilde{H}(x) := \underline{H}(x,u(x),p(x)), \quad \widetilde{T}(x) := T(x,u(x),\nabla u(x))$$
τότε
$$\widetilde{H}(x) = \widetilde{T}(x), \ \forall x \in \Omega.$$
Από τη σχέση αυτή έπεται αμέσως ότι
$$\mathrm{div}\widetilde{H}(x) = \mathrm{div}\widetilde{T}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

2.5 Μερικές χαμιλτονιανές

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με μια ακόμη γενίκευση του μετασχηματισμού Legendre, την οποία δεν θα χρειαστούμε στη συνέχεια της εργασίας αυτής, αλλά η οποία ίσως αποδειχθεί χρήσιμη σε μελλοντικές εφαρμογές των τανυστών ορμής-ενέργειας. Πιό συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε μερικές χαμιλτονιανές, δηλ. συναρτήσεις Hamilton που προκύπτουν από μερικό μετασχηματισμό Legendre ως προς ορισμένες συνιστώσες του $z=(z',z'')$. Υποθέτουμε οτι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} G \to G^\star, (x,y,z',z'') \mapsto (x,y,z',p) &= (x,y,z',L_{z''}(x,y,z',z'')) \\ &=: (x,y,z',\varphi(x,y,z',z'')) \end{aligned} \tag{2.39}$$

είναι C^1-διαφορομορφισμός.

Ορισμός 8 (Μερική συνάρτηση Hamilton)**.** Εστω L μια συνάρτηση Lagrange που ικανοποιεί την πιο πάνω υπόθεση. Εστω

$$G^\star \to G, (x,y,z',p) \mapsto (x,y,z',z'') = (x,y,z',\psi(x,y,z',p)) \tag{2.40}$$

η αντίστροφη απεικόνιση της (2.39). Ο μερικός μετασχηματισμός Legendre $\overline{H}(x,y,z',p)$ της $L(x,y,z',z'')$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\overline{H}(x,y,z',p) = z''\cdot p - L(x,y,z',z'')\Big|_{z''=\psi(x,y,z',p)}$$

λέγεται μερική συνάρτηση Hamilton ή μερική χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στην λαγρανζιανή L, ως προς τις μεταβλητές z''.

Παρατηρήσεις 13. (i) Για τις μερικές χαμιλτονιανές ισχύει η Πρόταση 5 με τις προφανείς τροποποιήσεις. Για παράδειγμα στην (v) προστίθενται και οι σχέσεις

$$L_{z'}(x,y,z',z'') + H_{z'}(x,y,z',p) = 0$$

όπου $z''=\psi(x,y,z',p) \iff p=\varphi(x,y,z',z'')$.

(ii) Θεωρούμε τη μερική χαμιλτονιανή που προκύπτει από τη διαμέριση

$$z=(z',z'')=((z_r)_{r\neq i},z_i)$$

όπου $z_r=(z_{kr})_{k=1,\cdots,M}$ είναι η r-στη στήλη του πίνακα $z=(z_{ki})_{k\leqslant M,i\leqslant N}$. Εχουμε

$$\overline{H}_i(x,y,z',p) = \sum_{k=1}^{M} z_{ki}p_{ki} - L(x,y,z',z'')\Bigg|_{z''=\psi(x,y,z',p)}.$$

Αν ακολουθήσουμε την πορεία που ακολουθήσαμε για την παραγωγή της (2.38), θα διαπιστώσουμε ότι

$$\widetilde{H}_i(x) = \widetilde{H}_{ii}(x)$$

όπου $\widetilde{H}_{ii}$ είναι η διαγώνια συνιστώσα του τανυστή ορμής-ενέργειας.

§ 3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Ενας μεγάλος αριθμός σημαντικών προβλημάτων του Λογισμού των Μεταβολών περιλαμβάνει την ακροτατοποίηση ενός συναρτησιακού όταν η υπό προσδιορισμό συνάρτηση υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς, οι οποίοι λέγονται και *δευτερογενείς συνθήκες* (subsidiary conditions). Σ΄ αυτή την κατηγορία προβλημάτων εντάσσονται τα *ισομεριμετρικά προβλήματα* καθώς επίσης και τα περισσότερα προβλήματα της θεωρίας *Βέλτιστου Ελέγχου* (optimal control). Επίσης, ορισμένα προβλήματα Λογισμού των Μεταβολών χωρίς συνθήκες αντιμετωπίζονται ως προβλήματα υπό συνθήκες με απλούστερες λαγρανζιανές. Για την τεχνική αυτή βλ. αναφορά [60].

Στην παρούσα εργασία δεν θα γίνει ανασκόπιση του Λογισμού των Μεταβολών υπό δευτερογενείς συνθήκες, αλλά θα γίνεται επίκληση των απαιτούμενων στοιχείων της θεωρίας από τη βιβλιογραφία χωρίς απόδειξη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται για μια γενική εισαγωγή βασικού επιπέδου στον Logan [38] και για μια προχωρημένη εισαγωγή στο λογισμό των μεταβολών με πολυδιάστατα ολοκληρώματα συναρτήσεων με διανυσματικές τιμές υπό συνθήκες, ταξινόμηση των συνθηκών και αρκετά ιστορικά στοιχεία, στους Giaquinta-Hildebrandt [28]. Μια πλήρως ενημερωμένη (state of the art) παρουσίαση του αντικειμένου προσφέρεται στη Μη-Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση του Zeidler [66].

Προβλήματα Λογισμού των Μεταβολών υπό συνθήκες είχαν αντιμετωπιστεί από τον Euler ήδη από το 1732, εδώ και περίπου 300 χρόνια, με τη γνωστή μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Η ύπαρξη και ομαλότητα πολλαπλασιαστών Lagrange μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να επιτευχθεί με στοιχειώδεις μεθόδους, όπως η μελέτη ακρότατων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^N$ υπό συνθήκες στη βασική Ανάλυση.

Σύμφωνα με τους Giaquinta-Hildebrandt, για συναρτησιακά με πολλαπλά ολοκληρώματα και ολονομικές συνθήκες[5] (βλ. [28], κεφ. 2), η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange είναι απλά ένα φορμαλιστικό εργαλείο,

[5] Συνθήκες που περιλαμβάνουν και μερικές παραγώγους της υπό προσδιορισμό συνάρτησης.

η εφαρμοσιμότητα του οποίου δεν έχει εξακριβωθεί πλήρως ([28], κεφ. 2, σελ. 89). Εντούτοις, οι Abraham-Marsden-Ratiu ([1] Suppl. 3.5A, σελ. 187-189, κυρίως Th. 3.5.27, σελ. 187) δίνουν μία ενοποιημένη παρουσίαση του προβλήματος των πολλαπλασιαστών Lagrange με βάση τη θεωρία των απειροδιάστατων πολλαπλοτήτων που είναι τοπικά ομοιομορφικές με έναν χώρο Banach. Είναι πιθανό οι αναφορές των Giaquinta-Hildebrandt στο σημείο αυτό [10, 33] να είναι ελλειπώς ενημερωμένες. Για εισαγωγή στο αντικείμενο των απειροδιάστατων πολλαπλοτήτων βλ. [1, 37].

Για τη συνέχεια της εργασίας αυτής θα θεωρήσουμε δεδομένη την ύπαρξη και ομαλότητα των πολλαπλασιαστών Lagrange για τα προβλήματα που θα θεωρήσουμε και ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στο Θεώρημα 3.5.27 της αναφοράς [1] για επαλήθευση των ισχυρισμών.

3.1 Συνθήκες ισοπεριμετρικού τύπου

Θεωρούμε μεταβολικά προβλήματα που υπόκεινται σε δευτερογενείς συνθήκες της μορφής

$$J_1(u) := \int_\Omega L_1(x, u(x), \nabla u(x))dx = c, \tag{2.41}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μια δεδομένη σταθερά, $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$. Θα αναφερόμαστε σε συνθήκες αυτού του τύπου, ως *ισοπεριμετρικές συνθήκες*. Το σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων του προβλήματος αυτού θα είναι

$$\mathcal{S} := \{v \in C^1(\overline{\Omega})^M : J_1(v) = c\}.$$

Πρόταση 7 (Τανυστής ορμής-ενέργειας υπό ισοπεριμετρικές συνθήκες)**.** *Εστω J_0 ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί τη συνθήκη (VF) και L_0 η αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange. Υποθέτουμε ότι το μεταβολικό πρόβλημα που ορίζει το J_0 υπόκειται σε μία δευτερογενή συνθήκη ισοπεριμετρικού τύπου (2.41) και έστω $u \in C^1(\overline{\Omega})^M \cap C^2(\Omega)^M$ μια λύση του προβλήματος, δηλ. η u είναι κρίσιμο σημείο του J_0 και ικανοποιεί την συνθήκη (2.41). Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ (πολλαπλασιαστής Lagrange) έτσι ώστε ο τανυστής ορμής-ενέργειας για την u να δίνεται από τη σχέση*

$$T(x) = T_0(x) + \lambda T_1(x), \tag{2.42}$$

όπου T_0, T_1 είναι οι τανυστές ορμής-ενέργειας που αντιστοιχούν στα συναρτησιακά J_0, J_1 αντίστοιχα και το λ δίνεται από τη λύση του μεταβολικού προβλήματος.

Απόδειξη. Θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη και ομαλότητα του πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$, το μεταβολικό πρόβλημα υπό την δευτερογενή συνθηκή είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα χωρίς συνθήκη που ορίζεται από το συναρτησιακό

$$J(u) := J_0(u) + \lambda J_1(u), \quad L(x,y,z) = L_0(x,y,z) + \lambda L_1(x,y,z).$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό J είναι

$$\begin{aligned} T &= z\dot{\otimes}L_z + LI = z\dot{\otimes}(L_{0,z} + \lambda L_{1,z}) + (L_0 + \lambda L_1)I \\ &= z\dot{\otimes}L_{0,z} + L_0 I + \lambda z\dot{\otimes}L_{1,z} + \lambda L_1 I \\ &= T_0 + \lambda T_1, \end{aligned}$$

όπου $J_1(u) = c$. □

Παρατήρηση 14. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας στην πιο πάνω Πρόταση προσδιορίστηκε για τη λύση του μεταβολικού προβλήματος u. Θα θεωρούμε γενικότερα, όπως για παράδειγμα για συναρτήσεις u που δεν είναι λύσεις του μεταβολικού προβλήματος, αλλά και ακόμη πιο γενικά, ότι ο τανυστής ορμής-ενέργειας εκφράζεται από μια σχέση της μορφής (2.42), δηλ.

$$T(x,y,z) = T_0(x,y,z) + \lambda T_1(x,y,z),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.2 Ολονομικές συνθήκες.

Στην υποενότητα αυτή θεωρούμε μεταβολικά προβλήματα με *συνθήκες ολονομικού τύπου*, δηλ. προβλήματα στα οποία η προσδιοριστεία συνάρτηση ικανοποιεί μια συνθήκη της μορφής

$$G(x,u(x)) = 0, \; \forall x \in \Omega,$$

όπου $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^r$, $1 \leqslant r \leqslant M-1$([6]).

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δούμε τις αποδεκτές συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ του μεταβολικού προβλήματος ως συναρτήσεις, το γράφημα των οποίων περιέχεται σε μια $(N+M-r)$-διάστατη πολλαπλότητα M, η οποία ορίζεται από την εξίσωση

$$\mathrm{M}:\ G(x,y) = 0$$

ή σε συνιστώσες

$$\mathrm{M}:\ G_1(x,y) = 0, \cdots, G_r(x,y) = 0.$$

Το γεγονός ότι η M είναι $(N+M-r)$-διάστατη πολλαπλότητα εξασφαλίζεται από τη συνθήκη επί της G

$$\mathrm{rank} G' = r.$$

Με την παρατήρηση ότι η M παίρνει τη *δομή ινώδους δέσμης* (*fibre bundle*) *επί του* Ω (το οποίο είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$) αν θεωρήσουμε ως προβολή της δέσμης την κανονική προβολή

$$\pi : \mathrm{M} \to \Omega, (x,y) \mapsto x$$

και ίνες τις υποπολλαπλότητες

$$\mathrm{M}_x := \{y \in \mathbb{R}^M :\ G(x,y) = 0\},$$

όπου M_x είναι η ίνα υπεράνω του $x \in \Omega$, τότε μια αποδεκτή συνάρτηση του μεταβολικού προβλήματος u μπορεί να θεωρηθεί ως *διατομή της ινώδους δέσμης* $(\mathrm{M}, \Omega, \pi)$.

Στην περίπτωση αυτή είναι εύκολο να δούμε ότι τα διανυσματικά πεδία

$$G_{1,y}, \cdots, G_{r,y}$$

[6]Η συνθήκη αυτή προκύπτει από την φυσιολογική απαίτηση η διάσταση της πολλαπλότητας M (βλ. πιο κάτω) να είναι τουλάχιστον $N+1$, όπου το N αντιστοιχεί στις συνιστώσες του $x \in \Omega$ που θέλουμε να είναι ανεξάρτητες (διαφορετικά δεν μιλάμε για λογισμό μεταβολών σε συναρτήσεις του Ω, αλλά μιας υποπολλαπλότητάς του) και μία τουλάχιστον για τις συνιστώσες του u.

είναι κάθετα στις αντίστοιχες ίνες M_x, δηλ.

$$G_{i,y}(x,y) \in N_y\mathrm{M}_x,$$

όπου $N_y\mathrm{M}_x$ είναι ο κάθετος χώρος της πολλαπλότητας M_x στο y.

Συνοψίζουμε τη λύση του μεταβολικού προβλήματος με ολονομική συνθήκη στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2 (Υπαρξη πολλαπλασιαστών Lagrange για ολονομικά μεταβολικά προβλήματα)**.** *Εστω J_0 ένα συναρτησιακό με συνάρτηση Lagrange L_0 που ικανοποιεί την (VF). Θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα που ορίζει το J_0 με την ολονομική συνθήκη*

$$G(x,u(x)) = 0$$

ή σε μορφή συνιστωσών

$$G_1(x,u(x)) = \cdots = G_r(x,u(x)) = 0,$$

όπου $G \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^M)^r$. Μια συνάρτηση $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})^M \cap \mathrm{C}^2(\Omega)^M$ είναι κρίσιμο σημείο του προβλήματος αυτού τότε και μόνο τότε όταν υπάρχουν συναρτήσεις

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_r \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$$

τέτοιες ώστε η u να είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού με συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y,z) = L_0(x,y,z) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(x)G_j(x,y)$$

(*χωρίς περιορισμούς*).

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται ως απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5.27 της αναφοράς [1]. Εναλλακτικά ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αναφορά [28] κεφ. 2, ενότητα 2, σελ. 99-103, όπου υπάρχουν και πολλές εφαρμογές μεταβολικών προβλημάτων με ολονομικές συνθήκες (βλ. προηγ. αναφ., σελ. 103-109). □

Η κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας σε προβλήματα με ολονομικές συνθήκες γίνεται με εφαρμογή του επόμενου πορίσματος.

Πόρισμα 4 (Κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας σε ολονομικά μεταβολικά προβλήματα)**.** *Εστω J_0 ένα συναρτησιακό με ολονομική συνθήκη όπως στο Θεώρημα. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις*

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in C(\Omega),$$

τέτοιες ώστε ο τανυστής ορμής-ενέργειας να δίνεται από τη σχέση

$$T = T_0 - I \sum_{j=1}^{r} \lambda_j G_j$$

όπου T_0 είναι ο τανυστής ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό J_0, δηλ. του προβλήματος χωρίς συνθήκη.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τη γραμμή της απόδειξης της Πρότασης 7. ◻

3.3 Μη ολονομικές συνθήκες.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με μια αναφορά στις *μη ολονομικές συνθήκες*, δηλ. συνθήκες της μορφής

$$G(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \tag{2.43}$$

όπου $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{NM})^r$.

Το πρόβλημα αυτό σύμφωνα με τους Giaquinta-Hildebrandt είναι ακόμη ανοιχτό διότι είναι δύσκολη η επαλήθευση των συνθηκών του Kloetzler([28] κεφ. 2, ενότητα 3, σελ. 112). Εντούτοις, όπως φαίνεται, η λύση του προβλήματος αυτού είναι άμεση εφαρμογή (η με μικρές τροποποιήσεις) του Θεωρήματος 3.5.27 της αναφοράς [1] (σελ. 187). Σύμφωνα με τους Giaquinta-Hildebrandt, το Θεώρημα 2 εξακολουθεί να ισχύει για την περίπτωση μη ολονομικών συνθηκών (με την πιο πάνω παρατήρηση), όπου εδώ η συνάρτηση της μη ολονομικής συνθήκης εξαρτάται και από το z. Κατά συνέπεια για την κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας σε μη ολονομικά προβλήματα έχουμε την επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 3 (Κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας σε μη ολονομικά προβλήματα)**.** *Εστω J_0 ένα συναρτησιακό όπως στο Θεώρημα 2. Θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα που ορίζει το J_0 με τη μη ολονομική συνθήκη* (2.43)*. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις*

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in C(\Omega),$$

τέτοιες ώστε ο τανυστής ορμής-ενέργειας να δίνεται από τη σχέση

$$T = T_0 + T_1,$$

όπου T_0 και T_1 είναι οι τανυστές ορμής-ενέργειας που αντιστοιχούν στο J_0 και την συνάρτηση Lagrange

$$L_1(x,y,z) = \lambda(x) \cdot G(x,y,z), \quad \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in C(\Omega)^r$$

αντίστοιχα.

Απόδειξη. Επεται με ανάλογο τρόπο όπως και η Πρόταση 7. □

Παράδειγμα 4. Μη ολονομική συνθήκη ([25]). Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y,z) := \frac{1}{2} z : z + F(y),$$

με τη συνθήκη ότι οι αποδεκτές συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ είναι ελεύθερες απόκλισης, δηλ.

$$\mathrm{div} u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Η συνάρτηση που εκφράζει αυτή την μη ολονομική συνθήκη είναι η

$$G(x,y,z) = \mathrm{tr} z = z_{ii}$$

δηλ. έχουμε τον περιορισμό

$$G(x,y,z) = 0.$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας για το πρόβλημα αυτό δίνεται από την σχέση

$$T_{ij}(x) = T^0_{ij} + \lambda(x)(u_{j,i}(x) - \delta_{ij} u_{k,k}(x)) = T^0_{ij} + \lambda(x) u_{j,i}(x)$$

όπου
$$T^0_{ij}(x) = u_{k,i}(x)u_{k,j}(x) - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{k,l}(x)u_{k,l}(x) + F(u)\right)$$
και η συνάρτηση λ προκύπτει από την λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange
$$\Delta u + \nabla\lambda = F_y(u), \quad \operatorname{div} u = 0.$$
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση λ παίζει τον ρόλο της πίεσης (μέχρις προσήμου).

§ 4 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ NOETHER

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί ένα *γενικό μεταβολικό σχήμα*, στο οποίο οι εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλονται ταυτόχρονα, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος Noether [41]. Βλ. για λεπτομέρειες Giaquinta-Hildebrand [28], κεφάλαιο 3, ενότητες 3 και 4. Οι εσωτερικές μεταβολές που παρουσιάστηκαν στην § 1 είναι μια ειδική περίπτωση αυτών των μεταβολών και έτσι ο λαμβανόμενος τανυστής ορμής-ενέργειας ταυτίζεται με εκείνον που λαμβάνεται από την μέθοδο των εσωτερικών μεταβολών. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι γενικότερες ταυτότητες τύπου Derrick-Pohozaev μπορούν να παραχθούν με πιο συστηματικό τρόπο. Για παράδειγμα, όταν έχουμε μεταβολικά προβλήματα σε υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^N$ ή σε πολλαπλότητες που δεν θέλουμε να θεωρήσουμε ως ενσωματωμένες στον $\mathbb{R}^N$, τότε δεν έχουμε το διανυσματικό πεδίο $x = (x_1, \cdots, x_N)$ στη διάθεσή μας (σημειώνεται ότι το πεδίο αυτό είναι απαραίτητο για την απόδειξη της ταυτότητας Derrick-Pohozaev, βλ. επίσης Κεφάλαιο 5). Η μέθοδος του θεωρήματος Noether προσφέρεται ως μια φυσική προσέγγιση για τον χειρισμό τέτοιων περιπτώσεων.

Η μέθοδος του θεωρήματος Noether έχει χρησιμοποιηθεί από διάφορους συγγραφείς [11, 12, 13, 61] για τη διερεύνηση προβλημάτων που σχετίζονται με συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων παρόμοια με αυτά που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή.

Κεφάλαιο 3

ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των τανυστών ορμής-ενέργειας, ορισμένες από τις οποίες είναι απαραίτητες για τη συνέχεια της εργασίας αυτής ενώ άλλες θεωρούμε ότι είναι χρήσιμες για περαιτέρω ανάπτυξη θεμάτων της εργασίας αυτής.

§ 1 ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ

Ξεκινώντας από την παρατήρηση 5(iv), για την ειδική περίπτωση $L_x = 0$, η εσωτερική μεταβολή ενός συναρτησιακού J δίνεται από τη σχέση

$$\mathfrak{d}J(u)h = \int_\Omega T_{ij}h_{i,j}dx = \int_\Omega T : \nabla h dx \tag{3.1}$$

Προχωρώντας ευριστικά θεωρούμε ότι τα L, u είναι όσες φορές χρειάζεται συνεχώς διαφορίσιμα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη στην πιο πάνω σχέση παίρνουμε

$$\mathfrak{d}J(u)h = -\int_\Omega T_{ij,j}h_i dx = -\int_\Omega (\mathrm{div}T)\cdot h dx \tag{3.2}$$

Εαν η συνάρτηση u είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού J, ή ισοδύναμα η u ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange, τότε $\delta J(u)v = 0$ για κάθε αποδεκτή μεταβολή v του u και επομένως για κάθε εσωτερική μεταβολή h του Ω είναι $\mathfrak{d}J(u)h = \delta J(u)v_h = 0$, όπου $v_h := u' \cdot h$ είναι η μεταβολή του u που προκαλεί η h. Επομένως

$$\int_\Omega (\mathrm{div}T) \cdot h dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N \tag{3.3}$$

και από το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών έπεται ότι

$$\mathrm{div}T = 0, \quad \acute{\eta} \quad T_{ij,j} = 0. \tag{3.4}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε επίσης να καταλήξουμε εναλλακτικά απ΄ ευθείας από τις εξισώσεις Euler-Lagrange με πράξεις. Πράγματι, έστω $u \in C^2(\Omega)$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}}\right) = \frac{\partial L}{\partial u_k}, \quad k = 1, \cdots, M.$$

Από τον ορισμό του τανυστή ορμής-ενέργειας, Ορισμός 3, έχουμε

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= \left(u_{k,i}\frac{\partial L}{\partial u_{k,j}} - \delta_{ij}L\right)_{,j} \\ &= u_{k,ij}\frac{\partial L}{\partial u_{k,j}} + u_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{k,j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial u_k}u_{k,i} - \frac{\partial L}{\partial u_{k,j}}u_{k,ij} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x_i} = -L_{x_i} \end{aligned} \tag{3.5}$$

δηλ. $\mathrm{div}T = 0$ εαν $L_x = 0$.

Πριν προχωρήσουμε, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτά στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση (VF), σελ. 19, τέτοιο ώστε η συνάρτηση Lagrange να είναι ανεξάρτητη του x, δηλ. $L_x = 0$, και $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ μια λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange* *του μεταβολικού προβλήματος που ορίζει το J (ισοδύναμα η u είναι ένα C^2 κρίσιμο σημείο του J). Τότε η u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση*

$$\mathrm{div} T(x,u,\nabla u) = 0 \tag{3.6}$$

ή ισοδύναμα, η u είναι ένα εσωτερικό κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού J, δηλ. $\mathfrak{d}J(u)h = 0$ για κάθε εσωτερική μεταβολή h του Ω (βλ. Ορισμό 9 πιο κάτω).

Απόδειξη. Επεται άμεσα από τις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.4) και (3.5) πιο πάνω. □

Ενα ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να χαλαρώσουμε την υπόθεση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, δηλ. αν από την υπόθεση ότι η u είναι λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange στην ασθενή μορφή[1], έπεται οτι η u ικανοποιεί την ασθενή μορφή της διαφορικής εξίσωσης (3.6),

$$\int_\Omega T : \nabla h dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$$

δηλ. η u είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού J. Η απάντηση είναι αρνητική όπως δείχνει το επόμενο αντιπαράδειγμα.

Αντιπαράδειγμα 1. (Steffen) Είναι γνωστό [63] ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ και μια συνεχής καμπύλη $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε $\nabla f(\gamma(t)) = 0$ $\forall t \in [0,1]$ και $f \circ \gamma \neq$σταθ. Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J(u) := \int_0^1 f(\dot{u}(t))dt.$$

Εχουμε

$$\delta J(u)h = \frac{d}{d\lambda} J(u+\lambda h)\bigg|_{\lambda=0} = \int_0^1 \nabla f(\dot{u}(t)) \cdot \dot{h}(t)dt = 0$$

εαν

$$\dot{u}(t) = \gamma(t) \Longleftrightarrow u(t) = c_0 + \int_0^t \gamma(s)ds. \tag{3.7}$$

[1] $\int_\Omega (L_{y_k}(x,u(x),\nabla u(x))\phi_k(x) + L_{z_{ki}}(x,u(x),\nabla u(x))\phi_{k,i}(x))dx = 0$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^M$.

Δηλ. η u που ορίζεται από την (3.7) ικανοποιεί τις ασθενείς εξισώσεις Euler-Lagrange για το J. Ομως η u δεν είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J διότι εαν ήταν, τότε

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}J(u)h &= \int_0^1 T(t)\dot{h}(t)dt = \int_0^1 (\dot{u}\cdot\nabla f(\dot{u}) - f(\dot{u}))\dot{h}(t)dt \\ &= -\int_0^1 f(\gamma(t))\dot{h}(t)dt = 0\end{aligned}$$

λόγω της $\nabla f(\dot{u}(t)) = \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Επομένως

$$\int_0^1 f(\gamma(t))\dot{h}(t)dt = 0, \quad \forall h \in \mathcal{D}(]0,1[),$$

από την οποία έπεται $f(\gamma(t)) =$ σταθ., το οποίο είναι άτοπο.

Ενα άλλο ενδιαφέρον ερώτημα που τίθεται είναι αν ισχύει το αντίστροφο της πιο πάνω πρότασης, δηλ. αν από την υπόθεση ότι η $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ είναι λύση της (3.6), έπεται ότι αυτή ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Η απάντηση είναι εν γένει αρνητική όπως φαίνεται εύκολα από το επόμενο αντιπαράδειγμα.

Αντιπαράδειγμα 2. Εστω $G \in C^1(\mathbb{R})$, $G \neq$ σταθ. και

$$J(u) := \int_\Omega G(u(x))dx, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας για το συναρτησιακό αυτό δίνεται από τη σχέση

$$T = -G(u)I,$$

οπότε η (3.6) απλοποιείται στην

$$G'(u)\nabla u = 0.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση $u = c_0$ είναι λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης, αλλά όχι των εξισώσεων Euler-Lagrange, οι οποίες για το ανωτέρω συναρτησιακό παίρνουν τη μορφή

$$G'(u) = 0.$$

Παρατήρηση 15. Από το αντιπαράδειγμα αυτό και τα σχόλια που προηγούνται είναι σαφές ότι για να ισχύει το ελεύθερο απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας δεν είναι απαραίτητο η u να είναι λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange, δηλ. είναι δυνατόν να ισχύει $\operatorname{div} T = 0$ χωρίς απαραίτητα να ισχύουν οι εξισώσεις αυτές.

Αυτή η παρατήρηση θα χρησιμεύσει στη συνέχεια στη γενίκευση κάποιων αποτελεσμάτων που έπονται από τους τανυστές ορμής-ενέργειας.

Ορισμός 9. Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση (VF), σελ. 19. Μια συνάρτηση $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ λέγεται *εσωτερικό κρίσιμο σημείο του* J αν

$$\mathfrak{d}J(u)h = 0, \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

Παρατηρήσεις 16. (i) Ο ανωτέρω ορισμός του εσωτερικού κρίσιμου σημείου είναι ανάλογος του ορισμού ενός κρίσιμου σημείου του J:

$$\delta J(u)\phi = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^M.$$

Η διαφορά είναι ότι οι εσωτερικές μεταβολές είναι ένα υποσύνολο των μεταβολών του u.

(ii) Οπως είδαμε, εαν $L_x = 0$, τότε $dJ(u)h = \int_\Omega T : \nabla h dx$ και η u είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J τότε και μόνο τότε όταν

$$\int_\Omega T : \nabla h dx = 0, \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$$

Η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα

$$\operatorname{div} T(u, \nabla u) = 0$$

με την έννοια των κατανομών. Γενίκευση της παρατήρησης αυτής αποτελεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση (VF), σελ. 19, και $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$. Τότε η u είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J εαν και μόνον εαν ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση*

$$\operatorname{div} T(x, u, \nabla u) + L_x(x, u, \nabla u) = 0 \tag{3.8}$$

ή σε μορφή συντεταγμένων

$$T_{ij}(x, u, \nabla u)_{,j} + L_{x_i}(x, u, \nabla u) = 0.$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού και από την Πρόταση 1 η u είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J τότε και μόνον τότε όταν

$$\int_\Omega (T(x,u,\nabla u) : \nabla h - L_x(x,u,\nabla u)\cdot h)dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$$

Επειδή από την υπόθεση είναι $T \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^{N^2}$, με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\int_\Omega (\nabla T(x,u,\nabla u) - L_x(x,u,\nabla u))\cdot h dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$$

Ο ισχυρισμός έπεται από το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών. □

Παρατήρηση 17. Θα αναφερόμαστε στη σχέση (3.8) ως τη *σχέση απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας*.

Η επόμενη αναδιατύπωση της προηγούμενης πρόταση είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

Πρόταση 10. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση (VF), σελ. 19. Μια συνάρτηση $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)^M \cap \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^M$ είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J, δηλ. ισοδύναμα ικανοποιεί κλασσικά την σχέση απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας, τότε και μόνον τότε όταν ικανοποιεί στο Ω την διαφορική εξίσωση*

$$\delta L(u)\cdot\nabla u = 0$$

ή σε μορφή συνιστωσών

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial L}{\partial u_{k,i}}) - \frac{\partial L}{\partial u_k}\right)u_{k,j} = 0 \quad (j = 1,\cdots,N). \tag{3.9}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του εσωτερικού κρίσιμου σημείου η $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)^M \cap \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})^M$ είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J αν

$$\mathfrak{d}J(u)h = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

Από το Πόρισμα 1 η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\int_\Omega (\delta L(u)\cdot\nabla u)\cdot h dx = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

Ο ισχυρισμός έπεται από το θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών. □

Πόρισμα 5. *Κάτω από τις υποθέσεις της Πρότασης, οι εξισώσεις απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας γράφονται στην ισοδύναμη μορφή*

$$\delta L(u) \cdot \nabla u = 0$$

ή σε μορφή συνιστωσών βλ. σχέση (3.9).

Απόδειξη. Επεται άμεσα από την Πρόταση και την Πρόταση 9. □

Είδαμε προηγουμένως (βλ. Αντιπαράδειγμα 1 και σχόλια που προηγούνται) ότι μια ασθενής λύση $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ των εξισώσεων Euler-Lagrange δεν είναι απαραίτητα εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J (δηλ. η u δεν ικανοποιεί την (3.8) με την έννοια των κατανομών). Είναι δυνατόν όμως να εξάγουμε το συμπέρασμα αυτό αν επιβάλουμε πρόσθετους περιορισμούς στην u, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 11. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση* (*VF*), *σελ. 19. Κάθε ελάχιστο σημείο $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ του J* (*το οποίο αναγκαστικά ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange στην ασθενή μορφή, δηλ. με την έννοια των κατανομών*) *είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J και επομένως ικανοποιεί ασθενώς την εξίσωση* (3.8), *δηλ. με την έννοια των κατανομών.*

Απόδειξη. Επειδή οι εσωτερικές μεταβολές του u είναι υποσύνολο των μεταβολών του u, από την παρατήρηση 4(ii), σελ. 20, έχουμε

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{A}} J(v) \leqslant \inf_{h \in \mathcal{D}(\Omega)^N} J(u \circ \xi_h^t) \leqslant J(u),$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την $u \circ \xi_h^0 = u \circ id_{\overline{\Omega}} = u$. Επομένως

$$\mathfrak{d}J(u)h = \frac{d}{dt} J(u \circ \xi_h^t)\Big|_{t=0} = 0$$

Από την Πρόταση 1, σελ. 20, έπεται ο ισχυρισμός. □

Μια άλλη συνθήκη η οποία εξασφαλίζει ότι ένα κρίσιμο σημείο[2] είναι εσωτερικό κρίσιμο σημείο του J, είναι η *ισχυρή συνθήκη Legendre-Hadamard*

$$\frac{1}{2}L_{z_{ki}z_{lj}}(x,u,\nabla u)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_l \geqslant c_0|\xi|^2|\eta|^2,$$

όπου c_0 μια σταθερά. Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα έπεται από το γεγονός ότι η u έχει αναγκαστικά μεγαλύτερη ομαλότητα, δηλ. $u \in C^2(\Omega)^M$. Για λεπτομέρειες βλ. [28] κεφ. 3, ενότητα 1, παράδειγμα 0, σελ. 153.

Από τα ανωτέρω είναι προφανές ότι η ομαλότητα της συνάρτησης u, η οποία είναι όρισμα του τανυστή ορμής-ενέργειας, είναι ένας κρίσιμος παράγοντας και το γεγονός αυτό πρέπει να λαμβάνεται προσεκτικά υπόψη σε χειρισμούς που αφορούν τανυστές ορμής-ενέργειας.

§ 2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ EULER-LAGRANGE ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Εστω $1 \leqslant N < M$ και $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ μια λύση της εξίσωσης απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας. Θεωρούμε την εικόνα της u

$$S := u(\Omega) = \{u(x) : x \in \Omega\}.$$

Εαν τα διανύσματα

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \in \mathbb{R}^M$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\forall x \in \Omega$ (ή για κάθε x σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $\Omega' \subset \Omega$, οπότε μετονομάζουμε το Ω' σε Ω), τότε η γραμμική απεικόνιση

$$u'(x) = \nabla u(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$

[2] Δηλ. ασθενής λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange

είναι ενστοίχιση (injection) $\forall x \in \Omega$, όπως πολύ εύκολα διαπιστώνεται από τη σχέση

$$u'(x)h = 0 \implies \sum_{i=1}^{N} u_{,i}(x)h_i = 0 \implies h_1 = \cdots = h_N = 0$$

διότι υποθέσαμε ότι τα διανύσματα $u_{,1}, \cdots, u_{,N}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως η u είναι μια εμμέριση (immersion) ([22] κεφ. 16, ενότητα 7, σελ. 37-39· [1], Ορισμός 3.5.6, σελ. 178) και κατά συνέπεια το S είναι ***τοπικά*** N-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^M$ ([3]). Σημειώνεται ότι η γραμμική ανεξαρτησία των $u_{,1}, \cdots, u_{,N}$ είναι ισοδύναμη με την ενστοιχιστικότητα της u'.

Θα δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\delta L(u)$, δηλ. η απεικόνιση

$$x \mapsto (\delta L(u))(x) := \Big((L_{z_{ki}})_{,i}(x,u(x),\nabla u(x)) - L_{y_k}(x,u(x),\nabla u(x))\Big)_{k=1,\cdots,M}$$

είναι ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο της S και ειδικότερα $(\delta L(u))(x) \perp T_{u(x)}\mathrm{S}$, ή

$$(\delta L(u))(x) \in N_{u(x)}\mathrm{S} \tag{3.10}$$

όπου $N_y\mathrm{S}$ είναι ο κάθετος χώρος της υποπολλαπλότητας S, και $T_{u(x)}\mathrm{S}$ είναι ο εφαπτόμενος χώρος (tangent space) της S. Ισχύει

$$\dim N_{u(x)}\mathrm{S} = M - N. \tag{3.11}$$

Πρόταση 12. *Εστω J ένα συναρτησιακό που ικανοποιεί την υπόθεση (VF), σελ. 19 και $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ μια λύση της εξίσωσης απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας, τέτοια ώστε η $u'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ είναι ενστοίχιση (injection) $\forall x \in \Omega$. Τότε το διανυσματικό πεδίο*

$$\delta L(u) : \Omega \to \mathbb{R}^M,\ x \mapsto (\delta L(u))(x)$$

είναι κάθετο στην N-διάστατη υποπολλαπλότητα S του $\mathbb{R}^M$, η οποία ορίζεται τοπικά από την u όπως πιο πάνω.

---

[3]Δηλ. για κάθε $x_0 \in \Omega$ υπάρχει $\Omega_{x_0} \in \mathcal{N}_0(x_0)$ τ.ω. η $\mathrm{S}_{x_0} := u(\Omega_{x_0})$ είναι N-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^M$. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, σύμφωνα με το οποίο η u είναι τοπικός διαφορομορφισμός, και το θεώρημα εμμέρισης ([22] κεφ. 16, (16.8.4), σελ. 42· [1], θεώρημα 3.5.7, σελ. 178)

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η S είναι (τοπικά) N-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^M$ έχει ήδη αποδειχθεί. Εστω $h \in T_{u(x)}S$. Η απεικόνιση

$$u'(x) : \mathbb{R}^N \to T_{u(x)}S$$

είναι αμφιστοίχιση (bijection) διότι από την υπόθεση είναι ενστοίχιση και $\dim T_{u(x)}S = N$. Ορίζοντας

$$k := u'(x)^{-1}h \ \in \mathbb{R}^N$$

παίρνουμε $h = u'(x)k$ και

$$((\delta L(u))(x)) \cdot h = (\delta L(u))(x) \cdot u'(x)k = (\delta L(u) \cdot \nabla u)(x) \cdot h = 0$$

από το Πόρισμα 5, διότι από την υπόθεση η u είναι λύση της (3.8). □

Παρατήρηση 18. Οπως έχουμε ήδη σημειώσει, στη θέση του Ω μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολό του. Επίσης να περιορίσουμε κι άλλο το Ω και στη θέση του να πάρουμε μια υποπολλαπλότητα $M \subset \Omega$. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (3.11) πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα.

Πόρισμα 6. *Εστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης, έτσι ώστε οι πιο κάτω απεικονίσεις να έχουν νόημα. Τότε η βραχεία ακολουθία (short sequence)*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)^N \xrightarrow{u'} \mathcal{D}(\Omega)^M \xrightarrow{\delta L(u)} \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Από τη σχέση $\delta L(u) \circ u' = 0$ έπεται αμέσως ότι

$$\operatorname{im} u' \subset \ker \delta L(u)$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\ker \delta L(u) \subset \operatorname{im} u'$. Εστω λοιπόν $h \in \ker \delta L(u)$, δηλ. $\delta L(u) \cdot h = 0$. Επειδή από την Πρόταση ισχύει $(\delta L(u))(x) \in N_{u(x)}S$, είναι $h(x) \in T_{u(x)}S$ $\forall x \in \Omega$. Επειδή η $u'(x)$ είναι αμφιστοίχιση επί του $T_{u(x)}S$ $\forall x \in \Omega$, ορίζουμε

$$k := u'^{-1}h \ \in \mathcal{D}(\Omega)^N,$$

οπότε $h = u' \cdot k \in \operatorname{im} u'$. □

§ 3 ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

Μια σημαντική απόρροια των τανυστών ορμής-ενέργειας είναι οι *εξισώσεις διατήρησης*[4], οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική και τη μηχανική. Ενα απλό παράδειγμα μονοδιάστατου προβλήματος Λογισμού Μεταβολών δείχνει τον ισχυρισμό αυτό.

Παράδειγμα 5. ([5]) Εστω $N = 1$, $\Omega =]a,b[$, $u \in C^1([a,b])^M$, $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$. Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J(u) := \int_a^b L(t,u(t),\dot{u}(t))dt,$$

όπου $L \in C^1([a,b],\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)$. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας για το συναρτησιακό αυτό δίνεται από τη σχέση

$$T(t) = \dot{u}(t)\cdot L_{\dot{u}}(t,u(t),\dot{u}(t)) - L(t,u(t),\dot{u}(t))$$

Εαν η L είναι ανεξάρτητη του t, από τη σχέση απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας (3.8) παίρνουμε

$$\frac{dT}{dt} = 0, \tag{3.12}$$

δηλ.

$$\dot{u}(t)\cdot L_{\dot{u}}(t,u(t),\dot{u}(t)) - L(t,u(t),\dot{u}(t)) = c, \tag{3.13}$$

όπου c είναι μία σταθερά. Η σχέση αυτή είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων Euler-Lagrange εάν η u τις ικανοποιεί. Σημειώνεται ότι δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange για να ισχύει η (3.13).

[4]Η νόμοι διατήρησης στην μηχανική και τη φυσική

[5][28] κεφ. 3, ενότητα 1, παράδ. 1, σελ. 154.

Εάν

$$L(u,z) = \frac{1}{2}|z|^2 + F(u),$$

όπου $F \in C^1(\mathbb{R}^M)$, και η F είναι τέτοια ώστε $c = 0$, τότε ισχύει η ισότητα Modica:

$$\frac{1}{2}|\dot{u}|^2 = F(u),$$

όπου τονίζεται ότι η u δεν είναι απαραίτητα λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange, αλλά μόνο της διαφορικής εξίσωσης απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας (βλ. σχέση (3.12)).

Το πιο πάνω παράδειγμα αναδεικνύει τον ρόλο του τανυστή ορμής-ενέργειας ως ένα ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο, το οποίο ίσως απαιτεί περαιτέρω μελέτη.

Για μεταβολικά προβλήματα που περιλαμβάνουν διανυσματικές συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$, οι εξισώσεις διατήρησης παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο. Ομως, η παρουσίασή τους απαιτεί την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας που παρουσιάσαμε στο Κεφ. 2 § 1 και το θεώρημα Noether, τα οποία ξεφεύγουν από τα όρια της εργασίας αυτής. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην αρχική δημοσίευση της Noether [41] ή στις αναφορές [28] κεφ. 3, ενότητες 3 και 4, σελ. 172-198· [39] κεφ. 6, σελ. 181-231· [53] σελ. 293.

3.2 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΑΝΥΣΤΗ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ο τανυστής ορμης-ενέργειας θεωρούμενος ως ένα τανυστικό πεδίο, δηλ. ως συνάρτηση $x \mapsto T(x,u(x),\nabla u(x))$ (την οποία επίσης θα συμβολίζουμε T), γράφεται ως εξής

$$T_{ij} + \delta_{ij}L = \left\langle z_i, p_j \right\rangle$$

όπου $\langle \cdot,\cdot \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^N$, z_i είναι η i-στή στήλη του πίνακα z και p_j η j-στή στήλη του πίνακα p, όπου

$$p(x) = L_z(x,u(x),\nabla u(x)). \tag{3.14}$$

Σε μορφή πινάκων έχουμε

$$T+LI=\begin{pmatrix} \langle z_1,p_1\rangle & \langle z_1,p_2\rangle & \cdots & \langle z_1,p_N\rangle \\ \langle z_2,p_1\rangle & \langle z_2,p_2\rangle & \cdots & \langle z_2,p_N\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle z_N,p_1\rangle & \langle z_N,p_2\rangle & \cdots & \langle z_N,p_N\rangle \end{pmatrix}.$$

Από αυτή την παράσταση του τανυστή ορμής-ενέργειας μπορούμε να βγάλουμε ορισμένα ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Παρατηρούμε ότι εαν $M<N$, τότε τα $p_1,\cdots,p_N$ (αντίστοιχα $z_1,\cdots,z_N$) είναι γραμμικά εξαρτημένα και η ορίζουσα του πίνακα του β΄ μέλους είναι μηδέν, δηλ.

$$\det(T+LI)=0$$

και έτσι αποδείξαμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 13. *Εαν $M<N$ η συνάρτηση Lagrange είναι ιδιοτιμή του τανυστή ορμής-ενέργειας T. Κάθε διάνυσμα $v\in\ker p=\ker L_z$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T στην ιδιοτιμή L. Κάθε διάνυσμα $v\in\ker\nabla u$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T^t στην ιδιοτιμή L.*

Κεφάλαιο 4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε παραδείγματα τανυστών ορμής-ενέργειας από τη μηχανική και τη φυσική, με σκοπό την διερεύνηση του ερωτήματος αν ο τανυστής ορμής-ενέργειας έχει κάποια φυσική σημασία και υπό ποιές προυποθέσεις είναι δυνατόν αυτό να συμβαίνει. Εξετάσαμε κάποιες περιπτώσεις από την κβαντική θεωρία, την κλασσική ηλεκτρομαγνητική θεωρία και την θεωρία γραμμικής ελαστικότητας με κάποια επέκταση στην μη-γραμμική θεωρία ελαστικότητας. Η απάντηση στο πιο πάνω ερώτημα είναι ότι σε ορισμένα προβλήματα ο τανυστής ορμής-ενέργειας έχει τη φυσική σημασία του τανυστή τάσης (ισοδύναμα μείον ροή ορμής), όμως αυτό δεν ισχύει γενικά. Υπό ορισμένες προυποθέσεις, όπως είδαμε στην ενότητα 3§ 2 ο τανυστής ορμής-ενέργειας έχει κάποια γεωμετρική σημασία.

Ενα ίσως σημαντικό ερώτημα που δεν εξετάστηκε στην εργασία αυτή είναι αν σε ένα φυσικό πρόβλημα στο οποίο ορίζεται ένας τανυστής ορμής-ενέργειας, υπάρχει μεταβολική διατύπωση τέτοια ώστε ο τανυστής ορμής-ενέργειας που προκύπτει να ταυτίζεται με τον τανυστής ορμής-ενέργειας του φυσικού προβλήματος. Το ερώτημα αυτό συνδέεται προφανώς με το πρόβλημα ύπαρξης μεταβολικής διατύπωσης ενός φυσικού προβλήματος.

§ 1 ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ - ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHROEDINGER

1.1 Φυσικές βάσεις

Η δυναμική (χρονική εξέλιξη) ενός κβαντικού συστήματος στην απλή περίπτωση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα δυναμικό πεδίο $\mathbf{f}$, το οποίο δίνεται από ένα δυναμικό V,

$$\mathbf{f}(x) = -\mathrm{grad} V(x)$$

ακολουθεί την εξίσωση Schroedinger ([35] κεφ. 3, ενότητα 17, ιδίως σχέση (17.6), σελ. 51)

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(x)\Psi = 0 \tag{4.1}$$

όπου $\Psi(x,t)$ είναι ένα βαθμωτό πεδίο με μιγαδικές τιμές και $\hbar$, m σταθερές.

Θεωρώντας ιδοκαταστάσεις ενέργειας, δηλ. θέτοντας

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda t}, \tag{4.2}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά, η εξίσωση (4.1) ανάγεται στην στάσιμη εξίσωση Schroedinger ([35] κεφ. 3, ενότητα 17, σχέση (17.7), σελ. 51)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (V(x) - \lambda)\psi = 0$$

Κλιμακώνοντας έτσι ώστε $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$ και θέτοντας $V_\lambda(x) := V(x) - \lambda$, παίρνουμε τελικά

$$-\Delta\psi + V_\lambda(x)\psi = 0 \tag{4.3}$$

Το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ψ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διδιάστατο πραγματικό διανυσματικό πεδίο

$$\psi(x) = u_1(x) + iu_2(x) = (u_1(x), u_2(x)).$$

Είναι μια καθιερωμένη πρακτική στην φυσική να χρησιμοποιούνται τα μιγαδικά πεδία ψ και $\overline{\psi}$ (συζυγής μιγαδικός) αντί για τα πραγματικά (u_1, u_2) ως συνιστώσες του ψ. Επειδή ενδιαφερόμαστε κατά κύριο λόγο για τη φυσική σημασία του τανυστή ορμής-ενέργειας, υιοθετούμε αυτόν τον συμβολισμό.

1.2 Μεταβολική διατύπωση της στάσιμης εξίσωσης Schroedinger

Η συνάρτηση Lagrange για το σύστημα αυτό[1] είναι (παραλείποντας τον δείκτη λ στο V):

$$L(x,\psi,\overline{\psi},\nabla\psi,\nabla\overline{\psi}) = |\nabla\psi|^2 + V(x)|\psi|^2 = \nabla\psi\nabla\overline{\psi} + V(x)\psi\overline{\psi}. \tag{4.4}$$

Για την ψ υποθέτουμε $\psi \in C^2(\Omega,\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{\Omega},\mathbb{C})$, όπου Ω είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^3$.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το σύστημα αυτό είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,i}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{\psi}_{,i}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \overline{\psi}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Από την (4.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi_{,i}} &= \overline{\psi}_{,i} & \qquad \frac{\partial L}{\partial \overline{\psi}_{,i}} &= \psi_{,i} \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= V(x)\overline{\psi} & \qquad \frac{\partial L}{\partial \overline{\psi}} &= V(x)\psi. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Χρήση των σχέσεων αυτών στις (4.5) δίνει

$$\begin{aligned} -\Delta\psi + V(x)\psi &= 0 \\ -\Delta\overline{\psi} + V(x)\overline{\psi} &= 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

οι οποίες είναι η εξίσωση (4.3).

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας υπολογίζεται από την (2.17)

$$T_{ij} = \psi_{,i}\frac{\partial L}{\partial \psi_{,j}} + \overline{\psi}_{,i}\frac{\partial L}{\partial \overline{\psi}_{,j}} - \delta_{ij}L,$$

[1] Για εναλλακτική, αλλά ισοδύναμη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος αυτού, βλ. [35] κεφ. 3, ενότητα 20, σελ. 58-60.

η οποία με τη βοήθεια των (4.6) δίνει

$$T_{ij} = \psi_{,i}\overline{\psi}_{,j} + \overline{\psi}_{,i}\psi_{,j} - \delta_{ij}L \tag{4.8}$$

Παρατηρήσεις 19. (i) Ισοδύναμα αποτελέσματα προκύπτουν αν χρησιμοποιηθούν οι συνιστώσες (u_1, u_2) αντί για τα $(\psi, \overline{\psi})$.

(ii) Ο τανυστής ορμής-ενέργειας T δεν είναι ελεύθερος απόκλισης. Από την (3.5) έχουμε

$$T_{ij,j} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}. \tag{4.9}$$

Χρήση της (4.4) δίνει

$$\mathrm{div} T = -|\psi|^2 \mathrm{grad} V \tag{4.10}$$

1.3 Φυσική σημασία του τανυστή ορμής-ενέργειας

Θα δείξουμε ότι ο τανυστής ορμής-ενέργειας T είναι ο πραγματικός *τανυστής ροής ορμής* (= - τάση) γι αυτό το κβαντικό σύστημα. Ειδικά θα δείξουμε ότι ικανοποιεί μια σχέση ανάλογη με αυτή του τανυστή τάσης του Cauchy στη μηχανική των συνεχών μέσων ([57] ενότητα 6, σχέση (6.1), σελ. 134· [7] 5.11, σχέση (5.11.3), σελ. 100), η ij-συνιστώσα του οποίου εκφράζει την j-οστή συνιστώσα της δύναμης (ανά μονάδα επιφάνειας) που ασκείται σε ένα απειροστό στοιχείο επιφάνειας με κάθετο διάνυσμα στην κατεύθυνση i ([57] ενότητα 6, σελ. 134-135· [7] 5.12, σελ. 101-102).

Εστω $\Psi : \Omega_0 \times [0, \tau] \to \mathbb{C}$ και $\Omega \subset \Omega_0$. Η ολική ορμή (στην πραγματικότητα «*η αναμενόμενη τιμή της ορμής*» σύμφωνα με την πιθανοτική ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας) που περιέχεται στο Ω δίνεται από τη σχέση[2] ([35] κεφ. 1, ενότητα 15, σχέση (15.2), σελ. 42)

$$P(t) = \int_\Omega \overline{\Psi(x,t)} \frac{1}{i} \nabla \Psi(x,t) dx \tag{4.11}$$

όπου $\frac{1}{i}\nabla$ είναι ο τελεστής της ορμής. Θα δείξουμε την επόμενη πρόταση.

[2] Λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα κλιμάκωση.

Πρόταση 14. *Εστω Ψ ένα μιγαδικό πεδίο όπως πιο πάνω, το οποίο είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμο ως προς x και μία ως προς t και ικανοποιεί την (4.1). Τότε για την παράγωγο του ολοκληρώματος (4.11) ισχύει η εξίσωση κίνησης του Cauchy*

$$P'(t) = -\int_{\partial\Omega} T \cdot \nu dS + \int_{\Omega} |\psi|^2(-\mathrm{grad} V)dx, \tag{4.12}$$

όπου T είναι ο τανυστής ορμής-ενέργειας (4.8), για κάθε $\Omega \subset \Omega_0$.

Απόδειξη. Από την (4.11) με παραγώγιση έχουμε

$$P'(t) = \int_{\Omega} (\overline{\Psi}_t \frac{1}{i} \nabla \Psi + \overline{\Psi} \frac{1}{i} \nabla \Psi_t) dx \tag{4.13}$$

Πολλαπλαζοντας τη σχέση

$$\frac{1}{i}\Psi_t - \Delta\Psi + V\Psi = 0$$

με $\nabla\overline{\Psi}$ και τη μιγαδική συζυγή της

$$-\frac{1}{i}\overline{\Psi}_t - \Delta\overline{\Psi} + V\overline{\Psi} = 0$$

με $\nabla\Psi$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα παίρνουμε

$$-\frac{1}{i}(\Psi_t \nabla\overline{\Psi} - \overline{\Psi}_t \nabla\Psi) = (-\Delta\Psi + V\Psi)\nabla\overline{\Psi} + (-\Delta\overline{\Psi} + V\overline{\Psi})\nabla\Psi.$$

Πρόσθεση και αφαίρεση του όρου $\overline{\Psi}\nabla\Psi_t$ στο α΄ μέλος της σχέσης αυτής (εντός των παρενθέσεων) και ανακατάταξη των όρων του β΄ μέλους δίνει

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i}(\Psi_t \nabla\overline{\Psi} + \overline{\Psi}\nabla\Psi_t - \overline{\Psi}\nabla\Psi_t - \overline{\Psi}_t \nabla\Psi) = \\ -(\Delta\Psi\nabla\overline{\Psi} + \Delta\overline{\Psi}\nabla\Psi) + V(\Psi\nabla\overline{\Psi} + \overline{\Psi}\nabla\Psi), \end{aligned}$$

από την οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i}\nabla(\Psi_t\overline{\Psi}) + \frac{1}{i}(\overline{\Psi}_t\nabla\Psi + \overline{\Psi}\nabla\Psi_t) = \\ -(\Delta\Psi\nabla\overline{\Psi} + \Delta\overline{\Psi}\nabla\Psi) + V\nabla(\Psi\overline{\Psi}), \end{aligned}$$

και από αυτή

$$\frac{1}{i}(\overline{\Psi}_t\nabla\Psi+\overline{\Psi}\nabla\Psi_t)=$$
$$-(\Delta\Psi\nabla\overline{\Psi}+\Delta\overline{\Psi}\nabla\Psi)+\frac{1}{i}\nabla(\Psi_t\overline{\Psi})+V\nabla(V\Psi\overline{\Psi})-(\nabla V)\Psi\overline{\Psi}.$$

Καλώντας A τον πρώτο όρο εντός παρενθέσεων του β΄ μέλους και B τον όρο του α΄ μέλους έχουμε

$$\begin{aligned} A_i &= \Psi_{jj}\overline{\Psi}_i+\overline{\Psi}_{,jj}\Psi_{,i}=(\Psi_{,j}\overline{\Psi}_{,i})_{,j}-\Psi_{,j}\overline{\Psi}_{,ij}+(\overline{\Psi}_{,j}\Psi_{,i})_{,j}-\overline{\Psi}_{,j}\Psi_{,ij}\\ &= (\Psi_{,j}\overline{\Psi}_{,i}+\overline{\Psi}_{,j}\Psi_{,i})_{,j}-(\Psi_{,j}\overline{\Psi}_{,j})_{,i}\\ &= (\overline{\Psi}_{,i}\Psi_{,j}+\Psi_{,i}\overline{\Psi}_{,j}-\delta_{ij}\nabla\Psi\cdot\nabla\overline{\Psi})_{,j} \end{aligned}$$

Με τη χρήση της σχέσης $\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\lambda t}$ έχουμε $\frac{1}{i}\Psi_t\overline{\Psi}=-\lambda|\psi|^2$ και

$$\begin{aligned} B_i &= -(\psi_{,i}\overline{\psi}_{,j}+\psi_{,j}\overline{\psi}_{,i}-\delta_{ij}|\nabla\psi|^2)_{,j}+((V-\lambda)|\psi|^2)_{,i}-V_{,i}|\psi|^2\\ &= -(\psi_{,i}\overline{\psi}_{,j}+\psi_{,j}\overline{\psi}_{,i}-\delta_{ij}L)_{,j}-V_{,i}|\psi|^2, \end{aligned}$$

δηλ. τελικά
$$B=-(\mathrm{grad}V)|\psi|^2-\mathrm{div}T.$$

Ολοκλήρωση της σχέσης αυτής επί του Ω και χρήση της (4.13) δίνει την (4.12). □

Παρατηρήσεις 20. (i) Η σχέση αυτή είναι ταυτόσημη με την εξίσωση κίνησης του Cauchy για ένα συνεχές μέσο με πυκνότητα $\rho=|\psi|^2$ (αυτή είναι η πυκνότητα πιθανότητας για το σωματίδιο να βρίσκεται στο απειροστό διάστημα $]x,x+dx[$ σύμφωνα με την αποδεκτή (standard) ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας), πεδίο δυνάμεων $\mathbf{f}=-\mathrm{grad}V$ και τανυστή τάσης του Cauchy $S=-T$. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι το S είναι τάση, δηλ. δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, ενώ το T είναι ροή ορμής.

(ii) Επειδή το σύστημα υπό θεώρηση ήταν εξ ορισμού στάσιμο, πρέπει να έχουμε $P'(t)=0$, δηλ. ισοδύναμα από την (4.12) $\mathrm{div}T=-(\mathrm{grad}V)|\psi|^2$. Πράγματι, η σχέση αυτή είναι η (4.10).

(iii) Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να θεωρήσουμε πιο πολύπλοκα κβαντικά συστήματα όπως συστήματα πολλών σωματιδίων, με ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, με μη γραμμική αλληλεπίδραση (Gross-Pitaevski, Ginsburg-Landau κλπ), αλλά για τους σκοπούς της επίδειξης της φυσικής σημασίας των τανυστών ορμής-ενέργειας, αυτό το πολύ απλό σύστημα είναι αρκετό.

§ 2 ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Η μελέτη του παραδείγματος της ηλεκρομαγνητικής θεωρίας είναι ενδιαφέρουσα για δύο λόγους. Ο ένας είναι ότι ο λαμβανόμενος τανυστής ορμής-ενέργειας έχει άμεση φυσική σημασία. Ο δεύτερος είναι ότι η μεταβολική διατύπωση της ηλεκρομαγνητικής θεωρίας μας οδηγεί με φυσικό τρόπο στην θεώρηση μεταβολικών προβλημάτων και τανυστών ορμής-ενέργειας σε πολλαπλότητες. Επομένως αφιερώνουμε την ενότητα αυτή στη μελέτη της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

2.1 Ανασκόπιση της ηλεκρομαγνητικής θεωρίας.

Ο αντικειμενικός σκοπός της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας είναι ο προσδιορισμός της εξέλιξης δύο διανυσματικών πεδίων

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ([3]), τα οποία ικανοποιούν το εξής σύστημα γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (εξισώσεις Maxwell στο σύστημα μονάδων του Gauss)

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho && \mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \\ &\mathrm{curl}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} && \mathrm{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

όπου c είναι μια σταθερά (η ταχύτητα του φωτός) και

$$\rho : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}, \ \mathbf{J} : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$$

[3] Γενίκευση στον $\mathbb{R}^N$ δεν είναι δυνατή.

είναι δεδομένα πεδία (το φορτίο και η πυκνότητα ρεύματος αντίστοιχα). Τα πεδία ρ και $\mathbf{J}$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} J = 0,$$

η οποία έπεται εύκολα από την πρώτη στήλη των εξισώσεων (4.14).

Για τον διαχωρισμό των ανεξάρτητων μεταβλητών του συστήματος (4.14) εισάγονται τα δυναμικά

$$\varphi : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R},\ \mathbf{A} : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$$

για τα πεδία $\mathbf{E}, \mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} &= \mathrm{curl}\mathbf{A} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Μέσω των δυναμικών αυτών οι εξισώσεις (4.14) ανάγονται σε ένα ανεξάρτητο σύστημα υπερβολικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Τα πεδία φ, $\mathbf{A}$ δεν είναι μοναδικά. Πράγματι, με τη χρήση ενός «gauge transformation» $(\varphi, \mathbf{A}) \mapsto (\varphi', \mathbf{A}')$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \mathrm{grad}\Lambda \end{aligned}$$

όπου $\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ένα βαθμωτό πεδίο, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο δυναμικών τα οποία διατηρούν τα πεδία $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$: για $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ όπως υπολογίζονται από τις σχέσεις (4.15) με φ', $\mathbf{A}'$ στη θέση των φ, $\mathbf{A}$ στο δεξιό μέλος, μπορούμε να δείξουμε τετριμμένα ότι $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ και $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$. Είναι δυνατό να επιλέξουμε τα δυναμικά έτσι ώστε να ικανοποιείται η επόμενη συνθήκη του Lorentz

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Τα επόμενα πεδία που παράγονται από τα βασικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ειναι σημαντικά:

Πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας	$\sigma = \frac{1}{8\pi}(\lvert\mathbf{E}\rvert^2 + \lvert\mathbf{H}\rvert^2)$
Ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας	$\mathbf{S} := \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$
Πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ορμής	$\mathbf{g} := \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$
Τανυστής τάσης Maxwell	$\mathbf{\Sigma}$

όπου οι συνιστώσες του τανυστή $\mathbf{\Sigma}$ δίνονται από τη σχέση

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi}(E_iE_j + H_iH_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\lvert\mathbf{E}\rvert^2 + \lvert\mathbf{H}\rvert^2))$$

Σημειώνεται ότι ο τανυστής τάσης του Maxwell δεν είναι απλά μια μαθηματική κατασκευή. Είναι ένας πραγματικός τανυστής τάσης που εκφράζει τη δύναμη ανα μονάδα εμβαδού σε κάθε επιφάνεια που βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ενα σχετικό σημαντικό θεώρημα που αφορά τη μεταφορά ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας και την ανάπτυξη δυνάμεων σε σώματα, είναι το θεώρημα του Poynting, το οποίο εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας και ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ειδικότερα

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{S} = -E\cdot J$$
$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{\Sigma}dx - \int_\Omega \mathbf{f}dx \tag{4.17}$$

όπου

$$\mathbf{P} = \int_\Omega \mathbf{g}dx$$

είναι η ηλεκτρομαγνητική ορμή που περιέχεται στο Ω και

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{H}$$

είναι η δύναμη Lorentz. Σημειώνουμε την ομοιότητα των σχέσεων (4.17) και (4.12).

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού έπεται με πράξεις στις σχέσεις (4.14). Επειδή αυτές είναι πολλές και υπάρχουν στη βιβλιογραφία, δεν θα τις παρουσιάσουμε εδώ.

2.2 Σχετικιστικά συμμεταβλητή διατύπωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

Για την διατύπωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας ως πρόβλημα του Λογισμού των Μεταβολών, είναι απαραίτητη η χρήση της σύγχρονης σχετικιστικά συμμεταβλητής διατύπωσης της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Στη θέση των δύο πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} : [0,\tau] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ θεωρούμε ένα τανυστικό πεδίο $F : \mathrm{G} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$ όπου $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}^4$, το οποίο ορίζουμε στη συνέχεια.

Ο χώρος Lorentz. Στον $\mathbb{R}^4$ εγκαταλείπουμε την Ευκλείδια μετρική g^E

$$\langle x,y \rangle_E = \sum_{i,j=0}^{3} g^E_{ij} x^i y^j,\ (g^E_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και στη θέση της θεωρούμε τη μετρική[4] του Lorentz

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} x^i y^j,\ (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

όπου $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$. Η μηδενική συνιστώσα του x, x^0, αντιστοιχεί στον χρόνο (κατάλληλα κλιμακωμένη με την σταθερά c, την ταχύτητα του φωτός), δηλ. $x^0 = ct$ και x^1, x^2, x^3 είναι οι συνηθισμένες χωρικές συνιστώσες. Επομένως κάθε διάνυσμα

$$X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$$

έχει μία χρονοειδή (time-like) συνιστώσα X^0 και τρείς χωροειδείς (space-like) συνιστώσες X^1, X^2, X^3. Συμβολιζουμε τον χώρο $\mathbb{R}^4$ με τη μετρική του Lorentz g ως

$$\mathbb{L}^4.$$

[4]Πρόκειται για μια «ψευδομετρική», η οποία παίρνει και αρνητικές τιμές.

Θα αναφερόμαστε στην τετράδα (X^0,X^1,X^2,X^3) ως τις αντιμεταβλητές συνιστώσες του X. Οι συμμεταβλητές συνιστώσες του X, (X_0,X_1,X_2,X_3), δίνονται από τη σχέση

$$X_i = g_{ij}X^j$$

δηλ.

$$(X_0,X_1,X_2,X_3) = (X^0,-X^1,-X^2,-X^3)$$

Με τη χρήση του αντίστροφου πίνακα του (g_{ij}),

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

έχουμε επίσης

$$X^i = g^{ij}X_j$$

Ο τελεστής Laplace στον χώρο αυτό παίρνει τη μορφή

$$\square := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

και είναι υπερβολικός και όχι ελλειπτικός τελεστής.

Ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις. Το τετραδιάστατο ανάλογο των δυναμικών φ, $\mathbf{A}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{L}^4$ με συνιστώσες

$$(A^0,A^1,A^2,A^3) = (\varphi,\mathbf{A}), \quad \mathbf{A} = (A^1,A^2,A^3).$$

Ομοίως τα πεδία ρ και $\mathbf{J}$ ορίζουν ένα διανυσματικό πεδίο $J : \mathrm{G} \to \mathbb{L}^4$ όπου $\mathrm{G} \subset \mathbb{L}^4$ με συνιστώσες

$$(J^0,J^1,J^2,J^3) = (\rho,\mathbf{J}).$$

Το ενοποιημένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο F που αναφέρθηκε προηγουμένως ορίζεται από τη σχέση

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}. \tag{4.18}$$

Σημειώνουμε ότι από το σημείο αυτό η θέση των δεικτών ως υπερ- ή υπο-δείκτες έχει σημασία. Βρίσκουμε εύκολα ότι το F σχετίζεται με τα αρχικά πεδία $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ μέσω των πινάκων

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου

$$F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl}.$$

Η σχέσεις της δεύτερης στήλης των (4.14) ικανοποιούνται αυτόματα από την (4.18) (για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την (4.15)· η (4.18) είναι αναδιατύπωση της (4.15) με διαφορετικό συμβολισμό). Για την πρώτη στήλη των (4.14) ελέγχεται εύκολα ότι αυτές παίρνουν τη μορφή

$$F^{ij}_{,i} = \frac{4\pi}{c} J^j. \tag{4.19}$$

2.3 Μεταβολική διατύπωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

Οι εξισώσεις Maxwell όπως δίνονται πιο πάνω (4.14) και το τετραδιάστατο συμμεταβλητό ανάλογό τους (4.19), μπορούν να παραχθούν ως εξισώσεις Euler-Lagrange του μεταβολικού προβλήματος που ορίζει η συνάρτηση Lagrange

$$L(x, A, \nabla A) = -\frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{c} A^i J_i(x)$$

όπου $F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$. Οι φυσικές σταθερές βρίσκονται εκεί για συμφωνία με την φυσική βιβλιογραφία.

2.3.1 Εξισώσεις Euler-Lagrange.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το σύστημα αυτό είναι

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{i,j}}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_i}.$$

Για τον υπολογισμό του όρου $\dfrac{\partial L}{\partial A_{i,j}}$ γράφουμε

$$F_{ij}F^{ij} = g^{pk}g^{ql}F_{pq}F_{kl}.$$

Τότε από την

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A_{i,j}}(g^{pk}g^{ql}F_{pq}F_{kl}) &= g^{pk}g^{ql}\left(\frac{\partial F_{pq}}{\partial A_{i,j}}F_{kl} + F_{pq}\frac{\partial F_{kl}}{\partial A_{i,j}}\right) \\
&= g^{pk}g^{ql}\Big((\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq})F_{kl} + F_{pq}(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})\Big) \\
&= g^{jk}g^{il}F_{kl} - g^{ik}g^{jl}F_{kl} + g^{pj}g^{qi}F_{pq} - g^{pi}g^{qj}F_{pq} \\
&= F^{ji} - F^{ij} + F^{ji} - F^{ij} \\
&= -4F^{ij}
\end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\frac{\partial L}{\partial A_{i,j}} = \frac{1}{4\pi}F^{ij}.$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} = -\frac{1}{c}J^i,$$

οπότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange γράφονται στη μορφή (4.19)

2.3.2 Τανυστής ορμής-ενέργειας.

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας υπολογίζεται από την (2.17) συμμεταβλητά αναδιατυπωμένη:

$$T_{ij} = g_{jp}A_{k,i}\frac{\partial L}{\partial A_{k,p}} - g_{ij}L.$$

Με χρήση των πιο πάνω σχέσεων παίρνουμε

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}g_{jp}A_{k,i}F^{kp} - g_{ij}L.$$

Η απόκλιση του τανυστή ορμής-ενέργειας T υπολογίζεται από την (3.8) (συμμεταβλητά αναδιατυπωμένη):

$$T_{ij,}^{\ j} = -\frac{\partial L}{\partial x^i} \implies T_{ij,}^{\ j} = \frac{1}{c}A^kJ_{k,i}.$$

Ο τανυστής T δεν είναι συμμετρικός. Για λόγους που εξηγούνται στη φυσική (βλ. [32] σελ. 604), μόνο συμμετρικοί τανυστές ορμής-ενέργειας έχουν φυσική σημασία. Αυτό το θέμα αντιμετωπίζεται με διάφορους τρόπους, οι οποίοι τελικά ανάγονται στην πρόσθεση του όρου $\frac{1}{4\pi}A_{i,k}F_j{}^k$ στον T παίρνοντας έτσι έναν συμμετρικό τανυστή

$$\widetilde{T}_{ij} = \Theta_{ij} + g_{ij}\frac{1}{c}A^k J_k$$

όπου

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{4\pi}(F_{ik}F^k_{\ j} + \frac{1}{4}g_{ij}F_{kl}F^{kl}).$$

Εχουμε

$$\widetilde{T}_{ij,}{}^j = \frac{1}{c}(A^k J_k)_{,i}$$

και

$$(\Theta_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma & -\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ -c\mathbf{g} & -\boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix}$$

δηλ. οι χωρικές συντεταγμένες του Θ δίνονται από τον τανυστή τάσης του Maxwell.

§ 3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

3.1 Ανασκόπιση της βασικής θεωρίας

3.1.1 Φυσικές βάσεις.

Εστω ένα ελαστικό σώμα $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, όπου το Ω είναι ένα χωρίο. Θεωρούμε ότι το σώμα αυτό υπό την επίδραση *εξωτερικών δυνάμεων* $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ υφίσταται κάποια παραμόρφωση, μετά την οποία η νέα θέση του είναι έστω $\Omega^\star$. Μικρές παραμορφώσεις ελαστικών μέσων περιγράφονται με ένα πεδίο μετατοπίσεων, δηλ. μια συνάρτηση $u : \Omega \to \Omega^\star \subset \mathbb{R}^3$, η οποία λέγεται *μετατόπιση* και απεικονίζει κάθε υλικό σημείο $x \in \Omega$ του σώματος στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση, στην νέα θέση του $y = x + u(x)$

στην παραμορφωμένη κατάσταση $\Omega^\star = \{x + u(x) : x \in \Omega\}$. Βλ. [40, 16, 31] για περισσότερες λεπτομέρειες και εισαγωγή στη θεωρία ελαστικότητας.

Για μικρές παραμορφώσεις η γραμμική θεωρία ελαστικότητας είναι μια προσέγγιση της γενικότερης θεωρίας μη-γραμμικής ελαστικότητας ([16, 40]) και στα επόμενα θα θεωρούμε ότι ισχύει αυτή η προσέγγιση. Με αυτή την υπόθεση, το συμμετρικό τμήμα της παραγώγου (βαθμίδας) της μετατόπισης

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{4.20}$$

δίνει τη σχετική μεταβολή του μήκους ενός απειροστού ευθύγραμμου τμήματος του σώματος (βλ. [36], κεφ. 1, ενότ. 1, σελ. 1-4) και λέγεται *τανυστής παραμόρφωσης* (strain tensor[5]). Στην κατάσταση παραμόρφωσης αναπτύσσονται εσωτερικές τάσεις στο σώμα, οι οποίες δίνονται από τον τανυστή τάσης του Cauchy ([36] κεφ. 1, ενότ. 1, σελ. 4-7· [40] 2.2, σελ. 132-134· [31] κεφ. 5, ενότ. 14, σελ. 97-108), ο οποίος συνδέεται με τον τανυστή παραμόρφωσης μέσω της καταστατικής σχέσης

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \tag{4.21}$$

(νόμος Hook, βλ. [16] ενότ. 3.6, σελ. 127· [36] κεφ. 1, ενότ. 4-5, σελ. 10-15). Ο τανυστής C λεγεται μέτρο ελαστικότητας (elasticity modulus) και εν γένει εξαρτάται από το x. Οι συνιστώσες του C ικανοποιούν τις επόμενες σχέσεις
Α. Συμμετρία:

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$
$$C_{ijkl} = C_{jikl},\ C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

Β. Θετικά ορισμένο:

$$C_{ijkl}(x)\psi_{ij}\psi_{kl} \geqslant 0\ \forall x \in \Omega$$

και για κάθε συμμετρικό $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $\psi = 0$, δηλ. $C_{ijkl}(x)\psi_{ij}\psi_{kl} = 0 \Rightarrow \psi_{ij} = 0$.

[5] Σημειώνεται ότι η ορολογία σε ορισμένες δημοσιεύσεις από μαθηματικούς δεν συμφωνεί με την καθιερωμένη από μηχανικούς και φυσικούς.

3.1.2 Προβλημα συνοριακών τιμών γραμμικής ελαστικότητας.

Από την συνθήκη ισορροπίας για ένα απειροστό στοιχείο όγκου του σώματος παίρνουμε

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \tag{4.22}$$

Οι πιο συνηθισμένες συνοριακές συνθήκες για τη λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει από τις (4.20), (4.21) και (4.22) για το u είναι ([16] ενότ. 3.6, σελ. 127)

$$u_i = g_i,\ x \in \partial\Omega$$

και

$$\sigma_{ij}\nu_j = h_i,\ x \in \partial\Omega,$$

όπου g και h είναι δεδομένες συναρτήσεις ορισμένες στο σύνορο $\partial\Omega$.

Για ένα *ισότροπο μέσο* ισχύει ([16] ενότ. 3.6, σελ. 127)

$$C_{ijkl}(x) = \mu(x)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda(x)\delta_{ij}\delta_{kl}$$

όπου λ, μ είναι συναρτήσεις που εξαρτώνται από το υλικό και λέγονται μέτρα Lamé. Για *ομογενές μέσο* τα λ, μ είναι σταθερές. Επομένως, για την περίπτωση ομογενούς και ισότροπου μέσου ο τανυστής της τάσης συνδέεται με τον τανυστή παραμόρφωσης ή την βαθμίδα της μετατόπισης μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mu(e_{ij} + e_{ji}) + \lambda\delta_{ij}e_{kk} \qquad (4.23) \\ &= 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{kk} \\ &= \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda\delta_{ij}\mathrm{div}u. \end{aligned}$$

Με αυτή την έκφραση του τανυστή της τάσης η συνθήκη ισορροπίας (4.22) παίρνει τη μορφή

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}u) + f = 0. \tag{4.24}$$

3.1.3 Ασυμπίεστη ελαστικότητα.

Για λόγους που εξηγούνται στη μηχανική, οι οποίοι όμως έχουν επαληθευτεί με αυστηρά μαθηματικά επιχειρήματα (βλ. [18] κεφ. 19, ενότ. 2.7, σελ. 16-18), στο όριο $\lambda \to \infty$ έχουμε $\mathrm{div} u \to 0$ με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\lambda \mathrm{div} u(x) \to -p(x),$$

όπου p είναι η συνάρτηση της πίεσης (βλ. [18] κεφ. 19, ενότ. 2.7, σελ. 16-18 για την έννοια με την οποία έχουμε την σύγκλιση αυτή και περισσότερες λεπτομέρειες). Επομένως, από την (4.23) έχουμε

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + p\delta_{ij}$$

η οποία μαζί με την (4.22) δίνουν το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\mu \Delta u - \nabla p + f = 0,$$

το οποίο αναγνωρίζεται αμέσως ότι είναι το σύστημα Stokes ([18] κεφ. 19, ενότ. 2.7, σελ. 1-34· [27] κεφ. 4, 182-243· [59] κεφ. 3, ενότ. 1-2, σελ. 107-156).

3.2 Μεταβολική διατύπωση της θεωρίας ελαστικότητας.

3.2.1 Εξισώσεις Euler-Lagrange.

Θεωρούμε την συνάρτηση Lagrange ([6])

$$L(x,u,z) := \frac{1}{2}\mu z : z + \frac{1}{2}(\lambda + \mu) z : z^t - f \cdot u \tag{4.25}$$

[6]Ανέπτυξα αυτή τη λαγρανζιανή διατύπωση της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας χωρίς να γνωρίζω την μάλλον εκτενή βιβλιογραφία στο θέμα αυτό. Ο κύριος λόγος ήταν ο τίτλος «μη-γραμμική θεωρία ελαστικότητας» που χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά στη βιβλιογραφία και η γραμμική περίπτωση είτε δεν αναφέρεται καθόλου είτε είναι «θαμμένη» μέσα σε πολύπλοκες διατυπώσεις της μη-γραμμικής θεωρίας. Ακολουθώ εδώ την αρχική διατύπωση για να δώσω στη συνέχεια μεγαλύτερη έμφαση στο γεγονός ότι η συνάρτηση Lagrange των συστημάτων αυτών, δηλ. των γραμμικών και κατ΄ επέκταση και των μη γραμμικών, έχει *άμεση φυσική σημασία*, πράγμα που επιτρέπει τον υπολογισμό της με φυσικές μεθόδους.

ή σε μορφή συνιστωσών

$$L(x,u,z) := \frac{1}{2}\mu z_{ij}z_{ij} + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)z_{ij}z_{ji} - f_i u_i.$$

Από την (4.25) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_i} &= -f_i \\ \frac{\partial L}{\partial z_{ij}} &= \mu z_{ij} + (\lambda+\mu)z_{ji} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουν τη μορφή

$$\Big(\mu u_{i,j} + (\lambda+\mu)u_{j,i}\Big)_{,j} = -f_i$$

από όπου παίρνουμε

$$\mu\Delta u_i + (\lambda+\mu)(\mathrm{div} u)_{,i} + f_i = 0$$

ή σε μορφή ελεύθερη συνιστωσών

$$\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div} u) + f = 0,$$

η οποία είναι η (4.24).

3.2.2 Τανυστής ορμής-ενέργειας.

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας υπολογίζεται από την (2.17) σελ. 24:

$$T_{ij} = z_{ki}\frac{\partial L}{\partial z_{kj}} - \delta_{ij}L\Big|_{z=\nabla u}.$$

Με χρήση των σχέσεων (4.26) παίρνουμε

$$T_{ij} = u_{k,i}\Big(\mu u_{k,j} + (\lambda+\mu)u_{j,k}\Big) - \delta_{ij}L,$$

οπότε

$$T_{ij} = \mu u_{k,i}u_{k,j} + (\lambda+\mu)u_{j,k}u_{k,i} - \delta_{ij}L,$$

ή σε μορφή ελεύθερη δεικτών

$$T = \mu(\nabla u)^t \cdot \nabla u + (\lambda + \mu)\nabla u \cdot \nabla u - LI. \tag{4.27}$$

Η απόκλιση του τανυστή ορμής-ενέργειας T υπολογίζεται από την (3.8) σελ. 53:

$$T_{ij,j} = -\frac{\partial L}{\partial x^i} \implies T_{ij,j} = f_{k,i}u_k,$$

ή σε μορφή ελεύθερη δεικτών

$$\mathrm{div}T = u \cdot \nabla f.$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής T είναι συμμετρικός, αλλά δεν είναι ελεύθερος απόκλισης αν $f \neq$σταθ.

3.2.3 Φυσική σημασία της συνάρτησης Lagrange για την θεωρία ελαστικότητας.

Η θερμοδυναμική θεωρία της παραμόρφωσης ([36] κεφ. 1, ενότ. 3, σελ. 8-9) δείχνει ότι η συνάρτηση F της ελεύθερης ενέργειας (Helmholtz) ενός ελαστικού μέσου, σε κατάσταση παραμόρφωσης u, δίνεται από την διαφορική φόρμα[7]

$$dF = \sigma_{ij} de_{ij}.$$

Παρατήρηση 21. Τονίζεται ότι η σχέση αυτή υπονοεί ότι η διαφορική φόρμα $\omega = \sigma_{ij} de_{ij}$ (σύμβαση άθροισης) είναι *ακριβής*. Επομένως αν είναι γνωστή η συνάρτηση F, η τάση υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial e_{ij}}.$$

Για γραμμικά ελαστικά μέσα αποδεικνύεται (βλ. προηγούμενη αναφορά) ότι η F είναι συνάρτηση του τανυστή παραμόρφωσης:

$$F(e) = \mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij})(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}) + \frac{1}{2}(\lambda + \frac{2}{3}\mu)(e_{kk})^2.$$

[7] Για $T =$σταθ., διαφορετικά πρέπει να προστεθεί στο δεξιό μέλος και ο όρος $-SdT$, όπου S είναι η εντροπία και T η απόλυτη θερμοκρασία.

Μετά από πράξεις η σχέση αυτή μετασχηματίζεται στην

$$F(e) = \mu e_{ij}e_{ij} + \frac{1}{2}\lambda(e_{kk})^2. \tag{4.28}$$

Παρατηρούμε ότι η F, έτσι όπως εκφράζεται από τη σχέση αυτή, διαφέρει από την συνάρτηση Lagrange (4.25) (με $f = 0$) κατά μία μηδενική λαγρανζιανή.

Λήμμα 3. *Η συνάρτηση Lagrange*

$$L_0(z) = \frac{1}{2}z_{ij}z_{ji} - \frac{1}{2}(z_{kk})^2 \tag{4.29}$$

είναι μηδενική λαγρανζιανή.

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα αν πάρουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange της λαγρανζιανής (4.29). □

Επομένως μπορούμε να πάρουμε ως συνάρτηση Lagrange για τη γραμμική θεωρία ελαστικότητας (τουλάχιστον) την συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας Helmholtz.

Πρόταση 15. *Η συνάρτηση Lagrange ενός γραμμικού ελαστικού μέσου μπορεί να επιλεγεί ίση με την συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας (Helmholtz) F, σύμφωνα με την πιο κάτω σχέση:*

$$L(x,y,z) := F(\frac{1}{2}(z+z^t)) - f \cdot y. \tag{4.30}$$

Απόδειξη. Εστω

$$L_1(x,y,z) := \frac{1}{2}\mu z : z + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)z : z^t - f \cdot y$$

η συνάρτηση Lagrange (4.30). Είναι

$$L(x,y,z) = \frac{1}{2}\mu(z : z + z : z^t) + \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}z)^2 - f \cdot y \tag{4.31}$$

Από την σχέση

$$L(x,y,z) - L_1(x,y,z) = -\lambda L_0(z) \tag{4.32}$$

και λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3, έπεται ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange της L συμπίπτουν με αυτές της L_1, οι οποίες είναι οι εξισώσεις (4.24). □

Παρατηρήσεις 22. (i) Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ως συνάρτηση Lagrange ενός γραμμικού ελαστικού μέσου την (4.30), η οποία αντιπροσωπεύει την συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας (Helmholtz). Η λαγρανζιανή αυτή λέγεται από ορισμένους συγγραφείς ([42] ενότ. 21.4, παράδ. 21.9, σελ. 1176· [67] ενότ. 62.7, σελ. 255) *αποθηκευμένη ενέργεια* (*stored energy*), *δυναμική ενέργεια* (*potential energy*) ή ενέργεια παραμόρφωσης (βλ. [67] ενότ. 61.6, σελ. 190· [6] κεφ. 7, ενότ. 1, σελ. 237). Ο τανυστής της τάσης δίνεται από τη σχέση

$$\sigma(x) = L_z(x, u(x), \nabla u(x)) \tag{4.33}$$

(ii) Τονίζεται ότι η ελαχιστοποίηση της ενέργειας δεν είναι γενική αρχή η οποία διέπει τα φυσικά φαινόμενα[8]. Αντίθετα, η εφαρμοσιμότητά της στην περίπτωση της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας πρέπει να θεωρείται καθαρή σύμπτωση. Παράδειγμα είναι η κλασσική μηχανική, όπου η συνάρτηση Lagrange δεν αντιπροσωπεύει κάποιας μορφής ενέργεια εκός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

3.2.4 Ο τανυστής ορμής-ενέργειας για την συνάρτηση Lagrange (4.30)

Από τη σχέση (4.31) παίρνουμε

$$L_z(u,z) = \mu(z + z^t) + \lambda(\mathrm{tr} z)I$$

Ο τανυστής ορμές-ενέργειας για τη νέα λαγρανζιανή υπολογίζεται από την (2.17) σελ. 24

$$T = 2\mu e \cdot e + \lambda(\mathrm{div} u)(\nabla u)^t - LI, \tag{4.34}$$

ή σε μορφή συνιστωσών

$$T_{ij} = 2\mu e_{ki} e_{kj} + \lambda(u_{k,k}) u_{j,i} - \delta_{ij} L.$$

Πρόταση 16. *Οι τανυστές ορμές-ενέργειας T, $\widetilde{T}$ που λαμβάνονται από τις συναρτήσεις Lagrange L (4.30), $\widetilde{L}$ (4.31) αντίστοιχα, δεν είναι ίσοι εν γένει.*

[8] Σύγκρινε με [42] ενότ. 21.4, παράδ. 21.9, σελ. 1176, όπου αναγράφεται ότι «Nature, as always, seeks the displacement that will minimize the total energy».

Απόδειξη. Πράγματι, από τις σχέσεις (4.34) και (4.27) παίρνουμε

$$T_{ij} - \widetilde{T}_{ij} = \lambda(du_{j,i} - u_{j,k}u_{k,i}) - \delta_{ij}(L - \widetilde{L}),$$

όπου $d := \operatorname{div} u$. Θέτοντας $u = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ για απλούστευση του συμβολισμού, διαπιστώνουμε εύκολα ότι σε δύο διαστάσεις, $N = 2$, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$L - \widetilde{L} = \frac{\lambda}{2}(d^2 - u_{i,j}u_{j,i}) = \lambda(u_x v_y - u_y v_x)$$

έχουμε

$$T = \widetilde{T}, \quad N = 2.$$

Για $N = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} L - \widetilde{L} &= \frac{\lambda}{2}(d^2 - u_{i,j}u_{j,i}) \\ &= \lambda((u_x v_y - u_y v_x) + (v_y w_z - w_y v_z) + (w_z u_x - w_x u_z)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} T_{11} - \widetilde{T}_{11} &= -\lambda(v_y w_z - w_y v_z) = -\lambda(\mathrm{adj}\nabla u)_{11} \\ T_{12} - \widetilde{T}_{12} &= -\lambda(v_x w_z - w_y v_x) = -\lambda(\mathrm{adj}\nabla u)_{12} \\ T_{13} - \widetilde{T}_{13} &= -\lambda(v_x w_y - w_x v_y) = -\lambda(\mathrm{adj}\nabla u)_{13}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

από όπου προκύπτει

$$(T_{11} - \widetilde{T}_{11})u_{1,1} + (T_{12} - \widetilde{T}_{12})u_{1,2} + (T_{13} - \widetilde{T}_{13})u_{1,3} = -\lambda(\det \nabla u)I.$$

Ομοίως για τις υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή $T - \widetilde{T}$. Εαν τώρα υποθέσουμε ότι $T = \widetilde{T}$, τότε από τις σχέσεις (4.35) έπεται ότι οι βαθμίδες $\nabla u, \nabla v, \nabla w$ είναι παράλληλες σε κάθε σημείο του Ω, το οποίο δεν είναι εν γένει αληθές. □

3.2.5 Μη-γραμμική θεωρία ελαστικότητας.

Με βάση τις Παρατηρήσεις 22 (i) και (ii) μπορούμε να πάμε ένα βήμα πιο κάτω υποθέτοντας ότι η παραμόρφωση ενός ελαστικού σώματος λαμβάνεται από την ελαχίστοποίηση ενός συναρτησιακού της μορφής (VF), σελ. 19, όπου η συνάρτηση Lagrange δίνεται γενικά από μια σχέση ανάλογη της (4.30)

$$L(x,y,z) := F(x,z) - f(x,y) \tag{4.36}$$

και η τάση δίνεται από την (4.33) ([67, 16, 40, 43, 44, 45, 46]).

Κεφάλαιο 5

Η ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ DERRICK-POHOZAEV ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΜΕ ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΟΡΜΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την ταυτότητα Derrick-Pohozaev στη βασική της μορφή καθώς επίσης και διάφορες επεκτάσεις της. Ερευνάμε την σχέση της με τους τανυστές ορμής-ενέργειας και δείχνουμε ότι είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τανυστές ορμής-ενέργειας οι οποίοι είναι ελεύθεροι απόκλισης. Δίνουμε τα πρώτα εναύσματα για περαιτέρω γενικεύσεις και τροποποιήσεις της ταυτότητας αυτής.

§ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ταυτότητα Derrick-Pohozaev είναι γνωστή στην μαθηματική βιβλιογραφία ως ταυτότητα Pohozaev ([25, 60, 8, 9, 13, 30]) και στην φυσική βιβλιογραφία ως θεώρημα του Derrick ([17, 62]). Στο [8] αναφέρεται ως «ταυτότητα Pohozaev» παρόλο που οι συγγραφείς είναι ενήμεροι ότι η ταυτότητα αυτή σχετίζεται και με το όνομα του Derrick, την απόδειξη μάλιστα του οποίου παραθέτουν αυτούσια.

Την ταυτότητα αυτή ανέπτυξε ο Derrick [20] στό Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Νέας Βόρειας Ουαλίας της Αυστραλίας το 1964 για την έρευνα του ερωτήματος εαν τα στοιχειώδη σωματίδια θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως σταθερές, χρονικά ανεξάρτητες λύσεις πεπερασμένης ενέργειας μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η απάντηση είναι αρνητική για μια μεγάλη κατηγορία διαφορικών εξισώσεων. Στο ίδιο paper εξετάστηκε το ερώτημα αν τα στοιχειώδη σωματίδια μπορούν να θεωρηθούν ταλαντούμενες λύσεις μη-γραμμικών κυματικών εξισώσεων, στις οποίες οι κυματοσυναρτήσεις είναι χρονικά περιοδικές, ενώ η ενέργεια παραμένει «τοπικοποιημένη»[1].

Το πρόβλημα της «αναπαράστασης» στοιχειωδών σωματιδίων από σταθερές, χρονικά ανεξάρτητες λύσεις πεπερασμένης ενέργειας μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ παλιότερο και η συζήτησή του είχε αρχίσει ήδη αμέσως μετά την εμφάνιση της εξίσωσης Schroedinger, στο γενικότερο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας (βλ. [26] ενότ. 1.5, παρ. 4, σελ. 77, όπου αναφέρεται ότι «... *αυτή η αστραπιαία διασκόρπιση του υλικού πεδίου είναι μία από τις αιτίες ότι και η καθαρά πεδιακή θεώρηση της ύλης δεν μπορεί να αποτελέσει ικανοποιητική περιγραφή της συμπεριφοράς των στοιχειωδών σωματιδίων*...»).

Είναι σκόπιμο να δούμε το θεώρημα αυτό όχι τόσο ως αποτέλεσμα, πιο ακριβείς διατυπώσεις του οποίου θα δούμε στη συνέχεια της εργασίας αυτής, αλλά λόγω της εξαιρετικά σύντομης και περιεκτικής απόδειξης που επινόησε ο Derrick. Η απόδειξη αυτή, την οποία θα δούμε στην § 2 που ακολουθεί, εμπεριέχει τη μέθοδο των εσωτερικών μεταβολών που είδαμε στο κεφ. 2 § 1, χωρίς όμως προηγουμένως να έχει αναπτυχθεί ο λογισμός των μεταβολών αυτών. Από καθαρά μαθηματική άποψη ο Derrick στο θεώρημά του απέδειξε περισσότερα από όσα περιέχονται στην ταυτότητα Derrick-Pohozaev, προχωρώντας ένα βήμα πιο κάτω, στην ευστάθεια των λύσεων μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που προέρχονται από μεταβολικά προβλήματα κάποιας συγκεκριμένης μορφής. Επειδή το αντικείμενο της ευστάθειας είναι εκτός των ορίων της παρούσας εργασίας, δεν θα αναφερθούμε περισσότερο στο θέμα αυτό.

Το αρχικό paper του Derrick ακολούθησε ένας μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων, η σημαντικότερη ίσως από τις οποίες ήταν η [51] το 1966 με ανάλο-

[1] Η έννοια της τοπικότητας της ενέργειας σχετίζεται με το πεπερασμένο του συναρτησιακού του μεταβολικού προβλήματος (αναφερόμαστε σε καθολικές λύσεις).

γο περιεχόμενο. Περισσότερες πληροφορίες για τη χρήση μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων ως μοντέλων στοιχειωδών σωματιδίων υπάρχουν στις αναφορές [17, 52]. Ανεξάρτητα από τον Derrick[2], ο Pohozaev το 1965, δηλ. ένα χρόνο μετά, κατέληξε στην ίδια ταυτότητα, σε ένα paper που αφορούσε τις ιδιοτιμές του μη-γραμμικού προβλήματος $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ [49, 48]. Μια παρόμοια σχέση είχε παρουσιάσει ο Rellich [50] το 1940 για γραμμικά προβλήματα. Στην παρούσα εργασία, ως μια προσπάθεια συμβιβασμού της διαφοράς μεταξύ της βιβλιογραφίας μαθηματικών και φυσικής, αναφερόμαστε στην εν λόγω ταυτότητα και με τα δύο ονόματα[3].

Η ταυτότητα Derrick-Pohozaev έχει αποδειχθεί ένα σημαντικό αποδεικτικό εργαλείο για πολλές εργασίες στην περιοχή των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και του Λογισμού Μεταβολών. Οι Berestycki & Lions [8, 9] ασχολήθηκαν με την ύπαρξη μη τετριμμένων λύσεων κάποιων προβλημάτων που σχετίζονται με ορισμένα είδη μοναχικών κυμάτων (solitary waves), σε στάσιμη κατάσταση, μη-γραμμικών εξισώσεων τύπου Klein-Gordon και Schroedinger. Τα προβλήματα αυτά μπορεί κάποιος να τα χειριστεί μέσω μεταβολικών προβλημάτων με συναρτησιακό της μορφής

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(u) \right) dx,$$

τα οποία οδηγούν σε ημιγραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$-\Delta u = g(u), \quad u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^N),$$

όπου $g = G' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής περιττή συνάρτηση, δηλ. $g(0) = 0$. Αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη λύσεων του πιο πάνω προβλήματος μπορούν να παραχθούν με χρήση της ταυτότητας Derrick-Pohozaev [8].

[2]Αυτό δεν είναι εξακριβωμένο γεγονός αλλά πιθανολογείται. Είναι αντικείμενο έρευνας για ιστορικούς της επιστήμης το ερώτημα αν ο Pohozaev γνώριζε την εργασία του Derrick, ιδίως αν λάβει κανείς υπόψη ότι αυτή είχε δημοσιευθεί σε ένα περιοδικό τεράστιας αναγνωσιμότητας. Σημειώνεται ότι την εποχή εκείνη υπήρχε ένας εξωφρενικός ανταγωνισμός μεταξύ ΗΠΑ και ΕΣΣΔ (Ρωσίας) για θέματα τεχνολογιών αιχμής, όπως τα στοιχειώδη σωματίδια που ήταν το αντικείμενο της εργασίας του Derrick, ενώ είναι δεδομένο το ενδιαφέρον του Pohozaev για την κβαντική θεωρία, όπως φαίνεται από μεταγενέστερες δημοσιεύσεις.

[3]Εκτός αυτού, δεν θεωρούμε ορθή επιστημονική πρακτική να χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικά ονόματα για το ίδιο αντικείμενο.

Οι Sandier και Serfaty [54] χρησιμοποιούν μια νέα τεχνική, κύριο συστατικό της οποίας είναι η ταυτότητα Derrick-Pohozaev, για την παραγωγή εκτιμήσεων κάτω φράγματος για το συναρτησιακό της ενέργειας Ginzburg-Landau με ή χωρίς μαγνητικό πεδίο. Ο Shafrir στο [56] εξηγεί πως από την ταυτότητα Derrick-Pohozaev λαμβάνονται a priori εκτιμήσεις για τον δεύτερο όρο του πιο πάνω συναρτησιακού ενέργειας. Ο Gui [30] διατύπωσε χαμιλτώνιες ταυτότητες για μερικές διαφορικές εξισώσεις σε 2 ή περισσότερες διαστάσεις, οι οποίες, σύμφωνα με ισχυρισμό του, αποτελούν γενίκευση της ανισότητας Modica και απέδειξε ότι η ταυτότητα Derrick-Pohozaev μπορεί να παραχθεί άμεσα από αυτές. Ταυτότητες τύπου Derrick-Pohozaev στην ελαστοστατική και ελαστοδυναμική και κάποιες εφαρμογές έχουν συζητηθεί από τους Bozhkov και Olver [13].

Η χρήση τανυστών ορμής-ενέργειας για την ανάπτυξη ταυτοτήτων τύπου Derrick-Pohozaev σε μια σειρά μη-γραμμικών μερικών διαφορικών συστημάτων έγινε, σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, από τους Αλικάκο και Φαλιάγκα [5]. Τη μέθοδο αυτή αναπτύσουμε με λεπτομέρειες στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού.

§ 2 Η ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ DERRICK-POHOZAEV ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ POISSON

Οπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, ειναι σκόπιμο να ξεκινήσουμε τη μελέτη της ταυτότητας Derrick-Pohozaev από την αρχική διατύπωση του εντυπωσιακού θεωρήματος του Derrick.

Θεώρημα 4 (Derrick 1964). *Θεωρούμε το μεταβολικό συναρτησιακό*

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right) dx, \tag{5.1}$$

όπου $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N > 2$, είναι μια καθολικά ορισμένη συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ και $F \in C(\mathbb{R})$. Δεν υπάρχει κανένα μη-τετριμμένο κρίσιμο σημείο του J το οποίο να είναι ευσταθές, δηλ. για την δεύτερη μεταβολή του J να ισχύει

$$\delta^2 J(u) \geqslant 0$$

και τέτοιο ώστε τα

$$J_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx, \quad J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

να είναι πεπερασμένα.

Απόδειξη. (Derrick). Εστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Παίρνουμε τις συναρτήσεις

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x), \tag{5.2}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Προφανώς $u_\lambda \in C^2(\mathbb{R}^N)$ και τα $J_1(u_\lambda)$, $J_2(u_\lambda)$ είναι πεπερασμένα. Απο την υπόθεση έχουμε

$$\delta J(u) = \frac{d}{d\lambda} J(u_\lambda)\bigg|_{\lambda=1} = 0. \tag{5.3}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \lambda x$ παίρνουμε

$$J(u_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Η (5.3) δίνει

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + N \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = 0. \tag{5.4}$$

Η δεύτερη μεταβολή του J δίνεται από τη σχέση

$$\delta^2 J(u) = \frac{d^2}{d\lambda^2} J(u_\lambda)\bigg|_{\lambda=1}$$

Εκτελώντας πράξεις παίρνουμε

$$\delta^2 J(u) = (N-1)(N-2)\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + N(N+1) \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

οπότε

$$(N-1)(N-2)\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + N(N+1) \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Από τις (5.4) και (5.5) παίρνουμε

$$-\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geqslant 0,$$

το οποίο είναι άτοπο διότι από τη σχέση αυτή έπεται ότι $u = 0$. □

Πόρισμα. *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος, για κάθε κρίσιμο σημείο* $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *του* J *ισχύει η ταυτότητα Derrick-Pohozaev, δηλ. η σχέση (5.4).*

Σχόλιο. Το θεώρημα Derrick δεν κάνει καμμία υπόθεση για την συνάρτηση F, όπως αν είναι θετική ή άρτια (τα γράφημά της είναι συμμετρκό ως προς την ευθεία $u = 0$). Επίσης καμμία συνθήκη παραγωγισιμότητας δεν χρειάζεται για την F. Ακόμη και η συνθήκη συνέχειας επί της F είναι πλεονασμός. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ταυτότητα Derrick-Pohozaev ισχύει σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Παρατηρήσεις 23. (i) Το θεώρημα Derrick δεν ισχύει για $N = 1$. Για $N = 2$ οι σχέσεις (5.4), (5.5) ανάγονται στην $\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = 0$. Με την πρόσθετη υπόθεση $F \geqslant 0$ ή $F \leqslant 0$ παίρνουμε πάλι το αποτέλεσμα του θεωρήματος.

(ii) Οι Berestycki, Lions [8] ασκούν εσφαλμένα κριτική σ΄ αυτή την αποδεικτική διαδικασία θεωρώντας την φορμαλιστική (τυπική). Η διαφορά βρίσκεται στο γεγονός ότι οι Berestycki, Lions στην (5.3) παραγωγίζουν κάτω από το ολοκλήρωμα ενώ ο Derrick εκτελεί αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης.

(iii) Το θεώρημα Derrick γενικεύεται άμεσα για διανυσματικές συναρτήσεις $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$.

Το πρώτο ερώτημα που προκύπτει από την απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος είναι ποιό θα ήταν το συμπέρασμα αν αντί για την κλιμάκωση $y = \lambda x$ στην σχέση (5.2) παίρναμε κάποια άλλη συνάρτηση. Αν ακολουθούσαμε την διαδικασία αυτή θα επαναλαμβάναμε τα βήματα της απόδειξης της Πρότασης 1, σελ. 20 και θα καταλήγαμε σε μια σχέση ανάλογη της (2.11). Εαν $L_x = 0$ (το οποίο αληθεύει για το συναρτησιακό του Θεωρήματος 4) τότε θα καταλήγαμε σε μια σχέση ανάλογη της (2.14), σελ. 22, όπου η ολοκληρωταία ποσότητα δίνεται από την σχέση 2.15, σελ. 23. Αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των συμπερασμάτων του Θεωρήματος 4, όπως για παράδειγμα η σχέση (5.4), και των εσωτερικών μεταβολών ή ισοδύναμα των τανυστών ορμήςενέργειας.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική πορεία για την κατασκευή σχέσεων της μορφής (5.4), ξεκινώντας απευθείας από τον τανυστή ορμής-ενέργειας του μεταβολικού προβλήματος[4]. Οι λόγοι είναι οι εξής:

1. Αν το J είναι ορισμένο σε ένα φραγμένο χωρίο, τότε ο μετασχηματισμός $x \mapsto \lambda x$ δεν εφαρμόζεται.
2. Μας ενδιαφέρουν σχέσεις της μορφής (5.4) για περιπτώσεις στις οποίες οι συνθήκες του Θεωρήματος 4 δεν ισχύουν.
3. Ελπίζουμε ότι με τον τρόπο αυτό θα προκύψουν σχέσεις γενικότερες της (5.4).

Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ χωρίο με $\partial\Omega \in C^1$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ συνάρτηση με $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ που ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη*

$$u(x) = a, \quad x \in \partial\Omega$$

όπου $a \in \mathbb{R}^M$ είναι μια σταθερά. Τότε για κάθε $x \in \partial\Omega$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial u}{\partial h} = u'(x)h = \nabla u(x) \cdot h = 0, \quad \forall h \in T_x\partial\Omega \tag{5.6}$$

και

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{(x)} \right| = \left|\nabla u(x) \cdot \nu(x)\right| = \left|\nabla u(x)\right|, \tag{5.7}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια $\partial\Omega$.

Απόδειξη. Εστω $h \in T_x\partial\Omega$ και $\gamma : \mathrm{I} =]-\epsilon,\epsilon[\to \partial\Omega$ διαφορίσιμη καμπύλη του $\partial\Omega$ με $\gamma(0) = x$ και $\gamma'(0) = h$. Για τη συνάρτηση $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^N$, $f(t) = u(\gamma(t))$, έχουμε $f(t) =$σταθ. , $\forall t \in \mathrm{I}$, επομένως

$$f'(t) = u'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \implies u'(x)h = f'(0) = 0.$$

[4] Η απόδειξη του Pohozaev για την σχέση (5.4) για φραγμένα χωρία, η οποία υπάρχει στο αρχικό paper του Pohozaev [49] καθώς επίσης και στα [60, 48, 8], προχωράει πολλαπλασιάζοντας την μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος με $x \cdot \nabla u$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη. Η μέθοδος αυτή δεν έχει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εργασία αυτή από την άποψη ότι δεν προσφέρεται για γενικεύσεις και επεκτάσεις και για το λόγο αυτό δεν θα θεωρηθεί περαιτέρω στην εργασία αυτή.

Εφαρμογή του αποτελέσματος αυτού σε κάθε συνιστώσα του $u = (u_1, \cdots, u_M)$ δίνει $\nabla u_i(x) \in N_x\partial\Omega$, επομένως υπάρχουν συναρτήσεις

$$\lambda_i : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \cdots, M,$$

τέτοιες ώστε

$$\nabla u_i(x) = \lambda_i(x)\nu(x), \tag{5.8}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια $\partial\Omega$. Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$\nabla u_i(x) \cdot \nu(x) = \lambda_i(x). \tag{5.9}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}, \cdots, \frac{\partial u_M}{\partial \nu} \right)$$

και

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \nabla u_i(x) \cdot \nu = \lambda_i(x)$$

παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 &= \sum_{i=1}^{M} |\lambda_i(x)|^2 = \sum_{i=1}^{M} |\nabla u_i(x)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |u_{i,j}(x)|^2 = |\nabla u(x)|^2. \end{aligned}$$

□

Θεωρούμε τώρα το μεταβολικό πρόβλημα που ορίζεται από το συναρτησιακό (5.1). Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το σύστημα αυτό είναι

$$\Delta u = F_u(u), \tag{5.10}$$

όπου

$$F_u = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial u_M} \right).$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.17), σελ. 24:

$$T_{ij} = u_{k,i}u_{k,j} - \delta_{ij}(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)). \tag{5.11}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει την ταυτότητα Derrick-Pohozaev για το συναρτησιακό (5.1).

Πρόταση 17. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ φραγμένο χωρίο με $\partial\Omega \in C^1$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ μια λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό (5.1)*

$$\mathrm{div}T(u, \nabla u) = 0 \tag{5.12}$$

με $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$, η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$u(x) = a, \quad x \in \partial\Omega$$

όπου $a \in \mathbb{R}^M$ είναι μια σταθερά για την οποία ισχύει $F(a) = 0$. Τότε η u ικανοποιεί την ακόλουθη ταυτότητα

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + N\int_\Omega F(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x - x_0)\cdot\nu|\nabla u|^2 dS = 0, \tag{5.13}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\partial\Omega$, $x \in \partial\Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ένα τυχαίο σταθερό σημείο και $|\nabla u| = (u_{k,i}u_{k,i})^{1/2}$.

Παρατήρηση 24. Γνωρίζουμε ότι αν η $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος (5.10), τότε ικανοποιεί και την σχέση απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας $\mathrm{div}T(u, \nabla u) = 0$ (βλ. Πρόταση 8, σελ. 50) και επομένως το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει για λύσεις της (5.10).

Από την άλλη μεριά, οι λύσεις της $\mathrm{div}T(u, \nabla u) = 0$ δεν είναι απαραίτητα και λύσεις της (5.10) (βλ. Παρατήρηση 15, σελ. 53 και Αντιπαράδειγμα 2, σελ. 52). Επομένως, όπως φαίνεται τουλάχιστον εκ πρώτης όψεως από την πρόταση αυτή, η σχέση (5.13) ισχύει κάτω από γενικότερες συνθήκες από την κλασική περίπτωση (βλ. [4], Διάλεξη 15, Λήμμα 1, σχέση (93), σελ. 11 και [5, 60]). Ομως, στο [3] (βλ. σχέση (2.3) εκεί) σημειώνεται ότι οι σχέσεις αυτές είναι «σχεδόν ισοδύναμες». Είναι επομένως απαραίτητο να εξεταστεί αν το αποτέλεσμα της πιο πάνω πρότασης είναι γενικότερο για την περίπτωση $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ καθώς επίσης και τι ισχύει για λιγότερο ομαλές λύσεις των (5.10) και (5.12).

Απόδειξη. Ακολουθώντας τη μέθοδο του Schoen [55]([5]) ξεκινάμε από τη σχέση

$$(x_i T_{ij})_{,j} = \delta_{ij} T_{ij} + x_i T_{ij,j} = T_{ii}$$

την οποία ολοκληρώνουμε στο Ω και εφαρμόζουμε το θεώρημα Green για να πάρουμε

$$\int_\Omega T_{ii}(x)dx = \int_{\partial\Omega} x_i T_{ij}(x) \nu_j(x) dS(x), \tag{5.14}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\partial\Omega$.

Από τη σχέση (5.11) είναι

$$T_{ii} = |\nabla u|^2 - N(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)) = -\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2 - NF(u). \tag{5.15}$$

Ο όρος $x_i T_{ij} \nu_j$ κάτω από το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (5.14) μετασχηματίζεται γράφοντας το $x \in \partial\Omega$ ως εξής

$$x = (x \cdot \nu)\nu + (x \cdot h)h,$$

όπου $h \in T_x \partial\Omega$, $|h| = 1$ (συνεπώς $h \cdot \nu = 0$). Για $x \in \partial\Omega$ έχουμε

$$x_i T_{ij} \nu_j = ((x \cdot \nu)\nu_i + (x \cdot h)h_i) T_{ij} \nu_j = (x \cdot \nu)\nu_i T_{ij} \nu_j + (x \cdot h) h_i T_{ij} \nu_j \tag{5.16}$$

και αντικαθιστώντας την T_{ij} από την (5.11) με $L = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)$

$$\nu_i T_{ij} \nu_j = \nu_i u_{k,i} u_{k,j} \nu_j - (\nu \cdot \nu)L = \nu_i u_{k,i} u_{k,j} \nu_j - L \tag{5.17}$$

και

$$h_i T_{ij} \nu_j = h_i u_{k,i} u_{k,j} \nu_j - (\nu \cdot h)L = 0 \tag{5.18}$$

λόγω της $h \cdot \nu = 0$ και της σχέσης (5.6). Με βάση τη σχέση (5.7) η (5.17) γράφεται στη μορφή

$$\nu_i T_{ij} \nu_j = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - L = |\nabla u|^2 - L = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(a). \tag{5.19}$$

[5]Πρόκειται για κάποια εκδοχή της διάλεξης Lecture 3-Matter fields and the stress-energy tensor του Schoen για το μάθημα με κωδικό Math 286 του πανεπιστημίου Stanford, τρίτο παράδειγμα, σελ. 4-5.

Συνδυασμός των (5.16), (5.18) και (5.19) δίνει

$$x_i T_{ij} \nu_j = (x \cdot \nu)\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(a)\right). \tag{5.20}$$

Από τις (5.14), (5.15), (5.20) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $F(a) = 0$ παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + N\int_\Omega F(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)|\nabla u|^2 dS = 0. \tag{5.21}$$

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία από την αρχή, αλλά πολλαπλασιάζοντας τις συνιστώσες T_{ij} του τανυστή ορμής-ενέργειας με x_i^0, όπου $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_N^0)$, αντί για x_i, αφού παρατηρήσουμε ότι το πρώτο μέλος της (5.14) είναι μηδέν, παίρνουμε τελικά

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x_0\cdot\nu)|\nabla u|^2 dS = 0. \tag{5.22}$$

Αφαίρεση κατά μέλη των (5.21) και (5.22) δίνει την (5.13). □

§ 3 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ[6]

Θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα που ορίζεται από τη λαγρανζιανή

$$L(u,z) = \frac{1}{2} b_{klrs}(u) z_{kl} z_{rs} + F(u), \tag{5.23}$$

όπου $u \in \mathbb{R}^M$, $z \in \mathbb{R}^{M\cdot N}$ και

(H0) Οι συναρτήσεις $b_{klrs} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ $(k,r = 1,\cdots,M;\ l,s = 1,\cdots,N)$ και $F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ είναι C^1 και ικανοποιούν τις πιο κάτω υποθέσεις:

(H1) Συμμετρία: $b_{klrs} = b_{rskl}$.

[6] Πρόκειται για τα συστήματα κλάσης I του [5].

(H2) Ελλειπτικότητα: $b_{klrs}(u)z_{kl}z_{rs} \geqslant c|z|^2$ $\forall z \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $\forall u \in \mathbb{R}^M$, όπου $c > 0$ είναι μία σταθερά και

$$|z|^2 = z_{ki}z_{ki}. \tag{5.24}$$

Σημειώνουμε ότι όταν $M = N$ για $z_{ij} = \xi_i\xi_j$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^N$, από την (H2) παίρνουμε

$$b_{klrs}(u)\xi_k\xi_l\xi_r\xi_s \geqslant c|\xi|^4. \tag{5.25}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το σύστημα αυτό είναι

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{rikj}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}b_{kilj,r}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} - F_{,r}(u) = 0. \tag{5.26}$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.17), σελ. 24:

$$T_{ij} = b_{kjrs}(u)u_{k,i}u_{r,s} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}b_{knrs}(u)u_{k,n}u_{r,s} + F(u)\right). \tag{5.27}$$

Παρατήρηση 25. Η σχέση (5.26) εκφράζει ένα *νόμο διατήρησης* σε στάσιμη κατάσταση ([65] ενότ. 25.9, σελ. 521-524) για τη διανυσματική ποσότητα u με ρεύμα J που εξαρτάται από το u μέσω της σχέσης

$$J_{ri} = -b_{rikj}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Αυτή η εξάρτηση υποδηλώνει ότι το μέσο είναι ανισότροπο και οι ιδιότητές του εξαρτώνται από το πεδίο u. Πράγματι, αν $M = 1$ και τα $b_{rikj} = b_{ij}$ δεν εξαρτώνται από το u, η σχέση αυτή ανάγεται στην

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - F'(u) = 0.$$

Στο [65] θεωρείται ότι τα $b_{ij} = \delta_{ij}b$ εξαρτώνται από το ∇u. Η περίπτωση αυτή ανάγεται στο σύστημα της επόμενης ενότητας.

Από μια άλλη άποψη, η λαγρανζιανή (5.23) με $b_{kilj} = g_{ij}(u)$ και $F = 0$ έχει συζητηθεί στην αναφορά [60] (κεφ. I, ενότ. 1, σελ. 7) στο πλαίσιο των ελαχιστικών επιφανειών σε πολλαπλότητες Riemann

Η επόμενη πρόταση μας δίνει την ταυτότητα Derrick-Pohozaev για το συναρτησιακό (5.23). Για την απόδειξή της θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ χωρίο με $\partial\Omega \in C^1$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ συνάρτηση με $u \in C^1(\overline{\Omega})^M$ που ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη*

$$u(x) = a, \quad x \in \partial\Omega$$

όπου $a \in \mathbb{R}^M$ είναι μια σταθερά. Τότε για κάθε $x \in \partial\Omega$ ισχύει

$$u_{k,j}(x) = u_{k,i}(x)\nu_i(x)\nu_j(x), \tag{5.28}$$

όπου $k = 1, \cdots, M$; $j = 1, \cdots, N$ και ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια $\partial\Omega$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν θέσουμε $w := \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ στο $\partial\Omega$, δηλ. $w_i = u_{i,j}\nu_j$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}(w_i\nu_j - u_{i,j})^2 &= (w_i\nu_j - u_{i,j})(w_i\nu_j - u_{i,j}) \\
&= w_i w_i \nu_j \nu_j - w_i \nu_j u_{i,j} - u_{i,j} w_i \nu_j + u_{i,j}u_{i,j} \\
&= w_i w_i - w_i w_i - w_i w_i + u_{i,j}u_{i,j} \\
&= |\nabla u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 = 0
\end{aligned}$$

από τη σχέση (5.7) του Λήμματος 4. Εναλλακτικά το αποτέλεσμα προκύπτει από συνδυασμό των σχέσεων (5.8) και (5.9). □

Πρόταση 18. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ φραγμένο χωρίο με $\partial\Omega \in C^1$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ μια λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας (5.27) που αντιστοιχεί στην λαγρανζιανή (5.23)*

$$\operatorname{div} T(u, \nabla u) = 0. \tag{5.29}$$

Για την (5.23) θεωρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (H0)-(H2). Υποθέτουμε ότι η λύση $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$u(x) = a, \quad x \in \partial\Omega$$

όπου $a \in \mathbb{R}^M$ είναι μια σταθερά για την οποία ισχύει $F(a) = 0$. Τότε η u ικανοποιεί την ακόλουθη ταυτότητα

$$\frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|_u^2 dx + N\int_{\Omega}F(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x-x_0)\cdot\nu|\nabla u|_a^2 dS = 0, \tag{5.30}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός

$$|p|_u^2 = b_{klrs}(u)p_{kl}p_{rs} \tag{5.31}$$

ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\partial\Omega$ και $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ένα τυχαίο σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Ακολουθώντας, όπως στην απόδειξη της πρότασης 17, τη μέθοδο του Schoen [55] ολοκληρώνουμε στο Ω τη σχέση$(x_iT_{ij})_{,j} = T_{ii}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Green για να πάρουμε

$$\int_{\Omega}T_{ii}(x)dx = \int_{\partial\Omega}x_iT_{ij}(x)\nu_j(x)dS(x), \tag{5.32}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\partial\Omega$.

Από την (5.27) είναι

$$\begin{aligned} T_{ii} &= -\frac{N-2}{2}b_{klrs}(u)u_{k,l}u_{r,s} - NF(u) \\ &= -\frac{N-2}{2}|\nabla u|_u^2 - NF(u). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Ο όρος $x_iT_{ij}\nu_j$ κάτω από το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (5.32) μετασχηματίζεται γράφοντας το $x \in \partial\Omega$ ως εξής

$$x = (x\cdot\nu)\nu + (x\cdot h)h,$$

όπου $h \in T_x\partial\Omega$, $|h| = 1$ (συνεπώς $h\cdot\nu = 0$). Για $x \in \partial\Omega$ έχουμε

$$x_iT_{ij}\nu_j = ((x\cdot\nu)\nu_i + (x\cdot h)h_i)T_{ij}\nu_j = (x\cdot\nu)\nu_iT_{ij}\nu_j + (x\cdot h)h_iT_{ij}\nu_j. \tag{5.34}$$

Για συντόμευση των σχέσεων θέτουμε $L(u,\nabla u) = L_0(u,\nabla u) + F(u)$ και $L_0(u,\nabla u) = \frac{1}{2}|\nabla u|_u^2$. Αντικαθιστώντας την T_{ij} από την (5.27) παίρνουμε

$$\nu_iT_{ij}\nu_j = \nu_iu_{k,i}b_{kjrs}(u)u_{r,s}\nu_j - (\nu\cdot\nu)L = \nu_iu_{k,i}b_{kjrs}(u)u_{k,j}\nu_j - L_0 - F(a) \tag{5.35}$$

και

$$h_i T_{ij} \nu_j = h_i u_{k,i} b_{kjrs}(u) u_{r,s} \nu_j - (\nu \cdot h) L = 0 \tag{5.36}$$

λόγω της $h \cdot \nu = 0$ και της σχέσης (5.6). Από τη σχέση (5.28) είναι

$$\nu_i u_{k,i} b_{kjrs}(a) u_{r,s} \nu_j = u_{k,j} b_{kjrs}(a) u_{r,s} = |\nabla u|_a$$

οπότε η (5.35) γράφεται στη μορφή

$$\nu_i T_{ij} \nu_j = \frac{1}{2} |\nabla u|_a^2 - F(a). \tag{5.37}$$

Συνδυασμός των (5.34), (5.36) και (5.37) δίνει

$$x_i T_{ij} \nu_j = (x \cdot \nu) \left(\frac{1}{2} |\nabla u|_a^2 - F(a) \right). \tag{5.38}$$

Από τις (5.32), (5.33), (5.38) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $F(a) = 0$ παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|_u^2 dx + N \int_\Omega F(u) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) |\nabla u|_a^2 dS = 0. \tag{5.39}$$

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία από την αρχή, αλλά πολλαπλασιάζοντας τις συνιστώσες T_{ij} του τανυστή ορμής-ενέργειας με x_i^0, όπου $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_N^0)$, αντί για x_i, αφού παρατηρήσουμε ότι το πρώτο μέλος της (5.32) είναι μηδέν, παίρνουμε τελικά

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x_0 \cdot \nu) |\nabla u|_a^2 dS = 0. \tag{5.40}$$

Αφαίρεση κατά μέλη των (5.39) και (5.40) δίνει την (5.30). □

Παρατήρηση 26. Οπως και στην Παρατήρηση 24, αν η $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος (5.26), τότε ικανοποιεί και την σχέση απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας $\mathrm{div} T(u, \nabla u) = 0$ (βλ. Πρόταση 8, σελ. 50) και επομένως το συμπέρασμα της Πρότασης 18 ισχύει για τις κλασσικές λύσεις της (5.26). Είναι φανερό ότι ο ισχυρισμός της Πρότασης 18 ισχύει κάτω από γενικότερες συνθήκες σε σύγκριση αυτές της Πρότασης 1 στο [5] και επομένως η παρούσα διατύπωση της Πρότασης 18 είναι γενικότερη. □

§ 4 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΗΣ p-ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗΣ[7]

Θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα που ορίζεται από τη λαγρανζιανή

$$L(u,z) = \frac{1}{2}\varphi(|z|^2) + F(u) \tag{5.41}$$

όπου $u \in \mathbb{R}^M$, $z \in \mathbb{R}^{M\cdot N}$ και $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$ και $\varphi'(s) \geqslant 0\ \forall s \geqslant 0$. Το σύστημα αυτό είναι γενίκευση της βαθμωτής περίπτωσης (βλ. [14]).

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το σύστημα αυτό είναι

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi'(|\nabla u|^2)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = F_{,k}(u). \tag{5.42}$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.17), σελ. 24:

$$T_{ij} = \varphi'(|\nabla u|^2)u_{k,i}u_{k,j} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right). \tag{5.43}$$

Παρατηρήσεις 27. (i) Οπως και στο σύστημα της προηγούμενης ενότητας, η σχέση (5.42) εκφράζει ένα *νόμο διατήρησης* σε στάσιμη κατάσταση ([65] ενότ. 25.9, σελ. 521-524) για τη διανυσματική ποσότητα u με ρεύμα J που εξαρτάται από το u μέσω της σχέσης $J_{ki} = -\varphi'(|\nabla u|^2)u_{k,i}$. Η βαθμωτή περίπτωση $M = 1$ συμπίπτει απόλυτα με το σύστημα που εξετάζεται στην προηγούμενη αναφορά.

(ii) Η βαθμωτή περίπτωση αντιστοιχεί στην εξίσωση ελαχιστικών επιφανειών [60, 2, 47]. Για $1 < M < N$ η u μπορεί να θεωρηθεί ότι παριστάνει μια M-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N$ ([23] κεφ. 4, ενότ. 42, σελ. 143-146 και ενότ. 52, σελ. 176-179). Η λαγρανζιανή του συστήματος αυτού μπορεί να τεθεί σε μία μορφή, η οποία είναι κάτι μεταξύ αυτής και της ενότητας § 3 (βλ. [23] κεφ. 4, ενότ. 52, σελ. 176-179).

(iii) Η διανυσματική περίπτωση της λαγρανζιανής (5.41) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η λαγρανζιανή ενός μη-γραμμική ελαστικού μέσου. Οπως και στην προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε μια μικτού τύπου λαγρανζιανή για ανισότροπα μη-γραμμικά ελαστικά μέσα.

[7] Πρόκειται για τα συστήματα της κλάσης II του [5].

Πρόταση 19. *Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ φραγμένο χωρίο με $\partial\Omega \in C^1$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ μια λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας (5.43) που αντιστοιχεί στην λαγρανζιανή (5.41)*

$$\mathrm{div} T(u, \nabla u) = 0. \tag{5.44}$$

Για την (5.41) θεωρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις στην αρχή της ενότητας. Περαιτέρω υποθέτουμε ότι η λύση $u \in C^2(\Omega)^M \cap C^1(\overline{\Omega})^M$ και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$u(x) = a, \quad x \in \partial\Omega$$

όπου $a \in \mathbb{R}^M$ είναι μια σταθερά για την οποία ισχύει $F(a) = 0$. Τότε η u ικανοποιεί την ακόλουθη ταυτότητα

$$\frac{N}{2}\int_\Omega \psi(|\nabla u|^2)dx + N\int_\Omega F(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x - x_0)\cdot \nu\widetilde{\psi}(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2)dS = 0, \tag{5.45}$$

όπου

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \varphi(s) - \frac{2}{n}s\varphi'(s) \\ \widetilde{\psi}(s) &= 2s\varphi'(s) - \varphi(s), \end{aligned} \tag{5.46}$$

ν είναι το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διανυσματικό πεδίο της $\partial\Omega$ και $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ένα τυχαίο σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Προχωράμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 18. Ολοκληρώνοντας τη σχέση $(x_i T_{ij})_{,j} = T_{ii}$ στο Ω μετά από εφαρμογή του θεωρήματος Green παίρνουμε

$$\int_\Omega T_{ii}dx = \int_{\partial\Omega} x_i T_{ij}\nu_j dS. \tag{5.47}$$

Από την (5.43) παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \varphi'(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 - N\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right) \\ &= -\frac{N}{2}\psi(|\nabla u|^2) - NF(u). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Για $x \in \partial\Omega$ έχουμε

$$x = (x\cdot\nu)\nu + (x\cdot h)h$$

όπου $h \in T_x\partial\Omega$, $|h| = 1$ (επομένως $h \cdot \nu = 0$) και

$$\begin{aligned} x_i T_{ij} \nu_j &= (x\cdot\nu)\nu_i T_{ij}\nu_j + (x\cdot h) h_i T_{ij}\nu_j \\ &= (x\cdot\nu)\varphi'(|\nabla u|^2)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - (x\cdot\nu)L \\ &\quad + (x\cdot h)\varphi'(|\nabla u|^2) u_{k,i} h_i u_{k,j}\nu_j - (x\cdot h)(h\cdot\nu)L. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Επειδή $u_{,i}h_i = 0$ στο $\partial\Omega$

$$x_i T_{ij}\nu_j = (x\cdot\nu)\left(\varphi'(|\nabla u|^2)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - \frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) - F(a)\right). \tag{5.50}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στο $\partial\Omega$

$$F(a) = 0, \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = |\nabla u|$$

από την (5.50) παίρνουμε

$$x_i T_{ij}\nu_j = (x\cdot\nu)\frac{1}{2}\widetilde{\psi}(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2),\ x \in \partial\Omega. \tag{5.51}$$

Συνδυασμός των (5.47), (5.48) και (5.51) δίνει την

$$\frac{N}{2}\int_\Omega \psi(|\nabla u|^2)dx + N\int_\Omega F(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\cdot\nu\widetilde{\psi}(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2)dS = 0. \tag{5.52}$$

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία από την αρχή, αλλά πολλαπλασιάζοντας τις συνιστώσες T_{ij} του τανυστή ορμής-ενέργειας με x_i^0, όπου $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_N^0)$, αντί για x_i, αφού παρατηρήσουμε ότι το πρώτο μέλος της (5.47) είναι μηδέν, παίρνουμε τελικά

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x_0\cdot\nu)|\nabla u|_a^2 dS = 0. \tag{5.53}$$

Αφαίρεση κατά μέλη των (5.52) και (5.53) δίνει τελικά την (5.45). □

Παρατηρήσεις 28. (i) Ισχύει η Παρατήρηση 26 της προηγούμενης ενότητας.

(ii) Για ορισμένες επιλογές της φ οι συναρτήσεις ψ, $\widetilde{\psi}$ είναι μη-αρνητικές. Για παράδειγμα για την επιλογή των ελαχιστικών επιφανειών

$$\varphi(s) = 2(\sqrt{1+s} - 1)$$

έχουμε

$$\psi(s) = 2(\sqrt{1+s} - 1 - \frac{1}{n}\frac{s}{\sqrt{1+s}}) \geqslant 0$$

και

$$\widetilde{\psi}(s) = \frac{2s}{\sqrt{1+s}} - 2(\sqrt{1+s} - 1) = 2\frac{\sqrt{1+s} - 1}{\sqrt{1+s}} \geqslant 0.$$

Κεφάλαιο 6

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε σχέσεις μονοτονίας για τα συναρτησιακά του προηγουμένου κεφαλαίου. Οι σχέσεις μονοτονίας είναι θεμελιώδους σημασίας για τη μελέτη των ελαχιστικών επιφανειών [58] και την θεωρία αρμονικών συναρτήσεων [55] (Lecture 3-Matter fields and the stress-energy tensor, σελ. 5). Ακολουθούμε τη μέθοδο των τανυστών ορμής-ενέργειας, η οποία όπως είδαμε προηγουμένως είναι δυνατόν να δώσει κάποια πρόσθετη γενικότητα. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις διαλέξεις του Schoen (βλ. προηγ. αναφορά, σελ. 4-5), όπου αναγράφεται ότι «...θα ήταν ενδιαφέρον να γίνει παραγωγή της Σχέσης Μονοτονίας για ελαχιστικές επιφάνειες από την ίδια μέθοδο θεώρησης[1]».

Με τον όρο μονοτονία εννοούμε τη μονοτονία της συνάρτησης

$$R \mapsto \frac{1}{R^{\alpha}} \int_{\mathrm{B}_R} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

όπου $\alpha \geqslant 0$, B_R είναι η ανοιχτή μπάλα του $\mathbb{R}^N$ με κέντρο ένα σταθερό σημείο x_0 και ακτίνα R, L μία συνάρτηση Lagrange και u μία ακέραια συνάρτηση.

[1] Σημ. Εννοεί τη μέθοδο των τανυστών ορμής-ενέργειας.

§ 1 ΣΧΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ POISSON

Στο πλαίσιο της αναφοράς [4], Διάλεξη 15, 6.C, σελ. 7, θεωρούμε την γενικευμένη εκτίμηση Modica

$$\frac{1}{2}|\nabla u|^2 \leqslant \zeta F(u),$$

όπου $\zeta \in]0,+\infty]$ είναι μία σταθερά. Οι περιπτώσεις ασθενούς και ισχυρής μονοτονίας[3] ανακτώνται ως δύο ειδικές περιπτώσεις της σχέσης αυτής για $\zeta = +\infty$ και $\zeta = 1$ αντίστοιχα. Η ανωτέρω σχέση πρέπει να θεωρείται ως μια φορμαλιστική γενίκευση της εκτίμησης Modica, η ισχύς της οποίας (για $\zeta = 1$) δεν είναι γνωστή στην διανυσματική περίπτωση. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της ασθενούς μονοτονίας ($\zeta = +\infty$) η εκτίμηση Modica ανάγεται στην τετριμμένη ανισότητα $F(u) \geqslant 0$.

Θεωρούμε το σύστημα του κεφ. 5 § 2, δηλ. την συνάρτηση Lagrange (5.1), $\Omega := \mathrm{B}_R$ και

$$E(R) := \int_{\mathrm{B}_R} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\right) dx. \tag{6.1}$$

Ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 20. *Εστω $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ μια ακέραια λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό (5.1)*

$$\mathrm{div} T(u, \nabla u) = 0$$

με $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N)^M$. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση μονοτονίας

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-(N-\dfrac{2\zeta}{\zeta+1})} E(R) \right) \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Για $\zeta = +\infty$ η σχέση αυτή απλοποιείται στην

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-(N-2)} E(R)\right) \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Από την σχέση (5.14) παίρνουμε

$$\int_{\mathrm{B}_R} T_{ii}(x)dx = R\int_{\partial \mathrm{B}_R} \nu_i(x)T_{ij}(x)\nu_j(x)dS(x). \tag{6.3}$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} T_{ii} &= |\nabla u|^2 - N(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)) \\ &= \left(\frac{|\nabla u|^2}{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)} - N\right)(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)) \\ &\leqslant (\frac{2\zeta}{\zeta+1} - N)(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)), \end{aligned}$$

δηλ.

$$\int_{\mathrm{B}_R} T_{ii}(x)dx \leqslant -(N - \frac{2\zeta}{\zeta+1})E(R) \tag{6.4}$$

όπου η $E(R)$ δίνεται από την (6.1).

Από την (5.11) παίρνουμε για $x \in \partial \mathrm{B}_R$

$$\nu_i T_{ij}\nu_j = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - L \geqslant -(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u))$$

δηλ.

$$\int_{\partial \mathrm{B}_\mathbf{R}} \nu_i T_{ij}\nu_j dS \geqslant -\int_{\partial \mathrm{B}_\mathbf{R}} (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u))dS = -\frac{dE}{dR}. \tag{6.5}$$

Συμδυασμός των (6.3), (6.4) και (6.5) δίνει

$$-R\frac{dE}{dR} \leqslant -(N - \frac{2\zeta}{\zeta+1})E(R).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας αυτής με $R^{-N+\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}$ παίρνουμε

$$-R^{1-(N-\frac{\zeta-1}{\zeta+1})}\frac{dE}{dR} + (N - \frac{2\zeta}{\zeta+1})R^{-N+\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}E(R) \leqslant 0$$

δηλ.

$$-R^{-N+\frac{2\zeta}{\zeta+1}}\frac{dE}{dR}+(N-\frac{2\zeta}{\zeta+1})R^{-N+\frac{2\zeta}{\zeta+1}-1}E(R)\leqslant 0$$

Αρα

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-N+\frac{2\zeta}{\zeta+1}}E(R)\right)\geqslant 0.$$

□

Παρατήρηση 29. Οπως και με τις Παρατηρήσεις 24, 26 και 28(i), η διατύπωση της πιο πάνω πρότασης είναι γενικότερη από την αντίστοιχη του Θεωρήματος 2.1 στο [3].

§ 2 ΣΧΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Θεωρούμε μια ειδική περίπτωση του συστήματος του κεφ. 5 § 3, δηλ. την συνάρτηση Lagrange (5.23) για την οποία ισχύει επιπλέον η συνθήκη

(H3) $b_{kjrs}(u)=b_{kr}(u)\delta_{js}$.

Από την συνθήκη (H2) με $z_{kj}=\xi_k\delta_{j1}$ παίρνουμε

$$b_{kl}(u)\xi_k\xi_l\geqslant c|\xi|^2 \tag{6.6}$$

όπου $|\xi|=\sqrt{\xi_k\xi_k}$ είναι η συνηθισμένη ευκλείδια νόρμα του ξ.

Η συνάρτηση $E(R)$ ορίζεται ανάλογα με την αντίστοιχη της § 1

$$E(R):=\int_{\mathrm{B}_R}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2+F(u)\right)dx. \tag{6.7}$$

Υπενθυμίζεται ότι η νόρμα $|\cdot|_u$ έχει οριστεί με την σχέση (5.31).

Οπως και στην § 1 θεωρούμε την φορμαλιστική γενίκευση της ανισότητας Modica

$$\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 \leqslant \zeta F(u),$$

όπου $\zeta \in]0,+\infty]$ είναι μία σταθερά, η οποία υποθέτουμε ότι ισχύει τουλάχιστον για $\zeta = +\infty$.

Ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 21. *Εστω $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ μια ακέραια λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό (5.23) με $u \in C^2(\mathbb{R}^N)^M$. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση μονοτονίας*

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-(N-\frac{2\zeta}{\zeta+1})}E(R)\right) \geqslant 0. \tag{6.8}$$

Για $\zeta = +\infty$ η σχέση αυτή απλοποιείται στην

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-(N-2)}E(R)\right) \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Ισχύει όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 20 η σχέση (6.3). Από την (5.33) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= |\nabla u|_u^2 - N(\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)) \\
&= \left(\frac{|\nabla u|_u^2}{\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)} - N\right)(\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)) \\
&\leqslant -(N - \frac{2\zeta}{\zeta+1})(\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u))
\end{aligned}$$

και μετά από ολοκλήρωση στην μπάλα B_R

$$\int_{B_R} T_{ii}(x)dx \leqslant -(N - \frac{2\zeta}{\zeta+1})E(R) \tag{6.9}$$

όπου η $E(R)$ δίνεται από την (6.7).

Χρήση της (5.27) για τον τανυστή δίνει για $x \in \partial B_R$

$$\begin{aligned} \nu_i T_{ij} \nu_j &= \nu_i u_{k,i} b_{kjrs}(u) u_{r,s} \nu_j - (\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)) \\ &= \nu_i u_{k,i} b_{kr}(u) u_{r,j} \nu_j - (\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)) \qquad (6.10) \\ &\geqslant c\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - (\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)) \\ &\geqslant -(\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ανισότητα έπεται από την (6.6). Ολοκλήρωση στο ∂B_R δίνει

$$\int_{\partial B_R} \nu_i T_{ij} \nu_j dS \geqslant -\int_{\partial B_R} (\frac{1}{2}|\nabla u|_u^2 + F(u)) dS = -\frac{dE}{dR}. \qquad (6.11)$$

Συνδιασμός των (6.3), (6.9) και (6.11) δίνει

$$-R\frac{dE}{dR} \leqslant (N - \frac{2\zeta}{\zeta+1})E(R)$$

από την οποία παίρνουμε όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 20

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-N+\frac{2\zeta}{\zeta+1}} E(R)\right) \geqslant 0.$$

□

§ 3 ΣΧΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΗΣ p-ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗΣ

Θεωρούμε το σύστημα του κεφ. 5 § 4, δηλ. την συνάρτηση Lagrange (5.41) με την πρόσθετη υπόθεση

(H4) Υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ έτσι ώστε $a < \frac{N}{2}$, $\beta < \frac{N}{2}$ και

$$\alpha \leqslant \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)} \leqslant \beta \ \forall s > 0.$$

Παραδείγματα 3. (i) Για $\varphi(s) = s$ η (H4) ικανοποιείται τετριμμένα με $\alpha = \beta = 1$ και $N > 2$.

(ii) Για $\varphi(s) = 2(\sqrt{1+s} - 1)$ έχουμε $\varphi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1+s}}$ και έτσι

$$\frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+s}}\right),$$

από την οποία παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)} \leqslant 1$$

και η (H4) ικανοποιείται με $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 1$ και $N > 2$.

(iii) Για την «p-Λαπλασιανή» $\varphi(s) = s^r$, $0 < r < \dfrac{N}{2}$, η (H4) ικανοποιείται με $\alpha = \beta = r$. □

Η συνάρτηση $E(R)$ ορίζεται από την σχέση

$$E(R) := \int_{B_R} \left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right) dx \tag{6.12}$$

Οπως και στις προηγούμενες ενότητες θεωρούμε την φορμαλιστική γενίκευση της ανισότητας Modica

$$\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) \leqslant \zeta F(u), \tag{6.13}$$

όπου $\zeta \in]0, +\infty]$ είναι μία σταθερά, η οποία υποθέτουμε ότι ισχύει τουλάχιστον για $\zeta = +\infty$.

Ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 22. *Εστω $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ μια ακέραια λύση του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό (5.41) με $u \in C^2(\mathbb{R}^N)^M$. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση μονοτονίας*

$$\frac{d}{dR}\left(R^{-N+2\beta\frac{\zeta}{\zeta+1}}E(R)\right) \geqslant 0. \tag{6.14}$$

Για $\zeta = +\infty$ η σχέση αυτή απλοποιείται στην

$$\frac{d}{dR}\Big(R^{-(N-2\beta)}E(R)\Big) \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Ισχύει όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 20 η σχέση (6.3). Από την (5.48) λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (H4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} T_{ii} &\leqslant \beta\varphi(|\nabla u|^2) - N\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right) \\ &\leqslant (2\beta - N)\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right) \\ &= -(N-2\beta)\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ολοκληρώνοντας στην μπάλα B_R παίρνουμε

$$\int_{B_R} T_{ii}dx \leqslant -(N-2\beta)E(R). \tag{6.16}$$

Επίσης για $x \in \partial B_R$ έχουμε

$$\begin{aligned} \nu_i T_{ij}\nu_j &= \varphi'(|\nabla u|^2)u_{k,i}\nu_i u_{k,j}\nu_j - \left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right) \\ &= \varphi'(|\nabla u|^2)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 - \left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right) \\ &\geqslant -\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right). \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας στην ∂B_R παίρνουμε

$$\int_{\partial B_R} \nu_i T_{ij}\nu_j dS \geqslant -\int_{\partial B_R}\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right)dS = -\frac{dE}{dR}. \tag{6.17}$$

Συνδυασμός των σχέσεων (6.3), (6.16) και (6.17) δίνει

$$-R\frac{dE}{dR} \leqslant -(N-2\beta)E(R).$$

Πολλαπλασιασμός και των δύο μελών της ανισότητας αυτής με $-R^{-N+2\beta-1}$ δίνει

$$R^{-N+2\beta}\frac{dE}{dR} \geqslant (N-2\beta)R^{-N+2\beta-1}E(R),$$

από την οποία παίρνουμε τελικά

$$\frac{d}{dR}(R^{-N+2\beta}E(R)) \geqslant 0. \tag{6.18}$$

Αν λάβουμε υπόψη την γενικευμένη ανισότητα Modica (6.13), τότε η εκτίμηση (6.15) για το T_{ii} γίνεται

$$\begin{aligned}
T_{ii} &\leqslant \beta\varphi(|\nabla u|^2) - N\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right)\\
&= \left(\frac{\beta\varphi(|\nabla u|^2)}{\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)} - N\right)\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right)\\
&\leqslant \left(\beta\frac{2\zeta}{\zeta+1} - N\right)\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right)\\
&= -\left(N - 2\beta\frac{\zeta}{\zeta+1}\right)\left(\frac{1}{2}\varphi(|\nabla u|^2) + F(u)\right).
\end{aligned}$$

Βλέπουμε εύκολα ότι η ανισότητα (6.18) ισχύει με $\beta\dfrac{\zeta}{\zeta+1}$ στη θέση του β, δηλ.

$$\frac{d}{dR}(R^{-N+2\beta\frac{\zeta}{\zeta+1}}E(R)) \geqslant 0.$$

$\square$

§ 4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΙΣ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μια σημαντική συνέπεια των πιο πάνω προτάσεων είναι το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 5. *Δεν υπάρχει μη-τετριμμένη ακέραια λύση* $u \in C^2(\mathbb{R}^N)^M$ *του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας που αντιστοιχεί σε ένα από τα συναρτησιακά* (5.1), (5.23), (5.41) (*ή των αντίστοιχων εξισώσεων* Euler-Lagrange) *τέτοια ώστε η αντίστοιχη συνάρτηση* Lagrange *να είναι ολοκληρώσιμη στον* $\mathbb{R}^N$.

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις (20), (21) ή (22) έχουμε

$$E(R) \geqslant \frac{R^\gamma}{R_0^\gamma} E(R_0) \to \infty, \quad R \to \infty$$

όπου $\gamma > 0$, $R_0 > 0$ σταθερά και $R \geqslant R_0$, εκτός εαν $u = u_0 =$σταθερά και $F(u_0) = 0$. □

Επανερχόμαστε στο σημείο αυτό στο θεώρημα του Derrick, Θεώρημα 4, σελ. 90, στις υποθέσεις του οποίου συμπεριλαμβάνεται και η υπόθεση της ευστάθειας. Είναι προφανές από το Θεώρημα 5 ότι η υπόθεση της ευστάθειας δεν είναι απαραίτητη και η υπόθεση της πεπερασμένης ενέργειας (ολοκληρωσιμότητας της συνάρτησης Lagrange) είναι αρκετή για τον αποκλεισμό μη τετριμμένων λύσεων. Επομένως θα μπορούσε κάποιος να προσπαθήσει να αποδείξει το θεώρημα εγκαταλείποντας την υπόθεση αυτή. Αυτό ακριβώς έγινε στο Θεώρημα 5 με όλη τη διαδικασία που προηγήθηκε. Η κύρια διαφορά βρίσκεται στις εσωτερικές μεταβολές στις οποίες βασίζεται, σε τελική ανάλυση, το Θεώρημα 5 αντί για τις απλές ομοθετκές μεταβολές που χρησιμοποίησε ο Derrick.

Σε έναν σημαντικό αριθμό δημοσιεύσεων ακολουθείται μια διαφορετική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία αναζητούνται λύσεις «άπειρης ενέργειας» και στη συνέχεια μελετάται το ερώτημα αν οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς. Οι Dang, Fife και Peletier αναζητούν σαγματικές λύσεις της μη-γραμμικής εξίσωσης Poisson με μη ομογενή όρο διευσταθούς (bistable) τύπου σε δύο διαστάσεις ($N = 2$) και στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι οι λύσεις είναι ασταθείς. Μια διαφορετική μέθοδο χρησιμοποιούν οι Gabré και Terra για την μελέτη της ύπαρξης και ευστάθειας σαγματικών λύσεων της ίδιας εξίσωσης με παρόμοιο μη ομογενή όρο σε περισσότερες διαστάσεις.

Ο σκοπός μας εδώ δεν είναι να δώσουμε μια πλήρη αναφορά του θέματος. Θα παρατηρήσουμε όμως, χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, ότι η απόδειξη της αστάθειας των λύσεων που έχουν κατασκευαστεί με την πιο πάνω διαδικασία δεν είναι εύκολη εργασία. Επομένως το ερώτημα που τίθεται είναι αν μια τροποποίηση της μεθόδου του Derrick, πιθανώς με χρήση δεύτερων εσωτερικών μεταβολών, μπορεί να οδηγήσει απευθείας, χωρίς προηγούμενη κατασκευή της λύσης, σε μια απλούστερη και συστηματικότερη απόδειξη της μη-ύπαρξης ευσταθών λύσεων «άπειρης ενέργειας».

Κεφάλαιο 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΑΝΟΙΧΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

Παρουσιάσαμε βασικές μεθόδους κατασκευής τανυστών ορμής-ενέργειας. Διερευνήσαμε τη γεωμετρική και φυσική τους σημασία και δείξαμε πως με βάση τους τανυστές αυτούς μπορούν να αναπτυχθούν ταυτότητες Derrick-Pohozaev και σχέσεις μονοτονίας. Επίσης δείξαμε πώς από τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να συναχθούν θεωρήματα μη-ύπαρξης λύσεων ΜΔΕ.

Μια σημαντική συνεισφορά της εργασίας αυτής ήταν η παρατήρηση ότι η ταυτότητα Derrick-Pohozaev που λαμβάνεται με τη μέθοδο των τανυστών ορμής-ενέργειας ισχύει κάτω από γενικότερες συνθήκες.

Από την διερεύνηση των θεμάτων που είχαν αρχικά τεθεί ως στόχοι της εργασίας αυτής προέκυψαν αρκετά ερωτηματικά και θέματα για περαιτέρω μελέτη. Ορισμένα από αυτά παρατίθενται πιο κάτω.

1. Προβλήματα υπό συνθήκες. Στο κεφ. 2 § 3 παρουσιάσαμε μεθόδους για την κατασκευή τανυστών ορμής-ενέργειας σε προβλήματα υπό συνθήκες και τις εφαρμόσαμε στο μη-γραμμικό σύστημα Poisson με την μη-ολονομική συνθήκη $\operatorname{div} u = 0$. Οι τανυστές αυτοί δεν είναι εν γένει ελεύθεροι απόκλισης. Παρόλα αυτά θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η δυνατότητα ανάπτυξης ταυτότητας Derrick-Pohozaev και να εξεταστεί αν είναι δυνατόν, ίσως κάτω από κάποιες προυποθέσεις, να παραχθούν σχέσεις μονοτονίας, όπως στο κεφ. 6. Επίσης, σε σχέση με αυτό, είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί αν το θέμα της ύπαρξης και ομαλότητας πολλαπλασιαστών Lagrange σε μη-ολονομικές συνθήκες είναι πράγματι ανοιχτό και σε περίπτωση θετικής απάντησης η διερεύνηση του.

2. Γεωμετρική σημασία τανυστών για $M \leqslant N$. Στο κεφ. 3 είδαμε ότι οι τανυστές ορμής-ενέργειας έχουν κάποια ενδιαφέρουσα γεωμετρική σημασία για $M > N$. Παραμένει ανοιχτό το θέμα για την αντίστοιχη γεωμετρική σημασία για την περίπτωση $M \leqslant N$.

3. Μηδενικές λαγρανζιανές. Στο κεφ. 4 § 3 είδαμε ότι διαφορετικές μεταβολικές διατυπώσεις είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε διαφορετικό τανυστή ορμής-ενέργειας. Εναλλακτικά διατυπωμένο αυτό σημαίνει ότι μηδενικές λαγρανζιανές είναι δυνατόν να δίνουν μη μηδενικό τανυστή ορμής-ενέργειας. Το φαινόμενο αυτό είναι από μόνο του εξαιρετικά ενδιαφέρον για περαιτέρω μελέτη. Είναι δυνατόν με αυτό το κριτήριο να μπορεί κάποιος να ξεχωρήσει μια «προτιμώμενη» μεταβολική διατύπωση ενός φυσικού προβλήματος; Εκτός αυτού θα ήταν ενδιαφέρον να δεί κάποιος τι ταυτότητες Derrick-Pohozaev λαμβάνονται από μηδενικές λαγρανζιανές. Είναι προφανές ότι αυτές οι ταυτότητες, σε περίπτωση που δεν είναι τετριμμένες, θα ισχύουν για κάθε συνάρτηση της κλάσης στην οποία αναφέρεται η λαγρανζιανή, εφόσον οι εξισώσεις Euler-Lagrange ικανοποιούνται ταυτοτικά για αυτές.

4. Ισοδυναμία εξισώσεων Euler-Lagrange και Noether. Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 24, 26 και 28(i), αποδείξαμε στην εργασία αυτή ότι η ταυτότητα Derrick-Pohozaev που λαμβάνεται με τη μέθοδο των τανυστών ορμής-ενέργειας, ισχύει κάτω από γενικότερες συνθήκες από ότι συνήθως. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η ταυτότητα Derrick-Pohozaev που παρουσιάσαμε εδώ, είναι πράγματι γενικότερη, δηλ. αν οι εξισώσεις Euler-Lagrange δεν είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας. Από το Αντιπαράδειγμα 2 γνωρίζουμε ότι αυτό είναι αληθές. Ομως παραμένει το ερώτημα, μήπως αυτό είναι αληθές για κάποιες ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων Lagrange ή κάποιες ειδικές κατηγορίες λύσεων; Δηλ. μήπως κάτω από ορισμένες υποθέσεις για την συνάρτηση Lagrange ή/και την λύση των εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας, έχουμε ισοδυναμία των εξισώσεων αυτών με τις εξισώσεις Euler-Lagrange; Σύμφωνα με κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα του συγγραφέα, κάτω από ορισμένες γενικές υποθέσεις είναι δυνατόν να έχουμε ισοδυναμία των εξισώσεων Euler-Lagrange με τις εξισώσεις Noether.

5. Μη-τετριμμένα αντιπαραδείγματα μη-ισοδυναμίας εξισώσεων Euler-Lagrange και Noether Ενα άλλο ερώτημα που τίθεται σε σχέση με την προηγούμενη παρατήρηση είναι το εξής. Στο Αντιπαράδειγμα 2 η λύση των εξισώσεων απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας είναι τετριμμένη. Θα μπορούσε κάποιος να κάνει την υπόθεση ότι για μη τετριμμένες λύσεις ίσως ισχύει η ισοδυναμία των εξισώσεων Euler-Lagrange με τις εξισώσεις απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας. Είναι επομένως φανερή η ανάγκη για μη-τετριμμένα αντιπαραδείγματα που δείχνουν ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange δεν είναι εν γένει (δηλ. χωρίς πρόσθετες συνθήκες) ισοδύναμες με τις εξισώσεις απόκλισης του τανυστή ορμής-ενέργειας.

6. Ταυτότητα Derrick-Pohozaev για ασθενείς λύσεις των εξισώσεων Euler-Lagrange ή Noether. Στην εργασία αυτή δεν αγγίξαμε καθόλου το θέμα αυτό.

7. Η ταυτότητα Derrick-Pohozaev σε μη φραγμένα χωρία. Η ταυτότητα Derrick-Pohozaev που παρουσιάσαμε στο κεφ. 5 ισχύει για φραγμένα χωρία. Μια ενδιαφέρουσα επέκταση της ταυτότητας αυτής θα ήταν η επέκτασή της σε μη-φραγμένα χωρία για δεδομένη ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης στο άπειρο, με σκοπό την ανάπτυξη θεωρημάτων μη-ύπαρξης λύσεων με δεδομένη ασυμπτωτική συμπεριφορά. Μια τέτοια ασυμπτωτική υπόθεση υπονοείται στην εκδοχή της ταυτότητας Derrick-Pohozaev του Derrick στην οποία λείπουν οι επιφανειακοί όροι.

8. Μη-ύπαρξη ευσταθών λύσεων. Αναφερόμενοι στα σχόλια της ενότητας 6 § 4 που έπονται του Θεωρήματος 5, ένα σημαντικό ερώτημα που τέθηκε εκεί είναι αν με τροποποίηση της μεθόδου του Derrick, πιθανώς με χρήση δεύτερων εσωτερικών μεταβολών, θα μπορούσαμε να πάρουμε απευθείας, χωρίς προηγούμενη κατασκευή της λύσης, μια απλούστερη και συστηματικότερη απόδειξη μη-ύπαρξης ευσταθών λύσεων («άπειρης ενέργειας»). Από μια άλλη οπτική γωνία, αυτό θα ήταν μία έμμεση απόδειξη μη-ευστάθειας κάποιων δεδομένων λύσεων (που έχουν κατασκευαστεί με κάποιο τρόπο).

9. Τανυστές ορμής-ενέργειας σε πολλαπλότητες. Το βασικό ερώτημα εδώ είναι: για την παραγωγή της ταυτότητας Derrick-Pohozaev ποιό πεδίο θα αντικαταστήσει το ρόλο του διανύσματος θέσης x; Η μέθοδος του θεωρήματος Noether είναι μία απάντηση.

10. Τανυστές ορμής-ενέργειας και ταυτότητες Derrick-Pohozaev για μη-μεταβολικά προβλήματα. Αυτό είναι επίσης ένα θέμα που δεν αγγίξαμε στην εργασία αυτή.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Ορολογία

Ακέραια συνάρτηση	entire function
Αμφιστοίχιση	bijection
Ανέβασμα ομοτοπίας	homotopy lifting
Βραχεία ακολουθία	short sequence
Διαφορομορφισμός	diffeomorphism
Εμμέριση	immersion
Ενστοίχιση	injection
Επιστοίχιση	surjection
Εφαπτόμενος χώρος	tangent space
Ινα	fiber
Ινώδης δέσμη	fiber bundle
Καθολικός διαφορομορφισμός	global diffeomorphism
Υπεμμέριση	subimmersion
Υπομέριση	submersion

Βιβλιογραφία

[1] Abraham, R.; Marsden, J. E.; Ratiu, T. Manifolds, tensor analysis and applications. Second edition. Applied Mathematical Sciences 75. Springer-Verlag 1988.

[2] Almgren, F. Plateau's problem. An invitation to varifold geometry. Benjamin 1996.

[3] Alikakos, N. D. Some basic facts on the system $\Delta u - W_u(u) = 0$. Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 1, 153-162.

[4] Alikakos, N. D. Lecture notes on nonlinear analysis and calculus of variations (in greek). University of Athens 2010. http://users.uoa.gr/~nalikako.

[5] Alikakos, N. D.; Faliagas, A. C. The stress-energy tensor and Pohozaev's identity for systems. Acta Math. Sci. 32 (2012), no. 1, 433-439.

[6] Antman, S. S. Nonlinear Problems of Elasticity. Second Edition. Applied Mathematical Sciences 107. Springer 2005.

[7] Aris, R. Vectors, tensors, and the basic equations of fluid dynamics. Dover 1989.

[8] Berestycki, H.; Lions, P.-L. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), no. 4, 313-345.

[9] Berestycki, H.; Lions, P.-L. Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), no. 4, 347-375.

[10] Bittner, L. New conditions for the validity of the Lagrange multiplier rule. I. Math. Nachr. 48 (1971), 353-370.

[11] Bozhkov, Y.; Mitidieri, E. Conformal Killing vector fields and Rellich type identities on Riemannian manifolds, II. Mediterr. J. Math. 9 (2012), no. 1, 1-20.

[12] Bozhkov, Y.; Mitidieri, E. The Noether approach to Pokhozhaev's identities. Mediterr. J. Math. 4 (2007), no. 4, 383-405.

[13] Bozhkov, Y.; Olver, P. J. Pohozhaev and Morawetz identities in elastostatics and elastodynamics. SIGMA 7 (2011), 055, 1-9.

[14] Caffarelli, L.; Garofalo, N.; Segala, F. A gradient bound for entire solutions of quasi-linear equations and its consequences. Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), no. 11, 1457-1473.

[15] Caratheodory, C. Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Third edition. AMS 1999.

[16] Ciarlet, P. G. An introduction to differential geometry with applications to elasticity. Springer 2010.

[17] Coleman, S. Aspects of Symmetry. Selected Erice Lectures. Cambridge University Press 1995.

[18] Dautray, R.; Lions, J.-L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 6. Evolution problems II. Springer 1993.

[19] Deimling, K. Nonlinear functional analysis. Dover 2010.

[20] Derrick, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. J. Math. Phys. 5 (1964), no. 9, 1252-1254.

[21] Dieudonné, J.-A. Treatise on Analysis. Volume I. Foundations of modern analysis. Enlarged and corrected printing. Academic 1969.

[22] Dieudonné, J.-A. Treatise on Analysis. Volume III. Academic 1972.

[23] Eisenhart, L. P. Riemannian geometry. Princeton University Press 1949.

[24] Evans, L. C. Entropy and Partial Differential Equations. Lecture Notes. http://math.berkeley.edu/~evans/entropy.and.PDE.pdf.

[25] Evans, L. C. Partial Differential Equations. Graduate studies in mathematics 19. AMS 2002.

[26] Fick, E. Einfuehrung in die Grundlagen der Quantentheorie. 4. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden 1979.

[27] Galdi, G. P. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Volume I. Linearised steady problems. Tracts in natural philosophy 38. Springer 1998.

[28] Giaquinta, M.; Hildebrandt, S. Calculus of Variations I: The Lagrangian Formalism. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer 2010.

[29] Giaquinta, M.; Hildebrandt, S. Calculus of Variations II: The Hamiltonian Formalism. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer 2010.

[30] Gui, C. Hamiltonian identities for elliptic partial differential equations. J. Funct. Anal. 254 (2008), no. 4, 904-933.

[31] Gurtin, M. E. An introduction to continuum mechanics. Academic 1981.

[32] Jackson, J. D. Classical electrodynamics. Second edition. Wiley 1975.

[33] Kloetzler, R. Mehrdimensionale Variationsrechnung. Lehrbuecher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 44. Birkhaeuser 1970.

[34] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Course of Theoretical Physics Volume 2. The classical theory of fields. Forth revised english edition. Butterworth-Heinemann 2000.

[35] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Course of theoretical physics Volume 3. Quantum mechanics. Non-relativistic theory. Third edition, revised and enlarged. Pergamon 1991.

[36] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Course of Theoretical Physics Volume 7. Theory of elasticity. Third edition, revised and enlarged. Pergamon 1999.

[37] Lang, S. Fundamentals of differential geometry. Graduate Texts in Mathematics 191. Springer 1999.

[38] Logan, J. D. Applied mathematics. Third edition. Wiley-Interscience 2006.

[39] Lovelock D.; Rund, H. Tensors, differential forms, and variational principles. Dover 1989.

[40] Marsden J. E.; Hughes T. J. R. Mathematical foundations of elasticity. Prentice-Hall 1983.

[41] Noether, E.; Tavel M. A. (Translator). Invariant variation problems. arXiv:physics/0503066v1 [physics.hist-ph], http://arxiv.org/pdf/-physics/0503066v1.

[42] Olver, P. J. Applied Mathematics. Lecture Notes. www.math.umn.edu/-~olver/.

[43] Olver, P. J. Conservation laws in elasticity. I. General results. Arch. Rational Mech. Anal. 85 (1984), no. 2, 111-129.

[44] Olver, P. J. Conservation laws in elasticity. II. Linear homogeneous isotropic elastostatics. Arch. Rational Mech. Anal. 85 (1984), no. 2, 131-160.

[45] Olver, P. J. Errata: "Conservation laws in elasticity. II. Linear homogeneous isotropic elastostatics". Arch. Rational Mech. Anal. 102 (1988), no. 4, 385-387.

[46] Olver, P. J. Conservation laws in elasticity. III. Planar linear anisotropic elastostatics. Arch. Rational Mech. Anal. 102 (1988), no. 2, 167-181.

[47] Osserman, R. A survey of minimal surfaces. Second edition. Dover 1986.

[48] Kuzin, I.; Pohozaev, S. Entire solutions of semilinear elliptic equations. Progress in nonlinear differential equations and their applications 33. Birkhaeuser 1997.

[49] Pohozaev, S.I., Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Sov. Math. Doklady 5, (1965) 1408-1411.

[50] Rellich, F. Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral. Math. Z. 46, (1940). 635-636.

[51] Rosen, G. Nonexistence of localized periodic solutions to nonlinear field theories. J. Math. Phys. 7 (1966) 2071.

[52] Rosen, G. Formulations of classical and quantum dynamical theory. Academic 1969.

[53] Rund, H. The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations. Its role in mathematics and physics. Van Nostrand 1966.

[54] Sandier, E.; Serfaty, S. Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 70. Birkhaeuser 2007.

[55] Schoen, R. Lecture notes on topics in differential geometry. Stanford University 2009.

[56] Shafrir, I. On singular perturbation problems involving a «circular-well» potential. In Ginzburg-Landau vortices; edited by Brezis, H.; Li, T. Series in Contemporary Applied Mathematics 5. Higher Education Press 2005.

[57] Serrin, J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Encyclopedia of Physics, edited by Fluegge, S. Volume VIII/1. Fluid dynamics I. Springer 1959.

[58] Simon, L. Lectures on geometric measure theory. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 3. Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

[59] Sohr, H. The Navier-Stokes equations. An elementary functional analytic approach. Birkhaeuser 2001.

[60] Struwe, M. Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Fourth edition. A Series of Modern Surveys in Mathematics 34. Springer 2010.

[61] Van der Vorst, R. C. A. M. Variational identities and applications to differential systems. Arch. Rational Mech. Anal. 116 (1992), no. 4, 375-398.

[62] Weinberg, S. The quantum theory of fields. Volume II. Modern applications. Cambridge University Press 1996.

[63] Whitney, H. A function not constant on a connected set of critical points. Duke Math. J. 1 (1935), no. 4, 514-517.

[64] Zeidler, E. Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems. 2nd corrected printing. Springer 1993.

[65] Zeidler, E. Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators. Springer 1990.

[66] Zeidler, E. Nonlinear functional analysis and its applications. III: Variational methods and optimization. 2nd corrected printing. Springer 1993.

[67] Zeidler, E. Nonlinear functional analysis and its applications. IV: Applications to mathematical physics. Springer 1988.