

ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΧΑΙΟΙ
ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΔΕ
ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

Δημήτριος Καλαντζής*
Α.Μ: 200515

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΦΛΩΡΑΤΟΣ ΕΜ.

2 Αυγούστου 2013

*e-mail: d.kalantzis@phys.uoa.gr

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
2	ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	4
2.1	Τα αξιώματα της Κβαντομηχανικής	4
2.2	Το παράδοξο EPR	11
2.3	Η ανισότητα του Bell	13
3	ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ	20
3.1	Το qubit	20
3.2	Κβαντικές πύλες - Κβαντικά κυκλώματα.	23
3.2.1	Θεώρημα μη αντιγραφισμότητας μιας κβαντικής κατάστασης.	28
3.2.2	Κβαντική Παράλληλη Επεξεργασία	30
3.3	Ένα παράδειγμα: Ο αλγόριθμος του Deutsch.	33
3.4	Ένα παράδειγμα: Κβαντική Τηλεμεταφορά.	35
4	ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	39
4.1	Ο αλγόριθμος του GROVER	39
4.2	Γεωμετρική αναπαράσταση.	41
4.3	Κβαντική εξέλιξη και ο αλγόριθμος του Grover	47
4.4	Ο αλγόριθμος του Grover είναι βέλτιστος	53
5	ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ.	57
5.1	Κλασικοί τυχαίοι περίπατοι.	57
5.2	Κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι.	61
5.2.1	Κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι διακριτού χρόνου.	66
5.2.2	Κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι συνεχούς χρόνου.	72
6	ΕΞΕΛΙΞΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRODINGER	74
6.1	Υπολογισμός των Ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής	75
6.2	Υπολογισμός χρόνου και πλάτους σύγκλισης	78
6.3	Ανάλυση των αποτελεσμάτων	84
7	ΕΞΕΛΙΞΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ DIRAC	86
7.1	Υπολογισμός των ιδιοτιμών την Χαμιλτονιανής	87
7.2	Υπολογισμός πλάτους και χρόνου σύγκλισης	92
7.3	Ανάλυση των αποτελεσμάτων	97
8	ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ 2D	98

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Ο R.P. Feynmann είχε πει πως όποιος ισχυρίζεται ότι καταλαβαίνει την κβαντομηχανική λέει ψέματα. Η αλήθεια είναι ότι μπορούμε πολύ καλά να υπολογίσουμε πλάτη μετάβασης, πιθανά αποτελέσματα πειραμάτων, να γνωρίζουμε πολύ καλά τι κάνουμε, οι υπολογισμοί μας να είναι σωστοί και να συμφωνούν με το πείραμα. Ακολουθώντας συγκεκριμένους κανόνες και καλά ορισμένα λογικά βήματα καταλήγουμε σε φυσικά σωστές προβλέψεις. Συνεπώς τι εννοούσε ο Feynmann; Εννοούσε ότι τα θεμέλια της κβαντομηχανικής είναι τόσο αντίθετα στη διαίσθησή μας, που δεν μπορούμε να την καταλάβουμε. Μπορεί να είναι ένα κλειστό λογικό σύστημα που βγάζει φυσικά σωστά συμπεράσματα, αλλά είναι τόσο αντίθετη με την καθημερινή μας εμπειρία που απλά δεν μπορούμε να κατανοήσουμε την ουσία της.

2.1 Τα αξιώματα της Κβαντομηχανικής

Δεν χρειάζεται κανείς να καταφύγει σε περίπλοκους υπολογισμούς για να καταλάβει αυτό το παράδοξο. Είναι εμφανές στα θεμέλια της κβαντομηχανικής, στα αξιώματά της, και κληροδοτείται σε όλα τα λήμματα και συμπεράσματά της. Σε αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε τα αξιώματα της κβαντομηχανικής που θα ορίσουν το εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο θα κινηθούμε στην υπόλοιπη εργασία και θα ασχοληθούμε κυρίως με την έννοια του εναγκαλισμού (entanglement) που είναι μία από τις πιο “περίγες” ιδιότητες των κβαντικών συστημάτων, είναι ο φυσικός λόγος της ανώτερης ισχύος των κβαντικών υπολογιστών έναντι των κλασικών.

Η κβαντομηχανική είναι θεμελιωμένη σε τέσσερα βασικά αξιώματα.

1. Κάθε φυσικό σύστημα περιγράφεται από έναν μιγαδικό διάνυσματικό χώρο με πράξη το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή ένα χώρο Hilbert. Αυτό ο χώρος λέγεται καταστατικός και το φυσικό σύστημα περιγράφεται πλήρως από το καταστατικό του διάνυσμα $|\Psi\rangle$, ένα μοναδιαίο μιγαδικό διάνυσμα σε αυτό το χώρο.
2. Η κατάσταση ενός κλειστού κβαντικού συστήματος εξελίσσεται στο χρόνο μέσω ενός μοναδιακού (Unitary) μετασχηματισμού U .

$$|\Psi'(t')\rangle = U(t', t)|\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

3. Η μέτρηση ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται από μια συλλογή τελεστών μέτρησης που δρουν στον καταστατικό χώρο του συστήματος.

Η συλλογή των τελεστών M_m φέρει το δείκτη m για τα πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα της μέτρησης να είναι m δίνεται από:

$$p(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle \quad (2)$$

και η κατάσταση του συστήματος μετά τη μέτρηση είναι

$$|\Psi'\rangle = M_m \frac{|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}} \quad (3)$$

Για να αθροίζονται οι πιθανές εκβάσεις της μέτρησης στη μονάδα θα πρέπει να είναι πλήρης η συλλογή των τελεστών:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (4)$$

4. Εάν ένα φυσικό σύστημα αποτελείται από επι μέρους ανεξάρτητα συστήματα το κάθε ένα με χώρο Hilbert $|\Psi_i\rangle$, ο συνολικός καταστατικός χώρος είναι το τανυστικό γινόμενο των επιμέρους:

$$|\Psi_{ολ}\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_n\rangle \quad (5)$$

Για να γίνουν κατανοητά τα αξιώματα θα τα εφαρμόσουμε στο πιο απλό κβαντικό σύστημα, το qubit. Ως τέτοιο ορίζεται οποιοδήποτε κβαντικό σύστημα του οποίου ο χώρος Hilbert είναι διδιάστατος, δηλαδή οποιοδήποτε σύστημα έχει δύο καταστάσεις. Ως φυσικό παράδειγμα μπορεί να σκέφτεται κανείς τις καταστάσεις spin ενός ηλεκτρονίου, τις δυνατές διελεύσεις του από δύο οπές στο πείραμα των δύο οπών, τις καταστάσεις πόλωσης ενός πραγματιού φωτονίου, ένα άτομο με δύο ενεργειακές καταστάσεις¹ και άλλα. Το qubit αποτελεί και το θεμέλιο λίθο των κβαντικών υπολογιστών. Είναι το αντίστοιχο του bit των κλασικών υπολογιστών.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι δύο καταστάσεις του qubit συμβολίζονται ως $|0\rangle$, $|1\rangle$ και η διανυσματική τους αναπαράσταση στη βάση ενός τελεστή είναι

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

¹Η πιο πρακτικά ένα άτομο του οποίου μόνο δύο ενεργειακές καταστάσεις συμμετέχουν για δεδομένες ενέργειες ενός πειράματος.

Συνεπώς, εν γένει η κατάσταση του συστήματός μας είναι

$$|\Psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle \quad (8)$$

με $a, b \in \mathbb{C}$ και

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (9)$$

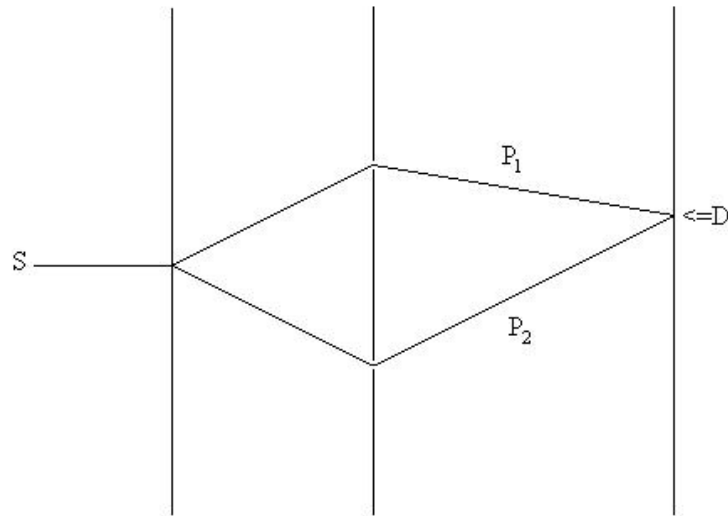
για να είναι μοναδιαίο το διάνυσμα. Σε αυτή την εξίσωση, που τόσο αβίαστα γράψαμε ως προφανή συνέπεια του διανυσματικού χώρου που περιγράφει το σύστημά μας, γίνεται το πιο θεμελιώδες άλμα που διαχωρίζει την κλασική φυσική από την κβαντική. Η εξίσωση (8) μας λέει ότι ένα κβαντικό σύστημα μπορεί να βρεθεί σε υπέρθεση δύο καταστάσεων². Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρόνιο έχει πεπερασμένο πλάτος πιθανότητας να περάσει και από τις δύο οπές στο πείραμα του Young. Αυτό οφείλεται στο ότι για να βρούμε την πιθανότητα να γίνει μια διαδικασία που αποτελείται από N βήματα, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το πλάτος πιθανότητας να πάμε από το βήμα i στο $i + 1$ και στο τέλος της διαδικασίας να πάρουμε το τετράγωνο του πλάτους πιθανότητας που θα μας δώσει την πιθανότητα να έχουμε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Η διαδικασία αυτή είναι θεμελιωδώς αντίθετη με αυτή που υποδεικνύει η κλασική φυσική καθώς στην κλασική φυσική θα πολλαπλασιάζαμε πιθανότητες εξ αρχής και όχι πλάτη πιθανοτήτων, στα οποία υπάρχουν και οι μη διαγώνιοι σταυρωτοί όροι, οι οποίοι περιέχουν επιπλέον πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος. Αυτή η ιδιότητα έρχεται σε ευθεία αντίθεση με την διαίσθηση που έχουμε για την ύλη γύρω μας η οποία μπορεί να βρίσκεται μόνο σε μία κατάσταση (εν προκειμένω θέση) κάθε στιγμή. Αυτή είναι η αρχή της επαλληλίας που ισχύει για τα κβαντικά συστήματα.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση. Ένας κλασικός υπολογιστής μπορεί να καταλάβει το κλασικό bit 1 ή 0, δηλαδή αν περνάει ρεύμα ή όχι από μία πύλη του κυκλώματος. Ένας κβαντικός υπολογιστής μπορεί να καταλάβει qubits τα οποία εκτός από τις καταστάσεις βάσης³ που αντιστοιχούν στο 0,1 των κλασικών bit μπορούν να βρεθούν και στην επαλληλία αυτών, με άπειρους συνδυασμούς των συντελεστών a, b . Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι σε ένα qubit μπορεί να αποθηκευτεί άπειρη πληροφορία, τουλάχιστον από άποψη αρχής. Αμέσως αμέσως αναδεικνύεται η ουσιαστική διαφορά που κάνει τους κβαντικούς υπολογιστές τόσο ισχυρούς σε σύγκριση με τους κλασικούς. Σε αυτό το ζήτημα θα επιστρέψουμε αργότερα.

Το δεύτερο αξίωμα είναι αρκετά γενικό και ουσιαστικά εκφράζει την απαίτησή μας για διατήρηση της πιθανότητας. Αν μία κατάσταση $|\Psi\rangle$ εξελ-

² Φυσικά, εάν ο χώρος Hilbert είναι N διαστάσεων, η κατάσταση του συστήματός μας θα είναι υπέρθεση των N διανυσμάτων βάσης.

³ Η λεγόμενη υπολογιστική βάση.



Σχήμα 1: Η πιθανότητα το σωματίο να βρεθεί στη θέση D δίνεται από το πλάτος πιθανότητας να πάει από τη θέση S στην μία οπή επί το πλάτος πιθανότητας να πάει μετά στη θέση D συν το πλάτος πιθανότητας να πάει από τη θέση S στην άλλη οπή επί το πλάτος πιθανότητας να πάει από εκεί στην θέση D και όλο στο τετράγωνο.

λίσεται στο χρόνο μέσω ενός γενικού τελεστή U με $|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$ η απαίτηση να διατηρείται η πιθανότητα εκφράζεται ως

$$\langle \Psi' | \Psi' \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle \quad (10)$$

$$\langle \Psi | U^\dagger U | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle \quad (11)$$

$$U^\dagger U = I \quad (12)$$

που δεν είναι άλλη από τη συνθήκη μοναδιακότητας ενός τελεστή.

Από μια άλλη οπτική γωνία, το δεύτερο αξίωμα μας λέει ότι ένας παρατηρητής σε μια χρονική στιγμή t_1 είναι ισοδύναμος με έναν παρατηρητή τη χρονική στιγμή t_2 . Δεν υπάρχει δηλαδή προνομιακός παρατηρητής στο χρόνο. Αυτό ισοδυναμεί με αναλωιότητα των κβαντικών συστημάτων σε χρονικές μεταθέσεις που με τη σειρά του μέσω του θεωρήματος της Noether υποδεικνύει τη διατήρηση της ενέργειας. Σε αυτό οφείλεται και η σαφής καταγραφή του όρου 'κλειστού' κβαντικού συστήματος, για να δηλώσει την απόλυτη διατήρηση της ενέργειας στα κλειστά συστήματα.

Στα πρακτικά προβλήματα όμως κατά την κατασκευή ενός κβαντικού υπολογιστή δεν μπορεί παρά να είναι η αλληλεπίδραση του κβαντικού συστήματος με το περιβάλλον του, τόσο σε όρους αλληλεπίδρασης του με το κλασικών

διαστάσεων 'κουτί' στο οποίο το διατηρούμε, όσο και στην ίδια τη διαδικασία της μέτρησης, όταν θέλουμε να πάρουμε πληροφορία από αυτό. Το πρώτο είναι ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν όσοι πειραματίζονται με την κβαντική πληροφορία και λέγεται decoherence. Ο λόγος για τον οποίο είναι τόσο μεγάλο πρόβλημα είναι πως στην περίπτωση μη κλειστού συστήματος η εξέλιξη παύει να είναι μοναδιακή και το σύστημα χάνει τα κβαντικά χαρακτηριστικά του. Τείνει να γίνει κλασσικό, πράγμα που φυσικά εμποδίζει την πλήρη εκμετάλλευση της κβαντικής ισχύος για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το δεύτερο άπτεται του τρίτου αξιώματος και θα συζητηθεί παρακάτω.

Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση που το κβαντικό σύστημα είναι κλασσικό (μή σχετικιστικό) η εξέλιξη δίνεται συγκεκριμένα από την εξίσωση του Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle \quad (13)$$

με H την χαμιλτονιανή του συστήματος και \hbar τη σταθερά του Planck. Σε περίπτωση που η ταχύτητα του κβαντικού συστήματος είναι σχετικιστική η εξίσωση εξέλιξης είναι η εξίσωση του Dirac:

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\Psi = 0, \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (14)$$

όπου γ^μ είναι οι τέσσερις πίνακες του Dirac και ικανοποιούν την άλγεβρα αντιμετάθεσης $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ είναι η μετρική του Minkowski, του θεσεογραφικού χώρου της ειδικής σχετικότητας.

Υπάρχουν πολλές σημαντικές διαφορές στις δύο διαφορικές εξισώσεις, ακόμα και η ερμηνεία των κυματοσυναρτήσεων δεν είναι ακριβώς η ίδια. Αυτό που είναι το σημαντικότερο όμως, και είναι και ο λόγος που ο Dirac εισήγαγε τη δεύτερη εξίσωση, είναι πως η πρώτη είναι δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο σε αντίθεση με την τελευταία που είναι πρώτης τάξης. Αυτό το γεγονός οδηγεί σε πολύ σημαντικές διαφορές, ορισμένες από τις οποίες θα μας απασχολήσουν προς το τέλος της εργασίας, όπου και θα αναπτυχθεί περισσότερο το περιεχόμενο των δύο εξισώσεων.

Ερχόμενοι στο τρίτο αξίωμα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι μια μέτρηση στην υπολογιστική βάση θα μπορεί να γίνει από δύο τελεστές μέτρησης

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| \quad (15)$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1| \quad (16)$$

για τους οποίους εύκολα αποδεικνύεται ότι πληρούν τη συνθήκη πληρότητας και είναι προβολικοί τελεστές ($M_0^2 = M_0$, $M_1^2 = M_1$). Η πιθανότητα το αποτέ-

λεσμα της μέτρησης να είναι $|0\rangle$ ή $|1\rangle$ είναι

$$p(0) = \langle \Psi | M_0^\dagger M_0 | \Psi \rangle = \langle \Psi | M_0 | \Psi \rangle = |a|^2 \quad (17)$$

$$p(1) = \langle \Psi | M_1^\dagger M_1 | \Psi \rangle = \langle \Psi | M_1 | \Psi \rangle = |b|^2 \quad (18)$$

και η κατάσταση αμέσως μετά τη μέτρηση είναι αντίστοιχα

$$\frac{M_0 | \Psi \rangle}{|a|} = \frac{a}{|a|} |0\rangle \quad (19)$$

$$\frac{M_1 | \Psi \rangle}{|b|} = \frac{b}{|b|} |0\rangle \quad (20)$$

Το αποτέλεσμα σε αυτή την περίπτωση είναι ουσιαστικά τετριμμένο. Ο λόγος είναι ότι οι καταστάσεις που μετρούσαμε ήταν ορθογώνιες μεταξύ τους. Εάν κάτι τέτοιο δεν ισχύει δεν υπάρχει κβαντική μέτρηση ικανή να διαχωρίσει τις δύο καταστάσεις. Για να το δείξουμε αυτό ας θεωρήσουμε δύο καταστάσεις που είναι μεταξύ τους μη κάθετες. $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ με τη δεύτερη να έχει μη μηδενική προβολή στην πρώτη

$$|\Psi_2\rangle = a|\Psi_1\rangle + b|\Phi\rangle, \quad \mu\epsilon \quad (21)$$

$$\langle \Psi_1 | \Phi \rangle = 0 \quad (22)$$

Εάν υποθέσουμε ότι μια μέτρηση ικανή να διαχωρίσει τις δύο καταστάσεις είναι δυνατή, σύμφωνα με το τρίτο αξίωμα θα περιγράφεται από μια συλλογή τελεστών M_j . Εάν το σύστημα είναι εκ των προτέρων προετοιμασμένο στη μία ή την άλλη κατάσταση θα πρέπει η πιθανότητα να παρατηρηθεί σε αυτήν να είναι μονάδα. Για να ποσοτικοποιηθεί αυτή η παρατήρηση χρήσιμο είναι να ορίσουμε την παράμετρο $f(i) = 1$ εάν το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι i και 0 διαφορετικά. Με αυτό το σκεπτικό ορίζουμε τους τελεστές

$$E_j = \sum_{i:f(i)=j} M_j^\dagger M_j \quad (23)$$

και θα πρέπει να ισχύει

$$\langle \Psi_1 | E_1 | \Psi_1 \rangle = 1 \quad (24)$$

$$\langle \Psi_2 | E_2 | \Psi_2 \rangle = 1 \quad (25)$$

Δεδομένης της σχέσης πληρότητας που ισχύει για τους E_i από τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται ότι

$$\langle \Psi_1 | E_2 | \Psi_1 \rangle = 0 \implies \quad (26)$$

$$\sqrt{E_2} | \Psi_1 \rangle = 0 \quad (27)$$

Από την 21 έπεται ότι

$$\sqrt{E_2}|\Psi_1\rangle = b\sqrt{E_2}|\Psi_1\rangle \implies \quad (28)$$

$$\langle \Psi_2|E_2|\Psi_2\rangle = |b|^2 \langle \Phi|E_2|\Phi\rangle \leq |b|^2 \leq 1 \quad (29)$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω του ότι η κατάσταση $|\Phi\rangle$ είναι ορθοκανονική στην $|\Psi_1\rangle$ και οι τελεστές E_2 είναι μέρος της συλλογής των τελεστών μέτρησης:

$$\langle \Phi|E_2|\Phi\rangle \leq \sum_i \langle \Phi|E_i|\Phi\rangle = \langle \Phi|\Phi\rangle = 1 \quad (30)$$

Αυτό που ουσιαστικά συμπεραίνουμε από την παραπάνω απόδειξη είναι ότι επειδή η κατάσταση $|\Psi_2\rangle$ έχει μη μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση της κατάστασης $|\Psi_1\rangle$ υπάρχουν μετρήσεις που δίνουν το αποτέλεσμα ήτε το μετρούμενο σύστημα είχε προετοιμαστεί στην κατάσταση $|\Psi_2\rangle$ ήτε στην κατάσταση $|\Psi_1\rangle$. Επιπλέον, είναι αδύνατον να ξεχωρίσει κανείς αυτές τις μετρήσεις, συνεπώς δεν μπορεί κανείς να διαχωρίσει με ασφάλεια τις δύο καταστάσεις.

Υπάρχει ένα πιο εξειδικευμένο είδος μέτρησης, οι POVM μετρήσεις, οι οποίες είναι μια ειδική περίπτωση των προαναφερθέντων μετρήσεων που είναι έτσι κατασκευασμένες ώστε τα αποτελέσματα των μετρήσεων να είναι χωρισμένα σε τρεις κατηγορίες. Σε μία που αντιστοιχεί με απόλυτη βεβαιότητα στην κατάσταση του συστήματος να είναι η $|\Psi_1\rangle$, σε μία που αντιστοιχεί με απόλυτη βεβαιότητα στην κατάσταση του συστήματος να είναι $|\Psi_2\rangle$ και σε μία που είναι απολύτως αδύνατο να αποφασίσει κανείς. Με αυτό τον τρόπο μπορεί κανείς σε κάποιες περιπτώσεις να αναγνωρίσει την κατάσταση του συστήματος, σε κάποιες όμως όχι. Αυτού του είδους μετρήσεις δε θα μας απασχολήσουν και δε θα επεκταθούμε περεταίρω.

Ένα άλλο είδος εξειδικευμένης μέτρησης είναι οι προβολικές μετρήσεις. Αυτές είναι πιο γενικές από τις POVM και το επιπλέον χαρακτηριστικό τους ως προς τον ορισμό είναι ότι είναι ορθογώνιες προβολές. Δηλαδή είναι ερμητιανοί τελεστές M_m και ικανοποιούν τη σχέση $M_m M'_m = \delta_{m,m'} M_m$. Αυτός ο επιπλέον περιορισμός καθιστά τις προβολικές μετρήσεις πολύ πιο εύχρηστες και με αυτές θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο.

Τέλος, το τέταρτο αξίωμα, μας δηλώνει ότι εάν η κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$|\Psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle \quad (31)$$

σημαίνει πως αυτό το σύστημα αποτελείται από δύο ανεξάρτητα υποσυστήματα, στην περίπτωσή μας από δύο qubits. Η πιο σημαντική περίπτωση όμως είναι

η άρνηση αυτής της πρότασης. Η περίπτωση δηλαδή που μια κβαντική κατάσταση δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο επι μέρους καταστάσεων, όπως η κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \frac{|\alpha_0\rangle |\beta_0\rangle + |\alpha_1\rangle |\beta_1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (32)$$

Το τέταρτο αξίωμα υποδηλώνει πως αυτή η κατάσταση δεν μπορεί να "σπάσει" σε δύο επιμέρους συστήματα και αποτελεί μία και μόνο μία οντότητα. Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται εναγκαλισμένη (entangled) και το φαινόμενο εναγκαλισμός. Παίζει σημαντικότατο ρόλο σε πολλές εκφάνσεις των κβαντικών υπολογιστών όπως η κβαντική τηλεμεταφορά. Είναι ένας από τους βασικότερους πόρους της κβαντικής πληροφορίας, δεν υπάρχει ανάλογός του στους κλασσικούς υπολογιστές, και παρά όλα αυτά δεν είναι ακόμα πλήρως κατανοητός. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα αναφερθούμε πιο εκτεταμένα στην έννοια του entanglement.

2.2 Το παράδοξο EPR

Πολλές φορές λέγεται ότι η κβαντομηχανική είναι μια μη ντετερμινιστική θεωρία με την έννοια ότι δεν υπάρχει η αντιστοιχία αίτιου αιτιατού. Αυτό δεν ισχύει. Η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει ένα φυσικό σύστημα εξελίσσεται χρονικά με απόλυτα καθορισμένο τρόπο σύμφωνα με την αξίσωση του Schrödinger. Αυτό που είναι αρκετά αντίθετο με την εμπειρία μας είναι η ερμηνία της. Το μόνο που μπορεί να μας πει η κβαντομηχανική για οποιοδήποτε φυσικό σύστημα είναι πως μπορεί να μας προβλέψει με απόλυτη ακρίβεια την εξέλιξη της κυματοσυνάρτησής του, αλλά για το ποιο θα είναι το αποτέλεσμα μιας μέτρησής μας μπορεί να μας δώσει μόνο την πυκνότητα πιθανότητας των δυνατών αποτελεσμάτων, $\langle \Psi | \Psi \rangle$. Δεν μπορεί να προβλέψει εκ προοιμίου το ακριβές της αποτέλεσμα.

Λογικό είναι κανείς να θεωρεί αυτή την περιγραφή του κόσμου μας ατελή, μή πλήρη. Με αυτό το σκεπτικό, το 1935 οι Einstein, Podolsky, Rosen δημοσίευσαν μια εργασία με σκοπό να μειώσουν την αξία της κβαντομηχανικής ως πλήρους θεωρίας που περιγράφει τη φύση. Για να το πετύχουν αυτό ανέπτυξαν μια επιχειρηματολογία που οδηγούσε σε ένα λογικό παράδοξο, το λεγόμενο EPR paradox από τα ονόματα των συγγραφέων, το οποίο θα παρουσιάσουμε εδώ σε μια απλουστευμένη μορφή από τον Bohm.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πιόνιο π^0 που διασπάται σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο.

$$\pi^0 \longrightarrow e^- + e^+ \quad (33)$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής, προβλέπεται ότι το ένα σωματίο θα πρέπει να έχει αντίθετο σπιν από το άλλο. Δηλαδή αν το ηλεκτρόνιο έχει σπιν $+\hbar/2$ (δηλαδή παράλληλο ως προς τη διεύθυνση κάποιου μαγνητικού πεδίου)

το ποζιτρόνιο θα πρέπει να έχει σπιν $-\hbar/2$ ώστε η συνολική στροφορμή να αθροίζεται σε μηδέν, που είναι και το αρχικό σπιν του πιονίου. Αυτό σημαίνει πως η κατάσταση σου ζεύγους περιγράφεται από την singlet αναπαράσταση του σπιν

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (34)$$

όπου \uparrow, \downarrow υποδηλώνει την κατάσταση με θετικό και αρνητικό σπιν αντίστοιχα και ο δείκτης φορτίου προσδιορίζει το σωματίδιο.

Ας φανταστούμε τώρα το εξής πείραμα: Ένα πιόνιο διασπάται σε ηρεμία στο εργαστήριο και ανιχνεύουμε τα δύο προϊόντα σε κάποια απόσταση από το σημείο της διάσπασης. Αυτή θα μπορούσε να είναι από δέκα μέτρα μέσα σε ένα εργαστήριο, ως μερικές χιλιάδες έτη φωτός σε κάποιο άλλο γαλαξία. Μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε το σπιν των σωματιδίων. Από διατήρηση της στροφορμής εάν το ηλεκτρόνιο έχει σπιν πάνω, χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά θα βρούμε το ποζιτρόνιο να έχει σπιν κάτω και αντίστροφα. Η ερμηνεία από την πλευρά των επονομαζόμενων ρεαλιστών, όπως ο Einstein, είναι πως αυτό είναι απόλυτα λογικό αφού τα δύο σωματίδια είχαν απόλυτα προκαθορισμένη τιμή του σπιν πριν από τη μέτρησή μας, απλή η κυματοσυνάρτηση δε αρκούσε για να μας δώσει αυτή την πληροφορία.

Όμως αυτό έρχεται σε ευθεία αντίθεση με το πρώτο αξίωμα της κβαντομηχανικής σύμφωνα με το οποίο το κάθε σωματίο πριν από τη μέτρηση βρίσκεται σε επαλληλία των δύο καταστάσεων σπιν. Σύμφωνα όμως με αυτήν την εικόνα, το ηλεκτρόνιο για παράδειγμα δεν είχε προκαθορισμένη τιμή του σπιν αμέσως πριν τη μέτρηση, αλλά απέκτησε απόλυτα καθορισμένη τιμή κατά τη μέτρηση, έστω θετική. Εάν όμως ακριβώς την ίδια στιγμή κάποιος μετρήσει την τιμή του σπιν του ποζιτρονίου, σε έναν άλλο ανιχνευτή πολύ μακριά θα πρέπει να την βρει αρνητική και μάλιστα να γίνει αρνητική ακριβώς τη στιγμή της μέτρησης, λόγω του ότι η τιμή του σπιν του ηλεκτρονίου βρέθηκε μερικά χιλιόμετρα μακριά θετική. Αυτό ουσιαστικά υποδηλώνει κατά τους Einstein, Podolsky, Rosen ότι πληροφορία μεταδόθηκε ακαριαία⁴ από το ηλεκτρόνιο στο ποζιτρόνιο, πράγμα που φυσικά δεν συνάδει με το πεπερασμένο της ταχύτητας του φωτός και με την αλληλουχία αίτιου - αιτιατού.

Οι βασικές ιδιότητες μιας πλήρους φυσικής θεωρίας που θα περιγράφει τη φυσική πραγματικότητα είναι κατά τους Einstein, Podolsky, Rosen το να είναι τοπική και ρεαλιστική. Τοπική με την έννοια της εξάρτησης των φυσικών μεγεθών μόνο από τοπικές μεταβλητές και την απαγόρευση μετάδοσης σημάτων

⁴Η μετάδοση θα πρέπει να είναι ακαριαία, ούτε καν πεπερασμένη αλλά πιο γρήγορη από την ταχύτητα του φωτός, γιατί η στροφορμή μετατίθεται με το χρόνο. Ως συνέπεια, δεν υπάρχει κάποια αρχή αβεβαιότητας αντίστοιχη του $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ για να μπορούμε να πούμε ότι για μικρό χρονικό διάστημα παραβιάζεται η διατήρηση της στροφορμής.

με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός. Ρεαλιστική με την έννοια της 1-1 αντιστοίχισης μιας φυσικής ποσότητας σε μια ιδιότητα ενός φυσικού συστήματος, την οποία μπορούμε να μετρήσουμε χωρίς να διαταράζουμε το σύστημα. Συνεπώς, λέει το επιχείρημα, εάν θέλει κανείς να έχει μια περιγραφή της φύσης που είναι τοπική και ρεαλιστική, θα πρέπει να αναγνωρίσει πως η κβαντομηχανική είναι μη πλήρης θεωρία για την περιγραφή της πραγματικότητας. Δεν είναι λάθος, απλά αγνοεί μέρος της πραγματικότητας. Για την ακρίβεια, θα πρέπει αυτή η ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης να μην είναι σωστή με την έννοια ότι η κατάσταση του φυσικού μας συστήματος είναι καθορισμένη πριν από τη μέτρηση, απλά η κβαντομηχανική δεν ξέρει να μας δώσει την απάντηση. Θα πρέπει να υπάρχουν κάποιες επιπλέον, κρυφές για εμάς, τοπικές μεταβλητές που θα δίνουν την πλήρη εικόνα για το φυσικό σύστημα και θα καθιστά τα αποτελέσματα των μετρήσεων απόλυτα προβλέψιμα, στα πρότυπα των πειραμάτων της κλασικής φυσικής. Έτσι θα προκύψει μια πιο πλήρης θεωρία που θα περιγράφει ακριβώς τη φύση. Τέτοιου είδους, μελλοντικά ανακαλύψιμες, θεωρίες λέγονται θεωρίες κρυμμένων μεταβλητών.

2.3 Η ανισότητα του Bell

Για πολλά χρόνια πολλοί φυσικοί θεωρούσαν ως σχεδόν αυτονόητες τις ιδέες του Einstein και απλά δεν μπορούσαν να τις ταιριάζουν στο πλαίσιο της κβαντομηχανικής. Η αλήθεια είναι ότι αυτή η οπτική φαίνεται πολύ “λογική” σε σχέση με τις περίεργες ιδιότητες που αξίωνε η κβαντομηχανική. Όμως, το 1964 ο J. S. Bell δημοσίευσε μια εργασία στην οποία συνέκρινε τις δύο θεωρίες. Για την ακρίβεια θεώρησε μια τοπικά ρεαλιστική θεωρία και κατέληξε πως τα συμπεράσματα ορισμένων μετρήσεων θα πρέπει να ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ανισότητα, τη λεγόμενη ανισότητα του Bell αν η αρχική θεώρηση είναι αληθής. Οι προβλέψεις της κβαντομηχανικής δεν ικανοποιούν αυτή την ανισότητα. Έκτοτε έχουν γίνει πολλά πειράματα τα οποία συμφωνούν με τις προβλέψεις της κβαντομηχανικής και δεν ικανοποιούν την ανισότητα του J. S. Bell. Συνεπώς, όσο αντιδιασθητικό και να είναι, η έννοια του τοπικού ρεαλισμού έπρεπε να εγκαταλειφθεί.

Ο τρόπος σκέψης του Bell ήταν ουσιαστικά να προσπαθήσει να γενικεύσει το παράδοξο EPR. Αντί οι δύο ανιχνευτές που μετράνε το σπιν των δύο σωματιδίων να είναι προσανατολισμένοι στην ίδια κατεύθυνση, προσπάθησε να δει τι γίνεται όταν αυτοί έχουν τυχαίες διευθύνσεις, έστω \vec{a} , \vec{b} . Αυτό δικαιολογείται ως σκέψη γιατί θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς πως για να είναι ευθυγραμμισμένοι οι δύο μακρινοί ανιχνευτές θα πρέπει οι χειριστές τους να έχουν εκ προοιμίου συνεννοηθεί για αυτό, συνεπώς να έχουν ανταλλάξει πληροφορία. Στα πλαίσια αποφυγής οποιασδήποτε προκατάληψης στα αποτελέσματα των

e^-	e^+	Γινόμενο
1	-1	-1
-1	-1	1
1	1	1
-1	1	-1

Σχήμα 2: Πιθανά αποτελέσματα μετρήσεων του σπιν του ζεύγους ηλεκτρονίου ποζιτρονίου στην περίπτωση που οι αντίστοιχοι ανιχνευτές δεν είναι ευθυγραμμισμένοι. Για λόγους συντόμευσης δεν γράφεται ο όρος $\hbar/2$.

μετρήσεων, εάν υπάρχει τέτοια υπόνοια, λογικό είναι να αφαιρέσει κανείς αυτή τη δέσμευση από το πείραμα. Επιπλέον, εάν κανείς θέλει να εξαντλήσει έστω και την παραμικρή υποψία επικοινωνίας των δύο μετρητικών συσκευών, μπορεί να επιτρέψει στους δύο ανιχνευτές να αλλάξουν κατεύθυνση με τυχαίο τρόπο λίγο πριν τη μέτρηση. Αυτό διασφαλίζει την απαίτηση της τοπικότητας.

Εάν γίνει αυτό όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί είναι δυνατοί για τους δύο ανιχνευτές. Ο πίνακας αποτελεσμάτων θα είχε τη μορφή του πίνακα στο σχήμα 2

Ως μέτρο συσχέτισης των αποτελεσμάτων, μπορεί να πάρει πλέον κανείς τη μέση τιμή του γινομένου των σπιν, $P(\vec{a}, \vec{b})$. Οι δύο περιπτώσεις πλήρους συσχέτισης είναι αυτές που εμπίπτουν στην αρχική διατύπωση του παράδοξου EPR, όταν οι ανιχνευτές είναι τοποθετημένοι παράλληλα και αντιπαράλληλα αντίστοιχα:

$$P(\vec{a}, \vec{a}) = -1 \quad (35)$$

$$P(\vec{a}, -\vec{a}) = +1 \quad (36)$$

Για οποιοδήποτε άλλο τυχαίο προσανατολισμό η κβαντομηχανική δίνει ως αποτέλεσμα

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (37)$$

που ουσιαστικά δεν είναι άλλος από τον λεγόμενο νόμο του Malu για την κυματική.

Όμως τι θα προέβλεπε μια θεωρία κρυμμένων μεταβλητών σαν του Einstein; Θα είχε διαφορά από τις προβλέψεις της κβαντομηχανικής; Ας ονομάσουμε λ τη μία, ή το σύνολο των κρυμμένων μεταβλητών που εικάζει ο Einstein ότι θα έπρεπε να συμπεριληφθούν στην κυματοσυνάρτηση. Αυτό σημαίνει πως το αποτέλεσμα της μέτρησης στο πείραμά μας θα προβλέπεται πλήρως από μία συνάρτηση A που θα εξαρτάται από τη μεταβλητή/μεταβλητές λ που θα εμπεριέχουν πληροφορία για την ακριβή κατάσταση του σπιν. Φυσικά θα πρέπει

να εξαρτάται και από τον προσανατολισμό του ανιχνευτή που μετράει το σπιν του σωματιδίου, αλλά όχι από τον άλλο μακρινό ανιχνευτή που ανιχνεύει το αντισωματίο. Συνεπώς το αποτέλεσμα της μέτρησης για το ηλεκτρόνιο θα προβλέπεται από τη συνάρτηση $A(\vec{a}, \lambda)$ και ομοίως για το ποζιτρόνιο από την $B(\vec{b}, \lambda)$. Αυτές θα είναι δίτιμες συναρτήσεις

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \quad (38)$$

$$B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (39)$$

και όταν οι ανιχνευτές θα είναι παράλληλοι τα αποτελέσματα θα είναι απόλυτα συσχετισμένα

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \quad (40)$$

Ξεκινώντας λοιπόν τον υπολογισμό του μέσου όρου των γινομένων έχουμε

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (41)$$

όπου $\rho(\lambda)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας των κρυμμένων μεταβλητών. Χρησιμοποιώντας την (40) έχουμε

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (42)$$

Εάν τώρα \vec{c} είναι ένα άλλο μοναδιαίο διάνυσμα θα ισχύει

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = \int \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda \quad (43)$$

Όμως από την (39) έχουμε ότι $[A(\vec{b}, \lambda)]^2 = 1$ και το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (44)$$

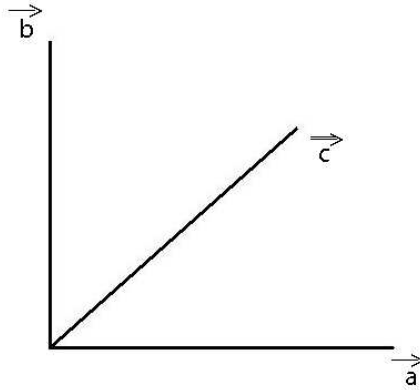
Επίσης από την (39) έχουμε ότι

$$-1 \leq A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \leq +1 \quad (45)$$

$$\rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \geq 0 \quad (46)$$

και η (44) γίνεται

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda \quad (47)$$



Σχήμα 3: Προσανατολισμός των τριών ανιχνευτών σπιν

ή πιο απλά

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \quad (48)$$

Αυτή είναι η ανισότητα του Bell. Ισχύει για κάθε θεωρία κρυμμένων μεταβλητών και υπόκειται μόνο στους τετριμένους περιορισμούς των εξισώσεων (39), (40).

Για να ελέγξουμε τη συμβατότητα αυτού του αποτελέσματος με τις προβλέψεις της κβαντομηχανικής, αρκεί να πάρουμε μια συγκεκριμένη διάταξη των ανιχνευτών \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Έστω ότι επιλέγουμε τους δύο πρώτους να είναι κάθετοι μεταξύ τους και τον τρίτο σε γωνία 45° ανάμεσά τους (βλ. σχήμα 3). Σε αυτή τη συγκεκριμένη διάταξη η κβαντομηχανική σύμφωνα με την (37) δίνει πρόβλεψη

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \quad (49)$$

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = P(\vec{b}, \vec{c}) = -0,707 \quad (50)$$

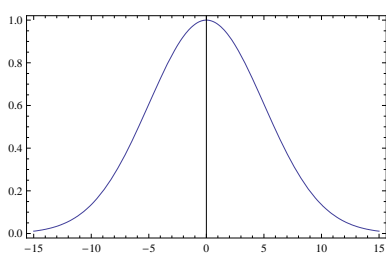
η οποία είναι προφανώς μη συμβατή με την ανισότητα του Bell:

$$0,707 \not\leq 1 - 0,707 = 0,293 \quad (51)$$

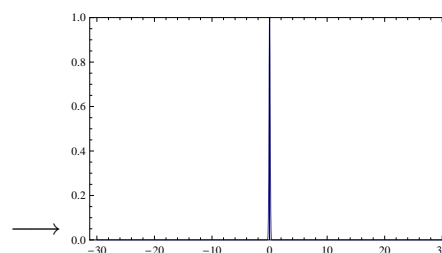
Αυτό υποδεικνύει απλά ότι οι δύο θεωρίες είναι μη συμβατές. Θα είναι σωστή ή η μία ή η άλλη, αλλά δε μας λέει ποιά. Αυτό μπορεί να το αποφασίσει μόνο το πείραμα. Από τότε που ειπώθηκε η ανισότητα μέχρι σήμερα έχουν γίνει πολλά πειράματα για να αποσαφηνιστεί ποιο ενδεχόμενο ισχύει και όλα δικαιώνουν την κβαντομηχανική, όχι τις θεωρίες κρυμμένων μεταβλητών.

Όμως αυτό δε σημαίνει πως απαντήθηκε το παράδοξο EPR. Πως είναι δυνατόν

α) να μην έχει προαποφασίσει το ποζιτρόνιο ποιο θα είναι το σπιν του και



Σχήμα 4: Η αρχική κυματοσυνάρτηση πριν από τη μέτρηση.

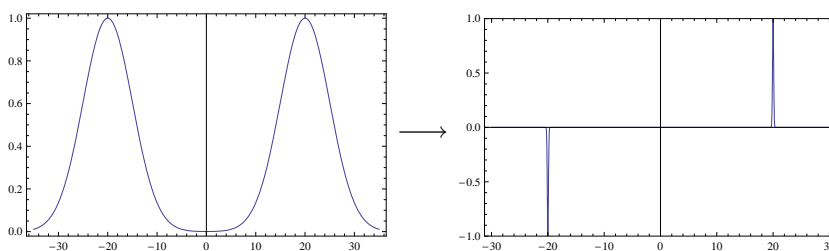


Σχήμα 5: Η κυματοσυνάρτηση έχει καταρρεύσει μετά τη μέτρηση.

β) συγχρόνως να “συνεννοείται” ακαριαία με το ηλεκτρόνιο ποια τιμή θα πρέπει να έχει το σπιν του ώστε μαζί να διατηρούν τη στροφορμή;

Η κβαντομηχανική αξιώνει να ισχύει το (α), συνεπώς η απαίτηση του Einstein για ρεαλισμό καταρρίπτεται και θα πρέπει να διορθώσουμε το (β). Προκειμένου να μην συμπεριλάβουμε στη θεωρία μας αφύσικες ακαριαίες αλληλεπιδράσεις είμαστε υποχρεωμένοι να χαλαρώσουμε την έννοια της τοπικότητας που αξιωνε ο Einstein και να θεωρήσουμε πως το ζεύγος ηλεκτρονίου ποζιτρονίου είναι MI-A εκταταμένη οντότητα. Υπό αυτό το πρίσμα, το παράδοξο EPR λύνεται. Με την ίδια έννοια που μπορούμε να δεχτούμε πως μία κυματοσυνάρτηση καταρρέει σε μία τιμή κατά τη μέτρηση, θα πρέπει να δεχτούμε πως η μέτρηση της ενιαίας κυματοσυνάρτησης του EPR ζεύγους, όπως έχει επικρατήσει να αποκαλείται, καταρρέει με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνει ταυτόχρονα στις δύο “άκρες” της αντίθετες τιμές σπιν (βλ. σχήματα 4,5,6). Αυτό είναι που ονομάσαμε προηγουμένως εναγγαλισμός (entanglement). Φυσικά μπορούν να υπάρξουν και EPR ζευγάρια όπου το ρόλο του σπιν παίρνουν άλλες κβαντικές ποσότητες.

Από την παραπάνω ερμηνεία μπορεί να μην έχει αποσαφηνιστεί το εάν μεταδίδεται πληροφορία πιο γρήγορα από την ταχύτητα του φωτός ή όχι. Δεν είναι παράλογο το πώς μπορούν να συνεννοούνται ακαριαία δύο σωματάρια, εν δυνάμει, στις δύο άκρες τους γαλαξία; Η απάντηση είναι πως όχι και ο λόγος είναι οτι δεν μεταφέρεται πληροφορία. Για να γίνει σαφές αυτό θα αναφέρουμε ένα κλασσικό αντίστοιχο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε οτι έχουμε μια δέσμη λέιζερ. Γυρνώντας για μικρή γωνία το λέιζερ, η φωτεινή κυλίδα που θα προβάλλεται σε κάποιο πέτασμα πολύ μακριά θα έχει ταχύτητα ανάλογη της ακτίνας του κύκλου που διαγράφει, και συνεπώς πολύ εύκολα μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός. Αυτό παραβαίνει την αρχή της σχετικότητας; Όχι. Κι αυτό γιατί το αντικείμενο στην επιφάνεια του πετάσματος δεν είναι φυσικό αντικείμενο αλλά νοητό. Δεν μεταφέρει κάποια ενέργεια. Ή σε μια ισοδύναμη γλώσσα, η κυλίδα δεν μπορεί να μεταφέρει πληροφορία. Δεν μπορεί κανείς στο ένα άκρο του



Σχήμα 6: Σχηματική αναπαράσταση της κυματοσυνάρτησης ενός ζεύγους EPR πριν και μετά τη μέτρηση. Όπου και να γίνει η μέτρηση, ένα πιθανό αποτέλεσμα είναι αυτό. Το σημαντικό είναι ότι η μέτρηση επιδρά σε όλη την έκταση της κυματοσυνάρτησης, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. (Τα δύο μέρη εμφανίζονται εκατέρωθεν του οριζόντιου άξονα σε μια προσπάθεια αναπαράστασης της σπιν πάνω-σπιν κάτω διάταξης. Το διάγραμμα έχει καθαρά συμβολικό χαρακτήρα και δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.)

πετάσματος να της κάνει κάτι για να μεταφέρει πληροφορία σε κάποιον άλλο στην άλλη άκρη του.

Το αντίστοιχο συμβαίνει και στα EPR ζεύγη. Δεν μπορεί κανείς να κάνει κάτι στο ένα μέρος του ζεύγους για να μεταφέρει πληροφορία σε κάποιον άλλο που έχει το άλλο μέρος. Ο κάθε παρατηρητής ξεχωριστά παίρνει μια σειρά από εντελώς τυχαίες boolean μεταβλητές που δεν του δίνουν καμία πληροφορία. Μόνο εάν οι δύο παρατηρητές συναντηθούν και συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους θα δούν ότι είναι απόλυτα συσχετισμένα ένα προς ένα. Αυτό όμως δεν αλλάζει το γεγονός ότι ο κάτοχος, του ηλεκτρονίου για παράδειγμα, δεν μπορεί να κάνει απολύτως τίποτα για να φροντίσει η μέτρηση του ποζιτρονίου να είναι για παράδειγμα $+\hbar/2$. Δεν μπορεί να ελέγξει το τι θα μετρήσει ο άλλος. Το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να στείλει μέσω ενός κλασσικού καναλιού (με τη γενική έννοια της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης της πληροφορίας) ένα μήνυμα στον κάτοχο του ποζιτρονίου που θα του μεταφέρει κάποια πληροφορία και σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα της μέτρησης του σπιν να βγάλει κάποιο λογικό συμπέρασμα. Αυτό γίνεται και λέγεται κβαντική τηλεμεταφορά. Ο όρος τηλεμεταφορά είναι ατυχής, καθώς μεσολαβεί κλασσικό κανάλι επικοινωνίας και δεν τίθεται θέμα ταχυτήτων μεγαλύτερων αυτής του φωτός. Χρησιμοποιείται όμως γιατί, όπως θα δούμε, με αυτόν τον τρόπο μπορεί να μεταδοθεί μεγάλος όγκος πληροφορίας, μεγαλύτερος από αυτόν που θα επέτρεπε ένα κλασσικό κανάλι.

Τελειώνοντας, αξίζει να αναφέρουμε πως υπάρχουν αρκετοί φυσικοί που θεωρούν ότι το επιχείρημα του Bell δεν καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις θεωριών κρυφών μεταβλητών και παρόμοια επιχειρήματα θα πρέπει να βρεθούν και για άλλες κλάσεις τέτοιων θεωριών, όπως για παράδειγμα θεωρίες

μή τοπικών κρυμμένων μεταβλητών. Αυτές θα χαλάρωναν την απαίτηση της τοπικότητας, αλλά εν δυνάμει θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την απαίτηση του ρεαλισμού. Δηλαδή, θα μπορούσε ένα φυσικό σύστημα να έχει απόλυτα καθορισμένες όλες τις μετρήσιμες ποσότητες του πριν από τη μέτρηση, αλλά αυτές να εξαρτώνται από μη τοπικές μεταβλητές⁵. Τέτοιου είδους αμφιβολίες δε θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία και θα θεωρήσουμε ότι με τις ανισότητες του Bell όλες οι δυνατές κλάσεις θεωριών κρυμμένων μεταβλητών είναι μη συμβιβαστές με το πείραμα.

⁵Τελευταία έχουν γίνει πειράματα που καταρίπτουν και αυτές τις θεωρίες [1]

3 ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε το πώς λειτουργούν οι κβαντικοί υπολογιστές και οι κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να αποκτήσουμε ένα οπλοστάσιο εννοιών και εργαλείων που θα μας βοηθήσουν σε αυτή την κατεύθυνση. Θα ξεκινήσουμε με μια πιο ενδελεχή διερεύνηση του βασικού μας φυσικού συστήματος, του qubit . Θα συνεχίσουμε με την παρουσίαση των εργαλείων που χρησιμοποιούμε για να το διαχειριστούμε, τις κβαντικές πύλες, που δρουν σε ένα ή σε πολλά qubit και το πως αυτές διατάσσονται σε κβαντικά κυκλώματα. Θα συνεχίσουμε με την παρουσίαση μερικών χρήσιμων θεωρημάτων και θα τελειώσουμε με την περιγραφή ορισμένων απλών κβαντικών αλγορίθμων για να εξοικειωθούμε με αυτούς.

3.1 Το qubit

Όπως προαναφέρθηκε, ως qubit ορίζεται ένα κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων. Η φυσική υλοποίησή του μπορεί να ποικίλει από την πόλωση ενός φωτονίου ως το σπιν ενός ηλεκτρονίου, αλλά η μαθηματική και υπολογιστική διαχείρισή του δεν παύει να είναι εννοιαία και ανεξάρτητη από το φυσικό σύστημα που αντιπροσωπεύει. Συνηθίζουμε να ονομάζουμε $|0\rangle$ και $|1\rangle$ τις δύο ιδιοκαταστάσεις του συστήματος ως προς κάποιο ερμητιανό τελεστή, συνήθως την ενέργεια. Οι ιδιοκαταστάσεις αυτές αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για το χώρο Hilbert του κβαντικού μας συστήματος. Στη βάση αυτή, η οποία αποκαλείται και υπολογιστική βάση⁶ η κατάσταση ενός qubit , σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, αναπαρίσταται ως

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (52)$$

με a, b μιγαδικούς αριθμούς και $|a|^2 + |b|^2 = 1$ από τη συνθήκη κανονικοποίησης.

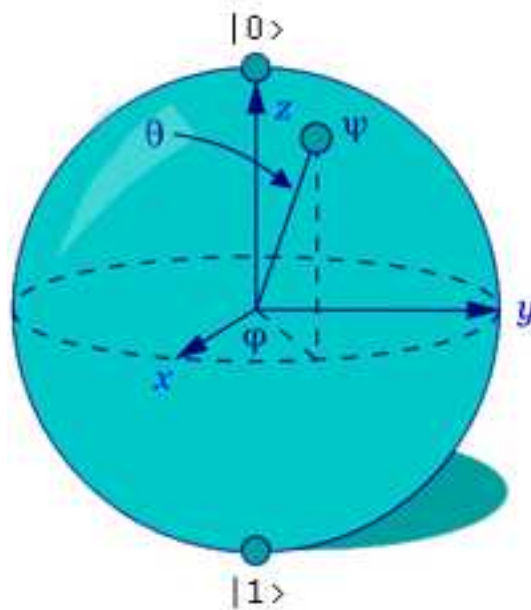
Ένας ευρέως διαδεδομένος τρόπος αναπαράστασης ενός qubit είναι η σφαίρα του Bloch (βλ. σχήμα 7). Αυτή η αναπαράσταση είναι δυνατή γιατί η γενική σχέση 52 μπορεί να ξαναγραφεί ως⁷

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \right) \quad (53)$$

για να ικανοποιεί αυτομάτως και τη συνθήκη κανονικοποίησης. Επειδή τα μετρήσιμα μεγέθη είναι πιθανότητες, οι οποίες είναι γινόμενα του τύπου $\langle \Psi^* | \Psi \rangle$,

⁶Γιατί είναι εύκολο να αρχικοποιηθεί το σύστημα σε αυτήν, όπως και το να γίνουν μετρήσεις σε αυτή τη βάση.

⁷Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα a, b αποτελούν στοιχεία της ομάδας $SU(2)$ και ο πιο γενικός τρόπος αναπαράστασής τους είναι ο αναφερόμενος.



Σχήμα 7: Η σφαίρα του Bloch: Σχηματική αναπαράσταση ενός qubit .

η αρχική φάση δεν είναι παρατηρήσιμο μέγεθος⁸ και μπορεί να παραληφθεί

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (54)$$

Από αυτή τη σχέση γίνεται σαφής η αναπαράσταση του qubit σε μια σφαίρα Bloch. Οι διάφορες τιμές των γωνιών θ, ϕ αναπαριστούν τις άπειρες δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρίσκεται το qubit ενώ κατά τη διαδικασία της μέτρησης στην υπολογιστική βάση, η κατάσταση προβάλλεται στις γωνίες $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$.

Πρέπει να καταστεί σαφές ότι η διαφορά του qubit και του bit είναι θεμελιώδης. Ένα bit μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 και 1. Ένα qubit μπορεί να πάρει τιμές από ένα συνεχές φάσμα τιμών για τα a, b αρκεί να ικανοποιούν τη σχέση κανονικοποίησης. Μπορεί κανείς να αντιπαραβάλει σε αυτή την πρόταση πως όταν κάνει κανείς μια μέτρηση του qubit στην υπολογιστική βάση, σύμφωνα με τον ορισμό της προβολικής μέτρησης, θα πάρει μόνο την κατάσταση $|0\rangle$ με πιθανότητα a^2 ή την κατάσταση $|1\rangle$ με πιθανότητα b^2 λόγω του ότι η κυματοσυνάρτηση θα καταρεύσει σε μία από τις δύο ιδιοκαταστάσεις. Δεν υπάρχει τρόπος με μία και μοναδική μέτρηση να βρούμε τα a, b . Είναι τέτοια η φύση της κβαντομηχανικής. Ο μόνος τρόπος να μάθει κανείς τα a, b εί-

⁸ Αυτό ισχύει στην πλειονότητα των περιπτώσεων. Υπάρχουν όμως κβαντικά φαινόμενα όπου αυτή η φάση έχει φυσικές συνέπειες, όπως το φαινόμενο Bohm-Aharonov [2].

ναι να ετοιμάσει μια συλλογή από πανομοιότυπα qubit και να κάνει μέτρηση στο καθένα. Τα a, b θα προκύψουν από τη στατιστική των αποτελεσμάτων. Όμως ούτε αυτό είναι δυνατό. Απαγορεύεται από το λεγόμενο θεώρημα μη αντιγραφισμότητας (no cloning theorem), που θα δούμε παρακάτω, σύμφωνα με το οποίο μια κβαντική κατάσταση είναι αδύνατον να αντιγραφεί. Συνεπώς δεν είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε μια συλλογή πανομοιότυπων άγνωστων κβαντικών καταστάσεων. Η λέξη 'άγνωστων' μπήκε στην προηγούμενη πρόταση για να αποσαφινίσει το ότι δεν μπορούμε να αντιγράψουμε μια άγνωστη κβαντική κατάσταση, κάτι που καθημερινά κάνουμε στους κλασσικούς υπολογιστές όταν αντιγράφουμε αρχεία, αλλά φυσικά μπορούμε να κατασκευάσουμε, εύκολα ή δύσκολα, μια οποιαδήποτε κατάσταση $|\Psi\rangle$ με γνωστά τα a, b όσες φορές θέλουμε. Φυσικά σε αυτή την περίπτωση δεν έχει νόημα να εφαρμόσουμε την προηγούμενη λογική αφού ήδη γνωρίζουμε τα a, b .

Ως αποτέλεσμα της ανωτέρω επιχειρηματολογίας, αποδεικνύεται⁹ ότι η πληροφορία που κρύβει μια κβαντική κατάσταση, ένα qubit εν προκειμένω, είναι μεν άπειρη αλλά ένα πολύ μικρό και πεπερασμένο μέρος της είναι προσιτό από εμάς, γιατί πάντα θα πρέπει να αλληλεπιδράσουμε με το σύστημα κάνοντας μια μέτρηση για να εξάγουμε πληροφορία. Επι πλέον, μετά τη μέτρηση το σύστημα έχει καταρεύσει σε μία συγκεκριμένη κατάσταση την οποία γνωρίζουμε απολύτως και συνεπώς παύει να είναι κβαντικό παρά γίνεται κλασσικό. Με τη μέτρηση καταστρέφουμε πληροφορία, είναι μια μη αντιστρεπτή διαδικασία.

Συνεπώς τι καινούριο έχουν να μας δώσουν οι κβαντικοί υπολογιστές αφού αυτό που στο τέλος παίρνουμε ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας τους είναι κλασσική πληροφορία; Το ότι η επιπλέον πληροφορία που υπάρχει πριν τη μέτρηση δεν είναι προσβάσιμη από εμάς δε σημαίνει ότι η φύση δεν τη λαμβάνει υπ' όψη της κατά τη διάρκεια εξέλιξης ενός φυσικού συστήματος (αλλιώς γιατί θα χρειαζόμασταν την κβαντική θεωρία;). Σε αυτό το σημείο παίζεται όλο το παιχνίδι της ισχύος των κβαντικών υπολογιστών αλλά και της κατασκευής των κβαντικών αλγορίθμων. Ο σκοπός είναι να είναι έτσι φτιαγμένοι ώστε να εκμεταλλεύονται τις επιπλέον ιδιότητες των κβαντικών συστημάτων και να εξελίσσονται με τους νόμους της κβαντικής φυσικής που επεξεργάζονται άπειρη πληροφορία. Αυτή την ιδιότητα εκμεταλεύονται οι περισσότεροι κβαντικοί αλγόριθμοι και καλείται κβαντική παράλληλη επεξεργασία. Σε αυτήν θα αναφερθούμε ξανά αργότερα. Όμως στο τέλος κάθε κβαντικού προγράμματος θα πρέπει η κατάσταση να είναι τέτοια ώστε με μια κατάλληλη μέτρηση να πάρουμε με μεγάλη πιθανότητα το αποτέλεσμα που θέλουμε.

⁹Μένει να αποδείξουμε την ισχύ του θεωρήματος μη αντιγραφισμότητας

3.2 Κβαντικές πύλες - Κβαντικά κυκλώματα.

Όπως ένας κλασικός υπολογιστής έχει λογικές πύλες για τη διαχείριση της κλασικής πληροφορίας, έτσι και ένας κβαντικός υπολογιστής έχει κβαντικές πύλες για τη διαχείριση της κβαντικής πληροφορίας. Φυσικά ο λόγος και στις δύο περιπτώσεις είναι ότι θέλουμε να μπορούμε να καθορίζουμε εμείς την εξέλιξη του συστήματός μας κατά βούληση.

Υπάρχουν όμως σημαντικές διαφορές. Αυτές οφείλονται στη διαφορετική φύση της κβαντικής πληροφορίας και συγκεκριμένα στο βασικό αξίωμα της κβαντομηχανικής σύμφωνα με το οποίο η χρονική εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος είναι μια αντιστρεπτή διαδικασία. Για να ισχύει αυτό είχαμε δείξει ότι θα πρέπει όλοι οι τελεστές χρονικής εξέλιξης να είναι μοναδιαίοι:

$$|\Psi \rangle' = U(t, t') |\Psi \rangle \quad (55)$$

με

$$U^*(t, t') U(t, t') = 1 \quad (56)$$

Δεδομένου ότι οι πύλες σε ένα κύκλωμα, κβαντικό ή κλασικό, το μόνο που κάνουν είναι να εξελίσσουν μια κατάσταση στο χρόνο έπεται ότι οι κβαντικές πύλες έχουν τον ισχυρό περιορισμό ότι θα πρέπει να είναι μοναδιαίοι τελεστές. Ένα παράδειγμα μιας πύλης που δρα σε ένα qubit είναι η πύλη \mathbf{X} που αντιστοιχεί στη NOT των κλασικών υπολογιστών και δρα ως εξής:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$X[a|0 \rangle + b|1 \rangle] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (58)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$(61)$$

Αυτή είναι η δράση της πύλης \mathbf{X} σε μια κατάσταση ενός qubit που βρίσκεται σε επαλληλία των δύο διανυσμάτων βάσης. Το ότι η κατάσταση, αλλά και η δράση των πυλών είναι γραμμική και μόνο είναι περιορισμός που επιβάλλεται από την κβαντική φυσική.

Επομένως, τουλάχιστον για ένα qubit, οποιοσδήποτε 2×2 μοναδιαίος πίνακας μπορεί να αποτελέσει κβαντική πύλη. Όμως γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι οι τρεις πίνακες του Pauli μαζί με τον μοναδιαίο πίνακα αποτελούν

βάση των 2×2 μοναδιακών πινάκων. Συνεπώς οποιοσδήποτε 2×2 μοναδιακός πίνακας μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των τεσσάρων αυτών πινάκων:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Επειδή όμως η δράση μιας πύλης σε χρόνο επόμενο από τη δράση μιας άλλης μεταφράζεται στην αναπαράσταση των πινάκων σε πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων τελεστών

$$U_{total}|\Psi\rangle = U(t_n)U(t_{n-1}) \cdots U(t_2)U(t_1)|\Psi\rangle \quad (66)$$

θα πρέπει να αναλύσουμε τη γενική δράση ενός 2×2 μοναδιακού πίνακα σε γινόμενο πινάκων.

Αυτό γίνεται εύκολα αν γνωρίζουμε ότι οι πίνακες του Pauli είναι οι γεννιότερες των στροφών της $SU(2)$, που είναι η ομάδα συμμετρίας ενός qubit, γύρω από τους αντίστοιχους άξονες:

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (69)$$

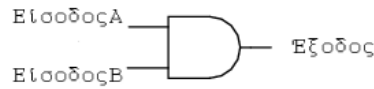
$$(70)$$

Ερχόμενοι τώρα στη γενική μορφή ενός μοναδιακού πίνακα, αυτός μπορεί να εξαρτάται μόνο από τέσσερις πραγματικές παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και να είναι μόνο της μορφής

$$U = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)}\cos\frac{\gamma}{2} & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)}\sin\frac{\gamma}{2} \\ e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)}\sin\frac{\gamma}{2} & e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)}\cos\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (71)$$

δεδομένου ότι οι στήλες και γραμμές του θα πρέπει να είναι ορθοκανονικές μεταξύ τους. Σύμφωνα και με τις σχέσεις 67 η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$U = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta) \quad (72)$$



A	B	Εξοδος
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Σχήμα 8: Η πύλη *AND* ενός κλασσικού υπολογιστή

Συνεπώς οποιαδήποτε πύλη που δρα σε ένα qubit μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο των παραπάνω πινάκων¹⁰.

Προχωρώντας σε πύλες που δρουν σε παραπάνω από ένα qubit η αναπαράσταση αυτών σε πίνακες θα είναι, κατά αναλογία με την περίπτωση του ενός qubit, $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ μοναδιαίοι πίνακες. Πριν προχωρήσουμε και σε αυτή την περίπτωση σε ομαδοποίηση αυτών των πινάκων, σκόπιμο είναι να αναφερθούμε σε τρεις βασικές ιδιότητες των κβαντικών κυκλωμάτων, που θα διευκολύνουν την περαιτέρω ανάλυση.

Πρώτον, η απαίτηση γραμμικότητας της κβαντομηχανικής επιβάλλει να έχουμε μόνο ακυκλικά κυκλώματα. Δεν επιτρέπει ανάδραση σε ένα πρότερο μέρος του κυκλώματος από ένα επόμενο, κάτι που εν γένει επιτρέπεται σε ένα κλασσικό κύκλωμα, αν και ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν προβλήματα αστάθειας.

Δεύτερον, ο περιορισμός της μοναδιακότητας των τελεστών οδηγεί σε σημαντικές διαφορές με τους κλασσικούς υπολογιστές. Στους τελευταίους, μια συνήθης λειτουργία είναι η γείωση φορτίων. Για παράδειγμα το λεγόμενο fanin ή η πύλη *AND* (βλ. σχήμα 8) έχει ως είσοδο δύο bit και ως έξοδο ένα. Αυτή είναι προφανώς μια μή αντιστρεπτή διαδικασία και δεν μπορεί να υλοποιηθεί από κβαντικά κυκλώματα (Η διαδικασία της μέτρησης είναι μια μη αντιστρεπτή διαδικασία στα κβαντικά κυκλώματα, αλλά συνήθως¹¹ εμφανίζεται στο τέλος των κυκλωμάτων.)

Τρίτον, η αντίστροφη διαδικασία του fanin, το fanout που έχει ως αποτέ-

¹⁰Η πιο γενική έκφραση ενός μοναδιαίου πίνακα U είναι $U = e^{i\alpha} R_n(\beta) R_m(\gamma) R_n(\delta)$, όπου n, m μοναδιαία διανύσματα γύρω από τα οποία γίνεται η γενική στροφή. Στην ειδική περίπτωση όπου $n = z, m = y$ προκύπτει η 72

¹¹Υπάρχουν παραδείγματα κβαντικών αλγορίθμων που χρησιμοποιούν ενδιάμεσες μετρήσεις του συστήματος ως ένα άλλο τρόπο πρακτικής εφαρμογής της αδιαβατικής εξέλιξης ενός συστήματος: Με αλληλέπληρες μετρήσεις διατηρείται το σύστημα στην χρονομεταβαλλόμενη θεμελιώδη κατάσταση [3].

λεσμα την αντιγραφή μιας κατάστασης, δεν είναι δυνατή στους κβαντικούς υπολογιστές λόγω του πολύ περιοριστικού θεωρήματος της μη αντιγραφισμότητας μιας κβαντικής κατάστασης, την οποία θα αποδείξουμε σε λίγο.

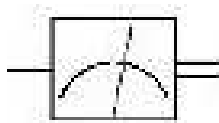
Ερχόμαστε τώρα στην ομαδοποίηση των μοναδιακών $n \times n$ πινάκων. Όπως προείπαμε κατά αναλογία με την περίπτωση ενός 2×2 μοναδιακού πίνακα που δρα σε ένα qubit, ένας $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ μοναδιακός πίνακας θα δρα σε μια κατάσταση n qubit. Επειδή το n μπορεί να πάρει, και θέλουμε να μπορεί να παίρνει, όσο το δυνατόν μεγαλύτερες τιμές, γίνεται κατανοητό ότι μια ομαδοποίηση σύμφωνα με τα στοιχεία βάσης δεν είναι λειτουργική σε αυτή την περίπτωση. Θα έχουμε διαφορετικούς πίνακες βάσης για κάθε n και μάλιστα με αυξανόμενο πλήθος. Η οργάνωση τέτοιων πινάκων-πυλών θα ήταν πολύ δύσκολη εάν δεν υπήρχε το πολύ σημαντικό λήμμα: Κάθε $n \times n$ μοναδιακός πίνακας μπορεί να σπάσει σε γινόμενο $n \times n$ μοναδιακών πινάκων 2 σταθμών¹², $n - 1$ το πλήθος. Ως αποτέλεσμα, κάθε διαδικασία επεξεργασίας - δράσης πυλών σε n qubit μπορεί να σπάσει σε $n - 1$ βήματα δράσης σε κάθε qubit χωριστά. Το ότι όλα τα άλλα διαγώνια στοιχεία είναι μονάδα αντιστοιχεί σε ενεργοποιημένο control των υπολοίπων.

Έχοντας δείξει ότι οποιαδήποτε μοναδιακή δράση μπορεί να αποδομηθεί σε δράση δύο σταθμών, αποδεικνύεται ότι οποιοδήποτε κβαντικό κύκλωμα μπορεί να δημιουργηθεί από συνδυασμούς της πύλης $C - NOT$, που δρα σε ζεύγη qubit, και των πυλών που δρουν σε ένα qubit.

Τελειώνοντας, ορίζουμε τους βασικούς κανόνες αναπαράστασης ενός κβαντικού κυκλώματος. Ο χρόνος κυλά από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τα qubit, ή οι γραμμές μεταφοράς τους, συμβολίζονται με γραμμές, ενώ μια γραμμή με ένα “/” συμβολίζει μια δέσμη από qubit. Δύο παράλληλες γραμμές θα συμβολίζουν κλασσική πληροφορία και συνήθως θα εμφανίζονται στα κυκλώματα ως αποτελέσματα μετρήσεων, οι οποίες θα απεικονίζονται με το σύμβολο της μέτρησης (σχήμα 9). Οι λογικές πύλες αναπαριστώνται σε ένα κουτί που διακόπτει τη γραμμή μεταφοράς, μέσα στο οποίο εμφανίζεται το γράμμα της πύλης. Στο σχήμα 10 απεικονίζονται μερικές από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες κβαντικές πύλες ενός qubit. Στο σχήμα 11 αναπαρίσταται η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη πύλη που δρα σε δύο qubit η C-NOT και η γενίκευσή της, η Control-U που όπως η C-NOT εάν το Control qubit είναι $|1\rangle$ εκτελεί τη δράση U (NOT) στο target qubit.

Ιδιαίτερη χρησιμότητα έχει η πύλη Hadamard γιατί με αυτήν μπορούμε να φέρουμε ένα qubit σε επαλληλία καταστάσεων. Εάν συνδυαστεί και με μία C-NOT πύλη (βλ. σχήμα 13) μπορεί να μας δημιουργήσει σε επίπεδο ζεύ-

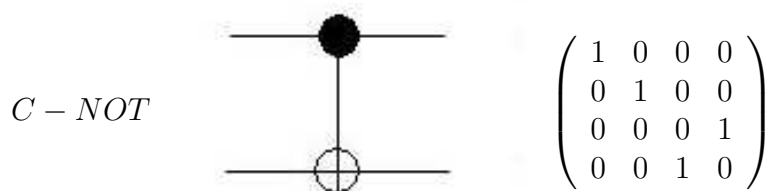
¹² Δρώντας αυτός ο πίνακας σε ένα διάνυσμα στήλη με n στοιχεία, δρά σε μόνο δύο από αυτά. Όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι μηδενικά εκτός από τα διαγώνια που είναι μονάδα και άλλα τέσσερα που είναι εν γένει μη μηδενικά. Πρόκειται για μια γενικευμένη Block Form



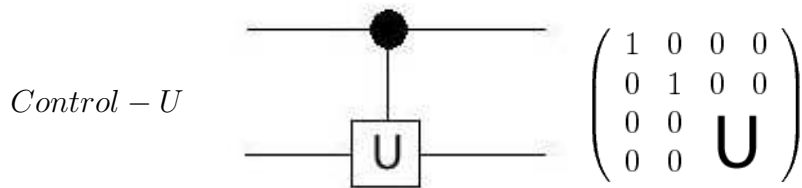
Σχήμα 9: Η αναπαράσταση της διαδικασίας μέτρησης σε ένα κβαντικό κύκλωμα.

Hadamard		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Pauli-X		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Phase		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

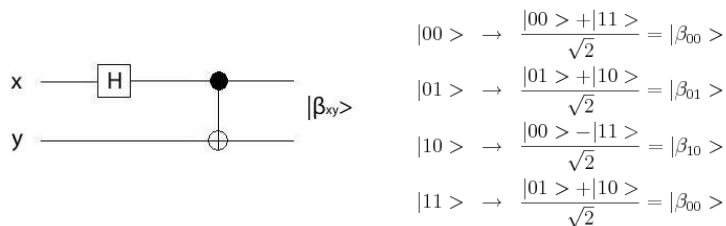
Σχήμα 10: Μερικές από τις πιο συνηθισμένες κβαντικές πύλες ενός qubit .



Σχήμα 11: Η πύλη C-NOT



Σχήμα 12: Η πύλη Control-U



Σχήμα 13: Κβαντικό κύκλωμα για τη δημιουργία Bell καταστάσεων. Η πύλη Hadamard εξασφαλίζει την επαλληλία ενώ η C-NOT παίζει το ρόλο αλληλεπίδρασης των δύο qubit .

γους καταστάσεις με το μέγιστο δυνατό εναγκαλισμό¹³ (maximally entangled). Αυτές οι καταστάσεις καλούνται καταστάσεις Bell και είναι γενικεύσεις αυτής που είχαν πρωτοχρησιμοποιήσει οι Einstein, Podolsky, Rosen στη δημοσίευση με το ομώνυμο παράδοξο.

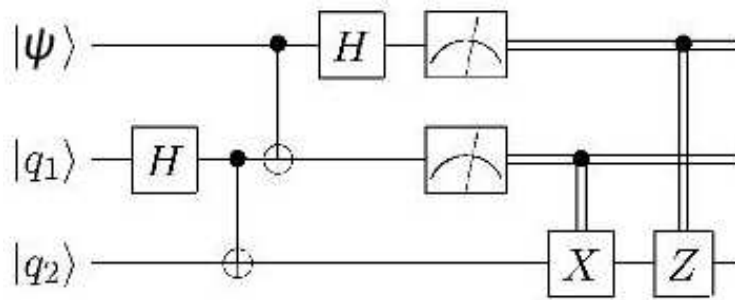
Ως παράδειγμα ενός απλού κβαντικού κυκλώματος παρατίθεται το κύκλωμα που χρησιμοποιείται για την κβαντική τηλεμεταφορά (σχήμα 14), το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και παρακάτω.

3.2.1 Θεώρημα μη αντιγραφισμότητας μιας κβαντικής κατάστασης.

Μέχρι στιγμής έχουμε επανηληθμένα χρησιμοποιήσει την ισχύ του θεωρήματος μη αντιγραφισμότητας μιας κβαντικής κατάστασης (no-cloning theorem) [4],[5]. Σε αυτή την παράγραφο θα την αποδείξουμε.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια άγνωστη κατάσταση $|\Psi\rangle$ αποθηκευμένη σε ένα ή περισσότερα qubit την οποία θέλουμε να αντιγράψουμε σε ένα άγνωστο ή άγνωστα target qubit $|S\rangle$. Εάν υποθέσουμε ότι αυτές οι δύο καταστάσεις είναι οι είσοδοι του κβαντικού μας αντιγραφέα η αρχική του κατάσταση είναι η

¹³Έχουν το μέγιστο δυνατό εναγκαλισμό επειδή αφενός είναι απόλυτα συσχετισμένα τα αποτελέσματα των μετρήσεων στα δύο qubit και αφετέρου είναι ισοβαρείς (ισοπίθανες).



Σχήμα 14: Κύκλωμα κβαντικής τηλεμεταφοράς.

$|\Psi\rangle \otimes |S\rangle$ η οποία θέλουμε με έναν μοναδιακό μετασχηματισμό U να γίνει

$$|\Psi\rangle \otimes |S\rangle \rightarrow U(|\Psi\rangle \otimes |S\rangle) = |\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \quad (73)$$

Φυσικά θα θέλουμε αυτός ο αντιγραφέας να δουλεύει για κάθε δυνατή κατάσταση, έστω τις $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$

$$U(|\Psi\rangle \otimes |S\rangle) = |\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \quad U(|\Phi\rangle \otimes |S\rangle) = |\Phi\rangle \otimes |\Phi\rangle \quad (74)$$

και το εσωτερικό τους γινόμενο μας δίνει

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = (\langle \Psi | \Phi \rangle)^2 \quad (75)$$

που έχει λύσεις $\langle \Psi | \Phi \rangle = 0$ ή $\langle \Psi | \Phi \rangle = 1$. Συνεπώς έχουμε ή $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle$ ή $|\Psi\rangle \perp |\Phi\rangle$. Δηλαδή ένας κβαντικός αντιγραφέας θα μπορούσε να κλωνοποιήσει μόνο κάθετες μεταξύ τους καταστάσεις, συνεπώς είναι αδύνατον να κατασκευάσουμε έναν γενικό κβαντικό αντιγραφέα.

Αυτό θα μπορούσε να το περιμένει κανείς και από ένα σχόλιο που είχαμε κάνει για τις ιδότητες των qubit . Οτι περιέχουν άπειρη πληροφορία, αλλά μόνο ένα πεπερασμένο μέρος της είναι προσβάσιμο σε εμάς. Αυτό το γεγονός, αν και δεν έχει την ισχύ θεωρήματος δεν παύει να είναι μια αλήθεια που δεν έχει βρει μέχρι σήμερα αντιπαράδειγμα. Εάν δεχθούμε ότι ισχύει, θα έπρεπε να περιμένουμε ότι δεν είναι δυνατόν να κλωνοποιήσουμε κβαντικές καταστάσεις. Και αυτό γιατί στην αντίθετη περίπτωση θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε όσα αντίγραφα μιας άγνωστης κατάστασης θέλαμε και με μέτρηση σε κάθε ένα από τα αντίγραφα να βρίσκαμε με όση στατιστική ακρίβεια επιθυμούσαμε την κατάσταση του qubit .

Η παραπάνω συλλογιστική έχει εφαρμογή μόνο σε περιπτώσεις που η κατάσταση $|\Psi\rangle$ είναι καθαρή κβαντική κατάσταση και όχι εναγκαλισμένη. Θα ήταν δυνατόν το θεώρημα μη αντιγραφισμότητας να μην έχει ισχύ σε αυτή την περίπτωση¹⁴. Όμως μπορεί να αποδειχθεί πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει [6], [7].

¹⁴ Αν και θα ήταν παράλογο να ισχύει κάτι τέτοιο καθώς όσο πιο εναγκαλισμένη είναι μια

3.2.2 Κβαντική Παράλληλη Επεξεργασία

Η κβαντική παράλληλη επεξεργασία (quantum parallelism) είναι ουσιαστικά η ιδιότητα της κβαντικής φυσικής να επεξεργάζεται άπειρη πληροφορία κατά την εξέλιξη μιας φυσικής κατάστασης, την οποία θέλουμε να εκμεταλλευτούμε.

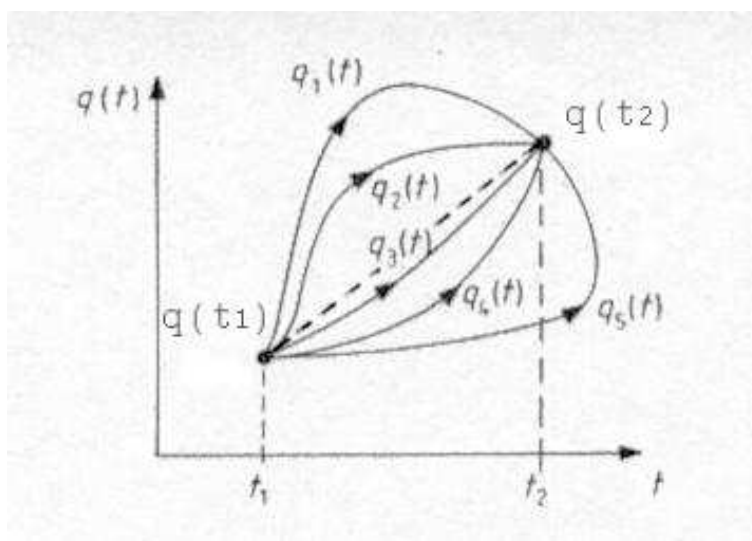
Ένα πολύ απλουστευμένο παράδειγμα είναι το εξής. Ας θεωρήσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε πόσο κάνει $3 + 7$. Ένας κλασικός υπολογιστής για να το υπολογίσει θα κάνει την πράξη $3 + 7$. Ένας κβαντικός υπολογιστής θα κάνει όλες τις δυνατές πράξεις μεταξύ δύο αριθμών παράλληλα, και αφήνεται στον προγραμματιστή να μπορέσει να μετρήσει έτσι το αποτέλεσμα ώστε από όλα τα δυνατά να πάρει το ζητούμενο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται κβαντική παράλληλη επεξεργασία (Quantum Parallelism) και θα αναφερθούμε σε αυτήν παρακάτω.

Ένας άλλος τρόπος να καταλάβουμε το φυσικό λόγο που μας επιτρέπει να έχουμε κβαντική παράλληλη επεξεργασία είναι τα ολοκληρώματα διαδρομών του Feynman. Σύμφωνα με αυτό τον τρόπο κβάντωσης, ένα σωματίο κατά τη διάρκεια μετακίνησής του από ένα σημείο του θεσεογραφικού χώρου $q(t_1)$ σε ένα άλλο $q(t_2)$, ακολουθεί όλες τις δυνατές τροχιές με άκρα τα εν λόγω σημεία (βλ. σχήμα 15). Για να βρει κανείς το πλάτος μετάβασης από το ένα σημείο στο άλλο οφείλει να αθροίσει (ολοκληρώσει) σε όλες τις δυνατές τροχιές $q_i(t)$, η κάθε μία από τις οποίες θα συνεισφέρει στο άθροισμα με ένα συγκεκριμένο βάρος που ορίζεται από την κλασική δράση που αντιστοιχεί στην εν λόγω τροχιά.

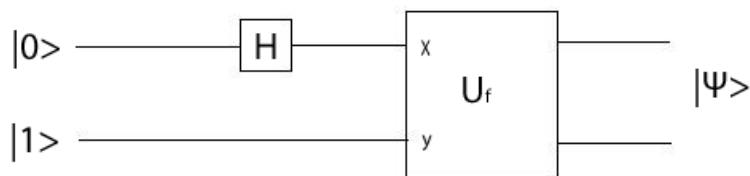
Υπό αυτό το πρίσμα, μπορεί κανείς να δει μια πράξη του κβαντικού υπολογιστή ως τη μετάβαση από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική. Κατά τη διάρκεια της εξέλιξης όμως περνάει από όλες τις δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί. Στη γλώσσα του προηγούμενου παραδείγματος, ξεκινάει κανείς από την αρχική κατάσταση με τα δύο ψηφία ($|0\rangle, |0\rangle$) έστω. Καθώς εξελίσσεται κβαντικά αυτή η κατάσταση, ακολουθεί όλες τις δυνατές τροχιές, δηλαδή κάνει όλα τα δυνατά -άπειρα- αθροίσματα αριθμών. Αφήνεται στον παρατηρητή να μετρήσει κατάλληλα για να πάρει το αποτέλεσμα που θέλει, εν προκειμένω το $3 + 7$.

Για να γίνει πιο απτή η έννοια της κβαντικής παράλληλης επεξεργασίας θα παρουσιάσουμε ένα απλό παράδειγμα, το πρώτο στοιχειώδες κβαντικό μας κύκλωμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια δύτιμη συνάρτηση $f(x) : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε μόνο με μία πράξη τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$, ταυτόχρονα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κβαντικό κύκλωμα με δύο qubit αρχικοποιημένο στην κατάσταση $|x, y\rangle$, με το $|x\rangle$ να είναι το data register και το $|y\rangle$ να είναι το target register. Ας υποθέσουμε επίσης ότι έχουμε μια πύλη U_f που εκτελεί την πράξη $|x, y\rangle \rightarrow |x + y \oplus f(x)\rangle$, όπου η πράξη \oplus

κατάσταση τόσο περισσότερο απομακρύνεται από το κλασικό πρότυπο.



Σχήμα 15: Κάποιες από τις άπειρες δυνατές τροχιές που μπορεί να ακολουθήσει ένα κβαντικό σωματίο, σε αντιδιαστολή με την μοναδική κλασσική τροχιά (Η διακεκομμένη ευθεία.)



Σχήμα 16: Κύκλωμα κβαντικής παράλληλης επεξεργασίας για τον ταυτόχρονο υπολογισμό των $f(0), f(1)$

συμβολίζει άθροισμα mod2. Ας πειστούμε ότι μπορεί να υπάρξει¹⁵ και ας τη δεχτούμε στην παρούσα φάση ως black box. Το κύκλωμα θα έχει τη μορφή του σχήματος 16

Το σημαντικό στοιχείο είναι η δράση της πύλης Hadamard στο data register

¹⁵ Αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε λειτουργία μπορεί να εκτελέσει ένα κλασσικό κύκλωμα μπορεί να εκτελέσει και ένα κβαντικό κύκλωμα με τουλάχιστον ίση ή μικρότερη απόδοση. Συνεπώς, αν η εν λόγω συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί σε ένα κλασσικό υπολογιστή θα μπορεί να υπολογιστεί και σε έναν κβαντικό.

η οποία έχει τη δράση

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (76)$$

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (77)$$

Φέρνει το data register σε μια υπέρθεση καταστάσεων. Η δράση της U_f τότε δίνει

$$\frac{|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}} \quad (78)$$

Βλέπουμε ότι εκμεταλλευόμενοι την υπέρθεση καταστάσεων που επιτρέπει η κβαντομηχανική μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα την τιμή των $f(0), f(1)$.

Φυσικά αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί σε περισσότερα qubit με αποτέλεσμα να μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα οποιοδήποτε $f(x)$ μιας συνάρτησης ορισμένης σε n qubit . Για να γίνει αυτό αρκεί να δημιουργήσουμε στο data register μια ισοβαρή υπέρθεση 2^n καταστάσεων δρώντας με πύλες Hadamard στα n qubit . Η πράξη αυτή συμβολίζεται με $H^{\otimes n}$ και θα τη συναντήσουμε συχνά καθώς οι περισσότεροι κβαντικοί αλγόριθμοι αρχικοποιούνται σε υπέρθεση καταστάσεων ακριβώς για να μπορέσει να γίνει εκμετάλλευση της κβαντικής ισχύος.

Εάν τα n qubit είναι αρχικοποιημένα στην $|0\rangle$ το αποτέλεσμα της δράσης των Hadamard είναι

$$H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle \quad (79)$$

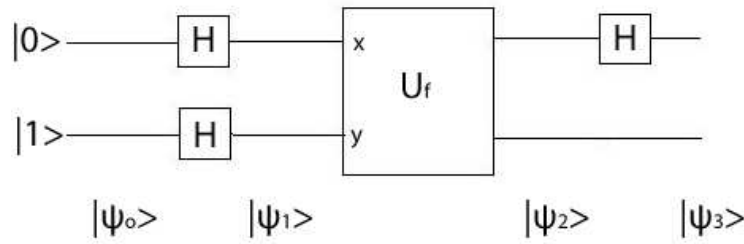
Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση και εκμεταλλευόμενοι την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο έχοντας ως data register x , n qubit σε υπέρθεση και ένα target qubit στο οποίο θα αποθηκευτεί το αποτέλεσμα $f(x)$. Η δράση της U_f θα είναι

$$H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle |0\rangle \quad (80)$$

$$U_f\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle |0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x |x\rangle |f(x)\rangle \quad (81)$$

Όπως αναμέναμε, με έναν μόνο υπολογισμό της $f(x)$ δημιουργήσαμε μια κατάσταση με υπέρθεση όλων των δυνατών αποτελεσμάτων της.

Το πρόβλημα όμως παραμένει. Μπορούμε να πάρουμε με μια μέτρηση, δεν έχουμε και άλλη, όλη αυτή την πληροφορία. Γιατί μπορούμε να μετρήσουμε το $|i\rangle$ qubit για να πάρουμε την τιμή $f(i)$ αλλά θα έχουμε μόνο ένα αποτέλεσμα και μόνο αυτό λόγω της κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης. Με



Σχήμα 17: Κβαντικό κύκλωμα για την υλοποίηση του αλγορίθμου του Deutsch

αυτό τον τρόπο δεν κερδίζουμε και τίποτα σε σχέση με την κλασσική περίπτωση. Θα θέλαμε μετά τον παραπάνω αλγόριθμο να έχουμε ένα τρόπο να αποσπάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία από το σύστημα. Ένας τέτοιος τρόπος παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο.

3.3 Ένα παράδειγμα: Ο αλγόριθμος του Deutsch.

Ο πρώτος κβαντικός αλγόριθμος δημιουργήθηκε από τον Deutsch το 1989 [10] και ήταν σε αυτή τη δημοσίευση που για πρώτη φορά καταδεικνυόταν ότι ένας κβαντικός υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει μια εργασία πιο γρήγορα από έναν κλασσικό. Σε αυτή την παράγραφο δε θα αναφερθούμε στον ίδιο ακριβώς αλγόριθμο αλλά σε μια απλοποιημένη εκδοχή του η οποία όμως καταδεικνύει με πιο ευκρινή τρόπο τα αίτια που μας δίνουν την κβαντική επιτάχυνση.

Εάν κανείς κάνει μια μικρή αλλαγή στο κύκλωμα της κβαντικής παραλληλίας και το τροποποιήσει έτσι ώστε να δημιουργήσει και συμβολή (interference) στα τελικά qubit, μπορεί να εξαγάγει περισσότερη πληροφορία από το κύκλωμα, σε σχέση με την προηγούμενη, ή την κλασσική περίπτωση. Για να επιτευχθεί αυτό δημιουργούμε το κύκλωμα του σχήματος 17 όπου η U_f έχει ακριβώς την ίδια λειτουργία με την προηγούμενη περίπτωση. Βλέπουμε ότι και το δεύτερο qubit σε αυτή την περίπτωση διέρχεται από μια πύλη Hadamard για να βρεθεί σε επαλληλία καταστάσεων για να σχηματίσουν την κατάσταση $|\Psi_1\rangle$

$$|\Psi_0\rangle = |01\rangle \quad (82)$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (83)$$

Κατόπιν τούτου, η $|\Psi_1\rangle$ διέρχεται από την U_f και παίρνουμε την $|\Psi_2\rangle$. Για να δούμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αρκεί να μελετήσουμε την επίδραση της U_f στην $|x\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$U_f(|x\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}) = (-1)^{f(x)} |x\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (84)$$

Για να δούμε πως προέκυψε αυτό το αποτέλεσμα αρκεί να πάρουμε τις δύο περιπτώσεις όπου $|x\rangle = |0\rangle$ ή $|x\rangle = |1\rangle$

$$U_f(|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}) \rightarrow |x\rangle \frac{|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \quad (85)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (86)$$

$$f(x) = 1 \rightarrow |x\rangle \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} = -|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (87)$$

το οποίο συνοψίζεται στη σχέση 84. Συνεχίζοντας με αυτή τη λογική το αποτέλεσμα της δράσης της U_f στην κατάσταση $|\Psi_1\rangle$ θα εξαρτάται από το αν το $f(0)$ είναι ίσο ή διάφορο του $f(1)$ για να καθοριστεί ο συνδυασμός των προσήμων. Συνεπώς έχουμε ότι

$$|\Psi_2\rangle = \pm \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{Για } f(0) = f(1) \quad (88)$$

$$|\Psi_2\rangle = \pm \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{Για } f(0) \neq f(1) \quad (89)$$

Τέλος, επειδή $H^2 = 1$, η δεύτερη πύλη Hadamard στο πρώτο qubit αντιστρέφει τη δράση της πρώτης και αναιρεί την επαλληλία με αποτέλεσμα να γυρίσουμε το πρώτο qubit σε καθαρές καταστάσεις

$$|\Psi_3\rangle = \pm |0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{Για } f(0) = f(1) \quad (90)$$

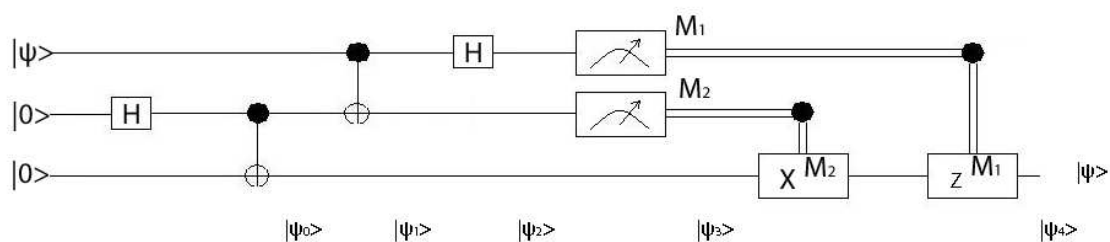
$$|\Psi_3\rangle = \pm |1\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{Για } f(0) \neq f(1) \quad (91)$$

Όμως $f(0) \oplus f(1) = 0$ αν $f(0) = f(1)$ ενώ $f(0) \oplus f(1) = 1$ για $f(0) \neq f(1)$. Συνεπώς το προηγούμενο αποτέλεσμα, η τελική κατάσταση του κυκλώματος, μπορεί να γραφεί ως

$$|\Psi_3\rangle = \pm |f(0) \oplus f(1)\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (92)$$

Ως αποτέλεσμα, αν κάνουμε μια μέτρηση στο πρώτο qubit θα πάρουμε το άθροισμα $f(0) \oplus f(1)$.

Βλέπουμε ότι χρησιμοποιώντας την κβαντική παραλληλία και τη συμβολή μπορέσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της συνάρτησης με μόνο ένα υπολογισμό της $f(x)$, κάτι που για να γίνει σε έναν κλασσικό υπολογιστή θα χρειαζόντουσαν τουλάχιστον δύο πράξεις. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι



Σχήμα 18: Το κύκλωμα υλοποίησης της κβαντικής τηλεμεταφοράς. Τα δύο άνω qubit τα έχει η Alice και το κάτω qubit ο Bob.

υπολογίσαμε μια ολική (global) τιμή της συνάρτησης, όπως είναι το άθροισμα, σε ένα μόνο βήμα κάτι το οποίο είναι καθαρά αποτέλεσμα της συμβολής των κυματοσυναρτήσεων των qubit και δεν έχει κλασικό ανάλογο. Αυτή την ιδιότητα θα χρησιμοποιήσουμε και στους κβαντικούς τυχαίους περιπάτους.

3.4 Ένα παράδειγμα: Κβαντική Τηλεμεταφορά.

Στο σχήμα 18 φαίνεται το κύκλωμα που υλοποιεί έναν από τους πιο απλούς κβαντικούς αλγόριθμους, αυτόν της κβαντικής τηλεμεταφοράς.

Η σκιαγράφηση του προβλήματος έχει ως εξής. Ένας παρατηρητής A θέλει να στείλει σε έναν άλλο παρατηρητή B, έστω Alice και Bob αντίστοιχα όπως συνηθίζεται να αναφέρονται στη βιβλιογραφία, μια κβαντική κατάσταση $|\Psi\rangle$. Η πρώτη και πιο λογική επιλογή είναι να του στείλει το ίδιο το qubit στο οποίο είναι αποθηκευμένη η $|\Psi\rangle$. Σε αυτή την περίπτωση η Alice στέλνει κβαντική πληροφορία στον Bob. Εάν όμως τα δύο μέρη μοιράζονται εκ προοιμίου μία κατάσταση Bell, μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν για να μεταφερθεί όλη η πληροφορία της κατάστασης $|\Psi\rangle$ από την Alice στον Bob μόνο με τη διάδοση πληροφορίας δύο κλασικών bit και όχι ενός qubit όπως στην προηγούμενη περίπτωση, μεταδίδοντας δηλαδή πολύ λιγότερη πληροφορία.

Ξεκινώντας τη μελέτη του κυκλώματος από αριστερά προς τα δεξιά έχουμε ως αρχική κατάσταση την

$$|\Psi\rangle |0\rangle |0\rangle \quad (93)$$

Τα δύο κάτω qubit περνάνε από την Hadamard και τη C-NOT και όπως έχουμε ήδη περιγράψει δημιουργούν την $|\beta_{00}\rangle$ κατάσταση Bell. Αυτή θα παίξει και το ρόλο της εκ προοιμίου μοιραζόμενης κατάστασης Bell μεταξύ των δύο. Θα μπορούσαν μετά από αυτή την πράξη να απομακρυνθούν, να κρατήσει ο κάθε ένας το δικό του qubit από το ζεύγος και το υπόλοιπο κύκλωμα να πραγματοποιηθεί χρόνια μετά. Παρεμπιπτόντως, δεν υπάρχει κανένας ιδιαίτερος λόγος για την επιλογή του $|\beta_{00}\rangle$. Οποιαδήποτε άλλη κατάσταση Bell θα μ-

πορούσε να χρησιμοποιηθεί, με μικρές τροποποιήσεις στα τελευταία στάδια του κυκλώματος.

Μετά τη δημιουργία του εναγκαλισμένου ζεύγους η Alice και ο Bob διαχωρίζονται και η Alice κρατάει τα δύο άνω qubit ενώ ο Bob μόνο το κάτω, το ένα μέρος της κατάστασης Bell ¹⁶. Η κατάσταση που έχει δημιουργηθεί είναι η

$$|\Psi_0\rangle = |\Psi\rangle |\beta_{00}\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (94)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[a|0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + b|1\rangle (|00\rangle + |11\rangle)] \quad (95)$$

Προκειμένου η Alice να μπορέσει να στείλει πληροφορία στον Bob για την $|\Psi\rangle$ θα πρέπει να αλληλεπιδράσει την άγνωστη κατάσταση με το δικό της μέρος του εναγκαλισμένου ζεύγους. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιεί την πύλη C-NOT και παίρνει

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[a|0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + b|1\rangle (|10\rangle + |01\rangle)] \quad (96)$$

όπου η κάθετη διάταξη των qubit στο κύκλωμα από πάνω προς τα κάτω απεικονίζεται ως οριζόντια διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά στις εξισώσεις.

Εν συνεχεία η Alice για να δημιουργήσει επαλληλία στο πρώτο της qubit το περνάει από μια πύλη Hadamard και παίρνει

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}[a(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + b(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)] \quad (97)$$

Αυτή η κατάσταση με απλή αναδιάταξη των όρων μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}[|00\rangle (a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle (b|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle (a|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle (a|1\rangle - b|0\rangle)] \quad (98)$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς πως ουσιαστικά η επαλληλία που δημιουργήθηκε στο πρώτο qubit της Alice μεταφέρθηκε στο qubit του Bob μέσω της κατάστασης Bell. Εάν δεν είχαμε δημιουργήσει επαλληλία στο qubit της Alice μετά την αναδιάταξη των όρων οι καταστάσεις του qubit του Bob θα ήταν καθαρές καταστάσεις ($|0\rangle$ ή $|1\rangle$). Φυσικά, αν δεν είχε προηγηθεί η σύζευξη του ζεύγους με την άγνωστη κατάσταση δε θα μπορούσε να μεταδοθεί καμία πληροφορία στον Bob για αυτήν. Συνεπώς οι δύο αυτές πύλες είναι απαραίτητες στο

¹⁶ Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τέτοιες καταστάσεις απαρτίζονται από διακριτά φυσικά αντικείμενα όπως το EPR ζεύγος ηλεκτρονίου ποζιτρονίου που παράγεται από τη διάσπαση ενός π^0 .

κύκλωμα και παίζουν το ρόλο της δημιουργίας αλληλεπίδρασης και συμβολής αντίστοιχα.

Σε αυτό το σημείο το ουσιαστικό μέρος του κυκλώματος έχει τελειώσει. Εάν η Alice εκτελέσει μετρήσεις στην υπολογιστική βάση στα δύο qubit που έχει στην κατοχή της και στείλει τα αποτελέσματα στον Bob, όπως φαίνεται από την 98, του δηλώνει σε ποιά κατάσταση βρίσκεται το qubit του

$$00 \rightarrow a|0\rangle + b|1\rangle \quad (99)$$

$$01 \rightarrow a|1\rangle + b|0\rangle \quad (100)$$

$$10 \rightarrow a|0\rangle - b|1\rangle \quad (101)$$

$$11 \rightarrow a|1\rangle - b|0\rangle \quad (102)$$

Δε μένει στον Bob παρά να δράσει με τις απαραίτητες πύλες στο qubit του, ανάλογα με την κλασσική πληροφορία που θα του στείλει η Alice, για να το φέρει στην αρχική κατάσταση $|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$.

Εάν το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι 00 δε χρειάζεται να κάνει τίποτα, η κατάσταση είναι η ζητούμενη. Εάν το αποτέλεσμα είναι 01 θα πρέπει να δράσει με την πύλη X για να αντιστρέψει την κατάσταση. Εάν το αποτέλεσμα είναι 10 θα πρέπει να δράσει με την πύλη Z για να αλλάξει το πρόσημο της $|1\rangle$ και τέλος, εάν η κλασσική πληροφορία που θα του στείλει η Alice είναι 11 χρειάζεται τη σύνθεση των δύο για να αλλάξει το πρόσημο της $|1\rangle$ πρώτα και να αντιστρέψει εκ τω υστέρων, ήτοι τον συνδυασμό XZ . Αυτός ο συνδυασμός αποτελεσμάτων και εφαρμοζόμενων πυλών κωδικοποιείται στο κύκλωμα ως X^{M_2} και Z^{M_1} αντίστοιχα, όπου ο εκθέτης δηλώνει όπως και στους αριθμούς πόσες φορές θα εφαρμοστεί η πύλη, φυσικά με τη σύμβαση ότι $X^0 = Z^0 = I$.

Πρέπει να αποσαφηνιστεί ότι σε καμία φάση του κυκλώματος δεν υπήρξε αντίγραφο της $|\Psi\rangle$ ούτε αντλήθηκε έστω και η παραμικρή γνώση για την κατάσταση $|\Psi\rangle$. Όση άγνοια είχε η Alice για την κατάσταση αρχικά έχει και ο Bob τελικά. Αυτό που κάνει το κύκλωμα είναι να μεταφέρει μια άγνωστη κατάσταση από τη μία άκρη του κυκλώματος στην άλλη με τη χρήση δύο κλασσικών καναλιών και την προϋπόθεση ότι η Alice και ο Bob μοιράζονταν ένα ζεύγος αναγκαλισμένων qubit. Φυσικά αυτό θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο εύκολα και απλά εάν η Alice έστελνε το qubit στον Bob. Σε περιπτώσεις όμως που κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει πρακτικά ή σε περιπτώσεις που τα δύο μέρη μοιράζονται μία κατάσταση Bell για άλλο λόγο, το κύκλωμα θα μπορούσε να έχει πρακτική εφαρμογή.

Τέλος, είναι σαφές ότι η κατάσταση δε μεταφέρεται με ταχύτητα πιο γρήγορη από την ταχύτητα του φωτός, όπως ίσως υποδηλώνει ο τίτλος, κάτι που καθίσταται προφανές ακόμα και από την ύπαρξη των κλασσικών καναλιών που θα πρέπει να έχουν η Alice και ο Bob. Ο όρος τηλεμεταφορά χρησιμοποιείται απλά και μόνο για να δηλώσει ότι μόνο με τη χρήση δύο κλασσικών bit είναι δυνατόν,

χρησιμοποιώντας την κβαντική ιδιότητα του εναγκαλισμού, να μεταφερθεί όλη η (άπειρη) πληροφορία ενός qubit . Αυτό φυσικά δεν είναι απόλυτα ακριβές γιατί προϋποθέτει τα δύο μέρη να έχουν μοιραστεί μία κατάσταση Bell . Εάν η δημιουργία της και η αποστολή του ενός μέρους στον Bob ληφθεί υπόψη η αλήθεια είναι ότι μεταφέρεται πολύ περισσότερη πληροφορία από το αναγκαίο σε αυτό το κύκλωμα. Θα ήταν πολύ πιο απλό η Alice να στείλει την $|\Psi\rangle$ στον Bob .

4 ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Μία από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των κβαντικών υπολογιστών είναι οι κβαντικοί αλγόριθμοι αναζήτησης δεδομένων. Αν και μπορεί να αποδειχθεί ότι η κβαντική επιτάχυνση που επιτυγχάνεται είναι ριζική¹⁷ και όχι εκθετική, όπως συμβαίνει με τις άλλες δημοφιλείς τους εφαρμογές, οι κβαντικοί αλγόριθμοι αναζήτησης δεδομένων έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για δύο λόγους. Αφενός μια πληθώρα υπολογιστικών προβλημάτων μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα αναζήτησης μέσα στα στοιχεία μιας βάσης και αφετέρου είναι ιδανικοί για προσομοίωση φυσικών συστημάτων αφού ο τρόπος λειτουργίας τους είναι ισοδύναμος με την εύρεση μιας κατάστασης ελαχίστης ενέργειας. Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος του Grover [11], ο πρότυπος αλγόριθμος στον οποίο βασίζονται οι περισσότεροι του είδους. Εν συνεχεία θα αποδειχθεί η ισχύς του με την εξέλιξη φυσικών συστημάτων και ότι είναι βέλτιστος.

4.1 Ο αλγόριθμος του GROVER

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ψάξουμε τη λύση σε ένα πρόβλημα αναζήτησης μιας μη δομημένης βάσης δεδομένων. Μια τέτοια βάση θα μπορούσε να είναι μια λίστα N τυχαία κατανεμημένων ονομάτων από την οποία αναζητούμε ένα όνομα. Μπορούμε να φανταστούμε τη διαδικασία ανίχνευσης της λύσης ως εξής. Ο αλγόριθμος παίρνει ένα ένα τα ονόματα της λίστας, τα βάζει σε ένα κουτί-πύλη που γνωρίζει τη λύση και το ρωτάει αν το συγκεκριμένο όνομα είναι λύση. Αν είναι σταματάει τον αλγόριθμο, αν όχι συνεχίζει στο επόμενο όνομα. Αυτό το μαύρο κουτί που γνωρίζει τη λύση θα καλείται μάντης (oracle), είναι μία πύλη, ή συνηθέστερα σύνολο πυλών, και δε χρειάζεται να γνωρίζουμε τις εσωτερικές του λειτουργίες παρά μόνο ότι έχει την ιδιότητα να αναγνωρίζει τις λύσεις στο εκάστοτε πρόβλημα αναζήτησης. Ένας τέτοιος μηχανισμός θα μπορούσε να είναι το μάτι μας που αναγνωρίζει ή όχι το όνομα που ζητείται, ή κάποιος λιγότερο περίπλοκος μηχανισμός που σίγουρα θα εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα. Όμως η ιδιαιτερότητα του κάθε προβλήματος μπορεί να περιοριστεί απλά στις εσωτερικές λειτουργίες του μάντη. Μπορούμε λοιπόν να ενσωματώσουμε τις λεπτομέρειες του κάθε προβλήματος στον μάντη και να μελετήσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα αναζήτησης συναρτήσει αυτού. Σημαντικό

¹⁷ Αν ψάχνουμε ένα από N αντικείμενα χρειαζόμαστε \sqrt{N} βήματα για να επιτύχουμε.

είναι να προσέξουμε ότι ο μάντης δεν έχει την ιδιότητα να βρίσκει λύσεις του προβλήματος, απλά να τις αναγνωρίζει εάν τις δει.

Ένας κλασικός αλγόριθμος θα χρειάζεται να ψάξει ένα ένα τα ονόματα μέχρι να βρεί το σωστό, συνεπώς χρειάζονται περίπου $N/2$ κλήσεις του μάντη στη διαδικασία του αλγόριθμου. Σε έναν κβαντικό υπολογιστή όμως, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια επαλληλία όλων των ονομάτων που υπάρχουν στη βάση και χρησιμοποιώντας τη μη τοπική δράση της κβαντομηχανικής ο μάντης μπορεί να ψάχνει όλα τα ονόματα ταυτόχρονα. Για να γίνει αυτό αρκεί να κωδικοποιήσουμε τα ονόματα, ή εν γένει τα στοιχεία της οποιασδήποτε βάσης σε qubit .

Πριν αρχίσουμε τη λεπτομερή περιγραφή του αλγόριθμου θα αποσαφηνίσουμε τη λειτουργία της πύλης μάντη. Για ευκολία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πλήθος N των στοιχείων ισούται με $N = 2^n$ για να μπορέσουν να κωδικοποιηθούν σε n qubit¹⁸ . Η πύλη-μάντης για να λειτουργήσει προφανώς θα χρειάζεται ως είσοδο όλα τα στοιχεία που θα ψάξει (τα n qubit) και ένα χώρο από qubit στον οποίο θα αποθηκεύει το αποτέλεσμα της εργασίας της, έστω ένα qubit $|q\rangle$.

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας της πύλης-μάντης μπορεί να αποδοθεί από μία συνάρτηση $f(x)$ που δρα στην κατάσταση εισόδου $x \in [0, N - 1]$ ως εξής

$$f(x) = 0, \quad x \neq x_s \quad (103)$$

$$f(x) = 1, \quad x = x_s, \quad (104)$$

όπου x_s είναι οποιαδήποτε λύση του προβλήματος. Για να αποθηκευτεί αυτό το αποτέλεσμα στο qubit $|q\rangle$ του μάντη η λειτουργία στην υπολογιστική βάση θα πρέπει να γράφεται

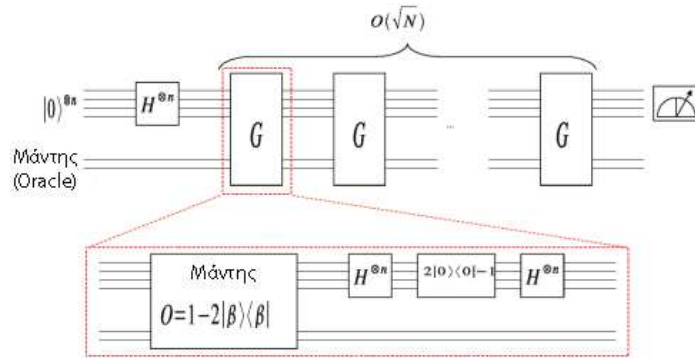
$$\hat{O}(|x\rangle |q\rangle) \longrightarrow |x\rangle |q \oplus f(x)\rangle, \quad (105)$$

όπου \hat{O} είναι ο μοναδιακός τελεστής του μάντη (oracle). Δηλαδή όσο το qubit του μάντη παραμένει στην αρχική του κατάσταση, έχουν εισαχθεί μόνο καταστάσεις - μη λύσεις του προβλήματος. Εάν εισαχθεί λύση, η κατάσταση του μάντη αλλάζει.

Αυτό όμως μας δημιουργεί ένα πρόβλημα. Στη δεύτερη λύση που θα βρεί ο μάντης το $|q\rangle$ θα επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Συνεπώς για να αναγνωρίζουμε τις λύσεις θα έπρεπε να καταγράφουμε κατά τη διάρκεια του αλγόριθμου τις αλλαγές του $|q\rangle$. Για να το αποφύγουμε αυτό μπορούμε να το αρχικοποιήσουμε σε υπέρθεση καταστάσεων, απλά περνώντας το $|q\rangle = |1\rangle$ μέσα από μια πύλη Hadamard . Η δράση του μάντη θα είναι

$$\hat{O}[|x\rangle (\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}})] \longrightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle (\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}) \quad (106)$$

¹⁸Εάν $N \neq 2^n$ επιλέγουμε $n_0 : N \leq 2^{n_0}$ και απλά αυξάνουμε λίγο το χώρο της βάσης προσθέτοντας καταστάσεις μη λύσεις.



Σχήμα 19: Το κβαντικό κύκλωμα υλοποίησης του αλγορίθμου του Grover

και επειδή η κατάσταση του μάντη μένει αναλλοίωτη καθ'ολη τη διάρκεια του αλγορίθμου, μπορεί στο εξής να παραλείπεται

$$\hat{O}|x\rangle \longrightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle \quad (107)$$

Έχοντας αποφασηθεί τη λειτουργία του μάντη θα παραθέσουμε τους δύο τελεστές που δρουν στην κατάσταση σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, το λεγόμενο βήμα Grover και στα επόμενα κεφάλαια θα τα ερμηνεύσουμε.

Σε κάθε βήμα αρχικά δρα ο μάντης και μετά ακολουθεί ο τελεστής $H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n}$ και η συνολική δράση του τελεστή Grover είναι

$$G = H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n} \hat{O} \quad (108)$$

Εάν αρχικοποιήσουμε τις καταστάσεις μας στην ισοβαρή υπέρθεση

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle, \quad (109)$$

επανελημμένη εφαρμογή του συνολικού τελεστή G μας οδηγεί στη ζητούμενη λύση του προβλήματος αναζήτησης, όπως θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο. Το κύκλωμα αναπαρίσταται στο σχήμα 19 και συγκλίνει στη λύση σε χρόνο $O(\sqrt{\frac{N}{M}})$, όπου M το πλήθος των λύσεων.

4.2 Γεωμετρική αναπαράσταση.

Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα τι ακριβώς κάνει ο μάντης, είναι χρήσιμο να χωρίσουμε το χώρο των καταστάσεών μας σε αυτές που δεν είναι λύσεις, $|a\rangle$,

και σε αυτές που είναι λύσεις, $|b\rangle$. Ως προς τις αρχικές καταστάσεις γράφονται

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_x'' |x\rangle \quad (110)$$

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_x' |x\rangle \quad (111)$$

όπου \sum_x'' δηλώνει άθροιση στις μη λύσεις και \sum_x' άθροιση στις λύσεις.

Σε αυτή τη βάση η αρχική μας κατάσταση (109) γράφεται

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{N-M}{N}} |a\rangle + \sqrt{\frac{M}{N}} |b\rangle \quad (112)$$

και οι δύο δράσεις του αλγορίθμου του Grover αποκτούν σαφή γεωμετρική σημασία (βλ. σχήμα 20). Έχουμε ήδη πει ότι η δράση του μάντη είναι

$$\hat{O}|x\rangle \longrightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle \quad (113)$$

που σημαίνει ότι αφήνει τον υπόχωρο των μη λύσεων αναλλοίωτο και η δράση του στο χώρο των λύσεων είναι

$$\hat{O}|x_s\rangle \longrightarrow -|x_s\rangle \quad (114)$$

ήτοι η δράση του στην $|\Psi\rangle$ είναι

$$\hat{O}|\Psi\rangle = \hat{O}(a|a\rangle + b|b\rangle) = a|a\rangle - b|b\rangle \quad (115)$$

Συνεπώς η δράση του μάντη προκαλεί μια ανάκλαση της $|\Psi\rangle$ ως προς τις μη λύσεις $|a\rangle$ (βλ. σχήμα 20).

Συνεχίζοντας στη δράση του $H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n}$ βλέπουμε ότι ισχύει

$$H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n} = 2H^{\otimes n}|0\rangle\langle 0|H^{\otimes n} - H^{\otimes n}IH^{\otimes n} \quad (116)$$

$$= 2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I \quad (117)$$

Δρώντας με αυτόν τον τελεστή σε μια γενική κατάσταση $|\phi\rangle = \sum_k a_k |k\rangle$,

όπου τα $|k\rangle$ είναι μια πλήρης βάση του χώρου Hilbert, έχουμε

$$(2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I) \sum_k a_k |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} 2|\Psi\rangle \sum_{x,k} a_k \langle x|k\rangle - \sum_k a_k |k\rangle \quad (118)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} 2|\Psi\rangle \sum_{x,k} a_k \delta_{x,k} - \sum_k a_k |k\rangle \quad (119)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} 2|\Psi\rangle \sum_k a_k - \sum_k a_k |k\rangle \quad (120)$$

$$= \frac{1}{N} 2 \sum_k a_k \sum_x |x\rangle - \sum_k a_k |k\rangle \quad (121)$$

$$= 2 \sum_x \left(\sum_k \frac{a_k}{N} \right) |x\rangle - \sum_k a_k |k\rangle \quad (122)$$

$$(123)$$

Αντικαθιστώντας τη μέση τιμή των a_k $\langle a \rangle = \sum_k \frac{a_k}{N}$ έχουμε

$$(2|\Psi\rangle\langle\Psi| - I) \sum_k a_k |k\rangle = 2 \langle a \rangle \sum_x |x\rangle - \sum_k a_k |k\rangle \quad (124)$$

$$= 2 \langle a \rangle \sum_{x,k} |k\rangle \langle k|x\rangle - \sum_k a_k |k\rangle \quad (125)$$

$$= 2 \langle a \rangle \sum_k |k\rangle - \sum_k a_k |k\rangle \quad (126)$$

$$= \sum_k (2 \langle a \rangle - a_k) |k\rangle \quad (127)$$

Για να γίνει σαφής η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω δράσης μελετάμε τα εσωτερικά γινόμενα της $|\phi\rangle$ με την $|\Psi\rangle$ πριν και μετά τη δράση του $H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n}$

$$\langle \Psi|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x,k} \langle x|a_k|k\rangle \quad (128)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k |k\rangle \quad (129)$$

$$\langle \Psi|\phi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x,k} \langle x|2 \langle a \rangle - a_k|k\rangle \quad (130)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k (2 \langle a \rangle - a_k) |k\rangle \quad (131)$$

$$= 2 \sum_k \langle a \rangle - \langle \Psi|\phi\rangle \quad (132)$$

Όμως αν κανείς αθροίσει τη μέση τιμή πιθανοτήτων θα πρέπει να πάρει μονάδα, συνεπώς $\sum_k \langle a \rangle = 1$ και

$$\langle \Psi | \phi' \rangle = 2 - \langle \Psi | \phi \rangle \quad (133)$$

Αναδιατάσσοντας παίρνουμε

$$\langle \Psi | \frac{\phi + \phi'}{2} \rangle = 1 \quad (134)$$

που προφανώς σημαίνει ότι

$$|\Psi\rangle = \left| \frac{\phi + \phi'}{2} \right\rangle \quad (135)$$

Ερμηνεύοντας τώρα αυτή τη σχέση, το $\left| \frac{\phi + \phi'}{2} \right\rangle$, δηλαδή το $|\psi\rangle$ είναι ένα διάνυσμα που διχοτομεί¹⁹ τα $|\phi\rangle, |\phi'\rangle$. Επίσης από την 108 φαίνεται ότι δε διατηρεί την ομοτιμία, άρα δεν είναι στροφή. Αυτό δε μπορεί παρά να σημαίνει πως η δράση του $H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n}$ είναι να ανακλά μια γενική κατάσταση $|\phi\rangle$ ως προς την $|\Psi\rangle$ στο επίπεδο που ορίζουν τα $|a\rangle, |b\rangle$ (βλ. σχήμα 20).

Συνολικά λοιπόν η δράση του $G = (H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n})O$ είναι πρώτον να ανακλά την αρχική κατάσταση $|\Psi\rangle$ ως προς τις μη λύσεις $|a\rangle$ και εν συνεχεία να ανακλά εκ νέου την $0|\Psi\rangle$ ως προς την $|\Psi\rangle$ για να καταλήξει στην $G|\Psi\rangle$ (βλ. σχήμα 20). Όμως δύο ανακλάσεις ισοδυναμούν με μία στροφή²⁰. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα με κάθε δράση του G η αρχική κατάσταση $|\Psi\rangle$ να στρίβει όλο και περισσότερο προς τον υπόχωρο των λύσεων. Ακολουθώντας το σχήμα 20 έχουμε

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|a\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|b\rangle \quad (136)$$

$$G|\Psi\rangle = \cos\frac{3\theta}{2}|a\rangle + \sin\frac{3\theta}{2}|b\rangle \quad (137)$$

$$\cdot \quad (138)$$

$$\cdot \quad (139)$$

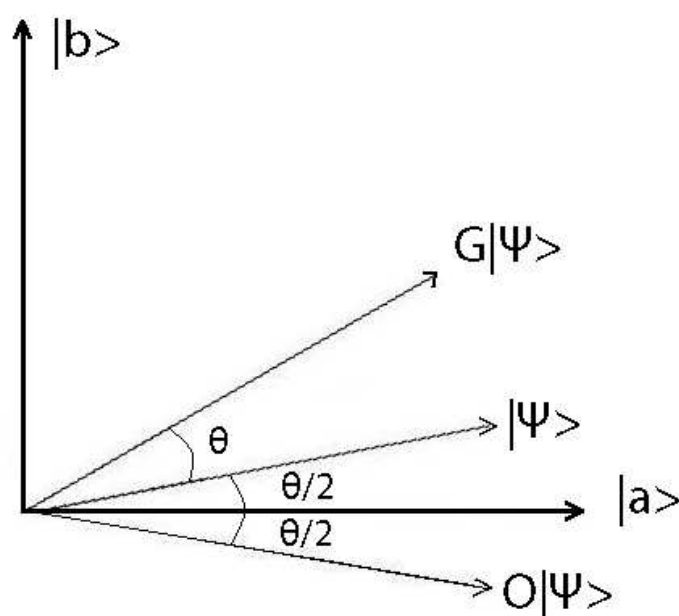
$$G^k|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right)|a\rangle + \sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right)|b\rangle \quad (140)$$

με την αρχική γωνία να ορίζεται από το πλήθος των λύσεων

$$\cos\frac{\theta}{2} = \langle a|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{N-M}{N}} \quad (141)$$

¹⁹Τα διχοτομεί δεδομένου ότι τα $|\phi\rangle, |\phi'\rangle$ είναι μοναδιαία, συνεπώς και ισομήκη.

²⁰Ως γινόμενο δύο ανακλάσεων (αρνητική μοτιμία) έχει ομοτιμία θετική. Επίσης διατηρεί το μέτρο των διανυσμάτων και τα διατηρεί στο ίδιο επίπεδο με τα διανύσματα βάσης. Δεν μπορεί παρά να είναι στροφή σε αυτό το επίπεδο



Σχήμα 20: Γεωμετρική αναπαράσταση ενός βήματος του αλγόριθμου του Grover . Αρχικά η πύλη-μάντης (oracle) ανακλά την $|\Psi\rangle$ ως προς τις μη λύσεις $|a\rangle$ και εν συνεχεία ανακλά την $O|\Psi\rangle$ ως προς την $|\Psi\rangle$. (Όλα τα απεικονιζόμενα διανύσματα είναι μοναδιαία, αλλά τα διανύσματα βάσης παρουσιάζονται μεγαλύτερα για λόγους καλύτερης επιβλεψής.)

Ερχόμενοι στο χρόνο σύγκλισης, πρέπει να βρούμε σε πόσα βήματα (με πόσες δράσεις του G) η $|\Psi\rangle$ θα βρίσκεται όσο το δυνατόν περισσότερο κοντά στην $|b\rangle$ ώστε με μια μέτρηση του συστήματος εκείνη τη χρονική στιγμή να μας δώσει όλες τις λύσεις²¹ του προβλήματος με μεγάλη πιθανότητα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει η αρχική κατάσταση $|\Psi\rangle$ να διανύσει γωνία $\pi/2 - \theta/2$, που σύμφωνα με την 136, $\pi/2 - \theta/2 = \arccos\sqrt{M/N}$. Δεδομένου ότι σε κάθε εφαρμογή της G η $|\Psi\rangle$ στρίβει κατά γωνία θ , το πλήθος των φορών R που θα πρέπει να εφαρμόσουμε το βήμα του Grover για να τερματιστεί επιτυχώς ο αλγόριθμος με γωνιακή απόκλιση από τον υπόχωρο των λύσεων $\theta/2 \leq \pi/4$ είναι

$$R = P\left(\frac{\arccos\sqrt{M/N}}{\theta}\right), \quad (142)$$

όπου $P(x)$ δηλώνει στρογγυλοποίηση του x στον κοντινότερο ακέραιο.

Για να βρούμε ένα ανώτερο όριο στο πλήθος R των κλήσεων του βήματος Grover βλέπουμε ότι $R \leq \pi/2\theta$. Υποθέτοντας ότι το πλήθος των λύσεων είναι λιγότερο από το μισό του πλήθους της συνολικής βάσης²² ($M \leq N/2$) έχουμε

$$\frac{\theta}{2} \geq \sin\frac{\theta}{2} = \quad (143)$$

που μας δίνει το άνω όριο του χρόνου σύγκλισης του αλγόριθμου του Grover :

$$R \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \quad (144)$$

Αυτό το όριο μας δίνει την ριζική επιτάχυνση του κβαντικού αλγόριθμου ($O(\sqrt{N})$ βήματα) σε σχέση με τον αντίστοιχο κλασικό που απαιτεί $O(N/2)$ βήματα.

Όσον αφορά την πιθανότητα σύγκλισης, δεδομένου ότι στο τέλος του αλγορίθμου το $G^{\sqrt{N}}|\Psi\rangle$ βρίσκεται εντός μιας γωνίας $\theta/2 \leq \pi/2$ από το $|b\rangle$, η μέτρηση της $G^{\sqrt{N}}|\Psi\rangle$ στην υπολογιστική βάση θα μας δώσει τον υπόχωρο των λύσεων $|b\rangle$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$. Αυτή η πιθανότητα μπορεί να αυξηθεί προσθέτοντας στη βάση καταστάσεις μη λύσεις ώστε να ισχύει $M \ll N$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $\theta \simeq 2\sqrt{M/N}$ με αποτέλεσμα η γωνιακή απόκλιση από τη λύση να είναι $\theta/2 \leq \sqrt{M/N}$ που αντιστοιχεί σε πιθανότητα λάθους μικρότερη από M/N .

²¹ Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος του Grover δίνει ως λύση όλο το πλήθος των λύσεων του ζητούμενου προβλήματος. Δεν βρίσκει μια λύση, συνεχίζει τη ρουτίνα για να βρει την επόμενη κοκ.

²² Εάν αυτή η υπόθεση δεν ισχύει από την πρώτη κι όλες εφαρμογή του G η $|\Psi\rangle$ θα ξεπεράσει κατά πολύ το $|b\rangle$ και ο αλγόριθμος θα έχει προβλήματα σύγκλισης. Αυτό μπορεί να διορθωθεί εύκολα με την προσθήκη άλλων N στοιχείων, μη λύσεων, στον αρχικό χώρο Hilbert με αποτέλεσμα να ισχύει πάντοτε η ζητούμενη συνθήκη. Ο αλγόριθμος γίνεται μόλις $\sqrt{2}$ φορές πιο αργός.

4.3 Κβαντική εξέλιξη και ο αλγόριθμος του Grover

Μπορεί στην προηγούμενη παράγραφο να παρουσιάστηκε και να αναλύθηκε ο αλγόριθμος του Grover αλλά όχι και ο τρόπος σκέψης που οδήγησε σε αυτόν. Είναι αρκετά ενδιαφέρον ότι ο Grover που τον επινόησε, παρά το γεγονός ότι προέρχεται καθαρά από τον χώρο των υπολογιστών, σκέφτηκε με φυσικά επιχειρήματα για να καταλήξει σε αυτόν [12]. Για την ακρίβεια, αυτό που ουσιαστικά έκανε ήταν να δημιουργήσει ένα τρόπο κβαντικής προσομοίωσης για τη χρονική εξέλιξη μιας κβαντικής κατάστασης με την εξίσωση του Schrödinger. Κωδικοποιώντας στη χαμιλτονιανή τη λύση ενός προβλήματος αναζήτησης ως κατάσταση ελαχίστης ενέργειας, απλά αφήνοντας το σύστημα να εξελιχθεί υπό αυτή την κατάλληλα επιλεγμένη χαμιλτονιανή, θα μας δώσει ως τελική κατάσταση του συστήματος τη ζητούμενη λύση. Υπό αυτό το πρίσμα αναδεικνύεται και η φυσική σημασία του συγκεκριμένου αλγόριθμου.

Ξεκινάμε γράφοντας την εξίσωση του Schrödinger

$$i\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle \quad (145)$$

$$i\frac{d}{dt}\Psi(x,t) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\Psi(x,t) \quad (146)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi(x,t) = i\left(\frac{d^2}{dx^2} - iV(x)\right)\Psi(x,t) \quad (147)$$

όπου θεωρήσαμε ότι το δυναμικό δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το χρόνο και $\hbar = m = 1$. Παρατηρούμε ότι η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης εξαρτάται από έναν δυναμικό όρο και τον κινητικό όρο που μοιάζει με εξίσωση διάχυσης, εκτός από τη μιγαδική σταθερά.

Αν και στις παραπάνω εξισώσεις η κυματοσυνάρτηση είναι συνεχής συνάρτηση του χώρου και του χρόνου, άρα και ο αντίστοιχος χώρος Hilbert, για να μπορέσουμε να δημιουργήσουμε ένα υπολογιστικό αλγόριθμο θα πρέπει να διακριτοποιήσουμε²³ τους τελεστές

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \frac{\Psi(x,t+dt) - \Psi(x,t)}{dt} \quad (148)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) = \frac{\Psi(x+dx,t) + \Psi(x-dx,t) - 2\Psi(x,t)}{(dx)^2} \quad (149)$$

²³ Αυτή η διακριτοποίηση ήθειςται να γίνεται στα υπολογιστικά προβλήματα όμως οι προκύπτοντες διακριτοί τελεστές δεν σέβονται τους κανόνες μετάθεσης της διακριτής κβαντομηχανικής. Αυτό το πρόβλημα θα μας αποσχολήσει παρακάτω αλλά θα το αγνοήσουμε προς το παρόν. Επίσης αξίζει να παρατηρηθεί ότι διακριτοποιούνται και ο χώρος και ο χρόνος. Θα δούμε στο κεφάλαιο των κβαντικών τυχαίων περιπάτων ότι υπάρχουν και αλγόριθμοι συνεχούς χρόνου.

Εισάγοντας τη σταθερά $\epsilon = \frac{dt}{(dx)^2}$ η εξίσωση του Schrödinger γίνεται

$$\Psi(x, t+dt) = (1 - iV(x)dt - 2i\epsilon)\Psi(x, t) + i\epsilon[\Psi(x+dx, t) + \Psi(x-dx, t)] \quad (150)$$

που σε μορφή πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix} \Psi(x_1, t+dt) \\ \Psi(x_2, t+dt) \\ \Psi(x_3, t+dt) \\ \dots \\ \Psi(x_N, t+dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & i\epsilon & 0 & \dots & i\epsilon \\ i\epsilon & A_2 & i\epsilon & \dots & 0 \\ 0 & i\epsilon & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i\epsilon & 0 & 0 & i\epsilon & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(x_1, t) \\ \Psi(x_2, t) \\ \Psi(x_3, t) \\ \dots \\ \Psi(x_N, t) \end{pmatrix} \quad (151)$$

όπου

$$A_j = 1 - i(N-1)\epsilon - iV(x_j)dt \quad (152)$$

ή για $N \gg 1$

$$A_j = 1 - iN\epsilon - iV(x_j)dt \quad (153)$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι αυτός ο πίνακας μετάβασης είναι κατά προσέγγιση μοναδιακός, υπολογίζοντας ότι το μέτρο των κάθετων στηλών του είναι $1 + O((dt)^2) + O(\epsilon^2)$ ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο στηλών είναι της τάξης $0 + O((dt)^2) + O(\epsilon^2)$. Διατηρώντας την τάξη απόκλισης από τη μοναδιακότητα στην ίδια τάξη ως προς dt και ϵ μπορούμε να γράψουμε την 151 ως

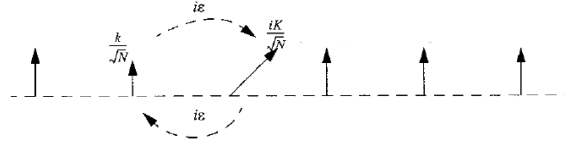
$$|\Psi(x, t+dt)\rangle = DR|\Psi(x, t)\rangle \quad (154)$$

όπου το $|\Psi(x, t+dt)\rangle$ υποδηλώνει το διάνυσμα στήλη στο αριστερό μέρος της 151 και το $|\Psi(x, t)\rangle$ αντίστοιχα, ενώ

$$D = \begin{pmatrix} 1 - i2\epsilon & i\epsilon & 0 & \dots & i\epsilon \\ i\epsilon & 1 - i2\epsilon & i\epsilon & \dots & 0 \\ 0 & i\epsilon & 1 - i2\epsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i\epsilon & 0 & 0 & i\epsilon & 1 - i2\epsilon \end{pmatrix} \quad (155)$$

$$R = \begin{pmatrix} e^{-iV(x_1)dt} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-iV(x_2)dt} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iV(x_3)dt} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-iV(x_N)dt} \end{pmatrix} \quad (156)$$

Από τους δύο παραπάνω πίνακες αυτός του δυναμικού, ο R , είναι εμφανώς μοναδιακός ενώ ο κινητικός όρος, ο D , αποκλίνει από τη μοναδιακότητα κατά $O(\epsilon^2)$.



Σχήμα 21: Η δράση του δυναμικού R είναι να προσθέτει μια φάση στη λύση και η δράση του κινηματικού όρου D να διαχέει το πλάτος πιθανότητας προς αυτήν και μόνο. Δεδομένου ότι οι υπόλοιπες καταστάσεις έχουν ίδιο πλάτος δέν υπάρχει διάχυση μεταξύ τους.

Επαναλαμβάνοντας τον απειροστό μετασχηματισμό τ/dt φορές, σε πεπερασμένο χρόνο τ παίρνουμε

$$|\Psi(x, \tau)\rangle = (DR)(DR) \cdots (DR)|\Psi(x, 0)\rangle \quad (157)$$

Έχοντας βρει ποια είναι η δράση της εξίσωσης Schrödinger σε διακριτό χώρο μπορούμε να ρυθμίσουμε τη χαμιλτονιανή κατάλληλα για το πρόβλημα της αναζήτησης δεδομένων. Η ιδέα είναι απλή. Θα απεικονίσουμε το κάθε στοιχείο i των δεδομένων μας στις καταστάσεις $\Psi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Για να εκμεταλευτούμε τις δυνατότητες της κβαντικής παραλληλίας θα κατασκευάσουμε την ισοβαρή²⁴ υπέρθεση αυτών ως αρχική κατάσταση του συστήματος. Εν συνεχεία θα επιλέξουμε το δυναμικό ώστε η κατάσταση που αντιστοιχεί στη λύση μας (έστω μία) να είναι κατάσταση ελάχιστης ενέργειας. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε η τελική κατάσταση του συστήματος να έχει (σχεδόν) μηδενικό πλάτος πιθανότητας να βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση εκτός από την κατάσταση λύση που θα έχει πλάτος πιθανότητας (σχεδόν) ένα. Ως αποτέλεσμα, με μια μέτρηση θα πάρουμε με πολύ μεγάλη πιθανότητα τη ζητούμενη λύση.

Οι επιλογές της αρχικοποίησης σε ισοβαρή κατάσταση και της απόδωσης ελάχιστης ενέργειας στη λύση αποδίδονται στον αλγόριθμο με την επιλογή των

²⁴ Δεδομένου ότι η βάση δεδομένων στην οποία ψάχνουμε είναι μη δομημένη δεν υπάρχει κανένας λόγος κάποια κατάσταση να έχει μεγαλύτερο βάρος από κάποια άλλη. Αν η βάση είχε κάποια δομή (π.χ. αλφαβητική σειρά ονομάτων) η υπέρθεση δε θα ήταν ισοβαρής ως απεικόνιση προτιμητέων καταστάσεων.

D, R ως εξής

$$D = \begin{pmatrix} 1 - iN\epsilon & i\epsilon & i\epsilon & \dots & i\epsilon \\ i\epsilon & 1 - iN\epsilon & i\epsilon & \dots & i\epsilon \\ i\epsilon & i\epsilon & 1 - iN\epsilon & \dots & i\epsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i\epsilon & i\epsilon & i\epsilon & i\epsilon & 1 - iN\epsilon \end{pmatrix} \quad (158)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (159)$$

Αντικαθιστώντας τα μηδενικά στον πίνακα διάχυσης με $i\epsilon$ ο κινητικός όρος δρα σε όλα τα στοιχεία της βάσης όπως αναμένουμε από την κβαντική παραλληλία²⁵, ενώ στον πίνακα του δυναμικού R όλες οι καταστάσεις παραμένουν ανεπηρέαστες εκτός από την κατάσταση λύση, έστω τη δεύτερη σε αυτή την περίπτωση, η οποία υπόκειται μια στροφή φάσης²⁶ κατά $e^{i\gamma}$ που για $\gamma \geq 0$ αντιστοιχεί σε αρνητικό δυναμικό.

Ας εξετάσουμε τώρα τη δράση αυτών των πινάκων σε μια αρχική κατάσταση ισοβαρούς υπέρθεσης. Ο πίνακας διάχυσης έχει ως αποτέλεσμα δυναμικής ισορροπίας μηδενική δράση στις καταστάσεις μή λύσεις καθώς είναι όλες στο ίδιο δυναμικό-ίδια φάση, για τον ίδιο που λόγο δεν υπάρχει ροή θερμότητας μεταξύ δύο σημείων με την ίδια θερμοκρασία. Ο πίνακας R όμως, επίσης αφήνει τις υπόλοιπες καταστάσεις ανέπαφες εκ κατασκευής, αλλά στρίβει τη φάση της κατάστασης λύσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργηθεί 'διαφορά δυναμικού' ανάμεσα σε αυτήν και όλες τις υπόλοιπες και λόγω του D να διαχυθεί πλάτος πιθανότητας από **όλες** τις υπόλοιπες καταστάσεις $|x\rangle$ προς την κατάσταση λύση $|x_s\rangle$. Είναι σημαντικό να προσέξουμε τη διαφορά σε σχέση με την κλασική εξίσωση διάχυσης κατά την οποία σε κάθε στιγμιότυπο οι κοντινές καταστάσεις στην $|x_s\rangle$ θα είχαν πολύ μεγαλύτερη διάχυση προς αυτήν σε σχέση με τις πιο απομακρισμένες. Όμως λόγω της κβαντικής υπέρθεσης, μια έκφραση της μη τοπικότητας της κβαντομηχανικής, **όλες** οι υπόλοιπες καταστάσεις συνεισφέρουν στην $|x_s\rangle$ κατά το ίδιο ποσοστό.

Πριν προχωρήσουμε σε λεπτομέρεια τον αλγόριθμο σκόπιμο είναι να δούμε ποιοτικά το τι γίνεται και το χρόνο που χρειάζεται για να λύσει το πρόβλημα. Αρχικά όλες οι καταστάσεις βρίσκονται σε υπέρθεση και έχουν το ίδιο πλάτος πιθανότητας 1. Καθώς ο αλγόριθμος προχωρά έστω οι καταστάσεις

²⁵Για να εξισορροπηθεί το πλεόνασμα στις στήλες και να μην υπάρχει μεγάλη απόκλιση από τη μοναδιακότητα οι διαγώνιοι όροι έγιναν $1 - iN\epsilon$

²⁶Εξ' ου και ο συμβολισμός R από Rotation.

$|x\rangle$ έχουν πλάτος $k\sqrt{N}$ και η $|x_s\rangle = K\sqrt{N}$ με το K να αυξάνει και το k να μειώνεται. Υπολογίζοντας τη ροή πλάτους πιθανότητας λόγω διάχυσης στην $|x_s\rangle$ παρατηρούμε ότι είναι (βλ. σχήμα 21)

$$|x_s\rangle: \frac{iK}{\sqrt{N}} + \frac{ik}{\sqrt{N}}N\epsilon + \frac{K}{\sqrt{N}}N\epsilon \quad (160)$$

ενώ για τις υπόλοιπες καταστάσεις

$$|x\rangle: \frac{k}{\sqrt{N}} - \frac{K}{\sqrt{N}}\epsilon - \frac{iK}{\sqrt{N}}N\epsilon \quad (161)$$

Ειδικά στα πρώτα βήματα το $k \simeq 1$ και η (160) δίνει ροή πλάτους πιθανότητας στην $|x_s\rangle$ της τάξης του $N\epsilon/\sqrt{N}$ και στροφή της φάσης κατά $N\epsilon$, ενώ η φάση και το πλάτος πιθανότητας των υπόλοιπων καταστάσεων παραμένουν σχεδόν αμετάβλητες.

Δεδομένου ότι η ροή πλάτους πιθανότητας σε κάθε βήμα, όπως φαίνεται και από τον πίνακα D , είναι $i\epsilon$, θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ότι αν το ϵ γίνει αρκετά μεγάλο, της τάξης της μονάδας, θα μπορούσε ο αλγόριθμος να συγκλίνει στη λύση σε ένα μόνο βήμα. Δυστυχώς αυτό δεν είναι δυνατόν γιατί όπως έχει ειπωθεί, ο πίνακας D είναι μόνο κατά προσέγγιση μοναδιακός σε τάξη $O(N\epsilon^2)$. Συνεπώς, για να είναι καλή η προσέγγιση θα πρέπει να ισχύει τουλάχιστον ότι $\epsilon = O(1/N)$, πράγμα που συνεπάγεται ότι η ροή πλάτους πιθανότητας στην $|x_s\rangle$ είναι της τάξης του $1/\sqrt{N}$ και η στροφή της φάσης της τάξης της μονάδας. Εάν ρυθμίσουμε τον πίνακα R ώστε να αναιρεί ακριβώς αυτή τη στροφή θα μπορούσαμε με επαναλαμβανόμενες εφαρμογές του γινομένου DR να μεταφέρουμε όλο το πλάτος πιθανότητας στην $|x_s\rangle$. Αφού σε κάθε βήματα η ροή θα είναι της τάξης του $1/\sqrt{N}$, έπεται ότι χρειάζονται \sqrt{N} βήματα για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου, το γνωστό αποτέλεσμα από τον αλγόριθμο του Grover .

Προχωρώντας στις λεπτομέρειες του αλγορίθμου, θα πρέπει να ρυθμίσουμε ακριβώς το γ του πίνακα του δυναμικού και να καταστήσουμε τον D ακριβώς μοναδιακό για να μπορέσει να προσομοιωθεί σε ένα κβαντικό κύκλωμα. Το πρώτο προκύπτει εύκολα από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου. Για να κάνει μια πλήρη περιστροφή της φάσης θα πρέπει $\gamma = \pi$. Το δεύτερο είναι λίγο πιο τεχνικό ζήτημα²⁷ και αποδεικνύεται ότι ο μοναδικός πίνακας διάχυσης (με την έννοια ότι είναι αναλλοίωτος σε μεταθέσεις) που είναι μοναδιακός είναι

²⁷ Λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στο [12]

της μορφής

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ & & & \dots & \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} \quad (162)$$

με τα a, b να είναι πραγματικά και να υπόκεινται στους περιορισμούς $1 - \frac{2}{a}$ και $b = \pm \frac{1}{a}$.

Εάν επιλέξουμε τα $b = \frac{2}{N}$ $a = -1 + \frac{2}{N}$ οι δύο πίνακες μπορούν να γραφτούν ως

$$D = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \dots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & -1 + \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \dots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & -1 + \frac{2}{N} & \dots & \frac{2}{N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & -1 + \frac{2}{N} \end{pmatrix} \quad (163)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (164)$$

και οι 160, 161 γίνονται

$$|x_s\rangle: N \frac{2}{N} \left(\frac{k}{\sqrt{N}} + \frac{K}{\sqrt{N}} \right) \quad (165)$$

$$|x\rangle: \frac{k}{\sqrt{N}} - \frac{2}{\sqrt{N}} \frac{k}{\sqrt{N}} - \frac{2K}{n\sqrt{N}} \quad (166)$$

αντίστοιχα. Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με πριν καταλήγουμε και πάλι ότι απαιτούνται \sqrt{N} βήματα για να συγκεντρωθεί όλο το πλάτος πιθανότητας στην κατάσταση $|x_s\rangle$.

Σημαντικό είναι να δει κανείς ότι τα παραπάνω προέκυψαν χωρίς να υπάρχει η απαίτηση γνώσης της ζητούμενης κατάστασης, απλά δυνατότητα αλλαγής της φάσης της και μάλιστα για να γίνει ο αλγόριθμος αποδοτικότερος η αλλαγή φάσης αυτή θα πρέπει να είναι κατά π , αυτό που κάνει και η πύλη μάντης του αλγόριθμου του Grover .

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη ότι η παραπάνω διαδικασία ταυτίζεται με τον αλγόριθμο του Grover θα πρέπει να δείξουμε ότι οι πίνακες εξέλιξης είναι οι ίδιοι με αυτούς που χρησιμοποιούνται στο βήμα Grover της προηγούμενης παραγράφου. Αυτό είναι εύκολο και έχει ήδη αποδειχθεί για τον πίνακα R

που όπως είπαμε ταυτίζεται με τη λειτουργία του μάντη. Συνεπώς $R = \hat{O}$. Ερχόμενοι στον πίνακα D παρατηρούμε ότι μπορεί να γραφεί ως

$$D = H^{\otimes N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} H^{\otimes N} \quad (167)$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$D = H^{\otimes N} (2|0\rangle\langle 0| - I) H^{\otimes N} \quad (168)$$

και φυσικά ταυτίζεται ακριβώς με το δεύτερο μέρος του βήματος του Grover. Συνολικά λοιπόν ισχύει $DR = G$.

Αυτή ήταν η λογική που ακολούθησε ο Grover κατά τη δημιουργία του αλγορίθμου του. Μπορεί όμως να δει κανείς ότι γενικότερα οποιαδήποτε χαμιλτονιανή και να χρησιμοποιήσει, αρκεί αυτή να έχει ως κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας την $|x_s\rangle$ και αρχική κατάσταση την ισοβαρή υπέρθεση $|\Psi\rangle$, όπως οι

$$H = |x_s\rangle\langle x_s| + |\Psi\rangle\langle \Psi| \quad (169)$$

$$H = |x_s\rangle\langle \Psi| + |\Psi\rangle\langle x_s| \quad (170)$$

θα καταλήξει στον αλγόριθμο του Grover. Αυτή η παρατήρηση φαίνεται να αποδίδει ένα είδος παγκοσμιότητας στον αλγόριθμο του Grover και προϋδεάζει για την παράγραφο που ακολουθεί.

Τέλος, πολύ χρήσιμο συμπέρασμα της παραπάνω ανάλυσης, που θα χρειαστούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε κβαντικά κυκλώματα και αλγόριθμους γνωρίζοντας την χαμιλτονιανή ενός κβαντικού συστήματος. Αυτό είναι πολύ θετικό αφού μεν η κατασκευή ενός κβαντικού κυκλώματος υπόκειται σε πολύ λίγους περιορισμούς, η δε κατασκευή όμως μιας χαμιλτονιανής υπόκειται σε αυστηρούς φυσικούς περιορισμούς συμμετρίας και έχουμε πολύ λιγότερη ελευθερία.

4.4 Ο αλγόριθμος του Grover είναι βέλτιστος

Στο τέλος της ανάλυσης του αλγορίθμου του Grover θα αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητά του. Είναι βέλτιστος [13], [14]. Δηλαδή δεν υπάρχει άλλος κβαντικός αλγόριθμος που μπορεί να λύσει πρόβλημα αναζήτησης δεδομένων πιο γρήγορα από τον αλγόριθμο του Grover. Συνεπώς γνωρίζουμε ότι δεν μπορούμε να επιτύχουμε περαιτέρω κβαντική επιτάχυνση. Θα παρατεθεί η

απόδειξη για την περίπτωση μοναδικής λύσης $|x\rangle$ στο πρόβλημα αναζήτησης για λόγους ευκολίας. Η γενίκευση για περισσότερες λύσεις είναι άμεση.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια πύλη μάντη με τη δράση $O_x = I - 2|x\rangle\langle x|$ με το γνωστό αποτέλεσμα της αντιστροφής της φάσης της λύσης. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι έχουμε δύο τρόπους εξέλιξης μιας αρχικής κατάστασης $|\Psi\rangle$. Μία με k το πλήθος μοναδιακών μετασχηματισμούς U_i και μία όπου πριν από κάθε δράση του U_i προηγείται μία δράση της O_x όπως φαίνεται παρακάτω

$$|\Psi_k^x\rangle = U_k O_x U_{k-1} O_x \dots U_1 O_x |\Psi\rangle \quad (171)$$

$$|\Psi_k\rangle = U_k U_{k-1} \dots U_1 |\Psi\rangle \quad (172)$$

Εάν ορίσουμε την ποσότητα

$$D_k = \sum_x \|\Psi_k^x - \Psi_k\|^2, \quad (173)$$

όπου για ευκολία χρησιμοποιήσαμε $|\Psi\rangle = \Psi$, αυτή εκφράζει τη διαφορά που θα έχει η εξέλιξη του συστήματος κάτω από ένα γενικό μετασχηματισμό σε σχέση με την εξέλιξή του με τη βοήθεια της πύλης μάντη. Εάν είναι πολύ μικρή σημαίνει ότι η εξέλιξη με τη βοήθεια του μάντη δε διαχωρίζει και πολύ την τελική κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη δυνατή εξέλιξη, συνεπώς είναι πολύ απίθανο αυτή να έχει συγκλίνει στη λύση $|x\rangle$. Εάν αποδείξουμε πρώτον ότι ο ρυθμός αύξησης του D_k είναι άνω φραγμένος από $D_k \leq 4k^2$ και δεύτερον ότι για να έχουμε ικανοποιητική πιθανότητα να βρούμε τη λύση θα πρέπει $D_k = O(N)$ προκειμένου να μπορεί να διαχωρίσει N αντικείμενα, θα έχουμε αποδείξει ότι για να βρούμε με μεγάλη πιθανότητα την $|x\rangle$ χρειαζόμαστε το πολύ \sqrt{N} βήματα.

Η πρώτη πρόταση αποδεικνύεται με τη μέθοδο της επαγωγής. Για $k = 0$ ισχύει η ισότητα της πρότασης. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το βήμα k

$$D_k \leq 4k^2 \quad (174)$$

ενώ για το βήμα $k + 1$ έχουμε

$$D_{k+1} = \sum_x \|O_x \Psi_k^x - \Psi_k\|^2 \quad (175)$$

$$= \sum_x \|O_x(\Psi_k^x - \Psi_k) + (O_x - I)\Psi_k\|^2 \quad (176)$$

Βλέποντας το δεξί μέλος ως το τετράγωνο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\|a+b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} D_{k+1} &\leq \sum_x (\|\Psi_k^x - \Psi_k\|^2 + 4\|\Psi_k^x - \Psi_k\| |\langle x|\Psi_k \rangle| + 4|\langle \Psi_k|x \rangle|^2) \\ &\leq D_k + 4\left(\sum_x (\|\Psi_k^x - \Psi_k\|^2)^{1/2}\right) \left(\sum_{x'} |\langle \Psi_k|x' \rangle|^2\right)^{1/2} + 4 \end{aligned} \quad (177)$$

$$\leq D_k + 4\sqrt{D_k} + 4 \quad (178)$$

όπου στις δυο τελευταίες ανισότητες χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Schwarz και η σχέση πληρότητας $\sum_x |\langle x|\Psi_k \rangle|^2 = 1$. Από την (174) έχουμε

$$D_{k+1} \leq 4k^2 + 8k + 4 = 4(k+1)^2 \quad (179)$$

και η ανισότητα αποδείχθη.

Προχωρώντας στη δεύτερη πρόταση θα χρειαστούμε μια ελάχιστη πιθανότητα εύρεσης της $|x \rangle$ με την οποία θεωρούμε ότι αλγόριθμος είναι επιτυχής. Η ελάχιστη δυνατή επιλογή είναι $1/2$ που για την προβολή της τελικής κατάστασης στην λύση $|x \rangle$ σημαίνει

$$|\langle x|\Psi_k^x \rangle|^2 \geq 1/2 \quad (180)$$

Στα πλαίσια που μας ενδιαφέρει μόνο η πιθανότητα εύρεσης της κατάστασης και όχι το πλάτος πιθανότητας δεν μας απασχολούν τυχόν ολικές φάσεις των καταστάσεων και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $|\langle x|\Psi_k^x \rangle| = \langle x|\Psi_k^x \rangle$. Κατόπιν τούτου και μέσω της (180) έχουμε

$$\|\Psi_k^x - x\|^2 = 2 - 2|\langle x|\Psi_k^x \rangle| \leq 2 - \sqrt{2} \quad (181)$$

Εάν ορίσουμε δύο μέτρα επιτυχίας του αλγόριθμου, ένα για κάθε έναν από τους δύο τρόπους εξέλιξης των (171), ως

$$E_k = \sum_x \|\Psi_k^x - x\|^2 \quad (182)$$

$$F_k = \sum_x \|x - \Psi_k\|^2 \quad (183)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε το D_k με τη μορφή

$$D_k = \sum_x \|(\Psi_k^x - x)(x - \Psi_k)\|^2 \quad (184)$$

$$\geq \sum_x \|\Psi_k^x - x\|^2 - 2 \sum_x \|\Psi_k^x - x\| \|x - \Psi_k\| + \sum_x \|x - \Psi_k\|^2 \quad (185)$$

$$= E_k + F_k - 2 \sum_x \|\Psi_k^x - x\| \|x - \Psi_k\| \quad (186)$$

$$\geq E_k + F_k - 2\sqrt{E_k F_k} = (\sqrt{F_k} - \sqrt{E_k})^2 \quad (187)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\sum_x \|\Psi_k^x - x\| \|x - \Psi_k\| \leq \sqrt{E_k F_k} \quad (188)$$

Για το E_k έχουμε μια σχέση ανισότητας. Χρειαζόμαστε μία και για το F_k . Για οποιαδήποτε κανονικοποιημένη κατάσταση σε ένα χώρο Hilbert με $|x\rangle$ μια ορθοκανονική βάση σε αυτόν έχουμε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\sum_x \|\Psi - x\|^2 = \sum_x (\|\Psi\|^2 + \|x\|^2 - 2\|\Psi\| \|x\|) \quad (189)$$

$$\geq \sum_x \|\Psi\|^2 + \sum_x \|x\|^2 - 2 \sum_x |\langle \Psi | x \rangle|^2 \quad (190)$$

$$= 1N + 1N - 2 \quad (191)$$

$$\geq 2N - 2\sqrt{N} \quad (192)$$

όπου το τελευταίο βήμα εισήχθη δεδομένου ότι $N \geq 1$ για διευκόλυνση στα επόμενα.

Γνωρίζοντας λοιπόν ότι

$$F_k \geq 2N - 2\sqrt{N} \quad (193)$$

$$E_k \leq (2 - \sqrt{2})N \quad (194)$$

έπεται από την (184) πως

$$D_k \geq cN \quad , \mu\epsilon \ c \leq [\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}]^2 \quad (195)$$

Έχοντας και ως δεδομένο το αποτέλεσμα $D_k \leq 4k^2$ από την επαγωγική μέθοδο της πρώτης απόδειξης προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα

$$k \geq \sqrt{\frac{cN}{4}} \quad (196)$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι στο [15] παρουσιάζεται μια πιο λεπτομερής απόδειξη, που παρολαυτά ακολουθεί περίπου τα ίδια βήματα, η οποία αποδεικνύει ότι το κάτω όριο ισχύει και για αλγόριθμους με μέγιστη πιθανότητα εύρεσης της λύσης. Η μελέτη εξετάζει και αλγόριθμους που χρησιμοποιούν μετρήσεις κατά τη λειτουργία τους, όπως και το ενδεχόμενο παράλληλης επεξεργασίας με χρήση πολλών πυλών-Oracle χωρίς να αλλάζει το όριο.

5 ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ.

Με τον αλγόριθμο του Grover είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα αντικείμενο σε μια βάση δεδομένων πιο γρήγορα από ό,τι με έναν κλασσικό αλγόριθμο. Αυτή η επιτάχυνση κατά \sqrt{N} επιτυγχάνεται σε μια εντοπισμένη βάση δεδομένων. Εάν φανταστούμε όμως μια βάση της οποίας τα στοιχεία έχουν μια διάταξη στο χώρο, για παράδειγμα αποτελούν ένα γράφο, μόνο και μόνο η μετακίνηση από το ένα σημείο της βάσης στο άλλο απαιτεί κάποιο χρόνο. Αυτός θα πρέπει να συνυπολογιστεί στην ταχύτητα εύρεσης του ζητούμενου αντικειμένου. Χρειαζόμαστε έναν έξυπνο τρόπο ώστε να μπορούμε να σαρώσουμε τη βάση πολύ γρήγορα.

Η μέθοδος των τυχαίων περιπάτων (Random Walks) είναι πολύ γνωστή στους κλασσικούς υπολογιστές για την ταχύτητα σάρωσης ενός γράφου. Εδώ θα γενικεύσουμε τη βασική ιδέα των τυχαίων περιπάτων για την εφαρμογή τους σε qubits και θα δούμε ότι χρησιμοποιώντας και πάλι την ιδιότητα του εναγκαλισμού μπορούμε να επιτύχουμε πολύ πιο γρήγορη σάρωση ενός γράφου με τη χρήση των λεγόμενων κβαντικών τυχαίων περιπάτων (Quantum Random Walks).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά του κλασσικούς τυχαίους περιπάτους και στη συνέχεια το κβαντικό τους ανάλογο.

5.1 Κλασικοί τυχαίοι περίπατοι.

Η πιο κλασική εφαρμογή των τυχαίων περιπάτων βρίσκεται σε ένα d -διάστατο άπειρο κανονικό γράφο, ένα d -διάστατο άπειρο πλέγμα, στον ευκλείδειο χώρο. Κάθε πλεγματοειδές σημείο, ή κόμβος, έχει q πρώτους γείτονες. Μπορούμε να φανταστούμε σε αυτό το πλέγμα ότι σε μια χρονική στιγμή t_0 υπάρχει ένας περιπατητής σε έναν κόμβο του x_0 . Μετά από ένα πεπερασμένο και ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt πηδάει από το δεδομένο πλεγματοειδές σημείο σε ένα διπλανό του x_1 με πιθανότητα $1/q$ για το καθένα²⁸. Μπορούμε να φανταστούμε ότι πριν από κάθε βήμα κάποιος πετάει ένα νόμισμα και ανάλογα με το αποτέλεσμα ο περιπατητής θα κινηθεί προς τη μία κατεύθυνση ή την άλλη. Μετά από ένα ακόμα Δt πηδάει σε ένα άλλο διπλανό κ.ο.κ. Κάθε μετάβαση θεωρείται στατιστικά ανεξάρτητη από οποιαδήποτε άλλη²⁹. Με αυτό το σκεπτικό, αν στην

²⁸Εν γένει η πιθανότητα θα μπορούσε να είναι διαφορετική για κάθε σημείο αλλά εδώ εξετάζουμε την απλούστερη περίπτωση

²⁹Η στατιστική ανεξαρτησία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι ο τυχαίος περίπατος διαδικασία Markov

αρχική θέση αφήσουμε πολλούς περιπατητές, μετά από συγκεκριμένο χρόνο θα έχει καλυφθεί μεγάλο ποσοστό του γράφου.

Εν γένει οι ιδιότητες του περίπατου εξαρτώνται ισχυρά από τις ιδιότητες του πλέγματος. Όμως, σε αυτή τη συγκριτική παρουσίαση κλασικών και κβαντικών τυχαίων περιπάτων, θα αντιπαραβάλλουμε τις βασικότερες ασυμπτωτικές τους ιδιότητες που είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του πλέγματος. Για αυτό η μελέτη μας της απλής μορφής του άπειρου ορθοκανονικού πλέγματος μας καλύπτει.

Για ευκολία χειρισμού του πλέγματος ορίζουμε την ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_d στον \mathbb{R}^d ώστε κάθε κόμβος να μπορεί να εκφραστεί ως $\vec{x} = x^\mu e_\mu$ με $x^\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$. Για αυτό το πλέγμα έχουμε $q = 2d$. Η πιο βασική ποσότητα που φυσικά θέλει να υπολογίσει κανείς είναι η πιθανότητα (δεσμευμένη πιθανότητα) ο περιπατητής να βρεθεί στο σημείο x_1 τη στιγμή t_1 δεδομένου ότι τη στιγμή t_0 βρισκόταν στη θέση x_0 $P(x_1, t_1; x_0, t_0)$. Η πρώτη προφανής του ιδιότητα είναι ότι αν δεν περάσει χρονικό διάστημα Δt δεν μπορεί να γίνει καμία μετάβαση.

$$P(x_1, t_0; x_0, t_0) = \delta_{x_1, x_0} \quad (197)$$

Η πιθανότητα αυτή μπορεί να οριστεί μόνο για $t_1 \geq t_0$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση του άπειρου πλέγματος ο χώρος και ο χρόνος είναι ομογενείς και η πιθανότητα εξαρτάται μόνο από τις διαφορές στο χώρο και το χρόνο

$$P(x_1, t_1; x_0, t_0) = P(x_1 - x_0; t_1 - t_0) \quad (198)$$

ενώ για κάθε χρονική στιγμή t_1 θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κανονικοποίησης.

$$\sum_{x_1} P(x_1, t_1; x_0, t_0) = 1 \quad (199)$$

Πέρα από τις πολύ χρήσιμες ιδιότητες που προαναφέραμε θα θέλαμε να έχουμε και μια αναλυτική έκφραση της δεσμευμένης πιθανότητας συναρτήσει των αρχικών και τελικών χωροχρονικών συντεταγμένων. Το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι η έκφραση της πιθανότητας για διαδοχικές στιγμές $t, t + \Delta t$

$$P(\vec{x}, t + \Delta t; \vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{2d} \sum_{[x', x]} P(\vec{x}', t; \vec{x}_0, t_0) \quad (200)$$

όπου $[x', x]$ συμβολίζει τους κόμβους x' που είναι γείτονες του x και χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ότι ο περιπατητής μπορεί να βρεθεί στη θέση x τη στιγμή $t + \Delta t$ αν και μόνο αν τη στιγμή t βρισκόταν σε μία από τις θέσεις x' που είναι γείτονες του x .

Για $d = 1$ αυτή η σχέση ταυτίζεται με τον τύπο του Pascal για την κατασκευή των συντελεστών της διωνυμικής κατανομής. Με τις σχέσεις (197, 199, 200) η δεσμευμένη πιθανότητα είναι πλήρως ορισμένη.

Χρησιμοποιώντας τη διακριτοποιημένη εκδοχή του λαπλασιανού τελεστή

$$\Delta f(\vec{x}) = \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d [f(x + e_\mu) + f(x - e_\mu) - 2f(x)] \quad (201)$$

η (200) μπορεί να γραφτεί ως

$$P(x, t+1; x_0, t_0) - P(x, t; x_0, t_0) = \Delta P(x, t; x_0, t_0) \quad (202)$$

που είναι ουσιαστικά η εξίσωση διάχυσης, $(\theta_t - \Delta)P = 0$, σε μορφή πεπερασμένων διαφορών.

Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρουν οι ασυμπτωτικές ιδιότητες του περιπάτου αφήνουμε τον περιορισμό της διακριτότητας του χώρου και περνάμε στη συνεχή του εκδοχή. Με αυτό το δεδομένο μπορούμε να αναζητήσουμε λύση της (202) χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier

$$P(x, t; x_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{P}(\vec{k}, t) \quad (203)$$

Από την αρχική συνθήκη

$$P(x, t = t_0; x_0, t_0) = \delta_{x, x_0} \quad (204)$$

θα πρέπει να ισχύει

$$\tilde{P}(\vec{k}, t_0) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_0} \quad (205)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\tilde{P}(\vec{k}, t+1) = \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos \vec{k} \cdot \vec{e}_\mu \tilde{P}(\vec{k}, t). \quad (206)$$

Έπεται πως η λύση της (202) είναι

$$P(x_1, t_1; x_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos \vec{k} \cdot \vec{e}_\mu \right)^{t_1 - t_0} \quad (207)$$

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις ασυμπτωτικές λύσεις σε μεγάλους χρόνους και αποστάσεις αλλάζουμε την πλεγματική και χρονική σταθερά από μονάδα σε α και τ . Αυτό επιτυγχάνεται με τις αντικαταστάσεις $t \rightarrow t/\tau$, $x \rightarrow x/\alpha$, $\vec{k} \rightarrow \alpha \vec{k}$. Έτσι η (208) γίνεται

$$P(x_1 - x_0, t_1 - t_0) = \alpha^d \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos \vec{k} \cdot \vec{e}_\mu \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} \quad (208)$$

Εν συνεχεία θεωρώντας μια περιοχή Δx γύρω από το x , αρκετά μεγαλύτερη του στοιχειώδους όγκου α^d , αλλά συγχρόνως αρκετά μικρή ώστε να θεωρείται το P σταθερό σε αυτήν, μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας p ως

$$p(x_1 - x_0, t_1 - t_0)\Delta x = \sum_{x'_1 \in \Delta x} P(x'_1 - x_0, t_1 - t_0) \quad (209)$$

$$\simeq \frac{\Delta x}{\alpha^d} P(x_1 - x_0, t_1 - t_0) \quad (210)$$

και συνεπάγεται ότι

$$p(x_1 - x_0, t_1 - t_0) = \lim_{\alpha, \tau \rightarrow 0} \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos \vec{k}_\mu \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} \quad (211)$$

Όμως, όπως φαίνεται και από το ανάπτυγμα του συνημιτόνου

$$\frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos \vec{k}_\mu \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{d} \frac{\vec{k}^2}{2} + \dots \right) \rightarrow e^{-(t_1 - t_0)/\vec{k}^2} \quad (212)$$

το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο εάν ο λόγος τ/α^2 είναι σταθερός και συγκεκριμένα

$$\tau = \frac{\alpha^2}{2d} \quad (213)$$

Ός αποτέλεσμα η πυκνότητα πιθανότητας γίνεται

$$p(x_1 - x_0, t_1 - t_0) = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-(t_1 - t_0)/\vec{k}^2 + i(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{k}} \quad (214)$$

$$= \frac{1}{[4\pi(t_1 - t_0)]^2} e^{-\frac{(x_1 - x_0)^2}{4(t_1 - t_0)}} \quad (215)$$

που είναι το γνωστό Kernel της εξίσωσης διάχυσης σε συνεχή χώρο.

Το σημαντικό όμως για εμάς αποτέλεσμα είναι η συνθήκη σύγκλησης (216)

$$\tau = \frac{\alpha^2}{2d} \quad (216)$$

που στην ασυμπτωτική περίπτωση δηλώνει μια συγκεκριμένη σχέση της απόστασης που διανύει ο περιπατητής σε κάποιο χρόνο, για την ακρίβεια η απόσταση από ένα αρχικό σημείο x_0 ως ένα τελικό x_1 είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του παρεμβαλλόμενου χρόνου

$$|x_1 - x_0| \sim (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}} \quad (217)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ταχύτητα κάλυψης του γράφου είναι σχετικά αργή αφού για παράδειγμα για να φτάσει ο περιπατητής 10 πλεγματικά σημεία μακριά θα πρέπει να έχουν περάσει 100 μονάδες χρόνου.

Τέλος, μια άλλη σημαντική διαφορά μεταξύ των κλασσικών και των κβαντικών τυχαίων περιπάτων είναι η διασπορά της κατανομής τους. Στην κλασσική περίπτωση εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι η κατανομή είναι γκαουσιανή (ειδικά στην περίπτωση της ισοπίθανης μετάβασης στους πρώτους γείτονες). Εν αντιθέση, θα δούμε ότι στην κβαντική περίπτωση η κατανομή είναι εντελώς διαφορετική.

5.2 Κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι.

Προχωρώντας στο κβαντικό ανάλογο των τυχαίων περιπάτων θα δούμε ότι χρησιμοποιώντας κβαντικές ιδιότητες όπως ο εναγκαλισμός και η υπέρθεση καταστάσεων μπορούμε να επιτύχουμε πολύ μεγαλύτερες ταχύτητες σάρωσης του γράφου. Για την ακρίβεια μπορούμε να έχουμε γραμμική σχέση απόστασης και χρόνου επιτυγχάνοντας την επιτάχυνση σε τάξη ρίζας όπως και στον αλγόριθμο του Grover .

Για να γίνει εύκολα αντιληπτή η διαφορά από την κλασσική περίπτωση αρχικά θα αποφύγουμε την παρουσίαση μιας γενικής και αφηρημένης περίπτωσης ενός κβαντικού τυχαίου περιπάτου και θα επικεντρωθούμε στη μελέτη ενός συγκεκριμένου απλού παραδείγματος. Θα θεωρήσουμε ένα σωματίο που μπορεί να κινείται στο θεσεογραφικό χώρο σε μία ευθεία. Τον ρόλο του νομίσματος της κλασσικής περίπτωσης μπορεί να τον παίξει ένας επιπλέον διδιάστατος χώρος Hilbert που μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί φυσικά από το σπιν του σωματιδίου.

Αρχικά το σωματίό μας είναι εντοπισμένο στη θέση x_0 ³⁰ και η κατάσταση του γράφεται ως $|\Psi_{x_0}\rangle$. Εάν P είναι ο τελεστής της ορμής, αποτελεί γεννήτορα του μοναδιακού μετασχηματισμού

$$U_l = e^{-iPl/\hbar} \quad (218)$$

που προκαλεί μετάθεση του κυματοπακέτου προς τα δεξιά κατά l και η νέα κατάσταση γράφεται

$$U_l |\Psi_{x_0}\rangle = |\Psi_{x_0+l}\rangle \quad (219)$$

ενώ ο μιγαδικός συζυγής προκαλεί μετατόπιση προς την αντίθετη κατεύθυνση

$$U_l^\dagger |\Psi_{x_0}\rangle = |\Psi_{x_0-l}\rangle \quad (220)$$

Δεδομένου ότι η κατάσταση μας είναι εφοδιασμένη και με σπιν μπορεί να υπάρξει αλληλεπίδραση τέτοια ώστε η χρονική της εξέλιξη να δίνεται από τον

³⁰Γράφοντας εντοπισμένο εννοούμε μια γκαουσιανή κατανομή με το κέντρο της στο x_0 .

μοναδιακό τελεστή

$$U_t = e^{-i2S_z/\hbar \otimes Pt/\hbar} \quad (221)$$

όπου ο πρώτος ερμητιανός τελεστής δρα στο χώρο του σπιν και είναι η z συνιστώσα της στροφορμής με δράση κατά τα γνωστά

$$S_z|+ \rangle = \frac{\hbar}{2}|+ \rangle \quad (222)$$

$$S_z|- \rangle = -\frac{\hbar}{2}|- \rangle \quad (223)$$

$$(224)$$

στις $|+ \rangle$ και $|- \rangle$ ιδιοκαταστάσεις της αντίστοιχα, ενώ ο τελεστής P δρα όπως και πριν στο βαθμό ελευθερίας του χώρου. Ένας τέτοιος τελεστής θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί φυσικά με την αλληλεπίδραση του σπιν του σωματιδίου με ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Είναι σαφές ότι ένας τέτοιος μετασχηματισμός προκαλεί την κατά περίπτωση μετάθεση του κυματοπακέτου προς τα δεξιά ή αριστερά ανάλογα με την αρχική τιμή του σπιν κατά πλήρη αναλογία με την περίπτωση του κλασικού περίπατου με το σπιν να έχει πάρει τη θέση του νομίσματος.

Πιο συγκεκριμένα, εάν η αρχική κατάσταση έχει προετοιμαστεί σε μία από τις καθαρές καταστάσεις βάσης του σπιν η χρονική εξέλιξη θα είναι αντίστοιχα

$$U|+ \rangle |\Psi_{X_0} \rangle = |+ \rangle |\Psi_{X_0-l} \rangle \quad (225)$$

$$U|- \rangle |\Psi_{X_0} \rangle = |- \rangle |\Psi_{X_0+l} \rangle \quad (226)$$

Όπως πάντα εάν εξετάζουμε ιδιοκαταστάσεις τίποτα το ιδιαίτερο δε συμβαίνει. Τα αποτελέσματα γίνονται ενδιαφέροντα όταν εξετάσουμε τη χρονική εξέλιξη μιας γενικής υπέρθεσης καταστάσεων στο χώρο του σπιν

$$|\Psi_{in} \rangle = (a^+|+ \rangle + a^-|- \rangle)|\Psi_{X_0} \rangle \quad (227)$$

$$U|\Psi_{in} \rangle = (a^+|+ \rangle + |\Psi_{X_0-l} \rangle + a^-|- \rangle)|\Psi_{X_0+l} \rangle \quad (228)$$

Βλέπουμε ότι η τελική κατάσταση βρίσκεται σε υπέρθεση και ως προς τα σπιν και ως προς τη θέση. Με μία μέτρηση του S_z θα αποφανθούμε για την τιμή του σπιν και αντίστοιχα για το εάν το κυματοπακέτο κινήθηκε προς τα δεξιά ή τα αριστερά.

Εάν σε κάθε βήμα (εφαρμογή του τελεστή χρονικής εξέλιξης) μετράμε το σπιν είναι εύκολο να δούμε ότι αναπαράγεται πλήρως η συμπεριφορά του κλασικού τυχαίου περίπατου και το σπιν παίζει ακριβώς το ρόλο του νομίσματος της κλασικής περίπτωσης. Μετά τη μέτρηση το σύστημα θα βρίσκεται ή στην κατάσταση $|+ \rangle |\Psi_{X_0-l} \rangle$ ή στην $|- \rangle |\Psi_{X_0+l} \rangle$ με πιθανότητα

$p^+ = |a^+|^2$ και $p^- = |a^-|^2$ αντίστοιχα. Ομοίως με την κλασική περίπτωση η μετατόπιση του περιπατητή είναι κατά μέσο όρο $\langle x \rangle = l(p^+ - p^-)$ και εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία T φορές (πάντα με ενδιάμεση μέτρηση σε κάθε βήμα) η μέση απόσταση που θα διανύεται είναι $\langle x \rangle = Tl(p^+ - p^-)$ ενώ η διασπορά $\sigma^2 = 4Tlp^+p^-$. Η τελευταία σχέση προκύπτει από τον ορισμό της διασποράς $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ με τους αντίστοιχους όρους να είναι $\langle x \rangle^2 = Tl(p^+ - p^-)^2$ και $\langle x^2 \rangle = Tl(p^+ + p^-)^2$. Βλέπουμε έκδηλα την κλασική συμπεριφορά.

Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς εάν μετράμε σε κάθε βήμα καταστρέφουμε τον εναγκαλισμό των καταστάσεων που δημιουργείται. Ας δούμε τι γίνεται αν δεν μετρήσουμε το σπιν στην υπολογιστική βάση αλλά σε μία άλλη εστραμμένη ως προς αυτήν και θα δούμε ότι μπορούμε να έχουμε περιπτώσεις αποτελεσμάτων όπου το κυματοπακέτο έχει πεπερασμένο πλάτος πιθανότητας σε ένα βήμα να μετατοπιστεί πολύ πιο μακριά από την απόσταση l .

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να στρέψουμε το σπιν και όχι τη βάση μέτρησής του. Μια τυχαία (όχι η γενικότερη) στροφή στον χώρο των σπιν γράφεται

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (229)$$

ενώ στον ίδιο χώρο ο S_z είναι

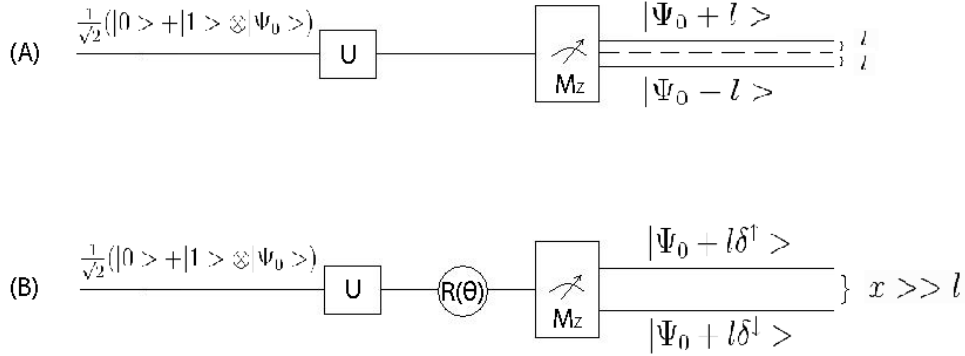
$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) \quad (230)$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κατάσταση που θα πάρουμε εάν κάνουμε μια μέτρηση στο χώρο των σπιν αφού έχει εξελιχθεί χρονικά κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου και έχει στραφεί πριν τη μέτρηση. Ψάχνουμε δηλαδή την κατάσταση $M_z R(\theta) U |\Psi_{in}\rangle$ (βλ. σχήμα 22) Ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης από τη σχέση (230) μπορεί να γραφεί ως

$$U = e^{-2iS_z \otimes Pt} \quad (231)$$

$$= e^{-2i(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)Pt} \quad (232)$$

όπου θεωρήσαμε $\hbar = 1$ και παραλείψαμε το σύμβολο του τανυστικού γινομένου για ευκολία. Δεδομένου ότι έχουμε αναλύσει τον S_z στις ιδιοκαταστάσεις του, που είναι κάθετες μεταξύ τους, αναμένει κανείς ότι η δράση του U θα μπορεί να σπάσει σε γινόμενο ανεξάρτητων δράσεων στους δύο υπόχωρους. Πράγματι εύκολα αποδεικνύεται ότι οι τελεστές $|+\rangle\langle +|$ και $|-\rangle\langle -|$ μετατίθενται $[|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|] = 0$, όπως επίσης και το ότι είναι προβολικοί τελεστές $|+\rangle\langle +|^k = |+\rangle\langle +|$ και $|-\rangle\langle -|^k = |-\rangle\langle -|$. Αναπτύσσοντας το



Σχήμα 22: Στο πρώτο κύκλωμα απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη για ένα βήμα του κβαντικού τυχαίου περιπάτου όπου το κυματοπακέτο μετατοπίζεται κατά μία απόσταση l προς δεξιά ή αριστερά. Στο δεύτερο κύκλωμα πριν τη μέτρηση στρέφουμε την κατάσταση του σπιν και ακολούθως μετράμε. Αυτό επιτρέπει πλάτη πιθανότητας όπου η τελική απομάκρυνση μετά από ένα βήμα μπορεί να έχει πολύ μεγαλύτερες τιμές από l .

εκθετικό στην (231), χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των $|+ \rangle \langle +|$, $|- \rangle \langle -|$ και ξανασηματώντας το εκθετικό εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$U = |+\rangle \langle +| e^{-iPl} + |-\rangle \langle -| e^{iPl} \quad (233)$$

Έχοντας πλέον όλους τους τελεστές στην επιθυμητή μορφή μπορούμε να αρχίσουμε να υπολογίζουμε τη ζητούμενη κατάσταση $M_z R(\theta) U |\Psi_{in}\rangle$. Η αρχική κατάσταση όπως έχουμε ξαναγράψει είναι

$$|\Psi_{in}\rangle = (a^+ |+\rangle + a^- |-\rangle) |\Psi_{X_0}\rangle \quad (234)$$

η οποία μετά από ένα βήμα στον κβαντικό τυχαίο περίπατο γίνεται

$$U |\Psi_{in}\rangle = (a^+ |+\rangle e^{-iPl} + a^- |-\rangle e^{iPl}) |\Psi_{X_0}\rangle \quad (235)$$

$$(236)$$

$$= \begin{pmatrix} a^+ e^{-iPl} \\ a^- e^{iPl} \end{pmatrix} |\Psi_{X_0}\rangle \quad (237)$$

Συνεχίζοντας στον υπολογισμό της στροφής αυτής της κατάστασης έχουμε

$$R(\theta) U |\Psi_{in}\rangle = \begin{pmatrix} a^+ \cos\theta e^{-iPl} - a^- \sin\theta e^{iPl} \\ a^+ \sin\theta e^{-iPl} + a^- \cos\theta e^{iPl} \end{pmatrix} |\Psi_{X_0}\rangle \quad (238)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να κάνουμε μια προσέγγιση. Εάν η αρχική κυματοσυνάρτησή μας είναι εντοπισμένη στις ορμές (δηλαδή η διασπορά Δx του

αρχικού κυματοπακέτου είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος l ενός βήματος) μπορούμε να προσεγγίσουμε το εκθετικό σε πρώτη τάξη ως

$$e^{\pm iPl}|\Psi_{X_0}\rangle \approx (I \pm iPl)|\Psi_{X_0}\rangle \quad (239)$$

και η (240) γράφεται

$$R(\theta)U|\Psi_{in}\rangle \approx \begin{pmatrix} a^+ \cos\theta(I - iPl) - a^- \sin\theta(I + iPl) \\ a^+ \sin\theta(I - iPl) + a^- \cos\theta(I + iPl) \end{pmatrix} |\Psi_{X_0}\rangle \quad (240)$$

$$\approx \begin{pmatrix} I(a^+ \cos\theta - a^- \sin\theta) - iPl(a^+ \cos\theta + a^- \sin\theta) \\ I(a^+ \sin\theta + a^- \cos\theta) - iPl(a^+ \sin\theta - a^- \cos\theta) \end{pmatrix} |\Psi_{X_0}\rangle$$

$$\approx \left\{ (a^+ \cos\theta - a^- \sin\theta) \left[I - iPl \frac{a^+ \cos\theta + a^- \sin\theta}{a^+ \cos\theta - a^- \sin\theta} \right] \right\} |+\rangle \quad (241)$$

$$+ (a^+ \sin\theta + a^- \cos\theta) \left[I - iPl \frac{a^+ \sin\theta - a^- \cos\theta}{a^+ \sin\theta + a^- \cos\theta} \right] \right\} |-\rangle |\Psi_{X_0}\rangle$$

Εάν η αρχική διασπορά Δx είναι αρκετά μεγαλύτερη από τις απομακρύνσεις $l\delta^+$, $l\delta^-$ μπορούμε να αντιστρέψουμε την αρχική προσέγγιση του εκθετικού και να γράψουμε

$$(I - iPl\delta^\pm)|\Psi_{X_0}\rangle \approx e^{-iPl\delta^\pm} |\Psi_{X_0}\rangle = |\Psi_{X_0-l\delta^\pm}\rangle \quad (242)$$

με

$$l\delta^+ = l \frac{a^+ \cos\theta + a^- \sin\theta}{a^+ \cos\theta - a^- \sin\theta} \quad (243)$$

$$l\delta^- = l \frac{a^+ \sin\theta - a^- \cos\theta}{a^+ \sin\theta + a^- \cos\theta} \quad (244)$$

Συνεπώς, κάνοντας μια μέτρηση στο χώρο των σπιν θα πάρουμε μία από τις καταστάσεις

$$M_z R(\theta)U|\Psi_{in}\rangle = \left\{ \begin{array}{l} |+\rangle \otimes |\Psi_{X_0-l\delta^+}\rangle \\ |-\rangle \otimes |\Psi_{X_0-l\delta^-}\rangle \end{array} \right. \quad (245)$$

με πιθανότητες

$$p^+ = |a^+ \cos\theta - a^- \sin\theta|^2 \quad (246)$$

$$p^- = |a^+ \sin\theta + a^- \cos\theta|^2 \quad (247)$$

και αντίστοιχες απομακρύνσεις

$$l\delta^+ = l \frac{a^+ \cos\theta + a^- \sin\theta}{a^+ \cos\theta - a^- \sin\theta} \quad (248)$$

$$l\delta^- = l \frac{a^+ \sin\theta - a^- \cos\theta}{a^+ \sin\theta + a^- \cos\theta} \quad (249)$$

Βλέπουμε ότι οι απομακρύνσεις εξαρτώνται από την επιλογή της γωνίας θ . Για $\theta = 0$ ή $\theta = \pi/2$ προφανώς παίρνουμε τις αναμενόμενες μετατοπίσεις κατά $\pm l$. Όμως όσο περισσότερο η γωνία τείνει προς $\tan\theta = |a^+/a^-|$ (τις 45 μοίρες για $|a^+| = |a^-|$) που αντιστοιχεί σε maximally entangled καταστάσεις η απομάκρυνση μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές. Για παράδειγμα εάν $\tan\theta = |a^+/a^-|(1 + \epsilon)$ με $l/\Delta x \ll |\epsilon| \ll 1$ η πιθανότητα να μετρήσουμε την $|+\rangle$ κατάσταση του σπιν είναι μεν μικρή $p^+ \approx |a^+a^-|^2\epsilon^2$ αλλά η απομάκρυνση $l\delta^+$ γίνεται $l\delta^+ \approx -2l/\epsilon$ που είναι πολύ μεγαλύτερη από l . Αντιστοίχως είναι πολύ πιθανότερο να μετρήσουμε την $|-\rangle$ κατάσταση του σπιν με πιθανότητα $p^- \approx 1 - |a^+a^-|^2\epsilon^2$ και απομάκρυνση της τάξης του l , $l\delta^+ \approx l(|a^+|^2 - |a^-|^2) + O(l\epsilon)$. Φυσικά η μέση μετατόπιση και η διασπορά μένουν ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση, χωρίς στροφή του σπιν.

Το σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου, σε ένα μόνο βήμα, υπάρχει πλάτος πιθανότητας όπου οι μετατοπίσεις μπορούν να γίνουν πολύ μεγαλύτερες από την απόσταση l σε σημαντική αντίθεση με την κλασική περίπτωση. Επίσης, αξιοσημείωτο είναι ότι αυτές οι μεγάλες μετατοπίσεις έχουν μικρό αλλά πεπερασμένο πλάτος πιθανότητας όταν η γωνία στροφής είναι περίπου 45 μοίρες και όχι ακριβώς³¹. Αυτά τα γεγονότα λοιπόν υπάρχουν στα όρια μιας διαμάχης μεταξύ του μέγιστου εναγκαλισμού των καταστάσεων σπιν και της πιθανότητας ύπαρξης μεγάλων μετατοπίσεων.

Από την παραπάνω μελέτη βλέπουμε ότι σε κάθε βήμα ενός κβαντικού τυχαίου περιπάτου υπάρχει πεπερασμένο πλάτος πιθανότητας το κυματοπακέτο μας να μετατοπίζεται πολύ περισσότερο από μια πλεγματική σταθερά, σε αντίθεση με το κλασικό ανάλογο. Κατόπιν τούτου είναι εύκολο να καταλάβει κανείς ότι εν γένει ένας κβαντικός τυχαίος περίπατος δεν είναι τίποτε άλλο από μια συνεχή διαδοχή των προηγούμενων βημάτων με τη μέτρηση φυσικά να παραλείπεται στα ενδιάμεσα βήματα για να διατηρείται ο εναγκαλισμός. Τέλος, θα πρέπει ο χώρος στον οποίο κινείται το σώματιο να γίνει εκπεφρασμένα διακριτός και πεπερασμένος για να μπορεί να προσομοιωθεί σε έναν κβαντικό υπολογιστή.

Υπάρχουν εν γένει δυο τύποι κβαντικών τυχαίων περιπάτων. Οι λεγόμενοι διακριτού και συνεχούς χρόνου οι οποίοι διαφέρουν τόσο μεταξύ τους όσο και με το παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου.

5.2.1 Κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι διακριτού χρόνου.

Η λογική των κβαντικών τυχαίων περιπάτων διακριτού χρόνου είναι άμεσο ακόλουθο της προηγούμενης μελέτης. Στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε ουσιαστικά μελετήσει ένα βήμα του αλγορίθμου και ο χώρος μας ήταν συνεχής

³¹ Σε αυτή την περίπτωση εύκολα βλέπει κανείς ότι οι μετατοπίσεις είναι περίπου ίσες με l και η πιθανότητα μεγάλων μετατοπίσεων γίνεται μηδέν.

και άπειρος. Για να επιτύχουμε τη μετάβαση στο ζητούμενο τύπο αλγορίθμου πρέπει αφ' ενός να επαναλάβουμε αυτά τα βήματα χωρίς ενδιάμεση μέτρηση για να μην καταστρέφεται ο εναγκαλισμός. Αφετέρου, να διακριτοποιήσουμε τον χώρο μας και να τον καταστήσουμε πεπερασμένο, κι αυτό για να μπορεί αργότερα να προσομοιωθεί σε ένα κβαντικό υπολογιστή.

Ξεκινάμε από το δεύτερο. Θεωρούμε ένα πλέγμα σε μία γραμμή³² με πλεγματική σταθερά = 1. Στο κάθε πλεγματικό σημείο αντιστοιχεί και ένα διάνυσμα βάσης του χώρου Hilbert $|i\rangle$: $i \in \mathbf{Z}$. Η κάθε κατάσταση $|i\rangle$ αντιστοιχεί στο εντοπισμένο κυματοπακέτο $|\Psi\rangle$ της προηγούμενης παραγράφου αν και δε θα μας απασχολήσει η ερμηνεία της ως εντοπισμένο σωματίδιο παρά μόνο αργότερα για την πειραματική πραγματοποίηση του αλγορίθμου. Για αυτό το λόγο ας αποκαλέσουμε αυτό το χώρο Hilbert θεσεογραφικό (H_p).

Αυξάνουμε τη διάσταση του χώρου Hilbert εμπουτίζοντάς τον με ένα διδιάστατο χώρο νομίσματος $H_c = |+\rangle, |-\rangle$ που παίρνει το ρόλο του σπιν της προηγούμενης παραγράφου. Συνεπώς ο συνολικός χώρος Hilbert είναι το ταυυστικό γινόμενο των δύο $H = H_c + H_p$. Το εκθετικό της προηγούμενης παραγράφου που περιέγραφε την υπο συνθήκη μετάθεση δεξιά ή αριστερά, μπορεί να γραφεί ως

$$S = |+\rangle\langle +| \otimes \sum_i |i+1\rangle\langle i| + |-\rangle\langle -| \otimes \sum_i |i-1\rangle\langle i| \quad (250)$$

που εκτελεί το μετασχηματισμό

$$S|+\rangle \otimes |i\rangle = |+\rangle \otimes |i+1\rangle \quad (251)$$

$$S|-\rangle \otimes |i\rangle = |-\rangle \otimes |i-1\rangle \quad (252)$$

Έχοντας ορίσει το βασικό μας βήμα στο νέο διακριτό χώρο Hilbert μένει να βρούμε τον αντίστοιχο της στροφής στο χώρο του σπιν τελεστή (C) που προηγείται της δράσης S για να επιτευχθεί η υπέρθεση στον H_c και ο συνολικός μοναδιαίος μετασχηματισμός σε κάθε βήμα να είναι $U = S(C \otimes I)$.

Απαιτώντας το "νόμισμά" μας να είναι αμερόληπτο ώστε η μετάθεση εκατέρωθεν της αρχικής θέσης να είναι ισοπίθανη η πιο λογική επιλογή είναι η $C = H$, όπου H ο τελεστής Hadamar,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (253)$$

³²Θα περιοριστούμε στη μία διάσταση για ευκολία. Εξ' άλλου μας εν διαφέρουν τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα τα οποία εύκολα γενικεύονται για γενικούς γράφους.

Όντως, σε ένα βήμα του αλγόριθμου έχουμε π.χ.

$$H|+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \otimes |0\rangle \quad (254)$$

$$SH|+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |1\rangle + |-\rangle \otimes |-1\rangle) \quad (255)$$

που με μέτρηση στη βάση του νομίσματος $|+\rangle, |-\rangle$ παίρνουμε μετάθεση κατά ένα βήμα δεξιά ή αριστερά της αρχικής θέσης με την ίδια πιθανότητα. Φυσικά μετά από μια τέτοια μέτρηση χάνεται η κβαντική υπέρθεση και εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι αν μετά από κάθε βήμα εκτελείται μέτρηση παίρνουμε έναν κλασσικό τυχαίο περίπατο με ασυμπτωτική (για μεγάλο αριθμό T επαναλήψεων του βήματος) μορφή μια γκαουσιανή γύρω από το μηδέν (από τον ορισμό της γκαουσιανής κατανομής) και διασπορά $\sigma^2 = T$.

Ας δούμε τι θα γίνει αν διατηρήσουμε την κβαντική υπέρθεση μεταξύ των βημάτων. Σε T βήματα ο αλγόριθμος ορίζεται ως ο μοναδιακός μετασχηματισμός U^T με

$$U = S(C \otimes I) \quad (256)$$

Η διαφορά με την κλασσική περίπτωση γίνεται εμφανής από τα πρώτα βήματα του αλγόριθμου. Ας εξελίξουμε για παράδειγμα την $|\Phi_{in}\rangle = |-\rangle \otimes |0\rangle$, όπου παραλείψαμε το εξωτερικό γινόμενο χάρην συντομίας, όπως θα κάνουμε και στη συνέχεια.

$$|\Phi_{in}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle |1\rangle - |-\rangle |-1\rangle) \quad (257)$$

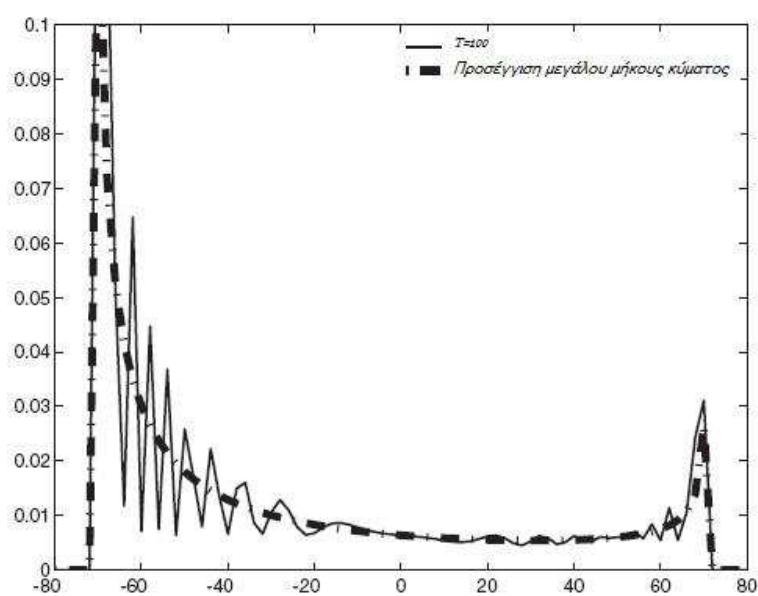
$$\rightarrow \frac{1}{2}[|+\rangle |2\rangle - (|+\rangle - |-\rangle)|0\rangle + |-\rangle |-2\rangle] \quad (258)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}[|+\rangle |3\rangle + (|-\rangle + |+\rangle - |+\rangle)|1\rangle + (|+\rangle - 2|-\rangle)|-1\rangle - |-\rangle |-3\rangle]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[|+\rangle |3\rangle + |-\rangle |1\rangle + |+\rangle |-1\rangle - 2|-\rangle |-1\rangle - |-\rangle |-3\rangle]$$

Ήδη στο τρίτο βήμα είναι εμφανείς οι ενισχυτικές και καταστρεπτικές συμβολές σε κάποια σημεία. Συνεχίζοντας για 100 βήματα παίρνουμε για το πλάτος πιθανότητας συναρτήσε της θέσης το γράφημα του σχήματος 23.

Αυτό που παρατηρούμε πρωτίστως είναι η μεγάλη διαφορά σε σχέση με την γκαουσιανή κατανομή της κλασσικής περίπτωσης. Εν αντιθέση είναι έκδηλη μια τάση για δύο κορυφές που απομακρύνονται από την αρχική θέση. Δευτερευόντως, αξίζει να παρατηρηθεί ότι σε κάθε περιττό βήμα το πλάτος πιθανότητας στα άρτια πλεγματικά σημεία είναι μηδέν και σε κάθε άρτιο βήμα το αντίθετο. Τέλος, παρατηρείται μια ανισοτροπία στη συμπεριφορά του αλγόριθμου στις δύο



Σχήμα 23: Το πλάτος πιθανότητας συναρτήση της απόστασης μετά από 100 βήματα για έναν ανισότροπο κβαντικό περίπατο πεπερασμένου χρόνου. Αναπαρίστανται μόνο τα σημεία άρτιας πλεγματικής σταθεράς καθώς τα περιττά έχουν πλάτος πιθανότητας μηδέν. Για περιττό πλήθος βημάτων ισχύει το ανάποδο.

κατευθύνσεις. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς ο τελεστής Hadamar διατηρεί πάντα θετική φάση στην $|+\rangle$ κατάσταση ενώ αρνητική στην $|-\rangle$. Συνεπώς οι μετατοπίσεις προς αριστερά που συνοδεύονται από θετικό σπιν θα έχουν πολλές θετικές συμβολές ενώ οι μετατοπίσεις προς τα αριστερά πολλές καταστρεπτικές αφού συνοδεύονται από αρνητικό σπιν.

Η ανισοτροπία αυτή εύκολα διορθώνεται αν ξεχωρίσουμε τις δύο εξελίξεις, προς δεξιά και αριστερά αντίστοιχα. Ο πιο εύκολος τρόπος να γίνει αυτό είναι να οι μετατοπίσεις προς τα δεξιά να έχουν πραγματική φάση και οι μετατοπίσεις προς αριστερά να έχουν φαντασική. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ή με την επιλογή της αρχικής κατάστασης σε υπέρθεση καταστάσεων σπιν $(|\Phi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle)|0\rangle)$ ή με την αλλαγή του νομίσματος

$$H \rightarrow Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (259)$$

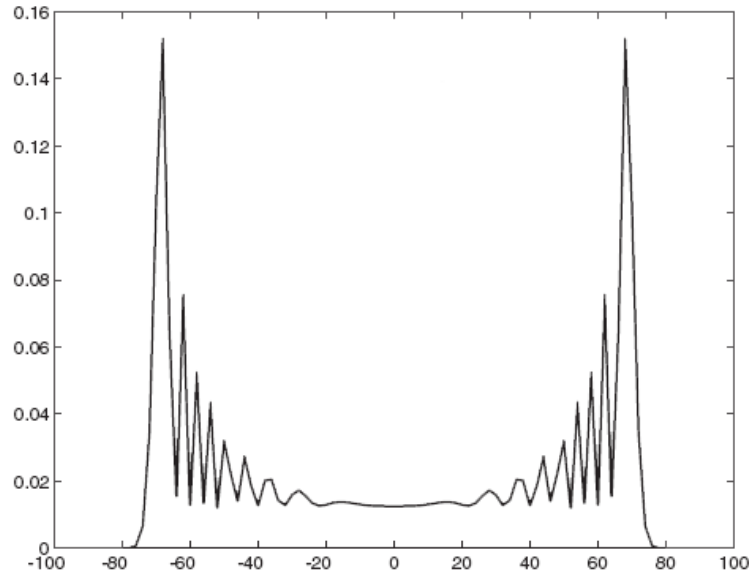
Στην πρώτη περίπτωση ο διαχωρισμός σε πραγματικό και φανταστικό μέρος που ταξιδεύουν δεξιά και αριστερά αντίστοιχα γίνεται αξ' αρχής με την επιλογή της αρχικής κατάστασης και διασφαλίζεται στα επόμενα βήματα από το ότι ο τελεστής Hadamar δεν εισάγει φανταστικές φάσεις. Στη δεύτερη περίπτωση ο διαχωρισμός εξασφαλίζεται από το ίδιο το νόμισμα που πάντα προσδίδει φανταστική φάση στις $|-\rangle$ καταστάσεις και πραγματική στις $|+\rangle$. Το πλάτος πιθανότητας συναρτήση της θέσης για την πρώτη περίπτωση αναπαρίσταται στο σχήμα 24.

Δύο είναι οι σημαντικές παρατηρήσεις. Πρώτον ότι έχουμε εξελίξει τον αλγόριθμο για 100 βήματα και έχουμε πεπερασμένο πλάτος πιθανότητας ο περιπατητής να βρίσκεται σχεδόν 80 βήματα μακριά από την αρχική θέση. Αυτό σίγουρα δε συνάδει με την κλασική ταχύτητα ενός περιπατού που θα ήταν 10 βήματα αφού έχουμε δείξει ότι $s \propto O(\sqrt{t})$. Φαίνεται μάλιστα να υπάρχει μια γραμμική σχέση της διανυόμενης απόστασης και του χρόνου $s \propto O(t)$ που σημαίνει κβαντική επιτάχυνση τάξης ρίζας.

Δεύτερον, προφανώς όπως και στην ανισότροπη περίπτωση η διαφορά με τη γκαουσιανή κατανομή είναι μεγάλη. Μάλιστα, φαίνεται ότι στο διάστημα $(-\sqrt{T/2}, \sqrt{t/2})$ η κατανομή είναι σχεδόν ομοιόμορφη. Και τις δύο παρατηρήσεις θα αποδείξουμε αναλυτικά στο ασυμπτωτικό όριο στο παράρτημα Β.

Προχωρώντας στη σύνδεση με τον αλγόριθμο του Grover, ας μελετήσουμε τι νόμισμα θα χρειάζεται για ένα πολυδιάστατο μοντέλο. Η πρώτη σκέψη είναι να αντικαταστήσει κανείς τον τελεστή Hadamar με τη γενίκευσή³³ του, τον τελεστή του κβαντικού μετασχηματισμού Fourier που για ένα d διάστατο πλέγμα

³³Ο 2×2 πίνακας του κβαντικού μετασχηματισμού Fourier ταυτίζεται με τον πίνακα Hadamar.



Σχήμα 24: Το πλάτος πιθανότητας συναρτήση της απόστασης μετά από 100 βήματα για έναν ισότροπο κβαντικό περίπατο πεπερασμένου χρόνου. Αναπαρίστανται μόνο τα σημεία άρτιας πλεγματικής σταθεράς καθώς τα περιττά έχουν πλάτος πιθανότητας μηδέν. Για περιττό πλήθος βημάτων ισχύει το ανάποδο.

γράφεται

$$QFT = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{d-1} \\ 1 & \omega^2 & \dots & \dots & \omega^{2(d-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \dots & \omega^{(d-1)(d-1)} \end{pmatrix} \quad (260)$$

με $\omega = e^{2\pi i/d}$ τη d οστή ρίζα της μονάδας. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι αυτός ο πίνακας μετασχηματίζει κάθε κατεύθυνση σε μια ισοβαρή υπέρθεση όλων των κατευθύνσεων, συνεπώς διατηρεί τη βασική ιδιότητα του αμερόληπτου ζαριού.

Εάν όμως θέλουμε το ζάρι μας να είναι ισότροπο αλλά και αναλλοίωτο σε μεταθέσεις πάνω στο πλέγμα έχουμε ήδη βρει ποιο είναι αυτό. Δεδομένου ότι απαιτούμε να είναι και μοναδιακό, η μόνη επιλογή είναι το νόμισμα που είχαμε βρει ως μοναδιακό πίνακα διάχυσης στη σχέση (162).

$$D = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} \quad (261)$$

με τα a, b να είναι πραγματικά και να υπόκεινται στους περιορισμούς $1 - \frac{2}{d} \leq |a| \leq 1$ και $b = \pm \frac{1}{a}$.

Από αυτό το σημείο η σύνδεση με τον αλγόριθμο του Grover είναι προφανής. Εάν ο γράφος που μελετάμε είναι πλήρης (όλα τα σημεία του πλέγματος θεωρούνται γειτονικά) ώστε ουσιαστικά η βάση μας να είναι εντοπισμένη και εάν προσθέσουμε αυτό που είχαμε ονομάσει πίνακα στροφής R ώστε ο αλγόριθμος να διαλέγει την κατάσταση λύσης, έχουμε ακριβώς τον αλγόριθμο του Grover από τις σχέσεις (162) - (165).

5.2.2 Κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι συνεχούς χρόνου.

Μια άλλη οδός που μπορεί να ακολουθήσει κανείς για την ανάπτυξη ενός κβαντικού αλγορίθμου είναι το να ακολουθήσει το πρότυπο της διαδικασίας Markov συνεχούς χρόνου. Μοιάζει αρκετά διαφορετική με την προηγούμενη περίπτωση αλλά παρουσιάζει τα ίδια κβαντικά χαρακτηριστικά και κυρίως την ίδια κβαντική επιτάχυνση.

Οι διαδικασίες, ή αλυσίδες, Markov ορίζονται μέσω ενός πίνακα M ο οποίος μετασχηματίζει την κατανομή πιθανότητας στο πλέγμα συναρτήση του χρόνου μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης, συνεπώς ορίζεται για συνεχή χρόνο. Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα ο περιπατητής βρίσκεται στη θέση i σε μια χρονική στιγμή t είναι $p_i(t)$, η εν λόγω διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = - \sum_j H_{i,j} p_j(t) \quad (262)$$

όπου

$$H_{i,j} = \begin{pmatrix} 1-d\gamma & \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma \\ \gamma & 1-d\gamma & \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & 1-d\gamma & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & & & \gamma & 1-d\gamma & \gamma \\ \gamma & 0 & & \dots & \gamma & 1-d\gamma & \end{pmatrix} \quad (263)$$

Η διαδικασία αυτή αναπαριστά ένα περιπατητή με d πρώτους γείτονες ανά πλεγματο σημείο και πιθανότητα γ ανά μονάδα χρόνου να μεταβεί σε κάποιο γείτονα³⁴.

³⁴Για την ακρίβεια αναπαρίσταται ο πίνακας ενός κυκλικού πλέγματος για να είναι πεπερασμένης διάστασης ο πίνακας. Αυτό δικαιολογεί και τα μη μηδενικά στοιχεία στις δυο γωνίες εκατέρωθεν της διαγωνίου, αφού το τελευταίο πλεγματο σημείο ταυτίζεται με το πρώτο

Λύνοντας αυτή τη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\vec{p}(t) = e^{-\mathbf{H}t} \vec{p}(0) \quad (264)$$

Η βασική ιδέα για τη μετάβαση στο κβαντικό ανάλογο είναι να αντικατασταθεί ο πίνακας Markov με τη Χαμιλτονιανή του συστήματος [16] που θα γεννά τον μοναδιακό μετασχηματισμό

$$U(t) = e^{-i\mathbf{H}t} \quad (265)$$

Εάν σε αυτή την χαμιλτονιανή κωδικοποιήσουμε μια συγκεκριμένη κατάσταση $|j\rangle$ την οποία ψάχνουμε ως κατάσταση ελαχίστης ενέργειας, η εξέλιξη του συστήματος θα μας δώσει την κατάσταση $|j\rangle$. Με αυτή την έννοια θα έχουμε εκτελέσει τον αλγόριθμο του Grover σε μία βάση διατεταγμένη στο χώρο. Μετά από πόσο χρόνο και με τι ακρίβεια θα μας δώσει τη συγκεκριμένη κατάσταση είναι το ζητούμενο για να δούμε εάν θα έχουμε κβαντική επιτάχυνση.

Δε θα επεκταθούμε περαιτέρω στη μελέτη της γενικής αυτής περιγραφής. Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα όπου η εξέλιξη γίνεται με τη χαμιλτονιανή του Schrödinger και του Dirac και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των αλγορίθμων.

6 ΕΞΕΛΙΞΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRODINGER

Όπως προαναφέρθηκε ως εφαρμογή ενός κβαντικού τυχαίου περιπάτου συνεχούς χρόνου θα δούμε έναν περίπατο που εξελίσσεται με τη διαφορική εξίσωση του Schrödinger

$$i \frac{dq_j(t)}{dt} = \sum_k H_{jk} q_k(t) \quad (266)$$

όπου $q_j(t) = \langle j | \Psi(t) \rangle$ η προβολή μιας γενικής κατάστασης $|\Psi(t)\rangle$ στο διάνυσμα $|j\rangle$ του χώρου Hilbert. Δεδομένου ότι το σωματίδιό μας θα είναι ελεύθερο, η χαμιλτονιανή μας δε θα είναι άλλη από τη διακριτή μορφή του τελεστή Laplace L για ένα d διάστατο πλέγμα, όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο.

$$L = - \begin{pmatrix} -d_j & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -d_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -d_j & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -d_j \end{pmatrix} \quad (267)$$

όπου d_j είναι το πλήθος των πρώτων γειτόνων και εδώ θεωρούμε ότι έχουμε μία διάσταση επομένως $d_j = 2$. Για να εκφράζεται η πιθανότητα μετάβασης γ ανά μονάδα χρόνου σε κάποιο πρώτο γείτονα, θα πρέπει να ορίσουμε τη χαμιλτονιανή ως $H = -\gamma L$, με το αρνητικό πρόσημο να εξασφαλίζει ότι είναι θετικά ορισμένη. Ας σημειωθεί ότι η επιλογή της χαμιλτονιανής σε ένα γενικό πρόβλημα δε είναι μονοσήμαντη όπως είχαμε δει και στο σχετικό κεφάλαιο για τον αλγόριθμο του Grover.

Όμως για να εξασφαλίσουμε ότι πρόκειται για αλγόριθμο αναζήτησης δεδομένων, σε μια φυσική d διάστατη βάση αυτή τη φορά, θα πρέπει να σημαδέψουμε τη λύση του προβλήματος $|w\rangle$. Ας θυμηθούμε ότι δε χρειάζεται να γνωρίζουμε τη λύση απλά να έχουμε ένα black box που θα έχει την ικανότητα να αναγνωρίζει τη λύση. Αυτό σε επίπεδο χαμιλτονιανής θεώρησης έχουμε ήδη αναφέρει πως μπορεί να γίνει, απλά καθιστώντας τη λύση κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας.

Αποφεύγουμε λοιπόν τη χρήση της oracle

$$U_w |j\rangle = (-1)^{\delta_{jw}} |j\rangle \quad (268)$$

που απαιτεί αλγόριθμο διακριτού χρόνου και χρησιμοποιούμε στη θέση της την oracle Hamiltonian

$$H_w = -|w\rangle\langle w| \quad (269)$$

που έχει μηδενική ενέργεια για κάθε κατάσταση πλην της ζητούμενης και ενέργεια

-1 για την $|w\rangle$. Η συνολική χαμιλτονιανή λοιπόν γίνεται

$$H = -\gamma L + H_w \quad (270)$$

$$= -\gamma L - |w\rangle\langle w| \quad (271)$$

Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί για την γενική περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε. Εκκινούμε τον αλγόριθμο με κατάσταση εισόδου την ισοβαρή υπέρθεση όλων των καταστάσεων για να έχουμε την επιθυμητή κβαντική παράλληλη επεξεργασία που είχαμε αναφέρει στο 2ο κεφάλαιο

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j |j\rangle \quad (272)$$

Αφήνουμε τον αλγόριθμο να εξελιχθεί για χρόνο T και μετράμε στη βάση $|j\rangle$. Θέλουμε η τελική κατάσταση να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στη ζητούμενη $|\langle w|\Psi(T)\rangle|^2 \simeq 1$ για όσο το δυνατόν μικρότερο χρόνο. Θα δούμε ότι υπάρχει κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου γ που επιτυγχάνει την κβαντική επιτάχυνση ταξης \sqrt{N} αλλά όχι για όλες τις διαστάσεις d .

Για να αποδείξουμε τα ανωτέρω θα χρειαστούμε το φάσμα ιδιοτιμών της χαμιλτονιανής.

6.1 Υπολογισμός των Ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής

Πριν ξεκινήσουμε, χρειάζεται να ορίσουμε δύο νέους τελεστές. Αρχικά, αν θέλουμε να αποφύγουμε φαινόμενα που λαβαίνουν χώρα στα άκρα του πλέγματος για να μπορέσουμε να έχουμε πίνακες πεπερασμένης διάστασης, θα πρέπει να επιβάλλουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες, ή πιο περιοριστικά ο χώρος μας να έχει τοπολογία κύκλου. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι πράξεις θα εκτελούνται $\text{mod} N$, όπου N είναι το πλήθος των σημείων σε κάθε διεύθυνση.

Σε αυτό το χώρο οι καταστάσεις βάσης - πλεγματικά σημεία θα είναι $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |N-1\rangle$ με $|N\rangle = |0\rangle$ και αναπαράσταση

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \quad (273)$$

Ο τελεστής της ορμής (P) θα αναπαρίσταται από έναν $N \times N$ πίνακα που θα εκτελεί τον μετασχηματισμό $|j\rangle \rightarrow |j+1\rangle$. Η πιο απλή διάταξη που μπορεί να φανταστεί κανείς είναι τα σημεία διατεταγμένα στον μοναδιαίο κύκλο, ισαπέχοντα, με γωνιακή απόσταση $\omega = \frac{2\pi i}{N}$. Επομένως ο τελεστής της ορμής θα

παράγει στροφή κατά γωνία $\omega = \frac{2\pi i}{N}$. Η αναπαράστασή του είναι

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (274)$$

ενώ ο αντίστροφός του που παράγει την αντίθετη στροφή

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (275)$$

Εάν επιλέξουμε τη λογική θεώρηση, ότι ο τελεστής θέσης είναι ο $|x\rangle$, θα καταλήξουμε σε λάθος σχέσεις μετάθεσης. Αντί αυτού θα τον ορίσουμε ως γενικευμένο τελεστή θέσης (Q) μέσω του μετασχηματισμού (διακριτού) Fourier

$$FPF^{-1} = Q \quad (276)$$

με τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier όπως ορίστηκε νωρίτερα

$$F = QFT = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{d-1} \\ 1 & \omega^2 & \dots & \dots & \omega^{2(d-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \dots & \omega^{(d-1)(d-1)} \end{pmatrix} \quad (277)$$

που παράγει τον πίνακα

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix} \quad (278)$$

που γράφεται ως

$$Q = |0\rangle + \omega|1\rangle + \omega^2|2\rangle + \dots + \omega^{N-1}|N\rangle \quad (279)$$

Αυτοί οι τελεστές υπακούουν στη διακριτοποιημένη εκδοχή της αρχής του Heizenberg

$$QP = \omega PQ \quad (280)$$

Προφανώς εάν δράσουμε με τον τελεστή P N φορές σε μια κατάσταση $|x\rangle$ θα κάνουμε μια πλήρη περιστροφή και θα ισχύει

$$P^N|x\rangle = |x\rangle \quad \forall x \quad (281)$$

που σημαίνει πως οι ιδιοτιμές του είναι ω^{-k} , $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Ομοίως, οι ιδιοτιμές του αντίστροφου είναι ω^k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Ερχόμενοι τώρα στην ελεύθερη χαμιλτονιανή

$$H_s = -\gamma L \quad (282)$$

το φάσμα της οποίας ζητάμε, μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει του τελεστή P . Για να γίνει εύκολα αντιληπτό ξαναγράφουμε τους L και P σύμφωνα με τον ορισμό (355) που είχαμε δώσει στο αντίστοιχο κεφάλαιο

$$L = - \begin{pmatrix} -d_j & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -d_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -d_j & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -d_j \end{pmatrix} \quad (283)$$

και

$$P_j|x\rangle = \frac{i}{2}(|x + e_j\rangle - |x - e_j\rangle) \quad (284)$$

αλλά για μία διάσταση,

$$\langle x'|L|x\rangle = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (285)$$

$$\langle x'|P|x\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (286)$$

Οι παραπάνω πίνακες μπορούν να γραφούν συναρτήσει του τελεστή της ορμής ως

$$\langle x'|L|x\rangle = 2I - [P^{-1} + P] \quad (287)$$

$$\langle x'|P|x\rangle = \frac{i}{2}[P^{-1} - P] \quad (288)$$

Γνωρίζοντας τις ιδιοτιμές της P εύκολα μπορούμε να βρούμε τις ιδιοτιμές $\varepsilon(k)$ της χαμιλτονιανής

$$H_s = -\gamma L = -\gamma(2I - [P^{-1} + P]) \quad (289)$$

που είναι

$$\varepsilon(k) = -\gamma(2 - [\omega^{-k} + \omega^k]) \quad (290)$$

όπου $\omega = 2\pi i/N$

$$\varepsilon(k) = -\gamma(2 - [\omega^{-\frac{2\pi i}{N}k} + \omega^{\frac{2\pi i}{N}k}]) \quad (291)$$

$$\varepsilon(k) = -\gamma(2 - 2\cos\frac{2\pi k}{N}) \quad (292)$$

Η γενίκευση για d διαστάσεις είναι άμεση.

6.2 Υπολογισμός χρόνου και πλάτους σύγκλισης

Αν θεωρήσουμε μια κανονικοποιημένη ιδιοκατάσταση $|\Psi_\alpha\rangle$ της ενέργειας έχουμε

$$H|\Psi_\alpha\rangle = E_\alpha|\Psi_\alpha\rangle \quad (293)$$

τότε

$$H|\Psi_\alpha\rangle = (-\gamma L - |w\rangle\langle w|)|\Psi_\alpha\rangle = E_\alpha|\Psi_\alpha\rangle \quad (294)$$

όπου αναδιατάσσοντας του όρους παίρνουμε

$$(-\gamma L - E_\alpha)|\Psi_\alpha\rangle = |w\rangle\langle w||\Psi_\alpha\rangle \quad (295)$$

Ορίζουμε την προβολή της ιδιοκατάστασης στη λύση ως

$$R_\alpha = |\langle w|\Psi_\alpha\rangle|^2 \quad (296)$$

Επιπλέον, μπορούμε να διαλέξουμε τη φάση έτσι ώστε

$$\langle w|\Psi_\alpha\rangle = \sqrt{R_\alpha} \quad (297)$$

Χρειαζόμαστε το πλάτος μετάβασης από την αρχική κατάσταση στην κατάσταση λύση

$$\langle w|e^{-iHt}|s\rangle = \sum_\alpha \langle w|\Psi_\alpha\rangle \langle \Psi_\alpha|s\rangle e^{-iE_\alpha t} \quad (298)$$

Θεωρούμε ένα απλό υπερκυβικό πλέγμα, d διάστατο με N το πλήθος κόμβους. Ως αποτέλεσμα η L θα είναι η διακριτοποιημένη λαπλασιανή του d διάστατου

πλέγματος, περιοδική σε κάθε διάσταση με περίοδο $N^{1/d}$. Οι ιδιοκαταστάσεις της λαπλασιανής σε ένα τέτοιο χώρο θα είναι φυσικά τα επίπεδα κύματα

$$|\Phi(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikx} |x\rangle \quad (299)$$

όπου $|x\rangle$ τα διανύσματα βάσης του χώρου Hilbert που τυατίζονται όπως είπαμε με τα πλεγματικά σημεία και τα κυματανύσματα παίρνουν τις διακριτές τιμές

$$k_j = \frac{2\pi m_j}{N^{1/d}} \quad (300)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές όπως δείξαμε παραπάνω είναι

$$E(k) = 2(d - \sum_{j=1}^d \cos(k_j)) \quad (301)$$

Αφού η προβολή αυτών των ιδιοκαταστάσεων είναι μη μηδενική στην κατάσταση λύση έχουμε για κάθε k

$$[\gamma E(k) - E_\alpha] \langle \Phi(k) | \Psi_\alpha \rangle \neq 0 \quad (302)$$

Συνεπώς μπορούμε να διαιρέσουμε με το αριστερό μέλος και να γράψουμε την εξίσωση (295) ως

$$|\Psi_\alpha\rangle = \frac{\sqrt{R_\alpha}}{-\gamma L - E_\alpha} |w\rangle \quad (303)$$

Από τις (297) και (303) παίρνουμε τη συνθήκη ιδιοτιμών

$$\langle w | \frac{1}{-\gamma L - E_\alpha} |w\rangle = 1 \quad (304)$$

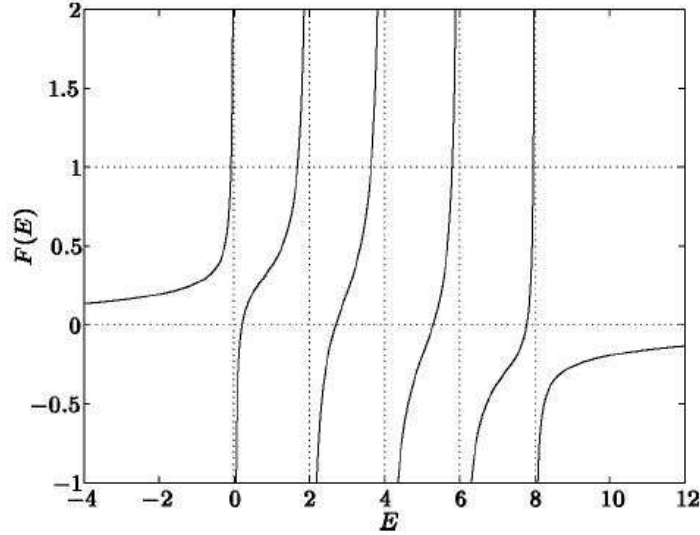
όπου χρησιμοποιώντας την πλήρη βάση των ιδιοσυναρτήσεων της L από την (299) έχουμε

$$\langle w | \sum_k |\Phi_k\rangle \langle \Phi_k | \frac{1}{-\gamma L - E_\alpha} | \sum_k |\Phi_k\rangle \langle \Phi_k | w \rangle = 1 \quad (305)$$

Η L βλέπει τις ιδιοτιμές της και έχουμε

$$F(E_\alpha) = 1 \quad (306)$$

$$F(E) = \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{\gamma E(k) - E} \quad (307)$$



Σχήμα 25: Αναπαράσταση της συνάρτησης $F(E_\alpha)$ για $d = 2$, $N = 16$ και $\gamma = 1$.

όπου έχουμε ορίσει τη συνάρτηση

$$F(E) = \langle w | \frac{1}{H_0 - E} | w \rangle = \langle w | \frac{H_0 + E}{H_0^2 - E^2} | w \rangle \quad (308)$$

και $H_0 = -\gamma L$ είναι η ελεύθερη χαμιλτονιανή.

Για να πάρουμε μια τυπική μορφή της $F(E_\alpha)$ κάνουμε τη γραφική παράσταση για $d = 2$, $N = 16$ και $\gamma = 1$ όπως φαίνεται στο σχήμα 25

Η παράγωγος είναι θετικά ορισμένη

$$F'(E) = \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{(\gamma E(k) - E)^2} \quad (309)$$

επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Έχει επίσης πόλους, ίσους σε πλήθος με τις ιδιοτιμές της λαπλασιανής³⁵ ενώ για $E \rightarrow \pm\infty \implies F(E) \rightarrow 0$

Εισάγοντας τις ιδιοκαταστάσεις της χαμιλτονιανής $|\Psi_\alpha\rangle$ στη συνθήκη κανονικοποίησης (306) παίρνουμε

$$\langle w | \sum |\Psi_\alpha\rangle \langle \Psi_\alpha | \frac{1}{(-\gamma L - E_\alpha)^2} | \sum |\Psi_\alpha\rangle \langle \Psi_\alpha | w \rangle = 1 \quad (310)$$

³⁵ Λόγω συμμετρίας του πλέγματος οι ιδιοτιμές $E = 2, 4, 6$ έχουν πολλαπλότητα 4, 6, 4 αντίστοιχα.

που γράφεται

$$R_\alpha < w | \frac{1}{(-\gamma L - E_\alpha)^2} | w > = 1 \quad (311)$$

ή αλλιώς

$$R_\alpha = \frac{1}{F'(E_\alpha)} \quad (312)$$

Τέλος, χρειαζόμαστε την επικάλυψη των ιδιοκαταστάσεων της χαμιλτονιανής με την αρχική κυματοσυνάρτηση.

$$< s | \Psi_\alpha > = -\frac{\sqrt{R_\alpha}}{E_\alpha} < s | \Psi_\alpha > \quad (313)$$

που μας δίνει

$$| < s | \Psi_\alpha > |^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{E_\alpha^2 F'(E_\alpha)} \quad (314)$$

Καταλήγοντας, από τις σχέσεις (298), (303) και (305) έχουμε για το ζητούμενο πλάτος μετάβασης

$$< w | e^{-iHt} | s > = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t}}{E_\alpha F'(E_\alpha)} \quad (315)$$

το οποίο επιθυμούμε να είναι της τάξης $O(1)$. Προφανώς για χρόνο $t = 0$ θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_\alpha \frac{1}{E_\alpha F'(E_\alpha)} = -1 \quad (316)$$

Για μεγάλα N αυτό το άθροισμα μπορεί να προσεγγιστεί από το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t}}{E_\alpha F'(E_\alpha)} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iE_\alpha t} d^d k}{E_\alpha F'(E_\alpha)} \quad (317)$$

Όμως ας δούμε πότε αυτό το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Δεδομένου ότι

$$F'(E_\alpha) = \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{(\gamma \varepsilon(k) - E_\alpha)^2} \quad (318)$$

και αφού όπως έχουμε ήδη πει

$$\varepsilon(k) = 2(d - \sum_{j=1}^d \cos(k_j)) \quad (319)$$

αναπτύσσοντας το συνημίτονο $\cos(k_j) = 1 + k_j^2 + \dots$ εύκολα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα σε πρώτη τάξη είναι της μορφής

$$\langle w|e^{-iHt}|s \rangle \simeq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iE_\alpha t} d^d k}{E_\alpha(\gamma k^2 - E_\alpha)^2} \quad (320)$$

Βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο για $d \geq 4$ συνεπώς για $d \leq 4$ σίγουρα δε μπορούμε να πετύχουμε $\langle w|e^{-iHt}|s \rangle \simeq 1$ και ο αλγόριθμος αποτυγχάνει.

Συνεχίζοντας μόνο για $d > 4$ και προσπαθώντας να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα γράφουμε

$$F(E) = -\frac{1}{NE} + \frac{1}{N} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\gamma \varepsilon(k) - E} \quad (321)$$

Εάν ισχύει $|E| \ll \gamma \varepsilon(k) \forall k \neq 0$ για μεγάλα N μπορούμε αφενός να πάρουμε το ολοκλήρωμα και αφετέρου να κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο του αναπτύγματος Taylor

$$F(E) \simeq -\frac{1}{NE} + \frac{1}{\gamma} U(0) + \frac{1}{\gamma^2} V(0) \quad (322)$$

όπου έχουμε ορίσει τα ολοκληρώματα

$$U(0) = \frac{1}{(2\pi^d)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon(k)} \quad (323)$$

$$V(0) = \frac{1}{(2\pi^d)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\varepsilon^2(k)} \quad (324)$$

Ός αποτέλεσμα η παράγωγος της $F(E)$ είναι περίπου

$$F'(E) \simeq -\frac{1}{NE^2} + \frac{1}{\gamma^2} V(0) \quad (325)$$

Τώρα, δεδομένου ότι ζητάμε ιδιοκαταστάσεις με ιδιοτιμή μονάδα απαιτούμε $F(E_\alpha) = 1$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου γ . Η πιο εύκολη επιλογή είναι $\gamma = U(0)$ ώστε η συνθήκη που ζητάμε να γράφεται

$$-\frac{1}{NE} + \frac{1}{\gamma^2} V(0) = 0 \quad (326)$$

Λύνοντας ως προς E παίρνουμε

$$E_\pm \simeq \pm \frac{U(0)}{\sqrt{V(0)N}} \quad (327)$$

που αντιστοιχούν στις ενέργειες της θεμελιώδους και πρώτης διεγερμένης αντίστοιχα. Η διαφορά ενεργειών είναι

$$\Delta E_{\pm} = 2 \frac{U(0)}{\sqrt{V(0)N}} \quad (328)$$

Επίσης βλέπουμε ότι η συνθήκη για να πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor ισχύει για κάθε $k \neq 0$. Από την (325) παίρνουμε

$$F'(E_-) \simeq F'(E_+) \simeq \frac{2V(0)}{U(0)} \quad (329)$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να εξελίξουμε την κατάσταση μας $|s\rangle$ στο χρόνο. Για $t = 0$ από την (316) η συνεισφορά των καταστάσεων ενέργειας μεγαλύτερης της πρώτης διεγερμένης είναι

$$-\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{E_{\alpha} > E_+} \frac{e^{-iE_{\alpha}t}}{E_{\alpha}F'(E_{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[1 + \frac{1}{E_-F'(E_-)} \right] + \frac{1}{E_+F'(E_+)} \quad (330)$$

Βλέπουμε και με τη χρήση των (327) και (329) ότι οι όροι τάξης $O(\sqrt{N})$ από τους δύο τελευταίους όρους αλληλοαναιρούνται. Συνεπώς από την (;;) παίρνουμε για την προβολή της $|s(t)\rangle$ στην $|w\rangle$

$$|\langle w|e^{-iHt}|s\rangle| \simeq \frac{U(0)}{\sqrt{V(0)}} \left| \sin\left(\frac{U(0)t}{\sqrt{V(0)}}\right) \right| \quad (331)$$

Επιλέγοντας $t = \frac{\sqrt{V(0)N}}{U(0)} \propto O(\sqrt{N})$ το ημίτονο γίνεται μονάδα και έχουμε πιθανότητα $O(1)$ η τελική μας κατάσταση να είναι η $|w\rangle$. Συνεπώς επιτυγχάνεται η ζητούμενη κβαντική επιτάχυνση τάξης ρίζας.

Για $d = 4$ το $U(0)$ δεν συγκλίνει και έχει τη μορφή $(1/32\pi^2)\ln N$. Επομένως οι σχέσεις (327) - (331) γίνονται αντίστοιχα

$$E_{\pm} \simeq \pm \frac{U(0)}{\sqrt{\frac{1}{32\pi^2}N\ln N}} \quad (332)$$

$$F'(E_-) \simeq F'(E_+) \simeq \frac{\ln N}{16\pi^2 U^2(0)} \quad (333)$$

$$|\langle w|e^{-iHt}|s\rangle| \simeq \frac{U(0)}{\sqrt{\frac{1}{32\pi^2}\ln N}} \left| \sin\left(\frac{U(0)t}{\sqrt{\frac{1}{32\pi^2}N\ln N}}\right) \right| \quad (334)$$

Βλέπουμε ότι για $d = 4$ δεν πετυχαίνουμε πλήρη κβαντική επιτάχυνση καθώς ο χρόνος που απαιτείται για να έχουμε επιτυχία $O(1/\log N)$ ³⁶ είναι $t = \sqrt{N \ln N}$ και είναι λίγο πιο αργός. Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι με χρήση της χαμιλτονιανής του Dirac μπορούμε να έχουμε πλήρη κβαντική επιτάχυνση έως και $d \geq 2$.

6.3 Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Πριν προχωρήσουμε χρήσιμο είναι να δούμε τη σχέση που έχει ο κβαντικός περίπατος συνεχούς χρόνου με τον αλγόριθμο του Grover, όπως και να ασχοληθούμε με μια ποιοτική ανάλυση του τι στην ουσία κάνει αυτός ο αλγόριθμος.

Όσον αφορά το δεύτερο θέμα, κανείς από τη μορφή της χαμιλτονιανής αναμένει ότι η εξέλιξη της αρχικής μας κατάστασης σίγουρα θα μεταβαίνει προς την κατάσταση λύσης. Είναι έτσι κατασκευασμένη η χαμιλτονιανή. Όμως κανείς δεν εγκυιάται ότι σε χρόνο τάξης $O(\sqrt{N})$ θα υπάρχει πιθανότητα $O(1)$ η τελική μας κατάσταση να είναι η ζητούμενη $|w\rangle$, για κάποιο γ . Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό αν σκεφτούμε τις ακραίες μορφές της χαμιλτονιανής. Για $\gamma \gg 1$ η χαμιλτονιανή γίνεται $H \simeq \gamma L$ όπου δεδομένου ότι η L είναι η λαπλασιανή, για οποιαδήποτε μορφή πλέγματος η ομογενής υπέρθεση, και αρχική μας κατάσταση, $|s\rangle$ είναι ιδιοκατάστασή της με $L|s\rangle = 0$ οπότε είναι και η θεμελιώδης. Εν αντιθέση, για $\gamma \ll 1$ ο κυρίαρχος όρος είναι ο $H \simeq -|w\rangle\langle w|$ και προφανώς έχει θεμελιώδη την $|w\rangle$. Όμως, δεδομένου ότι η κατάσταση που ψάχνουμε είναι μία³⁷, ουσιαστικά η ισοβαρής υπέρθεση όλων είναι σχεδόν κάθετη στην $|w\rangle$. Όμως η τελευταία είναι και η θεμελιώδης της αρχικής μας χαμιλτονιανής. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε τον πρώτο όρο ως διαταραχή για $\gamma \rightarrow 0$, η θεμελιώδης θα παραμείνει περίπου ίδια ενώ η πρώτη διεγερμένη θα είναι η $|s\rangle$. Τώρα, σκοπός μας είναι να διαλέξουμε το γ σε μια ενδιάμεση αυτών των ακραίων τιμών έτσι ώστε και η θεμελιώδης αλλά και η πρώτη διεγερμένη να είναι σχεδόν ισοβαρής υπέρθεση των $|s\rangle$, $|w\rangle$. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα η εξέλιξη του συστήματος να είναι μια συνεχής στροφή από την $|s\rangle$ στην $|w\rangle$ και αντίστροφα. Όπως και ο αλγόριθμος του Grover δηλαδή, θα προκαλεί στροφή από τις μη λύσεις στις λύσεις. Η θεωρία διαταραχών υποδεικνύει ότι αυτό θα γίνεται σε χρόνο $O(\frac{1}{E_1 - E_0})$, όπου στον παρονομαστή είναι η διαφορά ενεργειών της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης. Αρκεί να τερματίσουμε τον αλγόριθμο μετά από τόσο χρόνο για

³⁶Χρησιμοποιώντας Amplitude Amplification μπορούμε να επιτύχουμε την $|w\rangle$ με πιθανότητα $O(\sqrt{N \log N})$

³⁷Για να ισχύει αυτή η προσέγγιση αρκεί το πλήθος των μη λύσεων να είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος των λύσεων. Εάν κάτι τέτοιο δεν ισχύει μπορούμε πάντα, όπως και στην περίπτωση του Grover, να διπλασιάσουμε τουλάχιστον τον χώρο Hilbert του προβλήματος για να ικανοποιείται η συνθήκη.

να πάρουμε με μεγάλη πιθανότητα τη ζητούμενη κατάσταση.

Το ότι αυτός ο χρόνος είναι τάξης $O(\sqrt{N})$ φαίνεται εύκολα στην περίπτωση του πλήρους γράφου όπου κάθε πλεγματικό σημείο θεωρείται πως συνορεύει με όλα τα άλλα, συνεπώς έχουμε μια εντοπισμένη βάση. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμός μας ουσιαστικά ταυτίζεται με αυτόν του Grover .

Έχουμε την ελευθερία να προσθέσουμε μια σταθερά στη χαμιλτονιανή. Προσθέτουμε ένα πολλαπλάσιο της μονάδας και παίρνουμε

$$L + NI = N|s\rangle\langle s| = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (335)$$

που έχει σαν αποτέλεσμα η χαμιλτονιανή να γράφεται ως

$$H = -\gamma N|s\rangle\langle s| - |w\rangle\langle w| \quad (336)$$

και η χαμιλτονιανή δρα μη τετριμμένα μόνο σε ένα διδιάστατο υπόχωρο, οπότε εύκολα βρίσκουμε το φάσμα της. Όπως σχολιάσαμε και λίγο πριν για τις δύο ακραίες τιμές του γ η θεμελιώδης κατάσταση αυτής της χαμιλτονιανής είναι οι $|w\rangle$ και $|s\rangle$ αντίστοιχα. Με την επιλογή $\gamma = 1/N$ οι ιδιοκαταστάσεις είναι $\frac{1}{\sqrt{N}}(|w\rangle \pm |s\rangle)$ με ενεργειακό χάσμα $2/\sqrt{N}$. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, εάν εκκινήσουμε τον αλγόριθμο στην κατάσταση $|s\rangle$, μετά από χρόνο $O(\sqrt{N})$ θα μεταβεί στην $|w\rangle$.

7 ΕΞΕΛΙΞΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΙΣΩΣΗ DIRAC

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε έναν κβαντικό τυχαίο περίπατο συνεχούς χρόνου εξελισσόμενο με τη χαμιλτονιανή του Schrödinger. Τώρα θα δούμε έναν κβαντικό τυχαίο περίπατο συνεχούς χρόνου και πάλι αλλά με τη χαμιλτονιανή του Dirac. Το ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση είναι ότι η χαμιλτονιανή του Dirac εκφράζει καταστάσεις με σπιν που, όπως έχει προαναφερθεί, παίζει το ρόλο του νομίσματος στους κβαντικούς τυχαίους περιπάτους διακριτού χρόνου³⁸. Στην έκδοση συνεχούς χρόνου δεν είχε χρειαστεί να εισάγουμε έναν εξωτερικό χώρο νομίσματος, αλλά η εξίσωση του Dirac μας αναγκάζει να το κάνουμε αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη χαμιλτονιανή του. Θα δούμε ποιές είναι οι συνέπειες.

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle \quad (337)$$

Η χαμιλτονιανή του Dirac είναι

$$H = \sum_{j=1}^d \alpha_j p_j + \beta m \quad (338)$$

όπου οι πίνακες α_j, β δρουν στο βαθμό ελευθερίας του σπιν της κατάστασης και το $j = 1, 2, \dots, d$ με d τη διάσταση του χώρου. Απαιτείται να ισχύουν οι γνωστές σχέσεις αντιμετάθεσης

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk} \quad (339)$$

$$\{\alpha_j, \beta\} = 0 \quad (340)$$

$$\beta^2 = 1 \quad (341)$$

για να είναι η χαμιλτονιανή μας ρελατιβιστική $H^2 = |p|^2 + m^2$.

Επειδή θέλουμε να μελετήσουμε ένα πλέγμα εν γένει d διάστασης, χρειαζόμαστε $d + 1$ τέτοιους τελεστές. Η αναπαράσταση της άλγεβρας αυτής είναι πίνακες διάστασης $2^{\lceil d/2 \rceil}$ ³⁹ συνεπώς χρειαζόμαστε ισοπληθούς διάστασης σπιν.

Χρειαζόμαστε τη διακριτή έκδοση της χαμιλτονιανής. Ο τελεστής της ορμής σε κάθε διεύθυνση μπορεί να διακριτοποιηθεί πάνω στο πλέγμα ως

$$P_j |x\rangle = \frac{i}{2} (|x + e_j\rangle - |x - e_j\rangle) \quad (342)$$

³⁸ Αξίζει να σημειωθεί ότι ο επιπλέον χώρος του νομίσματος είναι απαραίτητος για τους κβαντικούς τυχαίους περιπάτους διακριτού χρόνου, σε αντίθεση με του συνεχούς χρόνου.

³⁹ Ο συμβολισμός $\lceil x \rceil$ αντιστοιχεί στον μικρότερο ακέραιο μεγαλύτερο ίσο του x .

όπου e_j είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην j κατεύθυνση. Προς αποφυγή του προβλήματος Fermion Doubling Problem⁴⁰ που συναντάται στη θεωρία πεδίου πλέγματος, αντικαθιστούμε τον όρο μάζας με τον όρο Wilson

$$H_0 = \omega \sum_{j=1}^d \alpha_j P_j + \gamma \beta L \quad (343)$$

όπου ω και γ είναι ελεύθερες παράμετροι. Για να μελετήσουμε την εξέλιξη του αλγορίθμου χρειαζόμαστε τις ιδιοτιμές της.

7.1 Υπολογισμός των ιδιοτιμών την Χαμιλτονιανής

Λόγω της συμμετρίας στο χώρο που έχει η χαμιλτονιανή οι ιδιοκαταστάσεις της θα είναι της μορφής

$$H_0 |\eta, k\rangle = \varepsilon(k) |\eta, k\rangle \quad (344)$$

όπου $|k\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση ορμής και $|\eta\rangle$ είναι κατάσταση σπιν, που εν γένει εξαρτάται από την ορμή.

Κατόπιν τούτων είμαστε έτοιμοι να αρχίσουμε τον υπολογισμό των ιδιοτιμών. Θα χρησιμοποιήσουμε εκ νέου τους δύο τελεστές που εισήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την εύρεση των ιδιοτιμών της χαμιλτονιανής του Schrödinger. Ορίζουμε και πάλι όλες τις πράξεις μας να εκτελούνται $mod N$, όπου N είναι το πλήθος των σημείων σε κάθε διεύθυνση και οι καταστάσεις βάσης θα έχουν αναπαράσταση $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |N-1\rangle$ με $|N\rangle = |0\rangle$ και αναπαράσταση

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \quad (345)$$

Οι τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι (P) και (Q) . Για τον πρώτο

⁴⁰Η "κανονική" διακριτοποιημένη χαμιλτονιανή του Dirac έχει ιδιοτιμές ενέργειας της μορφής $\lambda \sim \frac{\sin kL}{L}$, με L το μήκος του πλέγματος σε κάποια διάσταση. Αυτό οδηγεί σε δύο διαφορετικές συμπεριφορές της λ ανάλογα με την τιμή του k : $k = 0 \implies \lambda \sim 0$ και $k = \pi/L \implies \lambda \sim 1/L$. Αυτές οι δύο συμπεριφορές καλούνται Fermion Doublets. Για να γλιτώσουμε από τον δεύτερο όρο (που απειρίζεται στο συνεχές όριο όπου το $L \rightarrow 0$) εισάγουμε τον Wilson Term για να κάνουμε τη μάζα του πολύ μεγάλη συνεπώς να είναι μη παρατηρήσιμος. Αυτός ο όρος όμως σπάει τη χειραλική συμμετρία της QCD.

όπως προείπαμε θα ισχύει

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (346)$$

ενώ ο αντίστροφός του που παράγει την αντίθετη στροφή

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (347)$$

για να εκτελούν στροφή κατά γωνία $\omega = \frac{2\pi i}{N}$ και $\omega = -\frac{2\pi i}{N}$ αντίστοιχα.

Επίσης, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο ο τελεστής (Q) είναι ο γενικευμένος τελεστής θέσης που ορίζεται μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$FPF^{-1} = Q \quad (348)$$

με τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier όπως ορίστηκε νωρίτερα

$$F = QFT = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{d-1} \\ 1 & \omega^2 & \dots & \dots & \omega^{2(d-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \dots & \omega^{(d-1)(d-1)} \end{pmatrix} \quad (349)$$

που παράγει τον πίνακα

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix} \quad (350)$$

που γράφεται ως

$$Q = |0\rangle + \omega|1\rangle + \omega^2|2\rangle + \dots + \omega^{N-1}|N\rangle \quad (351)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι αυτοί οι τελεστές υπακούουν στη διακριτοποιημένη εκδοχή της αρχής του Heizenberg

$$QP = \omega PQ \quad (352)$$

Προφανώς εάν δράσουμε με τον τελεστή P N φορές σε μια κατάσταση $|x\rangle$ θα κάνουμε μια πλήρη περιστροφή και θα ισχύει

$$P^N|x\rangle = |x\rangle \quad \forall x \quad (353)$$

που σημαίνει πως οι ιδιοτιμές του είναι ω^{-k} , $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Ομοίως, οι ιδιοτιμές του αντίστροφου είναι ω^k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Ερχόμενοι τώρα στην ελεύθερη χαμιλτονιανή

$$H_D = \omega \sum_{j=1}^d \alpha_j P_j + \gamma \beta L \quad (354)$$

το φάσμα της οποίας ζητάμε, μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει του τελεστή P . Για να γίνει εύκολα αντιληπτό ξαναγράφουμε τους L και P σύμφωνα με τους ορισμούς (355) και (356) που είχαμε δώσει στα αντίστοιχα κεφάλαια

$$L = - \begin{pmatrix} -d_j & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -d_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -d_j & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -d_j \end{pmatrix} \quad (355)$$

και

$$P_j|x\rangle = \frac{i}{2}(|x + e_j\rangle - |x - e_j\rangle) \quad (356)$$

αλλά για μία διάσταση,

$$\langle x'|L|x\rangle = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (357)$$

$$\langle x'|P|x\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (358)$$

Οι παραπάνω πίνακες μπορούν να γραφούν συναρτήσει του τελεστή της ορμής ως

$$\langle x'|L|x\rangle = 2I - [P^{-1} + P] \quad (359)$$

$$\langle x'|P|x\rangle = \frac{i}{2}[P^{-1} - P] \quad (360)$$

Το φάσμα της H_D είναι λίγο πιο δύσκολο να βρεθεί από την προηγούμενη περίπτωση με την εξε•λική με την χαμιλτονιανή του Schrödinger . Ο λόγος είναι ότι οι ιδιοκαταστάσεις έχουν και σπιν μέρος στο οποίο οι πίνακες του α_j, β του Dirac δρουν μη τερμμένα

$$\alpha_j |\eta, \Psi\rangle \rightarrow |\eta', \Psi\rangle \quad (361)$$

$$\beta |\eta, \Psi\rangle \rightarrow |\eta', \Psi\rangle \quad (362)$$

Μπορούμε όμως να εκμεταλευτούμε τις ιδιότητες των πινάκων $\alpha_j^2 = \beta^2 = 1$ και τις σχέσεις αντιμετάθεσης $\{\alpha_j, \alpha_i\} = 2\delta_{ji}$, $\{\alpha_j, \beta\} = 0$. Αυτό που θα κάνουμε, είναι να βρούμε τις ιδιοτιμές του τετραγώνου της χαμιλτονιανής, ώστε να μη μας απασχολεί το σπιν κομμάτι καθώς θα συμμετέχει ή το τετράγωνο των πινάκων του Pauli που δρα τετριμμένα στο σπιν κομμάτι (το αφήνει αναλλοίωτο) ή ένας συνδυασμός τους που λόγω της σχέσης αντιμετάθεσης θα μηδενίζεται.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές λ_P της ορμής

$$\langle x' | P | x \rangle = \frac{i}{2} [P^{-1} - P] \quad (363)$$

επομένως

$$\lambda_P = \frac{i}{2} [\omega^k - \omega^{-k}] \quad (364)$$

$$= \sin \frac{2\pi k}{N} \quad (365)$$

Από την τελευταία σχέση δικαιολογείται και η μιγαδική μονάδα στον ορισμό της ορμής.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί η διαφορά στη σχέση διασποράς που κληροδοτείται και στις ιδιοτιμές. Για την εξίσωση Schrödinger ισχύει $E \propto \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ενώ για την Dirac $E \propto \frac{\partial}{\partial x}$. Η δεύτερη παράγωγος στη Schrödinger ερμηνεύεται ως ομόσημα P, P^{-1} που με τη σειρά του οδηγεί σε ιδιοτιμή $\lambda_S \propto \cos(2\pi k/N)$ ενώ εν αντιθέση η πρώτη παράγωγος στην Dirac οδηγεί σε διαφορετικό σχετικό πρόσημο των P, P^{-1} που με τη σειρά του σημαίνει $\lambda_D \propto \sin(2\pi k/N)$. Η υπογραφή της διαφορετικής διασποράς παραμένει και γίνεται εμφανής στο ανάπτυγμα Taylor που είναι τετραγωνική και γραμμική αντίστοιχα. Αυτή η διαφορά είναι σημαντική για τη συμπεριφορά των δύο αλγορίθμων.

Συνεχίζοντας στον υπολογισμό των ιδιοτιμών της H_D έχουμε

$$H_D |\eta, \Psi\rangle = (\omega \sum_j \alpha_j P_j + \gamma \beta L) |\eta, \Psi\rangle \quad (366)$$

$$= [\omega \sum_j \alpha_j \sin \frac{2\pi k_j}{N} + \gamma \beta 2 \sum_j (1 - \cos \frac{2\pi K_j}{N})] |\eta', \Psi\rangle \quad (367)$$

Δρώντας εκ νέου με την H_D παίρνουμε

$$H_D^2|\eta, \Psi\rangle = \{(\omega^2 \sum_{j,i} \alpha_j \alpha_i \sin \frac{2\pi k_j}{N} \sin \frac{2\pi k_i}{N} \quad (368)$$

$$+ \gamma^2 \beta^2 [2 \sum_j (1 - \cos \frac{2\pi K_j}{N})]^2\} |\eta, \Psi\rangle \quad (369)$$

$$+ (\text{οροι } \alpha_j \beta) |\eta, \Psi\rangle \quad (370)$$

Ξανακάνουμε τα δύο τελευταία βήματα αλλά φροντίζουμε η σειρά των i, j να είναι ανάποδη ώστε να εμφανιστεί ο αντιμεταθέτης. Προσθέτουμε τα δύο H_D^2 και βρίσκουμε

$$2H_D^2|\eta, \Psi\rangle = \{(\omega^2 \sum_{j,i} \{\alpha_j, \alpha_i\} \sin \frac{2\pi k_j}{N} \sin \frac{2\pi k_i}{N} \quad (371)$$

$$+ 2\gamma^2 \beta^2 [2 \sum_j (1 - \cos \frac{2\pi K_j}{N})]^2\} |\eta, \Psi\rangle \quad (372)$$

$$+ (\text{οροι } \{\alpha_j, \beta\}) |\eta, \Psi\rangle \quad (373)$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες $\alpha_j^2 = \beta^2 = 1$ και τις σχέσεις αντιμετάθεσης $\{\alpha_j, \alpha_i\} = 2\delta_{ji}$, $\{\alpha_j, \beta\} = 0$ κάνουμε τα αθροίσματα ως προς i και παίρνουμε

$$H_D^2|\eta, \Psi\rangle = \{(\omega^2 \sin^2 \frac{2\pi k_j}{N} + \gamma^2 [2 \sum_j (1 - \cos \frac{2\pi K_j}{N})]^2)\} |\eta, \Psi\rangle \quad (374)$$

Παίρνοντας τη ρίζα βρίσκουμε για το φάσμα της H_D

$$\varepsilon(k) = \pm \sqrt{\omega^2 \sum_j \sin^2 \frac{2\pi k_j}{N} + \gamma^2 [2 \sum_j (1 - \cos \frac{2\pi K_j}{N})]^2} \quad (375)$$

που όντως σε πρώτη τάξη από το ανάπτυγμα Taylor γράφεται $\varepsilon(k) \simeq \pm \omega |k|$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της ενέργειας για τη χαμιλτονιανή μας H_0 είναι

$$E(k) = \pm \sqrt{\omega^2 s^2(k) + \gamma^2 c^2(k)} \quad (376)$$

με

$$s^2(k) = \sum_{j=1}^d \sin^2 k_j \quad (377)$$

$$c(k) = 2 \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j) \quad (378)$$

7.2 Υπολογισμός πλάτους και χρόνου σύγκλισης

Έχοντας και το φάσμα ιδιοτιμών είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμό μας. Όπως και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θεωρούμε ότι η κατάσταση που φάχνουμε κωδικοποιείται σαν ένα σημείο του πλέγματος $|w\rangle$. Για να εξελιχθεί το σύστημά μας προς αυτήν, θα το εξελίσσουμε με την τροποποιημένη χαμιλτονιανή

$$H = H_0 - \beta|w\rangle\langle w| \quad (379)$$

που έχει την κατάσταση $|w\rangle$ ως κατάσταση ελάχιστης ενέργειας.

Εκκινούμε τον αλγόριθμο στην κατάσταση $|\eta, s\rangle$ όπου $|\eta\rangle$ είναι μια κατάσταση σπιν και $|s\rangle$ είναι η γνωστή κατάσταση ισοβαρούς υπέρθεσης

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle \quad (380)$$

Μετά από κάποιο χρόνο T η αρχική κατάσταση θα έχει εξελιχθεί προς την κατάσταση $|w\rangle$. Μπορούμε να επιλέξουμε τα ω και γ έτσι ώστε να έχουμε πλάτος πιθανότητας της τάξης της μονάδας η τελική μας κατάσταση να είναι η $|w\rangle$ σε χρόνο $T \propto \sqrt{N}$ για $d \geq 2$.

Για να αναλύσουμε τον αλγόριθμο και να δούμε αν όντως έχουμε την επιθυμητή σύγκλιση και σε πόσο χρόνο, χρειαζόμαστε το φάσμα της χαμιλτονιανής μας H συναρτήση της ελεύθερης χαμιλτονιανής H_0 . Μια ιδιοκατάσταση $|\Psi_\alpha\rangle$ της H θα ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών

$$H|\Psi_\alpha\rangle = (H_0 - \beta|w\rangle\langle w|)|\Psi_\alpha\rangle = E_\alpha|\Psi_\alpha\rangle \quad (381)$$

Εάν θεωρήσουμε την προβολή του χωρικού κομματιού της $|\Psi_\alpha\rangle$ στην κατάσταση λύση μπορούμε να την ορίσουμε ως

$$\sqrt{R_\alpha}|\Phi_\alpha\rangle = \langle w|\Psi_\alpha\rangle \quad (382)$$

όπου $|\Phi_\alpha\rangle$ είναι το σπιν κομμάτι της $|\Psi_\alpha\rangle$. Με τη χρήση αυτής της προβολής μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ιδιοτιμών ως

$$H_0 - E_\alpha|\Psi_\alpha\rangle = \sqrt{R_\alpha}\beta|\Phi_\alpha, w\rangle \quad (383)$$

Για $H_0 \neq E_\alpha$ η ιδιοκατάσταση γράφεται

$$|\Psi_\alpha\rangle = \frac{\sqrt{R_\alpha}}{H_0 - E_\alpha}\beta|\Phi_\alpha, w\rangle \quad (384)$$

που από την (382) γίνεται

$$|\Phi_\alpha\rangle = F(E_\alpha)\beta|\Phi_\alpha\rangle \quad (385)$$

όπου έχουμε ορίσει τη συνάρτηση

$$F(E) = \langle w | \frac{1}{H_0 - E} | w \rangle = \langle w | \frac{H_0 + E}{H_0^2 - E^2} | w \rangle \quad (386)$$

η οποία δρα μόνο στο σπιν κομμάτι μιας κατάστασης. Για να μπορέσουμε να βρούμε ιδιοκαταστάσεις της H θα πρέπει το σπιν κομμάτι της ιδιοκατάστασης να μένει αναλλοίωτο κάτω από την εφαρμογή της χαμιλτονιανής, ή πιο συγκεκριμένα στο κομμάτι της χαμιλτονιανής που δρα στο σπιν, δηλαδή την $F(E)\beta$. Συνεπώς θα πρέπει να ψάξουμε για ιδιοτιμές της ενέργειας τέτοιες ώστε ο τελεστής που δρα στο σπιν $F(E)\beta$ να έχει ιδιοτιμή μονάδα. Με αυτό το σκοπό θα ασχοληθούμε μέχρι την σχέση (404).

Αρχίζοντας, η συνθήκη κανονικοποίησης των ιδιοδιανυσμάτων $\langle \Psi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle = 1$ δίνει

$$R_\alpha^{-1} = \langle \Phi_\alpha, w | \beta \frac{1}{(H_0 - E_\alpha)^2} \beta | \Phi_\alpha, w \rangle \quad (387)$$

$$= \langle \Phi_\alpha | \beta F'(E_\alpha) \beta | \Phi_\alpha \rangle \quad (388)$$

Επίσης, αν $|\varepsilon\rangle$ ονομάσουμε τις ιδιοκαταστάσεις ενέργειας της ελεύθερης χαμιλτονιανής με ιδιοτιμές ε

$$H_0 |\varepsilon\rangle = \varepsilon |\varepsilon\rangle \quad (389)$$

που σημαίνει ότι

$$\frac{1}{H_0} |\varepsilon\rangle = \frac{1}{\varepsilon} |\varepsilon\rangle \quad (390)$$

Επομένως η προβολή της ιδιοκατάστασης της H σε μια ιδιοκατάσταση της H_0 είναι

$$\langle \varepsilon | \Psi_\alpha \rangle = \frac{\sqrt{R_\alpha}}{\varepsilon - E_\alpha} \langle \varepsilon | \beta | \Phi_\alpha, w \rangle \quad (391)$$

Ο τελεστής που δρα στο σπιν κομμάτι της κυματοσυνάρτησης γράφεται

$$F(E)\beta = \langle w | \frac{H_0 + E}{H_0^2 - E^2} | w \rangle \beta \quad (392)$$

που με την εισαγωγή της πλήρους βάσης των ιδιοκαταστάσεων της H_0 γίνεται

$$F(E)\beta = \frac{1}{N} \sum_k \frac{\gamma c(k) \beta^2 + \beta E}{\varepsilon(k)^2 - E^2} \quad (393)$$

ή αλλιώς

$$F(E)\beta = -\frac{\beta}{NE} + U(E) + \beta EV(E) \quad (394)$$

όπου για $k = 0$ παίρνουμε τον πρώτο όρο και για τα $k \neq 0$ έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις

$$U(E) = \frac{1}{N} \sum_{k \neq 0} \frac{\gamma c(k)}{\varepsilon(k)^2 - E^2} \quad (395)$$

$$V(E) = \frac{1}{N} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\varepsilon(k)^2 - E^2} \quad (396)$$

Εάν $|E| \ll \varepsilon(k)$, που είναι τόσο καλύτερη προσέγγιση όσο περισσότερα αντικείμενα ψάχνουμε, για κάθε k μπορούμε να προσεγγίσουμε τις δύο αυτές συναρτήσεις με το ανάπτυγμα Taylor τους και να κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο. Επίσης, σε μια προσπάθεια να μελετήσουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες του αλγόριθμου θα θεωρήσουμε ότι τα σημεία του πλέγματος τείνουν στο άπειρο και θα μπορέσουμε προσεγγίσουμε το άθροισμα με το ολοκλήρωμα. Έχουμε λοιπόν

$$U(0) \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma c(k) d^d k}{\varepsilon(k)^2} \quad (397)$$

$$V(0) \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{\varepsilon(k)^2} \quad (398)$$

όπου στο τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιήσαμε ότι αφού το N είναι μεγάλο, μιλάμε για μικρά k και ισχύει η προσέγγιση $\varepsilon(k)^2 - E^2 \simeq \varepsilon(k)^2$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε διάσταση d του πλέγματος. Αυτό δεν ισχύει όμως και για το δεύτερο ολοκλήρωμα, που εύκολα φαίνεται ότι συγκλίνει μόνο για $d > 2$. Για να δούμε πιο συγκεκριμένα την εξάρτηση του $V(0)$ από το N , το υπολογίζουμε για τα πρώτα d

$$d = 2 \rightarrow V(0) = \frac{1}{4\pi\omega^2} \ln N + O(1) \quad (399)$$

$$d = 3 \rightarrow V(0) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \quad (400)$$

$$d = 4 \rightarrow V(0) = \frac{4\pi}{\omega^2 N} + \frac{\pi}{4} \quad (401)$$

$$d \rightarrow V(0) \propto \frac{1}{N^{\frac{d-2}{2}}} \quad (402)$$

Αυτή την εξάρτηση θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την ταχύτητα του αλγόριθμου.

Τώρα, μπορούμε πάντα να διαλέξουμε τα ω, γ έτσι ώστε το $U(0) = 1$. Τότε η (394) γίνεται

$$F(E)\beta = \beta \left[-\frac{1}{NE} + EV(0) \right] + 1 \quad (403)$$

Αφού είχαμε πει ότι ψάχνουμε από το φάσμα του $F(E)\beta$ ιδιοτιμές ίσες με τη μονάδα, αρκεί να βρούμε ιδιοτιμές που μηδενίζουν την αγκύλη. Λύνοντας ως προς E βρίσκουμε δύο

$$E_+ = +\frac{1}{\sqrt{V(0)N}} \quad (404)$$

$$E_- = -\frac{1}{\sqrt{V(0)N}} \quad (405)$$

Αυτές αντιστοιχούν στην βασική και πρώτη διεγερμένη κατάσταση του συστήματός μας και όντως ικανοποιούν την προσέγγιση $|E_{\pm}| \ll \varepsilon(k)$, $\forall k \neq 0$.

Έχοντας βρει τις ιδιοτιμές μπορούμε να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις. Από την (389) παίρνουμε

$$\beta F'(E)\beta = \beta[-\frac{\beta}{NE} + U(E) + \beta EV(E)]'\beta \quad (406)$$

$$= \beta[\frac{\beta}{NE^2} + U'(E) + \beta V(E) + \beta EV'(E)]\beta \quad (407)$$

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow 0} [\beta F'(E)\beta] &= \frac{\beta^2}{NE^2} + U'(E)|_{E=0} + \beta^2 V(E=0) + \beta EV'(E)|_{E=0} \\ &= \frac{1}{NE_{\pm}^2} + V(0) \end{aligned} \quad (408)$$

όπου παραλείψαμε τη δράση στις ιδιοκαταστάσεις $|\Phi_{\alpha}\rangle$ χάρη στην συντομία. Η τελευταία σχέση από την (404) γίνεται

$$R_{\pm}^{-1} \approx \frac{1}{NE_{\pm}^2} + V(0) \approx 2V(0) \quad (409)$$

Αν διαλέξουμε για το σπιν κομμάτι της χαμιλτονιανής ιδιοκαταστάσεις $|\Phi_{\pm}\rangle = \beta|\eta\rangle$, η αρχική μας κυματοσυνάρτηση έχει προβολές στις δύο ιδιοκαταστάσεις

$$\langle \eta, s | \Psi_p m \rangle = -\frac{\sqrt{R_{\pm}}}{E_{\pm}\sqrt{N}} \langle \eta | \beta | \Phi_{\pm} \rangle \quad (410)$$

$$\approx \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (411)$$

Συνεπώς η αρχική μας κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί συναρτήση των ιδιοκαταστάσεων ως

$$|\eta, s\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_- \rangle - |\Psi_+ \rangle) \quad (412)$$

Αν διαλέξουμε να εξελίξουμε την αρχική αυτή κατάσταση για χρόνο $T = \frac{\pi}{2|E_{\pm}|}$ παίρνουμε ουσιαστικά την κατάσταση που ψάχνουμε $|w\rangle$. Όντως

$$e^{-iHT}|\eta, s\rangle = |\eta, s(t)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_+\rangle + |\Psi_-\rangle) \quad (413)$$

και υπολογίζοντας την προβολή της στην κατάσταση $|w\rangle$ έχουμε

$$\langle \eta, w | \eta, s(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{R_{\pm}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{R_{\pm}} \quad (414)$$

$$= \sqrt{2R_{\pm}} \quad (415)$$

Το τετράγωνο αυτής της ποσότητας εκφράζει φυσικά την πιθανότητα $p(t)$ η τελική μας κατάσταση μετά από χρόνο T να είναι η ζητούμενη. Για να δούμε αν είναι κοντά στη μονάδα από την (409) έχουμε ότι

$$p(t) = 2R_{\pm} = \frac{1}{V(0)} \quad (416)$$

Από τις σχέσεις (399) βλέπουμε ότι για $d \geq 3 \Rightarrow p(t) \rightarrow 1$. Για $d = 2 \Rightarrow p(t) \rightarrow 1/\ln N$ που μπορεί μέσω Amplitude Amplification να τείνει στη μονάδα.

Όσον αφορά τον χρόνο για να γίνει αυτό, είπαμε ότι χρειάζεται $T = \pi/(2)$ που είναι (για $d \neq 2$)

$$T = \frac{\pi}{2|E_{\pm}|} \quad (417)$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{V(0)N} \quad (418)$$

$$\propto \frac{\pi}{2}\sqrt{N\frac{1}{N^{\frac{d-2}{2}}}} \quad (419)$$

$$\propto \frac{\pi}{2}N^{\frac{4-d}{4}} \quad (420)$$

που επιβεβαιώνει την κβαντική επιτάχυνση $O(\sqrt{N})$. Για $d = 2$ δεν πετυχαίνουμε πλήρη επιτάχυνση καθώς παίρνουμε

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{4\pi\omega^2}}\sqrt{N\ln N} \quad (421)$$

Βλέπουμε όμως ότι για $d \geq 3$ πετυχαίνουμε πλήρη κβαντική επιτάχυνση ενώ $d = 2$ θα πρέπει να βρούμε κάποιο άλλο τρόπο να την επιτύχουμε.

7.3 Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Κοιτώντας την αρχική επιλογή της χαμιλτονιανής πρέπει να προσέξουμε ότι είναι πολύ σημαντική η εισαγωγή του όρου Wilson. Το ότι είχαμε την ελευθερία να επιλέξουμε την παράμετρο γ κατάλληλα μας επέτρεψε να λύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών της πλήρους χαμιλτονιανής, έστω και προσεγγιστικά. Εάν διατηρούσαμε τον αρχικό όρο μάζας θα καταλήγαμε σε μη συγκλίνοντα ολοκληρώματα για κάθε διάσταση του πλέγματος, κάτι που ισχύει και για την περίπτωση που επιλέγαμε την χαμιλτονιανή Klein-Gordon για να εξελίξουμε το σύστημα.

Τελειώνοντας, θα πρέπει να εξηγήσουμε γιατί υπάρχει αυτή η διαφορά μεταξύ της εξέλιξης με την εξίσωση του Schrödinger και του Dirac για το σε ποιά διάσταση οι αλγόριθμοι είναι επιτυχείς. Φαίνεται ο δεύτερος να τα καταφέρνει καλύτερα. Λογικό θα σκεφτεί κανείς, αφού χρησιμοποιεί περισσότερη μνήμη δεδομένου ότι χρειάζεται τον επιπλέον χώρο του νομίσματος - σπιν, σε αντίθεση με τον πρώτο. Όμως ο λόγος της καλύτερης απόδοσης σε διάσταση έως $d \geq 2$ είναι η διαφορετική διασπορά των δύο εξισώσεων. Εάν θυμηθεί κανείς την ανάλυση του αλγόριθμου του Schrödinger στην εξίσωση (320) είχαμε προσεγγίσει την ενέργεια της ελεύθερης χαμιλτονιανής ως $\varepsilon(k) \simeq k^2$ δεδομένου ότι το φάσμα ιδιοτιμών της ήταν ανάλογο του $\cos(k)$. Στην περίπτωση του Dirac το αντίστοιχο φάσμα έχει εξάρτηση $\varepsilon(k) \propto \sin(k)$ που σε πρώτη τάξη δίνει $\varepsilon(k) \simeq k$. Αυτή η διαφορά φυσικά κληροδοτείται από τη διαφορά στη διασπορά των δύο εξισώσεων καθώς στη Schrödinger είναι της μορφής $E \propto P^2$ ενώ στην Dirac της μορφής $E \propto P$.

8 ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ 2D

Είδαμε ότι σε μία διάσταση οι κβαντικοί τυχαίοι περίπατοι προσφέρουν επιτάχυνση τάξης ρίζας σε σχέση με τους κλασσικούς τυχαίους περιπάτους, όπως επίσης ότι διαφέρουν πάρα πολύ οι κατανομές τους. Αυτή η διαφορά δείξαμε ότι οφείλεται στην υπέρθεση καταστάσεων του σπιν που μπορεί να βρεθεί το σωματίδιό μας. Περιμένει λοιπόν κανείς να έχει τα ίδια αποτελέσματα σε περισσότερες διαστάσεις αρκεί να εξασφαλίσει την υπέρθεση του σπιν. Αυτό ακριβώς θα δείξουμε.

Στις δύο χωρικές διαστάσεις υπάρχει το εξής πρόβλημα. Η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(2)$ είναι διδιάστατη, πράγμα που είναι ιδανικό για τη μονοδιάστατη περίπτωση καθώς ακριβώς δύο είναι και οι δυνατές μετακινήσεις του σωματιδίου, δεξιά ή αριστερά. Στις δύο διαστάσεις όμως έχουμε τέσσερις επιλογές. Η πιο απλή γενίκευση που μπορεί να σκεφτεί κανείς είναι να χρησιμοποιήσει την (προφανώς αναγώγιμη) τετραδιάστατη αναπαράσταση της $SU(2)$ ώστε να υπάρχουν τέσσερις συνιστώσες σπιν για να συζευχθούν με τις τέσσερις δυνατές χωρικές μετακινήσεις: Πάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά. Επομένως έχουμε τα σπιν

$$Spin1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (422)$$

$$Spin2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (423)$$

$$Spin3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (424)$$

$$Spin4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (425)$$

που θα τα συζεύξουμε με τους αντίστοιχους τελεστές μετατόπισης

$$P_{xR} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (426)$$

$$P_{xL} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (427)$$

$$P_{yR} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (428)$$

$$P_{yL} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (429)$$

όπου ο P_{xR} προκαλεί μετατόπιση μία θέση προς τα δεξιά και οι υπόλοιποι τελεστές αντίστοιχα.

Αρχικά κάνουμε μια προσομοίωση του προβλήματός μας. Η κατάσταση μας στο χώρο των θέσεων θα είναι ένας $n \times n$ πίνακας όπου εάν το στοιχείο $(7, 5)$ έχει τιμή 0, 4 αυτό σημαίνει ότι η κυματοσυνάρτησή μας στη θέση του χώρου $(7, 5)$ έχει τιμή 0, 4. Οι μεταβάσεις στην y διεύθυνση γίνονται εύκολα όπως και πριν καθώς οι τελεστές $P_{yR,L}$ εκτελούν ακριβώς αυτή την στροφή στα διανύσματα - στήλες του πίνακα της κατάστασής μας. Όμως για να μετατοπίζουν αριστερά -

δεξιά οι $P_{xR,L}$ θα πρέπει να δρουν από αριστερά στην κατάσταση μας

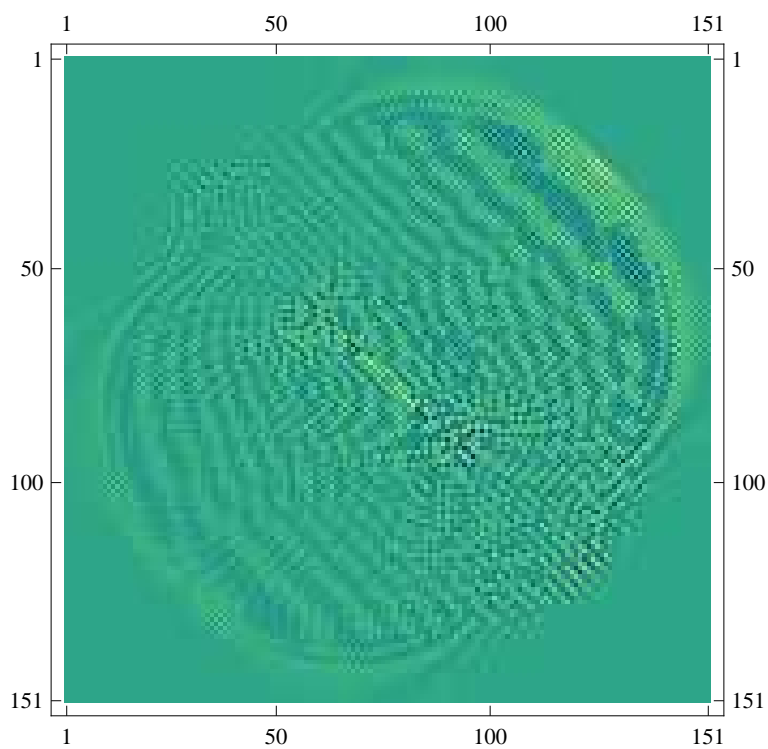
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (430)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (431)$$

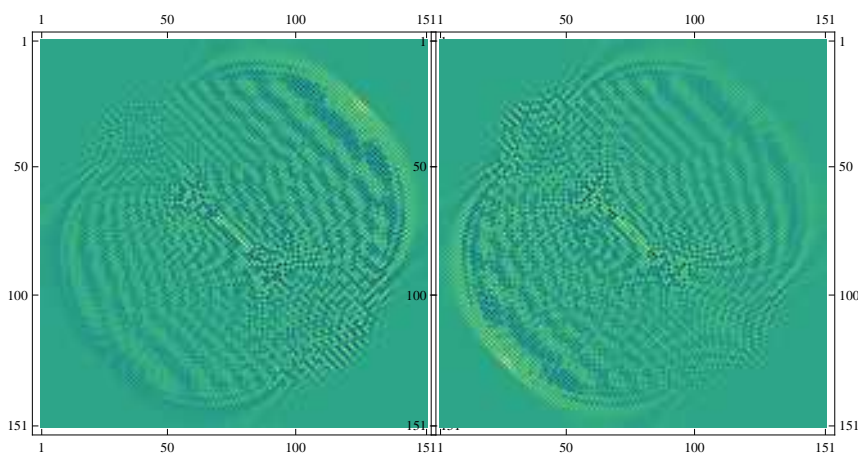
Με αυτές τις συνθήκες και χρησιμοποιώντας για ζάρι τη γενίκευση του τελεστή Hadamard σε τέσσερις διαστάσεις, τον τελεστή του QFT=Quantum Fourier Transform που δημιουργεί μια ισοβαρή υπέρθεση των διανυσμάτων βάσης ώστε να είναι ισοπίθανο για τις τέσσερις διευθύνσεις ζάρι παίρνουμε για πλέγμα 151×151 σημείων και για χρόνο 100 timesteps την κατανομή πιθανότητας του σχήματος 26 ενώ αρχικοποιώντας το σπιν σε διάφορες καταστάσεις παίρνουμε τις κατανομές 27 - 32

Ενώ αρχικοποιώντας το σπιν σε διάφορες καταστάσεις παίρνουμε τις κατανομές 27 - 32

Παρατηρούμε αμέσως πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Καταρχάς παρατηρούμε ότι σε χρόνο 100 βημάτων η κυματοσυνάρτηση έχει διαδοθεί σε αντίστοιχη απόσταση, άρα υπάρχει και εδώ η κβαντική επιτάχυνση τάξης ρίζας. Ένας κλασικός τυχαίος περίπατος θα ήταν μια γκαουσιανή με διασπορά τάξης \sqrt{t} . Δεύτερον, η διδιάστατη κατανομή έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τη μονοδιάστατη. Είναι σχεδόν uniform κατανομή στον κεντρικό τομέα με μικρές διακυμάνσεις και παρουσιάζει μέγιστα στα άκρα. Επίσης βλέπουμε ισχυρή εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες της επιλογής του σπιν, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση. Με αρχικό σπιν $|Spin1\rangle$ η μεγαλύτερη πιθανότητα διαδίδεται προς πάνω και δεξιά, ενώ με αρχικό σπιν $|Spin2\rangle$ το μεγαλύτερο βάρος της πιθανότητας διαδίδεται προς την ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση. Φυσικά υπάρχουν και επιλογές υπέρθεσης που δίνουν ισοπίθανη κατανομή προς τις δύο κατευθύνσεις.

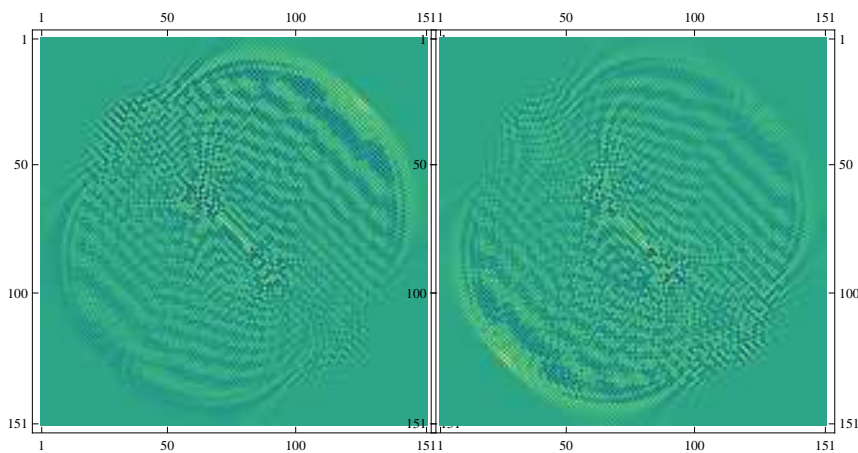


Σχήμα 26: Η αρχική Κυματοσυνάρτηση είναι μια δέλτα συνάρτηση εντοπισμένη στο κέντρο, δηλαδή στο $(75,75)$ στοιχείο. Μετά από 100 βήματα εξέλιξης η κυματοσυνάρτηση έχει την ανωτέρω μορφή όπου οι αποχρώσεις του κίτρινου έχουν τις μεγαλύτερες τιμές ενώ του μπλε τις μικρότερες.



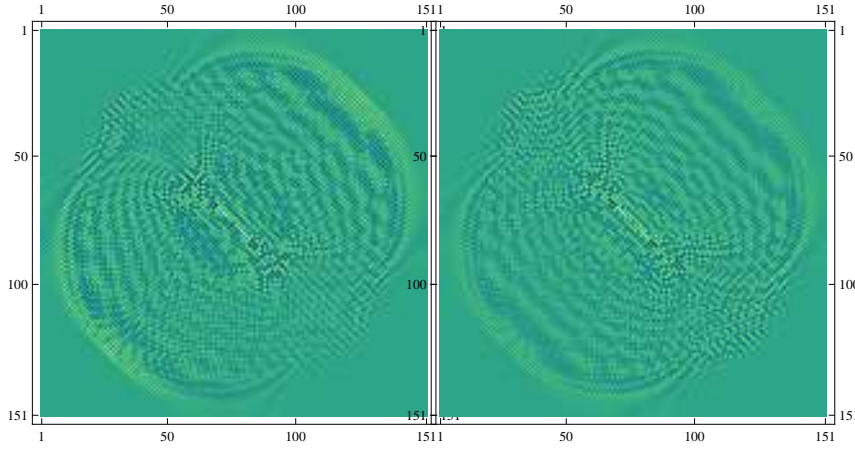
Σχήμα 27: Η κυματο-
συνάρτηση μετά από 100 βή-
ματα με το σπιν αρχικοποιη-
μένο στην κατάσταση σπιν
 $|Spin1\rangle$.

Σχήμα 28: Η κυματο-
συνάρτηση μετά από 100 βή-
ματα με το σπιν αρχικοποιη-
μένο στην κατάσταση σπιν
 $|Spin2\rangle$.



Σχήμα 29: Η κυματο-
συνάρτηση μετά από 100 βή-
ματα με το σπιν αρχικοποιη-
μένο στην κατάσταση σπιν
 $|Spin3\rangle$.

Σχήμα 30: Η κυματο-
συνάρτηση μετά από 100 βή-
ματα με το σπιν αρχικοποιη-
μένο στην κατάσταση σπιν
 $|Spin4\rangle$.



Σχήμα 31: Η κυματο-
 συνάρτηση μετά από 100 βή-
 ματα με το σπιν αρχικοποιη-
 μένο στην κατάσταση σπιν
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|Spin2\rangle + |Spin3\rangle)$.

Σχήμα 32: Η κυματο-
 συνάρτηση μετά από 100 βή-
 ματα με το σπιν αρχικοποιη-
 μένο στην κατάσταση σπιν
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|Spin2\rangle + |Spin4\rangle)$.

9 Παράρτημα

Σε αυτό το παράρτημα θα υπολογίσουμε το χρόνο σύγκλισης και την κατανομή ενός κβαντικού τυχαίου περίπατου διακριτού χρόνου. Οι υπολογισμοί θα γίνουν για εξέλιξη σε μια διάσταση απείρου μήκους και με νόμισμα τον τελεστή Hadamard. Όπως όμως αποδεικνύεται στο () τα αποτελέσματα μπορούν να γενικευθούν και για οποιοδήποτε άλλο νόμισμα.

Ας θυμηθούμε το βήμα του κβαντικού τυχαίου περίπατου διακριτού χρόνου $U = S(C \otimes I)$ με $C = H$ για την περίπτωση που το νόμισμά μας είναι ο τελεστής Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (432)$$

Η δράση του μοναδιακού μετασχηματισμού U σε μια κατάσταση στη θέση n τη χρονική στιγμή t με σπιν $\pm|n, t\rangle$ $|\pm\rangle$ είναι

$$U|n, t\rangle |+\rangle = |n+1, t+1\rangle |+\rangle + |n-1, t+1\rangle |-\rangle \quad (433)$$

$$U|n, t\rangle |-\rangle = |n+1, t+1\rangle |+\rangle - |n-1, t+1\rangle |-\rangle \quad (434)$$

ή εάν θεωρήσουμε τις καταστάσεις χειραλικότητας με $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $|-\rangle =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ μπορούμε να γράφουμε σε σπινωριακή μορφή $|n, t \rangle = \Psi(n, t)$ με

$$\Psi(n, t) = \begin{pmatrix} \Psi_L(n, t) \\ \Psi_R(n, t) \end{pmatrix} \quad (435)$$

και γίνεται άμεσα ο διαχωρισμός σε δύο κομμάτια που εξελίσσονται δεξιά και αριστερά αντίστοιχα.

Αυτό το βήμα υποδεικνύει ότι για να βρεθεί ο περιπατητής στην κατάσταση $|n \rangle$ τη χρονική στιγμή $t + 1$ θα πρέπει την προηγούμενη να είναι σε μία από τις $|n - 1 \rangle, |n + 1 \rangle$

$$|n, t + 1 \rangle = M_+ |n - 1, t \rangle + M_- |n + 1, t \rangle \quad (436)$$

όπου έχουμε ορίσει

$$M_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (437)$$

$$M_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (438)$$

Θεωρούμε ότι αρχικά ο περιπατητής βρίσκεται στην κατάσταση $|0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ ⁴¹ που σε σπινωριακή μορφή γράφεται $\Psi(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\Psi(n, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ για κάθε $n \neq 0$

Δεδομένου ότι ο τελεστής Hadamard είναι αναλλοίωτος σε μεταθέσεις, η Fourier ανάλυσή του είναι εύκολη, για την ακρίβεια οι καταστάσεις βάσης $|n, t \rangle$ γίνονται

$$|k, t \rangle = \sum_n |n, t \rangle e^{ikn} \quad (439)$$

ή σε σπινωριακή μορφή

$$\tilde{\Psi}(k, t) = \sum_n \Psi(n, t) e^{ikn} \quad (440)$$

Θα βρούμε το δυναμικό νόμο στον χώρο των ορμών, θα εκτελέσουμε εκεί την εξέλιξη που είναι πιο εύκολο και στη συνέχεια θα μετατρέψουμε το αποτέλεσμα πίσω στον καταστατικό χώρο.

⁴¹ Δε θεωρούμε την κατάσταση $|0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ που θα μας οδηγήσει σε συμμετρική εκκατέρωθεν της αρχής κατάσταση γιατί οι εκφράσεις που εμπλέκονται για αυτή την περίπτωση είναι πολύ μεγάλες. Για οικονομία χώρου μελατάμε αυτή την περίπτωση. Καθώς οι εκφράσεις είναι αντίστοιχα ίδιες για την περίπτωση $|0 \rangle = |-\rangle$ για να πάρουμε τη συμμετρική περίπτωση αρκεί να αθροίσουμε τις δύο συνεισφορές

Με απλή αντικατάσταση παίρνουμε την εξέλιξη στο χώρο των ορμών

$$|k, t + 1 \rangle = \sum_n [M_+ |n - 1, t \rangle + M_- |n + 1, t \rangle] e^{ikn} \quad (441)$$

$$= e^{ik} M_+ \sum_n |n - 1, t \rangle e^{ik(n-1)} + e^{-ik} M_- \sum_n |n + 1, t \rangle e^{ikn} \quad (442)$$

$$= (e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_-) |k, t \rangle \quad (443)$$

$$= M_k |k, t \rangle \quad (444)$$

όπου ορίσαμε τον πίνακα εξέλιξης στο χώρο των ορμών

$$M_k = e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_- \quad (445)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & e^{ik} \end{pmatrix} \quad (446)$$

Είναι προφανώς μοναδιακός.

Η κατάσταση μετά από χρόνο t θα είναι

$$|k, t \rangle = M_k^t |k, 0 \rangle \quad (447)$$

Διαγωνοποιώντας τον M_k μπορούμε εύκολα να βρούμε την εξέλιξη για κάθε t . Αν $|u_1 \rangle, |u_2 \rangle$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και λ_1, λ_2 οι αντίστοιχες ιδιοτιμές έχουμε

$$M_k = \lambda_1 |u_1 \rangle \langle u_1| + \lambda_2 |u_2 \rangle \langle u_2| \quad (448)$$

και

$$M_k^t = \lambda_1^t |u_1 \rangle \langle u_1| + \lambda_2^t |u_2 \rangle \langle u_2| \quad (449)$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2N(k)}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{ik} + e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (450)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2N(\pi - k)}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{-ik} + e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (451)$$

με τον παράγοντα κανονικοποίησης

$$N(k) = (1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \quad (452)$$

οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = e^{i\omega_k} \quad (453)$$

$$\lambda_2 = e^{i(\pi - \omega_k)} \quad (454)$$

με

$$\omega_k = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin k}{\sqrt{2}}\right), \quad \omega_k \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (455)$$

Για την αρχική μας κατάσταση στο χώρο των ορμών έχουμε

$$|k, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall k \quad (456)$$

και εξελίσσοντας την σύμφωνα με την (447) παίρνουμε

$$\Psi_R(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{i\omega_k t} + \frac{(-1)^t}{2} \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{-i\omega_k t} \quad (457)$$

$$\Psi_L(k, t) = \frac{e^{-ikt}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{i\omega_k t} - (-1)^t e^{-i\omega_k t}) \quad (458)$$

Εκτελώντας τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$\Psi(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\Psi}(k, t) e^{-ikn} \quad (459)$$

παίρνουμε την εξέλιξη στον καταστατικό χώρο

$$\Psi_L(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{-ie^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} e^{-i(\omega_k t - kn)} \quad (460)$$

$$\Psi_R(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{-i(\omega_k t - kn)} \quad (461)$$

Αυτές οι συναρτήσεις αν και ακριβείς είναι δύσχρηστες. Ούτε την γραφική τους παράσταση μπορούμε να κάνουμε, ούτε να υπολογίσουμε τα ζητούμενα φυσικά μεγέθη όπως την κατανομή πιθανότητας. Για αυτό το λόγο θα καταφύγουμε στην ασυμπτωτική ανάλυση των ολοκληρωμάτων για πολύ μεγάλους χρόνους.

Στη συνέχεια θα κάνουμε χρήση της μεθόδου στάσιμης φάσης⁴² (Stationary Phase) για να μπορέσουμε να διαχειριστούμε αυτές τις ολοκληρωτικές συναρτήσεις. Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε τα ακρότατα της φάσης $\phi(k) =$

⁴² Σε μια συνάρτηση της μορφής

$$I(t) = \int_a^b g(k) e^{i\phi(k)t} dk \quad (462)$$

(με την $g(k)$ μια περιοδική συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ και την $\phi(k)$ μια λεία συνάρτηση) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος στάσιμης φάσης για να προσεγγιστεί η μορφή της για $t \rightarrow \infty$. Η βασική ιδέα είναι ότι για μεγάλα t οι συνεισφορές των ημιτονοειδών $g(k)$ θα αλληλοαναιρούνται καθώς η φάση στον εκθέτη θα ταλαντώνεται πολύ γρήγορα. Συνεπώς η συνεισφορά τους θα είναι αμελητέα. Στα σημεία όμως που η φάση $\phi(k)$ είναι στάσιμη $\frac{d\phi(k)}{dk} = 0$ η φάση θα μεταβάλλεται πολύ αργά λόγω ακροτάτου και τα k σε αυτή την περιοχή θα

$-\omega_k t + kn$ ή χρησιμοποιώντας το $\alpha = n/t^3$ η φάση γράφεται $\phi(k, \alpha) = -\omega_k + \alpha k$ ενώ τα ολοκληρώματα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι της μορφής

$$I(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk g(k) e^{i\phi(k, \alpha)t} \quad (465)$$

Η $g(k)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π (άρτια για την $\Psi_R(n, t)$ και περιττή για την $\Psi_L(n, t)$) και το $\alpha \in [-1, 1]$.

Υπολογίζουμε τις παραγώγους της φάσης

$$\frac{\partial \phi}{\partial k} = -\omega'_k + \alpha = -\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} + \alpha \quad (466)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial k^2} = -\omega''_k = \frac{\sin k}{(1 + \cos^2 k)^{3/2}} \quad (467)$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial k^3} = -\omega'''_k = \frac{2\cos k(1 + \sin^2 k)}{(1 + \cos^2 k)^{5/2}} \quad (468)$$

Έχουμε δύο ελεύθερες παραμέτρους. Θα φάξουμε για μηδενισμούς της πρώτης παραγώγου για διάφορα διαστήματα του α . Αφού $|\cos k| \leq 1$ δεν έχουμε ρίζες για $|\alpha| \geq 1/\sqrt{2}$. Για $|\alpha| = 1/\sqrt{2}$ τα ακρότατα της φάσης βρίσκονται στα σημεία $k = 0$ και $k = \pi$ που αντιστοιχούν σε $\alpha = 1/\sqrt{2}$ και $\alpha = -1/\sqrt{2}$. Παρατηρούμε

είναι τα μόνα που θα συμβάλλουν ενισχυτικά και θα δίνουν σημαντική συνεισφορά. Μπορούμε λοιπόν να αναπτύξουμε κατά Taylor την $\phi(k)$ γύρω από το ακρότατό της k_0 και να κρατήσουμε τους 3 πρώτους όρους με τον δεύτερο φυσικά να είναι μηδέν $\phi(k) \simeq \phi(k_0) + \frac{(k_0 - k)^2}{2} \frac{d^2 \phi(k)}{dk^2}$. Αντικαθιστώντας τη φάση στο ολοκλήρωμα εύκολα υπολογίσουμε την ασυμπτωτική μορφή του καθώς το πρώτο μέρος βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα με την τιμή της $g(k)$ στο k_0 ενώ το μέρος με τη δεύτερη παράγωγο είναι ένα γκαουσιανό ολοκλήρωμα. Κάνοντας την ολοκλήρωση η γενική μορφή είναι

$$I(t) \simeq g(k_0) e^{i\phi(k_0)t \pm i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{d^2 \phi(k)}{dk^2} \right|}}, \quad t \rightarrow \infty \quad (463)$$

Στην περίπτωση που το k_0 είναι στάσιμο σημείο τάξης $p - 1$ ($\phi'(k_0) = \phi''(k_0) = \dots = \phi^{(p-1)}(k_0) = 0$) στο ανάπτυγμα Taylor κρατάμε ανώτερους όρους με αποτέλεσμα η μέθοδος αυτή να δίνει

$$I(t) \simeq g(k_0) e^{i\phi(k_0)t \pm i\pi/2p} \left[\frac{p!}{t\phi^{(p)}(k_0)} \right]^{1/p} \frac{\Gamma(1/p)}{p}, \quad t \rightarrow \infty \quad (464)$$

όπου στη φάση το \pm χρησιμοποιείται ανάλογογα με το αν $\phi^{(p)}(k_0) \geq 0$ αντίστοιχα. Φυσικά η ίδια διαδικασία θα πρέπει να ακολουθηθεί για κάθε τυχόν στάσιμο σημείο x_j της φάσης και το άθροισμά τους θα μας δίνει την κυρίαρχη συμπεριφορά. Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στη μέθοδο στάσιμης φάσης βλ. ().

⁴³Είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται η ομαδική ταχύτητα (α) σε σχέση με την φασική $d\omega/dk$. Η σημαντική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προκύπτει για κανονική διασπορά. $\alpha \simeq d\omega/dk$

οτι και τα δύο σημεία είναι ακρότατα τάξης 2 καθώς μηδενίζεται και η δεύτερη παράγωγος. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο στάσιμης φάσης (464) παίρνουμε

$$I\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, t\right) \simeq \frac{g(\pi)}{3\pi} \sqrt{2} \Gamma(1/3) \left[\frac{6}{t}\right]^{1/3} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (469)$$

$$I\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, t\right) \simeq \frac{g(0)}{3\pi} \sqrt{3/2} \Gamma(1/3) \left[\frac{6}{t}\right]^{1/3} \quad (470)$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς την εξάρτηση του $I(\alpha, t)$ από το χρόνο $\propto t^{-1/3}$.

Για $|\alpha| \leq 1/\sqrt{2}$ έχουμε δύο ρίζες $k_\alpha, -k_\alpha$ με $k_\alpha \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε

$$\cos k_\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (471)$$

Αυτή τη φορά το ακρότατο είναι πολλαπλότητας 1 και η μέθοδος στάσιμης φάσης (463) δίνει

$$I(\alpha, t) = \frac{g(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi t |\omega''_{k_\alpha}|}} 2\cos\left(\phi(k_\alpha, t) + \frac{\pi}{4}\right), \text{ για } g(k) \text{ αρτιο} \quad (472)$$

$$I(\alpha, t) = \frac{g(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi t |\omega''_{k_\alpha}|}} 2i\sin\left(\phi(k_\alpha, t) + \frac{\pi}{4}\right), \text{ για } g(k) \text{ περιπτο} \quad (473)$$

Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να γράψουμε την ασυμπτωτική μορφή των συναρτήσεών μας (460), (461) που είναι

$$\Psi_L(\alpha t, t) \simeq \frac{1 + (-1)^{(\alpha+1)t}}{\sqrt{2\pi t |\omega''_{k_\alpha}|}} \alpha \cos\left(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (474)$$

$$\Psi_R(\alpha t, t) \simeq \frac{1 + (-1)^{(\alpha+1)t}}{\sqrt{2\pi t |\omega''_{k_\alpha}|}} (1 - \alpha) \cos\left(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{1 - 2\alpha^2} \sin\left(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (475)$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανότητας παίρνοντας το τετράγωνο των δύο κυματοσυναρτήσεων

$$P(\alpha, t) = |\Psi_L(\alpha t, t)|^2 + |\Psi_R(\alpha t, t)|^2 \quad (476)$$

$$P(\alpha, t) = P_L(n, t) + P_R(n, t) \quad (477)$$

Οι κατανομές πιθανότητας στο $|\alpha| < 1/\sqrt{2}$ είναι

$$P_L(n, t) \simeq \frac{1 + (-1)^{(\alpha+1)t}}{\pi t |\omega''_{k_\alpha}|} (1 - \alpha^2) \cos^2\left(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (478)$$

$$P_R(n, t) \simeq \frac{1 + (-1)^{(\alpha+1)t}}{\pi t |\omega''_{k_\alpha}|} (1 - \alpha)^2 \cos^2\left(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (479)$$

Αυτή η κατανομή πιθανότητας μπορεί να σπάσει σε δύο κομμάτια που θα μας βοηθήσουν στην ανάλυσή της. Σε ένα κομμάτι που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο και σε ένα που μεταβάλλεται γρήγορα με το χρόνο:

$$P(\alpha, t) = P_{slow}(\alpha, t) + P_{fast}(\alpha, t) \quad (480)$$

με

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1 - \alpha}{\pi t |\omega''_{k\alpha}|} \quad (481)$$

που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο χωρίς να ταλαντώνεται και $P_{fast}(\alpha, t)$ είναι το εναπομείναν κομμάτι που ταλαντώνεται γρήγορα με το χρόνο λόγω του συνημιτόνου. Θα δείξουμε ότι η συνεισφορά του τελευταίου στον υπολογισμό των ροπών της κατανομής είναι τάξης $O(1)/t$ μικρότερο από τη συνεισφορά του $P_{slow}(\alpha, t)$ και ως αποτέλεσμα θα μπορούμε να την παραλείψουμε στον υπολογισμό της διασποράς.

Στο εξής περιοριζόμαστε στο πεδίο $\alpha \in [-1/\sqrt{2} + \epsilon, 1/\sqrt{2} - \epsilon]$ καθώς όπως θα δούμε το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πιθανότητας σε αυτό το διάστημα είναι σχεδόν ίση με τη μονάδα, άρα σε αυτό το διάστημα περιέχεται το σημαντικό μέρος της πληροφορίας.

Για να δείξουμε ότι οι ροπές της κατανομής είναι τάξης $O(1)/t$ θα τις φράξουμε απόλυτα. Για τη ροπή τάξης m έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_n (n/t)^m P_{slow}(n/t, t) - \int_{\alpha} \alpha^m p(\alpha, t) d\alpha \right| &\leq \sum_n \int_{n/t}^{(n+1)/t} d\alpha |(n/t)^m P_{slow}(n/t, t) - \alpha^m p(\alpha, t)| \\ &\leq \sum_n \int_{n/t}^{(n+1)/t} d\alpha \Delta_{1/t}(\alpha^m p(\alpha)) \end{aligned} \quad (482)$$

όπου

$$\Delta_{\delta} f(\alpha) = \max_{\alpha} |f(\alpha + \delta) - f(\alpha)| \quad (484)$$

και γράψαμε εκπεφρασμένα ότι $\alpha = n/t$. Παίρνοντας το $\Delta_{1/t}(\alpha^m p(\alpha))$ και αναπτύσσοντας κατά Taylor βλέπουμε ότι η εξάρτησή του από το χρόνο είναι τάξης $O(1)/t^2$ όπου ολοκληρώνοντας μας δίνει τη ζητούμενη τάξη $O(1)/t$ για όλες τις ροπές.

Προχωράμε στη δικαιολόγηση του διαχωρισμού σε $P_{fast}(\alpha, t)$ και $P_{slow}(\alpha, t)$. Ο όρος $P_{fast}(\alpha, t)$ εμπεριέχει γρήγορα ταλαντούμενους όρους με ημίτονα και συνημίτονα. Ένας γενικός τέτοιος όρος είναι της μορφής

$$P(\alpha, t) = \frac{\alpha(1 - 2\alpha)}{\pi t |\omega''_{k\alpha}|} e^{2i\phi(\alpha)t} \quad (485)$$

όπου έχουμε ορίσει

$$\phi(\alpha) = \phi(k_{\alpha}, \alpha) \quad (486)$$

και έχουμε γράψει τα ημίτονα και συνιμήτονα με την εκθετική τους μορφή. Η συνεισφορά ενός τέτοιου όρου στη ροπή τάξης m της κατανομής

$$\sum_n \alpha^m P(\alpha, t) \quad (487)$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\alpha^m P(\alpha, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\delta}^{\pi-\delta} f(k) e^{2i\phi(k, \alpha)t} dk \quad (488)$$

με

$$f(k) = -\frac{2\omega'_k(1 + 2\omega'_k)}{\pi\sqrt{\pi|\omega''_k|}} e^{-i\pi/4} \quad (489)$$

και δ μια κατάλληλα επιλεγμένη σταθερά. Αυτά τα ολοκληρώματα όμως είναι ακριβώς της μορφής $I(t) = \int_a^b g(k) e^{it\phi(k)} dk$ που είχαμε διαχειριστεί στην αρχή του παραρτήματος με τη μέθοδο της στάσιμης φάσης. Αθροίζοντας στα n και γράφοντας εκπεφρασμένα το $\alpha = n/t$ παίρνουμε

$$\sum_n (n/t)^m P(\alpha, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_n \int_{\delta}^{\pi-\delta} f(k) e^{-2i\omega_k t - 2ink} dk \quad (490)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\delta}^{\pi-\delta} f(k) e^{-2i\omega_k t} dk \sum_n e^{-2ink} \quad (491)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\delta}^{\pi-\delta} f(k) e^{-2i\omega_k t} \frac{e^{-2ik(\beta t + 1)} - e^{2ik\beta t}}{e^{-2ik} - 1} dk \quad (492)$$

με

$$\beta = (1/\sqrt{2} - \epsilon) \quad (493)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τη μέθοδο στασίμης φάσης βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα εξαρτάται από το χρόνο σαν $0(1/\sqrt{t})$ που σημαίνει ότι η συνεισφορά στις ροπές των όρων της $P_{fast}(\alpha, t)$ είναι της τάξης $0(1/t)$ και επομένως μπορούν σε πρώτη τάξη να παραλειφθούν.

Πλέον έχουμε το δικαίωμα να γράψουμε ότι

$$\int_{-1/\sqrt{2}+\epsilon}^{1/\sqrt{2}-\epsilon} P_{total}(\alpha, t) d\alpha \simeq \int_{-1/\sqrt{2}+\epsilon}^{1/\sqrt{2}-\epsilon} P_{slow}(\alpha, t) d\alpha \quad (494)$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα βρίσκουμε

$$\int_{-1/\sqrt{2}+\epsilon}^{1/\sqrt{2}-\epsilon} P_{slow}(\alpha, t) d\alpha = 1 - \frac{2}{\pi}\epsilon \quad (495)$$

Από αυτό το αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι σχεδόν όλη η πιθανότητα είναι συγκεντρωμένη στο διάστημα $\alpha \in [-1/\sqrt{2} + \epsilon, 1/\sqrt{2} - \epsilon]$ οπότε γράφουμε

$$\int_{\alpha} P_{total}(\alpha, t) d\alpha \simeq \int_{-1/\sqrt{2}+\epsilon}^{1/\sqrt{2}-\epsilon} P_{slow}(\alpha, t) da \quad (496)$$

$$\simeq 1 \quad (497)$$

$$(498)$$

που αποδεικνύει ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη και μακράν απέχει από την γκαουσιανή.

Αναφορές

- [1] An experimental test of non-local realism. Nature Vol 446 nature05677
- [2] Aharonov, Y.; Bohm D. (1959). "Significance of electromagnetic potentials in quantum theory". Phys. Rev. 115: 485-491. doi:10.1103/PhysRev.115.485.
- [3] Quantum search by measurement. Phys. Rev. A 66, 032314 (2002)
- [4] Communication by EPR devices. D Dieks - Phys. Lett. A, 1982
- [5] A single Quantum cannot be cloned. WK Wootters. WH Zurek - Nature, 1982
- [6] Noncommuting Mixed States Cannot Be Broadcast. H Barnum, CM Caves, CA Fuchs, R Jozsa, B • - Physical Review Letters, 1996 - APS
- [7] No Cloning of Orthogonal States in Composite Systems. T Mor - Physical Review Letters, 1998 - APS
- [8] Quantum Entanglement and the Nonexistence of Superluminal Signals. MD Westmoreland, B Schumacher - Arxiv preprint quant-ph/9801014, 1998 - arxiv.org
- [9] No-cloning and superluminal signaling. SJ van Enk - Arxiv preprint quant-ph/9803030, 1998 - arxiv.org
- [10] Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. DAVID DEUTSCH. Proceedings of the Royal Society of London A 400, pp. 97-117 (1985)
- [11] Quantum Mechanics helps in searching for a needle in a haystack. Lov K. Grover. Phys. Rev. Lett. 78(2), 325-328 (1997)
- [12] From Schrödinger 's equation to the quantum search algorithm. Lov K. Grover. Am. J. Phys. 69 (7), July 2001
- [13] Strengths and weaknesses of quantum computing. C.H. Bennet, E. Bernstein, G. Brassard, U. Vazirani. SIAM J. Comput.,26(5):1510-1523, 1997)
- [14] Tight bounds on quantum searching. M. Boyer, G. Brassard, P. Hoyer, A. Tapp. Fortsch. Phys. - Prog. Phys., 46(4-5):493-505, 1998
- [15] Grover's quantum searching algorithm is optimal. Cristof Zalka. Phys. Rev. A. Vol 60 No 4, Oktober 1999

- [16] Farhi E., Gutmann S. 1998, Phys. Rev. A, 58, 915