



Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ Μ.Δ.Ε. (MSc THESIS)**

## **ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΕΣ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ**

Πέτρος Μπλάνης

Αθήνα, 29 Οκτωβρίου 2015

Επιβλέπων: Θεοχάρης Αποστολάτος, αναπληρωτής καθηγητής

**Ταξινόμηση:** γενική θεωρία σχετικότητας, μελανές οπές, διαφορική γεωμετρία, γεωμετρία Riemann, γεωμετρία Kähler, εξωτερική άλγεβρα Cartan, τοπολογία, cosets, συμμετρικοί χώροι, ομογενείς χώροι, θεωρία ομάδων, ανάλυση Iwasawa, ανάλυση Cartan, ομάδες Lie, άλγεβρες Lie, υπερβαρύτητα, κβαντική βαρύτητα, μη γραμμικά μοντέλα  $\sigma$ , διαστατική αναγωγή, αναγωγή Kaluza–Klein, μαθηματικές μέθοδοι φυσικής, δυναμικά Ernst, μαγνητισμένη Kerr–Newman, Kerr–Newman–Melvin, εργοπεριοχές, μετασχηματισμός Harrison, φορτίο Wald

Η παρούσα συνεγράφη με χρήση του Xe<sub>La</sub>TeX και του KOMA-Script (TeXlive 2013) στον emacs με AUCTeX 11.88. Οι γραμματοσειρές είναι οι Minion Pro, Myriad Pro, Calibri. Οι υπολογισμοί γενικότερα έγιναν με το Wolfram Mathematica 10, Wolfram Research, Inc. 2014, οι υπολογισμοί διαφορικής γεωμετρίας με το xAct 1.1.2, Martín-García 2015.

© 2015 Πέτρος Μπλάνης

Τὸν ἀριστοτέχνην τῶν σοφῶς καὶ ἐντέχνως γενομένων δοξάσωμεν, καὶ ἐκ τοῦ κάλλους τῶν ὀρωμένων τὸν ὑπέρκαλον ἐννοώμεθα, καὶ ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν αἰσθητῶν τούτων καὶ περιγραπτῶν σωμάτων ἀναλογιζώμεθα τὸν ἄπειρον καὶ ὑπερμεγέθη καὶ πᾶσαν διάνοιαν ἐν τῷ πλήθει τῆς ἑαυτοῦ δυνάμεως ὑπερβαίνοντα. Καὶ γὰρ εἰ καὶ τὴν φύσιν ἀγνοοῦμεν τῶν γενομένων, ἀλλὰ τό γε ὄλοσχερῶς ὑποπίπτον ἡμῶν τῆ αἰσθήσει τοσοῦτον ἔχει τὸ θαῦμα, ὥστε καὶ τὸν ἐντρεχέστατον νοῦν ἐλάττονα ἀναφανῆναι τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, πρὸς τὸ ἢ δυνηθῆναι αὐτὸ κατ' ἀξίαν ἐπεξελεῖν, ἢ τὸν ὀφειλόμενον ἔπαινον ἀποπληρῶσαι τῷ κτίσαντι· ᾧ πᾶσα δόξα, τιμὴ καὶ κράτος, εἰς τοὺς αἰῶνας τῶν αἰώνων. Ἀμήν.

Ἅγιος Βασίλειος Καισαρείας, ἀρχιεπίσκοπος Καππαδοκίας 1857

Ευχαριστῶ τον κ. Αποστολάτο και τους γονεῖς μου για την υποστήριξη, και την Άννα, επειδὴ υποχρεώθηκα να δοκιμάσω τα ὅρια της υπομονῆς της (δεν θα το επαναλάβω!) κατά την εκπόνηση της παρούσης. Ευχαριστῶ ιδιαιτέρως τον κ. Robert Geroch και τον κ. Χριστοδουλάκη για τις συμβουλές, τον Παντελή Πανόπουλο για τις συζητήσεις στην κβαντική βαρύτητα και τους Filip Hejda, Piotr Chruściel, João Costa, Νεκτάριο Βλαχάκη, Κωνσταντίνο Σφέτσο για τις υποδείξεις. Ευχαριστῶ επίσης τον Alfonso García-Parrado Gómez-Lobo και την ομάδα του xAct για τη βοήθεια στους υπολογισμούς.



### **Περίληψη**

Γίνεται αναλυτική περιγραφή της αστροφυσικής μελανών οπών Kerr–Newman με έμφαση στη μαγνητισμένη λύση ύστερα από εφαρμογή του μετασχηματισμού μαγνήτισης Harrison. Ο κατάλληλος μετασχηματισμός Harrison προκύπτει από την κρυμμένη συμμετρία  $SU(2, 1)$  της λύσεως της εξισώσεως Einstein–Maxwell, όπως αναλύεται διεξοδικώς με εφαρμογή μεθόδων κβαντικής βαρύτητας.

### **Abstract**

A fully developed description of Kerr–Newman black holes pertaining to astrophysics is performed, with emphasis on the magnetised solution derived from the Harrison magnetising transformation. The suitable Harrison transformation is found from the  $SU(2, 1)$  hidden symmetry of the solution of the Einstein–Maxwell equation, as is explained in detail by employing methods of quantum gravity.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>9</b>
1.1	Συμβολισμός . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Η λύση Kerr–Newman–Melvin για ασθενές μαγνητικό πεδίο και ασθενές φορτίο</b>	<b>11</b>
2.1	Τα ανύσματα Killing παράγουν λύσεις των εξισώσεων Maxwell . . . . .	11
2.2	Χωροχρόνος Kerr σε ασθενές μαγνητικό πεδίο . . . . .	14
2.3	Προέλευση του φορτίου . . . . .	17
2.4	Συμπέρασμα . . . . .	17
2.5	Κριτική του αποτελέσματος του Wald . . . . .	18
2.5.1	Εισαγωγή . . . . .	18
2.5.2	Υπολογισμός της ενέργειας . . . . .	19
2.5.3	Συμπέρασμα . . . . .	20
2.6	Κριτική των αποτελεσμάτων . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Μοντέλο <math>\sigma</math> από διαστατική αναγωγή θεωρίας Einstein–Hilbert</b>	<b>22</b>
3.1	Μη γραμμικό μοντέλο $\sigma$ . . . . .	22
3.2	Δυναμικό Ernst . . . . .	23
3.3	Πολλαπλότητα Kähler . . . . .	23
3.4	Ψευδοσφαίρα . . . . .	23
3.5	Δομή coset . . . . .	24
3.6	Κρυμμένη συμμετρία $SO(2, 1)$ . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Μοντέλο <math>\sigma</math> από διαστατική αναγωγή θεωρίας Einstein–Maxwell–Hilbert</b>	<b>25</b>
4.1	Μη γραμμικό μοντέλο $\sigma$ . . . . .	25
4.2	Δυναμικά Ernst . . . . .	26
4.2.1	Πολλαπλότητα Kähler . . . . .	27
4.3	Κρυμμένη συμμετρία $SU(2, 1)$ . . . . .	27
4.4	Δράση της $SU(2, 1)$ . . . . .	28
4.4.1	Συμμετρία βαθμίδος $U(1)$ . . . . .	30
4.4.2	Μετασχηματισμός μαγνήτισης κατά Harrison . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Η μαγνητισμένη Kerr–Newman</b>	<b>32</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	32
5.2	Υπολογισμοί . . . . .	32
5.3	Ο χωροχρόνος Kerr–Newman–Melvin . . . . .	34
5.3.1	Κωνική ανωμαλία . . . . .	34
5.3.2	Φορτίο . . . . .	35
5.3.3	Εργοπεριοχές . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Συμπέρασμα</b>	<b>36</b>

<b>Παραρτήματα</b>	<b>37</b>
<b>A Γεωμετρία (semi-)Riemann</b>	<b>37</b>
A.1 Μη συντεταγμένη ή μη ολονομική βάση . . . . .	37
A.2 Τανυστής Levi-Civita . . . . .	38
A.3 Συμμετρίες . . . . .	39
A.3.1 Ενεργητικοί και παθητικοί μετασχηματισμοί . . . . .	40
<b>B Διαφορικές μορφές</b>	<b>41</b>
B.1 Δυική Hodge . . . . .	41
<b>C Μιγαδικές πολλαπλότητες</b>	<b>45</b>
C.1 Πολλαπλότητα Hermite . . . . .	46
C.2 Πολλαπλότητα Kähler . . . . .	46
<b>D Θεωρία ομάδων</b>	<b>47</b>
D.0.1 Ανάλυση Iwasawa . . . . .	48
D.1 Ομογενείς χώροι . . . . .	50
<b>E Μη γραμμικά μοντέλα σ</b>	<b>51</b>
E.1 Φορμαλισμός εσωτερικής μετρικής (internal metric formalism) . . . . .	51
<b>F Διαστατική αναγωγή</b>	<b>54</b>
F.1 Διαστατική αναγωγή Kaluza-Klein . . . . .	54
F.2 Διαστατική αναγωγή διαφορικών μορφών . . . . .	59
<b>G Υπολογισμοί</b>	<b>60</b>
<b>H Κώδικας Mathematica</b>	<b>62</b>
H.1 Θεωρία ομάδων . . . . .	62
H.2 Απλοποιήσεις . . . . .	62
H.3 Υπολογισμοί . . . . .	63
<b>Παραπομπές σε άρθρα</b>	<b>64</b>
<b>Λοιπή βιβλιογραφία</b>	<b>68</b>
<b>Ευρετήριο</b>	<b>73</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η λύση Kerr ανακαλύφθηκε το 1963 από τον Roy Kerr, Kerr 1963, ύστερα από επίμονες προσπάθειες, και δύο χρόνια αργότερα προέκυψε η γενίκευσή της με ηλεκτρικό φορτίο από τον Newman, ενώ η σφαιρικά συμμετρική Schwarzschild είχε ανακαλυφθεί το 1916, εντός ενός έτους περίπου από τη δημοσίευση του Einstein για τη γενική θεωρία σχετικότητας. Η δυσκολία της λύσεως Kerr έγκειται όχι τόσο στη θεωρία που την περιβάλλει, όσο στην πολυπλοκότητα των αλγεβρικών σχέσεων που την εκφράζουν, επειδή η εισαγωγή της στροφορμής καταλύει την σφαιρική συμμετρία που έχει η μετρική Schwarzschild, ειδική περίπτωση της Kerr. Η δυσκολία αυτή δέον είναι να αντιπαρβληθεί με τη χρησιμότητα αυτής της λύσεως στην αστροφυσική, καθώς είναι απίθανο να εντοπίσει κανείς στο σύμπαν μεμονωμένη κατανομή μάζας χωρίς στροφορμή<sup>1</sup>. Η χρησιμότητα της Kerr-Newman, απ' την άλλη πλευρά, ήταν κυρίως θεωρητική την πρώτη δεκαετία, δεδομένου ότι θεωρείται απίθανο να υπάρξει μελανή οπή με σημαντικό ηλεκτρικό φορτίο εκτός μαγνητικού πεδίου, καθώς θα ελκύει αντίθετα φορτία μέχρι να γίνει ουδέτερη, όμως ο Wald 1974 απέδειξε ότι στην περίπτωση περιβάλλοντος μαγνητικού πεδίου το φορτίο έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία, καθώς εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο στην κατάσταση ισορροπίας, και καθίσταται πλέον σημαντικό ως μέγεθος στην αστροφυσική.

Η αντιπαράθεση μεταξύ δυσκολίας στους υπολογισμούς και χρησιμότητας της λύσεως είναι διδακτική επίσης στην περίπτωση της *μαγνητισμένης Kerr-Newman* ή *Kerr-Newman-Melvin* (K-N-M), καθώς οι υπολογισμοί απεδείχθησαν τόσο δύσκολοι, που ενώ η πρώτη αναφορά στη μαγνητισμένη Kerr-Newman έγινε το 1976, Ernst and Wild 1976, για συγκεκριμένη σχέση μεταξύ μαγνητικού πεδίου, φορτίου και στροφορμής, η πρώτη αναλυτική αναφορά στους γενικότερους υπολογισμούς που απαιτούνται έγινε στα Díaz 1985; Baez and Díaz 1986, περίπου μια δεκαετία αργότερα, κυρίως επειδή οι υπολογισμοί είναι επίπονοι, οι εξισώσεις που προκύπτουν εξαιρετικά μεγάλες και η αξία τους στην αστροφυσική έως τότε εθεωρείτο αμφίβολη. Είναι προφανές ότι η χρήση γρήγορων ηλεκτρονικών υπολογιστών και των προγραμμάτων συμβολικών υπολογισμών (Computer Algebra System, CAS), όπως τα Mathematica, Maple, διευκολύνουν πολύ τη μελέτη τέτοιων λύσεων και συμβάλλουν ιδιαίτερα σε αυτή τις τελευταίες δεκαετίες. Το πρώτο πρόγραμμα εξειδικευμένο για υπολογισμούς στη γενική θεωρία σχετικότητας, γνωστό ως ALAM, ανεπτύχθη το 1969 από τον Ray d' Inverno υπό την καθοδήγηση του F. A. E. Pirani στο King's college, London. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της αξίας τέτοιων προγραμμάτων στη γενική θεωρία σχετικότητας είναι ότι χρησιμοποιήθηκε το εν λόγω για να υπολογιστούν οι τανυστές Ricci και Riemann της μετρικής Bondi· ενώ οι υπολογισμοί από τον Bondi και τους συνεργάτες του με το χέρι διήρκεσαν 6 μήνες, το ALAM

<sup>1</sup> Αυτό προκύπτει, καθώς η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο κατανομών μάζας χωρίς να προσδίδει στροφορμή στη μία ή στην άλλη πρέπει να γίνεται στο κέντρο μάζας τους χωρίς παλιρροϊκές δυνάμεις, το οποίο είναι εξαιρετικά απίθανο (η πιθανότητά του είναι μηδέν αν εξαιρέσουμε κβαντικά φαινόμενα) για τυχαίες κινήσεις σωμάτων τυχαίας κατανομής μάζας. Αν και δεν είναι βέβαιη η θεωρία δημιουργίας δομών στο σύμπαν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μικρότερες δομές αποκτούν στροφορμή από τις μεγαλύτερες, ακολουθώντας την ιεραρχία κλίμακος μάζας. Σε κοσμολογική κλίμακα, οι τυχαίες διαταραχές που σχηματίζουν τους γαλαξίες, η ασυμμετρία των δομών που σχηματίζονται (μη μηδενική τετραπολική ροπή) και οι παλιρροϊκές δυνάμεις που ασκούνται από γειτονικές τέτοιες δομές οδηγούν σε μη μηδενική στροφορμή στους γαλαξίες, βλέπε Peebles 1969.

χρειάστηκε 4 min και βρήκε 6 λάθη στο άρθρο τους, βλέπε Skea 1994! Είναι προφανές ότι η πολυπλοκότητα της μετρικής στην εξ. (5.2) καθιστά τη μελέτη της χωρίς χρήση CAS απαγορευτική γενικότερα, πόσο μάλλον για το περιορισμένο χρονικό πλαίσιο της παρούσης.

Στο Bičák and Ledvinka 2014, p. 523 παρατίθενται οι λόγοι για τους οποίους είναι εύλογη η άποψη ότι η κύρια πηγή ενέργειας των jets σε δίσκους προσαύξησης που περιβάλλουν μελανή οπή είναι η μελανή οπή· ο κυριότερος είναι ότι εμφανίζεται συσχέτιση μεταξύ της στροφορμής της μελανής οπής και της ισχύος του jet. Άλλος παράγοντας που αύξησε το ενδιαφέρον για τη λύση K-N-M είναι ότι εμφανίζει μη μηδενική μαγνητική ροή στον ορίζοντα γεγονότων όταν έχει μέγιστη στροφορμή (extremal Kerr)<sup>2</sup> η αρχική λύση, το οποίο συνεπάγεται ότι ο μηχανισμός Blandford-Znajek (Blandford and R. L. Znajek 1977) μπορεί να εφαρμοστεί για την εξαγωγή ενέργειας στην περίπτωση AGN, quasars, GRB, βλέπε Kim, C. H. Lee, and H. K. Lee 2001, κάτι που δεν ισχύει για την απλή Kerr<sup>3</sup>. Ιδιαίτερος αυτή η ιδιότητα φαινόταν να ενίσχυε την προοπτική ερμηνείας της λειτουργίας της «κεντρικής μηχανής» ενός AGN με βάση τη μελανή οπή K-N-M, ένα σημαντικό ανοικτό ζήτημα της αστροφυσικής υψηλών ενεργειών.

## 1.1 Συμβολισμός

Σε ορισμένους υπολογισμούς είναι πιο εύχρηστος ο συμβολισμός των τανυστών με δείκτες, ενώ σε άλλα ο συμβολισμός των μορφών, οι οποίες αναπαρίστανται με έντονα στοιχεία χωρίς δείκτες. Στους τανυστές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό αφηρημένων δεικτών με τους λατινικούς δείκτες, ο οποίος εισήχθη από τον Penrose, βλέπε Penrose and Rindler 1987, §2.2, επίσης Wald 1984. Οι ελληνικοί δείκτες αντιστοιχούν στις συνιστώσες των τανυστών στις αντίστοιχες συντεταγμένες και,

$$T_{(a_1 a_2 \dots a_p)} \equiv \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} T_{\sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots\sigma(a_p)},$$

$$T_{[a_1 a_2 \dots a_p]} \equiv \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) T_{\sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots\sigma(a_p)},$$

όπου  $S_p$  η ομάδα μεταθέσεων με  $p$  στοιχεία. Ο συμβολισμός αφηρημένων δεικτών έχει μια εξαίρεση, το  $z$ , το οποίο δεν είναι αφηρημένος δείκτης αλλά η συνιστώσα που αντιστοιχεί στο άνυσμα Killing κατά την αναγωγή Kaluza-Klein. Ορίζουμε επίσης  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, r, \theta, \phi)$  και αντιστοίχως ορίζονται οι συνιστώσες των τανυστών.

Στις lagrangians συνήθως περιλαμβάνεται το στοιχείο όγκου, ώστε ο συμβολισμός να γίνεται με διαφορικές μορφές, ενώ στη βιβλιογραφία συνηθίζεται η lagrangian να είναι βαθμωτό και όχι μορφή. Η αντιστοίχιση των δύο συμβολισμών είναι προφανής. Ο μιγαδικός συζυγής του  $x$  συμβολίζεται με  $\bar{x}$ . Το ίδιο σύμβολο σε δείκτη τανυστή δηλώνει τη συνιστώσα ως προς τη συζυγή βάση όταν πρόκειται για μιγαδική πολλαπλότητα. Η μια εξαίρεση είναι στον ορισμό των ορθοκανονικών βάσεων, στον οποίο ο ίδιος συμβολισμός δηλώνει τους δείκτες που αντιστοιχούν στην ορθοκανονική βάση. Συνηθίζεται στη φυσική υψηλών ενεργειών ο συμβολισμός  $(\partial\varphi)^2 \equiv \partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi$  για λόγους οικονομίας. Επίσης, σε μιγαδική πολλαπλότητα συνηθίζεται  $|\partial\varphi|^2 \equiv \partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar{\varphi}$ .

<sup>2</sup>Σύμφωνα με το Falanga et al. 2015, p. 295, ύστερα από εφαρμογή μεθόδου μέτρησης της στροφορμής μελανής οπής με βάση το συνεχές θερμικό φάσμα του δίσκου προσαύξησης κατά το μοντέλο λεπτού δίσκου Novikov-Thorne, είναι σύνηθες με βάση τα παρατηρησιακά δεδομένα να υπάρχουν μελανές οπές με  $a \gtrsim 0.8M$ . Σύμφωνα με το Bardeen 1970, είναι αναμενόμενο για AGN η μελανή οπή να περιστρέφεται πολύ γρήγορα λόγω πρόσληψης ύλης από το δίσκο προσαύξησης. Η μαγνητική ροή μηδενίζεται στην extremal Kerr αν το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση ίδια με τον άξονα συμμετρίας· για διαφορετικό προσανατολισμό αυτό δεν ισχύει, βλέπε Bičák and Janiš 1985.

<sup>3</sup>Σε συνήθεις συνθήκες στην αστροφυσική, δηλαδή παρουσία πλάσματος, αυτό δεν ισχύει, βλέπε Komissarov and McKinney 2007, επομένως δεν είναι τόσο σημαντικό πρόβλημα στην πράξη.

## Κεφάλαιο 2

# Η λύση Kerr–Newman–Melvin για ασθενές μαγνητικό πεδίο και ασθενές φορτίο

### 2.1 Τα ανύσματα Killing παράγουν λύσεις των εξισώσεων Maxwell

Η εισαγωγή στη λύση K-N-M έγινε στο Wald 1974 για την περίπτωση ασθενούς μαγνητικού πεδίου, ώστε να θεωρείται η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη γεωμετρία αμελητέα και να παρακαμφθεί η μεγάλη δυσκολία που παρουσιάζει η μελέτη της μη γραμμικής αλληλεπίδρασης της στροφορμής του χωροχρόνου και του μαγνητικού πεδίου. Η ανάλυση του Robert Wald υπήρξε ιδιαίτερως καίρια, εύληπτη, συνοπτική και κομψή, καθώς βασίζεται σε μια παρατήρηση του Αχιλλέα Παπαπέτρου, Papapetrou 1966, κατά την οποία ανύσματα Killing σε κενό χωροχρόνο μπορεί να αξιοποιηθούν για να παράγουμε λύσεις των εξισώσεων Maxwell απουσία πηγών.

Για ένα άνυσμα Killing  $\xi^a$  ισχύει ως γνωστόν  $0 = \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$ . Ορίζουμε τον αντισυμμετρικό τανυστή ή 2-form<sup>1</sup>  $F_{ab} \equiv \nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a$ , και από την προηγούμενη σχέση προκύπτει  $F_{ab} = 2\nabla_a \xi_b$ . Έχουμε επίσης  $R_{abc}{}^d \xi_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \xi_c = \nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a$ , ύστερα από χρήση του ορισμού ανύσματος Killing. Η κυκλική εναλλαγή των δεικτών δίνει τις εξισώσεις  $R_{bca}{}^d \xi_d = \nabla_b \nabla_c \xi_a + \nabla_c \nabla_a \xi_b$ ,  $R_{cab}{}^d \xi_d = \nabla_c \nabla_a \xi_b + \nabla_a \nabla_b \xi_c$  και η αντικατάσταση στην ταυτότητα  $R_{[abc]}{}^d = 0$  του τανυστή Riemann δίνει  $(R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d) \xi_d = -2R_{cab}{}^d \xi_d$ , επομένως<sup>2</sup>:

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d. \quad (2.1)$$

Αυτή η σχέση στο κενό<sup>3</sup> δίνει  $\nabla_a \nabla^a \xi_c = -R_c{}^d \xi_d = 0$  και με χρήση του  $F_{ab}$  γίνεται  $\nabla_a F^{ab} = 0$ , η οποία δίνει τις εξισώσεις Maxwell απουσία πηγών, αν ισχύει επίσης η  $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$  (ομογενείς εξ. Maxwell). Οι προηγούμενες εξισώσεις στη γλώσσα των διαφορικών μορφών γράφονται αντιστοίχως  $d\star F = 0$ ,  $dF = 0$ , βλέπε (B.10).

Παραδείγματος χάριν, για το χωροχρόνο Minkowski τα ανύσματα Killing<sup>4</sup>  $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\}$  δίνουν  $F_{ab} = 2\nabla_{[a}(\partial_t)_{b]} = 0$  κλπ, ένθα ορίζουμε ως  $F$  την εξωτερική παράγωγο (exterior derivative) της διαφορικής μορφής που προκύπτει από το άνυσμα Killing. Είναι απλό να συνεχίσει κανείς για τα υπόλοιπα 6 ανύσματα Killing, από τα οποία οι γεννήτορες στροφών ( $\{x\partial_y - y\partial_x, y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z\}$ ) δίνουν ομογενή μαγνητικά πεδία και οι γεννήτορες boosts ( $\{t\partial_x + x\partial_t, t\partial_y + y\partial_t, t\partial_z + z\partial_t\}$ ) ομογενή ηλεκτρικά, βλέπε (B.11).

<sup>1</sup>Ο συνήθης ορισμός είναι  $F \equiv dA$ , ο οποίος είναι ανεξάρτητος του τελεστή παραγωγίσης στη γενική θεωρία σχετικότητας. Αν ο χωροχρόνος έχει μη μηδενική στρέψη (torsion), τότε ο ορισμός με τη μερική παράγωγο διαφέρει σε σχέση με τον ορισμό με την covariant· μάλιστα η επιλογή του ενός ή του άλλου σχετίζεται με το αν προτιμάμε τη διατήρηση minimal coupling (covariant) ή τη gauge invariance (μερική), δεν μπορούν να ισχύουν αμφότερα, βλέπε Hehl, Heyde, et al. 1976, §V.B.2.

<sup>2</sup>Βλέπε επίσης Wald 1984, appendix C.

<sup>3</sup>Η εξίσωση Einstein στο κενό είναι  $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$ , και το ίχνος αυτής δίνει  $R = 0$ , το οποίο συνεπάγεται  $R_{ab} = 0$ .

<sup>4</sup>Ο δείκτης στα εφαπτομενικά ανύσματα (tangent vectors) ενίοτε παραλείπεται όταν χρησιμοποιούμε το συμβολισμό των διαφορικών μορφών.

Η ανάλυση του Wald ξεκινά σε χωροχρόνο κενό, ασυμπτωτικώς επίπεδο, στάσιμο, με αξονική συμμετρία, ο οποίος επομένως διαθέτει ένα ασυμπτωτικώς χρονοειδές άνυσμα Killing  $(\partial_t)^a$ , το οποίο αντιστοιχεί στη χρονική συμμετρία, και ένα χωροειδές  $(\partial_\phi)^a$ , το οποίο αντιστοιχεί στην αξονική συμμετρία. Αν και συνηθίζεται σε τέτοιες περιπτώσεις να χρησιμοποιείται ο *μουσικός ισομορφισμός* (*musical isomorphism*) και ο αντίστοιχος συμβολισμός<sup>5</sup>, διατηρούμε το συμβολισμό του πρωτοτύπου και συμβολίζουμε με  $\eta$  τη μορφή που προκύπτει από το  $\partial_t$  και με  $\psi$  αυτή που προκύπτει από το  $\partial_\phi$ , επομένως οι αντίστοιχες μορφές Faraday ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{F}_\eta \equiv d\eta, \quad \mathbf{F}_\psi \equiv d\psi. \quad (2.2)$$

Αυτός ο ορισμός συνεπάγεται  $d\mathbf{F}_\eta = d\mathbf{F}_\psi = 0$  από το λήμμα Poincaré, Wald 1984, appendix B, και ο κενός χωροχρόνος συνεπάγεται  $d\star\mathbf{F}_\eta = d\star\mathbf{F}_\psi = 0$  από την (2.1), επομένως ικανοποιούνται οι εξισώσεις Maxwell, όπως ανεφέρθη στην προηγούμενη παράγραφο.

Οι προηγούμενες σχέσεις κατ' αρχήν δεν επαρκούν για να έχει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο τις συμμετρίες του χωροχρόνου, ώστε να μπορεί να είναι μέρος της λύσεως που αναζητούμε<sup>6</sup>. απαιτείται επί πλέον οι τανυστές Faraday να είναι αναλλοίωτοι κάτω από τη δράση αμφοτέρων  $\partial_t$  και  $\partial_\phi$ . Αυτό εκφράζεται από τις σχέσεις  $\mathcal{L}_{\partial_t} \mathbf{F}_\eta = \mathcal{L}_{\partial_t} \mathbf{F}_\psi = \mathcal{L}_{\partial_\phi} \mathbf{F}_\eta = \mathcal{L}_{\partial_\phi} \mathbf{F}_\psi = 0$ . Ξεκινώντας από τις παραγώγους Lie<sup>7</sup>, των  $\eta$ ,  $\psi$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\partial_t} \eta &= (\partial_t)^a \partial_a \eta_b + \eta_a \partial_b (\partial_t)^a = \partial_t g_{t\mu} = 0, \\ \mathcal{L}_{\partial_t} \psi &= (\partial_t)^a \partial_a \psi_b + \psi_a \partial_b (\partial_t)^a = \partial_t g_{\phi\mu} = 0, \\ \mathcal{L}_{\partial_\phi} \eta &= (\partial_\phi)^a \partial_a \eta_b + \eta_a \partial_b (\partial_\phi)^a = \partial_\phi g_{t\mu} = 0, \\ \mathcal{L}_{\partial_\phi} \psi &= (\partial_\phi)^a \partial_a \psi_b + \psi_a \partial_b (\partial_\phi)^a = \partial_\phi g_{\phi\mu} = 0, \end{aligned}$$

όπου το δεύτερο ίσον ισχύει σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο η παράγωγος Lie της μετρικής παίρνει τη μορφή της μερικής παραγώγου. Η ύπαρξη του συστήματος συντεταγμένων, στο οποίο αμφοτέροι οι γεννήτορες χρονικής και αξονικής συμμετρίας λαμβάνουν τη μορφή μερικής παραγώγου, είναι εγγυημένη από τη συνθήκη ότι μετατίθενται οι δράσεις των μονοπαραμετρικών ομάδων που ορίζουν οι γεννήτορες αυτοί, ή, πιο απλά, για  $[\partial_t, \partial_\phi] = 0$ . αυτή η συνθήκη προκύπτει από τον ορισμό του στάσιμου και αξονικώς συμμετρικού χωροχρόνου, βλέπε Wald 1984, εξ. 7.1.2. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Cartan (B.7) και τη μεταθετικότητα παραγώγου Lie και εξωτερικής παραγώγου, (B.8), είναι προφανές ότι οι μορφές Faraday που ορίσαμε προηγουμένως έχουν τις επιθυμητές συμμετρίες.

Δεδομένου πλέον ότι οι μορφές Faraday που ορίσαμε έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες για να εισαγάγουμε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην αφόρτιστη Kerr, έχει ενδιαφέρον να δούμε τι είδος πεδίου παράγει εκάστη. Αυτό φαίνεται ευκολότερα ασυμπτωτικώς, δηλαδή καθώς  $r \rightarrow \infty$ , οπότε η μετρική παίρνει τη μορφή Minkowski  $ds^2|_\infty = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ ,  $\det g_{\mu\nu}|_\infty = r^2$ . Καθώς  $(\partial_t)^\mu|_\infty = \delta^{\mu 0}$ ,  $F_{\eta,\mu\nu}|_\infty = \partial_\mu \eta_\nu|_\infty - \partial_\nu \eta_\mu|_\infty = 0$ . Για το γεννήτορα αξονικής συμμετρίας έχουμε  $(\partial_\phi)^\mu|_\infty = \delta^{2\mu}$  και  $F_{\psi,\mu\nu}|_\infty = \partial_\mu \psi_\nu|_\infty - \partial_\nu \psi_\mu|_\infty = 2r(\delta_\mu^1 \delta_\nu^2 - \delta_\nu^1 \delta_\mu^2)$ . Από τον

<sup>5</sup>Στο Wald 1974 ο συμβολισμός δεν επιτρέπει διάκριση μεταξύ του ανύσματος και της αντίστοιχης μορφής, κάτι που ενδέχεται να προκαλέσει σύγχυση στον αρχάριο αναγνώστη. Ένα παράδειγμα της σύγχυσης που προκάλεσε στον γράφοντα είναι ότι η Lie παράγωγος ως προς άνυσμα έχει την ίδια γραφή με τη Lie παράγωγο ως προς μορφή, η οποία είναι γνωστή ως *αγκύλη Frölicher–Nijenhuis*, με ελάχιστη αναφορά στη βιβλιογραφία. Δυστυχώς, αυτή η πρακτική συνηθίζεται στη βιβλιογραφία όταν αποφεύγεται ο συμβολισμός με βάση τις διαφορικές μορφές.

<sup>6</sup>Έχει ενδιαφέρον, αν και δεν έχει άμεση εφαρμογή στο συγκεκριμένο σημείο, ότι το στάσιμο της μετρικής δεν συνεπάγεται το στάσιμο του πεδίου, ακόμη κι αν ικανοποιείται η εξίσωση Einstein–Maxwell, βλέπε Breitenlohner, Maison, and G. Gibbons 1988.

<sup>7</sup>Μπορούμε βεβαίως να εκμεταλλευθούμε ότι  $\mathcal{L}_{\partial_\phi} \partial_t = [\partial_\phi, \partial_t] = 0$ , την ιδιότητα ότι η παράγωγος Lie ακολουθεί τον κανόνα Leibniz και τον ορισμό των ανυσμάτων Killing για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα πολύ πιο γρήγορα.

ορισμό του μαγνητικού πεδίου, (B.11), έχουμε  $B_\mu|_\infty = -\frac{1}{2}r\varepsilon_{\mu 0\nu\rho\sigma}F_\psi^{\rho\sigma}|_\infty = 2r^2\delta_{\mu 3}$ , επομένως η  $\mathbf{F}_\psi$  ασυμπτωτικώς παράγει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 2, με διεύθυνση αυτή του άξονος συμμετρίας.

Δεδομένης της μορφής Faraday, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό φορτίο προκύπτουν από τις σχέσεις (B.13), επομένως έχουμε ολοκληρώνοντας στην τοπολογική σφαίρα<sup>8</sup>  $S^2$  (ο χώρος ολοκλήρωσης<sup>9</sup> για τον υπολογισμό του φορτίου καλύπτει τον ορίζοντα γεγονότων),  $4\pi q_\psi = \int_{S^2} \star \mathbf{F}_\psi$  για το ηλεκτρικό φορτίο και  $4\pi p_\psi = \int_{S^2} \mathbf{F}_\psi = \int_{\partial S^2} \psi = 0$  για το μαγνητικό, όπου εφαρμόσαμε το θεώρημα Stokes και  $\partial S^2 = \emptyset$ . Εν τέλει ισχύει  $4\pi q_\psi = 16\pi J$  από τον ορισμό της στροφορμής κατά Komar, βλέπε Wald 1984, εξ. 11.2.9 και άσκηση 6, επομένως το φορτίο αυτό σχετίζεται με την στροφορμή του αρχικού χωροχρόνου Kerr. Η όμοια διαδικασία για τον γεννήτορα της χρονικής συμμετρίας οδηγεί στη σχέση  $4\pi q_\eta = -8\pi M$  από τον ορισμό της μάζας κατά Komar  $M$ , επομένως το ηλεκτρικό φορτίο του σχετίζεται με τη μάζα του αρχικού χωροχρόνου. Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα μέχρι στιγμής,

1. Ο γεννήτορας αξονικής συμμετρίας παράγει στάσιμο, αξονικώς συμμετρικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο-υπόθεμα<sup>10</sup>, το οποίο ασυμπτωτικώς γίνεται ομογενές μαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρικό φορτίο του είναι  $4J$  και το μαγνητικό μηδέν.
2. Ο γεννήτορας χρονικής συμμετρίας παράγει στάσιμο, αξονικώς συμμετρικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο-υπόθεμα, το οποίο ασυμπτωτικώς μηδενίζεται. Το ηλεκτρικό φορτίο του είναι  $-2M$  και το μαγνητικό μηδέν.

Το επόμενο βήμα είναι η χρήση ενός θεωρήματος του Wald<sup>11</sup>:

**Theorem 2.1.1.** *Θεωρούμε  $\mathbf{F}$  μορφή που αντιστοιχεί σε λύση των εξισώσεων Maxwell για ένα πεδίο-υπόθεμα σε στάσιμο, αξονικώς συμμετρικό, κενό χωροχρόνο μελανής οπής. Αν η  $\mathbf{F}$  διαθέτει τις ιδιότητες:*

1. *είναι στάσιμη και αξονικώς συμμετρική,*
2. *είναι ομαλή στον ορίζοντα γεγονότων και έξω από αυτόν,*
3. *μηδενίζεται ασυμπτωτικώς,*
4. *δεν έχει μαγνητικό ή ηλεκτρικό φορτίο,*

<sup>8</sup>Στην τοπολογία, τοπολογικοί χώροι που σχετίζονται με ομοιομορφισμό (homeomorphism) θεωρούνται ισοδύναμοι, π.χ. κάθε επιφάνεια που μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο έτσι ώστε η συνάρτηση που απεικονίζει την αρχική επιφάνεια σε μια σφαίρα να είναι 1-1 και επί (αμφιμονοσήμαντη, bijective), θεωρείται ισοδύναμη με μια σφαίρα, βλέπε, Gamelin and Greene 1999; Schwarz 2002. πιο απλά, ένας χώρος είναι ισοδύναμος με έναν άλλο, αν μπορούμε να παραμορφώσουμε τον ένα σαν να είναι λάστιχο και να καταλήξουμε στον άλλο χωρίς να τον κόψουμε ή να κολλήσουμε μέρη του μεταξύ τους. Παράδειγμα μη ομοιομορφικής επιφάνειας σε σχέση με τη σφαίρα είναι ο τόρος (torus), καθώς η απλή συνεκτικότητα (simple connectedness) είναι τοπολογική ιδιότητα και δύο ομοιομορφικοί χώροι έχουν ίδιες τοπολογικές ιδιότητες. Η 2-σφαίρα είναι απλώς συνεκτική, ενώ ο τόρος δεν είναι, καθώς μια διαδρομή γύρω από την τρύπα του δεν μπορεί συνεχώς να φτάσει σε σημείο που να ανήκει στον τόρο.

<sup>9</sup>Η επιφάνεια ολοκλήρωσης μπορεί να γίνει τοπολογική σφαίρα, επειδή αν χρησιμοποιήσουμε ως χωρίο ολοκλήρωσης στο ολοκλήρωμα στο χώρο, το οποίο προκύπτει από το θεώρημα Stokes, μια περιοχή μεταξύ τέτοιων τοπολογικών σφαιρών με διαφορετική γεωμετρία, η διαφορά τους μηδενίζεται. Αυτή είναι ιδιότητα ήδη γνωστή από τον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό σε χώρο Minkowski. Με την πιο εξειδικευμένη γλώσσα της τοπολογίας, οι δύο αυτές επιφάνειες ολοκλήρωσης είναι *ομόλογες* (homologous), βλέπε Schwarz 2002, §5.2, δηλαδή ανήκουν στην ίδια *τάξη ομολογίας* (homology class) και το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από την τάξη αυτή.

<sup>10</sup>Δηλώνει την πρώτη τάξη προσέγγισης, κατά την οποία η αλληλεπίδραση που προκαλεί το πεδίο αυτό στον χωροχρόνο είναι αμελητέα.

<sup>11</sup>Επίσης Ipser 1971.

τότε  $\mathbf{F} = 0$ .

Αυτό το θεώρημα συνεπάγεται ότι υπάρχει το πολύ μια διαταραχή μιας στάσιμης, αξονικώς συμμετρικής μελανής οπής στο κενό, η οποία αντιστοιχεί στην προσθήκη φορτίου στη μελανή οπή, καθώς η διαφορά οποιωνδήποτε μορφών Faraday που προσθέτουν φορτίο  $Q$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος, επομένως μηδενίζεται. Από την προηγηθείσα ανάλυση προκύπτει επίσης ότι τέτοια διαταραχή υπάρχει, και συγκεκριμένα αυτή είναι η  $-\frac{Q}{2M}\mathbf{F}_\eta$  για προσθήκη φορτίου  $Q$ , ώστε να έχει η λύση την αναμενόμενη ασυμπτωτική συμπεριφορά στο μονοπολικό όρο, όπως είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ολοκληρώνοντας. Είναι επίσης εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι πράγματι η προαναφερθείσα διαταραχή οδηγεί στο πεδίο Kerr–Newman ξεκινώντας από τη μετρική Kerr, ως εξής: η μορφή  $\eta$  έχει συντεταγμένες  $g_{0\mu}$ , δηλαδή  $(2Mr - \Sigma, 0, 0, -2aMr \sin^2 \theta)/\Sigma$ . Έχουμε,

$$\mathbf{A} = -\frac{Q}{2M}\boldsymbol{\eta} = -\frac{Q}{2\Sigma} [-(\Sigma - 2Mr) dt - 2Mar \sin^2 \theta d\phi] = -\frac{Qr}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\phi) + \frac{Q}{2M} dt,$$

το οποίο είναι το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό Kerr–Newman σε διαφορετική βαθμίδα από τη συνηθισμένη, π.χ Wald 1984, εξ. 12.3.2, στην οποία παραλείπεται ο τελευταίος όρος. Η συγκεκριμένη προσέγγιση όμως δεν δίνει την πλήρη λύση Kerr–Newman, καθώς εξ υποθέσεως παραλείπουμε την επίδραση του φορτίου στη γεωμετρία του χωροχρόνου.

## 2.2 Χωροχρόνος Kerr σε ασθενές μαγνητικό πεδίο

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί λύση με ασυμπτωτικώς ομογενές μαγνητικό πεδίο, και τα πεδία που προκύπτουν από τα ανύσματα Killing δίνουν, ύστερα από την προηγηθείσα διαδικασία, πεδίο της μορφής  $\mathbf{F}_\psi + \frac{2J}{M}\mathbf{F}_\eta$ , όπου ο συντελεστής  $2J/M$  απαιτείται για να έχουμε συνολικό ηλεκτρικό φορτίο μηδέν και να διασφαλίζεται η ισχύς του θεωρήματος μοναδικότητας. Αν θέλουμε το ασυμπτωτικώς ομογενές μαγνητικό πεδίο να είναι έντασης  $B_0$ , τότε ορίζουμε το πεδίο του μαγνητισμένου αφόρτιστου χωροχρόνου με ασθενές μαγνητικό πεδίο,

$$\mathbf{F} = \frac{B_0}{2} \left( \mathbf{F}_\psi + \frac{2J}{M}\mathbf{F}_\eta \right), \quad (2.3)$$

όπου  $J$  η στροφορμή και  $M$  η μάζα του αρχικού χωροχρόνου. Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ηλεκτρικό πεδίο λόγω περιστροφής της μελανής οπής, όπως η περιστροφή ενός αγωγού (πιο κάτω θα δούμε ότι ο οριζοντας γεγονότων είναι ισοδυναμική επιφάνεια) σε μαγνητικό πεδίο επάγει ηλεκτρικό πεδίο κατά το νόμο του Faraday.

### Βάση Carter

Η μέτρηση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου γίνεται προβάλλοντας τη μορφή Faraday σε ορθοκανονική βάση, το χρονοειδές άνυσμα της οποίας αντιστοιχεί σε παρατηρητή. οι συνιστώσες ως προς τη βάση αυτή είναι εκείνες που μετρά ο παρατηρητής. Η πιο κατάλληλη ορθοκανονική βάση για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, από την άποψη ότι δίνει τις πιο απλές εκφράσεις, είναι η *βάση Carter* (Carter frame), βλέπε Carter 1968; R. Znajek 1977, C. DeWitt and B. S. DeWitt 1973, p. 94, Felice and Bini 2010, p. 176, D. L. Wiltshire, Visser, and Scott 2009, p. 99, στην οποία ο παρατηρητής βλέπει τα φωτόνια της principal null congruence<sup>12</sup> να κινούνται με ακτινική ταχύτητα. Η μετρική Kerr

<sup>12</sup>Οι principal null congruences ορίζονται από γεωδαισιακές για φωτόνια, οι οποίες σχετίζονται με τον αλγεβρικό τύπο του χωροχρόνου (ταξινόμηση Petrov). Είναι το αντίστοιχο των ακτινικών γεωδαισιακών φωτονίων στη Schwarzschild.

στο σύστημα συντεταγμένων Boyer–Lindquist είναι<sup>13</sup>:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2r}{\Sigma}\right) dt^2 - 4\frac{Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{C}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.4)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr, \quad C \equiv (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta.$$

Οι βάσεις, ανυσματική και δυική, είναι:

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma\Delta}}[(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi], & e^0 &= \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}(dt - a \sin^2 \theta d\phi), \\ e_1 &= \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\partial_r, & e^1 &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}dr, \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\partial_\theta, & e^2 &= \sqrt{\Sigma}d\theta, \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\left(a \sin \theta \partial_t + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi\right), & e^3 &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}[-a dt + (r^2 + a^2) d\phi], \end{aligned} \quad (2.5)$$

και οι principal null directions,

$$k_\pm \equiv \partial_t \pm \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \partial_r + \frac{a}{r^2 + a^2} \partial_\phi = \frac{\sqrt{\Delta\Sigma}}{r^2 + a^2} (e_0 \pm e_1). \quad (2.6)$$

Από αυτή τη σχέση φαίνεται ότι τα φωτόνια που κινούνται στις principal null directions κινούνται στην ακτινική διεύθυνση για παρατηρητή με ταχύτητα  $e_0$ .

Άλλη μια ιδιότητα αυτής της βάσης είναι ότι παρατηρητής σε αυτή τη βάση κινείται γύρω από τη μελανή οπή με γωνιακή ταχύτητα μετρημένη ως προς αδρανειακό παρατηρητή στο άπειρο  $\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{r^2 + a^2}$ . Πράγματι, η μετρική (2.4) εκπεφρασμένη σε αυτή τη βάση είναι:

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b = -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [-a dt + (r^2 + a^2) d\phi]^2,$$

οπότε παρατηρητής με ταχύτητα  $e_0$  στη δυική βάση αντιστοιχεί σε  $dr = d\theta = -a dt + (r^2 + a^2) d\phi = 0$  εκτός του άξονος συμμετρίας, δηλαδή σε  $r = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{r^2 + a^2}$ , η οποία είναι επίσης η γωνιακή ταχύτητα του οριζοντιο γειτονικών για  $r = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ , βλέπε Wald 1984, εξ. 12.3.19.

## Έγχυση φορτίου

Η lagrangian ενός σωματιδίου-υποθέματος<sup>14</sup> μάζας  $m$ , φορτίου  $q$  και ταχύτητας  $v^a \equiv v^a(\tau)$  σε πεδίο με δυναμικό  $A^a \equiv A^a(x^\mu)$  είναι  $L \equiv L(x^\mu(\tau), \dot{x}^\mu(\tau)) = \frac{m}{2} v^a v_a + q A^a v_a$ ,  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ . Η ορμή αυτού είναι  $p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a} = m v_a + q A_a$  και η εξίσωση κίνησης στο σύστημα συντεταγμένων  $\{x^\mu\}$  με παράμετρο της worldline του σωματιδίου τον ιδιοχρόνο  $\tau$  είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = m \dot{v}_\mu + m v^\nu \partial_\nu g_{\mu\nu} v^\rho + q \partial_\nu A_\mu v^\nu - \frac{m}{2} v^\rho v^\nu \partial_\mu g_{\nu\rho} - q \partial_\mu A_\nu v^\nu \\ &= m(\dot{v}_\mu + \Gamma_{\nu\rho\mu} v^\nu v^\rho) - q F_{\mu\nu} v^\nu = m v^\mu \nabla_\mu v^\nu - q F^\nu{}_\mu v^\mu, \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Ο παραδοσιακός συμβολισμός της μετρικής είναι  $ds^2$ , όμως ενδέχεται να δημιουργήσει σύγχυση όταν κάποιος γνωρίζει την εξωτερική άλγεβρα και να νομίζει ότι η  $ds^2$  είναι εξωτερική μορφή. Στην πραγματικότητα όμως είναι συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης στο δυικό χώρο και ο συμβολισμός διατηρείται, αν και θα ήταν προτιμότερος ο  $g_{ab}$ , καθώς  $ds$  είναι πράγματι εξωτερική μορφή, το στοιχείο όγκου για χώρο διάστασης 1.

<sup>14</sup>Υποθέτουμε ότι είναι σημειακό και η αλληλεπίδραση της μάζας και του φορτίου του με την περιβάλλουσα γεωμετρία είναι αμελητέα, όπως και η αλληλεπίδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που δημιουργεί με το ίδιο το σωματίο.

η εξίσωση Lorentz. Έχουμε επίσης

$$\frac{d}{d\tau}(p_\mu(\partial_t)^\mu) = \frac{dp_\mu}{d\tau}(\partial_t)^\mu + p_\mu \frac{d(\partial_t)^\mu}{d\tau} = \partial_\mu L(\partial_t)^\mu = \partial_0 L = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση Euler–Lagrange, επομένως διατηρείται η ενέργεια  $\mathcal{E} \equiv -p_0$  κατά μήκος της worldline του σωματιδίου.

Αν χαμηλώσουμε ένα τέτοιο σωματίο ξεκινώντας μακριά από τη φορτισμένη μελανή οπή προς αυτή κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, τότε η μεταβολή της ενέργειάς του<sup>15</sup>, γνωστή και ως ενέργεια έγχυσης (*injection energy*), είναι:

$$\delta\mathcal{E} = p_a(\partial_t)^a|_{\text{horizon}} - p_a(\partial_t)^a|_\infty = q(A_0|_\infty - A_0|_{\text{horizon}}) = q\left(\frac{Q}{2M} - \frac{B_0 J}{M}\right), \quad (2.7)$$

όπου το  $A^a$  ορίζεται από:

$$\mathbf{F} = \frac{B_0}{2} \left( \mathbf{F}_\psi + \frac{2J}{M} \mathbf{F}_\eta \right) - \frac{Q}{2M} \mathbf{F}_\eta, \quad (2.8)$$

δηλαδή την εξ. (2.3) με την προσθήκη της διαταραχής φορτίου,  $-\frac{Q}{2M} \mathbf{F}_\eta$ . Το δυναμικό στο σημείο του άξονα που τέμνει τον ορίζοντα γεγονότων είναι το ίδιο πάνω σε ολόκληρο τον ορίζοντα, σύμφωνα με την επόμενη πρόταση από τον Carter, βλέπε C. DeWitt and B. S. DeWitt 1973, p. 172, Frolov and Novikov 1998, p. 224.

**Proposition 2.2.1.** *Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό πάνω στον ορίζοντα γεγονότων.*<sup>16</sup>

*Απόδειξη.* Έχουμε  $0 = \mathcal{L}_\chi \mathbf{F} = d\iota_\chi \mathbf{F} = -d\mathbf{E}$ , όπου  $\mathbf{E} \equiv -\iota_\chi \mathbf{F}$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο και  $\chi^a$  άνυσμα Killing. Από το λήμμα Poincaré προκύπτει ότι τοπικώς ισχύει  $\mathbf{E} = -d\Phi$  για βαθμωτό  $\Phi$ . Δεδομένου ότι  $0 = \mathcal{L}_\chi \mathbf{A} = d\iota_\chi \mathbf{A} + d\Phi$ , έχουμε  $\Phi = -\iota_\chi \mathbf{A} + \text{const}$ . Για μελανή οπή Kerr έχουμε ότι το  $\chi^a \equiv (\partial_t)^a + \frac{a}{r_+^2 + a^2} (\partial_\phi)^a$  πάνω στον ορίζοντα γεγονότων, όπου  $r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$ , είναι null άνυσμα Killing, ορθογώνιο στον ορίζοντα γεγονότων, ο οποίος ως γνωστόν είναι υπερεπιφάνεια null<sup>17</sup>. Αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύει  $R_{ab}\chi^a\chi^b|_{\text{horizon}} = 0$ . Από την εξίσωση Einstein, αυτό συνεπάγεται ότι  $T_{ab}\chi^a\chi^b|_{\text{horizon}} = 0$ , επομένως στο κενό παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (electrovacuum) ισχύει

$$0 = T_{ab}\chi^a\chi^b|_{\text{horizon}} = \frac{1}{4\pi} \left( F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4} F^{cd} F_{cd} g_{ab} \right) \chi^a \chi^b = \frac{1}{4\pi} E^a E_a|_{\text{horizon}},$$

το οποίο συνεπάγεται ότι το  $E^a$  είναι ορθογώνιο στον εαυτό του<sup>18</sup>. Επίσης,  $E^a \chi_a = -F_{ab}\chi^a\chi^b = 0$ , επομένως  $E^a \propto \chi^a$  από την A.0.2 και, για  $t^a$  εφαπτόμενο στον ορίζοντα γεγονότων, έχουμε  $0 = t^a E_a = -t^a \partial_a \Phi = 0$ , το οποίο συνεπάγεται  $\Phi|_{\text{horizon}} = \text{const}$ .  $\square$

<sup>15</sup>Για μια εισαγωγή στον ορισμό της ενέργειας στη γενική θεωρία σχετικότητας, βλέπε Geroch 1973.

<sup>16</sup>Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να δίνει την εντύπωση ότι ο ορίζοντας γεγονότων συμπεριφέρεται όπως ένας αγωγός, όμως αυτό δεν είναι ακριβές. Αποδεικνύεται, π.χ. Punsly 2008, §4.5.2.2, θεωρήματα μοναδικότητας Mazur 1982 & Bunting, βλέπε Mazur 2000, ότι μόνο μονοπολικοί όροι μπορούν να ακτινοβολούνται από οπή Kerr–Newman. Δεδομένου ότι ο ορίζοντας γεγονότων δεν είναι σφαίρα, θα ανέμενε κανείς να ακτινοβολούνται τετραπολικοί όροι, όμως αυτό απαγορεύεται από τα θεωρήματα μοναδικότητας!

<sup>17</sup>Το  $\chi^a$  ορίζει τον *ορίζοντα Killing*, ο οποίος στην περίπτωση της Kerr ταυτίζεται με τον ορίζοντα γεγονότων.

<sup>18</sup>Ένα null άνυσμα μπορεί να είναι ορθογώνιο στον εαυτό του· η ορθογωνιότητα δεν συνεπάγεται ότι η γωνία που σχηματίζεται είναι ορθή αν η πολλαπλότητα είναι Lorentz, βλέπε O’Neill 1983, p.48.



Εδώ έχει ενδιαφέρον μια παρατήρηση σχετικά με τον *στάσιμο παρατηρητή* (*stationary observer*) ( $\partial_t$ )<sup>a</sup>. Καλείται στάσιμος παρατηρητής, επειδή ασυμπτωτικώς είναι ό,τι πιο κοντά στον παρατηρητή που παρατηρεί το χωροχρόνο να είναι αμετάβλητος, με την έννοια ότι σε ασυμπτωτικώς επίπεδο χωροχρόνο πράγματι παρατηρεί το χωροχρόνο σε σταθερή κατάσταση, όχι με την έννοια της ακινησίας αλλά της σταθερής κατάστασης στο χρόνο που ορίζεται από την  $t$  (αυτές οι δύο έννοιες διαφέρουν για περιστρεφόμενο χωροχρόνο, είναι η διαφορά μεταξύ στάσιμου και στατικού). Είναι γνωστό ότι τέτοιος παρατηρητής δεν υπάρχει στην εργοπεριοχή της μελανής οπής, επομένως ενδέχεται να δημιουργηθούν αμφιβολίες για το κατά πόσον ισχύει το προηγούμενο αποτέλεσμα για διαδρομή που περνά μέσα από την εργοπεριοχή. Ωστόσο, η ενέργεια του σωματιδίου ορίζεται από τη σχέση που περιλαμβάνει το άνυσμα που ορίζει το στάσιμο παρατηρητή χωρίς να απαιτείται η ύπαρξη του αντίστοιχου παρατηρητή στη διαδρομή που την υπολογίζουμε. Αν η worldline περάσει μέσα από την εργοπεριοχή, τότε απλώς η ενέργεια θα μειωθεί από το χωροειδές μέρος του ανύσματος.

### 2.3 Προέλευση του φορτίου

Από τα προηγούμενα συνάγουμε ότι η μελανή οπή θα ελκύει φορτίο  $q$  αν  $\delta\mathcal{E} < 0$  μέχρι  $\delta\mathcal{E} = 0$ , δηλαδή μέχρι να αποκτήσει φορτίο

$$Q = 2B_0J, \quad (2.9)$$

το οποίο είναι γνωστό και ως *φορτίο Wald*. Ένα σημαντικό ζήτημα για να φτάσει το φορτίο αυτό το μέγεθος είναι η προέλευσή του, όπως και η ύπαρξη κβαντικών φαινομένων, τα οποία ενδεχομένως επηρεάζουν τη διαδικασία, δεδομένου ότι μέχρις εδώ η ανάλυση ήταν αποκλειστικώς κλασική.

Αποδεικνύεται στα Gary W. Gibbons 1976; Gary W. Gibbons 1975 ότι υπάρχει ελάχιστη ένταση του μαγνητικού πεδίου ( $4 \times 10^{13}$  G για ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου), τέτοια ώστε να αντιστοιχεί σε επαρκώς ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο για κατάλληλο παρατηρητή και να παράγονται ζεύγη σωματιδίου-αντισωματιδίου. Από αυτά μπορεί να τροφοδοτηθεί η μελανή οπή, αν και δεν είναι βέβαιο κατά πόσο αυτή η διαδικασία μπορεί να έχει επαρκή διάρκεια, ώστε να είναι σημαντική στην αστροφυσική· άλλωστε, η ίδια η ύπαρξη ηλεκτρικού πεδίου δυσχεραίνεται από το πλάσμα που συνήθως περιβάλλει τα άστρα, ενώ, εξ αιτίας της φύσεως του φαινομένου, μειώνεται σημαντικά ο ρυθμός δημιουργίας ζευγών όσο πλησιάζει το φορτίο της μελανής οπής το φορτίο Wald. Το θέμα δεν έχει διευκρινιστεί πλήρως σε όλες τις πτυχές του· ενδέχεται το πλάσμα να είναι πιο αραιό απ' όσο απαιτείται για να μηδενιστεί το ηλεκτρικό πεδίο, βλέπε Heyl 2001.

Ωστόσο, ο επικρατέστερος τρόπος τροφοδότησης της μελανής οπής με φορτία είναι αυτός που σχετίζεται με το *μηχανισμό Blandford-Znajek*, Blandford and R. L. Znajek 1977, Dermer and Menon 2009, §16.3, Vietri 2008, §8.3, σύμφωνα με τον οποίο ήδη υπάρχοντα φορτία από το δίσκο προσαύξησης επιταχύνονται σε ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο σε κενό χώρο, εκλύουν ακτινοβολία λόγω καμπυλότητας της τροχιάς, και τα προϊόντα φωτόνια αλληλεπιδρούν με το ισχυρό μαγνητικό πεδίο, δημιουργώντας ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων (*vacuum breakdown σε spark gap*). Σε περιβάλλον AGN υπάρχει επίσης η δυνατότητα για *αντίστροφο σκεδασμό Compton (ICS)*, από τον οποίο παράγονται φωτόνια υψηλών ενεργειών για δίδυμη γένεση. Τα κβαντικά φαινόμενα σε τέτοιο περιβάλλον είναι εξαιρετικώς ενδιαφέρον θέμα, το οποίο δυστυχώς δεν επιτρέπει να διερευνήσουμε περαιτέρω το χρονικό πλαίσιο της παρούσης.

### 2.4 Συμπέρασμα

Για μελανή οπή Kerr πρέπει  $a \leq M$ , αλλιώς έχουμε *γυμνή ανωμαλία (naked singularity)*, επομένως ισχύει  $J = Ma \leq M^2$ . αν επιπλέον έχει φορτίο Wald, τότε για να διατηρείται η γεωμετρία

Kerr πρέπει να ισχύει:

$$\frac{Q}{M} = 2B_0 \frac{J}{M} \leq 2B_0 M = 2 \cdot 10^{-5} \frac{B_0}{10^{15} \text{ G}} \frac{M}{M_\odot} \ll 1, \quad (2.10)$$

όπου χρησιμοποίησαμε το Wald 1984, appendix F για να μετατρέψουμε από γεωμετροποιημένες μονάδες σε cgs. Επίσης, η συνθήκη ασθενούς μαγνητικού πεδίου, ώστε να θεωρείται υπόθεμα, είναι:

$$B_0^2 M^2 \ll 1 \implies 10^{-10} \left( \frac{B_0}{10^{15} \text{ G}} \right)^2 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \ll 1.$$

Αυτή προκύπτει από την απαίτηση η ενεργειακή πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου να είναι αμελητέα σε σχέση με την ενεργειακή πυκνότητα από τη μάζα ( $\propto M^{-2}$ ), η οποία περιβάλλεται από τον ορίζοντα γεγονότων. Η σχέση  $Q/M \ll 1$  δίνει το εύρος ισχύος της υποθέσεως ότι το φορτίο δεν επηρεάζει τη γεωμετρία του χωροχρόνου και είναι προφανές ότι συνεπάγεται ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενές, επομένως οι συνθήκες για ασθενές μαγνητικό πεδίο και ασθενές φορτίο ταυτίζονται στην εξ. (2.10). Για ένα AGN<sup>19</sup> με μελανή οπή μάζας  $10^8 M_\odot$  σε μαγνητικό πεδίο  $10^4 \text{ G}$  έχουμε  $Q/M \approx 10^{-8}$ , για ένα GRB<sup>20</sup> με μελανή οπή μάζας  $3 M_\odot$  σε πεδίο  $10^{15} \text{ G}$  έχουμε  $Q/M \approx 10^{-4}$ , επομένως η γεωμετρία παραμένει Kerr με καλή προσέγγιση και η προηγούμενη ανάλυση δίνει ακριβή αποτελέσματα στις συνθήκες αστροφυσικού ενδιαφέροντος<sup>21</sup>.

## 2.5 Κριτική του αποτελέσματος του Wald

### 2.5.1 Εισαγωγή

Στο Li 2000, ο συγγραφέας επεχείρησε να διορθώσει το αποτέλεσμα του Wald, ισχυριζόμενος ότι η «ενέργεια έγχυσης» εξαρτάται από τη διαδρομή του φορτίου, επομένως δεν μπορεί να είναι αξιόπιστη μέθοδος για τον υπολογισμό της καταστάσεως ισορροπίας. Για να υπολογίσει το φορτίο στην κατάσταση ισορροπίας ο Li κατέφυγε στη μέθοδο υπολογισμού του ελαχίστου της ενέργειας ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που περιέχει ο χωροχρόνος Kerr σε μαγνητικό πεδίο. Η πρώτη δυσκολία είναι ότι η ενέργεια αυτού του χωροχρόνου απειρίζεται, καθώς το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται στο χωρικό άπειρο ομογενές, επομένως, για να είναι πεπερασμένο το αποτέλεσμα, πρέπει να περιορίσουμε το πεδίο σε πεπερασμένο χωρίο ολοκλήρωσης και ύστερα να πάρουμε το όριο της ακτίνας  $R$  αυτού πολύ μεγάλο<sup>22</sup>. Ο συγγραφέας επιλέγει για την ολοκλήρωση μια σφαίρα<sup>23</sup> με τη μελανή οπή στο κέντρο και ακτίνα πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων, στην οποία το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές, και εκτός της οποίας φθίνει γρήγορα. Στο τέλος συμπεραίνει ότι το φορτίο ισορροπίας είναι  $2\xi B_0 J$ ,  $\xi$  φορές το φορτίο Wald με  $0 \leq \xi \leq [\frac{3}{2}(2 + \pi)]^{-1} \approx 0.13$ .

<sup>19</sup>Βλέπε Punsly 2008, p. 324.

<sup>20</sup>Μοντέλο collapsar, έχει το πρόβλημα της *μαγνητοπεριστροφικής αστάθειας (MRI)*, βλέπε H. K. Lee, R. Wijers, and Brown 2000, Vedrenne and Atteia 2009, §8.2, Kouveliotou, R. A. Wijers, and Woosley 2012, §10.4.2, Dessart et al. 2008.

<sup>21</sup>Η κλίμακα στην οποία το μαγνητικό πεδίο επηρεάζει σημαντικά τη γεωμετρία προκύπτει από τις εξισώσεις (G.2) και (5.2), από τις οποίες για  $H \approx 1$  προκύπτει  $rB_0 \sim 1$ , το οποίο σε μονάδες cgs είναι  $\frac{r}{10^5 \text{ km}} \frac{B_0}{10^{15} \text{ G}} \sim 1$ . Ο περιβάλλον χώρος μελανής οπής AGN, όπως και αυτής ενός GRB με τα προηγούμενα χαρακτηριστικά και ενός *magnetar* με πεδίο τάξεως  $10^{14} \text{ G} - 10^{15} \text{ G}$ , βλέπε Kouveliotou, R. A. Wijers, and Woosley 2012, §10.4, §10.5, Lyne and Graham-Smith 2005, chapter 13, βρίσκεται εντός του ορίου αυτής της συνθήκης, επομένως δεν επηρεάζεται από τη μεταβολή της καμπυλότητας.

<sup>22</sup>Εδώ απαιτείται προσοχή ώστε να διατηρηθεί η συνθήκη ασθενούς μαγνητικού πεδίου και να παραμείνει η γεωμετρία Kerr σε καλή προσέγγιση. Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει είναι  $B_0 R^3 \ll M$ .

<sup>23</sup>Ακριβέστερα, μπάλα.

## 2.5.2 Υπολογισμός της ενέργειας

Η μετρική είναι η Kerr, (2.4) με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το (2.8). Υπολογίζουμε την ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με τη *μάζα Komar*, Wald 1984, εξ. 12.5.37, ολοκληρώνοντας στη χωροειδή υπερεπιφάνεια  $\Sigma$ , η οποία εκτείνεται από τον ορίζοντα γεγονότων μέχρι τη σφαίρα που ορίσαμε,

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a (\partial_t)^b dV + \frac{1}{4\pi} \kappa A_{\mathcal{H}} + 2\Omega_{\mathcal{H}} J, \quad (2.11)$$

όπου  $n^a \equiv \frac{1}{\alpha} [(\partial_t)^a + \frac{2aMr}{C} (\partial_{\phi})^a]$  είναι το μοναδιαίο, προσανατολισμένο στο μέλλον, κάθετο στην υπερεπιφάνεια  $\Sigma_{t=\text{const}}$ ,  $dV$  το στοιχείο όγκου της  $\Sigma$ ,  $A_{\mathcal{H}}$  η επιφάνεια του ορίζοντα γεγονότων,  $\alpha \equiv \sqrt{\frac{\Delta\Sigma}{C}}$ ,  $T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_a^c F_{bc} - \frac{1}{4} F^{cd} F_{cd} g_{ab})$ ,  $\Omega_{\mathcal{H}} \equiv \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2Mr_+}$  η γωνιακή ταχύτητα του ορίζοντα γεγονότων,  $r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$ , όπου  $r = r_+$  ορίζει τον ορίζοντα γεγονότων,  $\kappa \equiv \frac{r_+ - M}{2Mr_+}$  η *βαρύτητα επιφάνειας (surface gravity)*<sup>24</sup>,  $J$  η *στροφορμή Komar* και  $a \equiv J/M$ . Η επιφάνεια<sup>25</sup> του χωρικού μέρους του ορίζοντα γεγονότων δίνεται από τη σχέση,

$$A_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{H}} \sqrt{\det g_{\mu\nu}|_{\mathcal{H}}} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{g_{22}g_{33}}|_{r=r_+} d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2 + a^2),$$

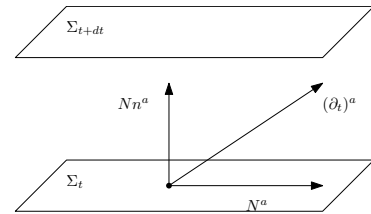
από την οποία συμπεραίνουμε ότι ο ορίζοντας γεγονότων *δεν είναι σφαίρα ακτίνας  $r_+$*  για  $a \neq 0$ . η συνθήκη  $r = r_+$  δεν ορίζει σταθερή ακτίνα με τη μορφή της ακτινικής συντεταγμένης στη γεωμετρία Schwarzschild. Αυτό ισχύει, καθώς η ανωμαλία στο εσωτερικό δεν είναι σημείο, όπως στη Schwarzschild, αλλά δακτύλιος.

### Διαμέριση 3 + 1

Η βασική ιδέα της *διαμέρισης 3 + 1* (*3 + 1 decomposition*), Kiefer 2007, p. 106, Baumgarte and S. L. Shapiro 2010, §2.3, Wald 1984, §10.2, §E.2, είναι να χωρίσουμε το χωροχρόνο ( $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ , *φυλλοποίηση, foliation*) σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες  $\Sigma_t$ , οι οποίες ορίζονται από την απαίτηση η συντεταγμένη  $t$  να είναι σταθερή πάνω τους και η *worldline* του στάσιμου παρατηρητή να τις διαπερνά μόνο μία φορά. Ορίζουμε το άνυσμα  $n^a$  ως το μοναδιαίο χρονοειδές, προσανατολισμένο προς το μέλλον με  $n^a n_a = -1$ . Η συνάρτηση  $N \equiv -(\partial_t)^a n_a$  ονομάζεται *συνάρτηση παρέλευσης (lapse function)* και ορίζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η  $t$  καθώς αλλάζει ο στάσιμος παρατηρητής θέση από την  $\Sigma_t$  προς τη  $\Sigma_{t+dt}$ . Το άνυσμα  $N^a \equiv h^a_b (\partial_{\phi})^b$  είναι το *άνυσμα μετατόπισης (shift vector)*, το οποίο ορίζει τη μετακίνηση στη θέση του παρατηρητή σε σχέση με τις  $\Sigma_t$  και  $\Sigma_{t+dt}$  (προβολή της θέσης στην  $\Sigma_{t+dt}$  πάνω στην  $\Sigma_t$ ).  $h_{ab} \equiv g_{ab} + n_a n_b$  είναι η μετρική στη  $\Sigma_t$ , η οποία ενεργεί επίσης ως προβολικός τελεστής<sup>26</sup> στη μορφή  $h^a_b$ . Για ανύσματα που ανήκουν στις  $\Sigma_t$ , δηλαδή είναι χωροειδή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη  $h_{ab}$  είτε τη  $g_{ab}$  για να ανεβοκατεβάζουμε δείκτες.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η μετρική (2.4) γράφεται στη μορφή ( $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3\}$  ορίζουν χωρικές συντεταγμένες, δηλαδή πάνω στις  $\Sigma_t$ ),

$$ds^2 = h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) - N^2 dt^2, \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.1: Διαμέριση του χωροχρόνου 3 + 1.

<sup>24</sup>Βλέπε Wald 1984, §12.5 για λεπτομέρειες.

<sup>25</sup>Η επιφάνεια του ορίζοντα γεγονότων έχει εξαιρετική φυσική σημασία στη θερμοδυναμική μελανών οπών, βλέπε Hawking and Ellis 1973, §9.3, Wald 1984, table 12.1.

<sup>26</sup>Προβάλλει ανύσματα του  $\mathcal{M}$  σε ανύσματα στις  $\{\Sigma_t\}$ .

με  $g_{00} = h_{ij}N^iN^j - N^2 = N^iN^j - N^2$ ,  $g_{ij} = h_{ij}$ ,  $g_{0i} = h_{ij}N^j = N_i$ . Επομένως, για τη μετρική Kerr έχουμε  $h_{11} = \Sigma/\Delta$ ,  $h_{22} = \Sigma$ ,  $h_{33} = C \sin^2 \theta/\Sigma$ ,  $\det h_{ij} = \Sigma C \sin^2 \theta/\Delta$ ,  $N_3 = -2Mar \sin^2 \theta/\Sigma$ ,  $N^3 = -2Mar/C$ . Ο υπολογισμός του  $N$  είναι αρκετά πιο πολύπλοκος. Έχουμε,

$$\begin{aligned}\epsilon_{abcd}\epsilon_{efgh}g^{ae}g^{bf}g^{cg}g^{dh} &= 4!(\epsilon_{0123})^2 \det g^{\mu\nu} \\ &= \epsilon_{abcd}\epsilon_{efgh}(h^{ae} - n^an^e)(h^{bf} - n^bn^f)(h^{cg} - n^cn^g)(h^{dh} - n^dn^h) \\ &= -4\epsilon_{abcd}\epsilon_{efgh}n^an^en^bn^fn^cn^gn^dn^h,\end{aligned}$$

αφού  $\epsilon_{abcd}h^{ae}h^{bf}h^{cg}h^{dh} = 0$ , δεδομένου ότι οι δείκτες των  $h^{ij}$  παίρνουν τιμές στο  $\{1, 2, 3\}$ , και  $\epsilon_{abcd}n^an^b \dots = 0$ . Επίσης,  $\epsilon_{abcd}\epsilon_{efgh}n^an^en^bn^fn^cn^gn^dn^h = N^{-2}\epsilon_{0ijk}\epsilon_{0lmn}h^{il}h^{jm}h^{kn} = (\epsilon_{0123})^2 N^{-2} \det h^{ij}$ , καθώς  $n^a\epsilon_{abcd} = -\frac{1}{N}\epsilon_{0ijk}$  από τον ορισμό  $n^a = \frac{1}{N}[(\partial_t)^a - N^a]$ , και  $g^{00} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{\mu\nu}}$  από τον ορισμό του αντιστρόφου πίνακα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι  $-N^2 \det h_{ij} = \det g_{\mu\nu}$  και

$$N = \sqrt{-\frac{\det g_{\mu\nu}}{\det h_{ij}}} = \sqrt{\frac{\Delta\Sigma}{C}}.$$

Η ενέργεια ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη σφαίρα ακτίνας  $R$  είναι:

$$\mathcal{E} = 2 \int_{r_+}^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left( T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} \right) n^a(\partial_t)^b \sqrt{\frac{\Sigma C}{\Delta}} \sin \theta,$$

ύστερα από αντικατάσταση στην εξ. (2.11), παραλείποντας τους όρους μετά το ολοκλήρωμα, επειδή αντιστοιχούν στη μάζα αν μηδενιστεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

### 2.5.3 Συμπέρασμα

Ο υπολογισμός της ποσότητας προς ολοκλήρωση είναι αρκετά εύκολη υπόθεση για ένα πακέτο υπολογισμών με τανυστές όπως το xAct, Martín-García 2015. Η ολοκλήρωση απαιτεί επίσης πρόγραμμα όπως το Mathematica, καθώς οι εκφράσεις είναι αρκετά πολύπλοκες για ολοκλήρωση με το χέρι. Το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{Q^2}{M}F_1(s) + \frac{B_0JQ}{M}F_2(s),$$

όπου το πρώτο μέρος αντιστοιχεί στην ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, το δεύτερο στην ενέργεια του φορτίου  $Q$  και το τρίτο στην αλληλεπίδραση μαγνητικού πεδίου, ηλεκτρικού φορτίου και στροφορμής. Για  $R \rightarrow \infty$  το πρώτο μέρος αποκλίνει, ως αναμενόταν, όμως τα άλλα δύο συγκλίνουν, το οποίο σημαίνει ότι δεν επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό το τελικό αποτέλεσμα από την επιλογή του  $R$  πάνω από ένα όριο. Το ελάχιστο της  $\mathcal{E}$  ως προς το  $Q$  προκύπτει ότι είναι:

$$Q = 2\xi(s)B_0J, \quad (2.13)$$

όπου  $s \equiv a/M$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . Η συνάρτηση  $\xi(s)$  μειώνεται γρήγορα όσο μειώνεται το  $s$  και έχει μέγιστο  $\xi(1) \approx 0.13$ , επομένως το φορτίο Wald είναι αρκετά μεγαλύτερο από εκείνο που δίνει την ελάχιστη ενέργεια για το συγκεκριμένο σύστημα.

## 2.6 Κριτική των αποτελεσμάτων

Η κριτική του αποτελέσματος του Wald από τον Li πάσχει σε ουσιώδη σημεία. Κατ' αρχάς, η «ενέργεια έγχυσης» δεν εξαρτάται από τη διαδρομή του φορτίου, όπως προκύπτει από την πρόταση 2.2.1, και δεν είναι σαφές πού βασίζει ο Li τον ισχυρισμό του για το αντίθετο, καθώς η επικοινωνία μαζί του για διευκρινίσεις δεν κατέστη δυνατή. Επιπλέον, ο ορισμός της μάζας Komar απαιτεί ιδιαίτερες συνοριακές συνθήκες, βλέπε Komar 1963, ενώ η εξ. (2.11) έχει νόημα μόνο για ασυμπτωτικώς επίπεδο χωροχρόνο, και ο μαγνητισμένος Kerr δεν είναι τέτοιος. Άλλο πρόβλημα είναι η ύπαρξη πηγών στη συνοριακή επιφάνεια, την οποία είναι υποχρεωμένος να υποθέσει, ώστε να φθίνει το πεδίο γρήγορα έξω από αυτή. Είναι προφανές ότι προσεπάθησε ο Li να εκτιμήσει την επίδραση αυτών των προβλημάτων στο αποτέλεσμα κατά τη διερεύνηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των όρων της ενέργειας  $\mathcal{E}$ , όμως δεν προκύπτει από το άρθρο του πλήρης διερεύνηση σε σχέση με τις ιδιότητες της μάζας Komar· η προσπάθεια για ορισμό της ενέργειας, γνωστής και ως *οιονεί τοπική ενέργεια* (*quasilocal energy*), βλέπε Szabados 2009, §3.3.1, κεφ.4, §4.2.3, §4.2.5, δεν είναι βέβαιο ότι είναι συνεπής με τον ορισμό της μάζας Komar ή ότι έχει τις επιθυμητές ιδιότητες της μάζας. Κατά την επικοινωνία με τον κ. Robert Geroch επιβεβαιώνονται τα κυριότερα από τα προαναφερθέντα προβλήματα και τείνει ο καθηγητής, όπως και ο κ. Χριστοδουλάκης, στο συμπέρασμα ότι το αποτέλεσμα του Wald είναι εγκυρότερο. Άλλη μια εκτίμηση της μάζας στη συγκεκριμένη περίπτωση έγινε στο Garry W. Gibbons, Pang, and C. N. Pope 2013, εξ. 5.12 και διαφέρει ουσιωδώς από αυτή του Li, ενώ ο υπολογισμός είναι ακριβής, χωρίς προσεγγίσεις. Επίσης, ο ακριβής υπολογισμός του φορτίου της μαγνητισμένης Kerr στην κατάσταση ισορροπίας, εξ. (5.4), συμφωνεί με το αποτέλεσμα του Wald. Ανεξαρτήτως εγκυρότητας του αποτελέσματος, είναι βέβαιο ότι η ανάλυση του Wald προσφέρει περισσότερο στην κατανόηση του φαινομένου της εμφανίσεως ηλεκτρικού φορτίου σε περιστρεφόμενη μελανή οπή εντός μαγνητικού πεδίου στην κατάσταση ισορροπίας· εξ άλλου, κάθε μελέτη για την ασθενώς μαγνητισμένη Kerr περιλαμβάνει αναφορά στο άρθρο του Wald, ενώ οι αναφορές στο αντίστοιχο του Li είναι ελάχιστες.

## Κεφάλαιο 3

# Μοντέλο $\sigma$ από διαστατική αναγωγή θεωρίας Einstein–Hilbert

### 3.1 Μη γραμμικό μοντέλο $\sigma$

Τα επόμενα βασίζονται σε Hehl, Kiefert, and Metzler 1998, §7.3, Chruściel, Costa, and M. Heusler 2012, p. 35, Combesure and Robert 2012, p. 225, Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013, appendix A, Ortin 2004.

Η πιο γενική μορφή κενού, στάσιμου, αξονικώς συμμετρικού χωροχρόνου (που ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες υποθέσεις, βλέπε Wald 1984, εξ. 7.1.22, θεώρημα 7.1.1) δίνεται από τη μετρική

$$ds^2 = -V(dt - w d\phi)^2 + V^{-1}[\rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)],$$

όπου  $V > 0$ ,  $\gamma$ ,  $w$  αυθαίρετες συναρτήσεις. Είναι προφανές ότι αυτή είναι η μορφή της (F.1) με άνυσμα Killing  $\partial_\phi$  στη θέση του  $\partial_z$  και  $\partial_t$  στη θέση του  $\partial_\phi$  (είναι εύκολο να δει κανείς ότι προκύπτει αυτό αν γίνει η κατάλληλη επιλογή κατά την εξαγωγή της μετρικής), επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία αναγωγής κατά Kaluza–Klein στα επόμενα.

Από τη δράση Einstein–Hilbert σε διάσταση 4, η διαστατική αναγωγή Kaluza–Klein οδηγεί στη lagrangian (F.2) για διάσταση 3, όμως στα επόμενα θα προτιμήσουμε την κανονικοποίηση  $2 = \alpha^2(D-2)(D-3)$ , ούτως ώστε να ταιριάζουν οι εκφράσεις με την κανονικοποίηση που συνηθίζεται στη θεωρία χορδών<sup>1</sup> Με αυτή την κανονικοποίηση, οι συντελεστές της μετρικής γίνονται  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  και η ανηγμένη lagrangian είναι:

$$\mathcal{L} = \star[R - 2(\partial\varphi)^2 - e^{-4\varphi}\mathcal{F}^2], \quad (3.1)$$

όπου  $\varphi$  το «dilaton»,  $\mathcal{F} \equiv d\mathcal{A}$  η μορφή πεδίου Kaluza–Klein, και  $\star$  η *δυσική απεικόνιση κατά Hodge (Hodge dual)*, (B.4), στη διάσταση 3. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange multipliers)<sup>2</sup> και τη *δυσικότητα Poincaré (Poincaré duality)*, ώστε να απαλειφθούν τα πεδία από τη lagrangian. Ο περιορισμός (constraint) είναι  $d\mathcal{F} = 0$ , επομένως με πολλαπλασιαστή Lagrange  $4\sigma$  έχουμε  $4\sigma d\mathcal{F} = 4d(\sigma\mathcal{F}) - 4d\sigma \wedge \mathcal{F}$  και μένει, ύστερα από εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών της δράσεως,  $-4d\sigma \wedge \mathcal{F} = 2\epsilon \frac{\partial_\mu \sigma}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} \mathcal{F}_{\nu\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho}$  στη lagrangian. Οι εξισώσεις Euler–Lagrange ως προς  $\mathcal{F}_{\nu\rho}$  δίνουν  $e^{-4\varphi}\mathcal{F} = -\star d\sigma$ , το οποίο ύστερα από χρήση της (B.5) γίνεται  $d\sigma = e^{-4\varphi}\star\mathcal{F}$ . Αντικαθιστώντας στη lagrangian προκύπτει το μη γραμμικό μοντέλο  $\sigma$ ,

$$\mathcal{L} = \star[R - 2(\partial\varphi)^2 - 2e^{4\varphi}(\partial\sigma)^2]. \quad (3.2)$$

Σε αυτό το μοντέλο, τα πεδία της πολλαπλότητας-στόχου είναι  $(\varphi, \sigma)$  και οι συνιστώσες της μετρικής  $G_{AB} = \text{diag}(1, e^{4\varphi})$ .

<sup>1</sup>Το μεγαλύτερο μέρος των μεθόδων που ακολουθούν συνηθίζονται στη θεωρία χορδών, στην κβαντική βαρύτητα και στη φυσική υψηλών ενεργειών.

<sup>2</sup>Εν προκειμένω είναι απλούστερο να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα Poincaré για την τοπική ύπαρξη του  $\sigma$ .

### 3.2 Δυναμικό Ernst

Αν ορίσουμε  $\mathcal{E} \equiv e^{-2\varphi} - 2i\sigma$ , τότε  $\partial^\mu \mathcal{E} \partial_\mu \bar{\mathcal{E}} = 4(e^{-4\varphi} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma)$ ,  $(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2 = 4e^{-4\varphi}$ , επομένως η lagrangian γράφεται στη μορφή,

$$\mathcal{L} = \star \left[ R - 2 \frac{\partial^\mu \mathcal{E} \partial_\mu \bar{\mathcal{E}}}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \right]. \quad (3.3)$$

Αυτή είναι η lagrangian<sup>3</sup> που εμφανίζεται στο Ernst 1968, βλέπε επίσης Stephani et al. 2009, §34.1, και  $\mathcal{E}$  είναι το *δυναμικό Ernst*, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή των δύο από τους τρεις βαθμούς ελευθερίας ενός κενού, στάσιμου, συμμετρικού περί άξονος χωροχρόνου.

### 3.3 Πολλαπλότητα Kähler

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει η μετρική του μοντέλου  $\sigma$ ,  $ds^2 = 2G_{\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} d\bar{\mathcal{E}}$  με  $G_{\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}}} = (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^{-2}$ . Αυτό είναι μετρική πολλαπλότητας Kähler με *δυναμικό Kähler*  $\ln \operatorname{Re} \mathcal{E}$ .

### 3.4 Ψευδοσφαίρα

Ορίζουμε<sup>4</sup>  $\varepsilon \equiv \frac{1-\mathcal{E}}{1+\mathcal{E}}$ . Επίσης,  $\mathcal{E} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$  και  $\operatorname{Re} \mathcal{E} = \frac{1-|\varepsilon|^2}{|1+\varepsilon|^2}$ . Για  $\operatorname{Re} \mathcal{E} > 0$ , η  $\varepsilon$  απεικονίζει το άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο στο  $|\varepsilon| < 1$ , το μοναδιαίο δίσκο. Επίσης,  $\partial_\mu \varepsilon \partial^\mu \bar{\varepsilon} = 4 \frac{\partial_\mu \mathcal{E} \partial^\mu \bar{\mathcal{E}}}{|1+\mathcal{E}|^4}$ ,  $(1 - |\varepsilon|^2)^2 = 4 \frac{(\bar{\mathcal{E}} + \mathcal{E})^2}{|1+\mathcal{E}|^4}$ , επομένως

$$\frac{\partial_\mu \varepsilon \partial^\mu \bar{\varepsilon}}{(1 - |\varepsilon|^2)^2} = \frac{\partial_\mu \mathcal{E} \partial^\mu \bar{\mathcal{E}}}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} = \frac{\partial_\mu r \partial^\mu r + r^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta}{(1 - r^2)^2},$$

όπου στην τελευταία σχέση αντικαταστήσαμε την πολική μορφή του  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \equiv r e^{i\theta}$ . Αυτό ως μοντέλο  $\sigma$  αντιστοιχεί στη μετρική,

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 - r^2)^2}, \quad (3.4)$$

γνωστή και ως *μετρική του δίσκου Poincaré*, μετρική για το υπερβολοειδές, όπως θα δούμε στα επόμενα.

Ορίζουμε  $r \equiv \tanh \frac{\tau}{2}$ , οπότε με χρήση των ταυτοτήτων υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων η μετρική παίρνει τη μορφή  $ds^2 = \frac{1}{4}(d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\theta^2)$ , η οποία είναι το 1/4 της μετρικής της *ψευδοσφαίρας*<sup>5</sup>,  $PS^2$ , σε ψευδοπολικές συντεταγμένες  $(\tau, \theta)$ , όπως θα δούμε στα επόμενα. Η ψευδοσφαίρα ορίζεται από τη σχέση  $PS^2 \equiv \{(x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3 | (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2 = -1, x^0 > 0\}$ , δηλαδή είναι το άνω φύλλο υπερβολοειδούς στον  $\mathbb{R}^3$ . Η αναπαραμέτρηση ως προς ψευδοπολικές συντεταγμένες είναι  $x^1 = \sinh \tau \cos \theta$ ,  $x^2 = \sinh \tau \sin \theta$ ,  $x^0 = \cosh \tau$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  και υποθέτουμε περιβάλλοντα χώρο Minkowski,  $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ . Αυτή η μετρική επάγει πάνω στην  $PS^2$  τη μετρική  $ds^2|_{PS^2} = d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\theta^2$ , η οποία είναι riemannian<sup>6</sup>.

<sup>3</sup>Μέρος της διαδικασίας μέχρι εδώ χρησιμεύει στην απόδειξη του θεωρήματος μοναδικότητας για την Kerr, βλέπε M. Heusler 1996, §12.6.

<sup>4</sup>Αυτός είναι *μετασχηματισμός Möbius*, ο οποίος απεικονίζει (γενικευμένους) κύκλους σε (γενικευμένους) κύκλους στο μιγαδικό επίπεδο.

<sup>5</sup>Για λεπτομέρειες βλέπε Thurston and Levy 1997, §2.1, Balazs and Voros 1986, Dray 2012, κεφ. 14.

<sup>6</sup>Έχει ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι η μετρική αυτή είναι συμμετρική στην περιστροφή, το οποίο σημαίνει ότι η μετρική είναι της μορφής  $\eta^2(\tau) d\tau^2 + \xi^2(\tau) d\theta^2$  και η πολλαπλότητα της μορφής  $\mathbb{R} \supset I \times S^1$ . Ωστόσο, δεν προέρχονται όλες οι μετρικές που είναι συμμετρικές στην περιστροφή από επιφάνειες εκ περιστροφής, βλέπε Petersen 2006, p. 11.

### 3.5 Δομή coset

Ξεκινώντας πάλι από τη μετρική Minkowski του περιβάλλοντος χώρου, η μετρική (3.4) γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες στη μορφή,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2} \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \\ -x^1 x^2 & 1 + (x^1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

και το  $A \equiv \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$  δρα σε αυτή ως  $A_\rho^\mu g_{\mu\nu} A^\nu_\sigma = \tilde{g}_{\rho\sigma}$ , όπου  $a$  η γωνία περιστροφής. Το  $A$  έχει τη δράση  $\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{g}_{\mu\nu} = [1 + (\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^1)^2]^{-1} \begin{pmatrix} 1 + (\tilde{x}^2)^2 & -\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \\ -\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 & 1 + (\tilde{x}^1)^2 \end{pmatrix}$ , επομένως διατηρεί τη μετρική της  $PS^2$ . Η  $\text{SO}(2)$  είναι η ομάδα ισοτροπίας (isotropy group) του σημείου  $(x^0, x^1, x^2) = (1, 0, 0)$ , όπως προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της ψευδοσφαίρας.

**Proposition 3.5.1.** Η  $\text{SO}_0(2, 1)$  ενεργεί μεταβατικώς στην  $PS^2$ <sup>7</sup>.

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι αν το ένα σημείο είναι  $(1, 0, 0)$ , οποιοδήποτε  $(x^0, x^1, x^2)$  μπορεί να προκύψει από το  $\Lambda \in \text{SO}_0(2, 1)$ , το οποίο είναι γνωστό ότι ισχύει για χρονοειδή ανύσματα προσανατολισμένα στο μέλλον, βλέπε πρόταση A.0.1.  $\square$

Η  $\text{SO}_0(2, 1)$  ενεργεί μεταβατικώς στην  $PS^2$ , επομένως ο χώρος  $PS^2$  είναι ομογενής. Από το O'Neill 1983, p.307, proposition 13 προκύπτει ότι υπάρχει ο ισομορφισμός  $PS^2 \cong \text{SO}_0(2, 1)/\text{SO}(2)$ . Από τον Gilmore 2005, p. 205 προκύπτει ότι  $PS^2 \cong \text{SU}(1, 1)/\text{U}(1)$ .

### 3.6 Κρυμμένη συμμετρία $\text{SO}(2, 1)$

Τα προηγούμενα αρκούν για να αποδείξουμε ότι το μοντέλο  $\sigma$  έχει συγκεκριμένη συμμετρία, όμως αυτή η συμμετρία απαιτεί εξειδικευμένους χειρισμούς για να εκδηλωθεί, επειδή δεν είναι φανερή από τη μορφή της lagrangian. Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε τον καθιερωμένο φορμαλισμό, ώστε να γραφεί η lagrangian σε μορφή με έκδηλη τη συμμετρία της.

Αναλύοντας την άλγεβρα του μοντέλου,

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \text{Span} \left\{ X_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

οι σχέσεις μετάθεσης είναι  $[X_3, X_1] = X_2$ ,  $[X_3, X_2] = -X_1$ ,  $[X_2, X_1] = X_3$ , οι οποίες είναι αυτές της  $\mathfrak{so}(3)$  με τη διαφορά ενός προσήμου<sup>8</sup>. Θέτουμε  $H \equiv 2X_2$ ,  $E_\pm \equiv X_1 \pm X_3$ , επομένως προκύπτουν οι σχέσεις μετάθεσης  $[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm$ ,  $[E_+, E_-] = H$ , οι οποίες είναι αυτές της  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , επομένως  $\mathfrak{so}(1, 2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , της οποίας η ανάλυση Iwasawa είναι στην εξ. (D.8). Ένα coset representative  $\mathcal{V}$  και η «εσωτερική μετρική»  $\mathcal{M}$  είναι:

$$\mathcal{V} \equiv e^{\varphi(x)H} e^{2\sigma(x)E_+} = \begin{pmatrix} e^{\varphi(x)} & 2e^{\varphi(x)}\sigma(x) \\ 0 & e^{-\varphi(x)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} \equiv \begin{pmatrix} e^{2\varphi(x)} & 2e^{2\varphi(x)}\sigma(x) \\ 2e^{2\varphi(x)}\sigma(x) & 4e^{2\varphi(x)}\sigma(x)^2 + e^{-2\varphi(x)} \end{pmatrix},$$

τα οποία δίνουν  $\mathcal{L} = R + \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial^\mu \mathcal{M} \partial_\mu \mathcal{M}^{-1}) = R - 2[(\partial\varphi)^2 + e^{4\varphi}(\partial\sigma)^2]$ , η οποία είναι το μοντέλο  $\sigma$  της (3.2). Αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από τη δράση  $\text{SO}_0(2, 1)_{\text{global}} \times \text{O}(2)_{\text{local}}$  κατά τα γνωστά.

<sup>7</sup>Οι επιφάνειες μεταβατικότητας της ομάδος Lorentz παρατίθενται στο Gelfand, Minlos, and Z. Y. Shapiro 1963, p. 162. Βλέπε επίσης Gallier 2015, proposition 4.9.

<sup>8</sup>Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην απεικόνιση  $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{i} \mathfrak{p}$  για ανάλυση Cartan  $\mathfrak{so}(2, 1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , ώστε να βρούμε τη συμπαγή άλγεβρα που αντιστοιχεί στη μη συμπαγή.



## Κεφάλαιο 4

# Μοντέλο $\sigma$ από διαστατική αναγωγή θεωρίας Einstein–Maxwell–Hilbert

### 4.1 Μη γραμμικό μοντέλο $\sigma$

Το πρόβλημα είναι όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο με την προσθήκη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου  $\hat{F}$ ,  $\mathcal{L}_{\partial_z} \hat{F} = 0$ , ο χωροχρόνος είναι αξονικός συμμετρικός με χωροειδές άνυσμα Killing  $\partial_z$ , και:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &\equiv (\hat{R} - \hat{F}^2)\hat{\epsilon}, \\ d\hat{s}^2 &= e^{2\varphi} ds^2 + e^{-2\varphi} (dz + 2\mathcal{A})^2, \\ \hat{A} &\equiv A + \chi(dz + 2\mathcal{A}),\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου  $\hat{F} \equiv d\hat{A}$ . Η διαστατική αναγωγή (βλέπε (E.2)) για μετρική (E.1) με  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ) για το βαθμωτό Ricci δίνει  $R - 2(\partial\varphi)^2 - e^{-4\varphi}\mathcal{F}^2$ ,  $\mathcal{F} \equiv d\mathcal{A}$ . Η διαστατική αναγωγή για το ανυσματικό πεδίο δίνει  $\hat{F} \equiv d\hat{A} = F + d\chi \wedge (dz + 2\mathcal{A})$ ,  $F \equiv dA + 2\chi d\mathcal{A}$ ,  $\hat{F}_{ab} = e^{-2\varphi} F_{ab}$ ,  $\hat{F}_{az} = \partial_a \chi$ . Επίσης,  $\hat{\epsilon} = \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 \wedge \hat{e}^z = e^{2\varphi} \epsilon \wedge dz$ , επομένως  $\hat{F}^2 = e^{-4\varphi} F^2 + 2\partial_a \chi \partial^a \chi$  και  $\hat{F}^2 \hat{\epsilon} = [e^{-2\varphi} F^2 + 2e^{2\varphi} (\partial\chi)^2] \epsilon \wedge dz$ , και η lagrangian γίνεται,

$$\hat{\mathcal{L}} = [R - 2(\partial\varphi)^2 - e^{-4\varphi}\mathcal{F}^2 - e^{-2\varphi}F^2 - 2e^{2\varphi}(\partial\chi)^2] \epsilon \wedge dz.$$

Ακολουθεί η εφαρμογή των μεθόδων πολλαπλασιαστών Lagrange και δεικνότητας Poincaré για να βρούμε τη lagrangian ως προς τα δυναμικά. Οι δύο περιορισμοί είναι  $0 = d\mathcal{F} = d(F - 2\chi\mathcal{F})$ , και με πολλαπλασιαστή  $4\sigma$  έχουμε για τον πρώτο  $4\sigma d\mathcal{F} = 4d(\sigma\mathcal{F}) - 4d\sigma \wedge \mathcal{F}$ , επομένως από τις συνοριακές συνθήκες μένει  $4d\sigma \wedge \mathcal{F}$  στη lagrangian. Για το δεύτερο, ο πολλαπλασιαστής είναι  $4\psi$ , επομένως  $4\psi d(F - 2\chi\mathcal{F}) = 4d[\psi(F - 2\chi\mathcal{F})] + 4d\psi \wedge (F - 2\chi\mathcal{F})$  και μένει ο όρος  $4d\psi \wedge (F - 2\chi\mathcal{F})$  στη lagrangian. Το μέρος με την  $\mathcal{F}$  γίνεται:

$$-e^{-4\varphi} \star \mathcal{F}^2 - 4(d\sigma - 2\chi d\psi) \wedge \mathcal{F} = \star \left( -e^{-4\varphi} \mathcal{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{2\partial_\mu \sigma}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} \mathcal{F}_{\nu\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho} - 4 \frac{\partial_\mu \psi}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} \chi \mathcal{F}_{\nu\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho} \right),$$

και οι εξισώσεις κίνησης (Euler–Lagrange) ως προς  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  είναι  $e^{-4\varphi} \mathcal{F} = -\star(d\sigma - 2\chi d\psi) \implies e^{-4\varphi} \star \mathcal{F} = d\sigma - 2\chi d\psi$ . Το μέρος της lagrangian με την  $F$  είναι,

$$-e^{-2\varphi} F^2 \epsilon + 4d\psi \wedge F = \star \left( -e^{-2\varphi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial_\mu \psi}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} F_{\nu\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho} \right).$$

Οι εξισώσεις κίνησης ως προς  $F_{\nu\rho}$  είναι  $e^{-2\varphi} F = -\star d\psi \implies e^{-2\varphi} \star F = d\psi$ . Επομένως, οι ανηγμένες μορφές είναι,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \star [R - 2(\partial\varphi)^2 - 2e^{2\varphi}(\partial\chi)^2 - 2e^{2\varphi}(\partial\psi)^2 - 2e^{4\varphi}(\partial\sigma - 2\chi\partial\psi)^2], \\ \hat{F} &= -e^{2\varphi} \star d\psi + d\chi \wedge (dz + 2\mathcal{A}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

και αν εκφράσουμε τη lagrangian στη μορφή  $\mathcal{L} = R - 2G_{AB}(\Psi)\partial_\mu\Psi^A\partial^\mu\Psi^B$ , όπου  $(\Psi^0, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3) \equiv (\varphi, \chi, \psi, \sigma)$ , η μετρική του μη γραμμικού μοντέλου  $\sigma$  είναι:

$$d\Sigma^2 \equiv G_{AB} d\Psi^A d\Psi^B = d\varphi^2 + e^{2\varphi} d\chi^2 + e^{2\varphi} d\psi^2 + e^{4\varphi} (d\sigma - 2\chi d\psi)^2. \quad (4.3)$$

Από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στη εξ. (4.1) προκύπτει η μορφή Faraday,  $\hat{\mathbf{F}} \equiv d\hat{\mathbf{A}}$ . Στα επόμενα συμβολίζουμε με  $K^a$  το άνυσμα  $(\partial_z)^a$  και την αντίστοιχη μορφή με  $\mathbf{K} \equiv e^{-2\varphi}(dz + 2\mathcal{A})$ .

**Proposition 4.1.1.** *Ισχύει:*

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{K^a K_a} [-\mathbf{K} \wedge d\chi + \hat{\star}(\mathbf{K} \wedge d\psi)]. \quad (4.4)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι θέμα υπολογισμών, όμως απαιτείται προσοχή κατά τη μετατροπή από τη δυική Hodge ανώτερης διάστασης σε αυτή μικρότερης, καθώς οι υψωμένοι δείκτες ενδέχεται να αντιστοιχούν σε διαφορετικές μετρικές, επομένως συνιστάται η γραφή της έκφρασης αναλυτικά με τις εκάστοτε μετρικές. Έχουμε,

$$\iota_K \hat{\star} d\psi = (d\psi)^a \hat{\epsilon}_{abcd} K^b = (d\psi)_e \hat{g}^{ea} e^{2\varphi} \epsilon_{acd} = (d\psi)_e g^{ea} \epsilon_{acd} = \star d\psi,$$

καθώς

$$\hat{\epsilon}_{abcd} K^b = \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 \wedge \iota_K \hat{e}^z = e^{2\varphi} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 = e^{2\varphi} \epsilon_{acd},$$

και  $\hat{g}^{ab}|_N = e^{2\varphi} g^{ab}$ . Έτσι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^a K_a} [-\mathbf{K} \wedge d\chi + \hat{\star}(\mathbf{K} \wedge d\psi)] &= e^{2\varphi} [e^{-2\varphi} d\chi \wedge (dz + 2\mathcal{A}) - \iota_K \hat{\star} d\psi] \\ &= d\chi \wedge (dz + 2\mathcal{A}) - e^{2\varphi} \star d\psi = \hat{\mathbf{F}}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξ. (B.9). □

Η δυική Hodge της εξ. (4.4) είναι  $\star\hat{\mathbf{F}} = -[\mathbf{K} \wedge d\psi + \hat{\star}(\mathbf{K} \wedge d\chi)]/K^a K_a$ , επομένως απεικονίζει το  $d\chi$  στο  $d\psi$  και το  $d\psi$  στο  $-d\chi$ . Σύγκριση της εξ. (4.4) με την εξ. (B.12) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι  $\mathbf{E} = -\iota_K \hat{\mathbf{F}} = -d\chi$ ,  $\mathbf{B} = \iota_K \hat{\star}\hat{\mathbf{F}} = d\psi$ , επομένως χρησιμοποιώντας την εξ. (4.6) συνάγουμε ότι:

$$d\Phi = \iota_K (\hat{\mathbf{F}} + i\hat{\star}\hat{\mathbf{F}}). \quad (4.5)$$

## 4.2 Δυναμικά Ernst

Τα επόμενα βασίζονται στα Chruściel, Costa, and M. Heusler 2012; Hehl, Kiefert, and Metzler 1998. Αποδεικνύεται παρακάτω ότι το μη γραμμικό μοντέλο  $\sigma$  της lagrangian (4.1) έχει ως χώρο-στόχο μια πολλαπλότητα Kähler με συντεταγμένες  $(\mathcal{E}, \Phi)$ . Ορίζουμε τις μεταβλητές,

$$\mathcal{E} \equiv N - \Phi\bar{\Phi} + 2i(\chi\psi - \sigma), \quad \Phi \equiv \chi + i\psi, \quad N \equiv (\partial_z)^a (\partial_z)_a = g_{zz}, \quad (4.6)$$

όπου  $\bar{\Phi}$  ο μιγαδικός συζυγής του  $\Phi$ . Τότε, η lagrangian (4.2) παίρνει τη μορφή αυτής στο Mazur 1983,

$$\mathcal{L} = R - \frac{2}{N} |\partial\Phi|^2 - \frac{1}{2N^2} |\partial\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial\Phi|^2, \quad (4.7)$$

όπου  $|\partial\Phi|^2 \equiv \partial_\mu\Phi\partial^\mu\bar{\Phi}$ . Για  $\chi = \psi = 0$  παίρνουμε τη lagrangian (3.3), ως αναμενόταν, καθώς τα  $\chi, \psi$  προκύπτουν από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αυτή η lagrangian είναι μοντέλου  $\sigma$  με χώρο-στόχο  $SU(2,1)/S(U(2) \otimes U(1)) \cong SU(2,1)/U(2)$ , με τον ισομορφισμό  $S(U(2) \otimes U(1)) \cong U(2)$  να προκύπτει από την πρόταση D.0.1. Παρακάτω θα εκφράσουμε την εν λόγω lagrangian έτσι ώστε αυτή η συμμετρία να είναι έκδηλη.

### 4.2.1 Πολλαπλότητα Kähler

Μπορούμε να ορίσουμε τα δυναμικά Ernst, (4.6), ως συντεταγμένες της πολλαπλότητας στόχου,  $(z^1, z^2) \equiv (\mathcal{E}, \Phi)$ , η οποία πλέον είναι μιγαδική. Έτσι, έχουμε το μιγαδικό μη γραμμικό μοντέλο  $G_{ab} \frac{\partial z^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{z}^b}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}$  με συνιστώσες μετρικής,

$$G_{a\bar{b}} = \frac{1}{2N^2} \begin{pmatrix} 1 & 2\Phi \\ 2\bar{\Phi} & -4\operatorname{Re} \mathcal{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z^1 + |z^2|^2)^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 2z^2 \\ 2\bar{z}^2 & -4\operatorname{Re} z^1 \end{pmatrix}.$$

Η μορφή Kähler είναι,

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{i}{2} (\operatorname{Re} z^1 + |z^2|^2)^{-2} \left[ dz^1 \wedge d\bar{z}^1 + 4i \operatorname{Im}(z^2 dz^1 \wedge d\bar{z}^2) - 4\operatorname{Re} z^1 dz^2 \wedge d\bar{z}^2 \right] \\ &= 2d[e^{2\phi}(d\sigma - 2\chi d\psi)], \end{aligned} \quad (4.8)$$

η οποία είναι προφανώς κλειστή, επομένως η πολλαπλότητα-στόχος είναι Kähler.

### 4.3 Κρυμμένη συμμετρία SU(2, 1)

Ο ορισμός της ομάδας είναι  $SU(2, 1) \equiv \{A \in M_3(\mathbb{C}) | A\eta A^\dagger = \eta, \det A = 1\}$ , όπου  $\eta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  η μετρική<sup>1</sup> με υπογραφή  $(-1, 1, 1)$ . Η άλγεβρά της είναι ημιαπλή, μη συμπαγής και πραγματική<sup>2</sup>, για την οποία ισχύει στη θεμελιώδη αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2, 1) &= \operatorname{Span} \left\{ H_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, iH_2 \equiv \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, Y_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ & Y_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \left. \right\} = \\ & \operatorname{Span} \left\{ H_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, iH_2 \equiv \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, X_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ & X_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, X_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \left. \right\}, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη βάση αποτελείται από τις ιδιοκαταστάσεις της Cartan involution  $\theta(X) \equiv -X^\dagger$ . Πράγματι, έχουμε  $\theta(H_1) = -H_1$ ,  $\theta(iH_2) = iH_2$ ,  $\theta(X_1) = X_1$ ,  $\theta(X_2) = -X_2$ ,  $\theta(X_3) = -X_3$ ,  $\theta(X_4) = X_4$ ,  $\theta(X_5) = X_5$ ,  $\theta(X_6) = -X_6$ . Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει η μέγιστη συμπαγής υποάλγεβρα  $\mathfrak{k} = \operatorname{Span}(iH_2, X_1, X_4, X_5)$ , από την οποία και τον ορθογώνιο σε αυτή υπόχωρο, μέσω της ανάλυσης Cartan  $\mathfrak{su}(2, 1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  και του *Weyl unitarian trick*, παίρνουμε την άλγεβρα  $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \cong \mathfrak{su}(3)$ , γνωστή και ως *συμπαγή πραγματική μορφή (compact real form)* της  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ . αυτός ο τρόπος επιτρέπει να φτάσουμε απ' ευθείας από τους πίνακες Gell-mann σε βάση της  $\mathfrak{su}(2, 1)$  και το αντίστροφο.

<sup>1</sup>Υπάρχουν διάφορες επιλογές, οι οποίες συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας (συζυγία). Όλες είναι ισοδύναμες, δεδομένου ότι μόνο η υπογραφή αναφέρεται στον ορισμό, όμως ορισμένες επιλογές διευκολύνουν τις πράξεις αναλόγως με το πρόβλημα στο οποίο δρα η ομάδα.

<sup>2</sup>Αυτό είναι εύκολο να δει κανείς, καθώς  $\mathfrak{su}(2, 1) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) | X\eta + \eta X^\dagger = 0\}$ , επομένως αν  $X \in \mathfrak{su}(2, 1)$ , για να ισχύει  $aX \in \mathfrak{su}(2, 1)$  πρέπει  $aX\eta + \bar{a}\eta X^\dagger = 0$ , το οποίο συνεπάγεται  $a = \bar{a}$ .

Για να βρούμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής πρέπει να καταφύγουμε στην *πραγματική μορφή (real form)*<sup>3</sup> της μιγαδοποίησης της  $\mathfrak{su}(2, 1)$ , γνωστή και ως *διακεχωρισμένη πραγματική μορφή (split real form)* εν προκειμένω. Έχουμε  $\mathfrak{su}(2, 1)^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ , επομένως η πραγματική της μορφή έχει τη βάση,

$$\left\{ \begin{aligned} H_1 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_1^- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_2^+ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2^- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3^- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

με σχέσεις μετάθεσης  $[H_1, H_2] = 0$ ,  $[H_1, E_1^{\pm}] = \pm 2E_1^{\pm}$ ,  $[H_1, E_2^{\pm}] = \pm E_2^{\pm}$ ,  $[H_1, E_3^{\pm}] = \pm E_3^{\pm}$ , επομένως οι  $H_1, H_2$  ανήκουν στην υποάλγεβρα Cartan και οι τελεστές με  $\pm$  είναι αντιστοίχως δημιουργίας/καταστροφής. Το μη συμπαγές μέρος της υποάλγεβρας Cartan είναι  $\mathfrak{a}_0 = \text{Span}(H_1)$ , η ανάλυση στο σύστημα ριζών δείχνει ότι η μηδενοδύναμη άλγεβρα που παράγεται από τις θετικές ρίζες είναι η  $(\mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^2) \cap \mathfrak{su}(2, 1) = \text{Span}(E_1^+, E_2^+, E_3^+)$ , όπου  $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ . Επομένως, η ανάλυση Iwasawa είναι:

$$\mathfrak{su}(2, 1) = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{u}(2) \oplus \mathbb{R}H_1 \oplus (\mathbb{R}E_1^+ \oplus \mathbb{R}E_2^+ \oplus \mathbb{R}E_3^+). \quad (4.9)$$

Με βάση την (4.9) μπορούμε να γράψουμε ένα coset representative  $\mathcal{V} \in \text{SU}(2, 1)$  του  $\text{SU}(2, 1)/\text{U}(2)$ ,

$$\mathcal{V} \equiv e^{\varphi H_1} e^{-2\sigma E_1^+} e^{\sqrt{2}\chi E_2^+} e^{-\sqrt{2}\psi E_3^+} = \begin{pmatrix} e^{\varphi} & \sqrt{2}e^{\varphi}(\chi - i\psi) & e^{\varphi}(\chi^2 + 2i\psi\chi + \psi^2 - 2i\sigma) \\ 0 & 1 & \sqrt{2}(\chi + i\psi) \\ 0 & 0 & e^{-\varphi} \end{pmatrix},$$

και την αντίστοιχη «εσωτερική μετρική»  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{V}^\dagger \mathcal{V}$ ,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{2\varphi} & \sqrt{2}e^{2\varphi}(\chi - i\psi) & e^{2\varphi}(\chi^2 + 2i\psi\chi + \psi^2 - 2i\sigma) \\ \sqrt{2}e^{2\varphi}(\chi + i\psi) & 2e^{2\varphi}(\chi^2 + \psi^2) + 1 & \sqrt{2}(\chi + i\psi + e^{2\varphi}(\chi + i\psi)(\chi^2 + 2i\psi\chi + \psi^2 - 2i\sigma)) \\ e^{2\varphi}(\chi^2 - 2i\psi\chi + \psi^2 + 2i\sigma) & \sqrt{2}(\chi - i\psi + e^{2\varphi}(\chi - i\psi)(\chi^2 - 2i\psi\chi + \psi^2 + 2i\sigma)) & 2(\chi^2 + \psi^2) + e^{-2\varphi} + e^{2\varphi}(\chi^2 + 2i\psi\chi + \psi^2 - 2i\sigma)(\chi^2 - 2i\psi\chi + \psi^2 + 2i\sigma) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Η lagrangian (4.2) γράφεται στη μορφή  $\mathcal{L} = R + \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial_\mu \mathcal{M} \partial^\mu \mathcal{M}^{-1})$ , η οποία είναι αναλλοίωτη στη δράση  $\text{SU}(2, 1)_{\text{global}} \times \text{U}(2)_{\text{local}}$ . Από αυτή την εξίσωση των δύο μορφών της lagrangian προκύπτουν οι συντελεστές των πινάκων της άλγεβρας στα εκθετικά του  $\mathcal{V}$ .

#### 4.4 Δράση της $\text{SU}(2, 1)$

Τα στοιχεία της  $\text{SU}(2, 1)$  και η δράση τους στη λύση της εξίσωσης Einstein–Maxwell έχουν παρουσιαστεί στα Neugebauer and Kramer 1969; Harrison 1965; Kinnersley 1973, Stephani et al. 2009, p. 523, βλέπε επίσης Gal'tson 1996. Η ομάδα αποτελείται από 8 στοιχεία κατά τα προηγούμενα, η δράση των οποίων στα δυναμικά Ernst φαίνεται στον πίνακα 4.2. Ο υπολογισμός της δράσης κάθε στοιχείου της ομάδας πάνω στο coset representative είναι εξαιρετικώς χρονοβόρα διαδικασία ακόμη και με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή<sup>4</sup>, εκτός από τις απλές περιπτώσεις που αντιστοιχούν

<sup>3</sup>Εδώ έχει ενδιαφέρον να αναφερθεί μια συνήθης παρανόηση στην κβαντική μηχανική. Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής της  $\mathfrak{su}(2)$  δεν ανήκουν στην  $\mathfrak{su}(2)$  αλλά στην  $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ , αφού η πρώτη είναι πραγματική άλγεβρα και οι τελεστές δημιουργίας/καταστροφής είναι γραμμικοί συνδυασμοί στο  $\mathbb{C}$ .

<sup>4</sup>Στην πραγματικότητα, είναι απλό να γίνει ο υπολογισμός αντικαθιστώντας στη γνωστή δράση στα δυναμικά Ernst τα δυναμικά του μοντέλου  $\sigma$ , όμως προκύπτουν εξαιρετικώς δύσχρηστες εκφράσεις και δεν μπορεί να θεωρηθεί αυτό υπολογισμός εξ αρχής.

στους γεννήτορες που δημιουργούν την επιλύσιμη άλγεβρα στην ανάλυση Iwasawa. Στα επόμενα γίνονται οι αναφορές σε σχέση με τους μετασχηματισμούς ως προς τα δυναμικά Ernst, οι οποίοι είναι γνωστοί από τη βιβλιογραφία, και γίνεται κατά περίπτωση αναφορά στη δράση πάνω στο coset representative.

Τα στοιχεία της  $SU(2, 1)$  είναι:

$$h_1 \equiv \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-a_1} \end{pmatrix}, h_2 \equiv \begin{pmatrix} e^{i a_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i a_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i a_2} \end{pmatrix}, y_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & i a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i a_4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & a_5 & \frac{a_5^2}{2} \\ 0 & 1 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y_4 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_6 & 1 & 0 \\ \frac{a_6^2}{2} & a_6 & 1 \end{pmatrix}, y_5 \equiv \begin{pmatrix} 1 & i a_7 & \frac{a_7^2}{2} \\ 0 & 1 & -i a_7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y_6 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i a_8 & 1 & 0 \\ \frac{a_8^2}{2} & -i a_8 & 1 \end{pmatrix},$$

(4.11)

όπου  $a_j \in \mathbb{R}$  για  $j = 1, \dots, 8$ . Οι υπολογισμοί της δράσης στο coset representative οδηγούν στον πίνακα 4.1. Η δράση αυτή υπολογίζεται λύνοντας την εξίσωση  $g^\dagger M g = M'$ , όπου  $M'$  η «εσω-

$SU(2, 1)$	$\varphi \mapsto$	$\chi \mapsto$	$\psi \mapsto$	$\sigma \mapsto$
$h_1$	$a_1 + \varphi$	$\chi e^{-a_1}$	$e^{-a_1} \psi$	$e^{-2a_1} \sigma$
$y_1$	$\varphi$	$\chi$	$\psi$	$\sigma - \frac{a_3}{2}$
$y_3$	$\varphi$	$\chi + \frac{a_5}{\sqrt{2}}$	$\psi$	$\sigma + \sqrt{2} a_5 \psi$
$y_5$	$\varphi$	$\chi$	$\psi - \frac{a_7}{\sqrt{2}}$	$\sigma$

Πίνακας 4.1: Μετασχηματισμοί των πεδίων του μοντέλου  $\sigma$  υπό τη δράση του  $SU(2, 1)$ . Η δράση των απόντων πινάκων είναι εξαιρετικώς χρονοβόρο να υπολογιστεί στα πλαίσια της παρούσης.

τερική μετρική» με τα μετασχηματισμένα πεδία· αυτή η εξίσωση είναι μη γραμμική στα δυναμικά. Εδώ φαίνεται το πλεονέκτημα του φορμαλισμού της «εσωτερικής μετρικής», καθώς ο πίνακας  $g$  είναι σταθερός, ενώ αν χρησιμοποιούσαμε το coset representative  $\mathcal{V}$ , τότε θα απαιτείτο επιπλέον πολλαπλασιασμός με μη σταθερό πίνακα. Δεδομένου ότι ήδη η διαδικασία με την «εσωτερική μετρική» απαιτεί χρονοβόρους υπολογισμούς, η άλλη θα ήταν σχεδόν αδύνατο να έλθει εις πέρας<sup>5</sup>.

$\mathcal{E}'$	$\Phi'$	Περιγραφή
$ \alpha ^2 \mathcal{E}$	$a \Phi$	Αλλαγή κλίμακος (scaling).
$\mathcal{E} + i b$	$\Phi$	Για $ \alpha  = 1$ , δυκότητα $U(1)$ του η/μ πεδίου.
$\mathcal{E} - 2\bar{\beta}\Phi -  \beta ^2$	$\Phi + \beta$	Μετατόπιση του $\mathcal{E}$ .
$\mathcal{E}$	$\Phi + \gamma \mathcal{E}$	Μετατόπιση του $\Phi$ .
$\frac{1 - 2\bar{\gamma}\Phi -  \gamma ^2 \mathcal{E}}{\mathcal{E}}$	$\frac{1 - 2\bar{\gamma}\Phi -  \gamma ^2 \mathcal{E}}{\Phi}$	Μετασχηματισμός Harrison.
$\frac{1 + i c \mathcal{E}}{1 + i c \mathcal{E}}$	$\frac{\Phi}{1 + i c \mathcal{E}}$	Μετασχηματισμός Ehlers για $\Phi = 0$ .

Πίνακας 4.2: Δράση των στοιχείων της  $SU(2, 1)$  στα δυναμικά Ernst.  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ . Αντιγραφή από Stephani et al. 2009, §34.1.1.

Τα πιο ενδιαφέροντα στοιχεία της  $SU(2, 1)$  είναι οι μετασχηματισμοί Harrison και Ehlers. Ο μετασχηματισμός Ehlers για  $\Phi = 0$  μετασχηματίζει τη λύση από στατική σε στάσιμη με ανωμαλία τύπου

<sup>5</sup>Πράγματι, είναι αρκετά δύσκολο να έλθει εις πέρας για πολύ απλούστερες περιπτώσεις, βλέπε C. Pope 2008.

NUT. Ο μετασχηματισμός Harrison είναι μετασχηματισμός μαγνήτισης ή/και ηλεκτρίσης του χωροχρόνου. Ο συγκεκριμένος για  $\gamma \in \mathbb{R}$  είναι αυτός μας ενδιαφέρει για να προκύψει η μαγνητισμένη Kerr–Newman και η παράμετρος  $\gamma$  θα αποδειχθεί αργότερα ότι σχετίζεται με το ασυμπτωτικώς ομογενές μαγνητικό πεδίο κατά τη  $\gamma = -B_0/2$ . Καθώς η συμμετρία βαθμίδος  $U(1)$  μετασχηματίζει το μαγνητικό σε ηλεκτρικό πεδίο και η δράση της είναι μέρος της ομάδος  $SU(2, 1)$ , είναι αναμενόμενο η ηλεκτρίση να ανήκει στην υποομάδα βαθμίδος της  $SU(2, 1)$ .

#### 4.4.1 Συμμετρία βαθμίδος $U(1)$

Ο μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακος, ο οποίος αντιστοιχεί στον πίνακα  $h_1$  στην (4.11), αφήνει τη lagrangian (4.7) αναλλοίωτη, όμως δρα στη μεταβλητή  $N$  κατά τη  $N \mapsto |a_1|^2 N$ . Ο πίνακας  $h_2$  αποδεικνύεται ότι έχει τη δράση  $U(1)$  στο δυναμικό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή για  $e^{-ia} \in U(1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  η δράση  $U(1)$  στο δυναμικό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου  $d\Phi \mapsto e^{-ia} d\Phi$  οδηγεί στην ακόλουθη απεικόνιση,

$$\begin{pmatrix} d\chi \\ d\psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\chi \\ d\psi \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

όπου  $a_2 = -a/3$ . Για  $a = -\pi/2$  έχουμε  $d\psi \mapsto d\chi$ ,  $d\chi \mapsto -d\psi$ , δηλαδή μετατρέπεται το ηλεκτρικό σε μαγνητικό πεδίο και αντιστρόφως. Η ίδια δράση  $U(1)$  σε συνδυασμό με την εξ. (4.5) δίνει  $\hat{\mathbf{F}} \mapsto \cos(a)\hat{\mathbf{F}} + \sin(a)\hat{\star}\hat{\mathbf{F}}$ , εκδήλωση της συμμετρίας βαθμίδος  $U(1)$  των εξισώσεων Maxwell απουσία πηγών, γνωστής και ως *δυσισμός ηλεκτρικού/μαγνητικού πεδίου (electric/magnetic duality)*. Ο μετασχηματισμός του πεδίου  $\sigma$  κάτω από τη  $U(1)$  είναι απλή υπόθεση αν παρατηρήσει κανείς ότι η  $U(1)$  δεν επηρεάζει τη μετρική αλλά μόνο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, επομένως στη σχέση  $e^{-4\varphi} \star\mathcal{F} = d\sigma - 2\chi d\psi$  το αριστερό μέρος είναι αναλλοίωτο, εξ ου και το δεξί. Αντικαθιστώντας τα μετασχηματισμένα πεδία, εξ. (4.12), σε αυτή τη μορφή, συμπεραίνουμε ότι:

$$\sigma \mapsto \sigma + \frac{1}{2} \sin(2a)(\psi^2 - \chi^2) - 2 \sin^2(a)\psi\chi. \quad (4.13)$$

#### 4.4.2 Μετασχηματισμός μαγνήτισης κατά Harrison

Καθώς ο υπολογισμός της δράσης  $g \in SU(2, 1)$  στα πεδία του μοντέλου  $\sigma$  με τη χρήση της  $\mathcal{M}' = g^\dagger \mathcal{M} g$  είναι διαδικασία ιδιαίτερος απαιτητική σε πόρους σε ορισμένες περιπτώσεις, συμπεριλαμβανομένου του μετασχηματισμού μαγνήτισης, καθίσταται αναγκαίο να βρεθεί άλλος τρόπος υπολογισμού αυτής. Ένας τρόπος είναι η αναζήτηση της δράσης της  $SU(2, 1)$  πάνω σε coset representative γνωστής λύσεως, όπως αυτής του Minkowski, στην οποία περίπτωση ο ζητούμενος μετασχηματισμός μαγνήτισης παράγει τη *λύση Melvin (Melvin universe)*, βλέπε Stephani et al. 2009, p. 345, Griffiths and Podolský 2009, §7.3, Melvin 1964; Ernst 1976.

#### Λύση Melvin με αφετηρία τη Minkowski

Γράφουμε τη μετρική Minkowski ώστε να έχει έκδηλη αξονική συμμετρία, σε κυλινδρικές συντεταγμένες στη μορφή,

$$ds^2 = \frac{1}{r^2}(-r^2 dt^2 + r^2 dr^2 + r^2 dz^2) + r^2 d\theta^2. \quad (4.14)$$

Συγκρίνοντας με τη μετρική (4.1) και τα δυναμικά Ernst (4.6), συμπεραίνουμε ότι  $N = r^2$ ,  $\sigma = \text{const}$ ,  $\mathcal{E} = r^2$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\Lambda \equiv 1 + B_0\Phi - \frac{B_0^2}{4}\mathcal{E} = 1 + \frac{B_0}{4}r^2$ . Ο μετασχηματισμός μαγνήτισης δίνει

$\mathcal{E} \mapsto \frac{r^2}{\Lambda}$ ,  $\Phi \mapsto \frac{B_0 r^2}{2\Lambda}$ ,  $N \mapsto \frac{r^2}{\Lambda^2}$ . Αντικαθιστώντας στη μετρική, προκύπτει:

$$ds^2 \mapsto \Lambda^2(-dt^2 + dr^2 + dz^2) + \frac{r^2}{\Lambda^2} d\theta^2, \quad (4.15)$$

και  $\psi \mapsto 0$ ,  $\chi \mapsto \frac{B_0 r^2}{2\Lambda}$ , το οποίο με μετασχηματισμό  $U(1)$ , (4.12), μπορεί να μετατραπεί σε ηλεκτρικό πεδίο.

Ορίζουμε την ορθοκανονική βάση  $\hat{e}^0 \equiv \Lambda dt$ ,  $\hat{e}^1 \equiv \Lambda dr$ ,  $\hat{e}^2 \equiv \Lambda dz$ ,  $\hat{e}^3 \equiv \frac{r}{\Lambda} d\theta$ . Έχουμε  $d\chi \mapsto \frac{B_0 r}{\Lambda^3} \hat{e}^1$ , η μορφή που αντιστοιχεί στο άνυσμα Killing αξονικής συμμετρίας είναι  $\mathbf{K} = \frac{r^2}{\Lambda^2} d\theta$ . Η μορφή Faraday γίνεται  $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}' = \frac{B_0 r}{\Lambda^2} dr \wedge d\theta$ , σύμφωνα με την εξ. (4.4), η οποία αντιστοιχεί σε μαγνητικό πεδίο. Αν χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμό  $e^{-i\pi/2} \in U(1)$ , τότε αυτή γίνεται  $\mathbf{F}' \mapsto -\hat{\star}\mathbf{F} = B_0 dt \wedge dz$ , καθώς  $\hat{\star}(dr \wedge d\theta) = \frac{1}{r}\hat{\star}(\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^3) = \frac{1}{r}(\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^3)^{ab}\hat{e}_{abcd} = \frac{1}{r}\hat{e}_{13cd} = -\frac{1}{r}\hat{e}^0 \wedge \hat{e}^2 = -\frac{\Lambda^2}{r} dt \wedge dz$ .

Αυτή είναι η λύση Melvin, στατικός, χωρίς ανωμαλίες, συμμετρικός περί άξονα χωροχρόνος, με μαγνητικό πεδίο  $B_0 r/\Lambda^2$  στη διεύθυνση του άξονος συμμετρίας. Μπορεί να περιγραφεί ως δέσμη παράλληλων δυναμικών γραμμών ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, η οποία διατηρείται σταθερή υπό την επίδραση του ιδίου της του βαρυτικού πεδίου. Για  $B_0 = 0$  ανάγεται στη μετρική Minkowski. Για  $B_0 \neq 0$  δεν είναι ασυμπτωτικός επίπεδος χωροχρόνος εξ αιτίας του μαγνητικού πεδίου<sup>6</sup>.

Αντικαθιστώντας  $\varphi = -\ln r$ ,  $\chi = \psi = \sigma = 0$  και  $\varphi \mapsto \ln(\frac{a_6^2 r}{2} + \frac{1}{r})$ ,  $\chi \mapsto \frac{\sqrt{2}a_6}{a_6^2 + 2e^{2\varphi}} = \frac{\sqrt{2}a_6}{a_6^2 + \frac{2}{r^2}}$ ,  $\psi \mapsto 0$ ,  $\sigma \mapsto 0$  στην εξίσωση  $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}' = g^\dagger \mathcal{M} g$  για  $g$  ένα εκ των πινάκων (4.11) κάθε φορά, συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός μαγνήτισης με πεδίο  $B_0$  είναι ο  $y_4$  με  $a_6 = B_0/\sqrt{2}$ .

<sup>6</sup>Το μαγνητικό πεδίο εξαρτάται από το  $r$ , επομένως δεν είναι ομογενές. Χαρακτηρίζεται ομογενές από ορισμένους συγγραφείς ίσως επειδή η ασθενώς μαγνητισμένη Kerr έχει ασυμπτωτικός ομογενές μαγνητικό πεδίο, βλέπε κεφάλαιο 2.

## Κεφάλαιο 5

### Η μαγνητισμένη Kerr–Newman

#### 5.1 Εισαγωγή

Με την εφαρμογή του μετασχηματισμού που παράγει ο πίνακας  $y_4$  από τις εξ. (4.11) στην Kerr–Newman είμαστε σε θέση να εξαγάγουμε την πλήρη έκφραση, η οποία είναι γνωστή ως *μαγνητισμένη Kerr–Newman* (*magnetized Kerr–Newman*) ή *Kerr–Newman–Melvin*, βλέπε Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013; Garry W. Gibbons, Pang, and C. N. Pope 2013.

Η μετρική και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο Kerr–Newman στη μορφή (4.1) είναι:

$$d\tilde{s}^2 = -f dt^2 + R^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{R^2} (d\phi - \tilde{\omega} dt)^2, \quad (5.1)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\Phi}_0 dt + \tilde{\Phi}_3 (d\phi - \tilde{\omega} dt),$$

όπου  $R^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr + P^2 + Q^2 = r^2 + a^2 - \tilde{\omega}\Sigma/a$ ,  $\tilde{\omega} \equiv a(2Mr - Q^2 - P^2)/\Sigma$ ,  $f \equiv R^2 \Delta/\Sigma$ ,  $\Sigma \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta = (r^2 + a^2)R^2 + a\Sigma\tilde{\omega} \sin^2 \theta$ ,  $\Sigma/R^2 = \frac{r^2+a^2}{1-a\tilde{\omega}\sin^2\theta}$ ,  $f - \frac{\Sigma\tilde{\omega}^2}{R^2} \sin^2 \theta = 1 - \frac{\tilde{\omega}\Sigma}{aR^2}$ ,  $\tilde{\Phi}_0 \equiv -\frac{Qr(r^2+a^2)}{\Sigma} + \frac{aP\Delta \cos \theta}{\Sigma}$ ,  $\tilde{\Phi}_3 \equiv \frac{aQr \sin^2 \theta}{R^2} - \frac{P(r^2+a^2) \cos \theta}{R^2}$ , όπου  $Q$  το ηλεκτρικό και  $P$  το (υποθετικό) μαγνητικό φορτίο, βλέπε Frolov and Novikov 1998, p. 235. Στα επόμενα βεβαίως ορίζουμε  $P \equiv 0$ , καθώς δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ μαγνητικό μονόπολο, αλλιώς δυσχεραίνουμε τους ήδη μακροσκελείς υπολογισμούς χωρίς ιδιαίτερο όφελος. Σε σχέση με την εξ. (4.1) οι προηγούμενες εκφράσεις γράφονται στη μορφή,

$$dz = d\phi, \quad \mathbf{A} = -\frac{\tilde{\omega}}{2} dt, \quad e^{-2\varphi} = \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{R^2}, \quad \chi = \tilde{\Phi}_3, \quad \mathbf{A} = \tilde{\Phi}_0 dt,$$

$$ds^2 = -\Delta \sin^2 \theta dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} \sin^2 \theta dr^2 + \Sigma \sin^2 \theta d\theta^2.$$

Η δυνατότητα έκφρασης της μετρικής στη μορφή Kaluza–Klein προϋποθέτει ότι ο συντελεστής που αντιστοιχεί στο  $e^{-2\varphi}$  είναι θετικός, δηλαδή ότι  $\Sigma > 0$ . Για  $r > r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ , δηλαδή στην περιοχή έξω από τον ορίζοντα γεγονότων έχουμε  $2Mr - Q^2 > 2M(M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}) - Q^2 \geq 2M^2 - Q^2 \geq M^2 + a^2 > 0$ , καθώς  $M^2 \geq a^2 + Q^2$  για να μην είναι γυμνή ανωμαλία. Αυτό συνεπάγεται ότι  $\tilde{\omega}\Sigma > 0$ , το οποίο από τον ορισμό του  $\Sigma$  συνεπάγεται ότι  $\Sigma > 0$ , το οποίο συνεπάγεται ότι  $\tilde{\omega} \geq 0$ .

#### 5.2 Υπολογισμοί

Ο υπολογισμός της μαγνητισμένης λύσεως αποδεικνύεται ιδιαίτερος χρονοβόρα υπόθεση. Ακόμη και με όλες τις δυνατές απλοποιήσεις και διευκολύνσεις στο θέμα των πράξεων, η εξίσωση των μετασχηματισμένων πεδίων δεν κατέστη δυνατόν να λυθεί μέσω της εντολής Solve, την οποία παρέχει

<sup>1</sup>Η  $\tilde{\omega}$  πάνω στον ορίζοντα γεγονότων είναι η γωνιακή ταχύτητά του.



το Mathematica, Wolfram Research, Inc. 2014. Η δυσκολία αυξάνεται εξ αιτίας ορισμένων προβλημάτων του Mathematica<sup>2</sup> στο θέμα απλοποίησης. Η μια περίπτωση είναι η απλοποίηση μεγάλης έκφρασης υπό μιγαδική συζυγία, η οποία απεδείχθη εξαιρετικώς χρονοβόρα με τις εντολές Simplify, FullSimplify, με ορισμένες εκφράσεις να απαιτούν ώρες ολόκληρες γι' αυτή. Ύστερα όμως από χρήση της συνάρτησης fastConjugate, βλέπε παράρτημα Η, υπολογισμοί που απαιτούσαν ολόκληρες ώρες γίνονται σε λιγότερο από 10 s! Η άλλη περίπτωση σχετίζεται με τις απλοποιήσεις των εκφράσεων  $\sqrt{\Sigma^2}$ , τις οποίες το Mathematica δεν απλοποιεί αν και υπάρχει κατάλληλο Assumption. Αυτή η απλοποίηση επετεύχθη με τη χρήση της SimplifyΣ. Καθίσταται προφανές ότι η πείρα σε υπολογισμούς με τόσο μεγάλες εκφράσεις είναι κρίσιμη παράμετρος για την ολοκλήρωση των υπολογισμών εντός λογικών χρονικών πλαισίων.

Τα δυναμικά  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$  υπολογίζονται από τους ορισμούς τους στην § 4.1, όπερ σημαίνει ότι εκφράζονται στη μορφή εξωτερικής παραγώγου, π.χ.  $d\psi = (\partial_0\psi, \partial_1\psi, \partial_2\psi)$  στις συντεταγμένες  $(t, r, \theta)$ . Το ανάπτυγμα σε σύστημα συντεταγμένων παρέχει έναν τρόπο επαλήθευσης του αποτελέσματος, καθώς πρέπει να ισχύει  $\partial_1\partial_2\psi = \partial_2\partial_1\psi$ , ένας άλλος τρόπος έκφρασης της  $dd\psi = 0$  στην πλήρη μορφή. Για να εξαγάγουμε το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τα προηγούμενα, ως εξής. Έχουμε  $\psi = \int \partial_1\psi dr + c(\theta)$ . Επίσης,  $\partial_2\psi = \int \partial_2\partial_1\psi dr + c'(\theta)$ , το οποίο συνεπάγεται  $c(\theta) = \int (\partial_2\psi - \int \partial_2\partial_1\psi dr) d\theta + \text{const}$ , επομένως  $\psi = \int \partial_1\psi dr + \int (\partial_2\psi - \int \partial_2\partial_1\psi dr) d\theta$ , το αποτέλεσμα της συνάρτησης integrateForm. Η σταθερά αντιστοιχεί στη δράση τελεστή μετατόπισης εκάστου πεδίου, βλέπε πίνακα 4.1, και από την εξ. (B.11) προκύπτει ότι οι μετατοπίσεις των  $\chi$ ,  $\psi$  δεν επηρεάζουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ενώ από την  $e^{-4\varphi} \star \mathcal{F} = d\sigma - 2\chi d\psi$  προκύπτει ότι αυτή του  $\sigma$  δεν επηρεάζει τη μαγνητισμένη μετρική. Ωστόσο, στο Garry W. Gibbons, Pang, and C. N. Pope 2013, §V.A αποδεικνύεται ότι η μετατόπιση του  $\chi$  επηρεάζει τη στροφορμή του χωροχρόνου· υπάρχει τρόπος να οριστεί έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτη η στροφορμή στη μεταβολή βαθμίδος του  $\chi$ , όμως όχι και του  $\psi$  ταυτοχρόνως, επειδή η εξάρτηση της στροφορμής του χωροχρόνου από τη βαθμίδα είναι αποτέλεσμα της εμφάνισης του  $A$  στον ορισμό της. Σε γενικότερες μορφές απαιτείται η κατασκευή του δυναμικού, όπως αυτή παρουσιάζεται στην απόδειξη του λήμματος Poincaré, βλέπε Frankel 2012, §5.4. Αυτό υποτίθεται ότι παράγει η συνάρτηση FindPotential του xTerior, μέρους του xAct που σχετίζεται με την εξωτερική άλγεβρα, όμως στην πράξη είναι υπερβολικά αργή όποτε παράγει αποτέλεσμα, ενώ αποτυγχάνει ακόμη και να παράγει αποτέλεσμα στις μορφές που συναντούμε σε αυτό το πρόβλημα<sup>3</sup>.

Η επιλογή της επιλύσιμης άλγεβρας για το coset representative αποδεικνύεται καιρία εν προκειμένω, καθώς η δομή της «εσωτερικής μετρικής», εξ. (4.10), επιτρέπει την εύρεση του μετασχηματισμένου  $\varphi$  με μια ματιά, ύστερα με αντικατάσταση αυτού την εύρεση των  $\chi$ ,  $\psi$ , και αντικαθιστώντας τα προηγούμενα την εύρεση του  $\sigma$ . Το τελικό αποτέλεσμα απαιτεί πάνω από 10 h υπολογισμών στον υπολογιστή του γράφοντος και αρκετά GB RAM, και συμφωνεί στα περισσότερα σημεία με το Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013. Επιβεβαιώνεται έτσι η διόρθωση που έγινε μετά την ανάρτηση μιας πρώιμης έκδοσης στο Αρχίβ από τον Filip Hejda και τον Jiri Bicák, την οποία έμαθα ύστερα από επικοινωνία με τον πρώτο. Εδώ οφείλω να αναφέρω ότι καθοριστική υπήρξε η συμβολή του Filip Hejda, βλέπε Hejda 2013 και επικοινωνία μαζί του, στην ολοκλήρωση των υπολογισμών, δεδομένων των διαφορετικών συμβάσεων (υπάρχει άρθρο που αναφέρει μαγνητικό πεδίο ενώ εννοεί ηλεκτρικό και το ανάποδο!) και λαθών που περιέχει η βιβλιογραφία.

<sup>2</sup>Η έλλειψη πείρας του γράφοντος...

<sup>3</sup>Ο Alfonso García-Parrado Gómez-Lobo εξέδωσε πριν από λίγες μέρες βελτιωμένη FindPotential, ώστε να λυθούν τα προβλήματα που παρουσίασε κατά την εκπόνηση της παρούσης.

### 5.3 Ο χωροχρόνος Kerr–Newman–Melvin

Η μετρική της μαγνητισμένης Kerr–Newman είναι:

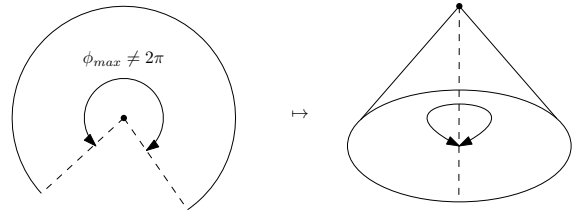
$$ds^2 = H \left[ -f dt^2 + R^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{HR^2} (d\phi - \omega dt)^2, \quad (5.2)$$

$$A = \Phi_0 dt + \Phi_3 (d\phi - \omega dt),$$

όπου οι άγνωστες συναρτήσεις ορίζονται στο παράρτημα G. Καθώς δεν είναι γνωστές πολλές ιδιότητες του μετασχηματισμού μαγνήτισης, απαιτείται να επιβεβαιώσουμε όλες τις ιδιότητες του προκύπτοντος χωροχρόνου εξ αρχής.

#### 5.3.1 Κωνική ανωμαλία

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός μαγνήτισης του coset representative είναι τοπικός, δηλαδή εξαρτάται από το χωροχρόνο, κάθε συμπέρασμα από την αρχική λύση τίθεται εν αμφιβόλω· μια περίπτωση είναι το εύρος τιμών των συντεταγμένων. Πράγματι, όπως παρατήρησε ο Hiscock 1981, ο μετασχηματισμός μαγνήτισης δημιουργεί μια *κωνική ανωμαλία* (*conical singularity*), βλέπε Ellis and Schmidt 1977; Geroch 1968; Clarke 1993, Stephani et al. 2009, §3.4, Reall 2008, §2.14, ένα είδος *ημιομαλής ανωμαλίας* (*quasi-regular singularity*). Αυτή προκύπτει αν για παράδειγμα αναπαραστήσουμε το χώρο Minkowski με δίσκο, βλέπε σχήμα 5.1, αφαιρέσουμε έναν κυκλικό τομέα γωνίας  $2\pi - \phi_{\max}$  και ταυτίσουμε τις ακτίνες οι οποίες ορίζουν τον τομέα αυτόν. Αυτή η διαδικασία παράγει κώνο ομαλό παντού εκτός από την κορυφή, με *έλλειμμα κώνου* (*cone deficit*)  $2\pi - \phi_{\max}$ , δηλαδή ο τανυστής Riemann μηδενίζεται εκτός από την κορυφή του κώνου, και αν πάρουμε το όριο της περιφέρειας ενός κύκλου γύρω από την κορυφή προς την ακτίνα για κύκλο πολύ μικρό με κέντρο την κορυφή, αυτό είναι  $\phi_{\max} \neq 2\pi$ . Καθώς κάθε πολλαπλότητα στη γενική θεωρία σχετικότητας εξ ορισμού είναι τοπικώς επίπεδη, είναι προφανές ότι έχουμε ανωμαλία στην κορυφή του κώνου, η οποία μοιάζει με την ανωμαλία στα σημεία διακλάδωσης μιγαδικών συναρτήσεων<sup>4</sup>. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να έχουμε *πλεόνασμα κώνου* (*cone surplus*).



Σχήμα 5.1: Έλλειμμα κώνου και κωνική ανωμαλία. Οι διακεκομμένες γραμμές αριστερά ταυτίζονται και προκύπτει ο κώνος στα δεξιά.

Εν προκειμένω, για να εξαλειφθεί η κωνική ανωμαλία<sup>5</sup> πρέπει (το αποτέλεσμα είναι το ίδιο είτε για  $\theta \rightarrow 0$  είτε για  $\theta \rightarrow \pi$ ),

$$2\pi \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\phi_{\max}} \sqrt{g_{33}(\theta)} d\phi}{\int_0^{\theta} \sqrt{g_{22}(\theta')} d\theta'} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\theta} \int_0^{\phi_{\max}} \sqrt{g_{33}(\theta)} d\phi}{\sqrt{g_{22}(\theta)}}$$

$$= \left[ 1 + \frac{3}{2} Q^2 B_0^2 + 2QM a B_0^3 + \left( \frac{Q^4}{16} + M^2 a^2 \right) B_0^4 \right]^{-1} \phi_{\max},$$

<sup>4</sup>Οι κωνικές ανωμαλίες ενδεχομένως να έχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία όταν λαμβάνουν τη μορφή υποθετικών *κοσμικών χορδών* (*cosmic strings*), βλέπε Geroch and Traschen 1987. Μπορούν να ερμηνευθούν ως κατανομές μάζας με μεγάλη πυκνότητα.

<sup>5</sup>Άλλη δυνατότητα είναι να κάνουμε αλλαγή κλίμακας στη συντεταγμένη  $\phi$ , ώστε τα όρια να είναι κατάλληλα.

από τον κανόνα de l'Hôpital, επομένως το μέγιστο της  $\phi$  είναι:

$$\phi_{\max} \equiv 2\pi \left[ 1 + \frac{3}{2}Q^2 B_0^2 + 2QM a B_0^3 + \left( \frac{Q^4}{16} + M^2 a^2 \right) B_0^4 \right], \quad (5.3)$$

δηλαδή έχουμε πλεόνασμα κώνου.

### 5.3.2 Φορτίο

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4), (4.2) και τις (G.4), το ηλεκτρικό φορτίο προκύπτει,

$$Q_{\text{MKN}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \hat{\star} \hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\phi_{\max}} \int_0^\pi \partial_2 \psi \, d\theta \, d\phi = \frac{\phi_{\max}}{4\pi} \psi \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = Q + 2MaB_0 - \frac{1}{4}Q^3 B_0^2, \quad (5.4)$$

το οποίο τείνει στο  $Q$  για  $B_0 \rightarrow 0$ , ως αναμενόταν. Για ασθενές φορτίο σε ασθενές μαγνητικό πεδίο, δηλαδή στις συνθήκες υπολογισμού του φορτίου Wald,  $Q \ll M \ll 1/B_0$ , εξ. (2.10), ή  $QB_0 \ll 1$ , ισχύει  $Q_{\text{MKN}} \approx Q + 2JB_0$ , επομένως το φορτίο της καταστάσεως ισορροπίας με αρχική μετρική την αφόρτιστη Kerr ( $Q = 0$ ) είναι το φορτίο Wald, εξ. (2.9), και επιβεβαιώνεται η ανάλυση στο κεφ. 2.

### 5.3.3 Εργοπεριοχές

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του  $g_{00} = -fH + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{HR^2} \omega^2$  είναι  $g_{00} \sim -\frac{1}{16} B_0^4 r^4 \sin^4 \theta$ . Αυτή μοιάζει με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μετρικής Melvin, εξ. (4.15), για  $\theta \approx \pi/2$ , όμως κοντά στον άξονα συμμετρίας εμφανίζεται ασυμπτωτικώς εργοπεριοχή, η οποία απομακρύνεται όσο μειώνεται το  $B_0$  στη γενική περίπτωση. Πράγματι, ύστερα από την αναπαράμετρηση  $Z \equiv r \cos \theta$ ,  $\rho \equiv r \sin \theta$ , το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της  $g_{00}$  ως προς  $Z$  είναι:

$$g_{00} = \frac{16^6 W (Q + aMB_0)^2 \rho^2}{W} Z^2 - \frac{B_0^6 (Q + MB_0 a) (64QM + 9Q^2 a B_0 + 76M^2 a B_0) \rho^2}{4W} Z + \mathcal{O}(Z^0),$$

$$W \equiv 16 + 8B_0^2 \rho^2 + B_0^4 (\rho^2 + Q^2)^2 + 24B_0^2 \left( Q + \frac{2}{3} aMB_0 \right)^2 + \frac{16}{3} a^2 M^2 B_0^4,$$

το οποίο είναι θετικό κοντά στον άξονα συμμετρίας εκτός αν  $Q = -aMB_0$ . Αυτή η παρατήρηση διαψεύδει την ευρέως διαδεδομένη αντίληψη ότι η μαγνητισμένη Kerr–Newman ασυμπτωτικώς τείνει στη Melvin. Στο Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013 αποδεικνύεται ότι με την προαναφερθείσα συνθήκη υπάρχουν τιμές του  $B_0$ , τέτοιες ώστε να μην εκτείνονται στο άπειρο οι εργοπεριοχές.

## Κεφάλαιο 6

### Συμπέρασμα

Η κατάσταση ισορροπίας μιας μελανής οπής Kerr–Newman σε ασθενές μαγνητικό πεδίο είναι αυτή που έχει φορτίο το φορτίο Wald, (2.9), και η ακριβής λύση του προβλήματος για ισχυρότερα μαγνητικά πεδία απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς. Χρησιμοποιώντας το φορμαλισμό των μοντέλων  $\sigma$ , της ανάλυσης σε επιλύσιμη άλγεβρα και της «εσωτερικής μετρικής» επιτυγχάνουμε την απλοποίηση των πράξεων κατά το δυνατό, ενώ οι διαφορικές μορφές ολοκληρώνονται με σχετικώς απλό τρόπο για να προκύψουν τα δυναμικά. Απεδείχθη ότι στάσιμος και αξονικός συμμετρικός χωροχρόνος έχει συμμετρία  $SO(2, 1)$ , ενώ με την προσθήκη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διευρύνεται η συμμετρία στην  $SU(2, 1)$ .

Η ακριβής μετρική της μαγνητισμένης Kerr–Newman, γνωστή ως Kerr–Newman–Melvin, προκύπτει από το μετασχηματισμό μαγνήτισης Harrison, σύμφωνα με τα προηγούμενα, όμως έχει το πρόβλημα της ύπαρξης εργοπεριοχών που εκτείνονται στο χωρικό άπειρο κοντά στον άξονα συμμετρίας, εκτός αν ισχύει συγκεκριμένη σχέση μεταξύ φορτίου, μαγνητικού πεδίου, μάζας και στροφορμής, δηλαδή για  $Q + aMB_0 = 0$ . Αν ικανοποιείται η προηγούμενη συνθήκη, υπάρχουν τιμές του  $B_0$  τέτοιες ώστε η εργοπεριοχή να είναι περιορισμένη κοντά στη μελανή οπή. Η ύπαρξη εργοπεριοχών ασυμπτωτικώς συνεπάγεται ότι η ασυμπτωτική μετρική δεν είναι η Melvin.

# Παράρτημα Α

## Γεωμετρία (semi-)Riemann

**Proposition A.0.1.** Ένα χρονοειδές άνυσμα  $v^a$  προσανατολισμένο στο μέλλον μπορεί να γραφεί σε σύστημα συντεταγμένων στη μορφή  $(1, 0, 0, 0)$ .

*Απόδειξη.* Από το μετασχηματισμό Lorentz για boost στον άξονα  $x^1$  με παράγοντα Lorentz  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ , έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

όπου ισχύει  $-\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = -1$  και  $\gamma \geq 1$ . Καθώς η  $SO(3)$  είναι υποομάδα της  $SO_0(3, 1)$ , μπορούμε να γράψουμε το άνυσμα στη μορφή  $(\gamma, x^1, x^2, x^3)$  με  $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (\beta\gamma)^2$ , η οποία είναι η γενικότερη έκφραση για χρονοειδές άνυσμα προσανατολισμένο στο μέλλον στο χώρο Minkowski. Το αντίστροφο είναι προφανές αν πάρουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς.  $\square$

**Proposition A.0.2.** Αν για ένα άνυσμα null  $n^a$  και ένα  $b^a$  ισχύει  $n^a b_a = 0$ , τότε είτε  $n^a \propto b^a$ , είτε  $b^a b_a > 0$ .

*Απόδειξη.* Ένα άνυσμα null, το οποίο είναι  $\neq 0$ , πρέπει εξ ορισμού να αποτελείται από χωροειδές και χρονοειδές μέρος διάφορα του μηδενός. Μπορούμε να επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε το χωροειδές να συμπίπτει με το ένα άνυσμα βάσης. Επιλέγουμε επίσης ορθοκανονική βάση χωρίς βλάβη γενικότητας, επομένως ένα άνυσμα null μπορεί να γραφεί στη μορφή  $n^a = a(e_0)^a + b(e_1)^a$ , και από τον ορισμό του προκύπτει  $a = \pm b$ . Επειδή κάθε πολλαπλάσιο ενός null είναι null, γράφουμε την ακόμη πιο απλή μορφή  $n^a = (e_0)^a + (e_1)^a$ . Επίσης,  $0 = n^a b_a = -b^0 + b^1$ , επομένως το άνυσμα  $b^a = b^0[(e_0)^a + (e_1)^a] + b^2(e_2)^a + b^3(e_3)^a$ . Έχουμε  $b^a b_a = (b^2)^2 + (b^3)^2 \geq 0$ , επομένως είτε  $b^a b_a = 0$ , το οποίο συνεπάγεται  $b^a = b^0 n^a$ , είτε  $b^a b_a > 0$ . Έχει σημασία εδώ να παρατηρήσουμε ότι τα προηγούμενα είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας αν και έχουμε εισαγάγει σύστημα συντεταγμένων, επειδή οι συγκεκριμένες εκφράσεις ισχύουν για κάθε άνυσμα που ικανοποιεί τις υποθέσεις.  $\square$

### A.1 Μη συντεταγμένη ή μη ολονομική βάση

Η μη συντεταγμένη ή μη ολονομική βάση (*non-coordinate or non-holonomic basis*), επίσης γνωστή και ως *vierbein* για διάσταση 4 ή *vielbein* εν γένει, η οποία συνήθως συμβολίζεται με  $\{e^a\}$ , είναι μια βάση της οποίας τα ανύσματα ικανοποιούν τη σχέση  $[e^a, e^b] \neq 0$ . Αν ο μεταθέτης μηδενίζεται, τότε και μόνο τότε η βάση είναι συντεταγμένη (σύστημα συντεταγμένων). Ισοδύναμη συνθήκη είναι ότι οι μορφές βάσης της δυικής βάσης είναι κλειστές (*closed*), δηλαδή  $de_a = 0$ . Υπάρχουν βάσεις που είναι ορθοκανονικές και ολονομικές, όμως μόνο σε επίπεδες πολλαπλότητες, βλέπε Göckeler and

Schücker 1989, p. 70. Μια ορθοκανονική βάση  $\{(e_{\bar{a}})^a\}_{\bar{a}=1}^{\dim M}$  ορίζεται από τη σχέση  $(e_{\bar{a}})^a (e_{\bar{b}})^b g_{ab} = \eta_{\bar{a}\bar{b}}$ , όπου  $\eta_{\bar{a}\bar{b}}$  η μετρική Minkowski. Για μια μη ολονομική βάση ισχύει:

$$(e_{\bar{a}})^a \nabla_a (e_{\bar{b}})^b = \omega_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} (e_{\bar{c}})^b, \quad (\text{A.1})$$

όπου οι συντελεστές  $\omega_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}$  είναι γνωστοί ως *συντελεστές συνοχής* (*connection coefficients*). Στην περίπτωση μιας βάσης συντεταγμένων έχουμε:

$$\omega_{\sigma}^{\mu\nu} = (\partial_{\sigma})^a (dx^{\mu})_b \nabla_a (\partial_{\nu})^b = (\partial_{\sigma})^a (dx^{\mu})_b (\partial_a (\partial_{\nu})^b + \Gamma_{ac}^b (\partial_{\nu})^c) = \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu},$$

καθώς  $\partial_a (\partial_{\nu})^b = 0$ , δηλαδή οι συντελεστές συνοχής είναι τα Christoffel. Από τον ορισμό (A.1) προκύπτει επίσης

$$\omega_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = (e_{\bar{b}})^b \nabla_a (e_{\bar{c}})^b, \quad (\text{A.2})$$

δηλαδή ορίζεται η *1-μορφή συνοχής* ή *συναγωγή spin* (*connection 1-form* or *spin connection*). Δεδομένου ότι  $\omega_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = (e_{\bar{b}})^b \nabla_a (e_{\bar{c}})^b = \nabla_a [(e_{\bar{b}})^b (e_{\bar{c}})_b] - (e_{\bar{c}})^b \nabla_a (e_{\bar{b}})_b = -(e_{\bar{c}})^b \nabla_a (e_{\bar{b}})_b = -\omega_{\bar{a}\bar{c}\bar{b}}$ , η συναγωγή spin είναι αντισυμμετρική στους ορθοκανονικούς δείκτες.

Οι ορθοκανονικές βάσεις επιλέγονται αναλόγως με το είδος των φυσικών φαινομένων που θέλει να μελετήσει κανείς, καθώς κατάλληλη επιλογή διευκολύνει κατά πολύ τις πράξεις. Στη μετρική Kerr είναι ιδιαίτερες χρήσιμες, επειδή η μετρική Kerr στο σύστημα συντεταγμένων Boyer-Lindquist έχει όρους εκτός διαγωνίου, ενώ στην ορθοκανονική βάση είναι διαγώνια.

## A.2 Τανυστής Levi-Civita

Ορίζουμε το σύμβολο *Levi-Civita*<sup>1</sup> (βλέπε Renteln 2014; Nakahara 2003, pp. 238,199),

$$\varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \equiv \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \equiv \begin{cases} \text{sgn}(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n), & \text{αν } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \text{ διαφέρουν μεταξύ τους,} \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση,} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

όπου το  $\text{sgn}$  είναι το πρόσημο της μετάθεσης (permutation) των δεικτών. Η μορφή στοιχείου όγκου ή *τανυστής Levi-Civita*,  $\varepsilon$ , ορίζεται από την ιδιότητα:

$$\varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} = (-1)^s n!, \quad s = \begin{cases} 0, & \text{μετρική Riemann,} \\ 1, & \text{μετρική Lorentz,} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

όπου  $s$  το πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών της μετρικής. Από τον ορισμό προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες για πολλαπλότητα διάστασης  $n$ ,

1.  $\varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} = (-1)^s n! \delta_{b_1}^{[a_1} \delta_{b_2}^{a_2} \dots \delta_{b_n}^{a_n]}$ , εύκολο να υπολογίσει κανείς, καθώς σε διάσταση  $n$  η συναίρεση του  $\varepsilon$  πρέπει να είναι βαθμωτό και οι άνω και κάτω δείκτες πρέπει να είναι αντισυμμετρικοί,
2.  $\varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_j a_{j+1} a_{j+2} \dots a_n} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_j b_1 b_2 \dots b_{n-j}} = (-1)^s j!(n-j)! \delta_{b_1}^{[a_{j+1}} \delta_{b_2}^{a_{j+2}} \dots \delta_{b_{n-j}}^{a_n]}$ , καθώς, κατά τα προηγούμενα, πρέπει τα  $\delta^a_b$  να έχουν αντισυμμετρικούς δείκτες, πολλαπλασιασμένα με τον αριθμό συνδυασμών για διατεταγμένο σύνολο από  $j$  ακεραίους.

<sup>1</sup> Ακριβέστερα, είναι *ψευδοτανυστική πυκνότητα*. Μετασχηματίζεται κάτω από διαφορομορφισμούς ως τανυστής πολλαπλασιασμένος με μια δύναμη της ορίζουσας Jacobi και αλλάζει πρόσημο κάτω από δράση parity. Υπάρχουν δύο συμβάσεις στη βιβλιογραφία, η προαναφερθείσα και η άλλη αν την πολλαπλασιάσουμε με  $(-1)^s$ , όπου  $s$  το πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών στη μετρική.

Άλλος τρόπος ορισμού αυτού είναι ως το στοιχείο όγκου στην ορθοκανονική βάση,

$$\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} (e_{\mu_1})^{a_1} (e_{\mu_2})^{a_2} \dots (e_{\mu_n})^{a_n} = \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n},$$

επειδή τότε η εξ. (A.4) δίνει,

$$(-1)^s n! = \eta^{a_1 b_1} \eta^{a_2 b_2} \dots \eta^{a_n b_n} \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} = \eta^{\mu_1 \nu_1} \eta^{\mu_2 \nu_2} \dots \eta^{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}.$$

Βεβαίως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης βάση συντεταγμένων, επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned} (-1)^s n! &= g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = A^2 g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \\ &= A^2 n! \det g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι σε διάσταση  $n$  κάθε  $n$ -μορφή είναι  $\propto \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}$ , καθώς ο υπόχωρος που δημιουργούν είναι μονοδιάστατος, και τον ορισμό της ορίζουσας,  $\det g_{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} \dots g_{\mu_n n}$ , οι οποίες συνεπάγονται ότι:

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_n \nu_n} = (-1)^s \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n},$$

καθώς η ορίζουσα είναι αντισυμμετρική στην εναλλαγή σειρών ή στηλών. Από τα προηγούμενα προκύπτει  $A = \pm 1 / \sqrt{(-1)^s \det g^{\mu\nu}} = \pm \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|^2}$ , επομένως  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  και ο τανυστής όγκου στο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} (dx^1)_{a_1} \wedge (dx^2)_{a_2} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n}. \quad (\text{A.5})$$

Ο αντίστοιχος με τους δείκτες πάνω ως προς το σύμβολο Levi-Civita είναι εύκολο να υπολογιστεί:  $\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_n \nu_n}$ , επομένως

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} &= \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \\ \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} &= \frac{(-1)^s}{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Άλλη μια χρήσιμη εξίσωση προκύπτει αν εκφράσουμε το στοιχείο όγκου σε ορθοκανονική και συντεταγμένη βάση,

$$\begin{aligned} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} &= \epsilon_{12 \dots n} (e^1)_{a_1} \wedge (e^2)_{a_2} \wedge \dots \wedge (e^n)_{a_n} \\ &= (e^1)_{\mu_1} (e^2)_{\mu_2} \dots (e^n)_{\mu_n} (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge (dx^{\mu_2})_{a_2} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_n})_{a_n} \\ &= (e^1)_{\mu_1} (e^2)_{\mu_2} \dots (e^n)_{\mu_n} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} (dx^1)_{a_1} \wedge (dx^2)_{a_2} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n} \\ &= \epsilon_{12 \dots n} (dx^1)_{a_1} \wedge (dx^2)_{a_2} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n}, \end{aligned}$$

η οποία με μορφές γράφεται ως:

$$\epsilon = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \det e^a_{\mu} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Συμμετρίες

Τα επόμενα βασίζονται σε Frankel 2012, Wald 1984, appendix C, Grøn and Hervik 2004, p. 404, Besse 2008, p.178, Garry W. Gibbons 2011, p. 39. Επίσης, το Thurston and Levy 1997, κεφ. 2 είναι χρήσιμο για την ανάπτυξη της διαισθησης.

<sup>2</sup>Η ελευθερία προσήμου προέρχεται από την ελευθερία στον ορισμό του προσανατολισμού.

### A.3.1 Ενεργητικοί και παθητικοί μετασχηματισμοί

Υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι να παραγάγει κανείς μεταβολές σε πολλαπλότητα: ο πρώτος είναι να μετακινήσουμε συγκεκριμένο σημείο, γνωστός ως *ενεργός* (*active*), και ο δεύτερος να διατηρήσουμε το σημείο σταθερό, μεταβάλλοντας το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο το μετράμε, γνωστός ως *παθητικός* (*passive*). Αυτοί οι δύο τρόποι είναι ήδη γνωστοί στην κβαντική μηχανική, ο μεν ενεργητικός ως *εικόνα Schrödinger* (*Schrödinger picture*), καθώς οι ιδιοκαταστάσεις ενός τελεστή είναι σταθερές, ενώ η κατάσταση εξαρτάται από το χρόνο, ο δε παθητικός ως *εικόνα Heisenberg* (*Heisenberg picture*), καθώς οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή εξαρτώνται από το χρόνο, ενώ η κατάσταση είναι σταθερή.

**Definition A.3.1.** Ορίζουμε  $\phi : M \rightarrow N$  μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν η  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  είναι λεία, ορίζουμε την *επαναφορά* (*pull-back*)  $\phi_* : M \rightarrow \mathbb{R}$  με τη σχέση

$$\phi_* f \equiv f \circ \phi. \quad (\text{A.8})$$

Αυτή η συνάρτηση δημιουργεί μια νέα με βάση την  $f$  που να επαναφέρει το πεδίο ορισμού στο  $M$ . Η  $\phi$  μας επιτρέπει επίσης να ορίσουμε άλλη μια απεικόνιση.

**Definition A.3.2.** Αν  $\phi : M \rightarrow N$  διαφορίσιμη απεικόνιση και  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  λεία, ορίζουμε την *προώθηση* (*push-forward*) ή *παραγώγιση* (*derivative*) ή *ιακωβιανή* (*jacobian*) του εφαπτομενικού ανύσματος  $v^a \in V_p$ ,

$$\phi^* : V_p \rightarrow V_{\phi(p)}, \quad \phi^* v(f) \equiv d\phi \circ v(f) \equiv v(\phi_* f) = v(f \circ \phi), \quad (\text{A.9})$$

η οποία σε σύστημα συντεταγμένων  $\{x^\mu\}$  για το  $V_p$  γίνεται

$$v(\phi_* f) = v(f(y(x))) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(y(x)) = v^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial y^\nu} = \frac{\partial f}{\partial y^\mu} (\phi^* v)^\mu,$$

το οποίο επιβεβαιώνει ότι η  $\phi^*$  είναι γραμμικός μετασχηματισμός,  $\phi^* v \in V_{\phi(p)}$  και  $(\phi^*)^\mu{}_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ .

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει ότι η προώθηση επεκτείνει την απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων σε απεικόνιση μεταξύ των εφαπτομενικών τους χώρων.

Έστω  $M$  πολλαπλότητα και  $\phi : M \rightarrow M$  *διαφορομορφισμός* (*diffeomorphism*), δηλαδή  $C^\infty$  1-1 και επί με  $C^\infty$  αντίστροφο, ο οποίος στέλνει κάθε  $p \in M$  στο  $\phi(p) \in M$ . Καθώς η  $\phi^* : V_p \rightarrow V_{\phi(p)}$  σε σύστημα συντεταγμένων γίνεται  $(\phi^*)^\mu{}_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ , έχουμε  $((\phi^{-1})^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = (\phi_*)^\mu{}_\nu$ . Επίσης, υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ  $V_p$  και  $V_p^*$ , επομένως  $(\phi^{-1})^* = \phi_*$  και η προώθηση ενός διαφορομορφισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τανυστή αυθαίρετης τάξης.



## Παράρτημα Β

### Διαφορικές μορφές

Τα επόμενα βασίζονται στα Wald 1984; Arnold 1989; Frankel 2012; Nakahara 2003. Οι διαφορικές μορφές και η εξωτερική άλγεβρα (*exterior algebra*) εισήχθησαν από τον Élie Cartan για τη μελέτη ομάδων Lie και διαφορικής γεωμετρίας. Το πλεονέκτημά τους έναντι των τανυστών είναι ότι αποφεύγονται οι εκφράσεις με πολλούς δείκτες και καθίσταται ευχερέστερη η λύση διαφορικών εξισώσεων ιδιαιτέρως στη γενική θεωρία σχετικότητας, καθώς για την παραγωγή δεν απαιτείται η εισαγωγή της μετρικής, ενώ φορμαλισμοί όπως αυτοί των ορθοκανονικών (μη ολονομικών) βάσεων και η χρήση των εξισώσεων δομής Cartan διευκολύνουν ιδιαιτέρως υπολογισμούς όπως του τανυστή (μορφής) Riemann.

Μια διαφορική μορφή (*differential form*) είναι ολικώς αντισυμμετρικός τανυστής. Συμβολίζουμε με έντονη γραμματοσειρά όταν παραλείπουμε τους δείκτες για απλούστευση· έτσι έχουμε  $\omega \equiv \omega_{a_1 a_2 \dots a_p} = \omega_{[a_1 a_2 \dots a_p]}$  για διαφορική μορφή τάξης (rank)  $p$ . Μπορούμε να παράγουμε διαφορικές μορφές υψηλότερες τάξης συνδυάζοντας δύο μορφές  $\omega$ ,  $\sigma$  τάξης  $p$  και  $q$  αντιστοίχως με το εξωτερικό γινόμενο (*exterior ή wedge product*) ως εξής:  $(\omega \wedge \sigma)_{a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_q} \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[a_1 a_2 \dots a_p} \sigma_{b_1 b_2 \dots b_q]}$ . Αυτό το γινόμενο είναι πολυγραμμικό, αναμενόμενο για τανυστές, όμως όχι μεταθετικό, καθώς ισχύει  $\omega \wedge \sigma = (-1)^{pq} \sigma \wedge \omega$ .

Το εσωτερικό γινόμενο (*interior product*) ενός ανύσματος  $v^a$  και μιας  $p$ -μορφής  $\omega$ , συμβολιζόμενο ως  $\iota_v \omega$ , είναι η  $p - 1$ -μορφή

$$(\iota_v \omega)_{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \equiv \omega_{a_1 a_2 \dots a_p} v^{a_p}. \quad (\text{B.1})$$

Είναι αντιπαραγωγή (*antiderivation*), όπερ σημαίνει ότι για μια  $p$ -μορφή  $\omega$  και μια  $q$ -μορφή  $\sigma$  ισχύει:

$$\iota_v(\omega \wedge \sigma) = (\iota_v \omega) \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge (\iota_v \sigma). \quad (\text{B.2})$$

Αυτό είναι εύκολο να το δει κανείς, δεδομένου ότι κάθε φορά που ο δείκτης του ανύσματος μετατοπίζεται στους δείκτες της μορφής, πολλαπλασιάζεται με  $-1$  ο συντελεστής μπροστά στη μορφή.

#### B.1 Δυική Hodge

Ορίζουμε απεικόνιση από τις  $p$ -μορφές στις  $n - p$ -μορφές, γνωστή ως η *δυική Hodge* (*Hodge dual*), συμβολιζόμενη με  $\star$ , με τη σχέση,

$$(\star \omega)_{b_1 b_2 \dots b_{n-p}} \equiv \frac{1}{p!} \omega^{a_1 a_2 \dots a_p} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_{n-p}}. \quad (\text{B.3})$$

Στο συμβολισμό μορφών, σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων αυτή η σχέση γίνεται,

$$\star \omega = \frac{1}{p!(n-p)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-p} dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}}. \quad (\text{B.4})$$

Μπορεί κανείς να πάρει τη δυική Hodge οποιουδήποτε τανυστή που ανήκει στο δυική χώρο και το αποτέλεσμα θα είναι μια μορφή, καθώς το συμμετρικό κομμάτι του μηδενίζεται από την αντισυμμετρική μορφή όγκου.

Εφαρμογή της δυικής Hodge δics σε μια  $p$ -μορφή  $\omega$  δίνει:

$$\begin{aligned}
(\star\star)\omega_{a_1 a_2 \dots a_p} &= \frac{1}{(n-p)!} (\star\omega)^{b_1 b_2 \dots b_{n-p}} \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_{n-p} a_1 a_2 \dots a_p} \\
&= \frac{1}{(n-p)! p!} \omega_{c_1 c_2 \dots c_p} \epsilon^{c_1 c_2 \dots c_p b_1 b_2 \dots b_{n-p}} \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_{n-p} a_1 a_2 \dots a_p} \\
&= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{(n-p)! p!} \omega_{c_1 c_2 \dots c_p} \epsilon^{b_1 b_2 \dots b_{n-p} c_1 c_2 \dots c_p} \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_{n-p} a_1 a_2 \dots a_p} \\
&= (-1)^{s+p(n-p)} \omega_{c_1 c_2 \dots c_p} \delta_{[a_1}^{c_1} \delta_{a_2}^{c_2} \dots \delta_{a_p]}^{c_p} = (-1)^{s+p(n-p)} \omega_{a_1 a_2 \dots a_p},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

όπου  $s$  το πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών της μετρικής.

Η δυική Hodge είναι επίσης χρήσιμη για την έκφραση της συναίρεσης μιας  $p$ -μορφής με άλλη  $p$ -μορφή,

$$\begin{aligned}
F \wedge \star G &= \frac{1}{(p!)^2 (n-p)!} F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} G^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-p}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_{n-p}} \\
&= \frac{\epsilon}{(p!)^2 (n-p)!} F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} G^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-p}} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-p}} \\
&= \frac{\epsilon}{p!} F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} G^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} \delta^{[\mu_1}_{\nu_1} \delta^{\mu_2}_{\nu_2} \dots \delta^{\mu_p]}_{\nu_p} = \frac{\epsilon}{p!} F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} G^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

**Lemma B.1.1** (Εξίσωση Cartan). *Αν  $\omega$  είναι μια  $p$ -μορφή και  $X^a$  ένα άνυσμα, τότε*

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota_X \circ d\omega + d\circ \iota_X \omega. \tag{B.7}$$

Απόδειξη. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\iota_X \circ d\omega &= (p+1) X^c \nabla_{[c} \omega_{a_1 a_2 \dots a_p]} \\
&= X^c (\nabla_c \omega_{a_1 a_2 \dots a_p} - \nabla_{a_1} \omega_{c a_2 a_3 \dots a_p} + \nabla_{a_2} \omega_{c a_1 a_3 \dots a_p} + \dots + (-1)^p \nabla_{a_p} \omega_{c a_1 a_2 \dots a_{p-1}}),
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
d\circ \iota_X \omega &= p \nabla_{[a_1} (\omega_{|c| a_2 a_3 \dots a_p]} X^c) = p X^c \nabla_{[a_1} \omega_{|c| a_2 a_3 \dots a_p]} + p \nabla_{[a_1} X^c \omega_{|c| a_2 a_3 \dots a_p]} \\
&= X^c (\nabla_{a_1} \omega_{c a_2 a_3 \dots a_p} - \nabla_{a_2} \omega_{c a_1 a_3 \dots a_p} + \dots + (-1)^{p-1} \nabla_{a_p} \omega_{c a_1 a_2 \dots a_{p-1}}) \\
&\quad + \nabla_{a_1} X^c \omega_{c a_2 a_3 \dots a_p} - \nabla_{a_2} X^c \omega_{c a_1 a_3 \dots a_p} + \dots + (-1)^{p-1} \nabla_{a_p} X^c \omega_{c a_1 a_2 \dots a_{p-1}},
\end{aligned}$$

από τα οποία προκύπτει:

$$\begin{aligned}
(\iota_X \circ d + d\circ \iota_X) \omega &= X^c \nabla_c \omega_{a_1 a_2 \dots a_p} + \omega_{c a_2 a_3 \dots a_p} \nabla_{a_1} X^c + \omega_{a_1 c a_3 a_4 \dots a_p} \nabla_{a_2} X^c + \dots + \omega_{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \nabla_{a_p} X^c \\
&= \mathcal{L}_X \omega. \quad \square
\end{aligned}$$

Η προηγούμενη εξίσωση είναι ιδιαίτερος χρήσιμη στην απόδειξη της μεταθετικότητας μεταξύ της παραγώγου Lie και της εξωτερικής παραγώγου και του εσωτερικού γινομένου, ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X d\omega &= d\iota_X \omega = d\mathcal{L}_X \omega, \\
\mathcal{L}_X \iota_X \omega &= \iota_X d\iota_X \omega = \iota_X \mathcal{L}_X \omega.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

**Proposition B.1.1.** *Αν  $X^a$  άνυσμα,  $X$  η αντίστοιχη μορφή και  $\omega$  μια  $p$ -μορφή, τότε ισχύει:*

$$\iota_X \star \omega = \star(\omega \wedge X). \tag{B.9}$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \iota_X \star \omega &= \frac{1}{p!} \omega^{a_1 a_2 \dots a_p} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_{n-p}} X^{b_1} = \frac{1}{p!} \omega^{[a_1 a_2 \dots a_p] X^{b_1}} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_{n-p}} \\ &= \frac{1}{(p+1)!} (\omega \wedge X)^{a_1 a_2 \dots a_p b_1} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_{n-p}} = \star(\omega \wedge X). \quad \square \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις Maxwell είναι  $\nabla_a F^{ab} = -4\pi J^b$ ,  $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$ . Χρησιμοποιώντας την εξωτερική άλγεβρα γράφονται ως:

$$d\star F = 4\pi \star J, \quad dF = 0. \quad (\text{B.10})$$

Απόδειξη. Η δεύτερη είναι προφανής. Γράφουμε την πρώτη στη μορφή  $\star d\star F = 4\pi J$  με χρήση της εξ. (B.5) και, καθώς  $(d\star F)_{abc} = \frac{3}{2} \nabla_{[a} F^{ed} \epsilon_{|ed|bc]}$ ,

$$\begin{aligned} (\star d\star F)_a &= \frac{3}{2 \times 3!} \nabla^{[c} F_{ed} \epsilon^{|ed|fb]} \epsilon_{cfba} = \frac{1}{4} \epsilon_{fbca} \epsilon^{[fb|ed|} \nabla^c] F_{ed} \\ &= \frac{1}{12} \epsilon_{fbca} (\epsilon^{fbcd} \nabla^c + \epsilon^{cfed} \nabla^b + \epsilon^{bced} \nabla^f) F_{ed} \\ &= -\frac{1}{3} (\delta^e_{[c} \delta^d_{a]} \nabla^c + \delta^e_{[b} \delta^d_{a]} \nabla^b + \delta^e_{[f} \delta^d_{a]} \nabla^f) F_{ed} = -\nabla^b F_{ba} = 4\pi J_a, \end{aligned}$$

ύστερα από χρήση των εξισώσεων κάτω από την εξ. (A.4). □

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία εκφράζονται σε σχέση με τους τανυστές Maxwell και Faraday ως προς παρατηρητή  $v^a$  ως εξής:

$$\begin{aligned} E_a &= F_{ab} v^b, \quad B_a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ab}{}^{cd} F_{cd} v^b, \\ \mathbf{E} &= -\iota_v \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \iota_v \star \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Επίσης, η μορφή Faraday μπορεί να εκφραστεί στη μορφή,

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{v^a v_a} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{E} + \star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})], \quad (\text{B.12})$$

όπου  $\mathbf{v} \equiv v_a$ , η οποία μορφή θυμίζει το θεώρημα Helmholtz στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \iota_v \mathbf{F} = \iota_v (\mathbf{v} \wedge \mathbf{F}) - (\iota_v \mathbf{v}) \wedge \mathbf{F} = \iota_v (\mathbf{v} \wedge \mathbf{F}) - v^a v_a \mathbf{F},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξ. (B.2). Επίσης,

$$\star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = -\star(\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}) = -\iota_v \star \mathbf{B} = -\iota_v \star \iota_v \star \mathbf{F} = -\iota_v \star^2 (\mathbf{F} \wedge \mathbf{v}) = -\iota_v (\mathbf{F} \wedge \mathbf{v}) = -\iota_v (\mathbf{v} \wedge \mathbf{F}),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξ. (B.9) και (B.5). □

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό φορτίο που περικλείονται από χωρίο  $D$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \star \mathbf{F}, \quad p = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \mathbf{F}. \quad (\text{B.13})$$

Απόδειξη. □

Αν έχουμε ορθοκανονική βάση  $\{e^a\}$ , ισχύουν οι επόμενες εξισώσεις, γνωστές ως εξισώσεις δομής Cartan (*Cartan structure equations*):

$$T^a \equiv de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \quad R^a_b \equiv d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \quad (\text{B.14})$$

όπου  $\omega^a_b$  η συνοχή spin, (A.2),  $R^a_b$  η 2-μορφή καμπυλότητας (*curvature form*), από την οποία μπορούμε να βρούμε τον τανυστή Riemann, και  $T^a$  η 2-μορφή στρέψης (*torsion 2-form*), η οποία μηδενίζεται ταυτοτικώς στη γενική θεωρία σχετικότητας<sup>1</sup>.

Η δράση *Einstein–Hilbert* μπορεί να γραφεί με διαφορικές μορφές στη μορφή:

$$S_{EH} \equiv \int \frac{1}{(D-2)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \wedge e^{a_3} \wedge e^{a_4} \wedge \dots \wedge e^{a_D}. \quad (\text{B.15})$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(D-2)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \wedge e^{a_3} \wedge e^{a_4} \wedge \dots \wedge e^{a_D} \\ &= \frac{1}{2(D-2)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{\mu_1 \mu_2}_{\nu_1 \nu_2} e^{a_1}_{\mu_1} e^{a_2}_{\mu_2} \dots e^{a_D}_{\mu_D} dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} \\ &= \frac{1}{2(D-2)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} \varepsilon^{\nu_1 \nu_2 \mu_3 \dots \mu_D} R^{\mu_1 \mu_2}_{\nu_1 \nu_2} e^{a_1}_{\mu_1} e^{a_2}_{\mu_2} \dots e^{a_D}_{\mu_D} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^D \\ &= \frac{1}{2(D-2)!} \varepsilon^{\nu_1 \nu_2 \mu_3 \dots \mu_D} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \det e^a_{\mu} R^{\mu_1 \mu_2}_{\nu_1 \nu_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^D \\ &= \delta^{\nu_1}_{[\mu_1} \delta^{\nu_2}_{\mu_2]} R^{\mu_1 \mu_2}_{\nu_1 \nu_2} \det e^a_{\mu} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^D \\ &= R^{\mu_1 \mu_2}_{[\mu_1 \mu_2]} \det e^a_{\mu} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^D = R \det e^a_{\mu} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^D, \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Είναι εν γένει διάφορη του μηδενός στη θεωρία *Einstein–Cartan–Sciama–Kibble*, βλ. Hehl, Heyde, et al. 1976, εξ. 2.21.

# Παράρτημα C

## Μιγαδικές πολλαπλότητες

Τα επόμενα βασίζονται στο Nakahara 2003.

Μια μιγαδική πολλαπλότητα (*complex manifold*) μιγαδικής διάστασης  $n$  ( $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ ) και πραγματικής  $2n$  είναι πολλαπλότητα στην οποία τα συστήματα συντεταγμένων απεικονίζουν σημεία της πολλαπλότητας σε υποσύνολα του  $\mathbb{C}^n$  και οι συναρτήσεις που συνδέουν τα συστήματα συντεταγμένων είναι ολομορφικές. Αν η πολλαπλότητα είναι συμπαγής, τότε κάθε ολομορφική συνάρτηση πάνω της είναι σταθερά.

Ο εφαπτομενικός χώρος σε σημείο  $p$ ,  $T_p M$ , έχει ως βάση τα  $2n$  ανύσματα:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\},$$

και ο δυικός  $T_p^* M$  τις  $2n$  μορφές,

$$\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n, dy^1, dy^2, \dots, dy^n\}.$$

Άλλη μια βάση του  $T_p M$  δίνεται από τις σχέσεις  $\frac{\partial}{\partial z^\mu} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{\partial}{\partial y^\mu})$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{\partial}{\partial y^\mu})$ , από τις οποίες προκύπτει ότι  $\frac{\partial}{\partial z^\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}$ . Αντιστοίχως για το  $T_p^* M$  έχουμε  $dz^\mu \equiv dx^\mu + i dy^\mu$ ,  $d\bar{z}^\mu \equiv dx^\mu - i dy^\mu$  για νέα βάση, δυική στην προηγούμενη, καθώς ισχύουν  $dz^\mu(\partial_{z^\nu}) = \delta^\mu_\nu = d\bar{z}^\mu(\partial_{\bar{z}^\nu})$ ,  $dz^\mu(\partial_{\bar{z}^\nu}) = d\bar{z}^\mu(\partial_{z^\nu}) = 0$ .

Η σχεδόν μιγαδική δομή (*almost complex structure*) της  $M$  είναι το τανυστικό πεδίο  $J : T_p M \rightarrow T_p M$  που ορίζεται από τις σχέσεις  $J(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$ ,  $J(\frac{\partial}{\partial y^\mu}) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , ή, σε μορφή πίνακα στην προηγούμενη βάση<sup>1</sup>,

$$J^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

όπου  $I_n \equiv \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ στοιχεία}})$ . Στην άλλη βάση, την οποία ορίσαμε προηγουμένως, έχουμε  $J(\frac{\partial}{\partial z^\mu}) =$

$i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}$ ,  $J(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}) = -i\frac{\partial}{\partial z^\mu}$ , επομένως ο τελεστής γράφεται σε αυτή τη βάση,

$$J^\mu_\nu = i dz^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial z^\mu} - i d\bar{z}^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} = i \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}.$$

Ως αναμένεται για μιγαδική δομή, ισχύει  $J^a_b J^b_c = -\delta^a_c$ . Αν και κάθε πολλαπλότητα με ζυγή διάσταση δέχεται τοπικώς τέτοιον τελεστή, μόνο οι μιγαδικές πολλαπλότητες δέχονται τέτοιον σε ολόκληρη την πολλαπλότητα.

<sup>1</sup>Αυτός ο πίνακας έχει την ίδια μορφή με τον αντισυμμετρικό που χρησιμοποιείται στον ορισμό του τελεστή εκπεφρασμένου στη συμπλεκτική βάση, ο οποίος χρησιμοποιείται για να προσδώσουμε ευκλείδεια δομή σε συμπλεκτικό χώρο, βλέπε Arnold 1989, κεφ. 8 §41D.

## C.1 Πολλαπλότητα Hermite

Αν η μετρική Riemann  $g_{ab}$  μιας μιγαδικής πολλαπλότητας  $M$  ικανοποιεί τη σχέση  $g_{ab}J^a{}_cX^cJ^b{}_dX^d = g_{ab}X^aX^b$ , για κάθε  $X^a, Y^a \in T_pM$  και κάθε  $p \in M$ , τότε χαρακτηρίζεται ερμιτιανή μετρική (*hermitian metric*) και το  $(M, g_{ab})$  ερμιτιανή πολλαπλότητα (*hermitian manifold*). Μια ερμιτιανή μετρική έχει την ιδιότητα,

$$g_{ab}J^b{}_cX^cX^a = g_{ab}J^a{}_cJ^c{}_eX^eJ^b{}_fX^f = -g_{ab}X^aJ^b{}_fX^f = -g_{ab}J^a{}_fX^fX^b = 0.$$

**Theorem C.1.1.** Μια μιγαδική πολλαπλότητα δέχεται ερμιτιανή μετρική.

*Απόδειξη.* Αν  $g_{ab}$  μετρική Riemann, ορίζουμε  $\hat{g}_{ab} \equiv \frac{1}{2}(g_{ab} + g_{cd}J^c{}_aJ^d{}_b)$ . Καθώς  $\hat{g}_{ab}J^a{}_cX^cJ^b{}_dX^d = \hat{g}_{ab}X^aX^b$ , είναι ερμιτιανή η  $\hat{g}_{ab}$ .  $\square$

Αν η  $g_{ab}$  είναι ερμιτιανή, τότε  $g_{\mu\nu} \equiv g_{ab}(\frac{\partial}{\partial z^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial z^\nu})^b = g_{ab}J^a{}_cJ^b{}_d(\frac{\partial}{\partial z^\mu})^c(\frac{\partial}{\partial z^\nu})^d = -g_{ab}(\frac{\partial}{\partial z^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial z^\nu})^b = -g_{\mu\nu}$ , επομένως  $g_{\mu\nu} = 0$ . Επίσης,  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \equiv g_{ab}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu})^b = -g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ , επομένως  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ . Εν τέλει,

$$g_{ab} = g_{\mu\bar{\nu}}(dz^\mu)_a(d\bar{z}^\nu)_b + g_{\bar{\mu}\nu}(\bar{d}z^\mu)_a(dz^\nu)_b. \quad (C.1)$$

## C.2 Πολλαπλότητα Kähler

Η μορφή,

$$\Omega_{ab} \equiv g_{cb}J^c{}_a, \quad (C.2)$$

σε πολλαπλότητα Hermite είναι γνωστή ως *μορφή Kähler (Kähler form)* της  $g_{ab}$ . Πράγματι, ισχύει  $\Omega_{ab} = g_{cb}J^c{}_a = g_{ce}J^c{}_dJ^d{}_aJ^e{}_b = -g_{ac}J^c{}_b = -\Omega_{ba}$ , επομένως είναι διαφορική μορφή. Ικανοποιεί τη σχέση  $\Omega_{ab}J^a{}_cJ^b{}_d = g_{eb}J^e{}_aJ^a{}_cJ^b{}_d = g_{ad}J^a{}_c = \Omega_{cd}$ . Επίσης,  $\Omega_{\mu\nu} = \Omega_{ab}(\frac{\partial}{\partial z^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial z^\nu})^b = i g_{\mu\nu} = 0$ ,  $\Omega_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Omega_{ab}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu})^b = -i g_{\mu\nu} = 0$ ,  $\Omega_{\mu\bar{\nu}} = i g_{\mu\bar{\nu}} = -\Omega_{\bar{\mu}\nu}$ , επομένως έχουμε,

$$\Omega = i(g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu - g_{\bar{\mu}\nu} d\bar{z}^\mu \otimes dz^\nu) = i g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu. \quad (C.3)$$

Η μορφή Kähler είναι πραγματική μορφή, καθώς  $\bar{\Omega} = -i \bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} d\bar{z}^\mu \wedge dz^\nu = -i g_{\bar{\mu}\nu} d\bar{z}^\mu \wedge dz^\nu = i g_{\nu\bar{\mu}} dz^\nu \wedge d\bar{z}^\mu = \Omega$ .

Μια πολλαπλότητα Kähler (*Kähler manifold*) είναι μια ερμιτιανή πολλαπλότητα  $(M, g_{ab})$ , της οποίας η μορφή Kähler είναι κλειστή,  $d\Omega = 0$ . Η μετρική  $g_{ab}$  είναι η *μετρική Kähler (Kähler metric)* της  $M$ .

# Παράρτημα D

## Θεωρία ομάδων

Χρήσιμες αναφορές με εφαρμογές στη φυσική είναι Gilmore 2005; Georgi 1999; Gilmore 2008; Jeevanjee 2011; Iachello 2015; Carmeli 1977; Sxl and Urbantke 2001; Fuchs and Schweigert 1997. Για πιο μαθηματική δομή, Kosmann-Schwarzbach 2010; Erdmann and Wildon 2006; Hall 2004; Gallier 2015. Σε πιο υψηλό μαθηματικό επίπεδο είναι απαραίτητες οι Knapp 2002; Helgason 1978; Serre 2001.

**Definition D.0.1.** Ένας ομομορφισμός ομάδος (*group homomorphism*) από το  $(G, \circ)$  στο  $(H, \cdot)$  είναι μια συνάρτηση  $h : G \rightarrow H$  τέτοια ώστε:

$$h(g_1 \circ g_2) = h(g_1) \cdot h(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

δηλαδή διατηρεί τη δομή της ομάδος. Αν η απεικόνιση επιπλέον είναι 1-1 (αμφιμονοσήμαντη) και επί (bijection), τότε λέγεται *ισομορφισμός*.

Μερικές ιδιότητες ομομορφισμών είναι  $h(e_G) = e_H$ ,  $h^{-1}(g) = h(g^{-1})$ .

**Proposition D.0.1.** Έχουμε  $U(n) \cong SU(n) \otimes U(1)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $A \in SU(n) \equiv \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1, AA^\dagger = I\}$ ,  $e^{ia} \in U(1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Προφανώς ισχύει  $e^{ia} A \in SU(n) \otimes U(1)$ . Επίσης,  $(e^{ia} A)^\dagger e^{ia} A = I$ ,  $\det(e^{ia} A) = e^{ina} \det A = e^{ina} \neq 1$  για  $a \neq 0$ , επομένως  $e^{ia} A \in U(n)$ . Είναι προφανές ότι μια απεικόνιση  $f : SU(n) \otimes U(1) \rightarrow U(n)$  ορισμένη από τη σχέση  $f(x) = x$  είναι ισομορφισμός με πράξεις πολλαπλασιασμού των πολλαπλασιασμό πινάκων.  $\square$

**Definition D.0.2.** Αν για  $g_1, g_2 \in G$  υπάρχει  $g \in G$  τέτοια ώστε

$$gg_1g^{-1} = g_2, \tag{D.1}$$

τότε τα  $g_1, g_2$  είναι *συζυγή στοιχεία* (*conjugate elements*) του  $G$ . Αυτός ο ορισμός επεκτείνεται στις υποομάδες στις οποίες ενδεχομένως ανήκουν τα  $g_1, g_2$ .

Μια υποομάδα  $H$  της  $G$  είναι *κανονική* (*normal*) ή *αυτοσυζυγής* (*self-conjugate*) ή *αναλλοίωτη* (*invariant*), αν ισχύει

$$gHg^{-1} = H. \tag{D.2}$$

Η *τάξη ισοδυναμίας* (*equivalence class*) ενός στοιχείου  $g_1 \in G$ ,

$$\text{Cl}(g_1) \equiv \{g_2 \mid \exists g \in G \text{ τέτοιο ώστε } g_2 = gg_1g^{-1}\}, \tag{D.3}$$

είναι γνωστή ως *τάξη συζυγίας* (*conjugacy class*) του  $g_1$ .

**Definition D.0.3.** Το δεξιό σύμπλοκο (*right coset*) της ομάδος  $H$ , η οποία είναι υποομάδα της  $G$ , είναι το σύνολο,

$$Hg \equiv \{hg|h \in H\},$$

για κάποιο  $g \in G$ , το οποίο είναι γνωστό ως *αντιπροσωπευτικό συμπλόκου* (*coset representative*). Το σύνολο των δεξιών συμπλόκων της  $H$  συμβολίζεται με  $G \setminus H$  και είναι χώρος-πηλίκιο.

Ομοίως, το αριστερό σύμπλοκο (*left coset*) της ομάδος  $H$  είναι το σύνολο,

$$gH \equiv \{gh|h \in H\},$$

για κάποιο  $g \in G$ . Το σύνολο των αριστερών συμπλόκων της  $H$  συμβολίζεται με  $G/H$ .

**Definition D.0.4.** Αν  $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$ , τότε ο διαφορομορφισμός  $\phi$  είναι *ισομετρία* (*isometry*) και  $\phi \in \text{Isom}(M)$ , όπου  $\text{Isom}(M)$  είναι η ομάδα *ισομετρίας* (*isometry group*) της πολλαπλότητας  $M$ .

**Definition D.0.5.** Η υποομάδα *ισοτροπίας* (*isotropy subgroup*) ή *σταθεροποιήτρια* (*stabilizer*) ενός σημείου  $p \in M$  είναι

$$\mathcal{I}_p(M) \equiv \{\phi \in \text{Isom}(M) | \phi(p) = p\}, \quad (\text{D.4})$$

δηλαδή η υποομάδα της ομάδας *ισομετρίας* που αφήνει σταθερό το σημείο  $p$ . Ένας *ισοτροπικός χώρος* (*isotropic space*) έχει μια *ισομετρία* που αφήνει ένα σημείο σταθερό και απεικονίζει μια βάση σε μια άλλη.

Παραδείγματος χάριν, η *ισοτροπική υποομάδα* του 0 στο  $\mathbb{R}^n$  είναι η  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , η γενική γραμμική ομάδα, ενώ ενός μη μηδενικού σημείου είναι η  $A(n-1)$ , η *affine group*. Επίσης, η  $\text{SO}(3)$  δρα στον  $S^2 \subset \mathbb{E}^3$  με περιστροφές, επομένως είναι υποομάδα της  $\text{Isom}(S^2)$ , και η υποομάδα της  $\text{SO}(2) \cong U(1)$  διατηρεί σταθερούς το βόρειο και νότιο πόλο, επομένως είναι η ομάδα *ισοτροπίας* τους. Άλλη υποομάδα  $\text{SO}(2)$  διατηρεί σταθερά ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων στη σφαίρα. Αυτές οι υποομάδες και η προηγούμενη συνδέονται με *συζυγία* (*conjugation*). Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν μόνο τρεις διακριτές, απλώς συνεκτικές, *ισοτροπικές γεωμετρίες* σε κάθε διάσταση: η ευκλείδεια ή επίπεδη, η σφαιρική και η υπερβολική γεωμετρία.

### D.0.1 Ανάλυση Iwasawa

Τα επόμενα βασίζονται σε C. Pope 2015, p. 103, Frè 2013, p. 255, Trigiante 1998, p. 17, Frè et al. 1999, p. 215, Henneaux, Persson, and Spindel 2008, §6.4.5, Helgason 1978, §3, Knapp 2002, VI§4. Η *ανάλυση Iwasawa* (*Iwasawa decomposition*) προτιμάται σε σχέση με την ανάλυση Cartan, επειδή οι παράγοντες στους οποίους αναλύει μια ομάδα είναι στοιχεία υποομάδων. Είναι μια μορφή εφαρμογής της ορθοκανονικοποίησης Gram–Schmidt.

Έστω  $G$  μη συμπαγής, ημιαπλή, μιγαδική ομάδα Lie και  $K$  η μέγιστη συμπαγής υποομάδα της, οι οποίες σχηματίζουν ένα ομογενές coset. Τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις της πρότασης 6.43 του Knapp 2002, επομένως ισχύει:

**Proposition D.0.2** (Ανάλυση Iwasawa). Αν  $\mathfrak{g}$  ημιαπλή, μιγαδική άλγεβρα Lie, τότε ισχύει

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \quad (\text{D.5})$$

όπου  $\mathfrak{k}$  είναι η μέγιστη συμπαγής υποάλγεβρα (*maximal compact subalgebra*),  $\mathfrak{a}$  αβελιανή υποάλγεβρα (*abelian subalgebra*) και  $\mathfrak{n}$  η μηδενοδύναμη υποάλγεβρα (*nilpotent subalgebra*).



Η προηγούμενη ανάλυση ισχύει για μιγαδική άλγεβρα, όμως οι περισσότερες που χρησιμοποιούμε στη φυσική είναι πραγματικές. Στο Helgason 1978, theorem 3.4 αναφέρεται η επέκταση του προηγούμενου στις *πραγματικές μορφές (real forms)*. Ένας άλλος τρόπος να καταλήξει κανείς στο ίδιο συμπέρασμα είναι με το εξαιρετικώς χρήσιμο θεώρημα 9 Serre 2001, II§8,

**Theorem D.0.3.** *Αν  $\mathfrak{g}_0$  μια πραγματική άλγεβρα Lie και  $\mathfrak{g}$  η μιγαδοποίησή της, τότε η  $\mathfrak{g}_0$  είναι αβελιανή ή μηδενοδύναμη ή επιλύσιμη ή ημιαπλή αν και μόνο αν είναι και η  $\mathfrak{g}$  αντιστοίχως αβελιανή ή μηδενοδύναμη ή επιλύσιμη ή ημιαπλή.*

Επίσης, για την ανάλυση Cartan (*Cartan decomposition*), από την οποία προκύπτει η μέγιστη συμπαγής υποάλγεβρα  $\mathfrak{k}$ , Helgason 1978, Corollary 7.5, §7, Knapp 2002, Corollary 6.22,

**Proposition D.0.4.** *Αν  $\mathfrak{g}$  μια ημιαπλή, μιγαδική άλγεβρα Lie και  $\mathfrak{u}$  μια πραγματική μορφή της, τότε η ανάλυση Cartan αυτής είναι:*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}, \quad (D.6)$$

όπου  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  η άλγεβρα  $\mathfrak{g}$  αν τη θεωρήσουμε πραγματική.

Με αυτόν τον τρόπο, η πλήρης έκφραση του θεωρήματος για τις πραγματικές μορφές γίνεται (Helgason 1978, VI, §3, theorem 3.4):

**Theorem D.0.5.** *Αν  $\mathfrak{g}_0$  πραγματική ημιαπλή άλγεβρα Lie, τότε η ανάλυση Iwasawa γίνεται:*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\lambda \cap \mathfrak{g}_0, \quad (D.7)$$

όπου  $\mathfrak{a}_0$  είναι ο υπόχωρος που σχηματίζεται από τα μη συμπαγή στοιχεία της υποάλγεβρας Cartan,  $\Sigma^+$  είναι το σύνολο θετικών ριζών και  $\mathfrak{g}^\lambda \equiv \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} | [H, X] = \lambda(H)X\}$  είναι ο υποχώρος που αντιστοιχεί στη ρίζα  $\lambda$  της μιγαδοποίησης της  $\mathfrak{g}_0$ . Το μέρος με το σύμβολο άθροισης είναι το μηδενοδύναμο στην (D.5).

Για άλγεβρες που προκύπτουν από ομάδες πινάκων, η συνήθης περίπτωση στη φυσική, η  $\mathfrak{a}_0$  αποτελείται από διαγώνιους και η  $\mathfrak{n}_0$  από άνω τριγωνικούς πίνακες. Δεδομένου ότι το άθροισμα μετά τη συμπαγή υποάλγεβρα είναι επιλύσιμη υποάλγεβρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ανάλυση για να εκφράσουμε cosets σε πιο απλή μορφή σε σχέση με την ανάλυση Cartan.

Για παράδειγμα, έστω το coset  $SL(2, \mathbb{R})/O(2)$ . Η ανάλυση της  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^1$  δίνει,

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) &= \text{Span} \left\{ H \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

και της  $\mathfrak{o}(2)$ ,

$$\mathfrak{o}(2) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Είναι προφανές ποια είναι η βάση του coset χρησιμοποιώντας τη ανάλυση Cartan, επειδή φέραμε τη βάση της  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  σε μορφή όμοια με αυτή της  $\mathfrak{o}(2)$ , όμως θα συνεχίσουμε στα επόμενα ακολουθώντας τη διαδικασία της ανάλυσης Iwasawa, και θα δούμε ότι δίνει το ίδιο αποτέλεσμα σε αυτή την περίπτωση. Έχουμε  $[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm$ ,  $[E_+, E_-] = H$ , επομένως δεν υπάρχουν αβελιανά ιδεώδη εκτός του  $\{0\}$  και η  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  είναι ημιαπλή, τάξης 1, με υποάλγεβρα Cartan που σχηματίζεται

<sup>1</sup> Αυτή η άλγεβρα είναι γνωστή επίσης ως *άλγεβρα-κλειδί (key algebra)* στην κβαντική βαρύτητα.

από τον  $H$ . Η ανάλυση Cartan είναι  $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  και η Cartan involution είναι η  $\theta(X) = -X^T$ . Εδώ χρησιμεύει η δεύτερη βάση που εμφανίζεται στην ανάλυση της  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  πιο πάνω, καθώς αποτελείται από τα ιδιοανύσματα της  $\theta$ , και προκύπτει εύκολα ότι η συμπαγής υποάλγεβρα αποτελείται από το γεννήτορα της  $\mathfrak{o}(2)$ , ως αναμενόταν, άρα η υποάλγεβρα που είναι μη συμπαγής και υποσύνολο της υποάλγεβρας Cartan έχει βάση τον  $H$  μόνο. Από την ανάλυση Iwasawa συνάγουμε ότι η επιλύσιμη υποάλγεβρα είναι:

$$\text{Span } H \oplus \text{Span } E_+ = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.8})$$

## D.1 Ομογενείς χώροι

**Definition D.1.1.** Η τροχιά (*orbit*) ενός σημείου  $p \in M$  κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετρίας είναι

$$H_p \equiv \{q \in M \mid q = \phi(p) \text{ για μια } \phi \in \text{Isom}(M)\}. \quad (\text{D.9})$$

Αν η τροχιά είναι η  $M$ , τότε ο χώρος είναι *μεταβατικός* (*transitive*).

**Definition D.1.2.** Αν για κάθε ζεύγος σημείων  $p, q \in M$  υπάρχει  $\phi \in \text{Isom}(M)$ , τέτοια ώστε  $\phi(p) = q$ , τότε η  $M$  είναι ένας *μεταβατικός* (*transitive*) ή *ομογενής* (*homogeneous*) χώρος.

# Παράρτημα Ε

## Μη γραμμικά μοντέλα $\sigma$

Ένα μοντέλο  $\sigma$  είναι μια θεωρία από  $d$  συναρτήσεις  $\{\phi^A\}_{A=1}^d$  σε μια  $n$ -διάστατη πολλαπλότητα  $\Sigma$  (domain), τις οποίες θεωρούμε συντεταγμένες μιας  $d$ -διάστατης πολλαπλότητας  $T$  (target). Η δράση είναι της μορφής

$$S[\phi^A, \partial_\mu \phi^A] = \int_\Sigma \epsilon^{h\mu\nu} G_{AB}(\phi(x)) \partial_\mu \phi^A(x) \partial_\nu \phi^B(x) = \int_\Sigma G_{AB} d\phi^A \wedge \star d\phi^B,$$

όπου  $\epsilon$  είναι η μορφή όγκου στο  $\Sigma$ ,  $h_{\mu\nu}$  η μετρική στο  $\Sigma$  και  $G_{AB}(\phi)$  είναι  $(d+1)d/2$  συναρτήσεις, οι οποίες λειτουργούν ως η μετρική του  $T$ . Αν οι συναρτήσεις είναι μη σταθερές, τότε το μοντέλο είναι μη γραμμικό (*non-linear  $\sigma$  model*, NLSM). Πήραν το όνομά τους από μια εφαρμογή στη μελέτη ενός μεσονίου  $\sigma$  από τον Gell-Mann.

Τα μοντέλα  $\sigma$  έχουν πολλές εφαρμογές στη φυσική υψηλών ενεργειών, στη γενική θεωρία σχετικότητας και στην κβαντική βαρύτητα. Η μελέτη τους στη φυσική ως αρμονικές απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων εισήχθη από το Misner 1978· ονομάζονται αρμονικές, επειδή οι εξισώσεις κίνησης των πεδίων δίνουν μη γραμμική γενίκευση των αρμονικών συναρτήσεων,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^A + \Gamma^A_{BC}(\phi) \partial_\mu \phi^B \partial^\mu \phi^C = 0, \quad \Gamma^A_{BC}(\phi) \equiv \frac{1}{2} G^{AD} \left( \frac{\partial G_{DB}}{\partial \phi^C} + \frac{\partial G_{DC}}{\partial \phi^B} - \frac{\partial G_{BC}}{\partial \phi^D} \right).$$

Για εφαρμογές στη γενική θεωρία σχετικότητας βλέπε Mazur 2000, ιδιαιτέρως δε σε σχέση με το θέμα της παρούσης βλέπε Breitenlohner, Maison, and G. Gibbons 1988; Breitenlohner and Maison 2000, και για εφαρμογές στην υπερβαρύτητα βλέπε Freedman and Van Proeyen 2012. Η αξία τέτοιων μοντέλων έγκειται στο ότι διευκολύνουν τη μελέτη διαφόρων μοντέλων με το να απεικονίζουμε γεωδαισιακές της γνωστής πολλαπλότητας-στόχου σε γεωδαισιακές αυτής προς μελέτη, της πολλαπλότητας domain, η οποία συνήθως έχει γνωστές ιδιότητες.

### Ε.1 Φορμαλισμός εσωτερικής μετρικής (internal metric formalism)

Τα επόμενα βασίζονται σε Bachas et al. 2002, lecture 1, §4.3, Wospakrik 2002; Keurentjes 2003; Cremmer et al. 1998; Hörnlund 2011; Kleväng 2010; Tani 2014, Henneaux, Persson, and Spindel 2008, §9.1.3, Hoenselaers and Dietz 1984, p. 276.

Μελετάμε μη γραμμικά μοντέλα  $\sigma$  σε συμμετρικό χώρο  $G/H$ , όπου  $G$  ομάδα Lie με ημιαπλή άλγεβρα Lie  $\mathfrak{g}$  και  $H$  η μέγιστη συμπαγή υποομάδα της με άλγεβρα  $\mathfrak{h}$ . Η  $H$  είναι επίσης γνωστή ως η τοπική ομάδα συμμετρίας βαθμίδος (*local gauge symmetry group*), επειδή η συμμετρία αυτή χρησιμεύει για τη διαμέριση του χώρου κατά τη δημιουργία του coset. Έστω  $V \in G$  ένα αντιπροσωπευτικό του coset. Υποθέτουμε ότι η  $G$  ενεργεί με καθολικό (global) ή άκαμπτο (rigid) μετασχηματισμό, ενώ η  $H$  με τοπικό (local), ο οποίος εξαρτάται από τη θέση. Η μορφή Maurer–Cartan (*Maurer–Cartan form*)  $dV V^{-1}$  είναι μια μορφή που παίρνει τιμές στην άλγεβρα Lie, αναλλοίωτη από τα δεξιά (right-invariant). Η ανάλυση Cartan, η οποία επιτυγχάνεται με την *Cartan involution*

$\theta$ , επ' αυτής δίνει  $dVV^{-1} = K + P$ ,  $K \in \mathfrak{k}$ ,  $P \in \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , όπου  $\mathfrak{k}$  η συμπαγής υποάλγεβρα και  $\mathfrak{p}$  ο υποχώρος με τους μη συμπαγείς γεννήτορες. Η Cartan involution επιτρέπει να διαχωρίσουμε μεταξύ των δύο υποχώρων, ως εξής:

$$P = \frac{1}{2}[dVV^{-1} - \theta(dVV^{-1})], \quad K = \frac{1}{2}[dVV^{-1} + \theta(dVV^{-1})]. \quad (\text{E.1})$$

Κάτω από μετατόπιση από αριστερά (left translation),  $V \mapsto hV$ ,  $h(x) \in H$ , η μορφή Maurer–Cartan μετασχηματίζεται ως  $dVV^{-1} \mapsto h dVV^{-1}h^{-1} + dh h^{-1}$ . Αφού  $h \in \mathfrak{k}$  και  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$  και η Maurer–Cartan ανήκει στην άλγεβρα του στοιχείου  $V$ , πρέπει  $K \mapsto hKh^{-1} + dh h^{-1}$ ,  $P \mapsto hPh^{-1}$ , επομένως το  $K_\mu$  μετασχηματίζεται ως πεδίο βαθμίδος (gauge field).

Σύμφωνα με τα προηγηθέντα, μπορούμε να περιγράψουμε ένα μη γραμμικό μοντέλο  $\sigma$  με ομογενή χώρο-στόχο μέσω των πεδίων  $\phi^a(x)$ , τα οποία απεικονίζουν το χωροχρόνο στο coset. Ένα αντιπροσωπευτικό του coset είναι της μορφής  $V(\phi^a(x)) \in G$ , επομένως  $dVV^{-1} = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} V^{-1} \partial_\mu \phi^a dx^\mu$  και η ανάλυση Cartan δίνει  $K_\mu = \omega_a(\phi) \partial_\mu \phi^a$ ,  $P_\mu = e_a(\phi) \partial_\mu \phi^a$ , όπου  $\omega_a, e_a$  οι πίνακες  $\frac{\partial V}{\partial \phi^a} V^{-1}$ , οι οποίοι αντιστοιχούν στους συμπαγείς και μη συμπαγείς γεννήτορες αντιστοίχως στην αναπαράσταση adjoint. Από αυτές τις εκφράσεις φαίνεται ακόμη ότι τα  $K, P$  είναι οι επαναφορές (pull-backs) από το χώρο-στόχο προς το χωροχρόνο. Η μετρική Cartan–Killing στο  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  είναι  $G_{ab} = \text{Tr}(e_a(\phi)e_b(\phi))$ , επομένως βλέπουμε ότι τα  $e_a(\phi)$  λειτουργούν ως μορφές βάσης στο coset. Επίσης,

$$\text{Tr}(P_\mu P^\mu) = g^{\mu\nu} \text{Tr}(P_\mu P_\nu) = g^{\mu\nu} \text{Tr}(e_a e_b) \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b = g^{\mu\nu} G_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b, \quad (\text{E.2})$$

επομένως η lagrangian του μοντέλου  $\sigma$  παίρνει αυτή τη μορφή, η οποία είναι πιο εύχρηστη για να διερευνήσουμε τις συμμετρίες της.

Ορίζουμε την εσωτερική μετρική (internal metric) ή γενικευμένη μετρική (generalized metric)  $M(\phi) \equiv V^\#(\phi)V(\phi)$ , όπου  $\#$  η γενικευμένη αναστροφή (generalized transpose) ενός πίνακα  $V \in G$ , ορισμένη ούτως ώστε να είναι συμβατή με την Cartan involution της εκάστοτε άλγεβρας, δηλαδή  $X^\# \equiv -\theta(X)$  για  $X \in \mathfrak{g}$ . Η γενικευμένη αναστροφή έχει τις συνήθεις ιδιότητες της αναστροφής ενός πίνακα, δηλαδή είναι involution, περνά από το εκθετικό στο όρισμά του και μετατίθεται με την πράξη αντιστροφής. Η «εσωτερική μετρική»<sup>1</sup> έχει την εξαιρετικώς χρήσιμη ιδιότητα να μένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδος, ενώ μετασχηματίζεται κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς της  $G$ . Πριν προχωρήσουμε στα επόμενα, χρειάζεται να διερευνήσουμε τον ορισμό της γενικευμένης αναστροφής που επάγεται στην ομάδα δεδομένου του ορισμού της στην άλγεβρα. Έστω  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $V \equiv e^X \in G$ . Τότε ορίζουμε<sup>2</sup>,

$$V^\# \equiv e^{X^\#} = e^{-\theta(X)} = \Theta(e^{-X}) = \Theta(V^{-1}),$$

όπου στις δύο τελευταίες σχέσεις με  $\Theta$  εννοούμε την απεικόνιση που επάγει η Cartan involution στην ομάδα<sup>3</sup>. Από την προηγούμενη σχέση συνάγουμε ευθέως ότι  $\Theta(V) = (V^\#)^{-1}$ , επομένως για συμπαγή άλγεβρα  $\mathfrak{su}(n)$ , στην οποία η Cartan involution είναι  $\theta(X) = -X^\dagger$ , η involution που επάγεται στην ομάδα είναι η  $\Theta(V) = (V^\dagger)^{-1}$  και  $M = V^\dagger V$ . Παρατηρούμε ότι σε μετατόπιση από τα αριστερά,  $V \mapsto h(\phi)V$ ,  $M \mapsto V^\dagger h^\dagger h V = M$  και για  $g \in G$  καθολικό μετασχηματισμό από τα δεξιά,  $V \mapsto Vg$ ,  $M \mapsto (Vg)^\dagger Vg = g^\dagger V^\dagger Vg = g^\dagger M g$ .

<sup>1</sup>Είναι πράγματι μετρική της ομάδας, όταν η συμπαγής υποάλγεβρα είναι  $\mathfrak{so}(n)$ ,  $\mathfrak{su}(n)$ .

<sup>2</sup>Ο ορισμός είναι αμφίσημος, καθώς δεν γίνεται διάκριση μεταξύ της δράσης του  $\#$  στην ομάδα ή στην άλγεβρα, όπως συνηθίζεται και για τον ορισμό της Cartan involution. Στην πράξη, είναι προφανές κάθε φορά ποια απεικόνιση εννοείται και δεν εμφανίζεται σύγχυση.

<sup>3</sup>Συνήθως στη μαθηματική και φυσική βιβλιογραφία χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο για την Cartan involution στην άλγεβρα και για αυτή που επάγει στην ομάδα, κάτι που ενδέχεται να προκαλέσει σύγχυση στον αρχάριο αναγνώστη.

Υπάρχει απλούστερος τρόπος να γράψουμε τη lagrangian (E.2), όπως θα δούμε ευθύς αμέσως. Έχουμε,

$$\begin{aligned} M^{-1} dM &= V^{-1}(V^{-1})^\#(dV^\# + V^\# dV) = V^{-1}[(V^{-1})^\# dV^\# + dVV^{-1}]V \\ &= V^{-1}[(dVV^{-1})^\# + dVV^{-1}]V = 2V^{-1}PV, \end{aligned}$$

ύστερα από χρήση της (E.1). Επίσης,

$$V^{-1}P_\mu V V^{-1}P^\mu V = \frac{1}{4}M^{-1}\partial_\mu M M^{-1}\partial^\mu M,$$

και

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P^\mu P_\mu) &= \text{Tr}(V^{-1}P_\mu P^\mu V) = \frac{1}{4} \text{Tr}(M^{-1}\partial_\mu M M^{-1}\partial^\mu M) = -\frac{1}{4} \text{Tr}(M^{-1}\partial_\mu M \partial^\mu M^{-1}M) \\ &= -\frac{1}{4} \text{Tr}(\partial_\mu M \partial^\mu M^{-1}), \end{aligned}$$

καθώς  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$  για  $A, B, C$  τετραγωνικούς πίνακες, και  $\partial_\mu M M^{-1} = -M \partial_\mu M^{-1}$ , το οποίο προκύπτει ύστερα από παραγωγή του ορισμού του αντιστρόφου πίνακα. Εν τέλει, η lagrangian του μοντέλου  $\sigma$  γίνεται,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(\partial_\mu M \partial^\mu M^{-1}) \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}, \quad (\text{E.3})$$

η οποία έχει το εξαιρετικό πλεονέκτημα ότι είναι αναλλοίωτη στη δράση  $G_{\text{global}} \times H_{\text{local}}$ . Πράγματι, για  $g \in G_{\text{global}}$  και  $h \in H_{\text{local}}$  έχουμε  $V \mapsto hV$ ,  $M \mapsto M$  για τη δράση της ομάδας βαθμίδος και  $V \mapsto Vg$ ,  $M \mapsto g^\# M g$  για την καθολική δράση, και το αναλλοίωτο της lagrangian στο συνδυασμό τους είναι προφανές.

# Παράρτημα F

## Διαστατική αναγωγή

### F.1 Διαστατική αναγωγή Kaluza–Klein

Τα επόμενα βασίζονται σε Blau 2014; Grøn and Hervik 2004; C. Pope 2000; Castillo-Felisola 2014. Η θεωρία Kaluza–Klein έγινε γνωστή από τα άρθρα των ομωνύμων φυσικών το 1920 και 1926 σε μια προσπάθεια να ενοποιηθούν τη γενική θεωρία σχετικότητας με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Βασίζεται στην υπόθεση ότι ο χωροχρόνος έχει μία επιπλέον χωρική διάσταση (μπορεί να γενικευθεί σε χρονική), με ένα χωροειδές άνυσμα Killing. Γράφοντας τη δράση Einstein–Hilbert, προκύπτει ότι αυτή καταλήγει στη δράση Einstein–Hilbert σε διάσταση 4 με την προσθήκη του όρου Maxwell, κάτι που ήταν αναπάντεχο τότε και οδήγησε εδώ και μερικές δεκαετίες σε επιπλέον προσπάθειες ενοποίησης δυνάμεων, όπως η θεωρία χορδών. Βασικά μέρη της θεωρίας θεωρούνται προβληματικά και έχει υπάρξει πλήθος προσπαθειών για βελτίωση με αμφίβολο αποτέλεσμα, όμως το μαθηματικό κομμάτι της *διαστατικής αναγωγής κατά Kaluza–Klein* (*Kaluza–Klein dimensional reduction*) είναι ιδιαίτερος χρήσιμο όταν επιχειρούμε να μελετήσουμε ιδιότητες του χωροχρόνου διαμερίζοντάς τον. Ωστόσο, ορισμένα μέρη της θεωρίας έχουν βοηθήσει σημαντικά στην κατανόηση ιδιοτήτων μελανών οπών, βλέπε Gary W. Gibbons and D. Wiltshire 1986; Breitenlohner, Maison, and G. Gibbons 1988.

Στα επόμενα, η πολλαπλότητα<sup>1</sup>  $M = N \times S^1$  είναι διάστασης  $D + 1$ , το καπελάκι συμβολίζει ποσότητες ορισμένες στην  $M$ , η απουσία του ποσότητες ορισμένες στην  $N$ , οι λατινικοί δείκτες αντιστοιχούν στην ορθοκανονική βάση, οι ελληνικοί στη βάση συντεταγμένων, οι δείκτες με κεφαλαία παίρνουν τιμές από  $\{0, 1, \dots, D\}$ , οι δείκτες με μικρά από  $\{0, 1, \dots, D - 1\}$  και η συντεταγμένη που αντιστοιχεί στο άνυσμα Killing είναι η  $z^2$ . Η υπόθεση Kaluza–Klein είναι ότι η πολλαπλότητα έχει τη μορφή  $M = N \times S^1$ , όπου η συντεταγμένη  $z$  αντιστοιχεί σε έναν κύκλο μικρής ακτίνας, σε μια προσπάθεια να ερμηνευθεί το γεγονός της απουσίας πειραματικών δεδομένων για την επιπλέον διάσταση. Στα επόμενα δεν χρειάζεται να είμαστε τόσο λεπτομερείς ή να βασιζόμαστε σε αμφίβολες υποθέσεις· αρκεί ότι η πολλαπλότητα διαμερίζεται με βάση το άνυσμα Killing, με τρόπο παρόμοιο όπως στη διαμέριση  $3 + 1$ .

Η υπόθεση για τη μετρική είναι της μορφής<sup>3</sup>:

$$ds^2 = \hat{g}_{MN} d\hat{x}^M d\hat{x}^N = e^{2\alpha\phi(x)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta\phi(x)} (dz + \mathcal{A}_\mu(x) dx^\mu)^2, \quad (\text{F.1})$$

<sup>1</sup>Η  $M$  θεωρείται ότι είναι *fibre bundle* επί της  $N$  με *fibre*  $S^1 \cong U(1)$ , βλέπε Jost 2009, §1.2.4 για λεπτομέρειες. Άλλος τρόπος να το δει κανείς είναι ότι το άνυσμα Killing ορίζει μονοδιάστατο Lie group  $G_1$  και το  $N$  είναι το coset space  $M/G_1$ .

<sup>2</sup>Ο συμβολισμός είναι παραδοσιακός και όχι συνεπής, π.χ. ισχύει  $z = \hat{x}^z = \hat{x}^{D+1}$ .

<sup>3</sup>Στη θεωρία Kaluza–Klein το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  αναπαριστά υποθετικό σωματίδιο γνωστό ως *dilaton* και το ανυσματικό  $\mathcal{A}_\mu$  είναι γνωστό ως *ανυσματικό πεδίο Kaluza–Klein*.

απ' όπου προκύπτουν,

$$\begin{aligned}\hat{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}, \\ \hat{g}^{\mu z} &= -\mathcal{A}^\mu, \\ \hat{g}^{zz} &= e^{2\phi[(D-3)\alpha-\beta]} + e^{2\phi\alpha(D-3)} \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu.\end{aligned}$$

Η απόδειξη της τελευταίας σχέσης δεν είναι τόσο απλή:

$$\begin{aligned}\hat{g}^{zz} &= \frac{1}{\det \hat{g}_{MN}} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-1}} (e^{2\alpha\phi} g_{\mu_1 1} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_{\mu_1} \mathcal{A}_1) (e^{2\alpha\phi} g_{\mu_2 2} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_{\mu_2} \mathcal{A}_2) \dots \\ &\quad (e^{2\alpha\phi} g_{\mu_{D-1} D-1} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_{\mu_{D-1}} \mathcal{A}_{D-1}) \\ &= \frac{1}{\det \hat{g}_{MN}} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-1}} (e^{2(D-1)\alpha\phi} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} \dots g_{\mu_{D-1} D-1} + e^{2\phi[\beta+(D-2)\alpha]} \mathcal{A}_{\mu_1} \mathcal{A}_1 g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} \\ &\quad \dots g_{\mu_{D-1} D-1} + e^{2\phi[\beta+(D-2)\alpha]} \mathcal{A}_{\mu_2} \mathcal{A}_2 g_{\mu_1 1} g_{\mu_3 3} \dots g_{\mu_{D-1} D-1} + \dots \\ &\quad + e^{2\phi[\beta+(D-2)\alpha]} \mathcal{A}_{\mu_{D-1}} \mathcal{A}_{D-1} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} \dots g_{\mu_{D-2} D-2}) \\ &= e^{2\phi[(D-3)\alpha-\beta]} + e^{2\phi\alpha(D-3)} \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu,\end{aligned}$$

αφού η εξίσωση  $g_{\mu\nu} \mathcal{A}^\nu = \mathcal{A}_\mu$  συνεπάγεται

$$\mathcal{A}^1 = \frac{1}{\det g_{\mu\nu}} \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \dots & \mathcal{A}_{D-1} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2,D-1} \\ g_{31} & g_{32} & \dots & g_{3,D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{D-1,1} & g_{D-1,2} & \dots & g_{D-1,D-1} \end{vmatrix}, \quad \text{κ.ο.κ..}$$

Επίσης προκύπτουν,

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu} &= e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu, \\ \hat{g}_{\mu z} &= e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_\mu, \\ \hat{g}_{zz} &= e^{2\beta\phi}, \\ \det \hat{g}_{MN} &= e^{2\phi[\beta+(D-1)\alpha]} \det g_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από τις προηγούμενες ως εξής:

$$\begin{aligned}\det \hat{g}_{MN} &= \varepsilon^{M_1 M_2 \dots M_D} \hat{g}_{M_1 1} \hat{g}_{M_2 2} \dots \hat{g}_{M_D z} = \varepsilon^{z \mu_2 \dots \mu_D} \hat{g}_{z 1} \hat{g}_{\mu_2 2} \dots \hat{g}_{\mu_D z} + \varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \dots \mu_D} \hat{g}_{\mu_1 1} \hat{g}_{z 2} \hat{g}_{\mu_3 3} \dots \hat{g}_{\mu_D z} \\ &\quad + \dots + \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots z} \hat{g}_{\mu_1 1} \hat{g}_{\mu_2 2} \dots \hat{g}_{z z} \\ &= (-1)^{D-1} \varepsilon^{\mu_2 \mu_3 \dots \mu_D} e^{4\beta\phi} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{\mu_D} (e^{2\alpha\phi} g_{\mu_2 2} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_{\mu_2} \mathcal{A}_2) \dots \\ &\quad + (-1)^{D-2} \varepsilon^{\mu_1 \mu_3 \dots \mu_D} e^{4\beta\phi} \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_{\mu_D} (e^{2\alpha\phi} g_{\mu_1 1} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_{\mu_1} \mathcal{A}_1) \dots + \dots \\ &\quad + \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-1}} e^{2\beta\phi} (e^{2\alpha\phi} g_{\mu_1 1} + e^{2\beta\phi} \mathcal{A}_{\mu_1} \mathcal{A}_1) \dots \\ &= (-1)^{D-1} \varepsilon^{\mu_2 \mu_3 \dots \mu_D} e^{2\phi[2\beta+(D-2)\alpha]} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{\mu_D} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} \dots g_{\mu_{D-1} D-1} \\ &\quad + (-1)^{D-2} \varepsilon^{\mu_1 \mu_3 \dots \mu_D} e^{2\phi[2\beta+(D-2)\alpha]} \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_{\mu_D} g_{\mu_1 1} g_{\mu_3 3} \dots g_{\mu_{D-1} D-1} + \dots + e^{2\phi[\beta+(D-1)\alpha]} \det g_{\mu\nu} \\ &\quad + \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_{D-1}} e^{2\phi[2\beta+(D-2)\alpha]} (\mathcal{A}_{\mu_1} \mathcal{A}_1 g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} \dots g_{\mu_{D-1} D-1} \\ &\quad + \mathcal{A}_{\mu_2} \mathcal{A}_2 g_{\mu_1 1} g_{\mu_3 3} \dots g_{\mu_{D-1} D-1} + \dots + \mathcal{A}_{\mu_{D-1}} \mathcal{A}_{D-1} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} \dots g_{\mu_{D-2} D-2}) \\ &= e^{2\phi[\beta+(D-1)\alpha]} \det g_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον να ελέγξουμε πόσο απλουστεύει τις πράξεις η εισαγωγή ορθοκανονικής βάσης. Ορίζουμε  $\hat{e}^a \equiv e^{\alpha\phi} e^a$ ,  $\hat{e}^z \equiv e^{\beta\phi} (dz + \mathbf{A})$ ,  $\hat{g}_{MN} d\hat{x}^M d\hat{x}^N \equiv \hat{\eta}_{AB} \hat{e}^A \hat{e}^B$ ,  $\hat{\eta}_{AB} \equiv \text{diag} \underbrace{(-1, 1, \dots, 1)}_{D \text{ στοιχεία}}$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} &\equiv \sqrt{|\det \hat{g}_{MN}|} d\hat{x}^0 \wedge d\hat{x}^1 \dots \wedge dz = \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^1 \wedge \dots \wedge \hat{e}^z = e^{[(D-1)\alpha+\beta]\phi} e^0 \wedge e^1 \wedge \dots \wedge (dz + \mathbf{A}) \\ &= e^{[(D-1)\alpha+\beta]\phi} \epsilon \wedge dz = e^{[(D-1)\alpha+\beta]\phi} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dz, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η έκφραση που συνδέει τις δύο ορίζουσες. Παρατηρούμε ότι ο φορμαλισμός διαφορικών μορφών και ορθοκανονικών βάσεων διευκολύνει εξαιρετικώς τη διαμέριση του χωροχρόνου, εξ ου και η διαδεδομένη χρήση του στο συγκεκριμένο πεδίο.

Για να υπολογίσουμε τη δράση Einstein–Hilbert, (B.15), πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη μορφή καμπυλότητας, η οποία απαιτεί τις εξισώσεις δομής Cartan, (B.14). Έχουμε ( $\mathcal{F} \equiv d\mathbf{A}$ ):

$$\begin{aligned} d\hat{e}^a &= \alpha e^{-\alpha\phi} \partial_b \phi \hat{e}^b \wedge \hat{e}^a + \hat{e}^b \wedge \omega^a{}_b, \\ d\hat{e}^z &= \beta \partial_a \phi e^{-\alpha\phi} \hat{e}^a \wedge \hat{e}^z + \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}_{ab} \hat{e}^a \wedge \hat{e}^b, \end{aligned}$$

των οποίων η σύγκριση με τις εξισώσεις δομής δείχνει ότι οι μορφές συνοχής είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{za} &= \beta e^{-\alpha\phi} \partial^a \phi \hat{e}^z + \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^a{}_b \hat{e}^b, \\ \hat{\omega}^{ab} &= \omega^{ab} + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial^b \phi \hat{e}^a - \partial^a \phi \hat{e}^b) - \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^{ab} \hat{e}^z, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα  $\hat{\omega}^{ab} = -\hat{\omega}^{ba}$  για να υπολογίσουμε τον αντισυμμετρικό όρο με τις μερικές παραγώγους. Οι εξωτερικές παράγωγοι των προηγούμενων είναι:

$$\begin{aligned} d\hat{\omega}^{za} &= \beta e^{-2\alpha\phi} \hat{e}^b \wedge \hat{e}^z [\partial_b \partial^a \phi + (\beta - \alpha) \partial_b \phi \partial^a \phi] \\ &\quad + \frac{e^{\phi(\beta-3\alpha)}}{2} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^b [\beta \partial^a \phi \mathcal{F}_{cb} + (\beta - \alpha) \partial_c \phi \mathcal{F}^a{}_b + \partial_c \mathcal{F}^a{}_b] + \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^a{}_b \hat{e}^c \wedge \omega^b{}_c, \\ d\hat{\omega}^{ab} &= d\omega^{ab} + \alpha e^{-2\alpha\phi} (\partial_c \partial^b \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^a - \partial_c \partial^a \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^b) + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial^b \phi \hat{e}^c \wedge \omega^a{}_c - \partial^a \phi \hat{e}^c \wedge \omega^b{}_c) \\ &\quad - \frac{e^{\phi(\beta-3\alpha)}}{2} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^z [2(\beta - \alpha) \partial_c \phi \mathcal{F}^{ab} + \partial_c \mathcal{F}^{ab}] - \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{ab} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^d. \end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα μέρη της μορφής καμπυλότητας είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^{cz} &= \left( \beta e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \hat{e}^z + \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^c{}_b \hat{e}^b \right) \wedge [\omega^a{}_c + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial_c \phi \hat{e}^a - \partial^a \phi \hat{e}_c)] \\ &\quad + \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}^a{}_c \mathcal{F}^c{}_b \hat{e}^z \wedge \hat{e}^b, \\ \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_b &= \omega^a{}_c \wedge \left[ \omega^c{}_b + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial_b \phi \hat{e}^c - \partial^c \phi \hat{e}_b) - \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^c{}_b \hat{e}^z \right] \\ &\quad + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial_c \phi \hat{e}^a - \partial^a \phi \hat{e}_c) \wedge (\omega^c{}_b - \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^c{}_b \hat{e}^z) \\ &\quad + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \hat{e}^a \wedge (\partial_b \phi \hat{e}^c - \partial^c \phi \hat{e}_b) + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial^a \phi \partial^c \phi \hat{e}_c \wedge \hat{e}_b \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^a{}_c \hat{e}^z \wedge [\omega^c{}_b + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial_b \phi \hat{e}^c - \partial^c \phi \hat{e}_b)], \\
\hat{\omega}^a{}_z \wedge \hat{\omega}^z{}_b = & \beta \frac{e^{\phi(\beta-3\alpha)}}{2} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^z (\mathcal{F}_{bc} \partial^a \phi - \mathcal{F}^a{}_c \partial_b \phi) + \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}^a{}_c \mathcal{F}_{bd} \hat{e}^d \wedge \hat{e}^c.
\end{aligned}$$

Οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες της μορφής καμπυλότητας είναι:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{R}}^{az} = & e^{-2\alpha\phi} \hat{e}^z \wedge \hat{e}^b \left[ \beta \partial_b \partial^a \phi + \beta(\beta-2\alpha) \partial_b \phi \partial^a \phi + \frac{e^{3\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}^a{}_c \mathcal{F}^c{}_b \right] \\
& - \frac{e^{\phi(\beta-3\alpha)}}{2} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^b [(\beta-\alpha)(\partial^a \phi \mathcal{F}_{cb} + \partial_c \phi \mathcal{F}^a{}_b) + \partial_c \phi \mathcal{F}^a{}_b] \\
& + \beta \alpha e^{-2\alpha\phi} \partial^c \phi \partial_c \phi \hat{e}^z \wedge \hat{e}^a \\
& + \frac{\alpha e^{\phi(\beta-3\alpha)}}{2} \mathcal{F}^c{}_b \partial_c \phi \hat{e}^b \wedge \hat{e}^a - \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^a{}_b \hat{e}^c \wedge \omega^b{}_c \\
& + \left( \beta e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \hat{e}^z + \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^c{}_b \hat{e}^b \right) \wedge \omega^a{}_c, \\
\hat{\mathbf{R}}^{ab} = & d\hat{\omega}^{ab} + \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^{cb} = \mathbf{R}^{ab} - \omega^a{}_c \wedge \left( \alpha e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \hat{e}^b + \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^{cb} \hat{e}^z \right) \\
& + \alpha e^{-\alpha\phi} \partial_c \phi \hat{e}^a \wedge \left( \omega^c{}_b - \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^c{}_b \hat{e}^z \right) + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \hat{e}^a \wedge (\partial^b \phi \hat{e}^c - \partial^c \phi \hat{e}^b) \\
& + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial^a \phi \partial^c \phi \hat{e}_c \wedge \hat{e}^b - \frac{e^{\phi(\beta-2\alpha)}}{2} \mathcal{F}^a{}_c \hat{e}^z \wedge [\omega^{cb} + \alpha e^{-\alpha\phi} (\partial^b \phi \hat{e}^c - \partial^c \phi \hat{e}^b)] \\
& + \beta \frac{e^{\phi(\beta-3\alpha)}}{2} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^z (\mathcal{F}^b{}_c \partial^a \phi - \mathcal{F}^a{}_c \partial^b \phi) + \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}^a{}_c \mathcal{F}^b{}_d \hat{e}^d \wedge \hat{e}^c \\
& + \alpha e^{-2\alpha\phi} (\partial_c \partial^b \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^a - \partial_c \partial^a \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^b) - \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{ab} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^d.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τα προηγούμενα στη lagrangian της (B.15):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}} = & \frac{1}{(D-2)!} \varepsilon_{A_1 A_2 \dots A_D} \hat{\mathbf{R}}^{A_1 A_2} \wedge \hat{e}^{A_3} \wedge \hat{e}^{A_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{A_D} \\
= & \frac{2}{(D-2)!} \varepsilon_{a_1 z a_2 \dots a_D} \hat{\mathbf{R}}^{a_1 z} \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{a_D} + \frac{1}{(D-3)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{D-1} z} \hat{\mathbf{R}}^{a_1 a_2} \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{a_{D-1}} \wedge \hat{e}^z.
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(D-2)!} \varepsilon_{a_1 z a_3 \dots a_D} \hat{\mathbf{R}}^{a_1 z} \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{a_D} \\
= & \frac{2}{(D-2)!} \varepsilon_{a_1 z a_2 \dots a_D} \left[ e^{-2\alpha\phi} \hat{e}^z \wedge \hat{e}^b \left( \beta \partial_b \partial^{a_1} \phi + \beta(\beta-2\alpha) \partial_b \phi \partial^{a_1} \phi + \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}^{a_1}{}_c \mathcal{F}^c{}_b \right) \right. \\
& \left. + \beta \alpha e^{-2\alpha\phi} \partial^c \phi \partial_c \phi \hat{e}^z \wedge \hat{e}^{a_1} + \beta e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \hat{e}^z \wedge \omega^{a_1}{}_c \right] \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{a_D} \\
= & \frac{2}{(D-2)!} \varepsilon_{a_1 z a_3 \dots a_D} \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 \wedge \dots \wedge \hat{e}^z \left[ e^{-2\alpha\phi} \varepsilon^{z b a_3 a_4 \dots a_D} \left( \beta \partial_b \partial^{a_1} \phi + \beta(\beta-2\alpha) \partial_b \phi \partial^{a_1} \phi \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}^{a_1}_c \mathcal{F}^c_b \Big) + \beta \alpha e^{-2\alpha\phi} \partial^c \phi \partial_c \phi \varepsilon^{za_1 a_3 a_4 \dots a_D} + \beta e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \varepsilon^{zma_3 a_4 \dots a_D} (\omega^{a_1}_c)_m \Big] \\
& = -2\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 \wedge \dots \wedge \hat{e}^z \left[ \beta \partial_b \partial^b \phi + \beta(\beta - 2\alpha) \partial_b \phi \partial^b \phi + \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}^b_c \mathcal{F}^c_b + \beta \alpha (D-1) \partial_b \phi \partial^b \phi + \beta \partial^c \phi (\omega^b_c)_b \right] \\
& = -2e^{[\beta+(n-3)\alpha]\phi} \left[ \beta \partial_b \partial^b \phi + \beta(\beta - 2\alpha) \partial_b \phi \partial^b \phi + \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}^b_c \mathcal{F}^c_b + \beta \alpha (D-1) \partial_b \phi \partial^b \phi \right. \\
& \quad \left. + \beta \partial^c \phi (\omega^b_c)_b \right] \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{D-1} \wedge dz,
\end{aligned}$$

και ο δεϋτερος:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(D-3)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{D-1} z} \hat{\mathbf{R}}^{a_1 a_2} \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^z \\
& = \frac{1}{(D-3)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} z} \left[ \mathbf{R}^{a_1 a_2} - \alpha e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \omega^{a_1}_c \wedge \hat{e}^{a_2} + \alpha e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \hat{e}^{a_1} \wedge \omega_c^{a_2} \right. \\
& \quad \left. + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \hat{e}^{a_1} \wedge (\partial^{a_2} \phi \hat{e}^c - \partial^c \phi \hat{e}^{a_2}) + \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial^{a_1} \phi \partial^c \phi \hat{e}_c \wedge \hat{e}^{a_2} + \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}^{a_1}_c \mathcal{F}^{a_2}_d \hat{e}^d \wedge \hat{e}^c \right. \\
& \quad \left. + \alpha e^{-2\alpha\phi} (\partial_c \partial^{a_2} \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^{a_1} - \partial_c \partial^{a_1} \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^{a_2}) - \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{a_1 a_2} \hat{e}^c \wedge \hat{e}^d \right] \\
& \quad \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{a_{D-1}} \wedge \hat{e}^z \\
& = \frac{1}{(D-3)!} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{D-1} z} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{a_{D-1}} \wedge \hat{e}^z + \frac{\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{D-1} z}}{(D-3)!} \left[ -2\alpha e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi \omega^{a_1}_c \wedge \hat{e}^{a_2} \right. \\
& \quad \left. + 2\alpha e^{-2\alpha\phi} \partial_c \partial^{a_2} \phi \hat{e}^c \wedge \hat{e}^{a_1} + 2\alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \partial^{a_2} \phi \hat{e}^{a_1} \wedge \hat{e}^c - \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \partial^c \phi \hat{e}^{a_1} \wedge \hat{e}^{a_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{2\phi(\beta-2\alpha)}}{4} (\mathcal{F}^{a_1}_c \mathcal{F}^{a_2}_d + \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{a_1 a_2}) \hat{e}^d \wedge \hat{e}^c \right] \wedge \hat{e}^{a_3} \wedge \hat{e}^{a_4} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{D-1} \wedge \hat{e}^z \\
& = e^{\phi[\beta+(D-3)\alpha]} R \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d^{D-1} x dz + \frac{1}{(D-3)!} \left[ -2\alpha e^{-\alpha\phi} \partial^c \phi (\omega^{a_1}_c)_m \varepsilon^{ma_2 \dots a_{D-1} z} \right. \\
& \quad \left. + 2\alpha e^{-2\alpha\phi} \partial_c \partial^{a_2} \phi \varepsilon^{ca_1 a_3 \dots a_{D-1} z} + 2\alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \partial^{a_1} \phi \varepsilon^{a_1 ca_3 \dots a_{D-1} z} - \alpha^2 e^{-2\alpha\phi} \partial_c \phi \partial^c \phi \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_{n-1} z} \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} (\mathcal{F}^{a_1}_c \mathcal{F}^{a_2}_d + \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{a_1 a_2}) \varepsilon^{dca_3 a_4 \dots a_{n-1} z} \right] \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 \wedge \dots \wedge \hat{e}^{n-1} \wedge \hat{e}^z \\
& = e^{\phi[\beta+(D-3)\alpha]} R \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d^{D-1} x dz + \frac{1}{(D-3)!} \left[ -2(D-2)! \alpha \partial^c \phi (\omega^m_c)_m - 2(D-2)! \alpha \partial_c \partial^c \phi \right. \\
& \quad \left. + 2(D-2)! \alpha^2 \partial_c \phi \partial^c \phi - \alpha^2 (D-1)! \partial_c \phi \partial^c \phi + 2(D-3)! \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} (\mathcal{F}^{[d}_c \mathcal{F}^c]_d + \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{[dc]}) \right] \\
& \quad \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 \wedge \dots \wedge \hat{e}^z \\
& = \left[ R - 2(D-2)\alpha (\partial^c \phi (\omega^m_c)_m + \partial_c \partial^c \phi - \alpha \partial_c \phi \partial^c \phi) - \alpha^2 (D-1)(D-2) \partial_c \phi \partial^c \phi \right. \\
& \quad \left. - \frac{3e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}_{cd} \mathcal{F}^{cd} \right] e^{\phi[\beta+(D-3)\alpha]} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{D-1} \wedge dz.
\end{aligned}$$

Επομένως, η lagrangian γίνεται:

$$\hat{\mathcal{L}} = \left[ R - 2[(D-2)\alpha + \beta] \partial^c \phi (\omega^m{}_c)_m - [(D-2)(D-3)\alpha^2 + 2\beta(\beta - 2\alpha) + 2\alpha\beta(D-1)] \partial_a \phi \partial^a \phi \right. \\ \left. - 2[(D-2)\alpha + \beta] \partial^a \partial_a \phi - \frac{e^{2\phi(\beta-\alpha)}}{4} \mathcal{F}^{ab} \mathcal{F}_{ab} \right] e^{\phi[\beta+(D-3)\alpha]} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d^{D-1}x dz,$$

η οποία μοιάζει με τη lagrangian Einstein–Hilbert–Maxwell αν εκλείπει το εκθετικό στο στοιχείο όγκου, δηλαδή για  $\beta = -\alpha(D-3)$ . Επιπλέον, επιθυμητή είναι η κανονικοποίηση του κινητικού όρου του βαθμωτού πεδίου, επομένως  $1/2 = \alpha^2(D-2)(D-3)$ , και παραλείπουμε τους όρους με απόκλιση λόγω συνοριακών συνθηκών, επομένως η τελική μορφή της lagrangian είναι:

$$\hat{\mathcal{L}} = \left( R - \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - \frac{e^{-\phi \sqrt{\frac{2(D-2)}{D-3}}}}{4} \mathcal{F}^{ab} \mathcal{F}_{ab} \right) \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d^{D-1}x dz. \quad (\text{E.2})$$

Επειδή κανένα από τα πεδία εξαρτάται από το  $z$ , η ολοκλήρωση ως προς  $dz$  είναι τετριμμένη και προκύπτει lagrangian για διάσταση  $D-1$ ,  $D \neq 3$ . Μια αφελής κίνηση για να μοιάζει ακόμη περισσότερο με την Einstein–Hilbert–Maxwell στη μικρότερη διάσταση θα ήταν να ορίσουμε  $\phi \equiv 0$ , όμως αυτό είναι ασυνεπές με τις υποθέσεις, όπως αποδεικνύεται από τις εξισώσεις κίνησης· ο μηχανισμός Kaluza–Klein βασίζεται στη σύζευξη των πεδίων dilaton και Kaluza–Klein.

## F.2 Διαστατική αναγωγή διαφορικών μορφών

Έστω διαφορική  $p-1$ -μορφή  $\hat{\mathbf{A}}$ . Η αναγωγή της γίνεται εκφράζοντάς την στη μορφή  $\hat{\mathbf{A}}(x) \equiv \mathbf{A}(x) + \chi(x) \wedge (dz + \mathcal{A}(x))$ , όπου  $\chi$  είναι  $p-2$ -μορφή<sup>4</sup> και  $\mathcal{A}$  το πεδίο Kaluza–Klein. Υπάρχουν και άλλες επιλογές, όμως η συγκεκριμένη επιτρέπει να εκμεταλλευθούμε τη συμμετρία της αναγωγής της μετρικής, ώστε οι εκφράσεις να προκύψουν απλούστερες. Η μορφή πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{F}} \equiv d\hat{\mathbf{A}} = d\mathbf{A} + d\chi \wedge (dz + \mathcal{A}) + \chi \wedge d\mathcal{A} \equiv \mathbf{F} + d\chi \wedge (dz + d\mathcal{A}),$$

όπου ορίσαμε  $\mathbf{F} \equiv d\mathbf{A} + \chi \wedge d\mathcal{A}$ , ώστε να διατηρηθεί η συμμετρία της Kaluza–Klein. Αναπτύσσουμε πάνω στη βάση:

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{p!} \hat{F}_{A_1 A_2 \dots A_p} \hat{e}^{A_1} \wedge \hat{e}^{A_2} \wedge \dots \wedge \hat{e}^{A_p} \\ = \frac{1}{p!} \hat{F}_{a_1 a_2 \dots a_p} e^{p\alpha\phi} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_p} \\ + \frac{1}{(p-1)!} \hat{F}_{a_1 a_2 \dots a_{p-1} z} e^{[(p-1)\alpha+\beta]\phi} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_{p-1}} \wedge (dz + \mathcal{A}) \\ \equiv \frac{1}{p!} F_{a_1 a_2 \dots a_p} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_p} + \frac{1}{(p-1)!} d\chi_{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_{p-1}} \wedge (dz + \mathcal{A}),$$

απ' όπου προκύπτει  $\hat{F}_{a_1 a_2 \dots a_p} = e^{-p\alpha\phi} F_{a_1 a_2 \dots a_p}$ ,  $\hat{F}_{a_1 a_2 \dots a_{p-1} z} = e^{-\phi[(p-1)\alpha+\beta]} d\chi_{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}$ . Επομένως, αν έχουμε όρο  $\star(\hat{F}^2)$  στη lagrangian, η ανηγμένη μορφή είναι:

$$\star(\hat{F}^2) = \hat{\epsilon} \hat{F}^2 = [e^{[(D-1-2p)\alpha+\beta]\phi} F^2 + p e^{[(1+D-2p)\alpha-\beta]\phi} (\partial\chi)^2] \epsilon \wedge dz \\ = [e^{(1-p)2\alpha\phi} F^2 + p e^{2\alpha\phi(D-p-1)} (\partial\chi)^2] \epsilon \wedge dz, \quad (\text{E.3})$$

όπου  $\epsilon(\partial\chi)^2 \equiv (p-1)! d\chi \wedge \star d\chi$  από την (B.6).

<sup>4</sup>Αναπαριστά το υποθετικό σωματίδιο *axion* για  $p=2$  στη θεωρία υπερχορδών.

## Παράρτημα G

### Υπολογισμοί

Τα δυναμικά που προκύπτουν από τη διαστατική αναγωγή της Kerr–Newman είναι:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{R^2}, \\
 \chi &= \tilde{\Phi}_3, \\
 \psi &= -\frac{Q(a^2 + r^2) \cos \theta}{R^2}, \\
 \sigma &= \frac{1}{4} Ma(\cos(3\theta) - 9 \cos \theta) - \frac{a^3 [Ma^2 \cos^2 \theta + r(Q^2 + Mr)] \sin^4 \theta \cos \theta}{R^4}.
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

Το αποτέλεσμα (5.1) στο Garry W. Gibbons, Pang, and C. N. Pope 2013 είναι εσφαλμένως διπλάσιο του προηγούμενου  $\sigma$ .

Τα δυναμικά που προκύπτουν ύστερα από μετασχηματισμό μαγνήτισης είναι:

$$\begin{aligned}
 \varphi &\mapsto -\frac{1}{2} \ln \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{HR^2}, \\
 H &\equiv \frac{R^2 + H_{(1)}B_0 + H_{(2)}B_0^2 + H_{(3)}B_0^3 + H_{(4)}B_0^4}{R^2}, \\
 H_{(1)} &\equiv 2aQr \sin^2 \theta, \\
 H_{(2)} &\equiv \frac{1}{2} \Sigma \sin^2 \theta + \frac{3}{2} Q^2 (a^2 + r^2 \cos^2 \theta), \\
 H_{(3)} &\equiv -\frac{Qa\Delta}{2r} [r^2(3 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta + a^2(1 + \cos^2 \theta)] + \frac{aQ(r^2 + a^2)(1 + \cos^2 \theta)}{2r} \\
 &\quad + \frac{Q^3 a [(2r^2 + a^2) \cos^2 \theta + a^2]}{2r}, \\
 H_{(4)} &\equiv \frac{1}{16} (r^2 + a^2)^2 R^2 \sin^4 \theta + \frac{1}{4} M a^2 r (r^2 + a^2) \sin^6 \theta + \frac{1}{4} M a^2 Q^2 r (\cos^2 \theta - 5) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &\quad + \frac{1}{4} M^2 a^2 [r^2 (\cos^2 \theta - 3)^2 \cos^2 \theta + a^2 (1 + \cos^2 \theta)^2] + \frac{1}{8} Q^2 (r^2 + a^2) (r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &\quad + \frac{1}{16} Q^4 [r^2 \cos^2 \theta + a^2 (1 + \sin^2 \theta)^2] \cos^2 \theta,
 \end{aligned} \tag{G.2}$$

$$\chi \mapsto \frac{\chi_{(0)} + \chi_{(1)}B_0 + \chi_{(2)}B_0^2 + \chi_{(3)}B_0^3}{R^2 H},$$

$$\chi_{(0)} \equiv aQr \sin^2 \theta,$$

$$\chi_{(1)} \equiv \frac{1}{2} (\Sigma \sin^2 \theta + 3Q^2 (a^2 + r^2 \cos^2 \theta)),$$

$$\chi_{(2)} \equiv \frac{3}{4} aQr (r^2 + a^2) \sin^4 \theta + \frac{3}{2} aQM [r^2 (3 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta + a^2 (1 + \cos^2 \theta)] - \frac{3}{4} aQ^3 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$\begin{aligned}
\chi_{(3)} \equiv & \frac{1}{8}R^2(r^2 + a^2)^2 \sin^4 \theta + \frac{1}{2}a^2Mr(r^2 + a^2) \sin^6 \theta - \frac{1}{2}a^2Q^2Mr(5 - \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
& + \frac{1}{2}a^2M^2[r^2(3 - \cos^2 \theta)^2 \cos^2 \theta + a^2(1 + \cos^2 \theta)^2] + \frac{1}{4}Q^2(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
& + \frac{1}{8}Q^4[r^2 \cos^2 \theta + a^2(2 - \cos^2 \theta)^2] \cos^2 \theta, \tag{G.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi & \mapsto -\frac{\psi_{(0)} + \psi_{(1)}B_0 + \psi_{(2)}B_0^2}{R^2H}, \\
\psi_{(0)} & = Q(r^2 + a^2) \cos \theta, \\
\psi_{(1)} & = aM[3r^2 + a^2 - (r^2 - a^2) \cos^2 \theta] \cos \theta - aQ^2r \sin^2 \theta \cos \theta, \tag{G.4} \\
\psi_{(2)} & = -\frac{1}{4}Q(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta \cos \theta + a^2QMr \sin^2 \theta \cos \theta \\
& + a^2(1 + \cos^2 \theta) - \frac{1}{4}Q^3[(r^2 - a^2) \cos^2 \theta + 2a^2] \cos \theta - a^2(1 + \cos^2 \theta).
\end{aligned}$$

Σημειωτέον ότι στο Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013, εξ. B.14 λείπουν ο όρος  $-a^2(1 + \cos^2 \theta)$  στο τέλος της προηγούμενης και το μείον στο κλάσμα στο  $\psi$ . Το λάθος πρόσημο δίνει αντίθετο αποτέλεσμα κατά τον υπολογισμό του φορτίου, εξ. (5.4), και στο Garry W. Gibbons, Pang, and C. N. Pope 2013, υποσημείωση 7 μάλλον προσπάθησαν οι συγγραφείς να υποβαθμίσουν τη διαφορά ως διαφορά προσανατολισμού των συντεταγμένων, ενώ δεν προκύπτει αυτό από τις εκφράσεις σε αυτό το άρθρο και στο Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013, στα οποία οι εκφράσεις είναι ίδιες, ενώ προκύπτουν από αυτές λανθασμένα αποτελέσματα.


Από τα προηγούμενα δυναμικά προκύπτει το  $\omega$ ,

$$\begin{aligned}
\omega & \mapsto \frac{\omega_{(0)} + \omega_{(1)}B_0 + \omega_{(2)}B_0^2 + \omega_{(3)}B_0^3 + \omega_{(4)}B_0^4}{\Sigma}, \\
\omega_{(0)} & \equiv a(2Mr - Q^2), \\
\omega_{(1)} & \equiv -2Qr(r^2 + a^2), \\
\omega_{(2)} & \equiv -\frac{3}{2}aQ^2(r^2 + a^2 + \Delta \cos^2 \theta), \\
\omega_{(3)} & \equiv \frac{1}{2}Qr(r^2 + a^2)[r^2 - a^2 + (r^2 + 3a^2) \cos^2 \theta] + \frac{1}{2}Q^3r[(r^2 + 3a^2) \cos^2 \theta - 2a^2] \\
& + 4QM^2a^2r - 2a^2MQ^3 + QM[r^4 - a^4 + r^2(r^2 + 3a^2) \sin^2 \theta] - \frac{3}{2}QM\Sigma, \\
\omega_{(4)} & \equiv \frac{1}{2}a^3M^3r(3 + \cos^4 \theta) - \frac{1}{16}aQ^6 \cos^4 \theta - \frac{1}{8}aQ^4[r^2(2 + \sin^2 \theta) \cos^2 \theta + a^2(1 + \cos^4 \theta)] \\
& + \frac{1}{16}aQ^2(r^2 + a^2)[r^2(1 - 6 \cos^2 \theta + 3 \cos^4 \theta) - a^2(1 + \cos^4 \theta)] - \frac{1}{4}a^3M^2Q^2(3 + \cos^4 \theta) \\
& + \frac{1}{4}aM^2[r^4(3 - 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) + 2a^2r^2(3 \sin^2 \theta - 2 \cos^4 \theta) - a^4(1 + \cos^4 \theta)] \\
& + \frac{1}{8}aMQ^4r \cos^4 \theta + \frac{1}{4}aMQ^2r[2r^2(3 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta - a^2(1 - 3 \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta)] \\
& + \frac{1}{8}aMr(r^2 + a^2)[r^2(3 + 6 \cos^2 \theta - \cos^4 \theta) - a^2(1 - 6 \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta)] - \frac{1}{128}a\Sigma(12M^2 - 7Q^2). \tag{G.5}
\end{aligned}$$


Στο Garry W. Gibbons, Mujtaba, and C. N. Pope 2013, εξ. (B.8) λείπουν ο όρος  $-3QM\Sigma/2$  στο  $\omega_{(3)}$  και ο όρος  $-a\Sigma(12M^2 - 7Q^2)/128$  στο  $\omega_{(4)}$ .

# Παράρτημα Η

## Κώδικας Mathematica

Το αρχείο που ακολουθεί περιλαμβάνει τον πλήρη κώδικα για το κυρίως μέρος των υπολογισμών της μαγνητισμένης Kerr–Newman: 

### Η.1 Θεωρία ομάδων

Το αρχείο που ακολουθεί περιλαμβάνει τον κώδικα για τους υπολογισμούς στη θεωρία ομάδων: 

Ακολουθούν οι κυριότερες συναρτήσεις για τους υπολογισμούς στη θεωρία ομάδων.

```
commutator[A_, B_] := A.B - B.A;

e[i_, j_] := Normal[SparseArray[{i, j} -> 1, {3,3}]];
(*Weyl basis: Define the matrix with everything zero except for a 1 at (i,j)*)

multiplicationTable[basis_] :=
  Outer[LinearSolve[Transpose[Flatten /@ Values[basis]], Flatten[commutator[#1, #2]]] &,
    Values@basis, Values@basis, 1][.Keys[basis]
(*Basis must be an association*)

adjoint[X_, basis_] := Outer[Normalize[Flatten[#1]]][Conjugate]
  [.Normalize[Flatten[commutator[X, #2]]] &, Values@basis, Values@basis, 1]

CKmetric[basis_] := Outer[Tr[adjoint[#1, basis][.adjoint[#2, basis]]] &,
  Values@basis, Values@basis, 1]
```

### Η.2 Απλοποιήσεις

Ακολουθούν οι συναρτήσεις απαραίτητες για τις απλοποιήσεις στους υπολογισμούς, ώστε να ολοκληρωθούν σε λογικό χρονικό πλαίσιο.

```
fastConjugate[x_] := Map[Simplify[Conjugate[#]] &, x, {-1}];

Simplify[CapitalSigma][a_] := Module[{x, y},
  Simplify[a /. {(Rotation^2 + r[]^2)^2 -
    Rotation^2 (Charge^2 + Rotation^2 - 2 Mass r[] +
    r[]^2) Sin[Theta][]^2 -> x,
    Csc[Theta][]^2 (Rotation^2 + r[]^2)^2 -
```

```

Rotation^2 (Charge^2 + Rotation^2 - 2 Mass r[] + r[]^2) -> y,
Conjugate[Sqrt[CapitalSigma]] -> Sqrt[CapitalSigma],
Assumptions -> {x > 0, y > 0,
Sin[Theta] > 0} /. {x -> CapitalSigma,
y -> Csc[Theta]^2 (Rotation^2 + r[]^2)^2 -
Rotation^2 (Charge^2 + Rotation^2 - 2 Mass r[] + r[]^2)}

```

### H.3 Υπολογισμοί

Η integrateForm παίρνει ως όρισμα τη συνιστώσα  $r$  και τη συνιστώσα  $\theta$  της μορφής.

```

integrateForm[x_, y_] := With[{z = Integrate[x, r[]]}, z +
Integrate[y - SubscriptBox[PartialD],
(Theta)]z, Theta];

```

## Παραπομπές σε άρθρα

- Baez, Nora Bretón and Alberto García Díaz (1986). “The most general magnetized Kerr–Newman metric”. In: *Journal of Mathematical Physics* 27.2, pp. 562–563. DOI: 10.1063/1.527208. URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/27/2/10.1063/1.527208> (cit. on p. 9).
- Balazs, N.L. and A. Voros (1986). “Chaos on the pseudosphere”. In: *Physics Reports* 143.3, pp. 109–240. ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/0370-1573(86)90159-6. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157386901596> (cit. on p. 23).
- Bardeen, J. M. (Apr. 1970). “Kerr Metric Black Holes”. In: *Nature* 226, pp. 64–65. DOI: 10.1038/226064a0 (cit. on p. 10).
- Bičák, Jiří and Václav Janiš (1985). “Magnetic fluxes across black holes”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 212.4, pp. 899–915. DOI: 10.1093/mnras/212.4.899. eprint: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/212/4/899.full.pdf+html>. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/212/4/899.abstract> (cit. on p. 10).
- Blandford, R. D. and R. L. Znajek (1977). “Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 179.3, pp. 433–456. DOI: 10.1093/mnras/179.3.433. eprint: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/179/3/433.full.pdf+html>. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/179/3/433.abstract> (cit. on pp. 10, 17).
- Breitenlohner, Peter and Dieter Maison (2000). “On Nonlinear  $\sigma$ -Models Arising in (Super-)Gravity”. In: *Communications in Mathematical Physics* 209.3, p. 785. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/s002200050038. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s002200050038> (cit. on p. 51).
- Breitenlohner, Peter, Dieter Maison, and Gary Gibbons (1988). “4-Dimensional black holes from Kaluza-Klein theories”. In: *Communications in Mathematical Physics* 120.2, p. 295. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/BF01217967. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01217967> (cit. on pp. 12, 51, 54).
- Carter, Brandon (Oct. 1968). “Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields”. In: *Physical Review* 174, pp. 1559–1571. DOI: 10.1103/PhysRev.174.1559 (cit. on p. 14).
- Chruściel, Piotr T., João Lopes Costa, and Markus Heusler (2012). “Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond”. In: *Living Reviews in Relativity* 15.7. URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2012-7> (cit. on pp. 22, 26).
- Cremmer, E. et al. (Aug. 1998). “Dualisation of Dualities, I”. In: *Nucl.Phys.B* 523, pp. 73–144. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00136-9. arXiv: hep-th/9710119v2 [hep-th]. URL: <http://arxiv.org/pdf/hep-th/9710119v2> (cit. on p. 51).
- Dessart, L. et al. (2008). “The Proto-Neutron Star Phase of the Collapsar Model and the Route to Long-Soft Gamma-Ray Bursts and Hypernovae”. In: *The Astrophysical Journal Letters* 673.1, p. L43. URL: <http://stacks.iop.org/1538-4357/673/i=1/a=L43> (cit. on p. 18).
- Díaz, Alberto García (1985). “Magnetic generalization of the Kerr–Newman metric”. In: *Journal of Mathematical Physics* 26.1, pp. 155–156. DOI: 10.1063/1.526777. URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/26/1/10.1063/1.526777> (cit. on p. 9).



- Ellis, G. F. R. and B. G. Schmidt (1977). "Singular space-times". In: *General Relativity and Gravitation* 8.11, p. 915. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/BF00759240. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00759240> (cit. on p. 34).
- Ernst, Frederick J. (Mar. 1968). "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem". In: *Phys. Rev.* 167, pp. 1175–1178 (cit. on p. 23).
- (1976). "Black holes in a magnetic universe". In: *Journal of Mathematical Physics* 17.1, pp. 54–56. DOI: 10.1063/1.522781. URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/17/1/10.1063/1.522781> (cit. on p. 30).
- Ernst, Frederick J. and Walter J. Wild (1976). "Kerr black holes in a magnetic universe". In: *Journal of Mathematical Physics* 17.2, pp. 182–184. DOI: 10.1063/1.522875. URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/17/2/10.1063/1.522875> (cit. on p. 9).
- Geroch, Robert (1968). "What is a singularity in general relativity?" In: *Annals of Physics* 48.3, pp. 526–540 (cit. on p. 34).
- (1973). "ENERGY EXTRACTION\*". In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 224.1, pp. 108–117. ISSN: 1749-6632. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1973.tb41445.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1749-6632.1973.tb41445.x> (cit. on p. 16).
- Geroch, Robert and Jennie Traschen (Aug. 1987). "Strings and other distributional sources in general relativity". In: *Phys. Rev. D* 36, pp. 1017–1031 (cit. on p. 34).
- Gibbons, Garry W., A. H. Mujtaba, and Chris N. Pope (Jan. 2013). "Ergoregions in Magnetised Black Hole Spacetimes". In: *Classical and Quantum Gravity* 30.12, p. 125008. arXiv: 1301.3927v2 [gr-qc]. URL: <http://iopscience.iop.org/0264-9381/30/12/125008/article> (cit. on pp. 22, 32, 33, 35, 61).
- Gibbons, Garry W., Yi Pang, and Chris N. Pope (Oct. 2013). "Thermodynamics of Magnetised Kerr-Newman Black Holes". In: *Phys. Rev. D* 89, p. 044029. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.044029. arXiv: 1310.3286v1 [hep-th]. URL: <http://arxiv.org/pdf/1310.3286v1> (cit. on pp. 21, 32, 33, 60, 61).
- Gibbons, Gary W. (1975). "Vacuum polarization and the spontaneous loss of charge by black holes". In: *Communications in Mathematical Physics* 44.3, p. 245. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/BF01609829. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01609829> (cit. on p. 17).
- (1976). "Black Holes, Magnetic Fields And Particle Creation". In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 177.1, 37P–41P. DOI: 10.1093/mnras/177.1.37P. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/177/1/37P.abstract> (cit. on p. 17).
- Gibbons, Gary W. and D.L. Wiltshire (1986). "Black holes in Kaluza-Klein theory". In: *Annals of Physics* 167.1, pp. 201–223. ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/S0003-4916(86)80012-4. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491686800124> (cit. on p. 54).
- Harrison, B. (Apr. 1965). "Electromagnetic Solutions of the Field Equations of General Relativity". In: *Phys. Rev.* 138, B488–B494. DOI: 10.1103/PhysRev.138.B488. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.138.B488> (cit. on p. 28).
- Hehl, Friedrich W., Paul von der Heyde, et al. (July 1976). "General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects". In: *Rev. Mod. Phys.* 48 (3), pp. 393–416. DOI: 10.1103/RevModPhys.48.393. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.393> (cit. on pp. 11, 44).
- Henneaux, Marc, Daniel Persson, and Philippe Spindel (Apr. 2008). "Spacelike Singularities and Hidden Symmetries of Gravity". In: *Living Reviews in Relativity* 11.1. arXiv: 0710.1818v2 [hep-th]. URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-1> (cit. on pp. 48, 51).
- Heyl, Jeremy S. (Feb. 2001). "Electron-positron jets from a critically magnetized black hole". In: *Phys. Rev. D* 63 (6), p. 064028. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.064028. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.064028> (cit. on p. 17).

- Hiscock, William A. (1981). "On black holes in magnetic universes". In: *Journal of Mathematical Physics* 22.8, pp. 1828–1833. DOI: 10.1063/1.525130. URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/22/8/10.1063/1.525130> (cit. on p. 34).
- Ipsier, James R. (Aug. 1971). "Electromagnetic Test Fields Around a Kerr-Metric Black Hole". In: *Phys. Rev. Lett.* 27, pp. 529–531 (cit. on p. 13).
- Kerr, Roy P. (Sept. 1963). "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics". In: *Phys. Rev. Lett.* 11 (5), pp. 237–238. DOI: 10.1103/PhysRevLett.11.237. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237> (cit. on p. 9).
- Keurentjes, Arjan (Jan. 2003). "The group theory of oxidation". In: *Nucl. Phys. B* 658, pp. 303–347. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00178-0. arXiv: hep-th/0210178v3 [hep-th]. URL: <http://arxiv.org/pdf/hep-th/0210178v3> (cit. on p. 51).
- Kim, Hongsu, Chul Hoon Lee, and Hyun Kyu Lee (Feb. 2001). "Nonvanishing magnetic flux through the slightly charged Kerr black hole". In: *Phys. Rev. D* 63 (6), p. 064037. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.064037. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.064037> (cit. on p. 10).
- Kinnersley, William (1973). "Generation of stationary Einstein-Maxwell fields". In: *Journal of Mathematical Physics* 14.5, pp. 651–653 (cit. on p. 28).
- Komar, Arthur (Feb. 1963). "Positive-Definite Energy Density and Global Consequences for General Relativity". In: *Phys. Rev.* 129 (4), pp. 1873–1876. DOI: 10.1103/PhysRev.129.1873. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.129.1873> (cit. on p. 21).
- Komissarov, S. S. and Jonathan C. McKinney (2007). "The 'Meissner effect' and the Blandford–Znajek mechanism in conductive black hole magnetospheres". In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 377.1, pp. L49–L53. DOI: 10.1111/j.1745-3933.2007.00301.x. eprint: <http://mnrasl.oxfordjournals.org/content/377/1/L49.full.pdf+html>. URL: <http://mnrasl.oxfordjournals.org/content/377/1/L49.abstract> (cit. on p. 10).
- Lee, Hyun Kyu, R.A.M.J. Wijers, and G.E. Brown (2000). "The Blandford–Znajek process as a central engine for a gamma-ray burst". In: *Physics Reports* 325.3, pp. 83–114. ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00084-8. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157399000848> (cit. on p. 18).
- Li, Li-Xin (Jan. 2000). "Electromagnetic Energy for a Charged Kerr Black Hole in a Uniform Magnetic Field". In: *Phys. Rev. D* 61, p. 084033. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.084033. arXiv: astro-ph/0001494v1 [astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0001494v1> (cit. on p. 18).
- Mazur, Pawel O. (1982). "Proof of uniqueness of the Kerr-Newman black hole solution". In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 15.10, p. 3173. URL: <http://stacks.iop.org/0305-4470/15/i=10/a=021> (cit. on p. 16).
- (1983). "A Relationship Between the Electrovacuum Ernst Equations and Nonlinear  $\sigma$ -Model". In: *Acta Phys. Polon.* B14, pp. 219–234 (cit. on p. 26).
- Melvin, M.A. (1964). "Pure magnetic and electric geons". In: *Physics Letters* 8.1, pp. 65–68. ISSN: 0031-9163 (cit. on p. 30).
- Misner, Charles W. (Dec. 1978). "Harmonic maps as models for physical theories". In: *Phys. Rev. D* 18, pp. 4510–4524. DOI: 10.1103/PhysRevD.18.4510. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.4510> (cit. on p. 51).
- Neugebauer, G. and D. Kramer (1969). "Eine Methode zur Konstruktion stationärer EINSTEIN-MAXWELL-Felder". In: *Annalen der Physik* 479.1-2, pp. 62–71. ISSN: 1521-3889. DOI: 10.1002/andp.19694790108 (cit. on p. 28).
- Papapetrou, Achille (1966). "Champs gravitationnels stationnaires a symetrie axiale". In: *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Theor.* IV, pp. 83–105 (cit. on p. 11).
- Peebles, P. J. E. (1969). "Origin of the angular momentum of galaxies". In: *The Astrophysical Journal* 155, p. 393. URL: <http://adsabs.harvard.edu/full/1969ApJ...155..393P> (cit. on p. 9).

- Szabados, László B. (2009). “Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in General Relativity”. In: *Living Reviews in Relativity* 12.4. URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2009-4> (cit. on p. 21).
- Wald, Robert M. (Sept. 1974). “Black hole in a uniform magnetic field”. In: *Phys. Rev. D* 10, pp. 1680–1685. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.1680. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.1680> (cit. on pp. 9, 11, 12).
- Znajek, RL (1977). “Black hole electrodynamics and the Carter tetrad”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 179.3, pp. 457–472. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/179/3/457.short> (cit. on p. 14).

## Λοιπή βιβλιογραφία

- Arnold, Vladimir Igorevich (1989). *Mathematical methods of classical mechanics*. Ed. by S. Axler, F.W. Gehring, and K.A. Ribet. 2nd ed. Graduate texts in mathematics 60. Springer (cit. on pp. 41, 45).
- Bachas, C., ed. (Aug. 2002). *Unity from duality: Gravity, gauge theory and strings*. Les Houches 76. NATO Advanced Study Institute. Grenoble: Springer Verlag (cit. on p. 51).
- Baumgarte, T. W. and S. L. Shapiro (June 2010). *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press. ISBN: 9780521514071 (cit. on p. 19).
- Besse, Arthur L. (2008). *Einstein Manifolds*. Classics in mathematics. Springer-Verlag (cit. on p. 39).
- Bičák, Jiří and Tomáš Ledvinka (2014). *General Relativity, Cosmology and Astrophysics: Perspectives 100 Years After Einstein's Stay in Prague*. Vol. 177. Fundamental theories of physics. Springer. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=Ax0qBAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=general+relativity,+cosmology+and+astrophysics+perspectives+bicak&ots=DaUzf0bxj4&sig=\\_z1koUtMGte4NPFH2Fh2TxRd2eA](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=Ax0qBAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=general+relativity,+cosmology+and+astrophysics+perspectives+bicak&ots=DaUzf0bxj4&sig=_z1koUtMGte4NPFH2Fh2TxRd2eA) (cit. on p. 10).
- Blau, Matthias (Oct. 2014). *Lecture notes on general relativity*. Institut für theoretische Physik. URL: <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf> (cit. on p. 54).
- Carmeli, Moshe (1977). *Group theory and general relativity: representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field*. McGraw-Hill. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=GmGal5SEyqAC&oi=fnd&pg=PR13&dq=group+theory+and+general+relativity+carmeli&ots=tcdz1-ubi\\_&sig=zGfYVE\\_PNc201AzpvdI4aWb7D5o](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=GmGal5SEyqAC&oi=fnd&pg=PR13&dq=group+theory+and+general+relativity+carmeli&ots=tcdz1-ubi_&sig=zGfYVE_PNc201AzpvdI4aWb7D5o) (cit. on p. 47).
- Castillo-Felisola, Oscar (Sept. 2014). *Differential Geometry, Gravitation and Particle Physics*. 15. Universidad Técnica Federico Santa María. 64 pp. URL: <https://sites.google.com/site/ocastillofelisola/Home/academic/gravpart> (visited on 10/19/2015) (cit. on p. 54).
- Clarke, Christopher James Seaton (1993). *The analysis of space-time singularities*. Cambridge lecture notes in physics 1. Cambridge University Press. URL: <http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=aeUADsSiC1QC&oi=fnd&pg=PR11&dq=analysis+of+space-time+singularities+clarke&ots=JeEWKw5f0w&sig=0mdHi1fYvEQqC3qIhVwZUTjJI> (cit. on p. 34).
- Combesque, Monique and Didier Robert (2012). *Coherent States and Applications in Mathematical Physics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer. ISBN: 9789400701953 (cit. on p. 22).
- Dermer, Charles D. and Govind Menon (Sept. 2009). *High Energy Radiation from Black Holes. Gamma Rays, Cosmic Rays, and Neutrinos*. English. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, p. 568. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7rph4> (cit. on p. 17).
- DeWitt, Cécile and Bryce Seligman DeWitt, eds. (1973). *Black holes*. Gordon and Breach Science Publishers, Inc. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=16Fpu06h3A4C&oi=fnd&pg=PR6&dq=black+holes+dewitt&ots=C54NCB-Rib&sig=GXSggbL7LWnwd\\_9ursiVAPD\\_y3I](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=16Fpu06h3A4C&oi=fnd&pg=PR6&dq=black+holes+dewitt&ots=C54NCB-Rib&sig=GXSggbL7LWnwd_9ursiVAPD_y3I) (cit. on pp. 14, 16).
- Dray, Tevian (2012). *The Geometry of Special Relativity*. CRC Press. ISBN: 9781466510470 (cit. on p. 23).
- Erdmann, Karin and Mark Wildon (2006). *Introduction to Lie Algebras*. Springer Undergraduate Mathematics. Springer. ISBN: 9781846280405 (cit. on p. 47).

- Falanga, Maurizio et al., eds. (2015). *The Physics of Accretion Onto Black Holes*. Space Sciences Series of ISSI 49. Springer. URL: <http://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-1-4939-2227-7.pdf> (cit. on p. 10).
- Felice, Fernando De and Donato Bini (2010). *Classical Measurements in Curved Space-Times*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=50cPMI0RRk0C&oi=fnd&pg=PR7&dq=classical+measurements+in+curved+space-times+felice&ots=f\\_L5TYBv-f&sig=X8c0G4Gv\\_72X4f0lKlumomopmu0](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=50cPMI0RRk0C&oi=fnd&pg=PR7&dq=classical+measurements+in+curved+space-times+felice&ots=f_L5TYBv-f&sig=X8c0G4Gv_72X4f0lKlumomopmu0) (cit. on p. 14).
- Frankel, Theodore (2012). *The geometry of physics*. 3rd ed. Cambridge University Press, p. 721 (cit. on pp. 33, 39, 41).
- Frè, Pietro Giuseppe (2013). *Gravity, a Geometrical Course*. Vol. Black holes, cosmology and introduction to supergravity. 2. Springer. DOI: 10.1007/978-94-007-5443-0 (cit. on p. 48).
- Frè, Pietro Giuseppe et al., eds. (1999). *Classical and quantum black holes*. Studies in high energy physics, cosmology and gravitation. Institute of physics publishing (cit. on p. 48).
- Freedman, D. Z. and A. Van Proeyen (Apr. 2012). *Supergravity*. Cambridge University Press (cit. on p. 51).
- Frolov, Valeri P. and Igor Dmitrievich Novikov (1998). *Black hole physics: basic concepts and new developments*. Vol. 96. Fundamental theories of physics. Kluwer Academic Publishers. URL: <http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=n0kHI6CVWZUC&oi=fnd&pg=PR19&dq=introduction+to+black+hole+frolov&ots=9dNFlp-ctR&sig=h6zaAobxJ8UGTdyWxjQ645hXs24> (cit. on pp. 16, 32).
- Fuchs, Jürgen and Christoph Schweigert (1997). *Symmetries, Lie algebras and representations: A graduate course for physicists*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=B\\_JQryjNYyAC&oi=fnd&pg=PR15&dq=symmetries,+lie+algebras+and+representations+fuchs&ots=Xsv\\_7Ye4qc&sig=HKVa0Bwz2c4LaGrv2rLD0iY72w0](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=B_JQryjNYyAC&oi=fnd&pg=PR15&dq=symmetries,+lie+algebras+and+representations+fuchs&ots=Xsv_7Ye4qc&sig=HKVa0Bwz2c4LaGrv2rLD0iY72w0) (cit. on p. 47).
- Gallier, Jean (May 9, 2015). *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*. University of Pennsylvania. 807 pp. URL: <http://www.seas.upenn.edu/~jean/diffgeom.pdf> (visited on 09/18/2015) (cit. on pp. 24, 47).
- Gal'tsov, D. V. (Aug. 1996). *Square of General Relativity*. arXiv: gr-qc/9608021v1 [gr-qc]. URL: <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9608021v1> (cit. on p. 28).
- Gamelin, Theodore W. and Robert Everist Greene (1999). *Introduction to topology*. 2nd ed. Dover (cit. on p. 13).
- Gelfand, I.M., R. A. Minlos, and Z. Ya. Shapiro (1963). *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*. Trans. from the Russian by G. Cummins and T. Boddington. The Macmillan Company. ISBN: 9780080100692 (cit. on p. 24).
- Georgi, Howard (1999). *Lie Algebras in Particle Physics*. 2nd ed. Westview press (cit. on p. 47).
- Gibbons, Garry W. (Jan. 2011). *Part III: Applications of Differential Geometry to Physics*. DAMTP Cambridge (cit. on p. 39).
- Gilmore, Robert (2005). *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Dover (cit. on pp. 24, 47).
- (2008). *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers, and Chemists*. Cambridge University Press. DOI: 10.1063/1.3099582 (cit. on p. 47).
- Göckeler, M. and T. Schücker (Oct. 1989). *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*. Cambridge University Press. ISBN: 0521378214 (cit. on p. 37).
- Griffiths, J. B. and J. Podolský (Aug. 2009). *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press (cit. on p. 30).

- Grøn, Øyvind and Sigbjørn Hervik (2004). *Einstein's general theory of relativity: with modern applications in cosmology*. Springer (cit. on pp. 39, 54).
- Hall, Brian C. (2004). *Lie groups, Lie algebras, and representations - An elementary introduction*. Ed. by S. Axler, F. W. Gehring, and K. A. Ribet. corrected second printing. Graduate texts in mathematics 222. Springer-Verlag (cit. on p. 47).
- Hawking, S. W. and G. F. R. Ellis (1973). *The large scale structure of space-time*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press (cit. on p. 19).
- Hehl, Friedrich W., Claus Kiefert, and Ralph J.K. Metzler, eds. (1998). *Black Holes: Theory and Observation*. Lecture Notes in Physics 179. W.E. Heraeus Seminar. Springer. ISBN: 9783540651581 (cit. on pp. 22, 26).
- Hejda, Filip (2013). "Particles and fields in curved spacetimes (selected problems)". MA thesis. Prague: Charles University (cit. on p. 33).
- Helgason, Sigurdur (1978). *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press (cit. on pp. 47–49).
- Heusler, M. (July 1996). *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge lecture notes in physics 6. Cambridge University Press (cit. on p. 23).
- Hoenselaers, C. and W. Dietz, eds. (1984). *Solutions of Einstein's equations: techniques and results: proceedings of the International seminar on exact solutions of Einstein's equations, held in Retzbach, Germany, November 14-18, 1983*. Springer-Verlag. ISBN: 9783540133667 (cit. on p. 51).
- Hörlund, Josef Lindman (2011). "Sigma-models and Lie group symmetries in theories of gravity". PhD thesis. Bruxelles, Belgique: Université Libre de Bruxelles (cit. on p. 51).
- Iachello, Francesco (2015). *Lie Algebras and Applications*. 2nd ed. Lecture Notes in Physics 891. Springer. ISBN: 9783642071621 (cit. on p. 47).
- Jeevanjee, Nadir (2011). *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*. Birkhäuser Boston (cit. on p. 47).
- Jost, Jürgen (2009). *Geometry and Physics*. Springer. ISBN: 9783642005404 (cit. on p. 54).
- Kiefer, Claus (2007). *Quantum Gravity*. 2nd ed. International series of monographs on physics. Oxford University Press (cit. on p. 19).
- Kleväng, Oscar (Oct. 2010). "Automorphic Forms in String Theory". MA thesis. Chalmers University of Technology. 126 pp. (cit. on p. 51).
- Knapp, Anthony W. (2002). *Lie Groups - Beyond an Introduction*. 2nd ed. Progress in Mathematics 140. Birkhäuser (cit. on pp. 47–49).
- Kosmann-Schwarzbach, Yvette (2010). *Groups and Symmetries: From Finite Groups to Lie Groups*. Universitext. Springer. ISBN: 9780387788654 (cit. on p. 47).
- Kouveliotou, Chryssa, Ralph A.M.J. Wijers, and Stanford E. Woosley, eds. (2012). *Gamma-ray bursts*. 51. Cambridge University Press. ISBN: 9780521662093 (cit. on p. 18).
- Lyne, Andrew G. and Francis Graham-Smith (July 2005). *Pulsar Astronomy*. Cambridge University Press. ISBN: 9780511844584. DOI: 10.1017/CB09780511844584 (cit. on p. 18).
- Martín-García, José M. (2015). *xAct. Efficient tensor computer algebra for Mathematica*. Version 1.1.2. URL: <http://www.xact.es/index.html> (cit. on pp. 2, 20).
- Mazur, Pawel O. (Dec. 2000). "Black Hole Uniqueness Theorems". In: *Proceedings of the 11th International Conference on General Relativity and Gravitation*. Ed. by M. A. H. MacCallum. International Conference on General Relativity and Gravitation. Stockholm: Cambridge University Press, pp. 130–157. arXiv: hep-th/0101012v1 [hep-th]. URL: <http://arxiv.org/pdf/hep-th/0101012v1> (cit. on pp. 16, 51).
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. 2nd ed. Graduate student series in physics. Institute of physics publishing (cit. on pp. 38, 41, 45).

- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics v. 103. Academic Press. ISBN: 9780125267403. URL: <http://books.google.gr/books?id=CGk1eRSjFIIC> (cit. on pp. 16, 24).
- Ortin, Tomas (2004). *Gravity and strings*. Cambridge University Press (cit. on p. 22).
- Penrose, Roger and Wolfgang Rindler (1987). *Spinors and Space-Time*. Vol. Two-spinor calculus and relativistic fields. 1. Cambridge University Press (cit. on p. 10).
- Petersen, Peter (2006). *Riemannian geometry*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 171. Springer. URL: <http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=9cekXdo52hEC&oi=fnd&pg=PR7&dq=riemannian+geometry+petersen&ots=lDE4Gg2Dn5&sig=mAYa5DJT5YUBRyR5n0Yw5WgQe0Y> (cit. on p. 23).
- Pope, Chris (Sept. 15, 2015). *Geometry and topology in physics II. Applications*. Texas A&M university. URL: <http://people.physics.tamu.edu/pope/geomlec.pdf> (visited on 09/15/2015) (cit. on p. 48).
- (2000). *Kaluza-Klein theory*. Texas A&M university. URL: <http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf> (cit. on p. 54).
- (2008). *Geometry and group theory*. Texas A&M university (cit. on p. 29).
- Punsly, Brian (2008). *Black Hole GravitoHydroMagnetics*. 2nd ed. Astrophysics and Space Science Library 355. Springer (cit. on pp. 16, 18).
- Reall, Harvey (July 2008). *Black holes*. Cambridge University (cit. on p. 34).
- Renteln, Paul (2014). *Manifolds, Tensors, and Forms: An Introduction for Mathematicians and Physicists*. Cambridge University Press (cit. on p. 38).
- Schwarz, Albert S. (2002). *Topology for Physicists*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer (cit. on p. 13).
- Serre, Jean-Pierre (2001). *Complex semisimple Lie algebras*. reprint of the 1987 edition. Springer monographs in mathematics. Springer Science & Business Media. URL: <http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=7AHsUrooSsC&oi=fnd&pg=PA1&dq=complex+semisimple+lie+algebras+serre&ots=nvUdcFLie-&sig=Qp0A3euTK2A-f01nshi-U0jL8x0> (cit. on pp. 47, 49).
- Sexl, Roman U. and Helmuth K. Urbantke (2001). *Relativity, groups, particles. Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics*. Springer physics. Wien: Springer Verlag. ISBN: 9783211834435 (cit. on p. 47).
- Skea, James F. (Aug. 5, 1994). *Applications of SHEEP*. Queen Mary College. 161 pp. URL: <http://www.computeralgebra.nl/systemsoverview/special/tensoranalysis/sheep/shpdrv.ps.gz> (visited on 10/15/2015) (cit. on p. 10).
- Stephani, H. et al. (Sept. 2009). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. 2nd ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press (cit. on pp. 23, 28–30, 34).
- Straumann, Norbert (Nov. 1997). *The Membrane Model of Black Holes and Applications*. Ed. by Friedrich W. Hehl, Claus Kiefer, and Ralph J.K. Metzler. W.E. Heraeus Seminar. arXiv: astro-ph/9711276v1 [astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9711276v1>.
- Tanii, Yoshiaki (2014). *Introduction to Supergravity*. Vol. 1. SpringerBriefs in Mathematical Physics. Springer. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=mg3vAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=introduction+to+supersymmetry+tanii&ots=T-PNmTCZ11&sig=r9TKLEFJ1Ez1pGeQ\\_4\\_VdZP1MBc](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=mg3vAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=introduction+to+supersymmetry+tanii&ots=T-PNmTCZ11&sig=r9TKLEFJ1Ez1pGeQ_4_VdZP1MBc) (cit. on p. 51).
- Thurston, William P. and Silvio Levy (1997). *Three-dimensional geometry and topology*. Vol. 1. Princeton Mathematical Series 35. Princeton university press. URL: [http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=9kkuP3lsEFQC&oi=fnd&pg=PR9&dq=three-dimensional+geometry+thurston&ots=Kxd7wdzdLU&sig=\\_MxSqiH010XU-gf2ameIPg7i4TI](http://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=9kkuP3lsEFQC&oi=fnd&pg=PR9&dq=three-dimensional+geometry+thurston&ots=Kxd7wdzdLU&sig=_MxSqiH010XU-gf2ameIPg7i4TI) (cit. on pp. 23, 39).

- Trigiante, M. (Jan. 1998). “Dualities in Supergravity and Solvable Lie Algebras”. PhD thesis. University of Wales Swansea. arXiv: hep - th/9801144v1 [hep-th]. URL: <http://arxiv.org/pdf/hep-th/9801144v1> (cit. on p. 48).
- Vedrenne, G. and J.-L. Atteia (2009). *Gamma-Ray Bursts: The Brightest Explosions in the Universe*. Springer. DOI: 10.1063/1.3366244 (cit. on p. 18).
- Vietri, Mario (2008). *Foundations of high-energy astrophysics*. University of Chicago press (cit. on p. 17).
- Wald, Robert M. (1984). *General relativity*. The university of Chicago press (cit. on pp. 10–15, 18, 19, 22, 39, 41).
- Wiltshire, David L., Matt Visser, and Susan M. Scott, eds. (2009). *The Kerr spacetime: rotating black holes in general relativity*. Cambridge University Press. ISBN: 9780521885126 (cit. on p. 14).
- Wolfram Research, Inc. (2014). *Mathematica*. Version 10.0 (cit. on pp. 2, 33).
- Wospakrik, Hans Jacobus (2002). “Harmonic maps, SU(N) Skyrme models and Yang-Mills theories”. PhD thesis. Durham University. URL: [http://etheses.dur.ac.uk/4100/1/4100\\_1619.pdf](http://etheses.dur.ac.uk/4100/1/4100_1619.pdf) (cit. on p. 51).
- Άγιος Βασίλειος Καισαρείας, αρχιεπίσκοπος Καππαδοκίας (1857). *Ὁμιλῆαι θ' εἰς τὴν ἑξαήμερον*. Vol. 29-32. Patrologia Graeca. Jacques-Paul Migne (cit. on p. 3).



# Ευρετήριο

- 1-μορφή συνοχής, 39
- 2-μορφή καμπυλότητας (curvature form), 45
- 2-μορφή στρέψης (torsion 2-form), 45
  
- affine group, 49
- ALAM, 9
- axion, 60
  
- Cartan involution, 52
  
- dilaton, 55
  
- fibre bundle, 55
  
- Kerr–Newman–Melvin, 9, 33
  
- magnetar, 19
  
- non-linear  $\sigma$  model, NLSM, 52
  
- spin connection), 39
  
- vielbein, 38
- vierbein, 38
  
- Weyl unitaritarian trick, 28
  
- άλγεβρα-κλειδί (key algebra), 50
- άνυσμα μετατόπισης (shift vector), 20
- έλλειμμα κώνου (cone deficit), 35
- αβελιανή υποάλγεβρα (abelian subalgebra), 49
- αγκύλη Frölicher–Nijenhuis, 13
- ανάλυση Cartan, 49, 50
- ανάλυση Cartan (Cartan decomposition), 50
- ανάλυση Iwasawa (Iwasawa decomposition), 49
- ανάστροφο σκεδασμό Compton (ICS), 18
- αναλλοίωτη (invariant), 48
- αντιπαραγωγή (antiderivation), 42
- αντιπροσωπευτικό συμπλόκου (coset representative), 49
- ανυσματικό πεδίο Kaluza–Klein, 55
- αριστερό σύμπλοκο (left coset), 49
- αρμονικές απεικονίσεις, 52
- αυτοσυζυγής (self-conjugate), 48
- βάση Carter (Carter frame), 15
- βαρύτητα επιφάνειας (surface gravity), 20
- γενικευμένη αναστροφή (generalized transpose), 53
- γενικευμένη μετρική (generalized metric), 53
- γυμνή ανωμαλία (naked singularity), 18
- δεξιό σύμπλοκο (right coset), 49
- διακεχωρισμένη πραγματική μορφή (split real form), 29
- διαμέριση  $3 + 1$  ( $3 + 1$  decomposition), 20
- διαστατικής αναγωγής κατά Kaluza–Klein (Kaluza–Klein dimensional reduction), 55
- διαφορικές μορφές, 42
- διαφορική μορφή (differential form), 42
- διαφορομορφισμός (diffeomorphism), 41
- δράση Einstein–Hilbert, 45
- δυική Hodge (Hodge dual), 42
- δυική απεικόνιση κατά Hodge (Hodge dual), 23
- δυικότητα Poincaré (Poincaré duality), 23
- δυσμός ηλεκτρικού/μαγνητικού πεδίου (electric/magnetic duality), 31
- δυναμικό Ernst, 24
- δυναμικό Kähler, 24
- εικόνα Heisenberg (Heisenberg picture), 41
- εικόνα Schrödinger (Schrödinger picture), 41
- ενέργεια έγχυσης (injection energy), 17
- ενεργός (active), 41
- εξισώσεις δομής Cartan (Cartan structure equations), 45
- εξωτερική άλγεβρα (exterior algebra), 42
- εξωτερικό γινόμενο (exterior ή wedge product), 42
- επαναφορά (pull-back), 41
- ερμιτιανή μετρική (hermitian metric), 47
- ερμιτιανή πολλαπλότητα (hermitian manifold), 47
- εσωτερική μετρική (internal metric), 53

- εσωτερικό γινόμενο (interior product), 42  
 ημιομαλής ανωμαλίας (quasi-regular singularity), 35  
 ημιτοπική ενέργεια (quasilocal energy), 22  
 θεωρία Einstein–Cartan–Sciama–Kibble, 45  
 θεωρία χορδών, 23  
 ιακωβιανή (jacobian), 41  
 ισομετρία (isometry), 49  
 ισομορφισμός, 25  
 ισομορφισμός ομάδος, 48  
 ισοτροπικός χώρος (isotropic space), 49  
 κανονική (normal), 48  
 κλειστές (closed), 38  
 κοσμικών χορδών (cosmic strings), 35  
 κωνική ανωμαλία (conical singularity), 35  
 λύση Melvin (Melvin universe), 31  
 μάζα Komar, 19  
 μάζας Komar, 21  
 μέγιστη συμπαγής υποάλγεβρα (maximal compact subalgebra), 49  
 μαγνητισμένη Kerr–Newman (magnetized Kerr–Newman), 33  
 μαγνητισμένης Kerr–Newman, 9  
 μαγνητοπεριστροφικής αστάθειας (MRI), 19  
 μεταβατικός (transitive), 51  
 μετασχηματισμός Möbius, 24  
 μετατόπιση από αριστερά (left translation), 53  
 μετρική Kähler (Kähler metric), 47  
 μετρική του δίσκου Poincaré, 24  
 μη συντεταγμένη ή μη ολονομική βάση (non-coordinate or non-holonomic basis), 38  
 μηδενοδύναμη υποάλγεβρα (nilpotent subalgebra), 49  
 μηχανισμός Blandford–Znajek, 10, 18  
 μιγαδική πολλαπλότητα (complex manifold), 46  
 μορφή Kähler (Kähler form), 47  
 μορφή Maurer–Cartan (Maurer–Cartan form), 52  
 μορφή στοιχείου όγκου, 39  
 μουσικός ισομορφισμός (musical isomorphism), 13  
 ομάδα ισομετρίας (isometry group), 49  
 ομάδα ισοτροπίας (isotropy group), 25  
 ομογενής (homogeneous), 51  
 ομομορφισμός ομάδος (group homomorphism), 48  
 ομόλογες (homologous), 14  
 ορίζοντα Killing, 17  
 παθητικός (passive), 41  
 παραγωγή (derivative), 41  
 πεδίο βαθμίδος (gauge field), 53  
 πλεόνασμα κώνου (cone surplus), 35  
 πολλαπλότητα Kähler (Kähler manifold), 47  
 πραγματικές μορφές (real forms), 50  
 πραγματική μορφή (real form), 29  
 προώθηση (push-forward), 41  
 στάσιμο παρατηρητή (stationary observer), 18  
 σταθεροποιητήρια (stabilizer), 49  
 στροφορμή Komar, 20  
 συζυγή στοιχεία (conjugate elements), 48  
 συζυγία (conjugation), 49  
 συμπαγή πραγματική μορφή (compact real form), 28  
 συνάρτηση παρέλευσης (lapse function), 20  
 συνοχή spin (connection 1-form, 39  
 συντελεστές συνοχής (connection coefficients), 39  
 σχεδόν μιγαδική δομή (almost complex structure), 46  
 σύμβολο Levi–Civita, 39  
 τάξη ισοδυναμίας (equivalence class), 48  
 τάξη ομολογίας (homology class), 14  
 τάξη συζυγίας (conjugacy class), 48  
 τανυστής Levi–Civita, 39  
 τοπική ομάδα συμμετρίας βαθμίδος (local gauge symmetry group), 52  
 τροχιά (orbit), 51  
 υποομάδα ισοτροπίας (isotropy subgroup), 49  
 φορτίο Wald, 18  
 φυλλοποίηση, foliation, 20  
 ψευδοσφαίρας, 24  
 ψευδοτανυστική πυκνότητα, 39