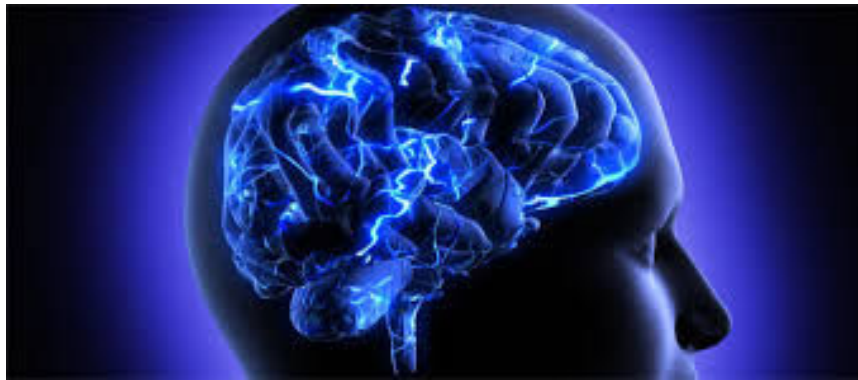




ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ  
ΗΛΕΚΤΡΟΕΓΚΕΦΑΛΟΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ  
ΜΑΓΝΗΤΟΕΓΚΕΦΑΛΟΓΡΑΦΙΑΣ**



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Πάσιου Νιόβη-Παρασκευή**

Επιβλέπων καθηγητής

**Ιωάννης Γ. Στρατής**

ΑΘΗΝΑ, 2014







## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Ολοκληρώνοντας τις μεταπτυχιακές σπουδές μου με τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπεύθυνο καθηγητή της διπλωματικής μου, κ. **Ιωάννη Στρατή**, για την καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλη την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής αυτής εργασίας καθώς και για την δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον και με προοπτικές θέμα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την **οικογένειά** μου, για την στήριξη και την ενθάρρυνση καθ' όλη την διάρκεια της ακαδημαϊκής μου πορείας.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μαθηματική ανάλυση των ευθέων και αντίστροφων προβλημάτων που συνδέονται με τις μεθόδους της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας με σκοπό τον εντοπισμό και το χαρακτηρισμό της πηγής που παρήγαγε τα μετρούμενα πεδία. Στο εσωτερικό του εγκεφάλου παρατηρείται έντονη ηλεκτρική δραστηριότητα η οποία γεννάει ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Τα πεδία αυτά καταγράφονται στην επιφάνεια και στον εξωτερικό χώρο του κρανίου και δίνουν το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (EEG) και το Μαγνητοεγκεφαλογράφημα (MEG).

Στο πρώτο μέρος της εργασίας (κεφάλαιο 1) μελετάται αναλυτικά η δομή και λειτουργία του εγκεφάλου και της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού. Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη αναφορά στις κυριότερες μεθόδους απεικόνισης του εγκεφάλου που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα, εστιάζοντας κυρίως στη Ηλεκτροεγκεφαλογραφία και στη Μαγνητοεγκεφαλογραφία.

Επιλύουμε στην συνέχεια (κεφάλαιο 2) το ευθύ πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στην περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας, όπου η πηγή μας αποτελείται από ένα δίπολο που βρίσκεται στο εσωτερικό του εγκεφάλου. Αφού παρουσιάσουμε αναλυτικές λύσεις του ευθέος προβλήματος σε σφαιρικές αρμονικές για το εσωτερικό και εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, αθροίζουμε σε μια συνάρτηση κλειστής μορφής, την οποία στη συνέχεια ερμηνεύουμε μέσω ενός συστήματος ειδώλων.

Το αντίστροφο πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (κεφάλαιο 3) αναλύεται αρχικά στα πλαίσια τυχούσας γεωμετρίας και ενός συνεχούς νευρωνικού ρεύματος. Αποδεικνύεται ότι μόνο μία από τις τρεις συνιστώσες που συνιστούν το ρεύμα είναι δυνατόν να προσδιοριστεί από την γνώση του επιφανειακού ηλεκτρικού δυναμικού και αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα μη μοναδικότητας της λύσης. Έπειτα περιοριζόμαστε σε σφαιρική γεωμετρία και σε σημειακό δίπολο και κατασκευάζουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της θέσης και της ροπής του διπόλου. Ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία και στην γενικότερη περίπτωση ενός συνεχούς ρεύματος.

Το ευθύ πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας (κεφάλαιο 4), επιλύεται με παρόμοιες τεχνικές με αυτές της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας. Εισάγουμε επίσης τον

μετασχηματισμό Kelvin, παράγουμε μια νέα αναπαράσταση για το μαγνητικό δυναμικό και επιλύουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας.

Τέλος, αναλύουμε το αντίστροφο πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας (κεφάλαιο 5). Αποδεικνύεται ότι σε τυχούσα γεωμετρία η Μαγνητοεγκεφαλογραφία παρέχει πληροφορίες μόνο για τις δύο από τις τρεις συνιστώσες του νευρωνικού ρεύματος και επομένως δεν έχει μοναδική λύση. Όταν ο αγωγός μας είναι σφαιρικός και περιέχει ένα διπολικό ρεύμα αναπτύσσουμε αλγόριθμο για τον προσδιορισμό του διπόλου εκτός της ακτινικής συνιστώσας της ροπής. Στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού μόνο η μία από τις δύο συνιστώσες του νευρωνικού ρεύματος είναι ορατή, αυτή που δεν 'βλέπει' η EEG.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** εγκέφαλος, νευρώνας, διπολικό ρεύμα, πρωτεύον ρεύμα, επαγωγικό ρεύμα, σφαιρικός αγωγός, Ηλεκτροεγκεφαλογραφία, Μαγνητοεγκεφαλογραφία



## ABSTRACT

The object of this Master Thesis is to study forward and inverse problems of Electroencephalography and Magnetoencephalography in order to identify and characterize the source. In the interior of the brain there is electromagnetic activity that generates electric and magnetic fields. The resulting electric and magnetic fields are measured on the surface and the exterior of the head via the EEG and MEG, respectively.

In the first part of the thesis (chapter 1) we describe the morphology and the functionality of the human brain and we also present an overview of the electromagnetic theory. Subsequently there is a brief review of the main brain imaging methods such as EEG and MEG.

In chapter 2, we solve the forward problem of Electroencephalography, in spherical geometry for the case where the source is considered to be a point current dipole in the interior of the brain. We find analytical solutions in spherical harmonics for the electric potential in the interior and the exterior of the conductor and we present the well-known closed form solutions. Subsequently we interpret the solution by the Image Source Method.

The inverse EEG problem (chapter 3) is analyzed in spherical geometry in the case of a continuously distributed neuronal current. It turns out that only one of the three components of the neuronal current is identified from the knowledge of surface potential. This is an indication of the fact that the solution of the inverse problem is not unique. We solve the inverse problem in spherical geometry and in the case where a primary current is a dipole and we construct an algorithm that computes the exact position and the moment of the dipole. We follow same methodology for a continuously distributed neuronal current.

The forward MEG problem (chapter 4) is solved with similar techniques that used in Electroencephalography. We also present transformation Kelvin, produce a new representation for the magnetic potential and solve an integral equation on the surface of a sphere.

Finally we solve the inverse problem of MEG (chapter 5). It is shown that for an arbitrary geometry MEG provides information about two of the three components of the neuronal current. Consequently, the inverse MEG problem is not uniquely

solvable. In particular, for spherical geometry it is not possible to determine the radial parts of the neuronal current. In the case of the spherical conductor only one of the two components is “visible”, the one that it is invisible for EEG.

**KEY WORDS:** brain, neural, dipole current, primary current, passive current, spherical conductor, EEG, MEG





# Πίνακας περιεχομένων

<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....</b>	<b>V</b>
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....</b>	<b>VII</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>IX</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> .....</b>	<b>1</b>
1. Συμβολή των μαθηματικών στη λειτουργική απεικόνιση του εγκεφάλου .....	1
1.1. Η σπουδαιότητα του ανθρώπινου εγκεφάλου.....	1
1.2. Ανατομία του εγκεφάλου .....	1
1.3. Νευρικό Σύστημα .....	2
1.3.1. Εισαγωγή .....	2
1.3.2. Νευρώνες .....	4
1.3.3. Δυναμικό μεμβράνης .....	5
1.3.4. Δημιουργία δυναμικού ηρεμίας .....	6
1.3.5. Συνάψεις .....	7
1.4. Απεικόνιση του εγκεφάλου .....	8
1.5. Ηλεκτρομαγνητισμός .....	10
1.5.1. Εισαγωγή.....	10
1.5.2. Εξισώσεις Maxwell.....	11
1.6. Βιοηλεκτρομαγνητισμός .....	13
1.7. Ηλεκτρομαγνητισμός και εγκέφαλος .....	15
1.8. Ηλεκτροεγκεφαλογραφία .....	16
1.9. Μαγνητοεγκεφαλογραφία .....	19
1.10. Μαθηματική τοποθέτηση των EEG και MEG .....	23
1.11. Το γεωμετρικό πρότυπο της ομογενούς σφαίρας .....	23
1.12. Δυαδική μορφή των EEG και MEG .....	28
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> .....</b>	<b>31</b>
2. Συμβολή των μαθηματικών στη λειτουργική απεικόνιση του εγκεφάλου .....	31
2.1. Εισαγωγή .....	31
2.2. Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό .....	31
2.3. Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό .....	34

2.4. Κλειστές μορφές του Ηλεκτρικού Δυναμικού .....	35
2.4.1. Εισαγωγή .....	35
2.4.2. Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό .....	35
2.4.3. Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό .....	37
2.5. Εσωτερικό και Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με τη Μέθοδο των Ειδώλων.....	38
2.6. Ηλεκτρικό Πεδίο .....	43
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup></b> .....	45
3. Το αντίστροφο πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας .....	45
3.1. Εισαγωγή.....	45
3.2. Επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος .....	45
3.3. Αντίστροφο πρόβλημα της EEG για διπολική πηγή .....	47
3.4. Αντίστροφο πρόβλημα της EEG για κατανεμημένη νευρωνική διέγερση .....	50
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup></b> .....	55
4. Μαγνητοεγκεφαλογραφία σε ομογενή σφαίρα.....	55
4.1. Ευθύ πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας .....	55
4.2. Εξωτερικό Μαγνητικό Δυναμικό .....	55
4.3. Ανάπτυγμα Εξωτερικού Μαγνητικού Δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές .....	56
4.4. Το εξωτερικό Μαγνητικό πεδίο .....	58
4.5. Ολοκληρωτικός τύπος για το Μαγνητικό Δυναμικό.....	59
4.6. Εσωτερικό Μαγνητικό Πεδίο .....	60
4.7. Σύνδεση Εσωτερικού και εξωτερικού Μαγνητικού πεδίου μέσω μετασχηματισμού Kelvin.....	62
4.8. Υπολογισμός του επιφανειακού Ηλεκτρικού Δυναμικού.....	66
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup></b> .....	69
5. Το αντίστροφο πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας.....	69
5.1. Εισαγωγή.....	69
5.2. Επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος .....	69
5.3. Αντίστροφο πρόβλημα της MEG για διπολική πηγή .....	73
5.4. Αντίστροφο πρόβλημα της MEG για κατανεμημένη νευρωνική διέγερση .....	76
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	81







## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

### 1. Συμβολή των μαθηματικών στη λειτουργική απεικόνιση του εγκεφάλου

#### 1.1. Η σπουδαιότητα του ανθρώπινου εγκεφάλου

Η έρευνα του ανθρώπινου εγκεφάλου ανάγεται ιστορικά στους χρόνους των αρχαίων Αιγυπτίων, οι οποίοι χρησιμοποίησαν και για πρώτη φορά τη λέξη «εγκέφαλος» στον χειρουργικό πάπυρο του Edwin Smith πριν από 4.000 χρόνια. Στα Ιπποκρατικά έργα περιέχονται αξιόλογες περιγραφές του εγκεφάλου, των μηνίγγων και της ανατομίας του οφθαλμού. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος με μάζα περίπου 1,5 κιλό ρυθμίζει τη λειτουργία του οργανισμού και εκείνη των επιμέρους οργάνων του σώματος. Διαθέτει νευρικά κύτταρα, τις δομικές μονάδες του, που συνδέονται μεταξύ τους σχηματίζοντας δίκτυα. Αυτά τα δίκτυα βρίσκονται σε μία διαρκή κατάσταση ηλεκτρικής και χημικής δραστηριότητας και οι λειτουργίες τους είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία των σκέψεων, της μνήμης, τον έλεγχο των δραστηριοτήτων του σώματος και των συναισθημάτων.

Η κατανόηση του τρόπου κατασκευής και οργάνωσης του ανθρώπινου εγκεφάλου αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις της σύγχρονης επιστήμης. Αν και τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρήθηκε μια έκρηξη πάνω στην έρευνα για τον εγκέφαλο, η κατανόηση της λειτουργίας του εγκεφάλου βρίσκεται ακόμα σε πρώιμο στάδιο και οι γνώσεις που έχουν αποκτηθεί έως σήμερα μας ωθούν συνεχώς σε νέες ανεξερεύνητες περιοχές.

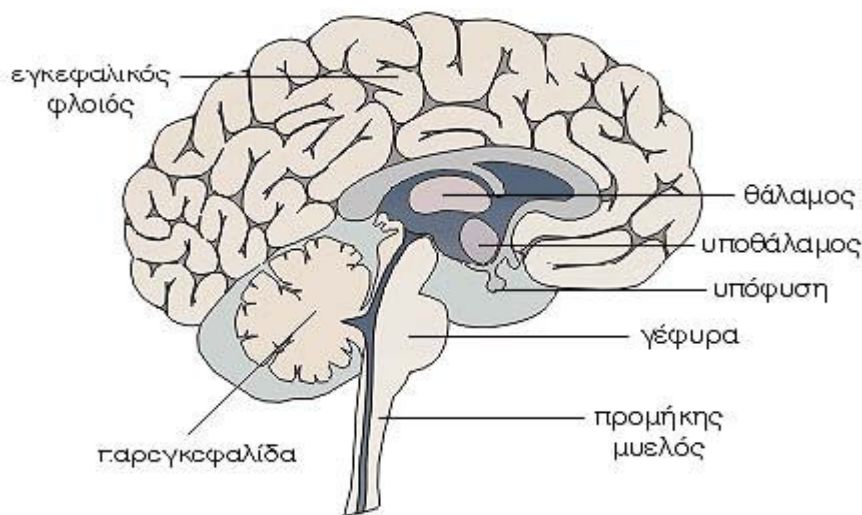
#### 1.2. Ανατομία του εγκεφάλου

Ο εγκέφαλος βρίσκεται εντός του εγκεφαλικού κρανίου και περιβάλλεται από τρεις προστατευτικούς υμένες, τις **μηνιγγες**. Αυτές από μέσα προς τα έξω είναι η χοριοειδής, η αραχνοειδής και η σκληρή.

Ο εγκέφαλος διακρίνεται :

- στον τελικό εγκέφαλο: Αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος και αποτελείται από τα δύο **εγκεφαλικά ημισφαίρια** (τα οποία χωρίζονται μεταξύ τους από την επιμήκη σχισμή), τους **συνδέσμους των ημισφαιρίων** και τις **δύο πλάγιες κοιλίες** του εγκεφάλου.

- στον διάμεσο εγκέφαλο: Αποτελείται από τους δύο **θαλάμους**, τον **υποθάλαμο**, τον **επιθάλαμο**, τον **μεταθάλαμο** και την **τρίτη κοιλία** του εγκεφάλου.
- στον μέσο εγκέφαλο: Αποτελείται από το **τετράδωμο πέταλο**, τα δύο **εγκεφαλικά σκέλη** και τον **υδραγωγό του Sylvius**.
- στον οπίσθιο εγκέφαλο: Αποτελείται από την **γέφυρα**, την **παρεγκεφαλίδα** και την **τέταρτη κοιλία** του εγκεφάλου.
- και έσχατο εγκέφαλο: Αποτελείται από τον προμήκη μυελό και το κάτω τριτημόριο της τέταρτης κοιλίας.



**Εικόνα 1 : Ανατομία του εγκεφάλου**

### 1.3. Νευρικό σύστημα

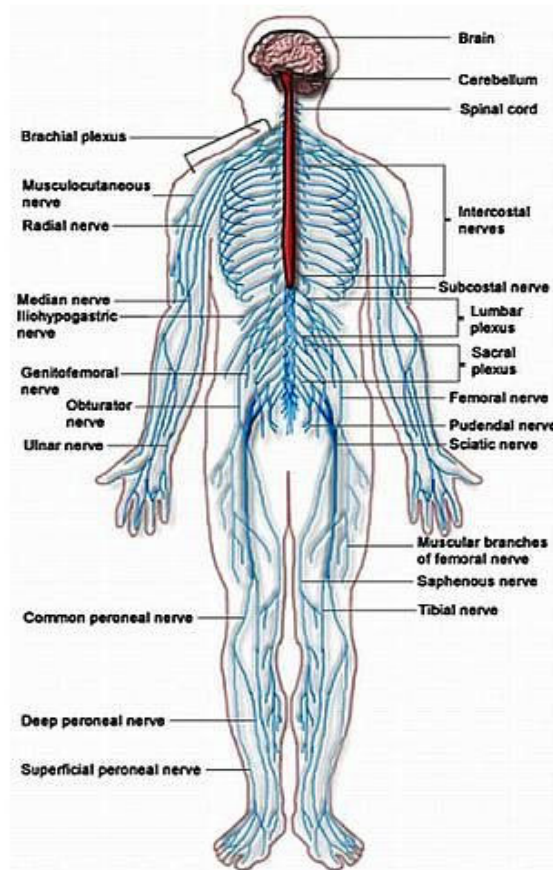
#### 1.3.1. Εισαγωγή

Το νευρικό σύστημα αποτελεί το σύστημα που ρυθμίζει ελέγχει και συντονίζει τη λειτουργία όλων των οργάνων του ανθρώπινου σώματος, καθώς επίσης και τη μεταξύ τους αρμονική συνεργασία.

Χωρίζεται σε δύο επί μέρους συστήματα:

- Το **Σωματικό Νευρικό Σύστημα** το οποίο ελέγχει τις συνειδητές λειτουργίες και περιλαμβάνει το **Περιφερικό Νευρικό Σύστημα** που αποτελείται από εγκεφαλικά και νωτιαία νεύρα και το **Κεντρικό Νευρικό Σύστημα** (εγκέφαλος και νωτιαίος μυελός).

- Το **Αυτόνομο Νευρικό Σύστημα** το οποίο είναι υπεύθυνο για τη διατήρηση σταθερού εσωτερικού περιβάλλοντος (υπεύθυνο για την ομοιόσταση). Το σύστημα αυτό λειτουργεί αυτόνομα, χωρίς την άμεση συμμετοχή της συνείδησης.



**Εικόνα 2 : Το Νευρικό Σύστημα του ανθρώπου**

Το Κεντρικό Νευρικό Σύστημα (ΚΝΣ) είναι δέκτης μηνυμάτων τόσο από το εσωτερικό όσον και από το εξωτερικό περιβάλλον. Τα μηνύματα δημιουργούνται από διάφορα ερεθίσματα και μεταφέρονται ως νευρικές ώσεις μέσω των περιφερικών νευρών (αισθητική οδός). Τα ερεθίσματα τα οποία μπορούν να προκαλέσουν δημιουργία νευρικής ώσης είναι χημικά, ηλεκτρικά, μηχανικά κ.ά. Στο ΚΝΣ τα μηνύματα αξιολογούνται και αν υπάρχει ανάγκη, διαβιβάζονται εντολές (κινητική οδός) που πάλι έχουν τη μορφή νευρικών ώσεων, στα εκτελεστικά όργανα που είναι οι μύες και οι αδένες.

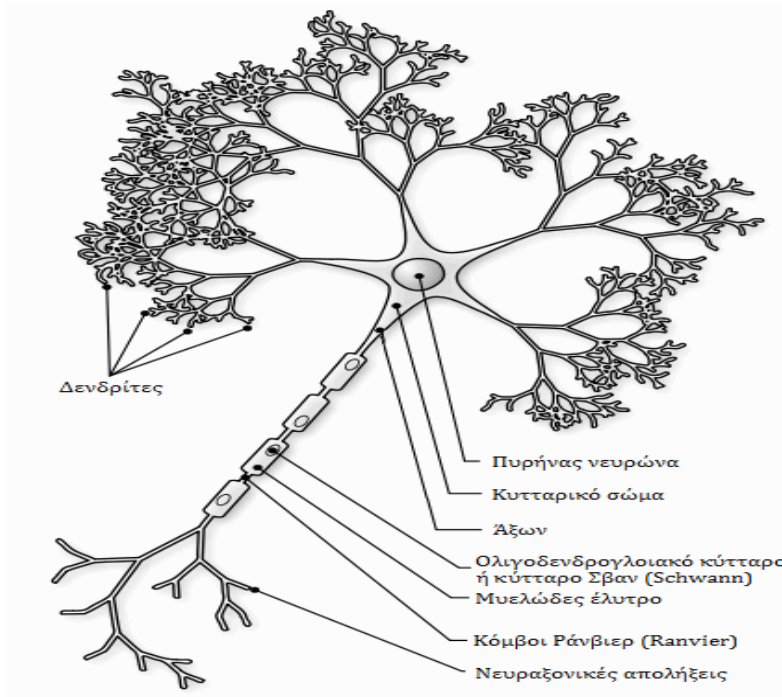
Το νευρικό σύστημα αποτελείται κυρίως από **νευρικά κύτταρα ή νευρώνες** και από **νευρογλοία** (νευρογλοιακά κύτταρα και μεσοκυττάρια ουσία). Τα **νευρογλοιακά**

**κύτταρα** έχουν ποικίλα σχήματα και ειδικές λειτουργίες. Τα κύτταρα αυτά, είναι πολύ περισσότερα από τους νευρώνες και έχουν βοηθητικό ρόλο. Προμηθεύουν με θρεπτικά συστατικά το νευρώνα και χρησιμεύουν στην απορρόφηση και απομάκρυνση των άχρηστων ουσιών από αυτούς. Τα νευρογλοιακά κύτταρα, που περιβάλλουν το νευράξονα των περισσότερων από τους νευρώνες, συμβάλλουν στη μόνωσή του και στην επιτάχυνση της μεταφοράς της νευρικής ώσης.

### 1.3.2. Νευρώνες

Οι νευρώνες αποτελούν τις δομικές και λειτουργικές μονάδες του νευρικού συστήματος. Με τη γέννηση ενός ανθρώπου, στο νευρικό του σύστημα, ο αριθμός των νευρώνων υπερβαίνει τα 100 δισεκατομμύρια. Οι νευρώνες δεν αναπαράγονται, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα κύτταρα του ανθρώπινου οργανισμού, αλλά με το πέρασμα του χρόνου, ο αριθμός τους μειώνεται σημαντικά.

Οι νευρώνες παρουσιάζουν ασυμμετρία στο σχήμα τους. Ένας τυπικός νευρώνας αποτελείται από το **κυτταρικό σώμα**, τους **δενδρίτες**, τον **νευράξονα** και τα **προσυναπτικά άκρα**. Σε ορισμένους νευρώνες, το μήκος των νευραξόνων μπορεί να ξεπερνά το 1 μέτρο ενώ η διάμετρος τους φθάνει μέχρι και το 0,1mm. Πολλοί νευρώνες έχουν νευράξονες οι οποίοι περιβάλλονται από περίβλημα μυελίνης (μικροσκοπικά κύτταρα που λέγονται **ολιγοδενδρογλοιακά** αν πρόκειται για νευρώνα του εγκεφάλου, ή **κύτταρα Schwann** αν πρόκειται για τους νευράξονες των περιφερικών νεύρων). Η **μυελίνη** είναι η λιποειδής ουσία η παρουσία της οποίας βελτιώνει την αποδοτικότητα με την οποία οι άξονες άγουν τα δυναμικά ενέργειας, ειδικά στις μεγάλες αποστάσεις που τα νεύρα διασχίζουν μεταξύ του εγκεφάλου και των άκρων. Υπάρχουν και σημεία που ο νευράξονας εμφανίζεται γυμνός και αυτά ονομάζονται **κόμβοι Ranvier**. Επομένως το περίβλημα δεν είναι συνεχόμενο αλλά είναι διακεκομμένο, κάτι που βοηθά στην αγωγή των νευρικών ώσεων. Οι τελικές απολήξεις των δενδρυλίων του νευράξονα έχουν στα άκρα διογκώσεις, τα τελικά κομβία. Στις απολήξεις των νευρώνων υπάρχουν τα προσυναπτικά άκρα, τα οποία είναι υπεύθυνα για τη μετάδοση των νευρικών ώσεων από τον ένα νευρώνα στον άλλο ή ακόμα από νευρώνα σε μυϊκό ή αδενικό κύτταρο.



**Εικόνα 3 : Σχηματική αναπαράσταση νευρώνα**

Ανάλογα με τη λειτουργία τους, οι νευρώνες διακρίνονται σε:

- αισθητικούς: μεταφέρουν μηνύματα από την περιφέρεια προς το ΚΝΣ .
- κινητικούς: μεταφέρουν μηνύματα-εντολές από το ΚΝΣ προς τα εκτελεστικά όργανα.
- ενδιάμεσους: κατευθύνουν τα μηνύματα που προέρχονται από τους αισθητικούς νευρώνες στις κατάλληλες περιοχές του ΚΝΣ .

Όλοι οι νευρώνες είτε είναι αισθητικοί είτε κινητικοί, έχουν ως κοινό γνώρισμα ότι η δραστηριότητά τους είναι και ηλεκτρική και χημική. Οι νευρώνες συνεργάζονται αλλά και ανταγωνίζονται ο ένας τον άλλο, προκειμένου να ρυθμίσουν την γενικότερη κατάσταση του νευρικού συστήματος.

### 1.3.3. Δυναμικό μεμβράνης

Στην πλασματική μεμβράνη των νευρώνων παρατηρείται διαφορά δυναμικού. Αυτή η διαφορά δυναμικού ονομάζεται **δυναμικό μεμβράνης** και σε ένα νευρώνα που βρίσκεται σε ηρεμία (δεν παράγει ώσεις) ονομάζεται **δυναμικό ηρεμίας**. Η μονάδα μέτρησης διαφοράς δυναμικού είναι τα Volts. Στα κύτταρα, η διαφορά δυναμικού είναι μικρή. Το δυναμικό ηρεμίας των νευρώνων είναι συνήθως περίπου 70mV ή 0,07V. Για να δείξουμε ότι το εσωτερικό της μεμβράνης είναι ηλεκτροαρνητικότερο

σε σχέση με το εξωτερικό, το δυναμικό ηρεμίας γράφεται ως  $-70\text{mV}$ . Η μεμβράνη του νευρώνα διατηρεί το **δυναμικό ηρεμίας** για όσο διάστημα δε δέχεται κάποιο ερέθισμα ή, όταν δέχεται ερεθίσματα, με ένταση μικρότερη από κάποια οριακή τιμή.

Τρεις είναι οι παράγοντες που διαμορφώνουν το δυναμικό μεμβράνης:

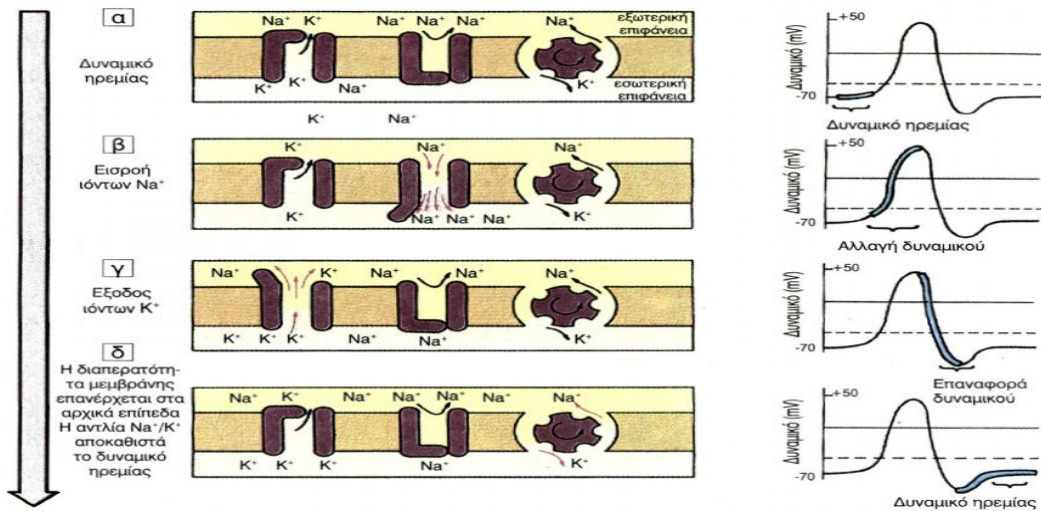
- 1) Η δράση των αντλιών ιόντων νατρίου και καλίου.
- 2) Η διαφορά στη διαπερατότητα της μεμβράνης στα διάφορα ιόντα.
- 3) Η παρουσία αρνητικά φορτισμένων ιόντων στο εσωτερικό των κυττάρων τα οποία λόγω μεγέθους δεν μπορούν να εξέλθουν του κυττάρου.

Οι τρεις πιο πάνω παράγοντες επικρατούν σε όλα τα κύτταρα και το αποτέλεσμα είναι όλα τα κύτταρα να διαθέτουν δυναμικό μεμβράνης. Οι αντλίες  $\text{Na}^+$  και  $\text{K}^+$  μεταφέρουν τρία ιόντα νατρίου έξω από το κύτταρο ενώ μεταφέρουν δύο ιόντα καλίου μέσα στο κύτταρο. Η μεταφορά είναι ενεργητική και το αποτέλεσμα των αντλιών αυτών είναι να γίνεται άνιση κατανομή αυτών των ιόντων και το εσωτερικό των κυττάρων να διαθέτει λιγότερα θετικά φορτία από το εξωτερικό των κυττάρων. Οι αντλίες  $\text{Na}^+$  και  $\text{K}^+$  ενισχύουν το αποτέλεσμα της παρουσίας των ανιόντων στο εσωτερικό των κυττάρων. Τα ανιόντα αυτά δεν μπορούν, λόγω μεγέθους, να εγκαταλείψουν το κύτταρο, αλλά ελκύουν κατιόντα από το εξωτερικό περιβάλλον. Η πλασματική μεμβράνη δεν παρουσιάζει την ίδια διαπερατότητα στα κατιόντα. Για παράδειγμα, η πλασματική μεμβράνη ενός νευρώνα που βρίσκεται σε ηρεμία είναι κατά πολύ πιο διαπερατή στα  $\text{K}^+$  παρά σε οποιαδήποτε άλλα κατιόντα και το αποτέλεσμα αυτής της προτίμησης της μεμβράνης προς τα ιόντα καλίου είναι να παρατηρείται ισχυρή έλξη των ιόντων αυτών προς το εσωτερικό των κυττάρων. Είναι γι'αυτούς ακριβώς τους λόγους που η συγκέντρωση των ιόντων καλίου στο εσωτερικό είναι κατά 30 φορές μεγαλύτερη από τη συγκέντρωση των ιόντων αυτών στο εξωτερικό των κυττάρων. Και άλλα κατιόντα, πέραν των ιόντων καλίου, μπορούν να περάσουν στο εσωτερικό των κυττάρων αλλά ο ρυθμός με τον οποίο περνούν είναι σχετικά πολύ αργός.

#### 1.3.4. Δημιουργία του δυναμικού ηρεμίας

Τα ενδοκυτταρικά και εξωκυτταρικά υγρά έχουν διαφορετική ιοντική σύνθεση. Τα ιόντα καλίου διαχέονται έξω από το κύτταρο μέσα από πύλες πρωτεϊνικών καναλιών της μεμβράνης, όχι όμως και τα ανιόντα, λόγω του μεγέθους των. Έτσι, το εσωτερικό των κυττάρων αναπτύσσει αρνητικό φορτίο. Παρατηρείται, λοιπόν, μια σταθερή

μεταφορά ιόντων καλίου, με διάχυση, έξω από το κύτταρο και ταυτόχρονα διάχυση ιόντων νατρίου από έξω προς το εσωτερικό των κυττάρων. Η αποκατάσταση της ισορροπίας που τελικά θα επέφερε η διάχυση δεν επιτυγχάνεται, λόγω της δράσης της αντλίας ιόντων νατρίου / καλίου, η οποία βέβαια είναι ενεργητική διαδικασία και στηρίζεται στη χρησιμοποίηση τριφωσφορικής αδενοσίνης, της ονομαζόμενης «μοριακής νομισματικής μονάδας» ATP (mM = χιλιοστό του mole).

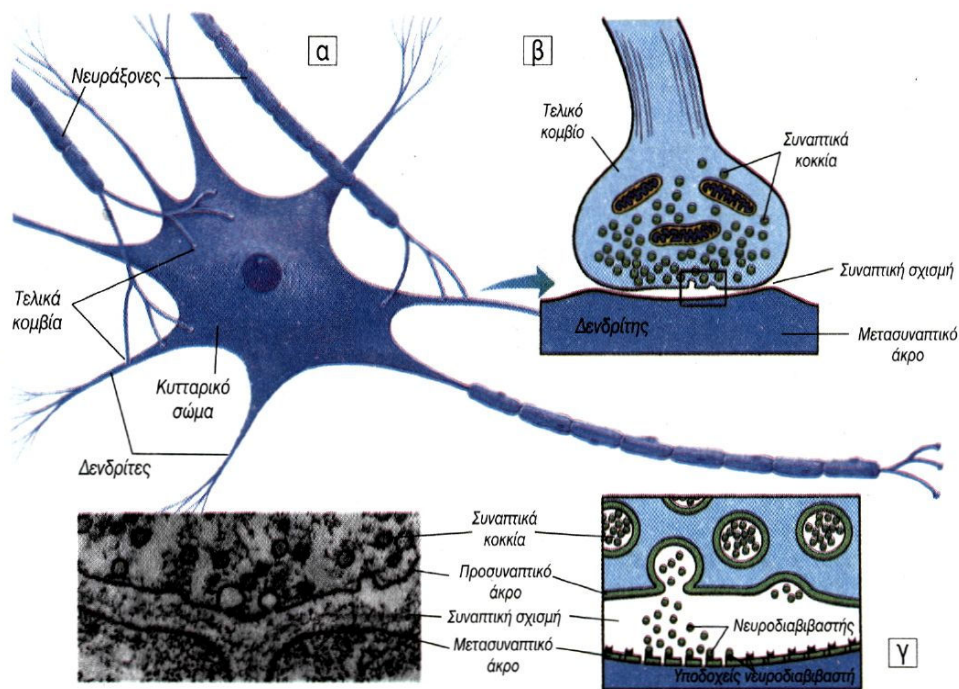


**Εικόνα 4 : Δημιουργία δυναμικού ενέργειας στη μεμβράνη του νευράξονα**

### 1.3.5. Συνάψεις

Ο όρος σύναψη επινοήθηκε από τον φυσιολόγο Sir Charles Sherrington (1906) και περιλαμβάνει όχι μόνο τη διασύνδεση μεταξύ των νευρώνων, αλλά και εκείνη μεταξύ των νευρώνων με εκτελεστικά όργανα όπως τα μυϊκά και τα αδενικά κύτταρα. Η σύναψη, διαρθρώνεται στην απόληξη του τελικού κομβίου του νευράξονα ενός νευρώνα με ένα δενδρίτη άλλου νευρώνα (εικ. 5α). Η μεταφορά της νευρικής ώσης μέσω των συνάψεων πραγματοποιείται συνήθως με τη βοήθεια χημικών ενώσεων που παράγει το νευρικό κύτταρο, των **νευροδιαβιβαστών**, οι οποίες εκκρίνονται από τα τελικά κομβία των νευραξόνων (χημική σύναψη). Σε μία σύναψη μπορούμε να διακρίνουμε το **προσυναπτικό άκρο** (τα τελικά κομβία ενός νευρικού κυττάρου), που περιέχουν τη νευροδιαβιβαστική ουσία και το **μετασυναπτικό άκρο**, που είναι η υποδοκτική επιφάνεια του νευρώνα ή του εκτελεστικού οργάνου, και στο οποίο βρίσκονται οι υποδοχείς της νευροδιαβιβαστικής ουσίας. Το προσυναπτικό και το μετασυναπτικό άκρο δε βρίσκονται σε επαφή, και ο χώρος ανάμεσά τους, η συνοπτική σχισμή, έχει πάχος 15-20 nm (εικ. 5β).

Ένα ερέθισμα με ένταση μεγαλύτερη μιας συγκεκριμένης τιμής δημιουργεί τοπικές αλλαγές στο δυναμικό της μεμβράνης, οι οποίες στη συνέχεια μεταδίδονται σε όλο το μήκος του νευράξονα. Όταν μία νευρική ώση φτάσει στα τελικά κομβία ενός νευρώνα, απελευθερώνονται νευροδιαβιβαστικές ουσίες. Στη συνέχεια, ο νευροδιαβιβαστής διαχέεται στη συνοπτική σχισμή και προσδένεται στους υποδοχείς του μετασυναπτικού άκρου (εικ. 5γ). Στην περίπτωση που ο νευροδιαβιβαστής δρα διεγερτικά, προκαλεί αύξηση στη διαπερατότητα της μετασυναπτικής μεμβράνης σε  $\text{Na}^+$ . Η μαζική εισροή ιόντων νατρίου έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία νευρικής ώσης κατά μήκος του νευράξονα του μετασυναπτικού νευρώνα. Η νευροδιαβιβαστική ουσία δρα για περιορισμένο χρονικό διάστημα, διότι είτε επαναρροφάται από το προσυναπτικό άκρο είτε αποικοδομείται με τη βοήθεια ενζύμων. Οι συνάψεις καθορίζουν την κατεύθυνση μεταφοράς των νευρικών ώσεων, διότι μπορούν να μεταφερθούν μόνο από το προσυναπτικό προς το μετασυναπτικό άκρο.



**Εικόνα 5 : α. Σύναψη β. Τελικό κομβίο και μετασυναπτικό άκρο γ. Απελευθέρωση νευροδιαβιβαστή**

#### 1.4. Απεικόνιση του εγκεφάλου

Η χαρτογράφηση του εγκεφάλου, η οποία βασίζεται σε ένα ευρύ φάσμα από παρατηρήσεις και πειραματικά αποτελέσματα, επέκτεινε και άλλαξε για πάντα την κατανόησή μας για τα συστήματα του εγκεφάλου. Οι χάρτες χρησιμοποιούνται για να



περιγράψουν τη δομή και την λειτουργία του εγκεφάλου και να ομαδοποιήσουν την τεράστια γνώση μας που βασίζεται στο ανθρώπινο και ζωικό νευρικό σύστημα.

Η συνεισφορά των μαθηματικών στη μελέτη της δομής και λειτουργίας του εγκεφάλου υπήρξε καθοριστική. Συγκεκριμένα ο ρόλος των μαθηματικών στις υπολογιστικές προσομοιώσεις είναι προφανής. Συνεπώς θα εστιάσουμε στην σπουδαιότητα των μαθηματικών στις απεικονιστικές τεχνικές, αρχίζοντας από την Αξονική Τομογραφία ή Υπολογιστική Τομογραφία (Computed Tomography – CT).

Αυτή είναι η υπολογιστική ανακατασκευή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής συνάρτησης, που λέγεται «συντελεστής απόσβεσης ακτίνων X», και που αντανακλά την πυκνότητα των ιστών. Ο Allan Cormack, που ανακάλυψε τον αξονικό τομογράφο, στην ομιλία του κατά την απονομή του Nobel το 1979, αναφέρει: «Ήταν προφανές ότι το πρόβλημα της αξονικής τομογραφίας είναι καθαρά ένα μαθηματικό πρόβλημα». Και στη συνέχεια εξηγεί ότι αυτό το μαθηματικό πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης από την γνώση του ολοκληρώματος της, κατά μήκος μιας ευθείας. Αυτό το ολοκλήρωμα ονομάζεται μετασχηματισμός Radon. Κατά συνέπεια το βασικό μαθηματικό πρόβλημα της αξονικής τομογραφίας είναι η εύρεση μιας συνάρτησης από την γνώση του αντίστοιχου μετασχηματισμού Radon. Η ανακάλυψη του αξονικού τομογράφου και αργότερα του μαγνητικού τομογράφου, για την ανακάλυψη του οποίου απονεμήθηκε το Nobel στον Sir Peter Mansfield το 2003, επέτρεψαν για πρώτη φορά την απεικόνιση της **ανατομίας** του εγκεφάλου.

Η απεικόνιση της **λειτουργίας** του εγκεφάλου άρχισε να γίνεται δυνατή πολύ αργότερα με την ανακάλυψη τριών καινούριων απεικονιστικών τεχνικών:

- του τομογράφου εκπομπής ποζιτρονίων **Pet** ( Positron Emission Tomography)
- του λειτουργικού μαγνητικού τομογράφου **fMRI** (functional Magnetic Resonance Imaging)
- και του τομογράφου εκπομπής φωτονίων **Spect** (Single Photon Emission Computed Tomography)

Είναι καταπληκτικό ότι σήμερα μπορούμε να παρατηρούμε τον εγκέφαλο εν λειτουργία με ολοένα και μεγαλύτερη ακρίβεια. Το Pet και το Spect στηρίζονται στο γεγονός ότι ο εγκέφαλος σαν πηγή ενέργειας χρησιμοποιεί μόνο γλυκόζη και όχι λίπη και πρωτεΐνες. Τα πιο ενεργοποιημένα κύτταρα καταναλώνουν πιο πολύ γλυκόζη, κατά συνέπεια αν έχουμε τρόπο να παρακολουθούμε την τοπική κατανάλωση

γλυκόζης, τότε μπορούμε να ξέρουμε ποιες περιοχές του εγκεφάλου, είναι πιο ενεργοποιημένες. Ο ρόλος των Μαθηματικών στο Pet και στο Spect είναι καθοριστικός. Τα μαθηματικά του Pet είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά του αξονικού τομογράφου. Τα μαθηματικά όμως του Spect είναι πολύ πιο δύσκολα. Συγκεκριμένα το Spect στηρίζεται στον εξασθενούμενο μετασχηματισμό Radon, για τον οποίον το πρόβλημα της αντιστροφής παρέμεινε μέχρι προσφάτως άλυτο. Συνέπεια αυτής της μαθηματικής δυσκολίας είναι ότι η υψηλή ανάλυση (ακρίβεια) του Spect δεν είναι τόσο καλή όσο του Pet. Προσφάτως λύθηκε το μαθηματικό αυτό πρόβλημα, και αυτό έχει οδηγήσει σε ένα καινούργιο, πιο γρήγορο και πιο ακριβή αλγόριθμο. Πρέπει να τονισθεί ότι αυτές οι καινούριες τεχνικές όχι μόνο βοηθούν στην κατανόηση του εγκεφάλου, αλλά είναι επίσης εξαιρετικά χρήσιμες σε πολλές περιοχές της Ιατρικής, από την Νευρολογία την Ψυχιατρική την Ογκολογία και την Καρδιολογία.

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος, από πλευράς λειτουργικότητας είναι η πολυπλοκότερη δομή στο γνωστό σύμπαν. Για την μελέτη της δυναμικής του εγκεφάλου, οι παραπάνω τεχνικές δεν είναι κατάλληλες γιατί είναι σχετικά αργές και δεν δίνουν αποτελέσματα σε πραγματικό χρόνο.

Από τις πιο σημαντικές μη επεμβατικές τεχνικές για την μελέτη της δυναμικής του εγκεφάλου είναι η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία (EEG) και η Μαγνητοεγκεφαλογραφία (MEG). Τα μαθηματικά των EEG και MEG συνίσταται στην εύρεση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του εγκεφάλου από τη μέτρηση εκτός του κρανίου του αντίστοιχου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί. Όπως όμως ήταν ήδη γνωστό από τον Helmholtz, το συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση. Ο ακριβής αναλυτικός προσδιορισμός αυτής της μη μοναδικότητας παρέμενε άλυτος από το 1860. Πρόσφατα, οι Fokas και Gelfand, αφενός μεν έλυσαν αυτό το πρόβλημα, αφετέρου δε έδειξαν ότι αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα στον εγκέφαλο είναι τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την ενέργεια, τότε η λύση είναι μοναδική και επίσης αναλυτική.

## **1.5. Ηλεκτρομαγνητισμός**

### **1.5.1. Εισαγωγή**

Ο Ηλεκτρομαγνητισμός είναι ο τομέας της Φυσικής που μελετά τα φαινόμενα που έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με ηλεκτρικά φορτία και πηγές μαγνητικού πεδίου. Αρχικά πιστεύονταν ότι ο ηλεκτρισμός και ο μαγνητισμός είναι δύο διαφορετικά φαινόμενα μέχρι που ο Oersted ο παρατήρησε ότι όταν πλησίαζε μία πυξίδα σε αγωγό

ο οποίος διαρρέοταν από ηλεκτρικό ρεύμα, τότε η μαγνητική της βελόνα προσανατολιζόταν ασυμβάτως κάθετα στον αγωγό. Τότε έγινε κατανοητό ότι δεν επρόκειτο για δύο διαφορετικά φαινόμενα, αλλά για ένα: τον ηλεκτρομαγνητισμό. Η ενοποίηση των δύο αυτών φαινομένων έγινε από τον Maxwell με τις τέσσερις περίφημες εξισώσεις, που έκτοτε φέρουν το όνομά του.

### 1.5.2. Εξισώσεις Maxwell

Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία οι **εξισώσεις Maxwell** είναι μία τετράδα εξισώσεων που διατυπώθηκαν από τον Σκοτσέζο φυσικό και μαθηματικό James Clerk Maxwell και περιγράφουν τη συμπεριφορά ηλεκτρικών και μαγνητικών καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους με την ύλη. Η αρχική δημοσίευση του Maxwell αναφερόταν σε οκτώ συνολικά, αλληλοσχετιζόμενες εξισώσεις. Η μορφή των τεσσάρων εξισώσεων, όπως χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα και όπως περιγράφεται παρακάτω, σχηματοποιήθηκε από τον αυτοδίδακτο Άγγλο φυσικό και μαθηματικό Heaviside, ο οποίος τις αναδιατύπωσε χρησιμοποιώντας διανυσματικό λογισμό, απλοποιώντας τις αποδείξεις τους και συμπυκνώνοντάς τις από 8 σε 4.

Οι εξισώσεις Maxwell είναι:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

η **εξίσωση (1.1)** περιγράφει το πως η μεταβολή ενός μαγνητικού πεδίου παράγει ηλεκτρικά πεδία (Νόμος του Faraday για την επαγωγή),

η **εξίσωση (1.2)** περιγράφει πως τα ηλεκτρικά ρεύματα και τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία παράγουν μαγνητικά πεδία (Νόμος των Ampere και Maxwell),

η **εξίσωση(1.3)** περιγράφει πώς ηλεκτρικά φορτία παράγουν ηλεκτρικά πεδία (νόμος του Gauss)

η **εξίσωση (1.4)** περιγράφει την πειραματική απουσία μαγνητικών μονοπόλων.

όπου  $\mathbf{E}$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο κενό,  $\mathbf{H}$  είναι το μαγνητικό πεδίο στο κενό,  $\mathbf{D}$  είναι η ηλεκτρική μετατόπιση παρουσία ύλης,  $\mathbf{B}$  είναι η μαγνητική επαγωγή παρουσία ύλης,  $\mathbf{J}$  είναι η πυκνότητα ρεύματος και  $\rho$  είναι η πυκνότητα φορτίου.

Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο ισχύουν οι καταστατικές εξισώσεις:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.6)$$

όπου  $\epsilon$  είναι η διηλεκτρική σταθερά και μετράει την επιρροή του μέσου επάνω στο ηλεκτρικό πεδίο,  $\mu$  είναι η μαγνητική διαπερατότητα και μετράει την επιρροή του μέσου επάνω στο μαγνητικό πεδίο και  $\sigma$  είναι η αγωγιμότητα όπου αν είναι θετική τότε το υλικό μέσο χαρακτηρίζεται ως αγώγιμο, αν  $\sigma \rightarrow \infty$  τότε το υλικό χαρακτηρίζεται τέλειος αγωγός και αν  $\sigma=0$  το μέσο μας είναι μη αγώγιμο ή μονωτικό. Στην περίπτωση που το μέσο μας είναι αγώγιμο το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  δημιουργεί μέσα στο υλικό ένα επαγωγικό ρεύμα  $\mathbf{J}^i$  και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{J}^i = \sigma \mathbf{E} \quad (1.7)$$

Το ολικό ρεύμα  $\mathbf{J}$  αναλύεται τώρα ως εξής

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \mathbf{J}^i = \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (1.8)$$

όπου  $\mathbf{J}^p$  είναι το πρωτεύον ρεύμα, δηλαδή το επιβαλλόμενο ρεύμα.

Κατά συνέπεια, σε ένα αγώγιμο μέσο, οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν την μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (1.10)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.12)$$

Παίρνοντας την απόκλιση της (1.2) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.3) συνεπάγεται η εξίσωση συνέχειας :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

που αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου.

### 1.6. Βιοηλεκτρομαγνητισμός

Ο Βιοηλεκτρομαγνητισμός αποτελεί ένα σχετικά καινούργιο επιστημονικό όρο και εξετάζει τα ηλεκτρικά, μαγνητικά και ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα που αναπτύσσονται στους βιολογικούς ιστούς. Οι βιολογικοί ιστοί παρουσιάζουν ισχυρές και πολύπλοκες ηλεκτρικές ιδιότητες, οι οποίες έχουν μελετηθεί θεωρητικά και πειραματικά από πολλούς ερευνητές.

Το 1791 ο Ιταλός ανατόμος Luigi Galvani (1737-1798) έδειξε όχι μόνο ότι στο σώμα υπάρχουν ηλεκτρικές δυνάμεις αλλά και ότι ο ηλεκτρισμός παίζει σημαντικό ρόλο στη λειτουργία των μυών. Ο Galvani υποστήριξε ότι η ζωική ηλεκτρική ενέργεια συσσωρεύεται κατά κύριο λόγο στους μύες, ενώ στα νεύρα απέδωσε απλώς λειτουργία αγωγής, πιθανόν επηρεασμένος από την κρατούσα τότε άποψη ότι τα νεύρα είναι εξαιρετικά λεπτοί ιστοί για να μπορούν να συσσωρεύσουν ηλεκτρική ενέργεια σε ικανοποιητικό βαθμό. Παρά τις ανακρίβειες των απόψεων του Galvani οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι με τις παρατηρήσεις του άρχισε να αναπτύσσεται η ηλεκτροφυσιολογία.

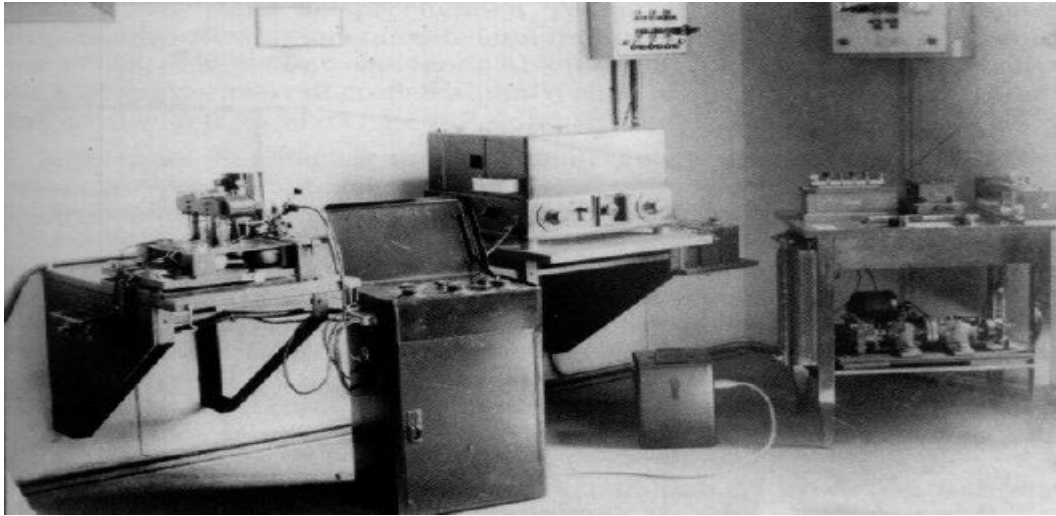
Ο Alessandro Volta (1745-1827), σε μια μακρά διαμάχη με τον Galvani, δεν αποδεχόταν τον ζωικό ηλεκτρισμό, υποστηρίζοντας την άποψη ότι όσα παρατηρούσε ο Galvani ήταν αποτέλεσμα ηλεκτρικής ενέργειας που παραγόταν κατά τον πειραματικό χειρισμό. Αργότερα ο Alexander von Humboldt (1769-1859) έδωσε τέλος στη διαμάχη αυτή αποδεικνύοντας ότι υπάρχει ζωικός ηλεκτρισμός.

Το 1848 ο Emil Du Bois-Reymond (1818-1896) ανακάλυψε ότι η δραστηριότητα των περιφερειακών νεύρων συνοδεύεται από μετρήσιμες μεταβολές του ηλεκτρικού δυναμικού. Αυτό έδωσε ώθηση στην επιστημονική κοινότητα να ερευνήσει για μεταβολές της ηλεκτρικής δραστηριότητας οι οποίες θα οφείλονταν στο νευρικό σύστημα και θα ήταν ενδεικτικές της λειτουργίας του.

Ήδη, το 1877 ο Richard Caton (1842-1926) είχε δείξει ότι υπάρχει σχέση μεταξύ εξωτερικών ερεθισμάτων και ηλεκτρικής δραστηριότητας στον εγκέφαλο κουνελιών και πιθήκων. Ανέφερε μάλιστα ότι ήταν δυνατή η καταγραφή ασθενών ρευμάτων από ηλεκτρόδια στη δερματική επιφάνεια του κεφαλιού τους.

Η πρώτη εμπειριστατωμένη αναφορά για τη μέτρηση διαφορών δυναμικού από την εξωτερική επιφάνεια του ανθρώπινου κεφαλιού προέρχεται από τον Hans Berger

(1873-1941) το 1929, γεγονός το οποίο οριοθετεί την έναρξη της μελέτης των λειτουργιών του εγκεφάλου μέσω του Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (EEG).



**Εικόνα 6 : Σύστημα καταγραφής EEG (1926)**



**Εικόνα 7 : Σύγχρονος Ηλεκτροεγκεφαλογράφος**

Διάφορα όργανα, συμπεριλαμβανομένης της καρδιάς, του εγκεφάλου και των πνευμόνων, παράγουν και μαγνητικά πεδία που είναι αδύνατα έναντι άλλων γεγονότων όπως οι ηλεκτρικές μεταβολές που εμφανίζονται σ' αυτά. Βιομαγνητισμός είναι η μέτρηση των μαγνητικών σημάτων που συνδέονται με τη συγκεκριμένη

φυσιολογική δραστηριότητα. Τα βιομαγνητικά σήματα επομένως μπορούν να παρέχουν πολύτιμες πρόσθετες πληροφορίες που συνήθως δεν περιλαμβάνονται στα βιοηλεκτρικά σήματα. Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λάβουν πρόσθετες πληροφορίες για την ενδοκυτταρική δραστηριότητα.

Τα βιοηλεκτρικά και βιομαγνητικά φαινόμενα μπορούν καταγραφούν σε πραγματικό χρόνο από μη επεμβατικές μεθόδους, επειδή η πληροφορία που αποκομίζεται από αυτά φανερώνεται απευθείας σε κάθε σημείο του τρισδιάστατου αγωγού και γύρω από αυτόν. Τα δεδομένα που λαμβάνονται από την εξωτερική καταγραφή των πεδίων του Βιοηλεκτισμού αποτελούν το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (EEG), ενώ αυτών του Βιομαγνητισμού αποτελούν το Μαγνητοεγκεφαλογράφημα (MEG).

### 1.7. Ηλεκτρομαγνητισμός και εγκέφαλος

Όπως είδαμε ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα παρατηρούνται μέσα στο ανθρώπινο σώμα. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που διαδίδεται στο εσωτερικό του εγκεφάλου έχει τόσο μεγάλο μήκος κύματος σε σχέση με τις διαστάσεις του εγκεφάλου, ώστε τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που δημιουργούνται να θεωρούνται στατικά. Έτσι οι εξισώσεις του Maxwell, απαλείφοντας τους όρους με τις χρονικές παραγώγους διατυπώνονται πλέον με τη μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.17)$$

Η εξίσωση (1.14) χαρακτηρίζει το ηλεκτρικό πεδίο ως αστρόβιλο και συνεπώς θα επιδέχεται την αναπαράσταση

$$\mathbf{E} = -\nabla u \quad (1.18)$$

όπου  $u$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό. Παίρνοντας την απόκλιση της εξίσωσης (1.15) καταλήγουμε στην εξίσωση Poisson

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{J}^p + \mathbf{J}^i)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J}^p + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J}^p - \sigma \nabla \cdot \nabla u$$

$$\sigma \Delta u = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (1.19)$$

για το ηλεκτρικό δυναμικό. Η απόκλιση του πρωτεύοντος ρεύματος αποτελεί την πηγή του ηλεκτρικού δυναμικού.

### 1.8. Ηλεκτροεγκεφαλογραφία

Η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία είναι η νευροφυσιολογική μέτρηση της ηλεκτρικής δραστηριότητας του εγκεφάλου με τη χρήση επικρανιακών ηλεκτροδίων. Η λειτουργία του ηλεκτροεγκεφαλογράφου στηρίζεται στην καταγραφή των διαφορών δυναμικού, οι οποίες παρουσιάζονται πάνω στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του ανθρώπινου κρανίου, ως αποτέλεσμα της λειτουργίας του εγκεφάλου. Τα μετρούμενα ηλεκτρικά σήματα είναι ασθενή, από περίπου 1μV ως 100μV.

Επομένως, αυτό που καταγράφουμε στο EEG είναι ηλεκτρικά σήματα από τον φλοιό του εγκεφάλου (αφού αυτό είναι πιο κοντά στο κρανίο σε σχέση με άλλες δομές του φλοιού που είναι στο εσωτερικό του εγκεφάλου). Εξαρχής λοιπόν υπάρχει η απαίτηση της όσο το δυνατόν μεγαλύτερης ενίσχυσης των υπό εξέταση σημάτων, και μόνο αυτών, καθώς και της πυκνότερης κάλυψης του κεφαλιού με απαγωγά ηλεκτρόδια.

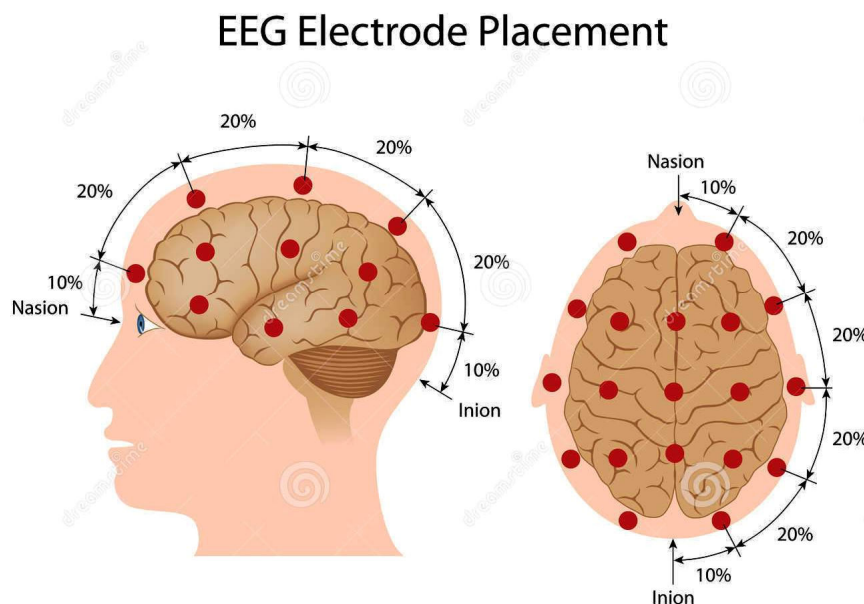
Η καταγραφή του εγκεφαλογραφήματος γίνεται συνήθως από ηλεκτρόδια, τα οποία αλείφουμε με αγωγίμο τζελ και τα οποία τοποθετούμε στο δέρμα του κρανίου του ανθρώπου. Τα ηλεκτρόδια, οι αισθητήρες του συστήματος, μετατρέπουν το ρεύμα ιόντων μέσα στο ανθρώπινο σώμα σε ρεύμα ηλεκτρονίων μέσα στα καλώδια, τα οποία μετά οδηγούν αυτό το ρεύμα σε επόμενα στάδια επεξεργασίας. Στα σημεία στα οποία θα τοποθετηθούν τα ηλεκτρόδια, το δέρμα πρέπει να καθαριστεί καλά με οινόπνευμα για να επιτύχουμε χαμηλή αντίσταση επαφής, κάτω των 5kΩ. Στα ίδια σημεία χρησιμοποιείται ειδικό υγρό που έχει τον ρόλο ηλεκτρολύτη. Το ηλεκτρόδιο λοιπόν έρχεται σε απ' ευθείας επαφή με τον υποκείμενο ηλεκτρολύτη που χρησιμοποιείται. Έτσι είναι δυνατή η κίνηση ιόντων μέσω του «συνόρου» ηλεκτροδίου - ηλεκτρολύτη μέχρι να επέλθει ισορροπία. Η ισορροπία αυτή είναι συνάρτηση της ιοντικής συγκέντρωσης που υπάρχει στις δύο πλευρές του συνόρου. Δημιουργούνται τελικά δύο φορτισμένα στρώματα στις δύο πλευρές του συνόρου, ένα στη μεταλλική επιφάνεια και ένα πάνω στις υγρές ουσίες γύρω από το



ηλεκτρόδιο, εμφανίζοντας έτσι μια διαφορά δυναμικού η οποία εμποδίζει τη συνέχιση της κίνησης των ιόντων, αλλά είναι ταυτοχρόνως ευαίσθητη στις μεταβολές των συγκεντρώσεων των ιόντων.

Όταν μέσα στον εγκέφαλο υπάρξει σήμα, δηλαδή ροή ιόντων, αυτό θα προκαλέσει μεταβολή της ιοντικής συγκέντρωσης και αυτόματα μεταβολή της διαφοράς δυναμικού των στρωμάτων, άρα και ροή ηλεκτρονίων από την πλευρά του αγωγίμου ηλεκτροδίου. Είναι επιθυμητό η τάση στο «σύνορο» να επηρεάζεται μόνο από ιοντικά ρεύματα του ανθρώπινου κεφαλιού και όχι από θερμοκρασιακές μεταβολές ή μηχανικές μετακινήσεις των ηλεκτροδίων. Αυτό επιτυγχάνεται όταν προσδίδουμε μεγαλύτερη ευχέρεια κινήσεων στα ιόντα της συνοριακής περιοχής.

Για την επιλογή των θέσεων του κάθε ηλεκτροδίου πάνω στο κεφάλι έχουν δημιουργηθεί διάφορα πρότυπα, το δημοφιλέστερο εκ των οποίων είναι το Διεθνές Σύστημα 10-20. Η ονομασία του συστήματος οφείλεται στην επιλογή του 20% της αποστάσεως μεταξύ των δύο αυτιών ως την απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε ηλεκτρόδια και επίσης στην επιλογή του 10% της αποστάσεως μεταξύ των δύο αυτιών ως την απόσταση από το αυτί στο κοντινότερο προς αυτό ηλεκτρόδιό του. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι θέσεις των ηλεκτροδίων προσαρμόζονται ανάλογα με τις διαστάσεις του κρανίου του εξεταζόμενου.



**Εικόνα 8 : Διεθνές Σύστημα 10-20**

Το κάθε σήμα το οποίο ενισχύεται στον EEG είναι η διαφορά μεταξύ των δυναμικών που ανά πάσα στιγμή παρουσιάζουν δύο ηλεκτρόδια μεταξύ τους. Ηλεκτρόδια τα οποία βρίσκονται «πάνω» από εγκεφαλικές περιοχές, οι οποίες ενδεχομένως θα παρουσιάσουν δραστηριότητα, λέγεται ότι αντιστοιχούν σε ενεργά σημεία. Αντίθετα, ηλεκτρόδια τοποθετημένα πάνω από περιοχές που θεωρείται ότι δεν έχουν σχέση με εγκεφαλική λειτουργία, λέγεται ότι αντιστοιχούν σε ανενεργά σημεία. Τέτοια σημεία π.χ. είναι το αυτί, ή τα ενωμένα με αγώγιμο δρόμο δύο αυτιά, σημεία του λαιμού κ.ά.

Όταν το μετρούμενο σήμα προκύπτει ως διαφορά δυναμικού δύο ηλεκτροδίων ενεργών περιοχών, τότε, σύμφωνα με την ορολογία του EEG, έχουμε «διπολική» μέτρηση. Διπολικές μετρήσεις για 15 ως 30 ηλεκτρόδια είναι η κοινή μεθοδολογία σε κλινικές νευρολογικές εξετάσεις EEG. Αυτή η μέθοδος προσφέρει το πλεονέκτημα ότι απορρίπτει τυχόν παράσιτα τα οποία είναι κοινά στα δύο ηλεκτρόδια. Στην περίπτωση της ψυχοφυσιολογικής έρευνας όμως, συνήθως το μετρούμενο σήμα προκύπτει ως διαφορά δυναμικού ενός ηλεκτροδίου ενεργής περιοχής και ενός ηλεκτροδίου ανενεργής περιοχής, οπότε έχουμε «μονοπολική» μέτρηση. Το ηλεκτρόδιο ανενεργής περιοχής είναι κοινό για όλες τις μετρήσεις και αποτελεί το σημείο αναφοράς, το οποίο κανονικά δεν θα πρέπει να επηρεάζεται από εγκεφαλικά ρεύματα. Επιζητούμε κατ' αυτόν τον τρόπο να έχουμε μια ολοκληρωμένη και ταυτόχρονη, από όλα τα ηλεκτρόδια ενεργών περιοχών, πληροφόρηση σχετικά με κάθε εγκεφαλικό ρεύμα ιόντων το οποίο φτάνει στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του κεφαλιού.

Οι διαφορές δυναμικού που επιλέγουμε εντέλει να μετρήσουμε, οδηγούνται στο τμήμα της ενισχυτικής διάταξης του EEG, η οποία περιέχει και διατάξεις φιλτραρίσματος. Εκεί κάθε ανιχνεύόμενο σήμα ενισχύεται ώστε να μπορεί να μετρηθεί με ευχέρεια. Συντελεστές ενίσχυσης της τάξης του  $10^5$  είναι συνηθισμένοι. Η πρώτη βαθμίδα ενίσχυσης, οι προενισχυτές, πρέπει να αποτελείται από ενισχυτές χαμηλού θορύβου. Συγκεκριμένα, αν σκοπεύουμε να μετρήσουμε σήματα της τάξης του  $1\mu\text{V}$  πρέπει η προενισχυτική διάταξη να έχει επίπεδο εσωτερικού θορύβου τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μικρότερη, άρα της τάξης των εκατοντάδων nV. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται κυκλώματα με συνδυασμούς διαφορικών ενισχυτών, ώστε ο λόγος απόρριψης κοινού σήματος (common mode rejection ratio - CMRR) να είναι στο επίπεδο των 120 db. Κατόπιν τα αναλογικά σήματα είτε οδηγούνται σε

καταγραφική συσκευή και αποτυπώνονται σε χαρτί, σε συμβατικά συστήματα EEG, είτε, όπως συνηθίζεται στα πιο εξελιγμένα συστήματα, μέσω συσκευής πολυπλεξίας οδηγούνται στον μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό σήμα (A/D), όπου ως ψηφιακά πλέον σήματα καταμετρώνται σε ηλεκτρονικό βολτόμετρο. Στη συνέχεια, ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής λαμβάνει τα ψηφιακά δεδομένα των μετρήσεων, οπότε υπάρχει η δυνατότητα για ψηφιακή επεξεργασία και απεικόνιση του σήματος, είτε κατά τη διάρκεια των μετρήσεων (on line), είτε σε υστερότερο χρόνο εφόσον αποθηκευτεί το σήμα στο δίσκο του υπολογιστή (off line).

Τελειώνοντας θα πρέπει να τονίσουμε ότι για τη σωστή λειτουργία κάθε συσκευής μέτρησης βιοσημάτων, αλλά ακόμη περισσότερο για την περίπτωση του EEG όπου τα μετρούμενα σήματα είναι της τάξεως των  $\mu V$ , η γείωση όλων των τμημάτων του συστήματος θα πρέπει να είναι κοινή για να μην δημιουργούνται βρόχοι μεταξύ διαφορετικών γειώσεων που εισάγουν σφάλματα.

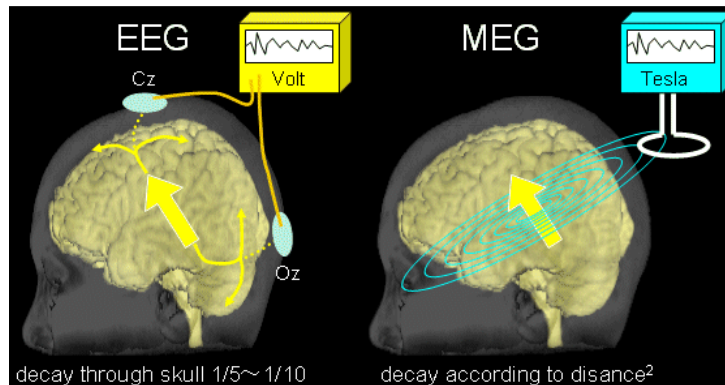
Η μελέτη του EEG βασίζεται στη διάκριση, στις καταγραφές δυναμικού ως συνάρτηση του χρόνου, της ύπαρξης ή μη συγκεκριμένων κυματομορφών, των λεγόμενων ρυθμών, κύριο χαρακτηριστικό των οποίων είναι οι συχνότητες των αρμονικών από τις οποίες αποτελούνται, δηλαδή το φασματικό τους περιεχόμενο. Η κατηγοριοποίηση με βάση τη συχνότητα είναι φυσικά προσεγγιστική. Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι ο μεγαλύτερος όγκος της έρευνας στο EEG είχε επιτελεστεί όταν δεν ήταν διαδεδομένη η χρήση ψηφιακών υπολογιστών και οι παρατηρήσεις βασιζόνταν στις καταγραφές των δυναμικών πάνω στο βαθμονομημένο καταγραφικό χαρτί.

Η χρήση του EEG στη Νευρολογία είναι ευρύτατη, καθώς αποτελεί μια μέθοδο φθηνή, ανώδυνη και απλή στην εφαρμογή της. Από τη μελέτη του EEG μπορούν να εξαχθούν εξαιρετικά χρήσιμα συμπεράσματα για τη σωστή εξέλιξη του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος ενός ανθρώπου από τη γέννησή του έως την ενηλικίωση.

### *1.9. Μαγνητοεγκεφαλογραφία*

Η Μαγνητοεγκεφαλογραφία έχει λάβει το μεγαλύτερο κλινικό ενδιαφέρον μέχρι σήμερα, καθώς παρέχει ασυναγώνιστη ορθότητα και ακρίβεια εκτίμησης της παραμέτρου πηγής. Ενώ με το EEG, είναι πολύ δύσκολο να καθοριστεί το σημείο του εγκεφάλου από το οποίο προέρχεται ένα συγκεκριμένο σήμα, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το MEG. Στο MEG εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι κάθε ηλεκτρικό πεδίο συνοδεύεται από τη δημιουργία και μαγνητικού πεδίου. Η

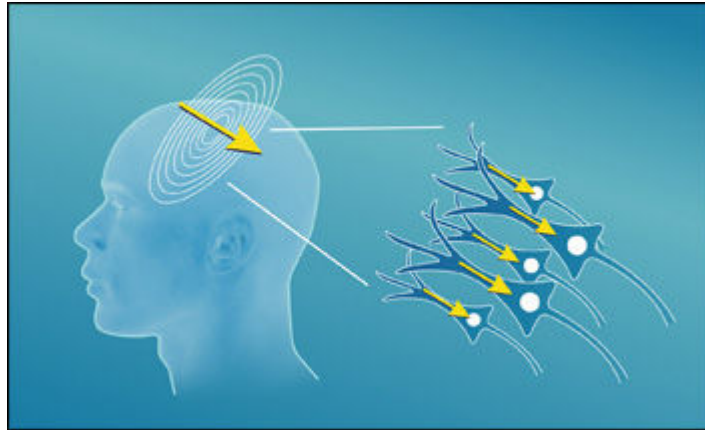
Μαγνητοεγκεφαλογραφία ανιχνεύει την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου, όπως και η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία. Ενώ το ΗΕΓ ανιχνεύει την διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ δύο ηλεκτροδίων, το ΜΕΓ ανιχνεύει τα δυναμικά μαγνητικά πεδία που παράγονται από την ηλεκτρική τους δραστηριότητα.



**Εικόνα 9 : Καταγραφές των EEG και MEG**

Η συναπτική επίδραση σε μια περιοχή του εγκεφάλου ισοδυναμεί με την ενεργοποίηση μιας κύριας πηγής ρεύματος, προέρχεται από κίνηση (είσοδο ή έξοδο) ιόντων δια μέσω μεμβρανικών διαύλων στις συνάψεις η οποία επάγει αντίστοιχη μετακίνηση ιόντων μέσα στους εμπλεκόμενους νευρώνες και με την επακόλουθη παθητική εμφάνιση χωρικών ρευμάτων στον περιβάλλοντα του νευρώνα χώρο. Η κίνηση των ιόντων στον εσωτερικό και η επαγόμενη κίνηση στον εξωτερικό του νευρώνα χώρο, συμπληρώνουν ένα βρόχο ιοντικής ροής εξασφαλίζοντας έτσι πως δεν υπάρχει σε κανένα σημείο συσσώρευση φορτίου, με αποτέλεσμα τοπικά η μέση πυκνότητα φορτίου να είναι μηδενική.

Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από το κύριο και το επαγόμενο χωρικό ρεύμα μαζί, μπορεί να καταγραφεί με τη μη επεμβατική μέθοδο της μαγνητοεγκεφαλογραφίας, ενώ τα αποτελέσματα της καταγραφής αποτελούν το λεγόμενο Μαγνητοεγκεφαλογράφημα-MEG. Για ένα καταγράψιμο εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικό σήμα, είναι απαραίτητη η συγχρονισμένη λειτουργία χιλιάδων γειτονικών νευρώνων, που καταλαμβάνουν έκταση μερικών τετραγωνικών χιλιοστών εγκεφαλικού φλοιού.



**Εικόνα 10 : Επαγόμενα μαγνητικά πεδία στον εγκέφαλο**

Για πρώτη φορά μετρήθηκαν σήματα MEG στο πανεπιστήμιο του Illinois από τον David Cohen το 1968, όπου ανίχνευσε εγκεφαλικά μαγνητικά πεδία με την βοήθεια πηνίων χαλκού. Σήμερα χρησιμοποιούμε αισθητήρες τεχνολογίας SQUID (superconducting Quantum interference device) που στηρίζονται σε υπεραγώγιμα ηλεκτρικά κυκλώματα που μας βοηθάνε να εντοπίζουμε ακόμα και τα πιο ασθενή ηλεκτρομαγνητικά πεδία του ανθρώπινου εγκεφάλου αλλά ανιχνεύουν μόνο τα επαπτόμενα δίπολα και όχι τα ακτινικά, τα οποία είναι ορατά στο EEG. Κατ'ελάχιστον απαιτούνται 300 αισθητήρες προκειμένου να έχουμε την πλήρη κάλυψη του ανθρώπινου κρανίου.

Το μαγνητόμετρο SQUID μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματιστής που μετατρέπει μικρές μεταβολές της μαγνητικής ροής των επαπτομενικών συνιστωσών του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου, σε διαφορές δυναμικού, μέσω αισθητήρων τοποθετημένων σε ένα σφαιρικό κάλυμμα σε απόσταση 5-10 cm γύρω από το κεφάλι. Λόγω του ότι το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι πολύ ασθενές, η καταγραφή του απαιτεί συνθήκες υψηλής μαγνητικής μόνωσης και εξαιρετική ευαισθησία.

Εκτός από τις λειτουργίες εγκεφάλου, οι εστιακές διαδικασίες στο κεντρικό νευρικό σύστημα μπορούν να εντοπιστούν χρησιμοποιώντας τη Μαγνητοεγκεφαλογραφία. Διάφορες αισθητήριες και μηχανικές διαδικασίες μπορούν να προσδιοριστούν με την ιδιαίτερη δομή του φλοιού. Κατά αυτόν τον τρόπο, τα οπτικά, ακουστικά και σωματοαισθητηριακά συστήματα και οι γνωστικές λειτουργίες μπορούν να ερευνηθούν. Οι κλινικές εφαρμογές, οι χωρικές κατανομές των μαγνητικών πεδίων αναλύονται για να εντοπίσουν τις πηγές των δραστηριοτήτων μέσα στον εγκέφαλο και οι θέσεις των πηγών επιβάλλονται στις απεικονίσεις, όπως MRI, για να

παρέχουν τις πληροφορίες για τη δομή και τη λειτουργία του εγκεφάλου. Με τη χρήση του MEG ο εντοπισμός της επιληπτικής δραστηριότητας και των λειτουργικών διαταραχών που προκαλούνται από τα τραύματα ή τις παροδικές ισχαιμικές επιθέσεις μπορούν εύκολα να καθοριστούν.

Τα διάφορα σήματα που μπορούν να ανιχνευθούν χρησιμοποιώντας το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα EEG έχουν επίσης παρατηρηθεί στο MEG, αλλά το τελευταίο μπορεί να παρέχει τις πρόσφατες μοναδικές πληροφορίες. Παραδείγματος χάριν, η αυθόρμητη δραστηριότητα του εγκεφάλου συνδέεται χαρακτηριστικά με τα τμήματα (συνιστώσα) χαμηλής συχνότητας (<30Hz) και στα δύο. Εντούτοις, ενώ οι μετρήσεις του EEG είναι απαθείς στην κατεύθυνση των ισοδύναμων δίπολων πηγής, το MEG παρέχει τις πληροφορίες που επιτρέπουν στη θέση, τον προσανατολισμό και τη κατανομή των ακαθόριστων νευρικών πηγών (όπως εμφανίζεται στην επιληψία) να καθοριστούν. Αυτό είναι δυνατό επειδή μόνο εκείνα τα τρέχοντα δίπολα παράλληλα στο επίπεδο της σπείρας ανίχνευσης συμβάλλουν στο MEG.



**Εικόνα 11: Μαγνητοεγκεφαλογράφημα**

### *1.10. Μαθηματική τοποθέτηση των EEG και MEG*

Όπως είδαμε μέσα στον εγκέφαλο δημιουργούνται ρεύματα (πηγές), τα οποία προκαλούν ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στόχος μας είναι η εύρεση αυτών των πεδίων. Τα μαθηματικά προβλήματα που καλούμαστε να λύσουμε είναι:

1. **Ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας**, όπου είναι γνωστά σε εμάς η θέση, ο προσανατολισμός και η ένταση του πρωτεύοντος νευρωνικού ρεύματος  $\mathbf{J}^P$  και ψάχνουμε το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του εγκεφάλου.
2. **Αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας**, όπου είναι γνωστό το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στον εγκέφαλο και ψάχνουμε το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα  $\mathbf{J}^P$  (θέση, ένταση και προσανατολισμό) που προκάλεσε το καταγραφέν ηλεκτρικό πεδίο.
3. **Ευθύ πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας**, όπου είναι γνωστό το ολικό ρεύμα  $\mathbf{J}$  και ψάχνουμε την μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό του εγκεφάλου.
4. Τέλος, το **αντίστροφο πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας**, όπου είναι γνωστή η μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό του εγκεφάλου και αναζητάμε το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα  $\mathbf{J}^P$ .

Η καλή τοποθέτηση του μαθηματικού προβλήματος προϋποθέτει μια σειρά παραδοχών που αφορούν τόσο γεωμετρική μοντελοποίηση του εγκεφάλου όσο και για το μοντέλο που προσεγγίζει το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα  $\mathbf{J}^P$ .

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα κάνουμε τις εξής παραδοχές:

- Το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα αποτελείται από ένα δίπολο με ροπή  $\mathbf{Q}$  που βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_0$  στο εσωτερικό του εγκεφάλου, δηλαδή έχουμε:  
$$\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$
- Βασιζόμαστε στο πλέον κλασικό πρότυπο για τον εγκέφαλο, σύμφωνα με το οποίο ο εγκέφαλος προσομοιάζεται με μια ομογενή σφαίρα, εντός της οποίας βρίσκεται η πηγή κύριου ρεύματος και η αγωγιμότητα είναι θετική ενώ εκτός της σφαίρας δεν περιλαμβάνονται πηγές και η αγωγιμότητα είναι μηδέν .

### 1.11. Το γεωμετρικό πρότυπο της ομογενούς σφαίρας

Θεωρούμε μια λεία, ομογενή σφαίρα επιφάνειας  $S$ , που ορίζεται από την εξίσωση  $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$ . Η υπόθεση της λειότητας εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη συνεχή μεταβολή του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος  $\hat{\mathbf{n}}$  πάνω στην  $S$ .

Έστω  $S^-$  το εσωτερικό φραγμένο και αγωγίμο χωρίο (ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο) με αγωγιμότητα  $\sigma^- = \sigma$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  και  $S^+$  το εξωτερικό μη αγωγίμο χωρίο με αγωγιμότητα  $\sigma^+ (\sigma^+ = 0)$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ .

Στο εσωτερικό χωρίο  $S^-$  υποθέτουμε την ύπαρξη μιας σημειακής πηγής ρεύματος δίπολων με ροπή  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ , η οποία δημιουργεί στο εσωτερικό και εξωτερικό του χωρίου ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρικό δυναμικό  $u^\pm$  ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα διαπερατότητας :

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S^- \quad (1.20)$$

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S^+ \quad (1.21)$$

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \quad (1.22)$$

$$\sigma^- \frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma^+ \frac{\partial u^+(\mathbf{r})}{\partial n}, \mathbf{r} \in S \quad (1.23)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \quad (1.24)$$

όπου  $\partial/\partial n$  δηλώνει την εξωτερική κάθετη παραγωγή πάνω στην  $S$ .

Η συνθήκη (1.20) ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του εγκεφάλου όπου το πρωτεύον ρεύμα είναι μη μηδενικό. Η συνθήκη (1.21) ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του εγκεφάλου όπου δεν περιλαμβάνονται πηγές. Οι σχέσεις (1.22), (1.23) εξασφαλίζουν τις ειδικές συνθήκες συνέχειας που πρέπει να ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό επί της συνοριακής επιφάνειας  $S$ . Τέλος, η σχέση (1.24) περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού καθώς  $r \rightarrow \infty$ . Η σχέση (1.23) στην περίπτωση του προτύπου που εξετάζουμε, επειδή έχουμε  $\sigma^+ = 0$ , γίνεται:

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \mathbf{r} \in S \quad (1.25)$$

Ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού στο εσωτερικό και εξωτερικό του εγκεφάλου, απαιτεί την επίλυση δύο προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Έτσι το πρόβλημα (1.20)-(1.25) αναλύεται στα εξής προβλήματα:

- 1) Εσωτερικό πρόβλημα Neumann

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S^- \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \mathbf{r} \in S \quad (1.27)$$

- 2) Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S^+ \quad (1.28)$$



$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \quad (1.29)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \quad (1.30)$$

Πρώτα επιλύουμε το εσωτερικό πρόβλημα Neumann και μετά το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet. Όταν υπολογισθεί το ηλεκτρικό δυναμικό, το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται από τον τύπο (1.18).

Θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής  $\mathbf{B}$ , με δεδομένα τα ηλεκτρικά δυναμικά που προκύπτουν από το ευθύ πρόβλημα της EEG.

Η εξίσωση (1.15), χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.31)$$

μετατρέπεται στην

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.32)$$

και από τη σχέση  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  έπεται ότι το πεδίο  $\mathbf{B}$  ως σωληνοειδές μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$  με τη μορφή:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.33)$$

Ενώ χωρίς βλάβη της γενικότητας, το  $\mathbf{A}$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.34)$$

Τώρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.32)-(1.34) και την ταυτότητα  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$  παίρνουμε την εξίσωση:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.35)$$

της οποίας η λύση βρίσκεται χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη λύση του τελεστή Laplace :

$$\Delta_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.36)$$

όπου  $\delta$  το μέτρο Dirac,

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.37)$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left[ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mu_0 \mathbf{J} \right] = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mu_0 \mathbf{J} \right] d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu_0 \mathbf{J} d\mathbf{v}(\mathbf{r}')$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} \int_{S^-} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mu_0 \mathbf{J} \right] d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (1.39)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στο φορέα  $S^-$  της συνάρτησης  $\mathbf{J}$ . Έτσι από τη σχέση (1.33) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} (\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.40)$$

που εκφράζει τον νόμο του Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (1.41)$$

όπου το  $\mathbf{J}$  είναι το ολικό ρεύμα.

Άρα από τη σχέση (1.7), (1.8) και (1.18) ο τύπος (1.41) γίνεται:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} -\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (1.42)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται από τον τύπο  $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}') = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)$  και τον ορισμό του μέτρου του Dirac:

$$\int_{S^-} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \int_{S^-} \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (1.43)$$

Άρα ο τύπος (1.42) γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} -\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (1.44)$$

Στην ολοκληρωτική αναπαράσταση (1.44) ο πρώτος όρος περιγράφει την συνεισφορά του νευρωνικού διπολικού ρεύματος στο σημείο  $\mathbf{r}_0$ , ενώ ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος περιγράφει την συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος. Πιο συγκεκριμένα, το ηλεκτρικό δυναμικό  $u^-$  δημιουργεί ένα δίπολο επαγωγικού ρεύματος σε κάθε σημείο  $\mathbf{r}' \in S^-$  με ροπή ίση με  $-\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')$ . Ολοκληρώνοντας την συνεισφορά από κάθε τέτοιο δίπολο, παίρνουμε την συνολική συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος στο πεδίο  $\mathbf{B}$ .

Τώρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\text{curl}(\mathbf{fF}) = f \text{curl}\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = 0$ , με  $f = u^-(\mathbf{r}')$  και  $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$ , ο 2<sup>ος</sup> όρος της σχέσης (1.44) για  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  γίνεται

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) &= u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) &= 0 + \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\ \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) &= \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Άρα ο 2<sup>ος</sup> όρος βάσει της παραπάνω σχέσης και με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss  $\int_{\Omega} \nabla \times (f \nabla g) = \oint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \times f \nabla g \, ds$ , για  $\mathbf{r} \in S^+$  δίνει

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} -\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \, d\mathbf{u}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} -\sigma \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \, d\mathbf{u}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{-\sigma\mu_0}{4\pi} \int_{S^-} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left( u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{u}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{-\sigma\mu_0}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \, ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.46)$$

Αντικαθιστώντας τον παραπάνω τύπο στη σχέση (1.44) παίρνουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση του **Geselowitz** για την μαγνητική επαγωγή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{-\sigma\mu_0}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \, ds(\mathbf{r}') \quad (1.47)$$

Ο τύπος του Geselowitz μεταφέρει την συνεισφορά της χωρικής κατανομής των διπόλων ρεύματος στον αγωγό  $S^-$ , σε μια επιφανειακή κατανομή διπόλων με ροπές κάθετες επάνω στο σύνορο του αγωγού και με ένταση ίση με  $-\sigma u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')$ .

Παρόμοια, βρίσκουμε και τον αντίστοιχο τύπο του Geselowitz, για το ηλεκτρικό δυναμικό.

Παίρνουμε τον τύπο του Green

$$\int_{\Omega^-} [f\Delta g - g\Delta f] = \oint_{\Omega^-} [f \frac{\partial}{\partial \eta} g - g \frac{\partial}{\partial \eta} f] ds \quad (1.48)$$

όπου  $f = u^-$  και όπου  $g = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

άρα έχουμε

$$\int_{S^-} [u^-(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Delta_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')] = \oint_S [u^-(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} u^-(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') \\ \int_{S^-} [u^-(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Delta_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')] = \oint_S [u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} u^-(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') \quad (1.49)$$

Βάζοντας τώρα τις σχέσεις:

$$\Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (1.50)$$

$$\Delta_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sigma^-} \nabla \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \quad (1.51)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (1.52)$$

$$\text{και } \frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}') = 0 \text{ για } \mathbf{r}' \in S \quad (1.53)$$

έχουμε:

$$u^-(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{S^-} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{u}(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.54)$$

ο πρώτος όρος γράφεται

$$\int_{S^-} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{u}(\mathbf{r}') = \int_{S^-} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{u}(\mathbf{r}') = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{S^-} \frac{\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ = -\mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (1.55)$$

Άρα ο τύπος του Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό είναι:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.56)$$

που ισχύει για κάθε  $\mathbf{r} \notin S$ .

Όπου η συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος στο ηλεκτρικό δυναμικό αντιπροσωπεύεται από μια επιφανειακή κατανομή διπόλων ρεύματος καθέτων πάνω στο σύνορο του αγωγού με ροπή ανάλογη της τιμής του ηλεκτρικού δυναμικού στο αντίστοιχο σημείο.

### 1.12. Δυαδική μορφή των EEG και MEG

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να ενοποιήσουμε σε μία δυαδική μορφή, δηλαδή σε ένα τανυστή δεύτερης τάξης, την θεωρία των EEG και MEG.

Για το ηλεκτρικό δυναμικό έχουμε:

$$\sigma \Delta u(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^P \quad (1.57)$$

και για την μαγνητική επαγωγή από τις σχέσεις (1.15), (1.8), (1.14) και (1.17) έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) + \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) + \mu_0 \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) + \mu_0 \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) + \mu_0 \sigma \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r})$$

$$-\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r})$$

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) \quad (1.58)$$

Παρατηρούμε ότι οι πηγές του ηλεκτρικού δυναμικού και της μαγνητικής επαγωγής είναι το βαθμωτό αναλλοίωτο και το διανυσματικό αναλλοίωτο αντίστοιχα του δυαδικού  $\nabla \times \mathbf{J}^P$ , δηλαδή της κλίσης του νευρωνικού ρεύματος.

Η εξίσωση (1.57) είναι το βαθμωτό αναλλοίωτο της δυαδικής εξίσωσης

$$\nabla \otimes (\nabla \sigma u(\mathbf{r})) = \nabla \otimes \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) \quad (1.59)$$

και η εξίσωση (1.58) είναι διανυσματικό αναλλοίωτο της δυαδικής εξίσωσης

$$\nabla \otimes \left( \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right) = \nabla \otimes \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) \quad (1.60)$$

Σε μια προσπάθεια ενοποίησης των τύπων του Geselowitz ορίζουμε την επιφανειακή κατανομή διπολικών ρευμάτων

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = -\sigma u^-(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial S^- \quad (1.61)$$

και το δυαδικό πεδίο

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \otimes \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \oint_{\partial S^-} \mathbf{d}(\mathbf{r}') \otimes \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.62)$$

Συμβολίζουμε με  $S_D$  και με  $\mathbf{V}_D$  το βαθμωτό και το διανυσματικό αναλλοίωτο αντίστοιχα του δυαδικού  $\tilde{\mathbf{D}}$  τότε

$$\mathbf{u}^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{S}_D(\mathbf{r}) \quad (1.63)$$

και

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{V}_D(\mathbf{r}) \quad (1.64)$$

όπου ο τύπος (1.63) ταυτίζεται με τον τύπο (1.56) και ο τύπος (1.64) ταυτίζεται με τον (1.47).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

### 2. Ευθύ πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας

#### 2.1. Εισαγωγή

Στο ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας, θεωρούμε γνωστό το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα, που αποτελείται από ένα δίπολο με ροπή  $\mathbf{Q}$  που βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_0 \in S^-$  και ψάχνουμε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί.

#### 2.2. Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό

Στο πρώτο κεφάλαιο, υποθέσαμε πως ο εγκέφαλος προτυποποιείται ως μια ομογενή σφαίρα επιφάνειας  $S$  που ορίζεται από την εξίσωση  $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$ , η οποία χωρίζει τον εσωτερικό αγώγιμο χώρο  $S^-$ , με τον εξωτερικό μη αγώγιμο χώρο  $S^+$ .

Εντός της σφαίρας, η παρουσία σημειακής πηγής  $\mathbf{J}^p=\mathbf{Q}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ , δημιουργεί ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία εντός και εκτός της σφαίρας.

Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό βρίσκεται από την επίλυση του εσωτερικού προβλήματος Neumann:

$$\Delta u^-(\mathbf{r})=\frac{1}{\sigma}\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{Q}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \mathbf{r}\in S^- \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r})=0, \mathbf{r}\in S \quad (2.2)$$

ενώ το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet:

$$\Delta u^+(\mathbf{r})=0, \mathbf{r}\in S^+ \quad (2.3)$$

$$u^-(\mathbf{r})=u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r}\in S \quad (2.4)$$

$$u^+(\mathbf{r})=O\left(\frac{1}{r}\right), r\rightarrow\infty \quad (2.5)$$

Όπως είδαμε, υπολογίζουμε πρώτα το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό και στη συνέχεια βρίσκουμε το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό. Πρέπει να τονίσουμε ότι το πρόβλημα Neumann δεν έχει μοναδική λύση. Για το λόγο αυτό επιβάλλουμε την επιπλέον συνθήκη:

$$u^-(\mathbf{0})=0 \quad (2.6)$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$-\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}=\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (2.7)$$

Η λύση του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού  $u^{\bar{}}$ , ως γενική λύση της εξίσωσης Poisson, μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα μιας ειδικής λύσης  $w^{\bar{}}(\mathbf{r})$  της εξίσωσης Poisson (2.1) και μιας εσωτερικής αρμονικής συνάρτησης  $v^{\bar{}}(\mathbf{r})$ .

Για να βρούμε την ειδική λύση της (2.1) θα χρησιμοποιήσουμε την θεμελιώδη λύση του τελεστή Laplace και τη σχέση (2.7):

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{r}} \left[ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ \Delta_{\mathbf{r}} \left[ -\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] &= \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ \Delta_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] &= \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Επομένως,

$$w^{\bar{}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (2.9)$$

Η  $v^{\bar{}}(\mathbf{r})$  ως αρμονική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των εσωτερικών σφαιρικών αρμονικών ιδιολύσεων  $r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$ , όπου  $Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$  μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές οι οποίες αποτελούν πλήρες ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων σε κάθε σφαιρική επιφάνεια και δίνονται από τη σχέση

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos(\theta)) e^{im\varphi} \quad (2.10)$$

όπου  $n=0,1,2,\dots$  και  $m=-n,\dots,n$ ,  $P_n^m$  συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους που δίνονται από τη σχέση

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right] \quad (2.11)$$

Άρα,

$$v^{\bar{}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.12)$$

οι συντελεστές  $A_n^m$  υπολογίζονται από την συνθήκη (2.2).

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το προσθετικό θεώρημα των πολυωνύμων του Legendre για τις μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές,

$$P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.13)$$



που εκφράζει κάθε πολυώνυμο Legendre βαθμού  $n$  ως προς την γωνία των διευθύνσεων  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{r}}_0$  συναρτήσει των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{r}}_0$ .

Βάσει των παραπάνω θα γράψουμε το ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace :  $\frac{1}{|r-r_0|}$ , συναρτήσει των σφαιρικών αρμονικών:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{\min}^n}{r_{\max}^{n+1}} P_n(\cos\gamma) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_{\min}^n}{r_{\max}^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi) Y_n^{m*}(\theta', \varphi') \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Όπου } r_{\min} &= \min |r|, |r'| \\ r_{\max} &= \max |r|, |r'| \\ \cos\gamma &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' \end{aligned}$$

Η μορφή του  $\frac{1}{|r-r'|}$  εξαρτάται από τη σχετική θέση του σημείου παρατήρησης  $r$  ως προς τη θέση της πηγής  $r'$ .

Για  $r > r_0$  η (2.14) γράφεται:

$$\frac{1}{|r-r_0|} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.15)$$

Ενώ για  $0 < r < r_0$

$$\frac{1}{|r-r_0|} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.16)$$

η μορφή (2.16) δεν αξιοποιείται για την επίλυση του προβλήματος (2.1)-(2.2), είναι απαραίτητες όμως για την πληρότητα του προβλήματος, αφού θα μας βοηθήσει να βρούμε τις τιμές του δυναμικού για την περιοχή  $0 < r < r_0$ .

Τώρα θα υπολογίσουμε τους συντελεστές  $A_n^m$ :

Η συνοριακή συνθήκη (2.2) γράφεται για  $r > r_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m \left[ \frac{d}{dr} r^n \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \\ - \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{2n+1} \left[ \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

υπολογίζοντας την (2.17) για  $r=a$  και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$  επάνω στην μοναδιαία σφαίρα παίρνουμε  $A_0^0 = \text{αυθαίρετο}$ ,

$$A_n^m = \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{a^{2n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0), \text{ για κάθε } n \geq 1 \text{ και } |m| \leq n \quad (2.18)$$

που ισχύουν και για  $0 < r < r_0$

Αφού το πρόβλημα (2.1)-(2.2) είναι πρόβλημα Neumann, μπορούμε να προσθέσουμε μια αυθαίρετη σταθερά  $c$  στη λύση μας, η οποία αντιστοιχεί στον όρο μηδενικής τάξης και μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (2.6). Οπότε έχουμε

$$c = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3}$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό στις δύο περιοχές εσωτερικά της σφαίρας δίνεται από τους τύπους:

Για  $r > r_0$

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = & \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{\alpha^{2n+1}} r^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ενώ για  $0 < r < r_0$

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = & \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{\alpha^{2n+1}} r^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.3. Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό

Θα ασχοληθούμε τώρα με το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet (2.3)-(2.5).

Αναπτύσσουμε το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό με τη βοήθεια των χωρικών εξωτερικών σφαιρικών αρμονικών:  $r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$ , για να ικανοποιείται η ασυμπτωτική συνθήκη (2.5) δηλαδή,

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.21)$$

Για να ικανοποιείται και η συνθήκη (2.4) χρησιμοποιούμε την λύση που βρήκαμε για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό (2.19) για  $r = \alpha$ :

$$\begin{aligned} u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = & \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \\ & \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

και έχουμε τα δεδομένα Dirichlet στην επιφάνεια  $S$ .

Εξισώνουμε τις σχέσεις (2.21) και (2.22) για  $r = \alpha$  έχουμε :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m \alpha^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &+ \\ \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) & \end{aligned} \quad (2.23)$$

και από την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών  $Y_n^m$  βρίσκουμε:

$$B_n^m = \frac{1}{\sigma n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \text{ και } |m| \leq n \quad (2.24)$$

και

$$B_0^0 = \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi\sigma}} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0^3} \quad (2.25)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (2.24)-(2.25) παίρνουμε το ηλεκτρικό δυναμικό για  $r > \alpha$ :

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n r_0^n r^{-(n+1)} \frac{1}{n} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.26)$$

## 2.4. Κλειστές μορφές του Ηλεκτρικού Δυναμικού

### 2.4.1. Εισαγωγή

Οι σχέσεις (2.19) και (2.26) μας δίνουν το εσωτερικό και εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, αντίστοιχα εκφρασμένα με τη βοήθεια σφαιρικών αρμονικών. Στη παράγραφο αυτή θα αθροίσουμε αυτές τις σειρές για να οδηγηθούμε στη κλειστή μορφή των σχέσεων αυτών.

### 2.4.2. Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό

Εισάγοντας τη σχέση (2.13) στη (2.22) έχουμε

$$\begin{aligned} u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{n+1}{n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \\ &\quad \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \\ &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \\ u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Το άθροισμα  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)$  με τη χρήση του θεμελιώδους αναπτύγματος γράφεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = \frac{1}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.28)$$

Άρα η (2.27) γράφεται:

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^n \frac{1}{n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right] \quad (2.29)$$

Τώρα χρησιμοποιώντας τη σχέση :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\cos\theta) = -\ln \left[ \frac{1 - \rho \cos\theta + \sqrt{1 - 2\rho \cos\theta + \rho^2}}{2} \right] \quad (2.30)$$

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 \text{ και } \rho = \frac{r_0}{\alpha} < 1. \quad (2.31)$$

Η (2.29) γίνεται :

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{1 - \frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2\frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r_0^2}{\alpha^2}}}{2} \right] \right] \quad (2.32)$$

ο αριθμητής στην συνάρτηση του λογαρίθμου γράφεται:

$$1 - \frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2\frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r_0^2}{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha^2} [\alpha |\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| + \alpha\hat{\mathbf{r}} \cdot (\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)] = \frac{F(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0)}{\alpha^2 |\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.33)$$

$$\text{όπου } F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| [r |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \quad (2.34)$$

η (2.32) γίνεται

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{F(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0)}{2\alpha^2 |\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \right] \quad (2.35)$$

ή ισοδύναμα

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| + \hat{\mathbf{r}} \cdot (\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}{2\alpha} \right] \right] \quad (2.36)$$

Τώρα η σχέση (2.19) μέσω της (2.13) γράφεται :

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{r_0^n r^n}{\alpha^{2n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.37)$$

κάνοντας πράξεις έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες ανάπτυγμα (2.14) για  $r_{\min} = |\mathbf{r}_0|$   $r_{\max} = |\alpha^2 \hat{\mathbf{r}}|$  και τη σχέση (2.30), η (2.37) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} \right] + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_0 r)^n}{(\alpha^2)^n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(r_0 r)^n}{(\alpha^2)^n} \right]^n \frac{1}{n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} \right] + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) - \frac{1}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} \right] + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left( \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - 2\rho(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) + \rho^2}} - \frac{1}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{1 - \rho(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) + \sqrt{1 - 2\rho(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) + \rho^2}}{2} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\rho = \frac{r_0 r}{\alpha^2}, \rho < 1 \quad (2.39)$$

Η (2.38) τώρα απαλείφοντας τον όρο  $\frac{1}{\alpha}$  που θα φύγει λόγω του τελεστή κλίση γίνεται

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} + \frac{\alpha}{|r_0 r - \alpha^2 \hat{\mathbf{r}}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{F\left[\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0\right]}{2\left(\frac{\alpha^2}{r}\right) \left|\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0\right|} \right] \right] \quad (2.40)$$

#### 2.4.3. Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό

Στην παράγραφο 2.2 αποδείξαμε τη σχέση που μας δίνει το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό. Κάνοντας χρήση της σχέσης (2.13), της σχέσης (2.14) για  $r_{\min}=|r_0|$ ,  $r_{\max}=|r|$  και τη σχέσης (2.30) με

$$\rho = \frac{r_0}{r}, \rho < 1 \quad (2.41)$$

η σχέση (2.26) γίνεται:

$$\begin{aligned} u^+(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) r_0^n r^{-(n+1)} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \\ &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ 2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n r^{-(n+1)} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right) - \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r_0^n r^{-n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \\ &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r} \ln \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_0}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2 \frac{r_0}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r_0^2}{r^2}} \right) \right] \\ &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma r_0^3} \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

ή

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] \quad (2.43)$$

Παρατηρούμε ότι για  $r=\alpha$  η σχέση (2.43) ισούται με την σχέση (2.35), δηλαδή,

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = u^+(\alpha \hat{\mathbf{r}}) \quad \hat{\mathbf{r}} \in S \quad (2.44)$$

#### 2.5. Εσωτερικό και Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με τη Μέθοδο των Ειδώλων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την μέθοδο των ειδώλων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην τοποθέτηση υποθετικών ιδιαιζόντων σημείων δηλαδή πηγών-ειδώλων, με κατάλληλα επιλεγμένη ένταση, σε κατάλληλα σημεία του χώρου, έτσι ώστε το ολικό δημιουργούμενο πεδίο να ικανοποιεί αυτόματα τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Η ευκολία στη μέθοδο των ειδώλων οφείλεται στο ότι τα είδωλα είναι

σημειακά και συνεπώς τα αντίστοιχα δυναμικά που δημιουργούν έχουν τη γνωστή μορφή της θεμελιώδους λύσης. Ακόμα επειδή που τα είδωλα αντικαθιστούν τα σύνορα, αποφεύγεται η επίπονη διαδικασία του υπολογισμού των συντελεστών, για την προσαρμογή των συνοριακών συνθηκών κατά την ανάπτυξη των δεδομένων σε ορθοκανονικά συστήματα ιδιολύσεων.

Για την επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών χρειαζόμαστε ένα θεμελιώδες χωρίο  $\Omega$ , γνήσιο υποσύνολο ολόκληρου του χώρου, στο οποίο ορίζεται η διαφορική εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε και ένα καλά ορισμένο σύνορο  $\partial\Omega$ , πεπερασμένο πάνω στο οποίο ορίζονται οι συνοριακές συνθήκες. Με  $\Omega^c$  ορίζουμε το εξωτερικό χωρίο που είναι το συμπλήρωμα του συνόλου  $\Omega \cup \partial\Omega$ .

Στόχος μας είναι μέσω της μεθόδου των ειδώλων, να αντικαταστήσουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος μας, με ιδιομορφίες της λύσης που βρίσκονται στο  $S^c$ .

Θα μελετήσουμε αρχικά το εξής πρόβλημα:

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad x_3 > 0, \quad x_{03} > 0 \quad (2.45)$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_3 = 0 \quad (2.46)$$

ζητάμε δηλαδή μια αρμονική συνάρτηση στον ημίχωρο  $x_3 > 0$ , που δημιουργείται από μια θετική και μοναδιαία μονοπολική πηγή η οποία βρίσκεται στο επίπεδο

$\mathbf{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  με  $x_{03} > 0$ , όπου η αρμονική συνάρτηση μηδενίζεται πάνω στο επίπεδο  $x_3 = 0$ .

Η λύση αυτού του προβλήματος δίνεται από τη σχέση:

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + w(\mathbf{r}) \quad (2.47)$$

όπου για την  $w(\mathbf{r})$  ισχύει:

$$\Delta w(\mathbf{r}) = 0, \quad x_3 > 0 \quad (2.48)$$

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad x_3 = 0 \quad (2.49)$$

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση  $w(\mathbf{r})$  με την μέθοδο των ειδώλων. Παρατηρούμε ότι η  $w(\mathbf{r})$  είναι η αρμονική συνάρτηση που γεννάει ένα αρνητικό μοναδιαίο μονόπολο στη θέση  $\mathbf{r}_0'$  που είναι συμμετρική της θέσης  $\mathbf{r}_0$  της πηγής ως προς το επίπεδο  $x_3 = 0$ .

Η λύση του προβλήματος (2.45)-(2.46) δίνεται από τη σχέση:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \quad (2.50)$$

που ισχύει για κάθε  $r$  με  $x_3 > 0$  και λόγω συμμετρίας

$$|\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| = |\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0'| \quad (2.51)$$

για κάθε  $\bar{\mathbf{r}}$  με  $x_3 = 0$ .

Η εισαγωγή του ειδώλου με ένταση  $-1$  στη θέση  $\mathbf{r}_0'$ , αντικατέστησε την ανάγκη για υπολογισμό της συνοριακή συνθήκης η οποία ικανοποιείται λόγω συμμετρίας.

Μελετάμε τώρα το εξής πρόβλημα:

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad r < \alpha, \quad r_0 < \alpha \quad (2.52)$$

$$u(\mathbf{r}) = 0, \quad r = \alpha \quad (2.53)$$

αντικαταστήσαμε δηλαδή το επίπεδο  $x_3 = 0$  του αρχικού προβλήματος (2.45)-(2.46), με μια σφαίρα ακτίνας  $\alpha$  που περιέχει ένα μονόπολο έντασης  $+1$  στο εσωτερικό της και η αρμονική συνάρτηση που αναζητάμε μηδενίζεται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

Η λύση του προβλήματος αυτού, σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται από τη σχέση:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\alpha}{r_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{\alpha^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \quad (2.54)$$

όπου το είδωλο που επιλύει το πρόβλημα μας βρίσκεται στη θέση

$$\mathbf{r}_0' = \frac{\alpha^2}{r_0^2} \mathbf{r}_0 \quad (2.55)$$

με ένταση

$$q' = -\frac{\alpha}{r_0} \quad (2.56)$$

Με βάση τα παραπάνω θα προσπαθήσουμε να αναπαραστήσουμε το εσωτερικό και εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό με τη βοήθεια των ειδώλων που βρίσκονται στο συμπληρωματικό του θεμελιώδους χωρίου.

Θα μετατρέψουμε το δεξί μέλος της (2.40), ώστε να εντοπίσουμε τα απαιτούμενα είδωλα. Συμβολίζουμε με  $A$  τον όρο αυτό και έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \frac{\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 + |\mathbf{r} \mathbf{r}_0 - \alpha^2 \hat{\mathbf{r}}|}{2\alpha^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \frac{\mathbf{r} \cdot (\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) + r |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|}{2\alpha^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \frac{-\mathbf{r} + r \nabla_{\mathbf{r}_0} |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|}{\mathbf{r} \cdot (\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) + r |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \frac{-\mathbf{r}-\mathbf{r}\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0}{|\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|} \\
 &= \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma\alpha} \cdot \frac{r(\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0)+r|\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}{|\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|[r\cdot(\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0)+r|\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|]} \\
 &= \frac{\alpha}{4\pi\sigma r} \mathbf{Q} \cdot \frac{(\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}|\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}{F(\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}};\mathbf{r}_0)} \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

από τη σχέση (2.57) παρατηρούμε ότι το είδωλο Kelvin του σημείου  $\mathbf{r}$  είναι στη θέση  $\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$  που βρίσκεται εκτός της σφαίρας επειδή  $r < \alpha$ .

Το διανυσματικό δυναμικό ενός διπόλου στη θέση  $\mathbf{r}_0$  ενός είναι ανάλογο του πεδίου:

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \tag{2.58}$$

ενώ το διανυσματικό δυναμικό ενός διπόλου στη θέση  $\mathbf{r}$  είναι ανάλογο του αντίθετου πεδίου:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \tag{2.59}$$

δηλαδή ο διαφορικός τελεστής  $\nabla_{\mathbf{r}_0} + \nabla_{\mathbf{r}}$  εξαλείφει το πεδίο του μονοπολικού δυναμικού  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ .

Κατανέμουμε δίπολα κατά μήκος της ακτίνας με διεύθυνση  $\hat{\mathbf{r}}$  από το σημείο  $\frac{\alpha^2}{r}$  ως το άπειρο και θα δημιουργηθεί ένα δυναμικό που θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}) dt &= \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} \frac{\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|^3} dt \\
 &= \hat{\mathbf{r}} \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} \frac{t dt}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|^3} dt - \mathbf{r}_0 \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} \frac{dt}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|^3} \tag{2.60}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τους ολοκληρωτικούς τύπους για  $\alpha > 0$ ,

$$\int \frac{xdx}{(\sqrt{\alpha x^2+bx+c})^3} = \frac{2(bx+2c)}{(b^2-4\alpha c)\sqrt{\alpha x^2+bx+c}} \tag{2.61}$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{\alpha x^2+bx+c})^3} = \frac{-2(2\alpha x+b)}{(b^2-4\alpha c)\sqrt{\alpha x^2+bx+c}} \tag{2.62}$$

και παίρνουμε:

$$\int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} \frac{t dt}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|^3} = \frac{1}{r_0} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{r_0^2 r - r_0 \alpha^2 \cos\theta}{r_0^2 r \sin^2\theta |\frac{\alpha^2}{r}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|} \tag{2.63}$$



$$\int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} \frac{dt}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|^3} = \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} + \frac{r_0 r \cos \theta - \alpha^2}{r_0^2 r \sin^2 \theta |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.64)$$

όπου  $\cos \theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0$

Βάζουμε τώρα τις σχέσεις (2.63),(2.64) στη (2.60) έχουμε :

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} (\nabla \mathbf{r}_0 \frac{1}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}) dt = \\ & = \hat{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{r_0 \sin^2 \theta} + \frac{r_0 r - \alpha^2 \cos \theta}{r_0 r \sin^2 \theta |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] - \hat{\mathbf{r}}_0 \left[ \frac{1}{r_0 \sin^2 \theta} + \frac{r_0 r \cos \theta - \alpha^2}{r_0 r \sin^2 \theta |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \\ & = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\mathbf{r}}_0}{r_0 \sin^2 \theta} + \frac{\hat{\mathbf{r}}(r_0 r - \alpha^2 \cos \theta) - \hat{\mathbf{r}}_0(r_0 r \cos \theta - \alpha^2)}{r_0 r \sin^2 \theta |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \\ & = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r_0 \sin^2 \theta} \left[ \cos \theta + \frac{r_0 - \frac{\alpha^2}{r} \cos \theta}{|\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] - \frac{\hat{\mathbf{r}}_0}{r_0 \sin^2 \theta} \left[ 1 + \frac{r_0 r \cos \theta - \alpha^2}{|\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \\ & = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r_0 \sin^2 \theta} \left[ \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot (\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}{|\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] - \frac{\hat{\mathbf{r}}_0}{r_0^2 \sin^2 \theta} \left[ \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot (\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}{|\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

εισάγοντας τώρα το συμβολισμό  $\mathbf{R} = \frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0$  και  $R = |\mathbf{R}|$

και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\frac{(R - \frac{\alpha^2}{r}) \cos \theta + r_0}{r_0 \sin^2 \theta} = \frac{R + \frac{\alpha^2}{r}}{R + \frac{\alpha^2}{r} - r_0 \cos \theta} \quad (2.66)$$

$$\frac{R - \frac{\alpha^2}{r} + r_0 \cos \theta}{r_0 \sin^2 \theta} = \frac{r_0}{R + \frac{\alpha^2}{r} - r_0 \cos \theta} \quad (2.67)$$

γράφουμε την (2.65):

$$\int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} (\nabla \mathbf{r}_0 \frac{1}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}) dt = \frac{\alpha^2}{r} \frac{(\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) + \hat{\mathbf{r}} |\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|}{F(\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0)} \quad (2.68)$$

Η σχέση (2.57) μέσω της σχέσης (2.68) για την συνεισφορά των καταναμημένων διπόλων πάνω στην ακτίνα  $\hat{\mathbf{r}}$  γίνεται

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma\alpha} \cdot \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} (\nabla \mathbf{r}_0 \frac{1}{|\mathbf{t}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}) dt \quad (2.69)$$

Η σχέση (2.69) αναπαριστά το δεξί μέλος της (2.40) ως το δυναμικό που δημιουργείται στο σημείο  $\mathbf{r}_0$  από μια ομοιόμορφη κατανομή διπόλων πάνω στην ακτίνα  $\mathbf{r}$ , από το είδωλο  $\frac{\alpha^2}{r}$  ως το άπειρο.

Η σχέση (2.40) γίνεται

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r_0} + \frac{\frac{\alpha}{r}}{\left| \frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \right] + \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|t\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0|}) dt \quad (2.70)$$

Παρατηρούμε ότι το δυναμικό πεδίο ενός μονοπόλου στη θέση  $\mathbf{r}_0$  με ένταση  $+1$  που ισούται με  $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ , ικανοποιεί τη σχέση αμοιβαιότητας, δηλαδή το δυναμικό πεδίο στο σημείο  $\mathbf{r}$  ενός μονοπόλου που βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}_0$  είναι ίσο με το πεδίο στο σημείο  $\mathbf{r}_0$  ενός μονοπόλου που βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{r}$ . Το πεδίο ενός δίπολου υπολογίζεται αν πάρουμε την κλίση του πεδίου που δημιουργείται από ένα μονόπολο. Επίσης ο παράγοντας  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  είναι συμμετρικός ως προς τις μεταβλητές  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{r}_0$  οπότε και επιτρέπεται η παραγωγή ως προς και τις δύο αυτές μεταβλητές, με μόνη διαφορά η αλλαγή πρόσημου της κλίσης. Θεωρούμε ότι το δυναμικό ενός δίπολου στη θέση  $\mathbf{r}_0$  με ροπή  $\mathbf{Q}$ , δίνεται από την κατά κατεύθυνση παράγωγο ως προς  $\mathbf{r}_0$  του δυναμικού του μοναδιαίου μονοπόλου επί το μέτρο  $\mathbf{Q}$  της ροπής, οπότε το δυναμικό του δίπολου δίνεται:

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right] = -\frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (2.71)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, το δεξιό μέλος της (2.70) ερμηνεύεται ως εξής:

Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $\mathbf{r}$  ισούται με το δυναμικό που δημιουργείται στη θέση  $\mathbf{r}_0$  από ένα σύστημα ειδώλων που αποτελείται από :

- ένα δίπολο με ροπή  $-\frac{1}{\sigma} \mathbf{Q}$  στο σημείο  $\mathbf{r}$ ,
- ένα δίπολο με ροπή  $+\frac{1}{\sigma} \mathbf{Q}$  στο σημείο  $\mathbf{0}$ ,
- ένα δίπολο με ροπή  $-\frac{\alpha}{\sigma r} \mathbf{Q}$  στο σημείο  $\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$  που είναι το είδωλο του σημείου  $\mathbf{r}$ ,
- μια συνεχής κατανομή διπόλων με ροπή  $-\frac{1}{\alpha\sigma} \mathbf{Q}$  σε κάθε σημείο της ακτίνας  $\mathbf{r}$  από το σημείο  $\frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$  ως το άπειρο.

Συμβολίζουμε με

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \quad P = |\mathbf{P}|, \quad \mathbf{R} = \frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \quad \text{και} \quad R = |\mathbf{R}|$$

τότε το εσωτερικό δυναμικό (2.40) κάνοντας την παραγωγή γράφεται ως εξής:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[ \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{\alpha R} \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right] \quad (2.72)$$

ή

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[ \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{\infty} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|}) dt \right] \quad (2.73)$$

αντίστοιχα το εξωτερικό δυναμικό (2.43) χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$r \nabla_{\mathbf{r}_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -r(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}}) \quad (2.74)$$

γράφεται:

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma} \cdot \left[ \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + 2 \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{rP} \frac{(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}})}{rP + \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}} \right] \quad (2.75)$$

αν θέσουμε στην (2.72)  $\alpha = r$  σε όλους εκτός από τον πρώτο όρο, παρατηρούμε ότι η (2.72) ταυτίζεται με την (2.75).

Οπότε αν θέσουμε  $\alpha = r$  και στην σχέση (2.73) καταλήγουμε στην σχέση:

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma} \cdot \left[ \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + 2 \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{r} \int_r^{\infty} \mathbf{Q} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|}) dt \right] \quad (2.76)$$

Το σύστημα ειδώλων που περιγράφει η αναπαράσταση (2.76) είναι:

- ένα δίπολο με ροπή  $-\frac{\alpha}{\sigma r} \mathbf{Q}$  στο σημείο  $\mathbf{0}$
- ένα δίπολο με ροπή  $-\frac{2}{\sigma} \mathbf{Q}$  στο σημείο  $\mathbf{r}$  και
- μια συνεχής κατανομή διπόλων με ροπή  $-\frac{1}{\sigma r} \mathbf{Q}$  σε κάθε σημείο της ακτίνας  $\hat{\mathbf{r}}$  από το σημείο  $\mathbf{r}$  μέχρι το άπειρο.

Το σύστημα αυτό παράγει ένα δυναμικό στο σημείο  $\mathbf{r}_0$  που είναι ίσο με το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο παρατήρησης  $\mathbf{r}$ .

## 2.6. Ηλεκτρικό Πεδίο

Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1 από τη σχέση  $\mathbf{E} = -\nabla u$ , οπότε το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}^-(\mathbf{r}) = -\nabla u^-(\mathbf{r}) \quad (2.77)$$

και το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο από τη σχέση :

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}) = -\nabla u^+(\mathbf{r}) \quad (2.78)$$

από τη σχέση (2.72) και τη σχέση (2.77) έχουμε:

$$\mathbf{E}^{-}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla_r \left( \mathbf{Q} \cdot \left[ \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{\alpha \mathbf{R}}{r R^3} + \frac{1}{\alpha R} \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right] \right) \quad (2.79)$$

ενώ από τις σχέσεις (2.75) και (2.78) έχουμε:

$$\mathbf{E}^{+}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla_r \cdot \left[ \mathbf{Q} \cdot \left( \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + 2 \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{rP} \frac{(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}})}{rP + \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}} \right) \right] \quad (2.80)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

### 3. Το αντίστροφο πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας

#### 3.1. Εισαγωγή

Στο αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας γνωρίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στην επιφάνεια του κρανίου μέσω μετρήσεων και αναζητάμε το νευρωνικό ρεύμα στο εσωτερικό του εγκεφάλου που το δημιούργησε.

#### 3.2. Επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος

Το αντίστροφο πρόβλημα της EEG δεν έχει μοναδική λύση και επομένως αρκούμαστε στον εντοπισμό μιας συνιστώσας του νευρωνικού ρεύματος. Στο ευθύ πρόβλημα της EEG υποθέσαμε την ύπαρξη σημειακής διπολικής πηγής ρεύματος  $\mathbf{J}^P$  ροπής  $\mathbf{Q}$ , εσωτερικά του εγκεφάλου. Στην περίπτωση του αντίστροφου προβλήματος θα θεωρήσουμε αρχικά

- συνεχές νευρωνικό ρεύμα  $\mathbf{J}^P = \mathbf{J}^P(\mathbf{r})$ , το οποίο διαχέεται σε διάφορα σημεία στο εσωτερικό του εγκεφάλου και είναι διάφορο του μηδενός μόνο εσωτερικά του καθώς
- και ότι η γεωμετρία του εγκεφάλου δεν υπόκειται σε κανέναν περιορισμό. Συμβολίζουμε με  $\Omega^-$  τον εσωτερικό αγωγίμο εγκέφαλο, με  $\Omega^+$  τον εξωτερικό αγωγίμο εγκέφαλο και με  $\partial\Omega$  το σύνορο του.

Γνωρίζουμε ότι ο φορέας μιας συνάρτησης  $f$ ,  $\text{supp}f$ , είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το σύνολο μη μηδενισμού της  $f$ . Εφόσον λοιπόν το σύνολο  $\Omega^-$  είναι ανοιχτό και περιέχει το  $\text{supp}f$ , συνεπάγεται ότι η απόσταση του συνόρου  $\partial\Omega$  από το  $\text{supp}f$  είναι θετική. Επομένως η συνάρτηση  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^{-1}$  όπου  $\mathbf{r} \in \partial\Omega$  και  $\mathbf{r}_0 \in \text{supp}f$  δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο. Αυτό συνεπάγεται επίσης ότι το ρεύμα  $\mathbf{J}^P$  πάνω στο σύνορο  $\partial\Omega$  είναι μηδέν.

Στην περίπτωση του συνεχούς ρεύματος το πρόβλημα (1.26)-(1.27) δέχεται λύση της μορφής του Geselowitz:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} dV(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (3.1)$$

όπου η λύση λόγω γραμμικότητας του προβλήματος εκφράζεται ως το ολοκλήρωμα της αντίστοιχης λύσης για το διπολικό ρεύμα  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)\}$  επάνω στο χωρίο  $\Omega$ .

Παρατηρούμε ότι η συνεισφορά του νευρωνικού ρεύματος ολοκληρώνεται σε όλο το  $\Omega^-$ , ενώ η συνεισφορά του επαγωγικού ρεύματος παραμένει ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια  $\partial\Omega$ . Επομένως το ηλεκτρικό δυναμικό είναι απόρροια της δραστηριότητας στο  $\Omega^-$  ενός συνεχούς ρεύματος και όχι μόνο αυτού ενός διπόλου.

Δηλαδή:

$$u^-(\mathbf{r}) = \int_{\Omega^-} u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \quad (3.2)$$

Σύμφωνα με την ανάλυση της ενότητας 2.1 το ηλεκτρικό δυναμικό μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla \mathbf{r}_0 \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \quad (3.3)$$

όπου το  $\mathbf{r}$  θέλουμε να περιορίζεται πάνω στο σύνορο  $\partial\Omega$  επειδή εκεί γίνονται οι EEG μετρήσεις. Και επειδή το  $\mathbf{r}_0$  μεταβάλλεται στο εσωτερικό του  $\Omega^-$  το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.3) δεν απειρίζεται.

Θεωρούμε ότι το νευρωνικό ρεύμα  $\mathbf{J}^P$  έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους και ότι το χωρίο  $\Omega^-$  είναι συνεκτικό και αστεροειδές δηλαδή υπάρχει ένα εσωτερικό σημείο του  $\Omega^-$  με την ιδιότητα κάθε ακτίνα που ξεκινάει από αυτό το σημείο και εκτείνεται στο άπειρο, συναντάει το σύνορο του αστεροειδούς σε ένα σημείο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το ρεύμα  $\mathbf{J}^P$  γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \nabla\psi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega^- \quad (3.4)$$

$$\text{με } \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.5)$$

όπου το  $\psi$  ονομάζεται βαθμωτό και το  $\mathbf{A}$  διανυσματικό δυναμικό Helmholtz.

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = \nabla f \cdot \mathbf{g} + f\nabla \cdot \mathbf{g} \quad (3.6)$$

του θεωρήματος Gauss, το γεγονός ότι το  $\mathbf{J}^P$  μηδενίζεται πάνω στο σύνορο και τη σχέση (3.4) η σχέση (3.3) γίνεται

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} \nabla \mathbf{r}_0 \cdot \left[ \frac{\mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \right] d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} (\nabla \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)) \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \oint_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)) \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] ds(\mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} (\nabla \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)) \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \right] d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \\
 & = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} (\Delta \mathbf{r}_0 \Psi(\mathbf{r}_0)) \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \right] d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ .

Τώρα χρησιμοποιώντας το δεύτερο τύπο του Green στο  $\Omega^-$  για τις συναρτήσεις  $\Psi(\mathbf{r}_0)$  και  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$  με  $\mathbf{r} \in \partial\Omega$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^-} \left[ \Psi(\mathbf{r}_0) \Delta \mathbf{r}_0 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \Delta \mathbf{r}_0 \Psi(\mathbf{r}_0) \right] d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \\
 & = \oint_{\partial\Omega} \left[ \Psi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}_0)} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}_0)} \Psi(\mathbf{r}_0) \right] ds(\mathbf{r}_0) \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

όπου η  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$  είναι αρμονική και οι  $\Psi(\mathbf{r}_0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} \Psi$  μηδενίζονται στο σύνορο  $\partial\Omega$  άρα

$$\int_{\Omega^-} (\Delta \mathbf{r}_0 \Psi(\mathbf{r}_0)) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{για } \mathbf{r} \in \partial\Omega. \tag{3.9}$$

Επομένως ο τύπος (3.7) παίρνει τη μορφή:

$$u^-(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} (\Delta \mathbf{r}' \Psi(\mathbf{r}')) v^-(\mathbf{r};\mathbf{r}') d\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \quad \text{για } \mathbf{r} \in \partial\Omega \tag{3.10}$$

που μας δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στο σύνορο  $\partial\Omega$ .

Από την παραπάνω σχέση γίνεται αντιληπτό, ότι για τον υπολογισμό του επιφανειακού ηλεκτρικού δυναμικού αρκεί μόνο η γνώση της συνιστώσας του βαθμωτού δυναμικού Helmholtz  $\Psi$ , του πρωτεύοντος νευρωνικού ρεύματος. Αντίστροφα αν γνωρίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό επάνω στο σύνορο μπορούμε να προσδιορίσουμε μόνο την συνιστώσα  $\Psi$  του νευρωνικού ρεύματος. Για την ακρίβεια μόνο ο προσδιορισμός του μη αρμονικού μέρους του βαθμωτού  $\Psi$  είναι εφικτός αφού το αρμονικό του μέρος εξαλείφεται από τη δράση του τελεστή Laplace. Οι άλλες δύο συνιστώσες του νευρωνικού ρεύματος, οι συνιστώσες του σωληνοειδούς διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$  δεν μπορούν να ανιχνευθούν από την καταγραφή του επιφανειακού ηλεκτρικού δυναμικού.

### 3.3. Αντίστροφο πρόβλημα της EEG για διπολική πηγή

Στο ευθύ πρόβλημα της EEG υπολογίσαμε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται εντός μιας αγωγίμης σφαίρας όταν η πηγή μας είναι ένα δίπολο ροπής  $\mathbf{Q}$  που βρίσκεται εντός της σφαίρας στη θέση  $\mathbf{r}_0$ . Στο αντίστροφο πρόβλημα της EEG

θεωρούμε γνωστό το επιφανειακό ηλεκτρικό δυναμικό και ψάχνουμε το νευρωνικό ρεύμα που το δημιουργήσε.

Από τη σχέση (2.22) για  $c = 0$  :

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\alpha^n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.11)$$

Αναπτύσσουμε τώρα στο πλήρες και ορθοκανονικό σύστημα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών  $Y_n^m$ :

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.12)$$

όπου οι συντελεστές  $C_n^m$  δίνονται από τη σχέση :

$$C_n^m = \oint_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \text{ και } |m| \leq n \quad (3.13)$$

και λόγω ορθογωνιότητας ισχύει:

$$C_n^m = \frac{1}{\sigma \alpha^{n+1}} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \quad (3.14)$$

Επομένως γνωρίζοντας τις σταθερές  $C_n^m$ , αναζητάμε το δίπολο  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ .

Για τον προσδιορισμό του διπόλου απαιτείται ο προσδιορισμός έξι αριθμών  $C_n^m$ , τριών για τις συντεταγμένες του  $\mathbf{r}_0$  και τριών για τις συντεταγμένες του  $\mathbf{Q}$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (3.15)$$

και παίρνοντας τις συντεταγμένες που προκύπτουν για  $n=1,2$  έχουμε

$$C_1^{-1} = \frac{1}{\sigma \alpha^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta_0 e^{-i\varphi_0} \quad (3.16)$$

$$C_1^0 = \frac{1}{\sigma \alpha^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta_0 \quad (3.17)$$

$$C_1^1 = \frac{1}{\sigma \alpha^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta_0 e^{i\varphi_0} \quad (3.18)$$

$$C_2^{-2} = \frac{1}{2\sigma \alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^2 \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2\theta_0 e^{-2i\varphi_0} \quad (3.19)$$

$$C_2^{-1} = \frac{1}{2\sigma \alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^2 \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin\theta_0 \cos\theta_0 e^{-i\varphi_0} \quad (3.20)$$

$$C_2^0 = \frac{1}{2\sigma \alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{3 \cos^2\theta_0 - 1}{2} \quad (3.21)$$



$$C_2^1 = \frac{1}{2\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^2 \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3\sin\theta_0 \cos\theta_0 e^{i\varphi_0} \quad (3.22)$$

$$C_2^2 = \frac{1}{2\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^2 \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3\sin^2\theta_0 e^{2i\varphi_0} \quad (3.23)$$

οι παραπάνω σχέσεις σε καρτεσιανή μορφή γράφονται:

$$C_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01} - ix_{02}) \quad (3.24)$$

$$C_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} x_{03} \quad (3.25)$$

$$C_1^1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01} + ix_{02}) \quad (3.26)$$

$$C_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{128\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01} - ix_{02})^2 \quad (3.27)$$

$$C_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01} - ix_{02})x_{03} \quad (3.28)$$

$$C_2^0 = \sqrt{\frac{5}{32\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (2x_{03}^2 - x_{01}^2 - x_{02}^2) \quad (3.29)$$

$$C_2^1 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01} + ix_{02})x_{03} \quad (3.30)$$

$$C_2^2 = \sqrt{\frac{15}{128\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01} + ix_{02})^2 \quad (3.31)$$

εκτελώντας την κατά κατεύθυνση παίρνουμε:

$$C_1^{-1*} = C_1^1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^2} (\mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2) \quad (3.32)$$

$$C_1^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^2} \mathbf{Q}_3 \quad (3.33)$$

$$C_2^{-2*} = C_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} [(\mathbf{Q}_1 x_{01} - \mathbf{Q}_2 x_{02}) + i(\mathbf{Q}_1 x_{01} + \mathbf{Q}_2 x_{02})] \quad (3.34)$$

$$C_2^{-1*} = C_2^1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} [(\mathbf{Q}_1 x_{03} - \mathbf{Q}_3 x_{01}) + i(\mathbf{Q}_2 x_{03} + \mathbf{Q}_3 x_{02})] \quad (3.35)$$

$$C_2^0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{1}{\sigma\alpha^3} [2\mathbf{Q}_3 x_{03} - \mathbf{Q}_1 x_{01} - \mathbf{Q}_2 x_{02}] \quad (3.36)$$

από τις σχέσεις (3.32), (3.32) βρίσκουμε τις συνιστώσες του  $\mathbf{Q}$  :

$$\mathbf{Q}_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma\alpha^2 (C_1^{-1} + C_1^1) \quad (3.37)$$

$$Q_2 = i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma \alpha^2 (C_1^{-1} - C_1^1) \quad (3.38)$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma \alpha^2 C_1^0 \quad (3.39)$$

$$\text{άρα } Q = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma \alpha^2 (C_1^{-1} + C_1^1, i(C_1^{-1} - C_1^1), \sqrt{2} C_1^0) \quad (3.40)$$

Εισάγοντας τώρα αυτές τις τιμές τώρα στις σχέσεις (3.34),(3.35),(3.36) έχουμε:

$$C_2^{-2*} = C_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{2\alpha} C_1^1 (x_{01} + ix_{02}) \quad (3.41)$$

$$C_2^{-1*} = C_2^1 = \frac{\sqrt{5}}{2\alpha} [2C_1^1 x_{03} + \sqrt{2} C_1^0 (x_{01} + ix_{02})] \quad (3.42)$$

$$C_2^0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{1}{2\alpha} [2\sqrt{2} C_1^0 x_{03} - C_1^{-1} (x_{01} + ix_{02}) - C_1^1 (x_{01} - ix_{02})] \quad (3.43)$$

επιλύοντας το σύστημα (3.41)- (3.43) παίρνουμε:

$$x_{01} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \left[ \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} + \frac{C_2^2}{C_1^1} \right] \quad (3.44)$$

$$x_{02} = \frac{i\alpha}{\sqrt{5}} \left[ \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} - \frac{C_2^2}{C_1^1} \right] \quad (3.45)$$

$$x_{03} = \frac{2\alpha}{\sqrt{5}} \frac{C_2^1}{C_1^1} - \sqrt{\frac{2}{5}} \alpha \left[ \frac{C_1^0}{C_1^1} \frac{C_2^2}{C_1^1} \right], \text{ όπου } C_1^1 \neq 0 \quad (3.46)$$

επομένως η θέση  $\mathbf{r}_0$  του διπόλου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \left( \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} + \frac{C_2^2}{C_1^1}, \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} - \frac{C_2^2}{C_1^1}, 2 \frac{C_2^1}{C_1^1} - \sqrt{2} \alpha \frac{C_1^0}{C_1^1} \frac{C_2^2}{C_1^1} \right) \quad (3.47)$$

### 3.4. Αντίστροφο πρόβλημα της EEG για κατανεμημένη νευρωνική διέγερση

Μέχρι τώρα, αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο τέτοιον ώστε γνωρίζοντας το επιφανειακό ηλεκτρικό δυναμικό μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το διπολικό νευρωνικό ρεύμα (μια συνιστώσα του μόνο) που το προκάλεσε. Στην παράγραφο αυτή, τη θέση του διπόλου παίρνει ένα συνεχές ρεύμα, κατανεμημένο μέσα στην αγωγίμη σφαίρα που προτυποποιεί τον αγωγίμο εγκέφαλο.

Το συνεχές ρεύμα, δείξαμε ότι έχει την παρακάτω μορφή

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \nabla \Psi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.48)$$

$$\text{με } \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.49)$$

και το επιφανειακό ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την σχέση (3.10)

$$u(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{r' \leq \alpha} (\Delta_{\mathbf{r}'} \Psi(\mathbf{r}')) v(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}') d\mathbf{u}(\mathbf{r}') \quad (3.50)$$

η αρμονική συνάρτηση  $v$  συνδέεται με το  $u$  με τη σχέση

$$u(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{J}^{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + v(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right] \quad (3.51)$$

είδαμε επίσης ότι το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί ένα δίπολο  $\{\mathbf{r}', \mathbf{J}^{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')\}$  από τη σχέση (2.19) έχει τη μορφή, για  $c=0$ :

$$u(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{J}^{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r'^n}{\alpha^{2n+1}} r^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (3.52)$$

Από τις (3.51) και (3.52) για  $r = \alpha$  έχουμε

$$v(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r'^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.53)$$

Εξαιτίας της πληρότητας των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών πάνω στη μοναδιαία σφαίρα έπεται ότι η συνάρτηση Helmholtz  $\Psi$  στο εσωτερικό της σφαίρας  $r' < \alpha$  γράφεται

$$\Psi(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \quad (3.54)$$

για να βρούμε λοιπόν την άγνωστη συνάρτηση  $\Psi$  αρκεί να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $y_n^m$  που είναι συναρτήσεις μόνο της ακτινικής μεταβλητής  $r'$ .

Ο τελεστής Laplace στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3.55)$$

όπου

$$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3.56)$$

είναι ο τελεστής του Beltrami που αντιπροσωπεύει όλες τις εφαπτομενικές παραγωγίσεις.

τότε

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.57)$$

Ο τελεστής του Beltrami έχει ιδιοσυναρτήσεις τις σφαιρικές αρμονικές και αντίστοιχες ιδιοτιμές τις  $-n(n+1)$  δηλαδή:

$$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = -n(n+1) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.58)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{\mathbf{r}'} \Psi(\mathbf{r}') \\
 &= \left[ \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} B(\hat{\mathbf{r}}') \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} y_n^m(r') \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{r'^2} y_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r'^2} \left[ r'^2 \frac{d^2}{dr'^2} + 2r' \frac{d}{dr'} - n(n+1) \right] y_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Ορίζουμε:

$$\Psi_n^m(r') = \left( \frac{d^2}{dr'^2} + \frac{2}{r'} \frac{d}{dr'} - \frac{n(n+1)}{r'^2} \right) y_n^m(r') \quad (3.60)$$

τότε

$$\Delta_{\mathbf{r}'} \Psi(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \quad (3.61)$$

Τώρα η σχέση (3.50) από τις σχέσεις (3.53) και (3.61) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) \\
 &= -\frac{1}{\sigma} \int_0^\alpha \int_{|\hat{\mathbf{r}}'|=1} \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \Psi_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') \right] \times \\
 & \quad \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r'^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right] r'^2 d\mathbf{r}' ds(\hat{\mathbf{r}}') \\
 &= -\frac{1}{\sigma} \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\alpha^{n+1}} \right] \times \\
 & \quad \int_0^\alpha \int_{|\hat{\mathbf{r}}'|=1} r'^{n+2} \Psi_{n'}^{m'}(\mathbf{r}') Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') d\mathbf{r}' ds(\hat{\mathbf{r}}') \\
 &= -\frac{1}{\sigma} \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\alpha^{n+1}} \right] \times \\
 & \quad \int_0^\alpha r'^{n+2} \Psi_{n'}^{m'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \delta_{nn'} \delta_{mm'} \\
 & u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{\alpha^{n+1}} \int_0^\alpha r^{n+2} \Psi_n^m(r) dr \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε το δυναμικό σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές:

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Gamma_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.63)$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τη σχέση:

$$\Gamma_n^m = \oint_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \text{ και } |m| \leq n \quad (3.64)$$

και από την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών έχουμε:

$$\Gamma_n^m = -\frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^\alpha r^{n+2} \Psi_n^m(r) dr \quad (3.65)$$

για κάθε  $n \geq 1$  και  $|m| \leq n$  και  $\Gamma_0^0 = 0$ .

Ο φορέας του πρωτεύοντος ρεύματος  $\mathbf{J}^P$  περιέχεται όπως είδαμε στο εσωτερικό της ανοιχτής σφαίρας ακτίνας  $\alpha$ , άρα υπάρχει ένας φλοιός πάχους  $\delta > 0$  όπου  $\mathbf{J}^P \equiv 0$ . Άρα και  $y_n^m(r) = 0$  για  $\alpha - \delta < r < \alpha$ . Έτσι η σφαίρα με ακτίνα  $\bar{\alpha} = \alpha - \delta$  είναι η ελάχιστη κλειστή σφαίρα που περιέχει τον φορέα του  $\mathbf{J}^P$ . Τότε  $y_n^m(\bar{\alpha}) \neq 0$ .

Με βάση τα παραπάνω και με επανειλημμένες παραγοντικές ολοκληρώσεις, το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.65) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha r^{n+2} \Psi_n^m(r) dr &= \int_0^{\bar{\alpha}} [r^{n+2} \frac{d^2}{dr^2} y_n^m(r) + 2r^{n+1} \frac{d}{dr} y_n^m(r) - r^n n(n+1) y_n^m(r)] dr \\ &= r^{n+2} \frac{d}{dr} y_n^m(r) \Big|_0^{\bar{\alpha}} - (n+2) \int_0^{\bar{\alpha}} r^{n+1} \frac{d}{dr} y_n^m(r) dr + 2 \int_0^{\bar{\alpha}} r^{n+1} \frac{d}{dr} y_n^m(r) dr \\ &\quad - n(n+1) \int_0^{\bar{\alpha}} r^n y_n^m(r) dr = \bar{\alpha}^{n+2} \frac{d}{dr} y_n^m(r) \Big|_{\bar{\alpha}} - n \int_0^{\bar{\alpha}} r^{n+1} \frac{d}{dr} y_n^m(r) dr - n(n+1) \int_0^{\bar{\alpha}} r^n y_n^m(r) dr \\ &= \bar{\alpha}^{n+2} \dot{y}_n^m(\bar{\alpha}) - n \int_0^{\bar{\alpha}} r^{n+1} \dot{y}_n^m(r) dr - n(n+1) \int_0^{\bar{\alpha}} r^n y_n^m(r) dr \\ &= \bar{\alpha}^{n+1} (\bar{\alpha} \dot{y}_n^m(\bar{\alpha}) - n y_n^m(\bar{\alpha})) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Άρα

$$\Gamma_n^m = -\frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \left( \frac{\alpha - \delta}{\alpha} \right)^{n+1} [(\alpha - \delta) \dot{y}_n^m(\alpha - \delta) - n y_n^m(\alpha - \delta)] \quad (3.67)$$

όπου η παραγωγήση είναι ως προς την μεταβλητή  $r$ .

Η παραπάνω σχέση συνδέει τις τιμές των συναρτήσεων  $\dot{y}_n^m$ ,  $y_n^m$  επάνω στο σύνορο  $r = \alpha - \delta$ , αλλά δεν υπολογίζει τις συναρτήσεις  $y_n^m$  ώστε να αναγνωρίσουμε το ρεύμα που αντιστοιχεί στο μη αρμονικό μέρος της  $\Psi$ .

Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, θα προσεγγίσουμε την  $\Psi$  με μια διαρμονική προσέγγιση της  $\Psi_\alpha$ .

$$\Psi_\alpha = \Psi_1(r) + r^2 \Psi_2(r) \quad (3.68)$$

$$\text{όπου } \Delta \Psi_1(r) = \Delta \Psi_2(r) = 0 \quad (3.69)$$

από την (3.68) έχουμε

$$\Delta \Psi = (6 + 4r \cdot \nabla) \Psi_2 \quad (3.70)$$

και αν θέσουμε:

$$\Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.71)$$

τότε

$$\Delta \Psi = (6 + 4r \cdot \nabla) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (3 + 2n) B_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.72)$$

Εισάγοντας τώρα τη σχέση (3.71) και τη σχέση

$$\Psi_n^m(r') = 2(3 + 2n) B_n^m r'^n \quad (3.73)$$

στη (3.62) έχουμε:

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = -\frac{2}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} B_n^m \alpha^{n+2} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.74)$$

και από τη σχέση (3.63) υπολογίζουμε τους συντελεστές  $B_n^m$  συναρτήσει των γνωστών συντελεστών  $\Gamma_n^m$

$$B_n^m = -\frac{\sigma}{2} \frac{1}{\alpha^{n+2}} \frac{n+1}{n(2n+1)} \Gamma_n^m \quad (3.75)$$

οπότε

$$\Psi(r) = \Psi_1(r) - \frac{n(2n+1)}{n+1} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n+2} \Gamma_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.76)$$

όπου η  $\Psi_1$  είναι άρατη από την EEG.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

### 4. Μαγνητοεγκεφαλογραφία σε ομογενή σφαίρα

#### 4.1. Ευθύ πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας

Στο ευθύ πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας θεωρούμε γνωστό το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα  $\mathbf{J}^P$  που αποτελείται από ένα δίπολο  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$  και ψάχνουμε εσωτερικό και εξωτερικό το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί.

#### 4.2. Εξωτερικό Μαγνητικό Δυναμικό

Από τις σχέσεις  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , προκύπτει ότι στο εξωτερικό της ομογενούς σφαίρας ακτίνας  $a$ , όπου δεν υπάρχει ούτε νευρωνικό ούτε επαγωγικό ρεύμα, το μαγνητικό πεδίο είναι αστρόβιλο και σωληνοειδές. Επομένως το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \quad r > a \quad (4.1)$$

όπου  $U$  άγνωστη εξωτερική αρμονική συνάρτηση και  $\mu_0$  είναι η μαγνητική διαπερατότητα του αέρα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, αποδείξαμε τον τύπο του Geselowitz για το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{-\sigma \mu_0}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.2)$$

Στην περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')$  ταυτίζεται με το μοναδιαίο διάνυσμα της μεταβλητής ολοκλήρωσης  $\mathbf{r}'$  και άρα ο τύπος (4.2) γράφεται:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{-\sigma \mu_0}{4\pi} \oint_S u^-(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.3)$$

επειδή  $\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{r}' = 0$ .

Η ακτινική συνιστώσα του  $\mathbf{B}$  είναι ανεξάρτητη του ολοκληρώματος άρα και του επαγωγικού ρεύματος και του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού, επειδή

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{r}) = 0 \quad (4.4)$$

έχουμε λοιπόν,

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (4.5)$$

άρα η ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό της σφαίρας μας εξαρτάται μόνο από το δίπολο  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ .

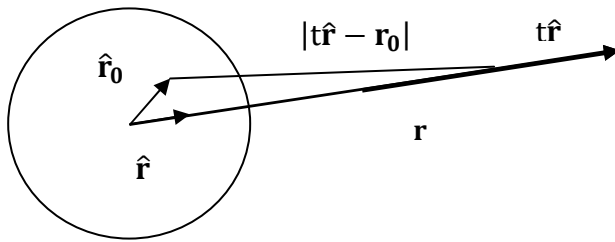
Λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του μαγνητικού δυναμικού :

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

έχουμε ότι :

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r'} U(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) dr' = - \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) dr' = - \frac{4\pi}{\mu_0} \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) dr' = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^3} dr' \quad (4.7)$$

Επειδή το  $\mathbf{B}$  είναι αστρόβιλο άρα ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, ολοκληρώνουμε από το σημείο  $\mathbf{r}$  ως το άπειρο κατά μήκος της ακτίνας στην διεύθυνση της παρατήρησης  $\hat{\mathbf{r}}$ .



Τώρα ο τύπος (4.7) γίνεται:

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (4.8)$$

Ισχύει

$$\int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{r}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} \quad (4.9)$$

$$\text{όπου } F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| [r |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \quad (4.10)$$

Άρα το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} \quad (4.11)$$

### 4.3. Ανάπτυγμα Εξωτερικού Μαγνητικού Δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε το μαγνητικό δυναμικό σε εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Παίρνουμε τη σχέση (4.8):

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \frac{t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} \frac{dt}{t} \\ = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \left( \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right) \frac{dt}{t} \quad (4.12)$$

κάνοντας το μετασχηματισμό  $t = \frac{r}{\tau}$  στο ολοκλήρωμα της (4.12) παίρνουμε :



$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_0^1 \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \tau \mathbf{r}_0|} \quad (4.13)$$

και αναπτύσσοντας τη θεμελιώδη λύση του τελεστή Laplace σε σφαιρικές αρμονικές και χρησιμοποιώντας το προσθετικό θεώρημα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau r_0)^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) d\tau \\ &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \\ &= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{(n+1)(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (4.14)$$

η σχέση (4.14) μας δίνει το εξωτερικό μαγνητικό  $U$  σε σφαιρικές αρμονικές.

Μπορούμε να αναπτύξουμε τώρα το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό και σε **διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές** που ορίζονται από τις εξής σχέσεις:

$$\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{r} \nabla Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{r} \times \nabla Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.17)$$

όπου  $Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$  επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές.

Οι διανυσματικές αρμονικές  $\mathbf{P}_n^m, \mathbf{B}_n^m, \mathbf{C}_n^m$  είναι κάθετες μεταξύ τους και ειδικότερα η  $\mathbf{P}_n^m$  είναι ακτινική και οι  $\mathbf{B}_n^m, \mathbf{C}_n^m$  είναι εφαπτομενικές επάνω στην μοναδιαία σφαίρα.

Οι διανυσματικές αρμονικές ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} \oint_{S^2} \mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{P}_{n'}^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) &= \oint_{S^2} \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{B}_{n'}^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \oint_{S^2} \mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{C}_{n'}^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \delta_{nn'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (4.18)$$

όπου  $S^2$  συμβολίζει την μοναδιαία σφαίρα.

Αν δράσουμε τώρα τον τελεστή  $\nabla_{\mathbf{r}_0}$  πάνω στην ποσότητα  $r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)$  στη σχέση (4.14) έχουμε :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) &= n r_0^{n-1} \hat{\mathbf{r}}_0 Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) + r_0^n \nabla_{\mathbf{r}_0} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \\ &= n r_0^{n-1} \mathbf{P}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) + \sqrt{n(n+1)} r_0^{n-1} \mathbf{B}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

επομένως

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0 \times \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{n(n+1)} r_0^n \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{B}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \\ &= \sqrt{n(n+1)} r_0^n \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{C}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.21)$$

Αν βάλουμε τώρα τη σχέση (4.20) στην (4.14) έχουμε:

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{(2n+1)} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \mathbf{C}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (4.22)$$

Από την σχέση (4.22) γίνεται αντιληπτό ότι μόνον η **C**-συνιστώσα του διπολικού ρεύματος συνεισφέρει στο εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό. Οι **P** και **B** συνιστώσες του διπολικού ρεύματος παραμένουν 'αόρατες' στον εξωτερικό χώρο.

#### 4.4. Το Εξωτερικό Μαγνητικό Πεδίο

Εισάγοντας τη σχέση (4.11) στην σχέση (4.1) βρίσκουμε το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\nabla_{\mathbf{r}} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r})}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} - \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) \frac{\nabla_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{F^2(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} \quad (4.23)$$

ισχύει

$$\nabla_{\mathbf{r}} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \quad (4.24)$$

ακόμα έχουμε,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \nabla_{\mathbf{r}} (r|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2) + \nabla_{\mathbf{r}} [|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] \\ &= \hat{\mathbf{r}} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 + 2r(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| (2\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ &= |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| (r+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) \hat{\mathbf{r}} + [|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 + 2r|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (4.25)$$

τώρα η σχέση (4.23) με τη χρήση των τύπων (4.24), (4.25) γίνεται:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{F^2(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} [|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| (r+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) \hat{\mathbf{r}} + (|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 + 2r|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}] \quad (4.26)$$

Παρατηρούμε ότι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο παρατήρησης **r** σχετίζεται με:

- το σημείο που βρίσκεται το δίπολο

- το κέντρο της σφαίρας, που αντιπροσωπεύει το γεωμετρικό κέντρο του ομογενούς αγωγμού υλικού μέσου.

Στην πρώτη περίπτωση εισάγουμε το διάνυσμα  $\mathbf{P}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ , και για την δεύτερη περίπτωση έχουμε το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$ .

Με τη χρήση των δύο αυτών διανυσμάτων, γράφουμε το μαγνητικό δυναμικό ως εξής:

$$U(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}}{P(1+\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} \quad (4.27)$$

και το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times (\mathbf{r}-\mathbf{P})}{rP^2(1+\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}}{P^2(1+\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}})} \left[ \hat{\mathbf{P}} + \frac{r+P}{r} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}}{1+\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}}} \right] \quad (4.28)$$

Τώρα θα βρούμε το διανυσματικό ανάπτυγμα του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Στη σχέση (4.22) αναπτύξαμε το μαγνητικό δυναμικό με τη χρήση **διανυσματικών αρμονικών**. Από τη σχέση (4.1) και την ταυτότητα (4.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) &= \mu_0 \mathbf{Q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{(2n+1)} \sqrt{\frac{n}{n+1}} r_0^n \mathbf{C}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \nabla \left( \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{Q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{(2n+1)} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{r_0^n}{r^{n+2}} \mathbf{C}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) [-(n+1)\hat{\mathbf{r}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + r \nabla Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})] \\ &= \mu_0 \mathbf{Q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+2}} \mathbf{C}_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) [-\mathbf{P}_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mathbf{B}_n^m(\hat{\mathbf{r}})] \end{aligned} \quad (4.29)$$

δηλαδή το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο εξαρτάται από τις  $\mathbf{P}$  και  $\mathbf{B}$  συνιστώσες της μεταβλητής παρατήρησης  $\mathbf{r}$  και από την  $\mathbf{C}$  συνιστώσα της μεταβλητής της πηγής  $\mathbf{r}_0$ .

#### 4.5. Ολοκληρωτικός τύπος για το Μαγνητικό Δυναμικό

Θα βρούμε τώρα έναν ολοκληρωτικό τύπο ανάλογο με εκείνο του Geselowitz για το μαγνητικό δυναμικό.

Υπολογίζουμε την ακτινική συνιστώσα του  $\mathbf{B}$  από τον τύπο του Geselowitz (1.45) για τυχαίο όμως αγωγό  $\Omega$  και όχι σφαιρικό :

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} u^-(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.30)$$

από τη σχέση (4.7) και τη σχέση (4.30) έχουμε :

$$U(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{4\pi}{\mu_0} \int_{\mathbf{r}}^{+\infty} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(t\hat{\mathbf{r}};\mathbf{r}_0) dt = \int_{\mathbf{r}}^{+\infty} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{t\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_0} dt - \sigma \int_{\mathbf{r}}^{+\infty} \oint_{\partial\Omega} u^-(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{|t\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') dt$$

$$= \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} - \sigma \oint_{\partial\Omega} u^-(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \int_r^{+\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} ds(\mathbf{r}') \quad (4.31)$$

Η (4.31) χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.9) γίνεται:

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} - \sigma \oint_{\partial\Omega} u^-(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}')} ds(\mathbf{r}') \quad (4.32)$$

ισοδύναμα

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} - \sigma \mathbf{r} \cdot \oint_{\partial\Omega} u^-(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}')} ds(\mathbf{r}') \quad (4.33)$$

Βρήκαμε ένα τύπο ανάλογο με τον τύπο του Geselowitz για το μαγνητικό δυναμικό.

Εδώ τον ρόλο του θεμελιώδους διπολικού πεδίου:

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = -\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4.34)$$

αναλαμβάνει τώρα η συνάρτηση:

$$\frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} = \mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{r}} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (4.35)$$

#### 4.6. Το Εσωτερικό Μαγνητικό Πεδίο

Ο τύπος (4.2) ισχύει όταν το σημείο παρατήρησης  $\mathbf{r}$  βρίσκεται εσωτερικά και εξωτερικά της σφαίρας μας, ακτίνας  $a$ . Όταν το σημείο παρατήρησης είναι πάνω στη σφαίρα  $r = a$ , τότε η τιμή του μαγνητικού πεδίου αντικαθίσταται από την τιμή  $\mathbf{B}/2$ .

Επομένως έχουμε,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{2\pi} \oint_{r'=a} u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.36)$$

όπου  $u$  είναι η τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας και  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{r}}'$ .

Ομοίως, το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στη σφαίρα  $r = a$ :

$$u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{2\pi} \oint_{r'=a} u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.37)$$

αν γράψουμε το ηλεκτρικό δυναμικό με τη μορφή:

$$u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \quad (4.38)$$

γράφουμε τον τύπο του Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό, με τον εξής τρόπο για  $r \neq a$ :

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{4\pi} \oint_{r'=a} V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.39)$$

όπου ο τύπος (4.39) ισχύει όταν:

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{r'=\alpha} V(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.40)$$

και για  $r=\alpha$ :

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{2\pi} \oint_{r'=\alpha} V(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.41)$$

Ο τύπος (4.41) αποτελεί μια ολοκληρωτική εξίσωση για το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στη σφαίρα  $r=\alpha$ . Η λύση της εξίσωσης πρέπει να συμπίπτει με την τιμή που βρήκαμε στη σχέση (2.27). Επομένως:

$$V(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\sigma r_0} + \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (4.42)$$

και

$$u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} V(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) \quad (4.43)$$

αν βάλουμε τις σχέσεις (4.42), (4.43) στην σχέση (4.3) και χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα:

$$-\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4.44)$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0})(\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^n} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \oint_{r'=\alpha} \frac{Y_n^m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.45)$$

η συνεισφορά του όρου  $-1/4\pi\sigma r_0$  στο μαγνητικό πεδίο για  $r \neq \alpha$ , είναι μηδενική.

Από τους τύπους (2.15), (2.16) και λόγω ορθογωνιότητας παίρνουμε:

για  $r > \alpha$ ,

$$\oint_{r'=1} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{\alpha^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.46)$$

και  $r < \alpha$

$$\oint_{r'=1} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.47)$$

Αν πάρουμε τις σχέσεις (2.13) και (4.46), (4.47) παίρνουμε τους ακόλουθους τύπους για το εξωτερικό και για το εσωτερικό πεδίο:

$$\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0})(\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (4.48)$$

για  $r > \alpha$ ,

$$\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0})(\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_0^n r^n}{\alpha^{2n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (4.49)$$

για  $r < \alpha$ .

Μπορούμε να γράψουμε τους παραπάνω τύπους σε μια κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.30):

Για  $r > r_0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = -\frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.50)$$

και για  $r < r_0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_0^n r^n}{\alpha^{2n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{F(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2\frac{\alpha^4}{r^2} |\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.51)$$

Άρα το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο γράφεται:

$$\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0})(\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.52)$$

για  $r > \alpha$  και

$$\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0})(\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \frac{1}{\alpha} \ln \frac{F(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2\frac{\alpha^4}{r^2} |\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.53)$$

για  $r < \alpha$ .

#### 4.7. Σύνδεση Εσωτερικού και Εξωτερικού Μαγνητικού Πεδίου μέσω Μετασχηματισμού Kelvin

Οι σχέσεις (4.52) και (4.53) θα μας βοηθήσουν να συσχετίσουμε τα δύο διανυσματικά πεδία μέσω του μετασχηματισμού Kelvin

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \frac{a^2}{r^2} \mathbf{r} \quad (4.54)$$

που είναι μη γραμμικός ακτινικός μετασχηματισμός.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνεισφορά του διπόλου  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$  στο εξωτερικό και εσωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι η ίδια και δίνεται από τον όρο

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.55)$$

Η συνεισφορά όμως από το αγώγιμο ρεύμα που δημιουργείται στο εσωτερικό της σφαίρας διαφέρει όταν υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο εκτός από όταν υπολογίζεται εντός της σφαίρας.

Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση  $f$  έχουμε :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \nabla \left[ \frac{1}{r} f(\mathbf{r}) \right] &= \left( \mathbf{r} \times \nabla \frac{1}{r} \right) f(\mathbf{r}) + \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r})) \\ &= \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}) f(\mathbf{r}) + \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r})) \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ταυτότητα

$$\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \times \nabla_{\mathbf{r}'}, \quad (4.57)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{r}'$  δηλώνει την εικόνα Kelvin στη σχέση (4.54).

Ο μετασχηματισμός (4.54) είναι ακτινικός, δηλαδή

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}' \quad (4.58)$$

που απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα το εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας  $a$  στο εξωτερικό της, αφήνοντας την ίδια τη σφαίρα αναλλοίωτη.

Αναλύουμε τώρα τον τελεστή  $\nabla$  στο ακτινικό και γωνιακό του μέρος:

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{D} \quad (4.59)$$

$$\text{όπου } \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (4.60)$$

ο μετασχηματισμός Kelvin θα επηρεάσει μόνο την ακτινική παραγωγή  $\partial/\partial r$  και τον παράγοντα  $1/r$ . Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial r'}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r'} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\alpha^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r'} = -\frac{\alpha^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r'} = -\frac{1}{r} \mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} \quad (4.61)$$

δηλαδή

$$r \frac{\partial}{\partial r} = -r' \frac{\partial}{\partial r'} \quad (4.62)$$

και επειδή

$$\mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}') \quad (4.63)$$

άρα η (4.59) γίνεται

$$\begin{aligned}
 r\nabla_{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}) = -\hat{\mathbf{r}} \mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}) = -\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}') \\
 &= -\mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} + \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}') = -\mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} \mathbf{D}(\hat{\mathbf{r}}') - 2\mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} \\
 &= -\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} - 2\mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r'} \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

Η σχέση (4.64) μπορεί να γραφεί με την βοήθεια της τανυστικής ανάλυσης στη παρακάτω μορφή

$$r\nabla_{\mathbf{r}} = (\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} \tag{4.65}$$

όπου το δυαδικό  $\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}$  περιγράφει το πως μετασχηματίζει ο μετασχηματισμός Kelvin τον τελεστή  $r\nabla_{\mathbf{r}}$ .

Παρατηρούμε ακόμα ότι η σύνθεση του μετασχηματισμού Kelvin με τον εαυτό του δημιουργεί τον ταυτοτικό μετασχηματισμό:

$$\mathbf{r}' \circ \mathbf{r}'(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' \left( \frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \right) = \alpha^2 \frac{r}{\alpha^2} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \tag{4.66}$$

και κατά συνέπεια

$$(\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) = \tilde{\mathbf{I}} \tag{4.67}$$

η οποία αντιστρέφει τη σχέση (4.65):

$$\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} = (\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot r\nabla_{\mathbf{r}} \tag{4.68}$$

Ακόμα επειδή το δυαδικό  $\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}$  παραμένει αναλλοίωτο στον μετασχηματισμό Kelvin έπεται

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{r'^2}{\alpha^2} (\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}}' \otimes \hat{\mathbf{r}}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \tag{4.69}$$

και

$$\nabla_{\mathbf{r}'} = \frac{r^2}{\alpha^2} (\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \tag{4.70}$$

Επομένως η ταυτότητα (4.57) αποδεικνύεται άμεσα ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}} &= \left( \frac{\alpha^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right) \times \nabla_{\mathbf{r}} \\
 &= \left( \frac{\alpha^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right) \times \frac{r'^2}{\alpha^2} (\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}}' \otimes \hat{\mathbf{r}}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \\
 &= \mathbf{r}' \times \tilde{\mathbf{I}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \\
 &= \mathbf{r}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \tag{4.71}
 \end{aligned}$$



Αν πάρουμε τη σχέση που συνδέει το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στο ρεύμα αγωγιμότητας μέσα και έξω από τη σφαίρα  $r = a$  και συμβολίζουμε με  $\mathbf{K}$  τον διαφορικό τελεστή

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) (\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \quad (4.72)$$

η συνεισφορά του ρεύματος αγωγιμότητας στις σχέσεις (4.52), (4.53) γράφεται:

$$\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4.73)$$

για  $r > a$  και

$$\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \frac{1}{\alpha} \ln \frac{F\left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0\right)}{2\frac{\alpha^4}{r^2} \left|\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right|} \quad (4.74)$$

για  $r < a$ .

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τις σχέσεις (4.54), (4.56) και (4.57) οι σχέσεις (4.73) και (4.74) γίνονται:

$$\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4.75)$$

για  $r > a$  και

$$\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r}') = \frac{\alpha}{r'} \frac{r'}{\alpha^2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \ln \frac{F(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0)}{2r'^2 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \quad (4.76)$$

για  $r < a$ .

Ο μετασχηματισμός Kelvin επάνω στον τελεστή Laplace είναι

$$\Delta_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}) = \left(\frac{r'}{\alpha}\right)^5 \Delta_{\mathbf{r}'} \left[ \frac{\alpha}{r'} u\left(\frac{\alpha^2}{r'^2} \mathbf{r}'\right) \right] \quad (4.77)$$

που συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός απεικονίζει την αρμονική συνάρτηση  $u(\mathbf{r})$ , με  $r > a$ , στην αρμονική συνάρτηση  $\frac{\alpha}{r'} u(\mathbf{r}')$ , με  $r < a$ , και αντίστροφα. Παρατηρούμε ότι ακριβώς αυτή τη σχέση ικανοποιούν οι συναρτήσεις  $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{r})$  και  $\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r})$ . Προκύπτει δηλαδή

$$\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r}') = \frac{\alpha}{r'} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{r}') \quad (4.78)$$

και

$$\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} \mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r}) \quad (4.79)$$

Είναι προφανές ότι το μαγνητικό πεδίο είναι συνεχές πάνω στην επιφάνεια  $r = \alpha$ , δηλαδή ισχύει

$$\mathbf{B}^{(e)}(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{B}^{(i)}(\alpha\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.80)$$

Πριν ολοκληρώσουμε την ανάλυση μας, παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (4.52) και (4.53) οδηγούν άμεσα στην έκφραση των διανυσματικών δυναμικών που αναπαριστούν το σωληνοειδές πεδίο  $\mathbf{B}$ . Αν θέσουμε:

$$\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \nabla \times \Phi^{(e)}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \quad (4.81)$$

και

$$\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \nabla \times \Phi^{(i)}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \quad (4.82)$$

τότε παίρνουμε τα διανυσματικά δυναμικά

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \frac{F(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{2r^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.83)$$

για  $r > \alpha$

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{\mu_0}{4\pi\alpha} \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \frac{F(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{2r'^2|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|} \quad (4.84)$$

για  $r < \alpha$ , όπου έγινε χρήση της ταυτότητας

$$-\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times (f(\mathbf{r}) \mathbf{r}) \quad (4.85)$$

#### 4.8. Υπολογισμός του Επιφανειακού Ηλεκτρικού Δυναμικού

Θα υπολογίσουμε την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.41) για  $r = \alpha$  με τη χρήση των σφαιρικών αρμονικών,

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{2\pi} \oint_{r'=\alpha} V(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.86)$$

Αρχικά εκφράζουμε τη συνάρτηση  $V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$  σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ως προς την διεύθυνση  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{r}}_0$ . Λόγω του όρου  $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ , της συνάρτησης  $V$  ο οποίος αναπτύσσεται στις σφαιρικές αρμονικές  $Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$ , έπεται, λόγω γραμμικότητας ότι και η συνάρτηση  $V$  θα έχει το ίδιο ανάπτυγμα:

$$V(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k_n^m(\alpha, r_0) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.87)$$

τότε αν βάλουμε την παραπάνω σχέση στην (4.86) έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k_n^m(\alpha, r_0) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{2}{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k_n^m(\alpha, r_0) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.88)$$

Αν εφαρμόσουμε στην παραπάνω σχέση, ορθογωνιότητα ως προς τις συναρτήσεις  $Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)$ , έχουμε:

$$k_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{2}{\sigma} \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{2\pi} k_n^m \oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (4.89)$$

για κάθε  $n=0,1,2,\dots$  και  $m=-n,\dots,-1,0,1,\dots,n$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4.89) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} &\oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{r}}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ &= \oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{r}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ &= \oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.90)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον δεύτερο τύπο του Green για τις συναρτήσεις  $r^n Y_n^m$  και  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ , και τη σχέση

$$\Delta_r \left[ \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (4.91)$$

για  $r < \alpha$ , παίρνουμε

$$r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\alpha^n}{4\pi} \oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') + \frac{n\alpha^{n-1}}{4\pi} \oint_{r'=\alpha} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \quad (4.92)$$

από τη σχέση (3.47) έχουμε,

$$\oint_{r'=\alpha} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.93)$$

οπότε η (4.92) βάσει της (4.93) και παίρνοντας το όριο καθώς το  $\mathbf{r}$  τείνει στην επιφάνεια της σφαίρας  $r = \alpha$  γίνεται:

$$\frac{\alpha^n}{2} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\alpha^n}{4\pi} \oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') + \frac{n\alpha^n}{2n+1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.94)$$

όπου για  $r = \alpha$  έχουμε:

$$\oint_{r'=\alpha} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') = -\frac{2\pi}{2n+1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.95)$$

ο παράγοντας  $\frac{1}{2}$  στο αριστερό μέλος της (4.94) είναι αυτός της σχέσης (4.36).

Εισάγοντας τη σχέση (4.95) στην (4.89) παίρνουμε

$$k_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{2}{\sigma} \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{k_n^m}{2n+1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.96)$$

οπότε

$$k_n^m = \frac{1}{n\sigma} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} \quad \text{για κάθε } n \geq 1 \quad (4.97)$$

Για  $n=0$ , η (4.89) γράφεται

$$k_0^0 = \frac{2}{\sigma} \frac{1}{\alpha} \frac{k_0^0}{2\pi} \oint_{r'=a} \hat{\mathbf{r}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \quad (4.98)$$

η οποία λόγω του θεωρήματος Gauss και της (3.91) γίνεται:

$$k_0^0 = \frac{2}{\sigma} \frac{1}{\alpha} - \frac{k_0^0}{2\pi} (-4\pi) \quad (4.99)$$

ή

$$k_0^0 = -\frac{2}{\sigma\alpha} \quad (4.100)$$

εισάγοντας τις (4.87), (4.100) στο ανάπτυγμα (4.87) έχουμε:

$$V(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{2}{\sigma\alpha} + \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (4.101)$$

αν εφαρμόσουμε τώρα στη παραπάνω σχέση τον τελεστή  $\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}$  θα πάρουμε την επιφανειακή τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού

$$u(\alpha\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (4.102)$$

Η σχέση αυτή διαφέρει από την (2.26) κατά τον σταθερό όρο  $\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{r_0}$  που σχετίζεται με την επιλογή του σημείου μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

### 5. Το αντίστροφο πρόβλημα της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας

#### 5.1. Εισαγωγή

Στο αντίστροφο πρόβλημα της μαγνητοεγκεφαλογραφίας γνωρίζουμε το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μέσω μετρήσεων και αναζητάμε το νευρωνικό ρεύμα στο εσωτερικό του εγκεφάλου που το δημιούργησε.

#### 5.2. Επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος

Το αντίστροφο πρόβλημα MEG δεν έχει μοναδική λύση και επομένως αρκούμαστε στον εντοπισμό μιας συνιστώσας του νευρωνικού ρεύματος. Δουλεύουμε αρχικά σε γενική γεωμετρία και στη συνέχεια περιοριζόμαστε στη σφαιρική γεωμετρία.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla U(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

και ότι το μαγνητικό δυναμικό  $U$  υπολογίζεται από την γνώση της ακτινικής συνιστώσας του  $\mathbf{B}$ , δηλαδή

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} U(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

Επομένως μπορούμε τώρα να αναδιατυπώσουμε το αντίστροφο πρόβλημα MEG ως την εύρεση του νευρωνικού ρεύματος από την γνώση του εξωτερικού αρμονικού μαγνητικού δυναμικού  $U$ .

Ο τύπος του Geselowitz που αποδείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο για την μαγνητική επαγωγή σε τυχαίο αγωγό  $\Omega$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (5.3)$$

και με τη βοήθεια της ταυτότητας:

$$\int_{\Omega} (\nabla f) \times (\nabla g) d\mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla \times (f \nabla g) d\mathbf{v} = \oint_{\partial \Omega} \hat{\mathbf{n}} \times f \nabla g ds \quad (5.4)$$

γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \times \left( \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{v}(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left[ u^-(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (5.5)$$

Αν γράψουμε το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε στο κεφαλαίο 2, έχουμε

$$u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] \quad (5.6)$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και αλλάζοντας την παραγωγή στη μεταβλητή  $\mathbf{r}'$  με αυτήν ως προς τη μεταβλητή  $\mathbf{r}_0$  η σχέση (5.5) γράφεται

**$\mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$**

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ &- \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left\{ -\mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[ \left( \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right) \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \right\} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ &- \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \left( \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (5.7)$$

ή

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \quad (5.8)$$

όπου η συνάρτηση  $\mathbf{H}$ , ανεξάρτητη της ροπής  $\mathbf{J}^P$ , δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \oint_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right] \left[ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] ds(\mathbf{r}') \quad (5.9)$$

Η σχέση (5.8) αναφέρεται σε ένα μοναδικό δίπολο  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ . Για ένα καταναμημένο ρεύμα  $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)$ ,  $\mathbf{r}_0 \in \Omega$ , η σχέση (5.8) γίνεται

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \quad (5.10)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \right] = -\mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \quad (5.11)$$

και

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot [\mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \otimes \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)] = [\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)] \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) + \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \otimes \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \quad (5.12)$$

οπότε η (5.10) γίνεται:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)] \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}_0)] \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \quad (5.13)$$

Κάνοντας χρήση της αναπαράστασης Helmholtz (3.4), (3.5) έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{J}^P = \nabla \times [\nabla \Psi + \nabla \times \mathbf{A}] = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} \quad (5.14)$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^P = \nabla \cdot [\nabla \Psi + \nabla \times \mathbf{A}] = \Delta \Psi \quad (5.15)$$

η σχέση (5.13) τώρα βάσει των παραπάνω σχέσεων παίρνει τη μορφή

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{r}_0 \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{r}_0 \Psi(\mathbf{r}_0)) \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \quad (5.16)$$

Από την σχέση (5.16) γίνεται αντιληπτό ότι το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  εξαρτάται από το μη αρμονικό μέρος του βαθμωτού δυναμικού  $\Psi$  αλλά και από το μη αρμονικό μέρος του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ . Στην πραγματικότητα το μαγνητικό δυναμικό εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$ .

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{r} \cdot \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \quad (5.17)$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \\ &= \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \\ &= \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 \cdot \left( \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot [(\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2] \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot [|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0))] d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Με χρήση του θεωρήματος Gauss παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot [|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0))] d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \oint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| ds(\mathbf{r}_0) = 0 \quad (5.19)$$

Άρα η (5.18) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \\
 &= - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{r}_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2) \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \int_{\Omega} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \nabla \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \\
 &= 2 \int_{\Omega} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της σχέσης

$$\nabla \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) = \Delta (\nabla \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) = 0 \tag{5.21}$$

Αν βάλουμε τώρα τη σχέση (5.20) στη (5.17) έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r} \cdot \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \\
 &= 2 \int_{\Omega} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

η οποία παίρνει τελικά τη μορφή

$$\mathbf{r} \cdot \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \int_{\Omega} \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \tag{5.23}$$

η παραπάνω ταυτότητα μας λέει ότι το ολοκλήρωμα δεν μεταβάλλεται αν ολοκληρώσουμε την προβολή του διανύσματος  $\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$  επάνω στο  $\mathbf{r}$  ή επάνω στο  $\mathbf{r}_0$ .

Χρησιμοποιούμε τώρα την ταυτότητα

$$\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\Delta \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot (\Delta \mathbf{g}) + 2(\nabla \otimes \mathbf{f})^T : (\nabla \otimes \mathbf{g}) \tag{5.24}$$

και το γεγονός ότι το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  είναι σοληνοειδές για να αποδείξουμε την εξής σχέση

$$\begin{aligned}
 & \Delta(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \\
 &= (\Delta \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) + 2(\nabla \otimes \mathbf{r}_0)^T : (\nabla \otimes \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \\
 &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) + 2\tilde{\mathbf{I}} : \nabla \otimes \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \\
 &= \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) + 2\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0 \cdot (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

Η (5.23) γίνεται βάση της παραπάνω σχέσης:

$$\mathbf{r} \cdot \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \int_{\Omega} \Delta(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \tag{5.26}$$

Παίρνοντας τη προβολή του τύπου (5.16) έχουμε

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{r}_0 \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{r}_0 \Psi(\mathbf{r}_0)) \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \tag{5.27}$$



Κάνοντας τώρα χρήση της (5.26) έχουμε

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int_{\Omega} \Delta (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)) \frac{d\nu(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{r}_0 \Psi(\mathbf{r}_0)) \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\nu(\mathbf{r}_0) \quad (5.28)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το μαγνητικό δυναμικό  $\mathbf{B}$  εξαρτάται μόνο από τα μη αρμονικά μέρη του βαθμωτού δυναμικού  $\Psi$  και της ακτινικής συνιστώσας του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ . Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι η MEG μας δίνει επιπλέον πληροφορίες σε σχέση με τη EEG. Ο λόγος όμως που δεν περιοριζόμαστε αποκλειστικά μόνο στην απεικόνιση με την μέθοδο της MEG είναι το εξαιρετικά μεγάλο κόστος της σε σχέση με την EEG.

### 5.3. Αντίστροφο πρόβλημα της MEG για διπολική πηγή

Εδώ θα θεωρήσουμε ότι η πηγή μας είναι ένα δίπολο  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ . Γνωρίζουμε το μαγνητικό πεδίο ή ισοδύναμα το μαγνητικό δυναμικό στο εξωτερικό του εγκεφάλου και ψάχνουμε το δίπολο που το δημιούργησε. Συγκεκριμένα περιοριζόμαστε στην εύρεση της θέσης και της ροπής του διπόλου.

Το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση (3.14) :

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{(n+1)(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (5.29)$$

Αν αναπτύξουμε τώρα το μαγνητικό δυναμικό σε εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές παίρνουμε

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_n^m \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.30)$$

όπου

$$D_n^m = \oint_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} U(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.31)$$

για κάθε  $n \geq 1$  και  $|m| \leq n$

Από τους τύπους (5.29) και (5.30) βρίσκουμε τους συντελεστές  $D_n^m$ :

$$D_n^m = \frac{4\pi}{(n+1)(2n+1)} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \quad (5.32)$$

με άγνωστους μόνον τα  $\mathbf{r}_0$  και τα  $\mathbf{Q}$ .

Παίρνουμε τους οκτώ πρώτους όρους  $n=1,2$  του αναπτύγματος (5.32)

$$D_1^{-1*} = D_1^1 = \sqrt{\frac{\pi}{6}} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_1 + i\hat{\mathbf{x}}_2) \quad (5.33)$$

$$D_1^0 = \sqrt{\frac{\pi}{3}} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.34)$$

$$D_2^{-2*} = D_2^2 = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot [(x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 - x_{02}\hat{\mathbf{x}}_2) + i(x_{02}\hat{\mathbf{x}}_1 - x_{01}\hat{\mathbf{x}}_2)] \quad (5.35)$$

$$D_2^{-1*} = D_2^1 = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot [(x_{03}\hat{\mathbf{x}}_1 - x_{01}\hat{\mathbf{x}}_3) + i(x_{03}\hat{\mathbf{x}}_2 - x_{02}\hat{\mathbf{x}}_3)] \quad (5.36)$$

$$D_2^0 = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot [2x_{03}\hat{\mathbf{x}}_3 - x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 - x_{02}\hat{\mathbf{x}}_2] \quad (5.37)$$

Παρατηρούμε ότι αν  $D_1^0 = D_1^1 = 0$  τότε οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος μηδενίζονται και συνεπώς

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad (5.38)$$

Αφού όμως  $\mathbf{Q} \neq 0$  έπεται από την σχέση (5.38) ότι η ροπή  $\mathbf{Q}$  θα είναι ακτινική, δηλαδή παράλληλη στο  $\mathbf{r}_0$ . Αν  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  τότε αναγκαστικά η  $\mathbf{Q}$  θα είναι ακτινική. Έπεται  $\mathbf{B} = 0$  στο εξωτερικό του εγκεφάλου. Συνεπώς όλα τα δίπολα που είναι στην διεύθυνση του  $\mathbf{r}_0$  δεν μπορούν να ανιχνευθούν από την MEG. Για την εύρεση του διπόλου  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$  περιοριζόμαστε λοιπόν στην εύρεση του  $\mathbf{r}_0$  και των εφαπτομενικών συνιστωσών του  $\mathbf{Q}$ , δηλαδή των  $Q_{\theta_0}, Q_{\varphi_0}$  της σφαιρικής ανάλυσης

$$\mathbf{Q} = Q_{r_0} \hat{\mathbf{r}}_0 + Q_{\theta_0} \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + Q_{\varphi_0} \hat{\boldsymbol{\phi}}_0 \quad (5.39)$$

Από τις σχέσεις (5.33) και (5.34) παίρνουμε

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (D_1^{-1} + D_1^1, i(D_1^{-1} - D_1^1), \sqrt{2}D_1^0) \quad (5.40)$$

Εισάγοντας τώρα την (5.40) στις (5.35)-(5.37) έχουμε:

$$D_2^{-2*} = D_2^2 = \frac{2D_1^1}{\sqrt{5}} (x_{01} + ix_{02}) \quad (5.41)$$

$$D_2^{-1*} = D_2^1 = \sqrt{\frac{2}{5}} [D_1^0 ((x_{01} + ix_{02}) + \sqrt{2} D_1^1 x_{03})] \quad (5.42)$$

$$D_2^0 = \sqrt{2} [2\sqrt{2} D_1^0 x_{03} - D_1^1 (x_{01} - ix_{02}) - D_1^{-1} (x_{01} + ix_{02})] \quad (5.43)$$

Απαλείφουμε τον όρο  $x_{01} + ix_{02}$  από τις σχέσεις (5.41) και (5.42) και παίρνουμε:

$$x_{03} = \sqrt{\frac{5}{4}} \frac{D_2^1}{D_1^1} - \sqrt{\frac{5}{8}} \frac{D_1^0 D_2^2}{D_1^1 D_1^1} \quad (5.44)$$

από την (5.41) βρίσκουμε τα  $x_{01}$  και  $x_{02}$  :

$$x_{01} = \frac{\sqrt{5}}{4} \left[ \frac{D_2^{-2}}{D_1^{-1}} + \frac{D_2^2}{D_1^1} \right] \quad (5.45)$$

$$x_{02} = i \frac{\sqrt{5}}{4} \left[ \frac{D_2^{-2}}{D_1^{-1}} - \frac{D_2^2}{D_1^1} \right] \quad (5.46)$$

Άρα

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sqrt{5}}{4} \left( \frac{D_2^{-2}}{D_1^{-1}} + \frac{D_2^2}{D_1^1}, i \left( \frac{D_2^{-2}}{D_1^{-1}} - \frac{D_2^2}{D_1^1} \right), 2 \frac{D_2^1}{D_1^1} - \sqrt{2 \frac{D_1^0 D_2^2}{D_1^1 D_1^1}} \right) \quad (5.47)$$

Υπολογίσουμε τώρα τις εφαπτομενικές συνιστώσες του  $\mathbf{Q}$  :

Από την σχέση (5.39) παίρνουμε :

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 = r_0 (Q_{\varphi_0} \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - Q_{\theta_0} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_0) \quad (5.48)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\cos\theta_0 \cos\varphi_0, \cos\theta_0 \sin\varphi_0, -\sin\theta_0) \quad (5.49)$$

και

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_0 = (-\sin\varphi_0, \cos\varphi_0, 0) \quad (5.50)$$

Αν βάλουμε τώρα τις σχέσεις (5.49) και (5.50) στην (5.48) παίρνουμε:

$$Q_{\varphi_0} r_0 \cos\theta_0 \cos\varphi_0 + Q_{\theta_0} r_0 \sin\varphi_0 = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (D_1^{-1} + D_1^1) \quad (5.51)$$

$$Q_{\varphi_0} r_0 \cos\theta_0 \sin\varphi_0 + Q_{\theta_0} r_0 \cos\varphi_0 = i \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (D_1^{-1} - D_1^1) \quad (5.52)$$

$$-Q_{\varphi_0} r_0 \sin\theta_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} D_1^0 \quad (5.53)$$

από τα παραπάνω έπεται

$$Q_{\theta_0} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{D_1^{-1} + D_1^1}{r_0 \sin\varphi_0} + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{D_1^0}{r_0 \tan\theta_0 \tan\varphi_0} \quad (5.54)$$

$$Q_{\varphi_0} = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{D_1^0}{r_0 \sin\theta_0} \quad (5.55)$$

Είναι προφανές ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  του σημείου  $\mathbf{r}_0$  υπολογίζονται από την καρτεσιανή αναπαράσταση (5.47) του  $\mathbf{r}_0$ .

#### 5.4. Αντίστροφο πρόβλημα της MEG για κατανεμημένη νευρωνική διέγερση

Στην παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε πάλι γνωστό το εξωτερικό μαγνητικό δυναμικό και αναζητάμε το μέρος του νευρωνικού ρεύματος που είναι δυνατόν να υπολογισθεί.

Υποθέτουμε πάλι ότι το ρεύμα  $\mathbf{J}^p$  ικανοποιεί τις σχέσεις (3.4) και (3.5) ενώ η ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r' \leq \alpha} \Delta_{r'}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\nu(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \int_{r' \leq \alpha} (\Delta_{r'} \Psi(\mathbf{r}')) \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\nu(\mathbf{r}') \quad (5.56)$$

όπου

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \oint_{\rho=\alpha} \left[ \frac{1}{|\rho-\mathbf{r}'|} + \tilde{u}^-(\rho; \mathbf{r}') \right] \left[ \hat{\mathbf{n}}(\rho) \times \nabla_{\rho} \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|} \right] ds(\rho) \quad (5.57)$$

Πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας ισχύει  $\hat{\mathbf{n}}(\rho) = \hat{\rho}$ , άρα

$$\hat{\mathbf{n}}(\rho) \times \nabla_{\rho} \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|} = \hat{\rho} \times \frac{\mathbf{r}-\rho}{|\mathbf{r}-\rho|^3} = \frac{\hat{\rho} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\rho|^3} \quad (5.58)$$

οπότε έχουμε

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\rho) \times \nabla_{\rho} \frac{1}{|\mathbf{r}-\rho|} = 0 \quad (5.59)$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = 0 \quad (5.60)$$

από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι το μαγνητικό πεδίο εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού Helmholtz.

Ο τύπος τώρα (5.56) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r' \leq \alpha} \Delta_{r'}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\nu(\mathbf{r}') \quad (5.61)$$

Αν εισάγουμε τώρα τη σχέση (2.14) :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r'^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') \quad (5.62)$$

στην σχέση (5.61) έχουμε:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \int_{r' \leq \alpha} \Delta_{r'}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')) r'^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') d\nu(\mathbf{r}') \quad (5.63)$$

αναπτύσσουμε τώρα την συνάρτηση  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')$  σε σφαιρικές αρμονικές

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n r' \alpha_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \quad (5.64)$$

όπου  $r' \leq \alpha$  και ψάχνουμε να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές  $\alpha_n^m$ .

Δρώντας τώρα τον τελεστή Laplace στην (5.64) έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_{r'}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} r' \alpha_{n'}^{m'}(r') \right) Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') + \\ &\sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \frac{1}{r'} \alpha_{n'}^{m'}(r') B Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \right) r' \alpha_{n'}^{m'}(r') Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') - \\ &\sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \frac{n'(n+1)}{r'} \alpha_{n'}^{m'}(r') Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') \end{aligned} \quad (5.65)$$

Εισάγουμε τώρα την σχέση (5.65) στην (5.63), εφαρμόζουμε την επιφανειακή ολοκλήρωση και ορθογωνιότητα έχουμε:

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} &= -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \int_{r' \leq \alpha} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \alpha_{n'}^{m'}(r') + \right. \\ &\left. \frac{4}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \alpha_{n'}^{m'}(r') - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} \alpha_{n'}^{m'}(r') \right] r'^{n+1} Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{v}(r') \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^{\alpha} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \alpha_n^m(r') + \right. \\ &\left. \frac{4}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \alpha_n^m(r') - \frac{(n-1)(n+2)}{r^2} \alpha_n^m(r') \right] r'^{n+3} dr' \end{aligned} \quad (5.66)$$

όπου η άθροιση ξεκινάει από το  $n = 1$  γιατί η ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του  $\mathbf{B}$  στο άπειρο έχει τάξη τουλάχιστον  $r^{-2}$ .

Υπολογίζοντας τώρα το ολοκλήρωμα στην (5.66) έχουμε:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\alpha} [r^{n+3} \frac{d^2}{dr^2} \alpha_n^m(r) + 4r^{n+2} \frac{d}{dr} \alpha_n^m(r) - n(n-1)(n+2)r^{n+1} \alpha_n^m(r)] dr \\ &= r^{n+3} \alpha_n^m(r) \Big|_0^{\alpha} - n(n-1) \int_0^{\alpha} [r^{n+2} \frac{d}{dr} \alpha_n^m(r) - (n-1)(n+2) \int_0^{\alpha} [r^{n+1} \alpha_n^m(r) dr \\ &= \alpha^{n+3} \dot{\alpha}_n^m(\alpha) - (n-1) \alpha^{n+2} \alpha_n^m(\alpha) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Συνεπώς η (5.66) γράφεται

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{\alpha^{n+2}}{r^{n+1}} [\alpha \dot{\alpha}_n^m(\alpha) - (n-1) \alpha_n^m(\alpha)] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.68)$$

επομένως η ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου εξαρτάται από τους συντελεστές

$$\alpha_n^m(a) - (n-1)\alpha_n^m(a) \quad (5.69)$$

όπου οι συντελεστές  $\alpha_n^m$  είναι αυτοί που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα (5.64) της ακτινικής συνιστώσας του μαγνητικού δυναμικού Helmholtz.

Αν υποθέσουμε ότι η συνιστώσα  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}$  είναι αρμονική, οι συντελεστές  $\alpha_n^m$  δίνονται από τη σχέση

$$\alpha_n^m(r) = \lambda_n^m r^n \quad (5.70)$$

και συνεπώς οι συντελεστές στην (5.69) γράφονται

$$\alpha_n^m n \alpha^{n-1} - (n-1)\lambda_n^m \alpha^n = \lambda_n^m \alpha^n \quad (5.71)$$

Αν λοιπόν γνωρίζουμε το ανάπτυγμα από τις καταγραφές του MEG

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \delta_n^m(r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.72)$$

από τις σχέσεις (5.68), (5.71), (5.72) έχουμε

$$\lambda_n^m = \frac{2n+1}{\alpha^{2n+1}} \frac{1}{\mu_0} r^{n+1} \delta_n^m(r) \quad (5.73)$$

και συνεπώς

$$\alpha_n^m(r) = -\frac{2n+1}{\mu_0} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{2n+1} \delta_n^m(r) \quad (5.74)$$

Αν εισάγουμε τώρα την παραπάνω σχέση στην σχέση (5.64) παίρνουμε την ακόλουθη αρμονική προσέγγιση της συνιστώσας  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}$  του ρεύματος, η οποία είναι και η μόνη που μπορεί να υπολογισθεί,

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \delta_n^m(r) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{2n+1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \quad (5.75)$$

επειδή υποθέσαμε την αρμονική προσέγγιση του  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}$  έπεται ότι οι συντελεστές  $\delta_n^m$  θα πρέπει να είναι ίσοι με ένα πολλαπλάσιο της  $r^{-(n+1)}$ .







## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Γ. Ακριβής, Ν. Αλικάκος, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2012
- [2] Σ. Ν. Γιαπαλάκη, Μελέτη προτύπων ιατρικής φυσικής μέσω της επίλυσης προβλημάτων μαθηματικής νευροφυσιολογίας, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2006
- [3] Γ. Δάσιος, Μαθηματική θεμελίωση της ηλεκτρικής και μαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, ΕΑΠ, υπό έκδοση
- [4] Γ. Δάσιος, Κ. Κυριάκη, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα, 1994
- [5] Α. Φωκάς, Τα Μαθηματικά και ο εγκέφαλος,  
[http://www.emepatras.gr/emec23/perilipseis/K01\\_FOKAS\\_EME.doc](http://www.emepatras.gr/emec23/perilipseis/K01_FOKAS_EME.doc), 2006
- [6] P. Glees, The human brain, Cambridge University Press, 2005
- [7] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3<sup>rd</sup>ed, Wiley, 1998
- [8] H. H. Jasper, The 10–20 electrode system of the International Federation. *Electroenceph. clin. Neurophysiol.* 10, p. 370–375, 1958
- [9] E. R. Kandel, H. H. Schwartz, T. M. Jessell, «Βασικές Αρχές Νευροεπιστημών», Ιατρικές εκδόσεις Π. Χ Πασχαλίδης, 2006.
- [10] Γ. Δ. Καραγεωργόπουλος, Υπολογιστική ανάλυση της λειτουργικής διασύνδεσης εγκεφαλογραφικών χρονοσειρών με θεωρίες πληροφορίας μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (Partial Directed Coherence), Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2012
- [11] Φ. Καριώτου, Μαθηματικά Προβλήματα Ηλεκτρομαγνητικής Δραστηριότητας στη Νευροφυσιολογία του Εγκεφάλου. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2002
- [12] Ε. Καφετζόπουλος, Νευροεπιστήμη και Ψυχολογία, Από τα απλά αντανεκλαστικά μοντέλα και τα ένστικτα στις σύνθετες γνωστικές λειτουργίες, Κεφάλαιο 3 στο «Γνωσιακή Επιστήμη, Η νέα Επιστήμη του Νου», Εκδ. Gutenberg, σελ. 155-197 Αθήνα 2004
- [13] Δ. Κουτσούρης, Εισαγωγή στη Βιοϊατρική Τεχνολογία και Ανάλυση Ιατρικών Σημάτων, Ε.Μ.Π., 2000

- [14] Δ. Κυριακοπούλου, Σύγκριση Αλγορίθμων PET, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμ. Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2013
- [15] J. Malkevitch, Mathematics and the Brain, Feature Column of AMS, 2014
- [16] J. Marsden-A. Tromba, Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 2007
- [17] Γ. Θ. Παναγής, Μ. Δαφέρμος, Ψυχή, νους, και εγκέφαλος: Μια ιστορική αναδρομή στη μελέτη των μεταξύ τους σχέσεων, Hellenic Journal of Psychology , Vol.5 (2008), pp.324-366
- [18] Π.Α. Ράμμος, Πρόσκτηση και Παρουσίαση Τρισδιάστατων Ιατρικών Δεδομένων, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2003
- [19] Γ. Σ. Σκουλαρίκης, Μελέτη της Συνδεσιμότητας Περιοχών του Εγκεφάλου με εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων και δεδομένα ηλεκτροεγκεφαλογραφίας, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006
- [20] A. Toga, J. Mazziotta (Eds), Brain Mapping: The Systems, Elsevier, 2000
- [21] A. Toga, J. Mazziotta, Brain Mapping: The Methods, 2<sup>nd</sup> ed., Academic Press, 2002
- [22] Δ. Α. Χατζηλοϊζή, Αντίστροφα Προβλήματα στη Μαθηματική Θεωρία της Ηλεκτρο-Μαγνητο-Εγκεφαλογραφίας, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2009.
- [23] <http://www.wikipedia.org>