



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών – Τμήμα Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών
Σωματιδίων

Εργασία για απόκτηση ΜΔΕ στην Πυρηνική Φυσική και
Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων με θέμα :
Μεθοδολογία για την ανακατασκευή εικόνας σε τομογράφο
PET βασιζόμενη στον αλγόριθμο MLEM

Όνοματεπώνυμο: Χρήστος Γάτης
Α.Μ. : 200710
Ιούλιος 2012

Επιβλέπων Καθηγητής :
Γεώργιος Τζανάκος

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:
Σακελλίου Λουκάς
Στυλιάρης Ευστάθιος

Περίληψη

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην μελέτη της σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization). Κάνοντας χρήση του ψηφιακού ομοιώματος εγκεφάλου Hoffman, και τεχνικών Monte Carlo, δημιουργούμε τομογραφικές προβολές. Χρησιμοποιώντας αυτές τις προβολές, ο MLEM αλγόριθμος ανακατασκευάζει την εκάστοτε τομή του ομοιώματος και το συγκρίνει με την αρχική εικόνα. Παρατηρείται ότι οι εικόνες που παράγει ο συγκεκριμένος αλγόριθμος βελτιώνονται καθώς αυξάνει ο αριθμός επαναλήψεων καταλήγοντας σε μία βέλτιστη εικόνα και στην συνέχεια υπόκεινται αλλοίωση λόγω θορύβου. Αντικείμενο της παρούσας έρευνας είναι να καθοριστεί ο ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων για τη λήψη της βέλτιστης εικόνας.

Σε πρόσφατες έρευνες έχει χρησιμοποιηθεί το μέγεθος NRMSD (Normalized Root Mean Square Deviation) σαν μέγεθος αξιολόγησης της ανακατασκευασμένης εικόνας αφού συγκρίνει τα δεδομένα των δύο εικόνων, αρχικής και ανακατασκευασμένης. Πάνω σε αυτό το μέγεθος στηρίχθηκε η ανάπτυξη νέων κριτηρίων παύσης του αλγορίθμου, στην παρούσα εργασία, εστιάζοντας στην εξοικονόμηση χρόνου σε σχέση με προηγούμενες τεχνικές. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, αναζητήθηκαν νέα κριτήρια παύσης στηριζόμενα στην σχετική μεταβολή του παραπάνω μεγέθους, στο οποίο τέθηκε ένα κατώφλι πέρα από το οποίο ο αλγόριθμος τερματίζεται. Η κατάλληλη επιλογή κατωφλίου εξασφαλίζει σε ποιότητα την βέλτιστη ανακατασκευασμένη εικόνα. Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζονται αποτελέσματα της μελέτης που αφορούν στην επιτάχυνση του αλγορίθμου.

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία αρχικά οφείλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Τζανάκο για την γνώση που μου προσέφερε καθώς και την φιλοσοφία αλληλοβοήθειας και συνεργασίας με τα υπόλοιπα μέλη του εργαστηρίου φυσικής υψηλών ενεργειών και εφαρμογών. Εν συνεχεία δεν μπορώ να παραλείψω τον κύριο Γαϊτάνη Αναστάσιο διδάκτορα ιατρικής φυσικής καθώς και τον Παναγιώτη Σταμούλη υποψήφιο διδάκτορα του εργαστηρίου Φ.Υ.Ε.Ε. που υπήρξαν πάντοτε πρόθυμοι να βοηθήσουν σε θέματα επιστημονικά και υπολογιστών. Ακόμη ευχαριστώ τον κύριο Ανγγελιδάκη Στυλιανό υποψήφιο διδάκτορα στον τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων για τις γνώσεις που μου προσέφερε σε θέματα προγραμματισμού. Επιπλέον είμαι ευγνώμων στον κύριο Ευάγγελο Λογαρά, άριστο γνώστη ηλεκτρονικών, για την εκάστοτε βοήθεια του. Τέλος ευχαριστώ τον κύριο Χρήστο Παφίλη, επίσης υποψήφιο διδάκτορα του εργαστηρίου Φ.Υ.Ε.Ε., για την συνεργασία. Κλείνοντας εύχομαι σε όλους το ευ αριστεύειν και ευ αγωνίζεσθαι.

Περιεγόμενα Διατριβής

| | |
|--|-----------|
| 1. Εισαγωγή στην Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίων | 6 |
| 1.1 Γενικά | 6 |
| 1.2 Ορισμός και παραγωγή ραδιοφαρμάκων | 9 |
| 1.3 Σύνθεση ενός τομογράφου PET | 11 |
| 1.4 Οι εφαρμογές της τομογραφίας PET | 13 |
| 1.5 Σύγκριση και συνεργασία με άλλες τομογραφικές μεθόδους | 14 |
| | |
| 2. Τομογραφικές Μέθοδοι | 17 |
| 2.1 Εισαγωγή | 17 |
| 2.2 Αναλυτικές Μέθοδοι | 17 |
| 2.2.1 Τομογραφικά Θεωρήματα | 18 |
| 2.2.2 Απεικόνιση ύστερα από συγκερασμό και επαναπροβολή | 19 |
| 2.3 Επαναληπτικές Μέθοδοι | 21 |
| | |
| 3. Αλγόριθμοι EM ανακατασκευής εικόνας | 23 |
| 3.1 Εισαγωγή | 23 |
| 3.2 MLEM | 23 |
| 3.2.1 Μαθηματικός Φορμαλισμός του αλγορίθμου | 23 |
| 3.2.2 Μεγέθη αξιολόγησης εικόνας | 26 |
| 3.2.3 Συμπεριφορά Μεγεθών Αξιολόγησης εικόνας | 28 |
| 3.2.4 Κριτήρια παύσης | 28 |
| 3.2.5 Πραγματικά και κατασκευασμένα δεδομένα | 28 |
| 3.2.6 Ανύσμα C και C _{min} | 29 |
| 3.3 OSEM αλγόριθμος | 32 |
| | |
| 4. Χρήση Αλγορίθμων ανακατασκευής εικόνας | 33 |
| 4.1 Software και Ομοιώματα | 33 |
| 4.2 Εισαγωγή | 33 |
| 4.3 Νέα μεγέθη | 35 |
| 4.3.1 DNRMSD | 35 |
| 4.3.2 DNRMSD/NRMSD | 38 |
| 4.3.3 Εισαγωγή νέων κριτηρίων παύσης | 38 |
| 4.4 Σύγκριση μεθόδων | 39 |
| 4.4.1 Μελέτη του I3 δείκτη | 39 |
| 4.4.2 Μελέτη του I4 δείκτη | 40 |
| 4.4.3 Σύγκριση των I3 και I4 | 43 |
| 4.5 Ανακατασκευασμένες εικόνες νέων μεθόδων | 48 |
| 4.6 Μελέτη των μεγεθών του MLEM αλγορίθμου | 51 |
| 4.6.1 NRMSD και παράγωγα μεγέθη για διάφορες τομές | 51 |
| 4.6.2 Σύγκλιση του ανύσματος C | 56 |

| | |
|--|----|
| 4.6.3 Cmin | 60 |
| 4.6.4 DNRMSD/NRMSD Vs Cmin | 62 |
| 4.6.5 DNRMSD/NRMSD και DNRMSD Vs NRMSD | 65 |
| 4.6.6 Cmin optimum | 67 |
| 4.6.7 Σύνοψη | 70 |
| 4.6 Γενικά Συμπεράσματα Αναφορές..... | 71 |

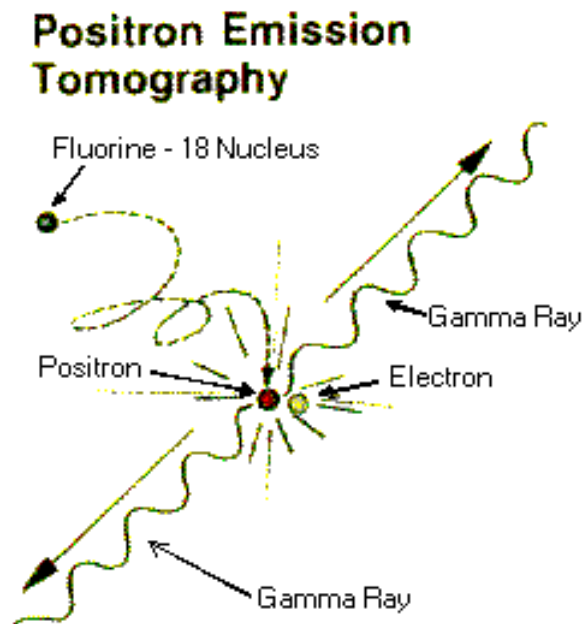
Κεφάλαιο 1^ο Εισαγωγή στην Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίων

1.1 Γενικά

Η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων (positron emission tomography, PET) είναι μια αναίμακτη τεχνική απεικόνισης βιοχημικών δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα εντός ενός ζωντανού οργανισμού. Βασίζεται σε 2 δυνατότητες (α) τη δυνατότητα παραγωγής βραχύβιων ραδιενεργών ισοτόπων {C-11, N-13, O-15, F-18 (αντί του H-3)} των στοιχείων της ζωής που διασπώνται σε ποζιτρόνιο της τάξης του 1MeV και (β) το γεγονός της εξαύλωσης ενός ηλεκτρονίου με ένα ποζιτρόνιο μέσα σε ένα οργανισμό από όπου στη συνέχεια παράγονται δύο φωτόνια ενέργειας 511keV υπό γωνία 180° σύμφωνα με την αντίδραση :

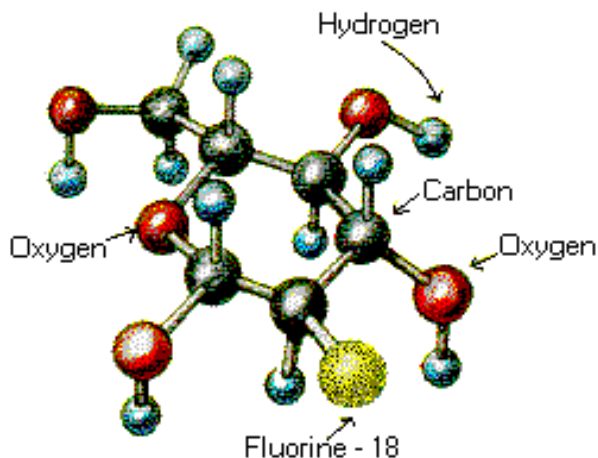


Τα φωτόνια αυτά μετά από ταυτόχρονη ανίχνευση και κατάλληλη επεξεργασία μπορούν να δώσουν πληροφορία σχετικά με τη θέση της εξαύλωσης μέσα στο σώμα του ασθενούς. Η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων, PET, αποτελεί μέρος της πυρηνικής ιατρικής οπότε και κάνει χρήση κατάλληλων ραδιοφαρμάκων τα οποία φέρουν ραδιενεργό πυρήνα που εκπέμπει β⁺ ακτινοβολία. Συγκεκριμένα έχουμε ένα πρωτόνιο στον πυρήνα που μας δίνει ένα νετρόνιο , ένα ποζιτρόνιο και ένα νεutrino ηλεκτρονίου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.1 για τον πυρήνα φθορίου , σύμφωνα με την αντίδραση :



Σχήμα 1.1 : Σχηματική αναπαράσταση εξαύλωσης ενός ατομικού ηλεκτρονίου με ένα ποζιτρόνιο που έχει εκπεμφθεί από το μόριο της γλυκόζης (FDG) το οποίο φέρει το ραδιενεργό ισότοπο του φθορίου ¹⁸F.

**2-fluoro-
2-deoxy-D-glucose
"FDG"**

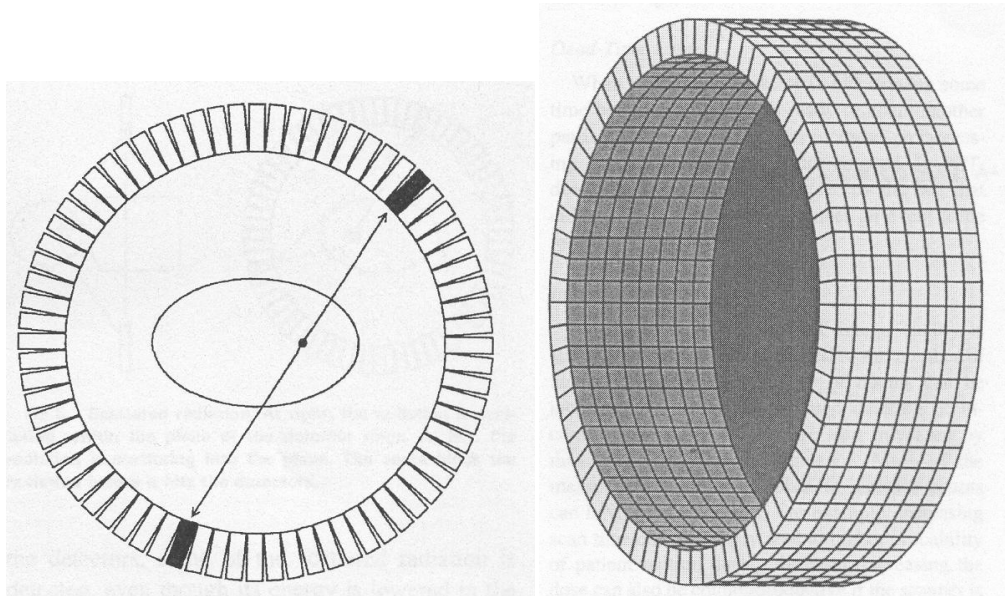


Σχήμα 1.2 : Σχηματική αναπαράσταση του μορίου της γλυκόζης. Διακρίνονται τα άτομα υδρογόνου, οξυγόνου, άνθρακα και φυσικά του ραδιενεργού ισότοπου του φθορίου ^{18}F .

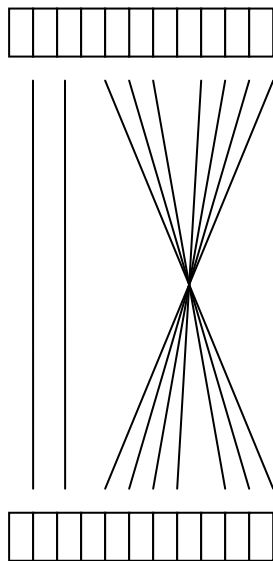
Ο χρόνος ημιζωής των ραδιοφαρμάκων αυτών είναι της τάξης των μερικών λεπτών ώστε να είναι δυνατή η λήψη αρκετών δεδομένων. Το κυριότερο ραδιοφάρμακο που χρησιμοποιείται είναι το μόριο της γλυκόζης (fluorodeoxyglucose, FDG) το οποίο φέρει το ραδιενεργό ισότοπο του φθορίου ^{18}F , σχήμα 1.2. Η χρήση αυτή του ραδιοφαρμάκου γίνεται ύστερα από την παρατήρηση ότι οι καρκινικοί όγκοι μεταβολίζουν εντονότερα την γλυκόζη από ότι οι υγιείς ιστοί. Έτσι θα παρατηρείται μεγαλύτερη δραστηριότητα σε εκείνη την περιοχή κατά την λήψη μιας εικόνας από τον PET τομογράφο.

Ένας τομογράφος PET πλήρους δακτυλίου προκειμένου να εντοπίσει τη θέση μιας εξαύλωσης καθορίζει μια τομογραφική ακτίνα (line of response, LOR) από τη θέση πρόσπτωσης των δύο φωτονίων σε απέναντι ανιχνευτές (σχήμα 1.3). Η ανίχνευση των δύο ακτίνων-γ γίνεται εντός ενός χρονικού παραθύρου που καθορίζουμε εμείς. Η συλλογή πολλών τέτοιων δεδομένων και επεξεργασία τους με κατάλληλους αλγορίθμους μας δίνουν την δυνατότητα απεικόνισης της τυχούσας δραστηριότητας του ραδιοφαρμάκου στο συγκεκριμένο όργανο του σώματος ή και σε όλο το σώμα. Η διαδικασία αυτή προσφέρει τη δυνατότητα ιατρικής απεικόνισης (medical imaging) και μελέτης φυσιολογικών και μεταβολικών δραστηριοτήτων ενός ζωντανού οργανισμού [16]. Ακόμη είναι δυνατή η δυναμική σχέση των οργάνων, ήτοι πως η λειτουργία του ενός επηρεάζει την λειτουργία του άλλου.

Στις αρχές, βέβαια, της χρήσης των τομογράφων PET υπήρχαν λίγοι ανιχνευτές σε κάθε μονάδα με αποτέλεσμα την παραγωγή εικόνων χαμηλής ποιότητας. Με την πάροδο του χρόνου βελτιώθηκε η ποιότητα των ανιχνευτών, κάτι που δεν έχει σταματήσει να γίνεται, καθώς επίσης αυξήθηκε και ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων ανιχνευτών σε κάθε μονάδα. Συνεπώς βελτιώθηκε η ποιότητα της ιατρικής απεικόνισης ενώ την στιγμή που μιλάμε υπάρχουν ερευνητικές ομάδες που δουλεύουν στην κατεύθυνση βελτίωσης ενός τέτοιου τομογράφου με παράλληλη μείωση του κόστους.



Σχήμα 1.3 [17]: PET τομογράφος πλήρους δακτυλίου, η σύμπτωση ανίχνευσης δύο ακτινών γ υποδεικνύει την εξαύλωση κατά μήκος της γραμμής που συνδέει τους δύο ανιχνευτές (αριστερά). Πλήρης δακτύλιος PET τομογράφου, ξεχωρίζουν τα πολλά επίπεδα ανιχνευτών (δεξιά).



Σχήμα 1.4 : Τομή τομογράφου PET πολλών δακτυλίων. Φαίνονται τα σχηματιζόμενα ευθεία (αριστερά) και σταυρωτά (δεξιά) επίπεδα .

Η χρήση περισσότερων ανιχνευτών οδήγησε στην δημιουργία δακτυλίων που μπορούν να παράγουν εικόνες σε πάνω από ένα επίπεδα (σχήμα 1.3 δεξιά). Η δημιουργία πολλών τομών ενός αντικειμένου οδηγεί στην τρισδιάστατη απεικόνισή του. Αν έχουμε πολλά επίπεδα ανιχνευτών γίνεται πλήρης τρισδιάστατη απεικόνιση (σχήμα 1.3 δεξιά). Στο σημείο αυτό να πούμε ότι τα επίπεδα χωρίζονται σε ευθεία και σταυρωτά [17],[18],[1]. Τα ευθεία είναι εκείνα που σχηματίζονται από ανιχνευτές του ίδιου επιπέδου και τα σταυρωτά εκείνα που σχηματίζονται από ανιχνευτές

διαφορετικών επιπέδων (σχήμα 1.4). Αν έχουμε τη δυνατότητα να επικοινωνούν ένας ανιχνευτής του πρώτου δακτυλίου με απέναντι ανιχνευτές ακόμη και από τον τελευταίο δακτύλιο τότε μιλάμε για πλήρη τρισδιάστατη απεικόνιση.

1.2 Ορισμός και παραγωγή ραδιοφαρμάκων

Με τον όρο ραδιοφάρμακα εννοούμε εκείνες τις βιοχημικές ενώσεις που έχουν δεχθεί φυσική και χημική επεξεργασία ώστε να φέρουν κάποιο άτομο με ραδιενεργό πυρήνα που στην συγκεκριμένη περίπτωση εκπέμπει ποζιτρόνιο. Σκοπός των ραδιοφαρμάκων είναι να κατευθύνονται σε καρκινικούς όγκους στον οργανισμό ή σε άλλα μέρη ανάλογα με την εφαρμογή. Προσοχή, τα ραδιοφάρμακα δεν έχουν την έννοια καταστολής κάποιας παθολογικής κατάστασης αλλά στην περίπτωσή μας την μελέτη αυτής αλλά και εν εξελίξει βιολογικών διεργασιών. Συνεπώς παρασκευάζονται σε πολύ συγκεκριμένα μέρη και καταναλώνονται από ασθενής ύστερα από σοβαρό έλεγχο. Η λειτουργία τους βασίζεται στο γεγονός ότι το ραδιοφάρμακο φέρει στο μόριό του έναν ραδιενεργό πυρήνα που εκπέμπει ποζιτρόνιο. Λόγω της φύσης και το είδος του μορίου μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την παρουσία του στον ανθρώπινο οργανισμό. Έτσι μπορούμε για παράδειγμα να ανιχνεύσουμε καρκινικούς όγκους εκεί που έχουμε υψηλή συγκέντρωση του ιχνηθέτη αυτού (γλυκόζη), να μετρήσουμε την ροή αίματος σε διάφορα σημεία του σώματος και άλλες εφαρμογές σχετικές με τον μεταβολισμό του οργανισμού. Ισότοποι ραδιενεργοί πυρήνες που εκπέμπουν ποζιτρόνια και χρησιμοποιούνται στο PET φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα :

Πίνακας 1.1:

| Πυρήνες | $t_{1/2}(\text{min})$ |
|-----------------|-----------------------|
| ^{15}O | 2 |
| ^{13}N | 10 |
| ^{11}C | 20 |
| ^{18}F | 110 |

Όπως φαίνεται οι πυρήνες αυτοί έχουν επιλεγεί ώστε ο χρόνος ημιζωής τους να είναι παραπλήσιος με τον χρόνο που χρειάζεται μια εξέταση αυτού του είδους. Έτσι μια εξέταση απαιτεί γύρω στα 10 με 15 λεπτά μόνο όσον αφορά το κομμάτι της συλλογής δεδομένων. Οι πυρήνες αυτοί λοιπόν παρασκευάζονται με τη βοήθεια ενός κυκλοτρονίου το οποίο επιταχύνει πρωτόνια (p) ή πυρήνες δευτερίου (d) σε ενέργειες της τάξης των MeV. Τα επιταχυνόμενα αυτά σωματίδια προσπίπτουν σε στόχους και αλληλεπιδρούν παράγοντας τους επιθυμητούς πυρήνες και νετρόνια (n) ή σωματίδια α ($\alpha = {}^4_2\text{He}$, πυρήνες ηλίου). Ο γενικός συμβολισμός μιας αντίδρασης του τύπου $p + {}^{16}\text{O} \rightarrow \alpha + {}^{13}\text{N}$ είναι ${}^{16}\text{O}(p, \alpha){}^{13}\text{N}$. Στη συνέχεια είναι απαραίτητο ένα εργαστήριο ραδιοχημείας για την παρασκευή αυτών των ραδιοφαρμάκων/ιχνηθετών

σε μια διαδικασία κάποιων λεπτών έως μίας ώρας. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει κάποια παραδείγματα :

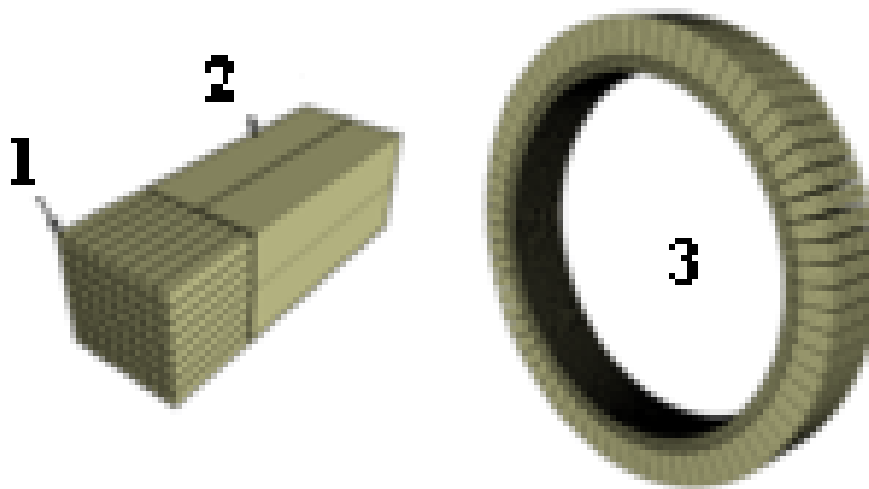
Πίνακας 1.2:

| Πυρήνας | Αντίδραση | Ραδιοφάρμακο | Χρόνος παρ/γής |
|-----------------|---|--|----------------|
| ^{15}O | $^{14}\text{N}(\text{d},\text{n})^{15}\text{O}$ | $\text{O}_2, \text{CO}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}$ | 6 min |
| ^{13}N | $^{16}\text{O}(\text{p},\alpha)^{13}\text{N}$ | NH_3, NO_x | 30 min |
| ^{11}C | $^{14}\text{N}(\text{p},\alpha)^{11}\text{C}$ | $\text{CO}_2, \text{CO}, \text{HCN}$ | 30 min |
| ^{18}F | $^{14}\text{N}(\text{p},\text{n})^{18}\text{F}$ | $^{18}\text{F}\text{-FDG}$ | 60 min |

Υπάρχουν και άλλοι πυρήνες με αντίστοιχες ιδιότητες αλλά με μεγαλύτερο χρόνο ζωής. Κάποιοι από αυτούς έχουν και εκπομπή ποζιτρονίων με μεγαλύτερη ενέργεια από τους ήδη αναφερθέντες. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει της πληροφορίες.

Πίνακας 1.3:

| Στοιχείο | Πυρήνας | $t_{1/2}(\text{min})$ | Max β^+ Ενέργεια (MeV) |
|----------|------------------|-----------------------|------------------------------|
| Οξυγόνο | ^{15}O | 2,05 | 1,7 |
| Άζωτο | ^{13}N | 9,96 | 1,2 |
| Άνθρακας | ^{11}C | 20,4 | 0,96 |
| Φθόριο | ^{18}F | 109,8 | 0,64 |
| Χαλκός | ^{62}Cu | 9,74 | 2,9 |
| Χαλκός | ^{64}Cu | 762 | 0,58 |
| Γάλλιο | ^{66}Ga | 569,4 | 3,8 |
| Γάλλιο | ^{68}Ga | 68,4 | 1,9 |
| Βρώμιο | ^{76}Br | 966 | 3,7 |
| Ρουβίδιο | ^{82}Rb | 1,3 | 3,4 |
| Ύτριο | ^{86}Y | 882 | 1,4 |
| Ιώδιο | ^{124}I | 6019,2 | 1,5 |

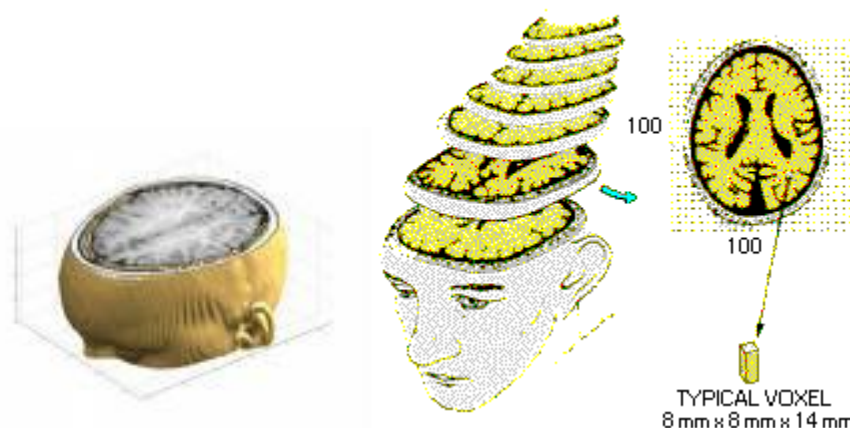


Σχήμα 1.5: Αριστερά φαίνεται το ανιχνευτικό στοιχείο του δακτυλίου (Detector Block) όπου αποτελείται από σπινθηριστικό υλικό (1, scintillation crystals) οπτικά συζευγμένο με φωτοπολλαπλασιαστή (2, Photo Multiplier). Δεξιά φαίνεται ο δακτύλιος (3, Detector Ring) αποτελούμενος από τα ανιχνευτικά στοιχεία (Block Detectors).

1.3 Σύνθεση ενός τομογράφου PET

Μια μονάδα τομογραφίας εκπομπής ποζιτρονίων έχει ως κύριο χαρακτηριστικό της τους ανιχνευτές της διατεταγμένους σε κυκλική διάταξη. Οι ανιχνευτές αυτοί αποτελούνται από ανόργανους σπινθηριστές οπτικά συζευγμένους με τους φωτοπολλαπλασιαστές (σχήμα 1.5). Από την διάταξη αυτή παίρνουμε έναν παλμό ρεύματος, που είναι πολύ μικρός. Συνεπώς χρειαζόμαστε ενίσχυση για να μελετήσουμε το σήμα μας καλύτερα το οποίο φέρει πληροφορία ενέργειας και χρόνου. Εν συνεχεία απαραίτητο είναι ένα κύκλωμα ολοκλήρωσης το οποίο να μας δίνει το συνολικό φορτίο που φέρει ο παλμός και είναι ευθέως ανάλογος με την ενέργεια. Ακόμη γίνεται χρήση διευκρινιστή για την λήψη χρονικής πληροφορίας ενώ μπορεί να συνδυαστεί ένα πλήθος από ηλεκτρονικά για την λήψη του σήματος το οποίο τελικά θα αποθηκευτεί σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ο υπολογιστής μέσω κατάλληλων προγραμμάτων μπορεί να δώσει εντολές, μετά τη λήψη των δεδομένων, κάνοντας χρήση ειδικευμένων αλγορίθμων ώστε να κατασκευάσει την εικόνα της τομής ή αν είναι εφικτό να κάνει τρισδιάστατη απεικόνιση. Στο σημείο αυτό να πούμε ότι το εικονοστοιχείο σε μια τομή καλείται pixel (picture element) ενώ σε μια τρισδιάστατη απεικόνιση voxel (volume element, ογκοστοιχείο), το οποίο έχει διαστάσεις ακμών της τάξης των μερικών χιλιοστών (σχήμα 1.6).

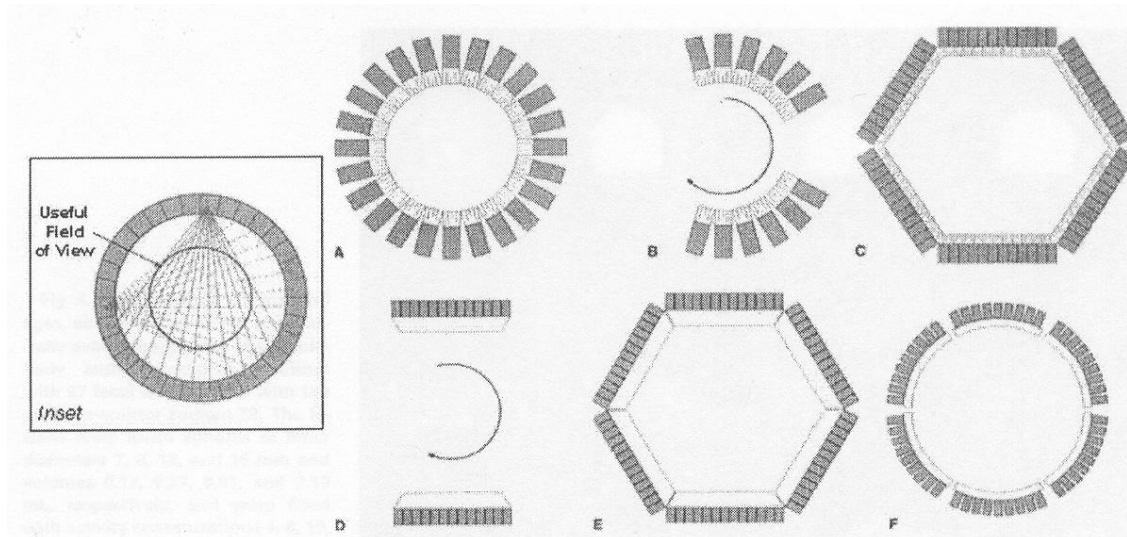
Typical "Slice"



Σχήμα 1.6 : Αριστερά: Για απεικόνιση μιας τομής το εικονοστοιχείο καλείται pixel. Δεξιά: Για τρισδιάστατη απεικόνιση το εικονοστοιχείο καλείται voxel, με μέγεθος τυπικό $8mm \times 8mm \times 14mm$.

Σε ένα τομογράφο PET οι ανιχνευτές, συνήθως, είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε να περιβάλλουν τον ασθενή πλήρως προκειμένου να έχουμε ορθή συλλογή πληροφοριών. Οι ανιχνευτές μπορεί να σχηματίζουν δακτυλίους ή και πολύγωνα αποτελούμενοι από μικρής περιοχής ανιχνευτές/ανιχνευτικά στοιχεία. Σε τέτοια συστήματα ένα ανιχνευτικό στοιχείο δεν πραγματοποιεί σύμπτωση μόνο με το απέναντί του αλλά με πολλά μέσα στο εύρος κάποιας στερεάς γωνίας σχηματίζοντας μια «βεντάλια ευθειών αναφοράς» το κάθε ένα από αυτά. Αν έχουμε N ανιχνευτικά στοιχεία τότε μπορούμε να πάρουμε το πολύ $N/4$ με $N/2$ δέσμες από κάθε ανιχνευτικό στοιχείο που να σχηματίζει συμπτώσεις με άλλα [3]. Ο χώρος που καλύπτουν πλήρως όλες αυτές οι «βεντάλιες» καλείται οπτικό πεδίο του τομογράφου (field of view, FOV). Να πούμε ότι το οπτικό πεδίο αναφέρεται για ένα επίπεδο άσχετα αν αυτό είναι ευθύ ή σταυρωτό.

Οι ανιχνευτές πλήρους κύκλωσης δεν είναι οι μόνοι που υπάρχουν. Λόγω κόστους υπάρχουν και συστήματα PET με μερική κάλυψη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε συνεχόμενους ανιχνευτές μεγάλης περιοχής όπως και στις κάμερες Anger που χρησιμοποιούνται για τομογραφία εκπομπής απλού φωτονίου (single photon emission computed tomography, SPECT). Οι ανιχνευτές εδώ οφείλουν να στερεώνονται σε πλαίσιο το οποίο να μπορεί να περιστρέφεται προκειμένου να καλύπτει τον ασθενή. Ανάλογα με το αν υπάρχουν δύο ή τρία τμήματα ανιχνευτών το πλαίσιο οφείλει να κάνει περιστροφή 180° ή 120° αντίστοιχα. Οι διάφορες διατάξεις ανιχνευτών που χρησιμοποιούνται φαίνονται στο σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7 [3] : Αριστερά: Αναπαράσταση του οπτικού πεδίου του δακτύλιου ανιχνευτών. Ο κύκλος ορίζει τον αξιοποιήσιμο χώρο από τις αλληλεπικαλυπτόμενες «βεντάλιες» δεσμών. Δεξιά: A) Πλήρης δακτύλιος από Block Detectors αποτελούμενοι από ανιχνευτικά στοιχεία μικρής περιοχής. B) Μερικός δακτύλιος από Block Detectors αποτελούμενοι από ανιχνευτικά στοιχεία μικρής περιοχής. C) Εξαγωνική διάταξη ανιχνευτών αποτελούμενοι από ανιχνευτικά στοιχεία μικρής περιοχής. D) Αντιτιθέμενοι μεγάλης περιοχής ανιχνευτές όπως σε κάμερες Anger. E) Εξαγωνική διάταξη μεγάλης περιοχής ανιχνευτών. F) Κυκλική διάταξη μεγάλης περιοχής ανιχνευτών.

1.4 Οι εφαρμογές της τομογραφίας PET

Η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων έχει αρκετές εφαρμογές στον χώρο της ογκολογίας, της καρδιολογίας και της νευρολογίας ενώ υπάρχουν ερευνητικές ομάδες που μελετούν νέες, πρώτα σε ζώα και εν συνεχεία στον άνθρωπο. Οι έρευνες σε ζώα κυρίως ποντίκια έχει να κάνει με την σχεδιαστική βελτίωση παραμέτρων απεικόνισης όπως η χωρική διακριτική ικανότητα [3],[4]. Άλλες πάλι ερευνητικές ομάδες κάνουν συνδυασμό της PET με άλλες τομογραφικές μεθόδους για να δουν αν και κατά πόσο βελτιώνεται το διαγνωστικό αποτέλεσμα. Το σίγουρο είναι πάντως πως με τη σωστή χρήση της PET ο άνθρωπος μπορεί να βελτιώσει την ποιότητα της ζωής του.

Είπαμε ότι η PET βρίσκει εφαρμογή στον τομέα της ογκολογίας. Ύστερα μάλιστα από την παρατήρηση ότι η γλυκόζη μεταβολίζεται εντονότερα στα καρκινικά από ότι στα υγιή κύτταρα έγινε ευκολότερη η αναγνώριση καρκινικών όγκων. Αυτό συμβαίνει διότι στο μόριο της γλυκόζης (FDG) που περιέχεται ένα άτομο φθορίου φροντίζουμε αυτό να είναι το ραδιενεργό ισότοπο ^{18}F που έχει χρόνο ημιζωής 110min. Χρόνος αρκετός για την πραγματοποίηση μιας εξέτασης. Η πρώτη εφαρμογή αυτής της διαδικασίας έγινε από τον Di Chiro και συναδέλφους αυτού περί το 1982 [2]. Έτσι το PET είναι μια μονάδα που μπορεί να απεικονίσει με αρκετή ακρίβεια πολλά όργανα του ανθρώπινου σώματος και να εξαχθεί τελικό συμπέρασμα για την κακοήθεια ενός όγκου και για τυχόν μεταστάσεις του.

Άλλο στοιχείο που χρησιμοποιείται σε ραδιοφάρμακο είναι το οξυγόνο στο ραδιενεργό του ισότοπο ^{15}O . Η εισπνοή αυτού σε μοριακό οξυγόνο θα το οδηγήσει μέσω της αιμοσφαιρίνης στους ιστούς από όπου εν συνεχεία είναι δυνατή η καταμέτρηση της τοπικής αναλογίας οξυγόνου (regional Oxygen Extraction Ratio, rOER) που είναι μια φυσιολογική παράμετρος. Άλλη φυσιολογική παράμετρος είναι η τοπική ροή αίματος (regional Blood Flow, rBF) που γίνεται με την εισπνοή ραδιενεργού μονοξειδίου του άνθρακα C^{15}O που οδηγεί σε παραγωγή νερού H_2^{15}O από τους πνεύμονες. Η συγκεκριμένη τεχνική εφαρμοζόμενη στον εγκέφαλο (τοπική εγκεφαλική ροή αίματος, regional Cerebral Blood Flow, rCBF) έδειξε ότι υπάρχει εξάρτηση της rCBF ανάλογα τα συστατικά μιας λέξης που υπόκειται σε αναγνώριση από κάποιον εξεταζόμενο. Ακόμη η ανάκτηση της πληροφορίας για τον διαχωρισμό από λέξεις σε μη-λέξεις σχετίζεται με την rCBF στο πίσω κάτω μέρος του αριστερού ημισφαιρίου του εγκεφάλου ενώ εν γένει παρατηρείται μείωση της rCBF σε γηραιότερα άτομα. Περισσότερα για το θέμα αυτό βρίσκονται στην αναφορά [5]. Αναφορικά με τις φυσιολογικές παραμέτρους να αναφέρουμε τον τοπικό μεταβολικό ρυθμό οξυγόνου (regional Metabolic rate for Oxygen, rMRO₂) που γίνεται με εισπνοή C^{15}O καθώς και τον μεταβολικό ρυθμό της γλυκόζης (regional Metabolic rate for glucose, rMRglu) με ενδοφλέβια ένεση γλυκόζης.

Στον τομέα της καρδιολογίας το PET προσφέρει μη επεμβατική διάγνωση της νόσου της στεφανιαίας αρτηρίας καθώς και μέτρηση της μυοκαρδιακής ροής αίματος (myocardial blood flow, MDF) που προσφέρει σημαντικές πληροφορίες για καρδιακές δυσλειτουργίες. Τέτοιες μετρήσεις έχουν γίνει σε σκύλους και σε ανθρώπους παράλληλα για την αξιολόγηση τεχνικών με την χρήση αμμωνίας (NH_3) που φέρει ραδιενεργό άζωτο (^{13}N) [6]. Ακόμη είναι δυνατή η απεικόνιση μυοκαρδιακής ισχαιμίας, παραβίασης και βιωσιμότητας μέσω ραδιενεργού ρουβιδίου (^{82}Rb) αμμωνίας ή γλυκόζης [7].

Στη νευρολογία η PET βρίσκει εφαρμογή σε θέματα που αφορούν τον εγκέφαλο αφού εκτός από την αναγνώριση καρκινικών όγκων προσφέρει και την μη επεμβατική μελέτη της εν γένει φυσιολογίας του. Έτσι είναι δυνατόν να μελετηθεί πως αντιδρά ο εγκέφαλος στα διάφορα εξωτερικά ερεθίσματα συναισθηματικά ή άλλου είδους, όπως το πως επεξεργάζεται και αποθηκεύει πληροφορίες ή ακόμη το πως αντιμετωπίζει δύσκολα μαθηματικά προβλήματα. Συνεπώς ασθένειες που αφορούν τον εγκέφαλο όπως επιληψία, νόσος Alzheimer, Parkinson και σύνδρομο Down έχουν καλύτερες προοπτικές αντιμετώπισης. Ακόμη σε εγκεφαλικά χτυπήματα ή ζημιές από τυχόν ατυχήματα ή κάποιο εγκεφαλικό μπορούν να διακριθούν τα νεκρά τμήματα του εγκεφάλου αλλά δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα για τον αν κάποια τμήματα επανέλθουν ξανά. Κάτι που δεν ισχύει για την επανεμφάνιση καρκινικού όγκου. Επίσης νήπια μπορούν να υπόκεινται σε τέτοιους είδους εξετάσεις προκειμένου να παρακολουθείται η φυσιολογική ανάπτυξη του εγκεφάλου τους. Εννοείται δε ότι είναι δυνατή η μελέτη του νευρωνικού δικτύου σαν σύνολο εγκέφαλος – νευρώνες.

Μια παραλλαγή της τομογραφίας εκπομπής ποζιτρονίων είναι η μαμμογραφία εκπομπής ποζιτρονίων (Positron Emission Mammography, PEM). Η τεχνική αυτή έχει να κάνει με την ανίχνευση καρκινικών όγκων σε μαστούς. Είναι πολλά υποσχόμενη και προτιμάται στην συγκεκριμένη περίπτωση λόγω χαμηλότερου κόστους και υψηλότερης χωρικής ανάλυσης. Η ποιότητά της τεχνικής αυτής είναι συγκρίσιμη με αυτή της βιοψίας [10]. Σε άλλη περίπτωση η μαμμογραφία με ακτίνες

Χ προκαλεί απορρόφηση κάποιας δόσης από τον μαστό κάτι που επισύρει μελέτη για την ποιότητα της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας με διάφορες τεχνικές [11].

1.5 Σύγκριση και συνεργασία με άλλες τομογραφικές μεθόδους

Η συνεργασία τομογραφικών μεθόδων είναι ένα αναπτυσσόμενο κομμάτι της ερευνητικής δραστηριότητας εξελισσόμενο σε ένα ακόμα πολύτιμο εργαλείο για την διάγνωση ασθενειών αλλά και την δημιουργία νέων φαρμάκων. Η PET είναι πιο ακριβής μέθοδος ιατρικής απεικόνισης επίμονων όγκων εγκεφάλου σε μετεγχειρητικές περιόδους ή από χημειοθεραπεία συγκριτικά με εικόνες από πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό (Magnetic Resonance Images, MRI) ή αξονική/υπολογιστική τομογραφία (Computerized Tomography, CT), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει περαιτέρω βελτίωση.

Ένα θέμα που υπάρχει είναι η ύπαρξη περισσότερων καμερών βασισμένες στην PET τομογραφία παρά στην χρήση PET τομογράφων λόγω κόστους. Συνεπώς μια σύγκριση δύο τεχνικών θα ήταν αναγκαία. Μια τέτοια εργασία πραγματοποιήθηκε μόνο που τα αποτελέσματα και των δύο τεχνικών ερμηνεύθηκαν κάνοντας χρήση εμπλουτισμένης αντίθεσης από MRI [2]. Έτσι φάνηκε ότι η κάμερα βασισμένη στην PET κάμερα είναι 13% λιγότερο αποτελεσματική από τον ίδιο τον PET τομογράφο. Όμως ο συνδυασμός PET – MRI δεν σταματά εδώ. Γίνεται ανάπτυξη συστήματος που παίρνει δεδομένα – εικόνες ταυτόχρονα από PET και MRI [12]. Το κυριότερο πλεονέκτημα ενός τέτοιου συστήματος είναι η δυνατότητα συνδυασμού ανατομικών εικόνων MRI με μοριακές εικόνες φτιαγμένες από PET. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζει μια τέτοια μέθοδος είναι σωστή κατασκευή ώστε να μην επηρεάζουν τα μαγνητικά πεδία τους φωτοπολλαπλασιαστές οπότε και τοποθετούνται έξω από την κοιλότητα του μαγνητικού πεδίου. Κάτι τέτοιο με τη σειρά του οδηγεί σε χρήση φωτοοδηγών που προκαλεί μείωση στην ενεργειακή διακριτική ικανότητα του PET χωρίς να προκαλεί δημιουργία κακών εικόνων του.

Αναφορικά τώρα με την αξονική τομογραφία ο συνδυασμός των δύο αυτών τεχνικών (PET/CT) προωθεί την δυνατότητα για την ακριβέστερη μοριακή και μεταβολική όψη των ασθενειών, με εμπλουτισμό των μέχρι τώρα πληροφοριών για την διάγνωση και τον χαρακτηρισμό όγκων καθώς και τον συσχετισμό αυτών με ανατομικά ευρήματα [13][14]. Ένα ακόμη πλεονέκτημα είναι η μείωση του χρόνου για την διόρθωση των δεδομένων λόγω απορρόφησης, διαδικασία γνωστή ως τομογραφία διάδοσης, χάρη στον CT τομογράφο. Κάτι άλλο επίσης πολύ σημαντικό είναι το γεγονός ότι μια PET εξέταση διαρκεί κάποια λεπτά (περίπου 15) χωρίς να συμπεριληφθεί ο χρόνος προετοιμασίας του ασθενούς. Από το γεγονός αυτό καταλαβαίνει κανείς ότι ο ασθενής δεν μπορεί να μένει ακίνητος συνέχεια αφού κατά την διαδικασία εισπνοής εκπνοής τα όργανα αλλάζουν θέση ή και σχήμα (καρδιά) οπότε και είναι δύσκολο να πάρουμε ακριβή πληροφορία. Αντίθετα μια CT εξέταση διαρκεί μέχρι και μερικά δευτερόλεπτα (είναι δυνατόν να πάρει πολλές τομές πριν γίνει μια πλήρης σύσπαση της καρδιάς) οπότε και ο ασθενής μπορεί να θεωρηθεί ακίνητος. Έτσι από τον συνδυασμό τους γίνονται πάλι οι απαραίτητες διορθώσεις. Περισσότερα όμως βρίσκονται στην αναφορά [13]. Ένας άλλος συνδυασμός είναι CT με κάμερα βασισμένη στο PET που φαίνεται λιγότερο αποτελεσματικός από την μόλις προαναφερθείσα τεχνική. Τέλος κάνοντας σύγκριση των τεχνικών (PET και CT) σε θέματα καρδιολογίας βρέθηκε ότι : η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων είναι πολύ πιο αποτελεσματική από την αξονική τομογραφία πολλών τομών σε παροχή πληροφοριών για διάγνωση μυοκαρδιακής διάχυσης, μεταβολισμού και βιωσιμότητας

καθώς και μοριακής απεικόνισης. Το αντίθετο σε μικρότερο βαθμό συμβαίνει με την αγγειογραφία και ασβεστοποίηση της στεφανιαίας αρτηρίας και σε ακόμη μικρότερο βαθμό με την μορφολογία πλάκας. Όσον αφορά την λειτουργία της αριστερής κοιλίας η δεύτερη μέθοδος υπερτερεί ελαφρώς της πρώτης.

Κεφάλαιο 2^ο : Τομογραφικές Μέθοδοι

2.1 Εισαγωγή

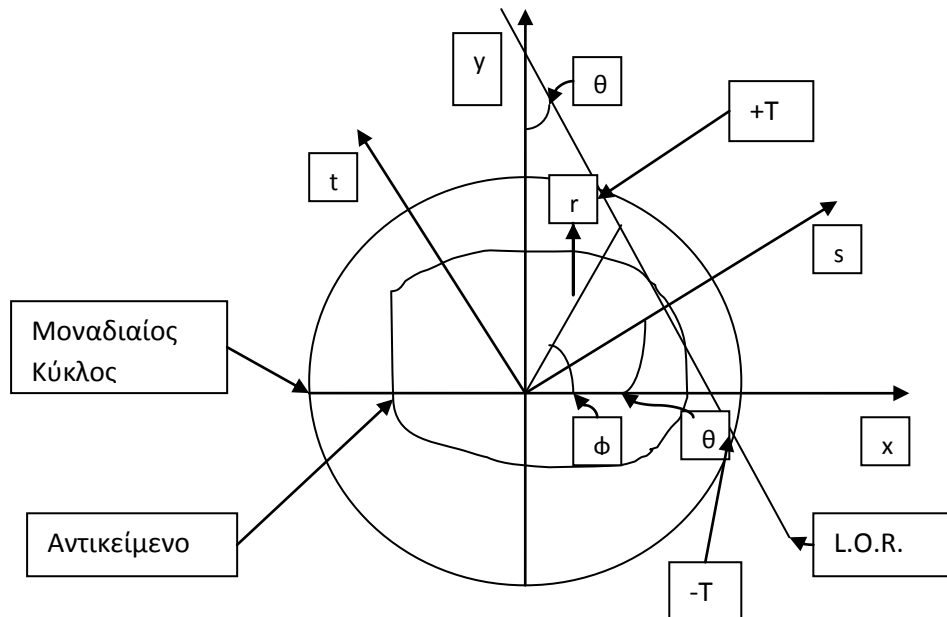
Με τον όρο τομογραφία εννοούμε την απεικόνιση μιας τομής ενός αντικειμένου. Με την κατασκευή πολλών τομών του ίδιου αντικειμένου μπορούμε να απεικονίσουμε ολόκληρο το αντικείμενο στις 3 διαστάσεις. Για την απεικόνιση είναι απαραίτητη η καταγραφή κάποιας δραστηριότητας στον υπό απεικόνιση ιστό. Η καταγραφή πραγματοποιείται λαμβάνοντας δεδομένα από τις προβολές αυτής της δραστηριότητας για διάφορες γωνίες στο επίπεδο της τομής [16].

Η ανακατασκευή εικόνας είναι εκείνο το κομμάτι της τομογραφίας όπου παίρνουμε την συνάρτηση που μας δίνει την κατανομή μιας δραστηριότητας μέσα στο αντικείμενο προκειμένου να απεικονίσουμε την συνάρτηση αυτή. Κάτι τέτοιο μπορεί να σημαίνει να δούμε την κατανομή ενός ραδιοφαρμάκου σε ένα όργανο κάποιου ασθενούς ύστερα από απεικόνιση πολλών τομών του οργάνου αυτού. Οι μέθοδοι ανακατασκευής εικόνας που θα αναφέρουμε είναι δύο : 1) με αναλυτικές μεθόδους και 2) ανακατασκευή με επαναληπτικές μεθόδους με παλαιότερη την πρώτη.

2.2 Αναλυτικές Μέθοδοι

Στην ανάλυση που ακολουθεί συμβολίζουμε με $f(x, y)$ την κατανομή μιας φυσικής ποσότητας ή την ένταση κάποιας δραστηριότητας στο επίπεδο (x, y) της προς απεικόνιση τομής. Αν (r, ϕ) οι πολικές συντεταγμένες τότε ισχύει :

$$f(x, y) = f(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.1 : Σχηματική αναπαράσταση αλλαγής συστήματος συντεταγμένων για την τομογραφία.

Έστω το σύστημα συντεταγμένων (x, y) και το σύστημα συντεταγμένων (s, t) εστραμμένο κατά γωνία θ σε σχέση με το πρώτο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Ο κύκλος απεικονίζει την περιοχή που περιβάλλει το υπό απεικόνιση αντικείμενο που για χάρη ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τον πρώτο μοναδιαίο και στο κέντρο του συστήματος (x, y) .

Η συνάρτηση Radon

$$p(s, \theta) = \int_{-T}^T f(x, y) dt \quad (2.2)$$

είναι η προβολή της δραστηριότητάς μας κατά μήκος της LOR που έχει μήκος $2T$ και είναι κάθετη στον άξονα s . Ο μετασχηματισμός στροφής μεταξύ των δύο συστημάτων (x, y) και (s, t) είναι :

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Τότε η $p(s, \theta)$ γράφεται ως το σύνολο των προβολών για όλες τις τομές των (s, θ) γράφεται :

$$p(s, \theta) = \int_{-T}^T f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt \quad (2.4)$$

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι μόνο το s θεωρείται μεταβλητή ενώ το θ παράμετρος οπότε και έχουμε την συνάρτηση αυτή για διάφορες γωνίες.

Κάνοντας χρήση κανείς των προβολικών αυτών συναρτήσεων για διάφορες γωνίες και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μπορεί να υπολογίσει την αρχική δραστηριότητα $f(x, y)$

2.2.1 Τομογραφικά Θεωρήματα

Θεώρημα Προβολής : Αν $w(s)$ είναι μια συνάρτηση παραθύρου μιας μεταβλητής (δηλαδή είναι μη μηδενική για ένα μικρό διάστημα στο πεδίο ορισμού της μεταβλητής του) τότε ισχύει η ισότητα :

$$\int_{-1}^1 p(s, \theta) w(s) ds = \iint_{\Omega} f(x, y) w(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy \quad (2.5)$$

Το θεώρημα αυτό δείχνει ότι μια διεργασία του αντικειμένου σε μια προβολή για μια δεδομένη γωνία θ είναι ευθέως εξαρτώμενη από την αντίστοιχη διεργασία του αντικειμένου [15],[18]. Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε την συνάρτηση Radon της $f(x, y)$ που περιγράφει μια αντιστρεπτή διεργασία μπορούμε να βρούμε την ίδια την

συνάρτηση κατανομής $f(x, y)$. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα κεντρικής τομής Fourier (Fourier central slice theorem) : Αν $\bar{p}(k, \theta)$ είναι ο 1-D μετασχηματισμός Fourier της $p(s, \theta)$ ως προς την μεταβλητή s και σταθερό θ τότε

$$\bar{p}(k, \theta) = \bar{f}(k \cos \theta, k \sin \theta) \quad (2.6)$$

Όπου $k_x = k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta$ και

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.7)$$

Γεωμετρικά η σημασία του θεωρήματος είναι ότι καθώς η χωρική συχνότητα k μεταβάλλεται η τιμή του \bar{p} και \bar{f} είναι ίδια στο επίπεδο (k_x, k_y) .

2.2.2 Απεικόνιση ύστερα από συγκερασμό και επαναπροβολή

Με βάση το θεώρημα κεντρικής τομής Fourier και βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για την $f(x, y)$ έχουμε :

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dk |k| \bar{p}(k, \theta) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (2.8)$$

Όπου

$$\bar{p}(k, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \theta) e^{-iks} ds \quad (2.9)$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την εικόνα μιας δραστηριότητας $f(x, y)$ αν έχουμε μετρημένες προβολές της $p(s, \theta)$ σε όσο το δυνατόν περισσότερες γωνίες στο διάστημα $\theta \in [0, \pi)$. Επειδή στην πραγματικότητα το s είναι διακριτό και τα βήματα δειγματοληψίας απέχουν κατά Δs η χωρική συχνότητα θα έχει μέγιστο και ελάχιστο

$$k_{\min} = -\frac{2\pi}{2\Delta s} \quad (2.10)$$

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{2\Delta s} \quad (2.11)$$

Οπότε συμβολίζοντας με $f_B(x, y)$ την πραγματική συνάρτηση κατανομής μιας δραστηριότητας έχουμε :

$$f_B(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\frac{2\pi}{2\Delta s}}^{\frac{2\pi}{2\Delta s}} dk |k| \bar{p}(k, \theta) w(k) e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} \quad (2.12)$$

με $w(k)$ μια συνάρτηση παραθύρου με τα όρια που είπαμε. Ορίζω ως

$$q(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{2\Delta s}}^{\frac{2\pi}{2\Delta s}} dk |k| w(k) e^{iks} \quad (2.13)$$

την συνάρτηση φίλτρου και έχω :

$$f_B(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\frac{2\pi}{2\Delta s}}^{\frac{2\pi}{2\Delta s}} dk |k| \int_{-\infty}^{\infty} dsp(s, \theta) e^{-iks} w(k) e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} \quad (2.14)$$

$$f_B(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dsp(s, \theta) q(x\cos\theta + y\sin\theta - s) \quad (2.15)$$

Η συγκεκριασμένη προβολή ή φιλτραρισμένη προβολή ορίζεται ως εξής :

$$p_s(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} dsp(s, \theta) q(s' - s) \quad (2.16)$$

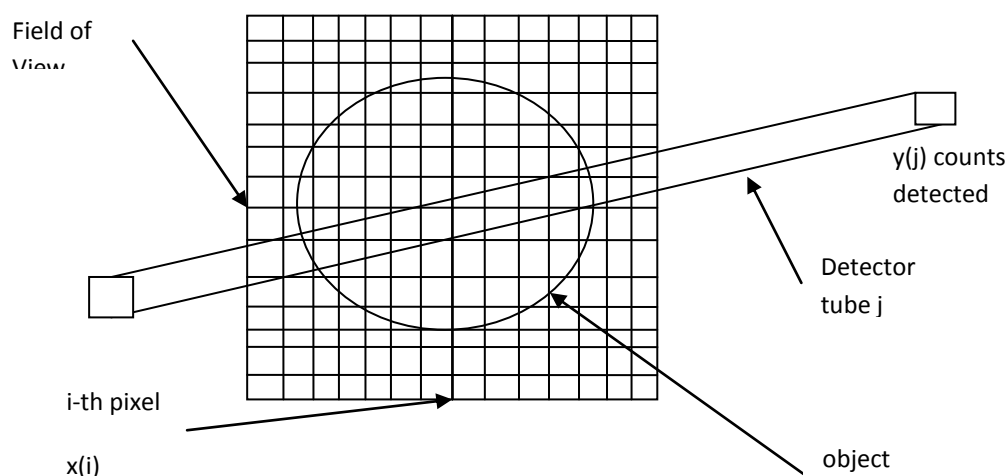
οπότε και η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$f_B(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta p_s(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \quad (2.17)$$

που είναι η εξίσωση επαναπροβολής[18]. Η όλη διαδικασία καλείται ανακατασκευή εικόνας ύστερα από συγκεκριασμό και επαναπροβολή.

Πρακτικά οι προβολές $p(s, \theta)$ παίρνονται για διακριτές τιμές των s και θ και συνήθως δειγματοληπτούνται ομοιόμορφα. Έτσι οι προβολές μετρούνται σε N γωνίες που απέχουν κατά $\Delta\theta$ και M ισαπέχουσες ακτίνες κατά Δs για κάθε γωνία.

Οι αναλυτικές μέθοδοι διαφέρουν από τις επαναληπτικές στο γεγονός ότι υπολογίζουν τους συντελεστές εξασθένισης ακριβώς κάνοντας ανακατασκευή εικόνας με ανάλυση κατά Fourier σε 2 διαστάσεις ή φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή συνήθως. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει α) τον υπολογισμό του Fourier μετασχηματισμού για την πρώτη γωνία σύμφωνα με τη σχέση 2.6 β) τον πολλαπλασιασμό της με την συνάρτηση φίλτρου (σχέση 2.13), γ) την λήψη της αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier (σχέση 2.15) , δ) οπισθοπροβολή της φιλτραρισμένης προβολής (σχέση 2.17) και εν συνεχεία την επανάληψη των βημάτων αυτών για όλες τις γωνίες.



Σχήμα 2.2 : Αναπαράσταση πεδίου όρασης (τετράγωνο) χωρισμένο σε I εικονοστοιχεία με ορισμένο αντικείμενο (κύκλος εσωτερικά) που διαπερνάται από τυχαίο σωλήνα ανίχνευσης.

2.3 Επαναληπτικές Μέθοδοι

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στην αξονική τομογραφία και για την κατασκευή μιας εικόνας η τομή χωρίζεται σε I κυψελίδες- εικονοστοιχεία ενώ το οπτικό πεδίο χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρείται τετράγωνο. Σε κάθε εικονοστοιχείο πραγματοποιούνται $x(i)$ εξαυλώσεις. Οι ανιχνευτές που αντιστοιχούν σε μία ευθεία αναφοράς (LOR) σχηματίζουν σωλήνες ανίχνευσης των ακτίνων γ και σε ένα σύνολο J σωλήνων ανίχνευσης ανιχνεύονται $y(j)$ γεγονότα εξαύλωσης σε κάθε έναν από αυτούς. Ο κάθε σωλήνας ανίχνευσης είναι νοητός χώρος που δημιουργείται μεταξύ δύο ανιχνευτικών στοιχείων και περνάει από το οπτικό πεδίο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2. Δηλαδή έχουμε ένα άνυσμα για τα πραγματικά δεδομένα και ένα άνυσμα για τα προβολικά ανιχνεύσιμα και μετρήσιμα γεγονότα. Συνεπώς ένας σωλήνας ανίχνευσης Γενικά ισχύει η σχέση

$$\bar{y} = A\bar{x}, A \in R^{I \times J} \quad (2.18)$$

όπου A είναι ένας πίνακας μετάβασης (προβολικός πίνακας) που συνδέει τα πραγματικά με τα προβολικά δεδομένα. Συνεπώς σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να υπολογίσει τα πραγματικά δεδομένα έχοντας τα προβολικά. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται επαναληπτικοί αλγόριθμοι που σε κάθε επανάληψη υπολογίζουν ένα πλήθος μεγεθών τα οποία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της δραστηριότητας σε κάθε εικονοστοιχείο. Μόλις κριθεί ότι έχει φτάσει σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα-ακρίβεια σταματάει και έχουμε προβολή της ανακατασκευασμένης εικόνας. Τέτοιοι αλγόριθμοι είναι οι MLEM [8],[15],[19] και OSEM με τον πρώτο να χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία και την αναλυτική παρουσίαση τους στο επόμενο. Άλλη μέθοδος είναι οι αλγεβρικές τεχνικές

ανακατασκευής (algebraic reconstruction techniques, ART[8],[15]). Εκεί γνωρίζοντας τον πίνακα μετάβασης, του οποίου τα στοιχεία παίζουν το ρόλο των συντελεστών βάρους, προκύπτουν J εξισώσεις της μορφής

$$y(j) = \sum_{i=1}^M x(i)a(i, j) \quad (2.19)$$

όπου M το πλήθος των εικονοστοιχείων που συνεισφέρουν στο συγκεκριμένο σωλήνα ανίχνευσης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2 . Προκύπτει έτσι ένα σύστημα J γραμμικών εξισώσεων με M αγνώστους η κάθε μία. Θεωρώντας ότι η κάθε εξίσωση ορίζει και έναν M -διάστατο επίπεδο τότε η τομή όλων αυτών των επιπέδων θα είναι η λύση του συστήματος. Η επαναληπτική μέθοδος συνίσταται στο γεγονός ότι ελέγχει την συνέπεια των $x(i)$ στις εξισώσεις και σταματάει αν βρίσκεται πολύ κοντά στην γειτονιά της λύσης.

Κεφάλαιο 3^ο : Αλγόριθμοι EM Ανακατασκευής Εικόνας

3.1 Εισαγωγή

Ο EM αλγόριθμος (Expectation Maximization) είναι μια επαναληπτική μέθοδος όπου βρίσκει τη μέγιστη πιθανοφάνεια υπολογίζοντας κάποιες παραμέτρους σε κάποιο στατιστικό μοντέλο το οποίο εξαρτάται από μη παρατηρήσιμες μεταβλητές. Ο EM αλγόριθμος εκτελεί σε κάθε επανάληψη υπολογισμούς για την αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας χρησιμοποιώντας κάποιες παραμέτρους. Επίσης υπολογίζει τις παραμέτρους ώστε να μεγιστοποιείται ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας σε κάθε επανάληψη. Οι παράμετροι αυτοί χρησιμοποιούνται ώστε να καθορίσουν την κατανομή των μεταβλητών στο επόμενο βήμα.

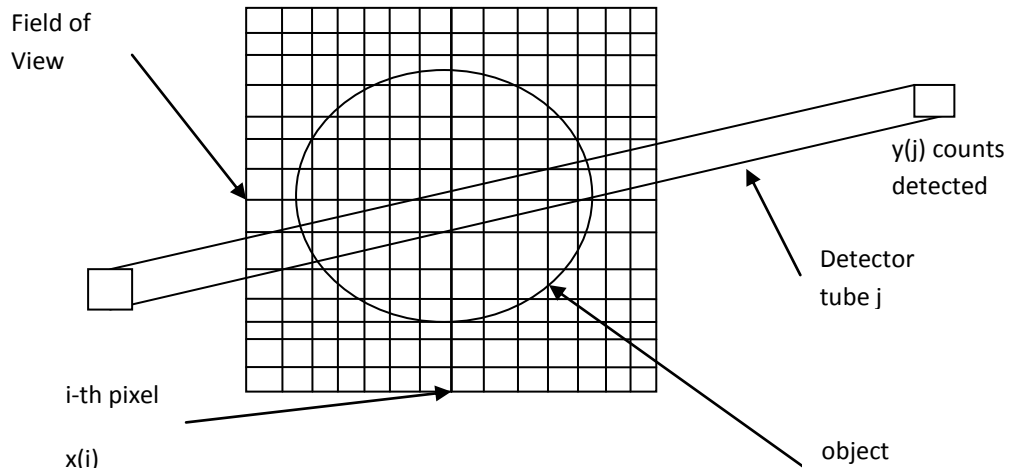
3.2 MLEM

Είδαμε ότι ένας τομογράφος PET χρειάζεται να συλλέξει δεδομένα από το αντικείμενο μελέτης μέσω των ανιχνευτών που σχηματίζουν μια ευθεία αναφοράς (Line of Response, LOR) και ανιχνεύουν τις 2 ακτίνες γ των 511keV, η κάθε μία, που εκπέμπονται ύστερα από την εξαύλωση ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου μετά από χορήγηση κατάλληλου ραδιοφαρμάκου. Η διαδικασία για την παραγωγή εικόνας που να δείχνει το εσωτερικό του αντικειμένου προσφέρει ανακατασκευή εικόνας για ιατρική εφαρμογή, με βάση τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει.

Ο αλγόριθμος MLEM είναι μια επαναληπτική μέθοδος που προσπαθεί να δώσει την ανακατασκευασμένη εικόνα με την μέγιστη πιθανοφάνεια βάση των δεδομένων που έχει συλλέξει. Δηλαδή MLEM σημαίνει Maximum Likelihood Expectation Maximization. Συγκεκριμένα ο MLEM προσπαθεί να υπολογίσει την δραστηριότητα (activity) όλων των εικονοστοιχείων (pixel) γνωρίζοντας τα προβολικά δεδομένα που έχουν συλλεχθεί από κάθε ζευγάρι ανιχνευτών που σχηματίζουν μια ευθεία αναφοράς που περνάει από το οπτικό πεδίο που βρίσκεται το αντικείμενο μελέτης. Το ζευγάρι των ανιχνευτών που σχηματίζουν ευθεία αναφοράς που περνάει από το πεδίο όρασης ονομάζεται ανιχνευτικός σωλήνας (detector tube) (σχήμα 3.1).

3.2.1 Μαθηματικός Φορμαλισμός του αλγορίθμου MLEM

Έστω λοιπόν ότι η δραστηριότητα που προσπαθεί να βρει ο αλγόριθμος είναι ένα άνυσμα $\mathbf{x}=\mathbf{x}(i)=[x(1),x(2),\dots,x(I)]$ όπου η τυχαία συνιστώσα $x(i)$ μας δείχνει την δραστηριότητα του i -στού εικονοστοιχείου για ένα πεδίο όρασης με I συνολικά εικονοστοιχεία. Τότε θα ορίσουμε ένα άνυσμα $\mathbf{y}=\mathbf{y}(j)=[y(1),y(2),\dots,y(J)]$ όπου η τυχαία συνιστώσα $y(j)$ θα μας δείχνει το πλήθος των εκπομπών ακτινών γ που ανιχνεύθηκαν στον j -στο ανιχνευτικό σωλήνα, όπως αυτός ορίστηκε. Να πούμε στο σημείο αυτό ότι για ένα ανιχνευτικό δακτύλιο που περιέχει K ανιχνευτές τότε έχουμε και $J=K(K-1)/2$ ανιχνευτικούς σωλήνες.



Σχήμα 3.1 : Αναπαράσταση πεδίου όρασης (τετράγωνο) χωρισμένο σε I εικονοστοιχεία με ορισμένο αντικείμενο (κύκλος εσωτερικά) που διαπερνάται από τυχαίο σωλήνα ανίχνευσης.

Θεωρούμε ότι η δραστηριότητα σε κάθε εικονοστοιχείο έχει Poisson κατανομή ενός αριθμού $\hat{x}(i)$ με μέση τιμή $x(i)$ και είναι ανεξάρτητη για κάθε ένα από αυτά. Προφανώς το άνυσμα $\hat{x}(i)$ αντιπροσωπεύει την πραγματική δραστηριότητα του κάθε εικονοστοιχείου και το $x(i)$ αυτήν που υπολογίζει ο αλγόριθμος. Συνεπώς ισχύει :

$$P(\hat{x}(i) = m) = e^{-x(i)} \frac{x(i)^m}{m!}, m = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Από κει και πέρα έχει υπολογισθεί ο πίνακας μετάβασης [15],[19]

$$a(i, j) = \frac{N_{ij}}{N_{tot}} \quad (3.2)(\alpha)$$

όπου το κάθε του στοιχείο δεν είναι τίποτα άλλο από τον αριθμό των εκπομπών που πραγματοποιήθηκαν στον i εικονοστοιχείο και ανιχνεύτηκαν από το j σωλήνα ανιχνευτών [15]. Δηλαδή το στοιχείο αυτό μας δίνει την πιθανότητα να έχουν εκπεμφθεί $x(i)$ ακτίνες γ όταν εμείς μετράμε $y(j)$ εκπομπές στον αντίστοιχο σωλήνα. Σε μαθηματική μορφή έχουμε :

$$a(i, j) = P(x(i) / y(j)) \quad (3.2)(\beta)$$

Γενικά τότε θα ισχύει :

$$a(i) = \sum_{j=1}^J a(i, j) \leq 1 \quad (3.3)$$

όπου η ανισότητα θα ισχύει σε περίπτωση που δεν έχουν ανιχνευθεί όλες οι ακτίνες λόγω Compton σκέδασης ή φωτοηλεκτρικής απορρόφησης. Στην παρούσα μελέτη όμως θεωρείται χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι δεν έχουμε απώλεια δεδομένων.

Συνεχίζοντας την μαθηματική προσέγγιση του αλγορίθμου πρέπει να αναφερθεί ότι αφού τα $x(i)$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και έχουν Poisson κατανομή τότε και τα $y(j)$ θα υπακούν στον ίδιο νόμο. Τότε οι αναμενόμενες τιμές των τελευταίων θα δίνονται από την σχέση :

$$\tilde{y}(j) = E[y(j)] = \sum_{i=1}^I x(i)a(i, j) \quad (3.4)$$

Οπότε μετά αναζητούμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(x)$ που να μας δίνει την πιθανότητα να έχουμε εκπομπές $x(i)$ γνωρίζοντας τις εκπομπές που παρατηρήθηκαν με βάση το Poisson μοντέλο πιθανότητας. Η συνάρτηση αυτή θα δίνεται από τη σχέση :

$$L(x) = P(y/x) = \prod_{j=1}^J e^{-\tilde{y}(j)} \frac{\tilde{y}(j)^{y(j)}}{y(j)!} \quad (3.5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 3.4 και 3.5 μπορούμε να πάρουμε τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας που είναι πιο εύκολα επεξεργάσιμος και δίνεται από τη σχέση :

$$l(\bar{x}) = \log(L(\bar{x})) = -\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I x(i)a(i, j) + \sum_{j=1}^J y(j) \log \left(\sum_{i=1}^I x(i)a(i, j) \right) - \left(\sum_{i=1}^I \log(y(j)!) \right) \quad (3.6)$$

Συνεπώς ο αλγόριθμος προσπαθεί να υπολογίσει το άνυσμα x για το οποίο έχουμε την μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας δεδομένου του ανύσματος. Για να γίνει αυτό πρέπει να μηδενίσουμε την παράγωγο του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας δεδομένου ότι όπου μεγιστοποιείται η πρώτη μεγιστοποιείται και η δεύτερη. Οπότε από τον μηδενισμό της παραγώγου έχουμε :

$$\frac{\partial l(\bar{x})}{\partial x(i)_{\bar{x}(i)}} = -\sum_{j=1}^J a(i, j) + \sum_{j=1}^J \frac{y(j)a(i, j)}{\sum_{i'=1}^I x(i')a(i', j)} = 0 \quad (3.7)$$

Η δραστηριότητα του κάθε εικονοστοιχείου θα υπολογίζεται μέσω της επαναληπτικής σχέσης :

$$x^{(k+1)}(i) = C^{(k)}(i)x^{(k)}(i) \quad (3.8)$$

Όπου $C^{(k)}(i)$ ο συντελεστής αναβάθμισης να δίνεται από την σχέση :

$$C^{(k)}(i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^J a(i, j)} \sum_{j=1}^J \frac{y(j)a(i, j)}{\sum_{i'=1}^I x^{(k)}(i')a(i', j)} \quad (3.9)$$

όπου k είναι ο αριθμός επανάληψης του αλγορίθμου, i το νούμερο του εικονοστοιχείου και j ο αριθμός του σωλήνα ανιχνευτών. Σημειώνεται ότι αντιστοιχεί ένα συντελεστής αναβάθμισης για κάθε εικονοστοιχείο.

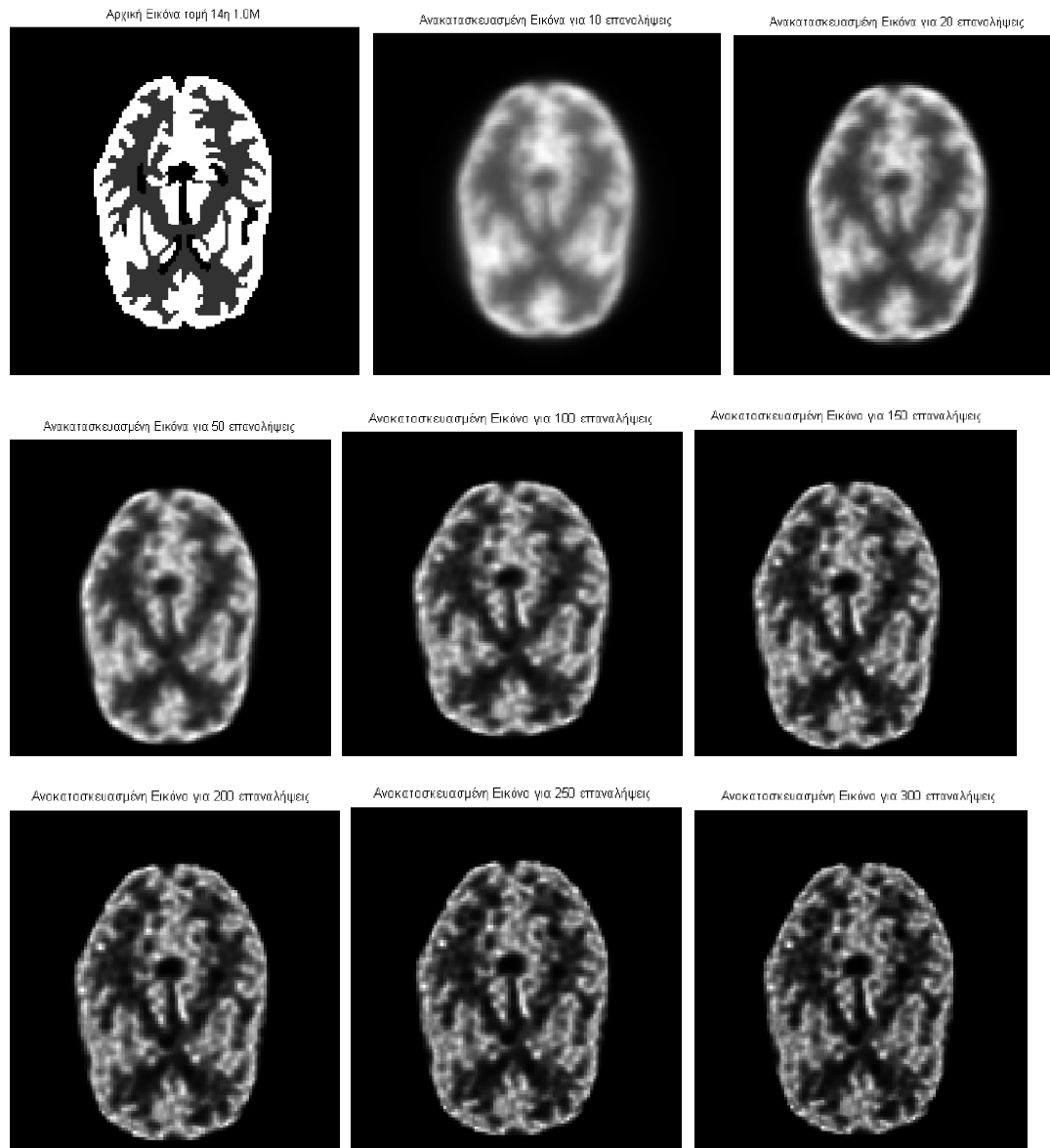
Είναι αξιοσημείωτο ότι οι συντελεστές αναβάθμισης εξαρτώνται μόνο από τα προβολικά δεδομένα οπότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την ανακατασκευή εικόνας από πραγματικά δεδομένα. Δηλαδή ο αλγόριθμος μας πρέπει να έχει μια αρχική τιμή για το άνυσμα x το οποίο θα αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη σύμφωνα με την σχέση 3.9 και θα σταματάει στο σημείο που θα γίνεται βέλτιστη η τουλάχιστον ποιοτικά αποδεκτή η ανακατασκευασμένη εικόνα. Το θέμα είναι πως μπορούμε να ξέρουμε σε ποιο σημείο πρέπει να σταματήσει ο αλγόριθμος.

3.2.2 Μεγέθη αξιολόγησης εικόνας

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε και να αξιολογήσουμε μεγέθη αξιολόγησης εικόνας χρησιμοποιήθηκαν [15],[19] ομοιώματα Hoffman που περιλαμβάνουν 18 τομές ανθρώπινου εγκεφάλου. Μεγέθη που έχουν προταθεί [16-18] είναι το NRMSD και χ^2 όπως επίσης και το μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Το NRMSD προερχόμενο από τα αρχικά των λέξεων Normalised Root Mean Square Deviation δηλαδή μέση κανονικοποιημένη τετραγωνική ρίζα της τυπικής απόκλισης ορίζεται από τη σχέση :

$$NRMSD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I (x(i) - \hat{x}(i))^2}{\sum_{i=1}^I \hat{x}(i)^2}} \quad (3.9)$$

όπου $x(i)$ η υπολογισμένη δραστηριότητα στο εκάστοτε εικονοστοιχείο ενώ $\hat{x}(i)$ η δραστηριότητα που γνωρίζουμε ότι είχε εξ αρχής το συγκεκριμένο εικονοστοιχείο αφού μιλάμε για ομοίωμα. Προφανώς το μέγεθος αυτό έχει τιμές μεταξύ 0 και 1 και όσο πιο κοντά είναι στο μηδέν τόσο πιο καλή θα είναι η ανακατασκευασμένη εικόνα. Το χ^2 ορίζεται με παραπλήσιο τρόπο από τη σχέση :



Σχήμα 3.2 : Πάνω αριστερά αρχική εικόνα ομοιώματος Hoffman τομή 14^η και ενεργότητα 1.0M. Στη συνέχεια είναι οι ανακατασκευασμένες εικόνες για 10, 20, 50, 100, 150, 200, 250 και 300 επαναλήψεις.

$$\chi^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^I (x(i) - \hat{x}(i))^2}{I \sum_{i=1}^I (x(i) + \hat{x}(i))} \quad (3.10)$$

το οποίο όμως δεν έχει τον ίδιο περιορισμό τιμών. Τέλος η συνάρτηση πιθανοφάνειας και κατά συνέπεια και ο λογάριθμος της θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν δείκτες ποιότητας εικόνας εάν η συνάρτηση αυτή εμφανίζει κάποιο μέγιστο.

3.2.3 Συμπεριφορά Μεγεθών Αξιολόγησης εικόνας

Έχει παρατηρηθεί ότι κατά τη λειτουργία του αλγορίθμου η ανακατασκευασμένη εικόνα βελτιώνεται αρχικά, καθώς οι επαναλήψεις αυξάνουν, φτάνει κάποια βέλτιστη ποιότητα και στη συνέχεια αλλοιώνεται. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα 3.2 όπου για 100 με 150 επαναλήψεις έχουμε τη βέλτιστη εικόνα και από κει και πέρα καθώς αυξάνουν και άλλο οι επαναλήψεις η ποιότητα εικόνας χαλάει. Συνεπώς ήταν αναγκαίο να βρεθεί ένα δείκτης κατάλληλος για την επισήμανση της επανάληψης στην οποία έχουμε την βέλτιστη ανακατασκευασμένη εικόνα.

Η συμπεριφορά των NRMSD, χ^2 και του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνεια φαίνονται στο σχήμα 3.3. Για τα δύο πρώτα βλέπουμε μια απότομη πτώση και στη συνέχεια, αφού περάσουν την ελάχιστη τιμή τους, μια βραδεία άνοδο. Αυτά τα δύο είναι αναμενόμενο να έχουν ίδια μορφή αφού έχουν τον ίδιο πυρήνα ορισμού δηλαδή την διαφορά γνωστών δραστηριοτήτων των εικονοστοιχείων με των υπολογισμένων από τον αλγόριθμο δραστηριοτήτων. Για τον λόγο αυτό έχουν σχεδόν γραμμική σχέση μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4. Ο δε λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας έχει μια μονοτονικά αύξουσα συμπεριφορά και για αυτό είναι δύσκολο να καθορίσουμε μέγιστο.

3.2.4 Κριτήρια παύσης

Το ερώτημα που εγείρεται λοιπόν χρησιμοποιώντας τον MLEM αλγόριθμο είναι πότε πρέπει αυτός να σταματήσει ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν καλύτερη ανακατασκευασμένη εικόνα. Με βάση λοιπόν τα προηγούμενα θα μπορούσαμε χρησιμοποιήσουμε την επανάληψη στην οποία συναντάται το ελάχιστο του NRMSD ή του χ^2 αφού σε εκείνη την επανάληψη οι πραγματικές τιμές δραστηριότητας και οι υπολογισμένες για κάθε εικονοστοιχείο είναι πιο κοντά από κάθε άλλη επανάληψη [16-18]. Μια άλλη ιδέα θα ήταν να σταματάμε τον αλγόριθμο όταν ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας περνάει την τιμή που έχει η συνάρτηση για την αρχική εικόνα [16]. Οι ιδέες αυτές έχουν χρησιμοποιηθεί και αξιολογηθεί δίνοντας πολύ καλής ποιότητας ανακατασκευασμένες εικόνες.

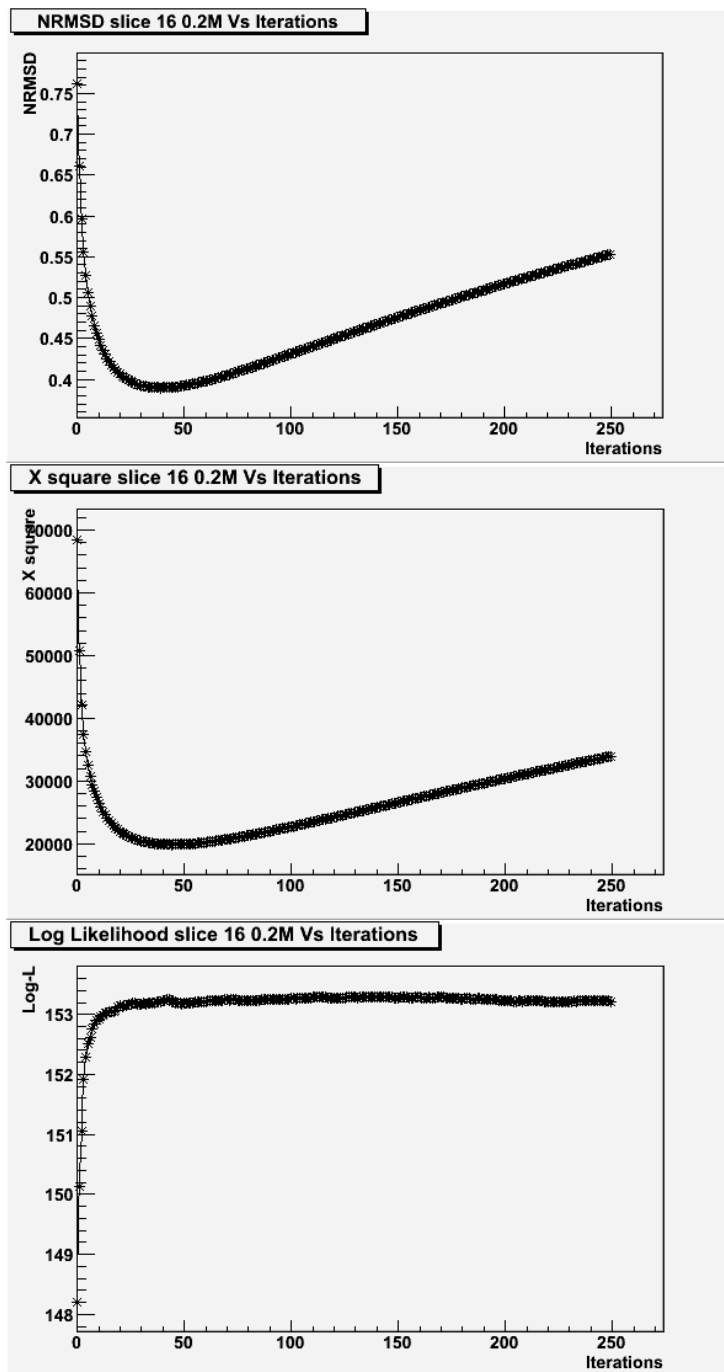
3.2.5 Πραγματικά και κατασκευασμένα δεδομένα

Τα μεγέθη και τα κριτήρια παύσης που αναφέρθηκαν στις τελευταίες παραγράφους χρησιμοποιούνται για κατασκευασμένες τομές ομοιωμάτων και όχι για ανακατασκευή εικόνας από πραγματικά δεδομένα. Συνεπώς θα αναρωτηθεί κανείς για ποιο λόγο να μελετάμε ομοιώματα. Η αλήθεια είναι πως το μόνο παρατηρήσιμο μέγεθος από πραγματικά δεδομένα είναι οι συντελεστές αναβάθμισης όπως ορίστηκαν στην σχέση 3.8. Συνεπώς αυτοί παίζουν κύριο ρόλο στην ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας αφού εξαρτώνται αποκλειστικά από τις εκπομπές ακτινών γ που μετρώνε οι σωλήνες ανίχνευσης. Η διαδικασία της μελέτης των

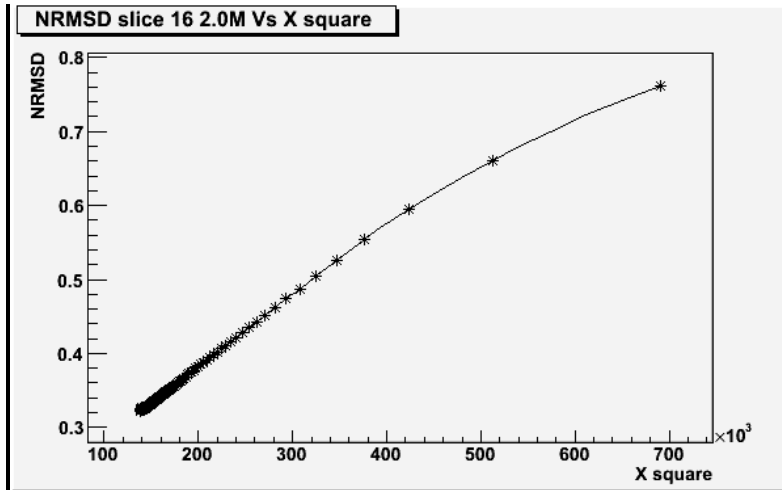
μεγεθών αξιολόγησης ανακατασκευασμένης εικόνας έχει νόημα αν τα συνδέσουμε με τους συντελεστές αναβάθμισης.

3.2.6 Άνυσμα C και C_{\min}

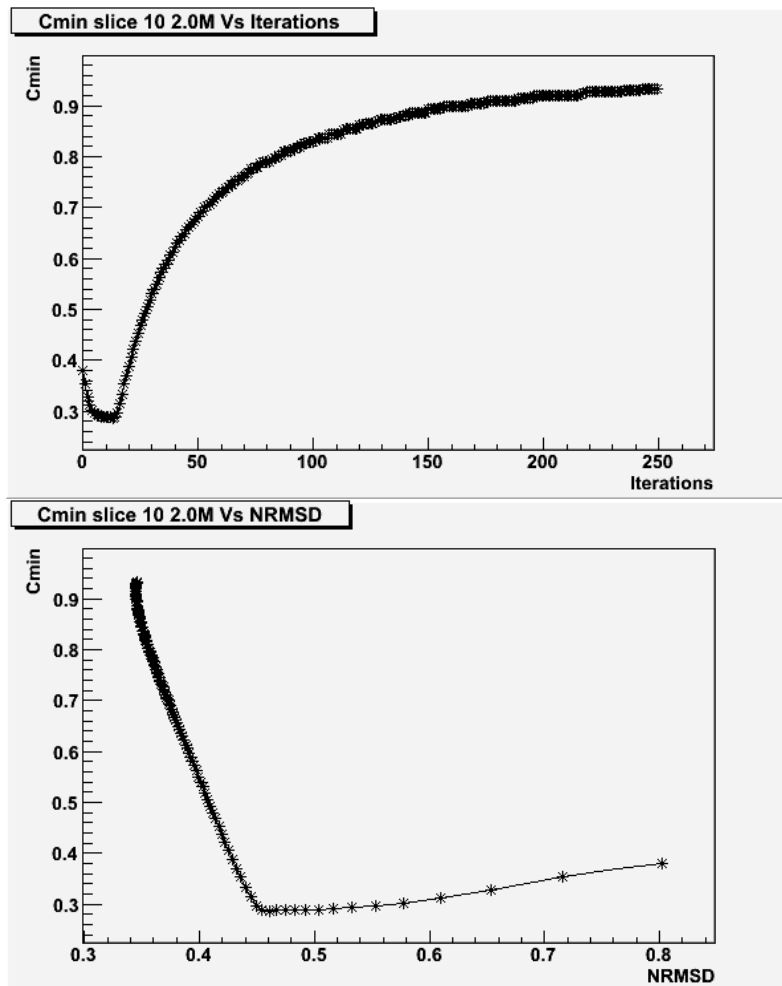
Προηγούμενες μελέτες από άλλους ερευνητές [16],[17] έχουν δείξει ότι κατά την εξέλιξη του αλγορίθμου οι συντελεστές αναβάθμισης αλλάζουν τιμή και έχει παρατηρηθεί πως τείνουν στην μονάδα. Συνεπώς σε κάθε επανάληψη έχουμε ένα άνυσμα $C(i)=C=[C(1),C(2),\dots,C(I)]$. Από όλες τις συνιστώσες αυτού του ανύσματος ορίζουμε ως C_{\min} την συνιστώσα με την μικρότερη τιμή από όλες. Το μέγεθος αυτό σαν συνάρτηση των επαναλήψεων τείνει στη μονάδα όπως φαίνεται σχήμα 3.5 ενώ έχει αμφιμονοσήμαντη σχέση με το NRMSD με εξαίρεση τις λίγες πρώτες επαναλήψεις του αλγορίθμου [16]. Αυτό σημαίνει πως αν ξέρουμε την τιμή του C_{\min} για μια συγκεκριμένη τιμή δραστηριότητας και τομής μπορούμε να εκτιμήσουμε που έχουμε το ελάχιστο του NRMSD οπότε και να σταματήσουμε στην επανάληψη εκείνη τον αλγόριθμο.



Σχήμα 3.3 : Από πάνω προς τα κάτω το NRMSD, το χ^2 και ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας σαν συνάρτηση των επαναλήψεων για την 12^η τομή του ομοιώματος Hoffman και δραστηριότητα 2.0M.



Σχήμα 3.4 : NRMSD σε σχέση με το χ^2 , φαίνεται η γραμμική σύνδεση τους.



Σχήμα 3.5 : Cmin σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (επάνω) και σε σχέση με το NRMSD (κάτω).

3.3 OSEM αλγόριθμος

Ο OSEM αλγόριθμος προέρχεται από τα αρχικά Ordered Subsets Expectation Maximization δηλαδή ταξινομημένα υποσύνολα αναμενόμενης μεγιστοποίησης. Πρακτικά αποτελεί την πιο γρήγορη χρονικά έκδοση του MLEM αφού χωρίζει τα δεδομένα σε υποσύνολα οπότε ο χρήστης καθορίζει τον αριθμό αυτό [16],[18]. Έτσι η επαναληπτική διαδικασία εφαρμόζεται για κάθε υποσύνολο δεδομένων και η έξοδος του πρώτου είναι είσοδος για το δεύτερο. Για να γίνει διαχωρισμός των δεδομένων καθορίζει τα υποσύνολα να έχουν τα δεδομένα από συγκεκριμένους σωλήνες ανίχνευσης. Για παράδειγμα αν θέλουμε 2 υποσύνολα τότε θα έχουμε στο πρώτο υποσύνολο τους σωλήνες ανίχνευσης με αριθμούς $\{1,3,5,\dots,J-1\}$ ενώ στο δεύτερο θα έχουμε $\{2,4,6,\dots,J\}$ αριθμούς σωλήνων ανίχνευσης. Αν πάλι θέλουμε 4 υποσύνολα οι σωλήνες ανίχνευσης θα χωρίζονται ως εξής: 1^ο υποσύνολο $\{1,5,9,\dots,J-3\}$, 2^ο υποσύνολο $\{2,6,10,\dots,J-2\}$, 3^ο υποσύνολο $\{3,7,11,\dots,J-1\}$ και το 4^ο $\{4,8,12,\dots,J\}$. Προφανώς για τα συγκεκριμένα υποσύνολα απαιτείται ο αριθμός των ανιχνευτικών σωλήνων να είναι πολλαπλάσιο του 4. Ακόμη να πούμε ότι για ένα μόνο υποσύνολο έχουμε τον αρχικό αλγόριθμο δηλαδή τον MLEM. Ο OSEM αλγόριθμος εισήχθη τις προηγούμενες δεκαετίες κυρίως λόγω έλλειψης υπολογιστικής δύναμης από τα μηχανήματα της εποχής προκειμένου να αντιμετωπίσει την υπερβολική χρήση χρόνου από τον MLEM. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν ισχύει σήμερα. Έρευνα έδειξε πως τα αποτελέσματα των δύο αλγορίθμων δεν συμπίπτουν [16] ούτε ότι είναι προβλέψιμη η συμπεριφορά του OSEM αν γνωρίζουμε την συμπεριφορά του MLEM.

Κεφάλαιο 4^ο : Χρήση Αλγορίθμων ανακατασκευής εικόνας

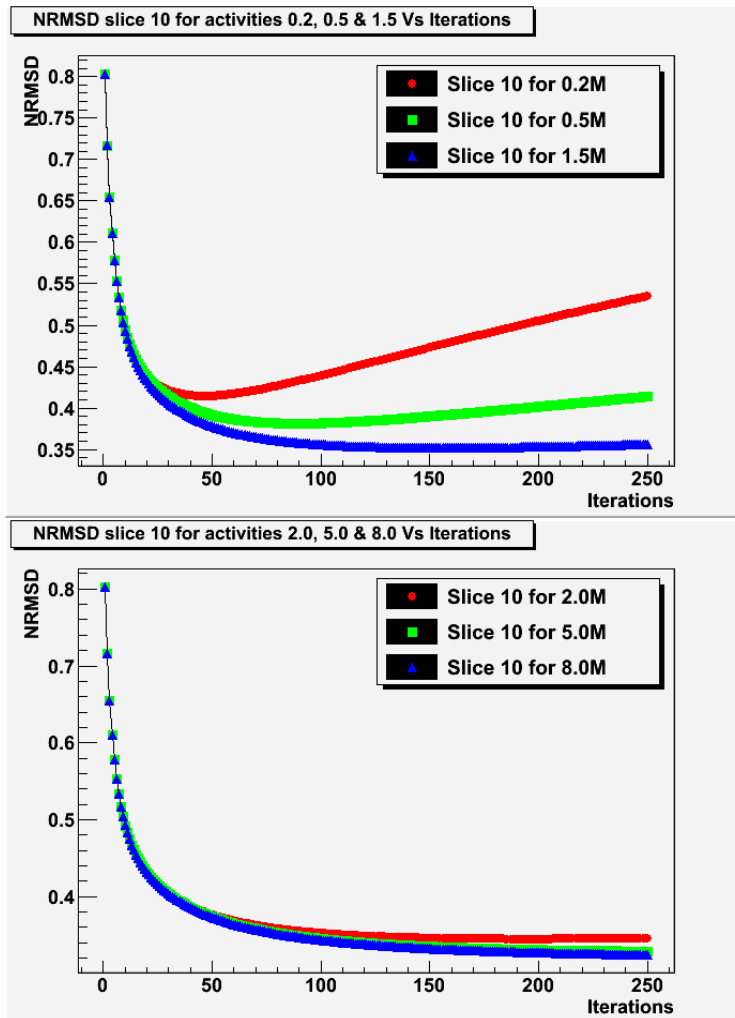
4.1 Software και Ομοιώματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η διαδικασία χρήσης αλγορίθμων ανακατασκευής εικόνας και οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Αρχικά αναφέρεται πως γίνεται χρήση του ομοιώματος Hoffman το οποίο περιλαμβάνει 18 ψηφιακές τομές του ανθρώπινου εγκεφάλου. Το ομοίωμα αυτό παρασκευάστηκε από αλγόριθμο ο οποίος γνωρίζοντας την τιμή δραστηριότητας σε κάθε εικονοστοιχείο παράγει γεγονότα ανάλογα της τιμής αυτής που δίνουν ακτίνες γ ιστροπικά κατανεμημένες σε όλους τους σωλήνες αντίχτυσης [16]. Στη συνέχεια λαμβάνονται τα αντίστοιχα προβολικά δεδομένα για τα οποία παράγεται τυχαία αριθμός μεταξύ 0 και 360 μοιρών. Κατόπιν αυτά επεξεργάζονται από τον MLEM αλγόριθμο και για κάθε επανάληψη υπολογίζουν – αναβαθμίζουν ένα πλήθος μεγεθών που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και κάποια νέα που ορίζονται στο κεφάλαιο αυτό. Συγκεκριμένα υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη το NRMSD, DNRMSD, DNRMSD/NRMSD, χ^2 , Cmin, Log-Likelihood. Επίσης έγινε χρήση της C++ γλώσσας προγραμματισμού για την δημιουργία των προβολικών δεδομένων. Ακόμα το πακέτο της root περιέχει τον αλγόριθμο ανακατασκευής εικόνας καθώς και όλα τα προγράμματα για την παραγωγή γραφημάτων. Τέλος για την παρουσίαση των εικόνων, αρχικών και ανακατασκευασμένων, χρησιμοποιήθηκε το πακέτο matlab.

4.2 Εισαγωγή

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή εικόνας έπρεπε να θέτει ένα όριο ή γενικά τέρμα στον αριθμό επαναλήψεων. Αυτό έγινε γιατί, όπως είπαμε, φάνηκε ότι η ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας βελτιώνεται αρχικά και μετά από ένα σημείο, που ποικίλει από τομή σε τομή και από ενεργότητα σε ενεργότητα, αρχίζει να χειροτερεύει [16],[17]. Συνεπώς ήταν αναγκαία μία συνθήκη που να όριζε την παύση του αλγορίθμου. Το μέγεθος που προτάθηκε είναι το NRMSD όπως έχει ήδη ορισθεί διότι συγκρίνει άμεσα την δραστηριότητα κάθε εικονοστοιχείου που υπολογίζει ο αλγόριθμος με αυτήν που ξέρουμε αρχικά από το ομοίωμα μέσω της διαφοράς τους [16] στη σχέση 3.9. Η δε συνθήκη που κρίθηκε ικανή για την επανάληψη με την βέλτιστη ανακατασκευασμένη εικόνα είναι εκείνη στην οποία έχουμε ελαχιστοποίηση του NRMSD οπότε και οι δύο τιμές δραστηριότητας ($x(i), \hat{x}(i)$) είναι παραπλήσιες. Δηλαδή σε μια τέτοια περίπτωση έχουμε την καλύτερη ποιοτικά ανακατασκευασμένη εικόνα.

Στην παρούσα εργασία έγινε μελέτη ξανά του NRMSD για διάφορες τιμές δραστηριότητας. Αρχικά επαληθεύεται η συμπεριφορά της μείωσης με γρήγορο ρυθμό που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση του και εν συνεχεία έχουμε την αύξηση με μικρότερο ρυθμό. Αυτό φαίνεται στο σχήμα σχήμα 4.1 (πάνω).



Σχήμα 4.1 : NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων για δραστηριότητες 0.2M, 0.5M και 1.5M (πάνω) και NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων για δραστηριότητες 2.0M, 5.0M και 8.0M (κάτω)

Μελετώντας το σχήμα των καμπύλων και την κλίση που αλλάζει στο ανοδικό κομμάτι καθώς αυξάνει η δραστηριότητα βλέπουμε ότι η επανάληψη που συναντάται το ελάχιστο του NRMSD αυξάνεται πολύ γρήγορα όταν αυξάνει η δραστηριότητα. Κάτι τέτοιο έχει σαν συνέπεια την αργοπορία του αλγορίθμου ανακατασκευής εικόνας μέχρις ότου δώσει το τελικό αποτέλεσμα.

Η συμπεριφορά αυτή συνεχίζεται καθώς αυξάνουμε και άλλο την τιμή της δραστηριότητας όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 (κάτω). Έτσι για τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων βρισκόμαστε ακόμα στο καθοδικό τμήμα για τιμές δραστηριότητας πάνω από 5.0M. Αυτό καταδεικνύει την απαίτηση μεγάλου χρόνου εξαγωγής τελικού αποτελέσματος, ειδικά, για μεγάλες τιμές δραστηριότητας. Συνεπώς θα αναζητηθεί νέο κριτήριο με στόχο την όσο το δυνατό μεγαλύτερη μείωση των επαναλήψεων άρα και κατά συνέπεια και του χρόνου εξαγωγής αποτελέσματος. Αυτό θα γίνει χωρίς όμως να έχουμε μείωση στην ποιότητα εικόνας που θα δίνει το νέο αυτό κριτήριο παύσης κάτι το οποίο θα ελεγχθεί.

4.3 Νέα μεγέθη

Κατά την μελέτη των ήδη υπαρχόντων μεγεθών του MLEM αλγορίθμου αναζητήθηκαν νέα κριτήρια παύσης με βάση τα ήδη ισχύοντα ή και με νέα μεγέθη. Στην προσπάθεια αυτή ορίστηκαν δύο νέα μεγέθη το DNRMSD και DNRMSD/NRMSD. Το πρώτο αποτελεί την παράγωγο του NRMSD και το δεύτερο την σχετική του μεταβολή.

4.3.1 DNRMSD

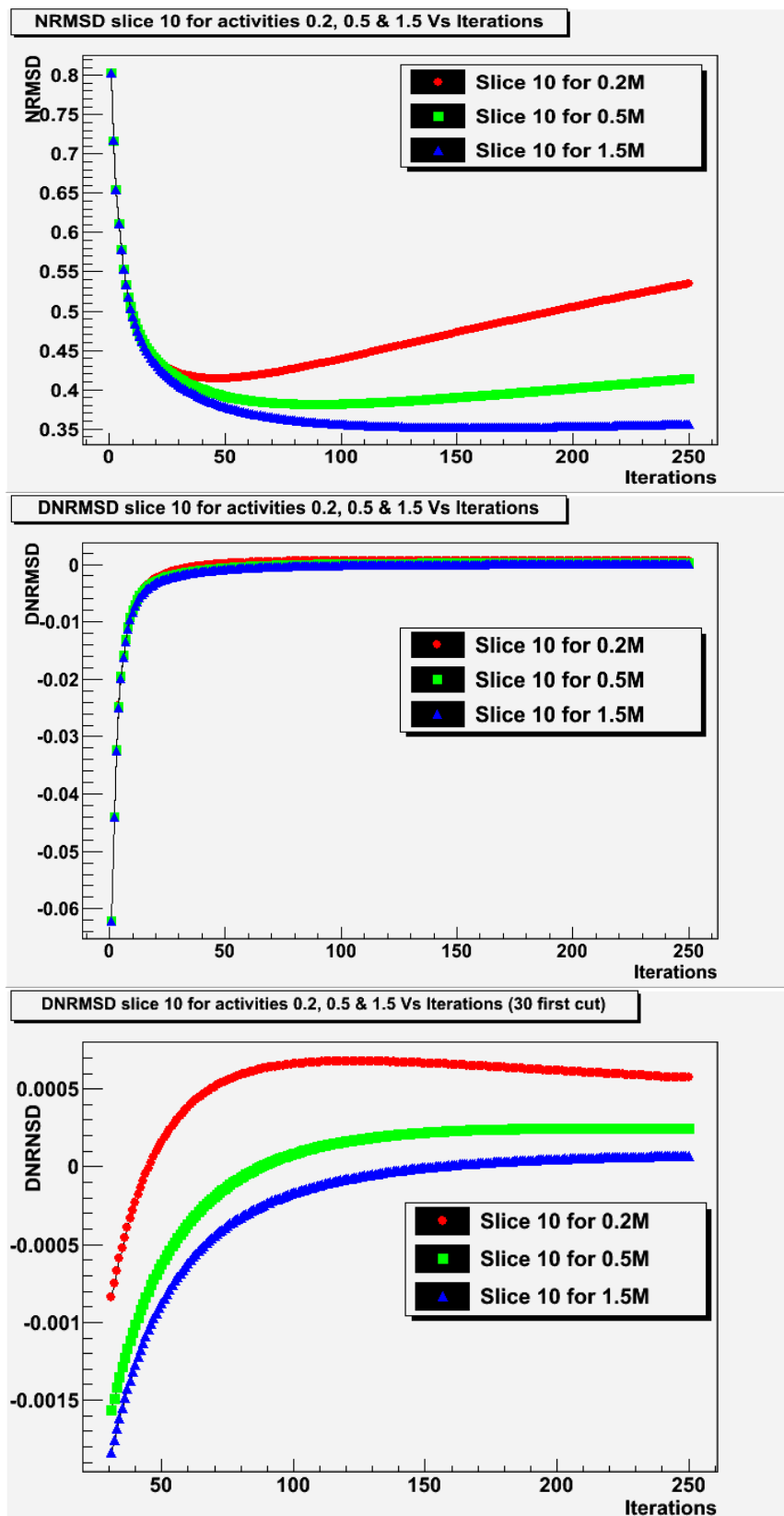
Ο ακριβής προγραμματιστικός ορισμός του DNRMSD για την i -οστή επανάληψη είναι

$$\text{DNRMSD}[i] = \text{NRMSD}[i] - \text{NRMSD}[i-1] \quad (4.1)$$

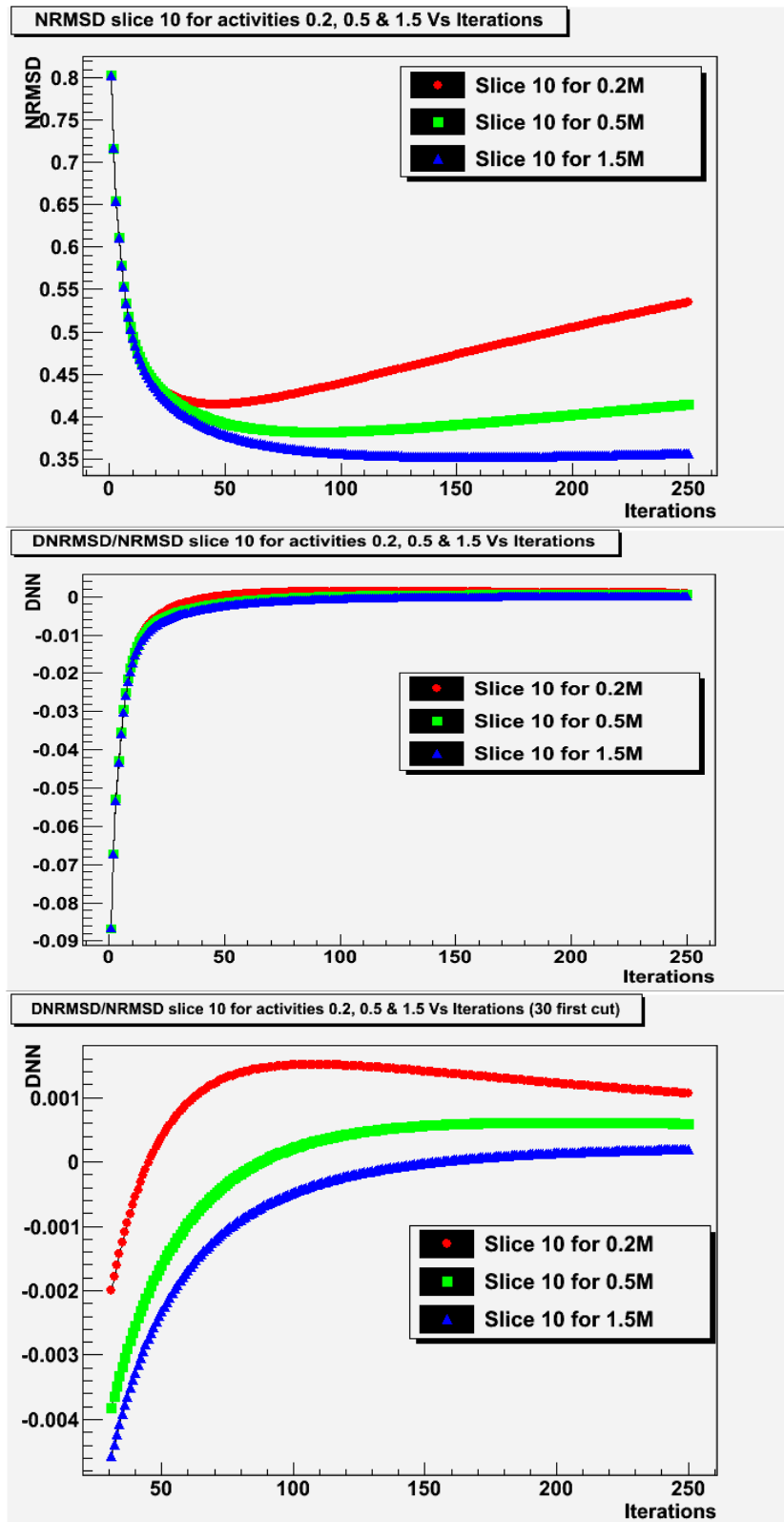
Συνεπώς χαρακτηρίζεται σαν παράγωγος, δεδομένου ότι η μεταβολή της επανάληψης είναι μονάδα. Το ερώτημα είναι η συμπεριφορά του σαν συνάρτηση των επαναλήψεων. Αν ανατρέξουμε στην συμπεριφορά του NRMSD δεδομένου ότι πέφτει απότομα σημαίνει πως το DNRMSD θα έχει αρχικά αρνητικές τιμές και θα μηδενίζεται γύρω από το σημείο ελαχιστοποίησης του NRMSD και εν συνεχεία θα παίρνει θετικές τιμές.

Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται και στο σχήμα 4.2 όπου είναι το NRMSD και ακριβώς από κάτω η παράγωγος του, DNRMSD, για χαμηλές δραστηριότητες, δηλαδή 0.2M, 0.5M και 1.5M. Παρατηρεί κανείς εύκολα ότι το σημείο μηδενισμού της παραγώγου είναι στην περιοχή που εμφανίζει ελάχιστο το NRMSD και διατηρεί τιμές γύρω από αυτό. Δεδομένου ότι δεν είναι εύκολο να παρατηρηθεί ο μηδενισμός του DNRMSD στο αρχικό σχήμα, με όλες τις επαναλήψεις, αφαιρέθηκαν κάποιες αρχικές ώστε να εστιάσουμε στην επανάληψη που συμβαίνει αυτό. Είναι φανερό ότι αυτό συμβαίνει στην περιοχή που ελαχιστοποιείται το NRMSD και αυξάνει η επανάληψη πραγματοποίησης του εξίσου γρήγορα όταν αυξάνουμε την Επίσης στην εστίαση βλέπουμε ότι η παράγωγος αυτή είναι δυνατό να παρουσιάζει και ένα μέγιστο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μετά το ελάχιστο δεν αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό το NRMSD, ο οποίος μπορεί και να μειώνεται κατά απόλυτη τιμή.

Το γεγονός της αύξησης του αριθμού επανάληψης όπου μηδενίζεται το DNRMSD καθώς αυξάνει η τιμή της δραστηριότητας παρατηρήθηκε και σε μεγαλύτερες τιμές δραστηριότητας. Στην περίπτωση που έχουμε μεγάλες τιμές ενεργότητας οι καμπύλες του DNRMSD συμπίπτουν περισσότερο στις 250 πρώτες επαναλήψεις, άρα μιλάμε για ακόμη πιο ταυτόσημη συμπεριφορά, και επιπλέον αργεί περισσότερο ο μηδενισμός του. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι το νέο αυτό μέγεθος εξ ορισμού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αριθμητική τιμή θετική ή αρνητική. Πρακτικά εδώ φαίνεται από -0.06 έως 0.001.



Σχήμα 4.2: NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (πάνω), DNRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (μέση) και DNRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τιμές δραστηριότητας 0.2M, 0.5M και 1.5M.



Σχήμα 4.3 : NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (πάνω), DNRMSD/NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (μέση) και DNRMSD/NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για 0.2M, 0.5M και 1.5M.

4.3.2 DNRMSD/NRMSD

Το DNRMSD/NRMSD της ι-οστής επανάληψης αλγοριθμικά ορίζεται σαν

$$DNRMSD/NRMSD[i]= DNRMSD[i]/NRMSD[i-1] \quad (4.2)$$

Το μέγεθος αυτό είναι η σχετική μεταβολή του NRMSD οπότε θεωρητικά παρέχει πιο συγκεκριμένες τιμές. Αυτό φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Επιπλέον σαν παράγωγο μέγεθος του DNRMSD έχει την ίδια συμπεριφορά με αυτό και θα μηδενίζεται όπου και αυτό. Το μόνο στο οποίο πλεονεκτεί σε σχέση με το DNRMSD είναι το συγκεκριμένο εύρος τιμών που διαθέτει. Από κει και πέρα όσα ειπώθηκαν για την παράγωγο του NRMSD , DNRMSD, ισχύουν και για την κανονικοποιημένη της εκδοχή, DNRMSD/NRMSD με τη διαφορά ότι παρέχει καλύτερες τιμές όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3. Τέλος το DNRMSD/NRMSD στην συνέχεια της εργασίας σε γραφήματα θα αναφέρεται και σαν DNN για συντομία.

4.3.3 Εισαγωγή νέων κριτηρίων παύσης

Είδαμε λοιπόν σε αυτό το κομμάτι ότι για να αναζητήσουμε νέα κριτήρια παύσης του αλγορίθμου ανακατασκευής εικόνας ορίσαμε κάποια νέα μεγέθη το DNRMSD και το DNRMSD/NRMSD. Το δεύτερο πλεονεκτεί του πρώτου στο γεγονός ότι έχει συγκεκριμένο εύρος τιμών ενώ σαν συμπεριφορά είναι παρόμοια. Συνεπώς προκειμένου να σχεδιάσουμε ένα νέο κριτήριο παύσης που να σταματάει νωρίτερα από την ελαχιστοποίηση του NRMSD θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα δύο νέα αυτά μεγέθη και να ορίσουμε ένα κατώφλι πάνω από το οποίο δεν θα συνεχίζει ο αλγόριθμος. Αυτό γίνεται διότι σε μεγάλες τιμές δραστηριότητας είπαμε ότι απαιτείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων για να λάβει το NRMSD την ελάχιστη τιμή του που αυξάνει αρκετά καθώς αυξάνει η δραστηριότητα. Η βασική ιδέα λοιπόν που αναπτύσσεται είναι να σταματάμε τον αλγόριθμο λίγο πιο πριν από την ελαχιστοποίηση του NRMSD δηλαδή κοντά στον μηδενισμό της παραγωγού. Από τα δύο νέα μεγέθη το DNRMSD/NRMSD γνωρίζουμε εξ ορισμού ότι έχει πιο συγκεντρωμένες τιμές οπότε είναι λογικό να το προτιμήσουμε σε ένα τέτοιας μορφής κριτήριο αυτό, σαν μέγεθος που θα διακόπτει τον αλγόριθμο. Το επόμενο ερώτημα η τιμή κατωφλίου. Ζητάμε μια τιμή πριν το μηδενισμό της παραγωγού που προφανώς αντιστοιχεί στην περιοχή ελαχίστου του NRMSD. Επειδή όμως μπορεί η μία τιμή να μην φανεί ικανοποιητική θα πρέπει να έχουμε δύο για το ίδιο κριτήριο. Συγκεκριμένα επιλέχθηκαν σαν τιμές κατωφλίου το 10^{-3} και το 10^{-4} . Είδαμε όμως ότι το DNRMSD/NRMSD όπως και το DNRMSD παίρνουν αρνητικές τιμές αρχικά. Συνεπώς το κριτήριο που διαμορφώθηκε τελικά είναι το DNRMSD/NRMSD να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερο από 10^{-3} και το 10^{-4} . Δηλαδή έχουμε

$$\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3} \quad (4.3)$$

$$\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4} \quad (4.4)$$

Το κριτήριο της σχέσης 4.3 θα αναφέρεται σε γραφήματα και ως Q3 ενώ το κριτήριο της σχέσης 4.4 σαν Q4. Προφανώς τα νούμερα αντιστοιχούν στους εκθέτες.

4.4 Σύγκριση Μεθόδων

Αφού ορίσαμε λοιπόν τα νέα κριτήρια παύσης πρέπει να δούμε πόσο πιο γρήγορα σταματάνε τον αλγόριθμο συγκριτικά με την ελαχιστοποίηση του NRMSD. Για τον σκοπό αυτό καταγράφηκε η επανάληψη που σταματάει ο αλγόριθμος και στα τρία αυτά κριτήρια για να μπορέσουμε να κάνουμε κάποια σύγκριση. Προφανώς η διαδικασία περιλαμβάνει και τις 18 τομές του ομοιώματος Hoffman αλλά και ένα φάσμα ενεργοτήτων. Οι ενεργότητες περιλαμβάνουν ένα πακέτο χαμηλών (0.5M, 1.0M και 1.5M), ένα πακέτο μεσαίων (2.0M, 4.0M και 5.0M) και ένα πακέτο υψηλών τιμών (6.0M, 8.0M και 10.0M).

Επιπλέον για την σύγκριση του παλαιού κριτηρίου παύσης με τα καινούρια ορίζονται δύο νέοι δείκτες, ο I3 και ο I4. Ο I3 ορίζεται σαν η επανάληψη που σταματάει ο αλγόριθμος για την ελαχιστοποίηση του NRMSD μείον την επανάληψη που σταματάει ο αλγόριθμος για κάνοντας χρήση της συνθήκης 4.3. Ομοίως ορίζεται και ο δείκτης I4 αλλά για την συνθήκη 4.4. Δηλαδή ισχύει :

$$I3 = \text{Stopping_Iteration}_{NRMSD_{min}} - \text{Stopping_Iteration}_{\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}} \quad (4.5)$$

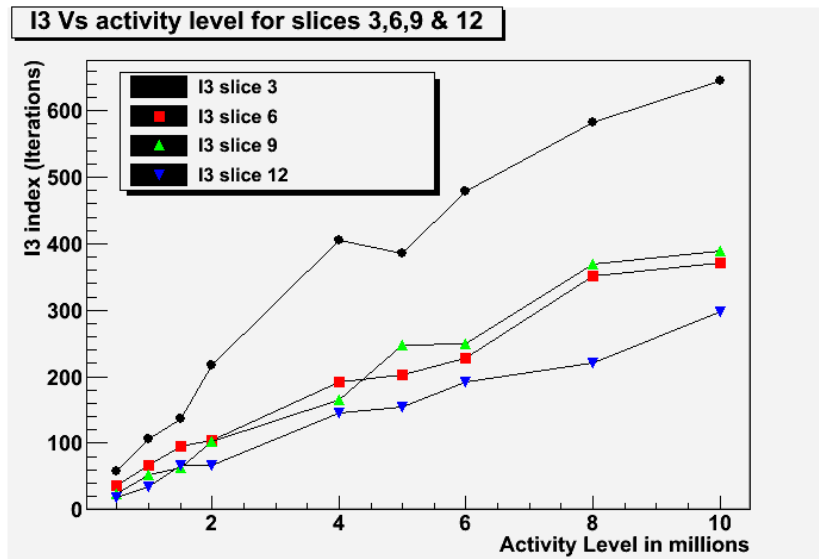
$$I4 = \text{Stopping_Iteration}_{NRMSD_{min}} - \text{Stopping_Iteration}_{\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}} \quad (4.6)$$

Προφανώς οι αριθμοί στους δείκτες υπονοούν τους εκθέτες των τιμών κατωφλίου πάλι. Εξ ορισμού οι δείκτες αυτοί είναι θετικοί . Αυτό συμβαίνει διότι η επανάληψη στην οποία συναντάται το ελάχιστο NRMSD είναι μεγαλύτερη αριθμητικά από ότι στην περίπτωση που ψάχνουμε μια τιμή πριν από τον μηδενισμό της παραγώγου.

4.4.1 Μελέτη του δείκτη I3

Ο δείκτης I3 απεικονίζεται για τα 3 πακέτα τιμών ενεργότητας , σύνολο 9 τιμών στα ακόλουθα γραφήματα. Για χαμηλές τιμές ενεργότητας βλέπουμε ότι η διαφορά μεταξύ των δύο κριτηρίων για τιμές κάτω από 1.5M ο δείκτης δεν ξεπερνάει τις 100 επαναλήψεις για τις περισσότερες τομές, αν και αυτή είναι μια αρκετή διαφορά.

Στις μεσαίες επαναλήψεις ο δείκτης I3 μεγαλώνει για όλες τις τομές. Η 1^η τομή αποτελεί ιδιάζουσα περίπτωση όπου για κάθε τιμή ενεργότητας ο δείκτης I3 έχει μεγάλη τιμή διότι στην συγκεκριμένη τομή αλγόριθμος για την ελαχιστοποίηση του NRMSD καθυστερεί χαρακτηριστικά λόγω της φύσης του ομοιώματος. Επιπλέον είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνει σε κάθε τομή η δραστηριότητα έχουμε και αύξηση του δείκτη I3. Δηλαδή το νέο κριτήριο κερδίζει περισσότερο χρόνο σε σχέση με το



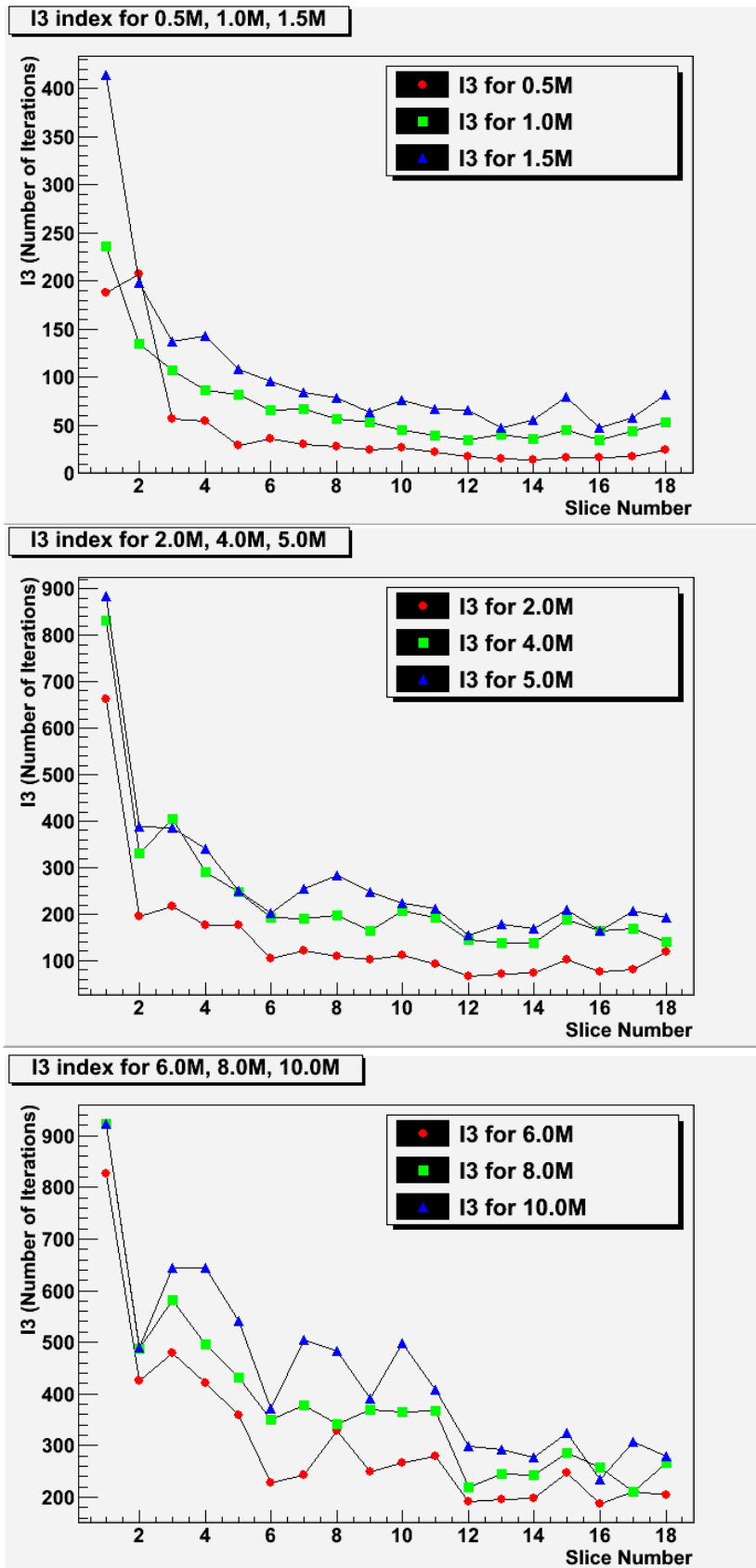
Σχήμα 4.4 : I3 δείκτης σαν συνάρτηση της δραστηριότητας για τις τομές 3,6,9 & 12.

παλιό καθώς αυξάνει η ενεργότητα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5. Ακόμα ο δείκτης αυτός αυξάνει καθώς αυξάνει η τιμή της δραστηριότητας κάτι που φαίνεται στο σχήμα 4.4 για τις τομές 3,6,9 και 12.

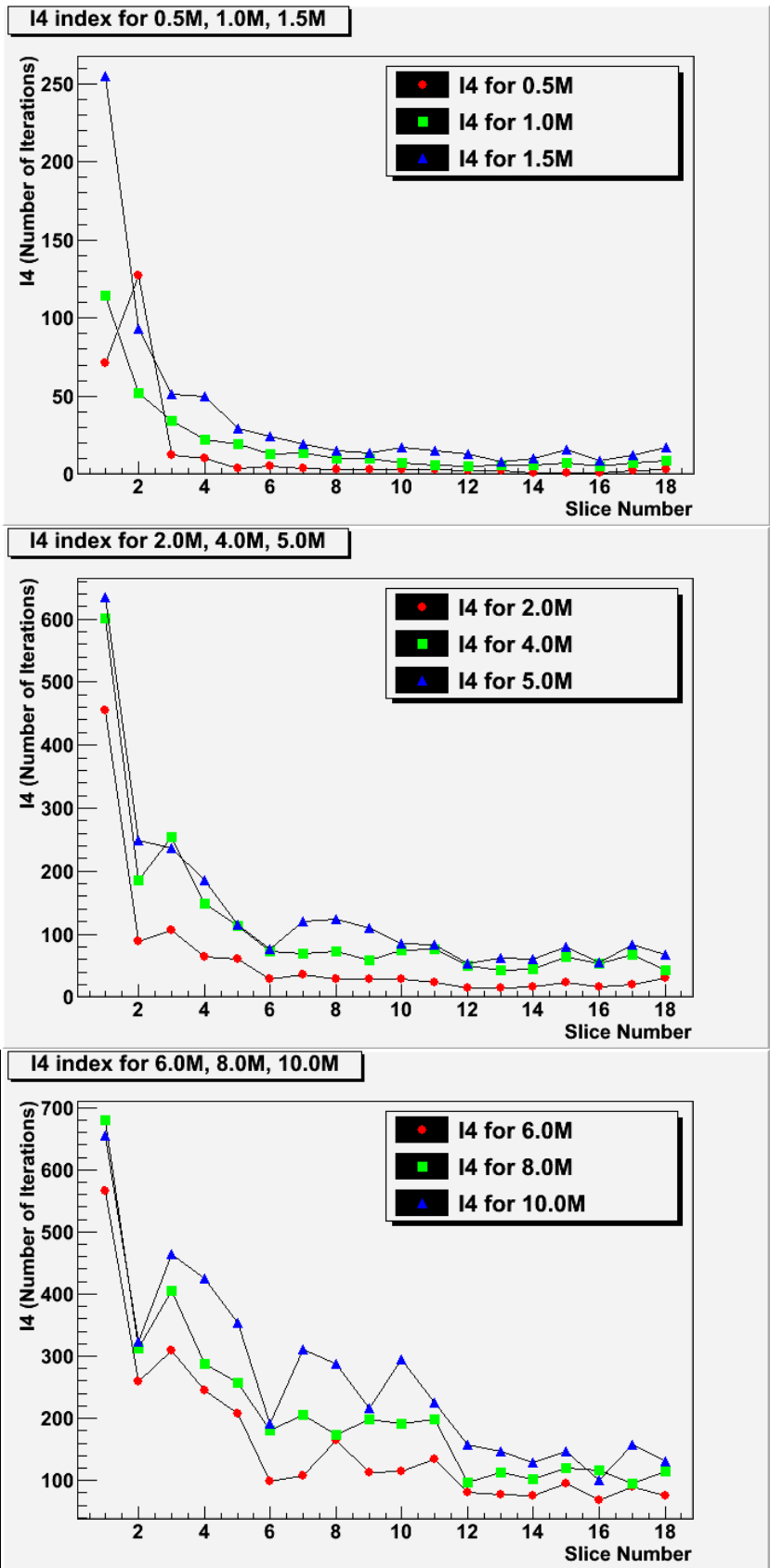
Τέλος για υψηλές δραστηριότητες παρατηρούμε ότι ο δείκτης I3 έχει υψηλές τιμές, πάνω από 200 επαναλήψεις, πράγμα που σημαίνει ότι το νέο κριτήριο σταματάει πολύ νωρίτερα από το παλιό. Συνεπώς αυξανόμενης της ενεργότητας έχουμε και μεγαλύτερο πλεονέκτημα χρησιμοποιώντας το κριτήριο της σχέσης 4.3.

4.4.2 Μελέτη του δείκτη I4

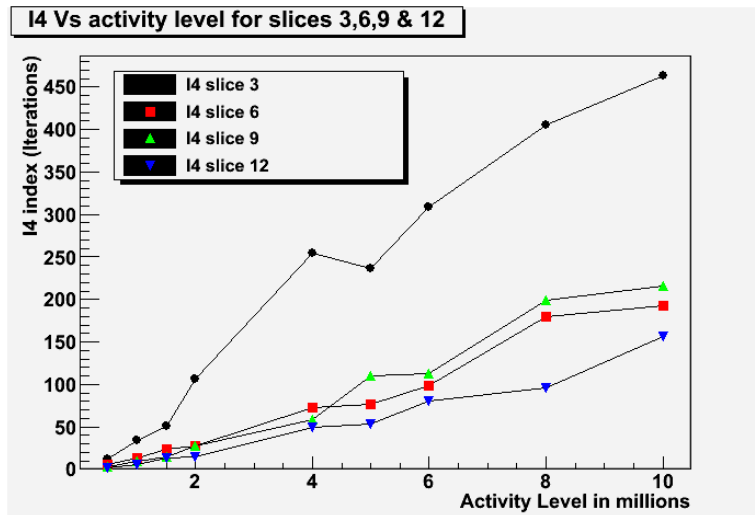
Εξ ορισμού ο δείκτης I4 αναμένουμε να έχει παραπλήσια συμπεριφορά με τον I3 δεδομένου έχουμε το ίδιο κριτήριο παύσης αλλά διαφορετικό κατώφλι. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.6 ενώ είναι εμφανές ότι για κατώφλι 10^{-4} σε χαμηλές τιμές ενεργότητας ο δείκτης έχει χαμηλές τιμές για το μεγαλύτερο μέρος των τομών του ομοιώματος. Πρακτικά βλέπουμε πολύ λίγες έως μόλις 30 επαναλήψεις κέρδος, περίπου, για τις περισσότερες τομές μέχρι 1.5M για το κριτήριο της σχέσης 4.4 συγκριτικά με την ελαχιστοποίηση του NRMSD. Πάλι παρατηρείται η αύξηση του I4 καθώς αυξάνει η ενεργότητα (σχήματα 4.6 και 4.7) ενώ το κέρδος της νέας μεθόδου για το συγκεκριμένο κατώφλι φαίνεται για δραστηριότητα 4.0M και πάνω που έχουμε σχεδόν 100 επαναλήψεις κέρδος. Για υψηλές τιμές δραστηριότητας η χρήση της νέας μεθόδου σαφέστατα πλεονεκτεί αφού ο αλγόριθμος σταματά τουλάχιστον 100 επαναλήψεις πιο μπροστά από το ελάχιστο NRMSD. Τέλος είναι εμφανές ότι οι πρώτες τομές παρουσιάζουν πολύ πιο αργά ελάχιστο NRMSD και γι αυτό εμφανίζουν τόσο μεγάλες τιμές του I4 συγκριτικά με τις υπόλοιπες τομές, κάτι που οφείλεται στη μορφή του ομοιώματος Hoffman.



Σχήμα 4.5 : Δείκτης I3 για κάθε τομή για τις δραστηριότητες 0.5M, 1.0M και 1.5M (πάνω), 2.0M, 4.0M και 5.0M (μέση) και 6.0M, 8.0M και 10.0M(κάτω).



Σχήμα 4.6 : Δείκτης I4 για κάθε τομή για τις δραστηριότητες 0.5M, 1.0M και 1.5M (πάνω), 2.0M, 4.0M και 5.0M (μέση) και 6.0M, 8.0M και 10.0M(κάτω).



Σχήμα 4.7 : I4 δείκτης σαν συνάρτηση της δραστηριότητας για τις τομές 3,6,9 & 12.

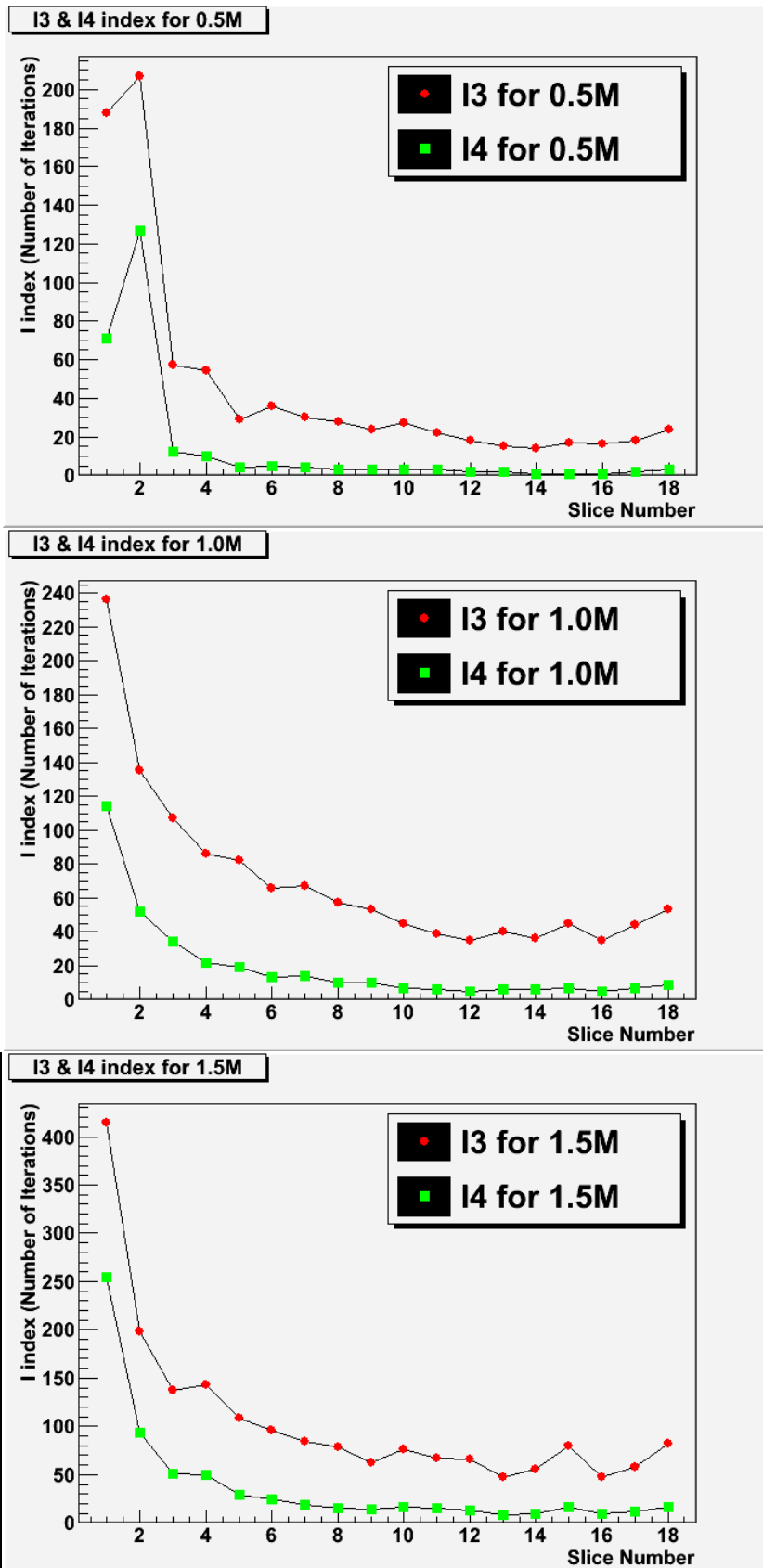
4.4.3 Σύγκριση των I3 και I4

Μελετώντας τους δείκτες I3 και I4 είδαμε ως τώρα ότι και οι δύο αυξάνουν για συγκεκριμένη τομή καθώς αυξάνει η ενεργότητα. Επίσης επειδή ο I3 αναφέρεται στην σύγκριση του κριτηρίου της σχέσης 4.3 με το ελάχιστο του NRMSD ενώ ο I4 στην σύγκριση του κριτηρίου της σχέσης 4.4 με το τελευταίο τότε καταλαβαίνουμε εύκολα ότι το δεύτερο θα είναι αργότερο του πρώτου αφού το 10^{-4} είναι πιο κοντά στο μηδέν από το 10^{-3} . Συνεπώς αναμένουμε ο δείκτης I3 να είναι μεγαλύτερος για κάθε τομή και ενεργότητα συγκριτικά με τον I4. Αυτό επαληθεύεται στα επόμενα σχήματα 4.8 έως 4.10 όπου απεικονίζονται και οι δύο για συγκεκριμένη ενεργότητα κάθε φορά. Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες τιμές δραστηριότητας με τα αρχικά διαγράμματα των I3 και I4. Ακόμα φαίνονται και οι δύο για την ίδια τομή σαν συνάρτηση της δραστηριότητας στο σχήμα 4.11

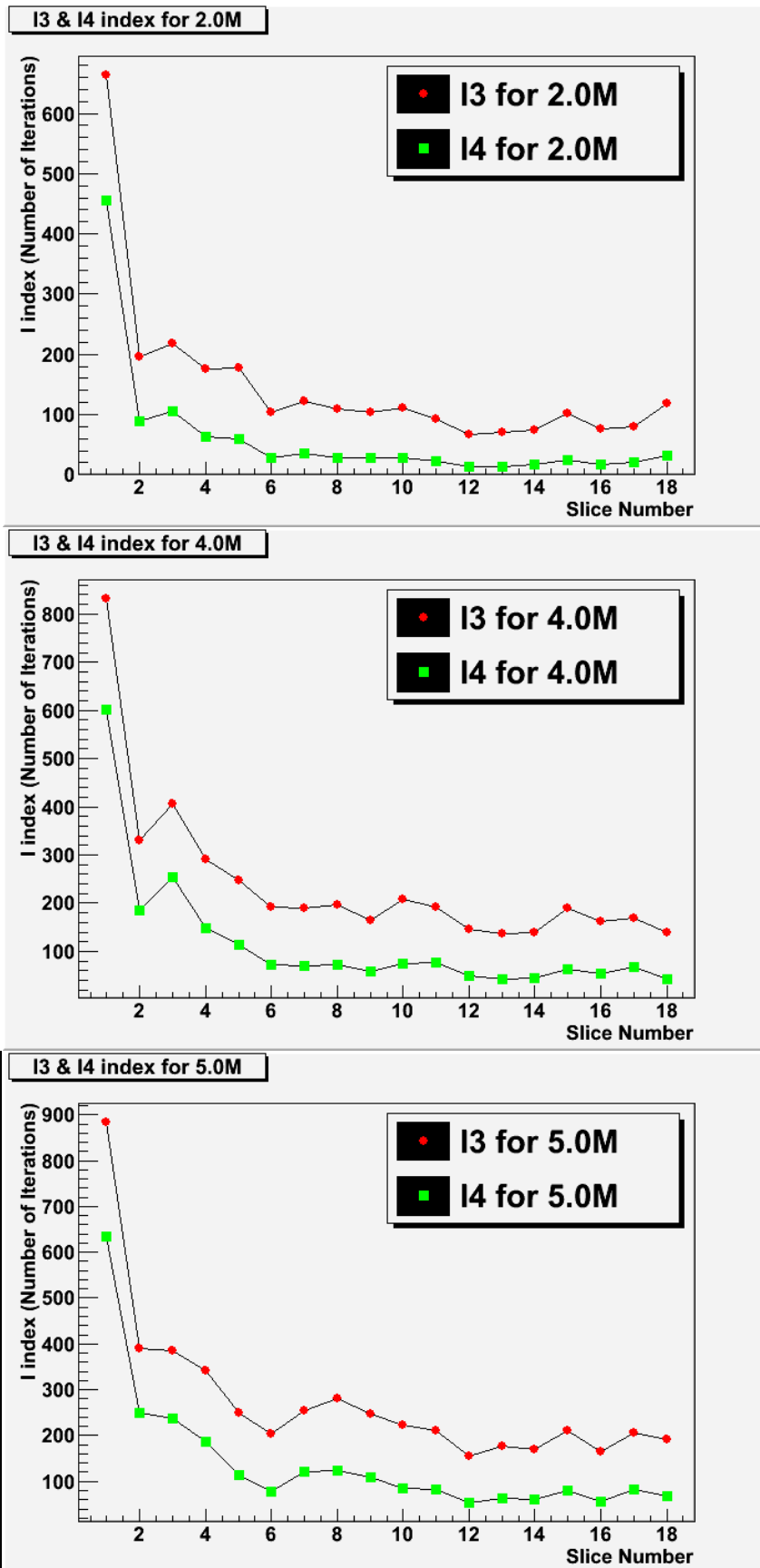
Βλέπουμε ξεκάθαρα στα σχήματα 4.8 έως 4.10 ότι για χαμηλές τιμές ενεργότητας ο δείκτης I3 είναι κατά 50 με 100 επαναλήψεις γρηγορότερος από τον I4. Στις μεσαίες ενεργότητες πλεονεκτεί ταχύτητας ολοκλήρωσης κατά 100 με 150 επαναλήψεις ενώ στις υψηλές τιμές ενεργότητας πάνω από 150 με 200 επαναλήψεις. Οι διαφορές στις επαναλήψεις ισχύουν για κάθε τομή καθώς είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι κάθε φορά οι καμπύλες είναι ίδιες με μια μετατόπιση της μίας ως προς την άλλη. Συνεπώς είδαμε ως εδώ ότι και τα δύο νέα κριτήρια παύσης

$$\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3} \quad \text{και} \quad \left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4} \quad \text{σταματάνε τον}$$

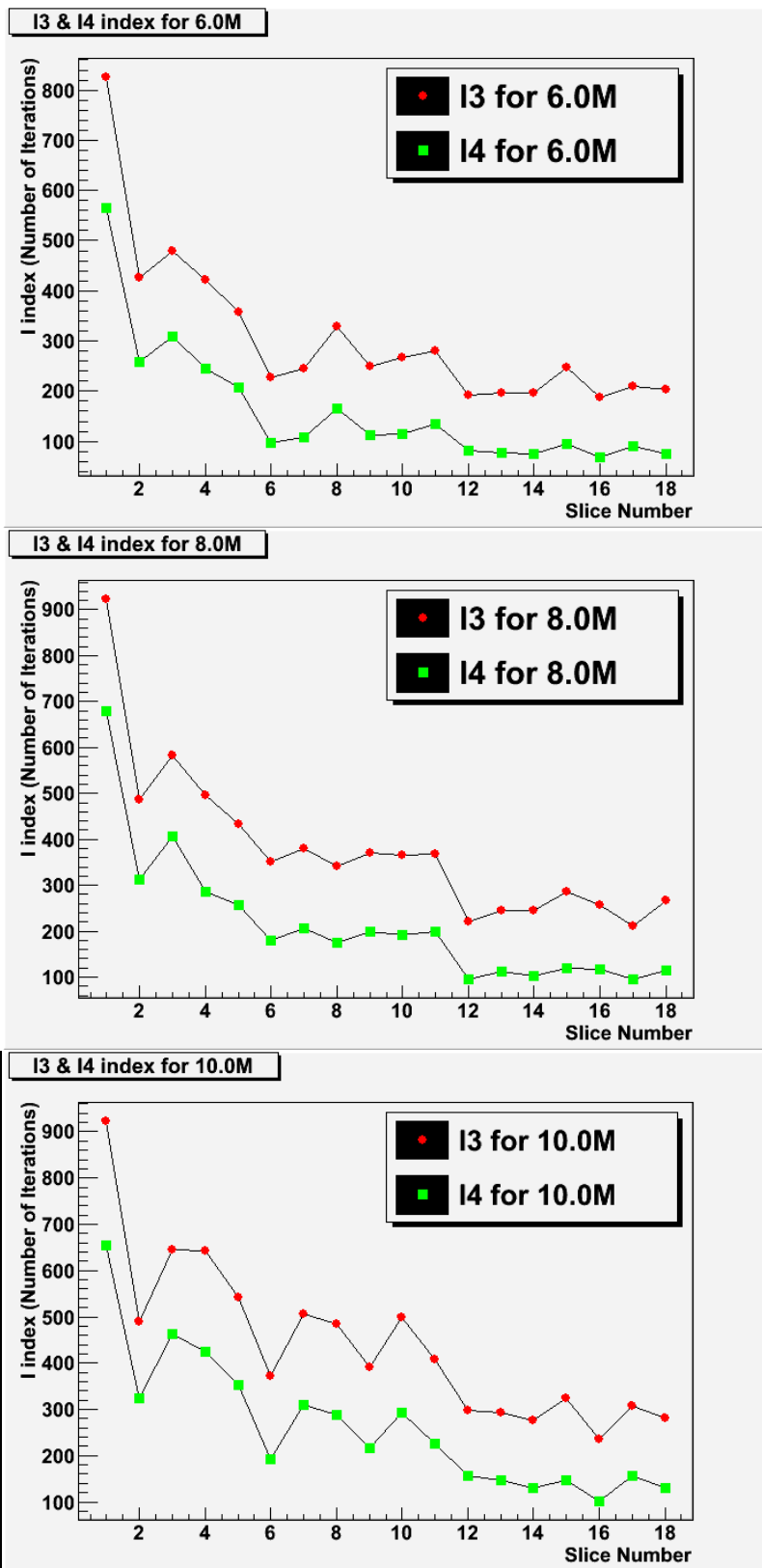
αλγόριθμο ανακατασκευής εικόνας ταχύτερα από την ελαχιστοποίηση του NRMSD και μάλιστα αυτό γίνεται ταχύτερα καθώς αυξάνει η τιμή της ενεργότητας. Επιπλέον το πρώτο νέο κριτήριο πλεονεκτεί του δεύτερου καθώς αυξάνει η τιμή της ενεργότητας κάτι που φαίνεται και στο σχήμα 4.11 όπου για την ίδια τομή ο I3 αυξάνει πιο γρήγορα από τον I4 σαν συνάρτηση της τιμής δραστηριότητας. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν παρέχουν και τα δύο κριτήρια αξιόλογη ποιότητα ανακατασκευασμένης εικόνας.



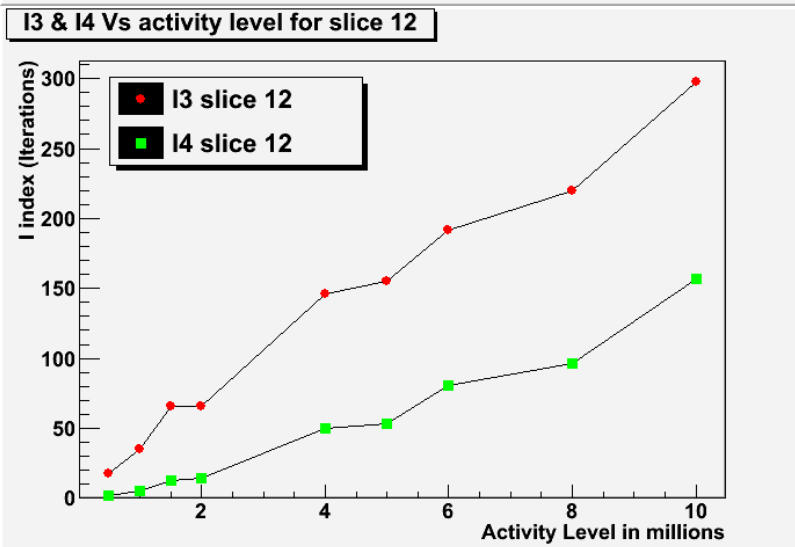
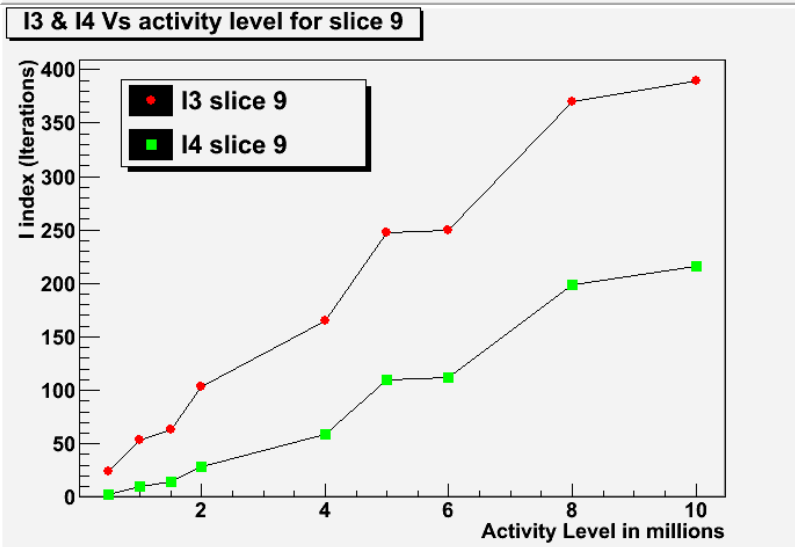
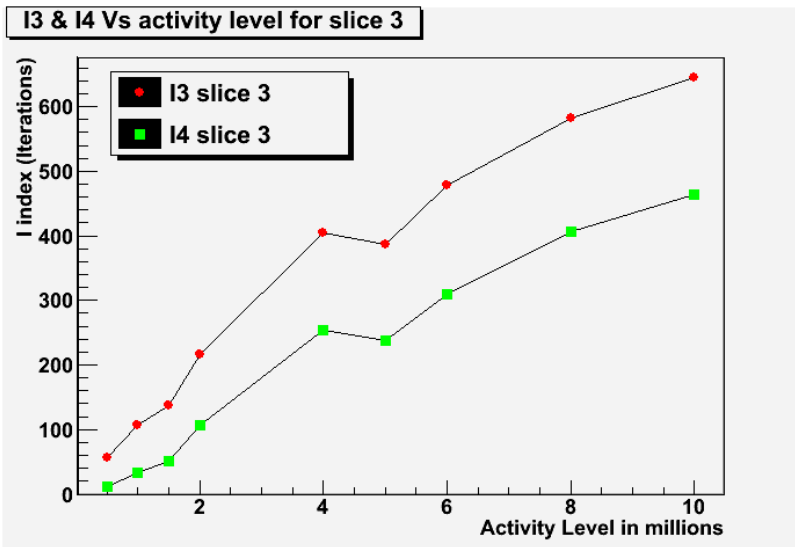
Σχήμα 4.8 : Δείκτες I3 και I4 για 0.5M (πάνω), 1.0M (μέση) και 1.5M (κάτω) στις 18 τομές του ομοιώματος Hoffman.



Σχήμα 4.9 : Δείκτες I3 και I4 για 2.0M (πάνω), 4.0M (μέση) και 5.0M (κάτω) στις 18 τομές του ομοιώματος Hoffman.



Σχήμα 4.10 : Δείκτες I3 και I4 για 6.0M (πάνω), 8.0M (μέση) και 10.0M (κάτω) στις 18 τομές του ομοιώματος Hoffman.



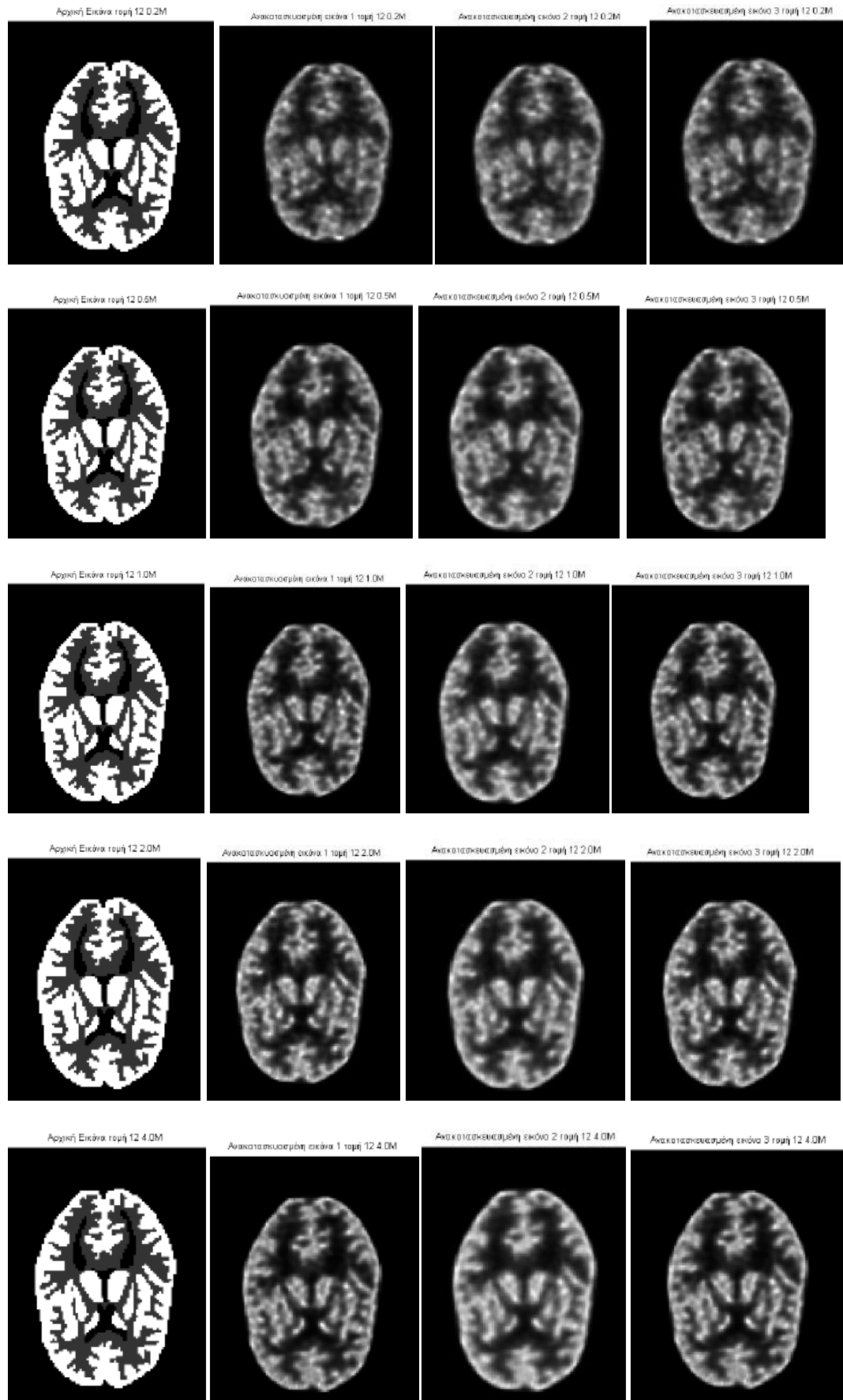
Σχήμα 4.11 Δείκτες I3 και I4 σαν συνάρτηση της δραστηριότητας για τις τομές 3 (πάνω), 9 (μέση) και 12 (κάτω).

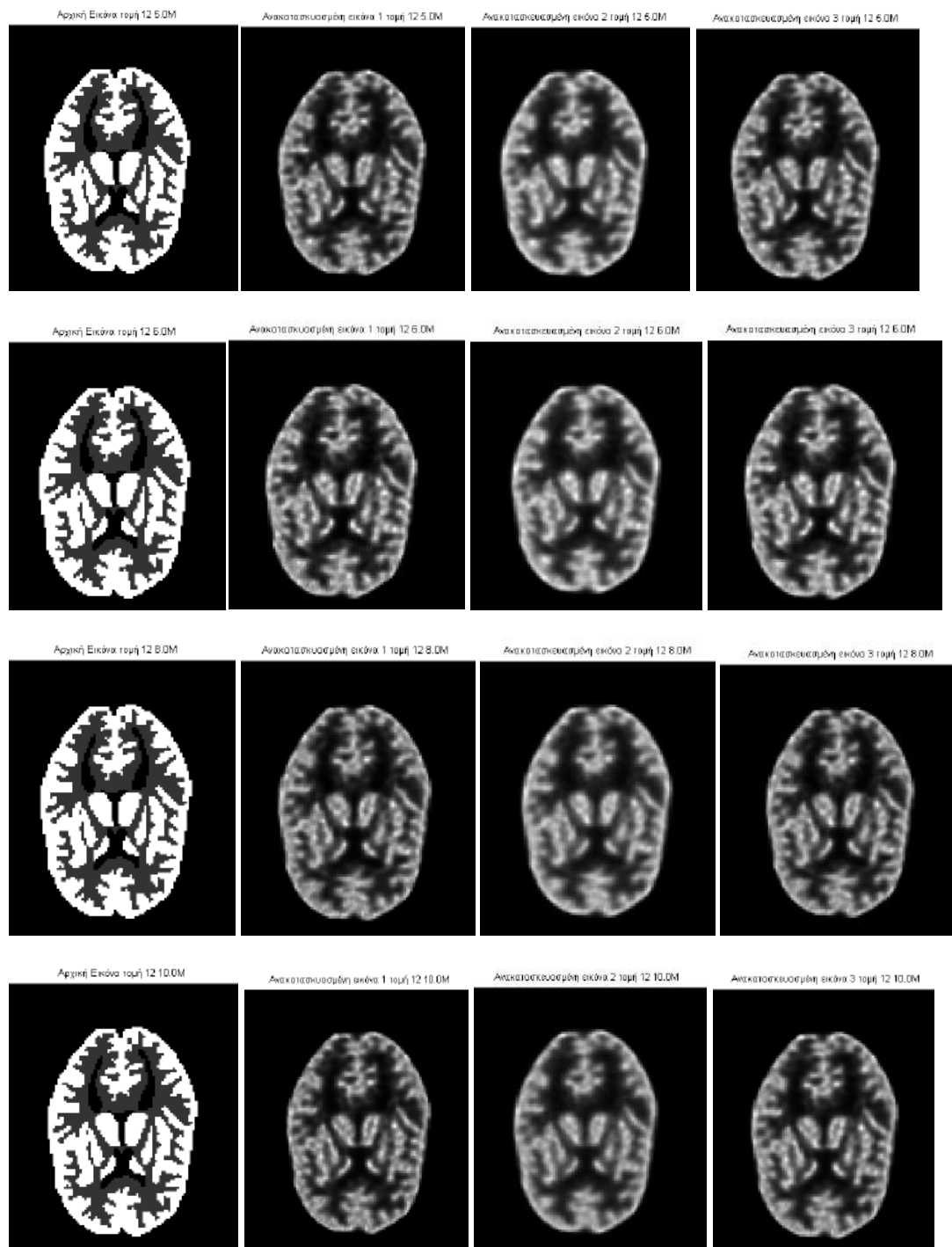
4.5 Ανακατασκευασμένες εικόνες νέων μεθόδων

Προκειμένου να δούμε αν τελικά τα νέα αυτά κριτήρια πέρα από πλεονέκτημα χρόνου που δίνουν με την περικοπή επαναλήψεων είναι εξίσου αξιόλογα θα πρέπει να ελέγξουμε την ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας που παράγουν. Για τον σκοπό αυτό κατασκευάστηκαν οι αρχικές εικόνες του ομοιώματος Hoffman για μια τυχαία τομή που επιλέχθηκε να είναι η 14^η για ένα μεγάλο πλήθος τιμών δραστηριότητας. Αναφέρεται ότι οι περιοχές με υψηλή δραστηριότητα είναι τονισμένες με μαύρο χρώμα ενώ αυτές με χαμηλή ή καθόλου δραστηριότητα με γκρι ή άσπρο χρώμα αντίστοιχα.

Οι τιμές δραστηριότητας που χρησιμοποιήθηκαν είναι 0.2M, 0.5M, 1.0M, 2.0M, 4.0M, 5.0M, 6.0M, 8.0M και 10.0M . Η ανακατασκευασμένη εικόνα 1 (2^η στήλη) αναφέρεται στην ανακατασκευασμένη εικόνα από τον αλγόριθμο κάνοντας χρήση της ελαχιστοποίησης του NRMSD σαν κριτήριο παύσης. Η ανακατασκευασμένη εικόνα 2 (3^η στήλη) έχει κριτήριο παύσης το $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}$ ενώ η ανακατασκευασμένη εικόνα 3 (4^η στήλη) το $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}$. Η πρώτη στήλη συμπληρώνεται από την αρχική εικόνα της τομής του ομοιώματος ενώ η φορά αύξησης δραστηριότητας είναι προς τα κάτω.

Στα σχήματα που ακολουθούν είναι φανερό ότι οι ανακατασκευασμένες εικόνες 2 και 3 είναι συγκρίσιμες με την εικόνα 1 και απεικονίζουν ορθά την αρχική για χαμηλές τιμές δραστηριότητας. Συνεπώς τα νέα κριτήρια παύσης παράγουν εξίσου καλές εικόνες συγκριτικά με την ελαχιστοποίηση του NRMSD παρέχοντας όλες τις λεπτομέρειες του ομοιώματος.





Σχήμα 4.12 : Η 1^η στήλη περιέχει τις αρχικές εικόνες της 14^{ης} τομής, η 2^η στήλη περιέχει τις ανακατασκευασμένες εικόνες με κριτήριο το ελάχιστο του NRMSD, η 3^η στήλη τις ανακατασκευασμένες εικόνες με κριτήριο το $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}$ και η 4^η στήλη τις ανακατασκευασμένες εικόνες με κριτήριο $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}$. Από πάνω προς τα κάτω είναι οι εικόνες για τιμές δραστηριότητας 0.2M, 0.5M, 1.0M, 2.0M, 4.0M, 5.0M, 6.0M, 8.0M και 10.0M αντίστοιχα.

4.6 Μελέτη των μεγεθών του MLEM αλγορίθμου

Κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας μελετήθηκαν τα πιο σημαντικά μεγέθη του MLEM. Συγκεκριμένα μελετήθηκαν τα μεγέθη NRMSD, DNRMSD και DNRMSD/NRMSD, άνυσμα C και C_{\min} και C_{\min}^{opt} . Όλα τα μεγέθη έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.6.1 NRMSD και παράγωγα μεγέθη για διάφορες τομές

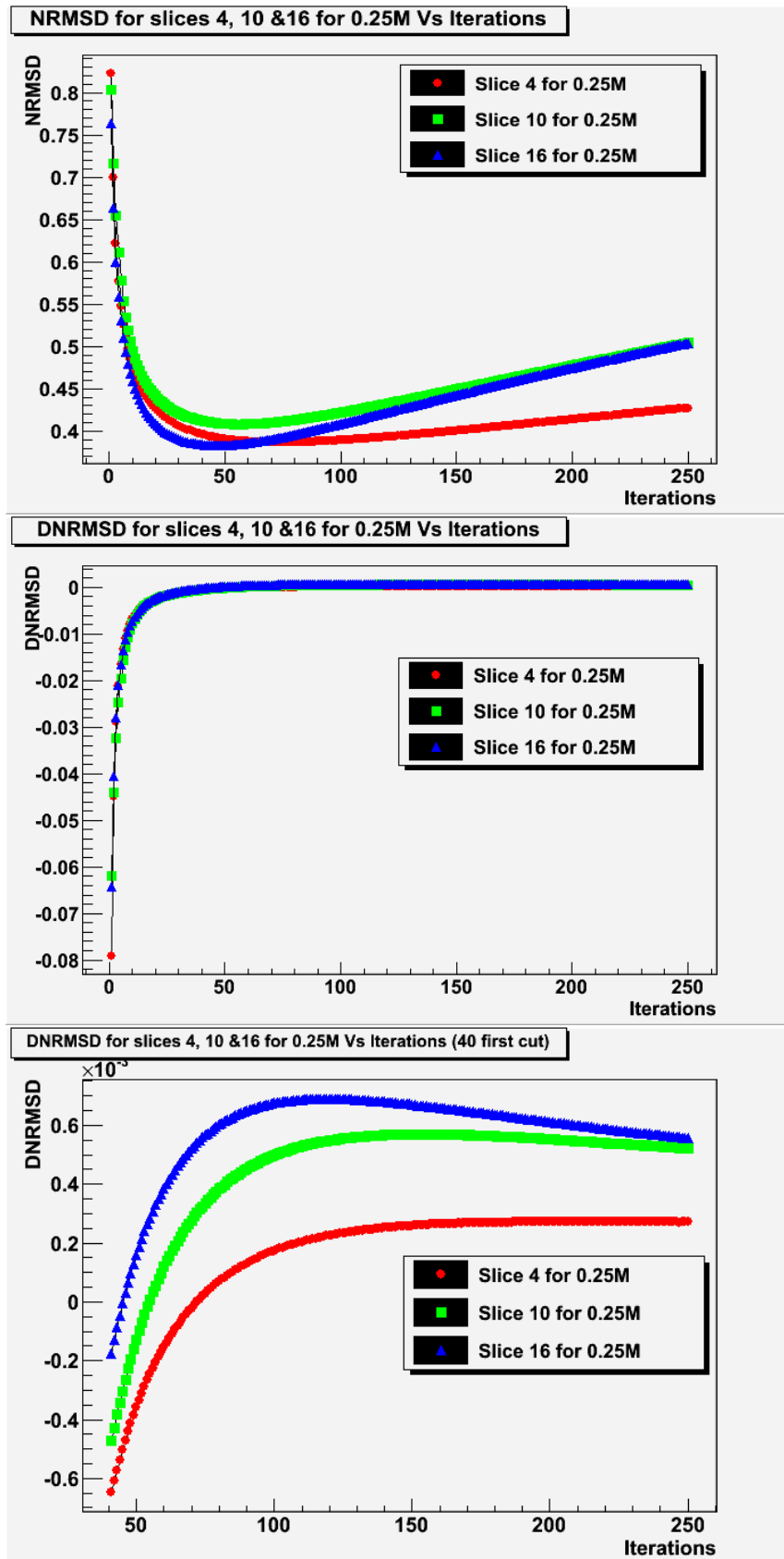
Τα μεγέθη NRMSD, DNRMSD και DNRMSD/NRMSD καταγράφηκαν για τρεις τομές σε μία ενεργότητα σε δύο τιμές ενεργότητας. Οι τομές που χρησιμοποιήθηκαν είναι μία από τις πρώτες, μία από τις μεσαίες και μία από τις τελευταίες. Δηλαδή η $4^{\text{η}}$, η $10^{\text{η}}$ και $16^{\text{η}}$. Οι δε τιμές δραστηριότητας είναι 0.25M και 6.0M.

Το NRMSD είναι φανερό ότι για την ίδια δραστηριότητα όλες οι τομές έχουν την ίδια συμπεριφορά με την μόνη διαφοροποίηση ότι υπάρχει ελαφρά διαφορά από τομή σε τομή το που συναντάται το ελάχιστο του μεγέθους αυτού.

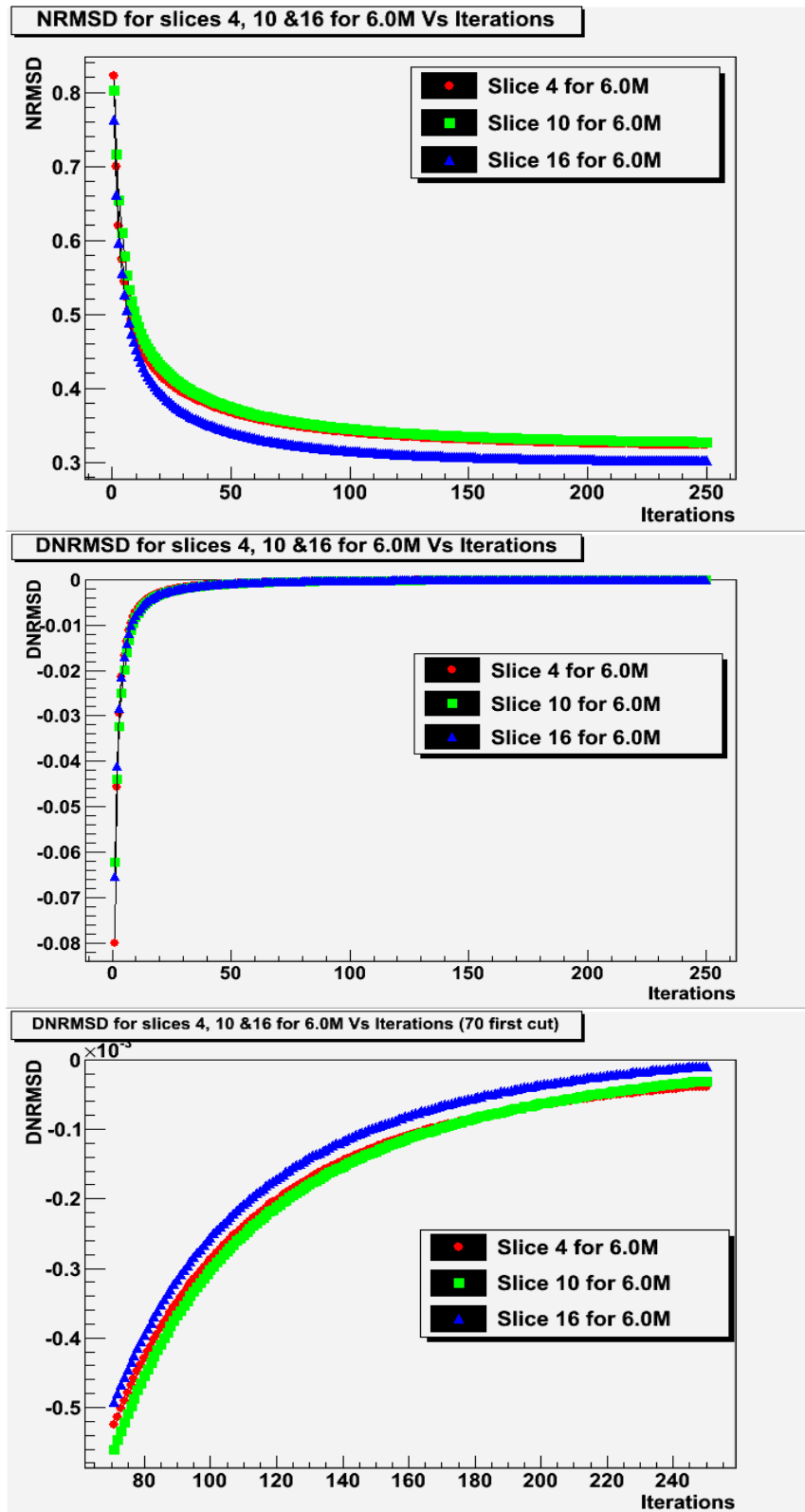
Το DNRMSD που ορίστηκε στην παράγραφο 4.3.2 και είδαμε ότι από δραστηριότητα σε δραστηριότητα αλλάζει το σημείο μηδενισμού της το οποίο μετατοπίζεται σε μεγαλύτερες τιμές επανάληψης, ενώ βρίσκεται πάντα στην περιοχή της ελάχιστης τιμής του NRMSD, καθώς αυξάνει η πρώτη. Στο κομμάτι αυτό μελετάται το πόσο αλλάζει από τομή σε τομή για μία μόνο ενεργότητα.

Το μέγεθος DNRMSD συμπεριφέρεται το ίδιο και για τις τρεις τομές και τιμή ενεργότητας 0.25M (σχήμα 4.13). Για να ξεχωρίσουμε τις τρεις καμπύλες θα πρέπει να εστιάσουμε κόβοντας μερικές επαναλήψεις από τις αρχικές. Στο κομμάτι αυτό βλέπουμε ότι μηδενίζεται και οι διαφορές των καμπυλών είναι της τάξης του 10^{-4} . Για τιμή δραστηριότητας 6.0M (σχήμα 4.14) δεν βλέπουμε εύκολα το μηδενισμό του DNRMSD ακόμα και στην εστίαση του ενώ οι καμπύλες συμπίπτουν περισσότερο για τις τρεις τομές. Συνεπώς καθώς αυξάνει η τιμή της δραστηριότητας έχουμε πιο ομοιόμορφη συμπεριφορά του DNRMSD για όλες τις τομές. Δηλαδή έχουμε μικρή στατιστική διακύμανση του αριθμού επανάληψης, για συγκεκριμένη τιμή δραστηριότητας, όπου μηδενίζεται το μέγεθος αυτό.

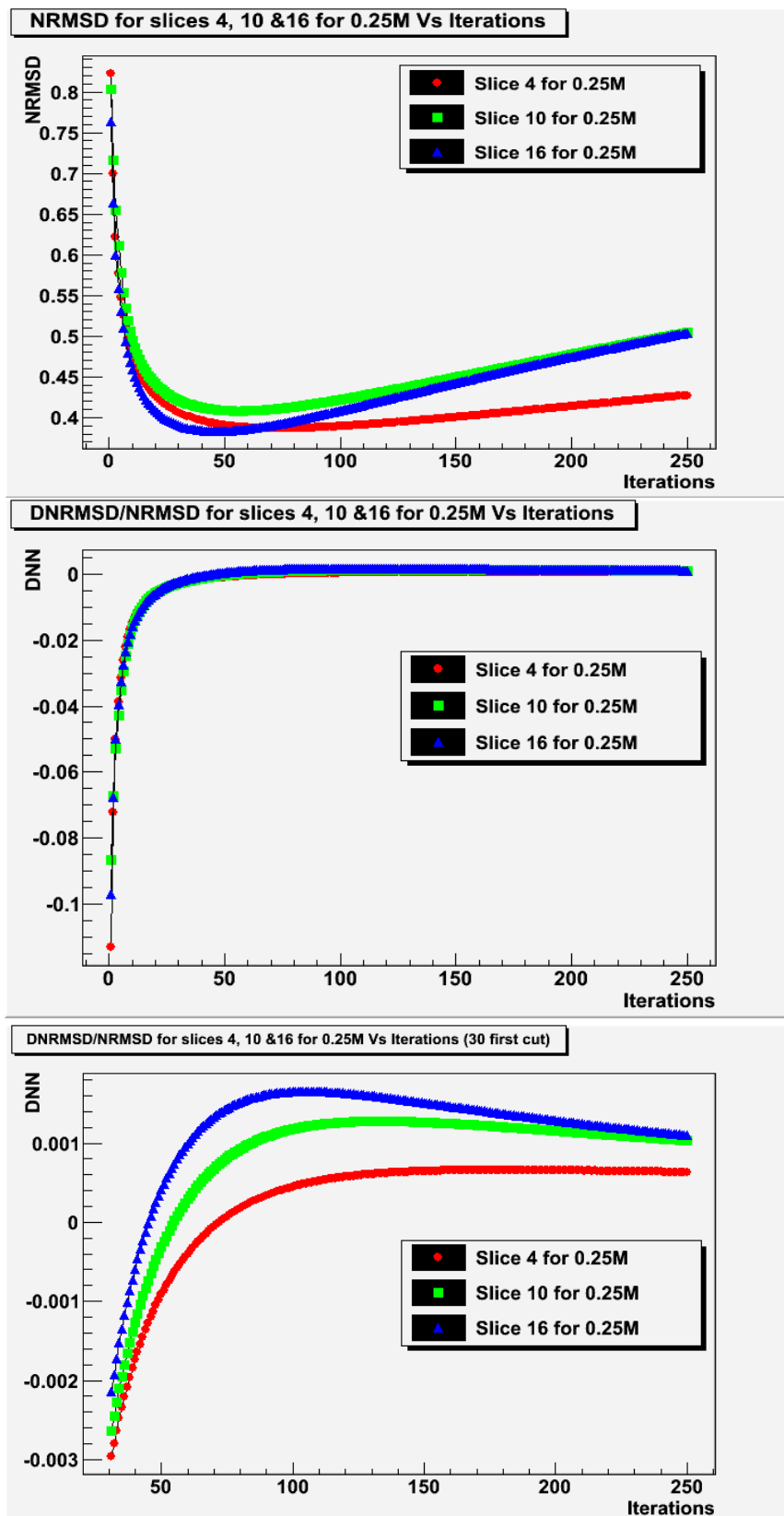
Το DNRMSD/NRMSD σαν παράγωγο μέγεθος του DNRMSD παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά (σχήματα 4.15 και 4.16). Οπότε η επανάληψη που συναντώνται οι τιμές 10^{-3} και 10^{-4} για το σύνολο των τομών και συγκεκριμένη τιμή δραστηριότητας θα έχει μικρή διακύμανση.



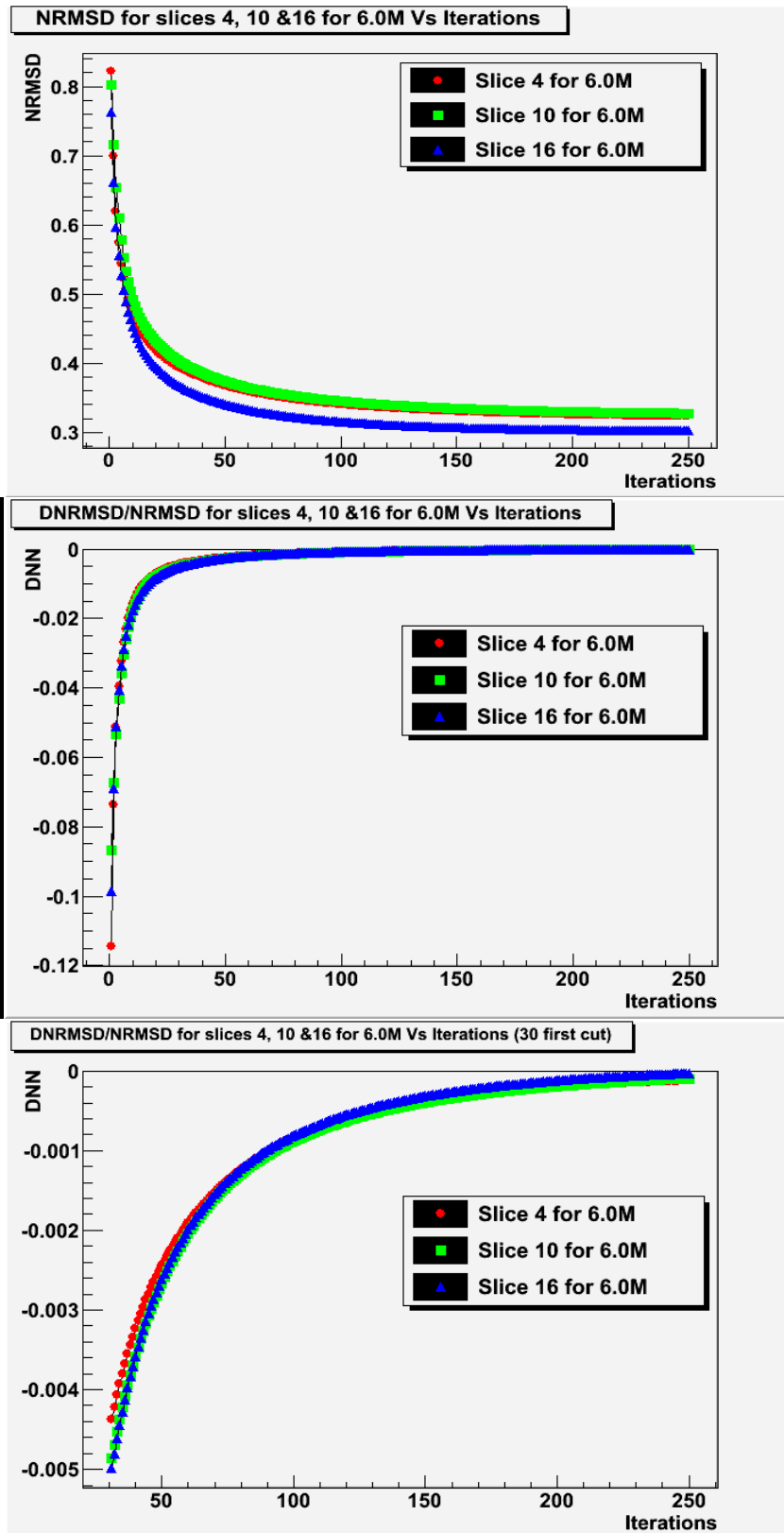
Σχήμα 4.13: NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (πάνω), DNRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (μέση), DNRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων χωρίς τις 40 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 και 0.25M



Σχήμα 4.14: NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (πάνω), DNRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (μέση), DNRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων χωρίς τις 40 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 και 6.0M



Σχήμα 4.15: NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (πάνω), DNRMSD/NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (μέση), DNRMSD/NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων χωρίς τις 40 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 και 0.25M



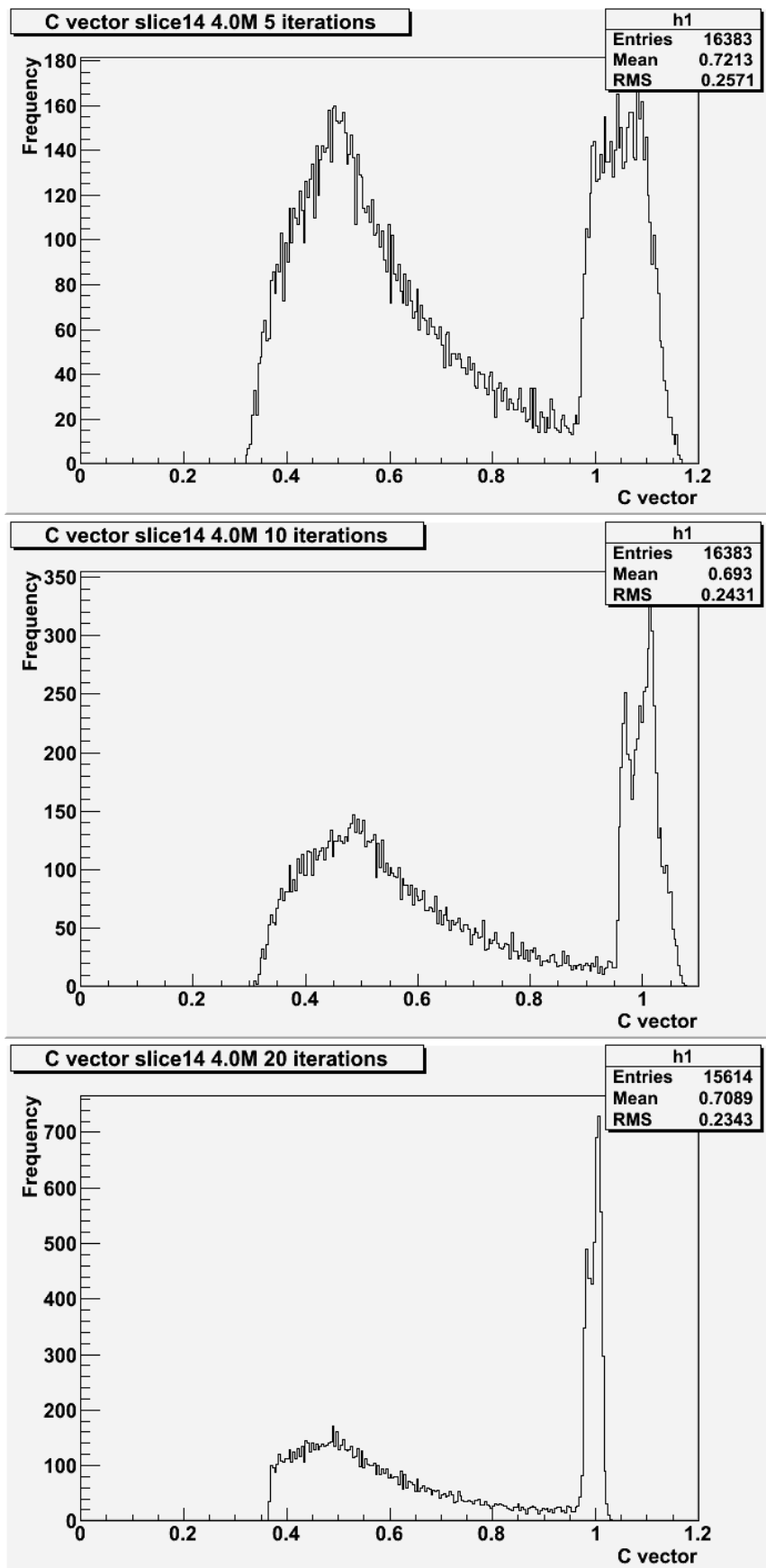
Σχήμα 4.16: NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (πάνω), DNRMSD/NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων (μέση), DNRMSD/NRMSD σαν συνάρτηση των επαναλήψεων χωρίς τις 40 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 και 6.0M.

4.6.2 Σύγκλιση του ανύσματος C

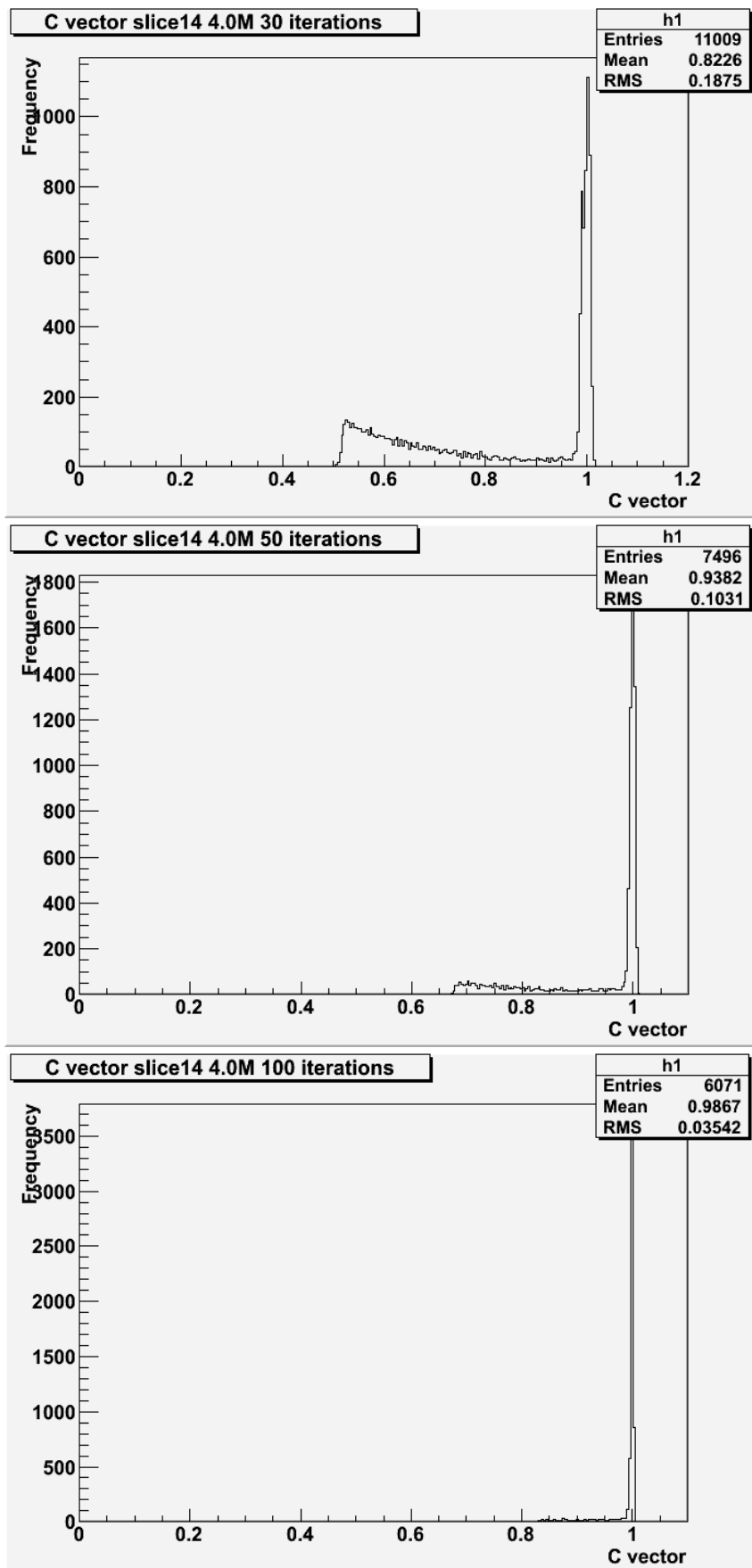
Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι για κάθε pixel υπάρχει ένας συντελεστής C που αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη και μας δίνει τον αριθμό εκπεμπόμενων ακτινών γ σύμφωνα με τη σχέση $x^{(k+1)}(i) = x^{(k)}(i) \cdot C^{(k)}(i)$ όπου k είναι η επανάληψη και i το pixel. Δηλαδή έχουμε ένα άνυσμα $\mathbf{C}=\mathbf{C}(i)=[C(1),C(2),\dots,C(I)]$ του οποίου οι συνιστώσες τείνουν στη μονάδα. Σε ένα πεδίο όρασης $128 \times 128 = 16384$ θα έχουμε ισόποσους συντελεστές αναβάθμισης. Η δε συμπεριφορά των συντελεστών αυτών έχει βρεθεί ανεξάρτητη από το μέγεθος του οπτικού πεδίου αλλά και το είδος του μοιώματος που μελετάμε [16],[17].

Έχει παρατηρηθεί ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων οι συντελεστές αναβάθμισης C συγκεντρώνονται στην μονάδα. Η τιμή αυτή για κάθε εικονοστοιχείο είναι θετική και μικρότερη της μονάδας. Η κατανομή τους καθώς αυξάνουν οι επαναλήψεις τείνει στη μονάδα καθώς αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων. Η μελέτη που έγινε στην παρούσα εργασία περιλαμβάνει και την καταγραφή του ανύσματος των συντελεστών αναβάθμισης σε διάφορες επαναλήψεις. Συγκεκριμένα καταγράφηκε το άνυσμα C για 5, 10, 20, 30, 50, 100, 150, 200 & 250 επαναλήψεις. Τα ιστογράμματα που ακολουθούν παρουσιάζουν τη σύγκλιση του ανύσματος αυτού.

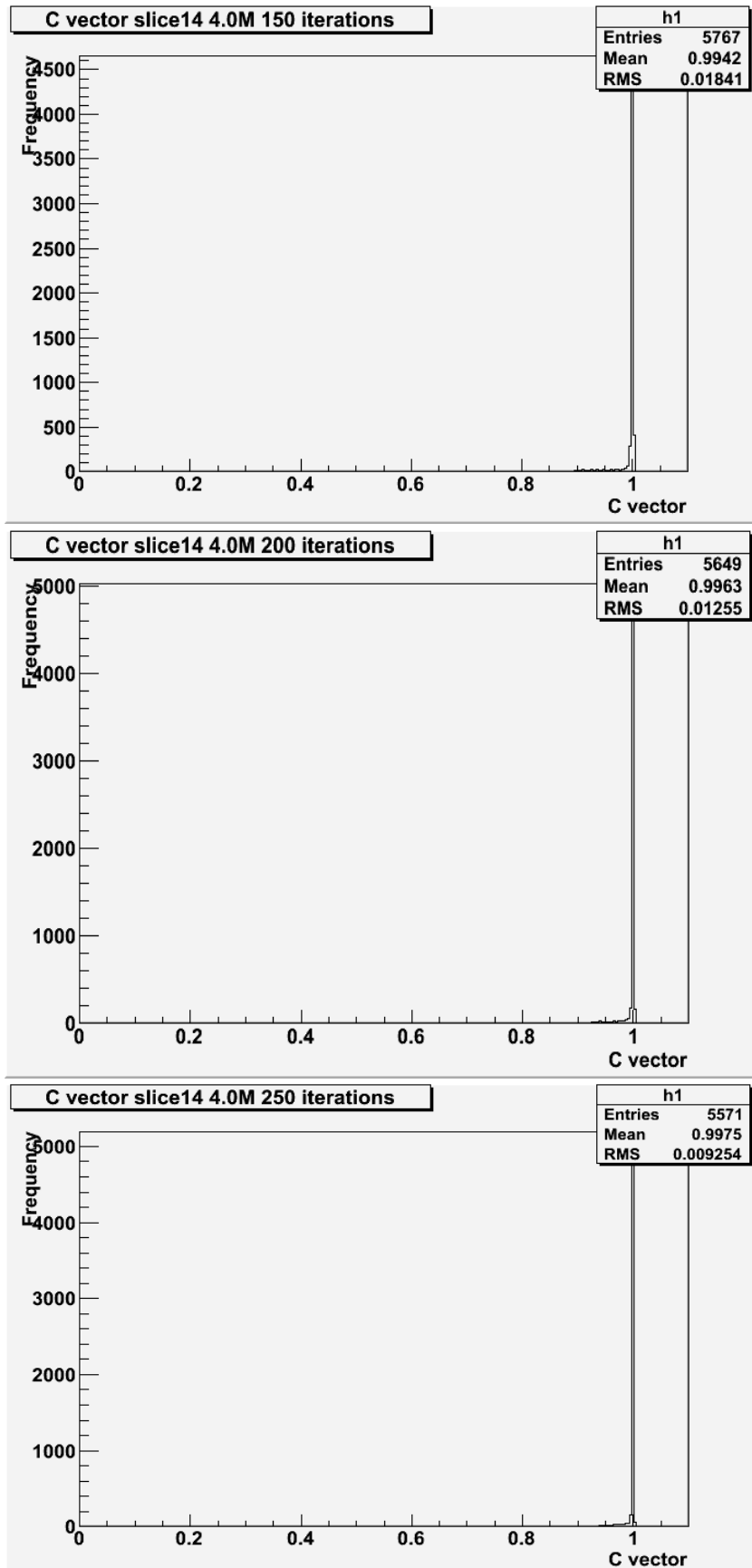
Είναι φανερό, από τα σχήματα 4.17 έως 4.19 ότι πάνω από τις 50 επαναλήψεις έχουμε αρκετά μεγάλη συγκέντρωση τιμών κοντά στη μονάδα. Από κει και πάνω λίγες είναι οι τιμές που δεν είναι ακριβώς μονάδα. Παρά ταύτα υπάρχει πάντα κάποια τιμή μικρότερη της μονάδας .



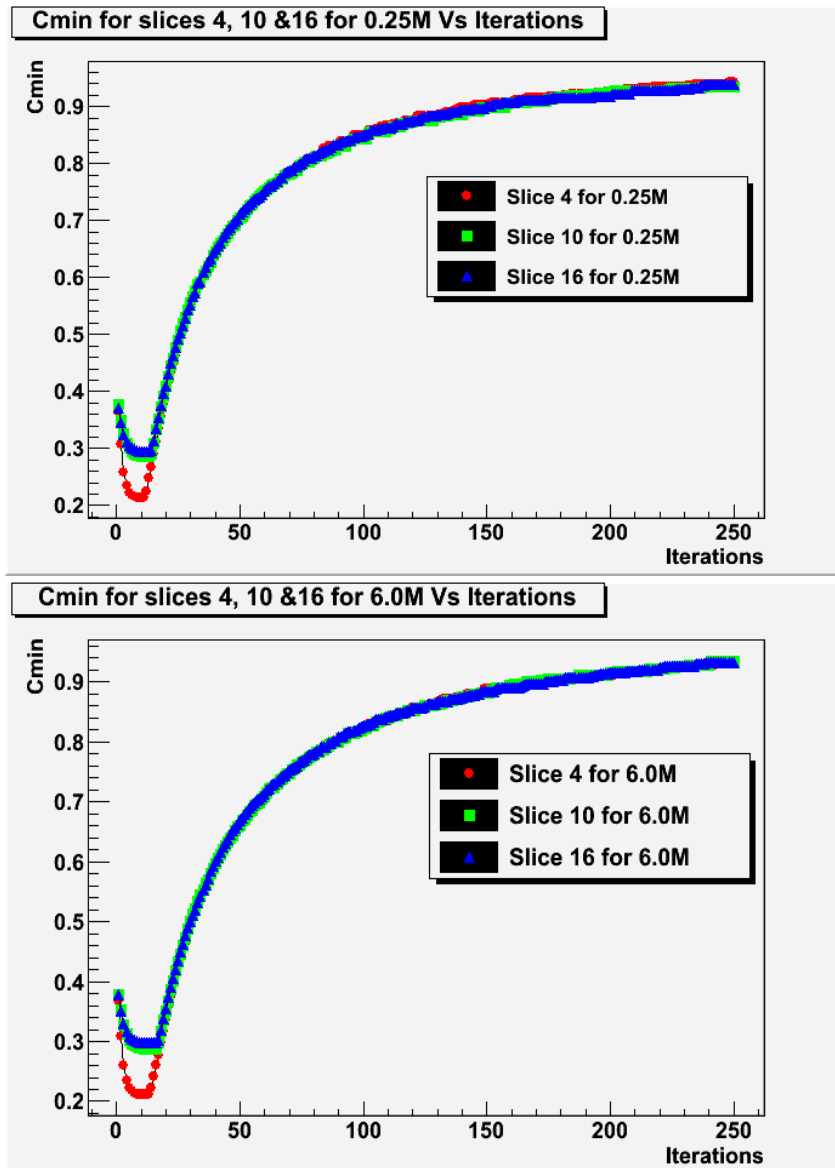
Σχήμα 4.17: Κατανομή του ανύσματος C για 5, 10 και 20 επαναλήψεις στην 14^η τομή.



Σχήμα 4.18: Κατανομή ανύσματος C για 30, 50 και 100 επαναλήψεις στην 14^η τομή.



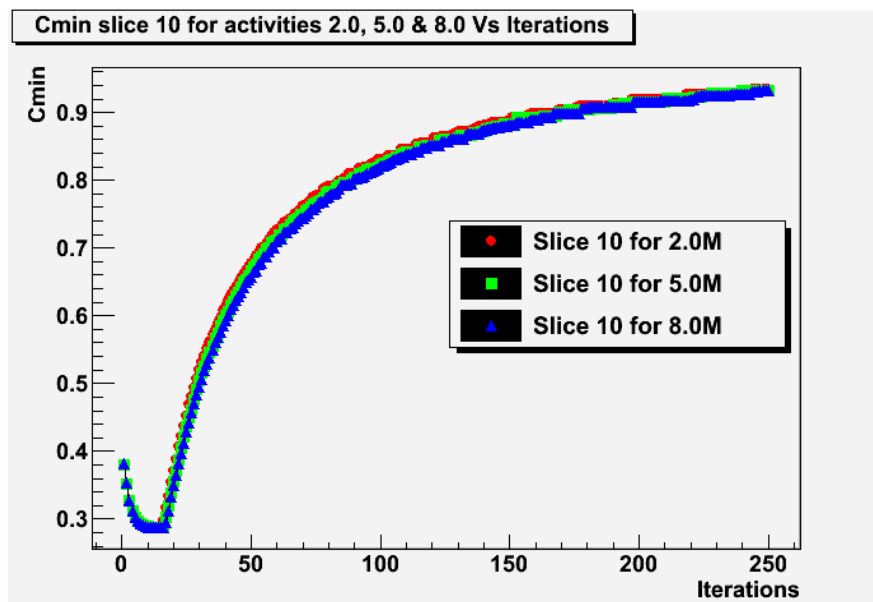
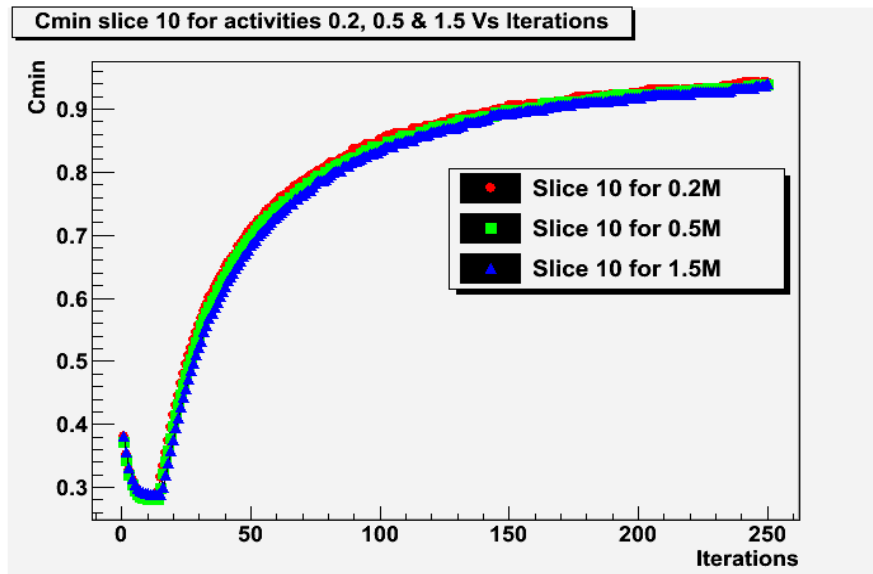
Σχήμα 4.19: Κατανομή ανύσματος C για 150, 200 και 250 επαναλήψεις στην 14^η τομή.



Σχήμα 4.20: Cmin σαν συνάρτηση των επαναλήψεων και τις τομές 4, 10 και 16 για τιμές δραστηριότητας 0.25M (πάνω) και 6.0M (κάτω).

4.6.3 Cmin

Σε κάθε επανάληψη το άνυσμα C έχει 16384 στοιχεία τα οποία είπαμε ότι η κατανομή τους τείνει στη μονάδα. Ορίζουμε ως C_{min} το ελάχιστο στοιχείο του ανύσματος C για μία συγκεκριμένη επανάληψη. Δηλαδή $C^{(k)}(i)_{min} = \{C(i) \text{ minimum συνιστώσα στην } k\text{-οστή επανάληψη}\}$. Παριστάνοντας το C_{min} σαν συνάρτηση των επαναλήψεων θα βλέπουμε ότι από κάποιες αρχικές τιμές θετικές και κοντά στο μηδέν θα τείνει στη μονάδα, σύμφωνα και με τα προηγούμενα που είδαμε. Αυτό φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα 4.20 και 4.21 όπου απεικονίζεται το C_{min} για μια τομή και τρεις ενεργότητες αλλά και για τρεις τομές και μία τιμή ενεργότητας.

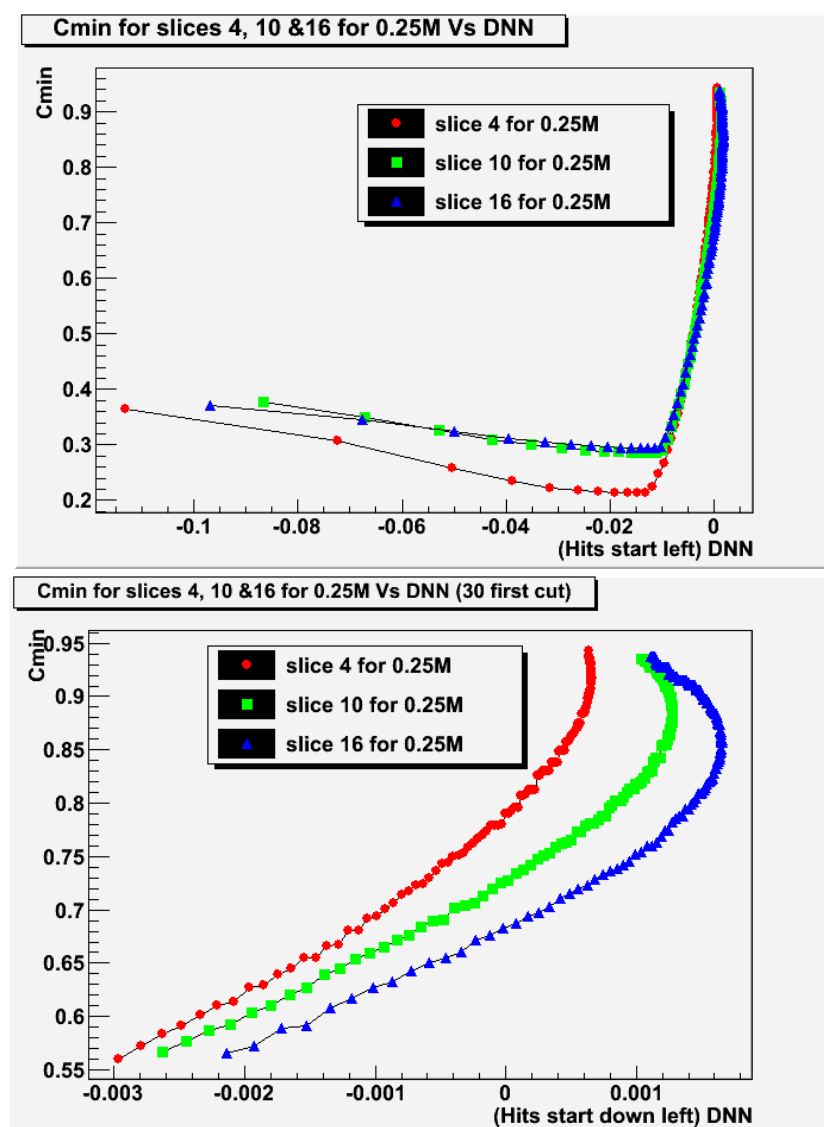


Σχήμα 4.21: Cmin σαν συνάρτηση των επαναλήψεων για την 10^1 τομή ομοιώματος Hoffman χαμηλές ενεργότητες (0.2M, 0.5M και 1.5M) (πάνω) και για υψηλές τιμές δραστηριότητας (2.0M, 5.0M και 8.0M) (κάτω).

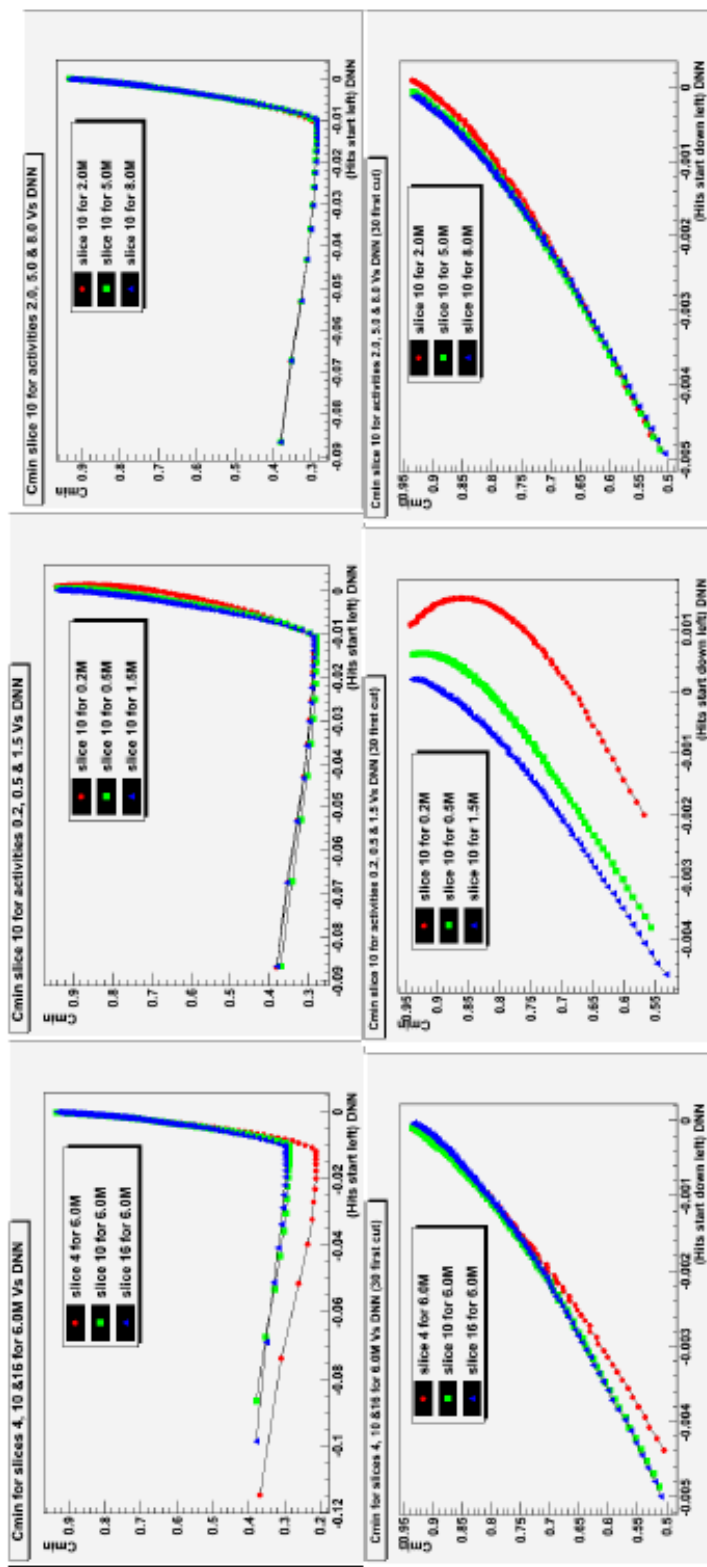
Βλέπουμε στα παραπάνω γραφήματα, λοιπόν, ότι το Cmin διαφέρει λίγο στην αρχή μόνο από τομή σε τομή ενώ στη συνέχεια είναι ταυτόσημη η συμπεριφορά του. Επίσης για μια συγκεκριμένη τομή η συμπεριφορά του Cmin δεν αλλάζει καθόλου καθώς αυξάνει η ενεργότητα. Συνεπώς το Cmin έχει την ίδια συμπεριφορά για κάθε τομή και ενεργότητα κάνοντας μια μικρή καμπύλη αρχικά και εν συνεχεία έχει ανοδική πορεία σύγκλισης στη μονάδα.

4.6.4 DNRMSD/NRMSD Vs Cmin

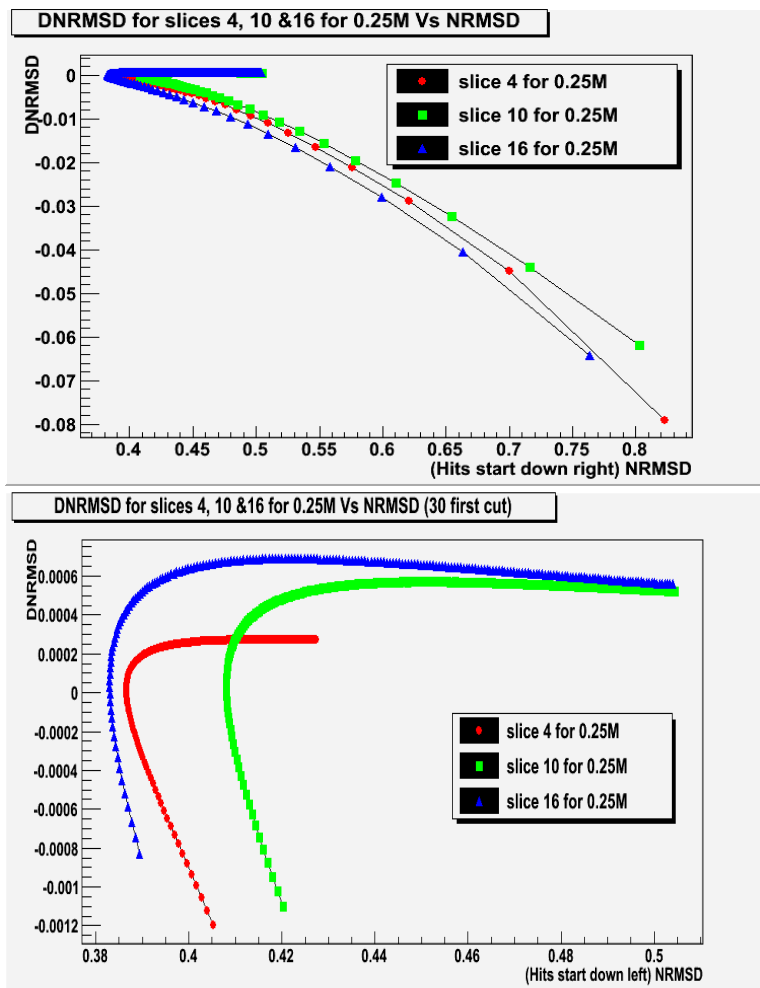
Ένα επιπλέον αντικείμενο μελέτης είναι ο συσχετισμός του νέου μεγέθους DNRMSD/NRMSD με το C_{min} . Πρακτικά αντιστοιχίζονται οι τιμές του κάθε μεγέθους για την αντίστοιχη επανάληψη οπότε δεν είναι υποχρωτικό η εκάστοτε καμπύλη να ξεκινά υποχρωτικά από αριστερά προς τα δεξιά. Στην προκειμένη περίπτωση, βέβαια, η καμπύλη ξεκινά από κάτω αριστερά. Τα ακόλουθα διαγράμματα απεικονίζουν την μεταξύ τους συσχέτιση για ίδια ενεργότητα και διάφορες τομές αλλά και μία τομή σε διάφορες ενεργότητες, ενώ παρέχονται και οι αντίστοιχες εστιάσεις τους.



Σχήμα 4.22: C_{min} σε σχέση με το DNRMSD/NRMSD (πάνω) και C_{min} σε σχέση με το DNRMSD/NRMSD χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 για 0.25M.

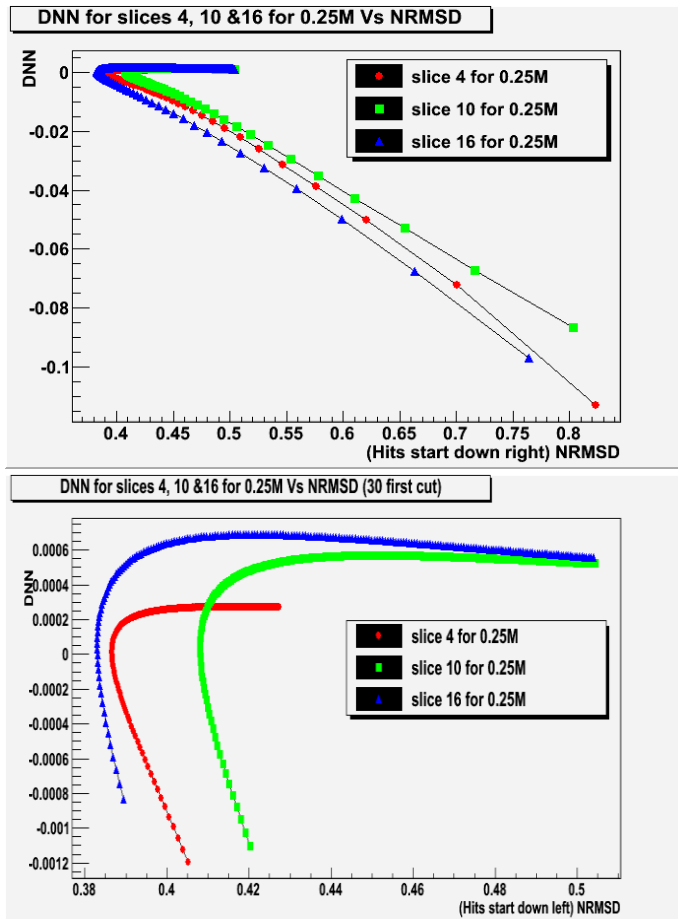


Σχήμα 4.23 : C_{min} σε σχέση με το DNRMSD/NRMSD (πάνω) και C_{min} σε σχέση με το DNRMSD/NRMSD χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω). 1^η στήλη τομές 4, 10 και 16 και 6.0M δραστηριότητα, 2^η στήλη 10^η τομή και τιμές δραστηριότητας 0.2M, 0.5M και 1.5M και 3^η στήλη 10^η τομή για τιμές δραστηριότητας 2.0M, 5.0M και 8.0M.



Σχήμα 4.24: DNRMSD σε σχέση με το NRMSD (πάνω) και DNRMSD σε σχέση με το NRMSD χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 για 0.25M.

Από τα προηγούμενα σχήματα 4.22 και 4.23 βλέπουμε πως από τομή σε τομή και ίδια δραστηριότητα οι καμπύλες διαφοροποιούνται στο αρχικό κομμάτι των πρώτων επαναλήψεων και εν συνεχεία είναι σχεδόν ταύτητες και μόνο στην εστίαση γίνεται ορατή η διαφοροποίησή τους. Αυτό ενθαρρύνεται για μεγάλη ενεργότητα. Στην περίπτωση απεικόνισης της καμπύλης για μία τομή και διάφορες ενεργότητες βλέπουμε μια μικρή διαφοροποίηση στις μικρές ενεργότητες κάτι που εξαλείφεται στις μεγάλες. Αυτό που είναι σημαντικό όμως και πρέπει να σημειωθεί είναι η αμφιμονοσήμαντη σχέση των δύο μεγεθών τουλάχιστον στο κομμάτι μεταξύ του $-3 \cdot 10^{-3}$ και λίγο πιο πριν μέχρι το μηδενισμό του DNRMSD/NRMSD. Αυτό σημαίνει πως αν γνωρίζω το C_{min} γνωρίζω σε ποια τιμή του DNRMSD/NRMSD αντιστοιχεί. Όμως το C_{min} μπορεί να μετρηθεί σε πραγματικά δεδομένα όπως φάνηκε από τη σχέση 3.9 αφού οι συντελεστές αναβάθμισης εξαρτώνται μόνο από τα προβολικά δεδομένα και τα ανακατασκευασμένα. Συνεπώς αν έχω πραγματικά δεδομένα και υπολογίζω το C_{min} μπορώ να βρω σε ποια τιμή αντιστοιχεί του DNRMSD/NRMSD έτσι ώστε όταν ο αλγόριθμος ανακατασκευής εικόνας συναντήσει την τιμή του C_{min}

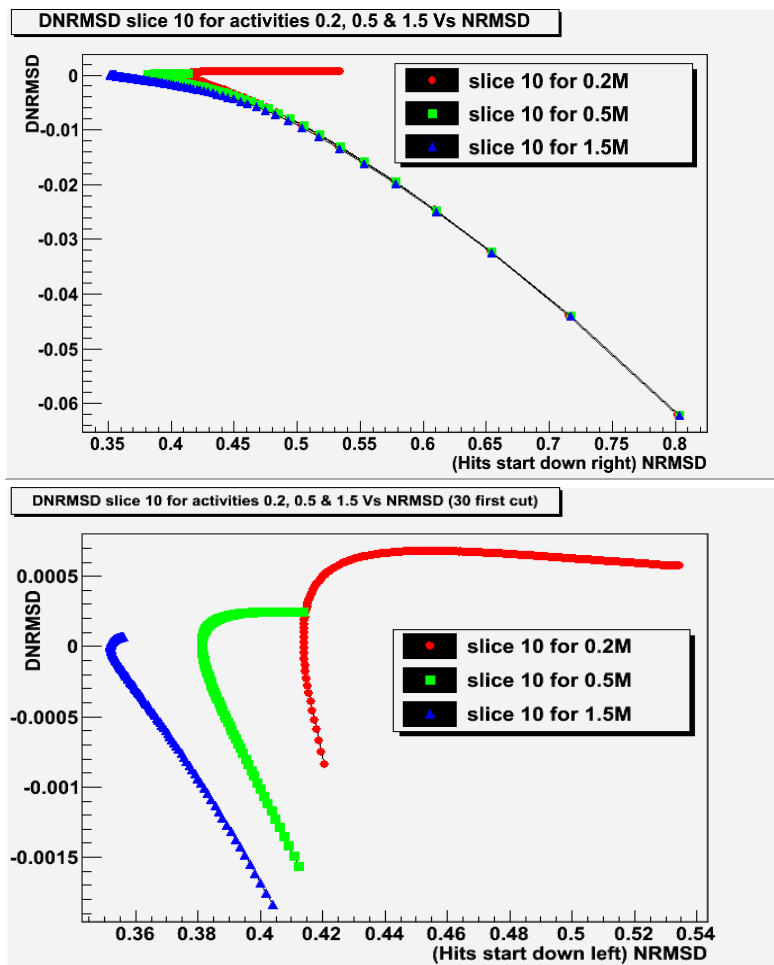


Σχήμα 4.25: DNRMSD/NRMSD σε σχέση με το NRMSD (πάνω) και DNRMSD/NRMSD σε σχέση με το NRMSD χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για τις τομές 4,10 και 16 για 0.25M.

που αντιστοιχεί στο κριτήριο $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}$ ή $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}$ να σταματάει.

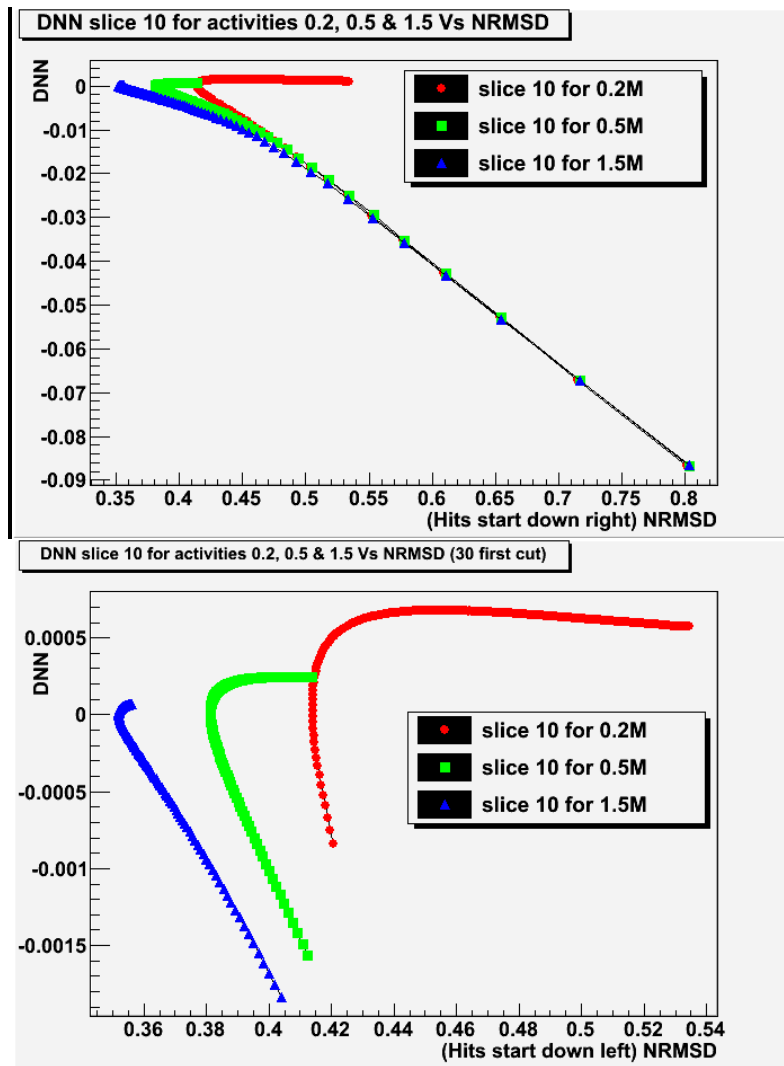
4.6.5 DNRMSD/NRMSD και DNRMSD Vs NRMSD

Στο σημείο αυτό μελετάται η σχέση των δύο νέων μεγεθών, DNRMSD/NRMSD και DNRMSD, σε σχέση με το μητρικό τους NRMSD. Σε αυτή την περίπτωση η εκάστοτε καμπύλη αρχίζει από κάτω δεξιά. Στην καμπύλη αυτή του DNRMSD με το NRMSD βλέπουμε ότι καθώς μειώνεται το δεύτερο αυξάνεται το πρώτο μέχρι μιας κορυφής όπως φαίνεται στο σχήμα 4.24 και 4.26. Μετά την κορυφή της καμπύλης, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο του NRMSD, ακολουθεί αύξηση του μεγέθους αυτού ενώ το DNRMSD κάνει ένα μέγιστο και μετά πέφτει με αργό ρυθμό όπως φαίνεται στην εστίαση του ίδιου σχήματος. Αυτό συμβαίνει διότι μετά την ελαχιστοποίηση του NRMSD αυτό αυξάνει με φθίνοντα ρυθμό. Η μορφή της καμπύλης διατηρείται για όλες τις τομές και τιμές δραστηριότητας.



Σχήμα 4.26: DNRMSD σε σχέση με το NRMSD (πάνω) και DNRMSD σε σχέση με το NRMSD χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για την 10^{11} τομή για 0.2M, 0.5M και 1.5M.

Παρατηρώντας τα προηγούμενα τα σχήματα 4.25 και 4.27 βλέπουμε αρχικά ότι για την ίδια τομή και ενεργότητα τα οι καμπύλες DNRMSD/NRMSD και DNRMSD σε σχέση με το NRMSD είναι ίδιες. Αυτό είναι λογικό διότι το DNRMSD/NRMSD είναι κανονικοποιημένη εκδοχή του DNRMSD οπότε θα έχουν την ίδια συμπεριφορά, όπως έχει ξαναειπωθεί. Το μόνο που αλλάζει θα είναι το εύρος τιμών που για το DNRMSD/NRMSD είναι από πιο συγκεκριμένες ενώ στο DNRMSD εξαρτάται από την κλίση της καμπύλης του NRMSD στο εκάστοτε σημείο. Από κει και πέρα παρατηρούμε μία κορυφή αριστερά της καμπύλης που αντιστοιχεί στην περιοχή που μηδενίζεται το DNRMSD/NRMSD ή το DNRMSD αντίστοιχα και έχουμε και την ελαχιστοποίηση του NRMSD. Αυτή η κορυφή γίνεται όλο και λιγότερο εμφανής καθώς αυξάνει η ενεργότητα για το πλήθος των 250 επαναλήψεων, που σημαίνει ότι συναντάται σε μεταγενέστερη επανάληψη. Από τομή σε τομή αλλάζει ελαφρώς η καμπύλη απόδειξη του γεγονότος ότι ποικίλει το σημείο ελαχιστοποίησης του NRMSD από τομή σε τομή για μία τιμή ενεργότητας.

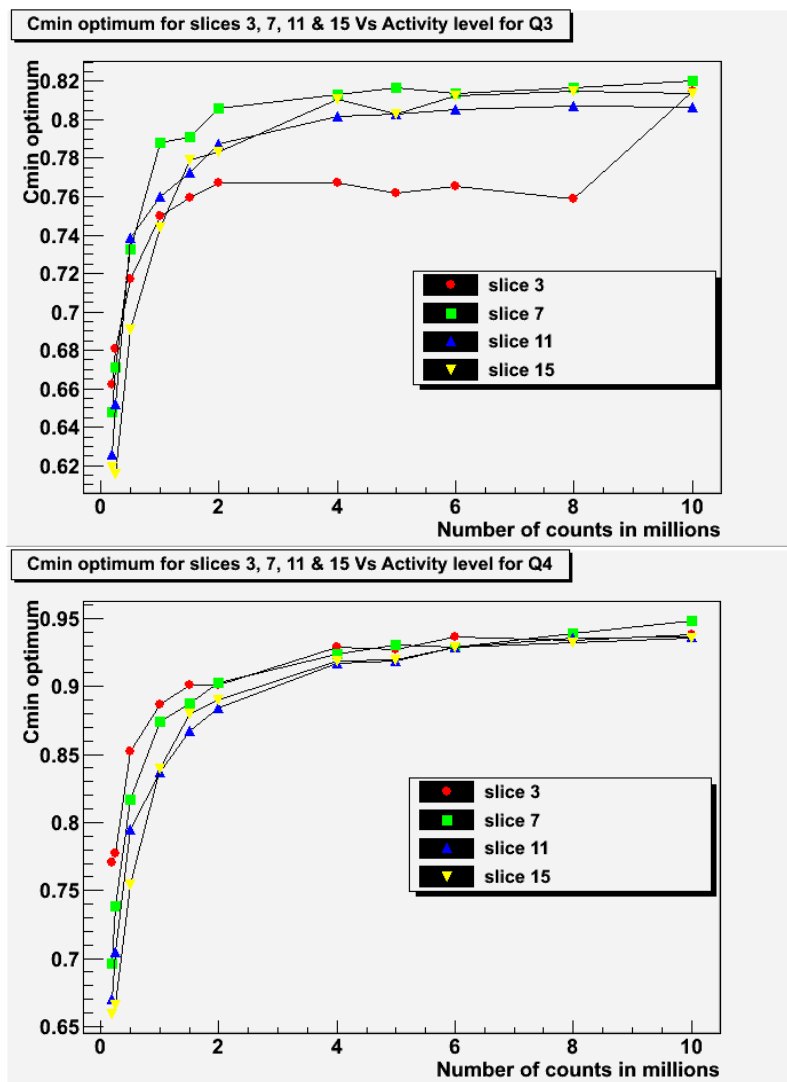


Σχήμα 4.27: DNRMSD/NRMSD σε σχέση με το NRMSD (πάνω) και DNRMSD/NRMSD σε σχέση με το NRMSD χωρίς τις 30 πρώτες επαναλήψεις (κάτω) για την 10^1 τομή για 0.2M, 0.5M και 1.5M.

Πέρα από τη μορφή των καμπυλών αυτών τελικά χρηστική αξία εμφανίζουν τα γραφήματα DNN Vs NRMSD διότι μπορούν να μας δώσουν την τιμή του NRMSD όταν το DNN λαμβάνει την τιμή 10^{-3} ή 10^{-4} οπότε και να συγκρίνουμε την τιμή αυτή με την ελάχιστη του NRMSD. Από τα σχήματα η διαφορά των δύο τιμών φαίνεται να είναι λιγότερο από 0,1 στο Q3 και λιγότερο από 0,05 στο Q4 περίπου.

4.6.6 Cmin optimum

Το βέλτιστο (optimum) Cmin ορίζεται ως το Cmin που αντιστοιχεί στην επανάληψη στην οποία σταματάει ο αλγόριθμος ανακατασκευής εικόνας. Το Cmin optimum απεικονίζεται σαν συνάρτηση των τιμών ενεργότητας στα επόμενα γραφήματα για τα κριτήρια $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}$ και $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}$ όπου, θυμίζω, Q3 αναφέρεται το πρώτο κριτήριο και Q4 το δεύτερο. Ο λόγος που μελετάμε αυτό το μέγεθος είναι διότι γνωρίζοντας την βέλτιστη τιμή του Cmin για κάθε τιμή

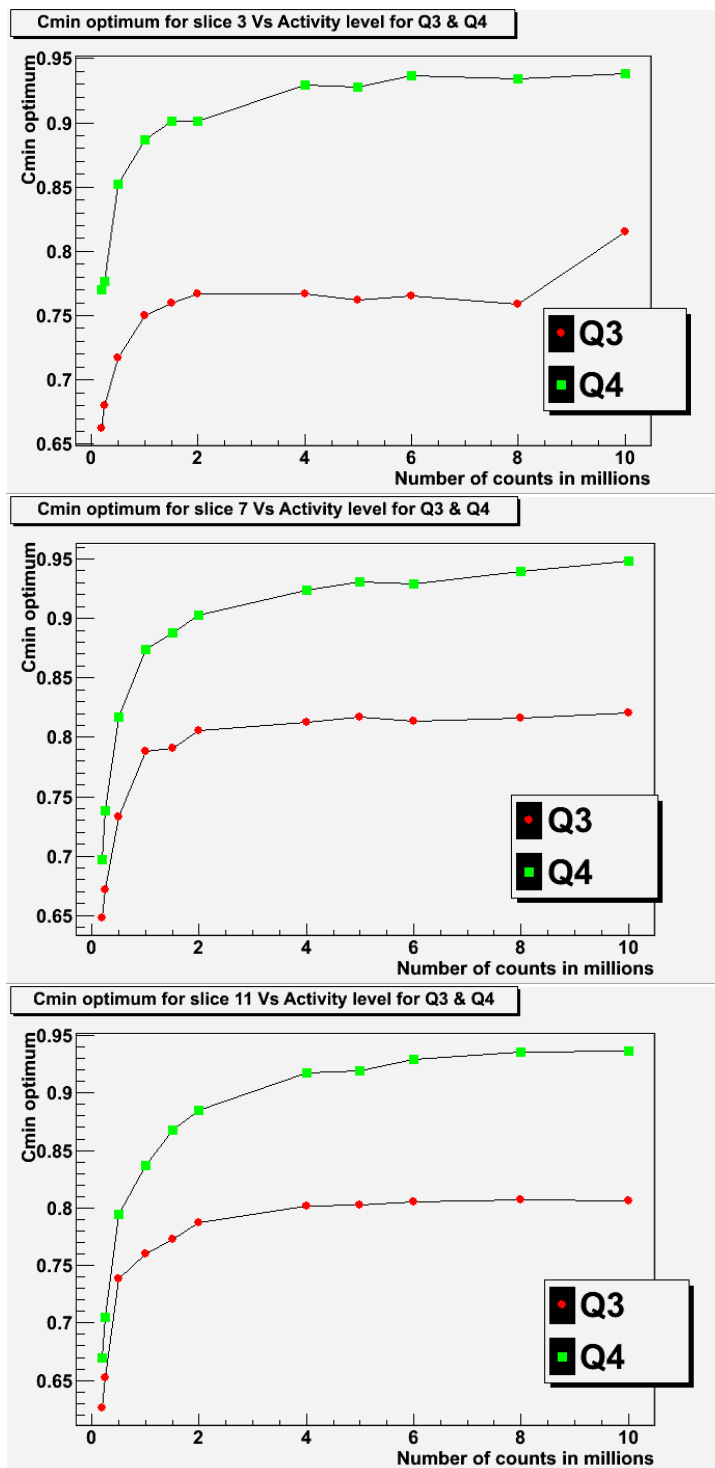


Σχήμα 4.28: Cmin optimum σαν συνάρτηση των τιμών ενεργότητας για το κριτήριο $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}$ (πάνω) και $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}$ (κάτω).

δραστηριότητας μπορούμε να ξέρουμε που να σταματήσει ο αλγόριθμος ανακατασκευής εικόνας όταν παίρνει πραγματικά δεδομένα. Αυτό το γεγονός είναι και η πραγματική αξία της διαδικασίας που έχει μέχρι τώρα αναπτυχθεί.

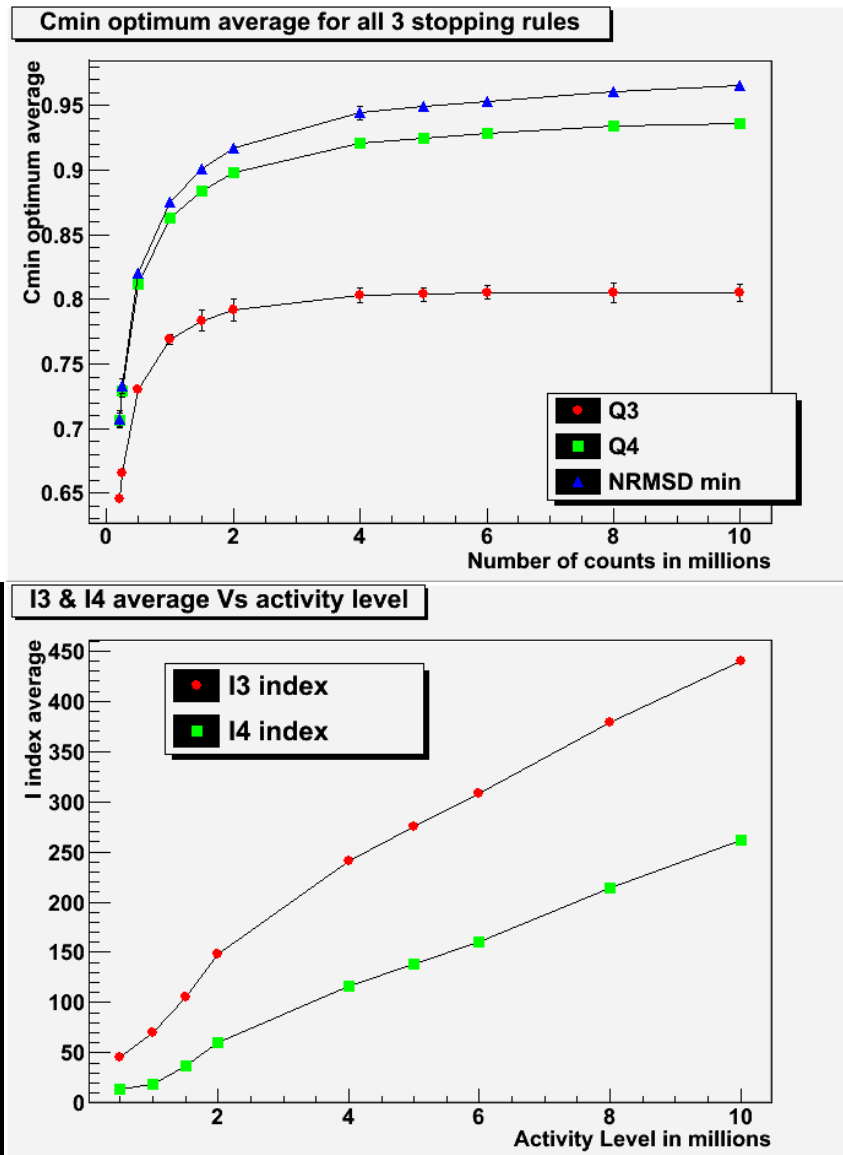
Παρατηρώντας τα παραπάνω γραφήματα βλέπουμε ότι το Cmin optimum έχει μια αυξητική τάση που σταθεροποιείται γύρω στο 0.8 για μεγάλες τιμές ενεργότητας σε όλες τις τομές για το κριτήριο Q3 ενώ για το κριτήριο Q4 η σταθεροποίηση γίνεται πάνω από 0.9 . Επιπλέον το δεύτερο κριτήριο δείχνει να έχει ελαφρώς μικρότερη στατιστική διακύμανση από το πρώτο.

Στην σύγκριση του Cmin optimum για τα δύο κριτήρια ταυτόχρονα, στο σχήμα 4.29 , βλέπουμε ότι για κάθε τομή στο Q4 είναι μεγαλύτερο από ότι στο Q3 κατά 0.1 με



Σχήμα 4.29: Cmin optimum σαν συνάρτηση των τιμών ενεργότητας και για τα δύο κριτήρια πάυσης για την 3^η (πάνω), 7^η (μέση) και 11^η τομή (κάτω).

0.15. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το πρώτο κριτήριο θα σταματάει πιο γρήγορα τον αλγόριθμο ανακατασκευής εικόνας και σε πραγματικά δεδομένα.



Σχήμα 4.30: Cmin optimum μέσο και για τα 3 κριτήρια(πάνω) και μέση τιμή των I3 και I4 δεικτών (κάτω) σαν συνάρτηση της τιμής δραστηριότητας.

4.6.7 Σύνοψη

Έχοντας δει λοιπόν τα γραφήματα DNN σε σχέση με το Cmin και Cmin optimum σε σχέση με την τιμή της δραστηριότητας μπορούμε να πούμε τα εξής βήματα που πρέπει να κάνει ο αλγόριθμος προκειμένου να κάνει ανακατασκευή εικόνας με πραγματικά δεδομένα. Δηλαδή έχουμε : 1) Βρες με τεχνητά δεδομένα την επανάληψη που ισχύει το κριτήριο παύσης, 2) Γράψε τη σχέση μεταξύ DNN και Cmin για την συγκεκριμένη τιμή δραστηριότητας, 3) Υπολόγισε το Cmin optimum για την συγκεκριμένη τιμή δραστηριότητας, 4) Τρέξε πραγματικά δεδομένα και υπολόγισε σε κάθε επανάληψη το Cmin και 5) Όταν το Cmin πάρει φτάσει την τιμή Cmin optimum για την συγκεκριμένη επανάληψη σταμάτα τον αλγόριθμο και ανακατασκεύασε τη εικόνα.

Ακόμη υπολογίστηκε η μέση τιμή του C_{min} optimum για τις 18 τομές του ομοιώματος Hoffman για ένα πλήθος τιμών δραστηριότητας και για τα 3 κριτήρια παύσης. Το δε σφάλμα, που λήφθηκε σαν η τυπική απόκλιση επί 3, στο σχήμα 4.30, για να καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των τομών (99,7%) το οποίο δεν είναι ορατό στις περισσότερες περιπτώσεις. Τέλος υπολογίστηκε και η μέση τιμή των I3 και I4 δεικτών για το ίδιο πλήθος τιμών δραστηριότητας και φαίνεται στο ίδιο σχήμα.

Παρατηρώντας, λοιπόν, το σχήμα 4.30 βλέπουμε πως για το κριτήριο Q3 έχουμε την μεγαλύτερη στατιστική διακύμανση συνολικά σε όλες τις τιμές δραστηριότητας. Μετά έρχεται το NRMSD_{min} και τελευταίο το Q4. Στο δε γράφημα με τις μέσες τιμές των δεικτών I3 και I4 βλέπουμε τον πρώτο να έχει μεγαλύτερες τιμές, κάτι που είναι αναμενόμενο, για τιμή δραστηριότητας ενώ και οι δύο αυξάνουν καθώς αυξάνει η τιμή δραστηριότητας. Το κέρδος χρήσης δηλαδή των νέων κριτηρίων παύσης αυξάνει καθώς αυξάνει η δραστηριότητα.

4.7 Γενικά Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία ασχολήθηκε με την εύρεση και αξιολόγηση νέων κριτηρίων παύσης του MLEM αλγόριθμου ανακατασκευής εικόνας έχοντας ως σημείο αναφοράς την ελαχιστοποίηση του NRMSD όπως αυτό ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην εργασία αυτή ορίστηκαν δύο παράγωγα αυτού μεγέθους, το DNRMSD και το DNRMSD/NRMSD. Το πρώτο είναι η παράγωγος του NRMSD και το δεύτερο η μια «κανονικοποιημένη» μορφή του πρώτου ή αλλιώς η σχετική μεταβολή. Το δεύτερο κρίθηκε ως πλεονεκτητικότερο εξαιτίας του συγκεκριμένου εύρους τιμών που διέθεται. Η ιδέα που χρησιμοποιήθηκε ήταν να σταματάει ο αλγόριθμος σε ένα σημείο ποιο πριν από το μηδενισμό της παραγωγού. Έτσι χρησιμοποιήθηκαν δύο τιμές κατωφλίου δημιουργώντας ισόποσα νέα κριτήρια παύσης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε η απόλυτη τιμή του DNRMSD/NRMSD να είναι μικρότερη από 10^{-3} ή 10^{-4} . Δηλαδή $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-3}$ και $\left| \frac{DNRMSD}{NRMSD} \right| \leq 10^{-4}$. Εν συνεχεία είδαμε το πλεονέκτημα σε κέρδος επαναλήψεων του αλγορίθμου σε σχέση με το ισχύον κριτήριο παύσης. Εκεί φάνηκε πως για μικρές τιμές ενεργότητας το δεύτερο δεν μας έδινε μεγάλη διαφορά σε επαναλήψεις ενώ οι εικόνες παράγονται είναι όλες εξίσου καλές. Όσο μεγάλωνε η τιμή της ενεργότητας τόσο ανέβαινε και το κέρδος των επαναλήψεων και για τα δύο κριτήρια με το πρώτο σαφώς να υπερέχει λόγω μεγαλύτερου κατωφλίου. Οι εικόνες που παράγονται σε αυτές τις περιπτώσεις είναι το ίδιο καλές με αυτές του αρχικού κριτηρίου. Φάνηκε πως και για τα δύο κριτήρια το C_{min} optimum συμπεριφέρεται όπως και για την ελαχιστοποίηση του NRMSD ενώ φάνηκε ότι το C_{min} δεν αλλάζει συμπεριφορά από τομή σε τομή και από ενεργότητα σε ενεργότητα. Τέλος είδαμε ότι το κέρδος σε επαναλήψεις του αλγορίθμου είναι μεγαλύτερο για το πρώτο κριτήριο το οποίο αυξάνει καθώς αυξάνει η δραστηριότητα. Συνεπώς είναι και το προτιμότερο αφού ανακατασκευάζει ποιοτικές εικόνες για κάθε τιμή δραστηριότητας και παράλληλα παρέχει μεγαλύτερο κέρδος σε επαναλήψεις άρα και χρόνο.

Αναφορές

- [1] Γεώργιος Σ. Τζανάκος: Πανεπιστημιακές σημειώσεις Βιοηλεκτρονικής 1992-93
- [2] Timothy G. Turkington : Clinical Oncologic Positron Emission Tomography, *Seminars in Roentgenology* 37(2) 102-109 (April 2002)
- [3] Pat Zanzonico: Positron Emission Tomography : A review of basic principles, scanner design and performance, and current systems, *Seminars in Nuclear Medicine* 34(2) 87-111 (April 2004)
- [4] Timothy G. Turkington: Introduction to PET Instrumentation, *Journal of Nuclear Medicine* 29(1) 4-11 (March 2002)
- [5] G. Tzanakos, M. Nikolaou, D. Drakoulakos, D. Karamitros, G. Kontaxakis, E. Logaras, G. Panayotakis, S. Pavlopoulos, M. Skiadas, G. Spyrou, T. Thireou and D. Vamvakas: Design considerations and construction of a small animal PET prototype, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A* , 569(2) 235-239 (Dec. 2006)
- [6] C. Woody, A. Kriplani, P. O'Connor, J.-F. Pratte, V. Radeka, S. Rescia, D. Schlyer, S. Shokouhi, S. Stoll, P. Vaska, A. Villaneuva, N. Volkow, B. Yu: RatCAP: a small, head-mounted PET tomography for imaging the brain of an awake RAT, 2004, *Nuclear Instruments & Methods in Physics Research A* 527 166-170 (2004)
- [7] R.E. Coleman, MD, T.C. Hawk, BS, S.M. Hambley, CNMT, C.M. Laymon, PhD, T.G. Turkington, PhD : Detection of recurrent brain tumor: Comparison of MR registered camera-based and dedicated PET images, *Clinical Positron Imaging* 2(1) 57-61 (1999)
- [8] David J. Madden, Timothy G. Turkington, R. Edward Coleman, James M. Provenzale, Timothy R. DeGrado, John M. Hoffman : Adult Age Differences in Regional Cerebral Blood Flow during Visual Word Identification: Evidence from $H_2^{15}O$ PET, *Neuroimage* 3(15) 127-142 (1996)
- [9] Timothy R. DeGrado, PhD, Michael W. Hanson, MD, Timothy G. Turkington, PhD, David M. DeLong, PhD, Damian A. Brezinski, MD, Jean-Paul Vallee, MD, Martin J. Sullivan, MD, R. Edward Coleman, MD : Estimation of myocardial blood flow for longitudinal studies with ^{13}N -labeled ammonia and positron emission tomography, *Journal of Nuclear Cardiology* 3(6) 494-507 (1996)
- [10] Sotiris Pavlopoulos: Design and performance evaluation of a new high resolution small animal P.E.T. scanner using Monte Carlo techniques (thesis for degree of Doctor of Philosophy) 1992
- [11] C. J. Thompson, K. Murthy, Y. Picard, I. N. Weinberg, R. Mako: Positron Emission Mammography (PEM): A promising technique for detecting breast cancer, *IEEE Transactions on Nuclear Science* 42(4) (August 1995)
- [12] H. Delis, G. Spyrou, G. Tzanakos, G. Panayiotakis : The influence of mammographic X-ray spectra on absorbed energy distribution in breast: Monte Carlo simulation studies, *Radiation Measurements*, 39(2) 149-155 (February 2005)
- [13] Raymond R. Raylman, Stan Majewski, Susan Lemieux, S. Sendhil Velan, Brain Kross, Vladimir Popov, Mark F. Smith, Andrew G.

- Weinberg, Randy Wojcik: Initial tests of a prototype MRI-compatible PET imager, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A 569 306-309 (2006)
- [14] M. D. Seemans, S. Nekolla, S. Ziegler, F. Bengel, M. Schwaiger: PET/CT: Fundamental Principles, Eur. J. Res. 9 241-246 (2004)
- [15] T.Z. Wong, S.D. Brown, T.G. Turkington, M.T. Munley, L.B. Marks, W.H. Sampson, R.E. Coleman : Hybrid CT/Gamma Camera Pet for Tumor Imaging: Comparison with dedicated PET scanner and potential treatment planning applications, I.J. Radiation Oncology Biology Physics 51(3) Suppl. 1 (2001)
- [16] Anastasios D. Gaitanis : Development of stopping rule methods for the MLEM and OSEM algorithms used in PET image reconstruction (thesis for degree of Doctor of Philosophy) (2010)
- [17] Anastasios Gaitanis, George Kontaxakis, George Spyrou, George Panayotakis, George Tzanakos : PET image reconstruction : A stopping rule for the MLEM algorithm based on properties of the updating coefficients, Computerized Medical Imaging & Graphics 34(2) 131-141 (2010)
- [18] Anastasios Gaitanis, George Kontaxakis, George Spyrou, George Panayotakis, George Tzanakos : Studying the properties of the updating coefficients in the OSEM algorithm for iterative image reconstruction in PET , Computer Methods & Programs in Biomedicine 99 219-229 (2010)
- [19] David W. Townsend, Jonathan P.J. Carney, Jeffrey T. Yap, Nathan C. Hall : PET/CT Today and tomorrow, The Journal of Nuclear Medicine 45(1) 4S-14S (January 2004)

Abstract

The present thesis is concentrated on the study of the convergence of the MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization) iterative algorithm . Using the digital Hoffman brain phantom and Monte Carlo techniques, tomographic projections are created. These projections are used from the MLEM algorithm which reconstructs each slice of the phantom comparing it with the initial picture. It is observed that the reconstructed images that are produced are improved as long as the number of iteration increases reaching the best quality reconstructed image which is altered after that iteration. Recent researches have used the quantity NRMSD (Normalised Root Mean Square Deviation) as quality index of the reconstructed image because it compares the data of the two images, initial and reconstructed. According to this quantity new stopping rules have been developed for the algorithm, focusing on sparing time in comparison with previous methods. The present thesis presents new stopping rules using the relative derivative of NRMSD which had a threshold. The algorithm stops after that threshold. The right choice of threshold ensures the quality of the best reconstructed image The results of this study concerning the algorithm's acceleration are presented at this thesis.