



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ, ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη ευστάθειας σχετικιστικών μαγνητισμένων
πιδάκων χωρίς επιφανειακά ρεύματα

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΣΙΝΝΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Νεκτάριος Βλαχάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής τμήματος
Φυσικής, ΕΚΠΑ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη ευστάθειας σχετικιστικών μαγνητισμένων πιδάκων χωρίς επιφανειακά ρεύματα

Σίννης Χαράλαμπος
ΑΜ:201429

Επιβλέπων:
Νεκτάριος Βλαχάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής, τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:
Τσίγκανος Κανάρης, Καθηγητής, τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ
Δαγκλής Ιωάννης, Καθηγητής, τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Θεωρία	13
2.0.1	Στατικός πίδακας	13
2.0.2	Σχετικιστικοί μη στατικοί πίδακες	18
2.1	Γραμμικοποίηση εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής, συνοριακές συνθήκες, ιδιότητες περιβάλλοντος του πίδακα, αριθμητική ολοκλήρωση	20
2.1.1	Γραμμικοποίηση εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής	20
2.1.2	Αριθμητική ολοκλήρωση γραμμικοποιημένων εξισώσεων	25
2.1.3	Περιβάλλον του πίδακα	28
2.1.4	Συνοριακές συνθήκες	29
2.1.5	Σχετικιστική επέκταση	31
3	Αριθμητικές ολοκληρώσεις	33
3.0.1	Επιλογή φυσικών μεγεθών και παραμέτρων	33
3.0.2	Μεθοδολογία ολοκληρώσεων	35
3.0.3	Αποτελέσματα	38
3.0.3.1	Σχέσεις διασποράς	38
3.0.3.2	Σχολιασμός αποτελεσμάτων - Γενικά σχόλια, συμπεράσματα	54
3.0.3.3	Ονομασία ιδιοσυναρτήσεων	55
3.0.3.4	Ταχύτητα φάσης κυμάτων στο όριο των μεγάλων k	64
4	Σύνοψη-Ανοιχτά ερωτήματα	73

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

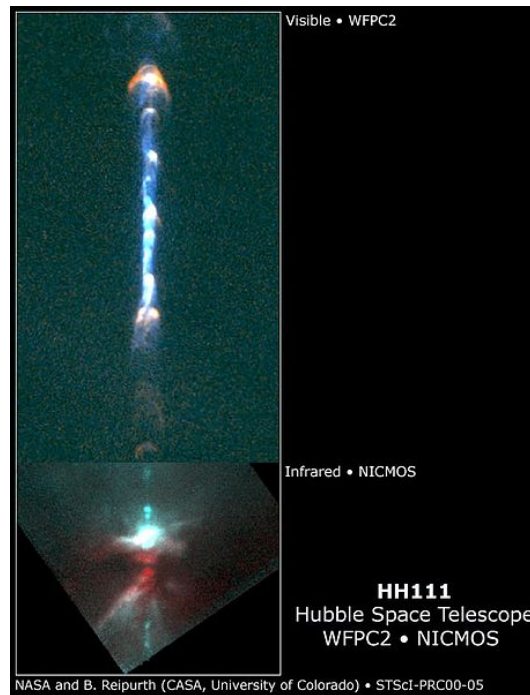
Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ευστάθεια αστροφυσικών πιδάκων οι οποίοι χαρακτηρίζονται από την έλλειψη επιφανειακών ρευμάτων στην συνολική δομή τους, στο όριο των σχετικιστικών ταχυτήτων. Στο πρώτη θεματική ενότητα της εισαγωγής θα ασχοληθούμε με βασικές έννοιες γύρω από τα αντικείμενα που ονομάζονται αστροφυσικοί πίδακες (astrophysical jets), ενώ στη δεύτερη ενότητα θα υπάρξει μία σύντομη καταγραφή των περιεχομένων των κεφαλαίων της εργασίας.

Ξεκινώντας με τον ορισμό, αστροφυσικοί πίδακες ονομάζονται οι κυλινδροειδείς εστιασμένες εκροές πλάσματος οι οποίες εκτείνονται σε μεγάλες αποστάσεις από το κεντρικό αντικείμενο το οποίο τις δημιουργεί. Οι εκροές αυτές είναι υπερηχητικές έως και σχετικιστικές με την ταχύτητα του πίδακα να προσεγγίζει αυτή του φωτός. Οι εκροές μπορούν να φέρουν και άλλα χαρακτηριστικά εκτός από την ταχύτητά τους, όπως εάν είναι ισχυρά μαγνητισμένες ή όχι, εάν είναι πυκνότερες του περιβάλλοντος ή αραιότερες και μία μακροσκελή λίστα ιδιοτήτων ακόμα.

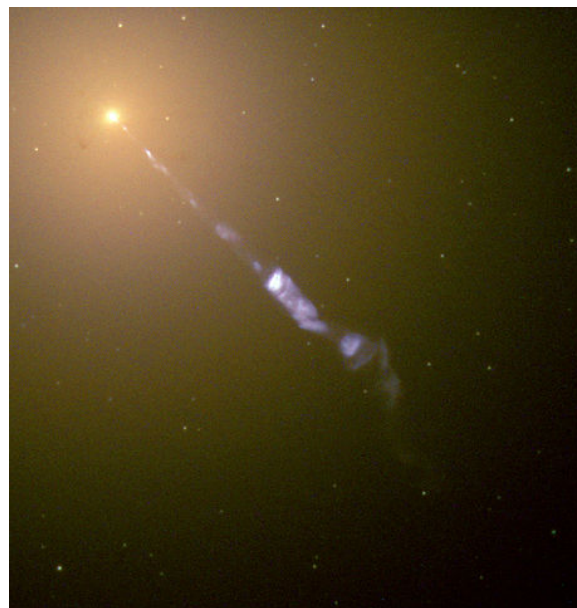
Αρχικά, θα ασχοληθούμε με την έννοια και την φύση του κεντρικού αντικειμένου το οποίο γεννά τους πίδακες. Αυτά τα αντικείμενα μπορούν να είναι:

- Πρωτοαστέρες
- Πυρήνες ενεργών γαλαξιών
- Αστέρες νετρονίων-Διπλά συστήματα ακτίνων χ
- Λευκοί νάνοι σε κατακλυσμιαίους μεταβλητούς αστέρες

Με το πρώτο και το δεύτερο αντικείμενο στην παραπάνω λίστα να αποτελούν τις ακραίες περιπτώσεις αντικειμένων που λειτουργούν ως γεννήτορες πιδάκων, και τα υπόλοιπα τα ενδιάμεσα στάδια, έχουμε μία καταγραφή των κυριοτέρων αντικειμένων που μας ενδιαφέρουν.



Σχήμα 1.1: Η δημιουργία πίδακα από το σύστημα τριών πρωταστέρων όπως κατεγράφη από το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble.

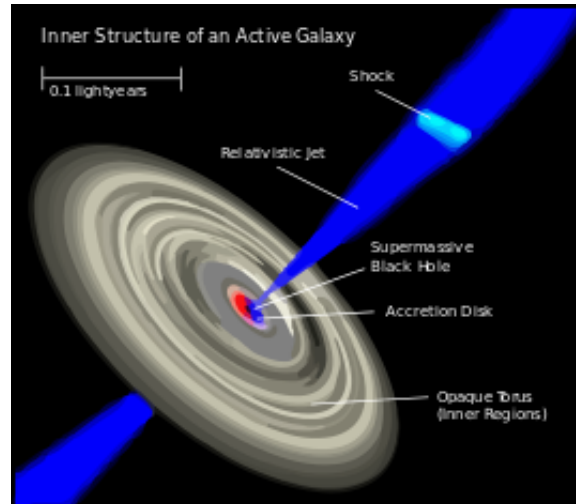


Σχήμα 1.2: Ο ενεργός γαλαξίας M87 με τον πίδακα που ξεκινά από το κέντρο του γαλαξία, ο οποίος φιλοξενεί μία υπερμεγέθη μελανή οπή, όπως κατεγράφη από το HST.

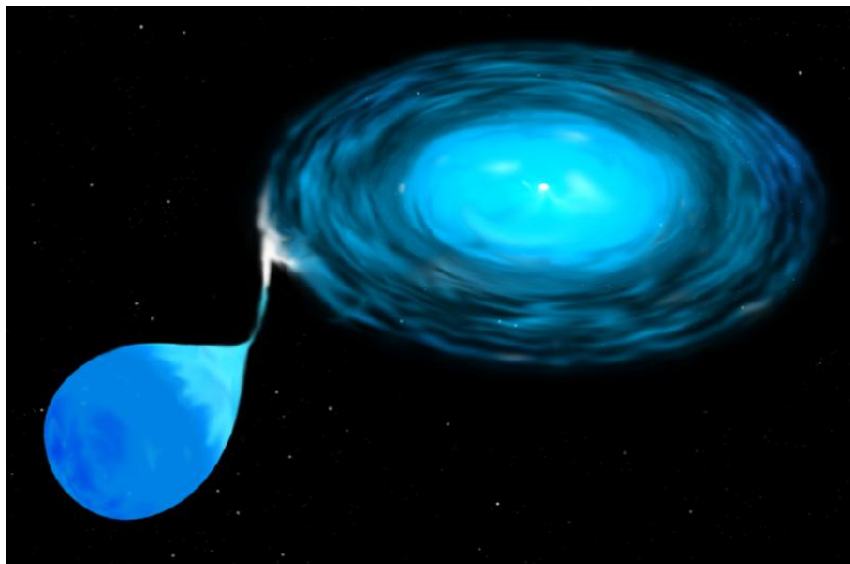
Ο μηχανισμός σε όλα τα αντικείμενα της παραπάνω λίστας έχει να κάνει με πρόσπτωση μάζας στο κεντρικό αντικείμενο, συνήθως από ένα δίσκο προσαύξησης που έχει δημιουργηθεί γύρω από αυτό. Το κεντρικό αντικείμενο δημιουργεί τον πίδακα απάγοντας στροφορμή από την ύλη του δίσκου, καθιστώντας την πρόσπτωση στο κεντρικό αντικείμενο δυνατή.

Στους πυρήνες των ενεργών γαλαξιών έχουμε την ύπαρξη μιας υπερμεγέθους μελανής οπής, η οποία τρέφεται από ένα δίσκο προσαύξησης ο οποίος τροφοδοτεί με ύλη το κεντρικό αντικείμενο όσο και τον πίδακα. Στα νεφελώματα, τα οποία είναι τα κοσμικά εργαστήρια παραγωγής νέων αστέρων, οι συμπυκνώσεις ύλης οδηγούνται στην δημιουργία ενός πρωταστέρα, ο οποίος μετά τα πρώτα στάδια της δημιουργίας του τρέφεται από έναν δίσκο προσαύξησης δημιουργώντας

παράλληλα εκροή υλικού. Στα διπλά συστήματα ακτίνων χ, ένας αστέρας νετρονίων ή μία μελανή οπή τρέφεται απο το υλικό ενός συνοδού αστέρα δημιουργώντας πίδακα. Οι κατακλυσιμίοι μεταβλητοί αστέρες αποτελούνται συνήθως από ένα λευκό νάνο και ένα αστέρα δότη ύλης, ακολουθώντας το μοτίβο που περιγράφεται παραπάνω. Οπότε, βλέπουμε πως για μία μεγάλη γκάμα αντικειμένων παρουσιάζεται η εικόνα της πρόπτωσης μάζας σε ένα κεντρικό αντικείμενο μέσω ενός δίσκου προσαύξεσης και τη δημιουργία πίδακα από το εν λόγω αντικείμενο.



Σχήμα 1.3: Η δομή του πυρήνα ενός ενεργού γαλαξία, με την απεικόνιση του δίσκου προσαύξεσης, της υπερμεγέθους μελανής οπής στον κέντρο του δίσκου, το σχετικιστικό πίδακα. Η εικόνα είναι παρόμοια και για τους πρωταστέρες αρκεί να αντικατασταθεί η μελανη οπή με το νεογέννητο άστρο, και ο σχετικιστικός πίδακας από έναν μικρότερων ταχυτήτων.



Σχήμα 1.4: Καλλιτεχνική απεικόνιση ενός μεταβλητού κατακλυσιμίου συστήματος.

Η διαφορά μεταξύ των παραπάνω αντικειμένων είναι στην έκταση των δομών που αναφέρθηκαν παραπάνω, καθώς και στην ένταση των αποτελεσμάτων. Δηλαδή, οι ισχυρότεροι και μακροσκελέστεροι πίδακες παράγονται από τους ενεργούς γαλαξίες ενώ οι ηπιότεροι από τους πρωταστέρες με την μεταξύ τους διαβάθμιση να συμπληρώνεται από τις υπόλοιπες δομές που αναφέραμε. Χαρακτηριστικά, για τους εξωγαλαξιακούς πίδακες έχουμε ως χαρακτηριστικά μεγέθη το μήκος του, που εκτείνεται από 0.01 μέχρι της τάξης των Mpc , ταχύτητες κοντά σε αυτή του φωτός και μάζα κεντρικού αντικειμένου ίση με $10^8 - 10^9 M_{\odot}$. Αντίστοιχα, οι πίδακες πρωταστέρων εκτείνονται

σε απόσταση της τάξης του pc , ταχύτητες $100 - 400 \text{ km/s}$ και κεντρικό αντικείμενο μάζας της τάξης της $1M_{\odot}$.

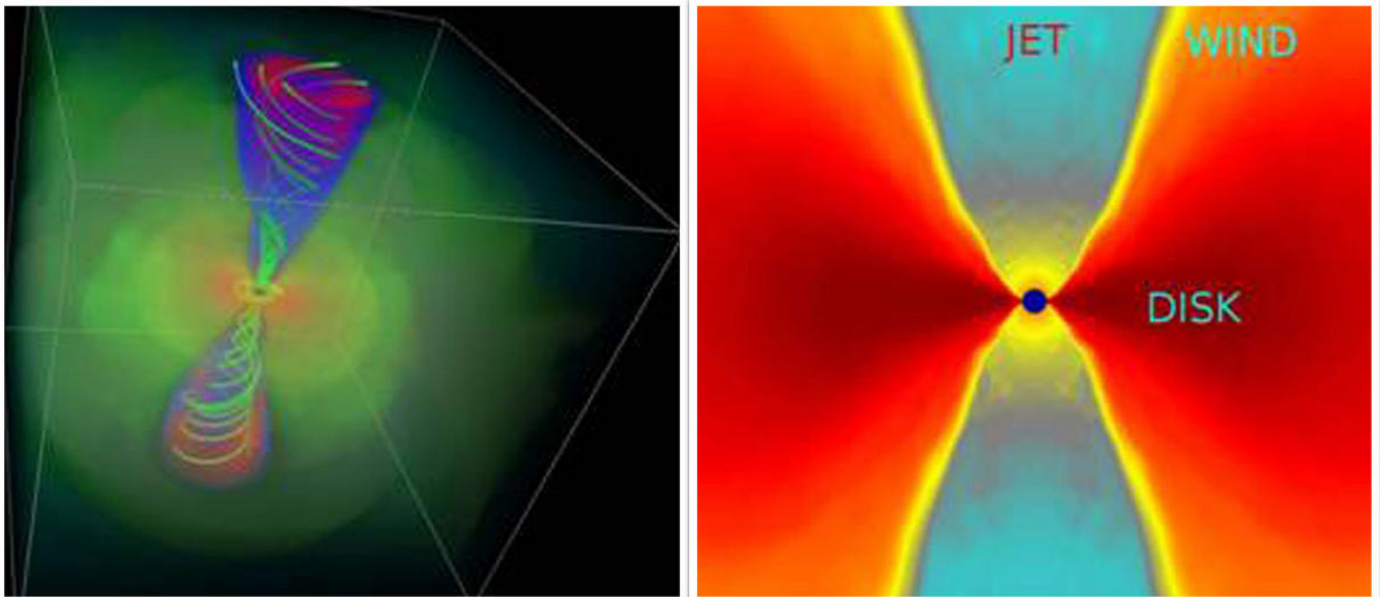
Τα μήκη κύματος παρατήρησης ενός πίδακα εκτείνονται στην πλειονότητα του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Έτσι, οι παρατηρήσεις εκτείνονται για τους πίδακες από αντικείμενα της κατηγορίας των πρωτοαστέρων κυρίως στο οπτικό και στο υπέρυθρο κομμάτι του φάσματος. Κατά το πλείστον οι παρατηρήσεις αυτές χαρακτηρίζονται κυρίως από έντονες γραμμές εκπομπής, δίνοντας την δυνατότητα να εξαχθούν συμπεράσματα για την τοπική θερμοκρασία, την ύπαρξη ισχυρών ασυνεχειών (shocks) εντός του πίδακα, την πυκνότητα του υλικού και την ταχύτητα του πίδακα.

Στον αντίποδα, οι πίδακες που σχετίζονται με ενεργούς γαλαξίες εκπέμπουν ένα συνεχές μη θερμικό φάσμα που εκτείνεται από τις συχνότητες των ραδιοκυμάτων μέχρι και τις σκληρές ακτίνες χ , φαινόμενο που συνδέει τις συγκεκριμένες εκπομπές με διαδικασίες όπως την σύγχροτρον και τον αντίστροφο σκεδασμό Κόμπτον. Η συγκεκριμένη εκπομπή, παρόλα αυτά, δεν δίνει ουσιαστικά ξεκάθαρους πληροφορίες για τις διαδικασίες εντός του πίδακα, εκτός φυσικά των γενικών πλαισίων που γνωρίζουμε, αφήνοντας την διαδικασία αυτή στην επιστημονική κοινότητα μέσω προσομοιώσεων, μοντέλων και στατιστικών αναλύσεων να αναπαράξει τα συγκεκριμένα φάσματα.

Γύρω από τους πίδακες, λοιπόν, επικρατεί σωρεία ερωτημάτων τόσο για την φύση τους όσο και για τις διαδικασίες που λαμβάνουν μέρος εντός του πίδακα και στο περιβάλλον με το οποίο αλληλεπιδρά. Ποίος ο ακριβής μηχανισμός ο οποίος επιταχύνει ένα πίδακα; Με ποίο τρόπο καταφέρνει ένας πίδακας (ιδιαίτερος οι πίδακες σε ενεργούς γαλαξίες) να κρατά την δομή του σε τέτοιες μεγάλες αποστάσεις; Παίζει κάποιο σημαντικό ρόλο το περιβάλλον του πίδακα σε αυτό το γεγονός ή όχι; Ποιες διαταραχές δημιουργούνται εντός του πίδακα και στην επιφάνεια αυτού; Πώς αποσβένονται αυτές και αν δεν γίνεται αυτό οι πίδακες διαλύονται; Τότε γιατί παρατηρούνται σε σωρεία περιπτώσεων στο σύμπαν; Ποιες οι ακριβείς δομές των πεδίων ενός πίδακα και ποία η ακριβής σύσταση; Ποιες ακριβώς είναι οι διαδικασίες εκπομπής ακτινοβολίας ενός πίδακα;

Όλα τα παραπάνω ερωτήματα και αρκετά ακόμα απασχολούν ένα μεγάλο μέρος της κοινότητας των αστροφυσικών και αστρονόμων που ασχολούνται με αυτές τις εξωτικές δομές του σύμπαντος. Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα έχει σημειωθεί πρόοδος τα τελευταία χρόνια έρευνας, από μικρή έως και μεγάλη σε κάποιες περιπτώσεις. Η συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθεί με το ερώτημα που αφορά την ευστάθεια των πιδάκων. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθεί με σχετικιστικούς πίδακες οι οποίοι δεν φέρουν ρεύματα στην επιφάνειά τους.

Στην διαδικασία της απάντησης αυτού του ερωτήματος, αν δηλαδή πίδακες που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα μαγνητικά πεδία, που σαν αποτέλεσμα έχουν την εξάλειψη των επιφανειακών ρευμάτων, παρουσιάζουν αυξημένη ευστάθεια ή όχι, θα χρησιμοποιήσουμε όλα τα δυνατά εργαλεία που μας προσφέρονται. Συνδυάζοντας θεωρητική γνώση για την οριοθέτηση του μοντέλου του πίδακα, και χρήση αλγορίθμου αριθμητικής ολοκλήρωσης για την παραγωγή των κατάλληλων αποτελεσμάτων γύρω από την ευστάθεια θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το συγκεκριμένο ερώτημα.



Σχήμα 1.5: Η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των αριθμητικών ολοκληρώσεων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο γύρω από την μελέτη των αστροφυσικών πίδακων. Στο σχήμα παρουσιάζεται το αποτέλεσμα μίας τέτοιας διαδικασίας παραγωγής ενός πίδακα μέσω αριθμητικών ολοκληρώσεων από κατάλληλους αλγόριθμους-κώδικες.

Έτσι λοιπόν, στο κεφάλαιο της θεωρίας ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει την θεωρητική θεμελίωση των πεδίων που θα χρησιμοποιηθούν για την μοντελοποίηση του πίδακα, καθώς και την διαδικασία της γραμμικοποίησης των εξισώσεων (πρόβλημα ιδιοτιμών) που διέπουν το πρόβλημα στο μη σχετικιστικό όριο. Ακόμα, η σχετικιστική επέκταση της γραμμικοποίησης όσο και η αντίστοιχη μελέτη για το περιβάλλον του πίδακα είναι καταγεγραμμένα στο ίδιο κεφάλαιο, όπως και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος των ιδιοτιμών.

Στο κεφάλαιο των αριθμητικών ολοκληρώσεων αρχικά παρουσιάζεται η επιλογή των φυσικών μεγεθών και παραμέτρων που θα πλαισιώσουν τις αριθμητικές ολοκληρώσεις. Έπειτα, ακολουθεί μία αναφορά στην μεθοδολογία των ολοκληρώσεων και στο ακριβώς επόμενο βήμα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συνολικής προσπάθειας.

Τέλος, ακολουθεί μία σύνοψη της εργασίας στο σύνολό της, όσο και μία σταχυολόγηση των ανοικτών ερωτημάτων που παρέμειναν ή δημιουργήθηκαν στην διάρκεια της επιστημονικής διαδικασίας.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία

Στο κεφάλαιο της θεωρητικής θεμελίωσης της εργασίας θα επικεντρωθούμε σε δύο βασικά γνωστικά προαπαιτούμενά της:

- Δομή μαγνητικών πεδίων, προφίλ πίεσης
- Γραμμικοποίηση εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής, συνοριακές συνθήκες, ιδιότητες περιβάλλοντος του πίδακα, αριθμητική ολοκλήρωση

Όσον αφορά τη δομή των μαγνητικών πεδίων, η ανάλυση θα εστιάσει στη παραγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο, καθώς και το προφίλ της πίεσης εντός του πίδακα που θα χρησιμοποιήσουμε στις αριθμητικές ολοκληρώσεις.

Το υποκεφάλαιο το οποίο θα αναφέρεται στη γραμμικοποίηση των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής, στις συνοριακές συνθήκες, στις ιδιότητες του περιβάλλοντος χώρου του πίδακα όσο και της διαδικασίας της αριθμητικής ολοκλήρωσης θα θεμελιώσει όλα τα παραπάνω για την άρτια κατανόηση βασικών πτυχών της εν λόγω εργασίας.

Πρέπει να τονίσουμε πως το τμήμα του πίδακα που μελετάμε είναι το ασυμπτωτικό του κομμάτι μακριά από τη περιοχή γέννησης του κυλινδρικού πίδακα στο πλαίσιο της έννοιας των μαγνητικών πύργων [Lynden-Bell, 2003].

Δομή μαγνητικών πεδίων, προφίλ πίεσης

Τα μαγνητικά πεδία που χρησιμοποιούμε δημιουργήθηκαν με σκοπό την μελέτη ευστάθειας πιδάκων χωρίς επιφανειακά ρεύματα [Gourgouliatos et al., 2012]. Τα βήματα που απαιτούνται για την ομαλή εξαγωγή των πεδίων είναι πρώτα η θεώρηση ενός στατικού πίδακα και ύστερα ακολουθεί η γενίκευσή του για σχετικιστικές ταχύτητες.

Η γενική αρχή που ακολουθείται είναι πως για να εξαφανιστούν τα επιφανειακά ρεύματα εισαγάγετε πίεση στο πλάσμα, έτσι η βασική force free εξίσωση αντικαθίσταται από την Grad-Shafranov. Με τις κατάλληλες προσαρμογές αυτή είναι η στρατηγική που ακολουθείται και στις δύο περιπτώσεις.

2.0.1 Στατικός πίδακας

Ξεκινάμε με την περίπτωση του μη σχετικιστικού στατικού πίδακα καθώς είναι η απλούστερη των περιπτώσεων. Η βασική εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εξίσωση Grad-Shafranov:

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$$

Το ρεύμα δίνεται από:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Τελικά αντικαθιστώντας την εξίσωση του ρεύματος στην Grad-Shafranov έχουμε:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 4\pi \nabla p \quad (2.1)$$

όπου \mathbf{B} το μαγνητικό πεδίο και p η πίεση του πλάσματος. Ο πίδακας που μοντελοποιείται είναι ένας αξισυμμετρικός κυλινδρικός πίδακας. Με βάση το παραπάνω οι φυσικές ποσότητες του πίδακα θα εξαρτώνται μόνο από μία μεταβλητή, την ακτινική κυλινδρική απόσταση από τον άξονα του πίδακα ϖ . Οι φυσικές ποσότητες που θα μας απασχολήσουν είναι η πίεση και το μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως [Gourgouliatos et al., 2012]:

$$\mathbf{B} = \nabla P_p(\varpi) \times \nabla \phi + I_p(\varpi) \nabla \phi \quad (2.2)$$

όπου P_p η πολοειδής συνάρτηση ροής και I_p το πολοειδές ρεύμα. Ακόμα έχουμε την ελευθερία να εκφράσουμε το πεδίο βάσει των τοροειδών συνιστωσών των ίδιων μεγεθών:

$$\mathbf{B} = \nabla P_t(\varpi) \times \nabla z + I_t(\varpi) \nabla z \quad (2.3)$$

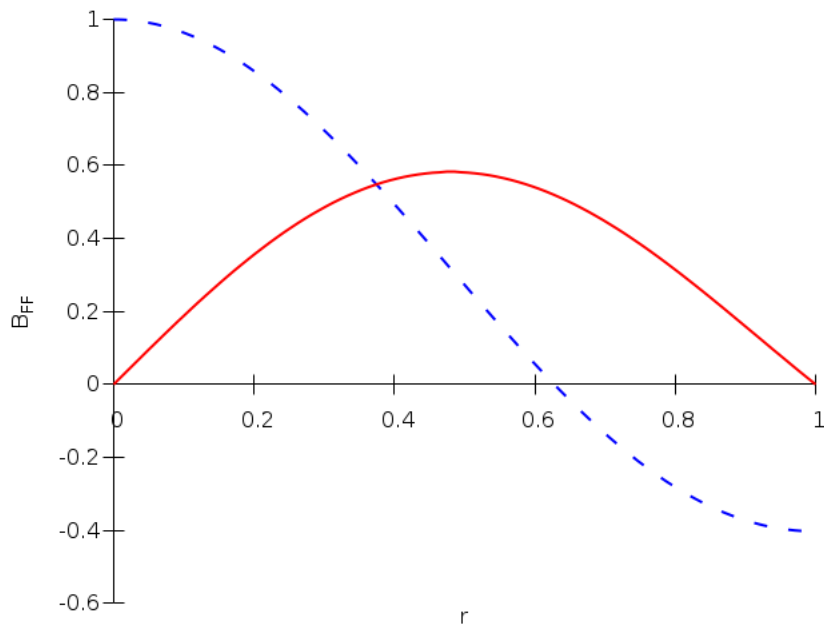
Τη τοροειδή συνιστώσα μπορούμε να τη δούμε από τη σχέση: $\int B_\phi d\varpi = P_t(\varpi) + const.$

Η παραπάνω ποσότητα είναι ανά μονάδα μήκους στον άξονα z , καθώς το σύστημα είναι συμμετρικό ως προς τη συγκεκριμένη μεταβλητή οπότε δεν χρειάζεται η ολοκλήρωση στον εν λόγω άξονα.

Εάν αφαιρέσουμε την πίεση από την εξίσωση τότε οδηγούμαστε σε μία force-free ισορροπία η οποία δίνεται από τη σχέση $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$. Τα πιο ευσταθή πεδία δημιουργούνται από ένα χωρικά σταθερό α [Tayler, 1973]. Εάν εκφράσουμε τα πεδία ως προς τις συναρτήσεις των ροών τους, διέπονται από τις σχέσεις $I_{p,t} = a_{p,t} P_{p,t}$. Η τελική μορφή της λύσης δόθηκε από τον Lundquist [Lundquist, 1951] στην γενικότερη μορφή:

$$\mathbf{B}_{FF} = c_0 \alpha (J_1(\alpha \varpi) \hat{\phi} + J_0(\alpha \varpi) \hat{z}) \quad (2.4)$$

όπου c_0 είναι μία σταθερά κανονικοποίησης και J_0, J_1 οι εξισώσεις Bessel μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1: Το μαγνητικό πεδίο όπως παρουσιάστηκε από τον Lundquist. Η κόκκινη γραμμή αναπαριστά την B_ϕ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, ενώ η διακεκομμένη μπλε γραμμή την B_z συνιστώσα. Στο συγκεκριμένο πεδίο οι συνιστώσες δεν μηδενίζονται ποτέ ταυτόχρονα, όσο και στην ακτίνα του πίδακα, με αποτέλεσμα να υπάρχουν ρεύματα στην επιφάνεια του πίδακα.

Προχωρούμε τώρα στην περίπτωση όπου η πίεση είναι παρούσα, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία δύναμη εκπεφρασμένη μέσω της κλίσης της. Αναλυτικές λύσεις είναι δυνατές μόνο εάν υποθέσουμε αναλογία του προφίλ της πίεσης ως προς τη ροή [Gourgouliatos et al., 2012]. Ακόμα, οι λύσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανάλογα με ποια έκφραση της ροής (πολοειδής, τοροειδής) αποφασίσουμε να εκφράσουμε την πίεση [Gourgouliatos et al., 2012]. Έτσι, $p_{p,t} = \frac{1}{4\pi} F_{p,t} P_{p,t} + p_{0,p,t}$ όπου $F_{p,t}$ είναι μία σταθερά και $p_{0,p,t}$ είναι μία σταθερά που μας εξασφαλίζει ότι η πίεση δεν θα λάβει σε κανένα σημείο εντός του πίδακα αρνητική τιμή.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην εξίσωση (1.1) και λύνοντας και για τις δύο περιπτώσεις παράγονται οι εξής εκφράσεις για την ροή:

$$P_p = c_p \varpi J_1(\alpha_p \varpi) - \frac{F_p \varpi^2}{\alpha_p^2} \quad (2.5)$$

$$P_t = c_t J_0(\alpha_t \varpi) - \frac{F_t}{\alpha_t^2} \quad (2.6)$$

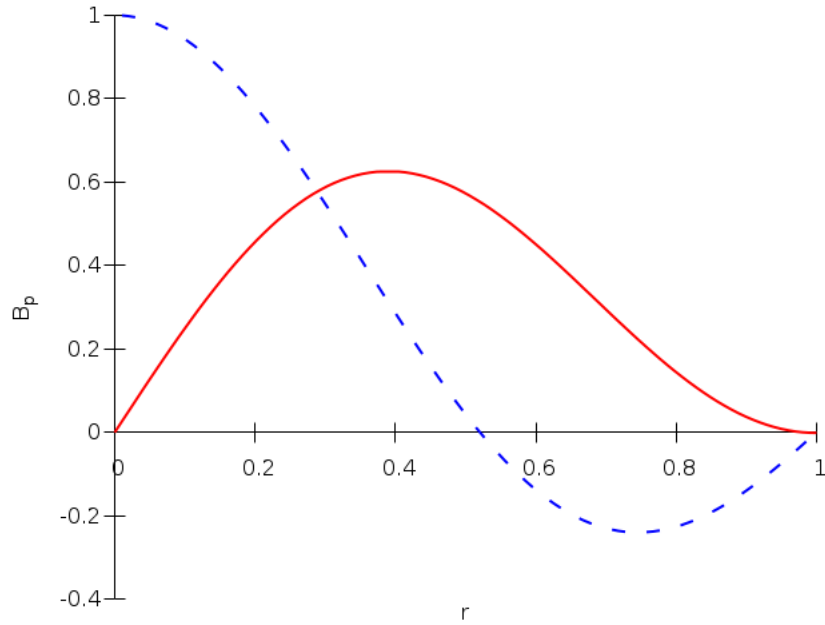
όπου $c_{p,t}$ είναι σταθερές κανονικοποίησης.

Ο πίδακας που χρησιμοποιείται είναι μοναδιαίας ακτίνα ($\varpi_{jet} = 1$) και απαιτείται να μην υπάρχουν επιφανειακά ρεύματα [Gourgouliatos et al., 2012]. Σύμφωνα με τα παραπάνω οι συνοριακές συνθήκες για την ροή λαμβάνουν την μορφή $P_{p,t}(1) = 0$ και $P'_{p,t}(1) = 0$. Η πρώτη συνοριακή συνθήκη εξασφαλίζει πως η ροή στο όριο είναι μηδενική, ανάγκη που εκπορεύεται με την σύνδεση του εν λόγω μοντέλου με τους μαγνητικούς πύργους [Lynden-Bell, 2003]. Η δεύτερη συνθήκη επιβάλλει στην ένταση του μαγνητικού πεδίου στα όρια του πίδακα να είναι μηδενική. Έτσι, και τα επιφανειακά ρεύματα μέσω των οριακών συνθηκών στο όριο του πίδακα μηδενίζονται.

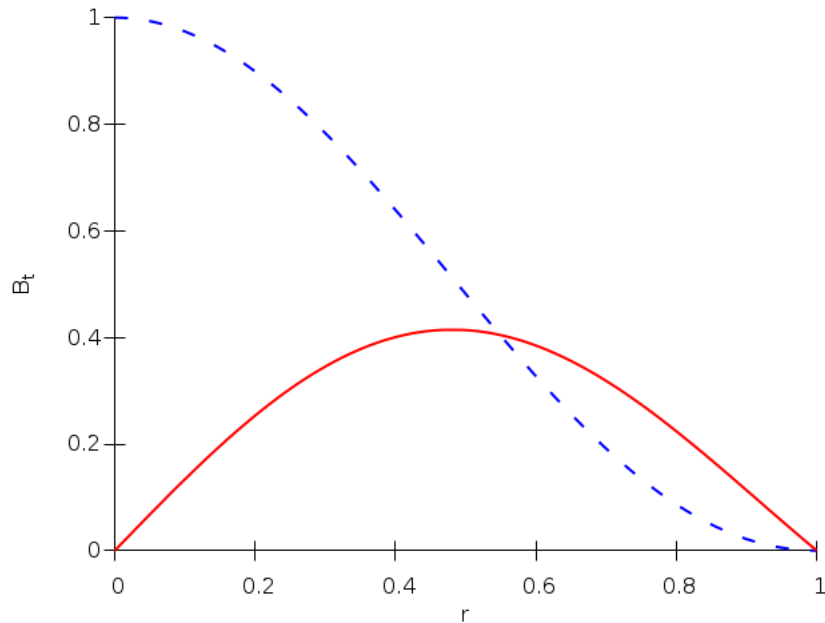
Ζητώντας και μία κανονικοποίηση τέτοια ώστε η μέγιστη ένταση της z συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου και στις δύο περιπτώσεις να είναι μονάδα οι σταθερές παίρνουν τις τιμές $c_p = 0.172$, $\alpha_p = 5.14$, $F_p = -1.54$ και $c_t = 0.186$, $\alpha_t = 3.83$, $F_t = -1.10$. Τελικά τα πεδία που παράγονται έχουν τις εξής μορφές:

$$\mathbf{B}_p = \left(c_p \alpha_p J_1(\alpha_p \varpi) - \frac{F_p \varpi}{\alpha_p} \right) \hat{\phi} + \left(c_p \alpha_p J_0(\alpha_p \varpi) - \frac{2F_p}{\alpha_p^2} \right) \hat{z} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B}_t = \left(c_t \alpha_t J_1(\alpha_t \varpi) \right) \hat{\phi} + \left(c_t \alpha_t J_0(\alpha_t \varpi) - \frac{F_t}{\alpha_t} \right) \hat{z} \quad (2.8)$$



Σχήμα 2.2: Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από την P_p ροή, με την κόκκινη γραμμή να αποτελεί την B_ϕ συνιστώσα και την διακεκομμένη μπλε την B_z συνιστώσα. Παρατηρείται ο επιθυμητός μηδενισμός των μαγνητικών πεδίων στο όριο του πίδακα.



Σχήμα 2.3: Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από την P_t ροή, με την κόκκινη γραμμή να αποτελεί την B_ϕ συνιστώσα και την διακεκομμένη μπλε την B_z συνιστώσα, όπως ακριβώς και στα προηγούμενα διαγράμματα. Παρατηρείται και σε αυτή την περίπτωση ο επιθυμητός μηδενισμός των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου στο όριο του πίδακα, καθώς και η διαφορετική δομή συνολικά της δομής του σε σχέση με το προηγούμενο σχήμα.

Τελευταίο βήμα το οποίο θα είναι πολύ χρήσιμο στην ανάλυση του μη στατικού πίδακα, η γραφή της εξίσωσης Grad-Shafranov λαμβάνει την μορφή:

$$\frac{\bar{\omega}}{2}(B_z^2 + B_\phi^2 + 8\pi p)' + B_\phi^2 = 0 \quad (2.9)$$

Η συγκεκριμένη μορφή προκύπτει όταν το μαγνητικό πεδίο εκφραστεί στην απλούστερη γραφή του $\mathbf{B} = B_\phi \hat{\phi} + B_z \hat{z}$ και εν συνεχεία αντικατασταθεί στην Grad-Shafranov.

2.0.2 Σχετικιστικοί μη στατικοί πίδακες

Η θεμελίωση που θα ακολουθήσει αφορά πίδακες με ταχύτητα ομογενή και παράλληλη στον άξονα z της μορφής $\mathbf{v} = v_z \hat{\mathbf{z}}$ με εξάρτηση από τη μεταβλητή ϖ , αλλά χωρίς χρονική εξάρτηση. Η κυλινδρική συμμετρία του στατικού προβλήματος ισχύει και σε αυτή την κατηγορία πιδάκων που θα μελετήσουμε όπως και για το προφίλ της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει πως όλα τα μεγέθη εξαρτώνται μόνο από την μεταβλητή ϖ . Ακόμα, το εύρος των ταχυτήτων που καλύπτει η συγκεκριμένη διαδικασία εκτείνεται από αυστηρά μη σχετικιστικές έως και σχετικιστικές ταχύτητες. Το μαγνητικό πεδίο είναι κατά τα γνωστά της μορφής:

$$\mathbf{B} = B_\phi(\varpi)\hat{\boldsymbol{\phi}} + B_z(\varpi)\hat{\mathbf{z}} \quad (2.10)$$

και το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\mathbf{E} = E_\varpi(\varpi)\hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.11)$$

που μέσω της σχέσης $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0$ και του προφίλ της πίεσης:

$$\mathbf{E} = \frac{v_z}{c} B_\phi \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.12)$$

Η χρονική παράγωγος του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν, άρα το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο. Η εξίσωση του Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ επαληθεύεται. Το ηλεκτρικό φορτίο δίνεται από:

$$j^0 = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (2.13)$$

ενώ η πυκνότητα ρεύματος από:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.14)$$

ενώ και ο νόμος του Gauss $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ επαληθεύεται.

Τέλος θα χρειαστούμε την εξίσωση ορμής της οποίας η σχετικιστική μορφή είναι:

$$\Gamma \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (\xi \Gamma \mathbf{v}) - \nabla p + \frac{j^0 \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c} = 0 \quad (2.15)$$

όπου $\Gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ ο παράγοντας Lorentz, ρ_0 η πυκνότητα του ρευστού στο σύστημα ηρεμίας και ξ η σχετικιστική ενθαλπία κανονικοποιημένη ως προς c^2 .

Από την εξίσωση ορμής ο όρος που αφορά τις χρονικές παραγωγούς είναι μηδενικός λόγω της χρονοανεξάρτητης φύσης του μοντέλου, ενώ και ο όρος $\Gamma \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\xi \Gamma \mathbf{v})$ είναι μηδενικός. Αυτό συμβαίνει διότι ο όρος $\mathbf{v} \cdot \nabla$ δίνει όρο που παραγωγίζει ως προς τη μεταβλητή z , και η εξάρτηση των μεγεθών προς παραγωγή είναι μόνο ως προς ϖ . Οπότε, συνοπτικά ο πρώτος όρος της εξίσωσης ορμής είναι μηδενικός.

Οι όροι που μας ενδιαφέρουν εν τέλει είναι οι δύο τελευταίοι από την εξίσωση ορμής, οι οποίοι συμπεριλαμβάνουν όρο που έχει την πίεση και τον ηλεκτρομαγνητικό όρο. Θέτοντας τα πεδία στην εξίσωση ορμής λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$\frac{\varpi}{2} (B_z^2 + B_\phi^2 - E_\varpi^2 + 8\pi p)' + B_\phi^2 - E_\varpi^2 = 0 \quad (2.16)$$

Παρατηρώντας την ομοιότητα με την εξίσωση (2.9), θα θέσουμε:

$$H^2 = B_\phi^2 - E_\omega^2 \quad (2.17)$$

έτσι η εξίσωση (2.16) θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{\omega}{2}(B_z^2 + H^2 + 8\pi p)' + H^2 = 0 \quad (2.18)$$

Με βάση τα αποτελέσματα του στατικού προβλήματος θα ορίσουμε δύο συναρτήσεις G_p , G_t σε πλήρη αναλογία με τις αντίστοιχες συναρτήσεις ροής P_p , P_t του στατικού προβλήματος. Τελικά, λαμβάνουμε τις εξής δύο αναπαραστάσεις:

$$H = \frac{\alpha_p G_p}{\omega}$$

$$B_z = \frac{1}{\omega} \frac{dG_p}{d\omega}$$

$$p = \frac{1}{4\pi} F_p G_p + p_{p,0} \quad (2.19)$$

Ακόμα:

$$H = -\frac{dG_t}{d\omega}$$

$$B_z = \alpha_t G_t$$

$$p = \frac{1}{4\pi} F_t G_t + p_{t,0} \quad (2.20)$$

Οι λύσεις για τις γενικευμένες εξισώσεις G_p , G_t είναι ακριβώς ίδιες με τις εξισώσεις (2.5) και (2.6) ως προς τη μορφή και το φυσικό περιεχόμενο. Μάλιστα, αφού οι συνοριακές συνθήκες του κινούμενου πίδακα είναι ίδιες με αυτές του στατικού πίδακα, οι σταθερές $F_{p,t}$, $\alpha_{p,t}$ λαμβάνουν τις ίδιες ακριβώς τιμές με τις αντίστοιχες του στατικού προβλήματος. Ο πίδακας πάλι δεν φέρει επιφανειακά ρεύματα που είναι και το ζητούμενο της όλης διαδικασίας.

Τέλος, υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο και την αζιμουθιακή συνιστώσα του μαγνητικού κάνο- ντας χρήση των εξισώσεων (2.12) και (2.17), με τελική έκφραση των πεδίων στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς:

$$B_\phi^2 = \frac{H^2}{1 - v_z^2}$$

$$E_\omega^2 = \frac{v_z^2}{1 - v_z^2} H^2$$

2.1 Γραμμικοποίηση εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής, συνοριακές συνθήκες, ιδιότητες περιβάλλοντος του πίδακα, αριθμητική ολοκλήρωση

2.1.1 Γραμμικοποίηση εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής

Ο στόχος της πρώτου τμήματος του συγκεκριμένης ενότητας της εργασίας είναι η εξαγωγή των γραμμικοποιημένων εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής, οι οποίες στην συνέχεια θα ολοκληρωθούν από τον αλγόριθμο του υπολογιστικού κομματιού της ανάλυσης που επιχειρούμε.

Το πρώτο μέρος της συγκεκριμένης διαδικασίας θα αφορά το μη σχετικιστικό σετ εξισώσεων, βασισμένο στην εργασία των [Kim et al., 2015]. Όλες οι προηγούμενες υποθέσεις γύρω από τη γεωμετρία του προβλήματος είναι σε ισχύ, με συμπληρωματικές στην τωρινή περίπτωση ότι η ανάλυση αφορά ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική και υπόθεση σταθερής εντροπίας. Η δεύτερη υπόθεση μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την εξίσωση ενέργειας με μία πολυτροπική εξίσωση, $p = K\rho^\Gamma$, όπου τα K , Γ είναι σταθερές. Το πλήρες σετ των εξισώσεων προς γραμμικοποίηση τελικά είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.21)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.23)$$

Οι αδιατάρακτες ποσότητες των μεγεθών θα χαρακτηρίζονται από τον κάτω δείκτη «0», παραδείγματος χάριν για την αδιατάρακτη πυκνότητα θα χρησιμοποιείται η μεταβλητή ρ_0 . Ακόμα, υπενθυμίζεται πως όλες οι αδιατάρακτες ποσότητες λόγω των δεδομένων συμμετριών του πίδακα εξαρτώνται μόνο από τη χωρική μεταβλητή ϖ και είναι χρονοανεξάρτητες. Δηλαδή, $\rho_0 = \rho_0(\varpi)$, $v_{0z} = v_{0z}(\varpi)$, $P_0 = P_0(\varpi)$, $B_{0z} = B_{0z}(\varpi)$, $B_{0\phi} = B_{0\phi}(\varpi)$.

Τέλος, οι ομογενείς λύσεις συνήθως παραμετροποιούνται από τον λόγο της πυκνότητας του πίδακα και του εξωτερικού περιβάλλοντος η , τον αριθμό Mach του πίδακα M μετρούμενο στον άξονα του πίδακα και την παράμετρο μαγνήτισης β υπολογισμένο στον άξονα του πίδακα και αυτό. Λόγου χάριν $\eta = \frac{\rho_j}{\rho_\alpha}$ με ρ_j την πυκνότητα στον άξονα του πίδακα και ρ_α την πυκνότητα του εξωτερικού μέσου.

Εφ' όσον οι λύσεις του ομογενούς σετ εξισώσεων δεν εξαρτώνται από τα t , ϕ και z μπορούμε να κάνουμε ανάλυση Fourier σε αυτές τις μεταβλητές και να θεωρήσουμε διαταραχές της μορφής $\delta f(t, \varpi, \phi, z) = \delta f(\varpi) \exp(im\phi + ikz - i\omega t)$. Στη θεώρησή μας, οι μεταβλητές k , m είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ η μεταβλητή ω είναι μιγαδικός αριθμός. Έτσι, ένα θετικό φανταστικό μέρος του ω θα οδηγήσει σε αύξηση του πλάτους της διαταραχής, η οποία μάλιστα, θα είναι εκθετικής μορφής. Στην αντίθετη περίπτωση προσήμου του φανταστικού μέρους του ω βρισκόμαστε σε ελάττωση του αρχικού πλάτους της διαταραχής, πάλι εκθετικής μορφής.

Το παραπάνω φαίνεται ευκολότερα αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω έκφραση της γενικής διαταραχής το ω με $\omega = \Re\omega + i\Im\omega$. Η γενική σχέση δίνει λοιπόν, $\delta f(t, \varpi, \phi, z) = \delta f(\varpi) \exp(\Im\omega t) \exp(-i\Re\omega t + ikz + im\phi)$. Το πλάτος της διαταραχής λοιπόν ανάλογα την τιμή του $\Im\omega$ μπορεί να ακολουθήσει μία από τις παραπάνω περιπτώσεις αύξησης ή ελάττωσης. Μάλιστα, το μέγεθος $1/\Im\omega$ αποτελεί μία χρονική κλίμακα για αυτή την μεταβολή. Οπότε, για μεγάλες τιμές του φανταστικού μέρους η χρονική κλίμακα είναι μικρή, ενώ για μικρή τιμή του φανταστικού μέρους η χρονική κλίμακα είναι μεγάλη. Με άλλα λόγια, για μεγάλη χρονική κλίμακα έχουμε αυξημένη ευστάθεια, ενώ για μικρή χρονική κλίμακα το ακριβώς αντίθετο.

Ακόμα, ορίζουμε τα μεγέθη $\omega_0 = \omega_0(\varpi) = \omega - kv_{0z}(\varpi)$ και $k_B = k_B(\varpi) = \frac{m}{\varpi} B_{0\phi}(\varpi) + k_{B0z}(\varpi)$. Επίσης, ορίζουμε την συνολική διαταραχή στην πίεση μέσω της σχέσης $\delta\Pi = \delta p +$

$B_{0\phi}\delta B_\phi + B_{0z}\delta B_z$. Οι εξισώσεις που θα γραμμικοποιήσουμε για να κλείσουμε το σετ των εξισώσεων που χρειαζόμαστε είναι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ και η πολυτροπική εξίσωση $p = K\rho^\Gamma$.

Ξεκινάμε με την γραμμικοποίηση της εξίσωσης (2.21). Γενικά, για να γραμμικοποιήσουμε μια εξίσωση αντικαθιστούμε κάθε όρο με τον όρο της αδιατάρακτης λύσης και προσθέτουμε και τον διαταρακτικό όρο. Δηλαδή, αν μιλήσουμε για το μέγεθος της πυκνότητας θα έχουμε $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, αντίστοιχα το προηγούμενο ισχύει για κάθε μέγεθος που συναντούμε. Αφαιρώντας τους όρους της αδιατάρακτης εξίσωσης και κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξης μόνο, από την εξίσωση (2.21) φτάνουμε στην κάτωθι μορφή:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\delta\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v}_0) = 0$$

Κάνοντας με προσοχή τις παραγωγίσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} &= -i\omega\delta\rho \\ \nabla \cdot (\rho_0\delta\mathbf{v}) &= \frac{d\rho_0}{d\varpi}\delta v_\varpi + \rho_0\frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi}m\rho_0\delta v_\phi + ik\rho_0\delta v_z \\ \nabla \cdot (\delta\rho\mathbf{v}_0) &= ikv_{0z}\delta\rho \end{aligned}$$

Να σημειωθεί ότι τα εκθετικά στους όρους διαταραχής μετά τις παραγωγίσεις στα αποτελέσματα θα παραλείπονται χάριν οικονομίας λόγου.

Εντέλει, η εξίσωση που παράγεται ύστερα από τις κατάλληλες πράξεις και αντικαταστάσεις έχει τη μορφή:

$$i\omega_0\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0\varpi}\frac{d(\rho_0\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi}m\delta v_\phi + ik\delta v_z \quad (2.24)$$

Συνεχίζουμε την διαδικασία με την εξίσωση ορμής (2.22). Ακολουθώντας τα ίδια βήματα στη συλλογιστική μας έχουμε την γραμμικοποιημένη της μορφή ως:

$$\rho_0\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + \rho_0(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \delta\mathbf{B} + (\nabla \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 - \nabla\delta p$$

Ακολουθούν τα αποτελέσματα από τις πράξεις στην παραπάνω εξίσωση για τον κάθε όρο αναλυτικά:

$$\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} &= \rho_0(\delta v_\varpi\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \delta v_z\hat{\boldsymbol{z}})(-i\omega) \\ \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} &= \rho_0[(ikv_{0z}\delta v_\varpi)\hat{\boldsymbol{\omega}} + (ikv_{0z}\delta v_\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} + (ikv_{0z}\delta v_z)\hat{\boldsymbol{z}}] \\ \rho_0(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 &= \rho_0\frac{dv_{0z}}{d\varpi}\delta v_\varpi\hat{\boldsymbol{z}} \\ (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \delta\mathbf{B} &= \left(-\frac{dB_{0z}}{d\varpi}\delta B_z - \frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi B_{0\phi})}{d\varpi}\delta B_\phi\right)\hat{\boldsymbol{\omega}} + \left(\frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi B_{0\phi})}{d\varpi}\delta B_z\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{dB_{0z}}{d\varpi}\delta B_\varpi\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\ (\nabla \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 &= (ik\delta B_\varpi B_{0z} - B_{0z}\frac{d\delta B_z}{d\varpi} - \frac{B_{0\phi}}{\varpi}\frac{d(\varpi\delta B_\phi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi}mB_{0\phi}\delta B_\varpi)\hat{\boldsymbol{\omega}} \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\varpi}mB_{0z}\delta B_z + ikB_{0z}\delta B_\phi\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{i}{\varpi}mB_{0\phi}\delta B_z - ikB_{0\phi}\delta B_\phi\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\ \nabla\delta p &= \frac{d\delta p}{d\varpi}\hat{\boldsymbol{\omega}} + \frac{i}{\varpi}m\delta p\hat{\boldsymbol{\phi}} + ik\delta p\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

Η εξίσωση που έχει παραχθεί είναι μία διανυσματική αλγεβρική εξίσωση με τρεις συνιστώσες παρούσες. Λαμβάνοντας τους όρους κάθε μίας συνιστώσας ξεχωριστά καταλήγουμε σε τρεις εξισώσεις. Οπότε ξεκινώντας με την $\hat{\omega}$ συνιστώσα, και κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις:

$$i\omega_0\rho_0\delta v_\omega = -ik_B\delta B_\omega + \frac{d\delta\Pi}{d\omega} + \frac{2}{\omega}B_{0\phi}\delta B_\phi \quad (2.25)$$

Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα:

$$i\omega_0\rho_0\delta v_\phi = -\frac{1}{\omega}\frac{d(\omega B_{0\phi})}{d\omega}\delta B_\omega + \frac{i}{\omega}mB_{0z}\delta B_z - ikB_{0z}\delta B_\phi + \frac{i}{\omega}m\delta p \quad (2.26)$$

Η \hat{z} συνιστώσα:

$$i\omega_0\rho_0\delta v_z - \rho_0\frac{dv_{0z}}{d\omega}\delta v_\omega = -\frac{dB_{0z}}{d\omega}\delta B_\omega + ikB_{0\phi}\delta B_\phi - \frac{i}{\omega}mB_{0\phi}\delta B_z + ik\delta p \quad (2.27)$$

Το επόμενο βήμα είναι η συγκεκριμένη διαδικασία να επαναληφθεί για την εξίσωση (2.23). Η γραμμικοποιημένη της μορφή τελικά δίδεται από την σχέση:

$$\frac{\partial\delta\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \delta\mathbf{B}) + \nabla \times (\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$

Ο κάθε όρος ύστερα από τις απαιτούμενες πράξεις μας δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\mathbf{B}}{\partial t} &= [(\delta B_\omega)\hat{\omega} + (\delta B_\phi)\hat{\phi} + (\delta B_z)\hat{z}](-i\omega) \\ \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \delta\mathbf{B}) &= (-ikv_{0z}\delta B_\omega)\hat{\omega} + (-ikv_{0z}\delta B_\phi)\hat{\phi} + \frac{1}{\omega}\left[\frac{d(\omega v_{0z}\delta B_\omega)}{d\omega} + imv_{0z}\delta B_\phi\right]\hat{z} \\ \nabla \times (\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) &= \left[\left(\frac{i}{\omega}mB_{0\phi} + ikB_{0z}\right)\delta v_\omega\right]\hat{\omega} + [ikB_{0z}\delta v_\phi - ikB_{0\phi}\delta v_z - \frac{d(B_{0\phi}\delta v_\omega)}{d\omega}]\hat{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{\omega}\left[-\frac{d(\omega B_{0z}\delta v_\omega)}{d\omega} - imB_{0z}\delta v_\phi + imB_{0\phi}\delta v_z\right]\hat{z} \end{aligned}$$

Η εξίσωση είναι πάλι διανυσματική, οπότε εκ νέου θα αναδείξουμε την κάθε συνιστώσα ξεχωριστά ξεκινώντας από την $\hat{\omega}$ συνιστώσα:

$$i\omega_0\delta B_\omega = -ik_B\delta v_\omega \quad (2.28)$$

Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα:

$$i\omega_0\delta B_\phi = -\frac{d(B_{0\phi}\delta v_\omega)}{d\omega} + ikB_{0\phi}\delta v_z - ikB_{0z}\delta v_\phi \quad (2.29)$$

Ακολουθεί η \hat{z} συνιστώσα της γραμμικοποιημένης (2.23).

$$-i\omega\delta B_z = \frac{1}{\omega}\frac{d(\omega v_{0z}\delta B_\omega)}{d\omega} + \frac{i}{\omega}mv_{0z}\delta B_\phi - \frac{1}{\omega}\frac{d(\omega B_{0z}\delta v_\omega)}{d\omega} - \frac{i}{\omega}mB_{0z}\delta v_\phi + \frac{i}{\omega}mB_{0\phi}\delta v_z$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι στην επιθυμητή της μορφή εναρμονισμένη με την μορφή των προηγούμενων εξισώσεων. Τη μετασχηματίζουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} -i\omega\delta B_z &= \frac{1}{\varpi} \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \varpi\delta B_\varpi + \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta B_\varpi)}{d\varpi} v_{0z} + \frac{i}{\varpi} m v_{0z} \delta B_\phi - \frac{1}{\varpi} \frac{dB_{0z}}{d\varpi} \varpi\delta v_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} B_{0z} \\ &\quad - \frac{i}{\varpi} m B_{0z} \delta v_\phi + \frac{i}{\varpi} m B_{0\phi} \delta v_z \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης (2.31) η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά ακριβώς παρακάτω έχουμε:

$$\begin{aligned} -i\omega\delta B_z &= \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \delta B_\varpi - \frac{i}{\varpi} m v_{0z} \delta B_\phi - ikv_{0z} \delta B_z + \frac{i}{\varpi} m v_{0z} \delta B_\phi - \frac{1}{\varpi} \frac{dB_{0z}}{d\varpi} \varpi\delta v_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} B_{0z} \\ &\quad - \frac{i}{\varpi} m B_{0z} \delta v_\phi + \frac{i}{\varpi} m B_{0\phi} \delta v_z \end{aligned}$$

Ακολούθως έχουμε την επιθυμητή μορφή:

$$\begin{aligned} -i(\underbrace{\omega - ikv_{0z}}_{\omega_0})\delta B_z &= \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \delta B_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{dB_{0z}}{d\varpi} \varpi\delta v_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} B_{0z} \\ &\quad - \frac{i}{\varpi} m B_{0z} \delta v_\phi + \frac{i}{\varpi} m B_{0\phi} \delta v_z \end{aligned} \quad (2.30)$$

Επόμενη εξίσωση προς γραμμικοποίηση η εξίσωση της απόκλισης του μαγνητικού πεδίου. Κρατώντας τον όρο πρώτης τάξης έχουμε:

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση μετά από τις πράξεις γίνεται:

$$\frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta B_\varpi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi} m \delta B_\phi + ik\delta B_z = 0 \quad (2.31)$$

Αυτό που πρέπει να επισημανθεί σε αυτό το σημείο είναι η ισοδυναμία μεταξύ των εξισώσεων (2.31) και (2.30). Οποιαδήποτε από τις δύο χρησιμοποιήσουμε στο σύστημα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων δεν υπάρχει καμία διαφορά ως προς τη φυσική σημασία, παρά μόνο τυπική ως προς τη μορφή της εξίσωσης.

Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού έχει ως εξής, αρχικά ξεκινάμε από την εξίσωση (2.31) και την πολλαπλασιάζουμε με ω_0 .

$$\omega_0 \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta B_\varpi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi} m \omega_0 \delta B_\phi + ik\omega_0 \delta B_z = 0$$

Από την παραπάνω εξίσωση για τον όρο $\omega_0 \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta B_\varpi)}{d\varpi}$ θέλουμε να βρούμε μία ισοδύναμη έκφραση προς αντικατάσταση. Αυτή βρίσκεται από την εξίσωση (2.28). Εάν παραγωγίσουμε την έκφραση αυτή ως προς ϖ και ολοκληρώσουμε τις απαραίτητες πράξεις έχουμε:

$$\omega_0 \frac{d(\varpi\delta B_\varpi)}{d\varpi} = -\frac{d\omega_0}{d\varpi} \varpi\delta B_\varpi - \frac{dk_B}{d\varpi} \varpi\delta v_\varpi - k_B \frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi}$$

Οι παραγωγίσεις των ποσοτήτων ω_0 και k_B ως προς ϖ δίδονται:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_0}{d\varpi} &= \frac{d(\omega - kv_{0z})}{d\varpi} = -k \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \\ \frac{dk_B}{d\varpi} &= \frac{d(\frac{m}{\varpi}B_{0\phi} + kB_{0z})}{d\varpi} = m \frac{d\frac{B_{0\phi}}{\varpi}}{d\varpi} + k \frac{dB_{0z}}{d\varpi}\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην αρχική έκφραση έχουμε:

$$\begin{aligned}-\frac{d\omega_0}{d\varpi} \varpi \delta B_\varpi - \frac{dk_B}{d\varpi} \varpi \delta v_\varpi - k_B \frac{d(\varpi \delta v_\varpi)}{d\varpi} + m \frac{d(B_{0\phi} \delta v_\varpi)}{d\varpi} \\ + ikmB_{0\phi} \delta v_z - ikmB_{0z} \delta v_\phi + ik\omega_0 \varpi \delta B_z = 0 \rightarrow \\ k \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \varpi \delta B_\varpi - m \frac{d\frac{B_{0\phi}}{\varpi}}{d\varpi} \varpi \delta v_\varpi - k \frac{dB_{0z}}{d\varpi} \varpi v_\varpi - \frac{m}{\varpi} B_{0\phi} \frac{\varpi \delta v_\varpi}{d\varpi} - kB_{0z} \frac{d(\varpi \delta v_\varpi)}{d\varpi} + m \frac{d(B_{0\phi} \delta v_\varpi)}{d\varpi} \\ + imkB_{0\phi} \delta v_z - imkB_{0z} \delta v_\phi + ik\omega_0 \varpi \delta B_z = 0\end{aligned}$$

Ο όρος $m \frac{d(B_{0\phi} \delta v_\varpi)}{d\varpi}$ μπορεί να γραφεί $m \frac{d(\frac{B_{0\phi}}{\varpi} \varpi \delta v_\varpi)}{d\varpi}$ οπότε:

$$\begin{aligned}k \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \varpi \delta B_\varpi - m \frac{d(\frac{B_{0\phi}}{\varpi})}{d\varpi} \varpi \delta v_\varpi - k \frac{dB_{0z}}{d\varpi} \varpi v_\varpi - \frac{m}{\varpi} B_{0\phi} \frac{\varpi \delta v_\varpi}{d\varpi} - kB_{0z} \frac{d(\varpi \delta v_\varpi)}{d\varpi} + m \frac{d(\frac{B_{0\phi}}{\varpi})}{d\varpi} \delta v_\varpi \\ + m \frac{B_{0\phi}}{\varpi} \frac{d(\varpi \delta v_\varpi)}{d\varpi} + imkB_{0\phi} \delta v_z - imkB_{0z} \delta v_\phi + ik\omega_0 \varpi \delta B_z = 0\end{aligned}$$

Αφαιρώντας τους αντίθετους όρους και διαιρώντας με k και ϖ καταλήγουμε:

$$i\omega_0 \delta B_z + \frac{dv_{0z}}{d\varpi} \delta B_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{dB_{0z}}{d\varpi} \varpi \delta v_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi \delta v_\varpi)}{d\varpi} B_{0z} - \frac{i}{\varpi} m B_{0z} \delta v_\phi + \frac{i}{\varpi} m B_{0\phi} \delta v_z = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ακριβώς όμοια με την (2.30), πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι εξισώσεις (2.31) και (2.30) είναι όντως ισοδύναμες. Οπότε, όπως προαναφέραμε οποιαδήποτε από τις δύο εξισώσεις χρησιμοποιήσουμε στο τελικό γραμμικοποιημένο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση δεν επιφέρει καμία διαφορά στο τελικό αποτέλεσμα.

Παρόλα αυτά η μορφή που είναι χρησιμότερη για τους σκοπούς αυτής της εργασίας είναι η (2.30) καθώς όπως θα καταστεί σαφές λίγο παρακάτω στην εργασία, οι εξισώσεις όλες είναι θεμιτό να μην παρουσιάζουν καμία άλλη εξάρτηση όρων που περιέχουν παραγώγους αγνώστων μεγεθών εκτός από παραγώγους των αγνώστων δv_ϖ και $\delta \Pi$.

Τελευταία εξίσωση που θα χρειαστούμε είναι η γραμμικοποιημένη πολυτροπική καταστατική εξίσωση:

$$\frac{\delta p}{p_0} = \Gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} \quad (2.32)$$

Ας δούμε με λίγη περισσότερη λεπτομέρεια την διαδικασία υπολογισμού της τελευταίας εξίσωσης. Η βασική σχέση είναι η πολυτροπική σχέση $p = K\rho^\Gamma$. Κάνοντας γραμμικοποίηση οδηγούμαστε στην παραπάνω σχέση:

$$\begin{aligned}
 p_0 + \delta p &= K(\rho_0 + \delta\rho)^\Gamma \xrightarrow{\delta\rho \ll \rho_0} \\
 p_0 + \delta p &= K(\rho_0^\Gamma + \Gamma\rho_0^{\Gamma-1}\delta\rho) \rightarrow \\
 \underbrace{p_0 - K\rho_0^\Gamma}_0 + \delta p &= \underbrace{K\rho_0^\Gamma}_{p_0} \Gamma \frac{\delta\rho}{\rho_0} \rightarrow \\
 \frac{\delta p}{p_0} &= \Gamma \frac{\delta\rho}{\rho_0}
 \end{aligned}$$

Συνοπτικά το γραμμικοποιημένο σύστημα εξισώσεων αποτελείται απο τις κάτωθι εξισώσεις:

$$i\omega_0 \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0\varpi} \frac{d(\rho_0\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi} m\delta v_\phi + ik\delta v_z \quad (2.24)$$

$$i\omega_0\rho_0\delta v_\varpi = -ik_B\delta B_\varpi + \frac{d\delta\Pi}{d\varpi} + \frac{2}{\varpi} B_{0\phi}\delta B_\phi \quad (2.25)$$

$$i\omega_0\delta B_\phi = -\frac{d(B_{0\phi}\delta v_\varpi)}{d\varpi} + ikB_{0\phi}\delta v_z - ikB_{0z}\delta v_\phi \quad (2.26)$$

$$i\omega_0\rho_0\delta v_z - \rho_0 \frac{dv_{0z}}{d\varpi}\delta v_\varpi = -\frac{dB_{0z}}{d\varpi}\delta B_\varpi + ikB_{0\phi}\delta B_\phi - \frac{i}{\varpi} mB_{0\phi}\delta B_z + ik\delta p \quad (2.27)$$

$$i\omega_0\delta B_\varpi = -ik_B\delta v_\varpi \quad (2.28)$$

$$i\omega_0\delta B_\phi = -\frac{d(B_{0\phi}\delta v_\varpi)}{d\varpi} + ikB_{0\phi}\delta v_z - ikB_{0z}\delta v_\phi \quad (2.29)$$

$$-i\omega_0\delta B_z = \frac{dv_{0z}}{d\varpi}\delta B_\varpi - \frac{dB_{0z}}{d\varpi}\delta v_\varpi - \frac{1}{\varpi} \frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} B_{0z} - \frac{i}{\varpi} mB_{0z}\delta v_\phi + \frac{i}{\varpi} mB_{0\phi}\delta v_z \quad (2.30)$$

$$\frac{\delta p}{p_0} = \Gamma \frac{\delta\rho}{\rho_0} \quad (2.32)$$

2.1.2 Αριθμητική ολοκλήρωση γραμμικοποιημένων εξισώσεων

Οι εξισώσεις που γραμμικοποιήσαμε στο ακριβώς προηγούμενο εδάφιο της εργασίας δημιουργούν το εξής μη ομογενές γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix}
 \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -k & -\frac{m}{\varpi} & \frac{1}{\varpi} & 0 & \frac{\rho_0'}{\varpi\rho_0} & 0 \\
 0 & \omega_0 & 0 & -v_{0z}' & \frac{mB_{0\phi}}{\varpi} & -\frac{mB_{0z}}{\varpi} & \frac{B_{0z}}{\varpi} & 0 & \frac{B_{0z}}{\varpi} & 0 \\
 0 & 0 & \omega_0 & 0 & -kB_{0\phi} & kB_{0z} & \frac{B_{0\phi}}{\varpi} & 0 & \left(\frac{B_{0\phi}}{\varpi}\right)' & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_B}{\varpi} & 0 \\
 -\Gamma p_0 & -B_{0z} & -B_{0\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & k_B & 0 & -B_{0z}' & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_0 v_{0z}'}{\varpi} & -k \\
 0 & 0 & k_B & -\left(\frac{\varpi B_{0\phi}}{\varpi}\right)' & 0 & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m}{\varpi} \\
 0 & 0 & -\frac{2B_{0\phi}}{\varpi} & k_B & 0 & 0 & 0 & -1 & \omega_0 \frac{\rho_0}{\varpi} & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \delta\rho/\rho_0 \\
 \delta B_z \\
 \delta B_\phi \\
 i\delta B_\varpi \\
 \delta v_z \\
 \delta v_\phi \\
 d(i\varpi\delta v_\varpi)/d\varpi \\
 d\delta\Pi/d\varpi \\
 i\varpi\delta v_\varpi \\
 \delta\Pi
 \end{pmatrix}
 = 0 \quad (2.33)$$

Το παρόν σύστημα προέρχεται από τις εξισώσεις (2.24) έως και (2.32) που παρουσιάζονται ακριβώς παραπάνω. Οι μόνες αλλαγές που έχουν συντελεστεί είναι πως οι εξισώσεις έχουν πολλαπλασιαστεί

όπου χρειάζεται με i ώστε να εμφανίζεται στην μειονότητα των όρων των εξισώσεων. Ακόμα όπου το i παραμένει περνά στο πίνακα διάνυσμα των αγνώστων απλοποιώντας ακόμα περισσότερο την μορφή του πίνακα.

Εν τέλει ύστερα από όλες τις προηγούμενες διαδικασίες το αρχικό σύστημα εξισώσεων κατέληξε σε ένα γραμμικοποιημένο σύστημα οκτώ εξισώσεων των αγνώστων $\delta\rho/\delta\rho_0$, δB_z , $i\delta B_\varpi$, δB_ϕ , δv_ϖ , δv_z , $d(i\varpi\delta v_\varpi)/d\varpi$, $d\delta\Pi/d\varpi$ συναρτήσει των μεγεθών ϖ , δv_ϖ , $\delta\Pi$.

Τώρα δικαιολογείται η επιλογή των παραπάνω πράξεων ώστε οι εξισώσεις να έρθουν σε μία επιθυμητή μορφή ή ποιές εξισώσεις αποφασίζουμε να κρατήσουμε στο σύστημα και ποιές όχι ανεξαρτήτως ισοδυναμιών μεταξύ τους και ουσιαστικής διαφοράς καμίας για την συνολική εικόνα της ανάλυσης που επιχειρείται στην παρούσα εργασία. Ο σκοπός εξ' αρχής ήταν να απλοποιηθεί το σύστημα που προέκυψε αρχικά από την γραμμικοποίηση μέσω της διαδικασίας να εκφραστούν όλα τα άγνωστα μεγέθη συναρτήσει των ϖ , δv_ϖ , $\delta\Pi$.

Ύστερα από όλα τα προηγούμενα έχουν προκύψει έξι αλγεβρικές εξισώσεις των μεγεθών $\delta\rho/\rho_0$, δB_z , $i\delta B_\varpi$, δB_ϕ , δv_ϖ , δv_z και οι υπόλοιπες δύο οι οποίες είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις των μεγεθών δv_ϖ , $\delta\Pi$.

Το σύστημα λοιπόν των διαφορικών εξισώσεων προς αριθμητική ολοκλήρωση έχει την μορφή:

$$\frac{d}{d\varpi} \begin{pmatrix} i\varpi\delta v_\varpi \\ \delta\Pi \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\varpi\delta v_\varpi \\ \delta\Pi \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ή,} \quad \frac{d}{d\varpi} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.34)$$

όπου

$$y_1 = i\frac{\varpi\delta v_\varpi}{\omega_0}, \quad y_2 = \delta\Pi + \frac{y_1}{\varpi} \frac{d\Pi_0}{d\varpi}$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{11} &= \mathcal{C}_{11} + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{d\varpi} \mathcal{D} - \frac{1}{\varpi} \frac{d\Pi_0}{d\varpi} \frac{1}{\omega_0} \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{F}_{12} &= \frac{1}{\omega_0} \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} &= \omega_0 \mathcal{C}_{21} - \frac{d}{d\varpi} \left(\frac{1}{\varpi} \frac{d\Pi_0}{d\varpi} \right) \mathcal{D} + \frac{1}{\varpi} \frac{d\Pi_0}{d\varpi} (\mathcal{F}_{11} - \mathcal{C}_{22}) \\ \mathcal{F}_{22} &= \mathcal{C}_{22} + \frac{1}{\varpi} \frac{d\Pi_0}{d\varpi} \mathcal{F}_{22} \end{aligned}$$

Το μόνο που απομένει είναι να ορίσουμε τα μεγέθη \mathcal{C}_{ij} για $i, j = 1, 2$ ώστε να ολοκληρωθεί πλήρως η εικόνα για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων. Αφού το παραπάνω γραμμικό σύστημα είναι μη ομογενές μπορούμε με την μέθοδο Cramer να βρούμε τις ζητούμενες εκφράσεις ως:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{11} &= \begin{vmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -k & -\frac{m}{\varpi} & \frac{\rho_0'}{\varpi\rho_0} & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & -v'_{0z} & \frac{mB_{0\phi}}{\varpi} & -\frac{mB_{0z}}{\varpi} & \frac{B_{0z}}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 & -kB_{0\phi} & kB_{0z} & (\frac{B_{0\phi}}{\varpi})' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & \frac{k_B}{\varpi} & 0 \\ -\Gamma p_0 & -B_{0z} & -B_{0\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_B & 0 & -B'_{0z} & \omega_0\rho_0 & 0 & \frac{\rho_0 v'_{0z}}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & k_B & -\frac{(\varpi B_{0\phi})'}{\varpi} & 0 & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_{0\phi}}{\varpi} & k_B & 0 & 0 & \omega_0\frac{\rho_0}{\varpi} & -1 \end{vmatrix} \\
 \mathcal{C}_{12} &= \begin{vmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -k & -\frac{m}{\varpi} & \frac{1}{\varpi} & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & -v'_{0z} & \frac{mB_{0\phi}}{\varpi} & -\frac{mB_{0z}}{\varpi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 & -kB_{0\phi} & kB_{0z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma p_0 & -B_{0z} & -B_{0\phi} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_B & 0 & -B'_{0z} & \omega_0\rho_0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k_B & -\frac{(\varpi B_{0\phi})'}{\varpi} & 0 & \omega_0\rho_0 & -\frac{m}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_{0\phi}}{\varpi} & k_B & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 \mathcal{C}_{21} &= \begin{vmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -k & -\frac{m}{\varpi} & \frac{1}{\varpi} & \frac{\rho_0'}{\varpi\rho_0} \\ 0 & \omega_0 & 0 & -v'_{0z} & \frac{mB_{0\phi}}{\varpi} & -\frac{mB_{0z}}{\varpi} & \frac{B_{0z}}{\varpi} & \frac{B'_{0z}}{\varpi} \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 & -kB_{0\phi} & kB_{0z} & \frac{B_{0\phi}}{\varpi} & (\frac{B_{0\phi}}{\varpi})' \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_B}{\varpi} \\ -\Gamma p_0 & -B_{0z} & -B_{0\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_B & 0 & -B'_{0z} & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 & \frac{\rho_0 v'_{0z}}{\varpi} \\ 0 & 0 & k_B & -\frac{(\varpi B_{0\phi})'}{\varpi} & 0 & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_{0\phi}}{\varpi} & k_B & 0 & 0 & 0 & \omega_0\frac{\rho_0}{\varpi} \end{vmatrix} \\
 \mathcal{C}_{22} &= \begin{vmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -k & -\frac{m}{\varpi} & \frac{1}{\varpi} & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & -v'_{0z} & \frac{mB_{0\phi}}{\varpi} & -\frac{mB_{0z}}{\varpi} & \frac{B_{0z}}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 & -kB_{0\phi} & kB_{0z} & \frac{B_{0\phi}}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma p_0 & -B_{0z} & -B_{0\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_B & 0 & -B'_{0z} & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & k_B & -\frac{(\varpi B_{0\phi})'}{\varpi} & 0 & \omega_0\rho_0 & 0 & -\frac{m}{\varpi} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_{0\phi}}{\varpi} & k_B & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 \mathcal{D} &= \begin{vmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -k & -\frac{m}{\varpi} & \frac{1}{\varpi} & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & -v'_{0z} & \frac{mB_{0\phi}}{\varpi} & -\frac{mB_{0z}}{\varpi} & \frac{B_{0z}}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 & -kB_{0\phi} & kB_{0z} & \frac{B_{0\phi}}{\varpi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma p_0 & -B_{0z} & -B_{0\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_B & 0 & -B'_{0z} & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_B & -\frac{(\varpi B_{0\phi})'}{\varpi} & 0 & \omega_0\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_{0\phi}}{\varpi} & k_B & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Με τις τελευταίες σχέσεις έχει καλυφθεί πλήρως το ζήτημα των διαφορικών εξισώσεων, όσο και του συστήματος των εξισώσεων εν γένει που χρειάζονται για την διεκπεραίωση των αριθμητικών ολοκληρώσεων. Να σημειωθεί πως η άνωθεν δομή στην ανάλυση και παρουσίαση των εξισώσεων όσο και των πινάκων παρουσιάστηκε αρχικά στην εργασία [Vlahakis], όπου συναντάται και η ολοκληρωμένη σχετικιστική ανάλυση στην ευστάθεια μαγνητισμένων πιδάκων μέσω γραμμικοποίησης των εξισώσεων.

Ο αλγόριθμος της αριθμητικής ολοκλήρωσης δόθηκε από τον επιβλέποντα της εργασίας κ. Βλαχάκη Νεκτάριο, ο οποίος τον ανέπτυξε στα πλαίσια παλαιότερης δουλειάς του πάνω στην ευστάθεια πιδάκων [Vlahakis].

2.1.3 Περιβάλλον του πίδακα

Στο παρόν τμήμα της εργασίας θα παρουσιαστεί η διαδικασία γραμμικοποίησης του περιβάλλοντος του πίδακα. Σκοπός είναι να βρεθούν οι κατανομές κυρίως στην πίεση, άρα και στην πυκνότητα ώστε να χρησιμοποιηθούν παρακάτω στις συνοριακές συνθήκες, απαραίτητες για την διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Το περιβάλλον του πίδακα είναι στατικό, ομογενές χωρίς μαγνητικά πεδία και με σταθερή πυκνότητα και πίεση. Δηλαδή, ισχύει ότι $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\rho = \rho_\alpha$, $p = p_\alpha$. Τα μεγέθη ρ_α και p_α λαμβάνουν σταθερή τιμή για οποιοδήποτε σημείο εκτός του πίδακα.

Περνώντας στην διαδικασία της γραμμικοποίησης του εξωτερικού περιβάλλοντος θα ανατρέξουμε στο κομμάτι της γραμμικοποίησης της εργασίας για το εσωτερικό του πίδακα. Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις των αρχικών εξισώσεων (2.21) έως και (2.23) καθώς και της πολυτροπικής εξίσωσης λαμβάνουν την μορφή:

$$(2.21) \rightarrow -i\omega\delta\rho = \frac{1}{\varpi}\rho_\alpha\frac{d(\varpi\delta v_\varpi)}{d\varpi} + \frac{i}{\varpi}m\rho_\alpha\delta v_\phi + ik\rho_\alpha\delta v_z = 0 \quad (2.35)$$

$$(2.22) \rightarrow (-i\omega)\rho_\alpha(\delta v_\varpi\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \delta v_z\hat{\boldsymbol{z}}) = -\frac{d\delta p}{d\varpi}\hat{\boldsymbol{\omega}} - \frac{i}{\varpi}m\delta p\hat{\boldsymbol{\phi}} - ik\delta p\hat{\boldsymbol{z}} \quad (2.36)$$

$$(2.23) \rightarrow (-i\omega)(\delta B_\varpi\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta B_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \delta B_z\hat{\boldsymbol{z}}) = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\delta p}{p_\alpha} = \Gamma\frac{\delta\rho}{\rho_\alpha} \quad (2.38)$$

Η τελευταία εξίσωση προέρχεται από την πολυτροπική εξίσωση γραμμικοποιημένη γύρω από τα μεγέθη ρ_α και p_α . Εν προκειμένω στην διαδικασία της γραμμικοποίησης για το εσωτερικό του πίδακα που βρίσκεται παραπάνω στην εργασία αρκεί κανείς να αντικαταστήσει στα αδιατάρακτα μεγέθη που εμφανίζονται τον δείκτη «0» με την δείκτη «α». Έτσι, οποιαδήποτε παραγωγή των μεγεθών ρ_α , p_α ισούται με μηδέν, ενώ όλες οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου όσο και της ταχύτητας είναι εκ προοιμίου μηδενικές. Με αυτή την διαδικασία πολύ εύκολα καταλήγει κανείς στις ακριβώς παραπάνω εξισώσεις.

Συνεχίζοντας αναλυτικά τις πράξεις αρχικά για την εξίσωση (2.36) ανά συνιστώσες έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}} &\rightarrow -i\omega\rho_\alpha\delta v_\varpi = -\frac{d v_\varpi}{d\varpi} \rightarrow i\omega\frac{d(\varpi\rho_\alpha\delta v_\varpi)}{d\varpi} = \frac{d}{d\varpi}\left(\varpi\frac{d\delta p}{d\varpi}\right) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &\rightarrow -i\omega\rho_\alpha\delta v_\phi = -\frac{i}{\varpi}m\delta p \rightarrow \rho_\alpha\delta v_\phi = \frac{m}{\varpi\omega}\delta p \\ \hat{\boldsymbol{z}} &\rightarrow -i\omega\rho_\alpha\delta v_z = -ik\delta p \rightarrow \rho_\alpha\delta v_z = \frac{k}{\varpi}\delta p \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις στην σχέση (2.35) μαζί και με την (2.38) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \frac{\rho_\alpha}{p_\alpha \Gamma} \delta p + \frac{1}{\varpi} \frac{1}{i\omega} \frac{d}{d\varpi} \left(\varpi \frac{d\delta p}{d\varpi} \right) + \frac{im^2}{\varpi^2 \omega} \delta p + \frac{ik^2}{\omega} \delta p = 0 \xrightarrow{i} \\
 & \omega \frac{\rho_\alpha}{p_\alpha \Gamma} \delta p + \frac{1}{\varpi \omega} \left(\frac{d\delta p}{d\varpi} + \varpi \frac{d^2 \delta p}{d\varpi^2} \right) - \frac{m^2}{\varpi^2 \omega} \delta p - \frac{k^2}{\omega} \delta p = 0 \xrightarrow{\cdot \varpi^2 \omega} \\
 & \varpi^2 \frac{d^2 \delta p}{d\varpi^2} + \varpi \frac{d\delta p}{d\varpi} + [\varpi^2 \left(\frac{\rho_\alpha}{p_\alpha \Gamma} \omega^2 - k^2 \right) - m^2] \delta p = 0 \rightarrow \\
 & \varpi^2 \frac{d^2 \delta p}{d\varpi^2} + \varpi \frac{d\delta p}{d\varpi} + [\varpi^2 \lambda^2 - m^2] \delta p = 0 \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση (2.39) που παράχθηκε ακριβώς από πάνω αποτελεί την έκφραση μίας οικογένειας τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel, όπου ορίσαμε το μέγεθος $\lambda^2 = \frac{\rho_\alpha}{p_\alpha \Gamma} \omega^2 - k^2$. Το λ είναι μιγαδικός αριθμός λόγω του ω το οποίο εξ' ορισμού είναι και αυτό μιγαδικός. Η συνάρτηση η οποία είναι λύση στην παραπάνω διαφορική ονομάζεται συνάρτηση Hankel ($H_m^{(1)}(\lambda \varpi)$) πρώτου είδους και επιλέγεται έναντι του δευτέρου είδους λόγω της ιδιότητας της στο άπειρο να λαμβάνει ασυμπτωτική μορφή $H_m^{(1)} \propto \varpi^{-1/2} \exp(i\lambda \varpi)$, αναπαριστώντας με αυτό τον τρόπο κύματα κινούμενα προς το άπειρο. Ακόμα, η διαταραχή της πίεσης ασυμπτωτικά γίνεται $\delta \Pi \propto \varpi^{-1/2} \exp(-\Im \lambda \varpi) \exp[i(\Re \lambda \varpi + m\phi + kz - \omega t)]$ οπότε για να συγκλίνει η λύση στο άπειρο πρέπει $\Im \lambda \geq 0$ [Vlahakis].

2.1.4 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες στο διαταραγμένο όριο του πίδακα απαιτούν την εξίσωση της συνολικής εξωτερικής πίεσης και της κάθετης μετατόπισης του πίδακα να έχουν την ίδια τιμή, με άλλα λόγια:

$$\delta \Pi^- = \delta \Pi^+ \tag{2.40}$$

$$\frac{\delta v_\varpi^-}{i\omega_0} = \frac{\delta v_\varpi^+}{i\omega} \tag{2.41}$$

Η πρώτη συνοριακή συνθήκη (2.40) συνδέει την συνολική διαταραχή στην πίεση στην ακτίνα του πίδακα από το εσωτερικό του, με το ίδιο μέγεθος πάλι στην ακτίνα του πίδακα από την μεριά του περιβάλλοντος. Οι δείκτες $-$, $+$ αυτό ακριβώς διαχωρίζουν, το $-$ αντιστοιχεί στο εσωτερικό του πίδακα ενώ το $+$ στο εξωτερικό περιβάλλον. Το ίδιο ισχύει και για την συνοριακή συνθήκη (2.41), όπου εδώ εξισώνονται οι Λανγκρατζιανές μετατοπίσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται από ακτινική κατεύθυνση.

Στην εργασία [Vlahakis] δείχνεται πώς η αντιστοιχία των παραπάνω συνοριακών συνθηκών ισοδυναμεί με την συνέχεια στο όριο του πίδακα των ιδιοσυναρτήσεων y_1, y_2 . Δηλαδή:

$$(2.41) \rightarrow y_1^- = y_1^+ \tag{2.42}$$

$$(2.40) \rightarrow y_2^- = y_2^+ \tag{2.43}$$

Μια διαδικασία που μπορούμε να ακολουθήσουμε για να απλουστευθεί ακόμα περισσότερο η διαδικασία είναι η ελευθερία που δίνεται σε μία από τις δύο λύσεις να πολλαπλασιαστεί με μία μιγαδική σταθερά, ώστε μία από τις μιγαδικές συνοριακές συνθήκες να ικανοποιούνται αυτόματα. Αυτό σημαίνει πως μας μένουν μόνο δύο πραγματικές συνοριακές συνθήκες (ή ισοδύναμα μία μιγαδική συνοριακή συνθήκη) που πρέπει να ικανοποιηθούν από τις τέσσερις (δύο πραγματικά και δύο φανταστικά μέρη των λύσεων) σχέσεις συνολικά.

Έτσι, χρησιμοποιώντας για την ολοκλήρωση την μέθοδο shooting για συγκεκριμένα k , m , \Re και \Im τα οποία έχουμε προσδιορίσει ως αρχικές τιμές στον αλγόριθμο, πραγματοποιούνται δύο ολοκληρώσεις. Μία η οποία εκκινά από τον άξονα του πίδακα έως την ακτίνα του πίδακα (ϖ_j), και μία δεύτερη, εν γένει, η οποία εκκινά από το άπειρο και σταματά στο ίδιο όριο της ακτίνας του πίδακα. Στην δική μας περίπτωση είχαμε την δυνατότητα να έχουμε αναλυτική έκφραση για το εξωτερικό του πίδακα. Το επόμενο βήμα για να γίνει δεκτή η λύση είναι όπως προείπαμε η συνέχεια των λύσεων στο όριο του πίδακα.

Γνωρίζουμε ότι μία λύση του συστήματος παραμένει λύση εάν πολλαπλασιαστεί με μία σταθερά, στην τωρινή περίπτωση απαιτείται πολλαπλασιασμός με μία μιγαδική σταθερά καθώς οι ιδιοσυναρτήσεις (λύσεις του συστήματος) είναι μιγαδικές. Να υπογραμμίσουμε ότι μπορούν να πολλαπλασιαστούν είτε οι λύσεις εντός του πίδακα είτε οι λύσεις του περιβάλλοντος, προτιμώντας να κάνουμε το δεύτερο ώστε να εναρμονιστούν οι εξωτερικές λύσεις με τις εσωτερικές. Εάν, λοιπόν, μετά την ολοκλήρωση έχουμε τις λύσεις του περιβάλλοντος της μορφής $y_{01}(\varpi)$, $y_{02}(\varpi)$ για $\varpi \geq \varpi_j$ με $y_{02}(\varpi_j) = g + if$ και η εντός του πίδακα λύση στο όριο $y_2(\varpi_j^-) = c + id$.

Πολλαπλασιάζοντας την εξωτερική λύση με σταθερά της μορφής $t + il$ απαιτώντας $y_2 = (t + il)y_{02}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} c + id &= (t + il) \cdot (g + if) \rightarrow \\ c + id &= (tg - lf) + i(gl + tf) \rightarrow \\ \begin{cases} c = tg - lf \\ d = gl + tf \end{cases} \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη συνάρτηση της αγκύλης ως προς ℓ έχουμε:

$$\ell = \frac{tg - c}{f}$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην έκφραση του d έχουμε:

$$\begin{aligned} d &= g \frac{tg - c}{f} + tf \rightarrow \\ df &= g^2 t - gc + tf^2 \rightarrow \\ t &= \frac{df + gc}{g^2 + f^2} \end{aligned}$$

Τέλος, αντικαθιστούμε την παραπάνω έκφραση του t στην σχέση του ℓ :

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\frac{fd+gc}{g^2+f^2}g - c}{f} \rightarrow \\ \ell &= \frac{(fd + gc)g - c(g^2 + f^2)}{f(g^2 + f^2)} \rightarrow \\ \ell &= \frac{fdg + g^2c - g^2c - cf^2}{f(g^2 + f^2)} \rightarrow \\ \ell &= \frac{dg - cf}{g^2 + f^2} \end{aligned}$$

Οπότε, βρίσκοντας τις ακριβείς εκφράσεις για τα t , ℓ οι λύσεις παίρνουν την μορφή:

$$y_1 = \frac{cg + fd + i(dg - cf)}{g^2 + f^2} y_{01}$$

$$y_2 = \frac{cg + fd + i(dg - cf)}{g^2 + f^2} y_{02}$$

οι οποίες ικανοποιούν απευθείας τις ζητούμενες συνθήκες $\Re y_2^- = \Re y_2^+$ και $\Im y_2^- = \Im y_2^+$. Οι αντίστοιχες συνθήκες για τη λύση y_1 γράφονται ως:

$$\Re y_1(\varpi = \varpi_j^-) = \frac{cg + fd}{g^2 + f^2} \Re y_{01}(\varpi = \varpi_j) - \frac{dg - cf}{g^2 + f^2} \Im y_{01}(\varpi = \varpi_j)$$

$$\Im y_1(\varpi = \varpi_j^-) = \frac{cg + fd}{g^2 + f^2} \Im y_{01}(\varpi = \varpi_j) - \frac{dg - cf}{g^2 + f^2} \Re y_{01}(\varpi = \varpi_j)$$

2.1.5 Σχετικιστική επέκταση

Η σχετικιστική επέκταση αποτελείται από όλες τις παραπάνω διεργασίες μόνο που οι σχέσεις που θα εμπλέκονται είναι αυτές της σχετικιστικής μαγνητοϋδροδυναμικής. Μία τέτοια διαδικασία είναι σαφώς πληρέστερη της παραπάνω αφού στο όριο για μη σχετικιστικές ταχύτητες, οι σχετικιστικές εξισώσεις αντιστοιχίζονται στις μη σχετικιστικές όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω για το ίδιο πρόβλημα [Vlahakis]. Η αναλυτική δουλειά στις σχετικιστικές εξισώσεις, με πληθώρα υποπεριπτώσεων προβλημάτων (εμπλεκόμενες συνιστώσες μαγνητικών πεδίων, εμπλεκόμενες συνιστώσες ταχυτήτων, κρύες ροές κλπ.) βρίσκονται στην εργασία [Vlahakis].

Μπορούμε να προσπεράσουμε, παρόλα αυτά, μία τέτοια μακροσκελή και κοπιώδη ανάλυση σκοπόμενοι έξυπνα και κάνοντας χρήση της ιδιότητας του προφίλ ταχύτητας που θα χρησιμοποιήσουμε. Στις ολοκληρώσεις που θα ακολουθήσουν το προφίλ της ταχύτητας που θα χρησιμοποιηθεί για το εσωτερικό του πίδακα δεν παρουσιάζει αξονική εξάρτηση, άρα είναι σταθερού μέτρου και σταθερής κατεύθυνσης.

Το παραπάνω γεγονός μας επιτρέπει να μεταφερόμαστε από το σύστημα αναφοράς του πίδακα στο αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου, και το αντίστροφο, μέσω απλών μετασχηματισμών Lorentz κατά την φορά του άξονα του πίδακα, δηλαδή της διεύθυνσης \hat{z} .

Οπότε, για το εσωτερικό του πίδακα κάνοντας πάντα ένα μετασχηματισμό Lorentz μπορούμε να πάμε στο σύστημα όπου ο πίδακας είναι στατικός. Το παραπάνω σενάριο αποτελεί μία υποπερίπτωση της ανάλυσης που έχει προηγηθεί καθώς πλέον η ταχύτητα v_{0z} είναι μηδενική. Παρόλα αυτά, η ανάλυση δεν καθίσταται άκυρη από το συγκεκριμένο γεγονός καθώς οι μόνες επιπτώσεις στην δομή της ανάλυσης είναι πως $\omega_0 = \omega$ και πως όλα τα στοιχεία του πίνακα (2.33) που περιέχουν τον όρο v_{0z} μηδενίζονται. Ακολούθως αυτό συνεχίζεται και στις οριζουσες του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων χωρίς καμία περαιτέρω επιπλοκή.

Αντίστοιχα, πρέπει να υπάρξει και για το περιβάλλον ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Lorentz με την αντίθετη ταχύτητα. Η μελέτη του περιβάλλοντος όμως ακόμα και με τον μετασχηματισμό είναι απλή διότι στον εν λόγω χώρο δεν υπάρχουν ταχύτητες και μαγνητικά πεδία. Ακόμα, η πίεση και η πυκνότητα στο συγκινούμενο σύστημα ως βαθμωτά μεγέθη δεν επηρεάζονται από τον μετασχηματισμό Lorentz. Άρα, και οι ιδιοσυναρτήσεις παραμένουν και αυτές αναλλοίωτες, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες, αφού η μία παράγεται από την συνέχεια της διαταραχής της πίεσης στο όριο του πίδακα και η δεύτερη αφορά την διαταραχή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας στο ίδιο σημείο.

Η μόνη διαφορά που μπορούμε να εντοπίσουμε είναι στα μεγέθη ω και \mathbf{k} . Τα συγκεκριμένα μεγέθη δεν παραμένουν αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς Lorentz. Επειδή όμως ο μετασχηματισμός είναι τετριμμένος πάνω στο τετράνυσμα του κυματανύσματος, το οποίο ορίζεται ως $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\omega_{co} &= \gamma\omega + \gamma v_{0z}k \\ k_{co} &= \gamma v_{0z}\omega + \gamma k\end{aligned}$$

Ύστερα, από πράξεις μπορούμε να δείξουμε πως συνολικά για τον κυματαριθμό ισχύει:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{co} &= k_{co}\hat{\mathbf{z}} + \frac{m}{\varpi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \gamma v_{0z}\omega\hat{\mathbf{z}} + \gamma k\hat{\mathbf{z}} - k\hat{\mathbf{z}} + \underbrace{k\hat{\mathbf{z}} + \frac{m}{\varpi}\hat{\boldsymbol{\phi}}}_{\mathbf{k}} \\ &= \mathbf{k} + [\gamma v_{0z}\omega + (\gamma - 1)k]\hat{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{k} + \gamma \mathbf{v}_{0z} \left(\omega + \frac{\gamma - 1}{\gamma \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) \gamma v_{0z}^2} v_{0z} \right) \\ &= \mathbf{k} + \gamma \mathbf{v}_{0z} \left(\omega + \frac{\gamma}{\gamma + 1} v_{0z} k \right)\end{aligned}$$

Έτσι, με τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να μεταφερθούμε από το ένα σύστημα στο άλλο και να κάνουμε την αντίστοιχη ανάλυση χωρίς να είναι απαραίτητο όλο το θεωρητικό υπόβαθρο της γενικότερης των περιπτώσεων στο σχετικιστικό όριο, ορμώμενοι από το πλεονέκτημα του προφίλ ταχυτήτων που χρησιμοποιείται.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικές ολοκληρώσεις

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο που ακολουθεί τα θέματα που θα αναλυθούν είναι τα εξής:

- Επιλογή φυσικών μεγεθών και παραμέτρων
- Μεθοδολογία ολοκληρώσεων
- Αποτελέσματα

Στο πρώτο κύριο κομμάτι του κεφαλαίου θα αναφέρουμε αναλυτικά τις επιλογές των φυσικών μεγεθών που θα αποτελέσουν τα αδιατάρακτα μεγέθη στις διαφορικές εξισώσεις. Αυτή η επιλογή δεν είναι τυχαία αλλά βασίζεται σε πρότερη δουλειά σε ευστάθεια με τη χρήση των συγκεκριμένων μαγνητικών πεδίων [Gourgouliatos et al., 2012]. Η σημαντική διαφορά έγκειται στην μελέτη της ευστάθειας που επιχειρείται στη συγκεκριμένη εργασία από την αρχική μη σχετικιστική που έχει προηγηθεί [Kim et al., 2015].

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα γίνει μία αναφορά στην μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την διεκπεραίωση των αριθμητικών ολοκληρώσεων. Θα γίνει, εν προκειμένω, μία σύντομη και απλή περιγραφή της μεθοδολογίας της διαδικασίας των ολοκληρώσεων αυτής καθ' εαυτής, με μία έμφαση στην τεχνική πλευρά της εργασίας.

Τέλος, θα παρουσιαστούν τα ευρήματα της συγκεκριμένης διαδικασίας, με αναλυτικά διαγράμματα και κατάλληλο σχολιασμό τόσο πάνω στα αποτελέσματα όσο και σε οποιοδήποτε ενδιαφέρον θέμα προέκυψε κατά την διάρκεια της επεξεργασίας των αποτελεσμάτων.

3.0.1 Επιλογή φυσικών μεγεθών και παραμέτρων

Ξεκινάμε με την πρώτη θεματική ενότητα του κεφαλαίου, η οποία εξηγεί την επιλογή των φυσικών μεγεθών (λόγου χάριν τα αδιατάρακτα μαγνητικά πεδία) καθώς και την φιλοσοφία γύρω από την οριοθέτηση των στόχων των ολοκληρώσεων.

Αρχικά, πρέπει να αναφερθεί ότι ως εργασία αναφοράς και πηγή των ήδη υπάρχοντων μη σχετικιστικών αποτελεσμάτων έχουμε την εργασία [Kim et al., 2015]. Η χρησιμότητα αυτού έγκειται στο γεγονός ότι θα δανειστούμε την επιλογή των παραμέτρων για το μη σχετικιστικό όριο των [Kim et al., 2015], ύστερα θα δοκιμάσουμε να αναπαράγουμε τα αποτελέσματα στο μη σχετικιστικό όριο ώστε να πειστούμε ότι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται στα πλαίσια της εργασίας δεν περιέχει κάποιο σφάλμα στην δομή του, και ύστερα θα επεκτείνουμε σταδιακά σε σχετικιστικές ταχύτητες.

Εν προκειμένω οι [Kim et al., 2015] χρησιμοποιούν ως προφίλ μαγνητικών πεδίων χωρίς επιφανειακά ρεύματα και προφίλ πίεσης τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
B_\phi(\varpi) &= \gamma \left[c_p \alpha_p J_1(\alpha_p) - \frac{F_p \varpi}{\alpha_p} \right] \\
B_z(\varpi) &= c_p \alpha_p J_0(\alpha_p \varpi) - \frac{2F_p}{\alpha_p^2} \\
p(\varpi) &= \frac{1}{4\pi} F_p \left[c_p \varpi J_1(\alpha_p \varpi) - \frac{F_p \varpi^2}{\alpha_p^2} \right] + p_{p,0}
\end{aligned}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι τα παραπάνω πεδία παράγονται από την γενικευμένη ροή G_p στην εργασία των [Gourgouliatos et al., 2012], με $\alpha_p = 5.14$, $c_p = 0.172$ και $F_p = -1.54$. Εάν κάποιος θελήσει αυτά τα πεδία να τα χρησιμοποιήσεις στο μη σχετικιστικό όριο αρκεί το γεγονός ότι για $v_{0z} \ll c$ το $\gamma \rightarrow 1$. Δηλαδή μόνο η ϕ συνιστώσα στα πλαίσια των πεδίων θα έχει διαφορά ανάμεσα στο σχετικιστικό και μη σχετικιστικό όριο.

Επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν στην διαδικασία των ολοκληρώσεων. Το πρώτο στο οποίο θα κάνουμε αναφορά είναι το προφίλ ταχυτήτων εντός του πίδακα. Υπενθυμίζεται πως το προφίλ ταχυτήτων είναι ομογενές και σταθερό εντός του πίδακα και μηδενικό έξω από αυτόν, όπως αναφέρεται και στο [Kim et al., 2015] γίνεται χρήση των λεγομένων προφίλ ταχυτήτων "top hat".

Επόμενες παράμετροι προς καθορισμό είναι ο λόγος πυκνότητας του πίδακα ως προς την πυκνότητα του εξωτερικού χώρου καθορισμένο στον άξονα του πίδακα ($\eta = \frac{\rho_i}{\rho_\alpha}$), το οποίο λαμβάνει την τιμή $\eta = 0.1$. Ύστερα, το ρ_α σταθεροποιείται σε τέτοια τιμή που αντιστοιχεί για το M (αριθμός Mach) στην τιμή 4 για το σύστημα αναφοράς. Τέλος, η τελευταία ανεξάρτητη παράμετρος που θα λάβει τιμή είναι η παράμετρος β του πλάσματος ($\beta = \frac{8\pi p_0}{B_{co}^2}$) με όλα τα μεγέθη μετρούμενα στον άξονα του πίδακα πάντα. Η τιμή που του δίδεται είναι η $\beta = 1/4$.

Ορμώμενοι από τις τιμές που δόθηκαν στα παραπάνω μεγέθη ως δεδομένα μπορούμε να βρούμε και τις τιμές των υπόλοιπων μεγεθών που μας ενδιαφέρουν πάνω στον άξονα του πίδακα ($\varpi = 0$). Ξεκινώντας από την σχέση που δίνει τον αριθμό Mach μπορούμε να βρούμε την σταθερά ρ_{axis} , την πυκνότητα στον άξονα του πίδακα. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{v_{0z}^2}{C_{sound}^2} \rightarrow \\
M^2 &= c^2 \frac{1 - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{\Gamma p_0}{\rho_{axis}}} \rightarrow \\
\rho_{axis} &= \frac{\Gamma p_0 M^2}{(1 - \frac{1}{\gamma^2}) c^2}
\end{aligned}$$

όπου Γ ο πολυτροπικός δείκτης και γ ο παράγοντας Lorentz. Ακολούθως, έχουμε τον προσδιορισμό της σταθεράς p_0 στην εξίσωση της πίεσης. Για να κάνουμε αυτό τον υπολογισμό ξεκινάμε από την σχέση που προσδιορίζει την παράμετρο β του πλάσματος έχοντας:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{8\pi p_0}{B_{co}^2(\varpi = 0)} = \frac{8\pi p_0}{B_z^2(\varpi = 0)} \xrightarrow{B_z^2(\varpi=0)=1} \\
p_0 &= \frac{\beta}{8\pi}
\end{aligned}$$

Τέλος η κατανομή της πυκνότητας εντός του πίδακα είναι μέσω της καταστατικής εξίσωσης:

$$\frac{p}{\rho^\Gamma} = \frac{p_0}{\rho_{axis}^\Gamma} \rightarrow$$

$$\rho = \rho_{axis} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\Gamma}}$$

Θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση τις εκφράσεις για τα μεγέθη ρ_{axis} , p_0 και p που έχουν καταγραφεί παραπάνω τότε εύκολα έχουμε και την αναλυτική έκφραση της πυκνότητας εντός του πίδακα.

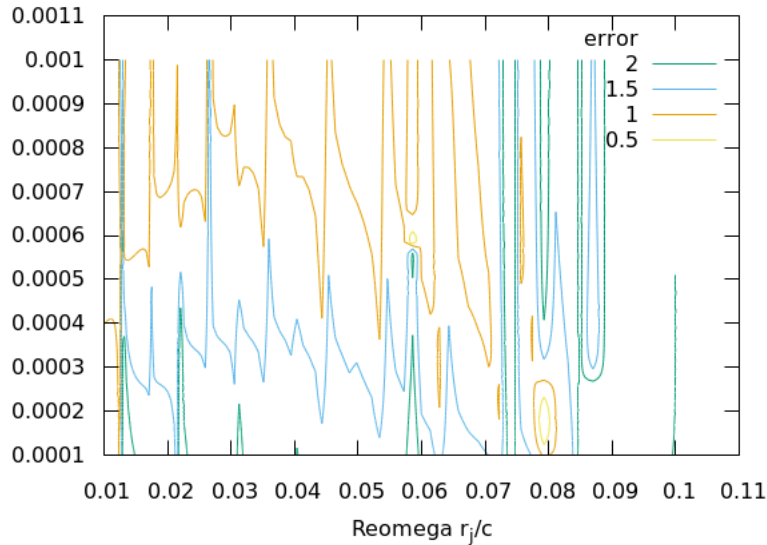
Όσον αφορά το εξωτερικό περιβάλλον το μόνο μέγεθος που έχουμε να προσδιορίσουμε είναι η πυκνότητα του περιβάλλοντος η οποία ισούται με ρ_{axis}/η . Ο πολυτροπικός δείκτης τόσο του πίδακα όσο και του περιβάλλοντος ισούται με 5/3 και ο παράγοντας Lorentz γ θα λαμβάνει τις επιθυμητές τιμές για την εκάστοτε ολοκλήρωση.

3.0.2 Μεθοδολογία ολοκληρώσεων

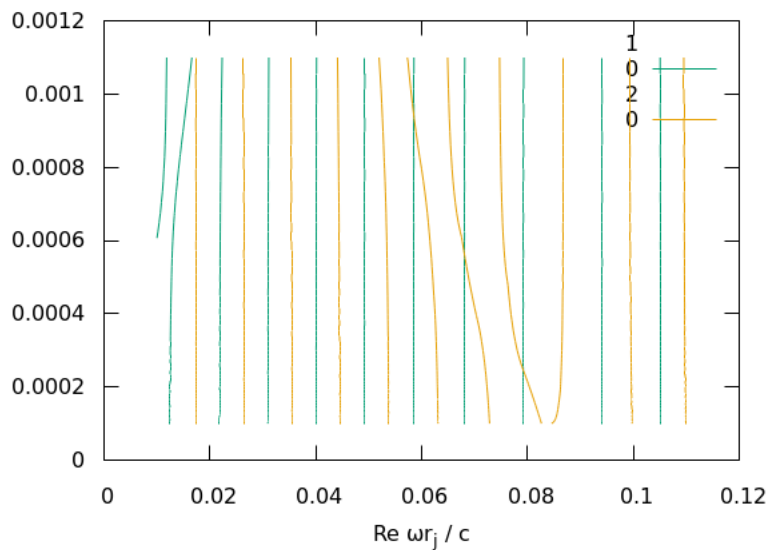
Όπως προαναφέρθηκε παραπάνω στο συγκεκριμένο χωρίο θα γίνει μία σύντομη αλλά περιεκτική περιγραφή της μεθόδου που ακολουθήθηκε για την επιτυχή ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων. Ο αλγόριθμος ο οποίος αναπτύχθηκε από τον κ. Βλαχάκη [Vlahakis] βασίζεται στις λεγόμενες μεθόδους shooting, δηλαδή ο χρήστης του αλγορίθμου επιλέγει τις αρχικές τιμές των μεγεθών προς ολοκλήρωση που θεωρεί πως είναι και λύσεις των εξισώσεων του, και αφήνει στον αλγόριθμο την ευθύνη της ολοκλήρωσης και του ελέγχου αν οι τιμές αυτές ανήκουν όντως σε λύση του συστήματός του.

Η πρώτη φάση στην διαδικασία μίας ολοκλήρωσης είναι να σαρώσουμε ένα χωρίο του συνολικού χώρου (\mathbb{R}^3 , \mathbb{Z}^3) για ένα συγκεκριμένο κυματαριθμό \mathbf{k} . Ο αλγόριθμος αφού σαρώσει το χωρίο ανάλογα με τον συνολικό αριθμό σημείων που του έχουμε ορίσει για την διάτμησή του, ελέγχει εάν οι ιδιοσυναρτήσεις του εσωτερικού του πίδακα και του εξωτερικού περιβάλλοντος στο όριο παρουσιάζουν την κατάλληλη συνέχεια.

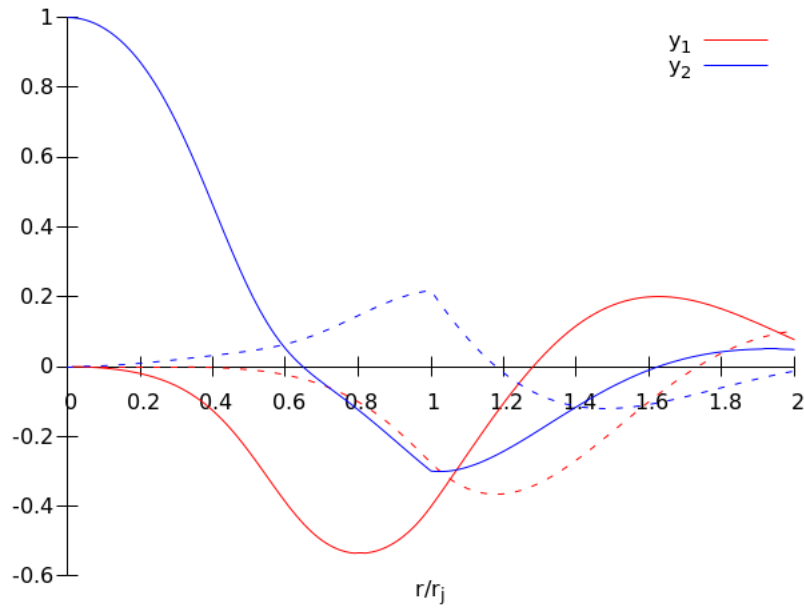
Ένας τρόπος για να το δει κανείς αυτό είναι να δημιουργήσει την διαφορά των τιμών των ιδιοσυναρτήσεων στην ακτίνα του πίδακα και αν αυτές οι τιμές είναι μηδενικές ή έστω τείνουν έντονα στο μηδέν το σημείο αυτό έχει τις προδιαγραφές να αποτελεί ζεύγος τιμών το οποίο ανήκει σε μία συγκεκριμένη λύση γενικότερα. Ακολουθούν χαρακτηριστικά διαγράμματα όλων των παραπάνω για την καλύτερη κατανόησή τους.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα όπου στον κατακόρυφο άξονα έχουμε το $\Im\omega$ και στον οριζόντιο $\Re\omega$ για $k = 0.1$, $m = 0$ και $\gamma = 2$. Οι γραμμές του διαγράμματος απεικονίζουν τη διαφορά των ιδιοσυναρτήσεων στο εσωτερικό του πίδακα από τις τιμές στο εξωτερικό του. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα στην κάτω δεξιά γωνία υπάρχει περιοχή με τις τιμές να τείνουν στο μηδέν, σε μία «βύθιση» που κρύβει σημείο που υπάρχει σε λύση που επιθυμούμε να βρούμε.



Σχήμα 3.2: Το διάγραμμα δείχνει στο χωρίο $(\Re\omega, \Im\omega)$ τις καμπύλες πάνω στις οποίες η διαφορά των ιδιοσυναρτήσεων εντός και εκτός του πίδακα στο όριο του είναι μηδενική. Η πράσινη γραμμή αφορά την y_1 και η πορτοκαλί την y_2 . Τα σημεία τομής τους προσδιορίζουν τα σημεία του χωρίου τα οποία μπορεί να αποτελούν λύση του συστήματος.

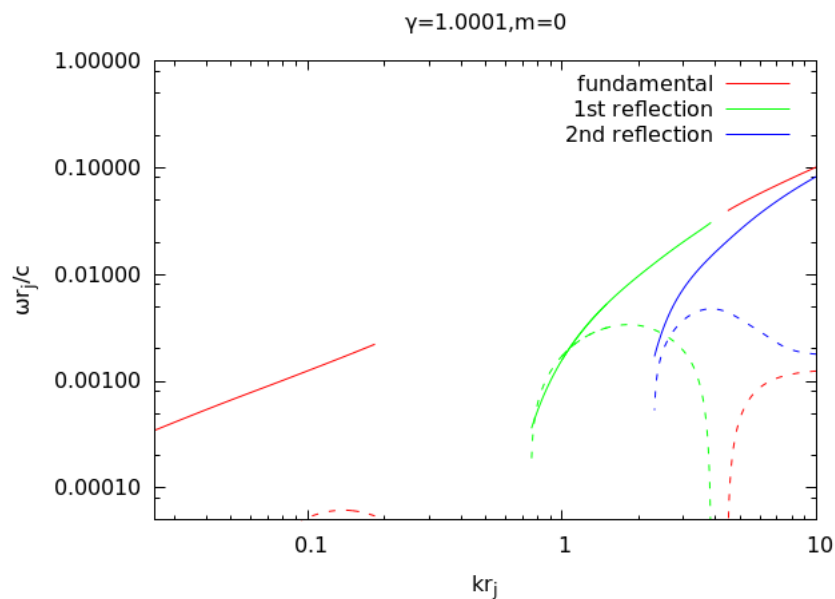


Σχήμα 3.3: Διάγραμμα όπου παρουσιάζονται οι ολοκληρωμένες ιδιοσυναρτήσεις μέχρι το όριο του πίδακα ($\varpi < 1$) και οι Hankel του κατάλληλου είδους για την υπόλοιπη περιοχή ($\varpi > 1$). Με συνεχή γραμμή έχουμε τα πραγματικά μέρη των ιδιοσυναρτήσεων και με διακεκομμένα τα αντίστοιχα φανταστικά, ενώ με κόκκινο χρώμα έχουμε την πρώτη ιδιοσυνάρτηση και με μπλε την δεύτερη. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα παρουσιάζεται μία ιδιοσυνάρτηση ισχύουσας λύσης με την μετάβαση στο όριο του πίδακα να παρουσιάζει τόσο ομαλότητα όσο και την απαιτούμενη συνέχεια.

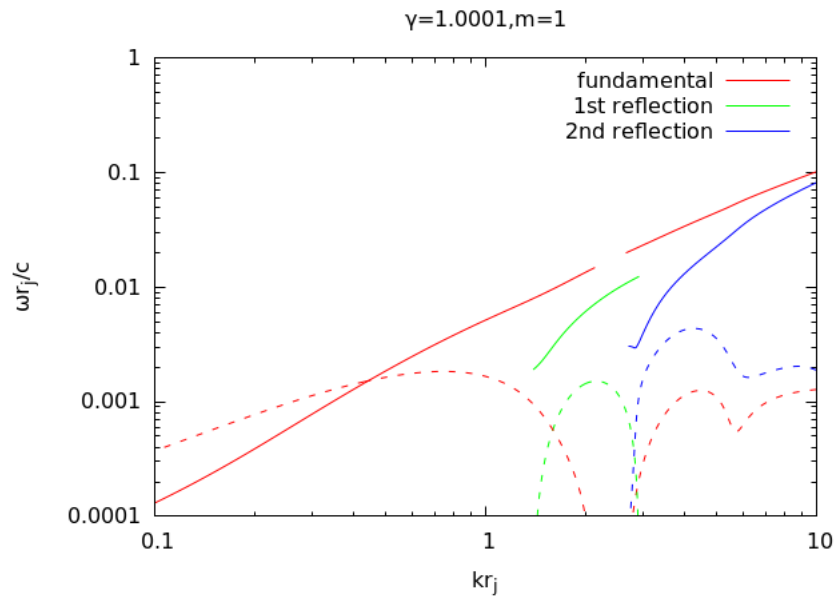
3.0.3 Αποτελέσματα

3.0.3.1 Σχέσεις διασποράς

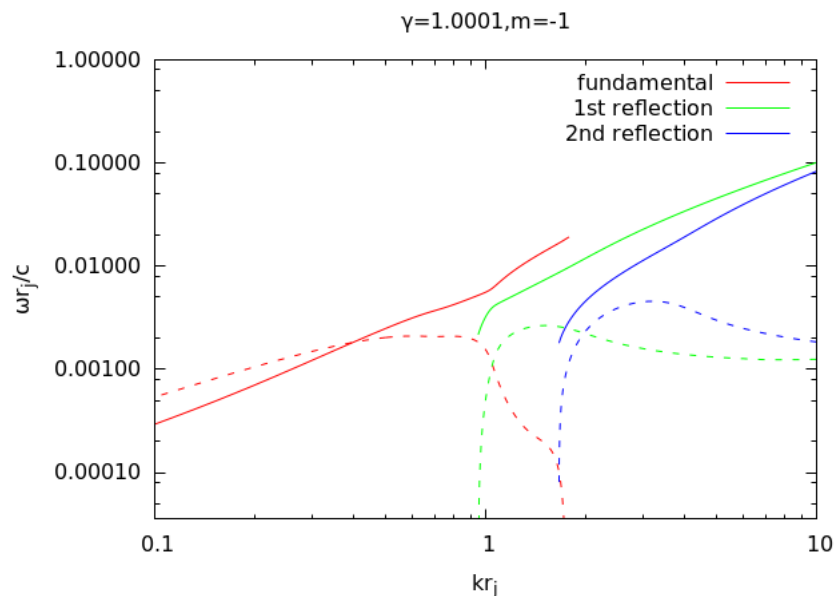
Πλέον ύστερα από όλα όσα προαναφέρθηκαν παραπάνω είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Αρχικά θα επικεντρωθούμε στα βασικότερα των διαγραμμάτων, στις σχέσεις διασποράς του ω (πραγματικό και φανταστικό μέρος) συναρτήσει του k . Συνεχίζοντας την προηγούμενη σύμβαση, σημειώνουμε πώς τα πραγματικά μέρη στα διαγράμματα των μεγεθών παρουσιάζονται από συνεχείς γραμμές, ενώ τα φανταστικά μέρη από διακεκομμένες. Το πρώτα διαγράμματα θα αντληθούν από την εργασία των [Kim et al., 2015] και αφορούν μη σχετικιστική ταχύτητα παράγοντα Lorentz $\gamma = 0.0001$ (η τιμή του παράγοντα Lorentz επιλέχθηκε να έχει την προηγούμενη τιμή χωρίς βλάβη της γενικότητας) και τις τιμές του $m = -1, 0, 1$. Στην εργασία των [Kim et al., 2015] δεν υπάρχει μελέτη για $m = -1$ κάτι που συμπληρώνει η παρούσα εργασία. Ακολουθούν τα διαγράμματα:



Σχήμα 3.4: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.0001$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.5: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.0001$ και $m = 1$.



Σχήμα 3.6: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.0001$ και $m = -1$.

Τα παραπάνω σχεδιαγράμματα λοιπόν όπως προαναφέραμε αποτελούν τις σχέσεις διασποράς για τις τρεις πρώτες ταλαντώσεις των ιδιοκαταστάσεων. Η θεμελιώδης ταλάντωση ή αλλιώς fundamental καθώς και οι δύο επόμενες, πρώτη και δεύτερη αρμονική ή 1st reflection, 2nd reflection προσπαθούν να δημιουργήσουν την αναγωγή στο γνωστό πρόβλημα της ταλάντωσης μιας χορδής χωρίς κατ' ανάγκη η αντιστοιχία να είναι ένα προς ένα. Με άλλα λόγια, η παραπάνω ονοματοθεσία στους ξεχωριστούς τρόπους ταλάντωσης αποτελεί μία σύμβαση ώστε να μπορούμε να διαχωρίσουμε στην ανάλυση την κάθε ταλάντωση ξεχωριστά, χωρίς να υπάρχει και η αντίστοιχη φυσική σημασία. Εκτενέστερη αναφορά στο ζήτημα των ιδιοσυναρτήσεων θα ακολουθήσει σε συγκεκριμένη ενότητα στην συνέχεια της εργασίας.

Όσον αφορά τις σχέσεις διασποράς, παρατηρούμε πως για $m = 0$ στα μικρά k υπάρχει μόνο η θεμελιώδης ταλάντωση (όταν θα μιλάμε για ύπαρξη ιδιοταλάντωσης, εννοείται ιδιοταλάντωση με

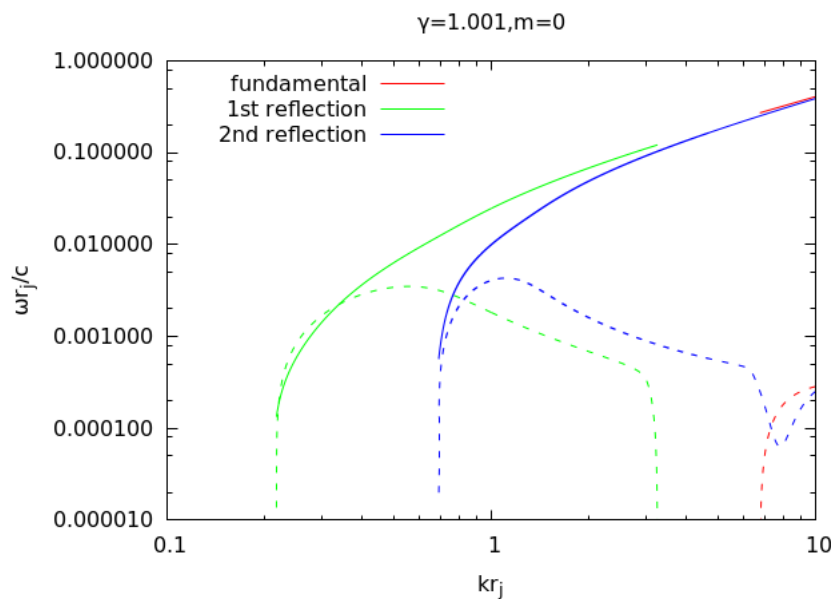
θετικό $\Im\omega$, γεγονός που οδηγεί σε αστάθεια) η οποία σαν διαταραχή επανεμφανίζεται σε $k \sim 5-10$ ενώ οι υπόλοιπες ταλαντώσεις έχουν μόνο παρουσία σε $k \gtrsim 1$. Τα μέγιστα πλάτη του φανταστικού μέρους, τα οποία καθορίζουν στην ουσία πόσο ασταθής είναι η κάθε είδους ταλάντωση, για τη θεμελιώδη δεν ξεπερνά το 10^{-3} ενώ οι υπόλοιπες κυμαίνονται στην τάξη του $5 \cdot 10^{-3}$, σε αδιάστατες μονάδες όπως αυτές παρουσιάζονται στους κάθετους άξονες των διαγραμμάτων.

Για $m = 1$ η σημαντική διαφορά είναι πως η παρουσία της θεμελιώδους ταλάντωσης είναι παρούσα σχεδόν σε όλο το εύρος του k , με εξαίρεση ένα εξαιρετικά μικρό παράθυρο κοντά στο $k \sim 1.5$. Επίσης, το μέγιστο πλάτος που παρουσιάζει μετατοπίστηκε σε μικρότερα k με περίπου ίδια τιμή. Ακόμα, το εύρος των k που υπάρχουν οι άλλες δύο ταλαντώσεις στο διάγραμμα είναι αισθητά μικρότερο ιδίως για την πρώτη αρμονική.

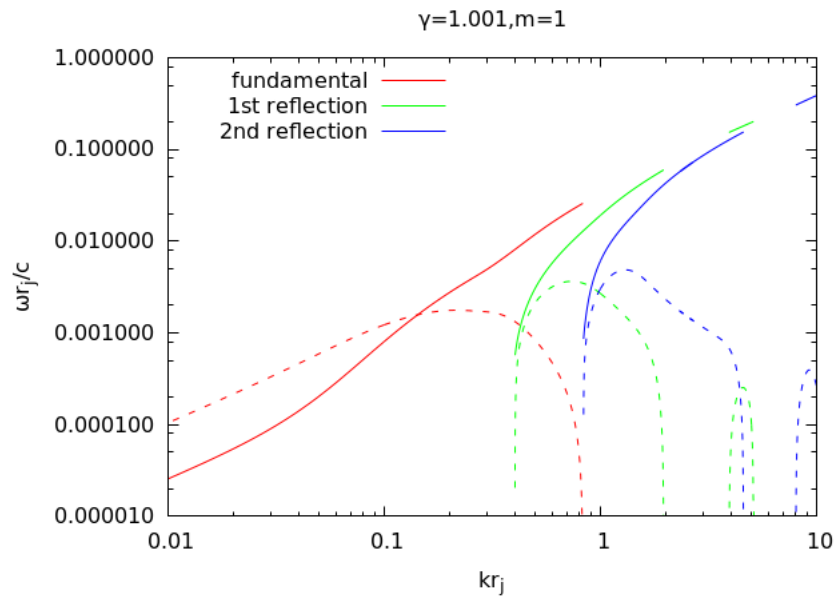
Τέλος, για την περίπτωση $m = -1$ έχουμε αστάθεια από την βασική ταλάντωση μόνο στο εύρος των μικρών k αφήνοντας μόνο τις υπόλοιπες δύο ταλαντώσεις στα μεγαλύτερα k . Τα πλάτη και εδώ κυμαίνονται στις ίδιες τιμές όσον αφορά την τάξη μεγέθους.

Η στρατηγική που ακολουθήθηκε προσπαθώντας να φτάσουμε σχετικιστικές ταχύτητες είναι η σταδιακή αύξησή της από μη σχετικιστικές [Kim et al., 2015], στο ενδιάμεσο εύρος ταχυτήτων και ύστερα στο σχετικιστικό όριο. Έτσι, μας δίδεται η δυνατότητα να είμαστε πιο ασφαλείς στα αποτελέσματα που παράγονται συγκρίνοντας με την ακριβώς προηγούμενη ταχύτητα. Ακόμα, μπορούμε να βγάλουμε ασφαλέστερα συμπεράσματα για την επίπτωση της αύξησης της ταχύτητας του πίδακα στην ευστάθεια του, έχοντας μεγαλύτερη γκάμα δεδομένων για αυτό τον σκοπό.

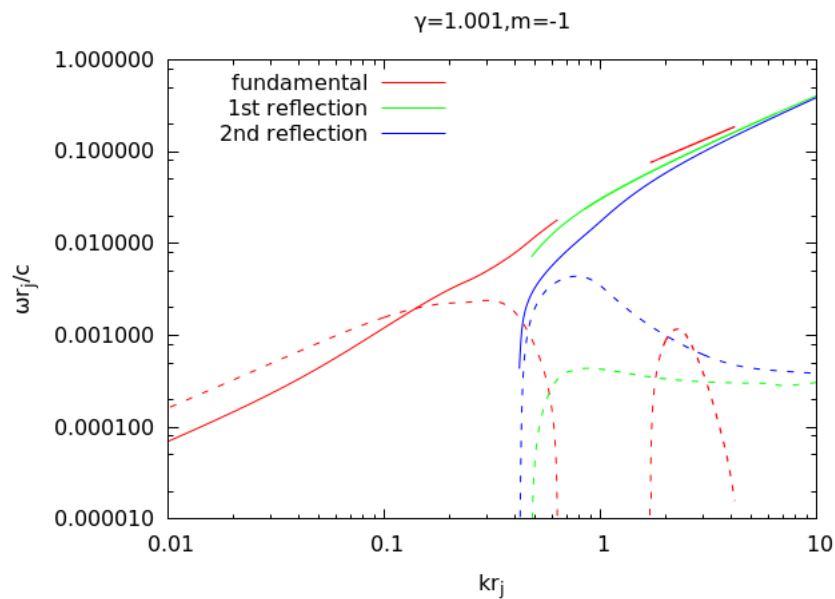
Οπότε, οι παράγοντες Lorentz που θα παρουσιαστούν παρακάτω παίρνουν τις τιμές $\gamma = 1.001, 1.01, 1.05, 1.25, 2, 5, 10$, οι οποίοι αντιστοιχούν σε 4.5%, 14%, 30%, 60%, 87%, 98%, 99.5% της ταχύτητας του φωτός αντίστοιχα. Ακολουθούν τα διαγράμματα για $\gamma = 1.001$:



Σχήμα 3.7: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.001$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.8: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.001$ και $m = 1$.



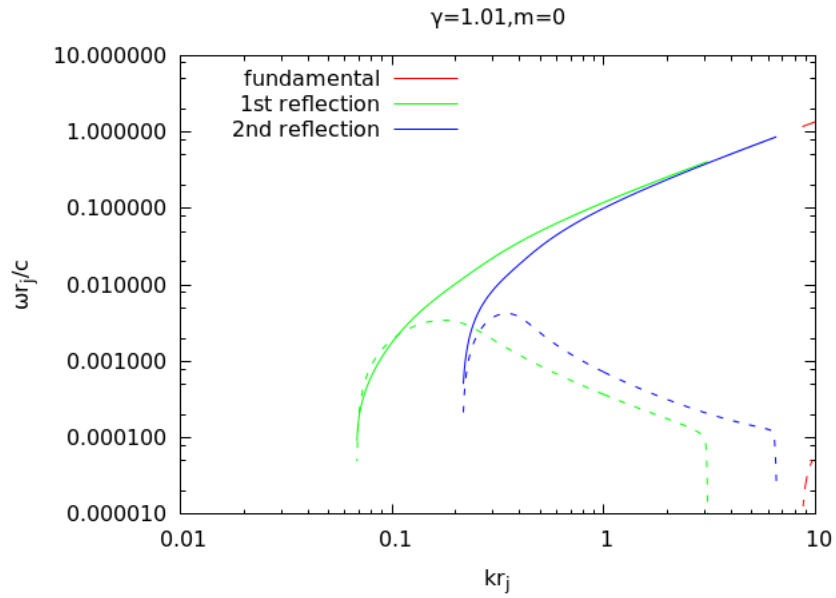
Σχήμα 3.9: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.001$ και $m = -1$.

Για $m = 0$ έχουμε πλέον μόνο στα $k \sim 9-10$ θεμελιώδη συνάρτηση, ενώ οι υπόλοιπες ταλαντώσεις επεκτείνονται προς μικρότερα k . Τα πλάτη των φανταστικών μερών δεν παρουσιάζουν κάποια σημαντική διαφορά εκτός από τη θεμελιώδη ταλάντωση που το μέγιστό της ελαττώνεται λίγο πιο χαμηλά από το 10^{-3} κάνοντάς την λίγο πιο ευσταθή.

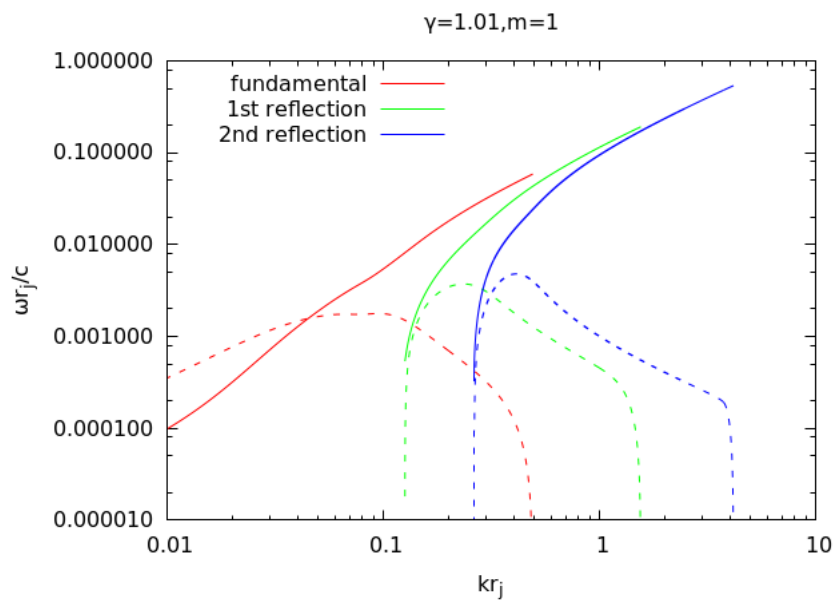
Για το $m = 1$ επικρατεί η αντίθετη εικόνα με την θεμελιώδη ταλάντωση να παραμένει μόνο στα μικρότερα k και τις υπόλοιπες δύο ταλαντώσεις να μειώνουν λίγο το εύρος της έκτασης τους. Να σημειωθεί ότι η δεύτερη αρμονική από ενιαίο κλάδο παρουσιάζει πλέον ένα κενό ευστάθειας σε $k \sim 5-8$ και την πρώτη αρμονική ένα ακόμη μικρό κλάδο σε $k \sim 4.5$. Τα πλάτη παραμένουν τα ίδια.

Για $m = -1$ η θεμελιώδης ταλάντωση αποκτά ένα κλάδο σε $k \sim 2-3$ και η πρώτη αρμονική γίνεται αρκετά πιο ευσταθής σε σχέση με το διάγραμμα της προηγούμενης ταχύτητας.

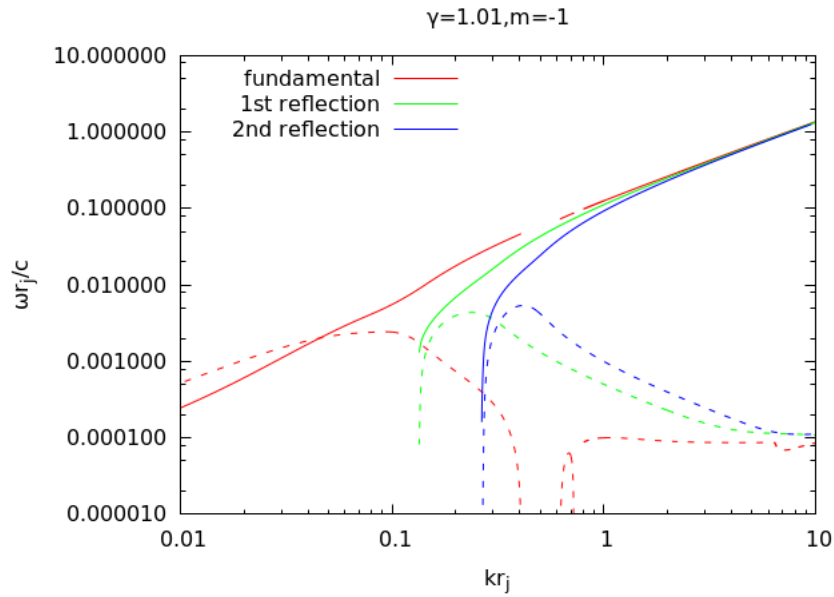
Ακολουθούν τα διαγράμματα για $\gamma = 1.01$:



Σχήμα 3.10: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.01$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.11: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.01$ και $m = 1$.



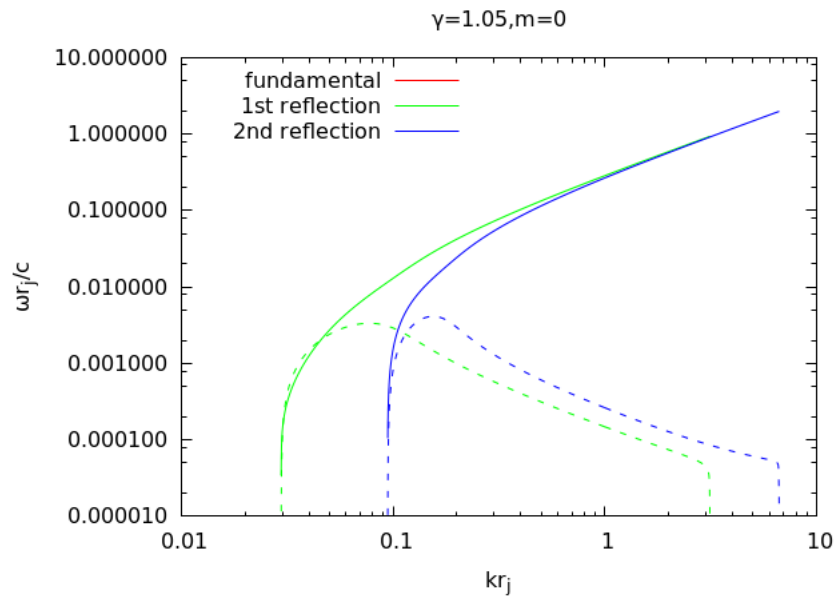
Σχήμα 3.12: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.01$ και $m = -1$.

Συνεχίζοντας μία πρώτη περιγραφή των αποτελεσμάτων παρατηρούμε πως, για $m = 0$ η θεμελιώδης ταλάντωση καταλαμβάνει όλο και λιγότερο χώρο κινούμενη προς $k > 10$ και μειούμενο πλάτος, μετατρέπόμενη σε όλο και πιο ευσταθή. Το πλάτος της πλέον είναι της τάξης του $5 - 8 \cdot 10^{-5}$, δηλαδή αρκετά ευσταθής. Οι άλλες δύο αρμονικές θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς πως είναι σχετικά αμετάβλητες.

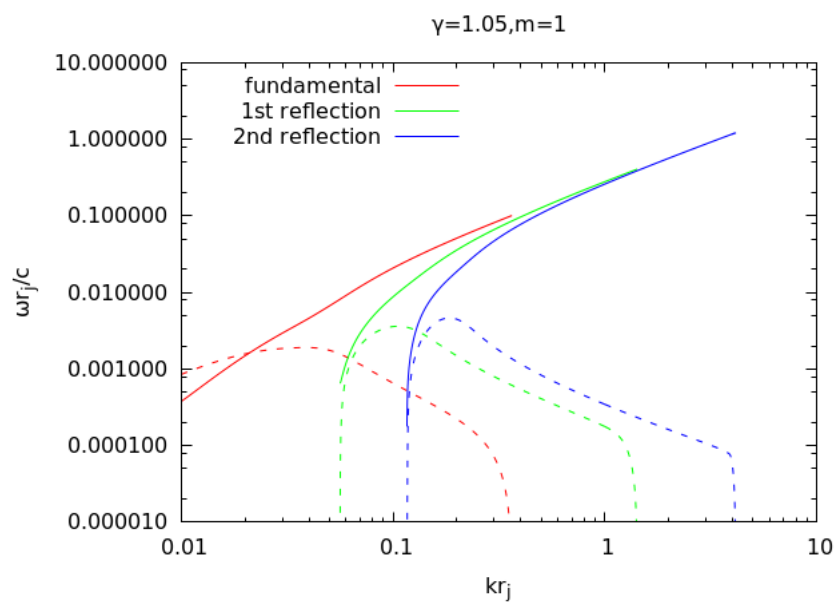
Για το $m = 1$ η εικόνα δεν παρουσιάζει διαφορές εκτός από τα μεγάλα k τα οποία πλέον προκύπτουν ευσταθή για $k \gtrsim 4$. Τα μέγιστα πλάτη των φανταστικών μερών του ω για κάθε ιδιοσυνάρτηση δεν παρουσιάζουν αλλαγή.

Για το $m = -1$ το πλάτος της πρώτης αρμονικής επανέρχεται σε συγκρίσιμη τιμή με αυτό της δεύτερης, επανερχόμενη σε τιμή ανάλογη που παρουσιάζεται στο αντίστοιχο διάγραμμα για $\gamma = 1.001$. Ο κλάδος αστάθειας που είχε παρουσιαστεί στο προηγούμενο διάγραμμα επεκτείνεται σε μεγάλο εύρος των μεγάλων k . Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να κάνουμε στα $k \sim 0.7 - 0.9$. Εκεί βλέπουμε μία νησίδα ξεχωριστή από το κυρίως σώμα του κλάδου. Μάλιστα ο κλάδος ο οποίος είναι συνεχής από το $k = 10$ μέχρι εκείνο το σημείο κατέστη σχεδόν μη ολοκληρώσιμος. Παρακάτω στην εργασία θα κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά σε τεχνικές λεπτομέρειες και δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την διάρκεια των ολοκληρώσεων θέτοντας ιδιαίτερος δυσεπίλυτα προβλήματα στην ροή της εργασίας.

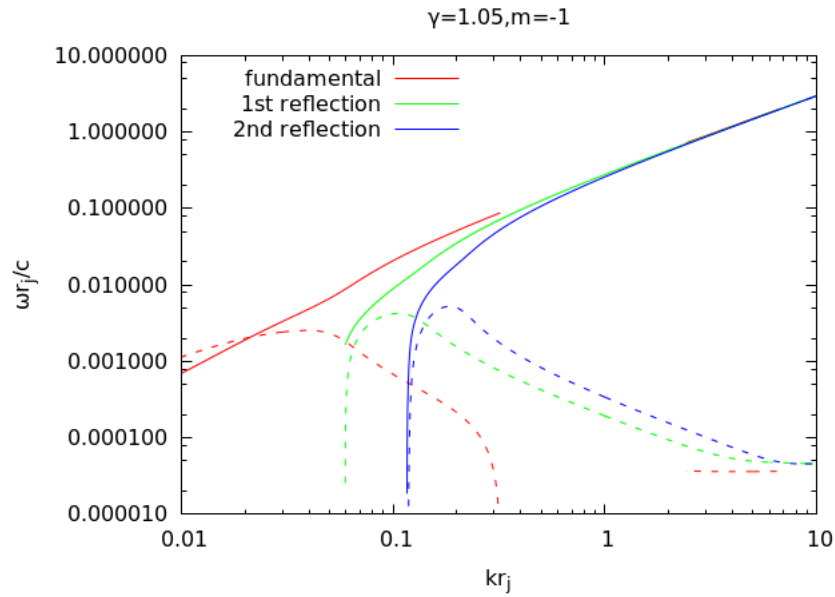
Συνεχίζουμε για ταχύτητες με παράγοντα Lorentz $\gamma = 1.05$:



Σχήμα 3.13: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.05$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.14: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.05$ και $m = 1$.



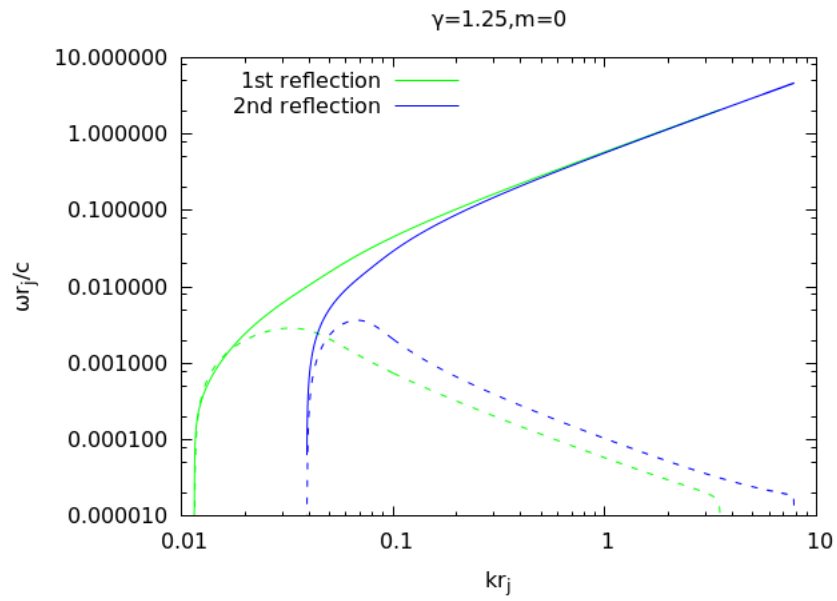
Σχήμα 3.15: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.05$ και $m = -1$.

Αρχίζοντας από το $m = 0$ διάγραμμα θα παρατηρήσει κανείς πως αν και υπάρχουν μόνο οι δύο αρμονικές χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές εκτός από το εύρος των τιμών που υπάρχουν οι κλάδοι τους και ελάχιστη ίσως διαφορά στο πλάτος της δεύτερης, δεν υπάρχει θεμελιώδης. Παρόλα αυτά στο υπόμνημα του διαγράμματος υπάρχει. Η εν λόγω κίνηση έγινε με σκοπό να σχολιαστεί το εξής, η θεμελιώδης ταλάντωση υπάρχει αλλά ευρίσκεται εκτός του ορίου του διαγράμματος προς $k > 10$. Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί τα όρια του διαγράμματος δεν επεκτείνονται. Αν μετρούσε κανείς το πλάτος του φανταστικού μέρους της θεμελιώδους ταλάντωσης θα σημείωνε τιμές κοντά στο 10^{-7} με 10^{-9} γεγονός που το καθιστά σχεδόν μηδενικό, άρα ευσταθές. Ουσιαστικά κλάδος υπάρχει αλλά με ασήμαντη συνεισφορά στην εικόνα για την αστάθεια του πίδακα στα συγκεκριμένα k .

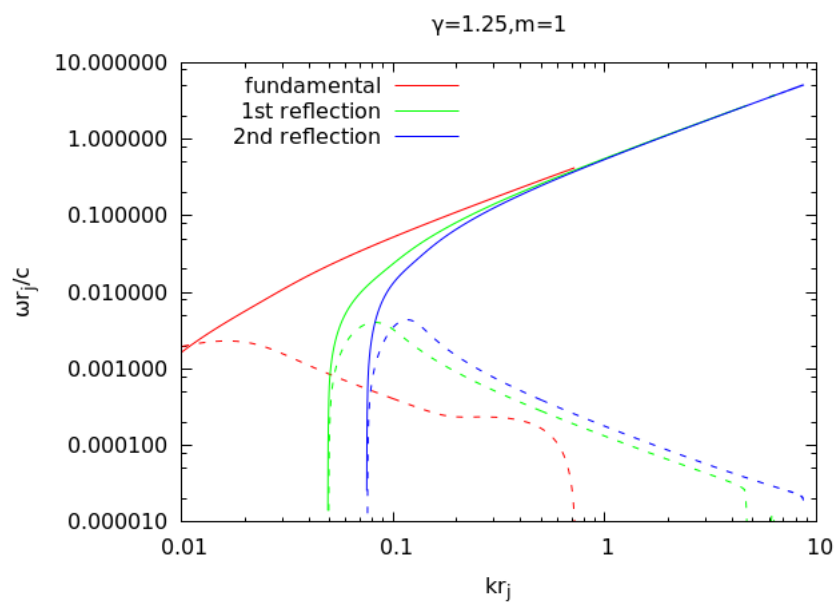
Για $m = 1$ δεν σημειώνονται ουσιαστικές διαφορές εκτός από μία μικρή πτώση των τιμών των μεγίστων των φανταστικών μερών των ταλαντώσεων, πιο εμφανή στη θεμελιώδη ταλάντωση κυρίως.

Για $m = -1$ αρχικά σημειώνουμε πως οι αρμονικές διευρύνονται προς μικρότερα k σε σχέση με το προηγούμενο διάγραμμα στο αντίστοιχο m . Η διαφορά που θέλουμε να σημειώσουμε είναι στον κλάδο της θεμελιώδους ταλάντωσης στα μεγάλα k . Αν και είναι ξεκάθαρο πώς υπάρχει ο κλάδος παρόλα αυτά δεν είναι ολοκληρωμένος καθώς τεχνικά ζητήματα καθιστούσαν την ολοκλήρωση σχεδόν αδύνατη. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί ξανά είναι πως το πλάτος κινείται ξανά στην τάξη του $5 \cdot 10^{-5}$, αρκετά ευσταθής γενικά, και πιο ευσταθής κατά μία τάξη μεγέθους από το αντίστοιχο σκέλος στα μικρότερα k .

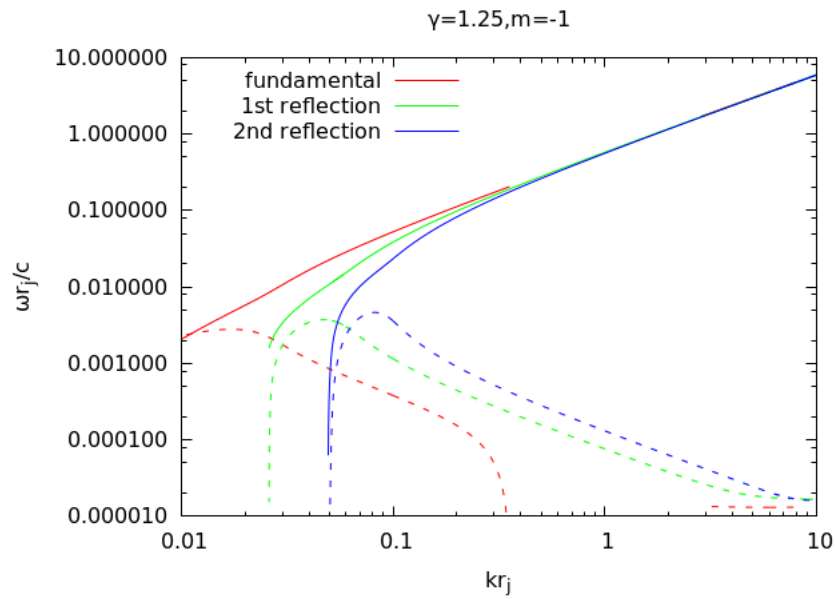
Ακολουθούν τα διαγράμματα με $\gamma = 1.25$:



Σχήμα 3.16: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.25$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.17: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.25$ και $m = 1$.

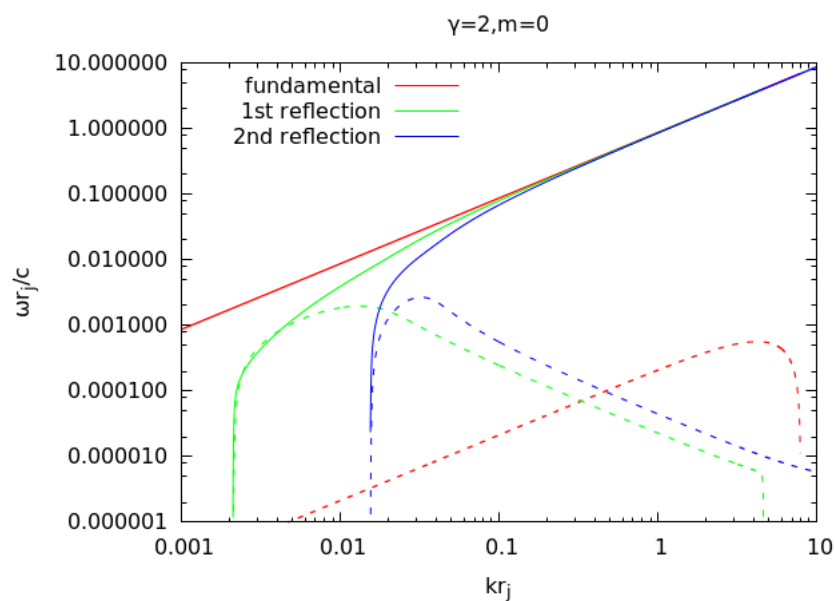


Σχήμα 3.18: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 1.25$ και $m = -1$.

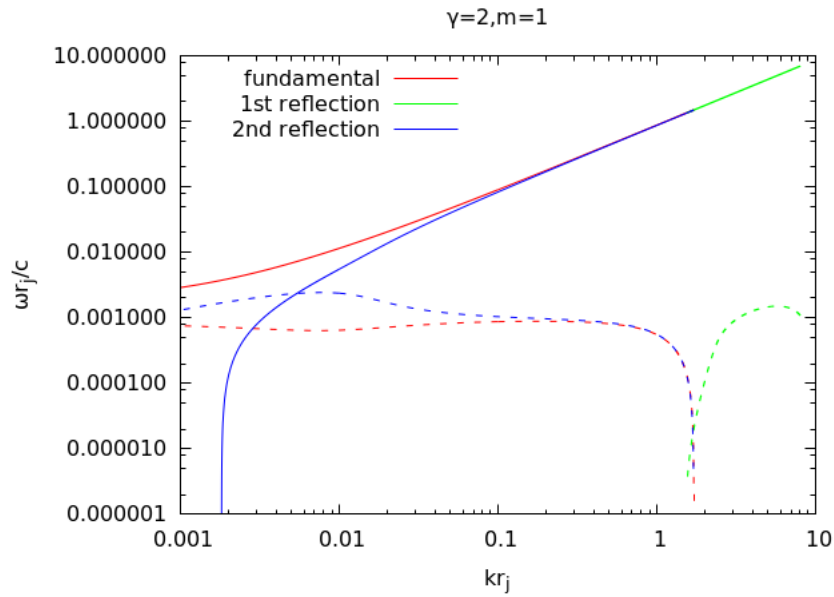
Ξεκινάμε για το $m = 0$ αναφέροντας ότι το εύρος των κλάδων επεκτείνεται προς μικρότερα k . Για το $m = 1$ όλοι οι κλάδοι επεκτείνονται προς μεγαλύτερα k , με αμετάβλητα πλάτη.

Τέλος, για $m = -1$ η εικόνα είναι παρόμοια με του προηγούμενου διαγράμματος στο ίδιο m με τον κλάδο της θεμελιώδους κατάστασης στα μεγάλα k να έχει ακόμα μικρότερη τιμή στην μέγιστη τιμή του φανταστικού μέρους περίπου ίσο με 10^{-5} ακόμα πιο ευσταθής ο κλάδος ακόμα.

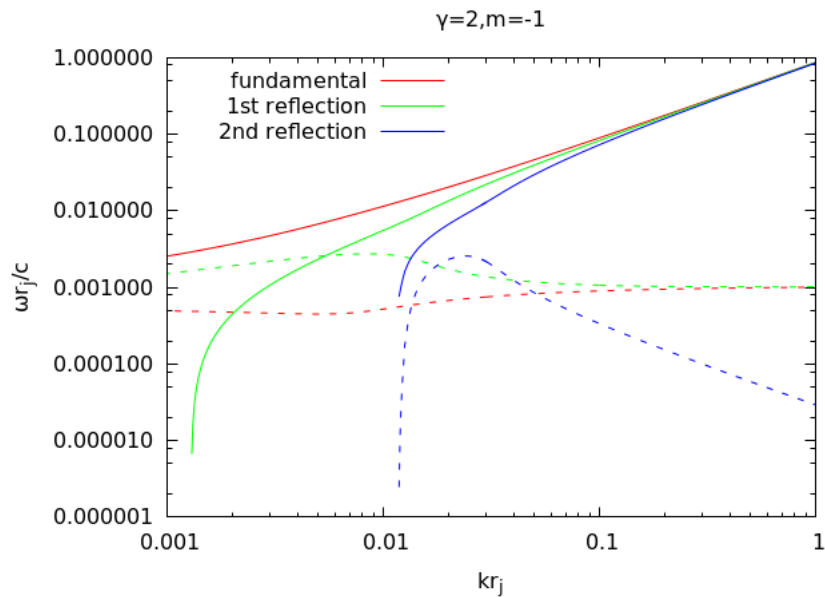
Επόμενα είναι τα διαγράμματα με $\gamma = 2$:



Σχήμα 3.19: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 2$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.20: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 2$ και $m = 1$.



Σχήμα 3.21: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 2$ και $m = -1$.

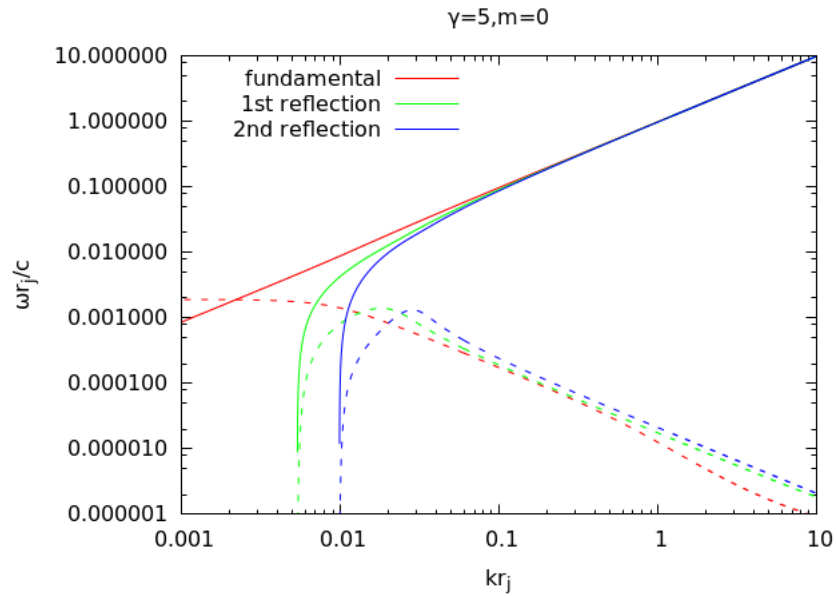
Για τον συγκεκριμένο παράγοντα Lorentz και για $m = 0$ έχουμε αντιστροφή της εικόνας για την θεμελιώδη ταλάντωση, όπου παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή του $\Im\omega$ σε μεγάλα k και με τιμή στο $k \sim 6$. Επίσης διακρίνουμε ένα κλάδο σε όλες τις τιμές των κυματαριθμών.

Για το $m = 1$ παρατηρούμε μία παρόμοια συμπεριφορά της θεμελιώδους και της δεύτερης αρμονικής, με τις τιμές των φανταστικών μερών να είναι παραπλήσιες και περίπου ίσες με 10^{-3} . Ακολουθώντας η πρώτη αρμονική βρίσκεται μόνο σε μεγάλα k με παρόμοιο πλάτος. Αν παρατηρήσει κανείς ιδιαίτερα την δεύτερη αρμονική, βλέπει πως το πραγματικό μέρος του ω τείνει στο μηδέν, χωρίς να αποκλείεται και αλλαγή πρόσημου. Αυτό σημαίνει ανάστροφη πορεία του κύματος της διαταραχής εντός του πίδακα, ή εάν μηδενίζεται μετατροπή του σε στάσιμο κύμα!

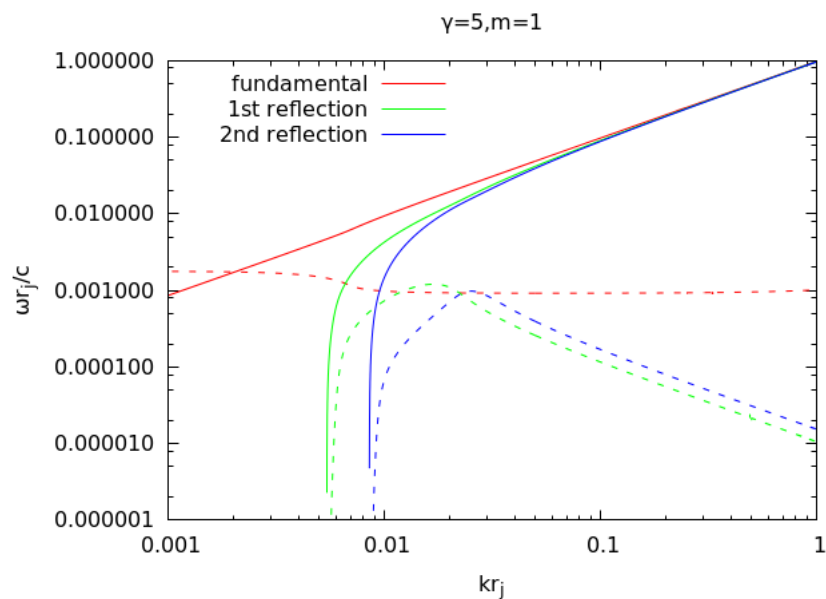
Για $m = -1$ έχουμε επέκταση της πρώτης θεμελιώδους σε όλο το εύρος των τιμών του k , με συμπεριφορά παρόμοια της δεύτερης αρμονικής του προηγούμενου σχήματος. Οι τιμές των

φανταστικών μερών συνεχίζει να παρουσιάζει πτωτική τάση, δημιουργώντας μια πρώτη πεποίθηση πως η αύξηση του παράγοντα γ αυξάνει και την ευστάθεια του πίδακα.

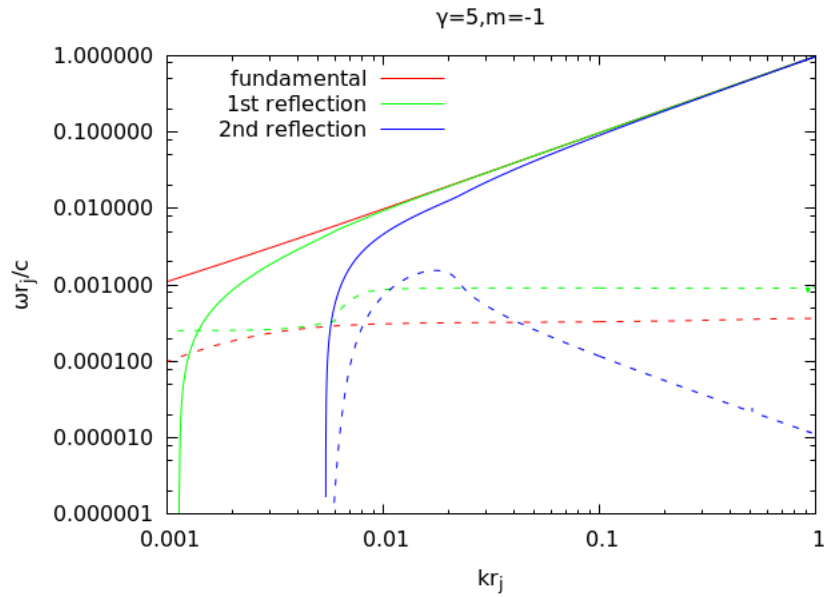
Συνεχίζουμε με $\gamma = 5$:



Σχήμα 3.22: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 5$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.23: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 5$ και $m = 1$.



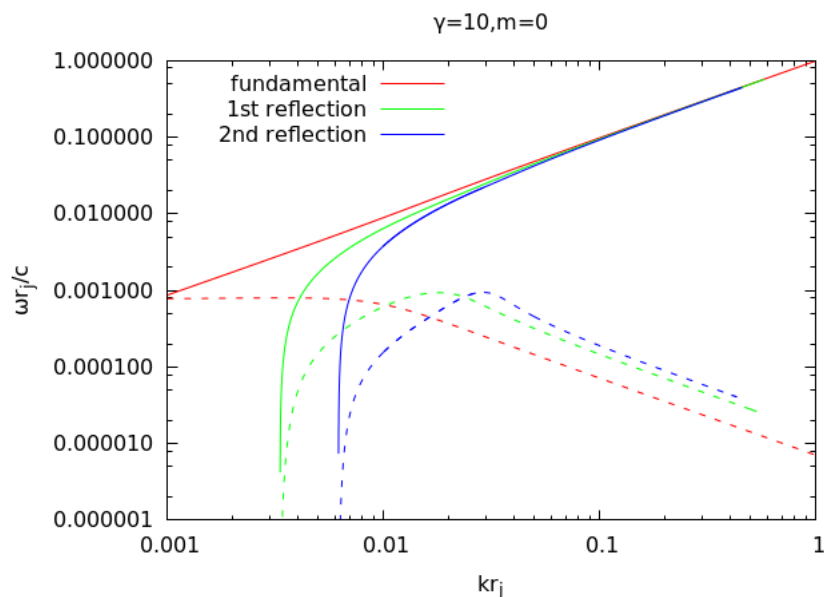
Σχήμα 3.24: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 5$ και $m = -1$.

Για το $m = 0$ βλέπουμε την θεμελιώδη ταλάντωση να επιστρέφει στο γνωστό μοτίβο με το μέγιστο της τιμής για το φανταστικό μέρος του ω να βρίσκεται σε μικρά k . Για τα άλλα δύο είδη ταλαντώσεων παρατηρούμε την πτωτική τάση στις τιμές των φανταστικών μερών να συνεχίζεται μαζί με μετακινήσεις στα κάτω όρια του κυματαριθμού όπου μηδενίζονται.

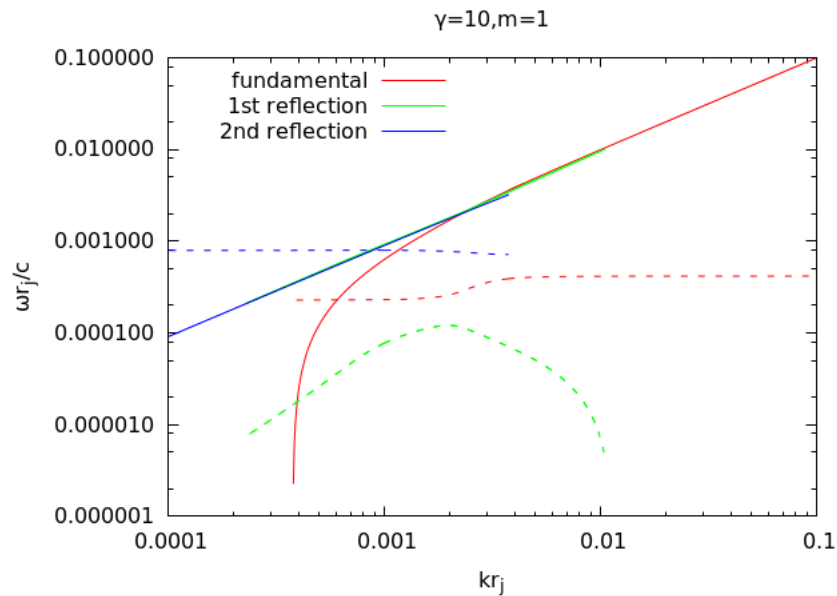
Για $m = 1$ τα πλάτη όλων των ταλαντώσεων ακολουθούν και εδώ χαμηλότερες τιμές, και η εικόνα έχει την θεμελιώδη ταλάντωση να εκτείνεται σε όλο το εύρος των τιμών του k , και τις υπόλοιπες να αποκτούν πάλι την εικόνα με ένα ελάχιστο κατώφλι που παρουσιάζονται, παρουσία του μεγίστου τους κοντά σε αυτό το κατώφλι, πτωτική τάση με την αύξηση του k .

Για $m = -1$ η εικόνα παρουσιάζει ομοιότητες με το αντίστοιχο διάγραμμα της προηγούμενης ταχύτητας ως προς την δομή. Οι μέγιστες τιμές βέβαια είναι σαφώς μικρότερες αν παρατηρήσει κανείς, αυξάνοντας πάλι την ευστάθεια.

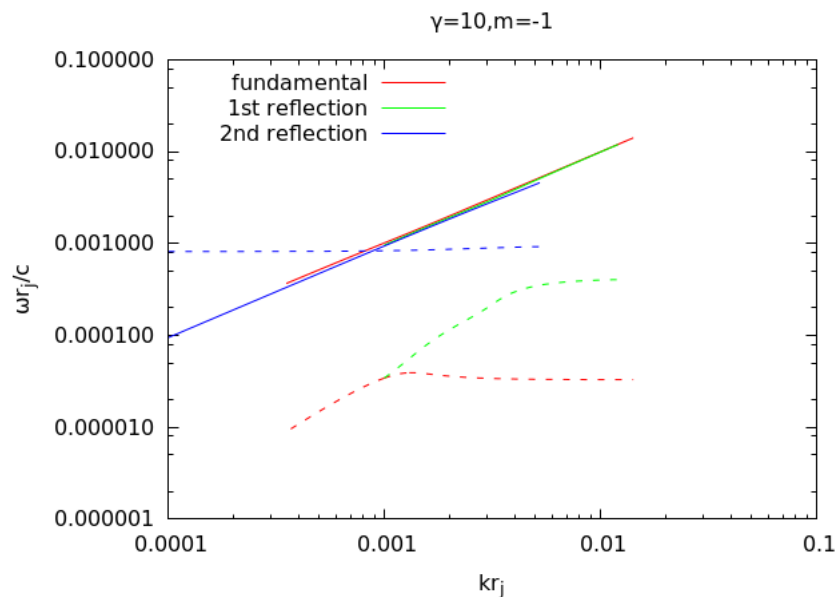
Ακολουθεί η τελευταία αύξηση στον παράγοντα Lorentz, ο οποίος λαμβάνει την τιμή $\gamma = 10$:



Σχήμα 3.25: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 10$ και $m = 0$.



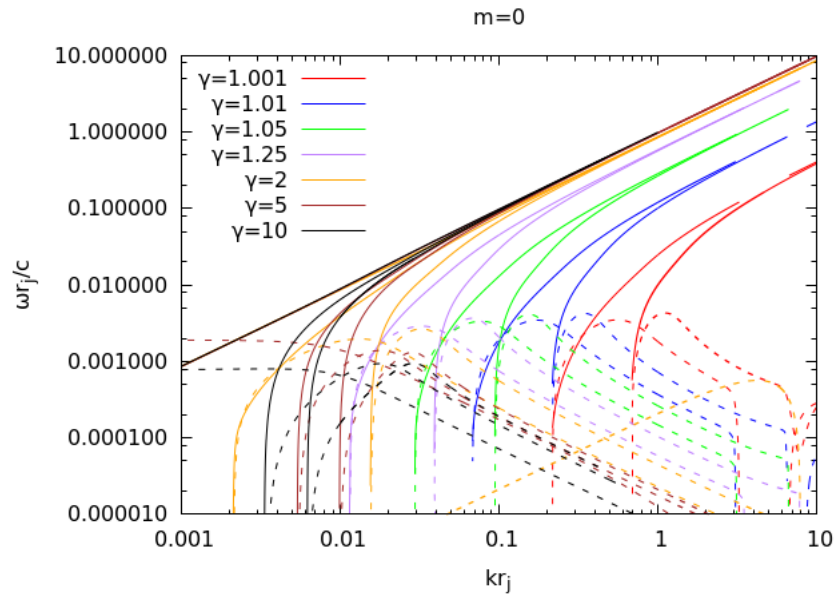
Σχήμα 3.26: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 10$ και $m = 1$.



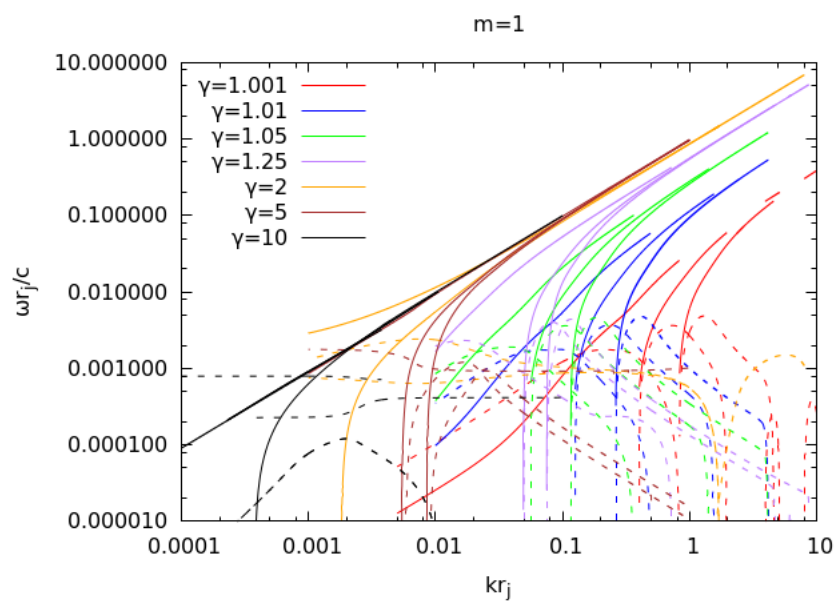
Σχήμα 3.27: Το διάγραμμα διασποράς για $\gamma = 10$ και $m = -1$.

Η σημαντικότερη παρατήρηση είναι πως η αύξηση στην ευστάθεια είναι και σε στα τρία διαγράμματα εμφανής. Άρα, η τάση που παρατηρήθηκε δεν είναι μεμονωμένο φαινόμενο αλλά γενικότερο που χαρακτηρίζει γενικά τις μεγάλες ταχύτητες. Το δεύτερο που πρέπει να ειπωθεί είναι η τρομερή δυσκολία ολοκλήρωσης των διαγραμμάτων στα μεγάλα και μικρά k στο $\gamma = 10$. Το συγκεκριμένο γεγονός θα σχολιαστεί αναλυτικότερα παρακάτω. Η σημαντικότερη αύξηση στην ευστάθεια παρατηρείται στο $m = -1$ και στο $m = 1$ σε δύο από τις τρεις ταλαντώσεις. Γενικότερα, τα διαγράμματα ακολουθούν στην μορφή την τάση των αντίστοιχων διαγραμμάτων στην προηγούμενη ακριβώς ταχύτητα του πίδακα που χρησιμοποιήσαμε.

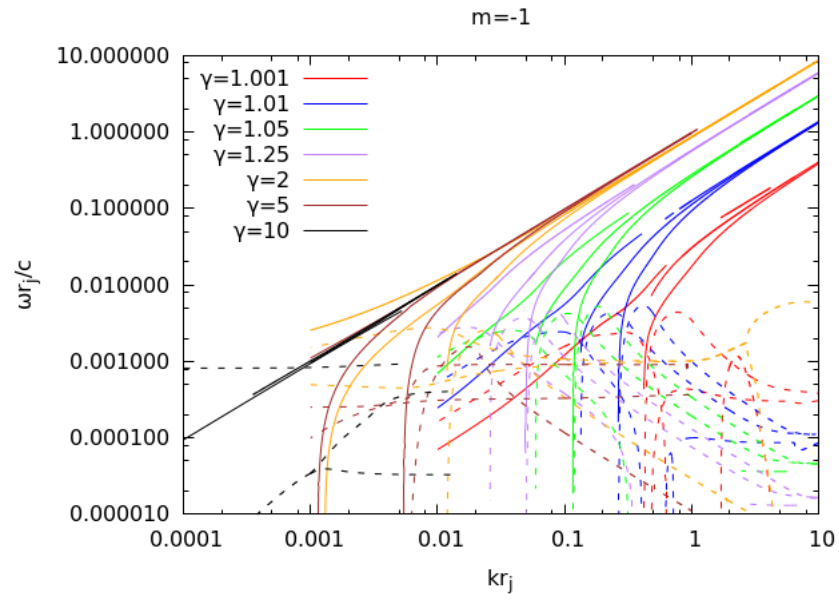
Για την συνολική επισκόπηση των παραπάνω συμπερασμάτων, ακολουθούν τα διαγράμματα όπου υπάρχουν όλα τα διαγράμματα διασποράς για όλες τις τιμές των γ .



Σχήμα 3.28: Το συνοπτικό διάγραμμα όπου παρουσιάζονται όλες οι σχέσεις διασποράς για όλες τις τιμές του γ και $m = 0$.



Σχήμα 3.29: Το συνοπτικό διάγραμμα όπου παρουσιάζονται όλες οι σχέσεις διασποράς για όλες τις τιμές του γ και $m = 1$.



Σχήμα 3.30: Το συνοπτικό διάγραμμα όπου παρουσιάζονται όλες οι σχέσεις διασποράς για όλες τις τιμές του γ και $m = -1$.

3.0.3.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων - Γενικά σχόλια, συμπεράσματα

Η πρώτη και σημαντικότερη παρατήρηση που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι η ευστάθεια των πιδάκων χωρίς επιφανειακά ρεύματα αυξάνεται με την αύξηση της ταχύτητας του. Είναι εμφανές πως οι σχετικιστικοί πίδακες έχουν μικρότερες μέγιστες τιμές των φανταστικών μερών του ω τουλάχιστον κατά μία τάξη μεγέθους από τους αρχικούς μη σχετικιστικούς. Μάλιστα, στα διαγράμματα για $\gamma = 10$ πολλές ιδιοταλαντώσεις έχουν μέγιστο $\Im\omega$ σχεδόν δύο τάξεις μεγέθους από τις αντίστοιχες τιμές στο μη σχετικιστικό όριο.

Ακόμα, τα μέγιστα $\Im\omega$ δεν φαίνεται σε καμία περίπτωση να ξεπερνούν τις αρχικές τους τιμές οι οποίες καταγράφηκαν στα μη σχετικιστικά διαγράμματα, ακόμα και σε αυτά των [Kim et al., 2015]. Οπότε, σε καμία περίπτωση δεν έχουμε αξιοσημείωτη μείωση της ευστάθειας του πίδακα για καμία ιδιοταλάντωση των διαταραχών του. Επιπροσθέτως, αφού τα μέγιστα λαμβάνουν χαμηλότερες τιμές, τότε και το υπόλοιπο εύρος όλων των $\Im\omega$ λαμβάνει επίσης χαμηλότερες τιμές, σαν αποτέλεσμα η ευστάθεια όλου του εύρους των κυματαριθμών ενισχύεται για τον πίδακα. Μάλιστα, όταν οι τιμές αυτές τείνουν ή και λαμβάνουν τις τιμές $10^{-5} - 10^{-6}$ τότε μιλάμε για ουσιαστικά ευσταθή μήκη κύματος.

Οι [Kim et al., 2015] αναφέρουν στην εργασία τους πως η ευστάθεια των πιδάκων αυξάνεται όταν στην δομή των πιδάκων δεν συμπεριλαμβάνονται επιφανειακά ρεύματα. Αυτό δεν συμβαίνει λόγω χαμηλότερης τιμής του $\Im\omega$ σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές που παρουσιάζουν παρόμοιες αναλύσεις σε πίδακες με επιφανειακά ρεύματα. Αυτό μπορούμε να το δούμε από την εργασία των [Appl et al., 2000] στην οποία για πίδακα με επιφανειακά ρεύματα βρίσκουν την εξάρτηση της μορφής $\Im\omega \frac{r_j}{c} \sim 0.4 \frac{v_{\text{alfven},co}}{\gamma c} r_j$ με τον δείκτη co να προσδιορίζει το συγκινούμενο σύστημα αναφοράς. Οι τιμές που λαμβάνουμε από τον παραπάνω τύπο και για $\gamma \sim 1$ και την τιμή της ταχύτητας v_{alfven} ισούνται περίπου με $0.4 - 0.5 \cdot 10^{-3}$ παραπλήσιες και με μία μικρή διαφορά μόνο από τις τιμές των [Kim et al., 2015]. Οι [Kim et al., 2015] προσδιορίζουν ως αύξηση της ευστάθειας κενές ζώνες από θετικές τιμές του $\Im\omega$ οι οποίες δρουν ως ζώνες ευστάθειας, εκεί που στις παρόμοιες αναλύσεις για πίδακες με επιφανειακά ρεύματα υπάρχουν τα $\Im\omega$ που οδηγούν σε αστάθειες αυξανόμενου πλάτους. Έτσι, χαρακτηρίζουν την αύξηση της ευστάθειας με ένα παράλληλο ορισμό αυτού και όχι με την απευθείας μείωση του φανταστικού μέρους του ω .

Κομβική ταχύτητα φαίνεται να είναι αυτή που αντιστοιχεί σε $\gamma = 2$ καθώς εκεί βλέπουμε συμπεριφορές των λύσεων σαφώς διαφορετικές από όλες τις προηγούμενες, οι οποίες τρόπον τινά καθιερώνονται σε αρκετά από τα επόμενα διαγράμματα. Λόγου χάριν, η επέκταση του εύρους του κυματαριθμού που καλύπτουν οι πρώτες δύο αρμονικές, όσο και η θεμελιώδης κυρίως στα $m = 1$, $m = -1$. Για τα διαγράμματα $m = 0$ δεν παρατηρείται τόσο έντονα η εν λόγω παρατήρηση.

Τα δύο είδη ασταθειών όπως αναφέρουν και οι [Kim et al., 2015] που επηρεάζουν τον πίδακα είναι οι Current-Driven (CD) αστάθειες όπως και η αστάθεια Kelvin-Helmholtz (KH). Η πρώτη οφείλεται στην ύπαρξη ρευμάτων λόγω των μαγνητικών πεδίων και η δεύτερη στην διαφορά ταχυτήτων μεταξύ δύο ρευστών.

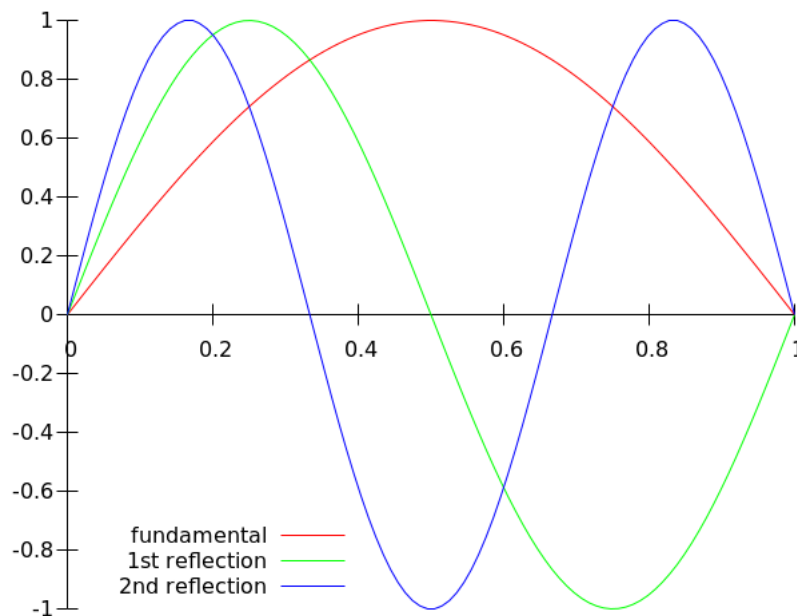
Η αστάθεια (KH) λόγω της φύσης του προβλήματος έχει την δυνατότητα να αναπτυχθεί μόνο στην επιφάνεια του πίδακα όπου έρχεται σε επαφή η ροή του πίδακα με το ακίνητο περιβάλλον. Σε εκείνη την περιοχή αναπτύσσονται οι συγκεκριμένες αστάθειες. Η αστάθεια (CD) δημιουργείται στην επιφάνεια όπου ισχύει $kB_{0z} + (m/\omega)B_{0\phi} = 0$ για $m \neq 0$. Μία τέτοια επιφάνεια υπάρχει πάντα εντός του πίδακα με αποτέλεσμα και η συγκεκριμένη αστάθεια να είναι πάντα παρούσα [Kim et al., 2015].

Το ενδιαφέρον λοιπόν είναι πως σχετίζονται οι δύο αυτές αστάθειες μεταξύ τους ώστε καθώς το γ μεγαλώνει η συνολική αστάθεια του πίδακα να μειώνεται. Η ακριβής ανάλυση τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά ξεπερνά τον σκοπό της συγκεκριμένης εργασίας, παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε πως η διάδοση της πληροφορίας της αστάθειας και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους πρέπει να παίζει κάποιο σημαντικό ρόλο. Εν γένει πώς επηρεάζει η σχετικότητα την ισχύ της κάθε αστάθειας, πώς αλληλεπιδρούν οι δύο διαφορετικές διαταραχές στο κοινό ρευστό του πίδακα, γιατί

η συγκεκριμένη διαδικασία συμβάλλει σε μία αποσβεστική τάση; Δύσκολα ερωτήματα σαν και τα παραπάνω, στα οποία, ακόμα στην βιβλιογραφία, παρουσιάζονται εν ολίγοις φαινομενολογικές παρατηρήσεις από αριθμητικούς κώδικες αναμένουν απαντήσεις, μία εργασία επίπονη λόγω της εξαιρετικής της δυσκολίας.

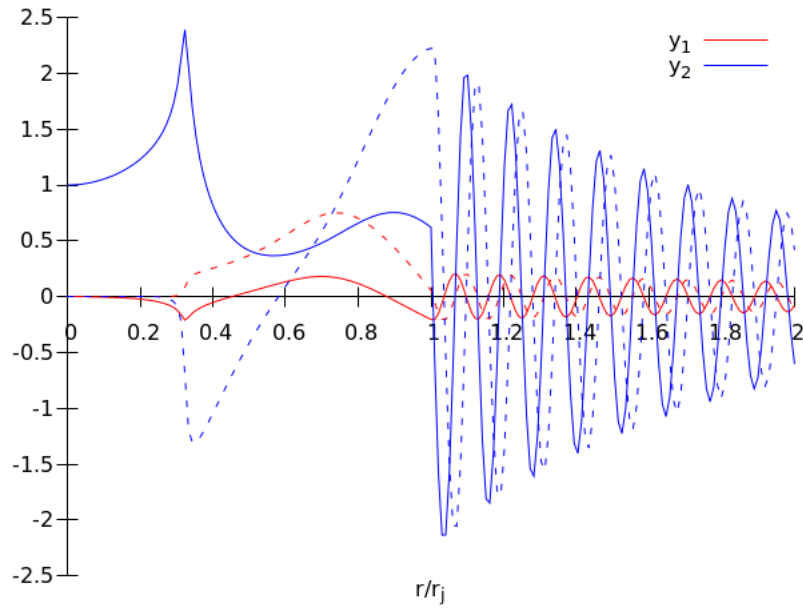
3.0.3.3 Ονομασία ιδιοσυναρτήσεων

Το επόμενο βήμα είναι να σχολιάσουμε εκτενέστερα το ζήτημα της ονομασίας των διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων με τους όρους θεμελιώδης, πρώτη αρμονική και δεύτερη αρμονική. Μία τέτοια κίνηση σαφώς και δημιουργεί την εντύπωση πως διαγράμματα ιδιοσυναρτήσεων θα εμφανίζουν μορφή παρόμοια με αυτή του προβλήματος όπου χρησιμοποιήθηκαν αρχικά, δηλαδή τις ταλαντώσεις χορδής με πακτωμένα άκρα. Η θεμελιώδης ταλάντωση δεν θα παρουσιάζει καθόλου κόμβους εντός του χωρίου του πίδακα, η πρώτη αρμονική ένα και η δεύτερη αρμονική δύο.



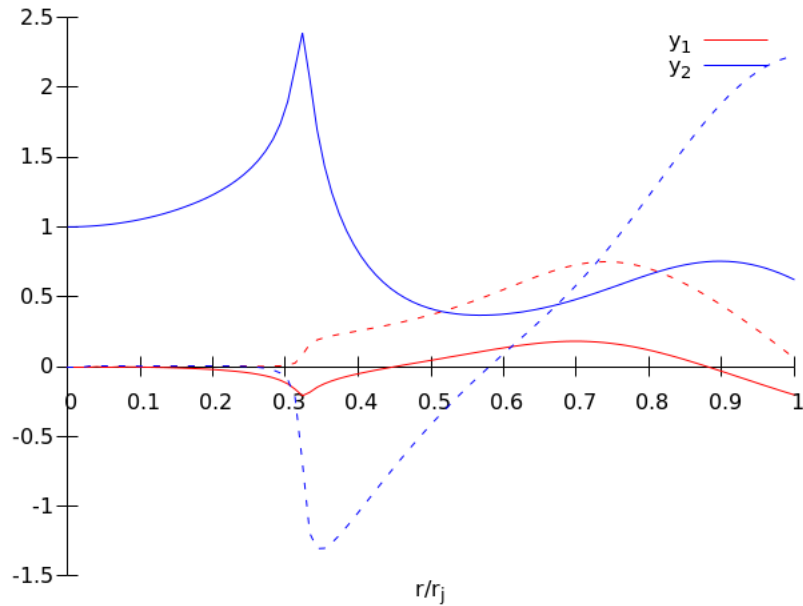
Σχήμα 3.31: Οι τρεις πρώτες ιδιοκαταστάσεις παλλόμενης χορδής με πακτωμένα άκρα.

Για να ξεκινήσουμε την συζήτηση πάνω στο συγκεκριμένο ζήτημα θα ξεκινήσουμε με την παρατήρηση των ιδιοκαταστάσεων όχι κάποιου σχετικιστικού πίδακα που παρουσιάσαμε παραπάνω αλλά των διαγραμμάτων αναφοράς τα οποία βρίσκονται στην εργασία [Kim et al., 2015]. Έτσι, εφ' όσον η αρχική ονοματοθεσία έγινε στην συγκεκριμένη δουλειά, θα ελέγξουμε αν όντως ισχύει η αντιστοιχία με το κλασσικό πρόβλημα της χορδής ή είναι μία σύμβαση εργασίας και συνεννόησης ή κάτι ανάμεσα στα δύο. Ξεκινάμε με τα διαγράμματα ιδιοκαταστάσεων που ανταποκρίνονται σε $m = 0$:



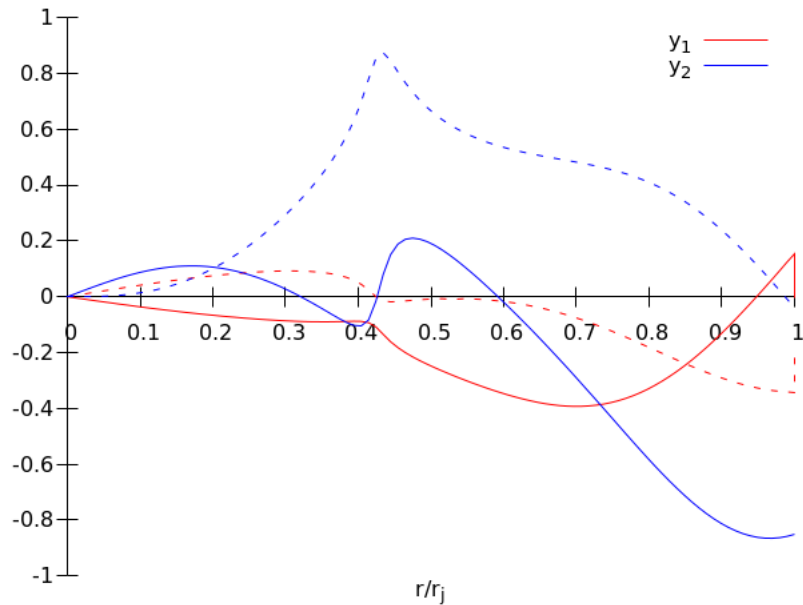
Σχήμα 3.32: Η θεμελιώδης ταλάντωση μέχρι το όριο του πίδακα, ακολουθούμενο από τις γνωστές ιδιοσυναρτήσεις του εξωτερικού περιβάλλοντος.

Ακολουθεί το ίδιο σχήμα μόνο για την περιοχή του εσωτερικού του πίδακα:

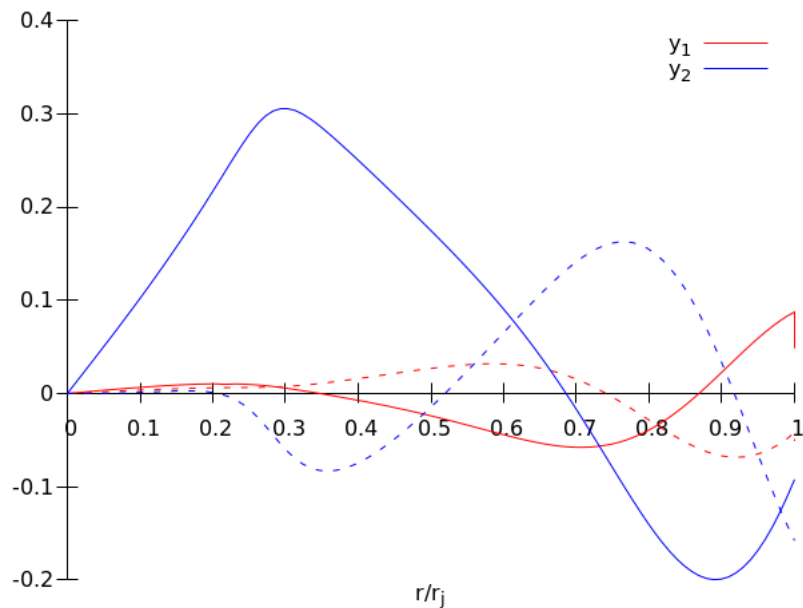


Σχήμα 3.33: Η θεμελιώδης ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = 0$.

Τελικά, ανατρέπεται από τα δύο παραπάνω σχήματα μία αυστηρή αντιστοιχία ένα προς ένα με το κλασικό πρόβλημα της παλλόμενης χορδής. Το λογικώς ορθό είναι να παρουσιαστούν παρακάτω και οι υπόλοιποι τρόποι ταλάντωσης για κάθε δυνατό m που έχουμε στη διάθεσή μας ώστε τα συμπεράσματα να είναι ασφαλέστερα. Θα επικεντρωθούμε σε όλα τα σχήματα στην εσωτερική περιοχή του πίδακα, οπότε έχουμε για την πρώτη και δεύτερη αρμονική:



Σχήμα 3.34: Η πρώτη αρμονική ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = 0$, για $k = 3.07848$, $\Re\omega = 2.114 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 1.777 \cdot 10^{-3}$.



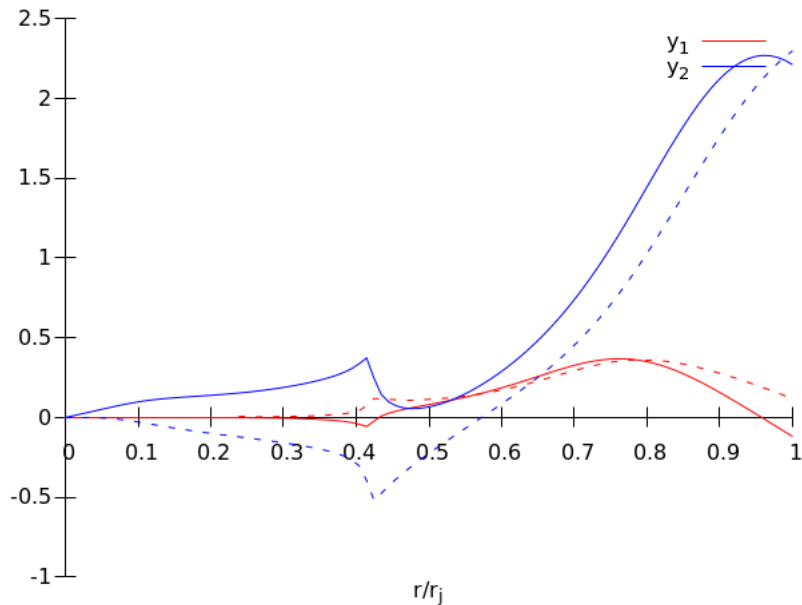
Σχήμα 3.35: Η δεύτερη αρμονική ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = 0$, για $k = 3.62372$, $\Re\omega = 1.278 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 4.697 \cdot 10^{-3}$.

Παρατηρώντας τα παραπάνω σχήματα αρχικά όντως βλέπουμε αυξητική τάση του αριθμού των κόμβων των ιδιοσυναρτήσεων εντός του πίδακα όσο προχωρούμε σε μεγαλύτερης τάξης αρμονική. Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει οριστικός αριθμός κόμβων που να ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη πεπατημένη σε συνάρτηση του είδους της ιδιοσυνάρτησης (θεμελιώδης ή αρμονικές). Έτσι, βλέπουμε στην θεμελιώδη ταλάντωση, σχήμα 3.33, έως και την εμφάνιση δύο κόμβων στο πραγματικό μέρος της y_1 , ενώ στην y_2 στο αντίστοιχο κομμάτι δεν παρατηρούμε κανένα κόμβο, πράγμα που ακολουθεί τον τυπικό κανόνα για την ονομασία που έχει η ιδιοκατάσταση.

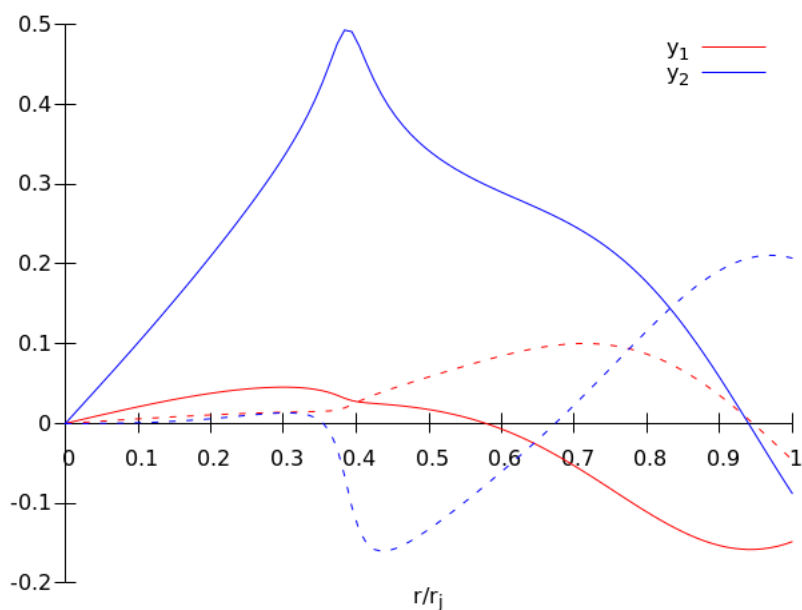
Στην πρώτη αρμονική παρατηρούμε την εμφάνιση ενός κόμβου στα τρία από τα τέσσερα μέρη των ιδιοσυναρτήσεων, με το πραγματικό μέρος του y_2 να παρουσιάζει τρεις ρίζες! Ακόμα, στην

δεύτερη αρμονική παρατηρούνται από έναν έως και τρεις κόμβοι. Σαφής απάντηση δεν μπορεί να δοθεί για την αυστηρή ονομασία της κάθε είδους ιδιοσυνάρτησης.

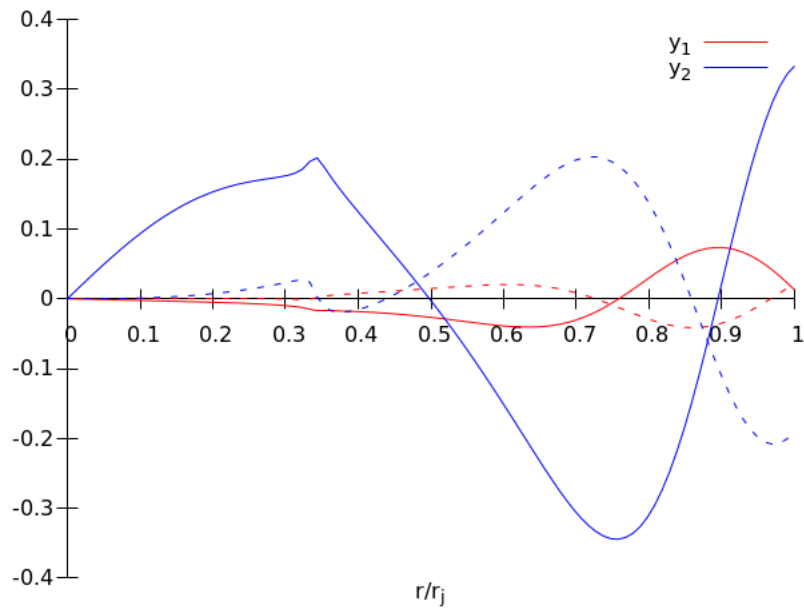
Ακόμα μία παρατήρηση που πρέπει να γίνει είναι ως προς την μορφή των μορφών των ιδιοσυνάρτησεων. Σαφώς και δεν μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι υπάρχει ομοιότητα με κάποιο γνωστό είδος εξισώσεων με την πρώτη ματιά. Σίγουρα, θα υπάρχει συνεισφορά από την οικογένεια των εξισώσεων Bessel, λόγω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον, αλλά το γεγονός αυτό από μόνο του δεν αρκεί. Ακολουθούν περαιτέρω διαγράμματα από όλα τα m που μελετήθηκαν, συνεχίζοντας στα διαγράμματα αναφοράς των [Kim et al., 2015].



Σχήμα 3.36: Η θεμελιώδης ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = 1$, για $k = 10$, $\Re\omega = 0.101$, $\Im\omega = 1.278 \cdot 10^{-3}$.

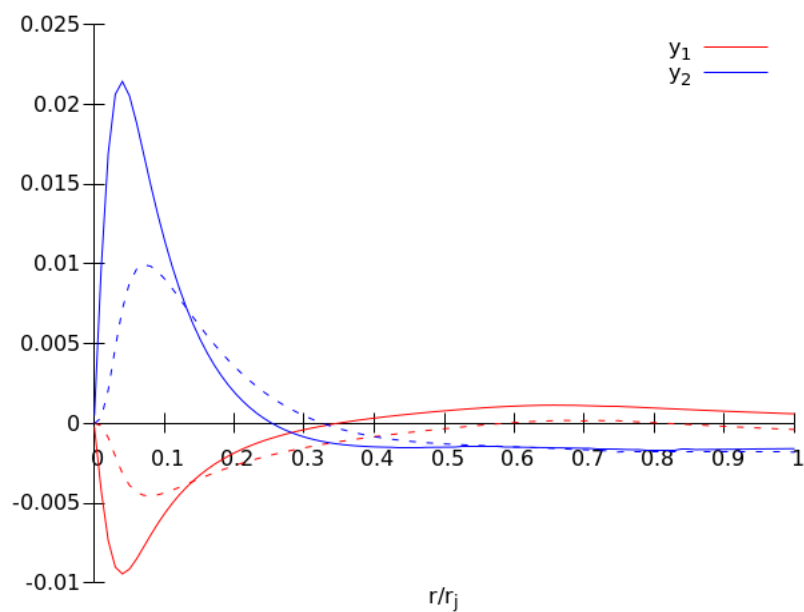


Σχήμα 3.37: Η πρώτη αρμονική ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = 1$, για $k = 2.166$, $\Re\omega = 7.332 \cdot 10^{-3}$, $\Im\omega = 1.512 \cdot 10^{-3}$.

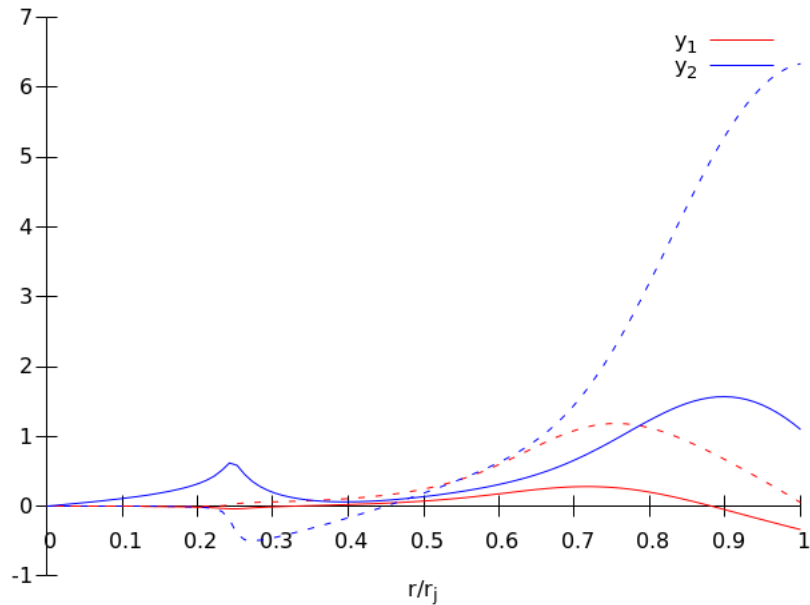


Σχήμα 3.38: Η δεύτερη αρμονική ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = 1$, για $k = 10$, $\Re\omega = 8.157 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 1.884 \cdot 10^{-3}$.

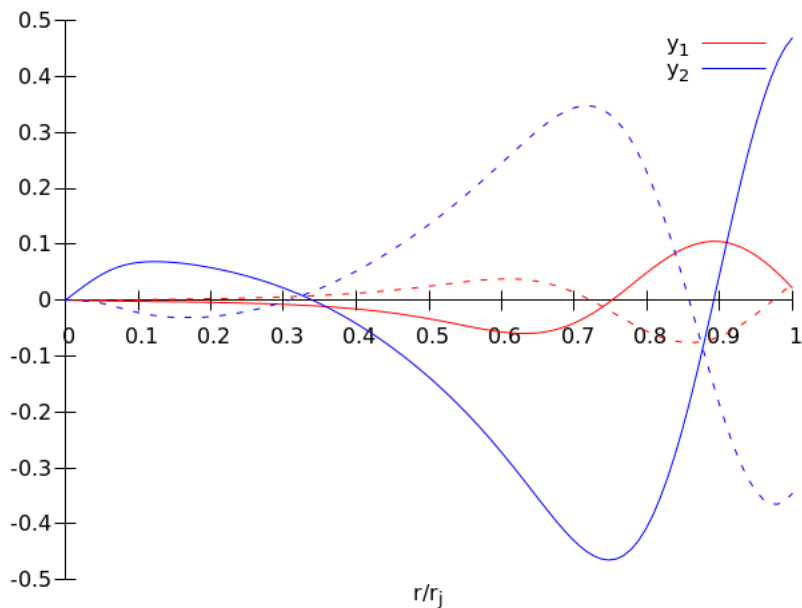
Ακολουθούν και τα αντίστοιχα διαγράμματα για $m = -1$:



Σχήμα 3.39: Η θεμελιώδης ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = -1$, για $k = 1.734$, $\Re\omega = 1.81 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 2.42 \cdot 10^{-5}$.



Σχήμα 3.40: Η πρώτη αρμονική ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = -1$, για $k = 10$, $\Re\omega = 0.101$, $\Im\omega = 1.253 \cdot 10^{-3}$.



Σχήμα 3.41: Η δεύτερη αρμονική ταλάντωση της διαταραχής του πίδακα για $m = -1$, για $k = 10$, $\Re\omega = 8.317 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 1.844 \cdot 10^{-3}$.

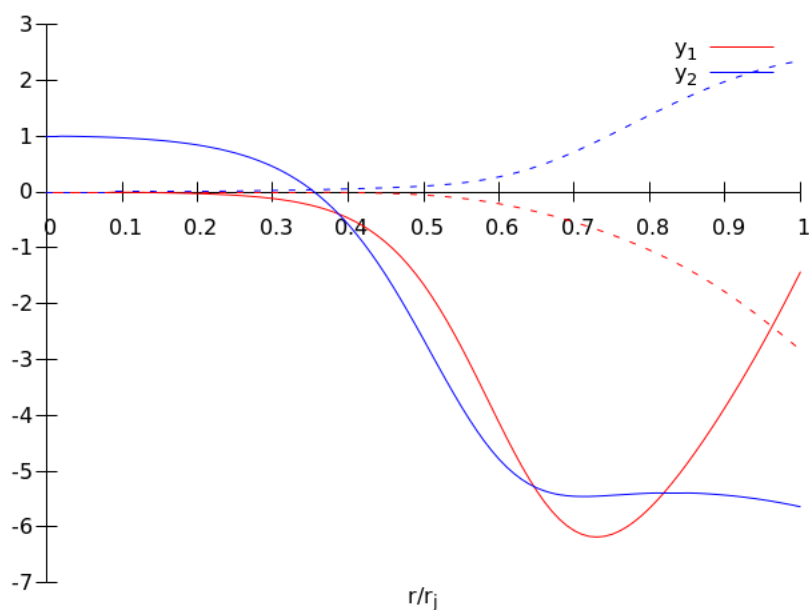
Σαν γενικό συμπέρασμα μπορεί να ειπωθεί πως όλα όσα σταχυολογήσαμε ως αρχικές παρατηρήσεις παραπάνω συνεχίζουν να ισχύουν ως γενικός κανόνας και για τα υπόλοιπα δύο m για τα οποία έγιναν αριθμητικές ολοκληρώσεις. Σημειώνουμε αναντιστοιχία ένα προς ένα κόμβων και είδους ιδιοσυνάρτησης, αυξητική τάση κόμβων περνώντας σε μεγαλύτερης τάξης ιδιοσυνάρτηση, μη ταύτιση με γνωστή θεωρητική οικογένεια καμπυλών αν και σίγουρα θα υπάρχει συνεισφορά από συναρτήσεις Bessel.

Ένα ζήτημα που πρέπει να τονιστεί είναι κατά πόσο η συνεισφορά του αλγορίθμου στην μορφή των καμπυλών είναι σημαντική ή όχι. Αναλυτικότερα, εντός του πίδακα οι ιδιοσυναρτήσεις είναι προϊόντα αριθμητικής ολοκλήρωσης, επομένως οποιοδήποτε σφάλμα προκύψει από την ολοκλήρωση

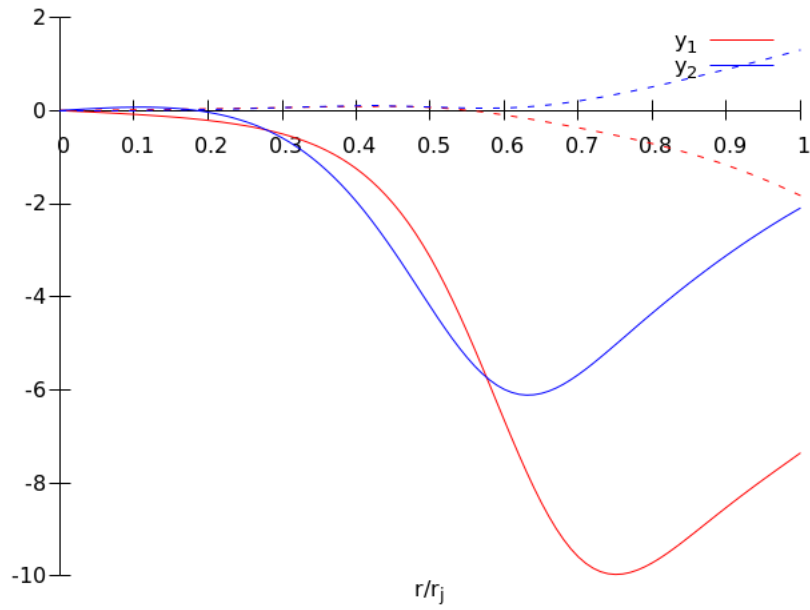
την ίδια υπάρχει πιθανότητα να αποτυπωθεί στο γραφικό αποτέλεσμα. Βέβαια, βλέποντας κοινά στοιχεία σε όλα τα διαγράμματα, ακόμα και τα σχετικιστικά όπως θα δειχθούν λίγο παρακάτω, αποκλείει την αλλοίωση της πραγματικότητας από τον αλγόριθμο σε υπερθετικό βαθμό. Παρόλα αυτά, η μη εμφάνιση ή η εμφάνιση κόμβου πολύ κοντά στο όριο του πίδακα, σημεία των γραφημάτων πολύ κοντά στον οριζόντιο άξονα με τάση για εμφάνιση κόμβου χωρίς να συμβαίνει αυτό ή το αντίθετο, ακόμα και στοιχεία που καθιστούν τις καμπύλες μη παραγωγίσιμες όπως εμφάνιση ακίδων και γωνιών.

Όλα τα παραπάνω πρέπει να διαπιστωθεί κατά πόσο επηρεάζονται από διαδικασίες ολοκλήρωσης του αλγόριθμου, και αν ναι ποία είναι η συνεισφορά στο τελικό αποτέλεσμα τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά. Φυσικά, μία τέτοια διερεύνηση στο βάθος που απαιτείται αποτελεί φόρτο εργασίας που με ευκολία αντιστοιχεί σε μία διπλωματική εργασία ή μία διατριβή και ξεπερνά τον στόχο του συγκεκριμένου πονήματος. Ωστόσο, το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν τα θέματα τόσο γύρω από την αναλυτική θεώρηση των καμπυλών, όσο και του τεχνικού κομματιού που έχει να κάνει με τον αλγόριθμο είναι μεγάλο και σίγουρα χρήζει βαθύτερης μελέτης πέρα από τις επισημάνσεις που σημειώθηκαν παραπάνω. Ένα τελευταίο σημείο που πρέπει να εξεταστεί είναι και η συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων για τις τάξεις των λύσεων πέραν της δεύτερης αρμονικής.

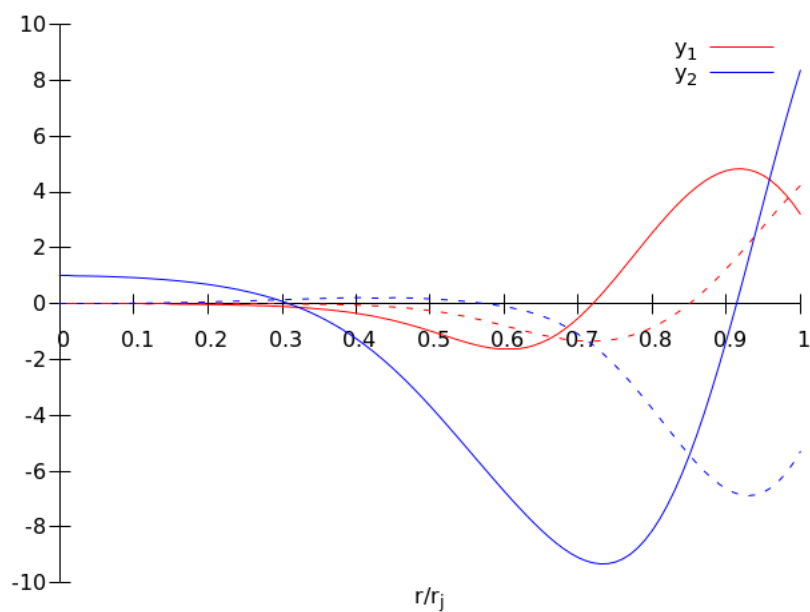
Ακολουθούν παρόμοια διαγράμματα για μεγαλύτερα γ ώστε η εικόνα να είναι πλήρης εξεταστεί αν ισχύει η ίδια συμπεριφορά και για τις μεγαλύτερες ταχύτητες ή να μπορεί να προστεθεί κάποια ακόμη πληροφορία στο παραπάνω κείμενο. Για συντομία θα επικεντρωθούμε μόνο στην ταχύτητα που αντιστοιχεί σε παράγοντα Lorentz πέντε για κάποια m από το σύνολο.



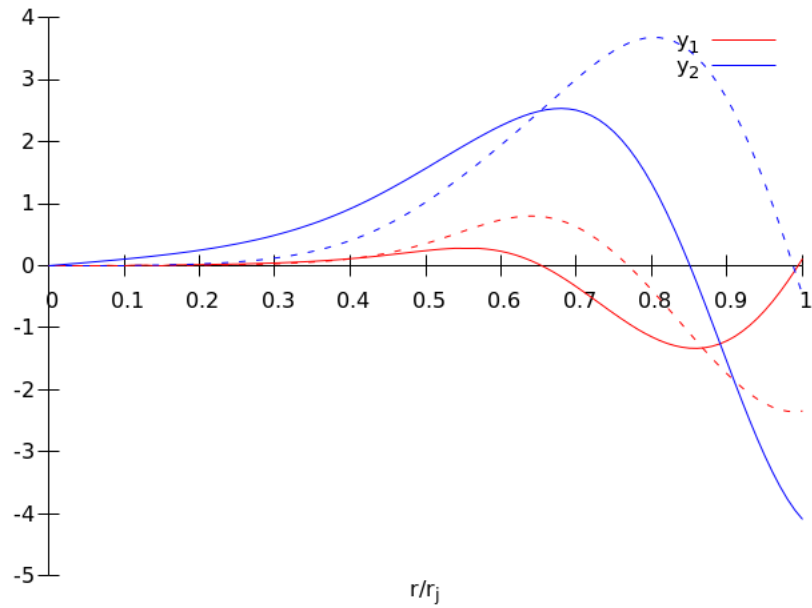
Σχήμα 3.42: Η θεμελιώδης ιδιοσυνάρτηση για $\gamma = 5$ και $m = 0$, για $k = 1.162 \cdot 10^{-2}$, $\Re\omega = 1.032 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 1.289 \cdot 10^{-3}$.



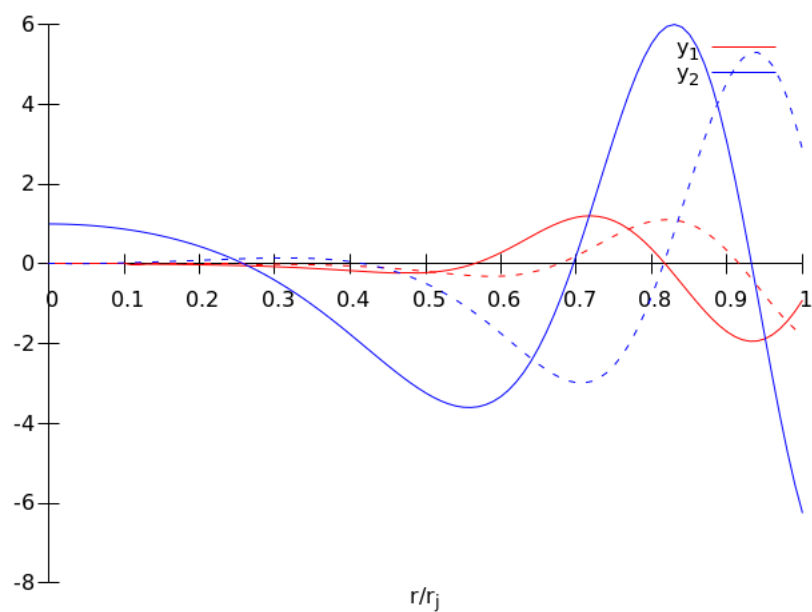
Σχήμα 3.43: Η θεμελιώδης ιδιοσυνάρτηση για $\gamma = 5$ και $m = 1$, για $k = 1.499 \cdot 10^{-3}$, $\Re\omega = 1.289 \cdot 10^{-3}$, $\Im\omega = 1.766 \cdot 10^{-3}$.



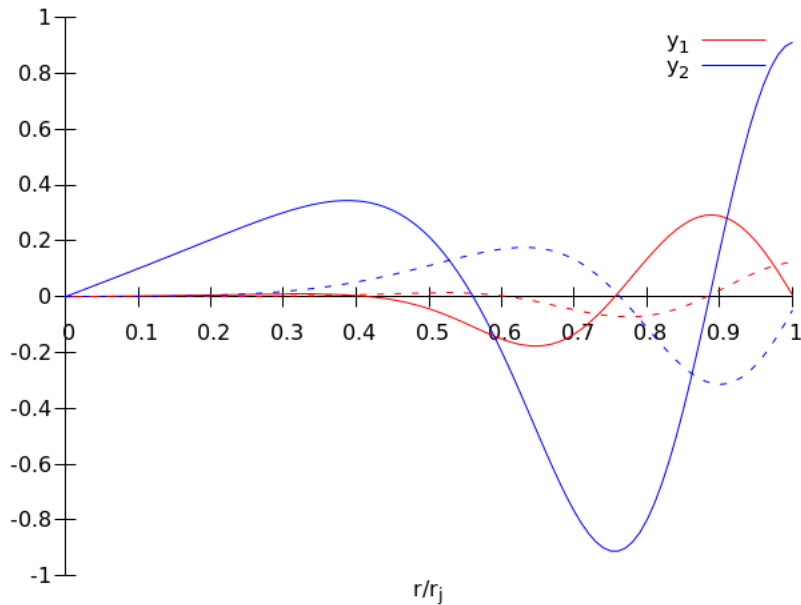
Σχήμα 3.44: Η πρώτη αρμονική για $\gamma = 5$ και $m = 0$, για $k = 1.677 \cdot 10^{-2}$, $\Re\omega = 9.981 \cdot 10^{-3}$, $\Im\omega = 1.382 \cdot 10^{-3}$.



Σχήμα 3.45: Η πρώτη αρμονική για $\gamma = 5$ και $m = 1$, για $k = 1.599 \cdot 10^{-2}$, $\Re\omega = 9.352 \cdot 10^{-3}$, $\Im\omega = 1.199 \cdot 10^{-3}$.



Σχήμα 3.46: Η δεύτερη αρμονική για $\gamma = 5$ και $m = 0$, για $k = 2.964 \cdot 10^{-2}$, $\Re\omega = 1.828 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 1.308 \cdot 10^{-3}$.



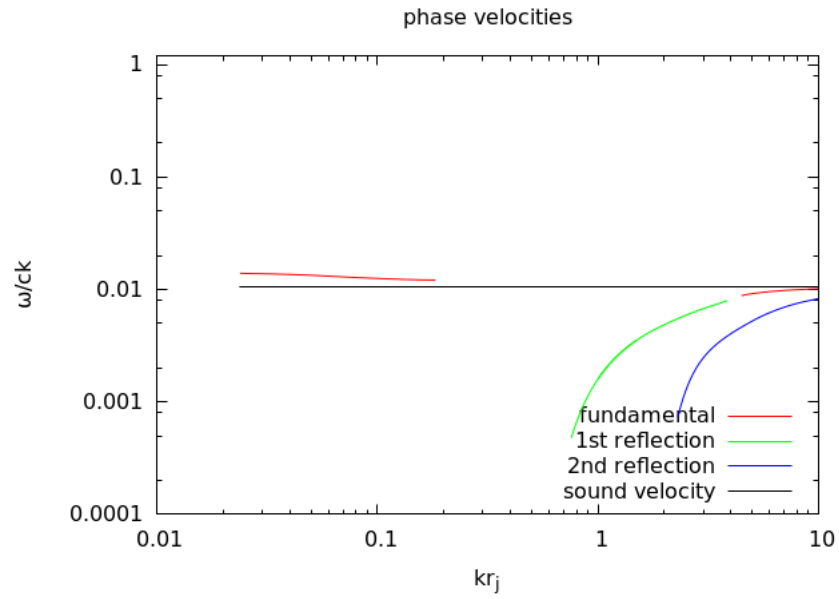
Σχήμα 3.47: Η δεύτερη αρμονική για $\gamma = 5$ και $m = 1$, για $k = 5 \cdot 10^{-2}$, $\Re\omega = 3.943 \cdot 10^{-2}$, $\Im\omega = 3.949 \cdot 10^{-4}$.

Τα βασικά συμπεράσματα που αναφέρθηκαν για τα διαγράμματα αναφοράς ισχύουν και στα διαγράμματα για $\gamma = 5$. Αν και η έντασή τους μπορεί να μην είναι η ίδια πάλι υπάρχει μία αναντιστοιχία ως προς την ονομασία και μία ασάφεια προς την ακριβή δομή. Αν και υπάρχει μία μεγαλύτερη ροπή προς την κανονικότητα κόμβων και τάξης της ιδιοσυνάρτησης, πάλι ο κανόνας της χορδής δεν ακολουθείται κατά γράμμα. Μία μελέτη, πάντως, σε βάθος γύρω από το ζήτημα των ιδιοσυναρτήσεων θεωρείται χρήσιμο για την συμπλήρωση της εικόνας γύρω από την ευστάθεια των πιδάκων.

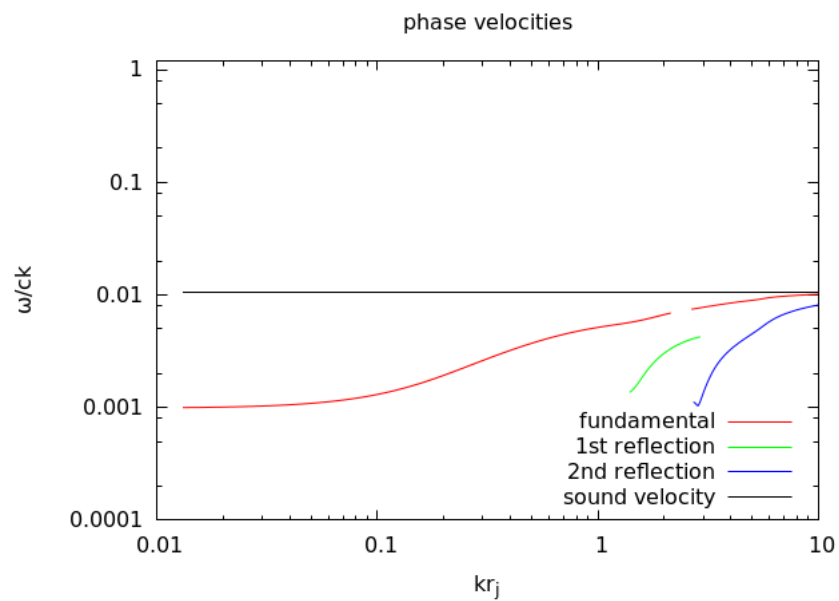
3.0.3.4 Ταχύτητα φάσης κυμάτων στο όριο των μεγάλων k

Όπως αναφέραμε στην αρχή σαρώνοντας το χωρίο $(\Re\omega, \Im\omega)$ για συγκεκριμένη τιμή του k και εντοπίζοντας εντός του χωρίου τα σημεία όπου το σφάλμα στην διαφορά της τιμής των ιδιοσυναρτήσεων στο όριο του πίδακα είναι μηδενικό, βρίσκουμε σημεία που είναι μέρος τη εκάστοτε ιδιοσυνάρτησης. Το ερώτημα είναι ποιές τιμές πρέπει να δώσουμε στις οριακές τιμές του χωρίου ώστε η σάρωση να έχει πιθανότητες να βρει όντως ολοκληρώσιμη ρίζα και να μην σπαταλάμε χρόνο ψάχνοντας σε χωρία κενά μηδενικών σφαλμάτων.

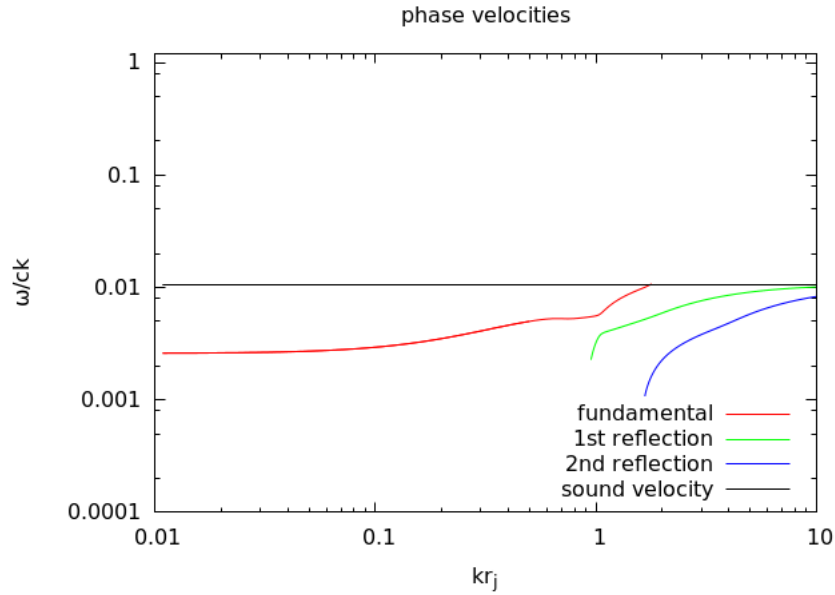
Αρχικά, το εύρος των k που ξεκινούσε η διερεύνηση για τις ρίζες κυμαινόταν για μεγάλες τιμές του, της τάξης του $5 - 10$. Το γεγονός αυτό εκπορεύεται από ένα εμπειρικό κανόνα ο οποίος λέει πως η φασική ταχύτητα λαμβάνει την τιμή της ταχύτητας του ήχου ή της ταχύτητας alfven όπως υπολογίζεται αυτή στον άξονα του πίδακα. Σε πρώτη φάση η τακτική αυτή δοκιμάστηκε ως πιθανή λύση να καθορίσουμε ένα εύρος τιμών για το πραγματικό μέρος του ω , αφήνοντας ελεύθερο μόνο το φανταστικό μέρος. Παρατίθενται ακριβώς παρακάτω διαγράμματα με την φασική ταχύτητα των κυμάτων της διαταραχής και την ταχύτητα του ήχου ή την alfven, και ύστερα θα ακολουθήσει μία πρώτη ανάλυση στα αποτελέσματα.



Σχήμα 3.48: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 1.0001$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.49: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 1.0001$ και $m = 1$.

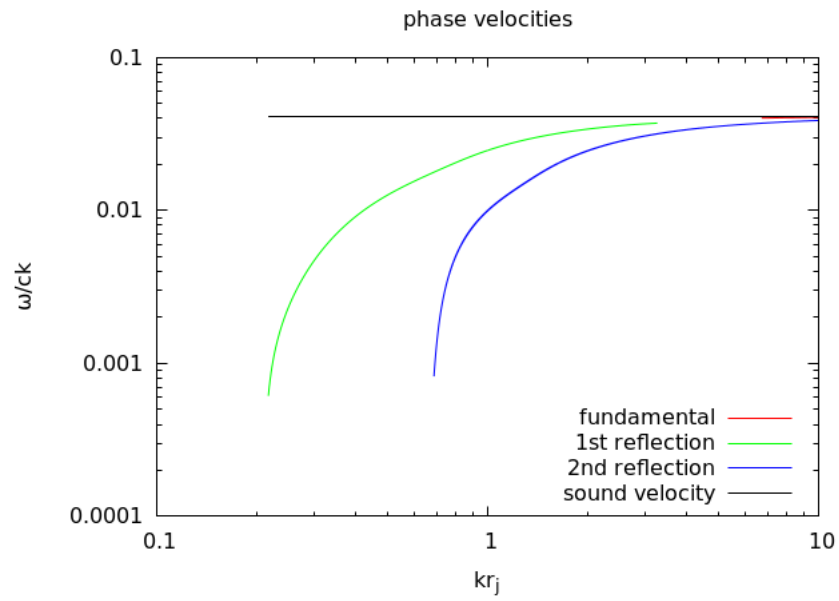


Σχήμα 3.50: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 1.0001$ και $m = -1$.

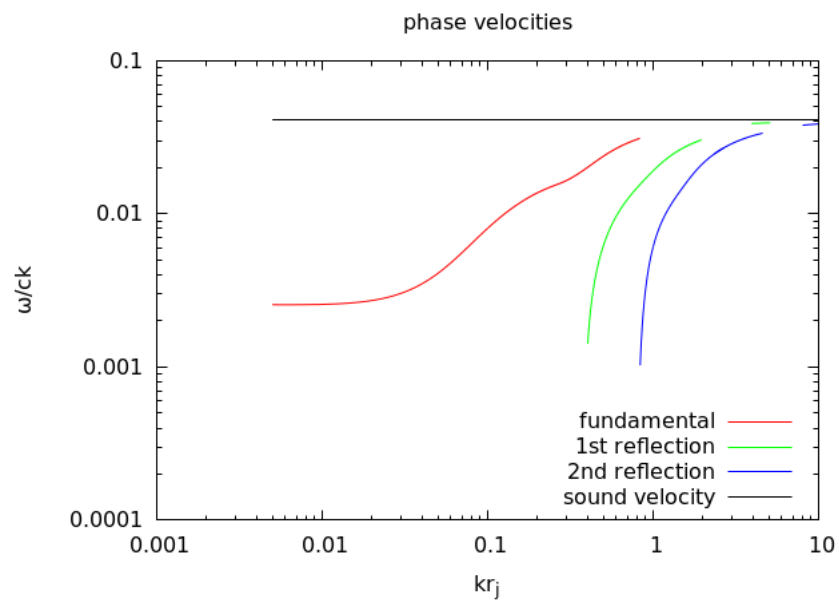
Αρχικά, ξεκινάμε με τα διαγράμματα της φασικής ταχύτητας των διαγραμμάτων αναφοράς των [Kim et al., 2015]. Με την μαύρη γραμμή αναπαρίσταται η ταχύτητα του ήχου εντός του πίδακα, ενώ με τα κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα είναι η φασική ταχύτητα της θεμελιώδους ιδιοσυνάρτησης, της πρώτης αρμονικής και της δεύτερης αντίστοιχα. Στα μεγάλα k των διαγραμμάτων παρατηρείται η σύγκλιση των τιμών στην τιμή της ταχύτητας του ήχου. Το γεγονός πως η πρώτη αρμονική και η δεύτερη αρμονική πλησιάζουν σε τάξη μεγέθους και όχι στην τιμή αυτή καθ' εαυτή σημαίνει πως η σύγκλιση κατά πάσα πιθανότητα συμβαίνει σε ακόμα μεγαλύτερη τιμή του k . Παρόλα αυτά, ακολουθώντας την παραπάνω εμπειρική μεθοδολογία κάποιος βρίσκει ακόμα και σε προσέγγιση τάξης μεγέθους με αρκετή ακρίβεια τιμή του $\Re\omega$. Αρκεί να χρησιμοποιήσει την σχέση:

$$\frac{\Re\omega}{ck} = v_{\text{sound ή alfvén}} \quad (3.1)$$

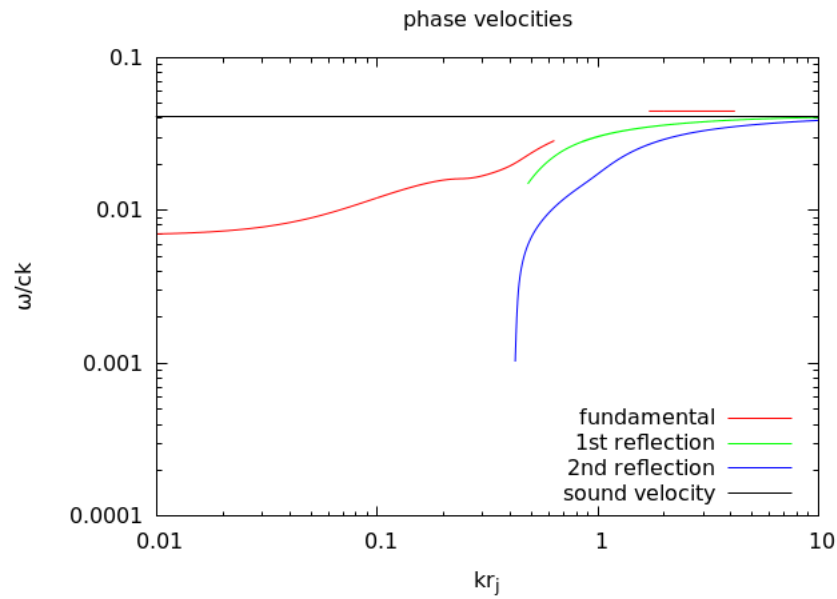
Στα επόμενα διαγράμματα αυξάνεται το γ και για τις τιμές 1.001, 1.25 και 5 θα δούμε αν η παραπάνω σχέση ισχύει στο γραμμικό κομμάτι στα μεγάλα k . Για $\gamma = 1.001$ έχουμε:



Σχήμα 3.51: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 1.001$ και $m = 0$.

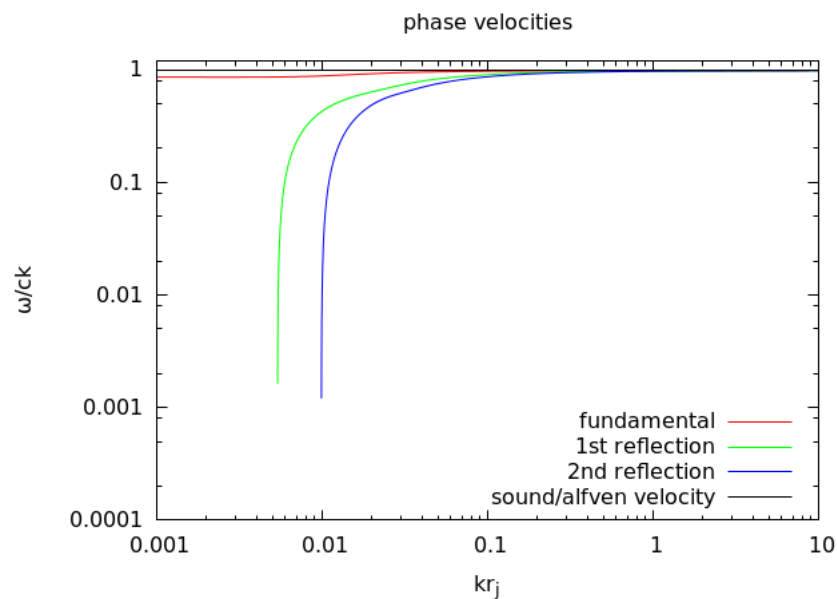


Σχήμα 3.52: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 1.001$ και $m = 1$.

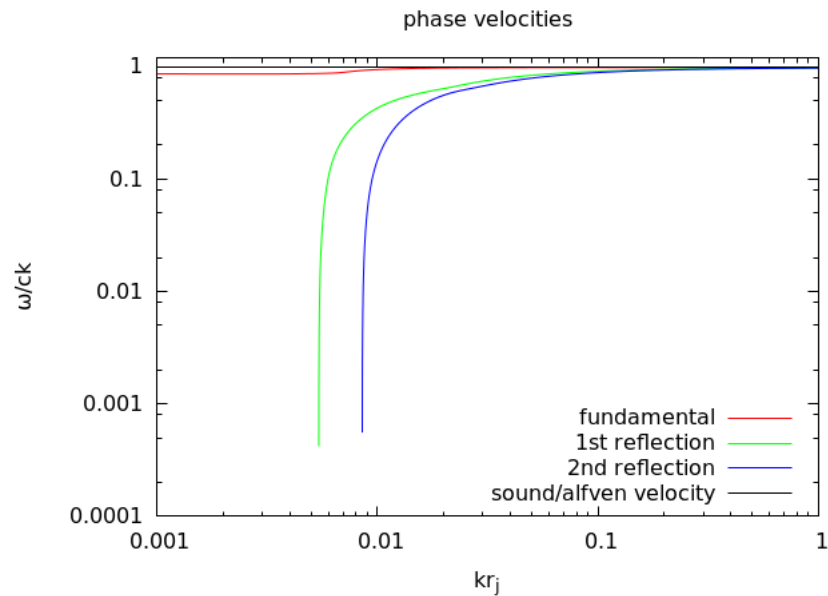


Σχήμα 3.53: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 1.001$ και $m = -1$.

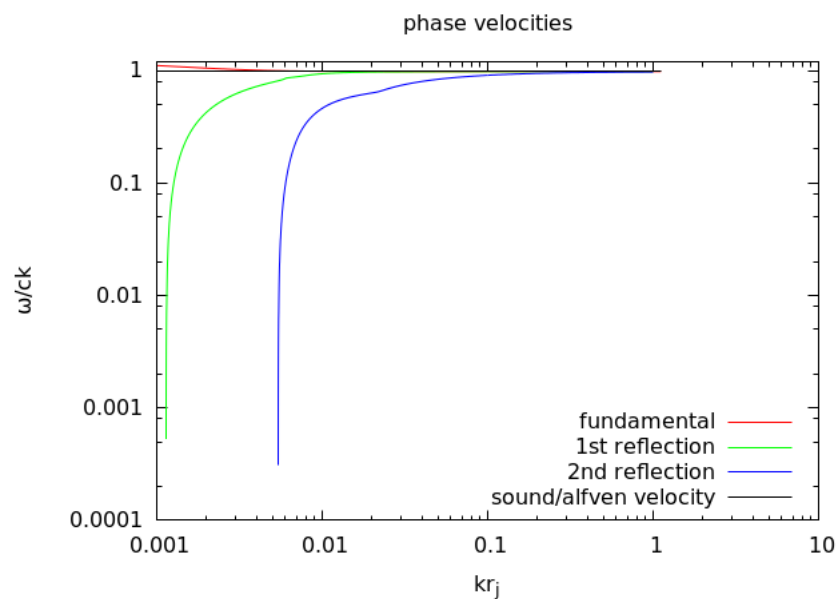
Η σχέση ολοφάνερα δείχνει να ισχύει και να βρίσκει την τιμή της φασικής ταχύτητας με αρκετά μεγάλη ακρίβεια. Ακολουθούν διαγράμματα για $\gamma = 5$ για πληρέστερη εικόνα και γενική αποτίμηση της σχέσης και την χρησιμότητά της.



Σχήμα 3.54: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 5$ και $m = 0$.



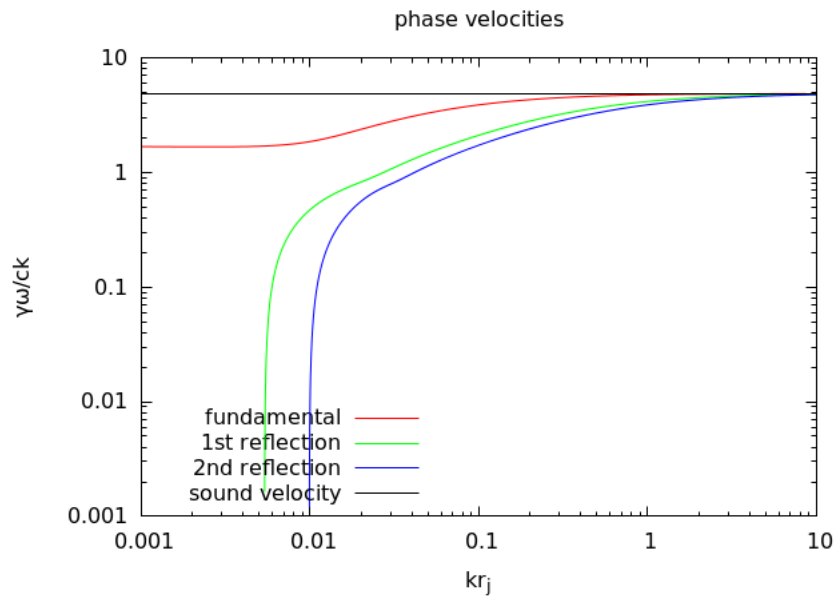
Σχήμα 3.55: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 5$ και $m = 1$.



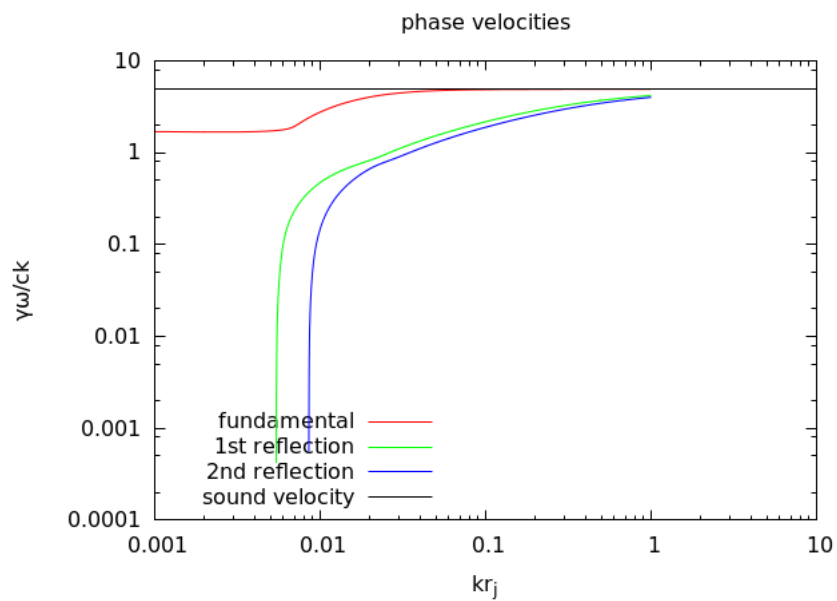
Σχήμα 3.56: Οι ταχύτητες φάσης για $\gamma = 5$ και $m = -1$.

Στα διαγράμματα για $\gamma = 5$ η ισχύς του ισχυρισμού που διατυπώθηκε παραπάνω είναι ακόμη πιο ξεκάθαρη. Πλέον, η τιμή της ταχύτητας του ήχου ή αντίστοιχα η alfven, άρα και το $\mathfrak{R}\omega$ βρίσκεται με μεγάλη ακρίβεια ως τιμή πλέον και όχι απλώς σαν τάξη μεγέθους. Μάλιστα, και στα υπόλοιπα υπόλοιπα διαγράμματα στην καθαρά σχετικιστική περιοχή ταχυτήτων βρίσκει την τιμή με εξαιρετική ακρίβεια ακολουθώντας το ίδιο μοτίβο. Ακόμα και από τα διαγράμματα το παραπάνω γεγονός είναι εξόφθαλμο.

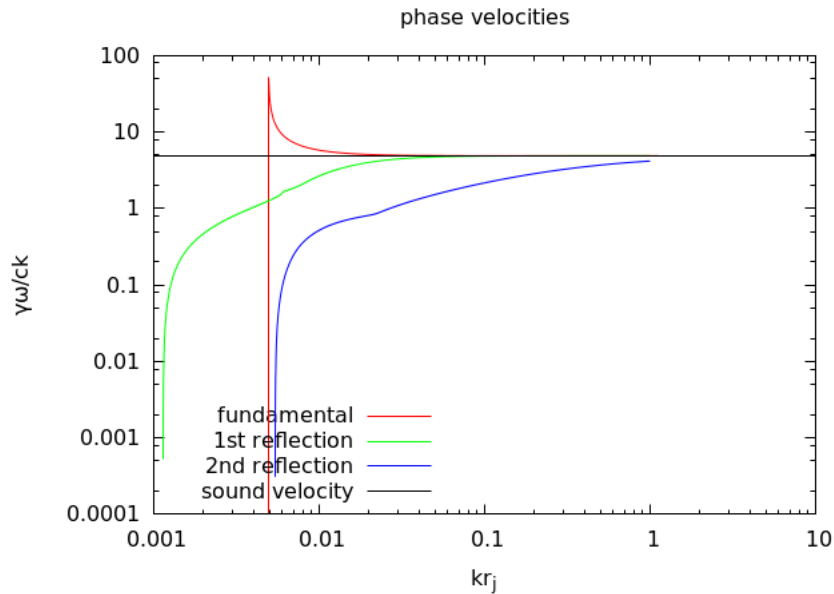
Ακολουθούν τα διαγράμματα όπου έχουμε εστιάσει στην περιοχή κοντά στην μονάδα, πολλαπλασιάζοντας με $\gamma_\omega = 1/\sqrt{1 - (\frac{\mathfrak{R}\omega}{ck})^2}$.



Σχήμα 3.57: Οι ταχύτητες φάσης $\gamma\omega v_{phase}$ για $\gamma = 5$ και $m = 0$.



Σχήμα 3.58: Οι ταχύτητες φάσης $\gamma\omega v_{phase}$ για $\gamma = 5$ και $m = 1$.



Σχήμα 3.59: Οι ταχύτητες φάσης $\gamma\omega v_{phase}$ για $\gamma = 5$ και $m = -1$.

Το επόμενο που πρέπει να ξεκαθαριστεί είναι ο λόγος που στο σχετικιστικό όριο είτε χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα του ήχου είτε την alfven το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Αυτό οφείλεται στην σχετικότητα. Εάν κάνουμε το μετασχηματισμό την ταχύτητας από το σύστημα του πίδακα στο σύστημα του εργαστηρίου έχουμε από τον τύπο μετασχηματισμού των ταχυτήτων:

$$v_{lab} = \frac{v_{co} - \beta}{1 - v_{co}\beta} \quad (3.2)$$

όπου η v_{co} η ταχύτητα στο κινούμενο σύστημα αναφοράς και v_{lab} η ταχύτητα στο σύστημα του εργαστηρίου, με την κανονικοποίηση του τύπου να είναι ως προς την ταχύτητα του φωτός. Η ταχύτητα του ήχου στο σύστημα του πίδακα έχει τιμή ίση με 0.0035 και η ταχύτητα alfven ίση με 0.0077. Οπότε, όταν ο παράγοντας $\beta \rightarrow 1$ τότε η διαφορά των δύο ταχυτήτων εντοπίζεται στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο. Για επαλήθευση του παραπάνω ισχυρισμού οι συγκεκριμένες ταχύτητες έχουν (απόλυτες) τιμές ίσες με:

γ	$v_{sound,lab}$	$v_{alfven,lab}$
1.25	0.5977	0.595
2	0.8651	0.8641
5	0.9796	0.9795
10	0.9949	0.9949

Επομένως, καθορίζοντας το πραγματικό μέρος του ω για το χωρίο έρευνας ριζών, μένει σαν ελεύθερη μεταβλητή το $\Im\omega$. Για το φανταστικό μέρος, με προκαθορισμένο το πραγματικό, σαρώναμε διαδοχικά από την κατώτερη τιμή 10^{-6} μέχρι ενός μεγίστου όπου δεν παρατηρούνταν πλέον ρίζες. Η κατώτερη τιμή επιλέχθηκε με το σκεπτικό πως κάτω από το συγκεκριμένο όριο η αστάθεια δεν χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο μήκος κύματος.

Κεφάλαιο 4

Σύνοψη-Ανοιχτά ερωτήματα

Η εν λόγω εργασία ασχολήθηκε με την μελέτη της ευστάθειας σχετικιστικών πιδάκων χωρίς επιφανειακά ρεύματα. Η πορεία που ακολουθήσαμε ήταν αρχικά να αναπαράξουμε τα πεδία τα οποία οδηγούν σε μία τέτοια δομή. Εν προκειμένω, για να το πετύχει κανείς αυτό θέλει όλες οι συνιστώσες των μαγνητικών πεδίων να ισούνται με το μηδέν για $\omega = \omega_j$. Η μορφή των πεδίων παρουσιάστηκε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο, τόσο για στατικό πίδακα όσο και για σχετικιστικό πίδακα με ταχύτητα στην διεύθυνση z . Ακόμη, το προφίλ της πίεσης έλαβε επίσης την αναλυτική του σχέση.

Επόμενο βήμα, η γραμμικοποίηση των εξισώσεων μέσω ανάλυσης με μετασχηματισμό Fourier της μαγνητούδροδυναμικής για την μελέτη της αστάθειας του πίδακα. Η ανάλυση έγινε στο σύστημα του πίδακα με την σχετικιστική επέκταση να ακολουθεί μέσω των κατάλληλων μετασχηματισμών Lorentz. Η δομή του πίδακα είναι κυλινδρική αξισυμμετρική, το οποίο σημαίνει πως όλα τα μεγέθη παρουσίαζαν εξάρτηση αποκλειστικά και μόνο από την μεταβλητή ϖ . Οπότε, η μορφή των διαταραχών που χρησιμοποιήθηκε έχει την μορφή $\delta f(t, \varpi, \phi, z) = \delta f(\varpi) \exp(im\phi + ikz - i\omega t)$.

Αφού το σύστημα των γραμμικοποιήθηκε το σύστημα των εξισώσεων, καταλήξαμε σε δύο διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι οι εξισώσεις που θα ολοκληρώνονται από τον αλγόριθμο. Κάνοντας την ίδια διαδικασία για το εξωτερικό περιβάλλον του πίδακα, περάσαμε στην διαδικασία των συνοριακών συνθηκών, δηλαδή την εξίσωση των τιμών των ιδιοσυναρτήσεων του πίδακα και του εξωτερικού περιβάλλοντος στο όριο του πίδακα. Τέλος, παρουσιάστηκε η σχετικιστική επέκταση της παραπάνω διαδικασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύθηκε η επιλογή των πεδίων και της επιλογής των τιμών των παραμέτρων των φυσικών μεγεθών του αδιατάραχτου συστήματος, τα οποία βρίσκονται ως παράμετροι εντός των εξισώσεων προς ολοκλήρωση. Στην συνέχεια ακολούθησε η παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Ως προς την ευστάθεια του πίδακα αυξάνοντας την ταχύτητα του, παρατηρείται να παρουσιάζει μεγαλύτερη ευστάθεια για όλα τα πιθανά m . Σημαντικό ρόλο παίζουν τα είδη των ασταθειών που δημιουργούνται εντός του συστήματος, καθώς και η ακριβής αλληλεπίδρασή μεταξύ τους, με την ακριβή εικόνα των μηχανισμών να αποτελεί ερώτημα προς επίλυση.

Η επίμονη αναφορά επί των αποτελεσμάτων αφορά την ονομασία των ιδιοσυναρτήσεων των διαταραχών. Αν και δανείζονται τους όρους θεμελιώδης ταλάντωση, πρώτη αρμονική κλπ από το κλασικό πρόβλημα της χορδής με πακτωμένα άκρα, η μελέτη τους στα πλαίσια της εργασίας δεν συνηγορεί σε μία τέτοια τακτική. Η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων δεν παρουσιάζει ένα προς ένα αντιστοιχία με αυτές της πακτωμένης χορδής όσον αφορά αρχικά τους τον αριθμό των κόμβων για κάθε τάξη ιδιοσυνάρτησης. Έτσι, βλέπουμε ρίζες από την θεμελιώδη, κιόλας, ιδιοταλάντωση και αυξομειούμενο αριθμό κόμβων για κάθε μία από τις υπόλοιπες σπάζοντας τον γνωστό κανόνα αριθμού κόμβων και ονομασίας.

Ακόμα, η αναλυτική μορφή των ιδιοσυναρτήσεων δεν είναι μία γνωστή παρά το γεγονός πως συνεισφορά από συναρτήσεις Bessel πρέπει να υπάρχει. Μία ακριβέστερη ανάλυση των παραπάνω ζητημάτων σαφώς και παρουσιάζει ενδιαφέρον. Ποια μπορεί να είναι η αναλυτική μορφή των

εξισώσεων αυτών; Ποίο ρόλο παίζει στην μορφή των εξισώσεων η διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης; Ποίος ο συσχετισμός αριθμού κόμβων και τάξης της λύσης;

Τελευταίο σημείο η ασυμπτωτική μορφή της σχέσης διασποράς για μεγάλα k . Είδαμε, πως ισχύει η ταύτιση της ταχύτητας του ήχου όπως υπολογίζεται στον άξονα και της φασικής ταχύτητας στο εν λόγω όριο. Ποια η ακριβής αιτία για συμβαίνει αυτό; Ποια η ακριβής σχέση που αναδεικνύει το παραπάνω;

Ακόμα, ένα ενδιαφέρον κομμάτι ενασχόλησης με την εργασία είναι η μελέτη της καθαρά από τεχνική πλευρά. Δηλαδή, η μελέτη που έχει να κάνει με την δομή πάνω σε αντίστοιχους κώδικες, την βελτίωσή τους, τον μείωση του θορύβου στα αποτελέσματα από τις καθαρά υπολογιστικές διαδικασίες ενός κώδικα και πολλά παρεμφερή ζητήματα που δεν άπτονται με άμεσο τρόπο της φυσικής.

Εν γένει καταφέραμε να απαντήσουμε σε βασικά ερωτήματα γύρω από το φαινόμενο της ευστάθειας γύρω από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Επιπλέον, είμαστε ακόμα ευτυχέστεροι διότι αναδείχθηκαν ερωτήματα μέσα από την διαδικασία της απάντησης των αρχικών μας αναζητήσεων που δεν είναι διόλου τετριμμένα, ούτε εύκολα προς επίλυση, όχι μόνο για την συγκεκριμένη εργασία, αλλά εν γένει στην παγκόσμια βιβλιογραφία όπου και συναντώνται αυτούσια. Οπότε, το συγκεκριμένο πόνημα δημιουργεί τις προϋποθέσεις για περαιτέρω αναζήτηση γύρω από ένα θέμα το οποίο βρίσκεται στην αιχμή του δόρατος για την σύγχρονη αστροφυσική, πετυχαίνοντας τον σκοπό της ακατάπαυστης διαδικασίας της μάθησης όπως αυτή την γνωρίζει ο άνθρωπος εδώ και χιλιάδες χρόνια.

Bibliography

- S. Appl, T. Lery, and H. Baty. Current-driven instabilities in astrophysical jets. Linear analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 355:818–828, March 2000.
- K. N. Gourgouliatos, Ch. Fendt, E. Clausen-Brown, and M. Lyutikov. Magnetic field structure of relativistic jets without current sheets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(4):3048–3059, 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19946.x. URL <http://mnras.oxfordjournals.org/content/419/4/3048.abstract>.
- Jinho Kim, Dinshaw S. Balsara, Maxim Lyutikov, Sergei S. Komissarov, Daniel George, and Prasanna Kumar Siddireddy. On the linear stability of magnetized jets without current sheets – non-relativistic case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450(1):982–997, 2015. doi: 10.1093/mnras/stv606. URL <http://mnras.oxfordjournals.org/content/450/1/982.abstract>.
- S. Lundquist. On the stability of magneto-hydrostatic fields. *Phys. Rev.*, 83:307–311, Jul 1951. doi: 10.1103/PhysRev.83.307. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.83.307>.
- D. Lynden-Bell. On why discs generate magnetic towers and collimate jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341(4):1360–1372, 2003. doi: 10.1046/j.1365-8711.2003.06506.x. URL <http://mnras.oxfordjournals.org/content/341/4/1360.abstract>.
- R. J. Tayler. The magnetohydrodynamic stability of white dwarfs and neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 162(1):17–23, 1973. doi: 10.1093/mnras/162.1.17. URL <http://mnras.oxfordjournals.org/content/162/1/17.abstract>.
- Nektarios Vlahakis. Stability of relativistic magnetized jets. Unpublished.