



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Μ.Δ.Ε. στην Ραδιοηλεκτρολογία/Ηλεκτρονική

**Μελέτη και Επεξεργασία Αλγορίθμων  
για τον Προσδιορισμό της Θέσης μίας  
Πηγής σε ένα Ασύρματο Δίκτυο  
Αισθητήρων**

*Επιβλέποντες:*

Αλιμπέρτης Γεώργιος  
Α.Μ. 2013102

Πολύδωρος Ανδρέας  
Δαγρές Ιωάννης

ΑΘΗΝΑ  
2016



# Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος του τμήματος Φυσικής και Πληροφορικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών στην Ραδιοηλεκτρολογία και την Ηλεκτρονική.

Η δημιουργία της αποσκοπεί στην σαφή καταγραφή και τεκμηρίωση των πολλαπλών τεχνικών προσδιορισμού της θέσης μίας πηγής σε ένα δίκτυο από αισθητήρες, χωρίς να παραλείπεται η λεπτομερή αναφορά στα μαθηματικά εργαλεία που είναι απαραίτητα για την δημιουργία των εκάστοτε αλγορίθμων. Έτσι θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Δαγρέ η συνεισφορά του οποίου στην ολοκλήρωση και συγγραφή της ήταν πολύτιμη, αφού με την καθοδήγησή του και τις συμβουλές του κατάφερα να προσεγγίσω όλες τις τεχνικές και να τις αναλύσω. Επίσης θα πρέπει να ευχαριστήσω τον κ. Πολύδωρο που μου έδωσε την τόσο σημαντική ευκαιρία να δουλέψω και να ασχοληθώ με αυτό το ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα εμπλουτίζοντας τις γνώσεις μου και παίρνοντας πολύτιμες εμπειρίες.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους τους φίλους μου που πίστεψαν σε μένα και με ενθάρρυναν σε κάθε στάδιο των σπουδών μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω προς την οικογένεια μου, τα αδέρφια μου Στέλλα και Δημήτρη και κυρίως τους γονείς μου Μιχάλη και Κλεάνθη για την διαχρονική συμπαράστασή τους και την υλική και ηθική στήριξη των επιλογών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την Κασσιανή για την υπομονή, το κουράγιο της και την σταθερή και αταλάντευτη υποστήριξή της σε μένα. Ήταν υπερπολύτιμη.



# Περίληψη

Σε αυτή τη πτυχιακή εργασία μελετούμε το πρόβλημα του προσδιορισμού της θέσης μίας πηγής σε ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων με τη χρήση RSS μετρήσεων. Για να ξεπεράσουμε την μη κυρτότητα του συνηθισμένου εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας (ML), το πρόβλημα αρχικά μετασχηματίζεται με τον ισοδύναμο εκθετικό μετασχηματισμό του συνηθισμένου μοντέλου απωλειών διαδρομής και τη χρήση του μετασχηματισμού UT. Έτσι προκύπτει ένας νέος εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας που ονομάζεται weighted least squares (WLS).

Στη συνέχεια με τη χρήση ενός κυρτού (convex) εκτιμητή προσεγγίζεται το ίδιο πρόβλημα. Στη περίπτωση αυτή ένας μη κυρτός εκτιμητής προσομοιώνει τον εκτιμητή ML εξαιλείνοντας από τον τύπο τον λογάριθμο. Η εφαρμογή του ημιορισμένου προγραμματισμού μετατρέπει τον μη κυρτό εκτιμητή σε ένα νέο κυρτό (SDP) προβάλλοντας πλεονεκτήματα στη χρήση του. Τέλος με τη χρήση του δεύτερης τάξης κωνικού προγραμματισμού γίνεται μια νέα προσέγγιση εκτιμητή δημιουργώντας και πάλι ένα νέο κυρτό (SOCP).

Όλες οι προσεγγίσεις συγκρίθηκαν με διαφορετικές παραμέτρους κάθε φορά όπως τη διάταξη, την τυπική απόκλιση και τον αριθμό αισθητήρων του προβλήματος ώστε να προσδιοριστεί η αποδοτικότητά τους σε κάθε περίπτωση.



# Περιεχόμενα

<b>1 Προσδιορισμός θέσης με τη χρήση της Maximum Likelihood</b>	<b>9</b>
1.1 Στοιχεία Θεωρίας	9
1.1.1 Μοντέλα Μέτρησης	9
1.1.2 Αμερόληπτος Εκτιμητής (Unbiased Estimator)	11
1.1.3 Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimator)	12
1.1.4 Κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Mean Square Error)	14
1.1.5 Όρια για την συνδιακύμανση του προσδιορισμού θέσης	15
1.1.6 Ανάλυση Cramer-Rao Lower Bound	15
1.2 Προσδιορισμός θέσης με τη χρήση της Maximum Likelihood για μια πηγή	16
1.2.1 Ανάλυση Cramer-Rao Lower Bound για τον εκτιμητή μίας πηγή	16
1.2.2 Προσδιορισμός θέσης μίας πηγής με τη χρήση Σταθμισμένου Εκτιμητή Ελάχιστων Τετραγώνων (Weighted Least Squares Estimator)	18
1.2.3 Προσομοίωση και Αποτελέσματα	21
<b>2 Προσδιορισμός της θέσης με τη χρήση τεχνικών Convex Optimization (SDP και SOCP)</b>	<b>25</b>
2.1 Θεωρία για τον προσδιορισμό κυρτών προβλημάτων	25
2.1.1 Νόρμα διανυσμάτων	25
2.1.2 Κυρτές Συναρτήσεις(Convex Functions)	26
2.1.3 Προβλήματα Κυρτής Βελτιστοποίησης(Convex Optimization)	26
2.2 Τεχνική Ημιορισμένου Προγραμματισμού (Semidefinite Programming Relaxation)	27
2.2.1 Εισαγωγή	27
2.2.2 Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)	28
2.2.3 Θετικά Ημιορισμένες Μήτρες	28
2.2.4 Από τον Γραμμικό στον Ημιορισμένο Προγραμματισμό	31
2.2.5 Ημιορισμένος Προγραμματισμός (Semidefinite Programming)	31
2.3 Εφαρμογή της Ημιορισμένης Τεχνικής για τον προσδιορισμό θέσης μίας πηγής	33
2.3.1 Διαμόρφωση της Maximum Likelihood	33
2.3.2 Εφαρμογή στο πρόβλημα	35
2.3.3 Ανάλυση Αποτελέσματος	36
2.4 Προσδιορισμός της θέσης με τη χρήση Κωνικού Προγραμματισμού Δεύτερης Τάξης (Second- Order Cone Programming)	37
2.4.1 Κωνικός Προγραμματισμός Δεύτερης Τάξης	37
2.4.2 Εφαρμογή στο πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης μίας πηγής με γνωστό $P_T$	40

2.4.3	Προσδιορισμός της θέσης με άγνωστο $P_T$ . . . . .	41
2.5	Εφαρμογή και χρήση του πακέτου επίλυσης CVX για τη λύση Convex προβλημάτων . . . . .	42
2.5.1	Δήλωση μεταβλητών . . . . .	43
2.5.2	Λειτουργίες διατήρησης της κυρτότητας . . . . .	43
2.5.3	Προσομοίωση και Αποτελέσματα . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Αποτελέσματα</b>	<b>49</b>
3.1	Σύγκριση λειτουργίας των εκτιμητών μιας πηγής . . . . .	49



# Κεφάλαιο 1

## Προσδιορισμός θέσης με τη χρήση της Maximum Likelihood

### 1.1 Στοιχεία Θεωρίας

#### 1.1.1 Μοντέλα Μέτρησης

Αρχικά περιγράφουμε τους διάφορους τύπους μετρήσεων που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της θέσης με τη βοήθεια αισθητήρων. Θεωρούμε σαν  $x_s = [x_s, y_s]^T \in \mathbb{R}^2$  τις συντεταγμένες της πηγής που πρέπει να εκτιμηθεί και  $\mathcal{C} = \{1, \dots, M\}$  το σύνολο των δεκτών των αισθητήρων που συνδέονται με την πηγή, και  $x_i = [x_i, y_i]^T \in \mathbb{R}^2, i \in \mathcal{C}$  είναι η γνωστή θέση των αισθητήρων.

#### Received-Strength-Signal

Η μέση μεταδιδόμενη ισχύς που μετράται από την πηγή στους αισθητήρες καθορίζεται από τη μέτρηση RSS. Οι μετρήσεις RSS περιλαμβάνουν πληροφορίες από τις αποστάσεις μεταξύ των πηγών και των αισθητήρων.

Το τυπικό λογαριθμικό-απόστασης μοντέλο (log-distance model) για τη λαμβανόμενη ενέργεια είναι :

$$RSS_{i,j} = P_j - L_0 - 10a \log_{10}(d_{i,j}/d_0) + n_{i,j} \quad (1.1)$$

όπου  $RSS_{i,j}$  είναι η λαμβανόμενη ενέργεια (σε dB) του  $i$  αισθητήρα από την  $j$  πηγή, της μεταδιδόμενης ενέργειας  $P_j$  σε απόσταση  $d_{i,j} = \|x_j - s_i\|$ ,  $d_0$  και  $L_0$  προσδιορίζουν την ανεφερόμενη απόσταση και την χαμένη ενέργεια,  $a$  είναι ο εκθέτης απωλειών διαδρομής και  $n_{i,j}$  είναι η Gaussian τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το log-normal στοιχείο διαλείψεων.

Στον ελεύθερο χώρο, η ισχύς του σήματος διασπάται αναλογικά του  $d^{-2}$ , όπου  $d$  είναι η απόσταση μεταξύ του πομπού και του δέκτη. Στα πραγματικά κανάλια, οι πολλαπλές διαδρομές του σήματος και το shadowing είναι δύο κύριες πηγές του περιβάλλοντος που επηρεάζουν τις μετρήσεις RSS. Πολλαπλά σήματα με διαφορετικό πλάτος και φάση φτάνουν στον δέκτη, και αυτά τα σήματα προστίθενται δημιουργικά και καταστροφικά σαν συνάρτηση της συχνότητας, προκαλώντας διαλήψεις επιλεκτικής συχνότητας. Η επίδραση αυτού του τύπου των διαλείψεων μπορεί να μειωθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάπλωσης του φάσματος η οποία παίρνει τη μέση τιμή της λαμβανόμενης ενέργειας σε ένα

ευρύ φάσμα συχνοτήτων. Οι δέκτες εξάπλωσης φάσματος είναι μια αποδεκτή λύση επειδή οι μέθοδοι εξάπλωσης φάσματος επίσης μειώνουν τις παρεμβολές στις χωρίς άδεια ζώνες στις οποίες οι ασύρματοι αισθητήρες τυπικά λειτουργούν. Η μετρούμενη λαμβανόμενη ισχύς χρησιμοποιεί μια μέθοδο ευρείας ζώνης η οποία είναι ισοδύναμη με τη μέτρηση του συνόλου της ισχύος για καθένα πολλαπλών διαδρομών σήμα.

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα από αυτό το log-normal μοντέλο είναι ότι το εύρος εκτίμησης βασιζόμενο στο μοντέλο RSS έχει διακύμανση ανάλογη με το πραγματικό εύρος. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το ότι το  $\sigma_{dB}$  είναι σταθερό με το εύρος, Στην πράξη, η σταθερή τυπική απόκλιση σε ντεσιμπέλ δείχνει ότι οι πολλαπλασιαστικοί συντελεστές είναι σταθεροί με το εύρος, αυτό εξηγεί την αναλογικότητα που προκύπτει. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα 1.5. Σε ένα πραγματικό εύρος 100m, θα μπορούσαμε να μετρήσουμε ένα εύρος 150m δηλαδή με ένα σφάλμα 50m, για 10m, το μετρούμενο εύρος θα μπορούσε να είναι 15m με ένα σφάλμα 5m, ένα συντελεστή κατά 10 μικρότερο. Αυτό μας εξηγεί γιατί τα RSS σφάλματα αναφέρονται σαν πολλαπλασιαστικά, σε σχέση με τα προσθετικά σφάλματα στο μοντέλο TOA. Επομένως το μοντέλο RSS είναι το πλέον αξιόπιστο σε υψηλής πυκνότητας δίκτυο αισθητήρων.

### Time-of-Arrival

Η μέτρηση TOA θεωρείται σαν το χρόνο μετάδοσης του σήματος μεταξύ της πηγής και των αισθητήρων  $T_i$ . Το μέγεθος TOA που μετράται περιλαμβάνει επίσης τη διάδοση που προκαλείται από τη χρονική καθυστέρηση. Έτσι μοντελοποιείται για τον  $i$  αισθητήρα :

$$T_i = \frac{d_i}{c} + w_i + \tau_i, i \in \mathcal{C} \quad (1.2)$$

όπου  $c$  είναι η ταχύτητα διάδοσης του σήματος εξαρτώμενη από το περιβάλλον (π.χ. στο κενό η ταχύτητα της ηλεκτρομαγνητικής διάδοσης είναι  $c = 3 \times 10^8$  m/s),  $w_i$  είναι η μέτρηση του θορύβου μοντελοποιημένη σαν Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση  $\sigma_{T,i}^2$  που σχετίζεται με το εύρος, και  $\tau_i$  είναι το σφάλμα του χρόνου καθυστέρησης. Ο χρόνος καθυστέρησης κατά κύριο λόγο είναι αποτέλεσμα του υλικού χρήσης και του λογισμικού στο πομπό και στο δέκτη ο οποίος προστίθεται στο χρόνο μέτρησης. Η κύρια πηγή σφαλμάτων των μετρήσεων TOA είναι οι πολλαπλές διαδρομές που παθαίνει το σήμα και ο προσθετικός θόρυβος.

### Angle-of-Arrival

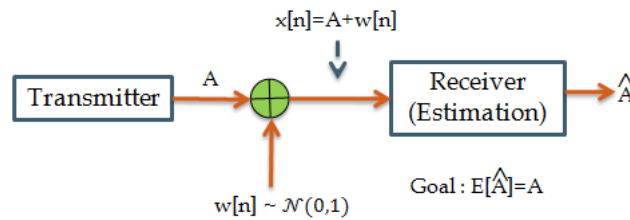
Η γωνία μεταξύ της πηγής και του αισθητήρα μετράται με τη μέτρηση AOA. Το υλικό για τη μέτρηση του AOA είναι σχετικά πιο σύνθετο από τις άλλες μεθόδους. Έτσι οι μετρήσεις του AOA μοντελοποιούνται :

$$\alpha_i = \tan^{-1} \frac{y_s - y_i}{x_s - x_i} + u_i, \quad i \in \mathcal{C} \quad (1.3)$$

όπου  $u_i$  είναι η μέτρηση του θορύβου που μοντελοποιείται σαν μηδενικής μέσης τιμής Gaussian τυχαία μεταβλητή με διακύμανση  $\sigma_a^2$ . Στην περίπτωση των ακουστικών σημάτων η μέτρηση του AOA, το αποτέλεσμα παρουσιάζει ότι η κανονική κατανομή είναι μεταξύ 2 και 6 βαθμών, ανάλογα με το εύρος.

## 1.1.2 Αμερόληπτος Εκτιμητής (Unbiased Estimator)

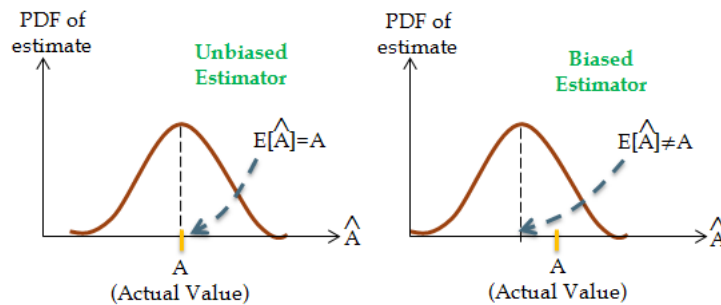
Θεωρούμε ένα απλό σύστημα επικοινωνίας όπου ο πομπός μεταδίδει συνεχή ροή από δείγματα δεδομένων όπου παρουσιάζεται με τη σταθερή τιμή  $A$ . Τα δείγματα δεδομένων στέλνονται μέσω του ενός καναλιού επικοινωνίας όπου προστίθεται λευκός Gaussian θόρυβος  $w[n]$  (με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1). Ο δέκτης λαμβάνει τα δείγματα και ο στόχος του είναι να εκτιμηθεί η πραγματική σταθερή τιμή που μεταδίδεται από τον πομπό με την παρουσία θορύβου. Εκφράζεται και σαν πρόβλημα DC.



Σχήμα 1.1: Σχεδιάγραμμα που μας δείχνει τη διαδικασία

Γνωρίζοντας ότι η σταθερή DC συνιστώσα έχει ενσωματωμένο θόρυβο, θα πρέπει να καταλήξουμε σε μία συνάρτηση του εκτιμητή για να εκτιμήσουμε τη DC συνιστώσα από τα λαμβανόμενα δείγματα. Στόχος της συνάρτησης εκτίμησης είναι να εκτιμηθεί η DC συνιστώσα έτσι ώστε η μέση τιμή της εκτίμησης να είναι ίση με την πραγματική τιμή DC. Αυτό είναι το κριτήριο που μας δείχνει αν είναι αμερόληπτος ή όχι ο εκτιμητής μας.

Τα παρακάτω διαγράμματα μας δείχνουν τη διαφορά μεταξύ ενός εκτιμητή που μεροληπτεί (biased) και ενός αμερόληπτου (unbiased)



Σχήμα 1.2:

Θεωρούμε ότι μας παρουσιάζεται ένα σύνολο  $N$  δειγμάτων δεδομένων που αντιπροσωπεύουν  $x[n]$  στο δέκτη. Θεωρούμε το μοντέλο του σήματος που μας δίνει τα ληφθέντα δείγματα δεδομένων :

$$x[n] = A + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$w[n] \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις εκτιμητών για να εκτιμήσουμε τη DC συνιστώσα από τα ληφθέντα δείγματα.

Για τον πρώτο εκτιμητή θεωρούμε :  $\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$   
 Έτσι ο υπολογισμός της μέσης τιμής θα μας δίνει :

$$\begin{aligned} E(\hat{A}) &= E\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E(x[n]) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E(A + w[n]) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [E(A) + E(w[n])] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [E(A) + 0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A = \frac{1}{N} NA = A \end{aligned}$$

όπου προκύπτει ότι ο εκτιμητής μας είναι αμερόληπτος.

Για τον δεύτερο εκτιμητή θεωρούμε :  $\hat{A} = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$   
 Έτσι ο υπολογισμός της μέσης τιμής θα μας δίνει :

$$\begin{aligned} E(\hat{A}) &= E\left(\frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} E(x[n]) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} E(A + w[n]) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} [E(A) + E(w[n])] = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} [E(A) + 0] = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} A = \frac{1}{2N} NA = \frac{A}{2} \neq A \end{aligned}$$

όπου προκύπτει ότι ο εκτιμητής μας δεν είναι αμερόληπτος.

Για έναν εκτιμητή να είναι αμερόληπτος εννοούμε ότι κατά μέσο όρο ο εκτιμητής θα δώσει την πραγματική τιμή σε μια άγνωστη μεταβλητή. Επειδή η τιμή της παραμέτρου μπορεί να είναι γενικά οπουδήποτε στο διάστημα  $a < A < b$  ο εκτιμητής μας θα το προσδιορίζει κατά μέσο όρο.

Μαθηματικά έναν εκτιμητής είναι αμερόληπτος (Unbiased Estimator) αν ισχύει :

$$E(\hat{A}) = A \quad , a < A < b$$

όπου  $(a, b)$  προσδιορίζει το εύρος της πιθανής τιμής του  $A$ .

Οι αμερόληπτοι εκτιμητές τείνουν να έχουν συμμετρικά PDF με κέντρο την πραγματική τιμή του  $A$ , ωστόσο αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Ο περιορισμός ότι  $E(\hat{A}) = A$  για όλα τα  $A$  είναι μια σημαντική παράμετρος. Θεωρώντας  $\hat{A} = g(x)$  όπου  $x = [x[0]x[1]...x[N-1]]^T$ , αυτό μας δίνει :

$$E(\hat{A}) = \int g(x)p(x; A)dx = A$$

για όλα τα  $A$ .

### 1.1.3 Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimator)

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας παραμένει ένας από τους δημοφιλέστερους εκτιμητές λόγω κυρίως του ότι είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος όσο οι καταγεγραμμένες παρατηρήσεις αυξάνονται. Χαρακτηριστικά τονίζουμε μερικά θεωρήματα που παρουσιάζουν την μορφή και τις ιδιότητες του MLE :

**Θεώρημα 1.1.1.** (Ασυμπτωτικές Ιδιότητες για τον MLE) Αν το PDF  $p(x; \theta)$  των δεδομένων  $x$  ικανοποιούν κάποιες συνθήκες "κανονικότητας", τότε η MLE της άγνωστης παραμέτρου  $\theta$  είναι ασυμπτωτικά κατανομημένη σύμφωνα με :

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta, I^{-1}(\theta))$$

όπου  $I(\theta)$  είναι ο πίνακας Fischer.

**Θεώρημα 1.1.2.** Η MLE της παραμέτρου  $a = g(\theta)$ , όπου  $g$  είναι μία  $r$ -διάστασης συνάρτηση για την  $p \times 1$  παράμετρο  $\theta$ , και η PDF  $p(x; \theta)$  παραμετροποιείται από το  $\theta$ :

$$\hat{a} = g(\hat{\theta})$$

για  $\hat{\theta}$ . Αν η  $g$  δεν είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε το  $\hat{a}$  μεγιστοποιεί την τροποποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας  $\bar{p}_T(x; a)$  που ορίζεται :

$$\bar{p}_T(x; a) = \max_{\theta, a=g(\theta)} p(x; \theta)$$

Στη γενική Gaussian περίπτωση τα παρατηρούμενα δεδομένα έχουν PDF :

$$x \sim \mathcal{N}(\mu(\theta), C(\theta))$$

Μετά από πράξεις έχουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της log-likelihood συνάρτησης προκύπτουν από τον τύπο:

$$\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta_k} = \frac{1}{2} \text{tr} \left( C^{-1}(\theta) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_k} \right) + \frac{\partial \mu(\theta)^T}{\partial \theta_k} C^{-1}(\theta) (x - \mu(\theta)) - \frac{1}{2} (x - \mu(\theta))^T \frac{\partial C^{-1}(\theta)}{\partial \theta_k} (x - \mu(\theta)) \quad (1.4)$$

για  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ένα γενικά γραμμικό σύστημα δεδομένων :

$$x = H\theta + w$$

όπου είναι ένας γνωστός  $N \times p$  πίνακας και  $w$  είναι ο θόρυβος με διαστάσεις  $N \times 1$  με PDF  $\mathcal{N}(0, C)$ . Έτσι προκύπτει η ακόλουθη PDF :

$$p(x; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det^{\frac{1}{2}}(C)} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - H\theta)^T C^{-1} (x - H\theta) \right]$$

έτσι η MLE του  $\theta$  θα προκύπτει ελαχιστοποιώντας την :

$$J(\theta) = (x - H\theta)^T C^{-1} (x - H\theta)$$

Επειδή η συνάρτηση που προκύπτει είναι μια τετραγωνική συνάρτηση του μεγέθους  $\theta$  και  $C^{-1}$  είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας, η παραγωγή θα μας δώσει το ολικό ελάχιστο και χρησιμοποιώντας την (1.4) θεωρώντας  $\mu(\theta) = H\theta$  καθώς και ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης δεν εξαρτάται από το  $\theta$ , έχουμε :

$$\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial (H\theta)^T}{\partial \theta_k} C^{-1} (x - H\theta)$$

Συνδυάζοντας τις μερικές παραγώγους για τη δημιουργία της βαθμίδας, έχουμε :

$$\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial (H\theta)^T}{\partial \theta} C^{-1} (x - H\theta)$$

έτσι αν θεωρηθεί ίση με το μηδέν έχουμε :

$$H^T C^{-1} (x - H\hat{\theta}) = 0$$

Λύνοντας ως προς  $\hat{\theta}$  έχουμε την MLE :

$$\hat{\theta} = (H^T C^{-1} H)^{-1} H^T C^{-1} x$$

Ως εκ τούτου ο  $\hat{\theta}$  είναι αμερόληπτος και έχει συνδυακόμενη :

$$C_{\hat{\theta}} = (H^T C^{-1} H)^{-1}$$

και επομένως για το γραμμικό μοντέλο θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο MLE είναι βέλτιστος.

**Θεώρημα 1.1.3.** Αν τα παρατηρούμενα δεδομένα  $x$  περιγράφονται από το γενικό γραμμικό μοντέλο :

$$x = H\theta + w$$

όπου  $H$  είναι ένας γνωστός  $N \times p$  πίνακας με  $N > p$  και βαθμού  $p$ ,  $\theta$  είναι ένα  $p \times 1$  διάνυσμα παράμετρος για να εκτιμηθεί, και  $w$  είναι ένα διάνυσμα θορύβου με PDF  $\mathcal{N}(0, C)$ , τότε ο MLE της  $\theta$  είναι :

$$\hat{\theta} = (H^T C^{-1} H)^{-1} H^T C^{-1} x$$

όπου το PDF της  $\hat{\theta}$  είναι :

$$\theta \sim \mathcal{N}(\theta, (H^T C^{-1} H)^{-1})$$

### 1.1.4 Κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Mean Square Error)

Στην προσπάθειά μας να βρούμε τον βέλτιστο εκτιμητή χρειάζεται να υιοθετήσουμε μερικά βέλτιστα κριτήρια έτσι να έχουμε σαφή εικόνα της προσέγγισης που κάναμε με τον αλγόριθμό μας. Ένα από αυτά είναι το κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Mean Square Error (MSE)) το οποίο εκφράζεται :

$$mse(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Αυτό μετρά τη μέση τιμή της μέσης τετραγωνικής απόκλισης του εκτιμητή από τη πραγματική τιμή. Δυστυχώς η υιοθέτηση αυτού του φυσικού κριτηρίου οδηγεί σε μη ρεαλιστικούς εκτιμητές, είναι αυτοί που δεν μπορούν να γραφούν αποκλειστικά ως συνάρτηση των δεδομένων. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί :

$$\begin{aligned} mse(\hat{\theta}) &= E\{[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)]^2\} \\ &= var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \end{aligned}$$

$$= \text{var}(\hat{\theta}) + b^2(\theta)$$

η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι ο MSE αποτελείται από λάθη λόγω της διακύμανσης του εκτιμητή, καθώς και την μεροληψία του (bias).

Σαν συνέχεια του παραπάνω κριτηρίου έχουμε μια διαφορετική προσέγγιση που εκφράζεται με το κριτήριο Root Mean Square Error (RMSE) και εκφράζεται :

$$RMSE(\hat{\theta}) = \sqrt{mse(\hat{\theta})} = \sqrt{E[(\hat{\theta} - \theta)^2]} \quad (1.5)$$

### 1.1.5 Όρια για την συνδιακύμανση του προσδιορισμού θέσης

Το όριο CRB είναι ένα μέσο για τον υπολογισμό του κατώτατου ορίου της διακύμανσης για κάθε αμερόληπτο εκτιμητή προσδιορισμού θέσης που χρησιμοποιεί τα μοντέλα μέτρησης RSS, TOA, ή AOA. Έτσι το κατώτατο όριο είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τους ερευνητές και για τους σχεδιαστές συστημάτων. Με τη δοκιμή για αλγόριθμους εκτίμησης, ο σχεδιαστής μπορεί γρήγορα να βρει την "καλύτερη περίπτωση" χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα τεχνολογίες μέτρησης.

Το όριο της συνδιακύμανσης του εκτιμητή είναι συνάρτηση των παρακάτω :

1. του αριθμού των γνωστής θέσης αισθητήρων
2. της γεωμετρίας των αισθητήρων
3. η περίπτωση για τον προσδιορισμό θέσης να είναι στις δυο ή στις τρεις διαστάσεις
4. ο τύπος μέτρησης της υλοποίησης (π.χ. RSS, TOA ή AOA)
5. οι παράμετροι του καναλιού (όπως  $\sigma_{dB}$  και  $n_p$  στο RSS,  $\sigma_T$  στο TOA, ή  $\sigma_a$  στο AOA μοντέλο μέτρησης)
6. ενοχλητικοί (άγνωστοι) παράμετροι που θα πρέπει επίσης να εκτιμηθούν

### 1.1.6 Ανάλυση Cramer-Rao Lower Bound

Το θεώρημα για τον προσδιορισμό του CRLB είναι :

**Θεώρημα 1.1.4.** (Cramer-Rao Lower Bound) Θεωρείται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF)  $p(x, \theta)$  ικανοποιεί τις συνθήκες :

$$E \left[ \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0$$

όπου η αναμενόμενη τιμή δίνεται σε σχέση με το  $p(x, \theta)$ . Τότε ο πίνακας συνδιακύμανσης για κάθε αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{\theta}$  ικανοποιεί τη σχέση :

$$C_{\hat{\theta}} - I^{-1} \geq 0 \quad (1.6)$$

όπου  $\geq 0$  ερμηνεύεται εννοώντας ότι ο πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος. Ο πίνακας Fisher  $I(\theta)$  δίνεται :

$$[I(\theta)]_{ij} = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

όπου οι παράγωγοι σχετίζονται με την πραγματική τιμή του  $\theta$  και η αναμενόμενη τιμή δίνεται σε σχέση με το  $p(x, \theta)$ . Ωστόσο, ένας αμερόληπτος εκτιμητής μπορεί να θεωρηθεί ότι επιτυγχάνει το όριο στη τιμή  $C_{\hat{\theta}} = I^{-1}(\theta)$  αν και μόνο αν :

$$\frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta} = I(\theta)(g(x) - \theta) \quad (1.7)$$

για μερικές  $p$  διαστάσεων συναρτήσεις  $g$  και μερικούς  $p \times p$  πίνακες  $I$ . Αυτός ο εκτιμητής, ο οποίος είναι αμερόληπτος εκτιμητής ελάχιστης διακύμανσης (*Minimum Variance Unbiased*), και για το καθένα ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι  $I^{-1}(\theta)$ .

## 1.2 Προσδιορισμός θέσης με τη χρήση της Maximum Likelihood για μια πηγή

Στη σχέση (1.1) η μεταβλητή  $n_{i,j}$  συχνά μοντελοποιείται σαν ανεξάρτητη και όμοια κατανεμημένη (IID) Gaussian τυχαία μεταβλητή. Επομένως η από κοινού εξαρτημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του παρατηρούμενου διανύσματος  $RSS_i$  όπου  $i = 1, \dots, N_s$  ( $N_s$  ο αριθμός των αισθητήρων) δοθέντος  $\theta$  είναι :

$$p(RSS|\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{\left( RSS_i - P_j + L_0 + 10 \log_{10} \left( \frac{d_i}{d_0} \right) \right)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

επομένως ο αντίστοιχος εκτιμητής της μέγιστης πιθανοφάνειας (*Maximum Likelihood Estimator*) θα είναι :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \left( 10 \log_{10} \frac{d_i}{d_0} + RSS_i - P_j + L_0 \right)^2 \quad (1.8)$$

όπου είναι ένας μη γραμμικός εκτιμητής ελάχιστων τετραγώνων (*NLS estimator*). Αυτός ο εκτιμητής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και όταν η κατανομή του  $n_i$  δεν είναι Gaussian ή ολοκληρωτικά άγνωστη, ενώ ο αντίστοιχος εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας αλλάζει ή δεν μπορεί να σχηματιστεί.

### 1.2.1 Ανάλυση Cramer-Rao Lower Bound για τον εκτιμητή μίας πηγής

Στη συνέχεια αναλύουμε το όριο CRLB για την κατώτατη δυνατή εκτίμηση για τον εκτιμητή μιας πηγής. Το Cramer-Rao Lower Bound ενός πίνακα συνδιακύμανσης για κάθε αμερόληπτο εκτιμητή δίνεται :

$$E_z[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] \geq J^{-1}$$

όπου  $J$  είναι ο Fisher πίνακας πληροφορίας με στοιχεία  $[J]_{i,j}$  και ορίζεται :

$$[J]_{i,j} = -E_z \left[ \frac{\partial^2 \ln p(z|\theta)}{\partial [\theta]_i \partial [\theta]_j} \right]$$



όπου  $z$  εκφράζουμε το διάνυσμα παρατήρησης και  $p(z|\theta)$  είναι η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) του διανύσματος παρατήρησης δοθέντος του  $\theta$ .

Αφού θεωρούμε ασύρματο σύστημα προσδιορισμού θέσης RSS (Received Signal Strength), δοθέντος της υπό συνθήκη συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε :

$$\begin{aligned} [J]_{1,1} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_i(\theta)}{\partial x} \right)^2 \\ [J]_{2,2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_i(\theta)}{\partial y} \right)^2 \\ [J]_{1,2} &= [J]_{2,1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(\theta)}{\partial x} \frac{\partial f_i(\theta)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.9)$$

όπου, αφού έχουμε θεωρήσει γνωστές όλες τις παραμέτρους της (1.1) ( $P_j, L_0, a, d_0$ ) εκτός από την απόσταση μεταξύ των αισθητήρων και των πηγών, θα προκύπτει η συνάρτηση  $f_i$  για τον υπολογισμό του πίνακα Fisher :

$$f_i(\theta) = 10a \log_{10} \|\theta - \theta_i\|$$

$$\frac{\partial f_i(\theta)}{\partial x} = \frac{10a}{\ln 10} \frac{x - x_i}{\|\theta - \theta_i\|^2}$$

$$\frac{\partial f_i(\theta)}{\partial y} = \frac{10a}{\ln 10} \frac{y - y_i}{\|\theta - \theta_i\|^2}$$

Μπορούμε να ορίσουμε  $k = \frac{10a}{\sigma \ln 10}$  Ορίζοντας το σφάλμα στην εκτίμηση της τοποθεσίας σαν  $e = \|\hat{\theta} - \theta\|$  τότε για κάθε αμερόληπτο εκτιμητή τοποθεσίας, στη ρίζα μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMSE)  $\sqrt{E(e^2)}$  το κατώτατο όριο είναι :

$$\begin{aligned} \sqrt{E(e^2)} &= \sqrt{E(\hat{x} - x)^2 + E(\hat{y} - y)^2} \\ &\geq \sqrt{[J^{-1}]_{1,1} + [J^{-1}]_{2,2}} \\ &= \sqrt{\text{tr}(J^{-1})} \end{aligned}$$

ως εκ τούτου ορίζουμε  $\sigma_{NC} = \sqrt{J^{-1}}$  το CRLB στο RMSE για κάθε αμερόληπτο εκτιμητή.

Επομένως προκύπτει :

$$\sqrt{E(e^2)} \geq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{10a}{\ln 10} \frac{x - x_i}{\|\theta - \theta_i\|^2} \right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{10a}{\ln 10} \frac{y - y_i}{\|\theta - \theta_i\|^2} \right)^2}} \quad (1.10)$$

*Σχέση μεταξύ των  $\sigma_{NC}$  και των παραμέτρων του περιβάλλοντος:*

Από τις σχέσεις (1.9) γίνεται φανερό ότι το  $J$  μπορεί να γραφεί σαν  $J = k^2 G(\theta, \theta_i)$ , όπου  $G(\theta, \theta_i) \in S^2$  ( $[G]_{i,j} = [J]_{i,j}/k^2$ ) είναι μία μήτρα που εξαρτάται αποκλειστικά από τις πραγματικές θέσεις των πηγών και που εμπλέκονται οι θέσεις των αισθητήρων αλλά όχι το μέγεθος  $k$ . Επομένως :

$$\sigma_{NC} = k^{-1} \sqrt{\text{tr}(G^{-1})} \propto k^{-1} = \frac{\ln 10 \sigma}{10a}$$

Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι  $\sigma_{NC} \propto \sigma/a$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\sigma_{NC}$  αυξάνει όσο αυξάνεται το  $\sigma$  ενώ μειώνεται όσο το  $a$  αυξάνεται. Αυτό γίνεται επειδή οι μετρήσεις του RSS ποικίλουν περισσότερο γύρω από τη μέση ισχύ καθώς το  $\sigma$  γίνεται μεγαλύτερο, αλλά γίνονται επηρεάζονται περισσότερο από την απόσταση καθώς το  $a$  γίνεται μεγαλύτερο.

*Σχέση μεταξύ των  $\sigma_{NC}$  και του μεγέθους του δικτύου:*

Θεωρούμε ότι τόσο η θέση της πηγής όσο και η θέση των αισθητήρων κλιμακώνεται από ένα παράγοντα  $s$ , επομένως  $\theta_{new} = [sx, sy]^T$ ,  $\phi_{i,new} = [sx_i, sy_i]$ , πράγμα που μας δείχνει ότι το δίκτυο κλιμακώνεται χωρίς την αλλαγή της τοπολογίας ( $\sigma$  και  $a$  τα κρατάμε ίδια).

Για την αντιστοίχιση με το  $J(\sigma_{NC})$  πριν και μετά την κλιμάκωση ορίζουμε  $J_{old}(\sigma_{NC,old})$  και  $J_{new}(\sigma_{NC,new})$ , αντίστοιχα. Από την (1.9) έχουμε  $J_{new} = s^{-2} J_{old}$ . Επομένως :

$$\sigma_{NC,new} = \sqrt{\text{tr}(J_{new}^{-1})} = s \sqrt{\text{tr}(J_{old}^{-1})} = s \sigma_{NC,old}$$

## 1.2.2 Προσδιορισμός θέσης μίας πηγής με τη χρήση Σταθμισμένου Εκτιμητή Ελάχιστων Τετραγώνων (Weighted Least Squares Estimator)

Για την επίλυση της Maximum Likelihood είναι δυνατές ποικίλες λύσεις ανάλογα κάθε φορά με την ακρίβεια της λύσης που επιζητούμε καθώς και με τα δεδομένα που έχουμε. Έτσι, στη παρακάτω προσέγγιση επιχειρούμε την επίλυση της ML με τη βοήθεια των ελάχιστων τετραγώνων αφού πρώτα κάνουμε μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς.

### Unscented Transformation

Αρχικό βήμα για την επίλυση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων είναι η εφαρμογή του μετασχηματισμού UT. Ο UT δημιουργήθηκε με την πεποίθηση ότι είναι ευκολότερο να προσεγγίσουμε την κατανομή της πιθανότητας από την προσέγγιση από την προσέγγιση μιας αυθαίρετης μη γραμμικής συνάρτησης. Έτσι αναπτύχθηκε σαν μέθοδο για τη μετάδοση της μέσης τιμής και της συνδιακύμανσης μέσω μη γραμμικών μετασχηματισμών. Με τη χρήση του UT, τα στατιστικά μεγέθη από της μη γραμμικές μετασχηματισμένες τυχαίες μεταβλητές μπορούν να εκτιμηθούν με ακρίβεια.

Για μία  $n$  διαστάσεων τυχαία μεταβλητή  $a$  με μέση τιμή  $\bar{a}$  και συνδιακύμανση  $\Sigma_a$ , η μέση τιμή και η συνδιακύμανση για μία  $m$  διαστάσεων τυχαία μεταβλητή  $\beta$  σε σχέση με την  $a$  με το μη γραμμικό μετασχηματισμό  $\beta = h(a)$  ( $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ) μπορεί να προσεγγιστεί :

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \sum_{j=0}^{2n} W^{(j)} h(a^{(j)}) \\ \Sigma_{\beta} &= \sum_{j=0}^{2n} W^{(j)} [h(a^{(j)}) - \bar{\beta}] [h(a^{(j)}) - \bar{\beta}]^T \end{aligned} \quad (1.11)$$

όπου

$$a^{(0)} = \bar{a}, W^{(0)} = \frac{k}{n+k},$$

$$a^{(j)} = \bar{a} + (\sqrt{(n+k)\Sigma_a})_j, W^{(j)} = \frac{1}{2(n+k)}$$

$$a^{(n+j)} = \bar{a} - (\sqrt{(n+k)\Sigma_a})_j, W^{(n+j)} = \frac{1}{2(n+k)}$$

$$j = 1, \dots, n$$

Έχουμε  $a^{(j)}$  ( $j = 0, \dots, 2n$ ) όπου ονομάζονται σημεία σίγμα και  $W^{(j)}$  ( $j = 0, \dots, 2n$ ) είναι τα αντίστοιχα βάρη,  $k \in \mathbb{R}$  είναι μια ελεύθερη μεταβλητή για να προσαρμόσει τις στιγμές στα σημεία σίγμα, και  $(A)_j$  προσδιορίζει την  $j$  στήλη του  $A$ .

### Προσέγγιση Σταθμισμένων Ελάχιστων Τετραγώνων (Weighted Least Squares Approach)

Στο πρόβλημα μέγιστης πιθανοφάνειας η εξίσωση (1.8) είναι μη κυρτή, προκύπτοντας ότι υπάρχουν πολλαπλά τοπικά ελάχιστα αλλά το ολικό ελάχιστο είναι δύσκολη η εύρεση του. Μετατρέπουμε τη εξίσωση διάδοσης για την προσέγγιση ενός διαφορετικού προβλήματος βελτιστοποίησης ευκολότερο στη λύση του, και το κυριότερο να είναι δυνατή η εύρεση του ολικής λύσης. Σε αντίθεση με την εφαρμογή του ημιορισμένου προγραμματισμού για τη λύση της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας που εφαρμόζουμε στο επόμενο κεφάλαιο μπορούμε να θεωρήσουμε μία ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης διάδοσης :

$$10^{\frac{L_i - L_0}{5a}} = 10^{\log_{10} \frac{\|x - s_i\|^2}{d_0^2} + \frac{n_i}{5a}} \quad (1.12)$$

όπου θεωρούμε  $z_i = 10^{\frac{L_i - L_0}{5a}}$  και  $y_i = \log_{10}(\|x - s_i\|^2/d_0^2) + n_i/5a$  και επομένως η (1.12) γράφεται ισοδύναμα :

$$z_i = 10^{y_i} \quad (1.13)$$

όπου  $y_i \sim \mathcal{N}(\log_{10}(\|x - s_i\|^2/d_0^2), \sigma_{n_i}^2/25a^2)$ . Γίνεται φανερό ότι οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης σχετίζονται με τη θέση της πηγής που θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Είναι γνωστό ότι αν  $z_i$  ακολουθεί την Gaussian κατανομή, τότε ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) της πηγής χρησιμοποιώντας  $N$  ανεξάρτητες μετρήσεις μπορεί να εκφραστεί :

$$\min_x \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{z_i}^2} (z_i - \bar{z}_i)^2 \quad (1.14)$$

όπου  $\bar{z}_i$  και  $\sigma_{z_i}^2$  είναι αντίστοιχα η μέση τιμή και η συνδυακόμενη του  $z_i$ . Ωστόσο,  $z_i$  είναι φανερό ότι δεν είναι Gaussian κατανομή. Έτσι για την μη Gaussian κατανομή  $z_i$ , το πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης (1.14) γίνεται ένα μη γραμμικό σταθμισμένο πρόβλημα ελάχιστων τετραγώνων (WLS), όπου  $1/\sigma_{z_i}^2$  αναφέρεται ως το βάρος για την  $i$  μέτρηση  $z_i$ .

Παρατηρούμε ότι για τη λύση του προβλήματος (1.14) απαιτείται να γνωρίζουμε τόσο το  $\bar{z}_i$  όσο και  $\sigma_{z_i}^2$ , τα οποία δεν μπορούν να παρουσιαστούν αναλυτικά από την (1.13). Ωστόσο μπορεί να γίνει η προσέγγισή τους από τη μέθοδο που αναπτύξαμε παραπάνω, Unscented Transformation, όπου τόσο τα σημεία σίγμα όσο και τα βάρη τους σχετίζονται με το  $y_i$ . Έτσι σύμφωνα με τη παραπάνω ανάλυση τα σημεία σίγμα και τα βάρη τους προσδιορίζονται :

$$y_i^{(0)} = \log_{10}(\|x - s_i\|^2/d_0^2), \quad W^{(0)} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
y_i^{(1)} &= y_i^{(0)} + \sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a, & W^{(1)} &= \frac{1}{6} \\
y_i^{(2)} &= y_i^{(0)} - \sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a, & W^{(2)} &= \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

όπου διαλέγουμε  $k = 2$  έτσι ώστε να προκύπτει  $n+k = 3$ . Η μέση τιμή και η διακύμανση του  $z_i$  θα είναι επομένως :

$$\bar{z}_i \approx a_i \frac{\|x - s_i\|^2}{d_0^2}$$

$$\sigma_{z_i}^2 \approx \frac{\|x - s_i\|^4}{d_0^4} \left[ \frac{2}{3}(1 - a_i)^2 + \frac{1}{6}(10^{\sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a} - a_i)^2 + \frac{1}{6}(10^{-\sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a} - a_i)^2 \right] \tag{1.16}$$

όπου  $a_i = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}10^{\sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a} + \frac{1}{6}10^{-\sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a}$  είναι μια σταθερά και  $\sigma_{z_i}^2$  δεν είναι διαθέσιμη επειδή δεν είναι γραμμική συνάρτηση της ζητούμενης πηγής  $x$ . Έτσι χρησιμοποιούμε την εκτίμηση  $\hat{\sigma}_{z_i}^2$  όπου αντικαθιστούμε το  $\sigma_{z_i}^2$  στην (1.14). Σύμφωνα με την εξίσωση διάδοσης (1.1) το  $\hat{\sigma}_{z_i}^2$  μπορεί να γίνει :

$$\hat{\sigma}_{z_i}^2 = 10^{2(L_i - L_0)/5a} \left[ \frac{2}{3}(1 - a_i)^2 + \frac{1}{6}(10^{\sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a} - a_i)^2 + \frac{1}{6}(10^{-\sqrt{3}\sigma_{n_i}/5a} - a_i)^2 \right] \tag{1.17}$$

όπου έχουμε κάνει τη μετατροπή  $\|x - s_i\|/d_0 \approx 10^{(L_i - L_0)/10a}$ . Έτσι αντικαθιστώντας  $\sigma_{z_i}^2$  με  $\hat{\sigma}_{z_i}^2$  και αντικαθιστώντας  $\bar{z}_i \approx a_i \frac{\|x - s_i\|^2}{d_0^2}$  στην (1.14), έχουμε την ακόλουθη μορφή σταθμισμένων ελάχιστων τετραγώνων όπου κατά προσέγγιση παρουσιάζει το πρόβλημα εύρεσης της θέσης μίας πηγής :

$$\min_x \sum_{i=1}^N \frac{1}{\hat{\sigma}_{z_i}^2} (z_i - a_i \|x - s_i\|^2 / d_0^2)^2 \tag{1.18}$$

το οποίο ισοδύναμα γράφεται :

$$\min_{x, \rho} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\hat{\sigma}_{z_i}^2} [z_i - a_i(\rho - 2s_i^T x + \|s_i\|^2) / d_0^2]^2 \tag{1.19}$$

$$s.t. \quad \|x\|^2 = \rho$$

όπου η (1.19) παραμένει μη κυρτή.

Παρατηρούμε ότι στην (1.19) λύνουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού της θέσης χρησιμοποιώντας τις μετασχηματισμένες μετρήσεις  $z_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), οι οποίες είναι στον κανονικό τομέα ενέργειας (standard power domain). Η πυκνότητα της μετασχηματισμένης μέτρησης στο standard power domain μπορεί να είναι εξαιρετικά ασύμμετρα, πράγμα που θα μπορούσε να κάνει τον αλγόριθμο πολύ ευαίσθητο σε θορύβους εκτός και αν δωθεί ένα κατάλληλο βάρος για κάθε  $z_i$ . Παρατηρούμε από την (1.17) ότι τα βάρη  $1/\hat{\sigma}_{z_i}^2$  ( $i = 1, \dots, N$ ) έχουν αντίστοιχα μετατραπεί στο standard power domain, και σχετίζονται άμεσα με την ισχύ του θορύβου και τις περιοχές των αισθητήρων σε σχέση με τη πηγή. Έτσι, η ευαισθησία της λύσης της (1.19) στους θορύβους μπορεί να είναι αποτελεσματικά μειωμένη από τα βάρη παρόλο που τα βάρη προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας εσφαλισμένες μετρήσεις.

### 1.2.3 Προσομοίωση και Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα αποτελέσματα προσομοίωσης για το πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης. Από το μοντέλο διάδοσης θεωρούμε  $d_0 = 1m, L_0 = 40dB$  και  $a = 3$ . Επιπρόσθετα θεωρούμε την υπόθεση ότι υπάρχουν  $N$  αισθητήρες οι οποίοι βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $(0, 0)$  με  $rad = 20$ . Η θέση των  $i$  αισθητήρων ( $i = 1, \dots, N$ ) δίνεται :

$$a_i = rad \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, \quad b_i = rad \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} \quad (1.20)$$

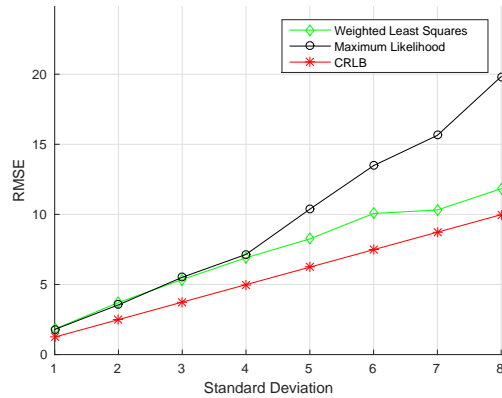
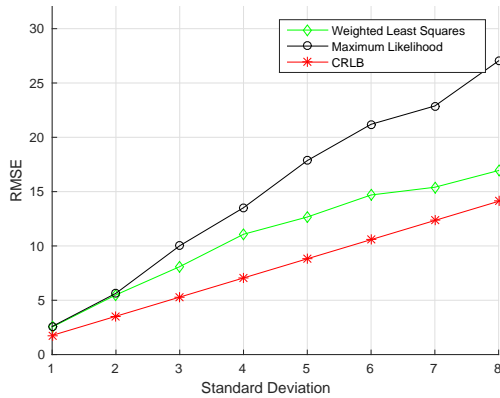
Είναι γνωστό ότι η γεωμετρική διάταξη των πηγών και των αισθητήρων έχουν σημαντική επίπτωση στον ακριβή προσδιορισμό της θέσης, η οποία είναι γνωστή σαν γεωμετρική αραίωση (geometric dilution) ακρίβειας. Για τη διερεύνηση αυτού του φαινομένου, κρατάμε τις θέσεις των αισθητήρων σταθερές ( $N = 3$  και  $= 6$ ) και διαλέγουμε τρεις διαφορετικές θέσεις της πηγής οι οποίες αναπαριστούν τρεις τυπικές γεωμετρικές υλοποιήσεις πηγών-αισθητήρων. Στην πρώτη περίπτωση  $(0, 2)$  τοποθετούμε την πηγή πολύ κοντά στο κέντρο (του τριγώνου για  $N=3$ , ομοιόμορφη κατανομή με βάση τους τύπους (1.20) για  $N=6$ ) που διαμορφώνουν οι αισθητήρες, στη δεύτερη περίπτωση είναι  $(12, -2)$  όπου βρίσκεται κοντά σε κάποιον από τους αισθητήρες ενώ είναι απομακρυσμένο από τους υπόλοιπους και στην τρίτη περίπτωση  $(22, 8)$  το οποίο βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα που σχηματίζεται από τους αισθητήρες.

Το RMSE για διάφορους εκτιμητές και διάφορες θέσεις της πηγής παρουσιάζονται στα σχήματα 1.3-1.5. Γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία ότι όλοι οι ML εκτιμητές (εκτιμητές ML που χρησιμοποιούν σαν αρχικό σημείο από τον αλγόριθμο SDP και το LLS) συγκλίνουν στο ίδιο σημείο και στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται στην καμπύλη της ML. Αυτό το φαινόμενο υποδεικνύει το πρόβλημα της μη σύγκλισης του εκτιμητή ML δεν παρουσιάζεται όταν το  $N$  είναι μικρό. Ωστόσο, το ίδιο πρόβλημα γίνεται εμφανές όσο το  $N$  αυξάνεται. Με τη βοήθεια των προσομοιώσεων γίνεται αντιληπτό ότι όλοι αυτοί οι εκτιμητές μεροληπτούν (biased) περισσότερο ή λιγότερο. Επομένως η εκτέλεση δεν θα λειτουργεί σωστά αν βρίσκεται κάτω από το κατώτατο όριο που εκφράζεται με το CRLB. Ωστόσο, το CRLB μπορεί να εξυπηρετήσει σαν σημείο αναφοράς αντιπροσωπεύοντας το κατώτατο όριο το οποίο κάθε αμερόληπτος εκτιμητής μπορεί να επιτύχει.

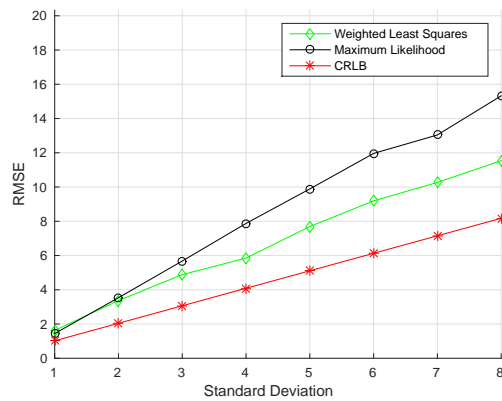
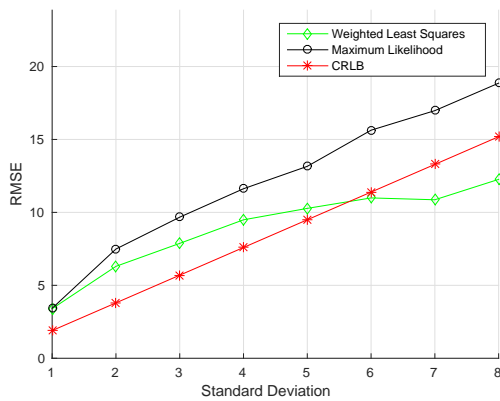
Ειδική μνεία θα πρέπει να γίνει στις προσεγγίσεις των δύο αλγόριθμων, όπου παρατηρείται ότι ο αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων δουλεύει καλύτερα σε σχέση με τον αντίστοιχο ML. Βασική παράμετρος είναι η έκφραση της ενέργειας σε log μορφή στον ML, σε αντίθεση με τον WLS που μας δείχνει ότι δεν είναι ευαίσθητος σε μια μετατροπή από τη log μορφή στην κανονική μορφή ενέργειας και στην προσέγγιση από τα βάρη.

Στο σχήμα 1.3 παρουσιάζεται η πρώτη περίπτωση που αναλύσαμε παραπάνω και παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η τυπική απόκλιση τόσο αυξάνεται και ο ρυθμός λαθών στον εκτιμητή. Ωστόσο η προσέγγιση της ML είναι αρκετά εσφαλμένη και δεν ακολουθεί το γνωστό μοτίβο, επηρεαζόμενη προφανώς από τη θέση της πηγής όπου δεν επιτρέπει να γίνει σωστή εκτίμηση της. Αντίθετα ο αλγόριθμος WLS βρίσκεται κοντά στο όριο που δημιουργεί το CRLB παρουσιάζοντας χαρακτηριστικά καλύτερη απόδοση από την ML.

Αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση του σχήματος 1.4 παρατηρούμε ότι και πάλι αυξάνεται ο ρυθμός λαθών όσο αυξάνεται η τυπική απόκλιση αλλά αυτή τη φορά η εκτίμηση λάθους έχει μικρότερη απόσταση από το κατώτατο όριο CRLB τόσο στο ένα σχήμα όσο και στο άλλο, δημιουργώντας στην πρώτη περίπτωση από το  $\sigma = 6$  δεδομένα biased. Στη



Σχήμα 1.3: Η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του πεδίου που δημιουργούν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση 3 αισθητήρων ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια 6 αισθητήρων



Σχήμα 1.4: Η πηγή βρίσκεται κοντά σε κάποιον από τους αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση 3 αισθητήρων ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια 6 αισθητήρων

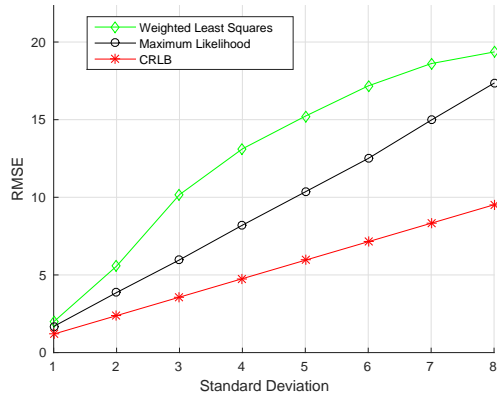
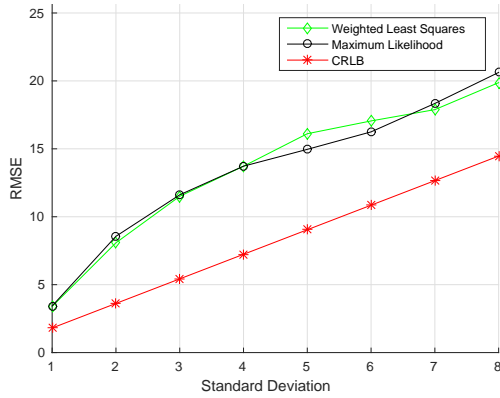
δεύτερη περίπτωση τόσο ο ML όσο και ο WLS ακολουθούν την αναμενόμενη γραμμική αύξηση, με τον WLS να εμφανίζει μικρότερα λάθη σε σχέση τον ML

Τέλος στη τρίτη περίπτωση που αποτυπώνεται από το σχήμα 1.3, λόγω της ιδιαιτερότητας της θέσης της πηγής έξω από το φάσμα που δημιουργούν οι αισθητήρες παρουσιάζεται ιδιαίτερα μεγάλη αύξηση του ρυθμού λαθών όσο αυξάνεται η τυπική απόκλιση. Ωστόσο και πάλι ο εκτιμητής ML δεν αποδίδει το ίδιο καλά όσο ο WLS τόσο σε επίπεδο σφαλμάτων όσο και σε γραμμική λειτουργία της εκτίμησης της πηγής.

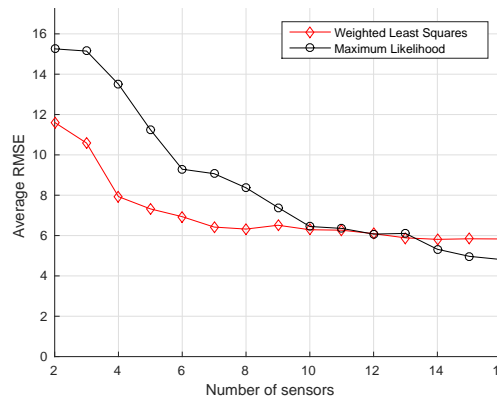
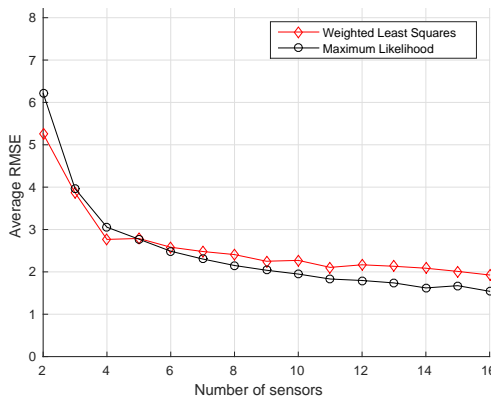
Σε γενικές γραμμές μπορούμε να τονίσουμε ότι σε κάθε περίπτωση ο WLS λειτουργεί με μικρότερο αριθμό σφαλμάτων εκτίμησης αλλά και η λειτουργία του είναι κατά πολύ πιο γραμμική από του ML.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα που προκύπτουν από τη διαδικασία σύγκλισης των δύο εκτιμητών δημιουργώντας τα διαγράμματα RMSE-Αριθμού Αισθητήρων για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις. Έτσι έχουμε :

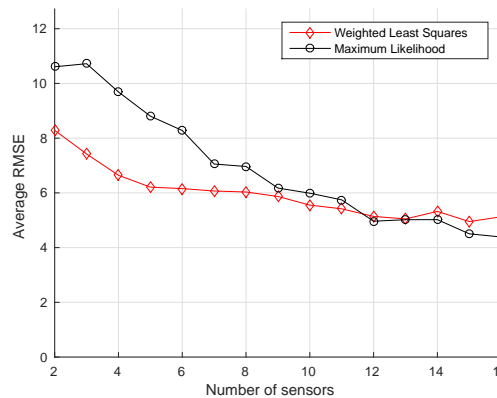
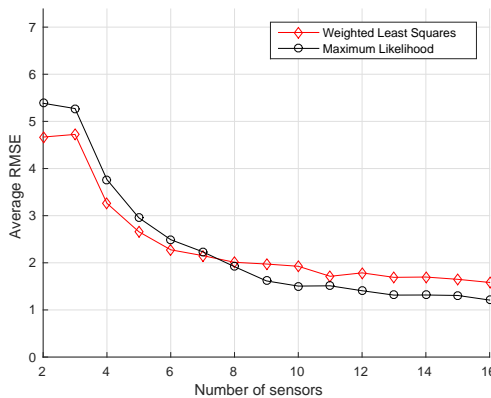
Σε κάθε περίπτωση στα σχήματα 1.6-1.8 παρουσιάζεται η σύγκλιση μεταξύ των εκτι-



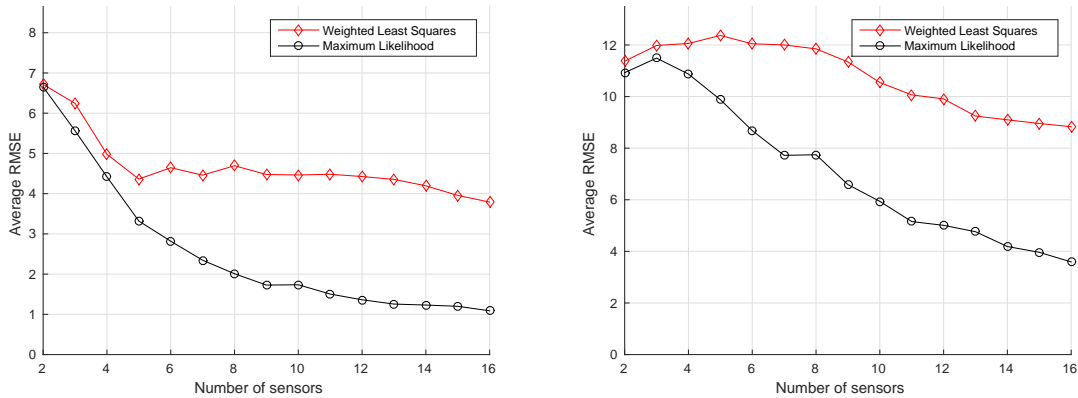
Σχήμα 1.5: Η πηγή βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα που σχηματίζουν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση 3 αισθητήρων ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια 6 αισθητήρων



Σχήμα 1.6: Η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του πεδίου που δημιουργούν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε  $\sigma = 2$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση  $\sigma = 6$



Σχήμα 1.7: Η πηγή βρίσκεται πιο κοντά σε κάποιους από τους αισθητήρες που δημιουργούν το πεδίο. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε  $\sigma = 2$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση  $\sigma = 6$



Σχήμα 1.8: Η πηγή βρίσκεται εκτός του πεδίου που δημιουργούν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε  $\sigma = 2$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση  $\sigma = 6$

μητών που είναι απόρροια της αύξησης των αισθητήρων με διαφορετικό  $\sigma$  κάθε φορά.

Χαρακτηριστικά παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση στο σχήμα 1.6 για  $\sigma = 2$  έχουμε παρόμοια λειτουργία των εκτιμητών στην αύξηση των αισθητήρων. Αντίθετα για  $\sigma = 6$  έχουμε κατά πολύ διαφορετική πορεία σύγκλισης με τον ML εκτιμητή να συγκλίνει έχοντας κατά πολύ μεγαλύτερο σφάλμα αρχικά.

Αντίστοιχη εικόνα παρατηρούμε και στο σχήμα 1.7 όπου για  $\sigma = 2$  προκύπτει πολύ κοντινή συμπεριφορά στους εκτιμητές, σε αντίθεση με το  $\sigma = 6$  όπου παρατηρείται διαφορετικός ρυθμός προσέγγισης.

Ωστόσο ολοκληρωτικά διαφορετική εικόνα παρατηρείται στην τρίτη περίπτωση (σχήμα 1.8) όπου λόγω της θέσης της πηγής παρατηρείται και η μεγαλύτερη απόκλιση στους δυο εκτιμητές. Ο ML και στις δυο περιπτώσεις εμφανίζεται να λειτουργεί εμφανώς καλύτερο με μεγαλύτερο ρυθμό σύγκλισης.

Από τα σχήματα που παρουσιάζονται, μπορούμε να δούμε ότι ο εκτιμητής WLS λειτουργεί κατά πολύ καλύτερα. Σε όλα τα διαγράμματα (1.3-1.5) η λύση WLS είναι καλύτερη από τη λύση ML τόσο όταν ο θόρυβος είναι μεγάλος όσο όταν ο αριθμός των αισθητήρων είναι μικρός. Αυτό συμβαίνει επειδή η ML λύση είναι βέλτιστη μόνο όταν ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) είναι επαρκώς μεγάλος και τα δείγματα είναι επαρκώς πολλά. Συγκρίνοντας την ML λύση με την WLS από τα παραπάνω σχήματα αποκαλύπτεται ότι η επίδραση της προσέγγισης χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό UT στο πρόβλημα WLS είναι μικρή στην ακρίβεια της εκτίμησης. Το RMSE από τις εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας την WLS μέθοδο μπορεί να είναι επίσης λίγο χαμηλότερα από το όριο CRLB (σχήμα 1.4) αφού ο εκτιμητής έστω και λίγο μεροληπτεί (biased).



## Κεφάλαιο 2

# Προσδιορισμός της θέσης με τη χρήση τεχνικών Convex Optimization (SDP και SOCP)

## 2.1 Θεωρία για τον προσδιορισμό κυρτών προβλημάτων

### 2.1.1 Νόρμα διανυσμάτων

**Ορισμός 2.1.1.** Η νόρμα  $\|\cdot\|$  σε  $\mathbb{R}^n$  είναι μία συνάρτηση  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιώντας τα παρακάτω

- (μη αρνητικότητα)  $\|x\| \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  και  $\|x\| = 0$  αν και μόνο αν  $x = 0$
- (θετική ομοιογένεια)  $\lambda\|x\| = |\lambda|\|x\|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$
- (τριγωνική ανισότητα)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^n$

Ένας τρόπος για τη δημιουργία μίας νόρμας στο σύνολο  $\mathbb{R}^n$  είναι να πάρουμε κάθε εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  στο σύνολο  $\mathbb{R}^n$  και ορίζεται η ακόλουθη νόρμα :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  το οποίο προσδιορίζει τη νόρμα. Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι απλό γινόμενο, τότε η αναμενόμενη νόρμα λέγεται Ευκλείδεια νόρμα ή  $l_2 - norm$  :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ . Εξ'ορισμού η νόρμα σε ένα πεδίο  $\mathbb{R}^n$  είναι  $\|x\|_2$ , και ο δείκτης 2 τις περισσότερες φορές παραλείπεται. Η Ευκλείδεια νόρμα ανήκει στην τάξη των  $l_p - norms$  (για  $p \geq 1$ ) και ορίζεται :

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

Ο περιορισμός  $p \geq 1$  είναι απαραίτητος επειδή για  $0 < p < 1$ , η συνάρτηση  $\|\cdot\|_p$  δεν είναι νόρμα. Άλλη μία σημαντική νόρμα είναι  $l_\infty$  - norm η οποία δίνεται :

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$$

Κατ'αντιστοιχία με τις νόρμες διανυσμάτων έχουμε τις νόρμες πινάκων που ορίζουμε:

**Ορισμός 2.1.2.** Η νόρμα  $\|\cdot\|$  σε  $\mathbb{R}^{m \times n}$  είναι μία συνάρτηση  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιώντας τα παρακάτω:

- (μη αρνητικότητα)  $\|A\| \geq 0$  για κάθε  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και  $\|A\| = 0$  αν και μόνο αν  $A = 0$
- (θετική ομοιογένεια)  $\lambda\|A\| = |\lambda|\|A\|$  για κάθε  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$
- (τριγωνική ανισότητα)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  για κάθε  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

## 2.1.2 Κυρτές Συναρτήσεις (Convex Functions)

**Ορισμός 2.1.3.** (Κυρτές συναρτήσεις). Μια συνάρτηση  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται σε ένα κυρτό σύνολο  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  και λέγεται κυρτή αν

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

για κάθε  $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$

Άλλος ένας σημαντικός ορισμός είναι των κοίλων συναρτήσεων. Μια συνάρτηση λέγεται κοίλη αν η  $-f$  είναι κυρτή και εκφράζουμε για κάθε  $x, y \in C$  και  $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

## 2.1.3 Προβλήματα Κυρτής Βελτιστοποίησης (Convex Optimization)

Ένα πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης είναι ένα πρόβλημα που αποτελείται από την ελαχιστοποίηση της κυρτής συνάρτησης πάνω σε ένα κλειστό κυρτό σύνολο. Ειδικότερα, ένα κυρτό πρόβλημα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in C \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου  $C$  είναι ένα κλειστό και κυρτό σύνολο και  $f$  είναι μια κυρτή συνάρτηση πάνω στο  $C$ . Το πρόβλημα (2.1) δεν είναι σαφή προσδιορισμένο, και γι'αυτό είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε πιο σαφής μορφές έτσι ώστε το πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης να έχει λειτουργική μορφή, η οποία μορφή είναι η ακόλουθη :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & b_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

όπου  $f, g_1, g_2, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κυρτές συναρτήσεις και  $b_1, b_2, \dots, b_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι αφινικές συναρτήσεις.

**Θεώρημα 2.1.1.** Θεωρούμε  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο  $C$ . Θεωρούμε  $x^* \in C$  είναι το τοπικό ελάχιστο της  $f$  πάνω στο  $C$ . Τότε  $x^*$  είναι ένα ολικό ελάχιστο της  $f$  πάνω στο  $C$ .

## 2.2 Τεχνική Ημιορισμένου Προγραμματισμού (Semidefinite Programming Relaxation)

### 2.2.1 Εισαγωγή

Ο ημιορισμένος προγραμματισμός ασχολείται με την επιλογή μίας συμμετρικής μήτρας η οποία βελτιστοποιεί ένα γραμμικό λειτουργικό πρόβλημα μέσω γραμμικών περιορισμών καθώς και με έναν περαιτέρω περιορισμό ότι οι μήτρες είναι θετικά ημιορισμένες. Τα παραπάνω προκύπτουν από το γνωστό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αντικαθιστώντας το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης με μία συμμετρική μήτρα καθώς και με αντικατάσταση των αρνητικών περιορισμών με θετικά ημιορισμένους περιορισμούς. Ένας άλλος τρόπος για να περιγραφεί το εν λόγω πρόβλημα είναι σε όρους ενός φορέα μεταβλητών με μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και με τον περιορισμό ότι κάποια συμμετρική μήτρα που εξαρτάται από τις μεταβλητές να είναι θετικά ημιορισμένη. Αυτή η γενίκευση, ωστόσο, κληρονομεί κάποιες σημαντικές ιδιότητες από το αντίστοιχο διάνυσμα. Οι ιδιότητες αυτές είναι ότι το διάνυσμα είναι κυρτό, διέπεται από τη θεωρία της δυαδικότητας (όχι με τον ίδιο τρόπο που αυτή διέπει τον γραμμικό προγραμματισμό) και επιτρέπει μια θεωρητικά πιο αποτελεσματική λύση που βασίζεται σε επανάληψη εσωτερικών καταστάσεων, ώστε να ακολουθηθεί έναν κεντρικό δρόμο ή να μειωθεί η πολυπλοκότητα μιας πιθανής λειτουργίας.

Ενώ ο γραμμικός προγραμματισμός (Linear Programming-LP) αναπτύχθηκε πολύ γρήγορα στη δεκαετία του 1950 και 1960, εξαιτίας της αναπτυγμένης και πολύ αποτελεσματικής μεθόδου, την οποία διατύπωσε ο G.B. Dantzig, η ημιορισμένη βελτιστοποίηση (γνωστή και ως ημιορισμένος προγραμματισμός ή SDP) δεν προσέλκυσε τόσο γρήγορα το ενδιαφέρον. Αυτό οφειλόταν κατά ένα μέρος στο γεγονός ότι η απλή μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα σε πρακτικό επίπεδο, παρόλο που υπάρχουν σχετικές μελέτες και εφαρμοσμένοι μέθοδοι. Όταν πια, θεωρητικά αποτελεσματικοί αλγόριθμοι αναπτύχθηκαν στη δεκαετία του 1980 και 1990, η έρευνα στην εν λόγω περιοχή εξελίχθηκε σημαντικά. Η ανάπτυξη των αποτελεσματικών αλγορίθμων ήταν μόνο η αρχή αυτής της εξέλιξης. Ένα άλλο βασικό κίνητρο ήταν η αποτελεσματικότητα του ημιορισμένου προγραμματισμού σε μοντέλο προβλημάτων ποικίλων περιοχών.

Αναλυτικότερα τη δεκαετία του '80, ο Fletcher αναβίωσε το ενδιαφέρον των προγραμματιστών για τον ημιορισμένο προγραμματισμό, κάτι που οδήγησε σε σειρά δημοσιεύσεων του Overton και του Womersley. Επίσης, σημαντική ήταν η συνεισφορά των Nesterov, Nemirovski και Alizadeh, οι οποίοι απέδειξαν ότι η νέα γενιά μεθόδων εσωτερικών σημείων, που εφάρμοσε για πρώτη φορά ο Karmarkar στο LP, θα μπορούσε να εφαρμοσθεί και στον ημιορισμένο προγραμματισμό. Τα ανωτέρω, προκάλεσαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον ημιορισμένο προγραμματισμό, το οποίο ενισχύθηκε ακόμα περισσότερο από τους Goemans και Williamson, οι οποίοι απέδειξαν ότι η SDP θεωρία θα μπορούσε να αποδώσει καλύτερη προσέγγιση στα προβλήματα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Στην παρούσα εργασία γίνεται χρήση του αλγόριθμου ημιορισμένου προγραμματισμού

(SDP) με περιβάλλον επίλυσης το CVX, αφού το κύριο αντικείμενο μελέτης είναι ο προσδιορισμός της θέσης μίας πηγής (ή πολλών) σε ασύρματο δίκτυο αισθητήρων (WSN). Στην αρχή δηλώνουμε στο πρόγραμμα τις μεταβλητές που καθορίζουν την υφή του δικτύου όπως επίσης και το σύνολο των μετρήσεων. Στη συνέχεια δηλώνουμε την αντικειμενική συνάρτηση (objective function) και την συνάρτηση περιορισμού (constraint function).

## 2.2.2 Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)

Αρχικά θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στις αρχές του γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming) έτσι ώστε να καταλήξουμε στην σύνδεση με τις αρχές του ημιορισμένου μοντέλου προγραμματισμού (SDP). Έτσι στην περίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού έχουμε την αντικειμενική συνάρτηση (objective function) και την συνάρτηση περιορισμού (constraint function) να είναι γραμμικές, δηλαδή :

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  είναι ένα διάνυσμα με  $n$  μεταβλητές,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  είναι η αντικειμενική συνάρτηση του διανύσματος,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  είναι το δεξί μέρος της ισότητας και  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  είναι η μήτρα περιορισμού. Το μηδενικό ψηφίο δείχνει το μηδενικό διάνυσμα της αντίστοιχης διάστασης.

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μεταξύ όλων των  $x \in \mathbb{R}^n$  που ικανοποιούν την ισότητα με πίνακες  $Ax = b$  και τη διανυσματική ανισότητα  $x \geq 0$  (κάθε  $x$  ονομάζεται εφικτή λύση) ψάχνουμε για ένα  $x^*$  για τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $c^T x^*$ .

## 2.2.3 Θετικά Ημιορισμένες Μήτρες

Επόμενο βήμα είναι η σαφή αναφορά στην ανάλυση των θετικά ημιορισμένων μητρών με σκοπό την εφαρμογή τους στον προσδιορισμό του Ημιορισμένου Προγραμματισμού.

### Ορισμοί και χαρακτηρισμοί

**Ορισμός 2.2.1.** Μια συμμετρική μήτρα  $A \in S\mathbb{R}^{n \times n}$  ονομάζεται θετικά ημιορισμένη αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $x^T A x \geq 0$  για όλα τα  $x \in \mathbb{R}^n$ , και ονομάζεται θετικά ορισμένη αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $x^T A x > 0$  για κάθε μη μηδενικό  $x \in \mathbb{R}^n$ . Το σύνολο των θετικά ημιορισμένων μητρών συμβολίζεται  $S_+^n$  και το σύνολο των θετικά ορισμένων μητρών συμβολίζεται  $S_{++}^n$ .

Αν  $A$  είναι θετικά ημιορισμένη μήτρα (ή θετικά ορισμένη), τότε ορίζουμε  $A \succeq 0$  (ή  $A \succ 0$ )

**Θεώρημα 2.2.1.** Οι παρακάτω προτάσεις είναι όλες ισοδύναμες.

- Η συμμετρική μήτρα είναι θετικά ημιορισμένη.
- Όλες οι ιδιοτιμές της μήτρας  $A$  είναι μη αρνητικές.

- Υπάρχει μήτρα  $B$ , τέτοια ώστε να ισχύει  $A = B^T B$ .
- Όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου της μήτρας  $A$  είναι μη αρνητικά.

**Θεώρημα 2.2.2.** Οι παρακάτω προτάσεις είναι όλες ισοδύναμες.

- Η συμμετρική μήτρα είναι θετικά ημιορισμένη.
- Όλες οι ιδιοτιμές της μήτρας  $A$  είναι μη αρνητικές.
- Υπάρχει τετραγωνική μήτρα  $B$ , τέτοια ώστε να ισχύει  $A = B^T B$ .
- Όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου της μήτρας  $A$  είναι θετικά.

**Θεώρημα 2.2.3.** Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μήτρα  $A \in S\mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε η μήτρα  $A$ , είναι θετικά ημιορισμένη αν και μόνο αν όλοι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

έχει εναλλαγή προσήμου, δηλαδή :  $(-1)^{n-i}p_i \geq 0$ , για όλα τα  $i$ .

### Ιδιότητες θετικά ημιορισμένων μητρών

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο μήτρες  $X, Y$  για τις οποίες ισχύει ότι  $X - Y \succeq 0$ , τότε ισοδύναμα η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως :

$$X \succeq Y$$

**Θεώρημα 2.2.4.** Για δυο συμμετρικές μήτρες  $X, Y$ . αν ισχύει ότι  $X \succeq Y$ , τότε ισχύει ότι :

$$\lambda_i(X) \geq \lambda_i(Y), \quad \forall i \in \mathbb{R}^n$$

Με το συντελεστή  $\lambda_i(\cdot)$ , συμβολίζεται η  $i$ -οστή ιδιοτιμή.

**Θεώρημα 2.2.5.** Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια μήτρα  $A$ , η οποία είναι μη αντιστρέψιμη :

- Τότε ισχύει ότι  $A \succeq 0$ , αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $P^T A P \succeq 0$
- Και ισχύει ότι  $A \succ 0$ , αν και μόνο αν ισχύει  $P^T A P \succ 0$

Το αντίστροφο των δυο προτάσεων δεν ισχύει.

**Θεώρημα 2.2.6.** Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια μήτρα  $U = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$  με  $A, C$  συμμετρικές και  $A \succ 0$  Τότε ισχύει η παρακάτω πρόταση :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow C - B^T A^{-1} B \succeq 0 \quad (2.3)$$

Ο πίνακας  $C - B^T A^{-1} B$  ονομάζεται συμπλήρωμα Schur του  $A$  στο  $U$ .

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1} B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

**Θεώρημα 2.2.7.** Έστω ότι υπάρχουν δύο μήτρες  $A, B$  τέτοιες ώστε να ισχύει η παρακάτω συνθήκη :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (2.4)$$

τότε ισχύει  $A \succeq 0$  και ακολούθως ισχύει ότι  $B = 0$

Επίσης η μήτρα  $A \in S\mathbb{R}^{n \times n}$ , μπορεί να χαρακτηριστεί ως ευσταθής, αν και μόνο αν το πραγματικό μέρος όλων των ιδιοτιμών της είναι μικρότερο του μηδενός (αρνητικό).

**Θεώρημα 2.2.8.** Μια μήτρα  $A$ , μπορεί να χαρακτηριστεί ευσταθής, αν και μόνο αν, υπάρχει συμμετρική θετικά ημιορισμένη μήτρα  $P$ , τέτοια ώστε να ισχύει :

$$PA + A^T P \prec 0 \quad (2.5)$$

### Παραγοντοποίηση Cholesky

Στον ημιορισμένο προγραμματισμό συχνά χρειάζεται να υπολογίσουμε για την δοθείσα θετικά ημιορισμένη μήτρα  $A$ , μία μήτρα  $B$  έτσι ώστε να προκύπτει  $A = B^T B$  όπως έχει περιγραφεί παραπάνω. Αυτός ο υπολογισμός ονομάζεται παραγοντοποίηση Cholesky.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια απλή σαφή μέθοδο, όπου στη παραγοντοποίηση Cholesky χρησιμοποιούνται  $O(n^3)$  αριθμητικές πράξεις για μία  $n \times n$  μήτρα  $A$ .

Αν  $A = (a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , και είναι  $B = (\sqrt{a})$ , όπου  $a \geq 0$  από τις μη αρνητικές τιμές που παίρνουν οι ιδιοτιμές. Εναλλακτικά επειδή  $A$  είναι συμμετρική μήτρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$A = \begin{bmatrix} a & q^T \\ q & N \end{bmatrix}$$

Από τον Ορισμό 1.1.1 έχει προκύψει ότι  $a = e_1^T A e_1 \geq 0$ . Το μέγεθος  $e_i$  ορίζει την  $i$  μονάδα διανύσματος της κατάλληλης διάστασης.

Υπάρχουν δυο περιπτώσεις να εξετάσουμε. Αν  $a > 0$  υπολογίζουμε :

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{a}}q & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & N - \frac{1}{2}qq^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \frac{1}{\sqrt{a}}q^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Η μήτρα  $N - \frac{1}{a}qq^T$  είναι ξανά θετικά ημιορισμένη και μπορούμε αναδρομικά να υπολογίσουμε την παραγοντοποίηση Cholesky :

$$N - \frac{1}{a}qq^T = V^T V$$

Στοιχειώδης υπολογισμοί μας δίνουν :

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \frac{1}{\sqrt{a}}q^T \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

ικανοποιώντας την σχέση  $A = B^T B$ , και επομένως προκύπτει η παραγοντοποίηση Cholesky του  $A$ .

Στην άλλη περίπτωση ( $a = 0$ ), έχουμε επίσης  $q = 0$ . Η μήτρα  $N$  είναι θετικά ημιορισμένη, έτσι αναδρομικά μπορούμε να υπολογίσουμε τη μήτρα ικανοποιώντας τη σχέση  $N = V^T V$ . Έχουμε

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

το οποίο μας δίνει  $A = B^T B$ , και δημιουργείται το αποτέλεσμα από την παραγοντοποίηση Cholesky.

## 2.2.4 Από τον Γραμμικό στον Ημιορισμένο Προγραμματισμό

Για την μετάβαση από τον γραμμικό στον ημιορισμένο προγραμματισμό ακολουθούμε μερικές βασικές υποθέσεις μετάβασης. Αρχικά αντικαθιστούμε το χώρο των διανυσμάτων  $\mathbb{R}^n$  που ανήκει το  $x$  σε ένα άλλο πραγματικό χώρο του διανύσματος που προσδιορίζεται :

$$SYM_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : x_{ij} = x_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

όπου έχουμε τη συμμετρική μήτρα  $n \times n$  διαστάσεων, και αντικαθιστούμε την μήτρα  $A$  με μία γραμμική  $A : SYM_n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Το τυποποιημένο βαθμωτό προϊόν που προέκυπτε στον γραμμικό προγραμματισμό :  $\langle x, y \rangle = x^T y$  στον πραγματικό χώρο  $\mathbb{R}^n$ , αντικαθίσταται από το προϊόν που παράγεται από την σχέση :

$$X * Y := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij} \quad (2.7)$$

στην περιοχή ορισμού  $SYM_n$ . Εναλλακτικά, μπορούμε επίσης να γράψουμε  $X * Y := Tr(X^T Y)$ , όπου για μια τετραγωνική μήτρα  $M$ ,  $Tr(M)$  είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της μήτρας.

Επομένως τελικά η βασική διαφοροποίηση προκύπτει στη διαφοροποίηση του περιορισμού της μη αρνητικής μήτρας  $x \geq 0$ , με μία θετικά ημιορισμένη μήτρα  $X \succeq 0$

## 2.2.5 Ημιορισμένος Προγραμματισμός (Semidefinite Programming)

**Ορισμός 2.2.2.** Ένα πρόβλημα ημιορισμένου προγραμματισμού, έχει ισοδύναμη μορφή με το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης :

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ijk} x_{ij} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad X \succeq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου ισχύει ότι  $1 \leq i, j \leq n$ , με  $n^2$  μεταβλητές να ικανοποιούν την συνθήκη συμμετρίας  $x_{ij} = x_{ji}$  για κάθε  $i, j$ , οι μήτρες  $c_{ij}$ ,  $a_{ij}$  και  $b_k$  είναι πραγματικοί συντελεστές και ισχύει η παρακάτω σχέση για τον πίνακα  $x_{ij}$  :

$$X(x_{ij})_{i,j=1}^n \in SYM_n$$

Μια διαφορετική μορφή του παραπάνω ορισμού για τον ημιορισμένο προγραμματισμό είναι :

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } C * X \\ & \text{subject to } A_1 * X = b_1 \\ & \quad A_2 * X = b_2 \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad A_m * X = b_m \\ & \quad X \succeq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

όπου

$$C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$$

είναι η μήτρα που εκφράζει την αντικειμενική συνάρτηση  
Και ορίζεται και η μήτρα :

$$A_k = (C_{ij})_{i,j=1}^n \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε το σύστημα των  $m$  γραμμικών εξισώσεων  $A_1 * X = b_1, \dots, A_m * X = b_m$  σε μία περισσότερο συμπυκνένη μορφή :

$$A(X) = b \tag{2.10}$$

όπου  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  και  $A : SYM_n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  παρουσιάζουν την γραμμική εικόνα. Αυτή η μορφή του προβλήματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για γενικές εκτιμήσεις ημιορισμένων προβλημάτων.

Ακολουθώντας την περίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο ημιορισμένος προγραμματισμός είναι εφικτός, αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον μια εφικτή λύση. Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχει μία μήτρα τέτοια ώστε  $\bar{X} \in SYM_n$ , με διατύπωση προβλήματος  $A(\bar{X}) = b, \bar{X} \succeq 0$ . Τότε η λύση του εφικτού ημιορισμένου προβλήματος ορίζεται :

$$\sup\{C * X : A(X) = b, X \succeq 0\} \tag{2.11}$$

η οποία περιλαμβάνει την πιθανότητα η λύση να είναι  $\infty$ . Σε αυτή τη περίπτωση το πρόβλημα καλείται μη φραγμένο. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση που υπάρχει εφικτή πραγματική λύση, τότε έχουμε ένα φραγμένο ημιορισμένο πρόβλημα.

Μια βέλτιστη λύση του ημιορισμένου προβλήματος είναι η εφικτή λύση  $X^*$ , τέτοια ώστε να ισχύει  $C * X^* \geq C * X$ , για όλες τις πιθανές λύσεις του  $X$ . Κατά συνέπεια, αν υπάρχει βέλτιστη λύση στο πρόβλημα ημιορισμένου προγραμματισμού και είναι πεπερασμένη, όπου προκύπτει ότι η ανώτατη λύση στο παραπάνω πρόβλημα είναι και το ανώτατο όριο του προβλήματος.



## 2.3 Εφαρμογή της Ημιορισμένης Τεχνικής για τον προσδιορισμό θέσης μίας πηγής

Εξαιτίας της φύσης του προβλήματος του προσδιορισμού της θέσης ο τύπος της ML που σχηματίζεται είναι μη κλειστής μορφής και ως εκ τούτου μια επαναληπτική διαδικασία λύσης απαιτείται. Επιπρόσθετα, η μορφή του ML εκτιμητή είναι μη κυρτή και επομένως η εκτέλεσή του εξαρτάται άμεσα από το αρχικό σημείο που παρέχεται για την επαναληπτική λύση (μια τοπική μέθοδο βελτιστοποίησης). Μια φτωχή αρχικοποίηση συχνά οδηγεί σε μία πολύ κακή εκτίμηση. Επιπλέον εξαιτίας της μη κυρτότητας (nonconvexity), η εύρεση του ολικού ελάχιστου για τον ML εκτιμητή είναι πολύ δύσκολη.

Σαν συνέχεια της λύσης του προβλήματος του προσδιορισμού της θέσης έχουμε την εφαρμογή της Ημιορισμένης Τεχνικής για την επίτευξη του στόχου μας. Η βασική ιδέα είναι ο μετασχηματισμός του πρωτότυπου μη κυρτού προβλήματος με τη βοήθεια του Ημιορισμένου Προγραμματισμού σε ένα κυρτό πρόβλημα (convex problem). Το βασικό πλεονέκτημα της τεχνικής κυρτής βελτιστοποίησης, είναι ότι το ολικό ελάχιστο του κυρτού προβλήματος μπορεί να βρεθεί εύκολα και αποδοτικά.

### 2.3.1 Διαμόρφωση της Maximum Likelihood

Στο κεφάλαιο 1 αναλύσαμε τον προσδιορισμό θέσης με τη χρήση της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood). Σαν συνέχεια εφαρμόζουμε την τεχνική ημιορισμένου προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της θέσης.

Από τη σχέση (1.8) και θεωρώντας  $10 \log_{10} \frac{\|\theta - s_i\|}{d_0} + RSS_i - P_T + L_0$  σαν το υπόλοιπο  $r_i$ , το οποίο είναι η διαφορά μεταξύ των πραγματικών τιμών και των μετρήσεων, τότε η (1.8) μπορεί να θεωρηθεί σαν να ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους του διανύσματος του υπολοίπου  $r = [r_1, \dots, r_N]^T$  ( $r \in \mathbb{R}^N$ )

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} f(r) \quad (2.12)$$

με  $f(\cdot) = \|\cdot\|^2$

Είναι φανερό ότι ο εκτιμητής ML (1.8) είναι μη κυρτός επειδή κάθε τομέας του  $\{\theta | \theta \neq \theta_i\}$  δεν είναι συνεχής. Επιπρόσθετα η (1.8) περιέχει και τον όρο  $\log_{10} \|\theta - \theta_i\|$ , ο οποίος δεν είναι ούτε κυρτός ούτε κοίλος στην αντικειμενική συνάρτηση (objective function), ωστόσο εμείς περιορίζουμε το  $\theta$  σε ένα κυρτό τομέα (αυτό μπορεί να επαληθευτεί από την εξέταση της Hessian του  $\log_{10} \|\theta - s_i\|$ , το οποίο δεν είναι θετικά ημιορισμένο ούτε αρνητικά ημιορισμένο). Εξαιτίας της μη κυρτότητας της (1.8) η εύρεση και επιβεβαίωση της λύσης του ολικού ελάχιστου είναι δύσκολη. Ένας κυρτός εκτιμητής θα ήταν ιδεατός, αλλά η ύπαρξη του  $\log_{10} \|\theta - s_i\|$  στο  $r_i$  δυσχεραίνει αυτή την ιδέα.

Ως εκ τούτου, για την διευκόλυνση της σχεδίασης ενός κυρτού εκτιμητή, πρώτα αντλούμε έναν μη κυρτό εκτιμητή ο οποίος προσεγγίζει τον εκτιμητή ML (1.8) αλλά δεν έχει το λογάριθμο στο υπόλοιπο. Έτσι αντικαθιστούμε την  $f(\cdot) = \|\cdot\|^2$  της (2.12) σε μία άλλη συνάρτηση κόστους  $f(\cdot) = \|\cdot\|_{\infty} = \max_i |[\cdot]_i|$  (Chebyshev Norm), και επομένως ο εκτιμητής ML προσεγγίζεται :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \max_i |10 \log_{10} \frac{\|\theta - s_i\|}{d_0} + RSS_i - P_T + L_0| \quad (2.13)$$

Ένα πλεονέκτημα στη χρήση του Chebyshev norm σαν συνάρτηση κόστους είναι ότι μετά από μερικές πράξεις, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα χωρίς τη χρήση του λογαρίθμου.

Επειδή  $\|\theta - s_i\| > 0$  και η θετική κλιμάκωση της συνάρτησης δεν θα επηρεάσει την ελαχιστοποίηση, και έτσι η (2.13) γίνεται :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \max_i \left| \log_{10} \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2} \right| \quad (2.14)$$

όπου  $\beta_i^2 = d_0^2 10^{\frac{RSS_i - P_T + L_0}{5\alpha}}$

Και προκύπτει :

$$\begin{aligned} \left| \log_{10} \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2} \right| &= \max \left( \log_{10} \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2}, \log_{10} \frac{\beta_i^2}{\|\theta - s_i\|^2} \right) \\ &= \log_{10} \left( \max \left( \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2}, \frac{\beta_i^2}{\|\theta - s_i\|^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

όπου η (2.14) γράφεται :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \max_i \log_{10} \left( \max \left( \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2}, \frac{\beta_i^2}{\|\theta - s_i\|^2} \right) \right) \quad (2.16)$$

Επειδή το  $\log_{10}(x)$  είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο τομέα  $(0, +\infty)$  έτσι η (2.16) θα είναι :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \max_i \max \left( \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2}, \frac{\beta_i^2}{\|\theta - s_i\|^2} \right) \quad (2.17)$$

Ακολουθώντας τον προτεινόμενο εκτιμητή για το πρόβλημα εκτίμησης θέσης βασιζόμενο στο RSS μοντέλο μπορούμε απλά να γράψουμε :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} f(r) \quad (2.18)$$

όπου  $r = [r_1, \dots, r_N]^T$  ( $r \in \mathbb{R}^N$ ) είναι το προτεινόμενο διάνυσμα του υπολοίπου και εκφράζεται :

$$r_i = \max \left( \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2}, \frac{\beta_i^2}{\|\theta - s_i\|^2} \right) \quad (2.19)$$

και  $f(\cdot)$  είναι μια αυθαίρετη κυρτή συνάρτηση κόστους (όπως για παράδειγμα η  $l_p$  νόρμες). Προφανώς, η  $r_i$  δεν περιλαμβάνει το λογάριθμο. Ωστόσο, συγκρίνοντας με τον εκτιμητή ML (1.8), η (2.18) δεν περιλαμβάνει το λογάριθμο, αλλά ακόμα παραμένει μη κυρτή εξαιτίας της μη κυρτότητας του όρου  $\beta_i^2 / \|\theta - s_i\|^2$ .

Εισάγοντας μια βοηθητική μεταβλητή  $t = [t_1, \dots, t_N]^T$   $t \in \mathbb{R}^N$ , η (2.18) γράφεται με τη βοήθειά της :

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}, \hat{t}) &= \operatorname{argmin}_{\theta, t} f(t) \\ \frac{\|\theta - s_i\|^2}{\beta_i^2} &\leq t_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{\beta_i^2}{\|\theta - s_i\|^2} \leq t_i$$

Προφανώς στην παραπάνω σχέση έχουμε  $t_i > 0$ , και επομένως η (2.20) γράφεται :

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}, \hat{t}) &= \operatorname{argmin}_{\theta, t} f(t) \\ \|\theta - s_i\|^2 &\leq \beta_i^2 t_i \\ \|\theta - s_i\|^2 &\geq \beta_i^2 t_i^{-1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

με  $i = 1, \dots, N$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις του (2.21) είναι ίδια με τις σχέσεις (2.20), αφού οι περιορισμοί της (2.21) συνεπάγονται  $\|\theta - s_i\|^2 \neq 0$  και  $t_i > 0$

### 2.3.2 Εφαρμογή στο πρόβλημα

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε την τεχνική ημιορισμένου προγραμματισμού για το μη κυρτό πρόβλημα (nonconvex problem) (2.21) για να καταλήξουμε στη μορφή κυρτού προβλήματος (convex problem).

Για απλούστευση, ορίζουμε  $k_i = \|s_i\|^2$ . Σημειώνοντας ότι  $\|\theta - s_i\|^2 = \theta^T \theta - 2s_i^T \theta + k_i$  και μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.21) εισάγοντας μια βοηθητική μεταβλητή  $X = \theta\theta^T$  ( $X \in S^2$ ) :

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}, \hat{X}, \hat{t}) &= \operatorname{argmin}_{\theta, X, t} f(t) \\ \operatorname{tr}(X) - 2s_i^T \theta + k_i &\leq \beta_i^2 t \\ \operatorname{tr}(X) - 2s_i^T \theta + k_i &\geq \beta_i^2 t^{-1} \\ X &= \theta\theta^T \end{aligned} \quad (2.22)$$

Στον παραπάνω σχηματισμό,  $\operatorname{tr}(X) - 2s_i^T \theta + k_i \leq \beta_i^2 t$  είναι συσχετισμένοι περιορισμοί (affine constraints), και  $\operatorname{tr}(X) - 2s_i^T \theta + k_i \geq \beta_i^2 t^{-1}$  είναι κυρτοί περιορισμοί (convex constraints) επειδή  $\operatorname{tr}(X)$  είναι γραμμικό του  $X$ ,  $-2s_i^T \theta$  είναι γραμμικό του  $\theta$  και  $t_i^{-1}$  είναι κυρτό στο  $t_i > 0$ . Ωστόσο, η περιορισμένη ισότητα  $X = \theta\theta^T$  δεν είναι συσχετισμένη, επομένως, ο παραπάνω σχηματισμός παραμένει μη κυρτός.

Για να γίνει κυρτός, μετατρέπουμε την περιορισμένη ισότητα  $X = \theta\theta^T$  σε περιορισμένη ανισότητα  $X \succeq \theta\theta^T$  (Ημιορισμένη Τεχνική), και μετά εκφράζεται αυτό σαν γραμμικός πίνακας ανισότητας χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα Schur(2.3):

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}, \hat{X}, \hat{t}) &= \operatorname{argmin}_{\theta, X, t} t \\ \operatorname{tr}(X) - 2s_i^T \theta + k_i &\geq \beta_i^2 t_i \\ \operatorname{tr}(X) - 2s_i^T \theta + k_i &\geq \beta_i^2 t_i^{-1} \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} X & \theta \\ \theta^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

Επομένως η (2.23) είναι κυρτή και αναπτύσσονται εύκολα εργαλεία αριθμητικής για την επίλυση κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Μια εξαιρετική ιδιότητα των κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι ότι τα τοπικά ελάχιστα είναι επίσης και ολικά. Έτσι, μπορούμε να εγγυηθούμε ότι τα ολικά μέγιστα μπορούν να επιτευχθούν όταν βρίσκουμε μια λύση.

Στον παραπάνω μετασχηματισμό, μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον όρο  $tr(X) - 2s_i^T\theta + k_i \geq \beta_i^2 t_i^{-1}$  σαν Γραμμικό Πίνακα Ανισοτήτων (Linear Matrix Inequality (LMI)) όπως παρακάτω :

$$\begin{bmatrix} tr(X) - 2s_i^T\theta + k_i & \beta_i \\ \beta_i & t_i \end{bmatrix} \succeq 0$$

Η μοναδική διαφορά μεταξύ της (2.22) και της (2.23) είναι ότι μετατρέψαμε την περιορισμένη ισότητα σε ανισότητα. Επομένως μετά τη λύση της (2.23), θα πρέπει να ελέγξουμε κατά πόσο η λύση ικανοποιεί την  $\hat{X} = \hat{\theta}\hat{\theta}^T$ . Αν την ικανοποιεί, προκύπτει ότι το ελάχιστο της (2.23) είναι και επίσης ολικό ελάχιστο της (2.22), και επομένως το ολικό ελάχιστο της (2.18) (αφού η 2.22 είναι ισοδύναμη με την (2.18)). Αν όχι το  $\hat{\theta}$  που προκύπτει από την (2.23) είναι αποδεκτό για την (2.18), εκτός και αν  $\hat{\theta} = s_i$ , επειδή η (2.18) είναι χωρίς περιορισμούς στο τομέα  $\{\theta | \theta \neq s_i\}$ .

### 2.3.3 Ανάλυση Αποτελέσματος

Συγκρίνοντας την (2.18), παράλληλα με την εξασφάλιση του  $\hat{\theta}$ , με το πρόβλημα SDP (2.23) μας δίνει το  $\hat{X}$  το οποίο μπορεί να μας δώσει μερικές παραπάνω πληροφορίες.

Εξαιτίας της μετατροπής, το δοθέν  $\theta$  που προκύπτει από την (2.23) ίσως να μην είναι το ολικό ελάχιστο την (2.18), εκτός και αν ικανοποιείται η  $\hat{X} = \hat{\theta}\hat{\theta}^T$ . Αν ωστόσο θεωρήσουμε το άγνωστο ολικό ελάχιστο την (2.18) σαν τυχαία μεταβλητή και την ορίσουμε σαν  $\bar{\theta}$  και γενικά θα έχουμε :

$$E(\bar{\theta}) = \hat{\theta}, E(\bar{\theta}\bar{\theta}^T) = \hat{X} \quad (2.24)$$

τότε, ο πίνακας συνδιακύμανσης της  $\bar{\theta}$  θα είναι :

$$cov(\bar{\theta}) = E(\bar{\theta}\bar{\theta}^T) - E(\bar{\theta})E(\bar{\theta})^T = \hat{X} - \hat{\theta}\hat{\theta}^T \quad (2.25)$$

Επειδή,  $\hat{X}$  και  $\hat{\theta}$  είναι οι λύσεις της (2.23), αυτές θα πρέπει να ικανοποιούν τον πίνακα  $[\hat{X} \quad \hat{\theta}; \hat{\theta}^T \quad 1] \succeq 0$ , ο οποίος είναι ισοδύναμος με  $\hat{X} - \hat{\theta}\hat{\theta}^T \succeq 0$ . Επομένως, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι  $\hat{X} - \hat{\theta}\hat{\theta}^T$  μπορεί να θεωρηθεί σαν πίνακας συνδιακύμανσης. Η ερμηνεία αυτή συμπίπτει με την προηγούμενη ανάλυση επειδή αν  $\hat{X} - \hat{\theta}\hat{\theta}^T$ , τότε  $\bar{\theta}$  θα πρέπει να είναι ντετερμινιστικό και ως εκ τούτου  $\bar{\theta} = E(\bar{\theta}) = \hat{\theta}$  δηλαδή το  $\hat{\theta}$  που προκύπτει από την (2.23) είναι επίσης ένα ολικό ελάχιστο της (2.18).

Επειδή η (2.23) μας παρέχει την πληροφορία για τον πίνακα συνδιακύμανσης της  $\bar{\theta}$ , μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να "εμπιστευτούμε" την  $\hat{\theta}$ , τα οποία αποτελέσματα προκαλούν μικρές διακυμάνσεις των στοιχείων στην  $cov(\bar{\theta})$ , και να απορρίψουμε ένα  $\hat{\theta}$ , το οποίο προκαλεί μεγάλες διακυμάνσεις και απαιτεί καινούργια εκτίμηση.

Μια τέτοια ερμηνεία επίσης μας βοηθά να σχεδιάσουμε τις προσεγγίσεις έτσι ώστε κατά προσέγγιση να βρούμε το ολικό ελάχιστο την 2.18.

## 2.4 Προσδιορισμός της θέσης με τη χρήση Κωνικού Προγραμματισμού Δεύτερης Τάξης (Second- Order Cone Programming)

### 2.4.1 Κωνικός Προγραμματισμός Δεύτερης Τάξης

Τα προβλήματα κωνικού προγραμματισμού δεύτερης τάξης είναι κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία μια γραμμική συνάρτηση ελαχιστοποιείται πάνω στη τομή ενός affine linear manifold με το καρτεσιανό γινόμενο να προκύπτει από της δεύτερης τάξης κώνους. Τα γραμμικά προγράμματα, τα κυρτά τετραγωνικά προγράμματα και τα τετραγωνικά περιορισμένα κυρτά τετραγωνικά προγράμματα μπορούν όλα να μορφοποιηθούν σε κωνικού προγραμματισμού δεύτερης τάξης(SOCP) πρόβλημα, όπως επίσης και πολλά ακόμη προβλήματα που δεν εντάσσονται σε αυτές τις κατηγορίες.

Ορίζουμε τον κωνικό προγραμματισμό δεύτερης τάξης (SOCP) ως :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f^T x \\ & \text{subject to} && \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.26)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι η μεταβλητή βελτιστοποίησης, και οι παράμετροι του προβλήματος είναι  $f \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}, b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, c_i \in \mathbb{R}^n$ , και  $d_i \in \mathbb{R}$ . Η νόρμα που εμφανίζεται στους περιορισμούς είναι Ευκλείδεια νόρμα που εκφράζεται  $\|u\| = (u^T u)^{1/2}$ . Ονομάζουμε το περιορισμό :

$$\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i \quad (2.27)$$

δεύτερης τάξης κωνικό περιορισμό της διάστασης  $n_i$ , για τον ακόλουθο λόγο. Η μονάδα για δεύτερης τάξης κώνο διάστασης  $k$  ορίζεται :

$$\mathcal{B}_k = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^{k-1}, t \in \mathbb{R}, \|u\| \leq t \right\}$$

(όπου ονομάζεται επίσης και τετραγωνικός ή κώνος Lorentz). Για  $k = 1$  ορίζουμε σαν μονάδα δεύτερης τάξης του κώνου :

$$\mathcal{B}_1 = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\}$$

Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τον δεύτερης τάξης κωνικό περιορισμό είναι η αντίστροφη εικόνα της μονάδας δεύτερης τάξης του κώνου κάτω από μία προσέγγιση αφινικού χώρου, δηλαδή :

$$\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in \mathcal{B}_{n_i}$$

και ως εκ τούτου είναι κυρτό. Έτσι, το SOCP είναι ένα κυρτό πρόβλημα προγραμματισμού αφού η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή και οι περιορισμοί ορίζουν ένα κυρτό σύνολο.

Οι δεύτερης τάξης κωνικοί περιορισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν να αναπαραστήσουν μερικούς κοινούς κυρτούς περιορισμούς. Για παράδειγμα, όταν  $n_i = 1$  για  $i = 1, \dots, N$ , το SOCP γίνεται γραμμικός προγραμματισμός :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f^T x \\ & \text{subject to} && 0 \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Επίσης άλλη μία ειδική περίπτωση προκύπτει όταν  $c_i = 0$ , έτσι ο  $i$  δεύτερης τάξης κωνικός περιορισμός γίνεται  $\|A_i x + b_i\| \leq d_i$ , όπου είναι ισοδύναμος (θεωρώντας ότι  $d_i \geq 0$ ) με τον τετραγωνικό περιορισμό  $\|A_i x + b_i\|^2 \leq d_i^2$ . Έτσι όταν όλα τα  $c_i$  εξαφανίζονται, το SOCP γίνεται ένα τετραγωνικού περιορισμού γραμμικό πρόγραμμα.

### Προβλήματα που μπορούν να μετασχηματιστούν σε SOCP

Παρακάτω θα περιγράψουμε μερικές γενικές τάξεις προβλημάτων που μπορούν να εκφραστούν σαν προβλήματα SOCP.

### Τετραγωνικού περιορισμού τετραγωνικός προγραμματισμός (Quadratically constrained quadratic programming (QCQP))

Προηγούμενα είδαμε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός εκφράζεται σαν SOCP με μίας διάστασης κώνο ( $n_i = 1$ ). Έτσι θεωρούμε τον γενικό κυρτό τετραγωνικού περιορισμού τετραγωνικό προγραμματισμό (QCQP) :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x^T P_0 x + 2q_0^T x + r_0 \\ & \text{subject to} && x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.28)$$

όπου  $P_0, P_1, \dots, P_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι συμμετρικοί και θετικά ημιορισμένοι. Θα θεωρήσουμε για απλότητα ότι οι πίνακες  $P_i$  είναι θετικά ορισμένοι, ωστόσο το πρόβλημα μπορεί να ένα SOCP πρόβλημα γενικά. Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε την (1.26) :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \|P_0^{1/2} x + P_0^{-1/2} q_0\|^2 + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0 \\ & \text{subject to} && \|P_i^{1/2} x + P_i^{-1/2} q_i\|^2 + r_i - q_i^T P_i^{-1} q_i \leq 0, i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

όπου μπορεί να λυθεί με τη χρήση του SOCP με  $p + 1$  περιορισμούς διάστασης  $n + 1$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && t \\ & \text{subject to} && \|P_0^{1/2} x + P_0^{-1/2} q_0\| \leq t \\ & && \|P_i^{1/2} x + P_i^{-1/2} q_i\| \leq (q_i^T P_i^{-1} q_i - r_i)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

όπου  $t \in \mathbb{R}$  είναι η νέα μεταβλητή βελτιστοποίησης. Η βέλτιστη τιμή του QCQP (1.26) είναι ίση με  $p^{*2} + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$ , όπου  $p^*$  είναι η βέλτιστη τιμή του SOCP (1.27).

Σαν ειδική περίπτωση, μπορούμε να λύσουμε ένα κυρτό τετραγωνικού προγραμματισμού πρόβλημα (QP) :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x^T P_0 x + 2q_0^T x + r_0 \\ & \text{subject to} && a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

με τη χρήση του SOCP με ένα περιορισμό διάστασης  $n+1$  και  $p$  περιορισμούς διάστασης ένα έχουμε :

*minimize*  $t$   
*subject to*  $\|P_0^{1/2}x + P_0^{-1/2}q_0\| \leq t, \quad a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, p$   
όπου οι μεταβλητές είναι τα  $x$  και  $t$ .

### Προβλήματα με Υπερβολικούς Περιορισμούς (Hyperbolic Constraints)

Άλλη μία μεγάλη τάξη από κυρτά προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν σαν SOCP παρουσιάζονται :

$$w^2 \leq xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2w \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \quad (2.30)$$

και, γενικότερα, όταν  $w$  είναι διάνυσμα

$$w^T w \leq xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2w \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \quad (2.31)$$

Αναφέρουμε αυτούς τους περιορισμούς σαν Υπερβολικούς Περιορισμούς, επειδή περιγράφουν μισό υπερβολοειδές (hyperboloid).

Θεωρούμε το πρόβλημα :

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^p 1/(a_i^T x + b_i)$$

$$\text{subject to} \quad a_i^T x + b_i > 0, i = 1, \dots, p, \quad c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, q$$

όπου είναι κυρτό επειδή  $1/(a_i^T x + b_i)$  είναι κυρτό για  $a_i^T x + b_i > 0$ . Αυτό είναι το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του αρμονικού μέσου για μερικές αφινικές συναρτήσεις του  $x$ , πάνω από ένα πολύτοπο. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί σαν SOCP. Πρώτα εισάγουμε νέες μεταβλητές  $t_i$  και γράφουμε το πρόβλημα σαν ένα με υπερβολικούς περιορισμούς (hyperbolic constraints):

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^p t_i$$

$$\text{subject to} \quad t_i(a_i^T x + b_i) \geq 1, t_i \geq 0, i = 1, \dots, p$$

$$c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, q$$

από την (2.31) έχουμε σαν SOCP :

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^p t_i$$

$$\text{subject to} \quad \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, i = 1, \dots, p$$

$$c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, q$$

Σαν επέκταση, έχουμε το τετραγωνικό/γραμμικό πρόβλημα με κλάσμα :

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^p \frac{\|F_i x + g_i\|^2}{a_i^T x + b_i}$$

$$\text{subject to} \quad a_i^T x + b_i > 0, i = 1, \dots, p$$

όπου  $F_i \in \mathbb{R}^{q_i \times n}$ ,  $g_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ , μπορεί να ανδειχθεί σαν SOCP εκφράζοντας :

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^p t_i$$

$$\text{subject to} \quad (F_i x + g_i)^T (F_i x + g_i) \leq t_i (a_i^T x + b_i), i = 1, \dots, p$$

$$a_i^T x + b_i > 0, i = 1, \dots, p$$

## 2.4.2 Εφαρμογή στο πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης μίας πηγής με γνωστό $P_T$

Η πηγή μπορεί να είναι σχεδιασμένη για τη μέτρηση και την αναφορά με δικά της μέτρα βαθμονόμησης με τους αισθητήρες, όπου σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να υποθέσουμε ότι η ισχύς μετάδοσης της πηγής είναι γνωστή. Αυτή αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι αναφερόμενες απώλειες της διαδρομής  $L_0$ , οι οποίες εξαρτώνται από το  $P_T$ , είναι γνωστές.

Έτσι στην περίπτωση που ο θόρυβος είναι επαρκώς μικρός από την (1.8) προκύπτει :

$$a_i \|x - s_i\| \approx d_0 \quad (2.32)$$

όπου  $a_i = 10^{(L_0 - L_i)/10a}$ . Ένας τρόπος για την εκτίμηση της θέσης της πηγής  $x$  είναι με τη χρήση της ελαχιστοποίησης του κριτηρίου Ελάχιστων Τετραγώνων (Least Squares Criterion). Έτσι, σύμφωνα με την (2.32), το πρόβλημα εκτίμησης ελάχιστων τετραγώνων εκφράζεται :

$$\hat{x} = \arg_x \min \sum_{i=1}^N (a_i \|x - s_i\| - d_0)^2 \quad (2.33)$$

Ωστόσο το πρόβλημα (2.33) είναι μη κυρτό, όταν  $a_i = d_0$ , για  $i = 1, \dots, N$ . Έτσι αναλύουμε μια διαφορετική μέθοδο επίλυσης με τη χρήση εργαλείων του γραμμικού προγραμματισμού.

Ορίζουμε τις βοηθητικές μεταβλητές  $z = [z_1, \dots, z_N]^T$ , όπου  $z_i = a_i g_i - d_0$  και  $g_i = \|x - s_i\|$  και από την (2.33) παίρνουμε :

$$\text{minimize}_{x,g,z} \|z\|^2$$

$$\text{subject to} \quad g_i = \|x - s_i\|, z_i = a_i g_i - d_0, i = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

Εισάγοντας μια μεταβλητή  $t$  και μετατρέποντας τον μη κυρτό μετασχηματισμό  $g_i = \|x - s_i\|$  σε  $g_i \geq \|x - s_i\|$  προκύπτει το ακόλουθο SOCP (Second-Order Cone Programming) πρόβλημα :

$$\text{minimize}_{x,g,z,t}$$



$$\begin{aligned} \text{subject to } & \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ t-1 \end{bmatrix} \right\| \leq t+1, \|x - s_i\| \leq g_i \\ & z_i = a_i g_i - d_0, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.35)$$

### 2.4.3 Προσδιορισμός της θέσης με άγνωστο $P_T$

Έχοντας την υπόθεση ότι οι αισθητήρες γνωρίζουν την πραγματική ισχύ εκπομπής της πηγής μας βοηθάει σε μεγάλο βαθμό στη προσέγγιση της θέσης της πηγής, ωστόσο απαιτείται πρόσθετη τεχνολογική υποστήριξη τόσο από πλευράς πηγής όσο και από πλευράς αισθητήρων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία διαφορετική εκδοχή κατά την οποία οι αισθητήρες δεν έχουν γνώση της ισχύος της πηγής και έτσι το  $L_0$  θεωρείται άγνωστο και πρέπει να εκτιμηθεί. Η κοινή συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση του  $x$  και του  $L_0$  είναι :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in [x; L_0]}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} \left[ (L_i - l^T \theta) - 10 \log_{10} \frac{\|A^T \theta - s_i\|}{d_0} \right]^2 \quad (2.36)$$

όπου  $l = [0_{2 \times 1}; 1]$ , και  $A = [I_2; 0_{1 \times 2}]$ .

Στην (2.32) θεωρήσαμε ότι  $P_T$ , δηλαδή το  $L_0$  είναι γνωστό. Θεωρώντας τώρα το  $L_0$  άγνωστο, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.32) :

$$\psi_i \|x - s_i\| \approx \eta d_0 \quad (2.37)$$

όπου  $\psi_i = 10^{-L_i/10a}$ , και  $\eta = 10^{-L_0/10a}$ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω έχουμε :

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{x,g,z,t} \\ \text{subject to } & \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ t-1 \end{bmatrix} \right\| \leq t+1, \|x - s_i\| \leq g_i \\ & z_i = \psi_i g_i - \eta d_0, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.38)$$

Αν και η προσέγγιση της (1.33) λύνει αποτελεσματικά την (1.31). μπορούμε να επιφέρουμε περαιτέρω βελτίωση των επιδόσεων του. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε την εκτίμηση των  $L_0$ , δηλαδή  $\widehat{L}_0$ , την οποία παίρνουμε λύνοντας την (1.33), και λύνοντας άλλο ένα SOCP πρόβλημα. Αυτή η προσέγγιση SOCP για το πρόβλημα παρουσιάζεται παρακάτω.

Εισάγουμε την βοηθητική μεταβλητή  $r_i = \|x - s_i\|$  και  $\gamma_i = r_i^2$ , επεκτείνοντας την (1.28) και αφαιρώντας τον όρο  $d_0^2$ , ο οποίος δεν έχει επίδραση στην ελαχιστοποίηση της και είναι:

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{x,\gamma,r} \sum_{i=1}^N (\widehat{a}_i^2 \gamma_i - 2d_0 \widehat{a}_i r_i) \\ \text{subject to } & \gamma_i = r_i^2, r_i = \|x - s_i\|, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.39)$$

όπου  $\hat{a}_i = 10^{(L_i - \hat{L}_0)/10a}$ . Επόμενα βήματα είναι η μετατροπή της (1.34) σε ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ο μη κυρτός περιορισμός  $\gamma_i = r_i^2$  μπορεί να αντικατασταθεί από ένα δεύτερης τάξης κωνικό περιορισμό (second-order cone constraint (SOCC))  $r_i^2 \leq \gamma_i$ . Πράγματι, η ανισότητα περιορισμού  $r_i^2 \leq \gamma_i$  θα ικανοποιηθεί σαν μια ισότητα επειδή  $\gamma_i$  και  $r_i$  θα μειωθεί και θα αυξηθεί στην ελαχιστοποίηση, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, ορίζουμε μια βοηθητική μεταβλητή  $y = \|x\|^2$ . Ο περιορισμός  $y = \|x\|^2$  μετατρέπεται σε ένα κυρτό περιορισμό  $y \geq \|x\|^2$ . ο οποίος είναι προφανώς ένας SOCC περιορισμός. Με τη χρήση των μετατροπών που κάναμε παραπάνω, το πρόβλημα (1.34) προσεγγίζεται σαν ένα κυρτό, SOCP, πρόβλημα βελτιστοποίηση όπως περιγράφεται παρακάτω :

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{x,\gamma,r,y} \sum_{i=1}^N (\hat{a}_i^2 \gamma_i - 2d_0 \hat{a}_i r_i) \\ & \text{subject to} \quad \left\| \begin{bmatrix} 2x \\ y-1 \end{bmatrix} \right\| \leq y+1, \left\| \begin{bmatrix} 2r_i \\ \gamma_i-1 \end{bmatrix} \right\| \leq \gamma_i+1 \\ & \quad \gamma_i = y - 2s_i^T x + \|s_i\|^2, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.40)$$

Περιληπτικά, η προτεινόμενη διαδικασία για τη λύση της (1.31) συνοψίζεται :

- **Βήμα 1** Λύνουμε την (1.33) για να βρούμε την αρχική εκτίμηση της  $x, \hat{x}'$
- **Βήμα 2** Χρησιμοποιούμε το  $\hat{x}'$  για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας και να εκτιμήσουμε τη  $L_0, \hat{L}'_0$  από την (1.31)

$$\hat{L}'_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \left( L_i - 10a \log_{10} \frac{\|\hat{x}' - s_i\|}{d_0} \right)}{N} \quad (2.41)$$

- **Βήμα 3** Χρησιμοποιούμε το  $\hat{L}'_0$  για να λύσουμε το SOCP στην (1.35) και αποκτούμε τη νέα εκτιμώμενη θέση της πηγής  $x, \hat{x}''$ . Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των  $L_0, \hat{L}''_0$ , χρησιμοποιώντας το  $\hat{x}''$ .

## 2.5 Εφαρμογή και χρήση του πακέτου επίλυσης CVX για τη λύση Convex προβλημάτων

Το CVX είναι ένα μοντέλο επίλυσης βασισμένο σε Matlab για τη λύση προβλημάτων Convex Optimization. Η βασική δομή του CVX παρουσιάζεται:

```
cvx _ begin
{variables declaration}
minimize ({objective function}) or minimize({objective function})
subject to
{constraints}
cvx _ end
```

## 2.5.1 Δήλωση μεταβλητών

Οι μεταβλητές δηλώνονται μέσω της εντολής `variable` ή `variables`. Για παράδειγμα :

`variable x(4);`

`variable z;`

`variable Y(2,3);`

δηλώσαμε τρεις μεταβλητές :

- $x$ , διάνυσμα μίας στήλης με μήκος 4
- $z$ , βαθμωτό
- $Y$ , ένας πίνακας  $2 \times 3$

Η ίδια δήλωση γράφεται :

`variables x(4) z Y(2,3);`

Το CVX δέχεται μόνο κυρτές συναρτήσεις σαν `objective` και `constraint` συναρτήσεις. Ωστόσο υπάρχουν μερικές βασικές κυρτές συναρτήσεις που λέγονται "atoms" οι οποίες εμπεριέχονται στο CVX. Μερικές από αυτές παρουσιάζονται παρακάτω :

function	meaning	attributes
<code>norm(x,p)</code>	$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n  x_i ^p} (p \geq 1)$	convex
<code>square(x)</code>	$x^2$	convex
<code>sum_square(x)</code>	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	convex
<code>square_pos(x)</code>	$[x]_+^2$	convex, nondecreasing
<code>sqrt(x)</code>	$\sqrt{x}$	concave, nondecreasing
<code>inv_pos(x)</code>	$\frac{1}{x} (x > 0)$	convex, nonincreasing
<code>max(x)</code>	$\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$	convex, nondecreasing
<code>quad_over_lin(x,y)</code>	$\frac{\ x\ ^2}{y} (y > 0)$	convex
<code>quad_form(x,P)</code>	$x^T P x (P \succeq 0)$	convex

## 2.5.2 Λειτουργίες διατήρησης της κυρτότητας

Οι παραπάνω συναρτήσεις μπορούν να ενσωματώνονται από μερικές λειτουργίες οι οποίες διατηρούν την κυρτότητα :

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός από ένα μη αρνητικό βαθμωτό μέγεθος
- Σύνθεση μίας μη φθίνουσας κυρτής συνάρτησης με μία κυρτή συνάρτηση
- Σύνθεση μίας κυρτής συνάρτησης με μία αφινική συνάρτηση

Επιπρόσθετα το CVX μας εφαρμόζει τη λογική ότι μία αρνητική κυρτή συνάρτηση είναι κοίλη συνάρτηση. Οι περιορισμοί τους οποίους το CVX θα δεχτεί είναι ανισότητες της μορφής :

$$f(x) \leq g(x)$$

$$g(x) \geq f(x)$$

όπου η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και το  $g$  κοίλη. Αν για περιορισμό έχουμε μία ισότητα θα πρέπει να είναι αφινική, και η σύνταξη είναι (με  $h$  και  $s$  να είναι αφινικές συναρτήσεις)

$$h(x) == s(x)$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ισότητα γράφεται στη μορφή  $==$ .

### 2.5.3 Προσομοίωση και Αποτελέσματα

Όπως ακριβώς κάναμε την προσομοίωση στο πρώτο κεφάλαιο για τους εκτιμητές ML και SDP έτσι αντίστοιχα εφαρμόζουμε και για τους δύο ακόμα εκτιμητές που χρησιμοποιούν την τεχνική Convex Optimization. Έτσι έχουμε το μοντέλο όπου θεωρούμε  $d_0 = 1m, L_0 = 40dB$  και  $a = 3$ . Επιπρόσθετα θεωρούμε την υπόθεση ότι υπάρχουν  $N$  αισθητήρες οι οποίοι βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $(0, 0)$  με  $rad = 20$ . Η θέση των  $i$  αισθητήρων ( $i = 1, \dots, N$ ) δίνεται :

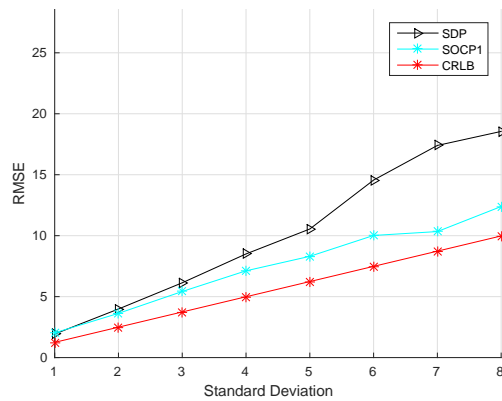
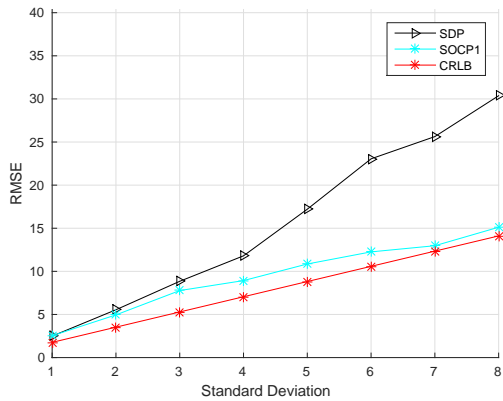
$$a_i = rad \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, \quad b_i = rad \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} \quad (2.42)$$

Είναι γνωστό ότι η γεωμετρική διάταξη των πηγών και των αισθητήρων έχουν σημαντική επίπτωση στον ακριβή προσδιορισμό της θέσης, η οποία είναι γνωστή σαν γεωμετρική αραιώση (geometric dilution) ακρίβειας. Για τη διερεύνηση αυτού του φαινομένου, κρατάμε τις θέσεις των αισθητήρων σταθερές ( $N = 3$  και  $N = 6$ ) και διαλέγουμε τρεις διαφορετικές θέσεις της πηγής οι οποίες αναπαριστούν τρεις τυπικές γεωμετρικές υλοποιήσεις πηγών-αισθητήρων. Στην πρώτη περίπτωση  $(0, 2)$  τοποθετούμε την πηγή πολύ κοντά στο κέντρο (του τριγώνου για  $N=3$ , ομοιόμορφη κατανομή με βάση τους τύπους (2.40) για  $N=6$ ) που διαμορφώνουν οι αισθητήρες, στη δεύτερη περίπτωση είναι  $(12, -2)$  όπου βρίσκεται κοντά σε κάποιον από τους αισθητήρες ενώ είναι απομακρυσμένο από τους υπόλοιπους και στην τρίτη περίπτωση  $(22, 8)$  το οποίο βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα που σχηματίζεται από τους αισθητήρες.

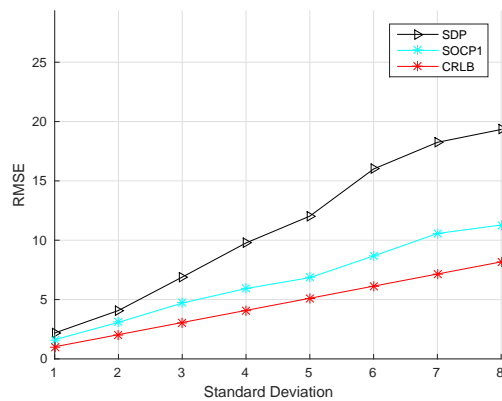
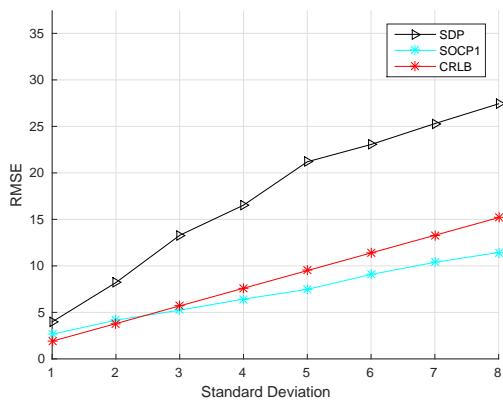
Στα σχήματα 2.1-2.3 γίνεται φανερό ότι οι γεωμετρικές διαμορφώσεις τόσο της πηγής όσο και των αισθητήρων επηρεάζουν σημαντικά τον ακριβή προσδιορισμό της θέσης επειδή οι εκτιμητές επιδεικνύουν μια τελείως διαφορετική συμπεριφορά υπό διαφορετικές γεωμετρίες

Στην πρώτη περίπτωση που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.1, τόσο στη περίπτωση που έχουμε 3 αισθητήρες όσο και στη περίπτωση που έχουμε 6 αισθητήρες, ο εκτιμητής SOCP βρίσκεται οριακά πάνω από το CRLB δημιουργώντας μια σωστή προσέγγιση στον εκτιμητή. Αντίθετα ο εκτιμητής SDP βρίσκεται να έχει μεγάλη αύξηση του RMSE με την αύξηση του  $\sigma$ .

Στη δεύτερη περίπτωση στο σχήμα 2.2 στη περίπτωση με τους τρεις αισθητήρες παρατηρούμε ότι ο εκτιμητής SOCP γίνεται bias αφού ξεπερνά το κατώτατο όριο του CRLB και αντίστοιχα στον εκτιμητή SDP αυξάνεται με ραγδαίο ρυθμό το RMSE σε σχέση με το  $\sigma$ . Μια τέτοια εξέλιξη είναι αναμενόμενη αφού τόσο λόγω της γεωμετρίας όσο και λόγω του αριθμού των αισθητήρων έχουμε ένα τέτοιο αποτέλεσμα. Αντίστοιχα στη περίπτωση με τους 6



Σχήμα 2.1: Η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του πεδίου που δημιουργούν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση 3 αισθητήρων ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια 6 αισθητήρων



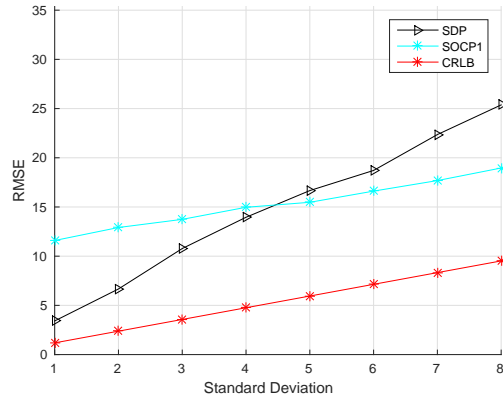
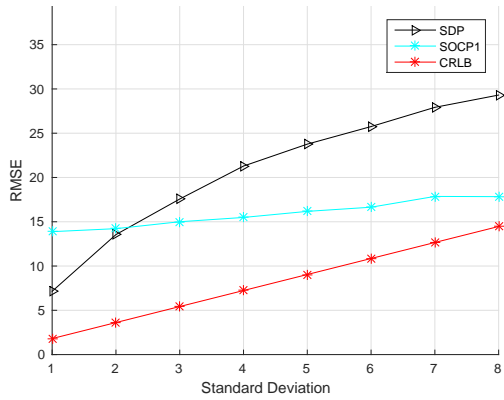
Σχήμα 2.2: Η πηγή βρίσκεται κοντά σε κάποιον από τους αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση 3 αισθητήρων ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια 6 αισθητήρων

αισθητήρες ο εκτιμητής SOCP βρίσκεται οριακά πάνω από το όριο CRLB ενώ αντίστοιχα ο εκτιμητής SDP αυξάνεται με αντίστοιχο ρυθμό όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.

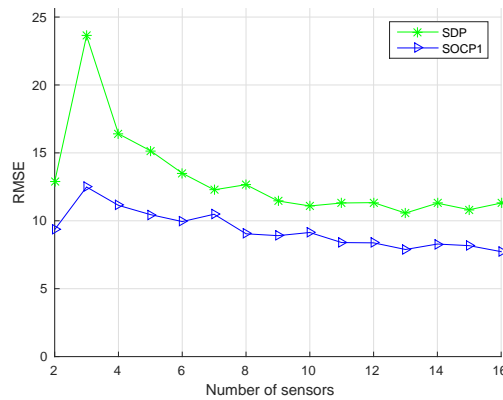
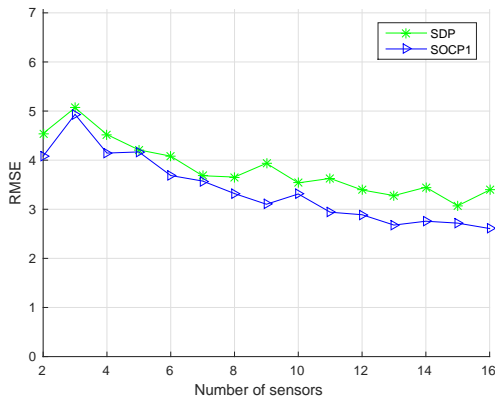
Τέλος στην τρίτη περίπτωση στο σχήμα 2.3 όπου η πηγή βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα παρατηρούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις με τρεις και έξι αισθητήρες ο εκτιμητής SOCP διατηρεί ένα σταθερό ρυθμό σε αντίθεση με τον εκτιμητή SDP που αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό το RMSE.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα που προκύπτουν από τη διαδικασία σύγκλισης των δυο εκτιμητών δημιουργώντας τα διαγράμματα RMSE-Αριθμού Αισθητήρων για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.

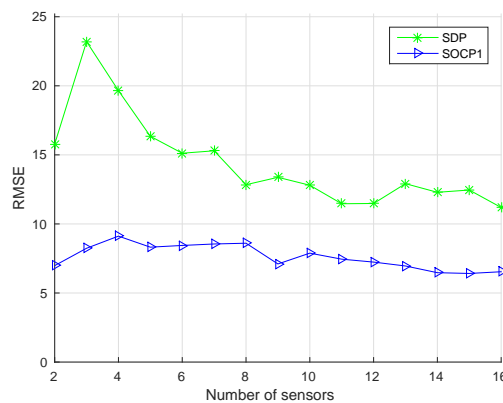
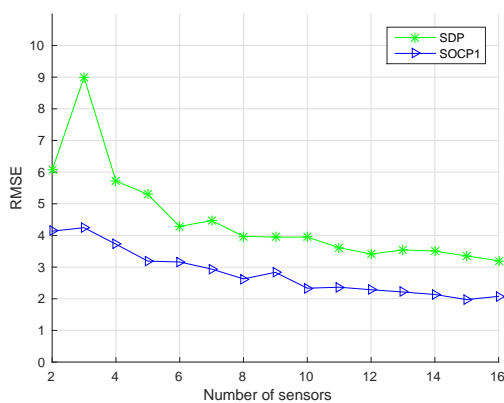
Σε όλες τις περιπτώσεις οι εκτιμητές βρίσκονται σε μεγάλη αντιστοιχία στο ρυθμό σύγκλισης μεταξύ τους παρουσιάζοντας ομοιόμορφα αποτελέσματα. Μοναδική εξαίρεση παρουσιάζει η τελευταία περίπτωση στο σχήμα 2.6 όπου οι εκτιμητές απέχουν στη σύγκλιση ενδεχομένως λόγω της ιδιαίτερης κατάστασης της θέσης της πηγής. Εντύπωση προκαλεί το γεγονός πως ενώ σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις ο εκτιμητής SOCP συγκλίνει καλύτερα



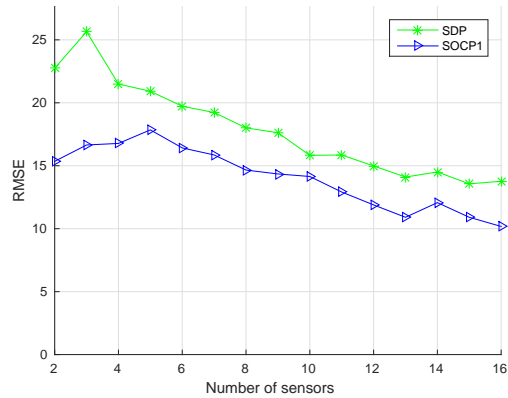
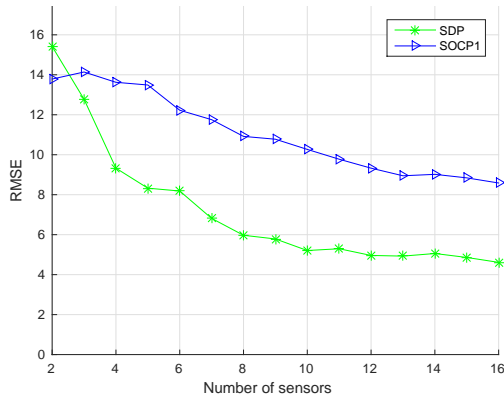
Σχήμα 2.3: Η πηγή βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα που σχηματίζουν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση 3 αισθητήρων ενώ στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια 6 αισθητήρων



Σχήμα 2.4: Η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του πεδίου που δημιουργούν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε  $\sigma = 2$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση  $\sigma = 6$



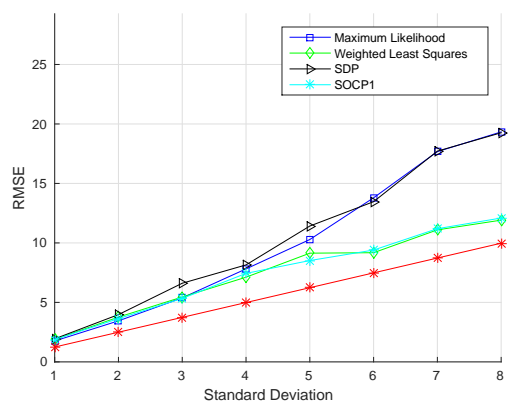
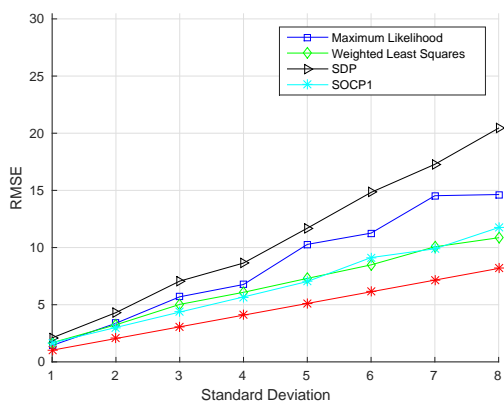
Σχήμα 2.5: Η πηγή βρίσκεται πιο κοντά σε κάποιους από τους αισθητήρες που δημιουργούν το πεδίο. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε  $\sigma = 2$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση  $\sigma = 6$



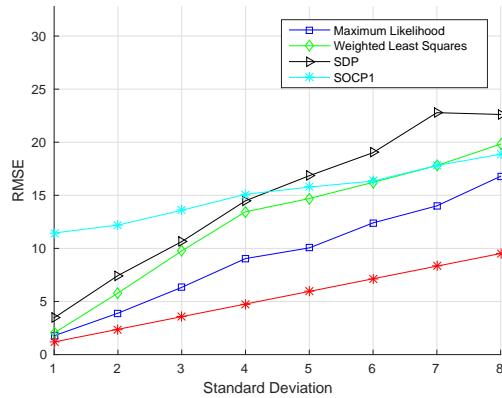
Σχήμα 2.6: Η πηγή βρίσκεται εκτός του πεδίου που δημιουργούν οι αισθητήρες. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε  $\sigma = 2$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση  $\sigma = 6$

στην περίπτωση του σχήματος 2.6 για  $\sigma = 2$  παρουσιάζει κατά πολύ καλύτερη λειτουργία.

Συμπερασματικά μπορούμε να τονίσουμε ότι ο εκτιμητής SDP αποκτά λειτουργικότητα όταν δεν έχουμε και τόσο καλή γεωμετρία στο πρόβλημα (τελευταία περίπτωση) και όταν προσδιορίζεται από λίγα N.



Σχήμα 2.7: Στη πρώτη περίπτωση η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του πεδίου που δημιουργούν έξι αισθητήρες. Ενώ στη δεύτερη η πηγή βρίσκεται κοντά σε κάποιον από τους αισθητήρες.



Σχήμα 2.8: Η πηγή βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα που σχηματίζουν οι αισθητήρες.

Τέλος παραθέτουμε τα διαγράμματα (σχήματα 2.7-2.8) των τριών περιπτώσεων όπου μελετώνται συγκεντρωτικά και με τους τέσσερις εκτιμητές θεωρώντας πως έχουμε έξι αισθητήρες σε κάθε περίπτωση. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι ότι στις περιπτώσεις που η πηγή βρίσκεται μέσα στο πλέγμα που σχηματίζουν οι αισθητήρες τόσο το SOCP όσο και το WLS έχουν και πολύ κοντινές λειτουργίες αλλά και πολύ καλύτερες καμπύλες (κοντά στο CRLB) από τα SDP και Maximum Likelihood. Ωστόσο στην τελευταία περίπτωση όπου η πηγή βρίσκεται έξω από το πλέγμα που σχηματίζουν οι αισθητήρες η καλύτερη επίδοση είναι της ML, ωστόσο και πάλι το SOCP έχει παρόμοια λειτουργία με το WLS όχι τόσο στα χαμηλά  $\sigma$  αλλά σε μεγαλύτερα.



# Κεφάλαιο 3

## Αποτελέσματα

### 3.1 Σύγκριση λειτουργίας των εκτιμητών μιας πηγής

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που κάναμε στα κεφάλαια 1 και 2 για τον προσδιορισμό της θέσης μίας πηγής με τη χρήση διάφορων εκτιμητών προκύπτουν ποικίλα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των εκτιμητών σε σχέση με τη θέση της πηγής, τον αριθμό των εκτιμητών και τη μεταβολή του  $\sigma$ . Θεωρώντας ότι χρησιμοποιήσαμε για το μοντέλο διάδοσης τις τιμές  $d_0 = 1\text{m}$ ,  $L_0 = 40\text{dB}$  και  $a = 3$  και επιπρόσθετα υπάρχουν  $N$  αισθητήρες οι οποίοι βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $(0, 0)$  και  $rad = 20$ . Η θέση των  $i$  αισθητήρων ( $i = 1, \dots$ ) προκύπτει :

$$a_i = rad \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, b_i = rad \sin \frac{2\pi(i-1)}{N}$$

Αρχικά η σύγκριση των εκτιμητών γίνεται μεταβάλλοντας την θέση της πηγής μέσα σε ένα πλέγμα από αισθητήρες ( $N=3, N=6$ ) μελετώντας κάθε φορά τη συμπεριφορά της πηγής. Οι θέσεις που δίνουμε της πηγής είναι αρχικά στο κέντρο του πλέγματος  $(0,2)$ , στη δεύτερη περίπτωση είναι πολύ κοντά σε κάποιον από τους αισθητήρες  $(12,-2)$ , ενώ στη τρίτη και τελευταία περίπτωση βρίσκεται έξω από το κυρτό περίβλημα στη θέση  $(22,8)$ .

Με τη βοήθεια της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι όλοι οι εκτιμητές ML (εκτιμητές ML που χρησιμοποιούν σαν αρχικό σημείο το αποτέλεσμα του αλγόριθμου SDP και το LLS) συγκλίνουν στο ίδιο σημείο όπου παρουσιάζεται στα διαγράμματα στη καμπύλη ML. Αυτό το φαινόμενο δείχνει ότι το πρόβλημα της μη σύγκλισης του εκτιμητή ML δεν παρουσιάζεται όταν το  $N$  είναι μικρό, αλλά όταν γίνεται εμφανές όταν το  $N$  αυξάνεται. Οι προσομοιώσεις επίσης μας δείχνουν ότι οι περισσότεροι εκτιμητές μεροληπτούν (biased) άλλοι περισσότερο άλλοι λιγότερο. Έτσι προκύπτει ότι δεν θα έχουμε αρμονική λειτουργία αν βρίσκεται κάτω από το κατώτατο όριο που δημιουργεί το CRLB, δηλαδή το CRLB καθίσταται σαν σημείο αναφοράς αντιπροσωπεύοντας το κατώτατο όριο όπου κάθε αμερόληπτος εκτιμητής μπορεί να πετύχει.

Συγκρίνοντας τους αλγορίθμους ML και WLS παρουσιάζεται μία ομαλότερη λειτουργία στον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων απόρροια του γεγονότος ότι εκφράζεται με διαφορετικό τρόπο η ενέργεια λόγω των μετασχηματισμών UT που έχουμε χρησιμοποιήσει. Η ML είναι βέλτιστη λύση μόνο όταν ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) είναι επαρκώς μεγάλος και τα δείγματα είναι επαρκώς πολλά. Έτσι από τις συγκρίσεις προκύπτει ότι ο εκτιμητής WLS σε γενικότερο πλαίσιο αποδίδει καλύτερα από τον ML.

Επιπρόσθετα το συγκριτικό μεταξύ του εκτιμητή ML και του εκτιμητή SDP αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής SDP είναι ισχυρότερος στην περίπτωση της κακής γεωμετρίας και στην περίπτωση που έχουμε μικρότερο αριθμό αισθητήρων.

Ο εκτιμητής SOCP επιτρέπει την απλή προσαρμογή σε διάφορα σενάρια για το πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης RSS και ως εκ τούτου πετυχαίνουμε τη μείωση του λάθους εκτίμησης. Έτσι παρατηρείται μικρό κέρδος σε σχέση με τους υπόλοιπους υπάρχοντες εκτιμητές.

Στο επόμενο βήμα η σύγκριση των εκτιμητών γίνεται με βάση το κριτήριο αύξησης των αισθητήρων διατηρώντας σταθερό  $\sigma$ . Λόγω της αύξησης των αισθητήρων η συμπεριφορά του ML βελτιώνεται ειδικότερα στην περίπτωση που έχουμε την πηγή εκτός πλέγματος. Αυτό προκύπτει σαν αποτέλεσμα της αύξησης των δειγμάτων που συγκεντρώνονται για την εκτίμηση. Με ανάλογο τρόπο παρουσιάζεται και η συμπεριφορά του SOCP που σε κάθε περίπτωση συγκλίνει ομαλότερα και ταχύτερα από το SDP, εκτός της περίπτωσης που είναι εκτός πλέγματος και για μικρό θόρυβο.

Σαν τελικό συμπέρασμα προκύπτει (από τα διαγράμματα που παρουσιάζουν τη συμπεριφορά όλων των εκτιμητών) ότι ο WLS μαζί με τον SOCP έχουν την καλύτερη απόδοση εκμεταλλευόμενοι κάθε φορά το πλεονέκτημά του ο καθένας δίνει για την βέλτιστη εκτίμηση.

# Βιβλιογραφία

- [1] S. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory, Prentice Hall,1993.
- [2] T.S. Rappaport, Wireless Communications: Principles and Practice Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall,1996.
- [3] N. Patwari et al.,"Locating the nodes:Cooperative localization in wireless sensor networks",IEEE Signal Process. Mag.,vol.22,no. 4,pp 54-69,Jul.2005.
- [4] Y. Chen and M. Gupta,"EM demystified: An expectation-maximization tutorial", Technical Report UWEETR-2010-0002,Department of Electrical Engineering, University of Washington, Feb.2010
- [5] I. Dagres,A. Polydoros, D. Denkovski, M. Angjelinoski, V. Atanasovski and L. Gavrilovska,"Algorithms and bounds for energy-based multi-source localization in log-normal fading",IEEE,2012
- [6] R. Ouyang,A.Wong and C.Lea,"Received Signal Strength-Based Wireless Localization via Semidefinite Programming: Noncooperative and Cooperative Schemes",IEEE Trans. Vehicular Technology,2010
- [7] B.Gartner and J. Matousek,"Approximation algorithms and semidefinite programming",Springer,2012
- [8] Robert M.Freud,"Introduction to semidefinite programming(SDP)",MIT OpenCourseWare: <http://ocw.mit.edu>
- [9] S.Boyd and L.Vandenberghe,"Convex Optimization",Cambridge,U.K.:Cambridge Univ.Press 2004
- [10] M. Grant and S. Boyd, CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, ver.1.21,CVX Res.,May Austin,TX USA,2010,[Online].Available: <http://cvxr.com/cvx>
- [11] Lecture-3-,Positive Semidefinite Matrices,Uscd,Mathematics Department
- [12] G. Wang,H. and K. Yang,"A new approach to sensor node localization using RSS measurements in wireless sensor networks",IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 10,no. 5,pp. 1389-1395, May 2011.

- [13] Slavisa Tomic, Marko Beko and Rui Dinis, "RSS-Based localization in wireless sensor networks using convex relaxation: Noncooperative and cooperative schemes", *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 64, no. 5, pp. 2037-2050, May 2015
- [14] Amir Beck, *Introduction to Nonlinear Optimization, Theory, Algorithms and Applications with MATLAB*, MOS-SIAM Series on Optimization, 2014
- [15] Daniel P. Palomar and Yonina C. Eldar, *Convex Optimization in Signal Processing and Communications*, Cambridge, 2010