



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Μελέτη της μετάβασης στην τυρβώδη κατάσταση σε  
εργαστηριακούς σωλήνες

Μάριος - Ανδρέας Νικολαΐδης  
Α.Μ:201229

Επιβλέπων: Πέτρος Ιωάννου, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα 2014

Διπλωματική Εργασία στα πλαίσια του Π.Μ.Σ.  
Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

**Εξεταστική επιτροπή**

Ιωάννου Πέτρος	Αναπληρωτής Καθηγητής
Αποστολάτος Θεοχάρης	Επίκουρος Καθηγητής
Βλαχάκης Νεκτάριος	Επίκουρος Καθηγητής

## Περίληψη

Χρησιμοποιούμε μεθόδους μη-γραμμικής βελτιστοποίησης για να υπολογίσουμε τις πιο «επιβλαβείς» αρχικές διαταραχές στις θεμελιώδης καταστάσεις του μοντέλου SSP του Waleffe και στην ροή Poiseuille 2 διαστάσεων. Για αυτήν την μέθοδο το δυναμικό σύστημα και το adjoint του επιλύονται αριθμητικά, και στη συνέχεια υπολογίζουμε conjugate παραγώγους του συναρτησοειδούς βελτιστοποίησης με τις οποίες μεταβάλλουμε τις αρχικές συνθήκες. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Υπολογίζουμε την ελάχιστη ενέργεια διαταραχών για την μετάβαση σε αυτοσυντηρούμενες καταστάσεις και τα optimals σε διάφορους χρόνους για καθορισμένη αρχική ενέργεια. Τέλος συγκρίνουμε τα μη-γραμμικά optimals της ροής Poiseuille με τα γραμμικά και παρατηρούμε ότι η δομή τους δεν αλλάζει σημαντικά.

## Abstract

Using nonlinear optimization methods we calculate optimal initial disturbances over base states in Waleffe's SSP model and Poiseuille 2D flow. For this method both forward and adjoint equations are solved numerically and update the initial condition on a conjugate gradient of the optimization functional. Process is iterated until sufficient convergence is achieved. We search for minimal perturbation energy for transition to the self-sustaining regime and energy growth over target times for fixed initial energy. Comparison of nonlinear optimals with linear in Poiseuille flow shows that structure of optimals is mainly unchanged.

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Ιωάννου για το αμείωτο ενδιαφέρον του κατά την εξέλιξη της εργασίας, συζητήσεις και συμβουλές, τον Ναβίτ για χρήσιμες συζητήσεις πάνω στους αριθμητικούς κώδικες, το Πολυτεχνείο της Μαδρίτης για τον χρόνο που με άφησε να χρησιμοποιώ τους υπολογιστές του. Τέλος, την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την στήριξη και την κατανόηση τους για τον δρόμο που διάλεξα να ακολουθήσω.

M.N., 21 Ιουλίου 2014



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Απλά μοντέλα εξέλιξης των διαταραχών</b>	<b>3</b>
2.1	Σύστημα Reynolds . . . . .	3
2.2	Μοντέλο του Waleffe . . . . .	7
2.2.1	2-D διαταραχές . . . . .	10
2.2.2	3-D διαταραχές . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Αστάθεια σε ροές</b>	<b>19</b>
3.1	Σταθερές λύσεις ροών . . . . .	19
3.2	Εξισώσεις διαταραχών . . . . .	20
3.2.1	Διακριτή μορφή . . . . .	21
3.3	Γραμμικά optimal ροής Poiseuille . . . . .	22
3.3.1	Μέσω υπολογισμού ιδιοτιμών . . . . .	23
3.3.2	Μέσω Conjugate Gradient βελτιστοποίησης . . . . .	23
3.4	Μη-γραμμικά optimal . . . . .	24
3.4.1	Σύγκριση OP και NLOP . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Το μη γραμμικό κύμα της ροής Poiseuille</b>	<b>35</b>
4.1	Ο ρόλος των FAS στην μετάβαση . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>41</b>
<b>A'</b>	<b>Προβλήματα μεγιστοποίησης</b>	<b>43</b>
A'.1	Αλγόριθμοι . . . . .	43
A'.1.1	Μέθοδος απότομης ανόδου . . . . .	43
A'.1.2	Μέθοδος Conjugate Gradient . . . . .	43
A'.2	Μέθοδος προσαρτημένων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	44
A'.2.1	Τοποθέτηση του προβλήματος . . . . .	44
A'.2.2	Γραμμική Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	46
A'.2.3	Μη-κανονικοί πίνακες . . . . .	48
A'.2.4	Ο αλγόριθμος . . . . .	51

<b>B' Μη-γραμμική βελτιστοποίηση 2 – D ροής</b>	<b>53</b>
B'.1 Αριθμητική ολοκλήρωση ροής . . . . .	53
B'.1.1 Διακριτοποίηση διαφορικών τελεστών . . . . .	54
B'.1.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης . . . . .	56
B'.2 Το πρόβλημα μεγιστοποίησης . . . . .	58

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Από την εποχή του Reynolds ήταν γνωστό ότι η μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση μπορούσε να καθυστερήσει, όσο μειώνονταν οι ατέλειες της πειραματικής διάταξης (1883). Θα λέγαμε πως αυτή η παρατήρηση αποτελεί και την αρχή για την ύπαρξη ασταθειών σε πεπερασμένου πλάτους διαταραχές σε ροές.

Για ένα διάστημα η προόδος της θεωρίας επικεντρώθηκε στην γραμμική περιοχή (Heisenberg, Lin, Thomas), όπου και η αστάθεια ή ευστάθεια μιας ροής καθόριζε την μετάβαση. Παράλληλα ο Squire (1933) απέδειξε ότι σε ροές μεταξύ παράλληλων τοιχομάτων οι δισδιάστατες διαταραχές γίνονται ασταθής σε χαμηλότερους αριθμούς Reynolds ( $Re$ ) από τις τρισδιάστατες. Όμως αυτή η θεώρηση, αν και επιτυχής για μικρές διαταραχές, απέιχε αρκετά από τα πειραματικά αποτελέσματα.

Με την εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών ήταν αναπόφευκτο να χρησιμοποιηθούν και για την μελέτη διαφορικών εξισώσεων. Αριθμητικά πειράματα από τους Zahn et al. σε ροή Poiseuille 2 διαστάσεων με μια προσέγγιση μέσης ροής-πρώτης αρμονικής, εντόπισαν μη γραμμικές κυματικές λύσεις του συστήματος, οι οποίες αντιστοιχούσαν και σε περιοχές που ήταν γραμμικά ευσταθείς.

Χρησιμοποιώντας αρχικές συνθήκες που καταλήγουν σε αυτές τις λύσεις και μικρές  $3-D$  διαταραχές, οι Orszag και Patera (1980) πέτυχαν μετάβαση σε χαμηλότερους αριθμούς Reynolds (subcritical transition) από ότι προέβλεπε η γραμμική θεωρία σε ροή Poiseuille τριών διαστάσεων. Η αρχική ενέργεια των διαταραχών μειώθηκε στη συνέχεια, όταν οι Butler και Farrell (1994) έδειξαν πως γραμμικά optimal καταλήγουν και αυτά στην μη γραμμική λύση με αρχική ενέργεια μια τάξη μεγέθους μικρότερη.

Μέχρι πρόσφατα λοιπόν η ελάχιστη ενέργεια μετάβασης εντοπιζόταν κυρίως διαισθητικά, καθώς η δοκιμή όλων των πιθανών αρχικών συνθηκών είναι πρακτικά αδύνατη. Η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος επέτρεψε την κατασκευή και χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης, για τις οποίες απαιτείται η επανάληψη μιας αριθμητικής



ολοκλήρωσης αρκετές φορές .Αποτελέσματα των Zuccher,Bottaro and Luchini , Pringle and Kerswell,Cherubini,δείχνουν ότι η προσέγγιση του προβλήματος με ένα συναρτησοειδές προς μεγιστοποίηση αποφέρει αποτελέσματα.

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, θα ασχοληθούμε με τέτοιου είδους βελτιστοποιήσεις σε δυναμικά συστήματα.

## Κεφάλαιο 2

# Απλά μοντέλα εξέλιξης των διαταραχών

Θα μελετήσουμε καταρχήν κάποια πιο απλά μοντέλα, που επιχειρούν να περιγράψουν την τυρβώδη κατάσταση χρησιμοποιώντας μερικά από τα χαρακτηριστικά της (toy models). Το αρχικό μας σύστημα είναι οι εξισώσεις Reynolds όπου έχουμε μια δισδιάστατη διαταραχή. Στο επόμενο βήμα αφήνουμε την διαταραχή να αλληλεπιδράσει με την μέση ροή του συστήματος. Τέλος, επιπλέον θα εισάγουμε μια μεταβλητή που περιγράφει την inflectional streak instability, αυξάνοντας τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος σε 4. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για την μεγιστοποίηση της ενέργειας περιγράφεται στην ενότητα A'.2 του παραρτήματος.

### 2.1 Σύστημα Reynolds

Το σύστημα του Reynolds επικεντρώνεται στην θεμελιώδη γραμμική συμπεριφορά των διαταραχών σε μια ροή [12]. Οι συνιστώσες του αντιστοιχούν στο streak ( $u$ ) και το roll ( $v$ ). Περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση.

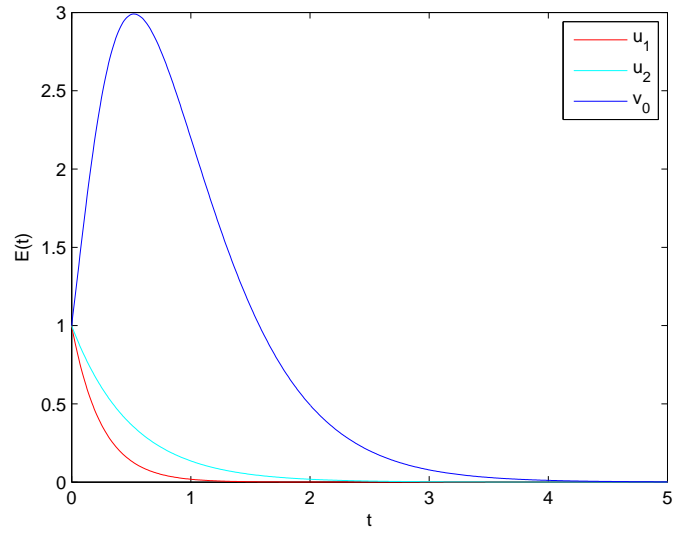
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & r \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, r = 10 \quad (2.1)$$

Από όπου υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις.

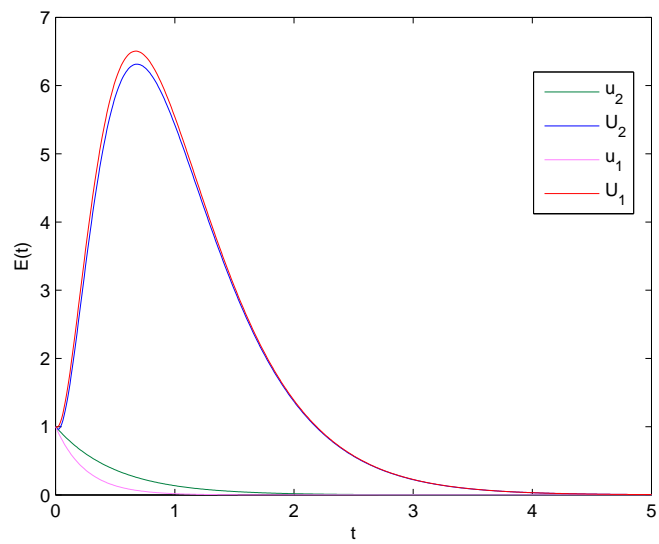
$$\lambda_1 = -2, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.9950 \\ -0.0995 \end{pmatrix} \lambda_2 = -1, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Βλέπουμε πως οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος δεν είναι ορθογώνιες, δηλαδή έχουμε να κάνουμε με έναν μη κανονικό πίνακα. Υπολογίζουμε και το adjoint σύστημα. Επειδή είναι γραμμικό το  $\lambda$  θα δίνεται από την

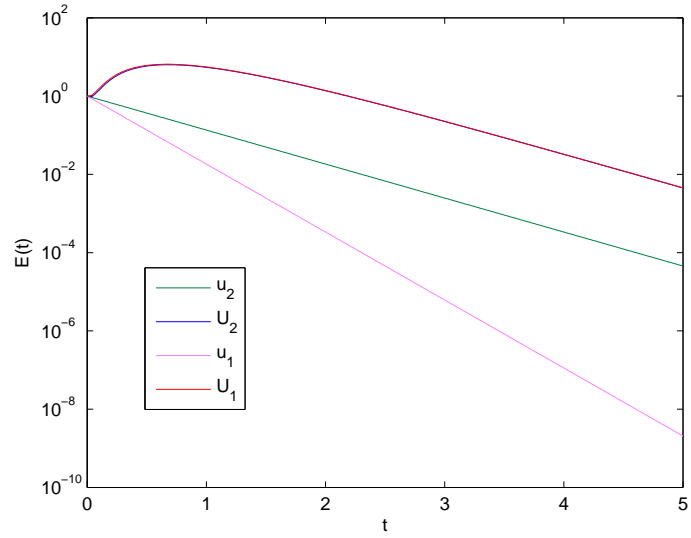
$$\dot{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 2 \end{pmatrix} \lambda \quad (2.3)$$



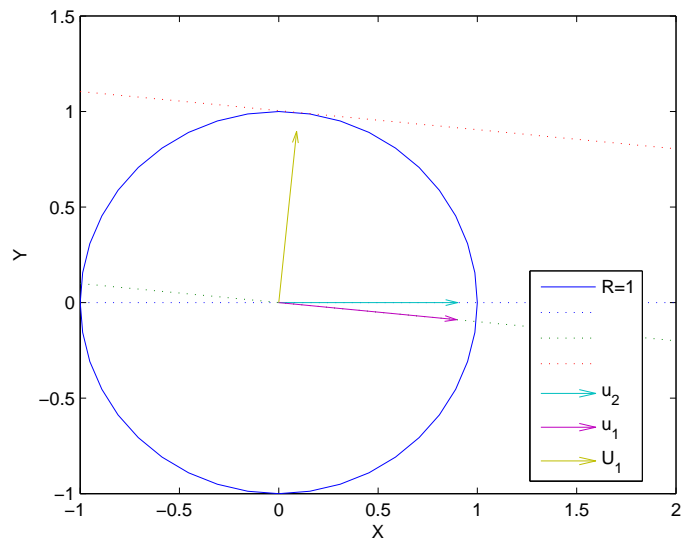
Σχήμα 2.1: Η εξέλιξη των ιδιοκαταστάσεων του συστήματος και της κατάστασης  $v_0$



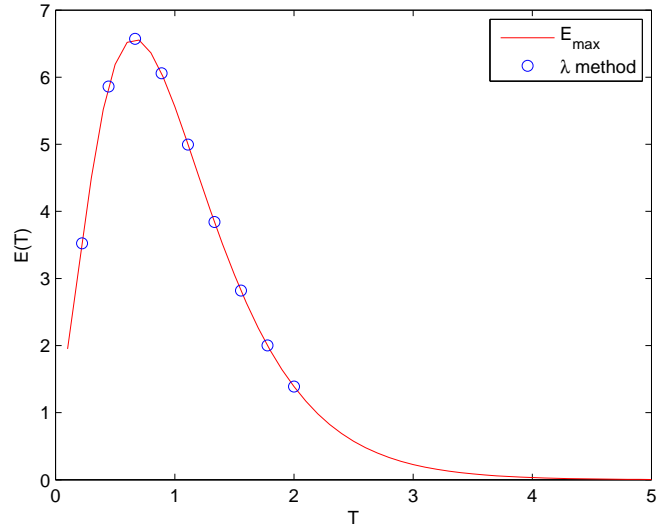
Σχήμα 2.2: Ιδιοκαταστάσεις και adjoint καταστάσεις



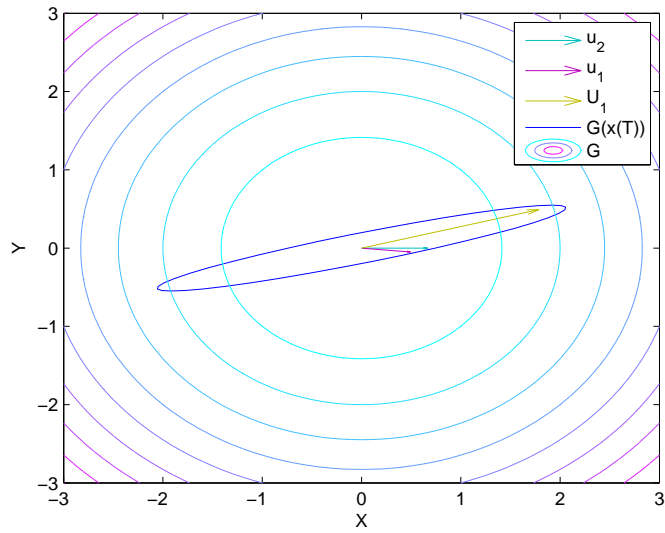
Σχήμα 2.3: Οι παραπάνω λύσεις σε λογαριθμική κλίμακα



Σχήμα 2.4: Το adjoint διάνυσμα και οι ιδιοκαταστάσεις



Σχήμα 2.5: Η μέγιστη τιμή του συναρτησοειδούς και ο υπολογισμός με τις ιδιοτιμές του  $M(T)$



Σχήμα 2.6: Το διάγραμμα των ισοψών της  $G$  και η καμπύλη  $x(T)$  σε χρόνο  $T=0.3$

Λόγω των αρνητικών ιδιοτιμών του πίνακα, κάθε αρχική κατάσταση του συστήματος αναλώνεται. Όμως, επιλέγοντας αρχικές συνθήκες που να απομακρύνονται από τις ιδιοκαταστάσεις μπορούμε να δούμε ότι οι λύσεις εμφανίζουν ένα μέγιστο στο μέτρο του συστήματος πριν τελικά καταλήξουν στο 0 (Σχημ.2.6,  $u_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ).

Όπως μπορούμε να δούμε και στο λογαριθμικό διάγραμμα 2.3 όλες οι αρχικές συνθήκες συμπεριφέρονται ασυμπτωτικά ως  $\exp -t$  εκτός της  $u_1$ . Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο μεγιστοποίησης  $A'$ . Με βάση τις λύσεις που έχουμε, ένα καλό χρονικό διάστημα είναι μέχρι τις 5 μονάδες χρόνου, καθώς κάτω εκεί μπορούμε να πούμε ότι οι λύσεις μας θα μηδενίζονται.

Η ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η  $G(x) = x^\dagger(T)x(T) = x^2(T) + y^2(T) = E(T)$ . Ο περιορισμός για τις αρχικές συνθήκες είναι  $x^\dagger(0)x(0) = 1$ . Οπότε για να κατασκευάσουμε την  $G$  θα πρέπει να τρέξουμε τον αλγόριθμο σε διάφορες χρονικές στιγμές.

Βλέπουμε πως το adjoint  $U_1$  (2.4) δεν αντιστοιχεί σε κάποιο από τα μέγιστα της 2.5 αλλά όσο αυξάνεται ο χρόνος που μας ενδιαφέρει, τόσο τείνει σε αυτό η μέγιστη αρχική κατάσταση.

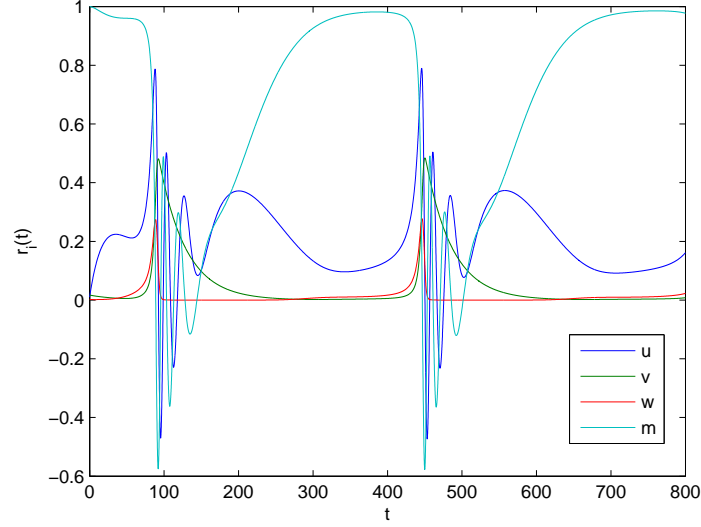
Επιπλέον, για να επαληθεύσουμε την ακρίβεια της καμπύλης που βρήκαμε, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγιστο και μέσω του πίνακα  $M(T)$ . Όπως βλέπουμε ο αλγόριθμος συμφωνεί με τα αναλυτικά αποτελέσματα, τουλάχιστον σε ένα γραμμικό πρόβλημα (2.5).

## 2.2 Μοντέλο του Waleffe

Το επόμενο μοντέλο που θα εξετάσουμε επιχειρεί να περιγράψει πως μια ροή μεταβαίνει σε μια αυτο-συντηρούμενη τυρβώδη κατάσταση [13]. Καταρχήν, από τις 4 μεταβλη-

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma \end{pmatrix} - \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \mu u \\ \lambda v \\ \nu w \\ \sigma m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta w & v \\ 0 & 0 & \gamma w & 0 \\ \gamma w & -\delta w & 0 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ m \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

τές του μοντέλου, οι  $u$  αντιστοιχούν στα streaks, οι  $v$  στα rolls και οι  $w$  στο πλάτος της αστάθειας του streak. Αυτές είναι και οι διαταραχές. Το  $m$  αντιστοιχεί στην μέση ροή. Οι σταθεροί όροι που πολλαπλασιάζουν τις μεταβλητές ( $\mu, \lambda, \nu, \sigma$ ) είναι οι επιμέρους τριβές, ενώ οι  $\gamma, \delta$  είναι οι μη-γραμμικοί συντελεστές αλληλεπίδρασης. Το ζητούμενο σε αυτό το πρόβλημα διαφοροποιείται κάπως, καθώς τώρα αναζητούμε την ελάχιστη ενέργεια που οδηγεί σε διατήρηση του συστήματος.



Σχήμα 2.7: Λύσεις των συνιστωσών του μοντέλου του Waleffe

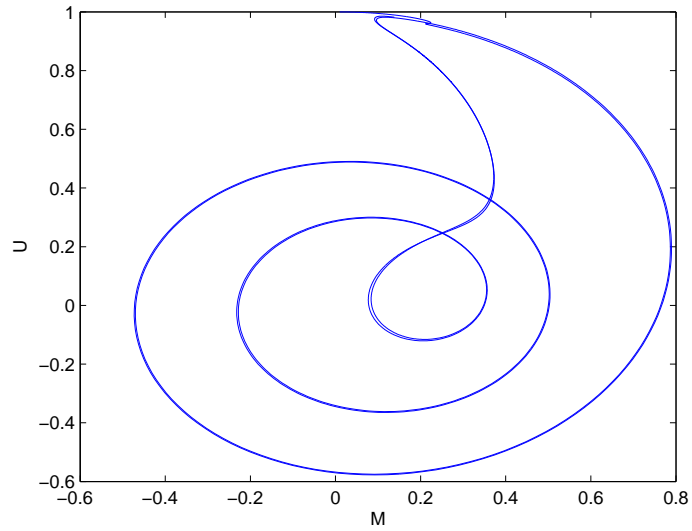
Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε από την μορφή του πίνακα είναι πως εάν πολλαπλασιάσουμε το σύστημα με το  $(u, v, w, m)$  τότε ο πίνακας στο δεξί μέλος της σχέσης μηδενίζεται, καθώς είναι αντισυμμετρικός. Οι μη γραμμικοί όροι ανακατανέμουν την ενέργεια. Καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση, η οποία ουσιαστικά οριοθετεί την αναλωτική περιοχή του συστήματος.

$$\frac{d}{dt}(u^2 + v^2 + w^2 + m^2) = \frac{\sigma m}{R} - \frac{1}{R}(\mu u^2 + \lambda v^2 + \nu w^2 + \sigma m^2) \quad (2.5)$$

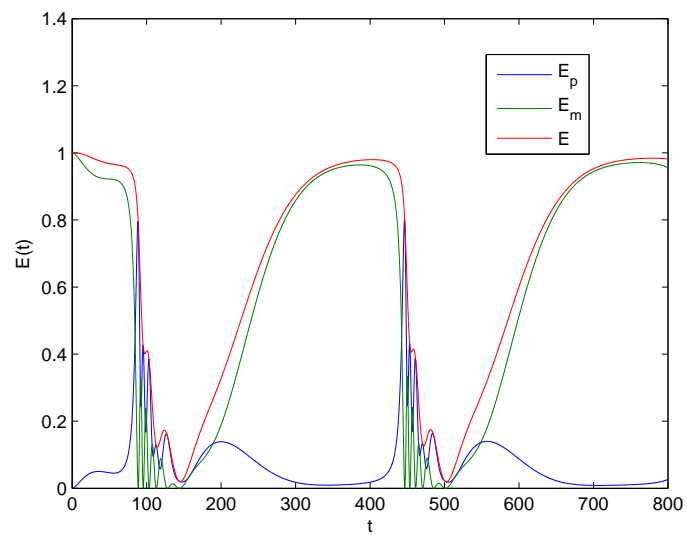
$$\frac{d}{dt}(u^2 + v^2 + w^2 + m^2) = \frac{\sigma}{4R} - \frac{1}{R}(\mu u^2 + \lambda v^2 + \nu w^2 + \sigma(m - \frac{1}{2})^2) \quad (2.6)$$

Μπορούμε να εξάγουμε και πιο απλά μοντέλα από το παραπάνω. Αν για παράδειγμα θέσουμε το  $m = 1$  και το  $w = 0$ , τότε βλέπουμε ότι μένει το σύστημα Reynolds. Εάν διατηρήσουμε τις αλληλεπιδράσεις με την μέση ροή, αλλά πάλι κρατήσουμε το  $w = 0$ , μελετάμε το σύστημα με διαταραχές 2 διαστάσεων.

Πριν να καταπιαστούμε με τον υπολογισμό της ελάχιστης ενέργειας, θα ήταν χρήσιμο να δούμε ποιές λύσεις μας δίνει το πλήρες σύστημα για διάφορες αρχικές συνθήκες. Οι τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι  $R = 357$ ,  $\mu = \lambda = \sigma = 10$ ,  $\nu = 15$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\delta = 1$ . Από την (2.6), και επειδή ξεκινάμε με  $m = 1$  είμαστε κατευθείαν στην αναλωτική περιοχή του συστήματος.



Σχήμα 2.8: Η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο  $(U, M)$



Σχήμα 2.9: Χρονικές μεταβολές των επιμέρους ενεργειών  $E_p$  (Διαταραχές),  $E_m$  (Μέση ροή) και της συνολικής ενέργειας  $E(U, M)$



Ας επιλέξουμε ως αρχικές συνθήκες τις  $u = 0.010, v = 0.017, w = 0.002, m = 1$ . Από αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε και την αρχική ενέργεια των διαταραχών  $E_0 = 3.93 \cdot 10^{-4}$ . Από το σχήμα (2.7) φαίνεται πως το μοντέλο μετά από κάποιον χρόνο καταλήγει σε μια περιοδική κατάσταση, κάτι που φαίνεται και από την 2.8. Μια ερώτηση που θα ήταν ενδιαφέρον να απαντήσουμε είναι εάν αυτή η περιοδική τροχιά είναι συγκεκριμένη η εξαρτάται από την αρχική ενέργεια. Θα περιμέναμε πάντως λόγω της 2.6 να εξελίσσονται στον ίδιο χώρο.

Η συμπεριφορά της ενέργειας είναι ενδιαφέρουσα, καθώς από μια περίπου σταθερή τιμή σχεδόν μηδενίζεται. Η απότομη πτώση συνδιάζεται με την αύξηση της ενέργειας των διαταραχών.

### 2.2.1 2-D διαταραχές

Σε αυτήν την απλοποιημένη περίπτωση, το σύστημα γράφεται ως

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \end{pmatrix} - \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \mu u \\ \lambda v \\ \sigma m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ m \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

, και εάν λύσουμε και την εξίσωση για το  $v$  θα έχουμε την πιο συμπαγή μορφή

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{R} & -v(t) \\ v(t) & \frac{\sigma}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{R} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

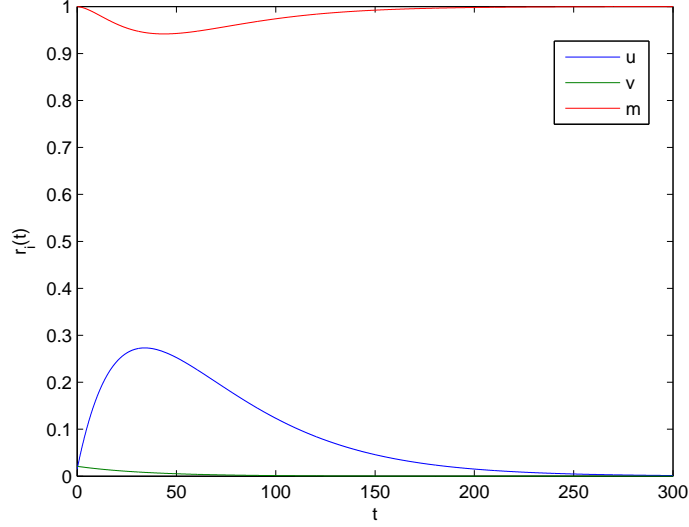
Η σχέση 2.6 μετασχηματίζεται στην παρακάτω (λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\mu = \lambda = \sigma$ )

$$\frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + m^2) = \frac{\sigma}{4R} - \frac{\sigma}{R} (u^2 + v^2 + (m - \frac{1}{2})^2) \quad (2.9)$$

Όπως μπορούμε να δούμε η  $v$  διαταραχή εμφανίζει εκθετική μείωση. Όσο υπάρχει το  $v$ , εμφανίζονται μη-γραμμικοί όροι στις  $u, m$  οπότε θα εξετάσουμε την εξέλιξη του μοντέλου για αυτές τις χρονικές περιόδους που το  $v$  δεν είναι αμελητέο. Διαφορετικά, έπειτα από αρκετό χρόνο το σύστημα καταλήγει στην κατάσταση  $(0, 0, 1)$ . Όπως βλέπουμε και από το σχήμα 2.11 η ενέργεια έχει την ίδια μορφή με το σύστημα του Reynolds. Οπότε θα περιμέναμε μια παρόμοια γραφική παράσταση και για την μέγιστη ενέργεια.

Θέλουμε να βρούμε την αρχική συνθήκη  $(u, v)$  η οποία να μεγιστοποιεί την ενέργεια των διαταραχών  $E = u^2(T) + v^2(T)$ . Με βάση την παραπάνω ανάλυση, δεν περιμένουμε να υπάρχει αυτο-συντηρούμενη κατάσταση. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα που έχουμε να μεγιστοποιήσουμε. Επειδή το  $u^2(0) + v^2(0)$  δεν είναι μοναδα, θα πρέπει να το υπολογίσουμε στο συναρτησοειδές. Άρα

$$G(V(0), V(T)) = \frac{V^\dagger(T)V(T)}{V^\dagger(0)V(0)}, \quad V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.10: Οι συνιστώσες για διαταραχές 2 διαστάσεων για αρχικές συνθήκες (0.015, 0.021, 1)

Επιβάλλουμε την εξέλιξη του συστήματος με την σχέση 2.7 ,και επιπλέον απαιτούμε να ξεκινάμε πάντα από την ίδια ενέργεια.

$$G(V(0), V(t), V(T), \lambda, c) =$$

$$\frac{V^\dagger(T)V(T)}{V^\dagger(0)V(0)} - \int_0^T \lambda^\dagger(t)(\dot{X}(t) - f(X(t)))dt - c[V^\dagger(0)V(0) - E_0] \quad (2.11)$$

$$G(V(0), V(t), V(T), \lambda, c) = \frac{V^\dagger(T)V(T)}{V^\dagger(0)V(0)}$$

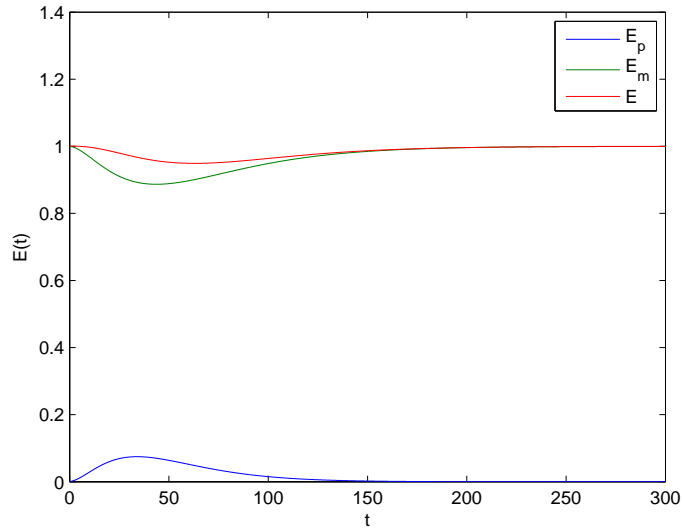
$$-\lambda^\dagger(T)X(T) + \lambda^\dagger(0)X(0) - \int_0^T \lambda^\dagger(t)X(t) + \lambda^\dagger f(X(t))dt - c[V^\dagger(0)V(0) - E_0] \quad (2.12)$$

Από την παραπάνω εξάγουμε τις adjoint εξισώσεις

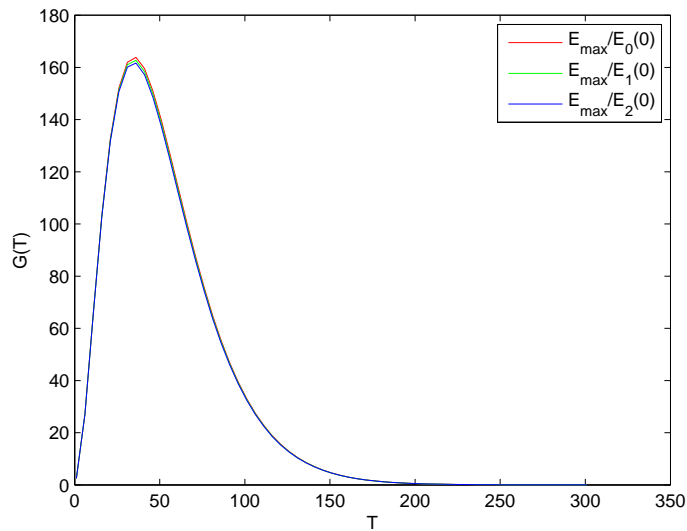
$$\frac{2V(T)}{E_0} = \lambda(T) \quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda} = - \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{R} & 0 & -v \\ m & -\frac{\sigma}{R} & -u \\ v & 0 & \frac{\sigma}{R} \end{pmatrix} \lambda \quad (2.14)$$

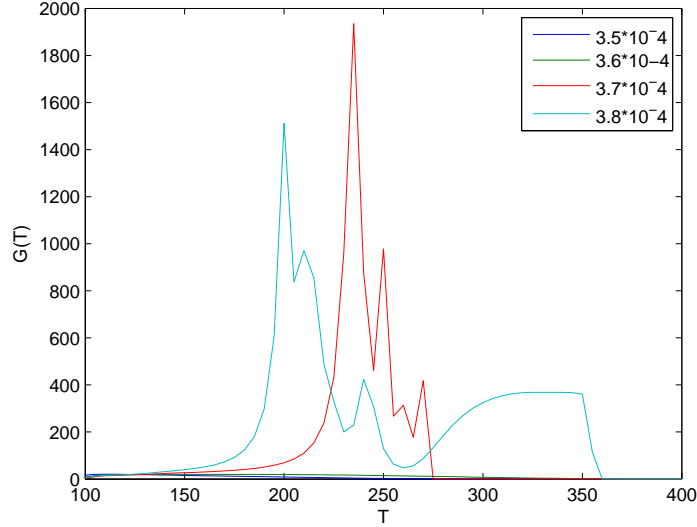
$$\frac{\partial G}{\partial x_0} = -2cV(0) + \lambda(0) \quad (2.15)$$



Σχήμα 2.11: Οι ενέργειες  $E_p$  των διαταραχών,  $E_m$  της μέσης ροής και  $E$  του συστήματος για διαταραχές 2 διαστάσεων



Σχήμα 2.12: Η μέγιστη τιμή που φτάνει η  $G(T)$  για τις διάφορες αρχικές ενέργειες



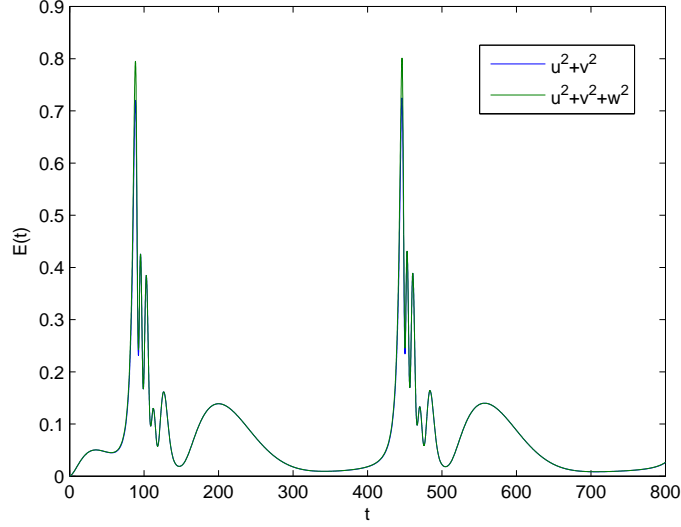
Σχήμα 2.13: Η μέγιστη τιμή που φτάνει η  $G(T)$  για τις διάφορες αρχικές ενέργειες. Οι μικρότερες ενέργειες εμφανίζονται αργότερα και έχουν υψηλότερες κορυφές

Για το  $c$  επιλέγουμε την τιμή  $c = \frac{1}{2} \frac{V^\dagger(0)\lambda(0)}{V^\dagger(0)V(0)}$  έτσι ώστε να κρατήσουμε μόνο την κάθετη στο  $x(0)$  συνιστώσα του  $\lambda(0)$ . Οι σταθερές του μοντέλου είναι  $R = 357$ ,  $\sigma = 10$ , και η αρχική ενέργεια  $E_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ . Επίσης θα επαναλάβουμε την διαδικασία για 2 ακόμα ενέργειες  $E_1(0) = 4.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $E_2(0) = 5 \cdot 10^{-4}$

Η γραφική παρασταση που μας δίνει ο αλγόριθμος είναι παρόμοια με το σύστημα Reynolds. Όπως βλέπουμε και για τις διαφορετικές ενέργειες, φαίνεται πως η  $G(T)$  είναι μεγαλύτερη όσο μικραίνει η αρχική ενέργεια των διαταραχών. Ένα χαρακτηριστικό των λύσεων που μεγιστοποιούν το σύστημα των 2-D διαταραχών είναι πως η ενέργεια κυρίως βρίσκεται στις  $v$  διαταραχές.

### 2.2.2 3-D διαταραχές

Επιστρέφουμε στο πλήρες σύστημα. Με βάση τις λύσεις του συστήματος που είδαμε παραπάνω θα περιμέναμε για τους πρώτους χρόνους το σύστημα να εμφανίζει μια κορυφή όπως το σύστημα Reynolds, ενώ στη συνέχεια είτε θα καταλήγει στο μηδέν ή σε μια αυτοσυντηρούμενη κατάσταση. Έχουμε την αρχική ενέργεια από το σύστημα που ολοκληρώσαμε πριν οπότε η ελάχιστη ενέργεια θα είναι μικρότερη από αυτήν. Για να περιορίσουμε κάπως τις αρχικές συνθήκες που υπολογίζουμε ξεκινάμε με 4 διαφορετικές ενέργειες και στη συνέχεια αναλύουμε περισσότερο το διάστημα μεταξύ της πρώτης που διατηρείται και της τελευταίας που μηδενίζεται.



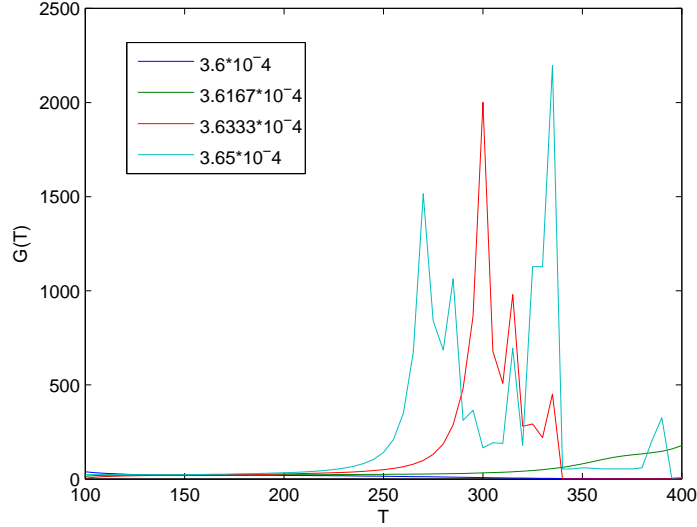
Σχήμα 2.14: Η ενέργεια των διαταραχών που μεγιστοποιούμε, και η συνολική ενέργεια των διαταραχών

Οι εξισώσεις του προβλήματος δεν διαφέρουν από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω εκτός από τον πίνακα του adjoint. Και εδώ η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η  $G(x(T), x(0)) = \frac{u^2(T)+v^2(T)}{u^2(0)+v^2(0)}$ . Ο adjoint πίνακας είναι

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{R} & 0 & \gamma w & -v \\ m & -\frac{\mu}{R} & -\delta w & -u \\ -2\gamma w & 2\delta w & -\frac{\nu}{R} & 0 \\ v & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{R} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Χρησιμοποιούμε και εδώ τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω  $R = 357$ ,  $\mu = \lambda = \sigma = 10$ ,  $\nu = 15$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\delta = 1$ . Οι αρχικές μας τιμές είναι τυχαίες για τα  $u, v$  με συγκεκριμένη ενέργεια. Θέτουμε το  $m = 1$  και το  $w = 10^{-4}$ .

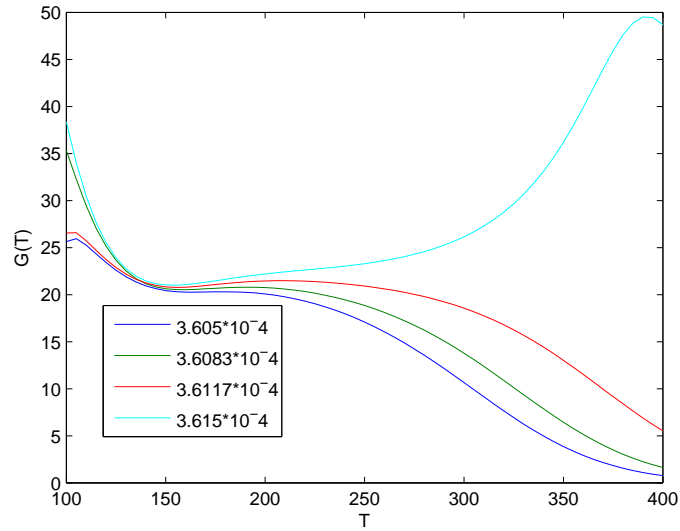
Οι διαφορές στο εάν χρησιμοποιήσουμε 2-διάστατη ή 3-διάστατη είναι μικρές, εκτός από τα μέγιστα των ενεργειών. όπως βλέπουμε στο διάγραμμα από την ολοκλήρωση του συστήματος (Σχήμα 2.14). Ειδικά επειδή έχουμε αρχικά ένα μικρό  $w$  δεν θα εμφανίζονται ιδιαίτερες διαφορές. Επειδή μπορούμε να βρούμε αρχικές συνθήκες που περνάνε το κατώφλι πιο αργά για την ίδια ενέργεια, θα περιμέναμε το γράφημα της  $G(T)$  από την στιγμή που περνάει στην αυτοσυντηρούμενη φάση να αποτελείται από τις κορυφές των λύσεων, οπότε ουσιαστικά θα παρατηρούσαμε αύξηση μέχρι να σταθεροποιόταν το σύστημα στην περιοδική τροχιά.



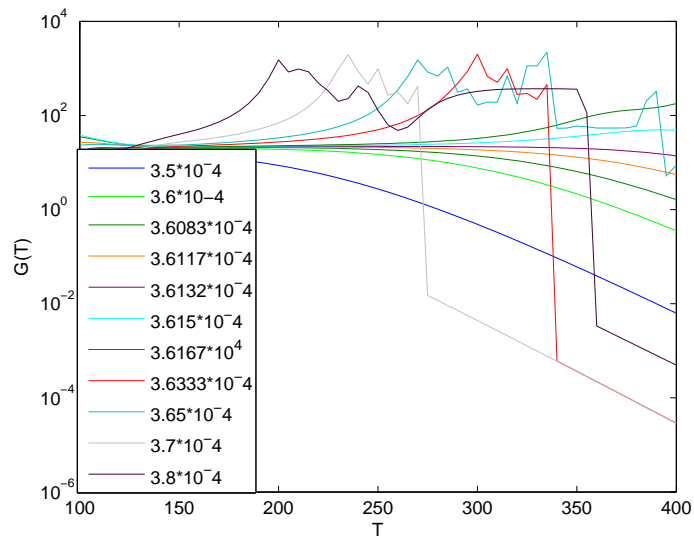
Σχήμα 2.15: Το  $G(T)$  για την δεύτερη περιοχή ενεργειών

Από τα διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε πως η ελάχιστη ενέργεια βρίσκεται μεταξύ  $E_0 = 3.6130 \cdot 10^{-4} - 3.6140 \cdot 10^{-4}$ , αλλά η ακρίβεια του κώδικά μας δεν μας επιτρέπει να δούμε αυτήν την περιοχή. Για να εξετάσουμε εάν υπάρχουν λύσεις, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο μέχρι ένα μικρότερο χρονικό διάστημα (σε αυτήν την περίπτωση μέχρι χρόνο 200) και βρίσκουμε τις αρχικές συνθήκες. Με αυτές ολοκληρώνουμε το σύστημα για αρκετό χρόνο και βλέπουμε ότι το σύστημα περνάει το κατώφλι έπειτα από περίπου 500 μονάδες χρόνου. Αν δοκιμάσουμε να ξαναξεκινήσουμε τον αλγόριθμο σε αυτό το σημείο, σε αντίθεση με την αρχική του υλοποίηση πλέον πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο του  $e$  για να παρατηρήσουμε αύξηση. Η λύση (2.18, 2.19) έχει αρχικές συνθήκες  $(0.0062110, 0.01899853, 10^{-4}, 1)$ . Χρησιμοποιώντας παρόμοια προσέγγιση δεν καταφέραμε να εντοπίσουμε λύση για  $E_0 = 3.6132 \cdot 10^{-4}$ , οπότε για περαιτέρω ακρίβεια θα πρέπει να αναζητήσουμε λύσεις στο διάστημα  $E_0 = 3.6132 - 3.6133 \cdot 10^{-4}$ .

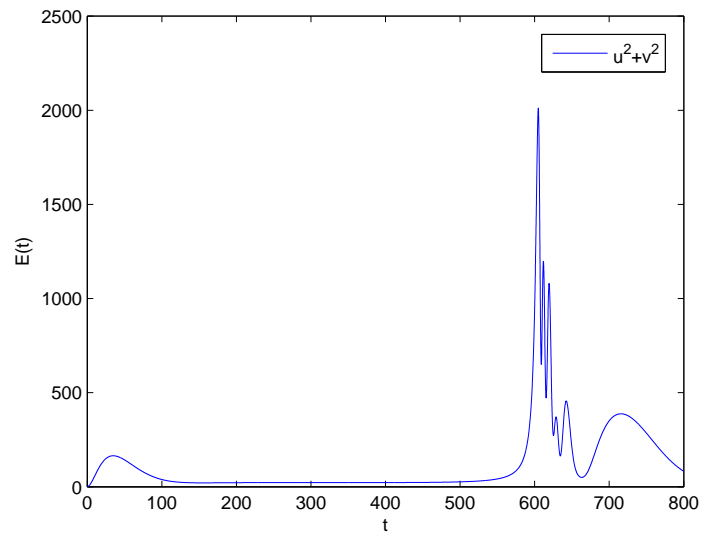
Όπως βλέπουμε και στο λογαριθμικό διάγραμμα το  $G(T)$  φτάνει σε μια τιμή της τάξης του  $2 \cdot 10^3$ , δηλαδή η αρχική ενέργεια που εισάγουμε στο σύστημα γίνεται περίπου 2000 φορές μεγαλύτερη.



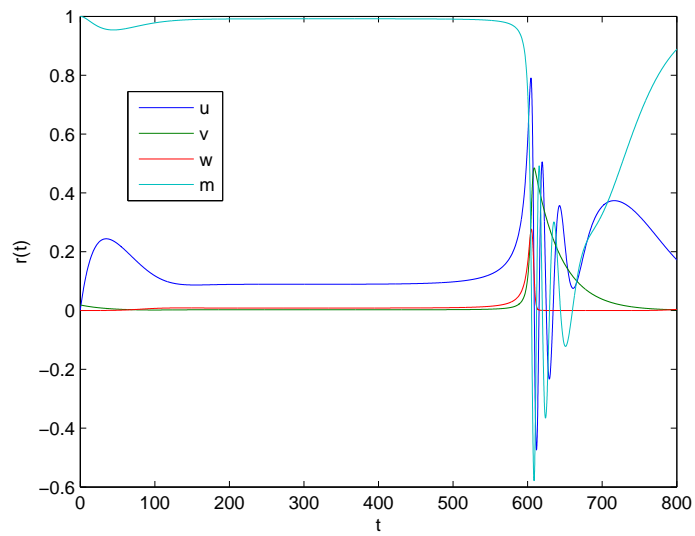
Σχήμα 2.16: Το  $G(T)$  για την τρίτη περιοχή ενεργειών. Καθώς οι ενέργειες πλησιάζουν στο κατώφλι βλέπουμε το  $G(T)$  να επιβιώνει για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα



Σχήμα 2.17: Μια συνολική απεικόνιση των  $G(T)$  στις διάφορες ενέργειες.



Σχήμα 2.18: Η ενέργεια των διαταραχών σε χρόνο  $t$  ( $E_0 = 3.6133 \cdot 10^{-4}$ )



Σχήμα 2.19: Εξέλιξη των συνιστωσών με τον χρόνο ( $E_0 = 3.6133 \cdot 10^{-4}$ )





## Κεφάλαιο 3

# Αστάθεια σε ροές

Το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε κάποιες απλές ροές και να εξετάσουμε την εξέλιξη μικρών διαταραχών.

### 3.1 Σταθερές λύσεις ροών

Ένα ασυμπίεστο ρευστό με ιζώδες περιγράφεται από την εξίσωση Navier-Stokes σε 2 διαστάσεις για το πεδίο ταχυτήτων  $\vec{V} = U(x, y, t)\hat{x} + V(x, y)\hat{y}$  με συνοριακές συνθήκες μη-ολίσθησης

$$\partial_t \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.3)$$

$$\vec{V} = 0 \quad (3.4)$$

Επειδή οι διαταραχές που χρησιμοποιούμε είναι χρονο-εξαρτώμενες, αρχικά θα πρέπει να βρούμε μόνιμες ( $\partial_t = 0$ ) λύσεις του παραπάνω συστήματος.

**Ροή Couette** Η διάταξη της ροής Couette έχει τα 2 παράλληλα επίπεδα να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Αυτές οι ταχύτητες αποτελούν και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Θεωρούμε ένα πεδίο  $\vec{V} = V(y)\hat{x}$ , και αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.3). Τότε καταλήγουμε στις 2 παρακάτω εκφράσεις

$$-\partial_x P + \frac{1}{Re} \partial_y^2 U = 0 \quad (3.5)$$

$$-\partial_y P = 0 \quad (3.6)$$

Η 3.6 μας λέει ότι η πίεση  $P$  μπορεί να είναι μόνο συνάρτηση του  $x$ . Τότε από την 3.5 καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο κάθε όρος ισούται με μια σταθερά

α. Το πεδίο  $U(y)$  τότε θα δίνεται ως  $U(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$ . Με την χρήση των συνοριακών συνθηκών  $U(1) = U_0, U(-1) = -U_0$  (+ υπόθεση  $U(y) = -U(-y)$ ) περιττη συναρτησης, θα μηδενίζεται στη μέση του καναλιού) η ροή είναι η εξής.

$$\vec{U} = U_0 \cdot y \hat{x} \quad (3.7)$$

Τέλος συμπεραίνουμε ότι η πίεση είναι σταθερή

**Ροή Poiseuille** Η ανάλυση που κάναμε παραπάνω ισχύει και εδώ, με τις συνοριακές συνθήκες να αλλάζουν  $U(1) = 0, U(-1) = 0$  (+ άρτια συνάρτηση  $U(y) = U(-y)$ ). Η ροή δίνεται τότε ως

$$\vec{U} = (1 - y^2) \hat{x} \quad (3.8)$$

Η διαφορά σε σχέση με την ροή Couette είναι ότι η βαθμίδα της πίεσης είναι σταθερή (υπάρχει μια σταθερή δύναμη στη ροή).

### 3.2 Εξισώσεις διαταραχών

Για να μελετήσουμε την εξέλιξη διαταραχών πάνω σε μια μέση ροή ορίζουμε ένα καινούργιο πεδίο ταχυτήτων  $\vec{V}' = U(y)\hat{x} + \vec{u}'(x, y)$ . Αντικαθιστούμε στην 3.2 και αφού απαλείψουμε τους όρους της μέσης ροής βρίσκουμε την χρονοεξαρτώμενη εξίσωση του  $\vec{u}'$ .

$$\partial_t \vec{u}' + U \cdot \partial_x \vec{u}' + v' \cdot \partial_y U \hat{x} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' = -\vec{\nabla} p' + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}' \quad (3.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad (3.10)$$

Αρχικά περιοριζόμαστε στην γραμμική περίπτωση, οπότε ο όρος  $(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}'$  θεωρείται αμελητέος. Η πίεση  $p'$  μπορεί να απαλειφθεί από τις εξισώσεις εάν χρησιμοποιήσουμε την 3.10, με την απόκλιση της 3.9.

$$\partial_x (\partial_t u' + U \cdot \partial_x u' + v' \cdot \partial_y U) = -\partial_x p' + \frac{1}{Re} \Delta u' \quad (3.11)$$

$$\partial_y (\partial_t v' + U \cdot \partial_x v') = -\partial_y p' + \frac{1}{Re} \Delta v' \quad (3.12)$$

$$(3.11) + (3.12) \rightarrow \partial_x (U \cdot \partial_x u' + v' \cdot \partial_y U) + \partial_y (U \cdot \partial_x v') = -\Delta p' \quad (3.13)$$

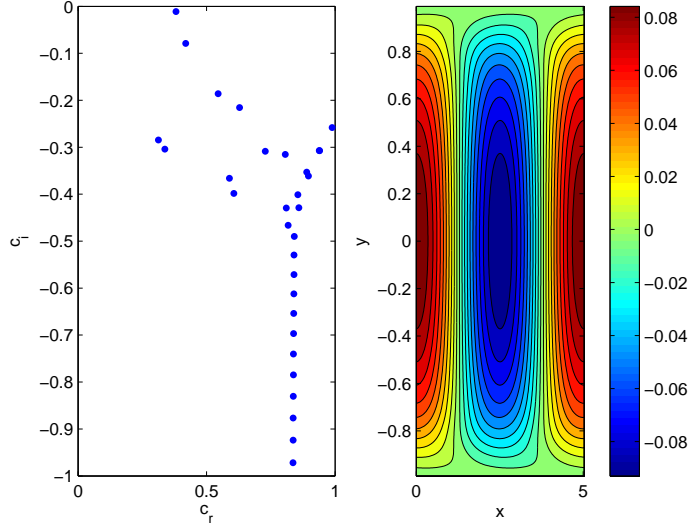
$$\Delta p' = -2\partial_x v \partial_y U \quad (3.14)$$

Το επόμενο βήμα είναι να δράσουμε με την Laplacian στην  $v$  συνιστώσα της 3.9, οπότε τελικά θα έχουμε μια εξίσωση μόνο για το  $v$ .

$$\Delta (\partial_t v' + U \cdot \partial_x v') = -\partial_y p' + \frac{1}{Re} \Delta v' \quad (3.15)$$

$$\partial_t \Delta v' + \Delta (U \cdot \partial_x v') = -\partial_y (-2\partial_x v' \partial_y U) + \frac{1}{Re} \Delta \Delta v' \quad (3.16)$$

$$\partial_t \Delta v' = -U \cdot \partial_x \Delta v' + \partial_y^2 U \partial_x v' + \frac{1}{Re} \Delta \Delta v' \quad (3.17)$$



Σχήμα 3.1: Το φάσμα των ιδιοτιμών της ροής Poiseuille για  $N = 197$ ,  $Re = 4000$ ,  $k = 1.25$  και η λιγότερο ευσταθής ιδιοκατάσταση

Αν στην παραπάνω εξίσωση υποθέσουμε ότι το  $v' = \hat{v}(y, t)e^{ikx}$  τότε μπορούμε να μελετήσουμε περιοδικές δομές μήκους  $l_x = 2\pi/k$  (σε ένα άπειρο κανάλι στη  $x$ -διεύθυνση)

$$\partial_t(\partial_y^2 - k^2)\hat{v} = -ikU(\partial_y^2 - k^2)\hat{v} + ik\partial_y^2 U\hat{v} + \frac{1}{Re}(\partial_y^2 - k^2)(\partial_y^2 - k^2)\hat{v} \quad (3.18)$$

$$\hat{v}(\pm 1, t) = 0 \quad (3.19)$$

Ο υπολογισμός του  $v$  θα μας δώσει και το  $u$  από την 3.10, αλλά και 2 ακόμα συνοριακές συνθήκες

$$ik\hat{u} = -\partial_y\hat{v} \quad (3.20)$$

$$\partial_y\hat{v}(\pm 1, t) = 0 \quad (3.21)$$

### 3.2.1 Διακριτή μορφή

Μια μέθοδος μελέτης της παραπάνω εξίσωσης είναι να διακριτοποιήσουμε το  $\hat{v}$  και τις ποσότητες που δρουν σε αυτό (B'.1.1). Οι ποσότητες με τους δείκτες  $1, 2, \dots, N$  είναι οι τιμές των συναρτήσεων στα σημεία  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . Η διακριτοποί-

ηση που εφαρμόζουμε είναι οι πεπερασμένες διαφορές.

$$\hat{v}(y, t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_N(t) \end{pmatrix}, U(y) = \begin{pmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & U_N \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε την εξέλιξη των διαταραχών ως ένα γραμμικό σύστημα  $\dot{x} = Ax$

$$\partial_t D_2 v = -ikUD_2 v + ik\partial_y^2 U v + \frac{1}{Re}(D_4 - 2k^2 D_2 + k^4)v \quad (3.23)$$

$$\partial_t v = D_2^{-1}(-ikUD_2 + ik\partial_y^2 U + \frac{1}{Re}(D_4 - 2k^2 D_2 + k^4))v \quad (3.24)$$

### Ενέργεια διαταραχών

Η κινητική ενέργεια των διαταραχών για κάθε χρονική στιγμή είναι

$$E = \int \int \frac{\vec{u}' \cdot \vec{u}'}{2} dx dy \quad (3.25)$$

Στην γραμμική περίπτωση μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την σχέση μεταξύ του  $u'$  και του  $v'$  για να ξαναγράψουμε την ενέργεια.

$$\int \int \frac{u^2 + v^2}{2} dx dy = \int \int \frac{(\hat{u}e^{ikx} + \hat{u}^*e^{-ikx})^2 + (\hat{v}e^{ikx} + \hat{v}^*e^{-ikx})^2}{8} dx dy \quad (3.26)$$

$$\int \frac{|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2}{4} dy = \int \frac{\partial_y \hat{v}^* \partial_y \hat{v} + k^2 \hat{v}^* \hat{v}}{4k^2} dy \quad (3.27)$$

$$\int \partial_y \hat{v}^* \partial_y \hat{v} dy = \hat{v}^* \partial_y \hat{v} \Big|_{y=-1}^{y=1} - \int \hat{v}^* \partial_y^2 \hat{v} dy \quad (3.28)$$

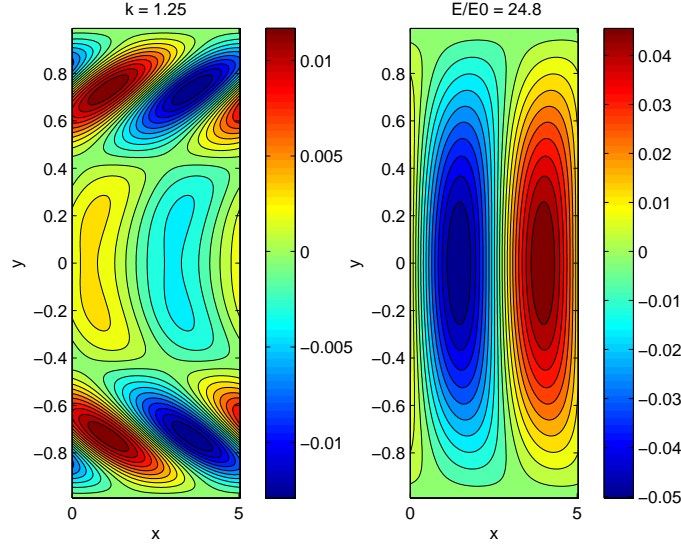
$$\int \frac{-\hat{v}^* \partial_y^2 \hat{v} + k^2 \hat{v}^* \hat{v}}{4k^2} dy = \int \frac{-\hat{v}^* (\partial_y^2 - k^2) \hat{v}}{4k^2} dy \quad (3.29)$$

Αν τώρα περάσουμε στον διακριτό χώρο η ενέργεια γράφεται με την χρήση του τελεστή  $D_2$

$$E = -\frac{v^\dagger D_2 v}{4k^2} \quad (3.30)$$

### 3.3 Γραμμικά optimalς ροής Poiseuille

Ο υπολογισμός των γραμμικών optimalς της ροής poiseuille είναι γνωστός ([10]). Όπως κάναμε και προηγουμένως αναζητούμε την αρχική συνθήκη η οποία για δεδομένη ενέργεια θα μεγιστοποιεί τον ρυθμό ανάπτυξης  $G(T) = \frac{E(T)}{E(0)}$ . Επειδή περιοριζόμαστε στην γραμμική περιοχή μπορούμε να θέσουμε το  $E(0) = 1$ .



Σχήμα 3.2: Η αρχική κατάσταση που δίνει τον μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης σε χρόνο  $t = 10$  και η εξέλιξή της στο χρόνο αυτό ( $Re = 4000, N = 197$ )

### 3.3.1 Μέσω υπολογισμού ιδιοτιμών

Για να απλοποιήσουμε κάπως το πρόβλημα ξαναγράφουμε το  $E = -\frac{v^\dagger D_2 v}{4k^2}$  ως  $E = V^\dagger V$  με το  $V = \sqrt{D_2} v$ . Επιπλέον αλλάζει και το δυναμικό σύστημα που περιγράφει τις διαταραχές ως εξής.

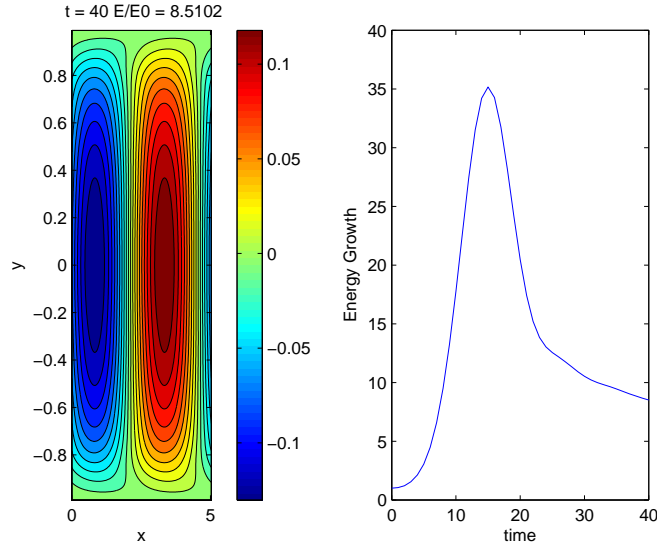
$$\partial_t v = Av \rightarrow \partial_t \sqrt{D_2} v = \sqrt{D_2} A \sqrt{D_2}^{-1} \sqrt{D_2} v \rightarrow \partial_t V = \tilde{A} V \quad (3.31)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον διαδότη του παραπάνω συστήματος για να υπολογίσουμε τα optimal, από τις ιδιοτιμές του πίνακα  $M = \tilde{\Phi}^\dagger(T) \tilde{\Phi}(T)$ . (Μια ακόμα πιο άμεση μέθοδος είναι η ιδιάζουσα ανάλυση τελεστή, οπότε έχουμε άμεσα και τελική κατάσταση για τον χρόνο βελτιστοποίησης.)

Ο υπολογισμός των optimal με τον παραπάνω τρόπο θα μας χρησιμεύσει για να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα του προγράμματος του υπολογισμού των μη γραμμικών optimal.

### 3.3.2 Μέσω Conjugate Gradient βελτιστοποίησης

Για να περιοριστούμε στην γραμμική περιοχή του προβλήματος θα πρέπει να επιβάλλουμε μια αρχόντως μικρή αρχική ενέργεια. Ελέγχουμε κατά πόσο είμαστε στην γραμμική περιοχή από την εξέλιξη κάποιου γραμμικού optimal το οποίο αντιπαραβάλλουμε με την ολοκλήρωση μέσω του τελεστή Orr-Sommerfeld. Ο λόγος



Σχήμα 3.3: Η τελική κατάσταση και ο λόγος ανάπτυξης από την εξέλιξη του τελεστή για το optimal  $T=15$

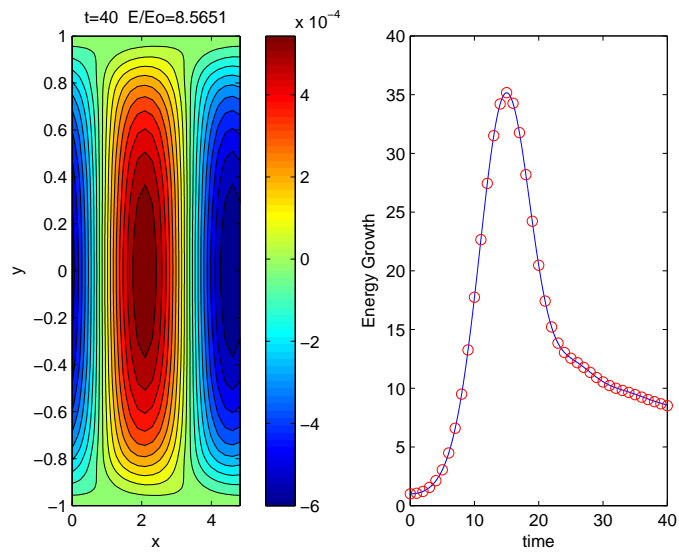
που δεν βάζουμε απλά μια πολύ μικρή τιμή είναι γιατί το σφάλμα κατά την διάρκεια τις μεγιστοποίησης μπορεί να φτάσει στα όρια ακριβείας του προγράμματος. Θα ορίζουμε την ενέργεια των διαταραχών ως ένα ποσοστό τις μέσης ενέργειας της ροής  $\bar{E}$ .

Από τα διαγράμματα για τους ρυθμούς ανάπτυξης των δυο περιπτώσεων βλέπουμε ότι συμφωνούν με ικανοποιητική ακρίβεια, οπότε το επόμενο στάδιο είναι να υπολογίσουμε τα γραμμικά optimalms μέσω του προγράμματος βελτιστοποίησης και να τα συγκρίνουμε.

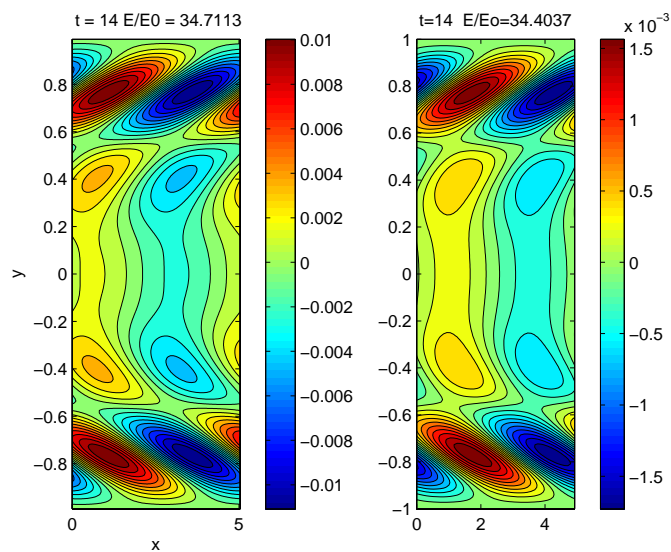
Ως αρχική ενέργεια των διαταραχών επιλέγουμε την  $E_0 = 10^{-7}\bar{E}$ . Θα υπολογίσουμε τα optimalms για χρόνο  $T = 1$  έως  $T = 30$  και στη συνέχεια θα τα συγκρίνουμε με τα optimalms του τελεστή Orr-Sommerfeld. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, οι δυο διαφορετικές μέθοδοι συμφωνούν.

### 3.4 Μη-γραμμικά optimalms

Έχουμε επιβεβαιώσει πως ο αλγόριθμος μεγιστοποίησης εντοπίζει με αρκετά καλή ακρίβεια τα OP(Linear Optimals). Επίσης όπως θα δούμε και στο παρακάτω κεφάλαιο το DNS περιγράφει το FAS (Finite Amplitude State). Όπως έχουν δείξει οι Butler και Farrell(1992) αρχικές διαταραχές με ενέργεια της τάξης του  $O(10^{-4})$  της μέσης ροής είναι ικανές να προκαλέσουν μετάβαση της ροής Poiseuille

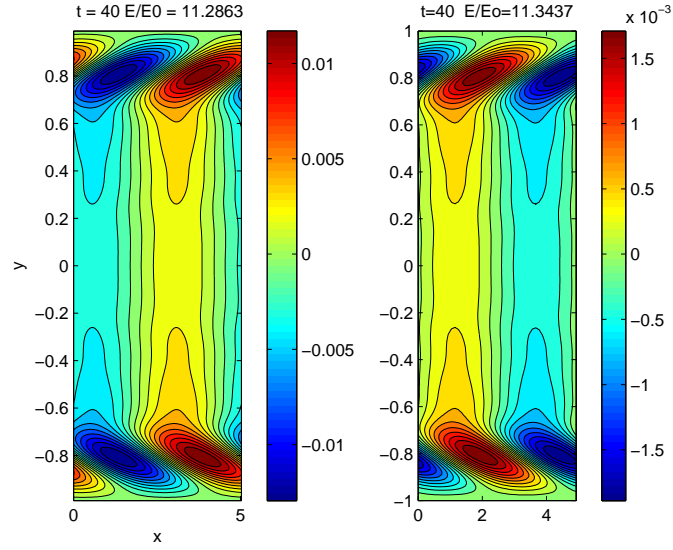


Σχήμα 3.4: Η τελική κατάσταση και ο λόγος ανάπτυξης από την εξέλιξη του πλήρους κώδικα για το ίδιο optimal και αντιπαραβολή με το γραμμικό (κόκκινοι κύκλοι), για ενέργεια  $10^{-7} \bar{E}$

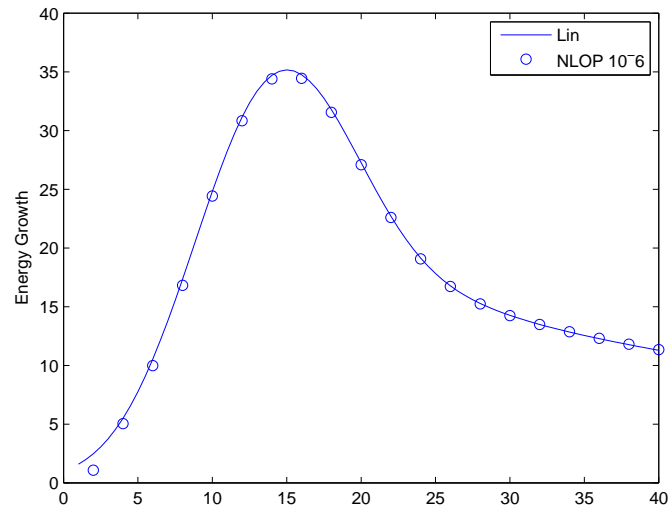


Σχήμα 3.5: OP σε χρόνο  $T = 14$ . Η δομή του γραμμικά υπολογισμένου (στα αριστερά) OP προς το κέντρο του καναλιού φαίνεται καλύτερα καθορισμένη.





Σχήμα 3.6: Τα 2 OP έχουν την ίδια δομή για  $T = 40$ .



Σχήμα 3.7: Σε χαμηλές ενέργειες τα conjugate gradient υπολογισμένα OP συμφωνούν με τα γραμμικά.

. Αυτή η τιμή της ενέργειας είναι αρκετά μικρότερη από αυτήν που αρχικά είχαν εντοπίσει οι Orszag και Patera (1980), της τάξης  $O(10^{-3})$ . Θα παρατηρήσουμε εδώ ότι γραμμικά η ροή είναι ευσταθής για τις παραμέτρους του προβλήματος (χωρίς  $[2 \times 2\pi/k]$ , με  $k = 1.25$  και  $Re = 4000$ ).

Οι ιδιοκαταστάσεις OS χρειάζονται αρχική ενέργεια της τάξης του 0.1% της μέσης. Μπορούμε να προσδιορίσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια την απαραίτητη αρχική ενέργεια της λιγότερο ευσταθούς OS. Για το γραμμικό optimal σε  $T = 15$ , γνωρίζουμε ότι η ενέργεια βρίσκεται στην περιοχή  $[0.0001\bar{E}, 0.0005\bar{E}]$ .

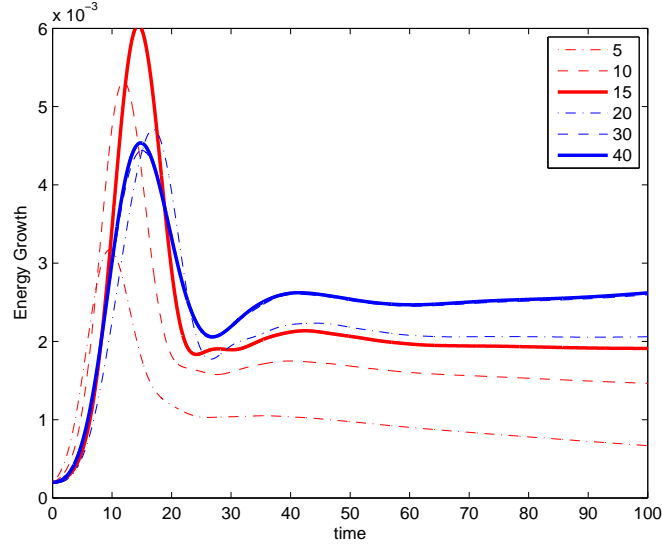
Αν και στο προηγούμενο μοντέλο ξεκινήσαμε την αναζήτηση των NLOP από μια τυχαία κατάσταση, εδώ θα ακολουθήσουμε τους Pringle και Kerswell, Cherubini et al., και ως αρχική συνθήκη επιλέγουμε το κατάλληλο OP.

Μια πρώτη επιλογή θα μπορούσε να είναι το OP για  $T = 15$ . Μια επιπλέον δοκιμή OP διαφορετικών χρόνων όμως (σε αρχική ενέργεια  $E_0 = 2 \cdot 10^{-4} E_{lam}$ ) μας δίνει μια καλύτερη εικόνα. Ενώ τα OP για μικρούς χρόνους επιστρέφουν στην μόνιμη ροή, τα OP μεγαλύτερων χρονικών στιγμών είναι αυτά που αποκτούν την μεγαλύτερη ενέργεια. Οι διαφορές πάντως δεν είναι σημαντικές για τα OP  $T \geq 30$ . Η πιθανότερη εξήγηση για αυτήν την συμπεριφορά είναι πως καθώς αυξάνουμε το χρόνο έχουμε μεγαλύτερη συμμετοχή της λιγότερο ευσταθούς OS, αλλά από ένα σημείο και μετά η διαφορά είναι αμελητέα (Φτάνουμε ασυμπτωτικά στην μεγαλύτερη δυνατή τιμή της OS).

Για τον υπολογισμό των NLOP (Non-Linear Optimals) θα χρησιμοποιήσουμε διαταραχές με αρχική ενέργεια μικρότερη της παραπάνω, έτσι ώστε να συγκρίνουμε κατά πόσο μπορούμε να βελτιώσουμε τις τιμές των γραμμικών optimal. Καθώς ο κώδικας που χρησιμοποιούμε διατηρεί την ροή μάζας σταθερή, θα υπολογίσουμε και την εξέλιξη των γραμμικών OP με τον ίδιο περιορισμό.

Ο χρόνος  $T = 40$  φαίνεται ένα καλό σημείο για να εξετάσουμε αν ένα σύστημα έχει αρχίσει την μετάβαση στο FAS ή καταλήγει στο laminar state. Οπότε θα περιορίσουμε την αναζήτησή μας σε NLOP αυτής της χρονικής στιγμής για διάφορες αρχικές ενέργειες. Ξεκινάμε την αναζήτηση για κάθε ενέργεια με αρχική συνθήκη το OP για  $T = 40$  και επιπλέον ένα μικρό ποσοστό θορύβου  $10^{-3} * max(OP)$ , την οποία στην συνέχεια νορμαλίζουμε στην  $E_0$ . Ένας ακόμα περιορισμός που απαιτούμε είναι οι διαταραχές να είναι περιοδικές στον  $x$ -άξονα (και να μην αλλάζουν την μέση ροή).

Για 2 αρχικές ενέργειες NLOP παρατηρούμε πως η ελάχιστη OS διαχωρίζει τις καταστάσεις που ομαλοποιούνται και αυτές που καταλήγουν στο FAS. Εκτός από την ενέργεια των διαταραχών πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την μέση ροή. Στην OS λόγω της μεγαλύτερης αρχικής ενέργειας περιμένουμε η μέση ροή να αλλάξει περισσότερο από τα NLOP για το ίδιο χρονικό σημείο. Έχουμε περιορίσει την αρχική ενέργεια που απαιτείται στο  $(1.45 - 1.47) * 10^{-4} E_b$ . Δεν περιμένουμε να



Σχήμα 3.8: Διαφορές στην συμπεριφορά των OP ίδιας ενέργειας αλλά διαφορετικού χρόνου βελτιστοποίησης.

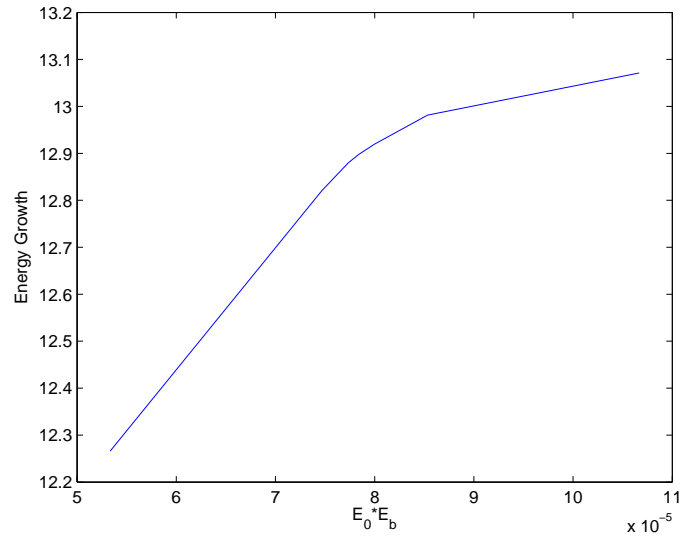
υπάρχουν ιδιαίτερες αλλαγές στον μηχανισμό μετάβασης σε σχέση με την ακριβή ελάχιστη ενέργεια.

Φαίνεται λοιπόν πως η κεντρική ιδέα του μηχανισμού μετάβασης, δηλαδή η αλλαγή στην συμπεριφορά της λιγότερο ασταθούς OS δεν αλλάζει είτε χρησιμοποιήσουμε OP είτε NLOP. Με βάση τα παραπάνω πειράματα δεν εντοπίσαμε κάποιο διαφορετικό τρόπο μετάβασης. (Ίσως όχι)

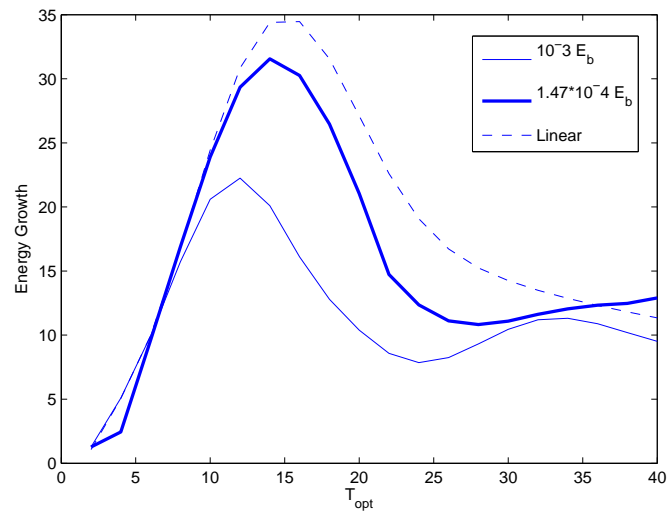
### 3.4.1 Σύγκριση OP και NLOP

Μια σύγκριση μεταξύ του OP γραμμικά και σε DNS δίνει μια εξήγηση γιατί δεν περιμένουμε αλλαγές στα NLOP. Σε ενέργειες της τάξης  $O(10^{-4})$  η συμπεριφορά της ενέργειας είναι γραμμική για τις πρώτες 10 μονάδες του χρόνου.

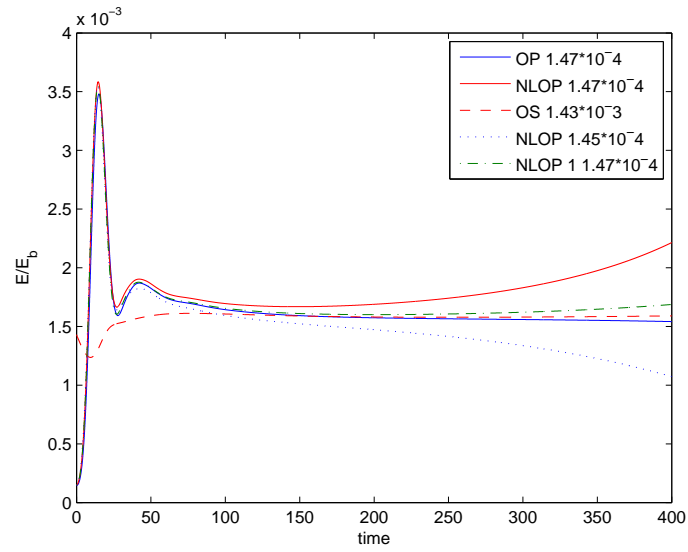
Περιορίζουμε το NLOP σε μια αρμονική για να εξετάσουμε την συνεισφορά των υπόλοιπων. Όπως βλέπουμε και στο διάγραμμα (3.11) έχουμε πάλι μετάβαση, αλλά η ενέργεια είναι χαμηλότερη του πλήρους NLOP. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλες οι αρμονικές είναι απαραίτητες στο NLOP. Επίσης μια σύντομη επιστροφή στην γραμμική περιοχή για να συγκρίνουμε τα 2 optimal επιβεβαιώνει την υπεροχή του γραμμικού στις χαμηλές ενέργειες. Όμως από τα διαγράμματα που απεικονίζουν το πεδίο ταχύτητας των διαταραχών οι διαφορές που παρατηρούμε είναι ουσιαστικά αμελητέες. Σε μεγαλύτερες ενέργειες ( $0.05E_b$ ) δεν καταφέραμε να εντοπίσουμε



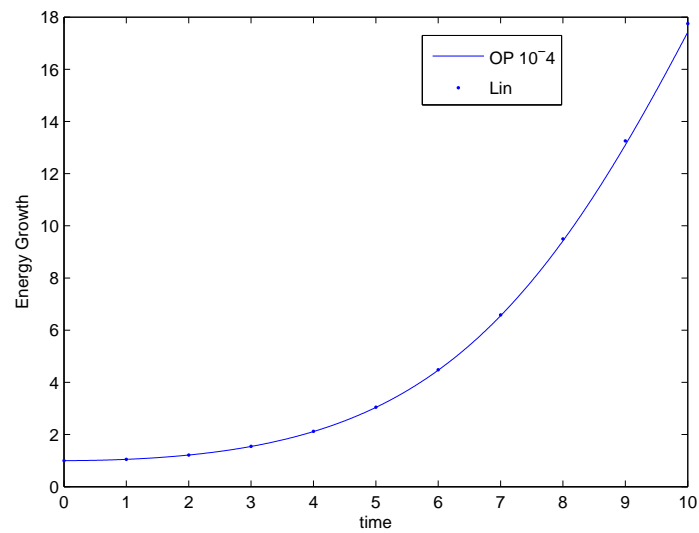
Σχήμα 3.9: Ο λόγος ανάπτυξης βελτιστοποιημένων αρχικών διαταραχών σε χρόνο  $T = 40$ , για διαφορετικές αρχικές ενέργειες.



Σχήμα 3.10: Βελτιστοποίηση για 3 αρχικές ενέργειες σε διάφορους χρόνους, με αρχική συνθήκη το γραμμικό OP για  $T = 40$ .



Σχήμα 3.11: Εξέλιξη της ελάχιστης OS, του OP  $1.47 \cdot 10^{-4}$ , των NLOP ( $1.45 - 1.47 \cdot 10^{-4}$ ) και της πρώτης αρμονικής του NLOP  $1.47 \cdot 10^{-4}$



Σχήμα 3.12: Σύγκριση της εξέλιξης σε DNS και γραμμικά ενός OP

κάποιο NLOP , γεγονός που ενισχύει την μοναδικότητα του μηχανισμού μετάβασης

Μια διαφορά στην εξέλιξη των OP και NLOP αποτελεί η ασύμμετρη εξέλιξη των στρόβιλων. Όπως θα δούμε στο FAS , οι στρόβιλοι εμφανίζουν μια μικρή κλίση μεταξύ τους. Το OP χρειάζεται 1-2 μονάδες χρόνου επιπλέον από το NLOP για να σπάσει την αρχική συμμετρία (φαινομενική τουλάχιστον).

### Εξίσωση Reynolds-Orr

Η ενεργειακή μέθοδος αποτελεί μια άλλη προσέγγιση του προβλήματος ευστάθειας μιας διαταραχής. Για να παράγουμε την εξίσωση της ενέργειας διαταραχών υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διαταραχτικών NS με το πεδίο ταχύτητας των διαταραχών.

$$\vec{u}' \cdot (\partial_t \vec{u}' + U \partial_x \vec{u}' + v \partial_y U \hat{x} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' + \vec{\nabla} p' - \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}') = 0 \quad (3.32)$$

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην χρονική μεταβολή της ενεργειακής πυκνότητας, οπότε η χρονική παράγωγος της ενέργειας των διαταραχών δίνεται από την ολοκλήρωση στον χώρο της  $\vec{u}' \cdot \partial_t \vec{u}' \rightarrow \dot{E}_V = \int_V \vec{u}' \cdot \partial_t \vec{u}' dx dy$ . Οι όροι που παραμένουν μετά την ολοκλήρωση αποτελούν την εξίσωση Reynolds-Orr που περιγράφει την εξέλιξη της ενέργειας των διαταραχών.

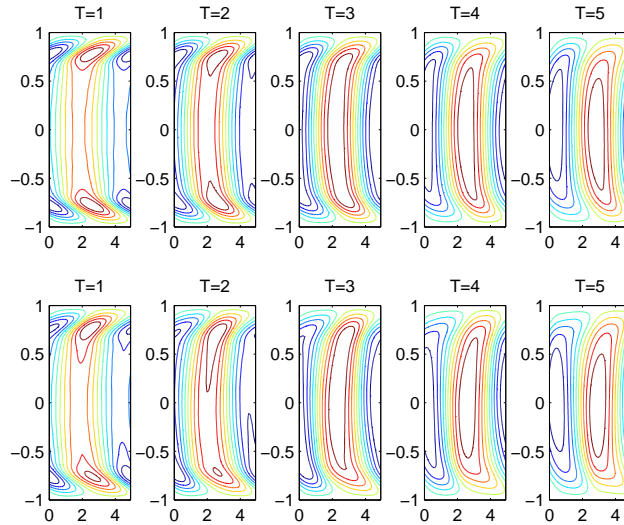
$$\dot{E}_V = - \int_V u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.33)$$

Παρατηρούμε πως ο δεύτερος όρος  $-\frac{1}{Re} \int \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  είναι πάντα αρνητικός, οπότε μειώνει την ενέργεια. Τότε φαίνεται καθαρά πως η αύξηση της ενέργειας έχει να κάνει με τον πρώτο όρο. Σε μια ροή 2 διαστάσεων με μέση ροή  $\vec{V} = (U(y), 0, 0)$  και διαταραχές  $(u', v', 0)$  η έκφραση απλοποιείται στην  $-\int_{-1}^1 \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial y}$  (που θα ήταν ο ρυθμός αύξησης σε μια ροή χωρίς ιξώδες). Από την ανάλυση των Drazin και Reid βλέπουμε ότι η εξίσωση Reynolds-Orr για διαταραχές 2 διαστάσεων είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα της ενέργειας της εξίσωσης Orr-Sommerfeld.

Όπως είδαμε οι ταχύτητες μπορούν να γραφούν ως  $(u, v) = (-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x})$ . Χρησιμοποιούμε αυτόν τον ορισμό στην invscid έκφραση για να εξάγουμε μια πιο «απτή» εικόνα για την εξέλιξη των διαταραχών. Ακολουθώντας μια ρευματογραμμή  $\psi$  το  $d\psi = 0$ . Τότε από το διαφορικό βλέπουμε την σχέση  $\frac{dy}{dx} = -(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}})_\psi$ .

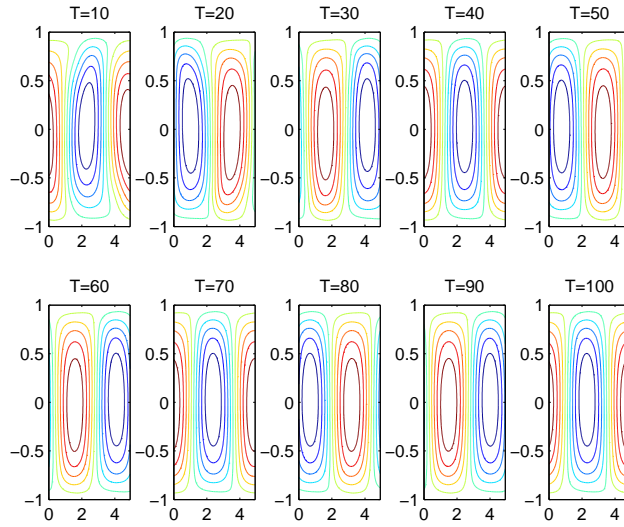
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$-u'v' \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}\right) \frac{\partial U}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}\right)_\psi \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.34)$$

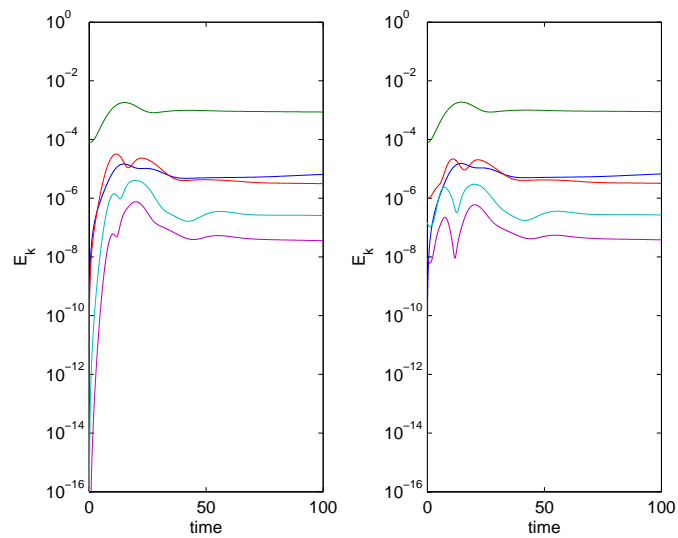


Σχήμα 3.13: Εξέλιξη του OP στην πρώτη σειρά και του NLOP στη δεύτερη μέχρι την χρονική στιγμή  $T = 5$ .

Για να έχουμε ενίσχυση των διαταραχών θα πρέπει το ολοκλήρωμα αυτής της έκφρασης να είναι θετικό, οπότε τελικά οι περιοχές που είναι σημαντικότερες θα πρέπει να ικανοποιούν την σχέση  $(\frac{\partial \psi}{\partial x})_{\psi} \frac{\partial U}{\partial y} < 0$ . Βλέπουμε δηλαδή πως η κλίση των ρευματογραμμών πρέπει να είναι αντίθετη από την κλίση του πεδίου ταχύτητας της μέσης ροής.

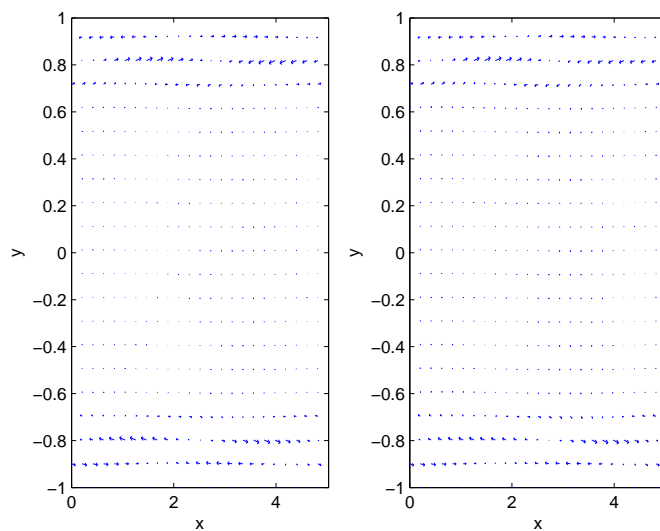


Σχήμα 3.14: Εξέλιξη του NLOP μέχρι την χρονική στιγμή  $T = 100$ .

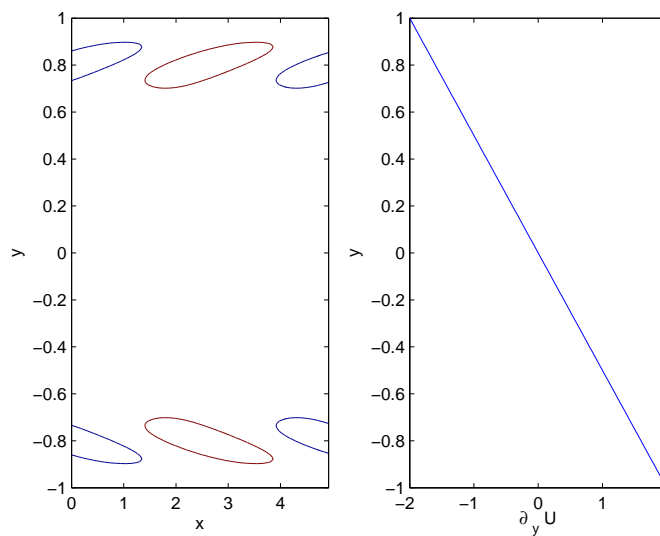


Σχήμα 3.15: Μέση ροή και πρώτες αρμονικές του OP (αριστερά) και NLOP (δεξιά)





Σχήμα 3.16: Το πεδίο ταχυτήτων του OP (αριστερά) και NLOP (δεξιά)



Σχήμα 3.17: Στρόβιλοι του OP και αντιστοιχη κλίση της μέσης ροής

## Κεφάλαιο 4

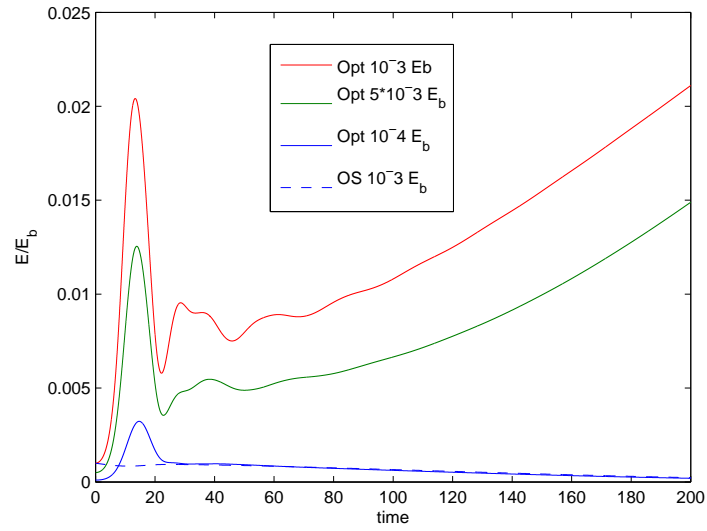
# Το μη γραμμικό κύμα της ροής Poiseuille

Η τελική κατάσταση μετά την μετάβαση είναι ένα κύμα (travelling wave) σταθερού πλάτους. Έχουμε καταλήξει λοιπόν σε μια διαφορετική (self-sustaining) λύση από την ομαλή ροή Poiseuille. Γενικά λύσεις διαφορετικές της μόνιμης θεωρείται ότι έχουν κάποιο ρόλο στη συντήρηση της τυρβώδους κατάστασης (σε 3 διαστάσεις). Στην ροή που εξετάζουμε υπάρχει επιπλέον και μια ασταθής τέτοια λύση, την οποία δεν εντοπίσαμε, αλλά πρέπει να βρίσκεται ακριβώς στο όριο της μετάβασης σύμφωνα και με τη βιβλιογραφία. (Upper and Lower Bracket Solutions)

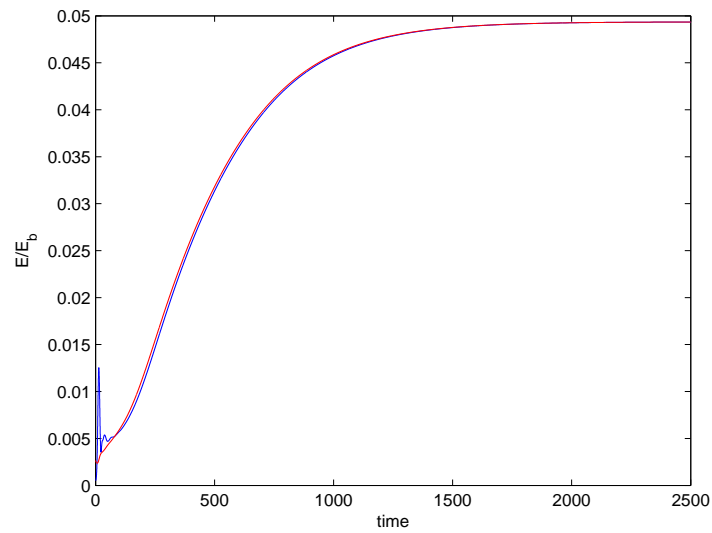
Η δομή του κύματος δεν διαφέρει σημαντικά από την πρώτη OS κατάσταση, όπως βλέπουμε και στα σχήματα. Αποτελείται από 2 στροβίλους που περιστρέφονται σε αντίθετες φορές, ενώ και η μέση ροή διαφοροποιείται από την Poiseuille όπως στο διάγραμμα. Φαίνεται ότι αποτέλεσμα αυτής της δομής είναι η μεταφορά ορμής από το εσωτερικό προς τα τοιχώματα.

**Ταχύτητα του κύματος** Πειραματικά βρίσκουμε την ταχύτητα του κύματος αφαιρώντας μια στήλη από την  $\psi'$  και υπολογίζοντας την αντίστοιχη ενέργεια. Βλέπουμε τότε ότι η ενέργεια αλλάζει περιοδικά (αντί να παραμένει σταθερή). Από την δομή του κύματος δεν έχει διαφορά αν η στήλη που λείπει αντιστοιχεί στον θετικό ή τον αρνητικό στροβίλο, καθώς αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια. Οπότε η περίοδος της ταλάντωσης είναι η μισή του κύματος. Από το διάγραμμα βλέπουμε 17 κορυφές σε χρόνο  $\delta T = 96.13$  οπότε μετά από πράξεις βρίσκουμε  $T_w = 11.31$  (με βάση το βήμα ολοκλήρωσης). Η ταχύτητα του κύματος είναι  $c = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{T_w} = 0.44$

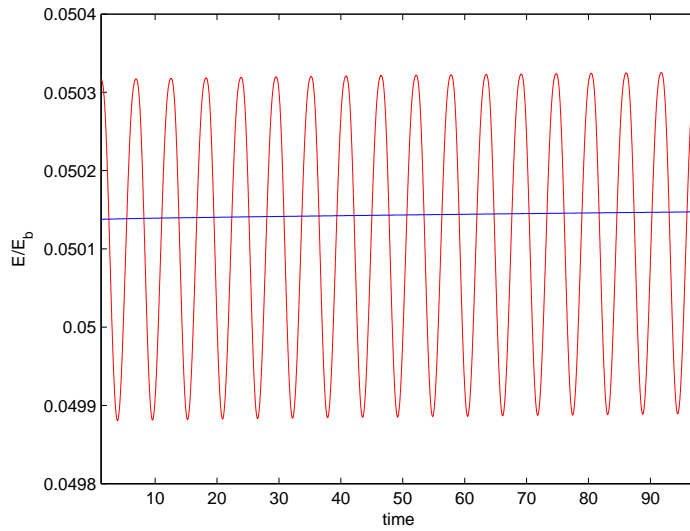
**Γραμμική ευστάθεια του κύματος** Για να υπολογίσουμε την ευστάθεια του κύματος προσθέτουμε μικρές τυχαίες διαταραχές και εξετάζουμε την εξέλιξή τους για μια περίοδο. (Υπολογισμός του αριθμού Lyapunov).



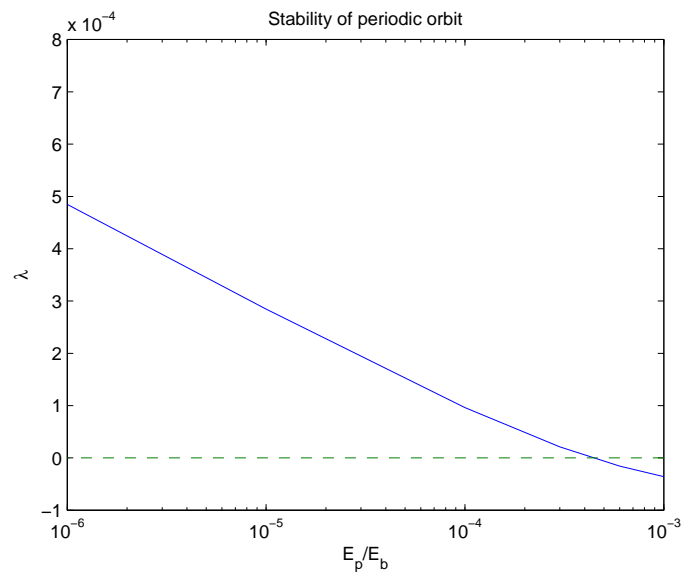
Σχήμα 4.1: Τα αποτελέσματα των Butler και Farell [10] για την μετάβαση του  $T = 15$  optimal



Σχήμα 4.2: Διαφορετικές αρχικές συνθήκες καταλήγουν στην ίδια τελική κατάσταση



Σχήμα 4.3: Μεταβολές της ενέργειας λόγω παράλειψης μιας στήλης του πεδίου ταχύτητας. Χρονικά, δυο διαδοχικές κορυφές απέχουν μισή περίοδο.



Σχήμα 4.4: Υπολογισμός του αριθμού Lyapunov διαταραχών για διάφορες αρχικές ενέργειες

Ουσιαστικά η ιδέα είναι πως το κύμα δεν θα αλλάξει σε αυτή την ολοκλήρωση, οπότε όταν το αφαιρέσουμε στο τέλος θα έχουμε την εξέλιξη των διαταραχών. Παρατηρούμε ότι οι μικρές διαταραχές είναι ασταθείς, πιθανώς επειδή το κύμα δεν έχει ισορροπήσει ακόμη.

## 4.1 Ο ρόλος των FAS στην μετάβαση

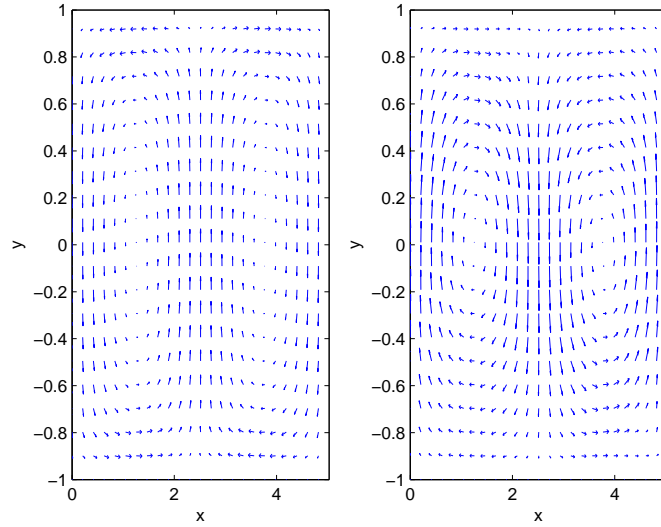
**Η θεωρία του Landau** Ο Landau περιέγραψε αρχικά την μετάβαση με βάση μια διαφορική εξίσωση για το πλάτος των διαταραχών. Για παραμέτρους που έχουμε γραμμική ευστάθεια σε μια ροή, το πλάτος των διαταραχών θα μεγαλώνει εκθετικά με το χρόνο. Όμως καθώς αυθάνεται το πλάτος και άλλοι όροι θα γίνουνται σημαντικοί, οι οποίοι αλλ'ζουν την συμπεριφορά του συστήματος.

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4 \quad (4.1)$$

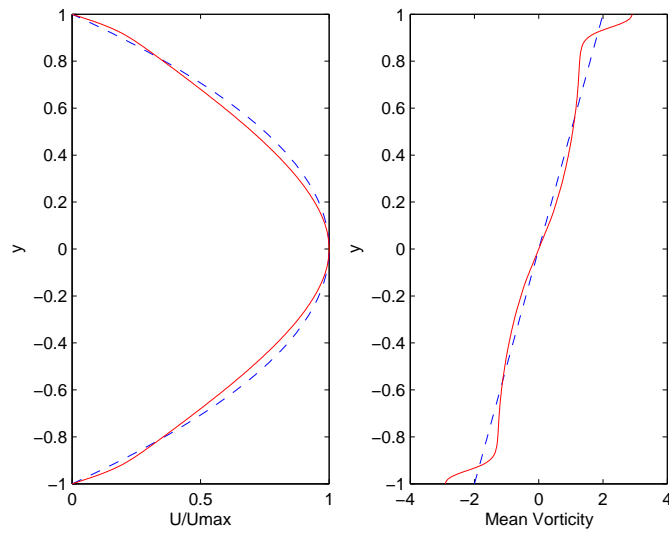
Όταν και οι 2 σταθερές  $\gamma_1, \alpha$  είναι θετικές, θα υπάρχει μια ευσταθής τιμή της  $|A|^2$  στην οποία θα καταλήγουν οι διαταραχές. Καθώς έχουμε υποθέσει ότι είναι κυματικής μορφής, θα αντιστοιχεί σε αυτές και κάποια συχνότητα  $\omega_1$ . Όσο απομακρυνόμαστε από την περιοχή γραμμικής αστάθειας η αρχική προσέγγιση της κυματικής διαταραχής γίνεται λιγότερο ακριβής, τότε πιθανώς το σύστημα να ισορροπίσει σε μια διαφορετική μέση ροή. Κατά αντιστοιχία με την αρχική διακλάδωση, θα εμφανιστεί και εδώ μια διαταραχή πεπερασμένου πλάτους με διαφορετική συχνότητα. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται με αποτέλεσμα να εμφανιστούν διάφορες συχνότητες στο φάσμα. Παρόλα αυτά όμως δεν εξηγεί κάποια χαρακτηριστικά της τυρβώδους κατάστασης, όπως την απώλεια αυτοσυσχέτισης αλλά και το φάσμα ποιοτικά.

**Δευτερεύουσες αστάθειες** Τα παραπάνω χαρακτηριστικά μπορούμε να συναντήσουμε σε συστήματα με παράξενους ελκυστές (strange attractors). Ακόμα και σε συστήματα με λίγους βαθμούς ελευθερίας μπορούμε να παρατηρήσουμε την μετάπτωση ενός συστήματος από ευσταθές σε περιοδικό και στη συνέχεια χαοτικό. Αντίστοιχα με τις σταθερές λύσεις και εδώ μπορούμε να μελετήσουμε την ευστάθεια μιας περιοδικής τροχιάς. Οι Orszag και Patera έδειξαν πως το διδιάστατο κύμα της ροής Poiseuille είναι ασταθές σε 3-D διαταραχές (κάτι που οδηγεί και στην μετάπτωση σε τυρβώδη κατάσταση) [9].

Γενικότερα, η ύπαρξη λύσεων ενισχύει μια δυναμική προσέγγιση στο σύστημα, καθώς αντίστοιχα με απλά δυναμικά συστήματα περιμένουμε οι διαταραχές γύρω από αυτές τις λύσεις να έχουν κάποια καθορισμένη συμπεριφορά.



Σχήμα 4.5: Πεδίο ταχύτητας της λιγότερο ευσταθούς Orr-Sommerfeld (αριστερά) και του κύματος (δεξιά)



Σχήμα 4.6: Συγκριση των μέσων τιμών ταχύτητας και vorticity του FAS (κόκκινο) και της ροής Poiseuille (μπλε)



## Κεφάλαιο 5

# Επίλογος

Από τα αριθμητικά πειράματα που διεξάγαμε, διαπιστώσαμε πως η μέθοδος μεγιστοποίησης είναι εν γένει επιτυχής, καθώς παρατηρούμε αύξηση της target function. Μια δυσκολία που συναντάνε στην περίπτωση που υπάρχουν διάφορα τοπικά μέγιστα, όπως είδαμε και στο μοντέλο του Waleffe, αν χάνουμε την λύση που είχε κάνει μετάβαση τότε παγιδευόμαστε στην περιοχή των φθίνουσων λύσεων.

Παρόμοια στην ροή Poiseuille δεν καταφέραμε να εντοπίσουμε τα optimal αρχικών χρόνων που αντιστοιχούν σε ανώτερες αρμονικές. Επίσης μακριά από την γραμμική περιοχή, όταν δεν χρησιμοποιούσαμε το κατάλληλο γραμμικό optimal για αρχική συνθήκη, εντοπίζαμε λύσεις με χαμηλότερη ανάπτυξη από αυτήν του γραμμικού για την συγκεκριμένη ενέργεια. Είναι λοιπόν σημαντικό να έχουμε κάποια αρχική συνθήκη που να βοηθάει τον αλγόριθμο.

Μελετήσαμε δυναμικά συστήματα ευσταθή γραμμικά, αλλά ασταθή σε διαταραχές πεπερασμένου πλάτους, με σκοπό να εντοπίσουμε το ελάχιστο πλάτος που απαιτείται ώστε να μεταβούν σε διαφορετική κατάσταση. Οι λύσεις που εντοπίσαμε χρησιμοποιούν την μη κανονικότητα των συστημάτων έτσι ώστε να φτιάξουν τις θεμελιώδεις δομές. Στην συνέχεια αυτές οι δομές γίνονται πλέον αυτοσυντηρούμενες και καταλήγουν σε κάποια ευσταθή λύση.

Σε αντίθεση με τις  $3-D$  ροές δεν εντοπίσαμε διαφορετικά NLOP και OP στην ροή Poiseuille, παρά μόνο μικρές διαφορές κοντά στην ενέργεια μετάβασης, και αφού έχουμε περάσει το χρονικό διάστημα όπου επικρατεί η μη κανονική συμπεριφορά του συστήματος. Στην γραμμική περιοχή μάλιστα οι λόγοι ανάπτυξης είναι μεγαλύτεροι από ότι μη γραμμικά.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι η transient ανάπτυξη επιτρέπει την κατασκευή σημαντικών δομών σε ροές, από αρχική ενέργεια τάξεων μεγέθους μικρότερη σε σχέση με την περίπτωση που η αρχική συνθήκη ήταν μια ιδιοκατάσταση του γραμμικού



προβλήματος. Αυτές οι δομές στην συνέχεια εμφανίζουν επιπλέον δευτερεύουσες αστάθειες (σε 3 διαστάσεις) που τελικά οδηγούν σε τυρβώδη κατάσταση.

# Παράρτημα Α΄

## Προβλήματα μεγιστοποίησης

### Α΄.1 Αλγόριθμοι

#### Α΄.1.1 Μέθοδος απότομης ανόδου

Μια από τις αρχικές μεθόδους μεγιστοποίησης για μια πραγματική συνάρτηση  $f(x)$ ,  $x \in R^n$ , η οποία χρησιμοποιεί την παράγωγο της  $\nabla f(x)$ . Αν κατασκευάσουμε την διαφορά  $f(x + \delta x) - f(x) = \nabla f(x)\delta x$  μια επιλογή του  $\delta x$  που οδηγεί σε θετική  $\delta f$  είναι η  $\delta x = a\nabla f(x)$ . Οπότε έχουμε μια επαναληπτική ακολουθία για τον προσδιορισμό του  $x_{i+1}$

$$x_{i+1} = x_i + a_i \nabla f(x_i) \quad (\text{Α΄.1})$$

Το  $a_i$  υπολογίζεται από την σχέση  $\frac{df(x_{i+1})}{da_i} = \nabla f(x_i + a_i \nabla f(x_i)) \nabla f(x_i) = 0$  με κάποια μέθοδο μονοδιάστατης μεγιστοποίησης (Line Search). Από τη στιγμή που έχουμε αύξηση της  $f$  σε κάθε βήμα, θα καταλήξουμε σε κάποιο μέγιστο της συνάρτησης (εάν υπάρχει).

#### Α΄.1.2 Μέθοδος Conjugate Gradient

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε για την μεγιστοποίηση των προβλημάτων είναι κυρίως η conjugate gradient method. Πηγή αυτής της μεθόδου είναι η conjugate direction method η οποία εντοπίζει τις λύσεις γραμμικών συστημάτων της μορφής  $Ax = k$ , όταν το  $A$  είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο.

Η κεντρική ιδέα είναι πως εαν έχουμε  $n$   $A$ -ορθογώνια διανύσματα για τα οποία ισχύει  $p_i A p_j = 0, i \neq j, p_i A p_i > 0$  τότε μπορούμε να βρούμε την λύση ως εξής. Αφού τα διανύσματα καλύπτουν όλο τον χώρο, η λύση θα είναι  $h = c_0 p_0 + c_1 p_1 + \dots + c_{n-1} p_{n-1}$ . Το πρόβλημα πλέον είναι να υπολογίζουμε τα  $c_i$ . Επειδή

$Ah = k$  μπορούμε να πάρουμε τα εσωτερικά γινόμενα με τα  $p_i$ .

$$p_i Ah = p_i k = p_i A(c_0 p_0 + c_1 p_1 + \dots c_{n-1} p_{n-1}) = c_i p_i A p_i \quad (A'.2)$$

$$c_i = \frac{p_i k}{p_i A p_i} \quad (A'.3)$$

Και έχουμε βρει την λύση του συστήματος.

Στη συνέχεια θέλουμε να λύσουμε το ίδιο σύστημα, αλλά χωρίς να έχουμε εξ αρχής τις  $p_i$ . Ξεκινάμε από ένα  $x_0$ , και ορίζουμε το διάνυσμα  $g_0 = p_0 = k - Ax_0$ . Θέλουμε τα  $g_i$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα  $p_i$  A-ορθογώνια. Για το πρώτο βήμα ορίζουμε το  $x_1 = x_0 + a_0 p_0$ . Τότε το  $g_1 = k - Ax_1 = k - A(x_0 + a_0 p_0) = g_0 - a_0 A p_0$ , ενώ το  $p_1$  θα είναι κάποιος γραμμικός συνδιασμός των  $g_1$  και  $p_0$ ,  $p_1 = g_1 + \beta_0 p_0$ . Τα  $a_i$  υπολογίζονται από την απαίτηση να είναι  $g_i g_j = 0 (i \neq j)$  και τα  $b_i$  από την  $p_i A p_j = 0 (i \neq j)$ . Για το  $a_0$

$$g_0^\dagger g_1 = g_0^\dagger (g_0 - a_0 A p_0) = 0 \implies a_0 = \frac{\|g_0\|^2}{g_0^\dagger A p_0} \quad (A'.4)$$

και για το  $b_0$

$$p_0^\dagger A p_1 = p_0^\dagger A (g_1 + \beta_0 p_0) = 0 \implies \beta_0 = -\frac{p_0^\dagger A g_1}{p_0^\dagger A p_0} \quad (A'.5)$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις για κάθε επανάληψη του αλγόριθμου ως  $a_i = \frac{\|g_i\|^2}{g_i^\dagger A p_i}$  και  $\beta_i = -\frac{p_i^\dagger A g_{i+1}}{p_i^\dagger A p_i}$

Η αλλαγή που κάνουμε ουσιαστικά στην παραπάνω μέθοδο για να την χρησιμοποιήσουμε σε μη-γραμμικά προβλήματα είναι να θέσουμε τα  $g_i = \nabla f(x_i)$ , αντί για τον τύπο των  $a_i$  να εφαρμόσουμε κάποια μέθοδο μεγιστοποίησης για την  $g_{i+1} p_i = 0$  και τέλος το  $b_i$  μπορεί να αντικατασταθεί από διάφορους τύπους, μια εκ των οποίων είναι η φόρμουλα Polak-Ribieré που χρησιμοποιούμε. Σε αυτούς τους αλγόριθμους είναι προτιμότερο να παρεμβάλλουμε περιοδικά επαναλήψεις που αντιστοιχούν σε  $b_i = 0$ , έτσι ώστε να αποφεύγουμε κάποια πιθανά αδιέξοδα. Και οι δυο αλγόριθμοι δεν μας εγγυόνται ότι θα βρουν το ολικό μέγιστο μιας συνάρτησης, αλλά τα τοπικά μέγιστα.

### Backtracking Line Search method

## A'.2 Μέθοδος προσαρτημένων διαφορικών εξισώσεων

### A'.2.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα συναρτησοειδές  $G(x) = x^\dagger x$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε την μέγιστη τιμή του σε χρόνο  $T$ . Επιβάλλουμε περιορισμούς για την χρονική εξέλιξη

του συστήματος ( $\dot{x} = f(x)$ ) και την αρχική συνθήκη  $x(0)^\dagger x(0) = 1$ . Το σύστημα που εξετάζουμε τροποποιείται στο εξής:

$$G(x(T), x(t), \dot{x}(t), x(0), \lambda) = x^\dagger(T)x(T) - \int_0^T \lambda^\dagger (\dot{x} - f(x)) dt - c(x^\dagger(0)x(0) - 1) \quad (\text{A.6})$$

Έχουμε υποθέσει ως ξεχωριστές μεταβλητές τις  $x(0), x(t), x(T)$ , και διαταράσσουμε την  $G$  με τις νέες τιμές  $x(0) + \delta x(0), x(t) + \delta x(t), x(T) + \delta x(T)$ . Αφού ολοκληρώσουμε κατά μέλη τον όρο  $\lambda^\dagger \dot{x}(t)$  ώστε να εμφανίσουμε τους επιφανειακούς όρους αλλά και να απαλλαγούμε από την παράγωγο του  $x(t)$  θα υπολογίσουμε την διαφορά  $\delta G = G' - G$ . Μετά από κάποιες πράξεις θα έχουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \delta G(x(T), x(t), x(0), \lambda, \dot{\lambda}) &= (x^\dagger(T) - \lambda^\dagger(T)) \delta x(T) \\ &+ \int_0^T (\dot{\lambda}^\dagger + \lambda^\dagger [\frac{\partial f}{\partial x}]) \delta x(t) dt - (c x^\dagger(0) - \lambda^\dagger(0)) \delta x(0) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Επειδή οι διαταραχές που επιλέξαμε είναι εν γένει τυχαίες, για να πούμε ότι βρισκόμαστε στο μέγιστο του συναρτησοειδούς θα πρέπει οι όροι που πολλαπλασιάζουν κάθε διαταραχή να είναι μηδενικοί. Από αυτήν την παρατήρηση έχουμε τις εξής σχέσεις για το  $\lambda$

$$\lambda(T) = x(T) \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\lambda} + [\frac{\partial f}{\partial x}]^\dagger(x(t)) \lambda = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda(0) = c x(0) \quad (\text{A.10})$$

Από αυτές, η (Εξ.Α.9) μπορεί να λυθεί από την στιγμή που έχουμε την τροχιά  $x(t)$ , και η μια συνοριακή συνθήκη που χρειαζόμαστε δίνεται από την (Εξ.Α.8). Σε αυτήν την περίπτωση θα ολοκληρώσουμε αντίστροφα από την φορά του χρόνου έτσι ώστε να βρούμε το  $\lambda(0)$ . Οπότε έχουμε καταφέρει να περιορίσουμε τους ελέγχους για το εάν είναι μέγιστο το συναρτησοειδές στην συνθήκη  $x(0) \parallel \lambda(0)$ .

Οπότε επιστρέφουμε στο  $\delta G$ , και βλέπουμε πως από τους αρχικούς όρους έχει μείνει μόνο ο  $\frac{\partial G}{\partial x(0)} \delta x(0)$ . Επειδή αναζητούμε το μέγιστο του συναρτησοειδούς θέλουμε οι μεταβολές που κάνουμε στο  $G$  να είναι θετικές. Ένας τρόπος για να το επιτύχουμε είναι να επιβάλλουμε οι αλλαγές  $\delta x(0)$  να είναι κάποιο πολλαπλάσιο του  $\frac{\partial G}{\partial x(0)}$ . Τότε θα είχαμε ως αποτέλεσμα  $\delta G = a \|\frac{\partial G}{\partial x(0)}\|^2 \geq 0$ . Επιλέγουμε το  $a$  σταθερό, αρκετά μεγάλο ώστε να έχουμε παρατηρήσιμες μεταβολές στην  $G$ , αλλά να μην υπερβούμε την γραμμική προσέγγιση που έχουμε κάνει. Πιο αυστηρές μέθοδοι περιλαμβάνουν και τον υπολογισμό του  $a$  μέσα στον αλγόριθμο, αλλά τότε αναπόφευκτα αυξάνεται ο χρόνος υπολογισμού.

Μετά την πρώτη επανάληψη αντί του  $\delta x(0) = a \frac{\partial G}{\partial x(0)}$  που αντιστοιχεί στην μέθοδο της πιο απότομης ανόδου (steepest ascend), χρησιμοποιούμε την μέθοδο των συζυγών παραγώγων (conjugate gradients). Τότε το  $\delta x(0)$  γίνεται

$$\delta x_{i+1}(0) = a \Lambda x_i(0) \quad (\text{A'.11})$$

$$\Lambda x_{i+1}(0) = \nabla_{x_{i+1}(0)} G_{i+1} + \beta \Lambda x_i(0) \quad (\text{A'.12})$$

$$\beta_{i+1} = \max\left(0, \frac{\delta x_{i+1}^T(0)(\delta x_{i+1}(0) - \delta x_i(0))}{\delta x_i^T(0)\delta x_i(0)}\right), \beta_1 = 0 \quad (\text{A'.13})$$

Η παραπάνω έκφραση για το  $\beta$  είναι η φόρμουλα των Polak-Ribieré. Γενικά υπάρχουν και άλλοι τρόποι υπολογισμού του  $\beta$ . Επειδή αποφύγαμε τον υπολογισμό του  $\alpha$  υπάρξει το ενδεχόμενο να καταλήξουμε σε μια τελική τιμή που να είναι μικρότερη από την προηγούμενη. Τότε για τον υπολογισμό της επόμενης αρχικής κατάστασης επιστρέφουμε στην μέθοδο της απότομης ανόδου αλλά πλέον με το μισό  $\alpha$ . Έτσι αυξάνεται η ακρίβεια του αλγόριθμου κοντά στα μέγιστα.

Για τον υπολογισμό του  $c$  βασιζόμαστε στο ότι οι αρχικές καταστάσεις έχουν συγκεκριμένο μέτρο. Έτσι από την στιγμή που γνωρίζουμε το  $\alpha$  ο μόνος άγνωστος στην έκφραση  $x_{i+1}(0) = x_i(0) + a \Lambda x_i(0)$  θα είναι το  $c$ . Ίσως μια άλλη επιλογή για το  $c$  να ήταν αυτή που ελαχιστοποιεί το  $|-cx_0(0) + \lambda_0(0)|$ , δηλαδή να κρατήσουμε ουσιαστικά μόνο την κάθετη στο  $x_0(0)$  συνιστώσα του  $\lambda_0(0)$ . Τότε η επιλογή θα ήταν

$$c = \frac{x^\dagger(0)\lambda(0)}{x^\dagger(0)x(0)} \quad (\text{A'.14})$$

**Ενδεχόμενα προβλήματα όταν υπάρχει κάποιο κατώφλι** Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο για να υπολογίσουμε τις ελάχιστες ενέργειες που μπορούν να οδηγήσουν ένα σύστημα σε αυτοσυντηρούμενη κατάσταση, υπάρχει το ενδεχόμενο να αντιμετωπίσουμε το παρακάτω πρόβλημα. Έπειτα από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, σχεδόν όλες οι αρχικές καταστάσεις θα τείνουν σε κάποιο σταθερό σημείο, εκτός από μια περιοχή η οποία θα εξαρτάται από το πόσο κοντά είμαστε ενεργειακά στο κατώφλι. Μάλιστα εάν υπάρχει μόνο μια ενεργειακά υλοποιήσιμη αρχική συνθήκη (στην κρίσιμη ενέργεια για παράδειγμα) τότε ουσιαστικά η  $G(x) = x^\dagger(T)x(T)$  θα έχει την μορφή μιας συνάρτησης βήματος. Οπότε σε αυτήν την περίπτωση θα ήταν αρκετά πιο δύσκολο να εντοπίσουμε το μέγιστο ξεκινώντας από κάποια τυχαία αρχική συνθήκη.

### A'.2.2 Γραμμική Περιγραφή του προβλήματος

Αν θεωρήσουμε ότι ο δυναμικός νόμος  $\dot{x} = f(x)$  είναι ένα γραμμικό σύστημα  $f(x) = Ax$  τότε το πρόβλημα προσεγγίζεται αναλυτικά πλέον.

$$G(x(T), x(t), \dot{x}(t), x(0), \lambda) = x^\dagger(T)x(T) - \int_0^T \lambda^\dagger(\dot{x} - Ax)dt - c(x^\dagger(0)x(0) - 1) \quad (\text{A'.15})$$

$$\dot{\lambda} = -A^\dagger \lambda \quad (\text{A'.16})$$

Και έχουμε άμεσα τις σχέσεις για τα  $x(T), \lambda(T)$

$$x(T) = \exp(AT)x(0) = \Phi(T)x(0), \lambda(0) = \exp(A^\dagger T)\lambda(T) = \Phi^\dagger(T)\lambda(T) \quad (\text{A'.17})$$

Όμως επειδή έχουμε θέσει το  $\lambda(T) = x(T)$  ξαναγράφουμε το  $\lambda(0) = \Phi^\dagger(T)\Phi(T)x(0)$ . Αλλά, η έκφραση για το  $\lambda(0)$  εμφανίζεται και από την  $x^\dagger(T)x(T)$  αν χρησιμοποιήσουμε τους διαδοτές.

$$x^\dagger(T)x(T) = x^\dagger(0)\Phi^\dagger(T)\Phi(T)x(0) \quad (\text{A'.18})$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει μάλιστα να ξαναγράψουμε το πρόβλημα χωρίς τον δεσμό για το  $\dot{x} = f(x)$  ως

$$G(x(0)) = x^\dagger(0)\Phi^\dagger(T)\Phi(T)x(0) - c(x^\dagger(0)x(0) - 1) \quad (\text{A'.19})$$

Καθώς γνωρίζουμε το  $\Phi^\dagger(T)\Phi(T)$  εάν υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του θα έχουμε βρεί την ιδιοκατάσταση με την μεγαλύτερη αύξηση

Ακολουθώντας την ανάλυση του μη-γραμμικού προβλήματος, έχουμε την παράγωγο του συναρτησειδούς

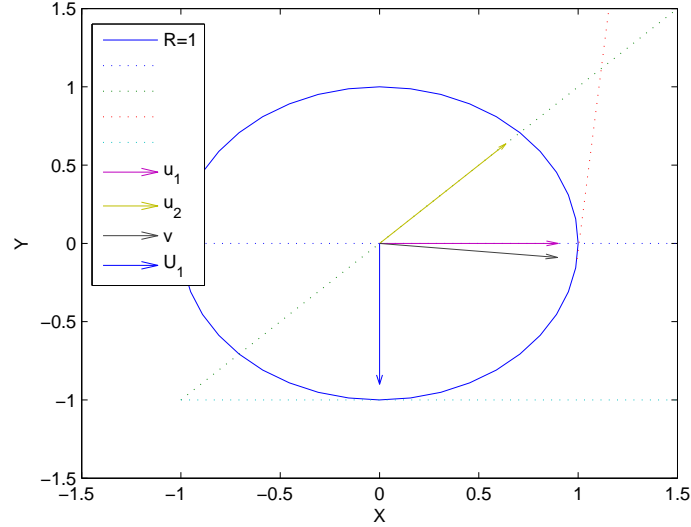
$$\frac{\partial G}{\partial x(0)} = -cx^\dagger(0) + x^\dagger(0)\Phi^\dagger(T)\Phi(T) \quad (\text{A'.20})$$

που βλέπουμε ότι είναι ισοδύναμη με την μη γραμμική έκφραση. Χρησιμοποιούμε και εδώ το  $c = \frac{x^\dagger(0)\Phi^\dagger(T)\Phi(T)x(0)}{x^\dagger(0)x(0)}$ . Τότε μια επιλογή για το  $\delta x(0) = \epsilon(-\frac{x^\dagger(0)\lambda(0)}{x^\dagger(0)x(0)}x(0) + \lambda(0))$ , όπου εάν θέσουμε το  $M(T) = \Phi^\dagger(T)\Phi(T)$  γίνεται (τα  $x_k$  αντιστοιχούν στα  $x_k(0)$ .)

$$x_1 = x_0 + \epsilon\left(-\frac{x^\dagger_0 M(T)x_0}{x^\dagger_0 x_0}x_0 + M(T)x_0\right) \implies \quad (\text{A'.21})$$

$$x_1 = \left\{I + \epsilon M(T) - \epsilon \frac{x^\dagger_0 M(T)x_0}{x^\dagger_0 x_0} I\right\}x_0 \quad (\text{A'.22})$$

Από όπου βλέπουμε ότι ο πίνακας που πολλαπλασιάζει το  $x_0$  θα έχει τις ιδιοκαταστάσεις του  $M(T)$ . Επειδή το  $M(T)$  εμφανίζεται μέσα σε ένα μέτρο, θα έχει θετικές ιδιοτιμές. Αναλύοντας την  $x_0$  στην βάση των  $\vec{\mu}_i$  έχουμε  $x_0 = \sum_{i=1}^k a_i \vec{\mu}_i$ . Η δράση του  $M(T)$  θα ενισχύσει την κατάσταση με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή περισσότερο. Οπότε η καινούργια κατάσταση  $x_1$  θα καταλήγει πιο κοντά στο μέγιστο από ότι η  $x_0$ . Αν ορίσουμε μια επαναληπτική ακολουθία με βάση την σχέση  $x_{i+1} = \left\{I + \epsilon M(T) - \epsilon \frac{x^\dagger_i M(T)x_i}{x^\dagger_i x_i} I\right\}x_i$ , ακολουθώντας και τους περιορισμούς για τις αρχικές συνθήκες, θα περιμέναμε να συγκλίνει στην μεγαλύτερη ιδιοκατάσταση που υπάρχει στις αρχικές συνθήκες.



Σχήμα Α΄.1: Ανάλυση των διανύσματος  $v$  και του adjoint  $U_1$  στις ιδιοκαταστάσεις  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

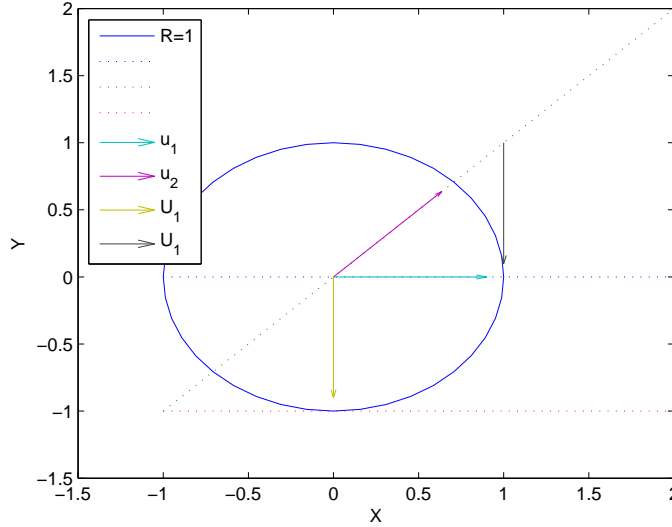
### Α΄.2.3 Μη-κανονικοί πίνακες

Όταν οι ιδιοκαταστάσεις ενός πίνακα είναι ορθοκανονικές, τότε ξέρουμε πως η μεγαλύτερη ιδιοτιμή θα είναι και αυτή που μεγαλώνει περισσότερο. Όμως, εν γένει έχουμε να κάνουμε με πίνακες που δεν είναι κανονικοί. Σε αυτήν την περίπτωση, χρειάζεται λίγη παραπάνω προσπάθεια ώστε να εντοπίσουμε τις καταστάσεις με την μεγαλύτερη αύξηση.

**Ανάλυση διανυσμάτων στις ιδιοτιμές ενός πίνακα** Καταρχήν, ας ορίσουμε δυο ιδιοκαταστάσεις κάποιου πίνακα, οι οποίες να μην είναι κάθετες μεταξύ τους. Μια καλή επιλογή είναι οι

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Τώρα πρέπει να κατασκευάσουμε έναν πίνακα με αυτές τις ιδιοκαταστάσεις. Μπορούμε να βρούμε ότι ένας τέτοιος θα είναι ο  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ . Επιλέγουμε ένα διάνυσμα  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.9950 \\ -0.0995 \end{pmatrix}$ . Βλέπουμε από το σχήμα Α.1 ότι ουσιαστικά φέρνουμε την εφαπτομένη στον κύκλο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα  $\vec{u}_1$ , και οι αναλογίες των  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  δίνονται από τα σημεία τομής της με τις προεκτάσεις των γραμμών των ιδιοκαταστάσεων. Για το adjoint  $\vec{U}_1$  η προβολή του στην κατάσταση  $\vec{u}_1$  θα είναι μηδενική (Α.2).



Σχήμα Α'2: Το adjoint  $\vec{U}_1$  και το πως συνδέεται με τις ιδιοκαταστάσεις

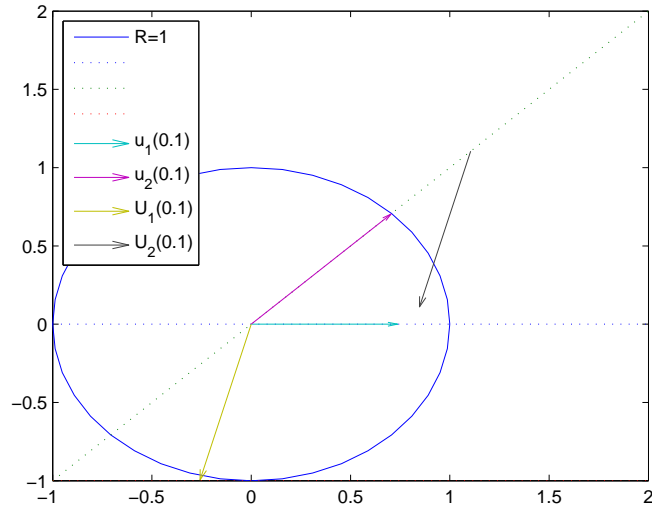
**Εξέλιξη με τον χρόνο** Σε αντίθεση με τους κανονικούς πίνακες, οι καταστάσεις που μεγαλώνουν περισσότερο τείνουν σε μια από τις 2 adjoint καθώς αυξάνουμε το διάστημα μεγιστοποίησης, και συγκεκριμένα σε αυτή που είναι κάθετη στην μικρότερη ιδιοτιμή. Αν ορίσουμε το  $\vec{U}_1$  από μια σχέση της μορφής  $\vec{u}_2 = a\vec{u}_1 + \vec{U}_1$ , τότε παρατηρούμε πως θα μεγαλώνει όχι μόνο από την  $\vec{u}_1$ , αλλά και επειδή η  $\vec{u}_2$  μικραίνει (Μπορούμε να το δούμε καθαρά αν συγκρίνουμε με την  $\vec{u}_2$  σταθερή). Από τα διαγράμματα Α.3, (Α.4), και αν περιμένουμε η μετάβαση στην adjoint κατάσταση να γίνεται με συνεχή τρόπο βλέπουμε την κατευθίνηση του μεγίστου να αλλάζει με τον χρόνο, και ουσιαστικά να τείνει στην  $\vec{u}_1$ . Αυτό συμβαίνει επειδή τελικά η  $\vec{u}_2(T)$  θα γίνει αμελητέα.

**Ανάλυση N-διάστατου διανύσματος σε μη-ορθογώνια βάση** Ένα διάνυσμα  $\vec{V}$  μπορεί πάντα να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ενός συνόλου διανυσμάτων  $\{u_i\}$ .

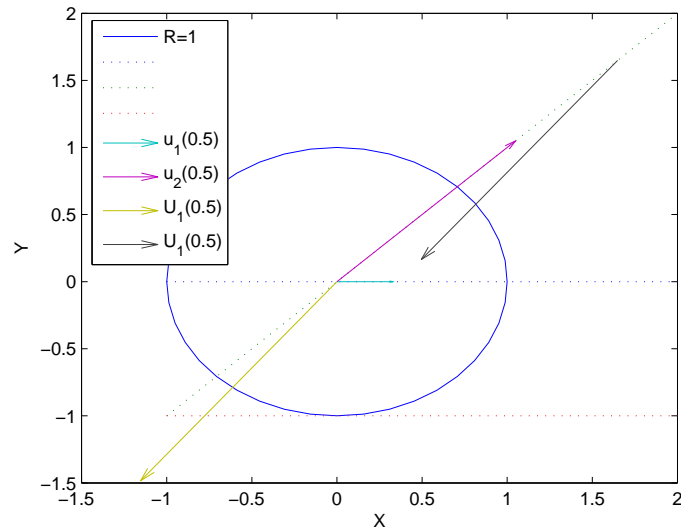
$$\vec{V} = \sum_i^N c_i \vec{u}_i$$

Θεωρούμε τώρα ότι τα  $u_i$  αποτελούν μια βάση, και δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Τότε ο υπολογισμός των συντελεστών  $c_i$  γίνεται με την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος  $Ax = b$ .





Σχήμα Α΄.3: Εξέλιξη του  $\vec{U}_1$  για χρόνο  $T = 0.1$



Σχήμα Α΄.4: Εξέλιξη του  $\vec{U}_1$  για χρόνο  $T = 0.5$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του  $\vec{V}$  με κάθε  $\vec{u}_j$ , οπότε έχουμε μια γραμμική εξίσωση για τους συντελεστές  $c_i$ .

$$\vec{u}_j \cdot V = \sum_i^N \vec{u}_j \vec{u}_i c_i$$

Οπότε σε μορφή γραμμικού συστήματος με τους  $c_i$  ως αγνώστους

$$\begin{pmatrix} u_1 \cdot V \\ u_2 \cdot V \\ \vdots \\ u_N \cdot V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{u}_1 \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_1 \vec{u}_N \\ \vec{u}_2 \vec{u}_1 & 1 & \dots & \vec{u}_2 \vec{u}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_N \vec{u}_1 & \vec{u}_N \vec{u}_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \quad (A'.24)$$

Σημειώνουμε έδω ότι αν η βάση μας ήταν ορθογώνια όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα θα μηδενίζονταν.

### A'.2.4 Ο αλγόριθμος

Συνοπτικά, η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε έχει την εξής μορφή:

1) Αρχικά επιλέγουμε μια τυχαία κατάσταση  $x_0(0)$  την οποία και κανονικοποιούμε σύμφωνα με τους περιορισμούς του προβλήματος.

2) Υπολογίζουμε την  $x(T)$  με βάση τον δυναμικό νόμο που έχουμε, εξισώνουμε με την  $\lambda(T)$  και βρίσκουμε την  $\lambda(0)$

3) Ελέγχουμε εάν είμαστε τυχεροί και ισχύει  $\lambda(0) = cx(0)$ , διαφορετικά ορίζουμε την νέα αρχική συνθήκη  $x_1(0) = x_0(0) + a \frac{\partial G}{\partial x(0)}$  (ουσιαστικά εξετάζουμε εάν το  $x_0$  αποτελεί ιδιοκατάσταση του  $M(T)$ , οπότε σε αυτήν την περίπτωση το  $c$  θα είναι η ιδιοτιμή του  $M(T)$ )

4) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1), 2) και πλέον ελέγχουμε σε κάθε βήμα τα εξής:

α) Εάν η διαφορά μεταξύ 2 διαδοχικών  $G$  είναι αρνητική ( $G_i - G_{i-1} < 0$ ), τότε θέτουμε το  $a_i = \frac{a_{i-1}}{2}$  και ως νέα αρχική συνθήκη έχουμε την  $x_{i+1}(0) = x_i(0) + a_i \frac{\partial G_i}{\partial x_i(0)}$

β) Εάν η διαφορά τους είναι θετική και μικρότερη από κάποιο σφάλμα που έχουμε ορίσει τότε σταματάμε το πρόγραμμα

γ) Στην περίπτωση που τα α) και β) δεν ισχύουν τότε η νέα αρχική κατάσταση δίνεται από την  $x_{i+1}(0) = x_i(0) + a_i \Lambda x_i(0)$

5) Όταν επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό για πολλούς χρόνους  $T$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί για την τυχαία αρχική κατάσταση αυτήν που μεγιστοποιούσε το συναρτησοειδές στον προηγούμενο χρόνο  $T$ .

## Παράρτημα Β'

# Μη-γραμμική βελτιστοποίηση 2 – D ροής

### Β'.1 Αριθμητική ολοκλήρωση ροής

Στα παρακάτω κεφάλαια θα ασχοληθούμε με την αριθμητική ολοκλήρωση ροών είτε του πλήρους συστήματος, ή των διαταραχών γύρω από μια μέση ροή.

Θεωρούμε τα όρια της ροής στο  $y = \pm 1$ , και ότι είναι περιοδική στην  $x$ -διεύθυνση με μήκος κύματος  $k = 1.25$  ( $L_x = \frac{2\pi}{k}$ ). Για την χωρική διακριτοποίηση της ροής θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Fourier στην  $x$  και πεπερασμένες διαφορές στην  $y$ .

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για μια 2 – D ροή γράφονται στις μεταβλητές  $u, v, p$  ως εξής:

$$\partial_t u + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u = -\partial_x p + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (\text{B'.1})$$

$$\partial_t v + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})v = -\partial_y p + \frac{1}{Re} \Delta v \quad (\text{B'.2})$$

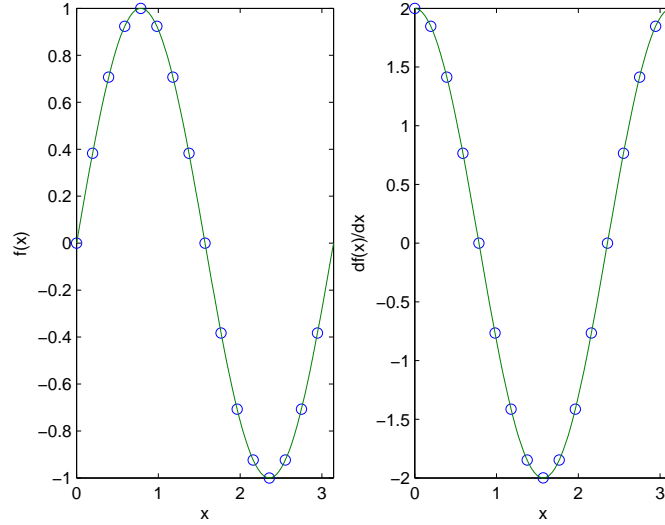
$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (\text{B'.3})$$

Για να επιλύσουμε το διδιάστατο σύστημα επιλέγουμε την αναπαράσταση  $\psi, \omega$  (ρευματογραμμής - στροβιλότητας), το οποίο συσχετίζεται με τις αρχικές μεταβλητές από τις σχέσεις

$$u = -\partial_y \psi, v = \partial_x \psi \quad (\text{B'.4})$$

$$\Delta \psi = \omega \quad (\text{B'.5})$$

$$\omega = \vec{\nabla} \times \vec{u} \Big|_z \quad (\text{B'.6})$$



Σχήμα Β'.1: Παραγωγή της συνάρτησης  $\sin(2x)$  και αντιπαραβολή με το διάνυσμα 16 σημείων της.

Σε αυτή την μορφή εξασφαλίζεται άμεσα πως η ροή είναι ασυμπίεστη, αφού  $\vec{u} = -\vec{\nabla} \times (\psi \hat{z})$ , και η απόκλιση ενός στροβιλισμού είναι πάντα μηδέν. Οι εξισώσεις NS μετασχηματίζονται σε αυτήν την μορφή μέσω του στροβιλισμού του  $\vec{u}$ .

$$\vec{\nabla} \times (\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p - \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}) = 0 \quad (B'.7)$$

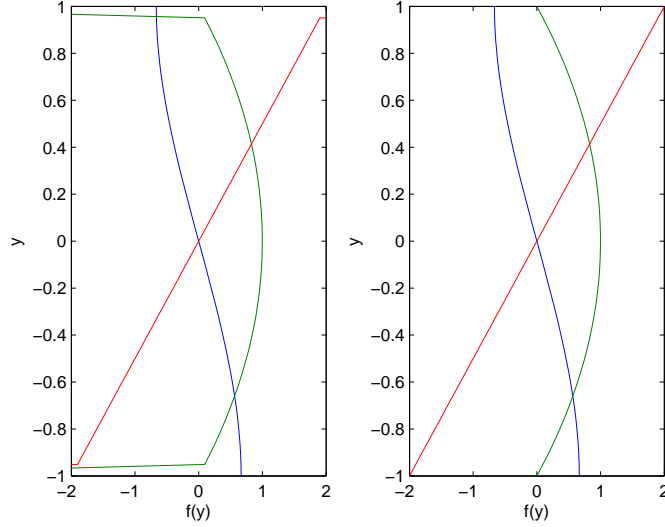
$$\partial_t \omega + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega - \frac{1}{Re} \Delta \omega = 0 \quad (B'.8)$$

Βλέπουμε πως η πίεση απαλείφεται από την εξίσωση του  $\omega$ . Το μειονέκτημα αυτής της αναπαράστασης είναι πως δεν γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες για το  $\omega$ , τις οποίες όμως μπορούμε να προσεγγίσουμε με διάφορους τύπους. Τελικά μπορούμε να συνοψίσουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\partial_t \omega + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega - \frac{1}{Re} \Delta \omega = 0, \Delta \psi = \omega, \vec{u} = -\vec{\nabla} \times (\psi \hat{z}) \quad (B'.9)$$

### Β'.1.1 Διακριτοποίηση διαφορικών τελεστών

Για την αριθμητική ολοκλήρωση του παραπάνω συστήματος θα χρειαστεί να υπολογίσουμε ποσότητες της μορφής  $\partial_i f$  και  $\partial_i^2 f$ . Τα πεδία που μας απασχολούν είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $y$ ,  $f(x, y)$ . Για να τα αναπαραστήσουμε, φτιάχνουμε



Σχήμα Β'.2: Παραγωγή της συνάρτησης  $-(y - y^3/3)$  και αντιπαραβολή με το διάνυσμα 40 σημείων της.

ένα πλέγμα πάνω στο χωρίο ολοκλήρωσης, και αντικαθιστούμε τις συνεχείς συναρτήσεις με τις τιμές τους στα σημεία του διακριτού πλέγματος,  $f(x_i, y_j) = f_{ij}$ .

**Παραγωγίσεις στον x-άξονα** Λόγω της περιοδικότητας του πεδίου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε φασματικές μεθόδους για τις παραγωγίσεις. Ένας γρήγορος τρόπος για να τις εφαρμόσουμε είναι με τους πίνακες παραγωγίσης. Trefethen (Insert Fourier matrix) Έχουμε υποθέσει ότι οι συναρτήσεις που παραγωγίζουμε είναι ομαλές. Παραγωγίσεις δεύτερης τάξης γίνονται με εφαρμογή του διαφορικού τελεστή δύο φορές.

**Παραγωγίσεις στον y-άξονα** Σε αυτή την περίπτωση προσεγγίζουμε τις παραγωγούς μέσω πεπερασμένων διαφορών. Μια σημαντική διαφορά με παραπάνω είναι πως οι τελεστές πρώτης και δεύτερης τάξης δεν συνδέονται απλά μεταξύ τους

$$\frac{df}{dy}|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2(\delta y)} \tag{B'.10}$$

$$\frac{d^2 f}{dy^2}|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2(\delta y)^2} \tag{B'.11}$$

$$\frac{df}{dy}(y) = \frac{f(y + \delta y) - f(y - \delta y)}{2(\delta y)} \tag{B'.12}$$

$$\frac{d^2 f}{dy^2}(y) = \frac{f(y + \delta y) - 2f(y) + f(y - \delta y)}{(\delta y)^2} \tag{B'.13}$$

Οπότε όταν έχουμε ορίσει ένα συγκεκριμένο  $\delta y$  θα προσεγγίσουμε την συνάρτηση  $f$  ως ένα διάνυσμα του οποίου οι συντεταγμένες αντιστοιχούν στις τιμές της  $f$  στα διακριτά σημεία,  $f_j$ . Σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε πως υπάρχει πρόβλημα με τις συνοριακές τιμές της συνάρτησης, που θα πρέπει είτε να επιβάλλουμε (όταν είναι γνωστές), είτε να προσεγγίσουμε. Συνολικά η παραγωγή της συνάρτησης  $f$  μπορεί να παρασταθεί από την δράση ενός τελεστή πάνω στο διάνυσμα  $f_j$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y) = \frac{1}{2\delta y} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (\text{B'.14})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y) = \frac{1}{\delta y^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (\text{B'.15})$$

### B'.1.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης

Έχοντας κατασκευάσει τους διαφορικούς τελεστές επιστρέφουμε στο σύστημα των εξισώσεων που θέλουμε να προχωρήσουμε στον χρόνο. Η διακριτή μορφή της συνάρτησης  $\omega(x, y)$  γράφεται ως ένας πίνακας  $M \times N$  στοιχείων. Κάθε στήλη του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα  $x$  και κάθε γραμμή σε ένα  $y$ .

$$\omega(x, y) = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1M} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{N1} & \omega_{N2} & \dots & \omega_{NM} \end{pmatrix} = \omega_{ji} \quad (\text{B'.16})$$

Οι παραγωγίσεις σε αυτήν την περίπτωση δουλεύουν ως εξής. Για να υπολογίσουμε το  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$  θα δράσουμε από αριστερά με τον τελεστή των  $y$ , ο οποίος θα παραγωγίσει κάθε στήλη. Οι  $x$  παραγωγίσεις γίνονται κατα μήκος των γραμμών, οπότε ο τελεστής δρά από τα δεξιά.

Τέλος για τους όρους μεταφοράς, ο πολλαπλασιασμός των ταχυτήτων με τις παραγωγούς του  $\omega$  γίνεται ανά σημείο του πλέγματος,  $u_{nm} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{nm}$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε τώρα να γράψουμε την  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$  σε διακριτή μορφή.

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_{nm} = -(u(\omega D_x))_{nm} - (v(D_y \omega))_{nm} + \frac{1}{Re}(D_2 \omega + \omega D_x^2)_{nm} \quad (\text{B'.17})$$

**Εξέλιξη στο χρόνο** Ο απλούστερος τρόπος για να υπολογίσουμε μια ποσότητα όταν γνωρίζουμε την χρονική παράγωγό της σε κάποια χρονική στιγμή είναι η μέθοδος (Forward) Euler. Προσεγγίζουμε την παράγωγο ως διαφορά μεταξύ δυο χρονικών στιγμών.

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^k = \frac{\omega^{k+1} - \omega^k}{dt} \quad (B'.18)$$

$$\omega^{k+1} = \omega^k + \left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^k dt \quad (B'.19)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω κατευθείαν στην  $\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)_{nm}$  ώστε να υπολογίσουμε το  $(\omega_{nm})^{k+1}$ . Όμως το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι εισάγει σχετικά μεγάλα αριθμητικά σφάλματα, οπότε θα πρέπει να περιορίσουμε το χρονικό βήμα  $dt$  που χρησιμοποιούμε.

Μια βελτίωση αυτής είναι η μέθοδος Adams-Bashforth στην οποία χρησιμοποιούμε τιμές της παραγωγού από περισσότερες χρονικές στιγμές για να υπολογίσουμε τα επόμενα  $\omega_{nm}$ .

Τότε ο υπολογισμός του  $(\omega_{nm})^{k+1}$  γίνεται μέσω των παραγωγών στον χρόνο  $k$  και  $k-1$ . Μόνο για το πρώτο βήμα που δεν θα έχουμε χρόνο  $k-1$  χρησιμοποιείται η μέθοδος Euler.

$$\omega^{k+1} = \omega^k + \left(\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^{k-1}\right)dt \quad (B'.20)$$

**Υπολογισμός του  $\psi$**  Μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει τις τιμές του  $\omega^{k+1}$  για σημεία που δεν είναι στο τοίχωμα ( $y = \pm 1$ ). Αυτές οι τιμές επαρκούν για τον υπολογισμό του  $\psi$ , εάν γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες του. Σε αυτό το σημείο είναι πιο εύχρηστο να επιλύσουμε την  $\Delta\psi = \omega$  για κάθε φασματικό αριθμό  $l$ , χρησιμοποιώντας την περιοδικότητα στην  $x$ -διεύθυνση. Το πρόβλημά μας τότε θα ήταν να επιλύσουμε τις  $M$  εξισώσεις που προκύπτουν,  $\Delta\psi_l = \omega_l$ . Για όλους τους κυματάρηθμους  $l \neq 0$  γνωρίζουμε ότι  $\psi_l(\pm 1) = 0$ . Όταν το  $l = 0$  η διαφορά  $\psi_0(1) - \psi_0(-1) = Q$ , δίνει την συνολική ροή  $Q$ . Ένας τρόπος να επιλύσουμε το πρόβλημα είναι να θέσουμε το  $Q$  σταθερό για όλη την ολοκλήρωση, επιλέγοντας σταθερές τιμές για τα  $\psi_0(1)$  και  $\psi_0(-1)$ .

**Προσέγγιση των συνοριακών συνθηκών του  $\omega$**  Τέλος για να έχουμε προσδιορίσει πλήρως τις ποσότητες  $(\psi, \omega)$  χρειαζόμαστε και τις συνοριακές συνθήκες για το  $\omega$ . Ένας τρόπος είναι η προσέγγιση Thomas, με την οποία συνδέουμε τις τιμές του  $\psi$  με τις τιμές του  $\omega$  στα τοιχώματα.

$$\psi_{2m} = \psi_{1m} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{1m}\delta y + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{1m} \frac{\delta y^2}{2} \quad (B'.21)$$

$$\omega_{1m} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{1m} = 2 \frac{\psi_{2m} - \psi_{1m}}{\delta y^2} \quad (B'.22)$$



Οπότε και έχουμε υπολογίσει τις τιμές που μας απασχολούν.

## Β'.2 Το πρόβλημα μεγιστοποίησης

Η ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η ανάπτυξη της ενέργειας των διαταραχών μιας ροής  $U(y)$ . Το πλήρες πεδίο ταχυτήτων γράφεται  $\vec{V} = (U(y) + u(x, y, t))\hat{x} + v(x, y, t)\hat{y}$ , και η ενέργεια που μας ενδιαφέρει

$$E'(T) = \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{1}{2}(u^2(T) + v^2(T)) dx dy \quad (\text{B'.23})$$

Για δεδομένη αρχική ενέργεια θα έχουμε και τον ρυθμό ανάπτυξης  $\tilde{G}(T) = \frac{E'(T)}{E'(0)}$ , οπότε με τους περιορισμούς το σύστημα να ακολουθεί τις διαταραχτικές εξισώσεις Navier-Stokes και οι διαταραχές να έχουν συγκεκριμένη αρχική ενέργεια το πρόβλημα τίθεται ως εξής (συνοριακές συνθήκες, ροή του διαταραχτικού πεδίου)

$$\begin{aligned} G(u(T), u(t), u(0), v(T), v(t), v(0), \vec{\lambda}, b, c) &= \tilde{G}(T) - \\ \int_0^T \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \vec{\lambda}^\dagger (\partial_t \vec{u}' + U \partial_x \vec{u}' + v \partial_y U \hat{x} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' + \vec{\nabla} p' - \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}') dx dy dt - \\ \int_0^T \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} b^\dagger (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}') dx dy dt - c(E'(0) - E_0) \end{aligned} \quad (\text{B'.24})$$

Όπως και παραπάνω, οι εξισώσεις Euler-Lagrange από τις μεταβολές των συναρτήσεων του forward προβλήματος μας δίνουν τις σχέσεις

$$\vec{\lambda}(x, y, T) = \vec{u}'(x, y, T) \quad (\text{B'.25})$$

$$\partial_t \vec{\lambda} = -U \partial_x \vec{\lambda} + \lambda_1 \partial_y U \hat{y} - (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{\lambda} - u'_i \vec{\nabla} \lambda_i - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\lambda} - \vec{\nabla} b \quad (\text{B'.26})$$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{u}_0} = \vec{\lambda}(x, y, 0) - c \vec{u}'(x, y, 0) \quad (\text{B'.27})$$

Οι εξισώσεις για το  $\vec{\lambda}(t)$  μας επιτρέπουν να ορίσουμε και εδώ ένα ανυσματικό δυναμικό  $\phi$ , έτσι ώστε  $\vec{\lambda} = -\vec{\nabla} \times \phi \hat{z}$  και μια συνάρτηση  $\pi$ ,  $\pi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\lambda}$ . Το σύστημα αυτό λύνεται κατά τον ίδιο τρόπο με τις εξισώσεις NS. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται παρόμοια με την περίπτωση που το πεδίο εξαρτάται μόνο από τον χρόνο, απλώς πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο που αντιστοιχεί στον χώρο που εργαζόμαστε.

# Βιβλιογραφία

- [1] P. G. Drazin, W. H. Reid *Hydrodynamic Stability* 2nd Edition 2004: Cambridge University Press.
- [2] P. J. Schmid, D. S. Henningson *Stability and Transition in Shear Flows* 2001: Springer.
- [3] L. N. Trefethen, M. Embree *Spectra and Pseudospectra: The behavior of Non-normal Matrices and Operators* 2005: Princeton University Press.
- [4] R. Peyret *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow* 2002: Springer
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz *Fluid Mechanics* 2nd Edition 1987: Pergamon Press.
- [6] A. Iserles *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations* 2nd Edition 2009: Cambridge University Press.
- [7] L. T. Biegler *Optimization of Differential-Algebraic Equation Systems* Carnegie Mellon University, 2000.
- [8] Chris C. T. Pringle *Transition in pipe flow: Nonlinear Mechanisms* PhD thesis, University of Bristol, 2009.
- [9] S. A. Orzag, A. T. Patera *Subcritical Transition to Turbulence in Plane Channel Flows* 1980: Phys. Rev. Lett. 45, (989)
- [10] K. M. Butler, B. F. Farrell *Nonlinear equilibration of two-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow* 1994: Phys. Fluids 6, 2011-2019
- [11] Chris C. T. Pringle, Ashley P. Willis, Rich R. Kerswell *Minimal seeds for shear flow turbulence: using nonlinear transient growth to touch the edge of chaos* 2012: J. Fluid Mech. 702, 415-443
- [12] L. N. Trefethen, Anne E. Trefethen, Satish C. Reddy, Tobin A. Driscoll *Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues* 1993: Science 261 578-584

- [13] F. Waleffe *Transition in shear flows: non-linear normality versus non-normal linearity* 1995:Phys.Fluids 7, 3060-3066
- [14] S. Cherubini, P. De Palma, J.-C. Robinet and A. Bottaro *The minimal seed of turbulent transition in the boundary layer* 2011:J.Fluid Mech. 689, 221-253.
- [15] P. J. Schmid *Nonmodal Stability Theory* 2007:Annu.Rev.Fluid Mech. 39:129-62
- [16] J. P. Zahn, J. Toomre, E. A. Spiegel and D. O. Gough *Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow* 1974:J.Fluid Mech. 64, 319-345
- [17] S. Cherubini and P. De Palma *Nonlinear optimal perturbations in a Couette flow: bursting and transition* 2013:J.Fluid Mech. 716, 251-279
- [18] T. Ellingsen and E. Palm *Stability of linear flow* 1975:Phys.Fluids 18, 487
- [19] M. T. Landahl *A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows* 1980:J.Fluid Mech. 98, 243-251