



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

*« ΜΕΘΟΔΟΙ ΙΣΧΥΡΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ. »*

ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ.Π.ΝΙΚΟΛΑΟΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ**

ΧΑΛΙΚΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2014

Στην ιερή μνήμη του πατέρα μου.



# Πρόλογος

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών, κ. Χαλικία Γεώργιο για την σημαντική βοήθειά, τις παρατηρήσεις, την καθοδήγησή και την ενθάρρυνσή του, για την ολοκλήρωση και εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, στα πλαίσια του Π.Μ.Σ. των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα πρόσωπα των καθηγητών, κ. Ιωάννη Στρατή και κ. Χριστόδουλο Αθανασιάδη, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, για την ηθική υποστήριξη που έλαβα ως προς την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου για την άριστη συνεργασία, ευχόμενος από καρδιάς καλή σταδιοδρομία.

Τέλος αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω την κα. Δήμου Αργυρώ-Ιωάννα, για την συνεχή συμπαράσταση και αρωγή, που μου παρείχε στη έως τώρα πορεία μου.

# Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	
Εισαγωγή.....	4
Κεφάλαιο 2	
Αυτόνομα Γραμμικά Συστήματα Συνεχούς Χρόνου.....	7
Γραμμικά Συστήματα Συνεχούς Χρόνου.....	13
Γραμμικά Συστήματα Διακριτού Χρόνου.....	17
Μη Γραμμικά Συστήματα Διακριτού Χρόνου.....	31
Κεφάλαιο 3	
Ισχυρή Ευστάθεια Δυναμικών Συστημάτων.....	36
Κεφαλαίου 4	
Παραδείγματα.....	51
Βιβλιογραφία.....	56

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η έννοια της ευστάθειας δυναμικών συστημάτων είναι κεντρική έννοια στην θεωρία συστημάτων και αυτόματου ελέγχου και έχει μελετηθεί εκτενώς και από πολλές πλευρές (Marcus and Minc 1964; Barnett 1971; Horn and Johnson 1980; Khalil 1992; Hershkowitz 1998; Hinrichsen and Pritchard 2005). Η εργασία αυτή εισάγει μία νέα έννοια ευστάθειας για συστήματα καταστάσεως χώρου που περιγράφονται από «φυσικές» μεταβλητές, δηλαδή σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Οι κλασσικές έννοιες ευστάθειας, όπως αυτή της ευστάθειας κατά Lyapunov ή της ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι αναγκαίες συνθήκες ώστε οι εσωτερικές μεταβλητές του συστήματος να είναι φραγμένες ως συναρτήσεις του χρόνου, αλλά δεν εξασφαλίζουν τον μη υπερακοντισμό τους. Ορίζουμε ως υπερακοντισμό την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος όπου μία κατάλληλη νόρμα κάποιου αυθαίρετου αρχικού διανύσματος κατάστασης (που αντιστοιχεί σε φυσικές μεταβλητές) δεν φθίνει μονοτονικά (στην εργασία χρησιμοποιούμε την Ευκλείδεια νόρμα αλλά και άλλες επιλογές είναι δυνατές). Σε πολλές περιπτώσεις μια τέτοια συμπεριφορά είναι επιθυμητή και μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική περίπτωση έλεγχου υπό περιορισμούς (constrained control). Στις περιπτώσεις αυτές οι κλασσικές έννοιες ευστάθειας είναι μάλλον ασθενείς για να περιγράψουν την ικανοποιητική συμπεριφορά πρακτικών συστημάτων που λειτουργούν με αυτόματο έλεγχο ανάδρασης. Η προτεινόμενη έννοια ευστάθειας είναι χρήσιμη σε πρακτικές εφαρμογές, π.χ. όπου χειριστής που παρακολουθεί την εξέλιξη βιομηχανικής χημικής αντίδρασης ερμηνεύει τον υπερακοντισμό ορισμένων βασικών μεταβλητών (θερμοκρασία, πίεση) ως ενδείξεις αστάθειας, και ενδεχομένως ωθείται σε λανθασμένες ενέργειες, όπως ο πρόωρος τερματισμός της αντίδρασης που ενδεχομένως έχει καταστροφικές συνέπειες. Στις περιπτώσεις αυτές, ο υπερακοντισμός των μεταβλητών κατάστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί πρακτικά για τον διαχωρισμό μεταξύ ευσταθούς και ασταθούς συστήματος, λαμβάνοντας μόνον υπόψη την απόκριση του συστήματος σε περιορισμένο χρονικό διάστημα.

Η εργασία παρουσιάζει την έννοια της «ισχυρής ευστάθειας» και την αναπτύσσει για γραμμικά συστήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου. Στην

περίπτωση αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με μία απλή ιδιότητα του πίνακα κατάστασης (συγκεκριμένα ότι είναι αρνητικά-ορισμένος στην περίπτωση συστημάτων συνεχούς χρόνου, η ότι η φασματική νόρμα του είναι μικρότερη της μονάδας για συστήματα διακριτού χρόνου). Ικανές και αναγκαίες συνθήκες που αντιστοιχούν σε φθίνουσα νόρμα του διανύσματος κατάστασης (αλλά όχι μονοτονικά) επίσης ορίζονται και αναλύονται διεξοδικά. Η εξάρτηση της ισχυρής ευστάθειας από γενικούς μετασχηματισμούς ομοιομορφίας αναλύεται, και αποδεικνύεται η ύπαρξη μετασχηματισμών για τους οποίους η ισχυρή ευστάθεια είναι αδύνατη. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η ισχυρή ευστάθεια είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, αποτέλεσμα που οδηγεί στην μορφή Schur ως την πλέον «κανονική μορφή» για την μελέτη της ιδιότητας ισχυρής ευστάθειας πινάκων. Στην συνέχεια, ορισμένες ενδιαφέρουσες αποδεικνύονται και η ιδιότητα ισχυρής ευστάθειας συσχετίζεται με την γωνία των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα κατάστασης και την απόσταση του πίνακα από το σύνολο των κανονικών (normal) πινάκων. Η συσχέτιση αυτή είναι ένδειξη ότι η ιδιότητα ισχυρής ευστάθειας αντιστοιχεί σε μειωμένη ευαισθησία των ιδιοτιμών του πίνακα κατάστασης σε αβέβαιες παραμέτρους και επομένως σε αντίστοιχες συνθήκες ευρωστίας για συστήματα ελέγχου που υπόκεινται σε αβεβαιότητα μοντέλου.

Στην συνέχεια της εργασίας μελετώνται προβλήματα «ισχυρής σταθεροποίησης» για αυτόματα συστήματα ελέγχου. Σε αντίθεση με τα προβλήματα ανάλυσης που περιγράφονται στην προηγούμενη παράγραφο, εδώ εξετάζονται προβλήματα σύνθεσης, που είναι της παρακάτω γενικής μορφής: Έστω γραμμικό δυναμικό σύστημα που δεν έχει την ιδιότητα ισχυρής ευστάθειας. Κάτω από ποιές συνθήκες υπάρχει μετασχηματισμός (στατική ανάδραση καταστάσεως, στατική ανάδραση εξόδου, δυναμική ανάδραση) έτσι ώστε το μετασχηματισμένο σύστημα («κλειστού βρόγχου») να είναι ισχυρά ευσταθές. Πως μπορούμε να εκφράσουμε όλους τους μετασχηματισμούς αυτής της μορφής σε παραμετρική μορφή; Αποδεικνύεται ότι το δυναμικό πρόβλημα ανάγεται στο αντίστοιχο στατικό. Επίσης, με χρήση ιδιοτήτων κυρτότητας, θεωρίας επέκτασης πινάκων και τεχνικές γραμμικών ανισοτήτων πινάκων, είναι δυνατόν να δοθεί πλήρης απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα με χρήση απλών τεχνικών γραμμικής άλγεβρας.

Η δομή της εργασίας είναι ως εξής. Αρχικά παρουσιάζεται μία επισκόπηση των βασικών κλασικών εννοιών ευστάθειας, αρχικά στην γενική μη-γραμμική περίπτωση και κατόπιν για γραμμικά συστήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου. Οι έννοιες αυτές επεκτείνονται με τους ορισμούς ισχυρής ευστάθειας, και τις βασικές της ιδιότητες. Το τελευταίο μέρος της εργασίας επικεντρώνεται στην επίλυση του προβλήματος ισχυρής σταθεροποίησης για συστήματα διακριτού χρόνου.



## Κεφάλαιο 2

Το κεφάλαιο αυτό περιγράφει τα κύρια σημεία της θεωρίας ευστάθειας Lyapunov για δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από συστήματα διαφορικών εξισώσεων (η εξισώσεων διαφορών) πρώτης τάξης, με αναφορά σε γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα συνεχούς η διακριτού χρόνου. Το κεφάλαιο περιλαμβάνει βασικές έννοιες και ορισμούς ευστάθειας (κατά Lyapunov, ασυμπτωτική, ολική), τα αντίστοιχα κριτήρια ευστάθειας (μέσω βασικών θεωρημάτων και των αποδείξεων τους). Η θεωρία που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο αποτελεί την βάση για τους βασικούς ορισμούς “ισχυρής ευστάθειας” που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

### 2.1 Αυτόνομα Συστήματα Συνεχούς Χρόνου.

#### Ορισμός 2.1.1

Έστω  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  με  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Η  $f$  θα λέγεται τοπικά Lipschitz αν, για κάθε κλειστό και φραγμένο  $U \subset \mathbb{D}$ , υπάρχει  $L > 0$  τέτοιο ώστε:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

για κάθε  $x, y \in U$ .

#### Ορισμός 2.1.2

Υποθέτουμε το αυτόνομο μη γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

όπου  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  τοπικά Lipschitz από το  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  στον  $\mathbb{R}^n$ . Θεωρούμε  $\bar{x} \in \mathbb{D}$  σημείο ισορροπίας της (2.1), δηλαδή

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Στο εξής θα θεωρήσουμε για όλους τους ορισμούς - θεωρήματα ως σημείο ισορροπίας το  $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Μπορούμε να το θεωρήσουμε αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας μπορεί να μετατοπιστεί στην αρχή των αξόνων μέσω του μετασχηματισμού  $y = x - \bar{x}$ . Η διαφοροποίηση του  $y$  μας δίνει:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(y + \bar{x}) \equiv g(y) \text{ με } g(0) = 0$$

### Ορισμός 2.1.3

Το σημείο ισορροπίας  $\bar{x} = 0$  της (2.1) είναι:

- Ευσταθές, αν  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  τέτοιο ώστε αν  $\|x\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$  για κάθε  $t > 0$ .
- Ασταθές, αν δεν είναι ευσταθές.
- Ασυμπτωτικά ευσταθές, αν είναι ευσταθές και το  $\delta$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

- Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν είναι ευσταθές και ισχύει:

$$\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

### Παρατηρήσεις

- ❖ Εάν ένα σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και μοναδικό σημείο ισορροπίας της (2.1). Άρα έχει νόημα να διερευνήσουμε ολική ασυμπτωτική ευστάθεια μόνο εάν η (2.1) έχει ένα σημείο ισορροπίας.
- ❖ Τα τρία πρώτα στοιχεία του ορισμού έχουν τοπική έννοια.
- ❖ Η ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας μπορεί να διερευνηθεί από την γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας (Πρώτη Μέθοδος Lyapunov).

### Ευστάθεια Lyapunov

Έστω  $V: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  να είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  που περιέχει την αρχή των αξόνων. Η παράγωγος της  $V$  κατά μήκος της τροχιάς της (2.1) συμβολίζεται με  $\dot{V}(x)$  και δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \\ &= \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x). \end{aligned}$$

Η παράγωγος της  $V$  κατά μήκος των τροχιών του συστήματος εξαρτάται από την εξίσωση του. Άρα η  $\dot{V}$  θα είναι διαφορετική για διαφορετικά συστήματα. Έστω  $\varphi(t, x)$  είναι λύση της (2.1) που ξεκινά από το αρχικό σημείο  $x$  για  $t = 0$  τότε

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\varphi(t, x)) \right|_{t=0}$$

Εάν  $\dot{V}(x) < 0$  τότε η  $V$  θα φθίνει κατά μήκος της λύσης.

### Ορισμός 2.1.4

Μια συνάρτηση  $V$ , ορισμένη σε μια ανοικτή περιοχή  $\mathcal{D}$  του σημείου ισορροπίας, συνεχώς διαφορίσιμη θα λέγεται θετικά ορισμένη εάν:

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Εάν ικανοποιεί την ασθενέστερη συνθήκη  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$  τότε θα λέγεται θετικά ημιορισμένη.

### Θεώρημα 2.1.5 (Lyapunov)

Έστω  $x = 0$  σημείο ισορροπίας της (2.1). Έστω  $V: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, σε περιοχή του  $x = 0$ , στο  $\mathbb{D}$  τέτοια ώστε:

- I.  $V(0) = 0$
- II.  $V(x) > 0$  στο  $\mathbb{D} - \{0\}$
- III.  $\dot{V}(x) \leq 0$  στο  $\mathbb{D}$

Τότε το  $x = 0$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας της (2.1).

Επιπλέον αν  $\dot{V}(x) < 0$  στο  $\mathbb{D} - \{0\}$  τότε το  $x = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας της (2.1).

### Απόδειξη

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Επιλέγουμε  $r \in (0, \varepsilon]$  τέτοιο ώστε:

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < r\} \subset \mathbb{D}.$$

Θεωρούμε:

$$\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x),$$

το ελάχιστο της  $V$  στο  $\partial B_r$ , δηλαδή στο σύνορο του  $B_r$ . Η  $V$  είναι συνεχής και

θετικά ορισμένη συνάρτηση, άρα υπάρχει το ελάχιστό της πάνω στο κλειστό και φραγμένο σύνολο  $\partial B_r$  και μάλιστα είναι και θετικό. Άρα  $\alpha > 0$ . Επιλέγουμε  $\beta \in (0, \alpha)$  και θεωρούμε το σύνολο  $\Omega_\beta = \{x \in B_r : V(x) \leq \beta\}$ . Το σύνολο  $\Omega_\beta$  περιέχεται στο σύνολο  $B_r$ . Το σύνολο  $\Omega_\beta$  έχει την εξής ιδιότητα: Οποιαδήποτε τροχιά που ξεκινά εντός του  $\Omega_\beta$  για  $t = 0$  παραμένει εντός του  $\forall t \geq 0$ . Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0.$$

Αφού το  $\Omega_\beta$  είναι συμπαγές, από τον ορισμό του, τότε από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης, έχουμε ότι η εξίσωση (2.1) έχει μοναδική λύση που ορίζεται  $\forall t \geq 0$  με  $x(0) \in \Omega_\beta$ . Αφού  $V$  συνεχής και  $V(0) = 0, \exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$ . Τότε προκύπτει ότι  $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$  και

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r.$$

Άρα  $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon \forall t \geq 0$ . Έτσι έχουμε ότι το σημείο  $x = 0$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει και η σχέση  $\dot{V}(x) < 0$  στο  $\mathbb{D} - \{0\}$ . Για να δείξουμε την ιδιότητα της ασυμπτωτικής ευστάθειας θα πρέπει να δείξουμε ότι  $x(t) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$  διαφορετικά ότι  $\forall \alpha > 0, \exists T > 0$  τέτοιο ώστε  $\|x(t)\| < \alpha, \forall t > T$ . Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι  $\forall \alpha > 0$  μπορούμε να επιλέξουμε  $b > 0$  τέτοιο ώστε  $\Omega_b \subset B_\alpha$ . Είναι αρκετό δηλαδή να αποδείξουμε ότι  $V(x(t)) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Αφού  $V$  είναι μονοτονικά φθίνουσα και φραγμένη από το 0 τότε έχουμε ότι  $V(x(t)) \rightarrow c \geq 0$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ . Για να δείξουμε ότι  $c = 0$  θα υποθέσουμε ότι  $c > 0$ . Από την συνέχεια της  $V$  έχουμε ότι  $\exists \delta > 0$  τέτοιο ώστε  $B_\delta \subset \Omega_c$ .

Αφού  $V(x(t)) \rightarrow c > 0$  τότε θα υπάρχει τροχιά  $x(t)$  που θα διαφεύγει από την μπάλα  $B_\delta$  για  $t \geq 0$ . Έστω:

$$-\gamma = \max_{\alpha \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x).$$

Τότε  $-\gamma < 0$ , αφού  $\dot{V}(x) < 0$  στο  $\mathbb{D} - \{0\}$ . Άρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(r)) dr \leq V(x(0)) - \gamma t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V(x(t)) - V(x(0)) \leq -\gamma t. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς  $t \rightarrow \infty$  το δεξιό μέλος τείνει στο  $-\infty$  ενώ το αριστερό μέλος τείνει στο  $c - V(x(0))$ . Αυτό είναι άτοπο άρα θα πρέπει  $c = 0$ .  $\square$

### Ορισμός 2.1.6

Μια συνάρτηση  $V$  που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ορισμού 2.1.4 και την τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος 2.1.4 σε περιοχή του σημείου ισορροπίας, ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov για την (2.1).

### Ορισμός 2.1.7

Μια συνάρτηση  $V$  θα λέγεται αρνητικά ορισμένη ή αρνητικά ημιορισμένη εάν η  $\{-V\}$  είναι θετικά ορισμένη ή θετικά ημιορισμένη, αντίστοιχα.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα 2.1.5 ως εξής:

### Θεώρημα 2.1.5.α

Το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  της (2.1) είναι ευσταθές εάν υπάρχει μια συνεχώς διαφορίσιμη, θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V$  έτσι ώστε  $\dot{V}$  να είναι αρνητικά ημιορισμένη συνάρτηση και αν η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ορισμένη τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

### Παρατήρηση

- ❖ Το Θεώρημα Lyapunov μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (2.1). Παρότι αυτό αποτελεί πλεονέκτημα της μεθόδου Lyapunov είναι εν γένει δύσκολο, και δεν υπάρχει γενικός κανόνας, εύρεσης συνάρτησης Lyapunov  $V$ .

Στην συνέχεια δίνεται ένα θεώρημα σχετικά με την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας της (2.1). Το θεώρημα αποδίδεται στους Barbashin-Krasovskii.

### Θεώρημα 2.1.8

Έστω  $x = 0$  σημείο ισορροπίας για την (2.1). Έστω  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow V(x) \Rightarrow +\infty$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Τότε το  $x = 0$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για την (2.1).

- Εκτός από τα παραπάνω θεωρήματα που χαρακτηρίζουν ένα σημείο ισορροπίας ως προς την ευστάθεια του, υπάρχουν και θεωρήματα που ελέγχουν την αστάθεια σημείου ισορροπίας. Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα που διατυπώνουν ικανές συνθήκες αστάθειας σημείου ισορροπίας είναι αυτό του Chetaev.

Πριν την διατύπωση του θεωρήματος θα δοθούν κάποιοι ορισμοί.

Έστω  $V: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση σε μια περιοχή  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  του  $x = 0$ . Υποθέτουμε ότι  $V(0) = 0$  και ένα σημείο  $x_0$  αυθαίρετα κοντά στο  $x = 0$ , έτσι ώστε  $V(x_0) > 0$ . Επιλέγουμε  $r > 0$  τέτοιο ώστε η μπάλα  $\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq r\}$  να περιέχεται στο  $\mathbb{D}$  και θέτουμε  $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{B}_r: V(x) > 0\}$ .

Το σύνολο  $\mathcal{U}$  είναι διάφορο του κενού, ανοικτό και περιέχεται στο  $\mathcal{B}_r$ . Το σύνορο του  $\mathcal{U}$  αποτελείται από την επιφάνεια  $V(x) = 0$  και την σφαίρα  $\|x\| = r$ . Αφού  $V(0) = 0$  το  $x = 0$  βρίσκεται στο σύνολο του  $\mathcal{U}$  που περιέχεται στο  $\mathcal{B}_r$ .

### Θεώρημα 2.1.9 (Chetaev)

Έστω  $x = 0$  σημείο ισορροπίας της (2.1). Έστω  $V: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε  $V(0) = 0$  και  $V(x_0) > 0$  για  $x_0$  με αυθαίρετα μικρή  $\|x_0\|$ . Ορίζουμε το σύνολο  $\mathcal{U}$  όπως παραπάνω και υποθέτουμε ότι  $\dot{V}(x) > 0$  στο  $\mathcal{U}$ .

Τότε το  $x = 0$  είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για την (2.1).

### Απόδειξη

Το  $x_0$  βρίσκεται στο εσωτερικό του  $\mathcal{U}$  και  $V(x_0) = \alpha > 0$ . Η τροχιά  $x(t)$  που ξεκινά από το  $x(0) = x_0$  θα διαφύγει από το σύνολο  $\mathcal{U}$ , αφού όσο η τροχιά  $x(t)$  βρίσκεται εντός του  $\mathcal{U}$  έχουμε ότι  $V(x(t)) \geq \alpha$  και  $\dot{V}(x) > 0$  στο  $\mathcal{U}$ .

Θέτουμε:

$$\gamma = \inf\{\dot{V}(x): x \in \mathcal{U} \text{ και } V(x) \geq \alpha\}.$$

Τότε  $\gamma > 0$  και

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq \alpha + \int_0^t \gamma ds = \alpha + \gamma t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x(t)) \geq \alpha + \gamma t.$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι η τροχιά  $x(t)$  δεν μπορεί να μείνει για πάντα εντός του  $\mathcal{U}$  γιατί η  $V$  είναι φραγμένη στο  $\mathcal{U}$ . Η  $x(t)$  δεν θα διαφύγει από το  $\mathcal{U}$  μέσω της επιφάνειας  $V(x) = 0$  αφού  $V(x(t)) \geq \alpha$ . Άρα θα διαφύγει από το  $\mathcal{U}$  διαμέσου της σφαίρας  $\|x\| = r$ . Αφού αυτό συμβαίνει για αυθαίρετα μικρή  $\|x_0\|$  τότε το  $x = 0$  δεν είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας της (2.1).  $\square$

## Γραμμικά Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 2.2

Θεωρούμε το γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο σύστημα:

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (2.2) είναι όλα τα  $\bar{x}$  για τα οποία ισχύει:  $A\bar{x} = 0$ . Το  $x = 0$  είναι σημείο ισορροπίας του παραπάνω συστήματος και για τον χαρακτηρισμό του ως προς την ευστάθεια του θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοτιμές του  $A$  πίνακα συστήματος.

Η λύση του συστήματος (2.2) με αρχική συνθήκη  $x(0)$  δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = \exp(At) x(0).$$

Κάθε τετραγωνικός πίνακας  $A$  μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή Jordan, μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας ως εξής:

$$J(A) = \text{block-diag} (J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_r(\lambda_r)),$$

όπου  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$  είναι οι  $r$ -διακεκριμένες (μη επαναλαμβανόμενες) ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Το μέγεθος του κάθε  $J_i(\lambda_i)$ -block είναι ίσο με την αλγεβρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής  $\lambda_i$ , με  $i = 1, \dots, r$  και είναι της μορφής:

$$J_i(\lambda_i) = \text{block-diag} (J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots, J_{iu_i}(\lambda_i)),$$

Όπου κάθε  $J_{ij}(\lambda_i)$  είναι της μορφής

$$J_{ij}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

όπου  $u_i$  είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ . Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση του πίνακα  $A$  μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα  $\exp(At)$  ως εξής:

$$\exp(At) = P \exp(Jt) P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} \exp(\lambda_i t) R_{ik}$$

όπου  $m_i$  είναι η τάξη του Jordan μπλοκ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  και  $k \in \mathbb{Z}$ , πολυωνυμικός παράγοντας.

Το παρακάτω θεώρημα αναφέρεται στο χαρακτηρισμό του  $x = 0$  του, συστήματος (2.2), ως προς την ευστάθεια του.

### Θεώρημα 2.2.1

Το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  του συστήματος (2.2) είναι ευσταθές, αν και μόνο αν, για όλες τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  ισχύει  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  και για κάθε ιδιοτιμή με  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίση με την γεωμετρική πολλαπλότητά της.

Επιπλέον το  $x = 0$  του συστήματος (2.2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν, όλες οι ιδιοτιμές έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό δηλαδή,  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .

### Απόδειξη

Από την μορφή που έχει η λύση,  $x(t) = \exp(At) x(0)$ , παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν  $\exp(At)$  είναι φραγμένη συνάρτηση ως προς  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ , δηλαδή  $\exists M > 0: \|\exp(At)\| \leq M < \infty, \forall t \geq 0$ . Έστω ότι μια από τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , τότε θα ισχύει ότι  $\exp(\lambda_i t) \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Άρα για να είναι ευσταθές το σημείο ισορροπίας θα πρέπει όλες οι ιδιοτιμές να βρίσκονται στο κλειστό αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ .

Για τις ιδιοτιμές για τις οποίες ισχύει  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , που βρίσκονται πάνω στον φανταστικό άξονα, θα πρέπει να  $t^{k-1} \rightarrow 1$ , ώστε να είναι φραγμένη  $\forall t \geq 0$ . Άρα πρέπει να ισχύει  $k = 1$ , το οποίο σημαίνει ότι το αντίστοιχο Jordan μπλοκ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή είναι τάξης ένα.

Για την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $x = 0$  θα πρέπει να



ισχύει ότι  $\exp(At) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Αυτό επιτυγχάνεται μόνο εάν ισχύει  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \forall i$ , σύμφωνα με την ανάλυση της  $\exp(At)$ .  $\square$

### Ορισμός 2.2.2

Εάν όλες οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  ικανοποιούν την σχέση  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , τότε ο πίνακας  $A$  του συστήματος (2.2) λέγεται πίνακας ευστάθειας ή πίνακας Hurwitz.

Με βάση τον ορισμό 2.2.2 μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα 2.2.1, στο τμήμα του που αφορά, την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $x = 0$ .

### Θεώρημα 2.2.3

Το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  του συστήματος (2.2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν ο πίνακας συστήματος  $A$  είναι πίνακας Hurwitz.

Για την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $x = 0$  του συστήματος (2.2) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την μέθοδο Lyapunov, όπως αυτή αναλύθηκε στην παράγραφο 2.1.

Θεωρούμε την τετραγωνική συνάρτηση:

$$V(x) = x^T P x,$$

ως μια υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα (2.2), όπου ο πίνακας  $P$  είναι ένας πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Η παράγωγος της  $V$  κατά μήκος της τροχιάς του γραμμικού συστήματος (2.2) δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T (PA + A^T P) x \\ &= -x^T Q x \end{aligned}$$

όπου ο  $Q$  είναι συμμετρικός πίνακας που ορίζεται ως εξής:

$$PA + A^T P = -Q.$$

Εάν ο  $Q$  είναι θετικά ορισμένος πίνακας τότε από το θεώρημα Lyapunov θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  του συστήματος (2.2) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, και κατά συνέπεια ότι  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  του συστήματος (2.2).

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Lyapunov και το θεώρημα που

ακολουθεί είναι θεώρημα χαρακτηρισμού ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας  $x = 0$  του συστήματος (2.2), μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov.

### Θεώρημα 2.2.4

Ένας πίνακας  $A$  είναι πίνακας Hurwitz, ισχύει δηλαδή  $Re\lambda_i < 0$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$ , αν και μόνο αν, για κάθε θετικά ορισμένο, συμμετρικό πίνακα  $Q$  υπάρχει ένας θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας  $P$  που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov.

Επιπλέον αν ο  $A$  είναι πίνακας Hurwitz, τότε ο  $P$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης Lyapunov.

### Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι πίνακας Hurwitz, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Ορίζουμε τον πίνακα  $P$  να έχει την μορφή:

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt$$

Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι αθροίσματα της μορφής  $t^{k-1} \exp(\lambda_i t)$  όπου  $Re\lambda_i < 0$ . Επομένως το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο και ο πίνακας  $P$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Το ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος μπορούμε να το αποδείξουμε ως εξής:

Έστω ότι υπάρχει ένα  $x \neq 0$  τέτοιο ώστε  $x^T P x = 0, \forall t \geq 0$  τότε:

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\Leftrightarrow \int_0^{\infty} x^T \exp(A^T t) Q \exp(At) x dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \exp(At) x \equiv 0, \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, \end{aligned}$$

αφού  $\exp(At)$  είναι μη ιδιάζων πίνακας για όλα τα  $t$ . Άρα ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος.

Τώρα με αντικατάσταση του  $P$  στην εξίσωση Lyapunov θα έχουμε:

$$PA + A^T P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) A dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} A^T \exp(A^T t) Q \exp(At) \\
& = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \\
& = \exp(A^T t) Q \exp(At) \Big|_0^{\infty} \\
& = -Q.
\end{aligned}$$

Άρα ο  $P$  είναι λύση της εξίσωσης Lyapunov. Για την μοναδικότητα του  $P$ , ως λύση της εξίσωσης Lyapunov, θα θεωρήσουμε  $\tilde{P} \neq P$  μια άλλη λύση της εξίσωσης Lyapunov, δηλαδή  $\tilde{P}A + A^T\tilde{P} = -Q$ . Τότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P}) = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με  $\exp(A^T t)$  και από δεξιά με  $\exp(At)$  θα έχουμε ως αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
0 & = \exp(A^T t) [(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P})] \exp(At) \\
& = \exp(A^T t) (P - \tilde{P})A \exp(At) \\
& \quad + \exp(A^T t) A^T (P - \tilde{P}) \exp(At) \\
& = \frac{d}{dt} \exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At).
\end{aligned}$$

Άρα  $\exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At) \equiv E = \text{σταθερός πίνακας}, \forall t \geq 0$ . Αφού ισχύει  $\forall t \geq 0$  τότε για  $t = 0$  θα έχουμε  $a = P - \tilde{P}$ . Δηλαδή ο  $P - \tilde{P}$  θα ικανοποιεί πλέον την σχέση:

$$E = P - \tilde{P} = \exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At), \forall t \geq 0.$$

Λαμβάνοντας τώρα το όριο καθώς  $t \rightarrow \infty$  έχουμε ότι:

$$\exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At) \rightarrow 0, \text{ άρα } P = \tilde{P}. \square$$

### Γραμμικά Συστήματα Διακριτού Χρόνου 2.3

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα γραμμικά αυτόνομα διακριτά συστήματα μιας διάστασης καθώς και με εκείνα πολλών διαστάσεων. Θα ξεκινήσουμε με τα μονοδιάστατα γραμμικά αυτόνομα συστήματα, θεωρώντας την απλή περίπτωση εξίσωσης διαφορών:

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta \text{ με } t = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

όπου  $y_t \in \mathbb{R}$  είναι η μεταβλητή κατάστασης στο χρόνο  $t$  με παραμέτρους τα

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  καθώς και την αρχική κατάσταση στο  $t = 0$  την  $y_0$ .

### Επίλυση (2.3)

Δοσμένης της αρχικής κατάστασης  $y_0$ , δηλαδή της κατάστασης του παραπάνω συστήματος για  $t = 0$ , μπορούμε να βρούμε την τιμή της κατάστασης για  $t = 1$  η οποία θα έχει την μορφή:

$$y_1 = \alpha y_0 + \beta.$$

Δοσμένης τώρα και της κατάστασης για  $t = 1$  βρίσκουμε την κατάσταση του συστήματος για  $t = 2$  με μορφή:

$$y_2 = \alpha y_1 + \beta = \alpha(\alpha y_0 + \beta) + \beta = \alpha^2 y_0 + \alpha\beta + \beta.$$

Όμοια βρίσκουμε και τις καταστάσεις του συστήματος για  $t = 3, 4, 5, \dots$

$$y_3 = \alpha y_2 + \beta = \alpha(\alpha^2 y_0 + \alpha\beta + \beta) + \beta = \alpha^3 y_0 + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta$$

$\vdots$

$$y_t = \alpha^t y_0 + \alpha^{t-1}\beta + \alpha^{t-2}\beta + \dots + \alpha\beta + \beta.$$

Άρα γενικά για  $t = 1, 2, 3, \dots$  θα έχουμε:

$$y_t = \alpha^t y_0 + \beta \sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i.$$

Το  $\sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i$  είναι άθροισμα όρων της γεωμετρικής προόδου  $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{t-1}\}$  το οποίο μπορούμε να το υπολογίσουμε:

$$\sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i = \begin{cases} \frac{1 - \alpha^t}{1 - \alpha} & \text{αν } \alpha \neq 1 \\ t & \text{αν } \alpha = 1. \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω αθροίσματος μπορούμε να εκφράσουμε τώρα την  $y_t$  ως εξής:

$$y_t = \begin{cases} \left[ y_0 - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right] \alpha^t + \frac{\beta}{1 - \alpha} & \text{αν } \alpha \neq 1 \\ y_0 + \beta t & \text{αν } \alpha = 1. \end{cases}$$

### Ορισμός 2.3.1

Ένα  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  θα λέγεται σημείο ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών (2.3) αν ισχύει η ισότητα:

$$\bar{y} = \alpha \bar{y} + \beta.$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι,

$$\bar{y} = \begin{cases} \frac{\beta}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ y_0 & \alpha = 1 \text{ και } \beta = 0. \end{cases}$$

### Πρόταση 2.3.2

Η εξίσωση διαφορών (2.3) έχει σημείο ισορροπίας  $\bar{y}$  αν και μόνο αν  $\{\alpha \neq 1\}$  ή  $\{\alpha = 1 \text{ και } \beta = 0\}$ .

### Πρόταση 2.3.3

Η εξίσωση διαφορών (2.3) έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας  $\bar{y}$  αν και μόνο αν

$$\alpha \neq 1.$$

### Ορισμός 2.3.4

Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{y}$  της εξίσωσης διαφορών (2.3) θα λέγεται:

- Τοπικά ευσταθές αν,  $\exists \varepsilon > 0$  έτσι ώστε  $\forall y_0$  με  $|y_0 - \bar{y}| < \varepsilon$  ισχύει ότι 
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \bar{y}.$$
- Ολικά ευσταθές αν,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \bar{y}, \forall y_0 \in \mathbb{R}$ .

### Παρατήρηση

- ❖ Για να είναι ένα σημείο ισορροπίας της (2.3) ολικά ευσταθές θα πρέπει να είναι και μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Στην συνέχεια θα δοθεί ένα θεώρημα για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $\bar{y}$  της εξίσωσης διαφορών (2.3).

### Θεώρημα 2.3.5

Το σημείο ισορροπίας  $\bar{y} = \frac{\beta}{1-\alpha}$  της εξίσωσης διαφορών,  
$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta, \alpha \neq 1, t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

είναι ευσταθές όταν  $|\alpha| < 1$  και τότε για κάθε τιμή του  $y_0$  ισχύει  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \bar{y}$ . Όταν  $|\alpha| > 1$  το  $\bar{y}$  είναι ασταθές και  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_t| = \infty$  για κάθε αρχική κατάσταση  $y_0 \neq \bar{y}$ .

Αν  $\alpha = -1$  τότε  $y_0 = y_2 = y_4 = \dots$  και  $y_1 = y_3 = y_5 = \dots$ , δηλαδή το  $\bar{y}$  είναι ευσταθές κατά Lyapunov, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

### Απόδειξη

Αν  $\alpha \neq 1$  τότε η λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι η εξής:

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 \alpha^t + \beta \frac{1 - \alpha^t}{1 - \alpha} = y_0 \alpha^t - \frac{\beta}{1 - \alpha} \alpha^t + \frac{\beta}{1 - \alpha} \\ &= y_0 \alpha^t - \bar{y} \alpha^t - \bar{y} = (y_0 - \bar{y}) \alpha^t + \bar{y}. \end{aligned}$$

Άρα:

$$y_t - \bar{y} = (y_0 - \bar{y}) \alpha^t \text{ από το οποίο έχουμε ότι } |y_t - \bar{y}| = |\alpha|^t |y_0 - \bar{y}|.$$

- Αν τώρα  $|\alpha| < 1$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha|^t = 0$  και άρα,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_t - \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \bar{y}$$

για κάθε αρχική κατάσταση  $y_0$ , δηλαδή το  $\bar{y}$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

- Αν  $|\alpha| > 1$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha|^t = \infty$  και άρα,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_t| = \infty$$

για κάθε αρχική κατάσταση  $y_0 \neq \bar{y}$ , δηλαδή το σημείο ισορροπίας  $\bar{y}$  είναι ασταθές.

- Αν  $\alpha = -1$  τότε θα έχουμε ότι  $y_{t+2} = -y_{t+1} + \beta = -(-y_t + \beta) + \beta = y_t$  δηλαδή  $y_0 = y_2 = y_4 = \dots$  και  $y_1 = y_3 = y_5 = \dots$  □

Θα συνεχίσουμε μελετώντας την περίπτωση των  $n$  - διάστατων, πρώτης τάξης, αυτόνομων γραμμικών συστημάτων εξισώσεων διαφορών.

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \\ x_{3t+1} \\ \vdots \\ x_{nt+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

όπου οι αρχικές τιμές για το διάνυσμα κατάστασης,  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$  είναι δοσμένες.

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να περιγραφεί με μορφή εξίσωσης ως εξής:

$$x_{t+1} = Ax_t + B, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  και  $B \in \mathbb{R}^n$  διάνυσμα.

### Επίλυση (2.4)

Δοσμένης της τιμής του διανύσματος κατάστασης για  $t = 0$ , δηλαδή του  $x_0$ , μπορούμε να βρούμε την τιμή του διανύσματος κατάστασης για  $t = 1, 2, 3, \dots$  ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + B \\ x_2 &= Ax_1 + B = A^2x_0 + AB + B \\ x_3 &= Ax_2 + B = A^3x_0 + A^2B + AB + B \\ &\vdots \\ x_t &= A^tx_0 + A^{t-1}B + A^{t-2}B + \dots + AB + B \end{aligned}$$

Έτσι γενικά για  $t = 1, 2, 3, \dots$  θα έχουμε:

$$x_t = A^tx_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^iB.$$

### Πρόταση 2.3.6

Το άθροισμα των όρων της γεωμετρικής προόδου των πινάκων  $\{I, A, A^2, A^3, \dots, A^{t-1}\}$  είναι ίσο με:

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^i = [I - A^t][I - A]^{-1} \quad \text{εάν } |I - A| \neq 0.$$

### Απόδειξη

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^i[I - A] = I + A + A^2 + \dots + A^{t-1} - [A + A^2 + A^3 + \dots + A^t] = I - A^t.$$

Υποθέτουμε ότι  $|I - A| \neq 0$ . Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με την παράσταση  $[I - A]^{-1}$  έχουμε το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.3.6 μπορούμε να αναπαραστήσουμε την λύση του συστήματος  $x_{t+1} = Ax_t + B$  ως εξής:

$$x_t = A^t[x_0 - [I - A]^{-1}B] + [I - A]^{-1}B \quad \text{εάν } |I - A| \neq 0. \quad \square$$

### Ορισμός 2.3.7

Ένα διάνυσμα  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  θα λέγεται σημείο ισορροπίας του αυτόνομου, γραμμικού συστήματος εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης  $x_{t+1} = Ax_t + B$  εάν ισχύει:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό το σημείο ισορροπίας  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ , υπάρχει αν και μόνο αν  $|I - A| \neq 0$ .

### Πρόταση 2.3.8

Το σημείο ισορροπίας του συστήματος  $x_{t+1} = Ax_t + B$ , είναι μοναδικό αν και μόνο αν ισχύει:

$$|I - A| \neq 0.$$

Στη συνέχεια θα δοθούν τρία λήμματα, χωρίς απόδειξη, και δύο προτάσεις που θα χρησιμοποιηθούν στους χαρακτηρισμούς ευστάθειας του σημείου ισορροπίας του παραπάνω συστήματος.

### Λήμμα 2.3.9

Έστω  $A = (a_{ij})$  να είναι ένας  $n \times n$  πίνακας με  $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

- Αν ο πίνακας  $A$  έχει  $n$  διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ , τότε υπάρχει ένας μη ιδιάζων  $n \times n$  πίνακας,  $Q$ , τέτοιος ώστε:

$$A = QDQ^{-1},$$

όπου ο  $D$  είναι διαγώνιος πίνακας της μορφής:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Επίσης ο  $Q$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας  $n \times n$  με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ ,  $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ , δηλαδή  $Q = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_n]$ .

- Αν ο πίνακας  $A$  έχει μια ιδιοτιμή  $\lambda$ , αλγεβρικής πολλαπλότητας  $n$  και γεωμετρικής πολλαπλότητας 1, τότε υπάρχει ένας μη ιδιάζων  $n \times n$  πίνακας,  $Q$ , τέτοιος ώστε:



$$A = QDQ^{-1},$$

όπου ο  $D$  είναι της μορφής:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

### Λήμμα 2.3.10

Αν ο πίνακας  $A$  έχει  $n/2$  το πλήθος ζεύγη διακεκριμένων μιγαδικών ιδιοτιμών, δηλαδή  $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_{n/2}, \bar{\mu}_{n/2}\}$ , όπου,

$$\mu_j = \alpha_j + \beta_j i$$

$$\bar{\mu}_j = \alpha_j - \beta_j i$$

τότε υπάρχει ένας μη ιδιάζων  $n \times n$  πίνακας  $V$ , τέτοιος ώστε  $A = VDV^{-1}$ , όπου

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_{n/2} & -\beta_{n/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_{n/2} & \alpha_{n/2} \end{bmatrix}.$$

### Λήμμα 2.3.11

Έστω  $A = (a_{ij})$  να είναι ένας  $n \times n$  πίνακας με  $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Τότε υπάρχει ένας  $n \times n$  μη ιδιάζων πίνακας  $V$ , τέτοιος ώστε

$$A = VDV^{-1},$$

όπου  $D$  είναι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα  $A$ , δηλαδή:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_h & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_m \end{bmatrix}.$$

Το λήμμα 2.3.11 αποτελεί γενίκευση των δύο προηγούμενων λημμάτων, στην περίπτωση που ο πίνακας  $A$  αποτελείται ταυτόχρονα από πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές, πραγματικές επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές και διακεκριμένες μιγαδικές ιδιοτιμές. Έτσι κάθε  $D_i, i = 1, \dots, m$  διαμορφώνεται σύμφωνα με τις αναλύσεις των δύο προηγούμενων λημμάτων.

### Πρόταση 2.3.12

Το μη ομογενές σύστημα πρώτης τάξης γραμμικών εξισώσεων διαφορών:

$$x_{t+1} = Ax_t + B,$$

μπορεί να μετασχηματιστεί σε ομογενές σύστημα πρώτης τάξης γραμμικών εξισώσεων:

$$z_{t+1} = Az_t,$$

όπου  $z_t \equiv x_t - \bar{x}$  με  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$  να είναι το σημείο ισορροπίας του αρχικού μη ομογενούς συστήματος.

### Απόδειξη

Έστω  $z_t \equiv x_t - \bar{x}$ . Έχουμε άμεσα ότι  $z_{t+1} \equiv x_{t+1} - \bar{x}$ . Δεδομένου ότι:

$$x_{t+1} = Ax_t + B,$$

τότε,

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= Ax_t + B - \bar{x} \\ &= A(z_t + \bar{x}) + B - \bar{x} \\ &= Az_t - [I - A]\bar{x} + B \end{aligned}$$

Όμως  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ . Έτσι προκύπτει ότι:

$$z_{t+1} = Az_t. \square$$

### Πρόταση 2.3.13

Η λύση του μη ομογενούς συστήματος πρώτης τάξης, γραμμικών εξισώσεων διαφορών:

$$x_{t+1} = Ax_t + B,$$

δίνεται από την εξής παράσταση,

$$x_t = QD^tQ^{-1}(x_0 - \bar{x}) + \bar{x},$$

όπου  $D$  είναι ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan του  $A$ ,  $x_0$  είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος και  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$  το σημείο ισορροπίας του μη ομογενούς συστήματος.

### Απόδειξη

Έστω  $z_t \equiv x_t - \bar{x}$ . Από την πρόταση 2.3.12 έχουμε:

$$z_{t+1} = Az_t.$$

Από το λήμμα 2.3.11 υπάρχει μη ιδιάζων πίνακας  $Q$  τέτοιος ώστε  $A = QDQ^{-1}$ , όπου ο πίνακας  $D$  είναι πίνακας Jordan. Άρα:

$$z_{t+1} = QDQ^{-1}z_t.$$

Έστω  $y_t \equiv Q^{-1}z_t$ . Προκύπτει τότε το εξής:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= Q^{-1}z_{t+1} \\ &= Q^{-1}QDQ^{-1}z_t \\ &= Dy_t. \end{aligned}$$

Με χρήση επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης έχουμε:

$$y_t = D^t y_0.$$

Όμως  $y_0 = Q^{-1}z_0$  και  $z_0 \equiv x_0 - \bar{x}$ , άρα έχουμε ότι:

$$y_t = D^t Q^{-1}(x_0 - \bar{x}).$$

Περαιτέρω έχουμε  $y_t \equiv Q^{-1}z_t \Rightarrow z_t = Qy_t \Rightarrow x_t - \bar{x} = Qy_t \Rightarrow x_t = Qy_t + \bar{x}$ .

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έχουμε για την λύση του μη ομογενούς συστήματος πρώτης τάξης, γραμμικών εξισώσεων διαφορών:

$$x_t = QD^tQ^{-1}(x_0 - \bar{x}) + \bar{x}. \square$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω λημμάτων και προτάσεων θα προχωρήσουμε στην ανάπτυξη θεωρημάτων για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του μη ομογενούς συστήματος γραμμικών εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Σημαντικό παράγοντα, για τα επόμενα θεωρήματα, έχουν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  του συστήματος και έτσι θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις που ο πίνακας έχει:

- 1) διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ .
- 2)  $n$ -ίδιες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda\}$ .

3)  $n/2$  το πλήθος ζεύγη διακεκριμένων μιγαδικών ιδιοτιμών.

Διακεκριμένες Πραγματικές Ιδιοτιμές.

Θεωρούμε το πολυδιάστατο, γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$x_{t+1} = Ax_t + B \text{ με } t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  και  $B \in \mathbb{R}^n$ . Θεωρούμε επίσης ότι ο πίνακας  $A$  έχει διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ , ή γενικότερα ότι ο πίνακας  $A$  είναι απλής δομής. Θεωρούμε επίσης ότι  $|I - A| \neq 0$ .

Από τα προηγούμενα λήμματα, υπάρχει ένας μη ιδιάζων  $n \times n$  πίνακας  $Q$  με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  τέτοιος ώστε:

$$x_t = Qy_t + \bar{x},$$

με  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$  να είναι το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Όμως γνωρίζουμε από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης ότι:

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

όπου  $D$  είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , δηλαδή:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Με επαναληπτική μέθοδο επίλυσης του  $y_{t+1} = Dy_t$  για  $t = 0, 1, 2, \dots, n$  έχουμε ότι η λύση του είναι η  $y_t = D^t y_0$ , δηλαδή

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}.$$

Η σχέση αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί και ως εξής:

$$y_{it} = \lambda_i^t y_{i0} \text{ με } i = 1, 2, \dots, n.$$

Από την πρόταση 2.3.13 έχουμε  $x_t = Qy_t + \bar{x}$  άρα σε μορφή πινάκων γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^t y_{10} \\ \lambda_2^t y_{20} \\ \vdots \\ \lambda_n^t y_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή,

$$x_{it} = \sum_{j=1}^n Q_{ij} y_{j0} \lambda_j^t + \bar{x}_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, n$$

Με χρήση της τελευταίας σχέσης θα δοθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του συστήματος.  $\square$

### Θεώρημα 2.3.14

Θεωρούμε το σύστημα  $x_{t+1} = Ax_t + B$ , όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$  με το  $x_0$  δοσμένο. Υποθέτουμε ότι  $|I - A| \neq 0$  και ότι ο πίνακας  $A$  έχει διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ . Τότε

- Το σημείο ισορροπίας  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν,

$$|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}$  αν και μόνο αν.  $\forall j = 1, 2, \dots, n$

$$\{|\lambda_j| < 1 \text{ ή } y_{j0} = 0\},$$

όπου  $y_0 = Q^{-1}(x_0 - \bar{x})$ , και ο  $Q$  είναι μη ιδιάζων  $n \times n$  πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ .

### Απόδειξη

Και τα δύο σημεία του θεωρήματος προκύπτουν άμεσα από την σχέση,

$$x_{it} = \sum_{j=1}^n Q_{ij} y_{j0} \lambda_j^t + \bar{x}_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, n$$

που βρίσκεται στην προηγούμενη ανάλυση πριν το θεώρημα.  $\square$

### Ίδιες πραγματικές ιδιοτιμές.

Θεωρούμε το πολυδιάστατο, γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$x_{t+1} = Ax_t + B \text{ με } t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  και  $B \in \mathbb{R}^n$ . Θεωρούμε επίσης ότι ο πίνακας  $A$  έχει  $n$ -ίδιες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda\}$  καθώς

και ότι  $|I - A| \neq 0$ . Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση υπάρχει μη ι-διάζων  $n \times n$  πίνακας  $Q$  με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  τέτοιος ώστε:

$$x_t = Qy_t + \bar{x},$$

με  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$  να είναι το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Όμως γνωρίζουμε από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης ότι:

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

με

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Με επαναληπτική μέθοδο επίλυσης του  $y_{t+1} = Dy_t$  για  $t = 0, 1, 2, \dots, n$  έχουμε ότι η λύση του είναι η  $y_t = D^t y_0$ , για  $t > n$  ο πίνακας  $D^t$  είναι:

$$D^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t\lambda^{t-1} & \lambda^t & 0 & \ddots & 0 \\ \frac{t(t-1)\lambda^{t-2}}{2!} & t\lambda^{t-1} & \lambda^t & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t(t-1)\dots(t-n+2)\lambda^{t-n+1}}{(n-1)!} & \dots & \dots & t\lambda^{t-1} & \lambda^t \end{bmatrix}.$$

Άρα για τις τιμές του διανύσματος κατάστασης  $y_t$  για  $t > n$  έχουμε:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \lambda^t y_{10} \\ y_{2t} &= t\lambda^{t-1} y_{10} + \lambda^t y_{20} \\ y_{3t} &= \frac{t(t-1)\lambda^{t-2}}{2!} y_{10} + t\lambda^{t-1} y_{20} + \lambda^t y_{30} \\ &\vdots \\ y_{nt} &= \frac{t(t-1)\dots(t-n+2)\lambda^{t-n+1}}{(n-1)!} y_{10} + \dots + \lambda^t y_{n0}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι για τα  $i = 1, 2, \dots, n$

$$y_{it} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{t}{k} \lambda^{t-k} y_{i-k,0}$$

Από το οποίο με αντικατάσταση στην σχέση  $x_t = Qy_t + \bar{x}$  έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^t y_{10} \\ t\lambda^{t-1}y_{10} + \lambda^t y_{20} \\ \vdots \\ \frac{t(t-1)\dots(t-n+2)\lambda^{t-n+1}}{(n-1)!} y_{10} + \cdots + \lambda^t y_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

Άρα  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$x_{it} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{t}{m} \lambda^{t-m} K_{i,m+1} + \bar{x}_i,$$

Με  $K_{i,m+1}$  οι σταθερές που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό των γραμμών του πίνακα  $Q$  με το διάνυσμα αρχικής κατάστασης  $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ .  $\square$

### Θεώρημα 2.3.15

Θεωρούμε το σύστημα  $x_{t+1} = Ax_t + B$ , όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$  με το  $x_0$  δοσμένο. Υποθέτουμε ότι  $|I - A| \neq 0$  και ότι ο πίνακας  $A$  έχει  $n$ -ίδιες πραγματικές ιδιοτιμές  $\{\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda\}$ . Τότε το σημείο ισορροπίας,  $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ , είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν

$$|\lambda| < 1.$$

### Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από την σχέση  $x_{it} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{t}{m} \lambda^{t-m} K_{i,m+1} + \bar{x}_i$ .  $\square$

### $n/2$ το Πλήθος Ζεύγη Διακεκριμένων Μιγαδικών Ιδιοτιμών.

Θεωρούμε το πολυδιάστατο, γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$x_{t+1} = Ax_t + B \text{ με } t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Υποθέτουμε ότι ο  $n \times n$  πίνακας  $A$  έχει  $n/2$  το πλήθος ζεύγη διακεκριμένων μιγαδικών ιδιοτιμών, δηλαδή  $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_{n/2}, \bar{\mu}_{n/2}\}$ , όπου,

$$\mu_j = a_j + \beta_j i$$





$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^t (\cos t\theta_1 y_{10} - \sin t\theta_1 y_{20}) \\ r_1^t (\sin t\theta_1 y_{10} + \cos t\theta_1 y_{20}) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Άρα για  $i = 1, 2, \dots, n$  οι τιμές των  $x_{it}$  δίνονται από τον τύπο,

$$x_{it} = \sum_j r_j^t [M_{ij} \cos t\theta_j + \tilde{M}_{ij} \sin t\theta_j] + \bar{x}_i,$$

όπου  $M_{ij} \equiv Q_{i,2j-1}y_{2j-1,0} + Q_{i,2j}y_{2j,0}$  και  $\tilde{M}_{ij} = Q_{i,2j}y_{2j-1,0} - Q_{i,2j-1}y_{2j,0}$  και αυ-  
τά ορίζονται για όλα τα  $j = 1, 2, \dots, n/2$ .  $\square$

### Θεώρημα 2.3.16

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα  $x_{t+1} = Ax_t + B$ , όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$ . Υποθέτου-  
με ότι  $|I - A| \neq 0$  και επίσης ότι ο πίνακας  $A$  έχει  $n/2$  το πλήθος ζεύγη δια-  
κεκριμένων μιγαδικών ιδιοτιμών, δηλαδή  
 $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_{n/2}, \bar{\mu}_{n/2}\}$ , όπου για  $j = 1, 2, \dots, n/2$

$$\begin{aligned} \mu_j &= a_j + \beta_j i, \\ \bar{\mu}_j &= a_j - \beta_j i. \end{aligned}$$

Τότε το σημείο ισορροπίας του συστήματος  $\bar{x}$ , θα είναι ολικά ασυμπτωτι-  
κά ευσταθές αν και μόνο αν:

$$r_j = \sqrt{(\alpha_j^2 + \beta_j^2)} < 1, \forall j = 1, 2, \dots, n/2.$$

### Απόδειξη

Για όλα τα  $t$  ισχύει,  $0 \leq |\cos t\theta_j| \leq 1$  και  $0 \leq |\sin t\theta_j| \leq 1$ , από την σχέση  
τώρα που αναπαριστά την λύση του συστήματος  
 $x_{it} = \sum_j r_j^t [M_{ij} \cos t\theta_j + \tilde{M}_{ij} \sin t\theta_j] + \bar{x}_i$  έχουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{it} = \bar{x} \Leftrightarrow r_j < 1 \forall j = 1, 2, \dots, n/2. \square$$

### Μη Γραμμικά Συστήματα Διακριτού Χρόνου 2.4

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε κυρίως την εφαρμογή του θεωρή-  
ματος Lyapunov στο μη γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.5}$$

Οπού  $f: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^k$ , συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε το  $x^*$  να είναι το σημείο ισορροπίας του παραπάνω συστήματος, δηλαδή  $f(x^*) = 0$ . Θεωρούμε την συνάρτηση  $V: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Η μεταβολή της επί του συστήματος ορίζεται ως εξής:

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

και

$$\Delta V(x_n) = V(f(x_n)) - V(x_n) = V(x_{n+1}) - V(x_n).$$

Παρατηρούμε πως αν  $\Delta V(x) \leq 0$  τότε η  $V$  είναι φθίνουσα κατά μήκος των λύσεων του συστήματος.

### Ορισμός 2.4.1

Μια συνάρτηση  $V$  θα λέγεται συνάρτηση Lyapunov στο υποσύνολο  $\mathbb{H}$  του  $\mathbb{R}^k$  αν:

- I. Η  $V$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{H}$
- II.  $\Delta V(x) \leq 0$ , όταν  $x$  και  $f(x)$  ανήκουν στο  $\mathbb{H}$ .

Έστω  $B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^k: \|y - x\| < \gamma\}$  να είναι η μπάλα στον  $\mathbb{R}^k$  με κέντρο το  $x$  και ακτίνα  $\gamma$ .

### Θεώρημα Lyapunov 2.4.2

Αν  $V$  είναι συνάρτηση Lyapunov του συστήματος (2.5) σε περιοχή  $\mathbb{H}$  του σημείου ισορροπίας  $x^*$  και  $V$  θετικά ορισμένη στο  $x^*$ , τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Αν ισχύει επιπλέον ότι  $\Delta V(x) < 0$  όταν  $x, f(x) \in \mathbb{H}$  και  $x \neq x^*$ , τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν ισχύει επίσης:

$$\begin{cases} \mathbb{G} = \mathbb{H} = \mathbb{R}^k \\ V(x) \rightarrow \infty \text{ καθώς } \|x\| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

τότε το σημείο ισορροπίας  $x^*$  είναι ολικά ευσταθές.

### Απόδειξη

Επιλέγουμε  $\alpha_1 > 0$  τέτοιο ώστε  $B(x^*, \alpha_1) \subset \mathbb{G} \cap \mathbb{H}$ . Αφού η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση, υπάρχει  $\alpha_2 > 0$  τέτοιο ώστε αν  $x \in B(x^*, \alpha_2)$ , τότε  $f(x) \in B(x^*, \alpha_1)$ . Έστω  $0 < \varepsilon < \alpha_2$  ορίζουμε  $\psi(\varepsilon) = \min\{V(x) | \varepsilon \leq \|x - x^*\| \leq \alpha_1\}$ . Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει  $0 < \delta < \varepsilon$  τέτοιο ώστε  $V(x) < \psi(\varepsilon)$  όταν  $\|x - x^*\| < \delta$ . Αν τώρα  $x_0 \in B(x^*, \delta)$ , τότε  $x_n \in B(x^*, \varepsilon)$  για κάθε  $n \geq 0$ .

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Για να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια, υποθέτουμε ότι  $x_0 \in B(x^*, \delta)$ . Τότε  $x_n \in B(x^*, \varepsilon)$  για κάθε  $n \geq 0$ . Αν  $\{x_n\}$  δεν συγκλίνει στο  $x^*$ , τότε θα υπάρχει μια υπακολουθία  $\{x_{n_i}\}$  που θα συγκλίνει στο  $y \in \mathbb{R}^k$ . Έστω  $E \subset B(x^*, \alpha_1)$  να είναι ανοικτή περιοχή του  $y$  με  $x^* \notin E$ . Ορίζουμε την  $h(x) = V(f(x))/V(x)$ , καλά ορισμένη και συνεχής, με  $h(x) < 1 \forall x \in E$ . Αν  $\eta \in (h(y), 1)$  τότε θα υπάρχει  $a > 0$  έτσι ώστε  $x \in B(y, a) \Rightarrow h(x) \leq \eta$ . Για μεγάλα  $n_i$  θα έχουμε:

$$V(f(x_{n_i})) \leq \eta V(x_{n_i-1}) \leq \eta^2 V(x_{n_i-2}) \leq \dots \leq \eta^{n_i} V(x_0).$$

Άρα,

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x_{n_i}) = 0.$$

Όμως  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x_{n_i}) = V(y)$ , άρα  $V(y) = 0$  και θα έχουμε ότι  $y = x^*$ . Για να αποδείξουμε την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια, θα αποδείξουμε ότι όλες οι λύσεις είναι φραγμένες και σε συνδυασμό με το προηγούμενο σκέλος της απόδειξης θα έχουμε το ζητούμενο. Υποθέτουμε ότι μια λύση του συστήματος, έστω η  $x_n$  είναι μη φραγμένη, άρα μια υπακολουθία της έστω η  $x_{n_i} \rightarrow \infty$  καθώς  $n_i \rightarrow \infty$ .

Από την σχέση  $V(x) \rightarrow \infty$  καθώς  $\|x\| \rightarrow \infty$ , θα έχουμε ότι  $V(x_{n_i}) \rightarrow \infty$  καθώς  $n_i \rightarrow \infty$ , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός  $V(x_0) > V(x_{n_i})$  για κάθε  $i$ .

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.  $\square$

### Παρατήρηση

- Αν  $V$  είναι συνάρτηση Lyapunov του συστήματος στο σύνολο,  $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| > a\}$  για κάποιο  $a > 0$  και αν ισχύει η σχέση  $V(x) \rightarrow \infty$  καθώς  $\|x\| \rightarrow \infty$ , τότε όλες οι λύσεις του συστήματος (2.5) είναι φραγμένες.

Σημαντικό στις εφαρμογές είναι και ο έλεγχος ως προς την αστάθεια του σημείου ισορροπίας του συστήματος (2.5) και για αυτό το λόγο ακολουθεί το εξής θεώρημα.

### Θεώρημα 2.4.3

Εάν  $\Delta V$  είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση σε περιοχή του σημείου ισορροπίας  $x^* = 0$  και υπάρχει μια ακολουθία  $\alpha_i \rightarrow 0$  με  $V(\alpha_i) > 0$ , τότε η μηδενική λύση του συστήματος (2.5) είναι ασταθής.

### Απόδειξη

Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με εκείνη του θεωρήματος Chetaev για τα αυτόνομα μη γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου και για αυτό παραλείπεται.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε αν  $\Delta V$  ήταν αρνητικά ορισμένη και  $V(\alpha_i) < 0$ .

Στην συνέχεια θα επανέλθουμε στα γραμμικά αυτόνομα συστήματα διακριτού χρόνου για εισάγουμε την ευστάθεια σημείου ισορροπίας μέσω της εξίσωσης Lyapunov, με την βοήθεια της μεταβολής της  $V$ , όπως ορίστηκε πριν.

Όπως και στα γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου έτσι και εδώ μπορούμε να ελέγξουμε ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια το σημείο ισορροπίας  $x = 0$ , του συστήματος:

$$x_{n+1} = Ax_n$$

όπου  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , με την βοήθεια της εξίσωσης Lyapunov. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή  $V(x) = x^T Bx$ , όπου  $B$  να είναι πραγματικός συμμετρικός πίνακας.

Ο πίνακας  $B$  είναι θετικά ορισμένος αν η  $V(x) = x^T Bx$  είναι θετικά ορισμένη. Η μεταβολή της  $V$  κατά μήκος των λύσεων του συστήματος  $x_{n+1} = Ax_n$  δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\Delta V(x_n) &= x_n^T A^T B A x_n - x_n^T B x_n \\ &= x_n^T (A^T B A - B) x_n\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι  $\Delta V < 0 \Leftrightarrow A^T B A - B = -C$  για  $C$  θετικά ορισμένο πίνακα.  $\square$

### Θεώρημα 2.3.4

Η μηδενική λύση  $x = 0$  του συστήματος  $x_{n+1} = Ax_n$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν για κάθε θετικά ορισμένο, συμμετρικό πίνακα  $C$  η εξίσωση Lyapunov

$A^T B A - B = -C$  έχει μοναδική λύση τον πίνακα  $B$ , που είναι και αυτός συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

### Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η μηδενική λύση,  $x = 0$ , είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Έστω  $C$  ένας θετικά ορισμένος και συμμετρικός πίνακας. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση Lyapunov έχει μοναδική λύση  $B$ . Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με τον πίνακα  $(A^T)^r$  και από δεξιά με τον πίνακα  $A^r$  την εξίσωση Lyapunov  $A^T B A - B = -C$ . Έχουμε δηλαδή,

$$(A^T)^{r+1} B A^{r+1} - (A^T)^r B A^r = -(A^T)^r C A^r.$$

Λαμβάνοντας το όριο,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n [(A^T)^{r+1} B A^{r+1} - (A^T)^r B A^r] = - \sum_{r=0}^n (A^T)^r C A^r,$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [B - (A^T)^{n+1} B A^{n+1}] = \sum_{r=0}^n (A^T)^r C A^r.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.3.14 έχουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^T)^{n+1} B A^{n+1} = 0$ .

Άρα έχουμε ως μοναδική λύση της εξίσωσης, τον πίνακα:

$$B = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r C A^r,$$

ο οποίος είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός.  $\square$

## Κεφάλαιο 3

Η έννοια της ισχυρής ευστάθειας γραμμικών αυτόνομων συστημάτων είναι μια έννοια ισχυρότερη από τους κλασσικούς ορισμούς ασυμπτωτικής ευστάθειας ή ευστάθειας κατά Lyapunov. Οι δύο αυτοί ορισμοί είναι κατάλληλοι όταν θέλουμε να φράξουμε τις μεταβλητές του συστήματος, αλλά δεν αποκλείουν φαινόμενα υπερακοντισμού των μεταβλητών αυτών (δηλαδή μη μονοτονική συμπεριφορά των μεταβλητών που περιγράφονται ως συναρτήσεις χρόνου). Αντίθετα, η έννοια της ισχυρής ευστάθειας εξασφαλίζει ότι η (Ευκλείδεια) νόρμα του διανύσματος των μεταβλητών, που περιγράφουν το σύστημα, είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, για κάθε διάνυσμα αρχικών συνθηκών. Η ιδιότητα αυτή είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις πρακτικών προβλημάτων και μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική μορφή προβλημάτων ελέγχου με περιορισμούς απόκρισης. Τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν, προβλήματα αυτομάτου ελέγχου ρομποτικού βραχίονα σε περιορισμένο χώρο, η βιομηχανικού ελέγχου χημικών αντιδράσεων, όπου φαινόμενα υπερακοντισμού κυρίων μεταβλητών, όπως αυτά της θερμοκρασίας ή της πίεσης, προσλαμβάνονται από τους χειριστές ως ενδείξεις απώλειας ελέγχου, και οδηγούν στον τερματισμό της χημικής διαδικασίας.

### Ισχυρή Ευστάθεια Δυναμικών Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρούμε το γραμμικό, αυτόνομο σύστημα:

$$S(A): \dot{x} = Ax, A \in R^{n \times n}, \quad (3.1)$$

όπου ο πίνακας  $A$  αναλύεται ως  $A = UJV$  με  $J$  να είναι ο πίνακας Jordan του  $A$  και έστω ότι  $U, V$  να είναι οι πίνακες των αριστερών και δεξιών ιδιοδιανυσμάτων αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει  $U = V^{-1}$ .

### Παρατήρηση

- Για τα γραμμικά, αυτόνομα δυναμικά συστήματα, απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για την ύπαρξη ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  να βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλαδή να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ( $Re(\lambda_i) < 0$ ).

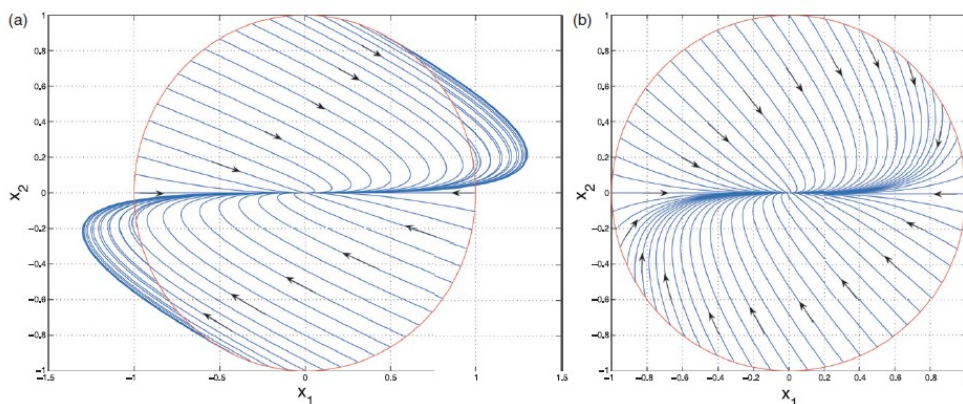
- Αντίστοιχα, απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για την ύπαρξη ευστάθειας κατά Lyapunov είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  να βρίσκονται στο κλειστό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο ( $Re(\lambda_i) \leq 0$ ) και οι ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος μηδέν να έχουν απλή δομή (ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα).
- Για τα γραμμικά, αυτόνομα δυναμικά συστήματα μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $t_0 = 0$ . Επίσης υποθέτουμε ότι το  $x(t_0) = 0$ , είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Στη συνέχεια θα δοθούν τρεις ορισμοί για την ισχυρή ευστάθεια που συνδέονται με την απουσία υπερακοντισμών.

### Ορισμός 3.1

Για το σύστημα (3.1) ορίζουμε τα εξής:

1. Το  $S(A)$  είναι ισχυρά ευσταθές κατά Lyapunov, αν και μόνο αν,  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|, \forall t > t_0$  και  $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .
2. Το  $S(A)$  είναι ολικά ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές (κατά γενική έννοια), αν και μόνο αν,  $\|x(t)\| < \|x(t_0)\|, \forall t > t_0$  και  $\forall x(t_0) \neq 0$ .
3. Το  $S(A)$  είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν,  $\frac{d\|x(t)\|}{dt} < 0, \forall t \geq t_0$  και  $\forall x(t_0) \neq 0$ .



### Παρατηρήσεις

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ένα σύστημα το οποίο παρουσιάζει υπερακοντισμό (a) και ένα σύστημα στο οποίο απουσιάζουν υπερακοντισμοί (b) και παρατηρείται η μονοτονική συμπεριφορά των τροχιών της λύσης του.
- Η ισχυρή ευστάθεια Lyapunov επάγει ευστάθεια κατά Lyapunov. Για να την απόδειξη του ισχυρισμού, επιλέγουμε  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$  στον ορισμό 3.1.
- Η ισχυρή ασυμπτωτική ευστάθεια (και για τις δυο περιπτώσεις του ορισμού 3.2) επάγει ασυμπτωτική ευστάθεια. Αφού  $\|x(t)\|$  είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση (το  $S(A)$  σύστημα είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές) τότε η  $\|x(t)\|$  θα πρέπει να συγκλίνει καθώς  $t \rightarrow \infty$ , από τη στιγμή που η νόρμα είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν. Αν το όριο της  $\|x(t)\|$  δεν είναι το μηδέν, τότε η τροχιά  $x(t)$  θα συγκλίνει σε κάποιο σημείο ισορροπίας  $x_e(t)$  του συστήματος.
- Η ιδιότητα της ισχυρής ευστάθειας κατά Lyapunov του συστήματος  $S(A)$ , συνεπάγεται ότι οι τροχιές του συστήματος δεν μπορούν να διαφύγουν από την σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα την νόρμα της αρχικής συνθήκης,  $r_0 = \|x(t_0)\|$ .
- Η ιδιότητα της ισχυρής ασυμπτωτικής ευστάθειας του συστήματος  $S(A)$ , συνεπάγεται ότι όλες οι τροχιές εισέρχονται σε κάθε σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\|x(t)\| = r \leq r_0$  από μη επαπτομενική τροχιά. Ενώ αν το σύστημα  $S(A)$  είναι ισχυρά ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές οι τροχιές μπορούν να εισέρχονται στις παραπάνω σφαίρες επαπτομενικά.
- Η ισχυρή ασυμπτωτική ευστάθεια συνεπάγεται ισχυρή ολική ασυμπτωτική ευστάθεια η οποία με την σειρά της συνεπάγεται ισχυρή κατά Lyapunov ευστάθεια.
- Εάν ένα σύστημα δεν παρουσιάζει υπερακοντισμούς είναι τουλάχιστον ισχυρά ευσταθές κατά Lyapunov, αλλά το αντίθετο δεν μπορούμε να το ισχυριστούμε. Εάν ένα σύστημα είναι ασταθές όμως, τότε παρουσιάζει υπερακοντισμούς.

Στη συνέχεια θα δοθεί θεώρημα με τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε στο σύστημα (3.1) να έχει την ιδιότητα της ισχυρής ευστάθειας. Πριν από το θεώρημα θα προηγηθεί ένα λήμμα χωρίς απόδειξη.



### Λήμμα 3.2

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή  $Q(x, A) = x^T Ax$ , η οποία παράγεται από το συμμετρικό τμήμα του πίνακα  $A$ , δηλαδή  $\bar{A} = \frac{1}{2}(A + A^T)$ . Η τετραγωνική μορφή  $Q$  είναι αρνητικά ορισμένη (ημιορισμένη) αν και μόνο αν,  $\bar{A} = \frac{1}{2}(A + A^T)$  ικανοποιεί τις εξής ισοδύναμες συνθήκες:

- I.  $\bar{A}$  είναι αρνητικά ορισμένο (ημιορισμένο).
- II.  $\bar{A}$  έχει μόνο αρνητικές ιδιοτιμές.

### Θεώρημα 3.3

Για το σύστημα  $S(A): \dot{x} = Ax, A \in R^{n \times n}$  (3.1) ισχύουν τα ακόλουθα:

- i. Το  $S(A)$  είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν,  
 $A + A^T < 0$ .
- ii. Το  $S(A)$  είναι ολικά ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν,  
 $A$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και  $A + A^T \leq 0$ .
- iii. Το  $S(A)$  είναι ισχυρά ευσταθές κατά Lyapunov, αν και μόνο αν,  
 $A + A^T \leq 0$ .

### Απόδειξη

- i. Από τον ορισμό της νόρμας  $\|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t)$  προκύπτει,

$$\frac{d\|x(t)\|^2}{dt} = \dot{x}^T(t)x(t) + x(t)^T \dot{x}(t) = x^T(t)(A + A^T)x(t)$$

ή

$$\frac{d\|x(t)\|^2}{dt} = x^T(t_0)e^{A^T(t-t_0)}(A + A^T)e^{A(t-t_0)}x(t_0).$$

Αφού ο πίνακας  $e^{A(t-t_0)}$  είναι μη ιδιάζων, τότε  $\frac{d\|x(t)\|^2}{dt} < 0$  για όλα  $t \geq t_0, x(t_0) \neq 0$ , αν και μόνο αν,  $A + A^T < 0$ .

- ii. Υποθέτουμε ότι το σύστημα  $S(A)$  είναι ολικά ισχυρά ευσταθές. Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, προκύπτει ότι το  $S(A)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Επιπλέον έχουμε  $\frac{d\|x(t)\|^2}{dt} \leq 0$  για όλα τα  $t \geq t_0, x(t_0) \in R^n$ . Αφού

$$\frac{d\|x(t)\|^2}{dt} = x^T(t_0)e^{A^T(t-t_0)}(A + A^T)e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

συνεπάγεται ότι,  $A + A^T \leq 0$ . Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και ισχύει  $A + A^T \leq 0$ . Υποθέτουμε ακό-

μα ότι υπάρχει κάποιο  $t_1 > t_0$  για το οποίο ισχύει  $\|x(t_1)\| \geq \|x(t_0)\|$ . Δεδομένης της υπόθεσης  $A + A^T \leq 0$  έχουμε ως αποτέλεσμα ότι η νόρμα  $\|x(t)\|$  είναι φθίνουσα συνάρτηση, για κάθε  $t > t_0$ . Άρα έχουμε ως συμπέρασμα ότι:

$$\|x(t)\| = \|x(t_0)\| \text{ για κάθε } t \in [t_0, t_1],$$

το οποίο συνεπάγεται  $\|x(t)\| = \|x(t_0)\|$  για κάθε  $t \geq t_0$ . Το τελευταίο συμπέρασμα έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση της ασυμπτωτικής ευστάθειας.

- iii. Η ισοδυναμία μεταξύ των δύο συνθηκών προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η νόρμα  $\|x(t)\|$  δεν είναι αύξουσα συνάρτηση κατά μήκος καμίας τροχιάς του συστήματος  $S(A)$ , για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη  $x(t_0)$ , αν και μόνο αν,  
 $A + A^T \leq 0$ .  $\square$

### Παρατήρηση

- Από το τρίτο μέρος του θεωρήματος 3.4 προκύπτει πως αν ισχύει  $A + A^T \leq 0$  τότε ο πίνακας  $A$  είναι πίνακας ευστάθειας κατά Lyapunov, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του ανήκουν στο κλειστό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και αν κάποια ιδιοτιμή του βρίσκεται πάνω στον μιγαδικό άξονα, τότε αυτή είναι απλής δομής.

Στην συνέχεια θα δοθεί ένα θεώρημα που συνδέει την ασυμπτωτική ευστάθεια του πίνακα συστήματος  $A$  με την παρατηρησιμότητα του ζεύγους πινάκων  $(A, A + A^T)$ . Πριν όμως από την διατύπωση και απόδειξη του, θα διατυπωθούν δύο λήμματα χωρίς απόδειξη.

### Λήμμα 3.4

Υποθέτουμε πίνακα  $A$  να είναι συμμετρικός και αρνητικά ορισμένος, δηλαδή για τον  $A$  πίνακα ισχύει,  $A = A^T < 0$ . Επίσης, έστω ότι ο  $B$  είναι αντισυμμετρικός και αρνητικά ορισμένος πίνακας, δηλαδή  $B = -B^T$ . Τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $(A + B)$  ανήκουν στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

### Λήμμα 3.5

Έστω ότι  $A = A^T \leq 0$  και  $B = -B^T$ . Τότε όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα  $(A + B)$  ανήκουν στο κλειστό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επιπλέον αν  $x$

είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $(A + B)$ , που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή που βρίσκεται στον μιγαδικό άξονα, τότε το ιδιοδιάνυσμα  $x \in \text{Ker}(A)$ .

### Θεώρημα 3.6

Υποθέτουμε ότι  $A + A^T \leq 0$ . Τότε το σύστημα  $S(A)$ , είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν, το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  είναι παρατηρήσιμο.

### Απόδειξη

Θεωρούμε ότι το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  δεν είναι παρατηρήσιμο. Υπάρχουν δηλαδή,  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $x \neq 0$  τέτοια ώστε:

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - A \\ A + A^T \end{pmatrix} x = 0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι  $Ax = \lambda x$  και  $(A + A^T)x = 0$ . Άρα  $(A + A^T)x = 0 \Rightarrow Ax = -A^T x \Rightarrow (\lambda I_n + A^T)x = 0$ , από το οποίο έχουμε σαν αποτέλεσμα ότι  $\lambda, -\lambda$  να είναι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , το οποίο είναι άτοπο αφού  $A$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Υποθέτουμε τώρα ότι το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  είναι παρατηρήσιμο, θα αποδείξουμε ότι ο  $A$  είναι πίνακας ασυμπτωτικής ευστάθειας για το σύστημα  $S(A)$ . Από την αρχική υπόθεση,  $A + A^T \leq 0$  και το λήμμα 3.6 έχουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  βρίσκονται στο κλειστό αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επιπλέον αν ισχύει  $Ax = i\omega x, \omega \in \mathbb{R}, x \neq 0$  τότε  $(A + A^T)x = 0$ , σε αυτή τη περίπτωση όμως για  $\lambda = i\omega$ , θα έχουμε ότι το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  δεν είναι παρατηρήσιμο. Άρα ο πίνακας  $A$  δεν έχει ιδιοτιμές επί του μιγαδικού άξονα, από το οποίο προκύπτει ότι ο πίνακας  $A$ , είναι πίνακας ασυμπτωτικής ευστάθειας για το σύστημα  $S(A)$ .  $\square$

Από το προηγούμενο θεώρημα (3.7) σε συνδυασμό με το θεώρημα (3.4.ii) καταλήγουμε άμεσα στην εξής σημαντική πρόταση.

### Πρόταση 3.7

Ο πίνακας  $A$  του συστήματος  $S(A)$  είναι πίνακας ολικής ισχυρής ασυμπτωτικής ευστάθειας, αν και μόνο αν,  $A + A^T \leq 0$  και το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  είναι παρατηρήσιμο.

### Παρατήρηση

Εάν ισχύει  $A + A^T < 0$ , τότε το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  είναι παρατηρήσιμο. Το αντίθετο δεν είναι αληθές πάντα. Με βάση την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι η έννοια της ισχυρής ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι ισχυρότερη από αυτή της ολικής ισχυρής ευστάθειας.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε ορισμένες ειδικές μορφές πινάκων και θα δώσουμε αποτελέσματα σχετικά με τη δυνατότητα άμεσου χαρακτηρισμού, ως της την ιδιότητα της ισχυρής ευστάθειας. Αρχικά δίνεται η εξής πρόταση.

### Πρόταση 3.8

Θεωρούμε τον πίνακα  $A$  του συστήματος  $S(A)$ . Για τον πίνακα  $A$  ισχύουν:

- I. Αν ο πίνακας  $A$  είναι πίνακας αστάθειας για το σύστημα τότε, το συμμετρικό τμήμα του  $\bar{A}$  είτε είναι θετικά ορισμένο είτε αόριστο.
- II. Απαραίτητη συνθήκη για να είναι το συμμετρικό τμήμα  $\bar{A}$  του πίνακα  $A$  αρνητικά ορισμένο, είναι ο πίνακας  $A$  του συστήματος να είναι πίνακας ευστάθειας.

### Απόδειξη

- ✓ Θεωρούμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι πίνακας αστάθειας για το σύστημα, τότε υπάρχει αρχική συνθήκη για την οποία η τροχιά  $x(t) = \exp(At)x(0)$  θα διαφύγει από την σφαίρα  $Sp(0, r)$ , δηλαδή το συνημίτονο της γωνίας  $\langle \dot{x}, \nabla V(x) \rangle$  είναι θετικό για κάποιο  $x(0)$  επάνω στην σφαίρα. Άρα η τετραγωνική μορφή  $x^T A x$  είναι θετικά ορισμένη.
- ✓ Το δεύτερο μέρος της πρότασης προκύπτει άμεσα από το λήμμα 3.5.

Μία ενδιαφέρουσα μορφή πίνακα που συναντάται συχνά σε εφαρμογές είναι αυτή του συνοδού πίνακα. Έστω πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι σε μορφή συνοδού πίνακα δηλαδή,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} > 0. \quad \square$$

Πριν την πρόταση που αφορά την παραπάνω μορφή πινάκων θα αναφερθεί το κριτήριο του Sylvester για θετικά ορισμένους πίνακες.

**Πρόταση 3.9 (κριτήριο Sylvester)**

Ο πίνακας  $P$  είναι θετικά ορισμένος, όταν όλες οι διαδοχικές ελάχιστονες ορίζουσες του είναι θετικές.

$$P = \begin{pmatrix} \underline{\Delta_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \underline{\Delta_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \underline{\Delta_3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \underline{\Delta_n} \end{pmatrix}, \Delta_i > 0 \forall i.$$

**Πρόταση 3.10**

Θεωρούμε τον πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Εάν ο  $A$  είναι σε μορφή συνοδού πίνακα, τότε δεν μπορεί να είναι πίνακας ισχυρής ευστάθειας.

**Απόδειξη**

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τον πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  σε μορφή συνοδού πίνακα, δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

όπου  $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ .

Για τον παραπάνω πίνακα, με τη συγκεκριμένη μορφή έχουμε ότι,

$$2\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - a_2 \\ -a_0 & -a_1 & 1 - a_2 & -2a_3 \end{pmatrix}.$$

Από το κριτήριο του Sylvester θα έχουμε για τις ελάχιστονες ορίζουσες  $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = 0$  και ανεξάρτητα από τη  $\Delta_4$  είναι προφανές ότι το συμμετρικό τμήμα του πίνακα  $A$  δεν είναι αρνητικά ορισμένο. □

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση πίνακα που βρίσκεται σε κανονική μορφή Jordan, ως προς την ιδιότητα της ισχυρής ευστάθειας. Όπως είναι γνωστό κάθε τετραγωνικός πίνακας  $A$  μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή Jordan, μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας ως εξής:

$$J(A) = \text{block-diag} (J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_k(\lambda_k)),$$

όπου  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  είναι οι  $k$ -διακεκριμένες (μη επαναλαμβανόμενες) ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Το μέγεθος του κάθε  $J_i(\lambda_i)$ -block είναι ίσο με την αλγεβρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής  $\lambda_i$  και είναι της μορφής:

$$J_i(\lambda_i) = \text{block-diag} (J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots, J_{ir_i}(\lambda_i)),$$

Όπου το  $J_{ij}(\lambda_i)$  είναι της μορφής

$$J_{ij}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

όπου  $r_i$  είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ . Πριν την διατύπωση του βασικού θεωρήματος θα προηγηθεί ένα βοηθητικό λήμμα χωρίς απόδειξη, για τριδιαγώνιους πίνακες.  $\square$

### Λήμμα 3.11

Θεωρούμε τον τριδιαγώνιο  $n \times n$  πίνακα της μορφής:

$$R_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου  $R_n(i, i+1) = R_n(i+1, i) = 1$  για όλα τα  $i$ ,  $R_n(i, j) = 0$  διαφορετικά. Έστω η ποσότητα  $D_n(\lambda) = |\lambda I_n - R_n|$  να παριστά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $R_n$ . Τότε:

- I. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $D_n(\lambda)$  παράγεται αναδρομικά ως εξής,

$$\begin{cases} D_{n+2}(\lambda) = \lambda D_{n+1}(\lambda) - D_n(\lambda) \\ D_1(\lambda) = \lambda \\ D_2(\lambda) = \lambda^2 - 1 \end{cases}.$$

II. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $R_n$  δίνονται από τον τύπο,

$$\lambda_k(R_n) = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Τώρα θα προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος που δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ο πίνακας που βρίσκεται σε κανονική μορφή Jordan-block να είναι πίνακας ισχυρής ευστάθειας.

### Θεώρημα 3.12

Έστω  $J(A)$  να είναι η μορφή Jordan του πίνακα  $A$ . Τότε  $J(A)$  είναι πίνακας ισχυρής ευστάθειας, αν και μόνο αν,

$$\max_{i=1,2,\dots,k} \left( \operatorname{Re}(\lambda_i) + \cos \left( \frac{\pi}{m_i + 1} \right) \right) < 0,$$

όπου  $m_i$  παριστά το μέγεθος του μεγαλύτερου  $J_{ij}$  block ( $j = 1, 2, \dots, r_i$ ) του πίνακα  $J_i$ .

### Απόδειξη

Ο  $J(A)$  είναι πίνακας ισχυρής ευστάθειας, αν και μόνο αν,  $J(A) + J^T(A) < 0$ . Ισοδύναμα η προηγούμενη σχέση γράφεται  $J_i(\lambda_i) + J_i^T(\lambda_i) < 0$  για κάθε  $i = \{1, 2, \dots, k\}$ . Για συγκεκριμένο  $i$ , θα έχουμε  $J_i(\lambda_i) + J_i^T(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow J_{ij}(\lambda_i) + J_{ij}^T(\lambda_i) < 0$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, r_i$ . Έστω ότι το  $J_{ij}(\lambda_i)$  block έχει μέγεθος  $m_{ij}$ . Τότε με χρήση του προηγούμενου λήμματος θα έχουμε:

$$J_{ij}(\lambda_i) + J_{ij}^T(\lambda_i) = 2\operatorname{Re}(\lambda_i)I_{m_{ij}} + R_{m_{ij}}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές:  $2\operatorname{Re}(\lambda_i) + 2 \cos \left( \frac{m\pi}{m_{ij}+1} \right)$ ,  $m = 1, 2, \dots, m_{ij}$ . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι  $J_{ij}(\lambda_i) + J_{ij}^T(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) + \cos \left( \frac{m\pi}{m_{ij}+1} \right) < 0$ . Τώρα για οποιοσδήποτε σταθερός  $m, n$  με  $m > n$ , έχουμε:

$$\cos \left( \frac{\pi}{m+1} \right) > \cos \left( \frac{\pi}{n+1} \right),$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι  $J_i(\lambda_i) + J_i^T(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) + \cos \left( \frac{m\pi}{m_{ij}+1} \right) < 0$ , όπου  $k_i = \max_{j \in \{1, 2, \dots, r_i\}} m_{ij}$ .  $\square$

Εφαρμογές στην θεωρία Ελέγχου: Ισχυρή Σταθεροποίηση μέσω Ανάδρασης Χώρου Καταστάσεων και Ανάδραση Εξόδων συστήματος.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε, ως εφαρμογές της θεωρίας που προηγήθηκε, τις εξής περιπτώσεις ισχυρής σταθεροποίησης:

- I. Ισχυρή Σταθεροποίηση μέσω Ανάδρασης Χώρου Καταστάσεων Συστήματος: θεωρούμε το ζεύγος πινάκων  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ , και αναζητούμε πίνακα  $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $A + BF$  να είναι πίνακας ισχυρής ασυμπτωτικής ευστάθειας.
- II. Ισχυρή Σταθεροποίηση μέσω Εμβολής Εξόδων Συστήματος: θεωρούμε το ζεύγος πινάκων  $(A, C) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{p \times n}$ , και αναζητούμε πίνακα  $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $A + HC$  να είναι πίνακας ισχυρής ασυμπτωτικής ευστάθειας.
- III. Ισχυρή Σταθεροποίηση μέσω Ανάδρασης Εξόδων Συστήματος: θεωρούμε την τριπλέτα πινάκων  $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$ , και αναζητούμε πίνακα  $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$  τέτοιον ώστε ο πίνακας  $A + BFC$  να είναι πίνακας ισχυρής ασυμπτωτικής ευστάθειας.

### Ορισμός 3.13

Δίνεται το δυναμικό σύστημα Διακριτού Χρόνου:

$$\Sigma_G(A, B, C, D) : x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k + Du_k, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

και θεωρούμε ως δυναμικό αντισταθμιστή του  $\Sigma_G$  συστήματος το παρακάτω δυναμικό σύστημα:

$$\Sigma_K(A_k, B_k, C_k, D_k) : \xi_{k+1} = \hat{A}\xi_k + \hat{B}y_k, \quad u_k = -\hat{C}\xi_k - \hat{D}y_k, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}^{\hat{n}}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

Η φυσική πραγμάτωση του χώρου καταστάσεων του κλειστού βρόγχου  $(\Sigma_G, \Sigma_K)$  είναι της μορφής:

$$(\Sigma_G, \Sigma_K) : z_{k+1} = A_c z_k, \quad z_0 \in \mathbb{R}^{n+\hat{n}}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

όπου  $z_k = (x_k, \xi_k)^t, k \in \mathbb{N}_0$ .

Θεωρούμε ότι το σύστημα  $\Sigma_K$  είναι ισχυρός σταθεροποιητής του  $\Sigma_G$  εάν:

- 1) το παραπάνω σύστημα ανάδρασης είναι καλώς τοποθετημένο, δηλαδή  $\det(I + D\hat{D}) \neq 0$
- 2) Η φυσική πραγμάτωση του χώρου καταστάσεων του κλειστού βρόγχου είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε για το σύστημα  $\Sigma_G$ , ότι ο πίνακας ανάδρασης του είναι μηδενικός, δηλαδή  $D = 0$ .



### Παρατήρηση

❖ Για την νόρμα του πίνακα  $A + BF$  ισχύει,

$$\|A + BF\| < 1, \text{ αν και μόνο αν, } \|A^t + F^t B^t\| < 1.$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία προκύπτει ότι η λύση του προβλήματος μέσω Εμβολής Εξόδων Συστήματος, μπορεί να προκύψει από την λύση του προβλήματος ισχυρής σταθεροποίησης μέσω Ανάδρασης του Χώρου Καταστάσεων, αν ορίσουμε εξ αρχής τους πίνακες όπως παρακάτω:

$$A = A^t, C = B^t \text{ και } H = F^t.$$

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στην ισοδυναμία μεταξύ της δυναμικής και στατικής σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης εξόδων συστήματος και αποτελείται από δύο επιμέρους ισχυρισμούς.

### Πρόταση 3.14

- Το σύστημα  $\Sigma_G (A, B, C, D)$  είναι ισχυρά σταθεροποιημένο μέσω δυναμικής ανάδρασης εξόδων, αν και μόνον αν, είναι ισχυρά σταθεροποιημένο μέσω στατικής ανάδρασης εξόδων.
- Εάν το σύστημα  $\Sigma_G (A, B, C, D)$  είναι ισχυρά σταθεροποιημένο μέσω στατικής ανάδρασης εξόδων τότε, είναι επίσης και ισχυρά σταθεροποιημένο μέσω δυναμικής ανάδρασης.

### Απόδειξη

Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση θεωρούμε ότι  $D = 0$ . Τότε η φυσική πραγμάτωση του χώρου καταστάσεων του κλειστού βρόγχου ( $\Sigma_G, \Sigma_K$ ) θα είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \xi_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B\hat{D}C & -B\hat{C} \\ \hat{B}C & \hat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \xi_k \end{pmatrix} := A_c \begin{pmatrix} x_k \\ \xi_k \end{pmatrix}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι ο δυναμικός αντισταθμιστής  $\Sigma_K$  είναι ισχυρός σταθεροποιητής του συστήματος  $\Sigma_G$  τότε, ο πίνακας που, περιγράφει τον κλειστό βρόγχο ( $\Sigma_G, \Sigma_K$ ),  $A_c$  είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθής, δηλαδή ισχύει  $\|A_c\| < 1$ . Από αυτό προκύπτει ότι  $\|A - B\hat{D}C\| < 1$  και άρα ο πίνακας  $-\hat{D}$  είναι ισχυρά στατικός σταθεροποιητής του συστήματος  $\Sigma_G$ , μέσω ανάδρασης εξόδων.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, υποθέτουμε ότι υπάρχει πίνακας  $\hat{D}$  τέτοιος ώστε

να ισχύει ότι  $\|A - B\hat{D}C\| < 1$ , τότε μπορούμε πάντα να επιλέγουμε πίνακες  $\hat{A}, \hat{B}$  και  $\hat{C}$  με μικρή νόρμα έτσι ώστε να ισχύει  $\|A_c\| < 1$ .  $\square$

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στην επίλυση του πρώτου προβλήματος της παραγράφου αυτής, δηλαδή της ισχυρής σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης χώρου καταστάσεων συστήματος και βασίζεται στην θεωρία των γραμμικών ανισοτήτων πινάκων.

### Πρόταση 3.15

Θεωρούμε τους πίνακες  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$  και  $C \in R^{p \times m}$  και υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $B$  έχει  $m$  πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (full column rank) και ότι ο πίνακας  $C$  έχει  $p$  πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών (full row rank).

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Υπάρχει πίνακας  $F$  τέτοιος ώστε  $\|A + BFC\| < 1$ , το σύστημα  $\Sigma(A, B, C)$  μπορεί να σταθεροποιηθεί ισχυρά δηλαδή, μέσω ανάδρασης εξόδων.
2. Ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:
  - I.  $B^\perp(I - AA^t)B^{\perp t} > 0$
  - II.  $C^{t\perp}(I - A^tA)C^{t\perp t} > 0$ .

Εάν όλες οι παραπάνω οι προϋποθέσεις πληρούνται, τότε κάθε πίνακας  $F$  για τον οποίον ισχύει  $\|A + BFC\| < 1$ , δίνεται από την σχέση:

$$F = -(B^t\Phi B)^{-1}B^t\Phi AC^t(CC^t)^{-1} + (B^t\Phi B)^{-1/2}L\Psi^{1/2},$$

όπου ο  $L$  πίνακας είναι αυθαίρετος με  $\|L\| < 1$  και οι πίνακες  $\Phi, \Psi$  δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\Phi &= (I - AA^t + AC^t(CC^t)^{-1}CA^t)^{-1} \\ \Psi &= (CC^t)^{-1} - (CC^t)^{-1}CA^t(\Phi - \Phi B(B^t\Phi B)^{-1}B^t\Phi)AC^t(CC^t)^{-1}.\end{aligned}$$

Η απόδειξη της πρότασης 3.16 βασίζεται στο επόμενο θεώρημα.

### Πρόταση 3.16

Θεωρούμε τους πίνακες  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$  και υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $B$  έχει  $m$  πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (full column rank).

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- I. Υπάρχει πίνακας  $F$  τέτοιος ώστε  $\|A + BF\| < 1$ , το σύστημα  $\Sigma(A, B, C)$  μπορεί να σταθεροποιηθεί ισχυρά δηλαδή, μέσω ανάδρασης χώρου καταστάσεων συστήματος.
- II. Ισχύει η ανισότητα:  $B^\perp(I - AA^t)B^\perp > 0$

Εάν όλες οι παραπάνω οι προϋποθέσεις πληρούνται, τότε κάθε πίνακας  $F$  για τον οποίον ισχύει  $\|A + BF\| < 1$ , δίνεται από την σχέση:

$$F = -(B^t B)^{-1} B^t A + (B^t B)^{-1/2} L \Psi^{1/2}$$

όπου ο  $L$  πίνακας είναι αυθαίρετος με  $\|L\| < 1$  και ο πίνακας  $\Psi$  δίνεται από την σχέση,  $\Psi = I - A^t A + A^t B (B^t B)^{-1} B^t A$ .

Η απόδειξη των παραπάνω προτάσεων βασίζεται στο επόμενο θεώρημα.

### Θεώρημα 3.17 (Parrot)

- I. Η λύση του προβλήματος επέκτασης πινάκων

$$\gamma_0 = \min_x \left\| \begin{bmatrix} X & B \\ A & C \end{bmatrix} \right\|$$

έχει λύση, που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\gamma_0 = \max \{ \| [C \quad A] \|, \left\| \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \right\| \},$$

όπου  $\|\cdot\|$  είναι η φασματική νόρμα πινάκων, επαγόμενη από την Ευκλείδεια νόρμα.

- II. Αν  $\gamma \geq \gamma_0$ , τότε όλες οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος είναι της μορφής:

$$X = -YA^t Z + \gamma(I - Y Y^t)^{1/2} W (I - Z Z^t)^{1/2},$$

όπου  $W$  είναι αυθαίρετος πίνακας με  $\|W\| \leq 1$ , και οι πίνακες  $Y, Z$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a) \quad B = Y(\gamma^2 I - A^t A)^{1/2}$$

$$b) \quad C = Z(\gamma^2 I - A A^t)^{1/2},$$

με  $\|Y\| \leq 1, \|Z\| \leq 1$ .

Στη συνέχεια θα διατυπωθεί πόρισμα, όταν η δομή του θεωρήματος είναι πιο απλή.

### Πόρισμα

I. Η λύση του προβλήματος επέκτασης πινάκων

$$\gamma_0 = \min_X \left\| \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \right\|$$

έχει λύση, που δίνεται από την παρακάτω σχέση  $\gamma_0 = \|A\|$ .

II. Αν  $\gamma \geq \gamma_0$ , τότε όλες οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος είναι της μορφής:

$$X = Y(\gamma^2 I - A^t A)^{1/2}, \text{ με } \|Y\| \leq 1.$$

Από το τελευταίο αποτέλεσμα έχουμε την λύση του προβλήματος της ισχυρής σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης χώρου καταστάσεων.

### Θεώρημα 3.18

Έστω το πρόβλημα:

$$\gamma_0 = \min_{F \in \mathbb{R}^{m \times n}} \| [A + BF] \|,$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $\text{rank}(B) = m$ . Τότε ο πίνακας  $B$  αναλύεται ως εξής,  $B = B_i B_0$ , όπου  $B_i^t B_i = I_m$  και  $B_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  είναι μη ιδιάζων. Έστω  $B_1$  το ορθογώνιο συμπλήρωμα του πίνακα  $B_i$  έτσι ώστε ο πίνακας  $[B_i; B_1] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  να είναι ορθογώνιος.

Τότε,  $\gamma_0 = \| B_1^t A \|$  και όλοι οι πίνακες  $F$  για τους οποίους  $\gamma_0 = \| [A + BF] \|$  δίνονται από την σχέση:

$$F = -B_0^{-1} B_i^t A + B_0^{-1} Y (\gamma_0^2 I - A^t B_1 B_1^t A)^{1/2},$$

όπου  $\|Y\| \leq 1$ . Επιπλέον, το σύστημα  $\Sigma_d(A, B)$  είναι ισχυρά σταθεροποιήσιμο μέσω ανάδρασης χώρου καταστάσεων, αν και μόνο αν,  $\gamma_0 \leq 1$ .

### Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι η φασματική νόρμα παραμένει αναλλοίωτη πολλαπλασιαζόμενη με ορθογώνιο πίνακα, έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} \|A + BF\| &= \|A + B_i B_0 F\| \\ &= \|A + [B_i; B_1] \begin{bmatrix} B_0 F \\ 0 \end{bmatrix}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{bmatrix} B_i^t \\ B_1^t \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} B_0 F \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} B_i^t A + B_0 F \\ B_1^t A \end{bmatrix} \right\|.
\end{aligned}$$

Εφόσον ο πίνακας  $B_0$  είναι μη ιδιάζων, η απεικόνιση  $F \rightarrow B_0 F$  είναι αμφιμο-  
νοσήμαντη και επομένως

$$\begin{aligned}
\min_F \left\| \begin{bmatrix} B_i^t A + B_0 F \\ B_1^t A \end{bmatrix} \right\| &= \min_X \left\| \begin{bmatrix} B_i^t A + X \\ B_1^t A \end{bmatrix} \right\| \\
&= \|B_1^t A\|.
\end{aligned}$$

Όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από το προηγούμενο πόρισμα. Το σύ-  
νολο των βέλτιστων λύσεων γράφεται ως εξής:

$$\mathfrak{S} = \{F: \|A + BF\| = \gamma_0\} = \left\{F: B_i^t A + B_0 F = Y(\gamma^2 I - A^t B_1 B_1^t A)^{1/2}, \|Y\| \leq 1\right\},$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathfrak{S} = \{-B_0^{-1} B_i^t A + B_0^{-1} Y(\gamma_0^2 I - A^t B_1 B_1^t A)^{1/2}, \|Y\| \leq 1\},$$

όπου  $\gamma_0 = \|B_i^t A\|$ . Επίσης το σύστημα  $\Sigma_d(A, B)$  είναι ισχυρά σταθεροποιήσι-  
μο, αν και μόνο αν υπάρχει  $F: \|A + BF\| < 1$ , δηλαδή αν  $\gamma_0 = \|B_i^t A\|$ .  $\square$

## Κεφάλαιο 4

Τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν έχουν ως σκοπό την διασαφήνιση των βασικότερων ορισμών, θεωρημάτων και των παρατηρήσεων που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

### Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

και θεωρούμε την αρχική συνθήκη:

$$x(0) = (1 \quad 0 \quad 1)'$$

Η τροχιά του συστήματος περιγράφεται από τις σχέσεις  $x_1(t) = \cos t$ ,  $x_2(t) = \sin t$  και  $x_3(t) = e^{-t}$ . Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση της τροχιάς του συστήματος έχουμε ότι η νόρμα  $\|x(t)\| = \sqrt{1 + e^{-2t}}$ , φθίνει μονοτονικά και συγκλίνει στο  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 1$ . Το σύστημα δεν είναι ολικά ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές, αφού ξεκινώντας από οποιοδήποτε αρχική συνθήκη  $x(t_0)$  του διαγράμματος φάσης  $(x_1, x_2)$ , καταλήγει σε τροχιά με σταθερή νόρμα  $\|x(t)\| = \|x(t_0)\|$ ,  $t \geq t_0$ .

Γίνεται σαφές ότι η συνθήκη  $\forall x(t_0) \neq 0$  του ορισμού 3.1, δεν δύναται να παραληφθεί.

### Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα εξετάσουμε σύστημα το οποίο είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές κατά γενική έννοια, αλλά δεν είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και η τροχιά του περιγράφεται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} x_1(0) + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ e^{-2t} \end{pmatrix} x_2(0).$$

Ορίζουμε:

$$V(x(t)) := \|x(t)\|^2 = x'(0)\Phi(t)x(0),$$

Όπου:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2\sqrt{2}(e^{-2t} - e^{-3t}) \\ 2\sqrt{2}(e^{-2t} - e^{-3t}) & 8e^{-2t} - 16e^{-3t} + 9e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$\|x(0)\|^2 - \|x(t)\|^2 = x'(0)\Theta(t)x(0)$$

όπου  $\Theta(t) = I_2 - \Phi'(t)\Phi(t)$ . Μετά από πράξεις βρίσκουμε  $\Theta_{11}(t) = 1 - e^{-2t}$ , με  $\Theta_{11}(t) > 0$  για κάθε  $t > 0$  και  $|\Theta(t)| = (e^{-t} - 1)^4(e^{-2t} + 4e^{-t} + 1) > 0$  για κάθε  $t \neq 0$ .

Αφού  $\Theta(t) > 0$  για κάθε  $t > 0$  και  $\|x(t)\| \leq \|x(0)\|$  για κάθε  $t > 0$ ,  $x(0) \neq 0$  το σύστημα είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές κατά γενική έννοια. Παρόλα αυτά δεν είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές. Υπολογίζοντας την παράγωγο της  $V$  έχουμε:

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{d\|x(t)\|^2}{dt} = x'(0)\dot{\Phi}(t)x(0),$$

όπου για  $t = 0$  προκύπτει ότι:

$$\dot{V}(x(0)) = 2x'(0) \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x(0).$$

Εάν η αρχική συνθήκη επιλεχθεί κατά μήκος της διεύθυνσης του διανύσματος  $x(0) = (\sqrt{2} \ 1)'$ , τότε  $\dot{V}(x(0)) = 0$ . Άρα το σύστημα δεν είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές.

### Παράδειγμα 3

Το επόμενο παράδειγμα αφορά την πρόταση 3.7, χρησιμοποιώντας τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος.

Υποθέτουμε το σύστημα  $\dot{x} = Ax$ ,

$$\text{όπου } A = \begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + A' = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Αφού ο πίνακας  $A + A'$  είναι ιδιάζων και επίσης  $A + A' \leq 0$ , προκύπτει ότι το σύστημα δεν είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ωστόσο ο πίνακας  $A$  είναι πίνακα ασυμπτωτικής ευστάθειας, άρα είναι και ολικά ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθής. Ισοδύναμα το ζεύγος πινάκων  $(A, A + A^T)$  είναι παρατηρήσιμο, το οποίο προκύπτει από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R},$$

το οποίο δεν είναι ιδιοδιάνυσμα το πίνακα  $A$ .

### Παράδειγμα 4

Το παράδειγμα που ακολουθεί αναφέρεται στην έννοια της σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης χώρου καταστάσεων.

Θεωρούμε το ζεύγος πινάκων  $(A, B)$  όπου,

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επιλέγουμε  $B^\perp = (0 \ 1)$  και έχουμε:

$$B^\perp(I - AA^t)(B^\perp)^t = (0 \ 1) \begin{pmatrix} -\rho^2 & -\rho \\ -\rho & -\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - \rho^2.$$

Το ζευγάρι πινάκων  $(A, B)$  είναι ισχυρά σταθεροποιήσιμο, αν και μόνο αν,  $|\rho| < 1$ .

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.16 υπολογίζουμε

$$\Psi^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}.$$



Θέτουμε  $L = (l_1 \ l_2)$  όπου  $l_1^2 + l_2^2 < 1$  από το οποίο προκύπτει ότι ο πίνακας

$$F = \begin{pmatrix} l_1 - \rho & l_2\sqrt{1 - \rho^2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Μετά από υπολογισμό προκύπτει:

$$A + BF = \begin{pmatrix} l_1 & l_2\sqrt{1 - \rho^2} \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την παράσταση:

$$\begin{aligned} \det[I_2 - (A + BF)^t A + BF] &= \det \begin{pmatrix} 1 - l_1^2 & -l_1 l_2 \sqrt{1 - \rho^2} \\ -l_1 l_2 \sqrt{1 - \rho^2} & 1 - l_2^2(1 - \rho^2) - \rho^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - l_1^2 - l_2^2)(1 - \rho^2) > 0. \end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι  $1 - l_1^2 > 0$ , προκύπτει ότι  $I_2 - (A + BF)^t A + BF > 0$ , από το οποίο έχουμε ως συμπέρασμα ότι  $\|A + BF\| < 1$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] Karcaniyas, N., Halikias, G., Papageorgiou A., (2010), 'Strong Stability of Internal System Descriptions', *International Journal of Control*, 83, 182-205.
- [2] G. Halikias, A. Papageorgiou & N. Karcaniyas (2010), 'Non-overshooting stabilisation via state and output feedback', *International Journal of Control*, 83:6, 1232-1247.
- [3] G. Halikias, L. Dritsas, A. Pantelous, V. Tsoukalas, (2011), 'Strong stability of discrete-time systems'
- [4] Khalil, H.K., (1992), *Nonlinear Systems*, New York, MacMillan Publishing Company.
- [5] Γ. Η. Καλογερόπουλος, ' Διακριτά Δυναμικά Συστήματα', Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.
- [6] Ν. Δ. Αλικάκος-Γ. Η. Καλογερόπουλος, 'Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις', Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2003.
- [7] Ε. Γρίσπος- Γ. Καλογερόπουλος, 'Θεωρία Ελέγχου', Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1995.
- [8] Marcus, M., and Minc, H. (1964), 'A survey of Matrix Theory and matrix Inequalities', New York, Dover Publications.
- [9] Ly, J. H., Safonov, M. G., and Ahamad, F. (1994), 'Positive Real Parrott Theorem with Application to LMI Controller Synthesis' in *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, USA, pp. 50-52, June.