Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων για την Κυματική Εξίσωση σε δύο χωρικές διαστάσεις

Δασκαλάκης Εμμανουήλ

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης στα

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2012

Τριμελής Επιτροπή:

1. Δουγαλής Βασίλειος

2. Δρακόπουλος Μιχάλης

3. Νοτάρης Σωτήριος

Ημερομηνία Παρουσίασης:

Τριμελής Επιτροπή:

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάμε μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων για την Κυματική Εξίσωση σε δύο χωρικές μεταβλητές. Παρουσιάζουμε αποτελέσματα για την τάξη ακρίβειας σε διάφορα προβλήματα αρχικών/συνοριακών τιμών με την χρήση τργωνικών και διγραμικών πεπερασμένων στοιχείων.

Abstract

In the present work we are studying Finite Element Methods for the two dimensional Wave Equation. We are presenting results about the order of accuracy for a number of initial/boundary value problems using triangular and bilinear (or quadrangular) finite elements spaces.

Στην οικογένειά μου και σε ΌΛΑ τα ανίψια μου.

”As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.”

Albert Einstein, ”Geometry and Experience”, January 27, 1921

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω βαθύτατα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Βασίλειο Δουγαλή για την βοήθεια και καθοδήγησή του σε κάθε στάδιο μέχρι την ολοκλήρωση της εργασίας αλλά και για την συμβολή του ώστε να γίνω πιο ώριμος ως Μαθηματικός και ως Άνθρωπος. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω

- Τους κυρίους Δρακόπουλο Μιχάλη και Νοτάρη Σωτήριο για την τιμή που μου κάνουν με την συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή αλλά και για την συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια του Ακαδημαϊκού έτους 2011-2012.
- Τον Κουνάδη Γρηγόριο για την πολύτιμη βοήθειά του.
- Τους συναδέλφους συμφοιτητές μου για την συμπαράσταση τους τα δύο τελευταία χρόνια.

Θα ήθελα βεβαίως να ευχαριστήσω όλους τους Καθηγητές μου στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών για τις γνώσεις που μου προσέφεραν σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Ζουράρη Γεώργιο, Λουλάκη Μιχάλη, Μητσούδη Δημήτριο και Σμυρνελή Μανώλη για τις συμβουλές τους και την ενθάρρυνση τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε μεθόδους Galerkin-Πεπερασμένων στοιχείων για προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών της κυματικής εξίσωσης.

Θα συγκρίνουμε την τάξη σύγκλισης των μεθόδων για την κυματική εξίσωση όταν αυτή είναι γραμμένη ως 2ης τάξης Μ.Δ.Ε. δύο χωρικών μεταβλητών.

$$p_{tt} = \Delta p$$

και όταν είναι γραμμένη σε μορφή υπερβολικού συστήματος 1ης τάξης

$$\begin{cases} p_t + u_x + v_y = 0 \\ u_t + p_x = 0 \\ v_t + p_y = 0 \end{cases}$$

Στην αρχή του δεύτερου κεφαλαίου θα μελετήσουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για διάφορα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών της κυματικής εξίσωσης δεύτερης τάξης ενώ στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann όπου και θα κάνουμε θεωρητική εκτίμηση του σφάλματος. Στο τέλος του κεφαλαίου θα επιβεβαιώσουμε πειραματικά την τάξη σύγκλισης.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για την κυματική εξίσωση ως υπερβολικό σύστημα 1ης τάξης. Αρχικά θα δούμε την σχέση του υπερβολικού συστήματος με την δευτεροβάθμια κυματική εξίσωση και θα διατυπώσουμε διάφορες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών για τις οποίες το σύστημα είναι καλώς τοποθετημένο. Στην συνέχεια για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις θα κατασκευάσουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και θα βρούμε πειραματικά την τάξη σύγκλισης.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΉ

Κεφάλαιο 2

Η κυματική εξίσωση 2ης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για την 2ης τάξης κυματική εξίσωση

$$p_{tt}(x,t) = \Delta p(x,t) + f(x,t)\ , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\ ,\ \ t > 0 \tag{2.1}$$

όπου Δ είναι ο Λαπλασιανός διαφορικός τελεστής.

Θα δούμε διάφορα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών, θα αναλύσουμε πρόβλημα με σ.σ. Neumann, και θα πραγματοποιήσουμε σειρά αριθμητικών πειραμάτων για την τάξη σύγκλισης των μεθόδων που θα αναπτύξουμε.

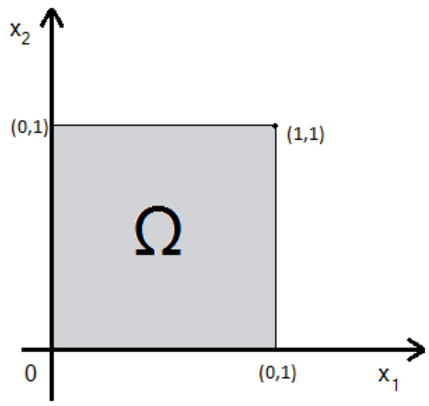
2.1 Προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών

Για να μπορέσουμε να λύσουμε την εξίσωση (2.1) σε ένα πεπερασμένο χωρίο Ω πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες για την λύση.

2.1.1 Το χωρίο Ω

Από την θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (Μ.Δ.Ε.) γνωρίζουμε ότι για την κυματική εξίσωση μπορούμε με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες να βρούμε την λύση με χωρισμό μεταβλητών σε κλειστή μορφή όταν παραδείγματος χάριν το χωρίο Ω είναι ορθογώνιο ή κυκλικό ενώ σε γενικότερο χωρίο αυτό δεν είναι εφικτό γενικά.

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε πειραματικά την τάξη σύγκλισης για τις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων που θα αναπτύξουμε θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης. Αυτό μας οδηγεί στο να επιλέξουμε δεδομένα και ένα χωρίο για τα οποία γνωρίζουμε εκ των προτέρων την ακριβή λύση. Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα επιλέγουμε ως χωρίο το τετράγωνο $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Το χωρίο Ω

2.1.2 Τέσσερα πρόβληματα αρχικών/συνοριακών τιμών

Σε πρώτη φάση λοιπόν ορίζουμε τέσσερα προβλήματα αρχικών/συνοριακών τιμών τα οποία και θα μελετήσουμε.

2.1.2.1 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με ομογενείς σ.σ. Dirichlet

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με ομογενείς σ.σ. Dirichlet:

$$\begin{cases} p_{tt} = \Delta p + f & \text{στο} \quad \Omega\,, \quad 0 \le t \le T, \\ p = 0 & \text{στο} \quad \partial\Omega\,, \quad 0 \le t \le T, \\ p(x,0) = p^0(x) & \text{στο} \quad \Omega\,, \quad t = 0, \\ p_t(x,0) = p_t^0(x) & \text{στο} \quad \Omega\,, \quad t = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

όπου Ω είναι το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ όπως το ορίσαμε στην ενότητα 2.1.1, και $x = (x_1, x_2)$

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί για παράδειγμα το μαθηματικό μοντέλο του φυσικού προβλήματος μίας τετράγωνης παλλόμενης μεμβράνης η οποία είναι στερεωμένη στο σύνορο του Ω. Η $p = p(x,t)$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της μεμβράνης και η μετατόπιση στο σύνορο του Ω είναι μηδέν. Αποτελεί επίσης μοντέλο για το πρόβλημα ακουστικής διάδοσης στο Ω όπου η ακουστική πίεση p είναι δεδομένη και ίση με μηδέν στο $\partial\Omega$.

2.1.2.2 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με ομογενείς σ.σ. Neumann

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με ομογενείς σ.σ. Neumann:

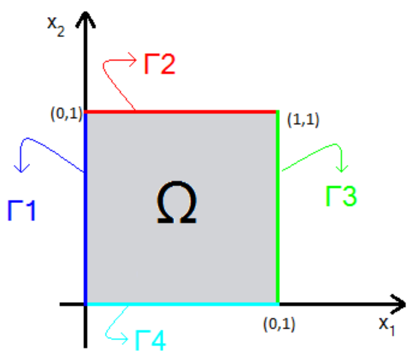
$$\begin{cases} p_{tt} = \Delta p + f & \text{στο} \quad \Omega \, , \quad 0 \leq t \leq T, \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{στο} \quad \partial\Omega \, , \quad 0 \leq t \leq T, \\ p(x,0) = p^0(x) & \text{στο} \quad \Omega \, , \quad t = 0, \\ p_t(x,0) = p_t^0(x) & \text{στο} \quad \Omega \, , \quad t = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

όπου Ω είναι το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ όπως το ορίσαμε στην ενότητα 2.1.1 και n το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$.

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί π.χ. το μαθηματικό μοντέλο του φυσικού προβλήματος της ακουστικής πίεσης στο Ω στο σύνορο του οποίου υπάρχει σταθερό εμπόδιο (τοίχος).

2.1.2.3 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με μικτές συνοριακές συνθήκες

Χωρίζουμε το σύνορο του Ω σε τέσσερα τμήματα Γ1 , Γ2 , Γ3 , Γ4 όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Το χωρίο Ω με το σύνορο χωρισμένο σε τέσσερεις καμπύλες

Έστω τώρα το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με μικτές συνθήκες στο σύνορο:

$$\begin{cases} p_{tt} = \Delta p + f & \text{στο} \quad \Omega\,, \ \ 0 \le t \le T, \\ p = 0 & \text{στο} \quad \Gamma 1 \cup \Gamma 3\,, \ \ 0 \le t \le T, \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{στο} \quad \Gamma 2 \cup \Gamma 4\,, \ \ 0 \le t \le T, \\ p(x,0) = p^0(x) & \text{στο} \quad \Omega\,, \ \ t = 0, \\ p_t(x,0) = p_t^0(x) & \text{στο} \quad \Omega\,, \ \ t = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

όπου Ω είναι το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ όπως το ορίσαμε στην ενότητα 2.1.1 και n το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$.

2.1.2.4 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Με βάση το διαχωρισμό του συνόρου του Ω όπως αυτός φαίνεται στο Σχήμα 2.2 ορίζουμε το εξής πρόβλημα με περιοδικές συνθήκες ως προς x_1 και x_2 ξεχωριστά στο σύνορο του Ω:

$$\begin{cases} p_{tt} = \Delta p + f & \text{στο} \quad \Omega\,, \ \ 0 \le t \le T, \\ p|_{\Gamma 1} = p|_{\Gamma 3} & 0 \le t \le T, \\ p|_{\Gamma 2} = p|_{\Gamma 4} & 0 \le t \le T, \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma 1} = \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma 3} & 0 \le t \le T, \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma 2} = \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma 4} & 0 \le t \le T, \\ p(x,0) = p^0(x) & \text{στο} \quad \Omega\,, \ \ t = 0, \\ p_t(x,0) = p_t^0(x) & \text{στο} \quad \Omega\,, \ \ t = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

όπου Ω είναι το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ όπως το ορίσαμε στην ενότητα 2.1.1 και n το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$.

Οι συνοριακές συνθήκες για το περιοδικό πρόβλημα μπορούν να γραφτούν σε πιο απλή μορφή για το χωρίο που μελετάμε ως εξής:

$p(0,y,t) = p(1,y,t)\ , \quad p_x(0,y,t) = p_x(1,y,t)\ , \quad 0 \le y \le 1$

$p(x,0,t) = p(x,1,t)\ , \quad p_y(x,0,t) = p_y(x,1,t)\ , \quad 0 \le x \le 1$

2.2 Η μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων για προβλήματα αρχικών/συνοριακών τιμών

Για να μπορέσουμε να λύσουμε αριθμητικά τα προηγούμενα προβλήματα ακολουθούμε μία διαδικασία που αποτελείται από δύο βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να διακριτοποιήσουμε χωρικά το πρόβλημα με την συνήθη μέθοδο Galerkin-Πεπερασμένων Στοιχείων. Έτσι παίρνουμε τη λεγόμενη ημιδιακριτή προσέγγιση. Δεύτερο βήμα είναι διακριτοποιήσουμε ως προς τον χρόνο και να πάρουμε μία πλήρως διακριτή προσέγγιση.

Πριν δούμε λοιπόν ποια είναι η μέθοδος Galerkin-Πεπερασμένων Στοιχείων για κάθε ένα από τα προβλήματα (2.2) έως (2.5) θα διατυπώσουμε μία μορφή του θεωρήματος του Gauss που αποτελεί το ανάλογο του τύπου ολοκλήρωσης κατά μέλη σε πολλές διαστάσεις.

Θεώρημα 1. *(Τύπος Ολοκληρωσης κατα μέλη)*
Έστω Ω ένα φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με κατα τμήματα ομαλό (C^1) σύνορο. Έστω επιπλέον συναρτήσεις $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Τότε

$$\int_\Omega u_{x_i} v = -\int_\Omega u v_{x_i} + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS, \tag{2.6}$$

όπου $\nu^i = \vec{n} \cdot \vec{e_i}$ είναι η i-οστή συντεταγμένη του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο σύνορο $\partial\Omega$.

□

Ο χώρος Sobolev $H^1(\Omega)$

Ο χώρος Hilbert στον οποίο θα δουλέψουμε είναι ο χώρος $H^1(\Omega)$ ο οποίος ορίζεται ως εξής,βλ.[B]

Ορισμός 1. *Ο χώρος Sobolev $H^1 = H^1(\Omega)$ ορίζεται ως:*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \;:\; \exists \;\, g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^2(\Omega), \;\; \textit{τέτοια ώστε} \\ \textstyle\int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \;\; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \; \forall i : 1 \le i \le n\}.$$

Για $u \in H^1$ ορίζουμε $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ και ονομάζουμε το g_i ασθενή μερική παράγωγο της u ως προς x_i.

□

Προφανώς ο H^1 είναι υπόχωρος του L^2 και αν $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ το εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα του L^2 αντίστοιχα, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες για τον H^1 ως εξής:

$$(u,v)_1 = (u,v) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big) , \quad u,v \in H^1,$$

$$\|u\|_1 = \Big(\|u\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|^2 \Big)^{1/2} , \ \ u \in H^1.$$

2.2.1 Πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Dirichlet

Για το ομογενές πρόβλημα σ.σ. Dirichlet ορίζουμε τον χώρο $H_0^1(\Omega)$ ως εξής:

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \ : \ v|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Τώρα θα πάρουμε την εξίσωση του προβλήματος (2.2) και θα την πολλαπλασιάσουμε με μία συνάρτηση $v \in H_0^1(\Omega)$

$$p_{tt} v = v\Delta p + fv$$

και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε στο Ω:

$$\int_\Omega p_{tt} v = \int_\Omega v\Delta p + \int_\Omega fv \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Για να υπολογίσουμε το $\int_\Omega v\Delta p$ θα χρησιμοποιήσουμε την (2.6) θέτοντας όπου $v = v_{x_i}$ οπότε

$$\int_\Omega v\Delta p = - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial p}{\partial n} dS. \tag{2.8}$$

Όμως $v \in H_0^1(\Omega)$ οπότε τελικά

$$\int_\Omega v\Delta p = - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p. \tag{2.9}$$

Αντικαθιστούμε τώρα την (2.9) στην (2.7) και έχουμε

$$\int_\Omega p_{tt} v + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p = \int_\Omega fv \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Δηλαδή ζητούμε $p \in H_0^1$ τέτοια ώστε

$$(p_{tt}, v) + (\nabla p, \nabla v) = (f, v) \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Θεωρούμε τώρα έναν υπόχωρο $S_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης. Η ημιδιακριτή μέθοδος Galerkin για την προσέγγιση του p διατυπώνεται ώς εξής:

Ζητούμε $p_h \in S_h^0$, $t \geq 0$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} (p_{h,tt}, \varphi) + (\nabla p_h, \nabla \varphi) = (f, \varphi) , & \forall \varphi \in S_h^0,\ t > 0, \\ p_h(x,0) = p_h^0(x) \approx p^0(x) & \text{όπου } p_h^0 \in S_h^0, \\ p_{h,t}(x,0) = p_{h,t}^0(x) \approx p_t^0(x) & \text{όπου } p_{h,t}^0 \in S_h^0. \end{cases} \tag{2.11}$$

2.2.2 Πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Neumann

Για το ομογενές πρόβλημα σ.σ. Neumann θα πάρουμε την εξίσωση του προβλήματος (2.3) και αυτήν την φορά θα την πολλαπλασιάσουμε με μία συνάρτηση $v \in H^1(\Omega)$. Στη συνέχεια θα ολοκληρώσουμε στο Ω και θα καταλήξουμε σε μία σχέση παρόμοια της (2.7), δηλ.:

$$\int_\Omega p_{tt} v = \int_\Omega v \Delta p + \int_\Omega f v , \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.12}$$

Εφαρμόζοντας και πάλι την σχέση (2.8) για τον υπολογισμό του $\int_\Omega v\Delta p$ και παίρνοντας υπ'όψιν ότι $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, καταλήγουμε ξανά στην σχέση (2.9). Αντικαθιστούμε στην (2.12) και παίρνουμε

$$\int_\Omega p_{tt} v + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p = \int_\Omega f v , \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Δηλαδή ζητάμε $p \in H^1$ τέτοιο ώστε

$$(p_{tt}, v) + (\nabla p, \nabla v) = (f, v) , \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.13}$$

Θεωρούμε τώρα έναν υπόχωρο $S_h \subset H^1(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης, το ημιδιακριτό πρόβλημα Galerkin διατυπώνεται ανάλογα με το πρόβλημα Dirichlet ως εξής:
Ζητούμε $p_h \in S_h$, $t \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} (p_{h,tt}, \varphi) + (\nabla p_h, \nabla \varphi) = (f, \varphi) , & \forall \varphi \in S_h,\ t > 0, \\ p_h(x,0) = p_h^0(x) \approx p^0(x) & \text{όπου } p_h^0 \in S_h, \\ p_{h,t}(x,0) = p_{h,t}^0(x) \approx p_t^0(x) & \text{όπου } p_{h,t}^0 \in S_h. \end{cases} \tag{2.14}$$

2.2.3 Πρόβλημα με μικτές συνοριακές συνθήκες

Για το πρόβλημα (2.4) θα ορίσουμε τον χώρο H_μ^1 ως

$$H_\mu^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ v|_{\Gamma 1 \cup \Gamma 3} = 0\}.$$

Στη λογική των προηγουμένων προβλημάτων ((2.2)-(2.3)), θα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση του προβλήματος (2.4) με μία συνάρτηση $v \in H_\mu^1$ και θα ολοκληρώσουμε στο Ω. Αυτό θα μας δώσει την σχέση

$$\int_\Omega p_{tt} v = \int_\Omega v \Delta p + \int_\Omega f v , \quad \forall v \in H_\mu^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Στην συνέχεια από την σχέση (2.8) θα πάρουμε ότι:

$$\int_\Omega v\Delta p = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla p + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial n}dS.$$

Όμως $v \in H^1_\mu(\Omega)$ και επιπλέον $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma 2\cup\Gamma 4} = 0$ οπότε καταλήγουμε στην σχέση (2.9). Αντικαθιστούμε στην (2.15) και καταλήγουμε στην σχέση

$$\int_\Omega p_{tt}v + \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla p = \int_\Omega fv\ , \quad \forall v \in H^1_\mu(\Omega).$$

Δηλαδή ζητούμε $p \in H^1_\mu$ τέτοιο ώστε

$$(p_{tt}, v) + (\nabla p, \nabla v) = (f, v)\ , \quad \forall v \in H^1_\mu(\Omega). \tag{2.16}$$

Θεωρούμε έναν υπόχωρο $S_h^\mu \subset H^1_\mu(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης και διατυπώνουμε το πρόβλημα της ημιδιακριτής προσέγγισης Galerkin με τον συνήθη πλέον τρόπο ως εξής: Ζητούμε $p_h \in S_h^\mu$, $t \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} (p_{h,tt}, \varphi) + (\nabla p_h, \nabla\varphi) = (f, \varphi)\ , \quad \forall\varphi \in S_h^\mu,\ t > 0, \\ p_h(x, 0) = p_h^0(x) \approx p^0(x) \quad \text{όπου } p_h^0 \in S_h^\mu, \\ p_{h,t}(x, 0) = p_{h,t}^0(x) \approx p_t^0(x) \quad \text{όπου } p_{h,t}^0 \in S_h^\mu. \end{cases} \tag{2.17}$$

2.2.4 Πρόβλημα με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Στο περιοδικό πρόβλημα (2.5) θα ορίσουμε τον χώρο H^1_π ως:

$$H^1_\pi(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)\ :\ v|_{\Gamma 1} = v|_{\Gamma 3}\ \text{ και }\ v|_{\Gamma 2} = v|_{\Gamma 4}\}.$$

Με την ίδια διαδικασία όπως στα προηγούμενα προβλήματα, απο την ΜΔΕ του προβλήματος (2.5), πολλαπλασιάζοντας με μία συνάρτηση $v \in H^1_\pi$ και ολοκληρώνοντας στο Ω θα έχουμε:

$$\int_\Omega p_{tt}v = \int_\Omega v\Delta p + \int_\Omega fv\ , \quad \forall v \in H^1_\pi(\Omega). \tag{2.18}$$

Στην συνέχεια από την σχέση (2.8) θα πάρουμε ότι:

$$\int_\Omega v\Delta p = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla p + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial n}dS.$$

Αναπτύσσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέρους και παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial p}{\partial n}dS = -\int_{\Gamma 1} vp_x dS + \int_{\Gamma 2} vp_y dS + \int_{\Gamma 3} vp_x dS - \int_{\Gamma 4} vp_y dS.$$

Όμως αφού $v \in H^1_\pi$ και $p_x(0,y,t) = p_x(1,y,t)$, $p_y(x,0,t) = p_y(x,1,t)$ βλέπουμε ότι:

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0, \tag{2.19}$$

και επομένως

$$\int_\Omega p_{tt} v + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p = \int_\Omega f v \ , \quad \forall v \in H^1_\pi(\Omega).$$

Δηλαδή ζητάμε $p \in H^1_\pi$ τέτοιο ώστε

$$(p_{tt}, v) + (\nabla p, \nabla v) = (f, v) \ , \quad \forall v \in H^1_\pi(\Omega). \tag{2.20}$$

Τέλος θεωρούμε έναν υπόχωρο $S^\pi_h \subset H^1_\pi(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης και διατυπώνουμε το πρόβλημα της ημιδιακριτής προσέγγισης Galerkin με τον συνήθη πλέον τρόπο ως εξής: Ζητάμε $p_h \in S^\pi_h$, $t \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{cases} (p_{h,tt}, \varphi) + (\nabla p_h, \nabla\varphi) = (f, \varphi) \ , \quad \forall \varphi \in S^\pi_h, \ t > 0, \\ p_h(x,0) = p^0_h(x) \approx p^0(x) \quad \text{όπου } \ p^0_h \in S^\pi_h, \\ p_{h,t}(x,0) = p^0_{h,t}(x) \approx p^0_t(x) \quad \text{όπου } \ p^0_{h,t} \in S^\pi_h. \end{cases} \tag{2.21}$$

2.3 Εκτιμήσεις σφάλματος για το πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Neumann

Στην προηγούμενη ενότητα ορίσαμε την ασθενή (ή μεταβολική) μορφή του προβλήματος Neumann και στην συνέχεια με την συνήθη μέθοδο Galerkin, δηλαδή το πρόβλημα (2.14): Ζητάμε $p_h \in S_h \subset H^1(\Omega)$, $t \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} (p_{h,tt}, \varphi) + (\nabla p_h, \nabla\varphi) &= (f, \varphi) \ , \quad \forall \varphi \in S_h, \ t > 0, \\ p_h(x,0) = p^0_h(x) &\approx p^0(x) \ , \quad \text{όπου } \ p^0_h \in S_h, \\ p_{h,t}(x,0) = p^0_{h,t}(x) &\approx p^0_t(x) \ , \quad \text{όπου } \ p^0_{h,t} \in S_h. \end{aligned}$$

Λύνουμε το πρόβλημα (2.14) ως εξής:

Ο χώρος S_h είναι υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω $N_h = \dim(S_h)$ και $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ μία βάση του S_h. Τότε αφού $p_h \in S_h$:

$$p_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N_h} a_i(t)\varphi_i(x) \ , \quad x \in \Omega, \ t \geq 0, \tag{2.22}$$

και

$$p_{h,tt}(x,t) = \sum_{i=1}^{N_h} \ddot{a}_i(t)\varphi_i(x) \ , \quad x \in \Omega, \ t \geq 0. \tag{2.23}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.22) και (2.23) στο πρόβλημα (2.14) καταλήγουμε στο παρακάτω $N_h \times N_h$ γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\sum_{i=1}^{N_h} \ddot{a}_i(t)(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{N_h} a_i(t)(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) = (f, \varphi_j) \ , \quad 1 \leq j \leq N_h, \ t > 0.$$

Ορίζουμε τώρα

- Τον $N_h \times N_h$ πίνακα μάζας G, έτσι ώστε $G_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)$. Ο πίνακας μάζας είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος ενώ με κατάλληλη επιλογή της βάσης (μικρός φορέας των φ_j), ο G είναι αραιός.
- Τον $N_h \times N_h$ πίνακα ακαμψίας S, έτσι ώστε $S_{ij} = (\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i)$. Ο πίνακας ακαμψίας είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος ενώ και πάλι με κατάλληλη επιλογή της βάσης ο πίνακας είναι και αραιός.
- Το διάνυσμα $\vec{F}(t) = \big((f(t), \varphi_1), (f(t), \varphi_2), \ldots, (f(t), \varphi_{N_h})\big)^T$.

Άρα μπορούμε να γράψουμε το σύστημα στην μορφή:

$$G\ddot{\vec{a}}(t) + S\vec{a}(t) = \vec{F}(t) \ , \quad t \geq 0 \tag{2.24}$$

όπου $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{N_h}(t))^T$.

Το σύστημα (2.24) είναι 2ης τάξης και απαιτεί δύο αρχικές συνθήκες. Αυτές θα προέλθουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (2.14) ως εξής:

$$p_h^0 \in S_h \Rightarrow p_h^0 = \sum_{i=1}^{N_h} \beta_i \varphi_i,$$

$$p_{h,t}^0 \in S_h \Rightarrow p_{h,t}^0 = \sum_{i=1}^{N_h} \gamma_i \varphi_i.$$

Συνεπώς ορίζουμε

$$\vec{a}(0) = \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{N_h})^T,$$

$$\dot{\vec{a}}(0) = \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{N_h})^T,$$

οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} G\ddot{\vec{a}}(t) + S\vec{a}(t) = \vec{F}(t) \ , \quad t \geq 0, \\ \qquad \vec{a}(0) = \vec{\beta} \ , \quad \dot{\vec{a}}(0) = \vec{\gamma}, \end{cases} \tag{2.25}$$

του οποίου η λύση είναι οι συντελεστές του p_h ως προς τη βάση $\{\varphi_i\}$ του S_h.

Η ιδέα της μεθόδου Galerkin είναι ότι όταν η διάσταση του S_h τείνει στο άπειρο (δηλαδή καθώς $h \longrightarrow 0$ αν π.χ. το h είναι η μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου κατάλληλου τριγωνισμού του Ω) τότε η ημιδιακριτη προσέγγιση p_h θα τείνει στην ακριβή λύση p, π.χ. ως προς την L^2 νόρμα, $\|p - p_h\| \longrightarrow 0$. Κάνοντας εκτίμηση της ποσότητας $\|p_h - p\|$ συναρτήσει του h θα είμαστε σε θέση να δούμε πόσο γρήγορα τείνει η προσεγγιστική λύση στην ακριβή λύση καθώς $h \to 0$.

2.3.1 Ελλειπτική προβολή και προσεγγιστικές ιδιότητές του S_h

Πριν από αυτό όμως ας ορίσουμε την ελλειπτική προβολή στον χώρο S_h. Ακολουθούμε τις σημειώσεις του σεμιναρίου [Δ],[Th].

Ορισμός 2. *(Τελεστής ελλειπτικής προβολής)*
Ο τελεστής $R_h : H^1 \to S_h$, που ονομάζεται τελεστής ελλειπτικής προβολής στον S_h, ορίζεται για $w \in H^1$ από την σχέση:

$$(\nabla(R_h w), \nabla\varphi) = (\nabla w, \nabla\varphi)\ , \quad \forall\varphi \in S_h. \tag{2.26}$$

□

Η ελλειπτική προβολή έχει την παρακάτω προσεγγιστική ιδιότητα:

Θεώρημα 2. *(Προσεγγιστική ιδιότητα της ελλειπτικής προβολής)*
Έστω $r \geq 2$, τότε για $v \in H^s,\ \ 2 \leq s \leq r$ ισχύει

$$\|R_h v - v\| \leq C h^s \|v\|_s \tag{2.27}$$

και

$$\|\nabla(R_h v - v)\| \leq C h^{s-1} \|v\|_s, \tag{2.28}$$

όπου C είναι σταθερά ανεξάρτητη του h και του v.

□

Η ιδιότητα αυτή της ελλειπτικής προβολής προκύπτει από ανάλογη προσεγγιστική ιδιότητα του S_h που δίνεται από το επόμενο λήμμα (βλ.[Th]).

Λήμμα 1. *(Προσεγγιστική ιδιότητα του S_h)*
Υπάρχει ακέραιος αριθμός $r \geq 2$ τέτοιος ώστε:

$$\inf_{\chi\in S_h} \Big(\|w-\chi\| + h\|w-\chi\|_1\Big) \leq C h^s \|w\|_s, \tag{2.29}$$

για $w \in H^s,\ \ 2 \leq s \leq r$ και C σταθερά ανεξάρτητη του w και του h.

□

Είναι γνωστό (βλ.[C]) ότι πολλοί χώροι συνεχών συναρτήσεων στο Ω, που είναι κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού $\leq r$ σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο του S_h, πληρούν την (2.29).

2.3.2 Εκτίμηση σφάλματος

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα για την εκτίμηση στην L^2 νόρμα του σφάλματος της ημιδιακριτής προσέγγισης του προβλήματος με ομογενείς σ.σ. Neumann.

Θεώρημα 3. *Έστω p_h και p οι λύσεις των προβλημάτων (2.3) και (2.14) αντίστοιχα για $0 \leq t \leq T$. Τότε, για $0 \leq t \leq T$*

$$\begin{aligned}\|p_h(t)-p(t)\| \leq \|p_h^0 - R_h p^0\| + C(T)\{\|p_{h,t}^0 - R_h p_t^0\| + \|\nabla(p_h^0 - R_h p^0)\|\}\\ + C(T)h^r\Big(\|p^0\|_r + \int_0^t \|p_t(\tau)\|_r d\tau + \big(\int_0^t \|p_{tt}(\tau)\|_r^2 d\tau\big)^{1/2}\Big),\end{aligned} \tag{2.30}$$

όπου $C(T)$ σταθερά ανεξάρτητη του h και του p.

Απόδειξη: Ακολουθούμε την απόδειξη του Dupont [D], για το πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Dirichlet. Από τις σχέσεις (2.3) και (2.14) έχουμε ότι:

$$(p_{tt},\varphi) + (\nabla p, \nabla\varphi) = (f,\varphi),$$

$$(p_{h,tt},\varphi) + (\nabla p_h, \nabla\varphi) = (f,\varphi),$$

$\forall \varphi \in S_h$, $0 \leq t \leq T$. Αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(e_{tt},\varphi) + (\nabla e, \nabla\varphi) = 0 \ , \ \ \forall\varphi \in S_h, \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.31}$$

όπου $e = p_h - p$. Επομένως $e|_{t=0} = p_h^0 - p^0$ και $e_t|_{t=0} = p_{h,t}^0 - p_t^0$.
Γράφουμε τώρα

$$e = p_h - p = (p_h - R_h p) + (R_h p - p) \equiv \vartheta + \varrho$$

όπου $\vartheta = (p_h - R_h p)$ και $\varrho = (R_h p - p)$.
Προφανώς

$$\|p_h - p\| = \|\vartheta + \varrho\| \leq \|\vartheta\| + \|\varrho\|,$$

οπότε αρκεί να εκτιμήσουμε τα $\|\vartheta\|$ και $\|\varrho\|$.
Η ποσότητα $\|\varrho\|$ είναι εύκολο να εκτιμηθεί αφού

$$\|\varrho\| = \|R_h p - p\| \overset{(2.27)}{\leq} Ch^r \|p\|_r.$$

Όμως

$$p(x,t) = p^0(x) + \int_0^t p_t(x,\tau) d\tau.$$

Επομένως

$$\|\varrho\| \leq Ch^r \Big(\|p^0\|_r + \int_0^t \|p_t\|_r d\tau \Big). \tag{2.32}$$

Για να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\|\vartheta\|$ παρατηρούμε ότι για $\varphi \in S_h$:

$$\begin{aligned}
(\vartheta_{tt}, \varphi) + (\nabla\vartheta, \nabla\varphi) &= (p_{h,tt}, \varphi) + (\nabla p_h, \nabla\varphi) - (R_h p_{tt}, \varphi) - (\nabla R_h p, \nabla\varphi) \\
&= (f, \varphi) - (R_h p_{tt}, \varphi) - (\nabla R_h p, \nabla\varphi) \\
&= (f, \varphi) - (R_h p_{tt}, \varphi) - (\nabla p, \nabla\varphi) \\
&= (p_{tt}, \varphi) - (R_h p_{tt}, \varphi),
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(\vartheta_{tt}, \varphi) + (\nabla\vartheta, \nabla\varphi) = -(\varrho_{tt}, \varphi) \ , \quad \forall \varphi \in S_h \ , \ \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.33}$$

Σταθεροποιούμε το t και επιλέγουμε $\varphi = \vartheta_t$ οπότε:

$$(\vartheta_{tt}, \vartheta_t) + (\nabla\vartheta, \nabla\vartheta_t) = -(\varrho_{tt}, \vartheta_t) \ ,$$

δηλ.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vartheta_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\vartheta\|^2 = -(\varrho_{tt}, \vartheta_t).$$

Συνεχίζουμε τώρα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\big(\|\vartheta_t\|^2 + \|\nabla\vartheta\|^2\big) &= -2(\varrho_{tt}, \vartheta_t) \\
&\leq 2\|\varrho_{tt}\|\|\vartheta_t\| \\
&\leq \|\varrho_{tt}\|^2 + \|\vartheta_t\|^2 \\
&\leq \|\varrho_{tt}\|^2 + \|\vartheta_t\|^2 + \|\nabla\vartheta\|^2.
\end{aligned}$$

Έστω $\sigma(t) := \|\vartheta_t\|^2 + \|\nabla\vartheta\|^2$. Τότε προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) \leq \|\varrho_{tt}\|^2 + \sigma(t), \ 0 \leq t \leq T.$$

Η παραπάνω σχέση είναι μία διαφορική ανισότητα. Από το λήμμα του Gronwall παίρνουμε:

$$\sigma(t) = \|\vartheta_t(t)\|^2 + \|\nabla\vartheta(t)\|^2 \leq e^t\{\|\vartheta_t(0)\|^2 + \|\nabla\vartheta(0)\|^2\} + \int_0^t e^{t-\tau}\|\varrho_{tt}(\tau)\|^2 d\tau,$$

και αφού για $0 \le t \le T$ έχουμε $e^t \le e^T =: C(T)$, παίρνουμε τελικά

$$\|\vartheta_t(t)\|^2 + \|\nabla\vartheta(t)\|^2 \le C(T)\{\|\vartheta_t(0)\|^2 + \|\nabla\vartheta(0)\|^2 + \int_0^t \|\varrho_{tt}(\tau)\|^2 d\tau\}\ , \ \ 0 \le t \le T. \tag{2.34}$$

Έχουμε όμως ότι

$$\|\varrho_{tt}\| = \|R_h p_{tt} - p_{tt}\| \le Ch^r \|p_{tt}\|_r,$$

αντικαθιστώντας στην (2.34) και παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες καταλήγουμε στην σχέση:

$$\|\vartheta_t(t)\| + \|\nabla\vartheta(t)\| \le C(T)\{\|\vartheta_t(0)\| + \|\nabla\vartheta(0)\| + h^r \Big(\int_0^t \|p_{tt}(\tau)\|_r^2 d\tau\Big)^{1/2}\}. \tag{2.35}$$

Για να βρούμε ένα φράγμα για την $\|\vartheta\|$ έχουμε:

$$\vartheta(x,t) = \vartheta(x,0) + \int_0^t \vartheta_t(x,\tau)d\tau.$$

Παίρνοντας νόρμες έχουμε:

$$\|\vartheta(t)\| \le \|\vartheta(0)\| + \int_0^t \|\vartheta_t(\tau)\|d\tau \le \|\vartheta(0)\| + T \max_{0\le\tau\le T} \|\vartheta_t(\tau)\|. \tag{2.36}$$

Άρα απο την (2.35) προκύπτει ότι:

$$\max_{0\le\tau\le T} \|\vartheta_t(\tau)\| \le C(T)\{\|\vartheta_t(0)\| + \|\nabla\vartheta(0)\| + h^r \Big(\int_0^t \|p_{tt}(\tau)\|_r^2 d\tau\Big)^{1/2}\},$$

οπότε η (2.36) γίνεται

$$\|\vartheta(t)\| \le \|\vartheta(0)\| + C(T)\{\|\vartheta_t(0)\| + \|\nabla\vartheta(0)\| + h^r \Big(\int_0^t \|p_{tt}(\tau)\|_r^2 d\tau\Big)^{1/2}\}. \tag{2.37}$$

Όμως

$$\|p_h - p\| \le \|\vartheta\| + \|\varrho\|.$$

Άρα τελικά απο τις σχέσεις (2.32) και (2.37) παίρνουμε για $0 \le t \le T$

$$\|p_h - p\| \le \|\vartheta(0)\| + C(T)\{\|\vartheta_t(0)\| + \|\nabla\vartheta(0)\|\} + C(T)h^r\Big(\|p^0\|_r + \int_0^t \|p_t(\tau)\|_r d\tau + \big(\int_0^t \|p_{tt}(\tau)\|_r^2 d\tau\big)^{1/2}\Big) \tag{2.38}$$

το οποίο, με δεδομένο ότι $\|\vartheta(0)\| = \|p_h^0 - R_h p^0\|$, $\|\vartheta_t(0)\| = \|p_{h,t}^0 - R_h p_t^0\|$ και $\|\nabla\vartheta(0)\| = \|\nabla(p_h^0 - R_h p^0)\|$, είναι το τελικό αποτέλεσμα (2.3) $\square$

Παρατήρηση:

Σημαντικό ρόλο στο θεώρημα αυτό είναι να μπορούμε να εκτιμήσουμε τις ποσότητες $\|\vartheta(0)\|$, $\|\vartheta_t(0)\|$ και $\|\nabla\vartheta(0)\|$ με ακρίβεια $O(h^r)$.

Τόσο η $\|\vartheta(0)\|$ όσο και η $\|\vartheta_t(0)\|$ είναι $\|O(h^r)\|$ για πολλές προσεγγίσεις της p^0 και της p_t^0 αντίστοιχα (π.χ. L^2 προβολές, παρεμβάλλουσα κλπ.). Αντιθέτως η $\|\nabla\vartheta(0)\|$ είναι $O(h^r)$ πρακτικά μόνον αν $p_h^0 = R_h p^0$, οπότε $\vartheta(0) = 0$.

2.4 Ένα πλήρως διακριτό σχήμα. Υλοποίηση και αριθμητικά πειράματα

Στην ενότητα 2.2 ορίσαμε τα ημιδιακριτά προβλήματα (2.11), (2.14), (2.17) και (2.21), τα οποία διαφέρουν ουσιαστικά μόνο στον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης στον οποίο είναι ορισμένη η ημιδιακριτή λύση. Θα δούμε τώρα πώς περνάμε από το ημιδιακριτό στο πλήρως διακριτό πρόβλημα και θα ορίσουμε συγκεκριμένα πλήρως διακριτά σχήματα.

2.4.1 Διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο

Είχαμε καταλήξει στο ημιδιακριτό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} (p_{h,tt},\varphi)+(\nabla p_h,\nabla\varphi)&=(f,\varphi)\ ,\quad \forall\varphi\in S_h\ ,\ \ t>0,\\ p_h(x,0)&=p_h^0(x)\approx p^0(x)\ ,\quad \text{όπου}\ \ p_h^0(x)\in S_h,\\ p_{h,t}(x,0)&=p_{h,t}^0(x)\approx p_t^0(x)\ ,\quad \text{όπου}\ \ p_{h,t}^0(x)\in S_h, \end{aligned} \tag{2.39}$$

όπου S_h είναι κάθε φορά ένας από τους χώρους πεπερασμένων στοιχείων των προβλημάτων τις ενότητας 2.2. Για την διακριτοποίηση ως προς το χρόνο, επιλέγουμε χρονικό βήμα k $(k=\Delta t)$ και ορίζουμε $t^n=nk\ ,\ \ n=0,1,2,\ldots,M$ όπου $M: Mk=T$ και

$$P^n\approx p(\cdot,t^n)\ ,\ \ P^n\in S_h.$$

Θα προσεγγίσουμε την p_{tt} από το πηλίκο: $p_{tt}\approx\dfrac{p(t^{n+1})-2p(t^n)+p(t^{n-1})}{k^2}$. Αντικαθιστώντας στο πρόβλημα (2.39) διατυπώνουμε το εξής πλήρως διακριτό πρόβλημα:
Ζητούμε $P^n\in S_h\ ,\ \ n=0,1,2,\ldots,M\ ,\ \ Mk=T$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{P^{n+1}-2P^n+P^{n-1}}{k^2},\varphi\Big)+(\nabla\hat{P}{}^n_\beta,\nabla\varphi)=(f^n,\varphi)\ ,\ \ \forall\varphi\in S_h\ ,\ \ n=1,\ldots,M-1\\ P^0\ ,\ P^1\ ,\ \ \text{δεδομένα στο}\ S_h, \end{cases} \tag{2.40}$$

όπου

$$\hat{P}{}^n_\beta=\beta P^{n+1}+(1-\beta)P^n+\beta P^{n-1}$$

και

$$f^n=f(t^n)$$

για παράμετρο $\beta\geq 0$.
Πολλαπλασιάζουμε την (2.40) με k^2 και έχουμε:

$$(P^{n+1},\varphi)-2(P^n,\varphi)+(P^{n-1},\varphi)+k^2\beta(\nabla P^{n+1},\nabla\varphi)+k^2(1-2\beta)(\nabla P^n,\nabla\varphi)+$$
$$+k^2(\nabla P^{n-1},\nabla\varphi)=k^2(f^n,\varphi)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}(P^{n+1},\varphi)+k^2\beta(\nabla P^{n+1},\nabla\varphi) =&2(P^n,\varphi)-k^2(1-2\beta)(\nabla P^n,\nabla\varphi)\\ &-(P^{n-1},\varphi)-k^2(\nabla P^{n-1},\nabla\varphi)\\ &+k^2(f^n,\varphi)\end{aligned}$$

για $\varphi\in S_h$, $1\le n\le M-1$.

Έστω τώρα $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ μία βάση του S_h. Τότε

$$P^n=\sum_{i=1}^{N_h}c_i^n\varphi_i,$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{N_h}c_i^{n+1}\varphi_i,\varphi_j)+k^2\beta(\sum_{i=1}^{N_h}c_i^{n+1}\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_j) =&2(\sum_{i=1}^{N_h}c_i^n\varphi_i,\varphi_j)-k^2(1-2\beta)(\sum_{i=1}^{N_h}c_i^n\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_j)\\ &-(\sum_{i=1}^{N_h}c_i^{n-1}\varphi_i,\varphi_j)-k^2(\sum_{i=1}^{N_h}c_i^{n-1}\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_j)\\ &+k^2(f^n,\varphi_j)\end{aligned}$$

για $1\le j\le N_h$. Ορίζουμε λοιπόν

- Τον πίνακα μάζας G : $G_{ji}=(\varphi_j,\varphi_i)$
- Τον πίνακα ακαμψίας S : $S_{ji}=(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_i)$
- Το άγνωστο διάνυσμα $\vec{c^n}$: $\vec{c^n}=(c_1^n,c_2^n,\dots,c_{N_h}^n)^T$
- και το διάνυσμα $\vec{F^n}$: $F_i^n=(f^n,\varphi_i)$,

οπότε τελικά το πλήρως διακριτό πρόβλημα γράφεται ως εξής:
Ζητάμε $\vec{c^n}$, $0\le n\le M$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases}(G+k^2\beta S)\vec{c}^{\,n+1}=(2G-k^2(1-2\beta)S)\vec{c}^{\,n}-(G+k^2\beta S)\vec{c}^{\,n-1}+k^2\vec{F}^{\,n},1\le n\le M-1,\\ \vec{c}^{\,0}\ ,\ \vec{c}^{\,1}\ ,\quad \text{δεδομένα.}\end{cases}\tag{2.41}$$

Για $\beta=0$ έχω $\hat{P}_\beta^n=P^n$ (το κλασσικό σχήμα των Courant-Friedrichs-Lewy, (1928)). Για $\beta\ge 1/4$ η μέθοδος συγκλίνει χωρίς περιορισμούς, χωρίς δηλαδή να απαιτούμε κάποια συνθήκη της μορφής $\frac{\Delta t}{h}\le c_0$. Όταν $0\le\beta<1/4$ χρειάζεται να εισάγουμε μία συνθήκη ευστάθειας της μορφής $\frac{\Delta t}{h}\le c_0$, η οποία όμως δεν είναι πολύ περιοριστική. Η c_0 είναι κατάλληλη σταθερά,[Δ].

Μία ξεχωριστή περίπτωση είναι όταν $\beta = 1/12$. Η μέθοδος τότε ονομάζεται Störmer-Numerov και είναι τέταρτης τάξης ως προς τον χρόνο.

Ακριβέστερα η συνθήκη ευστάθειας είναι:

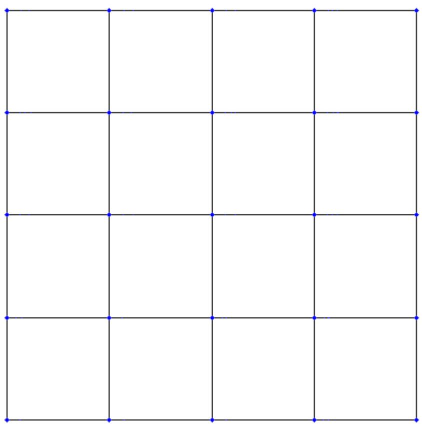
$$\Delta t\big(\rho(G^{-1}S)\big)^{1/2} = \begin{cases} +\infty & \text{εάν } \beta \geq 1/4 \\ \big(\dfrac{4}{1-4\beta}\big)^{1/2} & \text{εάν } 0 \leq \beta < 1/4 \end{cases},$$

όπου είναι γνωστό ότι $\big(\rho(G^{-1}S)\big)^{1/2} \backsim 1/h$. Υπό αυτή τη συνθήκη και για κατάλληλες αρχικές συνθήκες μπορεί να αποδειχθεί ότι $\max\limits_n \|P^n - p(t^n)\| \leq C(k^2 + h^r)$ (με k^4 αντί k^2 για την Störmer-Numerov). Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στις εργασίες [D],[D1]

2.4.2 Διγραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία

Για να προχωρήσουμε στην υλοποίηση στον υπολογιστή του πλήρους διακριτού σχήματος (2.41) θα πρέπει να θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη διαμέριση του Ω. Το σχήμα των στοιχείων του διαμερισμού ορίζει διάφορες οικογένειες χώρων πεπερασμένων στοιχείων για το χωρίο Ω.

Στην περίπτωση που το χωρίο Ω είναι ορθογώνιο η ένωση ορθογωνίων, όπως είναι το χωρίο στο οποίο θεωρούμε τα προβλήματα μας, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία διαμέριση $\mathcal{M}_h$ του Ω έτσι ώστε τα στοιχεία τα οποία σχηματίζονται να λαμβάνονται ως τανυστικά γινόμενα μονοδιάστατων χώρων. Για το χωρίο Ω του σχήματος 2.1 μία τέτοια διαμέριση θα μοιάζει π.χ. με αυτήν στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Ένας διαμερισμός του χωρίου Ω με ορθογώνια

Σε κάθε ορθογώνιο M_i του διαμερισμού υπάρχουν τέσσερις κορυφές και μπορούμε να ορίσουμε με μοναδικό τρόπο ένα πολυώνυμο με τέσσερις βαθμούς ελευθερίας. Ένα τέτοιο πολυώνυμο θα έχει την μορφή (με $x = x_1,\ y = x_2$):

$$a + bx + cy + dxy$$

και δεδομένου ότι τα γινόμενα γραμμικών πολυωνύμων $(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta y)$ γράφονται στην μορφή $a + bx + cy + dxy$, τέτοιου είδους πολυώνυμα αναφέρονται ως 'διγραμμικά' (bilinear). Να σημειώσουμε ότι τα διγραμμικά πολυώνυμα υποβαθμίζονται σε γραμμικά πάνω στις ακμές του ορθογωνίου.

Συμβολίζουμε λοιπόν με $\{c_1, c_2, \ldots, c_{N_c}\}$, το σύνολο των κόμβων στο σύνορο με συνοριακές συνθήκες Dirichlet (δεσμευμένοι κόμβοι) και με $\{z_1, z_2, \ldots, z_{N_f}\}$ το σύνολο των υπόλοιπων κόμβων του διαμερισμού τους οποίους ονομάζουμε ελεύθερους κόμβους $(N_\nu = N_f + N_c)$. Επιπλέον ορίζουμε με N_{el} τον αριθμό των ορθογώνιων στοιχείων του διαμερισμού. Έτσι λοιπόν $\Omega = \mathcal{M}_h = \bigcup_{i=1}^{N_{el}}\{M_i\}$ και μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο συναρτήσεων B_h με βάση $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N_\nu}\}$, με την ιδιότητα:

$$\psi_i(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i = j \\ 0 & \text{εάν } i \neq j \end{cases},$$

που μπορεί να γραφτεί ώς:

$$\psi_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy\ , \quad (x, y) \in M_i,$$

όπου τα a_i, b_i, c_i, d_i προσδιορίζονται κατα μοναδικό τρόπο από τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου M_i.

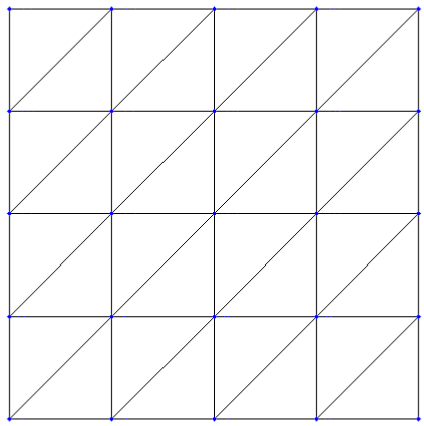
Αν ορίσουμε ως Γ1 το τμήμα του συνόρου $\partial\Omega$ με συνθήκες Dirichlet και ως Γ2 το τμήμα του συνόρου $\partial\Omega$ με συνθήκες Neumann, τότε ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων είναι ο:

$$S_h = \{v \in B_h\ :\ \ v = 0 \text{ στο } \Gamma 1\}.$$

Στο εξής θα αναφερόμαστε σε τέτοιου είδους χώρους ως χώρους τανυστικών γινομένων πεπερασμένων στοιχείων.

2.4.3 Τριγωνικά Πεπερασμένα Στοιχεία

Έστω τώρα ένας διαμερισμός του χωρίου του σχήματος 2.1 με τρίγωνα όπως φαίνεται π.χ. στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Ένας διαμερισμός του χωρίου Ω με τρίγωνα

Ορίζοντας λοιπόν $\Omega = \mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^{Nel}\{T_i\}$ και τον συμβολισμό στους κόμβους όπως αυτό έγινε στα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία μπορούμε και πάλι να ορίσουμε έναν χώρο συναρτήσεων P_h με βάση $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N_\nu}\}$ που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\psi_i(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i = j \\ 0 & \text{εάν } i \neq j \end{cases}.$$

Κάθε στοιχείο της βάσης μπορεί να γραφτεί ώς:

$$\psi_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \ , \quad (x, y) \in T_i,$$

όπου και πάλι τα a_i, b_i, c_i προσδιορίζονται κατα μοναδικό τρόπο από τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου T_i.

Ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων σε αυτήν την περίπτωση είναι ο

$$S_h = \{v \in P_h \ : \ \ v = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma 1\}.$$

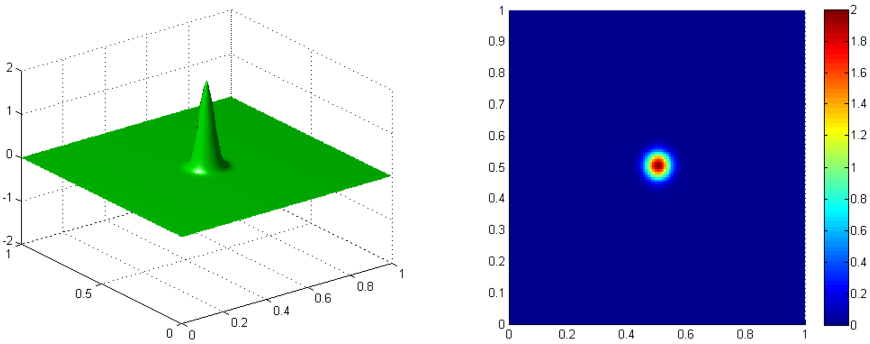
2.4.4 Αριθμητικά Παραδείγματα

Θα υλοποιήσουμε τώρα την πλήρως διακριτή μέθοδο (2.41) με $\beta = 0$ όταν οι αρχικές συνθήκες είναι της μορφής

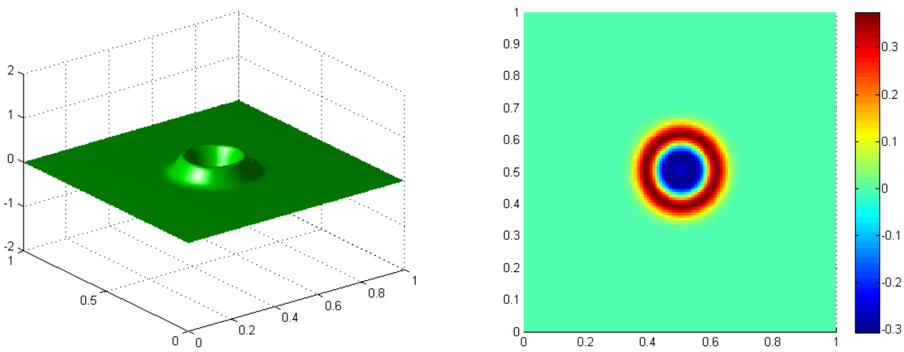
$$p^0(x, y) = Ae^{-c\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)} \ \text{ και } \ p_t^0(x, y) = 0. \tag{2.42}$$

Η συνάρτηση $p^0(x, y)$ παριστάνει την αρχική τιμή του κύματος που για στην δεδομένη περίπτωση είναι μία συνάρτηση Gauss. με κορυφή το σημείο (x_0, y_0)

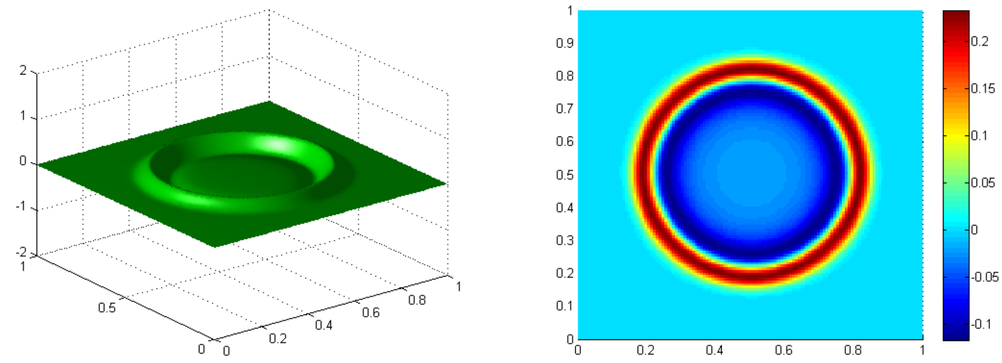
Παράδειγμα 1:
Δοκιμάζουμε την μέθοδο μας με τις αρχικές συνθήκες (2.42) όπου $A = 2,\ c = 600$, $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ για το χωρίο του σχήματος 2.1 με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Η προσομοίωση έγινε με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία με συνολικό αριθμό στοιχείων $N_{el} = 15376$. Πήραμε $\Delta t = 1/310$ έτσι ώστε $\frac{\Delta t}{h} = \frac{2}{5}$ που πληροί την συνθήκη ευστάθειας $\frac{\Delta t}{h} \leq c_0$ με $c_0 = 2/5$. Η εξέλιξη της λύσης φαίνεται στα σχήματα 2.5-2.9.



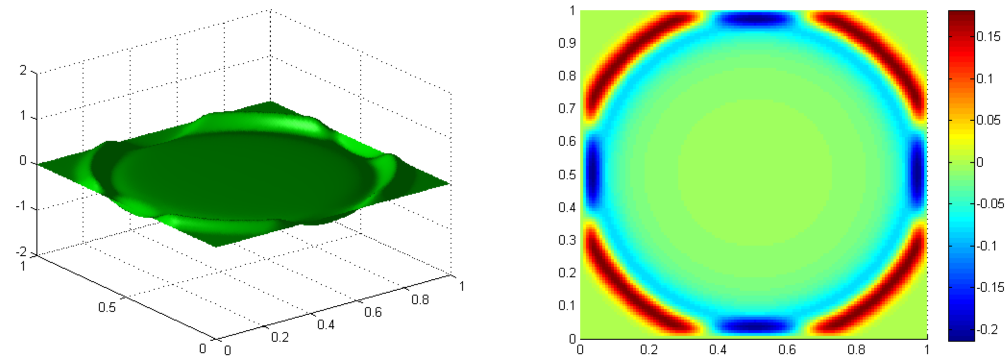
Σχήμα 2.5: $t = 0$



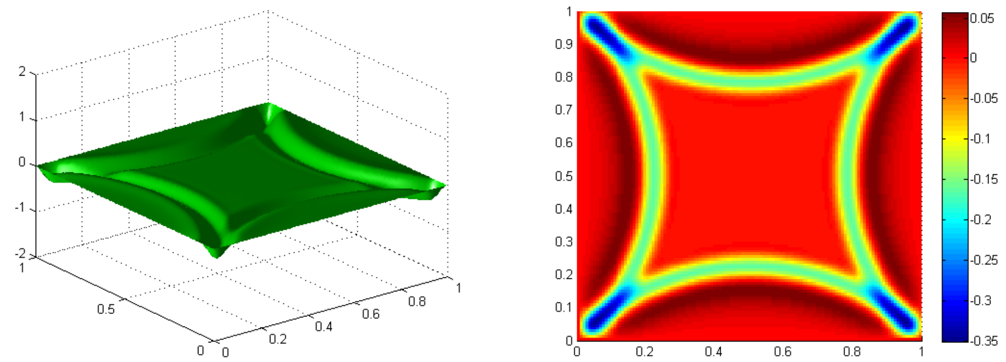
Σχήμα 2.6: $t = 0.1$



Σχήμα 2.7: $t = 0.3$

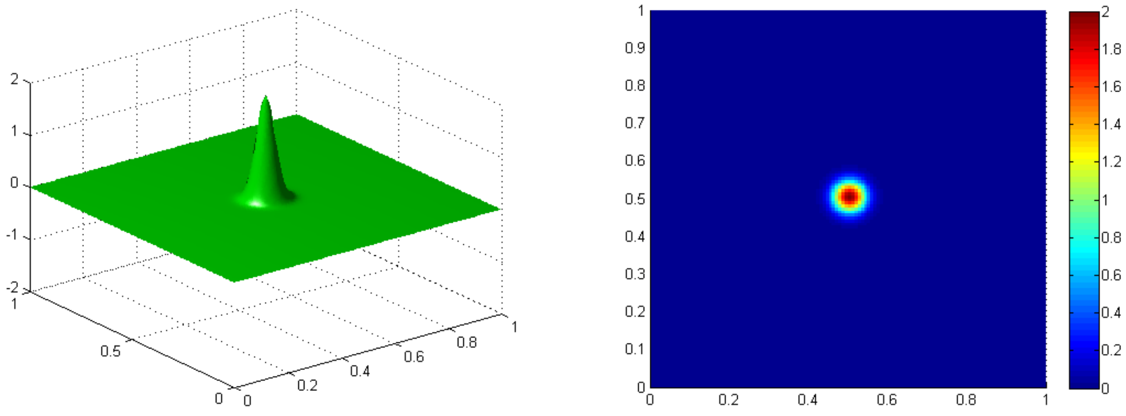


Σχήμα 2.8: $t = 0.5$

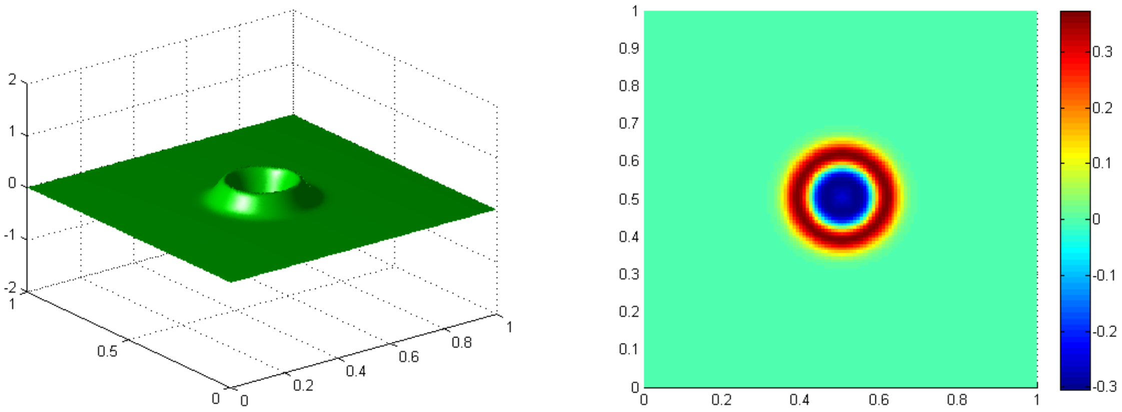


Σχήμα 2.9: $t = 0.7$

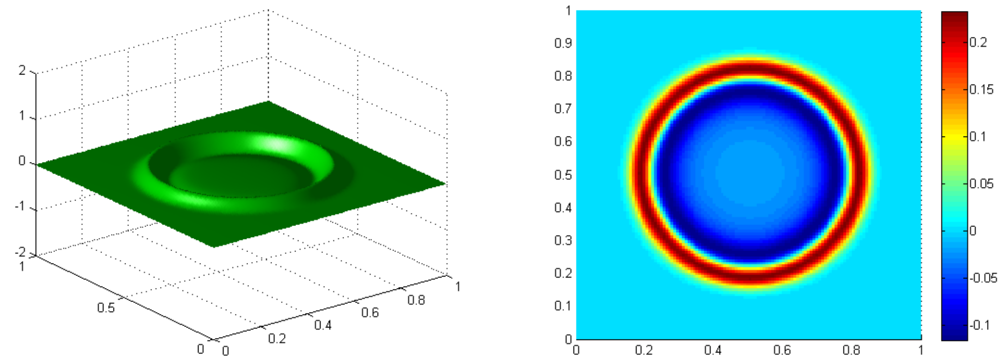
Παράδειγμα 2:
Δοκιμάζουμε την μέθοδο μας με τις αρχικές συνθήκες (2.42) όπου $A = 2,\ c = 600\ ,\ (x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ για το χωρίο του σχήματος 2.1 με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann. Η προσομοίωση έγινε με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία με συνολικό αριθμό στοιχείων $N_{el} = 15376$. Πήραμε $\Delta t = 1/310$ έτσι ώστε $\frac{\Delta t}{h} = \frac{2}{5}$ που πληροί την συνθήκη ευστάθειας $\frac{\Delta t}{h} \leq c_0$ με $c_0 = 2/5$. Η εξέλιξη της λύσης φαίνεται στα σχήματα 2.10-2.14.



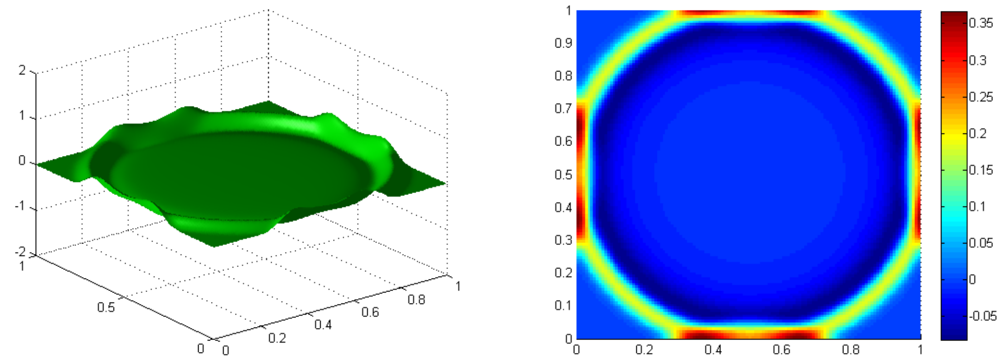
Σχήμα 2.10: $t = 0$



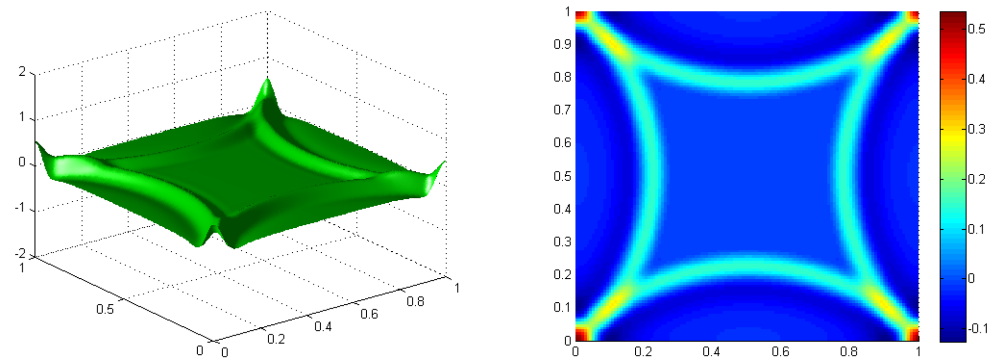
Σχήμα 2.11: $t = 0.1$



Σχήμα 2.12: $t = 0.3$



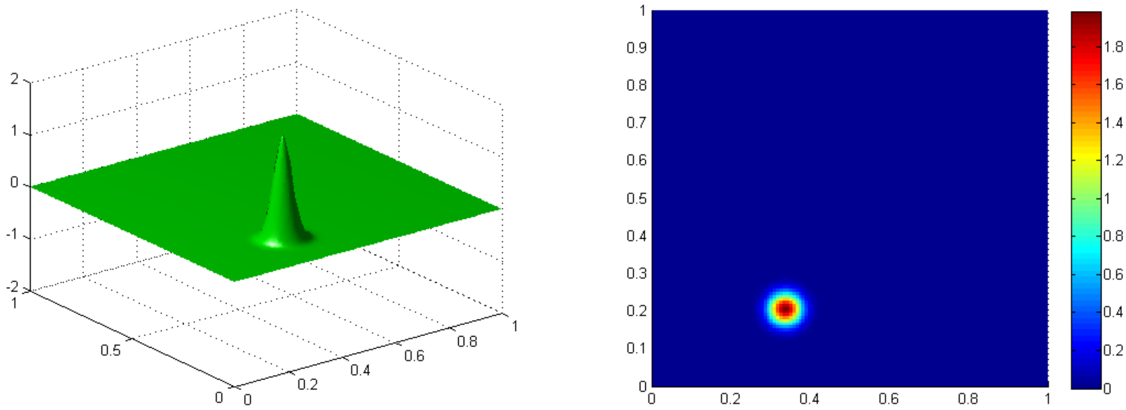
Σχήμα 2.13: $t = 0.5$



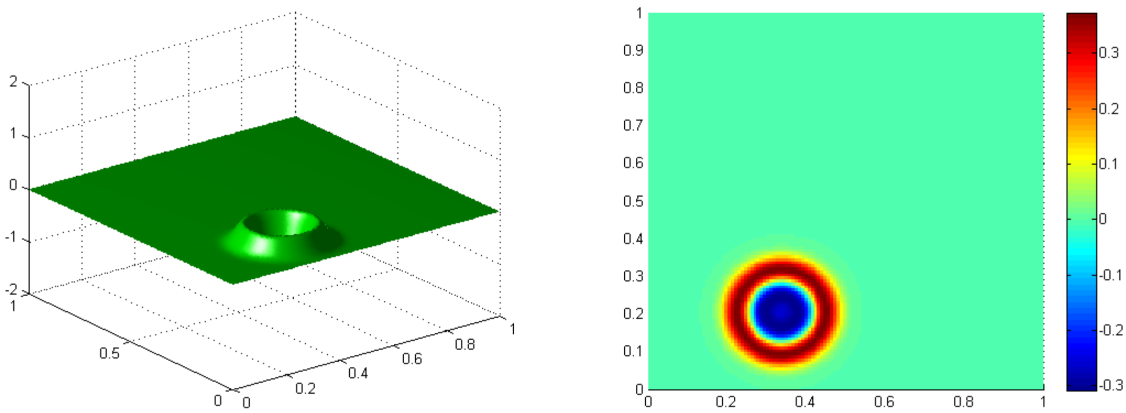
Σχήμα 2.14: $t = 0.7$

Παράδειγμα 3:

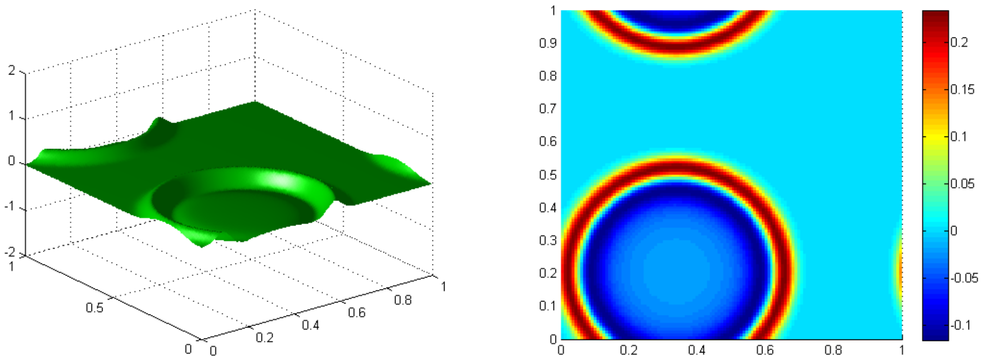
Δοκιμάζουμε την μέθοδο μας με τις αρχικές συνθήκες (2.42) όπου $A = 2,\ c = 600$, $(x_0, y_0) = (1/3, 1/5)$, στο χωρίο του σχήματος 2.1 με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Η προσομοίωση έγινε με ορθογώνια πεπερασμένα στοιχεία με $N_{el} = 15376$. Πήραμε $\Delta t = 1/310$ έτσι ώστε $\frac{\Delta t}{h} = \frac{2}{5}$ που πληροί την συνθήκη ευστάθειας $\frac{\Delta t}{h} \leq c_0$ με $c_0 = 2/5$. Η εξέλιξη της λύσης φαίνεται στα σχήματα 2.15-2.19.



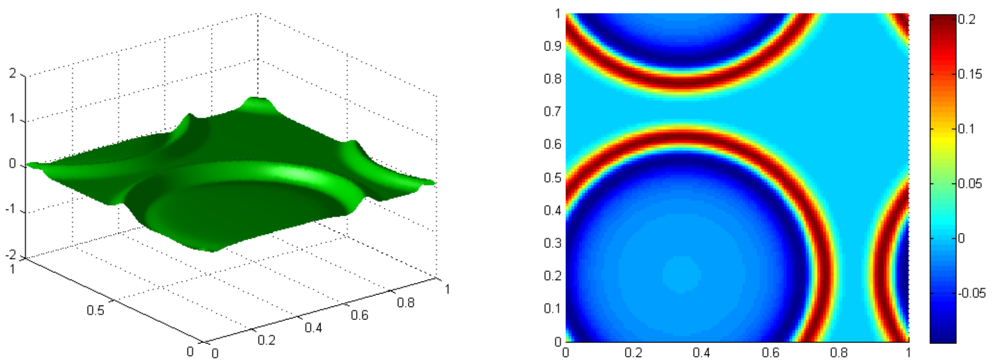
Σχήμα 2.15: $t = 0$



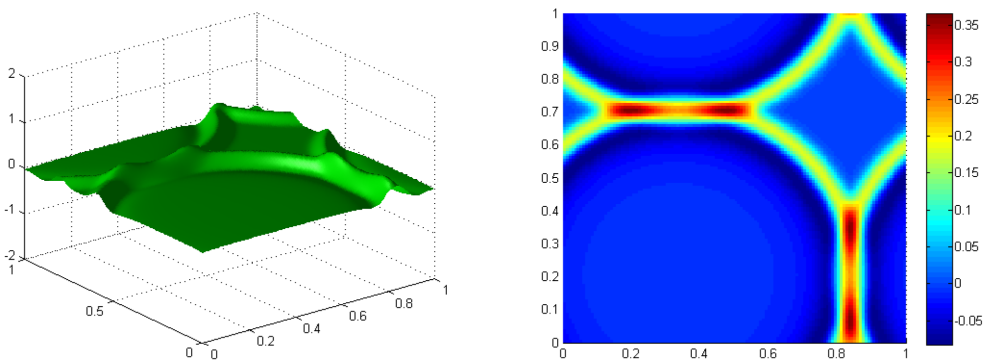
Σχήμα 2.16: $t = 0.1$



Σχήμα 2.17: $t = 0.3$

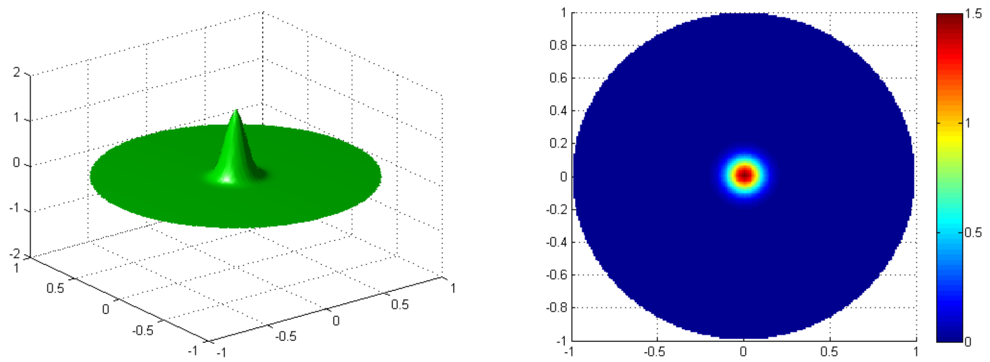


Σχήμα 2.18: $t = 0.4$

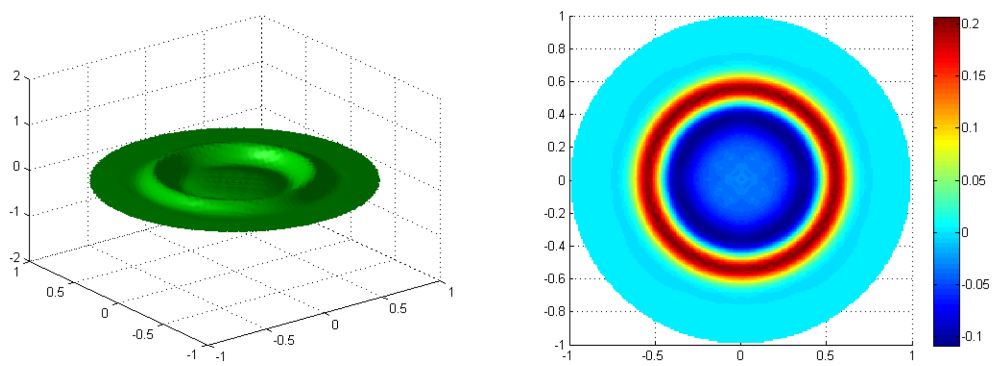


Σχήμα 2.19: $t = 0.5$

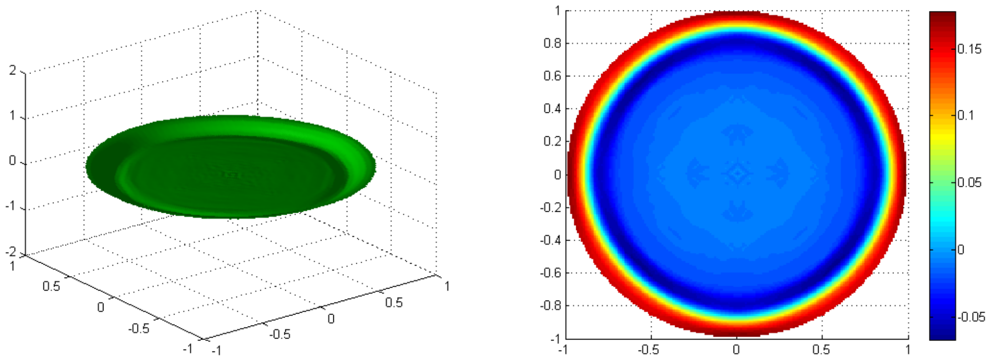
Παράδειγμα 4:
Δοκιμάζουμε την μέθοδο μας με τις αρχικές συνθήκες (2.42) όπου $A = 2$, $c = 600$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ στον δίσκο με κέντρο το $(0, 0)$, ακτίνα ένα και ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann. Η προσομοίωση έγινε με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία με τον συνολικό αριθμό των στοιχείων να είναι $N_{el} = 4096$. Πήραμε $\Delta t = 1/240$ έτσι ώστε $\frac{\Delta t}{h} = c$ που πληροί την συνθήκη ευστάθειας $\frac{\Delta t}{h} \leq c_0$ με c_0 δεδομένη σταθερά και h η μέγιστη πλευρά τριγώνου στον τριγωνισμό. Η εξέλιξη της λύσης φαίνεται στα σχήματα 2.20-2.24. Να σημειώσουμε ότι προσεγγίζουμε τον κύκλο από κανονικό πολύγωνο και στην περίπτωση του πειράματος αυτού υπάρχουν 129 κορυφές του τριγωνισμού πάνω στον κύκλο.



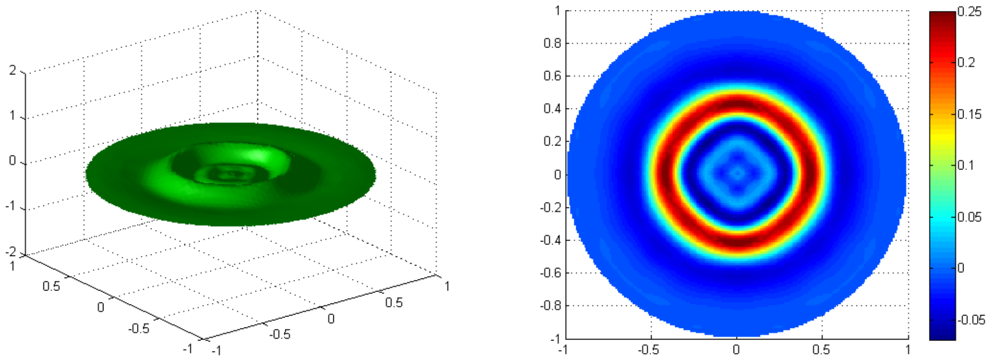
Σχήμα 2.20: $t = 0$



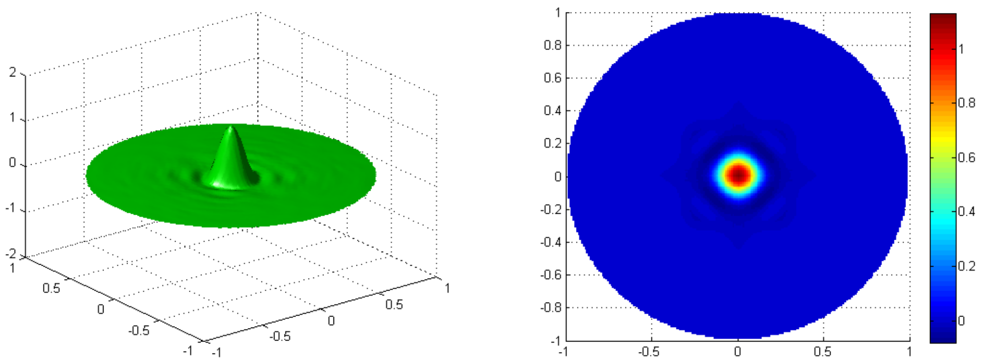
Σχήμα 2.21: $t = 0.5$



Σχήμα 2.22: $t = 1.0$



Σχήμα 2.23: $t = 1.5$



Σχήμα 2.24: $t = 1.9$

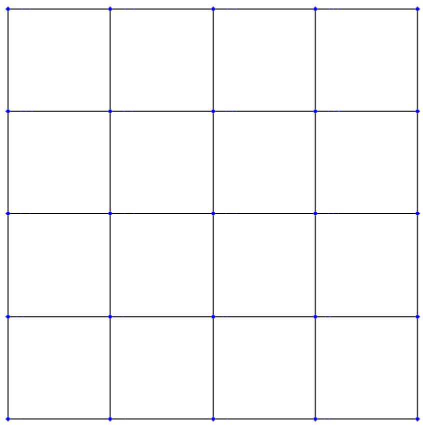
2.5 Τάξη σύγκλισης

Ήδη από το θεώρημα 3 αναμένουμε η τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα του χωρικού σφάλματος θα είναι τουλάχιστον 2. Για να βρούμε πειραματικά την τάξη σύγκλισης σχεδιάσαμε μία σειρά από αριθμητικά πειράματα.

Στα αριθμητικά πειράματα που ακολουθούν επιλέξαμε $\beta = 1/12$ (μέθοδος Störmer-Numerov) ώστε η μέθοδος να είναι τέταρτης τάξης ως προς τον χρόνο, καθώς και $\frac{\Delta t}{h} = 2/5$, ώστε να εξασφαλίζουμε ότι το αποτέλεσμα που παίρνουμε αφορά πρακτικά την τάξη σύγκλισης ως προς το χωρικό σφάλμα και μονο (εδώ το χωρικό σφάλμα μετριέται την χρονική στιγμή $T = 1$).

2.5.1 Τάξη σύγκλισης με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο όπως την περιγράψαμε προηγουμένως με χρήση διγραμμικών πεπερασμένων στοιχείων στο χωρίο του σχήματος 2.1. Ο διαμερισμός του χωρίου γίνεται με ομοιόμορφη διαμέριση με N σημεία σε κάθε πλευρά του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Έτσι κατασκευάζουμε ένα πλέγμα από σημεία απο τα οποία προκύπτει η διαμέριση. Το αποτέλεσμα θα είναι μία διαμέριση όπως π.χ. του σχήματος που ακολουθεί.



Σχήμα 2.25: $N = 5,\ h = 1/4,\ N_{el} = 16$

Ως h παίρνουμε το πλάτος του διαμερισμού στην πλευρά του Ω (δηλαδή $h = \frac{1}{N-1}$).

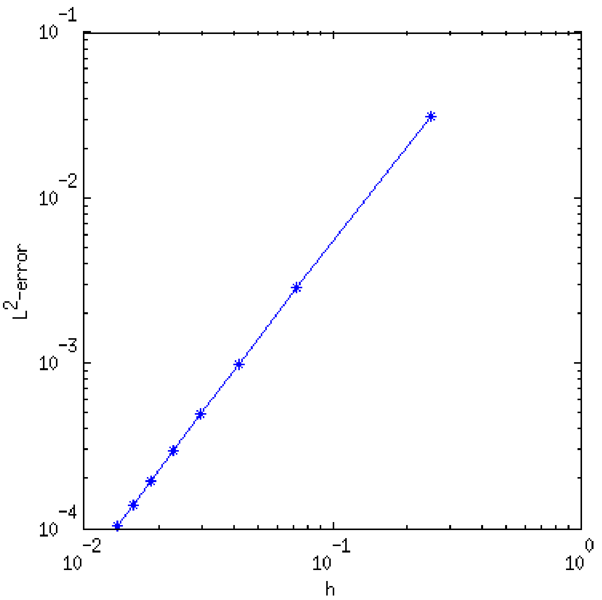
2.5.1.1 Πρόβλημα με ομογενείς σ.σ.Dirichlet

Παίρνοντας ακριβή λύση το προβλήματος (2.2) τη συνάρτηση

$$p(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)x\sin(\pi x)\sin(\pi y), \tag{2.43}$$

δηλαδή με $f(x,y,t) = -2\pi\cos(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\sin(\pi y)$ και με τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν εξετάζουμε την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα, συγκρίνοντας τα σφάλματα για διάφορα h την χρονική στιγμή $T=1$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα και δίνουν τάξη σύγκλισης $r=r(p)$ πρακτικά ίση με 2.

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$3.1038e-002$	$---$
15	$7.1429e-002$	$2.8342e-003$	1.9105
25	$4.1667e-002$	$9.7462e-004$	1.9805
35	$2.9412e-002$	$4.8740e-004$	1.9895
45	$2.2727e-002$	$2.9156e-004$	1.9930
55	$1.8519e-002$	$1.9378e-004$	1.9947
65	$1.5625e-002$	$1.3805e-004$	1.9958
75	$1.3514e-002$	$1.0332e-004$	1.9965



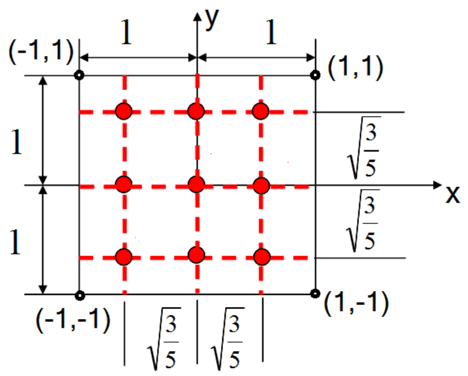
Σχήμα 2.26: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Dirichlet

Παρατήρηση:

Ο υπολογισμός της L^2-νόρμας, στην περίπτωση των διγραμμικών πεπερασμένων στοιχείων, γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση. Έχουμε λοιπόν

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega f^2(x,y)dxdy}$$

όπου $\int_\Omega f^2(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{N_{el}} \int_{M_i} f^2(x,y)dxdy$. Η προσέγγιση των ολοκληρωμάτων $\int_{M_i} f^2(x,y)dxdy$ γίνεται με κανόνα 3×3 σημείων Gauss-Legendre.



Τα σημεία του κανόνα είναι τα (x_i, y_j) , $1 \leq i,j \leq 3$ με $x = (-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5})$ και $y = (-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5})$ και τα αντίστοιχα βάρη είναι $W_{ij} = w_i w_j$ όπου $w = (5/9, 8/9, 5/9)$. Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy \simeq \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} W_{ij} f(x_i, y_j)$$

Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών ο παραπάνω κανόνας μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε στοιχείο M_i του διαμερισμού.

2.5.1.2 Πρόβλημα με ομογενείς σ.σ.Neumann

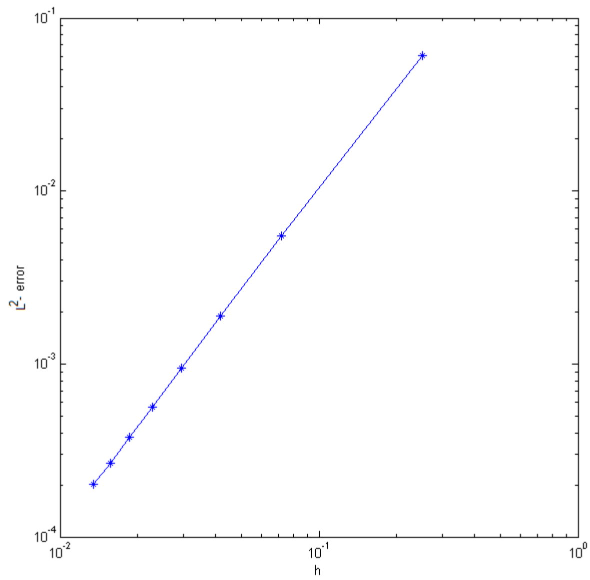
Με ακριβή λύση του προβλήματος (2.3) την συνάρτηση

$$p(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\cos(\pi y) \tag{2.44}$$

και με τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν εξετάζουμε την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα συγκρίνοντας τα σφάλματα για διάφορα h τη χρονική στιγμή $T = 1$.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα και δίνουν την αναμενόμενη τάξη σύγκλισης (2).

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$6.0480e-002$	$---$
15	$7.1429e-002$	$5.5015e-003$	1.9136
25	$4.1667e-002$	$1.8916e-003$	1.9807
35	$2.9412e-002$	$9.4602e-004$	1.9894
45	$2.2727e-002$	$5.6592e-004$	1.9928
55	$1.8519e-002$	$3.7615e-004$	1.9945
65	$1.5625e-002$	$2.6798e-004$	1.9956
75	$1.3514e-002$	$2.0055e-004$	1.9963



Σχήμα 2.27: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Neumann

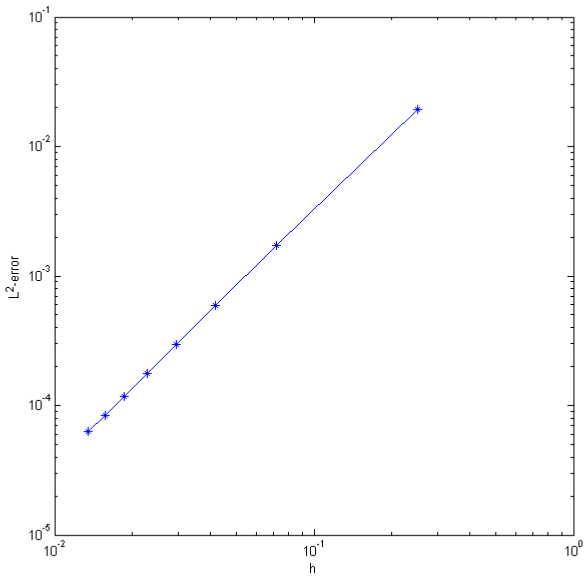
2.5.1.3 Πρόβλημα με μικτές συνοριακές συνθήκες

Η ακριβής λύση για το πρόβλημα (2.4) είναι

$$p(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)x^2 \sin(\pi x)\cos(\pi y), \tag{2.45}$$

δηλαδή με $f(x,y,t) = -2\cos(\sqrt{2}\pi t)(2\pi x\cos(\pi x) + \sin(\pi x))\cos(\pi y)$ και με τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν η τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα που προκύπτει απο τα αριθμητικά πειράματα είναι δύο.

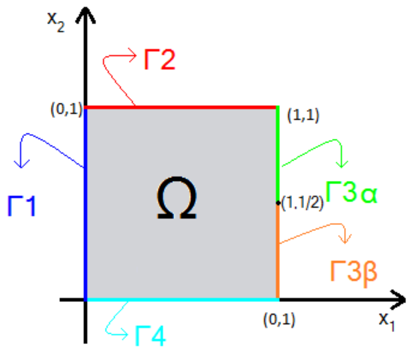
N	h	$\Vert p - p_h \Vert_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$1.9465e-002$	$---$
15	$7.1429e-002$	$1.7288e-003$	1.9327
25	$4.1667e-002$	$5.9338e-004$	1.9839
35	$2.9412e-002$	$2.9656e-004$	1.9913
45	$2.2727e-002$	$1.7735e-004$	1.9941
55	$1.8519e-002$	$1.1785e-004$	1.9956
65	$1.5625e-002$	$8.3950e-005$	1.9965
75	$1.3514e-002$	$6.2820e-005$	1.9971



Σχήμα 2.28: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με μικτές συνοριακές συνθήκες

Σημειωτέον ότι εδώ η λύση είναι εκ κατασκευής $C^2(\overline{\Omega})$. Γενικά υπάρχει πρόβλημα στην τάξη σύγκλισης εάν η ακριβή λύση δεν ήταν C^2 και για να το δούμε αυτό θα κάνουμε ένα βοηθητικό πείραμα.

Μικτές σ.σ. με λύση η οποία δεν είναι C^2. Θεωρούμε το χωρίο $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$ και χωρίζουμε το σύνορο του χωρίου στα τμήματα Γ1, Γ2, Γ3α, Γ3β και Γ4.



Σχήμα 2.29: Το χωρίο Ω με το σύνορό του χωρισμένο σε 5 τμήματα

Στην συνέχεια θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} p_{tt} = \Delta p + f & \text{στο} \quad \Omega \ , \ \ 0 \leq t \leq T, \\ p = 0 & \text{στο} \quad \Gamma 1 \cup \Gamma 3\beta \ , \ \ 0 \leq t \leq T, \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{στο} \quad \Gamma 2 \cup \Gamma 3\alpha \cup \Gamma 4 \ , \ \ 0 \leq t \leq T, \\ p(x,0) = p^0(x) & \text{στο} \quad \Omega \ , \ \ t = 0, \\ p_t(x,0) = p_t^0(x) & \text{στο} \quad \Omega \ , \ \ t = 0, \end{cases}$$

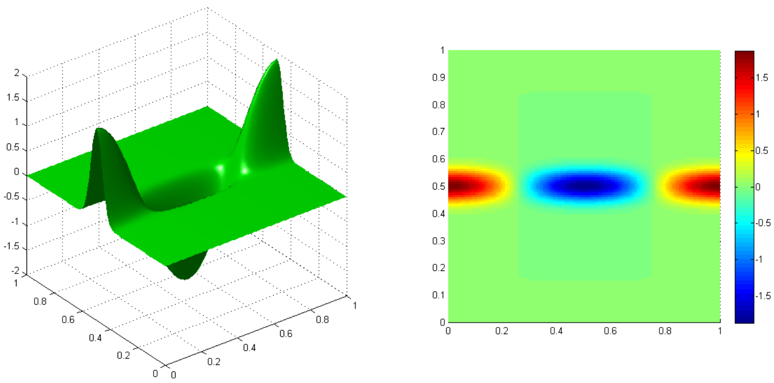
Το πρόβλημα δεν αναμένεται να έχει λύση $p \in C^2(\overline{\Omega})$ λόγω της έλλειψης συμβατότητας στο σημείο $(1, 1/2)$ του Γ3. Λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα (με $f \equiv 0$) χρησιμοποιώντας διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία με $N = 125, \ \beta = 0, \ \Delta t = \frac{2}{9}h$ και αρχικές συνθήκες

$$p^0(x,y) = 15x(x-1)^2 e^{-300(x-1/2)^2} \cos(2\pi y)$$

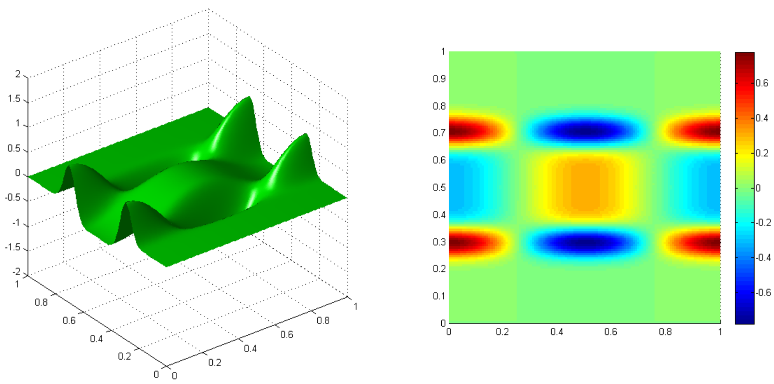
και

$$p_t^0(x,y) = 0.$$

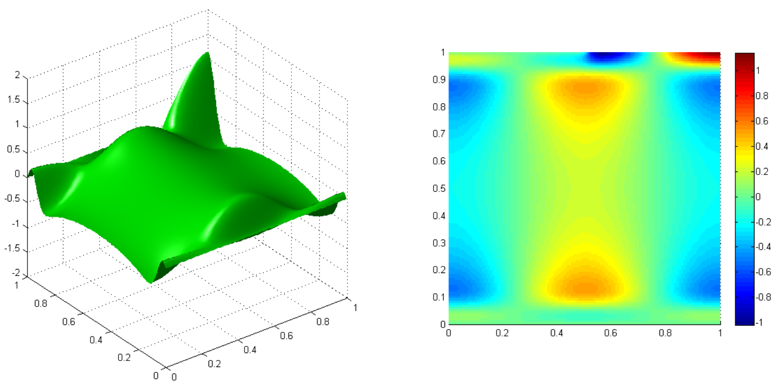
Η εξέλιξη της λύσης φαίνεται στα σχήματα 2.30-2.33.



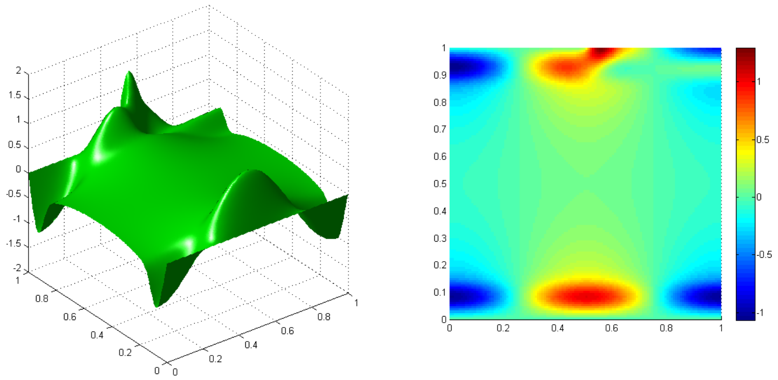
Σχήμα 2.30: $t = 0$



Σχήμα 2.31: $t = 0.2$

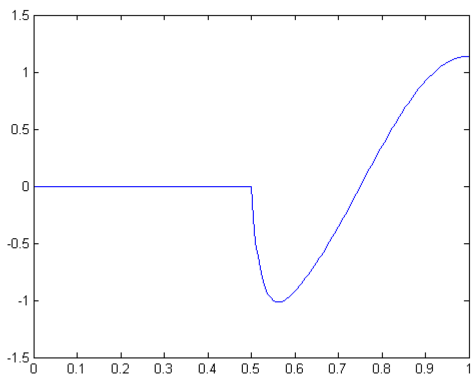


Σχήμα 2.32: $t = 0.4774$



Σχήμα 2.33: $t = 0.5663$

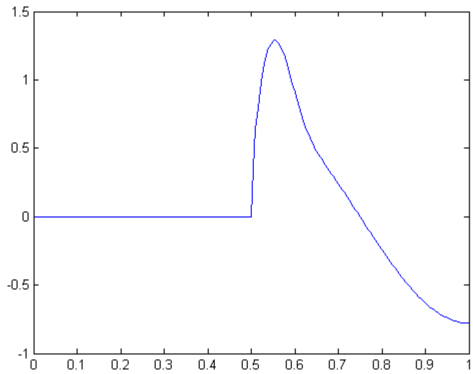
Θα κάνουμε μία πιο προσεκτική ανάλυση για το τι ακριβώς συμβαίνει σε δύο χρονικές στιγμές, $t = 0.4774$ και για $t = 0.5663$. Για $t = 0.4774$ το γράφημα της συνάρτησης $g(y) = p_h(1, y),\ 0 \leq y \leq 1$ φαίνεται στο Σχήμα 2.34.



Σχήμα 2.34: $g(y) = p_h(1, y),\ 0 \leq y \leq 1$ τη χρονική στιγμή $t = 0.4774$

Φαίνεται ότι η λύση δεν έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $(1, 0.5)$. Αριθμητικά έχουμε ότι $\dfrac{\partial p_h}{\partial x}(1, 0.5^-) \simeq 0 \neq -55.7929 \simeq \dfrac{\partial p_h}{\partial x}(1, 0.5^+)$.

Αντίστοιχα για $t = 0.5663$ το γράφημα της συνάρτησης $h(y) = p_h(1, y),\ 0 \leq y \leq 1$ φαίνεται στο Σχήμα 2.35.



Σχήμα 2.35: $h(y) = p_h(1, y),\ 0 \leq y \leq 1$ τη χρονική στιγμή $t = 0.5663$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η λύση δεν έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $(1, 0.5)$. Αριθμητικά έχουμε ότι $\dfrac{\partial p_h}{\partial x}(1, 0.5^-) \simeq 0 \neq 71.6015 \simeq \dfrac{\partial p_h}{\partial x}(1, 0.5^+)$.

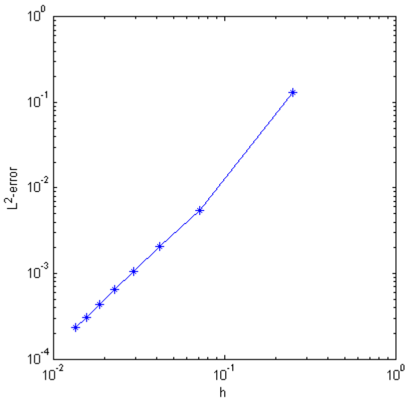
2.5.1.4 Πρόβλημα με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Μια ακριβής λύση για το περιοδικό πρόβλημα (2.5) είναι η συνάρτηση

$$p(x, y, t) = \cos(\sqrt{8}\pi t)\sin(2\pi x)\cos(2\pi y) \tag{2.46}$$

όπου με τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν η τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα που προκύπτει απο τα αριθμητικά πειράματα παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα και φαίνεται να συγκλίνει στην τιμή 2:

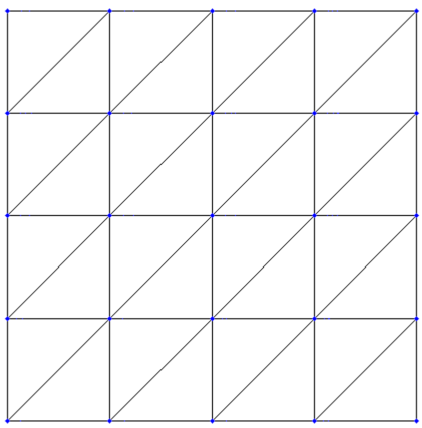
N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$1.2974e-001$	$---$
15	$7.1429e-002$	$5.5151e-003$	2.5208
25	$4.1667e-002$	$2.0769e-003$	1.8118
35	$2.9412e-002$	$1.0680e-003$	1.9095
45	$2.2727e-002$	$6.4662e-004$	1.9461
55	$1.8519e-002$	$4.3252e-004$	1.9635
65	$1.5625e-002$	$3.0932e-004$	1.9732
75	$1.3514e-002$	$2.3207e-004$	1.9792



Σχήμα 2.36: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

2.5.2 Τάξη σύγκλισης με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο αυτήν την φορά χρησιμοποιώντας ομοιόμορφα τριγωνικά στοιχεία στο χωρίο του σχήματος 2.1. Το πλέγμα των κόμβων προκύπτει όπως και στα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία παίρνοντας τις υποτείνουσες των τριγώνων έτσι ώστε να σχηματίζουν γωνία 45^o με τους άξονες x και y. Το αποτέλεσμα θα είναι μία διαμέριση όπως του σχήματος που ακολουθεί.



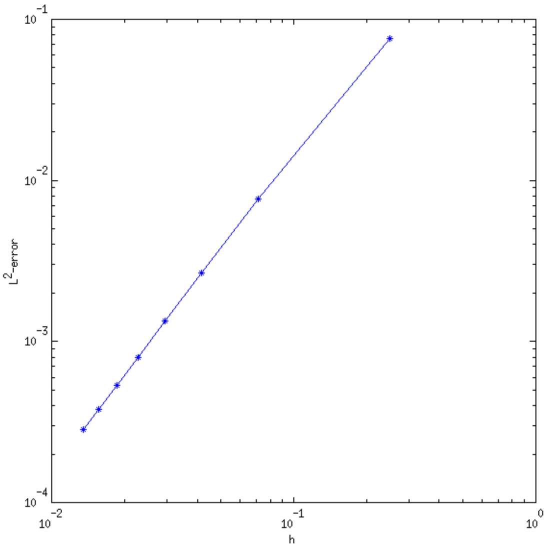
Σχήμα 2.37: $N = 5,\ h = 1/4,\ N_{el} = 32$

Ως h παίρνουμε και πάλι το πλάτος του διαμερισμού στην πλευρά του Ω, $(h = \frac{1}{N-1})$. Στα αριθμητικά πειράματα που ακολουθούν παίρνουμε και πάλι την παράμετρο $\beta = 1/12$ καθώς και $\frac{\Delta t}{h} = 2/5$

2.5.2.1 Πρόβλημα με ομογενείς σ.σ.Dirichlet

Παίρνουμε ως ακριβή λύση την (2.43) και με τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν εξετάζουμε την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα συγκρίνοντας τα σφάλματα για διάφορα h την χρονική στιγμή $T = 1$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα και δινουν τάξη σύγκλισης πρακτικά ίση με δύο.

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$7.6261e-002$	$---$
15	$7.1429e-002$	$7.6499e-003$	1.8355
25	$4.1667e-002$	$2.6565e-003$	1.9623
35	$2.9412e-002$	$1.3320e-003$	1.9819
45	$2.2727e-002$	$7.9769e-004$	1.9887
55	$1.8519e-002$	$5.3047e-004$	1.9920
65	$1.5625e-002$	$3.7804e-004$	1.9939
75	$1.3514e-002$	$2.8297e-004$	1.9951



Σχήμα 2.38: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Dirichlet

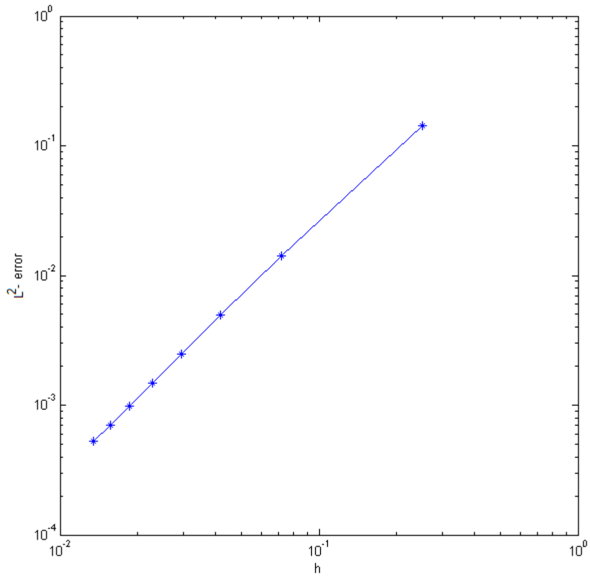
Παρατήρηση:

Ο υπολογισμός των σφαλμάτων στην περίπτωση των τριγωνικών πεπερασμένων γίνεται με την συνάρτηση L2NormErr1 από το βιβλίο του Mark S. Gockenbach [G].

2.5.2.2 Πρόβλημα με ομογενείς σ.σ.Neumann

Για ακριβής λύση έχουμε την (2.44) και με αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν η τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα (την χρονική στιγμή $T = 1$) που προκύπτει από τα πειράματα φαίνεται στο παρακάτω πίνακα και είναι πρακτικά ίση με δύο.

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$1.4390e-001$	$---$
15	$7.1429e-002$	$1.4267e-002$	1.8449
25	$4.1667e-002$	$4.9502e-003$	1.9639
35	$2.9412e-002$	$2.4840e-003$	1.9798
45	$2.2727e-002$	$1.4886e-003$	1.9857
55	$1.8519e-002$	$9.9051e-004$	1.9893
65	$1.5625e-002$	$7.0616e-004$	1.9916
75	$1.3514e-002$	$5.2873e-004$	1.9931

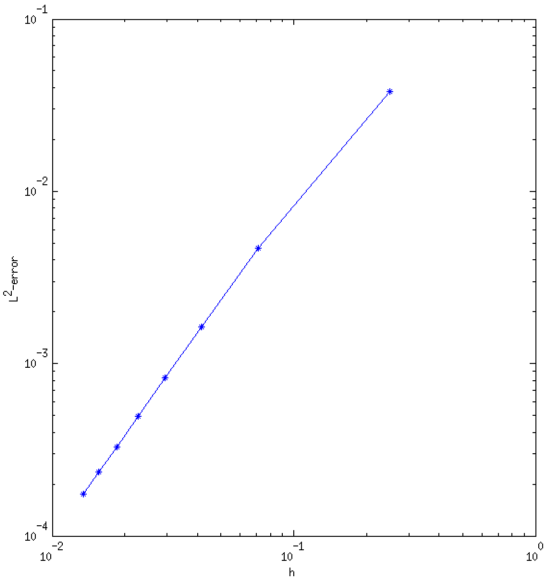


Σχήμα 2.39: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με ομογενείς σ.σ. Neumann

2.5.2.3 Πρόβλημα με μικτές συνοριακές συνθήκες

Μια ακριβής λύση του προβλήματος με μικτές συνοριακές συνθήκες είναι η (2.45) και με τις αρχικές συνθήκες που προκύπτουν από αυτήν η πειραματική τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα (τη χρονική στιγμή $T = 1$) προκύπτει είναι πρακτικά ίση με δύο.

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$
5	$2.5000e-001$	$3.8010e-002$	$---$
15	$7.1429e-002$	$4.6530e-003$	1.6766
25	$4.1667e-002$	$1.6415e-003$	1.9330
35	$2.9412e-002$	$8.2561e-004$	1.9731
45	$2.2727e-002$	$4.9479e-004$	1.9857
55	$1.8519e-002$	$3.2910e-004$	1.9912
65	$1.5625e-002$	$2.3452e-004$	1.9941
75	$1.3514e-002$	$1.7553e-004$	1.9958



Σχήμα 2.40: Διάγραμμα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με μικτές συνοριακές συνθήκες

Κεφάλαιο 3

Η κυματική εξίσωση ως υπερβολικό σύστημα 1ης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για την ακουστική κυματική εξίσωση

$$\begin{cases} p_t + \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = f, \\ \vec{\mathbf{v}}_t + \nabla p = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

όπου $\vec{\mathbf{v}} = (u, v)$.
Θα δούμε ορισμένες συνοριακές συνθήκες για τις οποίες το παραπάνω υπερβολικό σύστημα είναι καλώς τοποθετημένο και θα δούμε πειραματικά ποια είναι η τάξη σύγκλισης των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα αυτό. Είναι γνωστό ότι στην περίπτωση μίας χωρικής διάστασης η τάξη σύγκλισης των συνήθων μεθόδων Galerkin για γενικούς διαμερισμούς είναι 1 ενώ υπάρχουν ορισμένα αποτελέσματα (βλ. π.χ. [D2]), που για ομοιόμορφο διαμερισμό και επαρκείς συνθήκες συμβιβαστού στο σύνορο δινουν τάξη 2.

3.1 Το πρόβλημα

Θεωρούμε το σύστημα (3.1) για την ακουστική κυματική εξίσωση. Το σύστημα αυτό είναι ένα υπερβολικό σύστημα 1ης τάξης το οποίο προέρχεται από την ακουστική όπου $p = p(x, y, t)$ περιγράφει την πίεση και το διανυσματικό πεδίο $\vec{\mathbf{v}} = (u(x, y, t).v(x, y, t))$ περιγράφει την ταχύτητα του ρευστού που υφίσταται ακουστική διαταραχή.

Το σύστημα (3.1) μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή

$$\begin{cases} p_t + u_x + v_y = f, \\ u_t + p_x = 0, \\ v_t + p_y = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η πίεση ικανοποιεί την 2ης τάξης κυματική εξίσωση (2.1). Πράγματι:

$$p_{tt} \overset{(3.2)}{=} -u_{xt} - v_{yt} + f_t = -(-p_{xx}) - (-p_{yy}) + f_t = p_{xx} + p_{yy} + f_t = \Delta p + f_t$$

3.1.1 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Σε αυτό το σημείο θα εφοδιάσουμε την (3.1) με αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

3.1.1.1 Αρχικές συνθήκες

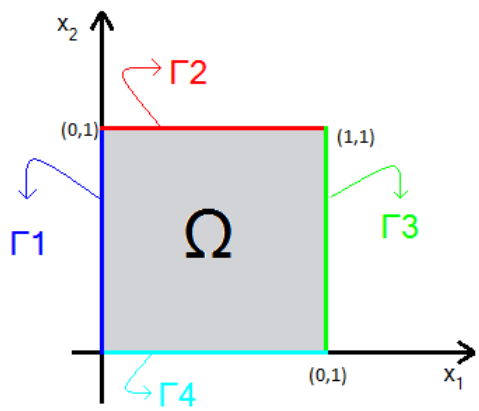
Οι αρχικές συνθήκες για την (3.1) αφορούν την πίεση και θα είναι της μορφής:

- $p|_{t=0}$ Δεδομένο
- $p_t|_{t=0}$ Δεδομένο

Η δεύτερη συνθήκη, επειδή $p_t|_{t=0} = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}|_{t=0} + f|_{t=0}$, θεωρεί συνεπώς ότι τα $u|_{t=0}$ και $v|_{t=0}$ είναι δεδομένα.

3.1.1.2 Συνοριακές Συνθήκες

Έστω το χωρίο $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1



Σχήμα 3.1: Το χωρίο Ω

Χωρίσαμε το σύνορο του χωρίου Ω σε τέσσερα τμήματα Γ1, Γ2, Γ3 και Γ4. Θα θεωρήσουμε τώρα τέσσερις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών:

(I) $p = 0$ στο $\partial\Omega$, για $0 \leq t \leq T$.

(II) $u = 0$ στο $\Gamma 1 \bigcup \Gamma 3$ και $v = 0$ στο $\Gamma 2 \bigcup \Gamma 4$, για $0 \leq t \leq T$.

(III) $p = 0$ στο $\Gamma 1 \bigcup \Gamma 3$ και $v = 0$ στο $\Gamma 2 \bigcup \Gamma 4$, για $0 \leq t \leq T$.

(IV) $p|_{\Gamma 1} = p|_{\Gamma 3}$, $p|_{\Gamma 2} = p|_{\Gamma 4}$ και $v|_{\Gamma 1} = v|_{\Gamma 3}$, $u|_{\Gamma 2} = u|_{\Gamma 4}$ για $0 \leq t \leq T$.

3.1.2 Διατήρηση της ενέργειας

Θα πρέπει με κάποιον τρόπο να προσδιορίσουμε εάν τα προβλήματα αρχικών/συνοριακών τιμών που ορίσαμε στις περιπτώσεις (I), (II), (III) και (IV) είναι καλώς τοποθετημένα. Από το πρόβλημα (3.1), για $f = 0$, έχουμε ότι:

$$p_t + \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με p έχουμε:

$$pp_t + p(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) = 0.$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω οπότε:

$$\int_\Omega pp_t + \int_\Omega p(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) = 0. \tag{3.3}$$

Όμως

$$\int_\Omega pp_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega p^2\Big) \tag{3.4}$$

και λόγω της ιδιότητας

$$div(p\vec{\mathbf{v}}) = p(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) + \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}},$$

έχουμε

$$\int_\Omega p(\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \int_\Omega (div(p\vec{\mathbf{v}}) - \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}}). \tag{3.5}$$

Αντικαθιστώντας την (3.4) και (3.5) στην (3.3) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega p^2\Big) + \int_\Omega (div(p\vec{\mathbf{v}}) - \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}}) = 0. \tag{3.6}$$

Θεωρούμε τώρα την δεύτερη εξίσωση του (3.1):

$$\vec{\mathbf{v}}_t + \nabla p = 0.$$

Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με το $\vec{\mathbf{v}}$ έχουμε:

$$\vec{\mathbf{v}}_t \cdot \vec{\mathbf{v}} + \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στο Ω:

$$\int_{\Omega} \vec{\mathbf{v}}_t \cdot \vec{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0. \tag{3.7}$$

Όμως και πάλι

$$\int_{\Omega} \vec{\mathbf{v}}_t \cdot \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega} |\vec{\mathbf{v}}|^2\Big), \quad \text{όπου } |\vec{\mathbf{v}}|^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}. \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας την (3.8) στην (3.7) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega} |\vec{\mathbf{v}}|^2\Big) + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0. \tag{3.9}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τις (3.6) και (3.9) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega} p^2 + \int_{\Omega} |\vec{\mathbf{v}}|^2\Big) + \int_{\Omega} div(p\vec{\mathbf{v}}) = 0. \tag{3.10}$$

Χρησιμοποιώντας συνεπώς το θεώρημα απόκλισης θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega} p^2 + \int_{\Omega} |\vec{\mathbf{v}}|^2\Big) + \int_{\partial\Omega} p\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, \tag{3.11}$$

όπου $\vec{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο του Ω.

Ορίζουμε ώς ενέργεια $\mathbb{E}(t)$ την ποσότητα:

$$\mathbb{E}(t) = \int_{\Omega} \big(p^2 + |\vec{\mathbf{v}}|^2\big),$$

και το J ώς εξής:

$$J = \int_{\partial\Omega} p\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}.$$

Είναι φανερό ότι για να διατηρείται η ενέργεια θα πρέπει

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbb{E}(t)\big) = 0,$$

που λόγω της (3.11) σημαίνει ότι πρέπει $J = 0$. Αν αναπτύξουμε το J θα έχουμε:

$$J = -\int_{\Gamma 1} pu + \int_{\Gamma 2} pv + \int_{\Gamma 3} pu - \int_{\Gamma 4} pv. \tag{3.12}$$

Μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει μία πληθώρα από συνοριακές συνθήκες για τις p, u και v για τις οποίες το J μηδενίζεται. Μεταξύ αυτών είναι προφανώς και οι συνθήκες $(I)-(IV)$.

3.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων και πειραματική τάξη σύγκλισης

Αφού λοιπόν ορίσαμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών $(I)-(IV)$ θα ορίσουμε ποια είναι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα. Στην συνέχεια θα δούμε πειραματικά ποια είναι η τάξη σύγκλισης για κάθε ένα από τα προβλήματα $(I)-(IV)$.

3.2.1 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου (I)

Έστω το πρόβλημα (3.2) εφοδιασμένο με αρχικές/συνθήκες τύπου (I). Έστω επιπλέον $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ και $\varphi_2 \in H^1(\Omega)$ όπου

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ \ v = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση της (3.2) με ψ, την δεύτερη με φ_1 και την τρίτη με φ_2, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} p_t\psi + u_x\psi + v_y\psi = f\psi \ , \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \\ u_t\varphi_1 + p_x\varphi_1 = 0 \ , \ \ \forall \varphi_1 \in H^1(\Omega), \\ v_t\varphi_2 + p_y\varphi_2 = 0 \ , \ \ \forall \varphi_2 \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω και έχουμε:

$$\begin{cases} (p_t, \psi) + (u_x, \psi) + (v_y, \psi) = (f, \psi) \ , \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \\ (u_t, \varphi_1) + (p_x, \varphi_1) = 0 \ , \ \ \forall \varphi_1 \in H^1(\Omega), \\ (v_t, \varphi_2) + (p_y, \varphi_2) = 0 \ , \ \ \forall \varphi_2 \in H^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.13}$$

όπου $(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \ , \ x \in \Omega$.

Έστω τώρα S_h ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του $H^1(\Omega)$, S_h^0 ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του $H_0^1(\Omega)$ και $p_h \in S_h^0$, $u_h, v_h \in S_h$. Τότε το σύστημα (3.13) διακριτοποιήται:

$$\begin{cases} (p_{h,t}, \psi) + (u_{h,x}, \psi) + (v_{h,y}, \psi) = (f, \psi) \ , \ \ \forall \psi \in S_h^0, \\ (u_{h,t}, \varphi_1) + (p_{h,x}, \varphi_1) = 0 \ , \ \ \forall \varphi_1 \in S_h, \\ (v_{h,t}, \varphi_2) + (p_{h,y}, \varphi_2) = 0 \ , \ \ \forall \varphi_2 \in S_h. \end{cases} \tag{3.14}$$

Αφού όμως $p_h \in S_h^0$ τότε

$$p_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_i(x, y),$$

όπου $N_h = \dim(S_h^0)$ και $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_h}$ μία βάση του S_h^0. Αντίστοιχα αφού $u_h, v_h \in S_h$ τότε

$$u_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}_h} u_i(t)\varphi_{i,1}(x,y),$$

$$v_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}_h} v_i(t)\varphi_{i,2}(x,y),$$

όπου $\hat{N}_h = \dim(S_h)$ και $\{\varphi_{i,1}\}_{i=1}^{\hat{N}_h}$, $\{\varphi_{i,2}\}_{i=1}^{\hat{N}_h}$ δύο βάσεις (εν γένει διαφορετικές) του S_h. Αντικαθιστώντας στην (3.14) θα έχουμε:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{N_h} \dot{p}_i(t)\psi_i, \psi_j) + (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} u_i(t)\varphi_{x,i,1}, \psi_j) + (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} v_i(t)\varphi_{y,i,2}, \psi_j) = (f, \psi_j)\ , \ \ 1 \le j \le N_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} \dot{u}_i(t)\varphi_{i,1}, \varphi_{j,1}) + (\sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_{x,i}, \varphi_{j,1}) = 0\ , \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} \dot{v}_i(t)\varphi_{i,2}, \varphi_{j,2}) + (\sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_{y,i}, \varphi_{j,2}) = 0\ , \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h. \end{cases} \tag{3.15}$$

Ορίζουμε τους πίνακες μάζας:

- M_1 με στοιχεία $\big(M_1\big)_{ij} = (\psi_j, \psi_i), \ \ 1 \le i,j \le N_h$
- M_2 με στοιχεία $\big(M_2\big)_{ij} = (\varphi_{j,1}, \varphi_{i,1}), \ \ 1 \le i,j \le \hat{N}_h$
- M_3 με στοιχεία $\big(M_3\big)_{ij} = (\varphi_{j,2}, \varphi_{i,2}), \ \ 1 \le i,j \le \hat{N}_h$

τους πίνακες 'ακαμψίας':

- $A_{1,x}$ με στοιχεία $\big(A_{1,x}\big)_{i,j} = (\varphi_{x,j,1}, \psi_i), \ \ 1 \le i \le N_h, \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h$
- $A_{2,y}$ με στοιχεία $\big(A_{2,y}\big)_{i,j} = (\varphi_{y,j,2}, \psi_i), \ \ 1 \le i \le N_h, \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h$
- $A_{x,1}$ με στοιχεία $\big(A_{x,1}\big)_{i,j} = (\psi_{x,j}, \varphi_{i,1}), \ \ 1 \le j \le N_h, \ \ 1 \le i \le \hat{N}_h$
- $A_{y,2}$ με στοιχεία $\big(A_{y,2}\big)_{i,j} = (\psi_{y,j}, \varphi_{i,2}), \ \ 1 \le j \le N_h, \ \ 1 \le i \le \hat{N}_h$

και το διάνυσμα $\vec{f}$ με στοιχεία $f_i = (f, \psi_i)$ $1 \le i \le N_h$. Οπότε τελικά το ημιδιακριτό σύστημα (3.15) γράφεται στην μορφή:

$$\underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{N}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{N}_h \end{array} & \begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & M_3 \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_h \\ \dot{u}_h \\ \dot{v}_h \end{pmatrix}}_{x_t(t)} = - \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{N}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{N}_h \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A_{x,1} & A_{y,2} \\ A_{1,x} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ A_{2,y} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \end{array}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} p_h \\ u_h \\ v_h \end{pmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Επομένως έχουμε πλέον να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για $x = x(t) \in \mathbb{R}^{N_h+\hat{N}_h+\hat{N}_h}$ της μορφής:

$$\begin{cases} Ax_t(t) = Bx(t) + F(t), \\ \quad x(0) = x^0, \ \text{δεδομένο.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.16) θα χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο Runge – Kutta 3ης τάξης ακρίβειας, τη μέθοδο Shu-Osher [SO].

3.2.1.1 Μέθοδος Shu-Osher

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(0) = y^0, \ \text{δεδομένο.} \end{cases}$$

Έστω χρονικό βήμα $k = \Delta t$, $t^n = nk$ και $y^n \simeq y(t^n)$. Η μέθοδος Shu-Osher είναι:

$$\begin{cases} Y^{n,1} = y^n + kf(y^n, t^n), \\ Y^{n,2} = \frac{3}{4}y^n + \frac{1}{4}Y^{n,1} + \frac{k}{4}f(Y^{n,1}, t^n + k), \\ y^{n+1} = \frac{1}{3}y^n + \frac{2}{3}Y^{n,2} + \frac{2k}{3}f(Y^{n,2}, t^n + k/2), \\ \quad y^0, \ \text{δεδομένο.} \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο στο πρόβλημα (3.16) και έχουμε:

$$\begin{cases} Ax^{n,1} = Ax^n + k(Bx^n + F(t^n)), \\ Ax^{n,2} = \frac{3}{4}Ax^n + \frac{1}{4}Ax^{n,1} + \frac{k}{4}(Bx^{n,1} + F(t^n + k)), \\ Ax^{n+1} = \frac{1}{3}Ax^n + \frac{2}{3}Ax^{n,2} + \frac{2k}{3}(Bx^{n,2} + F(t^n + \frac{k}{2})), \\ \quad x^0, \ \text{δεδομένο.} \end{cases} \tag{3.17}$$

Η πλήρως διακριτή μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι η (3.17).

3.2.1.2 Πειράματα για την τάξη σύγκλισης

Θα κάνουμε τώρα αριθμητικά πειράματα για την τάξη σύγκλισης χρησιμοποιώντας διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία και τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία και χρονικό βήμα που ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{\Delta t}{h} = 0.1$.

Ως ακριβή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (I) παίρνουμε τις συναρτήσεις:
Για την πίεση:

$$p(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)x\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u(x,y,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi y)(\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + x\cos(\pi x)),$$

$$v(x,y,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)x\sin(\pi x)\cos(\pi y),$$

και

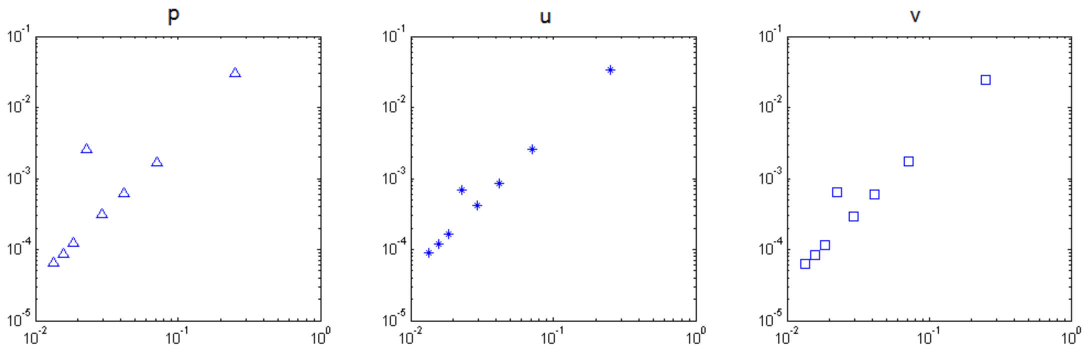
$$f(x,y,t) = -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\sin(\pi y).$$

(A) Ομοιόμορφος διαμερισμός με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία .

Το πρώτο πείραμα που θα κάνουμε είναι με ομοιόμορφο διαμερισμό, όπως ακριβώς κάναμε στη περίπτωση της 2ης τάξης κυματικής εξίσωσης. Ο παρακάτω πίνακας περιλαμβάνει τα αποτελέσματα για την τάξη ακρίβειας ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ των p, u, και v. Θυμίζουμε ότι N είναι το πλήθος των κόμβων σε κάθε ένα από τους άξονες x και y οπότε $h = \frac{1}{N-1}$.

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
5	$2.5000e-001$	$3.0223e-002$	$---$	$3.3558e-002$	$---$	$2.4436e-002$	$---$
15	$7.1429e-002$	$1.7061e-003$	2.2944	$2.5390e-003$	2.0607	$1.7442e-003$	2.1071
25	$4.1667e-002$	$6.1395e-004$	1.8962	$8.4758e-004$	2.0355	$5.9367e-004$	1.9996
35	$2.9412e-002$	$3.0845e-004$	1.9763	$4.1793e-004$	2.0300	$2.9597e-004$	1.9984
45	$2.2727e-002$	$2.5858e-003$	-8.2468	$6.9262e-004$	-1.9593	$6.4451e-004$	-3.0183
55	$1.8519e-002$	$1.2193e-004$	14.9141	$1.6639e-004$	6.9639	$1.1741e-004$	8.3148
65	$1.5625e-002$	$8.7565e-005$	1.9488	$1.1798e-004$	2.0235	$8.3564e-005$	2.0015
75	$1.3514e-002$	$6.5405e-005$	2.0098	$8.8399e-005$	1.9882	$6.2543e-005$	1.9958

Σε αυτήν την περίπτωση το διάγραμμα για την τάξη σύγκλισης που ακολουθεί θα μας βοηθήσει να ερμηνεύσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα που έχουμε από τον παραπάνω πίνακα και να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει για $N = 45$.



Σχήμα 3.2: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (I)

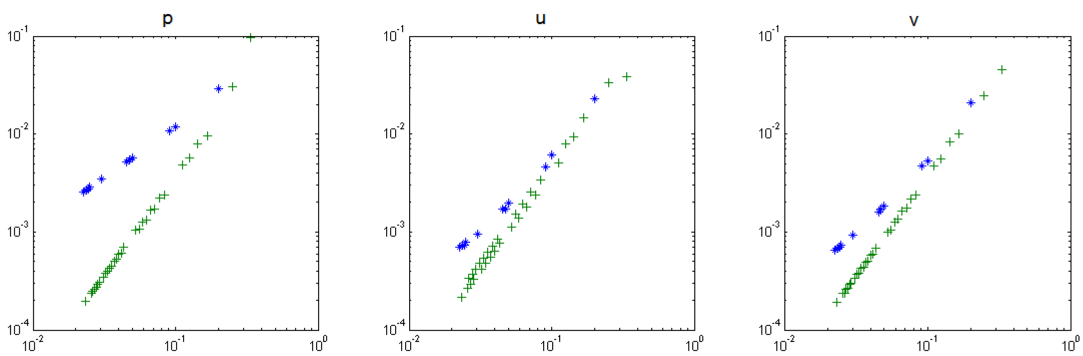
Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όλα τα σφάλματα με εξαίρεση το σφάλμα για $N = 45$ μας δίνουν τάξη σύγκλισης 2. Τι συμβαίνει όμως για $N = 45$; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα μελετήσουμε τα σφάλματα για όλα τα N με $4 \leq N \leq 45$. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι τα σφάλματα ακολουθούν διαφορετική τάξη ανάλογα με την ακολουθεία των N. Πιο συγκεκριμένα για την ακολουθεία

$$N_1 = [6\ 11\ 12\ 21\ 22\ 23\ 34\ 41\ 42\ 43\ 45],$$

η τάξη σύγκλισης είναι ένα ενώ για την ακολουθεία

$$N_2 = [4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 24\ 25\ 26\ 27\ 28\ 29\ 30\ 31\ 32\ 33\ 35\ 36\ 37\ 38\ 39\ 40\ 44],$$

η τάξη σύγκλισης είναι διαφορετική. Στα διαγράμματα που ακολουθούν βλέπουμε αυτήν ακριβώς την εικόνα.



Σχήμα 3.3: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (I) και $4 \leq N \leq 45$ για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Με μπλέ τα σφάλματα απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Οι πίνακες που ακολουθούν αντιστοιχούν στα διαγράμματα του σχήματος 3.3. Πρώτα ο πίνακας για την ακολουθία N_2

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$9.6101e-002$	$---$	$3.8264e-002$	$---$	$4.5302e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$3.0223e-002$	4.0211	$3.3558e-002$	0.4562	$2.4436e-002$	2.1458
7	$1.6667e-001$	$9.6299e-003$	2.8208	$1.4622e-002$	2.0489	$9.9396e-003$	2.2185
8	$1.4286e-001$	$7.9208e-003$	1.2675	$9.3436e-003$	2.9050	$8.2854e-003$	1.1809
9	$1.2500e-001$	$5.6922e-003$	2.4743	$7.9946e-003$	1.1677	$5.5989e-003$	2.9350
10	$1.1111e-001$	$4.8610e-003$	1.3402	$5.0945e-003$	3.8258	$4.7340e-003$	1.4247
13	$8.3333e-002$	$2.3888e-003$	2.4696	$3.4294e-003$	1.3757	$2.4024e-003$	2.3578
14	$7.6923e-002$	$2.2261e-003$	0.8812	$2.3958e-003$	4.4809	$2.1836e-003$	1.1929
15	$7.1429e-002$	$1.7061e-003$	3.5902	$2.5390e-003$	-0.7831	$1.7442e-003$	3.0316
16	$6.6667e-002$	$1.6541e-003$	0.4481	$1.7870e-003$	5.0909	$1.6199e-003$	1.0720
17	$6.2500e-002$	$1.3077e-003$	3.6419	$1.9495e-003$	-1.3488	$1.3377e-003$	2.9656
18	$5.8824e-002$	$1.2717e-003$	0.4602	$1.3926e-003$	5.5487	$1.2502e-003$	1.1156
19	$5.5556e-002$	$1.0648e-003$	3.1060	$1.5157e-003$	-1.4820	$1.0532e-003$	3.0008
20	$5.2632e-002$	$1.0323e-003$	0.5733	$1.1114e-003$	5.7386	$9.9955e-004$	0.9666
24	$4.3478e-002$	$6.9633e-004$	2.0609	$7.5981e-004$	1.9906	$6.8039e-004$	2.0132
25	$4.1667e-002$	$6.1395e-004$	2.9583	$8.4758e-004$	-2.5684	$5.9367e-004$	3.2037
26	$4.0000e-002$	$5.9049e-004$	0.9542	$6.4210e-004$	6.8013	$5.7516e-004$	0.7757
27	$3.8462e-002$	$5.2429e-004$	3.0318	$7.2097e-004$	-2.9539	$5.0618e-004$	3.2575
28	$3.7037e-002$	$5.0090e-004$	1.2096	$5.5425e-004$	6.9678	$4.9355e-004$	0.6693
29	$3.5714e-002$	$4.4980e-004$	2.9585	$6.2216e-004$	-3.1781	$4.3636e-004$	3.3867
30	$3.4483e-002$	$4.3097e-004$	1.2189	$4.8049e-004$	7.3637	$4.2741e-004$	0.5905
31	$3.3333e-002$	$3.9768e-004$	2.3710	$5.3837e-004$	-3.3550	$3.8044e-004$	3.4336
32	$3.2258e-002$	$3.7459e-004$	1.8248	$4.2043e-004$	7.5408	$3.7359e-004$	0.5548
33	$3.1250e-002$	$3.4596e-004$	2.5042	$4.7415e-004$	-3.7876	$3.3430e-004$	3.5000
35	$2.9412e-002$	$3.0845e-004$	1.8930	$4.1793e-004$	2.0818	$2.9597e-004$	2.0084
36	$2.8571e-002$	$2.9251e-004$	1.8298	$3.2973e-004$	8.1779	$2.9256e-004$	0.3998
37	$2.7778e-002$	$2.7542e-004$	2.1374	$3.7290e-004$	-4.3680	$2.6380e-004$	3.6731
38	$2.7027e-002$	$2.6250e-004$	1.7536	$2.9397e-004$	8.6808	$2.6152e-004$	0.3177
39	$2.6316e-002$	$2.4652e-004$	2.3548	$3.3534e-004$	-4.9377	$2.3684e-004$	3.7168
40	$2.5641e-002$	$2.3638e-004$	1.6173	$2.6438e-004$	9.1530	$2.3514e-004$	0.2780
44	$2.3256e-002$	$1.9620e-004$	1.9083	$2.1623e-004$	2.0591	$1.9333e-004$	2.0048

Ο πίνακας για την ακολουθία N_1:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$2.9320e-002$	$---$	$2.2945e-002$	$---$	$2.0869e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$1.1815e-002$	1.3113	$6.1147e-003$	1.9078	$5.3119e-003$	1.9741
12	$9.0909e-002$	$1.0759e-002$	0.9821	$4.5856e-003$	3.0194	$4.6806e-003$	1.3275
21	$5.0000e-002$	$5.7185e-003$	1.0572	$1.9855e-003$	1.4001	$1.8287e-003$	1.5720
22	$4.7619e-002$	$5.4523e-003$	0.9770	$1.7261e-003$	2.8703	$1.7275e-003$	1.1663
23	$4.5455e-002$	$5.1948e-003$	1.0400	$1.7219e-003$	0.0514	$1.5985e-003$	1.6685
34	$3.0303e-002$	$3.4513e-003$	1.0085	$9.5884e-004$	1.4440	$9.3224e-004$	1.3299
41	$2.5000e-002$	$2.8449e-003$	1.0044	$7.7771e-004$	1.0884	$7.2545e-004$	1.3037
42	$2.4390e-002$	$2.7756e-003$	1.0000	$7.3729e-004$	2.1615	$7.0627e-004$	1.0854
43	$2.3810e-002$	$2.7092e-003$	1.0046	$7.3266e-004$	0.2614	$6.8265e-004$	1.4114
45	$2.2727e-002$	$2.5858e-003$	1.0016	$6.9262e-004$	1.2080	$6.4451e-004$	1.2360

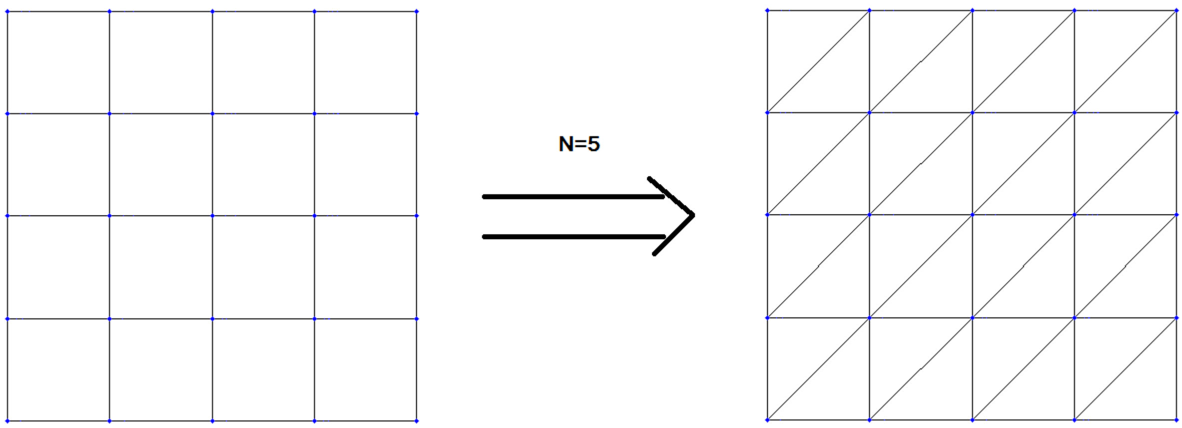
Συνεπώς για την ακολουθία N_1 φαίνεται να έχουμε $r(p) = 1$ ενώ τα $r(u)$ και $r(v)$, όπως έδειξαν αριθμητικά πειράματα σε ακόμα πιο λεπτούς διαμερισμούς, σταθεροποιούνται και αυτά στο 1. Απο την άλλη δεν είναι σαφές ποια είναι η τάξη σύγκλισης για την ακολουθία διαμερισμών N_2. Υπάρχουν όμως υπακολουθίες της N_2 για τις οποίες τα σφάλματα μειώνονται με ρυθμό $O(h^2)$, π.χ. για το υποσύνολο $N_3 = [4\ 9\ 15\ 19\ 25\ 29\ 33\ 37]$ της N_2 έχουμε:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$9.6101e-002$	$---$	$3.8264e-002$	$---$	$4.5302e-002$	$---$
9	$1.2500e-001$	$5.6922e-003$	2.8815	$7.9946e-003$	1.5963	$5.5989e-003$	2.1316
15	$7.1429e-002$	$1.7061e-003$	2.1531	$2.5390e-003$	2.0496	$1.7442e-003$	2.0840
19	$5.5556e-002$	$1.0648e-003$	1.8757	$1.5157e-003$	2.0527	$1.0532e-003$	2.0075
25	$4.1667e-002$	$6.1395e-004$	1.9141	$8.4758e-004$	2.0205	$5.9367e-004$	1.9926
29	$3.5714e-002$	$4.4980e-004$	2.0182	$6.2216e-004$	2.0057	$4.3636e-004$	1.9971
33	$3.1250e-002$	$3.4596e-004$	1.9658	$4.7415e-004$	2.0345	$3.3430e-004$	1.9953
37	$2.7778e-002$	$2.7542e-004$	1.9359	$3.7290e-004$	2.0395	$2.6380e-004$	2.0107

Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι ότι στη γενική περίπτωση η τάξη σύγκλισης, ως προς την L^2 νόρμα, για την μεταβλητή p φαίνεται να είναι ίση με 1, αλλά υπάρχουν ακολουθίες διαμερισμών για τις οποίες η τάξη σύγκλισης για την p είναι ίση με 2. Για την ακολουθία διαμερισμών N_2 η τάξη σύγκλισης, ως προς την L^2 νόρμα, για τις u και v είναι επίσης 2. Για την ακολουθία διαμερισμών N_1 η τάξη σύγκλισης, όπως δείχνουν τα αριθμητικά πειράματα τα οποία πραγματοποιήσαμε σε ακόμη λεπτότερους διαμερισμούς, σταθεροποιήται στο 1 και για τις u και v.

(B) Ομοιόμορφος διαμερισμός με γραμμικά πολυώνυμα σε τρίγωνα .

Την ίδια εικόνα θα πάρουμε όταν χρησιμοποιήσουμε τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία. Πιο συγκεκριμένα οι διαμερισμοί θα είναι οι ίδιοι με τα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία ως προς τους κόμβους. Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε την αντιστοιχία του ομοιόμορφου διαμερισμού στα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία σε σχέση με αυτόν ενός τριγωνισμού για $N = 5$.



Σχήμα 3.4: Ο διαμερισμός για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία και ο αντίστοιχος για τρίγωνα για $N = 5$. Προφανώς και στις δύο περιπτώσεις $h = \frac{1}{N-1}$

Πραγματοποιούμε λοιπόν ξανά το πείραμα για τις ακολουθίες διαμερισμών N_1 και N_2 αυτήν τη φορά με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία παίρνοντας ως ακριβή λύση για την πίεση

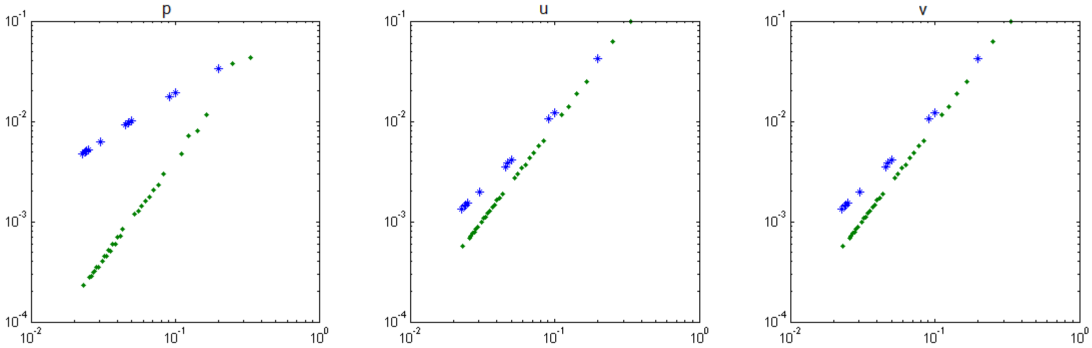
$$p(x, y, t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\cos(\pi y),$$

$$v(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\cos(\pi y),$$

παίρνοντας δηλαδή $f(x, y, t) = 0$.
Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.5: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης για τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (I) και $4 \leq N \leq 45$. Με μπλέ τα σφάλματα απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Θα παραθέσουμε τώρα τους πίνακες με τα σφάλματα ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το πείραμα σε τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία.
Ο πίνακας για την ακολουθία N_1:

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$3.3627e-002$	$---$	$4.2172e-002$	$---$	$4.2172e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$1.9206e-002$	0.8081	$1.2258e-002$	1.7826	$1.2258e-002$	1.7826
12	$9.0909e-002$	$1.7495e-002$	0.9786	$1.0649e-002$	1.4763	$1.0649e-002$	1.4763
21	$5.0000e-002$	$1.0119e-002$	0.9159	$4.0745e-003$	1.6069	$4.0745e-003$	1.6069
22	$4.7619e-002$	$9.6620e-003$	0.9471	$3.8180e-003$	1.3329	$3.8180e-003$	1.3329
23	$4.5455e-002$	$9.2461e-003$	0.9459	$3.5315e-003$	1.6765	$3.5315e-003$	1.6765
34	$3.0303e-002$	$6.2733e-003$	0.9567	$1.9789e-003$	1.4284	$1.9789e-003$	1.4284
41	$2.5000e-002$	$5.2064e-003$	0.9690	$1.5141e-003$	1.3916	$1.5141e-003$	1.3916
42	$2.4390e-002$	$5.0831e-003$	0.9707	$1.4715e-003$	1.1579	$1.4715e-003$	1.1579
43	$2.3810e-002$	$4.9653e-003$	0.9732	$1.4187e-003$	1.5152	$1.4187e-003$	1.5152
45	$2.2727e-002$	$4.7455e-003$	0.9733	$1.3340e-003$	1.3227	$1.3340e-003$	1.3227

Ο πίνακας για την ακολουθία N_2:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$4.3637e-002$	$---$	$9.7921e-002$	$---$	$9.7921e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$3.7723e-002$	0.5062	$6.2630e-002$	1.5535	$6.2630e-002$	1.5535
7	$1.6667e-001$	$1.1504e-002$	2.9289	$2.5119e-002$	2.2533	$2.5119e-002$	2.2533
8	$1.4286e-001$	$8.0329e-003$	2.3300	$1.8703e-002$	1.9134	$1.8703e-002$	1.9134
9	$1.2500e-001$	$7.1049e-003$	0.9193	$1.3866e-002$	2.2409	$1.3866e-002$	2.2409
10	$1.1111e-001$	$4.7397e-003$	3.4368	$1.1538e-002$	1.5600	$1.1538e-002$	1.5600
13	$8.3333e-002$	$3.0063e-003$	1.5826	$6.4052e-003$	2.0459	$6.4052e-003$	2.0459
14	$7.6923e-002$	$2.3351e-003$	3.1567	$5.6925e-003$	1.4738	$5.6925e-003$	1.4738
15	$7.1429e-002$	$2.0752e-003$	1.5920	$4.7907e-003$	2.3275	$4.7907e-003$	2.3275
16	$6.6667e-002$	$1.7696e-003$	2.3090	$4.3315e-003$	1.4602	$4.3315e-003$	1.4602
17	$6.2500e-002$	$1.6185e-003$	1.3829	$3.7140e-003$	2.3833	$3.7140e-003$	2.3833
18	$5.8824e-002$	$1.4305e-003$	2.0371	$3.4035e-003$	1.4400	$3.4035e-003$	1.4400
19	$5.5556e-002$	$1.2734e-003$	2.0355	$2.9673e-003$	2.3993	$2.9673e-003$	2.3993
20	$5.2632e-002$	$1.1840e-003$	1.3460	$2.7461e-003$	1.4328	$2.7461e-003$	1.4328
24	$4.3478e-002$	$8.3707e-004$	1.8148	$1.9013e-003$	1.9244	$1.9013e-003$	1.9244
25	$4.1667e-002$	$7.1216e-004$	3.7972	$1.7143e-003$	2.4321	$1.7143e-003$	2.4321
26	$4.0000e-002$	$7.0221e-004$	0.3447	$1.6218e-003$	1.3589	$1.6218e-003$	1.3589
27	$3.8462e-002$	$5.9857e-004$	4.0716	$1.4723e-003$	2.4666	$1.4723e-003$	2.4666
28	$3.7037e-002$	$5.9063e-004$	0.3536	$1.4017e-003$	1.3025	$1.4017e-003$	1.3025
29	$3.5714e-002$	$5.1156e-004$	3.9521	$1.2780e-003$	2.5405	$1.2780e-003$	2.5405
30	$3.4483e-002$	$5.1654e-004$	-0.2762	$1.2207e-003$	1.3069	$1.2207e-003$	1.3069
31	$3.3333e-002$	$4.4718e-004$	4.2529	$1.1185e-003$	2.5772	$1.1185e-003$	2.5772
32	$3.2258e-002$	$4.4831e-004$	-0.0765	$1.0743e-003$	1.2302	$1.0743e-003$	1.2302
33	$3.1250e-002$	$3.9976e-004$	3.6099	$9.8627e-004$	2.6936	$9.8627e-004$	2.6936
35	$2.9412e-002$	$3.5434e-004$	1.9893	$8.7792e-004$	1.9196	$8.7792e-004$	1.9196
36	$2.8571e-002$	$3.4965e-004$	0.4604	$8.5085e-004$	1.0806	$8.5085e-004$	1.0806
37	$2.7778e-002$	$3.1807e-004$	3.3596	$7.8618e-004$	2.8058	$7.8618e-004$	2.8058
38	$2.7027e-002$	$3.1223e-004$	0.6771	$7.6481e-004$	1.0059	$7.6481e-004$	1.0059
39	$2.6316e-002$	$2.8431e-004$	3.5116	$7.0887e-004$	2.8484	$7.0887e-004$	2.8484
40	$2.5641e-002$	$2.7887e-004$	0.7438	$6.9155e-004$	0.9518	$6.9155e-004$	0.9518
44	$2.3256e-002$	$2.3086e-004$	1.9350	$5.7288e-004$	1.9282	$5.7288e-004$	1.9282

Συνεπώς για την ακολουθία N_1 φαίνεται να έχουμε $r(p) = 1$ και πάλι ενώ τα $r(u)$ και $r(v)$, όπως έδειξαν αριθμητικά πειράματα σε ακόμα πιο λεπτούς διαμερισμούς, σταθεροποιούνται και αυτά στο 1. Απο την άλλη δεν είναι και πάλι σαφές ποια είναι η τάξη σύγκλισης για την ακολουθία διαμερισμών N_2. Υπάρχουν όμως υπακολουθίες της N_2 για τις οποίες τα σφάλματα μειώνονται με ρυθμό $O(h^2)$. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα με το υποσύνολο $N_3 = [4\ 9\ 15\ 19\ 25\ 29\ 33\ 37]$ της N_2 όπου έχουμε:

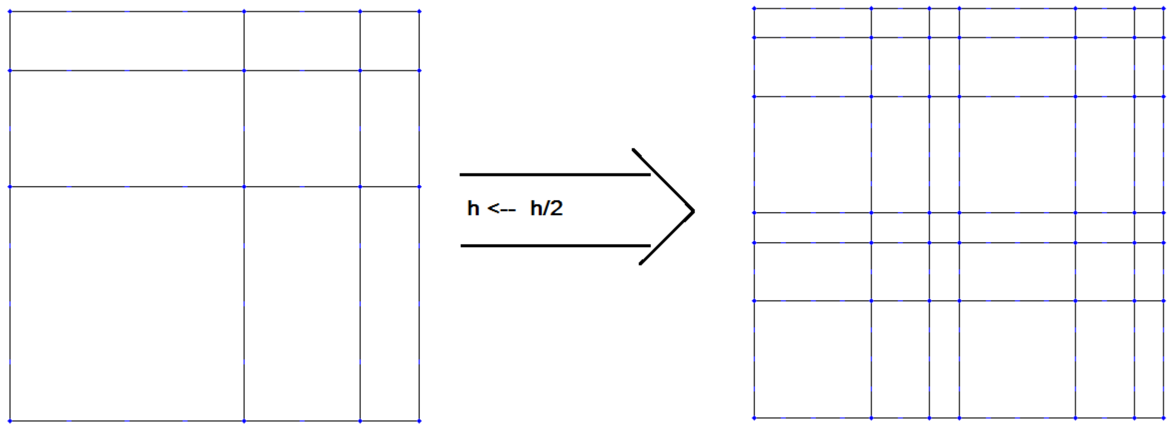
N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$4.3637e-002$	$---$	$9.7921e-002$	$---$	$9.7921e-002$	$---$
9	$1.2500e-001$	$7.1049e-003$	1.8506	$1.3866e-002$	1.9929	$1.3866e-002$	1.9929
15	$7.1429e-002$	$2.0752e-003$	2.1992	$4.7907e-003$	1.8991	$4.7907e-003$	1.8991
19	$5.5556e-002$	$1.2734e-003$	1.9434	$2.9673e-003$	1.9060	$2.9673e-003$	1.9060
15	$4.1667e-002$	$7.1216e-004$	2.0200	$1.7143e-003$	1.9071	$1.7143e-003$	1.9071
19	$3.5714e-002$	$5.1156e-004$	2.1462	$1.2780e-003$	1.9057	$1.2780e-003$	1.9057
33	$3.1250e-002$	$3.9976e-004$	1.8467	$9.8627e-004$	1.9403	$9.8627e-004$	1.9403
37	$2.7778e-002$	$3.1807e-004$	1.9408	$7.8618e-004$	1.9251	$7.8618e-004$	1.9251

Το συμπέρασμα μας είναι ότι στη περίπτωση τριγωνικών διαμερισμών η τάξη σύγκλισης είναι γενικά 1, αλλά υπάρχουν και ακολουθίες διαμερισμών στις οποίες εμφανίζεται 'υπερσύγκλιση' με τάξη ίση με 2.

(Γ) Μη-ομοιόμορφος διαμερισμός .

Προχωράμε τώρα στην γενική περίπτωση μη-ομοιόμορφων διαμερισμων. Για το πειράματο σε μή ομοιόμορφους διαμερισμούς χρησιμοποιούμε την ακριβή λύση για το μη-ομογενές πρόβλημα την οποία χρησιμοποιιήσαμε και στα πειράματα με ομοιόμορφους διαμερισμούς στα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία (βλ. (Α).)

Ο μη-ομοιόμορφος διαμερισμός που θα χρησιμοποιήσουμε στα πειράματα κατασκευάζεται παίρνοντας σε κάθε άξονα υποδιαστήματα με μήκη h, $h/2$, $h/4$, h, $h/2$, $h/4$, $h, \ldots$ Το αρχικό h που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $h + h/2 + h/4 = 1$ ενώ κάθε εκλέπτυνση του διαμερισμού γίνεται θέτοντας $h \leftarrow h/2$. Έτσι οι δύο πρώτοι διαμερισμοί του Ω θα είναι αυτοί του παρακάτω σχήματος:

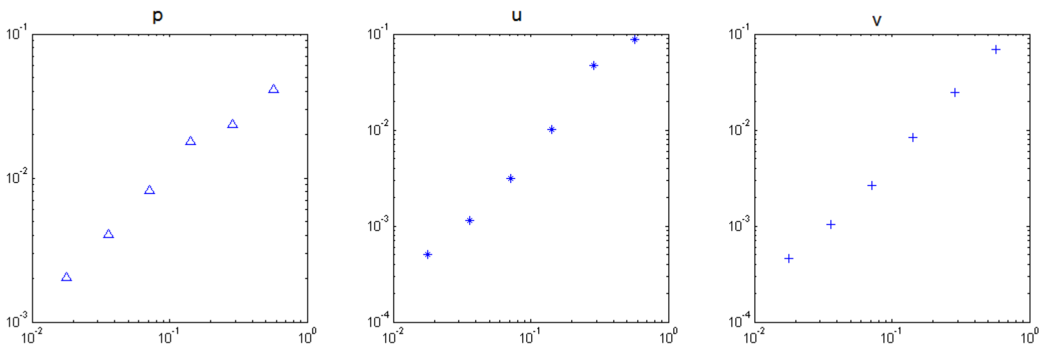


Σχήμα 3.6: Οι δύο πρώτοι διαμερισμοί του χωρίου Ω.

Κάνοντας εκλέπτυνση 5 φορές παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα για τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία:

h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
$5.7143e-001$	$4.1498e-002$	$---$	$8.6966e-002$	$---$	$6.8194e-002$	$---$
$2.8571e-001$	$2.3691e-002$	0.8087	$4.6420e-002$	0.9057	$2.4771e-002$	1.4610
$1.4286e-001$	$1.8065e-002$	0.3911	$1.0155e-002$	2.1925	$8.3358e-003$	1.5713
$7.1429e-002$	$8.2100e-003$	1.1377	$3.1025e-003$	1.7107	$2.6603e-003$	1.6477
$3.5714e-002$	$4.0681e-003$	1.0130	$1.1438e-003$	1.4396	$1.0482e-003$	1.3436
$1.7857e-002$	$2.0311e-003$	1.0021	$5.0305e-004$	1.1851	$4.5455e-004$	1.2054

Το επόμενο σχήμα περιέχει τα διαγράμματα της τάξης σύγκλισης για τις p,u και v.



Σχήμα 3.7: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (I) με μή-ομοιόμορφο διαμερισμό.

(Δ) Συμπεράσματα ως προς τη τάξη σύγκλισης .
Τα αριθμητικά πειράματα με ομοιόμορφο διαμερισμό για την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα για τις συναρτήσεις p,u και v, δίνουν μερικές φορές τάξη σύγκλισης δύο. Μια πιο προσεκτική μελέτη έδειξε ότι για κάποιους ομοιόμορφους διαμερισμούς η τάξη σύγκλισης γινόταν ένα ενώ για κάποιους άλλους δύο, αυτό μας οδήγησε έμμεσα στο συμπέρασμα ότι μάλλον η τάξη σύγκλισης είναι ένα και για τις τρεις συναρτήσεις p,u και v.

Για να σιγουρευτούμε κάναμε πειράματα με μη-ομοιόμορφους διαμερσμούς. Τα πειράματα αυτά επιβεβαίωσαν ότι η τάξη σύγκλισης είναι γενικά ένα.

3.2.2 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου (II)

Έστω το πρόβλημα (3.2) εφοδιασμένο με αρχικές/συνθήκες τύπου (II). Έστω επιπλέον $\psi \in H^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in H_u^1(\Omega)$ και $\varphi_2 \in H_v^1(\Omega)$ όπου

$$H_u^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\ :\ \ u = 0 \text{ στο } \Gamma1 \bigcup \Gamma3\}$$

και

$$H_v^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)\ :\ \ v = 0 \text{ στο } \Gamma2 \bigcup \Gamma4\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση της (3.2) με ψ, την δεύτερη με φ_1 και την τρίτη με φ_2, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} p_t\psi + u_x\psi + v_y\psi = f\psi\ ,\ \ \forall\psi \in H^1(\Omega), \\ u_t\varphi_1 + p_x\varphi_1 = 0\ ,\ \ \forall\varphi_1 \in H_u^1(\Omega), \\ v_t\varphi_2 + p_y\varphi_2 = 0\ ,\ \ \forall\varphi_2 \in H_v^1(\Omega). \end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω και έχουμε:

$$\begin{cases} (p_t, \psi) + (u_x, \psi) + (v_y, \psi) = (f, \psi)\ ,\ \ \forall\psi \in H^1(\Omega), \\ (u_t, \varphi_1) + (p_x, \varphi_1) = 0\ ,\ \ \forall\varphi_1 \in H_u^1(\Omega), \\ (v_t, \varphi_2) + (p_y, \varphi_2) = 0\ ,\ \ \forall\varphi_2 \in H_v^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.18}$$

Έστω τώρα S_h,S_h^u και S_h^v υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης των $H^1(\Omega)$,$H_u^1(\Omega)$ και$H_v^1(\Omega)$ αντίστοιχα. Εάν τώρα $p_h \in S_h$, $u_h \in S_h^u$, $v_h \in S_h^v$ τότε το πρόβλημα (3.18) γράφεται:

$$\begin{cases} (p_{h,t}, \psi) + (u_{h,x}, \psi) + (v_{h,y}, \psi) = (f, \psi)\ ,\ \ \forall\psi \in S_h, \\ (u_{h,t}, \varphi_1) + (p_{h,x}, \varphi_1) = 0\ ,\ \ \forall\varphi_1 \in S_h^u, \\ (v_{h,t}, \varphi_2) + (p_{h,y}, \varphi_2) = 0\ ,\ \ \forall\varphi_2 \in S_h^v. \end{cases} \tag{3.19}$$

Αφού όμως $p_h \in S_h$, $u_h \in S_h^u$, $v_h \in S_h^v$ τότε

$$p_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_i(x,y),$$

όπου $N_h = \dim(S_h)$ και $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_h}$ μία βάση του S_h,

$$u_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}_h} u_i(t)\varphi_{i,1}(x,y),$$

όπου $\hat{N}_h = \dim(S_h^u)$ και $\{\varphi_{i,1}\}_{i=1}^{\hat{N}_h}$ μία βάση του S_h^u,

$$v_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h} v_i(t)\varphi_{i,2}(x,y),$$

όπου $\hat{\hat{N}}_h = \dim(S_h^v)$ και $\{\varphi_{i,2}\}_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h}$ μία βάση του S_h^v. Αντικαθιστώντας στην (3.19) θα έχουμε:

$$\begin{cases} \quad (\sum_{i=1}^{N_h} \dot{p}_i(t)\psi_i, \psi_j) + (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} u_i(t)\varphi_{x,i,1}, \psi_j) + (\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h} v_i(t)\varphi_{y,i,2}, \psi_j) = (f, \psi_j) \ , \ \ 1 \le j \le N_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} \dot{u}_i(t)\varphi_{i,1}, \varphi_{j,1}) + (\sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_{x,i}, \varphi_{j,1}) = 0 \ , \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h} \dot{v}_i(t)\varphi_{i,2}, \varphi_{j,2}) + (\sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_{y,i}, \varphi_{j,2}) = 0 \ , \ \ 1 \le j \le \hat{\hat{N}}_h. \end{cases} \tag{3.20}$$

Ορίζουμε τους πίνακες μάζας:

- M_1 με στοιχεία $\big(M_1\big)_{ij} = (\psi_j, \psi_i), \ \ 1 \le i, j \le N_h$
- M_2 με στοιχεία $\big(M_2\big)_{ij} = (\varphi_{j,1}, \varphi_{i,1}), \ \ 1 \le i, j \le \hat{N}_h$
- M_3 με στοιχεία $\big(M_3\big)_{ij} = (\varphi_{j,2}, \varphi_{i,2}), \ \ 1 \le i, j \le \hat{\hat{N}}_h$

τους πίνακες 'ακαμψίας':

- $A_{1,x}$ με στοιχεία $\big(A_{1,x}\big)_{i,j} = (\varphi_{x,j,1}, \psi_i), \ \ 1 \le i \le N_h, \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h$
- $A_{2,y}$ με στοιχεία $\big(A_{2,y}\big)_{i,j} = (\varphi_{y,j,2}, \psi_i), \ \ 1 \le i \le N_h, \ \ 1 \le j \le \hat{\hat{N}}_h$
- $A_{x,1}$ με στοιχεία $\big(A_{x,1}\big)_{i,j} = (\psi_{x,j}, \varphi_{i,1}), \ \ 1 \le j \le N_h, \ \ 1 \le i \le \hat{N}_h$

- $A_{y,2}$ με στοιχεία $\left(A_{y,2}\right)_{i,j} = (\psi_{y,j}, \varphi_{i,2}),\ \ 1 \leq j \leq N_h,\ \ 1 \leq i \leq \hat{\hat{N}}_h$

και το διάνυσμα $\vec{f}$ με στοιχεία $f_i = (f, \psi_i)$ $1 \leq i \leq N_h$. Οπότε τελικά το σύστημα (3.20) γράφεται στην μορφή:

$$\underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{\hat{N}}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{\hat{N}}_h \end{array} & \begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & M_3 \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_h \\ \dot{u}_h \\ \dot{v}_h \end{pmatrix}}_{x_t(t)} = - \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{\hat{N}}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{\hat{N}}_h \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A_{x,1} & A_{y,2} \\ A_{1,x} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ A_{2,y} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \end{array}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} p_h \\ u_h \\ v_h \end{pmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Επομένως έχουμε πλέον να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} Ax_t(t) = Bx(t) + F(t) \\ \quad x(0) = x^0, \ \ \text{δεδομένο.} \end{cases} \tag{3.21}$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.21) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Shu-Osher, όπως την περιγράψαμε στην ενότητα 3.2.1.1.

3.2.2.1 Πειράματα για την τάξη σύγκλισης

Για ακριβή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (II) παίρνουμε:
Για την πίεση:

$$p(x, y, t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

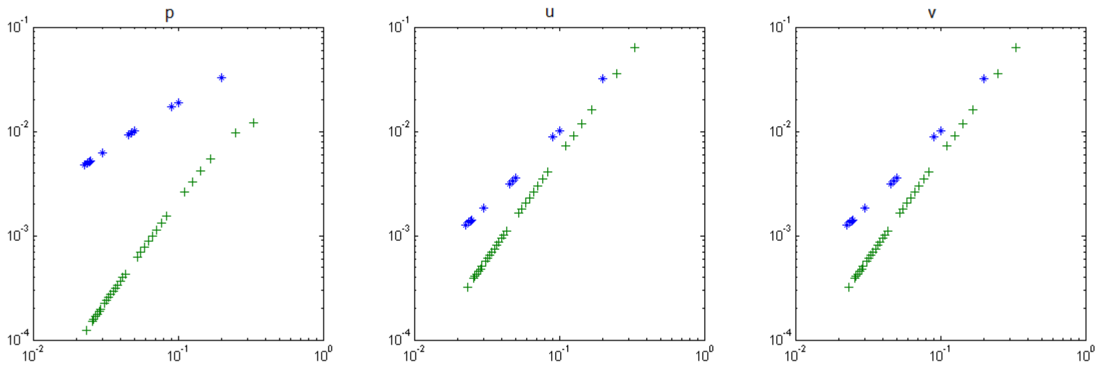
και για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u(x, y, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\sin(\pi y)$$

δηλαδή $f(x, y, t) = 0$. Τα πειράματα θα γίνουν με χρονικό βήμα που ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{\Delta t}{h} = 0.1$

(Α) Ομοιόμορφος διαμερισμός με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία .
Και σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε το φαινόμενο με την διαφορετική τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για τα σύνολα διαμερισμών N_1 και N_2 που ορίσαμε στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (I). Στο σχήμα 3.8 παραθέτουμε τα διαγράμματα για την τάξη σύγκλισης .



Σχήμα 3.8: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (II) και $4 \leq N \leq 45$ για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Με μπλέ τα σφάλματα απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Ο παρακάτω πίνακας αφορά την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ και τα σφάλματα για το σύνολο N_1 :

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$3.2945e-002$	$---$	$3.2067e-002$	$---$	$3.2067e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$1.8880e-002$	0.8032	$1.0189e-002$	1.6541	$1.0189e-002$	1.6541
12	$9.0909e-002$	$1.7379e-002$	0.8690	$8.7694e-003$	1.5742	$8.7694e-003$	1.5742
21	$5.0000e-002$	$1.0091e-002$	0.9094	$3.5942e-003$	1.4919	$3.5942e-003$	1.4919
22	$4.7619e-002$	$9.6394e-003$	0.9381	$3.3547e-003$	1.4136	$3.3547e-003$	1.4136
23	$4.5455e-002$	$9.2264e-003$	0.9413	$3.1429e-003$	1.4021	$3.1429e-003$	1.4021
34	$3.0303e-002$	$6.2669e-003$	0.9539	$1.8183e-003$	1.3497	$1.8183e-003$	1.3497
41	$2.5000e-002$	$5.2031e-003$	0.9670	$1.4202e-003$	1.2846	$1.4202e-003$	1.2846
42	$2.4390e-002$	$5.0799e-003$	0.9707	$1.3766e-003$	1.2627	$1.3766e-003$	1.2627
43	$2.3810e-002$	$4.9623e-003$	0.9715	$1.3355e-003$	1.2580	$1.3355e-003$	1.2580
45	$2.2727e-002$	$4.7428e-003$	0.9725	$1.2599e-003$	1.2512	$1.2599e-003$	1.2512

Ο πίνακας που ακολουθεί αφορά τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2

νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για την ακολουθία διαμερισμών N_2.

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$1.2180e-002$	$---$	$6.3125e-002$	$---$	$6.3125e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$9.7503e-003$	0.7733	$3.6039e-002$	1.9484	$3.6039e-002$	1.9484
7	$1.6667e-001$	$5.4362e-003$	1.4409	$1.6198e-002$	1.9723	$1.6198e-002$	1.9723
8	$1.4286e-001$	$4.1751e-003$	1.7123	$1.1929e-002$	1.9847	$1.1929e-002$	1.9847
9	$1.2500e-001$	$3.2876e-003$	1.7896	$9.1468e-003$	1.9887	$9.1468e-003$	1.9887
10	$1.1111e-001$	$2.6473e-003$	1.8392	$7.2345e-003$	1.9913	$7.2345e-003$	1.9913
13	$8.3333e-002$	$1.5354e-003$	1.8935	$4.0761e-003$	1.9943	$4.0761e-003$	1.9943
14	$7.6923e-002$	$1.3158e-003$	1.9282	$3.4742e-003$	1.9962	$3.4742e-003$	1.9962
15	$7.1429e-002$	$1.1397e-003$	1.9388	$2.9963e-003$	1.9968	$2.9963e-003$	1.9968
16	$6.6667e-002$	$9.9646e-004$	1.9471	$2.6106e-003$	1.9973	$2.6106e-003$	1.9973
17	$6.2500e-002$	$8.7841e-004$	1.9539	$2.2948e-003$	1.9977	$2.2948e-003$	1.9977
18	$5.8824e-002$	$7.8002e-004$	1.9594	$2.0330e-003$	1.9980	$2.0330e-003$	1.9980
19	$5.5556e-002$	$6.9719e-004$	1.9640	$1.8136e-003$	1.9982	$1.8136e-003$	1.9982
20	$5.2632e-002$	$6.2682e-004$	1.9679	$1.6278e-003$	1.9984	$1.6278e-003$	1.9984
24	$4.3478e-002$	$4.2982e-004$	1.9748	$1.1111e-003$	1.9988	$1.1111e-003$	1.9988
25	$4.1667e-002$	$3.9508e-004$	1.9803	$1.0205e-003$	1.9991	$1.0205e-003$	1.9991
26	$4.0000e-002$	$3.6437e-004$	1.9819	$9.4052e-004$	1.9992	$9.4052e-004$	1.9992
27	$3.8462e-002$	$3.3710e-004$	1.9833	$8.6959e-004$	1.9993	$8.6959e-004$	1.9993
28	$3.7037e-002$	$3.1278e-004$	1.9845	$8.0638e-004$	1.9993	$8.0638e-004$	1.9993
29	$3.5714e-002$	$2.9099e-004$	1.9857	$7.4983e-004$	1.9994	$7.4983e-004$	1.9994
30	$3.4483e-002$	$2.7139e-004$	1.9867	$6.9902e-004$	1.9995	$6.9902e-004$	1.9995
31	$3.3333e-002$	$2.5371e-004$	1.9876	$6.5321e-004$	1.9995	$6.5321e-004$	1.9995
32	$3.2258e-002$	$2.3769e-004$	1.9884	$6.1176e-004$	1.9995	$6.1176e-004$	1.9995
33	$3.1250e-002$	$2.2315e-004$	1.9891	$5.7413e-004$	1.9996	$5.7413e-004$	1.9996
35	$2.9412e-002$	$1.9779e-004$	1.9901	$5.0858e-004$	1.9996	$5.0858e-004$	1.9996
36	$2.8571e-002$	$1.8669e-004$	1.9910	$4.7994e-004$	1.9997	$4.7994e-004$	1.9997
37	$2.7778e-002$	$1.7651e-004$	1.9915	$4.5365e-004$	1.9997	$4.5365e-004$	1.9997
38	$2.7027e-002$	$1.6713e-004$	1.9919	$4.2946e-004$	1.9997	$4.2946e-004$	1.9997
39	$2.6316e-002$	$1.5849e-004$	1.9924	$4.0716e-004$	1.9997	$4.0716e-004$	1.9997
40	$2.5641e-002$	$1.5049e-004$	1.9928	$3.8655e-004$	1.9998	$3.8655e-004$	1.9998
44	$2.3256e-002$	$1.2387e-004$	1.9936	$3.1798e-004$	1.9998	$3.1798e-004$	1.9998

(B) Ομοιόμορφος διαμερισμός με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία .

Θα πραγματοποιήσουμε τώρα το ίδιο πείραμα με ομοιόμορφους διαμερισμούς χρησιμοποιώντας τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία για την ίδια ακριβής λύση που χρησιμοποιήσαμε στα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία, δηλαδή για την πίεση Για την πίεση:

$$p(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

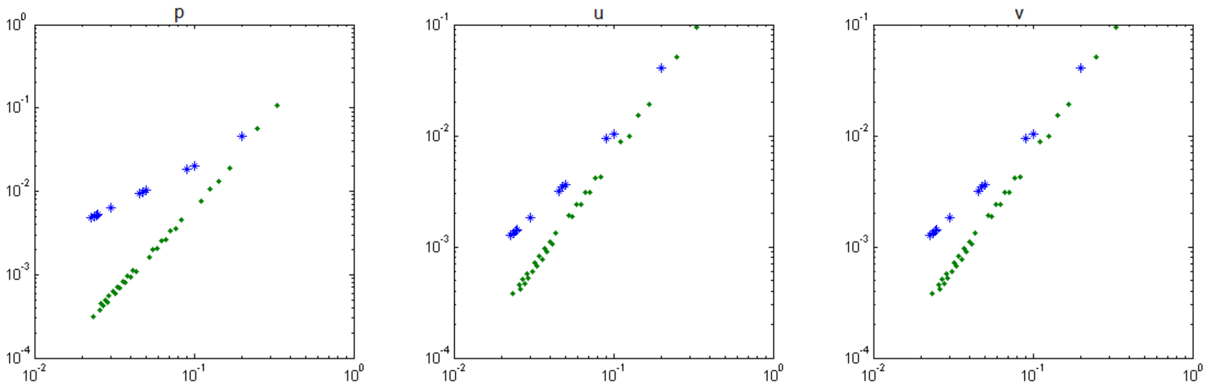
και για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u(x,y,t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$v(x,y,t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\sin(\pi y)$$

οπότε $f(x,y,t) = 0$.

Τα διαγράμματα για την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ βρίσκονται στο σχήμα 3.9 που ακολουθεί:



Σχήμα 3.9: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης για τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (II) και $4 \leq N \leq 45$. Με μπλέ τα σφάλματα απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Στο σχήμα 3.9 λοιπόν, όπως και στο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (I), παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια συμπεριφορά με τα διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Πιο αναλυτικά τα σφάλματα στους πίνακες που ακολουθούν.

Ο πίνακας με τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το σύνολο N_2:

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$1.0572e-001$	$---$	$9.3413e-002$	$---$	$9.3413e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$5.6305e-002$	2.1900	$5.1034e-002$	2.1014	$5.1034e-002$	2.1014
7	$1.6667e-001$	$1.8671e-002$	2.7224	$1.9262e-002$	2.4030	$1.9262e-002$	2.4030
8	$1.4286e-001$	$1.3319e-002$	2.1912	$1.5182e-002$	1.5442	$1.5182e-002$	1.5442
9	$1.2500e-001$	$1.0518e-002$	1.7680	$9.9904e-003$	3.1340	$9.9904e-003$	3.1340
10	$1.1111e-001$	$7.7042e-003$	2.6431	$8.8850e-003$	0.9955	$8.8850e-003$	0.9955
13	$8.3333e-002$	$4.5362e-003$	1.8412	$4.2656e-003$	2.5507	$4.2656e-003$	2.5507
14	$7.6923e-002$	$3.5442e-003$	3.0832	$4.1520e-003$	0.3371	$4.1520e-003$	0.3371
15	$7.1429e-002$	$3.3168e-003$	0.8948	$3.1133e-003$	3.8849	$3.1133e-003$	3.8849
16	$6.6667e-002$	$2.6345e-003$	3.3379	$3.1087e-003$	0.0218	$3.1087e-003$	0.0218
17	$6.2500e-002$	$2.5328e-003$	0.6100	$2.3815e-003$	4.1289	$2.3815e-003$	4.1289
18	$5.8824e-002$	$2.0367e-003$	3.5957	$2.4168e-003$	-0.2430	$2.4168e-003$	-0.2430
19	$5.5556e-002$	$1.9991e-003$	0.3263	$1.8770e-003$	4.4221	$1.8770e-003$	4.4221
20	$5.2632e-002$	$1.6219e-003$	3.8675	$1.9336e-003$	-0.5488	$1.9336e-003$	-0.5488
24	$4.3478e-002$	$1.0992e-003$	2.0362	$1.3182e-003$	2.0050	$1.3182e-003$	2.0050
25	$4.1667e-002$	$1.1227e-003$	-0.4967	$1.0541e-003$	5.2529	$1.0541e-003$	5.2529
26	$4.0000e-002$	$9.2807e-004$	4.6632	$1.1150e-003$	-1.3752	$1.1150e-003$	-1.3752
27	$3.8462e-002$	$9.5644e-004$	-0.7677	$8.9787e-004$	5.5226	$8.9787e-004$	5.5226
28	$3.7037e-002$	$7.9414e-004$	4.9273	$9.5591e-004$	-1.6596	$9.5591e-004$	-1.6596
29	$3.5714e-002$	$8.2452e-004$	-1.0322	$7.7380e-004$	5.8115	$7.7380e-004$	5.8115
30	$3.4483e-002$	$6.8733e-004$	5.1861	$8.2821e-004$	-1.9365	$8.2821e-004$	-1.9365
31	$3.3333e-002$	$7.1820e-004$	-1.2959	$6.7391e-004$	6.0812	$6.7391e-004$	6.0812
32	$3.2258e-002$	$6.0071e-004$	5.4478	$7.2469e-004$	-2.2154	$7.2469e-004$	-2.2154
33	$3.1250e-002$	$6.3116e-004$	-1.5573	$5.9203e-004$	6.3684	$5.9203e-004$	6.3684
35	$2.9412e-002$	$5.5905e-004$	2.0012	$5.2437e-004$	2.0017	$5.2437e-004$	2.0017
36	$2.8571e-002$	$4.7033e-004$	5.9614	$5.6822e-004$	-2.7705	$5.6822e-004$	-2.7705
37	$2.7778e-002$	$4.9862e-004$	-2.0737	$4.6756e-004$	6.9218	$4.6756e-004$	6.9218
38	$2.7027e-002$	$4.2054e-004$	6.2159	$5.0838e-004$	-3.0553	$5.0838e-004$	-3.0553
39	$2.6316e-002$	$4.4749e-004$	-2.3295	$4.1961e-004$	7.1960	$4.1961e-004$	7.1960
40	$2.5641e-002$	$3.7826e-004$	6.4702	$4.5748e-004$	-3.3264	$4.5748e-004$	-3.3264
44	$2.3256e-002$	$3.1084e-004$	2.0108	$3.7625e-004$	2.0022	$3.7625e-004$	2.0022

Ο αντίστοιχος πίνακας για το σύνολο N_1:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$4.6354e-002$	$---$	$4.0482e-002$	$---$	$4.0482e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$2.0163e-002$	1.2009	$1.0423e-002$	1.9575	$1.0423e-002$	1.9575
12	$9.0909e-002$	$1.8212e-002$	1.0678	$9.3780e-003$	1.1088	$9.3780e-003$	1.1088
21	$5.0000e-002$	$1.0222e-002$	0.9661	$3.6175e-003$	1.5934	$3.6175e-003$	1.5934
22	$4.7619e-002$	$9.7319e-003$	1.0064	$3.4630e-003$	0.8949	$3.4630e-003$	0.8949
23	$4.5455e-002$	$9.3229e-003$	0.9229	$3.1603e-003$	1.9662	$3.1603e-003$	1.9662
34	$3.0303e-002$	$6.2883e-003$	0.9712	$1.8506e-003$	1.3199	$1.8506e-003$	1.3199
41	$2.5000e-002$	$5.2179e-003$	0.9700	$1.4232e-003$	1.3649	$1.4232e-003$	1.3649
42	$2.4390e-002$	$5.0906e-003$	0.9998	$1.3944e-003$	0.8289	$1.3944e-003$	0.8289
43	$2.3810e-002$	$4.9750e-003$	0.9532	$1.3381e-003$	1.7091	$1.3381e-003$	1.7091
45	$2.2727e-002$	$4.7538e-003$	0.9777	$1.2623e-003$	1.2544	$1.2623e-003$	1.2544

Αν χρησιμοποιήσουμε το υποσύνολο $N_3 \subset N_2$, ο πίνακας με τα σφάλματα και τη τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το σύνολο N_3 είναι:

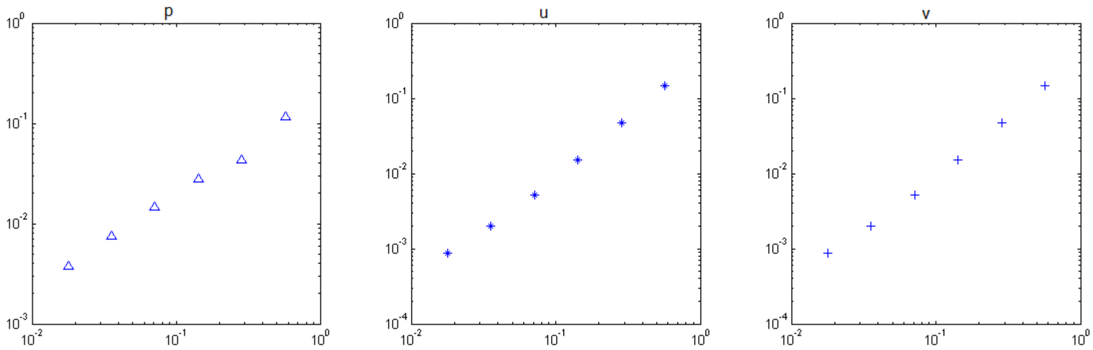
N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$1.0572e-001$	$---$	$9.3413e-002$	$---$	$9.3413e-002$	$---$
9	$1.2500e-001$	$1.0518e-002$	2.3528	$9.9904e-003$	2.2791	$9.9904e-003$	2.2791
15	$7.1429e-002$	$3.3168e-003$	2.0623	$3.1133e-003$	2.0834	$3.1133e-003$	2.0834
19	$5.5556e-002$	$1.9991e-003$	2.0146	$1.8770e-003$	2.0134	$1.8770e-003$	2.0134
15	$4.1667e-002$	$1.1227e-003$	2.0056	$1.0541e-003$	2.0056	$1.0541e-003$	2.0056
19	$3.5714e-002$	$8.2452e-004$	2.0024	$7.7380e-004$	2.0057	$7.7380e-004$	2.0057
33	$3.1250e-002$	$6.3116e-004$	2.0014	$5.9203e-004$	2.0052	$5.9203e-004$	2.0052
37	$2.7778e-002$	$4.9862e-004$	2.0012	$4.6756e-004$	2.0040	$4.6756e-004$	2.0040

(Γ) Μη-ομοιόμορφος διαμερισμός .

Για να εξάγουμε το τελικό συμπέρασμα για την τάξη σύγκλισης της μεθόδου κάνουμε ξανά το πείραμα με μη-ομοιόμορφους διαμερισμούς. Χρησιμοποιούμε τους ίδιους μη-ομοιόμορφους διαμερισμούς για το χωρίο Ω που χρησιμοποιήσαμε στο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (I). Ακολουθεί ο πίνακας με τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ με μη-ομοιόμορφο διαμερισμό.

h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
$5.7143e-001$	$1.1518e-001$	$---$	$1.4771e-001$	$---$	$1.4771e-001$	$---$
$2.8571e-001$	$4.3465e-002$	1.4060	$4.7275e-002$	1.6436	$4.7275e-002$	1.6436
$1.4286e-001$	$2.8099e-002$	0.6293	$1.4975e-002$	1.6584	$1.4975e-002$	1.6584
$7.1429e-002$	$1.4476e-002$	0.9568	$5.1913e-003$	1.5283	$5.1913e-003$	1.5283
$3.5714e-002$	$7.4476e-003$	0.9588	$2.0226e-003$	1.3599	$2.0226e-003$	1.3599
$1.7857e-002$	$3.7733e-003$	0.9809	$8.7646e-004$	1.2064	$8.7646e-004$	1.2064

Ακολουθούν τα διαγράμματα της τάξης σύγκλισης για τις p,u και v.



Σχήμα 3.10: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (II) με μή-ομοιόμορφο διαμερισμό.

(Δ) Συμπεράσματα ως προς τη τάξη σύγκλισης .

Στο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (II) δεν παρατηρήσαμε καμία ουσιαστική διαφορά ως προς την τάξη σύγκλισης σε σχέση με το πρόβλημα των συνοριακών συνθηκών τύπου (I). Το τελικό συμπέρασμα προήλθε για άλλη μία φορά χρησιμοποιώντας μη-ομοιόμορφους διαμερισμούς και είναι ότι και πάλι η τάξη σύγκλισης, τόσο για την πίεση p όσο και για τις συνιστώσες της ταχύτητας u και v, ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ φαίνεται να πλησιάζει το 1.

3.2.3 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου (III)

Έστω το πρόβλημα (3.2) εφοδιασμένο με αρχικές/συνθήκες τύπου (III) και έστω $\psi \in H_p^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ και $\varphi_2 \in H_v^1(\Omega)$ όπου

$$H_p^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega) \ : \ \ p = 0 \text{ στο } \Gamma 1 \bigcup \Gamma 3\}$$

και

$$H_v^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ v = 0 \text{ στο } \Gamma 2 \bigcup \Gamma 4\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση της (3.2) με ψ, την δεύτερη με φ_1 και την τρίτη με φ_2, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} p_t\psi + u_x\psi + v_y\psi = f\psi \ , \ \ \forall\psi \in H_p^1(\Omega), \\ u_t\varphi_1 + p_x\varphi_1 = 0 \ , \ \ \forall\varphi_1 \in H^1(\Omega), \\ v_t\varphi_2 + p_y\varphi_2 = 0 \ , \ \ \forall\varphi_2 \in H_v^1(\Omega). \end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω και έχουμε:

$$\begin{cases} (p_t, \psi) + (u_x, \psi) + (v_y, \psi) = (f, \psi) \ , \ \ \forall\psi \in H_p^1(\Omega), \\ (u_t, \varphi_1) + (p_x, \varphi_1) = 0 \ , \ \ \forall\varphi_1 \in H^1(\Omega), \\ (v_t, \varphi_2) + (p_y, \varphi_2) = 0 \ , \ \ \forall\varphi_2 \in H_v^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.22}$$

Έστω τώρα S_h^p,S_h και S_h^v υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης των $H_p^1(\Omega)$,$H^1(\Omega)$ και$H_v^1(\Omega)$ αντίστοιχα. Εάν τώρα $p_h \in S_h^p$, $u_h \in S_h$, $v_h \in S_h^v$ τότε το πρόβλημα (3.22) γράφεται:

$$\begin{cases} (p_{h,t}, \psi) + (u_{h,x}, \psi) + (v_{h,y}, \psi) = (f, \psi) \ , \ \ \forall\psi \in S_h^p, \\ (u_{h,t}, \varphi_1) + (p_{h,x}, \varphi_1) = 0 \ , \ \ \forall\varphi_1 \in S_h, \\ (v_{h,t}, \varphi_2) + (p_{h,y}, \varphi_2) = 0 \ , \ \ \forall\varphi_2 \in S_h^v. \end{cases} \tag{3.23}$$

Αφού όμως $p_h \in S_h^p$, $u_h \in S_h$, $v_h \in S_h^v$ τότε

$$p_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_i(x, y),$$

όπου $N_h = \dim(S_h^p)$ και $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_h}$ μία βάση του S_h^p,

$$u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}_h} u_i(t)\varphi_{i,1}(x, y),$$

όπου $\hat{N}_h = \dim(S_h)$ και $\{\varphi_{i,1}\}_{i=1}^{\hat{N}_h}$ μία βάση του S_h,

$$v_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h} v_i(t)\varphi_{i,2}(x, y),$$

όπου $\hat{\hat{N}}_h = \dim(S_h^v)$ και $\{\varphi_{i,2}\}_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h}$ μία βάση του S_h^v. Αντικαθιστώντας στην (3.23) θα έχουμε:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{N_h} \dot{p}_i(t)\psi_i, \psi_j) + (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} u_i(t)\varphi_{x,i,1}, \psi_j) + (\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h} v_i(t)\varphi_{y,i,2}, \psi_j) = (f, \psi_j)\ , \ \ 1 \le j \le N_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h} \dot{u}_i(t)\varphi_{i,1}, \varphi_{j,1}) + (\sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_{x,i}, \varphi_{j,1}) = 0\ , \ \ 1 \le j \le \hat{N}_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h} \dot{v}_i(t)\varphi_{i,2}, \varphi_{j,2}) + (\sum_{i=1}^{N_h} p_i(t)\psi_{y,i}, \varphi_{j,2}) = 0\ , \ \ 1 \le j \le \hat{\hat{N}}_h. \end{cases} \tag{3.24}$$

Ορίζουμε τους πίνακες μάζας:

- M_1 με στοιχεία $\big(M_1\big)_{ij} = (\psi_j, \psi_i),\ \ 1 \le i, j \le N_h$
- M_2 με στοιχεία $\big(M_2\big)_{ij} = (\varphi_{j,1}, \varphi_{i,1}),\ \ 1 \le i, j \le \hat{N}_h$
- M_3 με στοιχεία $\big(M_3\big)_{ij} = (\varphi_{j,2}, \varphi_{i,2}),\ \ 1 \le i, j \le \hat{\hat{N}}_h$

τους πίνακες 'ακαμψίας':

- $A_{1,x}$ με στοιχεία $\big(A_{1,x}\big)_{i,j} = (\varphi_{x,j,1}, \psi_i),\ \ 1 \le i \le N_h,\ \ 1 \le j \le \hat{N}_h$
- $A_{2,y}$ με στοιχεία $\big(A_{2,y}\big)_{i,j} = (\varphi_{y,j,2}, \psi_i),\ \ 1 \le i \le N_h,\ \ 1 \le j \le \hat{\hat{N}}_h$
- $A_{x,1}$ με στοιχεία $\big(A_{x,1}\big)_{i,j} = (\psi_{x,j}, \varphi_{i,1}),\ \ 1 \le j \le N_h,\ \ 1 \le i \le \hat{N}_h$
- $A_{y,2}$ με στοιχεία $\big(A_{y,2}\big)_{i,j} = (\psi_{y,j}, \varphi_{i,2}),\ \ 1 \le j \le N_h,\ \ 1 \le i \le \hat{\hat{N}}_h$

και το διάνυσμα $\vec{f}$ με στοιχεία $f_i = (f, \psi_i)$ $1 \le i \le N_h$. Οπότε τελικά το σύστημα (3.24) γράφεται στην μορφή:

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{\hat{N}}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{\hat{N}}_h \end{array} & \begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & M_3 \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_h \\ \dot{u}_h \\ \dot{v}_h \end{pmatrix}}_{x_t(t)} = - \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{\hat{N}}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{\hat{N}}_h \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A_{x,1} & A_{y,2} \\ A_{1,x} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ A_{2,y} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \end{array}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} p_h \\ u_h \\ v_h \end{pmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Επομένως έχουμε πλέον να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} Ax_t(t) = Bx(t) + F(t), \\ \quad x(0) = x^0,\ \ \text{δεδομένο}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Και πάλι θα λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.25) με τη μέθοδο Shu-Osher.

3.2.3.1 Πειράματα για την τάξη σύγκλισης

Για ακριβή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (III) παίρνουμε τις συναρτήσεις:
Για την πίεση:

$$p(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)x^2 \sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

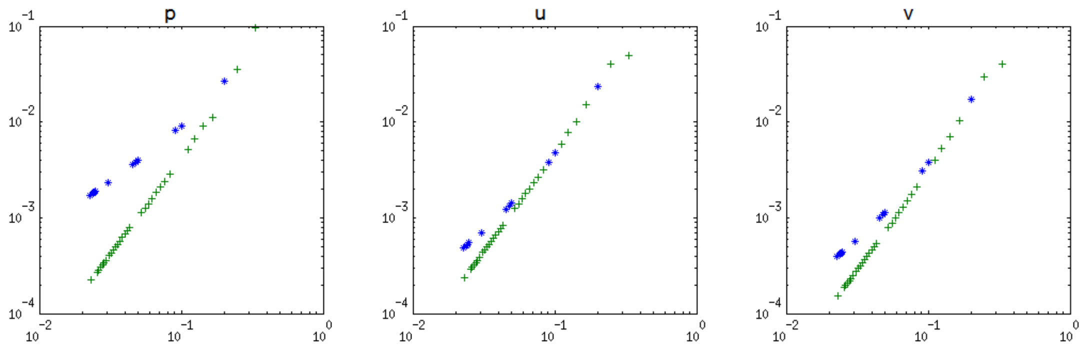
και για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u(x,y,t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\sqrt{2}\pi t)x\sin(\pi x)cos(\pi y) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)x^2\cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$v(x,y,t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)x^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

οπότε $f(x,y,t) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\sqrt{2}\pi t)(2\pi x\cos(\pi x)+sin(\pi x))\cos(\pi y)$ Τα πειράματα θα γίνουν με χρονικό βήμα που ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{\Delta t}{h} = 0.1$

(Α) Ομοιόμορφος διαμερισμός με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία . Όπως και στα προηγούμενα δύο προβλήματα, έτσι και στο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (III) θα παρατηρήσουμε το φαινόμενο της διαφορετικής τάξης σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για τα σύνολα N_1 και N_2. Αυτό επιβεβαιώνει και το σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (III) και $4 \leq N \leq 45$ για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Με μπλέ τα σφάλματα απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Ο παρακάτω πίνακας αφορά την τάξη σύγκλισης και τα σφάλματα ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το σύνολο N_2 :

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$9.6245e-002$	$---$	$4.9439e-002$	$---$	$4.0057e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$3.5199e-002$	3.4965	$4.0511e-002$	0.6923	$2.9394e-002$	1.0759
7	$1.6667e-001$	$1.1182e-002$	2.8281	$1.5267e-002$	2.4068	$1.0320e-002$	2.5816
8	$1.4286e-001$	$9.1712e-003$	1.2862	$1.0050e-002$	2.7120	$7.0353e-003$	2.4853
9	$1.2500e-001$	$6.6634e-003$	2.3922	$7.7796e-003$	1.9180	$5.2969e-003$	2.1255
10	$1.1111e-001$	$5.1657e-003$	2.1616	$5.8993e-003$	2.3490	$4.0208e-003$	2.3403
13	$8.3333e-002$	$2.8682e-003$	2.0452	$3.1703e-003$	2.1587	$2.0977e-003$	2.2617
14	$7.6923e-002$	$2.4090e-003$	2.1796	$2.6734e-003$	2.1299	$1.7511e-003$	2.2558
15	$7.1429e-002$	$2.0730e-003$	2.0269	$2.2996e-003$	2.0324	$1.4848e-003$	2.2259
16	$6.6667e-002$	$1.8237e-003$	1.8576	$1.9957e-003$	2.0541	$1.2870e-003$	2.0720
17	$6.2500e-002$	$1.5638e-003$	2.3821	$1.7787e-003$	1.7835	$1.1262e-003$	2.0684
18	$5.8824e-002$	$1.3812e-003$	2.0482	$1.5728e-003$	2.0299	$9.8867e-004$	2.1484
19	$5.5556e-002$	$1.2688e-003$	1.4854	$1.3795e-003$	2.2934	$8.7800e-004$	2.0769
20	$5.2632e-002$	$1.1402e-003$	1.9753	$1.2425e-003$	1.9358	$7.8895e-004$	1.9780
24	$4.3478e-002$	$7.9431e-004$	1.8923	$8.3747e-004$	2.0646	$5.3832e-004$	2.0007
25	$4.1667e-002$	$7.2690e-004$	2.0835	$7.6921e-004$	1.9978	$4.9427e-004$	2.0059
26	$4.0000e-002$	$6.7031e-004$	1.9855	$7.0967e-004$	1.9733	$4.5550e-004$	2.0010
27	$3.8462e-002$	$6.1972e-004$	2.0010	$6.5702e-004$	1.9655	$4.2193e-004$	1.9519
28	$3.7037e-002$	$5.6770e-004$	2.3231	$6.1325e-004$	1.8267	$3.9160e-004$	1.9767
29	$3.5714e-002$	$5.2438e-004$	2.1824	$5.7156e-004$	1.9357	$3.6377e-004$	2.0272
30	$3.4483e-002$	$4.9360e-004$	1.7237	$5.2862e-004$	2.2261	$3.3901e-004$	2.0090
31	$3.3333e-002$	$4.5881e-004$	2.1564	$4.9523e-004$	1.9245	$3.1693e-004$	1.9865
32	$3.2258e-002$	$4.2934e-004$	2.0243	$4.6192e-004$	2.1231	$2.9651e-004$	2.0310
33	$3.1250e-002$	$4.0296e-004$	1.9977	$4.3277e-004$	2.0531	$2.7782e-004$	2.0513
35	$2.9412e-002$	$3.5776e-004$	1.9624	$3.8178e-004$	2.0680	$2.4581e-004$	2.0189
36	$2.8571e-002$	$3.3672e-004$	2.0905	$3.6021e-004$	2.0066	$2.3161e-004$	2.0525
37	$2.7778e-002$	$3.1909e-004$	1.9090	$3.4006e-004$	2.0435	$2.1866e-004$	2.0432
38	$2.7027e-002$	$3.0193e-004$	2.0171	$3.2236e-004$	1.9507	$2.0694e-004$	2.0105
39	$2.6316e-002$	$2.8502e-004$	2.1620	$3.0637e-004$	1.9075	$1.9607e-004$	2.0221
40	$2.5641e-002$	$2.7009e-004$	2.0706	$2.9141e-004$	1.9274	$1.8596e-004$	2.0388
44	$2.3256e-002$	$2.2509e-004$	1.8669	$2.3805e-004$	2.0714	$1.5287e-004$	2.0069

Για το σύνολο N_1 ο πίνακας για τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2

νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ είναι:

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$2.6343e-002$	$---$	$2.3268e-002$	$---$	$1.7256e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$9.0788e-003$	1.5369	$4.7910e-003$	2.2800	$3.7419e-003$	2.2053
12	$9.0909e-002$	$8.1222e-003$	1.1682	$3.8295e-003$	2.3503	$3.1196e-003$	1.9084
21	$5.0000e-002$	$3.9505e-003$	1.2056	$1.4083e-003$	1.6733	$1.1450e-003$	1.6766
22	$4.7619e-002$	$3.7421e-003$	1.1108	$1.3080e-003$	1.5152	$1.0637e-003$	1.5082
23	$4.5455e-002$	$3.5597e-003$	1.0743	$1.2076e-003$	1.7152	$9.9366e-004$	1.4650
34	$3.0303e-002$	$2.2947e-003$	1.0829	$6.9106e-004$	1.3767	$5.6607e-004$	1.3877
41	$2.5000e-002$	$1.8742e-003$	1.0524	$5.4515e-004$	1.2328	$4.4128e-004$	1.2946
42	$2.4390e-002$	$1.8264e-003$	1.0445	$5.2930e-004$	1.1949	$4.2781e-004$	1.2556
43	$2.3810e-002$	$1.7812e-003$	1.0415	$5.1411e-004$	1.2082	$4.1510e-004$	1.2514
45	$2.2727e-002$	$1.6973e-003$	1.0370	$4.8609e-004$	1.2046	$3.9183e-004$	1.2404

(B) Ομοιόμορφος διαμερισμός με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία .
Στα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία θα χρησιμοποιήσουμε την ακριβή λύση του ομογενούς προβλήματος (δηλ. $f(x, y, t) = 0$), που είναι για την πίεση

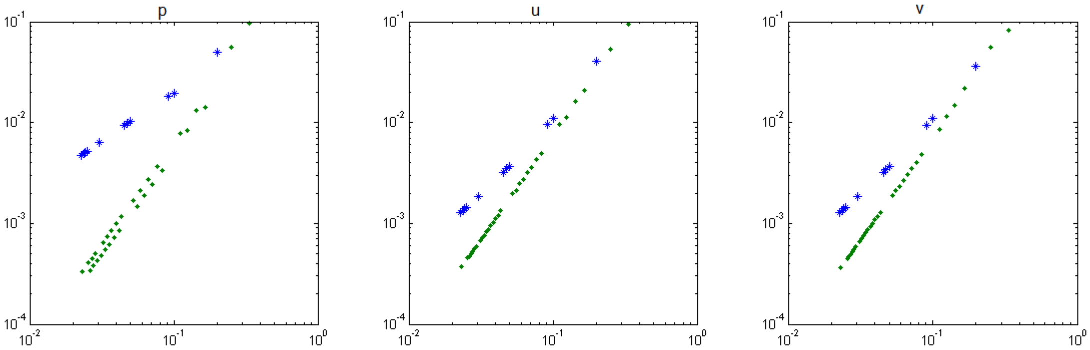
$$p(x, y, t) = \cos(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

και για τις συνιστώσες της ταχύτητας

$$u(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Κάνουμε το πείραμα με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία και πάλι η ίδια συμπεριφορά για τα σύνολα N_1 και N_2, η οποία φαίνεται στο σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης, σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (III) και $4 \leq N \leq 45$ τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία. Με μπλέ τα σφάλματα ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα αντίστοιχα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Αναλυτικά τα αποτελέσματα του πειράματος για το πρόβλημα με συνοριακές τιμές τύπου (III) χρησιμοποιώντας τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία βρίσκονται στους παρακάτω πίνακες.
Ο πίνακας με τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το σύνολο N_1:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$4.9307e-002$	$---$	$4.0157e-002$	$---$	$3.6472e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$1.9636e-002$	1.3283	$1.1090e-002$	1.8564	$1.0978e-002$	1.7322
12	$9.0909e-002$	$1.8217e-002$	0.7869	$9.6526e-003$	1.4566	$9.3018e-003$	1.7383
21	$5.0000e-002$	$1.0164e-002$	0.9760	$3.7096e-003$	1.5996	$3.6972e-003$	1.5433
22	$4.7619e-002$	$9.7413e-003$	0.8716	$3.4744e-003$	1.3426	$3.4422e-003$	1.4646
23	$4.5455e-002$	$9.2806e-003$	1.0414	$3.2300e-003$	1.5678	$3.2243e-003$	1.4059
34	$3.0303e-002$	$6.2914e-003$	0.9588	$1.8510e-003$	1.3732	$1.8446e-003$	1.3773
41	$2.5000e-002$	$5.2113e-003$	0.9791	$1.4368e-003$	1.3169	$1.4357e-003$	1.3028
42	$2.4390e-002$	$5.0923e-003$	0.9359	$1.3941e-003$	1.2192	$1.3913e-003$	1.2732
43	$2.3810e-002$	$4.9694e-003$	1.0134	$1.3498e-003$	1.3413	$1.3490e-003$	1.2801
45	$2.2727e-002$	$4.7489e-003$	0.9755	$1.2726e-003$	1.2667	$1.2719e-003$	1.2650

Ο αντίστοιχος πίνακας για το σύνολο N_2:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$9.6195e-002$	$---$	$9.4573e-002$	$---$	$8.1442e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$5.5885e-002$	1.8878	$5.2949e-002$	2.0163	$5.5949e-002$	1.3051
7	$1.6667e-001$	$1.4106e-002$	3.3954	$2.0782e-002$	2.3066	$2.2060e-002$	2.2954
8	$1.4286e-001$	$1.3251e-002$	0.4054	$1.6216e-002$	1.6093	$1.4978e-002$	2.5116
9	$1.2500e-001$	$8.3226e-003$	3.4832	$1.1187e-002$	2.7807	$1.1396e-002$	2.0465
10	$1.1111e-001$	$7.7805e-003$	0.5719	$9.6746e-003$	1.2328	$8.6436e-003$	2.3473
13	$8.3333e-002$	$3.3556e-003$	2.9233	$4.9061e-003$	2.3603	$4.8644e-003$	1.9983
14	$7.6923e-002$	$3.6782e-003$	-1.1466	$4.3226e-003$	1.5818	$4.0381e-003$	2.3257
15	$7.1429e-002$	$2.4281e-003$	5.6043	$3.5747e-003$	2.5635	$3.5203e-003$	1.8518
16	$6.6667e-002$	$2.7386e-003$	-1.7446	$3.2188e-003$	1.5204	$3.0209e-003$	2.2174
17	$6.2500e-002$	$1.8830e-003$	5.8038	$2.7227e-003$	2.5935	$2.6666e-003$	1.9330
18	$5.8824e-002$	$2.1314e-003$	-2.0432	$2.4799e-003$	1.5403	$2.3448e-003$	2.1214
19	$5.5556e-002$	$1.4778e-003$	6.4063	$2.1376e-003$	2.5986	$2.1108e-003$	1.8391
20	$5.2632e-002$	$1.7046e-003$	-2.6397	$1.9705e-003$	1.5056	$1.8761e-003$	2.1803
24	$4.3478e-002$	$1.1664e-003$	1.9858	$1.3296e-003$	2.0592	$1.2765e-003$	2.0156
25	$4.1667e-002$	$8.4557e-004$	7.5577	$1.1931e-003$	2.5455	$1.1748e-003$	1.9504
26	$4.0000e-002$	$9.8684e-004$	-3.7846	$1.1217e-003$	1.5126	$1.0804e-003$	2.0527
27	$3.8462e-002$	$7.2297e-004$	7.9330	$1.0136e-003$	2.5826	$1.0040e-003$	1.8690
28	$3.7037e-002$	$8.4684e-004$	-4.1903	$9.6015e-004$	1.4354	$9.2622e-004$	2.1369
29	$3.5714e-002$	$6.2291e-004$	8.4447	$8.7496e-004$	2.5548	$8.6336e-004$	1.9325
30	$3.4483e-002$	$7.3327e-004$	-4.6484	$8.3015e-004$	1.4984	$8.0426e-004$	2.0206
31	$3.3333e-002$	$5.4516e-004$	8.7440	$7.6056e-004$	2.5824	$7.5232e-004$	1.9694
32	$3.2258e-002$	$6.4219e-004$	-4.9956	$7.2568e-004$	1.4317	$7.0277e-004$	2.0778
33	$3.1250e-002$	$4.7887e-004$	9.2431	$6.6897e-004$	2.5629	$6.6039e-004$	1.9588
35	$2.9412e-002$	$4.2615e-004$	1.9239	$5.9088e-004$	2.0475	$5.8500e-004$	1.9996
36	$2.8571e-002$	$5.0372e-004$	-5.7689	$5.6746e-004$	1.3954	$5.5126e-004$	2.0490
37	$2.7778e-002$	$3.7959e-004$	10.0434	$5.2707e-004$	2.6212	$5.2189e-004$	1.9434
38	$2.7027e-002$	$4.5020e-004$	-6.2266	$5.0709e-004$	1.4101	$4.9444e-004$	1.9725
39	$2.6316e-002$	$3.4180e-004$	10.3293	$4.7209e-004$	2.6820	$4.6812e-004$	2.0511
40	$2.5641e-002$	$4.0522e-004$	-6.5523	$4.5617e-004$	1.3209	$4.4425e-004$	2.0149
44	$2.3256e-002$	$3.3346e-004$	1.9961	$3.7432e-004$	2.0253	$3.6579e-004$	1.9903

Για να δείξουμε ότι η τάξη σύγκλισης στο σύνολο N_2 είναι δύο θα χρησιμοποιήσουμε το υποσύνολο $N_3 \subset N_2$. Ο πίνακας με τα σφάλματα και τη τάξη σύγκλισης ως προς την L^2

νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το σύνολο N_3 είναι:

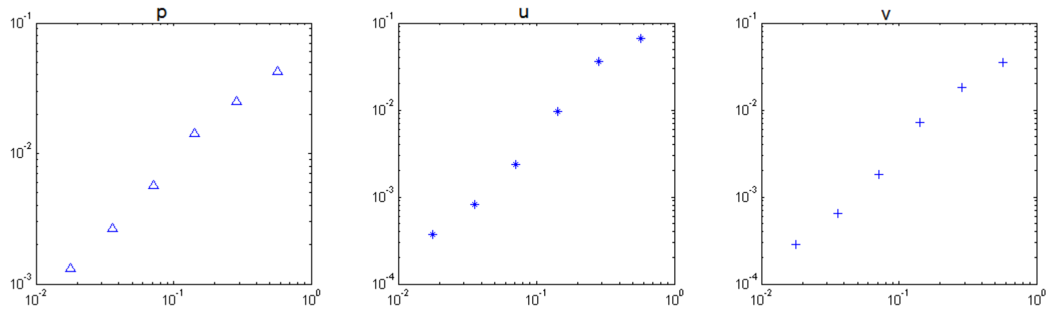
N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$9.6195e-002$	$---$	$9.4573e-002$	$---$	$8.1442e-002$	$---$
9	$1.2500e-001$	$8.3226e-003$	1.7728	$1.1187e-002$	1.0033	$1.1396e-002$	1.0033
15	$7.1429e-002$	$2.4281e-003$	1.5844	$3.5747e-003$	0.5336	$3.5203e-003$	0.5336
19	$5.5556e-002$	$1.4778e-003$	1.4798	$2.1376e-003$	0.6112	$2.1108e-003$	0.6112
25	$4.1667e-002$	$8.4557e-004$	1.3930	$1.1931e-003$	0.7149	$1.1748e-003$	0.7149
29	$3.5714e-002$	$6.2291e-004$	1.3813	$8.7496e-004$	0.7292	$8.6336e-004$	0.7292
33	$3.1250e-002$	$4.7887e-004$	1.3291	$6.6897e-004$	0.7871	$6.6039e-004$	0.7871
37	$2.7778e-002$	$3.7959e-004$	1.2659	$5.2707e-004$	0.8485	$5.2189e-004$	0.8485

(Γ) Μη-ομοιόμορφος διαμερισμός .

Το πείραμα του μη-ομοιόμορφου διαμερισμού θα μας δώσει και πάλι τάξη σύγκλισης δύο και για τις τρεις συναρτήσεις p, u και v. Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ακριβή λύση του μη-ομογενούς προβλήματος που ορίσαμε στο (Α).

Ακολουθεί ο πίνακας με τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ του μη-ομοιόμορφου διαμερισμού για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (III).

h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
$5.7143e-001$	$4.2629e-002$	$---$	$6.7183e-002$	$---$	$3.5170e-002$	$---$
$2.8571e-001$	$2.4943e-002$	0.7732	$3.6172e-002$	0.8932	$1.8021e-002$	0.9647
$1.4286e-001$	$1.4345e-002$	0.7981	$9.6826e-003$	1.9014	$7.1078e-003$	1.3422
$7.1429e-002$	$5.6536e-003$	1.3433	$2.3612e-003$	2.0359	$1.7940e-003$	1.9862
$3.5714e-002$	$2.6818e-003$	1.0760	$8.1839e-004$	1.5287	$6.4988e-004$	1.4650
$1.7857e-002$	$1.3110e-003$	1.0325	$3.6692e-004$	1.1573	$2.8081e-004$	1.2106



Σχήμα 3.13: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (III) με μή-ομοιόμορφο διαμερισμό.

(Δ) Συμπεράσματα ως προς τη τάξη σύγκλισης .
Στην περίπτωση του προβλήματος με συνοριακές τιμές τύπου (III), όπως άλλωστε και στα προηγούμενα προβλήματα, η τάξη σύγκλισης για τις συναρτήσεις p, u και v ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ πλησιάζει το 1.

3.2.4 Πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV)

Το τελευταίο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV).

Έστω λοιπόν το πρόβλημα (3.2) εφοδιασμένο με αρχικές/συνθήκες τύπου (IV)και έστω $\psi \in H_p^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in H_u^1(\Omega)$ και $\varphi_2 \in H_v^1(\Omega)$ όπου

$$H_p^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega) \ : \ p|_{\Gamma 1} = p|_{\Gamma 3} \text{ και } p|_{\Gamma 2} = p|_{\Gamma 4}\},$$

$$H_v^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ v|_{\Gamma 1} = v|_{\Gamma 3}\}$$

και

$$H_u^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ : \ u|_{\Gamma 2} = u|_{\Gamma 4}\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση της (3.2) με ψ, την δεύτερη με φ_1 και την τρίτη με φ_2, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} p_t\psi + u_x\psi + v_y\psi = f\psi \ , \ \ \forall \psi \in H_p^1(\Omega), \\ u_t\varphi_1 + p_x\varphi_1 = 0 \ , \ \ \forall \varphi_1 \in H_u^1(\Omega), \\ v_t\varphi_2 + p_y\varphi_2 = 0 \ , \ \ \forall \varphi_2 \in H_v^1(\Omega). \end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε στο Ω και έχουμε:

$$\begin{cases} (p_t,\psi)+(u_x,\psi)+(v_y,\psi)=(f,\psi)\ ,\ \ \forall\psi\in H^1_p(\Omega). \\ (u_t,\varphi_1)+(p_x,\varphi_1)=0\ ,\ \ \forall\varphi_1\in H^1_u(\Omega), \\ (v_t,\varphi_2)+(p_y,\varphi_2)=0\ ,\ \ \forall\varphi_2\in H^1_v(\Omega). \end{cases} \tag{3.26}$$

Έστω τώρα S_h^p,S_h^u και S_h^v υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης των $H^1_\pi(\Omega)$,$H^1_u(\Omega)$ και$H^1_v(\Omega)$ αντίστοιχα. Εάν τώρα $p_h\in S_h^p\ ,\ \ u_h\in S_h^u\ ,\ \ v_h\in S_h^v$ τότε το πρόβλημα (3.26) γράφεται:

$$\begin{cases} (p_{h,t},\psi)+(u_{h,x},\psi)+(v_{h,y},\psi)=(f,\psi)\ ,\ \ \forall\psi\in S_h^p, \\ (u_{h,t},\varphi_1)+(p_{h,x},\varphi_1)=0\ ,\ \ \forall\varphi_1\in S_h^u, \\ (v_{h,t},\varphi_2)+(p_{h,y},\varphi_2)=0\ ,\ \ \forall\varphi_2\in S_h^v. \end{cases} \tag{3.27}$$

Αφού όμως $p_h\in S_h^p\ ,\ \ u\in S_h^u\ ,\ \ v\in S_h^v$ τότε

$$p_h(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N_h}p_i(t)\psi_i(x,y),$$

όπου $N_h=\dim(S_h^p)$ και $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_h}$ μία βάση του S_h^p,

$$u_h(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\hat{N}_h}u_i(t)\varphi_{i,1}(x,y),$$

όπου $\hat{N}_h=\dim(S_h^u)$ και $\{\varphi_{i,1}\}_{i=1}^{\hat{N}_h}$ μία βάση του S_h^u,

$$v_h(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h}v_i(t)\varphi_{i,2}(x,y),$$

όπου $\hat{\hat{N}}_h=\dim(S_h^v)$ και $\{\varphi_{i,2}\}_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h}$ μία βάση του S_h^v. Αντικαθιστώντας στην (3.27) θα έχουμε:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{N_h}\dot{p}_i(t)\psi_i,\psi_j)+(\sum_{i=1}^{\hat{N}_h}u_i(t)\varphi_{x,i,1},\psi_j)+(\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h}v_i(t)\varphi_{y,i,2},\psi_j)=(f,\psi_j)\ ,\ \ 1\le j\le N_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{N}_h}\dot{u}_i(t)\varphi_{i,1},\varphi_{j,1})+(\sum_{i=1}^{N_h}p_i(t)\psi_{x,i},\varphi_{j,1})=0\ ,\ \ 1\le j\le\hat{N}_h, \\ (\sum_{i=1}^{\hat{\hat{N}}_h}\dot{v}_i(t)\varphi_{i,2},\varphi_{j,2})+(\sum_{i=1}^{N_h}p_i(t)\psi_{y,i},\varphi_{j,2})=0\ ,\ \ 1\le j\le\hat{\hat{N}}_h. \end{cases} \tag{3.28}$$

Ορίζουμε τους πίνακες μάζας:

- M_1 με στοιχεία $\left(M_1\right)_{ij} = (\psi_j, \psi_i), \;\; 1 \le i, j \le N_h$
- M_2 με στοιχεία $\left(M_2\right)_{ij} = (\varphi_{j,1}, \varphi_{i,1}), \;\; 1 \le i, j \le \hat{N}_h$
- M_3 με στοιχεία $\left(M_3\right)_{ij} = (\varphi_{j,2}, \varphi_{i,2}), \;\; 1 \le i, j \le \hat{\hat{N}}_h$

τους πίνακες 'ακαμψίας':

- $A_{1,x}$ με στοιχεία $\left(A_{1,x}\right)_{i,j} = (\varphi_{x,j,1}, \psi_i), \;\; 1 \le i \le N_h, \;\; 1 \le j \le \hat{N}_h$
- $A_{2,y}$ με στοιχεία $\left(A_{2,y}\right)_{i,j} = (\varphi_{y,j,2}, \psi_i), \;\; 1 \le i \le N_h, \;\; 1 \le j \le \hat{\hat{N}}_h$
- $A_{x,1}$ με στοιχεία $\left(A_{x,1}\right)_{i,j} = (\psi_{x,j}, \varphi_{i,1}), \;\; 1 \le j \le N_h, \;\; 1 \le i \le \hat{N}_h$
- $A_{y,2}$ με στοιχεία $\left(A_{y,2}\right)_{i,j} = (\psi_{y,j}, \varphi_{i,2}), \;\; 1 \le j \le N_h, \;\; 1 \le i \le \hat{\hat{N}}_h$

και το διάνυσμα $\vec{f}$ με στοιχεία $f_i = (f, \psi_i)$ $1 \le i \le N_h$, οπότε τελικά το σύστημα (3.28) γράφεται στην μορφή:

$$\underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{\hat{N}}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{\hat{N}}_h \end{array} & \begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & M_3 \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_h \\ \dot{u}_h \\ \dot{v}_h \end{pmatrix}}_{x_t(t)} = - \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N_h & \hat{N}_h & \hat{\hat{N}}_h \end{array} \\ \begin{array}{c} N_h \\ \hat{N}_h \\ \hat{\hat{N}}_h \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A_{x,1} & A_{y,2} \\ A_{1,x} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ A_{2,y} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \end{array}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} p_h \\ u_h \\ v_h \end{pmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Επομένως έχουμε πλέον να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} Ax_t(t) = Bx(t) + F(t), \\ \quad x(0) = x^0, \;\; \text{δεδομένο.} \end{cases} \tag{3.29}$$

Και αυτό το πρόβλημα (3.29), θα το λύσουμε με τη μέθοδο Shu-Osher.

3.2.4.1 Πειράματα για την τάξη σύγκλισης

Για ακριβή λύση του προβλήματος με συνοριακές τιμές τύπου (IV) παίρνουμε:
Για την πίεση:

$$p(x, y, t) = \cos(\sqrt{8}\pi t) \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

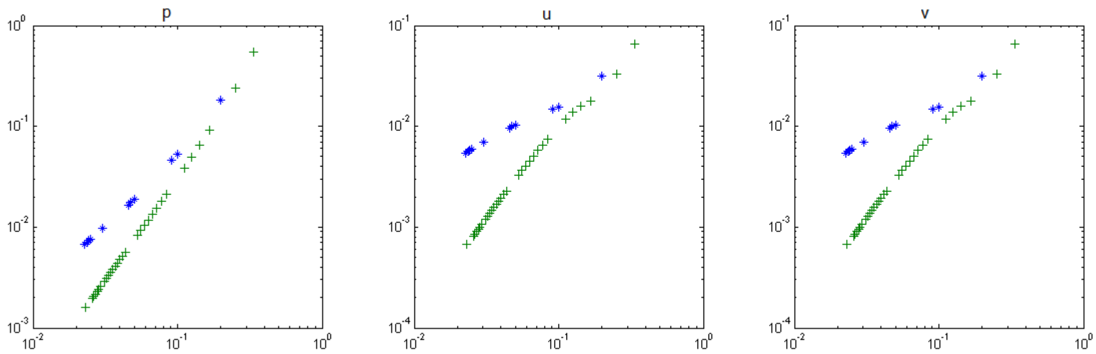
και για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u(x, y, t) = \frac{\sqrt{8}}{4} \sin(\sqrt{8}\pi t) \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{\sqrt{8}}{4} \sin(\sqrt{8}\pi t) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

δηλαδή με $f(x, y, t) = 0$. Τα πειράματα θα γίνουν με χρονικό βήμα που ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{\Delta t}{h} = 0.1$

(A) Ομοιόμορφος διαμερισμός με διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία .
Στο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV) θα παρατηρήσουμε το φαινόμενο της διαφορετικής τάξης σύγκλισης για τα σύνολα N_1 και N_2 αν και η συμπεριφορά ως προς τα σφάλματα αλλάζει ελάχιστα σε σχέση με τα προηγούμενα προβλήματα.



Σχήμα 3.14: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV) και $4 \leq N \leq 45$ για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Με μπλέ τα σφάλματα απο το σύνολο N_1 και με πράσινο τα σφάλματα απο το σύνολο N_2

Ο παρακάτω πίνακας αφορά την τάξη σύγκλισης και τα σφάλματα ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ για το σύνολο N_1 :

N	h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
6	$2.0000e-001$	$1.8197e-001$	$---$	$3.1309e-002$	$---$	$3.1309e-002$	$---$
11	$1.0000e-001$	$5.3253e-002$	1.7728	$1.5619e-002$	1.0033	$1.5619e-002$	1.0033
12	$9.0909e-002$	$4.5789e-002$	1.5844	$1.4844e-002$	0.5336	$1.4844e-002$	0.5336
21	$5.0000e-002$	$1.8904e-002$	1.4798	$1.0301e-002$	0.6112	$1.0301e-002$	0.6112
22	$4.7619e-002$	$1.7661e-002$	1.3930	$9.9475e-003$	0.7149	$9.9475e-003$	0.7149
23	$4.5455e-002$	$1.6562e-002$	1.3813	$9.6157e-003$	0.7292	$9.6157e-003$	0.7292
34	$3.0303e-002$	$9.6622e-003$	1.3291	$6.9883e-003$	0.7871	$6.9883e-003$	0.7871
41	$2.5000e-002$	$7.5738e-003$	1.2659	$5.9359e-003$	0.8485	$5.9359e-003$	0.8485
42	$2.4390e-002$	$7.3445e-003$	1.2451	$5.8103e-003$	0.8660	$5.8103e-003$	0.8660
43	$2.3810e-002$	$7.1282e-003$	1.2406	$5.6898e-003$	0.8696	$5.6898e-003$	0.8696
45	$2.2727e-002$	$6.7304e-003$	1.2342	$5.4630e-003$	0.8746	$5.4630e-003$	0.8746

Για το σύνολο N_2 ο πίνακας για τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2

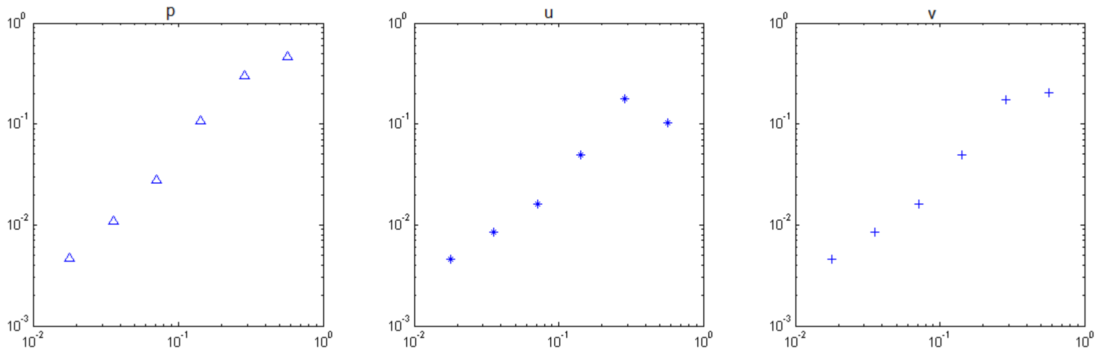
νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ είναι:

N	h	$\|p-p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v-v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
4	$3.3333e-001$	$5.4331e-001$	$---$	$6.6228e-002$	$---$	$6.6228e-002$	$---$
5	$2.5000e-001$	$2.3808e-001$	2.8680	$3.2655e-002$	2.4579	$3.2655e-002$	2.4579
7	$1.6667e-001$	$9.0699e-002$	2.3801	$1.7884e-002$	1.4850	$1.7884e-002$	1.4850
8	$1.4286e-001$	$6.4949e-002$	2.1664	$1.5907e-002$	0.7600	$1.5907e-002$	0.7600
9	$1.2500e-001$	$4.8929e-002$	2.1211	$1.3754e-002$	1.0891	$1.3754e-002$	1.0891
10	$1.1111e-001$	$3.8235e-002$	2.0939	$1.1775e-002$	1.3185	$1.1775e-002$	1.3185
13	$8.3333e-002$	$2.1113e-002$	2.0643	$7.5088e-003$	1.5640	$7.5088e-003$	1.5640
14	$7.6923e-002$	$1.7925e-002$	2.0450	$6.5458e-003$	1.7147	$6.5458e-003$	1.7147
15	$7.1429e-002$	$1.5411e-002$	2.0390	$5.7459e-003$	1.7587	$5.7459e-003$	1.7587
16	$6.6667e-002$	$1.3393e-002$	2.0341	$5.0773e-003$	1.7932	$5.0773e-003$	1.7932
17	$6.2500e-002$	$1.1748e-002$	2.0301	$4.5144e-003$	1.8207	$4.5144e-003$	1.8207
18	$5.8824e-002$	$1.0390e-002$	2.0268	$4.0372e-003$	1.8430	$4.0372e-003$	1.8430
19	$5.5556e-002$	$9.2550e-003$	2.0240	$3.6297e-003$	1.8613	$3.6297e-003$	1.8613
20	$5.2632e-002$	$8.2967e-003$	2.0217	$3.2795e-003$	1.8766	$3.2795e-003$	1.8766
24	$4.3478e-002$	$5.6431e-003$	2.0173	$2.2794e-003$	1.9039	$2.2794e-003$	1.9039
25	$4.1667e-002$	$5.1796e-003$	2.0139	$2.1001e-003$	1.9251	$2.1001e-003$	1.9251
26	$4.0000e-002$	$4.7710e-003$	2.0128	$1.9409e-003$	1.9313	$1.9409e-003$	1.9313
27	$3.8462e-002$	$4.4090e-003$	2.0119	$1.7989e-003$	1.9367	$1.7989e-003$	1.9367
28	$3.7037e-002$	$4.0867e-003$	2.0111	$1.6718e-003$	1.9416	$1.6718e-003$	1.9416
29	$3.5714e-002$	$3.7986e-003$	2.0104	$1.5576e-003$	1.9459	$1.5576e-003$	1.9459
30	$3.4483e-002$	$3.5399e-003$	2.0097	$1.4546e-003$	1.9497	$1.4546e-003$	1.9497
31	$3.3333e-002$	$3.3069e-003$	2.0091	$1.3614e-003$	1.9532	$1.3614e-003$	1.9532
32	$3.2258e-002$	$3.0961e-003$	2.0086	$1.2768e-003$	1.9563	$1.2768e-003$	1.9563
33	$3.1250e-002$	$2.9049e-003$	2.0081	$1.1998e-003$	1.9591	$1.1998e-003$	1.9591
35	$2.9412e-002$	$2.5720e-003$	2.0074	$1.0652e-003$	1.9628	$1.0652e-003$	1.9628
36	$2.8571e-002$	$2.4267e-003$	2.0068	$1.0062e-003$	1.9661	$1.0062e-003$	1.9661
37	$2.7778e-002$	$2.2933e-003$	2.0065	$9.5195e-004$	1.9680	$9.5195e-004$	1.9680
38	$2.7027e-002$	$2.1706e-003$	2.0062	$9.0194e-004$	1.9698	$9.0194e-004$	1.9698
39	$2.6316e-002$	$2.0576e-003$	2.0059	$8.5575e-004$	1.9714	$8.5575e-004$	1.9714
40	$2.5641e-002$	$1.9531e-003$	2.0056	$8.1300e-004$	1.9729	$8.1300e-004$	1.9729
44	$2.3256e-002$	$1.6059e-003$	2.0050	$6.7034e-004$	1.9761	$6.7034e-004$	1.9761

(Β) Μη-ομοιόμορφος διαμερισμός .

Και στο πρόβλημα με συνοριακές τιμές τύπου (IV) παρατηρούμε το φαινόμενο της υπερσύγκλισης στο σύνολο N_2. Και πάλι η τάξη σύγκλισης για την συναρτήσεις p, u και v θα προκύψει χρησιμοποιώντας μη-ομοιόμορφους διαμερισμούς.
Ακολουθεί ο πίνακας με τα σφάλματα και την τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ του μη-ομοιόμορφου διαμερισμού για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV).

h	$\|p - p_h\|_{L^2}$	$r(p)$	$\|u - u_h\|_{L^2}$	$r(u)$	$\|v - v_h\|_{L^2}$	$r(v)$
$5.7143e-001$	$4.6339e-001$	$---$	$1.0322e-001$	$---$	$2.0530e-001$	$---$
$2.8571e-001$	$3.0430e-001$	0.6067	$1.7772e-001$	-0.7838	$1.7554e-001$	0.2259
$1.4286e-001$	$1.0688e-001$	1.5095	$4.9107e-002$	1.8556	$4.9107e-002$	1.8378
$7.1429e-002$	$2.7755e-002$	1.9452	$1.6268e-002$	1.5939	$1.6268e-002$	1.5939
$3.5714e-002$	$1.0893e-002$	1.3493	$8.5726e-003$	0.9242	$8.5726e-003$	0.9242
$1.7857e-002$	$4.7208e-003$	1.2063	$4.5414e-003$	0.9166	$4.5414e-003$	0.9166



Σχήμα 3.15: Διάγραμματα τάξης σύγκλισης για διγραμμικά πεπερασμένα στοιχεία σε λογαριθμική κλίμακα για το πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV) με μή-ομοιόμορφο διαμερισμό.

(Γ) Συμπεράσματα ως προς τη τάξη σύγκλισης .

Στο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου (IV), αν και παρατηρήσαμε διαφορά στην συμπεριφορά της τάξης σύγκλισης για τις συναρτήσεις p, u και v, εμφανίζεται και πάλι το φαινόμενο της διαφορετικής τάξης σύγκλισης στα σύνολα N_1 και N_2. Η τάξη σύγκλισης ως προς την L^2 νόρμα την χρονική στιγμή $T = 1$ με την χρήση μη-ομοιόμορφων διαμερισμών προκύπτει και σε αυτό το πρόβλημα φαίνεται να πλησιάζει το ένα και για τις τρεις συναρτήσεις που μελετήσαμε.

Βιβλιογραφία

[Δ] Βασίλειος Α. Δουγαλής, *Σημειώσεις σεμιναρίου 'Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις'*, Αθήνα, Ακ. Έτος 2011-2012

[B] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer 2010.

[C] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[D] T. Dupont, SIAM *Journal on Numerical Analysis*, Volume 10, Issue 5, pp. 890-899, 1973.

[D1] V.A. Dougalis and S.M. Serbin, *Comp. and Maths. with Appls.*, Volume 7, pp. 261-279, 1981.

[G] M.S. Gockenbach *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM 2006.

[SO] C.W. Shu and S.Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes*, J. Comp. Phys., 77(1988), pp. 4339-471.

[Th] S. Larsson and V. Thomee, *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Göteborg, Springer 2009