



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Μαθηματικών

Π.Μ.Σ. 'Εφαρμοσμένα Μαθηματικά'

Διπλωματική Εργασία

Μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις
με διασπορά

Δανάη Καλότυχου

Αθήνα 2016

Δανάη Καλότυχου
Μαθηματικός
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
danae.math@gmail.com

Επιβλέπων

Καθηγητής Ιωάννης Στρατής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Πανεπιστημιούπολη Ζωγράφου, 15784, Αθήνα
istratis@math.uoa.gr

Μέλη Επιτροπής

Καθηγητής Δημήτριος Φραντζεσκάκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Πανεπιστημιούπολη Ζωγράφου, 15784, Αθήνα
dfrantz@phys.uoa.gr

Καθηγητής Νικόλαος Καραχάλιος
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Καρλόβασι, 83200, Σάμος
karan@aegean.gr

Στον παππού μου,
Σπύρο Φακιολά

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ κατ' αρχήν τον καθηγητή μου Ιωάννη Στρατή για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την ευκαιρία που μου έδωσε να εργαστώ μαζί του. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της επιτροπής, καθηγητές Δημήτριο Φραντζεσκάκη και Νικόλαο Καραχάλιο για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις χρήσιμες διορθώσεις τους.

Εν συνεχεία, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους καθηγητές μου Χριστόδουλο Αθανασιάδη και Ευαγγελία Κόττα-Αθανασιάδου για την υποστήριξη και την ενθάρρυνση καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, σημαντική υπήρξε η συμβολή των καθηγητών μου Μιχαήλ Μαλιάκα, Τηλέμαχου Χατζηαφράτη, Νικολάου Παπαναστασίου.

Περιεχόμενα

1 Προαπαιτούμενα	5
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 Απόκλιση-Στροβιλισμός-Τελεστής Laplace	5
1.3 Ο μετασχηματισμός Fourier	7
1.4 Ο μετασχηματισμός Laplace	8
1.5 Ασυμπτωτική Ανάλυση	10
1.6 Η Εξίσωση Bessel και η σύνδεσή της με τις αρμονικές ταλαντώσεις	11
1.7 Η Εξίσωση Boltzmann	13
1.8 Μια μορφή της Κυματικής Εξίσωσης	13
2 Κυματικές εξισώσεις νερών	17
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Η συμβολή της εξίσωσης Euler στις κυματικές εξισώσεις	18
2.3 Αδιάστατες εξισώσεις	23
3 Θεωρία ρηχών νερών	25
3.1 Εισαγωγή	25
3.2 Μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών	26
3.2.1 Περιορισμένες μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις	28
3.3 Γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών	29
3.4 Αναγωγή στη μονοδιάστατη εξίσωση	32
3.5 Η εξίσωση Korteweg de Vries (KdV)	36
3.6 Η διαστατική εξίσωση KdV	39
3.7 Η επίδραση της επιφανειακής τάσης	40
3.8 Η εξίσωση Benney-Luke (BL)	41
3.9 Εξισώσεις Kadomtsev-Petviashvili (KP)	46
3.9.1 Γραμμική εξίσωση KP	46
3.9.2 Μη γραμμική εξίσωση KP	47
3.10 KdV και σχετικά μοντέλα	48
4 Σολιτόνια	51
4.1 Εισαγωγή	51

4.2	Σολιτονιακές λύσεις της KdV	53
4.2.1	Για την αδιάστατη μορφή της KdV	53
4.2.1.1	Μέσω της Explicit μεθόδου	53
4.2.1.2	Μέσω του μετασχηματισμού Bäcklund	55
4.2.1.3	Μέσω της tanh μεθόδου	57
4.2.2	Για τη διαστατική μορφή της KdV	59
4.3	Αλληλεπιδράσεις μη γραμμικών, ρηχών κυματικών σολιτονίων ωκεανού σε επίπεδες παραλίες	60
4.3.1	Σολιτονιακή λύση για την KPI	63
4.3.2	Σολιτονιακές λύσεις για την KPII και αλληλεπιδράσεις	64
5	Εφαρμογές της θεωρίας ρηχών νερών	69
5.1	Εισαγωγή	69
5.2	Ενίσχυση των κυμάτων σε παραλία με ήπια κλίση	69
5.3	Η θεωρία των ρηχών νερών μέσω της εξίσωσης Bessel	72
5.4	Τσουνάμις	74
5.5	Ο Νόμος του Green	74
6	Η εξίσωση Nonlinear Schrödinger (NLS) και σχετικά μοντέλα	77
6.1	Εισαγωγή	77
6.2	Η NLS εξίσωση στα ρηχά νερά	77
6.2.1	Μέσω της Klein-Gordon (KG)	77
6.2.2	Μέσω της KdV	81
6.2.3	Μέσω ενός ansatz από την KdV	84
6.3	Μοντέλα για το γραμμικό πρόβλημα της NLS	86
7	Θεωρία βαθέων υδάτων	89
7.1	Εισαγωγή	89
7.2	Μετατόπισης συχνότητας	89
7.3	Εξαγωγή της εξίσωσης NLS	95
7.4	Ιδιότητες της εξίσωσης NLS	98
7.5	Πολυδιάστατα κύματα νερού	103
7.6	Ειδικές λύσεις για τις εξισώσεις Davey-Stewartson (DS)	104
7.7	Lump λύση για μικρή επιφανειακή τάση	105
8	Ακραία φαινόμενα της θάλασσας	107
8.1	Εισαγωγή	107
8.2	Ξαφνικό Κύμα (RW)	107
8.3	Σούπερ Ξαφνικό Κύμα (SRW)	112

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία, η οποία εκπονήθηκε στο πλαίσιο ολοκλήρωσης των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, έχει ως κύριο αντικείμενο τη μελέτη κυματικών εξισώσεων νερών και τη συσχέτισή τους με ακραία φαινόμενα της θάλασσας, όπως τα τσουνάμια, τα ξαφνικά κύματα και τα σούπερ ξαφνικά κύματα.

Αναφέρουμε αρχικά τις θεμελιώδεις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και πίεσης, καθώς και την εξίσωση Euler, ώστε να εισαχθούμε στις γραμμικές κυματικές εξισώσεις.

Ύστερα, εστιάζουμε στη θεωρία των ρηχών νερών. Εδώ συζητάμε για μεμονωμένα κύματα που ονομάζονται σολιτόνια. Ο ναυπηγός J. S. Russell, με πειράματα διαπίστωσε, μεταξύ άλλων, ότι η ταχύτητα του κύματος εξαρτάται από το ύψος του και έτσι κατέληξε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να υπάρχει μια μη γραμμική επίδραση. Οι J. Boussinesq, D. Korteweg και G. de Vries παρήγαγαν προσεγγιστικές μη γραμμικές εξισώσεις για κύματα ρηχών νερών και επίσης, μεμονωμένες αλλά και περιοδικές λύσεις μη γραμμικών κυμάτων για αυτές τις εξισώσεις. Βρήκαν ακόμα ότι η ταχύτητα των κυμάτων είναι ανάλογη του πλάτους, δηλαδή μεγαλύτερα κύματα κινούνται ταχύτερα. Οι Kadomtsev και Petviashvili συμπεριέλαβαν στις εξισώσεις τους ασθενή εγκάρσια μεταβολή και έτσι συνδέθηκε και η διασπορά. Η αντιστρόφως ανάλογη σχέση της αύξησης του πλάτους των ρηχών γραμμικών κυμάτων νερών που προσεγγίζουν μια παραλία και η ήπια κλίση της δίνεται από την εξίσωση Bessel και ποσοτικοποιείται από το νόμο του Green.

Στη συνέχεια, θα συζητήσουμε την παραγωγή της εξίσωσης Nonlinear Schrödinger (NLS) στη θεωρία ρηχών και βαθέων υδάτων καθώς και η σχέση της με τα σολιτόνια. Θα αναφερθούμε, επιπροσθέτως, σε πολυδιάστατα κύματα νερού και στις εξισώσεις που προκύπτουν χωρίς, αλλά και υπό την επίδραση της επιφανειακής τάσης.

Η δακτυλογράφηση της εργασίας υλοποιήθηκε σε περιβάλλον \LaTeX , ενώ τα γραφήματα έχουν γίνει στο MATLAB. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν επαναληπτικές διαδικασίες αλγορίθμων, όπως η μέθοδος Explicit και τεχνικές κατασκευής προσεγγιστικών λύσεων, όπως η multiple-scale και ο μετασχηματισμός Bäcklund.

Abstract

This thesis, which was produced as part of completion of my graduate studies in the Department of Mathematics of the National and Kapodistrian University of Athens, has as main object to study water wave equations and their connection with extreme phenomena of the sea, such as tsunamis, rogue waves and super rogue waves. Initially, we mention the fundamental equations of continuity, momentum and pressure, and also the framework of Euler equation in order to introduce the linear wave equations.

Afterwards, we focus on the theory of shallow water. Here we discuss solitary waves, called solitons. Naval architect J. S. Russell, through experiments found, inter alia, that the wave speed depends on the height and thus concluded that there must be a nonlinear effect. J. Boussinesq, D. Korteweg and G. de Vries produced approximate nonlinear equations for shallow water waves and also individual and periodic solutions of nonlinear wave equations for them mentioned above. They also found that the wave speed is proportional to amplitude, i.e. longer waves travel faster. Kadomtsev and Petviashvili included in their equations weak transverse variation and so dispersion was connected. The inverse rate of the increase of the amplitude of the linear shallow water wave approaching a shore and gentle slope is given by the Bessel equation and quantified by Green's law.

Then we will discuss the production of Nonlinear Schrödinger (NLS) equation in the theory of shallow and deep waters and the relationship with solitons, as well. In addition, we will refer to multidimensional water waves and the equations generated not only without the influence of surface tension but also under it.

Thesis typing implemented in \LaTeX environment, while the graphics are done in MATLAB. Also iterative algorithms procedures were used, such as Explicit method and manufacturing techniques approximate solutions such as multiple-scale and the transformation Bäcklund.

Πρόλογος

Η Μηχανική των Ρευστών αποτελεί ιδιαίτερο κλάδο της Κλασικής Μηχανικής με κύριο αντικείμενο έρευνας και μελέτης τη συμπεριφορά των ρευστών επί ασκουμένων δυνάμεων ή με την προσφορά ενέργειας σε αυτά. Τα ρευστά διακρίνονται σε υγρά και αέρια. Τα υγρά παρουσιάζουν σημαντική δυσκολία στη μεταβολή του όγκου τους, δηλαδή είναι σχεδόν ασυμπίεστα. Τα αέρια παρόλο που είναι κατ' εξοχήν ασυμπίεστα, όταν κινούνται με μικρές ταχύτητες ή υφίστανται μικρές μεταβολές πιέσεων, η συμπεριφορά τους προσομοιάζει με αυτή των ασυμπίεστων ρευστών. Η ρευστοδυναμική σχετίζεται με τη συμπεριφορά των μορίων των ρευστών, τα οποία μόρια βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους.

Φυσικές ποσότητες όπως μάζα, ταχύτητα, ενέργεια, κλπ που συχνά θεωρούνται ότι διαχέονται συνεχώς στην περιοχή της μελέτης μας, ονομάζονται συνεχείς υποθέσεις και συνεχείς παράγωγοι που βασίζονται σε αρχές διατήρησης. Πιο αναλυτικά, σε κάθε σημείο του χώρου και σε κάθε χρονική στιγμή βρίσκεται ένα ρευστό σωματίδιο και οι ιδιότητες του σωματιδίου θεωρούνται και ως ιδιότητες του ρευστού στο αντίστοιχο σημείο (x, y, z, t) . Προκύπτει έτσι η έννοια του ρευστού ως συνεχούς μέσου, του οποίου οι ιδιότητες είναι συνεχείς συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου και οι μεταβολές τους εξαρτώνται από την κίνηση και τα χαρακτηριστικά των επιμέρους ρευστών σωματιδίων.

Τα μόρια των ρευστών βρίσκονται σε συνεχή κίνηση και δεδομένου ότι οι χαρακτηριστικές διαστάσεις που ενδιαφέρουν είναι πολύ μεγαλύτερες από τις μοριακές, η μελέτη του ρευστού βασίζεται στις στατιστικές ιδιότητες ενός μεγάλου αριθμού μορίων και στις μεταβολές αυτών στο χώρο και το χρόνο. Αυτή η μικροσκοπική περιγραφή των ρευστών δίνεται από την εξίσωση Boltzmann. Όταν η μέση απόσταση μεταξύ των συγκρούσεων των μορίων των ρευστών γίνεται μικρή σε σχέση με τις μακροσκοπικές διαστάσεις των ρευστών, η εξίσωση Boltzmann μπορεί να απλοποιηθεί και να γίνει η εξίσωση των ρευστών.

Στόχος μας είναι να εστιάσουμε στα πιο σημαντικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τους νόμους διατήρησης και ειδικότερα στο πώς αυτοί σχετίζονται με τα κύματα.

1 Προαπαιτούμενα

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες θα χρειαστούν στην παρακάτω μελέτη και ανάλυση.

Ξεκινώντας με την υπόθεση ότι ένα διανυσματικό πεδίο $F = \langle P, Q \rangle$ είναι συντηρητικό, τότε $P_y = Q_x$, όπου τα P και Q είναι χώροι στους οποίους ορίζονται βαθμωτές συναρτήσεις¹. Το αντίστροφο ισχύει αν το διανυσματικό πεδίο ορίζεται σε ένα απλά συνεκτικό σύνολο. Ωστόσο, δεν υπάρχει καμία προφανής γενίκευση αυτής της κατάστασης σε ένα διανυσματικό πεδίο $F = \langle P, Q, R \rangle$ στον \mathbb{R}^3 . Γι' αυτό το λόγο μελετάμε δύο τελεστές, που ορίζονται στο διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R}^3 , οι οποίοι ονομάζονται απόκλιση και στροβιλισμός. Ωστόσο, αποδεικνύονται τόσο σημαντικοί για την επιστήμη και τα μαθηματικά, επειδή εμφανίζονται σε μαθηματικές περιγραφές φυσικών φαινομένων.

Παρατίθενται συνοπτικά, επίσης, οι βασικότερες ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier και Laplace. Οι συγκεκριμένοι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων κατάλληλης μορφής, μετασχηματίζοντάς τις σε απλούστερες.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις τάξεις μεγέθους \mathcal{O} και o που θα μας χρειαστούν από την ασυμπτωτική ανάλυση και φυσικά αναφερόμαστε σε έναν πολύ σημαντικό ορισμό, αυτόν του καλώς τοποθετημένου προβλήματος.

Έπειτα, κάνουμε μια αναφορά στους ελεύθερους αρμονικούς ταλαντωτές με ή χωρίς απόσβεση (τριβή) μέσω της εξίσωσης Bessel, η οποία θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε την επίδραση της ήπιας κλίσης μιας παραλίας σε μικρού πλάτους κυμάτα, όπως αυτά πλησιάζουν από τον ωκεανό, καθώς η εξίσωση του πλάτους αυτών των κυμάτων ικανοποιεί μια εξίσωση Bessel.

Ύστερα, κάνουμε μια σύντομη περιγραφή της εξίσωσης Boltzmann, η οποία αφορά την κίνηση των μορίων των ρευστών.

Τέλος, υπενθυμίζουμε την εξίσωση κύματος και βασικά της χαρακτηριστικά. Η συγκεκριμένη εξίσωση θα αποτελέσει το σημαντικότερο εργαλείο για τη μελέτη των κυματικών φαινομένων που θα ακολουθήσει.

1.2 Απόκλιση-Στροβιλισμός-Τελεστής Laplace

Το ανάδελτα ή gradient μιας βαθμωτής συνάρτησης είναι

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

¹Με τον όρο βαθμωτή συνάρτηση ορίζεται μία συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Απόκλιση

Έστω $F = \langle P, Q, R \rangle$ να είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον \mathbb{R}^3 . Τότε η απόκλιση του F που συμβολίζεται με $\operatorname{div} F$ ή $\nabla \cdot F$ ορίζεται να είναι η εξής βαθμωτή συνάρτηση στον \mathbb{R}^3

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Γενικεύοντας, για ένα διανυσματικό πεδίο $F = \langle F_1, \dots, F_n \rangle$ στον \mathbb{R}^n , για κάθε n , η απόκλισή του θα είναι

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Στροβιλισμός

Έστω $F = \langle P, Q, R \rangle$ να είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον \mathbb{R}^3 . Τότε ο στροβιλισμός του F που συμβολίζεται με $\operatorname{curl} F$ ή $\nabla \times F$ ορίζεται να είναι το εξής βαθμωτό πεδίο στον \mathbb{R}^3

$$\nabla \times F = \left\langle \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right\rangle$$

ή αλλιώς

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες της απόκλισης και του στροβιλισμού-Ταυτότητες της Διανυσματικής Ανάλυσης

- $\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla (cf) = c\nabla f$ για κάθε σταθερά c
- $\nabla (fg) = fg + g\nabla f$
- $\nabla (f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$ για $g(x) \neq 0$
- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$
- $\nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \nabla f = 0$
- $\operatorname{div} (\nabla f \times \nabla g) = 0$
- $\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla) F = \Delta F$

Ο τελεστής Laplace

Έστω U ανοιχτό και μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και

$$H = L^2(U) = \left\{ f : U \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx < +\infty \right\}$$

Το πεδίο ορισμού $D(\Delta) = C_c^\infty(U)$ είναι ο χώρος των απειρίοριστα παραγωγίσιμων και με συμπαγή φορέα συναρτήσεων στο U . Επίσης, $D(\Delta)$ πυκνό στο H .

Για $\varphi \in D(\Delta)$, θέτουμε $\Delta\varphi = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$ που είναι εξίσου λεία, με συμπαγή φορέα και τελικά ανήκει στον $L^2(U)$.

Ορισμός. Ο τελεστής Laplace Δ , ο οποίος δρα πάνω σε συναρτήσεις f , ορίζεται ως εξής

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Αν $F = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ είναι ένα C^2 διανυσματικό πεδίο, μπορούμε να ορίσουμε το $\nabla^2 F$ με βάση τις συνιστώσεις του

$$\nabla^2 F = \nabla^2 F_1 i + \nabla^2 F_2 j + \nabla^2 F_3 k$$

Πρόταση

Έστω U ανοιχτό και μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $(D(\Delta), \Delta)$ ο τελεστής Laplace όπως ορίστηκε παραπάνω, τότε

1. Ο τελεστής Laplace είναι συμμετρικός στο $D(\Delta)$: $\langle \Delta\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \Delta\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in C_c^\infty(U)$
2. Ο τελεστής Laplace είναι θετικά ημιορισμένος: $\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U)$

1.3 Ο μετασχηματισμός Fourier

Έστω L^1 το σύνολο των συναρτήσεων h για τις οποίες ισχύει $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\int |h| < +\infty$. Υποθέτουμε ότι $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue συγκλίνει $\forall \xi$ και έτσι ορίζεται η συνάρτηση \hat{f} η οποία ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της f .

Συμβολισμός: $\mathcal{F}f = \hat{f}$

Ιδιότητες

- Ο τελεστής \mathcal{F} είναι γραμμικός, δηλαδή η απεικόνιση \mathcal{F} με την ιδιότητα $\mathcal{F}(af + \beta g) = a\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$ έτσι ώστε $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$, όπου \mathcal{H}, \mathcal{F} χώροι Hilbert, είναι γραμμική.

- $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|f\|_1$
- Η \hat{f} είναι συνεχής στον \mathbb{R}^n
- Για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ το ολοκλήρωμα

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

ορίζεται για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Η οριζόμενη συνάρτηση $f \star g$ είναι στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^n)$ και ονομάζεται συνέλιξη των f, g . Ισχύει ότι

$$\widehat{(f \star g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n$$

- Τύπος της αντιστροφής

Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ισχύει

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

- Ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 τελεστής. Δηλαδή, αν $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\hat{f} = 0$ τότε $f = 0$.

1.4 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο γενικευμένος ολοκληρωτικός μετασχηματισμός $F(s)$ μιας συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται ως εξής

$$F(s) = \int_a^b f(t) k(s, t) dt \quad (1.1)$$

όπου η συνάρτηση $k(s, t)$ εξαρτάται και από μια πρόσθετη παράμετρο s , ονομάζεται πυρήνας του μετασχηματισμού.

Ορισμός. Ο μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ μιας συνάρτησης $f(t)$, $t \geq 0$ ορίζεται μέσω της (1.1) θέτοντας $k(s, t) = \exp(-st)$, $a = 0$ και $b = +\infty$, δηλαδή

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

για όλα τα s για τα οποία το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Πρόταση. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής κατά τμήματα. Αν ο μετασχηματισμός Laplace της f υπάρχει για κάποιο $s_0 \in \mathbb{C}$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f υπάρχει για κάθε s με $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$.

Ιδιότητες

- Γραμμικότητα. Αν a, b και c σταθερές, τότε για όλα τα s για τα οποία υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$, ισχύει

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

και

$$\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Γραμμικός τελεστής επίσης είναι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, συνεπώς

$$\mathcal{L}^{-1}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\}$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$$

- Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, T]$ και η $f'(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[0, T]$, για όλα τα $T > 0$ και επίσης η f είναι εκθετικής τάξης, δηλαδή $|f(t)| \leq M \exp ct$, για $t \geq T$, καθώς το $t \rightarrow +\infty$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f'(t)$ και δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

- Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης, τότε

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{για } s > c$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ισχύει ισοδύναμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

- Αν για μια συνάρτηση $f(t)$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad \text{για } s > c$$

τότε ο $\mathcal{L}\{\exp(at)f(t)\}$ υπάρχει για $s > a + c$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{\exp(at)f(t)\} = F(s - a)$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ισχύει ισοδύναμα

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = \exp(at)f(t)$$

- Συνέλιξη. Για κάθε $f, g \in L^2([0, +\infty); \mathbb{R})$ ισχύει

$$\mathcal{L}f \star g = (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g)$$

1.5 Ασυμπτωτική Ανάλυση

Θα ορίσουμε κάποιες έννοιες που αφορούν τη σύγκλιση και την ομοιόμορφη σύγκλιση. Ιδανικά, θα θέλαμε ένα πεπερασμένο άθροισμα όρων της σειράς διαταραχών, δεδομένου ενός ε , να δίνει μια προσεγγιστική λύση για όλο το εύρος των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Παρατηρούμε όμως φορμαλιστικά ότι η αντικατάσταση μιας σειράς διαταραχών σε μια διαφορική εξίσωση δεν καταλήγει πάντα σε αποδεκτή προσεγγιστική λύση. Για να συγκρίνουμε δυο συναρτήσεις καθώς το κοινό τους όρισμα τείνει προς μια σταθερή τιμή εισάγουμε το συμβολισμό \mathcal{O} και o .

Ορισμός. Έστω $f(\varepsilon)$ και $g(\varepsilon)$ συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του $\varepsilon = 0$ (η οποία μπορεί να μην περιέχει το 0).

Θα γράφουμε

$$f(\varepsilon) = \mathcal{O}(g(\varepsilon)), \quad \text{καθώς } \varepsilon \rightarrow 0$$

αν υπάρχει μια θετική σταθερά M τέτοια ώστε

$$|f(\varepsilon)| \leq M|g(\varepsilon)|$$

για κάθε ε σε μια περιοχή του μηδενός (η οποία δεν περιέχει κατ' ανάγκη το 0).

Θα γράφουμε

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)), \quad \text{καθώς } \varepsilon \rightarrow 0$$

αν

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| = 0$$

Σημείωση 1. Με τον όρο 'υψηλότερη τάξη' αναφερόμαστε στους όρους με τη μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Δεδομένου ότι $\varepsilon > 0$ αλλά και $\varepsilon \ll 1$ ισχύει ότι

$$\mathcal{O}(\varepsilon^0) > \mathcal{O}(\varepsilon^1) > \mathcal{O}(\varepsilon^2) > \dots$$

Σημείωση 2. Με το όρο 'αιώνιοι' (secular) αναφερόμαστε στους όρους που αυξάνονται χωρίς όριο.

Καλή τοποθέτηση προβλήματος

Υψίστης σημασίας για τη λύση μιας εξίσωσης, ιδίως για εκείνες που προέρχονται από προβλήματα φυσικών εφαρμογών, καθώς τα δεδομένα ενδέχεται να περιέχουν σφάλματα εφόσον πηγάζουν από μετρήσεις και πειράματα, αποτελεί η καλή τοποθέτηση του προβλήματος.

Για $Ax = b$, όπου A είναι ένας τελεστής, b ένα διάνυσμα γνωστών και x ένα διάνυσμα αγνώστων, η καλή τοποθέτηση έγκειται στα εξής

- Ύπαρξη λύσης. Θα πρέπει ο A να είναι επί, δηλαδή το b να ανήκει στο σύνολο τιμών του A .
- Μοναδικότητα λύσης. Θα πρέπει ο A να είναι $1 - 1$, δηλαδή για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού του A αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο στο πεδίο τιμών του A .
- Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα ή ευστάθεια λύσης. Δηλαδή σε οποιαδήποτε μικρή μεταβολή των αρχικών δεδομένων να διαταράσσεται σε μικρό βαθμό και η λύση του προβλήματος. Με άλλα λόγια, αν ισχύει $A(x + \delta) = b'$, όπου αν $0 < \delta \ll 1$, τότε $b \approx b'$.

1.6 Η Εξίσωση Bessel και η σύνδεσή της με τις αρμονικές ταλαντώσεις

Η Εξίσωση Bessel είναι μια γραμμική, 2ας τάξης, ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση. Συμβολίζοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή με x και την εξαρτημένη με $y = y(x)$, αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1.2)$$

όπου, r είναι μια σταθερά που ονομάζεται 'τάξη της συνάρτησης Bessel $y = y(x)$ ', που είναι η λύση της (1.2).

Ας μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου $r = 0$ για την (1.2). Θα έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (1.3)$$

Αν αγνοήσουμε τον όρο που περιέχει την πρώτη παράγωγο στην εξίσωση (1.3), έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\omega_0^2 y \quad (1.4)$$

όπου $\omega_0^2 = 1$. Αυτή είναι η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς τριβή, με ω_0^2 να είναι η κυκλική ιδιουσυχνότητα. Γνωρίζουμε ότι οι θεμελιώδεις λύσεις γι' αυτή την εξίσωση είναι

$$y_1 = \cos \sqrt{\omega_0^2} x$$

και

$$y_2 = \sin \sqrt{\omega_0^2} x$$

η ενώ γενική λύση είναι ο γραμμικός τους συνδυασμός

$$y = c_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 x} + c_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 x}$$

Στην εξίσωσή μας, ο όρος $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx}$ ενέχει ρόλο απόσβεσης (τριβής), όμως ο συντελεστής αυτός δεν είναι μια σταθερά, αλλά συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Στην περίπτωση της εξέλιξης του απλού αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, η εξίσωση ενέργειας συμπεριλαμβανομένης και της πρώτης παραγώγου (όρος που δηλώνει την τριβή) δίδεται από την

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2b \frac{dy}{dx} + \omega_0^2 y = 0 \quad (1.5)$$

όπου ω_0 είναι η συχνότητα του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση και $b > 0$ είναι μια σταθερά.

Στην περίπτωση της μικρής απόσβεσης ($b^2 < \omega_0^2$), η επίδραση της δύναμης αντίστασης ήταν να μετατοπίσει τη συχνότητα του ταλαντωτή από μια σταθερή τιμή σε $\omega_1^2 = \omega_0^2 - b^2$ και να προκαλέσει μια εκθετική πτώση του πλάτους

$$y(x) = [a \exp(-bx)] \cos(\omega x + \theta)$$

Στην εξίσωση Bessel έχουμε έναν παρόμοιο όρο απόσβεσης που δίνεται από $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx}$. Η κύρια διαφορά είναι ότι ο συντελεστής απόσβεσης δεν είναι σταθερός, αλλά πρόκειται για μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής, x . Θα περιμέναμε τότε οι συναρτήσεις Bessel να έχουν παρόμοια συμπεριφορά με αυτές των συναρτήσεων ταλάντωσης με απόσβεση.

Εάν $r^2 \neq 0$ στην εξίσωση Bessel (1.2), θα έχουμε τον όρο $-\frac{r^2}{x^2} y$, ο οποίος καθορίζει τη συχνότητα. Συνεχίζοντας τη σύγκριση με τον αρμονικό ταλαντωτή, όπου έχουμε μια σταθερά ω_0^2 μπροστά από τον y -όρο στην εξίσωση (1.5), διευκρινίζουμε ότι αυτή η σταθερά καθορίζει τη συχνότητα και επομένως και το μήκος των κυμάτων της λύσης. Εφ' όσον ο συντελεστής είναι ανάλογος με $\frac{1}{x^2}$, θα αναμέναμε ότι οι συναρτήσεις Bessel θα είχαν συχνότητα που εξαρτάται από το x . Αυτό επίσης θα περιμέναμε από τον όρο μπροστά από την πρώτη παράγωγο που κι αυτός εξαρτάται από το x .

Οι εξισώσεις Bessel παρουσιάζουν ταλαντωτική συμπεριφορά, καθώς το x μεταβάλλεται. Προοδευτικά αποσβένουν καθώς το x μεγαλώνει και το μήκος των κυμάτων εξαρτάται και από το x και από την τάξη r . Για κάθε τιμή του r , υπάρχουν δύο είδη συναρτήσεων Bessel. Αυτές δηλώνονται με $J_r(x)$ και $Y_r(x)$, αντίστοιχα και αναφέρονται ως συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους για την τάξη r . Αυτές οι συναρτήσεις αναπαριστούν τις θεμελιώδεις λύσεις των συναρτήσεων \cos και \sin της εξίσωσης Bessel (1.2) και μπορούν να χαρακτηριστούν και σαν γενικεύσεις των συναρτήσεων \cos και \sin . Η γενική λύση της εξίσωσης Bessel (1.2) είναι ο γραμμικός συνδυασμός των θεμελιωδών συναρτήσεων

$$y = y_r(x) = AJ_r(x) + BY_r(x) \quad (1.6)$$

όπου A, B είναι αυθαίρετες σταθερές.

1.7 Η Εξίσωση Boltzmann

Η εξίσωση Boltzmann περιγράφει τη στατιστική συμπεριφορά ενός θερμοδυναμικού συστήματος το οποίο δεν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, δηλαδή οι ιδιότητές του μεταβάλλονται με το χρόνο. Με τον όρο θερμοδυναμικό σύστημα εννοούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από ποσότητες όπως θερμοκρασία, πίεση, εσωτερική ενέργεια, εντροπία, κλπ.

Επιθυμούμε να μοντελοποιήσουμε την κίνηση ενός ρευστού, που αποτελείται από έναν πολύ μεγάλο αριθμό πανομοιότυπων σωματιδίων που κινούνται στον τρισδιάστατο χώρο. Για $(t, x, \underline{u}) \in [0, +\infty] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ θεωρούμε μια συνάρτηση $f(t, x, \underline{u})$ που περιγράφει την πυκνότητα των σωματιδίων κατά το χρόνο t , στο σημείο x , έχοντας ταχύτητα \underline{u} . Εναλλακτικά, αντιλαμβανόμαστε την $f(t, x, \underline{u})$ ως την πιθανότητα εύρεσης ενός σωματιδίου με \underline{u} ταχύτητα κοντά στο σημείο x , σε χρόνο t . Εάν δεν υπάρχουν συγκρούσεις, η ταχύτητα \underline{u} κάθε σωματιδίου θα παραμένει σταθερή στο χρόνο. Ένα σωματίδιο με ταχύτητα \underline{u} και κοντά στο σημείο x κατά την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, σε κάποια επόμενη χρονική στιγμή τ θα κινηθεί προς $x + \tau \underline{u}$. Επομένως $f(\tau, x, \underline{u}) = f(0, x - \tau \underline{u}, \underline{u})$. Σε αυτήν την περίπτωση, η f δίνει μια λύση για τη γραμμική εξίσωση μεταφοράς

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων προστίθεται ένας επιπλέον τετραγωνικός όρος στη δεξιά μεριά της (1.7), δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = Q(f, f) \quad (1.8)$$

όπου $Q(f, f)$ είναι ο τελεστής σύγκρουσης. Η (1.8) αποτελεί την περίφημη εξίσωση Boltzmann.

1.8 Μια μορφή της Κυματικής Εξίσωσης

Η κυματική εξίσωση που περιγράφει ενοποιημένα όλα τα κυματικά φαινόμενα για (x, t) να ανήκουν στο $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ και $c > 0$, είναι υπερβολικού τύπου και γράφεται ως εξής

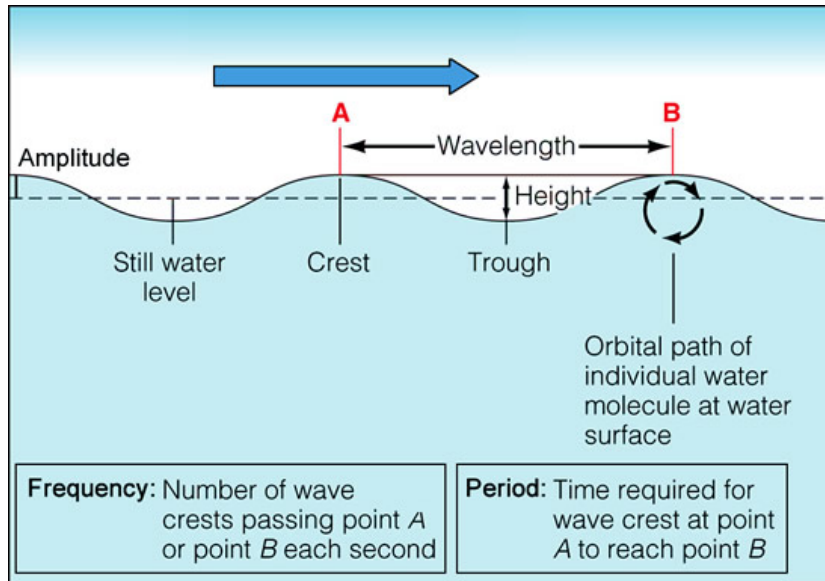
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Η γενική λύση της είναι της μορφής

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

όπου f και g αυθαίρετες C^2 συναρτήσεις που προσδιορίζονται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Η λύση είναι συνδυασμός δύο κυμάτων, το ένα περιγράφεται από τη συνάρτηση f και κινείται με ταχύτητα c προς τα δεξιά και το άλλο περιγράφεται από τη συνάρτηση g και κινείται με ταχύτητα c προς τα αριστερά.

Τα βασικά της χαρακτηριστικά είναι η γραμμικότητα, η περιοδικότητα $u(x + \lambda, t) = u(x, t)$, $u(x, t + T) = u(x, t)$ όπου λ το μήκος κύματος και T η περίοδος, και η δεύτερη τάξη στις παραγώγους χρόνου και χώρου (θέσης).



Σχήμα 1.1: Βασικά χαρακτηριστικά του κύματος

Θεμελιώδης ιδιότητα είναι ότι αν u_1 και u_2 είναι λύσεις τότε και $u = au_1 + bu_2$ είναι επίσης λύση για αυθαίρετες σταθερές a και b . Χρησιμοποιούμε επίσης τον κυματικό αριθμό $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, τη συχνότητα $f = \frac{1}{T}$ καθώς και τη γωνιακή συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Μέσα σε μια περίοδο το κύμα ταξιδεύει κατά ένα μήκος κύματος άρα η ταχύτητά του, ονομαζόμενη και φασική ταχύτητα είναι $c_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$. Το πλάτος του κύματος (συνήθως συμβολίζεται με a) αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος που καθορίζει την κυματική διαταραχή.

Η συμβολή δύο κυματικών διαταραχών με παραπλήσιες συχνότητες και κυματικούς αριθμούς έχει ως αποτέλεσμα τη συνύπαρξη δύο ταλαντώσεων, εκ των οποίων η μία έχει συχνότητα όσο περίπου και τα αρχικά κύματα, ενώ η άλλη στην οποία οφείλεται η διαμόρφωση του πλάτους έχει πολύ πιο αργή συχνότητα. Ο παλμός διαμόρφωσης του πλάτους έχει τώρα μια διαφορετική ταχύτητα, η οποία καλείται ομαδική ταχύτητα (group velocity) και δίνεται από $c_{gr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$ και στη γενικότερη περίπτωση $c_{gr} = \frac{d\omega(k)}{dk}$ που προϋποθέτει ότι η γωνιακή συχνότητα εξαρτάται από τον κυματικό αριθμό, άρα και από το μήκος του κύματος. Η σχέση $\omega = \omega(k)$ προσδιορίζεται ως σχέση διασποράς και είναι πολύ χρήσιμη για τα κυματοπακέτα.

Με τον όρο κυματοσυρμός (wave train) αναφερόμαστε σε μια μικρή 'έκρηξη' της εντοπισμένης δράσης των κυμάτων που ταξιδεύει ως μονάδα. Ένα κυματοπακέτο μπορεί να αναλυθεί σε, ή μπορεί να συντεθεί από ένα άπειρο σύνολο συνιστωσών ημιτονοειδών κυμάτων διαφορετικών κυματαριθμών, με φάσεις και πλάτη να παρεμβάλονται μόνο σε μια μικρή περιοχή του χώρου. Κάθε συνιστώσα της εξίσωσης κύματος, και ως εκ τούτου το κυματοπακέτο, είναι λύσεις μιας εξίσωσης κύματος. Με μαθηματικούς όρους, πρόκειται για μια περιοδική συνάρτηση μονοδιάστατου χώρου που κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή είναι ένας ειδικός τύπος χωροχρονικής ταλάντωσης.

Σε σχέση τώρα με τη διασπορά των κυμάτων νερού, αυτή αναφέρεται γενικά στη διασπορά συχνότητας, πράγμα που σημαίνει ότι τα κύματα διαφορετικών μηκών ταξιδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες φάσης. Σε αυτό το πλαίσιο, έχουμε κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού, έχοντας δεχθεί δυνάμεις λόγω βαρύτητας και επιφανειακής τάσης. Ως αποτέλεσμα, το νερό με

μία ελεύθερη επιφάνεια θεωρείται γενικά ότι είναι ένα μέσο διασποράς. Επιφανειακά βαρυτικά κύματα, που κινούνται λόγω της δύναμης της βαρύτητας, διαδίδονται πιο γρήγορα με στόχο την αύξηση του μήκους κύματος. Για ένα δεδομένο μήκος κύματος, βαρυτικά κύματα σε βαθύτερα νερά έχουν φασική ταχύτητα μεγαλύτερη απ' ό,τι σε πιο ρηχά νερά. Εκτός από τη διασπορά συχνότητας, τα κύματα του νερού εμφανίζουν επίσης και διασπορά πλάτους. Αυτό είναι ένα μη γραμμικό φαινόμενο, κατά το οποίο κύματα μεγαλύτερου πλάτους έχουν διαφορετική ταχύτητα φάσης από κύματα μικρού πλάτους.

2 Κυματικές εξισώσεις νερών

2.1 Εισαγωγή

Θα συμβολίζουμε

- $\rho = \rho(x, t)$ η πυκνότητα της μάζας του ρευστού
- $\underline{u} = \underline{u}(x, t)$ η ταχύτητα του ρευστού
- p η πίεση
- F μια εξωτερική δύναμη
- \underline{u}_* το μέτρο που εκφράζει την αντίσταση ενός ρευστού σε κάθε απόπειρα παραμόρφωσής του από κάποια εξωτερική δύναμη που οφείλεται σε δυνάμεις τριβής
- T η θερμοκρασία
- $p = p(\rho, T)$ μια εξίσωση κατάστασης

Αρχή διατήρησης της μάζας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (2.1)$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

$$\rho \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] = F - \nabla p + \underline{u}_* \Delta \underline{u} \quad (2.2)$$

1

Αυτές οι εξισώσεις αντιστοιχούν στις 3 πρώτες στιγμές της εξίσωσης Boltzmann.

Για $\rho = \rho_0$ σταθερά, η εξίσωση (2.1) περιγράφει ένα ασυμπίεστο ρευστό, δηλαδή $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, και η εξίσωση τότε ονομάζεται αποκλίνουσα.

Η εξίσωση απόκλισης και οι εξισώσεις ορμής συχνά ονομάζονται ασυμπίεστες εξισώσεις Navier-Stokes.

Η εξίσωση ενέργειας δεν είναι απαραίτητο να συμπληρώσει το σύστημα εξισώσεων, το οποίο στις 3 διαστάσεις αποτελείται από 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους

$$\underline{u} = (u, v, w) \quad \text{και} \quad p$$

¹ $\Delta \equiv \nabla^2$ είναι η Λαπλασιανή. Στις 3 διαστάσεις με καρτεσιανές συντεταγμένες η Λαπλασιανή είναι $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

όπου (u, ν, ω) ορίζουν τον τρισδιάστατο χώρο.

Παρακάτω θα εξετάσουμε την ελεύθερη επιφάνεια του προβλήματος των κυμάτων, το οποίο εσωτερικά του ρευστού δέχεται μη συνεκτική μείωση ($\underline{u}_* = 0$) των από πάνω εξισώσεων. Αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται εξισώσεις Euler.

Συμπληρώνοντας με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, έχουμε τις εξισώσεις Euler με ελεύθερη επιφάνεια.

Από αυτές θα αντλήσουμε τα όρια για τα ρηχά νερά ή τα μεγάλα μήκους κύματα από το σύστημα και θα συζητήσουμε ορισμένες προσεγγιστικές εξισώσεις. Την

KdV (Korteweg-de Vries) εξίσωση σε μονοδιάστατο χώρο και σε μία διάσταση χρόνου και την

KP (Kadomstev-Petviashvili) εξίσωση σε διδιάστατο χώρο και μία διάσταση χρόνου.

2.2 Η συμβολή της εξίσωσης Euler στις κυματικές εξισώσεις

Για τη μελέτη των κυμάτων, θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ασυμπίεστη μορφή της Navier-Stokes με σταθερή πυκνότητα $\rho = \rho_0$ και θα υποθέσουμε ένα ιδανικό² ρευστό. Τότε αυτό το ιδανικό και ασυμπίεστο ρευστό περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις Euler

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \frac{1}{\rho_0} (F - \nabla p)$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι η εξωτερική δύναμη είναι συντηρητική, δηλαδή $F = -\nabla U$, για κάποιο βαθμωτό δυναμικό U . Τότε η εξίσωση ορμής γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} &= \frac{1}{\rho_0} (-\nabla U - \nabla p) \implies \\ \implies \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} &= -\nabla \left(\frac{U + p}{\rho_0} \right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \frac{1}{2} \nabla (\underline{u} \cdot \underline{u}) - \underline{u} \times (\nabla \times \underline{u})$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\underline{u} \cdot \underline{u}) - \underline{u} \times (\nabla \times \underline{u}) &= -\nabla \left(\frac{U + p}{\rho_0} \right) \implies \\ \implies \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \underline{u} \times (\nabla \times \underline{u}) &= -\nabla \left(\frac{1}{2} (\underline{u} \cdot \underline{u}) + \frac{U + p}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Τώρα θα ορίσουμε τον στροβιλισμό ως $\omega \equiv \nabla \times \underline{u}$, που είναι ένα τοπικό μέτρο, βαθμού αναλόγου με την περιστροφή του ρευστού. Πιο συγκεκριμένα, $\frac{1}{2} \|\nabla \times \underline{u}\|$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ενός απειροελάχιστου ρευστού στοιχείου. Παίρνοντας *curl* στην (2.3) και γνωρίζοντας ότι *curl* (∇) =

²Ιδανικό ρευστό ονομάζεται εκείνο με $\underline{u}_* = 0$

0 έχουμε

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (\underline{u} \times \omega) = 0$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times (F \times G) = (G \cdot \nabla) F - (F \cdot \nabla) G + (\nabla \cdot G) F - (\nabla \cdot F) G$$

για τις διανυσματικές συναρτήσεις F και G και χρησιμοποιώντας ότι $\text{div}(\text{curl}) = 0$, φτάνουμε στην εξίσωση στροβιλισμού

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (\omega \cdot \nabla) \underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla) \omega$$

Αν τώρα θέσουμε $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)$ θα έχουμε τελικά

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \underline{u}$$

Εφόσον $\omega = 0$ είναι μια λύση, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ο στροβιλισμός είναι αρχικά 0, τότε (αν υπάρχει η λύση) θα είναι 0 για όλες τις φορές. Αυτή η ροή ονομάζεται αστρόβιλη.

Από φυσική σκοπιά, σε ένα ιδανικό ρευστό αν αρχικά αυτό είναι αστρόβιλο, δεν υπάρχει ο μηχανισμός που θα παράγει ‘τοπικό στροβιλισμό’. Συχνά μια καλή προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι το ρευστό είναι αστρόβιλο, με τη ρευστότητα να επηρεάζει όσα συμβαίνουν μόνο σε μικρές περιοχές όπου το ρευστό ρέει και αυτές καλούνται οριακά στρώματα. Σε αυτές τις συνθήκες μπορούμε να εισάγουμε μια δυνητική ταχύτητα $\underline{u} = \nabla \varphi$. Σημειώνουμε ότι η εξίσωση στροβιλισμού ικανοποιείται εφόσον

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

Οι εξισώσεις Euler μέσα στην περιοχή του ρευστού μπορεί επίσης να απλοποιηθούν

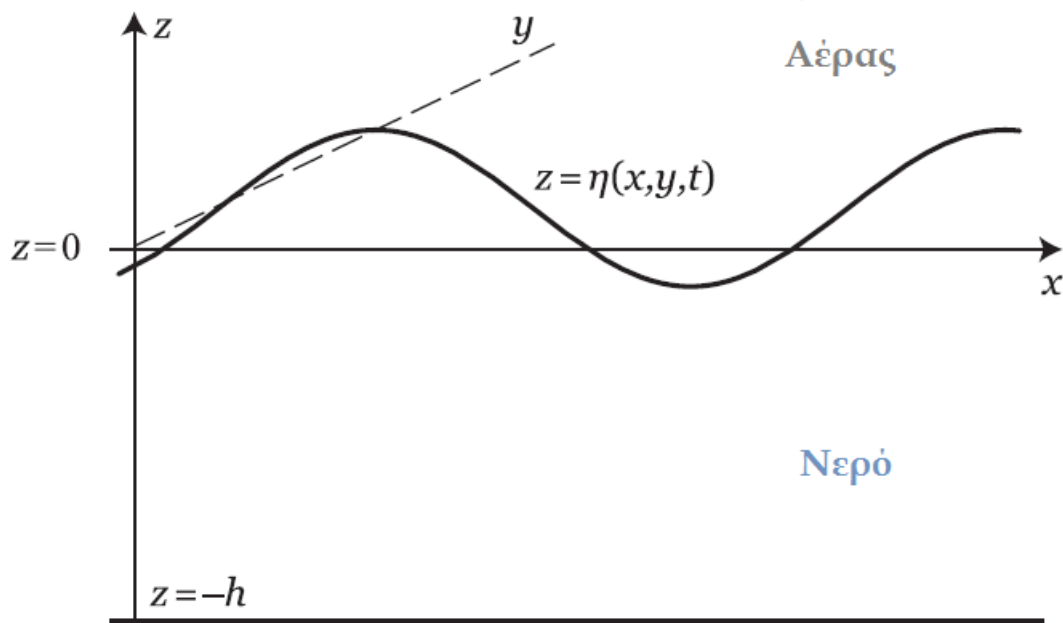
$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$$

που είναι η Λαπλασιανή, η οποία ικανοποιείται εσωτερικά στο ρευστό, $-h < z < \eta(x, y, t)$, όπου υποδηλώνουμε το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού πάνω από το μέσο επίπεδο $z = 0$ να είναι $\eta(x, y, t)$ και ο βυθός του ρευστού να είναι στο $z = -h$. Σύμφωνα και με την Εικόνα 2.1, το ρευστό που δεν διαταράσσεται βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$, ενώ ο βυθός στο επίπεδο $z = -h$ είναι σταθερός.

Ψάχνουμε τώρα τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που θα μας οδηγήσουν σε μια άγνωστη ελεύθερη επιφάνεια και σε μη γραμμικότητες. Θεωρούμε, έναν επίπεδο, αδιαπέραστο βυθό στο $z = -h$, έτσι ώστε το ρευστό να μην μπορεί να περάσει μέσα από αυτόν. Η αποτύπωση της συνθήκης αυτής γίνεται στην εξίσωση

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h$$

όπου v είναι η κάθετη ταχύτητα. Στην ελεύθερη επιφάνεια $z = \eta(x, y, t)$ υπάρχουν δύο συνθήκες. Η 1η βρίσκεται από την (2.3). Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ∇ και $\frac{\partial}{\partial t}$ συνδέονται ως



Σχήμα 2.1: Γεωμετρία των κυμάτων νερού

εξής

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2 + \frac{U+p}{\rho_0} \right) = 0 \implies$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2 + \frac{U+p}{\rho_0} = f(t)$$

όπου $\underline{u} = (u, v, w)$ και $\|\underline{u}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$. Εφόσον η φυσική ποσότητα είναι $\underline{u} = \nabla \varphi$, μπορούμε να προσθέσουμε μια αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου (ανεξάρτητη του χώρου) ως προς φ ,

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \int_0^t f(t') dt'$$

ώστε να πάρουμε τη λεγόμενη Bernoulli, δυναμική ή εξίσωση πίεσης

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2 + \frac{U+p}{\rho_0} = 0$$

Πλέον, αμελούμε την επιφανειακή τάση και θεωρούμε κυρίαρχη δύναμη την άνωση

$$F = -\nabla(\rho_0 g z)$$

από την οποία συνεπάγεται ότι $U = \rho_0 g z$, όπου g είναι η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Για ευκολία παίρνουμε την πίεση μηδέν ($p = 0$) στην ελεύθερη επιφάνεια, το οποίο παράγει

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια.

Η συγκεκριμένη εξίσωση προέρχεται από την υπόθεση ότι ένα 'πακέτο' ρευστού ευρισκόμενο αρχικά στην ελεύθερη επιφάνεια, εν τέλει θα παραμείνει εκεί.

Μαθηματικά, αυτό υπονοεί ότι αν $F = F(x, y, z, t)$, όπου (x, y, t) είναι ένα σημείο στην ελεύθερη επιφάνεια, τότε

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla F = 0$$

Στην επιφάνεια, $F = z - \eta(x, y, t) = 0$. Τότε

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{D\eta}{Dt} \implies v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \eta$$

όπου $\underline{u} = \left(\frac{Dx}{Dt}, \frac{Dy}{Dt}, \frac{Dz}{Dt} \right) = (u, v, v)$. Έτσι χρησιμοποιούμε $v = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$,

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \eta \quad (2.4)$$

όπου $z = \eta(x, y, t)$ στην ελεύθερη επιφάνεια. Η εξίσωση αυτή συχνά αναφέρεται ως κινηματική συνθήκη.

Ας σημειώσουμε ότι σε μια επιφάνεια μιας μεταβλητής $z = \eta(x, y, t)$ η εξίσωση (2.4) μπορεί να γραφτεί

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

όπου $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (n \cdot \nabla) \varphi$ και $n = (-\nabla \eta, 1)$ είναι το κάθετο διάνυσμα σε ένα συγκεκριμένο σημείο της επιφάνειας. Τότε η ελεύθερη επιφάνεια $z = \eta(x, y, t)$ κινείται προς τη διεύθυνση της κανονικής ταχύτητας.

Συνοπτικά, οι κυματικές εξισώσεις νερού ελεύθερης επιφάνειας με επίπεδο βυθό είναι

- Euler ιδανική ροή

$$\Delta \varphi = 0, \quad -h < z < \eta(x, y, t) \quad (2.5)$$

- Χωρίς ροή στον βυθό

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (2.6)$$

- Bernoulli ή εξίσωση πίεσης

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.7)$$

- Κινηματική συνθήκη

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \eta, \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.8)$$

Αυτές οι 4 εξισώσεις αποτελούν τις εξισώσεις για κύματα νερών με αγνώστους $\varphi(x, y, z, t)$ και $\eta(x, y, t)$. Αυτό είναι ένα πρόβλημα χωρίς σύνορα και σε αντίθεση με τα προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet ή Neumann όπου εκεί τα σύνορα είναι γνωστά και καθορισμένα, μέρος της λύσης είναι να καθορίσουμε τα δυναμικά των συνόρων.

Επίλυση των (2.7) και (2.8)

Ας δούμε πρώτα τη γραμμική περίπτωση θεωρώντας $|\eta| \ll 1$ και $\|\nabla \varphi\| \ll 1$. Γνωρίζουμε ότι η φ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της σειράς Taylor γύρω από το $\eta = 0$, ως εξής

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \eta, t) &= \varphi(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, 0, t) + \dots \\ &= \varphi_0(x, y, t) + \eta \varphi_{0z}(x, y, t) + \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (2.7) και (2.8) τη συγκεκριμένη μορφή της φ λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} &= -g\eta, \quad z = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \varphi_{0z}(x, y, t), \quad z = 0 \end{aligned}$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία αυτή με σκοπό την ευκολότερη επίλυση του προβλήματος των διαφορικών εξισώσεων. Θέλουμε τώρα να βρούμε 2 ειδικές λύσεις για τις εξισώσεις Euler και ελεύθερης επιφάνειας σε μορφή Fourier.

Υποθέτουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια έχει έναν τύπο της μορφής

$$\varphi_s(x, y, z, t) = A(k, l, z, t) \exp(ikx + ily)$$

τότε αντικαθιστώντας αυτόν στην εξίσωση Laplace (2.5) έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= [A(k, l, z, t) \exp(ikx + ily)]_{xx} + [A(k, l, z, t) \exp(ikx + ily)]_{yy} + \\ &+ [A(k, l, z, t) \exp(ikx + ily)]_{zz} + [A(k, l, z, t) \exp(ikx + ily)]_{tt} = \\ &= A_x ik \exp(ikx + ily) - Ak^2 \exp(ikx + ily) + A_y \exp(ikx + ily) - \\ &- Al^2 \exp(ikx + ily) + A_{zz} \exp(ikx + ily) + A_{tt} \exp(ikx + ily) = \\ &= A_{zz} - (k^2 + l^2) A = 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $\chi^2 = k^2 + l^2$, η λύση είναι

$$A = \tilde{A}(k, l, t) \cosh[\chi(z+h)] + \tilde{B}(k, l, t) \sinh[\chi(z+h)]$$

Υποθέτουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια έχει έναν τύπο της μορφής

$$\eta(x, y, t) = \tilde{\eta}(k, l, t) \exp(ikx + ily)$$

τότε αντικαθιστώντας αυτόν στις εξισώσεις (2.7) και (2.8) έχουμε

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} \cosh(\chi h) + g\tilde{\eta} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} - \chi \sinh(\chi h) \tilde{A} = 0 \quad (2.10)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (2.10) και αντικαθιστώντας στην (2.9) έχουμε

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + g\chi \tanh(\chi h) \tilde{\eta} = 0$$

Θέτοντας $\tilde{\eta}(k, l, t) = \tilde{\eta}(k, l, 0) \exp(-i\omega t)$, βρίσκουμε τη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = g\chi \tanh(\chi h) \quad (2.11)$$

η οποία έχει 2 μέλη. Με υπέρθεση όλων των ειδικών λύσεων φτάνουμε στη γενική λύση Fourier για μια ταχύτητα φθίνουσα λύση για το η

$$\eta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \{ \tilde{\eta}_+ \exp[i(kx + ly - \omega_+ t)] + \tilde{\eta}_- \exp[i(kx + ly + \omega_- t)] \} dk dl$$

με $\tilde{\eta}_+$, $\tilde{\eta}_-$ καθορισμένα από τα αρχικά δεδομένα που θεωρούμε ότι είναι πραγματικά και φθίνουν επαρκώς ταχύτητα στο χώρο.

Η σχέση διασποράς για βαθιά νερά, δηλαδή όταν $\chi h \gg 1$, είναι

$$\omega^2 \simeq g|\chi|$$

ενώ για ρηχά νερά, δηλαδή όταν $\chi h \ll 1$, είναι

$$\omega^2 \simeq g\chi \left(\chi h - \frac{(\chi h)^3}{3} + \dots \right)$$

2.3 Αδιάστατες εξισώσεις

Για την ευκολότερη μεταχείριση των εξισώσεων θα δουλέψουμε με ‘καθαρές’ ή αδιάστατες ποσότητες, δηλαδή ποσότητες χωρίς μονάδες μέτρησης. Με αυτό τον τρόπο θα καταλάβουμε ποιοι όροι είναι αμελητέοι. Για τις εξισώσεις ρηχών νερών χρησιμοποιούμε την ακόλουθη αδιαστατοποίηση

$$\begin{aligned} x &= \lambda_x x', & y &= \lambda_y y', & z &= h z' \\ t &= \frac{\lambda_x}{c_0} t', & \eta &= a \eta', & \varphi &= \frac{\lambda_x g a}{c_0} \varphi' \end{aligned}$$

όπου $c_0 = \sqrt{gh}$ είναι η κυματική ταχύτητα ρηχών νερών, λ_x, λ_y είναι τυπικά μήκη κύματος από τα αρχικά δεδομένα (στην x ή στην y κατεύθυνση) και a είναι το μέγιστο ή τυπικό πλάτος από τα αρχικά δεδομένα.

Συνοπτικά, οι αδιάστατες εξισώσεις κυμάτων νερού που διαδίδονται σε επίπεδο βυθό είναι

- Euler ιδανική ροή, εξίσωση Laplace

$$\varphi_{zz} + \mu^2 \varphi_{xx} + \mu^2 \delta^2 \varphi_{yy} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon \eta \quad (2.12)$$

- Χωρίς ροή στον βυθό

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -1 \quad (2.13)$$

- Bernoulli ή εξίσωση πίεσης

$$\varphi_t + \frac{\varepsilon}{2} \left[\varphi_x^2 + \delta^2 \varphi_y^2 + \frac{1}{\mu^2} \varphi_z^2 \right] + \eta = 0, \quad z = \varepsilon \eta \quad (2.14)$$

- Κινηματική συνθήκη

$$\mu^2 [\eta_t + \varepsilon (\varphi_x \eta_x + \delta^2 \varphi_y \eta_y)] = \varphi_z, \quad z = \varepsilon \eta \quad (2.15)$$

όπου το $\varepsilon \equiv \frac{a}{h}$ είναι ένα μέτρο μη γραμμικότητας των κυμάτων, το πλάτος, το $\mu \equiv \frac{h}{\lambda_x}$ είναι ένα μέτρο της σχέσης βάρους με το χαρακτηριστικό μήκος κύματος που καλείται παράμετρος διασποράς και το $\delta \equiv \frac{\lambda_x}{\lambda_y}$ είναι ένα μέτρο του μεγέθους των εγκάρσιων μεταβολών.

Σημειώνουμε πως όλες οι παραπάνω μεταβλητές και παράμετροι είναι αδιάστατες.

Για τη γραμμική, ή μικρού πλάτους, περίπτωση, δηλαδή όταν $\varepsilon \ll 1$, $\mu \sim \mathcal{O}(\varepsilon^0)$ οι παραπάνω εξισώσεις περιορίζονται και γίνονται σε αδιάστατη μορφή

$$\varphi_t + \eta = 0, \quad z = 0$$

$$\mu^2 \eta_t = \varphi_z, \quad z = 0$$

3 Θεωρία ρηχών νερών

3.1 Εισαγωγή

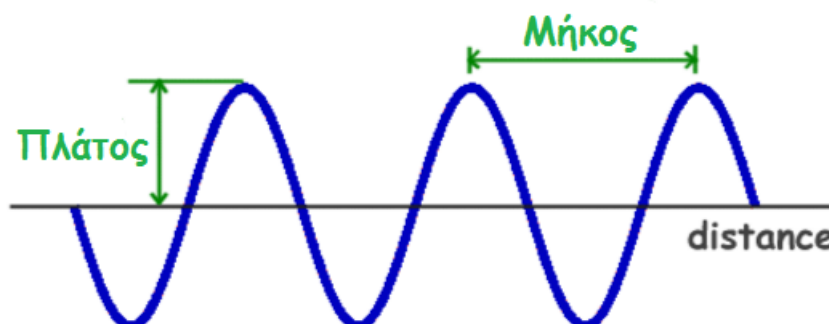
Μελετάμε τη θεωρία των ρηχών νερών σε δυο διαστάσεις στην περίπτωση όπου το βάθος του νερού είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του κύματος της διαταραχής στην ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή

$$\mu = \frac{h}{\lambda_x} \ll 1 \implies h \ll \lambda_x$$

Σημαντικά παραδείγματα τέτοιων κυμάτων είναι τα παλιρροϊκά κύματα στον ωκεανό και τα τσουνάμι, όπου το μήκος τους είναι πολύ μεγαλύτερο από το βάθος του νερού, συγκεκριμένα για το τσουνάμι έχουμε μήκος κύματος $\lambda \sim 100$ χιλιόμετρα και ένα τυπικό βάθος ωκεανού $h \sim 4$ χιλιόμετρα. Υποθέτουμε ότι το μήκος των κυμάτων σε εγκάρσια¹ διεύθυνση είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος κατά τη διάδοση, έτσι θα έχουμε $\delta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \ll 1$. Επίσης υποθέτουμε μικρού πλάτους κύματα, δηλαδή $|\varepsilon| = \frac{a}{h} \ll 1$. Τέλος υποθέτουμε τη ‘μέγιστη ισορροπία’, δηλαδή οι μικροί όροι, μη γραμμικότητα και διασπορά, βρίσκονται στην ίδια τάξη. Τότε θα έχουμε $\varepsilon = \mu^2$. Αυτό αντικατοπτρίζει μια ισορροπία μεταξύ της ασθενούς μη γραμμικότητας και της ασθενούς διασποράς.

Με τον όρο ‘μήκος κύματος’ εννοούμε την απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων ίδιας φάσης, ενώ με τον όρο ‘πλάτος κύματος’ αναφερόμαστε στο ύψος του κύματος.

¹Εγκάρσια κύματα ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση διάδοσής τους είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταλάντωσης των σωματιδίων που αποτελούν το μέσο διάδοσης.



Σχήμα 3.1: Μήκος και πλάτος κύματος

3.2 Μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών

Επιλέγουμε συντεταγμένες στο χώρο (x, y) , όπου η x αναπαριστά την οριζόντια διεύθυνση και η y την κάθετη. Θέτουμε την οριζόντια και την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού σωματιδίου ως $\underline{u}(t) = (u(t), v(t))$. Οι σχετικές εξισώσεις που διέπουν την κυματική διάδοση είναι συνεχείς και Euler. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση συνέχειας αναπαριστά τη διατήρηση της μάζας. Για ένα ιδανικό, ασυμπίεστο, αστρόβιλο ρευστό, δηλαδή ένα ρευστό χωρίς τριβές με σταθερή πυκνότητα $\nabla \rho = 0$ και για το οποίο ισχύει $\nabla \times \underline{u} = 0$, η εξίσωση συνέχειας δηλώνει ότι η απόκλιση του διανύσματος της ταχύτητας \underline{u} μηδενίζεται, δηλαδή $\nabla \cdot \underline{u} = 0$. Στις δυο διαστάσεις, η εξίσωση συνέχειας ή αλλιώς η εξίσωση διατήρησης της μάζας συναντάται στην ακόλουθη μορφή

$$\nabla \cdot F = 0 \implies \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση για $F = \underline{u}$, $P = u$ και $Q = v$ καταφεύγουμε στην παρακάτω εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Από το 2ο κεφάλαιο, εκμεταλλευόμενοι τις εξισώσεις Euler μπορούμε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις συντήρησης ορμής στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση.

Για την οριζόντια διεύθυνση έχουμε

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(F - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

όπου F κάποια εξωτερική δύναμη η οποία εδώ είναι μηδέν. Οπότε

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Για την κάθετη διεύθυνση ανάλογα έχουμε

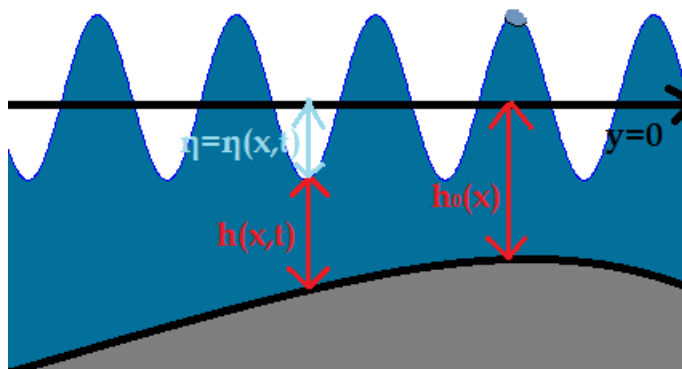
$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(F - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (3.3)$$

Ο όρος $-g$ στην (3.3) προέκυψε λόγω της βαρύτητας η οποία δρα κάθετα προς τα κάτω. Στόχος μας είναι να λύσουμε τις εξισώσεις (3.1), (3.2), (3.3) για να περιγράψουμε τα κύματα των ρηχών νερών.

Για να προχωρήσουμε θα υποθέσουμε την προσέγγιση των ρηχών νερών. Στην πραγματικότητα, αυτό ισοδυναμεί με το να αγνοήσουμε την κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης $\left(\frac{Dv}{Dt}\right)$ που σχετίζεται με το g στην εξίσωση (3.3). Δηλαδή, ισοδυναμεί με το να θέσουμε το 2ο μέλος της (3.3) ίσο με μηδέν. Τότε η (3.3) γίνεται

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0 \implies \frac{\partial p}{\partial y} = -g\rho \quad (3.4)$$

το οποίο υπονοεί ότι η κατακόρυφη κατανομή της πίεσης είναι ουσιαστικά σε υδροστατική ισορ-



Σχήμα 3.2: Συναρτήσεις αποστάσεων

ροπία.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ο βυθός της θάλασσας έχει ένα βάθος $h_0(x)$ κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια. Αυτό δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι οριζόντιο, δηλαδή το βάθος $h_0(x)$ μπορεί να είναι συνάρτηση του x , σύμφωνα και με την Εικόνα 3.2.

Έστω ότι $h(x, t)$ είναι η απόσταση από το κύμα μέχρι το βυθό της θάλασσας, ώστε

$$\eta(x, t) \equiv h(x, t) - h_0(x) \quad (3.5)$$

Ενσωματώνοντας την υδροστατική ισορροπία της εξίσωσης (3.4) υπό την υπόθεση ότι η πίεση $p = p_{atm}$ είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια και $y = \eta(x, t) = h(x, t) - h_0(x)$, όπου y η απόσταση ενός σημείου του κύματος από την ελεύθερη επιφάνεια. Τότε έχουμε

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -g\rho \implies \int_{h-h_0}^y \frac{\partial p}{\partial y} dy = - \int_{h-h_0}^y g\rho dy$$

$$p = p_{atm} - \rho g (y - (h - h_0)) \quad (3.6)$$

Αντικαθιστώντας την (3.6) στην (3.2) για τη διατήρηση της οριζόντιας ορμής και υπενθυμίζοντας ότι $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ έχουμε

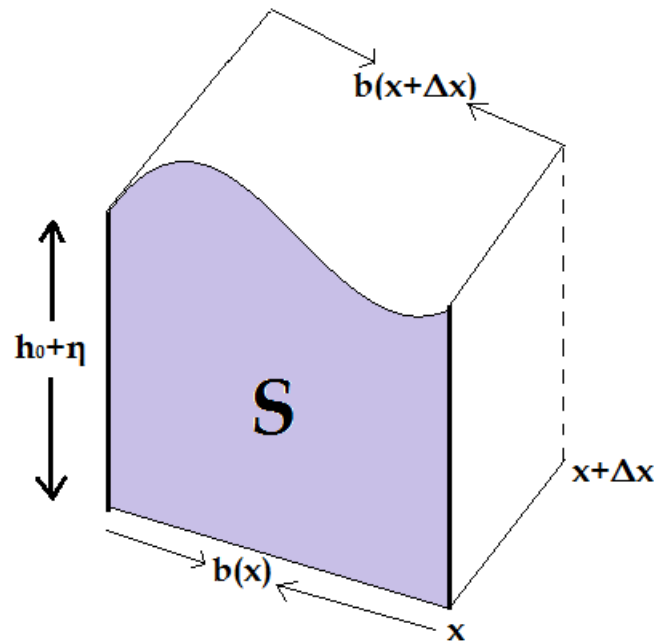
$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} [h(x, t) - h_0(x)] \quad (3.7)$$

όπου

$$\frac{Du}{Dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

Πλέον το δεξί μέλος της (3.7) είναι ανεξάρτητο του y , άρα και το αριστερό. Τότε ο ρυθμός μεταβολής της οριζόντιας συνιστώσας, u , της ταχύτητας για οποιοδήποτε συγκεκριμένο ρευστό στοιχείο είναι ανεξάρτητος του y .

Έτσι, αν η u αρχικά είναι ανεξάρτητη του y , θα είναι ανεξάρτητη για κάθε y για όλα τα t , δηλαδή, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \forall t$. Αυτό δείχνει ότι ο v -εξαρτώμενος όρος της (3.7) μηδενίζεται και κατά



Σχήμα 3.3: Σχηματική απεικόνιση καναλιού

συνέπεια η (3.7) απλοποιείται σε

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} [h(x, t) - h_0(x)] = 0 \quad (3.8)$$

Συνοψίζοντας μέχρι τώρα, έχουμε απλοποιήσει το πρόβλημα εύρεσης μιας λύσης για την εξίσωση συνέχειας (3.1) και την οριζόντια εξίσωση Euler. Όμως, η μορφή της (3.1) δεν είναι βολική σε αυτή την περίπτωση. Αποδεικνύεται ότι αυτή η συνθήκη μπορεί να εκφραστεί και με έναν εναλλακτικό τρόπο, που θα παράγουμε παρακάτω.

3.2.1 Περιορισμένες μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις

Θα βρούμε τώρα μια πιο βολική μορφή της εξίσωσης συνέχειας (3.1) σε μια οριοθετημένη περιοχή (κανάλι) με αργή μεταβολή του πλάτους $b(x)$ και του βάρους $h_0(x)$. Τότε το εμβαδόν της περιοχής που σχηματίζεται από το κύμα μέχρι το σημείο x δίνεται από

$$S(x) = b(x) (h_0(x) + \eta(x, t)) \quad (3.9)$$

Υποθέτουμε ότι το πλάτος μεταβάλλεται τόσο αργά, ώστε η κυματική κίνηση να παραμένει περιορισμένη στο (x, y) -επίπεδο.

Η μάζα που βρίσκεται στο σκιασμένο χώρο S , τη χρονική στιγμή Δt , δίνεται από την ποσότητα $([\rho S u]_x \Delta t)$, όπου οι συγκεκριμένες συναρτήσεις που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες $[\dots]_x$ υπολογίζονται ακριβώς στο σημείο x . Εφαρμόζοντας σειρά Taylor γύρω από το σημείο $(\Delta x, \Delta t)$

έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$([\rho Su]_{x+\Delta x}) \Delta t = [\rho Su]_x \Delta t + \frac{\partial [\rho Su]_x}{\partial x} \Delta x \Delta t \quad (3.10)$$

Τότε η αλλαγή της μάζας στον τύπο (η ροή μέσα μείον τη ροή έξω) σε ένα χρόνο Δt δίνεται από

$$\Delta (\rho S \Delta x) = - \left[\frac{\partial (\rho Su)}{\partial x} \right]_x \Delta x \Delta t \quad (3.11)$$

Διαιρώντας με $\Delta x \Delta t$ και παίρνοντας όρια $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ έχουμε

$$\frac{\partial (\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Su)}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.9) και θυμίζοντας ότι bh_0 είναι μια συνάρτηση μόνο των x , το πρώτο μέλος της αριστερής πλευράς της (3.12) γίνεται

$$\rho b \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3.13)$$

και το δεύτερο μέλος της αριστερής πλευράς γίνεται

$$\rho \frac{\partial (b(h_0 + \eta) u)}{\partial x}$$

Τότε, η εξίσωση συνέχειας για ένα μη-ομοιόμορφο 'κανάλι' μεταβλητού πλάτους και βάθους δίνεται από

$$\begin{aligned} \rho b \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho \frac{\partial (b(h_0 + \eta) u)}{\partial x} &= 0 \implies \\ b \frac{\partial \eta}{\partial t} &= - \frac{\partial (b(h_0 + \eta) u)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Οι εξισώσεις (3.8) και (3.14) είναι γνωστές ως μη γραμμικές εξισώσεις ρηχών νερών.

Είναι μη γραμμικές επειδή ακόμα περιέχουν μη γραμμικούς όρους που πρέπει να εξαλειφθούν, εκτός όμως από την κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης.

3.3 Γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών

Θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη των γραμμικών ρηχών κυμάτων.

Αυτό συμβαίνει όταν $u \ll 1$ και $h - h_0(x) = \eta(x, t) \ll 1$. Με αυτές τις προϋποθέσεις ο όρος $u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ στην εξίσωση (3.8) γίνεται αμελητέος και παραλείπεται. Αυτή η εξίσωση τότε απλοποιείται στη γραμμικοποιημένη εξίσωση ορμής

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

Όμοια, η εξίσωση (3.14) μπορεί να γραμμικοποιηθεί διαγράφοντας τον όρο $b\eta u$ ο οποίος είναι επίσης αμελητέος εφόσον είναι συνολικά ποσότητα δευτέρας τάξης, $(b\eta u)^k \rightarrow 0$ για $k \geq 3$.

Αυτό μας δίνει τη γραμμικοποιημένη εξίσωση συνέχειας

$$b \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial (bh_0 u)}{\partial x} \quad (3.16)$$

Για να καταλήξουμε στην κυματική εξίσωση, δηλαδή την ισοδύναμη της εξίσωσης Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, πρέπει πρώτα να εξαλείψουμε τη μεταβλητή u από τις εξισώσεις (3.15) και (3.16). Αυτό το πετυχαίνουμε πολλαπλασιάζοντας την (3.15) με bh_0 και μετά διαφορίζοντας μερικώς ως προς x , για να καταλήξουμε στην

$$\frac{\partial^2 (bh_0 u)}{\partial x \partial t} = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(bh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (3.17)$$

Επίσης διαφορίζουμε μερικώς την εξίσωση (3.16) ως προς t , για να καταλήξουμε στην

$$b \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 (bh_0 u)}{\partial t \partial x} \quad (3.18)$$

Λόγω του ότι οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε όλο το \mathbb{R}^n , ισχύει η μεταθετικότητα των μερικών παραγώγων, δηλαδή $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$. Τότε συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.17) και (3.18) φτάνουμε στη γενική κυματική εξίσωση σε έναν περιορισμένο χώρο με μεταβλητό πλάτος και βάθος

$$b \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(bh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \implies \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(bh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (3.19)$$

Υπάρχουν δυο περιπτώσεις με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

1η Περίπτωση: Ένας περιορισμένος χώρος με σταθερό πλάτος ($b = \text{σταθερό}$) και μεταβλητό βάθος ($h_0 = h_0(x)$). Σε αυτή την περίπτωση, η γενική εξίσωση κύματος (3.19) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (3.20)$$

2η Περίπτωση: Ένας περιορισμένος χώρος με σταθερό πλάτος ($b = \text{σταθερό}$) και σταθερό βάθος ($h_0 = \text{σταθερό}$). Σε αυτή την περίπτωση, η γενική εξίσωση κύματος (3.19) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = h_0 g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \implies \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = h_0 g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (3.21)$$

Τότε σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση ικανοποιεί την κανονική μονοδιάστατη εξίσωση κύματος και έχει φασική ταχύτητα $c_{ph} = \sqrt{gh_0}$.

Τώρα θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση (3.21) με τη μέθοδο Explicit. Έχουμε

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

όπου $\eta = \eta(x, t)$. Χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις $x = n\delta x$ και $t = m\delta t$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε

$$\eta(x, t) = \eta(n\delta x, m\delta t) = \eta_n^m$$

και $\delta x = \frac{x}{n}$ και $\delta t = \frac{t}{m}$. Εφαρμόζοντας σειρά Taylor προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την πρώτη

και δεύτερη παράγωγο. Συγκεκριμένα θα εφαρμόσουμε σειρά Taylor στις δυο διαστάσεις

$$\begin{aligned} \eta(x + \delta x, t + \delta t) &= \eta(x, t) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta t^2 + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} \delta x \delta t + \mathcal{O}(\delta x^3, \delta t^3) \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\eta(x, t + \delta t) = \eta(x, t) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

και εναλλάσσοντας θα έχουμε

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta(x, t + \delta t) - \eta(x, t)}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t)$$

Πηγαίνοντας προς τα πίσω στο χρόνο η εξίσωση μεταφράζεται ως

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta(x, t) - \eta(x, t - \delta t)}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t) \simeq \frac{\eta_n^m - \eta_n^{m-1}}{\delta t}$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την παράγωγο ως προς x . Ομοίως χρησιμοποιώντας παράγωγο Taylor στα σημεία $x + \delta x$ και $x - \delta x$ έχουμε

$$\eta(x + \delta x, t) = \eta(x, t) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \quad (3.22)$$

$$\eta(x - \delta x, t) = \eta(x, t) - \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta x^2 - \mathcal{O}(\delta x^3) \quad (3.23)$$

Η (3.22) μείον την (3.23) δίνει

$$\eta(x + \delta x, t) - \eta(x - \delta x, t) = 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Για τη δεύτερη παράγωγο προσθέτουμε τις (3.22) και (3.23) και τότε έχουμε

$$\eta(x + \delta x, t) + \eta(x - \delta x, t) = 2\eta(x, t) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\eta(x + \delta x, t) - 2\eta(x, t) + \eta(x - \delta x, t)}{\delta x^2} + \mathcal{O}(\delta x^2) \simeq \frac{\eta_{n-1}^m - 2\eta_n^m + \eta_{n+1}^m}{\delta x^2}$$

Με την ίδια μέθοδο προσεγγίζουμε τη δεύτερη παράγωγο ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \simeq \frac{\eta_n^{m-1} - 2\eta_n^m + \eta_n^{m+1}}{\delta t^2}$$

Τελικά μπορούμε να διακριτοποιήσουμε τη διαφορική εξίσωση (3.21) και να τη φέρουμε στην εξής

μορφή

$$\frac{\eta_n^{m-1} - 2\eta_n^m + \eta_n^{m+1}}{\delta t^2} = c^2 \frac{\eta_{n-1}^m - 2\eta_n^m + \eta_{n+1}^m}{\delta x^2} \quad (3.24)$$

Στόχος μας είναι να φέρουμε την (3.24) στη μορφή

$$\eta_n^{m+1} = F(\eta_{n-1}^m, \eta_n^m, \eta_{n+1}^m)$$

Γι' αυτό το σκοπό έχουμε

$$\begin{aligned} \eta_n^{m-1} &= \frac{c^2 \delta t^2}{\delta x^2} [\eta_{n-1}^m - 2\eta_n^m + \eta_{n+1}^m] + 2\eta_n^m - \eta_n^{m+1} \implies \\ \implies \eta_n^{m-1} &= -\eta_n^{m+1} + \frac{c^2 \delta t^2}{\delta x^2} \eta_{n-1}^m + \left[-2\frac{c^2 \delta t^2}{\delta x^2} + 1 \right] \eta_n^m + \frac{c^2 \delta t^2}{\delta x^2} \eta_{n+1}^m \end{aligned} \quad (3.25)$$

Η (3.25) αποτελεί έναν επαναληπτικό αλγόριθμο ο οποίος παράγει λύσεις για κάθε συγκεκριμένο σημείο του χρόνου και του χώρου. Επειδή στην περίπτωση μας δε δίνονται συνθήκες για $n = N$ και $m = M$, ο παραπάνω αλγόριθμος ισχύει για

$$2 \leq n \leq N - 2$$

$$1 \leq m \leq M - 1$$

Η εξίσωση (3.21) μπορεί να λυθεί με κάποια καλύτερη, σε όρους ευστάθειας και ακρίβειας, μέθοδο, όπως Implicit και Θ-Method. Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε επαναληπτική μέθοδο μάς ενδιαφέρουν η πολυπλοκότητα, η ευστάθεια, η συνέπεια, η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα.

3.4 Αναγωγή στη μονοδιάστατη εξίσωση

Θεωρούμε την περίπτωση των μη εγκάρσιων κυμάτων με $\varepsilon = \mu^2$ (για λόγους απλοποίησης), δηλαδή τη μέγιστη ισορροπία. Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε μία διάσταση, γεγονός το οποίο στην περίπτωση αυτή υπονοεί την αφαίρεση των όρων που περιέχουν παραγώγους ως προς y . Τότε οι (2.12)-(2.15) γίνονται

- Euler ιδανική ροή, εξίσωση Laplace

$$\varepsilon \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon \eta \quad (3.26)$$

- Χωρίς ροή στον βυθό

$$\varphi_z = 0, \quad z = -1 \quad (3.27)$$

- Bernoulli ή εξίσωση πίεσης

$$\varphi_t + \frac{\varepsilon}{2} \left[\varphi_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} \varphi_z^2 \right] + \eta = 0, \quad z = \varepsilon \eta \quad (3.28)$$

- Κινηματική συνθήκη

$$\varepsilon [\eta_t + \varepsilon \varphi_x \eta_x] = \varphi_z, \quad z = \varepsilon \eta \quad (3.29)$$

Πρόκειται για ζεύγη μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς φ και η με ένα ελεύθερο σύνορο, και πολύ δύσκολη ακριβή λύση, που θα προσεγγίσουμε με τη θεωρία διαταραχών.

Αναλύοντας το φ ως εξής

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$$

και αντικαθιστώντας στην (3.26) παίρνουμε

$$\varphi_{0zz} + \varepsilon (\varphi_{0xx} + \varphi_{1zz}) + \varepsilon^2 (\varphi_{1xx} + \varphi_{2zz}) + \dots = 0$$

Εξισώνοντας τώρα τους όρους σύμφωνα με τις δυνάμεις του ε έχουμε

Για όρους $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^0)$

$$\varphi_{0zz} = 0 \implies \varphi_{0z} = B \implies \varphi_0 = A + B(z + 1)$$

όπου A, B συναρτήσεις των x, t . Λόγω της συνοριακής συνθήκης (3.27) έχουμε

$$\varphi_z(-1) = 0 \implies B = 0$$

Επομένως, η 1ης τάξης λύση για τη δύναμη της ταχύτητας είναι ανεξάρτητη του z ,

$$\varphi_0 = A(x, t)$$

Πηγαίνοντας στην επόμενη τάξη του ε , για όρους $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^1)$

$$\varphi_{0xx} + \varphi_{1zz} = 0 \implies \varphi_{1zz} = -A_{xx} \implies \varphi_{1z} = -zA_{xx} + c_1$$

όπου A συνάρτηση των x, t . Λόγω της συνοριακής συνθήκης (3.27) έχουμε $\varphi_z(-1) = 0 \implies c_1 = -A_{xx}$. Τότε

$$\varphi_{1z} = -zA_{xx} - A_{xx} \implies \varphi_1 = -\frac{z^2}{2}A_{xx} - zA_{xx} + c_2$$

Λόγω της συνοριακής συνθήκης (3.27) και πάλι έχουμε $\varphi_z(-1) = 0 \implies c_2 = -\frac{A_{xx}}{2}$. Τότε

$$\varphi_1 = -\frac{z^2}{2}A_{xx} - zA_{xx} - \frac{A_{xx}}{2} \implies \varphi_1 = -A_{xx} \frac{(z+1)^2}{2}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\varphi_2 = A_{xxxx} \frac{(z+1)^4}{4!}$$

Έτσι έχουμε την προσέγγιση

$$\varphi = A - \varepsilon A_{xx} \frac{(z+1)^2}{2} + \varepsilon^2 A_{xxxx} \frac{(z+1)^4}{4!} + \dots \quad (3.30)$$

η οποία ισχύει στο διάστημα $-1 < z < \varepsilon\eta$, συγκεκριμένα ακριβώς μέχρι το ελεύθερο σύνορο $\varepsilon\eta$. Αυτή η επέκταση μπορεί να συμβεί σε κάθε τάξη του ε , αλλά οι 3 πρώτοι όροι επαρκούν για το σκοπό μας.

Αντικαθιστώντας την (3.30) στην (3.28) κατά μήκος του ελεύθερου συνόρου $z = \varepsilon\eta$ και διατηρώντας τους 2 πρώτους όρους παίρνουμε

$$\eta = -A_t + \frac{\varepsilon}{2} (A_{xxt} - A_x^2) + \dots \quad (3.31)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την (3.29) και κρατώντας τους 2 πρώτους όρους έχουμε

$$\varepsilon\eta_t + \varepsilon^2 \eta_x A_x = -\varepsilon A_{xx} (1 + \varepsilon\eta) + \frac{\varepsilon^2}{3!} A_{xxxx} + \dots \quad (3.32)$$

Αντικαθιστούμε την (3.31) στην (3.32) και κρατάμε τους όρους τάξης ε

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \left(\frac{A_{xxtt}}{2} - \frac{A_{xxxx}}{6} - 2A_x A_{xt} - A_{xx} A_t \right) \quad (3.33)$$

Η προσέγγιση της (3.33), ασυμπτωτικά, είναι ίδια με τη γραμμική εξίσωση Boussinesq (βλ. Παράρτημα) και γράφεται αλλιώς

$$A_{tt} - A_{xx} = \mathcal{O}(\varepsilon) \implies A_{tt} = A_{xx} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Παραγωγίζοντας 2 φορές ως προς x παίρνουμε

$$A_{xxtt} = A_{xxxx} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.34)$$

Τώρα αντικαθιστούμε την (3.34) στην (3.33) και παίρνουμε

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \left(\frac{A_{xxxx}}{3} - 2A_x A_{xt} - A_{xx} A_t \right) \quad (3.35)$$

Ας δούμε όμως τι παγίδα μπορεί να κρύβει το γραμμικοποιημένο μοντέλο

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \frac{A_{xxxx}}{3} \quad (3.36)$$

της

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \left(\frac{A_{xxtt}}{2} - \frac{A_{xxxx}}{6} \right) \quad (3.37)$$

Εδώ μπαίνει το πολύ σημαντικό θέμα της καλής τοποθέτησης των προβλημάτων.

Αυτό το βλέπουμε μέσω των σχέσεων διασποράς. Υποθέτουμε μια κυματική λύση

$$A(x, t) = \exp(i(kx - \omega t)) \quad (3.38)$$

και την αντικαθιστούμε στην (3.37). Υπενθυμίζουμε τις αντιστοιχίες

$$k \longleftrightarrow -i\partial_x$$

$$\omega \longleftrightarrow i\partial_t$$

Τότε έχουμε

$$-\omega^2 + k^2 = \varepsilon \left(\frac{\omega^2 k^2}{2} - \frac{k^4}{6} \right) \implies \omega^2 = \frac{k^2 + \varepsilon k^4/6}{1 + \varepsilon k^2/2}$$

Σημειώνουμε ότι $\omega^2 > 0$ και για πολύ μεγάλα k ,

$$\omega^2 \sim k^2/3 \quad (3.39)$$

Τότε αν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα της (3.39) στην κυματική λύση (3.38) βλέπουμε ότι τελικά η λύση

$$A(x, t) = \exp\left(i\left(kx \pm \frac{kt}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

είναι φραγμένη για όλα τα t .

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε την (3.38) στην (3.36), με τις αντιστοιχίες που αναφέραμε προηγουμένως, θα έχουμε

$$-\omega^2 + k^2 = \varepsilon k^4/6$$

Το μεγαλύτερο όριο του ω , που το θέτουμε k σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\omega_{\pm} \sim \pm i \frac{\sqrt{\varepsilon} k^2}{\sqrt{3}} \quad (3.40)$$

Τότε αν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα της (3.40), την αρνητική ρίζα του ω , στην κυματική λύση (3.38) βλέπουμε ότι τελικά η λύση είναι

$$A(x, t) \sim \exp(ikx) \exp\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} k^2 t\right)$$

Αυτή η λύση εκρήγνυται εκθετικά καθώς $k \rightarrow \infty$, οπότε δεν έχουμε μια συγκλίνουσα ολοκληρώσιμη Fourier λύση για τα μη αναλυτικά αρχικά δεδομένα. Η καλά τοποθετημένη λύση (3.37) προτιμάται στην περίπτωση που θέλουμε να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς, εν αντιθέσει με την (3.36) που είναι μη καλώς τοποθετημένη λόγω της προσέγγισης κύματος μεγάλου μήκους.

Τώρα θα καθορίσουμε μια εξίσωση για το κυματικό πλάτος η . Πρώτα παραγωγίζουμε την (3.31) ως προς x και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = A_x$ στις (3.31) και (3.32) και έτσι βρίσκουμε

Εξίσωση Bernoulli

$$\eta_x = -u_t + \frac{\varepsilon}{2} (u_{xxt} - 2uu_x) + \dots \quad (3.41)$$

Κινηματική εξίσωση

$$\eta_t = -u_x + \varepsilon \left(-\eta_x u - \eta u_x + \frac{u_{xxx}}{6} \right) + \dots \quad (3.42)$$

Αυτό το ζεύγος εξισώσεων καλείται μοντέλο Boussinesq για η και u .

Τώρα διαφορίζοντας την (3.41) ως προς x και την (3.42) ως προς t , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $u_t = -\eta_x + \mathcal{O}(\varepsilon)$ και $u_x = -\eta_t + \mathcal{O}(\varepsilon)$ από την εξίσωση Bernoulli και την κινηματική εξίσωση, αντίστοιχα, και θέτοντας $u = -\int_{-\infty}^x \eta_t dx'$, τελικά βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - \eta_{xx} &= \varepsilon \left[\frac{1}{3} \eta_{xxxx} + \eta_{xt} \int_{-\infty}^x \eta_t dx' + \eta_x^2 + \eta_t^2 + \eta \eta_{xx} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-\infty}^x \eta_t dx' \right)^2 \right] \implies \\ \eta_{tt} - \eta_{xx} &= \varepsilon \left[\frac{1}{3} \eta_{xxxx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\eta^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^x \eta_t dx' \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Η (3.43) είναι το μοντέλο Boussinesq για το πλάτος κύματος.

3.5 Η εξίσωση Korteweg de Vries (KdV)

Το 1895 δυο Ολλανδοί, οι Korteweg και de Vries, βρήκαν εξισώσεις, οι οποίες είχαν σαν λύσεις κυματομορφές του είδους του σταθερού κύματος, βασιζόμενοι στην παραδοχή, ότι το βάθος του νερού ήταν μικρό συγκρινόμενο με το πλάτος του κύματος. Η εξίσωση αυτή συσχέτιζε το πλάτος του κύματος και τις αλλαγές της στο χώρο με τις αλλαγές του πλάτους ως προς το χρόνο διάδοσης. Σε αυτή την ενότητα καλούμαστε να παράγουμε μέσω της εξίσωσης Boussinesq μια νέα εξίσωση με τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων (multiple-scale), η οποία συνδυάζει τεχνικές για την κατασκευή έγκυρων προσεγγιστικών λύσεων.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του μοντέλου Boussinesq για το δυναμικό της ταχύτητας (3.35), μια ασυμπτωτική έκφραση του A

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$$

έχουμε

$$A_{0tt} + \varepsilon A_{1tt} - A_{0xx} - \varepsilon A_{1xx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \varepsilon \left(\frac{A_{0xxxx}}{3} - 2A_{0x}A_{0xt} - A_{0xx}A_{0t} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

Εξισώνοντας τους όρους υψηλότερης τάξης, $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, παίρνουμε την κυματική εξίσωση

$$A_{0tt} - A_{0xx} = 0$$

Η λύση της οποίας είναι

$$A_0(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$$

όπου F και G καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Προβλέποντας τους αιώνιους (secular) όρους που θα πρέπει να αφαιρεθούν στην επόμενης τάξης εξίσωση, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων (multiple-scale), δηλαδή $A_0 = A_0(\xi, \zeta, T)$, έτσι ώστε

$$A_0 = F(\xi, T) + G(\zeta, T)$$

όπου $\xi = x - t$, $\zeta = x + t$, $T = \varepsilon t$. Λόγω των νέων μεταβλητών συνεπάγεται ότι

$$\partial_t = -\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon \partial_T$$

και

$$\partial_x = \partial_\xi + \partial_\zeta$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τους διαφορικούς τελεστές στην (3.35) έχουμε

$$\begin{aligned} & \left((-\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon \partial_T)^2 - (\partial_\xi + \partial_\zeta)^2 \right) A = \\ & = \varepsilon \left(\frac{(\partial_\xi + \partial_\zeta)^4}{3} A - 2(\partial_\xi + \partial_\zeta) A (\partial_\xi + \partial_\zeta) (-\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon \partial_T) A - \right. \\ & \quad \left. - (\partial_\xi + \partial_\zeta)^2 A (-\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon \partial_T) A \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Αρχικά, υποθέτουμε κύματα μονής κατεύθυνσης, και ασχολούμαστε μόνο με τη μονόπλευρη κίνησή τους, και συγκεκριμένα τη δεξιά κίνηση. Έτσι, $A_0 = F(\xi, T)$. Αντικαθιστώντας την ασυμπτωτική έκφραση του $A = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ στην (3.44) και κρατώντας όλους τους όρους μεγέθους $\mathcal{O}(\varepsilon)$ παίρνουμε την εξίσωση

$$-4A_{1\xi\zeta} = 2F_{\xi T} + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi} + 3F_{\xi\xi}F_\xi \quad (3.45)$$

Ολοκληρώνοντας την (3.45) παίρνουμε

$$A_1 \sim -\frac{1}{4} \left(2F_T + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}F_\xi^2 \right) \zeta + \dots$$

θυμούμενοι ότι έχουμε απορροφήσει ομογενείς όρους στην A_0 λύση. Για να αφαιρέσουμε τους secular όρους, ιδίως τον όρο ζ , απαιτούμε

$$2F_T + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}F_\xi^2 = 0$$

Τότε, αν πάρουμε παράγωγο ως προς ξ και κάνουμε την αντικατάσταση $U = F_\xi$ έχουμε την

Korteweg de Vries (KdV) εξίσωση

$$2U_T + \frac{1}{3}U_{\xi\xi\xi} + 3UU_\xi = 0$$

Τώρα θα μελετήσουμε κύματα με αμφίπλευρη κίνηση. Έτσι $A_0 = F(\xi, T) + G(\zeta, T)$. Τότε θα έχουμε την εξής έκφραση για το A_1

$$\begin{aligned} -4A_{1\xi\xi} &= 2(F_{\xi T} - G_{\zeta T}) + \frac{1}{3}(F_{\xi\xi\xi} + G_{\zeta\zeta\zeta}) + \\ &+ 3\left(F_\xi F_{\xi\xi} + \frac{1}{3}F_{\xi\xi}G_\zeta - \frac{1}{3}G_{\zeta\zeta}F_\xi - G_\zeta G_{\zeta\zeta}\right) \end{aligned}$$

Όταν ολοκληρώνουμε αυτή την εξίσωση, οι secular όροι προέρχονται από τμήματα που είναι συναρτήσεις του ξ ή του ζ , ξεχωριστά. Αφαιρώντας τους secular όρους παίρνουμε τις ακόλουθες δυο εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2F_{\xi T} + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi} + 3F_{\xi\xi}F_\xi &= 0 \\ -2G_{\zeta T} + \frac{1}{3}G_{\zeta\zeta\zeta} - 3G_{\zeta\zeta}G_\zeta &= 0 \end{aligned}$$

οι οποίες είναι δυο ξεχωριστές KdV εξισώσεις. Θέτοντας $U = F_\xi$ και $V = G_\zeta$ απλοποιούνται οι παραπάνω εξισώσεις

$$2U_T + \frac{1}{3}U_{\xi\xi\xi} + 3UU_\xi = 0 \quad (3.46)$$

$$2V_T - \frac{1}{3}V_{\zeta\zeta\zeta} + 3VV_\zeta = 0 \quad (3.47)$$

Η λύση μπορεί να προσδιοριστεί με την ενσωμάτωση των λοιπών όρων. Μια προσεγγιστική λύση για το δυναμικό της ταχύτητας είναι

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &\sim A_0(x, t) = F(x - t, \varepsilon t) + G(x + t, \varepsilon t) = \\ &= \int_{-\infty}^{x-t} U(\xi', \varepsilon t) d\xi' + \int_{-\infty}^{x+t} V(\zeta', \varepsilon t) d\zeta' \end{aligned}$$

και για την ταχύτητα

$$u = \varphi_x = F_x + G_x + \dots = U + V + \dots$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Bernoulli (3.31), έχουμε μια προσεγγιστική λύση για το πλάτος του κύματος με ελεύθερο σύνορο

$$\eta(x, t) \sim -A_{0t}(x, t) \sim F_\xi(\xi, T) - G_\zeta(\zeta, T) = U(x - t, \varepsilon t) - V(x + t, \varepsilon t)$$

Έτσι, το κυματικό πλάτος η έχει αμφίπλευρης κίνησης κύματα που ικανοποιούν την KdV εξίσωση.

3.6 Η διαστατική εξίσωση KdV

Η (3.46) μετατρέπεται σε μια διαστατική εξίσωση αλλάζοντας τις συντεταγμένες από (x, t, η) σε (x', t', η') , αντικαθιστώντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές $\xi = x' - t'$ και $T = \varepsilon t'$ και αφαιρώντας την ξ και T εξάρτηση. Εδώ, ας σημειώσουμε ότι ισχύουν από τον κανόνα αλυσίδας οι ακόλουθες εκφράσεις

$$\frac{\partial}{\partial t'} U(\xi, T) = -U_\xi + \varepsilon U_T$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} U(\xi, T) = U_\xi$$

που δείχνουν ότι

$$\partial_T = \frac{\partial_{t'} + \partial_{x'}}{\varepsilon}$$

Τελικά η (3.46) γίνεται

$$2(U_{t'} + U_{x'}) + \varepsilon \left(\frac{1}{3} U_{x'x'x'} + 3UU_{x'} \right) = 0 \quad (3.48)$$

Αν αγνοήσουμε την αριστερή κίνηση των κυμάτων, V , τότε έχουμε $\eta' \sim U$.

Υπενθυμίζοντας την αρχική αδιαστατοποίηση

$$x = \lambda_x x', \quad t = \frac{\lambda_x}{c_0} t', \quad \eta = a\eta', \quad \varepsilon = \frac{a}{h}$$

χρησιμοποιούμε $\partial_{x'} = \lambda_x \partial_x$ και $\partial_{t'} = \frac{\lambda_x}{c_0} \partial_t$ για να μετατρέψουμε την (3.48) σε

$$2 \left(\frac{\eta_t \lambda_x}{a c_0} + \frac{\eta_x \lambda_x}{a} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{3} \frac{\eta_{xxx}}{a} \lambda_x^3 + 3 \frac{\eta \eta_x}{a a} \lambda_x \right) = 0 \implies$$

$$2 \left(\frac{\eta_t}{c_0} + \eta_x \right) + \frac{a}{h} \left(\frac{\lambda_x^2}{3} \eta_{xxx} + \frac{3}{a} \eta \eta_x \right) = 0$$

Για να πετύχουμε τη μέγιστη ισορροπία, χρησιμοποιούμε

$$\varepsilon = \frac{a}{h} = \left(\frac{h}{\lambda_x} \right)^2$$

Έτσι απλοποιείται η αδιάστατη KdV εξίσωση (3.46) στη διαστατική μορφή

$$\frac{1}{c_0} \eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6} \eta_{xxx} + \frac{3}{2h} \eta \eta_x = 0 \quad (3.49)$$

όπου $c_0 = \sqrt{gh}$. Επίσης, g είναι η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας και h είναι το βάθος του νερού.

Ο όρος $\frac{3}{2h} \eta \eta_x$ της (3.49) είναι μη γραμμικός εφόσον υπάρχει εξάρτηση μεταξύ του η και του

η_x . Ας εξετάσουμε τώρα το γραμμικό κομμάτι της (3.49)

$$\frac{1}{c_0}\eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6}\eta_{xxx} = 0 \quad (3.50)$$

Θα ερμηνεύσουμε την παραπάνω γραμμική εξίσωση από την άποψη της σχέσης διασποράς για τα κύματα του νερού. Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το η σε όρους ω , όπου $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ (2.11), σημειώνοντας $\chi^2 = k^2 + l^2$, με $l = 0$, έτσι $\chi = k$. Τότε αναλύοντας την υπερβολική εφαπτομένη σε σειρά Taylor έχουμε

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) = gk \left[kh - \frac{1}{3}(kh)^3 + 2\frac{(kh)^5}{15} - 17\frac{(kh)^7}{315} + \dots \right]$$

Αυτό ισχύει για $|kh| < \frac{\pi}{2}$. Για κύματα ρηχών νερών, $kh \ll 1$, δηλαδή οι όροι $(kh)^{2m+1}$ για $m \in \mathbb{N}$ θεωρούνται αμελητέοι. Τότε, αν κρατήσουμε μόνο τον υψηλότερης τάξης όρο της επάνω έκφρασης της σειράς Taylor, δηλαδή $(kh)^1$ θα έχουμε

$$\omega^2 = gk^2h \implies$$

$$\omega = \pm k\sqrt{gh} = \pm kc_0$$

Αυτή είναι η σχέση διασποράς για τη γραμμική εξίσωση κύματος και c_0 είναι η κυματική ταχύτητα. Παίρνοντας και τον επόμενο όρο στη σειρά Taylor του $\tanh(kh)$ έχουμε

$$\omega \sim \pm k\sqrt{gh\left(1 - \frac{1}{3}(kh)^2\right)} \sim \pm k\sqrt{gh}\left(1 - \frac{1}{6}(kh)^2\right) = \pm\left(kc_0 - \frac{1}{6}c_0h^2k^3\right)$$

Προσπαθούμε να εκμαιεύσουμε τη διαφορική εξίσωση από την οποία προέρχεται η σχέση διασποράς. Παίρνοντας τη θετική ρίζα και αντικαθιστώντας το ω με $i\partial_t$ και το k με $-i\partial_x$ έχουμε

$$i\partial_t\eta = c_0(-i\partial_x)\eta - \frac{1}{6}c_0h^2(-i\partial_x)^3\eta \implies$$

$$\frac{1}{c_0}\eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6}\eta_{xxx} = 0$$

Τελικά καταλήξαμε πάλι στον τύπο της γραμμικής διαστατικής εξίσωσης KdV, (3.50). Μέσω αυτής της διαδικασίας επαληθεύουμε την εγκυρότητα της σχέσης διασποράς.

3.7 Η επίδραση της επιφανειακής τάσης

Οι εξισώσεις (2.5)-(2.8) στις οποίες αναφερθήκαμε για να περιγράψουμε το μοντέλο μας, δε λαμβάνουν υπ' όψιν τις επιπτώσεις της επιφανειακής τάσης. Στην πραγματικότητα μόνο η εξίσωση Bernoulli (3.28) επηρεάζεται από την επιφανειακή τάση. Η τροποποίηση αυτή οφείλεται σε έναν πρόσθετο όρο πίεσης από τις επιδράσεις της επιφανειακής τάσης που αφορούν την καμπυλότητα στην επιφάνεια.

Η εξίσωση Bernoulli που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα είναι

$$\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta \quad (3.51)$$

Προσθέτοντας τον όρο της επιφανειακής τάσης έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + g\eta &= \frac{T}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1 + |\nabla\eta|^2}} \right) = \\ &= \frac{T (\eta_{xx} (1 + \eta_y^2) + \eta_{yy} (1 + \eta_x^2) - 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y)}{\rho (1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{3/2}}, \quad z = \eta \end{aligned} \quad (3.52)$$

όπου T είναι ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης. Διατηρώντας τις διαστάσεις και τους γραμμικούς όρους που θα επηρεάσουν το προηγούμενο αποτέλεσμα σε $\mathcal{O}(\varepsilon)$, έχουμε

$$\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + g\eta - \frac{T}{\rho} (\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0, \quad z = \eta \quad (3.53)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.53) και την ίδια ασυμπτωτική διαδικασία όπως και πριν, η αντίστοιχη ασυμπτωτική εξίσωση υψηλότερης τάξης για την ελεύθερη επιφάνεια είναι

$$\frac{1}{c_0} \eta_t + \eta_x + \gamma \eta_{xxx} + \frac{3}{2h} \eta \eta_x = 0 \quad (3.54)$$

Η μόνη διαφορά μεταξύ αυτής της εξίσωσης και της (3.49) είναι ο συντελεστής γ του όρου τρίτης παραγώγου. Αυτός ο όρος ενσωματώνει την επιφανειακή τάση

$$\gamma = \frac{h^2}{6} - \frac{T}{2\rho g} = \frac{h^2}{6} \left(1 - \frac{3T}{\rho g h^2} \right) = \frac{h^2}{6} (1 - 3\hat{T})$$

όπου $\hat{T} = \frac{T}{\rho g h^2}$. Τότε αν

$$\hat{T} < \frac{1}{3} \implies \gamma > 0$$

αλλιώς αν

$$\hat{T} > \frac{1}{3} \implies \gamma < 0$$

Αυτό επηρεάζει τα είδη των λύσεων και τη συμπεριφορά της εξίσωσης και σχετίζεται με εγκάρσια κύματα, όπου θα αναφερθούμε στην εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP).

3.8 Η εξίσωση Benney-Luke (BL)

Μια μερική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται ως μη τοπική όταν για την επαλήθευσή της σε ένα συγκεκριμένο σημείο απαιτείται ένα μεγάλο εύρος τιμών μακριά από το δοθέν σημείο. Μη τοπικό σύστημα είναι ένα σύστημα δυο μερικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες είναι μη τοπικές. Η μη τοπική εξίσωση που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, την κινηματική συνθήκη και τη συνοριακή

συνθήκη του βυθού αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \exp [i(kx + ly)] \left(i\eta_t \cosh [\chi(\eta + h)] + \frac{1}{\chi} (k, l) \cdot \nabla q \sinh [\chi(\eta + h)] \right) = 0 \quad (3.55)$$

όπου η και $q = q(x, y, t) = \varphi((x, y, \eta(x, y, t)))$ άγνωστοι. Επίσης έχουμε την εξίσωση Bernoulli εκφραζόμενη σε όρους q

$$q_t + \frac{1}{2} |\nabla q|^2 + g\eta - \frac{(\eta_t + \nabla q \cdot \nabla \eta)^2}{2(1 + |\nabla \eta|^2)} = \sigma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \eta}{\sqrt{1 + |\nabla \eta|^2}} \right) \quad (3.56)$$

όπου $(k, l) \cdot \nabla q = kq_x + lq_y$, $\chi^2 = k^2 + l^2$, $\sigma = \frac{T}{\rho}$ όπου T είναι η επιφανειακή τάση και ρ η πυκνότητα.

Εδώ, υποθέτουμε ότι το η και οι παράγωγοι του q φθίνουν ραγδαίως στο άπειρο. Η (3.55) γράφεται σε 'φασματική' μορφή διότι πρόκειται για άθροισμα βασικών συναρτήσεων, δηλαδή στοιχείων συγκεκριμένης βάσης για έναν συναρτησιακό χώρο. Εδώ η βάση μας είναι οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Σημειώνουμε εδώ, ότι

$$\eta_t = \varphi_z - \nabla \varphi \cdot \nabla \eta = \nabla \varphi \cdot \vec{n}$$

όπου $\vec{n} = (-\nabla \eta, 1)$ είναι κάθετο στο γεωμετρικό τόπο $y - \eta = 0$. Έτσι βρίσκοντας $q(x, y, t)$, $\eta(x, y, t)$ βρίσκεται και το η_t το οποίο οδηγεί στην κατευθυνόμενη παράγωγο $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ που είναι κάθετη στο \vec{n} .

Λύνοντας τις εξισώσεις (3.55) και (3.56) για η , q απλοποιείται το σύστημα στην εξίσωση Laplace, (2.5), η οποία είναι ένα γραμμικό πρόβλημα λόγω των, πλέον, σταθερών συνοριακών συνθηκών. Η μη τοπική εξίσωση μπορεί να παραχθεί από την εξίσωση Laplace, ενώ η κινηματική συνθήκη και η συνοριακή συνθήκη βυθού από την ταυτότητα του Green.

Ορίζουμε μια δυνητική συνάρτηση $\psi(x, y, z)$ που ικανοποιεί

$$\Delta \psi(x, y, z) = 0, \quad \text{στο } D, \quad \psi_y(x, y, z = -h) = 0 \quad (3.57)$$

Τότε από την ταυτότητα του Green έχουμε

$$0 = \int_{D(\eta)} ((\Delta \psi) \varphi - (\Delta \varphi) \psi) dV = \int_{\partial D(\eta)} (\varphi (\nabla \psi \cdot \hat{n}) - \psi (\nabla \varphi \cdot \hat{n})) dS$$

όπου dV είναι ο όγκος, dS η στοιχειώδης επιφάνεια και \hat{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Από αυτά μπορούμε να γράψουμε

$$\int \psi(x, y, \eta) \eta_t dx dy = \int q (\psi_z(x, \eta) - \nabla_{x,y} \psi(x, y, \eta) \cdot \nabla \eta) dx dy \quad (3.58)$$

όπου $\eta_t = \nabla \varphi \cdot \vec{n}$, $\vec{n} = (-\nabla \eta, 1)$ στην ελεύθερη επιφάνεια όπως επίσης η συνοριακή συνθήκη

του βυθού και η συνθήκη $|\eta|$ φθίνουν στο άπειρο.

Υποθέτουμε μια λύση του προβλήματος (3.57) η οποία μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\psi(x, y, z) = \int \hat{\xi}(k, l) \hat{\psi}_{k,l}(x, y, z) dkdl$$

$$\hat{\psi}_{k,l} = \exp[i(kx + ly)] \cosh[x(z + h)]$$

Εισάγοντας $\psi_{k,l}(x, y, z)$ στην (3.58) και υπενθυμίζοντας τις ιδιότητες των παραγώγων των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

και

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \exp[i(kx + ly)] \cosh[x(\eta + h)] \eta_t dx dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} q \left(\exp[i(kx + ly)] x \sinh[x(\eta + h)] - \right. \\ & \left. - i \exp[i(kx + ly)] \cosh[x(\eta + h)] (k \cdot \nabla) \eta \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.59)$$

Τότε χρησιμοποιώντας ότι

$$\begin{aligned} & \exp[i(kx + ly)] x \sinh[x(\eta + h)] - \\ & - i \exp[i(kx + ly)] \cosh[x(\eta + h)] ((k, l) \cdot \nabla) \eta = \\ & = -i \nabla \cdot \left(\exp(ikx) \frac{\sinh[x(\eta + h)]}{x} (k, l) \right) \end{aligned}$$

στην (3.59) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνουμε τη μη τοπική εξίσωση (3.55). Η δεύτερη εξίσωση είναι κατ' ουσίαν μια αλλαγή μεταβλητών. Διαφορίζοντας

$$q(x, y, t) = \varphi(x, y, \eta(x, y, t), t)$$

οδηγούμαστε στο ότι

$$q_x + \varphi_x + \varphi_z \eta_x, \quad q_y = \varphi_y + \varphi_z \eta_y$$

Αυτές οι εξισώσεις και

$$\eta_t + \nabla \varphi \cdot \nabla \eta = \varphi_y$$

παράγουν τα $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ σε όρους παραγώγων των η και q . Τότε από την εξίσωση Bernoulli που συμπεριλαμβάνει την επιφανειακή τάση, αποκομίζουμε την εξίσωση (3.56). Αν $|\eta|$ και $|\nabla q|$

είναι μικρά τότε οι εξισώσεις (3.55) και (3.56) απλοποιούνται στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κύματος νερού. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{\eta} = \int dx dy \exp [i (kx + ly)] \eta$$

βρίσκουμε ομοίως για τις παραγώγους του q από τις εξισώσεις (3.55) και (3.56) αντίστοιχα ότι ισχύει

$$i\hat{\eta}_t \cosh \chi h + \frac{k \cdot \widehat{\nabla} q}{\chi} \sinh \chi h = 0 \quad (3.60)$$

$$\hat{q}_t + (g + \sigma \chi^2) \hat{\eta} = 0 \quad (3.61)$$

Τότε από τις (3.60) και (3.61) παίρνουμε

$$\hat{\eta}_{tt} = - (g\chi + \sigma \chi^3) \tanh \chi h \hat{\eta}$$

η οποία είναι η γραμμικοποιημένη εξίσωση νερού για το η στο χώρο Fourier.

Επίσης μπορούμε να βρούμε ολοκληρωτικές σχέσεις παίρνοντας $k, l \rightarrow 0$ στις εξισώσεις (3.55) και (3.56). Οι πρώτες τρεις που αντιστοιχούν στις δυνάμεις k^0, l^0, k, l δίνονται από

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \eta(x, y, t) = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\eta x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy q_x (\eta + h) \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\eta y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy q_y (\eta + h) \quad (3.64)$$

Η (3.62) αντιστοιχεί στη διατήρηση της μάζας, η (3.63) στην κίνηση του κέντρου μάζας κατά x και η (3.64) στην κίνηση του κέντρου μάζας κατά y . Τα δεξιά μέλη των (3.63) και (3.64) σχετίζονται με τις στιγμές x και y αντίστοιχα. Ανώτερες δυνάμεις των k, l οδηγούν σε “virial” είδη ταυτοτήτων. Από το σύστημα των (3.55) και (3.56) παίρνουμε επίσης προσεγγίσεις για τις κυματικές εξισώσεις βαθέων και ρηχών νερών. Συγκεκριμένα, για ρηχά νερά λαμβάνουμε την εξίσωση Benney-Luke (BL), η οποία τροποποιείται κατάλληλα ώστε να συμπεριλαμβάνει την επιφανειακή τάση. Για να το επιτύχουμε αυτό, είναι βολικό να κάνουμε όλες τις μεταβλητές αδιάστατες

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1}{\lambda}, & x'_2 &= \gamma \frac{x_2}{\lambda}, & t' &= \frac{c_0}{\lambda} t \\ a\eta' &= \eta, & q' &= \frac{a\lambda g}{c_0} q, & \sigma' &= \frac{\sigma}{gh^2} \end{aligned}$$

όπου $c_0 = \sqrt{gh}$ και λ, a είναι το χαρακτηριστικό οριζόντιο μήκος και πλάτος και γ είναι μια αδιάστατη παράμετρος εγκάρσιου μήκους. Οι εξισώσεις είναι γραμμένες σε όρους αδιάστατων μεταβλητών $\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1$ μικρό πλάτος, $\mu = \frac{h}{\lambda} \ll 1$ μεγάλα κύματα, $\gamma \ll 1$ αργή εγκάρσια

μεταβολή.

Τότε βρίσκουμε

$$\int dx dy \exp [i(kx + ly)] \left(i\eta_t \cosh [\tilde{\chi}\mu(1 + \varepsilon\eta)] + \sinh [\tilde{\chi}\mu(1 + \varepsilon\eta)] \frac{(k, l) \cdot \tilde{\nabla}q}{\tilde{\chi}\mu} \right) = 0 \quad (3.65)$$

όπου $(k, l) \cdot \tilde{\nabla} = kq_x + \gamma^2 lq_y$, $\tilde{\chi}^2 = k^2 + \gamma^2 l^2$. Στην (3.65) χρησιμοποιούμε

$$\cosh [\tilde{\chi}\mu(1 + \varepsilon\eta)] \sim 1 + \frac{\mu^2}{2} \tilde{\chi}^2$$

$$\sinh [\tilde{\chi}\mu(1 + \varepsilon\eta)] \sim \tilde{\chi}\mu + \frac{\mu^3}{6} \tilde{\chi}^3 + \varepsilon\mu\eta\tilde{\chi}$$

Τότε μετά τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και με $(k, l) \rightarrow (i\partial_x, i\partial_y)$ βρίσκουμε από τις (3.55) και (3.56)

$$\left(1 - \frac{\mu^2}{2} \tilde{\Delta}\right) \eta_t + \left(\tilde{\Delta} - \frac{\mu^2}{6} \tilde{\Delta}^2\right) q + \varepsilon (\tilde{\nabla}\eta \cdot \tilde{\nabla}q) + \varepsilon\eta\tilde{\Delta}q = 0 \quad (3.66)$$

$$\eta = -q_t - \frac{\varepsilon}{2} |\tilde{\nabla}q|^2 + \tilde{\sigma}\mu^2 \tilde{\nabla}\eta \quad (3.67)$$

όπου $\tilde{\Delta} = \partial_x^2 + \delta^2 \partial_y^2$, $\tilde{\nabla}\eta \cdot \tilde{\nabla}q = \eta_x q_x + \delta^2 \eta_y q_y$, $|\tilde{\nabla}q|^2 = (q_x^2 + \delta^2 q_y^2)$ και $\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3}$.

Εξαλείφοντας τη μεταβλητή η , όταν $\varepsilon, \mu, \delta \ll 1$, βρίσκουμε την εξίσωση Benney-Luke (BL), η οποία συμπεριλαμβάνει την επιφανειακή τάση

$$q_{tt} - \tilde{\Delta}q + \tilde{\sigma}\mu^2 \tilde{\Delta}^2 q + \varepsilon \left(\partial_t |\tilde{\nabla}q|^2 + q_t \tilde{\Delta}q \right) = 0 \quad (3.68)$$

όπου $\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3}$.

Σημειώνουμε ότι αν πάρουμε τη μέγιστη ισορροπία $\varepsilon = \mu^2 = \delta^2$ και χρησιμοποιώντας multiple scales, η BL εξίσωση απλοποιείται στην εξίσωση KP μονής κατεύθυνσης, η οποία μπορεί επιπλέον να απλοποιηθεί στην KdV εξίσωση αν δεν υπάρχει εγκάρσια μεταβολή. Δηλαδή, θέτοντας $\xi = x - t$, $T = \frac{t}{2}$, $w = q\xi$, βρίσκουμε την εξίσωση KP στη μορφή

$$\partial_\xi (w_T - \tilde{\sigma}w_{\xi\xi} + 3(ww_\xi)) + w_{yy} = 0$$

Έτσι και το μη τοπικό σύστημα (3.55) και (3.56) περιέχει τις γνωστές ολοκληρώσιμες μειώσεις του κύματος νερού. Σημειώνουμε επίσης, ότι οι υψηλότερης τάξης ασυμπτωτικές επεκτάσεις του μεμονωμένου κύματος και τα εξογκώματα μπορούν να ληφθούν από τις εξισώσεις (3.55) και (3.56) χρησιμοποιώντας την ίδια αδιαστατοποίηση όπως για την εξίσωση BL. Αυτές οι επεκτάσεις αποδίδουν μεμονωμένα κύματα κοντά στο μέγιστο πλάτος τους.

3.9 Εξισώσεις Kadomtsev-Petviashvili (KP)

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στα κύματα ρηχών νερών, χωρίς εγκάρσιες διακυμάνσεις. Τώρα οι υποθέσεις μας θα συμπεριλαμβάνουν και αδύναμη εγκάρσια μεταβολή. Η σχέση διασποράς για τα κύματα του νερού, όπως έχουμε αναλύσει στην (2.11), στις πολλές διαστάσεις (2 + 1, 2 για το χώρο και 1 για το χρόνο) δίνεται από

$$\omega^2 = \left(g\chi + \frac{T}{\rho}\chi^3 \right) \tanh(\chi h) \quad (3.69)$$

όπου $\chi^2 = k^2 + l^2$, εδώ k, l είναι κυματικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στις x και y διευθύνσεις αντίστοιχα. Σε έναν τύπο κυματικής λύσης, $a \exp[i(kx + ly - \omega t)]$, τα μήκη κύματος είναι $\lambda_x = \frac{2\pi}{k}$ και $\lambda_y = \frac{2\pi}{l}$. Ακόμα υποθέτουμε (όπως πριν) ότι

$$\delta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{l}{k} \ll 1$$

δηλαδή, το μήκος κύματος στην y διεύθυνση είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό στην x διεύθυνση. Αυτό αναφέρεται ως ασθενής εγκάρσια μεταβολή.

3.9.1 Γραμμική εξίσωση KP

Τώρα θα δείξουμε τη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση που συνδέεται με τη σχέση διασποράς (3.69) με ασθενή εγκάρσια μεταβολή. Δεδομένου ότι είμαστε υπό το καθεστώς των ρηχών νερών, έχουμε

$$|hk| \propto \left| \frac{h}{\lambda_x} \right| \ll 1$$

και υποθέτουμε ότι

$$\chi h = kh \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}} \ll 1$$

Τότε επεκτείνουμε τους όρους της υπερβολικής εφαπτομένης στη σειρά Taylor ώστε

$$\begin{aligned} \omega^2 &\approx \left(g\chi + \frac{T}{\rho}\chi^3 \right) \left(\chi h - \frac{1}{3}(\chi h)^3 \right) + \dots = \\ &= gh\chi^2 \left(1 + \frac{T}{g\rho}\chi^2 \right) \left(1 - \frac{1}{3}(\chi h)^2 \right) + \dots \implies \\ \omega &= \sqrt{ghk} \sqrt{\left(1 + \frac{l^2}{k^2} \right)} \sqrt{\left(1 + \frac{T}{g\rho}k^2 + \mathcal{O}(l^2) \right)} \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}(kh)^2 + \mathcal{O}(l^2) \right)} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική επέκταση και υποθέτοντας ότι $|\frac{l}{x}| \ll 1$, και ότι ισχύει η σχέση μέγιστης ισορροπίας $l^2 \sim \mathcal{O}(k^4)$ καταλήγουμε ($c_0 = \sqrt{gh}$)

$$\omega k \approx c_0 \left(k^2 + k^4 \left(\frac{T}{2g\rho} - \frac{1}{6}h^2 \right) + \frac{1}{2}l^2 + \mathcal{O}(k^6) \right)$$

Τελικά η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση που συνδέεται με αυτή τη σχέση διασποράς χρησιμοποιώντας $\omega \rightarrow i\partial_t$ και $k \rightarrow -i\partial_x$ είναι

$$\frac{1}{c_0}\eta_{tx} + \eta_{xx} + \frac{1}{2}\eta_{yy} + \frac{h^2}{6}(1 - 3\hat{T})\eta_{xxxx} = 0$$

όπου $\hat{T} = \frac{T}{\rho gh^2}$. Αυτή είναι η γραμμική εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP).

3.9.2 Μη γραμμική εξίσωση KP

Η πλήρως μη γραμμική KP εξίσωση, διαστατικού τύπου, που παρήχθη το 1970, είναι

$$\partial_x \left(\frac{1}{c_0}\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2h}\eta\eta_x + \gamma\eta_{xxx} \right) + \frac{1}{2}\eta_{yy} = 0 \quad (3.70)$$

δηλαδή

$$\frac{1}{c_0}\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2h}\eta\eta_x + \gamma\eta_{xxx} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \eta_{yy} dx'$$

όπου $\gamma = \frac{h^2}{6}(1 - 3\hat{T})$. Συνήθως η επιφανειακή τάση στα κύματα του νερού είναι μικρή, και άρα έχουμε $\hat{T} < \frac{1}{3}$, το οποίο δίνει την KP II εξίσωση

$$\frac{1}{c_0}\eta_{xt} + \eta_{xx} + \frac{3}{2h}(\eta\eta_x)_x + \frac{h^2}{6}\eta_{xxxx} = -\frac{1}{2}\eta_{yy}$$

όταν όμως η επιφανειακή τάση στα κύματα του νερού είναι μεγάλη, και άρα έχουμε $\hat{T} > \frac{1}{3}$, τότε παίρνουμε την KP I εξίσωση.

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3.70) σε αδιάστατη μορφή

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + 3\sigma u_{yy} = 0 \quad (3.71)$$

όπου

- $\sigma = +1 \implies$ KP II: τυπικά κύματα νερού με μικρή επιφανειακή τάση
- $\sigma = -1 \implies$ KP I: κύματα νερού με μεγάλη επιφανειακή τάση

Σημειώνουμε ότι αν $\eta_{yy} = 0$ στην (3.70) και αλλάξουμε κλίμακα, η παραγόμενη KP εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί στην KdV εξίσωση σε κανονική μορφή

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.72)$$

Το $+$ αντιστοιχεί στο $\hat{T} < \frac{1}{3}$ και το $-$ στο $\hat{T} > \frac{1}{3}$.

3.10 KdV και σχετικά μοντέλα

Θεωρούμε την KdV εξίσωση στη μορφή

$$u_t + u_x + \varepsilon(u_{xxx} + auu_x) = 0 \quad (3.73)$$

όπου a είναι μια σταθερά. Πρώτα μελετάμε το γραμμικό πρόβλημα και υποθέτουμε την κυματική λύση

$$u \sim \exp(i(kx - \omega t))$$

Η σχέση διασποράς είναι

$$\omega = k - \varepsilon k^3$$

η οποία για $|k| \gg 1$, δίνει $\omega \sim -\varepsilon k^3$. Συγκεκριμένα, σημειώνουμε ότι $\omega \rightarrow -\infty$, το οποίο μας δημιουργεί αριθμητικές δυσκολίες. Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα γύρω από αυτό το θέμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u_t = -u_x + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

ώστε να μεταβάλουμε ελαφρώς την εξίσωση σε

$$u_t + u_x + \varepsilon(-u_{xxt} + auu_x) = 0 \quad (3.74)$$

Οι (3.73) και (3.74) είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες με $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Για μεγάλα k , ($|k| \gg 1$) η σχέση διασποράς για το γραμμικό πρόβλημα είναι τώρα

$$\omega = \frac{k}{1 + \varepsilon k^2} \sim \frac{1}{\varepsilon k}$$

Αριθμητικά, η (3.74) υπερτερεί έναντι της (3.73). Αλλά και πάλι έχουμε μια μικρή παράμετρο, το ε , και στις δυο εξισώσεις οπότε αυτές δεν μειώνονται ασυμπτωτικά.

Εναλλακτικά, αν χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη μετατροπή στην (3.73), με ασυμπτωτικά multiple-scale

$$\xi = x - t, \quad T = \varepsilon t$$

$$\partial_x = \partial_\xi, \quad \partial_t = -\partial_\xi + \varepsilon \partial_T$$

τότε παίρνουμε την εξίσωση

$$u_T + u_{\xi\xi\xi} + auu_\xi = 0 \quad (3.75)$$

η οποία δεν έχει άμεση εξάρτηση από τη μικρή παράμετρο ε . Η (3.75) είναι επίσης χρήσιμη για αριθμητικούς υπολογισμούς εφόσον $T = \mathcal{O}(1)$ αντιστοιχεί στο $t = \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$.

Οι εξισώσεις KdV και KP δέχονται ειδικές, ακριβείς λύσεις γνωστές ως μεμονωμένα ή μοναχικά (solitary) κύματα. Σήμερα, οι επιστήμονες χρησιμοποιούν συχνά τον όρο σολιτόνιο αντί για μεμονωμένο κύμα για εντοπισμένες λύσεις πολλών εξισώσεων, παρά το γεγονός ότι ο αρχικός ορισμός ενός σολιτονίου αντανάκλασε την ιδιότητα ότι δύο μοναχικά κύματα αλληλεπιδρούν

ελαστικώς.

4 Σολιτόνια

4.1 Εισαγωγή

Στα μαθηματικά και τη φυσική, ένα σολιτόνιο είναι ένα μεμονωμένο (solitary) κύμα (ή παλμός) που διατηρεί το σχήμα του, ενώ διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Τα σολιτόνια προκαλούνται από την αντιστάθμιση της διασποράς από τη μη γραμμικότητα. Ο όρος 'αντιστάθμιση διασποράς' αναφέρεται σε μια ιδιότητα ορισμένων συστημάτων όπου η ταχύτητα των κυμάτων ποικίλει ανάλογα με τη συχνότητα. Σολιτόνια είναι οι λύσεις μιας ευρείας κατηγορίας ασθενώς μη γραμμικών, με διασπορά μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν φυσικά συστήματα. Η εμφάνιση του σολιτονίου αναφέρθηκε για πρώτη φορά τον Αύγουστο του 1834 από το μηχανικό John Scott Russell (1808-1882), ο οποίος παρατήρησε ένα μεμονωμένο κύμα στο Κανάλι της Ένωσης στη Σκωτία.

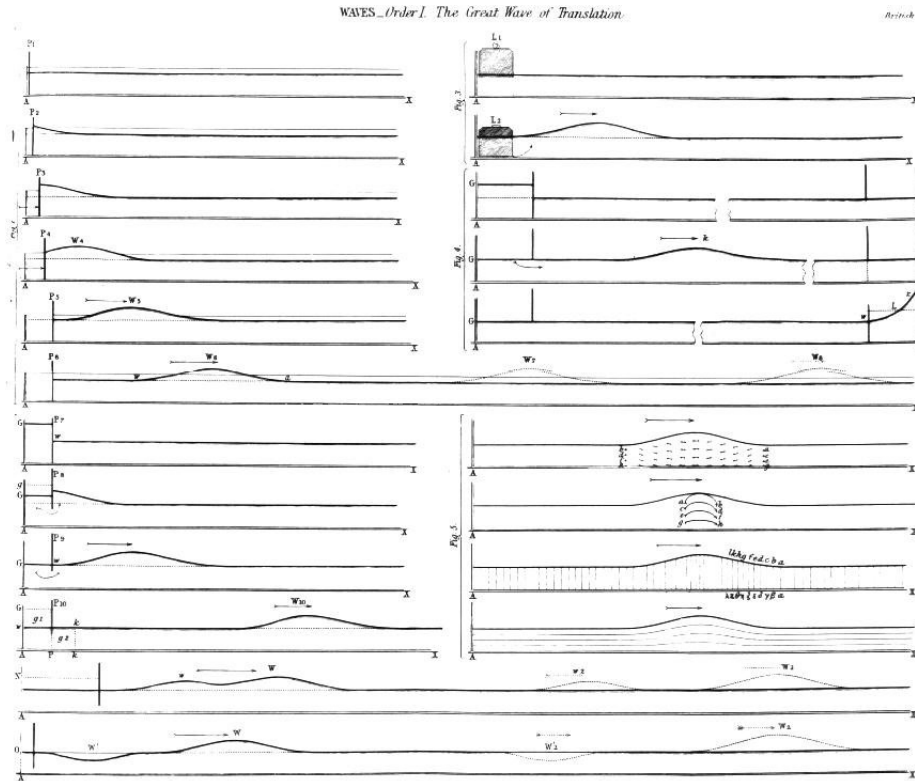
Το χρονικό της παρατήρησης

Ο Russell παρατηρούσε την κίνηση μιας βάρκας μέσα στο στενό κανάλι, την οποία έσερναν 2 άλογα από τις όχθες του. Όταν η πλεύση της βάρκας σταμάτησε αιφνιδίως, δεν συνέβη το ίδιο και με τη μάζα του νερού που είχε τεθεί σε κίνηση. Αντιθέτως, το νερό συσσωρεύτηκε γύρω από την πλώρη, όπου αναταρασσόταν βιαίως. Στη συνέχεια, αφήνοντας πίσω τη βάρκα, αναπτύσσοντας μεγάλη ταχύτητα, ανυψώθηκε σε μια στρογγυλεμένη, λεία και σχηματισμένη μάζα νερού, η οποία συνέχισε την πορεία της κατά μήκος του καναλιού χωρίς καμία αλλαγή στη μορφή ή την ταχύτητά της η οποία κυμαινόταν γύρω στα 8-9 μίλια/ώρα. Το μήκος του κύματος ήταν γύρω στα 30 πόδια και το ύψος του γύρω στα 1-1,5 πόδια. Μετά από κάποιο διάστημα το ύψος της μάζας του νερού άρχισε βαθμιαία να ελαττώνεται έως ότου εξαφανίστηκε.

Ύστερα από αυτή του την εμπειρία ο Russell ξεκίνησε τα πειράματα σε μια κυματοδεξαμενή νερού στην οποία έριχνε ένα βάρος με αποτέλεσμα να σχηματίζεται ένα υπερυψωμένο κύμα. Τότε υπολόγισε ότι ο όγκος του νερού που σχημάτιζε το κύμα, ήταν ίσος με τον όγκο του νερού που εκτοπιζόταν.

Ο Russell κατάφερε να δείξει τέσσερις σπουδαίες ιδιότητες των σολιτονίων.

- Τα κύματα σολιτονίων έχουν μια μορφή, που μπορεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια να περιγραφεί μαθηματικά ως $A \operatorname{sech}^2 [k(x - \underline{u}t)]$, εφόσον το φαινόμενο εκφράζεται μέσω μιας μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης τρίτης τάξης.
- Μια αρκετά μεγάλη αρχική μάζα νερού μπορεί να σχηματίσει δύο ή περισσότερα ανεξάρτητα σολιτόνια.
- Κύματα σολιτονίων, που συναντά το ένα το άλλο, καθώς διαδίδονται, περνούν το ένα μέσα από το άλλο χωρίς καμία διαταραχή κανενός είδους της αρχικής τους μορφής.



Σχήμα 4.1: Το χειρόγραφο του Russell με το πρώτο παρατηρούμενο σολιτόνιο

- Η ταχύτητα διάδοσης ενός σολιτονίου ύψους h , δηλαδή η απόσταση της κορυφής του κύματος από το επίπεδο επιφάνειας του νερού (νωρίτερα το ορίσαμε ως πλάτος), μέσα σε ένα κανάλι βάρους d είναι $\underline{u} = \sqrt{g(d+h)}$.

Όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, προσδιορίζοντας έτσι, ότι ένα μεγάλου πλάτους σολιτόνιο διαδίδεται γρηγορότερα από ένα μικρού πλάτους. Έχει αναπαραχθεί το φαινόμενο σε μια δεξαμενή κυμάτων και ονομάστηκε ‘wave of translation’.

Ένας ενιαίος, ομόφωνος ορισμός του σολιτονίου είναι δύσκολο να βρεθεί. Οι Drazin και Johnson (1989) αποδίδουν τρεις ιδιότητες σε αυτά.

- Έχουν μόνιμη μορφή.
- Εντοπίζονται μέσα σε μια περιοχή.
- Μπορούν να αλληλεπιδράσουν με άλλα σολιτόνια, και εξέρχονται από τη σύγκρουση αμετάβλητα, εκτός από μια μετατόπιση φάσης.

Παραδείγματα σολιτονίων που μας ενδιαφέρουν είναι τα υποθαλάσσια εσωτερικά κύματα που ξεκινάνε από την τοπογραφία του βυθού και διαδίδονται στον ωκεανό. Επίσης στην κατηγορία αυτή ανήκουν και ορισμένοι τύποι παλιρροιακών οπών, ένα κυματικό φαινόμενο μερικών ποταμών, συμπεριλαμβανομένου και του ποταμού Severn, που είναι ‘undular’, δηλαδή πρόκειται για ένα μέτωπο κύματος που ακολουθείται από συρμούς σολιτονίων. Συγκεκριμένα, είναι ένα παλιρροιακό φαινόμενο κατά το οποίο το άκρο της εισερχόμενης παλιρροίας σχηματίζει ένα κύμα ή περισσότερα

κύματα νερού που ταξιδεύουν σε έναν ποταμό ή σε έναν στενό κόλπο στην αντίθετη κατεύθυνση όμως με τη φορά του ποταμού ή του τρέχοντος κόλπου.

4.2 Σολιτονιακές λύσεις της KdV

4.2.1 Για την αδιάστατη μορφή της KdV

4.2.1.1 Μέσω της Explicit μεθόδου

Θα κατασκευάσουμε μια σολιτονιακή λύση για την κανονική KdV εξίσωση σε αδιάστατη μορφή μέσω της Explicit μεθόδου.

Για την (3.72), δηλαδή την

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

αναμένουμε η λύση να ακολουθεί τον τύπο d' Alembert, δηλαδή να είναι της μορφής

$$u(x, t) = f(x \mp vt) \equiv u(y)$$

Γι' αυτό το λόγο, στην (3.72) θα θέσουμε $u = u(y)$, όπου $y = y(x, t) = x \mp vt$, με v σταθερά. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'(y) y'$$

με $\frac{\partial y}{\partial x} = x' = 1$ και $\frac{\partial y}{\partial t} = (\mp vt)' = \mp v$. Η (3.72) γράφεται

$$\mp v u' \pm 6u u' + u'' = 0$$

Ολοκληρώνουμε ως προς u

$$\mp u v \pm 3u^2 + u'' + A_1 = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με u'

$$\mp u u' v \pm 3u' u^2 + u' u'' + A_1 u' = 0$$

και ολοκληρώνουμε ως προς u

$$\mp \frac{u^2}{2} v \pm u^3 + \frac{(u')^2}{2} + A_1 u + A_2 = 0$$

Θέλουμε $u, u' \rightarrow 0$, καθώς $y \rightarrow \pm\infty$, δηλαδή θέλουμε $A_1 = A_2 = 0$. Τότε

$$\mp \frac{u^2}{2} v \pm u^3 + \frac{(u')^2}{2} = 0 \implies (u')^2 = \pm u^2 (v \mp 2u) \implies$$

$$\implies \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \pm u^2 (v \mp 2u) \implies \frac{du}{dy} = \pm u \sqrt{v \mp 2u}$$

Με χωρισμό μεταβλητών έχουμε

$$\frac{du}{\pm u \sqrt{v \mp 2u}} = dy$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέρη

$$\int_0^z \frac{du}{\pm u\sqrt{v \mp 2u}} = \int_{y_0}^y ds$$

Για να λύσουμε το ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$u := \frac{1}{2}v \sec h^2 w \implies w = \sec h^{-1} \sqrt{\frac{2u}{v}}$$

Τότε θα έχουμε για $v - 2u = v(1 - \sec h^2 w) = v \tanh^2 w$. Επίσης θα ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{du}{dw} &= \frac{1}{2}v \sec h^2 w = \frac{1}{2}v(1 - \tanh^2 w) = \\ &= -v \tanh w \sec h^2 w = -v \tanh w \frac{1}{\cosh^2 w} = -v \frac{\sinh w}{\cosh^3 w} \end{aligned}$$

Για $u = 0 \implies w = 0$, ενώ για $u = z \implies u = w$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \int_0^w -2 \frac{\sinh w}{\sqrt{v} \sec h^2 w \tanh w \cosh^3 w} dw = \\ &= \int_0^w -\frac{2}{\sqrt{v}(1 - \tanh^2 w) \cosh^2 w} dw = \int_0^w -\frac{2 \cosh^2 w}{\sqrt{v} \cosh^2 w} dw = \frac{-2w}{\sqrt{v}} \implies \\ \implies y - y_0 &= \frac{-2}{\sqrt{v}} \sec h^{-1} \sqrt{\frac{2u}{v}} \implies -\frac{(y - y_0) \sqrt{v}}{2} = \sec h^{-1} \sqrt{\frac{2u}{v}} \implies \\ \implies \sec h \left(\frac{(y - y_0) \sqrt{v}}{2} \right) &= -\sqrt{\frac{2u}{v}} \implies u(y) = \frac{v}{2} \sec h^2 \left(\frac{(y - y_0) \sqrt{v}}{2} \right) \end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και για $v + 2u$. Εν τέλει η λύση της (3.72) για την αρχική θέση $y_0 = x_0$ είναι

$$u(x, t) = \pm \frac{v}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - x_0 \mp vt) \right)$$

Η περίπτωση

$$u(x, t) = +\frac{v}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - x_0 - vt) \right)$$

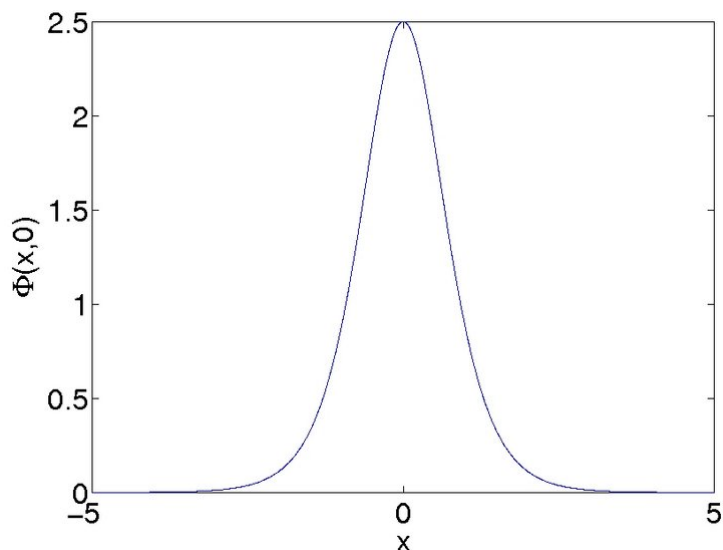
αντιστοιχεί στην ‘προς τα δεξιά’ κίνηση του κύματος, ενώ η περίπτωση

$$u(x, t) = -\frac{v}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - x_0 + vt) \right)$$

αντιστοιχεί στην ‘προς τα αριστερά’ κίνησή του.

Για $v = 4\beta^2$ μια σολιτονιακή λύση που εισάγεται από την εξίσωση KdV με κανονική, αδιάστατη μορφή, (3.72), είναι

$$u(x, t) = \pm 2\beta^2 \sec h^2 (\beta (x - x_0 \mp 4\beta^2 t)) \quad (4.1)$$



Σχήμα 4.2: Γράφημα της λύσης για την αδιάστατη KdV εξίσωση με $v = 5$ και $x_0 = 0$ και $t = 0$

Σημειώνουμε, ότι η κυματική ταχύτητα $c_0 = 4\beta^2$, είναι διπλάσια από το πλάτος του κύματος. Επίσης το $+$ αντιστοιχεί στο $\gamma > 0$ που από φυσική σκοπιά είναι μια θετική ανύψωση της κυματικής κίνησης στην επιφάνεια. Το $-$ αντιστοιχεί στο $\gamma < 0$ που από φυσική σκοπιά είναι μια βύθιση της επιφάνειας του νερού. (Υπενθυμίζουμε ότι $\gamma = \frac{h^2}{6} - \frac{T}{2\rho g}$.) Το μεμονωμένο κύμα ή σολιτονιακή λύση, (4.1) είναι σε αδιάστατη μορφή.

4.2.1.2 Μέσω του μετασχηματισμού Bäcklund

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια σολιτονιακή λύση για την κανονική KdV εξίσωση σε αδιάστατη μορφή μέσω του μετασχηματισμού Bäcklund.

Εισάγουμε μια συνάρτηση q με την ιδιότητα $q_x = u$. Τότε η (3.72), δηλαδή η

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

γίνεται

$$q_{tx} \pm 6q_x q_{xx} + q_{xxx} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial x} (q_t \pm 3q_x^2 + q_{xxx}) = 0$$

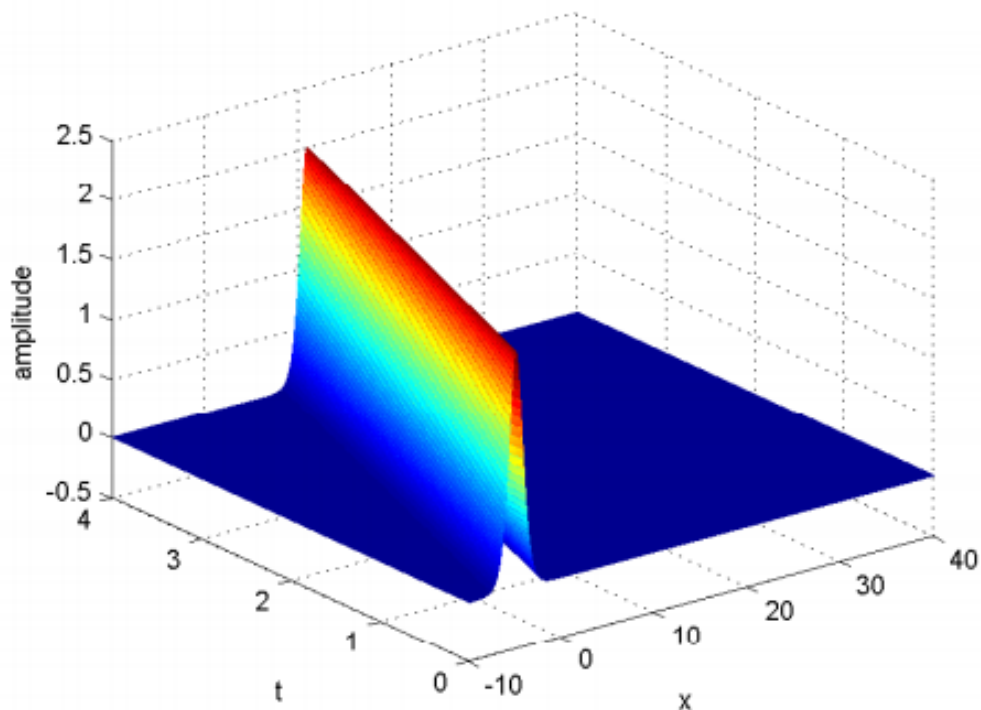
Ολοκληρώνουμε ως προς x

$$q_t \pm 3q_x^2 + q_{xxx} = f(x)$$

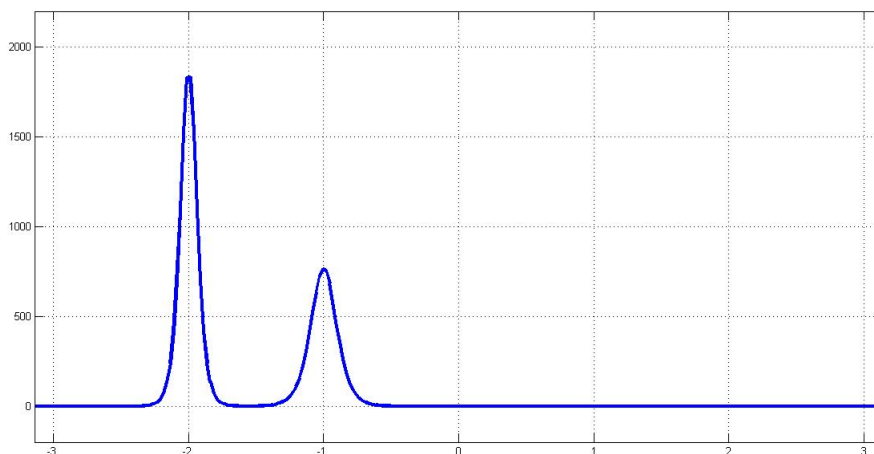
Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θέσουμε $f(x) = 0$. Έτσι έχουμε

$$q_t \pm 3q_x^2 + q_{xxx} = 0 \tag{4.2}$$

Ο μετασχηματισμός Bäcklund που αφήνει αμετάβλητη μια εξίσωση ονομάζεται Auto-Bäcklund.



Σχήμα 4.3: Plot της λύσης για την αδιάστατη KdV εξίσωση με $\beta = 1$ και $x_0 = 5$ στην περιοχή $[-10, 40] \times [0, 4]$



Σχήμα 4.4: Plot της λύσης για την KdV εξίσωση $u_t \pm uu_x + u_{xxx} = 0$ για $x = 0$, $t = 0.005$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

Ο μετασχηματισμός Auto-Bäcklund δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\xi &= -q_x + \beta - \frac{1}{2}(q - \tilde{q})^2 \\ \tilde{q}_\tau &= -q_t + (q - \tilde{q})(q_{xx} - q\tilde{q}_\xi) - 2(q_x^2 + q_x\tilde{q}_\xi + \tilde{q}_\xi^2) \\ \xi &= x, \quad \tau = t \end{aligned} \quad (4.3)$$

Η παράμετρος β ονομάζεται Bäcklund παράμετρος. Τώρα θα παράγουμε μια μη τετριμμένη λύση εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (4.3) στην τετριμμένη λύση (4.2) η οποία προφανώς τις πληροί. Με $\tilde{q} \equiv 0$ οι δυο πρώτες εξισώσεις τής (4.3) δίνουν

$$q_x = \beta - \frac{1}{2}q^2 \quad (4.4)$$

και

$$q_t = qq_{xx} - 2q_x^2 \quad (4.5)$$

Ολοκληρώνοντας την (4.4) και αντικαθιστώντας την στην (4.5) προκύπτουν δυο τύποι λύσεων που τις ικανοποιούν

$$q(x, t) = \sqrt{2\beta} \tanh \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (4.6)$$

$$\bar{q}(x, t) = \sqrt{2\beta} \coth \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (4.7)$$

Η (4.7) έχει ένα ιδιάζον σημείο, εκεί όπου μηδενίζεται το όρισμα του \coth . Τώρα ολοκληρώνοντας τις (4.6) και (4.7) ως προς x βρίσκουμε δυο λύσεις για την KdV εξίσωση

$$u(x, t) = q_x(x, t) = \beta^* \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta^*}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (4.8)$$

$$\bar{u}(x, t) = \bar{q}_x(x, t) = -\beta^* \operatorname{csch}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta^*}{2}}(x - 2\beta t) \right] \quad (4.9)$$

Η λύση (4.8) είναι κανονική, ενώ η (4.9) ιδιάζουσα και δεν αποτελεί σολιτόνιο διότι για $x - 2\beta t = 0$ δεν φράσσεται. Η σχέση ανάμεσα στις παραμέτρους β και β^* είναι $\beta^* = \frac{\beta}{2}$.

4.2.1.3 Μέσω της tanh μεθόδου

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια σολιτονιακή λύση για την κανονική KdV εξίσωση σε αδιάστατη μορφή μέσω της tanh μεθόδου.

Αρχικά, αντικαθιστούμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y με μια νέα, $w = k(x - vt)$, η οποία ορίζει το κινούμενο πλαίσιο αναφοράς. Εδώ, το k συμβολίζει τον κυματικό αριθμό και το v την ταχύτητα του κινούμενου κύματος. Και οι δυο παράμετροι είναι ακαθόριστες, όμως υποθέτουμε ότι $k > 0$. Τότε η (3.72), δηλαδή η

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

μέσω του μετασχηματισμού $u(x, t) = y(w)$ απλοποιείται σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση

$$-kvy' \pm 6kyg' + ky''' = 0 \quad (4.10)$$

Έπειτα εισάγουμε την $Y = \tanh(w)$ και την αντικαθιστούμε στην (4.10)

$$\begin{aligned} & -kv(1-Y^2) \frac{dF(Y)}{dY} \pm 6kF(Y)(1-Y^2) \frac{dF(Y)}{dY} + \\ & + k(1-Y^2) \frac{d}{dY} \left\{ (1-Y^2) \frac{d}{dY} \left[(1-Y^2) \frac{dF(Y)}{dY} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Οι συντελεστές της (4.10) για $y(w) = F(Y)$, δηλαδή οι συντελεστές της (4.11), εξαρτώνται μόνο από το Y , διότι $\frac{d}{dw}$ και οι υπακόλουθες παράγωγοι αντικαθίστανται από $(1-Y^2) \frac{d}{dY}$, κλπ. Γι' αυτόν το λόγο αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$F(Y) = \sum_{n=0}^N a_n Y^n \quad (4.12)$$

δηλαδή μια πεπερασμένη σειρά δυνάμεων του Y που ενσωματώνει σολιτονιακά κύματα. Η διαδικασία εξισορρόπησης καθορίζει τον βαθμό N της σειράς. Αντικαθιστώντας την (4.12) στην (4.11) βλέπουμε ότι οι μεγαλύτερες δυνάμεις του Y εμφανίζονται στον δεύτερο όρο της (4.11) με Y^{2N+1} και στον τελευταίο όρο της (4.11) με Y^{N+3} . Εξισορροπώντας αυτούς τους όρους έχουμε

$$2N + 1 = N + 3 \implies N = 2$$

Μια λύση τελικά μπορεί να προκύψει μέσω της (4.12) στο $N = 2$. Αντικαθιστώντας την στην (4.11) έχουμε

$$F(Y) = a_0 - 2k^2 Y^2$$

και

$$v = a_0 - 8k^2$$

Απαιτούμε η λύση να μηδενίζεται για $w \rightarrow \infty \implies Y \rightarrow 1$, οπότε

$$F(Y) = 2k^2 (1 - Y^2)$$

με

$$v = 4k^2$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές έχουμε

$$u(x, t) = \pm 2k^2 \operatorname{sech}^2(k(x - x_0 \mp vt))$$

4.2.2 Για τη διαστατική μορφή της KdV

Μπορούμε να μετατρέψουμε τη λύση (4.1) σε λύση της διαστατικής εξίσωσης KdV (3.49), δηλαδή της

$$\frac{1}{c_0}\eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6}\eta_{xxx} + \frac{3}{2h}\eta\eta_x = 0$$

Εδώ θα θεωρήσουμε $\gamma > 0$ και θα γράψουμε την (3.46), δηλαδή την

$$2U_T + \frac{1}{3}U_{\xi\xi\xi} + 3UU_\xi = 0$$

στη μορφή

$$2U'_{T'} + \frac{1}{3}U'_{\xi'\xi'\xi'} + 3U'U'_{\xi'} = 0$$

όπου συμβολίζουμε όλες τις μεταβλητές με τόνο. Αλλάζουμε κλίμακα στις μεταβλητές καταλλήλως, θεωρώντας την ακόλουθη μετατροπή των συντεταγμένων

$$\xi' = l_1\xi, \quad T' = l_2T, \quad U' = l_3U$$

Τότε η (3.46) γίνεται

$$\frac{2}{l_2}U_T + \frac{1}{3l_1^3}U_{\xi\xi\xi} + 3\frac{l_3}{l_1}UU_\xi = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{l_1}{l_3}$ παίρνουμε

$$\frac{2l_1}{l_2l_3}U_T + \frac{1}{3l_1^2l_3}U_{\xi\xi\xi} + 3UU_\xi = 0$$

Για να περάσουμε την (3.46) σε κανονική μορφή (3.72), θέτουμε

$$\frac{2l_1}{l_2l_3} = \frac{1}{2}$$

και

$$\frac{1}{3l_1^2l_3} = \frac{1}{2}$$

Μια λύση είναι $(l_1, l_2, l_3) = (1, 6, \frac{2}{3})$. Τώρα η σολιτονιακή λύση παίρνει τη μορφή

$$U'(\xi, T) = \frac{4\beta^2}{3}\operatorname{sech}^2\left(\beta\left(\xi - \frac{2}{3}\beta^2T - x_0\right)\right)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε $\xi' = x' - t'$ και $T' = \varepsilon t'$ για να βρούμε

$$U'(x', t') = \frac{4\beta^2}{3}\operatorname{sech}^2\left(\beta\left(x' - \left(1 + \frac{2}{3}\beta^2\varepsilon\right)t' - x_0\right)\right)$$

Η διαστατική λύση χρησιμοποιεί την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών

$$\eta = aU', \quad x = \lambda_x x', \quad t = \frac{\lambda_x}{c_0} t'$$

Αντικαθιστώντας στη λύση, έχουμε

$$\eta(x, t) = \frac{4\beta^2 a}{3} \operatorname{sech}^2 \left(\beta \left(\frac{x}{\lambda_x} - \left(1 + \frac{2}{3} \beta^2 \varepsilon \right) \frac{c_0}{\lambda_x} t - \frac{x_0}{\lambda_x} \right) \right)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $\frac{a}{h} = \varepsilon$, $\mu = \frac{h}{\lambda_x}$ και $\mu^2 = \varepsilon$ για να γράψουμε τη διαστατική λύση της εξίσωσης KdV στη μορφή

$$\frac{\eta}{h} = \frac{4\beta^2 \varepsilon}{3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\beta}{h} \sqrt{\varepsilon} \left(x - \left(1 + \frac{2}{3} \beta^2 \varepsilon \right) c_0 t - x_0 \right) \right)$$

Ας σημειώσουμε ότι β και ε είναι και οι δυο αδιάστατοι αριθμοί και το ε σχετίζεται με το μέγεθος ενός τυπικού κυματικού πλάτους. Θυμίζουμε τις σχέσεις $a = |\eta_{\max}|$ και $c_0^2 = gh$. Η επιπλέον ταχύτητα πέρα από την ταχύτητα των μεγάλων κυμάτων είναι $\frac{2\beta^2 c_0 \varepsilon}{3}$.

4.3 Αλληλεπιδράσεις μη γραμμικών, ρηχών κυματικών σολιτονίων ωκεανού σε επίπεδες παραλίες

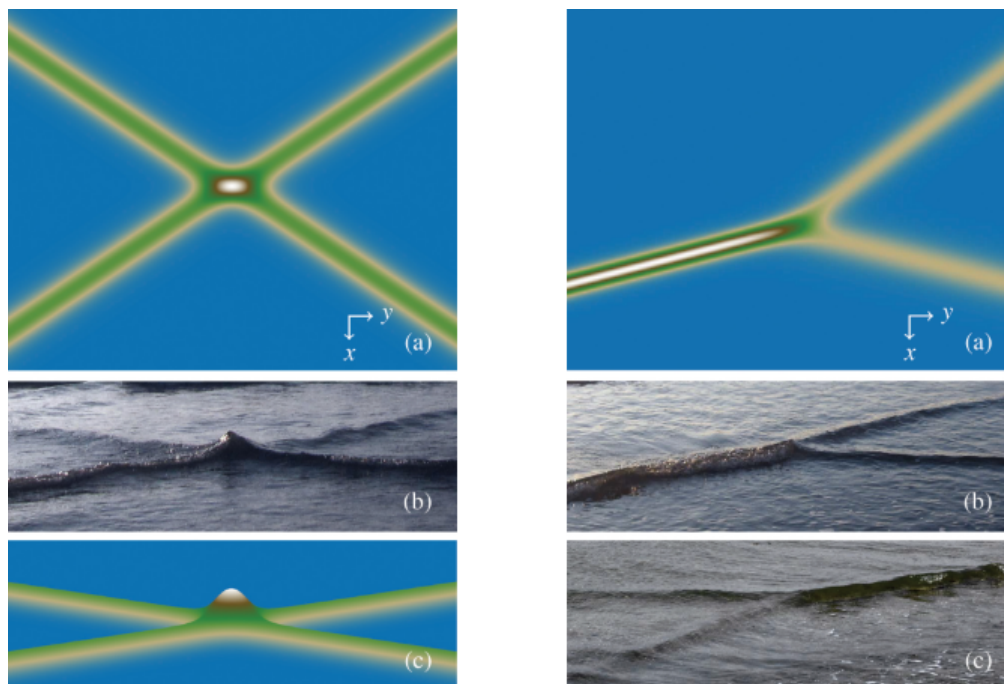
Τα κύματα του ωκεανού είναι πολύπλοκα και συχνά ταραγμένα. Ενώ οι περισσότερες αλληλεπιδράσεις των κυμάτων του ωκεανού είναι ουσιαστικά γραμμικές, μερικές φορές δύο ή περισσότερα κύματα αλληλεπιδρούν με έναν μη γραμμικό τρόπο. Για παράδειγμα, δύο ή περισσότερα κύματα μπορούν να αλληλεπιδράσουν και η απόδοση των κυμάτων αυτών τελικά να είναι πολύ υψηλότερη από το άθροισμα των αρχικών κυματικών υψών τους. Οι περισσότερες από τις αλληλεπιδράσεις των μη γραμμικών κυμάτων σε ρηχά νερά μοιάζουν με ένα X ή Y ή δύο συνδεδεμένα Y , ενώ σε άλλες περιπτώσεις διάφορες γραμμές εμφανίζονται σε κάθε πλευρά της περιοχής αλληλεπίδρασης. Θεωρήθηκε αρχικά ότι αυτές οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις είναι σπάνια γεγονότα. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι. Εδώ αναφέρουμε ότι οι εν λόγω μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις συμβαίνουν κάθε μέρα, κοντά στην άμπωτη, σε δύο επίπεδες παραλίες που απέχουν περίπου 2.000 χιλιόμετρα. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις είναι στενά συνδεδεμένες με τις αναλυτικές, σολιτονικές λύσεις από μια πολυδιάστατη μη γραμμική κυματική εξίσωση που έχει μελετηθεί ευρέως. Σε μια πολύ μεγαλύτερη κλίμακα, τα κύματα των τσουνάμι μπορεί να συγχωνευτούν με παρόμοιους τρόπους.

Η μελέτη των κυμάτων νερού έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές, συμπεριλαμβανομένων της ναυτικής αρχιτεκτονικής, της εξερεύνησης πετρελαίου και της διάδοσης των τσουνάμις. Οι εξισώσεις αυτών των κυμάτων είναι έντονα μη γραμμικές και έχουν ελεύθερο σύνορο στο σημείο όπου το νερό συναντά τον αέρα. Αυτά τα φαινόμενα είναι στενά συνδεδεμένα με την αναλυτική λύση μιας πολυδιάστατης μη γραμμικών κυμάτων εξίσωσης που έχει μελετηθεί εκτενώς από το 1970 και αποτελεί μια γενίκευση της εξίσωσης που μελετήθηκε από τους Korteweg και de Vries το 1895, η οποία έδωσε αφορμή για την έννοια των σολιτονίων.

Παρατηρήθηκαν τρεις τύποι αλληλεπιδράσεων με μορφή X :

μια αλληλεπίδραση με ένα κοντό κορμό,

μια αλληλεπίδραση με έναν μακρύ κορμό όπου το ύψος του είναι υψηλότερο από τις εισερχόμενες



Σχήμα 4.5: Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων X και Y τύπου με κοντό κορμό

γραμμές σολιτονίων,

και μια αλληλεπίδραση με έναν μακρύ κορμό όπου το ύψος του είναι χαμηλότερο από την υψηλότερη εισερχόμενη γραμμή σολιτονίου.

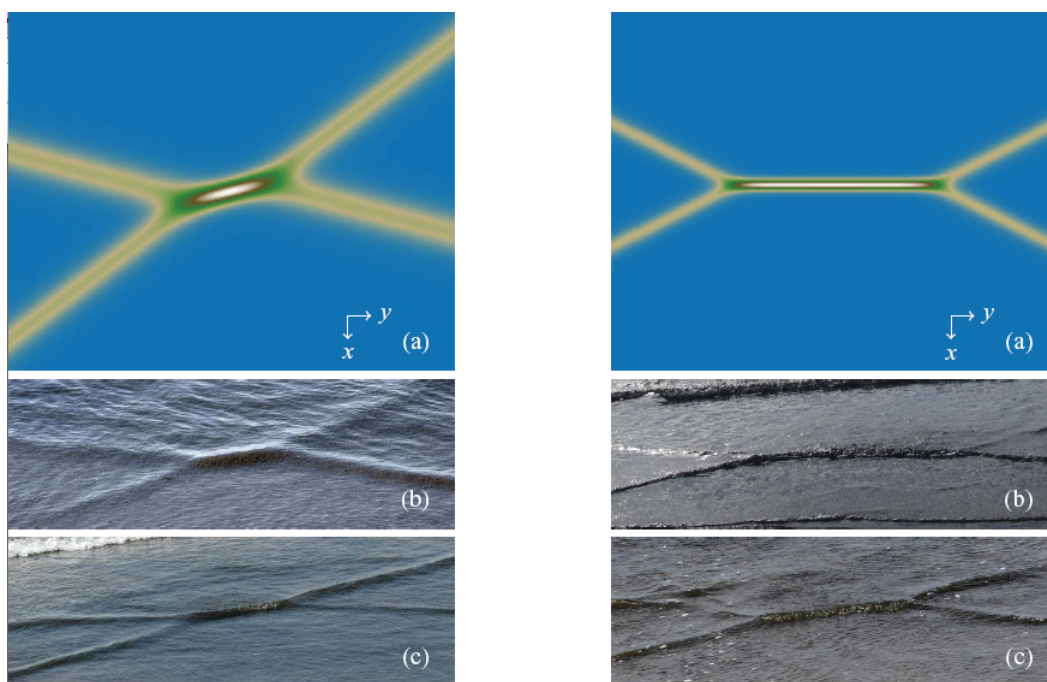
Το πλάτος της αλληλεπίδρασης X -τύπου χαμηλού κορμού μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο σε βαθύτερα νερά. Είναι ενδιαφέρον ότι το μήκος του κορμού συχνά αυξάνει όσο το βάθος μειώνεται.

Η εξίσωση KP, (3.70)

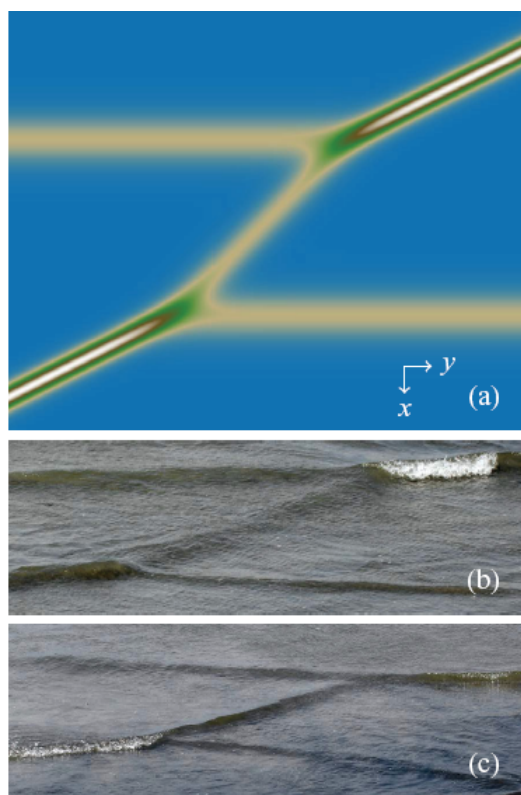
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c_0} \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2h} \eta \eta_x + \gamma \eta_{xxx} \right) + \frac{1}{2} \eta_{yy} = 0$$

που παρήχθη νωρίτερα, είναι μια εξίσωση 2 + 1 διαστάσεων, όπου το 2 αναφέρεται στο χώρο και το 1 στο χρόνο και αποτελεί μια άμεση γενίκευση της KdV εξίσωσης 1 + 1 διαστάσεων. Η KP διέπει στην x κατεύθυνση, σε μέγιστη ισορροπία, ασθενείς μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών με ασθενή διασπορά στην y κατεύθυνση. Εδώ, οι δείκτες δηλώνουν τις μερικές παραγώγους, το $\eta = \eta(x, y, t)$ είναι το ύψος του κύματος πάνω από το σταθερό μέσο ύψος h , το g είναι η βαρύτητα, $c_0 = \sqrt{gh}$ είναι η κυματική ταχύτητα, το $\gamma = \frac{h^2}{6} (1 - 3\hat{T})$, όπου $\hat{T} = \frac{T}{\rho g h^2}$ είναι ένας αδιάστατος επιφανειακός συντελεστής τάσης, και ρ είναι η πυκνότητα. Όταν δεν υπάρχει y εξάρτηση, η εξίσωση απλοποιείται στην εξίσωση KdV. Το πρόσημο του γ είναι σημαντικό διότι υπάρχει μεγάλη επιφανειακή τάση όταν $\gamma < 0$ και η εξίσωση καλείται KPI, ενώ υπάρχει μικρή επιφανειακή τάση όταν $\gamma > 0$ και η εξίσωση τότε ονομάζεται KPII. Μπορούμε να προσαρμόσουμε την κλίμακα της (3.70) στην αδιάστατη μορφή

$$(u(t) + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0$$



Σχήμα 4.6: Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων X τύπου με μακρύ κορμό όπου το ύψος του είναι υψηλότερο από τις εισερχόμενες γραμμές σολιτονίων



Σχήμα 4.7: Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων X τύπου με μακρύ κορμό όπου το ύψος του είναι χαμηλότερο από την υψηλότερη εισερχόμενη γραμμή σολιτονίου

όπως είδαμε πριν (εξίσωση (3.71)), όπου το u σχετίζεται με το ύψος του κύματος η και $\sigma = \pm 1$ που αντιστοιχεί στο πρόσημο του γ .

4.3.1 Σολιτονιακή λύση για την KPI

Η αδιάστατη εξίσωση KPI για κύματα νερού με μεγάλη επιφανειακή τάση (3.71) για $\sigma = -1$, δηλαδή η

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) - 3u_{yy} = 0$$

επιδέχεται την ακόλουθη μη ιδιάζουσα κινούμενη “lump” σολιτονιακή λύση

$$u = (x, y, t) = 2\partial_x^2 \left[\log (\hat{x} - 2k_R \hat{y})^2 + 4k_I^2 \hat{y}^2 + \frac{1}{4k_I^2} \right]$$

$$\hat{x} = x - 12(k_R^2 + k_I^2)t - x_0$$

$$\hat{y} = y - 12k_R t - y_0$$

η οποία φθίνει κατά τον x και y άξονα. Προσφάτως παρατηρήθηκε ένα μεγάλης επιφανειακής τάσης μονοδιάστατο σολιτόνιο που ικανοποιεί την εξίσωση KdV και το οποίο είχε μεγάλη πτώση από το μέσο ύψος.

Με τον όρο “lumps” εννοούμε σολιτονιακές λύσεις που φθίνουν αλγεβρικά και όχι εκθετικά όπως οι ‘dromions’, γι’ αυτό και περιγράφονται ως ‘ασθενώς τοπικές’. Σημειώνουμε ότι η λύση lump κινείται μόνο κατά τη θετική x διεύθυνση.

Αν υπάρχει μια λύση για την (3.71) τέτοια ώστε $u, u_x, u_t, u_{xxx} \rightarrow 0$, καθώς $x \rightarrow -\infty$ τότε έχουμε

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -3\sigma \int_{-\infty}^x u_{yy} dx'$$

Συγκεκριμένα, αν $u, u_x, u_t, u_{xxx} \rightarrow 0$, καθώς $x \rightarrow \infty$ τότε επίσης έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}(x, y, t) dx = 0$$

Αν δοθεί μια γενική αρχική συνθήκη $u(x, y, t=0) = u_0(x, y)$ δεν χρειάζεται να ικανοποιείται αυτός ο περιορισμός στην πρώτη στιγμή.

Για την γραμμικοποιημένη εκδοχή της KP εξίσωσης, αν η αρχική συνθήκη ικανοποιεί

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) dx \neq 0$$

εν τούτοις για τη λύση ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) dx = 0, \quad \forall t \neq 0$$

και η εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t}$ είναι ασυνεχής στο $t = 0$.

Μια ακριβής λύση για την εξίσωση KPI δίνεται και από τον τύπο Hirota

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial x^2}$$

όπου το φ ορίζεται ως εξής

$$\varphi = \det \left[(x - 2k_{i\pm}y + 12k_{i\pm}^2t + \gamma_{i\pm}) \cdot \delta_{i,l} - j \cdot \frac{(1 - \delta_{i,l})}{k_{i\pm} - k_{l\pm}} \right]$$

όπου $\delta_{i,l}$ είναι το σύμβολο Kronecker. Εδώ $i, l = 1, 2, \dots, N \equiv 2M$ όπου το M καθορίζει τον αριθμό των σολιτονίων. Οι παράμετροι $k_{i\pm} = k_{iR} \pm jk_{iI}$ και $\gamma_{i\pm} = \gamma_{iR} \pm j\gamma_{iI}$ καθορίζουν το πλάτος (ταχύτητα) και τη φάση καθενός σολιτονίου.

4.3.2 Σολιτονιακές λύσεις για την KP II και αλληλεπιδράσεις

Η αδιάστατη KP II εξίσωση για κύματα νερού με μικρή επιφανειακή τάση (όπως ισχύει για τα κύματα του ωκεανού) (3.71) για $\sigma = +1$, δηλαδή η

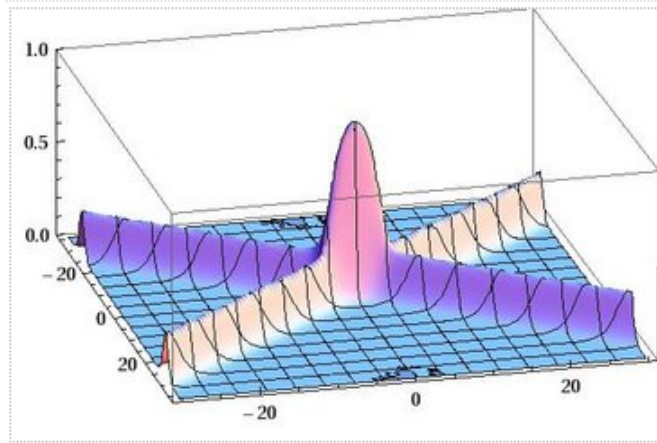
$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + 3u_{yy} = 0$$

έχει λύσεις μονοφασικές, τις οποίες θα ονομάζουμε γραμμές σολιτονίων, ενώ μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι επιδράσεις τους. Αυτές οι λύσεις μπορούν να βρεθούν από τις λεγόμενες άμεσες μεθόδους, όπως η Hirota. Ειδικές N -σολιτονιακές λύσεις της εξίσωσης KP μπορεί να γραφτούν στη μορφή

$$u = u_N = 2 \frac{\partial^2 F_N}{\partial x^2} \quad (4.13)$$

όπου F_N είναι ένα πολυώνυμο με όρους κατάλληλων εκθετικών. Μία N -σολιτονιακή λύση είναι μία λύση $u(x, y, t)$ που έχει το ίδιο σύνολο N γραμμών σολιτονιακών λύσεων και στα δύο ασυμπτωτικά $y \rightarrow \infty$ και $y \rightarrow -\infty$. Οι N -σολιτονιακές λύσεις περιλαμβάνουν όλες τις δυνατές έντονες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των γραμμών σολιτονίων. Οι γραμμές σολιτονιακών λύσεων φθίνουν εκθετικά σε όλον τον πεπερασμένο αριθμό των διευθύνσεων και είναι μια γενίκευση των N -σολιτονιακών λύσεων της KdV εξίσωσης, (3.72), που παίρνει τη μορφή

$$u = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln F$$



Σχήμα 4.8: Plot λύσης της KPII για την αλληλεπίδραση 2-γραμμών σολιτονίων κυμάτων

όπου F είναι η ορίζουσα ενός κύριου πίνακα. Η λύση (4.13) είναι βολική για την εύρεση της απλούστερης λύσης. Οι τρεις πρώτες είναι

$$F_1 = 1 + \exp \eta_1$$

$$F_2 = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 + \exp (\eta_1 + \eta_2 + A_{12})$$

$$F_3 = 1 + \sum_{1 \leq i \leq 3} \exp \eta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} [\exp (\eta_i + \eta_j + A_{ij})] + \exp (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{13} + A_{23})$$

όπου $\eta_j = k_j [x + P_j y - (k_j^2 + 3\sigma P_j^2) t] + \eta_j^{(0)}$, $k_j, P_j, \eta_j^{(0)}$ είναι σταθερές και

$$\exp A_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2 - \sigma (P_i - P_j)^2}{(k_i + k_j)^2 - \sigma (P_i + P_j)^2}, \quad i < j$$

Για την KPII (όπου $\sigma = +1$), τα u_1, F_1 αντιστοιχούν στο απλούστερο 1-γραμμής σολιτόνιο, το οποίο είναι ουσιαστικά μονοδιάστατο. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση των u_2, F_2 αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση 2-γραμμών σολιτονίων κυμάτων. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις έχουν ξεχωριστά μοτίβα.

Όταν $\exp A_{12} = \mathcal{O}(1)$, παίρνουμε μια αλληλεπίδραση X -τύπου με έναν κοντό κορμό.

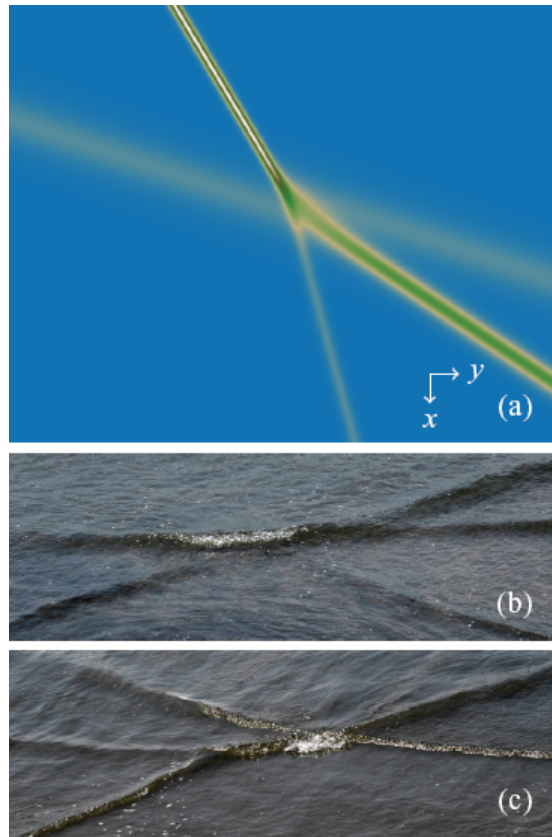
Όταν $\exp A_{12} \gg 1$, παίρνουμε μια αλληλεπίδραση X -τύπου με έναν μακρύ κορμό, όπου το ύψος του κορμού είναι υψηλότερο από τις εισερχόμενες γραμμές σολιτονίων.

Όταν $\exp A_{12} \ll 1$, παίρνουμε μια αλληλεπίδραση X -τύπου με έναν μακρύ κορμό, όπου το ύψος του κορμού είναι χαμηλότερο από τις υψηλότερες εισερχόμενες γραμμές σολιτονίων.

Όταν $\exp A_{12} = 0$, παίρνουμε μια αλληλεπίδραση Y -τύπου.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το μήκος των κορμών φαίνεται να συσχετίζεται με το βάθος του νερού. Μικροί κορμοί όπου $\exp A_{12} = \mathcal{O}(1)$, βρίσκονται συνήθως σε πολύ βαθύτερο νερό από ό,τι μακρείς κορμοί αλληλεπιδράσεων X ή Y -τύπου κύματος όπου $\exp A_{12} \gg 1$ ή $\exp A_{12} \ll 1$.

Προσφάτως, νέες και εξωτικές μεμβρανώδεις δομές έχουν βρεθεί για την KP εξίσωση (N-μέσα-M-έξω) χρησιμοποιώντας μεθόδους Wronski που υπερβαίνουν το απλούστερο ‘δομικό μπλοκ’



Σχήμα 4.9: Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων της μορφής 3-μέσα-2 έζω, όπου υπάρχουν 3 γραμμικά σολιτόνια αριστερά της περιοχής αλληλεπίδρασης και 2 δεξιά

λύσεων των X και Y -τύπου λύσεων γραμμών σολιτονίων. Σημειώνουμε επίσης ότι μια N -μέσα- M -έζω λύση (όπου $M < N$) μπορεί να βρεθεί ξεκινώντας με F_N και παίρνοντας k_i και P_j έτσι ώστε $\exp^{A_{M,N}} = \dots = \exp^{A_{N-1,N}} = 0$. Δείχθηκε πρόσφατα ότι αυτές οι αλληλεπιδράσεις γραμμών εξακολουθούν να βρίσκονται με βάση τις διαταραχές της επόμενης τάξης στις εξισώσεις για τα κύματα του νερού, ενώ ο κορμός μπορεί να είναι τέσσερις φορές τα ύψη των εισερχομένων σολιτονίων γραμμής στην εξίσωση KP, είναι λιγότερο από τέσσερις φορές το ύψος, όταν περιλαμβάνονται όροι μεγαλύτερης τάξης.

Η KP II

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + u_{yy} = 0$$

μέσω του μετασχηματισμού $u(x, t) = u(w)$, όπου $w = x + ry - ct$ και από τον κανόνα αλυσίδας γράφεται

$$\begin{aligned} (-cu'(w) + 6u(w)u'(w) + u'''(w))' + u''(w)r &= 0 \implies \\ \implies (-cu' + 6uu' + u''')' + u''r &= 0 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας μία φορά έχουμε

$$-cu' + 6uu' + u''' + u''r + K = 0$$

Ολοκληρώνοντας ξανά παίρνουμε

$$-cu + 3u^2 + u'' + ru + Ku + L = 0$$

Παίρνοντας $K = L = 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, καταλήγουμε σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση

$$(-c + r)u + 3u^2 + u'' = 0 \quad (4.14)$$

Εξισορροπώντας το μη γραμμικό όρο u^2 με την μεγαλύτερης τάξη παράγωγο u'' παίρνουμε $M = 2$, όπου

$$u(w) = S(Y) = \sum_{i=0}^M a_i Y^i + \sum_{i=1}^M b_i Y^{-i}$$

δηλαδή

$$u(x, t) = S(Y) = \sum_{i=0}^2 a_i Y^i + \sum_{i=1}^2 b_i Y^{-i} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας την (4.15) στην (4.14), συγκεντρώνοντας τους συντελεστές κάθε δύναμης του Y^i , $0 \leq i \leq 8$, θέτοντας κάθε συντελεστή με μηδέν και λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων, βρίσκουμε $a_1 = b_1 = 0$ και τα ακόλουθα σύνολα εξισώσεων

$$a_0 = \frac{c - r^2}{2}, \quad a_2 = -\frac{c - r^2}{2}, \quad b_2 = 0, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{c - r^2}, \quad c > r^2$$

$$a_0 = -\frac{c - r^2}{6}, \quad a_2 = \frac{c - r^2}{2}, \quad b_2 = 0, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - c}, \quad c < r^2$$

$$a_0 = \frac{c - r^2}{2}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = -\frac{c - r^2}{2}, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{c - r^2}, \quad c > r^2$$

$$a_0 = -\frac{c - r^2}{6}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{c - r^2}{2}, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - c}, \quad c < r^2$$

Αντικαθιστώντας στην (4.15) βρίσκουμε τελικά τις σολιτονιακές λύσεις

$$u_1(x, y, t) = \frac{c - r^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c - r^2} (x + ry - ct) \right], \quad c > r^2$$

$$u_2(x, y, t) = -\frac{c - r^2}{6} \left(1 - 3 \tanh^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - c} (x + ry - ct) \right] \right), \quad c < r^2$$

Οι u_1 και u_2 είναι η καθεμιά μία ξεχωριστή σολιτονιακή λύση.

$$u_3(x, y, t) = -\frac{c - r^2}{2} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c - r^2} (x + ry - ct) \right], \quad c > r^2$$

$$u_4(x, y, t) = -\frac{c - r^2}{6} \left(1 - 3 \coth^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - c} (x + ry - ct) \right] \right), \quad c < r^2$$

Οι u_3 και u_4 είναι κινούμενες κυματικές λύσεις, για τις οποίες παίζει πολύ σημαντικό ρόλο η

παράμετρος c . Ως εκ τούτου, παίρνουμε τις ακόλουθες επίπεδες περιοδικές λύσεις

$$u_5(x, y, t) = \frac{c - r^2}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - c} (x + ry - ct) \right], \quad c < r^2$$

$$u_6(x, y, t) = -\frac{c - r^2}{6} \left(1 + 3 \tan^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c - r^2} (x + ry - ct) \right] \right), \quad c > r^2$$

$$u_7(x, y, t) = \frac{c - r^2}{2} \csc^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - c} (x + ry - ct) \right], \quad c < r^2$$

$$u_8(x, y, t) = -\frac{c - r^2}{6} \left(1 + 3 \cot^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c - r^2} (x + ry - ct) \right] \right), \quad c > r^2$$

5 Εφαρμογές της θεωρίας ρηχών νερών

5.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μια επίπεδη λύση του αρμονικού κύματος

$$\eta = a \cos(kx - \omega t), \quad \text{με} \quad \omega = kc_{ph} = k\sqrt{gh_0} \quad (5.1)$$

Η περίοδος των κυμάτων είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$, όπου λ είναι το μήκος κύματος. Αλλιώς γράφουμε

$$\begin{aligned} T = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} &\iff \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{T\sqrt{gh_0}} \iff \frac{h_0}{\lambda} = \frac{h_0}{T\sqrt{gh_0}} \iff \\ &\iff \frac{h_0}{\lambda} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{h_0}{g}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Τώρα, για ένα παλιρροϊκό κύμα, η περίοδος είναι σχεδόν μισή ημέρα, δηλαδή $T \sim 43500$ δευτερόλεπτα. Για βάθος $h_0 = 3$ μέτρα, έχουμε

$$\frac{h_0}{\lambda} \sim 10^{-5}$$

Τότε, οι γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών, εξισώσεις (3.15) και (3.16), είναι εντελώς ακριβείς σε αυτή την περίπτωση. Αυτές οι εξισώσεις συνήθως εφαρμόζονται σε αξιολογήσεις παλιρροϊκών φαινομένων σε εκβολές ποταμών και λιμάνια, αλλά και σε παραλίες με ήπια κλίση.

5.2 Ενίσχυση των κυμάτων σε παραλία με ήπια κλίση

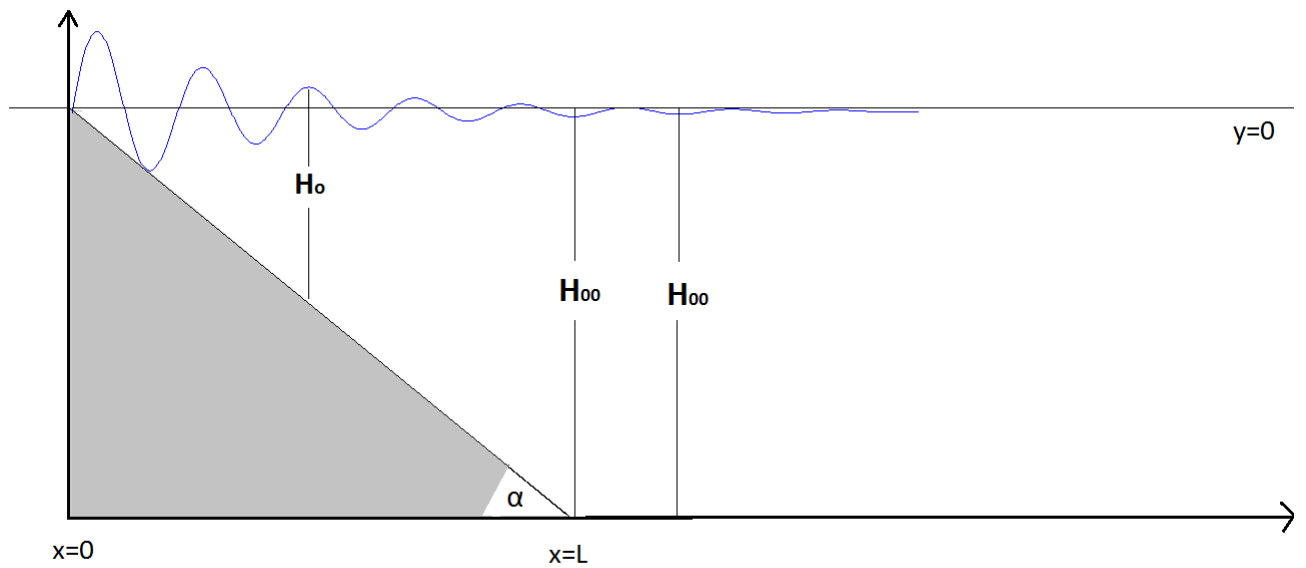
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γραμμικές κυματικές εξισώσεις ρηχών νερών για να μελετήσουμε την επίδραση της ήπιας κλίσης μιας παραλίας σε μικρού εύρους κυμάτα, όπως αυτά πλησιάζουν από τον ωκεανό.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω γράφημα.

Ο βυθός της θάλασσας έχει τη μορφή

$$h_0(x) = \begin{cases} x \tan a = \left(\frac{H_\infty}{L}\right) x, & \text{για } 0 \leq x \leq L \\ H_\infty, & \text{για } x \geq L \end{cases} \quad (5.3)$$

όπου η σταθερά H_∞ συμβολίζει το βάθος του ωκεανού μετά το σημείο $x = L$, οπότε και σταθεροποιείται. Τότε το $x = 0$ αντιστοιχεί στη θέση της ακτής, όπου το βάθος της θάλασσας είναι μηδέν. Θα υποθέσουμε μια παραλία με ήπια κλίση, δηλαδή $H_\infty \ll L \implies a \rightarrow 0$. Αυτή η



Σχήμα 5.1: Ήπια κλίση της παραλίας

υπόθεση είναι πολύ σημαντική, διότι με αυτό τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε

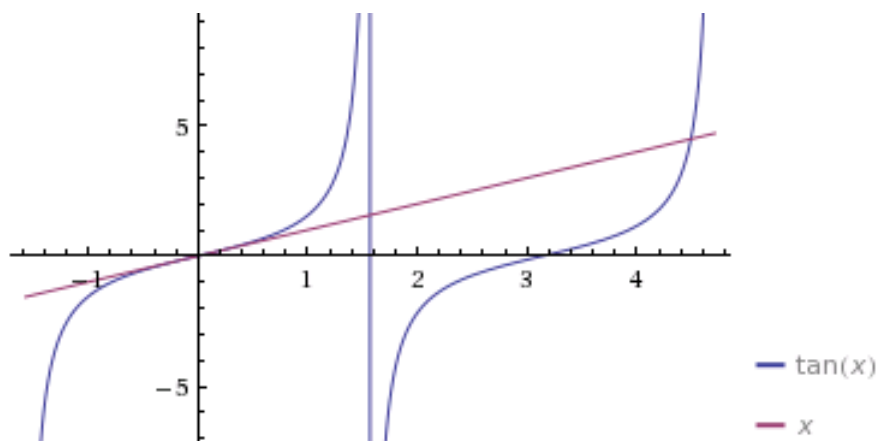
$$\frac{H_\infty}{L} = \tan a \sim a \quad (5.4)$$

Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι εφαρμόζοντας σειρά Taylor για την εφαπτομένη έχουμε

$$\tan a = a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{15}a^5 + \frac{17}{315}a^7 + \dots, \quad \text{για } a^2 < 1$$

Οπότε για $a \ll 1$ οι όροι a^{2k+1} , για $k \in \mathbb{N}$, γίνονται αμελητέοι. Εδώ δίνεται και μια γεωμετρική απόδειξη του ισχυρισμού μας.

Δίνοντας μικρό πλάτος κυμάτων, μπορούμε λογικά να περιμένουμε να χρησιμοποιήσουμε τη

Σχήμα 5.2: Plot της $\tan x$ σε σχέση με την $y = x$

γραμμική κυματική θεωρία ρηχών νερών που αναπτύξαμε προηγουμένως. Ακόμα, εφόσον θεωρούμε ότι τα κύματα πλησιάζουν την ακτή, θα εφαρμόσουμε τις ειδικές περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε μια σταθερά πλάτους b , όπως στην 1η περίπτωση των γραμμικών κυματικών εξισώσεων ρηχών νερών.

Τότε, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.20) και εφαρμόζοντας κανόνας αλυσίδας, βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (5.5)$$

Όμως λόγω της (5.3) και της (5.4), έχουμε ότι $h_0(x) \sim ax$. Αντικαθιστώντας, τότε καταλήγουμε στην

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gax \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + ga \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (5.6)$$

Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα τυχαίο κύμα που προκαλείται από παλίρροιες ή μακρινές καταιγίδες με σταθερό πλάτος a .

Για $x \geq L$, υποθέτουμε ότι αυτό είναι της μορφής

$$\eta = a \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (5.7)$$

όπου ω , ε είναι σταθερές.

Για την περιοχή $x < L$, όπου ο βυθός της θάλασσας με αργό ρυθμό ανυψώνεται στο επίπεδο $x \rightarrow 0$, ας αναζητήσουμε μια διαχωρίσιμη λύση για τον τύπο

$$\eta = H(x) \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (5.8)$$

ώστε το πλάτος του κύματος, $H(x)$, να είναι πλέον μια συνάρτηση του x . Υπενθυμίζουμε, ότι το x μετρά την απόσταση από την παραλία. Θέλουμε να καθορίσουμε το πώς αυτή η συνάρτηση συμπεριφέρεται καθώς $x \rightarrow 0$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.8) στην εξίσωση κύματος (5.6) και παραγωγίζοντας μερικώς, έχουμε

$$\begin{aligned} H(x) \frac{\partial^2 \cos(\omega t + \varepsilon)}{\partial t^2} &= gax \cos(\omega t + \varepsilon) \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} + ga \cos(\omega t + \varepsilon) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \implies \\ -H(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varepsilon) &= gax \cos(\omega t + \varepsilon) \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} + ga \cos(\omega t + \varepsilon) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \implies \\ -H(x) \omega^2 &= gax \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} + ga \frac{\partial H(x)}{\partial x} \implies \\ x \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\omega^2}{ga} H(x) &= 0 \implies \\ x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\omega^2}{ga} H &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3 Η θεωρία των ρηχών νερών μέσω της εξίσωσης Bessel

Η εξίσωση (5.9) για το πλάτος $H(x)$, είναι μια γραμμική, ομογενής, 2ας τάξης, συνήθης διαφορική εξίσωση με συνοριακή συνθήκη $H(L) = a$. Μπορούμε τότε, να απλοποιήσουμε τη μορφή αυτής της Σ.Δ.Ε. ορίζοντας μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή, s , τέτοια ώστε $x \equiv 2s^2$. Τότε έχουμε

$$s = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

Και από τον κανόνα αλυσίδας η (5.9) γίνεται

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{8\omega^2}{ga} H = 0 \quad (5.10)$$

Η εξίσωση (5.10) είναι μια γραμμική, 2ας τάξης συνήθης διαφορική εξίσωση που ανήκει στην κατηγορία των εξισώσεων Bessel. Θέτοντας $\sqrt{\frac{8\omega^2}{ga}} s = z$, έχουμε

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial H}{\partial z} + H = 0 \quad (5.11)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial H}{\partial z} + H = 0$ και $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right) y = 0$, δηλαδή τις (5.11) και (1.2), βλέπουμε ότι η πρώτη είναι η εξίσωση Bessel με τάξη 0, ($r = 0$).

Για την εξίσωση Bessel 2ου είδους ισχύει $Y_r(x) \rightarrow \pm\infty$, καθώς $x \rightarrow 0$. Εφόσον ενδιαφερόμαστε για κύματα που πλησιάζουν στην παράκτια περιοχή στο $x \rightarrow 0$, τέτοιες συναρτήσεις είναι αφύσικες και γι' αυτό το λόγο θέτουμε $B = 0$ στη γενική λύση (εξίσωση (1.6))

$$y = y_r(x) = AJ_r(x) + BY_r(x)$$

της εξίσωσης Bessel $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right) y = 0$, (εξίσωση (1.2)). Ο μαθηματικός τύπος για την εξίσωση Bessel 1ου είδους είναι μια άπειρη σειρά δυνάμεων

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.12)$$

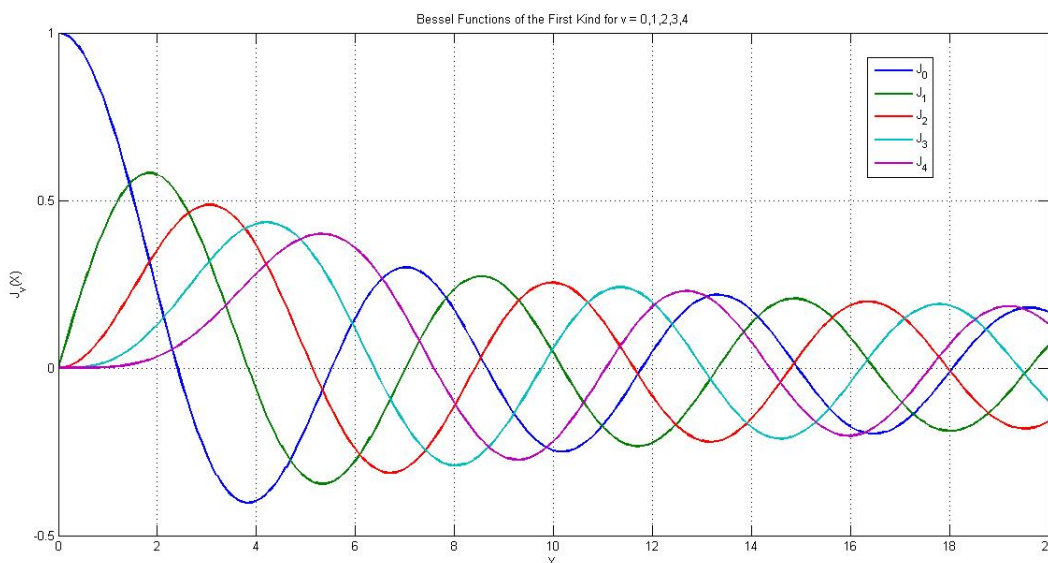
όπου τα a_n είναι αριθμητικοί συντελεστές οι τιμές των οποίων καθορίζονται από την τάξη r . Οι συγκεκριμένες εκφράσεις για τα a_n για τις αυθαίρετες, μη ακέραιες τιμές των r είναι αρκετά πολύπλοκες, όμως μπορούν να γραφούν αναλυτικά και να αναπαρασταθούν γραφικά.

Όταν το r είναι μη αρνητικός, ακέραιος η σειρά (5.12) έχει τη μορφή

$$J_r(x) = \frac{x^r}{2^r r!} \left[1 - \frac{x^2}{1! 2^2 (r+1)} + \frac{x^4}{2! 2^4 (r+1)(r+2)} - \dots \right] \quad (5.13)$$

Τα γραφήματα για τις εξισώσεις Bessel 1ου είδους απεικονίζονται στην εικόνα 5.3 για τις δοσμένες ακέραιες τιμές της τάξης r . Σημειώνουμε ότι για $r = 0$, $J_0(0) = 1$, ενώ $J_r(0) = 0$ για όλες τις τιμές για $r \geq 1$.

Τελικά, στο όριο για μεγάλα x , μπορεί να αποδειχθεί ότι για τις εξισώσεις Bessel 1ου είδους



Σχήμα 5.3: Plot της εξίσωσης Bessel 1ου είδους

προσεγγίζονται από

$$J_r(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2r+1}{4}\pi\right) \quad (5.14)$$

Η εξίσωση (5.14) υπονοεί ότι μετά από το μέσο όρο της τριγωνομετρικής συνάρτησης, το πλάτος των κυμάτων προσδιορίζεται σε $A \sim \frac{1}{x^{1/4}}$, δηλαδή ένα δια την τέταρτη ρίζα της απόστασης από την ακτή.

Τότε, καθώς το κύμα πλησιάζει την παραλία, το πλάτος της διατάραξης μεγαλώνει ενώ το μήκος κύματος μικραίνει. Αυτό μπορεί όντως να παρατηρηθεί στα κύματα που πλησιάζουν την παραλία, αλλά σημειώνουμε ότι οι παραδοχές μας μπορεί να καταρρεύσουν σε επαρκή μικρά x , όπου οι επιπτώσεις της μη γραμμικότητας μπορεί να προκαλέσουν το σπάσιμο των κυμάτων.

Τελικά η κατάλληλη λύση για την κυματική εξίσωση (5.9) που αφορά το πλάτος των ρηχών, γραμμικών κυμάτων που προσεγγίζουν μια παραλία, όπου το βάθος των νερών αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με την απόσταση από την ακτή είναι

$$H(s) = AJ_0\left(\sqrt{\frac{8\omega^2}{ga}}s\right)$$

όπου η σταθερά A είναι γνωστή από τη συνθήκη $H = a$ στο $x = L$. Σημειώνοντας ότι $s = \sqrt{\frac{x}{2}}$, καταλήγουμε στο ότι η κυματική συμπεριφορά λόγω της (5.8) δίνεται από τον τύπο

$$\eta(x, t) = a \frac{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x}\right)}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{L}\right)} \cos(\omega t + \varepsilon)$$

5.4 Τσουνάμις

Η προσέγγιση των ρηχών νερών με την οποία ξεκινήσαμε, σίγουρα αστοχεί όταν το πλάτος των κυμάτων υπερβαίνει ή είναι συγκρίσιμο με το βάθος των πιο βαθέων υδάτων. Τυπικά παραδείγματα αυτής της επίπτωσης μπορούμε να δούμε στα τσουνάμις. Στα ιαπωνικά, ‘τσου’ σημαίνει λιμάνι και ‘ναμι’ κύμα. Αυτά συνήθως προκαλούνται από διαταράξεις της επιφάνειας των ωκεανών από υποθαλάσσιους σεισμούς.

Στον ανοιχτό ωκεανό, τα τσουνάμις έχουν τεράστιο μήκος κύματος με εύρος από 100 έως 400 χιλιόμετρα, το πλάτος τους όμως εκτείνεται μόνο σε λίγα μέτρα ύψος. Αυτό καθιστά σχεδόν αδύνατο τον εντοπισμό τους. Καθώς αυτά πλησιάζουν την ακτή, μολονότι η επίδραση της κλίσης του πυθμένα εξασθενεί το μήκος των κυμάτων, παράγεται ένας τοίχος από νερό δεκάδων μέτρων.¹

Το τυπικό βάθος του πυθμένα του ωκεανού έχει εύρος από 1 έως 4 χιλιόμετρα. Προκύπτει ότι η προσέγγιση των γραμμικών, ρηχών νερών είναι πολύ καλή. Υπενθυμίζουμε ότι σε αυτή την προσέγγιση η ταχύτητα του κύματος είναι

$$c \approx \sqrt{gH_\infty}$$

εφόσον το βάθος του ωκεανού είναι σταθερό, $h_0 = H_\infty = \text{σταθερά}$. Για $g = 9.8 \text{ msec}^{-2}$ και $H_\infty = 4 \text{ km}$, έχουμε $c = 713 \text{ km/hour}$, το οποίο είναι πολύ γρήγορο συγκρινόμενο με το τωρινό παγκόσμιο ρεκόρ ταχύτητας κυμάτων νερού το οποίο είναι 511 km/hour . Αυτό εξηγεί για ποιο λόγο ένα τσουνάμι που προκαλείται από έναν σεισμό κοντά στην Ιαπωνία, μπορεί να φτάσει στις δυτικές ακτές της Αμερικής 12 ώρες αργότερα (η απόσταση από το Τόκιο στο Λος Άντζελες είναι 8.800 χιλιόμετρα). Γι’ αυτούς τους λόγους έχει επενδύσει η έρευνα σε μελέτες που αφορούν τη μορφή των τσουνάμις και πώς αυτά μπορούν να ανιχνευτούν αμέσως.

Έχουμε δει ότι σε ένα ιδεαλιστικό μοντέλο, όπου το βάθος του ωκεανού αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με την απόσταση από την ακτή που προσεγγίζεται, το πλάτος των κυμάτων αυξάνεται σύμφωνα με την εξίσωση Bessel με τάξη $r = 0$. Θα θέλαμε να την ποσοτικοποιήσουμε αυτή περισσότερο. Γι’ αυτό θα χρειαστούμε μια σχέση ανάμεσα στο πλάτος των κυμάτων και το βάθος του ωκεανού. Αυτή η σχέση που θα καταλήξουμε είναι γνωστή ως ο νόμος του Green.

5.5 Ο Νόμος του Green

Ο Νόμος του Green θα μας δώσει μια σχέση ανάμεσα στο πλάτος του κύματος και το βάθος της θάλασσας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει ότι το πλάτος A ενός γραμμικού κύματος ρηχών νερών αυξάνεται με αντίστροφο ρυθμό απ’ ό,τι το βάθος του ωκεανού, σύμφωνα με τη σχέση

$$A \propto \frac{1}{[h_0(x)]^{1/4}} \quad (5.15)$$

Αυτή η σχέση ισχύει για διάφορα $h(x)$, όχι όμως όταν η προσέγγιση των ρηχών νερών κόβεται καθώς το πλάτος γίνεται συγκρίσιμο με το βάθος, δηλαδή όταν $A \sim h$.

¹Αυτό ακριβώς συνέβη στην Ιαπωνία το 2011.

Τώρα θα αποδείξουμε τον τύπο (5.15). Ο νόμος του Green προκύπτει ως άμεση συνέπεια της διατήρησης ενέργειας που μεταφέρεται από το κύμα. Για ένα κύμα ρηχών νερών, τα ρευστά σωματίδια δεν κινούνται προς τα εμπρός, αλλά ακολουθούν ελλειπτικά μονοπάτια. Παρ' όλα αυτά, ενέργεια μεταφέρεται από το κύμα. Αυτό ποσοτικοποιείται από τη 'ροή ενέργειας' που ορίζεται βάσει της δύναμης σε σχέση με το κύμα. Γενικά ισχύει

$$\text{Ροή Ενέργειας} = \frac{\text{Έργο}}{\text{Χρόνος}} = \frac{\text{Δύναμη} \times \text{Απόσταση}}{\text{Χρόνος}} = \text{Δύναμη} \times \text{Ταχύτητα} \quad (5.16)$$

Για ένα κύμα ισχύει,

$$\text{Δύναμη} = \text{Πίεση} \times \text{Χωρίο} \quad (5.17)$$

και η περιοχή ή το χωρίο είναι (περίπου)

$$\text{Χωρίο} = \text{Πλάτος Κύματος} \times \text{Μήκος Κύματος} \quad (5.18)$$

Εφόσον το εύρος είναι αυθαίρετο, διαιρούμε με το εύρος για να ορίσουμε την 'ροή ενέργειας μοναδιαίου εύρους'

$$E_p \equiv \frac{\text{Ροή Ενέργειας}}{\text{Εύρος}} \quad (5.19)$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$E_p = pAc_{gr} \quad (5.20)$$

όπου p δηλώνει την πίεση, A είναι το πλάτος του κύματος και η c_{gr} είναι η ομαδική ταχύτητα ή group velocity, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία η ενέργεια μεταφέρεται από το κύμα. Η πίεση καθορίζεται από την κάθετη (y) συνιστώσα της εξίσωσης Euler, τύπος (3.3), η οποία όπως δείξαμε γίνεται

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -g\rho$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε $p \sim g\rho A$. Αντικαθιστώντας στην (5.20) έχουμε

$$E_p \sim g\rho A^2 c_{gr}$$

Είδαμε ότι για τα γραμμικά κύματα ρηχών νερών δεν υπάρχει διασπορά και η ομαδική ταχύτητα είναι ίση με τη φασική ταχύτητα $c_{ph} = \sqrt{gH_\infty}$. Το ρευστό είναι ασυμπύεστο, η πίεση είναι σταθερή και η διατήρηση της ενέργειας τότε απαιτεί

$$A \propto \frac{1}{H_\infty^{1/4}}$$

που είναι ο νόμος του Green.

Αν και το παραπάνω αποτέλεσμα έχει ως υπόθεση σταθερό πυθμένα στη θάλασσα, $h_0 = H_\infty$, ο νόμος του Green επίσης εφαρμόζεται όταν το βάθος του ωκεανού μεταβάλλεται, δηλαδή όταν $h_0 = h_0(x)$.

Αν ένα τσουνάμι σχηματίζεται σε έναν ωκεανό βάθους h_1 με πλάτος A_1 , τότε σε ένα βάθος

h_2 , θα έχουμε ένα πλάτος

$$A_2 \sim A_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{1/4}$$

Το σημείο στο οποίο το πλάτος γίνεται συγκρίσιμο με το βάθος όσο πλησιάζεται η ακτή $A_2 \sim h_2$ είναι

$$A_2 \sim A_1^{4/5} h_1^{1/5}$$

Έτσι ένα τσουνάμι που σχηματίζεται με ένα πλάτος 1 μέτρου σε ένα βάθος 4 χιλιομέτρων καταλήγει με ένα πλάτος περίπου 5 μέτρων και 5 μέτρα κοντά στην ακτή. Από αυτό το στάδιο θα ταξίδευε με ταχύτητα

$$c \sim \sqrt{gh_2} \sim 7 \text{ m/sec} \sim 25 \text{ km/h}$$

6 Η εξίσωση Nonlinear Schrödinger (NLS) και σχετικά μοντέλα

6.1 Εισαγωγή

Η μη γραμμικότητα, η διασπορά και τα συστήματα ενεργειακής διατήρησης γενικά μάς οδηγούν στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS), η οποία προέρχεται από μια μη γραμμική εξίσωση Klein-Gordon και την εξίσωση KdV. Αναλόγως της μορφής της NLS, αυτή θα εστιάζει και θα προκαλεί 'φωτεινά' σολιτόνια είτε θα αφεστιάζει και θα προκαλεί 'σκοτεινά' σολιτόνια. Για το γραμμικό πρόβλημα της NLS θα αναφέρουμε απλοποιημένα μοντέλα που περιλαμβάνουν γραμμικές και μη γραμμικές επιδράσεις.

6.2 Η NLS εξίσωση στα ρηχά νερά

6.2.1 Μέσω της Klein-Gordon (KG)

Το μοντέλο 'u - 4' ή η μη γραμμική Klein-Gordon (KG) εξίσωση είναι

$$u_{tt} - u_{xx} + u \mp u^3 = 0 \quad (6.1)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με u_t βρίσκουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας

$$u_t u_{tt} - u_t u_{xx} + u_t u \mp u_t u^3 = 0 \quad (6.2)$$

Ισοδύναμη μορφή της είναι η

$$\partial_t \left(u_t^2 + u_x^2 + u^2 \mp \frac{u^4}{2} \right) - \partial_x (2u_x u_t) = 0$$

Πράγματι,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_t^2 = 2u_t u_{tt} \\ \partial_t u_x^2 = 2u_x u_{xt} \\ \partial_t u^2 = 2u u_t \\ \partial_t \frac{u^4}{2} = 2u^3 u_t \\ \partial_t \frac{u^4}{2} = 2u^3 u_t \\ \partial_x (2u_x u_t) = 2(u_{xx} u_t + u_x u_{tx}) = 2u_{xx} u_t + 2u_x u_{tx} \end{array} \right.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 2u_t u_{tt} + 2u_x u_{xt} + 2uu_t \mp 2u^3 u_t - 2u_{xx} u_t - 2u_x u_{tx} &= 0 \implies \\ u_t u_{tt} + u_x u_{xt} + uu_t \mp u^3 u_t - u_{xx} u_t - u_x u_{tx} &= 0 \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Clairaut έχουμε

$$u_{xt} = u_{tx}$$

οπότε τελικά ισχύει η (6.2)

$$u_t u_{tt} - u_t u_{xx} + u_t u \mp u_t u^3 = 0$$

Ακολουθούμε αυτή τη διαδικασία διότι επιθυμούμε να ξεχωρίζουμε τις ποσότητες που διαφορίζουμε ως προς το χρόνο και το χώρο. Ως εκ τούτου για την εξίσωση αυτή ισχύει η διατήρηση πυκνότητας $T_1 = u_t^2 + u_x^2 + u^2 \mp \frac{u^4}{2}$.

Σημειώνουμε ότι το δυναμικό είναι ανάλογο με $V(u) = u^2 \mp \frac{u^4}{2}$. Γί αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε το μοντέλο 'u - 4'. Υποθέτουμε μια πραγματική λύση για την (6.1) με μια ταχεία φάση και αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις των x και t

$$u(x, t) = u(\theta, X, T; \varepsilon)$$

$$X = \varepsilon x, \quad T = \varepsilon t, \quad \theta = kx - \omega t, \quad |\varepsilon| \ll 1$$

όπου η σχέση διασποράς για το γραμμικό πρόβλημα στην (6.1) είναι $\omega^2 = 1 + k^2$. Εισάγοντας τους ακόλουθους διαφορικούς τελεστές είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε την ασυμπτωτική ανάλυση που θα μας δώσει λύση στην (6.1)

$$\partial_t = -\omega \partial_\theta + \varepsilon \partial_T$$

$$\partial_x = k \partial_\theta + \varepsilon \partial_X$$

Αντικαθιστούμε στην (6.1) αυτούς τους διαφορικούς τελεστές και έχουμε

$$\left[(-\omega \partial_\theta + \varepsilon \partial_T)^2 - (k \partial_\theta + \varepsilon \partial_X)^2 \right] u + u \mp u^3 = 0 \quad (6.3)$$

Τότε στην (6.3) αντικαθιστούμε και την ασθενή μη γραμμική ασυμπτωτική έκφραση

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots$$

και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \left[(-\omega \partial_\theta + \varepsilon \partial_T)^2 - (k \partial_\theta + \varepsilon \partial_X)^2 \right] (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots) + \\ & + (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots) \mp (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots)^3 = 0 \iff \\ \iff & [(\omega^2 - k^2) \partial_\theta^2 - \varepsilon (2\omega \partial_\theta \partial_T + 2k \partial_\theta \partial_X) + \varepsilon^2 (\partial_T^2 - \partial_X^2)] (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots) + \\ & + (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots) \mp (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots)^3 = 0 \end{aligned}$$

Θα βρούμε τις εξισώσεις μέχρι $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

Η εξίσωση $\sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ είναι

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2) \partial_\theta^2 u_0 + u_0 = 0 &\implies u_0 = A \exp i\theta + A^* \exp(-i\theta) \implies \\ &\implies u_0 = A \exp i\theta + c.c. \end{aligned}$$

Η εξίσωση $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ είναι

$$(\omega^2 - k^2) \partial_\theta^2 u_1 + u_1 = (2\omega i A_T + 2k i A_X) \exp i\theta + c.c.$$

όπου $c.c.$ δηλώνει τον μιγαδικό συζυγή. Για να αφαιρέσουμε τους αιώνιους (secular) όρους απαιτείται ο συντελεστής του δεξιού μέλους της $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ να είναι μηδέν, δηλαδή

$$2\omega i A_T + 2k i A_X = 0$$

Αυτό οδηγεί σε μια εξίσωση $A(X, T)$, όπου για να πάμε σε μεγαλύτερη τάξη, την τροποποιούμε χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική επέκταση

$$2i(\omega A_T + k A_X) = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots \quad (6.4)$$

Η ποσότητα $A(X, T)$ είναι το περίγραμμα του κύματος που μεταβάλλεται αργά. Απορροφούμε τις ομογενείς λύσεις στην u_0 ώστε $u_1 = 0$.

Η εξίσωση τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ είναι

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2) \partial_\theta^2 u_2 + u_2 = \\ = -(A_{TT} - A_{XX}) \exp i\theta + c.c. \mp (A \exp i\theta + A^* \exp(-i\theta))^3 + g_1 \exp i\theta + c.c. \end{aligned}$$

Προκειμένου να αφαιρέσουμε τους αιώνιους (secular) όρους, διαγράφουμε τον συντελεστή του $\exp i\theta$. Δηλαδή θα ισχύει

$$g_1 = (A_{TT} - A_{XX}) \mp 3A^2 A^* \quad (6.5)$$

όπου A^* είναι ο μιγαδικός συζυγής του A . Συγκρίνοντας τη σχέση (6.5) με την ασυμπτωτική έκφραση της (6.4) έχουμε

$$2i\omega (A_T + \omega'(k) A_X) = \varepsilon (A_{TT} - A_{XX} \mp 3|A|^2 A) \quad (6.6)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση διασποράς για να βρούμε $\omega'(k) = \frac{k}{\omega}$ και τη γνωστή αλγεβρική ιδιότητα $AA^* = |A|^2$. Αφότου αφαιρέσαμε τους secular (αιώνιους) όρους, μπορούμε πλέον να λύσουμε την εξίσωση $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ ως προς u_2 και τελικά παίρνουμε

$$u_2 = \mp \frac{1}{8} A^3 \exp 3i\theta + c.c.$$

Στην (6.6) μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση ως προς A και έτσι να φύγει ο όρος ε

που υποδηλώνει την ομαδική ταχύτητα. Για να συμβεί αυτό, αλλάζουμε σύστημα συντεταγμένων και έτσι κινούμεθα με την ομαδική ταχύτητα $\omega'(k)$ (ονομάζεται και σχηματισμός της ομαδικής ταχύτητας)

$$\xi = X - \omega'(k)T, \quad \tau = \varepsilon T = \varepsilon^2 t$$

$$\partial_T = -\omega'(k)\partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau, \quad \partial_X = \partial_\xi$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (6.6) για να βρούμε

$$2i\omega(-\omega'A_\xi + \varepsilon A_\tau + \omega'A_\xi) = \varepsilon \left((\omega')^2 A_{\xi\xi} - A_{\xi\xi} \mp 3|A|^2 A + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τη σχέση διασποράς

$$\omega'(k) = \frac{k}{\omega} \quad (6.7)$$

$$\omega'' = \frac{\omega - \omega'k}{\omega^2} = \frac{1}{\omega} - \frac{k\omega'}{\omega^2} = \frac{1}{\omega} \left[1 - (\omega')^2 \right] \quad (6.8)$$

και έτσι έχουμε τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) σε κανονική μορφή

$$iA_\tau + \frac{\omega''}{2}A_{\xi\xi} \pm \frac{3}{2\omega}|A|^2 A = 0 \quad (6.9)$$

Όπως και κατά τη διάρκεια της παραγωγής της εξίσωσης KdV, έτσι κι εδώ η μικρή παράμετρος ε έχει εξαφανιστεί από την υψηλότερης τάξης NLS εξίσωση. Η NLS εξίσωση είναι ένα ασυμπτωτικό σύστημα μέγιστης ισορροπίας.

Συνδυάζοντας την (6.7) και την (6.8) έχουμε

$$\omega'' = \frac{\omega^2 - k^2}{\omega^3} = \frac{1}{\omega^3} \implies \frac{\omega''}{\omega} > 0$$

Η συμπεριφορά της (6.9) εξαρτάται από το πρόσημο.

Η NLS με '+' εστιάζει και προκαλεί φωτεινά σολιτόνια. Τα φωτεινά σολιτόνια έχουν περιορισμένο σχήμα και φθίνουν στο άπειρο.

Η NLS με '-' αφεστιάζει και προκαλεί σκοτεινά σολιτόνια. Τα σκοτεινά σολιτόνια έχουν ένα σταθερό πλάτος στο άπειρο.¹

Κατά την παραγωγή της NLS, μετατρέπουμε το σύστημα συντεταγμένων ώστε να συμπίπτει με την ομαδική ταχύτητα του κύματος. Ένας εναλλακτικός τύπος, που ονομάζεται επιβραδυνόμενο πλαίσιο, είναι

$$t' = T - \frac{1}{\omega'(k)}X, \quad \chi = \varepsilon X$$

$$\partial_T = \partial_{t'}, \quad \partial_X = -\frac{1}{\omega'}\partial_{t'} + \varepsilon\partial_\chi$$

¹Οι όροι 'φωτεινά' και 'σκοτεινά' σολιτόνια έχουν υιοθετηθεί από την περιοχή της μη γραμμικής οπτικής.

Τώρα αντικαθιστούμε τις πιο πάνω σχέσεις στην (6.6) για να βρούμε

$$2i\omega \left(A_{t'} + \omega' \left[\left(-\frac{1}{\omega'} \right) A_{t'} + \varepsilon A_{\chi} \right] \right) = \varepsilon \left(A_{t't'} - \frac{1}{(\omega')^2} A_{t't'} \mp 3|A|^2 A \right)$$

Απλοποιούμε τώρα και αυτή την εξίσωση σε μια μη γραμμική Schrödinger εξίσωση

$$iA_{\chi} + \frac{\omega''}{2(\omega')^3} A_{t't'} \pm \frac{3}{2\omega\omega'} |A|^2 A = 0 \quad (6.10)$$

Σημειώνουμε πως στην (6.10) η μεταβλητή χ αναφέρεται στην εξέλιξη, ενώ η t' στο χώρο.

6.2.2 Μέσω της KdV

Για μικρά πλάτη, μπορούμε να παράγουμε την NLS από την KdV ασυμπτωτικά. Γ' αυτό το λόγο πρέπει να επεκτείνουμε τη λύση της KdV εξίσωσης (3.72)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

μέσω της ασθενώς μη γραμμικής ασυμπτωτικής έκφρασης

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots$$

όπου για ευκολία η υπόθεση του μικρού πλάτους δίδεται από την επέκταση του u παρά από την ίδια την εξίσωση. Εφόσον ο μη γραμμικός όρος uu_x είναι τετραγωνικός και όχι κυβικός, η απλοποίηση της εξίσωσης NLS είναι δυσκολότερη από εκείνη της εξίσωσης KG. Σε αυτή την περίπτωση, χρειάζεται να εξαλείψουμε τους αιώνιους όρους (secularity) από μια επιπρόσθετη δύναμη του ε , η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Μια άλλη δυσκολία εκδηλώνεται με την ανάγκη να εξετάσουμε ένα μεσαίο όρο στη λύση. Πράγματι, η εξίσωση στην υψηλότερη τάξη είναι

$$u_{0,t} + u_{0,xxx} = 0$$

η πραγματική λύση της οποίας δίδεται από την

$$u_0 = A(X, T) \exp i\theta + c.c. + M(X, T) \quad (6.11)$$

όπου $T = \varepsilon t$ και $X = \varepsilon x$ είναι οι αργές μεταβλητές, $\theta = kx - \omega t$ είναι η γρήγορη μεταβλητή, με σχέση διασποράς $\omega = -k^3$, και $M(T, X)$ να είναι ένας πραγματικός, αργής μεταβολής, μεσαίος όρος, δηλαδή αντιστοιχεί στο συντελεστή του $\exp in\theta$ με $n = 0$. Η ποσότητα $A(X, T)$ είναι αργής μεταβολής περίβλημα της ραγδαίως μεταβαλλόμενης κυματικής συμβολής. Στην προκειμένη περίπτωση ο μεσαίος όρος αντιστοιχεί σε $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Σημειώνουμε πως στην (6.11) η 'μιαδική συζυγία', *c.c.*, αντιστοιχεί στον πρώτο όρο και όχι στο μεσαίο, που είναι πραγματικής τιμής.

Αντικαθιστώντας $\partial_t = -\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T$ και $\partial_x = k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X$ στην εξίσωση KdV οδηγούμαστε στην

$$(-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T) u + 6u(k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X) u + (k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)^3 u = 0$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση αυτή στη λύση

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots$$

έχουμε

$$\begin{aligned} & (-\omega \partial_\theta + \varepsilon \partial_T) (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) + \\ & + 6 (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) (k \partial_\theta + \varepsilon \partial_X) (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) + \\ & + (k \partial_\theta + \varepsilon \partial_X)^3 (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε το γραμμικό τελεστή

$$\mathcal{L}u = k^3 (u_\theta + u_{\theta\theta\theta})$$

όπου $\omega = -k^3$. Τότε η υψηλότερης τάξης λύση της

$$\mathcal{L}u_0 = 0$$

δίνεται από την (6.11).

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τη σχέση διασποράς, η εξίσωση $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= -u_{0,T} - 3k^2 u_{0,\theta\theta X} - 6u_0 k u_{0,\theta} = \\ &= (-A_T \exp i\theta + c.c.) - M_T + (3k^2 A_X \exp i\theta + c.c.) - 6(A \exp i\theta + c.c. + M)(Aik \exp i\theta + c.c.) \implies \\ \mathcal{L}u_1 &= (-A_T + 3k^2 A_X - 6MAik) \exp i\theta - M_T + c.c. - 6(A^2 ik \exp 2i\theta + c.c.) \implies \\ \mathcal{L}u_1 &= (-A_T - \omega' A_X - 6iMkA) \exp i\theta + c.c. - 6(ikA^2 \exp 2i\theta + c.c.) - M_T \end{aligned}$$

όπου παραγωγίζοντας τη σχέση διασποράς χρησιμοποιήσαμε $\omega'(k) = -3k^2$. Προσπαθούμε να αποβάλλουμε τους ιδιάζοντες (αιώνιους) όρους που προέρχονται όχι μόνο από τους συντελεστές του $\exp i\theta$, αλλά και από τους συντελεστές του $\exp i0\theta (= 1)$ που αντιστοιχούν στο μεσαίο όρο. Τότε σύμφωνα με τη μεθοδολογία μας, απαιτούμε

$$A_T + \omega' A_X + 6iMkA = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots \quad (6.12)$$

$$M_T = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (6.13)$$

Τότε λύνουμε τη u_1 ως εξής

$$\mathcal{L}u_1 = -6(ikA^2 \exp 2i\theta + c.c.)$$

Θέτουμε $u = a \exp 2i\theta + c.c.$ το οποίο δίνει $a = \frac{A^2}{k^2}$, τότε

$$u_1 = \frac{A^2}{k^2} \exp 2i\theta + c.c. = a \exp 2i\theta + c.c.$$

Από την (6.13) βλέπουμε ότι $M = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Τώρα ελέγχουμε την εξίσωση $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_2 + 6(u_0 k u_{1,\theta} + u_0 u_{0,X} + u_1 k u_{0,\theta}) + 3k^2 u_{1,\theta\theta X} + 3k u_{0,\theta X X} + u_{1T} = \\ = -f_1 - (g_1 \exp i\theta + c.c.) \end{aligned}$$

όπου οι όροι f_1 και g_1 προέρχονται από τις εξισώσεις (6.12) και (6.13). Χρησιμοποιώντας την (6.11) και το γεγονός ότι $M = \mathcal{O}(\varepsilon)$, έχουμε για την υψηλότερη τάξη

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_2 = -6(A \exp i\theta + c.c.) (2ika \exp 2i\theta + c.c.) - 6(A \exp i\theta + c.c.) (A_X \exp i\theta + c.c.) - \\ -6(a \exp 2i\theta + c.c.) (ikA \exp i\theta + c.c.) - 3k^2 \left[(2i)^2 a_X \exp 2i\theta + c.c. \right] - \\ -3k (iA_{XX} \exp i\theta + c.c.) - f_1 - (g_1 \exp i\theta + c.c.) - (a_T \exp 2i\theta + c.c.) \end{aligned}$$

Πρέπει να αποβάλλουμε τους αιώνιους (secular) όρους του $\exp i\theta$ και τους μεσαίους όρους προκειμένου να βρούμε τους όρους f_1 και g_1 . Χρησιμοποιώντας ότι $a = \frac{A^2}{k^2}$ οδηγούμαστε στα εξής αποτελέσματα

$$g_1 = -3ikA_{XX} - 6ikaA^* = -3ikA_{XX} - \frac{6i}{k} A^2 A^*$$

$$f_1 = -6(AA_X^* + c.c.) = -6(|A|^2)_X$$

όπου A^* , όπως και πριν, είναι ο μιγαδικός συζυγής του A . Τότε από τις εξισώσεις (6.12) και (6.13) χρησιμοποιώντας τα g_1 και f_1 , συμπεραίνουμε για την υψηλότερη τάξη ότι

$$A_T + \omega' A_X + 6iMkA = \varepsilon \left(-3ikA_{XX} - \frac{6i}{k} A^2 A^* \right) \quad (6.14)$$

$$M_T = -6\varepsilon \left(|A|^2 \right)_X \quad (6.15)$$

Έτσι έχουμε λύσει το πρόβλημα των αιώνιων (secular) όρων για $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Για να καταλήξουμε όμως στην NLS εξίσωση χρειαζόμαστε επιπλέον ένα κινούμενο πλαίσιο αναφοράς, δηλαδή τη μετατροπή $A(X, T) = A(\xi, \tau)$, όπου οι καινούριες μεταβλητές δίνονται από

$$\begin{cases} \xi = X - \omega'(k)T \\ \tau = \varepsilon T \end{cases} \quad (6.16)$$

Οι παράγωγοι μετατρέπονται ως εξής

$$\begin{cases} \partial_X = \partial_\xi \\ \partial_T = \varepsilon \partial_\tau - \omega' \partial_\xi \end{cases}$$

και οι (6.14) και (6.15) γίνονται

$$\varepsilon A_\tau + 6iMkA = \varepsilon \left(-3ikA_{\xi\xi} - \frac{6i}{k} A^2 A^* \right) \quad (6.17)$$

$$\varepsilon M_\tau - \omega' M_\xi = -6\varepsilon \left(|A|^2 \right)_\xi \quad (6.18)$$

Η (6.18) μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $M = \mathcal{O}(\varepsilon)$ και έτσι οδηγούμαστε στην

$$-\omega' M_\xi = -6\varepsilon \left(|A|^2 \right)_\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

όπου η λύση υψηλότερης τάξης δίνεται από

$$M \sim -\frac{2\varepsilon |A|^2}{k^2} \quad (6.19)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει την πρώτη παράγωγο της σχέσης διασποράς, $\omega' = -3k^2$, και παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας λοιπόν, τη λύση για το M , (6.19), στην (6.17) έχουμε

$$A_\tau + 3ikA_{\xi\xi} + \frac{6i}{k} \left(-2|A|^2 \right) A + \frac{6i}{k} |A|^2 A = 0$$

Ως εκ τούτου φτάνουμε στην ακόλουθη NLS εξίσωση αφεστίαστης

$$iA_\tau - 3kA_{\xi\xi} + \frac{6}{k} |A|^2 A = 0$$

Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παράγωγο της σχέσης διασποράς, $\omega'' = -6k$ οδηγούμαστε στην κανονική (ή γενική) μορφή της NLS εξίσωσης

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2} A_{\xi\xi} + \frac{6}{k} |A|^2 A = 0$$

6.2.3 Μέσω ενός ansatz από την KdV

Μια εναλλακτική, πιο άμεση, και ίσως πιο γρήγορη μέθοδο παραγωγής της εξίσωσης NLS από την εξίσωση KdV θα περιγράψουμε παρακάτω, η οποία αποτελείται από μια υπόθεση ή ansatz που συνήθως αναφέρεται ως η ‘οιονεί μονοχρωματική’ υπόθεση. Αυτή η μέθοδος μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για το μοντέλο Klein-Gordon.

$$u_0 = \varepsilon [A(T, X) \exp i\theta + c.c. + M(X, T)] + \varepsilon^2 (a \exp 2i\theta + c.c.) + \dots$$

δηλαδή, προσθέτουμε το δεύτερο αρμονικό όρο $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ στην υπόθεση που έχει έναν θεμελιώδη και έναν μεσαίο όρο.

Οι όροι της KdV δίνονται αντίστοιχα από

$$u_t = \varepsilon [(Aik^3 + \varepsilon A_T) \exp i\theta + c.c. + \varepsilon M_T] + \varepsilon^2 [(2ik^3 a + \varepsilon a_T) \exp 2i\theta + c.c.] + \dots$$

$$6uu_x = 6\varepsilon [(A \exp i\theta + c.c. + M) + \varepsilon (a \exp 2i\theta + c.c.)] \varepsilon \cdot$$

$$\cdot [((ikA + \varepsilon A_X) \exp i\theta + c.c.) + \varepsilon M_X + \varepsilon ((2ika + \varepsilon a_X) \exp 2i\theta + c.c.)] + \dots$$

και

$$u_{xxx} = \varepsilon \left\{ \left[(ik + \varepsilon \partial_X)^3 A \right] \exp i\theta + c.c. + \varepsilon^3 M_{XXX} + \varepsilon^2 \left[(2ik + \varepsilon \partial_X)^3 a \exp 2i\theta + c.c. \right] \right\} + \dots$$

Τότε θέτουμε τους συντελεστές του $\exp i\theta$ και των μεσαίων όρων ίσους με μηδέν. Οι εναπομείναντες όροι είναι οι συντελεστές του $\exp 2i\theta$, τους οποίους επίσης θέτουμε ίσους με μηδέν (κινούμαστε ομοίως και αν προσθέσουμε όρους $\exp in\theta$ σε μεγαλύτερη τάξη)

$$\varepsilon^2 (2ik^3 a + 6ikA^2 - 8ik^3 a) = 0$$

Αυτή η εξίσωση υπονοεί ότι $a = \frac{A^2}{k^2}$. Αφαιρώντας τους ιδιάζοντες μεσαίους όρους έχουμε

$$M_T + 6\varepsilon \left(|A|^2 \right)_X + 6\varepsilon M M_X = 0$$

Τότε παρατηρούμε ότι $M = \mathcal{O}(\varepsilon)$, από το οποίο προκύπτει ότι για την υψηλότερη τάξη η εξίσωση για το M είναι

$$M_T + 6\varepsilon \left(|A|^2 \right)_X \sim 0$$

Με την αλλαγή μεταβλητών όπως στην (6.16), αφότου ολοκληρώσουμε και παραλείψουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης, βρίσκουμε

$$M \sim -\frac{2\varepsilon |A|^2}{k^2}$$

Έπειτα αφαιρώντας τους ιδιάζοντες (αιώνιους) όρους $\exp i\theta$, οδηγούμαστε στην

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 (A_T - 3k^2 A_X + 6ikMA) + \\ & + \varepsilon^3 (3ikA_{XX} + 12ikaA^2 A^* - 6ikaA^2 A^* + 6MA_X) = 0 \end{aligned}$$

Εδώ, το $6MA_X$ είναι αμελητέο, καθώς είναι μικρότερο από τους υπόλοιπους όρους λόγω του ότι ισχύει $M = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Αντικαθιστώντας τη λύση για το M φτάνουμε στην εξίσωση

$$A_T - 3k^2 A_X - \frac{12i\varepsilon |A|^2}{k} A + \varepsilon \left(3ikA_{XX} + \frac{6i}{k} |A|^2 A \right) = 0$$

Τελικά, μετατρέποντας τις συντεταγμένες σε κινούμενο πλαίσιο αναφοράς όπως στην (6.16) έχουμε

$$A_\tau + 3ikA_{\xi\xi} - \frac{6i}{k} |A|^2 A = 0$$

Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παράγωγο της σχέσης διασποράς, $\omega'' = (-3k)' = -6k$ οδηγούμαστε στην κανονική (ή γενική) μορφή της NLS εξίσωσης

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2} A_{\xi\xi} + \frac{6}{k} |A|^2 A = 0$$

Με τα συγκεκριμένα πρόσημα, δηλαδή το γινόμενο των μη γραμμικών και με διασπορά συντελεστών, η παραπάνω εξίσωση NLS είναι τύπου αφεστίασης.

6.3 Μοντέλα για το γραμμικό πρόβλημα της NLS

Είναι αξιοσημείωτο ότι στην παραγωγή της NLS εξίσωσης από τις KG και KdV εξισώσεις, οι γραμμικοί όροι στην NLS εξίσωση είναι

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2} A_{\xi\xi}$$

Ο συντελεστής $\frac{\omega''(k)}{2}$ δεν είναι τυχαίος. Προκύπτει πάντα, διότι κατά την παραγωγή εκδηλώνεται μια εγγενής ιδιότητα στην προσέγγιση της αργής μεταβολής του πλάτους ενός σταθερού συντελεστή της γραμμικοποιημένης με διασπορά εξίσωσης, στο σύστημα κινούμενου πλαισίου αναφοράς. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τη γραμμική KdV εξίσωση

$$A_t = -A_{xxx}$$

όπου η σχέση διασποράς είναι $\omega(k) = -k^3$. Μπορούμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση (χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Fourier), ψάχνοντας για κυματικές λύσεις της μορφής

$$A(x, t) = \tilde{A}(X, T) \exp[i(kx - \omega t)] + c.c.$$

Η υπόθεση αργής μεταβολής του πλάτους αντιστοιχεί σε μια υπέρθεση κυμάτων της μορφής

$$\tilde{A}(X, T) = A_0 \exp[i(\varepsilon kx - \varepsilon \Omega t)] = A_0 \exp[i(KX - \Omega T)], \quad A_0 = \text{σταθερά}$$

Αυτή δίνει

$$A(x, t) = A_0 \exp[i(kx + \varepsilon Kx - \omega t - \varepsilon \Omega t)] + c.c.$$

Θέτοντας όπου $X = \varepsilon x$ και $T = \varepsilon t$ έχουμε

$$A(x, t) = A_0 \exp[i(kx + KX - \omega t - \Omega T)] + c.c.$$

Οι ποσότητες K και Ω αναφέρονται συχνά ως πλευρικής ζώνης κυματικός αριθμός και συχνότητα, αντιστοίχως, διότι αντιστοιχούν σε μια μικρή απόκλιση από τον κεντρικό κυματικό αριθμό k και την κεντρική συχνότητα ω . Οι αποκλίσεις αυτές από τη σκοπιά των τελεστών είναι

$$\Omega \longleftrightarrow i\partial_T \quad K \longleftrightarrow -i\partial_X$$

Τότε

$$\omega_{tot} \sim \omega + \varepsilon \Omega \longrightarrow \omega + i\varepsilon \partial_T$$

$$k_{tot} \sim k + \varepsilon K \longrightarrow k - i\varepsilon \partial_X$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε το $\omega(k)$ σε σειρά Taylor γύρω από τον κεντρικό κυματικό αριθμό ως εξής

$$\omega_{tot}(k + \varepsilon K) \sim \omega(k) + \varepsilon K \omega' + \varepsilon^2 K^2 \frac{\omega''}{2}$$

Τότε χρησιμοποιώντας τον τελεστή $K = -i\partial_X$ έχουμε

$$\omega_{tot}(k - i\varepsilon\partial_X) \sim \omega(k) - i\varepsilon\omega'\partial_X + \varepsilon^2\frac{\omega''}{2}\partial_{XX}$$

Εναλλακτικά, αν χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $\Omega = i\partial_T$ θα έχουμε

$$\omega_{tot}(k)A = (\omega + \varepsilon\Omega)A \sim [\omega(k) + i\varepsilon\partial_T]A \sim \left(\omega(k) - i\varepsilon\omega'\partial_X + \varepsilon^2\frac{\omega''}{2}\partial_{XX}^2\right)A$$

Τότε για την υψηλότερη τάξη

$$i\varepsilon(A_T + \omega'A_X) + \varepsilon^2\frac{\omega''}{2}A_{XX} = 0 \quad (6.20)$$

και στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς ('απόκλιση κυμάτων νερού')

$$\xi = X - \omega'(k)T, \quad \tau = \omega T$$

η εξίσωση μετασχηματίζεται σε

$$\varepsilon^2 \left(iA_\tau + \frac{\omega''}{2}A_{\xi\xi} \right) = 0$$

η οποία είναι η γραμμική εξίσωση Schrödinger με έναν κανονικό συντελεστή $\frac{\omega''(k)}{2}$.

Αν όμως οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται σε 'οπτικές αποκλίσεις' χρησιμοποιώντας το 'επιβραδυνόμενο' πλαίσιο, δηλαδή $\chi = \varepsilon X$ και $t' = T - \frac{X}{\omega'}$, τότε η εξίσωση (6.20) γίνεται

$$i\varepsilon \left(A_{t'} + \omega' \left(-\frac{1}{\omega} A_{t'} + \varepsilon A_\chi \right) \right) + \frac{\omega''}{2} \varepsilon^2 \frac{1}{(\omega')^2} A_{t't'} = 0$$

η οποία απλοποιείται σε

$$iA_\chi + \frac{\omega''}{2(\omega')^3} A_{t't'} = 0 \quad (6.21)$$

δηλαδή, η 'οπτική απόκλιση' της γραμμικής εξίσωσης Schrödinger έχει έναν κανονικό συντελεστή $\frac{\omega''}{2(\omega')^3}$ μπροστά από τον όρο διασποράς. Η αλλαγή των συντεταγμένων από

$$\xi = x - \omega'(k)T, \quad T = \varepsilon t$$

σε

$$t' = T - \frac{x}{\omega'}, \quad \chi = \varepsilon x$$

επίσης αντανακλά στους όρους της σχέσης διασποράς. Για λόγους συμβολισμού αντί για $\omega = \omega(k)$, θεωρούμε $k = k(\omega)$. Τότε από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \frac{dk}{d\omega} = \frac{dk}{d\omega} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{d\omega/dk} \right) = -\frac{1}{\omega'^3} \frac{d^2\omega}{dk^2}$$

οπότε η (6.21) γράφεται ως εξής

$$iA_x - \frac{k''}{2} A_{x'x'} = 0$$

Υποθέτουμε τώρα, ότι θεωρούμε περισσότερο γενικά συντηρητικά μη γραμμικά κυματικά προβλήματα με υψηλή τετραγωνική ή κυβική μη γραμμικότητα. Μία ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων (multiple-scales), ή ανάλυση συχνότητας-μετατόπισης Stokes-Poincare δείχνει, παραλείποντας όρους διασποράς, μια κυματική λύση της μορφής

$$u(x, t) = \varepsilon A(\tau) \exp[i(kx - \omega t)] + c.c.$$

με $\tau = \varepsilon t$ έχουμε ότι το $A(\tau)$ ικανοποιεί

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + n |A|^2 A = 0$$

Ο σταθερός συντελεστής n εξαρτάται από την καθεμία εξίσωση. Τοποθετώντας μαζί τις γραμμικές και τις μη γραμμικές επιδράσεις καταλήγουμε σε μια εξίσωση NLS της μορφής

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + n |A|^2 A = 0$$

που θεωρείται 'φυσική'. Πράγματι, η εξίσωση NLS μπορεί να θεωρηθεί ως μια 'οικουμενική' εξίσωση καθώς διέπει γενικά την αργά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα ενός μονοχρωματικού συρμού κύματος.

7 Θεωρία βαθέων υδάτων

7.1 Εισαγωγή

Θα μελετήσουμε την παραγωγή της εξίσωσης NLS από τις εξισώσεις Euler-Bernoulli στο όριο του άπειρου βάθους (1 + 1) διαστάσεων κυμάτων νερού, δηλαδή

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < z < \varepsilon\eta(x, t) \quad (7.1)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (7.2)$$

$$\varphi_t + \frac{\varepsilon}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (7.3)$$

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x\varphi_x = \varphi_z, \quad z = \varepsilon\eta \quad (7.4)$$

Το μοντέλο αυτό παρουσιάζει μεγάλες διαφορές σε σχέση με αυτό των ρηχών νερών στις (3.26)-(3.29). Οι εξισώσεις (7.1) και (7.2) ορίζονται για $z \rightarrow -\infty$, εν αντιθέσει με την (3.27) που ορίζεται για $z \rightarrow -1$. Επιπλέον, η παράμετρος $\mu = \frac{h}{\lambda_x}$, στα κύματα ρηχών νερών είναι πολύ μικρή, ενώ στην περίπτωση αυτή δεν είναι. Συγκεκριμένα, παίρνοντας εδώ $h \rightarrow \infty$ θα υπονοούσαμε $\mu \rightarrow \infty$, το οποίο όμως δεν είναι κατάλληλο όριο και έτσι δε χρησιμοποιούμε την παράμετρο μ ούτε την προηγούμενη αδιάστατη αλλαγή κλίμακας. Χρησιμοποιούμε τις (7.1)-(7.4) σε διαστατική μορφή και υποθέτουμε ότι οι μη γραμμικοί όροι είναι μικροί.

Είδαμε ωστόσο ότι το γραμμικό μοντέλο καταλήγει πάντα στην ίδια γραμμική εξίσωση Schrödinger. Εφόσον τα κύματα νερού έχουν τετραγωνική μη γραμμικότητα, για το μη γραμμικό μοντέλο αναμένουμε ότι η εξίσωση NLS θα έχει τη μορφή

$$iA_\tau + \frac{\omega''}{2} A_{\xi\xi} + n|A|^2 A = 0 \quad (7.5)$$

όπου n είναι ένας συντελεστής που αναζητούμε, ο οποίος ενδέχεται να εξαρτάται από το $\omega(k)$ και τις παραγώγους του. Στόχος μας είναι να αποκτήσουμε τους μη γραμμικούς συντελεστές διασποράς. Ο όρος διασποράς είναι κανονικός, άρα θα βρούμε πρώτα τη μετατόπιση συχνότητας Stokes, δηλαδή τον συντελεστή n της (7.5).

7.2 Μετατόπισης συχνότητας

Οι (7.3) και (7.4) ορίζονται στην ελεύθερη επιφάνεια. Θα προσεγγίσουμε τις συνοριακές συνθήκες μέσω του αναπτύγματος Taylor του $z = \varepsilon\eta$ γύρω από το σταθερό όριο, δηλαδή τη συγκεκρι-

μένη ελεύθερη επιφάνεια, όπου είναι $z = 0$. Τότε έχουμε

$$\varphi_t(t, x, \varepsilon\eta) = \varphi_t(t, x, 0) + \varepsilon\eta\varphi_{tz}(t, x, 0) + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{tzz}(t, x, 0) + \dots$$

$$\varphi_x(t, x, \varepsilon\eta) = \varphi_x(t, x, 0) + \varepsilon\eta\varphi_{xz}(t, x, 0) + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{xzz}(t, x, 0) + \dots$$

$$\varphi_z(t, x, \varepsilon\eta) = \varphi_z(t, x, 0) + \varepsilon\eta\varphi_{zz}(t, x, 0) + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{zzz}(t, x, 0) + \dots$$

Χρησιμοποιώντας πολλαπλές κλίμακες (multiple scales) σε μεταβλητό χρόνο και ορίζοντας $T = \varepsilon t$, γράφουμε ξανά τις (7.3) και (7.4) σε όρους $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ως εξής

$$\left[\varphi_t + \varepsilon\eta\varphi_{tz} + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{tzz} + \varepsilon(\varphi_T + \varepsilon\eta\varphi_{Tz}) + \dots \right] + \frac{\varepsilon}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2 + 2\varepsilon\eta\varphi_x\varphi_{xz} + 2\varepsilon\eta\varphi_z\varphi_{zz} + \dots) + g\eta = 0 \quad (7.6)$$

και

$$\eta_t + \varepsilon\eta_T + \varepsilon\eta_x(\varphi_x + \varepsilon\eta\varphi_{xz}) + \dots = \varphi_z + \varepsilon\eta\varphi_{zz} + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{zzz} + \dots \quad (7.7)$$

όπου όλες οι συναρτήσεις στις (7.6) και (7.7) μελετώνται στο $z = 0$ για όλα τα x .

Έπειτα επεκτείνουμε ασυμπτωτικά το φ και το η ως εξής

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + \dots$$

$$\eta = \eta^{(0)} + \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + \dots$$

αντικαθιστούμε τις επεκτάσεις αυτές στις εξισώσεις και μετά μελετάμε τις αντίστοιχες εξισώσεις $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Υψηλότερης Τάξης, $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$

Από την (7.1) παίρνουμε

$$\varphi_{xx}^{(j)} + \varphi_{zz}^{(j)} = 0$$

δηλαδή, πρόκειται για την εξίσωση Laplace η οποία ισχύει για όλες τις τάξεις του ε . Επίσης παίρνουμε και τη συνοριακή συνθήκη

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi_z^{(j)} = 0$$

η οποία είναι και αυτή αληθής για κάθε τάξη του ε . Η λύση δίνεται από

$$\varphi^{(j)} \sim \sum_m A_m^{(j)}(T) \exp(im\theta + m|k|z) + c.c. \quad (7.8)$$

όπου $\theta = kx - \omega t$ και το άθροισμα μεταφέρεται για $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Αποδεικνύεται ότι ο μεσαίος όρος $m = 0$ είναι χαμηλής τάξης. Η επιλογή των $+m|k|z$ στον εκθέτη διαβεβαιώνει ότι η λύση φθίνει όσο το z πλησιάζει στο $-\infty$. Κρατώντας όρους μέχρι $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ στις (7.6) και (7.7)

για $z = 0$ οδηγούμαστε στις

$$\begin{aligned} & \left[\left(\varphi_t^{(0)} + \varepsilon \varphi_t^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_t^{(2)} \right) + \varepsilon \left(\eta^{(0)} + \varepsilon \eta^{(1)} \right) \left(\varphi_{tz}^{(0)} + \varepsilon \varphi_{tz}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta^{(0)2} \varphi_{tzz}^{(0)} \right] + \\ & + \varepsilon \left(\varphi_T^{(0)} + \varepsilon \varphi_T^{(1)} + \varepsilon \eta^{(0)} \varphi_{Tz}^{(0)} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(\varphi_x^{(0)} + \varepsilon \varphi_x^{(1)} \right)^2 + 2 \varepsilon \eta^{(0)} \varphi_x^{(0)} \varphi_{xz}^{(0)} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(\varphi_z^{(0)} + \varepsilon \varphi_z^{(1)} \right)^2 + 2 \varepsilon \eta^{(0)} \varphi_z^{(0)} \varphi_{zz}^{(0)} \right] + g \left(\eta^{(0)} + \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} \right) = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \left(\eta_t^{(0)} + \varepsilon \eta_t^{(1)} + \varepsilon^2 \eta_t^{(2)} \right) + \\ & + \varepsilon \left(\eta_T^{(0)} + \varepsilon \eta_T^{(1)} \right) \varepsilon \left(\eta_x^{(0)} + \varepsilon \eta_x^{(1)} \right) \left(\varphi_x^{(0)} + \varepsilon \varphi_x^{(1)} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \eta^{(0)} \eta_x^{(0)} \varphi_{xz}^{(0)} = \\ & = \varphi_z^{(0)} + \varepsilon \varphi_z^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_z^{(2)} + \\ & + \varepsilon \left(\eta^{(0)} + \varepsilon \eta^{(1)} \right) \left(\varphi_{zz}^{(0)} + \varepsilon \varphi_{zz}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta^{(0)2} \varphi_{zzz}^{(0)} \end{aligned}$$

Για $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ έχουμε

$$\varphi_t^{(0)} + g \eta^{(0)} = 0 \quad (7.9)$$

$$\eta_t^{(0)} - \varphi_z^{(0)} = 0 \quad (7.10)$$

Όπως προκύπτει από την (7.8), υποθέτοντας μόνο μια αρμονική στην υψηλότερη τάξη ($\theta = kx - \omega t$)

$$\varphi^{(0)} \sim A_1(T) \exp(i\theta + |k|z) + c.c.$$

και

$$\eta^{(0)} \sim N_1(T) \exp i\theta + c.c.$$

και από τις (7.9) και (7.10) έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -i\omega A_1 + g N_1 = 0 \\ -i\omega N_1 = |k| A_1 \end{cases} \quad (7.11)$$

Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα των A_1 και N_1 που γράφεται και σε μορφή πίνακα ως εξής

$$\begin{pmatrix} -i\omega & g \\ -|k| & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η λύση αυτού του γραμμικού ομογενούς συστήματος θα είναι μοναδική αν και μόνο αν η ορίζουσα του είναι μηδέν το οποίο μάς οδηγεί στη σχέση διασποράς

$$\omega^2(k) = g|k| \quad (7.12)$$

Σημειώνουμε ότι τη σχέση διασποράς μπορούμε να τη δούμε σαν ένα τυπικό όριο καθώς $h \rightarrow \infty$ από την πιο γενική σχέση διασποράς (σε οποιοδήποτε βάθος νερού)

$$\omega^2(k) = gk \tanh(kh)$$

εφόσον $\tanh(x) \rightarrow \operatorname{sgn}(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$ και $|k| = k \cdot \operatorname{sgn}(k)$.

Πρώτης τάξης, $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$

Η $\mathcal{O}(\varepsilon)$ εξίσωση που αντιστοιχεί στο σύστημα (7.9), (7.10) έχει ως εξής

$$\varphi_t^{(1)} + g\eta^{(1)} = -\left(\eta^{(0)}\varphi_{tz}^{(0)} + \varphi_T^{(0)}\right) - \frac{1}{2}\left(\varphi_x^{(0)2} + \varphi_z^{(0)2}\right) \quad (7.13)$$

$$\eta_t^{(1)} - \varphi_z^{(1)} = -\eta_x^{(0)}\varphi_x^{(0)} - \eta_T^{(0)} + \eta^{(0)}\varphi_{zz}^{(0)} \quad (7.14)$$

Από την (7.11) έχουμε

$$A_1 = -\frac{ig}{\omega}N_1$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση και αντικαθιστώντας τη λύση που βρήκαμε για τα $\varphi^{(0)}$ και $\eta^{(0)}$ στις (7.13) και (7.14) οδηγούμαστε στις

$$\varphi_t^{(1)} + g\eta^{(1)} = g|k|N_1^2 \exp 2i\theta - A_{1,T} \exp i\theta + c.c. \quad (7.15)$$

$$\eta_t^{(1)} - \varphi_z^{(1)} = -\frac{2ig}{\omega}k^2N_1^2 \exp 2i\theta - N_{1,T} \exp i\theta + c.c. \quad (7.16)$$

Αφαιρώντας τους αιώνιους (secular) όρους $\exp i\theta$ απαιτείται να θέσουμε $A_{1,T} = N_{1,T} = 0$ σε αυτή την τάξη. Όμως κάνουμε ασυμπτωτική επέκταση των $A_{1,T}$ και $N_{1,T}$ ως εξής

$$A_{1,T} = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$$

$$N_{1,T} = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots$$

και στην περίπτωση αυτή οι εναπομείναντες όροι στην εξίσωση μας οδηγούν σε μια λύση της μορφής

$$\varphi^{(1)} = A_2 \exp(2i\theta + 2|k|z) + c.c.$$

και

$$\eta^{(1)} = N_2 \exp 2i\theta + c.c.$$

Αντικαθιστώντας αυτή την υπόθεση ή ansatz στις (7.15) και (7.16) παίρνουμε το σύστημα

$$-2i\omega A_2 + gN_2 = g|k|N_1^2$$

$$-2i\omega N_2 - 2|k|A_2 = -\frac{2ig}{\omega}k^2N_1^2$$

Πλέον έχουμε ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα για τα A_2 και N_2 . Λόγω της (7.12) η λύση είναι μοναδική, εφόσον η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

διασποράς, η λύση είναι

$$A_2 = 0$$

και

$$N_2 = |k| N_1^2$$

Επομένως

$$\varphi^{(1)} = 0$$

και

$$\eta^{(1)} = |k| N_1^2 \exp 2i\theta + c.c.$$

Δεύτερης τάξης, $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Η εξίσωση $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ που αντιστοιχεί στο σύστημα (7.6), (7.7) έχει ως εξής

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(2)} + g\eta^{(2)} &= -\eta^{(1)}\varphi_{tz}^{(0)} - \eta^{(0)}\varphi_{tz}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta^{(0)2}\varphi_{tzz}^{(0)} - (f_1 \exp i\theta + c.c.) - \\ &- \left(\varphi_x^{(0)}\varphi_x^{(1)} + \eta^{(0)}\varphi_x^{(0)}\varphi_{xz}^{(0)} + \varphi_z^{(0)}\varphi_z^{(1)} + \eta^{(0)}\varphi_z^{(0)}\varphi_{zz}^{(0)} \right) - \varphi_T^{(1)} - \eta^{(0)}\varphi_{Tz}^{(0)} \\ \eta_t^{(2)} - \varphi_z^{(2)} &= - \left(\eta_x^{(0)}\varphi_x^{(1)} + \eta_x^{(1)}\varphi_x^{(0)} + \eta^{(0)}\eta_x^{(0)}\varphi_{xz}^{(0)} \right) + \\ &+ \eta^{(0)}\varphi_{zz}^{(1)} + \eta^{(1)}\varphi_{zz}^{(0)} + \frac{1}{2}\eta^{(0)2}\varphi_{zzz}^{(0)} - (g_1 \exp i\theta + c.c.) - \eta_T^{(1)} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\varphi^{(1)} = 0$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τους υπόλοιπους όρους f_1 και g_1 μετά την αφαίρεση των αιωνίων (secular) όρων, καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(2)} + g\eta^{(2)} &= -\eta^{(1)}\varphi_{tz}^{(0)} - \frac{1}{2}\eta^{(0)2}\varphi_{tzz}^{(0)} - (f_1 \exp i\theta + c.c.) - \\ &- \eta^{(0)}\varphi_x^{(0)}\varphi_{xz}^{(0)} - \eta^{(0)}\varphi_z^{(0)}\varphi_{zz}^{(0)} - \eta^{(0)}\varphi_{Tz}^{(0)} \\ \eta_t^{(2)} - \varphi_z^{(2)} &= -\eta_x^{(1)}\varphi_x^{(0)} - \eta^{(0)}\eta_x^{(0)}\varphi_{xz}^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{2}\eta^{(0)2}\varphi_{zzz}^{(0)} - (g_1 \exp i\theta + c.c.) - \eta_T^{(1)} \end{aligned}$$

Αφαιρούμε τους αιώνιους (secular) όρους και λύνουμε τις εναπομείναντες εξισώσεις. Προς τούτο, αντικαθιστούμε τις ακόλουθες λύσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{(0)} = A_1 \exp (i\theta + |k| z) + c.c. \\ \eta^{(0)} = N_1 \exp i\theta + c.c. \\ \eta^{(1)} = |k|^2 N_1^2 \exp i2\theta + c.c. \\ \varphi^{(1)} = 0 \end{array} \right. \quad (7.17)$$

και τελικά έχουμε

$$\varphi_t^{(2)} + g\eta^{(2)} = (C_1 \exp i\theta + c.c.) + (C_2 \exp 2i\theta + c.c.) + (C_3 \exp 3i\theta + c.c.) + C_0$$

$$\eta_t^{(2)} - \varphi_z^{(2)} = (D_1 \exp i\theta + c.c.) + (D_2 \exp 2i\theta + c.c.) + (D_3 \exp 3i\theta + c.c.)$$

όπου οι συντελεστές $C_1, C_2, C_3, C_0, D_1, D_2, D_3$ εξαρτώνται από A_1, N_1, k και ω . Για να αφαιρέσουμε τους αιώνιους (secular) όρους απαιτούμε οι συντελεστές του $\exp(\pm i\theta)$ να είναι μηδέν. Δηλαδή, ψάχνουμε λύση της μορφής

$$\varphi^{(2)} = \left[A_1^{(2)} \exp(i\theta + |k|z) + A_2^{(2)} \exp(2i\theta + |k|z) + A_3 \exp(3i\theta + |k|z) + c.c. \right] + A_0$$

$$\eta^{(2)} = \left(N_1^{(2)} \exp i\theta + N_2^{(2)} \exp 2i\theta + N_3 \exp 3i\theta + c.c. \right) + N_0$$

και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απροσδιορίστων συντελεστών. Θέτουμε, λοιπόν, $f_1 = A_{1,\tau}$ και $g_1 = N_{1,\tau}$, όπου $\tau = \varepsilon T = \varepsilon^2 t$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις λύσεις (7.17) και αφαιρώντας τους συντελεστές του $\exp(\pm i\theta)$, βρίσκουμε το σύστημα

$$-i\omega A_1^{(2)} + g N_1^{(2)} = -\frac{3}{2} g k^2 |N_1|^2 N_1 - A_{1,\tau} \quad (7.18)$$

$$-i\omega N_1^{(2)} - |k| A_1^{(2)} = -\frac{5i}{2} \omega k^2 |N_1|^2 N_1 - N_{1,\tau} \quad (7.19)$$

Χρησιμοποιώντας την (7.18) στην (7.19) φτάνουμε στις

$$A_1^{(2)} = \frac{g}{i\omega} N_1^{(2)} + \frac{3}{2i\omega} g k^2 |N_1|^2 N_1 + \frac{1}{i\omega} A_{1,\tau}$$

και

$$-i\omega N_1^{(2)} - \frac{g|k|}{i\omega} N_1^{(2)} = \frac{3}{2i\omega} |k| k^2 |N_1|^2 N_1 + \frac{|k|}{i\omega} A_{1,\tau} - \frac{5i}{2} \omega k^2 |N_1|^2 N_1 - N_{1,\tau}$$

Θέτοντας $A_1 = -\frac{ig}{\omega} N_1$ και $\omega^2 = g|k|$ οδηγούμαστε στην

$$-2N_{1,\tau} - 4i\omega k^2 |N_1|^2 N_1 = 0 \implies N_{1,\tau} = -2i\omega k^2 |N_1|^2 N_1$$

Γι' αυτή τη μορφή εξίσωσης ισχύει

$$|N_1|^2(\tau) = |N_1|^2(0)$$

οπότε

$$N_1(\tau) = N_1(0) \exp\left(-2i\omega k^2 |N_1(0)|^2 \tau\right)$$

Τότε η λύση της ελεύθερης επιφάνειας δίδεται στην υψηλότερη τάξη από την

$$\begin{aligned} \eta &= N_1(0) \exp\left[ikx - 2i\omega \left(1 + 2\varepsilon^2 k^2 |N_1(0)|^2\right) t\right] + c.c. \implies \\ &\implies \eta = a \cos\left[kx - \omega \left(1 + \frac{\varepsilon^2 a^2 k^2}{2}\right) t\right] \end{aligned}$$

όπου $a = 2 |N_1(0)|$. Η τελική συχνότητα προσεγγιστικά δίδεται από

$$\omega_n = \omega \left(1 + 2\varepsilon^2 k^2 |N_1(0)|^2 \right) = \omega \left(1 + \frac{\varepsilon^2 a^2 k^2}{2} \right)$$

Ο όρος $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, δηλαδή $2\varepsilon^2 \omega k^2 |N_1(0)|^2$, αντιστοιχεί στη μη γραμμική συχνότητα μετατόπισης. Μπορούμε επίσης να πάρουμε μια εξίσωση για το A_1 . Πράγματι, θέτοντας $N_1 = \frac{i\omega}{g} A_1$ παίρνουμε

$$A_{1,\tau} = -2ik^2 \frac{\omega^3}{g^2} |A_1|^2 A_1$$

Θέτοντας $\omega^2 = g|k|$ παίρνουμε

$$iA_{1,\tau} - \frac{2k^4}{\omega} |A_1|^2 A_1 = 0 \quad (7.20)$$

η λύση της οποίας (όμοια με την παραγωγή της N_1) είναι

$$A_1(\tau) = A_1(0) \exp\left(-2i \frac{k^4}{\omega} |A_1(0)|^2 \tau\right) = A_1(0) \exp\left(-2ik^2 \omega |N_1(0)|^2 \tau\right)$$

όπου $A_1 = -\frac{ig}{\omega} N_1$. Αυτό δείχνει ότι A_1 και N_1 έχουν την ίδια μη γραμμική συχνότητα μετατόπισης.

7.3 Εξαγωγή της εξίσωσης NLS

Προηγουμένως, ασχοληθήκαμε με την παραγωγή του μη γραμμικού όρου της εξίσωσης NLS, κάτι που επέτρεψε την αργά μεταβαλλόμενη καμπύλη (ή περίβλημα) A να εξαρτάται μόνο από τον αργό χρόνο $T = \varepsilon t$. Τώρα, θα περιγράψουμε την εξαγωγή της εξίσωσης NLS, όταν περιλαμβάνονται αργές χρονικές και χωρικές μεταβολές, δηλαδή, οι εξισώσεις κυμάτων νερού έχουν πλέον ένα πρόσθετο μεταβλητό βάθος, z . Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τη δομή των εξισώσεων κυμάτων νερού ώστε να προτείνουμε ένα ansatz για το διαταραγμένο υπολογισμό μας. Οι εξισώσεις που θα εξετάσουμε είναι

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < z < \varepsilon\eta \quad (7.21)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi_z = 0 \quad (7.22)$$

$$\varphi_t + \frac{\varepsilon}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (7.23)$$

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x \varphi_x = \varphi_z, \quad z = \varepsilon\eta \quad (7.24)$$

δηλαδή, πρόκειται για εξισώσεις κυμάτων νερού σε όριο βαθύων υδάτων. Ο υπολογισμός θα χωριστεί σε 3 στάδια.

Πρώτον, λόγω του ελεύθερου συνόρου, επεκτείνουμε το $\varphi = \varphi(t, x, \varepsilon\eta)$ για $\varepsilon \ll 1$, έτσι ώστε

$$\varphi = \varphi(t, x, 0) + \varepsilon\eta\varphi_z(t, x, 0) + \frac{(\varepsilon\eta)^2}{2}\varphi_{zz}(t, x, 0) + \dots \quad (7.25)$$

Ομοίως επεκτείνουμε τα φ_t , φ_x και φ_z . Οι εξισώσεις ελεύθερης επιφάνειας (7.23) και (7.24) επεκτείνονται γύρω από το $z = 0$ υπό τη μορφή

$$\varphi_t + \varepsilon\eta\varphi_{tz} + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{tzz} + \frac{\varepsilon}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2 + 2\varepsilon\eta\varphi_x\varphi_{xz} + 2\varepsilon\eta\varphi_z\varphi_{zz}) + g\eta = 0$$

και

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x(\varphi_x + \varepsilon\eta\varphi_{xz}) = \varphi_z + \varepsilon\eta\varphi_{zz} + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\varphi_{zzz}$$

Δεύτερον, εισάγουμε τις αργές χρονικές και χωρικές κλίμακες

$$\varphi(t, x, z) = \varphi(t, x, z, T, X, Z, ; \varepsilon)$$

$$\eta(t, x) = \varphi(t, x, \varepsilon\eta, T, X, \varepsilon)$$

όπου $X = \varepsilon x$, $Z = \varepsilon z$ και $T = \varepsilon t$.

Τέλος, λόγω της τετραγωνικής μη γραμμικότητας, αναμένουμε να παραχθούν δεύτερα αρμονικά και μεσαίοι όροι. Αυτό προτείνει το ansatz

$$\varphi = (A \exp(i\theta + |k|z) + c.c.) + \varepsilon(A_2 \exp(2i\theta + 2|k|z) + c.c. + \bar{\varphi}) \quad (7.26)$$

$$\eta = (B \exp i\theta + c.c.) + \varepsilon(B_2 \exp 2i\theta + c.c. + \bar{\eta}) \quad (7.27)$$

Οι συντελεστές A , A_2 και $\bar{\varphi}$ εξαρτώνται από τα X , Z και T ενώ οι B , B_2 και $\bar{\eta}$ εξαρτώνται από τα X , T . Αυτή η ταχεία φάση δίνεται από $\theta = kx - \omega t$, με τη σχέση διασποράς $\omega^2 = g|k|$. Αντικαθιστώντας το ansatz για το φ στην εξίσωση Laplace (7.21) βρίσκουμε

$$\exp i\theta [2\varepsilon k (iA_X + \operatorname{sgn}(k) A_Z) + \varepsilon^2 (A_{XX} + A_{ZZ}) + \dots] = 0$$

$$e^0 [\bar{\varphi}_{XX} + \bar{\varphi}_{ZZ}] = 0$$

Η πρώτη εξίσωση υπονοεί

$$A_Z = -i \operatorname{sgn}(k) A_X - \frac{\varepsilon \operatorname{sgn}(k)}{2k} (A_{XX} + A_{ZZ}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \implies$$

$$\implies A_Z = -i \operatorname{sgn}(k) A_X + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (7.28)$$

Παραγωγίζοντας την (7.28) ως προς αργή μεταβλητή Z παίρνουμε

$$A_{ZZ} = -i \operatorname{sgn}(k) A_{XZ} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (7.29)$$

Παραγωγίζουμε μερικώς την (7.28) ως προς X και αντικαθιστούμε στην (7.29) το A_{XZ} . Τότε έχουμε

$$A_{ZZ} = -i \operatorname{sgn}(k) (-i \operatorname{sgn}(k)) A_{XX} + \mathcal{O}(\varepsilon) \implies$$

$$\implies A_{ZZ} = -A_{XX} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (7.30)$$

Εφόσον οι όροι $\mathcal{O}(\varepsilon)$ στην (7.28) είναι ανάλογοι με το $A_{XX} + A_{ZZ}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (7.30) ώστε να καταλήξουμε στην

$$A_Z = -i \operatorname{sgn}(k) A_X + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Αντικαθιστώντας το ansatz (7.26) και (7.27) στην εξίσωση Bernoulli (7.23) και την κινηματική εξίσωση (7.24) με την (7.25), βρίσκουμε αντιστοίχως

$$\begin{aligned} & \exp i\theta \left\{ (-i\omega A + gB) + \varepsilon A_T + \varepsilon^2 \left[-i\omega k^2 A |B|^2 + 4k^2 |k| |A|^2 B + 2k^2 |k| A^2 B^* + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2} \omega k^2 B^2 A^* + 4k^2 A_2 A^* - i\omega |k| A \bar{\eta} + i\omega |k| B_2 A^* - 4i\omega |k| A_2 B^* \right] + \dots \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\exp 2i\theta \left\{ A_2 - \varepsilon \frac{4k^2 A}{2|k|g} \left(A_T + \frac{\omega}{2k} A_X \right) + \dots \right\} = 0 \quad (7.32)$$

$$e^0 \left\{ \bar{\varphi}_Z - \bar{\eta}_T - \frac{2\omega k}{g} \frac{\partial}{\partial X} |A|^2 + \dots \right\} = 0 \quad (7.33)$$

και

$$\begin{aligned} & \exp i\theta \left\{ (-i\omega B - |k| A) + \varepsilon (B_T + i \operatorname{sgn}(k) A_X) + \varepsilon^2 \left[\frac{k^2 |k|}{2} (B^2 A^* - 2|B|^2 A) + \right. \right. \\ & \left. \left. + k^2 (B_2 A^* - 2B^* A_2) - k^2 \bar{\eta} A \right] + \dots \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\exp 2i\theta \left\{ B_2 + \frac{k^2 A^2}{g} - \varepsilon \frac{2ik}{g} A A_X + \dots \right\} = 0 \quad (7.35)$$

$$e^0 \{ \bar{\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \} = 0 \quad (7.36)$$

Μέσω της (7.36) βρίσκουμε για την (7.33)

$$\bar{\varphi}_Z = \frac{2\omega k}{g} \frac{\partial}{\partial X} |A|^2$$

δηλαδή, μέχρι $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ η μέση ταχύτητα του δυναμικού εξαρτάται ρητά από το $|A|^2$. Θέτοντας τους συντελεστές κάθε δύναμης του ε με μηδέν στις (7.31) και (7.34) οδηγούμαστε στην υψηλότερη τάξη

$$-i\omega A + gB = 0$$

$$-|k| A - i\omega B = 0$$

η οποία, εφόσον ικανοποιείται η σχέση διασποράς $\omega^2 = g|k|$, έχει τη μη τετριμμένη λύση

$$B = \frac{i\omega}{g} A$$

Από τις (7.31)-(7.36) έχουμε

$$B = \frac{i\omega}{g} A - \frac{\varepsilon A_T}{g} +$$

$$+\varepsilon^2 \left(i \frac{\omega k^2}{g} A |B|^2 - 4 \frac{k^2 |k|}{g} |A|^2 B - \frac{i \omega k^2}{2g} B^2 A^* + \frac{i \omega k^2 |k|}{g^2} A^2 A^* \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Αντικαθιστώντας αυτήν στην (7.34) και μέσω των (7.31)-(7.36), καταλήγουμε στην

$$2i\omega (A_T + v_{gr} A_X) - \varepsilon \left(A_{TT} + 4k^4 |A|^2 A \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (7.37)$$

όπου έχουμε ορίσει την ομαδιαία ταχύτητα ως $v_{gr} = \omega'(k) = \frac{\omega}{2k}$. Από αυτό και την (7.32), έχουμε ότι $A_2 \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Αν αμελήσουμε τους όρους $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ από την (7.36) και κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητών $\tau = \varepsilon T$, $\xi = X - v_{gr} T$, παίρνουμε την εστιακού τύπου NLS εξίσωση

$$iA_\tau + \frac{\omega''}{2} A_{\xi\xi} - \frac{2k^4}{\omega} |A|^2 A = 0 \quad (7.38)$$

Με $\omega'' = -\frac{v_{gr}^2}{\omega}$, η (7.38) γράφεται

$$iA_\tau - \frac{v_{gr}^2}{2\omega} A_{\xi\xi} - \frac{2k^4}{\omega} |A|^2 A = 0 \quad (7.39)$$

η οποία είναι η τυπική μορφή της εξίσωσης NLS εστιακού τύπου της θεωρίας κυμάτων νερού. Σημειώνουμε ότι στους όρους του B , οι οποίοι σχετίζονται με την ανύψωση του κύματος η , θέτοντας $A = \frac{g}{i\omega} B$, η εξίσωση (7.39) γίνεται

$$iB_\tau + \frac{\omega''}{2} B_{\xi\xi} - 2k^2 \omega |B|^2 B = 0$$

Ακόμα, ο συντελεστής του μη γραμμικού όρου στην (7.39) συμφωνεί με τη συχνότητα μετατόπισης του Stokes. Μια διαφορετική αλλαγή συντεταγμένων σε ένα επιβραδυνόμενο χρονικό πλαίσιο είναι να θέσουμε $t' = T - \frac{X}{v_{gr}}$ και $\chi = \varepsilon X$. Τότε παίρνουμε

$$iA_\chi + \frac{\omega''}{2(\omega')^3} A_{t't'} - \frac{2k^4}{\omega\omega'} |A|^2 A = 0 \quad (7.40)$$

Η εξίσωση NLS εστιακού τύπου καλείται έτσι, διότι τα πρόσημα της διασποράς και των μη γραμμικών όρων είναι ίδια στην (7.39). Πράγματι, στην (7.40), εφόσον $\omega^2(k) = g|k|$, για k θετικό, παίρνουμε $\omega = \sqrt{gk}$, $v_{gr} = \omega' = \sqrt{\frac{g}{4k}}$ και $\omega'' = -\frac{\sqrt{g}}{4k^{3/2}} = -\frac{v_{gr}^2}{\omega}$. Επίσης $\frac{\omega''}{2(\omega')^2} = -\frac{1}{\omega}$. Δηλαδή, ο συντελεστής του όρου της δεύτερης παραγώγου και ο μη γραμμικός συντελεστής έχουν το ίδιο πρόσημο. Η εστιακού τύπου NLS εξίσωση δέχεται 'φωτεινές' σολιτονιακές λύσεις, δηλαδή, λύσεις της μορφής εντοπισμένων παλμών ('humps').

7.4 Ιδιότητες της εξίσωσης NLS

Ο γραμμικός τελεστής στην (7.38) είναι

$$\hat{L} = i\partial_\tau + \frac{\omega''}{2} \partial_\xi^2$$

Το μη γραμμικό κομμάτι της (7.38) είναι

$$iA_\tau - \frac{2k^4}{\omega} |A|^2 A = 0$$

Αλλάζοντας κλίμακα στην (7.39) με

$$\xi = \frac{v_{gr}}{\sqrt{2}} x$$

$$A = k^2 u$$

$$\tau = -2\omega^2 t$$

παίρνουμε την εστιακού τύπου εξίσωση NLS σε συγκεκριμένη μορφή

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \quad (7.41)$$

Μια ειδική λύση είναι ένα ‘φωτεινό’ σολιτόνιο

$$u = \eta \operatorname{sech} [\eta (x + 2\xi t - x_0)] \exp(-i\Theta)$$

όπου $\Theta = \xi x + (\xi^2 - \eta^2) t + \Theta_0$. Οι παράμετροι ξ και η σχετίζονται με μια ιδιοτιμή από την ανάλυση του μετασχηματισμού αντίστροφης σκέδασης μέσω του $\lambda = \frac{\xi}{2} + \frac{i\eta}{2}$, όπου λ είναι η ιδιοτιμή. Αν αντί για την (7.41) έχουμε την αφεστιακού τύπου εξίσωση NLS

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0 \quad (7.42)$$

τότε βρίσκουμε ‘σκοτεινές’, ‘μαύρες’ ή γενικώς ‘γκρι’, σολιτονιακές λύσεις.

Θέτοντας $t \rightarrow -\frac{t}{2}$, η (7.42) γίνεται

$$iu_t - \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = 0$$

και έχει μια μαύρη σολιτονιακή λύση της οποίας το πλάτος εξασθενεί στην αρχή

$$u = \eta \tanh(\eta x) \exp i\eta^2 t$$

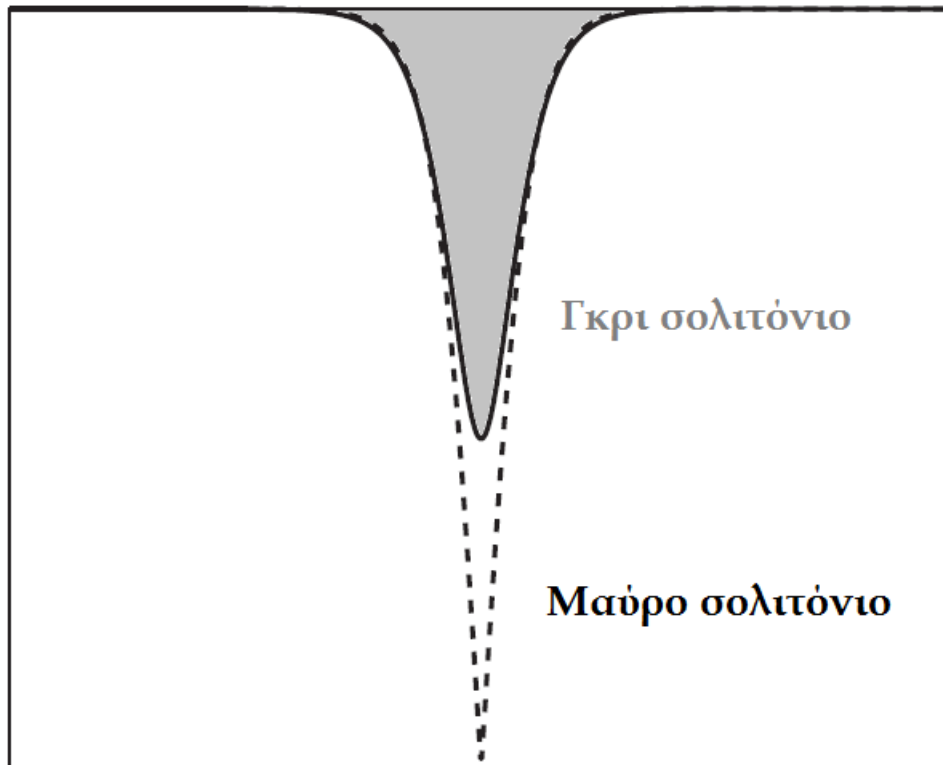
Σημειώνουμε ότι $u \rightarrow \pm\eta$ καθώς $x \rightarrow \pm\infty$.

Μια γκρι σολιτονιακή λύση δίνεται από

$$u(x, t) = \eta [\exp(2i\eta^2 t + i\psi_0)] [\cos a + i \sin a \tanh[\sin a \eta (x - 2\eta \cos a t - x_0)]]$$

όπου τα η , a , x_0 , ψ_0 συμβολίζουν αυθαίρετες πραγματικές παραμέτρους. Αυτές οι λύσεις ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

$$u(x, t) \rightarrow u_\pm(t) = \eta \exp(2i\eta^2 t + i\psi_0 \pm ia)$$



Σχήμα 7.1: Φωτεινά (επιφάνεια) και σκοτεινά (βυθός) σολιτόνια της NLS

καθώς

$$x \rightarrow \pm\infty$$

και εμφανίζονται σαν τοπικές βυθίσεις τής τάσης $\eta^2 \sin^2 a$ στο πεδίο η . Το γκρι σολιτόνιο κινείται με ταχύτητα $2\eta \cos a$ και παράγει τό σκοτεινό (μαύρο) σολιτόνιο όταν

$$a \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

με

$$\psi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Μια ιδιότητα της εξίσωσης NLS είναι η αναλλοίωτη του Γαλιλαίου. Τότε, αν $u_1(x, t)$ είναι μια λύση τής (7.41), τότε και η

$$u_2(x, t) = u_1(x - vt, t) \exp[i(kx - \omega t)]$$

είναι επίσης λύση τής (7.41) με $k = \frac{v}{2}$ και $\omega = k^2$. Αντικαθιστώντας τη u_2 στην (7.41) βρίσκουμε ότι η u_1 ικανοποιεί την

$$iu_{1,t} + \omega u_1 - i\nu u_{1,x} + (u_{1,xx} + 2iku_{1,x} - k^2 u_1) + 2|u_1|^2 u_1 = 0$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός της υπόθεσής μας, ότι η u_1 είναι μια λύση τής (7.41) και χρησιμο-

ποιώντας τις τιμές για k , ω , αυτό σημαίνει ότι η u_2 επίσης ικανοποιεί την (7.41).

Ένα ακόμα σημαντικό αποτέλεσμα περιλαμβάνει τη γραμμική ευστάθεια μιας ειδικής περιοδικής λύσης της (7.41). Στην (7.38), δηλαδή, η κανονική μορφή κυμάτων νερού, λαμβάνει το A ως ανεξάρτητο του ξ με αποτέλεσμα να έχουμε

$$iA_\tau = \frac{2k^4}{\omega} |A|^2 A$$

Σημειώνουμε, ότι αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα (7.20), για τον υπολογισμό της συχνότητας μετατόπισης του Stokes. Με την αλλαγή μεταβλητών που χρησιμοποιήσαμε νωρίτερα για τους όρους της κανονικής NLS, έχουμε

$$iu_t = -2|u|^2 u$$

η οποία έχει την επίπεδη κυματική λύση

$$u = a \exp 2ia^2 t$$

με $a = u(0)$, όπου για ευκολία παίρνουμε το a ως πραγματικό.

Τώρα, διαταράσσουμε τη λύση

$$u = a (\exp 2ia^2 t) (1 + \varepsilon(x, t))$$

όπου $|\varepsilon| \ll 1$. Αντικαθιστώντας αυτό στην (7.41) και γραμμικοποιώντας (υποθέτοντας ότι $|\varepsilon| \ll 1$) βρίσκουμε

$$i\varepsilon_t + \varepsilon_{xx} + 2a^2 (\varepsilon + \varepsilon^*) = 0 \tag{7.43}$$

Θα θεωρήσουμε το γραμμικοποιημένο πρόβλημα στην περιοδική χωρική περιοχή

$$0 < x < L$$

Τότε το $\varepsilon(x, t)$ εκφράζεται μέσω της σειράς Fourier

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varepsilon}_n(t) \exp i\mu_n x$$

όπου $\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$. Σημειώνουμε ότι το $\widehat{\varepsilon}_{-n}(t)$ δεν είναι το μιγαδικό συζυγές του $\widehat{\varepsilon}_n(t)$, εφόσον το ε δεν είναι απαραίτητα πραγματικός. Εφόσον η μερική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν λύση της τη μορφή

$$\varepsilon = \widehat{\varepsilon}_n(t) \exp i\mu_n x + \widehat{\varepsilon}_{-n}(t) \exp (-i\mu_n x) \tag{7.44}$$

Παραγωγίζοντας το ε_n ως προς t έχουμε

$$\varepsilon'_n \equiv \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial t}$$

Παραγωγίζοντας το ε μία φορά ως προς x έχουμε

$$\varepsilon_x = i\mu_n \widehat{\varepsilon}_n \exp i\mu_n x - i\mu_n \widehat{\varepsilon}_{-n} \exp(-i\mu_n x)$$

Παραγωγίζοντας το ε δύο φορές ως προς x έχουμε

$$\varepsilon_{xx} = -\mu_n^2 \widehat{\varepsilon}_n \exp i\mu_n x - \mu_n^2 \widehat{\varepsilon}_{-n} \exp(-i\mu_n x)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (7.44) και τις παραγώγους της στην (7.43) έχουμε

$$i [\widehat{\varepsilon}_n' \exp i\mu_n x + \widehat{\varepsilon}_{-n}' \exp(-i\mu_n x)] - \mu_n^2 [\widehat{\varepsilon}_n \exp i\mu_n x + \widehat{\varepsilon}_{-n} \exp(-i\mu_n x)] + \\ + 2a^2 [\widehat{\varepsilon}_n \exp i\mu_n x + \widehat{\varepsilon}_{-n} \exp(-i\mu_n x) + \widehat{\varepsilon}_n^* \exp(-i\mu_n x) + \widehat{\varepsilon}_{-n}^* \exp i\mu_n x] = 0$$

Θέτοντας με μηδέν τους συντελεστές των $\exp i\mu_n x$ και $\exp(-i\mu_n x)$, βρίσκουμε αντίστοιχα

$$i\widehat{\varepsilon}_n' - \mu_n^2 \widehat{\varepsilon}_n + 2a^2 (\widehat{\varepsilon}_n + \widehat{\varepsilon}_{-n}^*) = 0$$

$$i\widehat{\varepsilon}_{-n}' - \mu_n^2 \widehat{\varepsilon}_{-n} + 2a^2 (\widehat{\varepsilon}_{-n} + \widehat{\varepsilon}_n^*) = 0$$

Παίρνοντας τον συζυγή στην τελευταία εξίσωση και πολλαπλασιάζοντάς την με -1 , καταλήγουμε στο σύστημα

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_n \\ \widehat{\varepsilon}_{-n}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 - \mu_n^2 & 2a^2 \\ -2a^2 & -2a^2 + \mu_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_n \\ \widehat{\varepsilon}_{-n}^* \end{pmatrix} = 0$$

το οποίο και πρέπει να λύσουμε. Υποθέτοντας μία λύση της μορφής

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_n \\ \widehat{\varepsilon}_{-n}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp i\sigma_n t$$

βρίσκουμε

$$\det \begin{pmatrix} 2a^2 - \mu_n^2 - \sigma_n & 2a^2 \\ -2a^2 & -2a^2 + \mu_n^2 - \sigma_n \end{pmatrix} = 0$$

το οποίο αληθεύει για

$$\mu_n^2 = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2$$

και

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \left[\left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 - 4a^2 \right]$$

Τότε για

$$\frac{aL}{\pi} > n$$

το σύστημα είναι ασταθές, εφόσον το $\sigma_n^2 < 0$ οδηγεί σε εκθετική μεγέθυνση.

7.5 Πολυδιάστατα κύματα νερού

Για τα πολυδιάστατα κύματα νερού σε πεπερασμένο όριο βάρους με επιφανειακή τάση, το δυναμικό της ταχύτητας έχει τη μορφή

$$\varphi = \varepsilon \left[\tilde{\varphi}(X, Y, T) + \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \left(\tilde{A}(X, Y, T) \exp i(kx - \omega t) + c.c. \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

όπου $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon y$, $T = \varepsilon t$ και $\tilde{\varphi}$, \tilde{A} ικανοποιούν συζευγμένες μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις.¹ Αδιαστατοποιώντας τες και αλλάζοντάς τους κλίμακα, οι εξισώσεις μπορούν να πάρουν την εξής μορφή

$$\begin{aligned} iA_t + \sigma_1 A_{xx} + A_{yy} &= \sigma_2 |A|^2 A + A\Phi_x \\ a\Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= -b \left(|A|^2 \right)_x \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\sigma_1 = \pm 1, \quad \sigma_2 = \pm 1$$

Οι παράμετροι σ_1 , σ_2 , a και b είναι αδιάστατες και εξαρτώνται από το αδιάστατο βάθος του ρευστού και την επιφανειακή τάση. Το σύστημα (7.45) καλείται σύστημα Benney-Roskes (BR). Εδώ το έχουμε παρουσιάσει σε μια κανονικοποιημένη μορφή με αλλαγή κλίμακας που βοηθά την ανάλυσή του για διαφορετικές επιλογές των σ_1 και σ_2 . Η ποσότητα A σχετίζεται με την αργά μεταβαλλόμενη καμπύλη του πρώτου αρμονικού του πεδίου του δυναμικού της ταχύτητας και το Φ σχετίζεται με το αργά μεταβαλλόμενο μεσαίο πεδίο του δυναμικού της ταχύτητας. Μια ειδική λύση για το σύστημα (7.45) είναι η ακόλουθη self-similar λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Lambda}{t} \exp i \left(\frac{\sigma_1 x^2 + y^2}{4t} + \sigma_2 \frac{\Lambda^2}{t} + B(t) + \varphi_0 \right) \\ \Phi &= -B'(t)x + C(t)y + D(t) \end{aligned}$$

Αυτό είναι ανάλογο της ομοιότητας της λύσης στη μία διάσταση της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (NLS)

$$\begin{aligned} iA_t + A_{xx} + \sigma |A|^2 A &= 0 \\ A &= \frac{\Lambda}{\sqrt{t}} \exp i \left(\frac{x^2}{4t} + \sigma \Lambda^2 \log(t) + \varphi_0 \right) \end{aligned}$$

Από τις κυματικές εξισώσεις νερού στο όριο $kh \rightarrow 0$ (το όριο ρηχών νερών) με κατάλληλη αλλαγή κλίμακας, το σύστημα (BR) της (7.45) περιορίζεται στο

$$\begin{aligned} iA_t - \gamma A_{xx} + A_{yy} &= A \left(\gamma |A|^2 + \Phi_x \right) \\ \gamma \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= -2 \left(|A|^2 \right)_x, \quad \gamma = \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{3} - \hat{T} \right) = \pm 1 \end{aligned} \quad (7.46)$$

¹Οι Benney και Roskes, το 1969 παρήγαγαν το σύστημα αυτό χωρίς επιφανειακή τάση. Οι Davey και Stewartson, το 1974 το έφεραν σε απλούστερη μορφή και τελικά οι Djordjevic και Redekopp, το 1977 συμπεριέλαβαν την επιφανειακή τάση.

Η εξίσωση αυτή καλείται Davey-Stewartson (DS), η οποία περιγράφει πολυδιάστατα κύματα νερού σε προσέγγιση αργής μεταβαλλόμενης καμπύλης, συμπεριλαμβανομένης της επιφανειακής τάσης στο όριο των ρηχών νερών. Εδώ, η κανονικοποιημένη επιφανειακή τάση ορίστηκε ως $\hat{T} = \frac{T_0}{\rho gh^2}$, όπου T_0 είναι ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης. Το σύστημα (7.46) είναι ολοκληρώσιμο ενώ το πολυδιάστατο όριο βαθιών υδάτων

$$iA_t + \nabla^2 A + |A|^2 A = 0$$

είναι φαινομενικά μη ολοκληρώσιμο. Η εξίσωση DS μπορεί να γενικοποιηθεί κάνοντας τις ακόλουθες αντικαταστάσεις

$$\varphi = \Phi_x, \quad r = -\sigma q^* = -\sigma A^*, \quad \sigma = \pm 1$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned} iq_t - \gamma q_{xx} + q_{yy} &= q(\varphi - qr) \\ \varphi_{xx} + \gamma \varphi_{yy} &= 2(qr)_{xx} \end{aligned} \quad (7.47)$$

Για $q = A$, $\gamma = -1$ και $\sigma = 1$ παίρνουμε την εξίσωση ρηχών νερών (7.46) με ‘μεγάλη’ επιφανειακή τάση. Αποδεικνύεται ότι η γενικοποιημένη εξίσωση DS, (7.47), δηλαδή η GDS, δέχεται εντοπισμένα σύνορα που προκαλούν λύσεις παλμών όταν $\gamma = 1$ και ασθενώς πτωτικές ‘lump’-τύπου λύσεις όταν $\gamma = -1$.

7.6 Ειδικές λύσεις για τις εξισώσεις Davey-Stewartson (DS)

Υποθέτουμε την περίπτωση όπου $\gamma = -1$ με $\sigma = 1$. Τότε το σύστημα DS (7.47) γίνεται

$$\begin{aligned} 2iq_t + q_{xx} + q_{yy} &= 2q(\varphi - qr) \\ \varphi_{xx} - \varphi_{yy} &= 2(qr)_{xx} \end{aligned} \quad (7.48)$$

Το σύστημα αυτό καλείται DSI. Προκειμένου να καταγράψουμε τη λύση παλμού (επίσης λέγεται και ‘dromion’), θα κάνουμε μια βολική αλλαγή κλίμακας και μεταβλητών.

$$Q = \varphi - qr$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση στο σύστημα GDS, (7.48), γίνεται

$$Q_{xx} - Q_{yy} = (qr)_{xx} + (qr)_{yy}$$

Τώρα κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & \eta &= \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \partial_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\xi + \partial_\eta), & \partial_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\xi - \partial_\eta) \end{aligned}$$

ώστε να έχουμε το μετασχηματισμό

$$2Q_{\xi\eta} = (qr)_{\xi\xi} + (qr)_{\eta\eta} \quad (7.49)$$

Τέλος, κάνοντας την αντικατάσταση

$$Q = -(U_1 + U_2)$$

και ολοκληρώνοντας ως προς ξ και η ξεχωριστά μέσω της (7.49) έχουμε

$$U_1 = u_1(\eta) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} (qr)_{\eta} d\xi'$$

$$U_2 = u_2(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta} (qr)_{\xi} d\eta$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μαζί με τη μετασχηματισμένη 2η εξίσωση της (7.48)

$$2iq_t + q_{\xi\xi} + q_{\eta\eta} + 2q(U_1 + U_2) = 0$$

δημιουργεί την ακόλουθη ‘dromion’ εξίσωση

$$u_1(\eta) = 2\lambda_R^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_R(\hat{\eta} - \eta_0)), \quad \hat{\eta} = \eta - 2\lambda_I t$$

$$u_2(\xi) = 2\mu_R^2 \operatorname{sech}^2(\mu_R(\hat{\xi} - \xi_0)), \quad \hat{\xi} = \xi - 2\mu_I t$$

$$q = \frac{\rho\sqrt{\lambda_R\mu_R} \exp i\theta}{\cosh\left(\mu_R(\hat{\xi} - \xi_0) \cosh(\lambda_R(\hat{\eta} - \eta_0)) + \left(\frac{|\rho|}{2}\right)^2 \exp(\lambda_R(\hat{\eta} - \eta_0)) \exp(\mu_R(\hat{\xi} - \xi_0))\right)}$$

$$\theta = -\left(\mu_I \hat{\xi} + \lambda_I \hat{\eta}\right) + \left(|\mu|^2 + |\lambda|^2\right) \frac{t}{2} - \theta_0$$

με

$$\lambda = \lambda_R + i\lambda_I, \quad \mu = \mu_R + i\mu_I$$

σταθερές και $\lambda_R > 0$, $\mu_R > 0$, λ , μ , ρ μιγαδικές σταθερές και ξ_0 , η_0 να είναι πραγματικές σταθερές.

7.7 Lump λύση για μικρή επιφανειακή τάση

Απορρίπτουμε ότι υπάρχουν lump-τύπου λύσεις στην (7.46) όταν $\gamma = +1$, αυτό είναι το αποκαλούμενο DSII σύστημα. Τώρα θεωρούμε ότι αυτή η περίπτωση ($\gamma = +1$), αντιστοιχεί σε μηδενική ή ‘μικρή’ επιφανειακή τάση ($\hat{T} < \frac{1}{3}$). Τότε το σύστημα GSD, (7.47), αφού αντικαταστήσουμε

στο $r = -\sigma q^*$ το $\sigma = \pm 1$, γράφεται

$$\begin{aligned}iq_t - q_{xx} + q_{yy} &= q \left(\varphi + \sigma |q|^2 \right) \\ \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= -2\sigma \left(|q|^2 \right)_{xx}\end{aligned}\tag{7.50}$$

Το ακόλουθο είναι μια lump λύση

$$\begin{aligned}q &= 2\rho\sigma \frac{\exp i\theta}{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \sigma|\rho|^2} \\ \varphi + \sigma |q|^2 &= R_{xx} - R_{yy} \\ R &= \log \left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \sigma|\rho|^2 \right) \\ \theta &= a\hat{x} - b\hat{y} + (b^2 - a^2)t - \theta_0 \\ \hat{x} &= x + at - x_0, \quad \hat{y} = y + bt - y_0 \\ k &= \frac{1}{2}(a + ib)\end{aligned}\tag{7.51}$$

σταθερά. Η λύση είναι μη ιδιάζουσα όταν $\sigma = 1$ και ιδιάζουσα για $\sigma = -1$. Εναλλακτικά έχουμε την ενδιαφέρουσα περίπτωση της σκοτεινής lump-τύπου λύσης τρύπας καμπύλης όταν $\sigma = -1$. Η περίπτωση $\sigma = 1$ εμφανίζεται στα κύματα νερού, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση, η (7.50) μπορεί να μετασχηματιστεί στην περιορισμένη κυματική εξίσωση νερών (7.46). Όμως όπως δείξαμε η lump λύση (7.51) είναι ασταθής.

8 Ακραία φαινόμενα της θάλασσας

8.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε δυο πολύ ιδιαίτερα, σπάνια και σχετικά άγνωστα μέχρι και σήμερα φαινόμενα που εντοπίζονται στη θάλασσα. Πρόκειται για το Ξαφνικό Κύμα και το Σούπερ Ξαφνικό Κύμα. Οι λιγοστές πληροφορίες που έχουμε γι' αυτά και η αδυναμία της έγκαιρης πρόβλεψής τους, είτε ακόμα και της συσχέτισής τους με άλλους παράγοντες όπως η βαρύτητα, οι μετεωρολογικές συνθήκες, οι σεισμοί, οι παλίρροιες ή τα τσουνάμια, τα καθιστούν ιδιαίτερος επικίνδυνα, ακόμα και για τα μεγάλα πλοία που διασχίζουν τον ωκεανό, παρά το γεγονός ότι αυτά έχουν παρατηρηθεί ακόμα και σε κλειστές και ασφαλείς θάλασσες. Γι' αυτό το λόγο χαρακτηρίζονται ως ακραία φαινόμενα της θάλασσας.

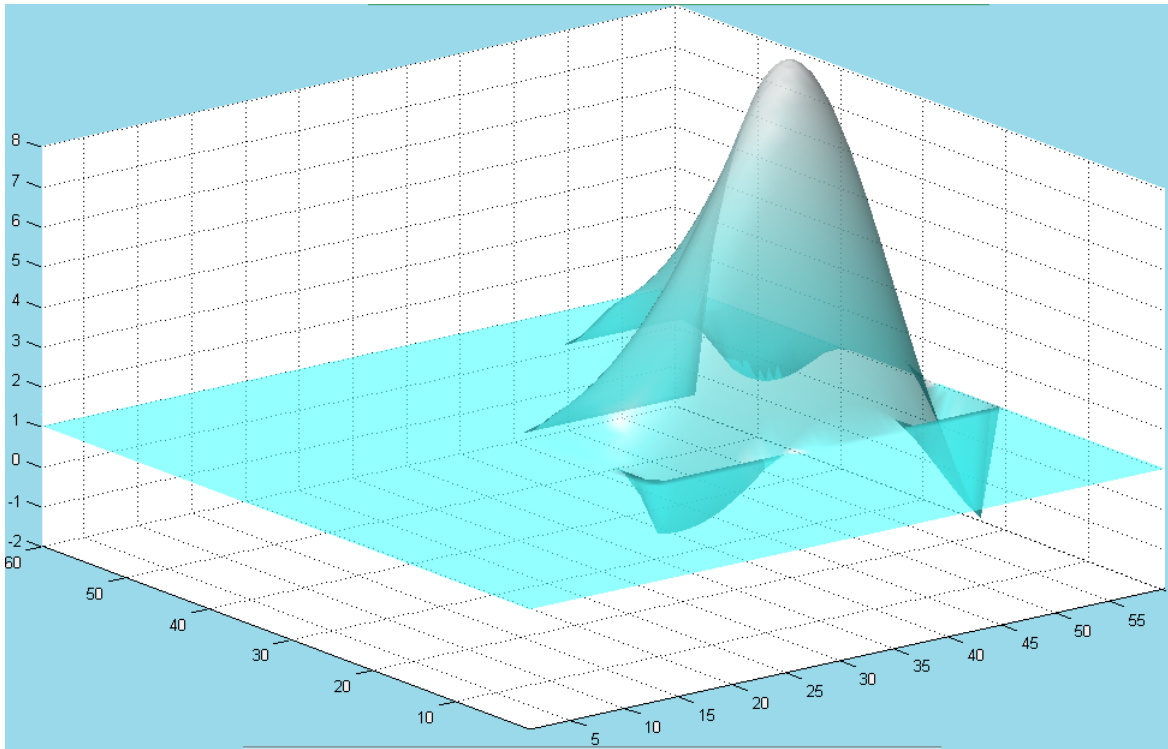
8.2 Ξαφνικό Κύμα (RW)

Πρόκειται για ένα αρκετά περίεργο θαλάσσιο φαινόμενο για το οποίο αντλούμε πληροφορίες κυρίως από παρατηρήσεις αεροπλάνων, ραντάρ (συνθετικού διαφράγματος), ακόμα και από το διάστημα (συνήθως με δορυφόρους), και λιγότερο από μαρτυρίες ανθρώπων, διότι η πιθανότητα επιβίωσης είναι μικρή. Πλοία, εν τω μέσω της θαλάσσης, χωρίς να επικρατούν άσχημες καιρικές συνθήκες, βλέπουν να ορθώνεται μπροστά τους σε κλάσματα δευτερολέπτου μια πυραμίδα, ένα τείχος ή ένα γιγάντιο βουνό από νερό.

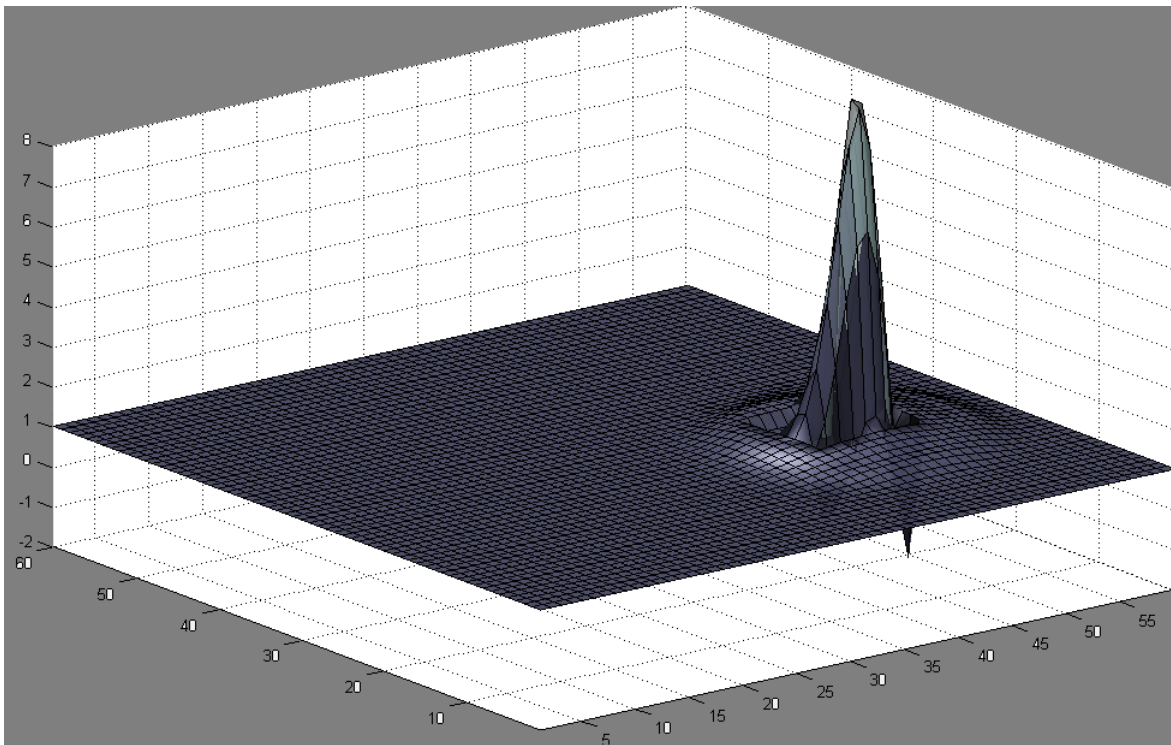
Η χειρότερη περίπτωση όμως είναι να συναντήσουν μια 'τρύπα' στο νερό, διότι αυτή δεν μπορεί να παρατηρηθεί από μακριά ώστε να προσπαθήσει να αλλάξει πορεία το πλοίο. Αυτά τα παράξενα και ακραία φαινόμενα της θάλασσας μελετώνται στην κατηγορία των ξαφνικών κυμάτων.

Επίσης έχουν αναφερθεί και παράκτια κυματικά φαινόμενα παρόμοιας φύσης με αυτά που συναντώνται στον ωκεανό τα οποία δεν σχετίζονται με τα τσουνάμια, αλλά ίσως έπονται μιας ισχυρής καταιγίδας. Αυτά περιγράφονται σαν ξαφνικές σύντομες παράκτιες πλημμύρες ή σαν τεράστια κύματα που ορμούν στις παράκτιες κατασκευές όπως τα αναχώματα ή οι κυματοθραύστες.

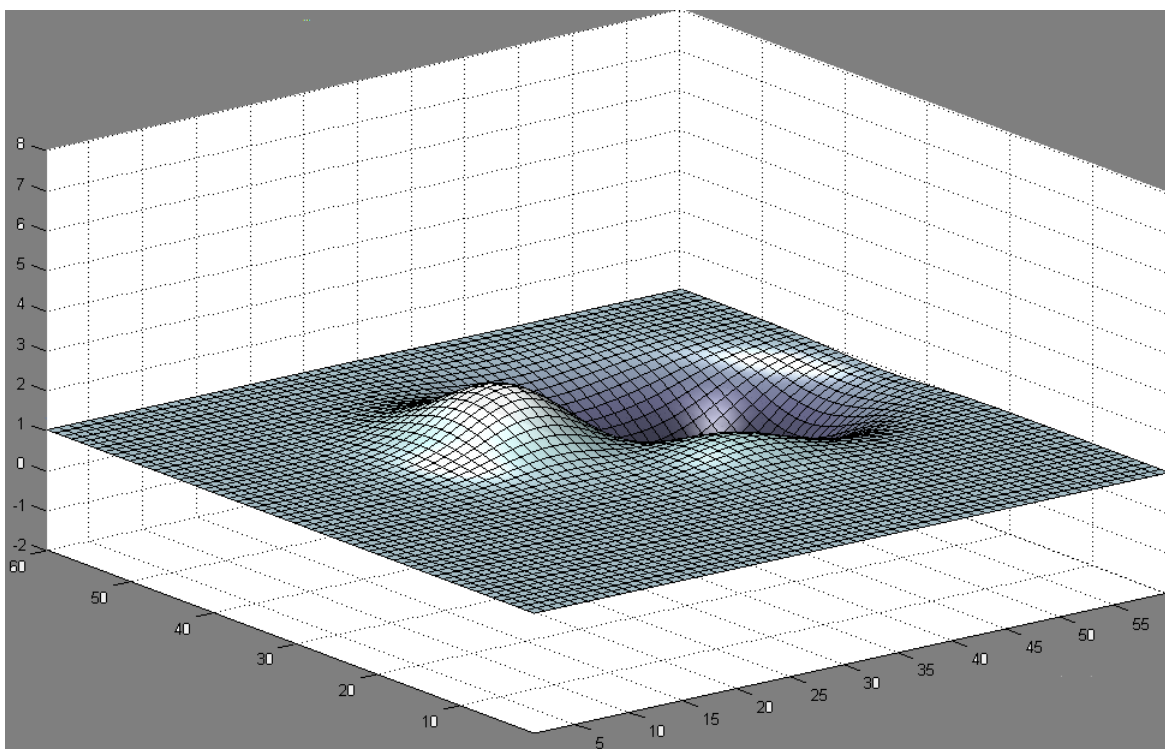
Ορισμένα πλοία που συναντούν ένα ξαφνικό κύμα επιλέγουν να το διασχίσουν απλά χαμηλώνοντας ταχύτητα, και όχι να το αποφύγουν αλλάζοντας πορεία, κάτι που μπορεί προκαλέσει πολύ μεγάλες ζημιές λόγω της επικίνδυνης πρόσκρουσης πλοίου και κύματος. Οι μελέτες που έχουν στηριχθεί σε στατιστικά στοιχεία δεν έχουν εντοπίσει σχέση ανάμεσα στις παραμέτρους της κύριας επιφάνειας του κύματος και του βάρους του πλοίου, αν και περισσότερο από 90% των ατυχημάτων έχουν συμβεί σε νερά βάθους περισσότερο από 50 μέτρα. Πλέον για λόγους ασφαλείας προτείνεται κάθε κατηγορία πλοίου να πληροί διαφορετικά προειδοποιητικά κριτήρια για την περίπτωση εμφάνισης του ξαφνικού κύματος. Μετρήσεις σήμερα γίνονται ακόμα και για



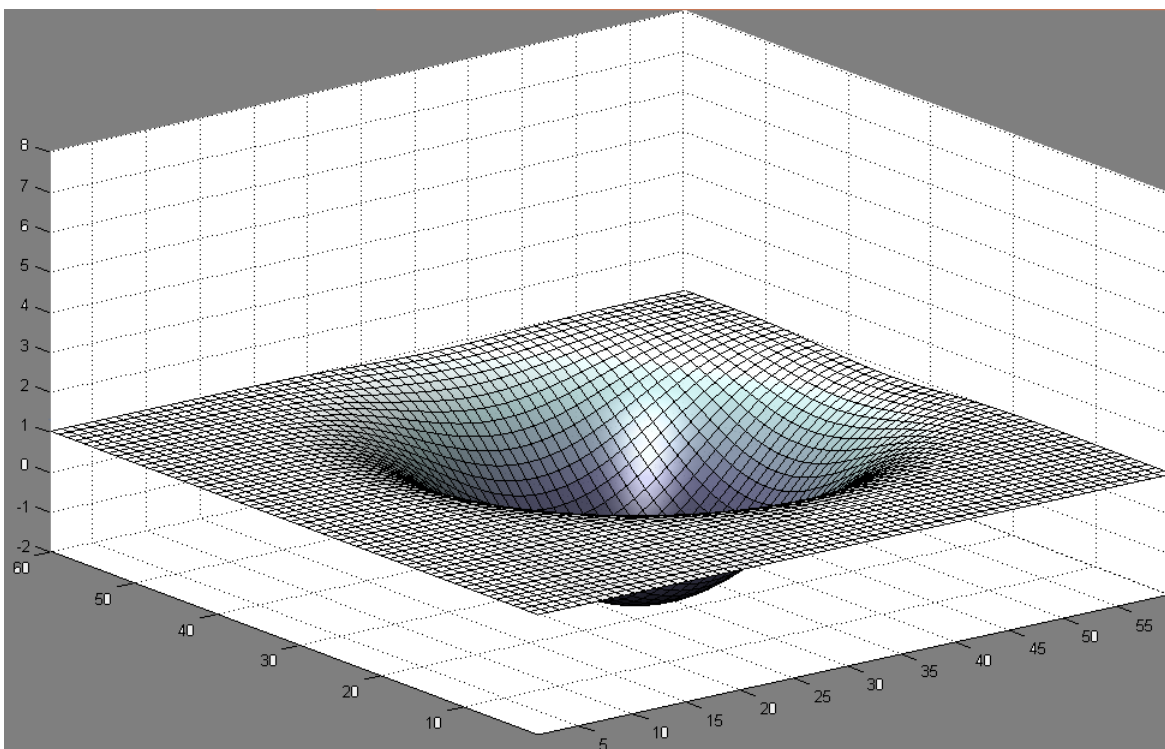
Σχήμα 8.1: Γιγάντιο βουνό από νερό



Σχήμα 8.2: Πυραμίδα από νερό



Σχήμα 8.3: 'Τρύπα' στο νερό



Σχήμα 8.4: 'Τρύπα' στο νερό

την ένταση του αέρα που προκαλεί το ξαφνικό κύμα με τη βοήθεια αγκυροβολημένων σηματοδούρων και υψομετρικών οργάνων που έχουν τοποθετηθεί σε κατάλληλες πλατφόρμες.

Οι περίοδοι του ξαφνικού κύματος δεν ξεχωρίζουν από τις περιόδους των τυπικών κυμάτων, δεδομένου ότι ένα τυπικό κύμα έχει περίοδο περίπου 10 seconds, όπως επίσης και το ξαφνικό κύμα που συνήθως εκδηλώνεται στιγμιαία με περίοδο λίγων λεπτών. Αυτό το γεγονός απαιτεί πολύ μεγαλύτερη συχνότητα απόκτησης δεδομένων, σε αντίθεση με την παλιρροϊκή καταγραφή δεδομένων που ακολουθείται και στην περίπτωση των τσουνάμιας. Οι δυσκολίες ξεκινούν όταν ο καταγεγραμμένος αριθμός δεδομένων καθίσταται τεράστιος, λόγω των μακροπρόθεσμων μετρήσεων που πραγματοποιούνται. Για παράδειγμα, για περίπου 109 μεμονωμένες μετρήσεις έχουν καταγραφεί περισσότερες από 50.000 ώρες μετρήσεων. Μια δειγματοληψία με συχνότητα 5 Hz αναπαριστά μια καλή και ρεαλιστιστική ανάλυση της μορφής του κύματος. Τα δεδομένα που καταγράφονται συνήθως αναπαριστώνται με έναν αριθμό μέσα στο διάστημα (10, 30) που συμβολίζει το χρόνο, ώστε να μπορούν ευκολότερα να ανακτηθούν ανά κάποια χρονικά διαστήματα, για κάποια στατιστική μελέτη, όταν φυσικά συνδυάζονται με άλλες παραμέτρους, ώστε να εκτιμηθεί η περίοδος του κύματος, το μέγιστο ύψος κ.α., ή εάν προκύψει κάποιο ενδιαφέρον γεγονός, π.χ. μια καταιγίδα ή ένα αξιοσημείωτο ύψος κύματος και να αξιοποιηθούν κατάλληλα. Έτσι, αυτά τα δεδομένα μπορούν να διαγράφονται για να εξοικονομείται χώρος.

Το ξαφνικό κύμα, μεγάλου πλάτους, είναι ένα ακραίο φαινόμενο, όπως ήδη αναφέρθηκε. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται μέθοδοι ιδιαίτερης ακρίβειας για τον προσδιορισμό ενός κύματος ως τέτοιου και τον εντοπισμό του. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται πολλοί διαφορετικοί τρόποι για τη μέτρηση της ανύψωσης της θαλάσσιας επιφάνειας, ώστε να ελέγχεται αν αυτή η ανύψωση αντιστοιχεί πράγματι σε κύμα μεγάλου πλάτους που να χαρακτηρίζεται ως ακραίο κύμα. Συνήθως η μέτρηση αυτή γίνεται με την ανάκλαση μιας οπτικής ακτίνας ή ενός ακουστικού σήματος από το σύνορο μεταξύ θάλασσας και αέρα και την επιτάχυνση των επιπλευσών σηματοδούρων. Οι μετρητές της πίεσης των κυμάτων μπορούν να εγγράψουν μεγάλα κύματα. Η πρώτη δυσκολία έγκειται στην αρχή του ορισμού της επιφάνειας της ανύψωσης. Η ανάκλαση των ηχητικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δε μπορεί να συμβεί στο σύνορο μεταξύ θάλασσας και αέρα εξαιτίας της παρουσίας αφρού ή φυσαλίδων που είναι συχνό φαινόμενο σε τέτοιες ακραίες συνθήκες. Ο σημαντήρας διαθέτει μια εγγενή ροπή αδράνειας που στρεβλώνει τις μετρήσεις. Τότε η χαμηλή συχνότητα απόκτησης των δεδομένων και η φτωχή βαθμονόμηση καθιστούν την έρευνα αναξιόπιστη. Μπορεί να οδηγηθούμε σε σφάλματα της συσκευής ή δυσλειτουργίες, σε ηλεκτρονικό θόρυβο ή παρεμβολή από τη δομή που υποστηρίζει τον αισθητήρα κύματος. Εάν η απόκτηση των δεδομένων δεν είναι συχνή μπορεί να καταλήξουμε σε ανακριβείς υπολογισμούς του ύψους της κορυφής του κύματος.

Τα ξαφνικά κύματα δεν εμφανίζουν συμμετρίες, έτσι οι κορυφές τους συνήθως είναι μεγαλύτερες από τα γειτονικά κοίλα. Αυτό μπορεί να εξηγήσει την επικράτηση των κορυφών στο σύνολο των γεγονότων. Αν η διάρκεια ζωής των ξαφνικών αυτών συμβάντων είναι μεγαλύτερη από την περίοδο του κύματος, μια τεράστια ενιαία κορυφή θα πρέπει να ορθωθεί κάπου μπροστά ή πίσω από το κύμα. Τα ξαφνικά κύματα αναπαριστώνται μαθηματικά από ακολουθίες, η μελέτη των οποίων γίνεται υπό το πρίσμα του χρόνου αλλά και του χώρου και γι' αυτό μας απασχολούν οι χρονοσειρές που ανακτώνται σε ένα σημείο του χώρου, συγκεκριμένα εκεί όπου έχει εγκαταστα-

θεί ο αισθητήρας, δηλαδή μελετάμε χωρο-χρονοσειρές. Όταν το ξαφνικό κύμα (ή η ακολουθία των ξαφνικών κυμάτων) είναι καλά εντοπισμένο στο χώρο, θα περάσει το σημείο καταγραφής γρήγορα, και μόνο μία ή έστω λίγες ταλαντώσεις κυμάτων με τεράστιο πλάτος θα καταγράφονται. Από την άλλη μεριά, η φυσική ταχύτητα των ελεύθερων κυμάτων στα βαθιά νερά είναι δυο φορές μεγαλύτερη από την ταχύτητα των ομαδοποιημένων κυμάτων. Ως αποτέλεσμα, οι χρονοσειρές των ομαδοποιημένων κυμάτων αποτελούνται από δύο φορές περισσότερα μεμονωμένα κύματα απ' ό,τι τα στιγμιότυπα της ομάδας. Μόνο ένα τεράστιο κύμα αναφέρεται στην πλειοψηφία των καταγεγραμμένων ξαφνικών γεγονότων. Αυτό θα πρέπει να αποδεικνύει ισχυρά τον εντοπισμό της κυματικής ενέργειας στο χώρο ενός ή έστω ενός πολύ μικρού αριθμού μεμονωμένων κυμάτων. Παρ' όλα αυτά, τα ομαδοποιημένα ξαφνικά κύματα ή όπως είναι γνωστά, 'οι ξαφνικές ομάδες' αποτελούνται από διάφορα τεράστια μεμονωμένα επιμέρους κύματα, καθένα από τα οποία ικανοποιεί τη συνθήκη του ξαφνικού κύματος

$$AI > 2$$

όπου

$$AI = \frac{H_{fr}}{H_s}$$

Εδώ, H_{fr} είναι το ύψος του ξαφνικού κύματος και H_s είναι το αξιοσημείωτο ύψος κύματος το οποίο είναι το μέσο κυματικό ύψος μεταξύ αυτών και ενός τρίτου από τα υψηλότερα κύματα σε μια χρονοσειρά μήκους συνήθως 10-30 mins. Με αυτόν τον τρόπο ο δείκτης ανωμαλίας AI είναι η μόνη παράμετρος που καθορίζει αν το κύμα είναι ξαφνικό ή όχι. Αυτές οι ομάδες κυμάτων ικανοποιούν τη μη γραμμική αυτο-ρυθμιστική συνθήκη και μπορεί να αποκτούν διαφορετικά δυναμικά σε σύγκριση με τα μεμονωμένα ξαφνικά κύματα, και ίσως αυτή να είναι η συνέπεια ενός άλλου μηχανισμού παραγωγής.

Τα ξαφνικά κύματα είναι σπάνια φαινόμενα, χωρο-χρονικά εντοπισμένα. Ο χρόνος ζωής τους περιορίζεται σε κλίμακα δευτερολέπτων ενώ το μήκος τους εντοπίζεται σε μια κλίμακα μερικών εκατοντάδων μέτρων. Η πρόβλεψη αυτών είναι πολύ δύσκολη εξαιτίας, φυσικά, της πολύ μικρής κλίμακας του χρόνου, αλλά και 1ον λόγω της διαφοράς μεταξύ των κλιμάκων των δυνάμεων που μπορεί να εμφανίζονται, όπως οι άνεμοι, οι ατμοσφαιρικές συνθήκες, οι θύελλες, τα ρεύματα, οι γεωστροφικές δίνες, και της επιφάνειας των κυμάτων και 2ον λόγω της ποικιλίας και της πολυπλοκότητας των φυσικών φαινομένων που συνοδεύουν τα δυναμικά των κυμάτων. Οι μετεωρολόγοι συνήθως εργάζονται με το μέσο όρο των παραμέτρων της θάλασσας που αντιπροσωπεύουν την κατάσταση της, όπως τα σημαντικά ύψη των κυμάτων, η μέγιστη περίοδος, και η κύρια κατεύθυνση διάδοσής τους, η κλίση τους, καθώς και συσχετίσεις μεταξύ τους. Είναι ένα ζωτικής σημασίας πρόβλημα για διαχείριση, η σύνδεση των χαρακτηριστικών της κατάστασης της θάλασσας με το βαθμό επικινδυνότητας πλεύσης στη θάλασσα, το οποίο ακόμη και σήμερα είναι αρκετά μακριά από τη λύση λόγω έλλειψης στοιχείων και πολυπλοκότητας των διαδικασιών.

8.3 Σούπερ Ξαφνικό Κύμα (SRW)

Τα σούπερ ξαφνικά κύματα με πλάτος μέχρι και 5 φορές την τιμή του βάθους παρατηρούνται για πρώτη φορά σε δεξαμενή με κύματα νερού. Μη γραμμική εστίαση του πλάτους των τοπικών κυμάτων εμφανίζεται, σύμφωνα με την υψηλότερης τάξης breather της λύσης μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων. Το παρόν αποτέλεσμα δείχνει ότι τα ξαφνικά κύματα μπορεί επίσης να αναπτυχθούν σε πολύ ήρεμες και φαινομενικά ασφαλείς θαλάσσιες καταστάσεις. Αναμένουμε το αποτέλεσμα να έχει σημαντικό αντίκτυπο στις μελέτες των ακραίων κυμάτων του ωκεανού και να ξεκινήσουν σχετικές μελέτες σε άλλους ενδιαφέροντες κλάδους που αφορούν κύματα σε μη γραμμικά μέσα με διασπορά, όπως η οπτική, η φυσική πλάσματος, και η υπερρευστότητα.

Η μη γραμμική δυναμική είναι μία από τις προσεγγίσεις που έχει επιτυχία στην πρόβλεψη των βασικών χαρακτηριστικών των ξαφνικών κυμάτων.

Η μη γραμμική εξίσωση Schrodinger (NLS) είναι μία από τις βασικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη μη γραμμική κυματική εξέλιξη σε διάφορα μέσα. Ειδικότερα, αυτή η εξίσωση περιγράφει τα κύματα βαρύτητας στα βαθιά νερά

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + c_{gr} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |A|^2 A = 0 \quad (8.1)$$

όπου t και x είναι ο χρόνος και οι γεωγραφικές συντεταγμένες, ενώ k_0 και $\omega_0 = \omega(k_0)$ δηλώνουν τον κυματικό αριθμό και τη συχνότητα του φέροντος κύματος αντίστοιχα, που συνδέονται μέσω της σχέσης διασποράς της κυματικής θεωρίας για βαθιά νερά, $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η group ταχύτητα εδώ είναι

$$c_{gr} := \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_0}{2k_0}$$

Η επιφάνεια ανύψωσης $\eta(x, t)$ σχετίζεται με την NLS μεταβλητή $A(x, t)$ σε δεύτερη τάξη με κλίση ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \operatorname{Re} \{ A(x, t) \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)] \} + \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} k_0 A^2(x, t) \exp [2i(k_0 x - \omega_0 t)] \right\} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Μια αδιάστατη μορφή της NLS

$$i\psi_T + \psi_{XX} + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (8.3)$$

λαμβάνεται από την (8.1) χρησιμοποιώντας τις διαβαθμισμένες μεταβλητές

$$\begin{cases} T = -\frac{\omega_0}{8}t \\ X = (x - c_{gr}t)k_0 = xk_0 - \frac{\omega_0}{2}t \\ \psi = \sqrt{2}k_0A \end{cases} \quad (8.4)$$

Εδώ, X είναι η συντεταγμένη στο πλαίσιο κίνησης με την ομαδιαία ταχύτητα κύματος και T είναι

ο κλιμακούμενος χρόνος. Η εξίσωση NLS έχει μια ιεραρχία των εντοπισμένων λύσεων breather με ένα μόνο μέγιστο, η οποία μπορεί να μοντελοποιήσει τα ξαφνικά κύματα σε βαθιά νερά. Για ένα δεδομένο φορέα πλάτους ανάλογο με ψ_0 , δίνεται από την άποψη των πολυωνύμων $G(X, T)$, $H(X, T)$ και $D(X, T)$

$$\psi(X, T) = \psi_0 \left(1 - \frac{G + iH}{D}\right) \exp\left(2i|\psi_0|^2 T\right) \quad (8.5)$$

όπου ψ_0 είναι μια παράμετρος ελεύθερη από βάθος και πλάτος. Στην απλούστερη περίπτωση, η πρώτη τάξης λύση ορίζεται από $G = 4$, $H = 16|\psi_0|^2 T$ και $D = 1 + 4|\psi_0|^4 X^2 + 16|\psi_0|^4 T^2$. Τότε έχουμε το γνωστό Peregrine σολιτόνιο. Αυτή η λύση είναι εντοπισμένη στο χώρο και το χρόνο και η μέγιστη ενίσχυση πλάτους που λαμβάνεται στο $X = 0$ και $T = 0$ είναι 3 φορές το πλάτος του βάθους. Η μεγαλύτερης τάξης ρητή λύση, εντοπίζεται στο χώρο και το χρόνο, και τα πολυώνυμα για αυτή τη λύση είναι

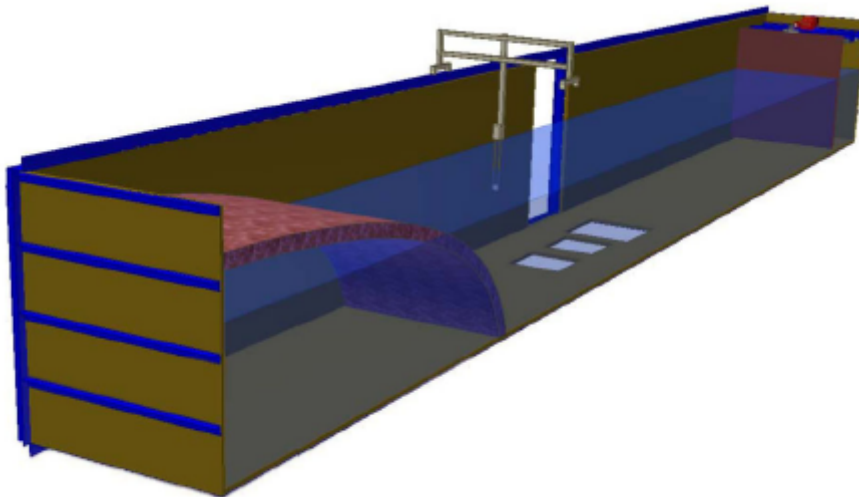
$$G = \left(|\psi_0|^2 X^2 + 4|\psi_0|^4 T^2 + \frac{3}{4}\right) \left(|\psi_0|^2 X^2 + 20|\psi_0|^4 T^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} \quad (8.6)$$

$$H = 2|\psi_0|^2 T \left(4|\psi_0|^4 T^2 - 3|\psi_0|^2 X^2\right) + 2|\psi_0|^2 T \left[2\left(|\psi_0|^2 X^2 + 4|\psi_0|^4 T^2\right)^2 - \frac{15}{8}\right] \quad (8.7)$$

$$D = \frac{1}{3} \left(|\psi_0|^2 X^2 + 4|\psi_0|^4 T^2\right)^3 + \frac{1}{4} \left(|\psi_0|^2 X^2 - 12|\psi_0|^4 T^2\right)^2 + \frac{3}{64} \left(12|\psi_0|^2 X^2 + 176|\psi_0|^4 T^2 + 1\right) \quad (8.8)$$

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα αυτής της λύσης είναι ότι ενισχύει την κορυφή του πλάτους του φέροντος κύματος σε $X = 0$ και $T = 0$ με ένα συντελεστή 5. Ως εκ τούτου, περιγράφει τα ξαφνικά κύματα που είναι υψηλότερα από τα κανονικά Peregrine σολιτόνια, με το τελευταίο να χαρακτηρίζεται από ένα συντελεστή ενίσχυσης 3. Από την άποψη των κυμάτων του νερού, αυτό είναι μια σημαντικά υψηλότερη ανύψωση. Εδώ, παρουσιάζουμε την πρώτη παρατήρηση της μεγαλύτερης τάξης του ξαφνικού κύματος, η οποία λαμβάνεται από τα κύματα των νερών στα πειράματα. Η δεξαμενή στην οποία διεξήχθησαν τα πειράματα είναι $15m \times 1.6m \times 1.5m$.

Ένα μονοπτερύγιο κουπί που παράγει κύμα ενεργοποιείται από έναν υδραυλικό κύλινδρο που βρίσκεται στην άκρη της δεξαμενής. Η υπόθεση ότι η μετατόπιση του πτερυγίου είναι ανάλογη προς το ύψος της παραγόμενης επιφάνειας έχει ελεγχθεί από τις μετρήσεις και επικυρώθηκε από τα μετέπειτα αποτελέσματα. Για να αποφεύγονται οι αντανακλάσεις των κυμάτων, μία συναρπαστική παραλία εγκαθίσταται στο αντίθετο άκρο. Όλα τα πειράματα διεξάγονται σε συνθήκες βαθύων υδάτων, η αναλογία του βάθους του νερού ενός μέτρου προς το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από τη μονάδα. Η ανύψωση της επιφάνειας του νερού σε οποιοδήποτε δεδομένο σημείο μετράται με ένα μετρητή χωρητικότητας κύματος με ευαισθησία 1,06 V/cm και συχνότητα δειγματοληψίας 0,5 kHz. Προκειμένου να εγείρει το σούπερ ξαφνικό κύμα στη δεξαμενή, κάποιος πρέπει να καθορίσει το αρχικό πλάτος a_0 και τον κυματοριθμό του φορέα κύματος k_0 . Αυτές οι



Σχήμα 8.5: Δεξαμενή πειραμάτων

δύο παράμετροι καθορίζουν την κλίση. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση, $\psi_0 = a_0 \sqrt{2} k_0$, και αναστρέφοντας την κλιμάκωση στην (8.4), η αναλυτική λύση γράφεται σε τρισδιάστατη μορφή και μετατοπίζεται στο χώρο, προκειμένου να παρατηρήσουμε το σχηματισμό του ξαφνικού κύματος σε οποιαδήποτε επιθυμητή θέση μέσα στη δεξαμενή κύματος. Αυτό δίνει αυτόματα τη λύση στο δημιουργό κύματος και κατά συνέπεια το σήμα που οδηγεί το κουπί.

Τα πειράματα διεξάγονται για ένα εύρος πλάτους $a_0 = 0.001$ μέτρα και μια κλίση $\varepsilon = a_0 k_0 = 0.03$, το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι 20 εκατοστά. Κοντά στο δημιουργό κύματος, σε απόσταση ενός μέτρου, το σύνηθες βάθος κύματος τοπικά διαταράσσεται στη μέση της αλληλουχίας κυμάτων. Οι παράμετροι της δεξαμενής κυμάτων, συγκεκριμένα, το περιορισμένο της μήκος, δυστυχώς, δεν επιτρέπει να παρατηρήσουμε άμεσα την πλήρη εξέλιξη της υψηλότερης τάξης breather από ένα πολύ μικρό πλάτος στο μέγιστο σε μία επανάληψη. Καθώς η αύξηση του πλάτους είναι περισσότερο αλγεβρική παρά εκθετική, ακόμη και η χρήση μεγαλύτερων δεξαμενών κύματος παραμένει προβληματική υπό αυτή την έννοια. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, χωρίσαμε το πείραμα σε διάφορα στάδια. Δηλαδή, ξεκινώντας τη δημιουργία του κύματος επανειλημμένα με διάφορες οριακές συνθήκες που δίνονται από τη θεωρία, μετρήσαμε το προφίλ του κύματος στο άλλο άκρο της δεξαμενής. Κάθε στιγμή, έχουμε ελέγξει ότι το τελικό προφίλ ακολουθεί τη θεωρητική πρόβλεψη. Αποκλίσεις από τη θεωρία που βρέθηκαν μέσω της άμεσης υπέρθεσης των θεωρητικών και των πειραματικών καμπυλών είναι ελάχιστες και κυρίως χαρακτηρίζουν την αριστερή και δεξιά ασυμμετρία των προφίλ. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία 7 φορές, πολλαπλασιάζοντας έτσι το μήκος διάδοσης των 9 μέτρων 8 φορές. Με αυτό τον τρόπο φτάνουμε την απόσταση διάδοσης στα 72 μέτρα, το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο του μεγίστου πλάτους. Μια πειραματικά παρατηρούμενη ασυμμετρία μεταξύ των κυμάτων πριν και μετά το ξαφνικό κύμα μπορεί να εξηγηθεί λόγω της υψηλότερης τάξης εξισώσεων NLS με περιττούς όρους. Επιπλέον, για τιμές κλίσης από 0.06 και πάνω, μπορούμε να παρατηρήσουμε με σαφήνεια το σπάσιμο του κύματος στην κορυφή του ξαφνικού κύματος. Παρά τις αποκλίσεις αυτές, το πλάτος του κύματος

στο μέγιστο της διέγερσης υπερβαίνει σημαντικά την ενίσχυση του 2.2 πάνω από το σημαντικό ύψος κύματος, η οποία είναι ο συνηθισμένος ορισμός ενός ξαφνικού κύματος.

Εν κατακλείδι, η ύπαρξη της ανώτερης τάξης ξαφνικών κυμάτων, ένα εντοπισμένο κυματικό συμβάν με πλάτος 5 φορές το βάθος του κύματος, έχει αποδειχθεί πειραματικά στην περίπτωση των επιφανειακών κυμάτων βαρύτητας. Όταν η κλίση είναι μικρή (λιγότερο από 0.03), η θεωρία NLS και η παρατήρηση των ερευνητών σχεδόν ταυτίζονται. Για μεγαλύτερες τιμές κλίσης (λιγότερο από 0.06), τα παρατηρούμενα κύματα μπορεί ακόμα να επιβεβαιώνουν τη θεωρητική breather λύση. Η μεγάλη ενίσχυση του πλάτους στην κορυφή πάνω από το βάθος του ύψους κύματος κατά ένα συντελεστή 5 υποδηλώνει την ύπαρξη μιας νέας κατηγορίας κυμάτων που ονομάζεται 'super ξαφνικά κύματα'. Η λύση δεύτερης τάξης των ξαφνικών κυμάτων που παρατηρείται μπορεί να θεωρηθεί ως η πρώτη εκπρόσωπος αυτής της κλάσης. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι, ακόμη και σε μια θαλάσσια κατάσταση που χαρακτηρίζεται από πολύ μικρή κλίση (της τάξης του 0.03), μπορούν να αναπτυχθούν ξαφνικά κύματα, λόγω των μη γραμμικών δυναμικών της επιφάνειας ανύψωσης. Αυτό είναι ένα αξιοσημείωτο γεγονός που θα μπορούσε να εξηγήσει κάποιες μυστηριώδεις παρατηρήσεις του ξαφνικού κύματος σε ήρεμη θαλάσσια κατάσταση. Βέβαια, στους ωκεανούς, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη δεύτερη οριζόντια διάσταση και έτσι το πρόβλημα χρειάζεται περισσότερο προσεκτική ανάλυση. Παρ' όλα αυτά, η παρατήρηση της δεύτερης τάξης breather είναι σημαντική από γενική επιστημονική ματιά.

Παράρτημα

Χρονοσειρές

Με τον όρο χρονοσειρά εννοούμε συνήθως μια ακολουθία $\{x_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$, όπου κάθε x_t εκφράζει κατά την χρονική στιγμή t την κατάσταση ενός συστήματος το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο κατά τυχαίο εν γένει τρόπο (stochastic system). Ουσιαστικά πρόκειται για μια ακολουθία που εκφράζει την εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος, ενός συστήματος δηλαδή με τυχαία κατά το μάλλον ή ήττον συμπεριφορά, σε αντίθεση με αυτήν ενός ντετερμινιστικού συστήματος, η οποία συνήθως περιγράφεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Το πρόβλημα είναι η “πρόβλεψη” μελλοντικών τιμών της χρονοσειράς με βάση τις μέχρι σήμερα τιμές της ίδιας χρονοσειράς, είτε ακόμα και σε συνδυασμό με τις μέχρι σήμερα τιμές μιας άλλης χρονοσειράς η οποία εξελίσσεται παράλληλα με την πρώτη και επιδρά πάνω σ’ αυτή, οπότε μιλάμε για πολυμεταβλητές χρονοσειρές. Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων ονομάζεται χώρος καταστάσεων και συμβολίζεται με S , ένα (μονοδιάστατο) υποσύνολο του \mathbb{R} ή γενικότερα ένα πολυδιάστατο υποσύνολο του \mathbb{R}^d , ενώ το σύνολο τιμών του t ονομάζεται παραμετρικός χώρος, συμβολίζεται με \mathcal{T} και μπορεί επίσης να είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^k όταν χρειάζεται ένα πολυδιάστατο t για να καθορίσουμε πέραν του χρόνου t και γεωγραφικές π.χ. συντεταγμένες σε χωρο-χρονοσειρές (spatial time series).¹

Η προσέγγιση Boussinesq

Στη Ρευστοδυναμική, η προσέγγιση Boussinesq για τα κύματα του νερού είναι μια προσέγγιση που ισχύει για ασθενώς μη γραμμικά και αρκετά μεγάλου μήκους κύματα. Η προσέγγιση αυτή λαμβάνει υπόψη την κάθετη δομή της οριζόντιας και κατακόρυφης ταχύτητας ροής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, που ονομάζονται εξισώσεις Boussinesq-τύπου και ενσωματώνουν τη συχνότητα διασποράς (σε αντιδιαστολή με τις εξισώσεις ρηχών νερών).

Η βασική ιδέα στην προσέγγιση Boussinesq το 1872, που ήρθε ως απάντηση στις παρατηρήσεις του Russell, είναι η εξάλειψη της κατακόρυφης συντεταγμένης από τις εξισώσεις ροής και η ταυτόχρονη διατήρηση επιρροών της κατακόρυφης δομής της ροής κάτω από τα κύματα του νερού. Αυτό είναι χρήσιμο επειδή τα κύματα διαδίδονται στο οριζόντιο επίπεδο και έχουν διαφορετική συμπεριφορά, όχι κυματική, στην κάθετη διεύθυνση. Τα βήματα όσον αφορά την προσέγγιση Boussinesq είναι

- Ένα ανάπτυγμα Taylor που αποτελείται από την οριζόντια και κατακόρυφη ταχύτητα ροής (ή δυναμικό ταχύτητας) γύρω από ένα συγκεκριμένο ύψος.
- Αυτό το ανάπτυγμα Taylor περικόπτεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό όρων.
- Η διατήρηση της μάζας για ένα ασυμπύεστο ρευστό και η μηδενικού curl συνθήκη για ένα αστρόβιλο ρευστό χρησιμοποιούνται για να αντικαταστήσουν τις κάθετες μερικές παραγώγους των ποσοτήτων στο ανάπτυγμα Taylor με οριζόντιες μερικές παραγώγους.

Στη συνέχεια, η προσέγγιση Boussinesq εφαρμόζεται στις υπόλοιπες εξισώσεις ροής, προκειμένου να εξαλειφθεί η εξάρτηση από την κάθετη συντεταγμένη. Ως αποτέλεσμα, οι προκύπτουσες

¹Οι όροι ‘διακριτά μεγέθη’ και ‘συνεχή μεγέθη’ είναι σε αντιστοιχία με τους όρους ‘διακριτές τυχαίες μεταβλητές’ και ‘συνεχείς τυχαίες μεταβλητές’.

μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι σε όρους συναρτήσεων των οριζόντιων συντεταγμένων (και φυσικά του χρόνου).

Η προσέγγιση Boussinesq για το δυναμικό της ταχύτητας $\underline{u} = \nabla\varphi$, ($\underline{u}(t) = (u(t), v(t))$), όπου $u(t)$ η οριζόντια συντεταγμένη της ταχύτητας και $v(t)$ η κάθετη για κύματα νερού σε ένα ασυμπύεστο ρευστό με αστρόβιλη ροή στο επίπεδο (x, z) , με συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια ανύψωσης $z = \eta(x, t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta = 0 \end{cases}$$

αποτελείται από τις 2 μερικές διαφορικές εξισώσεις που απαρτίζουν το setA-Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u_b] = \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u_b}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^3 u_b}{\partial t \partial x^2} \end{cases}$$

όπου $u_b = \frac{\partial \varphi_b}{\partial x}$ είναι η οριζόντια ταχύτητα στον πυθμένα $z = -h$ και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Εδώ το βάθος του νερού, h , θεωρείται σταθερό. Κρατάμε μόνο τους γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους, καθώς θεωρούμε αμελητέους τους κυβικούς και τους επόμενης τάξης όρους τους οποίους και παραλείπουμε. Για

$$\frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u_b}{\partial x^3} = 0$$

και

$$\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^3 u_b}{\partial t \partial x^2} = 0$$

παίρνουμε από το setA τις εξισώσεις ρηχών νερών. Οι χαρακτηριστικές για τη γραμμική συχνότητα διασποράς του setA έχουν τη μορφή

$$c_{ph}^2 = gh \frac{1 + \frac{1}{6} k^2 h^2}{1 + \frac{1}{2} k^2 h^2}$$

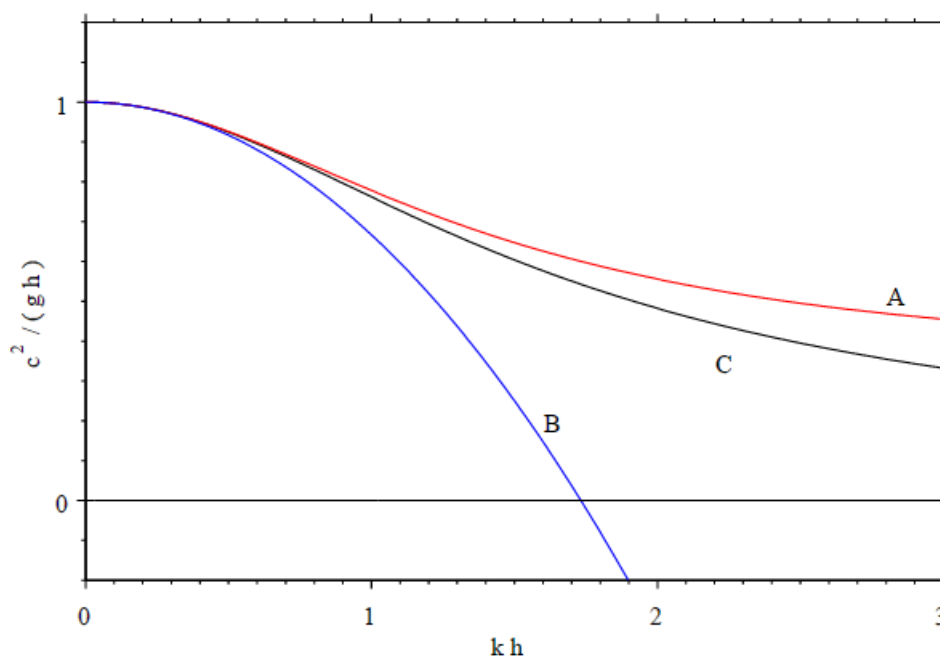
όπου c_{ph} είναι η ταχύτητα φάσης και k ο κυματαριθμός. Έπειτα από κάποιες πρόσθετες προσεγγίσεις, με την ίδια πάντα τάξη ακρίβειας, το setA μετατρέπεται σε μία μερική διαφορική εξίσωση για την ελεύθερη επιφάνεια ανύψωσης η που καλείται setB-Boussinesq

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - gh \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{3}{2} \frac{\eta^2}{h} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0 \implies \eta_{tt} - gh \eta_{xx} - g \frac{3}{2} (\eta^2)_{xx} - \frac{gh^3}{3} \eta_{xxxx} = 0$$

Σε αδιάστατες ποσότητες και μετά την κανονικοποίηση το setB γίνεται

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(3\psi^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) = 0 \implies \psi_{\tau\tau} - \psi_{\xi\xi} - 3(\psi^2)_{\xi\xi} - \psi_{\xi\xi\xi} = 0$$

όπου $\psi = \frac{1}{2} \frac{\eta}{h}$ η αδιάστατη επιφάνεια ανύψωσης, $\tau = \sqrt{3t} \sqrt{\frac{g}{h}}$ ο αδιάστατος χρόνος και $\xi = \sqrt{3} \frac{x}{h}$ η αδιάστατη οριζόντια θέση. Στην περίπτωση του setB οι χαρακτηριστικές της γραμμικής



Σχήμα 8.6: A=setA, B=setB, C=γραμμικό κύμα

συχνότητας διασποράς είναι

$$c_{ph}^2 = gh \left(1 - \frac{1}{3} k^2 h^2 \right)$$

όπου c_{ph} είναι η ταχύτητα φάσης και k ο κυματαριθμός.

Η γραμμική εξίσωση Boussinesq είναι

$$\eta_{tt} - a^2 \eta_{xx} = \beta^2 \eta_{xxtt}$$

ενώ η διασπορά της είναι

$$\omega = \pm ak (1 + \beta^2 k^2)^{-1/2}$$

Η tanh – coth μέθοδος

Έστω μια μερική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0 \tag{8.9}$$

Με μια κυματική μεταβολή ή έναν μετασχηματισμό $w = x - ct$, η (8.9) μετατρέπεται σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \tag{8.10}$$

Έπειτα ολοκληρώνουμε την (8.10) έως ότου όλοι οι όροι να περιέχουν παραγώγους όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης θεωρούνται μηδενικές. Η tanh μέθοδος αναπτύχθηκε από τον Malfliet

όπου η συνάρτηση \tanh χρησιμοποιείται σαν μια νέα μεταβλητή, δηλαδή έχουμε

$$T = \tanh(w)$$

$$T' = 1 - T^2$$

$$T'' = -2T + 2T^3 \quad (8.11)$$

$$T''' = -2 + 8T^2 - 6T^4$$

$$T^{(4)} = 16T - 40T^3 + 24T^5$$

δηλαδή εισάγουμε μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή

$$Y = \tanh(kw) , \quad w = x - ct \quad (8.12)$$

όπου k είναι ο κυματικός αριθμός. Τότε οδηγούμαστε στην εξής αλλαγή μεταβλητών

$$\frac{d}{dw} = k(1 - Y^2) \frac{d}{dY}$$

$$\frac{d^2}{dw^2} = -2k^2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + k^2(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2}$$

$$\frac{d^3}{dw^3} = 2k^3(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{d}{dY} - 6k^3Y(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + k^3(1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} \quad (8.13)$$

$$\frac{d^4}{dw^4} = -8k^4Y(1 - Y^2)(3Y^2 - 2) \frac{d}{dY} + 4k^4(1 - Y^2)^2(9Y^2 - 2) \frac{d^2}{dY^2} -$$

$$-12k^4Y(1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} + k^4(1 - Y^2)^4 \frac{d^4}{dY^4}$$

Η $\tanh - \coth$ μέθοδος εισάγει τη χρήση της πεπερασμένης έκφρασης

$$u(kw) = S(Y) = \sum_{i=0}^M a_i Y^i + \sum_{i=1}^M b_i Y^{-i} \quad (8.14)$$

όπου M είναι ένας θετικός ακέραιος, τις περισσότερες φορές καθορισμένος. Στην περίπτωση που το M δεν είναι ακέραιος, η μέθοδος μετασχηματισμού καταφέρνει και ξεπερνά τη δυσκολία αυτή. Η έκφραση (8.13) μειώνεται στην τυπική \tanh μέθοδο για $b_i = 0, 1 \leq i \leq M$. Αντικαθιστώντας την (8.13) στη συνήθη διαφορική εξίσωση (8.10), έχουμε μια αλγεβρική εξίσωση σε δυνάμεις του Y . Για την εξισορρόπηση των υψηλότερων εκθετών της συνάρτησης u και των παραγώγων της μεταξύ των (8.13) και (8.14), έχουμε

$$u \longrightarrow M \quad (8.15)$$

$$u^n \longrightarrow nM$$

$$\begin{aligned}
 u' &\longrightarrow M + 1 \\
 u'' &\longrightarrow M + 2 \\
 u^{(r)} &\longrightarrow M + r
 \end{aligned}
 \tag{8.16}$$

Για να καθορίσουμε την παράμετρο M , συνήθως εξισορροπούμε τους γραμμικούς όρους της υψηλότερης τάξης στην τελική εξίσωση με τους υψηλότερης τάξης μη γραμμικούς όρους χρησιμοποιώντας το σχήμα (8.16). Έπειτα συγκεντρώνουμε όλους τους συντελεστές από τις δυνάμεις του Y στην τελική εξίσωση όπου αυτοί οι συντελεστές πρέπει να εξαλειφθούν. Αυτό μάς δίνει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που περιέχουν τις παραμέτρους a_i , b_i , k και c . Έχοντας καθορίσει αυτές τις παραμέτρους καταλήγουμε σε μια αναλυτική λύση $u(x, t)$ σε κλειστή μορφή. Σημειώνουμε, ότι η συγκεκριμένη μέθοδος ενδέχεται να δίνει και περιοδικές λύσεις.

Breather

Στη φυσική, ο όρος breather αναφέρεται σε ένα μη γραμμικό κύμα όπου η ενέργεια επικεντρώνεται σε εντοπισμένο και ταλαντωτικό πεδίο διαμόρφωσης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις προσδοκίες που προέρχονται από το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα για απειροελάχιστα πλάτη, τα οποία τείνουν προς μια ομοιόμορφη κατανομή της αρχικά εντοπισμένης ενέργειας.

Breather είναι μια εντοπισμένη περιοδική λύση ή συνεχείς εξισώσεις μέσω των ή διακριτά πλέγματα εξισώσεων. Είναι δηλαδή, σολιτονικές δομές. Υπάρχουν δύο τύποι breathers: τα στάσιμα και τα κινούμενα. Τα στάσιμα breathers αντιστοιχούν σε εντοπισμένες λύσεις των οποίων το πλάτος ποικίλει στο χρόνο (μερικές φορές ονομάζονται oscillons). Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη των breathers σε διακριτά πλέγματα είναι ότι η κύρια συχνότητα και όλοι οι πολλαπλασιαστές του βρίσκονται εκτός του φάσματος φωνονίων του πλέγματος.

Oscillons vs Solitons

Oscillon είναι ένα σολιτονοειδές φαινόμενο που συμβαίνει σε κοκκώδη και άλλα διασκορπισμένα μέσα. Oscillons σε κοκκώδη μέσα προκύπτουν από κάθετες ταλαντώσεις σε ένα έλασμα με μια στρώση ομοιόμορφων σωματιδίων που τοποθετούνται ελεύθερα στην κορυφή. Όταν οι ημιτονοειδείς ταλαντώσεις έχουν το σωστό πλάτος και συχνότητα και το στρώμα έχει το επαρκές πάχος, ένα εντοπισμένο κύμα, που αναφέρεται ως ένα oscillon, μπορεί να σχηματιστεί διαταράσσοντας τοπικά τα σωματίδια. Αυτή η κατάσταση θα παραμείνει για μεγάλο χρονικό διάστημα (πολλές εκατοντάδες χιλιάδες των ταλαντώσεων) εν απουσία περαιτέρω διατάραξης. Ένα oscillon αλλάζει μορφή με κάθε σύγκρουση του στρώματος κόκκων και της πλάκας, εναλλάσσοντας μεταξύ μιας κορυφής που προεξέχει πάνω από το στρώμα των κόκκων σε ένα κρατήρα με μικρό χείλος. Αυτή η αυτοτροφοδοτούμενη κατάσταση ονομάστηκε κατ' αναλογία με το σολιτόνιο, που είναι ένα εντοπισμένο κύμα που διατηρεί την ακεραιότητά του καθώς κινείται. Ενώ δηλαδή, τα σολιτόνια δεν αποτελούν δεσμευμένες καταστάσεις εφόσον εμφανίζονται ως κινούμενα κύματα σε ένα ρευστό

ή ως ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε έναν κυματοδηγό, τα oscillons μπορεί να είναι στάσιμα. Oscillons έχουν πειραματικά παρατηρηθεί σε λεπτά παραμετρικά δονούμενα στρώματα παχύρευστων υγρών και κολλοειδών αιωρημάτων και έχουν συσχετιστεί με Faraday κύματα επειδή απαιτούν παρόμοιες συνθήκες συντονισμού.

Αλγόριθμοι Μεθόδων και Γραφημάτων

```
1 - clear all;  
2  
3 - x=0.01:0.01:1;  
4 - y=log(x)-x.^2;  
5 - hold on;  
6 - plot(x,y)  
7 - z=x.^2;  
8 - plot(x,z)
```

Σχήμα 8.7: Βασικός Κώδικας Matlab για την εικόνα 3.2


```

1 % This code solves the Korteweg-de Vries eq.  $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ 
2 % with periodic BCs on  $[-\pi, \pi]$  and initial condition given by
3 % a pair of solitons. The curve evolves up to  $t=0.005$  and at
4 % the end  $u(x=0)$  is printed to 6-digit accuracy. Changing  $N$ 
5 % to 384 and  $h$  to  $2.5e-7$  improves this to 10 digits but takes
6 % four times longer.
7
8 % Set up grid and two-soliton initial data:
9 N = 256; x = (2*pi/N)*(-N/2:N/2-1)';
10 A = 25; B = 16;
11 u = 3*A^2*sech(.5*(A*(x+2))).^2+3*B^2*sech(.5*(B*(x+1))).^2;
12 p = plot(x,u,'linewidth',3);
13 axis([-pi pi -200 2200]), grid on
14
15 % Precompute ETDRK4 scalar quantities (Kassam-Trefethen):
16 h = 1e-6; % time step
17 k = [0:N/2-1 0 -N/2+1:-1]'; % wave numbers
18 L = 1i*k.^3; % Fourier multipliers
19 E = exp(h*L); E2 = exp(h*L/2);
20 M = 64; % no. pts for complex means
21 r = exp(2i*pi*((1:M)-0.5)/M); % roots of unity
22 LR = h*L(:,ones(M,1))+r(ones(N,1),:);
23 Q = h*mean((exp(LR/2)-1)./LR,2);
24 f1 = h*mean((-4-LR+exp(LR).*(4-3*LR+LR.^2))./LR.^3,2);
25 f2 = h*mean((4+2*LR+exp(LR).*(-4+2*LR))./LR.^3,2);
26 f3 = h*mean((-4-3*LR-LR.^2+exp(LR).*(4-LR))./LR.^3,2);
27 g = -.5i*k;
28
29 % Time-stepping by ETDRK4 formula (Cox-Matthews):
30 set(gcf,'doublebuffer','on')
31 disp('press <return> to begin'), pause % wait for user input
32 t = 0; step = 0; v = fft(u);
33 while t+h/2 < .005
34     step = step+1;
35     t = t+h;
36     Nv = g.*fft(real(ifft(v)).^2);
37     a = E2.*v+Q.*Nv; Na = g.*fft(real(ifft(a)).^2);
38     b = E2.*v+Q.*Na; Nb = g.*fft(real(ifft(b)).^2);
39     c = E2.*a+Q.*(2*Nb-Nv); Nc = g.*fft(real(ifft(c)).^2);
40     v = E.*v+(Nv.*f1+(Na+Nb).*f2+Nc.*f3);
41     if mod(step,25)==0
42         u = real(ifft(v)); set(p,'ydata',u)
43         title(sprintf('t = %7.5f',t),'fontsize',18), drawnow
44     end
45 end
46 text(-2.4,900,sprintf('u(0) = %11.7f',u(N/2+1)),...
47     'fontsize',18,'color','r')

```

Σχήμα 8.8: Κώδικας Matlab για την εξίσωση KdV της εικόνας 4.4

```

1      %program to generate an exponentially damped sinusoidal wave
2
3      A=input('Enter the amplitude of the sinusoidal wave A = ');
4      f= input('Enter the frequency of the sinusoidal wave F = ');
5      phi=input('Enter the phase angle of sinusoid phi = ');
6      a=input('Enter the attenuation factor a = ');
7      f=f*2*pi;
8      t=0:0.001:1;
9      y=10+A*sin(f*t + phi).*exp(-a*t);
10     axis([0 1 -5 5])
11     plot(t,y);
12
13     %output
14     %Enter the amplitude of the sinusoidal wave A = 2
15     %Enter the frequency of the sinusoidal wave F = 10
16     %Enter the phase angle of sinusoid phi = 0
17     %Enter the attenuation factor a = 6

```

Σχήμα 8.9: Βασικός Κώδικας Matlab για την εικόνα 5.1

```

1      z = (0:0.2:1)';
2      besselj(1,z)
3      X = 0:0.1:20;
4      J = zeros(5,201);
5      for i = 0:4
6         J(i+1,:) = besselj(i,X);
7     end
8     plot(X,J,'LineWidth',1.5)
9     axis([0 20 -.5 1])
10    grid on
11    legend('J_0','J_1','J_2','J_3','J_4','Location','Best')
12    title('Bessel Functions of the First Kind for ν = 0,1,2,3,4')
13    xlabel('X')
14    ylabel('J_ν(X)')

```

Σχήμα 8.10: Κώδικας Matlab για την εξίσωση Bessel της εικόνας 5.3

```

15 function varargin = Huy_wave(varargin)
16 gui_Singleton = 1;
17 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
18                 'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
19                 'gui_OpeningFcn', @Huy_wave_OpeningFcn, ...
20                 'gui_OutputFcn',  @Huy_wave_OutputFcn, ...
21                 'gui_LayoutFcn',   [], ...
22                 'gui_Callback',    []);
23
24 if nargin && ischar(varargin{1})
25     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
26 end
27
28 if nargin
29     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
30 else
31     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
32 end
33
34 function Huy_wave_OpeningFcn(hObject,~, handles, varargin)
35 handles.output = hObject;
36
37 guidata(hObject, handles);
38 n=60;
39 H=seconds(n,n)-2;
40 axes(handles.axes3);
41 mesh(H);
42
43 axis([1 n 1 n -2 6]);
44 set(handles.axes3,'cameraposition',[4 -2.5 8]);
45 set(handles.axes3,'visible','off');
46 set(handles.text,'visible','off');
47 set(handles.clear,'enable','off');
48
49 function varargin = Huy_wave(varargin)
50 gui_Singleton = 1;
51 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
52                 'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
53                 'gui_OpeningFcn', @Huy_wave_OpeningFcn, ...
54                 'gui_OutputFcn',  @Huy_wave_OutputFcn, ...
55                 'gui_LayoutFcn',   [], ...
56                 'gui_Callback',    []);
57
58 if nargin && ischar(varargin{1})
59     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
60 end
61
62 [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
63 else
64     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
65 end
66
67 function Huy_wave_OpeningFcn(hObject,~, handles, varargin)
68 handles.output = hObject;
69
70 guidata(hObject, handles);
71 n=60;
72 H=seconds(n,n)-2;
73 axes(handles.axes3);
74 mesh(H);
75
76 axis([1 n 1 n -2 6]);
77 set(handles.axes3,'cameraposition',[4 -2.5 8]);
78 set(handles.axes3,'visible','off');
79 set(handles.text,'visible','off');
80 set(handles.clear,'enable','off');
81
82 set(handles.pause,'visible','off');
83 set(handles.energy,'enable','off');
84 set(handles.sliderDamp,'value',0.2);
85 set(handles.sliderSpeed,'value',12);
86 set(handles.Damp,'String','0.2');
87 set(handles.Speed,'String','12');
88 set(handles.editHeight,'String','15');
89 set(handles.editWidth,'String','15');
90 set(handles.radiobutton1,'value',1);
91 set(handles.Grid,'value',1);
92 set(handles.RUN_button,'value',1);
93 load data;
94 global Ekin Epot wvase zwine zwine E hello;
95 wvase=bwat; zwine=wine; zwine=hello; E=beeth; hello=Hi;
96 Ekin=[];
97 Epot=[];
98
99 % Say Hi at the beginning
100 axes(handles.axes1);
101 run=get(handles.RUN_button,'value');
102 H = hello;
103 oldH=H;
104 newH=H;
105 i = 2:n-1;
106 j = 2:n-1;
107 h=surf(newH);
108 surface();
109 while run
110     run=get(handles.RUN_button,'value');
111     if ~run
112         break
113     end
114     newH=Wave(60,i,j,0.05,0.5,1,H,oldH,0,0,0);
115     % n,i,j,du-c,h,H,oldH,fix,conn,connect
116     set(h,'data',newH);
117     pause(0.05);
118     oldH=H;
119     H=newH;
120 end
121
122 function varargin = Huy_wave_OutputFcn(~,~, handles)
123 varargout{1} = handles.output;
124
125 % If the RUN button is hit:
126 function RUN_button_Callback(hObject, eventdata, handles)
127 run=get(hObject,'Value');
128 pause(0.1);
129 axes(handles.axes1);
130 n=60;
131 global globH globOH Ekin Epot;
132 if run
133     toggle(0,handles);
134     set(hObject,'String','Stop');
135     set(handles.pause,'visible','on');
136     h=get(handles.haz,'value');
137     def=get(handles.default,'value');
138     du=0.05;
139     H=globH;
140     i = 2:n-1;
141     j = 2:n-1;
142     if eventdata==0
143         if eventdata==0
144             oldH=globOH;
145         else
146             oldH=H;
147             Ekin=[];
148             Epot=[];
149         end
150         newH=H;
151         h=surf(newH);
152         % if the default color mode is selected, use no surface
153         % rendering at all => improve performance
154         if def
155             axis([1 n 1 n -2 8]);
156             toggleColor(0,handles); % turn buttons visibility off
157             delay=0.04;
158         else
159             surface();
160             set(handles.default,'enable','off');
161             delay=0.02;% with surface rendering, which takes more time, so speed everything up a bit
162         end
163     end
164 end
165
166 while run
167     run=get(hObject,'Value');
168     if ~run:
169         globOH=oldH;
170         globH=H;
171         break
172     end
173 end

```

Σχήμα 8.11: Κώδικας Matlab για την εξίσωση κύματος των εικόνων 8.1-8.4

```

285 function editNidch_CreateFcn(hObject, ~, ~)
286 if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
287     set(hObject,'BackgroundColor','white');
288 end
289
290
291
292 % Boundary Conditions: fixed boundaries: with controller: connected boundaries
293 function fixbound_Callback(hObject, ~, handles)
294     set(handles.controller,'value',0);
295     set(handles.combound,'value',0);
296     a=get(hObject,'value');
297     if a
298         set(handles.textC,'visible','off');
299         set(handles.textF,'visible','on');
300         set(handles.textL,'visible','off');
301     else
302         set(handles.textC,'visible','off');
303     end
304
305 function controller_Callback(hObject, ~, handles)
306     set(handles.fixbound,'value',0);
307     set(handles.combound,'value',0);
308     a=get(hObject,'value');
309     if a
310         set(handles.textC,'visible','on');
311         set(handles.textF,'visible','off');
312         set(handles.textL,'visible','off');
313     else
314         set(handles.textC,'visible','off');
315     end
316     dam=str2double(get(handles.Damp,'String'));
317     spe=str2double(get(handles.Speed,'String'));
318     if dam>0.5 && spe >11.9
319         set(handles.Speed,'String','11.9');
320     end
321
322 function combound_Callback(hObject, ~, handles)
323     set(handles.fixbound,'value',0);
324     set(handles.controller,'value',0);
325     a=get(hObject,'value');
326     if a
327         set(handles.textC,'visible','off');
328         set(handles.textF,'visible','off');
329         set(handles.textL,'visible','on');
330     else
331         set(handles.textL,'visible','off');
332     end
333
334 function bar_Callback(~, ~, ~)
335
336 function Grid_Callback(hObject, ~, ~)
337     v=get(hObject,'value');
338     if v
339         set(hObject,'String','Grid on');
340     else
341         set(hObject,'String','Grid off');
342     end
343
344
345
346 % click on the figure to select drops position
347 function figure1_WindowButtonDownFcn(~, ~, handles)
348     multidrop(handles);
349
350 % Shapes Panel
351 function uipanel3_SelectionChangeFcn(~, ~, handles)
352     multidrop(handles);
353
354 % Color Panel
355 function uipanel11_SelectionChangeFcn(hObject, ~, handles)
356     a=get(handles.RUN_button,'value');
357     newButton=get(hObject,'tag');
358     global wasser twine;
359     switch newButton
360     case 'default'
361         colormap(gca,'default');
362     case 'Water'
363         colormap(gca,wasser);
364     case 'Wine'
365         colormap(gca,'autumn');
366     case 'wine'
367         colormap(gca,wine);
368     case 'Coffee'
369         colormap(gca,'copper');
370     case 'meat'
371         colormap(gca,'bone');
372     case 'paints'
373         colormap(gca,'hsv');
374     end
375
376
377
378
379
380 % radiobutton to activate multiple-drops mode
381 function multi_Callback(hObject, ~, handles)
382     a=get(hObject,'value');
383     axes(handles.axes1);
384     if ~a
385         H=ones(60,60);
386         plotDrop(handles,H);
387     end
388
389
390 function multidrop(handles)
391     multiget(handles.multi,'value');
392     pause=get(handles.pause,'visible');
393     global globH;
394     switch pause
395     case 'off'
396         if mult==1
397             H=globH;
398             plotDrop(handles,H);
399         else
400             H=ones(60,60);
401             plotDrop(handles,H);
402         end
403     case 'on'
404         H=globH; %allow users to add drop on the current plot
405         plotDrop(handles,H);
406     end
407
408
409 function surface()
410     lighting phong;
411     material shiny;
412     lightangle(-45,30);
413     lights('Position',[10 20 10]);
414     axis([1 60 1 60 -2 8]);
415
416 function plotDrop(handles,H)
417     a=get(handles.RUN_button,'value');
418     global globH;
419     if ~a
420         wat=get(handles.Water,'value');
421         H=add_Drop(handles,H);
422         globH=H;
423         if wat
424             surf(H,'facealpha',0.6);
425             shading interp;
426         else
427             surf(H,'facealpha',0.95);
428             shading faceted;
429         end
430         surface();
431     end
432
433 function H=add_Drop(handles,H)
434     global Z hello globOH;
435     axes(handles.axes1);
436     n=60;
437     width=get(handles.sliderWidth,'Value');
438     r=ceil(width/2);
439     height=get(handles.sliderHeight,'Value');
440     pos=get(handles.axes2,'currentpoint');
441     Dropx=floor(pos(2,2));
442     Droppy=floor(pos(2,1));
443     maxr=n-r;
444     minr=r+1;
445     Dropx(Dropx:maxr)=max;
446     Droppy(Droppy:min)=max;
447     Droppy(Droppy:min)=min;
448     [x,y]=ndgrid(-1:(2/(width))-1);
449
450     a=get(handles.radiobutton1,'Value');
451     b=get(handles.radiobutton2,'Value');
452     c=get(handles.radiobutton3,'Value');
453     d=get(handles.radiobutton4,'Value');
454     e=get(handles.radiobutton5,'Value');
455     f=get(handles.beth,'Value');
456
457     if b % Type 2:
458         [x,y]=ndgrid(-1.5:(2/(width)/1.5)-1);
459         D = height*0.5*(exp(-19*x.^2-0.5*y.^2).*cos(4*x)+...
460             exp(-2*(x+0.5).^2+0.5*y.^2));
461     elseif c % Type 3:
462         [x,y]=ndgrid(-2.5:(5/(width))-2.5);
463         D = height*1.4*y .* exp(-x.^2 - y.^2);
464

```

Σχήμα 8.12: Κώδικας Matlab για την εξίσωση κύματος των εικόνων 8.1-8.4

```

465 - elseif d ~ Matlab Logo:
466 -     D = height*membrane(1,x);
467 - elseif e ~ Peaks:
468 -     [k,y] = ndgrid(-3:(6/(width)):3);
469 -     D=height/12*peaks(k,y);
470 - elseif a ~ Type 1:
471 -     D = height*exp(-5*(x.^2+y.^2));
472 - elseif f ~ Half Sphere:
473 -     [k,y] = ndgrid(-2.1:(4.2/(width)):2.1);
474 -     D=height/4*real((4-x.^2-y.^2).^0.5);
475 - elseif g ~ Beethoven:
476 -     D=height/5*1;
477 -     D(1,:)=0;
478 -     D(:,1)=0;
479 -     Drops=2;
480 -     Dropy=2;
481 -     a=1;
482 - else
483 -     % Hi
484 -     set(handles.Speed,'String','0.54');
485 -     set(handles.sliderSpeed,'value',0.54);
486 -     set(handles.Damp,'String','1');
487 -     set(handles.sliderDamp,'value',1);
488 -     Drops=4;
489 -     Dropy=4;
490 - end
491
492 % size(D,1);
493 i2 = (Drops-r1)*(Drops-r1)-1;
494 j2 = (Drops-r1)*(Drops-r1)-1;
495 H(i2,j2)=1;
496 H(i2,j2) = H(i2,j2) + D;
497 globOH(i2,j2) = H(i2,j2);
498
499
500
501
502 % Plot Energy Flow.
503 function energy_Callback(~, ~, handles)
504 global Ekin Epot;
505 tot=Ekin+Epot;
506 w=1:length(Ekin);
507 figure;
508 plot(w,Ekin(i,:),w,Epot(i,:),w,tot(i));
509 legend('Kinetic energy','Potential energy','Total energy');
510
511 % Clear button
512 function clear_Callback(~, ~, handles)
513 global globH globOH;
514 axes(handles.axes1);
515 globH=ones(60,60);
516 globOH=globH;
517 surf(globH);
518 axis([1 60 1 60 -2 8]);
519
520
521 % Pause/Resume
522 function Pause_Callback(hObject, ~, handles)
523 stat=get(hObject,'value');
524 switch stat
525 case 0 %Resumed
526     set(hObject,'string','Pause');
527     set(handles.RUN_button,'enable','on');
528     set(handles.energy,'enable','on');
529     set(handles.clear,'enable','off');
530     set(handles.text,'visible','off');
531     set(handles.RUN_button,'value',1);
532     RUN_button_Callback(handles.RUN_button,0, handles);
533 case 1 %Paused
534     set(hObject,'string','Resume');
535     set(handles.RUN_button,'value',0);
536     set(handles.clear,'enable','on');
537     set(handles.energy,'enable','on');
538     set(handles.text,'visible','on');
539 end
540
541 function figure1_WindowKeyPressFcn(~, ~, ~)
542
543 function figure1_CloseRequestFcn(~, ~, handles)
544 % if animation's running, stop it, else close all.
545 a=get(handles.RUN_button,'value');
546 if a
547     set(handles.RUN_button,'value',0);
548     cla;
549 else
550     delete(handles.figure1);
551 end
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

```

Σχήμα 8.13: Κώδικας Matlab για την εξίσωση κύματος των εικόνων 8.1-8.4

```

644 - newH(i,n)=acceleration(i,n)*dt^2-oldH(i,n)+2*H(i,n);
645 -
646 - acceleration(1,j)=-k*velocity(1,j) +potential(1,j);
647 - newH(1,j)=acceleration(1,j)*dt^2-oldH(1,j)+2*H(1,j);
648 -
649 - acceleration(i,1)=-k*velocity(i,1) +potential(i,1);
650 - newH(i,1)=acceleration(i,1)*dt^2-oldH(i,1)+2*H(i,1);
651 -
652 -
653 - % 4 corners:
654 - acceleration(1,1)=-k*velocity(1,1) +potential(1,1);
655 - newH(1,1)=acceleration(1,1)*dt^2-oldH(1,1)+2*H(1,1);
656 -
657 - acceleration(1,n)=-k*velocity(1,n) +potential(1,n);
658 - newH(1,n)=acceleration(1,n)*dt^2-oldH(1,n)+2*H(1,n);
659 -
660 - acceleration(n,1)=-k*velocity(n,1) +potential(n,1);
661 - newH(n,1)=acceleration(n,1)*dt^2-oldH(n,1)+2*H(n,1);
662 -
663 - acceleration(n,n)=-k*velocity(n,n) +potential(n,n);
664 - newH(n,n)=acceleration(n,n)*dt^2-oldH(n,n)+2*H(n,n);
665 -
666 -
667 - % STANDSTILL CONTROLLER MODUS
668 - % Eliminate the wave and bring elements to their steady state.
669 -
670 - elseif cont
671 -
672 - H(1,j+1)= 0.5*(oldH(1,j+1)+oldH(2,j+1));
673 - newH(1,j+1)= H(1,j+1)+0.9*(H(2,j+1)-oldH(2,j+1));
674 - H(i+1,1)= 0.5*(oldH(i+1,1)+oldH(i+1,2));
675 - newH(i+1,1)= H(i+1,1)+0.9*(H(i+1,2)-oldH(i+1,2));
676 -
677 - H(1,1)= 0.5*(H(1,1)+H(2,2));
678 - newH(1,1)= H(1,1)+H(2,2)-oldH(2,2))/3;
679 - newH(1,2)= newH(1,1);
680 - Corner_n1=0.5*(H(n,1)+H(n-1,2));
681 - Corner_ln=0.5*(H(1,n)+H(2,n-1));
682 - Corner_nn= 0.5*(H(n,n)+H(n-1,n-1));
683 -
684 - H(i+1,n)= 0.5*(oldH(i+1,n)+oldH(i+1,n-1));
685 - newH(i+1,n)= H(i+1,n)+0.9*(H(i+1,n-1)-oldH(i+1,n-1));
686 - H(n,j+1)= 0.5*(oldH(n,j+1)+oldH(n-1,j+1));
687 - newH(n,j+1)= H(n,j+1)+0.9*(H(n-1,j+1)-oldH(n-1,j+1));
688 -
689 - newH(n,n)= Corner_nn;
690 - newH(n,n-1)= Corner_nn;
691 - newH(n-1,n)= Corner_nn;
692 - newH(1,n-1)=Corner_ln;
693 - newH(1,n)=Corner_ln;
694 - newH(2,n)=Corner_ln;
695 - newH(n,1)=Corner_n1;
696 - newH(n-1,1)=Corner_n1;
697 - newH(n,2)=Corner_n1;
698 -
699 - acceleration(n,j)=-k*velocity(n,j) +potential(n,j);
700 - acceleration(i,n)=-k*velocity(i,n) +potential(i,n);
701 - acceleration(1,j)=-k*velocity(1,j) +potential(1,j);
702 - acceleration(i,1)=-k*velocity(i,1) +potential(i,1);
703 -
704 - % 4 corners:
705 - acceleration(1,1)=-k*velocity(1,1) +potential(1,1);
706 - acceleration(1,n)=-k*velocity(1,n) +potential(1,n);
707 - acceleration(n,1)=-k*velocity(n,1) +potential(n,1);
708 - acceleration(n,n)=-k*velocity(n,n) +potential(n,n);
709 -
710 - % FIXED BOUNDARIES MODUS
711 - % All boundary points have a constant value of 1.
712 -
713 - elseif fix
714 - newH(1,:)=1;
715 - newH(n,:)=1;
716 - newH(:,1)=1;
717 - newH(:,n)=1;
718 -
719 - velocity(1,:)=0;
720 - velocity(n,:)=0;
721 - velocity(:,1)=0;
722 - velocity(:,n)=0;
723 -
724 - acceleration(n,j)=potential(n,j);
725 - acceleration(1,n)=potential(1,n);
726 - acceleration(1,j)=potential(1,j);
727 - acceleration(i,1)=potential(i,1);
728 -
729 - % 4 corners:
730 - acceleration(1,1)=potential(1,1);
731 - acceleration(1,n)=potential(1,n);
732 - acceleration(n,1)=potential(n,1);
733 - acceleration(n,n)=potential(n,n);
734 -
735 - % CONNECTED BOUNDARIES MODUS
736 - % Water flows across the edges and comes back from the opposite side
737 -
738 - else
739 - potential(1,j)=-c^2*((4*H(1,j)-H(2,j)-H(n,j))-H(1,j+1)-H(1,j-1))...
740 - +0.5*(4*H(1,j)-H(2,j+1)-H(2,j-1)-H(n,j+1)-H(n,j-1)));
741 - acceleration(1,j)=-k*velocity(1,j) +potential(1,j);
742 - newH(1,j)=acceleration(1,j)*dt^2-oldH(1,j)+2*H(1,j);
743 -
744 - potential(n,j)=-c^2*((4*H(n,j)-H(1,j)-H(n-1,j))-H(n,j+1)-H(n,j-1))...
745 - +0.5*(4*H(n,j)-H(1,j+1)-H(1,j-1)-H(n-1,j+1)-H(n-1,j-1)));
746 - acceleration(n,j)=-k*velocity(n,j) +potential(n,j);
747 - newH(n,j)=acceleration(n,j)*dt^2-oldH(n,j)+2*H(n,j);
748 -
749 - potential(i,1)=-c^2*((4*H(i,1)-H(i,n)-H(i-1,1))-H(i+1,1)-H(i,2))...
750 - +0.5*(4*H(i,1)-H(i+1,2)-H(i+1,n)-H(i-1,2)-H(i-1,n)));
751 - acceleration(i,1)=-k*velocity(i,1) +potential(i,1);
752 - newH(i,1)=acceleration(i,1)*dt^2-oldH(i,1)+2*H(i,1);
753 -
754 - potential(i,n)=-c^2*((4*H(i,n)-H(i+1,n)-H(i-1,n)-H(i,1)-H(i,n-1))...
755 - +0.5*(4*H(i,n)-H(i+1,1)-H(i+1,n-1)-H(i-1,1)-H(i-1,n-1)));
756 - acceleration(i,n)=-k*velocity(i,n) +potential(i,n);
757 - newH(i,n)=acceleration(i,n)*dt^2-oldH(i,n)+2*H(i,n);
758 -
759 - % 4 Corners
760 - potential(n,n)=-c^2*((4*H(n,n)-H(1,n)-H(n,1))-H(n,n-1)-H(n-1,n))...
761 - +0.5*(4*H(n,n)-H(1,n-1)-H(1,1)-H(n-1,n-1)-H(n-1,1)));
762 - acceleration(n,n)=-k*velocity(n,n) +potential(n,n);
763 - newH(n,n)=acceleration(n,n)*dt^2-oldH(n,n)+2*H(n,n);
764 -
765 - potential(n,1)=-c^2*((4*H(n,1)-H(1,1)-H(n,n)-H(n,2)-H(n-1,1))...
766 - +0.5*(4*H(n,1)-H(1,2)-H(1,n)-H(n-1,n)-H(n-1,2)));
767 - acceleration(n,1)=-k*velocity(n,1) +potential(n,1);
768 - newH(n,1)=acceleration(n,1)*dt^2-oldH(n,1)+2*H(n,1);
769 -
770 - potential(1,1)=-c^2*((4*H(1,1)-H(1,n)-H(1,2)-H(n,1)-H(2,1))...
771 - +0.5*(4*H(1,1)-H(2,2)-H(n,2)-H(n,n)-H(2,n)));
772 - acceleration(1,1)=-k*velocity(1,1) +potential(1,1);
773 - newH(1,1)=acceleration(1,1)*dt^2-oldH(1,1)+2*H(1,1);
774 -
775 - potential(1,n)=-c^2*((4*H(1,n)-H(1,1)-H(n,n)-H(2,n)-H(1,n-1))...
776 - +0.5*(4*H(1,n)-H(n,1)-H(2,1)-H(2,n-1)-H(n,n-1)));
777 - acceleration(1,n)=-k*velocity(1,n) +potential(1,n);
778 - newH(1,n)=acceleration(1,n)*dt^2-oldH(1,n)+2*H(1,n);
779 -
780 -
781 - end
782 -
783 - kin=velocity.^2;
784 - pot=-acceleration.*oldH;
785 - Ekin=[Ekin sum(kin(:))];
786 - Epot=[Epot sum(pot(:))];
787 -

```

Σχήμα 8.14: Κώδικας Matlab για την εξίσωση κύματος των εικόνων 8.1-8.4

Βιβλιογραφία

- [1] Ablowitz, M. J., *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*, 2011, Cambridge University Press.
- [2] Ablowitz, M. J. and Baldwin, D. E., *Nonlinear shallow ocean-wave solitons interactions on flat beaches*, 2012, American Physical Society.
- [3] Ablowitz, M. J. and Segur, H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, 1981, SIAM, Philadelphia.
- [4] Αλικάκος, Ν. Δ. και Καλογερόπουλος, Γ. Η., *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, 2003, Σύγχρονη Εκδοτική.
- [5] Brauer K., *The KdV Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation*, 2000, University of Osnabrück, Germany.
- [6] Cercignani C., *The Boltzmann Equation and Its Applications*, 1988, Springer-Verlag.
- [7] Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M. and Akhmediev N., *Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves*, 2012, American Physical Society.
- [8] Δάσιος Γ., *Εισαγωγή στην Ασυμπτωτική Ανάλυση*, 2016, Εκδόσεις Τσότρας.
- [9] Hereman W. and Malfliet W., *The Tanh Method: A Tool to Solve Nonlinear Partial Differential Equations with Symbolic Software*, 2005, WMSCI.
- [10] Huy P., *Water surface simulation. Energy conservation*, 2014, University of Applied Sciences, Rapperswil, Switzerland.
- [11] Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A., *Rogue Waves in the Ocean: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics*, 2009, Springer.
- [12] Knobel R., *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, 2000, American Mathematical Society.
- [13] Logan, D., *Applied Mathematics*, 4nd edition, 2013, Wiley.
- [14] Lu Z., Tian E. M. and Grimshaw R., *Interaction of two lump solitons described by the KPI equation*, *Wave Motion*, 40, 2004, p. 123-135.
- [15] Marsden J. and Tromba A., *Vector Calculus*, 3rd edition, 1988, W. H. Freeman and Company.

- [16] Νουτσόπουλος Γ., Χριστοδούλου Γ., Μαθήματα Μηχανικής των Ρευστών, 1996, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- [17] Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W., NIST Handbook of Mathematical Functions, 2010, Cambridge University Press.
- [18] Rose A., Numerical Simulations of the Stochastic KdV Equation, 2006, University of North Carolina, Wilmington, M.Sc. Thesis.
- [19] Sattinger D. H., Solitons & Nonlinear Dispersive Waves, 1998, 23rd Summer School of Mathematical Physics, Ravello, Italy.
- [20] Wazwaz A.-M., Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, 2009, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [21] Whitham G. B., Linear and Nonlinear Waves, 1999, Wiley.
- [22] Χατζηαφράτης, Τ. Ε., Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές, 2009, Εκδόσεις Συμμετρία.