ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

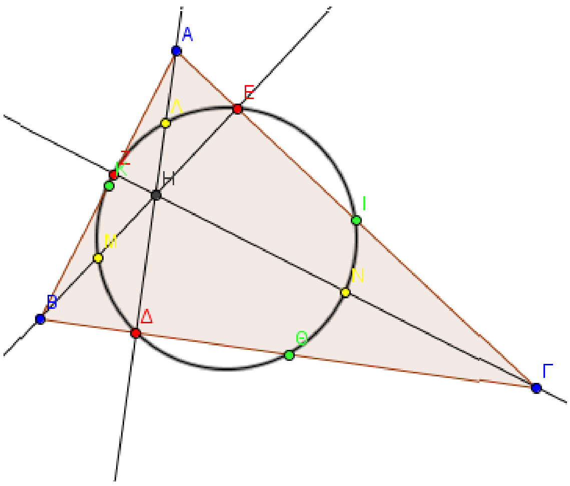
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Μιγαδικοί αριθμοί και Γεωμετρία»



ΒΑΣΙΛΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

Δ201018

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Λάππας Διονύσιος

ΑΘΗΝΑ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Λάππας Διονύσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής καθηγητής	…………………...
2) Ράπτης Ευάγγελος	Καθηγητής	…………………..
3) Σπύρου Παναγιώτης	Επίκουρος καθηγητής	…………………...

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω θερμά, τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου Διονύσιο Λάππα, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ και Καθηγητή μου, για το χρόνο που αφιέρωσε, την καθοριστική βοήθεια και τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις που μου παρείχε, για να μπορέσω να εκπονήσω την παρούσα εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών κ. Ράπτη Ευάγγελο και τον Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών κ. Σπύρου Παναγιώτη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Ακόμα, δε μπορώ να παραλείψω όλους τους διδάσκοντες του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, που με βοήθησαν να εμπλουτίσω τις γνώσεις μου σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και τη γραμματέα του τμήματος κα. Διονυσία Μπακογιάννη που χάρη στις χρήσιμες οργανωτικές συμβουλές της με βοήθησε να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δικούς μου ανθρώπους και φίλους που με στήριξαν σε αυτή μου την προσπάθεια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} –ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} –ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MOBIUS</u>

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο} –ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι μιγαδικοί αριθμοί και συγκεκριμένα ο αριθμός i έκανε μια πρώιμη εμφάνιση στη σκηνή της Ιστορίας των Μαθηματικών, τον 16ο αιώνα κατά την εποχή που οι Ιταλοί μαθηματικοί προσπαθούσαν να βρουν τρόπους για τη λύση τετραγωνικών εξισώσεων. Το 1572 ο Rafaello Bombelli, ο τελευταίος μεγάλος μαθηματικός της Bologna, παρουσίασε το βιβλίο του Algebra, στο οποίο μελετώντας τις τετραγωνικές ρίζες διάφορων αριθμών σκόνταψε σε ένα αναπάντητο ερώτημα: «Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του αρνητικού αριθμού -1» ; Η λύση γι αυτόν ήταν να «δημιουργήσει» έναν καινούριο αριθμό και θα είναι εξ ορισμού η απάντηση στο ερώτημα «ποια είναι η τετραγωνική ρίζα της αρνητικής μονάδας;». Ο αλλόκοτος αυτός αριθμός, που χαρακτηρίστηκε από τον Descartes «imaginaire» – στην ελληνική γλώσσα «φανταστικός»- έκανε την εμφάνισή του χωρίς να συμβολίζεται με κάποιο γενικώς αποδεκτό σύμβολο. Ο φανταστικός αριθμός γεννήθηκε λοιπόν τον 16ο αιώνα και απέκτησε τον δικό του «παγκόσμιο» συμβολισμό με το γράμμα i τον 18ο αιώνα ύστερα από πρόταση του Euler.

Οι μιγαδικοί αριθμοί εκτός του ότι έχουν σημαντικές εφαρμογές στην επίλυση εξισώσεων, μπορούν να αποτελέσουν ένα πεδίο μελέτης διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων όπως τα αριθμητικά συστήματα, τα διανύσματα, η τριγωνομετρία αλλά και η Γεωμετρία. Οι μιγαδικοί αριθμοί και η Γεωμετρία μπορούν να συνδιαστούν όμορφα και να οδηγήσουν σε εύκολες αποδείξεις και φυσικές γενικεύσεις πολλών θεωρημάτων της Επίπεδης Γεωμετρίας όπως το Θεώρημα του Simson, του Ναπολέων και του Morley κάτι το οποίο πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

ABSTRACT

Complex numbers, and more specifically the number *i*, made an early appearance in the history of Mathematics in the 16^{th} century, when Italian mathematicians were trying finding ways to solve square equations. In 1572 Rafaello Bombelli, the last great mathematician of Bologna, presented his book *Algebra* and as he was studying the square roots of various numbers, he faced an unanswered question: ‘Which is the square root of the negative number -1?’ The solution was to create a completely new number which would be by definition the answer to this question. This peculiar number, which was characterized by Descartes as *imaginaire*, appeared without being accompanied by a generally accepted symbol. So, the imaginary number was born in the 16^{th} century but acquired its universal symbol *i* in the 18^{th} century, after Euler’s proposition.

Apart from their significant applications in equations’ solutions, complex numbers can be also subjects of study for several mathematic units like number systems, vectors, trigonometry can be well combined and lean to easy proofs and logic generalisations of many theorems, for example the Simson’s, Napoleon’s and Morley’s theorems. The present work is dealing with this issue.

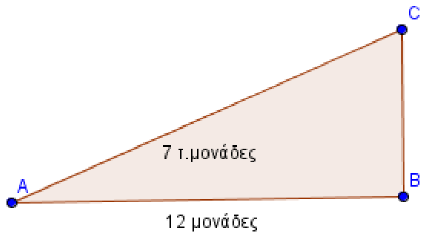
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η αντίληψη του ανθρώπου για τους αριθμούς είναι στενά συνυφασμένη με την ανθρώπινη κοινωνία. Οι φυσικοί αριθμοί είναι εύκολα κατανοητοί και έχουν χρησιμοποιηθεί για λόγους μέτρησης σε πολλούς πολιτισμούς. Αργότερα, για το «μοίρασμα» οι άνθρωποι εισήγαγαν τα κλάσματα με στόχο να απαντήσουν προβλήματα όπως ‘Αν πιάσαμε U ψάρια εγώ θα πάρω τα $\frac{2}{5}U$ κι εσύ τα $\frac{3}{5}U$ από αυτά που πιάσαμε’. Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών και του 0 έγινε για λόγους κέρδους ή απώλειας στην οικονομία. Είναι πραγματικά αξιοσημείωτο ότι οι αρχαίοι πολιτισμοί γνώριζαν την ανάγκη για τους άρρητους αριθμούς, όπως το $\sqrt{2}$ στην περίπτωση των Βαβυλωνίων και το π στην περίπτωση των αρχαίων Ελλήνων. Η εισαγωγή ενός νέου αριθμού συχνά προκύπτει από την ανάγκη να επιλύσουμε ένα συγκεκριμένο πρακτικό πρόβλημα, όπως η εισαγωγή των άρρητων για την εύρεση της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς 1.

Η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων είναι ιστορικά ένα από τα αγαπημένα θέματα των μαθηματικών. Ενώ οι γραμμικές εξισώσεις είναι πάντοτε επιλύσιμες στους πραγματικούς αριθμούς, οι τετραγωνικές εξισώσεις δεν έχουν όλες αυτή την ιδιότητα, όπως η $x^2+1=0$. Μέχρι τον 18^{o} αιώνα οι μαθηματικοί απέφευγαν τις τετραγωνικές εξισώσεις που δεν ήταν επιλύσιμες στο $\Re$. Ο Leonhard Euler έσπασε τον πάγο εισάγωντας τον ‘αριθμό’ $\sqrt{-1}$ στο γνωστό βιβλίο του Elements of Algebra ως ‘*neither nothing, nor greater than nothing, nor less than nothing…*’ και παρατήρησε ‘*notwithstanding this, these numbers present themselves to the mind; they exist in our imagination and we still have a sufficient idea of them; ... nothing prevents us from making use of these imaginary numbers, and employing them in calculation*’. Ο Euler συμβόλισε τον αριθμό $\sqrt{-1}$ με i και το ονόμασε *φανταστική μονάδα* και αυτό έγινε ένα από τα πιο χρήσιμα σύμβολα των Μαθηματικών. Χρησιμοποιώντας αυτό το σύμβολο ορίζουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως $z=a+bi$ με $a,b\in\Re$. Η μελέτη των μιγαδικών αριθμών συνεχίστηκε και οι γνώσεις μας γι' αυτούς εμπλουτίστηκαν μέσα στους τελευταίους δυόμιση αιώνες. Πράγματι, μας είναι αδύνατο να φανταστούμε τα νεότερα μαθηματικά χωρίς τους Μιγαδικούς αριθμούς και όλοι οι μαθηματικοί τομείς τους χρησιμοποιούν, καθώς και άλλοι κλάδοι όπως η Μηχανική, η Θεωρητική Φυσική, η Υδροδυναμική και η Χημεία.

Πιθανότατα οι πρώτες αναφορές σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών είναι του Ήρωνα από την Αλεξάνδρεια περίπου το 60μ.Χ. που τις συνάντησε υπολογίζοντας όγκους γεωμετρικών σωμάτων. Περίπου 200 χρόνια αργότερα, ο Διόφαντος (275μ.Χ.) έθεσε το εξής απλό γεωμετρικό πρόβλημα:

'Να βρεθούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με περίμετρο 12 μονάδες και εμβαδό 7 τετραγωνικές μονάδες'.



Για την επίλυση αυτού, θέτουμε την πλευρά $|AB| = x$ και το ύψος $|BC| = h$ οπότε έχουμε εμβαδό$=\frac{1}{2}hx$ και περίμετρος$= x + h + \sqrt{x^2 + h^2}$. Για να λύσουμε ως προς x χρειάζεται μα βρούμε τις ρίζες τις εξίσωσης $6x^2 - 43x + 84$, όμως η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ένα παρόμοιο με αυτό πρόβλημα τέθηκε από τον Cardano το 1545. Αυτός προσπάθησε να βρει δυο αριθμούς $a \& b$ τέτοιους ώστε $a + b = 10$ και $a \cdot b = 40$. Αυτές οι εξισώσεις ικανοποιούνται από τους αριθμούς $a = 5 + \sqrt{-15}$ και $b = 5 - \sqrt{-15}$ οι οποίοι δεν είναι πραγματικοί.

Προσπάθειες για την εύρεση των ριζών ενός τυχαίου πολυωνύμου περιλαμβάνονται σε εργασίες του Al-Khwarizmi (~800μ.Χ.) οι οποίες επιτρέπουν όμως μόνο θετικές ρίζες. Ο Al-Khwarizmi (780-850) στην 'Άλγεβρά' του έχει τις λύσεις διάφορων τύπων τετραγωνικών εξισώσεων. Οι λύσεις του μοιάζουν με αυτές που διδάσκονται σήμερα στα σχολεία όμως περιορίζονται μόνο στις θετικές. Οι αποδείξεις του είναι βασισμένες στη Γεωμετρία και οι πηγές είναι ελληνικές και από τις Ινδίες. Οι μέθοδοι της Άλγεβρας, γνωστές στους Άραβες εισήχθησαν στην Ιταλία από τη λατινική μετάφραση της 'Άλγεβρας' του Al-Khwarizmi από τον Gerard της Cremona (1114-1187) και από τις εργασίες του Leonardo di Pisa (Fibonacci) (1170-1250).

Περίπου το 1225, ο Leonardo da Pisa λύνει πολλά προβλήματα ένα εκ των οποίων ήταν η λύση της εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Η γενική κυβική εξίσωση $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, θέτοντας $x' = x + \frac{1}{3}a$ γίνεται $x^3 + px + q = 0$. Ο πρώτος που κατάφερε να τη λύσει ήταν ο Scipione del Ferro καθηγητής του πανεπιστημίου της Bologna μέχρι το 1526 που πέθανε. Λίγο πριν πεθάνει εμπιστεύτηκε τον τύπο που είχε ανακαλύψει στο μαθητή του Antonio Maria Fiore. Ο τελευταίος προκάλεσε τον Tartaglia (που σημαίνει τραυλός, λόγω διαταραχής ομιλίας που είχε-το πραγματικό του όνομα ήταν Niccolo Fontana) σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό. Τη νύχτα πριν το διαγωνισμό ο Tartaglia ανακάλυψε εκ νέου τον τύπο και νίκησε το διαγωνισμό. Ο Tartaglia με τη σειρά του έδωσε τον τύπο (αλλά όχι την απόδειξη) στον Gerolamo Cardano ο οποίος υπέγραψε όρκο μυστικότητας . Γνωρίζοντας τον τύπο, ο Cardano ήταν σε θέση να ανακατασκευάσει την απόδειξη. Αργότερα, έμαθε ότι ο del Ferro ήταν αυτός που αρχικά είχε ανακαλύψει τον τύπο, και στο έργο του Ars Magna (1545) τον δημοσίευσε. Ο τύπος αυτός ήταν ο εξής:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ .$$

Έτσι, σε αυτό το έργο, ο Cardano εισήγαγε πρώτος τους μιγαδικούς αριθμούς ως ένα εργαλείο εύρεσης των πραγματικών ριζών της κυβικής εξίσωσης $x^3 + px + q = 0$. Είναι αξιοσημείωτο πως ο Cardano ανέφερε τον Ferro ως αρχικό συγγραφέα αυτού και τον Tartaglia ως αυτόν που έλαβε τον τύπο αργότερα με ανεξάρτητο τρόπο. Για συγκεκριμένη κυβική εξίσωση και συγκεκριμένη αντικατάσταση, ο Tartlaglia έδειξε με τη συμμετρία πως υπάρχει το $\sqrt{-1}$ το οποίο έχει μαθηματικό νόημα. Για παράδειγμα, ο τύπος του Tartaglia δίνει τις λύσεις της εξίσωσης $x^3 - x = 0$ ως

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\left(\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Σύμφωνα με το [14] ο Cardano ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τους μιγαδικούς αριθμούς $a + \sqrt{-b}$ στην Άλγεβρα

Ο Rafael Bombelli ήταν ο συγγραφέας του L'Algebra (1572 και 1579) ένα σύνολο τριών βιβλίων. Ο Bombelli εισάγει το συμβολισμό για το $\sqrt{-1}$ και το ονόμασε *piu di meno*. Ο Bombelli θεωρώντας την εξίσωση $x^3 = 15x + 4$ για την οποία ο τύπος του Cardano δίνει $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ παρατήρησε ότι έχει και το $x = 4$ ως λύση και στη συνέχεια προσπάθησε να αποδώσει την έκφραση που δίνεται από τον τύπο του Cardano ως μια άλλη έκφραση για $x = 4$ ως εξής:

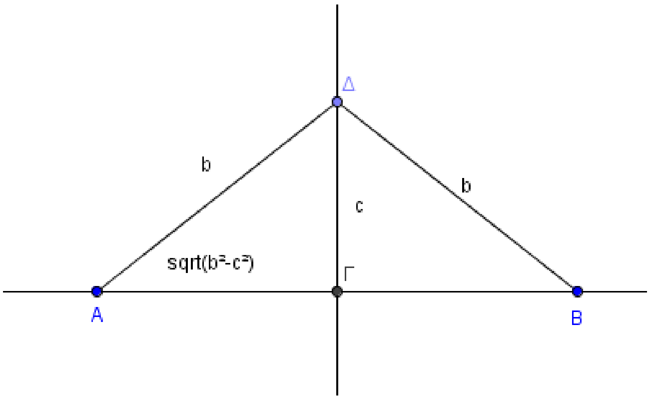
Έθεσε $a + bi = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ από το οποίο συνήγαγε $a - bi = \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ και μετά από αλγεβρικούς υπολογισμούς βρήκε $a = 2 \,\&\, b = 1$. Έτσι, $x = a + bi + a - bi = 2a = 4$.

Ο René Descartes (1596-1650) ήταν φιλόσοφος και στην εργασία του La Géométrie περιλαμβάνει εφαρμογή της Άλγεβρας στη Γεωμετρία από την οποία έχουμε την Καρτεσιανή Γεωμετρία. Ο Descartes μετά από πίεση των φίλων του δημοσίευσε τις ιδέες του σε μια διατριβή με τον τίτλο *Discours de la Méthod pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Τρία παραρτήματα σε αυτή την εργασία είναι τα εξής *La Dioptrique, Les Météores, και La Géométrie*. Η διατριβή του δημοσιεύτηκε το 1637 στο Leiden. Ο Descartes συνέδεσε τους φανταστικούς αριθμούς με τη γεωμετρική αδυναμία. Αυτό γίνεται εμφανές στη γεωμετρική κατασκευή που χρησιμοποίησε για να επιλύσει την εξίσωση $z^2 = az - b^2$ όπου a και b^2 θετικοί. Ο όρος '*φανταστικός*' επινοήθηκε από τον Descartes to 1630 και αντανακλά την παρατήρηση του «Για κάθε εξίσωση βαθμού n μπορούμε να φανταστούμε n ρίζες οι οποίες δεν αντιστοιχούνε σε καμία πραγματική ποσότητα».

Το 1629 ο μαθηματικός Albert Girard στο έργο του *L'Invention Nouvelle en L'Algèbre* ισχυρίζεται ότι υπάρχουν n ρίζες σε ένα πολυώνυμο n βαθμού, ωστόσο αυτό ήταν δεκτό ως αυτονόητο, χωρίς να εξασφαλίζει ότι η πραγματική λύση έχει τη μορφή $a + jb$ με $a, b \in \Re$.

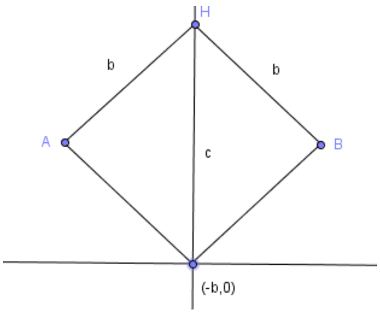
Ο John Wallis (1616-1703) σημειώνει ότι οι αρνητικοί αριθμοί που αντιμετωπίζονταν με καχυποψία από τους μαθηματικούς μέχρι τότε, έχουν μια καλή φυσική εξήγηση βασισμένη σε μια γραμμή με ένα σημείο το μηδέν (0), με τους θετικούς αριθμούς να αναπαρίστανται ως οι αποστάσεις από το 0 στα δεξιά αυτού και τους αρνητικούς στα αριστερά του. Επιπλέον προχώρησε δίνοντας μια γεωμετρική αναπαράσταση στο $\sqrt{-1}$. Μετά τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών από τον John Wallis το 1685 στο *De Algebra Tractatus* και του Caspar Wessel το 1797 στο

Proceedings of the Copenhagen Academy οι μιγαδικοί αριθμοί έγιναν τελικά αποδεκτοί. Το 1673 οJohn Wallis καθώς ερευνούσε τη γεωμετρική αναπαράσταση των ριζών πολυωνύμου συνειδητοποίησε ότι για ένα τετραγωνικό πολυώνυμο της μορφής $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ του οποίου η λύση είναι $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ η γεωμετρική αναπαράσταση ήταν δυνατή μόνο εάν $b^2 - c^2 \geq 0$. O Wallis απεικόνισε κάθε λύση ως μετατοπίσεις από το σημείο $-b$ όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα



Πραγματική Λύση

Αναπαρέστησε κάθε λύση ως μια κορυφή A και B ενός ορθογωνίου τριγώνου με ύψος c και πλευρά $\sqrt{b^2 - c^2}$. Η γεωμετρική αυτή αναπαράσταση είναι αναμφισβήτητα σωστή για $b^2 - c^2 \geq 0$. O Wallis υποστήριξε ότι για $b^2 - c^2 < 0$ εφόσον το b είναι μικρότερο του c έχουμε την παρακάτω περίπτωση:



Μιγαδική λύση

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να σκεφτούμε τους μιγαδικούς αριθμούς σημεία στο επίπεδο.

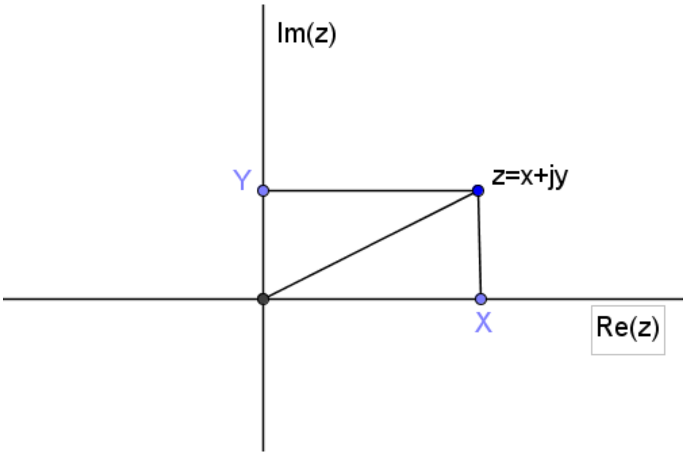
O Abraham de Moivre (1667-1754) έφυγε από τη Γαλλία στα 18 του να αναζητήσει θρησκευτικό καταφύγιο στο Λονδίνο. Εκεί έγινε φίλος με τον Newton και το 1698 αναφέρει ότι ο τελευταίος γνώριζε μια ισοδύναμη έκφραση με το γνωστό σήμερα ως Θεώρημα de Moivre: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ με n

ακέραιο. Προφανώς, ο Newton χρησιμοποιούσε αυτό τον τύπο για να υπολογίσει τις κυβικές ρίζες που εμφανίζονται στον τύπο του Cardano. O de Moivre γνώριζε και χρησιμοποιούσε αυτό τον τύπο που φέρει το όνομά του όπως είναι φανερό από τα γραπτά του.

O L. Euler (1707-1783) εισήγαγε το συμβολισμό $i = \sqrt{-1}$ και απεικόνισε τους μιγαδικούς ως σημεία με ορθογώνιες συντεταγμένες αλλά δεν έδωσε μια ικανοποιητική θεμελίωση γι' αυτούς. Επίσης, χρησιμοποίησε τον τύπο $x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και απεικόνισε τις ρίζες $z^n = 1$ ως κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου. Τέλος, όρισε και απέδειξε την ισότητα $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

O νορβηγός Caspar Wessel (1745-1818) ήταν ο πρώτος που βρήκε και δημοσίευσε μια κατάλληλη παρουσίαση των μιγαδικών αριθμών. Στις 10 Μαρτίου του 1797 ο Wessel παρουσίασε το βιβλίο του 'On the Analytic Representation of Direction: An Attempt' στη Royal Danish Academy of Sciences. To βιβλίο του εκδόθηκε το 1799 και η ποιότητα του ήταν τόσο καλή ώστε να είναι το πρώτο βιβλίο που εκδόθηκε από ένα άτομο που δεν ήταν μέλος της Ακαδημίας. Το βιβλίο του, όντας γραμμένο στα δανικά, πέρασε απαρατήρητο μέχρι το 1897, όταν το έφερε στο φως ένας αρχαιολόγος και η σπουδαιότητά του αναγνωρίστηκε από το Δανό μαθηματικό Sophus Christian Juel. Η προσέγγισή του χρησιμοποιεί αυτά που σήμερα αποκαλούμε διανύσματα. Χρησιμοποιεί τη γεωμετρική πρόσθεση διανυσμάτων (νόμος παραλληλογράμμου) και όρισε τον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων, αυτό που κάνουμε σήμερα αθροίζοντας τις πολικές γωνίες και πολλαπλασιάζοντας τα μεγέθη.

O Jean-Robert Argant (1768-1822), ένας λογιστής από το Παρίσι (δεν γνωρίζουμε αν είχε κάποια μαθηματική εκπαίδευση) έβγαλε ένα τεύχος με τίτλο *Essay on the Geometrical Interpretation of Imaginary Quantities* αλλά ξέχασε να συμπεριλάβει το όνομα του στον τίτλο. Στο μιγαδικό αριθμό $z = x + jy$ ερμηνεύει το j ως μια περιστροφή κατά 90 μοίρες και εισήγαγε το επίπεδο Argand ως μια γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Σε αυτό το $\pm\sqrt{-1}$ αναπαρίσταται σε μία γραμμή μήκους 1 κάθετη στον άξονα των πραγματικών.



Ο συμβολισμός και η ορολογία που εισήγαγε είναι όμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ο Argand αναπαριστά το μιγαδικό αριθμό ως ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου όπως φαίνεται παραπάνω και ονόμασε το $\sqrt{x^2+y^2}$ μέτρο.

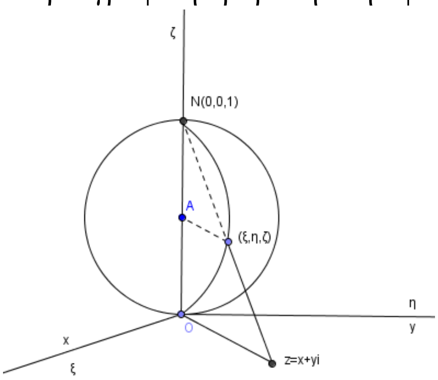
Ένα αντίγραφο έφτασε στα χέρια του μαθηματικού A. Legendre (1752-1833) ο οποίος με τη σειρά του το ανέφερε σε ένα γράμμα στον Francois Francais καθηγητή των Μαθηματικών. Όταν πέθανε ο Francais κληρονόμησε τα έγγραφά του στον αδερφό του Jaques , μαθηματικό. Βρήκε το γράμμα του Legendre που περιέγραφε τα μαθηματικά αποτελέσματα του Argand, όμως ο Legendre ξέχασε να αναφέρει τον Argand. Ο Jaques εξέδωσε ένα άρθρο το 1813 στο περιοδικό Annales de Mathématics δίνοντας τα βασικά χαρακτηριστικά των μιγαδικών αριθμών. Στην τελευταία παράγραφο του εγγράφου του, ο Jaques αναγνώρισε το χρέος του στο γράμμα του Legendre και κάλεσε τον άγνωστο συγγραφέα να εμφανιστεί. Ο Argand μαθαίνοντας αυτό απάντησε στο επόμενο τεύχος του περιοδικού.

Ο William Rowan Hamilton (1805-1865) όρισε το διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a,b) και όρισε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό διατεταγμένων ζευγών ως εξής: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ και $(a,b)(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$ με άλλα λόγια έδωσε τον αλγεβρικό ορισμό των μιγαδικών αριθμών.

Ο Karl Friedrich Gauss (1777-1855) σύμφωνα με ενδείξεις, πιθανότατα είχε στην κατοχή του τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών από το 1796 αλλά δε το είχε δημοσιεύσει πριν το 1831 οπόταν συνόψισε τις ιδέες του στη Royal Society of Gottingen. Επιπλέον χρησιμοποίησε τους μιγαδικούς στις πολλαπλές αποδείξεις του για το Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας και το 1831 όχι μόνο συσχέτισε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + jy$ με ένα σημείο (x, y) στο επίπεδο, αλλά επίσης εισήγαγε τους κανόνες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού τέτοιων αριθμών. Το 1811 σε επιστολή του προς τον Bessel γνωστοποιεί το θεώρημα του που σήμερα είναι γνωστό ως Θεώρημα του Cauchy. Αυτό το θεώρημα δεν εκδόθηκε, όμως αργότερα ανακαλύφθηκε εκ νέου από τους Cauchy και Weierstrass.

Ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) εισήγαγε τη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων σε ένα υπόμνημα που υπέβαλε στη French Académie des Sciences. Ο όρος *αναλυτική συνάρτηση* δεν αναφέρεται κάπου εκεί όμως η ιδέα αυτής ήταν εκεί. Ο Cauchy ήταν αυτός που κατασκεύασε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το 1847 ως $R(x)/(x^2+1)$ και είπε 'Απαρνούμαστε το σύμβολο $\sqrt{-1}$, χωρίς να το μετανιώνουμε γιατί δε γνωρίζουμε τι σημαίνει ο υποτιθέμενος συμβολισμός του ή τι ερμηνεία να του δώσουμε'.

Κάποιες αναλυτικές πτυχές των μιγαδικών αριθμών αναπτύχθηκαν και από τον Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) και αυτές οι αρχές είναι η βάση σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε manifold signal processing. Οι δυνατότητες των μιγαδικών αριθμών σε αυτό το πλαίσιο γίνονται εμφανείς θεωρώντας τη στερεογραφική προβολή στη σφαίρα του Riemman.



Θεωρώντας την παραπάνω σφαίρα υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του μιγαδικού επιπέδου και των σημείων της σφαίρας, εκτός του σημείου N του του βόρειου πόλου της σφαίρας. Αν συμπεριλάβουμε αυτό το σημείο της σφαίρας αντιστοιχίζοντας το στο άπειρο του μιγαδικού επιπέδου έχουμε το επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο $\widehat{C} = C \cup \{\infty\}$ και έχουμε μια απεικόνιση της σφαίρας του Riemman στο επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο.

Επέκταση των Μιγαδικών Αριθμών

Η γενίκευση των μιγαδικών αριθμών οδήγησε στη δημιουργία των υπερμιγαδικών αριθμών και εντοπίζεται στην εργασία του William Rowan Hamilton (1805-1865), ο οποίος εισήγαγε τις τετράδες το 1843. Μια τετράδα $\vec{q}$ ορίζεται ως $\vec{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ όπου οι μεταβλητές i, j, k ορίζονται όλες ως $\sqrt{-1}$, όμως ο πολλαπλασιασμός τετράδων δεν είναι αντιμεταθετικός. Από αυτούς που συνετέλεσαν στην ανάπτυξη της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών ήταν ο Hermann Günther Grassmann (1809-1877) που εισήγαγε τον πολυδιάστατο διανυσματικό λογισμό, και ο James Cockle ο οποίος το 1848 εισήγαγε τους split-complex numbers. Οι split-complex numbers, γνωστοί και ως υπερβολικοί αριθμοί ή αριθμοί Lorenz ορίζονται ως $z = x + jy$ με $j^2 = 1$. Το 1876 ο William Kingdon Clifford εισήγαγε το σύστημα των υπερμιγαδικών αριθμών (Άλγεβρα Clifford). Αυτό το κατάφερε συνδυάζοντας την άλγεβρα των τετράδων και τους split-complex numbers. Και στους δυο, Hamilton και Clifford, έχει πιστωθεί η εισαγωγή των biquaternions, τα οποία είναι τετράδες που έχουν ως συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς. Γενικότερα, ένα σύστημα υπερμιγαδικών αριθμών έχει τουλάχιστον ένα μη-πραγματικό άξονα και είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Άλλα μέλη της οικογένειας των υπερμιγαδικών αριθμών είναι οι McFarlane υπερβολικές τετράδες, οι υπέρ-αριθμοί, οι multicomplex numbers και οι twistors που αναπτύχθηκαν από τον Roger Penrose το 1967.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} - Μιγαδικοί Αριθμοί

1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες των Μιγαδικών Αριθμών

Εισαγωγή στους Φανταστικούς αριθμούς.

Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών είναι η δυνατότητα τους να επιτρέπουν να γίνουν ελεύθερα και χωρίς περιορισμούς οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (με εξαίρεση τη διαίρεση με το 0). Γι' αυτό το λόγο, μια τυχούσα γραμμική εξίσωση της μορφής $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ μπορεί να επιλυθεί μέσα στο χώρο των πραγματικών αριθμών ως $x = -\frac{b}{a}$.

Η παραπάνω κατάσταση αλλάζει στην περίπτωση που έχουμε να λύσουμε μια τετραγωνική εξίσωση της μορφής $x^2+1=0$, η οποία δε μπορεί να επιλυθεί για x μέσα στους πραγματικούς αριθμούς. Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού δε μπορεί να είναι αρνητικός , οπότε $x^2+1 \geq 1 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Έτσι, η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς. Σε μια τέτοια κατάσταση χρειάζεται να επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών ώστε να γίνει επιλύσιμη.

Για παράδειγμα, για ένα παιδί που γνωρίζει μόνο τους θετικούς ακεραίους μια εξίσωση της μορφής $7+x=3$ είναι αδιανόητη, ή για κάποιον που γνωρίζει μόνο τους ακεραίους, εξισώσεις όπως $5x=2$ και $x^2=17$ είναι αδύνατες. Επεκτείνοντας όμως το σύνολο των αριθμών μας για να συμπεριλάβει τους αρνητικούς, τα κλάσματα και του άρρητους, οι παραπάνω εξισώσεις έχουν λύση -4, $\frac{2}{5}$ και $\pm\sqrt{17}$ αντίστοιχα.

Με παρόμοιο τρόπο λοιπόν, για να επιλύσουμε την εξίσωση $x^2+1=0$ επεκτείνουμε το σύνολο των αριθμών για να συμπεριλάβει αριθμούς όπως ο $\sqrt{-1}$ το τετράγωνο του οποίου είναι το -1. Τέτοιοι αριθμοί δεν είναι σύμφωνοι με τη διαίσθησή μας έτσι πολλοί μαθηματικοί στο παρελθόν είχαν αντιρρήσεις για την εισαγωγή τους γι’ αυτό και τους ονόμασαν *φανταστικούς*. Ήταν τον 18^{o} αιώνα όταν ο L.Euler (1707-1783) με πολύ επιδέξιους χειρισμούς των φανταστικών αριθμών κατέληξε σε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Με την αναπαράσταση των φανταστικών αριθμών ως σημεία στο επίπεδο ο C.F.Gauss (1777-1855) τους μετονόμασε σε μιγαδικούς αριθμούς και με τη χρήση τους κατέληξε σε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τη Θεωρία αριθμών και έτσι κατοχυρώθηκε η θέση τους στο σύστημα των αριθμών. Την ίδια περίοδο, ο A.L.Cauchy(1789-1857) προσπαθώντας να βρει τρόπο να υπολογίζει ορισμένα ολοκληρώματα ερεύνησε το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό συναρτήσεων με μιγαδικούς αριθμούς ως μεταβλητές. Αυτό αποτέλεσε τη γένεση της Θεωρίας συναρτήσεων και άνοιξε το δρόμο για τους N.H.Abel (1802-1829) και C.G.J.Jacobi (1804-1851) να ανακαλύψουν τις ελλειπτικές συναρτήσεις. Επιπλέον η ανάπτυξη της Προβολικής Γεωμετρίας έδειξε την αναγκαιότητα των Μιγαδικών αριθμών στη Γεωμετρία. Καθώς η έρευνα προχωρά γίνεται ξεκάθαρο πως το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι πολύ περιορισμένο και είναι πολύ εντυπωσιακό το ότι εργαζόμαστε με τους μιγαδικούς για να επιτύχουμε την ομοιομορφία και την αρμονία.

Έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούμε το αρχικό γράμμα i από τη λέξη imaginary (φανταστικός) για το $\sqrt{-1}$. Έτσι, οι μιγαδικοί αριθμοί είναι αριθμοί της μορφής $z=a+bi$, όπου τα a και b είναι πραγματικοί, ο a καλείται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με $Re(z)$ και ο b φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $Im(z)$. Οι υπολογισμοί με αυτούς γίνονται όπως στους πραγματικούς αντικαθιστώντας το i^2 με -1:

1) <u>Πρόσθεση-Αφαίρεση</u>: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+i(b\pm d)$,
2) <u>Πολλαπλασιασμός</u>: $(a+bi)\cdot(c+di)=ac+ibc+iad+i^2bd=(ac-bd)+i(bc+ad)$,
3) <u>Διαίρεση</u>: [illegible] $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

(πολλαπλασιάζουμε με τον συζυγή του παρονομαστή).

<u>Ιδιότητες των πραγματικών αριθμών</u>

<u>(Ι) Ιδιότητες της Πρόσθεσης</u>

Α1. <u>Αντιμεταθετική</u>: $a+b=b+a$ για κάθε $a,b\in\Re$

Α2. <u>Προσεταιριστική</u>: $(a+b)+c=a+(b+c)$ για κάθε $a,b,c\in\Re$

A3. Ουδέτερο στοιχείο: Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός, το 0, έτσι ώστε $a+0=0+a=a$ για κάθε $a \in \Re$.

A4. Ύπαρξη αντιστρόφου: Για κάθε $a \in \Re$ υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $x \in \Re$ που ικανοποιεί τη σχέση $a+x=x+a=0$, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $-x$.

(ΙΙ) Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού

M1. Αντιμεταθετική: $ab=ba$ για κάθε a,b.

M2. Προσεταιριστική: $(ab)c=a(bc)$ για κάθε $a,b,c \in \Re$.

M3. Ουδέτερο στοιχείο: Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός, το 1, έτσι ώστε $a \cdot 1=1 \cdot a=a$ για κάθε $a \in \Re$.

M4. Ύπαρξη αντιστρόφου: Για κάθε $a \in \Re$ με $a \neq 0$, υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $x \in \Re$ που ικανοποιεί τη σχέση $ax=xa=1$, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\frac{1}{a}$ ή a^{-1}.

(ΙΙΙ) Επιμεριστική ιδιότητα

$a(b+c)=ab+ac$ για κάθε $a,b,c \in \Re$.

Ορισμός

Κάθε σύνολο που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες καλείται *ομάδα.*

Ορισμός

Ένας μιγαδικός αριθμός είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (a,b) πραγματικών αριθμών με τις ακόλουθες ιδιότητες:

Δυο μιγαδικοί αριθμοί (a,b) και (c,d) είναι ίσοι αν και μόνο αν $a=c$ και $b=d$.

Το άθροισμα και το γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών (a,b) και (c,d) ορίζεται ως εξής:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b) \cdot (c,d)=(ac-bd,bc+ad).$$

Η ισότητα των μιγαδικών αριθμών έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αυτοπαθής: $(a,b)=(a,b)$ για κάθε μιγαδικό αριθμό (a,b).

β) <u>Συμμετρική:</u> $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow (c,d)=(a,b)$.

γ) <u>Μεταβατική</u>: $(a,b)=(c,d)$ και $(c,d)=(e,f) \Rightarrow (a,b)=(e,f)$.

<u>Θεώρημα</u>

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C, με τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που παρουσιάστηκαν παραπάνω, αποτελούν ομάδα.

<u>Ορισμός</u>

Καλούμε μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+bi$ τον μη αρνητικό αριθμό $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

<u>Ορισμός</u>

Καλούμε συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z=a\pm bi$, τον μιγαδικό $\bar{z}=a\mp bi$, αντίστοιχα.

<u>Θεώρημα</u>

$|z|=0$ αν και μόνο αν $z=0$.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $z=a+bi$ $(a,b\in \Re)$. Τότε $|z|^2=a^2+b^2$. Έτσι, $|a|=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=0$.

Όμως $a^2,b^2\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό a και b άρα

$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0$ & $b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ & $b=0$.

<u>Θεώρημα</u>

Για κάθε μιγαδικό αριθμό a και b,

$ab=0$ αν και μόνο αν $a=0$ ή $b=0$

<u>Απόδειξη</u>

Από το προηγούμενο θεώρημα $a\cdot b=0 \Leftrightarrow |ab|=0$. Επειδή $|a|$, $|b|$ πραγματικοί αριθμοί $|a|\cdot|b|=0 \Leftrightarrow |a|=0$ *ή* $|b|=0 \Leftrightarrow a=0$ *ή* $b=0$.

1.2 Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας

Η σημασία των μιγαδικών αριθμών είναι εμφανής στο ακόλουθο θεώρημα, γνωστό ως το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

Θεώρημα

Μια πολυωνυμική εξίσωση $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n = 0$ όπου $c_k \in C, (k = 0,1,2,...,n)$, $c_n \neq 0, n \geq 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $z \in C$. Με άλλα λόγια το *C* είναι αλγεβρικά κλειστό.

Η παραπάνω εξίσωση καλείται πολυωνυμική εξίσωση βαθμού *n*.

Απόδειξη

Διαιρώντας την εξίσωση με το c_n, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_n = 1$. Θέτοντας λοιπόν $P(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_0$, αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι ότι υπάρχει $z_0 \in C$ ούτως ώστε $P(z_0) = 0$. Ας θεωρήσουμε τον αριθμό $\mu = \inf\{|P(z)| : z \in C\}$.

Από την τριγωνική ανισότητα, αν $|z| = R$, τότε

$|P(z)| \geq |z|^n - |c_{n-1}||z|^{n-1} - ... - |c_0| = R^n \left(1 - \frac{|c_{n-1}|}{R} - ... - \frac{|c_0|}{R^n}\right)$. Αλλά επειδή $\lim R^n{}_{R\to\infty} \left(1 - \frac{|c_{n-1}|}{R} - ... - \frac{|c_0|}{R^n}\right) = +\infty$, υπάρχει $R_0 > 0$ ούτως ώστε $|P(z)| > \mu + 1$ για κάθε z με $|z| > R_0$. Τότε, $\mu = \inf\{|P(z)| : z \leq R_0\}$. Έπεται τώρα από τη συμπάγεια του κλειστού δίσκου $\{z \in C : |z| \leq R_0\}$ και την συνέχεια της συνάρτησης $z \to |P(z)|$, ότι υπάρχει $z_0 \in \{z \in C : |z| \leq R_0\}$ ούτως ώστε $|P(z_0)| = \mu$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mu = 0$. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι $\mu > 0$. Τότε το πολυώνυμο $Q(z) = \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}$ ορίζεται και είναι βαθμού n, έχει σταθερό όρο ίσο με 1 αφού

$Q(0)=1$, και $|Q(z)|\geq 1$ για κάθε $z\in C$. Υπάρχει επίσης $k\in N$ με $1\leq k\leq n$ ούτως ώστε $Q(z)=1+a_k z^k+...+a_n z^n$ και $a_k\neq 0$. Από την επιλυσημότητα της εξίσωσης

"$z^n=w$", υπάρχει $\zeta\in C$ ούτως ώστε $\zeta^k=-|a_k|/a_k$. Ένα τέτοιο ζ έχει απόλυτη τιμή 1, δηλαδή $|\zeta|=1$ αφού $|\zeta|^k=|\zeta^k|=\left|-\frac{|a_k|}{a_k}\right|=1$.

Εκτιμώντας τώρα το πολυώνυμο Q στο σημείο $r\zeta$, για τα διάφορα $r>0$, έχουμε $|Q(r\zeta)|\leq|1+a_k r^k\zeta^k|+|a_{k+1}r^{k+1}\zeta^{k+1}|+...+|a_n r^n\zeta^n|$, και από την επιλογή του ζ έπεται ότι $|1+a_k r^k\zeta^k|=|1-|a_k|r^k|=1-|a_k|r^k$, με την προϋπόθεση το $r>0$ να είναι αρκετά μικρό.

Τότε δε $|Q(r\zeta)|\leq 1-|a_k|r^k+|a_{k+1}|r^{k+1}+...+|a_n|r^n=1-r^k\left(|a_k|-|a_{k+1}|r^1-...-|a_n|r^{n-k}\right)$.

Αλλά για $r>0$ αρκετά μικρό, $|a_k|-|a_{k+1}|r^1-...-|a_n|r^{n-k}>0$ και τότε για αυτά τα r θα έχουμε $|Q(r\zeta)|<1$, άτοπο (αφού όπως αναφέραμε προηγουμένως $|Q(z)|\geq 1$ για κάθε $z\in C$). Άρα πράγματι $\mu=0$, δηλαδή $P(z_0)=0$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

Πόρισμα

Μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού *n* έχει ακριβώς *n* μιγαδικές ρίζες συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλοτήτων αυτών.

Ο C.F.Gauss(1777-1855) έδωσε πολλαπλές αποδείξεις του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας. Να σημειώσουμε ότι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας ισχυρίζεται την ύπαρξη των μιγαδικών λύσεων αλλά δε μας υποδεικνύει πώς να τις βρούμε.

1.3 Διάταξη

Διάταξη των πραγματικών αριθμών

P1. Τριχοτομία. Για κάθε $a \in \Re$ ισχύει μια από τις ακόλουθες σχέσεις: $a>0$, $a=0$, $-a>0$. Παρόμοια, για κάθε $a,b \in \Re$ θα ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$a>b$, $a=b$, $b>a$.

P2. $a>0, b>0 \Rightarrow a+b>0$.

P3. $a>0$, $b>0 \Rightarrow ab>0$.

Διάταξη στους Μιγαδικούς αριθμούς

Θεώρημα

Μπορούμε να επεκτείνουμε τη σχέση της διάταξης από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς αριθμούς έτσι ώστε οι *P1, P2* να ικανοποιούνται, όμως είναι αδύνατο να ικανοποιείται η *P3*.

Απόδειξη:

Για $z=a+bi$ $(a,b \in \Re)$ ορίζουμε

$$z>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \text{ ή} \\ a=0 \,\&\, b>0 \end{cases}$$

P1. Για κάθε $z=a+bi$ ισχύει μια από τις ακόλουθες

$a>0$, $a=0$, $-a>0$

(a) Αν $a>0 \Rightarrow z>0$

(b) Αν $-a>0 \Rightarrow -z>0$

(c) Αν $a=0$, $\begin{cases} b>0 \Rightarrow z>0 \\ b=0 \Rightarrow z=0 \\ -b>0 \Rightarrow -z>0 \end{cases}$

Έτσι δείξαμε ότι ισχύει ακριβώς μια εκ των $z>0$, $z=0$, $-z>0$, για τυχαίο $z \in C$.

P2. Θεωρούμε $z>0$, $z'>0$ με $z=a+bi$ και $z'=a'+b'$ $(a,b,a',b' \in \Re)$.

Τότε $a>0$ ή {a=0 &b>0}

$a'>0$ ή {a′=0 &b′>0}

Πρέπει να ελέγξουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αυτών των περιπτώσεων:

(a) $a>0, a'>0 \Rightarrow a+a'>0 \Rightarrow z+z'>0$.

(b) *a>0, {a΄=0, b΄>0}* $\Rightarrow a+a΄>0 \Rightarrow z+z΄>0$.

(c) *{a=0 & b>0}* και *{a΄=0 & b΄>0}*, τότε *a+a΄=0* και *b+b΄>0*, άρα *z+z΄>0.*

<u>P3.</u> Ας υποθέσουμε πως ισχύει η P3. Τότε, επειδή $i \neq 0$, από *P1* θα έχουμε *i>0* ή *–i>0.* Αν *i>0*, από P3 $i \cdot i>0 \Rightarrow -1>0$, άτοπο. Ομοίως, αν *–i>0* πάλι από την *P3* $(-i)\cdot(-i)>0 \Rightarrow -1>0$, άτοπο.

<u>1.4 Θεώρημα (τριγωνική ανισότητα)</u>

<u>Θεώρημα</u>

Για οποιουσδήποτε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|.$$

<u>Απόδειξη</u>

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+2Re(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2$

$\leq |z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2$ [$\therefore$ $Re(a) \leq |a|$ *για κάθε* $a \in C$]

$=|z_1^2|+2|z_1||z_2|+|z_2|^2$ [$\therefore |\overline{z_2}|=|z_2|$]

$=(|z_1|+|z_2|)^2$ (*)

Επειδή $|z_1+z_2|, |z_1|+|z_2|$ μη αρνητικοί, από την (*) έχουμε ότι $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

Για να αποδείξουμε την άλλη ανισότητα έχουμε:

$|z_1|=|(z_1+z_2)+(-z_2)| \leq |z_1+z_2|+|-z_2|=|z_1+z_2|+|z_2| \Rightarrow |z_1|-|z_2| \leq |z_1+z_2|$

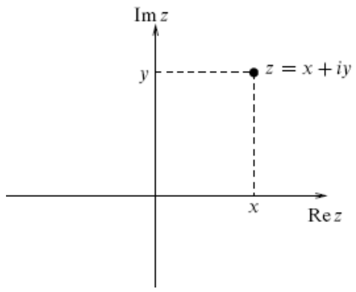
Αλλάζοντας τους ρόλους των z_1, z_2 παίρνουμε:

$|z_2|-|z_1| \leq |z_1+z_2|$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει ότι $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2|$.

1.5 Το Μιγαδικό Επίπεδο

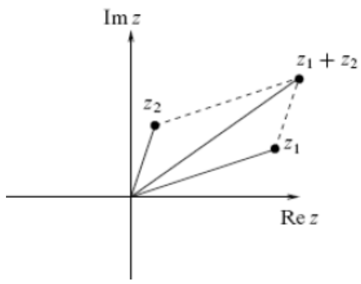
Ορίσαμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Όμως το σύνολο των διατεταγμένων πραγματικών ζευγών βρίσκεται σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με το *(x,y)*-πραγματικό επίπεδο. Έτσι είναι φυσικό ένας μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$ να αντιστοιχεί σε ένα σημείο *(x,y)* του πραγματικού επιπέδου.



Καλούμε τον άξονα των *x* ως *πραγματικό άξονα* και τον άξονα των *y* ως *φανταστικό άξονα*. Το επίπεδο που περιέχει αυτούς τους άξονες καλείται *Μιγαδικό Επίπεδο* ή *Επίπεδο του Gauss*.

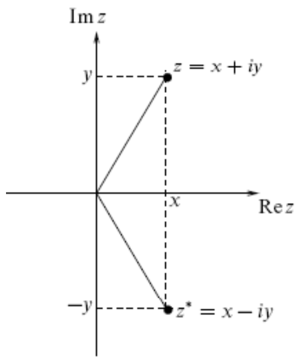
Παράδειγμα 1

Η γεωμετρική αναπαράσταση του αθροίσματος δυο μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοιχεί στη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα z_1, z_2 όπως φαίνεται παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Γεωμετρική αναπαράσταση του συζυγούς μιγαδικού:

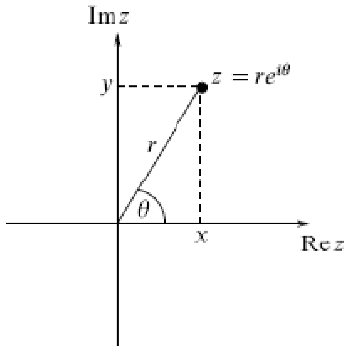


1.6 Πολική αναπαράσταση των Μιγαδικών αριθμών

Μέχρι τώρα έχουμε δει μόνο τη διανυσματική πτυχή των μιγαδικών αριθμών και αυτό μας κάνει να μην έχουμε καταλάβει όλη την αξία τους. Ο πολλαπλασιασμός είμαι καλά ορισμένος για τους μιγαδικούς ενώ δεν είναι για τα διανύσματα-το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι βαθμωτό και όχι διάνυσμα, ενώ το εξωτερικό γινόμενο τους είναι ένα τρισδιάστατο διάνυσμα που δε μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο.

Η ουσία των εφαρμογών των μιγαδικών αριθμών στην Επίπεδη Γεωμετρία έγκειται στο γεγονός ότι το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών είναι μιγαδικοί. Για τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την πολική αναπαράστασή τους.

Για ένα σημείο *P(x,y) (=x+yi)* θεωρούμε το διάνυσμα *OP* σε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το *O(=0,0).* Ονομάζουμε *θ* τη γωνία που περιέχεται από το θετικό άξονα Ox και το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ και $r=\overline{OP}$. Τότε *x=rcosθ* και *y=rsinθ*. Το *r* τότε λέγεται *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού z, και συμβολίζεται με |z|, και το *θ* λέγεται *όρισμα* του z, και συμβολίζεται με *arg(z)*.



Όπως μπορεί να δει κανείς εύκολα από το διάγραμμα παραπάνω, αν μια γωνία θ είναι όρισμα ενός μιγαδικού z, τότε κάθε γωνία $\theta+2k\pi$, όπου k ακέραιος, θα είναι επίσης όρισμα του z. Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού δηλαδή δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Από όλες τις δυνατές γωνίες που μπορούν να θεωρηθούν όρισμα του μιγαδικού z, η γωνία θ για την οποία ισχύει $0\leq\theta<2\pi$ λέγεται βασικό όρισμα του z και συμβολίζεται με $arg(z)$.

Οι πολικές συντεταγμένες ενός μιγαδικού z συνδέονται με τις καρτεσιανές μέσω των σχέσεων:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \text{ και } \theta=arg(z)=tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Θεώρημα

Έστω $z_1=r_1(cos\theta_1+isin\theta_1)$, $z_2=r_2(cos\theta_2+isin\theta_2)$.

Τότε $z_1z_2=r_1r_2\{cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2)\}$,

δηλαδή $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $arg(z_1z_2)=argz_1+argz_2$

Με άλλα λόγια η απόλυτη τιμή του γινομένου ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών, και το όρισμα του γινομένου ισούται με το άθροισμα των ορισμάτων.

Απόδειξη

Έχουμε,

$z_1z_2=r_1(cos\theta_1+isin\theta_1)\cdot r_2(cos\theta_2+isin\theta_2)=$

$=r_1r_2\{(cos\theta_1\cdot cos\theta_2-sin\theta_1\cdot sin\theta_2)+i(sin\theta_1\cdot cos\theta_2+cos\theta_1\cdot sin\theta_2)\}=$

$=r_1r_2\{cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2)\}$

Πόρισμα

$|z_1\cdot z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|$ και $arg(z_1\cdot z_2\cdots z_n)=argz_1+argz_2+\cdots argz_n$.

Πόρισμα(DeMoivre)

Για $z=r(cos\theta+isin\theta)$ και $n\in\mathbb{Z}$, ισχύει

$z^n=r^n(cosn\theta+isin\,n\theta)$

δηλαδή, $|z^n|=|z|^n$, $arg(z^n)=narg(z)$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση για $n=1$.

$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

Διαιρώντας και τα δυο μέλη με $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, παίρνουμε

$\frac{1}{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{1}{\mathrm{r}}(\cos\theta+i\sin\theta)=\frac{1}{\mathrm{r}}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ *αφού* $\cos(-\theta)=\cos\theta$ *και* $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$.

Συνεπώς αποδείξαμε το ζητούμενο.

Πόρισμα

Έστω $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$.

Τότε $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$.

Απόδειξη

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}=$$

Έχουμε $=\frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta_1)\right]=$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left((\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

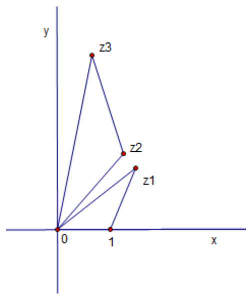
Πόρισμα

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ και $\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$, δεδομένου ότι $z_2\neq 0$.

Το τελευταίο θεώρημα μας λέει ότι πολλαπλασιάζοντας με z στο μιγαδικό επίπεδο σημαίνει μεγέθυνση (ή σμίκρυνση) της εικόνας κατά τον παράγοντα $|z|$ και περιστροφή αριστερόστροφα κατά γωνία argz. Για παράδειγμα, πολλαπλασιάζοντας με i σημαίνει περιστροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ αριστερόστροφα.

Παράδειγμα 1

Με αυτή την προεργασία για δυο δοσμένα σημεία του μιγαδικού επιπέδου z_1,z_2 μπορούμε να κατασκευάσουμε το γινόμενο $z_3=z_1z_2$ γεωμετρικά (βλ. παρακάτω εικόνα). Το μόνο που χρειάζεται είναι να παρατηρήσουμε πως τα τρίγωνα $(O1z_1)$ και (Oz_2z_3) είναι όμοια με τον ίδιο προσανατολισμό.

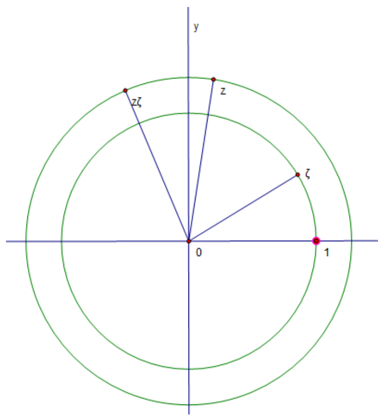


Παράδειγμα 2

Έστω $\zeta=cos\theta+isin\theta$ $(\theta\in\Re)$. Γι αυτό το ζ και $z\in C$ έχουμε:

$|\zeta z|=|\zeta|\cdot|z|=|z|$, $arg(\zeta z)=arg\zeta+argz$.

Δηλαδή



1.7 Οι *n* μιγαδικές ρίζες του 1

Ορισμός των n μιγαδικών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω ένας θετικος ακέραιος αριθμός $n \geq 2$ κι ένας μιγαδικός αριθμός $z_0 \neq 0$. Καλούμε κάθε λύση της εξίσωσης $Z^n - z_0 = 0$ (1)

νιοστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού z_0.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $z_0 = r(\cos t^* + i \sin t^*)$ ένας μιγαδικός αριθμός με $r > 0$ και $t^* \in [0, 2\pi)$. Ο αριθμός z_0 έχει n διακριτές νιοστές ρίζες που δίνονται από τον τύπο $Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t^* + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, ..., n-1.$

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε την πολική αναπαράσταση του μιγαδικού αριθμού Z,

$Z = \rho(\cos\phi + i \sin\phi)$.

Εξ' ορισμού έχουμε $Z^n = z_0 \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = r(\cos t^* + i \sin t^*)$, οπότε βρίσκουμε $\rho^n = r$ και $n\phi = t^* + 2k\pi$ για $k \in \mathrm{Z}$. Άρα, $\rho = \sqrt[n]{r}$ και $\phi_k = \frac{t^*}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ για $k \in \mathrm{Z}$.

Με αυτό τον τρόπο δείξαμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι της μορφής $Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\phi_k + i \sin\phi_k\right)$ για $k \in \mathrm{Z}$.

Παρατηρούμε ότι $0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \cdots < \phi_{n-1} < 2\pi$, έτσι οι αριθμοί $\phi_k, k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ είναι πεπερασμένοι. Έτσι, ως τώρα έχουμε n διακριτές ρίζες του z_0: $Z_0, Z_1, ..., Z_{n-1}$. Θεωρούμε έναν ακέραιο k και $r = k \bmod n$. Τότε, $k = nq + r$ για κάθε $q \in \mathrm{Z}$ και $\phi_k = \frac{t^*}{n} + (nq + r)\frac{2\pi}{n} = \frac{t^*}{n} + r\frac{2\pi}{n} + 2q\pi.$

Είναι φανερό ότι $\mathrm{Z}_k = Z_r$, άρα $\{Z_k : k \in \mathrm{Z}\} = \{Z_0, Z_1, ..., Z_{n-1}\}$, δηλαδή αποδείξαμε ότι υπάρχουν n διακριτές νιοστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού z_0.

<u>Θεώρημα</u>

Η γεωμετρική εικόνα των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού $z_0 \neq 0$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt[n]{r}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $M_0, M_1, ..., M_{n-1}$ τα σημεία με μιγαδικές συντεταγμένες $Z_0, Z_1, ..., Z_{n-1}$. Επειδή $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{r}$ για $k \in [0,1,...,n-1]$ έπεται ότι τα σημεία M_k ενήκουν στον κύκλο $C(0, \sqrt[n]{r})$. Από την άλλη πλευρά, το μέτρο του τόξου $M_k\widehat{M}_{k+1}$ είναι ίσο με $\arg Z_{k+1} - \arg Z_k = \dfrac{t^* + 2(k+1)\pi - (t^* + 2k\pi)}{n} = \dfrac{2\pi}{n}$ για κάθε $k \in \{0,1,...,n-2\}$ και το τόξο $M_{n-1}\widehat{M}_0$ είναι $\dfrac{2\pi}{n} = 2\pi + (n-1)\dfrac{2\pi}{n}$. Επειδή όλα τα τόξα $M_0\widehat{M}_1, M_1\widehat{M}_2, ..., M_{n-1}\widehat{M}_0$ είναι ίσα, το πολύγωνο $M_0 M_1 \cdots M_{n-1}$ είναι κανονικό.

<u>Οι νιοστές ρίζες του 1</u>

Ορίζουμε ως νιοστές ρίζες του 1 τις ρίζες της εξίσωσης $Z^n - 1 = 0$. Εφόσον $1 = \cos 0 + i \sin 0$, από τον τύπο των νιοστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού έχουμε ότι οι ζητούμενες ρίζες είναι οι $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ για $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

Δηλαδή, $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon^{n-1}.$$

Όπως προηγουμένως, οι γεωμετρικές εικόνες των νιοστών ριζών του 1 είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο με τη μια του κορυφή στο 1.

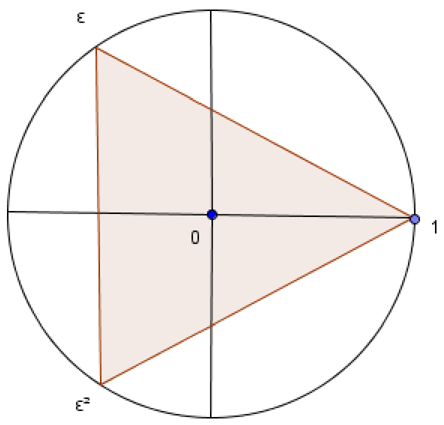
Εφαρμογές

- Για $n=2$, η εξίσωση $Z^2-1=0$ έχει ρίζες τις $1,-1$ οι οποίες είναι οι τετραγωνικές ρίζες της μονάδας.
- Για $n=3$, οι ρίζες της εξίσωσης $Z^3-1=0$ είναι οι

$$\varepsilon_0=1, \varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\varepsilon,$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\varepsilon^2$$

σχηματίζοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(0,1)$ όπως φαίνεται παρακάτω

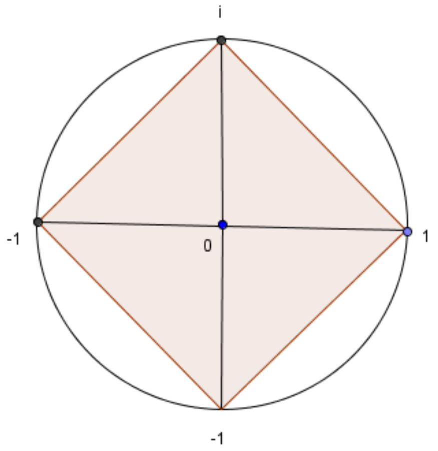


- Για $n=4$, οι ρίζες της εξίσωσης $Z^4-1=0$ είναι οι

$$\varepsilon_0=1, \varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$\varepsilon_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1, \varepsilon_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

σχηματίζοντας ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(0,1)$ όπως φαίνεται παρακάτω



1.8 Η εκθετική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση $e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ ισχύει για κάθε $x \in \Re$.

Για να δούμε τι γίνεται αν στη θέση του x βάλουμε $i\theta$.

$$e^{i\theta}=\{1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{4}+\frac{\theta^6}{6}+\cdots(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+\cdots\}+i\{\theta-\frac{\theta^3}{3}+\frac{\theta^5}{5}+\frac{\theta^7}{7}+\cdots(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\}=$$

$\cos\theta+i\sin\theta$. (**)

Από τον τύπο DeMoivre

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ δηλαδή $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$.

Για $\theta=\pi$ στην (**) προκύπτει:

$e^{i\pi}= \cos\pi+i\sin\pi=-1 \Rightarrow e^{i\pi}+1=0$ η οποία σχέση συνδέει τους 5 πιο σημαντικούς αριθμούς στα μαθηματικά: $0, 1, \pi, e, i$.

Ιδιότητες της Εκθετικής

Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$ $(x \in \Re)$ χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ δηλαδή $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$

η οποία ισχύει και για $z \in C$:

Επεκτείνοντας τη σειρά Taylor της *f(z+w)* γύρω από το *z* έχουμε

$$f(z+w)=f(z)+\frac{f'(z)}{1!}w+\frac{f''(z)}{2!}w^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z)}{n!}w^n+\cdots$$

$$=f(z)\left\{1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\cdots+\frac{w^n}{n!}+\cdots\right\}=f(z)+f(w).$$

Άλλες σχέσεις:

1. Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις ισότητες $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ και $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ προκύπτει:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

2. Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{\text{Ο}}$ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εφαρμογές στη Γεωμετρία

2.1 Βασικές έννοιες, συνθήκες συγγραμμικότητας, ορθογωνιότητας και ομοκυκλικότητας.

Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν είναι μόνο διανύσματα, αλλά μπορούν να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους. Αυτή είναι μια ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε σε εφαρμογές της Γεωμετρίας, καθώς η χρήση μιγαδικών αριθμών είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική σε συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων.

Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Απόσταση δύο σημείων

Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία M_1, M_2. Τότε, η απόσταση των σημείων M_1 και M_2 δίνεται ως εξής: $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$. Η συνάρτηση της απόστασης $d : C \times C \to [0, \infty)$ ορίζεται ως $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

a) Μη αρνητικότητα

$d(z_1, z_2) \geq 0$ για κάθε $z_1, z_2 \in C$

$d(z_1, z_2) = 0$ αν και μόνο αν $z_1 = z_2$

b) Συμμετρία

$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ για κάθε $z_1, z_2 \in C$

c) Τριγωνική ανισότητα

$d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in C$.

Αυτό δικαιολογείται αν παρατηρήσουμε ότι $|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός k τέτοιος ώστε $z_3 - z_1 = k(z_2 - z_3)$.

Θεώρημα

Έστω $A(a)$ και $B(b)$ δύο διακριτά σημεία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) $M \in (AB$

2) Υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός t τέτοιος ώστε $z = (1-t)a + tb$ όπου z οι μιγαδικές συντεταγμένες του σημείου M.

3) $\arg(z-a) = \arg(b-a)$

4) $\dfrac{z-a}{b-a} \in \Re^+$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) Εφόσον $M \in (AB$ έχουμε $A-M-B$ ή $A-B-M$. Υπάρχουν αριθμοί $t, l \in (0,1)$ τέτοιοι ώστε $z = (1-t)a + tb$ ή $b = (1-l)a + lz$. Αν ισχύει η πρώτη περίπτωση έχουμε τελειώσει. Για τη δεύτερη περίπτωση θέτουμε $t = \dfrac{1}{l}$, άρα $z = tb - (t-1)a = (1-t)a + tb$ το οποίο είναι το ζητούμενο.

2) $\Rightarrow$ 3) Από τη σχέση $z = (1-t)a + tb, t > 0$ έχουμε $z - a = t(b-a), t > 0$ άρα $\arg(z-a) = \arg(b-a)$.

3) $\Rightarrow$ 4) Η σχέση $\arg\dfrac{z-a}{b-a} = \arg(z-a) - \arg(b-a) + 2k\pi$ για κάποιο $k \in Z$ συνεπάγεται ότι $\arg\dfrac{z-a}{b-a} = 2k\pi, k \in Z$. Εφόσον $\arg\dfrac{z-a}{b-a} \in [0,2\pi)$ έπεται ότι $k = 0$ και $\arg\dfrac{z-a}{b-a} = 0$. Έτσι, $\dfrac{z-a}{b-a} \in \Re^+$ που είναι το ζητούμενο.

4) $\Rightarrow$ 1) Έστω $t = \dfrac{z-a}{b-a} \in \Re^+$. Άρα $z = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$, $t > 0$.

Αν $t \in (0,1)$ τότε $M \in (AB) \subset (AB$.

Αν $t = 1$ τότε $z = b$ και $M = B \in (AB$. Τέλος, αν $t > 1$ τότε θέτοντας $t = \dfrac{1}{l} \in (0,1)$ έχουμε $b = lz + (1-l)a$. Έπεται ότι $A-B-M$ και $M \in (AB$.

Θεώρημα

Έστω $A(a)$ και $B(b)$ δύο διακριτά σημεία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) $M(z) \in AB$

2) $\dfrac{z-a}{b-a} \in \Re$

3) Υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός t τέτοιος ώστε $z=(1-t)a+tb$.

4) $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$

5) $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$

Απόδειξη

Για να εξασφαλίσουμε τις ισοδυναμίες $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$ αρκεί να παρατηρήσουμε πως για ένα σημείο C τέτοιο ώστε $C-A-B$ η γραμμή AB είναι η ένωση $(AB \cup \{A\} \cup (AC$ και να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα. Τώρα θα αποδείξουμε τις ισοδυναμίες $2) \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 5)$. Πράγματι, έχουμε $\dfrac{z-a}{b-a} \in \Re$ αν και μόνο αν $\dfrac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)}$. Δηλαδή, $\dfrac{z-a}{b-a} = \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$ ή ισοδύναμα $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$ και έτσι αποδείξαμε ότι $2) \Leftrightarrow 4)$.

Επιπλέον έχουμε $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$ αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} & 0 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} & 0 \end{vmatrix} = 0$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με τη $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$ και έτσι αποδείξαμε ότι $4) \Leftrightarrow 5)$ και τελειώσαμε.

Συνθήκες συγγραμμικότητας, ορθογωνιότιτας και ομοκυκλικότητας

- Για τρία διαφορετικά σημεία $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$,

$arg\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ =*arg(β-α)-arg(γ-α)=η* προσανατολισμένη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha\gamma}$, $\overrightarrow{\alpha\beta}$

- Για *α, β, γ* συνευθειακά $\Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \in \Re \Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \dfrac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}$

- Για $\overrightarrow{\alpha\beta} \perp \overrightarrow{\alpha\gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ καθαρός φανταστικός$\Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} + \dfrac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}$ =0

Πιο γενικά, για τέσσερα διακριτά σημεία *α, β, γ,* $\delta \in \mathrm{C}$*:*

- $\overrightarrow{\alpha\beta} // \overrightarrow{\gamma\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} \in \Re \Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} = \dfrac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}$.

Επιπλέον τα $\overrightarrow{\alpha\beta}$ και $\overrightarrow{\gamma\delta}$ έχουν την ίδια (αντίθετη) διεύθυνση αν και μόνο αν $\dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}$ είναι ένας θετικός (αρνητικός) πραγματικός αριθμός.

- $\overrightarrow{\alpha\beta} \perp \overrightarrow{\gamma\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}$ καθαρός φανταστικός$\Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} + \dfrac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}$ =0
- Τέσσερα διακριτά σημεία $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \Gamma(\gamma), \Delta(\delta) \in C$ είναι ομοκυκλικά ή συγγραμμικά αν και μόνο αν $k = \dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} : \dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} \in \Re^*$

<u>Απόδειξη</u>

Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία είναι συγγραμμικά. Μπορούμε να τοποθετήσουμε τέσσερα σημεία σε ένα κύκλο με $(4-1)! = 3! = 6$ διαφορετικούς τρόπους. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση στην οποία τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ δίνονται με αυτή τη σειρά. Τότε τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma \in [3\pi, \pi]$. Δηλαδή, $\arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} + \arg\dfrac{\alpha-\delta}{\gamma-\delta} \in [3\pi, \pi]$. Έτσι, βρίσκουμε $\arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} - \arg\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} \in [3\pi, \pi]$, δηλαδή $k < 0$. Για την οποιαδήποτε σειρά των τεσσάρων σημείων η απόδειξη είναι παρόμοια. Αξίζει να σημειώσουμε ότι $k > 0$ στις τρεις περιπτώσεις και $k < 0$ στις άλλες τρεις περιπτώσεις.

Ο αριθμός *k* καλείται *διπλός λόγος* των τεσσάρων σημείων $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \Gamma(\gamma), \Delta(\delta)$.

2.2 Τρίγωνα

Στη στοιχειώδη Γεωμετρία τα τρίγωνα και οι έννοιες της Ομοιότητας και της Σύμπτωσης είναι θεμελιώδεις. Αρχικά θα ορίσουμε τις συνθήκες για την ομοιότητα δυο τριγώνων σε όρους των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμοί

Θα λέμε ότι δυο τρίγωνα $\Delta z_1z_2z_3$ και $\Delta w_1w_2w_3$ είναι όμοια, και θα γράφουμε

$\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3$

αν και μόνο αν η γωνία z_k είναι ίση με τη γωνία w_k $(k=1,2,3)$ και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Αν έχουν αντίθετο προσανατολισμό θα γράφουμε:

$\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3$ (αντιστραμμένο).

Θεώρημα

$\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Απόδειξη

Δυο τρίγωνα είναι όμοια αν και μόνο αν οι λόγοι των μηκών των δυο αντίστοιχων πλευρών είναι ίσες και οι αντίστοιχες γωνίες μεταξύ τους είναι ίσες. Άρα,

$\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}\right| \text{ και } \arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\arg\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Πρόταση</u>

Τα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $B_1B_2B_3$ είναι όμοια με αντίθετο προσανατολισμό αν και μόνο αν $\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \dfrac{\overline{b_2} - \overline{b_1}}{\overline{b_3} - \overline{b_1}}$.

<u>Απόδειξη</u>

Με ανάκλαση ως προς τον άξονα $x'x$ τα σημεία $B_1B_2B_3$ αντιστοιχίζονται στα σημεία $M_1(\overline{b_1}), M_2(\overline{b_2}), M_3(\overline{b_3})$. Τα τρίγωνα $B_1B_2B_3$ και $M_1M_2M_3$ είναι όμοια και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, άρα τα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $M_1M_2M_3$ είναι όμοια με τον ίδιο προσανατολισμό. Το συμπέρασμα έπεται από τα προηγούμενα.

<u>Εφαρμογή</u>

Τρία σημεία z_1, z_2, z_3 είναι συγγραμμικά $\Leftrightarrow$ τα τρίγωνα $z_1z_2z_3$ και $\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}$ είναι όμοια

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Εφαρμογή</u>

Η ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από δύο διακριτά σημεία z_1 και z_2 είναι η εξής:

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Εφαρμογή

Η κάθετη διχοτόμος του ευθύγραμμου τμήματος που διέρχεται από δύο διακριτά σημεία z_1 και z_2 είναι η εξής:

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_2} & 1 \\ z_2 & \overline{z_1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Πρόταση

Έστω z_1, z_2, z_3 οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου $A_1A_2A_3$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

a) Το $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο

b) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

c) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

d) $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$

e) $\dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{1}{z - z_2} + \dfrac{1}{z - z_3} = 0$, όπου $z = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$

f) $(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0$, όπου $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0$.

Απόδειξη

Το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν το $A_1A_2A_3$ είναι όμοιο και έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το $A_2A_3A_1$, ή $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0$,

Έτσι $a) \Leftrightarrow g)$.

Υπολογίζοντας την ορίζουσα παίρνουμε

$$0=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ z_2 & z_3 & z_1\end{vmatrix}=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1-\left(z_1^2+z_2^2+z_3^2\right)$$

$$=-\left(z_1+\varepsilon z_2+\varepsilon^2 z_3\right)\left(z_1+\varepsilon^2 z_2+\varepsilon z_3\right),$$

Άρα $g)\Leftrightarrow c)\Leftrightarrow f)$.

Με απλούς αριθμητικούς χειρισμούς μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι $d)\Leftrightarrow c)$. Ομοίως, αποδεικνύεται εύκολα ότι $a)\Leftrightarrow b)$ και $a)\Leftrightarrow e)$.

Εφαρμογή

Το τρίγωνο $\Delta z_1z_2z_3$ είναι ισόπλευρο

$\Leftrightarrow$ $\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta z_3z_1z_2$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}z_1 & z_3 & 1\\ z_2 & z_1 & 1\\ z_3 & z_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_2z_3-z_3z_1-z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+\omega z_2+\omega^2z_3)\cdot(z_1+\omega^2z_2+\omega z_3)=0,$ $(\omega^2+\omega+1=0)$

$\Leftrightarrow z_1+\omega z_2+\omega^2z_3=0$ ή $z_1+\omega^2z_2+\omega z_3=0$

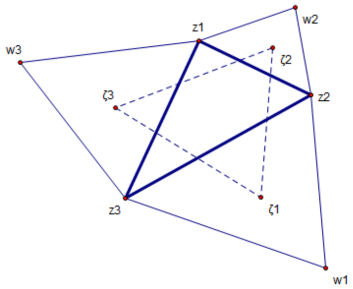
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}z_1 & 1 & 1\\ z_2 & \omega & 1\\ z_3 & \omega^2 & 1\end{vmatrix}=0 \text{ ή } \begin{vmatrix}z_1 & 1 & 1\\ z_2 & \omega^2 & 1\\ z_3 & \omega & 1\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow \Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta 1\omega\omega^2$ ή $\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta 1\omega^2\omega$

Εφαρμογή (Napoleon)

Σε κάθε πλευρά ενός τυχαίου τριγώνου σχηματίζουμε το αντίστοιχο ισόπλευρο τρίγωνο. Τότε τα κέντρα βάρους των τριών αυτών ισόπλευρων τριγώνων είναι κορυφές ενός τέταρτου ισόπλευρου τριγώνου.

Απόδειξη



Έστω $\Delta z_1z_2z_3$ το δοσμένο τρίγωνο, και $\Delta w_1z_3z_2$, $\Delta z_3w_2z_1$, $\Delta z_2z_1w_3$ τα ισόπλευρα τρίγωνα με προσανατολισμό σαν του $\Delta 1\omega\omega^2$ (όπου $\omega^2+\omega+1=0$) και ζ_1,ζ_2,ζ_3 τα αντίστοιχα κέντρα βάρους τους. Τότε:

$w_1+\omega z_3+\omega^2 z_2=0$

$z_3+\omega w_2+\omega^2 z_1=0$

$z_2+\omega z_1+\omega^2 w_3=0$

Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ είναι ισόπλευρο υπολογίζουμε:

$\zeta_1+\omega\zeta_2+\omega^2\zeta_3$

$=\frac{1}{3}(w_1+z_3+z_2)+\frac{\omega}{3}(z_3+w_2+z_1)+\frac{\omega^2}{3}(z_2+z_1+w_3)$

$=\frac{1}{3}\{(w_1+\omega z_3+\omega^2 z_2)+(z_3+\omega w_2+\omega^2 z_1)+(z_2+\omega z_1+\omega^2 w_3)\}$

$=0$

Επομένως, τρίγωνο $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ είναι ισόπλευρο.

Πρόταση

Έστω z_1, z_2, z_3 οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου $A_1A_2A_3$. Θεωρούμε τα ακόλουθα:

a) Το $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο

b) $z_1\cdot\overline{z_2}=z_2\cdot\overline{z_3}=z_3\cdot\overline{z_1}$

c) $z_1^2=z_2\cdot z_3$ και $z_2^2=z_1\cdot z_3$.

Τότε, $2)\Rightarrow 1), 3)\Rightarrow 1)$, και $2)\Leftrightarrow 3)$.

Απόδειξη

2) $\Leftrightarrow$ 1) $|z_1|\cdot|\overline{z_2}|=|z_2|\cdot|\overline{z_3}|=|z_3|\cdot|\overline{z_1}|$, ή ισοδύναμα $|z_1|\cdot|z_2|=|z_2|\cdot|z_3|=|z_3|\cdot|z_1|$. Αυτό συνεπάγεται $r=|z_1|=|z_2|=|z_3|$ και $\overline{z_1}=\dfrac{r^2}{z_1},\overline{z_2}=\dfrac{r^2}{z_2},\overline{z_3}=\dfrac{r^2}{z_3}$. Επιστρέφοντας στη δοσμένη σχέση έχουμε $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_2}{z_3}=\dfrac{z_3}{z_1}$, ή $z_1^2=z_2z_3, z_2^2=z_3z_1, z_3^2=z_1z_2$. Προσθέτοντας τις τελευταίες αυτές σχέσεις παίρνουμε $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$, άρα το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο.

Παρατηρούμε επίσης ότι έχουμε ήδη αποδείξει την ισοδυναμία 2) $\Leftrightarrow$ 3). Ως συνέπεια αυτού 3) $\Leftrightarrow$ 1) και έχουμε τελειώσει.

2.3 Ευθεία

Εξίσωση ευθείας

Η εξίσωση μιας ευθείας στο Μιγαδικό Επίπεδο είναι της μορφής $\overline{a}\cdot\overline{z}+az+b=0$, όπου $a\in C^*, b\in\Re$ και $z=x+yi\in C$.

Απόδειξη

Η εξίσωση μιας ευθείας στο Καρτεσιανό Επίπεδο είναι η $Ax+By+C=0$, όπου $A,B,C\in\Re$ και $A^2+B^2\neq 0$. Αν θέσουμε $z=x+yi$ τότε $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ και $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Έτσι, $A\dfrac{z+\overline{z}}{2}+Bi\dfrac{\overline{z}-z}{2}+C=0$ ή ισοδύναμα $\overline{z}\left(\dfrac{A+Bi}{2}\right)+z\dfrac{A-Bi}{2}+C=0$.

Έστω $a=\dfrac{A-Bi}{2}\in C^*$ και $b=C\in\Re$, τότε $\overline{a}\cdot\overline{z}+az+b=0$ που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση: Ορίζουμε κλίση μιας ευθείας $Ax+By+C=0$ το πηλίκο $m=-\dfrac{A}{B}=\dfrac{a+\overline{a}}{a-\overline{a}}=\dfrac{a+\overline{a}}{\frac{a-\overline{a}}{i}}=i\dfrac{a+\overline{a}}{a-\overline{a}}$.

<u>Πρόταση</u>

Θεωρούμε δύο ευθείες d_1 και d_2 με εξισώσεις $\overline{a_1}\cdot\bar{z}+a_1 z+b_1=0$ και $\overline{a_2}\cdot\bar{z}+a_2 z+b_2=0$ αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες d_1 και d_2 είναι:

1) παράλληλες αν και μόνο αν $\dfrac{\bar{a}_1}{a_1}=\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$

2) καθετες αν και μόνο αν $\dfrac{\bar{a}_1}{a_1}+\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}=0$

3) τεμνόμενες αν και μόνο αν $\dfrac{\bar{a}_1}{a_1}\neq\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$.

<u>Απόδειξη</u>

1) Έχουμε $d_1 // d_2$ αν και μόνο αν $m_1=m_2$. Δηλαδή, $\dfrac{a_1+\overline{a_1}}{a_1-\overline{a_1}}i=\dfrac{a_2+\overline{a_2}}{a_2-\overline{a_2}}i$. Οπότε $a_2\overline{a_1}=a_1\overline{a_2}\Leftrightarrow\dfrac{\bar{a}_1}{a_1}=\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$.

2) Έχουμε $d_1\perp d_2$ αν και μόνο αν $m_1 m_2=-1$, δηλαδή $a_2\overline{a_1}+a_2\overline{a_2}=0$ ή $\dfrac{\bar{a}_1}{a_1}+\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}=0$.

3) Οι ευθείες d_1 και d_2 είναι τεμνόμενες αν και μόνο αν $m_1\neq m_2$ το οποίο έπεται ότι $\dfrac{\bar{a}_1}{a_1}\neq\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$.

<u>Πρόταση</u>

Η εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $P_1(z_1)$ και $P_2(z_2)$ είναι η εξής:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Απόδειξη

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ στο καρτεσιανό επίπεδο είναι $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$. Χρησιμοποιώντας τους μιγαδικούς αριθμούς

έχουμε $\begin{vmatrix} \dfrac{z_1+\overline{z_1}}{2} & \dfrac{z_1-\overline{z_1}}{2} & 1 \\ \dfrac{z_2+\overline{z_2}}{2} & \dfrac{z_2-\overline{z_2}}{2} & 1 \\ \dfrac{z+\overline{z}}{2} & \dfrac{z-\overline{z}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$ αν και μόνο αν $\dfrac{1}{4i}\begin{vmatrix} z_1+\overline{z_1} & z_1-\overline{z_1} & 1 \\ z_2+\overline{z_2} & z_2-\overline{z_2} & 1 \\ z+\overline{z} & z-\overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Έτσι, $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Σημείωση:

Α) Τα σημεία $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Β) Η μιγαδική κλίση μιας ευθείας που διέρχεται από δυο σημεία με συντεταγμένες z_1 και z_2 είναι η $m = \dfrac{z_2 - z_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$.

Πράγματι, η εξίσωση είναι $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z} + z\overline{z_1} - z\overline{z_2} - z_1\overline{z} - z_2\overline{z_1} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z}(z_2 - z_1) - z(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} = 0$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μιγαδικής κλίσης παίρνουμε $m = \dfrac{z_2 - z_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$.

Θεώρημα

Έστωσαν $d: \overline{a}z + a\cdot \overline{z} + b = 0$ μια ευθεία και $P_0(z_0)$ ένα δοσμένο σημείο. Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στη d και διέρχεται από το P_0 είναι η :

$$z - z_0 = -\frac{\overline{a}}{a}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right).$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, η ευθεία που είναι παράλληλη στη d και διέρχεται από το P_0 έχει την εξίσωση $y - y_0 = i\dfrac{a+\overline{a}}{a-\overline{a}}\left(x - x_0\right)$.

Χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} - \dfrac{z_0 - \overline{z_0}}{2i} = i\dfrac{a+\overline{a}}{a-\overline{a}}\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2} - \dfrac{z_0+\overline{z_0}}{2}\right)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με $\left(a-\overline{a}\right)\left(z - z_0 - \overline{z} + \overline{z_0}\right) = \left(a+\overline{a}\right)\left(z + \overline{z} - z_0 - \overline{z_0}\right)$ ή $a\left(z - z_0\right) = -\overline{a}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right)$. Οπότε παίρνουμε $z - z_0 = -\dfrac{\overline{a}}{a}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right)$.

Πρόταση

Έστωσαν $d: \overline{a}z + a\cdot \overline{z} + b = 0$ μια ευθεία και $P_0(z_0)$ ένα δοσμένο σημείο. Η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στη d και διέρχεται από το P_0 έχει την εξίσωση

$$z - z_0 = \frac{\overline{a}}{a}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right).$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, η ευθεία που είναι κάθετη στη d και διέρχεται από το P_0 έχει την εξίσωση $y - y_0 = -\dfrac{1}{i}\dfrac{a-\overline{a}}{a+\overline{a}}\left(x - x_0\right)$.

Χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$\frac{z-\overline{z}}{2i}-\frac{z_0-\overline{z_0}}{2i}=i\frac{a-\overline{a}}{a+\overline{a}}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}-\frac{z_0+\overline{z_0}}{2}\right).$ Αυτό είναι ισοδύναμο με $\left(a+\overline{a}\right)\left(z-z_0-\overline{z}+\overline{z_0}\right)=-\left(a-\overline{a}\right)\left(z+\overline{z}-z_0-\overline{z_0}\right)$

ή $\left(z-z_0\right)\left(a+\overline{a}+a-\overline{a}\right)=\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)\left(-a+\overline{a}+a+\overline{a}\right).$

Οπότε παίρνουμε $a\left(z-z_0\right)=\overline{a}\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)$ και $z-z_0=\frac{a}{\overline{a}}\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right).$

<u>Πρόταση</u>

Έστωσαν $d:\overline{az}+a\cdot z+b=0$ μια ευθεία και $P_0\left(z_0\right)$ ένα δοσμένο σημείο. Το ίχνος της καθέτου από το P_0 στη d έχει συντεταγμένες $z=\frac{az_0-\overline{az_0}-b}{2a}$.

<u>Απόδειξη</u>

Το σημείο z είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases}\overline{a}\cdot\overline{z}+az+b=0\\ a\left(z-z_0\right)=\overline{a}\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)\end{cases}.$

Η πρώτη εξίσωση μας δίνει $\overline{z}=\frac{-az-b}{\overline{a}}$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $az-az_0=-az-b-\overline{a}\cdot\overline{z_0}$. Άρα $z=\frac{az_0-\overline{az_0}-b}{2a}$.

<u>Πρόταση</u>

Η απόσταση ενός σημείου $P_0\left(z_0\right)$ από μια ευθεία $d:\overline{az}+a\cdot z+b=0$, $a\in C^*$ είναι ίση με $D=\frac{\left|az_0+\overline{a}\cdot\overline{z_0}+b\right|}{2\sqrt{a\cdot\overline{a}}}$.

<u>Απόδειξη</u>

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε

$$D=\left|\frac{az_0-\bar{a}\cdot\overline{z_0}-b}{2a}-z_0\right|=\left|\frac{-az_0-\overline{az_0}-b}{2a}\right|=\frac{\left|a\cdot z_0+\overline{az_0}+b\right|}{2|a|}=\frac{\left|az_0+\overline{az_0}+b\right|}{2\sqrt{a\bar{a}}}$$

2.4 Εμβαδό Τριγώνου

Θεώρημα

Το εμβαδό τριγώνου $A_1A_2A_3$ του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες z_1, z_2, z_3 είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του αριθμού $\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες, το εμβαδό τρογώνου με κορυφές (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Επειδή $x_k=\frac{z_k+\overline{z_k}}{2}$, $y_k=\frac{z_k-\overline{z_k}}{2i}$, $k=1,2,3$ έχουμε

$$\Delta=\frac{1}{8i}\begin{vmatrix} z_1+\overline{z_1} & z_1-\overline{z_1} & 1 \\ z_2+\overline{z_2} & z_2-\overline{z_2} & 1 \\ z_3+\overline{z_3} & z_3-\overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{4i}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Σχόλια

Είναι εύκολο να δούμε πως για ένα θετικά προσανατολισμένο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες z_1, z_2, z_3 ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}>0.$$

Πόρισμα

Το εμβαδό ενός τριγώνου $A_1A_2A_3$ του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες z_1, z_2, z_3 είναι ίσο με $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1\right)$.

Απόδειξη

Η ορίζουσα του προηγούμενου θεωρήματος είναι

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} - \overline{z_2}z_3 - z_1\overline{z_3} - z_2\overline{z_3}\right) =$$

$$= \left[\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\right) - \overline{\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\right)}\right] = 2i\operatorname{Im}\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\right) =$$
$$-2i\operatorname{Im}\left(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1\right)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

2.5 Κύκλος

Πρόταση

Η εξίσωση ενός κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο είναι η $z \cdot \overline{z} + a \cdot z + \overline{a} \cdot \overline{z} + b = 0$, όπου $a \in C$ και $b \in \Re$.

Απόδειξη

Η εξίσωση του κύκλου στο καρτεσιανό επίπεδο είναι $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, όπου $m, n, p \in \Re$, και $p < \frac{m^2 + n^2}{4}$. Θέτουμε $x = \frac{z + \overline{z}}{2}$ και $y = \frac{z - \overline{z}}{2}$, και έχουμε $|z|^2 + m\frac{z + \overline{z}}{2} + n\frac{z - \overline{z}}{2i} + p = 0$ ή $z \cdot \overline{z} + z\frac{m - ni}{2} + \overline{z}\frac{m + ni}{2} + p = 0$.

Αν βάλουμε $a = \frac{m - ni}{2} \in C$ και $b = p \in \Re$ στην παραπάνω εξίσωση ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Σημείωση

Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $r=\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p}=\sqrt{a\overline{a}-b}$. Τότε η εξίσωση του κύκλου είναι ισοδύναμη με $(\overline{z}+a)(z+\overline{a})=r^2$. Θέτοντας $\gamma=-\overline{a}=-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}i$ η εξίσωση του κύκλου με κέντρο στο γ και ακτίνα r είναι $(\overline{z}-\overline{\gamma})(z-\gamma)=r^2$.

2.6 Εξωτερικό Γινόμενο Μιγαδικών Αριθμών

Ορισμός

Έστω a,b δύο μιγαδικοί αριθμοί. Ορίζουμε το μιγαδικό αριθμό $a\times b=\frac{1}{2}(\overline{a}b-a\overline{b})$ ως το εξωτερικό γινόμενο των a,b.

Σημείωση

Παρατηρούμε ότι $a\times b+\overline{a\times b}=\frac{1}{2}(\overline{a}b-a\overline{b})+\frac{1}{2}(a\overline{b}-\overline{a}b)=0$, άρα $\mathrm{Re}(a\times b)=0$.

Πρόταση

Έστω a,b,c τρεις μιγαδικοί αριθμοί. Τότε,

1) $a\times b=0$ αν και μόνο αν $a=0$ ή $b=0$ ή $a=\lambda b$ με $\lambda\in\Re$.

2) $a\times b=-b\times a$

3) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

4) $\alpha(a\times b)=(\alpha a)\times b=a\times(\alpha b)$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

5) Αν $A(a)$ και $B(b)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους σημεία εκτός του Ο, τότε $a\times b=0$ αν και μόνο αν O,A,B είναι συγγραμμικά.

Απόδειξη

Είναι άμεση από τον ορισμό.

Παρατήρηση

Έστω $A(a), B(b)$ δύο διακριτά σημεία του Μιγαδικού Επιπέδου διαφορετικά του O.

Το εξωτερικό γινόμενο των a, b έχει την ακόλουθη χρήσιμη γεωμετρική ερμηνεία:

$a \times b = \begin{cases} 2i \cdot area[AOB] \\ -2i \cdot area[AOB] \end{cases}$ αν το τρίγωνο OAB είναι θετικά προσανατολισμένο ή αρνητικά προσανατολισμένο αντίστοιχα.

'Οντως,

$$2i \cdot area[OAB] = i \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\left(A\hat{O}B\right) = i|a| \cdot |b| \cdot \sin\left(\arg\frac{b}{a}\right) = i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{|a|}{|b|} =$$

$$= \frac{1}{2}|a|^2\left(\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{a}b - a\bar{b}\right) = a \times b.$$

Για την άλλη περίπτωση, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο OBA είναι θετικά προσανατολισμένο, άρα $2i \cdot area[OBA] = b \times a = -a \times b$.

Πρόταση

Έστω $A(a).B(b), C(c)$ τρια διακριτά σημεία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) Τα σημεία A, B, C είναι συγγραμμικά
2) $(b-a)\times(c-a) = 0$
3) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$

Απόδειξη

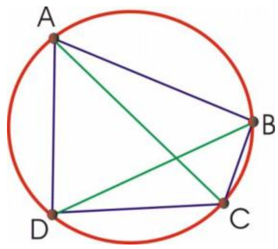
Τα σημεία A, B, C είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $area[ABC] = 0$ δηλαδή $a \times b + b \times c + c \times a = 0$. Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως $(b-a)\times(c-a) = 0$.

2.7 Θεώρημα Πτολεμαίου – Euler

Το θεώρημα του Πτολεμαίου

Το θεώρημα του Πτολεμαίου αναφέρεται σε τετράπλευρο που εγγράφεται σε κύκλο. Είναι πολύ πιθανό να ήταν ο Ίππαρχος ο πρώτος που ανακάλυψε αυτό το θεώρημα πολύ πριν τον Πτολεμαίο, όμως δεν έχει επιζήσει κάποιο έργο του και ο Πτολεμαίος δε

τον αναφέρει κάπου στο έργο του. Όποια και αν είναι η αλήθεια, το γνωστό αυτό θεώρημα ως του Πτολεμαίου συνδέει τα μήκη των πλευρών και τις διαγώνιους ενός τετραπλεύρου:



Για ένα περιγεγραμμένο τετράπλευρο *ABCD* ισχύει:*AC*BD = AB*CD + DA*BC.*

Η ισότητα αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση από τη γενική του L.Euler(1707-1783) που ανακαλύφθηκε χίλια χρόνια αργότερα.

Θεώρημα του Euler

Για τέσσερα σημεία *A,B,C,D* στο επίπεδο,

$\overline{AC}\cdot\overline{BD} \le \overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.

Απόδειξη

Για οποιουσδήποτε τυχαίους μιγαδικούς αριθμούς *a, b, c, d,* ισχύει η επόμενη ταυτότητα:

$(a-b)\cdot(c-d)+(a-d)\cdot(b-c) = (a-c)\cdot(b-d)$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$|a-b|\cdot|c-d| + |a-d|\cdot|b-c| \geq |a-c|\cdot|b-d|$

Τώρα θα ερευνήσουμε πότε η ανισότητα γίνεται ισότητα. Στην περίπτωση της τριγωνικής ανισότητας,

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός (δεδομένου ότι $z_1, z_2 \neq 0$).

Ψάχνουμε μια συνθήκη η οποία να μας εξασφαλίζει ότι ο $\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)}$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Όμως,

$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)}$ θετικός πραγματικός αριθμός

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{a-b}{a-d}}{\frac{c-b}{c-d}}$ αρνητικός πραγματικός αριθμός

$\Leftrightarrow \arg\left\{\dfrac{\frac{a-b}{a-d}}{\frac{c-b}{c-d}}\right\} = \arg\left\{\frac{a-b}{a-d}\right\} - \arg\left\{\frac{c-b}{c-d}\right\} \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Έπεται ότι τα *a*,*b*,*c*,*d* είναι *ομοκυκλικά*, δηλαδή τα *a*,*b*,*c*,*d* βρίσκονται στον ίδιο κύκλο και τα *a*,*c* βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές της χορδής που ενώνει τα *b* και *d*, κάτι που οδηγεί σε αλφαβητική σειρά (με φορά αυτής ή αντίθετης του ρολογιού).

<u>Ορισμός</u>

Η έκφραση $(\alpha,\beta;\gamma,\delta) := \left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta} \Big/ \frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}\right)$, καλείται *διπλός λόγος* των τεσσάρων σημείων *α, β, γ, δ* και έχει σπουδαίο ρόλο σε αρκετά κομμάτια των Μαθηματικών, ιδιαίτερα στην Προβολική Γεωμετρία.

<u>Πόρισμα</u>

Τέσσερα σημεία *α, β, γ, δ* είναι *ομοκυκλικά* αν και μόνο αν $(\alpha , \beta ; \gamma , \delta) \in \Re$

<u>Πόρισμα</u>

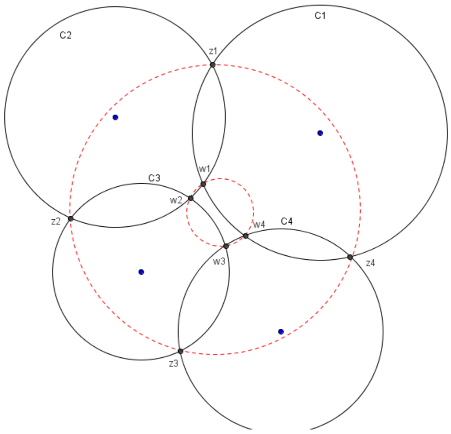
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC, με $\hat{C}$ ορθή, ισχύει:

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$.

<u>2.8 Θεώρημα Clifford</u>

<u>Θεώρημα</u>

Έστω τέσσερις κύκλοι C_1, C_2, C_3, C_4 στο επίπεδο και έστω ότι οι C_1, C_2 τέμνονται στα σημεία z_1 και w_1, οι C_2 και C_3 αντίστοιχα στα z_2 και w_2, οι C_3 και C_4 στα z_3 και w_3, και οι C_4 και C_1 στα z_4 και w_4. Τότε, τα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 είναι ομοκυκλικά, αν και μόνο αν τα w_1, w_2, w_3, w_4 είναι ομοκυκλικά.



<u>Απόδειξη</u>

Από υπόθεση, οι ακόλουθοι τέσσερις διπλοί λόγοι είναι πραγματικοί αριθμοί:

$$(z_1, w_2; z_2, w_1)=\frac{z_1-z_2}{w_2-z_2}\Big/\frac{z_1-w_1}{w_2-w_1},$$

$$(z_2, w_3; z_3, w_2)=\frac{z_2-z_3}{w_3-z_3}\Big/\frac{z_2-w_2}{w_3-w_2},$$

$(z_3\,,\,w_4\,;\,z_4\,,\,w_3)=\dfrac{z_3-z_4}{w_4-z_4}\Big/\dfrac{z_3-w_3}{w_4-w_3}$,

$(z_4\,,\,w_1\,;\,z_1\,,\,w_4)=\dfrac{z_4-z_1}{w_1-z_1}\Big/\dfrac{z_4-w_4}{w_1-w_4}$.

Επομένως,

$$\frac{(z_1,w_2;z_2,w_1)}{(z_2,w_3;z_3,w_2)}\cdot\frac{(z_3,w_4;z_4,w_3)}{(z_4,w_1;z_1,w_4)}=$$

$$=\left\{\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)\Big/\left(\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)\right\}\left\{\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)\Big/\left(\frac{w_1-w_4}{w_3-w_4}\right)\right\}$$

$=(z_1\,,\,z_3\,;\,z_2\,,\,z_4)\cdot(w_1\,,\,w_3\,;\,w_2\,,\,w_4)$

είναι πραγματικός.

Άρα, ο $(z_1\,,\,z_3\,;\,z_2\,,\,z_4)$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο $(w_1\,,\,w_3\,;\,w_2\,,\,w_4)$ είναι πραγματικός.

2.9 Ο κύκλος των 9 σημείων

Ορισμός

Το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων ενός τριγώνου καλείται *περίκεντρο* και είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Θεώρημα (ο κύκλος των 9 σημείων)

Σε ένα τρίγωνο,

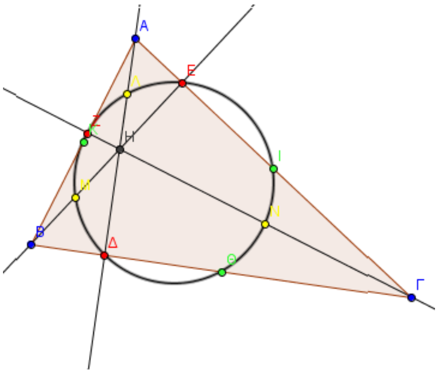
(i) τα μέσα των πλευρών του,

(ii) τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα το ορθόκεντρο και κάθε κορυφή και

(iii) τα ίχνη των υψών από κάθε κορυφή στην απέναντι πλευρά,

βρίσκονται σε ένα κύκλο.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο *ABC*. Επιλέγουμε το περίκεντρο του *O* να είναι η αρχή του μιγαδικού επιπέδου και *α, β, γ*, οι μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στις κορυφές *A, B, C* αντίστοιχα. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει ακτίνα *1*, δηλαδή $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Θέτω $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$. Εφόσον $\sigma - \alpha = \beta + \gamma$, και $\frac{\beta+\gamma}{2}$ είναι το μέσο *D* της πλευράς *BC*, το *σ* ανήκει στην

κάθετη από την κορυφή *A* στην πλευρά *BC* και το μήκος $|\sigma-\alpha|$ είναι διπλάσιο από το *OD*. Λόγω συμμετρίας, το σ ανήκει επίσης και στην κάθετη από το *B* στην πλευρά *CA*, και σε αυτή από το *C* στην *AB*. Δηλαδή το *σ* είναι το ορθόκεντρο *H* του τριγώνου *ABC*.

(i) Όμως, το $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το περίκεντρο *O* με το ορθόκεντρο *H*. Η απόσταση του σημείου $\frac{\sigma}{2}$ από το μέσο *D* της πλευράς *BC* είναι: $\left|\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\sigma}{2}\right| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Ομοίως η απόσταση του $\frac{\sigma}{2}$ από το μέσο *E* της πλευράς *CA* και το μέσο *F* της πλευράς *AB* είναι πάλι $\frac{1}{2}$.

(ii) Επιπλέον, η απόσταση του $\frac{\sigma}{2}$ από το μέσο του τμήματος που ενώνει το ορθόκεντρο *H* με την κορυφή *A* είναι: $\left|\frac{\alpha+\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2}\right|=\left|\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Ομοίως και η απόσταση του $\frac{\sigma}{2}$ από το μέσο του *BH*, και του *CH* είναι πάλι $\frac{1}{2}$.

(iii) Για να βρούμε το ίχνος *λ* της καθέτου από την κορυφή *A* στην πλευρά *BC*, αρχικά θα υπολογίσουμε το σημείο *α΄* όπου αυτή η κάθετη συναντά τον περιγεγραμμένο κύκλο. Έτσι, το *α΄* πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$\overrightarrow{\alpha\alpha'} \perp \overline{\beta\gamma}$, $|\alpha'|=1$, $\alpha' \neq \alpha$.

Από την πρώτη συνθήκη παίρνουμε

$\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}$ είναι καθαρά φανταστικός,

δηλαδή $\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}+\frac{\overline{\alpha}-\overline{\alpha'}}{\overline{\beta}-\overline{\gamma}}=0$.

Αντικαθιστώντας σε αυτή $\overline{a}=\frac{1}{a}$ παίρνουμε $\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}\left\{1+\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\right\}=0$.

Άρα, $\alpha'=-\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Η αποστάσεις από την κορυφή *B* στα *α΄* και *σ* είναι:

$\left|\beta+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right|=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right||\alpha+\gamma|=|\alpha+\gamma|$

$|\sigma-\beta|=|(\alpha+\gamma)|=|\alpha+\gamma|$.

Άρα το τρίγωνο *βα΄σ* είναι ισοσκελές και *λ*=$\frac{1}{2}(\sigma+\alpha')=\frac{1}{2}\left(\sigma-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$.

Έπεται ότι η απόσταση από το $\frac{\sigma}{2}$ στο *λ* είναι $\left|\lambda-\frac{\sigma}{2}\right|=\left|\frac{\alpha'}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Ομοίως και οι αποστάσεις από το $\frac{\sigma}{2}$ στα άλλα δυο ίχνη των καθέτων είναι επίσης $\frac{1}{2}$.

Μερικές παρατηρήσεις

Έστω z_1, z_2, z_3 τρία τυχαία σημεία πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$. Τότε, το περίκεντρο, το κέντρο βάρους, το κέντρο του κύκλου των εννέα σημείων και το ορθόκεντρο του τριγώνου $z_1z_2z_3$ δίνονται από

$0,\ \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3),\ \frac{1}{2}(z_1+z_2+z_3),\ (z_1+z_2+z_3)$

αντίστοιχα, και η ακτίνα του κύκλου των εννέα σημείων είναι $\frac{1}{2}$.

2.10 Η γραμμή του Simson

Εισαγωγή:

Δίνεται μια ευθεία ℓ. Θεωρούμε a το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην ℓ, και p την απόσταση από την αρχή των αξόνων στη γραμμή ℓ. Τότε για οποιοδήποτε σημείο z της ℓ, το z-pa είναι ένα διάνυσμα πάνω στην ℓ και εφόσον το a είναι διάνυσμα κάθετο στην ℓ έχουμε:

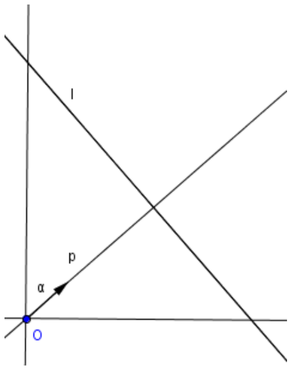
$\frac{z-pa}{a}$ είναι καθαρά φανταστικός, δηλαδή

$\frac{z-pa}{a}+\frac{\bar{z}-\overline{pa}}{\bar{a}}=0.$

- Άρα η εξίσωση της ℓ δίνεται από την εξίσωση $\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=2p$ δηλαδή $z+k\bar{z}=2pa$,

  όπου $p\in\Re, k=\frac{a}{\bar{a}}\ \&\ |k|=1.$
- Για την εξίσωση μιας ευθείας κάθετης στην ℓ, αντικαθιστούμε το a με ia:

  $\frac{z}{ia}+\frac{\bar{z}}{\overline{ia}}=2q$ για κάποιο $q\in\Re$ δηλαδή



$\frac{z}{a}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}}=2qi$ δηλαδή $z-k\bar{z}=2qia,\ \left(k=\frac{a}{\bar{a}}\right)$

όπου η σταθερά στο δεξί μέλος μπορεί να ρυθμιστεί να περνάει από ένα συγκεκριμένο σημείο.

<u>Σημείωση</u>

Μια γραμμική εξίσωση με z και $\bar{z}$ ταυτόχρονα, είναι εξίσωση μιας γραμμής αν και μόνο αν είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή η σχέση που παίρνουμε από το συζυγή μιγαδικό και των δυο πλευρών πρέπει να είναι ισοδύναμη με την αρχική εξίσωση.

Πχ. Παίρνοντας τη συζυγή σχέση της $z+k\bar{z}=2pa$, όπου $\left(p\in\Re, k=\frac{a}{\bar{a}}\right)$ έχουμε:

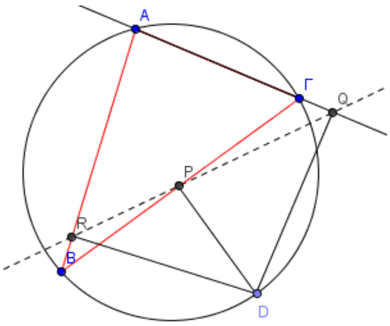
$\bar{z}+\bar{k}z=2p\bar{a}$ και αντικαθιστώντας $\bar{k}=\frac{1}{k}$ παίρνουμε $k\bar{z}+z=2p\bar{a}k=2pa$ η οποία είναι ίδια με την αρχική εξίσωση. Ομοίως και για την εξίσωση $z-k\bar{z}=2qia$ όπου $\left(q\in\Re, k=\frac{a}{\bar{a}}\right)$.

Ειδικότερα, είναι αναγκαία (όχι όμως και ικανή) συνθήκη στην οποία οι συντελεστές α και β των z και $\bar{z}$ στην $az+\beta\bar{z}=\gamma$ έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, δηλαδή $|\alpha|=|\beta|$.

<u>**Θεώρημα**</u>

Δίνεται τρίγωνο *ABC* και ένα σημείο *D*. Θεωρούμε *P, Q, R* τα ίχνη των καθέτων από το σημείο *D* στις πλευρές *BC, CA* και *AB* αντίστοιχα. Τότε τα σημεία *P, Q, R* είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν το *D* ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου *ABC*.

Απόδειξη



Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το τρίγωνο *ABC* είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο, και τα σημεία *A, B, C, D* αναπαρίστανται από τους μιγαδικούς αριθμούς *α, β, γ, δ* αντίστοιχα. Τότε η εξίσωση της γραμμής *BC* είναι:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ δηλαδή } \left(\bar{\beta}-\bar{\gamma}\right)z-\left(\beta-\gamma\right)\bar{z}+\left(\beta\bar{\gamma}-\bar{\beta}\gamma\right)=0.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\bar{\beta}=\dfrac{1}{\beta}, \bar{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$ παίρνουμε $z+\beta\gamma\bar{z}=\beta+\gamma$.

Άρα η εξίσωση της κάθετης από το *D(δ)* στην πλευρά *BC* είναι $z-\beta\gamma\bar{z}=\delta-\beta\gamma\bar{\delta}$.

Επομένως, η τομή *P(λ)* των δύο παραπάνω ευθειών είναι η κοινή λύση των δυο παραπάνω εξισώσεων:

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\beta+\gamma+\delta-\beta\gamma\bar{\delta}\right)$$

Ομοίως, τα *Q(μ), R(ν)* είναι:

$$\mu=\frac{1}{2}\left(\gamma+\alpha+\delta-\gamma\alpha\bar{\delta}\right),$$

$$\nu=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\delta-\alpha\beta\bar{\delta}\right).$$

Τώρα, τα P(λ), Q(μ), R(ν) είναι συγγραμμικά $\Leftrightarrow \dfrac{\lambda-\nu}{\mu-\nu}\in\Re$.

Ωστόσο, συμβολίζοντας $r=|\delta|$ (άρα $\bar{\delta}=\dfrac{r^2}{\delta}$) έχουμε:

[illegible]

Επομένως,

τα *P, Q, R* είναι συγγραμμικά $\Leftrightarrow (\alpha,\beta;\gamma,\delta r^{-2}) \in \Re \Leftrightarrow \alpha,\beta,\gamma,\delta r^{-2}$ είναι ομοκυκλικά $\Leftrightarrow \left|\delta r^{-2}\right| = 1 \Leftrightarrow r = |\delta| = 1$.

Η ευθεία γραμμή που περιέχει τα *R(ν), P(λ), Q(μ)* καλείται ***γραμμή του Simson*** του σημείου *D* στο τρίγωνο *ABC*.

Η εξίσωση της γραμμής του Simson

Για να βρούμε την εξίσωσή της θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό με πριν. Ειδικότερα υποθέτουμε ότι το τρίγωνο *ABC* είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο, και το σημείο *D(δ)* βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Τότε το ίχνος *P* της κάθετης από το *D(δ)* στην πλευρά *BC* δίνεται από τη σχέση: $z=\frac{1}{2}\left(\beta+\gamma+\delta-\frac{\beta\gamma}{\delta}\right)$.

Εισάγουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

σ_1= α+β+γ, σ_2= βγ+γα+αβ, σ_3=αβγ. Τότε,

$$\bar{\sigma}_1=\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

$$\bar{\sigma}_2=\overline{\beta\gamma}+\overline{\gamma\alpha}+\overline{\alpha\beta}=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}.$$

Έτσι η παραπάνω έκφραση του z γίνεται $z=\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\alpha+\delta-\frac{\sigma_3}{\alpha\delta}\right)$ και

$$\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\delta}-\frac{\alpha\delta}{\sigma_3}\right).$$

Απαλείφοντας το *α* από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$\delta z-\sigma_3\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\delta^2+\sigma_1\delta-\sigma_2-\frac{\sigma_3}{\delta}\right).$$

Η τελευταία σχέση πρέπει να ικανοποιείται από το ίχνος *P(λ)* της κάθετης από το *D(δ)* στην πλευρά *BC*. Επειδή αυτή η σχέση περιέχει μόνο τα σ_1, σ_2, σ_3, είναι συμμετρική ως προς τα *α, β, γ*. Έπεται ότι αυτή η σχέση ικανοποιείται επίσης από τα ίχνη *Q(μ)* και *R(ν)* των καθέτων από το *D(δ)* στις πλευρές *CA* και *AB* αντίστοιχα.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω τρία σημεία *L, M, N* του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο *ABC*. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι γραμμές Simson των τριών αυτών σημείων ως προς το τρίγωνο *ABC* να συναντώνται σε ένα σημείο είναι $\widehat{AL}+\widehat{BM}+\widehat{CN}=0$ *(mod 2π).*

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε ως περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου *ABC* το μοναδιαίο κύκλο, και u_1, u_2, u_3 τους μιγαδικούς αριθμούς που αντικαθιστούν τα σημεία *L, M, N* αντίστοιχα. Τότε οι εξισώσεις των τριών γραμμών Simson είναι:

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right),$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right),$$

$$u_3 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(u_3^2 + \sigma_1 u_3 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_3}\right).$$

Άρα το σημείο τομής των δύο πρώτων γραμμών Simson δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{u_1 u_2}\right),$$

και το σημείο τομής των δύο τελευταίων γραμμών Simson δίνεται από τη σχέση

$$z = \frac{1}{2}\left(u_2 + u_3 + \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{u_2 u_3}\right).$$

Οπότε η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε αυτά τα δύο σημεία να συμπίπτουν είναι $\sigma_3 = u_1 u_2 u_3$ δηλαδή $\alpha\beta\gamma = u_1 u_2 u_3$. Επειδή τα α, β, γ, u_1, u_2, u_3 είναι όλοι μιγαδικοί με απόλυτη τιμή 1, θεωρώντας τα ορίσματα τους $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ αντίστοιχα, έχουμε $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$ *(mod 2π)* $\Leftrightarrow$ $(\theta_1-\varphi_1)+(\theta_2-\varphi_2)+(\theta_3-\varphi_3)=0$ *(mod2π)*, η οποία είναι η επιθυμητή συνθήκη.

2.11 Θεώρημα Lagrange

Θεωρούμε τα διακριτά σημεία $A_1(z_1),...,A_n(z_n)$ του μιγαδικού επιπέδου. Έστω $m_1,...,m_n$ μη μιγαδικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $m_1+m_2+...+m_n \neq 0$ και θέτουμε $m=m_1+m_2+...+m_n$. Το σημείο G με συντεταγμένες $z_G=\frac{1}{m}(m_1z_1+...+m_nz_n)$ καλείται *βαρύκεντρο* του συνόλου $\{A_1,...,A_n\}$ ως προς τα βάρη $m_1,...,m_n$.

Εάν $m_1=...=m_n=1$ το σημείο G είναι το *βαρύκεντρο*του συνόλου $\{A_1,...,A_n\}$.

Θεώρημα(Lagrange)

Θεωρούμε τα σημεία $\{A_1,...,A_n\}$ και τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $m_1,...,m_n$ τέτοιους ώστε $m=m_1+m_2+...+m_n \neq 0$. Εάν το G δηλώνει το βαρύκεντρο του συνόλου $\{A_1,...,A_n\}$ ως προς τα βάρη $m_1,...,m_n$, τότε για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η ακόλουθη σχέση: $\sum_{j=1}^{n} m_j MA_j^2 = mMG^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j GA_j^{\ 2}$.

Απόδειξη

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως το βαρύκεντρο G είναι η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή $z_G=0$. Έχουμε $MA_j^2=|z_M-z_j|^2=(z_M-z_j)\cdot(\overline{z_M-z_j})=|z_M|^2-2z_M\cdot z_j+|z_j|^2$, δηλαδή

$MA_j^2=|z_M|^2-2z_Mz_j+|z_j|^2$. Πολλαπλασιάζοντας με m_j και αθροίζοντας τις σχέσεις για $j=1,...,n$ έπεται ότι

$$\sum_{j=1}^{n} m_j MA_j^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j\left(|z_M|^2-2z_M\cdot z_j+|z_j|^2\right)= m|z_M{}^2|-2z_M\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} m_j z_j\right)+\sum_{j=1}^{n} m_j|z_j|^2 =$$

$$= m|z_M|^2-2z_M\cdot(mz_G)+\sum_{j=1}^{n} m_j|z_j|^2 = m|z_M{}^2|+\sum_{j=1}^{n} m_j|z_j|^2 =$$

$$= m|z_M-z_G|^2+\sum_{j=1}^{n} m_j|z_j-z_G|^2 = mMG^2+\sum_{j=1}^{n} m_j GA_j^{\ 2}$$

Πόρισμα

Θεωρούμε τα διακριτά σημεία $\{A_1,...,A_n\}$ και τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $m_1,...,m_n$ τέτοιους ώστε $m = m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$. Για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η ακόλουθη σχέση: $\sum_{j=1}^{n} m_j MA_j^2 \geq \sum_{j=1}^{n} m_j GA_j^{\ 2}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $M = G$, το βαρύκεντρο του συνόλου $\{A_1,...,A_n\}$ ως προς τα βάρη $m_1,...,m_n$.

Απόδειξη

Η ανισότητα έπεται από τη σχέση του Lagrange.

Πόρισμα

Θεωρούμε τα σημεία $\{A_1,...,A_n\}$ και το βαρύκεντρο G του συνόλου $\{A_1,...,A_n\}$. Για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η ακόλουθη σχέση: $\sum_{j=1}^{n} MA_j^2 = nMG^2 + \sum_{j=1}^{n} GA_j^{\ 2}$.

Απόδειξη

Η απόδειξη αυτού είναι άμεση από το θεώρημα του Lagrange για $m_1 = ... = m_n = 1$.

Σημείωση

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη ταυτότητα:

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z_1,...,z_n$ έχουμε

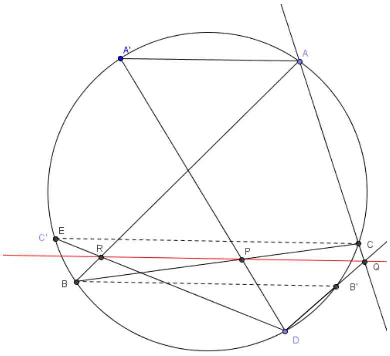
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|z - z_j\right|^2 = n\left|z - \frac{z_1 + ... + z_n}{n}\right|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left|z_j - \frac{z_1 + ... + z_n}{n}\right|^2.$$

Αυτή την τελευταία σχέση τη χρησιμοποιούμε συχνά για τον καθορισμό σημαντικών αποστάσεων σε ένα τρίγωνο.

Θεώρημα (Aubert)

Έστω *A, A΄, B, B΄, C, C΄, D* επτά ομοκυκλικά σημεία έτσι ώστε *AA΄*|| *BB΄*|| *CC΄*, και *P, Q, R* τα σημεία τομής των *A΄D* και *BC*, *B΄D* και *CA*, *C΄D* και *AB* αντίστοιχα. Τότε τα *P, Q, R* είναι συγγραμμικά και η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα τρία σημεία είναι παράλληλη στα *AA΄, BB΄* και *CC΄*.

Απόδειξη



Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο κύκλος μας είναι ο μοναδιαίος. Αναπαριστούμε τα σημεία *A, B, C, D* από τους μιγαδικούς αριθμούς *α, β, γ, δ* αντίστοιχα. Τότε οι εξισώσεις των παραλλήλων *AA΄, BB΄, CC΄* είναι οι:

$z+k\bar{z}=\alpha+k\bar{\alpha}$, $z+k\bar{z}=\beta+k\bar{\beta}$, $z+k\bar{z}=\gamma+k\bar{\gamma}$ αντίστοιχα, με *k* έναν κατάλληλο μιγαδικό αριθμό με $|k|=1$. Έπεται ότι τα σημεία *A΄, B΄, C΄* δίνονται από τους μιγαδικούς αριθμούς $k\bar{\alpha}, k\bar{\beta}, k\bar{\gamma}$ αντίστοιχα. Άρα η τομή του *P* με τις ευθείες *BC* και *A΄D* πρέπει να είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων:

$z+\beta\gamma\bar{z}=\beta+\gamma$, $z+\delta k\overline{\alpha z}=\delta+k\bar{\alpha}$. Άρα $(\beta\gamma-k\bar{\alpha}\delta)\bar{z}=\beta+\gamma-\delta-k\bar{\alpha}$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη αυτής με *α* παίρνουμε $(\alpha\beta\gamma-k\delta)\bar{z}=\alpha\beta+\gamma\alpha-\alpha\delta-k$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τους συμβολισμούς:

$\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma$, $\sigma_2=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta$, $\sigma_3=\alpha\beta\gamma$, η τελευταία ισότητα γίνεται

$$(\sigma_3-k\delta)\bar{z}=\sigma_2-\frac{\sigma_3}{\alpha}-\alpha\delta-k$$

Παίρνοντας τώρα το συζυγή αυτής και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $k\delta\sigma_3$ παίρνουμε:

[illegible]

Από τις τελευταίες δύο ισότητες έπεται ότι

[illegible]

Αυτή είναι η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί το σημείο *P*. Όμως αυτή η σχέση είναι συμμετρική ως προς τα α, β, γ, άρα τα σημεία *Q* και *R* ικανοποιούν και αυτά την ίδια σχέση. Από την άλλη πλευρά, αυτή είναι η εξίσωση μιας γραμμής παράλληλης στα AA', BB', CC'. Άρα τα σημεία *P*, *Q*, *R* είναι συγγραμμικά και η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα τρία σημεία είναι παράλληλη στα AA', BB', CC'.

Στην περίπτωση στην οποία $k\delta=\sigma_3$ έχουμε:

$BC||A'D$, $CA||B'D$, $AB||C'D$

Άρα τα σημεία *P*, *Q*, *R* συμπίπτουν με «το σημείο» στο άπειρο και το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω ένα τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ εγγεγραμμένο σε κύκλο, και *P* ένα αυθαίρετο σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου. Τότε τα ίχνη D_1, D_2, D_3, D_4 των καθέτων από το σημείο *P* στις γραμμές Simson του σημείου *P* ως προς τα τρίγωνα $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ είναι συγγραμμικά. Η γραμμή αυτή που τα περιέχει καλείται *γραμμή Simson του σημείου P ως προς το τετράπλευρο* $A_1A_2A_3A_4$.

<u>Απόδειξη</u>

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ είναι ο μοναδιαίος. Αναπαριστούμε τα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4 και

P από τους μιγαδικούς αριθμούς u_1, u_2, u_3, u_4 και u αντίστοιχα. Τότε η εξίσωση της γραμμής Simson από το σημείο *P(u)* ως προς το τρίγωνο $A_2A_3A_4$ είναι:

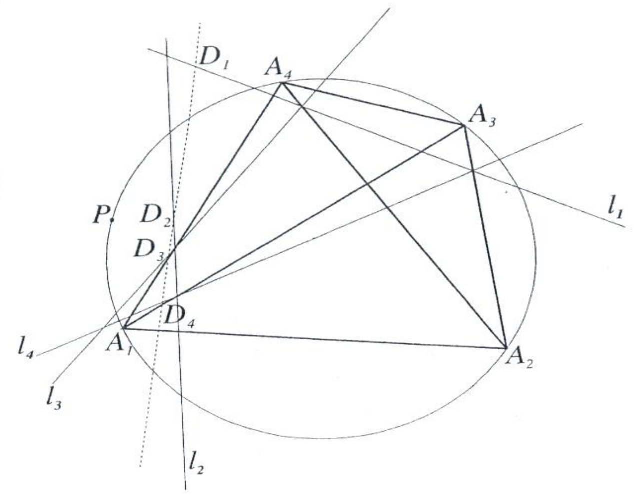
[illegible]

Άρα η εξίσωση της κάθετης από το σημείο *P(u)* σε αυτή τη γραμμή Simson είναι:

[illegible]

Οπότε το σημείο τομής D_1 των δύο αυτών γραμμών δίνεται από:

[illegible]



Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό

$\sigma_1=u_1+u_2+u_3+u_4$

$\sigma_2=u_1u_2+u_1u_3+u_1u_4+u_2u_3+u_2u_4+u_3u_4$

$\sigma_3=u_2u_3u_4+u_1u_3u_4+u_1u_2u_4+u_1u_2u_3$

$\sigma_4=u_1u_2u_3u_4$,

η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως

[illegible]

Παίρνοντας τώρα το συζυγή μιγαδικό και των δύο πλευρών και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$\overline{\sigma_1}=\frac{\sigma_3}{\sigma_4}, \quad \overline{\sigma_2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_4}, \quad \overline{\sigma_4}=\frac{1}{\sigma_4}$, παίρνουμε

[illegible]

Άρα $\sigma_4 \bar{z} = \dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{3\sigma_4}{u} + \sigma_3 - \sigma_2 u\right) - \left(\dfrac{\sigma_4}{u_1} - \dfrac{\sigma_3 u}{u_1} + \dfrac{\sigma_4 u}{u_1^{\ 2}}\right) + u_1 u^2\right\}.$

Οπότε

[illegible]

[illegible]

Εφόσον το u_1 ρίζα της εξίσωσης $u_1^4 - \sigma_1 u_1^3 + \sigma_2 u_1^2 - \sigma_3 u_1 + \sigma_4 = 0$ παίρνουμε

[illegible]

Αυτή η σχέση ικανοποιείται από το D_1. Επιπλέον, λόγω συμμετρίας ικανοποιείται και από τα D_2, D_3, D_4. Από την άλλη πλευρά, αυτή είναι η εξίσωση μιας ευθείας γραμμής. Άρα τα σημεία D_1, D_2 D_3, D_4 είναι συγγραμμικά.

2.12 Θεωρήματα του Cantor

Ας ξεκινήσουμε με την ακόλουθη απλή περίπτωση:

Θεώρημα

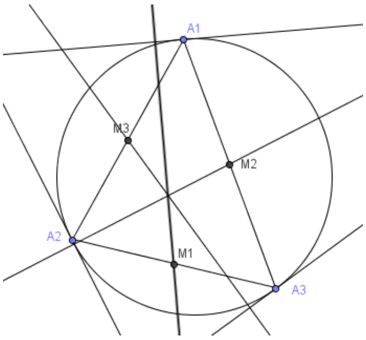
Οι τρεις κάθετες από τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου στις εφαπτόμενες στον περιγεγραμμένο κύκλο από τις απέναντι κορυφές συναντώνται στο κέντρο του κύκλου των 9 σημείων του τριγώνου.

Απόδειξη

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο.

Υπενθύμιση: Η εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία α και β στο μοναδιαίο κύκλο δίνεται από τη σχέση $z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$.

Εφόσον η εφαπτομένη στο μοναδιαίο κύκλο σε ένα σημείο α είναι ειδική περίπτωση της παραπάνω όταν τα α και β συμπίπτουν, η εξίσωση της εφαπτομένης στο α είναι: $z + a^2\bar{z} = 2a$.



Έστω u_1, u_2, u_3 οι αναπαραστάσεις των A_1, A_2, A_3 αντίστοιχα. Τότε, η εξίσωση της εφαπτομένης στο A_1 είναι $z + u_1^2\bar{z} = 2u_1$.

Άρα η εξίσωση της καθέτου από το μέσο $M_1\left(\frac{u_2+u_3}{2}\right)$ της πλευράς A_2A_3, σε αυτή την εφαπτομένη είναι:

$$z - u_1^2\bar{z} = \frac{1}{2}\left[(u_2+u_3) - u_1^2(\bar{u}_2+\bar{u}_3)\right].$$

Όμως το κέντρου του κύκλου των 9 σημείων του τριγώνου $A_1A_2A_3$ είναι το $\frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3)$ και $\frac{1}{2}\left[(u_1+u_2+u_3) - u_1^2(\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3)\right] = \frac{1}{2}\left[(u_2+u_3) - u_1^2(\bar{u}_2+\bar{u}_3)\right]$ αφού $u_1\bar{u}_1 = 1$.

Άρα το κέντρο του κύκλου των 9 σημείων ικανοποιεί την εξίσωση της κάθετης από το M_1 στην εφαπτομένη στο A_1. Ομοίως, το κέντρο του κύκλου των 9 σημείων ανήκει και στις κάθετες από τα M_2 και M_3 στις εφαπτόμενες των αντίστοιχων απέναντι κορυφών.

Θεώρημα

Έστω n σημεία δοσμένα σε ένα κύκλο. Από το κέντρο βάρους των *n-1* αυτών σημείων φέρουμε κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο απομένων σημείο. Τότε, οι *n* αυτές κάθετες συναντώνται σε ένα σημείο.

Απόδειξη

Η απόδειξη πρακτικά είναι όμοια με την προηγούμενη. Έστω u_1, u_2, ... , u_n τα n σημεία πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Το κέντρο βάρους των n-1 αυτών σημείων είναι το $\frac{1}{n-1}(u_2+u_3+\cdots+u_n)=\frac{\sigma_1-u_1}{n-1}$, όπου $\sigma_1=u_1+u_2+\cdots u_n$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $z+u_1^2\bar{z}=2u_1$. Άρα η εξίσωση της κάθετης από το κέντρο βάρους των σημείων u_2, ... , u_n σε αυτή την εφαπτομένη είναι:

[illegible]

.

Τώρα είναι φανερό ότι το σημείο $\frac{1}{n-1}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right)=\frac{\sigma_1}{n-1}$ ικανοποιεί αυτή την εξίσωση.

Τώρα θα συνεχίσουμε με μια άπειρη ακολουθία θεωρημάτων που ανακαλύφθηκαν από τον M. B. Cantor (1829-1920)

<u>Θεώρημα</u>

Έστω A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2 έξι ομοκυκλικά σημεία. Τότε τα τέσσερα σημεία τομής των τεσσάρων ζευγών των γραμμών Simson των σημείων P_1 και P_2 ως προς τα τρίγωνα $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ είναι συγγραμμικά. Η γραμμή αυτή καλείται *γραμμή του Cantor* του ζεύγους των σημείων P_1 και P_2 ως προς το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$.

<u>Απόδειξη</u>

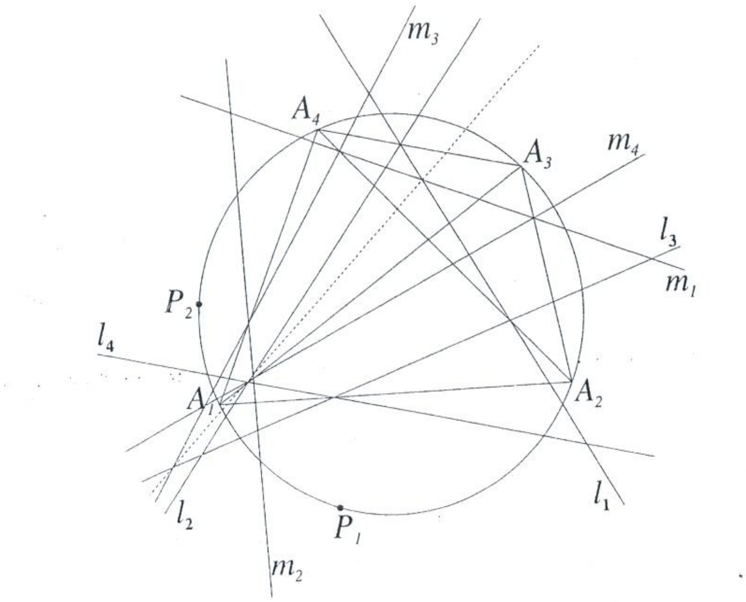
Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα έξι αυτά σημεία ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο και ότι αναπαρίστανται από τους μιγαδικούς αριθμούς u_1, u_2, u_3, u_4 και t_1, t_2 αντίστοιχα. Τότε οι εξισώσεις των γραμμών Simson των σημείων $P_1(t_1)$ και $P_2(t_2)$ ως προς το τρίγωνο $A_2A_3A_4$ δίνεται από:

[illegible],

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)+\frac{t_1t_2}{u_2u_3u_4}\right).$$

Άρα η τομή τους δίνεται ως

$$z = \frac{1}{2}\left(t_1+t_2+\left(u_2+u_3+u_4\right)+\frac{u_2u_3u_4}{t_1t_2}\right).$$



Θέτοντας

$\sigma_1 = u_1+u_2+u_3+u_4$,

$\sigma_2 = u_1u_2+u_1u_3+u_1u_4+u_2u_3+u_2u_4+u_3u_4$,

$\sigma_3 = u_2u_3u_4+u_1u_3u_4+u_1u_2u_4+u_1u_2u_3$,

$\sigma_4 = u_1u_2u_3u_4$,

η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$z = \frac{1}{2}\left(t_1+t_2+\sigma_1-u_1+\frac{\sigma_4}{t_1t_2u_1}\right)$$ και άρα

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{\sigma_3}{\sigma_4}-\frac{1}{u_1}+\frac{t_1t_2u_1}{\sigma_4}\right).$$

Απαλείφοντας το u_1 από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$z + t_1 t_2 \sigma_4 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2 \sigma_3 - \frac{\sigma_4}{t_1 t_2}\right).$$

Αυτή η σχέση πρέπει να ικανοποιείται από τα σημεία τομής των γραμμών Simson του P_1 και του P_2 ως προς το τρίγωνο $A_2A_3A_4$. Ωστόσο αυτή η σχέση είναι συμμετρική ως προς τα u_1, u_2, u_3, u_4 και άρα ικανοποιείται από τα σημεία τομής των ζευγών των γραμμών Simson των P_1 και P_2 ως προς τα τρίγωνα $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Από την άλλη, αυτή η σχέση είναι εξίσωση γραμμής. Άρα τα τέσσερα αυτά σημεία τομής είναι συγγραμμικά.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$ επτά ομοκυκλικά σημεία. Τότε οι τρεις γραμμές Cantor των τριών ζευγών σημείων P_2 και P_3, P_3 και P_1, P_1 και P_2 ως προς το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ συναντώνται σε ένα σημείο. Το σημείο αυτό καλείται *σημείο Cantor* της τριάδας σημείων P_1, P_2, P_3 ως προς το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$.

<u>Απόδειξη</u>

Όπως προηγουμένως, υποθέτουμε ότι ο κύκλος μας είναι ο μοναδιαίος και $u_1, u_2, u_3, u_4, t_1, t_2, t_3$ οι μιγαδικοί αριθμοί που αναπαριστούν τα σημεία $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$ αντίστοιχα. Τότε, οι εξισώσεις των γραμμών Cantor των ζευγών σημείων P_2 και P_3, P_3 και P_1 ως προς το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ δίνονται από

$$z + t_2 t_3 \sigma_4 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + t_2 + t_3 + t_2 t_3 \sigma_3 - \frac{\sigma_4}{t_2 t_3}\right),$$

$$z + t_3 t_1 \sigma_4 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + t_3 + t_1 + t_3 t_1 \sigma_3 - \frac{\sigma_4}{t_3 t_1}\right).$$

Άρα το σημείο τομής τους δίνεται από

$$z = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - \frac{\sigma_4}{t_1 t_2 t_3}\right).$$

Ωστόσο, αυτή η έκφραση είναι συμμετρική ως προς τα t_1, t_2, t_3 και άρα η γραμμή Cantor του ζεύγους σημείων P_1 *και* P_2 ως προς το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ διέρχεται επίσης από αυτό το σημείο. Άρα αυτό το σημείο πρέπει να είναι το σημείο Cantor της τριάδας σημείων P_1, P_2, P_3 ως προς το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$.

Θεώρημα

Έστω $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P_1, P_2, P_3$ οκτώ ομοκυκλικά σημεία. Τότε τα πέντε σημεία Cantor της τριάδας σημείων P_1, P_2, P_3 ως προς τα τετράπλευρα $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_2A_3A_4$ είναι συγγραμμικά. Η γραμμή αυτή καλείται γραμμή Cantor της τριάδας των σημείων P_1, P_2, P_3, ως προς το πεντάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Απόδειξη

Όπως προηγουμένως, υποθέτουμε ότι ο κύκλος μας είναι ο μοναδιαίος και $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, t_1, t_2, t_3$ οι μιγαδικοί αριθμοί που αναπαριστούν τα σημεία $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P_1, P_2, P_3$ αντίστοιχα. Τότε, το σημείο Cantor της τριάδας σημείων P_1, P_2, P_3 ως προς το τετράπλευρο $A_2A_3A_4A_5$ δίνονται από

$$z=\frac{1}{2}\left(t_1+t_2+t_3+u_2+u_3+u_4+u_5-\frac{u_2u_3u_4u_5}{t_1t_2t_3}\right).$$

Θέτοντας,

$$\sigma_1=u_1+u_2+u_3+u_4+u_5,$$

$$\sigma_2=u_1u_2+u_1u_3+u_1u_4+u_1u_5+u_2u_3+u_2u_4+u_2u_5+u_3u_4+u_3u_5+u_4u_5,$$

$$\sigma_3=u_1u_2u_3+u_1u_2u_4+u_1u_2u_5+u_1u_3u_4+u_1u_3u_5+u_1u_4u_5+u_2u_3u_4+u_2u_3u_5+u_2u_4u_5+u_3u_4u_5,$$

$$\sigma_4=u_2u_3u_4u_5+u_1u_3u_4u_5+u_1u_2u_4u_5+u_1u_2u_3u_5+u_1u_2u_3u_4$$

$$\sigma_5=u_1u_2u_3u_4u_5,$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$z=\frac{1}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\sigma_1-u_1-\frac{\sigma_5}{u_1t_1t_2t_3}\right)$$

Άρα $\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{\sigma_4}{\sigma_5}-\frac{1}{u_1}-\frac{u_1t_1t_2t_3}{\sigma_5}\right).$

Απαλείφοντας το u_1 από αυτές τις δύο σχέσεις παίρνουμε

[illegible]

Αυτή είναι μια σχέση η οποία πρέπει να ικανοποιείται από το σημείο Cantor της τριάδας των σημείων P_1, P_2, P_3 ως προς το τετράπλευρο $A_2A_3A_4A_5$. Ωστόσο, αυτή η σχέση είναι συμμετρική ως προς τα A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 και άρα πρέπει επίσης να ικανοποιείται από τα σημεία Cantor της τριάδας P_1, P_2, P_3 ως προς τα τετράπλευρα $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_2A_3A_4$. Από την άλλη πλευρά αυτή είναι η εξίσωση μιας γραμμής. Άρα αυτά τα πέντε σημεία Cantor είναι συγγραμμικά.

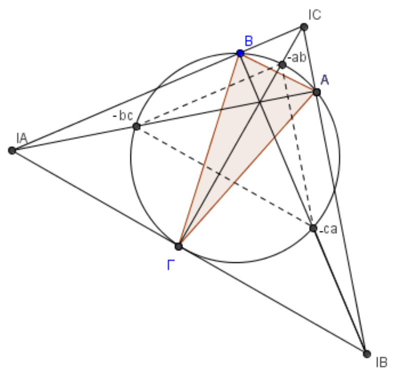
2.13 Το θεώρημα του Feuerbach

Έστω *H* το ορθόκεντρο του τριγώνου *ABC*. Σημειώνοντας ότι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου *ABC* είναι επίσης ένας κύκλος των 9 σημείων των τριγώνων *HBC*, *HCA*, *HAB*, το ακόλουθο θεώρημα του 1822 που αποδίδεται στον K. W. Feuerbach (1800-1834), καθηγητή Γυμνασίου στο Erlangen της Γερμανίας, είναι πραγματικά αξιοσημείωτο.

Θεώρημα

Ο κύκλος των 9 σημείων ενός τριγώνου είναι εφαπτόμενος στον εγγεγραμμένο κύκλο και τους τρεις ‘εξωτερικούς’ κύκλους του τριγώνου.

Απόδειξη



Χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι το τρίγωνο *ABC* εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο. Για να αποφύγουμε την ασάφεια των προσήμων στις τετραγωνικές ρίζες για τους μιγαδικούς αριθμούς, υποθέτουμε ότι οι κορυφές *A*, *B*, *C* αναπαρίστανται από τους μιγαδικούς αριθμούς a^2, b^2, c^2 αντίστοιχα. Η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας *A* του τριγώνου διέρχεται από το μέσο του τόξου *BC* που δεν περιέχει την κορυφή *A*, ενώ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας *A* του τριγώνου διέρχεται από το μέσο του τόξου

BC που δεν περιέχει το *A*. Έστω το τελευταίο *bc*, τότε το προηγούμενο είναι το *–bc*. Ομοίως *ca* το μέσο του τόξου *CA* που περιέχει το *B*, ενώ το άλλο *–ca*. Με τον ίδιο

τρόπο, *ab* το μέσο του τόξου *AB* που περιέχει το *C* και *–ab* αυτό στο συμπληρωματικό τόξο. Τότε, οι εξισώσεις των τριών εσωτερικών διχοτόμων είναι:

$$z - a^2bc\bar{z} = a^2 - bc$$

$$z - b^2ca\bar{z} = b^2 - ca$$

$$z - c^2ab\bar{z} = c^2 - ab$$

Αντίστοιχα. Λύνοντας το σύστημα δύο εκ των ανωτέρω εξισώσεων παίρνουμε

$$z = -(bc + ca + ab).$$

Ως συνήθως, θεωρώντας

$$\sigma_1 = a + b + c$$

$$\sigma_2 = bc + ca + ab$$

$$\sigma_3 = abc$$

το παραπάνω σημείο τομής γίνεται $z = -\sigma_2$.

Εύκολα, λόγω συμμετρίας επαληθεύεται ότι το σημείο αυτό ικανοποιεί και την τρίτη εξίσωση.

Έχουμε δείξει ότι οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου συναντώνται σε ένα σημείο το οποίο καλείται *έκκεντρο* (incenter) του τριγώνου.

Όμως *I*: $-\sigma_2 = -bc - ca - ab$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου με κορυφές στα *–bc, -ca, -ab*. Εκ των υστέρων, αυτό είναι φανερό αν συγκρίνουμε την εξίσωση της εσωτερικής διχοτόμου στην κορυφή *A*, με αυτή της γραμμής που ενώνει τα σημεία *–ab, -ca*:

$$z + a^2bc\bar{z} = -ca - ab.$$

Αυτό ισχύει επίσης και για τις άλλες δυο διχοτόμους των γωνιών του τριγώνου.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα *περίκεντρα* (excenter) I_A, I_B, I_C είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων με κορυφές τα

-bc, ab, ca

-ca, bc, ab

-ab, ca, bc αντίστοιχα.

Εφόσον αυτά τα τρίγωνα είναι εγγεγραμμένα στο μοναδιαίο κύκλο, έχουμε

$I_A: -bc+ca+ab$,

$I_B: -ca+ab+bc$,

$I_C: -ab+bc+ca$.

Η απόσταση *d* μεταξύ του έκκεντρου *I* και του κέντρου του κύκλου των 9 σημείων του τριγώνου ABC είναι:

$$d=\left|\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\sigma_2\right|=\left|\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right)\right|=\frac{1}{2}\left|(a+b+c)^2\right|$$
$$=\frac{1}{2}\sigma_1\bar{\sigma}_1=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3}.$$

Ξέρουμε πως η ακτίνα του κύκλου των 9 σημείων είναι $\frac{1}{2}$. Τώρα θα υπολογίσουμε την ακτίνα *r* του εγγεγραμμένου κύκλου. Η εξίσωση της γραμμής *BC* είναι $z+b^2c^2\bar{z}=b^2+c^2$, και άρα η εξίσωση της κάθετης από το έκκεντρο *I(-σ₂)* στο *BC* είναι:

$$z-b^2c^2\bar{z}=-\sigma_2+b^2c^2\bar{\sigma}_2=-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}.$$

Άρα το ίχνος αυτής της καθέτου δίνεται από

$$z=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}\right).$$

Έπεται ότι η ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου είναι

$$r=\left|\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\sigma_2+\frac{bc\sigma_1}{a}\right)+\sigma_2\right|=\left|\frac{1}{2}(b^2+c^2)+\frac{\sigma_2}{2}+\frac{bc\sigma_1}{2a}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(a+b)(b+c)(c+a)\right|=\frac{1}{2}\left|\sigma_1\sigma_2-\sigma_3\right|=\left|\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_3}-\frac{1}{2}\right|=\left|d-\frac{1}{2}\right|$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $|\alpha|=1=|\sigma_3|$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $d\le\frac{1}{2}$, επομένως παίρνουμε

$r=\frac{1}{2}-d$, $d=\frac{1}{2}-r$, το οποίο μας δείχνει ότι ο κύκλος των 9 σημείων και ο εγγεγραμμένος κύκλος είναι εφαπτόμενοι εσωτερικά μεταξύ τους.

Για να αποδείξουμε ότι ο κύκλος των 9 σημείων είναι εφαπτόμενος στον εξωτερικό κύκλο I_A, αρκεί να αντικαταστήσουμε το α με $-\alpha$ και να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία.

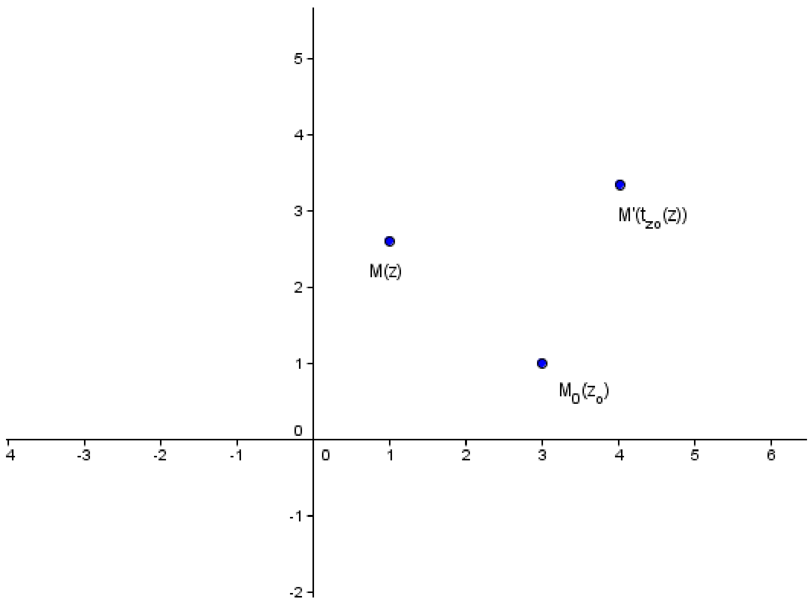
2.14 Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί στο μιγαδικό επίπεδο

A) Μεταφορά

Έστω z_0 ένας καθορισμένος μιγαδικός αριθμός και t_{z_0} η απεικόνιση που ορίζεται ως

$t_{z_0} : C \to C, \quad t_{z_o}(z) = z + z_0$.

Η απεικόνιση t_{z_0} καλείται *μεταφορά* κατά το μιγαδικό αριθμό z_o.

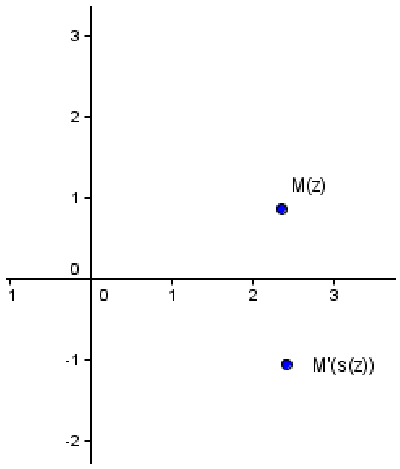


Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γεωμετρική εικόνα του $t_{z_0}(z)$ στην οποία καταλήγουμε εύκολα από την αναπαράσταση της πρόσθεσης δυο μιγαδικών αριθμών. Το $OM_0M'M$ είναι ένα παραλληλόγραμμο και η OM' είναι μια από τις διαγωνίους του. Έτσι, η απεικόνιση t_{z_0} αντιστοιχεί στη μεταφορά $t_{\overline{OM_0}}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OM_0}$.

Είναι φανερό πως η σύνθεση δυο μεταφορών t_{z_1} και t_{z_2} ικανοποιεί τη σχέση $t_{z_1} \circ t_{z_2} = t_{z_1+z_2}$. Είναι επίσης φανερό ότι το σύνολο T όλων των μεταφορών του μιγαδικού επιπέδου είναι μια ομάδα που περιέχει τη σύνεση των απεικονίσεων. Η ομάδα $(T,\circ)$ είναι αβελιανή με μονάδα το $t_O = 1_C$, η μεταφορά του μιγαδικού αριθμού 0.

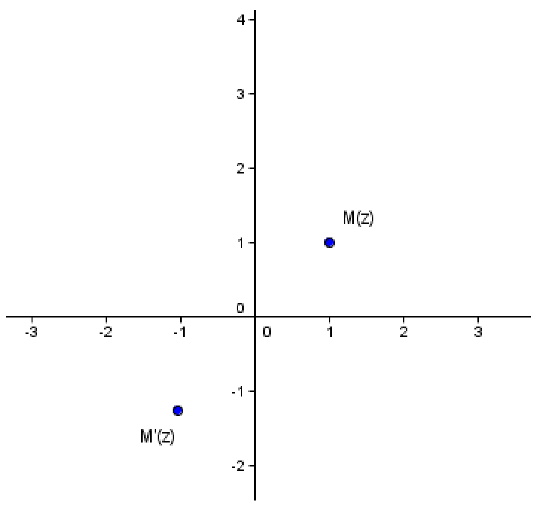
<u>Β) Ανάκλαση ως προς των άξονα των Πραγματικών</u>

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $s: C \to C, s(z) = \overline{z}$. Αν Μ είναι σημείο με συντεταγμένη z, τότε το σημείο $M'(s(z))$ προκύπτει από την ανάκλαση του Μ ως προς τον άξονα των πραγματικών. Η απεικόνιση x καλείται ανάκλαση ως προς τον άξονα των πραγματικών. Είναι φανερό ότι $s \circ s = 1_C$.



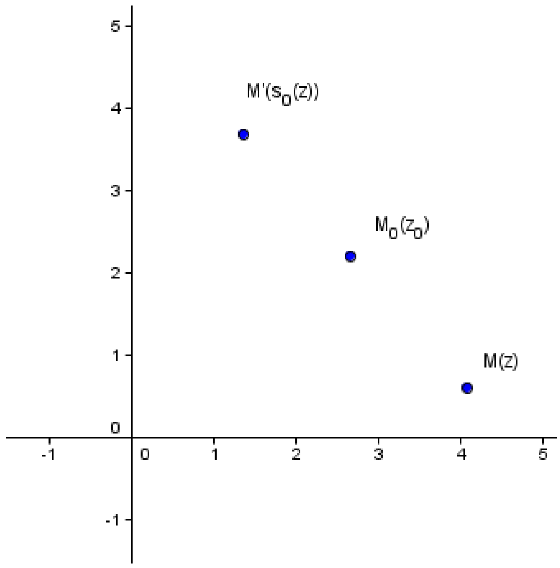
<u>Γ) Ανάκλαση ως προς σημείο</u>

Θεωρούμε την απεικόνιση $s_0 : C \to C, \quad s_{z_o}(z) = -z$. Εφόσον $s_0(z) + z = 0$, η αρχή 0 είναι το μέσο του τμήματος $[M(z)M'(z)]$. Άρα M' είναι η ανάκλαση του σημείου Μ ως προς το 0.



Η απεικόνιση s_0 καλείται ανάκλαση ως προς το Ο.

Θεωρούμε τώρα ένα δοσμένο μιγαδικό αριθμό z_0 και την απεικόνιση: $s_{z_0} : C \to C$, $s_{z_0}(z) = 2z_0 - z$. Εάν $z_0, z, s_{z_0}(z)$ είναι οι συντεταγμένες των σημείων M_0, M, M' τότε το M_0 είναι το μέσο του τμήματος $[MM']$, άρα M' είναι η ανάκλαση του Μ ως προς το M_0. Η απεικόνιση s_{z_0} καλείται ανάκλαση ως προς το σημείο $M_0(z_0)$. Είναι εμφανές ότι ισχύει η σχέση $s_{z_0} \circ s_{z_0} = 1_C$.



Δ) Στροφή

Έστω $a = \cos t_0 + i \sin t_0$ ένας μιγαδικός αριθμός μέτρου 1, και r_a απεικόνιση που δίνεται ως $r_a : C \to C, r_a(z) = az$. Αν $z = \rho(\cos t + i \sin t)$, τότε $r_a(z) = az = \rho[\cos(t + t_0) + i \sin(t + t_0)]$ άρα το $M'(r_a(z))$ προκύπτει από τη στροφή του σημείου $M(z)$ γύρω από το Ο κατά γωνία $t_0 = \arg a$.

Ε) Ισομετρικός Μετασχηματισμός

Ορισμός

Μια απεικόνιση $f : C \to C$ καλείται ισομετρία αν διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή για κάθε $z_1, z_2 \in C$, $|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$.

<u>Θεώρημα</u>

Μεταφορές, ανακλάσεις (ως προς τον άξονα των πραγματικών ή ως προς σημείο) και στροφές γύρω από το Ο είναι ισομετρίες του μιγαδικού επιπέδου

<u>Απόδειξη</u>

Για τη μεταφορά t_{z_0} έχουμε $|t_{z_0}(z_1)-t_{z_0}(z_2)|=|(z_1+z_0)-(z_2+z_0)|=|z_1-z_2|$.

Για την ανάκλαση s ως προς τον άξονα των πραγματικών έχουμε

$|s(z_1)-s(z_2)|=|\overline{z_1}-\overline{z_2}|=|\overline{z_1-z_2}|=|z_1-z_2|$, και το ίδιο ισχύει για ανάκλαση ως προς σημείο.

Τέλος, αν r_a μια στροφή τότε $|r_a(z_1)-r_a(z_2)|=|az_1-az_2|=|a||z_1-z_2|=|z_1-z_2|$ εφόσον $|a|=1$.

<u>Σημείωση</u>

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε πως η σύνθεση δυο ισομετριών είναι επίσης μια ισομετρία.

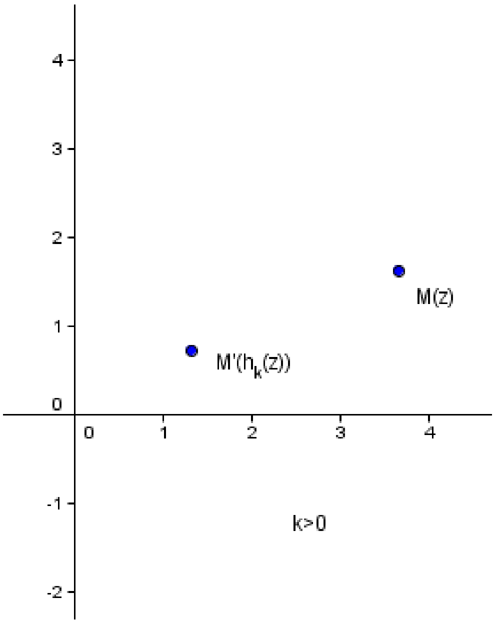
Το σύνολο $I_{z_0}(C)$ όλων των ισομετριών του μιγαδικού επιπέδου αποτελεί ομάδα ως προς τη σύνθεση των απεικονίσεων και η $(T,\circ)$ αποτελεί μια υποομάδα αυτής.

<u>Ομοιοθεσία</u>

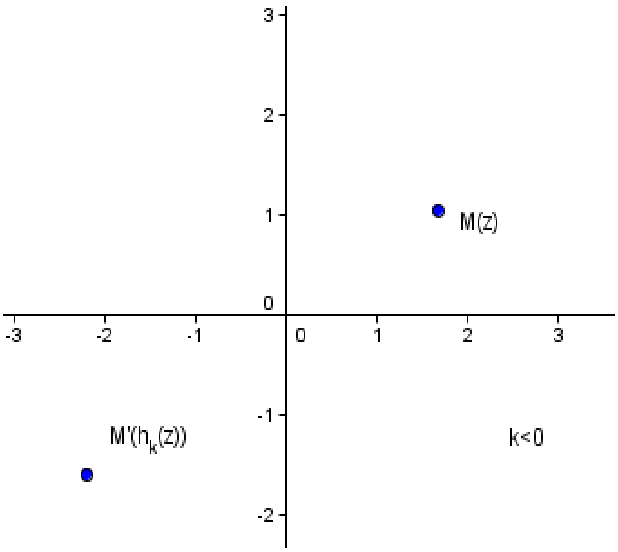
Για δοσμένο μη μηδενικό πραγματικό αριθμό k, η απεικόνιση $h_k : C \to C, h_k(z)=kz$ καλείται *ομοιοθεσία* στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το Ο και μέτρο k.

Οι παρακάτω εικόνες δείχνουν τη θέση του σημείου $M'(h_k(z))$ στην περίπτωση που α) $k>0$ και β) $k<0$.

α)



β)



Επιπλέον ισχύει η σχέση $|OM'| = |k|\,|OM|$.

Το σημείο M' καλείται ομοιόθετο του σημείου Μ με κέντρο το Ο και μέτρο k.

Είναι φανερό πως η σύνθεση δυο ομοιοθεσιών h_{k_1} και h_{k_2} είναι επίσης ομοιοθεσία, δηλαδή $h_{k_1} \circ h_{k_2} = h_{k_1 k_2}$.

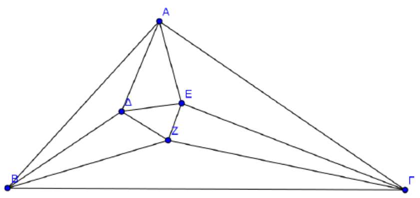
Το σύνολο H όλων του μιγαδικού επιπέδου είναι είναι μια αβελιανή ομάδα ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων. Το ταυτοτικό στοιχείο αυτής της ομάδας $(H,\circ)$, είναι το $h_1 = 1_C$, δηλαδή μια ομοιοθεσία μέτρου 1.

2.15 Το θεώρημα του Morley

Το ακόλουθο θεώρημα ανακαλύφθηκε από τον Frank Morley (1860-1934) περίπου στην αλλαγή αυτού του αιώνα και δίκαια χαρακτηρίζεται ως ένα από τα ομορφότερα θεωρήματα των Μαθηματικών.

Θεώρημα(Morley)

Τα σημεία τομής των ζευγών των τριχοτόμων ενός τυχαίου τριγώνου είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.



Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα

Έστω t_1, t_2, t_3, t_4 τρία σημεία στον μοναδιαίο κύκλο. Τότε, οι χορδές που ενώνουν τα t_1, t_2 και t_3, t_4 συναντώνται στο σημείο $z = \dfrac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4}$.

Απόδειξη

Οι εξισώσεις των ευθειών που ενώνουν τα t_1, t_2, και τα t_3, t_4 είναι

$z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2$, $\quad z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4$, αντίστοιχα.

Άρα το σημείο τομής τους είναι το $z = \dfrac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4}$.

Απόδειξη του θεωρήματος του Morley

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το τρίγωνο ABC εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο, και η κορυφή A βρίσκεται στο σημείο 1.

Θεωρούμε

$$\angle AOB = 3\gamma \quad \left(0<\gamma<\frac{2\pi}{3}\right),$$

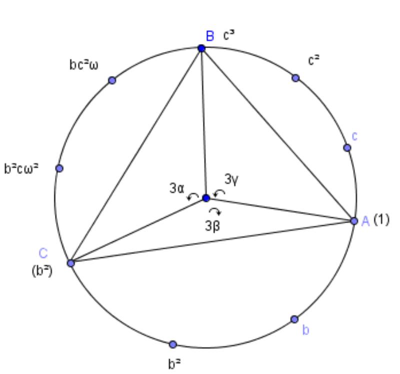
$$\angle AOC = 3\beta \quad \left(-\frac{2\pi}{3}<\beta<0\right),$$

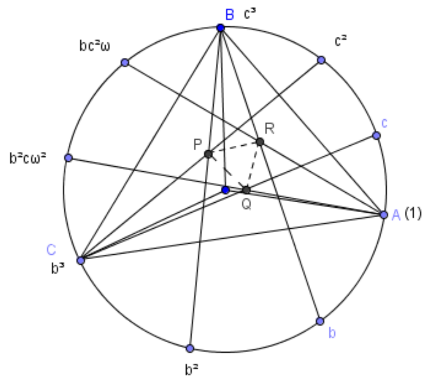
$$\angle BOC = 3\alpha \quad \left(\alpha=\frac{2\pi}{3}+\beta-\gamma>0\right).$$

Τότε τα ορίσματα των σημείων που τριχοτομούν το τόξο $\widehat{BC}$ (που δεν περιέχει το A) είναι

$$\alpha+3\gamma=\beta+2\gamma+\frac{2\pi}{3},$$

και $2\alpha+3\gamma=2\beta+\gamma+\frac{4\pi}{3}.$





Έτσι, αν θέσουμε τα σημεία που τριχοτομούν τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{AC}$ να είναι *c*, c^2 και *b*, b^2 αντίστοιχα, τότε *B*, *C* είναι c^3 και b^3, και τα σημεία που τριχοτομούν το τόξο $\widehat{BC}$ δίνονται από τα $bc^2\omega$ και $b^2c\omega^2$, όπου $\omega^2+\omega+1=0$.

Έστω *P(λ), Q(μ), R(ν)* τα σημεία τομής των παρακείμενων τριχοτόμων των γωνιών *B* και *C*, *C* και *A, A* και *B* αντίστοιχα. Τότε, από το τελευταίο λήμμα,

$$\lambda=\frac{b^2c^3(b^3+c^2)-b^3c^2(b^2+c^3)}{b^2c^3-b^3c^2}=\frac{b^3c-b^3+c^3-bc^3}{b-c}=\frac{(b-c)\left(bc(b+c)-(b^2+bc+c^2)\right)}{b-c}=$$

$$=-(b^2+bc+c^2)+bc(b+c),$$

$$\mu = \text{[illegible]} = \frac{b^3c + b\omega c - b^3}{b\omega - 1} = \frac{c\left(b^3 - 1\right) + b\left(b^2 - c\omega\right)}{c\left(b - \omega^2\right)} =$$

$$= \text{[illegible]}$$

$$\nu = \text{[illegible]} = \frac{b^3c + c\omega^2 - c^3 - b}{c\omega^2 - 1} = \frac{b\left(c^3 - 1\right) + c\left(c^2 - \omega^2\right)}{\omega^2 c\left(c - \omega\right)} =$$

$$= \text{[illegible]}.$$

Οπότε έχουμε,

$$\lambda + \omega\mu + \omega^2\nu = \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}$$

$$= 0$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε αποδείξει ότι τα τρίγωνο *PRQ* είναι ισόπλευρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3.1 Αλγεβρικές εξισώσεις και πολυώνυμα

Πρόβλημα

Θεωρούμε την τετραγωνική εξίσωση $a^2z^2 + abz + c^2 = 0$ όπου $a, b, c \in C^*$ και έστω z_1, z_2 οι ρίζες της.

Να αποδειχθεί ότι αν $\frac{b}{c}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $|z_1| = |z_2|$ ή $\frac{z_1}{z_2} \in \Re$.

Λύση

Έστω $t = \frac{b}{c} \in \Re$. Τότε $b = tc$ και $\Delta = (ab)^2 - 4a^2 \cdot c^2 = a^2c^2(t^2 - 4)$.

- Εάν $|t| \geq 2$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

  $z_{1,2} = \dfrac{-tac \pm ac\sqrt{t^2-4}}{2a^2} = \dfrac{c}{2a}\left(-t \pm \sqrt{t^2-4}\right)$ και είναι φανερό ότι $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- Εάν $t < 2$ οι ρίζες της εξίσωσεις είναι:

  $z_{1,2} = \dfrac{c}{2a}\left(-t \pm i\sqrt{4-t^2}\right)$, άρα $|z_1| = |z_2| = \dfrac{|c|}{|a|}$.

Πρόβλημα

Έστω $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και πραγματικές ρίζες. Να αποδειχθεί ότι αν $|f(i)| = 1$ τότε $a = b = c = d = 0$.

Λύση

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου f. Τότε, $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ και $|f(i)| = \sqrt{1 + x_1^2} \cdot \sqrt{1 + x_2^2} \cdot \sqrt{1 + x_3^2} \cdot \sqrt{1 + x_4^2}$.

Επειδή $|f(i)| = 1$ συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ και κατά συνέπεια $a = b = c = d = 0$.

Πρόβλημα

Να αποδειχθεί ότι εάν $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$ τότε $|z| = 1$.

Λύση

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως $z^9 = \dfrac{11 - 10iz}{11z + 10i}$. Εάν $z = a + bi$, τότε

$$|z|^9 = \left|\frac{11 - 10iz}{11z + 10i}\right| = \frac{\sqrt{11^2 + 220b + 10^2\left(a^2 + b^2\right)}}{\sqrt{11^2\left(a^2 + b^2\right) + 220b + 10^2}}.$$

Έστω $f(a,b) = \sqrt{11^2 + 220b + 10^2\left(a^2 + b^2\right)}$ και $g(a,b) = \sqrt{11^2\left(a^2 + b^2\right) + 220b + 10^2}$.

Εάν $|z| > 1$ τότε $a^2 + b^2 > 1$, άρα $g(a,b) > f(a,b)$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\left|z^9\right| < 1$ και αποτελεί αντίφαση στην υπόθεσή μας.

Εάν $|z| < 1$ τότε $a^2 + b^2 < 1$, άρα $g(a,b) < f(a,b)$ από το οποίο έπεται ότι $\left|z^9\right| > 1$ και πάλι αποτελεί αντίφαση. Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι $|z| = 1$.

3.2 Από τις αλγεβρικές ταυτότητες στις γεωμετρικές ιδιότητες

Πρόβλημα

Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ τα οποία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Να δειχθεί ότι τα τμήματα AA', BB', CC' μπορούν να αποτελούν πλευρές τριγώνου.

Λύση

Έστω a, b, c και a', b', c' οι συντεταγμένες των κορυφών A, B, C και A', B', C' αντίστοιχα. Επειδή τα τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ είναι όμοια έχουμε από προηγούμενο θεώρημα ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 .$$

Δηλαδή, $a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0$ (1). Επιπλέον, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πως ισχύει και η ακόλουθη σχέση: $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$ (2). Αφαιρώντας τη σχέση (2) από την (1) βρίσκουμε $(a'-a)(b-c)+(b'-b)(c-a)+(c'-c)(a-b)=0$ από την οποία συνεπάγεται ότι $|a'-a||b-c| \le |b'-b||c-a|+|c'-c||a-b|$ (3). Επειδή όμως $|b-c|=|c-a|=|a-b|$ παίρνουμε $AA' \le BB'+CC'$. Ομοίως αποδεικνύονται και οι ανισότητες $BB' \le CC'+AA'$ και $CC' \le AA'+BB'$ και έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Σημείωση

1. Αν τα τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ είναι όμοια, ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό τότε από τη σχέση (3) προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα $AA' \cdot BC \le BB' \cdot CA + CC' \cdot AB$ (4). Η ανισότητα αυτή ονομάζεται γενικευμένη ανισότητα του Πτολεμαίου. Η ανισότητα του Πτολεμαίου προκύπτει όταν το τρίγωνο $A'B'C'$ εκφυλίζεται σε σημείο.
2. Από την ανισότητα (4) έχουμε επίσης ότι $BB' \cdot CA \le CC' \cdot AB + AA' \cdot BC$ και $CC' \cdot AB \le AA' \cdot BC + BB' \cdot CA$. Έπεται ότι για κάθε δυο όμοια τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ με τον ίδιο προσανατολισμό και που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με μήκη τις πλευρές $AA', BC, BB' \cdot CA, CC' \cdot AB$.
3. Σε περίπτωση που το τρίγωνο $A'B'C'$ εκφυλίζεται σε ένα σημείο Μ έπεται ότι τα τμήματα MA, MB, MC είναι οι πλευρές ενός τριγώνου.

Πρόβλημα

Έστω P ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου του τριγώνου ABC. Τότε $\alpha \cdot PB \cdot PC + \beta \cdot PC \cdot PA + \gamma \cdot PA \cdot PB \ge \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου ABC.

Λύση

Θεωρούμε την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου στο P και έστω a, b, c οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ABC. Από την αλγεβρική ταυτότητα

$\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$. Παίρνοντας τώρα την απόλυτη τιμή έπεται ότι $\dfrac{|b||c|}{|a-b||a-c|}+\dfrac{|c||a|}{|b-c||b-a|}+\dfrac{|a||b|}{|c-a||c-b|}\geq 1$ (1).

Δεδομένου ότι $|a|=PA, |b|=PB, |c|=PC$ και $|b-c|=\alpha, |c-a|=\beta, |a-b|=\gamma$ η ανισότητα (1) είναι ισοδύναμη με την $\dfrac{PB\cdot PC}{\beta\cdot\gamma}+\dfrac{PC\cdot PA}{\gamma\cdot a}+\dfrac{PA\cdot PB}{\alpha\cdot\beta}\geq 1$, η οποία με τη σειρά της είναι ισοδύναμη με τη ζητούμενη ανισότητα.

Πρόβλημα

Έστω a,b,c τρεις διακριτοί μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7=0$. Να δειχθεί ότι οι a,b,c είναι οι συντεταγμένες των κορυφών ενός ισόπλευρου τριγώνου.

Λύση

Έστω $x=a-b, y=b-c, z=c-a$. Επειδή $x+y+z=0$ και $x^7+y^7+z^7=0$, βρίσκουμε ότι $(x+y)^7-x^7-y^7=0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη σχέση $7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2=0$. Όμως $xyz\neq 0$, άρα $x^2+xy+y^2=0$ δηλαδή $x^3=y^3$. Λόγω συμμετρίας $x^3=y^3=z^3$, άρα $|x|=|y|=|z|$.

3.3 Επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων

Πρόβλημα

Έστω ένα παραλληλόγραμμο και εξωτερικά κάθε πλευράς αυτού σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο. Να δειχθεί ότι τα κέντρα των τετραγώνων είναι οι κορυφές ενός άλλου τετραγώνου.

`

Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό επίπεδο με αρχή των αξόνων το σημείο τομής των διαγωνίων και έστω $a,b,-a,-b$ οι συντεταγμένες των κορυφών A,B,C,D αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τύπους στροφής παίρνουμε $b = z_{O_1} + (a - z_{O_1}) \cdot (-i)$ ή $z_{O_1} = \dfrac{b+ai}{1+i}$.

Ομοίως, $z_{O_2} = \dfrac{a-bi}{1+i}$, $z_{O_3} = \dfrac{-b-ai}{1+i}$, $z_{O_4} = \dfrac{-a+bi}{1+i}$.

Έπεται ότι $O_4\hat{O_1}O_2 = \arg\dfrac{z_{O_2} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_1}} = \arg\dfrac{a - bi - b - ai}{-a + bi - b - ai} = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$, έτσι

$O_1O_2 = O_1O_4$ και $O_2\hat{O_3}O_4 = \arg\dfrac{z_{O_4} - z_{O_3}}{z_{O_2} - z_{O_3}} = \arg\dfrac{-a + bi + b + ai}{a - bi + b + ai} = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$ άρα

$O_3O_4 = O_3O_2$. Οπότε το $O_1O_2O_3O_4$ είναι τετράγωνο.

Πρόβλημα

Έστω τρεις ίσοι μεταξύ τους κύκλοι $C_1(O_1, r), C_2(O_2, r), C_3(O_3, r)$ που έχουν ένα κοινό σημείο O. Οι κύκλοι $C_1 \,\&\, C_2$, $C_2 \,\&\, C_3$ και $C_3 \,\&\, C_1$ συναντώνται πάλι στα σημεία A, B, C αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC ισούται με r.

Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό επίπεδο με την αρχή των αξόνων στο σημείο O και έστω z_1, z_2, z_3 οι συντεταγμένες των κέντρων O_1, O_2, O_3 αντίστοιχα. Έπεται ότι τα σημεία A, B, C έχουν συντεταγμένες $z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_3 + z_1$, άρα $AB = |(z_1 + z_2) - (z_2 + z_3)| = |z_1 - z_3| = O_1O_3$. Ομοίως $BC = O_1O_2$ και $AC = O_2O_3$, άρα τα τρίγωνα ABC και $O_1O_2O_3$ είναι ίσα. Συνεπώς οι ακτίνες των περιγεγγραμμένων σε αυτούς κύκλους είναι ίσες. Εφόσον $OO_1 = OO_2 = OO_3 = r$ οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $O_1O_2O_3$ και ABC ισούνται με r.

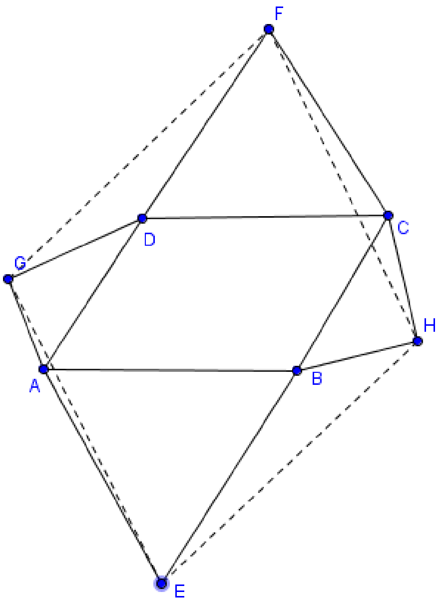
Πρόβλημα

Στις πλευρές AB και CD ενός δοσμένου παραλληλόγραμμου $ABCD$ σχεδιάζουμε εξωτερικά τα ισόπλευρα τρίγωνα ABE και CDF. Στις πλευρές AD και BC σχεδιάζουμε εξωτερικά τετράγωνα με κέντρα τα G και H αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι το $EHFG$ είναι παραλληλλόγραμμο.

Λύση

Συμβολίζουμε με πεζά γράμματα τις συντεταγμένες του αντίστοιχου σημείου.

Εφόσον το $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $a+c=b+d$.



Εφαρμόζοντας στροφή κατά 90° με κέντρα τα G και H, τα σημεία A και C απεικονίζονται στα D και B αντίστοιχα/ Τότε $d-g=(a-g)i$ και $b-h=(c-h)i$, άρα $g=\dfrac{d-ai}{1-i}$ και $h=\dfrac{b-ci}{1-i}$.

Εφαρμόζοντας τώρα στροφή κατά 60° με κέντρα τα E και F, τα σημεία B και D απεικονίζονται στα σημεία A και C αντίστοιχα. Τότε $a-e=(b-e)\varepsilon$ και $c-f=(d-f)\varepsilon$ όπου $\varepsilon=\cos 60^{o}+i\sin 60^{o}$. Άρα $e=\dfrac{a-b\varepsilon}{1-\varepsilon}$ και $f=\dfrac{c-d\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Παρατηρούμε ότι $g+h=\dfrac{d+b-(a+c)i}{1-i}=\dfrac{(a+c)-(a+c)i}{1-i}=a+c$ και $e+f=\dfrac{a+c-(b+d)\varepsilon}{1-\varepsilon}=\dfrac{a+c-(a+c)\varepsilon}{1-\varepsilon}=a+c$, άρα το τετράπλευρο $EHFG$ είναι παραλληλόγραμμο.

3.4 Επίλυση Τριγωνομετρικών Προβλημάτων

Πρόβλημα

Να δειχθεί ότι $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$.

Λύση

Θέτοντας $z=\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}$ συνεπάγεται ότι

$z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$. Παίρνοντας τώρα το πραγματικό μέρος και των δύο μελών της παραπάνω σχέσης έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πρόβλημα

Να υπολογιστεί το γινόμενο $P=\cos 20^o\cdot\cos 40^o\cdot\cos 80^o$.

Λύση 1

Θέτοντας $z=\cos 20+i\sin 20$ συνεπάγεται ότι $z^9=-1$, $\bar{z}=\cos 20-i\sin 20$ και $\cos 20=\frac{z^2+1}{2z}$, $\cos 40=\frac{z^4+1}{2z^2}$, $\cos 80=\frac{z^8+1}{2z^4}$. Τότε

$$P=\frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7}=\frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7(z^2-1)}=\frac{z^{16}-1}{8(z^9-z^7)}=\frac{-z^7-1}{8(-1-z^7)}=\frac{1}{8}.$$

Λύση 2

Αυτό είναι ένα κλασικό πρόβλημα με μια κλασική λύση:

Θέτουμε $S=\cos 20\cos 40\cos 80$. Τότε

$S\sin 20=\sin 20\cos 20\cos 40\cos 80=$

$=\frac{1}{2}\sin 40\cos 40\cos 80=\frac{1}{4}\sin 80\cos 80=\frac{1}{8}\cos 160=\frac{1}{8}\sin 20$

Οπότε $S=\frac{1}{8}$.

Παρατήρηση

Η τελευταία κλασική λύση είναι καθαρά επινοήσιμη χωρίς καθόλου κίνηση, ενώ η πρώτη λύση με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών είναι ένας απλός υπολογισμός.

Πρόβλημα

Έστω x, y, z τρείς πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$\sin x + \sin y + \sin z = 0$ και $\cos x + \cos y + \cos z = 0$.

Να δειχθεί ότι $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ και $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

Λύση

Θέτοντας $z_1 = \cos x + i \sin x, z_2 = \cos y + i \sin y, z_3 = \cos z + i \sin z$ έχουμε

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Επιπλέον,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = -2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) =$$

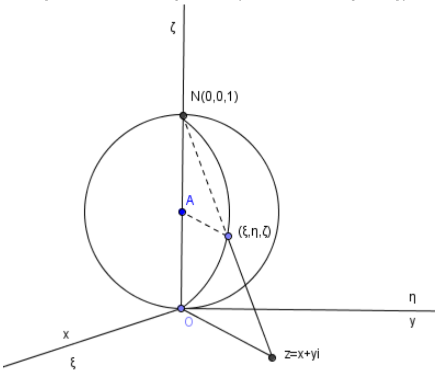
$$= -2z_1 z_2 z_3 \left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} \right) = -2z_1 z_2 z_3 \left(\overline{z_1 + z_2 + z_3} \right) = 0 .$$

Έτσι $(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + i(\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z) = 0$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $4^{Ο}$ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MOBIUS

4.1 Στερεογραφική προβολή

Μέχρι τώρα έχουμε αναπαραστήσει τους μιγαδικούς αριθμούς ως σημεία στο επίπεδο. Τώρα θα τους δούμε και ως σημεία πάνω στη σφαίρα.



Έστω μια σφαίρα με μοναδιαία διάμετρο, εφαπτόμενη στο μιγαδικό επίπεδο στην αρχή των αξόνων. Με όρους ορθογώνιων συντεταγμένων *(ξ,η,ζ)*, η εξίσωση της σφαίρας είναι $\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Για κάθε σημείο $z=x+iy$ του μιγαδικού επιπέδου το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο αυτό με το σημείο του βόρειου πόλου συναντά τη σφαίρα σε ένα μοναδικό σημείο (διαφορετικό από αυτό του βόρειου πόλου). Αντίστροφα, για κάθε σημείο της σφαίρας διαφορετικό από αυτό του βόρειου πόλου , η επέκταση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο με αυτό του βόρειου πόλου συναντά το μιγαδικό επίπεδο σε ένα μοναδικό σημείο. Έτσι , έχουμε μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού επιπέδου και της σφαίρας του Riemann με εξαίρεση το σημείο του βόρειου πόλου. Για να απαλλαγούμε από αυτή την εξαίρεση, προσθέτουμε ένα ιδανικό σημείο που καλείται σημείο στο άπειρο (συμβολίζεται με ∞) στο μιγαδικό επίπεδο C και το αντιστοιχίζουμε στο βόρειο πόλο Ν. Αυτό το επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο το συμβολίζουμε με $\hat{C}$, έτσι ώστε $\hat{C}=C\cup\{\infty\}$.

Έστω $z=x+iy\in C$ το οποίο αντιστοιχεί στο *(ξ,η,ζ)* σημείο της σφαίρας του Riemann. Τότε από ομοιότητα τριγώνων έχουμε

$\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{1}{1-\zeta}$. Άρα, $x=\frac{\xi}{1-\zeta}$, και $y=\frac{\eta}{1-\zeta}$.

Οπότε $z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$ και $x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}$.

Αντίστροφα, λύνοντας τα *ζ, ξ, η* ως προς *x, y* και *z* παίρνουμε

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2}=\frac{z+\bar{z}}{2\left(1+|z|^2\right)}$$

$$\eta=\frac{y}{1+|z|^2}=\frac{z-\bar{z}}{2\left(1+|z|^2\right)}$$

$$\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Για να βρούμε την εικόνα ενός κύκλου (ή μιας γραμμής) του επιπέδου στη σφαίρα του Riemann, αντικαθιστούμε αυτές τις σχέσεις στην εξίσωση του κύκλου (ή της γραμμής αν *A=0*) στο επίπεδο

$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$, (όπου $A,B,C,D\in\Re$ και $B^2+C^2\geq 4AD$). Τότε παίρνουμε μια γραμμική εξίσωση $A\zeta+\mathrm{B}\xi+C\eta+D(1-\zeta)=0$.

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη ώστε αυτό το επίπεδο να τέμνει τη σφαίρα του Riemann είναι:

$$\left|\frac{\frac{1}{2(A-D)+D}}{\sqrt{B^2+C^2+(A-D)^2}}\right|\leq\frac{1}{2},$$

η οποία είναι η συνθήκη $B^2+C^2\geq 4AD$ με την οποία η αρχική εξίσωση στο μιγαδικό επίπεδο μας δίνει κύκλο. Επιπλέον, αν *A=0*, τότε ο βόρειος πόλος *N(0, 0, 1)* ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου. Εφόσον η τομή του επιπέδου και της σφαίρας είναι ένας κύκλος, έχουμε εξασφαλίσει το πρώτο μισό του ακόλουθου θεωρήματος:

<u>Θεώρημα</u>

Οι κύκλοι και οι ευθείες γραμμές στο επίπεδο, αντιστοιχίζονται σε κύκλους πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Οι ευθείες αντιστοιχίζονται σε κύκλους που διέρχονται από το βόρειο πόλο. Αντίστροφα, κύκλοι στην επιφάνεια της σφαίρας αντιστοιχίζονται σε κύκλους και ευθείες στο επίπεδο.

<u>Απόδειξη</u>

Ένας κύκλος στη σφαίρα είναι η τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο, έστω $Ax+By+Cz=d$. Αν το (ξ,η,ζ) είναι σημείο του κύκλου έχουμε

$$A\frac{x}{1+r^2}+B\frac{y}{1+r^2}+C\frac{r^2}{1+r^2}=D \text{ ή } (C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$$

η οποία αποτελεί εξίσωση γραμμής ή κύκλου στο επίπεδο ανάλογα με το αν $C=D$ ή όχι.

Αντίστροφα, μια γραμμή ή ένας κύκλος στο επίπεδο δίνεται από μια εξίσωση της παραπάνω μορφής. Αντικαθιστώντας τα x, y ως προς ξ, η, ζ παίρνουμε

$$(C-D)\frac{\zeta}{1-\zeta}+\mathrm{A}\frac{\xi}{1-\zeta}+\mathrm{B}\frac{\eta}{1-\zeta}=D \quad \text{ή} \quad A\xi+\mathrm{B}\eta+C\zeta=D,$$ άρα το σημείο (ξ, η, ζ) ανήκει στο επίπεδο που καθορίζει έναν κύκλο στη σφαίρα.

<u>Θεώρημα</u>

Η στερεογραφική προβολή διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες.

<u>Απόδειξη</u>

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι δυο τεμνόμενες καμπύλες στο επίπεδο είναι ευθείες γραμμές. Δυο ευθείες γραμμές στο επίπεδο που τέμνονται σε ένα σημείο $(x_0.y_0)$ αντιστοιχίζονται σε δύο κύκλους στη σφαίρα τεμνόμενους στο σημείο $(\xi_0.\eta_0,\zeta_0)$ στο βόρειο πόλο και αυτοί οι κύκλοι δημιουργούν την ίδια γωνία μεταξύ τους στα δύο σημεία τομής τους.

Αν οι δυο γραμμές στο επίπεδο είναι οι $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, τότε οι στερεογραφικές προβολές τους είναι στα επίπεδα $A_1\xi+B_1\eta+C_1(1-\zeta)=0$, $A_2\xi+B_2\eta+C_2(1-\zeta)=0$ αντίστοιχα.

Οι εφαπτόμενες στους αντίστοιχους κύκλους στο βόρειο πόλο είναι οι τομές αυτών των επιπέδων με το επίπεδο $\zeta=1$, δηλαδή οι εξισώσεις τους είναι

$\mathrm{A}_1\xi+\mathrm{B}_1\eta=0$, $\zeta=1$ και $\mathrm{A}_2\xi+\mathrm{B}_2\eta=0$, $\zeta=1$ αντίστοιχα.

Είναι φανερό πως η γωνία μεταξύ των δύο γραμμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι ίδια με τη γωνία μεταξύ των δυο εφαπτόμενων γραμμών στο βόρειο πόλο (εφόσον το επίπεδο $\zeta = 1$ είναι παράλληλο στο μιγαδικό επίπεδο).

4.2 Μετασχηματισμοί Möbius

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας πραγματικής συνάρτησης με πραγματική μεταβλητή, χρησιμοποιούμε το *(x,y)*-επίπεδο για το γράφημά της (*x* για τη μεταβλητή και *y* για τη συνάρτηση), το οποίο ενισχύει την οπτική μας αντίληψη και διαίσθηση αλλά δε μπορεί να γίνει στην περίπτωση μιας μιγαδικής συνάρτησης με μιγαδική μεταβλητή. Τότε χρειαζόμαστε το χώρο των τεσσάρων διαστάσεων (δυο διαστάσεις για τη μεταβλητή *z* και άλλες δύο για τη συνάρτηση *w*), κάτι πέρα από τον φυσικό μας κόσμο. Οπότε, για να μελετήσουμε μια μιγαδική συνάρτηση με μιγαδική μεταβλητή χρησιμοποιούμε δυο φύλλα μιγαδικών επιπέδων, το *z*-επίπεδο για τη μεταβλητή *z* και το *w*-επίπεδο για τη συνάρτηση *w*.

Οι μετασχηματισμοί Möbius ορίζονται από συγκεκριμένες ρητές συναρτήσεις της μορφής:

$$w = T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

και ορίζονται σε όλο το z-επίπεδο εκτός από το σημείο $z = -\frac{\delta}{\gamma}$. Η συνθήκη $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ μας εξασφαλίζει ότι το T δεν είναι σταθερά.

Ο αντίστροφος αυτού του μετασχηματισμού

$$z = T^{-1}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}, \text{ με } \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

είναι επίσης ένας Möbius μετασχηματισμός και υποδεικνύει ότι κάθε σημείο στο w-επίπεδο έχει μια μοναδική εικόνα εκτός από το σημείο $w = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Για να εξαλείψουμε τους παραπάνω περιορισμούς μπορούμε να δούμε τους μετασχηματισμούς Möbius ως αντιστοιχίες από τη σφαίρα του Riemann στον εαυτό της, ορίζοντας την εικόνα του $z=-\frac{\delta}{\gamma}$ στο $w=\infty$ και αντίστροφα, την εικόνα του $w=\frac{\alpha}{\gamma}$ στο $z=\infty$. Η παραπάνω επέκταση του ορισμού των Möbius μετασχηματισμών μας επιτρέπει να καταλήξουμε ότι οι Möbius μετασχηματισμοί είναι ένα προς ένα και επί αντιστοιχίες από το επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο $\widehat{C}$ στον εαυτό του.

Σχόλια

- Η ταυτοτική αντιστοίχηση είναι ένας Möbius μετασχηματισμός με *β=γ=0* και *α=δ*.
- Για *α=δ=1, γ=0* δηλαδή *w=z+β*, έχουμε την πρόσθεση ενός καθορισμένου διανύσματος *β* στο διάνυσμα z.
- Για *β=γ=0, δ=1* δηλαδή *w=αz*, έχουμε στροφή κατά *argα* και μεγέθυνση κατά $|\alpha|$. Αν $|\alpha|=1$, τότε το *α* είναι της μορφής $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ και το *w=αz* είναι μια περιστροφή κατά γωνία *θ*.
- Για γ=0 έχουμε $w=\frac{\alpha}{\delta}z+\frac{\beta}{\delta}$, το οποίο αποτελεί σύνθεση των δυο παραπάνω περιπτώσεων.
- Η σύνθεση μετασχηματισμών Möbius είναι ένας Möbius μετασχηματισμός:

Αν αντιστοιχήσουμε το *z*-επίπεδο στο w_1-επίπεδο, ως $w_1=Tz=\frac{az+\beta}{\gamma z+\delta}$,

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

και το w_1 επίπεδο στο *w*-επίπεδο ως $w=Sw_1=\frac{aw_1+b}{cw_1+d}$, $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$, τότε το αποτέλεσμα είναι ένας Möbius μετασχηματισμός του *z*-επιπέδου στο *w*-επίπεδο ως εξής:

$$w=STz=\frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)},\ \text{με}\ \begin{vmatrix}a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta\\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$$

Ομοίως ελέγχουμε και την προσεταιριστικότητα.

Θεώρημα

Το σύνολο Μ των Möbius μετασχηματισμών αποτελεί *ομάδα*.

Ονομαστικά, ισχύουν τα ακόλουθα αξιώματα:

(a) Για δύο $T, S \in M$ το γινόμενο (σύνθεση) *TS* ορίζεται και είναι ένα στοιχείο του *M*. Δηλαδή, $TS \in M$.

Το γινόμενο των Möbius μετασχηματισμών μας θυμίζει το γινόμενο πινάκων: για τους Möbius μετασχηματισμούς T και S ως $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ τότε $ST = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$.

(b) Το *M* έχει ένα στοιχείο *I*, που καλείται *ταυτοτικό*, με την ιδιότητα $TI = IT = T$ για κάθε $T \in M$.

(c) Σε κάθε στοιχείο $T \in M$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $T^{-1} \in M$, το οποίο καλείται *αντίστροφο* του *T*, με την ιδιότητα $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

(d) Στο *M* ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε $T, S, U \in M$ ισχύει $(TS)U = T(SU)$.

Κάποιοι συγκεκριμένοι Möbius μετασχηματισμοί

- Ποιος ο μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει το πάνω μισό επίπεδο $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ στο μοναδιαίο δίσκο $\{w \mid |w| \leq 1\}$;

Εφόσον ο μετασχηματισμός Möbius αντιστοιχίζει γραμμές σε γραμμές ή κύκλους, η εικόνα του άξονα των πραγματικών πρέπει να είναι κύκλος. Επιπλέον, εφόσον ο άξονας των πραγματικών είναι το σύνορο του πάνω μισού επιπέδου, και οι μετασχηματισμοί Möbius είναι συνεχείς, η εικόνα του άξονα των πραγματικών πρέπει να είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|w| = 1$. Ειδικότερα, αν $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ είναι ο μετασχηματισμός, τότε $|T(0)| = |T(\infty)| = 1$. Έτσι, πρέπει να έχουμε $|b| = |d|$ και $|a| = |c|$. Από τη δεύτερη συνθήκη μπορούμε να γράψουμε $\dfrac{a}{c} = e^{i\theta}$ για κάποια γωνία *θ*, και ο T γίνεται $T(z) = e^{i\theta} \dfrac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}$, όμως εφόσον έχουμε $|b| = |d|$, παίρνουμε $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|$.

Αν τώρα, x είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του άξονα των πραγματικών, τότε $|T(x)| = 1$, και άρα $\left|x + \frac{b}{a}\right| = \left|x + \frac{d}{c}\right|$.

Οπότε, $\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) = \left(x + \frac{d}{c}\right)\left(x + \frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right)$ ή $\left(\frac{b}{a} + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)x = \left(\frac{d}{c} + \frac{\bar{d}}{\bar{a}}\right)x$.

Επειδή $\frac{b}{a} + \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{b}{a}\right)$ και $\frac{d}{c} + \frac{\bar{d}}{\bar{c}} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{d}{c}\right)$, τα $\frac{b}{a}$ και $\frac{d}{c}$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος και το ίδιο μέτρο. Έτσι, είτε $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ είτε $\frac{b}{a} = \frac{\bar{d}}{\bar{c}}$. Η πρώτη εναλλακτική μας δίνει $T(z) = e^{i\theta} = \sigma\tau\alpha\theta$ και θέτοντας $z_0 = -\frac{b}{a}$ παίρνουμε $T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$.

Αυτός είναι ο ζητούμενος Möbius μετασχηματισμός υπό την προϋπόθεση ότι το z_0 ανήκει στο πάνω μισό επίπεδο. Αν το z_0 ανήκει στο κάτω μισό επίπεδο, το πάνω μισό επίπεδο απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

- Ποιός ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στον εαυτό του;

Ο αντίστροφος του παραπάνω μετασχηματισμού T^{-1} απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο πάνω μισό επίπεδο. Παίρνοντας $\{z \mid |z| \le 1\}$ ως το μοναδιαίο δίσκο και $\{\zeta \mid \operatorname{Im}(\zeta) \ge 0\}$ ως το πάνω μισό επίπεδο έχουμε $\zeta = \mathrm{T}^{-1}(z) = \dfrac{\bar{z}_0 z - e^{i\theta} z_0}{z - e^{i\theta}}$.

Θεωρούμε έναν τέτοιο καθορισμένο μετασχηματισμό, έστω τον $\zeta = S(z) = -1\dfrac{z-1}{z+1}$.

Τότε, ο $U(z) = T(\zeta) = TS(z)$ απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο μοναδιαίο δίσκο.

Εφόσον ο $T = US^{-1}$ είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πάνω μισό επίπεδο στο μοναδιαίο δίσκο, ο U απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στον εαυτό του.
Υπολογίζοντας ρητά το *U* έχουμε

$$Uz = e^{i\theta}\frac{i\frac{z+1}{z-1}-z_0}{i\frac{z+1}{z-1}-\bar{z}_0} = e^{i\theta}\frac{(z_0-i)z-(z_0+i)}{(\bar{z}_0-i)z-(\bar{z}_0+i)} = e^{i\theta}\frac{(z_0+i)}{(\bar{z}_0+i)}\left(\frac{z-\frac{z_0-i}{z_0+i}}{1-\frac{\bar{z}_0-i}{\bar{z}_0+i}z}\right).$$

<u>Σταθερά σημεία και ταξινόμηση των μετασχηματισμών Möbius</u>

Ένα σημείο z_0 καλείται *σταθερό σημείο* ενός μετασχηματισμού *T* αν $Tz_0 = z_0$. Ένα σταθερό σημείο ενός Möbius μετασχηματισμού $w=\frac{az+b}{cz+d}$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $cz^2+(d-a)z-b=0$.

Εφόσον αυτή είναι μια τετραγωνική εξίσωση ως προς z, αν ένας Möbius μετασχηματισμός έχει 3 (ή περισσότερα) σταθερά σημεία τότε όλοι οι συντελεστές πρέπει να μηδενίζονται δηλαδή $c = 0,\ d-a=0,\ b = 0$, και έτσι ο T είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.

Αν εξαιρέσουμε αυτή την περίπτωση έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(a) Αν c=0, a-d=0 τότε ο T είναι μια μεταφορά $w=Tz=z+k$ με $k = \frac{b}{a}$, και το σημείο στο άπειρο είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του *T*.

Αν *c=0, a-d*$\neq 0$ τότε ο *T* είναι της μορφής $w=Tz=\left(\frac{a}{d}\right)z+\left(\frac{b}{d}\right)$ και ο *T* έχει 2 σταθερά σημεία, το $\frac{b}{d-a}$ και το σημείο στο άπειρο. Αν θέσουμε $Sz=z-\frac{b}{d-a}$ έχουμε

$$STS^{-1}z = \frac{a}{d}\left(z+\frac{b}{d-a}\right)+\frac{b}{d}-\frac{b}{d-a} = \frac{a}{d}z,$$

δηλαδή $T=S^{-1}US$ όπου $Uz=\frac{a}{d}z$ είναι μια διαστολή.

(b) Αν $c\neq 0, D\neq 0$ όπου $D=(d-a)^2+4bc$ η διακρίνουσα, ο T έχει 2 διακριτές ρίζες τις $\alpha=\dfrac{a-d+\sqrt{D}}{2c}$ και $\beta=\dfrac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$.

Θέτοντας $Sz=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ έχουμε $\dfrac{w-\alpha}{w-\beta}=k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ δηλαδή $S(Tz)=Sw=k(Sz)$ με $T=S^{-1}US$, όπου $Uz=kz$ $\left(k=\dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c}\right)$ είναι μια διαστολή.

Αν $c\neq 0, D=0$ τότε ο T έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\alpha=\beta=\dfrac{a-d}{2c}$. Εφόσον ο T αντιστοιχίζει το $z=\alpha$ στο $w=\alpha$ μπορούμε να γράψουμε $\dfrac{1}{w-a}=\dfrac{h}{z-a}+k$ για κατάλληλες σταθερές h και k. Αντικαθιστώντας $z=\infty, w=\dfrac{a}{c}$ και $z=0, w=\dfrac{b}{d}$ παίρνουμε $k=\dfrac{2c}{a+d}, h=1$.

Έτσι, αν θέσουμε $Sz=\dfrac{1}{z-a}$, τότε $S(Tz)=Sw=\dfrac{1}{w-a}=\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{2c}{a+d}=Sz+k$ με $T=S^{-1}VS$, όπου ο $Vz=z+k$ μια μεταφορά.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $w=Tz=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ένας Möbius μετασχηματισμός και $D=(a-d)^2+4bc$. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(a) $c=0$. Αν $D=0$, τότε το σημείο στο άπειρο είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του T, και ο T μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή: $w=z+k$ με $\left(k=\dfrac{b}{d}\right)$.

Αν $D\neq 0$ τότε ο T έχει δυο διακριτά σταθερά σημεία, το $\gamma=\dfrac{b}{d-a}$ και το σημείο στο άπειρο και ο T μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή: $w-\gamma=k(z-\gamma)$ με $\left(k=\dfrac{a}{d}\right)$.

(b) $c \neq 0$. Αν $D \neq 0$, τότε ο T έχει 2 διακριτά σταθερά σημεία: $\alpha = \dfrac{a-d+\sqrt{D}}{2c}$, $\beta = \dfrac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$ και ο T μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή : $\dfrac{w-\alpha}{w-\beta} = k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ με $\left(k = \dfrac{a-c\alpha}{a-c\beta} = \dfrac{a+d+\sqrt{D}}{a+d-\sqrt{D}}\right)$.

Αν $D=0$, ο T έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$ και ο T μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή: $\dfrac{1}{w-\alpha} = \dfrac{1}{z-\alpha} + k$ με $\left(k = \dfrac{2c}{a+d}\right)$.

Συνοψίζοντας,

(a) Ένας Möbius μετασχηματισμός T έχει 2 σταθερά σημεία αν και μόνο αν $D \neq 0$, και σε αυτή την περίπτωση ο T είναι όμοιος με μια διαστολή, ενώ

(b) Ο T έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο αν και μόνο αν $D=0$ και σε αυτή την περίπτωση ο T είναι όμοιος με μια μεταφορά.

4.3 Διπλός Λόγος

Ορισμός

Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{C}$. Ο διπλός λόγος τους ορίζεται ως εξής:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}.$$

Σχόλια-επέκταση

Για να γενικεύσουμε το παραπάνω, επεκτείνουμε τον ορισμό του διπλού λόγου και στην περίπτωση που ένα από τα σημεία μας είναι το ∞. Δηλαδή στην περίπτωση που $z \to \infty$ ο διπλός λόγος γίνεται:

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z-z_2}{z-z_3} \Big/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} = \left(\frac{1-\frac{z_2}{z}}{1-\frac{z_3}{z}}\right)\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right) \xrightarrow{z\to\infty} \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}.$$

Έπεται ότι μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα Möbius μετασχηματισμό μου μεταφέρει τρία δοσμένα σημεία $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{C}$ σε τρία προκαθορισμένα διακριτά σημεία $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{C}$ ως εξής:

$\frac{w-w_2}{w-w_3} \Big/ \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} \Big/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ και λύνοντας ως προς *w*.

Ένας Möbius μετασχηματισμός μπορεί να καθοριστεί πλήρως από τους λόγους των συντελεστών του. Άρα, δεδομένων τριών συνθηκών μπορούμε να βρούμε το Möbius μετασχηματισμό που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες. Ειδικότερα, ένας κύκλος καθορίζεται από τρία σημεία και έτσι μπορούμε να βρούμε το Möbius μετασχηματισμό που απεικονίζει το δοσμένο κύκλο του *z*-επιπέδου σε ένα δοσμένο κύκλο του *w*-επιπέδου.

Έστω ότι $\frac{aw+b}{cw+d} = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

Επιλύοντας το *w* ως προς *z*, βρίσκουμε το *w* ως ένα Möbius μετασχηματισμό του *z*.

Έτσι, αν ένας Möbius μετασχηματισμός απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3 στα w_1, w_2, w_3, τότε μπορούμε να γράψουμε $\frac{w-w_2}{w-w_3} = k\frac{z-z_2}{z-z_3}$, όπου η σταθερά *k* μπορεί να προσδιοριστεί.

Ανεξάρτητα από την τιμή του *k*, ο μετασχηματισμός Möbius καθορίζεται από την ισότητα των αντιστοιχήσεων z_2, z_3 στα w_2, w_3 αντίστοιχα. Έτσι, μένει να υπολογίσουμε το *k* έτσι ώστε να αντιστοιχίσουμε το z_1 στο w_1, δηλαδή $\frac{w-w_2}{w-w_3} = k\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$. Επιλύοντας το k από την τελευταία ισότητα και αντικαθιστώντας το στην παραπάνω, παίρνουμε:

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} \Big/ \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} \Big/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

Αυτό, μας δίνει το μετασχηματισμό Möbius που αντιστοιχίζει τα z_1, z_2, z_3 στα w_1, w_2, w_3, αντίστοιχα.

Αν αυτός μετασχηματισμός απεικονίζει και το z_0 στο w_0 τότε θα έχουμε:

$$\frac{w_0 - w_2}{w_0 - w_3} \Big/ \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \Big/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$, δηλαδή $(w_0, w_1; w_2, w_3) = (z_0, z_1; z_2, z_3)$.

<u>Θεώρημα</u>

Ο διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος κάτω από τους μετασχηματισμούς Möbius.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $w = \frac{az+b}{cz+b}$ ο μετασχηματισμός και w_i οι εικόνες των $z_i, i=1, 2, \dots, 4$. Τότε, $w_i - w_j = \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$, από το οποίο παίρνουμε εύκολα ότι $(w_1, w_2; w_3, w_4) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$.

<u>Πόρισμα</u>

Υπάρχει ένας Möbius μετασχηματισμός που απεικονίζει τα z_0, z_1, z_2, z_3 στα w_0, w_1, w_2, w_3 αν και μόνο αν

$(w_0, w_1; w_2, w_3) = (z_0, z_1; z_2, z_3)$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω z_i' τα αντίστροφα των σημείων $z_i, i=1, 2, \dots, 4$ ως προς ένα κύκλο C. Τότε $(z_1', z_2'; z_3', z_4') = \overline{(z_1, z_2; z_3, z_4)}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω z_0 το κέντρο του κύκλου C και r η ακτίνα του. Η αντιστροφή ως προς αυτόν δίνεται ως εξής $z' = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}$.

Έτσι, $z_i' - z_j' = \frac{r^2}{\overline{z_i} - \overline{z_0}} - \frac{r^2}{\overline{z_j} - \overline{z_0}} = \frac{r^2(\overline{z_j} - \overline{z_i})}{(\overline{z_i} - \overline{z_0})(\overline{z_j} - \overline{z_0})}$ από το οποίο έπεται το αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα</u>

Το θεώρημα αυτό είναι η βασική γεωμετρική ιδιότητα του διπλού λόγου.

Τέσσερα διαφορετικά σημεία είναι ομοκυκλικά ή συγγραμμικά αν και μόνο αν ο διπλός λόγος τους είναι πραγματικός αριθμός.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω z_1, z_2, z_3, z_4 τα τέσσερα σημεία και T ο μετασχηματισμός Möbius που αντιστοιχίζει τα z_1, z_2, z_3 στα ∞, *0, 1* αντίστοιχα. Δηλαδή $T(z) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z_3)}$.

Τότε, $(z_1, z_2; z_3, z_4) = T(z_4)$ [illegible]. Όμως ο T αντιστοιχίζει γραμμές και κύκλους σε γραμμές και κύκλους και τα ∞, *0, 1* είναι συγγραμμικά, άρα ο άξονας των πραγματικών είναι η εικόνα της γραμμής ή του κύκλου που διέρχεται από τα z_1, z_2, z_3. Έτσι, το z_4 ανήκει σε αυτή τη γραμμή ή τον κύκλο αν και μόνο αν ο $T(z_4)$ είναι πραγματικός.

<u>Βασική Ιδιότητα</u>

Για τρία δοσμένα σημεία z_1, z_2, z_3 και ενός αριθμού $\lambda \in C$, με $\lambda \neq 0, 1, \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο z_4 έτσι ώστε $(z1, z2; z3, z4) = \lambda$. Γιατί, αν $\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \lambda$ μπορούμε να λύσουμε ως προς z_4. Ορίζοντας $\mu = \frac{(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)}$ παίρνουμε $z_4 = \frac{\mu z_2 - \lambda z_1}{\mu - \lambda}$.

4.4 ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΣΧΟΛΙΑ

Έστω C κύκλος με κέντρο το σημείο O και ακτίνα r. Εάν το P είναι οποιοδήποτε σημείο, εκτός του O, το αντίστροφο του P ως προς τον C είναι το σημείο P', που ανήκει στην ευθεία OP, ώστε το γινόμενο των αποστάσεων των P και P' από το O να ισούται με r^2. Η αντιστροφή σε έναν κύκλο μερικές φορές αναφέρεται ως "ανάκλαση" στον κύκλο.

Προφανώς εάν το P' είναι ο αντίστροφος του P τότε το P είναι ο αντίστροφος του P'. Επίσης εάν το P βρίσκεται εντός του C, τότε το P' βρίσκεται εκτός του C, και αντίστροφα. Συνεπώς, το εσωτερικό του C εκτός του O χαρτογραφείται στο

εξωτερικό αυτού, και το εξωτερικό στο εσωτερικό. Ωστόσο, σημεία κοντά στο O αναπαρίστανται με σημεία μακριά από το O και αντίστροφα.

Ορίζουμε $\overline{PQ}$ το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος PQ. Η ισότητα και η ομοιότητα στα τρίγωνα συμβολίζεται με $\sim$ και $\cong$, αντίστοιχα.

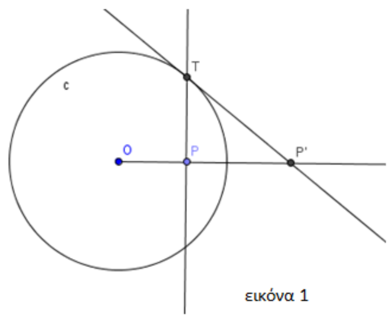
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ

Α΄ τρόπος:

Έστω P στο εσωτερικό του κύκλου αντιστροφής C, PT κάθετη στην OP όπου T το σημείο τομής του C με την PT. Η εφαπτομένη του C στο σημείο T τέμνει την ημιευθεία OP στο P' (εικόνα 1). Το P' είναι ο αντίστροφος του P. Πράγματι, $\Delta OPT \sim \Delta OTP'$ και έτσι,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP'}} \Leftrightarrow \overline{OP}\cdot\overline{OP'} = r^2$$

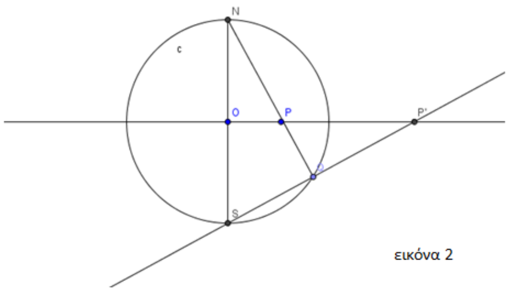
Εάν το P είναι εκτός του C κατασκεύασε εφαπτομένη του C από το P που συναντά το C στο T. Η κάθετη από το T στην ημιευθεία OP τέμνει την OP στο αντίστροφο σημείο P' βασιζόμενη στο ίδιο επιχείρημα.



εικόνα 1

Β΄ τρόπος:

Έστω η διάμετρος NS του C (N, S σημεία του κύκλου C), κάθετη στο OP που διέρχεται από το O και έστω ημιευθεία NP που τέμνει τον C στο Q και SQ τέμνει τον OP στο P' (εικόνα 2). Τότε [illegible] και άρα [illegible].



εικόνα 2

Συνεπώς το P' είναι ο αντίστροφος του P.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Η **πρώτη βασική ιδιότητα** που θα αποδειχθεί είναι ότι οι ευθείες και οι κύκλοι, ως κλάση, αντιστρέφονται σε ευθείες και κύκλους.

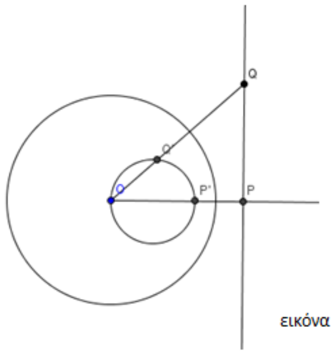
Θεώρημα 1

i. Η αντιστροφή μιας γραμμής που περνά από το κέντρο της αντιστροφής είναι η ίδια η γραμμή.
ii. Η αντιστροφή μιας γραμμής που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής είναι κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής.
iii. Η αντιστροφή ενός κύκλου που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής είναι γραμμή που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής.
iv. Η αντιστροφή ενός κύκλου που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής είναι κύκλος που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής.

<u>Απόδειξη</u>

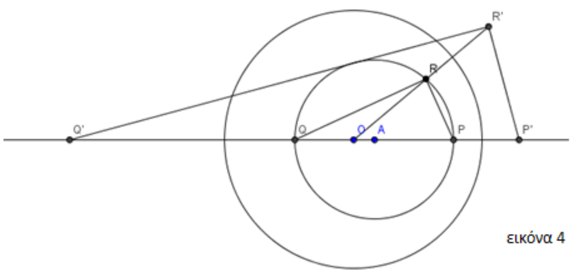
Έστω C ο κύκλος αντιστροφής με κέντρο O και ακτίνα r.

i. Αφού το O και το ζεύγος των αντίστροφων σημείων είναι συνευθειακά το ζητούμενο είναι προφανές.
ii. Έστω η κάθετη στη δοθείσα ευθεία l που διέρχεται από το O και συναντά την l στο P και έστω P' ο αντίστροφος του P (εικόνα 3). Έστω Q ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στην ευθεία και Q' το αντίστροφό του. $\overline{OQ'} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP'} \cdot \overline{OP} = r^2 \Rightarrow \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$ και άρα $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$. Συνεπώς, $\angle OQ'P'$ είναι ορθή και έτσι το Q' είναι σημείο ενός κύκλου A διαμέτρου OP΄. Επομένως η εικόνα της γραμμής αντιστοιχίζεται στο σύνολο A των σημείων.



εικόνα 3

iii. Έστω P το σημείο του δοθέντος κύκλου διαμετρικά αντίθετο του O και έστω P' το αντίστροφο του P (στην εικόνα 3 αντέστρεψε τους ρόλους των P και P' και Q και Q'). Έστω Q ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο του κύκλου και Q' το αντίστροφό του. Και πάλι $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$. Συνεπώς, η $\angle OP'Q'$ είναι ορθή και έτσι το Q' βρίσκεται στην κάθετη της ημιευθείας OP στο P'. Το αποτέλεσμα προκύπτει όπως παραπάνω.
iv. Έστω A ο δοθέν κύκλος με κέντρο A. Εάν O=A το ζητούμενο είναι άμεσο. Υποθέτουμε, λοιπόν $O \neq A$. Έστω η ευθεία που περνά από το O και το Α και τέμνει τον A στα P και Q και έστω P' και Q' τα αντίστροφα σημεία των P και Q. Τότε, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OR} \cdot \overline{OR'} = r^2$ και έτσι $\Delta OPR \sim \Delta OR'P'$. Ομοίως, προκύπτει $\Delta OQR \sim \Delta OR'Q'$. Έτσι, $\angle OPR = \angle OR'P'$ και όμοια $\angle OQR = \angle OR'Q'$, όμως η $\angle PRQ$ είναι ορθή και κατά συνέπεια και η



εικόνα 4

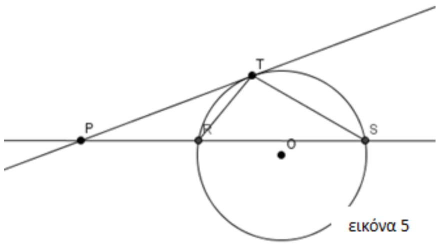
$\angle P'R'Q$. Επομένως καθώς το σημείο R κινείται στον A, το σημείο R' κινείται στον A' με διάμετρο $P'Q'$ και κάθε σημείο στον A' είναι η αντίστροφη εικόνα ενός σημείου του A.

□

Η **δεύτερη βασική ιδιότητα** της αντιστροφής είναι ότι ένας κύκλος ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής αντιστρέφεται στον εαυτό του.

Θεώρημα 2

Κάθε κύκλος που διέρχεται από ένα ζεύγος αντίστροφων σημείων είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής, και αντίστροφα, κάθε κύκλος που τέμνει τον κύκλο αντιστροφής ορθογώνια και διέρχεται από ένα σημείο P διέρχεται και από το αντίστροφό του, P΄.



εικόνα 5

Αυτό το θεώρημα αποτελεί άμεση συνέπεια του γνωστού θεωρήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

"Το τετράγωνο του ευθυγράμμου τμήματος της εφαπτομένης που ορίζεται από το σημείο επαφής και ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου είναι ίσο με το γινόμενο των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζονται από το εξωτερικό σημείο και τα σημεία τομής με τον κύκλο."

Πόρισμα

Ένας κύκλος που είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής αντιστρέφεται στον εαυτό του.

<u>Πόρισμα</u>

Έστω δύο σημεία P και Q εντός του κύκλου C και όχι στην ίδια διάμετρο. Τότε από αυτά διέρχεται μοναδικός κύκλος ορθογώνιος στον C.

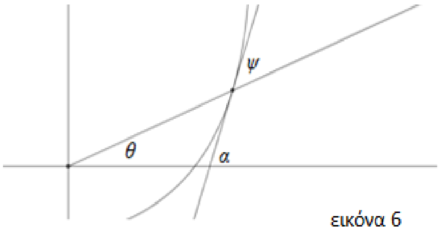
> <u>Σχόλιο</u>: Το τελευταίο πόρισμα είναι σημαντικό για το μοντέλο του Poincare στην υπερβολική γεωμετρία, όπου τα σημεία της ορίζονται ως τα εσωτερικά σημεία ενός κύκλου C και οι γραμμές του είναι οι διάμετροι του C και τόξα κύκλων ορθογώνια στο C. Είναι εύκολο να δούμε ότι το αξίωμα της παραλληλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν ισχύει σε αυτή τη Γεωμετρία. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι άλλα αξιώματα της Ευκλείδειας ισχύουν και άρα το αξίωμα της παραλληλίας είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα.

Η **τρίτη και βασικότερη ιδιότητα** της αντιστροφής είναι η ύπαρξη σύμμορφης συνάρτησης.

Έστω C_1 και C_2 δύο διαφορίσιμες καμπύλες που τέμνονται σε ένα σημείο P με εφαπτόμενες ευθείες στο P.

(Υπενθύμιση: εάν μία επίπεδη καμπύλη δίνεται παραμετρικά από τα $x(t), y(t)$ με $x'(t_0)$ και $y'(t_0)$ όχι ταυτόχρονα μηδέν τότε η καμπύλη έχει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο $(x(t_0), y(t_0))$ και συγκεκριμένα το $x'(t_0)i + y'(t_0)j$).

- Γωνία μεταξύ δύο διαφορίσιμων καμπύλων καλείται η γωνία μεταξύ των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο P
- Ένας μετασχηματισμός που σκιαγραφεί ένα υποσύνολο του επιπέδου στο επίπεδο, καλείται σύμμορφος στο P, αν διατηρεί τη γωνία μεταξύ των καμπύλων στο P.
- Ένας μετασχηματισμός T καλείται σύμμορφος , εάν είναι σύμμορφος σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού του.



εικόνα 6

<u>Υπενθυμίσεις</u>: Έστω (ρ,θ) οι πολικές συντεταγμένες του επιπέδου και έστω διαφορίσιμη καμπύλη ρ=f(θ). Έστω α η γωνία της κλίσης των δύο εφαπτόμενων ευθειών και ψ=α-θ. Τότε, cotψ=dρ/ρ.dθ ή cotψ=f΄(θ)/f(θ)

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η καμπύλη δίνεται ως εξής: x=ρcosθ και y=ρsinθ. Τότε,

[illegible]

Αντικαθιστώντας $\tan\psi = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$ στο και απλοποιώντας παίρνουμε τον επιθυμητό τύπο

<u>Θεώρημα 3</u>

Η αντιστροφή σε έναν κύκλο είναι μία σύμμορφος μετασχηματισμός.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω (ρ,θ) πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο με αρχή το κέντρο της αντιστροφής και έστω r η ακτίνα του κύκλου αντιστροφής. Έστω $f_i(\theta)$, $i=1,2$ δύο διαφορίσιμες καμπύλες που συναντώνται στο P και έστω $g_i(\theta)$, $i=1,2$ οι αντίστροφες εικόνες των καμπυλών. Τότε $g_i(\theta)=r^2/f_i(\theta)$. Έστω ψ_i, ϕ_i οι γωνίες μεταξύ του διανύσματος που αντιστοιχεί στη θ και τις εφαπτόμενες στα $f_i(\theta)$ και $g_i(\theta)$, αντίστοιχα. Έστω $\beta=\psi_2-\psi_1$ και $\beta'=\varphi_2-\varphi_1$ στο P. Θα δείξουμε ότι $\beta=\beta'$. Έχουμε,

[illegible]

Συνεπώς,

$$\cot\phi_i = \frac{g_i'(\theta)}{g_i(\theta)} = -\frac{f_i'(\theta)}{f_i(\theta)} = -\cot\psi_i$$

Άρα,

[illegible]

<u>Θεώρημα</u>

Ένας Möbius μετασχηματισμός διατηρεί την αντιστροφή.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ένα ζεύγος αντίστροφων σημείων *P, Q* ως προς ένα κύκλο *A* και ένας Möbius μετασχηματισμός *T* που απεικονίζει τα σημεία *R, Q* και τον κύκλο *A* στα σημεία *P΄, Q΄* και τον κύκλο *A΄* αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι τα *P΄, Q΄* είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο *A΄*.

Έστω *B΄* ένας αυθαίρετος κύκλος ορθογώνιος στον κύκλο *A΄* που διέρχεται από το σημείο *P΄*. Τότε η εικόνα του $T^{-1}B΄$ είναι ένας κύκλος ορθογώνιος στον κύκλο *A* και διέρχεται από το σημείο $T^{-1}P΄=P$. Τότε, από το Θεώρημα 2, ο κύκλος $T^{-1}B΄$ πρέπει επίσης να διέρχεται από το σημείο *Q*. Έπεται ότι ο κύκλος *B΄* πρέπει να διέρχεται από το σημείο *Q΄*, το οποίο συνεπάγεται ότι το *Q΄* είναι το αντίστροφο του *P΄* ως προς τον κύκλο *A΄*.

ΔΙΠΛΟΣ ΛΟΓΟΣ

<u>Λήμμα 1</u>

Εάν A, B, C συνευθειακά σημεία, τότε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$.

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη γίνεται κατά περίπτωση. Αν το C είναι μεταξύ των A και B τότε [illegible], το ζητούμενο. Όμοια και για τις άλλες περιπτώσεις.

<u>Λήμμα 2</u>

Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα μιας ευθείας l και Ο οποιοδήποτε σημείο της l. Τότε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Απόδειξη

Εύκολα προκύπτει από το λήμμα 1. □

Έστω AB ένα διάστημα μιας ευθείας l και έστω $P \in l$. Το P χωρίζει το AB στο λόγο $\overrightarrow{AP}/\overrightarrow{PB}$. Οι ιδιότητες αυτού του λόγου είναι οι εξής:

- είναι ανεξάρτητος από τον προσανατολισμό της l
- είναι θετικός εάν το P βρίσκεται μεταξύ των A, B και αρνητικός αν το P είναι εκτός του AB
- εάν $\overrightarrow{AP}/\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP'}/\overrightarrow{P'B}$, τότε $P = P'$.

Απόδειξη

$\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{P'B}}{\overrightarrow{P'B}}$, τότε από το λήμμα 1 $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{P'B}}$. Συνεπώς $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{P'B} \Rightarrow P = P'$.

- Εάν $r \neq -1$, τότε υπάρχει σημείο P τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AP}/\overrightarrow{PB} = r$.

Απόδειξη

Έστω η εξίσωση $r = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{r}{r+1}\overrightarrow{AB}$ και έτσι μπορούμε να βρούμε το σημείο P

- $\lim_{P\to\infty} \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -1$

Απόδειξη

Πράγματι, $r = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}} = \frac{1}{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AP}}-1} \longrightarrow -1$ □

Ορίζουμε διπλό λόγο $(A,B;C,D)$, *τεσσάρων διακριτών σημείων* A,B,C,D *το εξής:*
$$(A,B;C,D)=\frac{\overrightarrow{AC}\big/\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{AD}\big/\overrightarrow{DB}}.$$
Ο διπλός λόγος είναι θετικός, αν και το *C* και το *D* είναι μεταξύ των *A* και *B* ή κανένα εκ των δύο μεταξύ των *A* και *B*. Ο διπλός λόγος είναι αρνητικός αν τουλάχιστον ένα από τα *C* και *D* είναι ανάμεσα στα *A και B*.

Δοθέντων τριών διακριτών σημείων *A, B, C* σε μία ευθεία l, ενός πραγματικού αριθμού $\mu \neq 0$, 1 , $-\overrightarrow{AC}\big/\overrightarrow{CB}$, υπάρχει μοναδικό σημείο *D* που χωρίζει το *AB* σε λόγο $\frac{1}{\mu}\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$, με $(A,B;C,D)=\mu$. Αυτά τα τέσσερα σημεία *A, B, C, D* τα ονομάζουμε αρμονικό σύνολο αν $(A,B;C,D)=-1$ και τα συμβολίζουμε με $\mathrm{H}(A,B;C,D)$.

Εάν $\mathrm{H}(A,B;C,D)$, τότε τα μήκη των τμημάτων AC, AB, AD με αυτή τη σειρά αποτελούν αρμονική ακολουθία. Εάν $(A,B;C,D)=-1$ τότε $\overrightarrow{CB}\big/\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\big/\overrightarrow{AD}$,

όμως $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ και $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ και άρα,

$\frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\frac{\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}\Rightarrow\frac{1}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\left(1\big/\overrightarrow{AC}\right)+\left(1\big/\overrightarrow{AD}\right)}{2}$ και έτσι το $\frac{1}{\overrightarrow{AB}}$ είναι αριθμητικός μέσος των $\frac{1}{\overrightarrow{AC}}, \frac{1}{\overrightarrow{AD}}$.

Θεώρημα 4

Έστω κύκλος C με κέντρο O, και C και D ένα ζεύγος σημείων αντιστροφής ως προς τον κύκλο C. Έστω A και B τα άκρα της διαμέτρου που διέρχεται από τα C και D. Τότε, $(A,B;C,D)=-1$. Αντίστροφα, αν τα A και B είναι τα άκρα μιας διαμέτρου και $(A,B;C,D)=-1$, τότε τα C και D είναι αντίστροφα μεταξύ τους σημεία.

Απόδειξη

$\overrightarrow{AC}\big/\overrightarrow{CB} : \overrightarrow{AD}\big/\overrightarrow{DB}=$ [illegible], αλλά $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$ και έτσι

[illegible]. □

Λήμμα 3

Έστω C ο κύκλος της αντιστροφής με κέντρο O και ακτίνα r. Αν P, P' και Q, Q' είναι ζεύγη αντίστροφων σημείων, τότε:

$$\overline{P'Q'} = r^2 \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω τα O, P, Q είναι συνευθειακά. $\vec{OP}\cdot\vec{OP'} = \vec{OQ}\cdot\vec{OQ'}$, όμως $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$ και $\vec{OQ'} = \vec{OP'} + \vec{P'Q'}$ και άρα $\vec{QP}\cdot\vec{OP'} = \vec{P'Q'}\cdot\vec{OQ}$. Έτσι,

$$\overline{P'Q'} = \frac{\overline{QP}\cdot\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{QP}\, r^2}{\overline{OQ}\cdot\overline{OP}}. \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 5

Έστω A, B, C, D τέσσερα σημεία συνευθειακά με το κέντρο αντιστροφής O. Έστω, A', B', C', D' τα αντίστροφα σημεία τους. Τότε, $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

<u>Απόδειξη</u>

$$[illegible] \quad \blacksquare$$

Θεώρημα

Έστω $z_j{}^*$ τα αντίστροφα σημεία των z_j $(j = 0,1,2,3)$ ως προς ένα κύκλο. Τότε,

$$(z_0^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω T ένας Möbius μετασχηματισμός που αντιστοιχίζει τον κύκλο της αντιστροφής στον άξονα των πραγματικών. Εφόσον οι Möbius μετασχηματισμοί διατηρούν την αντιστροφή, τα σημεία z_j και $z_j{}^*$ αντιστοιχίζονται σε συζυγείς μιγαδικούς, δηλαδή αν

$w_j = Tz_j$ τότε $\overline{w_j} = Tz_j^*$ $(j=0,1,2,3)$. Επιπλέον, επειδή ένας Möbius μετασχηματισμός διατηρεί το διπλό λόγο, έχουμε:

[illegible]

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Μέσω της έννοιας της αντιστροφής, υπάρχει η δυνατότητα απόδειξης ενός θεωρήματος άμεσα και εύκολα, όπως το παρακάτω θεώρημα του Πάππου

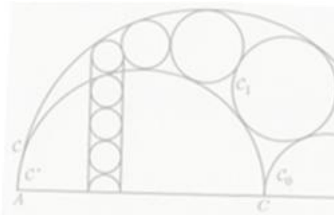
.

<u>Θεώρημα 6</u>

Έστω C, ένα ημικύκλιο με διάμετρο AB και C' και C_0 ημικύκλια, στην ίδια πλευρά του AB με διαμέτρους AC και CB αντίστοιχα. Έστω, $C_1, C_2, \cdots$ μία ακολουθία κύκλων εφαπτόμενων στο C και C', έτσι ώστε το C_n να είναι εφαπτόμενο στο C_{n-1}. Ονομάζουμε r_n την ακτίνα του C_n και d_n την απόσταση από το κέντρο του C_n στο AB. Τότε, $d_n = 2nr_n$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω a_n το μήκος της εφαπτομένης του κύκλου C_n από το A και έστω ο κύκλος αντιστροφής A_n με κέντρο το A και ακτίνα a_n.

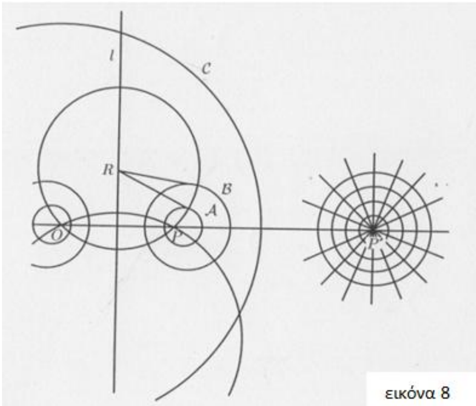


εικόνα 7

Τότε, ο C_n αντιστρέφεται στον εαυτό του. Από την άλλη οι κύκλοι C και C' διέρχονται από το A και είναι ορθογώνιοι στο AB. Έτσι, αντιστρέφονται σε ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών κάθετων στο AB. Αφού ο C_n αντιστρέφεται στον εαυτό του και είναι εφαπτόμενος στους C και C', ο C_n είναι εφαπτόμενος στις παράλληλες ευθείες. Τελικά, $C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$ θα αντιστρέφονται σε κύκλους εφαπτόμενους στις παράλληλες ευθείες και κατά συνέπεια, $d_n = 2nr_n$.

□

Έστω ο κύκλος της αντιστροφής C με κέντρο O και έστω P και P', ένα ζεύγος αντίστροφων σημείων. Οι γραμμές που περνάνε από το P' αντιστρέφονται σε μία οικογένεια κύκλων που διέρχονται από τα O και P, συμπεριλαμβανομένου μίας γραμμής που συμπίπτει με την OP. Κύκλοι ομόκεντροι στο P' είναι ορθογώνιοι στις ακτινωτές γραμμές που περνούν από το P' και άρα, από συμμόρφωση, αντιστρέφεται σε μία οικογένεια κύκλων ορθογώνιων στην πρώτη οικογένεια, συμπεριλαμβανομένης μιας γραμμής l, που είναι η αντίστροφη του κύκλου με κέντρο P' και διέρχεται από το O. Η l είναι μεσοκάθετος του OP. Αν R σημείο πάνω στην l, το R είναι κέντρο του κύκλου που ανήκει στην πρώτη οικογένεια. Έτσι, οι εφαπτομένες από το R στους κύκλους τις δεύτερης οικογένειας είναι ίσες, και η l καλείται "*ριζικός άξονας*" της δεύτερης οικογένειας.



εικόνα 8

Δοθέντων δύο μη ομόκεντρων κύκλων, χωρίς κανένα κοινό σημείο, μπορούμε να βρούμε το "*ριζικός άξονας*" τους και άρα την υπόλοιπη οικογένεια. Έστω A και B δύο κύκλοι με κέντρα *A* και *B* και έστω C ο κύκλος που τέμνει τους A και B στα σημεία *A*, *A* και *B*, *B*, αντίστοιχα. Αν οι γραμμές *AA* και *BABA* δεν είναι παράλληλες τέμνονται σε ένα σημείο του "*ριζικός άξονας*". Συνεπώς, ο "*ριζικός άξονας*" είναι κάθετος σε αυτό το σημείο, στη γραμμή που ορίζεται από τα *A* και *B*.

Θεώρημα 7

Δύο μη ομόκεντροι κύκλοι χωρίς κανένα κοινό σημείο, αντιστρέφονται σε δύο ομόκεντρους κύκλους.

Απόδειξη

Έστω A και B κύκλοι όπως παραπάνω και l ο "*ριζικός άξονας*" τους. Επιλέγοντας R πάνω στην l, φέρω τον κύκλο με κέντρο R και ακτίνα ίση με το εφαπτόμενο μήκος από το R στους A και B κύκλους. Αυτός ο κύκλος τέμνει το *AB* στα σημεία O και P. Με κέντρο αντιστροφής το O ή το P οι A και B αντιστρέφονται σε ομόκεντρους κύκλους. □

Το επόμενο θεώρημα του Steiner είναι άμεσο πόρισμα αυτού του αποτελέσματος.

<u>Θεώρημα 8</u>

Έστω A κύκλος στο εσωτερικό ενός άλλου κύκλου B. Υποθέτοντας ότι υπάρχει ακολουθία από n κύκλους $C_1,\dots,C_n$ στην περιοχή μεταξύ των A και B που εφάπτονται στους A και B ταυτόχρονα, με C_i εφαπτόμενο στο C_{i-1} και το C_n εφαπτόμενο στο C_1, υπάρχουν απείρως πολλές τέτοιες ακολουθίες και κάθε κύκλος μεταξύ των A και B που είναι εφαπτόμενος σε αυτούς, ανήκει σε μία τέτοια ακολουθία. □

Μία άλλη απλή εφαρμογή της θεωρίας της αντιστροφής είναι το ακόλουθο θεώρημα του Πτολεμαίου.

<u>Θεώρημα 9</u>

Έστω $ABCD$ κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε το γινόμενο των διαγωνίων ισούται με το άθροισμα των γινομένων των δύο ζευγών απέναντι πλευρών.

<u>Απόδειξη</u>

Αντιστρέφουμε τη διάταξη ως προς τον κύκλο αντιστροφής με κέντρο A και ακτίνα r, με B',C',D' τα αντίστροφα σημεία B,C,D. Τότε B',C',D' είναι συνευθειακά και επειδή το $ABCD$ είναι κυρτό, το C' βρίσκεται μεταξύ των B' και D'. Έτσι, $\overline{B'C'}+\overline{C'D'}=\overline{B'D'}$ και

από το λήμμα 3, έχουμε

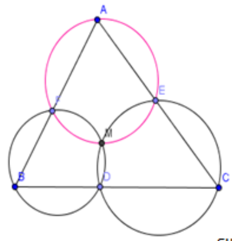
$r^2\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+r^2\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}=r^2\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}$ και έτσι, $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$ □

MIQUEL’S THEOREM

<u>Θεώρημα</u> (το μικρό θεώρημα)

Σε τρίγωνο ABC έστω D,E,F σημεία στις πλευρές απέναντι από τις κορυφές A,B,C αντίστοιχα. Τότε οι κύκλοι AEF, BDF και CDE διέρχονται από ένα κοινό σημείο M.

<u>Απόδειξη</u>



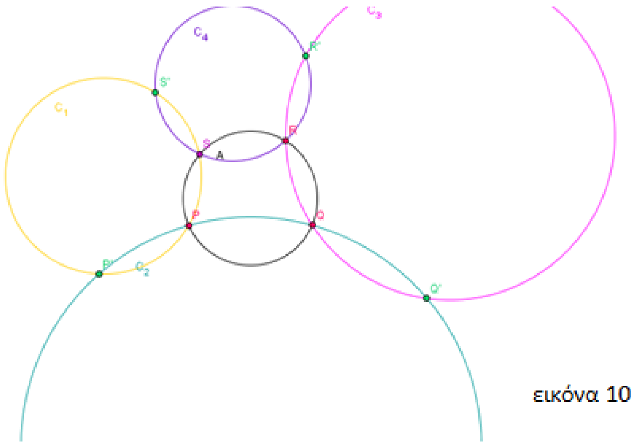
εικόνα 9

Υποθέτουμε ότι BDF και CDE τέμνονται στο M. Θα κάνουμε την απόδειξη στην περίπτωση που το M εσωτερικό του τριγώνου (ισχύει και όταν το M εξωτερικό του τριγώνου αλλά και όταν M συμπίπτει με το D πάνω στο τρίγωνο). Ενώνουμε το M με τα D,E,F . (Υπενθύμιση: Ένα τετράπλευρο μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο αν και μόνο αν οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές). Η απόδειξη, τώρα, συνεχίζει ως εξής:

[illegible] MEA και από αυτό έπεται ότι οι κορυφές του τετραπλεύρου AFME βρίσκονται πάνω σε κύκλο. □

<u>Θεώρημα</u>(το μεγάλο θεώρημα)

Έστω κύκλοι C_1,C_2,C_3,C_4 χωρίς ανά τρείς να έχουν κοινό σημείο. Υποθέτουμε ότι οι C_1,C_2 τέμνονται στα P και P΄, οι C_2,C_3 τέμνονται στα Q και Q΄, οι C_3,C_4 τέμνονται στα R και R΄ και οι C_4,C_1 τέμνονται στα S και S΄. Τότε τα P, Q, R, S βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο ή είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν ισχύει το ίδιο για τα P΄, Q΄, R΄, S΄.



εικόνα 10

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι τα P, Q, R, S βρίσκονται πάνω σε κύκλο ή γραμμή A και αντιστρέφουμε τη διάταξη με κέντρο αντιστροφής το S. Τότε τα C_1,C_4 και A αντιστρέφονται σε γραμμές που σχηματίζουν το τρίγωνο PRS΄ και οι κύκλοι C_2,C_3 αντιστρέφονται σε κύκλους. Χρησιμοποιώντας τώρα το «μικρό θεώρημα» του Miquel στο τρίγωνο PRS΄ και αντιστρέφοντας προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατηρήσεις:

- ✓ Το παραπάνω θεώρημα ισχύει ακόμα και αν ένα ζεύγος δοσμένων κύκλων είναι εφαπτόμενοι, π.χ. να συμπίπτουν τα P κα P΄ και τα υπόλοιπα ζεύγη να είναι ξένα.
- ✓ Το θεώρημα του Miquel περιλαμβάνει την ακόλουθη μικρή γενίκευση.

Θεώρημα 12

Έστω κύκλοι και γραμμές C_1,C_2,C_3,C_4 χωρίς ανά τρεις να έχουν κοινό σημείο. Υποθέτουμε ότι τα διαδοχικά ζεύγη συναντώνται στα σημεία P και P΄ κ.ο.κ όπως πριν, όπου για δυο διαδοχικές γραμμές τα σημεία τομής είναι το Ευκλείδειο σημείο της διατομής και το ‘ιδανικό σημείο’, το άπειρο. Τότε ισχύει το θεώρημα του Miquel.

Απόδειξη

Αντιστρέφοντας τη διάταξη ως προς κάποιο σημείο που δεν ανήκει στη διάταξη,
δίνεται η γνήσια Μικελιανή διάταξη. □

Αξιώματα incidence

- ✓ Στα αξιώματα incidence ενός αντίστροφου επιπέδου που ακολουθούν, το σημείο και ο κύκλος δεν ορίζονται.

A.1: Τρία διαφορετικά σημεία ορίζουν μοναδικό κύκλο

A.2: Αν P σημείο ενός κύκλου A και Q ένα σημείο που δεν ανήκει στον A, τότε υπάρχει μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τα P και Q έχοντας μόνο το P κοινό σημείο με τον A(εφαπτόμενο στον A).

A.3: Σε κάθε κύκλο υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία

A.4: Υπάρχει σημείο που δεν ανήκει στον κύκλο

Α.5: Υπάρχουν 4 κύκλοι ανά 2 εφαπτόμενοι τέτοιοι ώστε τα 6 σημεία επαφής να είναι διαφορετικά. Κανένας άλλος κύκλος που διέρχεται από αυτά τα σημεία δεν είναι εφαπτόμενος σε 3 από τους κύκλους.

Α.6: *Miquel's Big Theorem*

Με αυτό το αξίωμα το αντίστροφο επίπεδο καλείται Μικελιανό. Αυτό είναι ένα κλειστό θεώρημα της αντίστροφης Γεωμετρίας και παίζει τον ρόλο στην αξιωματική θεμελίωση παρόμοιο, με τον ρόλο που παίζει το θεώρημα του Πάππου στην αξιωματική θεμελίωση της Προβολικής Γεωμετρίας

Το θεώρημα του Feuerbach

Μια από τις πιο γνωστές εφαρμογές της Κλασσικής Θεωρίας Αντιστροφής είναι το Θεώρημα του Feuerbach, το οποίο μας λέει πως ο κύκλος των 9 σημείων ενός τριγώνου είναι εφαπτόμενος στον εγγεγραμμένο κύκλο και τους 'εξωτερικούς' κύκλους του τριγώνου. Αρχικά θα περιγράψουμε τον κύκλο των 9 σημείων και θα δώσουμε τις απαραίτητες έννοιες.

Ορθόκεντρο: Είναι το σημείο εκείνο στο οποίο συναντώνται τα ύψη του τριγώνου.

Θεώρημα

Σε ένα τρίγωνο, τα μέσα των πλευρών του, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα το ορθόκεντρο και κάθε κορυφή, βρίσκονται σε ένα κύκλο.

Απόδειξη

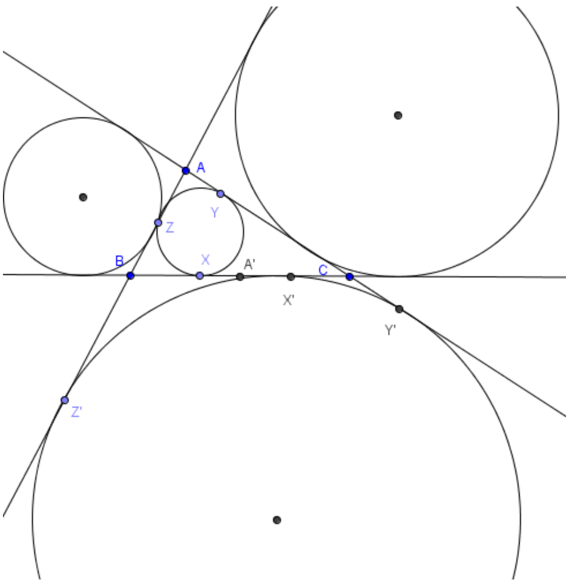
Έστω τρίγωνο ABC και A', B', C' τα μέσα των απέναντι αντίστοιχα κορυφών. Ορίζουμε D, E, F τα ίχνη των υψών από τις κορυφές A, B, C αντίστοιχα, H το ορθόκεντρο και U, V, W τα μέσα των τμημάτων AH, BH, CH αντίστοιχα. Θεωρούμε τον κύκλο C̓ που διέρχεται από τα A', B', C'. Θα δείξουμε ότι τα D, E, F και U, V, W κείνται επί του C̓.

Στο οξυγώνιο τρίγωνο ABD, το C' είναι το μέσο της υποτείνουσας και άρα $C'D=C'B$. Επίσης το τετράπλευρο $C'B'A'B$ είναι παραλληλόγραμμο εφόσον σε κάθε τρίγωνο η

πλευρά που ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών είναι παράλληλη στην Τρίτη. Έτσι το $C'B'A'B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Όμως ένα τραπέζιο μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο αν και μόνο αν είναι ισοσκελές. Έτσι ο κύκλος $\mathcal{C}$ που διέρχεται από τα A', B' και C' διέρχεται και από το D. Με παρόμοιο τρόπο, τα E και F ανήκουν στον κύκλο $\mathcal{C}$.
Για να δείξουμε ότι το U και ομοίως τα V και W ανήκουν στον $\mathcal{C}$ αρχικά θα παρατηρήσουμε ότι το $C'U$ είναι παράλληλο με το BE και άρα κάθετο στο $A'B'$. Επειδή οι γωνίες $\angle UC'A'$ και $\angle UB'A'$ είναι οξείες, τα σημεία B' και C' ανήκουν σε κύκλο με διάμετρο $A'U$ ο οποίος είναι ο $\mathcal{C}$. □

<u>Σημείωση:</u> Ο κύκλος του παραπλανω Θεωρήματος καλείται ***κύκλος των 9 σημείων*** του τριγώνου.

Όπως πολύ καλά γνωρίζουμε, οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου συμπίπτουν σε ένα σημείο το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές, οπότε αποτελεί το κέντρο ενός κύκλου εφαπτόμενο στις πλευρές του τριγώνου και ονομάζεται ***εγγεγραμμένος.*** Επίσης, η διχοτόμος μιας γωνίας και οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών των δυο άλλων κορυφών συμπίπτουν σε ένα σημείο το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούνται 3 ***εξωτερικοί κύκλοι*** του τριγώνου.



Στο τρίγωνο ABC θεωρούμε τα σημεία X,Y και Z τα οποία είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις κορυφές A,B

και *C* αντίστοιχα. Επίσης τα σημεία *X΄, Y΄* και *Z΄* ως τα σημεία επαφής των εξωτερικών κύκλων που βρίσκονται απέναντι από τις κορυφές *A,B* και *C* αντίστοιχα.

Τώρα θα αποδείξουμε ως λήμμα το γεγονός ότι το μέσο μίας πλευράς του τριγώνου είναι επίσης μέσο του τμήματος που ορίζεται από τον εγγεγραμμένο κύκλο και τον αντίστοιχο σε αυτή την πλευρά εξωτερικό.

<u>Λήμμα</u>

$\overline{XA'}=\overline{AX'}$.

<u>Απόδειξη</u>

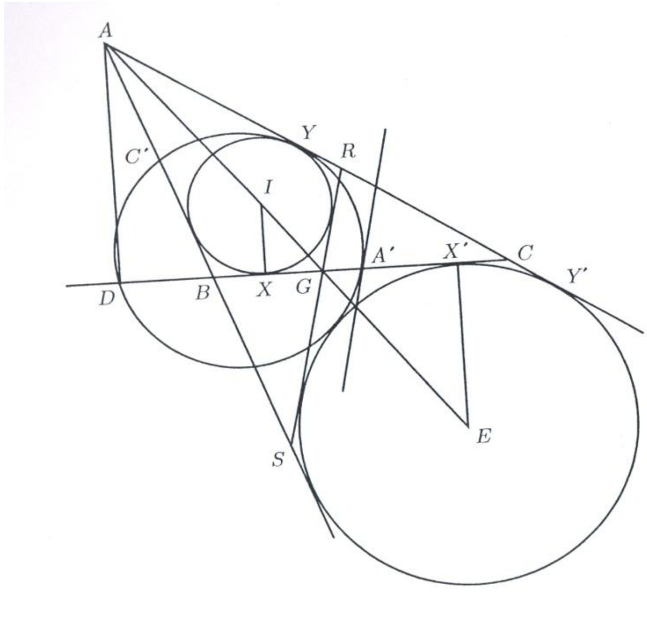
Εφόσον $\overline{BX'}=\overline{BZ}$ και $\overline{CX'}=\overline{CY}$ η περίμετρος του τριγώνου είναι $\overline{A'Z}+\overline{A'Y}=2\overline{A'}$. Όμως [illegible] και [illegible] άρα [illegible]. Επιπλέον έχουμε $\overline{CX}=\overline{A'Y}-\overline{A}$ [illegible] ή [illegible], οπότε $\overline{BX}=\overline{CX'}$ το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

<u>Θεώρημα Feuerbach</u>

Ο κύκλος των εννέα σημείων ενός τριγώνου είναι εφαπτόμενος στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου και τους τρεις εξωτερικούς.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω *ABC* το δοσμένο τρίγωνο με τα σημεία. Έστω *I* το κέντρο του εγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου $\dot{I}$ και *E* το κέντρο του εξωτερικού εφαπτόμενου κύκλου $\dot{E}$ που βρίσκεται απέναντι τις κορυφής *A*. Οι κύκλοι $\dot{I}$ και $\dot{E}$ έχουν κοινές εφαπτόμενες τις *AB, AC, CB* και μια τέταρτη *RS* που συναντά την *BC* στα *G, R* με το *R* επί της *AC* και το *S* επί της *AB* (εικόνα 1.14)



Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι τα σημεία *A, I, G, E* είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνα *AYI* και *AY΄E* είναι όμοια, όπως και τα *GXI* και *GX΄E* οπότε,

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{YI}}{\overline{Y'E}}=\frac{\overline{XI}}{\overline{X'E}}, \quad \text{άρα} \quad \frac{\overrightarrow{AI}}{\overrightarrow{IG}}=-\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EG}}.$$

Έτσι, εφόσον τα *AD, IX* και *EX΄* είναι παράλληλα έχουμε $\frac{\overrightarrow{DX}}{\overrightarrow{XG}}=-\frac{\overrightarrow{DX'}}{\overrightarrow{X'G}}$ δηλαδή ο διπλός λόγος *(DG,XX΄)=-1*. Άρα και *(XX΄, DG)=-1*.

Τώρα, αντιστρέφουμε στον κύκλο το κέντρο το *A΄* και ακτίνα $\overline{XA'}$ που ισούται με $\overline{A'X'}$ από το προηγούμενο Λήμμα. Οι κύκλοι $\dot{I}$ και $\dot{E}$ είναι ορθογώνιοι στον κύκλο της αντιστροφής και άρα αντιστρέφονται στον εαυτό τους. Ο κύκλος των 9 σημείων διέρχεται από τα *A΄* και *D*, οπότε αντιστρέφεται σε μια γραμμή ℓ που διέρχεται από το *G*, το αντίστροφο του *D* εφόσον *(XX΄, DG)=-1*. Θα δείξουμε τώρα ότι η γραμμή ℓ είναι η γραμμή *RS*, οπότε εφάπτεται στους $\dot{I}$ και $\dot{E}$, αποδεικνύοντας το θεώρημα. Αυτό προϋποθέτει να δείξουμε ότι το *RS* είναι παράλληλο στην εφαπτομένη του κύκλου των 9 σημείων στο σημείο *A΄* (το αντίστροφο ενός κύκλου που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής *A΄*, είναι μια γραμμή κάθετη στη διάμετρο του κύκλου που διέρχεται από το *A΄*). Η γωνία μεταξύ αυτής της εφαπτομένης και του *A΄B΄* είναι σύμφωνη με τη γωνία $\angle B'C'A'$, εφόσον και οι δυο αυτές γωνίες είναι το μισό του τόξου *A΄B΄*. Τώρα, η γωνία $\angle B'C'A'$ είναι σύμφωνη με τη γωνία $\angle A'CB'$, εφόσον το *B΄C΄A΄C* είναι παραλληλόγραμμο. Από ανάκλαση στη γραμμή *IE* βλέπουμε ότι η γωνία

$\angle A'CB'$ είναι σύμφωνη με τη γωνία $\angle RSA$. Έτσι, εφόσον η AS είναι παράλληλη στην $A'B'$ έπεται ότι η RS είναι παράλληλη στην εφαπτομένη στο A' άρα πρέπει να είναι η ℓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5$^{\text{Ο}}$ – ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΏΝ

Επέκταση των Μιγαδικών αριθμών - Quaternions (Τετράδες)

Ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάσαμε τους Μιγαδικούς αριθμούς υποδεικνύει ότι μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω θεωρώντας αριθμούς της μορφής $z = a + bi + cj$, όπου a, b, c τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί και i, j ορισμένα σύμβολα.

Πρόσθεση

Είναι λογικό να υιοθετήσουμε τον ακόλουθο προσθετικό νόμο γι' αυτούς τους αριθμούς:

$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j.$

Πολλαπλασιασμός

Ο πολλαπλασιαστικός νόμος χρειάζεται λίγη παραπάνω σκέψη, δεδομένου ότι πρέπει να μην μας οδηγεί σε περίεργα συμπεράσματα.. Για παράδειγμα, πρέπει να ισχύει η ισότητα $(a + 0i + 0j)(b + 0i + 0j) = ab + 0i + 0j$ η οποία δηλώνει πως για τους πραγματικούς αριθμούς ο νέος νόμος συμπίπτει με το συνήθη πολλαπλασιασμό τέτοιων αριθμών.

Επιπλέον απαιτήσεις:

1. Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού $k = k + 0i + 0j$ με ένα νούμερο $z = a + bi + cj$ πρέπει να είναι ίσο με $ka + kbi + kcj$.
2. Η ισότητα $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1 z_2)$ πρέπει να ισχύει για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b.

.	Η επιμεριστική ιδιότητα

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

ισχύει.

Δεν είναι δύσκολο να ανακαλύψουμε ένα πολλαπλασιαστικό νόμο που να ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να υιοθετήσουμε τον νόμο $(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = aa' + (ab' + ba')i + (ac' + ca')j$ ο οποίος αφού είναι αντιμεταθετικός και προσεταιριστικός $(z_1 z_2 = z_2 z_1 \; \& \; (z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3))$ δε συνεπάγεται την πιθανότητα της χωρίς περιορισμούς διαίρεσης. Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατό να διαιρέσουμε το 1 με το i, αφού η εξίσωση $(0+1i+0j)x = 1+0i+0j$ δεν έχει λύση.

Αυτό δεν είναι τυχαίο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε πολλαπλασιαστικό νόμο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις 1, 2, 3 υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος αριθμών $z_1, z_2 (z_2 \neq 0)$ έτσι ώστε το z_1 να μη διαιρείται από το z_2. Με άλλα λόγια είναι αδύνατο να φτιάξουμε ένα σύστημα διαίρεσης για τους αριθμούς $a+bi+cj$

Από την άλλη πλευρά μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύστημα διαίρεσης για τους αριθμούς $a+bi+cj+dk$ με k ένα επιπλέον σύμβολο. Δηλαδή, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε αριθμούς της παραπάνω μορφής ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις 1, 2, 3 και η διαίρεση μπορεί πάντοτε να πραγματοποιηθεί.

Το πιο ενδιαφέρον παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος είναι οι τετράδες (quaternions).

5.1 Ορισμός των τετράδων

Οι τετράδες είναι αριθμοί της μορφής $a+bi+cj+dk$ με τον εξής προσθετικό νόμο:

$$(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k)=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k.$$

Για να προσδιορίσουμε τον πολλαπλασιαστικό νόμο αρκεί να δώσουμε τιμή στο γινόμενο των αριθμών i, j, k ανά δύο:

$$\left.\begin{array}{l} i^2=-1, j^2=-1, k^2=-1, \\ ij=k, ji=-k, \\ ki=j, ik=-j \end{array}\right\}(*)$$

Βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιαστικός νόμος δεν είναι αντιμεταθετικός, αλλά το αποτέλεσμα εξαρτάται από τη σειρά των παραγόντων.

Έστω $q=a+bi+cj+dk$ και $q'=a'+b'i+c'j+d'k$. Από την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} qq' &= aa'+a(b'i)+\alpha(c'j)+a(d'\kappa)+(bi)a'+(bi)(b'i)+ \\ &+(bi)(c'j)+(bi)(d'k)+(cj)a'+(cj)(b'i)+(cj)(c'j)+ \\ &+(cj)(d'k)+(dk)a'+(dk)(b'i)+(dk)(c'j)+(dk)(d'k) \end{aligned}$$

Από τις απαιτήσεις 1, 2 και τις σχέσεις (*) παίρνουμε:

$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i +$$
$$+ (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ισχύει στις τετράδες

Έστω $q_a, i = 1,2,3$ τρεις τετράδες. Πρέπει να δείξουμε ότι $(q_1 q_2)q_3 = q_1(q_2 q_3)(**)$.

Απόδειξη

Κάθε τετράδα $q_a, i = 1,2,3$ είναι το άθροισμα τεσσάρων όρων $(q_a = a_a + b_a i + c_a j + d_a k)$. Οπότε, το δεξί μέλος της (**) είναι το άθροισμα $4*4*4 = 64$ όρων της μορφής $(u_1 u_2)u_3$. Ομοίως, το αριστερό μέλος της (**) είναι το άθροισμα 64 όρων της μορφής $u_1(u_2 u_3)$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε όρος του δεξιού μέλους της (**) ισούται με κάποιο όρο του αριστερού μέλους της (**).

Έτσι, για να επαληθεύσουμε την (**) αρκεί να επαληθεύσουμε αυτό για την ειδική περίπτωση όπου q_1, q_2, q_3 είναι οποιοδήποτε από τις ακόλουθες 4 τετράδες a, bi, cj, dk. Εφόσον μπορούμε να βγάλουμε τους αριθμητικούς συντελεστές χρειάζεται μόνο να επαληθεύσουμε την (*) για τις 4 τετράδες $1, i, j, k$, για παράδειγμα αντί να δείξουμε ότι $((bi)(cj))(b'i) = (bi)((cj)(b'i))$, αρκεί να δείξουμε ότι $(ij)k = i(jk)$. Αν μια από τις τετράδες q_1, q_2, q_3 είναι 1 είναι φανερό ότι η (**) ισχύει. Έτσι, αρκεί να επαληθεύσουμε την (**) όταν τα q_1, q_2, q_3 είναι οποιαδήποτε από τις τετράδες i, j, k. Υπάρχουν 27 τέτοιες ισότητες, όπως $(ii)i = i(ii), (ii)j = i(ij), (ij)i = i(ji), (ij)k = i(jk)$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (*) μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε και τις 27 ισότητες.

Με τον τρόπο αυτό αποδείξαμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στις τετράδες.

Το σύστημα των τετράδων μοιάζει με το σύστημα των μιγαδικών σε αρκετές σημαντικές πτυχές. Έχουμε ήδη δείξει ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό των τετράδων. Όπως ήδη αναφέρθηκε, στις τετράδες επιτρέπεται η διαίρεση. Τότε, υπάρχει η πιθανότητα να ορίσουμε την απόλυτη τιμή μιας τετράδας έτσι ώστε η απόλυτη τιμή ενός γινομένου να ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών. Πίσω από αυτές τις ομοιότητες κρύβεται η δυνατότητα να ορίσουμε τη συζυγία μιας τετράδας με ιδιότητες ανάλογες με εκείνες τις συζυγίας των μιγαδικών αριθμών.

5.2 Συζυγία των τετράδων

Ανάλογα με τους μιγαδικούς αριθμούς ορίζουμε το συζυγή μιας τετράδας $q = a + bi + cj + dk$ ως το τετράδα $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

- Το άθροισμα συζυγών τετράδων είναι πραγματικός αριθμός αφού $q + q' = 2\alpha$
- Το γινόμενο συζυγών τετράδων είναι πραγματικός αριθμός αφού $qq' = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Ορίζουμε ως απόλυτη τιμή της τετράδας $q = a + bi + cj + dk$ τον θετικό πραγματικό αριθμό $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Σημείωση: Αν μια τετράδα q' είναι *καθαρά φανταστική*, δηλαδή $q' = bi + cj + dk$, τότε $q'^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$.

Αντίστροφα, αν το τετράγωνο μιας τετράδας είναι πραγματικός μικρότερος ή ίσος με το 0, τότε η τετράδα είναι καθαρά φανταστική (απόδειξη: Αν $q = a + bi + cj + dk$ τότε $q^2 = (a + q')(a + q') = \alpha^2 + q'^2 + 2aq' = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2aq'$. Αν η τελευταία έκφραση ήταν πραγματικός αριθμός με $\alpha \neq 0$ τότε $q' = 0$. Όμως τότε $q = a$ και q^2 δεν είναι ≤ 0). Έπεται ότι το τετράγωνο μιας τετράδας της μορφής $q' = bi + cj + dk$ (και μόνο αυτής) είναι πραγματικός, μη θετικός αριθμός

Άμεσα επαληθεύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$ και (β) $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$. Αυτές μοιάζουν πολύ με τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών με τη μόνη διαφορά ότι στους μιγαδικούς ισχύει $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ ενώ στις τετράδες τα γινόμενα $\overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$ και $\overline{q_1} \cdot \overline{q_2}$ είναι εν γένει διαφορετικά.

Για να επαληθεύσουμε τη (β) ιδιότητα αρκεί να την ελέγξουμε στις περιπτώσεις στις οποίες τα q_1 και q_2 είναι κάποια από τις τετράδες i, j, k. Για παράδειγμα,

$$\begin{array}{l} \overline{ii} = \overline{-1} = -1 \;\&\; \overline{i}\,\overline{i} = (-i)(-i) = i^2 = -1 \\ \overline{ij} = \overline{k} = -k \;\&\; \overline{j}\,\overline{i} = (-j)(-i) = ji = -k \end{array} \quad \text{κοκ.}$$

5.3 Οι τετράδες ως ένα σύστημα διαίρεσης

Η βασική διαφορά ανάμεσα στη διαίρεση μιγαδικών και τη διαίρεση τετράδων έγκειται στην εξής παρατήρηση:

Το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών z_1 δια z_2 είναι η λύση της εξίσωσης $z_2 x = z_1$. Όμως ο πολλαπλασιασμός τετράδων δεν είναι αντιμεταθετικός, έτσι για το πηλίκο δυο τετράδων q_1 δια q_2 πρέπει να σκεφτούμε και τις δυο εξισώσεις $q_2 x = q_1 (1)$ και $xq_2 = q_1 (2)$. Η λύση της πρώτης εξίσωσης καλείται *αριστερό πηλίκο* του q_1 δια q_2 και το συμβολίζουμε με x_l. Ομοίως η λύση της δεύτερης εξίσωσης καλείται *δεξί πηλίκο* του q_1 δια q_2 και το συμβολίζουμε με x_r. (Φυσικά στους μιγαδικούς τα x_l και x_r ταυτίζονται). Για να λύσουμε την εξίσωση (1) πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές αυτής από αριστερά με $\overline{q_2}$ και έπειτα με $\frac{1}{|q_2|^2}$ και η λύση αυτής είναι $x_l = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q_2} q_1$.

Ομοίως, $x_r = \frac{1}{|q_2|^2} q_1 \overline{q_2}$.

<u>Ιδιότητα</u>

Η απόλυτη τιμή του γινομένου τετράδων ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών.

<u>Απόδειξη</u>

$|q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)\left(\overline{q_1 q_2}\right) = (q_1 q_2)\left(\overline{q_2}\,\overline{q_1}\right) = q_1 \left(q_2 \overline{q_2}\right)\overline{q_1} = |q_1|^2 |q_2|^2$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. Andreescu, T. and Andrica, D. (2006), *Complex Numbers from A to … Z*, Birkhäuser Boston.

[2]. Blair, D. (2000). *Inversion Theory and Conformal Mapping*. American Mathematical Society.

[3]. Davis, D. (2001), *Η φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[4]. Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. and Novikov, S. P. (1992), *Modern Geometry, Methods and Applications*, Chapter 6, Springer-Verlag, Berlin et al.

[5]. Eves, H. (1992), *Modern Elementary Geometry*, Jones and Bartlett, Boston, London.

[6]. Ewald, G. (1971), *Geometry: An Introduction*, Wadsworth, Belmont, CA.

[7]. Greenberg, M. J. (1993), *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman. Nev York.

[8]. Hahn, L.-s. (1996). *Complex Numbers & Geometry*. The Mathematical Association of America.

[9]. Kantor, I.L., Solodovnikov, A.S. (1989). *Hypercomplex Mumbers. An Elementary Introduction to Algebras*. New York: Springer-Verlag.

[10]. Mandic, D. P. and Goh, V. S. L. (2009), *Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters: Noncircularity, Widely Linear and Neural Models*, Wiley, J. & Sons.

[11]. Marsden, J.E., Hoffman M.J. (1994), *Βασική Μιγαδική Ανάλυση*, Αθήνα: εκδόσεις Συμμετρία.

[12]. Merino, Or. (2006), *A Short History of Complex Numbers*, University of Rhode Island.

[13]. Μερκουράκης, Σ.Κ. και Χατζηαφράτης, Τ.,Ε. (2005), *Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

[14]. Van der Waerden, B. L. (1985), *A History of Algebra*, New York: Springer-Verlag.