Καστης Ελευθεριος

Ο μετασχηματισμός Riesz σε ευκλείδειους χώρους και σε πολλαπλότητες Riemann

Διπλωματική Εργασία
στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 2013

Αφιερώνεται
στην οικογένεια μου

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, μελετάμε την συνέχεια Ιδιάζοντων Ολοκληρωτικών Τελεστών (ΙΟΤ) και ειδικότερα του μετασχηματισμού Riesz σε ευκλείδειους χώρους και σε πολαπλότητες Riemann.

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι εάν ένας ΙΟΤ είναι φραγμένος στον $L^q(\mathbb{R}^d)$, για κάποιο $1 < q \leq +\infty$ και ικανοποιεί την λεγόμενη συνθήκη Hörmander, τότε είναι ασθενώς L^1-συνεχής. Επομένως, από το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz έπεται πως ο ΙΟΤ είναι φραγμένος στον $L^p(\mathbb{R}^d)$, για κάθε $1 < p \leq q$. Εφόσον οι μετασχηματισμοί Riesz είναι αντισυμμετρικοί και ικανοποιούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις, είναι $L^p(\mathbb{R}^d)$-φραγμένοι, για κάθε $1 < p \leq +\infty$.

Στην συνέχεια, εξετάζουμε εάν η L^p-συνέχεια των μετασχηματισμών Riesz μπορεί να επεκταθεί σε μία κλάση πλήρων μη συμπαγών πολλαπλοτήτων Riemann. Ειδικότερα, δίνουμε θετικά αποτελέσματα για $1 < p \leq 2$ υπό πολύ ασθενείς προϋποθέσεις : την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου και μία εκτίμηση στην διαγώνιο του πυρήνα θερμότητας. Επίσης, δείχνουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά δεν ισχύουν για $p > 2$, υπό τις ίδιες προϋποθέσεις.

Abstract

In this thesis, we study the boundedness of Singular Integral Operators (SIOs) and in particular the Riesz transform on $L^p(\mathbb{R}^d)$, but also on Riemannian manifolds.

In particular, we first prove that every bounded SIO on $L^q(\mathbb{R}^d)$, for some $1 < q \leq +\infty$, that satisfies a certain Hörmander property, is weakly L^1-bounded. Thus, the Marcinkiewicz interpolation theorem implies that these SIOs are bounded on $L^p(\mathbb{R}^d)$, for $1 < p \leq q$. Since the Riesz transforms are skew-adjoint and satisfy the above properties, they are $L^p(\mathbb{R}^d)$-bounded, for every $1 < p \leq +\infty$.

Secondly, we prove that the L^p-boundedness of the Riesz transforms can be extended to a reasonable class of complete non-compact Riemannian manifolds. Particularly, we give positive results for $1 < p \leq 2$ under very weak assumptions, namely the doubling volume property and an on-diagonal heat kernel estimate. We also prove that the result cannot hold for $p > 2$ under the same assumptions.

Πρόλογος

Στην αρμονική ανάλυση ο μετασχηματισμος Riesz είναι η γενίκευση του μετασχηματισμού Hilbert σε Ευκλείδειους χώρους διάστασης $N > 1$, ενώ επεκτείνεται και σε πολλαπλότητες Riemann. Θεωρείται βασικό εργαλείο στην αρμονική ανάλυση, στη θεωρία ελέγχου και στην επεξεργασία σήματος. Ειδικότερα, ο μετασχηματισμός Hilbert χρησιμοποιείται στην αναλυτική αναπαράσταση ενός σήματος.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζουμε την L^p συνέχεια του μετασχηματισμού Riesz αμφότερα σε Ευκλείδειους χώρους και πολλαπλότητες Riemann. Και στις δύο περιπτώσεις, τα βασικά εργαλεία μας είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz και η ανάλυση Calderòn - Zygmund . Στους ευκλείδειους χώρους, οι συνιστώσες του τελεστή δίνονται μέσω της συνέλιξης με μία συνάρτηση, η οποία είναι ιδιάζουσα στο 0. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε την θεωρία ιδιαζόντων ολοκληρωτικών τελεστών και πολλαπλασιαστών Fourier. Αντίθετα, σε πολλαπλότητες όπου δεν μπορεί να οριστεί ο μετασχηματισμός Fourier, πρωταγωνιστικό ρόλο παίζει ο πυρήνας θερμότητας, δηλαδή η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας. Στοιχειώδεις γνώσεις αρμονικής, συναρτησιακής ανάλυσης και διαφορικής γεωμετρίας θεωρούνται γνωστές.

Θα ήθελα κατ΄ αρχάς να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μπαρμπάτη για την επιλογή του θέματος, την συστηματική συνεργασία καθώς και την συνεχή στήριξη που μου παρείχε κατά την διάρκεια της ακαδημαϊκής χρονιάς, η οποία υπήρξε προσωπικά ιδιαίτερα αγχωτική. Θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω και τους καθηγητές κ. Κατάβολο και κ. Στρατή για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Χρωστώ ευγνωμοσύνη στην Βεατρίκη Βριτσίου για την πολλαπλή βοήθεια της, στην αρχή των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μου, και ιδιαιτέρως τον Ορέστη Παπούλια και την Βασιλική Μπιτσούνη, για τις ημέρες που μοιραστήκαμε τα ίδια θρανία στο πανεπιστήμιο. Τέλος, από τις ευχαριστίες μου, δεν μπορει να λείπει η Άννα, που ακόμα με αντέχει!

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

1.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε μία σύντομη εισαγωγή σε ορισμένα βασικά στοιχεία της στοιχειώδους διαφορικής γεωμετρίας και στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στις πολλαπλότητες Riemann. Στόχος μας είναι να δοθεί στον αναγνώστη μία βασική ιδέα για τις διαφορές των πολλαπλοτήτων και των ευκλείδειων χώρων, καθώς και των απαιτούμενων ιδιοτήτων που θα πρέπει να πληροί μία πολλαπλότητα, ώστε να μπορούμε να αναπτύξουμε θεωρία συναρτησιακού λογισμού. Επομένως, το κεφάλαιο αυτό έχει μία περιγραφική δομή, ενώ οι αποδείξεις παραλείπονται (ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [11]).

1.2 Θεωρία Διαφορικών Πολλαπλότητων

Ορισμός 1.1. *Έστω (M, τ) ένας δεύτερος αριθμήσιμος συνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff. Εάν U ανοιχτό υποσύνολο του M, καλούμε* ***χάρτη*** *ή* ***αναπαραμέτρηση*** *(U, x) του M, κάθε ομοιομορφισμό $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.*
Γράφουμε $x = (x^1, \dots, x^n)$. Οι απεικονίσεις $x^i : U \to \mathbb{R}$ λέγονται ***συντεταγμένες****.*

Δύο χάρτες (U, x), (V, ψ) του M, είναι ***διαφορίσιμα συμβιβαστοί****, όταν ισχύει ένα από τα παρακάτω:*

- $U \cap V = \emptyset$

- $U \cap V \neq \emptyset$ *και η απεικόνιση* $\psi \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ *είναι αμφιδιαφόριση*

Η συνάρτηση $\psi \circ x^{-1}$ *καλείται* ***συνάρτηση μεταφοράς****.*

Ένας ***άτλας*** *του* M *είναι μια οικογένεια χαρτών* $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i) : i \in I\}$ *του* M*, τέτοια ώστε :*

(*i*) $\bigcup_{i \in I} U_i = M.$

(*ii*) *Υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$*, τέτοιο ώστε* $x_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$*, για κάθε* $i \in I$*.*

(*iii*) *ανά δύο οι χάρτες του* $\mathcal{A}$ *είναι διαφορίσιμα συμβιβαστοί.*

Έστω A *ένας άτλας του* M*.* ***Ο μεγιστικός άτλας*** *που αντιστοιχεί στον* $\mathcal{A}$ *είναι η οικογένεια χαρτών*

$$\mathcal{A}^* = \Big\{(U, x) \,\Big|\, (U, x) \text{ διαφορίσιμα συμβιβαστός με κάθε στοιχείο του } \mathcal{A}\Big\}.$$

η οποία αποτελεί μεγιστικό στοιχείο του συνόλου των ατλάντων ως προς την $\mathcal{M}$*.*

Το ζεύγος $(M, \mathcal{A})$ *καλείται* ***(διαφορική) πολλαπλότητα*** *διάστασης* n*. Όταν δεν υπάρχει σύγχυση, θα συμβολίζουμε* M *την διαφορική πολλαπλότητα* $(M, \mathcal{A}^*)$*.*

Η απόδειξη της δομής πολυπλότητας σε ένα τυχόν υποσύνολο ευκλείδειου χώρου απλοποιείται αρκετά από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2. *Έστω* U *υποσύνολο του* $\mathbb{R}^{n+m}$ *και* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *λεία απεικόνιση. Επιλέγουμε ένα σημείο* $c \in \mathbb{R}^n$ *και υποθέτουμε ότι για κάθε* $x \in F^{-1}(\{c\})$ *η παράγωγος* $DF(x)$ *είναι επί. Τότε το σύνολο* $F^{-1}(\{c\})$ *είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης* m*.*

Παράδειγμα 1.3. 1. *Κάθε υποσύνολο* Ω *του* $\mathbb{R}^n$ *είναι πολλαπλότητα διάστασης* n *με άτλα την ταυτοτική απεικόνιση. Μάλιστα, η οικογένεια*

$$\mathcal{A} = \{(U, id\big|_U) : U \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } \Omega\}$$

αποτελεί μεγιστικό άτλαντα του Ω*.*

2. *Έστω* S_n *η μοναδιαία σφαίρα διάστασης* n*. Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|_2^2.$$

Η απεικόνιση F *είναι λεία, με* $F^{-1}(\{1\}) = S_n$*, και για κάθε* $x \in F^{-1}(\{1\})$ *προκύπτει ότι ο τελεστής* $DF(x) : DF(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$ *είναι επί. Συνεπώς από το θεώρημα 1.2, έπεται ότι η μοναδιαία σφαίρα είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης* n*.*

3. *Θεωρούμε τον* ***προβολικό χώρο*** $P^n(\mathbb{R})$*, δηλαδή το σύνολο των ευθειών του* $\mathbb{R}^{n+1}$*, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Θα εισάγουμε μία διαφορική δομή στο σύνολο αυτό. Αρχικά, θεωρούμε για κάθε* $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ *την σχέση ισοδυναμίας* $\sim$*, όπου :*

   $$(y_1, \ldots, y_{n+1}) \sim (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_{n+1}),\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   Επομένως, το $P^n(\mathbb{R})$ *μπορεί να ταυτοποιηθεί συνολοθεωρητικά με τον χώρο πηλίκο* $\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)\Big/ \sim$*, οπότε κάθε στοιχείο του* $P^n(\mathbb{R})$ *θα το συμβολίζουμε ως* $[y_1, \ldots, y_{n+1}]$*. Παρατηρούμε μάλιστα ότι εάν* $y_i \neq 0$*, τότε*

   $$[y_1, \ldots, y_{n+1}] = \left[\frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, 1, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{y_i}\right]$$

   Ορίζουμε για κάθε $i = 1, \ldots, n+1$*, τα υποσύνολα* V_i *του* $P^n(\mathbb{R})$*, όπου*

   $$V_i = \{[y_1, \ldots, y_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}) \,|\, y_i \neq 0\}.$$

   Γεωμετρικά, τα V_i *είναι οι ευθείες του* $\mathbb{R}^{n+1}$*, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και δεν ανήκουν στο υπερεπίπεδο* $y_i = 0$*. Επιπλέον, για κάθε* $i = 1, \ldots, n+1$*, ορίζουμε την απεικόνιση :*

   $$x_i : V_i \to \mathbb{R}^n : [y_1, \ldots, y_{n+1}] = \left[\frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, 1, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_{n+1}}{y_i}\right] \mapsto (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1} \ldots, y_{n+1}).$$

   Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\{(V_i, x_i) \,|\, i = 1, \ldots, n+1\}$ *αποτελεί άτλαντα του* $P^n(\mathbb{R})$*.*

Ορισμός 1.4. *Μία συνάρτηση* $f : M \to \mathbb{R}$ *καλείται* $\mathbf{C}^r-$ ***διαφορίσιμη***, *και γράφουμε ότι* $f \in C^r(M)$*, όπου* $r = \infty, 1, 2, \ldots$*, όταν για κάθε χάρτη* (U, x) *της* M*, η απεικόνιση*

$$f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$$

είναι C^r*-διαφορίσιμη. Αντίστοιχα, μία απεικόνιση* $f : (M, \mathcal{A}) \to (\mathcal{N}, \mathcal{B})$ *καλείται* C^r*-διαφορίσιμη, όταν για κάθε επιλογή χαρτών* $(U, x) \in \mathcal{A}$*,* $(V, \psi) \in \mathcal{B}$*, η απεικόνιση* $\psi \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to \psi(V)$ *είναι* C^r*-διαφορίσιμη. Ο αντίστοιχος συμβολισμός είναι* $f \in C^r(M, \mathcal{N})$

Ορισμός 1.5. *Ένα* ***εφαπτόμενο διάνυσμα*** *του* $m \in M$ *είναι μία σημειακή παραγώγιση* $\xi_{|m} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$*, δηλαδή μία γραμμική απεικόνιση, η οποία πληροί τον κανόνα του Leibniz :*

$$\xi_{|m}(fg) = f(m)\xi_{|m}(g) + g(m)\xi_{|m}(f),\ \text{για κάθε } f, g \in C^\infty(M).$$

*Το σύνολο $T(M,m)$ των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο m, εφοδιασμένο με τις πράξεις κατά σημείο, αποκτάει δομή διανυσματικού χώρου διάστασης n, και καλείται **εφαπτόμενος χώρος** της M στο m. Η ένωση των εφαπτόμενων χώρων*

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{m\in M} T(M,m),$$

*καλείται **εφαπτόμενη δέσμη**. Αποδεικνύεται ότι η $T\mathcal{M}$ δέχεται δομή πολλαπλότητας διάστασης $2n$.*

Παράδειγμα 1.6. *Έστω (U,x) χάρτης με συντεταγμένες $x^1,\dots,x^n$ και $x(m) = p \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε για κάθε $i = 1,\dots,n$ τα εφαπτόμενα διανύσματα $\partial_{i|m} \in T(M,m)$, ως εξής :*

$$\partial_{i|m} f = \left.\frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x^i}\right|_p$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το σύνολο $\{\partial_{1|m},\dots,\partial_{n|m}\}$ αποτελεί βάση του $T(M,m)$.

Παρατήρηση 1.7. *Έστω διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, ώστε $0 \in I$. Κάθε απεικόνιση $\alpha : I \to M$ καλείται **καμπύλη** στην M. Θεωρούμε το σύνολο*

$$C(M,m) = \{\alpha : I_\alpha \to M : \alpha \text{ διαφορίσιμη καμπύλη και } \alpha(0) = m\}.$$

*Εάν $\alpha,\beta \in C(M,m)$, γράφουμε $\alpha \sim_m \beta$ και λέμε ότι οι α,β **εφάπτονται** στο m, εάν υπάρχει χάρτης (U,x) στην M, ώστε $m \in U$ και $(x\circ\alpha)'(0) = (x\circ\beta)'(0)$. Μάλιστα, η σχέση $\sim_m$ είναι σχέση ισοδυναμίας και είναι ανεξάρτηση επιλογής χάρτη.*
Θεωρούμε για κάθε κλάση ισοδυναμίας $u = [a]_m$ στον χώρο πηλίκο $C(M,m)\big/\sim_m$ την σημειακή παραγώγιση

$$u'(t)f = (f\circ a)'(t).$$

Αποδεικνύεται ότι για κάθε πολλαπλότητα (πεπερασμένης) διάστασης n, η συνάρτηση

$$C(M,m)\big/\sim_m \to T(M,m) : u \mapsto u'$$

είναι καλά ορισμένη και μάλιστα συνολοθεωρητικός ισομορφισμός.

Ορισμός 1.8. *Έστω $f : (M,\mathcal{A}) \to (N,\mathcal{B})$ διαφορίσιμη συνάρτηση και εφαπτόμενο διάνυσμα $u = [a]_m \in T(M,m)$. Τότε η απεικόνιση $f\circ a$ είναι διαφορίσιμη και $(f\circ a)(0) = f(m)$, συνεπώς $[f\circ a]_{f(m)} \in T(N,f(m))$. Η συνάρτηση*

$$df_m : T(M,m) \to T(N,f(m)) : [a]_m \to [f\circ a]_{f(m)}$$

*είναι γραμμική, ανεξάρτητη της επιλογής του αντιπροσώπου a, και καλείται **σημειακό διαφορικό** της f στο σημείο m.*

Ορισμός 1.9. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα. Ένα* ***διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο*** *της M είναι μία παραγώγιση της $C^\infty(M)$, δηλαδή μία γραμμική απεικόνιση $\xi : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, για την οποία ισχύει:*

$$\xi(fg) = f\xi(g) + g\xi(f).$$

Το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων συμβολίζεται με $\mathcal{X}(M)$.

Παρατήρηση 1.10. (*i*) *Για κάθε $m \in M$, θέτουμε $\xi_{|m} f = (\xi f)(m)$ και παρατηρούμε ότι $\xi_{|m} \in T(M, m)$. Εάν συμβολίσουμε*

$$D(M) = \{\tilde{\xi} \,|\, \tilde{\xi} \in C^\infty(M, TM) : \tilde{\xi}(m) \in T(M, m)\},$$

τότε έπεται πως η απεικόνιση

$$\mathcal{X}(M) \to D(M) : \xi \mapsto \tilde{\xi}, \text{όπου } \tilde{\xi}(m) = \xi_{|m}$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Στο εξής, ένα διανυσματικό πεδίο ξ έχει συμπαγή φορέα, όταν $supp\tilde{\xi}$ συμπαγές.

(*ii*) *Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ με τις κατά σημείο πράξεις αποκτά δομή $C^\infty(M)$-προτύπου.*

Παράδειγμα 1.11. *Έστω (U, x) χάρτης της M με συντεταγμένες $x_1, \dots, x_n$. Στον χάρτη αυτόν αντιστοιχούν* <u>*τοπικά*</u> *τα διανυσματικά πεδία $\partial_i \in \mathcal{X}(U)$. Τα πεδία αυτά καλούνται* ***βασικά διανυσματικά πεδία συντεταγμένων****, και για κάθε $f \in C^\infty(M)$, γράφουμε :*

$$(\partial_i f)(m) = \partial_{i|m} f, \ \forall m \in U.$$

Ορισμός 1.12. ***Αγκύλη Lie*** *δύο διανυσματικών πεδίων $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ καλείται το διανυσματικό πεδίο*

$$[\xi, \eta] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

το οποίο ορίζεται ως εξής :

$$[\xi, \eta] f = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)).$$

Παρατήρηση 1.13. *Η απεικόνιση $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :*

(*i*) *είναι διγραμμική*

(*ii*) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$,

(*iii*) $[\xi,[\eta,\zeta]]+[\eta,[\zeta,\xi]]+[\zeta,[\xi,\eta]]=0$, *για κάθε* $\xi,\eta,\zeta\in\mathcal{X}(M)$ *(ταυτότητα Jacobi)*

Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ *εφοδιασμένο με την πράξη* $[\cdot,\cdot]$ *δέχεται δομή άλγεβρας Lie.*

Σε μία πολλαπλότητα M, όπου δεν υπάρχει ολικό σύστημα συντεταγμένων, θέλουμε να εισάγουμε την έννοια της διαφόρισης διανυσματικών πεδίων, κατά τρόπο αναλλοίωτο, ώστε να μην εξαρτάται από την επιλογή χαρτών.

Ορισμός 1.14. *Μία απεικόνιση* $\nabla:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M):(\xi,\eta)\mapsto\nabla_\xi\eta$, *η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες :*

(*i*) $\nabla_{f\xi+g\eta}\zeta=f\nabla_\xi\zeta+g\nabla_\eta\zeta,\ \forall\xi,\eta,\zeta\in\mathcal{X}(M),\ f,g\in C^\infty(M)$,

(*ii*) $\nabla_\xi(\eta+\zeta)=\nabla_\xi\eta+\nabla_\xi\zeta,\ \forall\xi,\eta,\zeta\in\mathcal{X}(M)$,

(*iii*) $\nabla_\xi(f\eta)=f\nabla_\xi\eta+\xi(f)\eta,\ \forall\xi,\eta,\zeta\in\mathcal{X}(M),\ f\in C^\infty(M)$,

καλείται ***(γραμμική) συνοχή****. Το διανυσματικό πεδίο* $\nabla_\xi\eta$ *καλείται* ***συναλλοίωτη παράγωγος*** *του* η *στην διεύθυνση* ξ*, ως προς την συνοχή* ∇*.*

1.3 Ανάλυση σε πολλαπλότητες Riemann

Ορισμός 1.15. *Μία* ***μετρική Riemann*** g *στην* M *είναι μία απεικόνιση*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to L^\infty(M)$$

η οποία θα είναι διγραμμική, συμμετρική, θετικά ορισμένη και μετρήσιμη με την εξής έννοια: εάν $\xi,\eta\in\mathcal{X}(M)$*, τότε η απεικόνιση* $m\mapsto\langle\xi,\eta\rangle(m)$ *είναι μετρήσιμη. Το ζεύγος* $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ *καλείται* ***(μετρήσιμη) πολλαπλότητα Riemann****.*

Παρατήρηση 1.16. (*i*) *Στην διαφορική γεωμετρία, ο ορισμός μίας πολλαπλότητας Riemann απαιτεί η μετρική να είναι διαφορίσιμη. Όμως, όπως θα δούμε, αυτή η επιπλέον συνθήκη δεν είναι αναγκαία στην ανάπτυξη της θεωρίας μας, ενώ όταν κρίνεται αναγκαίο, θα αναφέρουμε ότι η μετρική είναι διαφορίσιμη ή λεία.*

(*ii*) *Από τον ορισμό της μετρικής Riemann , προκύπτει ότι για κάθε $m \in M$, η απεικόνιση*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle(m) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R} : (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle(m)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $T(M, m)$.

Παράδειγμα 1.17. (*i*) *Έστω $(\cdot, \cdot)$ το σύνηθες (ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Για το τυχόν $x \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $\langle \xi, \eta \rangle(x) = (\xi(x), \eta(x))$, για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Προκύπτει ότι η απεικόνιση $\langle\, , \rangle$ είναι μία διαφορίσιμη μετρική Riemann.*

(*ii*) *Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $q \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε το διαφορικό $DF(m)$ να είναι επί, για κάθε $m \in F^{-1}(\{q\})$. Τότε η υποπολλαπλότητα $M = F^{-1}(\{q\})$ του $\mathbb{R}^n$ αποκτάει δομή πολλαπλοτητας Riemann, κληρονομώντας το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, από το παράδειγμα 1.3, η μοναδίαια σφαίρα S_n δέχεται δομή πολλαπλοτητας Riemann.*

(*iii*) *Στην ανοιχτή μοναδιαία μπάλα $\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την μετρική*

$$\langle \xi, \eta \rangle(m) = \frac{4(\xi(m), \eta(m))}{(1 - |m|^2)^2}, \ \forall \xi, \eta \in C\langle\rangle(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}),\ m \in \mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}$$

*Ο χώρος $(\mathbf{B}_{\mathbb{R}^n}, \langle\, , \rangle)$ καλείται **υπερβολικός χώρος** και συμβολίζεται με H^n.*

(*iv*) *Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ και συναρτήσεις $a_{ij} \in L^\infty(M)$, τέτοιες ώστε για κάθε $m \in M$, ο πίνακας $\left(a_{ij}(m)\right)_{ij}$ να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ορίζουμε την μετρική Riemann, στα βασικά διανυσματικά πεδία του M, ως εξής :*

$$\langle \xi, \eta \rangle(m) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ a_{ij}(m) \xi_i \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}$$

για κάθε $\xi, \eta \in C\langle\rangle(M)$. Τότε, η $(M, \langle\, , \rangle)$ είναι μία μετρήσιμη πολλαπλότητα Riemann.

Από τον ορισμό της μετρικής Riemann και της παρατήρησης 1.10, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό των διανυσματικών πεδίων :

Ορισμός 1.18. *Μία απεικόνιση $\xi : M \to TM$, όπου για κάθε $m \in M$ έπεται ότι $\xi(m) \in T(M,m)$, καλείται* ***(μετρήσιμο) διανυσματικό πεδίο****, εάν η απεικόνιση :*

$$m \mapsto \langle \xi, \xi \rangle(m)$$

είναι μετρήσιμη.

Αντίστοιχα, ορίζονται τα ολοκληρώσιμα διανυσματικά πεδία. Έστω $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $\xi_{|m} \in T(M,m)$. Συμβολίζουμε

$$|\xi_{|m}| = \sqrt{\langle \xi_{|m}, \xi_{|m} \rangle}$$

Εφόσον η πολλαπλότητα M είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος, για κάθε $m, n \in M$ ορίζουμε :

$$d(m,n) = sup\left\{ |f(m) - f(n)| \,\middle|\, f : M \to \mathbb{R} \text{ Lipschitz συνεχής με σταθερά } L(f) \leq 1 \right\}$$

όπου συμβολίζουμε $L(f)$ την σταθερά Lipschitz , κι έχουμε το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 1.19. *Ο χώρος (M,d) είναι μετρικός χώρος. Μάλιστα η τοπολογία που ορίζει η μετρική d συμπίπτει με την αρχική τοπολογία της πολλαπλότητας.*

Ορισμός 1.20. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα M. Μια συνοχή στην πολλαπλότητα M καλείται:*

- ***μετρική****, έαν $\eta\langle \xi, \zeta \rangle = \langle \nabla_\eta \xi, \zeta \rangle + \langle \xi, \nabla_\eta \zeta \rangle$, $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)$*
- ***ελευθέρας στρέψης****, εάν $\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta = [\eta, \xi]$, $\forall \eta, \xi \in \mathcal{X}(M)$*

Έστω τώρα πολλαπλότητα Riemann $(M, \langle\ ,\ \rangle)$, και συνοχή ∇ στην M. Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνοχή αυτή είναι μετρική και ελευθέρας στρέψης, τότε ισχύει ο τύπος

$$2\langle \nabla_\eta \xi, \zeta \rangle = \eta\langle \zeta, \xi \rangle + \xi\langle \eta, \zeta \rangle - \zeta\langle \xi, \eta \rangle + \langle [\eta, \xi], \zeta \rangle + \langle [\zeta, \eta], \xi \rangle - \langle [\xi, \zeta], \eta \rangle$$

και κατά συνέπεια προκύπτει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.21. *Σε κάθε πολλαπλότητα Riemann υπάρχει μοναδική ελευθέρας στρέψης μετρική συνοχή, η οποία καλείται* ***συνοχή Levi - Civita****.*

Δουλεύοντας τώρα τοπικά σε μία πολλαπλότητα, δηλαδή σε ένα χάρτη (U, x), όπου ορίζονται τα βασικά διανυσματικά πεδία, θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $m \in U$, ο πίνακας $(g_{ij}(m))_{ij}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, ενώ θα γράφουμε $\mathbf{g} = \det(g_{ij})$.
Τέλος, ορίζονται τα **σύμβολα Cristoffel** Γ_{ij}^k από τον τύπο $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$.
Μάλιστα, εάν συμβολίσουμε $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, προκύπτει η σχέση:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\partial_i(g_{jm}) + \partial_j(g_{im}) - \partial_m(g_{ij}) \right)$$

1.3.1 Καμπυλότητα

Ορισμός 1.22. *Έστω $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ μία λεία πολλαπλότητα Riemann. Η απεικόνιση:*

$$R : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M) : R(\xi, \eta, \zeta) \equiv R(\xi, \eta)\zeta = \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - [\nabla_\xi, \nabla_\eta]\zeta$$

*καλείται **τελεστής καμπυλότητας**.*
Επιπλέον, εάν $\xi_m, \eta_m \in T(M, m)$, γράφουμε

$$R_{\xi_m,\eta_m} : T(M, m) \to T(M, m) : R_{\xi_m,\eta_m}\zeta_m = R(\xi, \eta, \zeta)(m)$$

όπου $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)$ με $\xi(m) = \xi_m$, $\eta(m) = \eta_m$, $\zeta(m) = \zeta_m$.

Έστω διανυσματικά πεδία $\xi, \eta, \zeta, \theta \in \mathcal{X}(M)$. Ο τελεστής καμπυλότητας R πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) Η απεικόνιση R είναι $C^\infty(M)$ γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή.

(ii) $R(\xi, \eta) = R(\eta, \xi)$

(iii) $\langle R(\xi, \eta)\zeta, \theta \rangle = \langle R(\xi, \eta)\theta, \zeta \rangle$

(iv) $R(\xi, \eta)\zeta + R(\eta, \zeta)\xi + R(\zeta, \xi)\eta = 0$ (ταυτότητα Bianchi)

(v) $\langle R(\xi, \eta)\zeta, \theta \rangle = \langle R(\zeta, \theta)\xi, \eta \rangle$

Έστω τώρα $m \in M$ και $\xi_m, \eta_m \in T(M, m)$. Θεωρούμε την ποσότητα

$$Q(\xi_m, \eta_m) = det \begin{pmatrix} \langle \xi_m, \xi_m \rangle & \langle \xi_m, \eta_m \rangle \\ \langle \eta_m, \xi_m \rangle & \langle \eta_m, \eta_m \rangle \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα $|Q(\xi_m, \eta_m)|$ εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου Π που ορίζουν τα δύο διανύσματα ξ_m, η_m στον εφαπτόμενο χώρο $T(M, m)$. Μάλιστα, αποδεικνύεται πως ο αριθμός

$$K_m(\Pi) = K_m(\xi_m, \eta_m) = \frac{\langle R(\xi, \eta)\xi, \eta\rangle(m)}{Q(\xi_m, \eta_m)}$$

δεν εξαρτάται από τα διανύσματα ξ_m, η_m, αλλά μόνο από το επίπεδο Π.

Ορισμός 1.23. *Δοθέντος ενός σημείου $m \in M$ και ενός διδιάστατου υποχώρου Π του $T(M, m)$, ο πραγματικός αριθμός $K_m(\Pi)$ καλείται **καμπυλότητα τομής** του Π στο m.*

Παράδειγμα 1.24. *Οι πολλαπλότητες Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής παίζουν πρωταγωνιστικό ρόλο στην γεωμετρία Riemann. Μετά από αλλαγή κλίμακας στην μετρική, υπάρχουν τρεις πιθανές περιπτώσεις :*

(*i*) *Αρνητική καμπυλότητα $K = -1$ (υπερβολική γεωμετρία)*

(*ii*) *Μηδενική καμπυλότητα (ευκλείδεια γεωμετρία)*

(*iii*) *Θετική καμπυλότητα $K = 1$ (ελλειπτική γεωμετρία)*

Τα πρότυπα των πολλαπλοτήτων είναι ο υπερβολικός χώρος, ο ευκλείδειος και η μοναδιαία σφαίρα, αντίστοιχα. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι κάθε πλήρης, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann σταθερής καμπυλότητας τομής, είναι πηλίκο των παραπάνω προτύπων με κάποια ομάδα ισομετριών.

Ορισμός 1.25. *Έστω $(M, \langle\,,\,\rangle)$ μία πολλαπλότητα Riemann διάστασης n. Εάν $x \in M$ και $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου χώρου $T(M, m)$. Ορίζουμε ως **βαθμωτή καμπυλότητα** της M την διγραμμική μορφή :*

$$Sc : T(M, m)^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, x)y, e_i\rangle,$$

*ενώ **καμπυλότητα Ricci** καλείται η τετραγωνική μορφή*

$$Ric : T(M, m) \to \mathbb{R} : x \mapsto Sc(x, x).$$

Παρατήρηση 1.26. (*i*) *Εύκολα αποδεικνύεται πως οι τιμές της βαθμωτής καμπυλότητας είναι ανεξάρτητες της επιλογής της ορθοκανονικής βάσης του $T(M, m)$.*

(ii) Εάν $\{e_1, \dots, e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $T(M, m)$ τότε έχουμε την σχέση :

$$Ric(e_i) = Sc(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} K_m(e_i, e_j)$$

1.3.2 Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες Riemann

Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann και χάρτης (U, x) στην M. Εάν $f : U \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα :

$$\int_U f dV = \int_{x(U)} (f \circ x^{-1}) \sqrt{\mathbf{g} \circ x^{-1}} dx$$

Μάλιστα, η μεθόδος αλλαγής μεταβλητής μας εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο στις τομές των χαρτών. Για να ορίσουμε τώρα το μέτρο καθολικά στην πολλαπλότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τις διαμερίσεις της μονάδας.

Ορισμός 1.27. *Μια **διαμέριση της μονάδας** για μια τοπικά πεπερασμένη ανοιχτή κάλυψη $\{U_a\}_{a\in A}$ της M είναι μία οικογένεια συναρτήσεων $\phi_a \in C^\infty(M)$, τέτοια ώστε:*

(i) $0 \leq \phi_a \leq 1, \forall a \in A$

(ii) $supp(\phi_a) \subseteq U_a$

(iii) $\sum_a \phi_a = 1$

*Ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος σε κάθε ανοιχτό του κάλυμμα έχει μία διαμερίση της μονάδας, που κυριαρχείται από αυτό, καλείται **παρασυμπαγής**.*

Αποδεικνύεται μάλιστα ότι κάθε παρασυμπαγής πολλαπλότητα, δέχεται δομή πολλαπλότητας Riemann ([12]). Αντίστροφα, κάθε μετρικός χώρος είναι παρασυμπαγής ([13]), οπότε κάθε πολλαπλότητα Riemann είναι παρασυμπαγής χώρος.

Έστω λοιπόν μία πολλαπλότητα Riemann M και μία τοπικά πεπερασμένη κάλυψη της M από χάρτες $(U_a, x_a)_{a\in A}$. Επιλέγοντας μία διαμέριση της μονάδας $\{\phi_a\}_a$, με $\mathrm{supp}\phi_a \subseteq U_a$, για κάθε μετρήσιμη $f : M \to \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$\int_M f dV = \sum_a \int_{U_a} \phi_a f dV.$$

Μάλιστα, το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο, καθώς είναι ανεξάρτητο επιλογής χαρτών και διαμέρισης της μονάδας.

Ορισμός 1.28. *Μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann M πληροί την* ***ιδιότητα διπλασιασμού όγκου*** *εάν υπάρχει σταθερά $C_M > 1$, τέτοια ώστε :*

$$V(x, 2r) \leq C_M V(x, r), \text{ για κάθε } x \in M,\ r > 0,$$

όπου $V(x, r) = \int_{B(x,r)} dV$.

Λήμμα 1.29. *Έστω πολλαπλότητα Riemann M, η οποία πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου. Τότε υπάρχει $D > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\theta > 0$:*

$$V(x, \theta r) \leq \theta^D V(x, r)$$

Απόδειξη. Αφού $\theta > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $2^{k-1} \leq \theta \leq 2^k$. Έχουμε λοιπόν :

$$2^{k-1} \leq \theta \leq 2^k \Rightarrow k - 1 \leq log_2\theta \leq k \rightarrow log_2\theta \leq k \leq log_2\theta + 1$$
$$\Rightarrow C_M^k \leq C_M^{log_2\theta+1} = C_M^{c' \, ln\theta} = e^{c' \, ln\theta \, lnC_M} = e^{D \, ln\theta} = \theta^D$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in M$ και $r > 0$ γράφουμε

$$V(x, \theta r) \leq V(x, 2^k r) \leq C_M^k V(x, r) \leq \theta^D V(x, r).$$

□

Παρατήρηση 1.30. *Κάθε ευκλείδειος και κάθε ελλειπτικός χώρος πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου, ενώ ο υπερβολικος χώρος του παραδείγματος 1.17 δεν πληροί αυτήν την ιδιότητα, καθώς έχει στοιχείο όγκου* $dH^n = \sqrt{\frac{1}{1-|m|^2}}$.

1.3.3 Διαφορικοί τελεστές

Η μετρική Riemann και η συνοχή Levi - Civita είναι τα απαιτούμενα εργαλεία, ώστε να γενικεύσουμε τις έννοιες των διαφορικών τελεστών του διανυσματικού λογισμού.

Ορισμός 1.31. ***Κλίση*** *μίας συνάρτησης $f \in C^\infty(M)$ είναι το μοναδικό διανυσματικό πεδίο* grad$f$, *για το οποίο ισχύει η σχέση:*

$$\langle \mathrm{grad} f, \xi \rangle = \xi(f)$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Τοπικά, αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \, \partial_i f \, \partial_j.$$

Ορισμός 1.32. *Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$.* ***Απόκλιση*** *του διανυσματικού πεδίου ξ καλείται η απεικόνιση* $\mathrm{div}\xi \in C^\infty(M)$, *η οποία ορίζεται ως εξής :*

$$\mathrm{div}\xi = trace(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi).$$

Έστω λεία[1] *πολλαπλότητα M και (U, x) μία τοπική αναπαραμέτρηση της. Τότε για κάθε $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i$ γράφουμε*

$$\mathrm{div}\xi = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\sqrt{\mathbf{g}}\,\xi_i).$$

Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ με φορέα στον χάρτη (U, x). Έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{div}\xi dV &= \int_U \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\sqrt{\mathbf{g}}\,\xi_i)\, dV = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x(U)} (\partial_i \sqrt{\mathbf{g}}\xi_i) \circ x^{-1} dx_1 \dots dx_n = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x(U)} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\mathbf{g}}\xi_i) \circ x^{-1} dx_1 \dots dx_n = 0.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα διαμέρισης της μονάδας, προκύπτει το θεώρημα απόκλισης.

Θεώρημα 1.33. *Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$ διανυσματικό πεδίο στην M με συμπαγή φορέα. Τότε*

$$\int_M \mathrm{div}\xi\, dV = 0.$$

Η σύνθεση των τελεστών της κλίσης και της απόκλισης μας δίνει την δυνατότητα να δώσουμε τώρα τον ορισμό του τελεστή Laplace, μέσω του οποίου θα εκφράσουμε στην συνέχεια τον μετασχηματισμό Riesz.

Ορισμός 1.34. *Ο τελεστής Laplace ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση*

$$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto \mathrm{div}(\mathrm{grad} f),$$

[1]Στην γενική περίπτωση, περιορίζομαστε σε διανυσματική πεδία ξ, τέτοια ώστε $\mathbf{g}\xi \in \mathcal{X}(M)$.

ενώ εάν (U, x) χάρτης στην M, τότε παίρνει την μορφή

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\sqrt{\mathbf{g}}\, g^{ij}\, \partial_i f \right)$$

Όπως και στον διανυσματικό λογισμό, το θεώρημα απόκλισης μας οδηγεί στον τύπο του Green. Πράγματι, εάν $f, h \in C^\infty(M), \xi \in \mathcal{X}(M)$, τότε εύκολα ελέγχεται ότι:

$$\mathrm{div}(f\xi) = f\mathrm{div}\xi + \langle \mathrm{grad} f, \xi \rangle$$

οπότε έχουμε τον τύπο:

$$\mathrm{div}(f\,\mathrm{grad}h) = f\Delta h + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} h \rangle$$

Θεώρημα 1.35 (Green). *Έστω $f, h \in C^\infty(M)$, ώστε τουλάχιστον μία εκ των δύο συναρτήσεων να έχει συμπαγή φορέα. Τότε :*

$$\int_M h\Delta f\, dV = -\int_M \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} h \rangle dV = \int_M f\Delta h\, dV$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του τελεστή Laplace σε συναρτήσεις, οι οποίες δεν είναι διαφορίσιμες. Αρχικά, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.36. *Έστω διανυσματικό πεδίο ξ, τέτοιο ώστε $|\xi| \in L^1_{loc}(M)$. Θα λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο ξ είναι η **ασθενής κλίση** μίας συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(M)$, και θα συμβολίζουμε $\xi = \nabla u$, εάν για κάθε $\eta \in \mathcal{X}(M)$ με συμπαγή φορέα, ισχύει η σχέση*

$$\int_M u\, \mathrm{div}\eta\, dV = -\int_M \langle \xi, \eta \rangle\, dV$$

Πρόταση 1.37. *Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann . Τότε για κάθε Lipschitz συνεχή $f \in C(M)$ υπάρχει η ασθενής της κλίση ∇f, η οποία μάλιστα είναι L^∞-διανυσματικό πεδίο της M και*

$$\|\nabla f\|_{L^\infty} \leq L(f),$$

όπου $L(f)$ η σταθερά Lipschitz της f.

Προφανώς, εάν $u \in C^1(M)$, τότε $\mathrm{grad} u = \nabla u$.

Ορισμός 1.38. *Ορίζουμε λοιπόν τον τελεστή* ***Laplace - Beltrami*** *ως εξής :*

$$L : D(L) \to L^2(M)$$

όπου

$$D(L) = \left\{ u \in W^{1,2}(M) \,\middle|\, \exists f \in L^2(M) : \int_M \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle dV = \int_M f \phi dV, \forall \phi \in C_C^\infty(M) \right\}$$

Εάν $u \in D(L)$, τότε η f είναι μοναδική και ορίζουμε

$$Lu = f$$

Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής Laplace - Beltrami είναι αυτοσυζυγής τελεστής, και μάλιστα θετικός, καθώς :

$$\langle Lu, u \rangle_{L^2(M)} = \int_M uLu\, dV = \int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle\, dV = \int_M |\nabla u|^2\, dV \geq 0$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του Green, κάθε $u \in C^2(M) \cap L^2(M)$ με $\int_M |\Delta u|^2\, dV < +\infty$ ανήκει στο $D(L)$ και μάλιστα ισχύει η σχέση

$$Lu = -\Delta u.$$

Επομένως, ο τελεστής L αποτελεί επέκταση του $-\Delta$, και για τον λόγο αυτόν, θα τον συμβολίζουμε στο εξής ως $-\Delta$.

Κεφάλαιο 2

Τα βασικά εργαλεία

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα βασικά εργαλεία, που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια, ώστε να αποδείξουμε τη συνέχεια του μετασχηματισμού Riesz σε χώρους συναρτήσεων, οι οποίες είναι ορισμένες αρχικά σε ευκλείδειους χώρους και στην συνέχεια σε πολλαπλότητες. Τα εργαλεία αυτά είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz και η ανάλυση Calderòn - Zygmund.

Τα θεωρήματα παρεμβολής αποτελούν ένα βασικό πεδίο έρευνας της Αρμονικής Ανάλυσης. Το διάσημο θεώρημα παρεμβολής του Riesz για παράδειγμα, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την συνέχεια ενός τελεστή επί του L^r, για κάθε $r \in (p, q)$, μόνο από την συνέχεια του στους χώρους L^p και L^q. Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz από αυτήν την άποψη γενικεύει το προηγούμενο θεώρημα, καθώς απαιτεί, όπως θα δούμε, μία ασθενέστερη συνθήκη συνέχειας επί των χώρων L^p και L^q. Στην επόμενη παράγραφο, δίνουμε μία απόδειξη του θεωρήματος στον $L^p(X)$ όπου X τυχών μετρικός χώρος κανονικού μέτρου.

Η ανάλυση Calderòn -Zygmund μας επιτρέπει να διασπάσουμε κάθε ολόκληρώσιμη συνάρτηση σε μία ≪ καλή ≫ ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση και σε μία ≪ κακή ≫ συνάρτηση, η οποία όμως έχει μηδενική μέση τιμή στο φορέα της. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνουμε μία απόδειξη στον χώρο των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων πάνω σε μία πλήρη πολλαπλότητα Riemannn, η οποία πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου.

2.1 Το Θεώρημα Παρεμβολής του Marcinkiewicz

2.1.1 Ασθενείς L^p χώροι

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και m κανονικό μέτρο Borel στον X.

Ορισμός 2.1. *Έστω $1 \leq p < \infty$. Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο $L^p_w(X)$, εάν υπάρχει $c(f) > 0$, τέτοιο ώστε*

$$m(\{x \in X : |f(x)| > a\}) \equiv m([|f| > a]) \leq \frac{c(f)}{a^p},$$

*για κάθε $a > 0$. Τον χώρο $L^p_w(X)$ θα τον αποκαλούμε **ασθενή** L^p.*

Παρατήρηση 2.2. *Για κάθε $p \in [1, +\infty)$, ο χώρος $L^p(X)$ είναι υποσύνολο του ασθενούς $L^p_w(X)$. Πράγματι, εάν υποθέσουμε τυχαίο $a > 0$ και $f \in L^p(X)$, επαναλαμβάνοντας τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας του Markov έχουμε*

$$a^p m([|f| > a]) = \int_{[|f|>a]} a^p dm(x) \leq \int_{[|f|>a]} |f(x)|^p dm(x) \leq \|f\|_p^p < +\infty$$

Μάλιστα, είναι εύκολο να δούμε ότι ο χώρος $L^p(X)$ είναι και γνήσιο υποσύνολο του $L^p_w(X)$. Ενδεικτικά, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \chi_{(1,+\infty)}(x)\frac{1}{x}$ ανήκει στον $L^1_w(\mathbb{R}, \lambda)$, ενώ όπως γνωρίζουμε δεν είναι στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$, όπου με λ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $a \geq 1$, ισχύει ότι $[|f| > a] = \emptyset$, οπότε

$$\lambda([|f| > a]) = 0 < \tfrac{1}{a}.$$

Όταν $a \in (0, 1)$, έχουμε ότι $[|f| > a] = \{x \in \mathbb{R} : \chi_{(1,+\infty)}(x)\frac{1}{x} > a\} = (1, \frac{1}{a})$, οπότε

$$\lambda([|f| > a]) = \tfrac{1}{a} - 1 < \tfrac{1}{a},$$

οπότε πράγματι έπεται ότι $f \in L^1_w(\mathbb{R})$.

Πρόταση 2.3. *Ο χώρος $L^p_w(X)$ είναι διανυσματικός χώρος για κάθε $1 \leq p < \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $1 \leq p < \infty$. Θα δείξουμε ότι ο χώρος $L^p_w(X)$ είναι κλειστός ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Έστω $f_1, f_2 \in L^p_w(X)$, οπότε υπάρχουν $c(f_1) > 0$ και $c(f_2) > 0$ τέτοια ώστε

$$m([|f_1| > a]) \leq \frac{c(f_1)}{a^p} \text{ και } m([|f_2| > a]) \leq \frac{c(f_2)}{a^p}$$

αντίστοιχα. Εάν $x \in X$, έτσι ώστε $a < |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$, τότε έχουμε λοιπόν ότι $|f_1(x)| > \frac{a}{2}$ ή $|f_2(x)| > \frac{a}{2}$. Συνεπώς,

$$[|f_1 + f_2| > a] \subseteq [|f_1| > \frac{a}{2}] \cup [|f_2| > \frac{a}{2}] \Rightarrow m([|f_1 + f_2| > a]) \leq$$

$$\leq m([|f_1| > \frac{a}{2}]) + m([|f_2| > \frac{a}{2}]) \leq \frac{2^p c(f_1)}{a^p} + \frac{2^p c(f_2)}{a^p} = \frac{2^p (c(f_1) + c(f_2))}{a^p}.$$

Έστω τώρα $\mu \in \mathbb{R}$ και $x \in X$, έτσι ώστε $a < |\mu f_1(x)|$. Τότε

$$[|\mu f_1| > a] = [f_1 > \frac{a}{|\mu|}] \Rightarrow m([|\mu f_1| > a]) = m([|f_1| > \frac{a}{|\mu|}]) \leq \frac{c|\mu|^p}{a^p}$$

□

Ορισμός 2.4. *Εάν ένας τελεστής $T : L^p(X) \to L^p(X)$, $p \in [1, +\infty]$, είναι συνεχής, θα γράφουμε ότι ο T είναι L^p-**συνεχής**.*

*Ένας τελεστής $T : L^p(X) \to L^p_w(X), p \in [1, +\infty)$, θα λέγεται **ασθενώς** L^p-**συνεχής**, εάν υπάρχει $c = c(f)$, τέτοιο ώστε για κάθε $a > 0$ ισχύει η σχέση :*

$$m([|Tf| > a]) \leq c \left(\frac{||f||_p}{a} \right)^p.$$

Παρατήρηση 2.5. *Κάθε L^p-συνεχής τελεστής είναι ασθενώς L^p- συνεχής, καθώς από την παρατήρηση 2.2, έχουμε*

$$m([|Tf| > a]) \leq \frac{||Tf||_p^p}{a^p} \leq c\frac{||f||_p^p}{a^p}.$$

2.1.2 Το Θεώρημα Παρεμβολής

Έστω τώρα $f \in L^p(X)$. Ορίζουμε την συνάρτηση κατανομής

$$m_f : [0, +\infty) \to [0, +\infty) : a \mapsto m([|f| > a]).$$

Λήμμα 2.6. *Η συνάρτηση m_f είναι θετική και μετρήσιμη, και επιπλέον ισχύει η ιδιότητα*

$$||f||_p^p = p \int_0^\infty a^{p-1} m_f(a) d\lambda(a)$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για $f \in L^p(X)$ θετική.
Υποθέτουμε αρχικά ότι η f είναι απλή, δηλαδή ότι $f = \chi_B$ όπου B Borel υποσύνολο του X. Τότε

$$p\int_0^\infty a^{p-1}m_f(a)d\lambda(a) = p\int_0^1 a^{p-1}m([\chi_B > a])d\lambda(a) = p\int_0^1 a^{p-1}m(B)d\lambda(a) =$$
$$= m(B)p\int_0^1 a^{p-1}d\lambda(a) = m(B)\left(\int_0^1 \frac{d}{da}(a^p)d\lambda(a)\right) = m(B) = \int_X |\chi_B|^p dm = \|\chi_B\|_p^p$$

Εάν τώρα η f είναι θετική απλή, δηλαδή είναι της μορφής $f = \sum_{k=1}^n \mu_k\chi_{B_k}$, όπου $\mu_k > 0$ τότε έχουμε

$$p\int_0^\infty a^{p-1}m_f(a)d\lambda(a) = p\int_0^\infty a^{p-1}m\left(\left[\sum_{k=1}^n \mu_k\chi_{B_k} > a\right]\right)d\lambda(a) =$$
$$= p\int_0^\infty a^{p-1}\sum_{k=1}^n m\left([\mu_k\chi_{B_k} > a]\right)d\lambda(a) = \sum_{k=1}^n\left(p\int_0^\infty a^{p-1}m\left(\left[\chi_{B_k} > \frac{a}{\mu_k}\right]\right)d\lambda(a)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^n\left(p\int_0^{\mu_k} a^{p-1}m\left(\left[\chi_{B_k} > \frac{a}{\mu_k}\right]\right)d\lambda(a)\right) = \sum_{k=1}^n\left(p\int_0^{\mu_k} a^{p-1}m(B_k)d\lambda(a)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^n m(B_k)\left(\int_0^{\mu_k}\frac{d}{da}(a^p)d\lambda(a)\right) = \sum_{k=1}^n \mu_k^p m(B_k) = \int_X\left|\sum_{k=1}^n \mu_k\chi_{B_k}\right|^p dm = \|f\|_p^p$$

Στην γενική περίπτωση όπου $f \in L^p(X)$ θετική, υπάρχει ακολουθία απλών μετρησίμων $\{s_n\}$, ώστε $s_n \nearrow f$, οπότε από το θεώρημα μόνοτονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\|f\|_p^p = \lim_n \int |s_n|^p dm = \lim_n\left(p\int_0^\infty a^{p-1}m([s_n > a])d\lambda(a)\right) =$$
$$= p\int_0^\infty a^{p-1}m\left(\left[\lim_n s_n > a\right]\right)d\lambda(a) = p\int_0^\infty a^{p-1}m_f(a)d\lambda(a)$$

□

Ορισμός 2.7. *Εάν μία συνάρτηση f γράφεται στην μορφή $f = f_1 + f_2$, όπου $f_1 \in L^{p_1}(X)$ και $f_2 \in L^{p_2}(X)$, τότε γράφουμε $f \in L^{p_1}(X) + L^{p_2}(X)$.*

Πρόταση 2.8. *Εάν $1 \le p_1 \le p \le p_2 \le +\infty$, τότε $L^p(X) \subset L^{p_1}(X) + L^{p_2}(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^p(X)$ και $a > 0$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1 = f\chi_{[|f|\geq a]}$ και $f_2 = f\chi_{[|f|<a]}$. Προφανώς $f = f_1 + f_2$, και μάλιστα παρατηρούμε ότι:

$$\|f_1\|_{p_1}^{p_1} = \int_X |f_1(x)|^{p_1} dm(x) = \int_X |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1-p} dm(x) \overset{p_1\leq p}{\leq} \frac{1}{a^{p-p_1}} \int_X |f_1(x)|^p dm(x) \leq \frac{\|f\|_p^p}{a^{p-p_1}} < +\infty$$

ενώ διαχωρίζοντας τις περιπτώσεις όπου $p_2 = +\infty$ και $p_2 < +\infty$ έχουμε αντίστοιχα :

- $\|f_2\|_\infty = \sup\limits_{[|f|<a]} \{|f(x)|\} \leq a$
- $\|f_2\|_{p_2}^{p_2} = \int_X |f_2(x)|^{p_2} dm(x) = \int_X |f_2(x)|^p |f_2(x)|^{p_2-p} dm(x) \overset{p\leq p_2}{\leq} a^{p_2-p} \int_X |f_2(x)|^p dm(x) \leq$
  $\leq a^{p_2-p} \|f\|_p^p < +\infty$

οπότε $f_1 \in L^{p_1}$ και $f_2 \in L^{p_2}$. □

Θεώρημα 2.9 (Marcinkiewicz). *Έστω ένας υπογραμμικός τελεστής T, ο οποίος είναι ασθενώς L^{p_1}-συνεχής και ασθενώς L^{p_2}-συνεχής, για κάποια $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$. Τότε ο T είναι L^r-συνεχής, για κάθε $r \in (p_1, p_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^r(X)$, όπου $r \in (p_1, p_2)$ και $a > 0$.
Αναλύουμε την συνάρτηση f στις $f_1^a = f\chi_{[|f|\geq a]}$ και $f_2^a = f\chi_{[|f|<a]}$, οπότε από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $f_1^a \in L^{p_1}$ και $f_2^a \in L^{p_2}$.
Εφόσον $|Tf(x)| \leq |Tf_1^a(x)| + |Tf_2^a(x)|$, έχουμε ότι $[|Tf| > a] \subseteq \left[|Tf_1^a| > \frac{a}{2}\right] \cup \left[|Tf_2^a| > \frac{a}{2}\right]$.
Έπεται λοιπόν η σχέση

$$m_{Tf}(a) = m([|Tf| > a]) \leq m\left(\left[|Tf_1^a| > \frac{a}{2}\right]\right) + m\left(\left[|Tf_2^a| > \frac{a}{2}\right]\right) \leq c_1 \left(\frac{\|f_1^a\|_{p_1}}{a}\right)^{p_1} + c_2 \left(\frac{\|f_2^a\|_{p_2}}{a}\right)^{p_2}$$

καθώς ο τελεστής T είναι ασθενώς L^{p_1}-συνεχής και ασθενώς $L_w^{p_2}$-συνεχής. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$m_{Tf}(a) \leq c_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{p_1} \int_{[|f|\geq a]} |f(x)|^{p_1} dm(x) + c_2 \left(\frac{1}{a}\right)^{p_2} \int_{[|f|<a]} |f(x)|^{p_2} dm(x)$$

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω σχέση, μπορούμε να δώσουμε μία εκτίμηση για την

$\|Tf\|_r^r$. Πράγματι, από το λήμμα 2.6 έχουμε

$$\|Tf\|_r^r = r\int_0^\infty a^{r-1} m_{Tf}(a)d\lambda(a) \leq$$
$$\leq c_1 r\int_0^\infty a^{r-1-p_1}\int_{[|f|\geq a]}|f(x)|^{p_1}dm(x)d\lambda(a) + c_2 r\int_0^\infty a^{r-1-p_2}\int_{[|f|<a]}|f(x)|^{p_2}dm(x)d\lambda(a)$$
$$\leq c_1 r\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_0^{|f(x)|} a^{r-1-p_1}d\lambda(a)\right)dm(x) + c_2 r\int_X |f(x)|^{p_2}\left(\int_{|f(x)|}^\infty a^{r-1-p_2}d\lambda(a)\right)dm(x) =$$
$$= \frac{c_1 r}{r-p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}|f(x)|^{r-p_1}dm(x) + \frac{c_2 r}{p_2-r}\int_X |f(x)|^{p_2}|f(x)|^{r-p_2}dm(x) =$$
$$= \frac{c_1 r}{r-p_1}\|f\|_r^r + \frac{c_2 r}{p_2-r}\|f\|_r^r \leq C\|f\|_r^r$$

□

Θεώρημα 2.10 (Marcinkiewicz). *Έστω ένας υπογραμμικός τελεστής T, ο οποίος είναι ασθενώς L^{p_1}-συνεχής και L^∞-συνεχής. Τότε ο T είναι L^r-συνεχής, για κάθε $r \in (p_1, +\infty)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^r$, όπου $r \in (p_1, +\infty)$ και $a > 0$.
Εφόσον ο τελεστής T είναι ασθενώς L^{p_1}-συνεχής και L^∞-συνεχής, έχουμε ότι:

$$m([|Tf| > a]) \leq c_1\left(\frac{\|f\|_{p_1}}{a}\right)^{p_1} \text{ και } \|Tf\|_\infty \leq c_2\|f\|_\infty.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_1^a = f\chi_{[|f|\geq \frac{a}{2c_2}]}$ και $f_2^a = f\chi_{[|f|<\frac{a}{2c_2}]}$
Από την πρόταση 2.8, έπεται ότι $f_1^a \in L^{p_1}(X)$ και $f_2^a \in L^\infty(X)$. Μάλιστα, εφόσον $\|f_2\|_\infty \leq \frac{a}{2c_2}$, έχουμε την εκτίμηση $\|Tf_2\|_\infty \leq \frac{a}{2}$, οπότε $m\left(\left[|Tf_2| > \frac{a}{2}\right]\right) = 0$.
Συνεπώς,

$$m([|Tf| > a]) \leq m\left(\left[|Tf_1| > \frac{a}{2}\right]\right) + m\left(\left[|Tf_2| > \frac{a}{2}\right]\right) \leq c_1\left(\frac{2}{a}\right)^{p_1}\|f_1\|^{p_1} =$$
$$= c_1\left(\frac{2}{a}\right)^{p_1}\left(\int_{[|f|>\frac{a}{2c_2}]}|f(x)|^{p_1}dm(x)\right)$$

Πλέον, αρκεί να επαναλάβουμε την βήματα της προηγούμενης απόδειξης για να εκτιμήσουμε την νόρμα $\|Tf\|_r^r$. Πράγματι :

$$\|Tf\|_r^r = r\int_0^\infty a^{r-1}m_{Tf}(a)d\lambda(a) \leq 2^{p_1}c_1 r\int_0^\infty a^{r-1-p_1}\int_{[|f|\geq\frac{a}{2c_2}]}|f(x)|^{p_1}dm(x)d\lambda(a) \leq$$
$$\leq 2^{p_1}c_1 r\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_0^{2c_2|f(x)|}a^{r-1-p_1}d\lambda(a)\right)dm(x) = \frac{2c_1c_2^{r-p_1}r}{r-p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}|f(x)|^{r-p_1}dm(x) \leq C\|f\|_r^r$$

□

2.2 Ανάλυση Calderòn- Zygmund

Έστω $(M, \langle\ ,\ \rangle, dV)$ πλήρης πολλαπλότητα Riemann, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου με σταθερά C_M.

Ορισμός 2.11. *Εάν $f \in L^1_{loc}(M)$, τότε ορίζουμε :*

$$Mf(x) = \sup_{x\in B} \fint_B |f(y)| dV(y).$$

*όπου παίρνουμε το supremum στις ανοιχτές μπάλες που περιέχουν το x. Η συνάρτηση Mf καλείται **έκκεντρη μεγιστική**.*

Παρατήρηση 2.12. *Ο υπογραμμικός τελεστής M δεν είναι L^1-συνεχής.*

Πράγματι, εάν $f = \chi_{B(0,1)}$, τότε $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Για να αποδείξουμε ότι η Mf δεν είναι ολοκληρώσιμη, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, με νόρμα μεγαλύτερη της μονάδας, έχουμε :

$$Mf(x) \geq \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f(y)| dy = \sup_{r>0} \frac{\lambda(B(0,1)\cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} \geq \frac{\lambda(B(0,1))}{\lambda(B(x,\|x\|))} \geq \frac{1}{\|x\|^n}$$

Συνεπώς, παίρνοντας σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε ότι :

$$\int_{B(0,\varepsilon)^c} Mf(x) d\lambda(x) \geq \int_{B(0,1)^c} Mf(x) d\lambda(x) \geq \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^n} dr = +\infty$$

Πρόταση 2.13. *Ο τελεστής M είναι L^p-συνεχής, για κάθε $p \in (1, +\infty]$, καθώς και ασθενώς L^1-συνεχής.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in L^\infty$ έχουμε :

$$|Mf(x)| = \sup_{x\in B} \fint_B |f(y)| dV(y) \leq \sup_{x\in B} \fint_B \|f\|_\infty dV(y) = \|f\|_\infty$$

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, το θεώρημα του Marcinkiewicz , αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής M είναι ασθενώς L^1-συνεχής.

Έστω $f \in L^1$ και K συμπαγές υποσύνολο του $[Mf > a]$. Εάν $x \in K$, τότε υπάρχει ανοιχτή μπάλα B_x, η οποία περιέχει το x, ώστε

$$\fint_B |f(y)| dV(y) > a \tag{2.1}$$

Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχουν μπάλες $B_{x_1}, B_{x_2}, \ldots, B_{x_N}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση (2.1), ώστε $K \subseteq \cup_{n=1}^N B_n$.

Από το λήμμα κάλυψης του Vitali [17], υπάρχουν $B_{x_{n_1}}, B_{x_{n_2}}, \ldots, B_{x_{n_m}}$ ξένες ανά δύο, ώστε

$$V(K) \leq C_M^2 \sum_{i=1}^{m} V(B_{x_{n_i}}) \leq \frac{C_M^2}{a} \sum_{i=1}^{m} V(B_{x_{n_i}}) \int_{B_{x_{n_i}}} |f(y)| dV(y) \leq \frac{C_M^2}{a} \|f\|_1.$$

καθώς οι $B_{x_{n_i}}$, $i = 1, \ldots, m$ ικανοποιούν την σχέση (2.1).
Αφού $[Mf > a] = \sup\{K \,|\, K$ συμπαγές υποσύνολο του $[Mf > a]\}$, έχουμε το ζητούμενο.

□

Συμβολισμός : Έστω ανοιχτή μπάλα $B_r = B(x, r)$. Συμβολίζουμε με nB_r την μπάλα με την n-πλάσια ακτίνα $B(x, nr)$.

Λήμμα 2.14. *Έστω F κλειστό μη κενό υποσύνολο της M, τότε υπάρχουν μπάλες $B_1, B_2, \ldots, B_\kappa, \ldots$, τέτοιες ώστε :*

(i) $B_m \cap B_n = \emptyset$, *όταν* $m \neq n$

(ii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} 4B_k = F^c$

(iii) $8B_k \cap F \neq \emptyset$, *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε για κάθε $x \notin F$ τις μπάλες $B(x, \frac{d(x,F)}{4})$. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Zorn, επιλέγουμε μία μεγιστική οικογένεια μπαλών $B_k = B(x_k, \frac{d(x_k,F)}{4})$, τέτοια ώστε $B_i \cap B_j = \emptyset$, όταν $i \neq j$. Εφόσον $8B_k \cap F \neq \emptyset$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{\infty} 4B_k = F^c$.
Έστω $x \notin F$. Αφού η οικογένεια $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι μεγιστική, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε $B(x, \frac{d(x,F)}{4}) \cap B(x_k, \frac{d(x_k,F)}{4}) \neq \emptyset$, οπότε $d(x, x_k) < \frac{d(x,F)}{4} + \frac{d(x_k,F)}{4}$.
Εφόσον το F είναι κλειστό, υπάρχει $y \in F$, ώστε $d(x_k, F) = d(x_k, y)$, οπότε

$$d(x, F) = \inf_{y' \in F}\{d(x, y')\} \leq d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) < \frac{d(x, F)}{4} + \frac{d(x_k, F)}{4} + d(x_k, F)$$
$$\Rightarrow d(x, F) < \frac{5}{3} d(x_k, F)$$

Συνεπώς,

$$d(x, x_k) \leq \frac{d(x_k, F)}{4} + \frac{d(x, F)}{4} \leq \frac{d(x_k, F)}{4} + \frac{5d(x_k, F)}{12} = \frac{2d(x_k, F)}{3},$$

άρα $x \in B(x_k, d(x_k, F)) = 4B_k$, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 2.15. *Ορίζουμε επαγωγικά τα σύνολα*

$$Q_1 = 4B_1 \cap \left(\cap_{j>1} B_j\right)^c$$

$$\cdots\cdots$$

$$Q_k = 4B_k \cap \left(\cup_{j<k} Q_j\right)^c \cap \left(\cap_{j>k} B_j\right)^c,\ k \in \mathbb{N}.$$

Τότε :

(*i*) $Q_m \cap Q_n = \emptyset$, *όταν* $m \neq n$

(*ii*) $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = F^c$

(*iii*) $B_k \subseteq Q_k \subseteq 4B_k$.

Θεώρημα 2.16 (Calderòn-Zygmund). *Έστω* $f \in L^1$ *και* $a > 0$. *Υπάρχει ακολουθία μπαλών* B_k, *σταθερά* $c > 0$ *και ανάλυση της* f, *τέτοια ώστε :*

$$f = g + b,\ \text{όπου } b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

ώστε:

(*i*) $|g(x)| \leq ca$, *σχεδόν για κάθε* $x \in M$

(*ii*) $\mathrm{supp} b_k \subseteq 4B_k$, *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$, *και επιπλέον*

(*α*) $\int |b_k(x)| dV(x) \leq ca\, V(4B_k)$

(*β*) $\int b_k(x) dV(x) = 0$

(*iii*) $\sum_{k=1}^{\infty} V(4B_k) \leq \frac{c}{a} \|f\|_1$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in M$, τέτοιο ώστε $Mf(x_0) > a$, δηλαδή υπάρχει ανοιχτή μπάλα B_{x_0}, τέτοια ώστε $⨍_{B_{x_0}} |f(y)| dV(y) > a$. Τότε, έπεται ότι για κάθε $x \in B_{x_0}$, έχουμε :

$$Mf(x) \geq ⨍_{B_{x_0}} |f(y)| dV(y) > a.$$

Συνεπώς, το σύνολο $[Mf > a]$ είναι ανοιχτό, καθώς κάθε σημείο του είναι εσωτερικό. Οπότε από το λήμμα 2.14 και το πόρισμα 2.15 υπάρχουν σύνολα B_k και Q_k, όπου $Q_n \cap Q_m = \emptyset$ όταν $n \neq m$, τέτοια ώστε :

$$B_k \subseteq Q_k \subseteq 4B_k \text{ και } \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = [Mf > a].$$

Θέτουμε $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{εάν } x \notin [Mf > a] \\ \fint_{Q_k} f(y)dV(y), & \text{εάν } x \in Q_k \end{cases}$

και $b_k(x) = \chi_{Q_k}(x)\,(f(x) - g(x))$.

(i) Αν $x \in [Mf \leq a]$, τότε από το θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue, προκύπτει

$$|g(x)| = |f(x)| = \left|\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f(y)dV(y)\right| \leq \sup_{x\in B} \fint_B |f(y)|dV(y) = Mf(x) \leq a$$

Όταν $x \in [Mf > a]$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $g(x) = \fint_{Q_k} f(y)dV(y)$.
Εφόσον $8B_k \cap [Mf > a]^c \neq \emptyset$, υπάρχει $x^* \in 8B_k \cap [Mf > a]^c$, οπότε έχουμε :

$$\fint_{8B_k} |f(y)|dV(y) \leq Mf(x^*) \leq a.$$

Συνεπώς,

$$\int_{Q_k} |f(y)|dV(y) \leq \int_{8B_k} |f(y)|dV(y) \leq a\,V(8B_k) \leq C_M^3 a\,V(B_k) \leq C_M^3 a\,V(Q_k),$$

άρα, $|g(x)| \leq ca$, σχεδόν για κάθε $x \in M$.

(ii) Προφανώς, $\text{supp} b_k(x) \subseteq Q_k$ και
$\int b_k(x)dV(x) = \int_{Q_k}\left(f(x) - \fint_{Q_k} f(y)dV(y)\right)dV(x) = \int_{Q_k} f(x)dV(x) - \int_{Q_k} f(y)dV(y) = 0.$
Επιπλέον, $\int |b_k(x)|dV(x) \leq 2\int_{Q_k} |f(x)|dV(x) \leq 2a\,V(8B_k) = C_M a\,V(4B_k)$.

(iii) Εφόσον $Q_n \cap Q_m = \emptyset$, όταν $n \neq m$, από την πρόταση 2.13 έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(4B_k) = C_M^2 \sum_{k=1}^{\infty} V(B_k) \leq C_M^2 \sum_{k=1}^{\infty} V(Q_k) = C_M^2 V(\cup_{k=1}^{\infty} Q_k) = C_M^2[Mf > a] \leq C_M^2 \frac{c}{a}\|f\|_1.$$

□

Παρατήρηση 2.17. *Αν μία συνάρτηση $f \in L^1$ αναλύεται κατά Calderòn - Zygmund ως $f = g + b$, τότε $g \in L^q$, για κάθε $q \in [1, +\infty]$, και $\|g\|_\infty \leq ca$*

$$\|g\|_q^q \leq ca^{q-1}\|f\|_1, \text{ εάν } q \in [1, +\infty).$$

Πράγματι, για $q = +\infty$, τότε πρόκειται για το (i) του θεωρήματος 2.16.
Εάν $q < +\infty$, έχουμε :

$$\|g\|_q^q = \int |g(x)|^q dV(x) = \int_{\cup_k 4B_k} |g(x)|^q dV(x) + \int_{(\cup_k 4B_k)^c} |g(x)|^q dV(x) \leq$$
$$\leq (ca)^q \sum_k V(4B_k) + \int_{(\cup_k 4B_k)^c} |g(x)|^{q-1}|f(x)|dV(x) \overset{(iii)}{\leq} (ca)^{q-1}\|f\|_1 + (ca)^{q-1}\|f\|_1 = 2c^{q-1}a^{q-1}\|f\|_1.$$

Κεφάλαιο 3

Πολλαπλασιαστές Fourier στον $\mathbb{R}^n$

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Riesz R σε ευκλείδειους χώρους. Εκφράζοντας κάθε συνιστώσα του τελεστή αυτού, ως ένα πολλαπλασιαστή Fourier, χρησιμοποιούμε θεωρία ιδιάζοντων ολοκληρωτικών τελεστών [14]. Στο βασικό θεώρημα παρουσιάζουμε την συνέχεια ενός ιδιάζοντος ολοκληρωτικού τελεστή, ο οποίος είναι συνεχής στον $L^q(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $q \in (1, \infty)$, και πληροί την λεγόμενη ιδιότητα Hörmander. Στην συνέχεια, λόγω της αντισυζυγίας των μετασχηματισμών R_j και της ισότητας Parseval δείχνουμε ότι οι τελεστές αυτοί είναι συνεχείς στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $p \in (1, \infty)$

3.2 Ιδιάζοντες Ολοκληρωτικοί Τελεστές

Ορισμός 3.1. ***Ιδιάζων ολοκληρωτικός τελεστής*** *καλείται ένας ολοκληρωτικός τελεστής*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) d\lambda(y),$$

όπου ο πυρήνας K εκρήγνυται επί της διαγωνίου $x = y$, αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμος ¨μακριά¨ από αυτήν.

Ακριβέστερα, απαιτούμε το ολοκλήρωμα να ορίζεται σε ένα πυκνό υπόχωρο των

L^p για κάθε $p \in [1, +\infty]$ (π.χ. τον $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ως εξής ([14]) :

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τον πυρήνα $K_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto \begin{cases} K(x,y), & \text{εάν } \|x-y\| > \varepsilon \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

και τον ολοκληρωτικό τελεστή $(T_\varepsilon f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x,y) f(y) d\lambda(y)$.

Ο τελεστής T ορίζεται ως το όριο

$$T(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(\cdot, y) f(y) d\lambda(y)$$

ενώ θα γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(\cdot, y) f(y) d\lambda(y) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(\cdot, y) f(y) d\lambda(y)$$

Θεώρημα 3.2. *Έστω T ιδιάζων ολοκληρωτικός τελέστής με πυρήνα K, ο οποίος πληροί τις ιδιότητες :*

(i) *Ο T είναι L^q φραγμένος, για κάποιο $q \in (1, +\infty)$.*

(ii) *Ο πυρήνας K πληροί την* ***συνθήκη Hormander****, δηλαδή υπάρχει $A > 0$, τέτοιο ώστε:*

$$\int_{\|x-y_0\|\geq 2\|y-y_0\|} |K(x,y) - K(x,y_0)| d\lambda(x) \leq A, \text{για κάθε } y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε, ο τελεστής T είναι ασθενώς L^1-συνεχής και L^p-συνεχής, για κάθε $p \in (1, q)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής T είναι ασθενώς L^1-συνεχής, και να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Marcinkiewicz.
Έστω $f \in L^1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda([|Tf| > \varepsilon]) \leq c\frac{\|f\|_1}{\varepsilon}$. Θεωρούμε την ανάλυση Calderòn - Zygmund , ως προς το $a = \frac{\varepsilon}{2}$, οπότε

$$f = g + b, \text{ όπου } b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Ισχυρισμός : $\lambda([|Tg| > a]) \leq c_1 \frac{\|f\|_1}{a}$
Πράγματι,

$$\lambda([|Tg| > a]) = \int_{[|Tg|>a]} d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Tg(x)|^q}{a^q} d\lambda(x) \leq \frac{\|T_g\|_q^q}{a^q} \leq \frac{M}{a^q}\|g\|_q^q$$

εφόσον ο τελεστής T είναι L^q-φραγμένος. Άρα, από την παρατήρηση 2.17, έχουμε

$$\lambda([|Tg| > a]) \leq \frac{M}{a^q}\|g\|_q^q \leq \frac{cMa^{q-1}}{a^q}\|f\|_1 = \frac{cM}{a}\|f\|_1$$

κι ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

Πρέπει πλέον να δείξουμε ότι $\lambda([|Tb| > a]) \leq c_2\frac{\|f\|_1}{a}$. Έχουμε

$$\lambda([|Tb| > a]) = \lambda\left([|Tb| > a] \cap \bigcup_k (2Q_k)\right) + \lambda\left([|Tb| > a] \cap \cup(2Q_k)^c\right)$$

όπου $suppb_k \subseteq Q_k \subseteq 4B_k$. Μάλιστα

$$\lambda\left([|Tb| > a] \cap \bigcup_k (2Q_k)\right) \leq \lambda\left(\bigcup_k 2Q_k\right) \leq \sum_k \lambda(8B_k) \leq \frac{c}{a}\|f\|_1$$

από την (iii) της ανάλυσης Calderòn-Zygmund.

Οπότε, αρκεί να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\lambda\left([|Tb| > a] \cap \cup(2Q_k)^c\right)$.

Έστω $Q_k \leq 4B_k = 4B(y_k, r_k)$ και $x \notin 2Q_k$, τότε

$$Tb_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)b_k(y)d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(K(x,y) - K(x,y_k)\right) b_k(y)d\lambda(y),$$

αφού $\int_{\mathbb{R}^n} b_k(y)dy = 0$. Εφόσον $suppb_k \subseteq Q_k$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{x\notin 2Q_k} |Tb_k(x)|d\lambda(x) &\leq \int_{x\notin 2Q_k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(x,y_k)|\ |b_k(y)|d\lambda(y)\right)d\lambda(x) \leq \\ &\leq \int_{x\notin 2Q_k}\left(\int_{y\in Q_k} |K(x,y) - K(x,y_k)|\ |b_k(y)|d\lambda(y)\right)d\lambda(x) \leq \\ &\leq \int_{y\in Q_k} |b_k(y)|\left(\int_{\|x-y_k\|\geq 2\|y-y_k\|} |K(x,y) - K(x,y_k)|d\lambda(x)\right)d\lambda(y) \leq \\ &\leq caA\lambda(4B_k)\end{aligned}$$

από την συνθήκη Hörmander και την ιδιότητα (ii) της ανάλυσης Calderòn - Zygmund.

Εφόσον $\sum_k \lambda(4B_k) \leq \frac{c}{a}\|f\|_1$, έχουμε

$$\int_{\cup_k(2Q_k)^c} |Tb(x)|d\lambda(x) \leq \sum_k \int_{x\notin 2Q_k} |Tb_k(x)|d\lambda(x) \leq caA\sum_k \lambda(4B_k) \leq cA\|f\|_1,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lambda\left([|Tb| > a] \cap \cup(2Q_k)^c\right) &\leq \int_{[|Tb|>a]\cap\cup(2Q_k)^c} d\lambda(x) \leq \int_{[|Tb|>a]\cap\cup(2Q_k)^c} \frac{|Tb(x)|}{a}d\lambda(x) \leq \\ &\leq \int_{\cup(2Q_k)^c} \frac{|Tb(x)|}{a}d\lambda(x) \leq \frac{cA\|f\|_1}{a}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\lambda([|Tf| > \varepsilon]) \leq \lambda([|Tg| > \frac{\varepsilon}{2}]) + \lambda([|Tb| > \frac{\varepsilon}{2}]) \leq \lambda([|Tg| > a]) + \lambda([|Tb| > a]) \leq$$
$$\leq \frac{c\|f\|_1}{a} + \left(\frac{c\|f\|_1}{a} + \frac{cA\|f\|_1}{a}\right) \leq \frac{c(A+2)\|f\|_1}{a}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

3.3 Πολλαπλασιαστές Fourier

Ορισμός 3.3. *Έστω συνάρτηση $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε ο τελεστής συνέλιξης*

$$T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) : (Tf)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi) f(\xi) e^{-2\pi i x\xi} d\lambda(\xi) = (K * f)(x) =$$

να είναι L^2-φραγμένος. Τότε από την ταυτότητα Plancherel προκύπτει ότι

$$\widehat{Tf}(\xi) = \hat{K}(\xi)\hat{f}(\xi),$$

*οπότε $\hat{K} \in L^\infty$. Η συνάρτηση $\hat{K}$ καλείται **πολλαπλασιαστής Fourier**.*

Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε υπό ποιες συνθήκες, ο πυρήνας K ικανοποιεί την συνθήκη Hörmander, ώστε να ελέγξουμε την συνέχεια του τελεστή T αυτού σε χώρους L^p, $p \neq 2$.

Πρόταση 3.4. *Εάν $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ και ικανοποιεί την σχέση*

$$\left|\partial_x^a K(x)\right| \leq \frac{c_a}{\|x\|^{n+|a|}}, \text{ για κάθε } |a| \leq 1 \tag{3.1}$$

τότε ο πυρήνας ικανοποιεί την συνθήκη Hörmander .

Απόδειξη. Έστω $y, y_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\delta = \|y - y_0\|$. Τότε :

$$\int_{\|x-y_0\| \geq 2\|y-y_0\|} |K(x-y) - K(x-y_0)| d\lambda(x) = \int_{B(y_0,2\delta)^C} |K(x-y) - K(x-y_0)| d\lambda(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} |K(x-y) - K(x-y_0)| d\lambda(x)$$

όπου $S_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^k\delta \leq \|x - y_0\| \leq 2^{k+1}\delta\}$, $k = 1, 2, \ldots$.
Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $y^* \in B(y_0, \delta)$, τέτοιο ώστε :

$$K(x-y) - K(x-y_0) = \left|\langle \nabla_y K(x-y^*), y_0 - y\rangle\right| \leq \| \nabla_y K(x-y^*)\| \, \|y_0 - y\| \leq c\frac{\delta}{\|x-y^*\|^{n+1}}$$

Εάν $x \in S_k$, τότε $\|x - y^*\| \geq 2^k\delta - \delta \geq 2^{k-1}\delta$, οπότε :

$$\int_{S_k} |K(x-y) - K(x-y_0)| d\lambda(x) \leq c \int_{S_k} \frac{\delta}{\|x-y^*\|^{n+1}} d\lambda(x) \leq c \int_{S_k} \frac{\delta}{\left(2^{k-1}\delta\right)^{n+1}} d\lambda(x) =$$
$$\frac{c\delta}{\left(2^{k-1}\delta\right)^{n+1}}\lambda(S_k) = \frac{c(n)\delta}{\left(2^{k-1}\delta\right)^{n+1}}\left(\left(2^{k+1}\delta\right)^n - \left(2^k\delta\right)^n\right) = c(n)\frac{1}{2^k}$$

Συνεπώς,

$$\int_{\|x-y_0\| \geq \|y-y_0\|} |K(x-y) - K(x-y_0)| d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} |K(x-y) - K(x-y_0)| d\lambda(x) =$$
$$= c(n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = c(n).$$

□

Επόμενως στόχος μας είναι να εξετάσουμε τις συνθήκες, που πρέπει να ικανοποιεί ο πολλαπλασιαστής Fourier m, ώστε να ικανοποιείται η σχέση (3.1). Αρχικά πρέπει να εισάγουμε την **δυαδική ανάλυση μιας συνάρτησης**.

Έστω $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, τέτοια ώστε $\eta(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \|\xi\| \leq 1 \\ 0, & \text{εάν } \|\xi\| \geq 2. \end{cases}$

Θέτουμε $\phi(\xi) = \eta(\xi) - \eta(2\xi)$, κι έχουμε $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\xi) = 1$

Πράγματι $\sum_{l^1}^{l^2} \phi(2^{-j}\xi) = \eta(2^{-l_2}\xi) - \eta(2^{-l_1+1}\xi) \to \eta(0) = 1$, καθώς $l_1 \to -\infty$ και $l_2 \to +\infty$.

Παρατηρούμε μάλιστα ότι $\text{supp}\phi(\xi) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq \|\xi\| \leq 2\right\}$, οπότε έπεται

$$\text{supp}\phi(2^{-j}\xi) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq \|\xi\| \leq 2^{j+1}\right\}$$

Η δυαδική ανάλυση μίας συνάρτησης f προκύπτει από την σχέση

$$f(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{-j}\xi) f(\xi)$$

Πρόταση 3.5. *Εάν $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, η οποία ικανοποιεί την σχέση*

$$\left|\partial_\xi^a m(\xi)\right| \leq \frac{c_a}{||\xi||^{|a|}}, \text{ για κάθε } a, \tag{3.2}$$

τότε ο μετασχηματισμός Fourier K της m, ικανοποίει την σχέση

$$\left|\partial_x^a K(x)\right| \leq \frac{c_a}{||x||^{n+|a|}}, \text{ για κάθε } a$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την δυαδική ανάλυση της m και γράφουμε

$$m(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{-j}\xi)m(\xi) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} m_j(\xi)$$

Θέτουμε

$$K_j(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} m_j(\xi) d\lambda(\xi) = \int_{2^{j-1} \leq ||\xi|| \leq 2^{j+1}} e^{-2\pi i x\xi} m_j(\xi) d\lambda(\xi)$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την $\left|\partial_x^a K_j(x)\right|$, για $a > 0$. Για όλους τους πολυδείκτες a, b έχουμε

$$\begin{aligned} x^b \partial_x^a K_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i\xi)^a x^b e^{-2\pi i x\xi} m_j(\xi) d\lambda(\xi) = \\ &= \int_{2^{j-1} \leq ||\xi|| \leq 2^{j+1}} (-2\pi i\xi)^a \left(\frac{\partial_\xi^b e^{-2\pi i x\xi}}{(-2\pi i)^b}\right) m_j(\xi) d\lambda(\xi) = \\ &= c \int_{2^{j-1} \leq ||\xi|| \leq 2^{j+1}} e^{-2\pi i x\xi} \partial_\xi^b (\xi^a m_j(\xi)) d\lambda(\xi) \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Leibniz και την σχέση (3.2) έχουμε

$$\left|\partial_\xi^b (\xi^a m_j(\xi))\right| \leq \sum_{|k|=0}^{|b|} c_k ||\xi||^{|a|-|k|} \left|\partial_\xi^{b-k} m_j(\xi)\right| \leq \sum_{|k|=0}^{|b|} c_k \frac{||\xi||^{|a|-|k|}}{||\xi||^{|b|-|k|}} = c||\xi||^{|a|-|b|}$$

Έπεται λοιπόν

$$\begin{aligned} \left|x^b \partial_x^a K_j(x)\right| &\leq c \int_{2^{j-1} \leq ||\xi|| \leq 2^{j+1}} \left|e^{-2\pi i x\xi}\right| \left|\partial_\xi^b (\xi^a m_j(\xi))\right| d\lambda(\xi) \leq \\ &\leq c \int_{2^{j-1} \leq ||\xi|| \leq 2^{j+1}} ||\xi||^{|a|-|b|} d\lambda(\xi) = c \int_{2^{j-1} \leq r \leq 2^{j+1}} r^{|a|-|b|+n-1} d\lambda(r) = \\ &= c\left\{\left(2^{j+1}\right)^{|a|-|b|+n} - \left(2^{j-1}\right)^{|a|-|b|+n}\right\} \leq c\left(2^{j+1}\right)^{|a|-|b|+n} \end{aligned}$$

Οπότε εάν θέσουμε $|b| = M$, τότε έχουμε

$$\left|\partial_x^a K_j(x)\right| \leq c\|x\|^{-M}(2^{j+1})^{|a|-M+n},\ \forall j, M \in \mathbb{N}$$

Για την εκτιμηση της ποσότητας $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\partial_x^a K_j(x)\right|$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, όταν $\|x\| \leq 1$ κι όταν $\|x\| > 1$.

- Εάν $\|x\| \leq 1$, χωρίζουμε το άθροισμα σε δύο επιμέρους αθροίσματα. Στο πρώτο αθροίζουμε για j, τα οποία ικανοποιούν $2^{j+1} < \|x\|^{-1}$, ενώ στο δεύτερο για j, για τα οποία ισχύει $2^{j+1} \geq \|x\|^{-1}$.
  Αν $2^{j+1} < \|x\|^{-1}$ ή ισοδύναμα $j < -\log_2\|x\| - 1$, θεωρούμε την διάταξη $j_0 > j_1 > \cdots > j_i > \dots$, για αυτά τα j. Επιλέγοντας $M = 0$, παίρνουμε
  $$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\partial_x^a K_{j_i}(x)\right| \leq c\sum_{i\in\mathbb{N}}(2^{j_i+1})^{|a|+n} = c(2^{j_0+1})^{|a|+n}\sum_{i\in\mathbb{N}}(2^{j_i-j_0})^{|a|+n} \leq \frac{c}{\|x\|^{|a|+n}}$$
  αφού $j_i - j_0 < 0$ για κάθε $i > 0$.
  Αν $2^{j+1} \geq \|x\|^{-1}$ ή ισοδύναμα $j \geq -\log_2\|x\| - 1$, θεωρούμε την διάταξη
  $j_0 < j_1 < \cdots < j_i < \dots$, για αυτά τα j. Επιλέγουμε τώρα $M > |a| + n$ κι έχουμε
  $$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\partial_x^a K_{j_i}(x)\right| &\leq \frac{c}{\|x\|^M}\sum_{i\in\mathbb{N}}(2^{j_i+1})^{|a|-M+n} = c\frac{(2^{j_0+1})^{|a|-M+n}}{\|x\|^M}\sum_{i\in\mathbb{N}}(2^{j_i-j_0})^{|a|-M+n} \leq \\ &\leq c\frac{(2^{j_0+1})^{|a|-M+n}}{\|x\|^M} \leq \frac{c}{\|x\|^M\|x\|^{|a|-M+n}} \leq \frac{c}{\|x\|^{|a|+n}}\end{aligned}$$
  αφού $|a| - M + n < 0$.
- Εάν $\|x\| > 1$, επιλέγουμε $M > |a| + n$, και έχουμε όπως πριν
  $$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\partial_x^a K_{j_i}(x)\right| \leq \frac{c}{\|x\|^M}\sum_{i\in\mathbb{N}}(2^{j_i+1})^{|a|-M+n} \leq \frac{c}{\|x\|^M} \leq \frac{c}{\|x\|^{|a|+n}}$$

κι η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.4 Ο Μετασχηματισμός Riesz σε χώρους $L^p(\mathbb{R}^n)$

Ορισμός 3.6. ***Μετασχηματισμός Riesz*** *R_j στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, όπου $j = 1, 2, \dots, n$, καλείται ο τελεστής*

$$R_j : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) : f \mapsto \left(m_j\hat{f}\right)^\vee$$

όπου

$$m_j(\xi) = -i\frac{\xi_j}{\|\xi\|}.$$

Εάν $n = 1$ τότε ο μετασχηματισμός Riesz ανάγεται στον μετασχηματισμό Hilbert

$$R_j : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : f \mapsto \left(-isign(\cdot)\hat{f}\right)^{\vee}$$

αφού $sign(\xi) = \frac{\xi}{\|\xi\|}$.

Ο μετασχηματισμός Riesz είναι L^2-συνεχής γραμμικός τελεστής, αφού ο πολλαπλασιαστής Fourier είναι φραγμένος, καθώς

$$\left|m_j(\xi)\right| = \left|-i\tfrac{\xi_j}{\|\xi\|}\right| \leq 1.$$

Εξ' άλλου, ο μετασχηματισμός Riesz έχει συζυγή τον αντίθετο του εαυτού του, δηλαδή $R_j^* = -R_j$. Πράγματι, για κάθε $f, g \in L^2$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle R_j f, g\rangle \overset{Plancherel}{=} \langle \widehat{R_j f}, \hat{g}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{R_j f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\lambda(\xi) =\\
= \int_{\mathbb{R}^n} -i\frac{\xi_j}{\|\xi\|}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\lambda(\xi) =\\
= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\left(i\frac{\xi_j}{\|\xi\|}\hat{g}(\xi)\right)}d\lambda(\xi) =\\
= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\left(\widehat{-R_j g}\right)(\xi)}d\lambda(\xi) =\\
= \langle \hat{f}, \widehat{R_j g}\rangle \overset{Plancherel}{=} \langle f, R_j g\rangle
\end{aligned}$$

Αρχικά, στόχος μας είναι να γράψουμε τον μετασχηματισμό Riesz ως ιδιάζοντα ολοκληρωτικό τελεστή, ώστε να εξετάσουμε την συνέχειά του στους χώρους $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, +\infty)$.

Λήμμα 3.7. *Η συνάρτηση $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|}e^{it\xi}d\lambda(\xi)$ καλείται **πυρήνας του Poisson**. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^n$, έχουμε*

$$P(t) = \frac{\Gamma\left[(n+1)/2\right]}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{1}{(1+\|t\|^2)^{(n+1)/2}}$$

Απόδειξη. **Ισχυρισμός :** $e^{-\beta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-\beta^2}{4u}}d\lambda(u)$

Εφαρμόζοντας θεωρία ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε ότι:

$$2\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{1+x^2}d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\beta x}{1+x^2}d\lambda(x) = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta x}}{1+x^2}d\lambda(x)\right) = Re\left(2\pi i Res\left(\frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}, i\right)\right)$$

όπου

$$Res\left(\frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}\right] = \frac{e^{-\beta}}{2i},\ \text{άρα } 2\int_0^{+\infty}\frac{cos\beta x}{1+x^2}d\lambda(x) = Re\left(2\pi i\frac{e^{-\beta}}{2i}\right) = e^{-\beta}\pi.$$

Οπότε $e^{-\beta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{cos\beta x}{1+x^2}d\lambda(x)$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-u}e^{-ux^2}d\lambda(u)$, γράφουμε :

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{cos\beta x}{1+x^2}d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} cos\beta x\left\{\int_0^{+\infty} e^{-u}e^{-ux^2}du\right\}d\lambda(x) \overset{Fubini}{=} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left\{\int_0^{+\infty} cos\beta x\, e^{-ux^2}dx\right\}d\lambda(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x}e^{-ux^2}dx\right\}d\lambda(u)\end{aligned}$$

αφού $Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x}e^{-ux^2}d\lambda(x)\right) = 0$.

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $x \mapsto -2\pi y$, ώστε να σχηματίσουμε το ολοκλήρωμα Euler - Poisson $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}d\lambda(z) = \sqrt{\pi}$, έπεται ότι :

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left\{\pi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4u\pi^2y^2}e^{-2\pi i\beta y}d\lambda(y)\right\}d\lambda(u) = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left\{\pi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(2\sqrt{u}\pi y+\frac{i\beta}{2\sqrt{u}}\right)^2}e^{-\beta^2/4u}d\lambda(y)\right\}d\lambda(u) = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}e^{-\frac{\beta^2}{4u}}\right\}d\lambda(u) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\beta^2}{4u}}d\lambda(u)\end{aligned}$$

κι ο ισχυρισμός μας αποδείχτηκε.

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} P(t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|}e^{it\xi}d\lambda(\xi) &\overset{\xi\mapsto 2\pi y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\|y\|}e^{2\pi ity}d\lambda(y) \overset{\text{Ισχυρισμός}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{-4\pi^2\|y\|^2}{4u}}d\lambda(u)\right\}e^{2\pi ity}d\lambda(y) \overset{Fubini}{=} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{-\pi^2\|y\|^2}{u}}e^{2\pi ity}d\lambda(y)\right\}d\lambda(u) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{y\pi}{\sqrt{u}}-it\sqrt{u}\right)^2}e^{-u\|t\|^2}d\lambda(y)\right\}d\lambda(u) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-u\|t\|^2}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{y\pi}{\sqrt{u}}-it\sqrt{u}\right)^2}d\lambda(y)\right\}d\lambda(u)\end{aligned}$$

Εφόσον η συνάρτηση e^{-z^2}, $z \in \mathbb{C}$, τείνει στο 0, όταν το z τείνει στο μιγαδικό άπειρο, προκύπτει από το ολοκλήρωμα Euler - Poisson πάλι ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{y\pi}{\sqrt{u}} - it\sqrt{u}\right)^2} d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{y\pi}{\sqrt{u}}\right)^2} d\lambda(y) = \left(\frac{u}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Οπότε, επιστρέφοντας στον υπολογισμό του $P(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-u\|t\|^2} d\lambda(u) \left(\frac{u}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \int_0^{+\infty} e^{-u\left(1+\|t\|^2\right)} u^{(n-1)/2} d\lambda(u) \overset{u\left(1+\|t\|^2\right)\mapsto s}{=} \\ &= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+\|t\|^2)^{n+1/2}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(n-1)/2} d\lambda(s) = \frac{\Gamma\left[(n+1)/2\right]}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+\|t\|^2)^{n+1/2}} \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.8. *Για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει ότι*

$$(R_j f)(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{y_j}{\|y\|^{n+1}} d\lambda(y),$$

όπου $c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}$.

Απόδειξη. Εφόσον $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έπεται ότι

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{\|\xi\|}\hat{f}(\xi) = \lim_{\delta \searrow 0}\left(-i\xi_j \frac{e^{-\|\xi\|\delta} - e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|}\hat{f}(\xi)\right),$$

και μάλιστα εφόσον $\left| -i\frac{\xi_j}{\|\xi\|}\hat{f}(\xi)\right| \leq \hat{f}(\xi)|$, και ο χώρος του Schwartz παραμένει αναλλοίωτος από τον μετασχηματισμό Fourier, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται πως η σύγκλιση είναι στον L^1. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} &\left(-i\xi_j \frac{e^{-\|\xi\|\delta} - e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|}\hat{f}\right)^{\vee}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(i\xi_j \frac{e^{-\|\xi\|\delta} - e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\right) d\lambda(\xi) = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[i\xi_j \frac{e^{-\|\xi\|\delta} - e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\xi y} d\lambda(y)\right) e^{i\xi x}\right] d\lambda(\xi) \overset{x-y\mapsto y}{=} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(i\xi_j \frac{e^{-\|\xi\|\delta} - e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i\xi y} d\lambda(y)\right) d\lambda(\xi) \overset{Fubini}{=} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_j \frac{e^{-\|\xi\|\delta} - e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|} e^{-i\xi y} d\lambda(\xi)\right)\right] d\lambda(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{f(x-y)\left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i\xi_j \left(\int_{1/\delta}^{\delta} e^{-\|\xi\| z} dz\right) e^{-i\xi y} d\lambda(\xi)\right]\right\} d\lambda(y) \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_j\left(\int_{1/\delta}^{\delta} e^{-\|\xi\|z}dz\right)e^{-i\xi y}d\lambda(\xi)$, γράφουμε

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_j\left(\int_{1/\delta}^{\delta} e^{-\|\xi\|z}d\lambda(z)\right)e^{-i\xi y}d\lambda(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{1/\delta}^{\delta} e^{-\|\xi\|z}d\lambda(z)\right)\frac{\partial}{\partial y_j}e^{-i\xi y}d\lambda(\xi) \overset{Fubini}{=}$$
$$= \int_{1/\delta}^{\delta}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|z}e^{-i\xi y}\right)d\lambda(\xi)d\lambda(z) = \int_{1/\delta}^{\delta}\frac{\partial}{\partial y_j}P_{1/z}(y)d\lambda(z)$$

όπου $P_\lambda(x) = \lambda^n P(\lambda x)$, και P ο πυρήνας του Poisson. Οπότε από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_j\left(\int_{1/\delta}^{\delta} e^{-\|\xi\|z}dz\right)e^{-i\xi y}d\lambda(\xi) = \int_{1/\delta}^{\delta} c_n\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{z^n}\frac{1}{\left(1+\left\|\frac{y}{z}\right\|^2\right)^{(n+1)/2}}\right)d\lambda(z) =$$
$$= c_n\int_{1/\delta}^{\delta}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\, z\frac{1}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\right)d\lambda(z) = c_n\int_{1/\delta}^{\delta}\left(-(n+1)y_j z\frac{1}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+3)/2}}\right)d\lambda(z) =$$
$$= c_n\int_{1/\delta}^{\delta}\left(\frac{\partial}{\partial z}\, y_j\frac{1}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\right)d\lambda(z) = c_n\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}$$

Συνεπώς, παίρνουμε την σχέση

$$\left(-i\xi_j\frac{e^{-\|\xi\|\delta}-e^{-\|\xi\|/\delta}}{\|\xi\|}\hat{f}\right)^{\vee}(x) = c_n\int_{\mathbb{R}^n}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μας, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y) - \int_{\|y\|>\varepsilon}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)\right| < C\varepsilon \tag{3.3}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\|y\|\le\varepsilon}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)\right| < C\varepsilon \tag{3.4}$$

καθώς υπάρχουν τα επιμέρους όρια της σχέσης (3.3), και μάλιστα

$$\lim_{\delta\searrow 0}\int_{\|y\|>\varepsilon}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y) \overset{\Theta K\Sigma}{=} \int_{\|y\|>\varepsilon}\left\{f(x-y)\left[\lim_{\delta\searrow 0}\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]\right\}d\lambda(y) =$$
$$= \int_{\|y\|>\varepsilon} f(x-y)\frac{-y_j}{\|y\|^{n+1}}d\lambda(y)$$

οπότε η ανισότητα

$$\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)-\int_{\|y\|>\varepsilon}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)\right|<\varepsilon$$

είναι ισοδύναμη με την

$$\left|\lim_{\delta\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)-\int_{\|y\|>\varepsilon}f(x-y)\frac{-y_j}{\|y\|^{n+1}}d\lambda(y)\right|<C\varepsilon$$

οπότε παίρνοντας όρια, καθώς το ε τείνει στο μηδέν, έχουμε το ζητούμενο.

Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι η σχέση (3.4) ισχύει. Εφόσον η συνάρτηση y_j είναι περιττή γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\|y\|\le\varepsilon}\left[f(x-y)\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)\right|=\\
&=\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\|y\|\le\varepsilon}\left[(f(x-y)-f(x))\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)\right|\overset{\Theta MT}{\le}\\
&\le\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\|y\|\le\varepsilon}\left[\max\|\nabla f\|\,\|x-y-x\|\frac{y_j}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}\right]d\lambda(y)\right|\le\\
&\le\|\max\nabla f\|\lim_{\delta\searrow 0}\left|\int_{\|y\|\le\varepsilon}\frac{\|y\|^2}{(z^2+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}\Bigg|_{z=1/\delta}^{z=\delta}d\lambda(y)\right|\le\\
&\le 2\max\|\nabla f\|\left|\int_{\|y\|\le\varepsilon}\frac{\|y\|^2}{\|y\|^{n+1}}d\lambda(y)\right|\le 2\max\|\nabla f(a)\|\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\varepsilon
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεώρημα 3.9. *Ο μετασχηματισμός Riesz R_j, $j=1,2,\ldots,n$, είναι συνεχής στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $p\in(1,+\infty)$.*

Απόδειξη. Εφόσον $R_j^*=-R_j$, αρκεί να δείξουμε την συνέχεια για κάθε $p\in(1,2]$. Η ισότητα Plancherel μας δίνει την L^2-συνέχεια του μετασχηματισμού Riesz, οπότε από το θεώρημα 3.2 μένει να αποδείξουμε ότι ο R_j πληροί την συνθήκη Hörmander , και ειδικότερα από την προταση 3.4 αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\left|\partial_x^\alpha K_{R_j}(x)\right|\le\frac{c_a}{\|x\|^{n+|a|}},\ \forall|\alpha|\le 1$$

όπου $K_{R_j}(x)=c_n\frac{x_j}{\|x\|^{n+1}}$, ο πυρήνας του τελεστής Riesz .

Συμβολίζουμε με δ_{ij} το δέλτα του Kronecker, κι έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_n\frac{x_j}{\|x\|^{n+1}}\right)=c_n\left(\frac{\delta_{ij}}{\|x\|^{n+1}}-(n+1)\|x\|^{-(n+3)}x_ix_j\right)$$

Συνεπώς

$$\left|\partial_x^\alpha K_{R_j}(x)\right| \leq c_n \frac{1+(n+1)\|x\|^{-2}|x_i x_j|}{\|x\|^{n+1}} \leq c_n \frac{n+2}{\|x\|^{n+1}},$$

οπότε αποδείχτηκε η συνέχεια του R_j στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $p \in (1,+\infty)$. □

Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του διανυσματικού μετασχηματισμού Riesz και θα τον συσχετίσουμε με τον τελεστή του Laplace.

Ορισμός 3.10. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου $1 < p < \infty$. Ο φραγμένος γραμμικός τελεστής, που δίνεται από τον τύπο :*

$$R : L^p(\mathbb{R}^n) \to (L^p(\mathbb{R}^n))^n : f \mapsto (R_1 f, \ldots, R_n f)$$

*καλείται **(διανυσματικός) μετασχηματισμός Riesz**.*

Πρόταση 3.11. *Για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι :*

$$Rf = \nabla(-\Delta)^{-1/2} f$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Εάν συμβολίσουμε με F τον μετασχηματισμό Fourier, γνωρίζουμε ότι

$$F(-\Delta) = M^2 F, \text{ όπου } (M^2 f)(x) = |x|^2 f(x).$$

Εφόσον ο τελεστής $-\Delta$ είναι θετικός, έχει μοναδική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα, εφαρμόζοντας συναρτησιακό λογισμό, προκύπτει ότι $F(-\Delta)^{-1/2} f = M^{-1} F f$.
Επομένως,

$$F((-\Delta)^{-1/2} f)(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|} \hat{f}(\xi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(\frac{\partial}{\partial x_i}(-\Delta)^{-1/2} f)(\xi) = i \frac{\xi_i}{\|\xi\|} \hat{f}(\xi) = \widehat{R_i f}(\xi)$$

Εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στον χώρο του Schwarz, έχουμε το ζητούμενο. □

Στο τέλος του κεφαλαίου, αξίζει να σημειώσουμε ότι ο μετασχηματισμός Riesz είναι μηδενικής τάξης διαφορισιμότητας, όπως δείξαμε στην προηγούμενη πρόταση, κι επομένως αναμέναμε ο τελεστής αυτός να είναι L^p-φραγμένος στον $\mathbb{R}^d$, για κάθε $p \in (1, +\infty)$. Όμως, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το ερώτημα της L^p-συνέχειας του διανυσματικού μετασχηματισμού Riesz $R = \nabla(-\Delta)^{-1/2}$ γίνεται αρκετά πολύπλοκο όταν εισερχόμαστε σε θεωρία πολλαπλοτήτων, όπου δεν ορίζονται ολικά συστήματα συντεταγμένων (ούτε ο μετασχηματισμός Fourier).

Κεφάλαιο 4

Ο μετασχηματισμός Riesz σε πολλαπλότητες Riemann

4.1 Εισαγωγή

Στα τελευταίο κεφάλαιο εξετάζουμε εάν η L^p συνέχεια του μετασχηματισμού Riesz σε ευκλείδειους χώρους, επεκτείνεται σε πλήρεις μη - συμπαγείς πολλαπλότητες Riemann. Το θεμελιώδες ερώτημα τέθηκε το 1983 από τον Robert Strichartz ([6]) :

> *Ποιες ιδιότητες πρέπει να πληροί μία πλήρης μη - συμπαγής πολλαπλότητα Riemann, ώστε ο μετασχηματισμός Riesz να είναι L^p συνεχής, για όλα (ή κάποια) $p > 1$ (αλλά $p \neq 2$)*;

Ο Dominique Bakry έδωσε θετική απαντήση ([3]) για πολλαπλότητες με μη αρνητική καμπυλότητα Ricci. Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζουμε την απόδειξη ([1]) που έδωσαν οι Thierry Coulhon και Xuan Thinh Duong , σε χώρους L^p, για $1 \leq p \leq 2$, κάτω από ασθενέστερες συνθήκες για την πολλαπλότητα, την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου και μία εκτίμηση στην διαγώνιο του πυρήνα θερμότητας. Τέλος, δίνεται ένα αντιπαράδειγμα πολλαπλότητας που πληροί τις προϋποθέσεις του βασικού θεωρήματος, αλλά ο μετασχηματισμός Riesz δεν είναι L^p-συνεχής, για $p > 2$.

4.2 Ο πυρήνας θερμότητας μίας πολλαπλότητας

Στην πρώτη παράγραφο παρουσιάζουμε συνοπτικά την θεωρία για τον πυρήνα θερμότητας σε μία πολλαπλότητα Riemann. Για τις αποδείξεις, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [4].

Έστω πολλαπλότητα $(M, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle, V)$. Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε τον αυτοσυζυγή τελεστή $-\Delta$. Οπότε με χρήση συναρτησιακού λογισμού, μπορούμε να ορίσουμε την **ημιομάδα θερμότητας** :

$$e^{-t(-\Delta)} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda$$

όπου $\{E_\lambda\}_\lambda$ η φασματική ανάλυση της μονάδας ([15]) που αντιστοιχεί στον τελεστή $-\Delta$.

Πρόταση 4.1. *Για κάθε $f \in L^2(M)$ και $t > 0$ η συνάρτηση $e^{-t(-\Delta)}$ ανήκει στον χώρο $C^\infty(M)$. Επιπλέον, για κάθε K συμπαγές υποσύνολο της M, η ανισότητα Sobolev προκύπτει η εκτίμηση :*

$$\sup_K |e^{-t(-\Delta)}| \leq C\|f\|_2$$

Απόδειξη. Έστω $\{E_\lambda\}$ η φασματική ανάλυση της μονάδας του τελεστή $-\Delta$ στον $L^2(M)$. Εφόσον για κάθε $t > 0$, $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $\Phi(\lambda) = \lambda^k e^{-t\lambda}$ είναι φραγμένη, ο τελεστής

$$\Phi(-\Delta) = (-\Delta)^k e^{-t(-\Delta)} = \int_0^\infty \lambda^k e^{-t\lambda} dE_\lambda$$

είναι φραγμένος. Επομένως, για κάθε $f \in L^2(M)$, έχουμε ότι $(-\Delta)^k e^{-t(-\Delta)} f \in L^2(M)$. Συνεπώς, αφού οι χώροι $C^\infty(M)$, $W^\infty_{loc}(M)$ είναι ομοιομορφικοί, έπεται ότι $e^{-t(-\Delta)} \in C^\infty(M)$ □

Πρόταση 4.2. *Για κάθε $f \in L^2(M)$, η απεικόνιση $u(t,x) = e^{-t(-\Delta)} f(x)$ είναι στοιχείο του χώρου $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times M)$ και είναι ασθενής λύση της εξίσωσης θερμότητας, δηλαδή ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση στον χώρο L^2 :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

Θεώρημα 4.3. *Έστω πολλαπλότητα Riemann M. Για κάθε $x \in M$ και $t > 0$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $h_{t,x} \in L^2(M)$ τέτοια ώστε*

$$e^{-t(-\Delta)}f(x) = \int_M h(t,x,y)f(y)dV(y) = \langle h(t,x,\cdot), f\rangle_{L^2(M)}$$

για κάθε $f \in L^2(M)$.

Απόδειξη. Από την πρόταση 4.1, για κάθε $x \in M$, το συναρτησοειδές $f \mapsto e^{-t(-\Delta)f}(x)$ είναι φραγμένο, επόμενως το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. □

Ορισμός 4.4. *Για κάθε $x, y \in M$, $t > 0$ ορίζουμε την συνάρτηση*

$$h(t,x,y) = \langle h_{t/2,x}, h_{t/2,y}\rangle_{L^2}$$

Η h καλείται ***πυρήνας θερμότητας*** *της πολλαπλότητας M.*

Παράδειγμα 4.5. *Εάν $M = \mathbb{R}^n$, τότε η απεικόνιση $h(t,x,\cdot)$ δίνεται από τον τύπο*

$$h(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}$$

Πρόταση 4.6. *Σε κάθε πολλαπλότητα M, ο πυρήνας θερμότητας ικανοποιεί τις εξης ιδιότητες :*

(i) *Συμμετρία : $h(t,x,y) = h(t,y,x)$, για κάθε $x, y \in M$ και $t > 0$,*

(ii) *για κάθε $f \in L^2(M)$, και για κάθε $x \in M$ και $t > 0$, έχουμε*

$$e^{-t(-\Delta)f(x)} = \int_M h(t,x,y)f(y)dV(y)$$

(iii) *$h(t,x,y) \geq 0$, για κάθε $x, y \in M$ και $t > 0$, και*

$$\int_M h(t,x,y)\, dV(y) \leq 1$$

για κάθε $x \in M$ και $t > 0$.

(iv) *Ταυτότητα ημιομάδας : για κάθε $x, y \in M$ και $t, s > 0$*

$$h(t+s,x,y) = \int_M h(t,x,z)\, h(s,z,y)\, dV(z),$$

(*v*) *Για κάθε* $y \in M$ *η απεικόνιση* $u(t,x) = h(t,x,y)$ *είναι* $C^\infty((0,+\infty) \times M)$ *και είναι ασθενής λύση της εξίσωσης θερμότητας.*

(*vi*) *Για κάθε* $f \in C_0^\infty(M)$, *ισχύει*

$$\int_M h(t,x,y) f(y) dV(y) \to f(x), \text{ καθώς } t \to 0,$$

όπου η σύγκλιση είναι στον $C^\infty(M)$.

Απόδειξη. Η συμμετρία του πυρήνα θερμότητας είναι προφανής, ενώ οι σχέσεις $h(t,x,y) \geq 0$ και $\int_M h(t,x,y)\, dV(y) \leq 1$ προκύπτουν άμεσα από την ημιομάδα θερμότητας. Στην συνέχεια της απόδειξης, χρειαζόμαστε αρχικά τους ακόλουθους ισχυρισμούς.

Ισχυρισμός : Για κάθε $x \in M, t, s > 0$ και $f \in L^2(M)$, έχουμε :

$$e^{-(t+s)(-\Delta)} f(x) = \int_M \langle h_{t,y}, h_{s,x} \rangle f(y) dV(y).$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συμμετρίας και της ημιομάδας της $e^{-t(-\Delta)}$, γράφουμε :

$$e^{-(t+s)(-\Delta)} f(x) = e^{s(-\Delta)} \left(e^{-t(-\Delta)} f \right)(x) = \langle h_{s,x}, e^{-t(-\Delta)} f \rangle = \langle e^{-t(-\Delta)} h_{s,x}, f \rangle =$$
$$\int_M e^{-t(-\Delta)} h_{s,x}(y) f(y) dV(y) = \int_M \langle h_{t,y}, h_{s,x} \rangle f(y) dV(y).$$

Ισχυρισμός : Για κάθε $x, y \in M$ και $t > 0$ το εσωτερικό γινόμενο $\langle h_{s,x}, h_{t-s,y} \rangle$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $s \in (0,t)$.

Πράγματι, για κάθε $0 < r < s < t$, έχουμε για $f = h_{r,x}$

$$\langle h_{s,x}, h_{t-s,y} \rangle = e^{-s(-\Delta)} h_{t-s,y}(x) = e^{-r(-\Delta)} \left(e^{-(s-r)(-\Delta)} h_{t-s,y} \right)(x) =$$
$$= \int_M h_{r,x}(z) \langle h_{s-r,z}, h_{t-s.y} \rangle dV(z) = e^{-(t-r)(-\Delta)} h_{r,x}(y) = \langle h_{t-r,y}, h_{r,x} \rangle$$

κι ο ισχυρισμός αποδείχτηκε. Εφαρμόζοντας τον πρώτο ισχυρισμό και τον ορισμό του πυρήνα θερμότητας, έχουμε για κάθε $x \in M$, $t > 0$:

$$e^{-t(-\Delta)} f(x) = \int_M \langle h_{t/2,x}, h_{t/2,y} \rangle f(y) dV(y) = \int_M h(t,x,y) f(y) dV(y),$$

οπότε έχουμε την απόδειξη του (*ii*). Εξάλλου, από τον δεύτερο ισχυρισμό προκύπτει ότι :

$$h(t,x,y) = \langle h_{s,x}, h_{t-s,y} \rangle$$

για κάθε $0 < s < t$. Πράγματι, για $s = t/2$ η ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της ημιομάδας θρμότητας, και εφόσον το δεύτερο μέλος της ισότητας είναι ανεξάρτητο του s, η ισότητα ισχύει για κάθε $s \in (0, t)$. Επομένως,

$$h(t, x, \cdot) = h_{t,x}\,,\ \sigma.\pi.$$

Έπεται λοιπόν από τις παραπάνω σχέσεις η σχέση (iv), καθώς

$$\int_M h(t, x, z)h(s, x, y)dV(z) = \langle h(t, x, \cdot), h(s, y, \cdot)\rangle = \langle h_{t,x}, h_{s,y}\rangle = h(t + s, x, y)$$

Επιπλέον, για κάθε $s > 0$ και $y \in M$, θεωρούμε την συνάρτηση $h(t + s, x, y)$. Από την προηγούμενη ισότητα έχουμε

$$u(t, x) = \langle h_{t,x}, h_{s,y}\rangle = e^{-t(-\Delta)}h_{s,y}(x),$$

οπότε από την προηγούμενη πρόταση η $u(t, x)$ είναι λεία στο (t, x) και λύνει την εξίσωση θερμότητας. Γράφοντας $t - s$ στην θέση του t έχουμε το ζητούμενο.
Τέλος, εάν $f \in C_0^\infty(M)$, τότε προφανώς $\Delta^m f \in C_0^\infty(M)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επομένως, από το φασματικό θεώρημα έπεται ότι

$$\int_0^\infty \lambda^{2m} d\|E_\lambda f\|^2 \leq \infty,$$

ενώ από τις σχέσεις

$$(-\Delta)^m f = \int_0^\infty \lambda^m dE_\lambda f$$

και

$$(-\Delta)^m e^{-t(-\Delta)} f = \int_0^\infty \lambda^m e^{-t\lambda} dE_\lambda f$$

γράφουμε

$$\|(-\Delta)^m(e^{-t(-\Delta)}f - f)\|_2^2 = \int_0^\infty \lambda^{2m}\left(e^{-t\lambda} - 1\right)^2 d\|E_\lambda f\|^2.$$

Εφόσον, η συνάρτηση $\lambda^{2m}\left(e^{-t\lambda} - 1\right)^2$ είναι φραγμένη για κάθε $t > 0$ από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση λ^{2m} και

$$\lambda^{2m}\left(e^{-t\lambda} - 1\right)^2 \to 0 \text{ καθώς } t \to 0,$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\|(-\Delta)^m(e^{-t(-\Delta)}f - f)\|_2^2 \to 0 \text{ καθώς } t \to 0.$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επομένως, $e^{-t(-\Delta)}f - f \to 0$ στον $W^{\infty}_{loc}(M)$, οπότε έχουμε ότι $e^{-t(-\Delta)}f \to f$ στον $C^{\infty}(M)$. □

Πρόταση 4.7. *Ο πυρήνας θερμότητας είναι C^{∞} συνάρτηση. Επιπλέον, για κάθε διαφορικό τελεστή D^{α}, όπου α πολυδείκτης, και $f \in L^2(M)$, ισχύει ότι :*

$$D^{\alpha}e^{-t(-\Delta)f}(x) = \int_M D^{\alpha}h(t,x,y)f(y)dV(y).$$

Έως τώρα η ημιομάδα θερμότητας έχει οριστεί σε συναρτήσεις $f \in L^2$. Χρησιμοποιώντας τον πυρήνα θερμότητας ορίζουμε

$$e^{-t(-\Delta)}f(x) := \int_M h(t,x,y)f(y)dV(y)$$

για κάθε συνάρτηση f τέτοια ώστε, το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης έχει νόημα. Ειδικότερα, εάν $f \in L^1_{loc}(M)$, τότε η συνάρτηση $e^{-t(-\Delta)}f$ είναι ορισμένη κατά σημείο, και μετρήσιμη σε κάθε $x \in M$ και κάθε $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times M$.

Πρόταση 4.8. *Έστω $f \in L^1(M)$ και $t > 0$. Τότε η ημιομάδα θερμότητας πληροί τις εξής ιδιότητες :*

(i) $\|e^{-t(-\Delta)}f\|_1 \leq \|f\|_1$,

(ii) $e^{-t(-\Delta)}f \xrightarrow{L^1} f$, *καθώς* $t \to 0$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι μη αρνητική. Έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_M e^{-t(-\Delta)}f dV &= \int_M\left(\int_M h(t,x,y)f(y)dV(y)\right)dV(x) = \\ &= \int_M\left(\int_M h(t,x,y)dV(x)\right)f(y)dV(y) \leq \\ &\leq \int_M f(y)dV(y) = \|f\|_1,\end{aligned}$$

οπότε το (i) αποδείχτηκε.

Έστω τώρα $\{\Omega_k\}$ αύξουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων της M, ώστε να εξαντλούν την πολλαπλότητα. Θέτουμε

$$f_k = min\{f, k\}\chi_{\Omega_k}$$

και παρατηρούμε ότι $f_k \in L^2(\Omega_k)$, άρα

$$e^{-t(-\Delta_{\Omega_k})} f_k \overset{L^2(\Omega_k)}{\to} f_k, \text{ καθώς } t \to 0.$$

Μάλιστα, εφόσον $V(\Omega_k) \le \infty$, οπότε $L^2(\Omega_k) \hookrightarrow L^1(\Omega_k)$, έπεται ότι

$$e^{-t(-\Delta_{\Omega_k})} f_k \overset{L^1(\Omega_k)}{\to} f_k, \text{ καθώς } t \to 0,$$

ενώ θέτοντας $e^{-t(-\Delta_{\Omega_k})} f_k(x) = 0$, για κάθε $x \notin \Omega_k$, έχουμε

$$e^{-t(-\Delta_{\Omega_k})} f_k \overset{L^1(M)}{\to} f_k, \text{ καθώς } t \to 0.$$

Εξάλλου, είνα προφανής η σχέση $f_k \overset{L^1(M)}{\to} f$, καθώς $k \to \infty$, οπότε προκύπτει το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} e^{-t(-\Delta_{\Omega_k})} f_k & \le & e^{-t(-\Delta)} f \\ \downarrow^{L^1} & & \le_{L^1} \\ f_k & \overset{L^1}{\to} & f \end{array}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι $e^{-t(-\Delta)} f \overset{L^1}{\to} f$. □

4.2.1 Πυρήνες θερμότητας και ιδιότητα διπλασιασμού όγκου

Ορισμός 4.9. *Μία πολλαπλότητα Riemann M ικανοποιεί την **σχετική ανισότητα Faber - Krahn**, εάν υπάρχουν θετικές σταθερές b, c, έτσι ώστε για κάθε μπάλα $B(x, r) \subseteq M$ και σχετικά συμπαγές ανοιχτό σύνολο $U \subseteq B(x, r)$ να ισχύει :*

$$\lambda_1(U) \ge \frac{b}{r^2} \left(\frac{V(B(x, r))}{V(U)} \right)^{\frac{2}{c}}$$

όπου $\lambda_1 = \min\{\lambda \in \sigma(-\Delta)$, *όπου* $-\Delta \in W_0^{1,2}(U)\}$.

Αποδεικνύεται μάλιστα ότι η σχετική ανισότητα Faber - Krahn ισχύει σε κάθε πλήρη μη συμπαγή πολλαπλότητα με μη αρνητική καμπυλότητα Ricci ([5]).

Θεώρημα 4.10. *Έστω $(M, \langle\cdot\,,\cdot\rangle, dV)$ μία πλήρης μη συμπαγής πολλαπλότητα Riemann. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

(α) *η M ικανοποιεί την σχετική ανισότητα Faber - Krahn .*

(β) *η M πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου, και ο πυρήνας θερμότητας της M ικανοποιεί την ανισότητα:*

$$h(t,x,x) \le \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}.$$

(γ) *η M πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου, και ο πυρήνας θερμότητας της M ικανοποιεί την ανισότητα:*

$$h(t,x,y) \le \frac{C_\alpha}{\sqrt{V(x,\sqrt{t})V(y,\sqrt{t})}} exp\left(-\alpha\frac{d^2(x,y)}{t}\right)$$

για κάθε $\alpha \in (0,1/4)$.

Παρατήρηση 4.11. (i) *Από το (γ), προκύπτει και η ιδιότητα :*

$$h(t,x,y) \le \frac{C'_\alpha}{V(y,\sqrt{t})} exp\left(-\alpha\frac{d^2(x,y)}{t}\right), \ \forall x,y \in M,\ t>0 \tag{4.1}$$

για κάθε $a \in (0,1/4)$. Πράγματι,έχουμε $B(y,\sqrt{t}) \subseteq B(x,\sqrt{t}+d(x,y))$. Οπότε από το λήμμα 1.29, έχουμε ότι :

$$V(y,\sqrt{t}) \le V(x,\sqrt{t}+d(x,y)) \le C\left(1+\frac{d(x,y)}{\sqrt{t}}\right)^D V(x,\sqrt{t})$$

και το αποτέλεσμα έπεται από ιδιότητες λογαρίθμων.

(ii) *Υπό τις ίδιες υποθέσεις, αποδεικνύεται επιπλέον η εκτίμηση [8]:*

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x,y)\right| \le \frac{C''_\alpha}{tV(y,\sqrt{t})} exp\left(-\alpha\frac{d^2(x,y)}{t}\right), \ \forall x,y \in M,\ t>0 \tag{4.2}$$

για κάθε $\alpha \in (0,1/4)$.

4.3 Ο μετασχηματισμός Riesz στον $L^p(M)$, $1 < p \leq 2$

Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου :

Θεώρημα 4.12. *Έστω M μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann , η οποία πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου και την εκτίμηση :*

$$h(t,x,x) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \tag{4.3}$$

για κάθε $x \in M$, $t > 0$ και κάποιο $C > 0$. Τότε ο μετασχηματισμός Riesz $R = \nabla(-\Delta)^{-1/2}$ είναι συνεχής στον $L^p(M)$, $\forall p \in (1,2]$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρειαζόμαστε τα ακόλουθα λήμματα, τα οποία μας δίνουν εκτιμήσεις για την χωρική ασθενή κλίση του πυρήνα θερμότητας.

4.3.1 Εκτιμήσεις της χωρικής μερικής παραγώγου του πυρήνα θερμότητας

Λήμμα 4.13. *Για κάθε $\gamma > 0$, ισχύει η εκτίμηση :*

$$\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} e^{-2\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) \leq C_\gamma V(y,\sqrt{s}) e^{-\gamma t/s}, \ \forall s,t > 0, \ y \in M.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $s, t > 0$ έχουμε την εκτίμηση :

$$\begin{aligned}\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} e^{-2\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) \leq \int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} e^{-\gamma\frac{d^2(x,y)+t}{s}} dV(x) \leq \\ \int_M e^{-\gamma t/s} e^{-\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) = \\ e^{-\gamma t/s}\int_M e^{-\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) = e^{-\gamma t/s} I.\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το I διαμερίζοντας την πολλαπλότητα M σε περιοχές :

$$A_n = \left\{x \in M : ns^{1/2} \leq d(x,y) \leq (n+1)s^{1/2}\right\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Οπότε από το λήμμα 1.29, έπεται η ανισότητα

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n} max\left\{e^{-\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}} : x \in A_n\right\} dV(x) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} V(B(y,(n+1)s^{1/2}))e^{-\gamma n^2} \leq V(y,s^{1/2})\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^D e^{-\gamma n^2}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας στην συνέχεια το κριτήριο λόγου, έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^D e^{-\gamma n^2} < \infty$, οπότε έπεται το ζητούμενο. □

Στο εξής, σταθεροποιούμε $\alpha \in (0, 1/4)$.

Λήμμα 4.14. *Για κάθε $\gamma \in (0, 2\alpha)$, έχουμε*

$$\int_M \left|h(s,x,y)\right|^2 e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) \le \frac{C_\gamma}{V(y, \sqrt{s})}, \ \forall y \in M, s > 0.$$

Απόδειξη. Από την εκτίμηση του πυρήνα θερμότητας (4.1), το θεώρημα 4.10 και την παρατήρηση 4.11, προκύπτει :

$$\int_M \left|h(s,x,y)\right|^2 e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) \le \int_M \frac{C}{V^2(y, \sqrt{s})} e^{-2\alpha \frac{d^2(x,y)}{s}} e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) =$$
$$\frac{C}{V^2(y, \sqrt{s})} \int_M e^{(-2\alpha+\gamma)\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) = \frac{C}{V^2(y, \sqrt{s})} I.$$

Οπότε αρκεί να εκτιμήσουμε το I. Από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε :

$$I = \int_{d(x,y) \ge s^{1/2}} e^{(-2\alpha+\gamma)\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) + \int_{d(x,y) < s^{1/2}} e^{(-2\alpha+\gamma)\frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) \le$$
$$\le CV(y, \sqrt{s}) e^{-\alpha + \frac{\gamma}{2}} + V(y, \sqrt{s}) e^{-2\alpha+\gamma} \le CV(y, \sqrt{s}),$$

οπότε αντικαθιστώντας, έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.15. *Για κάθε $\gamma \in (0, 2\alpha)$, έχουμε :*

$$\int_M \left|\nabla_x h(s,x,y)\right|^2 e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) \le \frac{C_\gamma}{sV(y, \sqrt{s})}, \ \forall y \in M, s > 0.$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει :

$$I(s,y) = \int_M \left|\nabla_x h(s,x,y)\right|^2 e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) =$$
$$- \int_M h(s,x,y) \Delta_x h(s,x,y) e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}} dV(x) -$$
$$\int_M h(s,x,y) \nabla_x h(s,x,y) \nabla_x \left(e^{\gamma \frac{d^2(x,y)}{s}}\right) dV(x) =$$
$$I_1(s,y) + I_2(s,y)$$

Θα εκτιμήσουμε τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 ξεχωριστά.

Εφόσον ο πυρήνας θερμότητας είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας, προκύπτει η σχέση :

$$I_1(s,y) = -\int_M h(s,x,y)\frac{\partial h}{\partial s}(s,x,y)e^{\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}}dV(x)$$

οπότε από την εκτίμηση της χρονικής παραγώγου (4.2), επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος, έχουμε ότι :

$$|I_1(s,y)| \leq \frac{C_\gamma}{sV(y,\sqrt{s})}$$

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα $I_2(s,y)$, από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι :

$$I_2(s,y) = -\int_M h(s,x,y)\nabla_x h(s,x,y)\,\frac{2\gamma d(x,y)}{s}\,\nabla_x d(x,y)\,e^{\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}}dV(x)$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.37 στην Lipschitz συνεχή συνάρτηση $d(\cdot,y)$, έχουμε $\left|\nabla_x d(x,y)\right| < 1$, οπότε έπεται η ανισότητα :

$$\left|I_2(s,y)\right| \leq \int_M h(s,x,y)\left|\nabla_x h(s,x,y)\right|\frac{2\gamma d(x,y)}{s}e^{\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}}dV(x).$$

Ισχυρισμός : Για κάθε $\gamma' > \gamma$, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε :

$$2\gamma\frac{d(x,y)}{s}e^{\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}} \leq \frac{c}{\sqrt{s}}e^{\gamma'\frac{d^2(x,y)}{s}}.$$

Θέτοντας $\beta = \frac{d(x,y)}{s}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$2\gamma\beta e^{\gamma\beta^2} \leq ce^{\gamma'\beta^2}.$$

Χρησιμοποιώντας λογαριθμικές ιδιότητες , έχουμε την ισοδύναμη σχέση :

$$ln(2\gamma) + ln(\beta) + (\gamma-\gamma')\beta^2 \leq lnC,$$

η οποία ισχύει για κάθε $\gamma' > \gamma$ κι ο ισχυρισμός μας αποδείχτηκε. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε $\gamma \in (\gamma', \frac{2\alpha+\gamma}{2})$. Επομένως, θέτοντας $\gamma'' = 2\gamma' - \gamma$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy - Schwarz, έχουμε :

$$\begin{aligned}\left|I_2(s,y)\right| &\leq \frac{c}{\sqrt{s}}\int_M h(s,x,y)\left|\nabla_x h(s,x,y)\right| e^{\gamma'\frac{d^2(x,y)}{s}}dV(x) \leq \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{s}}\left(\int_M \left|h(s,x,y)\right|^2 e^{\gamma''\frac{d^2(x,y)}{s}}dV(x)\right)^{1/2}\left(\int_M \left|\nabla_x h(s,x,y)\right|^2 e^{\gamma\frac{d^2(x,y)}{s}}dV(x)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Μάλιστα, εφόσον $\gamma'' \in (0, 2\alpha)$, από το λήμμα 4.14 έχουμε :

$$\left|I_2(s,y)\right| \leq \left(\frac{C}{sV(y,\ \sqrt{s})}\right)^{1/2} \sqrt{I(s,y)}.$$

Συνεπώς, έχουμε την εκτίμηση :

$$\begin{aligned} I(s,y) &\leq \frac{C'_\gamma}{sV(y,\ \sqrt{s})} + \left(\frac{C}{sV(y,\ \sqrt{s})}\right)^{1/2} \sqrt{I(s,y)} \\ \Rightarrow I(s,y) &\leq \frac{C_\gamma}{sV(y,\ \sqrt{s})}. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.16. *Υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε :*

$$\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} \left|\nabla_x h(s,x,y)\right| dV(x) \leq C\, e^{-\beta t/s} s^{-1/2},\ \forall y \in M,\ s,t > 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\beta \in (0, \alpha)$. Από το λήμμα 4.13 γράφουμε :

$$\begin{aligned} &\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} \left|\nabla_x h(s,x,y)\right| dV(x) \leq \\ &\leq \int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} \left|\nabla_x h(s,x,y)\right| e^{\beta \frac{d^2(x,y)-d^2(x,y)}{s}}\ dV(x) \leq \\ &\overset{C-S}{\leq} \left(\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} \left|\nabla_x h(s,x,y)\right|^2 e^{2\beta\frac{d^2(x,y)}{s}}\ dV(x)\right)^{1/2} \left(\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} e^{-2\beta\frac{d^2(x,y)}{s}}\ dV(x)\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_M \left|\nabla_x h(s,x,y)\right|^2 e^{2\beta\frac{d^2(x,y)}{s}}\ dV(x)\right)^{1/2} \left(\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} e^{-2\beta\frac{d^2(x,y)}{s}}\ dV(x)\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\frac{C_\beta}{sV(y,\ \sqrt{s})}\right)^{1/2} \left(C_\beta V(y,\ \sqrt{s}) e^{-\beta t/s}\right)^{1/2} \leq C\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\beta t/2s}. \end{aligned}$$

□

4.3.2 Η απόδειξη του βασικού θεωρήματος

Απόδειξη. Για $p = 2$, η συνέχεια προκύπτει από ολοκλήρωση κατα μέλη. Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε για κάθε $f \in W^{1,2}(M)$ τη σχέση :

$$\||\nabla f|\|_2 \leq C\|(-\Delta)^{1/2} f\|_2.$$

Έχουμε :

$$\| |\nabla f| \|_2^2 = \int_M \langle \nabla f, \nabla f \rangle_M dV = \int_M f(-\Delta) f dV =$$
$$= \langle f, (-\Delta) f \rangle_{L^2} = \langle (-\Delta)^{1/2} f, (-\Delta)^{1/2} f \rangle_{L^2} = \|(-\Delta)^{1/2} f\|_2.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Riesz είναι ασθενώς L^1- συνεχής, δηλαδή ότι για κάθε $f \in L^1(M)$ και $\lambda > 0$ ισχύει :

$$V(\{x \in M : |Rf(x)| > \lambda\}) \leq c \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Θεωρούμε λοιπόν τυχούσα συνάρτηση $f \in L^1(M) \cap L^2(M)$ και $\lambda > 0$. Θεωρούμε την ανάλυση Calderon-Zygmund του θεωρήματος 2.16:

$$f = g + b, \quad \text{όπου } b = \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Έχουμε λοιπόν :

$$V(\{x \in M : |Rf(x)| > \lambda\}) \leq V(\left\{x \in M : |Rg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}) + V(\left\{x \in M : |Rb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\})$$

Εφόσον R φραγμένος στον $L^2(M)$ και από την ιδιότητα (i) της ανάλυσης Calderon - Zygmund έχουμε ότι $|g(x)| < c\lambda$, οπότε έπεται από την παρατήρηση 2.17 ότι :

$$V\left(\left\{x \in M : |Rg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq c \frac{\|g\|_2^2}{\lambda^2} \leq c' \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τώρα την ποσότητα $Rb = \sum_{i=1}^{\infty} Rb_i$. Γράφουμε

$$Rb_i = Re^{-t_i(-\Delta)} b_i + R(I - e^{-t_i(-\Delta)}) b_i,$$

όπου $t_i = r_i^2$, και r_i είναι η ακτίνα της μπάλας $4B_i$ της ανάλυσης Calderon - Zygmund.
Ισχυρισμός : $\| \sum_i e^{-t_i(-\Delta)} b_i\|_2^2 \leq c\lambda \|f\|_1$.

Από την εκτίμηση του πυρήνα θερμότητας, και ότι supp$b_i \subseteq Q_i \subseteq B(x_i,\ \sqrt{t_i})$ έχουμε :

$$
\begin{aligned}
|e^{-t_i(-\Delta)}b_i(x)| &\leq \int_M h(t_i,x,y)|b_i(y)|dV(y) \leq \int_M \frac{e^{-\alpha\frac{d^2(x,y)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}|b_i(y)|dV(y) \leq \\
&\leq C\frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,x_i)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}\int_M |b_i(y)|dV(y) \leq C'\frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,x_i)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}\lambda V(B_i) \leq \\
&\leq C''\frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,x_i)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}\lambda V(Q_i) \leq C''\lambda\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,x_i)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}\chi_{Q_i}(y)dV(y) \leq \\
&\leq C'''\lambda\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,y)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}\chi_{Q_i}(y)dV(y)
\end{aligned}
$$

καθώς $\alpha' d^2(x,x_i) - \alpha d^2(x,y) \leq c$,, για κάθε $\alpha' \in (0,\alpha)$ και $y \in B(x_i,\ \sqrt{t_i})$.
Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι :

$$
\left\| \sum_{i=1}^{\infty}\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(\cdot,y)}{t_i}}}{V(\cdot,\ \sqrt{t_i})}\chi_{Q_i}(y)dV(y) \right\|_2 \leq c\left\| \sum_{i=1}^{\infty}\chi_{Q_i} \right\|_2,
$$

καθώς

$$
\lambda^2\left\| \sum_{i=1}^{\infty}\chi_{Q_i} \right\|_2^2 \leq c\lambda^2\sum_{i=1}^{\infty}V(4B_i) \leq c'\lambda\|f\|_1.
$$

Έχουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{\infty}\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(\cdot,y)}{t_i}}}{V(\cdot,\ \sqrt{t_i})}\chi_{Q_i}(y)dV(y) \right\|_2 &= \sup_{\|u\|_2=1}\left| \int_M \left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,y)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}\chi_{Q_i}(y)dV(y) \right) u(x)dV(x) \right| \leq \\
&\overset{Fubini}{\leq} \sup_{\|u\|_2=1}\int_M \left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(x,y)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x) \right)\chi_{Q_i}(y)dV(y).
\end{aligned}
$$

Εφόσον $V(y,\ \sqrt{t_i}) \leq \left(1+\frac{d(x,y)}{\sqrt{t_i}}\right)^D V(x,\ \sqrt{t_i})$, γράφουμε

$$
\int_M \frac{e^{-\alpha'\frac{d^2(\cdot,y)}{t_i}}}{V(x,\ \sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x) \leq \frac{1}{V(y,\ \sqrt{t_i})}\int_M e^{-\alpha'\frac{d^2(x,y)}{t_i}}\left(1+\frac{d(x,y)}{\sqrt{t_i}}\right)^D |u(x)|dV(x)
$$

και μάλιστα, αφού για κάθε $a'' \in (0,a')$, υπάρχει $c>0$, τέτοιο ώστε $e^{-\alpha' b^2}(1+b)^D < ce^{-\alpha'' b^2}$, έχουμε ότι :

$$\int_M \frac{e^{-\alpha' \frac{d^2(\cdot,y)}{t_i}}}{V(\cdot,\sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x) \leq \frac{C}{V(y,\sqrt{t_i})}\int_M e^{-\alpha'' \frac{d^2(x,y)}{t_i}}|u(x)|dV(x) =$$
$$= \frac{C}{V(y,\sqrt{t_i})}\left(\int_{d(x,y)\leq\sqrt{t_i}} e^{-\alpha'' \frac{d^2(x,y)}{t_i}}|u(x)|dV(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{2^k\sqrt{t_i}\leq d(x,y)\leq 2^{k+1}\sqrt{t_i}} e^{-\alpha'' \frac{d^2(x,y)}{t_i}}|u(x)|dV(x)\right) \leq$$
$$\leq \frac{C}{V(y,\sqrt{t_i})}\left(\int_{B(y,\sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\alpha'' 2^{2k}}\int_{B(y,2^{k+1}\sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x)\right) =$$
$$= C\left(⨍_{B(y,\sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\alpha'' 2^{2k}}\frac{V(y,2^{k+1}\sqrt{t_i})}{V(y,\sqrt{t_i})}⨍_{B(y,2^{k+1}\sqrt{t_i})}|u(x)|dV(x)\right) \leq$$
$$\leq C\left(1+\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{V(y,2^{k+1}\sqrt{t_i})}{V(y,\sqrt{t_i})}e^{-\alpha'' 2^{2k}}\right)Mu(y) \leq \left(1+\sum_{k\in\mathbb{N}}2^{(k+1)D}e^{-\alpha'' 2^{2k}}\right)Mu(y) = CMu(y)$$

όπου M η έκκεντρη μεγιστική συνάρτηση. Επομένως

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\int_M \frac{e^{-\alpha' \frac{d^2(\cdot,y)}{t_i}}}{V(\cdot,\sqrt{t_i})}\chi_{Q_i}(y)dV(y)\right\|_2 \leq C\sup_{\|u\|_2=1}\int_M Mu(y)\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{Q_i}(y)dV(y) \leq$$
$$\stackrel{C-S}{\leq} C\sup_{\|u\|_2=1}\left(\int_M |Mu(y)|^2 dV(y)\right)^{1/2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{Q_i}\right\|_2 \leq$$
$$\leq C'\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{Q_i}\right\|_2,$$

καθώς από την πρόταση 2.13 ο υπογραμμικός τελεστής M είναι φραγμένος στον L^2. Επομένως, ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

Συνεπώς, αφού ο μετασχηματισμός Riesz είναι L^2-συνεχής έχουμε ότι :

$$V\left(\left\{x\in M : \left|R\left(\sum_{i=1}^{\infty}e^{-t_i(-\Delta)}b_i\right)(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \frac{c}{\lambda^2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}e^{-t_i(-\Delta)}b_i\right\|_2^2 \leq \|f\|_1$$

Οπότε εκτιμήσαμε τον όρο $R\sum_i e^{-t_i(-\Delta)}b_i$. Εξετάζουμε τώρα τον όρο $R\sum_i(I-e^{-t_i(-\Delta)})b_i$. Γράφουμε :

$$V(\{x\in M : |R\sum_i(I-e^{-t_i(-\Delta)})b_i| > \lambda\}) \leq$$
$$\leq \sum_i V(8Bi) + V(\{x\in M\setminus\cup_i 8B_i : |R\sum_i(I-e^{-t_i(-\Delta)})b_i| > \lambda\})$$

Από την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου και την ιδιότητα (*iii*) της ανάλυσης Calderon - Zygmund έπεται ότι

$$\sum_i V(8Bi) \leq c\frac{\|f\|_1}{\lambda}$$

Για τον δεύτερο όρο έχουμε :

$$\begin{aligned} V(\{x \in M \setminus \cup_i 8B_i : |R\sum_i (I - e^{-t_i(-\Delta)})b_i| > \lambda\}) &= \int_{\{x\in M\setminus\cup_i 8B_i : |R\sum_i (I-e^{-t_i(-\Delta)})b_i|>\lambda\}} dV(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{M\setminus\cup_i 8B_i} |R\sum_i (I - e^{-t_i(-\Delta)})b_i(x)|dV(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_i \int_{M\setminus 8B_i} |R(I - e^{-t_i(-\Delta)})b_i(x)|dV(x) \end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{M\setminus 8B_i} |R(I - e^{-t_i(-\Delta)})b_i(x)|dV(x) \leq \|b_i\|_1.$$

Στο εξής, δεν θα γράφουμε πλέον τους δείκτες i. Έστω $k(t,x,y)$ ο πυρήνας του τελεστή $R(I - e^{-t(-\Delta)})$. Εφόσον $\mathrm{supp} b \subseteq 4B$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{M\setminus 8B} |R(I - e^{-t(-\Delta)})b(x)|dV(x) &\leq \int_{M\setminus 8B}\left(\int_{4B} |k(t,x,y)|\,|b(x)|dV(y)\right)dV(x) \leq \\ &\overset{Fubini}{\leq} \int_M \left(\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} |k(t,x,y)|dV(x)\right)|b(y)|dV(y). \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε :

$$\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}} |k(t,x,y)|dV(x) \leq c,\ \forall y \in M,\ t > 0.$$

Θέλουμε λοιπόν να εκτιμήσουμε τον πυρήνα $k(t,x,y)$. Αφού

$$(-\Delta)^{-1/2} = c\int_0^{+\infty} e^{-s(-\Delta)}\frac{d\lambda(s)}{\sqrt{s}},$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-1/2}(I - e^{-t(-\Delta)}) &= c\left(\int_0^{+\infty} e^{-s(-\Delta)}\frac{d\lambda(s)}{\sqrt{s}} - \int_0^{+\infty} e^{-(s+t)(-\Delta)}\frac{d\lambda(s)}{\sqrt{s}}\right) = \\ &= c\left(\int_0^{+\infty} e^{-s(-\Delta)}\frac{d\lambda(s)}{\sqrt{s}} - \int_t^{+\infty} e^{-s(-\Delta)}\frac{d\lambda(s)}{\sqrt{s-t}}\right) = \\ &= c\left(\int_0^{+\infty} e^{-s(-\Delta)}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right)d\lambda(s)\right), \end{aligned}$$

οπότε

$$R(I - e^{-t(-\Delta)}) = \nabla(-\Delta)^{-1/2}(I - e^{-t(-\Delta)}) = c\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right)\nabla e^{-s(-\Delta)}d\lambda(s).$$

Συνεπώς,

$$k(t,x,y) = c\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right)\nabla_x h(s,x,y)d\lambda(s).$$

Στην συνέχεια, από το λήμμα 4.16 προκύπτει :

$$\begin{aligned}\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}}|k(t,x,y)|dV(x) &\leq \int_{d(x,y)\geq t^{1/2}}\left|c\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right)\nabla_x h(s,x,y)d\lambda(s)\right|dV(x) \leq \\ &\overset{Fubini}{\leq} c\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right|\left(\int_{d(x,y)\geq t^{1/2}}\nabla_x h(s,x,y)dV(x)\right)d\lambda(s) \leq \\ &\leq c\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right|e^{-\beta t/2s}s^{-1/2}d\lambda(s).\end{aligned}$$

Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\chi_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right|e^{-\beta t/2s}s^{-1/2}d\lambda(s) &= \int_0^t\frac{e^{-\beta t/2s}}{s}d\lambda(s) + \int_t^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{s-t}} - \frac{1}{\sqrt{s}}\right)e^{-\beta t/2s}s^{-1/2}d\lambda(s) = \\ &= \qquad I_1 \qquad + \qquad I_2\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να φράξουμε τα δύο ολοκληρώματα :

$$I_1 = \int_0^t\frac{e^{-\beta t/2s}}{s}d\lambda(s) \overset{s=ut}{=} \int_0^1\frac{e^{\frac{-\beta}{2u}}}{u}d\lambda(u) \leq +\infty$$

και

$$\begin{aligned}I_2 \leq \tilde{I}_2 &= \int_t^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{s-t}} - \frac{1}{\sqrt{s}}\right)\frac{1}{\sqrt{s}}d\lambda(s) = \\ &\overset{s-t=v}{=} \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v+t}}\right)\frac{1}{\sqrt{v+t}}d\lambda(v) = \\ &\overset{ut=v}{=} \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{ut}} - \frac{1}{\sqrt{t(u+1)}}\right)\frac{1}{\sqrt{t(u+1)}}t\,d\lambda(u) = \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{ut}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{u+1}}d\lambda(u) \leq +\infty\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

4.4 Ένα αντιπαράδειγμα για $p > 2$

Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου δίνουμε συνοπτικά ένα αντιπαράδειγμα, όπου ο μετασχηματισμός Riesz δεν είναι συνεχής στον $L^p(M)$, για $p > 2$, ενώ η πολλαπλότητα M πληροί τις προϋποθέσεις του βασικού θεωρήματος.

Για $n \geq 2$ ορίζουμε την πολλαπλότητα M_n, η οποία αποτελείται από δύο αντίγραφα του $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$ (με την ευκλείδεια μετρική), τα οποία είναι ενωμένα με λείο τρόπο κατά μήκος των μοναδιαίων σφαιρών. Η πολλαπλότητα M_n ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες ([7], [9], και [10]):

(a) η M_n πληροί την ιδιότητα διπλασιασμού όγκου. Μάλιστα, υπάρχει $c > 0$:

$$c^{-1}r^n \leq V(x,r) \leq cr^n, \ \forall x \in M_n \text{ και } r > 0.$$

(b) υπάρχει $C > 0 \ : \ h(t,x,y) \leq C\, t^{-n/2}$, $\forall x, y \in M_n$ και $t > 0$. Επομένως, σε συνδυασμό με την ιδιότητα (α) ισχύει η εκτίμηση του πυρήνα θερμότητας στην διαγώνιο, που δίνεται στο θεώρημα 4.12.

(c) υπάρχει $c_1 > 0 \ : \ h(t,x,x) \geq c_1\, t^{-n/2}$, $\forall x \in M_n$ και $t > 0$.

(d) ο πυρήνας της θερμότητας δεν έχει κάτω Gaussian φράγμα, δηλαδή δεν υπάρχουν $c, C > 0$ τέτοιο ώστε :

$$h(t,x,y) \geq ct^{-n/2} exp\left(-C\frac{d^2(x,y)}{t}\right), \ \forall x, y \in M_n, \forall t > 0$$

(e) $\forall p > n$ έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq C\, d(x,y)^{1-\frac{n}{p}}\, \||\nabla f|\|_p$, $\forall f \in C_0^\infty(M_n)$ και $x, y \in M$

Σταθεροποιούμε λοιπόν $p > n$ και υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός Riesz είναι συνεχής στον $L^p(M_n)$, δηλαδή

$$\||\nabla f|\|_p \leq c\|(-\Delta)^{1/2} f\|_p$$

Επιλέγουμε τυχόν $z \in M$ και θέτουμε $f = h(t,\cdot,z)$. Έχουμε :

$$|h(t,x,z) - h(t,y,z)| \leq C\, d(x,y)^{1-\frac{n}{p}} \|(-\Delta_x)^{1/2} h(t,\cdot,z)\|_p$$

Από τις ιδιότητες του πυρήνα θερμότητας έχουμε ότι

$$(-\Delta_x)^{1/2} h(t,\cdot,z) = (-\Delta_x)^{1/2} \int_M h(\frac{t}{2},\cdot,y)\, h(\frac{t}{2},y,z)\, dy = (-\Delta_x)^{1/2} e^{-\frac{t}{2}(-\Delta_x)} h(\frac{t}{2},\cdot,z)$$

οπότε έπεται η ανισότητα

$$\|(-\Delta_x)^{1/2} h(t,\cdot,z)\|_p \le c t^{-\frac{1}{2}}\, \|h(\frac{t}{2},\cdot,z)\|_p,$$

καθώς η ημιομάδα θερμότητας είναι αναλυτική στον L^p [16].
Στην συνέχεια, από την γενικευμένη ανισότητα Hölder έχουμε

$$\|h(t,\cdot,z)\|_p \le \|h(t,\cdot,z)\|_2^{\frac{2}{p}}\, \|h(t,\cdot,z)\|_\infty^{1-\frac{2}{p}} \le (h(2t,\cdot,z))^{\frac{1}{p}}\, \|h(t,\cdot,z)\|_\infty^{1-\frac{2}{p}} \le$$
$$\overset{(b)}{\le} (C\,t^{-n/2})^{\frac{1}{p}} (C\,t^{-n/2})^{1-\frac{2}{p}} \le C\,t^{-n/2(1-\frac{1}{p})}.$$

Συνεπώς προκύπτει η εκτίμηση

$$|h(t,x,z) - h(t,y,z)| \le C\,d(x,y)^{1-\frac{n}{p}}\, t^{-n/2(1-\frac{1}{p})} = C\,d(x,y)^{1-\frac{n}{p}}\, t^{-1/2(1-\frac{n}{p})-\frac{n}{2}} \le$$
$$\overset{(c)}{\le} C \left(\frac{d(x,y)}{\sqrt{t}}\right)^{1-\frac{n}{p}} h(t,z,z).$$

Επομένως, θέτοντας $x = z$ και επιλέγοντας $d(y,z) = \alpha\sqrt{t}$, όπου το α είναι αρκούντως μικρό, προκύπτει η σχεση :

$$|h(t,z,z) - h(t,y,z)| \le \frac{1}{2} h(t,z,z),$$

η οποία μας δίνει ότι $h(t,y,z) \ge \frac{1}{2} h(t,z,z) \le c t^{-\frac{n}{2}}$, $\forall y \in B(z, a\sqrt{t})$. Όμως, τότε χρησιμοποιώντας ένα επαναληπτικό επιχειρήμα [7] μπορεί να αποδειχθεί ότι ο πυρήνας της θερμότητας έχει Gaussian κάτω φράγμα, το οποίο όμως είναι άτοπο από την ιδιότητα (d).

Επομένως η υπόθεση $\||\nabla f|\|_p \le c\|(-\Delta)^{1/2} f\|_p$ δεν ισχύει για $p > n$, οπότε δεν μπορεί να επεκταθεί η συνέχεια του μετασχηματισμού Riesz σε χώρους $L^p(M)$ με $p > 2$, μόνο με τις προϋποθέσεις του βασικού θεωρήματος 4.12.

Σχόλιο : Το 2001, οι Thierry Couhlon και Xuan Thinh Duong απέδειξαν την η συνέχεια του μετασχηματισμού Riesz σε χώρους $L^p(M)$ για κάθε $1 < p < +\infty$, απαιτώντας επιπλέον να ισχύει μία Gaussian εκτίμηση του πυρήνα θερμότητας σε 1-μορφές [2].

Βιβλιογραφία

[1] T. Coulhon, X.T. Duong : *Riesz Transforms for* $1 \leq p \leq 2$, Trans. Amer. Math. Soc. 351, 1151-1169, (1999).

[2] T. Coulhon, X.T. Duong : *Riesz Transforms for* $p > 2$, C.R. Acad. Sci. Paris. 332, 975-980, (2001).

[3] D. Bakry : *Etude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée*, Springer L.N.M. 1247, 137-172, (1971).

[4] A. Grygoryan : *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*, Amer. Math. Soc., Providence R.I., (2009).

[5] A. Grygoryan : *The Heat Equation on Non-compact Riemannian Manifolds*, Matem. Sbornik 182, 55-87, (1991)

[6] R. Strichartz : *Analysis of the Laplacian on the Complete Riemannian Manifold*, J. Funct. Anal. 52, 48-79, (1983).

[7] I. Benjamini, I. Chavel, E. Feldman : *Heat kernel lower bounds on manifolds using the old ideas of Nash*, Prod. Lond. Math. Soc. 72, 215-240, (1992).

[8] E. Davies : *Non-Gaussian aspects of heat kernel behaviour*, J. London Math. Soc. 55, 105-125, (1997).

[9] L. Saloff-Coste : *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities*, Duke J. Math 65, 27-38, (1997).

[10] N. Varopoulos : *Une généralisation du théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les espaces de Dirichlet*, C.R.A.S. Paris 299, 651-654, (1984).

[11] M. Do Carmo : *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston , (1992).

[12] Y. Matsushima : *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, Inc. , New York , (1972).

[13] A. Stone : *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 977-982, (1948).

[14] E. Stein : *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, (1993).

[15] R.V. Kadison, J.R. Ringrose : *Fundamentals of the theory of Operator Algebras*, Academic Press, New York, (1983).

[16] E. Hille, R. Phillips : *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math.Soc., Providence R.I., (1975).

[17] J. Heinonen : *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer Verlag, Neq York, (2001).

[18] U.Katznelson : *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

Ευρετήριο