ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ρόλος της αριθμογραμμής σε έργα πρόσθεσης μαθητών δημοτικού.

ΒΑΣΙΛΙΚΗ ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ

Δ201002

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Αθανάσιος Γαγάτσης

Αθήνα

2014

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ρόλος της αριθμογραμμής σε έργα πρόσθεσης μαθητών δημοτικού.

ΒΑΣΙΛΙΚΗ ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ

Δ201002

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Αθανάσιος Γαγάτσης

Αθήνα

2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Αθανάσιος Γαγάτσης (επιβλέπων Καθηγητής)	Αντιπρύτανης	…………….
2)Δέσποινα Πόταρη	Αν.Καθηγήτρια	………..…
3)Ιλιάδα Ηλία	Επ.Καθηγήτρια	………..…

Ευχαριστίες

- Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Αθανάσιο Γαγάτση για τη βοήθειά του και τις πολύτιμες συμβουλές του.
- Επίσης, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον καθηγητή και σύμβουλό μου Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για την συνεχή βοήθειά του όλα τα χρόνια που βρίσκομαι στο συγκεκριμένο τμήμα.
- Ευχαριστώ ιδιαίτερα την καθηγήτριά μου Δέσποινα Πόταρη όχι μόνο για την ουσιαστική βοήθειά της για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας αλλά και για όσα μου πρόσφερε ως καθηγήτριά μου.
- Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στον πατέρα μου για όλα όσα μου έχει προσφέρει.

Αφιερώνεται

στην

οικογένειά μου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία ασχολείται με το ρόλο του μοντέλου της αριθμογραμμής και των αναπαραστατικών εικόνων σε έργα πρόσθεσης μαθητών δημοτικού σχολείου. Η εργασία δομείται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος της εργασίας ασχολείται με το θεωρητικό πλαίσιο που αφορά τις παραπάνω έννοιες. Αρχικά δίνεται ο ορισμός της αναπαράστασης ενώ γίνεται διάκριση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων. Στη συνέχεια γίνεται διάκριση μεταξύ γεωμετρικού μοντέλου και αναπαράστασης και περιγράφεται η αριθμογραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο. Αναφέρονται τα είδη των εικόνων και οι τύποι της αριθμογραμμής ενώ γίνονται αναφορές της παρουσίας της αριθμογραμμής σε σχολικά βιβλία. Το δεύτερο μέρος της εργασίας αφορά την έρευνα που πραγματοποιήθηκε. Στη συγκεκριμένη έρευνα μελετάται ταυτόχρονα και συγκρίνεται ο ρόλος των εικονικών αναπαραστάσεων σε συνδυασμό με το μοντέλο της αριθμογραμμής σε απλά έργα πρόσθεσης αλλά και η θέση του αγνώστου μέσα στην ισότητα πώς επηρεάζει τον βαθμό δυσκολίας του έργου. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 213 μαθητές Α΄ και Β΄ τάξης δημοτικού. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε ότι η θέση του αγνώστου στη θέση α στην ισότητα (α + β = γ) αυξάνει τη δυσκολία του έργου. Επίσης τα έργα με αριθμογραμμή φάνηκε να βοήθησαν περισσότερο τους μαθητές της Α΄ τάξης ενώ για τους μαθητές της Β΄ τάξης η αριθμογραμμή δεν έπαιξε κανένα ουσιαστικό ρόλο στην επίλυση των έργων ενώ ο ρόλος των εικόνων σε έργα πρόσθεσης δεν προσδιορίστηκε ξεκάθαρα. Τέλος, τα έργα που αφορούσαν σε υπερπήδηση της δεκάδας ήταν δυσκολότερα από τα έργα που περιελάμβαναν την πρόσθεση δύο μονοψήφιων αριθμών που δεν υπερβαίνουν τη δεκάδα, ενώ προέκυψε αλληλεπίδραση μεταξύ της θέσης του αγνώστου και του μεγέθους των αριθμών στα έργα, η οποία φαίνεται να επηρέασε αρκετά την πολυπλοκότητα των έργων για τους μαθητές.

Λέξεις κλειδιά

Αναπαραστάσεις, αριθμογραμμή, αναπαραστατική εικόνα, γεωμετρικό μοντέλο, προσθετικά έργα

Abstract

The current study deals with the role of model of number line and representational images in elementary school students' additional tasks. The project is structured in two parts. The first part of the study deals with the theoretical framework concerning the above concepts. Starting with the definition of representation and distinguish between internal and external representations. The distinguish geometrical model and representation and discloses the number line as a geometrical model. Indicate the types of images and types of number line and made references to the presence of the number line in textbooks. The second part of the study concerns to the survey. In this research studied simultaneously and compared the role of visual representations along with the model of number line in simple addition tasks just as well as the position of the unknown into how gender affects the case of the project. The study included 213 students A and B class grade. An analysis of the results showed that the position of the unknown in **a** position of equation (a + b = c) increases the difficulty of the task. Also the tasks with number line seemed to help more the students of A class and for students of B class number line played no essential role in solving the task and the role of images in additional tasks are not clearly determined. Finally, the tasks related to overcome the top ten was difficult from the projects included the addition of two single digit numbers not exceeding ten, while interaction occurred between the location of the unknown and the magnitude of the numbers in the tasks, which seem to have affected several the complexity of the projects for students.

Key words:

Representations, number line, representational images, geometrical model, additional tasks

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ελένη ένα τετράχρονο κορίτσι παίζει με πολλά παιχνίδια. Καθώς εκθέτει τα παιχνίδια της για να παίξουν, ονοματίζει το πρώτο ως «ένα», το δεύτερο ως «δύο» και ούτω καθεξής. Αυτές οι λέξεις είναι σύμβολα για τη θέση των παιχνιδιών στη σειρά που το παιδί απαριθμεί. Στην αρχή, δεν μπορεί να καταλάβει ότι ο τελευταίος αριθμός αναφέρεται στον αριθμό των παιχνιδιών όλων μαζί. Αυτές οι αριθμολέξεις μπορεί απλώς να είναι λέξεις που το παιδί έχει μάθει να προφέρει καθώς αγγίζει κάθε αντικείμενο σε μια σειρά από αντικείμενα. Αργότερα, περίπου 5 με 6 ετών το παιδί αρχίζει να καταλαβαίνει ότι η τελευταία αριθμολέξη αποτελεί και το σύνολο όλων των στοιχείων του συνόλου. Μόλις μάθει τον αριθμό και το όνομά του (π. χ. 5 και πέντε) γίνονται οι εξωτερικές αναπαραστάσεις οι συμβάσεις για τις εσωτερικές αφαιρέσεις, ο αριθμός των στοιχείων στο σύνολο. Έτσι ο αριθμός όνομα πέντε και ο αριθμός 5 είναι η εξωτερική αναπαράσταση της εσωτερικής αναπαράστασης ενός συνόλου πέντε αντικειμένων.

Το παραπάνω, αλλά και πολλά άλλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή και όχι μόνο, δείχνουν τον σημαντικό ρόλο των αναπαραστάσεων για την κατανόηση αφηρημένων ιδεών από τα παιδιά, που παίζουν κεντρικό ρόλο στη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών.

Η πλήρης και βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών καθώς και η επίλυση προβλήματος βρίσκονται στο κέντρο του ενδιαφέροντος της διδακτικής των μαθηματικών καθώς και ο τρόπος ενσωμάτωσης όλων των σχετικών ευρημάτων στο ρόλο του δασκάλου μέσα στην τάξη.

Εξίσου σημαντικός είναι και ο ρόλος των αναπαραστάσεων σε όλη την σχολική ζωή των μαθητών. Ξεκινώντας από την σχολική τάξη, τα σχολικά εγχειρίδια αλλά και τη γενικότερη ύπαρξη και χρήση των αναπαραστάσεων στην δόμηση των μαθηματικών εννοιών εντός και εκτός σχολείου.

Η παρούσα εργασία δομείται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος, αρχικά γίνεται μια προσπάθεια διευκρίνισης του όρου «αναπαράσταση». Κατόπιν, γίνεται η διάκριση μεταξύ εσωτερικών - εξωτερικών αναπαραστάσεων και εξετάζεται ο ρόλος τους κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, που αποτελεί και κεντρικό σημείο του κλάδου της διδακτικής των μαθηματικών, όπως αναφέρεται και παραπάνω. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στα γεωμετρικά μοντέλα προκειμένου να γίνει αντιληπτή η συγκεκριμένη έννοια, για να μπορέσει παρακάτω να προσδιοριστεί καλύτερα η αριθμογραμμή, που είναι και ο πυρήνας της προκείμενης εργασίας. Επίσης, σε αυτή τη φάση της εργασίας γίνεται αναφορά στο ρόλο της εικόνας σε διάφορα μαθηματικά έργα. Η αριθμογραμμή είναι το επόμενο αντικείμενο που αναλύεται στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας. Τέλος, γίνεται μια σύντομη αναφορά σε παλαιότερες σχετικές έρευνες.

Το δεύτερο μέρος, αποτελεί η έρευνα που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας. Παρουσιάζεται η μεθοδολογία, η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχτηκαν, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα στα οποία προβήκαμε από τα δεδομένα αποτελέσματα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια από τα λάθη χρήσης της αριθμογραμμής που προήλθαν από τους μαθητές της έρευνας και παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις μαθητών οι οποίοι κάνουν εμφανή τη χρήση της εικόνας. Κλείνοντας, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας αυτής της εργασίας και γίνεται κάποια σχετική συζήτηση πάνω σε αυτά.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

1.ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Οι αναπαραστάσεις είναι μέρος της καθημερινής μας ζωής. Τις συναντάμε όχι μόνο στην διδασκαλία αλλά σε όλο το εύρος των δραστηριοτήτων μας. Η επαφή με τα σύμβολα και γενικά με τα διάφορα είδη αναπαράστασης ξεκινά από πολύ νωρίς. Ως μέλη ανθρώπινων κοινωνιών, η αρχική έκθεση των παιδιών στα σύμβολα προέρχεται πριν την γέννησή τους από τις λέξεις και τη μουσική που ακούνε στη μήτρα. Από τη γέννησή τους, εμβαπτίζονται σε ένα όλο και πιο περίπλοκο και εκτεταμένο σύστημα πολιτιστικών συμβόλων. Κατά τη διάρκεια των πρώτων χρόνων της ζωής τους, η ικανότητα παραγωγής και κατανόησης συμβόλων επεκτείνεται θαυμάσια (Judy S.Deloache, David H. Uttal &Sophia L. Pierroutsakos, 1998).

Οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών, αρχών και προβλημάτων είναι ένα από τα θέματα της μάθησης των μαθηματικών (Luitel Bal Chandra, 2005). Οι αναπαραστάσεις και οι οπτικοποιήσεις βρίσκονται στον πυρήνα της κατανόησης των μαθηματικών (Duval, 1999).

Οι οπτικές αναπαραστάσεις έχουν μια μακρά σχέση με τη μαθηματική δραστηριότητα. Η χρήση τους μπορεί να επισημανθεί πολλούς αιώνες πίσω στην πρώιμη ανάπτυξη των μαθηματικών στην Μεσοποταμία και την κλασική Ελλάδα. Όπως σημειώνει ένας παρατηρητής: «Τα διαγράμματα είναι… τόσο παλιά όσο και τα μαθηματικά τα ίδια. Η γεωμετρία πάντα στηριζόταν σε μεγάλο βαθμό στις εικόνες και για κάποια στιγμή, και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών έκανε το ίδιο» (Rival, 1987, p. 43). Πράγματι, τα αφηρημένα επιχειρήματα που παρουσιάζονται στα στοιχεία του Ευκλείδη εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη χρήση των διαγραμμάτων και αυτή η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων παρέμεινε μια αποδεκτή πρακτική στα μαθηματικά κατά τον δέκατο όγδοο αιώνα.

Ωστόσο η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων αμφισβητήθηκε κατά τον δέκατο ένατο αιώνα όταν αποδείχθηκε παραπλανητική σε αρκετές περιπτώσεις. Ένα από τα πιο ευρέως γνωστά παραδείγματα συνέβη στη γεωμετρία, όπως η ανακάλυψη των μη – Ευκλείδειων γεωμετριών, ιδιαίτερα η μη – διαισθητική υπερβολική γεωμετρία, που προκάλεσε τη την αμφισβήτηση της χρήσης των διαισθητικών και οπτικών επιχειρημάτων του Ευκλείδη. Κατά συνέπεια οι μαθηματικοί μετακινήθηκαν μακριά από τα οπτικά επιχειρήματα και αντί να αναπτύξουν μια ισχυρή προτίμηση για ένα συμβολικό μοντέλο του συλλογισμού που επικρατούσε στα μαθηματικά τη συγκεκριμένη στιγμή, αντιμετωπίζουν σοβαρές προκλήσεις από τα λογικά θεμέλια της τυπικής μαθηματικής συλλογιστικής (Stylianou & Silver, 2004).

Αν και οι οπτικές αναπαραστάσεις εστάλησαν στο περιθώριο των επίσημων μαθηματικών για ένα μεγάλο μέρος των τελευταίων δύο αιώνων, ο κεντρικός ρόλος της οπτικοποίησης στη μαθηματική δραστηριότητα δεν κατάφερε να ξεφύγει εντελώς της προσοχής. Καθ' όλη τη διάρκεια του εικοστού αιώνα, μπορεί κανείς να βρει αναφορές της κεντρικότητας της απεικόνισης στον μαθηματικό συλλογισμό.. Για παράδειγμα, στα γραπτά του σχετικά με τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας, ο σύγχρονος μαθηματικός Paul Halmos (1987, p. 400), υποστήριξε ότι « για να είναι κανείς μελετητής των μαθηματικών θα πρέπει να έχει γεννηθεί με την ικανότητα να απεικονίζει». Σύμφωνα με την Hadamard, πολλοί μαθηματικοί, όταν βυθίζονται στη σκέψη τους συχνά αποφεύγουν όχι μόνο τη χρήση λέξεων αλλά και αλγεβρικών ή άλλων συμβόλων προτιμώντας αντ ' αυτού να επικεντρωθούν σε εικόνες. Ο George Pólya (1945), έγραψε, επίσης, για τη σημασία των οπτικών πτυχών της μαθηματικής σκέψης και επίλυσης προβλημάτων. Προς το τέλος του εικοστού αιώνα, υπήρξε μια αναγέννηση του ενδιαφέροντος στις οπτικές αναπαραστάσεις ως εργαλεία για τη μαθηματική συλλογιστική. Για παράδειγμα, στη δεκαετία του 1990 στο MathematicsMagazine, μια δημοσίευση της Mathematical Association of America, προστεθεί ένα χαρακτηριστικό που ονομάζεται "ProofsWithoutWords," και οι αναγνώστες συχνά αναφέρονται σε ιστοσελίδες με διαδραστικά διαγράμματα για την περαιτέρω εξερεύνηση (Stylianou & Silver, 2004).

Οι αναπαραστάσεις αναφέρονται σε ένα ευρύ φάσμα εννοιολογικών δραστηριοτήτων: σταθερές και ολιστικές πεποιθήσεις για κάτι, διάφοροι τρόποι που προκαλούν και υποδηλώνουν αντικείμενα, πώς οι πληροφορίες είναι κωδικοποιημένες. Αντιθέτως, η οπτικοποίηση φαίνεται να τονίζει τις εικόνες και την εμπειρική διαίσθηση των φυσικών αντικειμένων και δράσεων. Η οπτικοποίηση αναφέρεται σε μια γνωστική δραστηριότητα που είναι εγγενώς σημειωτική, δηλαδή, ούτε νοητική ούτε φυσική. (Duval, 1999)

Η χρήση των συστημάτων της σημειωτικής αναπαράστασης για τη μαθηματική σκέψη είναι απαραίτητη, διότι, σε αντίθεση με τους άλλους τομείς της γνώσης (βοτανική, γεωλογία, αστρονομία, φυσική), δεν υπάρχουν άλλοι τρόποι για να αποκτήσουν πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα. Δεν υπάρχει άμεση πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα, αλλά μόνο στις αναπαραστάσεις τους. (Duval, 1999)

Η αναπαράσταση παρουσιάζεται συχνά ως ένα εργαλείο για τον χειρισμό αντικειμένων. Το να έχεις μια αναπαράσταση στα χέρια, επιτρέπει σε κάποιο άτομο να αποσπάσει τον εαυτό του από την έννοια της παρούσας αναπαράστασης και να χειριστεί τα σύμβολα μόνα τους, κάνοντας τους χειρισμούς αυτόματα και επιστρέφοντας αργότερα να ερμηνεύσει το αποτέλεσμα του συμβολικού χειρισμού (Skemp, 1986). Επιπλέον, η φύση του χειρισμού που παρουσιάζεται μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της αναπαράστασης. Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός μεγάλων αριθμών είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμος όταν οι αριθμοί αυτοί αναπαρίστανται στο ινδουιστικό – αραβικό, και όχι στο ρωμαϊκό, αριθμητικό σύστημα. Ομοίως, για τον σκοπό του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών, οι πολικές αναπαραστάσεις προτιμώνται σε σχέση με τις αναπαραστάσεις των διατεταγμένων ζευγών τέτοιων αριθμών (Zazkis & Liljedahl, 2004).

Η επικοινωνία αναφέρεται συχνά ως ένας σημαντικός ρόλος της αναπαράστασης (Kaput, 1991; Skemp, 1986). Ως εργαλείο για την επικοινωνία οι αναπαραστάσεις εξυπηρετούν έναν διττό σκοπό: βοηθάνε στην επικοινωνία μεταξύ των ιδεών και στην επικοινωνία μεταξύ των ατόμων. Ωστόσο, η ίδια η αναπαράσταση είναι μια σειρά συμβόλων. Ωστόσο, οι αναπαραστάσεις έρχονται στη ζωή όταν οι μαθητές αποτυπώνουν τα σύμβολα των μαθηματικών εννοιών. Αυτή η αποτύπωση είναι ένας δρόμος «διπλής κατεύθυνσης» διότι δίνει στο μαθητή την δυνατότητα να επικοινωνεί τις ιδέες πιο αποτελεσματικά και επιπλέον του δίνει τη δυνατότητα να αναγνωρίζει και να ερμηνεύει τις ιδέες που μεταδίδονται από τα σύμβολα (Zazkis & Liljedahl, 2004).

Ο όρος αναπαράσταση δημιουργεί πολλαπλές ερμηνείες. Πολλοί ερευνητές προτιμούν άλλους όρους, όπως εννοιοποίηση (conception) ή συλλογιστική (reasoning) ή ακόμα και κωδικοποίηση (encoding) και πολλοί ερευνητές της γνωσιακής επιστήμης έχουν προσπαθήσει να αποφύγουν το πρόβλημα ανάγοντας τη σκέψη σε κανόνες παραγωγής. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο εύκολοι και απλοϊκοί λόγοι για να θεωρηθεί η αναπαράσταση ως ένα σημαντικό θέμα για επιστημονική μελέτη. Το πρώτο είναι ότι όλοι μας βιώνουμε τις αναπαραστάσεις ως ένα ρεύμα εσωτερικών εικόνων, χειρονομιών και λέξεων. Ο δεύτερος είναι ότι οι λέξεις και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για να επικοινωνήσουμε δεν αναφέρονται άμεσα στην πραγματικότητα αλλά εκπροσωπούν οντότητες: αντικείμενα, ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, δράσεις και κατασκευές για τις οποίες δεν υπάρχει αυτόματη συμφωνία μεταξύ δύο ανθρώπων. (Gérard, 1998)

Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες να οριστεί ο όρος αναπαράσταση. Μέσω του τομέα των μαθηματικών, η αναπαράσταση μπορεί να θεωρηθεί ως μια εσωτερική αφαίρεση των μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσεται από τον μαθητή μέσα από την εμπειρία (Pape & Tchoshanov, 2001).

Η αναπαράσταση μπορεί να εξηγηθεί ως νοητική αναπαραγωγή μιας προηγούμενης νοητικής ικανοποίησης. Αναφέρεται ως δομικά ισοδύναμη αναπαράσταση μέσω εικόνων συμβόλων και σημαδιών (signs) Επίσης, είναι γνωστή ως κάτι στη θέση από κάτι (Pape &Tchoshanov, 2001).

Επικρατέστερος θεωρείται ο ορισμός που δίνεται από τον Kaput (1987 α) . Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες:

(α) την ολότητα που αναπαρίσταται

(β) την ολότητα που αναπαριστά

(γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται

(δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και

(ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες

Σε γενικές γραμμές , μια αναπαράσταση είναι μια διαμόρφωση κάποιου είδους που στο σύνολό του ή σε ένα μέρος του, αντιστοιχεί, συσχετίζει, αντιπροσωπεύει, συμβολίζει, αλληλεπιδρά με έναν ειδικό τρόπο ή αλλιώς αναπαριστά κάτι άλλο (Palmer , 1977). Μεταξύ άλλων πολύπλοκων χαρακτηριστικών οι αναπαραστάσεις δεν εμφανίζονται απομονωμένες. Συνήθως ανήκουν σε εξαιρετικά δομημένα συστήματα, είτε προσωπικά και ιδιοσυγκρασιακά ή πολιτιστικά και συμβατικά (τυπικά) (Goldin & Kaput, 1996). Αυτά έχουν ονομαστεί «συστήματα συμβόλων» (Kaput, 1987) ή «αναπαραστασιακά συστήματα» (Goldin, 1987 Lesh, Landau, & Hamilton, 1983).

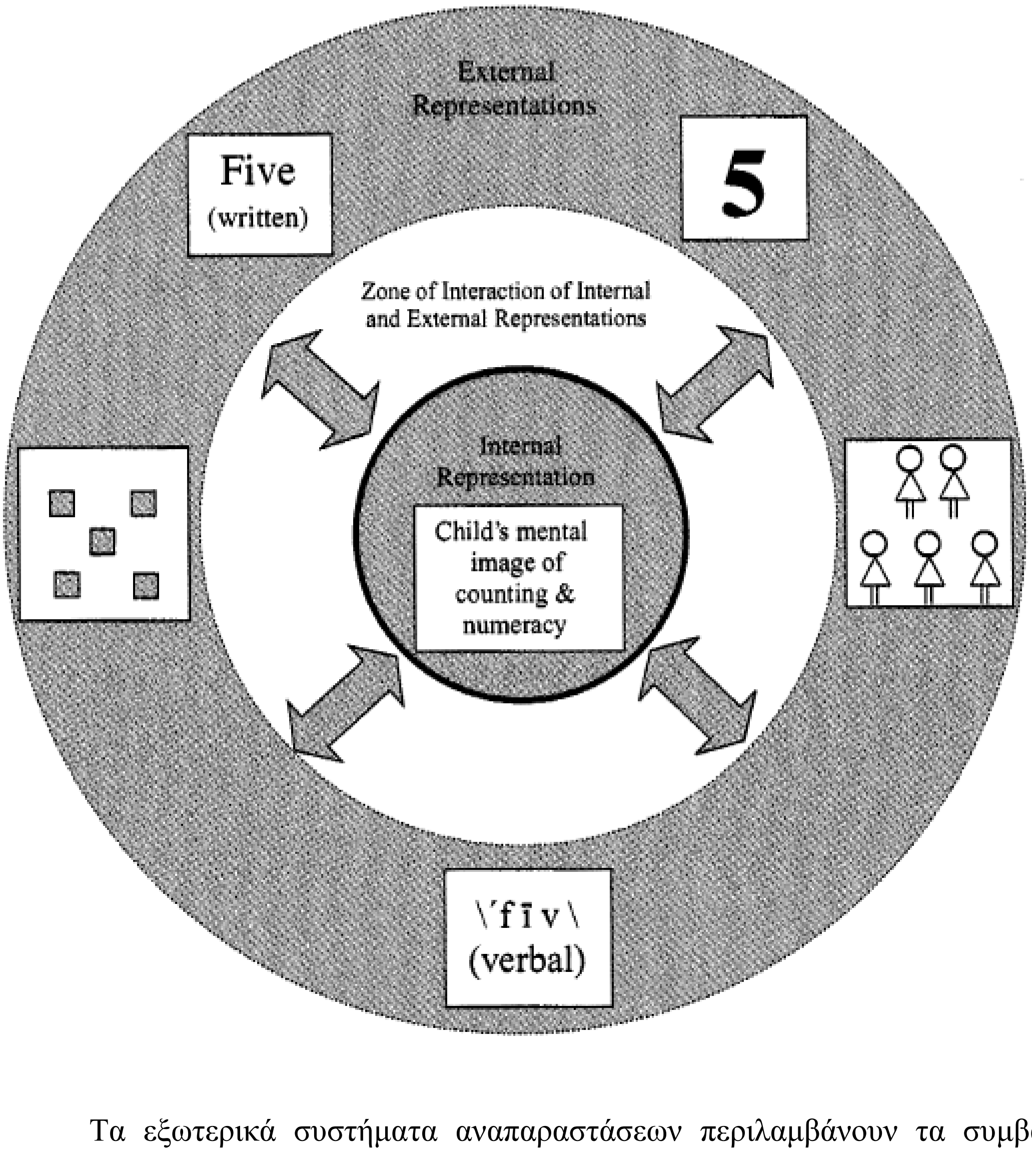
2.ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Μια σημαντική διάκριση για την ψυχολογία της μάθησης και του να κάνεις μαθηματικά, είναι μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών συστημάτων αναπαράστασης. Αλλού αυτό έχει χαρακτηριστεί ως διάκριση μεταξύ του σημαινόμενου (εσωτερική αναπαράσταση) και του σημαίνοντος (εξωτερική αναπαράσταση) (Goldin & Kaput, 1996).

Οι Lesh, Behr και Post (1987) εισάγουν την διάκριση μεταξύ διαφανών (transparent) και αδιαφανών (opaque) συστημάτων αναπαράστασης. Σύμφωνα με αυτούς τους ερευνητές, μια διαφανής αναπαράσταση δεν έχει περισσότερο ούτε λιγότερο νόημα από την αναπαράσταση ιδεών ή την κατασκευή (δομή). Μια αδιαφανής αναπαράσταση τονίζει ορισμένες πτυχές των ιδεών ή των δομών και δεν δίνει έμφαση σε άλλους. Ο Meira (1998) αναφέρθηκε σε αυτή τη διάκριση λαμβάνοντας υπόψη τους διδακτικούς μηχανισμούς και πρότεινε ότι η διαφάνεια δεν είναι χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου από μόνο του αλλά από τη χρήση του σε μια συγκεκριμένη εκπαιδευτική δραστηριότητα.
Η ορολογία αυτή χρησιμοποιήθηκε και από τον Lesh και τους συνεργάτες του (1987) στην σκιαγράφηση της διάκρισης μεταξύ διαφανών και αδιαφανών αναπαραστάσεων, οι Zazkis και Gadowsky(2001) επικεντρώθηκαν στις αναπαραστάσεις αριθμών και προτείνουν πως όλες αυτές οι αναπαραστάσεις είναι αδιαφανείς˙ ωστόσο μπορεί να έχουν διαφανή χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, αναπαριστώντας τον αριθμό 784 ως 282 δίνεται έμφαση στο ότι είναι ένα τέλειο τετράγωνο αλλά δεν δίνει έμφαση στο ότι είναι διαιρετό με το 98. Δηλαδή, στην αναπαράσταση του 784 ως 28^2, η ιδιότητα του 784 ότι είναι τέλειο τετράγωνο είναι διαφανής ενώ η ιδιότητα του 784 ότι είναι διαιρετό με το 98 είναι αδιαφανής. Αναπαριστώντας τον αριθμό ως 13 x 60 + 4 καθιστά διαφανές ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 784 με το 13 είναι 4 αλλά είναι αδιαφανής η ιδιότητα ότι είναι τέλειο τετράγωνο. **(**Zazkis & Liljedahl, 2004).

Στα μαθηματικά, αναπαραστάσεις μπορούν να θεωρηθούν ως οι εσωτερικές αφαιρέσεις των μαθηματικών ιδεών ή τα γνωστικά σχήματα που αναπτύσσονται στον εκπαιδευόμενο μέσα από την εμπειρία. Από την άλλη, αναπαραστάσεις όπως αριθμοί, αλγεβρικές εξισώσεις, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα και γραφήματα είναι εξωτερικές εκδηλώσεις των μαθηματικών εννοιών που «ενεργούν ως ερέθισμα για τις αισθήσεις» και μας βοηθούν να κατανοήσουμε αυτές τις έννοιες (Janvier, Girardon, & Morand,1993, p. 81). Τελικά η αναπαράσταση αναφέρεται στην εξωτερίκευση μιας εσωτερικής, νοητικής αφαίρεσης (Pape & Tchoshanov, 2011).

Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η σχέση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων, κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης της κατανόησης της έννοιας την αρίθμησης.



Τα εξωτερικά συστήματα αναπαραστάσεων περιλαμβάνουν τα συμβατικά συμβολικά συστήματα των μαθηματικών, όπως η αρίθμηση με βάση το δέκα, τον τυπικό αλγεβρικό συμβολισμό, την αριθμογραμμή ή την αναπαράσταση του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Τα μαθησιακά συστήματα, επίσης, περιλαμβάνονται, για παράδειγμα εκείνα που χρησιμοποιούν συγκεκριμένο εποπτικό υλικό ή τους μικρόκοσμους των υπολογιστικών προγραμμάτων (computer-based micro-worlds). Μερικά συστήματα αναπαράστασης είναι κυρίως και τυπικά, για παράδειγμα τα συστήματα αρίθμησης, η γραφή των αλγεβρικών εκφράσεων, συμβάσεις σχετικά με την έκφραση των συναρτήσεων, παραγώγων, ολοκληρωμάτων, γλώσσες προγραμματισμού κ.τ.λ. Άλλα εξωτερικά συστήματα δείχνουν τις σχέσεις οπτικά ή γραφικά, όπως η αριθμογραμμή, γραφήματα που βασίζονται σε Καρτεσιανές ή πολικές συντεταγμένες και γεωμετρικά διαγράμματα. (Godino & Font, 2010). Οι λέξεις και οι εκφράσεις των απλών γλωσσών είναι επίσης εξωτερικές αναπαραστάσεις. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορούν να δηλώνουν και να περιγράφουν τα υλικά αντικείμενα, φυσικές ιδιότητες, τις δράσεις και σχέσεις, ή αντικείμενα που είναι πολύ πιο αφηρημένα (Goldin, 1998, p.4).

Υπάρχουν πέντε συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων τα οποία είναι τα ακόλουθα:

(1) Κείμενα
(2) Χειραπτικά αντικείμενα – μοντέλα (π. χ. κύβοι αριθμητικής, ράβδοι κλασμάτων, αριθμογραμμή κ. α.)
(3) Εικόνες ή διαγράμματα
(4) Γλώσσες (π. χ. μαθηματική λογική)
(5) Γραπτά σύμβολα (π. χ. $\chi+3=8$, $A' \cup B' = (A' \cap B')'$) (Deiligianni et al., 2009)

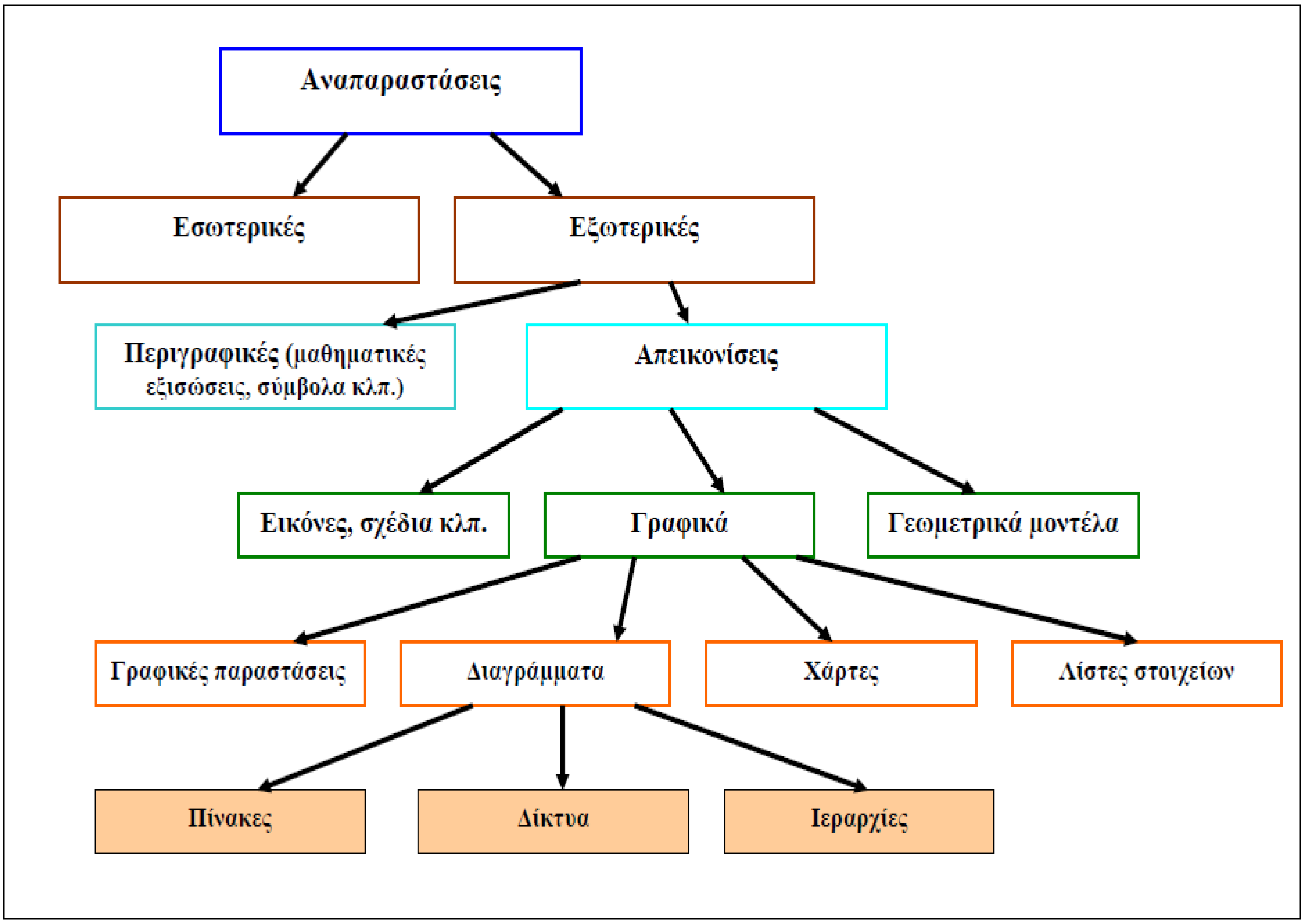
(Δεληγιάννη Ε., Μονογυιού Α., Ηλία Ι., Γεωργίου Χ. & Ζανέττου Ε, 2009).

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν προσωπικά συμβολικά κατασκευάσματα των μαθητών και τις εκχωρήσεις του νοήματος των μαθηματικών συμβολισμών. Στην κατηγορία αυτή η Goldin περιλαμβάνει επίσης τη φυσική γλώσσα των μαθητών , τις οπτικές τους εικόνες και τη χωρική αναπαράσταση , τις στρατηγικές και τους χειρισμούς επίλυσης προβλημάτων και την επιρροή τους σε σχέση με τα μαθηματικά (Godino & Font, 2010). Τα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης είναι εκείνα που υπάρχουν μέσα στο μυαλό του ατόμου. Τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης μπορούν εύκολα να μοιραστούν και να ειδωθούν από τους άλλους. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούνται από δομές για να βοηθήσουν στην περιγραφή των διαδικασιών της ανθρώπινης μάθησης και της επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά (Goldin, 1998) και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούνται από στοιχεία όπως τα διαγράμματα, η τυπική γλώσσα και οι συμβολικές παραστάσεις (Goldin & Steingold, 2001)

Η ανάπτυξη των εσωτερικών αναπαραστάσεων αλλάζει τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά ή τις μαθηματικές έννοιες (Goldin & Shteingold, 2001). Σύμφωνα με τους Α. Γαγάτση και Μ. Πατζιαρά, στο άρθρο τους με τίτλο «Η χρήση των διαγραμμάτων στην επίλυση των προβλημάτων διαδικασίας» αναφέρουν ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς όπως είναι τα σύμβολα, τα σχήματα και τα διαγράμματα που έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση. Τα συστήματα των εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι δομημένα με βάση κάποιες συμβάσεις (Γαγάτσης Α., 2004).

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα. Η αλληλεπίδραση των εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδης στην αποτελεσματική μάθηση και διδασκαλία (Γαγάτσης Α., 2004).

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις διαφοροποιούνται ανάλογα με το πληροφοριακό τους περιεχόμενο και τη χρησιμοποίησή τους (Veriki, 2002; Booth & Thomas, 2000). Ο Schnotz (2002) διαχωρίζει τις εξωτερικές αναπαραστάσεις σε περιγραφικές και σε απεικονίσεις (Πίνακας 1). Οι περιγραφικές αναπαραστάσεις έχουν αυθαίρετη δομή και σχετίζονται με τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται με κάποια καθορισμένη συμφωνία. Τα κείμενα, οι μαθηματικές εξισώσεις και τα μαθηματικά σύμβολα εντάσσονται στις περιγραφικές αναπαραστάσεις. Οι απεικονίσεις περιλαμβάνουν τις εικονικές αναπαραστάσεις, όπως τις εικόνες, τα διαγράμματα, τους χάρτες κλπ. Οι εικονικές αναπαραστάσεις συνδέονται με τα αντικείμενα που αναπαριστούν μέσω κοινών δομικών χαρακτηριστικών είτε σε συγκεκριμένο είτε σε πιο αφηρημένο επίπεδο.



Οι περιγραφικές αναπαραστάσεις έχουν μεγαλύτερη αναπαραστατική δύναμη από τις απεικονίσεις, γιατί με τις τελευταίες μπορεί μόνο να εκφραστεί μέρος από τις πληροφορίες. Όμως, οι πληροφορίες μπορεί να πάρουν μια γενική μορφή όπως είναι η μελέτη των ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού σχήματος από ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό μοντέλο.

Οι απεικονίσεις που περιλαμβάνουν τους όρους εικονικές αναπαραστάσεις, γραφικά και μοντέλα, χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν αναπαραστάσεις αντικειμένων, εννοιών και τις σχέσεις τους χρησιμοποιώντας σύμβολα και χωρική διευθέτηση (Veriki 2002). Ο Goodman (1968) αναφέρει ότι τα γεωμετρικά μοντέλα και τα γραφικά είναι σημειογραφικές αναπαραστάσεις ενώ οι εικόνες, τα σχέδια και οι φωτογραφίες δεν είναι σημειογραφικές αναπαραστάσεις. Στα γεωμετρικά μοντέλα και στα γραφικά, που είναι σημειογραφικά, υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων της αναπαράστασης και των στοιχείων του αντικειμένου που αναπαρίσταται. Αντίθετα, οι εικόνες δεν είναι σημειογραφικές, γιατί δεν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία της αναπαράστασης με το αντικείμενο που αναπαρίσταται και επιπλέον τα στοιχεία της αναπαράστασης μπορεί να επιδέχονται διάφορες ερμηνείες. Ακόμα, πολλές φορές πρέπει να προηγηθεί η γνώση της πολιτιστικής κουλτούρας στην οποία αναπτύσσεται η εικόνα και στη συνέχεια να ακολουθήσει η ερμηνεία της.

Τα γραφικά διαχωρίζονται από τα άλλα συμβολικά συστήματα όπως είναι οι εικόνες, γιατί αναφέρονται και σημαίνουν μόνο κάτι συγκεκριμένο (Bertin, 1983). Τα στοιχεία των συστημάτων αυτών έχουν μοναδική ερμηνεία, γιατί το σχέδιο τους βασίζεται σε προκαθορισμένες συμφωνίες. Αντίθετα, οι εικόνες μπορεί να έχουν διάφορες ερμηνείες, γιατί η ερμηνεία τους καθορίζεται από ένα άτομο και είναι συνεπώς υποκειμενική.

Κατά τη Veriki (2002) η βιβλιογραφία αναφέρει τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες γραφικών. Τα διαγράμματα, τις γραφικές παραστάσεις, τους χάρτες και τις λίστες στοιχείων (charts). Οι τέσσερις αυτές κατηγορίες γραφικών χρησιμοποιούν διαφορετικές προκαθορισμένες συμφωνίες για να παρουσιάζουν τις διάφορες πληροφορίες. Τα διαγράμματα είναι αναπαραστάσεις που παρουσιάζουν πληροφορίες σε μορφή δισδιάστατου χώρου (Diezmann & English, 2001). Τα διαγράμματα πολλές φορές χρησιμοποιούνται ως βοηθητική αναπαράσταση για την επίλυση ενός προβλήματος (Γαγάτσης Α., 2004).

Σύμφωνα με τους Larkin και Simon (1987) ένα διάγραμμα μπορεί να είναι ανώτερο από μια λεκτική περιγραφή για την επίλυση ενός προβλήματος για τρεις λόγους. Πρώτον, τα διαγράμματα μειώνουν την αναζήτηση για την επίλυση προβλημάτων, παρέχοντας ομαδοποιημένες τις σχετικές πληροφορίες. Δεύτερον, τα διαγράμματα μειώνουν την ανάγκη για την αντιστοίχιση των σχετικών σημείων. Τρίτον, τα διαγράμματα υποστηρίζουν αντιληπτικά συμπεράσματα που είναι συχνά ευκολότερα από τα αντίστοιχα συμβολικά συμπεράσματα. (Koedinger & Terao, A. 2002).

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για τις ίδιες έννοιες βοηθά όχι μόνο στην ανάπτυξη μιας καλύτερης εννοιολογικής κατανόησης αλλά επίσης ενδυναμώνει τη δυνατότητα επίλυσης προβλήματος (Amato, 2004, Gagatsis & Elia , 2004). Ο Kaput (1987) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από μια δομή σε μια άλλη δομή. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση.

Στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης τα διαγράμματα, οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις , τα σχήματα, οι εικόνες, οι αλγεβρικές και λεκτικές εκφράσεις χρησιμοποιούνται στα περισσότερα διδακτικά εγχειρίδια, γιατί οι αναπαραστάσεις αποτελούν πλέον αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών εννοιών, ένα εργαλείο χειρισμού τους κατά τη διδασκαλία και ένα μέσο αξιολόγησης της κατανόησης της μαθηματικής έννοιας (Γαγάτσης Α., 2004).

Το μαθηματικό πλαίσιο για τα δημόσια σχολεία στην Καλιφόρνια California State Department ofEducation, 1992, p. 124) ορίζει: “Οι μαθηματικές αναπαραστάσεις αποτελούν ισχυρά εργαλεία για την οπτικοποίηση και κατανόηση προβληματικών καταστάσεων, την επικοινωνία των μαθηματικών και την επίλυση προβλημάτων”. Πολύ συχνά οι μαθητές εκτίθενται σε ένα στενό φάσμα των μαθηματικών αναπαραστάσεων με επίκεντρο τους αριθμούς και τα σύμβολα για τους αριθμούς. Θα πρέπει να δείτε ότι είναι πιο εύκολο να κατανοήσουμε σημαντικές μαθηματικές ιδέες όταν αυτές οι ιδέες παρουσιάζονται με διάφορους τρόπους και ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις αναδεικνύουν διαφορετικές πτυχές των δεδομένων (Brenner et al. 1995) .

Πέρα από την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την αναγνώριση και την ευέλικτη χρήση τους σε ποιοτικά διαφορετικά συστήματα αναπαραστάσεων (λεκτικό, εικονικό, συμβολικό) βασικός στόχος της διδασκαλίας στα πλαίσια της αναπαραστασιακής προσέγγισης των μαθηματικών, πρέπει να είναι και η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα στο άλλο (Αθανάσιος Γαγάτσης,). Ως ικανότητα «μετάφρασης αναπαραστάσεων» ορίζεται η ψυχολογική διαδικασία μέσω της οποίας το άτομο μεταφέρεται από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο και αποτελεί σημαντικό κριτήριο αξιολόγησης για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και παράλληλα αποτελεσματικό μέσο επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Janvier, 1987).

3.ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η αξία του προβλήματος στη μάθηση όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά σε όλους τους επιστημονικούς τομείς θεωρείται αδιαμφισβήτητη. Ο Hilbert (1902) αναφέρει ότι κάθε κλάδος της επιστήμης παραμένει ζωντανός εφόσον εξακολουθεί να προσφέρει αφθονία προβλημάτων(Γαγατσης Αθανασιος).Τα προβλήματα κατείχαν σημαντική θέση στα μαθηματικά των αρχαίων πολιτισμών (π. χ. Αιγυπτίων, Κινέζων, Ελλήνων, Βαβυλωνίων) και αποτέλεσαν την αφετηρία ανάπτυξης σε διάφορους τομείς των μαθηματικών (γεωμετρία, Άλγεβρα, θεωρία Αριθμών, Στατιστική κ.τ.λ.). Επιπλέον, τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούσαν ανέκαθεν ένα σημαντικό μέρος των σχολικών μαθηματικών (Stanic & Kilpatrick, 1989). Στη διδασκαλία των μαθηματικών, η θεμελίωση της αξιοποίησης των προβλημάτων επήλθε από τη πρωτοποριακή εργασία του Polya (Αθανασιος Γαγατσης). Η ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να επιλύουν προβλήματα αναγνωρίζεται ως πρωταρχικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών από όλους τους παιδαγωγούς, ανεξάρτητα από τη θεωρία μάθησης που ακολουθούν. Η ικανότητα αυτή αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης και θεωρείται ότι περιλαμβάνει τόσο δημιουργική όσο και κριτική σκέψη. Στην πραγματικότητα, αν επρόκειτο να συνοψίσουμε τους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης ή γενικότερα της εκπαίδευσης σε μια μόνο φράση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι « η εκπαίδευση αποβλέπει στην ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλήματος». (Γαγάτσης Α., 2004).

Όπως αναφέρει το βιβλίο του δασκάλου της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου στην Ελλάδα, « η λύση προβλήματος αποτελεί κεντρικό σημείο στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ). Στα «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής» δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα και αφιερώνεται μεγάλη έκταση στη λύση προβλήματος» (Βιβλίο Δασκάλου Α΄Δημοτικού).

Η επίλυση προβλημάτων δημιουργεί ένα πλαίσιο για τη μάθηση των μαθηματικών (Schoenfeld, 1992) και την αναπαράσταση των μαθηματικών ιδεών (Verschaffel & Corte, 1997). Κατά τη μετάβαση της μάθησης από το συγκεκριμένο-λειτουργικό στο τυπικό-λειτουργικό επίπεδο (Piaget & Inhelder, cited in Schoenfeld, 1992) το παιδί μαθαίνει στη συνεχή αλληλεπίδραση με διακριτά/ημι-διακριτά αντικείμενα σε μια κατάσταση που ενσωματώνει αυτές τις έννοιες με ότι μαθαίνουν από το περιβάλλον (Schoenfeld, 1992; Verschaffel & Corte,1997). Επιπλέον, η κατάσταση η οποία έχει μετατραπεί από την αναπαράσταση των εννοιών μέσω συγκεκριμένων αντικειμένων στην εικονική κατάσταση είναι η κατάσταση της επίλυσης προβλημάτων. Επίλυση προβλημάτων είναι μια από τις κυρίαρχες μαθησιακές δραστηριότητες που χαρακτηρίστηκε σε όλη την ιστορία των μαθηματικών για την ανάπτυξη κάθε νέας μαθηματικής έννοιας και των αναπαραστασιακών συστημάτων τους. (Luitel, 2005).

Σημαντικό βοήθημα στην επίλυση προβλημάτων αποτελούν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι ένα καθημερινό φαινόμενο. Όταν χρειάζεται να αγοράσουμε μια μοκέτα παίρνουμε μαζί μας ένα σχέδιο με σημειώσεις στο κατάστημα χαλιών. Αν χρειάζεται να δώσουμε τις κατευθύνσεις σε ένα πάρτυ με φίλους σχεδιάζουμε έναν χάρτη. Παίρνουμε λίστες με ψώνια στο super market. Όλα αυτά αποτελούν παραδείγματα χρήσης των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων ή άλλων συναφών δραστηριοτήτων.
Εκτός από τα καθημερινά παραδείγματα, είναι γνωστό ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν σημαντικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων για μια σειρά τυπικών μορφών προβλήματος (Cox & Brna, 1995). Αυτά περιλαμβάνουν την αναλογική σκέψη (Beveridge & Parkins, 1987), την ιεραρχική κατάταξη πληροφοριών (Greene, 1989), τα διανύσματα (Katz &Anzai, 1991), αλγεβρικά λεκτικά προβλήματα (Singley, Anderson, Gevins & Hoffman, 1989), τον προγραμματισμό(Merrill, Reiser, Beekelaar& Hamid, 1992), τον λογικό και αναλυτικό συλλογισμό (Barwise & Etchemendy, 1994; Cox, Stenning & Oberlander, 1995; Stenning & Oberlander, in press), την φυσική (Anzai, 1991) και γενικότερα στην επιστημονική και μαθηματική ανακάλυψη (Davis & Hersh, 1981).

Ένας σημαντικός ρόλος της αναπαράστασης στα μαθηματικά είναι ότι αποτελεί εργαλείο για τη σκέψη κερδίζοντας ιδέες (Diezmann& English, 2001; Kaput,1 987). Οι ερευνητές έχουν επιδείξει ισχυρές συνδέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές και το επίπεδο της κατανόησής τους (Friedlande&r Tabach, 2001; Lamon, 2001), με την κατανόηση που συνδέεται με την ικανότητα να εφαρμόζουν διάφορες αναπαραστάσεις και να επιλλέγουν αυτή που είναι κατάλληλη σε κάθε προβληματική κατάσταση (Zazkis & Liljedahl, 2004).

Οι γνωστικές επιδράσεις των γραφικών εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι η μείωση της αναζήτησης και το γέμισμα της working memory από οργανωμένες πληροφορίες ανά περιοχή. Οι ημι-γραφικές εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπως οι πίνακες, περιέχουν πληροφορίες ρητές και μπορούν να κατευθύνουν την προσοχή στα άλυτα μέρη ενός προβλήματος (π. χ. τα κενά κελιά της αναπαράστασης ενός πίνακα).

Οι γραφικές αναπαραστάσεις μπορούν επίσης να επιτρέψουν την επίλυση προβλήματος διευκολύνοντας τις αντιληπτικές αποφάσεις ενός είδους που είναι σχεδόν άκοπο για τους ανθρώπους και μπορεί να δράσει ως βοήθημα για την ανάκτησή του (Larkin & Simon, 1987). Σε γενικές γραμμές οι γλωσσικές αναπαραστάσεις απαιτούν πιο ενεργή αναζήτηση, κατανόηση και διεξαγωγή συμπερασμάτων από τις γραφικές αναπαραστάσεις (Green & Petre, 1992). Οι γραφικές αναπαραστάσεις πιθανώς κάνουν χρήση του οπτικοχωρικού στοιχείου της working memory (Baddeley, 1992). Το χωρικό συστατικό της οπτικής επεξεργασίας πληροφοριών πιθανώς κωδικοποιείται αυτόματα και ανεξάρτητα από την προσοχή (Mandler, Seegmiller & Day, 1977).

Οι ερευνητές έχουν αναλύσει την διαδικασία επίλυσης λεκτικού προβλήματος σε διάφορες γνωστικές φάσεις (Mayer, 1989) : η αναπαράσταση του προβλήματος – κατά την οποία ο λύτης του προβλήματος κατασκευάζει μια νοητική αναπαράσταση της κατάστασης που περιγράφεται στο πρόβλημα, το σχέδιο λύσης – κατά το οποίο ο λύτης του προβλήματος καθορίζει τα αριθμητικά ή/και τα αλγεβρικά βήματα που απαιτούνται για να λυθεί το πρόβλημα, η εκτέλεση λύσης – κατά την οποία ο λύτης του προβλήματος πραγματοποιεί κάθε αριθμητική ή/ και η αλγεβρική διαδικασία που απαιτείται για να λύσει το πρόβλημα και ο έλεγχος της λύσης – κατά την οποία ο λύτης του προβλήματος ελέγχει τους υπολογισμούς του/της για να δει τα λάθη. Αν και μια σημαντική δυσκολία των μαθητών περιλαμβάνεται στην αναπαράσταση του προβλήματος(μαζί με την αναπαράσταση του σχεδιασμού και του ελέγχου) το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας τείνει να δίνει έμφαση στην εκτέλεση της λύσης (Kintsch & Greeno, 1985; Riley, Heller & Greeno, 1982).

Οι οπτικές αναπαραστάσεις είναι ένα σημαντικό συστατικό των προηγμένων μαθηματικών προβλημάτων. Αμφότεροι οι λύτες , εμπειρογνώμονες και αρχάριοι, βλέπουν τις οπτικές αναπαραστάσεις θετικά και προσπαθούν να τις χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλήματος (Stylianou & Silver, 2004).

4.ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Έστω μια συλλογή S από σημεία, ευθείες ή άλλα σχήματα στον ν – διαστάσεων ευκλείδειο χώρο που αναπαριστά ένα σύστημα Σ αντικειμένων ή μια κατάσταση ή μια διαδικασία.

Η συλλογή S είναι γεωμετρικό μοντέλο του Σ, αν οι εγγενείς γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων της συλλογής S (οι γεωμετρικές ιδιότητες των σημείων, των ευθειών και των σχημάτων της συλλογής S ανεξάρτητα από το Σ) μας δίνουν όλες κάποια πληροφορία για το Σ, δηλαδή αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιότητες του συστήματος Σ (Γαγάτσης και Πατρώνης, 2001).

Σύμφωνα με τον Fischbein (1972), ένα μοντέλο έχει:

- Γενεσιουργό χαρακτήρα όταν παράγει ένα απεριόριστο πλήθος ιδιοτήτων, ξεκινώντας από ένα περιορισμένο αριθμό στοιχείων και κανόνων
- Ευρετικό χαρακτήρα όταν μας οδηγεί εύκολα και ανεξάρτητα από το αρχικό σύστημα που αναπαριστάνει σε νέες πληροφορίες σχετικά με αυτό το σύστημα

Η χρήση γεωμετρικών μοντέλων (αριθμητική γραμμή) είναι ένα ενδιάμεσο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση καθώς παρέχει ένα καινούριο πλαίσιο αντίληψης του προβλήματος από τον λύτη, που τον βγάζει από ένα καθαρά εμπειρικό πλαίσιο αντίληψης. Η χρήση της αριθμητικής γραμμής έχει πάρα πολλές δυνατότητες, αφού αντανακλά τις ενορατικές διαδικασίες που συνδέονται με το μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκεται. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές και φοιτητές σε κάποιο κατάλληλο στάδιο της εξέλιξης της σκέψης τους ή της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος .

Σε αντίθεση με μια αναπαράσταση, που είναι δυνατόν να περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία ή να παραλείπει κάποια στοιχεία της ολότητας προς αναπαράσταση σε ένα γεωμετρικό μοντέλο όλα τα στοιχεία του δίνουν κάποια πληροφορία για την ολότητα προς αναπαράσταση και έχει γενεσιουργό και ευρετικό χαρακτήρα (Σιακαλλή, 2003)

Ένα μοντέλο είναι ένας τρόπος αναπαράστασης (όπως η γλώσσα) αλλά μια αναπαράσταση δεν είναι μοντέλο, αν δεν έχει γενεσιουργό και ευρετικό χαρακτήρα. Η σύλληψη μιας έννοιας μέσα από ένα γεωμετρικό σχήμα είναι μια πρώτη μορφή διαισθητικής σκέψης. Η διαδικασία της σκέψης περνάει μέσα από την διαίσθηση και βαθμιαία εξελίσσεται έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να συλλαμβάνουν σαν μια ολότητα την απόδειξη ενός προβλήματος. Από την άλλη πλευρά η φύση της Μαθηματικών και η διαδικασία της κατανόησης των μαθηματικών προβλημάτων είναι αλληλένδετη με την χαρακτηριστική διαδικασία της παραγωγής συμπερασμάτων που οδηγεί στην ανάγκη της τυπικής απόδειξης. Η χρήση των γεωμετρικών μοντέλων είναι ένα ενδιάμεσο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση καθώς παρέχει ένα καινούργιο πλαίσιο αντίληψης του προβλήματος από τον λύτη, που τον βγάζει από ένα καθαρά εμπειρικό πλαίσιο αντίληψης(Gagatsis & Patronis,1991).

5.Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ

Ο Bruner (1961) υποστηρίζει πως η μάθηση διενεργείται σε τρία επίπεδα: το διαδραστικό (enactive), το εικονικό και το συμβολικό. Με άλλα λόγια, η λειτουργία της εικόνας ως μεσολαβητής ανάμεσα στο πρακτικό και το θεωρητικό τυπικό επίπεδο κατανόησης. Στον τομέα της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, οι εικόνες παίζουν σημαντικό ρόλο ως βοήθημα για την υποστήριξη του συλλογισμού και ως μέσο στην επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών (Elia & Philippou, 2004).

Τα μαθηματικά πρότυπα του National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) συνιστούν τη χρήση των εικόνων για να υποστηρίξουν τους μαθητές να αναπτύξουν μια εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών. Οι εικονικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται ευρέως στα ασιατικά προγράμματα σπουδών (cf., Singapore Ministry, 1999). Αυτή η χρήση μπορεί να είναι ένας παράγοντας για την επιτυχία των ασιατικών χωρών στους διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς (TIMSS, 1996) (Koedinger & Terao, 2002).

Οι οπτικές απεικονήσεις αναφέρονται στην ικανότητα σχηματισμού νοητικών αναπαραστάσεων της εμφάνισης των αντικειμένων και να χειριστούν αυτές τις αναπαραστάσεις με το μυαλό (Kosslyn, 1995). Οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι οι εν λόγω οπτικές αναπαραστάσεις είναι σημαντικές στη μαθηματική εκπαίδευση επειδή ενισχύουν μια διαισθητική άποψη και την κατανόηση σε πολλές περιοχές των μαθηματικών (e.g., Krutetskii, 1976; Usiskin, 1987). Υπάρχει μια σημαντική σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και την επίδοση στα μαθηματικά (e.g., Battista, 1990).

Η οπτική απεικόνιση αναφέρεται σε μια αναπαράσταση της οπτικής εμφάνισης ενός αντικειμένου, όπως το σχήμα του, το χρώμα, ή φωτεινότητά του. Η χωρική απεικόνιση αναφέρεται σε μια αναπαράσταση των χωρικών σχέσεων μεταξύ των τμημάτων ενός αντικειμένου και τη θέση των αντικειμένων στο χώρο ή την κίνησή τους, επιπλέον, η χωρική απεικόνιση δεν περιορίζεται στις οπτικές πτυχές (δηλαδή κάποιος θα μπορούσε να έχει ακουστική ή απτική χωρική εικόνα)(Hegarty & Kozhevnikov1999).

Σύμφωνα με τους Carney και Levin (2002) οι εικόνες μπορούν να εξυπηρετήσουν διαφορετικές λειτουργίες στην επεξεργασία ενός κειμένου: διακοσμητική, αναπαραστασιακή, οργανωτική, ερμηνευτική και μετασχηματιστική. Οι διακοσμητικές εικόνες απλά διακοσμούν τη σελίδα έχοντας μικρή ή καθόλου σχέση με το περιεχόμενο του κειμένου. Οι αναπαραστασιακές εικόνες απεικονίζουν ένα μέρος ή το σύνολο του περιεχομένου του κειμένου. Οι οργανωτικές εικόνες παρέχουν ένα χρήσιμο δομικό πλαίσιο για το περιεχόμενο του κειμένου. Οι ερμηνευτικές εικόνες βοηθούν να αποσαφηνιστεί ένα δύσκολο κείμενο. Τέλος, οι μετασχηματιστικές εικόνες περιλαμβάνουν μνημονικά στοιχεία που έχουν σχεδιαστεί για να βελτιώσουν την ανάκληση πληροφοριών από αυτόν που επεξεργάζεται το κείμενο. Στα βιβλία με εικόνες οι περισσότερες από τις εικόνες είναι αντιπροσωπευτικές καθώς απεικονίζουν ότι περιγράφεται στο κείμενο.
(Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen& Georgiou, 2010).

Οι Α. Γαγάτσης, Η. Ηλία, Π. Ρούσου-Μιχαηλίδου & Μ.Τσακίρη εισηγούνται τέσσερις βασικές λειτουργίες στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος:
(α) διακοσμητικές,
(β) βοηθητικές-αναπαραστασιακές
(γ) βοηθητικές-οργανωτικές και
(δ) πληροφοριακές.

Οι διακοσμητικές εικόνες δεν παρέχουν οποιεσδήποτε πληροφορίες στους μαθητές για τη λύση του προβλήματος, αλλά αποτελούν καθαρά διακοσμητικό στοιχείο. Για παράδειγμα, μια εικόνα ενός λεωφορείου σε ένα πρόβλημα που αναφέρεται στον αριθμό των επιβατών που ανέβηκαν ή κατέβηκαν από το λεωφορείο σε διάφορες στάσεις έχει διακοσμητική λειτουργία, καθώς δε σχετίζεται με την επίλυση του προβλήματος.

Οι βοηθητικές-αναπαραστασιακές εικόνες αναπαριστούν ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος, αλλά δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή του. Οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν από την εικόνα για να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος, αλλά μπορούν και να την αγνοήσουν και να λύσουν το πρόβλημα με δική τους στρατηγική.

Οι βοηθητικές- οργανωτικές εικόνες βοηθούν τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα καθοδηγώντας τους να σχεδιάσουν ή να γράψουν κάτι. Όπως και στην περίπτωση των βοηθητικών-αναπαραστασιακών εικόνων, έτσι και οι βοηθητικές – οργανωτικές εικόνες δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί το πρόβλημα. Ένα παράδειγμα βοηθητικής οργανωτικής εικόνας που συνοδεύει το πρόβλημα «Έχω 20 μπαλόνια και θέλω να μοιράσω εξίσου σε 5 παιδάκια. Πόσα μπαλόνια θα πάρει το κάθε παιδάκι;» είναι μια εικόνα που καθοδηγεί τους μαθητές να σχεδιάσουν τα μπαλόνια στα παιδάκια αυτά.

Οι πληροφοριακές εικόνες δίνουν πληροφορίες που είναι απαραίτητες για λυθεί ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα δηλαδή στηρίζεται στη εικόνα, η οποία είναι αναγκαίο στοιχείο για την επίλυσή του. Για παράδειγμα, η εικόνα των διαφόρων υλικών κατασκευής ενός γλυκού, που παρουσιάζει τις ποσότητες των υλικών, αυτές που είναι απαραίτητες για να λυθεί ένα πρόβλημα σχετικά με την κατασκευή γλυκών με τα απαραίτητα υλικά στην καθορισμένη ποσότητα. Δηλαδή οι πληροφοριακές εικόνες αντιπροσωπεύουν οπτικά την κατάσταση του προβλήματος συχνά με ομάδες στοιχείων που μπορούν να πλαισιώσουν την διαδικασία καταμέτρησης(Γαγάτσης Α., 2004).

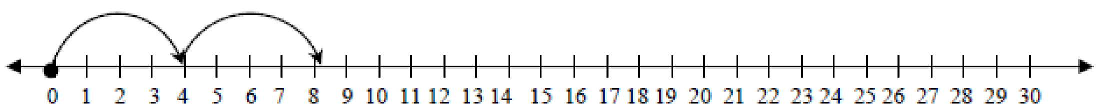
Οι Elia, Galatsis, και Demetriou (2007) ερεύνησαν τον ρόλο των διαφορετικώς τρόπων αναπαράστασης, δηλαδή, λεκτική περιγραφή, διακοσμητικές εικόνες, πληροφοριακές εικόνες και εικόνες αριθμογραμμής, στην επίλυση προσθετικών προβλημάτων από παιδιά Α’ , Β’ και Γ’ τάξης. Τα αποτελέσματα παρείχαν μια ισχυρή υπόθεση για τις διαφορετικές επιδράσεις των αναπαραστάσεων σχετικά με τη γενική ικανότητα επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Με άλλα λόγια, οι ικανότητες των μαθητών να λύσουν προβλήματα αλλαγής με διαφορετικές αναπαραστάσεις βρέθηκε να είναι βασικό συστατικό της ικανότητας επίλυσης προσθετικών προβλημάτων. Παρ’ όλα αυτά, τα ευρήματα αυτής της μελέτης καθώς και τα πορίσματα της μελέτης από τους Berends και van Lieshout (2009) έδειξαν ότι οι πληροφοριακές εικόνες έχουν μια δυσμενή επίδραση στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων. Αυτό αποδόθηκε στην εναλλαγή μεταξύ των πληροφοριών στις δύο διαφορετικές πηγές (κείμενο και εικόνα) και στον συνδυασμό αυτής της ροής πληροφοριών οι οποίες συνεπάγονται επιπλέον αύξηση στο γνωστικό φορτίο του έργου (Berends and van Lieshout 2009).

6.ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ

Η αριθμογραμμή συναντάται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών & περιλαμβάνεται στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών στην Ελλάδα αλλά και σε πολλές χώρες στο εξωτερικό, ενώ έχει αποτελέσει συχνά το αντικείμενο έρευνας πολλών επιστημόνων. Οι Carr και Katterns (1984, p. 33) αναφέρουν πως τα επίσημα σχολικά βιβλία και η διδακτέα ύλη δείχνουν ότι "η αριθμητική γραμμή είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μάθησης των μαθηματικών από το δημοτικό, το γυμνάσιο μέχρι και το λύκειο στη Νέα Ζηλανδία" Επίσης, η αριθμογραμμή συχνά αποτελεί μέρος της διακόσμησης της τάξης, συναντάται σε χάρακες ή είναι τυπωμένη πάνω στα θρανία, ιδιαίτερα στις μικρότερες τάξεις του δημοτικού σχολείου ή ακόμα και στο νηπιαγωγείο. Η αριθμογραμμή όταν μάθει κάποιος να τη χρησιμοποιεί σωστά χρησιμεύει ως ένα βοηθητικό μέσο για την επίλυση μαθηματικών ασκήσεων. Διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο για τα μαθηματικά των μαθητών των μικρών τάξεων. Είναι ζωτικής σημασίας στοιχείο για υψηλής ποιότητας μαθηματικά σε όλα τα επίπεδα,([2];[3];[4]). Χρησιμοποιείται για την αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών. Μπορεί επίσης να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τις δικές τους εσωτερικές αναπαραστάσεις. Η αριθμογραμμή έχει έναν απλό τρόπο να απεικονίζει τις μαθηματικές έννοιες. Πολλές μαθηματικές ιδέες και έννοιες απαιτούν αρκετά πολύπλοκη γλώσσα για να περιγραφούν και να αξιολογηθούν. Έτσι μια αναπαράσταση όπως η αριθμογραμμή μπορεί να μειώσει το κείμενο το οποίο οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να ερμηνεύσουν προκειμένου να εκτιμήσουν τα μαθηματικά της ερώτησης[21]. Η αριθμογραμμή υποστηρίζει την απόδοση των μαθητών, όπως σε έργα καταμέτρησης, προσφέροντάς τους έναν τύπο scaffolding με επιμέρους υπολογισμούς και επιμέρους αποτελέσματα (Silias and Bright, 2012).

Πολλές μελέτες έχουν αναφερθεί στις διάφορες χρήσεις της αριθμογραμμής και το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει στη Μαθηματική Παιδεία. Η αριθμογραμμή χρησιμοποιείται για την εκτίμηση, χρησιμοποιείται για τον πολλαπλασιασμό, για τη μέτρηση του μήκους και του χρόνου. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνει τις γνώσεις των μαθητών και για την παροχή πρόσβασης σε πιθανές στρατηγικές επίλυσης. Εξυπηρετεί επίσης για την αναπαράσταση αριθμών καθώς και τον σχηματισμό γεωμετρικών μοντέλων για τις πράξεις της αριθμητικής (Silias and Bright, 2012).

Στη διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο και στον σχεδιασμό του προγράμματος σπουδών, η αναπαράσταση η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην διδασκαλία των βασικών λειτουργιών των ακέραιων αριθμών και γενικά στην αριθμητική είναι η αριθμογραμμή (Klein, Beishuisen & Treffers, 1998). Παρά την ευρεία χρήση του διαγράμματος της αριθμογραμμής ως βοήθημα για την πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων έχουν τεθεί αμφιβολίες για την χρήση της (Hart, 1981). Ο Ernest (1985) υποστηρίζει ότι μπορεί να υπάρχει αναντιστοιχία μεταξύ της κατανόησης των μαθητών για την πρόσθεση των ακεραίων και την κατανόησή τους για αυτή την λειτουργία της αριθμογραμμής. Στην πραγματικότητα η αριθμογραμμή αποτελεί ένα γεωμετρικό μοντέλο που περιλαμβάνει συνεχεία εναλλαγές μεταξύ γεωμετρικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων (Γαγάτσης Α., 2004).
Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω (στην προηγούμενη ενότητα) η αριθμογραμμή είναι ένα παράδειγμα γεωμετρικού μοντέλου που αναπαριστά πράξεις με τους ακέραιους αριθμούς. Έστω Σ είναι ο δακτύλιος των ακέραιων ή το σύνολο των ρητών αριθμών με τους ακόλουθους κανόνες : πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Έστω S μια ευθεία γραμμή με κλίμακα, που περιλαμβάνει σύνολο σημείων που αντιστοιχούν σε ακέραιους ή ρητούς αριθμούς. Τότε το S είναι γεωμετρικό μοντέλο του Σ για τον ακόλουθο λόγο: Υπάρχει ένας ισομορφισμός Σ – S έτσι που οι πράξεις μεταξύ αριθμών στο Σ να αντιστοιχούν σε πράξεις κατευθυνόμενων τμημάτων. Η ευθεία γραμμή σε κλίμακα λειτουργεί ως γεωμετρικό μοντέλο των πράξεων στο Σ στην κατεύθυνση Σ- S με την ακόλουθη διαδικασία: δύο στοιχεία δίνονται στο S Που αντιστοιχούν με αριθμούς στο Σ. Η πράξη εκτελείται γεωμετρικά στο S και το αποτέλεσμα μεταφράζεται σε αριθμό του Σ.



$2 \times 4 = 8$

(Γαγάτσης Α., 2004)

Με βάση τη γεωμετρική διάσταση, οι αριθμοί απεικονίζονται από γραμμές που αντιστοιχούν σε διανύσματα. Σύμφωνα με την αριθμητική διάσταση, ο αριθμός απεικονίζεται με ένα σημείο επάνω στην γραμμή. Η ταυτόχρονη παρουσία αυτών των δύο εννοιών μπορεί να περιορίσει την αποτελεσματικότητα της αριθμογραμμής και να παρεμποδίσει τους μαθητές στην εκτέλεση των αριθμητικών έργων (Gagatsis, Shiakalli & Panaoura, 2003). Έρευνες έχουν δείξει πως η επίδοση των μαθητών σε βασικά έργα αριθμογραμμής είναι προβληματική. Για παράδειγμα, οι μαθητές ίσως έχουν δυσκολία να τοποθετούν σωστά τους ακέραιους όταν δεν φαίνονται κάποια τακτικά σημάδια (υποδιαίρεσης) πάνω στην αριθμογραμμή (Diezman et. Al., 2010), χρησιμοποιούν λάθος την αριθμογραμμή για να λύσουν λεκτικά προσθετικά προβλήματα (Skoumpourdi, 2010) ή αποτυπώνουν λάθος τις προσθετικές λειτουργίες των ακεραίων προτού σχεδιάσουν πάνω στην αριθμογραμμή (Ernest, 1985). Ο Bobis (2007 : 410) ανέφερε ότι η χρήση ότι η χρήση της αριθμογραμμής προκάλεσε κάποια προβλήματα, ενδεχομένως επειδή εισήχθη σε ένα πλαίσιο μέτρησης. Άλλες μελέτες έδειξαν ότι η αριθμογραμμή δεν μοντελοποιεί όλες τις ισότητες επιτυχώς, ούτε πρόκειται να το κάνει (Dickinson & Eade, 2004: 46) . Σύμφωνα με τον Ernest (1985 in Thompson, 2001 : 72) όταν σε στρατηγικές πρόσθεσης χρησιμοποιούνται από μικρά παιδιά ενώ λύνουν απλά λεκτικά προβλήματα τα οποία μεταφράζουν πάνω στην αριθμογραμμή, αυτές οι στρατηγικές φαίνεται να προκαλούν σύγχυση και δεν μπορούν να οδηγήσουν σε πολύ χρήσιμη μάθηση (Skoumpourdi, 2013)

Η δυναμική της αριθμογραμμής για την οργάνωση της σκέψης σχετικά με τους αριθμούς και τις πράξεις από τη μια και οι δυσκολίες που προκύπτουν από τη χρήση της από την άλλη, οδήγησαν πολλούς ερευνητές να προτείνουν μαθησιακά σκέλη και διδακτικές ακολουθίες για τη χρήση της κατά τη διαδικασία διδασκαλίας/ μάθησης των μαθηματικών. Μελέτες δείχνουν ότι η χρήση της αριθμογραμμής θα πρέπει να διδάσκεται προσεκτικά και συστηματικά καθώς υπάρχουν πολλές υποδεξιότητες που χρειάζεται να αποκτήσουν τα παιδιά για να τη χρησιμοποιήσουν με σιγουριά και ευελιξία (Roushman, 2013). Αναφέρουν ότι τη στιγμή που τα παιδιά γίνονται ικανά να τη χρησιμοποιήσουν, μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν εξαιρετικά ευέλικτα (Skoumbourdi, 2013).

Το μοντέλο της αριθμογραμμής δεν είναι επαρκές αν απλά συστηθεί η χρήση του ως ένα βοηθητικό μέσο για την μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Θα πρέπει να συμπεριληφθεί σωστά στα μαθηματικά σχολικά βιβλία. Η διδασκαλία της χρήσης

της αριθμογραμμής θα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στο πρόγραμμα σπουδών και θα πρέπει να αρχίσει με το σχήμα της εργασίας του δασκάλου για τον όρο.
Αυτή η αδυναμία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν την αριθμογραμμή δημιουργικά και με επιτυχία μπορεί να ξεπεραστεί με τον σχεδιασμό μιας συστηματικής διαδικασίας διδασκαλίας για τη χρήση της αριθμογραμμής. Είναι μια αναπτυξιακή διαδικασία που θα υποστηρίξει την εξοικείωση των μαθητών και των δασκάλων με τους διάφορους τύπους αναπαραστάσεων της αριθμογραμμής και τις χρήσεις τους. Αν γίνει, η αριθμογραμμή θα αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για κάθε μαθητή και κάθε δάσκαλο υποστηρίζοντας τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (Silias and Bright, 2012).

6.1 ΤΥΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ

Η αριθμογραμμή μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους, δομική και ημι – δομική, με ή χωρίς αριθμούς ή άλλα σύμβολα, μοντελοποιώντας μαθηματικές έννοιες ή όχι. Ένας άλλος τύπος αναπαράστασης της αριθμογραμμής, ο οποίος προτείνεται στη βιβλιογραφία είναι η κενή αριθμογραμμμή. Αυτός ο τύπος αριθμογραμμής προσφέρει στους μαθητές την ελευθερία να την χρησιμοποιήσουν όπως θέλουν, για να σημειώνουν ή για να εργάζονται (Silias and Bright, 2012).

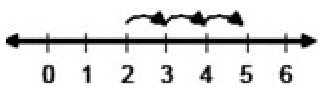
Οι αριθμογραμμές με σημειωμένα τα ευθύγραμμα τμήματα αναφέρονται ως δομημένες αριθμογραμμές. Οι υπέρμαχοι αυτού του τύπου αριθμογραμμής υποστηρίζουν την αξία της σε δραστηριότητες ακολουθίας (αλληλουχίας) αριθμών (e.g., Wiegel, 1998). Ωστόσο, ο προσδιορισμός της αριθμητικής ακολουθίας προκύπτει από τη γνώση στη σειρά των ονομάτων των αριθμών. Επειδή η αριθμογραμμή είναι ένα μοντέλο μέτρησης και όχι ένα μοντέλο αρίθμησης οι αριθμοί πάνω στην αριθμογραμμή είναι αναπαραστάσεις μηκών και όχι απλά σημεία (Fuson, 1984). Έτσι για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης θέσης ενός σημείου πάνω στην αριθμογραμμή η εγγύτητα του αγνώστου τις γνωστές θέσεις των αριθμών είναι σημαντική (Diezmann, & Lowrie, 2006).

Αυξάνοντας με την ηλικία και την εμπειρία, η εξάρτηση των γραμμικών αναπαραστάσεων των αριθμητικών ποσοτήτων φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Νωρίς κατά την ανάπτυξη, οι εκτιμήσεις των παιδιών συχνά δεν αυξάνουν γραμμικά με τις αριθμητικές ποσότητες. Πολλά παιδιά προσχολικής ηλικίας, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που μπορούν να μετρήσουν τέλεια από το 1 – 10, δεν καταλαβαίνουν ακόμη τη σειρά διάταξης αυτών των αριθμητικών μεγεθών. Αυτή η φτωχή κατανόηση της σειράς διάταξης των αριθμητικών μεγεθών είναι εμφανής σε ανακριβείς συγκρίσεις αριθμητικών μεγεθών από παιδιά προσχολικής ηλικίας (Ramani & Siegler, 2008; Whyte & Bull, in press), στην εκτίμηση της αριθμογραμμής (Siegler & Ramani, 2008; Whyte & Bull, in press) και σε διάφορες άλλες εκτιμήσεις της κατανόησης των αριθμητικών μεγεθών (Condry & Spelke, 2008; LeCorre & Carey,2007). Ακόμα και τα παιδιά που μαθαίνουν τη σειρά κατάταξης των αριθμητικών μεγεθών εξακολουθούν να μην αναπαριστούν τα αριθμητικά μεγέθη αυξάνοντας γραμμικά (Siegler & Ramani, 2009). Η ενασχόληση των παιδιών με έργα αριθμογραμμής αλλά ακόμα και με παιχνίδια που περιέχουν δραστηριότητες που σχετίζονται με την αριθμογραμμή και την λειτουργία της (π. χ. το φιδάκι) έχει διαπιστωθεί πως βοηθάει στην ανάπτυξη του γραμμικού μοντέλου αναπαράστασης των αριθμητικών μεγεθών και κατά συνέπεια την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

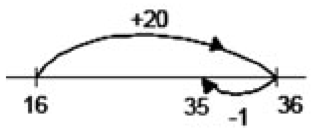
Φέρνοντας σε αντίθεση και συγκρίνοντας τα διάφορα παραδείγματα αριθμογραμμών οδηγηθήκαμε στην ανάπτυξη ενός πλαισίου ταξινόμησης για να χαρακτηρίσουμε τις αριθμογραμμές σε όρους ανάλογα με :

(1) τις διαφοροποιήσεις στα οπτικά χαρακτηριστικά τους
(2) τον τύπο των αριθμών που περιλαμβάνουν
(3) πώς οι αριθμοί και οι λειτουργίες αναπαρίστανται από μια αριθμογραμμή και
(4) η διδακτική στήριξη που προσφέρει μια αριθμογραμμή (A. Teppo and M. Van den Heuvel – Panhuizen, 2014).

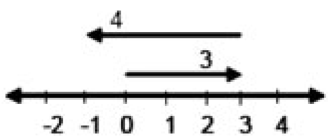
Οι Teppo και M. van den Heuvel – Panhuizen, χρησιμοποίησαν αυτό το πλαίσιο για να ομαδοποιήσουν τις αριθμογραμμές σύμφωνα με παρόμοια χαρακτηριστικά σε πέντε διαφορετικούς τύπους αριθμογραμμών τους οποίους συνήθως βρίσκουμε σε μαθηματικά κείμενα του δημοτικού και γυμνασίου και στα προγράμματα σπουδών για αυτές τις σχολικές τάξεις. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο πρώτος τύπος αριθμογραμμής είναι οι «γεμάτες αριθμογραμμές» (the filled number lines), οι οποίες χαρακτηρίζονται από ισαπέχοντα σημεία ή σημάδια υποδιαίρεσης που αντιπροσωπεύουν ακέραιους αριθμούς. Η άνω εικόνα της αριθμογραμμής αντανακλά τη σειρά μέτρησης και διευκολύνει τις δραστηριότητες μέτρησης, την τοποθέτηση αριθμών και την διερεύνηση της σειράς και των σχέσεων των αριθμών. Η κάτω εικόνα δείχνει την εκτέλεση υπολογισμών των ακεραίων με την απαρίθμηση προς τα πάνω ή προς τα πίσω (στα εγχειρίδια των μαθηματικών και την ερευνητική βιβλιογραφία αυτές οι «γεμάτες» αριθμογραμμές ονομάζονται «δομημένες» αριθμογραμμές).



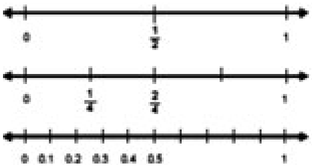
Ο δεύτερος τύπος αριθμογραμμής, είναι οι ¨κενές αριθμογραμμές» (the empty number lines) οι οποίες εστιάζουν στις πτυχές διάταξης του αριθμού. Η άνω εικόνα χαρακτηρίζεται από διατεταγμένα (όχι αναγκαίως ισαπέχοντα διαστήματα) σημεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Αυτά τα σημεία τα οποία αναπαριστούν αριθμούς, μεταφέρουν πληροφορίες για τις σχέσεις που σχετίζονται με τη διάταξη των αριθμών. Η κάτω εικόνα, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα κενό ευθύγραμμο τμήμα, δείχνει στρατηγικές υπολογισμού. Ξεκινώντας από ένα ελεύθερα τοποθετημένο σημείο για μια τέτοια γραμμή, οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν μια σειρά από ίσων διαστημάτων άλματα για να αναπαραστήσουν οπτικά τα βήματα που εμπλέκονται στην εκτέλεση ενός συγκεκριμένου υπολογισμού.



Στην τρίτη ομάδα ανήκουν οι «αριθμογραμμές κατευθυνόμενου μήκους» (the directed-length number lines), που χρησιμοποιούν μια μέτρηση της έννοιας του αριθμού, όπου οι ακέραιοι αντιπροσωπεύονται από γραμμές με κατευθυνόμενα μήκη που καθορίζονται τόσο από το μέγεθος όσο και από την κατεύθυνση. Η άνω εικόνα εμφανίζει αριθμούς ως μήκη που μετρώνται από το μηδέν. Στην κάτω εικόνα οι λειτουργίες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αναπαριστώνται από την ευθυγράμμιση και μετάφραση κατευθυνόμενων μηκών. Οι κατευθυνόμενου μήκους γραμμές υποστηρίζουν αριθμητικές λειτουργίες στους ακεραίους και την αιτιολόγηση για τη δομή αυτών των λειτουργιών.



Η τέταρτη ομάδα περιλαμβάνει τις «ρητές αριθμογραμμές» (the rational number lines) , τα μοναδιαία διαστήματα διαιρούνται σε ίσα υπο - διαστήματα και οι ρητοί αριθμοί αναπαριστώνται ως σημεία ή σημάδια υποδιαίρεσης. Αυτές οι γραμμές εμφανίζουν ακολουθίες καταμέτρησης ρητών αριθμών και υποστηρίζουν την τοποθέτηση των κλασμάτων και δεκαδικών ψηφίων. Οι παράλληλες αριθμογραμμές ρητών αριθμών, χρησιμοποιούν σύνολα παράλληλων γραμμών με διαφορετικά κατανεμημένα τα μοναδιαία διαστήματα για την εμφάνιση και αιτιολόγηση των σχέσεων ισοδυναμίας. Οι αριθμοί αναπαριστώνται ως σημεία ή σημάδια υποδιαίρεσης.



(1) Τέλος, στην πέμπτη ομάδα, ανήκουν τα αναλογικά και διπλά μοντέλα αριθμογραμμών. Οι αριθμοί αντιπροσωπεύονται από σημεία ή σημάδια τα οποία είναι αναλογικά τοποθετημένα σε σχέση με τις δεδομένες οριακές τιμές. Η αναλογική αριθμογραμμή χρησιμοποιείται για την εμφάνιση της κατά προσέγγιση θέση των πραγματικών αριθμών. Η διπλή αριθμογραμμή αποτελείται από μια ενιαία γραμμή με διπλή κλίμακα που εμφανίζει ζεύγη σημείων. Οι αριθμοί πάνω και κάτω από ένα δεδομένο σημείο αντιπροσωπεύουν μια αναλογία και χρησιμοποιούνται για την αιτιολόγηση μιας συγκεκριμένης αναλογικής σχέσης. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι αναλογικές αριθμογραμμές εμφανίζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών ενώ οι γεμάτες και οι κατευθυνόμενου μήκους αριθμογραμμές εμφανίζουν προσθετικές σχέσεις (A. Teppo and M. Van den Heuvel – Panhuizen, 2014).

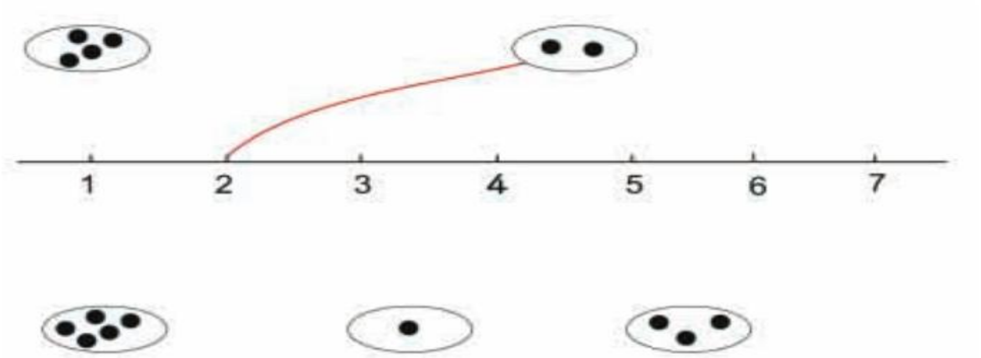
6.2 ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ

Συχνή είναι η παρουσία της αριθμογραμμής στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό. Η εμφάνιση της αριθμογραμμής στα σχολικά βιβλία είναι συχνή όχι μόνο στις πρώτες τάξεις του δημοτικού αλλά καθ’ όλη τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου. Σε κάθε τάξη (επίπεδο) εξυπηρετώντας συχνά και διαφορετικό σκοπό ανάλογα με τη χρήση της και με το μαθηματικό περιεχόμενο στο οποίο εφαρμόζεται. Διευκρινίζεται, πως στην παρούσα εργασία τα παραδείγματα παρουσίας της αριθμογραμμής στα σχολικά βιβλία θα περιοριστούν στα βιβλία των μαθηματικών της Α΄ και Β΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, μιας και η έρευνα εκτείνεται σε μαθητές αυτών των τάξεων.

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα εμφάνισης της αριθμογραμμής στα σχολικά βιβλία.

Παράδειγμα 1

Ενώνω με μια γραμμή τις κουκκίδες με τους αντίστοιχους αριθμούς.



Η συγκεκριμένη άσκηση περιέχεται στο πρώτο τεύχος του τετραδίου εργασιών της Α΄ τάξης του δημοτικού.

Παράδειγμα 2

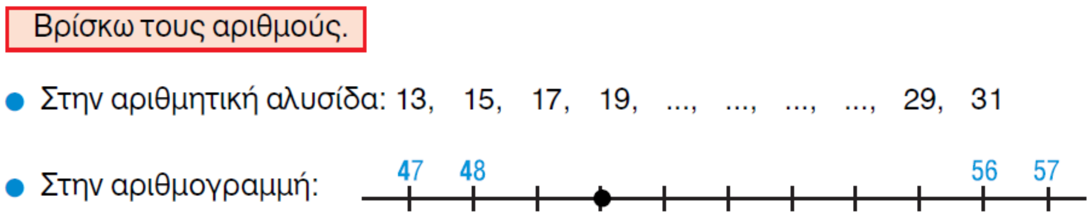
Ποιο είναι το πιο ακριβό βιβλίο της βιτρίνας του βιβλιοπωλείου; Κυκλώνω:

10 €, 20 €, 25 €, 15 €, 5 €

- Αν αγόραζα το πιο ακριβό και το πιο φτηνό βιβλίο, πόσα χρήματα θα έδινα;
  - Υπολογίζω με το νου: .... €.
  - Ελέγχω με την αριθμογραμμή:

Το συγκεκριμένο παράδειγμα βρίσκεται στη σελίδα 13 του α΄ τεύχους του σχολικού βιβλίου του μαθητή της Β΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου.

Παράδειγμα 3



Η συγκεκριμένη άσκηση βρίσκεται στη σελίδα 28 του σχολικού βιβλίου του μαθητή της Β΄ τάξης.

Επίσης, η αριθμογραμμή προτείνεται για χρήση στο βιβλίο του δασκάλου αρκετές φορές για διάφορους σκοπούς της διδασκαλίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε παρακάτω κάποιες περιπτώσεις.

Στο βιβλίο του δασκάλου της Α΄ τάξης αναφέρεται η αριθμογραμμή για την σελίδα το 4^{o} κεφάλαιο του α΄ τεύχους του σχολικού βιβλίου της Α΄ δημοτικού, όπου στόχος του κεφαλαίου είναι η άσκηση των μαθητών ώστε να καταστούν ικανοί να αναγνωρίζουν και να χειρίζονται τους αριθμούς με διάφορες αναπαραστάσεις, να περνούν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, να καταμετρούν συλλογές αποτελούμενες από ένα έως πέντε αντικείμενα και να δημιουργούν έναν αριθμό από τον προηγούμενο προσθέτοντας μια μονάδα. . Συγκεκριμένα το βιβλίο του δασκάλου αναφέρει: « **Η αριθμογραμμή.** Παρουσιάζουμε στους μαθητές την αριθμογραμμή με τους πέντε αριθμούς και τις αντίστοιχες ποσότητες. Δείχνουμε δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο ένας αριθμός δημιουργείται από τον προηγούμενό του με την πρόσθεση μιας μονάδας».

Στο 5^{o} κεφάλαιο του βιβλίου του δασκάλου της Β΄ τάξης, όπου κύριος διδακτικός στόχος της ενότητας είναι η ανάπτυξη στρατηγικών από τους μαθητές για την επίλυση προβλημάτων προτείνεται η χρήση της αριθμογραμμής στα εποπτικά μέσα.

Στο 6^{ο} κεφάλαιο του βιβλίου του δασκάλου της Β΄ τάξης, όπου κύριος διδακτικός στόχος της ενότητας είναι η αξία θέσης ψηφίου/σύγκριση, διαχείριση, διάταξη διψήφιων αριθμών, προτείνεται η χρήση της αριθμμογραμμής στα διδακτικά εργαλεία.

Στο 10^{ο} κεφάλαιο του βιβλίου του δασκάλου της Β΄ τάξης, όπου στόχος της συγκεκριμένης ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν διψήφιους αριθμούς με πρόσθεση και αφαίρεση χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές (το πάτημα στη δεκάδα είναι μια από αυτές), στο εποπτικό υλικό – διδακτικά εργαλεία προτείνεται από τους συγγραφείς η χρήση της αριθμογραμμής.

6.3 ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ

Οι Ramani και Siegler, αναφέρουν πως σύμφωνα με προηγούμενα ευρήματα, οι άνθρωποι αναπαριστούν τις ποσότητες των αριθμών με πολλούς τρόπους. Μέσω του κανόνα των λογαριθμικών αναπαραστάσεων (logarithmic ruler representation) (Dehaene,1997), το μέσο εκτιμώμενο μέγεθος είναι μια λογαριθμική συνάρτηση του πραγματικού μεγέθους (δηλαδή η απόσταση του μεγέθους των μικρών αριθμών είναι υπερβολική και η απόσταση μεταξύ των μεγαλύτερων αριθμών υποτιμάται). Αντίθετα, μέσω του κανόνα των γραμμικών αναπαραστάσεων (linear ruler representations) (Case & Okamoto, 1996), το μέσο εκτιμώμενο μέγεθος είναι μια γραμμική συνάρτηση του πραγματικού μεγέθους. Η συχνότητα χρήσης των αναπαραστάσεων αλλάζει με την ηλικία και τα άτομα συχνά χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις σε παρόμοιες ασκήσεις (Siegler & Opfer, 2003).

Η αύξηση της σχέσης με τις γραμμικές αναπαραστάσεις φαίνεται να διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη των αριθμητικών γνώσεων. Οι ερευνητές, εξέτασαν τα δεδομένα σε σχέση με την εκτίμηση της αριθμογραμμής. Σε αυτό το έργο στα παιδιά παρουσιάστηκαν μια σειρά από γραμμές με έναν αριθμό σε κάθε άκρο (π. χ. 0 και 1.000) και έναν τρίτο αριθμό (π. χ. 37) πάνω από την γραμμή και δεν υπήρχε καμία άλλη σήμανση. Η άσκηση ήταν να εκτιμηθεί η θέση του αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή. Οι μελέτες εκτίμησης της αριθμογραμμής δείχνουν ότι οι εκτιμήσεις των παιδιών συχνά δεν αυξάνουν γραμμικά με τα αριθμητικά μεγέθη.

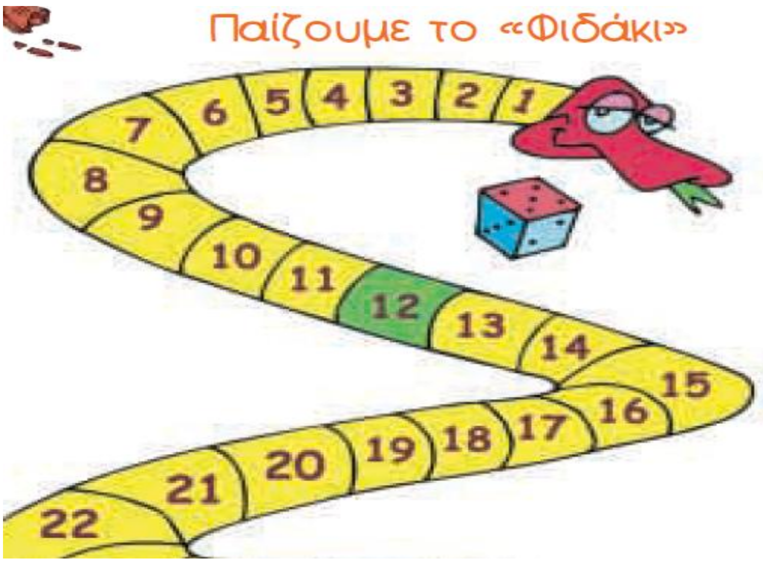
Οι Ramani και Siegler παρακάτω στο άρθρο τους αναφέρουν πως μια κοινή δραστηριότητα που φαίνεται ιδανικά σχεδιασμένη για την παραγωγή γραμμικών αναπαραστάσεων είναι το παιχνίδι με επιτραπέζια παιχνίδια, με συνεχή αρίθμηση, γραμμικώς διατεταγμένα, ισοδιαστημικά, όπως το «φιδάκι».

Όπως σημειώνεται από τους Siegler και Booth (2004), τα επιτραπέζια παιχνίδια παρέχουν πολλές νύξεις τόσο για την σειρά (διάταξη) των αριθμών τόσο και για τα αριθμητικά μεγέθη. Για πολλά παιδιά, οι καθημερινές άτυπες δραστηριότητές τους περιέχουν το παιχνίδι με επιτραπέζια παιχνίδια, παρέχοντας πλούσιες αριθμητικές εμπειρίες, οι οποίες μοιάζουν να τα βοηθούν να συγκροτούν γραμμικές αναπαραστάσεις (Siegler, & Ramani, 2009).

Όπως φαίνεται παραπάνω, οι Ramani και Siegler, στο άρθρο τους κάνουν εμφανή την ανάγκη ενασχόλησης των παιδιών με τέτοια παιχνίδια αλλά και τη σημασία της αριθμογραμμής για την προαγωγή και εκτίμηση των αριθμητικών ικανοτήτων των παιδιών. Διαφαίνεται η παρουσία της αριθμογραμμής ως εποπτικό μέσω στη διδασκαλία των μαθηματικών, να είναι όχι απλά σημαντικά βοηθητική αλλά σχεδόν απαραίτητη για την πιο γρήγορη και βαθύτερη ανάπτυξη συγκεκριμένων αριθμητικών ικανοτήτων από τους μαθητές (π. χ. η ικανότητα εκτίμησης των αριθμητικών μεγεθών όπως αναφέραμε παραπάνω).

Παρακάτω, παραθέτουμε μερικά παραδείγματα τέτοιων παιχνιδιών που βρίσκονται στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της α΄ και β΄ τάξης του δημοτικού.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα βρίσκεται στο τετράδιο εργασιών της Α΄τάξης.



Το γνωστό σε όλους μας παιχνίδι «Φιδάκι» βρίσκεται στο α΄ τεύχος του βιβλίου των μαθηματικών.

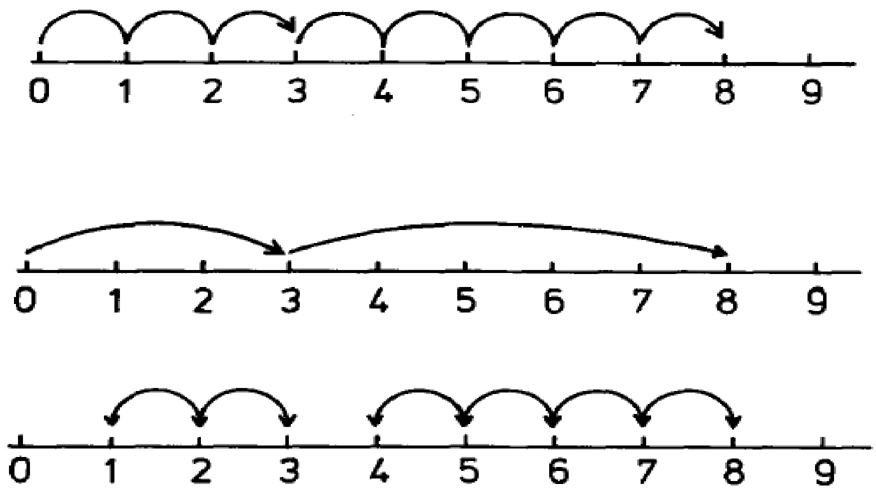
Παρόμοια παιχνίδια με τα παραπάνω, οι μαθητές (κυρίως των μικρότερων τάξεων) παίζουν και στο διάλειμμα. Ένα από αυτά είναι το κουτσό, όπου οι μαθητές ζωγραφίζουν με κιμωλία στο πάτωμα ίσα διαδοχικά αριθμημένα τετράγωνα και πηδούν με το ένα τους το πόδι τετράγωνα, ο αριθμός των οποίων κάθε φορά προσδιορίζεται από τους κανόνες του παιχνιδιού.

6.4 ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ

Οι Resnick και Ford (1981) υπογραμμίζουν την ύπαρξη τριών διαφορετικών προσεγγίσεων για τον υπολογισμό της πρόσθεσης π. χ. 3 + 5 από τα παιδιά. Επίσης, εκθέτουν αυτούς τους τρεις τρόπους από μια αναπτυξιακή ακολουθία.

Η πρώτη μέθοδος συνίσταται από την κίνηση του δαχτύλου ή του μολυβιού πρώτα τρία και μετά ακόμα πέντε βήματα κατά μήκος της αριθμητικής γραμμής. Η απάντηση δίνεται από την τελική θέση που είναι το οκτώ.

Τα παρακάτω σχεδιαγράμματα δείχνουν τα είδη αυτού του τρόπου χρήσης της αριθμητικής γραμμής.

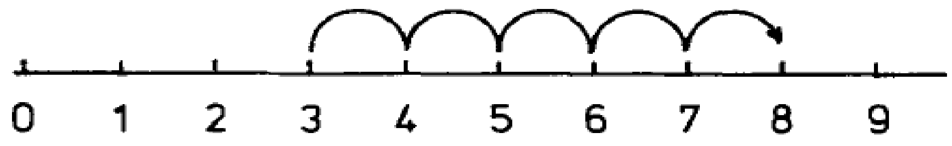


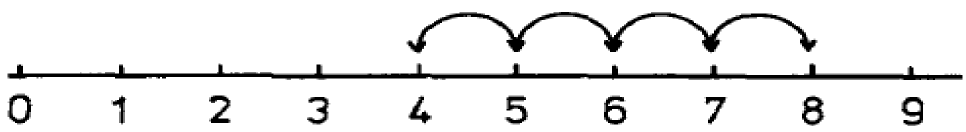
Το πρώτο αναπαριστά τις κινήσεις ενός παιδιού το οποίο υπολογίζει τα «μοναδιαία πηδήματα». Το δεύτερο προβάλει ένα πιο εναλλακτικό πιο απλοποιημένο διάγραμμα της ίδιας διαδικασίας. Το τρίτο αναπαριστά τις κινήσεις ενός παιδιού που υπολογίζει τα σημεία της αριθμητικής γραμμής και αυτό δείχνει μια παραλλαγμένη μέθοδο.

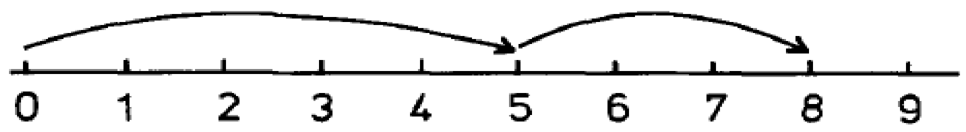
Εφόσον όλα από τα οκτώ πηδήματα ή όλοι από τους οκτώ σταθμούς υπολογίζονται από αυτή την μέθοδο ορίζεται ως «counting all» μέθοδος (υπολογισμός όλων) (Ernest, 1985).

Η δεύτερη μέθοδος συνίσταται ξεκινώντας από το σημείο που δείχνει το τρία και από εκεί υπολογίζουν προς τα πάνω πέντε ακόμα. Αυτή είναι μια απλή εκδοχή του τι είναι η «counting on» μέθοδος. Χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο το παιδί θα αγγίξει το σημείο που απεικονίζει το τρία και μετά θα κινηθεί πέντε βήματα κατά μήκος της γραμμής τελειώνοντας στο σημείο που απεικονίζει το οκτώ. Αυτό φαίνεται στο πρώτο από τα επόμενα σχεδιαγράμματα. Εναλλακτικά το παιδί θα αγγίξει πέντε σημεία από το σημείο που δείχνει το τρία για να φτάσει στο σημείο που δείχνει το οκτώ. Αυτό φαίνεται στο δεύτερο σχεδιάγραμμα.

Η Τρίτη μέθοδος είναι μια πιο εξελιγμένη απεικόνιση της δεύτερης μεθόδου. Για να υπολογίσει 3 + 5 το παιδί επιλέγει τον μεγαλύτερο από τους προσθετέους, τον 5 και μετράει άλλα τρία. Αυτό φαίνεται στο τρίτο σχεδιάγραμμα από τα επόμενα.







7. ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Οι Α. Γαγάτσης, Η. Ηλία, Π. Ρούσου-Μιχαηλίδου & Μ.Τσακίρη,2003, ασχολήθηκαν με την «επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης». Βασική επιδίωξη της συγκεκριμένης έρευνας ήταν να προσδιοριστεί ο ρόλος των εικόνων και της αριθμητικής γραμμής στη μαθηματική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων από μαθητές μικρότερων τάξεων του δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα βασικός σκοπός της έρευνας ήταν να προσδιοριστεί ο ρόλος των εικόνων (διακοσμητική και πληροφοριακή) και της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση προβλημάτων σύνθεσης δύο μέτρων και μετασχηματισμού ενός μέτρου συνδυασμού (Vergnaud, 1982) με προσθετική δομή, με τον άγνωστο να σε διαφορετικές θέσεις από μαθητές της Β’ και Γ’ τάξης του Δημοτικού σχολείου. Ειδικότερα, όσον αφορά τις εικόνες, εξετάζεται με ποιόν τρόπο τα δύο είδη εικόνας (διακοσμητική και πληροφοριακή), μπορούν να επηρεάσουν την επίλυση προβλημάτων από τους μαθητές, καθώς και πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτές τις εικόνες κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Επίσης, σε αυτή την έρευνα διερευνήθηκε αν διαφοροποιείται η επίδοση των μαθητών ανάλογα με τη θέση του αγνώστου στα προβλήματα προσθετικών σχέσεων και θα συγκριθεί η επίδραση της εικόνας και η επίδραση της μαθηματικής δομής του προβλήματος στην επίλυσή του. Ως προς την αριθμητική γραμμή εξετάστηκε με ποιο τρόπο οι μαθητές χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή σε προβλήματα ρουτίνας μιας πράξης (πρόσθεσης) και ποια είναι η συμπεριφορά των μαθητών ως προς την αριθμητική γραμμή κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος προσθετικών σχέσεων. Στην έρευνα συμμετείχαν 131 μαθητές της Β’ τάξης και 123 μαθητές της Γ’ τάξης δημοτικών σχολείων από την πόλη και την ύπαιθρο. Τα 254 συνολικά παιδιά των Β’ και Γ’ τάξεων, χωρίστηκαν σε δύο ομάδες: $7,5 < a < 8,5$ οκτάχρονα παιδιά, $8,5 < b < 9,5$ εννιάχρονα παιδιά. Η έρευνα διεξήχθη σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, δόθηκε το δοκίμιο σε 254 μαθητές. Στη δεύτερη φάση έγιναν συνεντεύξεις σε 48 μαθητές. Το δοκίμιο περιλάμβανε 12 συνηθισμένα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης, με τα οποία ασχολούνται καθημερινά οι μαθητές στο σχολείο. Μερικά από αυτά συνοδεύονταν από εικόνες διακοσμητικές ή πληροφοριακές και μερικά από αυτά με αριθμητική γραμμή. Σε κάθε πρόβλημα του δοκιμίου, ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν να το λύσουν, καθώς επίσης και να απαντήσουν στην ερώτηση κατά πόσο τους βοήθησε η εικόνα να λύσουν το πρόβλημα και με ποιο τρόπο. Ακόμα ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν ποιο από τα 12 προβλήματα θεώρησαν πιο εύκολο ή πιο δύσκολο και γιατί.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν επηρέασαν τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Από την ανάλυση Gras ομαδοποιήθηκαν οι απαντήσεις στα προβλήματα με διακοσμητική εικόνα μαζί με τις απαντήσεις στα προβλήματα χωρίς εικόνα και αριθμητική γραμμή. Αυτό έγινε γιατί οι μαθητές κατά την επίλυση αυτών των προβλημάτων επέδειξαν την ίδια συμπεριφορά. Το εύρημα αυτό ενισχύεται από την ποιοτική ανάλυση (κλινικές συνεντεύξεις), η οποία έδειξε ότι οι μαθητές αγνόησαν τις διακοσμητικές εικόνες κατά την επίλυση προβλημάτων με διακοσμητική εικόνα.

Η θέση του αγνώστου × στα προβλήματα με διακοσμητική εικόνα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στο βαθμό ευκολίας ή δυσκολίας της λύσης του προβλήματος. Όσον αφορά την περίπτωση των πληροφοριακών εικόνων, αν και από τη φύση τους είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος, δεν επηρέασαν θετικά τις επιδόσεις των μαθητών, σύμφωνα με τα ποσοτικά αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, από την ποιοτική ανάλυση (συνεντεύξεις) προέκυψε ότι πολλοί μαθητές κυρίως της Γ' τάξης αμφισβήτησαν τη χρησιμότητα των εικόνων αυτών, δηλώνοντας ότι περισσότερο τους δυσκόλεψαν παρά τους ευκόλυναν. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι η παρουσία των εικόνων και των αναπαραστάσεων γενικότερα, δεν είναι πάντοτε βοηθητική για τα παιδιά, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί πρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας, άποψη που υποστηρίζεται και από τους Carney & Levin (2002). Το εύρημα αυτό υποστηρίζεται και από τα ευρήματα της εργασίας των Hegarty, & Kozhernikov (1999), οι οποίοι σε έρευνά τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις συσχετίζονται αρνητικά με την επιτυχία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Για αυτό ο Seeger (1998) επισημαίνει ότι η χρήση των εικόνων πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή. Τα συμπεράσματα τόσο της ποσοτικής όσο και της ποιοτικής ανάλυσης, της παρούσας έρευνας, συμφωνούν επίσης με τις εισηγήσεις του Duval, που υποστηρίζουν ότι:

α) Οι μαθητές πρέπει να κατασκευάζουν και να χρησιμοποιούν οι ίδιοι την εικόνα και όχι ο δάσκαλος να την παρουσιάζει έτοιμη σε αυτούς

β) Η εικόνα δεν πρέπει να αντικαθιστά την εκφώνηση, γιατί στην ουσία ο δάσκαλος είναι αυτός που βάζει την πληροφορία και όχι οι μαθητές

γ) Οι αντιστοιχίες ανάμεσα στις βοηθητικές και στην κύρια αναπαράσταση του προβλήματος πρέπει να είναι ορθές και σαφώς διατυπωμένες

δ) Μια βοηθητική αναπαράσταση πρέπει να είναι προσωρινή και ο μαθητής να είναι ελεύθερος να την εγκαταλείπει, όταν δεν τη χρειάζεται

Η κατασκευή σχεδίου από αριθμό μαθητών στα προβλήματα με πληροφοριακές εικόνες δεν φάνηκε να έχει θετική επίδραση στην επίλυσή τους από τους μαθητές. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι η χρήση των πληροφοριακών εικόνων δεν βοήθησε τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος και να οργανώσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να καταλήξουν σε ορθή λύση. Τα αποτελέσματα της ποιοτικής έρευνας έδειξαν ότι πολλά παιδιά κυρίως από τη Γ' τάξη, δεν χρησιμοποίησαν τις εικόνες και δεν σχεδίασαν, γιατί έλυναν τα προβλήματα νοερά, καθώς τα θεώρησαν εύκολα και με μικρούς αριθμούς. Μεγάλος αριθμός παιδιών της Β’ τάξης δεν μπόρεσαν να συνδέσουν την κύρια αναπαράσταση του προβλήματος με την αναπαράσταση της εικόνας. Έτσι δεν σχεδίαζαν ή κι αν σχεδίαζαν οδηγούνταν σε λάθος αποτέλεσμα. Επομένως, η θέση του αγνώστου × στα προβλήματα με πληροφοριακή εικόνα και σχεδιασμό από τους μαθητές στα ίδια προβλήματα, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ευκολία ή δυσκολία λύσης του προβλήματος. Σε σχέση με την αριθμητική γραμμή στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε κατά πόσο οι μαθητές την χρησιμοποίησαν σωστά ή λανθασμένα (ως γεωμετρικό μοντέλο) στα λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και πώς χρησιμοποιήθηκε η αριθμητική γραμμή κατά την επίλυσή τους. Επίσης σε αυτήν την έρευνα μελετήθηκε συγκριτικά ο ρόλος της αριθμητικής γραμμής και της μαθηματικής δομής στην επίλυση προβλήματος.

Τα προβλήματα που συνοδεύονταν με αριθμητική γραμμή θεωρήθηκαν από τους μαθητές και των δύο τάξεων και κυρίως από τους μαθητές της Γ’ τάξης, ως τα πιο δύσκολα έναντι των υπόλοιπων προβλημάτων με και χωρίς εικόνα. Επίσης, η θέση του αγνώστου × στα προβλήματα με αριθμητική γραμμή, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ευκολία ή δυσκολία λύσης του προβλήματος. Γενικά έχει παρατηρηθεί ότι το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών δε χρησιμοποίησε την αριθμητική γραμμή ως μέσο για την επίλυση έργων πρόσθεσης ή ακόμη ότι η αριθμητική γραμμή αποτέλεσε εμπόδιο στη διαδικασία αυτή. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τις παρατηρήσεις του Van de Walle (1994) και των Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura (2003), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η χρήση της αριθμητικής γραμμής δυσκολεύει τους μαθητές των μικρών τάξεων του δημοτικού σχολείου (Gagatsis A., 2004).

Τα ευρήματα της έρευνας όσον αφορά την επίδραση των εικόνων και της αριθμητικής γραμμής στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικού προβλήματος υποστηρίζουν την άποψη του Seeger (1998) ότι πρέπει να εγκαταλειφθεί η αντίληψη σύμφωνα με την οποία η κατανόηση στα μαθηματικά θεμελιώνεται με την αναφορά σε κάποια αντιληπτική δομή (π.χ. εικόνα ή αριθμητική γραμμή) το νόημα της οποίας θεωρείται αυτονόητο. Αντίθετα, επισημαίνει ότι τίποτε δεν είναι αυτονόητο σε σχέση με τις αναπαραστάσεις. Πρόκειται για συμβολικά μέσα και για να μπορέσει κάποιος να τα χειριστεί ως τέτοια θα πρέπει να εξοικειωθεί με τον τρόπο χρήσης τους και να μάθει τη γλώσσα τους. Σε γενικές γραμμές, από την έρευνα έγινε εμφανές ότι τόσο οι επιδόσεις των μαθητών όλων των τάξεων, όσο και οι σωστές αναφορές τους σχετικά με τους τρόπους που εργάστηκαν για την επίλυση των προβλημάτων του δοκιμίου, ήταν ανάλογες με τη δυσκολία των προβλημάτων η οποία ήταν σε συνάρτηση με τη θέση του αγνώστου ×.

Σύμφωνα με τα ευρήματα της ποσοτικής ανάλυσης της έρευνας, η επιτυχία στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος επηρεάζεται από τη συνισταμένη δύο παραγόντων που αφορούν το έργο: του τρόπου αναπαράστασης του προβλήματος και της σημασιολογικής του δομής.

Γενικότερα, κατά την συγκεκριμένη έρευνα οι ερευνητές καταλήγουν στο ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν επηρέασαν την συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος. Όσον αφορά την περίπτωση των πληροφοριακών εικόνων, αν και από τη φύση τους είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλήματος, δεν επηρέασαν θετικά τις επιδόσεις των μαθητών. Επιπλέον, από τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης (συνεντεύξεις), προέκυψε ότι πολλοί μαθητές αμφισβήτησαν τη χρησιμότητα των εικόνων αυτών, δηλώνοντας ότι περισσότερο τους δυσκόλεψαν παρά τους διευκόλυναν. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι η παρουσία των εικόνων και των αναπαραστάσεων γενικότερα , δεν είναι πάντοτε βοηθητική για τα παιδιά, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί πρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας, άποψη που υποστηρίζεται και από τους Carney & Levin (2002). Το εύρημα αυτό υποστηρίζεται και από τα ευρήματα της εργασίας των Hegarty & Kozhernikov (1999), οι οποίοι σε έρευνά τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι εικονικές αναπαραστάσεις σχετίζονται αρνητικά στη επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Γι' αυτό ο Seeger (1998) επισημαίνει ότι η χρήση των εικόνων πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή (Gagatsis A., 2004).

Σε άλλη έρευνα οι Α. Γαγάτσης και Μ. Μοδέστου το 2002, εξετάζουν την επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού. Στην εργασία τους διακρίνουν, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, ορισμένα μοντέλα πολλαπλασιασμού με βάση τη σημασιολογική δομή των σχετικών λεκτικών προβλημάτων. Τα μοντέλα, τα οποία πρώτιστα αφορούν πολλαπλασιαστικά προβλήματα μιας πράξης για ακέραιους αριθμούς, είναι αυτά των ισοδύναμων ομάδων, της σύγκρισης, του καρτεσιανού γινομένου και το εμβαδού ορθογωνίου ή ορθογώνιας διάταξης (Greer, 1992). Τα πιο πάνω μοντέλα μπορούν να οργανωθούν σε δύο ευρύτερες κατηγορίες, στα ασυμμετρικά και στα συμμετρικά μοντέλα, με βάση το ρόλο που έχουν οι παράγοντες σε κάθε περίπτωση (Kouba & Fraklin, 1992). Οι ισοδύναμες ομάδες και η σύγκριση ορίζονται ως ασυμμετρικά μοντέλα λόγω του διαφορετικού ρόλου που διαδραματίζουν σε αυτά οι δύο παράγοντες, ο τελεστής και ο τελεστέος. Οι ρόλοι αυτοί δεν μπορούν να εναλλαγούν (Gagatsis A., 2004).

Τα προβλήματα ισοδύναμων ομάδων αφορούν μια φυσική αντιγραφή ή επανάληψη μιας σειράς από ενέργειες (Christou & Philippou, 1998). Στα προβλήματα αυτά ρόλο τελεστή έχει ο αριθμός που ορίζει τον αριθμό των ισοδύναμων ομάδων ενώ ρόλο τελεστέου έχει ο αριθμός που ορίζει τον αριθμό των αντικειμένων σε κάθε ομάδα.

Τα προβλήματα σύγκρισης είναι καταστάσεις οι οποίες συχνά χαρακτηρίζονται από φράσεις του τύπου «διπλάσιο, τριπλάσιο,...» ή « ο x έχει ν φορές όσο και ο ψ». Συντακτικά η έκφραση αυτή είναι πολύ πολύπλοκη οπότε και αντιμετωπίζεται ως μια γλωσσική ένδειξη πολλαπλασιαστικού προβλήματος (Nesher, 1988). Στα προβλήματα σύγκρισης ρόλο τελεστή έχει ο παράγοντας που ορίζει τη σχέση ανάμεσα στα αντικείμενα δύο ομάδων (διπλάσιο, τριπλάσιο κλπ.), ενώ ρόλο τελεστέου έχει ο αριθμός που ορίζει τον αριθμό των αντικειμένων στην αρχική ομάδα.

Τα μοντέλα του καρτεσιανού γινομένου και της ορθογώνιας διάταξης ορίζονται ως συμμετρικά λόγω του εναλλάξιμου ρόλου που μπορούν να έχουν οι παράγοντες σε τέτοιου είδους προβλήματα (Kouba & Fraklin, 1992). Αυτό είναι δυνατό, γιατί το περιεχόμενο τέτοιων προβλημάτων δεν επιτρέπει την ξεκάθαρη επιλογή του ενός όρου ως τελεστή και του άλλου ως τελεστέου. Τα προβλήματα εύρεσης του καρτεσιανού γινομένου οποιοδήποτε δύο συνόλων A και B αφορούν την εύρεση όλων των πιθανών συνδυασμών των στοιχείων του ενός συνόλου με τα στοιχεία του άλλου και μπορούν να επιλυθούν με την εφαρμογή της ταυτότητας n(AxB) = n(A) n(B) (Bassarear, 2001). Τα προβλήματα ορθογώνιας διάταξης αφορούν τη φυσική τοποθέτηση m x n αντικειμένων σε μια ορθογώνια διάταξη m σειρών και n στηλών ή και αντίστροφα (Greer, 1992).

Στόχος της έρευνάς τους, ήταν η μελέτη του τρόπου με τον οποίο το Αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου προσεγγίζει τη διδασκαλία της έννοιας του πολλαπλασιασμού. Συγκεκριμένα, εξετάστηκε η συχνότητα εμφάνισης του κάθε μοντέλου πολλαπλασιασμού στα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ Δημοτικού, σε σχέση με τις διαδικασίες μετάφρασης που προωθούνται ανάμεσα στο λεκτικό, εικονικό και συμβολικό μέσο αναπαράστασης για κάθε μοντέλο. Ακολούθως, διερευνήθηκαν οι ικανότητες των μαθητών Α' τάξης στο χειρισμό έργων (συμπεριλαμβανομένων της επίλυσης προβλήματος και της διεξαγωγής μεταφράσεων ανάμεσα στα διάφορα αναπαραστατικά μέσα) που αφορούν τα πολλαπλασιαστικά μοντέλα που παρουσιάστηκαν σε σχέση με την αντίστοιχη εμφάνισή τους στα σχολικά εγχειρίδια της Α' Δημοτικού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, προέκυψε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των δραστηριοτήτων πολλαπλασιασμού που περιλαμβάνονται στα εγχειρίδια της Α' Δημοτικού, αφορά δραστηριότητες ισοδύναμων ομάδων ενώ το μικρότερο ποσοστό αφορά δραστηριότητες καρτεσιανού γινομένου. Ανάλογη με τα ποσοστά εμφάνισης των δύο αυτών μοντέλων πολλαπλασιασμού στα βιβλία μαθηματικών, φάνηκε να είναι και η επίδοση των μαθητών της Α΄ Δημοτικού στα αντίστοιχα έργα του δοκιμίου που χορηγήθηκε για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας. Όσον αφορά στα πολλαπλασιαστικά μοντέλα της διάταξης και της σύγκρισης παρατηρήθηκε μικρότερη αναλογία ανάμεσα στα ποσοστά εμφάνισής τους στα σχολικά εγχειρίδια και στην επίδοση των μαθητών στα αντίστοιχα έργα. Συγκεκριμένα, η επίδοση των μαθητών στα έργα διάταξης και σύγκρισης ήταν ψηλότερη από την αναμενόμενη αν ληφθούν υπόψη τα ποσοστά εμφάνισης των μοντέλων αυτών στα βιβλία μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι τα έργα διάταξης αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές περισσότερο ως έργα ισοδύναμων ομάδων από την άποψη ότι μια διάταξη m x n θεωρήθηκε ότι αποτελείται από m ομάδες οι οποίες περιλαμβάνουν n στοιχεία η κάθε μια. Τώρα, όσον αφορά στην αυξημένη επιτυχία στο δοκίμιο στα έργα σύγκρισης, αυτή πιθανόν να οφείλεται στην καθημερινή και συχνή χρήση από τους μαθητές του πολλαπλασιαστικού όρου «διπλάσιο» (Fruedenthal, 1983), η οποία και υποβοήθησε τους περισσότερους μαθητές να επιλύσουν το ένα από τα δύο λεκτικά προβλήματα σύγκρισης. Όσον αφορά στη μετάφραση από λεκτικό μέσο αναπαράστασης σε συμβολικό, φαίνεται ότι παρά τη μικρή συχνότητα εμφάνισης τέτοιου είδους μεταφράσεων στα βιβλία μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού, οι μαθητές έχουν ψηλή επίδοση στις αντίστοιχες μεταφράσεις στο δοκίμιο. Από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορεί να εντοπιστεί ο σημαντικότατος ρόλος της εικονικής αναπαράστασης τόσο στην εκτέλεση διάφορων μεταφράσεων όσο και στην επίλυση προβλήματος αφού χρησιμοποιήθηκε από πολλούς μαθητές ως ο «μεσάζων» (Gagatsis A., 2004).

Επόμενη έρευνα των Α. Γαγάτσης και Ε. Ανδρονίκου, πραγματεύεται την επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων διαίρεσης. Συγκεκριμένα, σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνηθεί η επίδραση της διακοσμητικής, βοηθητικής-αναπαραστατικής, βοηθητικής-οργανωτικής και πληροφοριακής εικόνας στην επίλυση από μαθητές Γ΄ τάξης δημοτικού σχολείου προβλημάτων τέλειας διαίρεσης (μερισμού ή επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, διάταξης) καθώς και ατελούς διαίρεσης. Τα προβλήματα διακρίθηκαν σε προβλήματα τέλειας διαίρεσης και ατελούς διαίρεσης. Στα προβλήματα τέλειας διαίρεσης υπήρχε διάκριση ανάμεσα στα προβλήματα μερισμού ή επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης (Χρίστου & Φιλίππου, 1995) και προβλήματα διατάξεων. Στα προβλήματα μερισμού δίνεται ο αρχικός αριθμός και ο αριθμός των ομάδων στα οποία μοιράζεται στα ίσα και ζητείται από τους μαθητές να βρουν τον αριθμό των στοιχείων της κάθε ομάδας. Στα προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης δίνεται ο αρχικός αριθμός και ο αριθμός των στοιχείων της μιας ομάδας και ζητείται από τα παιδιά να βρουν σε πόσες ομάδες μοιράζεται ο αρχικός αριθμός. Δεν έγινε προσπάθεια διάκρισης ανάμεσα σ’ αυτά τα δυο είδη προβλημάτων διαίρεσης αφού έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές τα αντιμετωπίζουν με παρόμοιο τρόπο (Fisbein, Deri, Nello and Marino,1985; Murray, Olivier and Human, 1992). Στα προβλήματα διατάξεων δίνεται ο αρχικός αριθμός και ο αριθμός των σειρών στις οποίες μοιράζεται στα ίσα και ζητείται από τα παιδιά να βρουν πόσα στοιχεία έχει η κάθε σειρά. Ή δίνεται ο αρχικός αριθμός, ο αριθμός των στοιχείων που μπαίνουν σε κάθε σειρά και ζητείται από τα παιδιά να βρουν πόσες σειρές σχηματίζονται. Τα προβλήματα ατελούς διαίρεσης που χρησιμοποιήθηκαν είναι προβλήματα μερισμού ή επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, μόνο που το υπόλοιπο της διαίρεσης στην περίπτωση αυτή δεν είναι μηδέν.

Με βάση τα αποτελέσματα οι διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές και οι πληροφοριακές εικόνες επηρέασαν αρνητικά τη συμπεριφορά των μαθητών σε σχέση με τη λύση των τριών προβλημάτων διαίρεσης που εξετάστηκαν (προβλήματα μερισμού-τέλειας διαίρεσης, προβλήματα διατάξεων-τέλειας διαίρεσης και προβλήματα μερισμού-ατελούς διαίρεσης). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη ότι η παρουσία εικόνων δεν είναι πάντα βοηθητική για την επίλυση προβλήματος, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί πρόσθετο φόρτο νοητικής επεξεργασίας (Carney & Levin, 2002).Η χρήση των εικόνων συνεπώς πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή και πρέπει να εγκαταλειφθεί η αντίληψη σύμφωνα με την οποία η κατανόηση στα μαθηματικά θεμελιώνεται σε κάποια αντιληπτική εικόνα της οποίας το νόημα θεωρείται αυτονόητο.

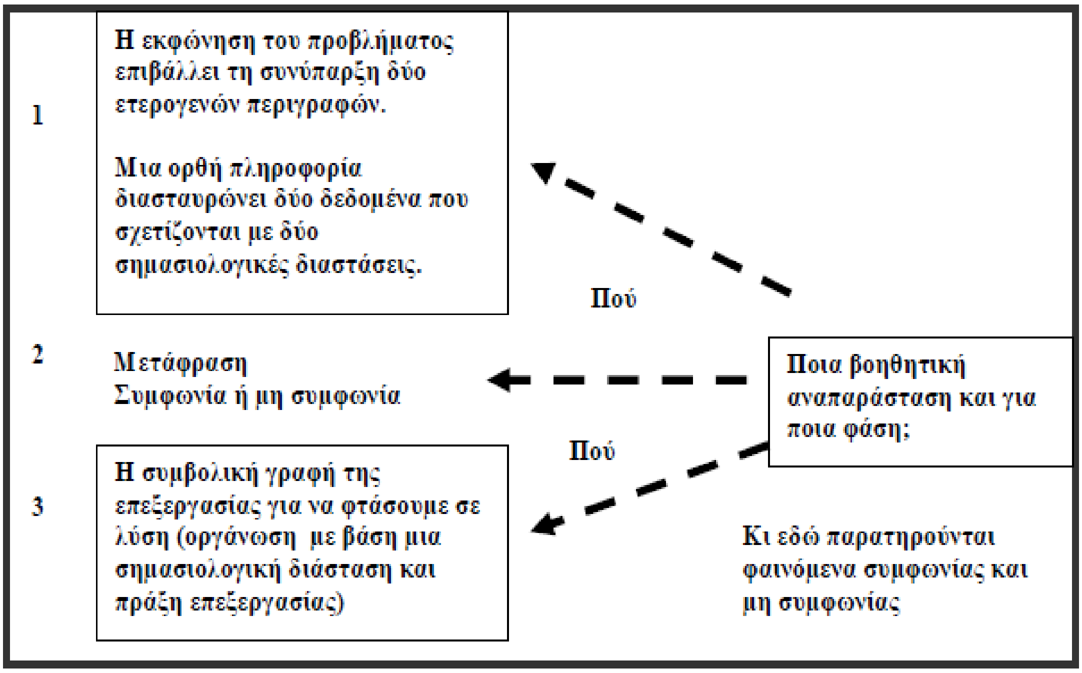
Από την άλλη οι βοηθητικές- οργανωτικές και η πληροφοριακή- οργανωτική εικόνα φάνηκαν να έχουν μια θετική επίδραση στην επίλυση προβλημάτων διαίρεσης από τους μαθητές. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι οι εικόνες αυτού του είδους βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος και να οργανώσουν τα δεδομένα με τρόπο ώστε να λύσουν σωστά τα προβλήματα. Επιπλέον, οι μαθητές δυσκολότερα εξηγούν ένα πρόβλημα με βοηθητική-αναπαραστατική εικόνα, παρά με διακοσμητική, ενώ η οργανωτική εικόνα τους ευκολύνει περισσότερο στην εξήγηση του προβλήματος και στην εύρεση της σωστής μοντελοποίησης. Οι αριθμοί επηρεάζουν τη λύση προβλημάτων διαίρεσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μαθηματική δομή επηρεάζει περισσότερο από το είδος της εικόνας, αφού ενώ προκύπτει το εύρημα ότι εφόσον κατανοηθεί ο τύπος προβλήματος διαίρεσης με υπόλοιπο, μπορεί να έχει επίδραση και στους άλλους τύπους προβλημάτων διαίρεσης, κανένα είδος εικόνας σε σχέση με τα προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο δεν παίζει ιεραρχικό ρόλο σε σχέση με τα άλλα είδη αναπαράστασης. Γενικά η έρευνα επιβεβαιώνει ότι η χρήση εικόνων πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή, αφού σε πολλές περιπτώσεις το ποσοστό επιτυχίας σε προβλήματα διαίρεσης με τη χρήση εικόνων είναι χαμηλότερο από το ποσοστό επιτυχίας σε λεκτικά προβλήματα αντίστοιχης δομής. Από την άλλη μεριά, η επίδραση της βοηθητικής-οργανωτικής και πληροφοριακής-οργανωτικής εικόνας αυξάνει τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στη λύση προβλημάτων διαίρεσης (Gagatsis A., 2004).

Οι Α. Γαγάτσης και Μ.Πατζιαρά, διεξήγαγαν έρευνα με τίτλο « Η χρήση των διαγραμμάτων στην επίλυση προβλημάτων διαδικασίας». Αρχικά οι Γαγάτσης και Πατζιαρά στο άρθρο τους κάνουν αναφορά στις εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις, της οποίας το περιεχόμενο αναφέρεται στην αρχή της παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια αναφέρεται η σχέση ανάμεσα στα διαγράμματα και την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.

Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος διέρχεται από τρεις φάσεις, την εκφώνηση του προβλήματος, την επεξεργασία μέσω μετάφρασης ή μετασχηματισμού και τη συμβολική επεξεργασία (Γαγάτσης, Πατζιαρά. 2001).

Η εκφώνηση ενός μαθηματικού προβλήματος επιβάλλει τη συνύπαρξη δύο διαφορετικών περιγραφών, η μια αναφέρεται σε ένα σενάριο της καθημερινής ζωής και η άλλη περιλαμβάνει ζευγάρια εκφράσεων. Κατά τη δεύτερη φάση της επεξεργασίας μετάφρασης, οι μαθητές μεταφράζουν τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος σε άλλου είδους αναπαράσταση, που θα τους βοηθήσει να οδηγηθούν στη λύση. Η τελευταία φάση αναφέρεται στη συμβολική επεξεργασία της λύσης που προτείνεται για το πρόβλημα (Γαγάτσης, Ηλία, Τσακίρη και Μιχαηλίδου, 2003).

Οι βοηθητικές αναπαραστάσεις όπως είναι τα διαγράμματα αφορούν μια μόνο από τις τρεις φάσεις επίλυσης του προβλήματος. Τα διαγράμματα έχουν τις δικές τους συμβάσεις σχετικά με τη χαρτογράφηση των στοιχείων που αναπαρίστανται στην αναπαράσταση (Novick & Hurley, 2001). Αν το διάγραμμα χρησιμοποιηθεί κατάλληλα σε μια από τις φάσεις επίλυσης του προβλήματος μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο στα χέρια του μαθητή. Το διάγραμμα συμβάλλει αποτελεσματικά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων όταν υπάρχει άμεση αντιστοιχία της δομής του προβλήματος και της αναπαράστασης, δηλαδή του διαγράμματος και όταν είναι ξεκάθαρο στο μαθητή, ποιο διάγραμμα είναι πιο βοηθητικό από άλλα διαγράμματα για την επίλυση του προβλήματος (Diezmann & English, 2001; Novick & Hurley, 2001). Συγκεκριμένα, κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν τα δομικά στοιχεία του προβλήματος. Το διάγραμμα βοηθά το μαθητή να επικεντρώσει την προσοχή του στα δομικά στοιχεία του προβλήματος, γιατί παρουσιάζει με ακρίβεια τις δομικές καταστάσεις του προβλήματος (Duval, 2003).

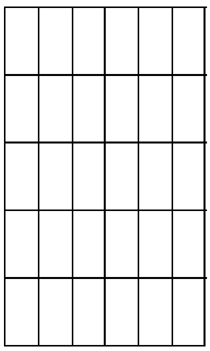


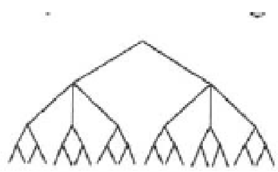
Επιπλέον, η θεωρία Visual Argument Hypothesis, (Waller, 1981) υποστηρίζει ότι τα διαγράμματα και γενικά οι γραφικές αναπαραστάσεις είναι αποτελεσματικές στην επίλυση προβλημάτων, γιατί λόγω των οπτικών τους ιδιοτήτων, η επεξεργασία τους χρειάζεται λιγότερες γνωστικές μετατροπές από αυτές των κειμένων που δεν υπερβαίνουν τα όρια της βραχυπρόθεσμης μνήμης. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα, παρέχουν τις πληροφορίες μέσω των ιδιοτήτων τους και μέσω των στοιχείων τους που είναι οργανωμένα στο χώρο. Η δυαδική αυτή διάσταση των γραφικών τα κάνει αποτελεσματικά στα χέρια των μαθητών που τα χρησιμοποιούν για να εξαγάγουν ή να αναπαραστήσουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός κειμένου.

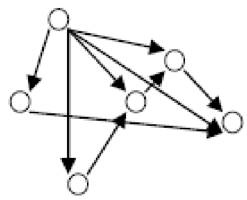
Με τα διαγράμματα οι μαθητές χρησιμοποιούν μια ακόμα στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων. Ο Schoenfeld (1985) τονίζει την κατασκευή διαγράμματος ως μια από τις στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Η επίλυση προβλήματος βασισμένη στη χρήση διαγράμματος είναι πολύ αποτελεσματική, γιατί η επίλυση του προβλήματος αντιστοιχεί σε μια μόνο πορεία στο διάγραμμα και ακόμα, γιατί σε ένα καλά σχεδιασμένο διάγραμμα η προσοχή σε ένα συγκεκριμένο σημείο του διαγράμματος είναι το βήμα για την αμέσως επόμενη φάση της επίλυσης του προβλήματος (Hegary & Steinhoff, 1997).

Τα αποτελεσματικά διαγράμματα ομαδοποιούν προβλήματα με κοινά χαρακτηριστικά. Έτσι, βοηθούν τους μαθητές να φέρνουν στη μνήμη τους γνώσεις και δεξιότητες, και να συσχετίζουν παλιές γνώσεις με καινούριες καταστάσεις. Επίσης, παρουσιάζουν δεσμούς μεταξύ των διαφόρων εννοιών και έτσι δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή να κατανοήσει την έννοια που παρουσιάζεται στο διάγραμμα (Diezmann & English, 2001). Οι Novick & Hurley (2001) ομαδοποίησαν τα διαγράμματα σε τρεις κατηγορίες με βάση τις δομικές τους ιδιότητες με σκοπό τη χρησιμοποίηση τους για την επίλυση ποικίλων προβλημάτων (Gagatsis A., 2004).

Οι πίνακες, τα δίκτυα και οι ιεραρχίες είναι το επόμενο θέμα στο συγκεκριμένο άρθρο.







Διάγραμμα 1 Διάγραμμα 2 Διάγραμμα 3

Τα τρία διαγράμματα (Διάγραμμα 1-3) έχουν 10 δομικές ιδιότητες που αλληλοσυσχετίζονται. Κάθε ιδιότητα επικεντρώνεται σε συγκεκριμένη πτυχή της δομικής αναπαράστασης. Οι δομικές ιδιότητες κάθε διαγράμματος κάνουν κατά τους Novick & Hurley (2001) τα τρία διαγράμματα, τους πίνακες (Διάγραμμα 1), τα δίκτυα (Διάγραμμα 2) και τις ιεραρχίες (Διάγραμμα 3), κατάλληλα για την αναπαράσταση διαφορετικών δομών προβλημάτων (Gagatsis A., 2004)..

α) Η σφαιρική δομή

Οι πίνακες εκφράζουν ένα παραγοντικό συνδυασμό μεταξύ των μεταβλητών. Αντίθετα, τα δίκτυα δεν έχουν προκαθορισμένη δομή και δεν έχουν ένα μοναδικό τρόπο αρχής και τέλους. Οι ιεραρχίες είναι οργανωμένες σε επίπεδα, αρχίζοντας από ένα σημείο και συνδέεται με τα άλλα σημεία.

β) Οικοδομικά στοιχεία

Ένα κελί του πίνακα παρουσιάζει την τομή ή το συνδυασμό μεταξύ της αξίας i της μιας μεταβλητής και της αξίας j της άλλη μεταβλητής. Όσον αφορά τα δίκτυα παρουσιάζονται ως δύο σημεία και ένα σύνδεσμος μεταξύ τους. Στην ιεραρχία υπάρχει ένα σημείο που είναι η αφετηρία τουλάχιστον δύο άλλων σημείων με σύνδεση που περιέχει κατεύθυνση.

γ) Ο αριθμός των περιπτώσεων

Στους πίνακες οι σειρές και οι στήλες καθορίζουν τις αξίες μεταξύ δύο μεταβλητών. Στα δίκτυα, τα σημεία καθορίζουν τις αξίες μεταξύ μιας μεταβλητής. Οι ιεραρχίες δεν εισηγούνται την καθορισμένη αξία μεταξύ των σημείων. Η διαίρεση των διαφόρων συνόλων και οι σχέσεις των συνόλων καθορίζονται από τα σημαινόμενα του προβλήματος.

δ) Ο περιορισμός στους δεσμούς

Όσον αφορά τους δεσμούς, υπάρχουν περιορισμοί στους πίνακες και στις ιεραρχίες. Στους πίνακες οι αξίες ίδιας σειράς ή στήλης δε σχετίζονται μεταξύ τους. Στα δίκτυα κάθε σημείο μπορεί να συνδεθεί με ένα άλλο σημείο. Στις ιεραρχίες μπορεί να μην υπάρχουν σύνδεσμοί μεταξύ του ίδιου επιπέδου ή μεταξύ σημείων σε διαφορετικά επίπεδα.

ε) Στοιχεία διάκρισης

Στους πίνακες όλες οι στήλες έχουν όμοια μορφή, όπως και όλες οι σειρές. Στα δίκτυα όλα τα σημεία έχουν όμοια μορφή. Στις ιεραρχίες τα σημεία στα ίδια επίπεδα έχουν την ίδια μορφή, αλλά τα σημεία σε διαφορετικά επίπεδα έχουν διαφορετική μορφή.

στ) Η μορφή του δεσμού μεταξύ των διαφόρων σημείων

Στους πίνακες οι δεσμοί μεταξύ της αξίας των σειρών και των στηλών δεν έχει κατεύθυνση και είναι αντιμεταθετικοί. Στα δίκτυα οι δεσμοί των σημείων μπορεί να είναι αντιμεταθετικοί ή μιας κατεύθυνσης. Στις ιεραρχίες οι δεσμοί μεταξύ των σημείων έχουν καθορισμένη κατεύθυνση.

ζ) Η απουσία σχέσης

Στους πίνακες η απουσία δεσμού μεταξύ ενός σημείου στη σειρά και ενός σημείου στη στήλη εντοπίζεται με ένα ευδιάκριτο σημάδι. Στο δίκτυο η απουσία δεσμού μεταξύ δύο σημείων πρέπει να υπολογιστεί για όλες τις περιπτώσεις, γιατί δεν υπάρχουν περιορισμοί μαζί στη σύνδεση κάποιου σημείου με τα άλλα σημεία. Στις ιεραρχίες η απουσία δεσμού δύο σημείων διακρίνεται από το διάγραμμα με βάση τους περιορισμούς στους δεσμούς των σημείων, αλλά θα πρέπει να υπολογιστεί η απουσία δεσμών μεταξύ των σημείων του ίδιου επιπέδου.

η) Σχέσεις μεταξύ των δεσμών

Στους πίνακες ο δεσμός μεταξύ μιας τιμής στη σειρά ή τη στήλη παρουσιάζει σχέση ένα προς πολλά ή πολλά προς ένα. Στα δίκτυα κάθε σημείο μπορεί να συνδέεται με πολλά άλλα σημεία και συνεπώς υπάρχει η σχέση ένα προς πολλά ή πολλά προς ένα. Στις ιεραρχίες παρουσιάζεται μεταξύ των σημείων η σχέση ένα προς ένα, αλλά δεν ισχύει ταυτόχρονα η σχέση ένα προς πολλά και πολλά προς ένα

θ) Η ύπαρξη πορείας

Στους πίνακες δεν παρουσιάζεται η πορεία μεταξύ δύο σημείων. Αντίθετα, στα δίκτυα και στις ιεραρχίες παρουσιάζεται η πορεία μεταξύ σημείων.

ι) Η αλλαγή πορείας

Στους πίνακες δεν υπάρχει αλλαγή πορείας. Αντίθετα, στα δίκτυα πολλές πορείες υπάρχουν μεταξύ ενός σημείου και του άλλου. Στις ιεραρχίες υπάρχει μια μόνο πορεία μεταξύ δύο σημείων.

Κεντρικός άξονας της μαθηματικής παιδείας είναι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (NCTM, 1989). Τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να διαχωριστούν σε προβλήματα ρουτίνας και προβλήματα διαδικασίας (English, 1996). Προβλήματα ρουτίνας είναι τα προβλήματα που για την επίλυσή τους χρειάζεται η μετάφραση τους σε εξίσωση και η χρήση υπολογισμών για την εύρεση της απάντησης (Shoenfeld, 1992). Προβλήματα διαδικασίας είναι τα προβλήματα που για την επίλυσή τους είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση διαφόρων στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, όπως «κάνω ένα σχέδιο», «εκτιμώ και ελέγχω», «κάνω ένα διάγραμμα», (English, 1996). Τα προβλήματα διαδικασίας θεωρούνται πιο πολύπλοκα και έχουν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας από τα προβλήματα ρουτίνας (Shoenfeld, 1992).

Ο κύριος στόχος της συγκεκριμένης έρευνας ήταν να μελετήσει την αποτελεσματικότητα των τριών διαγραμμάτων, πίνακα, δικτύων και ιεραρχιών, στην επίλυση προβλημάτων διαδικασίας.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η παρουσία των διαγραμμάτων δεν αύξησε την επιτυχία των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων διαδικασίας. Πολλοί μαθητές απέτυχαν να εντοπίσουν τη δομή του προβλήματος όπως παρουσιαζόταν στο διάγραμμα, έστω κι αν όμοια διαγράμματα χρησιμοποιούνται στην τάξη για την επίλυση προβλημάτων και έτσι απέτυχαν και να λύσουν το πρόβλημα ορθά.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαφάνηκε ότι δεν ήταν σε θέση όλοι οι μαθητές να ερμηνεύσουν και να χρησιμοποιήσουν τα διαγράμματα ορθά. Δύο λόγοι για την αποτυχία των μαθητών στην ερμηνεία και χρήση των διαγραμμάτων ήταν η αποτυχία των μαθητών να συνδέσουν το κάθε διάγραμμα με τη δομή του αντίστοιχου προβλήματος και δεύτερο η ανεπαρκής εμπειρία των μαθητών να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση διαγραμμάτων

Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η αποτελεσματική χρησιμοποίηση του διαγράμματος από τους μαθητές δεν συνεπάγεται και την επιτυχή επίλυση του προβλήματος και αντίθετα η επιτυχής επίλυση του προβλήματος δε συνεπάγεται την χρησιμοποίηση του αντίστοιχου διαγράμματος. Πιθανόν οι μαθητές να αντιμετώπισαν το κάθε πρόβλημα με το αντίστοιχο διάγραμμα ως δύο διαφορετικές δραστηριότητες, αποτυγχάνοντας να εκλάβουν το κάθε διάγραμμα σαν μια επιπρόσθετη βοήθεια για την επίλυση του προβλήματος.

Είναι φανερό στην έρευνα ότι τα διαγράμματα βοήθησαν κάποιους μαθητές να λύσουν τα προβλήματα ορθά , ενώ τα διαγράμματα οδήγησαν κάποιους άλλους μαθητές στην αποτυχία. Τα αποτελέσματα της έρευνας μπορούν να υποστηρίξουν την άποψη των Booth and Thomas (2000), για την ύπαρξη δύο κατηγοριών μαθητών. Τους μαθητές με ανεπτυγμένες χωρικές και οπτικές ικανότητες και τους μαθητές με λιγότερο ανεπτυγμένες χωρικές και οπτικές ικανότητες.

Η συσχέτιση του διαγράμματος στο μοντέλο της πραγματικότητας που περιγράφει ένα πρόβλημα απαιτεί ερμηνεία. Ο Hittleman (1985), αναφέρεται στην ιεράρχηση των αναπαραστάσεων από τις λιγότερο αφαιρετικές στις περισσότερο αφαιρετικές. Η ιεραρχία αυτή περιλαμβάνει τις φωτογραφίες στο χαμηλότερο σημείο της ιεραρχίας που είναι πιστή αναπαράσταση της πραγματικότητας και ακολουθούν οι εικόνες με πολλές λεπτομέρειες, οι εικόνες με λιγότερες λεπτομέρειες, τα διαγράμματα, οι χάρτες, οι γραφικές παραστάσεις και τα σχήματα. Τα διαγράμματα περιέχουν το στοιχείο της αφαίρεσης και αυτός είναι ίσως και ο λόγος που μερικοί μαθητές για να ερμηνεύσουν καλύτερα το διάγραμμα το μετέτρεψαν σε εικόνα ζωγραφίζοντας σε αυτό επιπρόσθετα στοιχεία. Η μαθηματική κοινότητα υποστηρίζει ότι η ικανότητα χρησιμοποίησης των διαγραμμάτων από τους μαθητές είναι σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής τους ανάπτυξης (NCTM, 2000). Οι μαθητές για να χρησιμοποιούν τα διαγράμματα αποτελεσματικά είναι αναγκαίο να αναπτύξουν την ικανότητα μετάφρασης του λεκτικού προβλήματος σε διαγραμματική αναπαράσταση και την ικανότητα να ερμηνεύουν τη σχέση ενός δεδομένου διαγράμματος με ένα πρόβλημα (Novick and Hurley, 2001; Diezmann and English, 2001). Επιπρόσθετα, είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν ικανότητες χρήσης διαφόρων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων διαδικασίας έτσι ώστε να τα χρησιμοποιούν αποτελεσματικά κατά την επίλυση των προβλημάτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έχουν συνέπειες στην εκπαιδευτική πράξη. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να βοηθήσει το μαθητή να κατακτήσει σταδιακά διάφορους τρόπους επίλυσης προβλημάτων διαδικασίας και να έρθει σε επαφή με διάφορες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Ο ρόλος των βοηθητικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος είναι πολύ σημαντικός όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονται το ρόλο των βοηθητικών αναπαραστάσεων και πιο συγκεκριμένα όταν είναι ξεκάθαρη η δομή του προβλήματος που αναπαριστούν τα μέσα αυτά, όπως είναι τα διαγράμματα. Είναι καλό ο μαθητής να κατακτήσει διάφορα μέσα επίλυσης προβλήματος και να επιλέγει εκείνα που είναι για τον ίδιο πιο αποτελεσματικά για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος(Gagatsis A., 2004).

Β΄ ΜΕΡΟΣ

1. Η ΕΡΕΥΝΑ

1.1.Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Παρόλη τη διαδεδομένη χρήση της αριθμητικής γραμμής, οι ερευνητικές προσπάθειες που αφορούν στην θεωρητική και εμπειρική αιτιολόγηση της χρήσης της είναι περιορισμένες (Gagatsis, Kyriakides & Panaoura, 2004). Στην παρούσα έρευνα προστίθενται δύο νέα στοιχεία, σε σχέση με τις έρευνες που έχουν προηγηθεί. Αρχικώς, στην έρευνα αυτή μελετάται ταυτόχρονα και συγκρίνεται ο ρόλος των εικονικών αναπαραστάσεων σε συνδυασμό με το μοντέλο της αριθμητικής γραμμής σε απλές πράξεις πρόσθεσης, θέμα το οποίο δεν έχει εξεταστεί προηγουμένως. Στο δοκίμιο τα έργα περιλαμβάνουν απλές πράξεις πρόσθεσης με μικρούς αριθμούς, ώστε οι μαθητές να μην είναι αναγκαίο να προστρέξουν στην αριθμητική γραμμή, με σκοπό να διαφανεί η προτίμηση των μαθητών και η χρήση της αριθμητικής γραμμής, ανεξάρτητα από την πολυπλοκότητα του έργου. Για το λόγο αυτό η μελέτη πραγματοποιείται σε μαθητές Α και Β τάξης Δημοτικού, αφού στις τάξεις αυτές η απάντηση στα συγκεκριμένα έργα είναι ανεξάρτητη από την πολυπλοκότητα των αριθμών, ώστε να φανεί η επίδραση των αναπαραστάσεων στην επίλυση των έργων.

Ειδικότερα, στη μελέτη αυτή προσεγγίζονται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1) Πώς διαφοροποιούνται οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα πρόσθεσης ως προς την παρουσία και το είδος της αναπαράστασης που περιλαμβάνουν;
2) Πώς διαφοροποιείται η επίδοση των μαθητών στα διάφορα έργα σε σχέση με την ηλικιακή ομάδα στην οποία ανήκουν;
3) Ποια είναι η συμπεριφορά των μαθητών ως προς τη χρήση του κάθε είδους αναπαράστασης για την επίλυση των έργων;
4) Πώς διαφοροποιείται η συμπεριφορά των μαθητών ως προς τη χρήση του κάθε είδους αναπαράστασης σε σχέση με την ηλικιακή ομάδα στην οποία ανήκουν;

Ερευνητικές υποθέσεις:

(Υ1) Οι μαθητές θα σημειώσουν μεγαλύτερη επιτυχία στις πράξεις που δεν συνοδεύονται από την αριθμογραμμή
(Υ2) Οι μαθητές θα σημειώσουν μεγαλύτερη επιτυχία στις πράξεις που συνοδεύονται από πληροφοριακή εικόνα
(Υ3)Η θέση του αγνώστου x θα επηρεάσει την επίδοση των μαθητών. Οι μαθητές θα σημειώσουν τη μεγαλύτερη επιτυχία στις πράξεις στις οποίες ο άγνωστος βρίσκεται στη θέση γ' και την μικρότερη επιτυχία στις πράξεις στις οποίες ο άγνωστος βρίσκεται στη θέση β'.

1.2. Μεθοδολογία

Για τη διερεύνηση του ρόλου των εικόνων και της αριθμογραμμής στις αριθμητικές πράξεις μελετήθηκαν τα σχολικά εγχειρίδια του υπουργείου των Α΄ και Β΄ τάξεων του Δημοτικού Σχολείου, προκειμένου να συνταχθεί κατάλληλο ερωτηματολόγιο, το οποίο ύστερα δόθηκε στους μαθητές των αντίστοιχων τάξεων, για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας.

1.3. Δείγμα

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 213 μαθητές της Α' και Β' τάξης του Δημοτικού σχολείου. Τα σχολεία από τα οποία επιλέχθηκαν οι μαθητές ήταν ιδιωτικά και δημόσια. Επίσης, τα σχολεία δεν ήταν όλα από την ίδια περιοχή. Βρίσκονταν σε Αττική και Κρήτη. Όπως επίσης και τα σχολεία της Αττικής βρίσκονταν σε διαφορετικές περιοχές της Αττικής.

1.4. Μέσα συλλογής δεδομένων

Για τον έλεγχο των ερευνητικών υποθέσεων και τη διερεύνηση του ρόλου των εικόνων, της αριθμογραμμής και της θέσης του αγνώστου σε προσθετικά έργα συντάχθηκε ερωτηματολόγιο το οποίο δόθηκε στους μαθητές. Το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από τρία μέρη και είχε συνολικά 27 έργα.

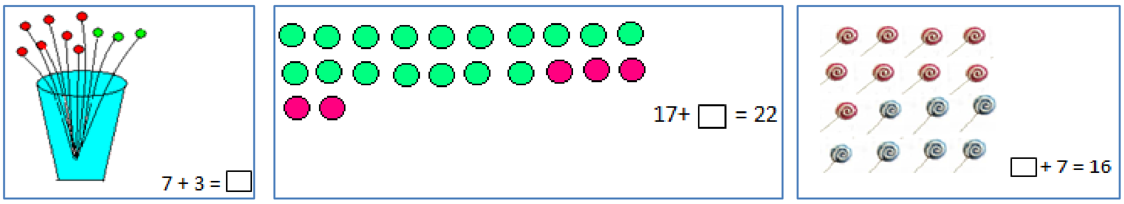
Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου περιελάμβανε πράξεις πρόσθεσης. Οι πράξεις εμπεριείχαν υπέρβαση της δεκάδας και οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν ήταν μέχρι το 22. Εκτός από τους αριθμούς αυτό που διέφερε σε κάθε πράξη ήταν η θέση στην οποία βρίσκονταν ο άγνωστος. Δηλαδή ενώ όλες οι πράξεις ήταν της μορφής α + β = γ αυτό που άλλαζε κάθε φορά όσον αφορά τη θέση του αγνώστου ήταν ότι ο αριθμός που έλειπε στην εξίσωση δεν βρίσκονταν απαραίτητα στη θέση γ, όπως συνηθίζεται και από τους δασκάλους αλλά και στα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και στις θέσεις α και β.

Πίνακας 1: Τα έργα του δοκιμίου (Ερωτηματολόγιο, Μέρος Α΄)

Μαθηματικές προτάσεις	Άγνωστος στο α	Άγνωστος στο β	Άγνωστος στο γ
1) 7+3=10	_+3=10	7+_=10	7+3=_
2) 9+7=16	_+7=16	9+_=16	9+7=_
3) 17+5=22	_+5=22	17+_=22	17+5=_

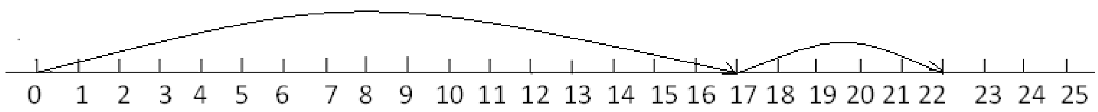
Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου περιελάμβανε ακριβώς τις ίδιες πράξεις. Το στοιχείο στο οποίο διέφερε από το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου είναι ότι αυτή τη φορά οι πράξεις συνοδεύονταν η κάθε μια από μια αναπαραστατική εικόνα. Για παράδειγμα, η πράξη $9 + \square = 16$ συνοδεύονταν από μια εικόνα από 16 γλειφιτζούρια εκ των οποίων τα 9 ήταν κόκκινα και τα υπόλοιπα 7 ήταν μπλε.

Σχήμα 1. Παραδείγματα από τα έργα του δοκιμίου (Μέρος Β)

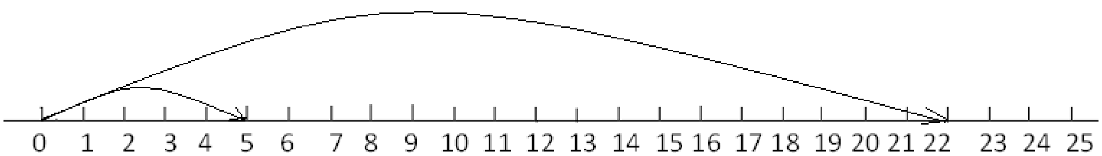


Το τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου αποτελούνταν από τις ίδιες πράξεις που όμως αυτή τη φορά συνοδεύονταν η κάθε μια πράξη από αριθμογραμμή η οποία απεικόνιζε την πράξη την οποία έπρεπε να κάνει ο μαθητής. Η αριθμογραμμή ήταν γεμάτη, δηλαδή περιείχε αριθμούς, και οι πράξεις αποτυπώνονταν με διαδ[illegible]ικά βέλη. Για παράδειγμα, η αριθμογραμμή που συνόδευε την πράξη 7 + 3 = είχε ένα βέλος που ξεκίναγε από το 0 και κατέληγε στο 7 και ένα δεύτερο βέλος που ξεκίναγε από το 7 και κατέληγε στο 10. Επίσης, στο τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου υπήρχε στην αρχή του ένα παράδειγμα χρήσης της αριθμογραμμής, δεδομένου πως δεν είναι συχνή η χρήση της από τους μαθητές και από τους δασκάλους, προκειμένου να γίνει περισσότερο ξεκάθαρος στους μαθητές ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί η συγκεκριμένη αναπαράσταση.

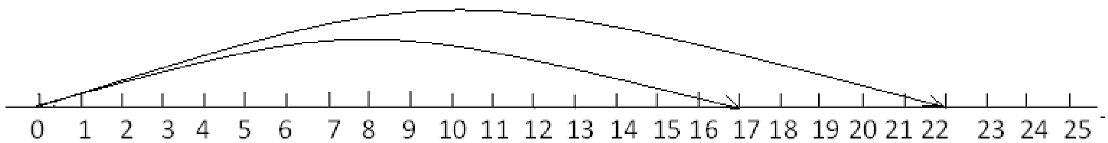
Σχήμα 2. Παραδείγματα από τα έργα του δοκιμίου (Μέρος Γ)



17 + 5 = _



_ + 5 = 22



17 + _ = 22

Να διευκρινιστεί πως οι μαθητές και των δύο τάξεων στους οποίους δόθηκε το ερωτηματολόγιο δεν ήταν σε θέση να αντιληφθούν ότι οι πράξεις που περιέχονταν στο κάθε μέρος του ερωτηματολογίου ήταν οι ίδιες.

Επιπλέον, η σειρά με την οποία εμφανίζονταν οι πράξεις σε κάθε φάση του ερωτηματολογίου δεν ήταν η ίδια.

Επίσης, το ερωτηματολόγιο, που δόθηκε στους μαθητές και των δύο τάξεων, ήταν κοινό.

(Στο παράρτημα επισυνάπτεται το ερωτηματολόγιο της έρευνας στο οποίο φαίνονται όλα τα έργα από όλα τα μέρη του ερωτηματολογίου)

1.5. Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Το ερωτηματολόγιο (και τα τρία μέρη του) χορηγήθηκαν με τη σειρά που περιγράφηκαν, σε μια φάση τον Φεβρουάριο του 2014. Η απάντηση κάθε ερωτηματολογίου από τους μαθητές διήρκησε περίπου 40 λεπτά (σχεδόν μια διδακτική ώρα) ενώ δόθηκαν οι ελάχιστες δυνατές επεξηγήσεις από τους δασκάλους των μαθητών.

1.6. Μεταβλητές της έρευνας

Οι μεταβλητές της έρευνας αντιπροσωπεύουν τις πράξεις του ερωτηματολογίου και τις πράξεις με αναπαραστάσεις (αναπαραστατική εικόνα και αριθμογραμμή) σε όλα τα μέρη του ερωτηματολογίου (Α’, Β’ και Γ’ μέρος).

Συμβολισμός	Μαθηματική Δομή πράξης	Τύπος Αναπαράστασης
Α1	$\alpha + \beta = x$	συμβολική αναπαράσταση
Α2	$x + \beta = \gamma$	συμβολική αναπαράσταση
Α3	$\alpha + \beta = x$	συμβολική αναπαράσταση
Α4	$\alpha + x = \gamma$	συμβολική αναπαράσταση
Α5	$\alpha + \beta = x$	συμβολική αναπαράσταση
Α6	$x + \beta = \gamma$	συμβολική αναπαράσταση
Α7	$x + \beta = \gamma$	συμβολική αναπαράσταση
Α8	$\alpha + x = \gamma$	συμβολική αναπαράσταση

A9	α + x = γ	συμβολική αναπαράσταση
B1	α + β = x	αναπαραστατική εικόνα
B2	x + β = γ	αναπαραστατική εικόνα
B3	α + β = x	αναπαραστατική εικόνα
B4	α + x = γ	αναπαραστατική εικόνα
B5	α + β = x	αναπαραστατική εικόνα
B6	x + β = γ	αναπαραστατική εικόνα
B7	x + β = γ	αναπαραστατική εικόνα
B8	α + x = γ	αναπαραστατική εικόνα
B9	α + x = γ	αναπαραστατική εικόνα
C1	α + β = x	αριθμογραμμή
C2	x + β = γ	αριθμογραμμή
C3	α + β = x	αριθμογραμμή
C4	α + x = γ	αριθμογραμμή
C5	α + β = x	αριθμογραμμή
C6	x + β = γ	αριθμογραμμή
C7	x + β = γ	αριθμογραμμή
C8	α + x = γ	αριθμογραμμή
C9	α + x = γ	αριθμογραμμή

Επίσης, υπήρχαν και ορισμένες ακόμα μεταβλητές οι οποίες δεν συμπεριλαμβάνονται στον πίνακα λόγω περιεχομένου. Αφορούν την τάξη στην οποία βρισκόταν ο κάθε μαθητής (Α΄ ή Β΄ τάξη) και ο συμβολισμός ήταν Cl1 (δηλαδή class1 για την Α΄ τάξη Δημοτικού) και Cl2 (δηλαδή class2 για την Β΄ τάξη Δημοτικού) και το είδος του σχολείου στο οποίο φοιτούσε ο κάθε μαθητής. Δημόσιο σχολείο με συμβολισμό Pu (public) και ιδιωτικό σχολείο με συμβολισμό Pr (private).

1.7. Κριτήρια Βαθμολόγησης

Για τη διόρθωση των ερωτηματολογίων και την ανάλυση των δεδομένων προτάθηκε η ακόλουθη κατηγοριοποίηση των απαντήσεων.

1 → σωστή απάντηση (όταν ο μαθητής είχε βάλει τον σωστό αριθμό που έλειπε από το κουτάκι)

0 → λάθος απάντηση (όταν ο μαθητής είχε βάλει λάθος αριθμό στο κουτάκι ή δεν είχε βάλει καθόλου αριθμό και είχε αφήσει άδειο το κουτάκι)

(Επίσης για την κατάταξη των μαθητών σε τάξη και σε σχολείο ίσχυσε η ακόλουθη κατηγοριοποίηση Pu → 1 → δημόσιο σχολείο, Pu → 0 → όχι δημόσιο σχολείο – δηλαδή ιδιωτικό σχολείο – Pr → 0 → όχι ιδιωτικό σχολείο – δηλαδή δημόσιο σχολείο – Pr → 1→ ιδιωτικό σχολείο. Αντίστοιχη ήταν και η κατηγοριοποίηση και για την τάξη στην οποία βρισκόταν ο κάθε μαθητής. Cl1 → 1→πρώτη δημοτικού – δηλαδή όχι δευτέρα δημοτικού- Cl1 →0→ όχι πρώτη δημοτικού – δηλαδή δευτέρα δημοτικού - Cl2 →1 → δευτέρα δημοτικού – δηλαδή όχι πρώτη δημοτικού – Cl2 →0→ όχι δευτέρα δημοτικού – δηλαδή πρώτη δημοτικού.)

1.8. Ανάλυση δεδομένων

Για την περιγραφική ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πρόγραμμα C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive), με το οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση ομοιότητας (Lerman, 1981) και η συνεπαγωγική ανάλυση του Gras (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000), ώστε να εντοπιστούν οι σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του δοκιμίου. Από τη συγκεκριμένη ανάλυση προέκυψαν ένα διάγραμμα ομοιότητας και ένα συνεπαγωγικό διάγραμμα για κάθε τάξη, τα οποία παρουσιάζονται, συγκρίνονται και συζητούνται στη συνέχεια. Τα διαγράμματα ομοιότητας παρουσιάζουν τις μεταβλητές ανάλογα με την ομοιότητα που παρουσιάζουν. Σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται, δηλαδή, ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο. Στα συνεπαγωγικά διαγράμματα παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις, οι οποίες υποδεικνύουν κατά πόσο και σε ποιο βαθμό η επιτυχία σε ένα έργο ή μια ομάδα έργων, αντίστοιχα, συνεπάγεται την επιτυχία σε ένα άλλο σχετικό έργο ή σε μια ομάδα έργων.

2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

2.1 Περιγραφική στατιστική

Από τα αποτελέσματα της περιγραφικής στατιστικής (Πίνακας 2) σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών στα έργα του δοκιμίου φαίνεται ότι οι μαθητές και των δύο τάξεων έχουν ψηλές επιδόσεις για την πλειοψηφία των έργων. Συγκρίνοντας τις δύο ομάδες μαθητών, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών της Β τάξης σε όλα τα έργα, καθώς και οι μέσοι όροι για καθένα από τα τρία μέρη του δοκιμίου (Πίνακας 3), είναι ψηλότεροι από τους μαθητές της Α τάξης. Παρόλα αυτά, από τα αποτελέσματα του independent sample t test, δεν προκύπτουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών ως προς τους μέσους όρους στα 3 μέρη του δοκιμίου.

Ακόμη, σε καμία από τις δύο τάξεις δε σημειώνονται μεγάλες διαφοροποιήσεις ανάμεσα στους μέσους όρους που αντιστοιχούν σε καθένα από τα τρία μέρη του δοκιμίου. Ειδικότερα, οι μαθητές της Α τάξης παρουσιάζουν ελαφρώς μειωμένο μέσο όρο στα έργα με αριθμητική γραμμή, σε σχέση με τους άλλους δύο τύπους έργων. Αντιθέτως, για τους μαθητές της Β τάξης ο αντίστοιχος μέσος όρος δε διαφοροποιείται από το μέσο όρο του μέρους Β, ενώ ο μέσος όρος για το μέρος Α είναι ελαφρώς χαμηλότερος. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα του paired sample t test έδειξαν ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στους μέσους όρους στα 3 μέρη του δοκιμίου, για καμία από τις δύο τάξεις.

Πίνακας 2: Οι επιδόσεις των μαθητών Α και Β τάξης στα έργα του δοκιμίου

ΈΡΓΑ	**Α ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ (%) (N=55)**	**Β ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ (%) (N=60)**
Α1	92,7	98,3
Α2	63,6	86,7
Α3	69,1	95,0
Α4	90,9	95,0
Α5	72,7	96,7
Α6	56,4	75,0
Α7	76,4	95,0

A8	69,1	91,7
A9	63,6	93,3
B1	98,2	98,3
B2	70,9	93,3
B3	70,9	91,7
B4	80,0	98,3
B5	80,0	98,3
B6	54,5	80,0
B7	80,0	96,7
B8	67,3	91,7
B9	67,3	96,7
C1	85,5	100,0
C2	61,8	91,7
C3	70,9	90,0
C4	80,0	93,3
C5	63,6	93,3
C6	60,0	93,3
C7	69,1	98,3
C8	60,0	90,0
C9	69,1	95,0

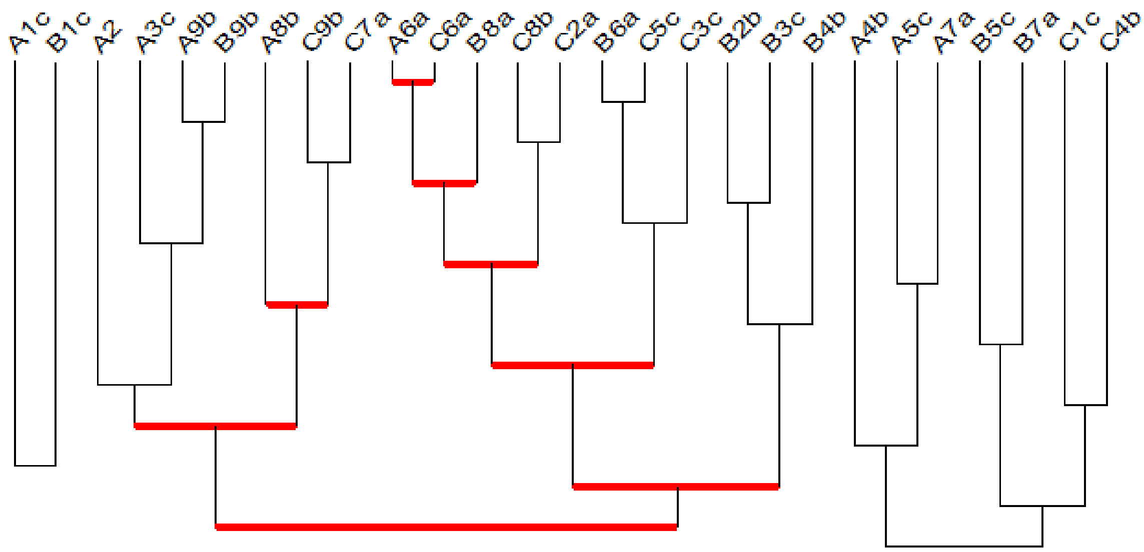
Πίνακας 3: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις των μαθητών α και β τάξης στα έργα του δοκιμίου

	Α ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ (%) (N=55)		Β ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ (%) (N=60)	
	Μ.Ο	Τ.Α	Μ.Ο	Τ.Α
Μέρος Α	6,55	2,57	8,26	1,12
Μέρος Β	6,69	2,65	8,45	0,94
Μέρος Γ	6,20	3,15	8,45	1,19
Συνολικός	19,43	7,66	25,17	2,76

2.2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Η ανάλυση ομοιότητας πραγματοποιήθηκε για κάθε ομάδα μαθητών ξεχωριστά. Έτσι προέκυψε ένα διάγραμμα ομοιότητας για τους μαθητές της Α και Β Δημοτικού αντιστοίχως. Στο διάγραμμα ομοιότητας για τις απαντήσεις των μαθητών της Α Δημοτικού (Σχήμα 3), οι μεταβλητές οργανώνονται σε 3 κλάσεις ομοιότητας.

Σχήμα 3: Διάγραμμα ομοιότητας για τις απαντήσεις των μαθητών της Α τάξης



Η πρώτη κλάση σχηματίζεται από μια σχέση με βάση την ομοιότητα του έργου (A1c – B1c). Στη δεύτερη κλάση ομοιότητας δημιουργούνται δύο υποομάδες που συνδέονται με ισχυρή σχέση μεταξύ τους. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται 4 έργα Α, 1 έργο Β και 2 έργα C, που συνδέονται με ισχυρή σχέση μεταξύ τους. Η σχέση ισχυροποιείται πιθανόν και λόγω του ότι τα έργα έχουν τον άγνωστο στη θέση α και β, τα οποία αποτελούν όλα έργα συμπληρωματικής πρόσθεσης. Παρουσιάζεται ακόμη και μια σχέση με βάση ομοιότητα του έργου (A9b – B9b). Επιπλέον, ισχυρή σχέση εντός αυτή της υποομάδας εμφανίζεται και μεταξύ έργων Α (A8c) και C (C9b, C7a). Στη δεύτερη υποομάδα υπάρχει 1 έργο Α, 5 έργα Β και 5 έργα C. Οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών αυτών είναι ισχυρές, ενώ εντοπίζονται περισσότερες σχέσεις μεταξύ έργων Β και C. Όπως και προηγουμένως, η ισχυρή σχέση που προκύπτει ενδέχεται να συνδέεται και με τη θέση του αγνώστου (θέση α και β), αφού και σε αυτή την περίπτωση όλα τα έργα απαιτούν συμπληρωματική πρόσθεση. Στην υποομάδα αυτή σχηματίζονται, επίσης, σχέσεις με βάση την ομοιότητα του έργου (A6a-B6a , B8a-C8a), ενώ εντοπίζεται και μια μικρότερη ομάδα με 3 έργα B, που δείχνουν μικρή συνέπεια ως προς τη χρήση της εικόνας (B2b, B3c, B4b). Από τη δεύτερη κλάση ομοιότητα προκύπτει γενικότερα ένας συντονισμός μεταξύ των τριών ειδών έργων, αφού δεν παρατηρείται αποσπασματικότητα ως προς τη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων. Δεν προκύπτει στεγανοποίηση των έργων ως προς το είδος της αναπαράστασης, παρά μόνο εμφανίζεται μια μικρή συνέπεια ως προς τη χρήση της εικόνας. Επιπλέον, προκύπτουν αρκετές συνδέσεις με βάση την ομοιότητα των έργων ως προς το μετασχηματισμό που απαιτείται.

Η τρίτη κλάση ομοιότητας απαρτίζεται από 3 υποομάδες, που σχηματίζονται με βάση το είδος της αναπαράστασης. Στην πρώτη υποομάδα εντάσσονται 3 έργα A, με διαφορετικό μετασχηματισμό με βάση τη θέση του αγνώστου (A4b, A5c, A7a), στη δεύτερη υποομάδα σχετίζονται 2 έργα B, με διαφορετική θέση του αγνώστου (B5c, B7a) και στην τρίτη υποομάδα υπάρχουν 2 έργα C, επίσης με διαφορετική θέση του αγνώστου (C1c, C4b). Συνεπώς, από αυτή την κλάση ομοιότητας προκύπτει μερική στεγανοποίηση κάποιων έργων, ως προς το είδος της αναπαράστασης που περιλαμβάνεται σε αυτά. Φαίνεται, λοιπόν, ότι σε κάποια από τα έργα το κάθε είδος αναπαράστασης επηρεάζει σε κάποιο βαθμό τους μαθητές.

Στο διάγραμμα ομοιότητας για τις απαντήσεις των μαθητών της Β τάξης (Σχήμα 4) οι μεταβλητές χωρίζονται σε περισσότερες κλάσεις ομοιότητας, σε σχέση με το διάγραμμα για τις απαντήσεις των μαθητών της Α Δημοτικού.

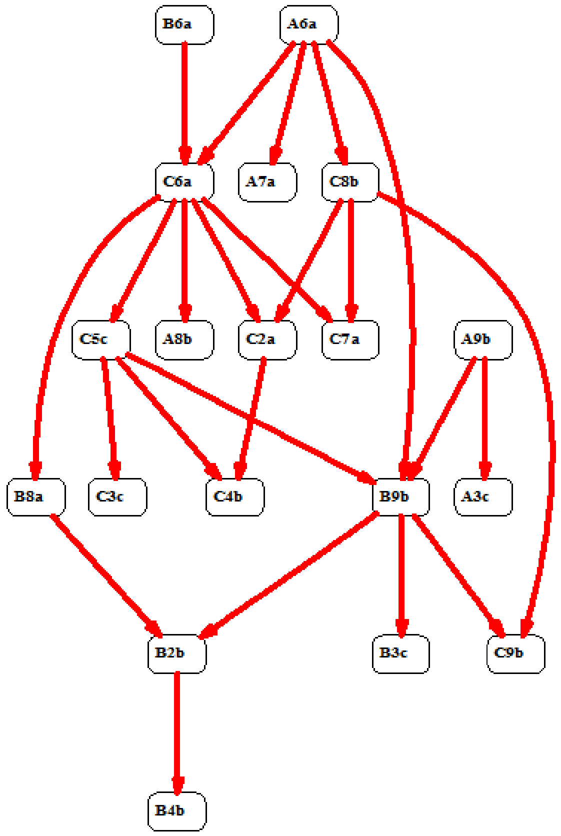
Σχήμα 4: Διάγραμμα ομοιότητας για τις απαντήσεις των μαθητών της Β τάξης

Συγκεκριμένα, η πρώτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνει τέσσερα έργα και από τα τρία είδη. Εμφανίζεται μια σχέση με βάση την ομοιότητα του έργου (A1c-B1c), ενώ τα τρία από τα τέσσερα έργα της κλάσης αυτής έχουν τη θέση του αγνώστου στο γ. Η δεύτερη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνει 3 υποομάδες, στις οποίες τα περισσότερα έργα έχουν τη θέση του αγνώστου στο α. Εντός της κλάσης αυτής εμφανίζονται δύο σχέσεις με βάση την ομοιότητα του έργου (A2a-C2a, A6a-B6a) και μια σχέση με βάση το είδος της αναπαράστασης (C4b-C3c). Στην τρίτη κλάση ομοιότητας ομαδοποιούνται τέσσερα έργα με τη θέση αγνώστου στο γ, τα οποία προέρχονται και από τα τρία διαφορετικά είδη έργων ως προς την αναπαράσταση. Στην επόμενη κλάση ομοιότητας εντάσσονται τέσσερα έργα με τη θέση αγνώστου στο β, και από τα τρία διαφορετικά είδη έργων ως προς την αναπαράσταση. Στην πέμπτη κλάση ομοιότητας εντοπίζεται μια σχέση με βάση την ομοιότητα του έργου (A9b-B9b) και μια σχέση μεταξύ έργων με διαφορετικές αναπαραστάσεις (εικόνα – αριθμητική γραμμή), στα οποία όμως οι μαθηματικές προτάσεις είναι οι ίδιες, αλλά με διαφοροποίηση στη θέση του αγνώστου (B4b-C7a). Τέλος, στην έκτη κλάση ομοιότητας παρατηρούνται σχέσεις μεταξύ δύο έργων B και δύο έργων C. Η μια σχέση δημιουργείται με βάση την ομοιότητα του έργου (B5c-C5c), ενώ η δεύτερη ως προς τη θέση του αγνώστου, η οποία και για τα δύο έργα είναι στο α (B7a-C6a).

2.3. ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα για τις απαντήσεις των μαθητών της Α Δημοτικού (Σχήμα 5) εντοπίζονται τρεις ομάδες μεταβλητών με βάση τις σχέσεις συνεπαγωγής που δημιουργούνται μεταξύ τους.

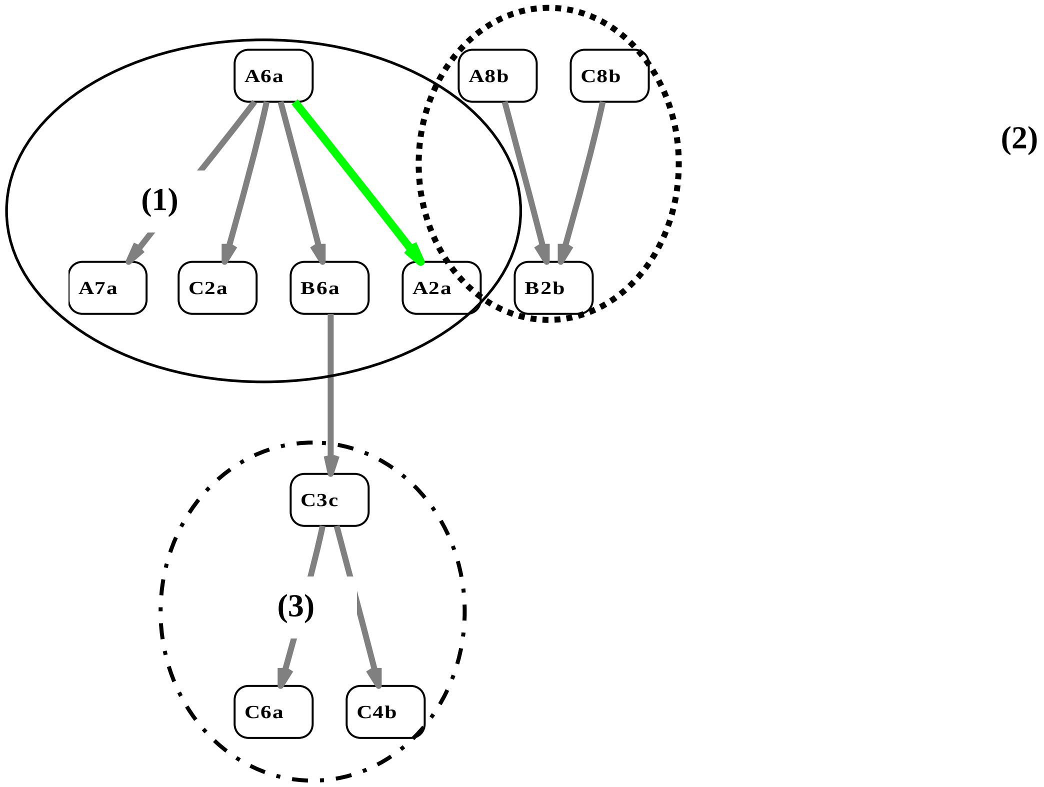
Σχήμα 5: Συνεπαγωγικό διάγραμμα για τις απαντήσεις των μαθητών της Α τάξης



Αρχικά παρατηρείται μια ομάδα μεταβλητών στις οποίες ο άγνωστος όρος βρίσκεται στη θέση α και β. Οι μεταβλητές αυτές δημιουργούν συνεπώς μια ομάδα με έργα συμπληρωματικής πρόσθεσης (B6a, A6a, C6a, A7a, C8b, A8b, C2a, C7a, C9b, B9b). Η επόμενη ομάδα σχηματίζεται από αρκετές σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ των έργων που περιλαμβάνουν την αριθμητική γραμμή (C6a, C2a, C7a, C5c, C3c, C4b). Μια τελευταία ομάδα που εντοπίζεται απαρτίζεται από σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ των έργων που περιλαμβάνουν εικόνες (B8a, B2b, B4b, B9b, B3c). Συνεπώς, από το συνεπαγωγικό διάγραμμα για την Α Δημοτικού βλέπουμε να σχηματίζονται συνεπαγωγικές αλυσίδες ως τη χρήση του κάθε είδους αναπαράστασης.

Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα για τις απαντήσεις των μαθητών της Β τάξης (Σχήμα 6), οι μεταβλητές δημιουργούν κυρίως τρεις ομάδες ως προς τις σχέσεις συνεπαγωγής που δημιουργούνται μεταξύ τους.

Σχήμα 6: Συνεπαγωγικό διάγραμμα για τις απαντήσεις των μαθητών της Β τάξης



Ειδικότερα, η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει 6 έργα, και από τους τρεις τύπους με βάση την αναπαράσταση, στα οποίο κοινό αποτελεί η θέση του αγνώστου, όπου σε όλα τα έργα βρίσκεται στη θέση α. Από τις σχέσεις αυτές φαίνεται ότι η αναπαράσταση δεν επηρεάζει την επίλυση των συγκεκριμένων έργων, ενώ εμφανίζεται και μια σχέση ως προς την ομοιότητα του έργου (A6a-B6a). Στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται 3 έργα, και από τους τρεις τύπους με βάση την αναπαράσταση. Ένα κοινό μεταξύ των έργων αυτών είναι η θέση του αγνώστου, όπου σε όλα τα έργα είναι στη θέση β. Επιπλέον, και στα 3 έργα οι μαθηματικές προτάσεις είναι οι ίδιες. Το είδος της αναπαράστασης δε φαίνεται, ούτε σε αυτή την περίπτωση, να επηρεάζει την επίλυση των έργων. Στην τρίτη ομάδα υπάρχουν 3 έργα που περιλαμβάνουν αριθμητική γραμμή. Προκύπτει, λοιπόν, μικρή συνέπεια ως προς τη χρήση της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση των έργων.

Ιεραρχική ταξινόμηση των έργων με βάση το μοντέλο Rasch

Ο βαθμός δυσκολίας των έργων διερευνήθηκε με τη χρήση του μοντέλου Rasch (Andrich, 1988), χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα QUEST (Adams & Khoo, 1996). Το μοντέλο Rasch είναι ένα μοντέλο πιθανοτήτων, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως για εκπαιδευτικές μετρήσεις και για σκοπούς κατασκευής μονοδιάστατων κλιμάκων. Το μοντέλο αυτό περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός ατόμου και ενός έργου, εκφράζοντας τις ικανότητες του ατόμου και τις δυσκολίες του έργου/ερώτησης σε μια κοινή γραμμική κλίμακα (π.χ η «logit scale»). Αυτό εξυπηρετεί στην ταυτόχρονη σύγκριση ανάμεσα στην ικανότητα ενός συγκεκριμένου ατόμου και στη δυσκολία ενός συγκεκριμένου έργου/ερώτησης, τοποθετώντας και τα δύο στο ίδιο συνεχές (Andrich, 1978).

Το μοντέλο Rasch θεωρήθηκε το καταλληλότερο μοντέλο για τα δεδομένα της έρευνας αυτής. Καταρχάς, τα σκορ των μαθητών στα έργα αποτελούν επαρκή στατιστικά στοιχεία για την εκτίμηση της σχετικής τους ικανότητας. Επιπλέον, δεν υπήρχε ανάγκη για βαθμολόγηση με περισσότερους βαθμούς σε σωστές ή μερικώς σωστές απαντήσεις σε δυσκολότερα έργα και να μειώσουμε τους βαθμούς σε λανθασμένες ή μερικώς σωστές απαντήσεις σε ευκολότερα έργα.

Το Partial Credit Model, το οποίο υποθέτει ότι όλες οι ερωτήσεις είναι είτε σωστές είτε λανθασμένες, χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Για την αξιολόγηση της προσαρμοστικότητας του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν δύο στατιστικοί δείκτες: ο δείκτης Infit Mean Square και ο δείκτης Outfit Mean Square (Wright & Stone, 1979). Οι δύο αυτοί δείκτες ακολουθούν την κατανομή χ^2 (Wright & Mok, 2000), όμως δεν υπάρχει συμφωνία μεταξύ των ερευνητών για τα αποδεκτά όρια στα οποία εμπίπτει η καλή προσαρμοστικότητα του μοντέλου. Σε κάποιες μελέτες (Engelhard, 1992, 1994; Lunz, Wright, & Linacre, 1990) το εύρος των αποδεκτών τιμών για τα άτομα καθορίστηκε μεταξύ των 0.6 και 1.5, ενώ το εύρος καθορίζεται επίσης συχνά μεταξύ του 0.7 και 1.3.

Τα δεδομένα της έρευνας αναλύθηκαν αρχικά για το συνολικό δείγμα τω ν μαθητών. Στο αρχικό μοντέλο Rasch προέκυψαν έργα με κακή προσαρμοστικότητα σε αυτό, συνεπώς τα εξι αυτά έργα scale (A1, B1, B4, B9, C6, C7) αποκλείστηκαν από την κλίμακα. Στη συνέχεια, αφού αφαιρέθηκαν τα έργα αυτά, η ανάλυση Rasch επαναλήφθηκε με τα υπόλοιπα έργα. Στον πίνακα Α παρουσιάζεται η περίληψη των στατιστικών δεικτών της ανάλυσης Rasch για το συνολικό δείγμα της έρευνας. Με βάση τους δείκτες φαίνεται ότι τα έργα κατανέμονται στην κλίμακα κατά ένα συστηματικό και συνεκτικό τρόπο με βάση το βαθμό δυσκολίας τους.

Πίνακας Α

Δείκτες για τα έργα πρόσθεσης του δοκιμίου για το συνολικό δείγμα

Δείκτες		
Μέσος όρος	Έργα	0.00
	Μαθητές	1.59
Τυπική απόκλιση	Έργα	0.84
	Μαθητές	1.71
Αξιοπιστία μέτρησης	Έργα	0.84
	Μαθητές	0.79
Infit mean square	Έργα	1.01
	Μαθητές	1.00
Outfit mean square	Έργα	1.01
	Μαθητές	1.01
Infit t	Έργα	0.03
	Μαθητές	0.12
Outfit t	Έργα	0.07
	Μαθητές	0.18

Η ταξινόμηση των έργων στην κλίμακα παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα. Η κλίμακα περιλαμβάνει τα 21 από τα 27 έργα του δοκιμίου και παρουσιάζει το βαθμό δυσκολίας των έργων, αλλά και την κατανομή των μαθητών σε αυτήν, βάσει των ικανοτήτων τους κατά την επίλυση των έργων του δοκιμίου.

Σχετικά με την κατανομή των έργων στην κλίμακα, φαίνεται να υπάρχει ικανοποιητική προσαρμογή του βαθμού δυσκολίας των έργων σε σχέση με τις ικανότητες των μαθητών. Παρόλα αυτά, η αντιστοίχιση μεταξύ βαθμού δυσκολίας των έργων και ικανοτήτων των μαθητών στην πρόσθεση θα μπορούσε να βελτιωθεί, με τη συμπερίληψη έργων με αυξημένο βαθμό δυσκολίας στο ερευνητικό εργαλείο της έρευνας.

Από το σχήμα προκύπτει επίσης ότι η πλειοψηφία των μαθητών εντοπίζεται πάνω από τα 1.0 logits στην κλίμακα, ενώ αρκετοί είναι και οι μαθητές που εντοπίζονται μεταξύ των 1.0 and -1.0 logits. Κατά συνέπεια, η πλειοψηφία των μαθητών μπορεί να χαρακτηριστεί με μέτριου ή ψηλού βαθμού ικανοτήτων για την επίλυση απλών έργων πρόσθεσης, με βάση τις επιδόσεις τους στα συγκεκριμένα έργα που τους δόθηκαν.

Παρατηρώντας τον τρόπο που τα έργα τοποθετούνται στην κλίμακα, σε σχέση με τη θέση του αγνώστου στις μαθηματικές προτάσεις, προκύπτει ότι η τοποθέτηση του αγνώστου στη θέση «α» αυξάνει το βαθμό δυσκολίας των έργων. Συγκεκριμένα, τα εν λόγω έργα εντοπίζονται στις ψηλότερες θέσεις της κλίμακας scale (A6a, B6a και A2a), οπότε θεωρούνται δυσκολότερα σε σύγκριση με τα έργα στα οποία ο άγνωστος όρος βρίσκεται στις θέσεις «β» ή «γ». Τα έργα με τον άγνωστο στη θέση «γ» βρίσκονται στις χαμηλότερες θέσεις της κλίμακας, δείχνοντας το μειωμένο βαθμό δυσκολίας τους.

Λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη διάσταση των έργων, δηλαδή τον τύπο αναπαράστασης με τον οποίο δίνονται, η ταξινόμηση των έργων στην κλίμακα δείχνει ότι τα έργα που δίνονται με αριθμητική γραμμή είναι , στις περισσότερες περιπτώσεις, δυσκολότερα από τα υπόλοιπα έργα του δοκιμίου. Συνεπώς, η παρουσία της αριθμητικής γραμμής επηρεάζει σε μεγαλύτερο βαθμό τη δυσκολία των έργων σε σύγκριση με την παρουσία της εικόνας.

Συγκρίνοντας τα έργα που δόθηκαν με εικόνα με τα αντίστοιχα έργα που δόθηκαν μόνο σε συμβολική μορφή, η επίδραση του κάθε τύπου αναπαράστασης στο βαθμό δυσκολίας των έργων δεν μπορεί να προσδιοριστεί ξεκάθαρα, αφού συναντάμε περιπτώσεις όπου τα έργα σε συμβολική μορφή είναι δυσκολότερα από τα αντίστοιχα έργα με τη συνοδεία εικόνας, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου παρατηρείται το αντίθετο. Έτσι, ο ρόλος των εικόνων στην επίλυση έργων πρόσθεσης δεν μπορεί να προσδιοριστεί ξεκάθαρα με βάση τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ανάλυσης.

Παρατηρώντας πιο προσεκτικά τον τρόπο τοποθέτησης των έργων στην κλίμακα, προκύπτει ένα επιπλέον κριτήριο το οποίο φαίνεται να επηρεάζει την πολυπλοκότητα των έργων. Ειδικότερα, παρατηρείται ότι στα χαμηλότερα μέρη της κλίμακας τοποθετούνται τα έργα που περιλαμβάνουν την πρόσθεση δύο μονοψήφιων αριθμών, οι οποίοι δεν υπερβαίνουν τη δεκάδα. Αντιθέτως, τα έργα που αφορούν σε πρόσθεση με υπερπήδηση δεκάδας τοποθετούνται στα ψηλότερα σημεία της κλίμακας. Στρέφοντας την προσοχή μας στα δύο έργα που εντοπίζονται στη ψηλότερη θέση της κλίμακας (A6a και B6a), παρατηρούμε ότι στα έργα αυτά ο άγνωστος όρος βρίσκεται στη θέση «α» και αφορούν στην ίδια μαθηματική πρόταση, η οποία περιλαμβάνει ένα μονοψήφιο και ένα διψήφιο αριθμό. Βλέπουμε, λοιπόν, να προκύπτει μια αλληλεπίδραση μεταξύ της θέσης του αγνώστου και του μεγέθους των αριθμών στα έργα, η οποία φαίνεται να επηρεάζει αρκετά την πολυπλοκότητα των έργων για τους μαθητές.

Αυτό που γενικότερα προκύπτει από την τοποθέτηση των έργων στην κλίμακα είναι ότι ο βαθμός δυσκολίας των έργων καθορίζεται βάσει της αλληλεπίδρασης μεταξύ της θέσης του αγνώστου, τον τύπο αναπαράστασης και το μέγεθος των αριθμών.

```
 ----------------------------------------------------------------
  High achievement                  Difficult items
  4.0                             |
                                  |
                                  |
                                  |
                                  |
       XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX   |
                                  |
   3.0                            |
                                  |
                                  |
                   XXXXXXXXXXXX   |
                                  |
                                  |
                                  |
   2.0              XXXXXXXXXXXXX |
                                  |
                             XX   |
                                  |     A6a
                           XXXX   |     B6a
                                  |
                         XXXXXX   |
   1.0                            |
                              X   |     A2a    C8b
                                  |
                             XX   |     C2a
                             XX   |     A9b    B2a C5c
                                  |     A8b    C3c
    .0                        X   |     B3c
                              X   |     A3c    B8b C9b
                                  |
                              X   |     A5c
                           XXXX   |     A7a   C4b
                                  |
                           XXXX   |     B7a
  -1.0                            |     B5c
                              X   |
                                  |
                                  |
                                  |
                              X   |     A4b C1c
                                  |
  -2.0                        X   |
                                  |
                                  |
                                  |
                                  |
                                  |
                                  |
                                  |
  -3.0                            |
                                  |
                            XXX   |
                                  |
                                  |
                                  |
                                  |
  -4.0                            |
 Low achievement                    Simple items
 ----------------------------------------------------------------
   Each X represents    1 student
```

Σχήμα Α. Κλίμακα για τα έργα πρόσθεσης για το συνολικό δείγμα

2.4. ΛΑΘΗ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Ήδη από παλαιότερες έρευνες (Αθανάσιος Γαγάτσης, Ιλιάδα Ηλία, Παναγιώτα Ρούσου-Μιχαηλίδου & Μαρία Τσακίρη, με τίτλο «Η επίδραση των εικόνων στην επίδραση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης») έχει παρατηρηθεί πως σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές δεν κάνουν σωστή χρήση της αριθμητικής γραμμής. Μερικά από τα λάθη των μαθητών, που παρατηρήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα, παρατίθενται στη συνέχεια.

Για παράδειγμα, σε προσθέσεις όπως 8+9, αρκετοί μαθητές ένωναν το 0 με το 8 και μετά ζωγράφιζαν 9 μικρά τόξα μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών για να βρουν το αποτέλεσμα. Επίσης πολλοί μαθητές στην προσπάθειά τους να χρησιμοποιήσουν την αριθμητική γραμμή, σχεδίαζαν ένα τόξο, ή δύο διαδοχικά τόξα ή δύο τόξα με αλληλοεπικάλυψη έχοντας κοινή αρχή τον αριθμό 0. Η φορά των τόξων ήταν ανάλογη με τον τρόπο σκέψης κάθε παιδιού.

Ακόμη, ξεκινούσαν τη σχεδίαση από την αρχή ή από οποιοδήποτε σημείο της αριθμητικής γραμμής. Στην αφαίρεση παρίσταναν τον αφαιρετέο πάνω από την αριθμητική γραμμή ενώ τον αφαιρέτη κάτω από αυτήν ή προχωρούσαν προς τα πίσω διαγράφοντας διαστήματα.

Τα βασικότερα λάθη που έγιναν από τους μαθητές της Β’ και της Γ’ τάξης αφορούσαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές ένωναν με τόξο τους δύο προσθετέους ή τον αφαιρέτη με τον αφαιρετέο, ή περιπτώσεις όπου οι μαθητές ξεκινούσαν από το 1 αντί από το 0. Επίσης μετρούσαν με βάση των αριθμό των γραμμών και όχι των διαστημάτων. Υπήρξαν και λίγες περιπτώσεις όπου οι μαθητές απλά ένωναν με τόξο και τους τρεις αριθμούς της μαθηματικής πρότασης.

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση της έρευνας σε σχέση με το χειρισμό της αριθμητικής γραμμής είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές έβρισκαν σωστά το αποτέλεσμα της μαθηματικής εξίσωσης και μετά χρησιμοποιούσαν την αριθμητική γραμμή για επαλήθευση ή δεν την χρησιμοποιούσαν καθόλου. Αυτό δείχνει ότι οι αναπαραστάσεις συμβάλλουν θετικά στην επίλυση προβλήματος με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη λειτουργία τους και είναι σε θέση να τις χειριστούν με ευχέρεια. Η αριθμητική γραμμή, ως χειριστικό μοντέλο χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει εξωτερικά μια μαθηματική πραγματικότητα. Η εφαρμογή όμως μιας αναπαράστασης σε μη κατανοητό περιεχόμενο, όπως είναι η αριθμητική γραμμή, είναι δυνατόν να δημιουργήσει παρανοήσεις, οι οποίες παρεμποδίζουν τη μάθηση. Συμπερασματικά, φαίνεται ότι η σύνδεση ανάμεσα στην αριθμητική γραμμή και την έννοια προς αναπαράσταση δεν ήταν πάντα διαφανής και κατανοητή από τους μαθητές της Β’ και Γ’ τάξης δημοτικού.

Στο τέλος οι ερευνητές (Αθανάσιος Γαγάτσης, Ιλιάδα Ηλία, Παναγιώτα Ρούσου-Μιχαηλίδου & Μαρία Τσακίρη) σημειώνουν πως ως προς τα λάθη της χρήσης της αριθμητικής γραμμής, τα κυριότερα από αυτά που εντοπίστηκαν στις λύσεις των μαθητών αφορούσαν την ένωση με τόξο των δύο προσθετέων ή του αφαιρέτη με τον αφαιρετέο, τη μέτρηση των κουκίδων μεταξύ των αριθμών και όχι των διαστημάτων και τη χρήση του σημείου 1 και όχι του 0 ως αφετηρία.

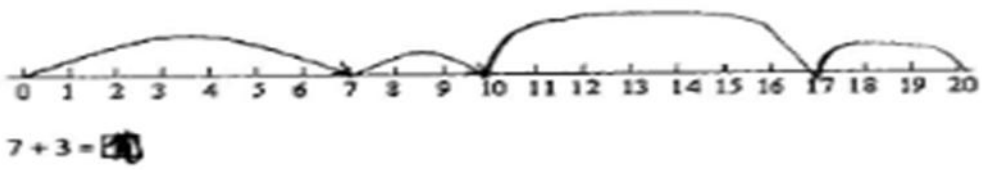
Στην συγκεκριμένη έρευνα προέκυψαν πολλές περιπτώσεις μαθητών οι οποίοι έκαναν λάθος χρήση ή καθόλου χρήση της αριθμητικής γραμμής. Αρκετές ήταν οι περιπτώσεις των μαθητών οι οποίοι ενώ έβρισκαν το σωστό αποτέλεσμα στην πράξη δεν είχαν καταφέρει να χρησιμοποιήσουν σωστά την αριθμητική γραμμή. Επίσης, υπήρχαν περιπτώσεις μαθητών, οι οποίοι σε αντίθεση με τους προηγούμενους, ενώ έδειχναν να είχαν χρησιμοποιήσει σωστά την αριθμητική γραμμή δεν είχαν καταφέρει να βρουν το σωστό αποτέλεσμα.

Με βάση την ανάλυση των λαθών των μαθητών προέκυψε η δημιουργία τριών τύπων λαθών σχετικά με τη χρήση της αριθμογραμμής.

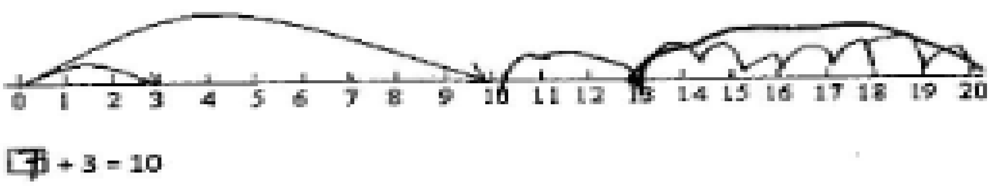
(α) *Πρώτος τύπος λάθους*

«Αναπαραγωγή της δοσμένης κατάστασης»

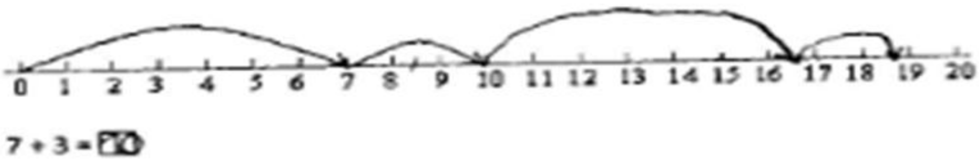
Στο συγκεκριμένο τύπο λάθους οι μαθητές σχεδίαζαν πάνω στην αριθμογραμμή βέλη προσπαθώντας να αναπαραστήσουν ξανά την μαθηματική πρόταση που ήδη τους είχε δοθεί . Παρ ΄ όλ ΄ αυτά σημείωναν την σωστή απάντηση στο κουτάκι. Γεγονός που δείχνει πως οι μαθητές υπολόγιζαν πρώτα την πράξη νοερά αλλά για κάποιο λόγο ένιωθαν την ανάγκη να σημειώσουν κάτι επάνω στην αριθμογραμμή. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στη διδακτική εμπειρία των μαθητών με βάση την οποία η αριθμογραμμή δίνεται άδεια και οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ή να αναπαραστήσουν την μαθηματική πράξη που τους δίνεται. Επιπλέον, όπως φαίνεται και από το πιο κάτω παράδειγμα, η συμπλήρωση των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή γίνεται σχεδόν μηχανικά εφόσον οι μαθητές δεν φαίνεται να συνειδητοποιούν τα διαφορετικά αποτελέσματα που προκύπτουν ως τελική απάντηση στην πράξη (στην αριθμογραμμή καταλήγει η γραμμή που έχει φέρει ο μαθητής στον αριθμό 20, ενώ με τον υπολογισμό που έχει κάνει νοερά καταλήγει στον αριθμό 10). Αυτό φανερώνει και την αδυναμία των μαθητών να καταλάβουν το τι εκφράζουν τα βέλη και ότι ο αριθμός στον οποίο καταλήγει το τελευταίο βέλος είναι και το τελικό αποτέλεσμα.

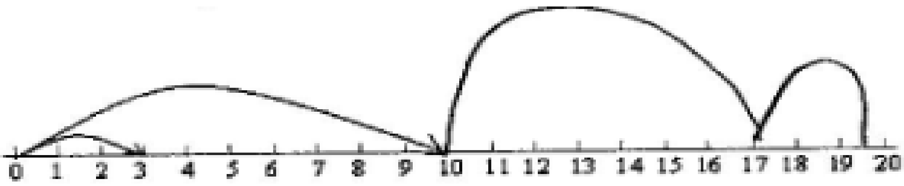


Στην παρακάτω περίπτωση παρουσιάζεται και μια διαφοροποιημένη λύση εντός του συγκεκριμένου τύπου λάθους όπου ο μαθητής αναπαριστά τον αριθμό πρώτα με διαδοχικά βήματα και μετά προσπαθεί να φτιάξει ένα βέλος μιμούμενος την δοσμένη κατάσταση από τους ερευνητές.



Σε ανάλογη περίπτωση του ίδιου λάθους παρατηρείται ακόμα ένα στοιχείο όσον αφορά τα λάθη των μαθητών. Ο παρακάτω μαθητής δείχνει να μην αντιλαμβάνεται ένα ακόμα στοιχείο της φύσης των αριθμών που αποτυπώνεται στην αριθμογραμμή. Οι μαθητές επηρεασμένοι από τον κλασικό τρόπο διδασκαλίας δείχνουν να αντιλαμβάνονται τη διακριτότητα της φύσης του αριθμού (καταμέτρηση κουκίδων της αριθμογραμμής) ενώ δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται την έκφραση ενός αριθμού ως μήκος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του φαινομένου παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμά, όπου ο μαθητής δεν καταλήγει σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο ώστε να κάνει μια σωστή αναπαράσταση του αριθμού, έστω κι αν προέκυπτε ένα λάθος αποτέλεσμα, αλλά σταματάει ανάμεσα σε δύο αριθμούς (18 και 19).



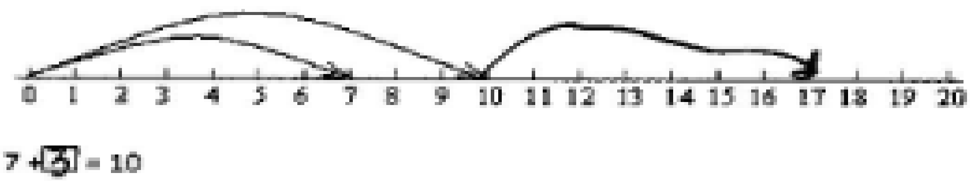


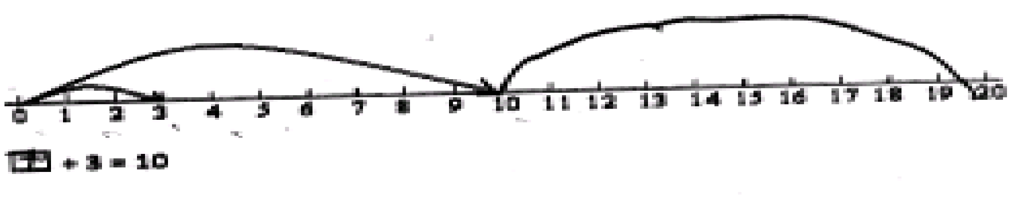
□ + 3 = 10

(β) *Δεύτερος τύπος λάθους*

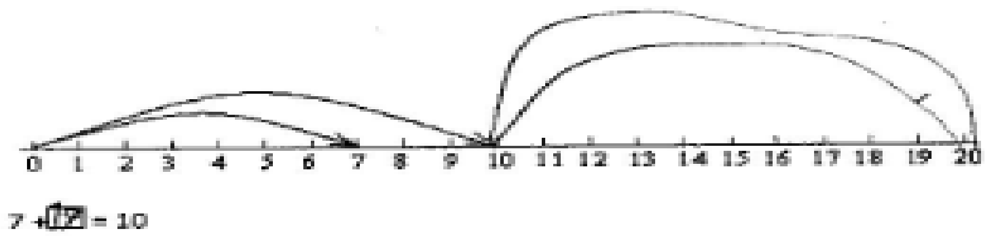
«Αναπαράσταση ενός από τους δύο δοσμένους όρους»

Σε αυτό τον τύπο λάθους εντάσσονται περιπτώσεις όπου οι μαθητές αναπαριστούν τον πρώτο ή τον δεύτερο δοσμένο όρο της μαθηματικής πρότασης.

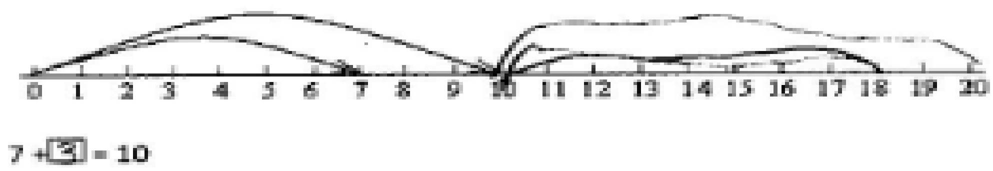




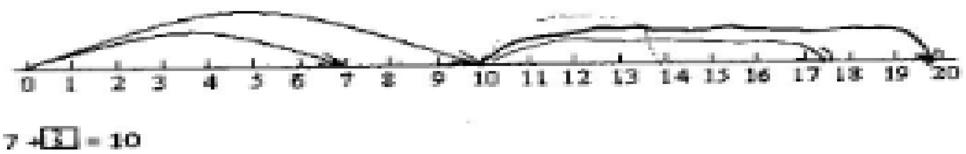
Στα παρακάτω παραδείγματα οι μαθητές αναπαριστούν τον έναν από τους δύο δοσμένους όρους σωστά (τον αριθμό 10 και στις δύο περιπτώσεις) ενώ δεν αναπαριστούν σωστά τον άλλο δοσμένο όρο (τον αριθμό 7). Κοινό στοιχείο και των δύο περιπτώσεων είναι ότι οι μαθητές φαίνεται να προσπαθούν να μιμηθούν τη δοσμένη κατάσταση που αναπαρίσταται στην γραμμή. Ο πρώτος μαθητής, μοιάζει τυχαία να φέρνει ένα δεύτερο βέλος κάτω από το πρώτο που έφτιαξε για να αναπαραστήσει τον αριθμό 10 χωρίς όμως να συνειδητοποιεί ότι με το δεύτερο βέλος θα έπρεπε να αναπαραστήσει τον αριθμό 7 προκειμένου να οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα. Σημαντική παρατήρηση είναι ο αριθμός που έχει συμπληρώσει ο μαθητής στο κενό κουτάκι. Ο αριθμός 17 που βάζει ο μαθητής φαίνεται να προκύπτει από την πρόσθεση των δύο δοσμένων όρων. Γεγονός, που δείχνει την επίδραση της θέσης στην οποία βρίσκεται ο άγνωστος όρος μέσα στη μαθηματική πρόταση και η σύγχυση που προκαλεί στους μαθητές όταν δεν βρίσκεται στην θέση «γ».



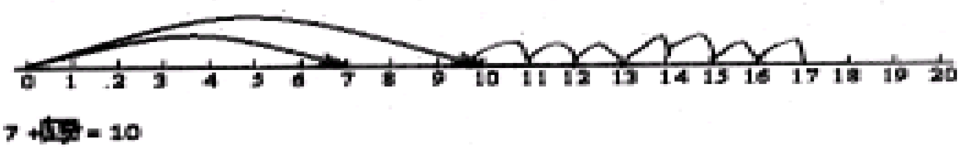
Παρατηρώντας την απάντηση και το σχέδιο του επόμενου μαθητή καταλήγουμε ότι και αυτός ο μαθητής αναπαριστά σωστά τον έναν δοσμένο όρο, όμως φαίνεται να κάνει προσπάθεια να αναπαραστήσει και τον δεύτερο δοσμένο όρο. Σε αντίθεση με τον προηγούμενο μαθητή, αυτός φαίνεται να συνειδητοποιεί περισσότερο τα βέλη τα οποία σχηματίζει και δείχνει να κατανοεί καλύτερα την χρήση της αριθμογραμμής. Σημαντικό στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι πως ο μαθητής φαίνεται να ξεπερνά το γνωστικό εμπόδιο που μπορεί να προκαλέσει η θέση του αγνώστου και καταλήγει προφανώς με νοερούς υπολογισμούς στο σωστό αποτέλεσμα.



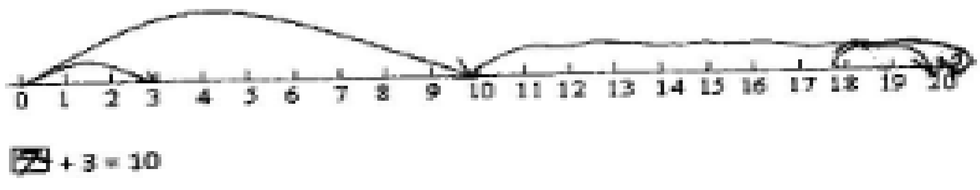
Παρακάτω ο μαθητής αναπαριστά τον πρώτο δοσμένο όρο (τον αριθμό 10) όμως αποτυγχάνει να αναπαραστήσει και τον δεύτερο όρο. Σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα τα βέλη που χρησιμοποιεί αυτός ο μαθητής καταλήγουν και στις δύο περιπτώσεις ανάμεσα σε δύο αριθμούς και όχι σε ένα συγκεκριμένο σημείο επάνω στην αριθμογραμμή. Γεγονός που καταδεικνύει για ακόμα μια φορά την μονοδιάστατη αντίληψη του αριθμού ως σημείο και όχι και ως μήκος.



Εντοπίζεται επίσης και μια διαφοροποιημένη αναπαράσταση του πρώτου δοσμένου όρου (ο αριθμός 7) όπου ο μαθητής επιλέγει αυτή τη φορά να αναπαραστήσει τον αριθμό όχι με ένα συνεχόμενο βέλος αλλά με διαδοχικά βήματα.



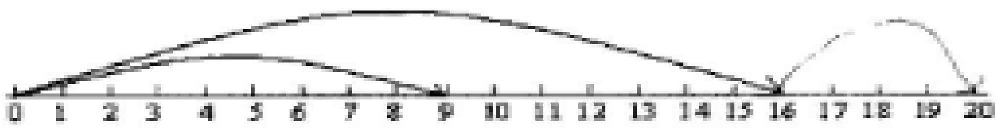
Στο παράδειγμα που ακολουθεί ο μαθητής αναπαριστά σωστά τον έναν από τους δύο δοσμένους όρους (τον αριθμό 10). Φαίνεται όμως πως στη συνέχεια ο μαθητής προσπάθησε να κάνει αφαίρεση, μετρώντας προς τα πίσω τρεις θέσεις. Παρόλα αυτά δεν εκφράζει τον αριθμό ως τρία διαστήματα αλλά μετρά τρία σημεία πάνω στην αριθμογραμμή.



(γ) Τρίτος τύπος λαθών

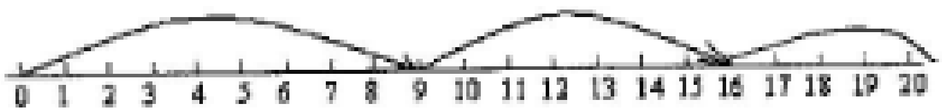
«Κάλυψη του τελικού ασυμπλήρωτου μέρους της αριθμογραμμής»

Σε αυτό τον τύπο λαθών οι μαθητές έφερναν ένα βέλος με αρχή το τέλος του δοσμένου βέλους και τέλος το τελικό σημείο της αριθμογραμμής. Παρακάτω παρατίθενται δύο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα του συγκεκριμένου τύπου λαθών στα οποία διαφοροποιείται η ορθότητα της απάντησης που δίνει ο μαθητής. Στην πρώτη περίπτωση ο μαθητής προσπαθεί να καλύψει το διάστημα που μένει κενό επάνω στην αριθμογραμμή φέρνοντας ένα βέλος μέχρι το τελικό σημείο και ακολούθως μετρά τις γραμμές που περιέχονται στο συγκεκριμένο διάστημα τις οποίες θεωρεί ότι εκφράζουν τον άγνωστο όρο της μαθηματικής πρότασης.

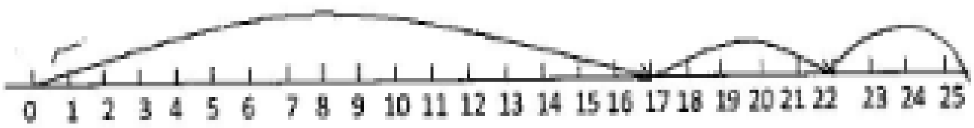


$9 + \boxed{5} = 16$

Και οι επόμενοι μαθητές προσπάθησαν να φέρουν ένα βέλος μέχρι το τέλος της αριθμογραμμής, στην προσπάθειά τους να βρουν τον σωστό αριθμό όμως δεν καταφέρνουν τελικά να δώσουν οποιαδήποτε απάντηση.



$9 + 7 = \square$



$17 + 5 = \square$

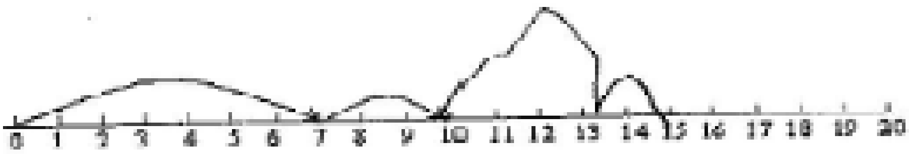
Στη δεύτερη περίπτωση παρατηρείται η ίδια τάση για συμπλήρωση του κενού διαστήματος της αριθμογραμμής μέχρι το τέλος. Παρόλα αυτά η χρήση της αριθμογραμμής φαίνεται να έγινε μετά την εκτέλεση του νοερού υπολογισμού αφού ο μαθητής δίνει τη σωστή απάντηση.

17 + $\boxed{5}$ = 22

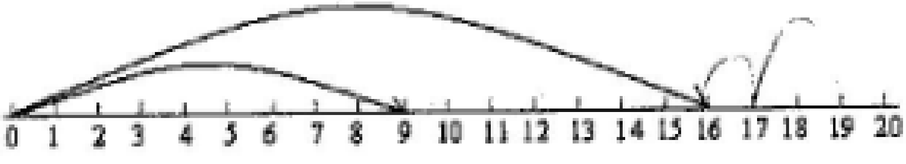
(δ) Τέταρτος τύπος λαθών

«Τυχαία λάθη»

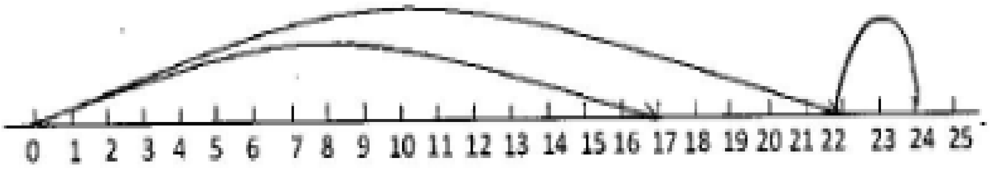
Σε αυτή την κατηγορία των μαθητών οι μαθητές φαίνεται να φέρνουν τυχαία βέλη επάνω στην αριθμογραμμή χωρίς έχουν κάποιο συγκεκριμένο σκοπό για να αναπαραστήσουν κάποιον από τους αριθμούς ή τις σχέσεις της δοσμένης αριθμητικής πρότασης. Ακολούθως παρουσιάζονται κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων λαθών.



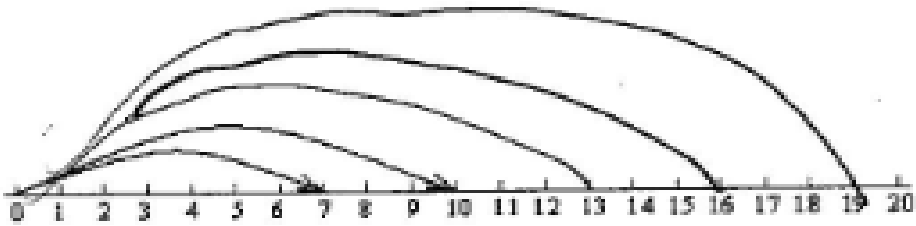
7 + 3 = $\boxed{}$



9 + $\boxed{}$ = 16



$17 + \square = 22$



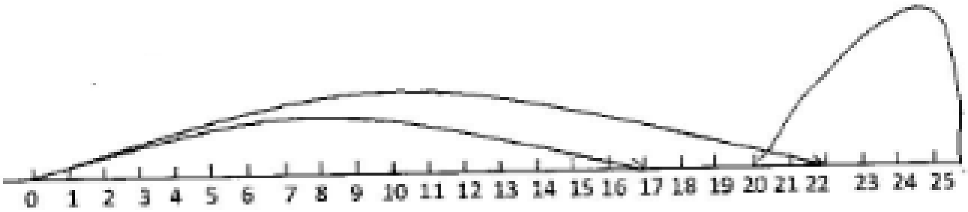
$7 + \square = 10$

$\square + 7 = 16$

$7 + 3 = \square$

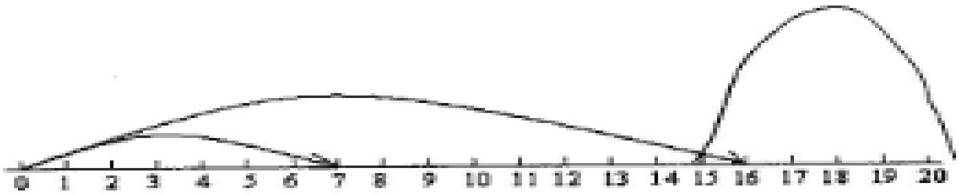
$9 + \square = 16$

9 + $\boxed{}$ = 16

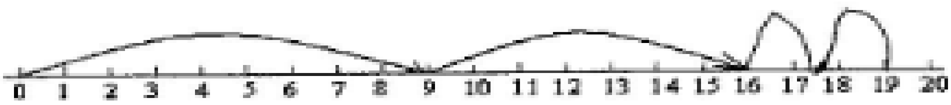


17+ $\boxed{}$ = 22

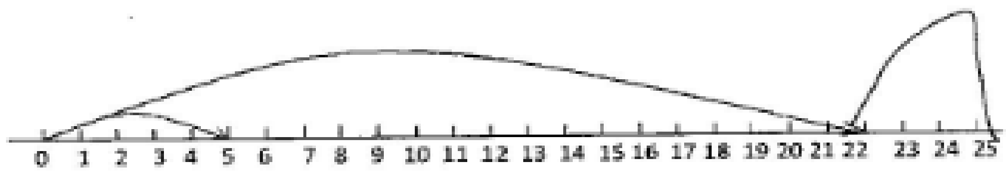
17 + 5 = $\boxed{22}$



$\boxed{9}$ + 7 = 16



9 + 7 = $\boxed{16}$



$\square + 5 = 22$

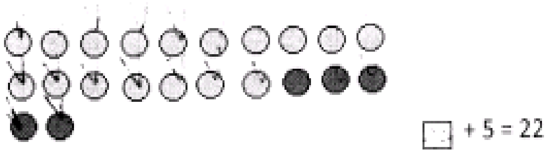
2.5. ΧΡΗΣΗ ΕΙΚΟΝΑΣ

Σε μερικές περιπτώσεις μαθητών η παρουσία των εικόνων στις πράξεις, έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην επίλυση των πράξεων και την εύρεση του σωστού αποτελέσματος από τους μαθητές. Τέτοιες περιπτώσεις αποτελούν τα παρακάτω παραδείγματα γραπτών κάποιων μαθητών.

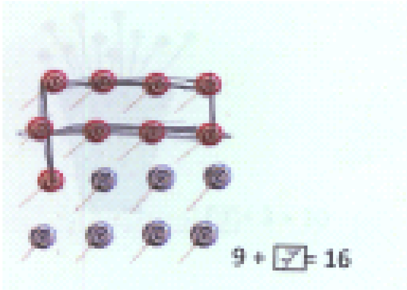
Στην πρώτη περίπτωση φαίνεται πως ο μαθητής κάνει χρήση της εικόνας προκειμένου να βρει τον αριθμό που λείπει από το κουτάκι ή να επιβεβαιώσει το αποτέλεσμα που ενδεχομένως έχει βρει μόνος του με το νου. Βάζει σημαδάκια « √ » για να κάνει την καταμέτρηση των αντικειμένων. Αν και δεν είναι ιδιαίτερα εμφανές, ο μαθητής φτάνει στο σημείο να βρει το σωστό αποτέλεσμα. Πολύ σημαντική είναι η παρατήρηση πως ο συγκεκριμένος μαθητής στην ίδια πράξη, που βρισκόταν στο α ΄ μέρος του ερωτηματολογίου, δεν κατάφερε να βρει το σωστό αποτέλεσμα και άφησε κενό το κουτάκι χωρίς να συμπληρώσει κάποιο νούμερο.

Στην δεύτερη περίπτωση, ο μαθητής φαίνεται κι αυτός πως κάνει χρήση της εικόνας προκειμένου να οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα. Ο συγκεκριμένος επιλέγει έναν διαφορετικό τρόπο χρήσης της εικόνας σε σχέση με τον προηγούμενο. Φαίνεται να ομαδοποιεί τα γλειφιτζούρια του ίδιου χρώματος και τελικά φτάνει στο σωστό αποτέλεσμα. Επίσης, σημαντικό είναι πως και αυτός ο μαθητής δεν είχε καταφέρει να βρει το σωστό αποτέλεσμα στην συγκεκριμένη πράξη που υπήρχε στο α ΄ μέρος του ερωτηματολογίου.

Και στις δύο περιπτώσεις, η εικόνα δείχνει πως βοηθά τους μαθητές να ξεπεράσουν τα όποια γνωστικά εμπόδια και να φτάσουν στη εύρεση του σωστού αποτελέσματος.



Παράδειγμα 1 «Σημείωση σημαδιών στα κυκλάκια ίδιου χρώματος για την ευκολότερη καταμέτρηση των αντικειμένων»



Παράδειγμα 2 « Ομαδοποίηση γλειφιτζουριών»

2.6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, ως προς τις επιδόσεις των μαθητών στα διαφορετικά έργα ως προς το είδος της αναπαράστασης που περιλαμβάνουν, τα αποτελέσματα δεν έδειξαν σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των τριών ειδών έργων του δοκιμίου. Οι μέσοι όροι των επιδόσεων των μαθητών στα τρία είδη έργων έδειξαν ότι για τους μαθητές της Α τάξης η παρουσία των εικόνων φαίνεται να επηρεάζει κάπως θετικότερα τις επιδόσεις τους, σε αντίθεση με την παρουσία της αριθμητικής γραμμής, η οποία προκύπτει να δυσχεραίνει κάπως την επίλυση των έργων. Αντιθέτως, η επίδραση της παρουσίας της αριθμητικής γραμμής δε φαίνεται να διαφοροποιεί την επίλυση των έργων για τους μαθητές της Β Δημοτικού, σε σχέση με την παρουσία των εικόνων. Συνεπώς, με βάση τα αποτελέσματα αυτά, δεν είμαστε σε θέση να διακρίνουμε με ξεκάθαρο τρόπο κατά πόσο ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι θετικός ή αρνητικός για την επίλυση έργων πρόσθεσης. Οπότε πρέπει να αναφερόμαστε στη λειτουργία των αναπαραστάσεων σε συσχετισμό με την φάση ανάπτυξης του ατόμου και την περίοδο φοίτησης του στο σχολείο.

Το υψηλό ποσοστό στην αριθμογραμμή δεν αντιστοιχεί στην πραγματική κατανόηση της χρήσης της όπως φαίνεται από την ποιοτική ανάλυση κάποιων λαθών των μαθητών. Στην πραγματικότητα λόγω του μικρού μεγέθους των αριθμών υπολογίζουν νοερά με βάση τη συμβολική έκφραση της πράξης.

Απαντώντας το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, η επίδοση των μαθητών στα διάφορα έργα του δοκιμίου εμφανίζονται διαφοροποιημένες σε σχέση με την ηλικιακή ομάδα στην οποία ανήκουν. Ειδικότερα, οι μαθητές της Β Δημοτικού παρουσιάζονται να ανταποκρίνονται με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην εκτέλεση των πράξεων πρόσθεσης και να σημειώνουν ψηλότερες επιδόσεις από τους μαθητές της Α Δημοτικού. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού οι αυξημένες επιδόσεις των μαθητών της Β τάξης συνδέονται προφανώς με τις περισσότερες διδακτικές εμπειρίες των μαθητών αυτών στην πρόσθεση, αλλά και στη χρήση των αναπαραστάσεων, σε σχέση με τους μαθητές της Α Δημοτικού.

Ενδείξεις για τη συμπεριφορά των μαθητών ως προς τη χρήση του κάθε είδους αναπαράστασης κατά την επίλυση των έργων προέκυψαν μέσα από τα διαγράμματα ομοιότητας και τα συνεπαγωγικά διαγράμματα. Από τα διαγράμματα αυτά εντοπίστηκαν, λοιπόν, τριών ειδών σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, οι οποίες ήταν είτε με βάση την ομοιότητα του έργου, με βάση τη θέση του αγνώστου, είτε με βάση το είδος της αναπαράστασης. Συνεπώς, μερικές φορές η πολυπλοκότητα του έργου εξαρτάται από το μετασχηματισμό που απαιτείται και όχι από το είδος της αναπαράστασης, ενώ άλλες φορές εξαρτάται από το είδος της αναπαράστασης. Ενώ, λοιπόν, σε άλλες εργασίες οι συνδέσεις μεταξύ των έργων προέκυπταν με βάση το είδος της αναπαράστασης (Gagatsis, Shiakalli & Panaoura, 2003), με βάση τα δικά μας αποτελέσματα η διάκριση των έργων με βάση το ρόλο των αναπαραστάσεων δε γίνεται ξεκάθαρα.

Με βάση το τελευταίο ερευνητικό ερώτημα, η συμπεριφορά των μαθητών ως προς τη χρήση του κάθε είδους αναπαράστασης σε σχέση με την ηλικιακή ομάδα στην οποία ανήκουν εμφανίζεται διαφοροποιημένη. Από την περιγραφή του διαγράμματος ομοιότητας προκύπτει γενικότερα ότι οι μαθητές της Α τάξης φαίνεται σε κάποιο βαθμό να χρησιμοποιούν τις εικόνες και την αριθμητική γραμμή ως υποστηρικτικά μέσα για την επίλυση των έργων, γι’ αυτό και παρατηρείται περιορισμένη στεγανοποίηση μεταξύ των τριών ομάδων έργων. Αυτό προκύπτει και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα, όπου βλέπουμε να σχηματίζονται συνεπαγωγικές αλυσίδες ως τη χρήση του κάθε είδους αναπαράστασης, γεγονός που δείχνει ότι στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν την κάθε αναπαράσταση, αυτό γίνεται με κάποια συνέπεια. Από την άλλη, παρατηρούνται σχέσεις που δημιουργούνται ως προς το είδος του έργου, σε σχέση με το μετασχηματισμό που καθορίζεται από τη θέση του αγνώστου. Γεγονός που δείχνει ότι σε κάποιες άλλες περιπτώσεις η παρουσία των αναπαραστάσεων δεν επιδρά στην επίλυση των έργων. Από το διάγραμμα για τους μαθητές της Β Δημοτικού φαίνεται ότι οι μαθητές απαντούν κυρίως ανεξάρτητα από το είδος της αναπαράστασης, ενώ εντοπίζεται μικρή στεγανοποίηση ως προς τη θέση του αγνώστου στις θέσεις β και γ.

Με βάση τις πιο πάνω παρατηρήσεις προκύπτει, λοιπόν, ότι οι μαθητές της Α τάξης κάνουν μεμονωμένες προσπάθειες για χρήση των αναπαραστάσεων, αφού τα συστήματα αναπαραστάσεων φαίνεται να είναι αναγκαία για στήριξη τους κατά την επίλυση των έργων. Εντοπίζεται περιορισμένη στεγανοποίηση ως προς το είδος της αναπαράστασης, ενώ από την άλλη παρατηρούνται σχέσεις που δημιουργούνται ως προς το είδος του έργου, σε σχέση με το μετασχηματισμό που καθορίζεται από τη θέση του αγνώστου. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι σε κάποιες άλλες περιπτώσεις η παρουσία των αναπαραστάσεων δεν επιδρά στην επίλυση των έργων. Από την άλλη, για τους μαθητές της Β τάξης η διαδικασία εκτέλεσης απλών προσθετικών πράξεων είναι ήδη αυτοματοποιημένη, λόγω της διδασκαλίας τους, συνεπώς είναι σε θέση να εκτελούν τη διαδικασία χωρίς την ανάγκη για υποστηρικτική χρήση αναπαραστάσεων. Οπότε η επίδοσή τους δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση. Οι μαθητές ανεξαρτητοποιούνται από το είδος της αναπαράστασης, γι’ αυτό και προκύπτουν χαμηλότερης σημαντικότητας συνεπαγωγές μεταξύ των διαφορετικών έργων, και ούτε ξεκάθαρη στεγανοποίηση μεταξύ τους. Η αρχικά περιορισμένη στεγανοποίηση που προκύπτει για τους μαθητές της Α τάξης φαίνεται να ξεπερνιέται για τους μαθητές της Β τάξης, οπότε τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης δε διαδραματίζουν τον ίδιο ρόλο για τους μαθητές των διαφορετικών ηλικιακών ομάδων.

Η σύνθεση των αποτελεσμάτων της έρευνας, δεν επιτρέπει τη διατύπωση βέβαιων και σαφών συμπερασμάτων ως προς το ρόλο και την αποτελεσματικότητα της χρήσης των αναπαραστάσεων για την εκτέλεση πράξεων πρόσθεσης στις πρώτες δύο τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Πέρα από το διαφοροποιημένο ρόλο του κάθε είδους αναπαράστασης για κάθε ομάδα μαθητών τα μη σαφή αποτελέσματα που προκύπτουν συνδέονται πιθανότητα και με κάποιες αδυναμίες κατά το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή της έρευνας. Αρχικά, ο αριθμός του δείγματος για κάθε ομάδα μαθητών είναι μικρός, γεγονός που επηρεάζει τη σημαντικότητα στων αποτελεσμάτων. Ακόμη, η περίοδος διεξαγωγής της έρευνας (προς το τέλος της σχολική χρονιάς) δυσχεράνει την ευδιάκριτη επίδραση του κάθε είδους αναπαράστασης στα παιδιά και δεν επιτρέπει να δούμε ξεκάθαρα το αν και σε ποιο βαθμό επηρεάζει την επίλυση των έργων η κάθε αναπαράσταση που δόθηκε. Επιπρόσθετα, τα τρία είδη έργων χορηγήθηκαν ταυτόχρονα, γεγονός που ενδέχεται να επηρέασε σε κάποιο βαθμό την απόφαση των μαθητών ως προς τη χρήση των αναπαραστάσεων, αφού προηγήθηκε η επίλυση των ίδιων αριθμητικών προτάσεων χωρίς την αναπαράσταση. Η έντονη επίδραση του παράγοντα αυτού, βέβαια, θα μας οδηγούσε στο να αναμένουμε τα ίδια ποσοστά επιτυχίας σε όλα τα αντίστοιχα έργα, γεγονός που δεν προκύπτει με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας, αφού τα ποσοστά επιτυχίας που προκύπτουν για τα έργα με αριθμητική γραμμή είναι χαμηλότερα από τα υπόλοιπα έργα.

Επιπλέον, η δυσκολία στα έργα αριθμητικής γραμμής, κυρίως για του μαθητές της Α Δημοτικού, ενδέχεται να οφείλεται και στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν είχαν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν οι ίδιοι την αριθμητική γραμμή, ώστε να συμπληρώσουν πάνω σε αυτήν τον κάθε όρο της πρόσθεσης και να εκτελέσουν τη διαδικασία. Αντιθέτως, οι μαθητές έπρεπε να επεξεργαστούν τις ήδη δοσμένες πληροφορίες στην αριθμητική γραμμή για να βρουν την απάντηση, γεγονός που πιθανόν να δημιούργησε επιπρόσθετο νοητικό φόρτος στους μαθητές, μειώνοντας έτσι τις επιδόσεις στους στα σχετικά έργα. Συνεπώς, αφού με βάση τα αποτελέσματα από τα διαγράμματα ομοιότητας και τις σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ των έργων, προκύπτει ότι οι μαθητές φαίνεται να χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή ως υποστηρικτικό μέσο για την εκτέλεση των πράξεων, θα πρέπει να σκεφτούμε για το είδος της αναπαράστασης τα αριθμητικής γραμμής που θα πρέπει να δίνεται αρχικά στους μαθητές κατά την εκμάθηση των διεργασιών αυτών.

Θα πρέπει λοιπόν να διερωτηθούμε και να μελετήσουμε συστηματικά με ποια μορφή θα πρέπει να δίνεται η αριθμητική γραμμή, ώστε να λειτουργήσει υποστηρικτικά για τους μαθητές. Προκύπτουν, έτσι, ερωτήματα για μελλοντικές μελέτες ως προς τη χρήση της αριθμητικής γραμμής στις διάφορες ηλικίες μαθητών. Οι μαθητές βοηθιούνται περισσότερο όταν χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή για να αναπαραστήσουν οι ίδιοι τους αριθμούς και να εκτελέσουν τις πράξεις ή όταν η πράξη αναπαρίσταται ήδη στην αριθμητική γραμμή; Επιπλέον, πώς διαφοροποιείται η επίδραση της αριθμητικής γραμμής στα διάφορα στάδια μάθησης των αριθμητικών διαδικασιών από τους μαθητές; Είναι η χρήση των αναπαραστάσεων αυτών πιο εποικοδομητική όταν γίνεται στα αρχικά στάδια μάθησης και αποτελεί επιπρόσθετο νοητικό βάρος όταν κάποιες διαδικασίες φτάνουν στην αυτοματοποίηση;

2.7. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ

Όλα τα αποτελέσματα της έρευνας και οι στατιστικές αναλύσεις δείχνουν, ότι για το είδος πράξεων που εξετάζει η έρευνα σε σχέση με το συγκεκριμένο μέγεθος αριθμών οι πολλαπλές αναπαραστάσεις δεν είναι απαραίτητες, τουλάχιστον για τους μαθητές της Β΄ δημοτικού. Οι μαθητές της τάξης αυτής, καθώς και η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών της Α΄ τάξης, έχουν φτάσει σε ένα επίπεδο νοερών ή γραπτών υπολογισμών που δεν χρειάζονται τη βοήθεια της αναπαραστατικής εικόνας ή της αριθμογραμμής, για να απαντήσουν στις συγκεκριμένες ασκήσεις.

Βέβαια, το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμογραμμής δεν περιορίζεται μόνο σε μια απλή βοήθεια εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων. Το χαρακτηριστικό ενός γεωμετρικού μοντέλου είναι ότι ανάμεσα στ ΄ άλλα, ο δυναμικός χαρακτήρας του και οι δυνατότητες παραγωγής μιας πληθώρας καταστάσεων από μια απλή μαθηματική κατάσταση. Κατά συνέπεια, μερικές διδακτικές επιπτώσεις θα μπορούσαν να είναι:

(1) Οι αναπαραστατικές εικόνες θα ήταν χρήσιμες τους πρώτους μήνες φοίτησης των μαθητών στην Α΄ δημοτικού ή σε μαθητές με σοβαρά προβλήματα σε (νοερούς) αριθμητικούς υπολογισμούς ή τέλος σε προβλήματα που δίνονται σε λεκτική μορφή και οι μαθητές έχουν σοβαρά προβλήματα ανάγνωσης και κωδικοποίησης.

(2) Δεν αναδεικνύεται η χρήση αναπαραστάσεων ή άλλου είδους εικόνων σε παιδιά που έχουν ευχέρεια σε αριθμητικούς υπολογισμούς.

(3) Παρ ΄ ολ ΄ αυτά όταν ο δάσκαλος θέλει να ελέγξει την ικανότητα κατανόησης ενός λεκτικού προβλήματος απ ΄ τα παιδιά, η αναπαραστατική εικόνα λόγω

της επανάληψης της αριθμητικής πληροφορίας που δίνει μπορεί να συμβάλλει προς την κατεύθυνση αυτή.

(4) Η αριθμογραμμή δεν ενδείκνυται να χρησιμοποιείται ως βοήθημα για την εκτέλεση απλών αριθμητικών πράξεων.

(5) Παρ' ολ' αυτά και στην περίπτωση αυτή όταν ο δάσκαλος θέλει να εισαγάγει τους μαθητές σε ένα πιο δυναμικό τρόπο σκέψης και θέλει να οδηγήσει τους μαθητές στο να βρίσκουν οι ίδιοι και να αναπαριστούν πολύπλοκες αριθμητικές σχέσεις τότε θα μπορούσε να είναι χρήσιμο εργαλείο.

2.8. ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ – ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ

Στα πλαίσια μελέτης περίπτωσης, που πραγματοποιήθηκε για την παρούσα εργασία, συμπληρωματικά με την ποσοτική έρευνα, διεξήχθη συνέντευξη σε μαθητή, που μόλις είχε αποφοιτήσει από την Α΄ τάξη του δημοτικού.

Σκοπός της εν λόγω μελέτης ήταν να βοηθήσει στην κατανόηση του τρόπου χρήσης της αριθμογραμμής από μαθητές των μικρών τάξεων του δημοτικού σχολείου.

Πυρήνας όλων των παραπάνω αποτελεί το αν τελικά το μοντέλο της αριθμογραμμής αποτελεί βοηθητικό εργαλείο στα χέρια των μαθητών ή εμπόδιο για την επίλυση προσθετικών έργων.

Στην συνέντευξη, που πραγματοποιήθηκε, αντίθετα με την ποσοτική έρευνα το ερωτηματολόγιο, που δόθηκε στον μαθητή διέφερε από το ερωτηματολόγιο, που δόθηκε στους υπόλοιπους μαθητές της ποσοτικής έρευνας.

Σε αυτό το νέο ερωτηματολόγιο διέφερε η σειρά με την οποίο δόθηκαν οι τρεις φάσεις του ερωτηματολογίου. Πρώτα δόθηκαν οι πράξεις με την συνοδεία αριθμογραμμής, σε δεύτερη φάση δόθηκαν οι πράξεις με τη συνοδεία εικόνα και τελική φάση του ερωτηματολογίου αποτέλεσε η συμβολική αναπαράσταση των προσθετικών έργων. Επίσης, το καινούριο ερωτηματολόγιο διαφοροποιήθηκε σε σχέση με το προηγούμενο στο περιεχόμενο των πράξεων. Οι αριθμοί, που λάμβαναν χώρα στο ερωτηματολόγιο, διέφεραν μεταξύ τους σε αντίθεση με τις πράξεις του πρώτου ερωτηματολογίου όπου οι πράξεις ήταν οι ίδιες και στις τρεις φάσεις της έρευνας και το μόνο που άλλαζε ήταν η σειρά με την οποία παρουσιάζονταν οι πράξεις αυτές. Οι αλλαγές αυτές στο καινούριο ερωτηματολόγιο, που χορηγήθηκε στον μαθητή, πραγματοποιήθηκαν κατόπιν των διαπιστώσεων που προέκυψαν μετά τα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας κατά τη διάρκεια ερμηνείας των αποτελεσμάτων αυτών, όπως αναφέρεται σε προηγούμενη παράγραφο της παρούσας εργασίας.

Από την συνέντευξη με τον συγκεκριμένο μαθητή προέκυψε πληθώρα αξιοσημείωτων συμπερασμάτων.

Αρχικά, όπως φάνηκε από τη συνέντευξη ο μαθητής δεν ερχόταν πρώτη φορά σε επαφή με το μοντέλο της αριθμογραμμής, αλλά το γνώριζε ήδη και ήξερε πως λειτουργεί.

Στη συνέχεια, από τις απαντήσεις στις διευκρινιστικές ερωτήσεις του ερευνητή γίνεται φανερό πως το παιδί έχει αναπτύξει δικές του στρατηγικές πρόσθεσης.

Στο σχόλιο (8) στην απομαγνητοφώνηση της συνέντευξης (παράρτημα), το παιδί αναφέρει «Γιατί 4 + 4 οκτώ άρα αυτό κάνει σίγουρα επτά» ως διευκρίνιση για τον τρόπο, που σκέφτηκε για να βρει τον σωστό αριθμό στην πράξη $4 + 3 = \square$. Το παιδί σκέφτηκε να προσθέσει στο 3 μια μονάδα ώστε να γίνει 4 και να τον διευκολύνει κάνοντας την πρόσθεση 4 + 4 και στην συνέχεια αφαίρεσε τη μονάδα, που είχε βάλει, καταλήγοντας μ' αυτόν τον τρόπο στον σωστό αριθμό.

Πιο κάτω, στην πράξη $\square + 3 = 12$, όπου το παιδί δυσκολεύτηκε και δεν είχε κάποια στρατηγική για να βρει τη λύση, αποφάσισε να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή (παράρτημα – απομαγνητοφώνηση (13) – (22)).

Το παιδί διευκρινίζει πως δεν ήθελε να σημειώσει τίποτε επάνω στην αριθμογραμμή, γεγονός που από μόνο του επιβεβαιώνει πως το παιδί γνώριζε όντως να χρησιμοποιεί σωστά την αριθμογραμμή εφόσον τα βέλη ήταν ήδη σχεδιασμένα επάνω στην αριθμογραμμή και κατά κόρον όσα παιδιά σχεδίαζαν επάνω στην αριθμογραμμή έδειχναν να μην έχουν αντιληφθεί τη χρήση της.

Το παιδί στη συνέχεια δείχνει αρκετά εξοικειωμένο με την αριθμογραμμή (παράρτημα – απομαγνητοφώνηση (38) – (45)). Μάλιστα, από τις συγκεκριμένες φράσεις του φαίνεται ιδιαίτερη εξοικείωση στη χρήση της αριθμμογραμμής εφόσον αναφέρεται σ' αυτή σαν να' ναι κάτι «αυτονόητο» πως θα την χρησιμοποιούσε για να τον βοηθήσει (εφόσον και η συγκεκριμένη πράξη ήταν από αυτές που τον δυσκόλεψαν $6 + \square = 15$).

Στην επόμενη πράξη ($\square + 9 = 26$) το παιδί δυσκολεύεται αρκετά (παράρτημα απομαγνητοφώνηση (49)). Παρ' όλ ' αυτά δε χρησιμοποιεί την αριθμογραμμή κατ’ ευθείαν αλλά προσπαθεί νοερά να υπολογίσει το σωστό αποτέλεσμα. Ενδεχομένως, το παιδί είναι περισσότερο εξοικειωμένο στους νοερούς υπολογισμούς με αποτέλεσμα να αισθάνεται μεγαλύτερη ασφάλεια με αυτούς. Το γεγονός αυτό, αποκλείει τη χρήση της αριθμογραμμής από το παιδί δυσκολεύοντάς το να βρει το αποτέλεσμα. Μονάχα, κατόπιν επαναλαμβανόμενης παροτρύνσεως από τον ερευνητή το παιδί «αφήνεται» να κάνει σωστή χρήση της αριθμογραμμής, όπως ήδη είχε δείξει ότι γνώριζε. Το παιδί, παρά την πρώτη προσπάθεια του ερευνητή να το παροτρύνει να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή (παράρτημα – απομαγνητοφώνηση (61)), επιμένει να μην εγκαταλείπει την προσπάθειά του να υπολογίσει νοερά το αποτέλεσμα (παράρτημα – απομαγνητοφώνηση (66)).

Το γεγονός αυτό πιθανώς προκύπτει από την χρήση περιορισμένων μεθόδων υπολογισμού στο σχολείο (συνήθως νοερούς) καταδεικνύοντας την ανάγκη ύπαρξης πλουραλισμού μεθόδων όσον αφορά τον υπολογισμό αριθμητικών πράξεων στο σχολείο αλλά και εξοικείωση μ’ αυτές.

Για την επόμενη πράξη του ερωτηματολογίου $\square + 2 = 10$ το παιδί δεν μπήκε σε καμία διαδικασία υπολογισμού του αποτελέσματος αλλά κατά δήλωσή του (παράρτημα – απομαγνητοφώνηση (84)) το ήξερε απ’ έξω.

Για την πράξη που ακολούθησε το παιδί χρησιμοποίησε ξανά την αριθμογραμμή, ενώ για την επόμενη πράξη το παιδί ανέπτυξε τη δική του στρατηγική υπολογισμού του αποτελέσματος, διαφορετική από το την προηγούμενη αυτή τη φορά.

Τέλος, το παιδί δηλώνει, πως η αριθμογραμμή τον βοήθησε στις πιο δύσκολες πράξεις, που δεν ήξερε απ’ έξω τα αποτελέσματα ή δεν μπόρεσε να αναπτύξει μια δική του στρατηγική υπολογισμού.

Κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης της δεύτερης φάσης του ερωτηματολογίου, ο μαθητής όπως και στην πρώτη φάση, άλλες πράξεις τις ήξερε απ’ έξω ενώ σε άλλες ανέπτυξε δικές του στρατηγικές υπολογισμού των αποτελεσμάτων, ανάλογες με αυτές της πρώτης φάσης του ερωτηματολογίου.

Ο μαθητής δεν έδειξε να είναι το ίδιο πρόθυμος να χρησιμοποιήσει την εικόνα σε πράξη όπου δυσκολευόταν. Μόνο κατόπιν παροτρύνσεως του ερευνητή και σε πράξεις όπου δυσκολευόταν, το παιδί βοηθήθηκε από την εικόνα. Το παιδί δεν ήταν το ίδιο εξοικειωμένο με την αναπαραστασιακή εικόνα όσο με την αριθμογραμμή. Προς το τέλος της δεύτερης φάσης του ερωτηματολογίου μόνο, το παιδί έδειξε να εξοικειώνεται με την αναπαραστασιακή εικόνα και να την χρησιμοποιεί για τον βοηθήσει στις πράξεις στις οποίες δυσκολευόταν.

Τέλος, στο τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου το παιδί εκτέλεσε τις πράξεις μέσω νοερών υπολογισμών ενώ μια πράξη, η οποία τον δυσκόλεψε δεν την συμπλήρωσε καθόλου. Σε αυτή την πράξη ενδεχομένως το παιδί εάν είχε στη διάθεσή του κάποια βοηθητική αναπαράσταση θα ήταν πολύ πιθανό να τη συμπληρώσει σωστά, δεδομένου ότι οι πράξεις και στις τρεις φάσεις του ερωτηματολογίου, όπου δυσκολευόταν έκανε χρήση της αριθμογραμμής ή της αναπαραστασιακής εικόνας και κατέληγε στο σωστό αποτέλεσμα.

Συνεπής με τα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας της παρούσας εργασίας, ο μαθητής έκανε μεμονωμένες προσπάθειες για χρήση των αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, έκανε χρήση των αναπαραστάσεων στα προσθετικά έργα στα οποία αδυνατούσε να επιλύσει μόνος του.

Επίσης, επιβεβαιώνεται ότι οι αναπαραστάσεις επηρέασαν θετικά τον μαθητή εφόσον κατάφερε μέσω των αναπαραστάσεων να λύσει τα έργα, που τον δυσκόλεψαν ενώ αντίθετα η αριθμογραμμή δεν έδειξε να τον δυσκολεύει ιδιαίτερα αντίθετα τον διευκόλυνε στα δύσκολα σημεία. Από τα παραπάνω αλλά και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης ο μαθητής έδειξε να αντιμετωπίζει τις αναπαραστάσεις ως υποστηρικτικά μέσα επιβεβαιώνοντας ένα από τα ευρήματα της ποσοτικής έρευνας της ποσοτικής έρευνας.

Επιπλέον, ο συγκεκριμένος μαθητής έδειξε να μην επηρεάζεται ιδιαίτερα από τη θέση του αγνώστου μέσα στην εξίσωση κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΜΕΡΟΣ Α

Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει σε κάθε κουτάκι.

$7 + 3 = \square$

$\square + 7 = 16$

$17 + 5 = \square$

$7 + \square = 10$

$9 + 7 = \square$

$\square + 5 = 22$

$\square + 3 = 10$

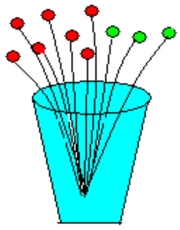
$9 + \square = 16$

$17 + \square = 22$

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

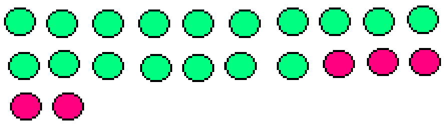
ΜΕΡΟΣ Β

Να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει σε κάθε κουτάκι.

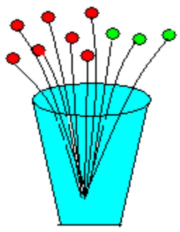


$7 + 3 = \square$

$9 + \square = 16$

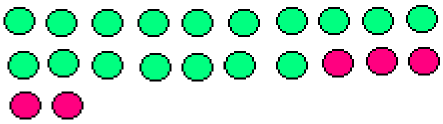


$17 + 5 \square$

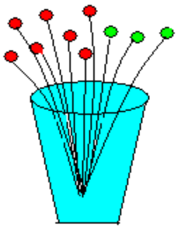


$7 + \square = 10$

$9 + 7 = \square$

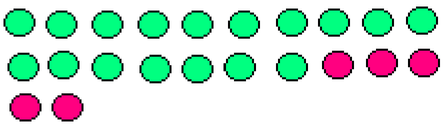


$\square + 5 = 22$



$\square + 3 = 10$

$\square + 7 = 16$

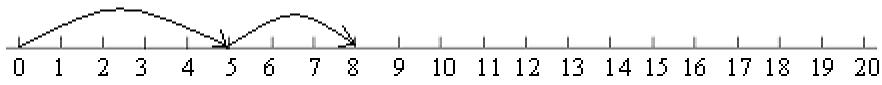


$17 + \square = 22$

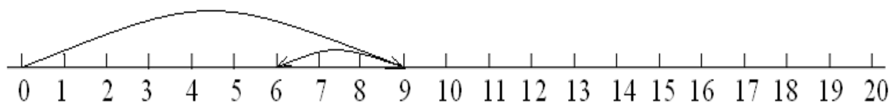
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΜΕΡΟΣ Γ

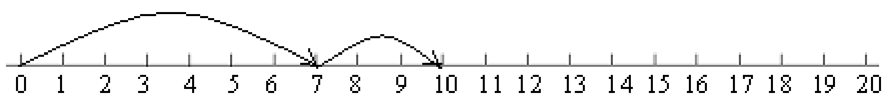
Να συμπληρώσετε τα κουτάκια όπως το παράδειγμα.



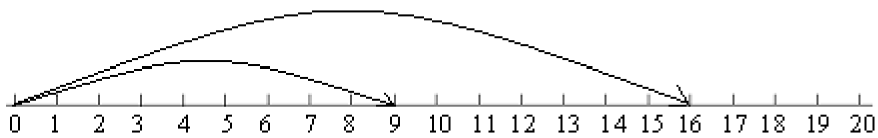
5 + 3 = 8



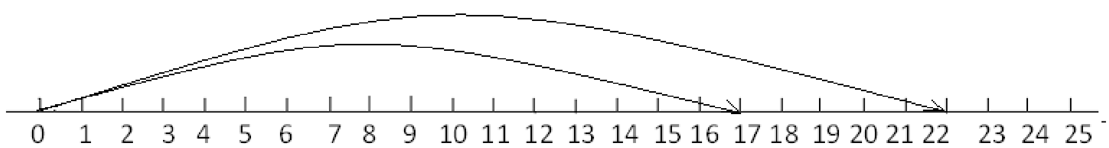
9 – 3 = 6



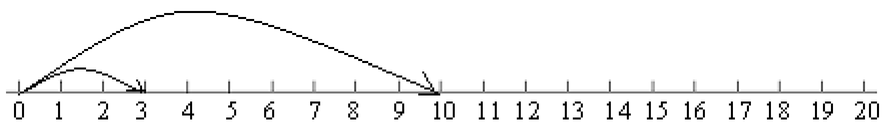
$7 + 3 = \boxed{}$



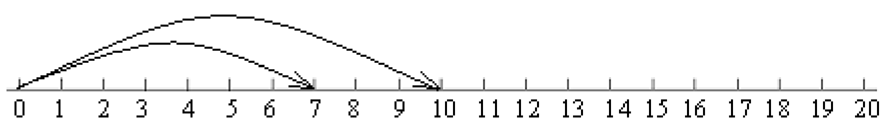
$9 + \boxed{} = 16$



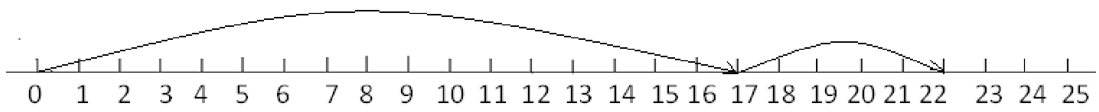
$17 + \boxed{} = 22$



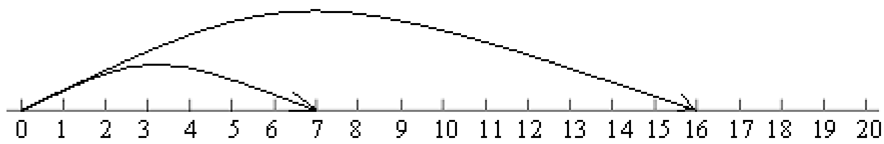
$\boxed{} + 3 = 10$



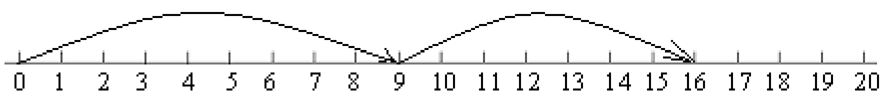
$7 + \boxed{} = 10$



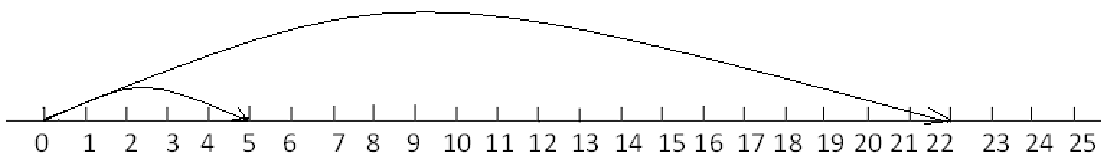
17 + 5 = □



□ + 7 = 16



9 + 7 = □



□ + 5 = 22

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΠΟΜΑΓΝΗΤΟΦΩΝΗΣΗ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Απομαγνητοφώνηση συνέντευξης 2/8/2014

Αρ	Ομιλι-τής		Σχόλια
1	Β.	Μάριε τις έχεις ξαναδεί αυτές εδώ τις γραμμές με τους αριθμούς;	
2	Μ.	Ναι	
3	Β.	Ωραία. Ξέρεις πώς λειτουργούν;	
4	Μ.	Ναι	
5	Β.	Μπράβο. Λοιπόν αυτό που σου ζητάνε οι ασκήσεις εδώ πέρα είναι να συμπληρώσεις το κουτάκι κάθε φορά όπως στα παραδείγματα εδώ πέρα. Έχεις χρόνο να σκεφτείς και τα λύνεις με όποιον τρόπο θέλεις	
6		[...]	το παιδί σκεφτόταν πώς να λύσει την πρώτη πράξη στο ερωτηματολόγιο με τις αριθμογραμμές 4 + 3 = $\square$ και βρίσκει ότι είναι 7
7	Β.	Δε μου λες πώς το βρήκες αυτό το αποτέλεσμα;	
8	Μ.	Γιατί 4 + 4 οκτώ άρα αυτό κάνει σίγουρα επτά.	
9	Β.	Μάλιστα. Δηλαδή με το μυαλό σου το σκέφτηκες ε;	
10	Μ.	Ναι	

11	Β.	Οκ. Για συνέχισε..	
12	Β.	Αυτό πώς το βρήκες;	την επόμενη πράξη □+ 3 = 12
13	Μ.	3 και 9 δώδεκα	το παιδί δείχνει επάνω στην αριθμογραμμή
14	Β.	Κοίταξες εδώ δηλαδή;	
15	Β.	Επάνω στη γραμμή;	
16	Μ.	Ναι	
17	Β.	Μάλιστα.	
18	Β.	Ωραία, και πώς ακριβώς το έκανες;	
19	Β.	Για δείξε μου ξανά.	
20	Μ.	Επειδή είμαστε	δείχνει το 9 στην αριθμογραμμή επάνω
21	Μ.	και τρία	δείχνει το βέλος που φτάνει μέχρι το 12
22	Μ.	Δώδεκα	
23	Β.	Α, ωραία!	
24	Β.	Μάλιστα, για προχώρα παρακάτω.	
25		[...]	το παιδί συμπληρώνει σωστά και την επόμενη πράξη
26	Β.	Πάρα πολύ ωραία..Συνεχίζουμε!	
27	Β.	Μπορείς και να σημειώνεις αν θέλεις πάνω ε;	
28	Μ.	Δε θέλω.	
29	Β.	Πολύ ωραία!	
30	Β.	Αυτό πώς το σκέφτηκες;	
31	Μ.	Ε.. 6 και 4 δέκα.	
32	Β.	Με το μυαλό σου.	

33	Μ.	Ναι	
34	Β.	Ωραία	
35		[...]	το παιδί προχωράει στην επόμενη πράξη και τη λύνει
36	Β.	Ωραία! Πολύ ωραία! Επίσης, πώς το σκέφτηκες αυτό Μάριε;	
37	Β.	Για πες μου πώς το βρήκες;	
38	Μ.	Όπως κάναμε και τις άλλες φορές.	
39	Β.	Δηλαδή;	
40	Μ.	Ε, έξι	δείχνει επάνω στην αριθμογραμμή το 6 εκεί που τελειώνει το πρώτο βέλος
41	Μ.	και εννιά..	
42	Μ.	το δείχνει και μόνο του...	
43	Μ.	έχει αυτή την τεράστια..	Γραμμή
45	Μ.	το βέλος που πάει προς το δεκαπέντε	
46	Β.	Μπράβο! Μπράβο σου! Συνέχισε.	
47		[...]	το παιδί προσπαθεί να λύσει την επόμενη πράξη + 9 = 26 αλλά φαίνεται να δυσκολεύεται εφόσον περνάει η ώρα δείχνει να προσπαθεί νοερά χωρίς να βρίσκει κάποιο αποτέλεσμα
48	Β.	Σε δυσκολεύει αυτό;	
49	Μ.	Ναι	
50	Β.	Τι ψάχνεις;	
51	Μ.	Εννιά στο είκοσι έξι	το παιδί δείχνει τους

			αριθμούς που βρίσκονται στην πράξη αυτή τη φορά και όχι στην αριθμογραμμή, ενώ δεν μπορεί να εκφράσει με λόγια τι ακριβώς ψάχνει γι ΄ αυτό και το δείχνει
52	Β.	Άρα ψάχνεις έναν αριθμό που θα τον προσθέσεις στο εννιά..να τον βάλεις εδώ	του δείχνω το άδειο κουτάκι
53	Β.	και να κάνει συνολικά είκοσι έξι	
54	Μ.	Ναι	
55	Β.	Τι σκέφτεσαι;	
56	Μ.	Πόσο κάνει...	
57		[...]	φαίνεται να μετράει πάλι νοερά ενώ δεν σκέφτεται να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή
58	Β.	Τι πράξη κάνεις στο μυαλό σου τόση ώρα;	
59	Β.	Δοκιμάζεις μήπως αριθμούς που βλέπεις στη γραμμή;	
60	Μ.	Ναι	
61	Β.	Η γραμμή τι λέει;	
62	Μ.	Δεκαεφτά και πάει προς το είκοσι έξι.	
63	Β.	Στο είκοσι έξι πάει;	
64	Μ.	Ναι	
65	Β.	Πόσα του έβαλε του δεκαεφτά;	
66		[...]	το παιδί πάει να προσπαθήσει για τους νοερούς υπολογισμούς

67	Β.	Γιατί το κάνεις με το μυαλό και δεν το βλέπεις στη γραμμή;	
68	Β.	Θα το δεις πάνω στη γραμμή;	
69	Μ.	Ναι	
70	Β.	Πόσα είναι;	
71	Β.	Πόσα του έβαλε του δεκαεφτά και πήγε στο είκοσι έξι;	
72	Β.	Μπορείς να μου πεις;	
73	Μ.	Ναι	
74	Β.	Για πες μου	
75	Μ,	Εννέα	
76	Β.	Εννέα...	
77		[...]	γελάει δείχνοντας να βρήκε το αποτέλεσμα μέσω της γραμμής
78		[...]	γελάω κι εγώ δείχνοντάς του ότι έχει κάνει το σωστό
79	Β.	Γιατί γελάς;	
80	Μ.	Δεκαεφτά και εννιά είκοσι έξι	
81	Β.	Μπράβο! Μπράβο !	
82		[...]	το παιδί συμπληρώνει αμέσως την επόμενη πράξη $\square + 2 = 10$
83	Β.	Αυτό το ξέρεις απ' έξω;	
84	Μ.	Ναι .	
85	Μ.	Είναι πανεύκολο.	
86	Β.	Πάμε στο επόμενο	
87	Μ.	Εννιά	

88	Β.	Μέτρησες τα νούμερα επάνω στη γραμμή;	
89	Β.	Τους αριθμούς;	
90	Μ.	Ναι	
91	Β.	Ωραία	
92		[...]	προχωράει στην επόμενη πράξη 17 + $\square$ = 27
93	Μ.	Δέκα..	
94	Μ.	γιατί πριν ήταν εννέα	
95	Β.	Αααα, μάλιστα.	
96	Β.	Και;	
97	Β.	Και επειδή ήτανε πριν εννέα;	
98	Μ.	Άμα βάλεις έναν αριθμό πάνω είναι είκοσι επτά.	
99	Β.	Το δεκαεπτά εννοείς;	
100	Μ.	Ναι	
101	Β.	Ααα, μάλιστα.	το παιδί εννοούσε πως αν βάλεις μια δεκάδα στο δεκαεπτά φτάνεις στο είκοσι επτά
102	Β.	Για πες μου Μάριε, μέχρι στιγμής σε βοήθησε η αριθμογραμμή;	
103	Μ.	Ναι	
104	Β.	Θυμάσαι σε ποιά από αυτές σε βοήθησε;	του δείχνω τις πράξεις που είχε μόλις συμπληρώσει
105		[...]	μου δείχνει μια αλλά μάλλον είναι στην τύχη αυτή που μου έδειξε
106	Β.	Όχι δα αφού αυτό δεν το ήξερες απ’ έξω	4 + 3 = $\square$

107	Μ.	Ε καλά αυτό το’ ξερα απ’ έξω	
108	Β.	Μάλιστα οπότε στις πιο δύσκολες πράξεις σε βοήθησε;	
109	Μ.	Ναι	
110	Β.	Ωραία, για να συνεχίσουμε	
111	Β.	Πάμε παρακάτω τώρα.	
112	Β.	Πάλι εδώ πρέπει να συμπληρώσεις το κουτάκι με τον σωστό αριθμό	
113	Β.	Έτσι ;	
114	Β.	Και κάθε πράξη έχει και μια εικόνα δίπλα.	
115	Β.	Ναι ; Ωραία.	
116	Μ.	Οκτώ	ανακοινώνει το αποτέλεσμα της πρώτης πράξης
117	Β.	Ναι .	
118	Β.	Πώς το βρήκες το ήξερες κι αυτό απ’ έξω;	
119	Β.	Ή σκέφτηκες επτά.. οκτώ ;	
120	Μ.	Όχι το ΄ξερα κι αυτό απ’ έξω.	
121	Β.	Έξι και δύο οκτώ;	
122	Μ .	Ναι	
123	Μ.	Δηλαδή άμα σου πω έξι και τέσσερα;	
124	Μ.	Δέκα	
125	Β.	Πέντε και τρία;	
126		[...]	Μετράει
127	Β.	Μετράς όμως από μέσα σου..έξι..επτά..οκτώ ε;	
128	Μ.	Ναι	
129	Β.	Έτσι πρέπει ωραία	
130	Μ.	Κάποιες φορές..	
131	Β.	Κάποιες φορές ναι αλλά κάποιες φορές το ’χεις μάθει απ’ έξω.	
132	Β.	Ωραία.	
133	Μ.	Δεκαπέντε	ανακοινώνει το ήδη

			δοσμένο αποτέλεσμα της επόμενης πράξης $\square$+8=15 αλλά έχει συμπληρώσει τον σωστό αριθμό το 7
134	Β.	Ωραία. Αυτό πώς το βρήκες;	εννοώ το 7
135	Μ.	Οκτώ κι οκτώ δεκάξι..και..	
136	Β.	Μάλιστα	
137	Β.	Εδώ;	
138	Β.	Τι γίνεται;	
139		[...]	Ο μαθητής συμπληρώνει σωστά το αποτέλεσμα της επόμενης πράξης 19 + 6 =
140	Β.	Πώς το σκέφτηκες;	
141	Μ.	Ε, το σκέφτηκα.	
142	Β.	Πώς;	
143	Μ.	Επειδή, είκοσι και έξι είκοσι έξι.	
144	Β.	Μπράβο.	
145	Β.	Δεκαεννιά τώρα, βγάζω ένα ναι;	
146	Μ.	Ναί.	
150	Β.	Πολύ ωραία	
151		[...]	ο μαθητής συμπληρώνει και το επόμενο αμέσως6+$\square$ = 10
152	Β.	Απ’ έξω το ’ξερες αυτό έτσι;	
153	Μ.	Ναί.	
154	Μ.	Κι αυτό δεκάξι	αναφέρεται στην επόμενη πρόσθεση 8 + 8 = $\square$

155	Μ.	Κι αυτό απ' έξω.	
156	Β.	Κι αυτό απ' έξω μάλιστα	
157	Β.	Πάμε πιο κάτω.	
158		[...]	ο μαθητής δείχνει να δυσκολεύεται στην επόμενη πράξη $\square + 7 = 22$
159	Β.	Υπάρχει κάτι που μπορεί να σε βοηθήσει εδωπέρα;	
160	Μ.	Ε..	
161	Β.	Απ' την εικόνα;	
162	Μ.	καλά..μπορώ να το σκεφτώ κι απ' το μυαλό μου	δεν βλέπει την εικόνα ως χρήσιμο εργαλείο για να βρει τον αριθμό που λείπει
163	Β.	Ό,τι νομίζεις. Στην εικόνα;	
164	Μ.	Όχι κοιτάω να βρω...	Προσπαθούσε ακόμα με νοερούς υπολογισμούς
165	Β.	Δυσκολεύεσαι;	
166	Μ.	Ναί και σε αυτό.	
167	Β.	Ε, εντάξη δεν πειράζει.	
168	Β.	Τι σκέφτεσαι;	
169	Β.	Προσπαθείς να βρεις απ' το επτά να μετρήσεις πόσα είναι;	
170	Μ.	Ναι	
171	Β.	Για δες μήπως μπορεί να σε βοηθήσει η εικόνα με κάποιο τρόπο.	
172		[...]	Παρατηρεί την εικόνα
173	Β.	Τι βλέπεις στην εικόνα;	

174	Μ.	Τα μπαλάκια που είναι είκοσι δύο.	
175	Β.	Μπράβο...για κοίτα λοιπόν λίγο καλύτερα μέσα στην εικόνα.	
176		[...]	Γελάει
177	Β.	Το βρήκες;	
178	Μ.	Δεκαπέντε!	
179	Β.	Δεκαπέντε.	
180	Β.	Τι μέτρησες και το βρήκες;	
181	Μ.	Τα μπαλάκια.	
182	Β.	Τα πράσινα ε;	
183	Μ.	Ναι	
184	Β.	Μπράβο.	
185	Μ.	Δηλαδή τα πράσινα είναι επτά	
186	Β.	Μπράβο	
187	Μ.	Τα άλλα είναι δεκαπέντε	
188	Β.	Μπράβο είδες; Σε βοήθησε λοιπόν.	
189		[...]	συμπληρώνει την επόμενη αριθμητική παράσταση $\square + 7 = 10$
190	Μ.	Τρία	Ψιθυρίζει
191	Β.	Α! Τρία και εφτά;	
192	Β.	Πώς το σκέφτηκες αυτό;	τον ρωτάω για την επόμενη πράξη που έχει ήδη συμπληρώσει 8 + = 17
193	Μ.	Οκτώ κι οκτώ δεκάξι.	
194	Μ.	Θα βάλουμε κι ένα παραπάνω δεκαεπτά	γελάει με αυτό που σκέφτηκε
195	Β.	Μάλιστα	

196		[...]	προχωράει στην επόμενη πράξη και τη λύνει 19 + = 28
197	Β.	Πώς το βρήκες;	
198	Μ.	δείχνει την εικόνα	
199	Β.	Μπράβο!	
200	Μ.	Τα μπαλάκια με ευκολεύουν	
201	Β.	Σε ευκολεύουν;	
202	Μ.	Ναί	
203	Β.	Εντάξει.. «με διευκολύνουν»	
204	Μ.	Ναι	
205	Β.	Μπράβο	
206	Μ.	Δηλαδή γίνεται πιο εύκολο.	
207	Β.	Μπράβο	
208		[...]	προχωράμε στο τελευταίο ερωτηματολόγιο που είναι η συμβολική αναπαράσταση των πράξεων από τους αριθμούς. Απουσία αριθμογραμμής και αναπαραστατικής εικόνας αυτή τη φορά.
209	Β.	Κι εδώ δεν έχει τίποτα...	
210	Β.	σε διευκόλυνε γενικά η εικόνα;	
211	Μ.	Ναι	
212	Β.	Ναι έτσι όπου δυσκολεύτηκες.	
213	Β.	Μάλιστα.	
214	Β.	Τα γλειφιτζούρι εδώ πέρα δεν τα πρόσεξες;	επιστρέφω στο προηγούμενο

			ερωτηματολόγιο για διευκρινιστικές ερωτήσεις
215	Β.	και τα λουλουδάκια στο βάζο;	
216	Β.	Δε δυσκολεύτηκες στις πράξεις όμως ε; γι' αυτό..	
217	Μ.	Ναι	
218	Β.	Τώρα μόνος σου όπως νομίζεις Μάριε.	αναφέρομαι στο τελευταίο ερωτηματολόγιο που δεν έχει κάποια αναπαράσταση
219		[...]	συμπληρώνει το πρώτο
220	Μ.	δέκα	Ψιθυρίζει
221	Μ.	αυτό το σκέφτηκα με το μυαλό μου	
222	Β.	Ναι , τώρα εδώ δεν έχεις κάτι, δεν έχεις κάποια εικόνα να σε βοηθάει.	
223	Μ.	Ε, ναι	
224	Β.	...ούτε καμία γραμμή.	
225	Β.	Θα το σκέφτεσαι με το μυαλό σου τώρα.	
226	Β.	Γράψε αυτό που εσύ θεωρείς σωστό.	
227	Μ.	Δυσκολεύομαι σ' αυτό.	
228	Β.	Να δω ποιό;	
229	Μ.	Εδώ πέρα	
230	Β.	Εδώ;	
231	Μ.	Ναι.	
232	Β.	Οκ. Δεν μπορείς να το βρεις δηλαδή πόσο κάνει.	
233	Μ.	Ναι	
234		[...]	με κοιτάει

235	Μ.	είκοσι τρία;	ψιθυρίζει και με ρωτάει
236	Β.	Δεν ξέρω.	
237	Β.	Δεν πειράζει προχώρα και κάνε τα υπόλοιπα αν δεν μπορείς κάποιο	
238		[...]	προχωράει στα επόμενα και τα συμπληρώνει όλα σωστά
239	Β.	Μπράβο Μάριε!	
240	Β.	Τελειώσαμε.	

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΡΘΡΑ

1.Adams, R. J., & Khoo, S. T. (1996). Quest. *Australian Council for Educational Research*.

2.Amato, S. A. (2004). Improving student teachers' mathematical knowledge. In *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*.

3.Andrich, D. (1978). Application of a psychometric rating model to ordered categories which are scored with successive integers. *Applied psychological measurement*, *2*(4), 581-594.

4.Andrich, D. (1988). *Rasch models for measurement* (Vol. 68). Sage Publications.

5.Anzai, Y. (1991). Learning and use of representations for physics expertise. *Towards a general theory of expertise*, 64-92.

6.Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science*, *255*(5044), 556-559.

7.Barwise, J., & Etchemendy, J. (1994). Turing's World 3.0. An Introduction to Computability Theory.

8.Bassarear, T. (2001). Mathematics for Elementary School Teachers: Explorations(2nd ed.). Boston: Houghton Mifflin Company

9.Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for research in mathematics education*, 47-60.

10.Beaton, A. E. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Campion Hall 323, Chestnut Hill, MA 02167.

11.Bertin, J. (1983). Semiology of graphics: diagrams, networks, maps.

12.Berends, I. E., & van Lieshout, E. C. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, *19*(4), 345-353.

13.Beveridge, M., & Parkins, E. (1987). Visual representation in analogical problem solving. *Memory & Cognition*, *15*(3), 230-237.

14.Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC1.2. Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

15.Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental psychology*, *42*(1), 189.

16.Booth,RL&Thomas,MJ (2000). Visualization in Mathematics Learning: Arithmetic problem-solvingandstudentdifficulties. Journal of Mathematical Behavior, •8(2), 169-190

17.Brenner M. E., Brar, T., Duran, R., Mayer, R. E., Moseley, B. R., & Webb,D., (1995, October). The role of multiple representations in learning arlgebra. Parer presenting at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH. (ERIC Document Reproduction Service No. ED391659)

18.Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard educational review*.

19.Carney, R. N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational psychology review*, *14*(1), 5-26.

20.Condry, K. F., & Spelke, E. S. (2008). The development of language and abstract concepts: the case of natural number. *Journal of Experimental Psychology: General*, *137*(1), 22.

21.COX,R.& BRNA,P.(in press).Supporting the use of external representations in problemsolving : the need for flexible learning environments.*Journal of Artificial Intelligence in Education, 6.*

22.Christou, C., & Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 436-442.

23.Davis, P., and Hersh, R. (1981).The mathematical_ experience.New York:Houghton Mifflin.

24.Dehaene, S. (1997). The number sense: How the mind creates mathematics. New York: Oxford University Press

25.Dickinson, P., & Eade, F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 41-47.

26.Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. *2001 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook: The Role of Representation in School Mathematics*, 77-89.

27.Diezmann, C. M., & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge of and errors on number lines. MERGA.

28.Diezmann, C. M., Watters, J. J., & English, L. D. (2001). Implementing mathematical investigations with young children.

29.Duval Raymond (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, October1999, (pp.25)*, Mexico.

30.Elia, I., van den Heuvel Panhuizen, M., & Georgiou, A. (2010). The role of pictures in picture books on children's cognitive engagement with mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, *18*(3), 275-297.

31.Elia, I., & Philippou, G. (2004). The Functions of Pictures in Problem Solving. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

32.English, L. D. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 81-112.

33.Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics, 16*(4), 411-424.

34.Fishbein, E. (1972). Les modes generatifs et le development intellectual, *Activites recherché pedagogues*, 5, 10-14.

35.Fishbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3-17

36.Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, 15-19.

37.Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht: Reidel.

38.Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. *The roles of representation in school mathematics*, 173-185.

39.Fuson, K. (1984). More complexities in subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 15(3), 214-225

40.Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 447-454).

41.Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the Cross-cultural Applicability of Number Lines in Conducting Arithmetic Operations Using Structural Equation Modelling: A Comparative Study Between Cypriot, Italian and Greek Primary Pupils. *World Studies in Education*, *5*(1), 85-101.

42.Gagatsis, A., & Patronis, T. (2001). Geometrical models in mathematics and in mathematics teaching. In A. Gagatsis (Ed.), Learning in Mathematics and Science and Educational Technology: Vol. 1 (pp. 333-336)

43.Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. Annales de didactique et de sciences cognitives, 8, 95-112.

44.Godino, J. D., Font, V., & del Professorat, F. D. F. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 189-210.

45.Goldin GA & Kaput JJ(1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning,1996* .

46.Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

47.Goldin, G. and Shteingold, N.: 2001, 'Systems of representations and the development of mathematical concepts', in A.A. Cuoco and F.R. Curcio (eds.), *The roles of Representation in School Mathematics*, NCTM, Reston, VA, pp. 1–23.

48.Goodman, L. A. (1968). The Analysis of Cross-Classified Data: Independence, Quasi-Independence, and Interactions in Contingency Tables with or without Missing Entries: RA Fisher Memorial Lecture. *Journal of the American Statistical Association*, *63*(324), 1091-1131.

49.Green, T. R., & Petre, M. (1992, September). When visual programs are harder to read than textual programs. In *Human-Computer Interaction: Tasks and Organisation, Proceedings of ECCE-6 (6th European Conference on Cognitive Ergonomics). GC van der Veer, MJ Tauber, S. Bagnarola and M. Antavolits. Rome, CUD.*

50.Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F. (1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation designs. *Educational evaluation and policy analysis*, *11*(3), 255-274.

51.Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., & McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

52.Hegarty, M., & Steinhoff, K. (1997). Individual differences in use of diagrams as external memory in mechanical reasoning. *Learning and Individual Differences*, *9*(1), 19-42.

53.Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 684.

54.Hilbert, D. (1902). Mathematical Problems Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in.

55.Hittleman, D. R. (1985). A picture is worth a thousand words… if you know the words. *Childhood Education*, *62*(1), 32-36.

56.Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In *This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre*

Interdisciplinaire de Recherche sur l" Apprentissage et le Développement en Education) of Université du Que1bec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec à Montréal.. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

57.Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. C. (1993). Mathematical symbols and representations. *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, 79-102.

58.JD Godino, V Font (2010).The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 9 (No. 1), 2010, pp. 189- 210.

59.Judy S. Deloache, David H. Uttal & Sophia L. Pierroutsakos (1998). The Development of early symbolization: Educational implications. *Learning and instruction.* Vol.8,No 4, pp. 325 – 339.

60.Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, *19*, 26.

61.Katz, I. R., & Anzai, Y. (1991). The construction and use of diagrams for problem solving. In *Proceedings of the International Conference on Advanced Research on*.

62.Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological review*, *92*(1), 109.

63.Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-464.

64.Koedinger, K. R., & Terao, A. (2002). A cognitive task analysis of using pictures to support pre-algebraic reasoning. In *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 542-547).

65.Kouba, V. L., & Franklin, K. (1993). Multiplication and division: Sense making and meaning. In J. Jansen (Eds.), *Research ideas for the classroom early childhood mathematics* (pp. 103-126). New York: Macmillan Publishing Company.

66.Krutetskii,V.A.(1976).The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.Chicago: University of Chicago Press

67.Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. *The roles of representation in school mathematics*, 146-165.

68.Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive science*, *11*(1), 65-100.

69.Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *105*(2), 395-438.

70.Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 33-40.

71.Luitel Bal Chandra (2005). *Multiple representations of addition and subtraction-related problems by third, fourth and fifth graders.* Project. SMEC, Curtin University

72.Luitel, B. C., 2005, Multiple representations of addition and subtraction-related problems by third, fourth and fifth graders.

73.Lunz, M. E., Wright, B. D., & Linacre, J. M. (1990). Measuring the impact of judge severity on examination scores. *Applied measurement in education*, *3*(4), 331-345.

74.Mandler, J. M., Seegmiller, D., & Day, J. (1977). On the coding of spatial information. *Memory & Cognition*, *5*(1), 10-16.

75.Mayer, R. E. (1989). Models for understanding. *Review of educational research*, *59*(1), 43-64.

76.Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 121-142.

77.Merrill, D. C., Reiser, B. J., Beekelaar, R., & Hamid, A. (1992, January). Making processes visible: scaffolding learning with reasoning-congruent representations. In *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 103-110). Springer Berlin Heidelberg.

78.Murray, H, Olivier, A. & Human, P. (1992) The development of young students' division strategies.Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2,152–159. Durham, New Hampshire.

79.Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. *Number concepts and operations in the middle grades*, *2*, 19-40.

80.Novick, L. R., & Hurley, S. M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: That is the question. *Cognitive Psychology*, *42*(2), 158-216.

81.Okamoto, Y., & Case, R. (1996). II. EXPLORING THE MICROSTRUCTURE OF CHILDREN'S CENTRAL CONCEPTUAL STRUCTURES IN THE DOMAIN OF NUMBER. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *61*(1- 2), 27-58. Psychology Review, Vol. 14, No. 3, 261-312.

82.Philippou, G., & Christou, K. (1995). Teaching mathematics. *Athens: Dardanos*.

83.Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development, 79*, 375-394.

84.Rauch, S. L., Savage, C. R., Brown, H. D., Curran, T., Alpert, N. M., Kendrick, A., ... & Kosslyn, S. M. (1995). A PET investigation of implicit and explicit sequence learning. *Human Brain Mapping*, *3*(4), 271-286.

85.Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

86.Roushman, L. (2003). The empty number line: a model in search of a learning trajectory. In Thompson, I., Enhancing Primary Mathematics Teaching, Open University Press, Maidenhead.

87.Schnotz, W. (2002). Commentary: Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational psychology review*, *14*(1), 101-120.

88.Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic press.

89.Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.of technology.

90.Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science*, *14*(3), 237-250.

91.Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 545.

92.Silas A. Ihedioha and Bright O. Osu (2012). An Assessment of Students' Proficiency in Using Number Line to Solve Mathematical Problems. *Gen. Math. Notes*, Vol. 12, No. 1, September 2012, pp. 11-19.

93.Singley, M. K., Anderson, J. R., Gevins, J. S., & Hoffman, D. (1989). The algebra word problem tutor. In *Artificial intelligence and education* (Vol. 267, p. 275).

94.SJ Pape, MA Tchoshanov (2011). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory into Practice*, Vol. 40 (No. 2), Realizing Reform in School Mathematics (Spring,2011), pp. 118-127.

95.Σιακαλλή Μ.., (2003), Η χρήση γεωμετρικών μοντέλων στη διδασκαλία των μαθηματικών: Η περίπτωση της αριθμητικής γραμμής.

96.Skoumpourdi, C. (2013). The number line: An auxiliary means or an obstacle. *International Journal for Mathematics Learning.(October, 12, 2010). http://www. cimt. plymouth. ac. uk/journal/skoumpourdi. pdf. Accessed*, *8*.

97.Stanic, G. and Kilpatrick, J. (1989). 'Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum'. In R.I. Charles and E.A. Silver (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, (pp.1-22). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

98.Stenning, K., Cox, R., & Oberlander, J. (1995). Contrasting the cognitive effects of graphical and sentential logic teaching: reasoning, representation and individual differences. *Language and Cognitive Processes*, *10*(3-4), 333-354.

99.Stylianou A. Despina & Silver A. Edward (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol.6 (No 4), pp. 353 – 387.

100.Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM*, *46*(1), 45-58.

101.Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. *Learning and teaching geometry, K-12*, 17-31.

102.Vekiri, I., (2002). What is the value of Graphical Displays in Learning? Educational

103.Vergnaud Gerard (1998). A comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *The Journal of Mathematics Behavior*, Vol. 17(No 2), pp. 167 – 181.

104.Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 39-59.

105.Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in mathematics education*, 577-601.

106.Verschaffel, L., De Corte, E., & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 265-285.

107.Waller, R. (1981). Understanding Network Diagrams.

108.Wiegel, H. G. (1998). Kindergarten students' organization of counting in joint counting tasks and the emergence of cooperation. Journal for Research in Mathematics Education, 29(2) 202-224.

109.Wright, B. D., & Mok, M. (2000). Understanding Rasch measurement: Rasch models overview. *Journal of applied measurement*.

110.Wright, B. D., & Stone, M. H. (1979). Best Test Design. Rasch Measurement.

111.Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. *NCTM*, 44-52.

112.Zazkis Rina & Liljedahl Peter (2004). Understanding Primes: The Role of Representation. *Journal for Recearch in Mathematics Education*, Vol. 35 (No. 3), pp. 164 – 186.

113.Seeger F., 1998, Represantations in mathematics classroom: Reflections and constructions. In F. Seeger

ΒΙΒΛΙΑ

1.Γαγάτσης, Α. (Εκδ.) (2004). *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών.* Λευκωσία: UNESCO, Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΒΙΒΛΙΑ ΑΠΟ ΗΜΕΡΙΔΕΣ

1.Δεληγιάννη Ε., Μονογυιού Α., Ηλία Ι., Γεωργίου Χ. & Ζανέττου Ε. (2009). Ο ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων στη ρήξη του διδακτικού συμβολαίιου κατά την επίλυση προβλήματος από μαθητές προσχολικής και πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. *Σημειωτική προσέγγιση στη μάθηση μαθηματικών εννοιών στο νηπιαγωγείο,5 Δεκεμβρίου 2009, Λευκωσία* (σσ.)

2.Σημειωτική προσέγγιση στη μάθηση μαθηματικών εννοιών στο νηπιαγωγείο. Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, 5 Δεκεμβρίου 2009.

3.Βιβλίο δασκάλου Μαθηματικά ‘Α Δημοτικού.