Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Κατεύθυνση Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας

Διπλωματική Εργασία

Παιγνιοθεωρητικά μοντέλα σε μη παρατηρήσιμες ουρές αναμονής

Ιωάννης Γεωργίου

Τριμελής επιτροπή

Μπουρνέτας Απόστολος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Επιβλέπων

Οικονόμου Αντώνιος , Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών

Μηλολιδάκης Κωνσταντίνος , Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ιανουάριος 2014

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 3

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 6

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ 6

2.1. Εισαγωγή 6

2.2. Στρατηγικές, ωφέλειας και ισορροπία σε παίγνια χωρίς συνεργασία. 7

2.3. Στάσιμη κατανομή 8

2.4. Στρατηγικές ισορροπίας για μεταβατικές καταστάσεις 9

2.5. Εξελικτικά Σταθερές στρατηγικές 10

2.6. Απόφυγε το πλήθος ή ακολούθησέ το; 10

2.7. Κόστη και στόχοι 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 13

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΕΣ ΟΥΡΕΣ 13

3.1 Βασικό μοντέλο μη παρατηρήσιμης ουράς 13

3.1.1 Διατύπωση και ανάλυση προβλήματος 14

3.2 Ένα μοντέλο δυοπωλίου σε ουρές αναμονής 17

3.2.1 Περιγραφή μοντέλου 18

3.2.2 Δύο εταιρείες δύο τιμές...20

3.2.3 Ίσες ή Διαφορετικές Τιμές...25

3.2.3 Συνεργασία μεταξύ των εταιρειών...28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 32

ΕΝΑ ΝΕΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ 2 ΟΥΡΕΣ. 32

4.1 Περιγραφή προβλήματος 32

4.2 Ανάλυση ισορροπίας...33

4.3 Κοινωνική ευημερία 41

4.4 Αριθμητικά αποτελέσματα 51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας εξετάζουμε προβλήματα στην περιοχή των ουρών αναμονής όπου οι πελάτες επιδεικνύουν στρατηγική συμπεριφορά και παίρνουν οι ίδιοι ανεξάρτητες αποφάσεις όσον αφορά τη συναλλαγή τους με το σύστημα εξυπηρέτησης. Τα προβλήματα αυτά οδηγούν σε μαθηματικά μοντέλα που συνδυάζουν θεωρία αναμονής και θεωρία παιγνίων. Παραδοσιακά η μαθηματική περιοχή της θεωρίας αναμονής εστιάζεται στην ανάλυση της συμπεριφοράς ενός συστήματος εξυπηρέτησης όσον αφορά τον συνωστισμό και την καθυστέρηση των πελατών. Συνήθως γίνονται συγκεκριμένες υποθέσεις σχετικά με την πιθανοθεωρητική κατανομή της διαδικασίας αφίξεων των πελατών και του χρόνου εξυπηρέτησης κάθε πελάτη, με την πολιτική που ακολουθείται ως προς την αποδοχή και την σειρά εξυπηρέτησης των πελατών και άλλες παραμέτρους λειτουργίας του συστήματος. Με βάση τις υποθέσεις αυτές δημιουργείται ένα μοντέλο στοχαστικής ανέλιξης που περιγράφει την εξέλιξη του αριθμού πελατών στο χρόνο και με βάση το μοντέλο αυτό υπολογίζονται αναλυτικά ή αριθμητικά διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος όπως π.χ. ο μέσος αριθμός πελατών κάτω από την οριακή κατανομή, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα ή στο χώρο αναμονής, ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας κλπ. Σε αναλύσεις αυτού του τόπου η συμπεριφορά των πελατών θεωρείται γνωστή προβλέψιμη και εξωγενώς προσδιορισμένη, χωρίς να επηρεάζεται από τη λειτουργία του ίδιου του συστήματος.

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται και στη μελέτη προβλημάτων βελτιστοποίησης συστημάτων εξυπηρέτησης. Εδώ ζητείται

(α) να προσδιοριστούν βασικές παράμετροι λειτουργιάς του συστήματος (π.χ. μέγεθος ουράς, αριθμός παράλληλων σταθμών, ταχύτητα εξυπηρέτησης)

(β) να βρεθούν δυναμικές πολιτικές ελέγχου (π.χ. αποδοχή πελατών ανάλογα με την κατάσταση, δυναμική μεταβολή του ρυθμού εξυπηρέτησης ή αριθμού υπηρετών κλπ.)

Κριτήριο στα παραπάνω προβλήματα είναι συνήθως κάποιο μέτρο μέσης απόδοσης, από τα παραπάνω ή μια έκφραση κόστους/κέρδους.

Και στα προβλήματα βελτιστοποίησης συνήθως η συμπεριφορά των πελατών θεωρείται δεδομένη.

Από μαθηματική άποψη τα προβλήματα αυτά αντιστοιχούν σε υποδείγματα στατικής ή δυναμικής βελτιστοποίησης και τυπικά επιλύονται με εφαρμογή μεθόδων μαθηματικού ή στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού.

Και στις δύο προηγούμενες κατηγορίες προβλημάτων, όπως αναφέρθηκε, γίνεται η υπόθεση ότι η συμπεριφορά των πελατών είτε δεν επηρεάζεται καθόλου από την ακολουθουμένη πολιτική λειτουργίας είτε, αν επηρεάζεται, ο τρόπος που γίνεται αυτό είναι προσδιορισμένος εκ των προτέρων.

Στην πραγματικότητα όμως, στις περισσότερες περιπτώσεις συστημάτων εξυπηρέτησης, οι πελάτες συμπεριφέρονται με πιο ΄΄έξυπνο΄΄ τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι αντιδρούν σε συνθήκες συνωστισμού ή μεγάλων καθυστερήσεων είτε αναβάλλοντας ή ματαιώνοντας εντελώς την είσοδο τους στο σύστημα, είτε εγκαταλείποντας την ουρά αν παρατηρήσουν μεγάλες αναμονές ή με διάφορους άλλους τρόπους. Το σημαντικό χαρακτηριστικό σε αυτά τα φαινόμενα είναι ότι οι αποφάσεις που παίρνει κάθε πελάτης χωριστά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους επηρεάζουν το συνωστισμό και τις καθυστερήσεις σε όλο το σύστημα. Επομένως όταν κάθε πελάτης αποφασίζει με ορθολογικό τρόπο πως θα ενεργήσει, στην απόφαση του αυτή θα πρέπει να λάβει υπ’ όψη του με ορθολογικό τρόπο τις αποφάσεις των άλλων πελατών που αυτές με τη σειρά τους επηρεάζονται από τις αποφάσεις των υπολοίπων και ούτω καθεξής.

Τα μαθηματικά υποδείγματα που είναι κατάλληλα για την ανάλυση διαδικασιών αποφάσεων με πολλούς αποφασίζοντες και αλληλοεξαρτώμενες πολιτικές είναι αυτά της Θεωρίας Παιγνίων. Προβλήματα που ενσωματώνουν μοντέλα Θεωρίας Παιγνίων στην ανάλυση συστημάτων εξυπηρέτησης έχουν αρχίσει να μελετώνται από τα μέσα της δεκαετίας του 1950. Τα τελευταία 10 με 15 χρόνια η έρευνα σε αυτή την περιοχή έχει πάρει σημαντικές διαστάσεις, καθώς η μελέτη του συνωστισμού λαμβάνοντας υπ’ όψη την ορθολογική συμπεριφορά των πελατών είναι λογικό να οδηγεί σε πιο ρεαλιστικά συμπεράσματα σχετικά με την λειτουργία του συστήματος.

Στην παρούσα εργασία μελετώνται συγκεκριμένα μαθηματικά υποδείγματα ουρών αναμονής με στρατηγικούς πελάτες και μη παρατηρήσιμες ουρές. Η εργασία διορθώνεται ως εξής . Στην αρχή του κεφαλαίου 2 εξετάζουμε το βασικό μοντέλο με μια ουρά όπου οι πελάτες αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στην ουρά ή θα αποχωρήσουν χωρίς να ζητήσουν εξυπηρέτηση. Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους κάτω από 2 σκοπιές. Είτε ο διαχειριστής του συστήματος αφήνει τους πελάτες να λειτουργούν ανάλογα με το δικό τους κέρδος είτε επιχειρεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του κοινωνικού συνόλου. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση ανάμεσα σε αυτές τις δύο τιμές και προκύπτει το αποτέλεσμα ότι το ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται κάτω από το κριτήριο της κοινωνικής ευημερίας είναι μικρότερο ή ίσο το αντίστοιχο ποσοστό σε συνθήκες στρατηγικής, ενώ το κέρδος του συστήματος είναι πάντοτε μεγαλύτερο ή ίσο. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν επιτραπεί στους πελάτες να εισέρχονται στο σύστημα έχοντας ως κριτήριο μόνο το προσωπικό τους κέρδος, τότε το συνολικό όφελος μειώνεται, αφού δημιουργείται συνωστισμός και μεγαλώνουν οι χρόνοι παραμονής στο σύστημα. Με οδηγό τώρα αυτό το απλό μοντέλο γίνεται επέκταση στο κεφάλαιο 4 σε μοντέλο πελατών με δύο ουρές, όπου πελάτες έρχονται και εκτός από το να αποφασίσουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα για εξυπηρέτηση αποφασίζουν και σε ποια από τις δύο ουρές θα εισέλθουν. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε αυτό το μοντέλο είναι αντίστοιχα με αυτά του βασικού μοντέλου με μια ουρά, όσον αφορά τη σχέση των συνολικών ποσοστών πελατών που εξυπηρετούνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια σύντομη περιγραφή των βασικών υποδειγμάτων ουρών αναμονής με στρατηγικούς πελάτες. Επίσης αναφέρουμε χρήσιμους σχετικούς ορισμούς. Η ανάλυση βασίζεται στο κεφάλαιο 1 και 3 του βιβλίου Hassin and Havin (2003).

2.1. Εισαγωγή

Οι πελάτες στα συστήματα εξυπηρέτησης ενεργούν ανεξάρτητα ώστε να μεγιστοποιήσουν την ευημερία τους. Ακόμη, η βέλτιστη συμπεριφορά κάθε πελάτη επηρεάζεται από τις αποφάσεις των διαχειριστών των συστημάτων κι των άλλων πελατών. Το αποτέλεσμα είναι μια συμπεριφορά πελατών που προκύπτει από την ανάλυση στρατηγικών ισορροπίας η οποία όμως συνήθως δεν είναι βέλτιστη από την οπτική της κοινωνίας ως σύνολο. Παρόμοιες παρατηρήσεις είναι γνωστές στους οικονομολόγους εδώ και πολύ καιρό. Μετά την δημοσίευση της εργασίας του Naor (1969) αυτές εκφράστηκαν ρητά και στο πλαίσιο της θεωρίας των ουρών αναμονής.

Πριν την δημοσίευση της εργασίας του Naor, στην εργασία Leeman (1964) είχαν διατυπωθεί τρεις στόχους που θα μπορούσαν να επιτευχθούν αν κανείς εφάρμοζε κατάλληλα σχεδιασμένες πολιτικές τιμολόγησης σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης.

Πρώτον, θα μπορούσε να επιτευχθεί πιο αποδοτική χρήση και κατανομή των υπαρχουσών υποδομών του συστήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλα τιμολογιακά κίνητρα ώστε να εξομαλυνθεί η ζήτηση χωρικά και χρονικά και να αποφευχθούν σημεία συμφόρησης.

Δεύτερον ένα μεγάλο μέρος του σχεδιασμού και της διαχείρισης μπορεί να ανατεθεί έμμεσα στους πελάτες μέσω των αποκεντρωμένων αποφάσεων.

Τρίτον, η ανάλυση αποφάσεων σχετικά με μακροχρόνιες στρατηγικές επενδύσεων για τη βελτίωση των υποδομών μπορεί να γίνει πιο ρεαλιστική αφού λαμβάνει υπόψη και τις επιπτώσεις της τιμολογιακής πολιτικής.

Με την εργασία του Naor αναγνωρίστηκε και ένας τέταρτος στόχος, που είναι η ρύθμιση της διαδικασίας ζήτησης, χωρίς την οποία τείνει να γίνεται υπερβολική χρήση του συστήματος εξυπηρέτησης

Την εργασία του Naor ακολούθησε πολύ έρευνα πάνω στην ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς και το βέλτιστο έλεγχο των ουρών.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των συγκεκριμένων μαθηματικών μοντέλων που θα μελετήσουμε στα πλαίσια αυτής της εργασίας, παραθέτουμε σύντομα μερικές βασικές έννοιες θεωρίας παιγνίων και θεωρίας αναμονής που είναι απαραίτητες για την κατανόηση του γενικότερου πλαισίου μελέτης.

2.2. Στρατηγικές, ωφέλειας και ισορροπία σε παίγνια χωρίς συνεργασία.

Ένα παίγνιο μη συνεργασίας ορίζεται ως εξής: Έστω N = {1, … , n} ένα πεπερασμένο σύνολο παιχτών και έστω A_i σύνολο δράσεων διαθέσιμων στον παίχτη $i \in N$. Μια καθαρή στρατηγική για τον παίχτη i είναι μια δράση από το A_i. Μια μεικτή στρατηγική αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση πιθανότητας η οποία υπαγορεύει έναν τυχαιοποιημένο κανόνα για την επιλογή μιας δράσης από το A_i. Χαρακτηρίζουμε με S_i το σύνολο των μεικτών στρατηγικών των διαθέσιμων στον παίκτη i. Ένα προφίλ στρατηγικών $s=(s_1, \dots\ s_n)$ ορίζει μια στρατηγική $s_i \in S_i$ σε κάθε παίχτη $i \in N$. Για κάθε παίχτη ορίζεται με μια πραγματική συνάρτηση ωφέλειας $F_i(s)$, που καθορίζει την ωφέλεια για τον παίκτη i δεδομένου ότι το σύνολο στρατηγικών s υιοθετείται από όλους τους παίκτες. Χαρακτηρίζουμε με s_{-i} ένα προφίλ για το σύνολο των παικτών N\{i}. Η συνάρτηση $F_i(s) = F_i(s_i, s_{-i})$ υποτίθεται ότι είναι γραμμική ως προς s_i. Αυτό σημαίνει ότι αν η s_i είναι μεικτή με πιθανότητες α και 1-α μεταξύ των στρατηγικών s_i^1 και s_i^2, τότε:

$$F_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \alpha \cdot F_i\left(s_i^1, s_{-i}\right) + \left(1-\alpha\right) \cdot F_i\left(s_i^2, s_{-i}\right) \text{ για κάθε } s_{-i}.$$

Η στρατηγική s_i^1 λέγεται ότι κυριαρχεί ασθενώς της στρατηγικής s_i^2 (για τον παίκτη i) εάν για κάθε s_{-i} ισχύει ότι $F_i(s_i^1, s_{-i}) \geq F_i(s_i^2, s_{-i})$ και για τουλάχιστον μια s_{-i} η ανισότητα είναι αυστηρή. Μια στρατηγική s_i θεωρείται ασθενώς κυριαρχική αν κυριαρχεί ασθενώς επί των άλλων στρατηγικών στο S_i. Μια στρατηγική s_i^* ονομάζεται στρατηγική βέλτιστης απάντησης για τον παίχτη i στο προφίλ s_{-i} αν

$s_i^* \in \arg\max F_i(s_i, s_{-i})$.

Ένα προφίλ στρατηγικών s^e είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας Nash αν για κάθε $i \in N$, το s_i^e είναι η βέλτιστη απάντηση του παίχτη i στο s^e_{-i}, δηλαδή $s_i^e \in \arg\max_{s_i} F_i(s_i, s_{-i}^e)$

Αν η βέλτιστη απάντηση s^*_i είναι μια μείξη στρατηγικών τότε όλες αυτές οι στρατηγικές είναι επίσης βέλτιστες απαντήσεις. Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει όταν η «βέλτιστη απάντηση» αντικαθίσταται από «ισορροπία».

Στο πλαίσιο των ουρών αναμονής συνήθως προκύπτουν παίγνια με πανομοιότυπους άπειρα πολλούς παίκτες (συνήθως πελάτες). Σε αυτήν την περίπτωση χαρακτηρίζουμε το κοινό σύνολο στρατηγικών και την συνάρτηση απόδοσης ωφέλειας με S και F αντίστοιχα. Έστω F(α, b) η συνάρτηση ωφέλειας για έναν παίκτη που επιλέγει την στρατηγική α όταν όλοι οι άλλοι επιλέγουν την στρατηγική b. Μια συμμετρική στρατηγική ισορροπίας είναι μια στρατηγική $s^e \in S$ τέτοια ώστε $s^e \in \arg\max_{s \in S} F(s, s^e)$

Με άλλα λόγια, η s^e είναι ένα συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας αν είναι η βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της.

Τα προβλήματα Θεωρίας Παιγνίων σε ουρές αναμονής συχνά διακρίνονται σύμφωνα με το αν μπορεί το μήκος τους να παρατηρηθεί πριν ο πελάτης πάρει κάποια απόφαση. Αναφερόμαστε σε αυτές τις περιπτώσεις ως παρατηρήσιμες και μη παρατηρήσιμες ουρές αντίστοιχα.

2.3. Στάσιμη κατανομή

Κατά την εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης ωφέλειας ενός ατόμου η οποία σχετίζεται με μια στρατηγική x ως απάντηση έναντι όλων των υπολοίπων που χρησιμοποιούν τη στρατηγική y, υποθέτουμε ότι έχουν επιτευχθεί συνθήκες στάσιμης κατάστασης (βάσει του ότι όλοι χρησιμοποιούν τη στρατηγική y). Στα περισσότερα από τα μοντέλα υπάρχει μια μαρκοβιανή διαδικασία, της οποίας οι πιθανότητες μετάβασης προκύπτουν από την κοινή στρατηγική που έχουν επιλέξει όλοι. Επομένως, η «στάσιμη κατανομή» έχει την σταθερή έννοια των οριακών πιθανοτήτων και ένα άτομο υποθέτει ότι αυτή είναι η κατανομή επί των καταστάσεων.

Για να διευκρινίσουμε αυτό το σημείο, υποθέτουμε μια ουρά M/M/1 με ρυθμό αφίξεων 4 πελατών ανά μονάδα χρόνου, ρυθμό εξυπηρέτησης 5 πελατών ανά μονάδα χρόνου και πελάτες που εισέρχονται με πιθανότητα 0,75. Στην οριακή κατάσταση, ένας πελάτης που σκέφτεται να εισέλθει στην ουρά εκτιμά τον προσδοκώμενο χρόνο αναμονής του ως 1/(5-4·0,75) . Φυσικά, αν ο συγκεκριμένος πελάτης ήταν ο πρώτος ή ο δεύτερος που θα έφτανε σε ένα σύστημα που ξεκινά με άδεια ουρά, η εκτίμησή του θα ήταν διαφορετική.

Η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη όταν ο πελάτης πληροφορείται την κατάσταση του συστήματος πριν λάβει την απόφαση του. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την παρατηρήσιμη εκδοχή του παραπάνω προβλήματος απόφασης στο οποίο οι πελάτες παρατηρούν την ουρά πριν αποφασίσουν αν θα μπουν η όχι σε αυτήν. Θεωρούμε μια στρατηγική δ και έστω δ(s) η ληφθείσα απόφαση σύμφωνα με αυτήν τη στρατηγική στην κατάσταση s. Για ευκολία υποθέτουμε ότι δ είναι μια ντετερμινιστική στρατηγική, όπου s= 0,1,2,3, …. είναι τα πιθανά μήκη της ουράς που μπορεί να αντιμετωπίσει ένας πελάτης κατά την άφιξη και δ(s) μπορεί να είναι είτε είσοδος είτε άρνηση εισόδου. Μια τέτοια στρατηγική, όταν ακολουθείται από όλους, ορίζει τις πιθανότητες μετάβασης σε μια μαρκοβιανή διαδικασία με χώρο καταστάσεων s={0,1,2, …}. Έστω $\pi_s(\delta)$ η οριακή πιθανότητα της κατάστασης s δεδομένου ότι s είναι η αρχική κατάσταση και η στρατηγική δ υιοθετείται από όλους. Επομένως, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα για ένα άτομο που υιοθετεί τη στρατηγική δ' όταν όλοι χρησιμοποιούν τη στρατηγική δ είναι

$$\sum_{s/\delta'(s)=\text{join}} \pi_s(\delta)\frac{s+1}{\mu}. \tag{1}$$

2.4. Στρατηγικές ισορροπίας για μεταβατικές καταστάσεις

Ένα συχνά αναφερόμενο μειονέκτημα της έννοιας της ισορροπίας είναι η πιθανότητα η λύση να μην είναι μοναδική. Περιγράφουμε εδώ δύο τρόπους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λύσεων.

Οι πιθανότητες μετάβασης μεταξύ διαφόρων καταστάσεων συνήθως εξαρτώνται από την υιοθετούμενη από τους πελάτες στρατηγική. Συγκεκριμένα, είναι πιθανό για μια δεδομένη στρατηγική και αρχική κατάσταση, κάποιες καταστάσεις να έχουν μηδενική πιθανότητα στάσιμης κατάστασης. Κατά τον υπολογισμό των αναμενόμενων ωφελειών των πελατών, αυτές οι καταστάσεις λαμβάνουν βάρος 0. Ως εκ τούτου, δεν έχει σημασία ποιες δράσεις υπαγορεύονται για αυτές τις καταστάσεις ώστε να εξετάσουμε αν μια δοθείσα στρατηγική είναι η βέλτιστη απάντηση. Για παράδειγμα,

για τις καταστάσεις s με $\pi_s(\delta)=0$, η τιμή του (1) είναι η ίδια ανεξαρτήτως του αν $\delta'(s)$ είναι είσοδος ή άρνηση εισόδου. Από την άλλη πλευρά, μια στρατηγική θα έπρεπε να υπαγορεύει μια δράση για την κάθε κατάσταση ανεξάρτητα από τη στάσιμη κατανομή. Αυτό το γεγονός συχνά οδηγεί σε πολλαπλές στρατηγικές ισορροπίας κάποιες από τις οποίες είναι αντίθετες από αυτές που θα περίμενε κανείς.
Μια στρατηγική ισορροπίας ονομάζεται τέλεια ως προς τα υποπαιχνίδια (subgame perfect equilibrium (SPE)) αν υπαγορεύει βέλτιστες απαντήσεις σε όλες τις καταστάσεις, συμπεριλαμβανομένων αυτών που έχουν μηδενική πιθανότητα στάσιμης κατάστασης.

2.5. Εξελικτικά Σταθερές στρατηγικές

Μια (συμμετρική) στρατηγική ισορροπίας είναι, εξ ορισμού, η βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της. Παρ' όλα αυτά δεν είναι ανάγκη να είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση. Συγκεκριμένα, έστω y μια στρατηγική ισορροπίας. Μπορεί να υπάρχει μια στρατηγική βέλτιστης απάντησης $z \neq y$, τέτοια ώστε το z να είναι αυστηρά καλύτερη απάντηση στον εαυτό της από ότι η y. Σε αυτήν την περίπτωση, η y είναι ασταθής υπό την έννοια ότι ξεκινώντας με y μπορεί οι παίκτες να υιοθετήσουν την βέλτιστη απάντηση z και τότε μια νέα ισορροπία θα επιτευχθεί στο z. Αν δεν υπάρχει τέτοια z τότε η y θεωρείται ως μια εξελικτικά σταθερή στρατηγική ή (ESS). Παρατηρούμε ότι αν y είναι μια στρατηγική ισορροπίας και είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, τότε απαραιτήτως είναι (ESS).
Τυπικά, μια στρατηγική ισορροπίας y θεωρείται ως (ESS) αν για οποιαδήποτε $z \neq y$ που αποτελεί βέλτιστη απάντηση στη y, η y είναι καλύτερη από τη z ως απάντηση στην ίδια τη z: $y \in \arg\max_{x\in S} F(x,y)$ και για οποιαδήποτε στρατηγική $z \neq y$ τέτοια που $z \in \arg\max_{x\in S} F(x,y)$ έχουμε $F(y,z) > F(z,z)$. Υπάρχουν παραδείγματα στα οποία καμία στρατηγική ισορροπίας δεν είναι (ESS).

2.6. Απόφυγε το πλήθος ή ακολούθησέ το;

Σε πολλά μοντέλα ουρών αναμονής, οι στρατηγικές μπορούν να εκφραστούν ως μονοδιάστατες αριθμητικές μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση γεννιέται το ερώτημα αν η βέλτιστη απόκριση ενός ατόμου είναι μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) συνάρτηση της επιλεχθείσας από τους άλλους πελάτες στρατηγικής;

Το ερώτημα αυτό είναι ενδιαφέρον γιατί, αν π.χ. η στρατηγική ορίζεται από την πιθανότητα εισόδου P τότε αν η βέλτιστη απάντηση είναι αύξουσα συνάρτηση του P, αυτό σημαίνει ότι όσο πιο συχνά μπαίνουν οι πελάτες στο σύστημα τόσο πιο επιθυμητό είναι να μπει οποιοσδήποτε άλλος πελάτης το αντίστροφο ισχύει αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

Γενικά, έστω F(x, y) η συνάρτηση ωφέλειας για έναν πελάτη ο οποίος επιλέγει την στρατηγική x όταν όλοι οι άλλοι επιλέγουν τη στρατηγική y. Υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε y υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη απόκριση x(y):

$x(y) = \operatorname{argmax} F(x,y)$

Ενδιαφερόμαστε για τις περιπτώσεις όπου η x(y) είναι συνεχής και αυστηρά μονότονη. Όταν η x(y) είναι μονότονη φθίνουσα ή είναι μονότονη αύξουσα, αποκαλούμε αυτές τις περιπτώσεις απέφυγε το πλήθος (ATC) και ακολούθησε το πλήθος (FTC), αντίστοιχα. Η λογική πίσω από αυτήν την ορολογία είναι ότι σε μια FTC (αντίστοιχα στην ATC) όσο υψηλότερες οι αξίες που επιλέγονται από άλλους, τόσο υψηλότερη (αντίστοιχα, χαμηλότερη) είναι η βέλτιστη απάντηση κάποιου.

Μια στρατηγική ισορροπίας y ικανοποιεί την x(y) =y. Με άλλα λόγια, είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης x. Επομένως από μαθηματική άποψη έχει ενδιαφέρον να αποδειχθεί αν ένα μοντέλο είναι ATC ή FTC εφόσον, προφανώς, στην περίπτωση ATC υπάρχει το πολύ μια συμμετρική στρατηγική ισορροπία, ενώ στην περίπτωση FTC είναι δυνατές περισσότερες από μία συμμετρικές στρατηγικές ισορροπίας.

2.7. Κόστη και στόχοι

Η ευημερία ενός πελάτη διαμορφώνεται από την ωφέλεια που σχετίζεται με την εξυπηρέτηση, από την οποία αφαιρούνται οι άμεσες πληρωμές και τα έμμεσα κόστη που σχετίζονται με την αναμονή. Το άθροισμα του άμεσου και έμμεσου κόστους αναφέρεται ως ολική τιμή. Υποθέτουμε ότι οι συμμετέχοντες πελάτες είναι ουδέτεροι έναντι του κινδύνου στο σχετικό εύρος των πληρωμών και των ωφελειών έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη ευημερία τους.

Στις περισσότερες περιπτώσεις υποθέτουμε ότι η αξία μιας μονάδας χρόνου για κάθε πελάτη είναι σταθερά (δηλώνεται με C) έτσι ώστε η δαπάνη t μονάδων χρόνου στο σύστημα να έχει ολικό κόστος Ct. Η τιμή του C μπορεί να διαφέρει από τον έναν πελάτη στον άλλον.

Ένα σύστημα ουρών μπορεί να εξεταστεί κι από την οπτική του συνόλου των πελατών (εδώ αναφέρονται ως κοινωνία ή κοινωνικό σύνολο) . Όταν υιοθετούμε αυτήν την οπτική, υποθέτουμε ότι ο στόχος ελέγχου του συστήματος είναι να μεγιστοποιήσουμε την κοινωνική ευημερία (social welfare) η οποία ορίζεται εδώ ως το συνολικό καθαρό αναμενόμενο όφελος των μελών της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων των πελατών και των εξυπηρετητών. Από αυτήν την προσέγγιση μια πληρωμή μεταξύ ατόμων του πληθυσμό έχει μηδενική καθαρή επίδραση στην κοινωνική ευημερία και ως εκ τούτου καμία επίδραση στη βελτιστοποίηση του συστήματος. Επομένως, ο κοινωνικός στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί το σύνολο των ωφελειών των πελατών από την υπηρεσία μείον τα κόστη αναμονής και λειτουργίας.

Σε πολλές περιπτώσεις προκύπτουν εφαρμογές, όπου οι πελάτες ανήκουν σε κατηγορίες (classes) και κάθε κατηγορία παίρνει τις δικές τις αποφάσεις ώστε να μεγιστοποιήσει την συνολική ευημερία των μελών της. Αυτή η παραδοχή οδηγεί σε ένα παίγνιο μη συνεργασίας με έναν πεπερασμένο αριθμό παικτών. Συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι οι διαδικασίες άφιξης των πελατών των διαφόρων κατηγοριών είναι ανεξάρτητες και συγκεκριμένα, αν η συνολική διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ, και η αναλογία των πελατών της τάξης i είναι p_i τότε η διαδικασία αφίξεων των πελατών i είναι Poisson με ρυθμό $p_i λ$.

Χρησιμοποιούμε τον όρο χρόνος παραμονής για τον χρόνο από τη άφιξη μέχρι την αναχώρηση του πελάτη. Ο χρόνος αναμονής είναι ο χρόνος παραμονής αφαιρώντας το χρόνο εξυπηρέτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΕΣ ΟΥΡΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης σημείων στρατηγικής ισορροπίας και βέλτιστων στρατηγικών σε μη παρατηρήσιμες ουρές. Η έμφαση είναι σε προβλήματα με περισσότερες από μια ουρά αναμονής, στα οποία οι πελάτες αποφασίζουν όχι μόνο αν θα μπουν στο σύστημα αλλά και σε ποια ουρά θα μπουν. Αρχικά περιγράφουμε ένα βασικό μοντέλο μη παρατηρήσιμης ουράς όπως αναλύθηκε στην εργασία των Chen and Frank (1994). Αυτό γίνεται για να γίνουν κατανοητές οι βασικές έννοιες και η μεθοδολογία εύρεσης σημείων ισορροπίας σε μη παρατηρήσιμες ουρές, έτσι ώστε να γίνει επέκταση σε σύστημα δύο ουρών στο επόμενο κεφάλαιο.

Σε προβλήματα με περισσότερες από μια ουρές συχνά παίζει ρόλο και ο ανταγωνισμός μεταξύ των ουρών. Σε περιπτώσεις που τα διαφορετικά συστήματα εξυπηρέτησης έχουν διαφορετικούς ιδιοκτήτες, που θέλουν να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους, είναι λογικό να χρησιμοποιούν τις τιμές εισόδου ως εργαλείο προσέγγισης πελατών. Προκύπτουν επομένως ανταγωνιστικά παίγνια τιμολόγησης μεταξύ δύο ή περισσοτέρων παικτών, όπου εκτός από την τιμή, κεντρικό ρόλο για τη διαμόρφωση της ζήτησης παίζει και η αναμενόμενη καθυστέρηση των πελατών. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε ένα μοντέλο ανταγωνισμού αυτού του τύπου, που βασίζεται στην εργασία Levhari-Israel Luski (1977-1978). Η εργασία ασχολείται με ένα μοντέλο τιμών δυοπωλίου στο πλαίσιο εταιρειών που παρέχουν υπηρεσίες σε καταναλωτές. Καθεμία από τις εταιρείες έχει μια ουρά αναμονής από πελάτες που καταφτάνουν τυχαία. Οι δύο εταιρείες παρέχουν ακριβώς την ίδια υπηρεσία και ο χρόνος εξυπηρέτησης και των δύο υποτίθεται ότι ακολουθεί την ίδια κατανομή. Οι διαφορετικοί καταναλωτές έχουν διαφορετικά κόστη και πρέπει να αποφασίσουν αν θα μπουν ή όχι στις ουρές. Αποδεικνύεται ότι η ισορροπία Cournot – Nash είναι τέτοια που οι δύο εταιρείες γενικά χρεώνουν διαφορετικές τιμές. Μία από τις εταιρείες εξειδικεύεται στην εξυπηρέτηση ατόμων με υψηλό κόστος χρόνου και η άλλη με τα υπόλοιπα.

3.1 Βασικό μοντέλο μη παρατηρήσιμης ουράς

Οι υποθέσεις για το βασικό μοντέλο μη παρατηρήσιμης ουράς με έναν υπηρέτη διατυπώθηκαν από τους Edelson-Hildebrand (1975) και είναι οι εξής:

1. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο Λ και οι πελάτες φθάνουν σε μια ουρά με έναν υπηρέτη.
2. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι, εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο μ.
3. Το όφελος ενός πελάτη από μια συμπλήρωση εξυπηρέτησης είναι R.
4. Το κόστος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι C ανά μονάδα χρόνου.
5. Οι πελάτες είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, δηλαδή μεγιστοποιούν την αναμενόμενη αξία του καθαρού τους κέρδους.
6. Όλοι οι πελάτες έχουν την ίδια αντικειμενική συνάρτηση. Από την κοινωνική σκοπιά, η συνολική ευημερία προκύπτει ως το άθροισμα των επιμέρους αντικειμενικών συναρτήσεων.
7. Ο κάθε πελάτης λαμβάνει μια αποζημίωση u, εάν επιλέξει να μην μπει στο σύστημα.
8. Η πειθαρχία ουράς είναι FCFS.
9. Η απόφαση του να μπει ή να μην μπει ένας πελάτης είναι υποχρεωτική.
10. Κατά την στιγμή άφιξης ενός πελάτη στο σύστημα, αυτός είτε μπαίνει είτε όχι, χωρίς να μπορεί να παρατηρήσει το μήκος ουράς.
11. $R - u \geq C/\mu$.

3.1.1 Διατύπωση και ανάλυση προβλήματος

(Το μοντέλο αναλύθηκε από τους Chen-Frank(1994)).

Η λογική δομή του προβλήματος είναι αρκετά απλή. Κατ' αρχήν το σύστημα λειτουργεί ως μονοπώλιο. Η εταιρεία διαλέγει μια τιμή χρέωσης για όλους και δεν επιτρέπεται να επιβάλει σε διαφορετικούς πελάτες διαφορετικές χρεώσεις. Το μονοπώλιο διαλέγει την τιμή εκ των προτέρων γνωρίζοντας πώς αυτή θα επηρεάσει τη συμπεριφορά των πελατών.
Οι πελάτες βλέπουν την τιμή και γνωρίζουν το ρυθμό με τον οποίο οι νέοι πελάτες φθάνουν στο σύστημα, αλλά δεν μπορούν να γνωρίζουν την κατάσταση στην ουρά τη στιγμή που σκέπτονται να εισέλθουν στο σύστημα. Ζητείται το σημείο ισορροπίας όσον αφορά στις στρατηγικές των πελατών. Σε ένα τέτοιο σημείο, ο κάθε πελάτης θα είναι δυνατό να υπολογίσει το ρυθμό με τον οποίο οι πελάτες μπαίνουν στην ουρά.

Όλοι οι πελάτες είναι πανομοιότυποι και είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε το εγκαταλείπουν χωρίς να εισέλθουν. Θεωρούμε ότι οι χρόνοι άφιξης των δυνητικών πελατών δίνονται από μια Poisson διαδικασία με ρυθμό Λ. Ο ρυθμός με τον οποίο οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα είναι λ και πρέπει να καθοριστεί ως σημείο ισορροπίας.

Αρχικά καθορίζεται η συμπεριφορά του πελάτη σε ισορροπία όταν επιβάλλεται τέλος εισόδου μεγέθους p και ο αρχικός ρυθμός άφιξης είναι Λ. Υπάρχουν δύο καθαρές στρατηγικές διαθέσιμες σε κάθε πελάτη: Έστω s_i η στρατηγική του πελάτη i. Ο πελάτης i θα διαλέξει μια εκ των δύο εφικτών στρατηγικών: είτε μπαίνει στο σύστημα $(s_i = 1)$ είτε το εγκαταλείπει $(s_i = 0)$. Εάν ο πελάτης i μπει στην ουρά, ο πραγματικός χρόνος παραμονής θα είναι W_i το κόστος παραμονής συμβολίζεται με $C(W_i)$.

Μια καθαρή ή μικτή στρατηγική μπορεί να περιγραφεί από ένα αριθμό q, 0 ≤q ≤1, που δίνει την πιθανότητα προσχώρησης. Δεδομένου ότι το τέλος εισόδου είναι p, υποδηλώνουμε την πιθανότητα προσχώρησης σε ισορροπία με $q^e(p)$, και τον αντίστοιχο ρυθμό άφιξης (πραγματικό) σε ισορροπία με $\lambda^e(p)$. Φυσικά $\lambda^e(p) = q^e(p) \cdot \Lambda < \mu$. Υποδηλώνουμε τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής όταν ο (πραγματικός) ρυθμός άφιξης είναι λ < μ με $E(W_i(\lambda)) = \frac{1}{\mu - \lambda}$ για $\lambda < \mu$ και $E(W_i(\lambda)) = \infty$ για $\lambda > \mu$.

Το καθαρό όφελος για έναν πελάτη που μπαίνει στην ουρά είναι η αξία της υπηρεσίας, R, μείον την ολική τιμή, p + CW(λ). Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- p + CE(W(0)) ≥ R. Σε αυτήν την περίπτωση, ακόμη κι αν δεν μπει κανένας άλλος πελάτης, το καθαρό όφελος ενός πελάτη που εισέρχεται είναι μη θετικό. Ως εκ τούτου, η στρατηγική του να προσχωρήσει με πιθανότητα $q^e(p) = 0$ είναι στρατηγική σε ισορροπία και καμία άλλη ισορροπία δεν είναι πιθανή. Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση, η μη είσοδος είναι κυριαρχική στρατηγική.
- p+CE(W(Λ)) ≤ R. Σε αυτήν την περίπτωση, ακόμη κι αν όλοι οι πιθανοί πελάτες προσχωρήσουν, όλοι απολαμβάνουν μη αρνητικού οφέλους. Ως εκ

τούτου, η στρατηγική εισόδου με πιθανότητα $q^e(p)=1$ είναι μια στρατηγική σε ισορροπία και καμία άλλη ισορροπία δεν είναι πιθανή. Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση η είσοδος είναι κυριαρχική στρατηγική.

- p + CE(W(0)) < R < p + CE(W(Λ)). Σε αυτήν την περίπτωση, αν $q^e(p)=1$ τότε ο πελάτης που εισέρχεται στην ουρά υφίσταται αρνητικό όφελος. Συνεπώς αυτή (η περίπτωση) δεν μπορεί να είναι στρατηγική σε ισορροπία. Ομοίως, εάν $q^e(p)=0$, ένας πελάτης που εισέρχεται στην ουρά απολαμβάνει θετικού οφέλους, περισσότερο απ’ το αν αποχωρούσε. Συνεπώς, κι εδώ επίσης δεν υπάρχει ισορροπία. ΄Αρα, υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας όπου $q^e(p)=\dfrac{\lambda^e(p)}{\Lambda}$ και η $\lambda=\lambda^e(p)$ είναι η λύση της εξίσωσης $CE\Big(W\big(\lambda^e(p)\big)\Big)=R-p$.

Περίπτωση	$\lambda^e(p)$	$q^e(p)$	$W(\lambda^e(p))$
$\Lambda \le \mu-\dfrac{C}{R-p}$	Λ	1	$\dfrac{1}{\mu-\Lambda}$
$0 \le \mu-\dfrac{C}{R-p} \le \Lambda$	$\mu-\dfrac{C}{R-p}$	$\dfrac{\mu-\dfrac{C}{R-p}}{\Lambda}$	$\dfrac{R-p}{C}$
$\mu-\dfrac{C}{R-p}<0$	0	0	$\dfrac{1}{\mu}$

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στην κοινωνική βελτιστοποίηση. Έστω ότι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική εισόδου είναι q^*, και έστω ότι ο ρυθμός κοινωνικά βέλτιστης εισόδου είναι λ^* όπου $\lambda^*=q^*\cdot\Lambda$.

Τότε,

$$\lambda^* = \arg\max\{\lambda\big[R - CE(W(\lambda))\big]\}$$

$$\text{υ.π. } 0 \le \lambda \le \Lambda$$

Αφού το E(W(λ)) είναι αυστηρά κυρτή, η συνάρτηση προς μεγιστοποίηση είναι αυστηρά κοίλη και έχει ένα μοναδικό μέγιστο. Αντικαθιστώντας το E(W(λ)) = $\frac{1}{\mu-\lambda}$ μας δίνει ότι η λύση

$$\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}} = \arg\max_{0\le\lambda<\mu} \{\lambda R - C\lambda \frac{1}{\mu-\lambda}\}$$

είναι βέλτιστη, αρκεί να ανήκει στο διάστημα [0,Λ]. Το γεγονός ότι η λύση είναι μη αρνητική συνεπάγεται απ' την υπόθεση Rμ ≥ C. Συνεπώς, αν $\Lambda \ge \mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}$ τότε $\lambda^* = \mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}$, διαφορετικά $\lambda^* = \Lambda$. Έστω ότι SU είναι η κοινωνική ευημερία υπό το βέλτιστο ρυθμό άφιξης λ^*

Περίπτωση	λ^*	q^*	$W(\lambda^*)$	SU
$\Lambda \ge \mu - \sqrt{\frac{c\mu}{R}}$	$\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{R}}$	$\frac{\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{R}}}{\Lambda}$	$\sqrt{\frac{R}{c\mu}}$	$\left(\sqrt{R\mu} - \sqrt{c}\right)^2$
$\Lambda \le \mu - \sqrt{\frac{c\mu}{R}}$	Λ	1	$\frac{1}{\mu-\Lambda}$	$\Lambda\left(R - \frac{c}{\mu-\Lambda}\right)$

3.2 Ένα μοντέλο δυοπωλίου σε ουρές αναμονής

Η ανάλυση αυτού του υποκεφαλαίου βασίζεται στις εργασίες Luski (1976) και Levhari and Luski (1977-1978). Οι εργασίες αυτές ασχολούνται με ένα μοντέλο τιμών δυοπωλίου στο πλαίσιο εταιρειών που παρέχουν υπηρεσίες σε καταναλωτές. Καθεμία από τις εταιρείες έχει μια ουρά αναμονής από πελάτες που καταφτάνουν τυχαία. Οι δύο εταιρείες παρέχουν ακριβώς την ίδια υπηρεσία και ο χρόνος εξυπηρέτησης και των δύο υποτίθεται ότι ακολουθεί την ίδια κατανομή. Οι διαφορετικοί καταναλωτές έχουν διαφορετικά κόστη και πρέπει να αποφασίσουν αν θα μπουν ή όχι στις ουρές. Αποδεικνύεται ότι η ισορροπία Cournot – Nash είναι τέτοια που οι δύο εταιρείες γενικά χρεώνουν διαφορετικές τιμές. Μία από τις εταιρείες εξειδικεύεται στην εξυπηρέτηση ατόμων με υψηλό κόστος χρόνου και η άλλη με τα υπόλοιπα.

3.2.1 Περιγραφή μοντέλου

Θεωρούμε δύο εταιρείες που παρέχουν υπηρεσίες σε καταναλωτές. Καθεμία από τις εταιρείες έχει μια ουρά αναμονής από πελάτες που καταφτάνουν τυχαία. Οι δύο εταιρείες παρέχουν ακριβώς την ίδια υπηρεσία και ο χρόνος εξυπηρέτησης και στις δύο εταιρείες κατανέμεται εκθετικά με μια παράμετρο μ. Οι διαφορετικοί πελάτες έχουν διαφορετικό κόστος χρόνου και πρέπει να αποφασίσουν αν θα μπουν ή όχι στις ουρές. Το άτομο δε θα μπει σε καμία από τις δύο ουρές αν τελικά το καθαρό όφελος αναμονής στην ουρά και απόκτησης της εξυπηρέτησης είναι αρνητικό. Αν το καθαρό όφελος είναι θετικό θα μπει στην ουρά με το υψηλότερο αναμενόμενο καθαρό όφελος.

Η απόφαση του πελάτη σχετικά με το αν θα μπει στην ουρά και σε ποια ουρά θα μπει, βασίζεται σε ένα εκ των προτέρων αναμενόμενο καθαρό όφελος. Δηλαδή, το άτομο υπολογίζει τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής σε μια συγκεκριμένη εταιρεία εξυπηρέτησης χωρίς να έχει γνώση της ουράς αναμονής σε μια δεδομένη στιγμή αλλά γνωρίζοντας την κατανομή πιθανότητας του χρόνου αναμονής. Η παραδοχή είναι ότι στην μακροχρόνια συμπεριφορά του, το άτομο θα επιλέξει μια εταιρεία βάσει της εμπειρίας του σχετικά με το χρόνο αναμονής.

Προς χάριν ευκολίας τα έξοδα παροχής της εξυπηρέτησης αγνοούνται. Κάθε εταιρεία υποθέτει ότι η τιμή της εξυπηρέτησης της άλλης εταιρείας είναι δεδομένη. Σε αυτό το πλαίσιο το ερώτημα είναι ποια είναι η διαμόρφωση ισορροπίας της τιμής, δηλαδή είναι οι τιμές που χρεώνουν οι δύο εταιρείες απαραιτήτως ίδιες; Η υπό εξέταση ισορροπία είναι φυσικά μια ισορροπία τύπου Cournot στις τιμές ή μια ισορροπία Nash στις τιμές, δηλαδή η τιμή ισορροπίας είναι τέτοια που δεν συμφέρει καμία από τις εταιρείες να αλλάξει την τιμή, εκτός αν η άλλη εταιρεία αλλάξει την τιμή της.

Καθεμία από τις εταιρείες έχει μια καμπύλη βέλτιστης απάντησης που δίνει τη βέλτιστη τιμή (που μεγιστοποιεί το κέρδος) ως συνάρτηση της τιμής της άλλης εταιρείας. Οι τιμές ισορροπίας Cournot-Nash δίνονται από την τομή των δύο καμπυλών βέλτιστης απάντησης.

Το μοντέλο έχει κάποιες ομοιότητες στη δομή του με το κλασικό μοντέλο του Hotelling (1929) σχετικά με την χωρική ισορροπία. Αποδεικνύεται ότι η ισορροπία Cournot-Nash είναι τέτοια που οι δύο εταιρείες χρεώνουν γενικά διαφορετικές τιμές. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι χρεώνοντας την ίδια τιμή η εταιρεία επιτυγχάνει ένα τοπικό ελάχιστο των κερδών της. Ως εκ τούτου και οι δύο εταιρείες έχουν κίνητρο να μη χρησιμοποιούν ίδιες τιμές.

Δεν είναι δύσκολο να βρεθούν παραδείγματα στα οποία η υπόθεση ότι καθεμία από τις εταιρείες αναζητά μέγιστα συνολικά κέρδη χρησιμοποιώντας την τιμή της άλλης εταιρείας ως παράμετρο θα οδηγούσε στην ανυπαρξία οποιασδήποτε Cournot-Nash ισορροπίας. Αυτό ίσως εκπλήσσει με μια πρώτη ματιά κάποιον που είναι οικείος με τα θεωρήματα γενικής ύπαρξης των σημείων ισορροπίας του Nash. Παρ' όλα αυτά, παρατηρείται ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση η υπόθεση ότι η συνάρτηση βέλτιστης απάντησης είναι συνεχής δεν ικανοποιείται (κατά μήκος της γραμμής τις ισότητας τιμών στις δύο εταιρείες, οι συναρτήσεις μπορεί να είναι ασυνεχείς). Καθώς έχει υποτεθεί ότι οι δύο εταιρείες είναι ίδιες από κάθε άποψη, αν αποδειχθεί ότι μία από αυτές αποκομίζει χαμηλότερα κέρδη σε μια προτεινόμενη ρύθμιση των τιμών, ίσως επιχειρήσει να αλλάξει τους ρόλους με την ανταγωνίστριά της. Μπορεί έτσι να έχουμε μια μόνιμη διακύμανση των τιμών των δύο εταιρειών. Απ' την άλλη, σε όλα αυτά τα παραδείγματα εμφανίζεται η ύπαρξη τοπικών μέγιστων κερδών και για τις δύο εταιρείες στα οποία δεν συμφέρει καμία από τις δύο εταιρείες να αλλάξει οριακά τις τιμές της (χωρίς μια αλλαγή στην τιμή και της άλλης εταιρείας). Επομένως, και για τις δύο εταιρείες, η κατάσταση είναι είτε αυτή της σιωπηρής συμφωνίας στην ισορροπία Cournot-Nash ή σε συγκεκριμένες στιγμές είτε αυτή της «διαμάχης» κατά την οποία κάθε εταιρεία προσπαθεί να πάρει τη θέση αυτής που αποκομίζει τα περισσότερα κέρδη.

Δεχόμαστε ότι οι πελάτες καταφτάνουν τυχαία στις εγκαταστάσεις εξυπηρέτησης της εταιρείας. Η διάρκεια εξυπηρέτησης επίσης αποδεχόμαστε ότι είναι τυχαία. Και στα δύο ακολουθούμε τις συνήθεις παραδοχές απλών μοντέλων ουρών.

Συγκρίνουμε τις τιμές Cournot-Nash στις οποίες καταλήγουμε, με τις τιμές τις καθορισμένες από ένα μονοπωλητή που χειρίζεται και τους δύο σταθμούς εξυπηρέτησης. Αυτές οι τιμές συγκρίνονται επίσης με τις τιμές μεγιστοποίησης της ευημερίας που θα καθόριζε ένας ρυθμιστικός φορέας. Όπως είναι αναμενόμενο, οι μονοπωλιακές τιμές είναι υψηλότερες από αυτές που καθορίζει η ισορροπία δυοπωλίου Cournot-Nash και αυτές του δυοπωλίου είναι υψηλότερες από αυτές που καθορίζει η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας. Θα πρέπει να τονιστεί ότι παρά το γεγονός ότι αγνοούνται τα έξοδα, οι τιμές μεγιστοποίησης της κοινωνική ευημερίας είναι θετικές λόγω του ότι η είσοδος σε μια ουρά αναμονής έχει εξωτερική επίδραση σε όσους αργότερα μπουν σε αυτήν την ουρά. Αυτές οι ουρές αναμονής πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τον καθορισμό των τιμών μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας.

3.2.2 Δύο εταιρείες δύο τιμές

Όταν ένα αγαθό πωλείται σε διαφορετικές τιμές, μπαίνουν στο παιχνίδι οι δυνάμεις εξομοίωσης των τιμών. Αυτές οι δυνάμεις δεν λειτουργούν απαραίτητα με τον ίδιο τρόπο όταν οι υπηρεσίες προμήθειας των εταιρειών και οι πελάτες πρέπει να περιμένουν σε ουρά.

Ας υποθέσουμε ότι μόνο η μία εταιρεία μειώνει την τιμή. Κάποιοι από τους πελάτες θα προτιμήσουν να λάβουν την υπηρεσία σε χαμηλότερη τιμή, αλλά αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα η ουρά της εταιρείας με τη χαμηλή τιμή να γίνει μεγαλύτερη, αφού περισσότεροι πελάτες θα στραφούν σε αυτήν. Απ' την άλλη, στην εταιρεία με την υψηλότερη τιμή, η ουρά γίνεται μικρότερη και μειώνεται ο χρόνος αναμονής. Οι πελάτες που προτιμούν το μικρότερο χρόνο αναμονής δε θα πάνε στην εταιρεία με τη χαμηλή τιμή, παρ' ότι η τιμή είναι καλύτερη. Κάποια στιγμή αυτή η διαδικασία μετάβασης των πελατών από την εταιρεία με την υψηλότερη τιμή σε αυτήν με τη χαμηλότερη θα τελειώσει. Παρακάτω αποδεικνύεται ότι το σημείο όπου θα λήξει αυτή η διαδικασία μπορεί να αποτελέσει ισορροπία.

Προτού στραφούμε στο λεπτομερές μοντέλο, ας ξεκαθαρίσουμε τη διαφορά μεταξύ του μοντέλου δύο εταιρειών που πουλάνε το ίδιο αγαθό και του μοντέλου δύο εταιρειών που πουλάνε διαφορετικά αγαθά. Η αναμονή για την εξυπηρέτηση είναι προφανώς μέρος της ίδιας της υπηρεσίας. Αν υπάρχει διαφορετικός χρόνος αναμονής σε κάθε εταιρεία, τότε η υπηρεσία που παράγει κάθε εταιρεία αποτελεί διαφορετικό αγαθό. Αλλά αν το αγαθό δεν είναι το ίδιο και στις δύο εταιρείες, τότε προφανώς η τιμή δε χρειάζεται να είναι ίδια. Το βασικό στοιχείο του προβλήματός μας είναι ότι δεν μπορούμε εκ των προτέρων να πούμε αν τα αγαθά θα είναι δύο διαφορετικά ή ένα: δηλαδή, το εάν ο χρόνος αναμονής θα είναι ή όχι ο ίδιος και στις δύο εταιρείες καθορίζεται από το ίδιο το σύστημα.

Υποθέτουμε ένα σύστημα με εξυπηρέτηση παρεχόμενη από δύο εταιρείες. Και στις δύο εταιρείες η ποιότητα της εξυπηρέτησης είναι η ίδια και ο χρόνος εξυπηρέτησης κατανέμεται εκθετικά με την ίδια παράμετρο εξυπηρέτησης-χρόνου. Κάθε εταιρεία προσαρμόζει την τιμή εξυπηρέτησής της ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει συνεργασία μεταξύ των εταιρειών. (Παρακάτω στην εργασία θα χαλαρώσουμε αυτήν την παραδοχή).

Υπάρχει μια ροή πελατών τύπου Poisson που φτάνει στις εταιρείες. Κάθε πελάτης έχει τρεις εναλλακτικές: να επιλέξει την εταιρεία 1, να επιλέξει την εταιρεία 2 ή να φύγει χωρίς να λάβει εξυπηρέτηση. Η επιλογή πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη το κόστος αναμονής, τον αναμενόμενο χρόνο αναμονής σε κάθε εταιρεία και την τιμή της εξυπηρέτησης σε κάθε εταιρεία.

Εφαρμογή αυτού του μοντέλου θα μπορούσαν να θεωρηθούν δύο κέντρα υπολογιστών που ανταγωνίζονται στην ίδια αγορά. Ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής και οι τιμές και στα δύο κέντρα είναι γνωστά σε όλους τους πελάτες και τους πιθανούς πελάτες. Ένας πιθανός πελάτης συμπεριλαμβάνεται στη ροή των πελατών ακόμη κι αν δεν ασχοληθεί ποτέ με το να εμφανιστεί σε καμία απ’ τις δύο ουρές, λόγω των υψηλών τιμών και του μεγάλου χρόνου αναμονής. Κατά παραδοχή η επιλογή του πελάτη γίνεται βάσει των τιμών και του προσδοκώμενου χρόνου αναμονής και δεν εξαρτάται από την τρέχουσα σειρά αναμονής. Δηλαδή, υποθέτουμε ένα υψηλό κόστος μετακίνησης αν ο πελάτης είναι ήδη σε ένα από τα δύο κέντρα.

Υποθέτουμε ότι το κόστος αναμονής είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου αναμονής και ότι ο κάθε πελάτης έχει μια διαφορετική συνάρτηση κόστους αναμονής, ώστε κάθε πελάτης να χαρακτηρίζεται από την παράμετρο C η οποία υποδηλώνει το κόστος αναμονής μιας μονάδας χρόνου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση κατανομής η οποία δείχνει την πιθανότητα η παράμετρος του κόστους αναμονής ενός τυχαίου πελάτη να μην ξεπερνά το C.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

R = η ανταμοιβή από την λήψη της εξυπηρέτησης (δεχόμαστε ότι είναι ίση για όλους τους πελάτες)

$1/\mu$ = προσδοκώμενος χρόνος εξυπηρέτησης

W_i = προσδοκώμενος χρόνος αναμονής στην εταιρεία i (i=1,2)

C = κόστος αναμονής ανά μονάδα χρόνου (υποθέτουμε ότι $C>0$)

P_i = τιμή εξυπηρέτησης στην εταιρεία i (υποθέτουμε ότι $P1>P2$)

U_i = το καθαρό κέρδος ενός πελάτη από την λήψη της εξυπηρέτησης από την εταιρεία i

F(C) = η συνάρτηση κατανομής της παραμέτρου C ανάμεσα στους πελάτες (υποθέτουμε συνεχής)

f(C) = η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής C

Λ = η παράμετρος Poisson της διαδικασίας αφίξεων των πιθανών πελατών. Για λόγους απλότητας δεχόμαστε ότι Λ=1

λi = η παράμετρος Poisson αφίξεων στην εταιρεία i.

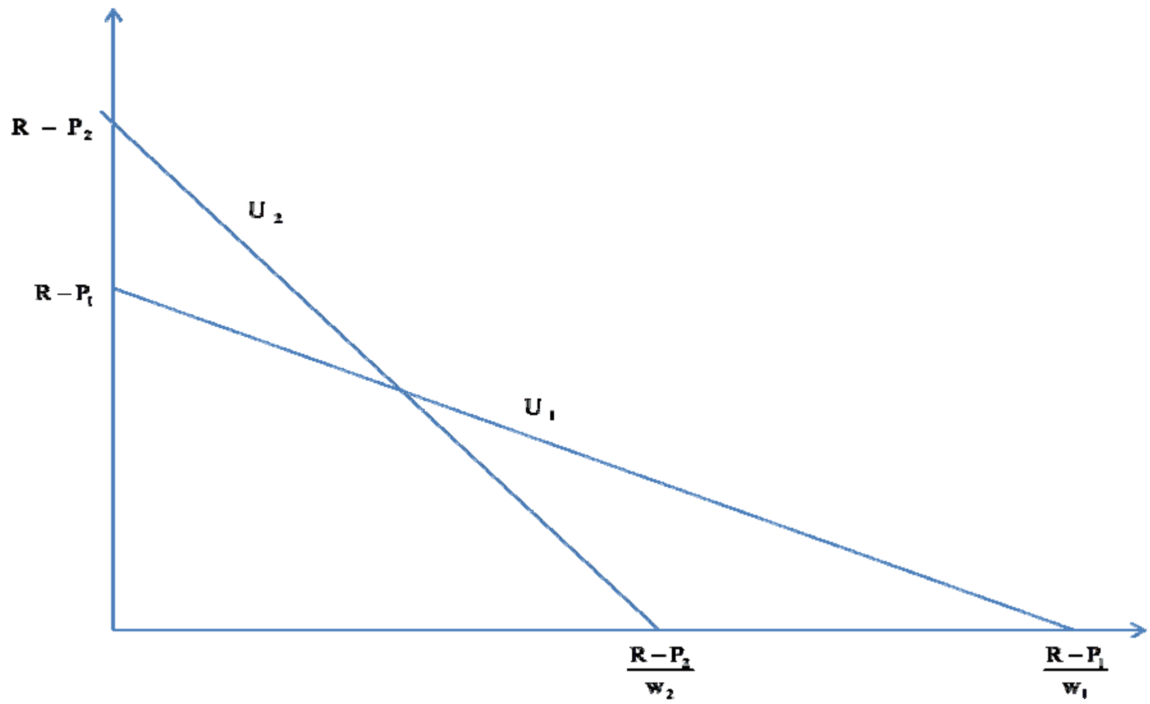
Το καθαρό κέρδος του πελάτη στην εταιρεία i είναι:

$$U_i = R - W_i C - P_i \quad (i = 1, 2) \qquad (1)$$

Επειδή υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $P_1 > P_2$ θα πρέπει $w_1 \le w_2$ διαφορετικά οι P_1, P_2 δε μπορεί να είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας. Επομένως $P_1 - P_2 > 0$, $w_2 - w_1 \ge 0$.

Ο πελάτης θα προτιμήσει την εταιρεία 2 όταν U2>U1, δηλαδή όταν $(P_1 - P_2)/(W_2 - W_1) > C$ (από το $R - W_2C - P_2 > R - W_1C - P_1$), και αντιστρόφως για την εταιρεία 1. Θα προτιμήσει να φύγει χωρίς εξυπηρέτηση όταν το καθαρό κέρδος είναι αρνητικό και στις δύο εταιρείες, δηλαδή, βάσει του (1), όταν $C > (R - P_i)/W_i$ για i = 1, 2.

Ας συνοψίσουμε τις συνθήκες με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος.



Ο πελάτης προτιμά την εταιρεία 2 όταν το κόστος αναμονής του ικανοποιεί

$$0 < C \le (P_1 - P_2)/(W_2 - W_1) \text{ και } C \le (R - P_2)/W_2. \qquad (2A)$$

Προτιμά την εταιρεία 1 όταν

$$C>(P_1-P_2)/(W_2-W_1) \text{ και } C\leq (R-P_1)/W_1 \qquad (3A)$$

Και φεύγει χωρίς να εξυπηρετηθεί όταν

$$C>(R-P_1)/W_1 \text{ και } C>(R-P_2)/W_2. \qquad (4A)$$

Υποθέτουμε ότι οι τιμές είναι τέτοιες ώστε και οι δύο εταιρείες να λειτουργούν, δηλαδή τουλάχιστον ένας πελάτης φτάνει σε καθεμιά. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$(P_1 -P_2)/(W_2 - W_1) < (R - P1)/W_1 \qquad (5)$$

Απ' αυτήν την παραδοχή, οι ανωτέρω συνθήκες απλοποιούνται στις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

Ο πελάτης προτιμά την εταιρεία 2 όταν :

$$C \leq(P_1 -P_2)/(W_2-W_1) \qquad (2)$$

Προτιμά την εταιρεία 1 όταν:

$$(P_1-P_2)/(W_2-W_1)<C \leq(R-P_1)/W_1 \qquad (3)$$

Και φεύγει χωρίς εξυπηρέτηση όταν :

$$C>(R-P_1)/W_1 \qquad (4)$$

Όταν η (2) ισχύει (δηλαδή $U_2> U_1$) και σύμφωνα με το (5) έχουμε $C< (R-P_1)/W_1$ τοτε και ως εκ τούτου $U_2> U_1>0$. Επομένως η (2) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο πελάτης να προτιμήσει την εταιρεία 2. Αντίστοιχα, όταν ισχύει η (4) (δηλαδή $U_1<0$), τότε από την (5), η (2) δεν ισχύει και $U_2< U_1< 0$. Επομένως η (4) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο πελάτης να φύγει χωρίς εξυπηρέτηση.

Σε αυτό το μοντέλο, η επιλογή της εταιρείας από τον πελάτη εξαρτάται όχι μόνο από τις τιμές της κάθε εταιρείας αλλά και από τον προσδοκώμενο χρόνο αναμονής. Αλλά ο προσδοκώμενος χρόνος αναμονής και οι αποφάσεις των πελατών είναι αλληλένδετες.

Τώρα εξετάζεται η εύρεση σημείων στρατηγικής ισορροπίας στις τιμές. Επειδή πρόκειται για ουρά M/M/1 γνωρίζουμε ότι $w_i = \dfrac{1}{\mu - \lambda_i}$.

Όλοι οι πελάτες των οποίων ο χρόνος αναμονής ικανοποιεί τη (2) θα προτιμήσουν την ουρά 2 και το κλάσμα της ροής των πελατών προς αυτή είναι ίσο με $F\left[\left(P1 - P2\right)\left(W2 - W1\right)\right]$. Κατά τον ίδιο τρόπο, ο ρυθμός εισόδου στην εταιρεία 2 είναι

$$\lambda_2 = \Lambda \cdot F\left[\left(P_1 - P_2\right)/\left(W_2 - W_1\right)\right] \qquad (6)$$

Βάσει του (3) το κλάσμα της ροής που προτιμά την εταιρεία 1 είναι:

$$\lambda_1 = \Lambda \cdot \left[F\left[\left(R - P_1 \right) / W_1 \right] - F\left[\left(P_1 - P_2 \right) / \left(W_2 - W_1 \right) \right] \right] \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας $Wi = (\mu\text{-}\lambda i)^{-1}$ και θέτοντας

$$(P_1\text{-}P_2)/(W_2\text{-} W_1) = \alpha, \qquad (R\text{-}P_1)/W_1 = \beta$$

παίρνουμε τις παρακάτω παραστάσεις για τον προσδοκώμενο χρόνο αναμονής σε κάθε εταιρεία:

$$W_1 = \frac{1}{\mu - F(\beta) + F(\alpha)} \quad (8)$$

$$W_2 = \frac{1}{\mu - F(\alpha)} \quad (9)$$

Οι εξισώσεις (8) και (9) ορίζουν τον προσδοκώμενο χρόνο αναμονής σε κάθε εταιρεία ως συνάρτηση της τιμής εξυπηρέτησης.

Έχουμε ως τώρα υποθέσεις ότι $P_1 > P_2$. Αλλά αν η τιμή είναι ίδια και στις δύο εταιρείες, προκύπτουν κάποιες δυσκολίες. Πρώτον, το α δεν ορίζεται όταν $P_1=P_2$ γιατί τότε συνεπάγεται ότι ο προσδοκώμενος χρόνος αναμονής πρέπει να είναι ο ίδιος, δηλαδή $W_1=W_2$, ώστε ο παρονομαστής της παράστασης να είναι μηδέν. Δεύτερον, στην προηγούμενη συζήτηση μπορέσαμε να διαχωρίσουμε τους πελάτες των δύο εταιρειών ανάλογα με το κόστος αναμονής τους. Με ίσες τιμές δεν μπορούμε να κάνουμε αυτόν τον διαχωρισμό. Ακριβώς το μισό από το σύνολο της ροής φτάνει σε κάθε εταιρεία.

Για να αποφύγουμε αυτές τις δυσκολίες, μπορούμε να εξετάσουμε την συμπεριφορά του α όταν $P_1 \rightarrow P_2$. Τώρα το W_1 πρέπει να είναι κοντά στο W_2 καθώς η P_1 πλησιάζει την P_2 και για να είναι ο προσδοκώμενος χρόνος αναμονής όμοιος, οι δείκτες άφιξης κάθε ροής πρέπει επίσης να είναι όμοιοι. Δηλαδή $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ όπως $P_1 \rightarrow P_2$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό α, β, οι παράμετροι ροής λ_i είναι

$$\lambda_1 = F(\beta) - F(\alpha) \quad (7')$$

$$\lambda_2 = F(\alpha) \quad (6')$$

Στο όριο όταν $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ έχουμε:

$$F(\alpha) = \frac{F(\beta)}{2} \quad (10)$$

Αυτή η εξίσωση δίνει έμμεσα το όριο του α όταν $P_1 \rightarrow P_2$

3.2.3 Ίσες ή Διαφορετικές Τιμές

Ας υποθέσουμε ότι τα έξοδα των εταιρειών είναι συνεχή και εξαρτημένα από τη ροή των πελατών. Η συνάρτηση κέρδους της εταιρείας 1 είναι $\pi_1 = P_1\lambda_1$, γιατί λ_1 είναι ο αναμενόμενος αριθμός αφίξεων στην εταιρεία 1 ανά μονάδα χρόνου και επομένως $P_1\lambda_1$ είναι το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας 1 ανά μονάδα χρόνου. Η εταιρεία 1 υποθέτει ότι η τιμή εξυπηρέτησης της εταιρείας 2 είναι σταθερή και επιλέγει την βέλτιστη τιμή P_1. Αλλά η λ_1 είναι επίσης συνάρτηση του P_1 και μπορούμε να σχηματίσουμε το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης, όπου οι περιορισμοί παριστάνουν τη σχέση μεταξύ λ_1 και P_1:

$$\max_{P_1, W_i, \lambda_i} \pi_1 = P_1 \cdot \lambda_1 \tag{11}$$

υπό τους περιορισμούς (6)-(9) και με P_2 υποθετική σταθερά. Ομοίως, για την εταιρεία 2 έχουμε

$$\max_{P_2, W_i, \lambda_i} \pi_2 = P_2 \cdot \lambda_2 \tag{12}$$

υπό τους ίδιους περιορισμούς και με P_1 υποθετική σταθερά.

Ισορροπία των τιμών υπάρχει, όταν καμία από τις δύο δε θέλει να αλλάξει την τιμή της. Έστω P_1^e και P_2^e οι τιμές στο σημείο στρατηγικής ισορροπίας..

Το βασικό ερώτημα σε αυτήν την εργασία είναι αν $P_1^e = P_2^e$ μπορούν να αποτελούν σημείο στρατηγικής ισορροπίας. Το ερώτημα αναλύεται ως εξής: πρώτα βρίσκονται οι μερικές παράγωγοι $\partial\pi_1/\partial P_1$ και έπειτα οι τιμές αυτών των μερικών παραγώγων υπολογίζονται στα σημεία όπου $P_1 = P_2$ Οι $P_1^e = P_2^e$ είναι τιμές ισορροπίας αν

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} \leq 0 \text{ για κάθε } P_1 \geq P_1^e \tag{13α}$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial P_2} \geq 0 \text{ για κάθε } P_2 \leq P_2^e \tag{13β}$$

Αυτές είναι οι γενικές συνθήκες για τις τιμές ισορροπίας. Στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση ζήτησης είναι συνεχής και συνεχής παραγωγίσιμη οι συνθήκες πρέπει να ισχύουν με αυστηρή ισότητα .

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό, ώστε ο μόνος τρόπος να γράψεις τις συνθήκες για ένα σημείο ισορροπίας Nash είναι μέσω ανισοτήτων όπως στο (13).

Αν $\partial\pi_1/\partial P_1 > \partial\pi_2/\partial P_2$ όταν $P_1 = P_2$, τότε οι συνθήκες (13) για την ισορροπία με ίσες τιμές δεν ισχύουν και το σύστημα δεν είναι σε ισορροπία όταν και οι δύο εταιρείες πουλάνε στην ίδια τιμή.

Ας ξεκινήσουμε με $\partial\pi_2/\partial P_2$. Από τη (12) και το (6) έχουμε τη συνάρτηση κέρδους της εταιρείας 2:

$$\pi_2 = P_2 \cdot \lambda_2 \qquad (14)$$

της οποίας η μερική παράγωγος ως προς P_2 είναι ίση με

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial P_2} = F(\alpha) - \frac{P_2 f(\alpha)}{W_2 - W_1}\left[1 + \alpha\left(\frac{\partial w_2}{\partial P_2} - \frac{\partial w_1}{\partial P_2}\right)\right] \qquad (15)$$

Για να εκφράσουμε την ποσότητα ($\partial W_2/\partial P_2$ - $\partial W_1/\partial P_2$) ως συνάρτηση των παραμέτρων, παραγωγίζουμε την (8) και την (9) ως προς P_2. Αντικατάσταση στη (15) μας δίνει:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial P_2} = F(\alpha) - P_2\left[\frac{W_2 - W_1}{f(\alpha)} + W_2{}^2\alpha + \frac{W_1{}^2\alpha}{\gamma}\right]^{-1} \qquad (16)$$

όπου $\gamma = 1 + W_1 f(\beta)\beta$

Αν P2 = 0 τότε $\partial\pi_2/\partial P_2 = F(\alpha) > 0$.

Όταν P2→P1 (P2≤P1). Ισχύει ότι W2→W1. Άρα

$$\lim_{P_2 \to P_1} \frac{\partial \pi_2}{\partial P_2} = F(\alpha) - \frac{P_2}{W^2}\left(\frac{1}{\alpha + \frac{\alpha}{\gamma}}\right) \qquad (17)$$

όπου $W = W_1 = W_2$, όριο.

Για την εταιρεία 1, παίρνουμε αντίστοιχα

$$\lim_{P_1 \to P_2} \frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} = F(\alpha) - \frac{P_1}{W^2}\left(\frac{\frac{[f(\beta)W\alpha + 1]}{\gamma}}{\alpha + \frac{\alpha}{\gamma}}\right) \qquad (18)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε τη σχέση μεταξύ των δύο παραγώγων (17) και (18). Χρησιμοποιώντας το γ όπως ορίζεται παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία παράγωγο:

$$\lim_{P_1 \to P_2} \frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} = F(\alpha) - \frac{P_1}{W^2}\left(\frac{1}{\alpha + \frac{\alpha}{\gamma}} \right) + \frac{P_1}{W^2} \frac{\left[f(\beta) W\alpha + 1 \right]}{(\gamma\alpha + \alpha)} \tag{19}$$

και χρησιμοποιώντας τη (17),

$$\lim_{P_1 \to P_2} \frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} = \frac{\partial \pi_2}{\partial P_2} + \frac{P_1}{W} \frac{\left[f(\beta)(\beta - \alpha) \right]}{(\gamma\alpha + \alpha)} \tag{20}$$

Τώρα β>α, οπότε το δεξί σκέλος της ισότητας είναι θετικό. Άρα

$$\partial\pi_1/\partial P_2 \geq \partial\pi_2/\partial P_2 \tag{21}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο αν f (β) = 0.

Όταν $P1^* \neq P2^*$, οι δύο εταιρείες βρίσκονται σε ισορροπία όταν $\partial\pi i/\partial Pi = 0$ και ισχύουν οι συνθήκες δεύτερης τάξης. Αλλά όταν $P_1^e = P_2^e$ τότε, όπως δείξαμε νωρίτερα, οι εταιρείες είναι σε ισορροπία αν ισχύουν οι συνθήκες της (13). Αλλά, όπως μόλις είδαμε, όταν f(β)>0, έχουμε ανισότητα στη (21) για όλα τα ζευγάρια Pi όπου P_1=P_2: Επομένως, οι συνθήκες (13) δεν ικανοποιούνται.

Η f(β) ισούται με την πιθανότητα να υπάρχουν πελάτες με υψηλό κόστος αναμονής που να θέλουν να λάβουν την εξυπηρέτηση αλλά αφήνουν την ουρά γιατί πρέπει να περιμένουν πολύ χρόνο. Επομένως f(β)=0 , αν όλοι οι πελάτες λάβουν την υπηρεσία, ενώ αν κάποιοι πελάτες φύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν, τότε f(β)>0, και η τιμή δεν μπορεί να είναι ίδια και στις δύο εταιρείες. Η δυσκολία είναι ότι το β εξαρτάται από την τιμή, οπότε δεν μπορούμε να πούμε αν οι τιμές θα είναι όντως ίσες.

Έστω το σύστημα αποκλίνει (δηλαδή λ/2>μ). Τότε αν όλοι οι πελάτες παραμείνουν στην ουρά, ο χρόνος αναμονής θα φτάσει το άπειρο και σε ένα τέτοιο σύστημα το f(β) είναι θετικό. Με άλλα λόγια, σε ένα σύστημα όπου λ/2>μ, κάθε εταιρεία θα πουλήσει σε διαφορετική τιμή.

Απ' την άλλη, αν το λ/2 είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με το μ, ο χρόνος αναμονής θα είναι σχετικά μικρός, ακόμη κι αν όλοι οι πελάτες λάβουν την εξυπηρέτηση. Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε F(β)=1 οπότε είναι λογικό να είναι f(β)= 0 και η τιμή να είναι ίδια και στις δύο εταιρείες.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα: *Υποθέτουμε ότι το σύνολο στο οποίο f(x)>0 είναι ένα απλό διάστημα. Τότε μια απαραίτητη συνθήκη για την ισορροπία ίσων τιμών* P^e *είναι:*

$$R \geq W^2 \lambda F^{-1}(0,5) + WF^{-1}(1) \qquad (22)$$

όπου W είναι ο αναμενόμενος χρόνος αναμονή σε κάθε εταιρεία, τέτοιος που κάθε εταιρεία εξυπηρετεί τη μισή ροή, και κανείς δε φεύγει χωρίς εξυπηρέτηση.

Απόδειξη.

Αν P_1=P_2= P τότε f(β)=0. Η συνθήκη για το μέγιστο κέρδος στην εταιρεία 1 γίνεται (δες 19):

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} = F(\alpha) - \frac{P}{W^2}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = 0 \qquad (23)$$

Από το γεγονός ότι F(α) = λ/2 και λ=1 παίρνουμε:

$$P = \lambda W^2 \alpha = \lambda W^2 F^{-1}(0.5) \qquad (24)$$

F(β) είναι μηδέν αν

$$(R-P)/W \geq F^{-1}(1).$$

Αντικαθιστώντας το P στο (24) παίρνουμε τις αναγκαίες συνθήκες (22).

Η σημασία της συνθήκης για ίσες τιμές (22) είναι ότι κανένας πελάτης δεν φεύγει χωρίς να εξυπηρετηθεί. Αυτό συμβαίνει όταν ακόμη και για το υψηλότερο κόστος ανά ώρα, έχουμε ότι το κέρδος από την εξυπηρέτηση Rείναι μεγαλύτερο από το σύνολο του συνολικού κόστους αναμονής [$WF^{-1}(1)$] και η τιμή για την εξυπηρέτηση [$W^2\lambda F^{-1}(0\cdot5)$].

Δυστυχώς, η συνθήκη (22) δεν είναι ικανή για την ισορροπία ίσων τιμών (μπορεί να βρεθεί αντιπαράδειγμα). Ο λόγος είναι ότι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι f(β) έχει μηδενιστεί. Οι εταιρείες μπορεί να καταλήξουν με τόσο υψηλές τιμές που κάποιοι πελάτες να φύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν.

3.2.3 Συνεργασία μεταξύ των εταιρειών

Σε αυτό το κομμάτι θα χαλαρώσουμε τις παραδοχές της μη συνεργασίας. Οι δύο εταιρείες στοχεύουν τώρα στο να μεγιστοποιήσουν το σύνολο των κερδών τους, δηλαδή maxπ= $\pi_1 + \pi_2$. Εδώ εξετάζουμε αν οι τιμές τους θα είναι ίσες. Αρχικά καθορίζουμε τις αναγκαίες συνθήκες για τα μέγιστα κέρδη υπό ίσες τιμές και μετά υπολογίζουμε πως αλλάζουν τα κέρδη μόλις αλλάξει μια τιμή.

Ξεκινάμε θέτοντας $P_1=P_2=P$, δηλαδή εξαναγκάζοντας τις τιμές να είναι ίσες. Ο ρυθμός των πελατών που δεν φεύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν είναι

$$\overline{\lambda} = F\left[\frac{(R-P)}{W}\right] \tag{25}$$

Το ολικό κέρδος είναι π = λP. Κάθε εταιρεία δέχεται τη μισή από τη ροή των πελατών και ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής σε κάθε εταιρεία είναι ως εκ τούτου

$$W = \frac{1}{\mu - \frac{\overline{\lambda}}{2}}$$

Χρησιμοποιώντας το (25) και θέτοντας (R-P)/W = β, μπορούμε να γράψουμε

$$\max_{P} \pi = PF(\beta) \tag{26}$$

$$\text{υπόθεση } W = \left[V - \frac{1}{2}F(\beta)\right]^{-1},$$

με λύση:

$$\frac{1}{2}\beta F(\beta) + \frac{F(\beta)}{Wf(\beta)} - \frac{P}{W^2} = 0 \tag{27}$$

Η τιμή P* που ικανοποιεί την (27) μεγιστοποιεί το κοινό κέρδος των δύο εταιρειών, υπό τον περιορισμό των ίσων τιμών.

Ας επιτρέψουμε τώρα την τιμή της μιας εταιρείας να αλλάξει. Για να δείξουμε την επίδραση στα κοινά κέρδη πρέπει να ορίσουμε το πρόσημο της ακόλουθης παράστασης:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P_1} = \frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} + \frac{\partial \pi_2}{\partial P_1} \tag{28}$$

όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται στα σημεία P*1=P2*=P που ικανοποιούν την (27). Η τιμή του αριστερού όρου δίνεται από την εξίσωση (18), ενώ το δεξί μέρος δίνεται από

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial P_1} = \frac{P_2}{W^2}\frac{1 - \frac{[W_1P_2f(\beta)]}{\gamma}}{\alpha + \frac{\alpha}{\gamma}} \tag{29}$$

Αντικαθιστώντας (29) και (18) στο (28) έχουμε:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P_1} = F(\alpha) - \frac{P_1}{W^2}\frac{\frac{[W\alpha f(\beta)+1]}{\gamma}}{\alpha+\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{P_2}{W^2}\frac{1-\frac{[W_1 P_2 f(\beta)]}{\gamma}}{\alpha+\frac{\alpha}{\gamma}} \tag{30}$$

Ακόμη μπορούμε να πάρουμε την $\partial\pi/\partial P_1$ στη μορφή:

$$A\frac{\partial \pi}{\partial P_1} = \frac{F(\beta)}{Wf(\beta)} + \frac{\beta F(\beta)}{2} - \frac{P}{W^2}\left(2-\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{31}$$

όπου το A είναι θετικό.

Αναζητούμε το πρόσημο της παραγώγου $\partial\pi/\partial P_1$ όταν υπολογίζεται στο σημείο P*1=P*2=P*, τη βέλτιστη τιμή για τις δύο εταιρείες υπό τον περιορισμό των ίσων τιμών εξυπηρέτησης. Δηλαδή, το P* πρέπει να ικανοποιεί την (27). Μετά αφαιρώντας την (27) από την (31) παίρνουμε

$$A\frac{\partial \pi}{\partial P_1} = -\frac{P}{W^2}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) > 0 \tag{32}$$

επειδή β> α.

Επομένως η $\partial\pi/\partial P1$ είναι πάντα θετική και οι δύο εταιρείες μπορούν πάντα να αυξήσουν το συνολικό τους κέρδος πουλώντας τις υπηρεσίες τους σε διαφορετικές τιμές.

Αυτό είναι ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα που προκύπτει η υπόθεση ότι διαφορετικοί πελάτες έχουν διαφορετικό κόστος αναμονής. Στην αρχική περίπτωση, οι δύο εταιρείες χρεώνουν την ίδια τιμή. Μετά, η μια εταιρεία μπορεί να αυξήσει την τιμή της χωρίς καμία αλλαγή στο συνολικό αριθμό των πελατών. Το αποτέλεσμα είναι υψηλότερα κοινά κέρδη. Υποθέτουμε ότι οι τιμές είναι ίδιες σε κάθε εταιρεία, και οι πελάτες χωρίζονται μεταξύ των εταιρειών έτσι ώστε αυτοί με το μεγαλύτερο κόστος αναμονής να εξυπηρετούνται στην εταιρεία 1. Τώρα, ας πάρουμε αυτόν με τον λιγότερο χρόνο αναμονής στην εταιρεία 1 κι ας τον μεταφέρουμε στην εταιρεία 2. Μια μείωση στον προσδοκώμενο χρόνο αναμονής στην εταιρεία 1 θα επιτρέψει στην εταιρεία να αυξήσει την τιμή της με τέτοιο τρόπο ώστε αυτοί που εξυπηρετούνταν στην εταιρεία 1 να συνεχίσουν να εξυπηρετούνται εκεί. Συμπερασματικά, η μια εταιρεία αυξάνει την τιμή της, η δεύτερη δεν την αλλάζει, ο συνολικός αριθμός πελατών παραμένει ίδιος και το αποτέλεσμα είναι υψηλότερα κοινά κέρδη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΕΝΑ ΝΕΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΠΕΛΑΤΩΝ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ 2 ΟΥΡΕΣ.

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το πρόβλημα δύο ουρών όπου πελάτες έρχονται με ρυθμό Λ και εκτός από το να αποφασίσουν αν θα μπουν στην ουρά, αποφασίζουν και σε ποια ουρά θα εισέλθουν με αντίστοιχες πιθανότητες p, q . Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης σημείων στρατηγικής ισορροπίας και βέλτιστων στρατηγικών σε μη παρατηρήσιμες ουρές p^e, q^e. Στο δεύτερο μέρος βρίσκουμε βέλτιστες στρατηγικές ως προς το κοινωνικό σύνολο p^*, q^*. Στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου γίνεται αριθμητική σύγκριση ανάμεσα στις δύο πιθανότητες με τη βοήθεια κατάλληλων διαγραμμάτων.

4.1 Περιγραφή προβλήματος

Έστω ότι πελάτες φτάνουν με μια διαδικασία αφίξεων Poisson (Λ) σε ένα σύστημα δύο ουρών με έναν υπηρέτη η καθεμία.

<u>Οι πελάτες επιλέγουν να μπουν στη πρώτη ουρά με πιθανότητα p, όπου:</u>

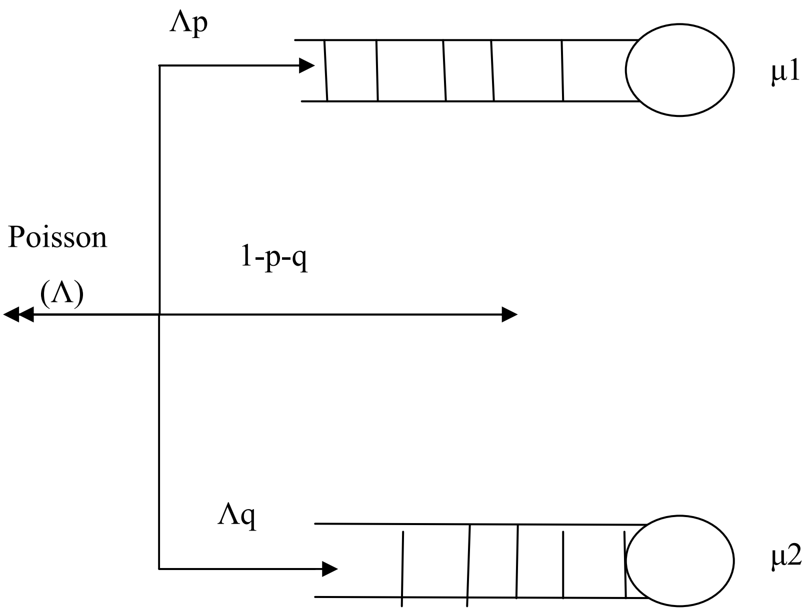
1. ο χρόνος εξυπηρέτησης τους είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο μ_1
2. το όφελος τους από μια συμπλήρωση εξυπηρέτησης είναι R_1
3. το κόστος παραμονής ενός πελάτης στο σύστημα είναι c_1 ανά μονάδα χρόνου.

<u>Οι πελάτες επιλέγουν να μπουν στη δεύτερη ουρά με πιθανότητα q, όπου:</u>

1. ο χρόνος εξυπηρέτησης τους είναι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο μ_2
2. το όφελος τους από μια συμπλήρωση εξυπηρέτησης είναι R_2
3. το κόστος παραμονής ενός πελάτης στο σύστημα είναι c_2 ανά μονάδα χρόνου.

<u>Οι πελάτες επιλέγουν να μην μπουν σε καμία από τις δύο ουρές με πιθανότητα</u> $1-p-q$.

<u>ΣΧΗΜΑ</u>



4.2 Ανάλυση ισορροπίας

Και στις δυο ουρές η πειθαρχία ουράς είναι FCFS, η απόφαση του να μπει ή να μη μπει ένας πελάτης είναι υποχρεωτική, ενώ τέλος κατά τη στιγμή άφιξης ενός πελάτη στο σύστημα, αυτός είτε μπαίνει είτε όχι, χωρίς να μπορεί να παρατηρήσει το μήκος ουράς.

Μια μεικτή στρατηγική για τον κάθε πελάτη είναι της μορφής $S=(p,q)$ όπου $p+q\leq 1$. Αν ο πελάτης i μπει στην ουρά 1, ο πραγματικός μέσος χρόνος παραμονής του θα είναι $W_i^1=\dfrac{1}{\mu_1-\Lambda p}$ και $C\left(W_i^1\right)=\dfrac{c_1}{\mu_1-\Lambda p}$ το αντίστοιχο μέσο κόστος παραμονής ενώ αν μπει στην ουρά 2, ο πραγματικός μέσος χρόνος παραμονής του θα είναι $W_i^2=\dfrac{1}{\mu_2-\Lambda q}$ και $C\left(W_i^2\right)=\dfrac{c_2}{\mu_2-\Lambda q}$.

Έστω ότι όλοι οι πελάτες επιλέγουν μια στρατηγική $S^0=(p_0,q_0)$ τότε

$$\lambda_1=\Lambda p_0$$

$$\lambda_2=\Lambda q_0$$

$$W_1=\frac{1}{\mu_1-\Lambda p_0}$$

$$W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \Lambda q_0}$$

και το συνολικό κέρδος είναι ίσο με

$$U\left(S/S^0\right) = p\left(R_1 - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0}\right) + q\left(R_2 - \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q_0}\right)$$

θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση U κάτω από τις συνθήκες $p+q \le 1,\ p \ge 0,\ q \ge 0$ όπου (p,q) η στρατηγική του πελάτη.

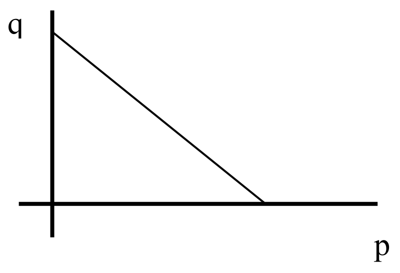
$$\max\left(p \cdot V_1^{S_0} + q \cdot V_2^{S_0}\right) \tag{1}$$

$$\text{υ.π. } p+q \le 1 \text{ και } p \ge 0\ ,\ q \ge 0$$

όπου $V_1^{S_0} = R_1 - \dfrac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0}$, $V_2^{S_0} = R_2 - \dfrac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q_0}$

ΣΧΗΜΑ 1

Εφικτή περιοχή για το πρόβλημα (1)



Για την ανάλυση ισορροπίας διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση Α

Αν όλοι πελάτες αποφασίσουν να μπουν στην πρώτη ουρά τότε αυτό για να συμβεί

πρέπει το αναμενόμενο καθαρό όφελος στην πρώτη ουρά να είναι θετικό και μεγαλύτερο ή ίσο από το αναμενόμενο καθαρό όφελος στη δεύτερη ουρά.
Δηλαδή αν $V_1^{S_0} \geq V_2^{S_0}$ και $V_1^{S_0} > 0$ τότε η στρατηγική ισορροπίας είναι της μορφής

$S^* = (1,0)$.

Επιλύοντας τις δύο ανισότητες προκύπτει $R_1 - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda} > 0$ δηλαδή $R_1 > \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda}$

και $R_1 - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda} \geq R_2 - \frac{c_2}{\mu_2}$ δηλαδή $R_1 - R_2 \geq \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda} - \frac{c_2}{\mu_2}$.

Η περιοχή τιμών των (R_1, R_2) για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω ανισότητες φαίνονται στο Σχήμα 2 ως περιοχή Α.

<u>Περίπτωση Β</u>

Αν όλοι πελάτες αποφασίσουν να μπουν στη δεύτερη ουρά τότε αυτό για να συμβεί πρέπει το αναμενόμενο καθαρό όφελος στη δεύτερη ουρά να είναι θετικό και μεγαλύτερο ή ίσο από το αναμενόμενο καθαρό όφελος στη πρώτη ουρά.
Επομένως αν $V_2^{S_0} \geq V_1^{S_0}$ και $V_2^{S_0} > 0$, τότε η στρατηγική ισορροπίας είναι της μορφής
$S^* = (0,1)$.

Επιλύοντας τις δύο ανισότητες προκύπτει $R_2 - \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda} > 0$ δηλαδή

$R_2 > \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda}$

και $R_2 - \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda} \geq R_1 - \frac{c_1}{\mu_1}$ δηλαδή $R_2 - R_1 \geq \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda} - \frac{c_1}{\mu_1}$.

Η περιοχή τιμών των (R_1, R_2) για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω ανισότητες φαίνονται στο Σχήμα 2 ως περιοχή Β.

Περίπτωση Γ

Αν το αναμενόμενο όφελος και από τις δύο ουρές είναι αρνητικό τότε οι πελάτες δεν θα εισέρθουν σε καμία από τις δύο ουρές και θα αποχωρήσουν χωρίς να εξυπηρετηθούν.

Επομένως αν $V_1^{S_0} < 0$ και $V_2^{S_0} < 0$ τότε η στρατηγική ισορροπίας είναι της

μορφής $S^* = (0,0)$.

Επιλύοντας τις ανισότητες βρίσκουμε $R_1 - \frac{c_1}{\mu_1} < 0$ και $R_2 - \frac{c_2}{\mu_2} < 0$ δηλαδή

$R_1 < \frac{c_1}{\mu_1}$ και $R_2 < \frac{c_2}{\mu_2}$.

Η λύση αντιστοιχεί στη περιοχή Γ στο Σχήμα 2.

Περίπτωση Δ

Μια στρατηγική της μορφής $S_0 = (p_0, 0)$ με $0 < p_0 < 1$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν $R_1 - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0} > 0$ και $R_2 - \frac{c_2}{\mu_2} < 0$.

Αφού $R_2 < \frac{c_2}{\mu_2}$ τότε $q^*(q_0) = 0 \ \forall \ q_0$.

Επομένως όσοι πελάτες αποφασίσουν να εισέρθουν στο σύστημα θα εισέρθουν μόνο στη πρώτη ουρά. Επομένως το πρόβλημα βέλτιστης απάντησης γίνεται $\max \ p \cdot V_1^{S_0}$. Για να έχει βέλτιστη λύση $p = p_0$ με $0 < p_0 < 1$ θα πρέπει $V_1^{S_0} = 0$, δηλαδή $R_1 - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0} = 0$, επομένως

$$p_0 = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_1 - \frac{c_1}{R_1} \right)$$

Για να ισχύει $0 < p_0 < 1$ θα πρέπει $\frac{c_1}{\mu_1} < R_1 < \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda}$ ενώ για την $q = 0$ πρέπει $R_2 < \frac{c_2}{\mu_2}$

περιοχή (Δ) στο Σχήμα 2.

<u>Περίπτωση Ε</u>

Μια στρατηγική της μορφής $S_0 = (0, q_0)$ με $0 < q_0 < 1$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν $R_2 - \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q_0} > 0$ και $R_1 - \frac{c_1}{\mu_1} < 0$.

Αφού $R_1 < \frac{c_1}{\mu_1}$ τότε $p^*(p_0) = 0 \ \forall \ p_0$.

Επομένως όσοι πελάτες αποφασίσουν να εισέρθουν στο σύστημα θα εισέρθουν μόνο στη δεύτερη ουρά. Επομένως το πρόβλημα βέλτιστης απάντησης γίνεται $\max \ q \cdot V_2^{S_0}$. Για να έχει βέλτιστη λύση $q = q_0$ με $0 < q_0 < 1$ θα πρέπει $V_2^{S_0} = 0$, δηλαδή $R_2 - \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q_0} = 0$, επομένως

$$q_0 = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_2 - \frac{c_2}{R_2} \right)$$

Για να ισχύει $0 < q_0 < 1$ θα πρέπει $\frac{c_2}{\mu_2} < R_2 < \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda}$ ενώ για την $p = 0$ πρέπει $R_1 < \frac{c_1}{\mu_1}$

περιοχή (Ε) στο Σχήμα 2.

<u>Περίπτωση Ζ</u>

Έστω στρατηγική της μορφής $S_0 = (p_0, q_0)$ με $0 < p_0 < 1$, $0 < q_0 < 1$ και $p_0 + q_0 < 1$, που αντιστοιχεί σε ένα εσωτερικό σημείο της εφικτής περιοχής $p + q \le 1,\ 0 \le p, q \le 1$ στο πρόβλημα βέλτιστης απάντησης. Σε αυτήν την περίπτωση οι πελάτες μπορούν να εισέρθουν στην πρώτη ουρά με πιθανότητα p_0 στη δεύτερη ουρά με πιθανότητα q_0 αλλά μπορούν και να αποχωρήσουν χωρίς να εξυπηρετηθούν. Για να είναι η S_0 στρατηγική ισορροπίας πρέπει κατ' αρχήν να ισχύει $V_1^{S_0} = 0,\ V_2^{S_0} = 0$.

Αν δεν ισχύει μια από τις παραπάνω σχέσεις, τότε η λύση στο πρόβλημα βέλτιστη απάντηση δε μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο της εφικτής περιοχής.

Λύνοντας ως προς p_0 βρίσκουμε

$$p_0 = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_1 - \frac{c_1}{R_1} \right),$$

αντίστοιχα λύνοντας την παραπάνω ως προς q_0 βρίσκουμε

$$q_0 = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_2 - \frac{c_2}{R_2} \right).$$

Για να ισχύει $p_0 + q_0 < 1$ θα πρέπει $\frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_1 - \frac{c_1}{R_1} \right) + \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_2 - \frac{c_2}{R_2} \right) < 1$

οπότε

$$\frac{c_1}{R_1} + \frac{c_2}{R_2} > \mu_1 + \mu_2 - \Lambda .$$

Γεωμετρικά η ανισότητα αντιστοιχεί σε μια υπερβολή ως προς R_1, R_2, όπου για

$R_1 \to \frac{c_1}{\mu_1}$ ισχύει $R_2 = \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda}$

ενώ για $R_1 \to \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda}$ ισχύει $R_2 = \frac{c_2}{\mu_2}$. Επίσης λόγω των $0 < p_0 < 1,\ 0 < q_0 < 1$ προκύπτει

$$\frac{c_1}{\mu_1} < R_1 < \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda} \quad \text{και} \quad \frac{c_2}{\mu_2} < R_2 < \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda}$$

Περιοχή (Z) στο σχήμα 2.

Περίπτωση Η

Έστω μια στρατηγική της μορφής $S_0 = \left(p_0, q_0\right)$ όπου $0 < p_0 < 1$, $0 < q_0 < 1$ και $p_0 + q_0 = 1$. Σε αυτή τη περίπτωση κανένας πελάτης δεν φεύγει και εισέρχονται με πιθανότητα p_0 στη πρώτη ουρά και με πιθανότητα q_0 στη δεύτερη ουρά. Για να είναι Σ.Σ.Ι. πρέπει $R_1 - \dfrac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0} = R_2 - \dfrac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q_0}$ και

$R_1 - \dfrac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0} \geq 0, \quad R_2 - \dfrac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q_0} \geq 0$.

Για να βρούμε την τιμή του p_0 λύνουμε την

$R_1 - \dfrac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0} = R_2 - \dfrac{c_2}{\mu_2 - \Lambda(1-p_0)}$ προκύπτει

$R_1 - R_2 = \dfrac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p_0} - \dfrac{c_2}{\mu_2 - \Lambda(1-p_0)}$ και κάνοντας ομώνυμα παίρνουμε

$$R_1 - R_2 = \frac{c_1\left(\mu_2 - \Lambda(1-p_0)\right) - c_2\left(\mu_1 - \Lambda p_0\right)}{\left(\mu_1 - \Lambda p_0\right)\left(\mu_2 - \Lambda(1-p_0)\right)}$$

$$\left(R_1 - R_2\right)\cdot\left(\mu_1 - \Lambda p_0\right)\left(\mu_2 - \Lambda(1-p_0)\right) = c_1\left(\mu_2 - \Lambda(1-p_0)\right) - c_2\left(\mu_1 - \Lambda p_0\right) \; .$$

Επομένως έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στην δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς p_0

$$A \cdot {p_0}^2 + B p_0 + \Gamma = 0$$

όπου

$$A = \Lambda^2\left(R_1 - R_2\right),$$

$$B = -\Lambda^2 R_1 + \Lambda R_1 \mu_2 + c_1 \Lambda + R_2 \Lambda^2 + R_2 \mu_1 \Lambda - R_2 \Lambda \mu_2 - R_1 \mu_1 \Lambda + c_2 \Lambda$$

και

$$\Gamma = -R_1\mu_1\mu_2 + R_1\mu_1\Lambda + R_2\mu_2\mu_1 - R_2\mu_1\Lambda + c_1\mu_2 - c_2\mu_1 - c_1\Lambda$$

Στη περίπτωση που $R_1 \neq R_2$, ισχύει $A \neq 0$ επομένως έχουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση

$$A \cdot p_0^{\,2} + Bp_0 + \Gamma = 0$$

Στην περίπτωση που $R_2 = R_1$, $A = 0$ και η λύση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης που προκύπτει είναι

$$p_0 = \frac{c_1\mu_2 - c_2\mu_1 - c_1\Lambda}{-\Lambda \cdot \left[\left(c_1 + c_2\right)\right]}$$

Περιοχή (Η) στο Σχήμα 2.

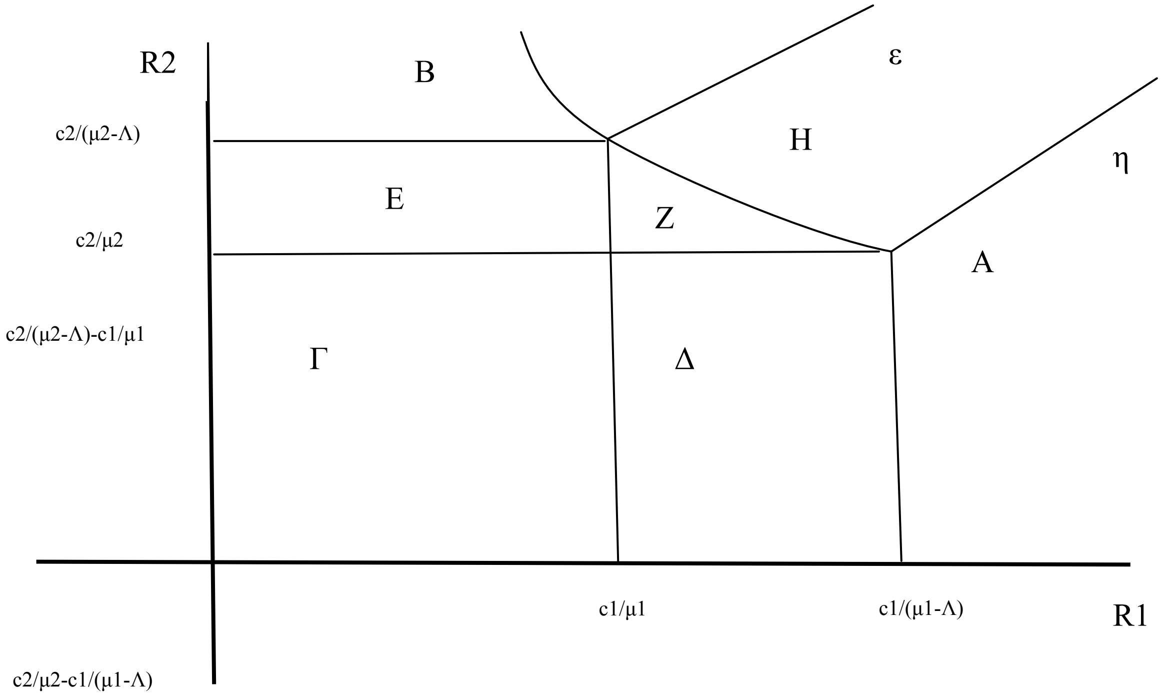
Λόγω συνέχειας των συναρτήσεων όλες οι παραπάνω ανισότητες μπορούν να ισχύουν και ως ισότητες .

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Έστω $\mu_1 < \mu_2$ και $\Lambda < \mu_1$ τότε $\mu_1 - \Lambda < \mu_2 - \Lambda$ και $\frac{c_1}{\mu_1} < \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda}$, $\frac{c_2}{\mu_2} < \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda}$

οπότε $\frac{c_2}{\mu_2} - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda} < \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda} - \frac{c_1}{\mu_1}$ (γιατί $\frac{c_2}{\mu_2} < \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda}$ και $-\frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda} < -\frac{c_1}{\mu_1}$)

Αν $\varepsilon : R_2 = R_1 + \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda} - \frac{c_1}{\mu_1}$ και $\eta : R_2 = R_1 + \frac{c_2}{\mu_2} - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda}$



Σχήμα 2

Περιοχές τιμών του ζεύγους (R_1, R_2) για τις διάφορες περιπτώσεις στρατηγικής ισορροπίας.

4.3 Κοινωνική ευημερία

Η κοινωνική ευημερία ορίζεται ως το συνολικό όφελος του συνόλου των πελατών. Εδώ γίνεται η υπόθεση ότι το ζεύγος (p,q) ορίζεται κεντρικά από το διαχειριστή του συστήματος, με σκοπό να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση συνολικού κέρδους. Επομένως προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\max\left\{S(p,q) = p\cdot\left(R_1 - \frac{c_1}{\mu_1 - \Lambda p}\right) + q\cdot\left(R_2 - \frac{c_2}{\mu_2 - \Lambda q}\right)\right\} \tag{2}$$
$$\text{υ.π. } p+q\le 1,\ p\ge 0,\ q\ge 0$$

Για την εύρεση της βέλτιστης λύσης εφαρμόζουμε τις συνθήκες Karnsh Kuhn Tucker Γράφουμε το πρόβλημα ως

$$\min\{-S(p,q)\}$$
$$\text{υ.π. } p+q\le 1,\ \ -p\le 0,\ \ -q\le 0$$

Για τη μορφή αυτή ορίζουμε Λαγρανζιανή:

$$L(p,q,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -S(p,q)+\lambda_1(p+q-1)-\lambda_2 p-\lambda_3 q\text{, για } \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0\,.$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το ζεύγος (p,q) τοπικά βέλτιστη λύση είναι η ύπαρξη $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ge 0$ τέτοιων ώστε

1. Αν $p+q-1<0$ τότε $\lambda_1 = 0$
2. Αν $p>0$ τότε $\lambda_2 = 0$
3. Αν $q>0$ τότε $\lambda_3 = 0$
4. $\dfrac{\partial L}{\partial p} = 0$
5. $\dfrac{\partial L}{\partial q} = 0$

Επειδή η $S(p,q)$ είναι κοίλη συνάρτηση των (p,q) οποιαδήποτε τοπικά βέλτιστη λύση είναι και ολικά βέλτιστη. Επομένως αρκεί να εξασφαλίσουμε τις συνθήκες (1) έως (5).

Θεωρούμε πρώτα τις (4) και (5) και έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial p} = -R_1+\frac{c_1}{\mu_1-\Lambda p}+\frac{c_1\cdot p\cdot\Lambda}{(\mu_1-\Lambda p)^2}+\lambda_1-\lambda_2 = 0$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει

$$-R_1\cdot(\mu_1-\Lambda p)^2+c_1\cdot(\mu_1-\Lambda p)+c_1\cdot p\cdot\Lambda+(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\mu_1-\Lambda p)^2 =$$

$= \left(\mu_1 - \Lambda p\right)^2 \cdot \left(\lambda_1 - \lambda_2 - R_1\right) + c_1 \cdot \mu_1 = 0$.

Επομένως $\mu_1 - \Lambda p = \pm\sqrt{\dfrac{c_1 \cdot \mu_1}{R_1 + \lambda_2 - \lambda_1}}$. Η $\mu_1 - \Lambda p > 0$, οπότε $\mu_1 - \Lambda p = \sqrt{\dfrac{c_1 \cdot \mu_1}{R_1 + \lambda_2 - \lambda_1}}$

και έτσι παίρνουμε

$$p^* = \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1 \cdot \mu_1}{R_1 + \lambda_2 - \lambda_1}}\right). \tag{1}$$

Από την $\dfrac{\partial L}{\partial q} = 0$ προκύπτει

$$q^* = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2 \cdot \mu_2}{R_2 + \lambda_3 - \lambda_1}}\right). \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκφράσεις για τα p^*, q^*, θεωρούμε τις δυνατές περιπτώσεις για τις τιμές των $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

<u>Περίπτωση 1</u>

- Αν $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = 0$ δηλαδή $p \geq 0,\ q \geq 0,\ p + q - 1 = 0$, δηλαδή όλοι οι πελάτες μπαίνουν σίγουρα σε τουλάχιστον μια από τις δύο ουρές. Κάνοντας αντικατάσταση των p^*, q^* η σχέση $p + q = 1$ προκύπτει

$$\frac{1}{\Lambda}\left[\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1 \cdot \mu_1}{R_1 - \lambda_1}}\right) + \left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2 \cdot \mu_2}{R_2 - \lambda_1}}\right)\right] = 1$$

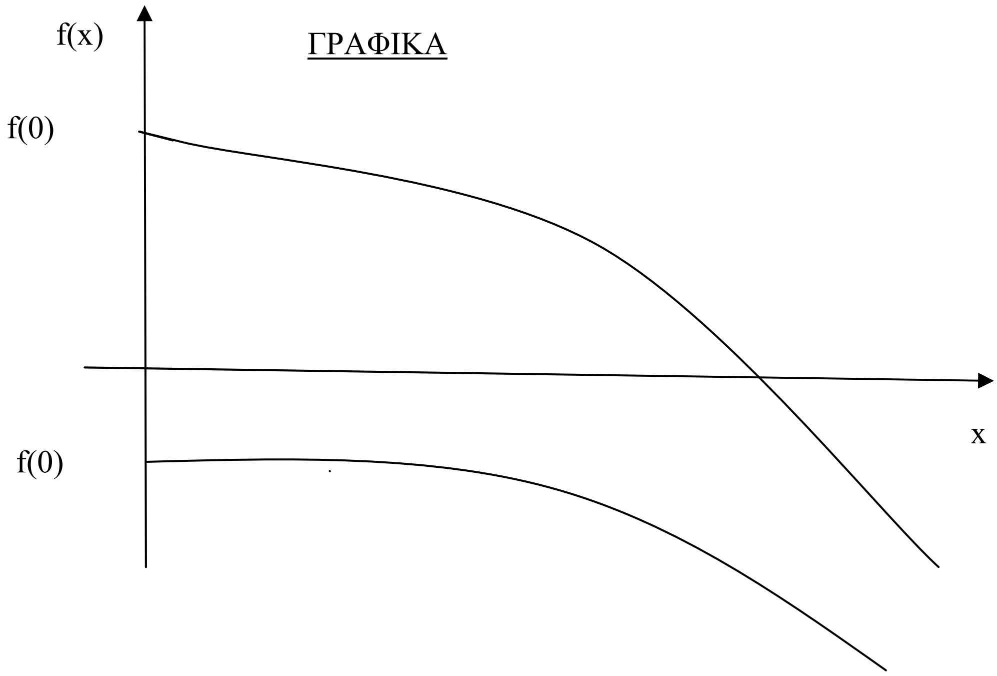
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \mu - \sqrt{\frac{\alpha}{R_1 - x}} - \sqrt{\frac{\beta}{R_2 - x}} \quad \text{όπου} \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 - \Lambda \quad \alpha = c_1 \cdot \mu_1 \quad \beta = c_2 \cdot \mu_2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα ως προς x και

$$f(0) = \mu_1 - \sqrt{\frac{c_1 \cdot \mu_1}{R_1}} + \mu_2 - \sqrt{\frac{c_2 \cdot \mu_2}{R_2}} - \Lambda$$

1. Αν $f(0) < 0$ τότε δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης f γιατί φθίνουσα ως προς x.
2. Αν $f(0) > 0$ τότε υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f γιατί $\lim_{x \to \min(R_1, R_2)} f(x) = -\infty$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.



Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση έχει λύση για θετική τιμή του x , επομένως $\lambda_1 > 0$.

Επειδή πρέπει $p \geq 0$ προκύπτει ότι $\lambda_1 \leq R_1 - \frac{c_1}{\mu_1}$.

Αντίστοιχα $q \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \leq R_2 - \frac{c_2}{\mu_2}$.

Επομένως αν η λύση της εξίσωσης ικανοποιεί $\lambda_1 \leq R_1 - \frac{c_1}{\mu_1}$, $\lambda_1 \leq R_2 - \frac{c_2}{\mu_2}$

τότε το ζεύγος (p, q) αποτελεί βέλτιστη λύση του προβλήματος.

<u>Περίπτωση 2</u>

- Αν $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 > 0$ δηλαδή $p \geq 0,\ q = 0$ και $p + q - 1 = 0$, επομένως $p = 1,\ q = 0$.

  Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι πελάτες θα μπουν στην 1^{η} ουρά κάνοντας αντικατάσταση στις τιμές των $p,\ q$ στις (1) και (2), προκύπτει

$$\frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1 - \lambda_1}}\right) = 1 \text{ και } \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2 + \lambda_3 - \lambda_1}}\right) = 0 .$$

Επομένως $\mu_1 - \Lambda = \sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1 - \lambda_1}}$ από την οποία παίρνουμε

$$\lambda_1 = R_1 - \frac{c_1\mu_1}{\left(\mu_1 - \Lambda\right)^2}$$

αντίστοιχα $\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2 + \lambda_3 - \lambda_1}} = 0$

$R_2 + \lambda_3 - \lambda_1 = \frac{c_2}{\mu_2}$ αντικαθιστώντας την τιμή του λ_1 από παραπάνω παίρνουμε

$\lambda_3 = R_1 - R_2 - \frac{c_1\mu_1}{\left(\mu_1 - \Lambda\right)^2} + \frac{c_2}{\mu_2}$, δηλαδή

$$\lambda_3 = R_1 - R_2 - \frac{c_1\mu_1}{\left(\mu_1 - \Lambda\right)^2} + \frac{c_2}{\mu_2} .$$

Πρέπει να ισχύει $\lambda_1, \lambda_3 > 0$, επομένως

$$R_1 > \frac{c_1\mu_1}{\left(\mu_1 - \Lambda\right)^2} \text{ και } R_1 - R_2 > \frac{c_1\mu_1}{\left(\mu_1 - \Lambda\right)^2} - \frac{c_2}{\mu_2}$$

άρα αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε το ζεύγος $\left(p, q\right) = \left(1, 0\right)$ είναι βέλτιστη λύση.

Περίπτωση 3

- Αν $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ και $\lambda_3 = 0$ δηλαδή $p = 0,\ q \geq 0$ και $p + q - 1 = 0$ επομένως $p = 0,\ q = 1$.

  Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι πελάτες θα μπουν στην 2η ουρά κάνοντας αντικατάσταση στις τιμές των $p,\ q$ στις (1) και (2), προκύπτει

  $$\frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1 + \lambda_2 - \lambda_1}}\right) = 0 \text{ και } \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2 - \lambda_1}}\right) = 1.$$

  Επομένως $\lambda_1 = R_2 - \dfrac{c_2\mu_2}{(\mu_2 - \Lambda)^2}$

  αντίστοιχα $\mu_1 - \sqrt{\dfrac{c_1\mu_1}{R_1 + \lambda_2 - \lambda_1}} = 0$

  $R_1 + \lambda_2 - \lambda_1 = \dfrac{c_1}{\mu_1}$, αντικαθιστώντας την τιμή του λ_1 από παραπάνω παίρνουμε

  $$\lambda_2 = R_2 - R_1 - \frac{c_2\mu_2}{(\mu_2 - \Lambda)^2} + \frac{c_1}{\mu_1}$$

  Πρέπει να ισχύει $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, επομένως

  $$R_2 > \frac{c_2 \cdot \mu_2}{(\mu_2 - \Lambda)^2} \text{ και } R_2 - R_1 > \frac{c_2 \cdot \mu_2}{(\mu_2 - \Lambda)^2} - \frac{c_1}{\mu_1}$$

  άρα αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε το ζεύγος $(p, q) = (0, 1)$ είναι βέλτιστη λύση.

Περίπτωση 4

- Αν $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ και $\lambda_3 > 0$ δηλαδή $p = 0,\ q = 0$ και $p + q - 1 = 0$ δεν μπορεί να συμβεί οπότε πρέπει $\lambda_1 = 0$ δηλαδή $p + q - 1 < 0$ επομένως $p = 0,\ q = 0$.
  Σε αυτή την περίπτωση κανένας πελάτης δεν θα εισέρθει σε μια από τις δύο ουρές. Κάνοντας αντικατάσταση των $p,\ q$ στις (1) και (2), προκύπτει

$$\frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1 + \lambda_2}}\right) = 0 \text{ και } \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2 + \lambda_3}}\right) = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{c_1}{\mu_1} - R_1$$

και αντίστοιχα

$$\lambda_3 = \frac{c_2}{\mu_2} - R_2$$

Πρέπει να ισχύει $\lambda_3, \lambda_2 > 0$, επομένως

$$\frac{c_1}{\mu_1} > R_1 \text{ και } \frac{c_2}{\mu_2} > R_2$$

άρα αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε το ζεύγος $(p,q) = (0,0)$ είναι βέλτιστη λύση.

Περίπτωση 5

- Αν $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 > 0$ δηλαδή $p \geq 0,\ q = 0$ και $p + q - 1 < 0$, επομένως $0 < p < 1$ και $q = 0$.
  Σε αυτή την περίπτωση όσοι πελάτες εισέρθουν στο σύστημα θα το κάνουν μόνο για την ουρά 1. Κάνοντας αντικατάσταση στις τιμές των $p,\ q$ στις (1) και (2), προκύπτει

$$0 < \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1}}\right) < 1 \text{ και } \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2 + \lambda_3}}\right) = 0$$

Λύνοντας τη δεύτερη σχέση προκύπτει

$$\lambda_3 = \frac{c_2}{\mu_2} - R_2$$

Πρέπει να ισχύει $\lambda_3 > 0$, επομένως

$$\frac{c_2}{\mu_2} > R_2$$

άρα αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε το ζεύγος $(p,q) = (p_0, 0)$ είναι βέλτιστη λύση.

<u>Περίπτωση 6</u>

- Αν $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$ και $\lambda_3 = 0$ δηλαδή $p = 0,\ q \geq 0$ και $p + q - 1 < 0$, επομένως $0 < q < 1$ και $p = 0$.

  Σε αυτή την περίπτωση όσοι πελάτες εισέρθουν στο σύστημα θα το κάνουν μόνο για την ουρά 2. Κάνοντας αντικατάσταση στις τιμές των $p,\ q$ στις (1) και (2), προκύπτει

$$\frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1 + \lambda_2}}\right) = 0 \text{ και } 0 < \frac{1}{\Lambda}\left(\mu_2 - \sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2}}\right) < 1$$

Λύνοντας τη πρώτη σχέση προκύπτει

$$\lambda_2 = \frac{c_1}{\mu_1} - R_1$$

Πρέπει να ισχύει $\lambda_2 > 0$, επομένως

$$\frac{c_1}{\mu_1} > R_1$$

άρα αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε το ζεύγος $(p,q)=(0,q_0)$ είναι βέλτιστη λύση.

Περίπτωση 7

- Αν $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0$ και $\lambda_3=0$ δηλαδή $p\geq 0,\ q\geq 0$ και $p+q-1<0$, επομένως $0<p<1$ και $0<q<1$.

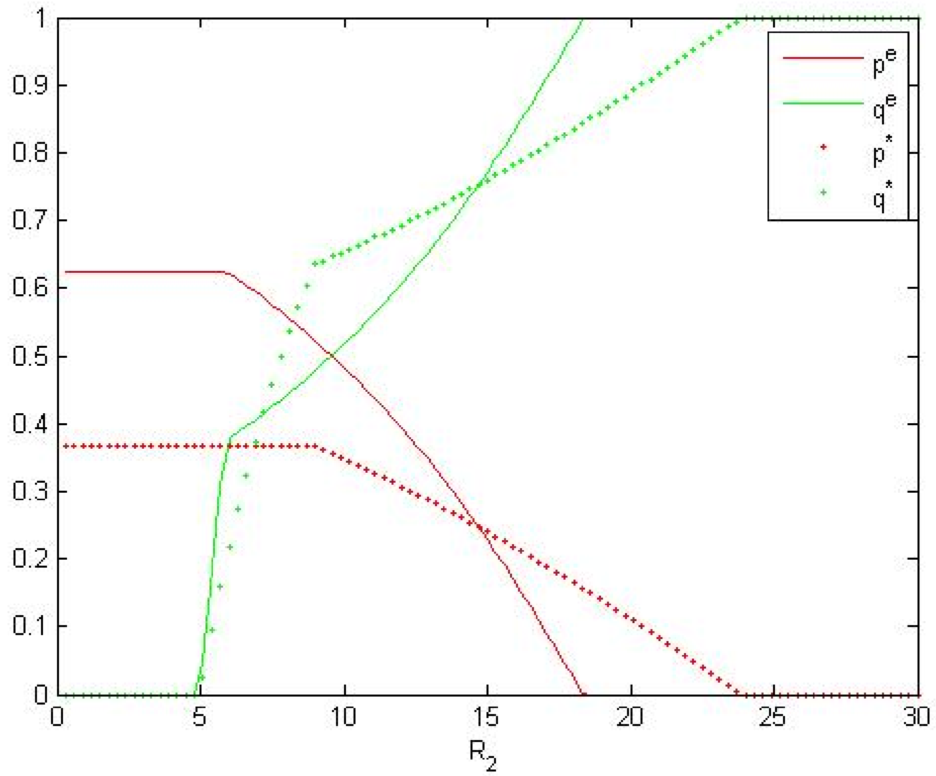
  Σε αυτή την περίπτωση κάποιοι πελάτες θα εισέλθουν σε μια από τις δύο ουρές και κάποιοι θα αποχωρήσουν. Κάνοντας αντικατάσταση στις τιμές των $p,\ q$ στις (1) και (2), προκύπτει

$$0<\frac{1}{\Lambda}\left(\mu_1-\sqrt{\frac{c_1\mu_1}{R_1}}\right)<1 \text{ και } 0<\frac{1}{\Lambda}\left(\mu_2-\sqrt{\frac{c_2\mu_2}{R_2}}\right)<1$$

  άρα αν ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις τότε το ζεύγος $(p,q)=(p_0,q_0)$ είναι βέλτιστη λύση με $0<p_0<1$ και $0<q_0<1$.

4.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από μια σειρά από υπολογιστικά πειράματα που έχουν σκοπό να διερευνήσουν τη συμπεριφορά την στρατηγική ισορροπίας και την βέλτιστη στρατηγική όπως επίσης και τις μεταξύ τους σχέσεις.



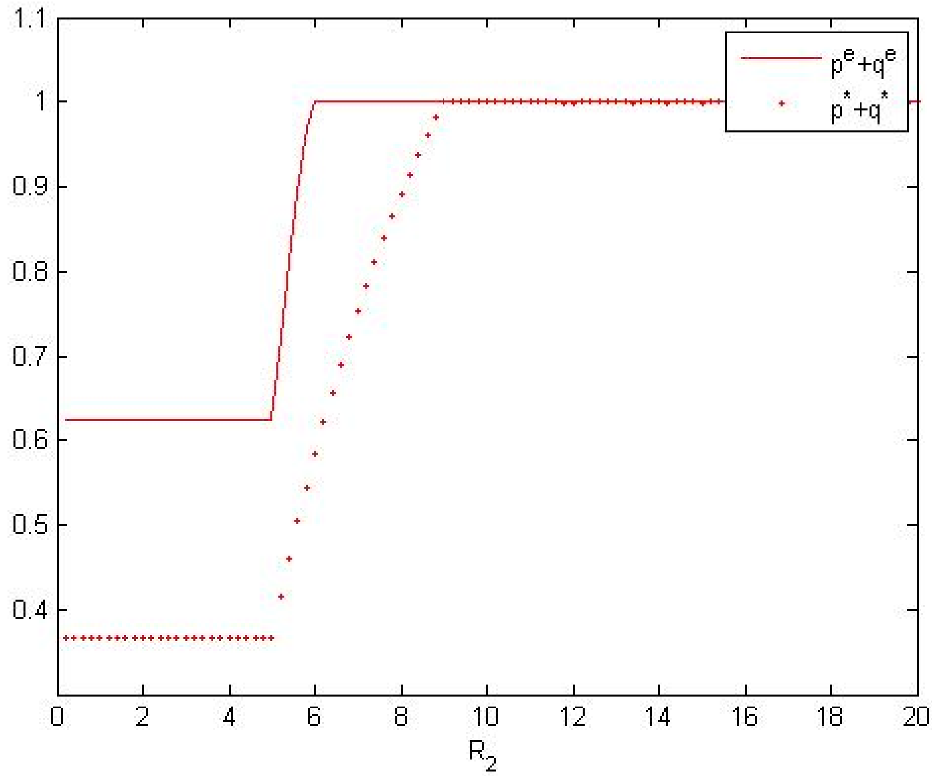
Σχήμα 1 Πιθανότητες Εισόδου για μεταβλητό R2, και R1=20, μ1=1,μ2=2, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Στο πρώτο πείραμα εξετάζουμε τη συμπεριφορά των λύσεων ως συνάρτηση του οφέλους R_2 από τη $2^{η}$ ουρά. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 1.

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές τιμές του R_2 οι πελάτες προτιμούν την ουρά 1 αυτό οφείλεται στο ότι το όφελος από την ουρά 2 είναι μικρό εξαιτίας της τιμής του R_2. Καθώς μεγαλώνει η τιμή του R_2 τότε η προτίμηση των πελατών αλλάζει καθώς περισσότεροι πελάτες αρχίζουν να προτιμούν την ουρά 2 και από ένα σημείο και μετά μπαίνουν όλοι στην ουρά 2 με πιθανότητα 1.

Όσον αφορά τη σύγκριση των λύσεων, από το διάγραμμα δεν προκύπτει μια σταθερή σχέση ανάμεσα στις τιμές των p^e, p^* και q^e, q^*.

Καθώς μεταβάλλεται η τιμή του R_2 αλλάζουν τόσο τα ποσοστά πελατών που μπαίνουν σε κάθε ουρά όσο και η μεταξύ τους σχέση. Για να πάρουμε μια πιο συνολική εικόνα της συμπεριφοράς των πελατών εξετάζουμε τη συνολική πιθανότητα εισόδου $p+q$, για τις περιπτώσεις της ισορροπίας και της κοινωνικής βελτιστοποίησης. Η σύγκριση φαίνεται στο Σχήμα 2.

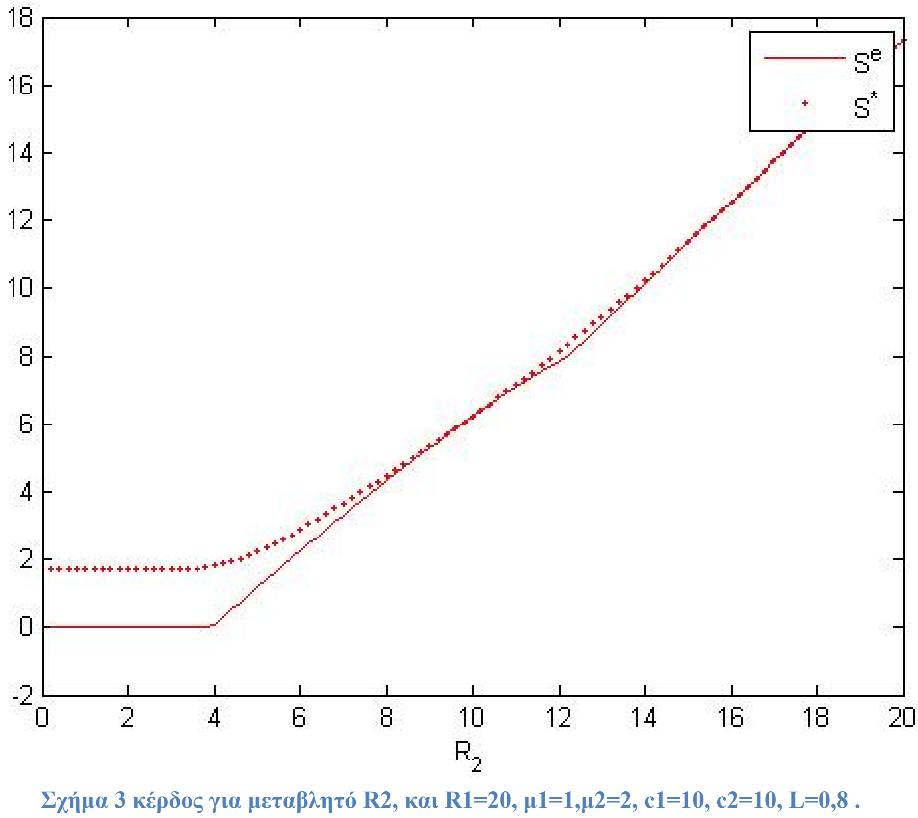


Σχήμα 2 Συνολική πιθανότητα εισόδου για μεταβλητό R2, και R1=20, μ1=1,μ2=2, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Μια πρώτη παρατήρηση από το γράφημα αυτό είναι ότι ισχύει $p^e+q^e \geq p^*+q^*$ για κάθε R_2. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πελάτες οι όποιο έχουν μεγάλο χρόνο αναμονής δημιουργούν πρόβλημα στο κοινωνικό σύνολο και είναι συνεπές με αντίστοιχα αποτελέσματα σε συστήματα μιας ουράς, όπως αναλύθηκε στην ενότητα 2.1.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του R_2 οι δύο συναρτήσεις είναι σταθερές με το άθροισμα των πιθανοτήτων στην ισορροπία να έχει τη μεγαλύτερη διαφορά από το άθροισμα των πιθανοτήτων στην κοινωνική ευημερία και το ποσοστό των χαμένων πελατών να είναι το μεγαλύτερο. Καθώς η τιμή του R_2 αυξάνει, οι δύο συναρτήσεις γίνονται αύξουσες με το ποσοστό των χαμένων πελατών να μειώνεται σε σχέση με το αρχικό (για μικρές τιμές του R_2) και γίνονται ίσες μόνο όταν και οι δύο μαζί αθροίζουν στη μονάδα με το άθροισμα των πιθανοτήτων της ισορροπίας να πηγαίνει πιο γρήγορα στη μονάδα από το άθροισμα των πιθανοτήτων της κοινωνικής ευημερίας.

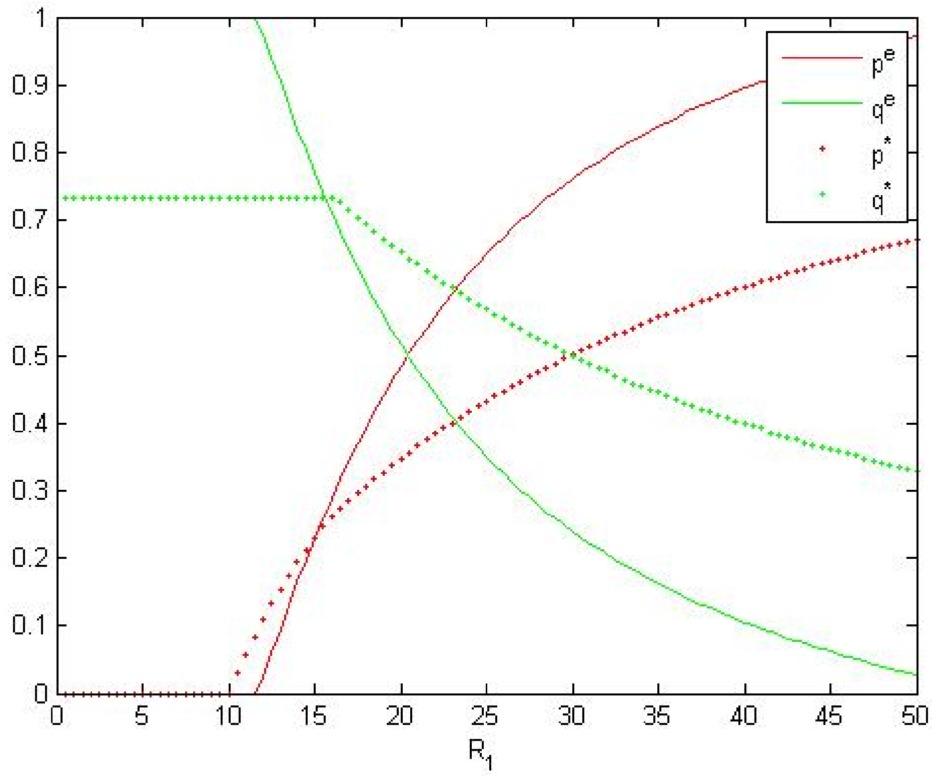
Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματα του απλού μοντέλου με μια ουρά όπου πελάτες έρχονται με ένα ρυθμό και αποφασίζουν χωρίς να παρατηρήσουν το μήκος της ουράς αν θα μπουν ή όχι στην ουρά. Εκεί ισχύει $p^e \geq p^*$ και οι δύο τιμές είναι αύξουσες συναρτήσεις του οφέλους R .



Σχήμα 3 κέρδος για μεταβλητό R2, και R1=20, μ1=1,μ2=2, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Τέλος για μεταβλητές τιμές του R_2, εξετάζουμε το συνολικό όφελος των πελατών κάτω από τη στρατηγική ισορροπίας και τη βέλτιστη στρατηγική. Τα αποτελέσματα περιλαμβάνονται στο Σχήμα 3. Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι και οι δύο είναι αύξουσες συναρτήσεις και για μικρές τιμές του R_2 το συνολικό κέρδος από τη κοινωνική ευημερία είναι μεγαλύτερο από το συνολικό κέρδος για την ισορροπία

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πελάτες οι οποίοι έχουν μεγάλο χρόνο αναμονής δημιουργούν πρόβλημα στο κοινωνικό σύνολο. Στη συνέχεια καθώς μεγαλώνει το R_2 οι αποκλίσεις στα δυο κέρδη είναι ελάχιστες, αυτό σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του R_2 όλοι οι πελάτες μπαίνουν στη δεύτερη ουρά κάτω και από τις δύο πολιτικές.

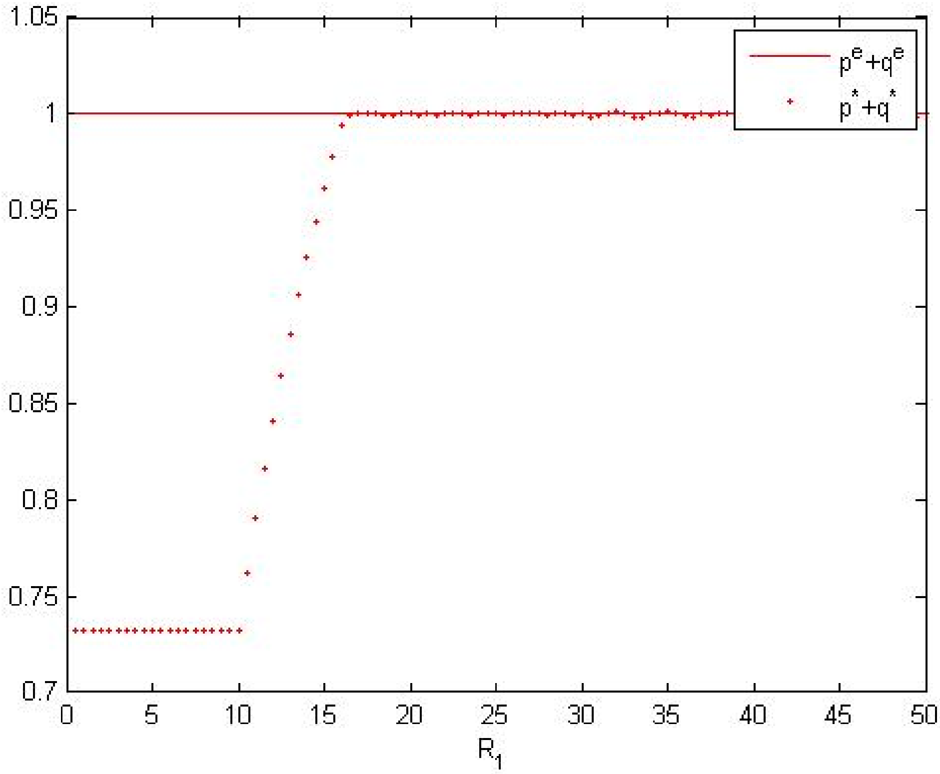


Σχήμα 4 Πιθανοτήτων εισόδου για μεταβλητό R1, και R2=20, μ1=1,μ2=2, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Στο δεύτερο πείραμα εξετάζουμε τη συμπεριφορά των λύσεων ως συνάρτηση του οφέλους R_1 από τη $1^η$ ουρά. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 4. Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του R_1 οι πελάτες προτιμούν την ουρά 2 αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι εξαιτίας του μικρού R_1 το κέρδος στην ουρά 2 είναι μεγαλύτερο. Στην συνέχεια καθώς μεγαλώνει το R_1 η προτίμηση των πελατών αλλάζει και αρχίζουν πελάτες να μπαίνουν και στην ουρά 1.

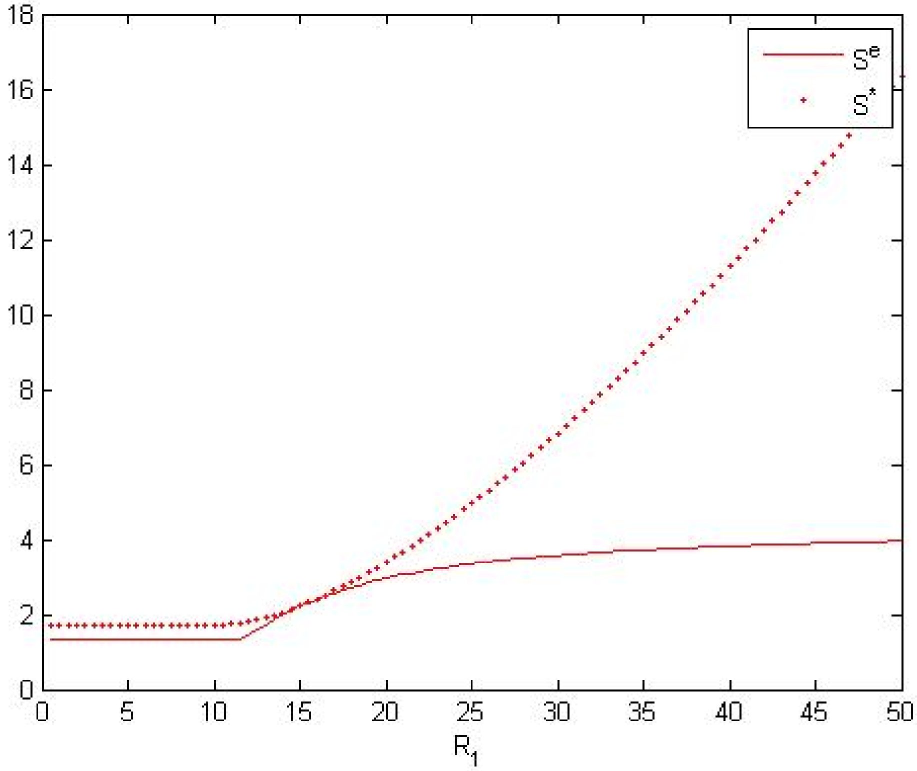
Όσον αφορά τη σύγκριση των λύσεων, από το διάγραμμα δεν προκύπτει μια σταθερή σχέση ανάμεσα στις τιμές των p^e, p^* και q^e, q^*.

Καθώς μεταβάλλεται η τιμή του R_1 αλλάζουν τόσο τα ποσοστά πελατών που μπαίνουν σε κάθε ουρά όσο και η μεταξύ τους σχέση. Για να πάρουμε μια πιο συνολική εικόνα της συμπεριφοράς των πελατών εξετάζουμε τη συνολική πιθανότητα εισόδου $p+q$, για τις περιπτώσεις της ισορροπίας και της κοινωνικής βελτιστοποίησης. Η σύγκριση φαίνεται στο Σχήμα 5.



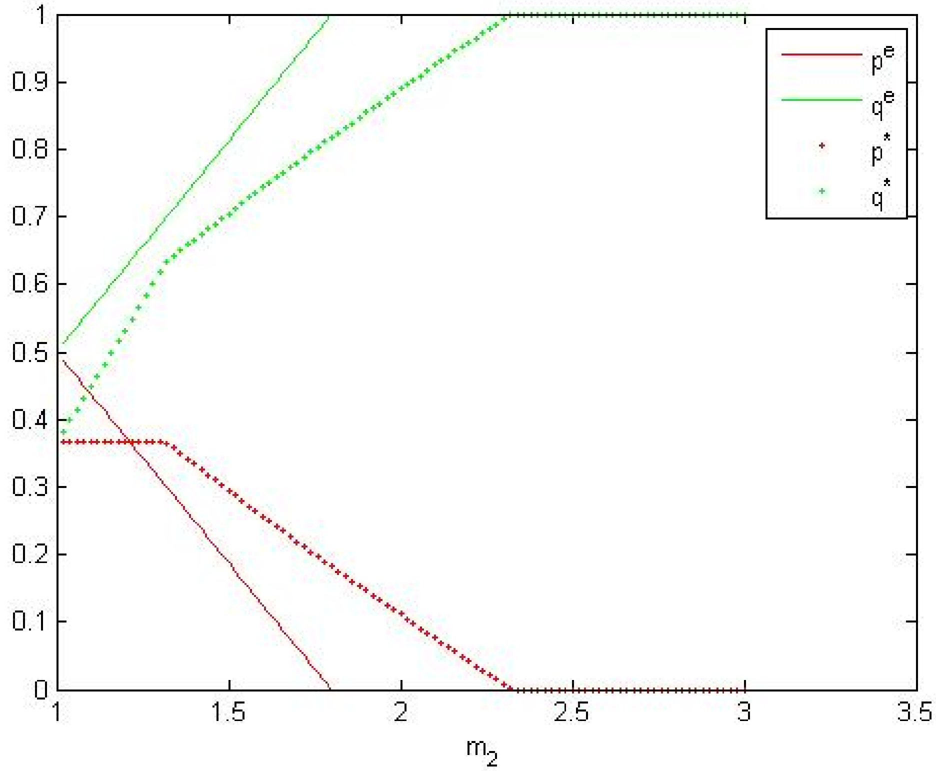
Σχήμα 5 Συνολική πιθανότητα εισόδου για μεταβλητό R1, και R2=20, μ1=1,μ2=2, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Στο σχήμα 5 παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση $p^e + q^e \geq p^* + q^*$ με την ισότητα να ισχύει από ένα σημείο του R_1 (περίπου 16) και περά δηλαδή από αυτή τη τιμή και πέρα όποια πολίτικη και να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα θα είναι τα ίδια. Όμως για μικρές τιμές του R_1 παρατηρούμε ότι ισχύει η ανισότητα και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχουν πελάτες που κάνουν κακό στο κοινωνικό σύνολο με την είσοδο τους στην ουρά εξαιτίας της χαμηλής τιμής του R_1.



Σχήμα 6 κέρδος για μεταβλητό R1, και R2=20, μ1=1,μ2=2, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Στο σχήμα 6 παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι αύξουσες και το κέρδος από της κοινωνική ευημερίας είναι μεγαλύτερο από το κέρδος της ισορροπίας.

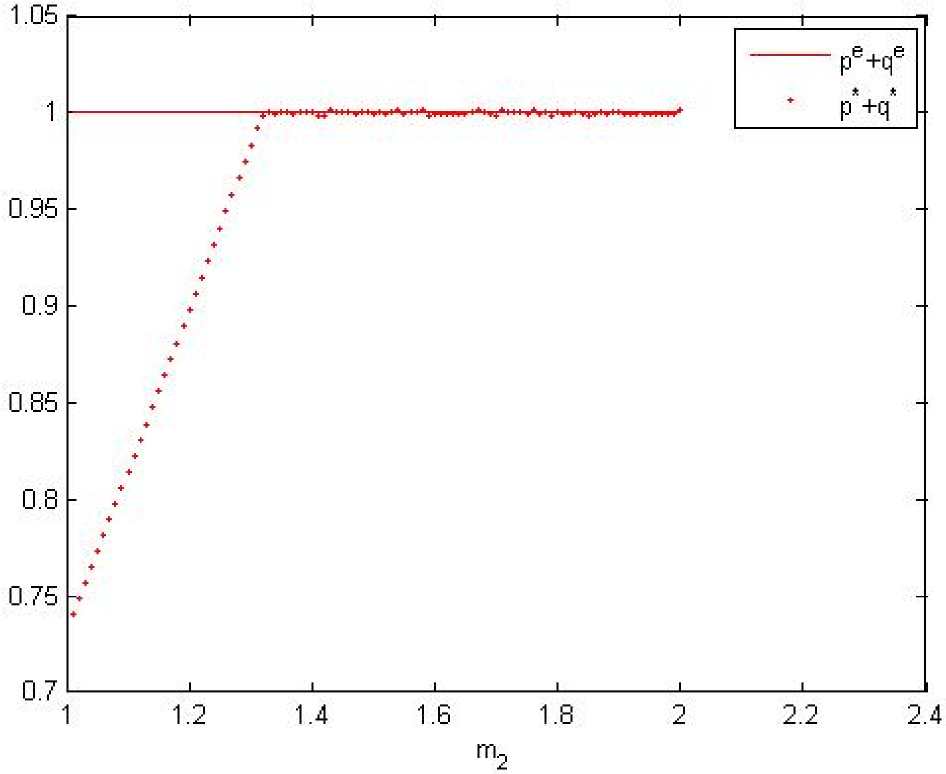


Σχήμα 7 Πιθανοτήτων Εισόδου για μεταβλητό μ2, και R2=20, R1=20,μ1=1, c1=10, c2=10, L=0,8 .

Στο τρίτο πείραμα εξετάζουμε τη συμπεριφορά των λύσεων ως συνάρτηση του οφέλους μ_2 από τη 2^{η} ουρά. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 7 παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του μ_2 η προτίμηση των πελατών είναι στην δεύτερη ουρά αλλά με μικρή απόκλιση σε σχέση με την ουρά 1. Καθώς όμως μεγαλώνει το μ_2 παρατηρούμε ότι η προτίμηση των πελατών προς την ουρά 2 είναι αύξουσα και από ένα σημείο και μετά η πιθανότητα γίνεται μονάδα ενώ η προτίμηση προς την ουρά 1 είναι φθίνουσα και από ένα σημείο και μετά γίνεται μηδενική.

Όσον αφορά τη σύγκριση των λύσεων, από το διάγραμμα δεν προκύπτει μια σταθερή σχέση ανάμεσα στις τιμές των p^e, p^* και q^e, q^*.

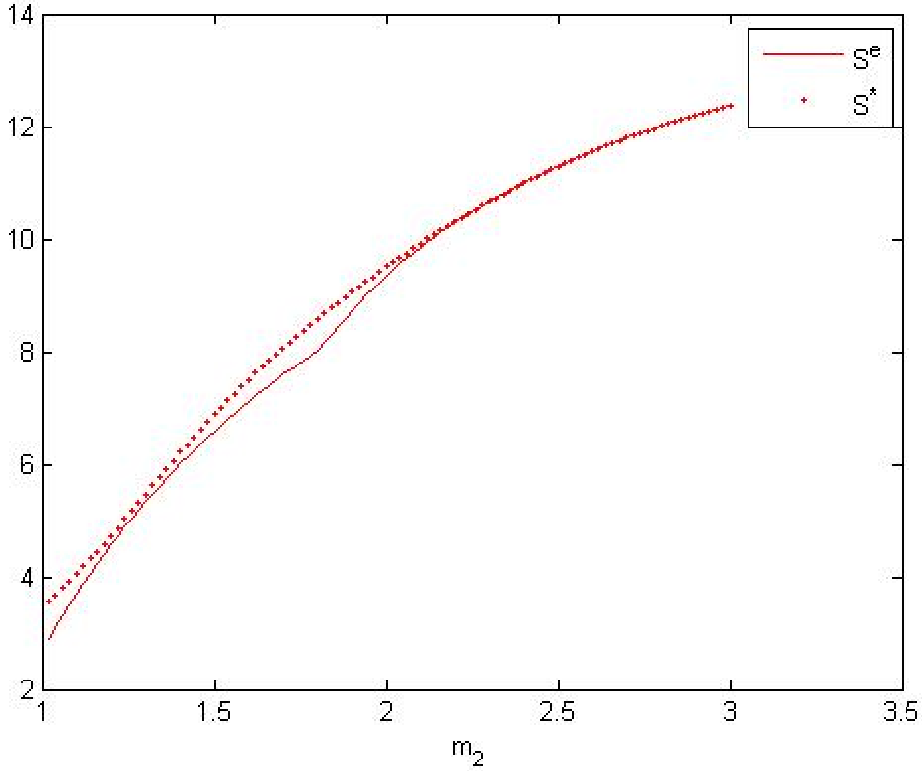
Καθώς μεταβάλλεται η τιμή του μ_2 αλλάζουν τόσο τα ποσοστά πελατών που μπαίνουν σε κάθε ουρά όσο και η μεταξύ τους σχέση. Για να πάρουμε μια πιο συνολική εικόνα της συμπεριφοράς των πελατών εξετάζουμε τη συνολική πιθανότητα εισόδου $p+q$, για τις περιπτώσεις της ισορροπίας και της κοινωνικής βελτιστοποίησης. Η σύγκριση φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8 Συνολική πιθανότητα εισόδου για μεταβλητό μ2, και R2=20, R1=20,μ1=1, c1=10, c2=10, L=0,8 .

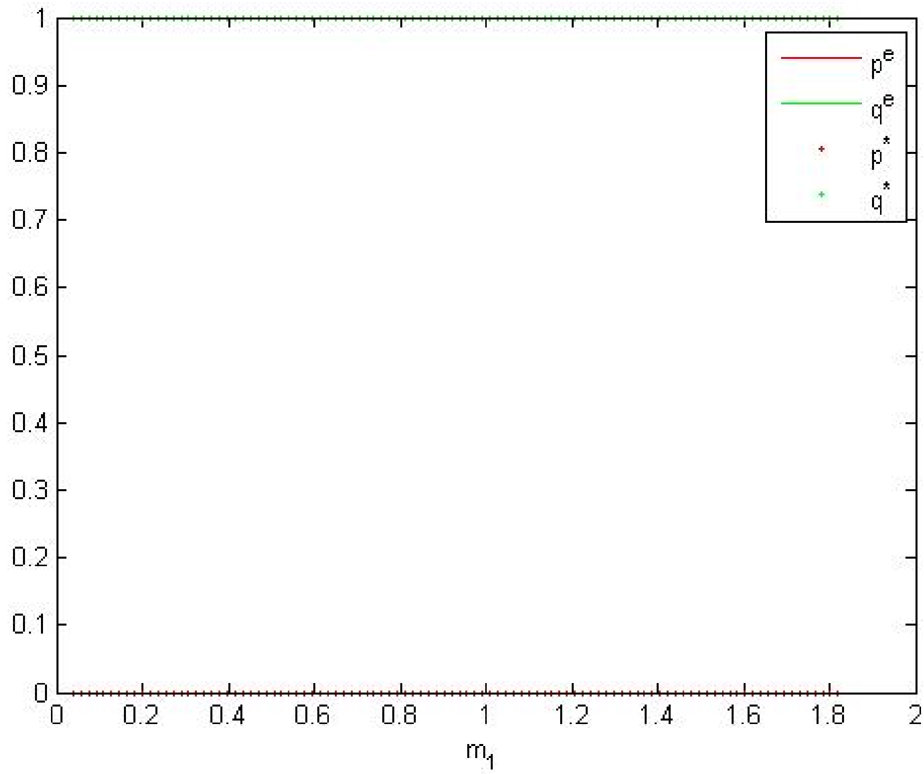
Από το σχήμα 8 παρατηρούμε ότι ισχύει πάλι η σχέση $p^e + q^e \geq p^* + q^*$ με την ισότητα να πετυχαίνεται σχετικά γρήγορα.

Το άθροισμα των πιθανοτήτων στην ισορροπία είναι μια σταθερή συνάρτηση ίση με το 1 αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν πελάτες που αποχωρούν από το σύστημα χωρίς να εξυπηρετηθούν, ενώ το άθροισμα των πιθανοτήτων της κοινωνικής ευημερία ξεκάνει από έναν μικρότερο αριθμό αλλά καθώς μεγαλώνει το μ_2 γίνεται και αυτό μονάδα και συνεχίζει σταθερά για όλες τις τιμές του μ_2.

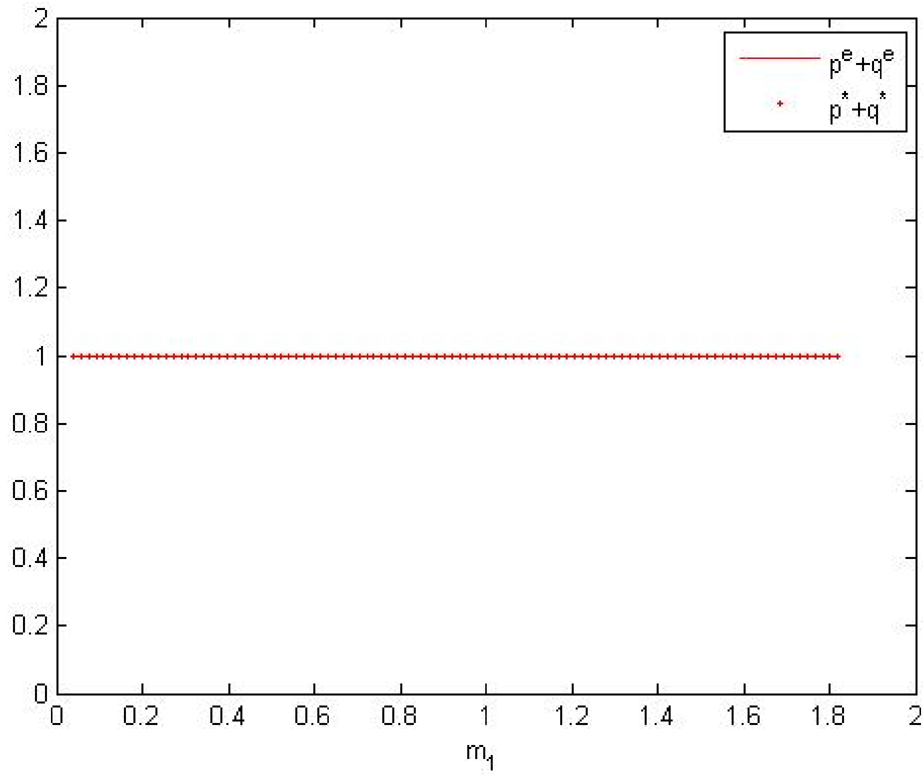


Σχήμα 9 κέρδος για μεταβλητό μ2, και R2=20, R1=20,μ1=1, c1=10, c2=10, L=0,8 .

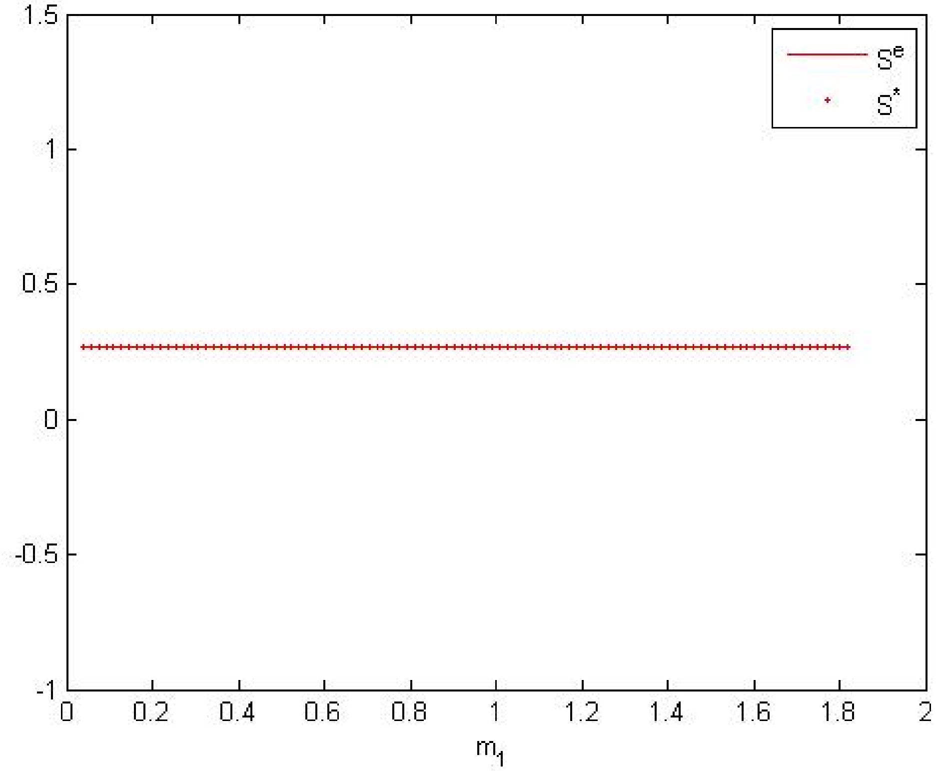
Είναι και οι δύο αύξουσες συναρτήσεις και για μικρές τιμές του μ_2 το συνολικό κέρδος από την κοινωνική ευημερία είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από το κέρδος στην ισορροπία και καθώς μεγαλώνει το μ_2 οι συναρτήσεις είναι ίδιες δηλαδή τα κέρδη είναι ίδια.



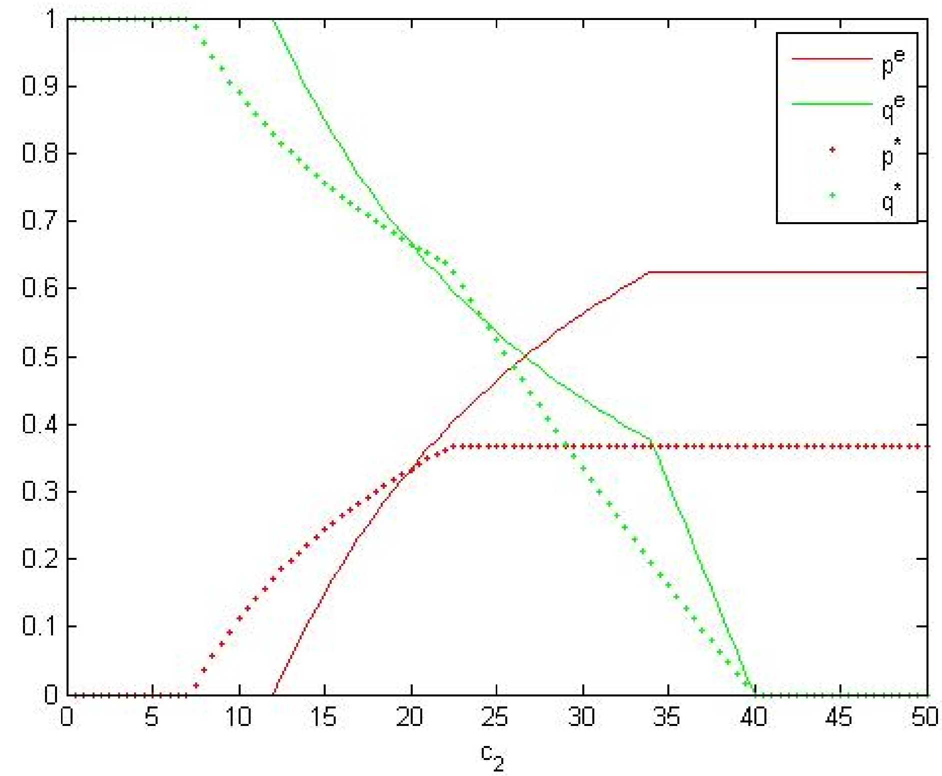
Σχήμα 10 Πιθανοτήτων Εισόδου για μεταβλητό μ1, και R2=20, R1=20,c2=10, c1=10, μ2=2, L=0,8 .



Σχήμα 11 Συνολική πιθανότητα εισόδου για μεταβλητό μ1, και R2=20, R1=20,c2=10, c1=10, μ2=2, L=0,8 .



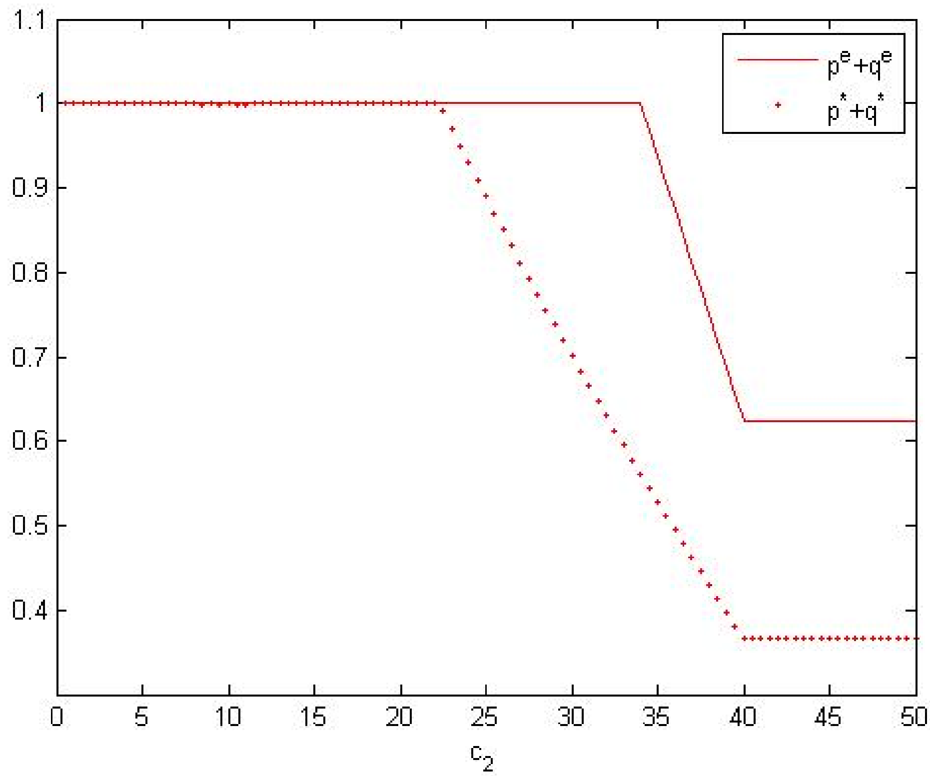
Σχήμα 12 κέρδους για μεταβλητό μ1, και R2=20, R1=20,c2=10, c1=10, μ2=2, L=0,8 .



Σχήμα 13 Πιθανοτήτων Εισόδου για μεταβλητό c2, και R2=20, R1=20,μ1=1, c1=10, μ2=2, L=0,8 .

Τέλος εξετάζουμε τη συμπεριφορά των λύσεων ως συνάρτηση του οφέλους c_2 από τη $2^η$ ουρά. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 13. Από το διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του c_2 όλοι οι πελάτες αποφασίζουν να εισέρθουν στην ουρά 2. Καθώς όμως μεγαλώνει το c_2 παρατηρούμε ότι η προτίμηση των πελατών προς την ουρά 1 είναι αύξουσα ενώ η προτίμηση προς την ουρά 2 είναι φθίνουσα.

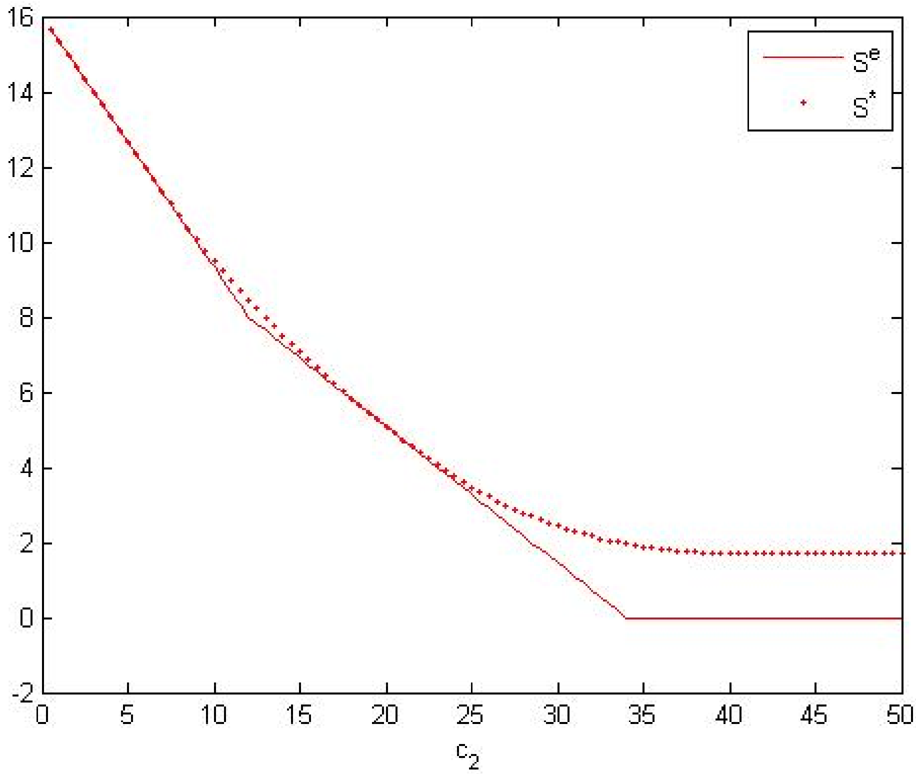
Όσον αφορά τη σύγκριση των λύσεων, από το διάγραμμα πάλι δεν προκύπτει μια σταθερή σχέση ανάμεσα στις τιμές των p^e, p^* και q^e, q^*.



Σχήμα 14 Συνολική πιθανότητα εισόδου για μεταβλητό c2, και R2=20, R1=20, μ1=1, c1=10, μ2=2, L=0,8 .

Παρατηρούμε ότι ισχύει πάλι η σχέση $p^e + q^e \geq p^* + q^*$ με την ισότητα να πετυχαίνεται στην αρχή δηλαδή για μικρές τιμές του c2.

Το άθροισμα των πιθανοτήτων στην ισορροπία είναι μια σταθερή συνάρτηση ίση με το 1 για μικρές τιμές του c_2, όσο το c_2 μεγαλώνει η συνάρτηση γίνεται φθίνουσα και στη συνέχεια γίνεται ξανά σταθερή με ένα αριθμό μικρότερο της μονάδας. Ενώ το άθροισμα των πιθανοτήτων της κοινωνικής ευημερία έχει και αυτό μια αντίστοιχη πορεία δηλ στην αρχή είναι σταθερό με τη μονάδα, μετά γίνεται φθίνουσα συνάρτηση και στη συνέχεια γίνεται ξανά σταθερή με ένα αριθμό μικρότερο από τον αντίστοιχο αριθμό της ισορροπίας. Επίσης το ποσοστό των χαμένων πελατών είναι μικρότερο για μικρές τιμές του c_2 και μεγαλύτερο καθώς μεγαλώνει το c_2.



Σχήμα 15 κέρδος για μεταβλητό c2, και R2=20, R1=20, μ1=1, c1=10, μ2=2, L=0,8.

Είναι και οι δύο φθίνουσες συναρτήσεις και για μικρές τιμές του c_2 το συνολικό κέρδος από την κοινωνική ευημερία είναι ίσο με το κέρδος στην ισορροπία και καθώς μεγαλώνει το c_2 το συνολικό κέρδος από την κοινωνική ευημερία είναι μεγαλύτερο από το κέρδος στην ισορροπία.

Βιβλιογραφία

1. Chen, H., Frank, M. (2004). Monopoly pricing when customers queue, *IIE Transactions*, **36** (6), 569-581.

2. Edelson, N. M., & Hilderbrand, D. K. (1975). Congestion tolls for Poisson queuing processes. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 81-92.

3. Hassin, R. J., & Haviv, M. (2003). *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behaviour in Queueing Systems* (Vol. 59). Kluwer Academic Pub.

4. Hotelling, H. (1929) Stability in Competition. *The Economic Journal*, **3**, 41-57.

5. Leeman, W. A. (1964). The reduction of queues through the use of price. *Operations Research*, **12**(5), 783-785.

6. Levhari, D., & Luski, I. (1978). Duopoly pricing and waiting lines. *European Economic Review*, **11**(1), 17-35.

7. Luski, I. (1976). On partial equilibrium in a queuing system with two servers. *The Review of Economic Studies*, **43** (3), 519-525.

8. Naor, P. (1969). The regulation of queue size by levying tolls. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 15-24.