



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στον τομέα
Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του Τμήματος
Φυσικής.

Νικόλαος Περράκης

**ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ
ΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥΣ ΣΕ
ΑΒΕΛΙΑΝΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΜΕ
ΠΑΡΑΒΙΑΣΜΕΝΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ.**

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ξάνθος Μαϊντάς

27 Ιουνίου 2013

Ευχαριστίες

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου. Χωρίς την αγάπη και την υποστήριξη τους δε θα ήμουν αυτός που είμαι σήμερα. Πολλές ευχαριστίες οφείλω επίσης στον επιβλέποντα καθηγητή, κύριο Ξάνθο Μαϊντά, για την εμπιστοσύνη του σε εμένα, την υπομονή του και κυρίως την καθοδήγηση του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Η συμβολή του στην πορεία των μεταπτυχιακών σπουδών μου υπήρξε καθοριστική. Ακόμα ευχαριστώ πολύ για τη βοήθειά τους τους διδακτορικούς φοιτητές, Γαρυφαλιά Κατσιμίγα, Χαρίλαο Τσαγκαράκη και Βασίλη Αχιλλέως. Οι συζητήσεις μας σε θέματα σχετικά με το αντικείμενο της παρούσας εργασίας υπήρξαν πολύ διαφωτιστικές.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για να αναζητήσουμε ειδικές λύσεις για τις εξισώσεις κίνησης του προτύπου $U(1)$ -Higgs. Καταλήγουμε στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger μέσω της οποίας κατασκευάζουμε τις προσεγγιστικές μας λύσεις. Βρίσκουμε περιοδικές λύσεις (ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi) τις οποίες επίσης εξετάζουμε αριθμητικά για την επαλήθευσή τους. Γι' αυτό κατασκευάζουμε τον απαραίτητο κώδικα με τη χρήση λογισμικού MATLAB. Για τη κατασκευή του χρησιμοποιούμε τη ψευδοφασματική μέθοδο και τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Στη συνέχεια βρίσκουμε εντοπισμένες λύσεις σολιτονικού τύπου (φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια). Εξετάζουμε αριθμητικά την επαλήθευσή τους στο πλήρες σύστημα και για το φωτεινό σολιτόνιο εξετάζουμε και την ευστάθειά του. Ακόμα εξετάζουμε λύσεις που κατασκευάζονται από τα μη γραμμικά κύματα της εξίσωσης NLS. Εξετάζουμε την ευστάθειά τους αναλυτικά και μετά αριθμητικά. Κατά τις προσομοιώσεις μας παρατηρούμε το φαινόμενο της αστάθειας διαμόρφωσης (modulation instability) και παρατηρούμε την αυθόρμητη δημιουργία oscillons με κυματομορφή αυτή της φωτεινής σολιτονικής λύσης που βρήκαμε νωρίτερα. Τέλος γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα της ίδιας μεθόδου η οποία έχει εφαρμοστεί σε προγενέστερες εργασίες στο πρότυπο $SU(2)$ -Higgs.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iii
Περίληψη	v
1 Η Συμμετρία στη Φυσική.	1
1.1 Προέλευση της Συμμετρίας.	2
1.2 Η Συμμετρία στη Φυσική Υψηλών Ενεργειών.	4
1.3 Αυθόρμητη Παραβίαση Συμμετρίας.	5
1.3.1 Τρόπος Wigner – Weyl για Παραβίαση Συμμετρίας.	5
1.3.2 Τρόπος Goldstone για Παραβίαση Συμμετρίας	5
2 Το πρότυπο U(1) - Higgs. Μέθοδος των Πολλαπλών Κλιμάκων.	9
2.1 Ιδιότητες και Αυθόρμητη Παραβίαση μίας Λαγκρανζιανής με τοπική Αβελιανή Συμμετρία.	10
2.2 Εξισώσεις Κίνησης του προτύπου που θα μελετήσουμε	13
2.3 Εφαρμογή της Μεθόδου των Πολλαπλών Κλιμάκων.	15
3 Προτεινόμενες λύσεις και Αριθμητική Μελέτη τους	21
3.1 Εντοπισμένες Λύσεις Σολιτονικού τύπου.	21
3.1.1 Σκοτεινά Σολιτόνια	22
3.1.2 Αριθμητική Μελέτη των Σκοτεινών Σολιτονίων.	24
3.1.3 Φωτεινά Σολιτόνια.	28
3.1.4 Αριθμητική Μελέτη των Φωτεινών Σολιτονίων.	30
3.2 Λύσεις μη Γραμμικών Επίπεδων Κυμάτων	38
3.2.1 Αναλυτική Μελέτη Ευστάθειας Μη γραμμικών Κυματικών λύσεων.	40
3.2.2 Αριθμητική Μελέτη Ευστάθειας Μη Γραμμικών Κυματικών Λύσεων στην Αποεστιάζουσα Περιοχή.	42
3.2.3 Αριθμητική Μελέτη Ευστάθειας Μη Γραμμικών Κυματικών Λύσεων στην Εστιάζουσα Περιοχή.	45
3.3 Ελλειπτικές περιοδικές Λύσεις	48
3.3.1 Ελλειπτικές Περιοδικές Λύσεις στην Αποεστιάζουσα Περιοχή	49

3.3.2	Αριθμητική Μελέτη Ελλειπτικών Περιοδικών Λύσεων στην Αποεστιάζουσα Περιοχή.	51
3.3.3	Ελλειπτικές Περιοδικές Λύσεις στην Εστιάζουσα Περιοχή	53
3.3.4	Αριθμητική Μελέτη Ελλειπτικών Περιοδικών Λύσεων στην Εστιάζουσα Περιοχή.	55
4	Το πρότυπο SU(2) - Higgs.	59
4.1	Ιδιότητες και Αυθόρμητη Παραβίαση μιας Λαγκρανζιανής με Τοπική Μη Αβελιανή Συμμετρία.	60
4.2	Εξισώσεις κίνησης και Εφαρμογή της Μεθόδου των Πολλαπλών Κλιμάκων.	63
4.3	Μη γραμμικές κυματικές λύσεις και Ευστάθεια.	67
4.4	Εξισώσεις κίνησης πεπλεγμένης μορφής	71
4.5	Κυματικές Λύσεις και Ευστάθεια	77
5	Συμπεράσματα	81
A'	Ο Κώδικας MATLAB και πως επηρεάζει την Αριθμητική Μελέτη.	83
A'.1	Παράθεση του κώδικα	83
A'.2	Η Συντακτική Δομή του κώδικα	91
A'.3	Ιδιότητες του Κώδικα	92

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Όψεις Αθηναϊκού κεραμικού πιάτου της ύστερης γεωμετρικής περιόδου του 8 ^{ου} αιώνα π.χ.	2
1.2	Ο Παρθενώνας	3
1.3	Zeeman Effect.	6
1.4	Δυναμικό για το φαινόμενο Goldstone.	7
3.1	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 1.8$	24
3.2	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 1.8$	25
3.3	Επάνω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας $\mathcal{H}(x, t)$ για τιμή της παραμέτρου q ίση με $q = 1.8$. Κάτω: Ολική ενέργεια κανονικοποιημένη ως προς την ενέργεια για $t = 0$ στη μαύρη γραμμή και κανονικοποιημένη ενέργεια του πυρήνα του σολιτονίου στη διακεκομμένη κόκκινη γραμμή. Κάτω εμβόλιμο πλαίσιο: Γράφημα της διαφοράς της ενέργειας από την αρχική τιμή για όλο το σολιτόνιο στη μαύρη γραμμή και για το πυρήνα του στη διακεκομμένη κόκκινη γραμμή.	26
3.4	Επάνω: Στιγμιότυπο του πεδίου βαθμίδας στην αρχή, (μπλε γραμμή), και στο τέλος της προσομοίωσης (κόκκινη γραμμή) για τιμή της παραμέτρου q ίση με $q = 1.8$. Κάτω: Στιγμιότυπο του πεδίου Higgs στην αρχή, (μπλε γραμμή), και στο τέλος της προσομοίωσης (κόκκινη γραμμή) για τιμή της παραμέτρου $q = 1.8$	27
3.5	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου q ίση με $q = 1.5$	30
3.6	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$	31

3.7	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 2.5$	32
3.8	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 2.5$	33
3.9	Επάνω: Αρχική συνθήκη του φωτεινού σολιτονίου για το πεδίο βαθμίδας χωρίς θόρυβο (κόκκινη γραμμή) και με θόρυβο (μπλε γραμμή). Κάτω: Αρχική συνθήκη του φωτεινού σολιτονίου για το πεδίο Higgs χωρίς θόρυβο (κόκκινη γραμμή) και με θόρυβο (μπλε γραμμή).	35
3.10	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας $\mathcal{H}(x, t)$ για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας $\mathcal{H}(x, t)$ για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$ αλλά με εισαγωγή θορύβου, με πλάτος 10% το πλάτους του σολιτονίου, επάνω στη λύση του σολιτονίου Κάτω: Α) Ολική Ενέργεια κανονικοποιημένη ως προς την αρχική της τιμή. Διακεκομμένη γραμμή για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$ και εστιγμένη γραμμή για τιμή της παραμέτρου $q = 2.5$. Β) Γράφημα της διαφοράς ενέργειας, ΔE , από την αρχική τιμή. Μπλε (μεσαία) γραμμή για $q = 1.5$ και κόκκινη διακεκομμένη (κάτω) γραμμή για $q = 2.5$	36
3.11	Γράφημα της καταστροφής ενός φωτεινού σολιτονίου σε τιμή $q = 1.85$ όπου το σύστημα (2.19) εμφανίζει αποεστιαζούσα συμπεριφορά. Από πάνω προς τα κάτω βλέπουμε γραφήματα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$, του πεδίου Higgs, $\eta(x, t)$, και της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$, του προτύπου.	37
3.12	Γράφημα μη γραμμικού επίπεδου κύματος. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$ με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$ με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$, επίπεδου κύματος μέχρι αδιάστατο χρόνο 10^5 με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$	39
3.13	Γράφημα Μελέτης Ευστάθειας μη γραμμικού επίπεδου κύματος μέχρι αδιάστατο χρόνο 10^5 με τιμή παραμέτρου $q = 1.85$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$	42
3.14	Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$. Κόκκινες γραμμές για $t = 0$. Πράσινες γραμμές για $t = 1100$. Μπλε γραμμές για $t = 90100$	43

3.15	Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του μετασχηματισμένου κατά Fourier πεδίου $\eta(k)$. Κόκκινες γραμμές για $t = 0$. Πράσινες γραμμές για $t = 1100$. Μπλε γραμμές για $t = 90100$	44
3.16	Γράφημα Μελέτης Ευστάθειας μη γραμμικού επίπεδου κύματος μέχρι αδιάστατο χρόνο 490 με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$	45
3.17	Επάνω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(t)$, με παράμετρο $q = 1.5$ και αρχική συνθήκη με διαταραχή σε ασταθή συχνότητα $Q = 0.1$. Κάτω: Στιγμιότυπο του πεδίου βαθμίδας $A(x)$, (μαύρη γραμμή), σε αδιάστατο χρόνο $t = 13040$ όπου η αστάθεια έχει κυριαρχήσει. Οι διακεκομμένες (μπλε και κόκκινη) γραμμές αντιστοιχούν σε λύσεις σαν της εξίσωσης (3.20), προσαρμοσμένες ως προς το μέγιστο πλάτος στην κορυφή των σολιτονίων (όπως φαίνεται από τις εστιγμένες γκρι γραμμές σε $x = 75$ και $x = 150$).	46
3.18	Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$. Κόκκινες Εστιγμένες γραμμές: Φωτεινή Σολιτονική Λύση. Με τις δύο μαύρες κάθετες γραμμές περιορίζουμε τη περιοχή όπου γεννήθηκε αυθόρμητα το ταλαντώνιο. Τιμές παραμέτρων $q = 1.4$ και $t_1 = 464.1$	47
3.19	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.85$ και $k_{jac} = 0.8$	51
3.20	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου Higgs $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.85$ και $k_{jac} = 0.8$	52
3.21	Γράφημα αριθμητικής επαλήθευσης λύσης ημιτόνου Jacobi με τιμές παραμέτρων $q = 1.85$ και $k_{jac} = 0.95$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$	52
3.22	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.4$ και $k_{jac} = 0.8$	55

3.23	Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου Higgs $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.4$ και $k_{jac} = 0.75$	56
3.24	Γράφημα αριθμητικής επαλήθευσης λύσης συνημιτόνου Jacobi με τιμές παραμέτρων $q = 1.4$ και $k_{jac} = 0.8$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$	56
3.25	Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$. Κόκκινες Εστιγμένες γραμμές: Φωτεινή Σολιτονική Λύση. Με τις δύο μαύρες κάθετες γραμμές περιορίζουμε τη περιοχή όπου γεννήθηκε αυθόρμητα το ταλαντώσιο. Τιμές παραμέτρων $q = 1.4$ και $t_1 = 24800$	57
4.1	Διάγραμμα επιτρεπόμενων περιοχών του λόγου των μαζών $q(= \lambda)$	70

Κεφάλαιο 1

Η Συμμετρία στη Φυσική.

When old age shall this generation waste,
Thou shalt remain, in midst of other woe
Than ours, a friend to man, to whom thou say'st,
"Beauty is truth, truth beauty", – that is all
Ye know on earth, and all ye need to know.

–John Keats, Ode on a Grecian Urn

1.1 Προέλευση της Συμμετρίας.

Στην καθημερινή μας αντίληψη τα συμμετρικά αντικείμενα μας δίνουν μια αίσθηση ομορφιάς. Αυτή η ενστικτώδης αντίληψη του ανθρώπου για ομορφιά πέρασε στη τέχνη και τη γεωμετρία όπου υπήρξε η πρώτη αποτύπωση της συμμετρίας. Μία πολύ καλή εικόνα για την πρώτη ανάδυση της συμμετρίας στην ανθρώπινη διάνοηση παίρνουμε από το παρακάτω αθηναϊκό κεραμικό πιάτο της ύστερης γεωμετρικής περιόδου του 8^{ου} αιώνα π.χ. (σχ. 1.1). Ενώ στις τέχνες η αποτύπωση της συμμετρίας ήταν υποκειμενική στη γεωμετρία ήταν αντικειμενική. Αυτή η αντικειμενικότητα της έννοιας της συμμετρίας στη γεωμετρία της επέτρεψε να περάσει και σε άλλα επιστημονικά πεδία όπως την αρχιτεκτονική. Λαμπρό παράδειγμα αυτής το κτίριο του Παρθενώνα (σχ. 1.2). Στη συνέχεια η έννοια της συμμετρίας πέρασε και στα σύγχρονα μαθηματικά και τη φυσική.



Σχήμα 1.1: Όψεις Αθηναϊκού κεραμικού πιάτου της ύστερης γεωμετρικής περιόδου του 8^{ου} αιώνα π.χ.

Η έννοια της συμμετρίας, όπως τη χρησιμοποιούμε σήμερα, έχει τις καταβολές της στην άλγεβρα. Αντικείμενο της άλγεβρας ήταν η προσπάθεια επίλυσης



Σχήμα 1.2: Ο Παρθενώνας

πολυωνυμικών εξισώσεων. Το 1821 όμως ο νεαρός Νορβηγός μαθηματικός Niels Henrik Abel απέδειξε πως δεν υπάρχει γενική αλγεβρική μέθοδος επίλυσης εξισώσεων 5^{ου} βαθμού. Όμως ο Abel με την απόδειξή του δεν εξήγησε γιατί δεν μπορούσαν να βρεθούν γενικές λύσεις. Τι έκανε τις εξισώσεις 5^{ου} βαθμού διαφορετικές από αυτές μικρότερου βαθμού;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα έδωσε ένας άλλος νεαρός μαθηματικός, ο Γάλλος Evariste Galois. *Ο Galois απέδειξε πως η αδυναμία εύρεσης γενικής λύσης πηγάζει από τις συμμετρίες της εξίσωσης!* Εάν οι συμμετρίες μιας εξίσωσης δεν περάσουν το λεγόμενο «τεστ Galois» τότε η εξίσωση δεν έχει γενική λύση μέσω μιας αλγεβρικής μεθόδου. Ποιες όμως είναι αυτές οι συμμετρίες; Ο Galois δούλεψε με πεπερασμένες ομάδες και ως συμμετρίες αποκάλεσε τις μεταθέσεις που διατηρούν όλες τις αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των ριζών. Οι μεταθέσεις αυτές ονομάζονται ομάδα Galois και οι ιδιότητές τους καθορίζουν την επιλυσιμότητα της εκάστοτε εξίσωσης.

Αυτή η ανακάλυψη έδωσε το έναυσμα για την δημιουργία ενός νέου κλάδου των μαθηματικών που ονομάστηκε θεωρία ομάδων. Αυτός ο κλάδος των μαθηματικών είναι ένα είδος «Ανάλυσης της Συμμετρίας». Κάθε αντικείμενο που παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση ενός μετασχηματισμού έχει σα συμμετρία αυτό το μετασχηματισμό. Η μελέτη των ιδιοτήτων των μετασχηματισμών αποτελεί αντικείμενο της θεωρίας ομάδων. Η θεωρία ομάδων εξελίχθηκε από τις πεπερασμένες ομάδες και προχώρησε και στις συνεχείς ομάδες όπως οι ομάδες Lie. Αυτές τις ανακάλυψε ο Sophus Lie μελετώντας μετασχηματισμούς

που πηγαινουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων σε άλλες λύσεις. Η θεωρία ομάδων πλέον έχει ωριμάσει και καταλήγει να αποτελεί το κατ' εξοχήν εργαλείο μελέτης της συμμετρίας στα μαθηματικά και τη φυσική.

1.2 Η Συμμετρία στη Φυσική Υψηλών Ενεργειών.

Η ενοποίηση του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού από τον James Clark Maxwell έδειξε πως το πεδίο μιας δύναμης μπορεί να είναι μία αυθύπαρκτη ποσότητα η οποία είναι φορέας ορμής και ενέργειας. Αυτό οδήγησε στην ανάπτυξη του κλάδου της Κλασικής Θεωρίας Πεδίου. Ο Λαγκρανζιανός και ο Χαμιλτονιανός φορμαλισμός επεκτάθηκαν για να καλύψουν τις ανάγκες της νέας θεωρίας. Ένα σημαντικό βήμα στην εξέλιξη της Κλασικής Θεωρίας Πεδίου ήταν η διατύπωση του ομώνυμου θεωρήματος της Emmy Noether:

Θεώρημα Noether. Σε κάθε συνεχή συμμετρία¹ της δράσης αντιστοιχεί ένα διατηρούμενο τετραρεύμα.

Το θεώρημα της Noether έβαλε τη μελέτη της συμμετρίας στο επίκεντρο της κλασικής θεωρίας πεδίου και μετέπειτα της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Η συμμετρία συνδέθηκε άμεσα με τη φυσική συμπεριφορά των φυσικών συστημάτων και η μελέτη της οδήγησε στην εμβάθυνση της κατανόησής μας σε πλήθος φυσικών φαινομένων. Πολλές διατηρήσιμες ποσότητες στη Φυσική Υψηλών Ενεργειών αποδόθηκαν σε συμμετρίες ενώ αντίστροφα η ύπαρξη συμμετριών υπέδειξε την ύπαρξη νέων διατηρούμενων ποσοτήτων.

Όμως η ανακάλυψη της σημασίας της συμμετρίας και η μελέτη της δεν αποτέλεσε το τέλος του δρόμου. Η μελέτη διαφόρων φυσικών συστημάτων υπέδειξε και άλλον ένα τρόπο παρουσίας της συμμετρίας σε φυσικά συστήματα. Μια συμμετρία μπορεί να καθορίζει τη φυσική συμπεριφορά ενός συστήματος μέσω του τρόπου που το σύστημα έχασε την ιδιότητα της συμμετρίας που προηγουμένως είχε. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται παραβίαση συμμετρίας. Κορυφαία στιγμή αυτής της διαδρομής ήταν η ανακάλυψη του σωματιδίου Higgs στο CERN στα τέλη του 2012.

Η παραβίαση συμμετρίας στη Φυσική Υψηλών Ενεργειών απαντάται κυρίως με τρεις τρόπους:

- Ο τρόπος Wigner – Weyl

¹Εδώ υπάρχει ένα πολύ λεπτό θέμα. Το θεώρημα της η Noether το απέδειξε για μεταβολικές (variational) συμμετρίες[4], δηλαδή συμμετρίες που δρουν στις εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές του συναρτησιακού της δράσης και το αφήνουν αναλλοίωτο. Στη φυσική όταν μιλάμε για συμμετρίες έχουμε, συνήθως, υπ' όψη μας δυναμικές συμμετρίες, δηλαδή ομάδες συμμετρίας που μας πηγαινουν από λύσεις των εξισώσεων κίνησης σε άλλες λύσεις. Ενώ όλες οι μεταβολικές συμμετρίες μπορούν να αναχθούν σε δυναμικές συμμετρίες δε συμβαίνει το αντίθετο. Υπάρχουν δυναμικές συμμετρίες που οδηγούν απλά στη προσθήκη μίας πολλαπλασιαστικής σταθεράς στη δράση και συνεπώς δε γεννούν διατηρούμενα ρεύματα.

- Ο τρόπος Goldstone
- Ο τρόπος Higgs

τους οποίους θα αναλύσουμε στην επόμενη ενότητα.

1.3 Αυθόρμητη Παραβίαση Συμμετρίας.

1.3.1 Τρόπος Wigner – Weyl για Παραβίαση Συμμετρίας.

Ο τρόπος Wigner – Weyl για τη παραβίαση της συμμετρίας ενός συστήματος είναι ένας τρόπος ρητής παραβίασης της συμμετρίας ενός συστήματος και απαντάται συχνά σε φυσικά συστήματα που μελετά η κβαντική μηχανική. Η τυπική «υπογραφή» αυτής της συμμετρίας είναι μια εκφυλισμένη πολλαπλέτα καταστάσεων στο ενεργειακό φάσμα με τον εκφυλισμό να αίρεται όταν στη χαμιλτονιανή του συστήματος εμφανιστούν όροι που καταστρέφουν άμεσα τη συμμετρία. Είναι χαρακτηριστικό αυτής της μορφής της παραβίασης της συμμετρίας να αναγνωρίζεται εύκολα η αρχική πολλαπλέτα καταστάσεων για μικρές διαταραχές που αίρουν τη συμμετρία.

Ιδανικό για τη παρατήρηση του τρόπου Wigner – Weyl είναι το φαινόμενο Zeeman. Εισάγοντας ομογενές μαγνητικό πεδίο στη περιοχή του ατόμου διαταράσσουμε τα επίπεδα των εκφυλισμένων ενεργειακών σταθμών αίροντας τον περιστροφικό εκφυλισμό πράγμα που οδηγεί σε διαφοροποίηση των παρατηρούμενων φασματικών γραμμών, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.3. Η μοναδική φασματική γραμμή που βλέπαμε απουσία μαγνητικού πεδίου τώρα έχει διαχωριστεί σε 3 γραμμές των οποίων ο διαχωρισμός είναι ευθέως ανάλογος της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

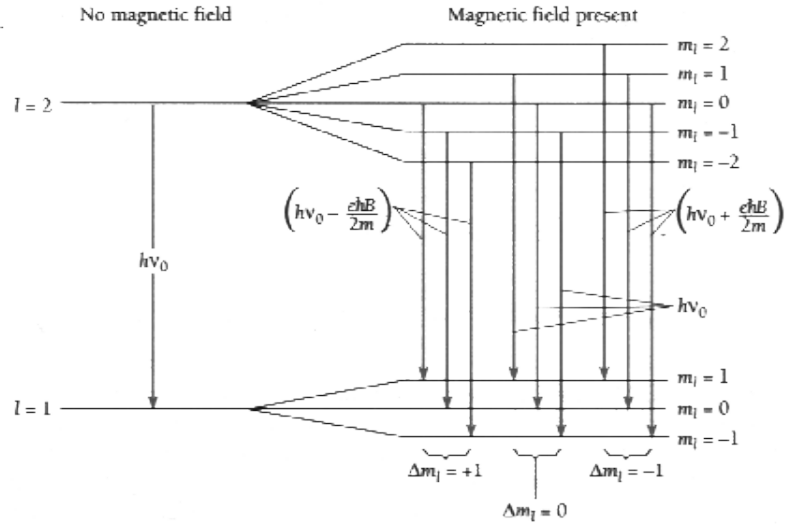
1.3.2 Τρόπος Goldstone για Παραβίαση Συμμετρίας

Οι τρόποι Goldstone και Higgs για τη παραβίαση της συμμετρίας ενός συστήματος είναι ουσιωδώς διαφορετικοί από το τρόπο Wigner – Weyl. Σε αυτούς η συμμετρία δε παραβιάζεται από τη Λαγκρανζιανή του φυσικού συστήματος αλλά από τη κατάσταση του κενού του εκάστοτε συστήματος. Αυτός ο τρόπος παραβίασης λέγεται αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας.

Όταν η συμμετρία που παραβιάζεται είναι καθολική συμμετρία τότε το σύστημα ακολουθεί τη παραβίαση μέσω του τρόπου Goldstone. Το ομώνυμο θεώρημα μας λέει:

Θεώρημα Goldstone. *Εάν μια συνεχής καθολική συμμετρία παραβιαστεί αυθόρμητα, για κάθε παραβιασμένο γεννήτορα συμμετρίας πρέπει να εμφανιστεί στη θεωρία ένα άμαζο σωματίο.*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου Goldstone είναι τα φωνόνια σε στερεά. Προκύπτουν από τη παραβίαση της γαλιλαϊκής συμμετρίας μεταθέσεων και στροφών στο χώρο.



Σχήμα 1.3: Zeeman Effect.

Για να καταλάβουμε καλύτερα το τρόπο Goldstone μελετάμε το ακόλουθο διδακτικό παράδειγμα μιας μποζωνικής θεωρίας. Έστω η Λαγκρανζιανή του ακόλουθου αλληλεπιδρώντος μιγαδικού βαθμωτού πεδίου:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.1)$$

όπου $\lambda > 0$. Αυτή η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς φάσης της ομάδας $U(1)$:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x) \quad (1.2)$$

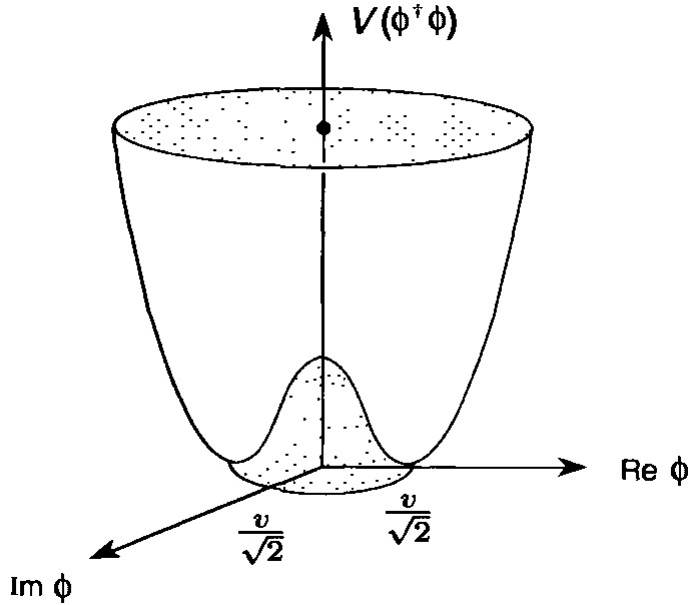
με το θ να είναι πραγματικό και ανεξάρτητο του x . Για να αντιληφθούμε ευκολότερα τι συμβαίνει με τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος το μελετάμε πρώτα από τη κλασική σκοπιά. Ο πρώτος όρος στη Λαγκρανζιανή (1.1) είναι ο κινητικός όρος και οι άλλοι δύο μπορούν να ειπωθούν σαν όροι δυναμικού. Συνεπώς το δυναμικό ορίζεται ως:

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.3)$$

Από τη συναρτησιακή του εξάρτηση παρατηρούμε δύο περιπτώσεις²:

- $\mu^2 > 0$
- $\mu^2 < 0$

Στη πρώτη περίπτωση το δυναμικό έχει μόνο ένα ολικό ελάχιστο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σύστημά μας να έχει μόνο μία θεμελιώδη κατάσταση,



Σχήμα 1.4: Δυναμικό για το φαινόμενο Goldstone.

τη $\phi = 0^3$, η οποία σέβεται τις συμμετρίες της Λαγκρανζιανής. Στη δεύτερη περίπτωση τα πράγματα είναι διαφορετικά, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4.

Η κατάσταση $\phi = 0$ είναι τοπικό μέγιστο. Τα ελάχιστα του δυναμικού βρίσκονται σε ένα κύκλο γύρω από το 0 περιφέρειας:

$$|\phi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.4)$$

Δηλαδή έχουμε ένα σύνολο άπειρων εκφυλισμένων καταστάσεων οι οποίες είναι όλες τοπικά ελάχιστα του δυναμικού, αντιστοιχούν σε σημεία του κύκλου στο ϕ μιγαδικό επίπεδο και συνδέονται μεταξύ τους μέσω μετασχηματισμών της ομάδας συμμετρίας (1.2) της θεωρίας. Η επιλογή μιας εκ των εκφυλισμένων καταστάσεων ως θεμελιώδους κατάστασης είναι αυθαίρετη αλλά είναι μία επιλογή που πρέπει να κάνει και η φύση. Μπορούμε να επιλέξουμε η θεμελιώδης κατάσταση να βρίσκεται πάνω στο πραγματικό άξονα, δηλαδή $\text{Re}(\phi) = v/\sqrt{2}$. Συνεπώς για το πεδίο ϕ θέτουμε:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \xi(x) + i\chi(x)] \quad (1.5)$$

²Το λ είναι θετικό από τη φυσική απαίτηση η ενέργεια να είναι κάτω φραγμένη.

³Αυτή είναι η θεμελιώδης κατάσταση της κλασικής επίλυσης του προβλήματος. Εάν όμως αυτή δε σέβεται κάποιες από τις συμμετρίες του προβλήματος τότε δε θα τις σεβαστεί ούτε και η κβαντική θεμελιώδης κατάσταση.

Αντικαθιστώντας το νέο ϕ στη λαγκρανζιανή πυκνότητα (1.1) βρίσκουμε, μετά από τις απαραίτητες πράξεις:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \lambda v^2 \xi^2 \\ & - \lambda v \xi(\xi^2 + \chi^2) - \frac{1}{4}\lambda(\xi^2 + \chi^2)^2 \\ & + \frac{1}{4}\lambda v^4 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Παρατηρώντας τη νέα Λαγκρανζιανή παρατηρούμε τα εξής. Από τη πρώτη σειρά βλέπουμε πως πλέον έχουμε ένα έμμαζο πεδίο ξ με μάζα:

$$m_\xi = \sqrt{2\lambda}v = \sqrt{-2\mu^2}$$

και ένα άμαζο πεδίο χ . Η δεύτερη σειρά μας δίνει τις δυνατές αλληλεπιδράσεις των πεδίων με τον εαυτό τους και μεταξύ τους. Στη δεύτερη σειρά βλέπουμε τις δυνατές αλληλεπιδράσεις των πεδίων με τον εαυτό τους αλλά και μεταξύ τους. Τέλος η τρίτη σειρά περιέχει μία σταθερά άνευ σημασίας ως προς τη δυναμική του συστήματος.

Η νέα Λαγκρανζιανή είναι μεν ισοδύναμη με τη προηγούμενη αλλά εδώ είναι εμφανής η μη παρουσία της συμμετρίας (1.2). Η παραβίαση της συμμετρίας που γεννούσε ο γεννήτορας της συμμετρίας «γέννησε» ένα άμαζο σωματίο σε συμφωνία με το θεώρημα Goldstone.

Την αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας μίας τοπικής θεωρίας βαθμίδας θα την παρουσιάσουμε αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο μιας και αποτελεί θεμέλιο λίθο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Το πρότυπο $U(1)$ - Higgs. Μέθοδος των Πολλαπλών Κλιμάκων.

Μετά από τη μικρή ανασκόπηση τη συμμετρία και στη παραβίασή της στα πλαίσια της κλασικής και κβαντικής θεωρίας πεδίου θα επικεντρωθούμε στη μελέτη ενός συγκεκριμένου μοντέλου. Θα μελετήσουμε λύσεις μίας αυθόρμητα παραβιασμένης αβελιανής τοπικής συμμετρίας βαθμίδας ή συντομότερα ενός αβελιανού μοντέλου Higgs.

Είναι ένα πρότυπο με μεγάλο ενδιαφέρον στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας πεδίου. Χρησιμοποιείται στη Κοσμολογία σε κοσμολογικά πρότυπα όπου μελετώνται τα φαινόμενα του πληθωρισμού και της αλλαγής φάσης του σύμπαντος. Ακόμα χρησιμοποιείται στη φυσική υπεραγωγών· κυρίως στη μελέτη του φαινομένου Meissner. Σε αυτό το μοντέλο τα ζεύγη Cooper περιγράφονται από το βαθμωτό πεδίο ϕ ενώ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποτελεί το αβελιανό πεδίο βαθμίδας της θεωρίας. Η φαινομενολογική του επιτυχία είναι η εμφάνιση της μη μηδενικής μάζας του φωτονίου που αντιστοιχεί στο αντίστροφο του μήκους διεύθυνσης London του μαγνητικού πεδίου μέσα σε υπεραγωγούς.

2.1 Ιδιότητες και Αυθόρμητη Παραβίαση μίας Λαγκρανζιανής με τοπική Αβελιανή Συμμετρία.

Όπως γνωρίζουμε η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του αβελιανού μοντέλου Higgs δίνεται από το παρακάτω τύπο:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

με λ θετικό και:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (2.2)$$

$$D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu \quad (2.3)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.4)$$

Η παραπάνω λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε καθολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής (1.2) καθώς και στους ακόλουθους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{ig\alpha(x)} \phi(x) \quad (2.5\alpha')$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.5\beta')$$

Όταν $\mu^2 > 0$ η παραπάνω λαγκρανζιανή δε χρήζει αυθόρμητης παραβίασης συμμετρίας και αποτελεί μια ηλεκτρομαγνητική θεωρία έμμαζων φορτισμένων βαθμωτών σωματιδίων. Η συμμετρία της Λαγκρανζιανής αποτελεί και συμμετρία της κατάστασης του κενού της θεωρίας. Το σωματιδιακό φάσμα της θεωρίας αποτελείται από ένα ουδέτερο και άμαζο διανυσματικό σωματίο και ένα ζευγάρι βαθμωτών σωματιδίων μάζας μ και φορτίου g .

Όταν $\mu^2 < 0$ έχουμε αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας (2.5). Η (κλασική) κατάσταση $\phi = 0$ είναι τοπικό μέγιστο, συνεπώς μία ασταθής κατάσταση στην οποία δε παραμένει το σύστημά μας. Και εδώ έχουμε ένα άπειρο σύνολο εκφυλισμένων καταστάσεων που αποτελούν ολικά ελάχιστα, τις:

$$|\phi|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$$

Για τη διευκόλυνσή μας θέτουμε:

$$\frac{-\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}$$

και επιλέγουμε, για τη κατάσταση του κενού:

$$\langle \phi_0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

Έχοντας επιλέξει μία κατάσταση του κενού αναζητούμε τη νέα μορφή που θα πάρει η Λαγκρανζιανή του συστήματος. Γράφουμε το πεδίο ϕ στη παρακάτω μορφή:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)]e^{i\xi(x)/v} \quad (2.7)$$

Αντικαθιστώντας το $\phi(x)$ από τη παραπάνω εξίσωση στη Λαγκρανζιανή βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[\partial_\nu \eta(x)][\partial^\nu \eta(x)] + \mu^2 \eta^2(x) \\ & + \frac{1}{2}[\partial_\nu \xi(x)][\partial^\nu \xi(x)] + gvA_\nu(x)\partial^\nu \xi(x) + \frac{1}{2}g^2 v^2 A_\nu(x)A^\nu(x) \\ & + 2g\eta(x)A_\nu(x)\partial^\nu \xi(x) + \frac{1}{v}\eta(x)[\partial_\nu \xi(x)][\partial^\nu \xi(x)] + g^2 v \eta(x)A_\nu(x)A^\nu(x) \\ & + \frac{g}{v}\eta^2(x)A_\nu(x)\partial^\nu \xi(x) + \frac{1}{2v^2}\eta^2(x)[\partial_\nu \xi(x)][\partial^\nu \xi(x)] + \frac{g^2}{2}\eta^2(x)A_\nu(x)A^\nu(x) \\ & - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4}\eta^4(x) - \lambda v \eta^3(x) - \frac{1}{4}\mu^2 v^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Εάν παρατηρήσουμε αυτή τη λαγκρανζιανή διαπιστώνουμε κάτι παράξενο. Οι σωματιδιακοί βαθμοί ελευθερίας είναι 5, δύο από τα βαθμωτά σωματίδια ξ , η και τρεις από το έμμοζο διανυσματικό σωματίδιο A . Όμως στην αρχή είχαμε τέσσερις σωματιδιακούς βαθμούς ελευθερίας. Η αύξηση των σωματιδιακών βαθμών ελευθερίας του προβλήματος είναι πλασματική. Αυτό μπορούμε να το δούμε διαλέγοντας κατάλληλη βαθμίδα για το πρόβλημά μας. Προχωράμε λοιπόν στην ακόλουθη αλλαγή βαθμίδας:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\xi(x)/v}\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)] \quad (2.9\alpha')$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu = A_\mu(x) + \frac{1}{gv}\partial_\mu \xi(x) \quad (2.9\beta')$$

Συνεπώς κάνοντας την αντικατάσταση

$$\eta(x) = \eta'(x) \quad (2.10\alpha')$$

$$A_\mu = A'_\mu(x) - \frac{1}{gv}\partial_\mu \xi(x) \quad (2.10\beta')$$

βρίσκουμε τη μορφή της Λαγκρανζιανής στη νέα βαθμίδα:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[\partial_\nu \eta'(x)][\partial^\nu \eta'(x)] + \mu^2 \eta'^2(x) - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2 v^2 A'_\nu(x)A'^\nu(x) \\ & + g^2 v \eta'(x)A'_\nu(x)A'^\nu(x) + \frac{g^2}{2}\eta'^2(x)A'_\nu(x)A'^\nu(x) \\ & - \frac{\lambda}{4}\eta'^4(x) - \lambda v \eta'^3(x) - \frac{1}{4}\mu^2 v^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Εδώ φαίνεται καθαρά πως το σωματιδιακό φάσμα της νέας θεωρίας αποτελείται από το βαθμωτό σωματίο η με μάζα $\sqrt{-2\mu^2}$ και από το διανυσματικό σωματίο A το οποίο όμως έχει αποκτήσει μάζα gv . Μέσω της αλλαγής βαθμίδας βλέπουμε πως το δεύτερο βαθμωτό σωματίο ξ έχει «μετατραπεί»¹ στο διαμήκη σωματιδιακό βαθμό ελευθερίας του διανυσματικού σωματιδίου A . Το σωματίδιο η ονομάζεται σωματίδιο Higgs του προτύπου και η βαθμίδα στην οποία μεταβήκαμε ονομάζεται μοναδιακή βαθμίδα.

Κλείνοντας παρατηρούμε πως το χαρακτηριστικό του τρόπου Higgs για τη παραβίαση συμμετρίας είναι η απόκτηση μάζας από το διανυσματικό σωματίο της θεωρίας σε βάρος του άμαζου σωματιδίου Goldstone το οποίο δεν εμφανίζεται.

¹Η μη ύπαρξη του άμαζου σωματιδίου ξ της (2.8) μας δείχνει ότι δεν ισχύει το θεώρημα Goldstone στη περίπτωση του μηχανισμού Higgs. Αυτό συμβαίνει γιατί το θεώρημα Goldstone ισχύει για χβαντικά πεδία που διέπονται από τις αρχές της τοπικότητας, αναλλοιότητας κατά Lorentz και θετικού μέτρου στο χώρο Hilbert. Όμως στα πεδία θεωριών τοπικής βαθμίδας δεν υπάρχει βαθμίδα στην οποία να ικανοποιούνται και οι τρεις αρχές ταυτόχρονα. [5]

2.2 Εξισώσεις Κίνησης του προτύπου που θα μελετήσουμε

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε πως η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του αβελιανού μοντέλου Higgs μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\nu \eta(x)][\partial^\nu \eta(x)] + \mu^2 \eta^2(x) - \frac{\lambda}{4} \eta^4(x) - \lambda v \eta^3(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 [v + \eta(x)]^2 A_\nu(x) A^\nu(x) \quad (2.12)$$

Υπενθυμίζουμε από τη προηγούμενη ενότητα πως για τις σταθερές ισχύει $\mu^2 < 0$ και $\lambda, v > 0$. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν για τα πεδία η και A είναι:

$$[\square + g^2 (v + \eta(x))^2] A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0 \quad (2.13\alpha')$$

$$[\square - 2\mu^2] \eta(x) - g^2 (v + \eta(x)) A_\nu(x) A^\nu(x) + 3\lambda v \eta^2(x) + \lambda \eta^3(x) = 0 \quad (2.13\beta')$$

Παρατηρώντας τις εξισώσεις κίνησης βλέπουμε πως έχουμε ένα σύστημα 5 δευτεροτάξων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η εύρεση γενικής λύσης για ένα τέτοιο σύστημα είναι πολύ δύσκολη έως αδύνατη με βάση τις γνωστές αναλυτικές μεθόδους. Γι' αυτό θα περιοριστούμε στην αναζήτηση κλασικών ειδικών λύσεων του συστήματος πράγμα που θα μας επιτρέψει να αποκτήσουμε κάποια κατανόηση για τη συμπεριφορά των φυσικών συστημάτων που περιγράφει.

Η Λαγκρανζιανή (2.12) έχει το παρακάτω όρο δυναμικού:

$$V = \frac{\lambda}{4} \eta^4(x) + \lambda v \eta^3(x) - \mu^2 \eta^2(x) - \frac{1}{2} g^2 [v + \eta(x)]^2 A_\nu(x) A^\nu(x) \quad (2.14)$$

Από τη μορφή του δυναμικού (2.14) βλέπουμε πως έχει ένα κρίσιμο σημείο, το $(A^\mu, \eta) = (0, 0)$. Περαιτέρω μελέτη μας αποκαλύπτει πως είναι σαγματικό σημείο γιατί όσο αυξάνεται το A_0 τόσο μειώνεται το δυναμικό. Όμως μπορούμε να αξιοποιήσουμε το ότι δουλεύουμε στη μοναδιακή βαθμίδα. Από τη συζήτηση για τις ιδιότητες του μηχανισμού Higgs[7] βλέπουμε πως στη μοναδιακή βαθμίδα το A_0 μηδενίζεται όταν βρισκόμαστε στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας². Επιλέγουμε λοιπόν να εργαστούμε σε αυτό το σύστημα, μια επιλογή που θα μας βοηθήσει και αργότερα. Όντας στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας μπορούμε να γράψουμε για το δυναμικό του συστήματος:

$$V = \frac{\lambda}{4} \eta^4(x) + \lambda v \eta^3(x) - \mu^2 \eta^2(x) + \frac{1}{2} g^2 [v + \eta(x)]^2 \mathbf{A}^2$$

απ' όπου βλέπουμε πως το σημείο $(\mathbf{A}, \eta) = (0, 0)$ είναι ολικό ελάχιστο του δυναμικού του συστήματος μας.

² Δηλαδή στο σύστημα όπου $\partial_\sigma A^\sigma = p_0 A^0$

Θα αξιοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα για να αναζητήσουμε προσεγγιστικές λύσεις του συστήματος. Όμως παρά τις προηγούμενες επισημάνσεις το σύστημα (2.13) παραμένει αρκετά πολύπλοκο για να το λύσουμε. Γι αυτό επιχειρούμε να μειώσουμε τις διαστάσεις του προβλήματος κάνοντάς το διδιάστατο³. Υποθέτουμε λοιπόν την ακόλουθη εξάρτηση του πεδίου βαθμίδας από το χωροχρόνο:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= A(x, t) \\ A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

η οποία μας δίνει ένα πεδίο A^μ που ικανοποιεί και τη συνθήκη Lorentz⁴.

Με αυτή την υπόθεση το σύστημα (2.13) των εξισώσεων μας παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$[\square + g^2(v + \eta(x))^2]A(x) = 0 \quad (2.16\alpha')$$

$$[\square - 2\mu^2]\eta(x) + g^2(v + \eta(x))A^2(x) + 3\lambda v\eta^2(x) + \lambda\eta^3(x) = 0 \quad (2.16\beta')$$

Για να διευκολυνθούμε στην επίλυση του συστήματος θα κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητών ώστε να έχουμε αδιάστατες εξισώσεις. Αυτή είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A/v \\ \tilde{\eta} &= \eta/v \\ \tilde{x} &= gv x \\ \tilde{t} &= gvt \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ακόμα εισάγουμε το λόγο q των μαζών των πεδίων A και η .

$$q^2 = \frac{m_\eta^2}{m_A^2} = \frac{2\lambda v^2}{g^2 v^2} = \frac{-2\mu^2}{g^2 v^2} \quad (2.18)$$

Μετά την αλλαγή μεταβλητών καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων.

$$[\tilde{\square} + (1 + \tilde{\eta}(\tilde{x}))^2]\tilde{A}(\tilde{x}) = 0 \quad (2.19\alpha')$$

$$[\tilde{\square} + q^2]\tilde{\eta}(\tilde{x}) + (1 + \tilde{\eta}(\tilde{x}))\tilde{A}^2(\tilde{x}) + \frac{3}{2}q^2\tilde{\eta}^2(\tilde{x}) + \frac{1}{2}q^2\tilde{\eta}^3(\tilde{x}) = 0 \quad (2.19\beta')$$

Για την επίλυση αυτού του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων την οποία θα περιγράψουμε στην επόμενη ενότητα.

³ Δηλαδή θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε 1 χωρική και τη χρονική διάσταση.

⁴ Αυτό όμως δε σημαίνει ότι λύνουμε το σύστημα στη βαθμίδα Lorentz. Το λύνουμε στη μοναδιακή βαθμίδα αλλά έχουμε κάνει μια υπόθεση για τη μορφή του πεδίου $A_\mu(x)$ η οποία «συμπτωματικά» ικανοποιεί τη συνθήκη Lorentz.

2.3 Εφαρμογή της Μεθόδου των Πολλαπλών Κλιμάκων.

Το σύστημα εξισώσεων (2.19) προκύπτει από την ακόλουθη χαμιλτονιανή πυκνότητα⁵:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & + \frac{1}{2}(\partial_t A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 \\ & + \frac{1}{8}q^2 \eta^4 + \frac{1}{2}q^2 \eta^3 + \frac{1}{2}q^2 \eta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 A^2 + \eta A^2 + \frac{1}{2}A^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Η πρώτη σειρά της Χαμιλτονιανής είναι ο κινητικός όρος και η δεύτερη ο δυναμικός όρος. Όπως περιμέναμε από την ανάλυση που προηγήθηκε παρατηρούμε πως το ελάχιστο της χαμιλτονιανής είναι η κατάσταση $(A, \eta) = (0, 0)$. Η ευστάθεια της κατάστασης αυτής, λόγω της μορφής του δυναμικού, μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε διαταρακτικές λύσεις γύρω από αυτή.

Η αναζήτηση των διαταρακτικών λύσεών μας θα βασιστεί στη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Σε αυτή τη μέθοδο υποθέτουμε πως έχουμε ασθενή μη γραμμική συμπεριφορά και πως η συμπεριφορά του συστήματος σε μία χωροχρονική κλίμακα δεν επηρεάζει τη συμπεριφορά του σε μια άλλη [8]. Αυτό μας επιτρέπει να λύσουμε χωριστά για κάθε κλίμακα πράγμα που απλοποιεί την επίλυση του συστήματος.

Ξεκινάμε γράφοντας την ανεξάρτητη χωροχρονική μεταβλητή στις διάφορες κλίμακες:

$$\begin{aligned} x^\rho & \rightarrow \epsilon^k x_k^\rho \\ & = x_0^\rho + \epsilon x_1^\rho + \epsilon^2 x_2^\rho + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ο πρώτος όρος που συμπίπτει με τη «προηγούμενη» μεταβλητή μας ονομάζεται γρήγορη μεταβλητή και οι υπόλοιποι όροι ονομάζονται αργές μεταβλητές. Οι διαφορικοί τελεστές θα μετασχηματιστούν ως εξής:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_{\mu 0} + \epsilon \partial_{\mu 1} + \epsilon^2 \partial_{\mu 2} + \dots \quad (2.22)$$

και

$$\square^2 \rightarrow \square_0^2 + 2\epsilon \partial_{\mu 0} \partial^{\mu 1} + \epsilon^2 (\square_1^2 + 2\partial_{\mu 0} \partial^{\mu 2}) + 2\epsilon^3 (\partial_{\mu 1} \partial^{\mu 2} + \partial_{\mu 0} \partial^{\mu 3}) + \dots \quad (2.23)$$

Αντίστοιχα αναπτύσσουμε και τα πεδία, ήτοι τις εξαρτημένες μεταβλητές:

$$A \rightarrow A(0) + \epsilon A(1) + \epsilon^2 A(2) + \dots$$

$$\eta \rightarrow \eta(0) + \epsilon \eta(1) + \epsilon^2 \eta(2) + \dots$$

⁵ Από εδώ και πέρα δε θα χρησιμοποιούμε τη περισπωμένη για να συμβολίσουμε τα αδιάστατα πεδία και μεταβλητές, παρ' όλο που θα τα χρησιμοποιούμε, για λόγους απλότητας.

Όμως έχουμε πει πως αναπτύσσουμε γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού της χαμιλτονιανής στο οποίο είναι $(A, \eta) = (0, 0)$ συνεπώς θα είναι $A(0) = \eta(0) = 0$. Ακόμα κάνουμε την επιπλέον υπόθεση πως έχουμε ασθενές πεδίο Higgs δηλαδή πως είναι $\eta(1) = 0$. Συνεπώς για τα πεδία έχουμε:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \epsilon A(1) + \epsilon^2 A(2) + \dots \\ \eta &\rightarrow \epsilon^2 \eta(2) + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Εδώ αξίζει να αναφέρουμε ένα λεπτό σημείο της μεθοδολογίας μας. Συνήθως η μικρή παράμετρος ϵ βρίσκεται εκπεφρασμένα στις εξισώσεις του συστήματος και ελέγχει την ισχύ του μη γραμμικού όρου. Στη δική μας περίπτωση δεν έχουμε ακολουθήσει αυτή την οδό γιατί δε θέλουμε να περιοριστούμε στη μελέτη ασθενώς συζευγμένων συστημάτων. Γι' αυτό μορφοποιούμε την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων με διαφορετικό τρόπο. Η μικρή παράμετρος ϵ εκφράζει το πόσο απέχουμε από το σημείο για το οποίο το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο απ' όπου παίρνουμε την αδιατάρακτη λύση.

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στο κύριο μέρος της μεθόδου. Εισάγουμε το ανάπτυγμα (2.24) στο σύστημα (2.19) και γράφουμε την εξίσωση που προκύπτει για κάθε τάξη του ϵ ξεχωριστά προκειμένου να τη λύσουμε.

Ξεκινάμε με το πεδίο A . Σε τάξη ϵ^1 έχουμε:

$$(\square_0 + 1)A(1) = 0$$

Ενθυμούμενοι ότι βρισκόμαστε στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου A για τη λύση της παραπάνω εξίσωσης έχουμε⁶:

$$A(1) = f_1 e^{-it} + c.c. \quad (2.25)$$

όπου το f_1 εξαρτάται από τις αργές μεταβλητές⁷.

Συνεχίζουμε με το πεδίο A σε τάξη ϵ^2 :

$$(\square_0 + 1)A(2) + 2\partial_{\mu 0} \partial^{\mu 1} A(1) = 0$$

Το ομογενές κομμάτι της εξίσωσης έχει λύση:

$$A(2) = f_2 e^{-it} + c.c.$$

⁶Εδώ υπάρχει άλλο ένα λεπτό σημείο στην επίλυσή μας. Εν γένει η επίλυση της προηγούμενης διαφορικής εξίσωσης επιδέχεται μια οικογένεια λύσεων

$$A(1) = c_1 f_1 e^{-it} + c_2 f_1 e^{it}$$

που παραμετροποιείται από τις σταθερές c_1 και c_2 . Όμως εμείς δε κάνουμε γενική επίλυση του συστήματος αλλά εξετάζουμε την ύπαρξη ή μη μιας προτεινόμενης λύσης. Η λύση της οποίας την ύπαρξη θα εξετάσουμε προκύπτει από την επιλογή $c_1 = c_2 = 1$.

⁷Η εξάρτηση του f_1 γράφεται $f_1 = f_1(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots)$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι επιλύουμε το σύστημα στις αδιάστατες μεταβλητές.

όμως από τη μορφή αυτή της λύσης παρατηρούμε πως ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης θα γεννήσει αιώνιους όρους στη λύση αυτή οι οποίοι θα τη κάνουν να αποκλίνει. Γι' αυτό απαιτούμε ο όρος αυτός να μηδενίζεται, δηλ.:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu 0} \partial^{\mu 1} A(1) &= 0 \\ \Rightarrow (\partial_{t_0} \partial_{t_1} - \partial_{x_0} \partial_{x_1}) A(1) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_{t_1} A(1) &= 0\end{aligned}\quad (2.26)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει πως η f_1 , όσον αφορά το χρόνο, θα εξαρτάται από τη t_2 και πέρα.

Συνεχίζουμε με το πεδίο η σε τάξη ϵ^2 :

$$(\square_0 + q^2)\eta(2) = -A^2(1)$$

Προκειμένου να λύσουμε τη παραπάνω μη ομογενή εξίσωση αναζητούμε πρώτα μία ειδική λύση της. Παίρνουμε λοιπόν:

$$X = A_h(b_h |f_1|^2 + f_1^2 e^{-2it} + f_1^{*2} e^{2it})$$

Αιτώντας η λύση X να επαληθεύει την εξίσωση για το πεδίο η βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}A_h b_h &= -\frac{2}{q^2} \\ A_h &= -\frac{1}{q^2 - 4}\end{aligned}$$

Συνεπώς για το πεδίο $\eta(2)$ καταλήγουμε⁸:

$$\eta(2) = (f_{h2} e^{-iqt} + c.c.) + \left(-\frac{1}{q^2 - 4} f_1^2 e^{-2it} + c.c.\right) - \frac{2}{q^2} |f_1|^2 \quad (2.27)$$

Συνεχίζουμε με το πεδίο A σε τάξη ϵ^3 :

$$(\square_0 + 1)A(3) + 2\partial_{\mu 0} \partial^{\mu 1} A(2) + (\square_1 + 2\partial_{\mu 0} \partial^{\mu 2} + 2\eta(2))A(1) = 0$$

Ο πρώτος όρος περιέχει το ομογενές κομμάτι της εξίσωσης. Ο δεύτερος περιέχει ένα αιώνιο όρο που προέρχεται από το $A(2)$. Αιτώντας να μηδενίζεται, όπως και προηγουμένως, παίρνουμε:

$$\partial_{t_1} A(2) = 0$$

⁸Ο όρος f_{h2} προσδιορίζεται σε μεγαλύτερη τάξη ως προς ϵ απ' όσο εμείς θα προχωρήσουμε. (Θα προχωρήσουμε τόσο όσο χρειάζεται ώστε να προσδιορίσουμε το f_1 .) Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε πως στα πλαίσια αναζήτησης προσεγγιστικής λύσης όπου δουλεύουμε είναι $f_{h2} = 0$. Αυτός ο μηδενισμός δεν έχει συνέπειες στη δική μας περίπτωση αλλά εν γένει μπορεί να οδηγήσει και σε σφάλματα αντί να βοηθήσει. Τέλος αυτός ο μηδενισμός είναι συνεπής με την υπόθεσή μας για ασθενές πεδίο Higgs. Θεωρούμε πως το πεδίο Higgs προκύπτει από το πεδίο βαθμίδας και λόγω της μορφής των εξισώσεων κίνησης εμφανίζεται μία τάξη αργότερα.

Ο τρίτος όρος περιέχει ένα κομμάτι που έχει αιώνιους όρους και ένα κομμάτι που είναι απλός μη ομογενής όρος της εξίσωσης. Προκειμένου να τα ξεχωρίσουμε έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta(2)A(1) &= \left[-\frac{1}{q^2-4}f_1^2e^{-2it} - \frac{1}{q^2-4}f_1^{*2}e^{2it} - \frac{2}{q^2}|f_1|^2 \right] \cdot [f_1e^{-it} + f_1^*e^{it}] \\ &= \left[-\left(\frac{1}{q^2-4} + \frac{2}{q^2}\right)(f_1|f_1|^2e^{-it} + f_1^*|f_1|^2e^{it}) + f_1^3e^{-3it} + f_1^{*3}e^{3it} \right]\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος θα δώσει τους αιώνιους όρους της εξίσωσης ενώ οι υπόλοιποι είναι απλοί μη ομογενείς όροι. Προτού γράψουμε την εξίσωση αιώνιων όρων υπολογίζουμε και τη μορφή των υπολοίπων κομματιών.

$$\begin{aligned}\square_1 A(1) &= (\partial_{t1}^2 - \partial_{x1}^2)A(1) \\ &= -\partial_{x1}^2 A(1)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\partial_{\mu 0}\partial^{\mu 2}A(1) &= (\partial_{t0}\partial_{t1} - \partial_{x0}\partial_{x2})A(1) \\ &= \partial_{t0}\partial_{t2}A(1)\end{aligned}$$

Εν τέλει για το κομμάτι των αιώνιων όρων της εξίσωσης βρίσκουμε:

$$\left(-\partial_{x1}^2 + 2\partial_{t0}\partial_{t2} - \left(\frac{1}{q^2-4} + \frac{2}{q^2}\right)|f_1|^2 \right) (f_1e^{-it} + f_1^*e^{it}) = 0$$

Θέτοντας

$$S \equiv \frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^2-4} = \frac{3q^2-8}{q^2(q^2-4)} \quad (2.28)$$

καταλήγουμε στη παρακάτω εξίσωση:

$$\left[\frac{1}{2}\partial_{x1}^2 + i\partial_{t2} + S|f_1|^2 \right] f_1 = 0 \quad (2.29)$$

Η παραπάνω εξίσωση είμαι μία μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Όμως προκειμένου να διευκολυνθούμε στην επίλυση της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών:

$$f_1 = \frac{y}{\sqrt{|S|}} \quad (2.30)$$

και καταλήγουμε στη παρακάτω εξίσωση:

$$\left[\frac{1}{2}\partial_{x1}^2 + i\partial_{t2} + \Sigma|y|^2 \right] y = 0 \quad (2.31)$$

όπου

$$\Sigma = \frac{S}{|S|} \quad (2.32)$$

Λύνοντας τη παραπάνω εξίσωση και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.25) και (2.27) βρίσκουμε λύσεις για το σύστημα (2.19). Μέσω της επίλυσης που κάναμε βρήκαμε λύσεις μόνο για τη πρώτη μη μηδενική τάξη, ως προς ϵ των πεδίων. Εάν θέλαμε να μπορούσαμε να συνεχίσουμε περισσότερο αλλά εφόσον η προσεγγιστική μας μέθοδος έχει χαρακτηριστικά γρήγορης σύγκλισης στην αναλυτική λύση αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Κεφάλαιο 3

Προτεινόμενες λύσεις και Αριθμητική Μελέτη τους

Έχοντας καταλήξει σε μία απλούστερη εξίσωση (2.31) από αυτή του αρχικού προβλήματος προχωράμε στη κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων του πλήρους συστήματος (2.19). Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το λογισμικό MATLAB προκειμένου να επαληθεύσουμε αριθμητικά εάν οι λύσεις που μας υποδεικνύει η προσεγγιστική μας μέθοδος είναι λύσεις και του πλήρους προβλήματος.

3.1 Εντοπισμένες Λύσεις Σολιτονικού¹ τύπου.

Η εξίσωση (2.31) είναι η κυβική μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Ανάλογα με το πρόσημο του συντελεστή Σ λέγεται εστιάζουσα ή αποεστιάζουσα. Αυτό εξαρτάται από το λόγο q των μαζών των πεδίων A και η . Από την εξίσωση (2.28) βλέπουμε πως όταν

$$q \in \left(\sqrt{\frac{8}{3}}, 2 \right) \Rightarrow \Sigma < 0 \quad (3.1)$$

ενώ όταν

$$q \in \left(0, \sqrt{\frac{8}{3}} \right) \cup (2, \infty) \Rightarrow \Sigma > 0 \quad (3.2)$$

Και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση δέχεται σολιτονικές λύσεις².

¹Σολιτονικές λύσεις προερχόμενες από τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS)

²Υπάρχει μία αμφισημία στη χρήση του όρου σολιτόνιο στη βιβλιογραφία. Για να χαρακτηριστεί μία λύση σολιτονική πρέπει να έχει δύο ιδιότητες

1. Διατήρηση της μορφής του κυματοπακέτου καθώς ταξιδεύει στο χώρο.
2. Διατήρηση της μορφής των κυματοπακέτων μετά από σύγκρουση μεταξύ τους.

Εάν τηρείται μόνο η πρώτη ιδιότητα τότε η λύση λέγεται μοναχικό κύμα (solitary wave). Στη φυσική όμως συχνά χρησιμοποιείται ο όρος σολιτόνιο είτε και για τις δύο περιπτώσεις. Αυτό θα κάνουμε και εμείς στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

3.1.1 Σκοτεινά Σολιτόνια

Στην αποεστιάζουσα εξίσωση Schrödinger, όπου έχουμε $\Sigma < 0$, υπάρχουν εντοπισμένες λύσεις που ονομάζονται σκοτεινά σολιτόνια. Αυτό συμβαίνει όταν ο λόγος q των μαζών των πεδίων παίρνει τιμές μέσα στο σύνολο (3.1). Προκειμένου να δούμε αυτές τις λύσεις πιο αναλυτικά ξαναγράφουμε την αποεστιάζουσα εξίσωση Schrödinger:

$$\left[\frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 + i \partial_{t_2} - |y|^2 \right] y = 0 \quad (3.3)$$

Η εξίσωση αυτή έχει σα λύσεις μη γραμμικά κύματα συνεχούς κύματος:

$$y = y_0 \exp[i(kx_1 - \omega t_2)] \quad (3.4)$$

τα οποία έχουν την ακόλουθη σχέση διασποράς μεταξύ συχνότητας και κυματάρηθμού:

$$\omega = \frac{1}{2} k^2 + y_0^2 \quad (3.5)$$

Τα σκοτεινά σολιτόνια εμφανίζονται σα διεγέρσεις των λύσεων συνεχούς κύματος.

$$y(x_1, t_2) = y_0 \{ A \tanh[y_0 A(x_1 - vt_2)] + iB \} \exp [i(kx_1 - \omega t_2)] \quad (3.6)$$

Οι σταθερές που υπεισέρχονται στην εξίσωση του σκοτεινού σολιτονίου δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για τη ταχύτητα του σολιτονίου πάνω στο υπόβαθρο ισχύει:

$$v = y_0 B + k \quad (3.7)$$

ενώ για τα πλάτη A και B ισχύει:

$$A^2 + B^2 = 1 \quad (3.8)$$

Εμείς όπως έχουμε προαναφέρει αναζητούμε λύσεις στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας. Γι' αυτό στις λύσεις που εξετάζουμε δεχόμαστε πως είναι:

$$v = k = 0 \quad (3.9)$$

Αυτό σημαίνει πως:

$$B = 0$$

$$A = 1$$

$$\omega = y_0^2$$

Συνεπώς η σκοτεινή σολιτονική λύση που θα εξετάσουμε είναι:

$$y(x_1, t_2) = y_0 \left[A \tanh(y_0 A x_1) \right] \exp(-iy_0^2 t_2) \quad (3.10)$$

Πηγαίνοντας στις αρχικές αδιάστατες μεταβλητές μέσω των εξισώσεων (2.25), (2.27) και (2.30) η λύση γράφεται:

$$A(1) = \frac{2y_0}{|S|^{\frac{1}{2}}} \tanh(y_0 \epsilon x) \cos(1 + \epsilon^2 y_0^2) t \quad (3.11)$$

και

$$\eta(2) = -\frac{2}{q^2 - 4} \frac{y_0^2}{|S|} \tanh^2(y_0 \epsilon x) \cos[2(1 + \epsilon^2 y_0^2) t] - \frac{2}{q^2} \frac{y_0^2}{|S|} \tanh^2(y_0 \epsilon x) \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια αφήνουμε τα αδιάστατα πεδία και μεταβλητές, μέσω των εξισώσεων (2.17) και (2.24), και επιστρέφουμε στα φυσικά πεδία και μεταβλητές για τα οποία βρίσκουμε³:

$$A(x, t) = \frac{2\epsilon y_0}{v|S|^{\frac{1}{2}}} \tanh(\epsilon g v y_0 x) \cos[(1 + \epsilon^2 y_0^2) g v t] \quad (3.13)$$

και

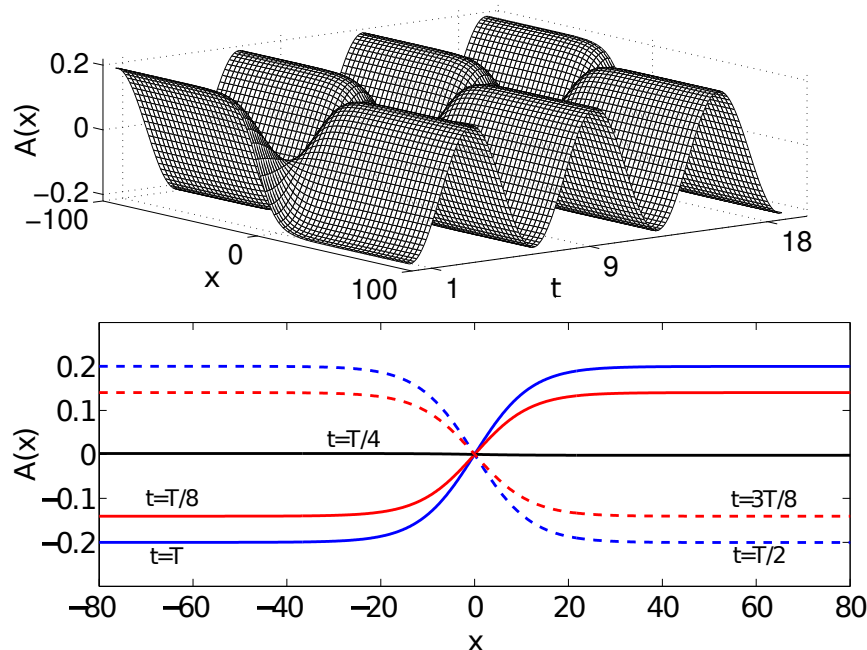
$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & -\frac{2\epsilon^2}{q^2 - 4} \frac{y_0^2}{v|S|} \tanh^2(\epsilon g v y_0 x) \cos[2(1 + \epsilon^2 y_0^2) g v t] \\ & - \frac{2\epsilon^2}{q^2} \frac{y_0^2}{v|S|} \tanh^2(\epsilon g v y_0 x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Οι εξισώσεις (3.13) και (3.14) αποτελούν τις προτεινόμενες σκοτεινές σολιτονικές λύσεις για το αβελιανό μοντέλο Higgs.

³Υπενθυμίζουμε πως είναι $m_A = gv$.

3.1.2 Αριθμητική Μελέτη των Σκοτεινών Σολιτονίων.

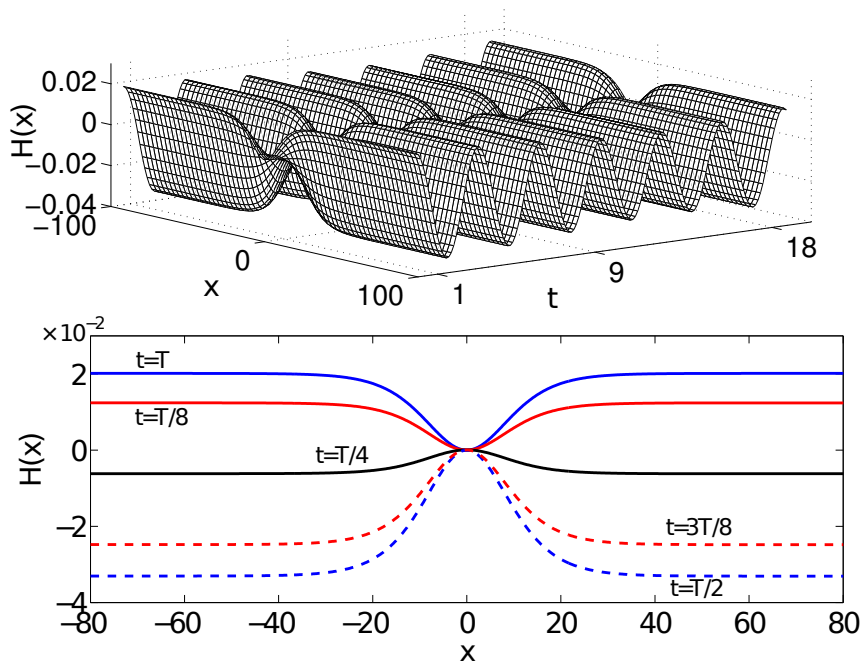
Συνεχίζουμε προχωρώντας στην αριθμητική μελέτη των παραπάνω λύσεων. Για να αποκτήσουμε μία καλύτερη εποπτεία της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.13) και (3.14) τη σχεδιάζουμε. Στα



Σχήμα 3.1: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $g = 1.8$.

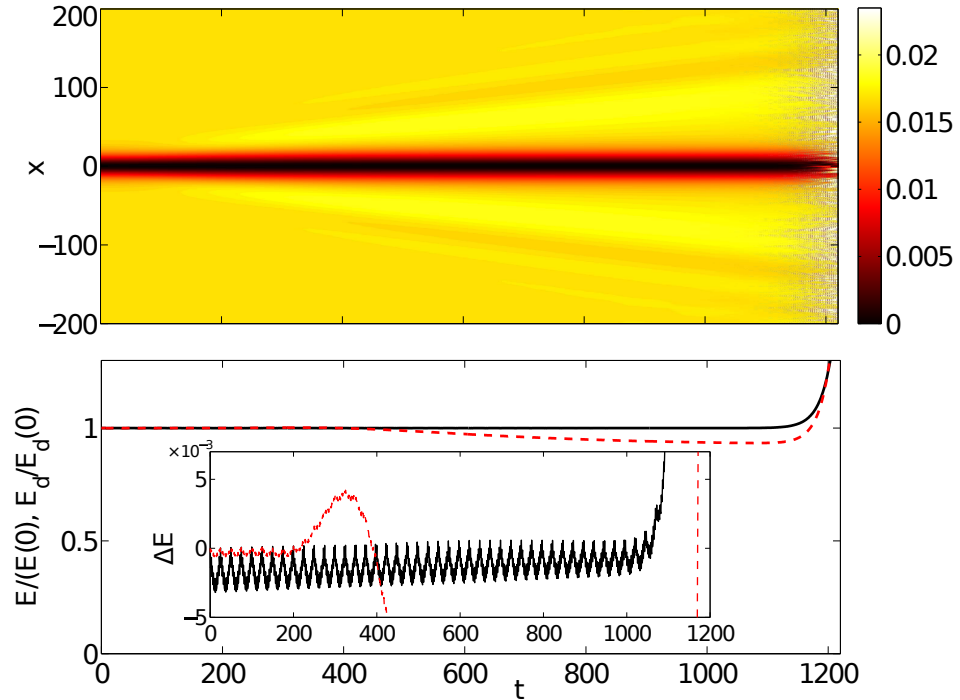
σχήματα 3.1 και 3.2 βλέπουμε γραφικά τη χωροχρονική εξάρτηση της λύσης του στάσιμου σκοτεινού σολιτονίου. Τα γραφήματα σχεδιάστηκαν σε χρόνους κοντά στην αρχική συνθήκη όταν η χωροχρονική εξάρτηση των πεδίων είναι αυτή της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου. Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι $g = 1.8$ και $\epsilon = 0.1$. Ένα από τα πράγματα που είναι εμφανές από τα γραφήματα είναι η διπλάσια συχνότητα του πεδίου Higgs του προτύπου.

Η αριθμητική μελέτη της προσεγγιστικής λύσης του σκοτεινού σολιτονίου μας δείχνει πως αυτή δεν επαληθεύει το πλήρες σύστημα (2.19) καθώς δε περνά το τεστ της αριθμητικής επαλήθευσης [6]. Στην αρχή, δηλαδή στις πρώτες ταλαντώσεις του σολιτονίου, η λύση διατηρείται αλλά γρήγορα μετά αρχίζει να καταστρέφεται. Τη πορεία αυτή της λύσης προς τη καταστροφή μπορούμε να τη παρακολουθήσουμε στο σχήμα 3.3. Σε αυτό βλέπουμε το γράφημα της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας του Σολιτονίου όπως απλώνεται στο χώρο και εξελίσσεται στο χρόνο. Παρατηρούμε πως αρχικά η ενέργεια είναι εντοπισμένη χωρικά στο κέντρο του σολιτονίου. Στη συνέχεια παρατηρούμε πως η ενέργεια



Σχήμα 3.2: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 1.8$.

από το κέντρο αρχίζει να «ακτινοβολείται» προς τα έξω και το σολιτόνιο αρχίζει να καταστρέφεται. Της καταστροφής της μορφής του σολιτονίου έπεται απειρισμός των πεδίων όπως τα εξελίσσει η αριθμητική προσομοίωση.

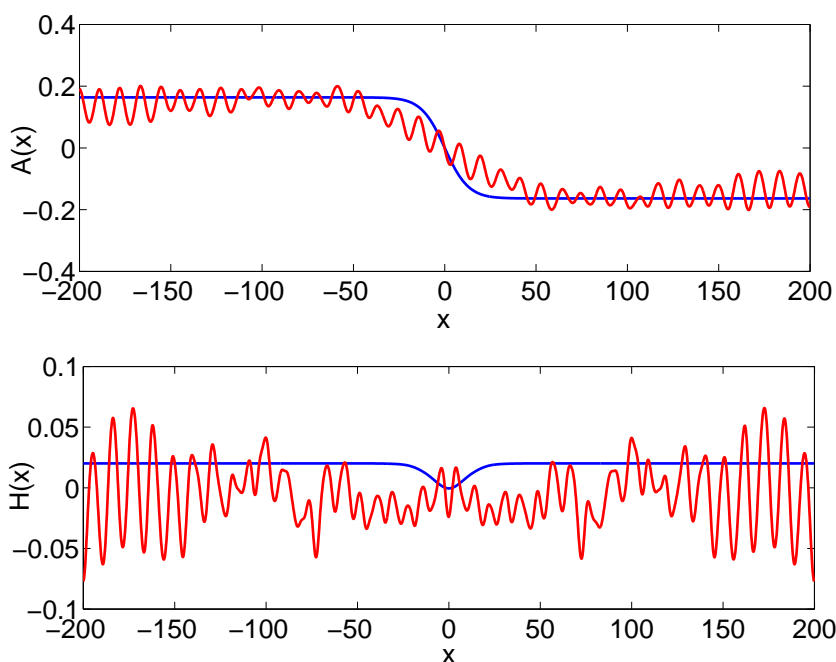


Σχήμα 3.3: Επάνω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας $\mathcal{H}(x, t)$ για τιμή της παραμέτρου q ίση με $q = 1.8$. Κάτω: Ολική ενέργεια κανονικοποιημένη ως προς την ενέργεια για $t = 0$ στη μαύρη γραμμή και κανονικοποιημένη ενέργεια του πυρήνα του σολιτονίου στη διακεκομμένη κόκκινη γραμμή. Κάτω εμβόλιμο πλαίσιο: Γράφημα της διαφοράς της ενέργειας από την αρχική τιμή για όλο το σολιτόνιο στη μαύρη γραμμή και για το πυρήνα του στη διακεκομμένη κόκκινη γραμμή.

Το αποτέλεσμα αυτής της πορείας προς τη καταστροφή, αλλά πριν τον απειρισμό των πεδίων, το βλέπουμε στο σχήμα 3.4. Σε αυτό γίνεται σύγκριση της μορφής των πεδίων στην αρχή της προσομοίωσης, όπου ξεκινούν έχοντας τη μορφή της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου, με τη μορφή τους στο τέλος της προσομοίωσης όπου η μορφή τους υποδηλώνει τη καταστροφή της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου. Μία παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε με αφορμή αυτό το σχήμα είναι πως το πεδίο Higgs του προτύπου καταστρέφεται πιο γρήγορα. Αυτό συμβαίνει γιατί, πράγμα που φαίνεται από τις σχέσεις (3.11) και (3.12), το πεδίο Higgs ταλαντώνεται με διπλάσια συχνότητα από το πεδίο βαθμίδας με αποτέλεσμα να εξελίσσεται «περισσότερο» από το πεδίο βαθμίδας και η καταστροφή σε αυτό να εμφανίζεται πιο γρήγορα.

Ένα ακόμα σημείο που αξίζει να τονίσουμε είναι αυτό του κάτω εμβόλιμου

πλασίου στο σχήμα 3.3. Σε αυτό βλέπουμε πως η ολική ενέργεια του σολιτονίου, ακόμα και στην αρχή που αυτό διατηρεί τη μορφή του, υπόκειται σε μικρές μεταβολές. Αυτές οι μεταβολές είναι της τάξεως του $1/500$ της αρχικής ενέργειας και οφείλονται στη διακριτοποίηση του προβλήματος προκειμένου να γίνει η αριθμητική προσομοίωση. Παρ' όλο που το σύστημα που μοντελοποιήσαμε με το κώδικά μας είναι Χαμιλτονιανό δε μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη μικρή μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος, είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό των αριθμητικών προσομοιώσεων.



Σχήμα 3.4: Επάνω: Στιγμιότυπο του πεδίου βαθμίδας στην αρχή, (μπλε γραμμή), και στο τέλος της προσομοίωσης (κόκκινη γραμμή) για τιμή της παραμέτρου q ίση με $q = 1.8$. Κάτω: Στιγμιότυπο του πεδίου Higgs στην αρχή, (μπλε γραμμή), και στο τέλος της προσομοίωσης (κόκκινη γραμμή) για τιμή της παραμέτρου $q = 1.8$.

3.1.3 Φωτεινά Σολιτόνια.

Όταν ισχύει η συνθήκη (3.2) τότε έχουμε την εστιάζουσα εξίσωση Schrödinger:

$$\left[\frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 + i \partial_{t_2} + |y|^2 \right] y = 0 \quad (3.15)$$

Αυτή η εξίσωση επιδέχεται φωτεινές σολιτονικές λύσεις οι οποίες είναι:

$$y(x_1, t_2) = y_0 \operatorname{sech} [y_0 (x_1 - vt_2)] \exp [i (kx_1 - \omega t_2)] \quad (3.16)$$

όπου y_0 είναι το πλάτος και το αντίστροφο εύρος, k ο κυματαριθμός, ω η συχνότητα και v η ταχύτητα του φωτεινού σολιτονίου. Οι σταθερές αυτές δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους καθώς ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} (k^2 - y_0^2) \\ v &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = k \end{aligned}$$

Συνεπώς το φωτεινό σολιτόνιο έχει μόνο δύο ανεξάρτητες παραμέτρους.

Έχουμε αναφέρει πως αναζητούμε λύσεις στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας, συνεπώς $v = 0$. Άρα θα είναι $k = 0$ και

$$\omega = -\frac{1}{2} y_0^2$$

Συνεπώς η φωτεινή σολιτονική λύση που θα εξετάσουμε είναι:

$$y(x_1, t_2) = y_0 \operatorname{sech} (y_0 x_1) \exp \left(+i \frac{y_0^2}{2} t_2 \right) \quad (3.17)$$

Πηγαίνοντας στις αρχικές αδιάστατες μεταβλητές μέσω των εξισώσεων (2.25), (2.27) και (2.30) η λύση γράφεται:

$$A(1) = \frac{2y_0}{|S|^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sech} (y_0 \epsilon x) \cos \left(1 + \epsilon^2 \frac{y_0^2}{2} \right) t \quad (3.18)$$

και

$$\eta(2) = -\frac{2}{q^2 - 4} \frac{y_0^2}{|S|} \operatorname{sech}^2 (y_0 \epsilon x) \cos [(2 + \epsilon^2 y_0^2) t] - \frac{2}{q^2} \frac{y_0^2}{|S|} \operatorname{sech}^2 (y_0 \epsilon x) \quad (3.19)$$

Στη συνέχεια αφήνουμε τα αδιάστατα πεδία και μεταβλητές, μέσω των εξισώσεων (2.17) και (2.24), και επιστρέφουμε στα φυσικά πεδία και μεταβλητές για τα οποία βρίσκουμε:

$$A(x, t) = \epsilon \frac{2y_0}{v|S|^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sech} (\epsilon g v y_0 x) \cos \left[\left(1 + \epsilon^2 \frac{y_0^2}{2} \right) g v t \right] \quad (3.20)$$

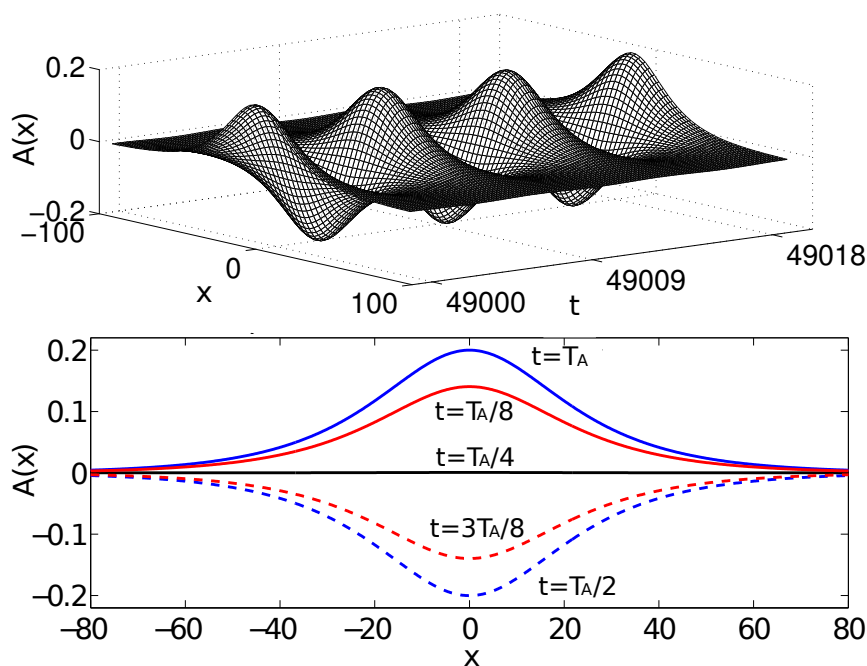
και

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & - \frac{2\epsilon^2}{q^2 - 4} \frac{y_0^2}{v|S|} \operatorname{sech}^2(\epsilon g v y_0 x) \cos [(2 + \epsilon^2 y_0^2) g v t] \\ & - \frac{2\epsilon^2}{q^2} \frac{y_0^2}{v|S|} \operatorname{sech}^2(\epsilon g v y_0 x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Οι εξισώσεις (3.20) και (3.21) αποτελούν τις προτεινόμενες φωτεινές σολιτονικές λύσεις για το αβελιανό μοντέλο Higgs.

3.1.4 Αριθμητική Μελέτη των Φωτεινών Σολιτονίων.

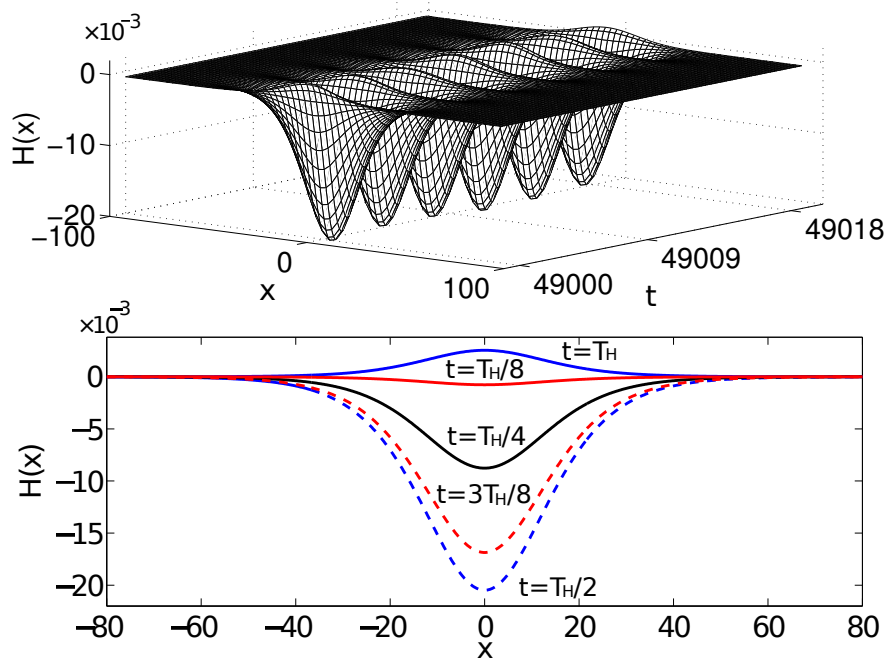
Στη συνέχεια περνάμε στην αριθμητική μελέτη της φωτεινής σολιτονικής λύσης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.20) και (3.21). Για να αποκτήσουμε μία καλύτερη εποπτεία της τη σχεδιάζουμε. Η αριθμητική μελέτη της προσεγγ-



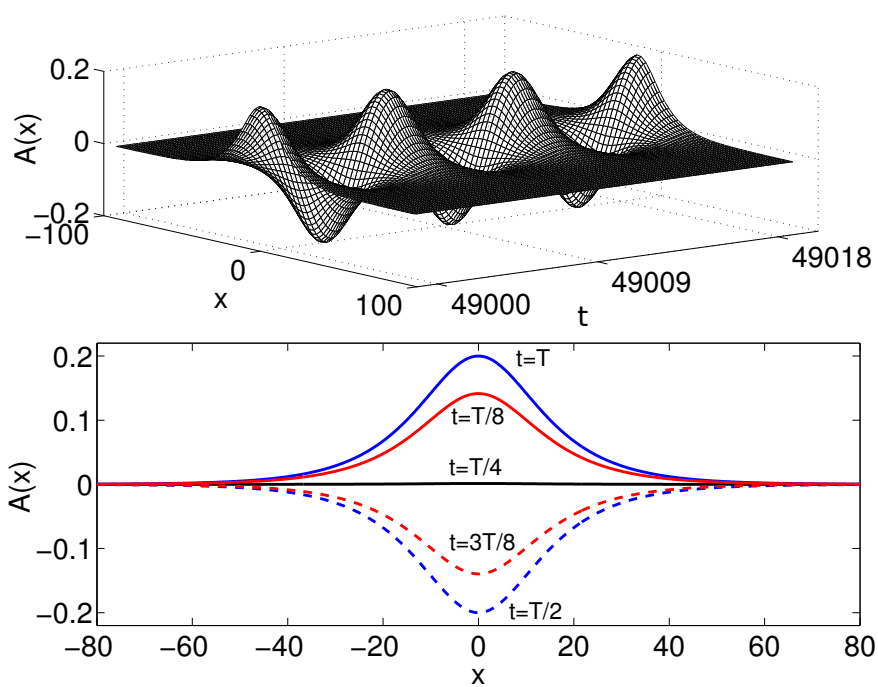
Σχήμα 3.5: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x,t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου q ίση με $q = 1.5$.

γιστικής λύσης του φωτεινού σολιτονίου μας δείχνει πως αυτή επαληθεύει το πλήρες σύστημα (2.19) καθώς περνά το τεστ της αριθμητικής επαλήθευσης[6]. Συνεπώς η προτεινόμενη λύση του φωτεινού σολιτονίου αποτελεί λύση και του πλήρους προβλήματος (2.19). Επειδή η μορφή των πεδίων διατηρεί τη μορφή της λύσης του φωτεινού σολιτονίου τα γραφήματα που ακολουθούν σχεδιάστηκαν σε (αδιάστατους) χρόνους κοντά στο τέλος της προσομοίωσης. Όπως φαίνεται από τη σχέση (3.2) το σύστημά μας επιδέχεται φωτεινές σολιτονικές λύσεις σε δύο περιοχές των τιμών της παραμέτρου q . Γι' αυτό στα σχήματα 3.5 και 3.6 σχεδιάζουμε το φωτεινό σολιτόνιο στη τιμή $q = 1.5$ ενώ στα σχήματα 3.7 και 3.8 σχεδιάζουμε το φωτεινό σολιτόνιο στη τιμή $q = 2.5$. Και στις δύο περιπτώσεις είναι $\epsilon = 0.1$. Σε αυτά τα γραφήματα εκτός από τη διπλάσια συχνότητα του πεδίου Higgs του προτύπου είναι εμφανής και η εξάρτηση της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής του από τη τιμή της παραμέτρου q .

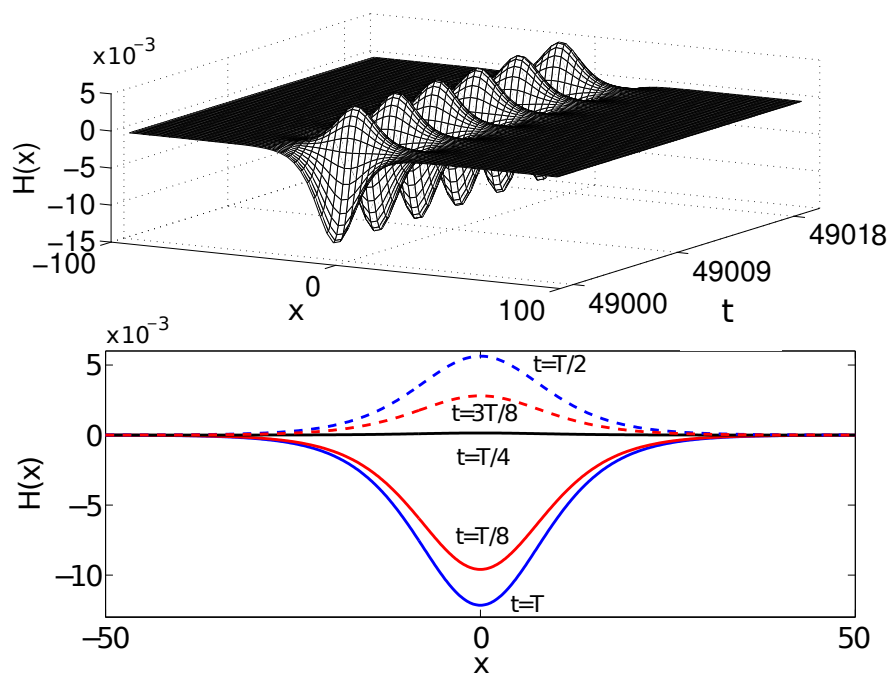
Την επαλήθευση της λύσης του φωτεινού σολιτονίου θα τη παρακολουθήσουμε με τον ίδιο τρόπο που παρατηρήσαμε τη καταστροφή του σκοτεινού



Σχήμα 3.6: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$.



Σχήμα 3.7: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x,t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 2.5$.



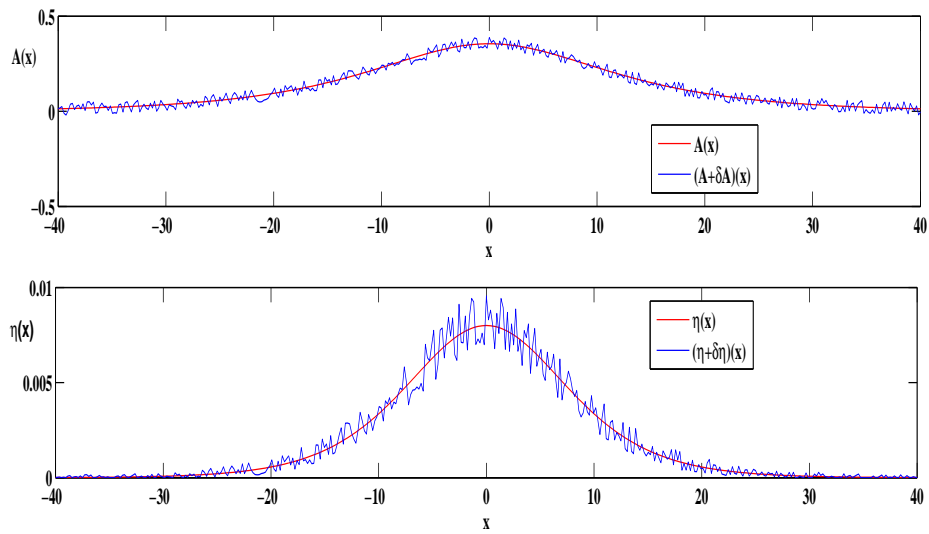
Σχήμα 3.8: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμή της παραμέτρου $q = 2.5$.

σολιτονίου, δηλαδή μέσω της Χαμιλτονιανής πυκνότητας. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων μας για τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.10. Στο επάνω γράφημα παρατηρούμε πως η ενέργεια του σολιτονίου παραμένει χωρικά εντοπισμένη καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης. Η διαφορά με την ακτινοβολία ενέργειας προς τα έξω από το σκοτεινό σολιτόνιο είναι εμφανής.

Στο μεσαίο γράφημα παρατηρούμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα του φωτεινού σολιτονίου κατά τη μελέτη γραμμικής ευστάθειάς του. Η αριθμητική μελέτη ευστάθειας γίνεται στο πλήρες σύστημα εξισώσεων κίνησης του προτύπου (2.19). Η μελέτη αυτή γίνεται εφαρμόζοντας μία μικρή διαταραχή στην αρχική συνθήκη της λύσης του φωτεινού σολιτονίου. Η διαταραχή που εφαρμόσαμε φαίνεται στο σχήμα 3.11 για το καθένα από τα δύο πεδία. Η διαταραχή αυτή προκύπτει από γεννήτρια τυχαίων αριθμών κανονικοποιημένους με τέτοιους συντελεστές ώστε η μέγιστη απόλυτη μεταβολή των πεδίων να μη ξεπερνάει το 10% του μέγιστου πλάτους της λύσης του φωτεινού σολιτονίου. Επιστρέφοντας στη Χαμιλτονιανή πυκνότητα του φωτεινού σολιτονίου κατά την αριθμητική μελέτη ευστάθειάς του παρατηρούμε πως αυτή διατηρεί όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που είχε και στην αδιατάρακτη περίπτωση. Δηλαδή διατηρείται και η μορφή της και ο χωρικός εντοπισμός της ενέργειας. Ακόμα παρατηρούμε πως η εισαγωγή του θορύβου, που προκαλεί αύξηση της ολικής ενέργειας του συστήματος, έχει εισάγει ενέργεια και σε περιοχές που δεν έχει ενέργεια το φωτεινό σολιτόνιο. Αυτή η επιπλέον ενέργεια δε διαχέεται αλλά και δεν εξαφανίζεται, πράγμα που οφείλεται στο Χαμιλτονιανό χαρακτήρα του συστήματος.

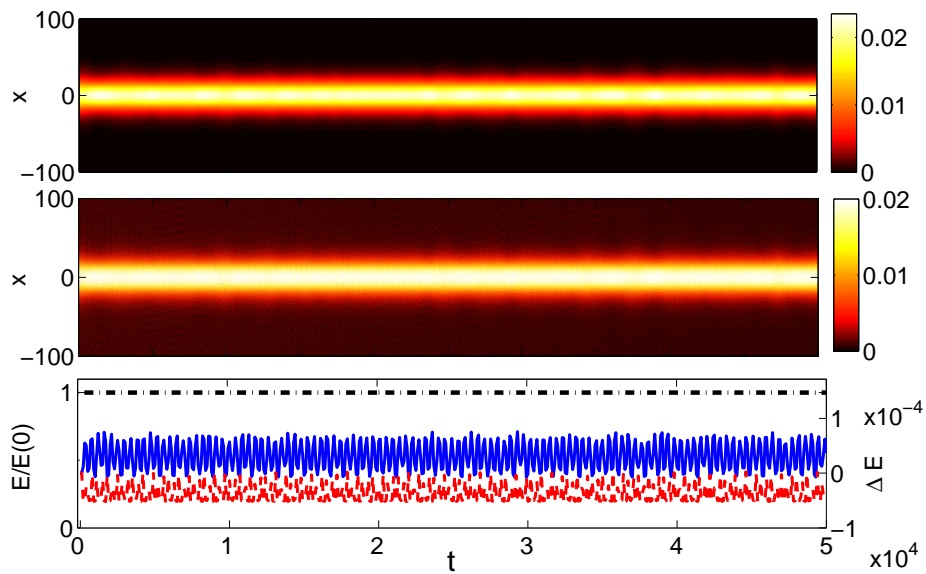
Έχουμε αφήσει το κάτω γράφημα του σχήματος 3.10. Σε αυτό σχεδιάσαμε την εξάρτηση της ολικής ενέργειας ως προς το χρόνο κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Αξίζει να σημειωθεί πως οι αρχικές ενέργειες δεν είναι ίδιες για τις δύο τιμές της παραμέτρου q . Απλά κάθε μία από τις δύο ενέργειες κανονικοποιείται χωριστά ως προς την αρχική της τιμή. Όπως και στη περίπτωση του σκοτεινού σολιτονίου παρατηρούμε και εδώ πως κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης η ολική ενέργεια υπόκειται σε κάποιες πολύ μικρές ταλαντώσεις οι οποίες οφείλονται στον αριθμητικό χαρακτήρα των δεδομένων.

Κλείνοντας τη μελέτη του αριθμητικού σολιτονίου θα αναφερθούμε σε ένα ακόμα χαρακτηριστικό του. Το ότι αποτελεί λύση μόνο για τις τιμές του q στη περιοχή τιμών (3.2) αλλά όχι στη περιοχή (3.1). Αυτό φαίνεται προφανές δεδομένων των επιχειρημάτων με βάση τα οποία καταλήξαμε στη φωτεινή σολιτονική λύση. Ας μη λησμονούμε όμως ότι αυτά προέρχονται από ένα διαταραχτικό ανάπτυγμα. Από το πλήρες σύστημα (2.19) δεν έχουμε κανένα λόγο να περιμένουμε αυτή την εξάρτηση της εστιάζουσας και αποεστιάζουσας συμπεριφοράς σε σχέση με τις τιμές της παραμέτρου q . Η παρουσία αυτής της εξάρτησης στις αριθμητικές προσομοιώσεις μας αποτελεί επαλήθευση της ισχύος του διαταραχτικού αναπτύγματος της θεωρίας των πολλαπλών κλιμάκων. Γραφικά η καταστροφή του φωτεινού σολιτονίου φαίνεται στο σχήμα 3.11. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα αυτή η καταστροφή συμβαίνει αρκετά γρήγορα, ξεκινά από αδιάστατο χρόνο 50 περίπου, δηλαδή ξεκινά πιο γρήγορα και από τη

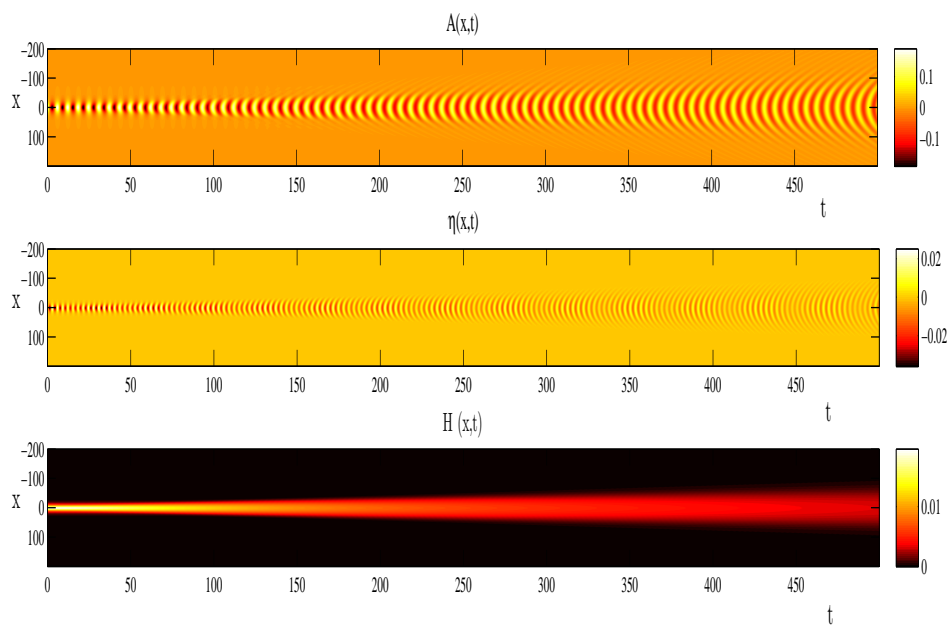


Σχήμα 3.9: Επάνω: Αρχική συνθήκη του φωτεινού σολιτονίου για το πεδίο βαθμίδας χωρίς θόρυβο (κόκκινη γραμμή) και με θόρυβο (μπλε γραμμή). Κάτω: Αρχική συνθήκη του φωτεινού σολιτονίου για το πεδίο Higgs χωρίς θόρυβο (κόκκινη γραμμή) και με θόρυβο (μπλε γραμμή).

καταστροφή του σκοτεινού σολιτονίου που είδαμε παραπάνω.



Σχήμα 3.10: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας $\mathcal{H}(x, t)$ για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης της Χαμιλτονιανής Πυκνότητας $\mathcal{H}(x, t)$ για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$ αλλά με εισαγωγή θορύβου, με πλάτος 10% το πλάτους του σολιτονίου, επάνω στη λύση του σολιτονίου Κάτω: Α) Ολική Ενέργεια κανονικοποιημένη ως προς την αρχική της τιμή. Διακεκομμένη γραμμή για τιμή της παραμέτρου $q = 1.5$ και εστιγμένη γραμμή για τιμή της παραμέτρου $q = 2.5$. Β) Γράφημα της διαφοράς ενέργειας, ΔE , από την αρχική τιμή. Μπλε (μεσαία) γραμμή για $q = 1.5$ και κόκκινη διακεκομμένη (κάτω) γραμμή για $q = 2.5$.



Σχήμα 3.11: Γράφημα της καταστροφής ενός φωτεινού σολιτονίου σε τιμή $q = 1.85$ όπου το σύστημα (2.19) εμφανίζει αποεστιάζουσα συμπεριφορά. Από πάνω προς τα κάτω βλέπουμε γραφήματα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$, του πεδίου Higgs, $\eta(x, t)$, και της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$, του προτύπου.

3.2 Λύσεις μη Γραμμικών Επίπεδων Κυμάτων

Μετά τις εντοπισμένες λύσεις προχωράμε στη μελέτη περιοδικών λύσεων οι οποίες εκτείνονται σε όλο το χώρο. Τέτοιες λύσεις υπάρχουν και για την εστιάζουσα και για την αποεστιάζουσα εξίσωση Schrödinger. Πρώτα προχωράμε στη μελέτη των επίπεδων μη γραμμικών κυματικών λύσεων.

Προκειμένου να παράγουμε τα μη γραμμικά κύματα τους προτύπου θα ξεκινήσουμε από την εξίσωση (2.29). Ανεξάρτητα⁴ από τη τιμή της παραμέτρου q η εξίσωση δέχεται μη γραμμικές κυματικές λύσεις της μορφής:

$$f_1(x_1, t_2) = u_0 \exp [i (kx_1 - \omega t_2)] \quad (3.22)$$

οι οποίες υπακούν την ακόλουθη σχέση διασποράς:

$$\omega = \frac{k^2}{2} - (u_0)^2 S \quad (3.23)$$

Ο μη γραμμικός χαρακτήρας αυτής της σχέσης είναι εμφανής.

Έχουμε αναφέρει νωρίτερα πως αναζητάμε λύσεις στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας. Συνεπώς θα θεωρήσουμε πως $k = 0$. Μέσω των εξισώσεων (2.25) και (2.27) η λύση, ως προς τις αδιάστατες μεταβλητές γράφεται:

$$A(x, t) = \epsilon u_0 \cos [(1 + \epsilon^2 \omega) t] \quad (3.24)$$

και

$$\eta(x, t) = -\frac{\epsilon^2 u_0^2}{q^2 - 4} \cos [2 (1 + \epsilon^2 \omega) t] - \frac{2\epsilon^2 u_0^2}{q^2} \quad (3.25)$$

Συνεχίζουμε αφήνοντας τα αδιάστατα πεδία και μεταβλητές, και μέσω των εξισώσεων (2.17) και (2.24), επιστρέφουμε στα φυσικά πεδία και μεταβλητές για τα οποία βρίσκουμε:

$$A(x, t) = \frac{\epsilon u_0}{v} \cos [(1 + \epsilon^2 \omega) gvt] \quad (3.26)$$

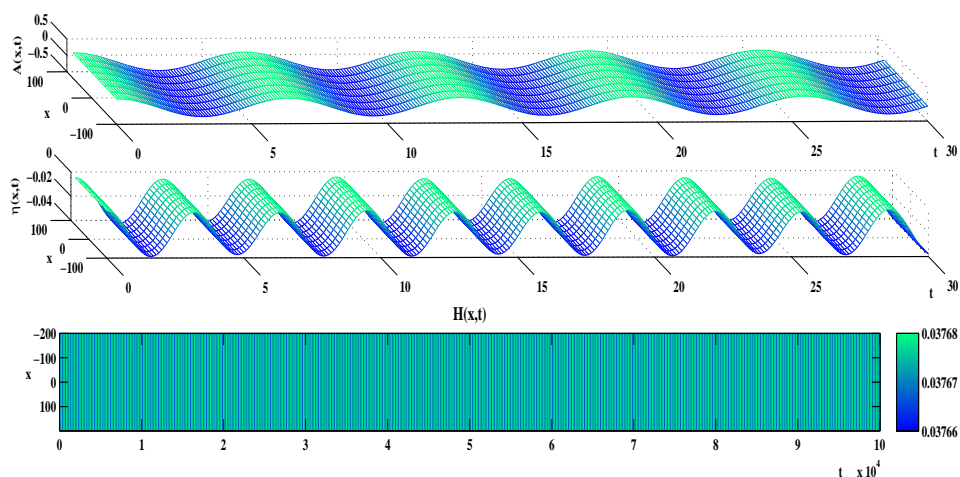
και

$$\eta(x, t) = -\frac{\epsilon^2 u_0^2}{v(q^2 - 4)} \cos [2 (1 + \epsilon^2 \omega) gvt] - \frac{2\epsilon^2 u_0^2}{vq^2} \quad (3.27)$$

Παρατηρούμε πως οι λύσεις αυτές είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες του προσήμου του S , η εξάρτηση από το οποίο βέβαια κρύβεται μέσα στη σχέση διασποράς (3.23), σε αντίθεση με τις σολιτονικές λύσεις οι οποίες έχουν μεγάλη διαφορά μεταξύ τους. Η αριθμητική προσομοίωση μας λέει πως τα μη γραμμικά επίπεδα κύματα αποτελούν λύσεις των εξισώσεων κίνησης του προτύπου μας [6]. Στο σχήμα 3.12 βλέπουμε με περισσότερες λεπτομέρειες αυτή την επαλήθευση. Στα δύο πρώτα σχήματα βλέπουμε τη μορφή που έχουν τα πεδία, όπως αυτή περιγράφεται και από τις εξισώσεις (3.26) και (3.27). Στο κάτω γράφημα βλέπουμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα του κύματος, με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$,

⁴Η οποία είναι παρούσα στην εξίσωση μέσω της εξάρτησης του S από αυτήν (2.28).

που αφέθηκε να εξελιχθεί μέχρι αδιάστατο χρόνο 10^5 . Η πολύ μικρή μεταβολή της (φαίνεται από τις μονάδες δεξιά του γραφήματος) που βλέπουμε στο γράφημα οφείλεται στη διακριτοποίηση που αναγκαστικά κάνουμε προκειμένου να εκτελέσουμε αριθμητικούς υπολογισμούς. Είναι δηλαδή ένα αριθμητικό φαινόμενο και όχι μια συμπεριφορά του συστήματός μας. Πέρα από αυτή όμως βλέπουμε πως η Χαμιλτονιανή πυκνότητα του επίπεδου κύματος παραμένει σταθερή χωρικά και χρονικά εσαεί, δηλαδή τα πεδία διατηρούν τη μορφή της μη γραμμικής επίπεδης κυματικής λύσης.



Σχήμα 3.12: Γράφημα μη γραμμικού επίπεδου κύματος. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$ με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$ με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$, επίπεδου κύματος μέχρι αδιάστατο χρόνο 10^5 με τιμή παραμέτρου $q = 1.4$.

Τα ίδια αποτελέσματα παίρνουμε και για άλλες τιμές της παραμέτρου q από την εστιάζουσα και αποεστιάζουσα περιοχή με γραφήματα ανάλογα αυτών του σχήματος 3.12 γι αυτό και δε τα σχεδιάζουμε.

3.2.1 Αναλυτική Μελέτη Ευστάθειας Μη γραμμικών Κυματικών λύσεων.

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε πως τα μη γραμμικά επίπεδα κύματα αποτελούν λύσεις των εξισώσεων κίνησης (2.19) του προτύπου μας. Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την ευστάθειά τους. Αυτό θα γίνει πρώτα μέσω της μελέτης γραμμικής ευστάθειας και μετά αριθμητικά [6, 12, 14]. Η μελέτη γραμμικής ευστάθειας γίνεται στο πλαίσιο της εξίσωσης NLS (2.29) από την οποία προέρχονται οι προσεγγιστικές λύσεις. Για να είναι ευσταθείς στο πλήρες σύστημα πρέπει να είναι ευσταθείς και στο σύστημα από το οποίο προέρχονται. Ξεκινάμε λοιπόν εφαρμόζοντας την ακόλουθη διαταραχή:

$$f_1 \rightarrow f'_1 = f_1 + \delta f_1 \quad (3.28)$$

Εισάγοντας τη «διαταραγμένη» f'_1 μέσα στην εξίσωση (2.29) βρίσκουμε:

$$i\partial_{t_2}\delta f_1 + \frac{1}{2}\partial_{x_1}^2\delta f_1 + S f_1^2\delta f_1^* + 2S|f_1|^2\delta f_1 = 0 \quad (3.29)$$

Θέτουμε $\delta f_1 = Re^{-i(\omega t_2 - kx_1)}$, με R εν γένει μιγαδικό, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$i\partial_{t_2}R + ik\partial_{x_1}R + \frac{1}{2}\partial_{x_1}^2R + S(R + R^*)u_0^2 = 0 \quad (3.30)$$

Καθότι το R είναι η μιγαδική συνάρτηση που εκφράζει τη διαταραχή, θέτουμε $R = a + ib$ για το πραγματικό και φανταστικό μέρος της. Εισάγοντάς τα στη προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$i(\partial_{t_2}a + i\partial_{t_2}b + k\partial_{x_1}a + ik\partial_{t_2}b) + \frac{1}{2}\partial_{x_1}^2a + \frac{i}{2}\partial_{x_1}^2b + 2Sau_0^2 = 0$$

Χωρίζοντας την παραπάνω εξίσωση σε πραγματικό και φανταστικό κομμάτι προκύπτουν οι σχέσεις:

$$-\partial_{t_2}b - k\partial_{x_1}b + \frac{1}{2}\partial_{x_1}^2a + 2aSu_0^2 = 0 \quad (3.31)$$

$$i\partial_{t_2}a + \frac{1}{2}\partial_{x_1}^2b + k\partial_{x_1}a = 0 \quad (3.32)$$

Τα a και b εκφράζουν τη διαταραχή που εφαρμόζουμε. Επιλέγουμε λοιπόν να τα αναλύσουμε ως στοιχεία Fourier. Δεδομένου ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα στοιχείων Fourier γνωρίζουμε πως μέσω των στοιχείων Fourier παίρνουμε πληροφορίες για κάθε δυνατή διαταραχή. Συνεπώς γράφουμε:

$$a = a_0e^{-i(\Omega t_2 - Qx_1)} + \text{c.c} \quad (3.33)$$

$$b = b_0e^{-i(\Omega t_2 - Qx_1)} + \text{c.c} \quad (3.34)$$

Με αυτή τη γραφή το σύστημα εξισώσεων (3.33) και (3.34) γίνεται:

$$\left(-\frac{Q^2}{2} + 2Su_0^2\right)a_0 + i(\Omega - kQ)b_0 = 0 \quad (3.35)$$

$$-i(\Omega - kQ)a_0 - \frac{Q^2}{2}b_0 = 0 \quad (3.36)$$

Το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων έχει ως λύση τη τετριμμένη λύση $(a_0, b_0) = (0, 0)$. Αυτό όμως σημαίνει πως η διαταραχή μηδενίζεται, πράγμα που δε μας δίνει καμία πληροφορία για την ευστάθεια της λύσης που διαταράσσουμε. Αυτή η πληροφορία προκύπτει από τη χρονική εξέλιξη της διαταραχής. Συνεπώς απαιτούμε το σύστημα να έχει μη τετριμμένες λύσεις, πράγμα που οδηγεί στην απαίτηση για μηδενισμό της ορίζουσάς του. Άρα⁵:

$$\det \begin{bmatrix} \left(-\frac{Q^2}{2} + 2Su_0^2\right) & i(\Omega - kQ) \\ -i(\Omega - kQ) & -\frac{Q^2}{2} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας και η απαίτηση για μηδενισμό της οδηγεί στην σχέση:

$$(\Omega - kQ)^2 = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{Q^2}{2} - 2Su_0^2\right) \quad (3.38)$$

Από τις σχέσεις (3.33) και (3.34) βλέπουμε πως το Ω είναι η συχνότητα της διαταραχής. Εάν αυτή, λόγω της σχέσης (3.39), πάρει μιγαδικές τιμές τότε η λύση την οποία διατάραξε είναι ασταθής. Συνεπώς για να πούμε μία κυματική λύση ευσταθή πρέπει το Ω να είναι πραγματικός αριθμός για κάθε τιμή του Q . Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.39) πρέπει να είναι πάντα θετική. Κάτι τέτοιο όμως συμβαίνει μόνο αν

$$Q^2 > 4Su_0^2 \quad (3.39)$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η αναζήτηση της ευστάθειας ή μη των λύσεων μας να σχετίζεται με το όρο μη γραμμικότητας της NLS (2.29).

Βλέπουμε πως στην αποεστιάζουσα περιοχή (3.1) όπου $S < 0$ τα μη γραμμικά επίπεδα κύματα είναι ευσταθή κάτω από οποιαδήποτε διαταραχή. Αντίθετα στην εστιάζουσα περιοχή (3.1) υπάρχουν περιοχές συχνοτήτων η συχνότητα Ω γίνεται μιγαδική και η διαταραχή καθίσταται ασταθής.

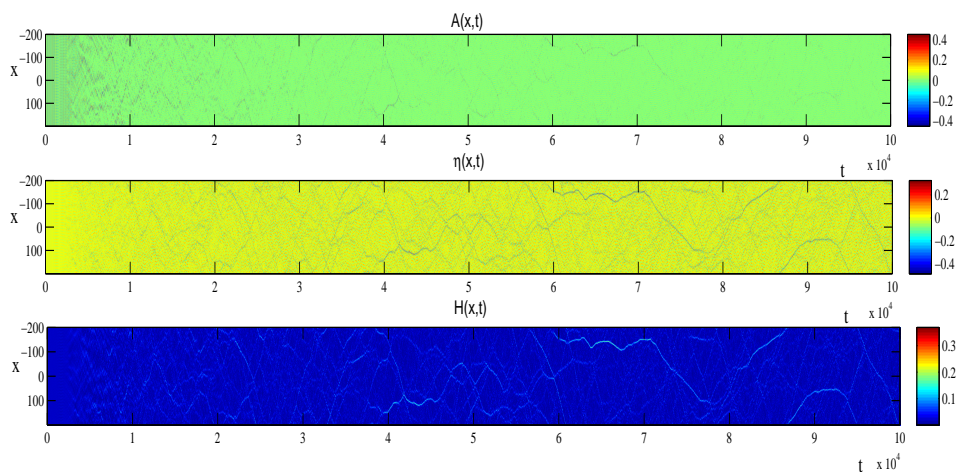
⁵Μία προσεκτική παρατήρηση της εξίσωσης (3.37) προκαλεί ερωτηματικά λόγω της εμφάνισης της φανταστικής μονάδας παρ' όλο που τα a_0 και b_0 είναι πραγματικά. Αυτό συμβαίνει γιατί στις πράξεις δε χρησιμοποιούμε το συζυγές μιγαδικό εκθετικό που γράφεται στους τύπους (3.33) και (3.34). Παρ' όλο που αυτό φαντάζει λάθος από τη σκοπιά της μιγαδικής ανάλυσης εν τούτοις το αποτέλεσμα μας είναι σωστό και με λιγότερες πράξεις. Πιο σωστά θα μπορούσαμε να είχαμε υποθέσει[12] για τη μορφή της διαταραχής το:

$$R = r_1 \exp[-i(\Omega t_2 - Qx_1)] + r_2 \exp[i(\Omega t_2 - Qx_1)]$$

Αυτή η διαταραχή δίνει τα ίδια αποτελέσματα για τη σχέση διασποράς μεταξύ των Ω και Q με το κόστος, όπως αναφέραμε, επιπλέον αλγεβρικών πράξεων.

3.2.2 Αριθμητική Μελέτη Ευστάθειας Μη Γραμμικών Κυματικών Λύσεων στην Αποεστιάζουσα Περιοχή.

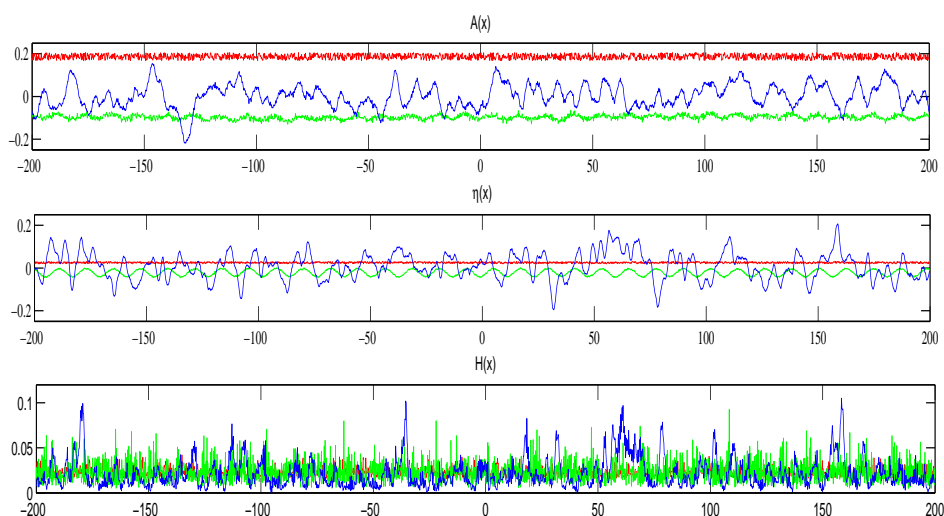
Έχοντας εξετάσει αναλυτικά την ευστάθεια προχωράμε στη μελέτη της αριθμητικά. Πρώτα μελετάμε το σύστημα σε τιμές της παραμέτρου g στην αποεστιάζουσα περιοχή (3.1). Όπως αναφέραμε σε αυτή τα επίπεδα μη γραμμικά κύματα βρέθηκαν ευσταθή. Αυτή όμως η ευστάθεια βρέθηκε στα πλαίσια της προσεγγιστικής εξίσωσης από την οποία προτείνουμε λύσεις για το πλήρες σύστημα. Στο πλήρες σύστημα η αριθμητική μελέτη μας λέει πως τα μη γραμμικά επίπεδα κύματα είναι ασταθή. Αυτό φαίνεται αναλυτικά στο σχήμα 3.13 που είναι το αποτέλεσμα αριθμητικής προσομοίωσης με τιμή παραμέτρου $g = 1.85$ και αρχική συνθήκη το επίπεδο κύμα διαταραγμένο με θόρυβο που προκύπτει από γεννήτρια τυχαίων αριθμών κανονικοποιημένο έτσι ώστε το μέγιστο πλάτος της διαταραχής να είναι το 10% του πλάτους της αρχικής συνθήκης.



Σχήμα 3.13: Γράφημα Μελέτης Ευστάθειας μη γραμμικού επίπεδου κύματος μέχρι αδιάστατο χρόνο 10^5 με τιμή παραμέτρου $g = 1.85$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$.

Το μειονέκτημα του σχήματος 3.13 για να γίνει εύκολα κατανοητό είναι ότι περιέχει πολλές πληροφορίες συμπυκνωμένες. Γι' αυτό φτιάχνουμε το σχήμα 3.14 όπου θα δούμε κάποια πράγματα πιο αναλυτικά. Σε αυτό σχεδιάζουμε στιγμιότυπα των πεδίων και της Χαμιλτονιανής τους πυκνότητας. Στο πάνω γράφημα σχεδιάζουμε το πεδίο βαθμίδας, στο μεσαίο το πεδίο Higgs και στο κάτω τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα του προτύπου. Με κόκκινη γραμμή βλέπουμε την αρχική συνθήκη που χρησιμοποιήσαμε για τα πεδία. Με πράσινη γραμμή βλέπουμε την εξέλιξη των πεδίων (και τη προκύπτουσα Χαμιλτονιανή πυκνότητα) σε αδιάστατο χρόνο $t = 1100$. Τέλος με μπλε γραμμή βλέπουμε την εξέλιξη

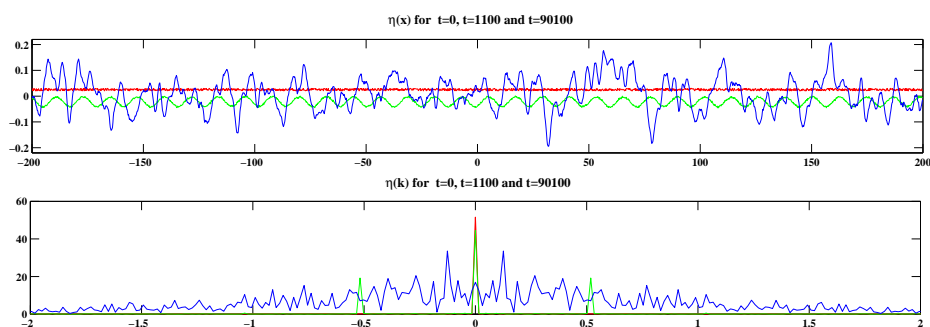
των πεδίων (και τη προκύπτουσα Χαμιλτονιανή πυκνότητα) σε αδιάστατο χρόνο $t = 90100$. Παρατηρούμε πως πρώτα αρχίζει να διαφοροποιείται σημαντικά η μορφή του πεδίου Higgs του προτύπου. Αυτό δε μας εκπλήσσει γιατί από τις εξισώσεις για το πεδίο $\eta(x, t)$ έχουμε δει πως αυτό ταλαντώνεται με συχνότητα διπλάσια από αυτή του πεδίου $A(x, t)$ συνεπώς εξελίσσεται πιο γρήγορα. Στα γραφήματα που αντιστοιχούν σε αδιάστατο χρόνο $t = 90100$ βλέπουμε πως η μορφή των πεδίων είναι «χαοτική» και δεν έχει καμία σχέση με την αρχική συνθήκη.



Σχήμα 3.14: Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$. Κόκκινες γραμμές για $t = 0$. Πράσινες γραμμές για $t = 1100$. Μπλε γραμμές για $t = 90100$.

Τα στιγμιότυπα του πεδίου Higgs του προτύπου του σχήματος 3.14 περιέχουν ακόμα περισσότερες πληροφορίες για το πως καταστράφηκε η λύση του μη γραμμικού επίπεδου κύματος. Η μορφή του $\eta(x, 1100)$ μας τονίζει ότι το πεδίο κυριαρχείται από μία συχνότητα. Καταφεύγουμε στη μελέτη μέσω του μετασχηματισμού Fourier για να δούμε εάν όντως συμβαίνει κάτι τέτοιο. Γι' αυτό επεξεργαζόμαστε τα δεδομένα μας κατασκευάζοντας το σχήμα 3.15. Στη χρονική στιγμή $t = 0$ βλέπουμε πως το πεδίο $\eta(k)$ κυριαρχείται από τη μηδενική συχνότητα, πράγμα λογικό αφού η μέση τιμή του είναι μη μηδενική. Αυτό που δε φαίνεται καθαρά στο γράφημα είναι η παρουσία ενός, πρακτικά συνεχούς, φάσματος των υπόλοιπων συχνοτήτων λόγω του πολύ μικρού πλάτους τους. Το πολύ μικρό πλάτος οφείλεται εν μέρει στη κανονικοποίησή μας και εν μέρει στο ότι η ενέργεια του θορύβου μοιράζεται σε πάρα πολλές συχνότητες οπότε η ενέργεια που αντιστοιχεί σε κάθε μία συχνότητα είναι πολύ μικρή.

Το ότι το πολύ μικρό αυτό πλάτος είναι περίπου ίσο για όλες τις συχνότητες πλην της μηδενικής οφείλεται στη προέλευση του θορύβου από γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Προχωρώντας τώρα στη χρονική στιγμή $t = 1100$ βλέπουμε πως έχει εμφανιστεί εκτός από τη μηδενική συχνότητα άλλη μία⁶ ενώ οι υπόλοιπες συχνότητες του θορύβου παραμένουν περίπου ως έχουν. Βλέπουμε δηλαδή πως το σύστημα εξισώσεων (2.19) έχει μια προτιμητέα συχνότητα όταν «απομακρύνεται» από τη λύση του μη γραμμικού επίπεδου κύματος. Αφήνοντας το σύστημα να εξελιχθεί παραπέρα κοιτάμε το φάσμα συχνοτήτων τη χρονική στιγμή $t = 90100$. Βλέπουμε πως έχουν γεννηθεί ακόμα περισσότερες συχνότητες και πως η συχνότητα που προτίμησε το σύστημα όταν καταστρεφόταν η κυματική λύση δεν κυριαρχεί πια στο φάσμα συχνοτήτων. Πλέον το σύστημα μας εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά.



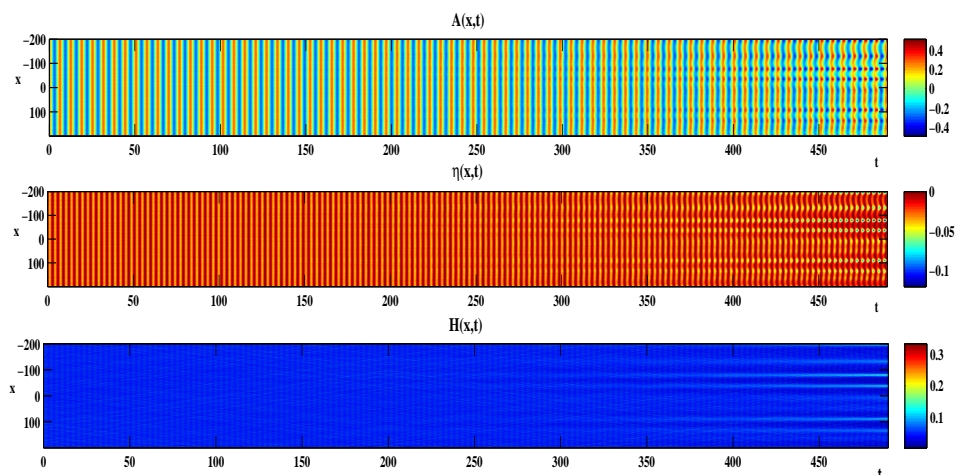
Σχήμα 3.15: Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του μετασχηματισμένου κατά Fourier πεδίου $\eta(k)$. Κόκκινες γραμμές για $t = 0$. Πράσινες γραμμές για $t = 1100$. Μπλε γραμμές για $t = 90100$.

Ένα άλλο σημείο που αξίζει να τονίσουμε είναι πως παρ' όλο που το σύστημα μας έχει πλέον εισέλθει σε χαοτική «κατάσταση» η παραπέρα εξέλιξή του μας δείχνει πως αυτό δεν απειρίζεται. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα αυτή είναι μία πολύ διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση συμπεριφορά του συστήματος όταν η τιμή της παραμέτρου q είναι τέτοια ώστε αυτό να βρίσκεται στην εστιάζουσα περιοχή (3.2).

⁶Ο λόγος που μιλάμε για μία συχνότητα ενώ το σχήμα μας δείχνει πως έχουν εμφανιστεί δύο συζυγείς μεταξύ τους συχνότητες οφείλεται ακριβώς στο ότι αυτές οι δύο συχνότητες είναι συζυγείς μεταξύ τους. Αυτό είναι κάτι που περιμέναμε. Όπως βλέπουμε από την εξίσωση (3.30) αυτό το χαρακτηριστικό είναι εγγενές της διαταρακτικής συμπεριφοράς του συστήματος.

3.2.3 Αριθμητική Μελέτη Ευστάθειας Μη Γραμμικών Κυματικών Λύσεων στην Εστιάζουσα Περιοχή.

Η αριθμητική μελέτη ευστάθειας μη γραμμικών κυματικών λύσεων στην εστιάζουσα περιοχή θα γίνει με τον ίδιο τρόπο που έγινε και στην αποεστιάζουσα περιοχή. Θα θεωρήσουμε δηλαδή αρχική συνθήκη στάσιμου επίπεδου κύματος και θα τη διαταράξουμε. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε όμως είναι πολύ διαφορετικά. Ας δούμε πρώτα τα αποτελέσματα της προσομοίωσης μας. Αυτά φαίνονται στο σχήμα 3.16.

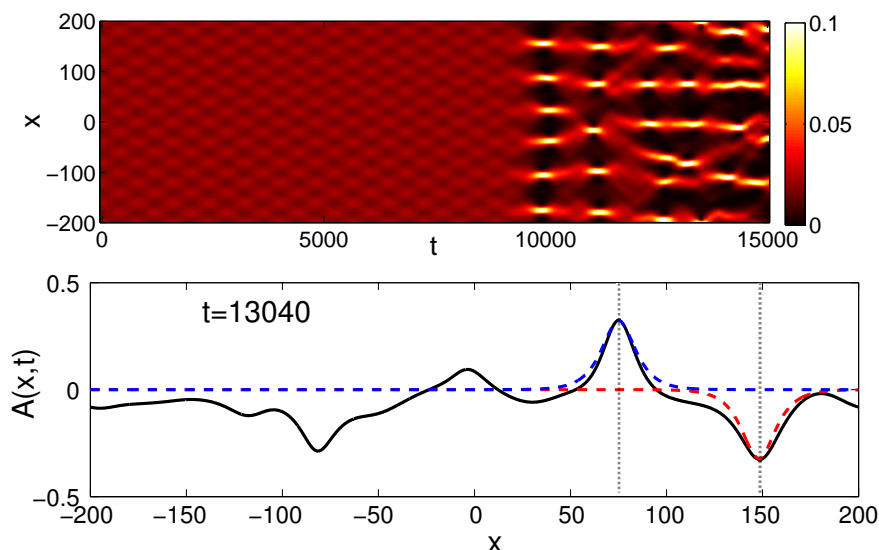


Σχήμα 3.16: Γράφημα Μελέτης Ευστάθειας μη γραμμικού επίπεδου κύματος μέχρι αδιάστατο χρόνο 490 με τιμή παραμέτρου $g = 1.4$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$.

Παρατηρώντας το σχήμα βλέπουμε πως η προσομοίωση τελειώνει πολύ γρήγορα, σε αδιάστατο χρόνο μόλις 490. Αυτό οφείλεται στο ότι λίγο πιο μετά η αριθμητική τιμή των πεδίων αποκλίνει. Ο απειρισμός των πεδίων όταν το σύστημα εκδηλώσει «χαοτική» συμπεριφορά είναι κάτι που συμβαίνει μόνο στην εστιάζουσα περιοχή. Όπως είδαμε στην αποεστιάζουσα περιοχή το σύστημα είχε μια «χαοτική» συμπεριφορά αλλά οι τιμές των πεδίων του παρέμεναν φραγμένες. Αυτή όμως δεν είναι η μόνη διαφορά. Παρατηρώντας τα γραφήματα βλέπουμε πως με τη πάροδο του χρόνου εμφανίζονται κάποιες χωρικές συγκεντρώσεις ενέργειας που όλο και αυξάνονται. Αναζητώντας πληροφορίες για το φαινόμενο βρίσκουμε πως αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως αστάθεια διαμόρφωσης, [modulation instability]. Κατά την αστάθεια διαμόρφωσης ένα περιοδικό σήμα μετατρέπεται σε παλμούς λόγω της αστάθειας του ως προς συγκεκριμένες συχνότητες. Υπό προϋποθέσεις οι παλμοί αυτοί ονομάζονται ταλαντώνια, (oscillons), και τα χαρακτηριστικά τους είναι πως αποτελούν έμ-

μαζες⁷, μακρόβιες⁸ και μοναχικές κυματικές⁹ λύσεις. Το φαινόμενο έχει παρατηρηθεί και μελετηθεί σε πλήθος φυσικών συστημάτων όπως στη μη γραμμική οπτική, στη φυσική πλάσματος, στη μηχανική των ρευστών και στην οπτική νανοσωματιδίων, ακόμα και τη κοσμολογία[12, 15, 16, 17].

Τυπικά το φαινόμενο της αστάθειας διαμόρφωσης μελετάται όταν διαταράξουμε ένα περιοδικό σήμα με μία συχνότητα ως προς την οποία είναι ασταθές. Τότε παρατηρούμε πως η περιοδικότητα του σήματος καταστρέφεται και εμφανίζονται αυθόρμητως ταλαντώνια. Στο σύστημα μας αυτή η συμπεριφορά μελετήθηκε και παρατηρήθηκε πως όντως εμφανίζονται αυθόρμητα ταλαντώνια. Έχουν σταθερό λόγο πλάτους προς εύρος και διατηρούνται για αρκετές ταλαντώσεις. Τα αποτελέσματα της σχετικής προσομοίωσης φαίνονται στο σχήμα 3.17. Σε αυτό παρατηρούμε πως η μονοχρωματική μας διαταραχή μετά από



Σχήμα 3.17: Επάνω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(t)$, με παράμετρο $g = 1.5$ και αρχική συνθήκη με διαταραχή σε ασταθή συχνότητα $Q = 0.1$. Κάτω: Στιγμιότυπο του πεδίου βαθμίδας $A(x)$, (μαύρη γραμμή), σε αδιάστατο χρόνο $t = 13040$ όπου η αστάθεια έχει κυριαρχήσει. Οι διακεκομμένες (μπλε και κόκκινη) γραμμές αντιστοιχούν σε λύσεις σαν της εξίσωσης (3.20), προσαρμοσμένες ως προς το μέγιστο πλάτος στην κορυφή των σολιτονίων (όπως φαίνεται από τις εστιγμένες γκρι γραμμές σε $x = 75$ και $x = 150$).

τη πάροδο αρκετού χρόνου θα φέρει το σύστημά μας σε συνθήκες αστάθειας

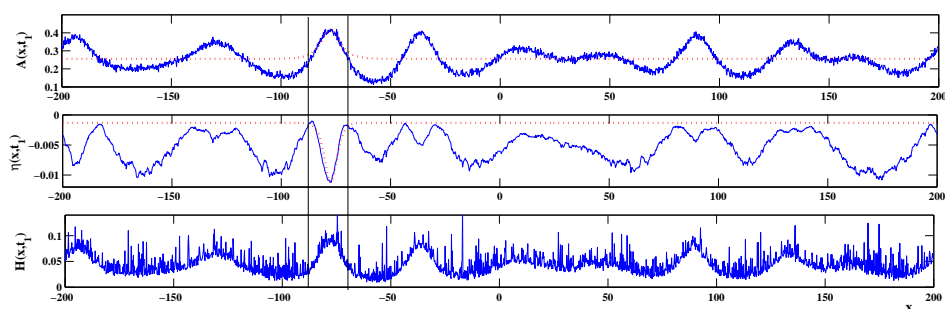
⁷Έμμαζες εδώ σημαίνει πως προέρχονται από εξίσωση κίνησης που έχει εν γένει τη μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon. Δηλαδή είναι δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο και έχει όρο μάζας όπως η Klein-Gordon.

⁸Μακρόβιες σημαίνει πως επιβιώνουν για αρκετές χιλιάδες ταλαντώσεις του πεδίου τους.

⁹Όπως αναφέραμε και νωρίτερα αυτό σημαίνει πως το ταλαντώσιο διατηρεί τη μορφή του καθώς διαδίδεται στο χώρο.

διαμόρφωσης και εκεί δημιουργούνται αυθόρμητα εντοπισμένοι παλμοί με χαρακτηριστικά ταλαντωτών. Η μορφή αυτών συγκρίνεται με τη μορφή της φωτεινής σολιτονικής λύσης για να καταδειχθούν οι ομοιότητές τους.

Με όσα αναφέραμε για την αστάθεια διαμόρφωσης επιστρέφουμε στην αριθμητική προσομοίωση του σχήματος 3.16. Μελετάμε ξανά τις συγκεντρώσεις ενέργειας που μας οδήγησαν στη μελέτη του φαινομένου της αστάθειας διαμόρφωσης. Παρατηρώντας τις βλέπουμε πως τα αυθόρμητα ταλαντώνα που δημιουργούνται έχουν την ίδια κυματομορφή με τη φωτεινή σολιτονική λύση που αναφέραμε νωρίτερα. Ενδεικτικά για την αδιάστατη χρονική στιγμή $t = 464,1$ στο σχήμα 3.18 σχεδιάζουμε τα πεδία, τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα που τους αντιστοιχεί και τη μορφή της φωτεινής σολιτονικής λύσης για παραμέτρους αντίστοιχες με αυτές των αυθόρμητα εμφανιζόμενων ταλαντωτών. Η ταύτισή τους είναι εντυπωσιακή!



Σχήμα 3.18: Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$. Κόκκινες Εστιγμένες γραμμές: Φωτεινή Σολιτονική Λύση. Με τις δύο μαύρες κάθετες γραμμές περιορίζουμε τη περιοχή όπου γεννήθηκε αυθόρμητα το ταλαντώνα. Τιμές παραμέτρων $g = 1.4$ και $t_1 = 464.1$.

3.3 Ελλειπτικές περιοδικές Λύσεις

Η δεύτερη κατηγορία μη εντοπισμένων λύσεων του προτύπου που θα μελετήσουμε είναι οι ελλειπτικές περιοδικές λύσεις. Προκειμένου να βρούμε τις ελλειπτικά περιοδικές κυματικές λύσεις κάνουμε την εξής υπόθεση για τη μορφή της συνάρτησης που αποτελεί λύση της εξίσωσης (2.31):

$$y(x_1, t_2) = \zeta(u) \exp(-i\omega t_2) \quad (3.40)$$

όπου $u = px_1$ και $\omega = \omega(p)$ σχέση διασποράς που μένει να καθοριστεί. Αυτή η μορφή για τη συνάρτηση έχει σαν αποτέλεσμα η χωρική παραγωγή να γίνεται:

$$\partial_{x_1}^2 = p^2 \partial_u^2$$

Ακόμα υποθέτουμε πως η συνάρτηση $\zeta(u)$ είναι πραγματική. Επειδή οι λύσεις που προκύπτουν είναι διαφορετικές ανάλογα με το αν δουλεύουμε στην εστιάζουσα ή στην αποεστιάζουσα περίπτωση θα τις εξετάσουμε χωριστά.

3.3.1 Ελλειπτικές Περιοδικές Λύσεις στην Αποεστιάζουσα Περιοχή

Ξεκινάμε με την αποεστιάζουσα περίπτωση. Στην εξίσωση (3.3) κάνουμε την αντικατάσταση (3.40) και βρίσκουμε τη παρακάτω εξίσωση για τη $\zeta(u)$:

$$\zeta''(u) + \frac{2\omega}{p^2}\zeta - \frac{2}{p^2}\zeta^3 = 0 \quad (3.41)$$

Η παραπάνω εξίσωση, μας θυμίζει μία άλλη εξίσωση, την οποία γνωρίζουμε από τη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi[11], την:

$$y'' + (1 + k^2)y - 2k^2y^3 = 0 \quad (3.42)$$

Προκειμένου οι δύο εξισώσεις να συμπίσουν πρέπει:

$$\begin{aligned} \frac{2}{p^2} &= 2k^2 \\ \frac{2\omega}{p^2} &= 1 + k^2 \end{aligned}$$

πράγμα που οδηγεί στην ακόλουθη σχέση διασποράς:

$$\omega = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \quad (3.43)$$

Όταν ισχύουν τα παραπάνω μία λύση της (3.41) είναι:

$$\zeta(u) = \text{sn}(u, k)$$

Συνεπώς η περιοδική λύση που θα εξετάσουμε είναι η:

$$y(x_1, t_2) = \text{sn}(px_1, k) \exp(-i\omega t_2) \quad (3.44)$$

Πηγαίνοντας στις αρχικές αδιάστατες μεταβλητές μέσω των εξισώσεων (2.25), (2.27) και (2.30) η λύση γράφεται:

$$A(1) = \frac{2}{\sqrt{|S|}} \text{sn}(\epsilon px, k) \cos(1 + \epsilon^2\omega) t \quad (3.45)$$

και

$$\eta(2) = -\frac{2}{q^2} \frac{\text{sn}^2(\epsilon px, k)}{|S|} - \frac{\text{sn}^2(\epsilon px, k)}{(q^2 - 4)|S|} \cos[2(1 + \epsilon^2\omega) t] \quad (3.46)$$

Στη συνέχεια αφήνουμε τα αδιάστατα πεδία και μεταβλητές, μέσω των εξισώσεων (2.17) και (2.24), και επιστρέφουμε στα φυσικά πεδία και μεταβλητές για τα οποία βρίσκουμε:

$$A(x, t) = \frac{2\epsilon}{v\sqrt{|S|}} \text{sn}(\epsilon g v p x, k) \cos[(1 + \epsilon^2\omega) g v t] \quad (3.47)$$

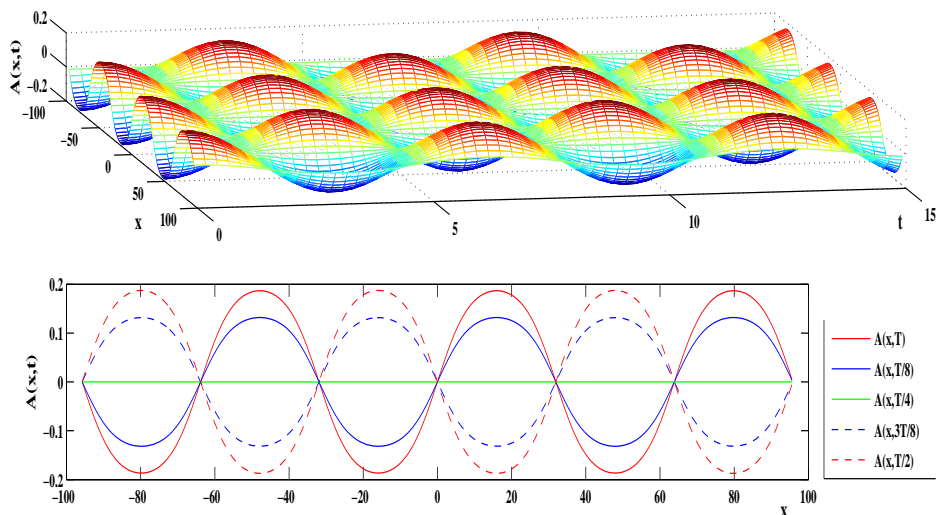
και

$$\eta(x, t) = -\frac{2\epsilon^2 \operatorname{sn}^2(\epsilon g v p x, k)}{v q^2 |S|} - \frac{2\epsilon^2 \operatorname{sn}^2(\epsilon g v p x, k)}{(q^2 - 4) v |S|} \cos [2 (1 + \epsilon^2 \omega) g v t] \quad (3.48)$$

Οι εξισώσεις (3.47) και (3.48) αποτελούν τις προτεινόμενες ελλειπτικές περιοδικές λύσεις για το αβελιανό μοντέλο Higgs σε τιμές του λόγου των μαζών των πεδίων όπου καταλήγουμε στην εξίσωση Schrödinger με αποεστιάζουσα συμπεριφορά.

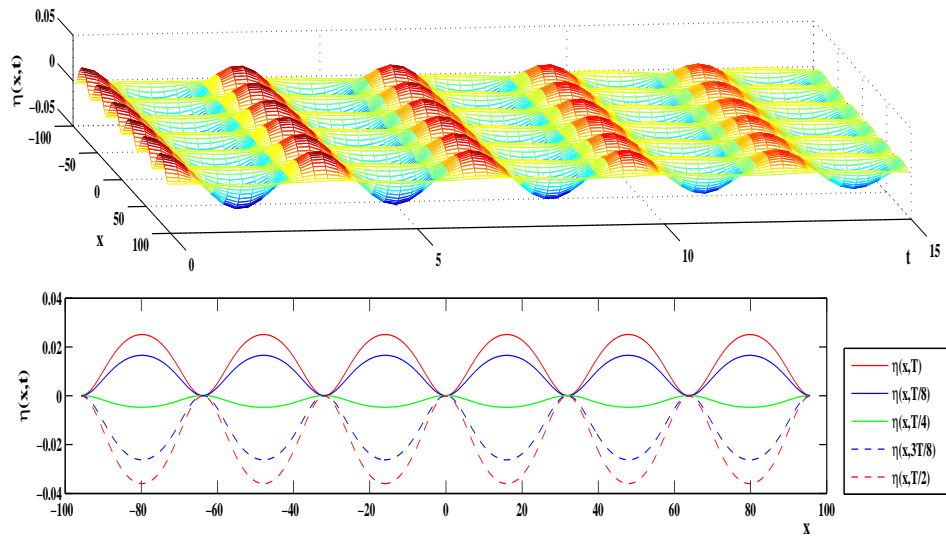
3.3.2 Αριθμητική Μελέτη Ελλειπτικών Περιοδικών Λύσεων στην Αποεστιάζουσα Περιοχή.

Οι εξισώσεις (3.47) και (3.48) αποτελούν τις προτεινόμενες περιοδικές λύσεις για το αβελιανό μοντέλο Higgs σε τιμές του λόγου των μαζών των πεδίων όπου καταλήγουμε στην εξίσωση Schrödinger με αποεστιάζουσα συμπεριφορά ή συντομότερα λύσεις ημιτόνου Jacobi. Για να αποκτήσουμε καλύτερη εποπτεία αυτών των λύσεων τις σχεδιάζουμε γραφικά και τις βλέπουμε στα σχήματα 3.19 και 3.20. Οι λύσεις που σχεδιάζονται προκύπτουν από δεδομένα στην αρχή της προσομοίωσης. Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι $\epsilon = 0.1$, $q = 1.85$ και το ελλειπτικό μέτρο $k_{jac} = 0.8$.

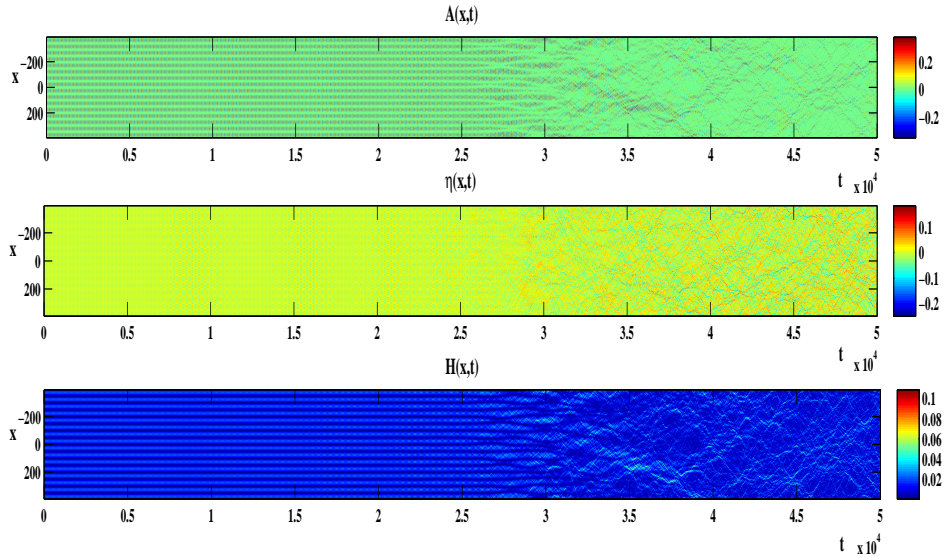


Σχήμα 3.19: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.85$ και $k_{jac} = 0.8$.

Η αριθμητική μελέτη της προσεγγιστικής λύσης ημιτόνου Jacobi μας δείχνει πως αυτή δεν επαληθεύει το πλήρες σύστημα (2.19) καθώς δε περνά το τεστ της αριθμητικής επαλήθευσης. Αυτό φαίνεται αναλυτικά στο σχήμα 3.21. Στην αρχή, δηλαδή στις πρώτες ταλαντώσεις των πεδίων, η λύση διατηρείται. Διατηρείται μάλιστα αρκετά ώστε στα πρώτα αποτελέσματα των προσομοιώσεών μας να θεωρήσουμε πως αποτελούσε λύση και του πλήρους συστήματος. Όμως μετά από 8000 περίπου ταλαντώσεις του πεδίου βαθμίδας η λύση αρχίζει να καταστρέφεται. Η καταστροφή αυτή εμφανίζει ίδια συμπεριφορά με την στάθμεια του μη γραμμικού επίπεδου κύματος στην αποεστιάζουσα περιοχή τιμών της παραμέτρου q . Συνεπώς δε μπορούμε να πούμε πως η ελλειπτική περιοδική λύση ημιτόνου Jacobi αποτελεί λύση του αβελιανού προτύπου παραβιασμένης συμμετρίας που μελετάμε.



Σχήμα 3.20: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου Higgs $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.85$ και $k_{jac} = 0.8$.



Σχήμα 3.21: Γράφημα αριθμητικής επαλήθευσης λύσης ημιτόνου Jacobi με τιμές παραμέτρων $q = 1.85$ και $k_{jac} = 0.95$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$.

3.3.3 Ελλειπτικές Περιοδικές Λύσεις στην Εστιάζουσα Περιοχή

Κάνοντας την αντικατάσταση (3.40) στην εστιάζουσα εξίσωση (3.15) βρίσκουμε τη παρακάτω εξίσωση για τη $\zeta(u)$:

$$\zeta''(u) + \frac{2\omega}{p^2}\zeta + \frac{2}{p^2}\zeta^3 = 0 \quad (3.49)$$

Η παραπάνω εξίσωση, μας θυμίζει μία άλλη εξίσωση, την οποία γνωρίζουμε από τη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi[11], την:

$$y'' + (1 - 2k^2)y + 2k^2y^3 = 0 \quad (3.50)$$

Προκειμένου οι δύο εξισώσεις να συμπίσουν πρέπει:

$$\begin{aligned} \frac{2}{p^2} &= 2k^2 \\ \frac{2\omega}{p^2} &= 1 - 2k^2 \end{aligned}$$

πράγμα που οδηγεί στην ακόλουθη σχέση διασποράς:

$$\omega = \frac{p^2}{2} - 1 = \frac{1 - 2k^2}{2k^2} \quad (3.51)$$

Όταν ισχύουν τα παραπάνω μία λύση της (3.41) είναι:

$$\zeta(u) = \text{cn}(u, k)$$

Συνεπώς η περιοδική λύση που θα εξετάσουμε είναι η:

$$y(x_1, t_2) = \text{cn}(px_1, k) \exp(-i\omega t_2) \quad (3.52)$$

Πηγαίνοντας στις αρχικές αδιάστατες μεταβλητές μέσω των εξισώσεων (2.25), (2.27) και (2.30) η λύση γράφεται:

$$A(1) = \frac{2}{\sqrt{|S|}} \text{cn}(\epsilon px, k) \cos(1 + \epsilon^2\omega) t \quad (3.53)$$

και

$$\eta(2) = -\frac{2}{q^2} \frac{\text{cn}^2(\epsilon px, k)}{|S|} - \frac{\text{cn}^2(\epsilon px, k)}{(q^2 - 4)|S|} \cos[2(1 + \epsilon^2\omega) t] \quad (3.54)$$

Στη συνέχεια αφήνουμε τα αδιάστατα πεδία και μεταβλητές, μέσω των εξισώσεων (2.17) και (2.24), και επιστρέφουμε στα φυσικά πεδία και μεταβλητές για τα οποία βρίσκουμε:

$$A(x, t) = \frac{2\epsilon}{v\sqrt{|S|}} \text{cn}(\epsilon g v p x, k) \cos[(1 + \epsilon^2\omega) g v t] \quad (3.55)$$

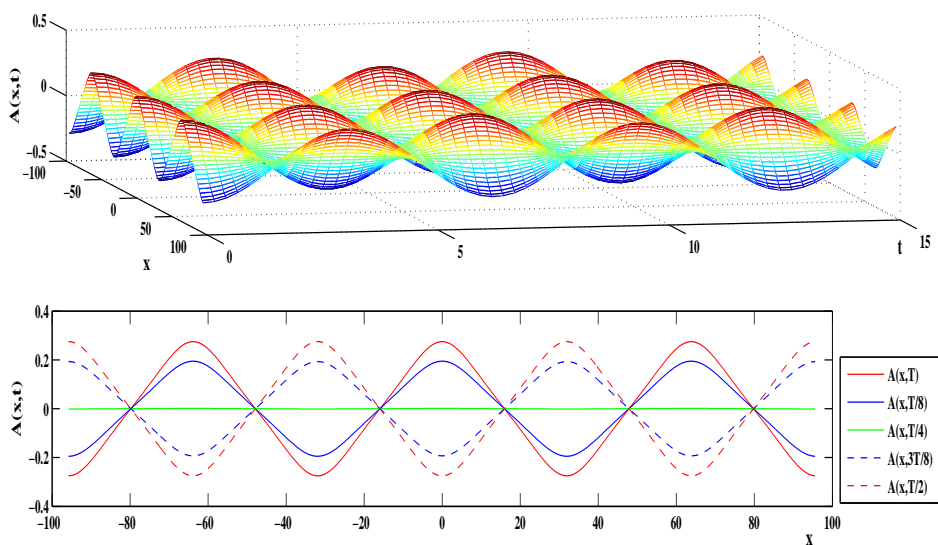
και

$$\eta(x, t) = -\frac{2\epsilon^2 \operatorname{cn}^2(\epsilon g v p x, k)}{v q^2 |S|} - \frac{2\epsilon^2 \operatorname{cn}^2(\epsilon g v p x, k)}{v (q^2 - 4) |S|} \cos [2 (1 + \epsilon^2 \omega) g v t] \quad (3.56)$$

Οι εξισώσεις (3.55) και (3.56) αποτελούν τις δεύτερες προτεινόμενες περιοδικές λύσεις για το αβελιανό μοντέλο Higgs σε τιμές του λόγου των μαζών των πεδίων όπου καταλήγουμε στην εξίσωση Schrödinger με εστιάζουσα συμπεριφορά.

3.3.4 Αριθμητική Μελέτη Ελλειπτικών Περιοδικών Λύσεων στην Εστιάζουσα Περιοχή.

Οι εξισώσεις (3.55) και (3.56) αποτελούν τις προτεινόμενες περιοδικές λύσεις για το αβελιανό μοντέλο Higgs σε τιμές του λόγου των μαζών των πεδίων όπου καταλήγουμε στην εξίσωση Schrödinger με εστιάζουσα συμπεριφορά ή συντομότερα λύσεις συνημιτόνου Jacobi. Για να αποκτήσουμε καλύτερη εικόνα αυτών των λύσεων τις σχεδιάζουμε γραφικά και τις βλέπουμε στα σχήματα 3.22 και 3.23. Οι λύσεις που σχεδιάζονται προκύπτουν από δεδομένα στην αρ-

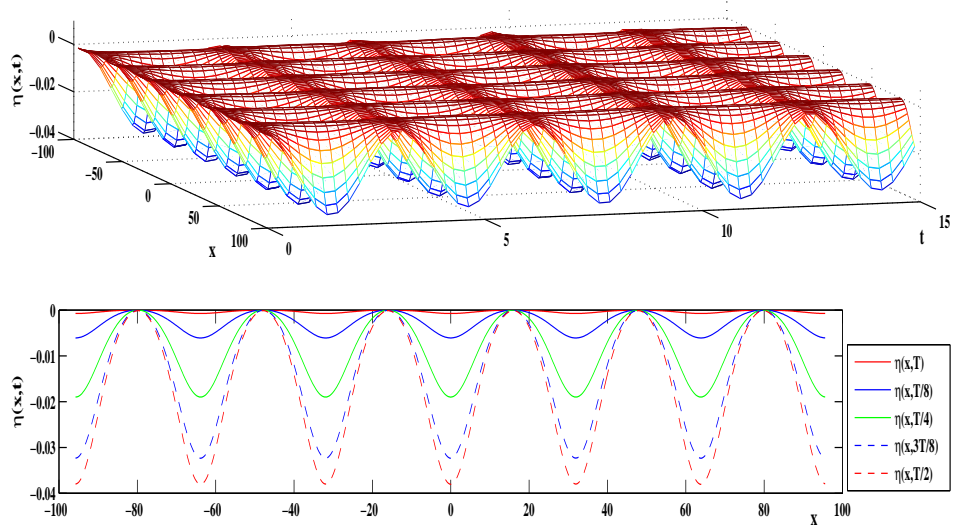


Σχήμα 3.22: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $q = 1.4$ και $k_{jac} = 0.8$.

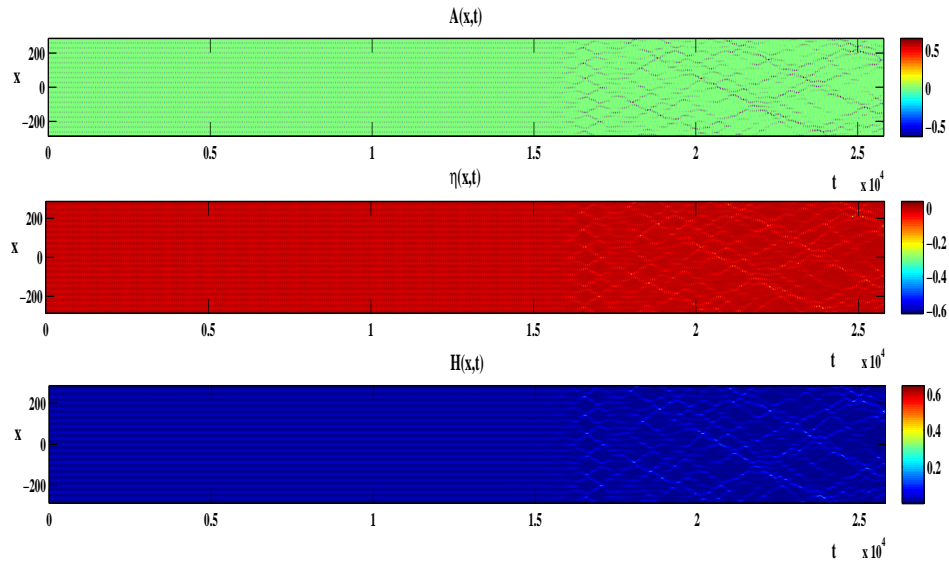
χή της προσομοίωσης. Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι $\epsilon = 0.1$, $q = 1.4$ και το ελλειπτικό μέτρο $k_{jac} = 0.8$.

Η αριθμητική μελέτη της προσεγγιστικής λύσης συνημιτόνου Jacobi μας δείχνει πως αυτή δεν επαληθεύει το πλήρες σύστημα (2.19) καθώς δε περνά το τεστ της αριθμητικής επαλήθευσης. Αυτό φαίνεται αναλυτικά στο σχήμα 3.24. Στην αρχή, δηλαδή στις πρώτες ταλαντώσεις των πεδίων, η λύση διατηρείται. Όμως μετά από 3000 περίπου ταλαντώσεις του πεδίου βαθμίδας η λύση αρχίζει να καταστρέφεται. Συνεπώς δε μπορούμε να πούμε πως η ελλειπτική περιοδική λύση συνημιτόνου Jacobi αποτελεί λύση του αβελιανού προτύπου παραβιασμένης συμμετρίας που μελετάμε.

Μελετώντας τα αποτελέσματα της αριθμητικής προσομοίωσης παρατηρούμε πως η καταστροφή της συνημιτονικής λύσης Jacobi εμφανίζει ίδια συμπεριφορά με την αστάθεια του μη γραμμικού επίπεδου κύματος στην εστιάζουσα περιοχή τιμών της παραμέτρου q . Βλέπουμε δηλαδή πως όταν η λύση καταστραφεί αρ-

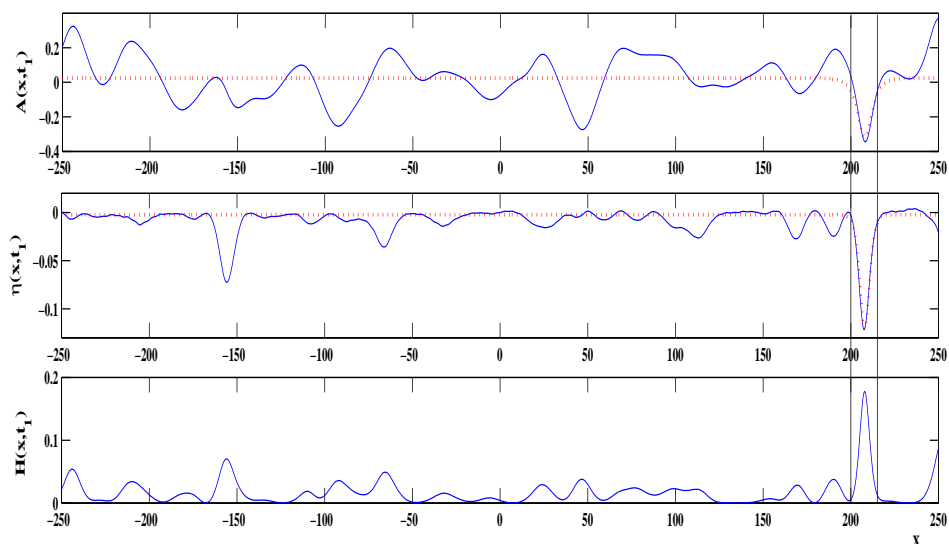


Σχήμα 3.23: Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου Higgs $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα του πεδίου σε διαφορετικές στιγμές της ταλαντωτικής του κίνησης για τιμές των παραμέτρων $g = 1.4$ και $k_{jac} = 0.75$.



Σχήμα 3.24: Γράφημα αριθμητικής επαλήθευσης λύσης συνημιτόνου Jacobi με τιμές παραμέτρων $g = 1.4$ και $k_{jac} = 0.8$. Επάνω: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Γράφημα της χωροχρονικής εξάρτησης του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Γράφημα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$.

χίζουν να εμφανίζονται χωρικές συγκεντρώσεις ενέργειας από την αυθόρμητη δημιουργία παλμών των πεδίων. Αυτοί οι παλμοί οδηγούν τελικά σε απειρισμό την αριθμητική μας προσομοίωση γι' αυτό σταματάει σε αδιάστατο χρόνο $t = 25810$. Μελετώντας όμως αυτούς τους παλμούς βλέπουμε πως εμφανίζουν τα χαρακτηριστικά των ταλαντωνίων που αναφέραμε μιλώντας για το φαινόμενο της αστάθειας διαμόρφωσης. Είναι δηλαδή εντοπισμένες, μακρόβιες σωματιδιακές οντότητες που διατηρούν τη κυματομορφή τους. Τα χαρακτηριστικά αυτά μάλιστα είναι τα ίδια όπως τα εμφανίζει η φωτεινή σολιτονική λύση. Ενδεικτικά συγκρίνουμε τη κυματομορφή ενός ταλαντωνίου στην αδιάστατη χρονική στιγμή $t_1 = 24800$ με τη κυματομορφή της φωτεινής σολιτονικής λύσης στα πεδία A και η . Και εδώ η ταύτιση τους εντυπωσιάζει.



Σχήμα 3.25: Επάνω: Στιγμιότυπα του πεδίου βαθμίδας $A(x, t)$. Μέση: Στιγμιότυπα του πεδίου $\eta(x, t)$. Κάτω: Στιγμιότυπα της Χαμιλτονιανής πυκνότητας, $\mathcal{H}(x, t)$. Κόκκινες Εστιγμένες γραμμές: Φωτεινή Σολιτονική Λύση. Με τις δύο μαύρες κάθετες γραμμές περιορίζουμε τη περιοχή όπου γεννήθηκε αυθόρμητα το ταλαντώνιο. Τιμές παραμέτρων $q = 1.4$ και $t_1 = 24800$.

Κεφάλαιο 4

Το πρότυπο $SU(2)$ - Higgs.

Μέχρι τώρα αναζητήσαμε, μέσω της μεθόδου μας, νέες λύσεις για την αυθόρμητη παραβίαση αβελιανής συμμετρίας. Σε αυτό το κεφάλαιο προχωράμε και στην αναζήτηση λύσεων για την αυθόρμητη παραβίαση μη αβελιανής συμμετρίας. Θα περιοριστούμε στη περίπτωση όπου το πεδίο βαθμίδας έχει σαν ομάδα συμμετρίας την ομάδα $SU(2)$. Επιπλέον θα περιοριστούμε στην αναλυτική μελέτη λύσεων επίπεδων κυμάτων και στη μελέτη ευστάθειάς τους.

4.1 Ιδιότητες και Αυθόρμητη Παραβίαση μιας Λαγκρανζιανής με Τοπική Μη Αβελιανή Συμμετρία.

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μιας θεωρίας με τοπική μη αβελιανή συμμετρία είναι:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (4.1)$$

όπου λ θετικό και:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a \tau_a \quad (4.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.3)$$

Όπως αναφέραμε νωρίτερα η ομάδα συμμετρίας του μοντέλου μας θα είναι η $SU(2)$. Συνεπώς στον ορισμό του ταυστή του πεδίου βαθμίδας f^{abc} είναι οι σταθερές δομής της $SU(2)$

$$f_{abc} = i\epsilon_{abc} \quad (4.4)$$

όπου ϵ_{abc} είναι το σύμβολο Levi-Civita. Στον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου με τ_a συμβολίζουμε τους γεννήτορες της $SU(2)$ για τους οποίους ισχύει:

$$\tau_a \equiv \sigma_a / 2 \quad (4.5)$$

όπου με σ_a συμβολίζουμε τους πίνακες του Pauli.

Η λαγκρανζιανή πυκνότητα (4.1) είναι αναλλοίωτη σε καθολικούς και τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της ομάδας $SU(2)$. Επειδή οι γεννήτορες της $SU(2)$ δε μετατίθενται μεταξύ τους¹ δεν δύναται να γραφούν οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί όπως στη περίπτωση της αβελιανής ομάδας συμμετρίας (2.5). Γι' αυτό σε πρότυπα με μη αβελιανές ομάδες συμμετρίας χρησιμοποιούμε απειροστούς μετασχηματισμούς. Στη περίπτωσή μας αυτοί είναι:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = [1 + i\theta^a(x)\tau_a] \phi(x) \quad (4.6\alpha')$$

$$A_\mu^c(x) \rightarrow A_\mu'^c(x) = A_\mu^c(x) - \partial_\mu \theta^c(x) + f_{ab}^c \theta^a(x) A_\mu^b(x) \quad (4.6\beta')$$

Όταν έχουμε $\mu^2 > 0$ η παραπάνω λαγκρανζιανή δε χρίζει αυθόρμητης παραβίασης συμμετρίας και αποτελεί μια θεωρία Yang-Mills με τέσσερα βαθμωτά

¹Μπορούμε να γράψουμε πως ο πεπερασμένος μετασχηματισμός για τα πεδία ϕ_i δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{ig\theta^a \tau_a} \phi(x)$$

όμως αυτή η σχέση δε μας δίνει αποτέλεσμα σε ρητή μορφή. Επειδή οι γεννήτορες τ_a δε μετατίθενται μεταξύ τους δε μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σχέση από τους απειροστούς γεννήτορες. Σαν αποτέλεσμα η παραπάνω σχέση έχει περισσότερη συμβολική παρά αυστηρή μαθηματική σημασία.

σωματίδια. Η συμμετρία της Λαγκρανζιανής αποτελεί και συμμετρία της κατάστασης του κενού της θεωρίας. Το σωματιδιακό φάσμα της θεωρίας αποτελείται από τρία ουδέτερα διανυσματικά σωματίδια και μία τετράδα βαθμωτών σωματιδίων μάζας μ και φορτίου g .

Όμως όταν έχουμε $\mu^2 < 0$ η (κλασική) κατάσταση $\phi = 0$ είναι τοπικό μέγιστο, συνεπώς μία ασταθής κατάσταση στην οποία δε παραμένει το σύστημά μας. Κατά συνέπεια θα έχουμε αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας κάτω από τους μετασχηματισμούς (4.6). Όπως είδαμε και στην αβελιανή περίπτωση έτσι και εδώ έχουμε ένα άπειρο σύνολο εκφυλισμένων καταστάσεων που αποτελούν ολικά ελάχιστα, τις:

$$|\phi|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$$

Για τη διευκόλυνσή μας θέτουμε:

$$\frac{-\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}$$

και επιλέγουμε, για τη κατάσταση του κενού:

$$\langle \phi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Θα δούμε, στη συνέχεια, πως το μοντέλο παραβίασης συμμετρίας που επιλέξαμε θα έχει ως αποτέλεσμα και τα τρία πεδία βαθμίδας να αποκτήσουν μάζα.

Προτού προχωρήσουμε χρειάζεται να κάνουμε μερικούς χρήσιμους υπολογισμούς. Ξεκινάμε υπολογίζοντας, στην αναπαράσταση Pauli, τον όρο $A_\mu^\alpha \tau_\alpha$:

$$A_\mu^a \tau_a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Συνεπώς για τη συναλλοίωτη παράγωγο έχουμε:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των όρων της Λαγκρανζιανής (4.1) που περιέχουν το γινόμενο των συναλλοίωτων παραγώγων. Οι υπολογισμοί μας θα διευκολυνθούν με τη πραγματοποίηση τους στη μοναδιακή βαθμίδα της θεωρίας, όπως κάναμε και στην αβελιανή περίπτωση. Όπως γνωρίζουμε στη μοναδιακή βαθμίδα (unitary gauge) εμφανίζονται μόνο τα πεδία που αποτελούν σωματιδιακούς βαθμούς ελευθερίας²[7]. Συνεπώς, στη μοναδια-

² Λόγω της μη ολοκληρωσιμότητας των απειροστών γεννητόρων της μη αβελιανής ομάδας συμμετρίας, $SU(2)$, ο μετασχηματισμός που μας πηγαίνει στη μοναδιακή βαθμίδα, στις μη αβελιανές ομάδες συμμετρίας, δε μπορεί να γραφεί σε ρητή μορφή. Μπορεί όμως να αποδειχθεί πως υπάρχει τέτοιος μετασχηματισμός[7]. Συμβολικά όμως μπορούμε να γράψουμε[14]:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x)) e^{i[\pi_1(x)\tau^1 + \pi_2(x)\tau^2 + \pi_3(x)\tau^3]} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου φαίνεται πως μπορούμε να μεταβούμε σε βαθμίδα που «εξοντώνονται» τα πεδία $\pi_a(x)$.

κή βαθμίδα μπορούμε να γράψουμε για το πεδίο ϕ :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Άρα για τις συναλλοίωτες παραγώγους υπολογίζουμε:

$$D_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (v + \eta) + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (A_\mu^1 - iA_\mu^2)(v + \eta) \\ -A_\mu^3(v + \eta) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

και

$$(D_\mu \phi)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (v + \eta) - \frac{ig}{2\sqrt{2}} [(A_\mu^1 + iA_\mu^2)(v + \eta), -A_\mu^3(v + \eta)] \quad (4.12)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (4.11) και (4.12) προχωρούμε σε ευθύ υπολογισμό του όρου του γινομένου των συναλλοίωτων παραγώγων της Λαγκρανζιανής (4.1). Καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{g^2}{8} (v + \eta)^2 A^{\mu a} A_\mu^a \quad (4.13)$$

Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τον όρο δυναμικού αλληλεπίδρασης των βαθμωτών πεδίων της Λαγκρανζιανής (4.1):

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \lambda v \eta^3 - \mu^2 \eta^2 + \frac{1}{4} \mu^2 v^2 \quad (4.14)$$

Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα η Λαγκρανζιανή (4.1) μετά από την αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας της και τη μετάβαση στη μοναδιακή βαθμίδα γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [\partial_\nu \eta(x)] [\partial^\nu \eta(x)] + \mu^2 \eta^2(x) - \frac{\lambda}{4} \eta^4(x) - \lambda v \eta^3(x) \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{8} g^2 [v + \eta(x)]^2 A_\nu^a(x) A^{\nu a}(x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Παρατηρώντας τη Λαγκρανζιανή (4.15) βλέπουμε πως η μάζα του «πεδίου Higgs» της θεωρίας είναι:

$$m_\eta^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2 \quad (4.16)$$

ενώ η μάζα των πεδίων βαθμίδας είναι:

$$m_{A^1}^2 = m_{A^2}^2 = m_{A^3}^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2 \quad (4.17)$$

4.2 Εξισώσεις κίνησης και Εφαρμογή της Μεθόδου των Πολλαπλών Κλιμάκων.

Έχοντας πλέον στην διάθεσή μας τη Λαγκρανζιανή του προτύπου μετά την αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας προχωράμε στην εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης των πεδίων. Για τα πεδία βαθμίδας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\square + \frac{1}{4}g^2v^2 \right) A_\mu^a - \partial_\mu(\partial_\nu A^{\nu a}) \\ & + g\varepsilon_{abc} \left[(\partial_\mu A^{\nu c}) A_\nu^b - (\partial_\nu A^{b\mu}) A_\mu^c - 2A_\nu^b \partial^\nu A_\mu^c \right] \\ & - g^2 \left[A_\mu^a A_\nu^b A^{\nu b} - A_\mu^b A_\nu^a A^{\nu b} \right] + \frac{g^2}{2}v\eta A_\mu^a + \frac{g^2}{4}\eta^2 A_\mu^a = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ενώ για το «πεδίο Higgs» βρίσκουμε:

$$\left(\square + 2\lambda v^2 \right) \eta - \frac{g^2}{4}(v + \eta)A^{\mu\alpha}A_\mu^\alpha + 3\lambda v\eta^2 + \lambda\eta^3 = 0 \quad (4.19)$$

Το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων (4.18) και (4.19) δεν έχει αναλυτική γενική λύση. Συνεπώς αναγκαζόμαστε να κάνουμε κάποιες παραδοχές και υποθέσεις που απλοποιούν το πρόβλημα και θα μας επιτρέψουν να βρούμε κάποιες ειδικές λύσεις του συστήματος. Η πρώτη παραδοχή που κάνουμε είναι πως θα δουλέψουμε στο σύστημα ηρεμίας των πεδίων βαθμίδας. Αυτό έχει σα συνέπεια να μηδενίζονται οι χρονοειδείς τους συνιστώσες[7].

Με αυτή τη παραδοχή ο δυναμικός όρος της Λαγκρανζιανής (4.15) γίνεται:

$$V = +\frac{\lambda}{4}\eta^4(x) + \lambda v\eta^3(x) - \mu^2\eta^2(x) + \frac{1}{8}g^2[v + \eta(x)]^2 A_i^a(x)A^{ia}(x) \quad (4.20)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως το σημείο $(A_a^i, \eta) = (0, 0)$ είναι ολικό ελάχιστο του δυναμικού μας. Συνεπώς η κλασική κατάσταση $(A_a^i, \eta) = (0, 0)$ αποτελεί λύση του συστήματος. Γύρω από αυτή τη κατάσταση θα εφαρμόσουμε τη Μέθοδο των Πολλαπλών Κλιμάκων.

Προτού προχωρήσουμε όμως θα κάνουμε μερικές υποθέσεις για τη μορφή των πεδίων βαθμίδας. Αυτό χρειάζεται προκειμένου να απλοποιηθούν περαιτέρω οι εξισώσεις κίνησης ώστε να είναι επιλύσιμες. Όπως έχουμε αναφέρει αυτό γίνεται στα πλαίσια αναζήτησης ειδικών λύσεων του προτύπου καθώς η εύρεση γενικής αναλυτικής λύσης δεν είναι εφικτή. Συνεπώς κάνουμε μία υπόθεση για τη μορφή των πεδίων βαθμίδας σε σχέση με τη τάξη της διαταραχής ϵ , δηλ υποθέτουμε πως σε τάξη μικρότερη από αυτή που γράφουμε τα πεδία είναι μηδενικά.

$$A_1^1 = A_2^2 = A_3^3 = A = 0(\epsilon^1) \quad (4.21)$$

$$A_2^1, A_3^1, A_1^2, A_3^2, A_1^3, A_2^3 = 0(\epsilon^4) \quad (4.22)$$

$$\eta = 0(\epsilon^2) \quad (4.23)$$

Τη τελευταία υπόθεση (4.23) την ονομάζουμε υπόθεση ασθενούς «πεδίου Higgs» και είναι μία υπόθεση που θα αναιρέσουμε αργότερα για να δούμε τις διαφορετικές λύσεις που παίρνουμε στις δύο περιπτώσεις. Με βάση όσα έχουμε πει και στην ενότητα 2.3 για τα πεδία γράφουμε:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \epsilon A(1) + \epsilon^2 A(2) + \dots \\ \eta &\rightarrow \epsilon^2 \eta(2) + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Πλέον είμαστε έτοιμοι να ακολουθήσουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε στην ενότητα 2.3 δουλεύοντας τάξη προς τάξη στη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Εισάγουμε το ανάπτυγμα (4.24) στο σύστημα εξισώσεων (4.18) και (4.19). Ξεκινάμε με το πεδίο η . Από την υπόθεση ασθενούς πεδίου σε πρώτη τάξη μηδενίζεται. Σε δεύτερη τάξη $0(\epsilon^2)$ προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$(\square_0 + m_\eta^2) \eta(2) = -\frac{3}{4} g^2 v A^2(1) \quad (4.25)$$

Συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία και για το πεδίο βαθμίδας A . Σε πρώτη τάξη, $0(\epsilon^1)$, παίρνουμε:

$$(\square_0 + m_A^2) A(1) = 0 \quad (4.26)$$

Σε δεύτερη τάξη, $0(\epsilon^2)$, παίρνουμε:

$$(\square_0 + m_A^2) A(2) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A(1) = 0 \quad (4.27)$$

Σε τρίτη τάξη, $0(\epsilon^3)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &(\square_0 + m_A^2) A(3) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A(2) + \square_1 A(1) + \\ &+ 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2} A(1) + \frac{g^2 v}{2} \eta(2) A(1) + 2g^2 A^3(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Από την εξίσωση κίνησης του πεδίου A σε πρώτη τάξη, $0(\epsilon^1)$, (4.26) προκύπτει ότι η γενική λύση για το $A(1)$ είναι η παρακάτω³:

$$A(1) = f e^{-im_A t} + f^* e^{im_A t} \quad (4.29)$$

Συνεχίζουμε με το πεδίο A σε τάξη $0(\epsilon^2)$. Η λύση του ομογενούς κομματιού της εξίσωσης (4.27) είναι:

$$A(2) = f_2 e^{-im_A t} + c.c.$$

όμως από τη μορφή αυτή της λύσης παρατηρούμε πως ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης θα γεννήσει αιώνιους όρους στη λύση αυτή οι οποίοι θα τη κάνουν να αποκλίνει. Γι' αυτό απαιτούμε ο όρος αυτός να μηδενίζεται, δηλ.:

$$\begin{aligned} &\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A(1) = 0 \\ \Rightarrow &(\partial_{t_0} \partial_{t_1} - \partial_{x_0} \partial_{x_1}) A(1) = 0 \\ \Rightarrow &\partial_{t_1} A(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

³ Αυτή είναι η γενική λύση γιατί όπως έχουμε αναφέρει, και όπως κάναμε και στην αβελιανή περίπτωση, βρισκόμαστε στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας.

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει πως η f , όσον αφορά το χρόνο, θα εξαρτάται από τη t_2 και πέρα.

Προτού προχωρήσουμε στη τρίτη τάξη ως προς A εξετάζουμε και το πεδίο η σε δεύτερη τάξη ως προς ϵ . Από την εξίσωση (4.25) παίρνουμε⁴:

$$\eta(2) = b_1 \left(b_2 |f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t} \right) \quad (4.31)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4.29) , (4.31) στη σχέση (4.25) γίνεται ο προσδιορισμός των σταθερών b_1 και b_2 που υπεισέρχονται στην γενική λύση για το $\eta(2)$. Μετά από τις απαραίτητες πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} b_1 b_2 m_\eta^2 &= -\frac{6}{4} g^2 v \\ b_1 (m_\eta^2 - 4m_A^2) &= -\frac{3}{4} g^2 v \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ορίζοντας τον λόγο των μαζών των δύο πεδίων, $q = m_\eta/m_A$, οι συντελεστές b_1, b_2 συναρτηθεί του q έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$b_1 = -\frac{3}{v(q^2 - 4)} \quad (4.33)$$

$$b_2 = \frac{2(q^2 - 4)}{q^2} \quad (4.34)$$

Έχοντας προσδιορίσει πλέον και τις σταθερές που εισήχθησαν στη λύση της εξίσωσης κίνησης του πεδίου Higgs, προχωράμε στη μελέτη της εξίσωσης κίνησης του πεδίου A σε τρίτη τάξη ως προς ϵ , (4.28). Κατά τα γνωστά η εξίσωση χωρίζεται σε δύο κομμάτια λόγω της απαίτησής μας, από τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, να μηδενίζονται χωριστά οι αιώνιοι όροι της εξίσωσης. Οι αιώνιοι όροι που προέρχονται από το $A(2)$ είναι ανεξαρτητοι από αυτούς του $A(1)$ οπότε μπορούμε να απαιτήσουμε να μηδενίζονται χωριστά. Αναλυτικά παίρνουμε:

$$(\square_0 + m_A^2)A(3) + n.s.p. \left[\frac{g^2 v}{2} \eta(2)A(1) + 2g^2 A^3(1) \right] = 0 \quad (4.35)$$

$$(\square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2})A(1) + s.p. \left[\frac{g^2 v}{2} \eta(2)A(1) + 2g^2 A^3(1) \right] = 0 \quad (4.36)$$

$$2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A(2) = 0 \quad (4.37)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις θα επικεντρωθούμε στην εξίσωση (4.36) γιατί αυτή μας προσδιορίζει τη παράμετρο f του $A(1)$. Οι παραμέτροι που υπεισέρχονται στις υπόλοιπες εξισώσεις προσδιορίζονται σε μεγαλύτερη τάξη ως προς ϵ .

⁴Όπως και αναφέραμε και στην αβελιανή περίπτωση αγνοούμε το κομμάτι της γενικής λύσης που ικανοποιεί το ομογενές κομμάτι της εξίσωσης (4.25).

Εμείς όμως θα περιοριστούμε μέχρι τη τρίτη τάξη. Προχωράμε υπολογίζοντας αναλυτικά τους όρους που υπεισέρχονται σε αυτή την εξίσωση. Έχουμε:

$$2g^2 A^3(1) = 2g^2 \left(f^3 e^{-3im_A t} + 3|f|^2 f e^{-im_A t} + 3|f|^2 f^* e^{+im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t} \right) \quad (4.38)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g^2 v \eta(2) A(1) &= -\frac{3g^2}{2(q^2 - 4)} \left[(b_2 + 1) |f|^2 f e^{-im_A t} + (b_2 + 1) |f|^2 f^* e^{+im_A t} \right. \\ &\quad \left. + f^3 e^{-3im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Κρατώντας μόνο τα αιώνια μέρη ($[s.p.]$) μέρη των ανωτέρω όρων, δηλαδή μόνο όρους ανάλογους του $[e^{-im_A t}]$ και αντικαθιστώντας τα b_1, b_2 από τις σχέσεις ορισμού τους, (4.33), (4.34) η εξίσωση (4.36) γράφεται⁵:

$$(\square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2}) f e^{-im_A t} + 3g^2 \left[2 - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4(\lambda^2 - 4)} \right] |f|^2 f e^{-im_A t} = 0 \quad (4.40)$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις και απλοποιώντας όπου επιτρέπεται καταλήγουμε στη παρακάτω εξίσωση:

$$\left[i\partial_{t_2} + \frac{1}{2m_A} \nabla_1^2 - s |f|^2 \right] f = 0 \quad (4.41)$$

όπου με s έχουμε ορίσει την παρακάτω ποσότητα:

$$s = \frac{g^2}{m_A} (3 + c_1(q)) \quad (4.42)$$

και με $c_1(q)$:

$$c_1(q) = -\frac{3}{4} \left(\frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^2 - 4} \right) \quad (4.43)$$

Η εξίσωση (4.41) είναι η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Οι λύσεις της είναι γνωστές και μέσω αυτών μπορούμε να προτείνουμε λύσεις για το πλήρες σύστημα που εξετάζουμε.

⁵Κανονικά η εξίσωση (4.35) έχει αιώνιους όρους της μορφής $[e^{\pm im_A t}]$. Στη πράξη όμως κρατάμε μόνο τους όρους με εκθέτη $-im_A t$. Οι όροι με εκθέτη $+im_A t$ είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των προηγούμενων συνεπώς δε χάνουμε πληροφορία με το να τους αγνοήσουμε. Ο μηδενισμός των αιώνιων όρων προκειμένου να λειτουργεί η διαδικασία της θεωρίας διαταραχών των πολλαπλών κλιμάκων εξακολουθεί να επιτυγχάνεται.

4.3 Μη γραμμικές κυματικές λύσεις και Ευστάθεια.

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε πως η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger παίζει πρωτεύοντα ρόλο στην εύρεση λύσεων και στο μη αβελιανό πρότυπο. Οι απλούστερες λύσεις της εξίσωσης NLS είναι οι μη γραμμικές κυματικές λύσεις. Θα μελετήσουμε λοιπόν αυτές τις λύσεις. Προκειμένου οι λύσεις αυτές να μπορούν να «σταθούν» στο πλήρες σύστημα θα πρέπει να είναι ευσταθείς και στην NLS από την οποία προέρχονται. Γι' αυτό θα εξετάσουμε την ευστάθεια των μη γραμμικών κυματικών λύσεων από το επίπεδο της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger η οποία είναι «γεννήτορας» των λύσεών μας για το πρότυπο $SU(2)$ -Higgs.

Ελέγχουμε κατά πόσο τα επίπεδα κύματα αποτελούν ευσταθείς λύσεις της NLS, μέσω της μελέτης γραμμικής ευστάθειας (linear stability analysis) [12]. Η εξίσωση (4.41) δέχεται τις ακόλουθες μη γραμμικές κυματικές λύσεις:

$$f = f_0 e^{-i(\omega t_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \quad (4.44)$$

οι οποίες ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση διασποράς:

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m_A} + s|f_0|^2 \quad (4.45)$$

Βλέπουμε πως η παραπάνω σχέση διασποράς έχει εμφανή χαρακτηριστικά μη γραμμικότητας.

Προκειμένου τώρα να εξετάσουμε τη γραμμική ευστάθεια αυτών των λύσεων θεωρούμε διαταραχή της μορφής:

$$f \rightarrow f' = f + \delta f \quad (4.46)$$

Εισάγοντας τη «διαταραγμένη» f' μέσα στην εξίσωση (4.41) βρίσκουμε:

$$i\partial_{t_2}\delta f + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2\delta f - s f^2\delta f^* - 2s|f|^2\delta f = 0 \quad (4.47)$$

Θέτουμε $\delta f = R e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, με R εν γένει μιγαδικό, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$i\left(\partial_t R + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla} R}{m_A}\right) + \frac{1}{2m_A}\nabla^2 R - (R + R^*)s f_0^2 = 0 \quad (4.48)$$

Καθότι το R είναι μιγαδική συνάρτηση, θέτουμε $R = u + iv$ για το πραγματικό και φανταστικό μέρος της. Εισάγοντάς τα στη προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$i\left(\partial_t u + i\partial_t v + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla} u}{m_A} - \frac{i\vec{k} \cdot \vec{\nabla} v}{m_A}\right) + \frac{1}{2m_A}\nabla^2 u + \frac{i}{2m_A}\nabla^2 v - 2us f_0^2 = 0 \quad (4.49)$$

Χωρίζοντας την παραπάνω εξίσωση σε πραγματικό και φανταστικό κομμάτι προκύπτουν οι σχέσεις:

$$-\partial_t v + \frac{\vec{k}\vec{\nabla}v}{m_A} + \frac{1}{2m_A}\nabla^2 u - 2usf_0^2 = 0 \quad (4.50)$$

$$i\partial_t u - \frac{i\vec{k}\vec{\nabla}u}{m_A} + \frac{i}{2m_A}\nabla^2 v = 0 \quad (4.51)$$

Τα u και v εκφράζουν τη διαταραχή που εφαρμόζουμε. Επιλέγουμε λοιπόν ως u, v τα παρακάτω:

$$u = u_0 e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + \text{c.c} \quad (4.52)$$

$$v = v_0 e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + \text{c.c} \quad (4.53)$$

Με αυτή τη γραφή το σύστημα εξισώσεων (4.50) και (4.51) γίνεται:

$$iv_0\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) - \left(\frac{Q^2}{2m_A} + 2f_0^2 s\right)u_0 = 0 \quad (4.54)$$

$$u_0\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) - \frac{iQ^2}{2m_A}v_0 = 0 \quad (4.55)$$

Το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων έχει ως λύση τη τετριμμένη λύση $(u_0, v_0) = (0, 0)$. Αυτό όμως σημαίνει πως η διαταραχή μηδενίζεται, πράγμα που δε μας δίνει καμία πληροφορία για την ευστάθεια της λύσης που διαταράσσουμε. Συνεπώς απαιτούμε το σύστημα να έχει μη τετριμμένες λύσεις, πράγμα που οδηγεί στην απαίτηση για μηδενισμό της ορίζουσάς του. Συνεπώς⁶:

$$\det \begin{bmatrix} i\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) & -\left(\frac{Q^2}{2m_A} + 2sf_0^2\right) \\ -\frac{iQ^2}{2m_A} & \left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.56)$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας και η απαίτηση για μηδενισμό της οδηγεί στην σχέση:

$$\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right)^2 = \frac{Q^2}{2m_A}\left(\frac{Q^2}{2m_A} + 2sf_0^2\right) \quad (4.57)$$

⁶Μία προσεκτική παρατήρηση της εξίσωσης (4.56) προκαλεί ερωτηματικά λόγω της εμφάνισης της φανταστικής μονάδας παρ' όλο που τα u_0 και v_0 είναι πραγματικά. Αυτό συμβαίνει γιατί στις πράξεις δε χρησιμοποιούμε το συζυγές μιγαδικό εκθετικό που γράφεται στους τύπους (4.52) και (4.53). Παρ' όλο που αυτό φαντάζει λάθος από τη σκοπιά της μιγαδικής ανάλυσης εν τούτοις το αποτέλεσμα μας είναι σωστό και με λιγότερες πράξεις. Πιο σωστά θα μπορούσαμε να είχαμε υποθέσει[12] για τη μορφή της διαταραχής το:

$$R = r_1 \exp[-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})] + r_2 \exp[i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})]$$

Αυτή η διαταραχή δίνει τα ίδια αποτελέσματα για τη σχέση διασποράς μεταξύ των Ω και Q με το κόστος, όπως αναφέραμε, επιπλέον αλγεβρικών πράξεων.

Από τις σχέσεις (4.52) και (4.53) βλέπουμε πως το Ω είναι η συχνότητα της διαταραχής. Εάν αυτή, λόγω της σχέσης (4.57), πάρει μιγαδικές τιμές τότε η λύση την οποία διατάραξε είναι ασταθής. Συνεπώς για να πούμε μία κυματική λύση ευσταθή πρέπει το Ω να είναι πραγματικός αριθμός για κάθε τιμή του \tilde{Q} . Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.57) πρέπει να είναι πάντα θετική. Κάτι τέτοιο όμως συμβαίνει μόνο αν $s > 0$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η αναζήτηση της ευστάθειας ή μη των λύσεων μας έχει αναχθεί σε μελέτη του προσήμου του συντελεστή του όρου μη γραμμικότητας της *NLS*. Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι, τα επίπεδα κύματα (4.44) ως λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger είναι ευσταθείς αν το s είναι θετικό. Αλλιώς είναι δυνατό να υπάρξουν συχνότητες της διαταραχής ως προς τις οποίες τα κύματα είναι ασταθή.

Συνεχίζουμε εξετάζοντας μία συνέπεια της μελέτης μας για την ευστάθεια των μη γραμμικών επιπέδων κυμάτων της (4.41) από την οποία προκύπτουν τα μη γραμμικά επίπεδα κύματα του προτύπου *SU(2)*. Θεωρώντας πως αυτά τα κλασικά επίπεδα κύματα μετά τη κβάντωση θα περιγράφουν τα αντίστοιχα σωματίδια βλέπουμε πως αυτά τα σωματίδια θα πρέπει να έχουν μάζες τέτοιες ώστε τα αντίστοιχα κλασικά μη γραμμικά επίπεδα κύματα να είναι ευσταθή. Συνεπώς από την απαίτηση $s > 0$ της ευστάθειας προκύπτουν οι επιτρεπόμενες περιοχές για το λόγο $q = m_\eta/m_A$ των μαζών των δύο πεδίων και άρα οι επιτρεπόμενες περιοχές για τη μάζα του σωματιδίου Higgs του προτύπου.

$$s > 0 \Rightarrow (q^2 - 4)(q^2 - 0.5)(q^2 - 4.3) > 0 \quad (4.58)$$

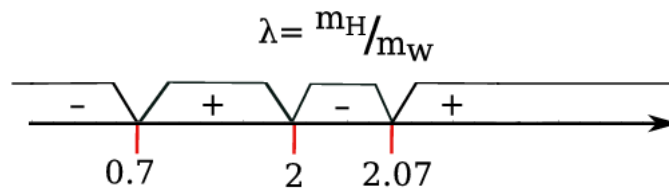
Παίρνουμε ενδεικτικά ως μάζα του A τη μάζα του W σωματιδίου, το οποίο αποτελεί σωματίο βαθμίδας μίας *SU(2)* παραβιασμένης συμμετρίας⁷, δηλαδή θέτουμε $m_A = m_W = 80.4\text{GeV}$. Με βάση τη παραπάνω υπόθεση οδηγούμαστε στην ακόλουθη επιτρεπτή περιοχή μαζών για το «σωματίδιο Higgs» του προτύπου μας:

$$56 < m_\eta < 160\text{GeV} \quad (4.59)$$

$$m_\eta > 165\text{GeV} \quad (4.60)$$

η οποία φαίνεται και στο σχήμα 4.1

⁷ Η Παραβίαση της συμμετρίας στη περίπτωση του W αφορά το μηχανισμό Higgs όπως αυτός πραγματοποιείται στο μοντέλο Glashow-Weinberg-Salam του Καθιερωμένου Πρότυπου των Στοιχειωδών Σωματιδίων και διαφέρει σημαντικά από το πρότυπο που μελετάμε εμείς. Όπως προαναφέραμε όμως το δάνειο αυτό από τη βιβλιογραφία πραγματοποιείται ενδεικτικά.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα επιτρεπόμενων περιοχών του λόγου των μαζών $q(= \lambda)$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα συμφωνούν και με τα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα [18].

4.4 Εξισώσεις κίνησης πεπλεγμένης μορφής

Σε αυτή την ενότητα θα συνεχίσουμε τη μελέτη του προτύπου $SU(2)$ -Higgs αλλά χωρίς την υπόθεση του ασθενούς πεδίου Higgs, (4.23). Δηλαδή θα θεωρήσουμε πως το πεδίο Higgs της θεωρίας εμφανίζεται από τη πρώτη τάξη ως προς ϵ , ήτοι:

$$\eta = 0(\epsilon^1) \quad (4.61)$$

Και σε αυτή τη περίπτωση θα δουλέψουμε στη μοναδιακή βαθμίδα και στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας. Επιπλέον για το πεδίο βαθμίδας εξακολουθούμε να κάνουμε τις υποθέσεις (4.21) και (4.22) που κάναμε και στη πρώτη μας ανάλυση.

Συνεπώς για τα πεδία θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \epsilon A(1) + \epsilon^2 A(2) + \dots \\ \eta &\rightarrow \epsilon \eta(1) + \epsilon^2 \eta(2) + \dots \end{aligned} \quad (4.62)$$

Όπως και στη προηγούμενη ενότητα κάνουμε την αντικατάσταση των πεδίων μέσα στις εξισώσεις κίνησης (4.18), (4.19) τους και γράφουμε την εξίσωση που προκύπτει τάξη προς τάξη εφαρμόζοντας κανονικά τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων όπως περιγράφηκε στην ενότητα 2.3.

Ξεκινώντας με το πεδίο βαθμίδας, σε πρώτη τάξη ως προς ϵ βρίσκουμε:

$$\left(\square_0 + m_A^2\right)A(1) = 0 \quad (4.63)$$

Συνεχίζοντας σε δεύτερη τάξη ως προς ϵ έχουμε:

$$\left(\square_0 + m_A^2\right)A(2) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}A(1) + \frac{g^2}{2}v\eta(1)A(1) = 0 \quad (4.64)$$

Τέλος σε τρίτη τάξη ως προς ϵ έχουμε:

$$\begin{aligned} &\left(\square_0 + m_A^2\right)A(3) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}A(2) + \square_1A(1) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2}A(1) + \\ &+ \frac{g^2}{2}vH(1)A(2) + \frac{g^2}{2}v\eta(2)A_1^1(1) + 2g^2A^3 + \frac{g^2}{4}\eta(1)^2A(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το πεδίο Higgs. Σε πρώτη τάξη ως προς ϵ έχουμε:

$$\left(\square_0 + m_\eta^2\right)\eta(1) = 0 \quad (4.66)$$

Συνεχίζοντας σε δεύτερη τάξη ως προς ϵ έχουμε:

$$\left(\square_0 + m_\eta^2\right)\eta(2) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}\eta(1) + \frac{3g^2}{4}vA^2 + 3\lambda v\eta^2(1) = 0 \quad (4.67)$$

Τέλος σε τρίτη τάξη ως προς ϵ έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\square_0 + m_\eta^2 \right) \eta(3) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} \eta(2) + \square_1 \eta(1) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2} \eta(1) + \frac{3g^2}{4} \eta(1) A^2 \\ & + \frac{6g^2}{4} v A(2) A(1) + 6\lambda v \eta(2) \eta(1) + \lambda \eta^3(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Προχωράμε τώρα, όπως και προηγουμένως, στην εξαγωγή αποτελεσμάτων από τις παραπάνω εξισώσεις. Για το πεδίο βαθμίδας A από την εξίσωση (4.63) παίρνουμε:

$$A(1) = f e^{-im_A t} + f^* e^{im_A t} \quad (4.69)$$

Σε αντιδιαστολή με την πρώτη περίπτωση τώρα δεν έχουμε υποθέσει ασθενές πεδίο η συνεπώς έχουμε την εξίσωση (4.66) η οποία μας δίνει τη λύση του $\eta(1)$:

$$\eta(1) = h e^{-im_\eta t} + h^* e^{im_\eta t} \quad (4.70)$$

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη των εξισώσεων δεύτερης τάξης πρέπει να μελετήσουμε και τους αιώνιους όρους που περιέχουν. Στην εξίσωση δεύτερης τάξης του πεδίου A , (4.64), απαιτούμε οι αιώνιοι όροι να μηδενίζονται χωριστά. Συνεπώς παίρνουμε δύο εξισώσεις:

$$\left(\square_0 + m_A^2 \right) A(2) + \frac{g^2}{2} v \eta(1) A(1) = 0 \quad (4.71)$$

$$\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A(1) = 0 \quad (4.72)$$

Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις έτσι κι εδώ η εξίσωση (4.72) μας λέει πως η f δεν έχει εξάρτηση από την αργή μεταβλητή t_1 . Από την εξίσωση (4.71), μέσω των εξισώσεων (4.69) και (4.70), παίρνουμε τη λύση για το $A(2)$ ⁸:

$$\begin{aligned} A(2) = & a_1 f h e^{-i(m_A + m_\eta)t} + a_2 f h^* e^{-i(m_A - m_\eta)t} \\ & + a_1^* f^* h^* e^{+i(m_A + m_\eta)t} + a_2^* f^* h e^{+i(m_A - m_\eta)t} \end{aligned} \quad (4.73)$$

όπου οι σταθερές a_1, a_2 προσδιορίζονται με αντικατάσταση των σχέσεων (4.69), (4.70) και (4.73) στην (4.71). Επιλύοντας το σύστημα που προκύπτει έπειτα από αυτή την αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$\begin{cases} a_1 [m_A^2 - (m_A + m_\eta)^2] = -\frac{g^2 v}{2} \\ a_2 [m_A^2 - (m_A - m_\eta)^2] = -\frac{g^2 v}{2} \end{cases} \quad (4.74)$$

Ακολούθως έχοντας ορίσει το λόγο q στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να εκφράσουμε τα a_1, a_2 του προηγούμενου συστήματος, σχέση (4.74) συναρτήσει αυτού.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{vq(q+2)} \\ a_2 = \frac{2}{vq(q-2)} \end{cases} \quad (4.75)$$

⁸Όπως έχουμε κάνει και σε προηγούμενες περιπτώσεις αγνοούμε το κομμάτι της λύσης που προκύπτει από το ομογενές κομμάτι της εξίσωσης.

Συνεχίζουμε τώρα με την εξίσωση δεύτερης τάξης του πεδίου Higgs. Κατά τα γνωστά απαιτούμε να μηδενίζονται χωριστά οι αιώνιοι όροι. Συνεπώς από την εξίσωση (4.67) παίρνουμε:

$$\left(\square_0 + m_\eta^2\right)\eta(2) + \frac{3g^2}{4}vA^2(1) + 3\lambda v\eta^2(1) = 0 \quad (4.76)$$

$$2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}\eta(1) = 0 \quad (4.77)$$

Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις έτσι κι εδώ η εξίσωση (4.77) μας λέει πως η h δεν έχει εξάρτηση από την αργή μεταβλητή t_1 . Γνωρίζοντας τα $A(1)$, $A(2)$, $\eta(1)$ από τις σχέσεις (4.69), (4.73), (4.70) μπορούμε να βρούμε τη λύση για το $\eta(2)$ από την εξίσωση (4.76). Για να προχωρήσουμε χρειαζόμαστε τα τετράγωνα των συναρτήσεων των πεδίων στη πρώτη τάξη. Για τον όρο $A^2(1)$ έχουμε:

$$A^2(1) = f^2e^{-2im_A t} + f^{*2}e^{+2im_A t} + 2|f|^2 \quad (4.78)$$

ενώ για τον όρο $\eta^2(1)$ έχουμε:

$$\eta^2(1) = \eta^2e^{-2im_\eta t} + \eta^{*2}e^{+2im_\eta t} + 2|\eta|^2 \quad (4.79)$$

Αξιοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τη λύση για το $\eta(2)$:

$$\begin{aligned} \eta(2) = & b_1 \left(b_2 |f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t} \right) \\ & + b'_1 \left(b'_2 |\eta|^2 + \eta^2 e^{-2im_\eta t} + \eta^{*2} e^{+2im_\eta t} \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Όπως και προηγουμένως για τον προσδιορισμό των σταθερών που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση, επιστρέφουμε στη διαφορική εξίσωση (4.76), η οποία έπειτα από αντικατάσταση των σχέσεων (4.78), (4.79) και (4.80), οδηγεί στο ακόλουθο σύστημα για τα b_1 , b'_1 , b_2 , b'_2 :

$$m_\eta^2 b_1 b_2 = -\frac{3g^2 v}{2} \quad (4.81)$$

$$m_\eta^2 b'_1 b'_2 = -6\lambda v \quad (4.82)$$

$$b_1(m_\eta^2 - 4m_A^2) = -\frac{3g^2 v}{4} \quad (4.83)$$

$$b'_1(m_\eta^2 - 4m_A^2) = -3\lambda v \quad (4.84)$$

Επιλύοντας το σύστημα και εισάγοντας το λόγο q των μαζών βρίσκουμε:

$$b_1 = -\frac{3}{v(q^2 - 4)} \quad (4.85)$$

$$b'_1 = -\frac{1}{2v} \quad (4.86)$$

$$b_2 = \frac{2(q^2 - 4)}{q^2} \quad (4.87)$$

$$b'_2 = -6 \quad (4.88)$$

Στο σημείο αυτό προκειμένου να διευκολυνθούμε στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν κρίνεται σκόπιμη η κατασκευή ενός συγκεντρωτικού πίνακα των σταθερών που υπολογίσαμε:

Συγκεντρωτικός πίνακας σταθερών

$b_1 = -\frac{3}{v(q^2-4)}$	$b'_1 = -\frac{1}{2v}$
$b_2 = \frac{2(q^2-4)}{q^2}$	$b'_2 = -6$
$a_1 = \frac{2}{vq(q+2)}$	$a_2 = \frac{2}{vq(q-2)}$
$m_A^2 = g^2 v^2 / 4$	$m_\eta^2 = 2\lambda v^2$
$q = \frac{m_\eta}{m_A}$	

Έχοντας τελειώσει με τη δεύτερη τάξη προχωράμε στη τρίτη τάξη ως προς ϵ στο διαταρακτικό ανάπτυγμα της θεωρίας διαταραχών των πολλαπλών κλιμάκων. Ξεκινάμε με το πεδίο βαθμίδας A . Όπως έχουμε κάνει και νωρίτερα έτσι και τώρα χωρίζουμε από την εξίσωση (4.65) τους αιώνιους όρους και απαιτούμε ξεχωριστά το μηδενισμό τους. Συνεπώς παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (\square_0 + m_A^2)A(3) + n.s.p. \left[2g^2 A^3(1) + \frac{g^2}{2} v\eta(1)A(2) \right. \\ \left. + \frac{g^2}{2} v\eta(2)A(1) + \frac{g^2}{4} \eta(1)^2 A(1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A(2) = 0 \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} (\square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2})A(1) + s.p. \left[2g^2 A^3(1) + \frac{g^2}{2} v\eta(1)A(2) \right. \\ \left. + \frac{g^2}{2} v\eta(2)A(1) + \frac{g^2}{4} \eta(1)^2 A(1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

Οι εξισώσεις (4.89) και (4.90) περιέχουν παραμέτρους που προσδιορίζονται σε μεγαλύτερη τάξη σε σχέση με τη μεγαλύτερη τάξη στην οποία θα προχωρήσουμε - δηλαδή τη τρίτη. Επικεντρωνόμαστε λοιπόν στην εξίσωση (4.91). Υπολογίζουμε κάθε όρο της εξίσωσης χωριστά προκειμένου να βρούμε τους αιώνιους όρους μέσα σε αυτά. Για τον όρο $A^3(1)$ έχουμε:

$$A^3(1) = f^3 e^{-3im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t} + 3|f|^2 f e^{-im_A t} + 3|f|^2 f^* e^{+im_A t} \quad (4.92)$$

Για τον όρο $\eta(1)A(2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta(1)A(2) = & a_1 h^2 f e^{-im_\eta t} e^{-i(m_A+m_\eta)t} + a_2 |h|^2 f e^{-im_\eta t} e^{-i(m_A-m_\eta)t} \\ & + a_1^* |h|^2 f^* e^{-im_\eta t} e^{+i(m_A+m_\eta)t} + a_2^* h^2 f^* e^{+i(m_A-m_\eta)t} \\ & + a_1^* h^{*2} f^* e^{+im_\eta t} e^{+i(m_A+m_\eta)t} + a_2^* |h|^2 f^* e^{+im_\eta t} e^{+i(m_A-m_\eta)t} \\ & + a_1 |h|^2 f e^{+im_\eta t} e^{-i(m_A+m_\eta)t} + a_2 \eta^{*2} f e^{+im_\eta t} e^{-i(m_A-m_\eta)t} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Ενώ για τον όρο $\eta(2)A(1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\eta(2)A(1) = & b_1 b_2 |f|^2 f e^{-im_A t} + b_1 f^3 f e^{-3im_A t} + b_1 |f|^2 f^* e^{+im_A t} \\
& + b'_1 b'_2 |h|^2 f e^{-im_A t} + b'_1 h^2 f e^{-im_A t} e^{-2im_\eta t} + b'_1 h^{*2} f e^{-im_A t} e^{+2im_\eta t} \\
& + b_1 b_2 |f|^2 f^* e^{+im_A t} + b_1 |f|^2 f e^{-im_A t} + b_1 f^{*3} f e^{+3im_A t} \\
& + b'_1 h^{*2} f^* e^{+im_A t} e^{+2im_\eta t} + b'_1 b'_2 |h|^2 f^* e^{+im_A t} \\
& + b'_1 h^2 f^* e^{+im_A t} e^{-2im_\eta t} + b_1 f^{*3} f e^{+3im_A t}
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Τέλος για τον όρο $\eta^2(1)A(1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\eta^2(1)A(1) = & 2|h|^2 f e^{-im_A t} + 2|h|^2 f^* e^{+im_A t} \\
& + h^2 f e^{-im_A t} e^{-2im_\eta t} + h^2 f^* e^{+im_A t} e^{-2im_\eta t} \\
& + h^{*2} f e^{-im_A t} e^{+2im_\eta t} + h^{*2} f^* e^{+im_A t} e^{+2im_\eta t}
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.89) αιώνιοι όροι θα είναι αυτοί που είναι ανάλογοι του $e^{\pm im_A t}$. Όμως όπως έχουμε αναφέρει εμείς από τις εξισώσεις (4.92), (4.93), (4.94) και (4.95) κρατάμε μόνο τους όρους $e^{-im_A t}$ και τους εισάγουμε στην εξίσωση (4.91), η οποία μετά από κάποιες πράξεις καταλήγει στην:

$$\left[-\nabla_1^2 - 2im_A \partial_{t_2} \right] f + 2g^2 \left[(3 + c_1(q)) |f|^2 + (c_2(q) - \frac{1}{2}) |\eta|^2 \right] f = 0 \tag{4.96}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μία από τις δύο εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για τη δημιουργία των προσεγγιστικών λύσεων του προτύπου.

Η άλλη έρχεται από την εξίσωση τρίτης τάξης του πεδίου Higgs, δηλαδή την (4.68). Γράφοντας και εδώ χωριστά τους αιώνιους όρους της έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \left(\square_0 + m_\eta^2 \right) \eta(3) + n.s.p \left[\frac{3g^2}{4} \eta(1)A^2(1) \right. \\
& \left. + \frac{6g^2}{4} vA(2)A(1) + 6\lambda v\eta(2)\eta(1) + \lambda\eta^3(1) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.97}$$

$$2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} \eta(2) = 0 \tag{4.98}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2} \right) \eta(1) + s.p \left[\frac{3g^2}{4} \eta(1)A^2(1) \right. \\
& \left. + \frac{6g^2}{4} vA(2)A(1) + 6\lambda v\eta(2)\eta(1) + \lambda\eta^3(1) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Όπως και πριν οι εξισώσεις (4.97) και (4.98) περιέχουν παραμέτρους που προσδιορίζονται σε μεγαλύτερη τάξη και δε θα μας απασχολήσουν. Συνεχίζουμε

υπολογίζοντας κάθε όρο της (4.99) προκειμένου να αναγνωρίσουμε τα κομμάτια που αποτελούν αιώνιους όρους της εξίσωσης. Για τον όρο $\eta^3(1)$ έχουμε:

$$\eta^3(1) = \eta^3 e^{-3im_\eta t} + \eta^{*3} e^{+3im_\eta t} + 3|\eta|^2 \eta e^{-im_\eta t} + 3|\eta|^2 \eta^* e^{+im_\eta t} \quad (4.100)$$

Για τον όρο $\eta(2)\eta(1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta(2)\eta(1) = & b_1 b_2 |f|^2 h e^{-im_\eta t} + b'_1 b'_2 |h|^2 h e^{-im_\eta t} + b'_1 |h|^2 h e^{-im_\eta t} \\ & + b'_1 h^{*3} e^{+3im_\eta t} + b'_1 h^3 e^{-3im_\eta t} + b_1 f^2 h e^{-2im_A t} e^{-im_\eta t} \\ & + b_1 f^{*2} h e^{+2im_A t} e^{-im_\eta t} + b'_1 |h|^2 h^* e^{+im_\eta t} + b'_1 b'_2 |h|^2 h^* e^{+im_\eta t} \\ & + b_1 b_2 |f|^2 h^* e^{+im_\eta t} + b_1 f^2 h^* e^{-2im_A t} e^{+im_\eta t} \\ & + b_1 f^{*2} h^* e^{+2im_A t} e^{+im_\eta t} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Για τον όρο $A^2(1)\eta(1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A^2(1)\eta(1) = & f^{*2} h e^{+2im_A t} e^{-im_\eta t} + f^{*2} h^* e^{+2im_A t} e^{+im_\eta t} + f^2 h e^{-2im_A t} e^{-im_\eta t} \\ & + 2|f|^2 \eta e^{-im_\eta t} + 2|f|^2 h^* e^{+im_\eta t} + f^2 h^* e^{-2im_A t} e^{+im_\eta t} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Για τον όρο $A(2)A(1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A(2)A(1) = & a_1 f^2 \eta e^{-i(m_A+m_\eta)t} e^{-im_A t} + a_2 f^2 h^* e^{-i(m_A-m_\eta)t} e^{-im_A t} \\ & + a_1^* h^* |f|^2 e^{-i(m_A+m_\eta)t} e^{-im_A t} + a_2^* h |f|^2 e^{+i(m_A-m_\eta)t} e^{-im_A t} \\ & + a_1 h |f|^2 e^{-i(m_A+m_\eta)t} e^{+im_A t} + a_2 h^* |f|^2 e^{-i(m_A-m_\eta)t} e^{+im_A t} \\ & + a_1^* f^{*2} h^* e^{+i(m_A+m_\eta)t} e^{+im_A t} + a_2^* f^{*2} h e^{+i(m_A-m_\eta)t} e^{+im_A t} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Όπως και προηγουμένως από τις σχέσεις (4.100), (4.101), (4.102) και (4.103) κρατάμε μόνο τους αιώνιους όρους, δηλαδή όρους ανάλογους του $e^{-im_\eta t}$ και τους εισάγουμε στην εξίσωση κίνησης (4.99) καταλήγοντας στην ακόλουθη σχέση:

$$\left[-\nabla_1^2 - 2im_\eta \partial_{t_2} \right] h - 12\lambda \left[|h|^2 + \frac{3|f|^2}{q^2} \right] h + \frac{3g^2}{2} [1 + 4c_2(q)] |f|^2 h = 0 \quad (4.104)$$

όπου

$$c_2(q) = \frac{1}{q^2 - 4} \quad (4.105)$$

Η εξίσωση (4.104) αποτελεί την δεύτερη εξίσωση με βάση την οποία φτιάχνουμε τις προσεγγιστικές μας λύσεις. Παρατηρώντας τις εξισώσεις (4.96) και (4.104) βλέπουμε πως αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων μη γραμμικών εξισώσεων Schrödinger.

4.5 Κυματικές Λύσεις και Ευστάθεια

Στη προηγούμενη ενότητα βρήκαμε τις δύο εξισώσεις από τις οποίες θα φτιάξουμε τις προσεγγιστικές μας λύσεις για το σύστημα εξισώσεων (4.18) και (4.19). Ξαναγράφουμε αυτές τις εξισώσεις σε συμπαγέστερη μορφή:

$$\left[i\partial_{t_2} + \frac{1}{2m_A} \nabla_1^2 - \left(g_{11} |f|^2 + g_{12} |h|^2 \right) \right] f = 0 \quad (4.106)$$

$$\left[i\partial_{t_2} + \frac{1}{2m_\eta} \nabla_1^2 - \left(g_{21} |f|^2 + g_{22} |h|^2 \right) \right] h = 0 \quad (4.107)$$

όπου τα g_{ij} που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις είναι τα ακόλουθα:

$$g_{11} = \frac{g^2}{m_A} (3 + c_1(q)) \quad (4.108)$$

$$g_{12} = \frac{g^2}{4m_A} (-3 + c_2(q)) \quad (4.109)$$

$$g_{21} = \frac{3g^2}{4m_\eta} (-3 + c_2(q)) \quad (4.110)$$

$$g_{22} = -\frac{3g^2}{4m_\eta} q^2 \quad (4.111)$$

Το σύστημα των εξισώσεων που παρουσιάσαμε δέχεται επίπεδες κυματικές λύσεις. Αυτές είναι οι:

$$f(\vec{x}_1, t_2) = f_0 \exp \left[-i \left(\omega_f t_2 - \vec{k}_f \vec{x}_1 \right) \right] \quad (4.112)$$

$$h(\vec{x}_1, t_2) = h_0 \exp \left[-i \left(\omega_h t_2 - \vec{k}_h \vec{x}_1 \right) \right] \quad (4.113)$$

με τα ω_f και ω_h να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\omega_f = \frac{\vec{k}_f^2}{2m_A} + g_{11} |f_0|^2 + g_{12} |h_0|^2 \quad (4.114)$$

$$\omega_h = \frac{\vec{k}_h^2}{2m_\eta} + g_{21} |f_0|^2 + g_{22} |h_0|^2 \quad (4.115)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και τις (4.69), (4.70) και (4.62) κατασκευάζουμε τις προτεινόμενες προσεγγιστικές λύσεις για το σύστημα εξισώσεων (4.18) και (4.19).

Τώρα που έχουμε μιλήσει για τη κατασκευή των προσεγγιστικών μας λύσεων προχωράμε στη μελέτη της ευστάθειάς τους. Θα κάνουμε γραμμική ανάλυση ευστάθειας, όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία [12, 13]. Ξεκινάμε διαταράσσοντας τις λύσεις f και h :

$$f \rightarrow f' = f + \delta f \quad (4.116)$$

$$h \rightarrow h' = h + \delta h \quad (4.117)$$

και εισάγοντας τη διαταραχή στις εξισώσεις (4.106) και (4.107):

$$i\partial_{t_2}(f + \delta f) + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2(f + \delta f) - [g_{11}|f + \delta f|^2 + g_{12}|h + \delta h|^2](f + \delta f) = 0 \quad (4.118)$$

$$i\partial_{t_2}(h + \delta h) + \frac{1}{2m_\eta}\nabla_1^2(h + \delta h) - [g_{21}|f + \delta f|^2 + g_{22}|h + \delta h|^2](h + \delta h) = 0 \quad (4.119)$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις και κρατώντας όρους μόνο γραμμικούς ως προς τις διαταραχές δf και δh έχουμε:

$$i\partial_{t_2}\delta f + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2\delta f - [g_{11}(f^2\delta f^* + 2|f|^2\delta f) + g_{12}(|h|^2\delta f + hf\delta h^* + h^*f\delta h)] = 0 \quad (4.120)$$

$$i\partial_{t_2}\delta h + \frac{1}{2m_\eta}\nabla_1^2\delta h - [g_{21}(|f|^2\delta h + fh\delta f^* + f^*h\delta f) + g_{22}(2|h|^2\delta h + h^2\delta h^*)] = 0 \quad (4.121)$$

Όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα δουλεύουμε στο σύστημα ηρεμίας του πεδίου βαθμίδας συνεπώς θεωρούμε πως βρισκόμαστε σε στατικό υπόβαθρο, δηλαδή στις σχέσεις ορισμού των f και h , (4.112) και (4.113), θεωρούμε πως:

$$\vec{k}_f = \vec{k}_h = 0 \quad (4.122)$$

Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις για τη μορφή των διαταραχών δf και δh θεωρούμε την ακόλουθη μορφή:

$$\delta f = R_f e^{-i\omega_f t} \quad (4.123)$$

$$\delta h = R_h e^{-i\omega_h t} \quad (4.124)$$

Συνεπώς για τις εξισώσεις (4.120) και (4.121) έχουμε:

$$i\partial_{t_2}R_f + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2R_f - [g_{11}f_0^2(R_f + R_f^*) + g_{12}h_0f_0(R_h + R_h^*)] = 0 \quad (4.125)$$

$$i\partial_{t_2}R_h + \frac{1}{2m_\eta}\nabla_1^2R_h - [g_{21}h_0f_0(R_f + R_f^*) + g_{22}h_0^2(R_h + R_h^*)] = 0 \quad (4.126)$$

Οι παράμετροι R_f και R_h που περιγράφουν τις διαταραχές είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί, δηλαδή:

$$R_f = u_1 + iv_1 \quad (4.127)$$

$$R_h = u_2 + iv_2 \quad (4.128)$$

Εισάγοντάς τες στις εξισώσεις (4.125) και (4.126) παίρνουμε:

$$i(\partial_{t_2} u_1 + i\partial_t v_1) + \frac{1}{2m_A}(\nabla_1^2 u_1 + i\nabla_1^2 v_1) - [2g_{11}f_0^2 u_1 + 2g_{12}h_0 f_0 u_2] = 0 \quad (4.129)$$

$$i(\partial_{t_2} u_2 + i\partial_t v_2) + \frac{1}{2m_\eta}(\nabla_1^2 u_2 + i\nabla_1^2 v_2) - [2g_{21}h_0 f_0 u_1 + 2g_{22}h_0^2 u_2] = 0 \quad (4.130)$$

Χωρίζοντας σε πραγματικά και φανταστικά μέρη κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στις επόμενες τέσσερις εξισώσεις:

$$-\partial_{t_2} v_1 + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2 u_1 - [2g_{11}f_0^2 u_1 + 2g_{12}h_0 f_0 u_2] = 0 \quad (4.131)$$

$$\partial_{t_2} u_1 + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2 v_1 = 0 \quad (4.132)$$

$$-\partial_{t_2} v_2 + \frac{1}{2m_\eta}\nabla_1^2 u_2 - [2g_{21}h_0 f_0 u_1 + 2g_{22}h_0^2 u_2] = 0 \quad (4.133)$$

$$\partial_{t_2} u_2 + \frac{1}{2m_\eta}\nabla_1^2 v_2 = 0 \quad (4.134)$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $u_{1,2}$ και $v_{1,2}$ εκφράζουν τη διαταραχή που εφαρμόζουμε. Επιλέγουμε λοιπόν να τα γράψουμε ως εξής:

$$u_{1,2} = u_{01,2} e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + c.c \quad (4.135)$$

$$v_{1,2} = v_{01,2} e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + c.c \quad (4.136)$$

Εισάγοντάς τα τώρα στις εξισώσεις (4.131), (4.132), (4.133) και (4.134) βρίσκουμε:

$$-\left[\frac{Q^2}{2m_A} + 2g_{11}f_0^2 \right] u_{01} + i\Omega v_{01} - 2g_{12}f_0 h_0 u_{02} = 0 \quad (4.137)$$

$$-i\Omega u_{01} - \frac{Q^2}{2m_A} v_{01} = 0 \quad (4.138)$$

$$-\left[\frac{Q^2}{2m_\eta} + 2g_{22}h_0^2 \right] u_{02} + i\Omega v_{02} - 2g_{21}f_0 h_0 u_{01} = 0 \quad (4.139)$$

$$-i\Omega u_{02} - \frac{Q^2}{2m_\eta} v_{02} = 0 \quad (4.140)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων αλγεβρικών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους. Όπως έχουμε αναφέρει θέλουμε το ομογενές αυτό

σύστημα να έχει μη τετριμμένες λύσεις. Συνεπώς απαιτούμε να μηδενίζεται η ορίζουσά του.

$$\det \begin{bmatrix} -(\frac{Q^2}{2m_A} + 2g_{11}f_0^2) & i\Omega & -2g_{12}f_0h_0 & 0 \\ -i\Omega & -\frac{Q^2}{2m_A} & 0 & 0 \\ -2g_{21}f_0h_0 & 0 & -(\frac{Q^2}{2m_\eta} + 2g_{22}h_0^2) & i\Omega \\ 0 & 0 & -i\Omega & -\frac{Q^2}{2m_\eta} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.141)$$

Υπολογίζοντας τη παραπάνω ορίζουσα καταλήγουμε στο τριώνυμο:

$$\Omega^4 - \beta\Omega^2 + \gamma = 0 \quad (4.142)$$

όπου έχουμε ορίσει ως β και γ τα ακόλουθα:

$$\beta = p_\eta d_\eta + p_A d_A \quad (4.143)$$

$$\gamma = p_\eta p_A d_\eta d_A - 4p_\eta p_A f_0^2 h_0^2 g_{12} g_{21} \quad (4.144)$$

ενώ ως p_η , p_A , d_η και d_A γράφουμε:

$$p_\eta = \frac{Q^2}{2m_\eta} \quad (4.145)$$

$$p_A = \frac{Q^2}{2m_A} \quad (4.146)$$

$$d_\eta = p_\eta + 2(h_0)^2 g_{22} \quad (4.147)$$

$$d_A = p_A + 2(f_0)^2 g_{11} \quad (4.148)$$

Από τον ορισμό τους φαίνεται ότι τα p_η και p_A ανήκουν στο διάστημα $[0, \infty)$. Αλγεβρική ανάλυση της εξίσωσης (4.142) αποκαλύπτει πως για να έχουμε μόνο πραγματικές λύσεις για το Ω πρέπει να είναι $\beta > 0$ και $\gamma > 0$. Από τις προηγούμενες εξισώσεις, μετά από κάποιες απαραίτητες πράξεις, καταλήγουμε σε τρεις ανισότητες που πρέπει να τηρούνται προκειμένου να είναι ευσταθείς οι επίπεδες μη γραμμικές λύσεις που εξετάσαμε. Αυτές είναι:

$$g_{11} > 0 \quad (4.149)$$

$$g_{22} > 0 \quad (4.150)$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} > 0 \quad (4.151)$$

Ελέγχοντας τις απαιτήσεις των παραπάνω εξισώσεων μέσω των τύπων (4.108), (4.109), (4.110) και (4.111) βλέπουμε πως η δεύτερη και η τρίτη ανίσωση δεν αληθεύουν για καμία τιμή της παραμέτρου q . Συνεπώς οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως οι μη γραμμικές επίπεδες κυματικές λύσεις είναι ασταθείς στη περίπτωση του «ισχυρού» πεδίου Higgs.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο κάνουμε μία ανασκόπηση της πορείας αυτής της εργασίας και παραθέτουμε τα βασικά μας συμπεράσματα. Βασικός σκοπός μας υπήρξε η αναζήτηση κλασικών λύσεων σε φυσικά συστήματα που περιγράφονται από αυθόρμητη παραβίαση τοπικής συμμετρίας. Μελετήσαμε δύο συστήματα, ένα όπου είχαμε αβελιανή τοπική συμμετρία (πρότυπο $U(1)$ -Higgs) και ένα όπου είχαμε μη αβελιανή τοπική συμμετρία (πρότυπο $SU(2)$ -Higgs). Οι εξισώσεις κίνησης των συστημάτων αυτών είναι πολύ πολύπλοκες για να λυθούν αναλυτικά [βλ. εξ. (2.13) και εξ. (4.18)-(4.19)]. Γι' αυτό χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων προκειμένου να βρούμε προσεγγιστικές λύσεις. Γνωρίζουμε πως αυτές οι προσεγγιστικές λύσεις δε θ' αποτελούν τη γενική λύση των εν λόγω συστημάτων γι' αυτό η μελέτη μας εξ' αρχής είναι προσανατολισμένη στην αναζήτηση ειδικών λύσεων. Στη συνέχεια εξετάσαμε αναλυτικά την ευστάθεια αυτών των λύσεων. Επιπλέον στη περίπτωση του προτύπου $U(1)$ -Higgs μελετήσαμε τις προτεινόμενες λύσεις και αριθμητικά, δηλαδή μελετήσαμε την αριθμητική επαλήθευσή τους και τη γραμμική τους ευστάθεια στο πλήρες σύστημα.

Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων απλοποιεί πολύ τις εξισώσεις που έχουμε να λύσουμε. Μας οδηγεί σε εξισώσεις από την οικογένεια της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger της οποίας οι λύσεις είναι εν μέρει γνωστές. Από αυτές κατασκευάζουμε τις προτεινόμενες προσεγγιστικές λύσεις για τα συστήματα που μελετάμε. Από τα μη γραμμικά κύματα της εξίσωσης NLS κατασκευάζουμε μη γραμμικές κυματικές λύσεις για τα πρότυπα $U(1)$ -Higgs και $SU(2)$ -Higgs και εξετάζουμε αναλυτικά την ευστάθειά τους.

Στη περίπτωση του προτύπου $SU(2)$ -Higgs μελετάμε δύο περιπτώσεις. Αυτή της υπόθεσης ασθενούς πεδίου Higgs και αυτή του ισχυρού πεδίου Higgs οι οποίες μας προτείνουν διαφορετικές ειδικές λύσεις για το ίδιο πλήρες σύστημα. Στη περίπτωση του ισχυρού πεδίου Higgs βρήκαμε πως οι μη γραμμικές κυματικές λύσεις είναι ασταθείς κάτω από διαταραχή οποιουδήποτε κυματαριθμού. Αντίθετα στη περίπτωση του ασθενούς πεδίου Higgs βρίσκουμε πως υπό προϋποθέσεις τα οι μη γραμμικές κυματικές λύσεις είναι ευσταθείς. Από αυτή τη

μελέτη ευστάθειας βρίσκουμε την αποδεκτή περιοχή τιμών μάζας για το πεδίο Higgs (ανισώσεις (4.59) και (4.60)) του προτύπου ώστε τα μη γραμμικά κύματα που (κλασικά) περιγράφουν κυματικές λύσεις να είναι ευσταθή.

Στη περίπτωση του προτύπου $U(1)$ -Higgs η μελέτη ευστάθειας των μη γραμμικών κυματικών λύσεων μας έδειξε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτά είναι ασταθή. Μελετώντας αριθμητικά το πρόβλημα παρατηρήσαμε πως όταν αυτές οι προϋποθέσεις ίσχυαν το σύστημα μας εκδήλωνε αστάθεια διαμόρφωσης. Κατά την αστάθεια διαμόρφωσης παρατηρήσαμε την αυθόρμητη δημιουργία ταλαντώνων. Τα ταλαντώνια που δημιουργήθηκαν είχαν τη μορφή μίας από τις λύσεις που προτείναμε για το πρότυπο $U(1)$ -Higgs, της φωτεινής σολιτονικής λύσης. Η φωτεινή σολιτονική λύση μελετήθηκε, επαληθεύει το πλήρες σύστημα εξισώσεων του προτύπου και προέκυψε ευσταθής κατά την αριθμητική μελέτη γραμμικής ευστάθειας. Αντίθετα η σκοτεινή σολιτονική λύση και οι ελλειπτικές περιοδικές λύσεις βρέθηκαν να μην επαληθεύουν αριθμητικά το πλήρες σύστημα εξισώσεων του προτύπου. Όμως η λύση συνημιτόνου Jacobi κατά τη καταστροφή της εκδήλωσε το φαινόμενο της αστάθειας διαμόρφωσης κατά την οποία εμφανίστηκαν ταλαντώνια με τη μορφή της φωτεινής σολιτονικής λύσης που προτείναμε.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να πούμε πως η δυνατότητα αριθμητικής μελέτης μας έδωσε τη δυνατότητα να μελετήσουμε το σύστημα με τρόπο που συμπλήρωνε την αναλυτική μας μελέτη. Σίγουρα μία πλήρης αναλυτική επίλυση των εξισώσεων κίνησης θα μας έδινε όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε. Αλλά απ' τη στιγμή που αυτό δεν είναι εφικτό και τα αναλυτικά μας εργαλεία μας δίνουν πολύ λιγότερες πληροφορίες η αριθμητική μελέτη του προβλήματος αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο στην κατανόηση της συμπεριφοράς ενός συστήματος που διέπεται από σύστημα εξισώσεων κίνησης με μη γραμμικό χαρακτήρα.

Η ευστάθεια της φωτεινής σολιτονικής λύσης σε συνδυασμό με την εμφάνισή της ως αυθόρμητο ταλαντώνιο κατά την εκδήλωση αστάθειας διαμόρφωσης από το σύστημα επαληθεύει την ισχύ της προσεγγιστικής μας μεθόδου για το πλήρες σύστημα. Το ίδιο συμβαίνει και με το γεγονός ότι στο πρότυπο $U(1)$ -Higgs τα πεδία θα αποκλίνουν κατά την εξέλιξη της αριθμητικής προσομοίωσης μόνο στη περίπτωση όπου η αναλυτική μας μελέτη μας λέει πως οι διαταραχές θα παρουσιάσουν εκθετική αύξηση. Οι επιτρεπτές τιμές της παραμέτρου g , του λόγου των μαζών των πεδίων, προκύπτουν από το ανάπτυγμα της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων. Από το πλήρες σύστημα δεν έχουμε κανένα λόγο να υποθέσουμε πως το πλήρες σύστημα των εξισώσεων κίνησης του προτύπου παρουσιάζει τέτοια εξάρτηση στη συμπεριφορά του ως προς τις τιμές της g . Κατά συνέπεια μπορούμε να πούμε πως η χρήση της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων αποτέλεσε χρήσιμο και πολύτιμο οδηγό στη μελέτη και κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων των εξισώσεων κίνησης του προτύπου $U(1)$ -Higgs.

Παράρτημα Α΄

Ο Κώδικας MATLAB και πως επηρεάζει την Αριθμητική Μελέτη.

Α΄.1 Παράθεση του κώδικα

```
% The main program to evolve the equations of motion with the Runge–Kutta 4
% and the pseudospectral method.
% Documentation:
% 1) Evolves the dimensionless equations for the higgs (u2) and vector (u1)
% fields.
% 2) Define the equations of motion to be evolved in time by choosing the
% appropriate values for the constants before each term:
% a1*u1_tt+b1*u1_xx+c1*|u1|^2u1+d1*u1+l1*|u2|^2*u1+q1*u1*u2=0.
% a2*u2_tt+b2*u2_xx+c2*|u2|^2u2+d2*u2+l2*|u1|^2*u2+q2*u1*u2+c22*u2^2+q1*u1^2=0
% 3) Before running the script edit the Simulation Parameters section to
% define simulation parameters enabling/disabling appropriate features.

%% Simulation Parameters Selection
% Chose values for the appropriate parameters of the simulation before
% running the script.

BoundaryOption=0;
%0 for free endpoints
%1 for fixed endpoints

SolutionOption=6;
%1 for sn
%2 for cn
%3 for sin
%4 for cos
%5 for bright soliton
%6 for static plane wave
```

```

ep=0.1; % from Definitions #1 (perturbation parameter)
kjac=0.95; % Parameter running from [0,1]
kappa=1; % Wavenumber for sinusoidal waves and "more"!

NoiseOption=1;
%1 for Enabled Noise
%0 for Disabled Noise

qu=1.4; % from Definitions #2

RunMode=1;
% 0 for Test Run – Does not save and has tmax=tplot
% 1 for Full Run
% 2 for manual hardcoded setting

FullRunTime=490; % Numerical evolution time for RunMode==1

tplot=0.1; %Determines time step for data acquisition!

tplot2=10; % from Definitions #6
% Determines time step length for time evolution.
% Care in changing it's operation within the script.
% dt=tplot/tplot2
% Check with dx in definition section to have appropriate numerical
% stability conditions.

ErrorCheck=1;
% Checks if function starts to diverge
% 1 to enable Check
% 0 to disable Check
% Note: A divergence Check based on endata would probably be more efficient
% computationally.

ErrorLimit=10;
% Limit for max(abs(u1)) to trigger error for u1 divergence

SaveFile=1;
% 0 to NOT save a data file
% 1 to save a data file

FileName='q14-1+r-t490-ep01-Code17c'; % Write appropriate Name

%% Definitions Section:

%%0-Timing
% Enable/Comment out
% Also enable/comment out toc at script's end
tic;
if RunMode==1
    tmax=FullRunTime;
elseif RunMode==0
    tmax=tplot;

```



```

        tplot=tplot/50;
        tplot2=tplot2/50;
elseif RunMode==2
    tmax=10; %For manual tmax setting
end
%1-grid definitions:

%1a-grid prerequisites

if SolutionOption==1 || SolutionOption==2
    mjac=kjac^2;
    pjac=1/kjac;
    root1=abs(fzero(@(x) cnj(pjac*ep*x,mjac),pjac*ep*2));
elseif SolutionOption==3 || SolutionOption==4
    root1=abs(fzero(@(x) cos(kappa*ep*x),kappa*ep*(pi-0.1)/2));
end

%% "Automatic" Selection of L and N
if SolutionOption<=4
    L=4*root1*10;
    N=640;
    dx=L/N;
    while dx>0.21 && N<4096
        N=N+128;
        dx=L/N;
    end

    while dx>0.21
        L=L-4*root1;
        dx=L/N;
    end
    if L<4*root1*4
        error('Numerical:PseudoSpectral',
            'For selected parameters grid length L is not large enough.');
```

```

ka1=[0:N/2 -N/2+1:-1]'*2*pi/L;
ka2=ka1.^2;

%%2-Set constants to properly define the equations
% The constants (except a1,a2) have the opposite value because they "have
% been moved to the other side of the equation" in order to define X_{tt}

a1=1;
b1=1;
c1=0;
d1=-1;
l1=-1;
q1=-2;
a2=1;
b2=1;
c2=-0.5*qu^2;
d2=-qu^2;
l2=-1;
q2=0;
c22=-3*qu^2/(2);
q1=-1;

%%3-Noise section
a=1;
b=-1;
r=a+(b-a).*rand(1,length(x))';
% %rtot=sum(r)/N;

%%4-Initial Conditions

S=(3*qu^2-8)/(qu^2*(qu^2-4));
Atilde=-1/(qu^2-4);
bt=2*(qu^2-4)/qu^2;

if SolutionOption==1 || SolutionOption==2
    [sn, cn, dn]=ellipj(pjac*ep*x,mjac);
    AInitial=[sn, cn, dn];
    ef=(1/sqrt(abs(S)))*(AInitial(:,SolutionOption)+0.1*NoiseOption*r);
elseif SolutionOption==3
    ef=(1/sqrt(abs(S)))*(sin(ep*kappa*x)+0.1*NoiseOption*r);
elseif SolutionOption==4
    ef=(1/sqrt(abs(S)))*(cos(ep*kappa*x)+0.1*NoiseOption*r);
elseif SolutionOption==5
    ef=(kappa/sqrt(abs(S)))*(sech(kappa*ep*x)+0.1*NoiseOption*r);
elseif SolutionOption==6
    ef=(kappa/sqrt(abs(S)))*(ones(N,1)+0.1*NoiseOption*r);
end

A1=ef+conj(ef);
u1=ep.*A1;
v1=zeros(N,1);

```

```

H2=(Atilde).* (bt.*abs(ef).^2+ef.^2+conj(ef.^2));
u2=1.*ep^2*H2;
vv2=zeros(N,1);

%%% Boundary conditions!!!
if BoundaryOption==1
    u1(1)=0;
    u2(1)=0;
    u1(end)=0;
    u2(end)=0;
end

%%5-Hamiltonian

% Kinetic Term
At=vv1;
Ht=vv2;
tu1=u1';
tu2=u2';
Axi=diff(tu1,1); par1=[Axi 0]./dx;Axi=par1';
Hxi=diff(tu2,1); par2=[Hxi 0]./dx;Hxi=par2';
% V-term
V=1/8*qu^2.*u2.^4+0.5*qu^2.*u2.^3+0.5*qu^2.*u2.^2+0.5.*u2.^2.*u1.^2
+u2.*u1.^2+0.5.*u1.^2;

% H=T+V
Ham=0.5.*At.^2+0.5.*Axi.^2+0.5.*Ht.^2+0.5.*Hxi.^2+V;
energy=sum(Ham'.*dx);

%%6-Plot prerequisites

u1data=zeros(N,(nmax/tplot2)+1);
u2data=zeros(N,(nmax/tplot2)+1);
tdata=zeros(1,(nmax/tplot2)+1);
hamdata=zeros(N,(nmax/tplot2)+1);
endata=zeros(1,(nmax/tplot2)+1);

% Initial Conditions:
u1data(:,1)=u1;
u2data(:,1)=u2;
endata(1,1)=energy;
tdata(1,1)=0;
hamdata(:,1)=Ham;

%%7-Numerical Stability Test
Ncrit=2*sqrt(2)/(pi^2);
Ntest=dt/(dx^2);
Nstab=Ntest-Ncrit;

%%% Aborts the program if numerical stability conditions are not met.

if Nstab >= 0

```

```

fprintf( 'dx=%4.8f\nL=%4.8f\ndt=%4.8f\n',dx,L,dt);
error('Numerical:PseudStab',
      'Pseudospectral Method Stability conditions are not met!')
end

%% Loop:

for nn=1:nmax
%% Runge–Kutta 4 section

%%%%% Ta k tou Runge %%%%%
%%% k1 tou u1 %%%%
k11=dt.*vv1;
Fu1=ifft(-ka2.*b1.*fft(u1))+c1*u1.*u1.*conj(u1)+d1.*u1+l1*u1.*u2.*conj(u2)
      +q1*u1.*u2;

k12=dt.*Fu1;
%%%%%%%%%%%%%%
%%% k1 tou u2 %%%%
k13=dt.*vv2;
Fu2=ifft(-ka2.*b2.*fft(u2))+c2*u2.*u2.*conj(u2)+d2.*u2+l2*u1.*u2.*conj(u1)
      +q2*u1.*u2+c22*u2.^2+q1*u1.^2;

k14=dt.*Fu2;
%%%%%%%%%%%%%%
%%% ta proxorimena u,v %%%%%%%%%5
%vv1=vv1+0.5.*k12;
v1=u1+0.5*k11;
%vv2=vv2+0.5.*k14;
v2=u2+0.5*k13;
%%%%%%%%%%%%%% k2 tou u1 %%%%%%%%%
k21=dt.*(vv1+0.5.*k12);
Fu1=ifft(-ka2.*b1.*fft(v1))+c1*v1.*v1.*conj(v1)+d1.*v1+l1*v1.*v2.*conj(v2)
      +q1*v1.*v2;

k22=dt.*Fu1;
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%% k2 tou u2 %%%%%%%%%
k23=dt.*(vv2+0.5.*k14);
Fu2=ifft(-ka2.*b2.*fft(v2))+c2*v2.*v2.*conj(v2)+d2*v2+l2*v1.*v2.*conj(v2)
      +q2*v1.*v2+c22*v2.^2+q1*v1.^2;

k24=dt.*Fu2;
%%%%%%%%%%%%%%
%%% ta proxorimena u,v %%%%%%%%%5
%vv1=vv1+0.5.*k22;
v1=u1+0.5*k21;
%vv2=vv2+0.5.*k24;
v2=u2+0.5*k23;
%%%%%%%%%%%%%% k3 tou u1 %%%%%%%%%
k31=dt.*(vv1+0.5.*k22);
Fu1=ifft(-ka2.*b1.*fft(v1))+c1*v1.*v1.*conj(v1)+d1.*v1+l1*v1.*v2.*conj(v2)
      +q1*v1.*v2;

k32=dt.*Fu1;
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%% k3 tou u2 %%%%%%%%%

```

```

k33=dt.*(vv2+0.5.*k24);
Fu2=ifft(-ka2.*b2.*fft(v2))+c2*v2.*v2.*conj(v2)+d2*v2+l2*v1.*v2.*conj(v2)
                                         +q2*v1.*v2+c22*v2.^2+q1*v1.^2;

k34=dt.*Fu2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% ta proxorimena u,v %%%%%%%%%5
%vv1=vv1+k32;
v1=u1+k31;
%vv2=vv2+k34;
v2=u2+k33;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% k4 tou u1 %%%%%%%%%
k41=dt.*(vv1+k32);
Fu1=ifft(-ka2.*b1.*fft(v1))+c1*v1.*v1.*conj(v1)+d1.*v1+l1*v1.*v2.*conj(v2)
                                         +q1*v1.*v2;

k42=dt.*Fu1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% k4 tou u2 %%%%%%%%%
k43=dt.*(vv2+k34);
Fu2=ifft(-ka2.*b2.*fft(v2))+c2*v2.*v2.*conj(v2)+d2*v2+l2*v1.*v2.*conj(v2)
                                         +q2*v1.*v2+c22*v2.^2+q1*v1.^2;

k44=dt.*Fu2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% to evolution tou Runge %e%%%%%%%%
u1=u1+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
vv1=vv1+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
u2=u2+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
vv2=vv2+(k14+2*k24+2*k34+k44)/6;

%% Boundary conditions!!!
if BoundaryOption==1
    u1(1)=0;
    u2(1)=0;
    u1(end)=0;
    u2(end)=0;
end

%% Divergence Check
if ErrorCheck==1
    if max(abs(u1))> ErrorLimit
        fprintf('Script will abort, manually plot current data and save.\n');
        error('Numerical:Divergence','Function starts to diverge!');
    end
end

%% Extract Plot data section

if mod(nn,tplot2) == 0

%Hamiltonian-subsection
% Kinetic Term
At=vv1;
Ht=vv2;
tul=u1';

```

```

tu2=u2';
Axi=diff(tu1,1); par1=[Axi 0]./dx;Axi=par1';
Hxi=diff(tu2,1); par2=[Hxi 0]./dx;Hxi=par2';
% V-term
V=1/8*qu^2.*u2.^4+0.5*qu^2.*u2.^3+0.5*qu^2.*u2.^2+0.5.*u2.^2.*u1.^2
                                     +u2.*u1.^2+0.5.*u1.^2;
%H=T+V
Ham=0.5.*At.^2+0.5.*Axi.^2+0.5.*Ht.^2+0.5.*Hxi.^2+V;
energy=sum(Ham'.*dx);

%Extract Data
uldata(:,(nn/tplot2)+1)=u1;
u2data(:,(nn/tplot2)+1)=u2;
tdata(1,(nn/tplot2)+1)=nn*dt;
hamdata(:,(nn/tplot2)+1)=Ham;
endata(1,(nn/tplot2)+1)=energy;
end;

%Show Progress
if mod(nn,10*tplot2) == 0

    fprintf('tdata=%4.1f endata=%4.8f\n',nn*dt,energy);
end
end

runtime=toc; %Comment out together with tic #Def 0

figure(1)
subplot(3,1,1);imagesc(tdata,x,uldata);
xlabel('t', 'fontsize', 14);
ylabel('x', 'fontsize', 14);
colorbar;
subplot(3,1,2);imagesc(tdata,x,u2data);
xlabel('t', 'fontsize', 14);
ylabel('x', 'fontsize', 14);
colorbar;
subplot(3,1,3);imagesc(tdata,x,hamdata);
xlabel('t', 'fontsize', 14);
ylabel('x', 'fontsize', 14);
colorbar;

if SaveFile==1 && RunMode==1
save(FileName,'tdata','uldata','u2data','endata','x','dx','dt','runtime',
                                     'N','L','hamdata');
end

%% Run Notes:

```

Α'.2 Η Συντακτική Δομή του κώδικα

Ο παραπάνω κώδικας είναι αυτός που χρησιμοποιήσαμε για την αριθμητική επαλήθευση των προτεινόμενων λύσεων¹ είναι χωρισμένος σε τρία κομμάτια. Το πρώτο κομμάτι ονομάζεται Τμήμα Παραμέτρων Προσομοίωσης. Το δεύτερο κομμάτι Τμήμα ορισμών και το τρίτο είναι ο Επαναλαμβανόμενος Βρόγχος.

Στο Τμήμα Παραμέτρων Προσομοίωσης είναι συγκεντρωμένα όλα τα στοιχεία που χρειάζεται να αλλάξουμε πριν εκτελέσουμε το πρόγραμμα. Αυτό βοηθάει στον έλεγχο του κώδικα πριν την έναρξη της προσομοίωσης μαζεύοντας όλα τα πράγματα που πρέπει να ελέγξουμε σε ένα σημείο ώστε να μειώσουμε τη πιθανότητα να μας διαφύγει κάτι.

Ο αυτοματισμός που επετεύχθη με τη συγκέντρωση των παραμέτρων της προσομοίωσης στην αρχή του κώδικα έχει όμως και το κόστος του. Αυξάνει τη περιπλοκότητα του προγράμματος απαιτώντας περισσότερο χρόνο για την εκτέλεσή του. Βέβαια αυτή η αύξηση είναι μικρή σε σχέση με το χρόνο που χρειάζεται το πρόγραμμα για να τρέξει μια πλήρη προσομοίωση συνεπώς δε μας ενοχλεί ιδιαίτερα. Από την άλλη όμως αυξάνει τη μελέτη που χρειάζεται όταν θέλουμε να προσθέσουμε κάποια καινούρια δυνατότητα στο κώδικα ή να τρέξουμε κάτι που είναι διαφορετικό με τρόπο που δεν έχουμε εκ των προτέρων ενσωματώσει στο πρόγραμμα. Σε αυτή τη περίπτωση μπορούμε είτε να τρέξουμε κάποια παλιότερη - και άρα λιγότερη πολύπλοκη - έκδοση του κώδικα τροποποιώντας τη κατά περίπτωση εκείνη τη στιγμή. Εάν όμως πρόκειται για κάποια δυνατότητα που θα χρησιμοποιούμε συχνά τότε αξίζει να ενσωματωθεί πλήρως στις δυνατότητες του κώδικα ώστε η χρήση της να γίνεται «αυτοματοποιημένα» κερδίζοντας χρόνο.

Στο τμήμα ορισμών φτιάχνουμε όλες εκείνες τις μεταβλητές και τις παραμέτρους πάνω στις οποίες θα γίνει η προσομοίωση. Χωρίζεται σε 7 επιμέρους κομμάτια. Πρώτα είναι το πλέγμα πάνω στο οποίο θα γίνει η προσομοίωση. Εδώ υπάρχει και ένα κριτήριο για το μήκος του πλέγματος, L , για τη σημασία του οποίου θα μιλήσουμε στην επόμενη ενότητα. Μετά ακολουθεί το κομμάτι όπου έχουμε τις σταθερές που καθορίζουν το σύστημα εξισώσεων που επιλύει το πρόγραμμα. Έπειτα βρίσκεται το κομμάτι που δημιουργεί το θόρυβο που χρησιμοποιούμε για να ελέγξουμε την ευστάθεια των λύσεων. Στη συνέχεια βρίσκεται το κομμάτι που φτιάχνει τις αρχικές συνθήκες και μετά το κομμάτι που υπολογίζει την αρχική ενέργεια που αντιστοιχεί σε αυτές τις αρχικές συνθήκες. Το 6^ο κομμάτι φτιάχνει τις μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν για την αποθήκευση των δεδομένων της προσομοίωσης. Τέλος έχουμε ένα

¹Ο κώδικας αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλες τις λύσεις που αναφέραμε στην εργασία εκτός από αυτή του σκοτεινού σολιτονίου. Η συγκεκριμένη προτεινόμενη λύση δε μπορεί να μελετηθεί με το συγκεκριμένο κώδικα εξαιτίας της χρήσης της ψευδοφασματικής μεθόδου για τον υπολογισμό της παραγώγου. Η ψευδοφασματική μέθοδος εφαρμόζεται σε περιοδικά συστήματα ή συστήματα όπου τα πεδία μηδενίζονται στα όρια του πλέγματος. Για τη λύση του σκοτεινού σολιτονίου δε συμβαίνει κανένα από τα δύο. Συνεπώς για τη περίπτωση του το κομμάτι του κώδικα όπου υπολογίζονται οι χωρικές παράγωγοι ξαναγράφηκε και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των διακριτών διαφορών.

κομμάτι στο οποίο ελέγχουμε ότι οι μεταβλητές που έχουν φτιαχτεί από τις παραμέτρους που έχουμε δώσει υπακούν το κριτήριο σταθερότητας της ψευδοφασματικής μεθόδου.

Το τρίτο κομμάτι περιέχει το βασικό επαναλαμβανόμενο βρόγχο του προγράμματος. Χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο είναι ο βρόγχος Runge-Kutta. Το δεύτερο μέρος επιλέγει κατά την εκτέλεση του βρόγχου εκείνα τα δεδομένα που πρέπει να αποθηκευτούν. Μετά το κομμάτι του Επαναλαμβανόμενου Βρόγχου υπάρχει μία εντολή που φτιάχνει ένα διάγραμμα όπου βλέπουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και μία εντολή που αποθηκεύει τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για περαιτέρω μελέτη. Τέλος υπάρχει ένα κομμάτι που ονομάζεται Σημειώσεις προσομοίωσης. Σε αυτό γράφουμε οτιδήποτε θέλουμε να θυμόμαστε σχετικά με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ή την επεξεργασία που κάνουμε στα δεδομένα που προκύπτουν μετά από αυτή.

Α'.3 Ιδιότητες του Κώδικα

Όπως αναφέραμε το παραπάνω κώδικα τον χρησιμοποιούμε για να επαληθεύσουμε αριθμητικά εάν οι λύσεις που προτείνουμε είναι λύσεις του συστήματος (2.19). Αυτό γίνεται με το να παίρνουμε τη προτεινόμενη λύση τη χρονική στιγμή $t = 0$ και να αφήνουμε το κώδικα να την εξελίξει χρονικά με βάση το σύστημα για το οποίο ψάχνουμε λύσεις. Εάν η αρχική μας συνθήκη αποτελεί λύση του προβλήματος τότε η χρονική της εξέλιξη θα είναι τέτοια που η λύση θα διατηρήσει τη μορφή της. Αλλιώς θα καταστραφεί.

Η χρονική εξέλιξη γίνεται μέσω της μεθόδου Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Για τον υπολογισμό των παραγώγων χρησιμοποιείται η ψευδοφασματική μέθοδος [19] αντί για τη μέθοδο των διακριτών διαφορών. Η χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στη ψευδοφασματική μέθοδο αυξάνει την χωρική αριθμητική ακρίβεια και αριθμητική ευστάθεια του κώδικα [19], έχει όμως και κάποιες ιδιαιτερότητες.

Η βασική ιδιαιτερότητα είναι πως σε περιοδικές λύσεις το μήκος του πλέγματος πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της χωρικής περιόδου της εκάστοτε λύσης. Αυτό έχει σα συνέπεια να πρέπει να επαναυπολογίζουμε το πλέγμα προσομοίωσης σε κάθε προσομοίωση όπου δοκιμάζουμε μια «διαφορετική» λύση. Πέρα από αυτό όμως υπάρχουν και ιδιαιτερότητες όσον αφορά τη διακριτική ικανότητα, ως προς τις συχνότητες, του μετασχηματισμού Fourier. Εμείς κατά τη προσομοίωση έχουμε ένα πλέγμα μήκους L αποτελούμενο από N σημεία. Αυτό σημαίνει πως ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier βλέπει ένα φάσμα συχνοτήτων:

$$\left[-\frac{N\pi}{L}, \frac{N\pi}{L} \right) \quad (\text{A'.1})$$

Από την άλλη η απόσταση ανάμεσα στις συχνότητες είναι:

$$\delta f = \frac{2\pi}{L} \quad (\text{A'.2})$$

Τέλος η περιοχή ευστάθειας της ψευδοφασματικής μεθόδου είναι:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \approx 0.2866 \quad (\text{A}'3)$$

όπου $\Delta x = L/N$ και Δt το χρονικό βήμα της προσομοίωσης.

Η πιο «κρυμμένη» απαίτηση στα παραπάνω είναι αυτή για διακριτική ικανότητα. Θέλουμε καλή διακριτική ικανότητα έτσι ώστε εάν το σύστημα εμφανίσει νέες συχνότητες κοντά στις υπάρχουσες κατά τη προσομοίωση να καταφέρει να τις διακρίνει αντί να τις «χάσει» κατά τη διακριτοποίηση. Η αύξηση του N αυξάνει τη χωρική διακριτική μας ικανότητα καθώς και το φάσμα συχνοτήτων που βλέπουμε. Όμως η αύξηση του N έχει σα συνέπεια τη γεωμετρική αύξηση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου για την εκτέλεση της προσομοίωσης.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως υπάρχει μία λεπτή ισορροπία στην επιλογή των παραμέτρων L , N και Δt της προσομοίωσης ώστε να έχουμε την απαιτούμενη ακρίβεια για να πάρουμε αξιόπιστα αποτελέσματα αλλά μέσα σε ένα λογικό χρόνο ο οποίος καθορίζεται από τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ.

Βιβλιογραφία

- [1] Σημειώσεις Επιβλέποντος καθηγητή κ. Ξάνθου Μαϊντά
- [2] Ian Stewart, *Why Beauty is Truth, The History of Symmetry* ©2007
- [3] Νικόλαος Περράκης, *Το θεώρημα της Noether στη Κλασική Θεωρία Πεδίου. Η Περίπτωση του Τανυστή Ενέργειας – Ορμής και άλλες εφαρμογές.*
Εργασία στα πλαίσια διδασκαλίας του μαθήματος Κλασικής Θεωρίας Πεδίου. © Μάρτιος 2009
- [4] Harvey R. Brown & Peter Holland *Dynamical vs. Variational Symmetries: Understanding Noether's first theorem* November 20, 2005
<http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00002914/01/MolPhys04.pdf>
- [5] Mike Guidry, *Gauge Field Theories* ©WILEY-VCH 2004
- [6] V. Achilleos, F. K. Diakonou, D. J. Frantzeskakis, G. C. Katsimiga, X. N. Maintas, E. Manousakis, C.E. Tsagkarakis and A. Tsapalis, *Oscillations and oscillating kinks in the Abelian-Higgs model.*, arXiv:1306.3868 [hep-th]
- [7] [O'Raifeartaigh, L.]. *Group Structure of Gauge Theories.*
©Cambridge University Press,1986.
Cambridge Books Online. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511564031>
- [8] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* ©Perseus Books 1994
- [9] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* © 1982
- [10] Σημειώσεις καθηγητή κ. Φραντζεσκάκη
- [11] Ramzi Mirshak, *An Overview of Jacobian Elliptical Functions*
<http://www.phys.ocean.dal.ca/~mirshak/papers/jef.pdf>
- [12] Govind P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Fourth Edition ©2007

- [13] X. N. Maintas, C. E. Tsagkarakis, F. K. Diakonov, and D. J. Frantzeskakis, *Nonlinear Schroedinger Solitons in Massive Yang-Mills Theory and Partial Localization of Dirac Matter*, J. Mod. Phys. **3**, 637 (2012);
V. Achilleos, F. K. Diakonov, D. J. Frantzeskakis, G. C. Katsimiga, X. N. Maintas, C. E. Tsagkarakis, and A. Tsapalis, *A multi-scale perturbative approach to $SU(2)$ -Higgs classical dynamics: stability of nonlinear plane waves and bounds of the Higgs field mass*, Phys. Rev. D **85**, 027702 (2012).
- [14] Xianhao Xin, *Glashow-Weinberg-Salam Model: An Example of Electroweak Symmetry Breaking*, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign
http://guava.physics.uiuc.edu/~nigel/courses/569/Essays_Fall2007/files/xianhao_xin.pdf
- [15] The destabilization of plane waves under small-amplitude long-wavelength perturbations is known as modulational instability or Benjamin-Feir instability [T. B. Benjamin and J. E. Feir, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967)], and occurs in various contexts, including fluid mechanics [G. B. Whitham, J. Fluid Mech. **22**, 273 (1965)], dielectrics [L. A. Ostrovsky, Sov. Phys. JETP **24**, 797 (1967)], plasmas [A. Hasegawa, Phys. Fluids **15**, 870 (1972)], etc.
- [16] Roman Noskov, Pavel Belov & Yuri Kivshar, *Oscillons, solitons, and domain walls in arrays of nonlinear plasmonic nanoparticles*
DOI: 10.1038/srep00873
- [17] M. A. Amin, R. Easther, H. Finkel, R. Flauger, and M. P. Hertzberg, *Oscillons after Inflation*. Phys. Rev. Lett. **108**, 241302 (2012).
- [18] An update of combined measurements of the new Higgs-like boson with high mass resolution channels (13 Dec 2012)
<http://atlas.web.cern.ch/Atlas/GROUPS/PHYSICS/CONFNOTES/ATLAS-CONF-2012-170/>
- [19] Janke Yiang, *Nonlinear Waves in Integrable and non-Integrable Systems*, ©2010
- [20] Wikipedia, the free encyclopedia
<http://www.wikipedia.org/>
- [21] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna and Elisabeth Schlegl, *The Not So Short Introduction to L^AT_EX 2_ε*, Version 5.01, April 06, 2011
<http://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english/>