

Πανεπιστήμιο Αθηνών



Πλοήγηση UAV με χρήση AHRS

UAV flight implementation with AHRS

Φοιτητής : Κατσούλης Παναγιώτης (AM 2002514)

Επιβλέπωντας: Κούτουλας Γεώργιος

Πτυχιακή Εργασία ΜΔΕ

Ηλεκτρονικός Αυτοματισμός

Σεπτέμβριος 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....	1
1.1 Ορισμός τηλεκατευθυνόμενου μη επανδρωμένου συστήματος	2
1.2 Ιστορικά στοιχεία.....	3
1.3 Κατηγοριοποίηση UAV.....	5
1.4 Πλοήγηση.....	6
Κεφάλαιο 2 Κινηματική και δυναμική αεροσκαφών.....	8
2.1 Εισαγωγή.....	8
2.2 Συστήματα αξόνων και εξισώσεις κίνησης.....	8
2.2.1 Γήινοι άξονες.....	8
2.2.2 Σωματόδετοι άξονες αεροσκάφους.....	9
2.3 Υπολογισμός εξισώσεων.....	12
2.3.1 Οι εξισώσεις κίνησης του στερεού συμμετρικού αεροσκάφους.....	12
2.3.2 Οι συνιστώσες της αδρανειακής επιτάχυνσης	13
2.3.3 Οι εξισώσεις της γενικευμένης δύναμης	15
2.3.4 Οι εξισώσεις της γενικευμένης Ροπής	17
2.4 Η στάση (attitude) του αεροσκάφους.....	18
2.5 Γενικές παρατηρήσεις για τις εξισώσεις κίνησης	21
2.6 Σταθερή μόνιμη πτήση (Steady State Flight).....	22
Κεφάλαιο 3 Επεξεργασία των εξισώσεων κίνησης	23
3.1 Τρόποι επεξεργασίας.....	23
3.2 Χώρος Κατάστασης.....	24
3.2.1 Εξισώσεις Εσωτερικής Κατάστασης.....	25
3.2.2 Εσωτερική Δομή ενός Συστήματος.....	26

3.3 Τετραδόνια.....	28
3.3.1 Τετραδόνια ως γενικευμένη μορφή μιγαδικών.....	29
3.3.2 Μορφή τετραδονίων τανυστών	31
3.3.3 Τετραδόνια στον τρισδιάστατο χώρο.....	32
3.3.4 Εφαρμογή των τετραδονίων στο AHRS.....	33
Κεφάλαιο 4 Αισθητήρες	34
4.1 Εισαγωγή.....	34
4.2 Επιταχυνσιόμετρο (Acceleromete).....	35
4.3 Γυροσκόπιο (Gyroscope).....	36
4.4 Μαγνητόμετρο (Magnetometer).....	37
4.5 Σφάλματα στους αισθητήρες.....	38
4.6 Φίλτρο Κάλμαν.....	40
Κεφάλαιο 5 Υλοποίηση του AHRS στο τετρακόπτερο.....	44
5.1 Εισαγωγή.....	44
5.2 Προδιαγραφές.....	44
5.3 Κίνδυνοι.....	44
5.4 Η κατάσταση στην αγορά.....	45
5.5 Το τετρακόπτερο.....	45
5.6 Έλεγχος.....	46
5.7 Υλικό.....	47
5.7.1 Σκελετός.....	47
5.7.2 Κινητήρες.....	48
5.7.3 Ελεγκτές των κινητήρων.....	48

5.7.4 Μπαταρίες.....	49
5.7.5 Χειριστήριο.....	49
5.7.6 Ελεγκτής πτήσης.....	50
5.7.7 PIC PWM.....	51
5.7.8 MPU6050.....	52
Κεφάλαιο 6 Βαθμονόμηση αισθητήρων(sensor calibration).....	55
6.1 Γυροσκόπιο.....	55
6.2 Επιταχυνσιόμετρο.....	56
6.3 Μαγνητόμετρο.....	58
Κεφάλαιο 7 Sensor Fusion.....	59
7.1 Δοκιμαστικά Δεδομένα.....	59
7.2 Συμπληρωματικό φίλτρο (complementary filter).....	60
7.3 Φίλτρο Κάλμαν.....	61
7.4 Έλεγχος.....	62
Κεφάλαιο 8 Συμπέρασμα.....	63
Παράρτημα	64
Βιβλιογραφία.....	67

Κεφάλαιο 1

1.1 Ορισμός τηλεκατευθυνόμενου μη επανδρωμένου συστήματος

Σύμφωνα με τον ορισμό της ένωσης UVS International¹, ένα τηλεκατευθυνόμενο μη επανδρωμένο εναέριο όχημα (UAV), είναι ένα αεροσκάφος σχεδιασμένο να λειτουργεί χωρίς την ανθρώπινη παρουσία πιλότου σε αυτό. Ο όρος UAV, χρησιμοποιείται ευρέως στον κλάδο της Γεωπληροφορικής, αλλά συναντώνται επίσης και ορολογίες όπως :

- Remotely Piloted Vehicle (RPV),
- Remotely Operated Aircraft (ROA),
- Remote Controlled (RC) Helicopter,
- Unmanned Vehicle Systems (UVS),
- Model Helicopter.

Ειδικότερα στη βιβλιογραφία συναντώνται με τις παρακάτω ονομασίες :

-UVS : Κάθε όχημα που λειτουργεί χωρίς έναν άνθρωπο σε άμεση φυσική επαφή με το εν λόγω όχημα.

-UV παραλλαγές : Τα τέσσερα αρκτικόλεξα που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τα UVs που λειτουργούν σε διαφορετικά περιβάλλοντα είναι τα UAV (μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα) , UGVs (μη επανδρωμένα οχήματα εδάφους) , USVs (μη επανδρωμένα οχήματα επιφάνειας) , και UUVs (μη επανδρωμένα υποβρύχια οχήματα).

-UCV : Αναφέρεται σε οπλισμένα UVs δηλαδή σε μη επανδρωμένο εναέριο όχημα μάχης. -Drones : Ο όρος είναι αναμφισβήτητα το πιο κοινό και διαδεδομένο συνώνυμο του όρου UVs . Ειδικότερα, χρησιμοποιείται για να αναφερθεί σε μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (UAV).

-Τηλεκατευθυνόμενα οχήματα: Remotely Piloted Vehicles και Remotely Operated Vehicles Αυτά αναφέρονται σε οχήματα που ελέγχονται από τον άνθρωπο εξ αποστάσεως μέσω ασύρματης ζεύξης.

-Ρομποτική : Οι πιο αυτόνομες μορφές UAVs συχνά αναφέρονται ως ρομπότ ή ρομποτικά συστήματα.

1.2 Ιστορικά στοιχεία

Στη σύγχρονη εποχή, τα τηλεκατευθυνόμενα μη επανδρωμένα εναέρια συστήματα εμφανίστηκαν κατά τη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου. Ωστόσο η ιδέα των “ιπτάμενων μηχανών” διατυπώθηκε για πρώτη φορά 2.500 χιλιάδες χρόνια πριν.

Έχει τεκμηριωθεί η άποψη, ότι η πρώτη σημαντική ανακάλυψη για αυτόνομες μηχανές πραγματοποιήθηκε κατά την εποχή του Πυθαγόρα και των Πυθαγόρειων Μαθηματικών. Το πρώτο βήμα για αυτόνομους μηχανισμούς αποδίδεται στον Αρχύτα, που καταγόταν από την πόλη Τάραντα της νότιας Ιταλίας, και αναφέρεται και ως Leonardo da Vinci του Αρχαίου Κόσμου. Το 425 π.Χ. δημιούργησε το πρώτο UAV όλων των εποχών. Επρόκειτο για ένα μηχανικό πουλί, ένα περιστέρι, που μπορούσε να πετάξει κουνώντας τα φτερά του, παίρνοντας ενέργεια από ένα μηχανισμό στο στομάχι του. Πιστεύεται ότι είναι η πρώτη τεχνητή, αυτοπροωθούμενη ιπτάμενη μηχανή που χρησιμοποιούσε νερό και ατμό για την παραγωγή ενέργειας. Περίπου 17 αιώνες αργότερα, η αρχική ιδέα του Αρχύτα έρχεται και πάλι στο προσκήνιο από μηχανικούς της Αναγέννησης. Δεν είναι γνωστό αν στηρίχτηκαν στην ιδέα του αλλά το υπόβαθρο ήταν παρόμοιο.

Ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι, το 1843, σχεδίασε ένα “αεροσκάφος”, ικανό να αιωρείται το οποίο ονομάστηκε «εναέρια βίδα» ή «εναέριο γυροσκόπιο». Είχε διάμετρο 5 μέτρα και η ιδέα ήταν να περιστρέφεται ο άξονας και με την εφαρμογή δύναμης η μηχανή θα μπορούσε να περιστρέφεται και να πετάξει. Αυτή η μηχανή θεωρείται από μερικούς ειδικούς ως ο πρόγονος του ελικοπτέρου σήμερα. Περαιτέρω, ο Ντα Βίντσι επινόησε ένα μηχανικό πουλί, το 1508 που μπορούσε να κουνήσει τα φτερά του με τη βοήθεια ενός διπλού μηχανισμού στροφάλου καθώς κατέβαινε κατά μήκος ενός καλωδίου .

Μία μηχανή κάθετης πτήσης, σχεδιάστηκε επίσης το 1840, από τον Horatio Phillips, η οποία χρησιμοποιούσε έναν μικρό λέβητα για την παραγωγή ατμού. Το 1860, ο Ponton d' Amecourt, πέταξε μικρά ελικοπτερα ατμού .

Μοντέλα ελικοπτέρων, σχεδιάστηκαν επίσης μεταξύ του 1860 και του 1907. Ο Thomas Alva Edison το 1880 πειραματίστηκε με διαφορετικές διαμορφώσεις ελίκων και τελικά, χρησιμοποίησε έναν ηλεκτρικό κινητήρα για την παραγωγή ισχύος. Το 1907, ο Paul Cornu ανέπτυξε μία κάθετη πτητική μηχανή 2 πτερυγίων. Το μεγαλύτερο επίτευγμα της

σύγχρονης εποχής στην ιστορία του ελικοπτέρου, ήταν το ελικόπτερο του Igor Ivanovitch Sikorsky. Αν και πρωτότυπο για το 1909 ένα μη επανδρωμένο ομοαξονικό ελικόπτερο, ποτέ δεν πέταξε λόγω των κραδασμών και της έλλειψης ενός ισχυρού κινητήρα .

Η κύρια ανάπτυξη των τηλεκατευθυνόμενων μη επανδρωμένων συστημάτων αεροφωτογράφισης, πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, αλλά η χρήση τους περιορίστηκε στη φάση των δοκιμών, δεν πρόλαβαν να χρησιμοποιηθούν πριν τη λήξη του πολέμου.

Τη δεκαετία του 1930, το Βρετανικό Βασιλικό Ναυτικό ανέπτυξε το τηλεκατευθυνόμενο UAV: The Queen-Bee το οποίο μπορούσε να φτάσει ταχύτητες 100 MPH (160 km / h). Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, οι Ναζί ανέπτυξαν ένα UAV που μπορούσε να φτάσει ταχύτητες περίπου 500 mph (804 χλμ/ώρα), να μεταφέρει 907 κιλά και να ταξιδέψει 150 μίλια (241 χιλιόμετρα).

Το 1970 ο Whittlesey, χρησιμοποίησε ένα εξαρτημένο από το έδαφος μπαλόνι, σε αρχαιολογικές παρατηρήσεις. Για την συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ποικίλες κάμερες όπως για παράδειγμα η Lindhof και η Graflex XL με 6cm x 9cm format και οι δύο. Οι κάμερες ήταν τοποθετημένες 9m κάτω από το μπαλόνι σε αναρτήρα κατά η διάρκεια της πτήσης και επέτρεπαν τη λήψη εικόνων σε ύψος 50m πάνω από το έδαφος. Έπειτα, χρησιμοποιήθηκε η φωτογραφική μηχανή Hasselblad 400FL με ένα Zeiss Distagon φακό 50mm, η οποία επέτρεψε τον τηλεχειρισμό για την απόκτηση εικόνας. Το ωφέλιμο φορτίο της κατασκευής ήταν 2,7 Kg και το μπαλόνι ήταν σε θέση να πετάξει μέχρι και 600m πάνω από το έδαφος. Η πλατφόρμα αυτή έδειξε ότι τα UAVs μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ύψος πτήσης που εξαρτάται από παραμέτρους όπως το είδος της κάμερας και του συστήματος ελέγχου .

Το 1979 πραγματοποιήθηκε ένα από τα πρώτα πειράματα με μη επανδρωμένο εναέριο όχημα σταθερών πτερυγίων από τους Przybilla και Wester – Ebbinghaus. Οι πρώτες δοκιμές έγιναν χρησιμοποιώντας ένα χειροκίνητα ελεγχόμενο UAV σταθερών πτερυγίων της εταιρείας Hegi, σε ύψος πτήσης 150m και με ταχύτητα 11m/s. Το σύστημα είχε μήκος 3m, άνοιγμα φτερών 2,6m και μπορούσε να μεταφέρει ωφέλιμο φορτίο 3kg. Ο εξοπλισμός πλοήγησης ήταν της Lindhof Technika, και χρησιμοποιήθηκε για να κατευθύνει το σύστημα. Η ποιότητα των δεδομένων που λήφθηκαν δεν ήταν ικανοποιητική εξαιτίας της ταχύτητας και των κραδασμών.

Το 1980 ο Wester-Ebbinghaus ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε ένα μη επανδρωμένο εναέριο όχημα με περιστροφικά πτερύγια για

φωτογραμμετρικούς σκοπούς. Επρόκειτο για ένα ελικόπτερο Schlüter ωφέλιμου φορτίου 3kg. Το ελικόπτερο ήταν σε θέση να πετάξει σε ύψος από 10m-100m και μπορούσε να μεταφέρει φωτογραφική μηχανή μεσαίου format, όπως η Rolleiflex SLX. Για να αντισταθμιστεί η δόνηση που προκαλούσε ο κινητήρας, τοιχώματα πολυστυρολίου είχαν εγκατασταθεί στο ελικόπτερο και με επιτυχία κατέστειλαν τις δονήσεις. Για την πραγματοποίηση της πτήσης απαιτούνταν ένας πιλότος στο έδαφος και ένας πλοηγός. Ο πιλότος ήλεγχε την απογείωση και την προσγείωση και ο πλοηγός το ύψος και την ενεργοποίηση του κλείστρου της κάμερας, χειροκίνητα μέσω ραδιοζεύξης.

1.3 Κατηγοριοποίηση των UAV

Με βάση το μέγεθος, το βάρος, την αντοχή και το ύψος πτήσης, η UVS International, ορίζει τις παρακάτω κύριες κατηγορίες τηλεκατευθυνόμενων μη επανδρωμένων εναέριων οχημάτων :

Όνομα Κατηγορίας	Μάζα (Kg)	Εμβέλεια (Km)	Ύψος πτήσης (m)	Αντοχή (hours)
Micro	<5	<10	250	1
Mini	<25/30/150	<10	150/250/300	<2
Close Range	25-150	10-30	3000	2-4
Medium Range	50-250	10-30	3000	3-6
High Altitude-Long Endurance	>250	>70	>3000	>6

Τα οποία κατατάσσει στις εξής ομάδες (Remondino, Barazzetti, Nex, Scaioni, & Sarazzi, UAV photogrammetry for mapping and 3D modeling –current status and future perspectives):

i. Τα τακτικά (tactical) UAVs, τα οποία περιλαμβάνουν μικρού και μεσαίου μεγέθους, χαμηλού υψόμετρου πτήσης, συστήματα. Οι μάζες τους κυμαίνονται έως 1.000 kg, το ύψος πτήσης φτάνει τα 500 km και η αντοχή τους κυμαίνεται από λίγα λεπτά έως 2-3 μέρες.

ii. Τα στρατηγικά (strategical) UAVs, που περιλαμβάνουν συστήματα που ίπτανται σε μεγάλο υψόμετρο τόσο στην στρατόσφαιρα όσο και έξω από αυτήν. Φτάνουν σε υψόμετρο πάνω από 20.000m και η αντοχή τους φτάνει τις 4 ημέρες.

iii. Τα ειδικών καθηκόντων (special tasks) UAVs, όπως τα αυτόνομα μη επανδρωμένα μαχητικά αεροσκάφη.

Επιπλέον, τα UAV μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με βάση τα κύρια χαρακτηριστικά των αεροσκαφών, όπως μη τροφοδοτούμενο ηλεκτρικά ή ηλεκτρικά τροφοδοτούμενο, ελαφρύτερο από τον αέρα ή βαρύτερο από τον αέρα, με σταθερά ή περιστρεφόμενα πτερύγια.

1.4 Πλοήγηση

Για την χειροκίνητη πλοήγηση ενός συστήματος UAV, είναι απαραίτητο ο χειριστής να γνωρίζει τη θέση του UAV κάθε στιγμή, αλλά και στην περίπτωση της αυτόματης λειτουργίας, το αεροσκάφος πρέπει να έχει αυτή την πληροφορία πάνω σε αυτό. Η πιο δημοφιλής μέθοδος προσδιορισμού θέσης και πλοήγησης μεταξύ των σημείων είναι η χρήση του Global Positioning System (GPS).

Το GPS αναπτύχθηκε από το Τμήμα Άμυνας των Ηνωμένων Πολιτειών και επίσημα ονομάζεται NAVSTAR GPS. Αρχικά χρησιμοποιείτο από τις αμερικανικές στρατιωτικές δυνάμεις μέχρι το 1982, όταν έγινε διαθέσιμο για γενική χρήση. Ένας δέκτης υπολογίζει κάθε θέση, χρησιμοποιώντας τα σήματα που μεταδίδονται τα σήματα από τέσσερις ή περισσότερους δορυφόρους GPS.

Το GPS είναι διαθέσιμο με δύο μορφές, σαν Standard Positioning System (SPS) για μη στρατιωτικούς χρήσεις και σαν Precise Positioning Service (PPS) για στρατιωτική χρήση. Η ακρίβεια των δύο GPS υπηρεσιών μπορεί να βελτιωθεί με τη χρήση του διαφορικού GPS (DGPS). Αυτό ενισχύει την ακρίβεια του GPS παρέχοντας ένα δίκτυο σταθερών, επίγειων, αναφευμένων σταθμών που καταγράφουν τη διαφορά ανάμεσα στις θέσεις που υποδεικνύονται από τους δορυφόρους. Αυτές οι διαφορές χρησιμοποιούνται στη συνέχεια από κάθε δέκτη για να διορθώσει τα σφάλματα των αρχικών δορυφορικών δεδομένων. Η ακρίβεια του DGPS μειώνεται με την απόσταση του δέκτη από το σταθμό αναφοράς και κάποιες μετρήσεις δείχνουν μια υποβάθμιση της τάξης των 0,2 m ανά 100 χιλιόμετρα.

Ένα σύστημα UAV μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα διαθέσιμο δίκτυο σταθμών αναφοράς ή να χρησιμοποιήσει το δικό του σταθμό ελέγχου του εδάφους ως σταθμό αναφοράς.

Εκτός από το GPS πολύ χρήσιμο στη λειτουργία των UAV είναι και το σύστημα INS (inertial navigation system). Πρόκειται για ένα βοήθημα πλοήγησης που χρησιμοποιεί αισθητήρες κίνησης, επιταχυνσιόμετρα, αισθητήρες περιστροφής (γυροσκόπια) που υπολογίζουν κάθε στιγμή τη θέση, τον προσανατολισμό και την ταχύτητα του κινούμενου αντικειμένου χωρίς να χρειάζονται εξωτερικά σημεία αναφοράς.

Σε περιπτώσεις που UAV συστήματα χρησιμοποιούνται για την κάλυψη δεδομένων σε μικρότερες κλίμακες της τάξης των 80-100km, μία

συνηθισμένη τεχνική είναι αυτή της ραδιοζεύξης. Το παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφει ένα σύστημα πλοήγησης GPS/INS για μη επανδρωμένα οχήματα.



Κύρια χαρακτηριστικά και δυνατότητες:	Δεδομένα εισόδου:	Δεδομένα εξόδου σχετικά με την πλοήγηση:	Δεδομένα εξόδου σχετικά με τον έλεγχο της πτήσης:
C/A GPS Code	Υψόμετρο	Θέση & ύψος	Τιμές Γωνιών
C/A DGPS Code (για διορθώσεις της θέσης)		Γεωγραφικές Ταχύτητες	Τιμές γραμμικής επιτάχυνσης
		Κατεύθυνση	
Απόδοση Πλοήγησης			
	C/A Code GPS		With C/A DGPS
Ακρίβεια Θέσης	4m		2m
Ακρίβεια Ύψους	8m		3m

Κεφάλαιο 2

Κινηματική και δυναμική αεροσκαφών

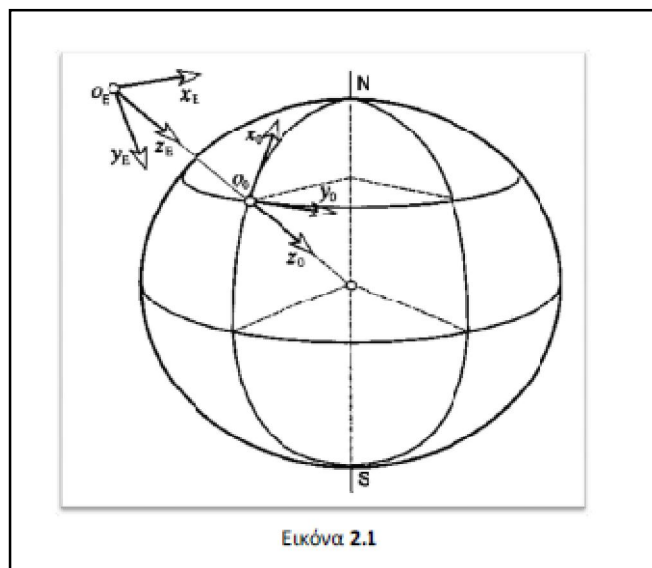
2.1 Εισαγωγή

Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η παρουσίαση της κινηματικής και της δυναμικής οχημάτων με έξι βαθμούς ελευθερίας που κινούνται στον τρισδιάστατο χώρο. Για τον σκοπό αυτόν, εξάγονται οι εξισώσεις κίνησης και αναλύεται η μέθοδος προσομοίωσης της κίνησης. Η παρουσίαση της μαθηματικής μοντελοποίησης της κίνησης γίνεται ώστε να γίνει κατανοητή η προσομοίωση της κίνησης των αεροσκαφών. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται η κινηματική ανάλυση με τους ορισμούς συστημάτων αναφοράς και των μετασχηματισμών ταχύτητας. Στη συνέχεια, αναλύονται οι δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται στα αεροσκάφη και εξάγονται οι εξισώσεις κίνησης. Τέλος, αναπτύσσεται η μεθοδολογία προσομοίωσης της κίνησης των αεροσκαφών.

2.2 Συστήματα αξόνων και εξισώσεις κίνησης

2.2.1 Γήινοι άξονες

Επειδή κατά κύριο λόγο θα αναφερθούμε στην πτήση εντός της ατμόσφαιρας, θα ορίσουμε την κίνηση του αεροσκάφους ως προς το γήινο πλαίσιο αναφοράς. Οι γήινοι άξονες (earth axis) ορίζονται με ένα σημείο αναφοράς O_0 στην επιφάνεια της γης, που είναι η αρχή των αξόνων ενός δεξιόστροφου ορθογωνίου συστήματος αναφοράς ($O_0 X_0 Y_0 Z_0$). Ο άξονας $O_0 X_0$ αυτού του συστήματος είναι προσανατολισμένος προς το βορά, ο άξονας $O_0 Y_0$ είναι προσανατολισμένος προς την ανατολή και ο άξονας $O_0 Z_0$ έχει φορά προς τα κάτω, παράλληλα με το διάνυσμα της βαρύτητας.



Εικόνα 2.1

Αυτοί οι γήινοι άξονες απεικονίζονται στο σχήμα 2.1. Το επίπεδο ($O_0 X_0 Y_0 Z_0$) ορίζει το τοπικό οριζόντιο επίπεδο το οποίο είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια της γης. Επομένως το ίχνος πτήσης (flight path) ενός αεροσκάφους το οποίο πετά μέσα στην ατμόσφαιρα, στην περιοχή του σημείου αναφοράς O_0 , μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις συντεταγμένες του στο σύστημα αξόνων. Αυτή η πρόταση προϋποθέτει μια επίπεδη γη (flat earth) όπου η κατακόρυφη διεύθυνση είναι προσδεμένη στο άνυσμα της βαρύτητας. Αυτό το μοντέλο είναι επαρκές για πτήσεις τοπικού χαρακτήρα, ταιριάζει όμως καλύτερα σε εφαρμογές πλοήγησης και εφαρμογές επιδόσεων, εκεί όπου η μελέτη ίχνους πτήσης έχει πρωταρχικό ενδιαφέρον.

Για τις εφαρμογές της δυναμικής πτήσης προτιμάται ένας πιο απλοποιημένος ορισμός των γήινων αξόνων. Επειδή κυρίως ασχολούμαστε με την βραχυπρόθεσμη κίνηση (short term motion), μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή ότι η πτήση πραγματοποιείται πάνω από μια επίπεδη γη. Η πιο κοινή μορφή πτήσης είναι εκείνη της ευθείας και οριζόντιας πτήσης (straight and level flight). Πρόκειται για την πτήση κατά το οριζόντιο επίπεδο σε σταθερό ύψος, ενώ ανεξάρτητα από τη μετέπειτα πτήση του αεροσκάφους, η στάση (attitude) του, ορίζεται σε σχέση με τον ορίζοντα. Στο σχήμα 2.1, το οριζόντιο επίπεδο ορίζεται από τους ($O_E X_E Y_E Z_E$) και είναι παράλληλο στο επίπεδο ($O_0 X_0 Y_0 Z_0$) στην επιφάνεια της γης. Η μοναδική διαφορά είναι ότι ο άξονας $O_E X_E$ έχει φορά προς την τυχαία διεύθυνση πτήσης του αεροσκάφους και όχι προς το βορά. Ο άξονας $O_E Z_E$ δείχνει προς τα κάτω όπως και προηγουμένως. Το μόνο που απομένει είναι να τοποθετήσουμε την αρχή O_E στο πιο κατάλληλο σημείο μέσα στην ατμόσφαιρα, το οποίο πολύ συχνά ταυτίζεται με την αρχή του σωματόδετου συστήματος του αεροσκάφους (aircraft body axis).

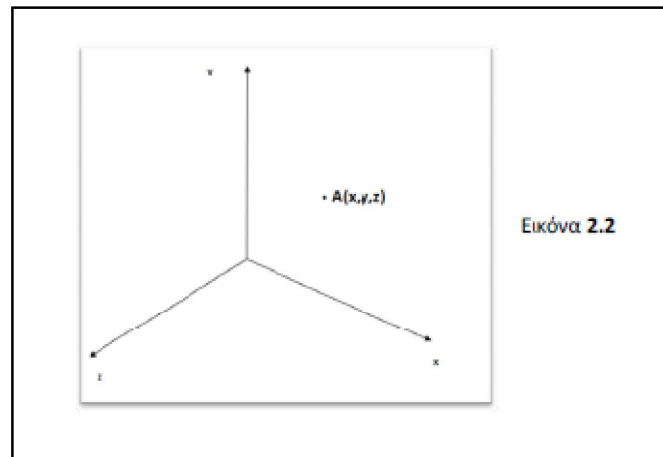
Οι γήινοι άξονες ($O_E X_E Y_E Z_E$) που ορίζονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται γήινοι άξονες αναφοράς (datum-path earth axis) είναι προσδεμένοι με τη γη μέσω του ανύσματος της βαρύτητας ενώ παρέχουν την αδρανειακή αναφορά για τη βραχυπρόθεσμη κίνηση του αεροσκάφους.

Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι θα θεωρήσουμε τη γη ως ένα στατικό σύστημα επομένως το σύστημα αναφοράς στο οποίο θα βρίσκεται το αεροσκάφος θα είναι, ως προς αυτό, ακίνητο.

2.2.2 Σωματόδετοι άξονες αεροσκάφους

Το πρώτο στοιχείο που συνιστά την αύξηση της δυσκολίας διαχείρισης του, έγκειται στην ύπαρξη του τρισδιάστατου μοντέλου. Συγκριτικά με την πλοήγηση ενός πλοίου ή αυτοκινήτου, παρουσιάζει την εξής δυσκολία: Η κίνηση πλέον δε γίνεται σε 2 άξονες x, y όπως στις δύο

προηγούμενες περιπτώσεις, αλλά, σε 3 άξονες γιατί εισάγεται και ο άξονας των z που είναι το ύψος. Συνεπώς, η θέση π.χ. A του αεροσκάφους εξαρτάται από τρεις μεταβλητές $A(x,y,z)$.



Επομένως, όλοι οι υπολογισμοί που θα χρειαστούν να γίνουν για την πλοήγηση του αεροσκάφους, πρέπει να εφαρμόζονται πάνω σε αυτούς τους τρεις άξονες.

Βέβαια, ο σωστός υπολογισμός των τριών αυτών συντεταγμένων μας δίνει απλά τη θέση του μέσα στο χώρο ως ένα σημείο. Έτσι, θα δουλέψουμε θεωρώντας τη μάζα του αεροσκάφους συγκεντρωμένη στο κέντρο βάρους του και συμπυκνωμένη σε ένα σημείο.

Το δεύτερο στοιχείο που δυσχεραίνει τους υπολογισμούς είναι το γεγονός ότι το αεροσκάφος έχει έξι (6) βαθμούς ελευθερίας (εάν θεωρηθεί ότι είναι άκαμπτο).

Έτσι, εισάγονται ακόμη τρεις άξονες που περνούν από το κέντρο του.

Ο πρώτος, είναι ο άξονας του Yaw, ο οποίος τέμνει κάθετα το κέντρο του και δίνει τη γωνία που κινείται το αεροσκάφος. Θεωρώντας το ρύγχος του αεροσκάφους ως αναφορικό σημείο, τότε το Yaw μας δίνει τις μοίρες δεξιά ή αριστερά που στρίβει.

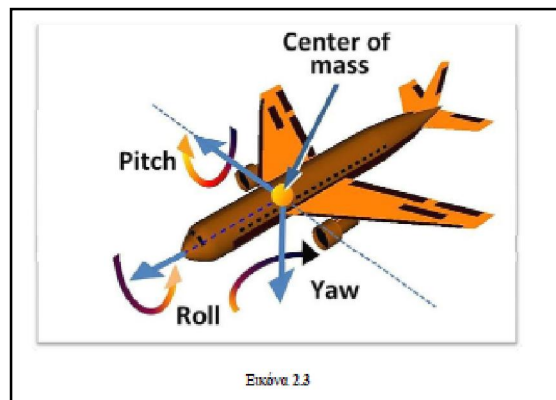
Ο δεύτερος άξονας είναι ο άξονας του Roll. Ο άξονας αυτός, είναι κάθετος στον άξονα του yaw και τέμνει το αεροσκάφος οριζοντίως. Θεωρώντας πάλι ως αναφορικό σημείο το ρύγχος του αεροσκάφους, ο άξονας του Roll μας δίνει κατά πόσες μοίρες γέρνει το αεροσκάφος δεξιά ή αριστερά.

Τέλος, ο άξονας του Pitch είναι κάθετος στους δύο προηγούμενους και τέμνει οριζοντίως το κέντρο του αεροσκάφους. Αντίθετα με τον

προηγούμενο κινείται όχι κατά μήκος του αλλά κατά πλάτος. Ο τελευταίος αυτός άξονας, μας δίνει την κλίση πάνω κάτω.

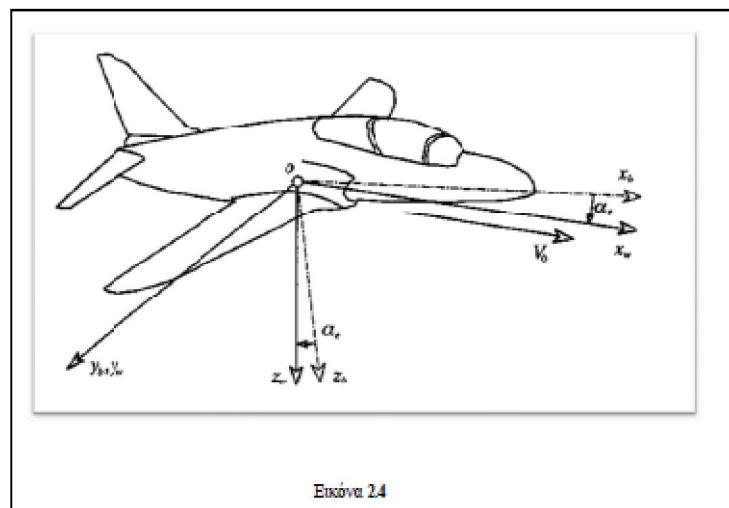
Οι δύο πρώτοι (Yaw, Roll), ευθύνονται για την αλλαγή κατεύθυνσης του αεροσκάφους ενώ ο τελευταίος (Pitch) καθορίζει εάν το αεροσκάφος βρίσκεται σε διαδικασία ανόδου ή καθόδου.

Η εισαγωγή αυτών των αξόνων σημαίνει ότι το αεροσκάφος μπορεί να ακολουθήσει έξι διαφορετικούς διαδρομές: Μπορεί να κινηθεί μπροστά, πλαγίως και κάτω ή μπορεί να περιστραφεί γύρω από τους τρεις αυτούς άξονες: Yaw, Roll και Pitch.



Είναι κοινή πρακτική να ορίζουμε ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα αξόνων που είναι προσδεμένο (fixed) στο αεροσκάφος και κινείται μαζί με αυτό. Έτσι όταν το αεροσκάφος διαταράσσεται από τις αρχικές συνθήκες πτήσης οι άξονες κινούνται μαζί με αυτό και η κίνηση περιγράφεται ποσοτικά ως προς τις μεταβλητές της διαταραχής που αναφέρονται στο κινούμενο σύστημα. Ο τρόπος με τον οποίο οι άξονες είναι προσδεμένοι με το σκάφος είναι τυχαίος αν και είναι προτιμότερο

να χρησιμοποιείται ένας καθορισμένος και γενικά αποδεκτός προσανατολισμός. Το πιο γενικευμένο τέτοιο σύστημα ονομάζεται σωματόδετο σύστημα αξόνων (body axis system) ($Ox_b Y_b Z_b$) και είναι προσδεμένο στο αεροσκάφος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4



Το επίπεδο ($OX_b Z_b$) ορίζει το επίπεδο συμμετρίας του αεροσκάφους ενώ γενικά μας εξυπηρετεί ο άξονας OX_b να είναι παράλληλος με τη γεωμετρική αναφορά της ατράκτου (horizontal fuselage datum). Έτσι σε κανονικές (δηλ. όχι ανάστροφη πτήση κλπ) στάσεις του αεροσκάφους κατά την πτήση ο άξονας OY_b έχει φορά προς τα δεξιά και ο άξονας OZ_b προς τα κάτω.

Είναι επίσης πολύ βολικό να ορίζουμε ένα σύστημα αξόνων με τέτοιο τρόπο ώστε ο άξονας OX να είναι παράλληλος με το διάνυσμα της ολικής ταχύτητας V_0 όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Αυτοί οι άξονες ονομάζονται αεροδυναμικοί, ή άξονες ανέμου (wind axis), ή άξονες ευστάθειας. Σε σταθερή-μόνιμη συμμετρική πτήση (steady symmetric flight) οι άξονες του ανέμου ($OX_w Y_w Z_w$) δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας τύπος του σωματόδετου συστήματος αξόνων, το οποίο έχει περιστραφεί γύρω από τον άξονα OY_b κατά τη σταθερή γωνία πρόσπτωσης του σώματος αε (body incidence) έως ότου ο άξονας OX_w ευθυγραμμιστεί με το άνυσμα της ταχύτητας. Έτσι το επίπεδο ($OX_w Z_w$) παραμένει το επίπεδο συμμετρίας του αεροσκάφους ενώ οι άξονες OY_w και OY_b ταυτίζονται. Επιπλέον επειδή υπάρχει μια και μοναδική τιμή της γωνίας πρόσπτωσης α_e που αντιστοιχεί σε κάθε συνθήκη πτήσης, ο προσανατολισμός των αξόνων του ανέμου στην άτρακτο είναι διαφορετικός για κάθε συνθήκη πτήσης. Όμως για κάθε μια δεδομένη συνθήκη πτήσης, ο προσανατολισμός των αξόνων του ανέμου είναι εξαρχής καθορισμένος και σταθερός σε σχέση με το αεροσκάφος, ενώ κινείται με αυτό σε κάθε διαταραχή. Οι τυπικές τιμές για τη γωνία πρόσπτωσης του σκάφους ποικίλουν στο $-10^\circ \leq \alpha_e \leq 20^\circ$ στο εύρος του κανονικού φακέλου πτήσης.

Για να συνοψίσουμε δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικό ποιο σύστημα αξόνων θα επιλέξουμε με την προϋπόθεση ότι η επιλογή μας μοντελοποιεί την κατάσταση πτήσης που εξετάζουμε. Όταν χρησιμοποιούμε δεδομένα για τις εξισώσεις κίνησης, είναι πολύ συνηθισμένο κάποια από αυτά να αναφέρονται στους άξονες του ανέμου ενώ κάποια άλλα να αναφέρονται στο σωματόδετο σύστημα. Επιβάλλεται επομένως να είμαστε ικανοί να εκτελέσουμε τους απαραίτητους μετασχηματισμούς από το ένα στο άλλο σύστημα.

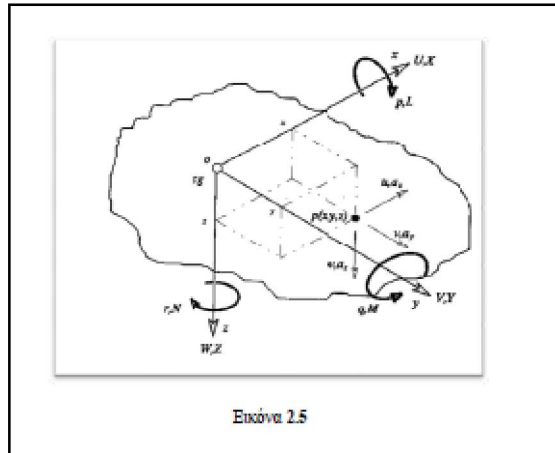
2.3 Υπολογισμός εξισώσεων

2.3.1 Οι εξισώσεις κίνησης του στερεού συμμετρικού αεροσκάφους

Σε αυτό το στάδιο ο αντικειμενικός σκοπός είναι να εφαρμοστεί ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε καθέναν από τους έξι βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή :

Μάζα x επιτάχυνση = Δύναμη

$$F=ma \text{ (2.1)}$$



Για τους βαθμούς ελευθερίας που υποδηλώνουν περιστροφή, η μάζα και η επιτάχυνση εκφράζονται ως ροπή αδρανείας και γωνιακή επιτάχυνση αντίστοιχα ενώ η διαταραγμένη δύναμη εκφράζεται ως ροπή διαταραχής. Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε τις συνιστώσες της αδρανειακής επιτάχυνσης που προκύπτουν από την εφαρμογή των διαταραγμένων δυνάμεων στο αεροσκάφος.

Θεωρούμε την κίνηση που αναφέρεται σε ένα σώμα, όχι κατά ανάγκη, απολύτως στερεό. Σε αυτό το σώμα, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, ορίζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων (OXYZ) του οποίου η αρχή ταυτίζεται με το κέντρο βάρους του (CG) (βλ. σχ. 2.5). Το σώμα και επομένως το σύστημα κινείται σε σχέση με ένα γήινο-αδρανειακό σύστημα αξόνων. Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της εξωτερικά εφαρμοζόμενης συνολικής δύναμης αναλύονται πάνω στο σύστημα (OXYZ) και ορίζονται ως (U,V,W) και (X,Y,Z) στους 3 άξονες αντίστοιχα. Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας και η ροπή ως προς τον ανάλογο άξονα συμβολίζονται ως (p,q,r) και (L,M,N) αντίστοιχα. Το σημείο p είναι ένα τυχαίο σημείο μέσα στο σώμα με συντεταγμένες (x,y,z). Οι τοπικές συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στο σημείο p σε σχέση με το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων συμβολίζονται με (u,v,w) και (a_x, a_y, a_z) αντίστοιχα.

2.3.2 Οι συνιστώσες της αδρανειακής επιτάχυνσης

Από τις γνώσεις της κινηματικής προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας στο σημείο p(x,y,z) σε σχέση με το σημείο (O) :

$$\begin{cases} u = \dot{x} - ry + qz \\ v = \dot{y} - pz + rx \\ w = \dot{z} - qx + py \end{cases} \quad (2.2)$$

Επειδή αναφερόμαστε στο αεροσκάφος το οποίο είναι ένα απολύτως στερεό σώμα (ένα σώμα του οποίου όλες οι απειροστές μάζες διατηρούν τις αποστάσεις μεταξύ τους) και υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν ρότορες (πχ έλικες ή στροβιλοκινητήρες) προκύπτει:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0 \quad (2.3)$$

Έτσι οι εξισώσεις (2.2) γίνονται:

$$\begin{cases} u = qz - ry \\ v = rx - pz \\ w = py - qx \end{cases} \quad (2.4)$$

Ανάλογα για τις συνιστώσες της επιτάχυνσης στο σημείο $p(x,y,z)$ σε σχέση με το O :

$$\begin{cases} a_x = \dot{u} - ru + qw \\ a_y = \dot{v} - rv + qu \\ a_z = \dot{w} - wv + pu \end{cases} \quad (2.5)$$

Οι απόλυτες ή διαφορετικά οι αδρανειακές ταχύτητες (u' , v' , w') του σημείου $p(x,y,z)$ θα προκύψουν σαν άθροισμα δύο όρων: Των ταχυτήτων του κέντρου βάρους (U, V, W) και των τοπικών ταχυτήτων (u, v, w) που προκύπτουν από τη σχέση (2.4).

$$\begin{cases} u' = U + u = U - ry + qz \\ v' = V + v = V - pz + rx \\ w' = W + w = W - qx + py \end{cases} \quad (2.6)$$

Κατ' αντιστοιχία οι συνιστώσες της αδρανειακής επιτάχυνσης (a'_x , a'_y , a'_z) στο σημείο $p(x,y,z)$ προκύπτουν με την αντικατάσταση των

ταχυτήτων (u', v', w') της σχέσεως (2.6) στη θέση των (u, v, w) της σχέσης (2.5) :

$$\begin{cases} a'_x = \dot{u}' - ru' + qw' \\ a'_y = \dot{v}' - rw' + ru' \\ a'_z = \dot{w}' - qu' + pv' \end{cases} \quad (2.7)$$

Παραγωγίζοντας την (2.6) ως προς το χρόνο και λαμβάνοντας υπόψη ότι επειδή αναφερόμαστε σε απολύτως στερεό σώμα ισχύει η (2.3), προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{u}' = \dot{U} - \dot{r}u' + \dot{q}w' \\ \dot{v}' = \dot{V} - \dot{r}w' + \dot{r}u' \\ \dot{w}' = \dot{W} - \dot{q}u' + \dot{p}v' \end{cases} \quad (2.8)$$

αντικαθιστώντας στη σχέση (2.7) παίρνουμε τις τρεις συνιστώσες της αδρανειακής επιτάχυνσης του τυχαίου σημείου $p(x, y, z)$ του στερεού σώματος, οι οποίες μπορούν να γραφούν :

$$\begin{cases} a'_x = \dot{U} - r\dot{V} + q\dot{W} - x(q^2 + r^2) + y(pq + \dot{r}) - z(pr + \dot{q}) \\ a'_y = \dot{V} - q\dot{W} + r\dot{U} - x(pq + \dot{r}) - y(p^2 + r^2) + z(qr - \dot{p}) \\ a'_z = \dot{W} - q\dot{U} + p\dot{V} + x(pr - \dot{q}) + y(qr + \dot{p}) - z(p^2 + q^2) \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3.3 Οι εξισώσεις της γενικευμένης δύναμης

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια μια απειροστή (incremental mass) μάζα δm στο σημείο $p(x, y, z)$ μέσα στο στερεό σώμα. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Newton (εξ. 2.1) στην απειροστή μάζα, οι απειροστές συνιστώσες της δύναμης που εφαρμόζονται σε αυτή τη μάζα θα δίνονται από τις $(\delta m a'_x, \delta m a'_y, \delta m a'_z)$. Αθροίζοντας αυτές τις απειροστές δυνάμεις σε όλο το σώμα παίρνουμε τις συνιστώσες της συνολικής δύναμης (X, Y, Z) . Στο σημείο αυτό πρέπει να υποθέσουμε ότι $\frac{dm}{dt} = 0$ δηλαδή, η συνολική μάζα του αεροσκάφους παραμένει σταθερή με τη μεταβολή του χρόνου. Αυτή η υπόθεση είναι αρκετά ακριβής εφόσον η μεταβολή της μάζας είναι σχετικά μικρή (της τάξης του 5%) για μια περίοδο 30-60 sec, χρόνος μέσα στον οποίο συνήθως εξετάζεται η δυναμική απόκριση του αεροσκάφους. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν μπορεί να είναι ακριβές εφόσον εξετάζουμε την περίπτωση ενός πυραύλου του οποίου η κατανάλωση καυσίμων είναι εντυπωσιακά μεγάλη. Αντιθέτως, σε ένα μη επανδρωμένο μικρό αεροσκάφος, το οποίο κινείται με

ηλεκτρική ενέργεια, δεν έχουμε καμία διαφοροποίηση στη μάζα του και ως εκ τούτου το $\delta m = 0$.

Μια άλλη υπόθεση η οποία πρέπει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο είναι ότι η κατανομή μάζας είναι επίσης σταθερή μέσα στο σώμα. Έτσι δεν εξετάζονται τα φαινόμενα της μετατόπισης του κέντρου βάρους από τη μετατόπιση των καυσίμων, επιβατών, άφεση φορτίων κλπ. Έτσι :

$$\begin{cases} \sum \delta m a'_x = X \\ \sum \delta m a'_y = Y \\ \sum \delta m a'_z = Z \end{cases} \quad (2.10)$$

Για τα δεξιά μέλη της ισότητας στη σχέση (2.10) μπορούμε να αναφέρουμε ότι οι εξωτερικά εφαρμοζόμενες δυνάμεις διαταραχής και ανάλογα ροπές σε ένα αεροσκάφος είναι ένα άθροισμα των αεροδυναμικών δυνάμεων (X_a), των δυνάμεων λόγω εφαρμογής της ισχύος (X_p), των δυνάμεων που προκύπτουν από την κίνηση των πηδαλίων (X_c), των δυνάμεων που προκύπτουν από τη βαρύτητα (X_g), και βέβαια των επιδράσεων των ατμοσφαιρικών διαταραχών (X_d). Η παραπάνω προσέγγιση προέρχεται από τον Bryan (1911). Αν και περιορισμένης εμβελείας, αυτή η ανάλυση δίνει κατά πρώτον πολύ καλά αποτελέσματα για τα κλασσικά αεροσκάφη και κατά δεύτερον προσφέρει μια ξεκάθαρη εικόνα για τους φυσικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά του αεροσκάφους.

Αντικαθιστώντας την έκφραση για τις συνιστώσες της αδρανειακής επιτάχυνσης (a'_x , a'_y , a'_z) από την εξίσωση (2.9) στην (2.10) και παρατηρώντας ότι η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το κέντρο βάρους έχουμε

:

$$\sum \delta m x = \sum \delta m y = \sum \delta m z = 0 \quad (2.11)$$

Ενώ οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης που επιδρά στο στερεό σώμα δίνονται από :

$$\begin{cases} m(\dot{U} - rV + qW) = X \\ m(\dot{V} - pW + rU) = Y \\ m(\dot{W} - qU + pV) = Z \end{cases} \quad (2.12)$$

Όπου m είναι η ολική μάζα του σώματος.

Η εξίσωση (2.12) περιγράφει την κίνηση του κέντρου βάρους του σώματος αφού η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το κέντρο βάρους. Σε μερικές εφαρμογές πχ στο αερόστατο είναι βολικότερο να τοποθετηθεί η αρχή των αξόνων σε κάποιο σημείο διαφορετικό από το CG. Σε αυτήν φυσικά την περίπτωση η συνθήκη που περιγράφεται από την εξίσωση (2.11) δεν ισχύει και η εξίσωση (2.12) θα πρέπει να περιλαμβάνει περισσότερους όρους.

2.3.4 Οι εξισώσεις της γενικευμένης Ροπής

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τις ροπές που δημιουργούνται από την εφαρμογή των δυνάμεων που εφαρμόζονται στην απειροστή μάζα dm στο σημείο $p(x,y,z)$. Οι απειροστές συνιστώσες της δύναμης προκαλούν απειροστές συνιστώσες ροπής σε καθένα από τους τρεις σωματόδετους άξονες. Αθροίζοντας τις τελευταίες πάνω σε όλο το σώμα προκύπτει η εξίσωση της ροπής, η οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια μορφή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα που ισχύει ειδικά για την περιστροφή. Για παράδειγμα η συνολική ροπή L ως προς τον άξονα OX προκύπτει αθροίζοντας τις απειροστές ροπές πάνω σε όλο το σώμα :

$$\sum \delta m (y a'_z - z a'_y) = L \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις εκφράσεις για τα a'_y και a'_z από την (2.9) και παρατηρώντας ότι ισχύει η (2.11), η (2.13) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} \sum \delta m (y^2 + z^2) + qr \sum \delta m (y^2 - z^2) + \\ +(r^2 + q^2) \sum \delta m yz - (pq + \dot{r}) \sum \delta m xz + (pr - \dot{q}) \sum \delta m xy = L \end{array} \right.$$

$$(2.14)$$

Οι όροι που περιέχονται στο άθροισμα στην εξίσωση (2.14) έχουν τις μονάδες της ροπής αδρανείας. Κατ' αυτόν τον τρόπο η πιο πάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί :

$$I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr + I_{xy}(pr - \dot{q}) - I_{xz}(pq + \dot{r}) + I_{yz}(r^2 - q^2) - L$$

$$(2.15)$$

Οι ροπές M και N ως προς τους άξονες OY και OZ αντίστοιχα θα είναι:

$$\begin{cases} \sum \delta m(z a'_x - x a'_z) = M \\ \sum \delta m(x a'_y - y a'_x) = N \end{cases} \quad (2.16)$$

Επαναλαμβάνοντας τους πιο πάνω συλλογισμούς, παίρνουμε και τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$I_y \dot{q} - (I_x - I_z)qr + I_{yz}(pr - \dot{r}) - I_{xy}(pr + \dot{p}) + I_{xz}(p^2 - r^2) = M \quad (2.17)$$

$$I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq - I_{yz}(pr - \dot{q}) + I_{xz}(pr - \dot{p}) + I_{xy}(q^2 - p^2) = N \quad (2.18)$$

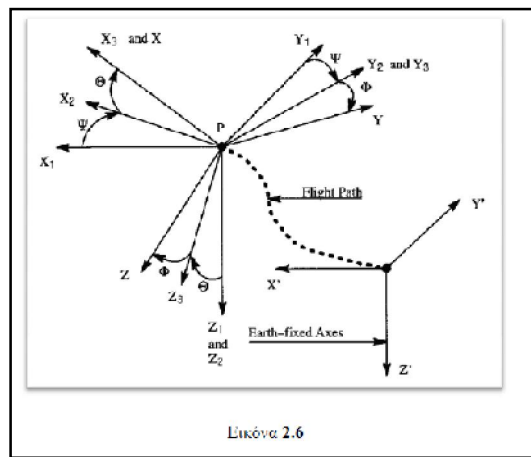
Οι σχέσεις (2.15), (2.17) και (2.18) αντιπροσωπεύουν τις εξισώσεις ροπών ενός στερεού σώματος και περιγράφουν την περιστροφική κίνηση γύρω από τους ορθογώνιους άξονες που περνούν από το κέντρο βάρους του, αφού όπως ήδη έχουμε σημειώσει η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το κέντρο βάρους του σώματος αυτού.

Στο σημείο αυτό προσπαθώντας να απλοποιήσουμε τις τρεις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι τα περισσότερα αεροσκάφη είναι συμμετρικά ως προς το επίπεδο oxz. και ότι η μάζα είναι ομοιόμορφα κατανομημένη, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $I_{xy} = I_{yz} = 0$.

Οι εξισώσεις (2.15, 2.17, 2.18) περιγράφουν τις κινήσεις διατοιχισμού (rolling), πρόνευσης (pitching) και εκτροπής (yawing) αντίστοιχα.

2.4 Η στάση (attitude) του αεροσκάφους ως προς το γήινο σύστημα αξόνων

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τον προσανατολισμό του αεροσκάφους σε σχέση με το γήινο σύστημα αξόνων κάτι που ως τώρα θα παρατηρήσουμε ότι δεν έχει γίνει. Αρκεί να ορίσουμε κάποιες γωνίες που θα συσχετίσουν το προσδεμένο στο αεροσκάφος σύστημα (xyz) (το οποίο μπορεί να είναι το σωματόδετο σύστημα (x_b, y_b, z_b) ή και το σύστημα (x_w, y_w, z_w) έτσι όπως ορίστηκαν στην §2.2.2) με το γήινο σύστημα (x_0, y_0, z_0). Γενικά η διαδικασία συσχετισμού ενός μεγέθους ή μεταβλητής από ένα σύστημα αξόνων σε ένα άλλο γίνεται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο και μάλιστα με τη βοήθεια κάποιων γωνιών που ονομάζονται γωνίες Euler.



Το σχήμα 2.6 απεικονίζει το γήινο σύστημα ($x_0y_0z_0$) το οποίο έχει μετακινηθεί παράλληλα με τον εαυτό του έως ότου η αρχή του ταυτιστεί με το κέντρο μάζας του αεροσκάφους P. Σε αυτό το σημείο το μετονομάζουμε ($x_1 y_1 z_1$). Ο προσανατολισμός του σωματόδετου συστήματος (xyz) σε σχέση με το ($x_1 y_1 z_1$) θα γίνει με τη βοήθεια τριών διαδοχικών περιστροφών ως προς τις γωνίες ψ , θ και ϕ .

Περιστροφή 1

Το σύστημα ($x_1 y_1 z_1$) περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z_1 με γωνία ψ η οποία ονομάζεται γωνία πορείας (heading angle). Η θετική φορά αυτής της γωνίας φαίνεται στο σχήμα. Το νέο σύστημα που προκύπτει μετονομάζεται ($x_2 y_2 z_2$).

Περιστροφή 2

Το σύστημα ($x_2 y_2 z_2$) περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y_2 με γωνία θ η οποία ονομάζεται γωνία πρόνευσης (ανόδου/καθόδου-pitch attitude angle). Η θετική φορά αυτής της γωνίας φαίνεται στο σχήμα. Το νέο σύστημα που προκύπτει μετονομάζεται ($x_3 y_3 z_3$).

Περιστροφή 3

Το σύστημα ($x_3 y_3 z_3$) περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x_3 με γωνία ϕ η οποία ονομάζεται γωνία διατοιχισμού ή γωνία κλίσης των πτερύγων (roll angle). Η θετική φορά αυτής της γωνίας φαίνεται επίσης στο σχήμα. Το νέο σύστημα που προκύπτει μετονομάζεται σε (xyz), δηλαδή σε αυτό το σημείο πετύχαμε την ταύτιση του γήινου με το προσδεμένο σύστημα στο αεροσκάφος. Πρέπει να τονιστεί ότι για αυτές τις πεπερασμένες γωνιακές περιστροφές δεν ισχύει ό,τι ισχύει για τα διανύσματα, δηλαδή η ιδιότητα $A+B = B+A$, όπου A και B διανύσματα. Έτσι ο ορισμός των αξόνων γύρω από τους οποίους γίνεται η περιστροφή, η φορά της περιστροφής αλλά και η σειρά με την οποία γίνεται η περιστροφή έχει πράγματι σημασία. Αντίθετα εάν θεωρήσουμε απειροστά μικρές γωνιακές περιστροφές τότε ισχύει η πιο πάνω ιδιότητα.

Επίσης όταν η στάση του αεροσκάφους αναφέρεται ως προς τους γήινους άξονες τότε οι άξονες $(Ox_0 y_0 z_0)$ και $(OX_E Y_E Z_E)$ προφανώς θα ταυτίζονται. Σε γωνία $\theta = 90^\circ$ η γωνία φ χάνει το νόημα της. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα σε εφαρμογές εξομοίωσης (simulation), όπου το αεροσκάφος πρέπει να είναι ικανό να εκτελέσει έναν πλήρες ελιγμό ανακύκλωσης (loop), έχουν αναπτυχθεί κάποιες μαθηματικές μέθοδοι που δίνουν αποδεκτές λύσεις.

Πολύ συχνά είναι απαραίτητο να μετασχηματίσουμε κάποιες κινηματικές μεταβλητές από ένα σύστημα αξόνων σ' ένα άλλο. Σ' αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να σχετίσουμε τις γωνιακές ταχύτητες p, q, r του προσδεμένου συστήματος του αεροσκάφους με τις γωνιακές ταχύτητες, $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ οι οποίες αντιπροσωπεύουν το ρυθμό αλλαγής της στάσης (attitude rates) του αεροσκάφους σε σχέση με το γήινο σύστημα αξόνων.

Σύμφωνα με την εικόνα 2.6, το σύστημα (xyz) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τις συνιστώσες της γραμμικής ταχύτητας του σημείου P στο προσδεμένο σύστημα και το $(x_0 y_0 z_0) - (x_1 y_1 z_1)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τις συνιστώσες της γραμμικής ταχύτητας του σημείου P στο γήινο σύστημα. Τότε οι γωνίες Euler ψ, θ και φ θα περιγράφουν το γωνιακό προσανατολισμό του ενός συστήματος αξόνων σε σχέση με το άλλο. Ο πιο πάνω υπολογισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα απεικονίζοντας όλα τα μεγέθη με τη μορφή διανυσμάτων πάνω στους άξονες του σχήματος.

Μετά την εκτέλεση των απαραίτητων υπολογισμών μπορούμε να καταλήξουμε στις ακόλουθες σχέσεις :

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta \quad (2.19)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \quad (2.20)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \quad (2.21)$$

ή σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Ο ρυθμός περιστροφής (roll rate) ως προς το προσδεμένο σύστημα δεν ταυτίζεται με το ρυθμό αλλαγής της κλίσης (bank angle) $\dot{\varphi}$. Ο ρυθμός

πρόνευσης (pitch rate) ως προς το προσδεμένο σύστημα δεν ταυτίζεται με το ρυθμό αλλαγής της γωνίας ανόδου-καθόδου (pitch angle) $\dot{\theta}$. Ο ρυθμός εκτροπής (yaw rate) ως προς το προσδεμένο σύστημα δεν ταυτίζεται με το ρυθμό αλλαγής της πορείας (heading angle) $\dot{\psi}$. Όταν οι διαταραχές του αεροσκάφους είναι μικρές έτσι ώστε τα (φ, θ, ψ) να μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν μικρές γωνίες οι εξισώσεις (2.19, 2.20, 2.21) μπορούν να προσεγγιστούν από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi} \\ q = \dot{\theta} \\ r = \dot{\psi} \end{cases} \quad (2.23)$$

2.5 Γενικές παρατηρήσεις για τις εξισώσεις κίνησης

Υπάρχουν λοιπόν τρία σετ εξισώσεων, οι εξισώσεις των δυνάμεων (2.12), οι εξισώσεις των ροπών (2.15), (2.17), (2.18), και οι κινηματικές εξισώσεις (2.19), (2.20), (2.21).

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται γενικευμένες εξισώσεις κίνησης του αεροσκάφους, παρόλο που για την παρουσίαση τους έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετές παραδοχές.

Οι εξισώσεις (2.12), (2.15), (2.17) και (2.18) είναι ακόμη ατελείς : Οι αεροδυναμικές δυνάμεις, οι δυνάμεις λόγω της ώσης τους αεροσκάφους καθώς και οι αντίστοιχες ροπές πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει των μεταβλητών κίνησης.

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά οι παραπάνω εξισώσεις σχηματίζουν ένα σύστημα εννέα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με εννέα μεταβλητές: Τις συνιστώσες της ταχύτητας U, V, W τους βαθμούς περιστροφής p, q, r και τις γωνίες Euler φ, θ, ψ . Με κατάλληλες αντικαταστάσεις μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα έξι διαφορικών εξισώσεων με έξι μεταβλητές, είτε τις U, V, W και p, q, r είτε τις U, V, W και φ, θ, ψ .

Σε κάθε περίπτωση, έως σήμερα λύση στο παραπάνω σύστημα μπορεί να δοθεί μόνο μέσω αριθμητικών μεθόδων. Παρά ταύτα και σε σχέση με τα χαρακτηριστικά ευκολίας χειρισμού (handling qualities) υπάρχουν δύο συνθήκες πτήσης για τις οποίες οι λύσεις έχουν μεγάλη σημασία :

Τις μόνιμες συνθήκες πτήσης (steady state flight conditions) και τις διαταραγμένες συνθήκες πτήσης (perturbed state flight conditions).

2.6 Σταθερή-μόνιμη πτήση (Steady State Flight)

Σταθερή ή μόνιμη κατάσταση πτήσης ονομάζεται εκείνη η κατάσταση κατά την οποία ΟΛΕΣ οι κινηματικές μεταβλητές παραμένουν σταθερές συναρτήσει του χρόνου, σε σχέση με το προσδεμένο σύστημα αξόνων. Από μαθηματικής σκοπιάς αυτό υποδηλώνει ότι :

$$\vec{V}_0 = 0 \text{ και } \vec{\omega} = 0 \quad (2.24)$$

Όπου: $(\vec{V}_0 = iU + jV + kW \text{ και } \vec{\omega} = ip + jq + kr)$

Ο πιο πάνω ορισμός ισχύει μόνο σε ατμόσφαιρα σταθερής πυκνότητας. Στην πραγματικότητα η πυκνότητα της ατμόσφαιρας μεταβάλλεται με το ύψος, επομένως ο πιο πάνω ορισμός μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο εφόσον το αεροσκάφος πετά σε σταθερό ύψος. Ο λόγος είναι το γεγονός ότι οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές είναι όλες ανάλογες της δυναμικής πίεσης $\frac{1}{2}\rho V_0^2$. Καθώς μεταβάλλεται η πυκνότητα μεταβάλλονται οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές και αυτό παραβιάζει την (2.24).

Στην πραγματικότητα εφόσον η πυκνότητα δεν μεταβάλλεται πάνω από περίπου 5% μέσα σε 30-60 sec, είναι αποδεκτό να πούμε ότι η σταθερή ευθύγραμμη πτήση σε σταθερό επίπεδο, η σταθερή στροφή στο ίδιο ύψος καθώς και η συμμετρική απαγκίστρωση (pull-up) ταξινομούνται ως πτήσεις μόνιμης κατάστασης.

Κεφάλαιο 3

Επεξεργασία των εξισώσεων κίνησης

3.1 Τρόποι επεξεργασίας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι εξισώσεις κίνησης του αεροσκάφους, μας παρέχουν αρκετές πληροφορίες σχετικά με την κίνησή και τη θέση του. Γνωρίζοντας τις γωνιακές ταχύτητες κάθε άξονα, την κλίση και τη μετατόπισή του μπορούμε με ακρίβεια να προσδιορίσουμε τη θέση του στο χώρο.

Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως πρότυπο ένα σημείο των αξόνων της γης, το οποίο παραμένει σταθερό και αμετάβλητο (εικόνα 2.1). Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως για λόγους ευκολίας και απλούστευσης της συγκεκριμένης εργασίας, θεωρούμε τη γη ως ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς. Επίσης, για λόγους απλοποίησης, θεωρούμε ότι ο ορίζοντας είναι επίπεδος και δεν έχει καμπυλότητα.

Με βάση αυτό το σημείο O_0 λοιπόν, το οποίο ορίζουμε ως αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς της γης, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση και την κατεύθυνση του αεροσκάφους. Συγκρίνοντας ανά πάσα στιγμή τους άξονες του συστήματος της γης με αυτούς της κίνησης του αεροσκάφους μπορούμε να γνωρίζουμε την κλίση και την κατεύθυνση του.

Συνεπώς, όταν γνωρίζουμε τις εξισώσεις κίνησης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως είσοδο στις μεταβλητές των εξισώσεων, τα στοιχεία που διαβάζουν οι αισθητήρες. Τα στοιχεία αυτά των αισθητήρων, φυσικά παρέχονται σε ψηφιακή μορφή.

Επομένως, χρειάζεται να βρεθεί ένας τρόπος, μια μεθοδολογία, για να μεταφραστούν αυτά τα ψηφιακά δεδομένα σε μορφή κατάλληλη ούτως ώστε να συμπληρώνουν τις εξισώσεις.

Στη συνέχεια, πρέπει αυτές οι εξισώσεις να μπορούν να προσομοιωθούν σε υπολογιστή και σε προγράμματα με σκοπό την επεξεργασία των δεδομένων. Αφού το αεροσκάφος βρίσκεται σε κίνηση, αυτά τα δεδομένα αλλάζουν διαρκώς. Έτσι θα πρέπει να δημιουργηθούν δυναμικές εξισώσεις οι οποίες θα πραγματοποιούν τους υπολογισμούς των τιμών σε πραγματικό χρόνο.

Ειδικότερα, οι γραμμικοποιημένες δυναμικές συναρτήσεις που χρειάζεται να δημιουργηθούν για την επεξεργασία των δεδομένων, μπορούν να προσεγγιστούν με διάφορους τρόπους και μεθοδολογίες.

Ένας μεγάλος αριθμός μηχανικών, μαθηματικών φυσικών και άλλων επιστημόνων ασχολούνται με τη δημιουργία τέτοιων αλγορίθμων.

Οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν έχουν εφαρμογές σε υπολογιστικά προγράμματα υπολογιστών. Προγράμματα τα οποία προσομοιώνουν την πτήση και την κίνηση του αεροσκάφους και δίνουν τη δυνατότητα της επεξεργασίας των δεδομένων, όπως το Matlab.

Το Matlab είναι μια μαθηματική υπολογιστική πλατφόρμα εξομοίωσης που χρησιμοποιείται και για εκπαιδευτικούς σκοπούς αλλά παράλληλα μπορεί να υλοποιήσει την προσομοίωση επαγγελματικών συστημάτων. Ειδικά, με την χρήση προγραμμάτων εξομοίωσης όπως το Matlab, μπορούμε με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια να ελέγξουμε ένα σύστημα προτού αρχίσουμε την κατασκευή του. Να το προσομοιώσουμε σε καταστάσεις και συνθήκες πραγματικές και να δούμε να μελετήσουμε και να αξιολογήσουμε τη συμπεριφορά του. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τις δυνατότητες που παρέχει το πρόγραμμα ούτως ώστε να ελέγξουμε το αεροσκάφος σε πραγματικό χρόνο.

3.2 Χώρος κατάστασης

Η πρώτη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στη συνέχεια, είναι ο χώρος κατάστασης. Το απόσταγμα από τον αριθμό των εισόδων των εξόδων και των καταστάσεων. Οι μεταβλητές εκφράζονται ως διανύσματα. Επιπλέον, εάν το δυναμικό σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο, οι διαφορικές και αλγεβρικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή πινάκων. Η αναπαράσταση του χώρου καταστάσεων (επίσης γνωστή ως η “προσέγγιση στο πεδίου του χρόνου”) παρέχει ένα βολικό εύκολα διαχειρίσιμο και συμπαγή περιεκτικό τρόπο να μοντελοποιηθούν και να αναλυθούν τα συστήματα με πολλαπλές εισόδους και εξόδους.

Με p εισόδους και q εξόδους, θα χρειαζόμασταν αλλιώς να υπολογίσουμε $p \times q$ εξισώσεις μετασχηματισμού Laplace για να κωδικοποιηθούν όλες οι πληροφορίες ενός συστήματος. Σε αντίθεση με την προσέγγιση του πεδίου των συχνοτήτων, με τη χρήση των χώρων κατάστασης, η παρουσίασή και καταγραφή των δεδομένων δεν υπόκειται σε περιορισμούς και όρια. Όταν πρόκειται για συστήματα γραμμικά και με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Οι “χώροι κατάστασης” αναφέρονται στα συστήματα που οι άξονές τους μπορούν να παρουσιαστούν ως μεταβλητές. Οι χώροι κατάστασης ενός συστήματος μπορούν να παρουσιαστούν ως διανύσματα μέσα στο χώρο κατάστασης.

3.2.1 Εξισώσεις εσωτερικής κατάστασης

Η εξωτερική συμπεριφορά ενός συστήματος ορίζεται από μια σχέση εισόδου- εξόδου. Η μαθηματική παράσταση της σχέσης εισόδου-εξόδου ενός συστήματος είναι:

- Στο επίπεδο του χρόνου t μία διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \quad (3.1)$$

Στο μιγαδικό επίπεδο s μια συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \text{ με } m \leq n \quad (3.2)$$

Η εσωτερική κατάσταση (state) ενός συστήματος εκφράζει εκτός από την εξωτερική σχέση εισόδου-εξόδου και δύο επιπρόσθετα εσωτερικά χαρακτηριστικά του συστήματος:

- τα εσωτερικά μεγέθη (inner magnitudes) και
 - την εσωτερική δομή (inner structure) του συστήματος.
- Τα εσωτερικά μεγέθη ενός συστήματος n -οστής τάξης είναι: οι n ανεξάρτητες μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n και ονομάζονται μεταβλητές εσωτερικής κατάστασης (state variables), ή το $(n \times 1)$ διάνυσμα μεταβλητών εσωτερικής κατάστασης (state vector):

$$\underline{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \quad (3.3)$$

3.2.2 Εσωτερική δομή ενός συστήματος

Η εσωτερική δομή ενός συστήματος περιγράφεται μαθηματικά από τις εξισώσεις εσωτερικής κατάστασης (state equations):

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B}u(t) \Big|_{\underline{x}_0} \quad (3.4)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + Du(t) \quad (3.5)$$

Η μετάβαση από τις εξισώσεις εσωτερικής κατάστασης στη σχέση εισόδου-εξόδου είναι μονοσήμαντη. Σε δεδομένες εξισώσεις κατάστασης αντιστοιχεί μία συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + D \quad (3.6)$$

Η κίνηση, ή διαφορετικά η κατάσταση οποιουδήποτε γραμμικού δυναμικού συστήματος μπορεί να περιγραφεί από ένα ελάχιστο σύνολο από τις μεταβλητές που ονομάζονται μεταβλητές κατάστασης. Ο αριθμός των μεταβλητών που απαιτείται ώστε να περιγραφεί πλήρως η κίνηση του συστήματος εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας που έχει το σύστημα. Έτσι η κίνηση του συστήματος περιγράφεται από ένα πολυδιάστατο διάνυσμα που ονομάζεται χώρος κατάστασης και στο οποίο ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης ισούται με το αριθμό των διαστάσεων. Παραπάνω είδαμε τις εξισώσεις κατάστασης ενός αμετάβλητου συστήματος ή αλλιώς τις εξισώσεις κίνησης του.

Όπου : $\underline{x}(t)$ είναι το διάνυσμα στήλη των n μεταβλητών κατάστασης που ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης (state vector), $u(t)$ είναι το διάνυσμα στήλη των m μεταβλητών κατάστασης που ονομάζεται διάνυσμα εισόδου (input vector).

A είναι ο $(n \times m)$ πίνακας κατάστασης (state matrix), B είναι ο $(n \times m)$ πίνακας εισόδου (input matrix). Οι πίνακες A και B του γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος έχουν σταθερά στοιχεία. Η εξίσωση (3.4) είναι το ισοδύναμο σε μορφή πίνακα ενός συστήματος n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Για πολλά συστήματα ορισμένες από τις μεταβλητές κατάστασης μπορεί να μην είναι δυνατόν να καθοριστούν άμεσα. Έτσι απαιτείται η δεύτερη εξίσωση (3.5) ώστε να καθοριστούν οι μεταβλητές εξόδου του συστήματος.

Όπου:

$y(t)$ είναι το διάνυσμα στήλη των r μεταβλητών εξόδου που ονομάζεται διάνυσμα εξόδου (output vector).

C είναι ο $(r \times n)$ πίνακας εξόδου (output matrix).

D είναι ο $(r \times m)$ πίνακας εξωτερικών μεταβολών (direct matrix). Τυπικά ισχύει $r \leq n$, ενώ για γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα οι πίνακες C και D έχουν σταθερά στοιχεία. Οι εξισώσεις 3.4 και 3.5 όταν χρησιμοποιηθούν συγχρόνως, περιγράφουν πλήρως το σύστημα.

Για τα περισσότερα προβλήματα που αφορούν τα αεροσκάφη, μας διευκολύνει να επιλέξουμε τις μεταβλητές εξόδου ως μεταβλητές κατάστασης, δηλαδή:

$y(t)=x(t)$ και $r=n$ και επομένως:

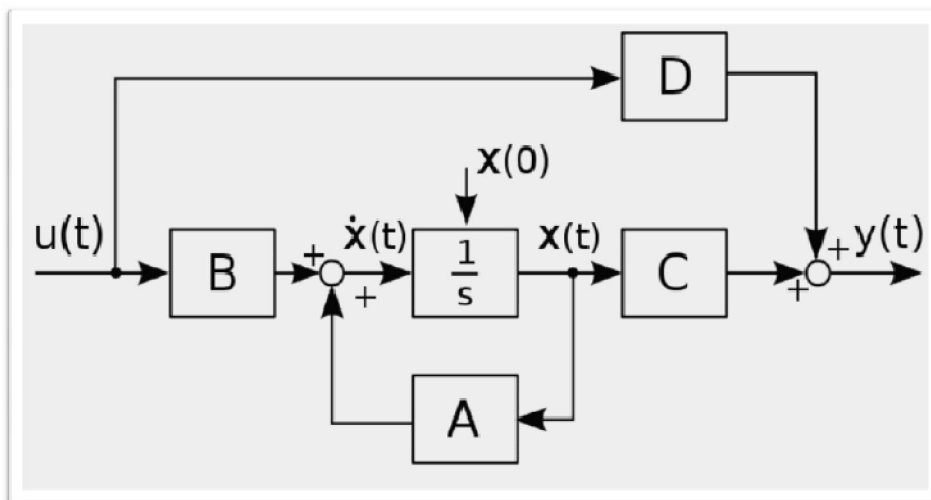
$C= I (n \times m)$ μοναδιαίος πίνακας $D= 0 (n \times m)$ μηδενικός πίνακας

Έτσι η εξίσωση εξόδου απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$y(t)= I x(t)=x(t) \quad (3.7)$$

Έχοντας καταλήξει στις εξισώσεις κατάστασης, απομένει να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης του αεροσκάφους, στις εξισώσεις κατάστασης. Κατέχοντας λοιπόν τις τιμές των τιμών των αξόνων, μπορούν να συμπληρωθούν οι πίνακες A και B.

Συμπερασματικά, μπορούμε εύκολα πλέον να ελέγξουμε το αεροσκάφος με έναν έξυπνο αλγόριθμο αναγνώρισης σφαλμάτων και σύγκρισης των τιμών με το σύστημα αναφοράς που έχει τοποθετηθεί στη γη.



Εικόνα 3.1

3.3 Τετραδόνια

Μια άλλη μεθοδολογία που προσεγγίζει το θέμα επίλυσης των εξισώσεων είναι αυτή των τετραδονίων (quaternions).

Στα μαθηματικά, τα τετραδόνια (quaternions) αποτελούν μία μη-αντιμεταθετική επέκταση της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών. Παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Ιρλανδό μαθηματικό Ουίλιαμ Ρόουαν Χάμιλτον το 1843. Όμως, τον προηγούμενο αιώνα ο Euler και ο Gauss συνεισέφεραν στη μαθηματική διατύπωση των αντικειμένων Q -τύπου. Επιπροσθέτως, ο Rodriguez εισήγαγε κανόνες πολλαπλασιασμού για στοιχεία παρόμοιας άλγεβρας.

Όμως, η ενεργός αντιπαράθεση του Gibbs και Heaviside στις αρχές του Hamilton πυροδότησε την απαρχή της σύγχρονης διανυσματικής άλγεβρας. Έτσι τα τετραδόνια σταμάτησαν πρακτικά να χρησιμοποιούνται σαν εργαλείο των μαθηματικών της φυσικής, παρά της ιδιαιτερότητας και συγκεκριμένης φύσης της άλγεβράς τους, η οποία επιβεβαιωνόταν από το θεώρημα του Frobenius.

Παρά την παύση της χρήσης τους, τα τετραδόνια επανεμφανίστηκαν μετά τις αρχές του 20ου αιώνα ως ένα μαθηματικό εργαλείο για εναλλακτική περιγραφή των ήδη γνωστών φυσικών μοντέλων. Λόγω της εκπληκτικής απλότητας και ευκολίας που παρείχαν, χρησιμοποιήθηκαν για τη λύση σωματόδετων προβλημάτων κινηματικής. Το ενδιαφέρον για τα τετραδόνια αυξήθηκε ουσιαστικά τις τελευταίες τρεις δεκαετίες όπου

καινούριες γενιές θεωρητικών άρχισαν να νιώθουν τις μεγάλες ανεκμετάλλευτες δυνατότητες τους.

Συνεπώς, λόγω της φύσης τους, εφαρμόστηκαν στη μηχανική μέσα στον τρισδιάστατο χώρο. Η αρχική διατύπωση των εξισώσεων του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό ήταν σε μορφή τετραδονίων. Σήμερα, στις περισσότερες εφαρμογές έχουν αντικατασταθεί από την απλούστερη διανυσματική θεωρία. Παρόλα αυτά, συναντώνται ακόμη σε εφαρμογές όπως στα τρισδιάστατα γραφικά ηλεκτρονικών υπολογιστών και η χρήση τους καταστεί πιο εύκολη την επεξεργασία των δεδομένων για υπολογισμούς.

3.3.1 Τετραδόνια ως γενικευμένη μορφή μιγαδικών

Τα τετραδόνια αποτελούν γενικευμένη μορφή των μιγαδικών αριθμών, που προκύπτουν από την πρόσθεση των βασικών στοιχείων i , j και k σε πραγματικούς αριθμούς.

Σύμφωνα με τον Hamilton το τετραδόνιο είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο της μορφής

$$Q \equiv a + bi + cj + dk, \quad (3.8)$$

όπου a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί. Το a είναι ο συντελεστής της πραγματικής μονάδας «1» και τα i, j, k είναι τρία φανταστικά τετραδόνια. Ο κανόνας πολλαπλασιασμού των μονάδων αυτών δίνεται από τον Hamilton και ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$1i - i1 \equiv i, \quad 1j - j1 \equiv j, \quad 1k - k1 \equiv k, \quad (3.9)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (3.10)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (3.11)$$

Λόγω των ιδιοτήτων αυτών, ο πολλαπλασιασμός δεν έχει αντιμεταθετική ιδιότητα. Επομένως ισχύει:

$$Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1 \quad (3.12)$$

Δύο διαφορετικά αλγεβρικά χαρακτηριστικά είναι φυσικά διαχωρισμένα σε ένα τετραδόνιο. Το ένα ορίζεται ως scalar που είναι το πραγματικό

του μέρους $\text{scal}Q=a$, το άλλο είναι το vector που είναι το φανταστικό του μέρους $\text{vect}Q=bj+ci+dk$

Συνεπάγεται, η αφαίρεση ή η πρόσθεση μεταξύ τετραδονίων να γίνεται ως προς τα φανταστικά και πραγματικά μέρη τους. Επομένως, το πραγματικό προστίθεται με το πραγματικό και το φανταστικό με το φανταστικό. Εδώ, συνυπολογίζεται και ο περιορισμός της μη αντιμεταθετικότητας των τετραδονίων .

Η σύζευξη των τετραδονίων μιγαδικών αριθμών γράφεται ως:

$$\overline{Q} \equiv \text{scal}Q - \text{vect}Q = a - bi - cj - dk, \quad (3.13)$$

Το μέτρο ενός τετραδονίου ορίζεται ως εξής:

$$|Q| \equiv \sqrt{Q\overline{Q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (3.14)$$

Με το συγκεκριμένο ορισμό του μέτρου, μπορεί να υλοποιηθεί η τετραδονική διαίρεση ως πολλαπλασιασμός προς «δεξιά» ή «αριστερά»

$$Q_L = \frac{Q_1\overline{Q_2}}{|Q_2|^2}, \quad Q_R = \frac{\overline{Q_2}Q_1}{|Q_2|^2} \quad (3.15)$$

Ο ορισμός του μέτρου του Q ενισχύει την διάσημη ταυτότητα των τεσσάρων τετραγώνων

$$|Q_1Q_2|^2 = |Q_1|^2|Q_2|^2 \quad (3.16)$$

Τα μιγαδικά στοιχεία των τετραδονίων μπορούν να παρουσιαστούν υπό τη μορφή 2 X 2 πινάκων

$$\mathbf{i} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Η παρουσίαση αυτή ως έχει, δεν είναι μοναδική. Αν στις παραπάνω μορφές των στοιχείων η μιγαδική μονάδα i παρουσιαστεί σαν ένας πίνακας πραγματικών στοιχείων 2 X 2 τότε έχουμε

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

ως αποτέλεσμα, τα τρία διανύσματα Q καταλήγουν πλέον να παρουσιάζονται ως πραγματικοί πίνακες 4×4 μορφής. Η διαδικασία του διπλασιασμού του βαθμού του πίνακα μπορεί προφανώς να συνεχιστεί περαιτέρω.

3.3.2 Μορφή τετραδονίων τανυστών

Για να καταστεί δυνατή η εισαγωγή, στα μιγαδικά αυτά στοιχεία, πολλών διαφορετικών τιμών πρέπει να παρουσιαστεί η μορφή των τανυστών (tensors) ή αλλιώς πινάκων μέσα στους πίνακες.

Εάν κάθε Q στοιχείο περιέχει την κανονική του μορφή ως μεταβλητή του tensor

$$(i,j,k) \rightarrow (q_1, q_2, q_3) = q, i, k, j, l, m, n, \dots = 1, 2, 3,$$

τότε ο πολλαπλασιαστικός κανόνας των τετραδονίων παίρνει την εξής συμπαγή μορφή :

$$1q_k = q_k 1 = q_k, q_j q_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn} q_n \quad (3.19)$$

όπου δ_{jk} και ε_{jkn} είναι τα τρισδιάστατα (3D) σύμβολα Kronecker και Levi-Chivita.

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι ο αριθμός από τετραδόνια της παραπάνω μορφής με την απλούστερη μορφή του πίνακα 2×2 είναι άπειρος. Συγκεκριμένα για όποιον πίνακα 2×2 με ιδιότητες

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}, \text{Tr} A = \text{Tr} B = 0, \quad (3.20)$$

τα δύο πρώτα Q στοιχεία μπορούν να κατασκευαστούν ως εξής

$$q_1 = \frac{A}{\sqrt{\det A}}, q_2 = \frac{B}{\sqrt{\det B}} \quad (3.21)$$

ενώ το τρίτο

$$q_3 = q_1 q_2 = \frac{AD}{\sqrt{\det A \det B}}, \text{ υπό την προϋπόθεση ότι } T_T(AB) = 0 \quad (3.22)$$

Ο μοναδιαίος πίνακας είναι αμετάβλητος πάντα

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

3.3.3 Τετραδόνια στον τρισδιάστατο χώρο

Είναι γνωστό, ότι σε κάθε N-διαστάσεων διαφορικό πολλαπλάσιο UN με συντεταγμένες $\{y^A\}$ μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν εφαπτόμενο χώρο T_N με συντεταγμένες $\{X^{(A)}\}$ ώστε να ισχύει:

$$dX^{(A)} = g_B^{(A)} dy^B \quad (3.24)$$

Όπου $g_B^{(A)}$ είναι ο συντελεστής Lamé. Με μια επιπλέον πράξη μπορεί να κατασκευαστεί ένας τετραδονικός εφαπτόμενος χώρος $T(U,q)$ με συντεταγμένες $\{x_k\}$ $k=1,2,3$, που είναι συσχετισμένος με τα τετραδονικά διανύσματα

$$dx_k = h_{k(A)} dX^{(A)} = h_k g_B^{(A)} dy^B, \quad (3.25)$$

Όπου $h_{k(A)}$ είναι γενικευμένοι μη τετραγωνικοί πίνακες απλοποιημένοι με προβολή του βασικού χώρου σε 3D και αντίστροφα.

Συνεπώς, κατάλληλος τετραδονικός χώρος U_3 ορίζεται ως τρισδιάστατος 3D χώρος που είναι τοπικά όμοιος με το δικό του εφαπτόμενο χώρο $T(U_3,q)$. Ο τετραδονικός τρισδιάστατος χώρος έχει τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά. Μπορεί να παρουσιαστεί υπό το πρίσμα διανυσμάτων του τετραδονικού μετρικού τα οποία είναι αποτελούν μέρος του πολλαπλασιαστικού κανόνα $q_j q_k = -\delta_{jk} + \epsilon_{jkn} q_n$. Είναι ασύμμετρος και το μη συμμετρικό μέρος του είναι ο τετραδονικός πίνακας χειρισμού, που είναι κατασκευασμένος με τέτοιο τρόπο, ούτως ώστε κάθε σημείο του U_3 να έχει μια εσωτερική τετραδονική δομή.

Να τονίσουμε εδώ ότι με τη βοήθεια των τετραδονίων μπορούμε να μεταφέρουμε, όπως και με τους χώρους κατάστασης, τις τιμές των

αισθητήρων στις εξισώσεις. Έτσι μπορούμε να επεξεργαστούμε τα δεδομένα με ακρίβεια. Η χρήση της μεθοδολογίας των τετραδονίων από υπολογιστικά προγράμματα, υπερτερεί έναντι των περισσότερων αλγορίθμων γιατί καταναλώνει λιγότερη υπολογιστική ισχύ.

3.3.4 Εφαρμογή των τετραδονίων στο AHRS

Το AHRS σύστημα όπως περιγράφηκε στην αρχή, εμπεριέχει την εξής διαφορική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \quad (3.27)$$

Όπου, q_0, q_1, q_2, q_3 είναι τα τέσσερα στοιχεία του τετραδονίου το οποίο περιγράφει την περιστροφική ευθυγράμμιση του κάθετου άξονα στο σώμα, p, q και r είναι τα τρία στοιχεία του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας των αξόνων του σώματος ως προς τους κάθετους άξονες. Το ε είναι η διορθωτική μεταβλητή που υπεισέρχεται για να αποκλείει την περίπτωση που το τετραδόνιο γίνει ίσο με 1 εξαιτίας αριθμητικών λαθών. Οι γωνίες Euler που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εδώ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \theta = \arcsin [2(q_0 q_2 - q_1 q_3)] \\ \psi = \arctan \frac{2(q_0 q_3 - q_1 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{cases} \quad (3.28)$$

όπου ψ =yaw, φ =pitch, θ =roll.

Κεφάλαιο 4

Αισθητήρες

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο λοιπόν θα παρουσιαστούν τα είδη των αισθητήρων που συνήθως χρησιμοποιούνται για τη λήψη των δεδομένων και θα περιγραφούν οι βασικές λειτουργίες τους.

Οι αισθητήρες για τη συλλογή των δεδομένων είναι το επιταχυνσιόμετρο, μαγνητόμετρο και γυροσκόπιο. Αυτοί οι τρεις, σε συνδυασμό με ένα θερμόμετρο και ένα GPS μας δίνουν το ολοκληρωμένο σύστημα AHRS.

Η αρχιτεκτονική του AHRS αποτελείται από μια μονάδα επεξεργασίας, η οποία λαμβάνει τα σήματα από τους αισθητήρες. Ο αισθητήρας θερμοκρασίας χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση των επιπτώσεων της αλλαγής της θερμοκρασίας στις μετρήσεις με βάση τους νόμους που παρέχονται από τους κατασκευαστές των αισθητήρων.

Η αρχή λειτουργίας του AHRS στηρίζεται στο φίλτρο Kalman το οποίο καθορίζει τον ιδανικό υπολογισμό των γωνιών Euler του roll, pitch και yaw (θ , ϕ , ψ), που περιγράφονται στην ενότητα 2.5, χρησιμοποιώντας δύο ανεξάρτητες πηγές εισόδου: η πρώτη, το τμήμα “Attitude and Heading Estimations” (Υπολογισμοί συμπεριφοράς και κατεύθυνσης), παρέχει τις τιμές υψηλής συχνότητας για τις άγνωστες μεταβλητές με την χρήση της εισαγωγής των γωνιακών ταχυτήτων που προέρχονται από το γυροσκόπιο.

Το δεύτερο είναι το τμήμα “Attitude and Heading Measurements” (Μετρήσεις συμπεριφοράς και κατεύθυνσης), το οποίο παρέχει τιμές χαμηλής συχνότητας με την χρήση ενός υπολογιστικού μοντέλου βασισμένου στις τιμές που δίνουν το επιταχυνσιόμετρο και το μαγνητόμετρο, τις τιμές του GPS και το παγκόσμιο μαγνητικό μοντέλο (World Magnetic Model WMM).

4.2 Επιταχυνσιόμετρο (Accelerometer)

Ένας από τους πλέον συνηθισμένους αδρανειακούς αισθητήρες είναι το επιταχυνσιόμετρο, ένας δυναμικός αισθητήρας με ικανότητα αίσθησης μεγάλου εύρους. Τα επιταχυνσιόμετρα μπορούν να μετρήσουν την επιτάχυνση σε έναν, δύο ή και τρεις ορθογώνιους άξονες. Χρησιμοποιούνται συνήθως σε μια από τις τρεις εφαρμογές:

- Ως αδρανειακή μέτρηση της ταχύτητας και της θέσης
- Ως αισθητήριο κλίσης ροπής ή προσανατολισμού σε δύο ή τρεις διαστάσεις όπως δίνεται από την επιτάχυνση της βαρύτητας ($1g = 9,8m/s^2$)
- Ως αισθητήρας δονήσεων ή κρούσης (shock)

Αρχές λειτουργίας του επιταχυνσιόμετρου

Τα περισσότερα επιταχυνσιόμετρα είναι μικρό-ηλεκτρομηχανικοί αισθητήρες (Micro-Electro-Mechanical Sensors MEMS). Η βασική αρχή που διέπει τη λειτουργία του είναι η μετατόπιση μια πολύ μικρής μάζας η οποία βρίσκεται σε χαραγμένη περιοχή επιφάνειας σιλικόνης ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος και η οποία συγκρατείται από μικρές ακτίνες. Συναφές με το δεύτερο νόμο της κίνησης του Newton ($F=ma$), όταν μια επιτάχυνση εφαρμόζεται στη συσκευή, μια δύναμη αναπτύσσεται ή οποία μετατοπίζει τη μάζα. Οι υποστηρικτικές ακτίνες λειτουργούν ως πηγή, και το υγρό (συνήθως αέρας) εγκλωβίζεται μέσα στο ολοκληρωμένο κύκλωμα και λειτουργεί ως αποσβεστήρας, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός συστήματος δεύτερης τάξης. Αυτός είναι ο λόγος του περιορισμού που τίθεται στο εύρος λειτουργίας και την ανομοιόμορφη απόκριση συχνότητας των επιταχυνσιόμετρων.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές αρχές με βάση τις οποίες ένα αναλογικό επιταχυνσιόμετρο μπορεί να κατασκευαστεί. Δύο πολύ κοινοί τύποι είναι ο χωρητικός και ο πιεζοηλεκτρικός. Αυτοί αντίστοιχα εκμεταλλεύονται τα φαινόμενα του πιεζοηλεκτρισμού και της χωρητικής μετατόπισης για να αισθανθούν τη μετατόπιση της μάζας η οποία είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης επιτάχυνσης.

Η έξοδος που δίνει ένα επιταχυνσιόμετρο είναι μια κλιμακωτή απόκριση του μέτρου του διανύσματος της επιτάχυνσης. Η πιο κοινή μορφή επιτάχυνσης, στην οποία είμαστε συνεχώς εκτεθειμένοι, είναι η επιτάχυνση που είναι αποτέλεσμα της βαρυτικής έλξης της Γης. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι μια τιμή που χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς με βάση το οποίο μετρώνται οι υπόλοιπες επιταχύνσεις.

4.3 Γυροσκόπιο (Gyroscope)

Το γυροσκόπιο είναι συσκευή που μπορεί να μετρήσει γωνιακή επιτάχυνση. Τα γυροσκόπια είναι έτσι φτιαγμένα ώστε να μπορούν να μετρούν την περιστροφική επιτάχυνση σε μια δύο ή τρεις κατευθύνσεις. Στις περισσότερες εφαρμογές τους, τα γυροσκόπια τριών αξόνων (3-axis gyroscopes) συνδυάζονται με την χρήση επιταχυνσιόμετρων τριών αξόνων (3-axis accelerometer), παρέχουν ένα πλήρες σύστημα ανίχνευσης έξι βαθμών ελευθερίας (6 degree- of – freedom DOF).

Τα γυροσκόπια εξελίχθηκαν από μηχανικά αδρανειακές συσκευές αποτελούμενες από στροφέα (rotors), άξονες και αναρτήρες σε διάφορες μορφές ηλεκτρονικών και οπτικών σύγχρονες συσκευές. Κάθε δομή εκμεταλλεύεται κάποια φυσική ιδιότητα του συστήματος που του επιτρέπει να ανιχνεύσει περιστροφική επιτάχυνση σε κάποιον άξονα. Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι γυροσκοπίων:

- Περιστροφικό(rotary)
- Δόνησης (vibrating structure)
- Οπτικό (Optical)

Όπως και τα επιταχυνσιόμετρα, έτσι και τα γυροσκόπια δόνησης, είναι MEMS δηλαδή συσκευές που είναι εύκολα διαθέσιμες εμπορικά, οικονομικές και πολύ μικρές σε μέγεθος. Βασική προϋπόθεση κατανόησης της λειτουργίας ενός vibrating structure gyroscope είναι η κατανόηση της δύναμης Coriolis. Σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα, κάθε σημείο περιστρέφεται με την ίδια περιστροφική ταχύτητα. Όσο το σημείο πλησιάζει τον άξονα της κίνησης του συστήματος, η περιστροφική ταχύτητα παραμένει σταθερή, αλλά η ταχύτητα κάθετα στην κατεύθυνση του άξονα περιστροφής, μειώνεται. Έτσι, για να κινηθεί προς τον άξονα ή από τον άξονα περιστροφής όταν το σύστημα περιστρέφεται, η πλευρική ταχύτητα πρέπει να μειωθεί ή να αυξηθεί ανάλογα, προκειμένου να διατηρήσει την ίδια σχετική γωνιακή θέση (γεωγραφικό μήκος) στο σώμα. Η ενέργεια που μειώνει ή αυξάνει την ταχύτητα είναι η επιτάχυνση και η δύναμη Coriolis είναι αυτή η επιτάχυνση πολλαπλασιασμένη επί τη μάζα του αντικειμένου του οποίου το γεωγραφικό μήκος πρέπει να παραμείνει σταθερό. Η δύναμη Coriolis είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας του περιστρεφόμενου αντικειμένου και στην ταχύτητα με την οποία το αντικείμενο κινείται από ή προς τον άξονα περιστροφής.

Αυτού του τύπου τα γυροσκόπια περιέχουν μια μικρομηχανική μάζα που είναι συνδεδεμένη σε ένα εξωτερικό σημείο με ένα σει από ελατήρια. Αυτό το εξωτερικό σημείο είναι συνδεδεμένο με τη σειρά του σε μια

πλακέτα μέσω ενός δεύτερου συστήματος ορθογώνιων ελατηρίων. Αυτή η μάζα συνεχώς οδηγείται ημιτονοειδώς κατά μήκος των ελατηρίων. Κάθε περιστροφή του συστήματος μπορεί να δημιουργήσει την επιτάχυνση Coriolis στη μάζα, σπρώχνοντας την στην κατεύθυνση του δεύτερου σετ ελατηρίων. Όταν η μάζα οδηγείται μακριά από τον άξονα περιστροφής θα σπρώχνεται κάθετα προς μια κατεύθυνση. Όπως θα οδηγείται προς τον άξονα της περιστροφής, θα ωθείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, εξαιτίας της επίδρασης της δύναμης Coriolis πάνω της.

Η δύναμη Coriolis λοιπόν, ανιχνεύεται με χωρητικά αισθητικά άκρα που βρίσκονται διαμήκους του περιβλήματος της μάζας και της άκαμπτης δομής της συσκευής. Καθώς η μάζα ωθείται από τη δύναμη Coriolis, μια διαφορική χωρητικότητα ανιχνεύεται καθώς τα χωρητικά άκρα συγκλίνουν. Όταν η μάζα ωθείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, ένα άλλο σετ αισθητήριων άκρων συγκλίνει. Με τον τρόπο αυτόν ο αισθητήρας μπορεί να ανιχνεύσει, τόσο το μέγεθος όσο και την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος.

4.4 Μαγνητόμετρο (Magnetometer)

Τα μαγνητόμετρα είναι συσκευές που μετρούν τη δύναμη ή/και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Επειδή τα μαγνητικά πεδία ορίζονται με το συνυπολογισμό της δύναμης και της κατεύθυνσης (διανυσματικά πεδία), τα μαγνητόμετρα τα οποία μετρούν μόνο τη δύναμη ή μόνο την κατεύθυνση, ονομάζονται βαθμιδωτά μαγνητόμετρα. Αυτά που μετράνε και τα δύο ονομάζονται ανυσματικά μαγνητόμετρα. Στις μέρες μας, και οι δύο τύποι είναι ευρέως διαδεδομένοι και μπορούν να βρεθούν ως στοιχεία ηλεκτρονικών συσκευών όπως κινητά ή tablets. Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα μαγνητόμετρα χρησιμοποιούνται για τη συλλογή πληροφοριών που αφορούν την κατεύθυνση σε τρεις διαστάσεις και είναι συνδυασμένα με επιταχυνσιόμετρα και γυροσκόπια. Μια τέτοια συσκευή ονομάζεται μονάδα αδρανειακής μέτρησης (inertial measurement unit IMU).

Η πυξίδα είναι ένα όργανο πλοήγησης που είναι ευαίσθητο στο μαγνητικό πεδίο της γης. Μια τυπική συνηθισμένη πυξίδα έχει μια μαγνητική ράβδο η οποία ευθυγραμμίζεται με τον μαγνητικό βορά. Με αυτόν τον τρόπο, ο προσανατολισμός μπορεί να καθοριστεί επακριβώς. Επειδή, η πυξίδα μπορεί να εντοπίσει μόνο την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, θεωρείται βαθμιδωτό μαγνητόμετρο.

Τα ανυσματικά μαγνητόμετρα, όπως ειπώθηκε παραπάνω, μπορούν να μετρήσουν περισσότερα στοιχεία που αφορούν στο μαγνητικό πεδίο ηλεκτρονικά. Με τη χρήση τριών μαγνητομέτρων τοποθετημένα ορθογώνια, τόσο το αζιμούθιο όσο και η κλίση μπορούν να μετρηθούν. Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των

στοιχείων της συνολικής μαγνητικής δύναμης του πεδίου που καλείται συνολική μαγνητική ένταση (total magnetic intensity, TMI) μπορεί να υπολογιστεί από το πυθαγόρειο θεώρημα.

4.5 Σφάλματα στους αισθητήρες

Τα σφάλματα των μετρήσεων είναι ένα άθροισμα διάφορων παραγόντων που εξαρτώνται από την αρχή λειτουργίας του κάθε οργάνου, της μετάδοσης του σήματος και των κατασκευαστικών ατελειών τους. Η ανάλυση του σφάλματος καταστεί δυνατό τον προσδιορισμό του τύπου του σφάλματος σε κάθε σύστημα. Ο πίνακας 1 δείχνει τα συνήθη λάθη των MEMS επιταχυνσιόμετρων και γυροσκοπίων και των μαγνητόμετρων.

Οι κυριότερες πηγές λάθους είναι οι εξής:

- **Ευθυγράμμιση.** Προκαλείται από το γεγονός ότι οι τριάδες των αισθητήρων δεν είναι ποτέ τέλεια ορθογωνισμένες εξαιτίας ατελειών συναρμολόγησης και θερμικών παραμορφώσεων. Ως εκ τούτου, κάθε αισθητήρας παρέχει δεδομένα εξαρτώμενα όχι μόνο από την κατά μήκος του άξονά του εισαγωγή που είναι κανονικά ευθυγραμμισμένος, αλλά και από τις εισαγωγές δεδομένων από τις άλλες ορθογώνιες κατευθύνσεις:

- **Bias.** Θεωρητικά, η έξοδος του αισθητήρα πρέπει να είναι μηδενική για καμία είσοδο. Στην πράξη, η έξοδος διαφέρει από το μηδέν προς μια τιμή η οποία ονομάζεται bias και χαρακτηρίζεται από τέσσερις συνιστώσες:

- Σταθερή απόκλιση (Constant value).

- Μια τιμή η οποία εκπροσωπεί την ποικιλομορφία της απόκλισης σε κάθε έναρξη λειτουργίας η οποία οφείλεται επίσης και στην σταδιακή φθορά. (Long term bias stability)

- Μια τιμή που εκπροσωπεί την ταλάντωση σε μικρό χρόνο περίπου 100 δευτερόλεπτα (Short term bias stability)

- Μια τιμή που εξαρτάται από τη θερμοκρασία λειτουργίας τους αισθητήρα (Bias temperature Shift)

- **Θόρυβος.** Είναι αποτέλεσμα πολλών μικρών πηγών διαταραχής οι οποίες προκαλούν ταχείς και απρόβλεπτες διακυμάνσεις της εξόδου του σήματος. Η κύριες πηγές θορύβου είναι ηλεκτρικές και μηχανικές. Η τελευταία υπάρχει εξαιτίας κλασμάτων και δονήσεων. Συνήθως, αυτού του τύπου το σφάλμα είναι ονομάζεται λευκός θόρυβος.

• Παράγοντας βαθμίδος. Τέτοιου τύπου το λάθος εκπροσωπεί τη μεταβολή της καμπύλης βαθμονόμησης και κυρίως εξαρτάται από τη θερμοκρασία λειτουργίας του αισθητήρα.

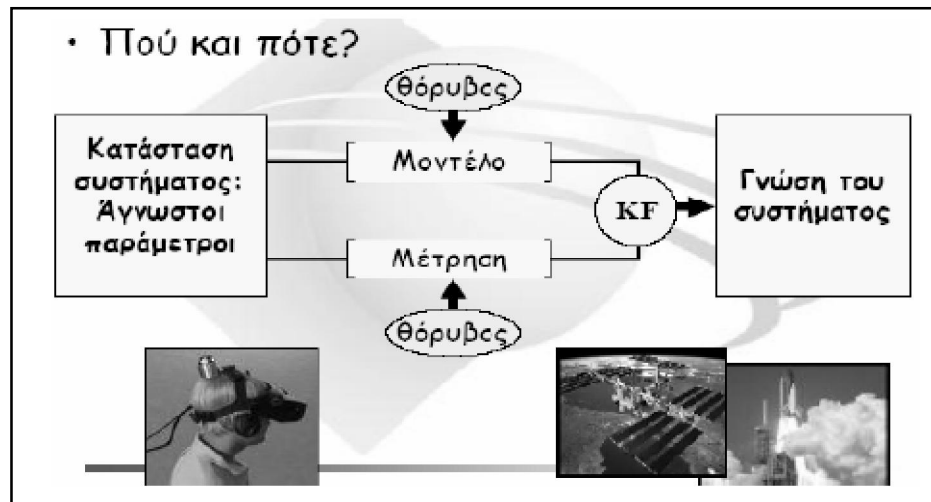
• Ευαισθησία G και G^2 . Από τις βασικές αρχές λειτουργίας των αισθητήρων, μπορούν να είναι περισσότερο ή λιγότερο ευαίσθητοι στην επιτάχυνση με γραμμικούς ή τετραγωνικούς νόμους.

	Γυροσκόπιο	Επιταχυνσιόμετρο	Μαγνητόμετρο
Input Range	±1000 [°/s]	±70*9.81 [m/s ²]	2e5 [nT]
Bandwidth	50 [Hz]	50 [Hz]	50 [Hz]
Constant and Long Term Bias Stability (σ)	15/3600 [°/s]	9.81e-3 [m/s ²]	20 [nT]
Short Term Bias Stability (τ_{STBS})	5/3600 [°/s] (300 s)	9.81e-3 [m/s ²] (300 s)	4 [nT] (300 s)
Bias Temperature Shift	2e-4 [(°/s)/°C] (25 °C)	9.81e-4 [(m/s ²)/°C] (25 °C)	20e-4 [nT/°C] (25 °C)
Scale Factor	150 [ppm]	300 [ppm]	500 [ppm]
G Sensitivity	3/3600 [(°/s)/g]	0	0
G ² Sensitivity	0.6/3600 [(°/s)/g ²]	0	0
Noise (S_w)	(0.1/60) ² [(°/s) ² /Hz]	(0.22/60) ² [(m/s ²) ² /Hz]	(0.7) ² [nT ² /Hz]
Misalignment	50/sqrt(2) [μrad]	100/sqrt(2) [μrad]	12000/sqrt(2) [μrad]

Πίνακας 1. Παράμετροι σφαλμάτων γυροσκοπίων μαγνητόμετρων και επιταχυνσιόμετρων

4.6 Φίλτρο Κάλμαν

Οι έξοδοι των αισθητήρων οδηγούνται ως είσοδοι σε ένα φίλτρο Κάλμαν για την εξάλειψη του λευκού θορύβου. Το φίλτρο Κάλμαν είναι ένα μοναδικό εργαλείο για τον έλεγχο πολύπλοκων δυναμικών διεργασιών. Παρέχει ένα πλήρη στατιστικό χαρακτηρισμό ενός δυναμικού προβλήματος, δηλ. λαμβάνει υπόψη τη διανομή των πιθανοτήτων (Probability Distributions) για όλες τις μεταβλητές που επιφορτίζεται να υπολογίσει και κάνει δυνατή την πρόβλεψη της δυναμικής κατάστασης ενός συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων.



Ο αλγόριθμος του Kalman στην αρχική του διατύπωση το 1960, στοχεύει στην εκτίμηση της κατάστασης του x ($x \in R^n$). Η κατάσταση του x είναι μια ελεγχόμενη διαδικασία διακριτού χρόνου, η οποία περιγράφεται από μια γραμμική στοχαστική εξίσωση:

$$X_k = AX_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (4.5.1)$$

Για την οποία μια μέτρηση z ($z \in R^m$ και περιγράφεται από την εξίσωση,

$$Z_k = HX_k + v_k \quad (4.5.2)$$

Όπου οι τυχαίες μεταβλητές και αναπαριστούν το θόρυβο συστήματος και μέτρησης αντίστοιχα. Αυτές συνήθως θεωρούνται non-time relative και έτσι μπορούν να αποκαλεστούν «λευκός θόρυβος».

Οι μεταβλητές αυτές είναι επίσης ασυσχέτιστες μεταξύ τους και μπορούν να εκφραστούν με κατανομές πιθανότητας $p(w)$ και $p(v)$ ως εξής:

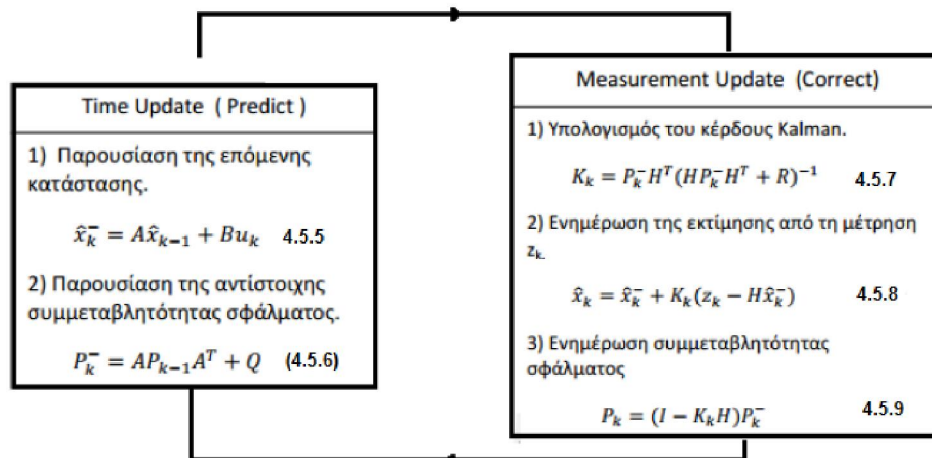
$$p(w) \sim N(0, Q) \quad (4.5.3)$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad (4.5.4)$$

Τα Q και R είναι οι πίνακες ασυμβατότητας και μέτρησης, αντίστοιχα. Ο $n \times n$ πίνακας A συσχετίζει την προηγούμενη κατάσταση κατά τη διακριτή τιμή $k-1$ με την παρούσα κατάσταση του συστήματος την στιγμή k χωρίς ο θόρυβος του συστήματος να αποτελεί παράμετρο στην σχέση. Ο $n \times 1$ πίνακας B συσχετίζει την είσοδο ελέγχου u με την κατάσταση του συστήματος X και τέλος ο πίνακας H που είναι $n \times m$ συσχετίζει τη μέτρηση Z_k με την κατάσταση του συστήματος.

Ο αλγόριθμος του Κάλμαν λοιπόν, στηρίζεται στην ανάδραση. Αρχικά το φίλτρο πραγματοποιεί μια πρώτη εκτίμηση της κατάστασης σε μια διακριτή χρονική στιγμή (πρόβλεψη) και εν συνεχεία εξασφαλίζει μια ενθόρυβη μέτρηση, μέσω ανάδρασης, (διόρθωση) για την βέλτιστη εκτίμηση της τρέχουσας κατάστασης. Κατέπекταση, παρατηρείται ένας διαχωρισμός μεταξύ των εξισώσεων που απαρτίζουν το φίλτρο, διακρίνοντας εξισώσεις που ενημερώνονται για την μεταβολή του χρόνου (time update) και εξισώσεις που ενημερώνονται για μεταβολές μετρήσεων (measurement update).

Συγκεκριμένα, οι time update εξισώσεις (4.5.5)-(4.5.6), αναλαμβάνουν να προάγουν την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος, που εκτιμήθηκε την στιγμή $k - 1$, καθώς και τις συμμεταβλητότητες των a priori και a posteriori εκτιμήσεων σφάλματος για τον υπολογισμό της a priori εκτίμησης της κατάστασης X , ώστε να χρησιμοποιηθεί σε επόμενο χρονικό βήμα k . Ενώ οι measurement update εξισώσεις (4.5.7)-(4.5.8), αναλαμβάνουν να προωθήσουν κάθε καινούρια μέτρηση, λειτουργώντας ως σύστημα ανάδρασης, και ενσωματώνοντας την στην a priori εκτίμηση σφάλματος με σκοπό να υπολογιστεί μια βέλτιστη, a posteriori, εκτίμηση.



Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας του αλγορίθμου Kalman

Ο παραπάνω κύκλος λειτουργίας του αλγορίθμου εκτελείται επαναληπτικά, μπορούμε να διακρίνουμε ως πρώτο βήμα των διορθωτικών εξισώσεων τον υπολογισμό του κέρδους K_k . Ο $m \times m$ πίνακας K υπολογίζεται ώστε να ελαχιστοποιεί τη συμμεταβλητότητα (covariance) της a posteriori εκτίμησης σφάλματος P_k . Εν συνεχεία, καταγράφεται μια μέτρηση z_k και υπολογίζεται μια a posteriori εκτίμηση της κατάστασης με βάση τη νέα μέτρηση. Τέλος, υπολογίζεται η συμμεταβλητότητα της a posteriori εκτίμησης σφάλματος P_k . Μετά το τέλος, λοιπόν, κάθε κύκλου λειτουργίας, η διαδικασία επαναλαμβάνεται προωθώντας την τελευταία a posteriori εκτίμηση στις εξισώσεις πρόβλεψης ώστε να προκύψει μια νέα a priori εκτίμηση. Έτσι, εκτιμάται πως η αναδρομική φύση του αλγορίθμου Kalman και η ευρωστία που προσφέρει, καθιστούν το φίλτρο άρτια υλοποιήσιμο σε πρακτικά προβλήματα.

Στην προσπάθεια να διαβάστουν μετρήσεις από διάφορους αισθητήρες όπως επιταχυνσιόμετρα, μετρητές απόστασης και GPS αποδείχτηκε ότι τα δεδομένα περιείχαν πολύ θόρυβο για να χρησιμοποιηθούν ως έχουν. Για παράδειγμα ένα GPS έχει ακρίβεια 10m, άρα σε κάθε μέτρηση μπορεί να έχει πολύ μεγάλη απόκλιση από την πραγματική θέση. Μπορεί δηλαδή να είμαστε εντελώς ακίνητοι αλλά λόγω της διαφορετικής μέτρησης να φαίνεται σα να κινούμαστε. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί ένας τρόπος να απορρίπτουμε τις απότομες αλλαγές (θόρυβο) αλλά ταυτόχρονα να αντιλαμβανόμαστε έγκαιρα τις πραγματικές αλλαγές.

Οι μαθηματικοί τύποι των φίλτρων kalman διαπιστώνουμε ότι απαιτούν πολλούς υπολογισμούς με πίνακες και διανυσματικά μαθηματικά. Αλλά Μπορούμε όμως με διάφορες απλοποιήσεις να καταλήξουμε σε ένα μονοδιάστατο φίλτρο το οποίο θα έδινε ικανά αποτελέσματα. Για να

χρησιμοποιηθεί σε ένα accelerometer 3 αξόνων μπορούν να συνδυαστούν 3 μονοδιάστατα φίλτρα. Έτσι καταλήγουμε σε αυτόν το μικρο τύπο που μπορεί έτσι να προγραμματιστεί:

$$\hat{x} = x;$$

$$p = p + q;$$

$$k = p / (p + r);$$

$$\hat{x} = \hat{x} + k * (\text{μέτρηση} - \hat{x});$$

$$p = (1 - k) * p;$$

Οι δύο πρώτοι τύποι αντιπροσωπεύουν την πρόβλεψη του Kalman Filter. Και δεδομένου ότι δεν υπάρχει καμία πληροφορία σχετικά με τις κινητήριες δυνάμεις είναι πολύ απλό. Οι υπόλοιποι τρεις τύποι, υπολογίζουν την ανανεωση των μετρήσεων. Οι μεταβλητές είναι x για το φιλτραρισμένο αποτέλεσμα, q για το θόρυβο της διεργασίας, r για το θόρυβο από τον αισθητήρα, p για το εκτιμώμενο σφάλμα και k για το κέρδος Kalman. Η κατάσταση του φίλτρου καθορίζεται από τις τιμές αυτών των μεταβλητών. Το φίλτρο εφαρμόζεται σε κάθε μέτρηση και αρχικοποιείται με τον θόρυβο της διεργασίας q , r θόρυβος του αισθητήρα, αρχική εκτίμηση λάθους p και η αρχική τιμή x . Η αρχική τιμή για το p δεν είναι πολύ σημαντική, δεδομένου ότι προσαρμόζεται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Πρέπει να είναι όμως αρκετά υψηλή για να περιοριστεί αργότερα. Η αρχική τιμή για την μέτρηση δεν είναι επίσης πολύ σημαντική, δεδομένου ότι ανανεώνεται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Αλλά η ρύθμιση των τιμών για το θόρυβο της διεργασίας και του θορύβου του αισθητήρα είναι απαραίτητη ούτως ώστε οι να μετρήσεις να είναι σαφείς και με τον ελάχιστο θόρυβο. Συνοψίζοντας, η χρήση του φίλτρου μας βοηθά στην καλύτερη και αρτιότερη διήθηση των αποτελεσμάτων του AHRS. Η υλοποίηση του φίλτρου, δεδομένου της απαίτησης ισχύος για τον υπολογισμό των εξισώσεων, γίνεται μέσω υπολογιστή. Η χρήση του προγράμματος matlab για την υλοποίηση του αλγόριθμου αυτού είναι ένας σχετικά εύκολος και πρακτικός τρόπος.

Κεφάλαιο 5

Υλοποίηση του AHRS στο τετρακόπτερο

5.1 Εισαγωγή

Το τετρακόπτερο είναι ένα μικρό προς μεσαίο UAV το οποίο παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο σε εμπορικές όσο και σε στρατιωτικές εφαρμογές. Αυτό οφείλεται στο συνδυασμό της μηχανικής απλότητας του, στη σταθερότητα του στην πτήση και στο χαμηλό κόστος του σε σχέση με άλλες πλατφόρμες.

Το βασικό του στοιχείο είναι το AHRS όπως περιγράφηκε αρκετά αναλυτικά μέχρι τώρα. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε πώς υλοποιείται ένα AHRS στο τετρακόπτερο έτσι ώστε αυτό να πραγματοποιεί μικρές πτήσεις. Θα δούμε επίσης πώς επιτυγχάνεται αυτό μέσω του κατάλληλου sensor fusion το οποίο πραγματοποιήθηκε μέσω ενός φίλτρου Κάλμαν. Η επεξεργασία των δεδομένων στην περίπτωση που θα περιγράψουμε στη συνέχεια της εργασίας πραγματοποιήθηκε από ένα Raspberry Pi επεξεργαστή με λειτουργικό Linux.

5.2 Προδιαγραφές

Δεδομένης της πολυπλοκότητας ενός ολοκληρωμένου συστήματος τετρακοπτέρου, είναι αρκετά δύσκολο να προσδιοριστεί αριθμητικά η απόδοση πτήσης του, ιδιαίτερα λόγω των απρόβλεπτων περιβαλλοντικών συνθηκών όπως του ανέμου και της μορφολογίας του εδάφους.

Παρόλα αυτά, μερικά χαρακτηριστικά ενός σωστά διαμορφωμένου τετρακοπτέρου είναι:

- Το AHRS θα πρέπει να λειτουργεί σωστά σε κάθε προσανατολισμό
- Το τετρακόπτερο θα πρέπει να μπορεί να περιίπταται για μικρά χρονικά διαστήματα με λίγη pilot input

5.3 Κίνδυνοι

Απαραίτητο πριν την πτήση ενός τετρακόπτερου είναι να υλοποιηθεί μία πολιτική ασφάλειας δεδομένης της επικινδυνότητας των προπελών. Ο χειριστής θα πρέπει να είναι σε θέση να σταματά ανά πάσα στιγμή το μοτέρ του τετρακοπτέρου μέσω ειδικού διακόπτη στον RC χειριστή.

Επίσης θα πρέπει να έχει γίνει μέριμνα ώστε το μοτέρ να μην συνεχίζει να λειτουργεί εάν το software κρασάρει.

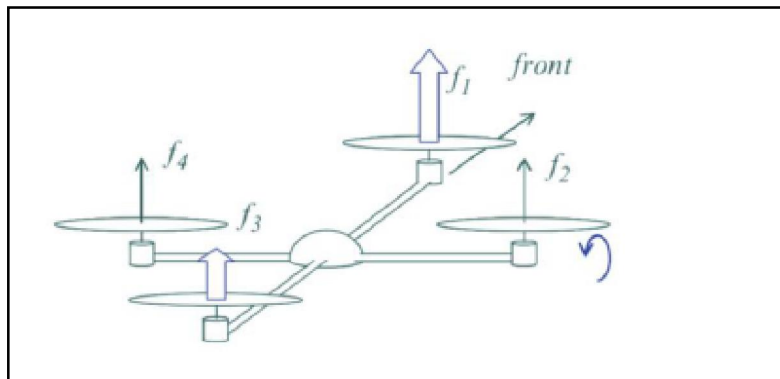
5.4 Η κατάσταση στην αγορά

Τα τελευταία χρόνια η αγορά των εμπορικών multicopter έχει κυριολεκτικά εκραγεί. Ο κυρίαρχος στην αγορά των flight controllers είναι η κινεζική DJI Innovations όπως επίσης και η γερμανική MikroKopter. Ο καλύτερος controller αυτή τη στιγμή θεωρείται ο AutoQuad flight controller .

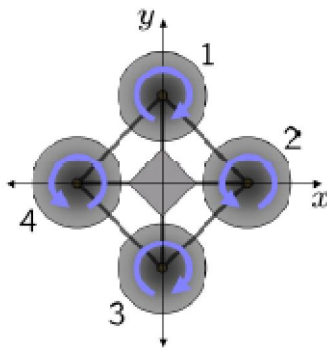
Γενικά οι flight controllers βασίζονται σε embedded microcontrollers της Atmel AVR με το οποίο επιτυγχάνεται εξαιρετική real-time απόδοση πτήσης .

5.5 Το τετρακόπτερο

Το τετρακόπτερο χρησιμοποιεί 4 προπέλες για την ανύψωση του. Η ανύψωση που προκαλεί το κάθε ένα από τα 4 μοτέρ ελέγχεται ανεξάρτητα ώστε να είναι εφικτή η περιστροφή σε κάθε άξονα. Το pitching και το rolling επιτυγχάνονται αυξάνοντας και μειώνοντας την ταχύτητα περιστροφής ενός ζεύγους προπελών ενώ οι άλλες δύο διατηρούν σταθερή την ταχύτητα τους όπως φαίνεται και στο σχήμα όπου το τετρακόπτερο ανεβαίνει στον pitch με $f_1 > f_3$ και $f_4 = f_2$.



Για το yaw control οι δύο απέναντι προπέλες με θετικό pitch στρέφονται δεξιόστροφα ενώ οι άλλες δύο με αρνητικό pitch στρέφονται αριστερόστροφα.



Κάθε έλικα παράγει ροπή στον άξονα Yaw αντίθετη στην φορά περιστροφής. Όταν εφαρμόζεται ίση ταχύτητα σε κάθε έλικα όλες οι ροπές έχουν άθροισμα μηδέν αλλά εάν μεταβληθεί το thrust ratio ανάμεσα στα δύο αντιτιθέμενα ζεύγη ελίκων, παράγεται μη μηδενική ροπή ,περιστρέφοντας το τετρακόπτερο.

5.6 Έλεγχος

Ο χειριστής μπορεί με διάφορους τρόπους να καθοδηγήσει το τετρακόπτερο με το επίπεδο αυτονομίας να είναι αντιστρόφως ανάλογο με τις ικανότητες του χειριστή.

Ο βασικότερος έλεγχος είναι ο έλεγχος του ρυθμού του τετρακοπτερου. Είναι ανάλογος του τρόπου ελέγχου ενός κανονικού ελικοπτερου με τον πιλότο να ελέγχει το γκάζι και τις τρεις γωνιακές ταχύτητες στους άξονες pitch,roll και yaw. Το τετρακόπτερο στη συνέχεια προσπαθεί να ταιριάζει τις τιμές των γωνιακών ταχυτήτων που υπολογίζει το γυροσκόπιο με τις τιμές που απαιτεί ο πιλότος-χειριστής.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο έλεγχος στάσης(attitude control). Σε αυτή τη λειτουργία το τετρακόπτερο χρησιμοποιεί δύο επίπεδα ελέγχου ώστε να ταιριάζει τη στάση του με αυτή που απαιτεί ο πιλότος ενώ ο άξονας εκτροπής εξακολουθεί να ελέγχεται με τη χρήση ελέγχου του ρυθμού.

Η ενσωμάτωση μιας μονάδας GPS επιπροσθέτει δύο ακόμα επίπεδα ελέγχου : έλεγχο ταχύτητας και έλεγχο θέσης η ταυτόχρονη λειτουργία των οποίων οδηγεί σε αυτόνομο σύστημα αντικαθιστώντας εντελώς τον πιλότο-χειριστή.

5.7 Υλικό



5.7.1 Σκελετός

Στην παραπάνω εικόνα παρατηρούμε ένα τετρακόπτερο το οποίο κυκλοφορεί στην αγορά με το όνομα Lunar Lander 4 και χρησιμοποιεί τετραγωνικούς σωλήνες 12mm από αλουμίνιο πάνω στους οποίους συνδέονται οι 4 κινητήρες.

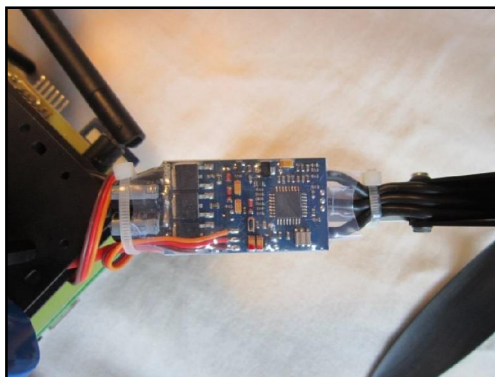
5.7.2 Κινητήρες



Το τετρακόπτερο της εργασίας μας χρησιμοποιεί 4 πανομοιότυπους Turnigy L2215J-900 κινητήρες. Οι κινητήρες είναι χωρίς ψύκτρες το οποίο σημαίνει ότι το εξωτερικό περίβλημα λειτουργεί σαν ρότορας. Λειτουργούν στα 200W, 18A με σταθερό kV στα 900rpm/V. Η περιέλιξη των κινητήρων αποτελείται από τρεις φάσεις, οι οποίες οδηγούνται εναλλάξ από μια DC τάση ώστε να παραχθεί το commutation.

5.7.3 Ελεγκτές των κινητήρων

Ο ελεγκτής ταχύτητας (ESC) εφαρμόζει μια τάση στις δύο φάσεις του κινητήρα ενώ μετράει το EMF που δημιουργείται στην τρίτη φάση. Η τάση στην συνέχεια διαμορφώνεται κατά πλάτος παλμού σε σχέση με ένα PWM 50Hz σήμα το οποίο παρέχεται από έναν μικροελεγκτή.



Οι ελεγκτές αυτοί είναι σχεδιασμένοι να συνεργάζονται με RC δέκτες και συνήθως είναι σε θέση να λαμβάνουν PWM παλμούς των 50Hz το οποίο δεν βοηθά στην σταθερότητα του αεροσκάφους. Έτσι, εγκαταστάθηκε ειδικό firmware το οποίο έδωσε την δυνατότητα να μεταδίδονται τα PWM δεδομένα στα 400Hz.

5.7.4 Μπαταρία

Στο τετρακόπτερο που μελετάμε χρησιμοποιείται μπαταρία των 5AH ανάμεσα στα 11.1V και 12.6V με βάρος 404gr. Το φορτίο είναι 20C το οποίο δίνει ρεύμα 100A.

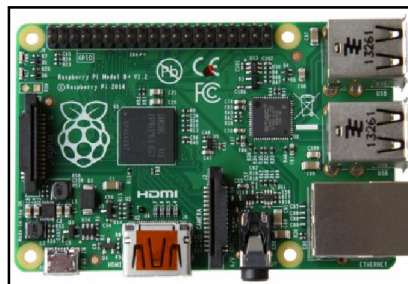
5.7.5 Χειριστήριο

Το χειριστήριο επιτρέπει στον πιλότο-χειριστή να στέλνει εντολές στο τετρακόπτερο με μορφή έξι 50Hz PWM παλμών. Ο αριστερός μοχλός ρυθμίζει το γκάζι και το yaw rate ενώ ο δεξιός μοχλός το pitch και το roll ή το pitch rate και το roll rate.



5.7.6 Ελεγκτής πτήσης (flight controller)

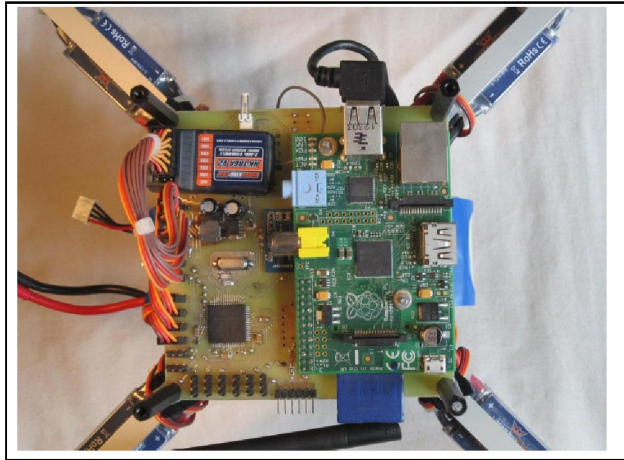
Κεντρικό ρόλο στην λειτουργία του τετρακοπτέρου παίζει ο μικροϋπολογιστής Raspberry Pi ο οποίος τρέχει το λειτουργικό Raspbian , μια ελεύθερη διανομή του Linux.



Ο RPi συνδέεται με τον αισθητήρα FreeIMU v4.3 και έναν μικροελεγκτή dsPIC30f μέσω ενός 400KHz I²C διαύλου. Η πλακέτα FreeIMU περιέχει το MPU6050 το οποίο συνδυάζει γυροσκόπιο/επιταχυνσιόμετρο τριών αξόνων, το HMC5883L μαγνητόμετρο τριών αξόνων και το MS5611-01BA βαρόμετρο υψηλής ανάλυσης.

Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται όλα τα components του flight controller του τετρακοπτέρου.

Δεξιά είναι το RPi, στο κέντρο το FreeIMU, κάτω αριστερά το dsPIC, πάνω αριστερά ο RC δέκτης.



5.7.7 PIC PWM

Ο dsPIC30f μικροελεγκτής παρέχει μία real-time διεπαφή ανάμεσα στα ESC και το δέκτη. Αυτό είναι απαραίτητο εξαιτίας της έλλειψης στο RPi ενός GPIO και real-time υποστήριξης.

Το PIC λειτουργεί σαν slave στο I²C bus, προσομοιώνοντας ένα σετ καταχωρητών. Το RPi μπορεί να γράφει τα επιθυμητά μήκη των παλμών PWM για τους κινητήρες όπως και να διαβάζει τα μήκη των λαμβανόμενων παλμών PWM χρησιμοποιώντας πρωτόκολλα SMBUS.

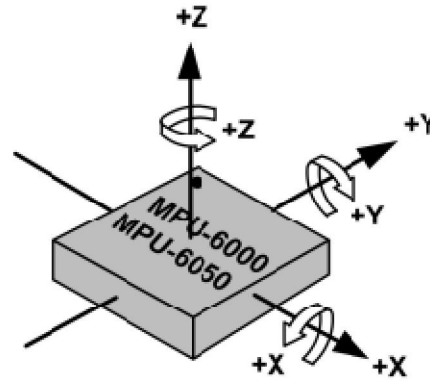
Η έξοδος προς τους κινητήρες γίνεται χρησιμοποιώντας τα modules σύγκρισης του PIC. Το module αυτό συγκρίνει μια τιμή περιόδου με την τιμή ενός timer module, παράγοντας μια διακοπή όταν οι δύο τιμές ταυτίζονται. Στην εφαρμογή μας, το υψηλό pin εξόδου του PIC συνδέεται με την αρχή του PWM παλμού, ενώ συγχρόνως ξεκινά ο timer. Ο timer αρχίζει να μετράει μέχρι η τιμή στον counter register να ταιριάζει με την τιμή στον register περιόδου. Το γεγονός αυτό πυροδοτεί μια διακοπή η οποία θέτει το pin χαμηλά και θέτει το OC module και τον timer σε αδράνεια μέχρι να χρειαστεί νέο παλμό. Αυτό σημαίνει ότι PWM παλμοί προς τους ESC δημιουργούνται εφόσον στο PIC δίνονται νέες τιμές περιόδου από το RPi, σταματώντας τους ESC όταν το RPi σταματά να ζητά νέες περιόδους εξόδου όπως στην περίπτωση που κρασάρει ο flight controller.

Η μέτρηση των 6 PWM καναλιών από τον RC δέκτη ρυθμίζεται από τα modules σύλληψης εισόδου του PIC. Αυτά λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο όπως τα modules εξόδου, παράγοντας διακοπές όταν υπάρχει

είσοδος ενώ συγχρόνως συλλαμβάνουν μια τιμή στον timer. Διακοπές παράγονται στην ανερχόμενη αλλά και στην κατερχόμενη ακμή του PWM παλμού εισόδου. Ο timer ξεκινά κατά την ανερχόμενη ακμή και η τιμή του αποθηκεύεται κατά την κατερχόμενη ακμή. Οι τιμές αυτές στο σεντ καταχωρητών ώστε να διαβαστούν από το RPi.

5.7.8 MPU6050

Η πλακέτα MPU6050 περιέχει γυροσκόπιο και επιταχυνσιόμετρο με συμπληρωματικούς ADCs των 16bit καθώς και καταχωρητές ελέγχου.



Επίσης, περιέχει έναν μικροεπεξεργαστή χαμηλής ισχύος, τον DMP, ο οποίος χρησιμεύει για να υλοποιεί αλγορίθμους για το sensor fusion όπως το φίλτρο Κάλμαν ο οποίος όμως δεν χρησιμοποιήθηκε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας.

Το MS5611-01BA βαρόμετρο υπολογίζει θερμοκρασία και πίεση του αέρα του περιβάλλοντος με 24bit ανάλυση και μπορεί να δώσει εκτίμηση υψομέτρου με ακρίβεια 10cm. Η εκτίμηση που παράγει ωστόσο δεν θα ληφθεί υπόψη από το φίλτρο Κάλμαν οπότε δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια της εργασίας μας.

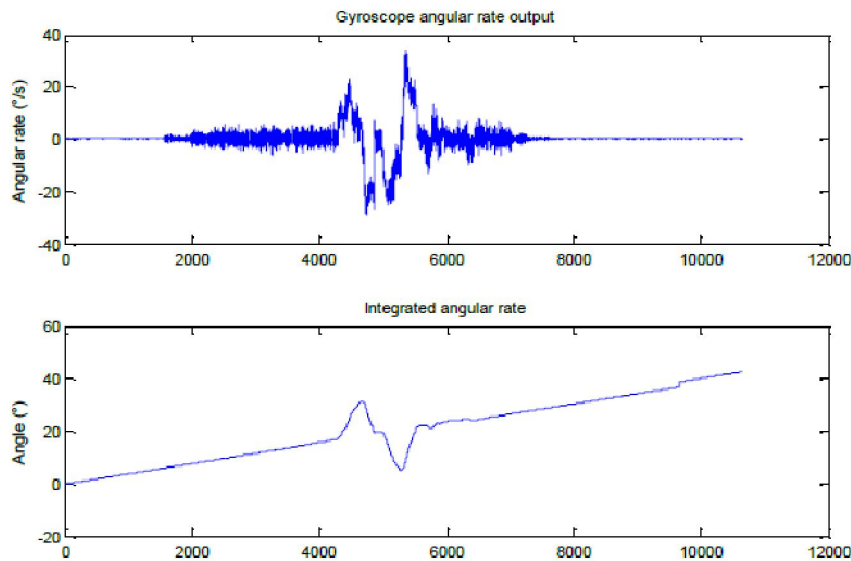
Το γυροσκόπιο τριών αξόνων του MPU6050 υπολογίζει την γωνιακή ταχύτητα γύρω από τους τρεις άξονες x,y,z.

$$\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad \text{ή}$$

$$\omega = [p \quad q \quad r]^T$$

Η έξοδος του είναι ανθεκτική σε θόρυβο δόνησης όμως πρέπει να ολοκληρωθεί (integrated) ώστε να παραχθεί μία απόλυτη εκτίμηση γωνίας. Αυτό εισάγει ένα σφάλμα στην εκτίμηση. Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται η ακατέργαστη γωνιακή ταχύτητα και η

ολοκληρωμένη, για τον άξονα pitch , παρουσιάζοντας ένα θετικό pitch 15° ακολουθούμενο από ένα αρνητικό pitch 15°

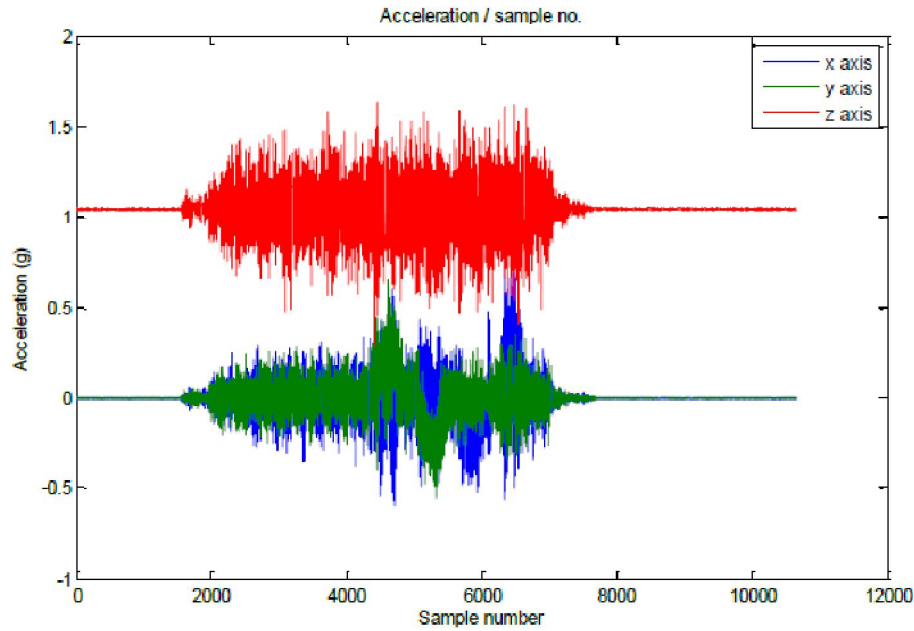


Το επιταχυνσιόμετρο του MPU6050 υπολογίζει την επιτάχυνση στους τρεις άξονες. Στη συνέχεια το διάνυσμα που προκύπτει συγκρίνεται με την κατεύθυνση του διανυσματος της βαρύτητας $[0 \ 0 \ g]^T$ και προσδιορίζεται ο προσανατολισμός του αεροσκάφους. Έτσι, είναι εφικτή η εκτίμηση του pitch και roll σχετικά με τον ορίζοντα, με απλη τριγωνομετρία :

$$pitch = atan2(y, \sqrt{x^2 + z^2})$$

$$roll = atan2(x, \sqrt{y^2 + z^2})$$

Η προσθήκη του θορύβου δόνησης από το αεροσκάφος καθιστά δύσκολο τον υπολογισμό του yaw. Παρακάτω φαίνεται η ακατέργαστη έξοδος του επιταχυνσιομέτρου (raw output) με τους κινητήρες σε λειτουργία.



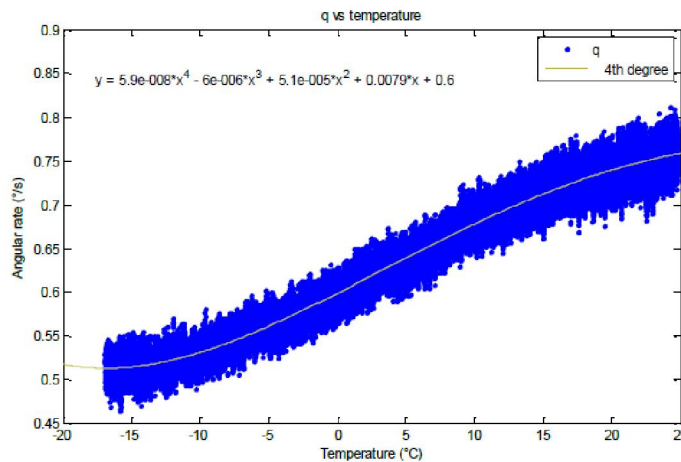
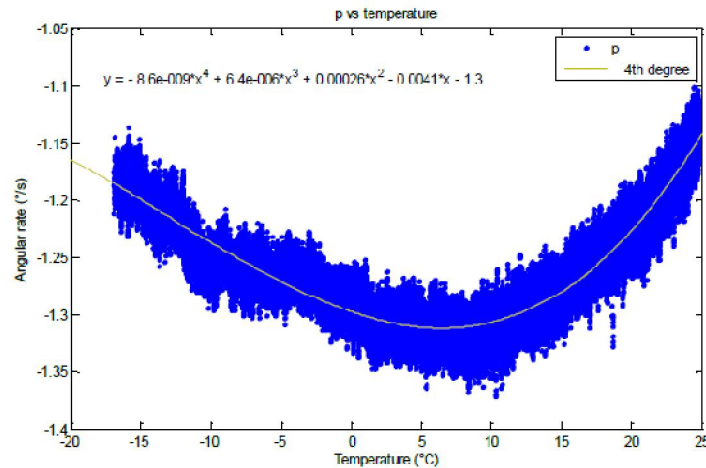
Το HMC5883L μαγνητόμετρο υπολογίζει την ένταση του μαγνητικού πεδίου στους τρεις άξονες. Στη συνέχεια όπως και με το επιταχυνσιόμετρο, το διάνυσμα που υπολογίζεται συγκρίνεται με το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου της Γής και γίνεται εκτίμηση του προσανατολισμού του αεροσκάφους. Στην πράξη, η έξοδος αυτή επηρεάζει μόνο τον άξονα του yaw διότι εκεί αποτυγχάνει το επιταχυνσιόμετρο. Η έξοδος του υποφέρει από δύο τύπους παραμόρφωσης, μαλακού και σκληρού σιδήρου. Η παραμόρφωση σκληρού σιδήρου έχει να κάνει με μια σταθερή προσθήκη στο περιβάλλον μαγνητικό πεδίο εξαιτίας μαγνητισμένων υλικών στο αεροσκάφος και είναι ανάλογο με το bias/offset του επιταχυνσιόμετρου και η οποία διορθώνεται με αφαίρεση από τις μετρήσεις. Η παραμόρφωση μαλακού σιδήρου αλλοιώνει το μαγνητικό πεδίο καθώς το αεροσκάφος περιστρέφεται εξαιτίας της ύπαρξης μαλακών μετάλλων και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο.

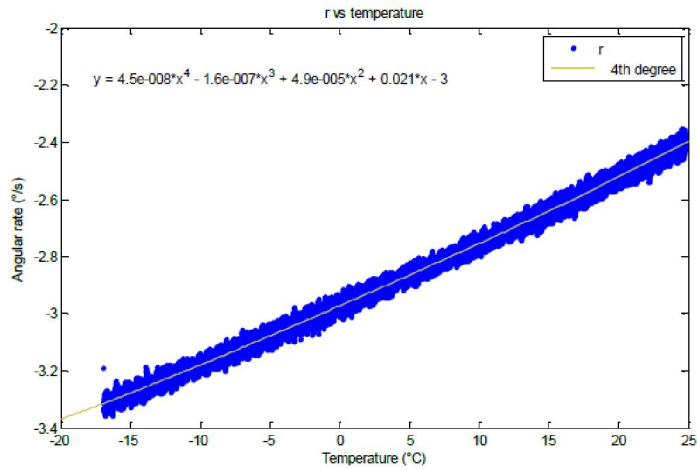
Κεφάλαιο 6

Βαθμονόμηση αισθητήρων (sensor calibration)

6.1 Γυροσκόπιο

Το bias του γυροσκοπίου είναι εξαιρετικά ευαίσθητο στις αλλαγές της θερμοκρασίας. Παρόλο που αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί με ειδικούς αλγορίθμους, είναι καλύτερο να αφαιρεθεί το offset που προκύπτει πριν αρχίσει η επεξεργασία. Έτσι, η πλακέτα ψύχεται στους -15°C πριν επιστρέψει σε θερμοκρασία ισορροπίας ενώ εγγράφεται η έξοδος του γυροσκοπίου και η θερμοκρασία από το ενσωματωμένο θερμίστορ. Στη συνέχεια με τη βοήθεια του Matlab δημιουργήθηκε ένα πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού περιγράφοντας το bias του γυροσκοπίου σε συνάρτηση της θερμοκρασίας. Το bias αφαιρείται από κάθε ένδειξη πριν από κάθε επεξεργασία.



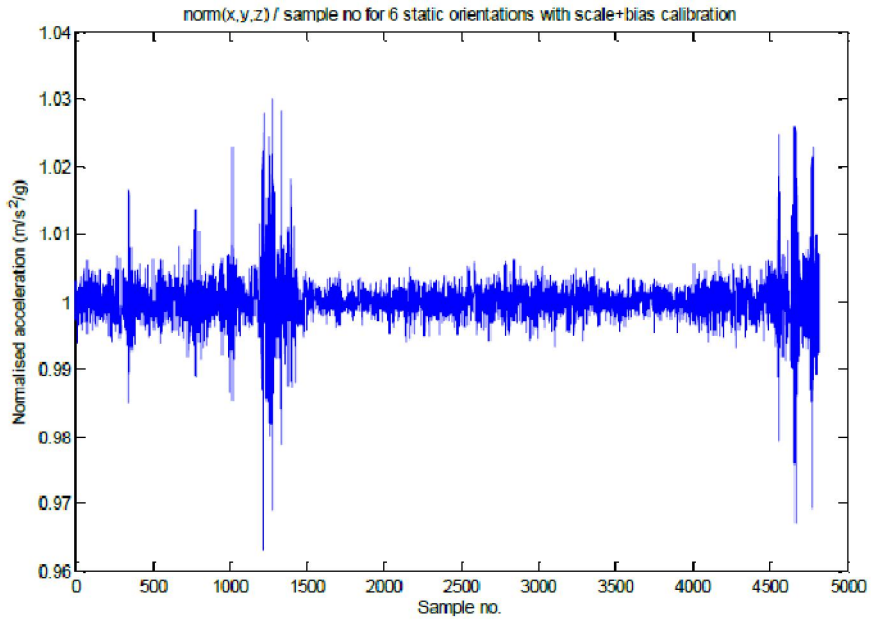
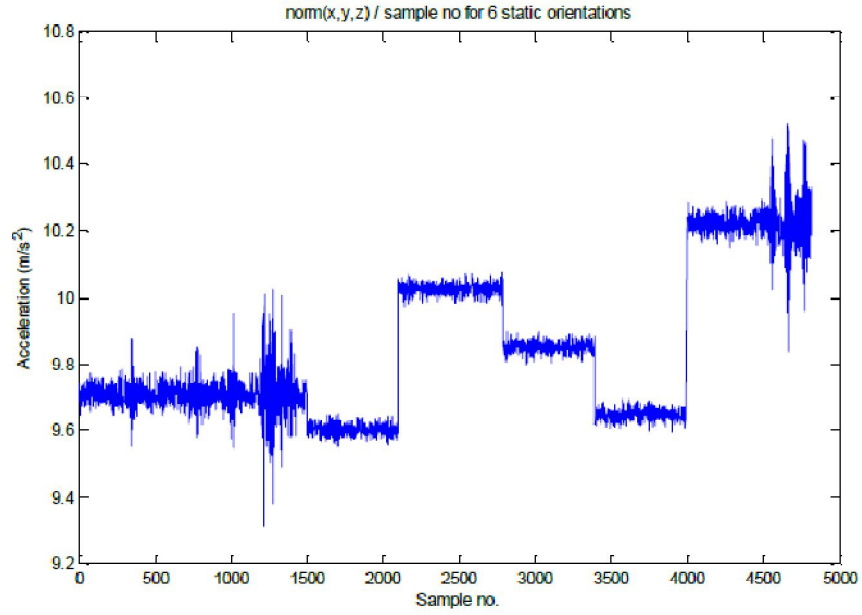


6.2 Επιταχυνσιόμετρο

Το επιταχυνσιόμετρο υποφέρει από σφάλμα κλίμακας και από το bias. Το εγχειρίδιο του MPU6050 αναφέρει την κλίμακα με μία ακρίβεια της τάξης του 3% με μια 0g ανοχή βαθμονόμησης $\pm 50\text{mg}$ για τους άξονες X και Y και $\pm 80\text{mg}$ για τον άξονα Z. Αυτό μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό σφάλμα στο διάνυσμα της επιτάχυνσης.

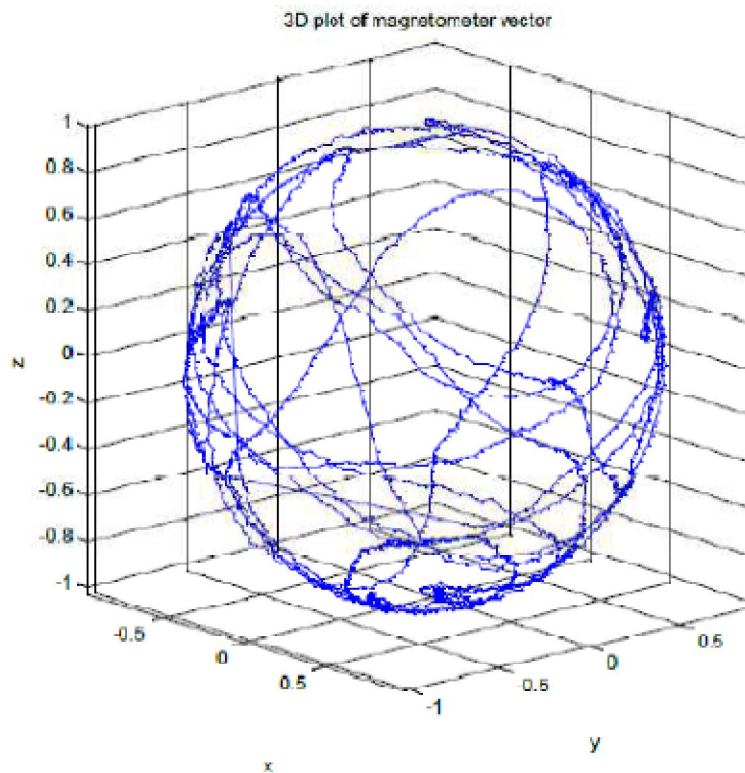
Το διάνυσμα της βαρύτητας είναι σταθερό σε κάθε μέτρηση και για κάθε προσανατολισμό. Οπότε για οποιαδήποτε ακολουθία περιστροφών η νόρμα του διανύσματος της επιτάχυνσης είναι το g. Παρόλα αυτά σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της νόρμας για μια ακολουθία 6 ορθογώνιων περιστροφών παρατηρείται μια σημαντική αλλαγή στην νόρμα που μετρήθηκε. Το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε χρησιμοποιώντας το ανοικτού κώδικα Matlab script MgnCalibration.m (Παράρτημα). Επίσης το script ApplyMgnCalibration.m (Παράρτημα) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διορθώσει το διάνυσμα εξόδου του επιταχυνσιομέτρου επιτυγχάνοντας σταθερή τιμή για όλους τους προσανατολισμούς.

Η αρχική νόρμα και η βαθμονομημένη νόρμα φαίνονται στις δύο εικόνες που ακολουθούν.



6.3 Μαγνητόμετρο

Το μαγνητόμετρο υποφέρει από σφάλματα κλίμακας και από το bias όπως και το επιταχυνσιόμετρο. Τα σφάλματα αυτά αντισταθμίζονται με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο καθώς το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου της γης μπορεί να θεωρηθεί σταθερό για κάθε προσανατολισμό στον ίδιο τόπο. Καθώς το τετρακόπτερο κινείται με διάφορους προσανατολισμούς ενώ συγχρόνως καταγράφεται το μετρήσιμο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου της γης παράγεται το παρακάτω γράφημα.



Ιδανικά, θα έπρεπε να παρατηρούμε μία τέλεια σφαίρα με ακτίνα B όπου B το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου της γης. Παρόλα αυτά παρατηρώντας προσεκτικά, υπάρχει μια αρνητική μετατόπιση στον άξονα z και σφάλματα κλίμακας σε κάθε άξονα. Τα δεδομένα αυτά τρέχουν στο script `MgnCalibration.m` παράγοντας την ιδανική σφαίρα.

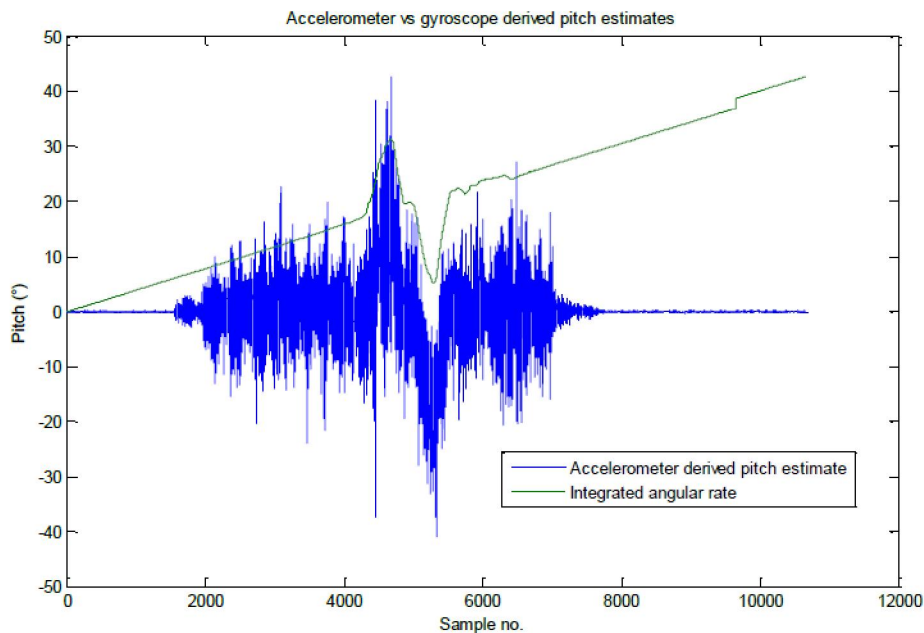
Κεφάλαιο 7

Sensor Fusion

Μιας και οι αισθητήρες δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα ώστε να προσδιορίσουν την στάση (attitude) του τετρακοπέρου, θα πρέπει να συνδυαστούν με μια τεχνική γνωστή ως sensor fusion κατά την οποία ουσιαστικά τα μειονεκτήματα του ενός αισθητήρα αντισταθμίζονται από τα πλεονεκτήματα του άλλου.

7.1 Δοκιμαστικά Δεδομένα

Τα δεδομένα ήταν ένα θετικό pitch 15° ακολουθούμενο από ένα αρνητικό pitch 15° με το ίδιο και για τον άξονα roll. Κατά τη διάρκεια της δοκιμής οι τέσσερις κινητήρες λειτούργησαν σε ταχύτητα πτήσης ώστε να προσομοιωθεί το επίπεδο θορύβου. Οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν απλά συγκρίνουν τα αποτελέσματα των φίλτρων στην εκτίμηση του άξονα pitch με την γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα pitch και την εκτίμηση pitch του επιταχυνσιομέτρου σαν αναφορά.



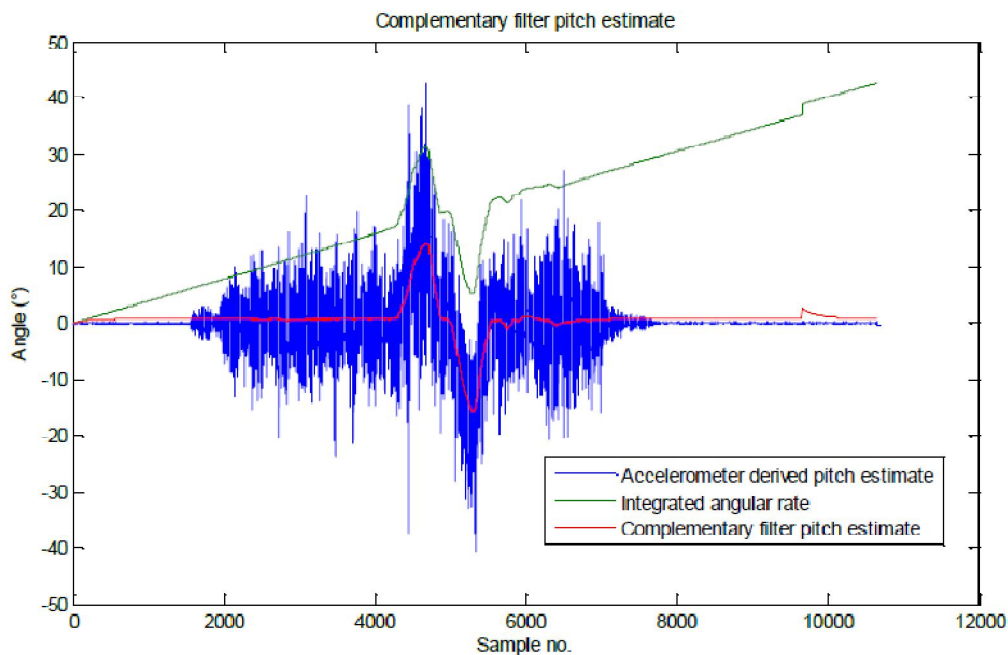
7.2 Συμπληρωματικό φίλτρο (complementary filter)

Η συνηθέστερη μέθοδος sensor fusion είναι η χρήση του συμπληρωματικού φίλτρου. Η χρήση του φίλτρου έχει να κάνει με το συνδυασμό των pitch και roll εκτιμήσεων από το επιταχυνσιόμετρο με τις x και y εξόδους του γυροσκοπίου, καθώς και της z εξόδου του γυροσκοπίου με την yaw εκτίμηση του μαγνητομέτρου:

$$\theta_k = (\theta_{k-1} + \dot{\theta} * dt) * a + \theta_{acc} * (1 - a)$$

Η τελευταία εξίσωση λειτουργεί στο πεδίο της συχνότητας και ουσιαστικά αθροίζει μια φιλτραρισμένη εκτίμηση γωνίας από το επιταχυνσιόμετρο με μία φιλτραρισμένη εκτίμηση από το γυροσκόπιο, με τα δύο φίλτρα να έχουν τις ίδιες γωνιακές συχνότητες. Το συμπληρωματικό φίλτρο είναι ουσιαστικά ο πρόδρομος για το φίλτρο Κάλμαν.(14)

Τρέχοντας τα δοκιμαστικά δεδομένα στο φίλτρο προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.



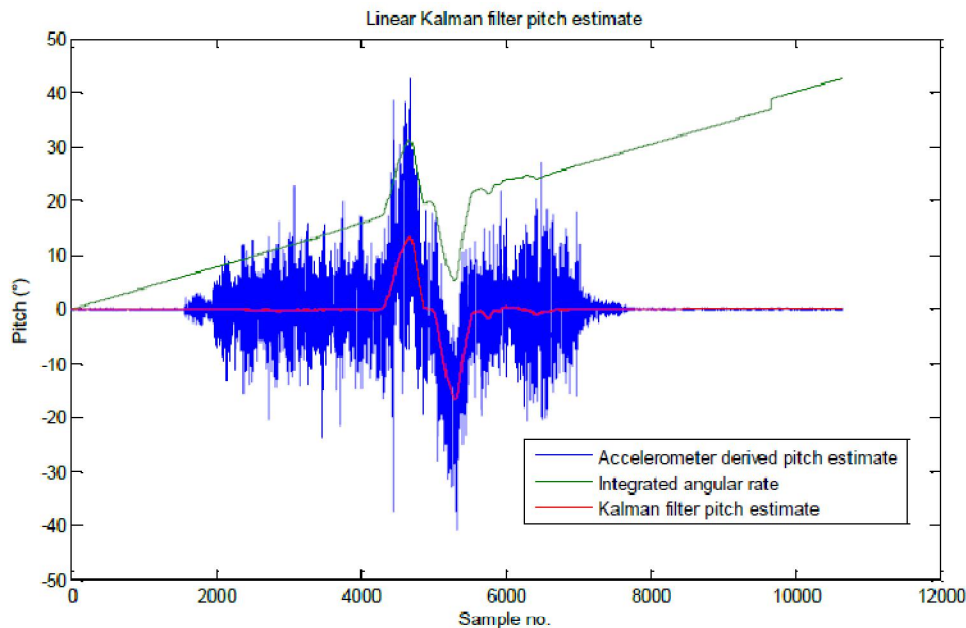
Από το διάγραμμα παρατηρήθηκε μία σταθερή μετατόπιση ανάλογη με το bias του γυροσκοπίου, η οποία μπορεί να μειωθεί εάν μειωθεί το α του προηγούμενου τύπου εισάγοντας όμως μεγαλύτερο θόρυβο από το επιταχυνσιόμετρο, κάνοντας επιτακτική τη χρήση ενός φίλτρου Κάλμαν.

7.3 Φίλτρο Κάλμαν

Το φίλτρο Κάλμαν όπως αναφέρθηκε παράγει μια βέλτιστη εκτίμηση της κατάστασης ενός συστήματος η οποία αναπαρίσταται από μια ροή δεδομένων με θόρυβο. Χρησιμοποιείται επίσης για το sensor fusion σε εφαρμογές AHRS καθώς μπορεί να δώσει εκτίμηση τόσο για τον προσανατολισμό ενός UAV καθώς και για άλλες παραμέτρους όπως το bias των αισθητήρων.

Στην παρούσα εργασία το φίλτρο Κάλμαν χρησιμοποιείται για να δώσει μια εκτίμηση για το pitch και το roll του AHRS μαζί με το bias του γυροσκοπίου στους άξονες αυτούς.

Τα αποτελέσματα του φίλτρου φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι το φίλτρο έδωσε μια εκτίμηση γωνίας με τα ίδια χαρακτηριστικά της γωνιακής ταχύτητας που έδωσε το γυροσκόπιο χωρίς όμως την μετατόπιση από το επιταχυνσιόμετρο. Επίσης, παρατηρούμε ότι το φίλτρο σχεδόν εξαφάνισε το σφάλμα βήματος του γυροσκοπίου στο δείγμα 9650. Η υλοποίηση του φίλτρου σε Matlab δίνεται από το LKF.m script στο παράρτημα.

Αξίζει να αναφερθεί πάντως ότι η παραπάνω υλοποίηση του φίλτρου έχει κάποια μειονεκτήματα. Όταν επιχειρείται μια περιστροφή γύρω από έναν άξονα ενώ ένας άλλος άξονας έχει εκτραπεί από τον οριζοντα, η τριγωνομετρική εκτίμηση γωνίας από το επιταχυνσιόμετρο και η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα που υπολογίζει το γυροσκόπιο δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Επίσης η χρήση των γωνιών του Euler στο φίλτρο εισάγει προβλήματα όπως το gimbal lock (yaw και roll

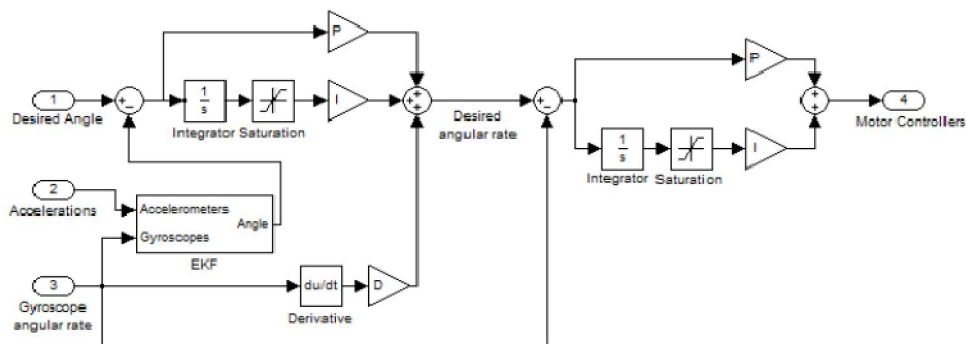
βρίσκονται στο ίδιο xy επίπεδο και το αεροσκάφος δε μπορεί να περιστραφεί στο yz επίπεδο) καθώς και singularities. Έτσι, ως λύση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα Extended Kalman Filter (EKF) με τετραδόνια, το οποίο όμως δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία.

7.4 Έλεγχος

Το σχήμα ελέγχου χρησιμοποιείται για να μεταφράσει τις εντολές του χειριστή στις ταχύτητες των κινητήρων του τετρακοπτέρου. Έτσι, χρησιμοποιούνται δύο PID επίπεδα για τους άξονες pitch και roll με ένα απλό επίπεδο για τον άξονα yaw.

Το πρώτο επίπεδο ελέγχει την γωνιακή ταχύτητα του τετρακοπτέρου χρησιμοποιώντας έναν ελεγκτή PI, δεχόμενο απευθείας εντολές από τον πιλότο ή την έξοδο του δεύτερου στρώματος ελέγχου σαν setpoint και τις εξόδους του γυροσκοπίου σαν μεταβλητές επεξεργασίας. Το επίπεδο αυτό είναι υπεύθυνο για την σταθερότητα του τετρακοπτέρου εξαλείφοντας τις ανεπιθύμητες γωνιακές κινήσεις.

Το δεύτερο επίπεδο είναι ένα πλήρες PID loop όπου θέτει σαν setpoint τις στάσεις του αεροσκάφους που στέλνει ο χειριστής και δίνει σαν έξοδο την επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα στο εσωτερικό loop. Οι όροι P και I παίρνουν την στάση του αεροσκάφους σαν μεταβλητή επεξεργασίας (process variable) με το D να σημαίνει παραγωγή στην μέτρηση. Αυτό σημαίνει ότι λαμβάνεται υπόψη η παράγωγος της γωνίας που δίνει ο αισθητήρας.



Τα loops ρυθμίζονται με το χέρι προσαρμόζοντας τις πέντε απολαβές μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή απόκριση, με το ίδιο σετ συντελεστών να χρησιμοποιείται για τον pitch και roll άξονα εξαιτίας της συμμετρίας της πλατφόρμας.

8. Συμπέρασμα

Το τετρακόπτερο που περιγράψαμε στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας, αποδείχτηκε αρκετά σταθερό στην πτήση του όπως επίσης το AHRS του λειτούργησε πλήρως σε κάθε προσανατολισμό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

MgnCalibration.m

```
function [U,c] = MgnCalibration(X)
% performs magnetometer calibration from a set of data
% using Merayo technique with a non iterative algoritm
% J.Merayo et al. "Scalar calibration of vector magnemoters"
% Meas. Sci. Technol. 11 (2000) 120-132.
%
% X : a Nx3 (or 3xN) data matrix
% each row (columns) contains x, y, z measurements
% N must be such that the data set describes
% as completely as possible the 3D space
% In any case N > 10
%
% The calibration tries to find the best 3D ellipsoid that fits the
data set
% and returns the parameters of this ellipsoid
%
% U : shape ellipsoid parameter, (3x3) upper triangular matrix
% c : ellipsoid center, (3x1) vector
%
% Ellipsoid equation : (v-c)'*(U'*U)(v-c) = 1
% with v a rough triaxes magnetometer measurement
%
% calibrated measurement w = U*(v-c)
%
% author : Alain Barraud, Suzanne Lesecq 2008
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[N,m] = size(X);
if m>3&&N==3,X = X';N = m;m = 3;end;%check that X is not transposed
if N<=10,U = [];c = [];return;end;%not enough data no calibration !!
% write the ellipsoid equation as D*p=0
% the best parameter is the solution of min||D*p|| with ||p||=1;
% form D matrix from X measurements
x = X(:,1); y = X(:,2); z = X(:,3);
D = [x.^2, y.^2, z.^2, x.*y, x.*z, y.*z, x, y, z, ones(N,1)];
D=triu(qr(D));%avoids to compute the svd of a large matrix
[U,S,V] = svd(D);%because usually N may be very large
p = V(:,end);if p(1)<0,p =-p;end;
% the following matrix A(p) must be positive definite
% The optimization done by svd does not include such a constraint
% With "good" data the constraint is allways satisfied
% With too poor data A may fail to be positive definite
% In this case the calibration fails
%
A = [p(1) p(4)/2 p(5)/2;
p(4)/2 p(2) p(6)/2;
p(5)/2 p(6)/2 p(3)];
[U,ok] = fchol(m,A);
if ~ok,U = [];c = [];return;end%calibration fails too poor data!!
b = [p(7);p(8);p(9)];
v = Utsolve(U,b/2,m);
d = p(10);
s = 1/sqrt(v*v'-d);
c =-Usolve(U,v,m)';%ellipsoid center
U = s*U;%shape ellipsoid parameter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

function [A,ok] = fchol(n,A)
% performs Cholesky factorisation
A(1,1:n) = A(1,1:n)/sqrt(A(1,1));
A(2:n,1) = 0;
for j=2:n
A(j,j:n) = A(j,j:n) - A(1:j-1,j)'*A(1:j-1,j:n);
if A(j,j)<=0,ok=0;break;end%A is not positive definite
A(j,j:n) = A(j,j:n)/sqrt(A(j,j));
A(j+1:n,j) = 0;
end
ok=1;
function x=Utsolve(U,b,n)
% solves U'*x=b
x(1) = b(1)/U(1,1);
for k=2:n
x(k) = (b(k)-x(1:k-1)*U(1:k-1,k))/U(k,k);
end
function x=Usolve(U,b,n)
% solves U*x=b
x(n) = b(n)/U(n,n);
for k=n-1:-1:1
x(k) = (b(k)-U(k,k+1:n)*x(k+1:n))/U(k,k);
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

ApplyMgnCalibration.m

```

function [ xnew,ynew,znew ] = ApplyMgnCalibration( U, c, x,y,z )
for (i = 1:length(x))
temp0 = x(i) - c(1);
temp1 = y(i) - c(2);
temp2 = z(i) - c(3);
xnew(i,1) = U(1,1)*temp0 + U(1,2)*temp1 + U(1,3)*temp2;
ynew(i,1) = U(2,2)*temp1 + U(2,3)*temp2;
znew(i,1) = U(3,3)*temp2;

```

End

LKF.m

```

function [pitch, roll, bp, bq, P_out] = LKF( p, q, accelpitch,
accelroll, dt )
pitch = zeros(length(dt),1);
roll = zeros(length(dt),1);
bp = zeros(length(dt),1);
bq = zeros(length(dt),1);
P_out = zeros(length(dt),4,4);
Q_pitch = 0.0; % Calculated from data
Q_roll = 0.0; % Calculated from data
Q_bp = 0.1;
Q_bq = 0.1;
R_pitch = 50; % Accel variance, calculated from data
R_roll = 50; % Accel variance, calculated from data
Q = [Q_pitch 0 0 0
0 Q_roll 0 0
0 0 Q_bp 0
0 0 0 Q_bq];
R = [R_pitch 0 0 0
0 R_roll 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0];
P = [0 0 0 0

```

```

0 0 0 0
0 0 10000 0
0 0 0 10000];
H = [1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0];
I = [1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1];
x = [accelpitch(1) % initial state estimate
accelroll(1)
0
0];
for i = 2:1:length(dt)
F = [1 0 -dt(i) 0
0 1 0 -dt(i)
0 0 1 0
0 0 0 1];

B = [dt(i) 0 0 0

0 dt(i) 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0];
u = [p(i)
q(i)
0
0];
z = [accelpitch(i)
accelroll(i)
0
0];
% Predicted state estimate
x = F*x + B*u;
% Predicted estimate covariance
P = F*P*F' + dt(i)*Q;
% Measurement residual
y = z - H*x;
% Residual covariance
S = H*P*H' + R;
% Optimal Kalman gain
K = P*H'*pinv(S);
% Updated state estimate
x = x + K*y;
% Updated estimate covariance
P = (I - K*H)*P;
pitch(i) = x(1);
roll(i) = x(2);
bp(i) = x(3);
bq(i) = x(4);
P_out(i,1:4,1:4) = P(1:4,1:4);
end

end

```

Βιβλιογραφία

1. *MultiWii repository*. [Online] <http://code.google.com/p/multiwii/>.
2. *Arducopter repository*. [Online] <http://code.google.com/p/arducopter/>.
3. *Autoquad*. [Online] <http://autoquad.org/about/>.
4. **K. Nomami, F. Kendoul, S. Suzuki, W. Wang, D. Nakazawa**. *Autonomous Flying Robots*. s.l. : Springer, 2010.
5. Quadrocopter yaw diagram. *Wikipedia*. [Online] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2a/Quadrotor_yaw_torque.png.
6. Turnigy L2215J-900. *HobbyKing*. [Online] http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/uh_viewItem.asp?idProduct=14737.
7. Flightmax 5000mAh 20C LiPo. *HobbyKing*. [Online] http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/__8579__ZIPPY_Flightmax_5000mAh_3S1P_20C.html.
8. **Invensense**. MPU6050 datasheet. [Online] www.invensense.com/mems/gyro/documents/PS-MPU-6000A.pdf.
9. MS5611-01BA Datasheet. [Online] www.meas-spec.com/downloads/MS5611-01BA03.pdf.
10. Tait-Bryan diagram. *Wikipedia*. [Online] <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Plane.svg>.
11. **Hoag, David**. *Apollo Guidance and Navigation Considerations of Apollo IMU Gimbal Lock*. 1963.
12. **Diebel, James**. *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*. s.l. : Stanford University, 2006.
13. **Solà, Joan**. *Quaternion kinematics for the error-state KF*. 2012.
14. *A Comparison of Complementary and Kalman Filtering*. **HIGGINS, WALTER T.** s.l. : IEEE, 1974.
15. **G. Minkler, J. Minkler**. *Theory and Application of Kalman Filtering*. 1993.
16. **Madgwick, Sebastian O.H.** *An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays*. 2010.
17. *A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems*. **Simon J. Julier, Jeffrey K. Uhlmann**. s.l. : The Robotics Research Group, Department of Engineering Science, The University of Oxford, 1997.
18. **Barraud, Alain**. MgnCalibration.m. *mathworks.co.uk*. [Online] <http://www.mathworks.co.uk/matlabcentral/fileexchange/23398-magnetometers-calibration/content/MgnCalibration.m>.