ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

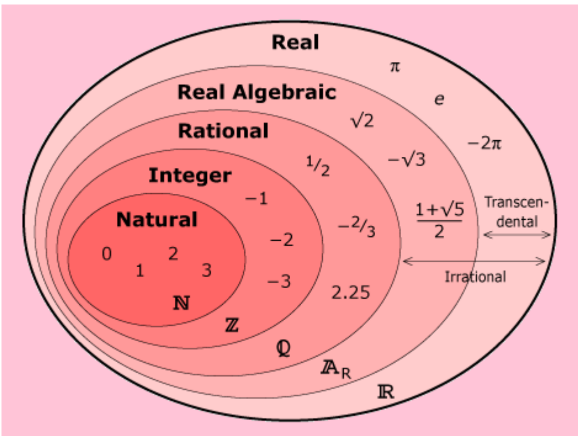
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Πραγματικοί αριθμοί: Εναλλακτικές θεμελιώσεις & διδακτικές προεκτάσεις



Άγγελος Νταλάκος

Α.Μ. 200724

Αθήνα

2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……… από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Παναγιώτης Σπύρου (επιβλέπων Καθηγητής)	Επικ. Καθηγητής	…………….
2) Διονύσιος Λάππας	Αναπ. Καθηγητής	………….
3) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Ομότ. Καθηγητής	………….

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος των Μαθηματικών κ. Παναγιώτη Σπύρου για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, και ειδικότερα κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.
- Τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος των Μαθηματικών κ. Διονύσιο Λάππα που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.
- Τον Ομότιμο Καθηγητή του τμήματος των Μαθηματικών κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή αλλά και μου έδωσε τη δυνατότητα, κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, να υπάρξω βοηθός του στο μάθημα Εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση του τμήματος Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης.
- Τη γραμματέα του Μεταπτυχιακού Προγράμματος της Διδακτικής & Μεθοδολογίας των Μαθηματικών κα. Διονυσία Μπακογιάννη, που χάρη στις χρήσιμες οργανωτικές συμβουλές της με βοήθησε να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.
- Τους μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα και με βοήθησαν να την πραγματοποιήσω.
- Τους συμφοιτητές μου, για την άψογη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν ένα από τα βασικότερα σύνολα αριθμών του απειροστικού λογισμού. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η οποία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών», ασχοληθήκαμε με την θεμελίωση, τις αναπαραστάσεις και τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος της εργασίας παρουσιάσαμε την πορεία με την οποία έγινε η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από το γεωμετρικό ορισμό της αναλογίας (σύμφωνα με τον Εύδοξο) στον ορισμό των τομών Dedekind (σύμφωνα με τον Dedekind). Το δεύτερο μέρος της εργασίας αφορά μία ποιοτική έρευνα που έγινε σε μαθητές Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, η οποία σχετίζεται με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, ακόμα και προχωρημένου μαθηματικού επιπέδου, στις αντιλήψεις σχετικά με τις αναπαραστάσεις και τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή έρχονται να επιβεβαιώσουν ήδη υπάρχουσες έρευνες αλλά και να αποτελέσουν κίνητρο για μελλοντικές ερευνητικές εργασίες πάνω στα ζητήματα αυτά.

Λέξεις κλειδιά: θεμελίωση, αναπαραστάσεις, άξονας, πραγματικοί αριθμοί, δυσκολίες.

Abstract

The set of real numbers is one of the most important set of numbers in Calculus Mathematics. This paper, which is a thesis for a master degree in the Didactics Of Mathematics, is about the foundation, the representations and the axis of real numbers. More specifically, in the first part of this paper, there is a structure of the real numbers from Eudoxus' Synthetic Definition of Proportionality to Dedekind's Cut. In the second part of this paper , we have contacted a research in High school students about the obstacles they have when they deal with the different representations and the axis of real numbers. We hope that the results of that research will motivate others to make new researches about those matters.

Key words: foundation, representations, axis, obstacles, real numbers.

Εισαγωγή

Αναμφισβήτητα οι πραγματικοί αριθμοί (και οι ιδιότητές τους) είναι η βασικότερη μαθηματική έννοια του Απειροστικού Λογισμού. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών κατάφερε να «κωδικοποιηθεί» με μαθηματική ακρίβεια με την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, στα τέλη του 19ου αιώνα, από τους σπουδαίους μαθηματικούς *R. Dedekind* και *G. Cantor*.

Οι απαρχές του συνόλου των πραγματικών αριθμών οφείλονται στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Πιο συγκεκριμένα, οι *Πυθαγόρειοι* πίστευαν ότι τα πάντα περιγράφονταν από φυσικούς αριθμούς. Αν θέλουμε αυτό να το «μεταφράσουμε» στα σύγχρονα μαθηματικά θα λέγαμε ότι κάθε πραγματικό αριθμό τον θεωρούσαν ρητό. Παρόλα αυτά ήταν οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι που ανακάλυψαν την ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$. Αυτή η ανακάλυψη, την οποία από ό, τι πιστεύεται προσπάθησαν να κρατήσουν μυστική, ήταν η πρώτη μεγάλη κρίση στα Μαθηματικά. Αυτή αποτέλεσε «ερέθισμα» μιας μαθηματικής αλλά και φιλοσοφικής αναζήτησης. Επιπλέον, ο *Πλάτωνας* στο διάλογο *Θεαίτητος*, αναφέρει ότι ο *Θεόδωρος ο Κυρηναίος* είχε μπορέσει να αποδείξει την αρρητότητα μέχρι και του αριθμού $\sqrt{17}$ (ασυμμετρία του $\sqrt{17}$). Η πιο αξιόλογη προσπάθεια όμως έγινε από τον *Εύδοξο* (στο *Βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη*) ο οποίος μας έδωσε τον ορισμό της αναλογίας και τις προτάσεις που συνδέονται με αυτόν (*Θεωρία Λόγων του Ευδόξου*). Πρόκειται στην ουσία για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών όπως τον διατύπωσε ο *Dedekind*, μέσω των τομών του, αρκετά χιλιάδες χρόνια μετά.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τον Εύδοξο στον Dedekind

⇓

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:
Θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών από τον Εύδοξο στον Dedekind

1.1. Ο γεωμετρικός ορισμός του Ευδόξου για την αναλογία

Στην παρούσα εργασία για να μπορέσουμε να μεταβούμε από την αξιωματική θεμελίωση του **Ευδόξου** (όπως αυτή περιγράφεται στο *Βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη*) στην αξιωματική θεμελίωση του **Dedekind**, θα ξεκινήσουμε από το μετρικό σύστημα που γνωρίζουμε και σταδιακά θα το «ξεγυμνώσουμε» από το αλγεβρικό του υπόβαθρο (***Moise, 1990***).

Αρχικά, ορίζουμε τη σχέση:

$$\overline{AB}:\overline{CD} \;\mathbf{::}\; \overline{EF}:\overline{GH} \quad (1)$$

για να δηλώσουμε ότι

$$\text{AB , CD} \sim \text{EF, GH} \quad (2)$$

η οποίο σημαίνει ότι

$$\frac{EF}{AB} = \frac{GH}{CD} \quad (3)$$

Η πρώτη από αυτές τις σχέσεις προφέρεται ως εξής: «Το $\overline{AB}$ είναι για $\overline{CD}$ ότι είναι το $\overline{EF}$ για το $\overline{GH}$». Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη σχέση αυτή χωρίς να αναφερθούμε καθόλου σε αριθμούς. (Αν χρειαστεί να αναφερθούμε σε αριθμούς, αυτοί θα είναι οι θετικοί ακέραιοι. Εκτός από σύμμετρα, τα μεγέθη $\overline{AB}$ και $\overline{EF}$ μπορεί να είναι και ασύμμετρα. Σε αυτήν την περίπτωση η σταθερά της αναλογίας

$$x = \frac{EF}{AB} = \frac{GH}{CD}$$

είναι άρρητη.

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε τη θεωρία του Ευδόξου θα πρέπει, πρώτα από όλα, να εκφράσουμε τη σχέση (3) σε τέτοια μορφή η οποία να αφορά ρητούς αριθμούς. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε ως εξής:

Αν p/q είναι ρητός και $\frac{p}{q} < \frac{EF}{AB}$ τότε $\frac{p}{q} < \frac{GH}{CD}$. (4)

Αντίστροφα, αν ισχύει η δεύτερη ανισότητα τότε ισχύει και η πρώτη.

Όλα αυτά, μπορούμε να τα εκφράσουμε χωρίς να αναφερθούμε στην έννοια της διαίρεσης.

Ακόμα,

Αν οι p και q είναι θετικοί ακέραιοι, και $p \cdot AB < q \cdot EF$, τότε $p \cdot CD < q \cdot GH$.

Αντίστροφα, αν ισχύει η δεύτερη ανισότητα, τότε ισχύει και η πρώτη.

Στο σημείο αυτό έχουμε σχεδόν τελειώσει, αφού η σχέση (5) είναι πολύ κοντά στο να γίνει πρόταση για τμήματα. Θα λέμε ότι αυτή η πρόταση μπορεί να προσδιορίσει ισοδύναμες κλάσεις τμημάτων. Πιο αναλυτικά, για κάθε τμήμα $\overline{XY}$, θεωρούμε το $[\overline{XY}]$ ως το σύνολο όλων των τμημάτων τα οποία είναι ισοδύναμα με το $\overline{XY}$. Για δοσμένα τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$ παίρνουμε τα σημεία *X, Y, Z* τέτοια ώστε:

$$X\text{-}Y\text{-}Z\ (\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ XY+YZ=XZ)\,, \quad \overline{AB} \cong \overline{XY}\ (\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ AB = XY)\,,$$

$$\overline{CD} \cong \overline{YZ}\ (\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ CD = YZ)$$

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το άθροισμα $[\overline{AB}]+[\overline{CD}]$ με βάση τον τύπο:

$$[\overline{AB}]+[\overline{CD}]=[\overline{XZ}]$$

Το άθροισμα αυτών των δύο κλάσεων εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις $[\overline{AB}]$ και $[\overline{CD}]$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των *A, B, C, D, X, Y και Z.* Αν ισχύει $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ τότε γράφουμε

$$[\overline{AB}]+[\overline{AB}]=2[\overline{AB}]$$

Γενικεύοντας για οποιαδήποτε θετικό ακέραιο *n* έχουμε

$$n[\overline{AB}]=[\overline{AB}]+[\overline{AB}]+\ldots+[\overline{AB}] \quad (\mu\varepsilon\ n\ \acute{o}\rho o\upsilon\varsigma)$$

Έτσι, αν γράψουμε

$$n[\overline{AB}]=[\overline{XY}],$$

αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε *n* ίσα τμήματα $\overline{AB}$ και τα τοποθετήσουμε το ένα δίπλα στο άλλο θα πάρουμε ένα νέο τμήμα ισοδύναμο, το $\overline{XZ}$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι αν ισχύει η σχέση

$$\overline{AB} < \overline{CD}$$

τότε θα υπάρχει ένα σημείο *B΄*, μεταξύ του *C* και *D*, τέτοιο ώστε $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$ Αυτός είναι ο Ευκλείδειος γεωμετρικός τρόπος για να εκφράσουμε ότι το *AB < CD.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να εκφράσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο Εύδοξος σχημάτισε τη σχέση (5):

Έστω ότι οι p και q είναι θετικοί ακέραιοι.

$$\text{Αν } p[\overline{AB}] < q[\overline{EF}] \quad \text{τότε} \quad p[\overline{CD}] < q[\overline{GH}]$$

Και αντίστροφα, αν η δεύτερη ανισότητα ισχύει τότε ισχύει και η πρώτη.

Αυτός ήταν ο τρόπος με τον οποίο ο Εύδοξος όριζε τη σχέση:

$$\overline{AB}:\overline{CD} \;::\; \overline{EF}:\overline{GH}.$$

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε την παραπάνω σχέση, στα «Στοιχεία», κάθε φορά που είχε να αντιμετωπίσει την αναλογία. Για να κατανοήσουμε πόσο μεγάλο κατόρθωμα ήταν αυτό θα εξετάσουμε την *Πρόταση V.4 του Βιβλίου V των Στοιχείων του Ευκλείδη*.

Πρόταση 4 : «Αν το πρώτο μέγεθος έχει την ίδια αναλογία με το δεύτερο μέγεθος όπως το τρίτο μέγεθος με το τέταρτο, τότε και τα ίσα πολλαπλάσια του πρώτου με το τρίτο θα έχουν την ίδια αναλογία με τα ίσα πολλαπλάσια του δεύτερου με το τέταρτο»

Αυτή την πρόταση μπορούμε να την ξαναγράψουμε με την εξής μορφή:

Πρόταση 4΄: Αν $\overline{AB}:\overline{CD} \;::\; \overline{EF}:\overline{GH}$, και m, n είναι θετικοί ακέραιοι τότε

$\overline{mAB}:\overline{mEF} \;::\; \overline{nCD}:\overline{nGH}$

Όπου $\overline{mAB}$ εννοούμε οποιοδήποτε τμήμα που ανήκει στην κλάση m$[\overline{AB}]$ και ομοίως για τα υπόλοιπα τμήματα.

Το αντίστοιχο αλγεβρικό θεώρημα είναι απλό. Λέει ότι :

$$\text{Αν } AB, CD \sim EF, GH$$

με m και n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε

$$mAB, mEF \sim nCD, nGH$$

Αν γράψουμε τις αναλογίες αυτές ως ισότητες λόγων, θα πάρουμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 4΄΄: Αν $\frac{EF}{AB} = \frac{GH}{CD}$ και m, n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε $\frac{nCD}{mAB} = \frac{nGH}{mEF}$

Η πρώτη από τις ισότητες σημαίνει: $EF \cdot CD = AB \cdot GH$

Και η δεύτερη σχέση σημαίνει: $mnEF \cdot CD = mn\, AB \cdot GH$

Δεν αξίζει να αναφερθούμε στην απόδειξη του Ευκλείδη επειδή όλα τα θεωρήματα του 5[ου] Βιβλίου των Στοιχείων «εξασθενούν», μόλις εξηγηθούν αλγεβρικά. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι ο Ευκλείδης ήταν ανόητος. Απλώς την εποχή του Ευκλείδη η άλγεβρα των πραγματικών αριθμών δεν είχε ανακαλυφθεί. Το να μπορέσουν να τα εφαρμόσουν (χωρίς την άλγεβρα) στη μελέτη της γεωμετρίας ήταν ένα επίτευγμα.

Επίσης, αυτό που πρέπει να γίνει κατανοητό είναι ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το λόγο $\overline{AB}:\overline{CD}$ και $\overline{EF}:\overline{GH}$. Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι τα $\overline{AB}:\overline{CD}$ **::** $\overline{EF}:\overline{GH}$ έχουν τον ίδιο λόγο. Ο ευκολότερος τρόπος για να το παρατηρήσουμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι ο λόγος $\overline{AB}:\overline{CD}$ θα πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία οι μόνοι αριθμοί είναι οι θετικοί ακέραιοι.

Τέλος, θα πρέπει να ομολογήσουμε ότι στην προσπάθεια να αποδώσουμε τους Ευκλείδειοι τύπους πάνω σε συγκεκριμένες ιδέες, δεν υιοθετήσαμε τον τρόπο γραφής του Ευκλείδη. Για παράδειγμα, στη μετάφραση του **Heath**, ο ορισμός της αναλογίας είναι ο εξής:

«Τα μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο με το δεύτερο και το τρίτο με το τέταρτο, όταν, αν για οποιαδήποτε πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου και για οποιαδήποτε πολλαπλάσια του δεύτερου και του τέταρτου, τα πρώτα πολλαπλάσια είναι με τον ίδιο τρόπο μεγαλύτερα ή με τον ίδιο τρόπο ίσα ή με τον ίδιο τρόπο μικρότερα από τα δεύτερα πολλαπλάσια».

Αυτή είναι η πρόταση την οποία την έχουμε διατυπώσει ως πρόταση (6).

Παρατηρήσεις για τη σχέση $\overline{AB}:\overline{CD}$ **::** $\overline{EF}:\overline{GH}$

Α) Όσον αφορά τον Ευκλείδη, αυτός είχε διατυπώσει ένα γεωμετρικό τρόπο για να δηλώνει ότι ο λόγος $\overline{AB}:\overline{CD}$ είναι μικρότερος από το λόγο $\overline{EF}:\overline{GH}$. Επιπρόσθετα, δεν χρησιμοποίησε την αρχιμήδεια ιδιότητα. Απλώς ανέφερε ότι τα τμήματα θα έπρεπε να συμπεριφέρονται με έναν αρχιμήδειο τρόπο για να μπορούμε να μιλάμε για αναλογία μεταξύ τους.

Β) Εμείς γνωρίζουμε ότι για να μπορέσουμε να γράψουμε $\overline{AB}:\overline{CD}$ **::** $\overline{EF}:\overline{GH}$ πρέπει πρώτα να ξέρουμε ότι:

(1) $p[\overline{AB}] > [\overline{CD}]$ *για κάποιο* p

(2) $q[\overline{CD}] > [\overline{AB}]$ *για κάποιο* q

(3) $r[\overline{EF}] > [\overline{GH}]$ *για κάποιο* r

(4) $s[\overline{GH}] > [\overline{EF}]$ $για\ κάποιο\ s$

Σε καμία περίπτωση ο Ευκλείδης δεν αναρωτήθηκε αν αυτές οι παραπάνω συνθήκες ισχύουν για δύο δοσμένα τμήματα. Ο Ευκλείδης αναφέρει ότι θα μιλήσει για λόγους οι οποίοι ισχύουν.

1.2. Η άλγεβρα για την πρόσθεση τμημάτων

Αφού ορίσαμε τον ορισμό της αναλογίας λόγων του Ευδόξου, θα ορίσουμε τους νόμους που θα πρέπει να ισχύουν όταν θέλουμε να τοποθετήσουμε το ένα τμήμα δίπλα στο άλλο.

Θεώρημα 1

Ο αντιμεταθετικός νόμος

$$[\overline{AB}] + [\overline{CD}] = [\overline{CD}] + [\overline{AB}]$$

Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της πρόσθεσης τμημάτων. Η σειρά με την οποία τα τμήματα ονομάζονται δεν έχει σημασία.

Θεώρημα 2

Ο προσεταιριστικός νόμος

$$([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) + [\overline{EF}] = [\overline{AB}] + ([\overline{CD}] + [\overline{EF}])$$

Θεώρημα 3

Ο επιμεριστικός νόμος

Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$n([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) = n[\overline{AB}] + n[\overline{CD}]$$

Απόδειξη:

Για κάθε n, έστω P_n είναι η παραπάνω πρόταση. Δηλαδή

$$Pn = n([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) = n[\overline{AB}] + n[\overline{CD}]$$

Η P_1 ισχύει.

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει το θεώρημα αυτό, θα πρέπει να δείξουμε ότι αν η P_n είναι αληθής τότε είναι αληθής και η P_{n+1} (*μαθηματική επαγωγή*)

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(n+1)([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) &= n([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) + ([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) \\
&= (n[\overline{AB}] + n[\overline{CD}]) + ([\overline{AB}] + [\overline{CD}]) \\
&= (n[\overline{AB}] + n[\overline{CD}]) + ([\overline{CD}] + [\overline{AB}]) \quad (\alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ 1) \\
&= n[\overline{AB}] + ((n[\overline{CD}] + [\overline{CD}]) + [\overline{AB}] \quad (\alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ 2) \\
&= n[\overline{AB}] + ((n+1)[\overline{CD}] + [\overline{AB}]) \\
&= n[\overline{AB}] + ([\overline{AB}] + (n+1)[\overline{CD}]) \quad (\alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ 1) \\
&= (n[\overline{AB}] + [\overline{AB}]) + (n+1)[\overline{CD}] \quad (\alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ 2) \\
&= (n+1)[\overline{AB}] + (n+1)[\overline{CD}].
\end{aligned}
$$

<u>Θεώρημα 4</u>

Διατήρηση της διάταξης

$A\nu\ [\overline{AB}] > [\overline{CD}],\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ n[\overline{AB}] > n[\overline{CD}]\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\ \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\ n.$

Απόδειξη

$A\nu\ [\overline{AB}] > [\overline{CD}], \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ [\overline{AB}] = [\overline{CD}] + [\overline{EF}]\ \gamma\iota\alpha\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\ EF.$

Από το προηγούμενο θεώρημα: $n[\overline{AB}] = n[\overline{CD}] + n[\overline{EF}]$, το οποίο σημαίνει ότι $n[\overline{AB}] > n[\overline{CD}]$.

<u>Θεώρημα 5</u>

Αν $n[\overline{AB}] > n[\overline{CD}], \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o\ n$, τότε $[\overline{AB}] > [\overline{CD}]$.

Αν δεν ίσχυε τότε δε θα ίσχυε το προηγούμενο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 6</u>

Αν $A - B - C$, τότε $n[\overline{AC}] > n[\overline{AB}]\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ n.$

Αυτό προκύπτει αφού αν $A - B - C$ $(\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ AB + BC = AC)$, οπότε

$[\overline{AC}] > [\overline{AB}]$, άρα ισχύει η σχέση $n[\overline{AC}] > n[\overline{AB}]$ σύμφωνα με το θεώρημα 4.

Θεώρημα 7

$A\nu\ [\overline{AB}] < [\overline{CD}], \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ [\overline{AB}] + [\overline{EF}] < [\overline{CD}] + [\overline{EF}]\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ [\overline{EF}]$

Απόδειξη

Έστω W, X και Z είναι συγγραμμικά σημεία τέτοια ώστε $W - X - Z, \overline{WX} \cong \overline{EF}$ και $\overline{XZ} \cong \overline{CD}$. Αφού $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$, υπάρχει ένα σημείο Y τέτοιο ώστε X-Y-Z και $\overline{XY} \cong \overline{AB}$. Τότε

$[\overline{AB}] + [\overline{EF}] = [\overline{WY}]\ \ \kappa\alpha\iota\ \ [\overline{CD}] + [\overline{EF}] = [\overline{WZ}]$

Αφού $W - X - Z\ \kappa\alpha\iota\ X - Y - Z$ έχουμε ότι $W - Y - Z$. Έτσι, $[\overline{WY}] < [\overline{WZ}]$ οπότε προκύπτει το θεώρημα αυτό.

1.3. Πώς να Προσδιορίσουμε τους λόγους: Το supremum

Έχουμε προαναφέρει ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε τους λόγους στη θεωρία της αναλογίας, σύμφωνα με τον Ευκλείδη. Μπορούμε μόνο να μιλήσουμε για τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ίσων λόγων. Η σχέση $\overline{AB}:\overline{CD}\ ::\ \overline{EF}:\overline{GH}$ μας λέει ότι τα $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$ έχουν τον ίδιο λόγο με τα $\overline{EF}$ και $\overline{GH}$. Αλλά οι λόγοι $\overline{AB}:\overline{CD}$ και $\overline{EF}:\overline{GH}$ δεν έχουν νόημα ξεχωριστά από μόνοι τους. Εάν χρησιμοποιήσουμε όμως τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να δώσουμε νόημα στο $\overline{AB}:\overline{CD}$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το γεωμετρικό σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, ο λόγος $\overline{AB}:\overline{CD}$ θα γίνει ο αριθμός AB/CD. Με αυτόν τον τρόπο, με το θεώρημα σύγκρισης θα λέμε ότι:

$$\frac{p}{q} < \overline{AB}:\overline{CD}\ \text{ αν και μόνο αν } \frac{p}{q} < \frac{AB}{CD}.$$

Αυτό ισοδυναμεί με το εξής:

$$pCD < qAB$$

το οποίο ισοδυναμεί με το

$$p[\overline{CD}] < q[\overline{AB}]$$

Έτσι, $\frac{p}{q} < \overline{AB}:\overline{CD}$ αν και μόνο αν τοποθετήσουμε $p - \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$ ένα ευθύγραμμο τμήμα της κλάσης $[\overline{CD}]$, τοποθετημένο το ένα δίπλα στο άλλο, και σχηματίσουμε ένα τμήμα μικρότερο από ένα άλλο τμήμα που δημιουργείται αν τοποθετήσουμε $q - φορές$ (το ένα δίπλα στο άλλο) ένα τμήμα της κλάσης $[\overline{AB}]$.

Έστω το σύνολο $K = \left\{\frac{p}{q} \mid p[\overline{CD}] < q[\overline{AB}]\right\}$.

Επίσημα, αυτό το σύνολο των ρητών αριθμών προσδιορίζεται χωρίς να αναφερθούμε σε απόσταση. Ανεπίσημα, παρατηρούμε ότι στο μετρικό (αριθμητικό) σύστημα θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$K = \left\{\frac{p}{q} \mid \frac{p}{q} < \frac{AB}{CD}\right\}$$

Η σχέση μεταξύ του συνόλου K και του αριθμού $\frac{AB}{CD}$ είναι απλή. Μπορεί να τεθεί κάτω από τις παρακάτω συνθήκες:

(1) ο AB/CD είναι ένα άνω φράγμα για το K. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε στοιχείο του K είναι $\leq AB/CD$. (Στην πραγματικότητα, κάθε στοιχείο του K είναι αυστηρά μικρότερο του AB/CD. Όμως αυτή η πιο αυστηρή συνθήκη δεν χρειάζεται στον γενικό ορισμό του άνω φράγματος ενός συνόλου αριθμών).

(2) ο AB/CD είναι ο ελάχιστος από όλα τα άνω φράγματα του K. Αυτό σημαίνει ότι κάθε άλλο άνω φράγμα του K είναι μεγαλύτερο από το AB/CD.

Στην περίπτωση αυτή θα συμβολίσουμε τον αριθμό AB/CD με s και θα λέμε ότι το s είναι *supremum* του συνόλου K (δηλαδή $s = supK$).

Συμπερασματικά:

Το s θα είναι ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου K αν

(1) το s είναι ένα άνω φράγμα του K

(2) δεν υπάρχει κανένας αριθμός μικρότερος από το s που να έχει αυτή την ιδιότητα.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα.

Έστω $K_1 = \left\{\frac{1}{n} \mid όπου\ n\ θετικός\ ακέραιος\right\}$. Το $supK_1 = 1$, και το $supK_1$ ανήκει στο K_1.

Έστω $K_2 = \left\{2 - \frac{1}{n} \mid όπου\ n\ θετικός\ ακέραιος\right\}$. Το $supK_2 = 2$, και το $supK_2$ δεν ανήκει στο K_2. Αν το K_3 είναι το σύνολο N, όλων των θετικών ακεραίων, τότε δεν υπάρχει το $supK_3$, επειδή δεν υπάρχει άνω φράγμα.

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το λόγο των τμημάτων, με βάση τα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδη, πρέπει να δώσουμε τις δύο παρακάτω βασικές αρχές. Η μία έχει να κάνει με το γεωμετρικό σύστημα ενώ η άλλη με το σύστημα των πραγματικών αριθμών.

Η αρχιμήδεια ιδιότητα

Για δύο τμήματα AB και CD, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε

$$n[\overline{AB}] > [\overline{CD}]$$

Η ιδιότητα του Dedekind

Έστω ένα μη κενό σύνολο K των πραγματικών αριθμών. Αν το K έχει άνω φράγμα, τότε το K έχει supremum ($supK$).

Αυτή είναι η πιο σημαντική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών. Για να κατανοήσουμε τη σημασία της θα πρέπει να εξηγήσουμε γιατί δεν ισχύει στους ρητούς αριθμούς.

Έστω, για παράδειγμα, το σύνολο $K = \left\{\frac{p}{q} | p, q > 0 \; και \; \frac{p}{q} < \sqrt{2}\right\}$

Αυτό μπορούμε να το περιγράψουμε με ρητούς αριθμούς ως εξής:

$$K = \left\{\frac{p}{q} | p, q > 0 \; και \; \frac{p^2}{q^2} < 2\right\}$$

Στο σύστημα των πραγματικών αριθμών, το σύνολο K έχει ελάχιστο άνω φράγμα $supK = \sqrt{2}$. Αλλά το K δεν έχει supremum στο σύστημα των ρητών αριθμών. Αυτό συμβαίνει για τον εξής λόγο:

Αν το r/s είναι ένα άνω φράγμα του K και $\sqrt{2} < \frac{t}{u} < \frac{r}{s}$, τότε το $\frac{t}{u}$ είναι άνω φράγμα του K. Έτσι, δεν υπάρχει κανένα ρητό άνω φράγμα του K που να είναι μικρότερο όλων των άλλων ρητών άνω φραγμάτων του K.

Επίσης, αν διαγράψουμε από τους πραγματικούς αριθμούς οποιοδήποτε αριθμό x, το υπόλοιπο σύνολο των πραγματικών αριθμών R' δεν ικανοποιεί την ιδιότητα του Dedekind. Ο λόγος είναι ότι στο σύστημα των αριθμών R', το σύνολο $K = \{y | y < x\}$ έχει πολλά άνω φράγματα, μα κανένα από αυτά δεν είναι ελάχιστο άνω φράγμα. (Αν z είναι ένα άνω φράγμα, τότε κάθε αριθμός ανάμεσα στα x και z είναι ένα άνω φράγμα.)

<u>Βασικά Θεωρήματα</u>

Έστω δύο τμήματα $\overline{AB}, \overline{CD}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$K = \left\{\frac{p}{q} | p[\overline{CD}] < q[\overline{AB}]\right\}$$

Με βάση την αρχιμήδεια ιδιότητα, θα αποδείξουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1

Το K περιέχει τουλάχιστον ένα θετικό αριθμό p/q

Απόδειξη

Έστω δύο τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει ένα n τέτοιο ώστε : $n[\overline{AB}] > [\overline{CD}]$. Έστω $p = 1$ και $q = n$. Τότε το p/q είναι θετικός και ανήκει στο K.

Θεώρημα 2

Το K έχει ένα άνω φράγμα.

Απόδειξη

Έστω $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει ένας αριθμός n, τέτοιος ώστε $n[\overline{CD}] > [\overline{AB}]$. Ισχυριζόμαστε ότι το n είναι ένα άνω φράγμα του K. Αυτό θα το αποδείξουμε δείχνοντας ότι αν $\frac{p}{q} > n$, τότε το p/q δεν ανήκει στο K.

Αν $\frac{p}{q} > n$, τότε $p > nq$. Έτσι $p[\overline{CD}] > nq[\overline{CD}]$. Από το θεώρημα 4 της προηγούμενης παραγράφου θα προκύψει ότι το $nq[\overline{CD}] > q[\overline{AB}]$. Οπότε $p[\overline{CD}] > q[\overline{AB}]$, έτσι ώστε το p/q δεν ανήκει στο K.

Από αυτά τα δύο θεωρήματα και από την ιδιότητα του Dedekind, θα προκύψει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3

Το K έχει ελάχιστο άνω φράγμα $supK$, και $supK > 0$

Από όλα αυτά τα τρία θεωρήματα παράγεται ο επόμενος ορισμός:

Ορισμός

$$\overline{AB}:\overline{CD} = supK$$

Με βάση το τρίτο θεώρημα και τον παραπάνω ορισμό προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4

Για κάθε δύο τμήματα $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ έχουμε $\overline{AB}:\overline{CD} > 0$

Θεώρημα 5

Αν $A \neq B$, και $C - D - E$ τότε $\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{AB} + \frac{DE}{AB}$

Αυτό ισχύει γιατί $CD + DE = CE$

ή αλλιώς

Θεώρημα 5

Το θεώρημα της πρόσθεσης

Αν $A \neq B$, και $C - D - E$ τότε $\overline{CE}:\overline{AB} = \overline{CD}:\overline{AB} + \overline{DE}:\overline{AB}$

1.4. Απόδειξη του θεωρήματος της πρόσθεσης

Στην προηγούμενη παράγραφο καταφέραμε να συνδέσουμε τον λόγο του $\overline{AB}:\overline{CD}$ (από τη θεωρία του Ευδόξου) με το *supremum* ενός συνόλου. Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα της πρόσθεσης πρέπει πρώτα να το μετατρέψουμε στις συνθήκες του ορισμού αυτού. Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα της πρόσθεσης

Δίνονται τα $A \neq B$, και $C - D - E$.

Έστω

$K_1 = \left\{\frac{p}{q} \,|p[\overline{AB}] < q[\overline{CD}] \right\}$, τέτοιο ώστε $\overline{CD}:\overline{AB} = supK_1 = k_1$

Έστω
$K_2 = \left\{\frac{r}{s} | r[\overline{AB}] < s[\overline{DE}] \right\}$, τέτοιο ώστε $\overline{DE}:\overline{AB} = supK_2 = k_2$

Τέλος, έστω
$K = \left\{\frac{t}{m} | t[\overline{AB}] < m[\overline{CE}] \right\}$, τέτοιο ώστε $\overline{CE}:\overline{AB} = supK = k$

Το θεώρημα της πρόσθεσης δηλώνει ότι $k_1 + k_2 = k$.

Επειδή η απόδειξη είναι αρκετά μεγάλη θα την αναλύσουμε σε μια σειρά από πιο μικρά θεωρήματα κάθε ένα από τα οποία έχει μια μικρή απόδειξη.

Θεώρημα 1

Αν p/q ανήκει στο σύνολο *K*, και $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$, τότε το r/s ανήκει στο *K*.

Απόδειξη

Έστω $p[\overline{AB}] < q[\overline{CE}]$ και $qr < ps,$ θα πρέπει να δείξουμε ότι

$r[\overline{AB}] < s[\overline{CE}]$

Από το θεώρημα 4 της προηγούμενης παραγράφου (διατήρηση της διάταξης) έχουμε

$pr[\overline{AB}] < qr[\overline{CE}]$, και $qr[\overline{CE}] < ps[\overline{CE}]$, επειδή $qr < ps$.

Έτσι, $pr[\overline{AB}] < ps[\overline{CE}]$.

Αν ίσχυε ότι $r[\overline{AB}] = s[\overline{CE}]$, τότε θα είχαμε $pr[\overline{AB}] = ps[\overline{CE}]$

Αν ίσχυε ότι $r[\overline{AB}] > s[\overline{CE}]$, τότε θα είχαμε $pr[\overline{AB}] > ps[\overline{CE}]$

Εδώ όμως ισχύει $pr[\overline{AB}] < ps[\overline{CE}]$, συνεπώς $r[\overline{AB}] < s[\overline{CE}]$

Θεώρημα 2

Το *K* δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $p/q \in K$. Τότε $p[\overline{AB}] < q[\overline{CE}]$. Έτσι, υπάρχει ένα τμήμα $\overline{FG}$ τέτοιο ώστε $q[\overline{CE}] = p[\overline{AB}] + [\overline{FG}]$. Έτσι $nq[\overline{CE}] = np[\overline{AB}] + n[\overline{FG}]$ για κάθε *n*. Από την αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει ένα *n* τέτοιο ώστε $n[\overline{FG}] > [\overline{AB}]$.

Προκύπτει από το θεώρημα 7 της προηγούμενης παραγράφου ότι

$$np[\overline{AB}] + n[\overline{FG}] > np[\overline{AB}] + [\overline{AB}]$$

Συνεπώς

$$(np+1)[\overline{AB}] < np[\overline{AB}] + n[\overline{FG}] = nq[\overline{CE}] \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \frac{np+1}{nq} \in K.$$

Αφού $\frac{p}{q} < \frac{np+1}{nq}$ προκύπτει ότι το p/q δεν είναι το μέγιστο στοιχείο στο K. Οπότε το K δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Ορισμός

Το σύνολο K το ονομάζουμε *τομή των ρητών αριθμών*. Ειδικότερα, η *τομή ρητών αριθμών* είναι ένα σύνολο Z τέτοιο ώστε:

(1) το Z είναι σύνολο από θετικούς ρητούς αριθμούς,

(2) το Z δεν είναι κενό,

(3) το Z έχει ένα άνω φράγμα,

(4) αν $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ και r/s ανήκει στο Z, τότε και το p/q ανήκει στο Z

(5) το K δεν έχει μέγιστο στοιχείο

Θεώρημα 3

Έστω $\overline{AB}$ και $\overline{CE}$ είναι δύο οποιαδήποτε τμήματα, και $K = \left\{\frac{p}{q} \,|\, p[\overline{AB}] < q[\overline{CE}]\right\}$ τότε το Κ είναι μια τομή των ρητών αριθμών.

Όσον αφορά τον ορισμό της τομής, το θεώρημα 1 μας λέει ότι το K ικανοποιεί την (4) σχέση, το θεώρημα 2 μας δίνει τη σχέση (5), και γνωρίζουμε ήδη ότι το σύνολο K ικανοποιεί τις άλλες τρεις συνθήκες του ορισμού.

Θεώρημα 4

Αν $z = supZ$, και ε είναι ένας θετικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα στοιχείο x του Z το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $z - \varepsilon$.

Απόδειξη

Αν δεν υπάρχει τέτοιο x, τότε κάθε στοιχείο x του Z, θα ήταν $\leq z - \varepsilon$. Έτσι το $z - \varepsilon$ θα είναι ένα άνω φράγμα του Z. Αυτό είναι άτοπο, επειδή το $supZ$ είναι το μικρότερο από όλα τα άνω φράγματα του Z.

Αν συνδυάσουμε το θεώρημα 3 και 4, θα πάρουμε μια απλή περιγραφή του συνόλου K.

Θεώρημα 5

Έστω $\overline{AB}$ και $\overline{DE}$ είναι δύο τμήματα. Έστω $K = \left\{\frac{p}{q} | p[\overline{AB}] < q[\overline{DE}]\right\}$ και έστω $k = supK$.

Τότε $K = \left\{\frac{r}{s} | 0 < \frac{r}{s} < k]\right\}$.

Απόδειξη

Έστω r/s είναι ένας ρητός αριθμός μεταξύ του 0 και του k. Έστω $\varepsilon = k - \frac{r}{s}$.

Τότε ε > 0. Από το θεώρημα 4 υπάρχει ένα στοιχείο p/q του K τέτοιο ώστε $\frac{p}{q} > k - \varepsilon$

Αυτό σημαίνει ότι $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$. Από το θεώρημα 1, $r/s \in K$. Οπότε $\left\{\frac{r}{s} | 0 < \frac{r}{s} < k]\right\} \subset K$

Αν $k \in K$, τότε k είναι το μεγαλύτερο από τα στοιχεία του K, κάτι το οποίο είναι αδύνατο. Έτσι κάθε στοιχείο του K είναι αυστηρά μεταξύ του 0 και του k, και $K \subset \left\{\frac{r}{s} | 0 < \frac{r}{s} < k]\right\}$.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε

$$K_1 = \left\{\frac{p}{q} | 0 < \frac{p}{q} < k_1\right\},$$

$$K_2 = \left\{\frac{r}{s} | 0 < \frac{r}{s} < k_2\right\},$$

$$K = \left\{\frac{t}{u} | 0 < \frac{t}{u} < k\right\}$$

Θεώρημα 6

Αν το p/q ανήκει στο σύνολο K_1 και το r/s ανήκει στο σύνολο K_2, τότε το $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ ανήκει στο σύνολο K.

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι $p[\overline{AB}] < q[\overline{CD}]$ $\;και\;$ $r[\overline{AB}] < s[\overline{DE}]$. Προφανώς $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{qr+ps}{qs}$

Συνεπώς, πρέπει να αποδείξουμε ότι $(qr + ps)[\overline{AB}] < qs[\overline{CE}]$.

Τώρα έχουμε $qr[\overline{AB}] < qs[\overline{DE}]$ και $ps[\overline{AB}] < qs[\overline{CD}]$ από το θεώρημα 4 της προηγούμενης ενότητας. Έτσι έχουμε $(qr+ps)[\overline{AB}] < qs([\overline{CD}] + [\overline{DE}]) = qs[\overline{CE}]$, αυτό που έπρεπε να αποδείξουμε.

Θεώρημα 7

Αν το p/q δεν ανήκει στο σύνολο K_1 και το r/s δεν ανήκει στο σύνολο K_2, τότε το $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ δεν ανήκει στο σύνολο K.

Απόδειξη

Για δοσμένα $p[\overline{AB}] \geq q[\overline{CD}]$ *και* $r[\overline{AB}] \geq s[\overline{DE}]$, θα πρέπει να δείξουμε ότι $(qr+ps)[\overline{AB}] \geq qs[\overline{CE}]$

Πρώτα από όλα, $qr[\overline{AB}] \geq qs[\overline{DE}]$ *και* $ps[\overline{AB}] \geq qs[\overline{CD}]$, από το θεώρημα 4 της προηγούμενης παραγράφου. Έτσι έχουμε, $(qr+ps)[\overline{AB}] \geq qs([\overline{CE}] + [\overline{DE}]) = qs[\overline{CE}]$, το οποίο ήταν αυτό που έπρεπε να αποδείξουμε.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στο τελευταίο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος πρόσθεσης. Παρατηρήσαμε πιο πριν ότι πρέπει $k_1 + k_2 = k$. Άμα αυτό δεν ισχύει τότε ή $k_1 + k_2 > k$ (1) ή $k_1 + k_2 < k$ (2). Θα δείξουμε ότι και τα δύο είναι αδύνατα.

Αν ισχύει η (1), τότε $k_1 + k_2 - k > 0$. Έστω $\varepsilon = k_1 + k_2 - k$ έτσι ώστε

$$k = k_1 + k_2 - \varepsilon$$

Από το θεώρημα 4, υπάρχει ένα στοιχείο p/q του συνόλου K_1 τέτοιο ώστε $\frac{p}{q} > k_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ καθώς επίσης υπάρχει ένα στοιχείο του r/s του συνόλου K_2 τέτοιο ώστε $\frac{r}{s} > k_2 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Συνεπάγεται ότι $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} > k_1 + k_2 - \varepsilon$.

Επομένως το $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ δεν βρίσκεται στο σύνολο K. Όμως από το θεώρημα 6, το $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ πρέπει να βρίσκεται στο σύνολο K. Συνεπώς η (1) είναι αδύνατη.

Αν ισχύει η (2), τότε $k - k_1 - k_2 > 0$. Έστω $\varepsilon = k - k_1 - k_2$ έτσι ώστε

$$k = k_1 + k_2 + \varepsilon$$

Έστω ότι οι p/q και r/s είναι ρητοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$k_1 < \frac{p}{q} < k_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ και $k_2 < \frac{r}{s} < k_2 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε p/q δεν ανήκει στο σύνολο K_1, οπότε και το r/s δεν ανήκει στο σύνολο K_2. Από το θεώρημα 7 έχουμε ότι το $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ δεν ανήκει στο σύνολο K. Αφού

$\left\{\frac{t}{u} | 0 < \frac{t}{u} < k\right\} \subset K$, συνεπάγεται ότι $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \geq k$.

Αλλά αυτό είναι άτοπο. Προσθέτοντας τις προηγούμενες ανισότητες για τα p/q και r/s , παίρνουμε ότι $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} < k_1 + \frac{\varepsilon}{2} + k_2 + \frac{\varepsilon}{2} = k_1 + k_2 + \varepsilon = k$.

Επομένως παρατηρούμε ότι η (2) είναι αδύνατη. Άρα το θεώρημα της πρόσθεσης ισχύει.

1.5. Το θεώρημα της Μέτρησης (metrization)

Στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία υπό το πρίσμα δύο όψεων, της μετρικής (αριθμητικής) και της καθαρά γεωμετρικής. Στην μετρική προσέγγιση, τα αξιώματα μας λένε πολλά για τη σχέση μεταξύ της γεωμετρίας και του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Η δομή είναι η εξής:

$$[S, \mathcal{L}, \wp, d, m]$$

Όπου d είναι η *συνάρτηση της απόστασης (μετρική)* : $d : SXS \to \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση απόστασης υπακούει το αξίωμα της μέτρησης.

Οι έννοιες της μαθηματικής αναλογίας και του μεταξύ προσδιορίζονται με βάση τους κανόνες της απόστασης.

Στην καθαρά γεωμετρική προσέγγιση, την οποία χρησιμοποιούσε ο Ευκλείδης, το σύστημα των πραγματικών αριθμών δεν αναφέρονταν πουθενά. Η δομή είναι η ακόλουθη:

$$[S, \mathcal{L}, \wp, \cong, \mathcal{B}]$$

Εδώ τα $\cong$ και $\mathcal{B}$ είναι απροσδιόριστες σχέσεις μεταξύ της μαθηματικής αναλογίας και της έννοιας του μεταξύ (Οι μόνοι αριθμοί που χρησιμοποιούνται εδώ είναι οι θετικοί ακέραιοι, τους οποίους χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε αντικείμενα).

Ένα μεγάλο επίτευγμα, μετά τη γεωμετρία των Ελλήνων, ήταν η ανακάλυψη του συστήματος των συντεταγμένων από τον Καρτέσιο. Είναι προφανές ότι για να υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση απόστασης. Με άλλα λόγια, για να μπορέσουμε να συμβολίσουμε τα σημεία του άξονα xx' με αριθμούς, θα πρέπει να έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων για τον άξονα xx', που να ικανοποιεί τις συνθήκες του αξιώματος μέτρησης.

Στο σημείο αυτό, θα δείξουμε σε ένα «καθαρό» γεωμετρικό σύστημα μπορούμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση απόστασης που να ικανοποιεί τα αξιώματα μετρικής.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1</u>

Δίνεται η γεωμετρική δομή

$$[S, \mathcal{L}, \wp, \cong, \mathcal{B}]$$

η οποία ικανοποιεί και τα αξιώματα του **Παραρτήματος Α** και την αρχιμήδεια ιδιότητα. Έστω *A* και *B* είναι δύο οποιαδήποτε σημεία. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση

$$d : SXS \to \mathbb{R}.$$

τέτοια ώστε:

(1) η d να ικανοποιεί τα αξιώματα μέτρησης

(2) $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ αν και μόνο αν οι αποστάσεις CD και EF να είναι οι ίδιες

(3) $C - D - E$ αν και μόνο αν $CD + DE = CE$ και

(4) $AB = 1.$

Η παραπάνω συνάρτηση απόστασης ικανοποιεί τα αξιώματα ισότητας τμημάτων και τα αξιώματα της σχέσης του «μεταξύ» (**Παράρτημα Α**). Ακόμα, αξίζει να αναφέρουμε ότι μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε τη συνάρτηση απόστασης με τέτοιο τρόπο όπου οποιαδήποτε δοσμένο τμήμα AB να θεωρείται ως μονάδα μέτρησης.

Όταν λέμε ότι η d ικανοποιεί το αξίωμα μέτρησης, εννοούμε ότι για οποιαδήποτε γραμμή L υπάρχει μια συνάρτηση συντεταγμένων

$$f : L \to \mathbb{R}$$

από το L στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

1) κάποιο σημείο να έχει συντεταγμένη 0

2) αν $x = f(P) \; και \; y = f(Q)$ τότε $PQ = |x - y|$.

Η τελευταία πρόταση δε σημαίνει ότι κάθε πραγματικός αριθμός x είναι η συντεταγμένη *f(P)* κάποιου σημείου P. Στην πραγματικότητα, η παραπάνω πρόταση δεν μπορεί να αποδειχτεί με βάση τα γεωμετρικά αξιώματα για τα οποία έχουμε μιλήσει. (Ο πιο απλός τρόπος για να το διαπιστώσουμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι το ασύμμετρο επίπεδο ικανοποιεί τα συνθετικά αξιώματα. Και στο ασύμμετρο επίπεδο, μόνο οι ασύμμετροι χρησιμοποιούνται ως συντεταγμένες.) Αν οι συναρτήσεις των συντεταγμένων είναι 1 προς 1 αντιστοιχίες $f: L \leftrightarrow \mathbb{R}$ τότε η γεωμετρική δομή $[S, \mathcal{L}, \wp, \cong, \mathcal{B}]$ ονομάζεται *ολοκληρωμένη κατά Dedekind*.

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην απόδειξη. Ευτυχώς, το πιο δύσκολο βήμα της απόδειξης, το οποίο είναι να δημιουργήσουμε τη συνάρτηση απόστασης κατά τέτοιο τρόπο ώστε οποιαδήποτε δοσμένα τμήματα AB να θεωρούνται ως μονάδα μήκους, έχει ήδη δοθεί. Για οποιαδήποτε δύο σημεία P, Q έχουμε

$$PQ = d(P,Q) = \overline{PQ} : \overline{AB}$$

όπου $\overline{PQ} : \overline{AB}$ είναι ο λόγος για τον οποίο μιλήσαμε πιο πριν. Αφού προσδιορίσαμε το λόγο, για κλάσεις ισοδυναμίας $[\overline{PQ}]$, παρατηρούμε άμεσα ότι η (2) συνθήκη ικανοποιείται.

Για να αποδείξουμε την (3) θα εργαστούμε ως εξής:

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν ισχύει

$$C - D - E$$

τότε προκύπτει από το θεώρημα πρόσθεσης ότι

$\overline{CE} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{AB} + \overline{DE} : \overline{AB}$.

Έτσι

$$CE = CD + DE,$$

από τον ορισμό της απόστασης. (*Αυτό είναι ένα από τα δύο πράγματα για τα οποία το θεώρημα της πρόσθεσης είναι καλό*).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$CE = CD + DE \quad (1)$$

όπου τα C, D και E είναι όλα διαφορετικά.

Αν ίσχυε ότι

$$D - E - C,$$

τότε θα προέκυπτε ότι

$$DC = DE + EC,$$

τέτοια ώστε

$$CE = CD - DE \quad (2)$$

Από την (1) και (2) έχουμε:

$$CD + DE = CD - DE,$$

οπότε

$$2DE = 0 \iff DE = 0.$$

Έτσι $D = E$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι τα C, D και E είναι όλα διαφορετικά .

Αν υποθέσουμε ότι $D - C - E$, θα οδηγηθούμε σε όμοιο με το προηγούμενο συμπέρασμα, επομένως το συμπέρασμα θα έρθει πάλι σε αντίθεση με την υπόθεση.

Όμως ένα από τα τρία σημεία πρέπει να είναι ανάμεσα στα άλλα δύο. Αφού η $D - E - C$ και η $D - C - E$ είναι λάθος, τότε θα ισχύει ότι $C - D - E$.

Ύστερα θα ελέγξουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη (4).

Προφανώς·

$$p[\overline{AB}] < q[\overline{AB}] \text{ αν } p < q,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\frac{p}{q} < 1$$

Επομένως,

$$\overline{AB}:\overline{AB} = sup\left\{\frac{p}{q} | 0 < \frac{p}{q} < 1\right\} = 1,$$

και

$$d(A, B) = 1.$$

Το μόνο που μένει τώρα είναι να ελέγξουμε το αξίωμα μέτρησης.

Δίνεται γραμμή L, και τρία σημεία C, D, E της L τέτοια ώστε $C - D - E$. Θα δημιουργήσουμε μια συνάρτηση $f: L \to \mathbb{R}$ και θα δείξουμε ότι η f είναι ένα σύστημα συντεταγμένων που ικανοποιούν τα αξιώματα μέτρησης.

Αν το P ανήκει στο διάνυσμα $\overrightarrow{DE}$, θεωρούμε ότι $f(P) = DP$.

Θα ελέγξουμε ότι αν τα P και Q είναι σημεία του $\overrightarrow{DE}$, με συντεταγμένες x, y, τότε $PQ = |x - y|$.

Αν είτε το P είτε το Q είναι ίσο με το D, αυτό είναι εύκολο να δειχτεί.

Έστω $Q = D$ τότε

$$PQ = DP = f(P) = x = |x| = |x - 0|$$

Αν $P = Q$ τότε $PQ = 0 = |x - x|$.

Ας υποθέσουμε τελικά ότι τα P, Q και D είναι διαφορετικά. Τότε είτε $D - P - Q$ είτε $D - Q - P$.

Αν $D - P - Q$,

τότε

$$\overline{DQ} : \overline{AB} = \overline{DP} : \overline{AB} + \overline{PQ} : \overline{AB}$$

από το θεώρημα της πρόσθεσης (*αυτό είναι το δεύτερο πράγμα που είναι χρήσιμο το θεώρημα της πρόσθεσης*). Όσον αφορά την απόσταση, αυτό μας λέει ότι

$$DQ = DP + PQ,$$

ή

$$PQ = DQ - DP = y - x.$$

Εδώ ισχύει $y - x > 0$, επειδή $y - x = PQ$.

Έτσι $PQ = |x - y|$. Οπότε αποδείχτηκε αυτό που θέλαμε.

Τώρα προσδιορίζουμε τη συνάρτηση συντεταγμένων f, για σημεία P τα οποία βρίσκονται στο αντίθετο διάνυσμα $\overrightarrow{DC}$, μέσω της συνθήκης $f(P) = -DP$.

Τώρα έχουμε $PQ = |x - y|$, αν και το P και το Q ανήκουν στο $\overrightarrow{DC}$. (Αυτή η απόδειξη είναι σχεδόν ίδια την προηγούμενη, δηλαδή με αυτή του διανύσματος $\overrightarrow{DE}$. Το νόημα είναι ότι το $|x - y|$ δεν αλλάζει όταν τα πρόσημα των x και y αντιστρέφονται). Αν το P ανήκει στο $\overrightarrow{DC}$ και το Q ανήκει στο $\overrightarrow{DE}$, τότε

$$PQ = PD + DQ \quad , \qquad x = -PD, \qquad y = DQ$$

Επομένως $PQ = y - x = |x - y|$, οπότε αποδείχτηκε αυτό που θέλαμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Στο θεώρημα 1, τα σύνολα F_L είναι τα ίδια για όλες τις γραμμές. Αν η γεωμετρική δομή ικανοποιεί *το θεώρημα των δύο κύκλων* του **Παραρτήματος Β**, και ικανοποιεί τις συνθήκες του *θεωρήματος Γραμμή-κύκλος* του **Παραρτήματος Β**, τότε η F σχηματίζει έναν κανονικό ευκλείδειο χώρο.

Απόδειξη

(1) Έστω L και L' είναι δύο γραμμές, και έστω f και f' είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων για αυτές, έτσι ώστε $f(P) = 0$ για κάποιο P και $f'(P) = 0$ για κάποιο P'. Αν $f(Q) = x$ για κάποιο Q στην L, τότε προκύπτει από το αξίωμα κατασκευής τμημάτων ότι $f'(Q') = x$ για κάποιο Q' στην L' (Υπάρχουν δύο υποθέσεις: $x > 0$ ή $x < 0$).

(2) Αν ισχύουν τα θεωρήματα των *δύο κύκλων* και της *γραμμής-κύκλου*, τότε μπορούμε να εκτελέσουμε όλες τις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Είναι εύκολο να μελετηθεί, χωρίς να είναι στόχος της παρούσας εργασίας, ότι οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της τετραγωνικής ρίζας για θετικούς αριθμούς μπορούν να εκτελεστούν με κανόνα και διαβήτη. Το αξίωμα κατασκευής τμημάτων υπονοεί ότι η F περιέχει το αρνητικό του καθενός από τα στοιχεία του. Προκύπτει ότι η F σχηματίζει έναν κανονικό ευκλείδειο χώρο.

Αν το επίπεδό μας είναι ασύμμετρο, τότε η F είναι το ακριβές ασύμμετρο πεδίο.

1.6. Η Τομή Dedekind

Αν δίνεται ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, δεν είναι δύσκολο να δημιουργήσουμε (με βάση αυτόν) το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Όμως δεν είναι τόσο απλό να περάσουμε από το σύνολο των ρητών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών.

Μια από τις πιο αξιοπρεπείς προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα δόθηκε από τον Dedekind, βασιζόμενος πολύ στις αρχές του Ευδόξου. Για χάρη ευκολίας, θα περιορίσουμε τα τη μελέτη μας στους θετικούς αριθμούς (όταν τους προσδιορίσουμε δεν είναι δύσκολο να δημιουργήσουμε και τους αρνητικούς).

Προηγουμένως, προσδιορίσαμε ότι

$$\overline{AB}:\overline{CD} = supK \text{ όπου } K = \left\{\frac{p}{q} | p[\overline{CD}] < q[\overline{AB}]\right\}$$

Φαίνεται από ότι το K ήταν πάντα τομή ρητών αριθμών.

Αυτό σημαίνει ότι:

(1) το K είναι ένα σύνολο από θετικούς ρητούς αριθμούς.

(2) το K δεν είναι κενό

(3) το K έχει ένα άνω φράγμα

(4) Αν $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ και $r/s \in K$, τότε $p/q \in K$

(5) το K δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Αν το σύστημα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι όπως το δώσαμε, τότε σε κάθε τομή K ανταποκρίνεται ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $supK$. Από την άλλη μεριά, οι τομές προσδιορίζονται θεωρητικά από όρους του συστήματος των ρητών αριθμών. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να προσδιορίσουμε ένα σύνολο από αντικείμενα τα οποία να αναγνωρίζονται ως θετικοί πραγματικοί.

Έστω $\mathbb{R}^+$ είναι το σύνολο όλων των τομών. Στο$\mathbb{R}^+$ θα πρέπει να προσδιορίσουμε την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διάταξη.

(1) Αν K και L είναι τομές, τότε $K + L = \{x + y | x \in K, y \in L\}$

(2) $K \cdot L = \{xy | x\epsilon K, y\epsilon L\}$

(3) Ορίζουμε $K < L$ για να δηλώσουμε ότι το K είναι ένα κατάλληλο υποσύνολο του L, τέτοιο ώστε $K \subset L \quad και \quad K \neq L$

Κάτω από αυτόν τον ορισμό, όταν θα λέμε ότι το K είναι ένα άνω φράγμα του Z, θα σημαίνει ότι κάθε τομή που θα ανήκει στο Z θα είναι ένα υποσύνολο του K. Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι κάθε φραγμένο σύνολο τομών έχει ένα supremum: το $supZ$ είναι απλά η ένωση όλων των συνόλων που ανήκουν στο Z. Αυτό σχηματίζει μια τομή. Είναι ένα άνω φράγμα του Z, και δεν υπάρχει καμία μικρότερη τομή που να είναι άνω φράγμα του Z.

Το αξιόλογο στη μέθοδο του Dedekind ήταν ότι χρησιμοποίησε τις τομές για να ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς. Αυτό έκανε και ο Εύδοξος πάνω από 2000 πριν. Για αυτό και θα μπορούσαμε ίσως να μιλάμε για τις τομές του Ευδόξου και όχι του Dedekind.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Ποιοτική Έρευνα σχετικά με τις αναπαραστάσεις και τον άξονα των πραγματικών αριθμών

Κεφάλαιο 1
Θεωρητικό Πλαίσιο

Στην καθημερινή ζωή μας χρησιμοποιούμε πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας ιδέας. Αυτό είναι χαρακτηριστικό της ανθρώπινης νοημοσύνης (***Duval***, 1993). Με τον ίδιο τρόπο, ο ανθρώπινος νους έχει την ικανότητα να μπορεί να δημιουργεί διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου. Σύμφωνα με τη ***Sieprinska*** (1992), οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αφομοιώνουν το νόημα μιας μαθηματικής ιδέας με το να έρχονται σε επαφή με πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας ιδέας. Για αυτό το λόγο, οι δάσκαλοι μπορούν να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις ως χρήσιμο εργαλείο όχι μόνο για την κατανόηση του νοήματος αλλά και για την σύνδεση μεταξύ της πληροφορίας που τους παρέχεται και του ίδιου του νοήματος (***Greeno & Hall***, 1997). Επίσης, αναφέρουν το πόσο σημαντικό είναι να μπορούν οι μαθητές να επιλέγουν αναπαραστάσεις αλλά και να κατασκευάζουν διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων γιατί αυτό τους βοηθάει να ανακαλύπτουν διαφορετικά πρότυπα (patterns) αλλά και να εκτελούν πράξεις επάνω στην ίδια μαθηματική ιδέα. Με αυτό τον τρόπο εκμεταλλεύονται το γεγονός ότι διαφορετικές μορφές της ίδιας μαθηματικής ιδέας δημιουργούν διαφορετικά εφόδια για υπολογισμούς και συμπεράσματα..

Στην παρούσα έρευνα θα ασχοληθούμε με τους πραγματικούς αριθμούς. Ειδικότερα θα δώσουμε έμφαση στην αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών καθώς και στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Πιο αναλυτικά, οι πραγματικοί αριθμοί εμφανίζονται στα σχολικά μαθηματικά μέσα από μια διαδικασία εμπλουτισμού των φυσικών αριθμών η οποία προέκυψε από την ανάγκη επίλυσης προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές πρώτα εισάγονται στους φυσικούς αριθμούς, στη συνέχεια στο σύνολο των ακεραίων που είναι ο εμπλουτισμός των φυσικών αριθμών με το σύνολο των αρνητικών, ύστερα στο σύνολο των ρητών αριθμών – ως το λόγο δύο ακεραίων – και τέλος στο σύνολο των αρρήτων. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αυτό που περιλαμβάνει όλα τα παραπάνω σύνολα. (***Giannakoulias, Souyoul & Zachariadis, 2007***). Το πρόβλημα είναι ότι πολύ συχνά αυτή η πορεία διδασκαλίας δημιουργεί διάφορα προβλήματα στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών από τους μαθητές. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι η πορεία αυτή έχει οδηγήσει σε προβληματισμό εκτός από τους μαθητές ακόμα και τους ίδιους τους μαθηματικούς. Σύμφωνα με μια έρευνα που έκαναν οι ***Arcavi et al. (1987)*** σχετικά με το ιστορική πορεία ανακάλυψης των αριθμών, στην ερώτηση «Να τοποθετήσουν χρονολογικά την εμφάνιση των εξής αριθμών: αρνητικών, δεκαδικά κλάσματα και αρρήτων», το 55% των καθηγητών απάντησε ότι τα δεκαδικά κλάσματα προηγούνται των αρρήτων. Παρόλα αυτά, σε προηγούμενη ερώτηση το 70% των καθηγητών υπέδειξε ότι η πρώτη φορά που προέκυψε το ζήτημα των αρρήτων χρονολογείται την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Αυτή η παραπάνω σύγχυση προκύπτει από το γεγονός ότι θεωρούν ότι η προέλευση της έννοιας της αρρητότητας, παρότι συνδέεται με τους αρχαίους Έλληνες, βασίζεται πάνω στους δεκαδικούς αριθμούς, και δε συνδέεται με τη γεωμετρία παρόλο που έτσι προκύπτει ιστορικά (σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη).

Κατά τον ***Moseley (2005)*** το πρόβλημα στην ανάπτυξη της έννοιας των πραγματικών αριθμών δημιουργείται επειδή η γνώση των πραγματικών αριθμών στους μαθητές είναι στην ουσία διαχωρισμένη και δε συνδέεται με τη προηγούμενη μαθηματική γνώση τους.

Ένα άλλο πρόβλημα που δυσκολεύει τους μαθητές είναι η ίδια η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών με τη χρήση ή μη του ορισμού. Πιο συγκεκριμένα, στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε τους ορισμούς για δύο κυρίως λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι δίνοντας έναν ορισμό σε μια έννοια που είναι ήδη γνωστή στους μαθητές (concept image) τους βοηθάμε στο να αναγνωρίσουν την έννοια αυτή. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι ο ορισμός χρησιμοποιείται για την κατασκευή των ιδιοτήτων της μαθηματικής έννοιας που προσδιορίζει. Σε αυτή την περίπτωση ο ορισμός καθορίζει την έννοια. Αυτή η αντιστροφή από το $concept\ image \rightarrow ορισμό$ και από τον $ορισμό \rightarrow concept\ image$ είναι ένα επιστημολογικό εμπόδιο που μπορεί να παρουσιάσει μεγάλη δυσκολία (***Pinto &Tall, 1996***).

Σύμφωνα με τον ***Vinner (1991)***, ο ορισμός της έννοιας και η εικόνα της έννοιας (concept image) είναι δύο διαφορετικά «κύτταρα» στη δημιουργία της γνωστικής δομής. Επιπλέον, ανάλυσε τις τρεις πιθανές νοητικές καταστάσεις κατά την εισαγωγή ενός ορισμού:

I) Το concept image αλλάζει προκειμένου να ταιριάζει με τον ορισμό

Iι) Το concept image παραμένει όπως ήταν και ο ορισμός ξεχνιέται ή διαστρεβλώνεται

Iιι) Υπάρχει και ο ορισμός και το concept image αλλά δεν συνδέονται μεταξύ τους.

Οι ***Pinto και Tall (1996)*** ισχυρίζονται ότι στην πραγματικότητα η ανάπτυξη της νοητικής κατάστασης είναι πιο πολύπλοκη, αφού σε κάθε άτομο δημιουργούνται διαφορετικοί τύποι σύνδεσης μεταξύ του ορισμού της έννοιας και της concept image.

Ο ***Vinner (1991)*** ισχυρίζεται ακόμα, ότι το concept image μπορεί να αλλάξει ως αποτέλεσμα του pseudo-conceptual thought. Πιο συγκεκριμένα, είναι πολύ πιθανό κάθε άτομο να έχει διαφορετικούς τύπους concept imaginary τα οποία να προέρχονται από διαφορετικές συνδέσεις που κάνουν με τον ορισμό της έννοιας.

Ειδικότερα:

Α) Informal imagery, η οποία δεν συνάγεται από έναν ορισμό, η οποία μπορεί να υποδιαιρεθεί σε imagery η οποία μπορεί να είναι συνεπής ή όχι ως προς την επίσημη θεωρία.

Β) Distorted imagery, η οποία παράγεται από έναν λανθασμένο προσωπικό ορισμό ή από λανθασμένη αντίληψη ενός σωστού ορισμού.

Γ) Pseudo-formal imagery, η οποία ενώ δείχνει ότι αποτελείται από επίσημη θεωρία αλλά δεν συνάγει απόλυτα με τον ορισμό της επίσημης έννοιας

Δ) Formal imagery, η οποία συνάγει απόλυτα με τον επίσημο ορισμό

Στην πράξη είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε ποιες από τις παραπάνω καταστάσεις πραγματοποιούνται. Αν δεν μας έχει δοθεί ορισμός τότε δημιουργείται μόνο informal imagery της έννοιας.

Το γεγονός ότι οι μαθητές διδάσκονται πρώτα μέσω concept image την έννοια των πραγματικών αριθμών χωρίς να τους δίνεται ένας κατάλληλος ορισμός (αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το γνωστικό τους επίπεδο είναι σε πρώιμο στάδιο όπου δεν μπορεί να εισαχθεί σε αυτούς ο ορισμός των πραγματικών αριθμών μέσω των τομών του Dedekind) οδηγεί στη δημιουργία του παραπάνω επιστημολογικού εμποδίου.

Παρεμφερής με την παραπάνω είναι και η άποψη των ***Tall και Schwarzenberger (1978)*** σύμφωνα με τους οποίους, η δυσκολία κατανόησης των μαθηματικών από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι διδάσκονται ανώτερες έννοιες των μαθηματικών μεταγλωττισμένες από τους δασκάλους με κατάλληλο τρόπο ούτως ώστε να μπορούν να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές. Αυτό όμως περιέχει τους εξής δύο κινδύνους:

1) Με το να παίρνουμε μια αρκετά υψηλού επιπέδου κατανόησης αφαιρετική μαθηματική έννοια και να της «κατεβάζουμε» το επίπεδο μπορεί να δημιουργήσει έλλειψη ακρίβειας της μαθηματικής έννοιας.

2) Η ανεπίσημη μαθηματική γλώσσα αυτής της μεταγλώττισης είναι πιθανό να περιέχει έννοιες από την καθημερινότητα με αποτέλεσμα να δυσκολεύει η κατανόηση τους.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω αξίζει να αναφέρουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Ορίζουμε:
$H\ ακολουθία\ των\ πραγματικών\ αριθμών\ s_n\ θα\ συγκλίνει\ στον\ πραγματικό\ αριθμό\ s, αν\ για\ κάθε\ \varepsilon\ θετικό\ πραγματικό\ αριθμό\ \varepsilon > 0, υπάρχει\ φυσικός\ αριθμός\ N\ (που\ να\ εξαρτάται\ από\ το\ \varepsilon)\ τέτοιος\ ώστε\ |s_n - s| < \varepsilon\ \ για\ κάθε\ n > N.$

Μια ανεπίσημη μεταγλώττιση του παραπάνω ορισμού είναι: «Μπορούμε να φέρουμε το s_n τόσο κοντά στο s με το να κάνουμε το n ικανοποιητικά μεγάλο». Με αυτήν την έκφραση δεν προσδιορίζουμε ούτε τη φράση «τόσο κοντά», ούτε τη φράση «μεγάλο» καθώς και δεν αναφέρουμε τη σχέση μεταξύ των ε και Ν. Σε έναν μαθηματικό οι έννοιες αυτές είναι οικίες αλλά σε ένα ανεκπαίδευτο αναγνώστη μπορούν αυτά να του δημιουργήσουν σύγχυση. Πόσο κοντά είναι; Ένα δέκατο; Ένα εκατοστό; Μήπως «απειροστά» κοντά;

Ακόμα με βάση την ανεπίσημη μεταγλώττιση του απείρου, οι μαθητές μπορεί να θεωρήσουν ότι το s_n μπορεί να είναι κοντά αλλά ποτέ ίσο με το s. Αυτό μπορεί να το θεωρήσουν αν σε όλα τα παραδείγματα που θα τους πούμε (όπως π.χ. η $s_n = \frac{1}{n}$ και η $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n+1}$) η s_n δεν είναι ίση με το όριό της.

Ένα άλλο πρόβλημα στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών οφείλεται στην προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών. Πιο αναλυτικά, μέσα στους μαθητές ενυπάρχει η έννοια της διάταξης των φυσικών αριθμών, η οποία αναφέρει ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτές μονάδες όπου ανάμεσα τους υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί. Για παράδειγμα, ανάμεσα στο 2 και στο 5 υπάρχουν δύο φυσικοί αριθμοί μόνο ο 3 και ο 4. Αντίθετα στους ρητούς αριθμούς, και κατ' επέκταση στους πραγματικούς αριθμούς, δεν υπάρχει αυτή η έννοια της διάταξης (discreteness) των φυσικών αριθμών αλλά η έννοια της πυκνότητας. Δηλαδή, ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχει πάντα ένας ρητός αριθμός. Αυτό υπονοεί ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί ανάμεσα σε δύο ρητούς. Το πρόβλημα δημιουργείται όταν «μεταφέρουν» οι μαθητές την ιδιότητα της διάταξης των φυσικών αριθμών στους ρητούς αριθμούς. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό χρειάζεται εννοιολογική αλλαγή στο τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις έννοιες των φυσικών αριθμών και τις έννοιες των ρητών αριθμών (***Vamvakoussi & Vosniadou, 2010***).

Ένα άλλο ζήτημα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα έρευνα, εκτός από αυτό της αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών και της πυκνότητάς τους, είναι η κατανόηση της έννοιας του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Σύμφωνα με τον ***Ernest (1985)***, ο άξονας των αριθμών «παίζει» σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία των ακέραιων αριθμών. Ο άξονας αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τρεις τρόπους:

1) Ως μοντέλο διάταξης διαφόρων συνόλων αριθμών όπως είναι οι φυσικοί, οι ακέραιοι, οι ρητοί, οι πραγματικοί.

2) Για να παρέχει μοντέλα (πρότυπα) για τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις

3) Ως αυτούσιο μέρος του μαθηματικού περιεχομένου και όχι ως διδακτικό ή βοηθητικό μοντέλο. Για την ακρίβεια, ο άξονας των αριθμών χρησιμεύει ως γραμμική μονάδα μέτρησης, ως άξονας σε γραφήματα και ως σύστημα συντεταγμένων στην αναλυτική γεωμετρία.

Παρόλο που ο άξονας των αριθμών έχει πλεονεκτήματα κατά τη διδασκαλία του μπορεί πολλές φορές σύμφωνα με έρευνες να έχει και αρνητικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, ο ***Ernest (1985)*** υποστηρίζει ότι μπορεί να υπάρξει μια αναντιστοιχία στην κατανόηση των μαθητών όσον αφορά την πρόσθεση των ακεραίων αριθμών και το αντίστοιχο μοντέλο του άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην πραγματικότητα, ο άξονας των αριθμών αποτελεί ένα γεωμετρικό μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει μια συνεχόμενη εναλλαγή μεταξύ της γεωμετρικής και της αριθμητικής αναπαράστασης. Σύμφωνα με το γεωμετρικό μοντέλο, οι αριθμοί αντιστοιχίζονται σε διανύσματα τα οποία υπάρχουν πάνω στον άξονα καθώς και αντιστοιχίζονται και σε διακεκριμένα σημεία πάνω στην ευθεία. Σύμφωνα με το αριθμητικό μοντέλο, τα σημεία πάνω στην γραμμή μπορούν να αριθμηθούν με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε αν μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ των σημείων μπορούμε να λάβουμε τη διαφορά ανάμεσα στους αριθμούς που αντιστοιχούν.

Η ύπαρξη της δυικής υπόστασης της απεικόνισης των αριθμών (ως διανύσματα και ως σημεία) μπορεί να περιορίσουν την αποτελεσματικότητα του άξονα των αριθμών και να μειώσουν τις αριθμητικές ικανότητες των μαθητών (***Gagatsis, Shiakalli & Panaoura, 2003***).

Όμως η ***Shiakalli (2004)*** υποστηρίζει ότι η αποτυχία στην ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων μέσω του μοντέλου του άξονα των αριθμών ισχύει λόγω της έλλειψης συστηματικών οδηγιών και όχι λόγω αναποτελεσματικότητας του μοντέλου του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα της έρευνας των ***Gagatsi et al. (2003)***, τα οποία έδειξαν ότι όταν οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα τα οποία σχετίζονται με πράξεις πρόσθεσης, ασχολούνται περισσότερο με την λεκτική μορφή του προβλήματος όχι με τα δεδομένα του προβλήματος που αναπαριστώνται με εικονικό τρόπο και με τον άξονα των αριθμών. Μάλιστα ο τρόπος με τον οποίο επιλύουν οι μαθητές τα προβλήματα αυτά υπονοεί ότι οι μαθητές παραβλέπουν την παρουσία του άξονα των αριθμών ή της εικόνας στα δεδομένα του προβλήματος και ασχολούνται μόνο με το κείμενο του προβλήματος. Οπότε και αυτό ενισχύει την παραπάνω άποψη της ***Shiakalli (2004)*** ότι η αποτυχία στην ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων μέσω του μοντέλου του άξονα των αριθμών ισχύει λόγω της έλλειψης συστηματικών οδηγιών και όχι λόγω αναποτελεσματικότητας του μοντέλου του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Κεφάλαιο 2

Μεθοδολογία Έρευνας

2.1. Στόχοι Έρευνας

Ένας από τους βασικούς στόχους της έρευνας μας είναι να εξετάσουμε πως οι μαθητές διαχειρίζονται τη διάταξη των πραγματικών αριθμών, πώς χρησιμοποιούν τον άξονα των πραγματικών αριθμών προκειμένου να αναπαραστήσουν συγκεκριμένους αριθμούς επάνω σε αυτόν (ρητούς και άρρητους) καθώς και πως χρησιμοποιούν τον άξονα τον πραγματικών αριθμών προκειμένου να απεικονίσουν λύσεις ανισώσεων. Ο άξονας των πραγματικών αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους. Όμως δεν είναι ξεκάθαρο ποιες είναι οι πνευματικές διεργασίες που εκτελούν οι μαθητές προκειμένου να συνδέσουν το μαθηματικό αντικείμενο των πραγματικών αριθμών με αυτό του άξονα των πραγματικών αριθμών. Αν τις αναγνωρίσουμε θα είναι πολύ ωφέλιμο από διδακτικής άποψης να γνωρίσουμε τα διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας των μαθητών καθώς συνδέουν τα μαθηματικά αντικείμενα με τον άξονα των πραγματικών αριθμών (***Pantisidis et al., 2005***)

Ένας άλλος επιμέρους στόχος μας είναι το να μπορέσουμε να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αναπαραστήσουν γεωμετρικά έναν άρρητο αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να ερευνήσουμε πως οι μαθητές κατανοούν την ερώτηση ***«Να τοποθετήσετε τον αριθμό $\sqrt{3}$ ακριβώς πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών»***. Έχουν διδαχτεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός απεικονίζεται ως ένα σημείο πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Όμως αυτό το γνωρίζουν θεωρητικά. Πρακτικά, συνήθως, τους είναι δύσκολο να το πιστέψουν ιδίως αν δεν έχουν δει έναν άρρητο να απεικονίζεται πάνω στον άξονα, και έχουν δει μόνο ρητούς να απεικονίζονται πάνω σε αυτόν. Ακόμα, χρησιμοποιήσαμε τον αριθμό $\sqrt{3}$ και όχι το $\sqrt{2}$ για να μην τους θυμίζει την κατασκευή του $\sqrt{2}$ την οποία ίσως έχουν αποστηθίσει ως αυτόματη προϋπάρχουσα γνώση. Με άλλα λόγια θέλαμε να δούμε αν είναι σε θέση να μπορέσουν να κατασκευάσουν τη θέση του $\sqrt{3}$, σκεφτόμενοι το πυθαγόρειο θεώρημα, και όχι να «παπαγαλίσουν» μια ήδη προϋπάρχουσα γνώση. Ολοκληρώνοντας, με αυτή τη δραστηριότητα θέλουμε να δούμε αν οι μαθητές είναι σε θέση να μπορούν να σκεφτούν γεωμετρικά όσον αφορά την τοποθέτηση του $\sqrt{3}$ ή θα αρκεστούν στο να προσπαθήσουν να τοποθετήσουν το $\sqrt{3}$ βασιζόμενοι σε μια προσέγγιση του δεκαδικού αναπτύγματός του (***Sirotic & Zazkis, 2007***).

Τέλος, με την παρούσα έρευνα στοχεύουμε στο να ανακαλύψουμε τυχόν δυσκολίες που έχουν οι μαθητές όσον αφορά την διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών. Ποιες δυσκολίες τους δημιουργούνται όσον αφορά τους ρητούς και τους άρρητους; Όσον αφορά το δεκαδικό ανάπτυγμα των πραγματικών αριθμών είναι σε θέση να μπορούν να συγκρίνουν πραγματικούς με πεπερασμένο και με άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα; (***Souyoul, Zachariadis & Giannakoulias, 2007***)

2.2. Συμμετέχοντες

Η παρούσα έρευνα διεξήχθη σε έξι μαθητές Γ΄ Λυκείου από διάφορα σχολεία της ευρείας περιοχής της Αττικής (Ελλάδα). Οι έξι αυτοί μαθητές ήταν όλοι τους μαθητές Θετικής ή Τεχνολογικής Κατεύθυνσης με στόχο την εισαγωγή τους σε Πανεπιστημιακά και Τεχνολογικά Ιδρύματα μέσω των Πανελληνίων εξετάσεων του 2012. Όλοι οι μαθητές είχαν ικανοποιητική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών του σχολείου (οι βαθμολογίες του κυμαίνονταν από 16 έως 20, με άριστα το 20). Συνεπώς, οι μαθητές αυτοί, θα έπρεπε να είναι αρκετά εξοικειωμένοι με την έννοια της διάταξης και της αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών καθώς και με την έννοια του άξονα των πραγματικών αριθμών, αφού αυτές είναι έννοιες τις οποίες έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου και αποτελούν το βασικό τους σύνολο αριθμών στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου.

2.3. Υλικά

Η συλλογή των δεδομένων της παρούσας έρευνας έγινε με γραπτά ερωτηματολόγια και με προσωπικές συνεντεύξεις. Με άλλα λόγια έγινε ποιοτική και όχι ποσοτική έρευνα. Ο λόγος για τον οποίο επιλέξαμε να πραγματοποιήσουμε ποιοτική έρευνα και όχι ποσοτική ήταν το γεγονός ότι θέλαμε μέσω προσωπικών συνεντεύξεων (και όχι ενός απρόσωπου συμπληρωμένου ερωτηματολογίου) να κατανοήσουμε τις δυσκολίες που οδηγούν τους μαθητές στη λανθασμένη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου. Οι δυσκολίες αυτές θα μας βοηθήσουν στο να προτείνουμε διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις ούτως ώστε να προσπαθήσουμε να μειώσουμε τις δυσκολίες αυτές. Η έρευνά μας χωρίστηκε σε δύο φάσεις:

- **Η πρώτη φάση** της έρευνας ήταν η παράδοση και η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από τους μαθητές. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι αφού τους δόθηκε το ερωτηματολόγιο αυτό δεν τους δόθηκαν περαιτέρω επεξηγήσεις των δεδομένων. Αυτό έγινε από την πλευρά μας επειδή δε θέλαμε οποιαδήποτε βοήθειά μας να επηρεάσει τις απαντήσεις των μαθητών. Όποιες δυσκολίες και αν συναντούσαν θα αποκαλύπτονταν σε εμάς μέσω της προσωπικής συνέντευξης. Ο χρόνος που τους δόθηκε προκειμένου να απαντήσουν στο ερωτηματολόγιο ήταν έως 45 λεπτά. Βέβαια όλοι οι μαθητές παρέδωσαν το ερωτηματολόγιο σε λιγότερο χρόνο.
- **Η δεύτερη φάση** της έρευνας ήταν η προσωπική συνέντευξη με τον καθένα από τους μαθητές ξεχωριστά, η οποία πραγματοποιήθηκε μετά

από λίγη ώρα αφού είχε ο κάθε μαθητής συμπληρώσει το ερωτηματολόγιο. Θέλαμε να προχωρήσουμε στη συνέντευξη σε σύντομο χρονικό διάστημα από τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου για δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι δε θέλαμε να έχει περάσει ένα εύλογο χρονικό διάστημα (όπως μια εβδομάδα) έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να θυμούνται ακριβώς ποια ήταν η πεποίθησή τους που τους οδήγησε στο να συμπληρώσουν με αυτόν τον τρόπο το ερωτηματολόγιο. Ο δεύτερος λόγος ήταν ότι λόγο του πιεσμένου χρόνου των μαθητών (προετοιμασία πανελλήνιων εξετάσεων) δε θέλαμε να τους απασχολήσουμε και με μια δεύτερη συνάντηση σχετικά με την έρευνά μας. Τέλος, όσον αφορά το χρόνο διάρκειας της κάθε συνέντευξης, αυτός κυμάνθηκε από 19 έως 26 λεπτά ανάλογα τον μαθητή. Η κάθε συνέντευξη απομαγνητοφωνήθηκε.

<u>2.4. Δομή Ερωτηματολογίου</u>

Το ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε αποτελείται συνολικά από επτά (7) ερωτήσεις και χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος σχετίζεται με τις αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών καθώς και στη βασική ιδιότητά τους, αυτή της πυκνότητας. Ενώ το δεύτερο μέρος σχετίζεται με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Το **Α΄ Μέρος** αποτελείται από τις εξής ερωτήσεις:

Ερώτηση 1η - Σύγκρινε τους αριθμούς:

- 0,333...   0,333
- 1,888…   1,9
- 4,999…   5

Ερώτηση 2η - Σε κάθε ζευγάρι από τα παρακάτω γράψε έναν αριθμό που υπάρχει ανάμεσά τους. Αν δεν υπάρχει γράψε «Δεν υπάρχει».

- 0,2   0,22
- 1,888…   1,9
- 4,999…   5
- 1/3   2/3

Ερώτηση 3η - Μπορείς να βρεις δύο πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε να μην υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσά τους; Αν ναι γράψε τους. Αν όχι γράψε «δεν υπάρχουν»

Ερώτηση 4η - Χαρακτήρισε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

- Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός
- Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός
- Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός
- Ο $\sqrt{4}$ είναι πραγματικός αριθμός
- Ο $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός
- Ο $\sqrt{4}$ είναι άρρητος αριθμός
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία

- Ο 0,786343434… είναι ρητός αριθμός
- Ο 0,786343434… είναι άρρητος αριθμός
- Ο 0,777 είναι ρητός αριθμός
- Ο 0,777 είναι άρρητος αριθμός
- Ο 0,777… είναι άρρητος αριθμός
- Ο 0,777… είναι ρητός αριθμός

Ερώτηση 5η - Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στη σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < :

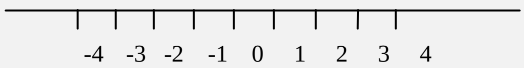
$$-\frac{1}{3}\ ,\quad +\frac{1}{3}\ ,\quad \frac{4}{3}\ ,\ -\frac{4}{3}$$

Ειδικότερα, η πρώτη ερώτηση σχετίζεται με τη σύγκριση δύο πραγματικών αριθμών σε δεκαδική αναπαράσταση είτε πεπερασμένων είτε άπειρων δεκαδικών ψηφίων. Η δεύτερη και η τρίτη ερώτηση σχετίζονται με την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Η τέταρτη ερώτηση αφορά την ικανότητα να μπορούν οι μαθητές να ξεχωρίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ρητών και αρρήτων αριθμών. Για το σχεδιασμό των τεσσάρων πρώτων ερωτήσεων βασιστήκαμε στην έρευνα των ***Souyoul, Zachariades & Giannakoulias (“Students Thinking about fundamental real numbers properties”, 2007***) Η πέμπτη ερώτηση αφορά την ικανότητα διάταξης των ρητών αριθμών όταν αναπαριστώνται με κλασματική μορφή. Για το σχεδιασμό της ερώτησης αυτής βασιστήκαμε στην έρευνα των ***Pantsidis et al.*** (***“Understanding of the ordering of numbers and the use of absolute value on the axis of real numbers”, 2005***).

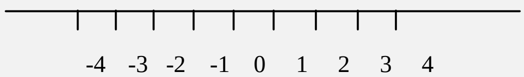
Το **Β΄ Μέρος** αποτελείται από τις παρακάτω ερωτήσεις:

Ερώτηση 6η - Να τοποθετήσετε τις τιμές των x πάνω στον άξονα:

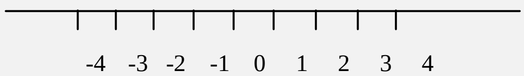
- $|x| - 1 < 3$



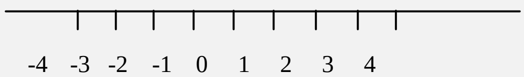
- $|x| - 1 > 1$



- $x^2 - 1 < 3$



- $x^2 - 1 > 3$



Ερώτηση 7η - Να τοποθετήσετε τον αριθμό $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

Α) στο περίπου

Β) ακριβώς

Πιο συγκεκριμένα, η έκτη ερώτηση αναφέρεται στη χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών σε σχέση με την επίλυση ανισώσεων. Για το σχεδιασμό της βασιστήκαμε και πάλι στην έρευνα των ***Pantsidis et al.*** (***"Understanding of the ordering of numbers and the use of absolute value on the axis of real numbers", 2005***). Ενώ η ερώτηση 7 αναφέρεται στην τοποθέτηση ενός άρρητου αριθμού πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών με δύο τρόπους και στο περίπου και ακριβώς. Για να σχεδιάσουμε την έβδομη ερώτηση βασιστήκαμε στην έρευνα των ***Sirotic & Zazkis*** (***"Irrational numbers on the number line – where are they?", 2007***)

Κεφάλαιο 3

Ποιοτική Ανάλυση Ερωτηματολογίων Μαθητών Μέσω Συνεντεύξεων

3.1. Ερωτηματολόγιο Βαγγέλη

Α΄ Φάση – Συμπλήρωση Ερωτηματολογίου

Ο πρώτος μαθητής στον οποίο δώσαμε το ερωτηματολόγιο και του οποίου πήραμε συνέντευξη είναι ένας μαθητής Γ΄ Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης με το όνομα Βαγγέλης. Όταν μας ρώτησε στην αρχή του ερωτηματολογίου πόσην ώρα έχει στη διάθεσή του του απαντήσαμε ότι έχει αρκετή ώρα στη αλλά δε θα πρέπει να ξεπεράσει τα 45 λεπτά. Για να συμπληρώσει το ερωτηματολόγιο χρειάστηκε 32 λεπτά κατά τη διάρκεια των οποίων, και ενώ του είχε αναφερθεί ότι δεν θα του παρέχουμε καθόλου βοήθεια κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου, ζήτησε ορισμένες διευκρινίσεις σχετικά με τις ερωτήσεις. Στην αρχή, ζήτησε διευκρινίσεις αν οι «…» σημαίνουν περιοδικότητα. Στη συνέχεια, δε θυμόταν αν οι αριθμοί με ρίζες είναι ρητοί ή άρρητοι. Μάλιστα, όπως προκύπτει και αργότερα από την συνέντευξη, είχε δημιουργηθεί στο μυαλό του η παρερμηνεία ότι όλες οι ρίζες είναι άρρητοι αριθμοί. Ύστερα ζήτησε διευκρίνιση για την ερώτηση 5 αν στο κλάσμα $\frac{4}{3}$ έχουμε ξεχάσει το πρόσημο. Τέλος, στην ερώτηση 7β) η δυσαρέστηση του ήταν έντονη αφού ξεφυσούσε σε τακτά χρονικά διαστήματα. Μάλιστα σε κάποια στιγμή ρώτησε ***«Θέλετε να το βρούμε ακριβώς ακριβώς; γιατί θα πάρει ώρα…»***. Αφού είχε ξεκινήσει αλγεβρικά να βρίσκει προσεγγίσεις του $\sqrt{3}$ σχολίασε ότι ***«μπορώ να συνεχίσω μέχρι αύριο να βρίσκω ψηφία»***, και μετά από λίγο ολοκλήρωσε το ερωτηματολόγιο λέγοντας ότι ***«δεν υπάρχει ακριβώς αυτός ο αριθμός, λογικά θα είναι περιοδικός»***.

Σύμφωνα με τα σχόλια του συγκεκριμένου μαθητή κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου κάναμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Ο μαθητής αυτός συγχέει την περιοδικότητα με τους άρρητους αριθμούς
- Ο μαθητής αυτός έχει την πεποίθηση ότι το σύμβολο των ριζών αντιστοιχεί στους άρρητους αριθμούς. Δηλαδή όταν βλέπει ρίζα θεωρεί ότι ο αριθμός είναι άρρητος.
- Ο μαθητής αυτός εστιάζει μόνο στην αλγεβρική προσέγγιση του $\sqrt{3}$ αγνοώντας εντελώς τη γεωμετρική του κατασκευή.

Β΄ Φάση – Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Στην πρώτη ερώτηση (σύγκριση των αριθμών), ο μαθητής απαντάει σωστά στη σύγκριση στα δύο πρώτα ζευγάρια αριθμών ισχυριζόμενος ότι ***«ο περιοδικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από ότι ο αριθμός με τα προκαθορισμένα ψηφία»*** καθώς και ***«το 1,888… είναι λίγο μικρότερο από το 1,9 σχεδόν είναι περίπου ίσο με αυτό»***. Το ίδιο ισχυρίζεται ότι ισχύει και για το τρίτο ζευγάρι λέγοντας ότι ***«είναι περίπου ίσα αλλά εξακολουθεί να είναι μικρότερο»***. Στην ερώτηση μας «***Τι εννοείς με τον όρο περίπου ίσα;***», μας απαντάει ότι ***«το 4,999… τείνει προς το πέντε είναι πάρα πολύ κοντά, είναι απειροελάχιστη η διαφορά τους»***. Μάλιστα επιμένει ότι ***«δεν είναι ίσα, σίγουρα το ένα είναι μικρότερο από το άλλο, απλά είναι πολύ κοντά»*** Αυτό έρχεται σε αντίθεση με αυτό που έχει συμπληρώσει στη δεύτερη ερώτηση, ότι δηλαδή ανάμεσα στο 4,999… και το 5 ***«Δεν υπάρχει»*** κανένας αριθμός. Στην παρατήρηση μας ότι: αφού πιστεύει ότι το 4,999… είναι μικρότερο από το 5 - και συνεπώς ανάμεσά τους υπάρχει ένας αριθμός - γιατί συμπλήρωσε ***«Δεν υπάρχει ανάμεσα τους κανένας αριθμός»***, ο μαθητής αυτός μας απαντά ότι ***«υπάρχει τελικά απλά δεν ξέρω ποιος είναι;»***. Ξανασκεπτόμενος την απάντησή του μας αναφέρει ότι ***«ανάμεσα τους είναι ο 4,999…»*** και μπερδεμένος μας λέει ***«δεν ξέρω»***. Οπότε και ο ακολουθεί ο εξής διάλογος:

Καθηγητής: «Πόσα ψηφία έχει ο 4,999…»

Βαγγέλης: «Άπειρα»

Κ: «Τι κάνει το 4,999… το πλησιάζει το 5; Είναι μικρότερο το 5; είναι ίσο με το 5;»

Β: «Δεν είναι ίσο με το 5. Το πλησιάζει»

Κ: «Ε τότε γιατί δεν μπορείς να βρεις κάποιο που να υπάρχει ανάμεσα τους;»

Β: «Άρα είναι ίσος θέλεις να μου πεις;»

Με βάση τον παραπάνω διάλογο αντιλαμβανόμαστε ότι ο μαθητής δυσκολεύεται να αντιληφθεί ότι ο αριθμός 4,999… είναι ίσος με το 5 λόγω του γεγονότος ότι δεν έχει ξεκάθαρη εικόνα για την έννοια του απείρου καθώς και την έννοια της πυκνότητας μεταξύ δύο ρητών. Αυτό θα φανεί πιο έντονα και στις επόμενες απαντήσεις του.

Στη συνέχεια, στη δεύτερη ερώτηση, η οποία σχετίζεται με την έννοια του απείρου και την έννοια της πυκνότητας, αξίζει να σημειώσουμε την απάντηση που έχει δώσει στο τελευταίο ζευγάρι αριθμών 1/3 και 2/3. Πιο συγκεκριμένα έχει δώσει την απάντηση ότι ανάμεσα τους βρίσκεται ο αριθμός 0,4. Για να το βρει αυτό, μετέτρεψε το 1/3 από την κλασματική του αναπαράσταση στη δεκαδική του και βρήκε ότι αυτή είναι ο αριθμός 0,333… Το ίδιο έκανε και για τον αριθμό 2/3, βρίσκοντας ότι αυτό ισούται με 0,666… Οπότε θεώρησε ότι ανάμεσα τους μπορεί να μπει ο 0,4. Με βάση την ερώτηση αυτή παρατηρούμε ότι ο μαθητής αυτός μπορεί να διαχειριστεί πιο εύκολα την έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών μετατρέποντας τον αριθμό από την κλασματική του αναπαράσταση στη δεκαδική.

Στην τρίτη ερώτηση ο μαθητής αυτός απάντησε ***«Δεν υπάρχουν».***

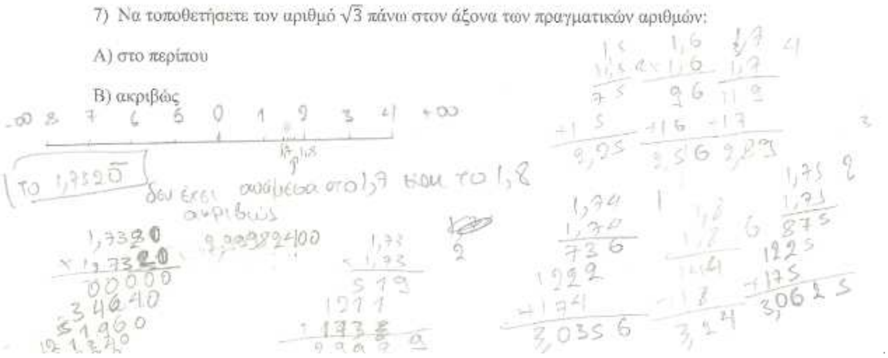
Ύστερα, καθώς προχωρήσαμε στην ανάλυση της τέταρτης ερώτηση, το πρώτο σχόλιο του μαθητή είναι ότι ***«Αυτά τώρα δεν τα θυμάμαι καν αν είναι σωστά έτσι;»*** Από το σχόλιο του αυτό αντιλαμβανόμαστε τη δυσκολία του μαθητή να διακρίνει τις βασικές αναπαραστάσεις των πραγματικών, των ρητών και των αρρήτων αριθμών παρότι είναι σε τόσο προχωρημένη σχολική τάξη. Αυτό το επιβεβαιώνει και η απάντηση του ότι ***«ο $\sqrt{4}$ είναι και ρητός και άρρητος»***. Και μάλιστα μας τονίζει ότι ***«άρρητοι είναι όσοι έχουν ρίζες»*** για να μπερδευτεί μετά από λίγο και να μας ρωτήσει αν ***«οι ρητοί είναι αυτοί που έχουν ρίζες»***. Οι απαντήσεις του αυτές έρχονται να αποδείξουν την υπόθεσή μας ότι ο μαθητής αυτός έχει δημιουργήσει τη λάθος πεποίθηση στο μυαλό του ότι άρρητοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν ρίζες. Για αυτό το λόγο και όταν βρίσκει ότι ο αριθμός $\sqrt{4}$ ισούται με 2 δημιουργείται η σύγχυση στο μυαλό του αφού γνωρίζει ότι ο αριθμός 2 είναι ρητός. Πώς λοιπόν μπορεί να είναι και άρρητος; Επιπλέον, από τις επόμενες απαντήσεις του (***«οι αριθμοί 0,78634343434… και 0,777… είναι άρρητοι»***) αντιλαμβανόμαστε ότι θεωρεί όλους τους αριθμούς που έχουν άπειρα επιλαμβανόμενα ψηφία ως άρρητους, και μόνο με την υπενθύμιση του ορισμού των ρητών αριθμών από εμάς αντιλαμβάνεται ότι είναι αυτοί οι δύο αριθμοί είναι ρητοί. Ολοκληρώνοντας την ερώτηση αυτή θα πρέπει να αναφέρουμε πόσο ισχυρή εξακολουθεί να είναι η λανθασμένη πεποίθησή του ότι άρρητοι είναι αυτοί που έχουν ρίζα, αφού ενώ του έχουμε εξηγήσει ποιοι ονομάζονται ρητοί αριθμοί, συνεχίζει να θεωρεί ότι το $\sqrt{4}$ μπορεί είναι και ρητός και άρρητος. Ρητός αφού γράφεται ως 2 και άρρητος αφού έχει ρίζα.

Όσον αφορά την πέμπτη ερώτηση ο μαθητής απάντησε ορθά τοποθετώντας τους αριθμούς στη σωστή σειρά.

Εν συνεχεία, ακολουθεί η ερώτηση 6. Σε αυτήν την ερώτηση ο Βαγγέλης προσπαθεί να τοποθετήσει τις τιμές των x πάνω στον άξονα αφού πρώτα έχει προσπαθήσει να λύσει αλγεβρικά τις ανισώσεις. Ενώ την πρώτη τη λύνει σωστά αλγεβρικά και ύστερα τοποθετεί τις τιμές του x στον άξονα, τη δεύτερη δεν την λύνει ορθά. Ομοίως συμβαίνει και για την τρίτη και την τέταρτη ανίσωση. Παρόλα αυτά συνειδητοποιεί ότι η τρίτη και η τέταρτη είναι δευτεροβάθμιες ανισώσεις, οπότε λόγω βιασύνης, όπως ισχυρίζεται, ξέχασε να πάρει και τις υπόλοιπες λύσεις. Τελικά, μας παραθέτει τις σωστές λύσεις πάνω στους άξονες. Το συμπέρασμα που προκύπτει από αυτή την ερώτηση είναι ότι για να μπορέσει να τοποθετήσει τις τιμές στους άξονες ο μαθητής αυτός σκέφτηκε και εφάρμοσε πρώτα αλγεβρικούς αλγορίθμους προκειμένου να βρει τις λύσεις τους, τις οποίες αργότερα παρουσίασε στους άξονες.

Τέλος, στην ερώτηση 7 ενώ μπορεί να τοποθετήσει στο περίπου τον αριθμό $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα χρησιμοποιώντας συνεχόμενες προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{3}$

(μέσω πολλαπλασιασμών), δεν καταλαβαίνει πως μπορεί να τοποθετήσει *ακριβώς* το $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα.



Στην αρχή μας λέει ότι δεν μπορεί να τοποθετηθεί ακριβώς το $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα. Ύστερα συμπληρώνει ότι ***«θα πρέπει να υπολογίσουμε ακριβώς πόσα είναι τα ψηφία του στο δεκαδικό ανάπτυγμα για να μπορέσουμε να το πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του αλλά αυτό δε θα μου βγει ποτέ 3. Για αυτό και στις ασκήσεις το βάζουμε περίπου»***. Η φράση του αυτή επιβεβαιώνει την υπόθεση που είχαμε κάνει ότι ο μαθητής αυτός εστιάζει μόνο στην αλγεβρική προσέγγιση του $\sqrt{3}$, αγνοώντας εντελώς τη γεωμετρική του κατασκευή. Μάλιστα, όταν του ξεκινάμε να δημιουργούμε τη γεωμετρική απεικόνιση του $\sqrt{3}$, και έχοντας απεικονίσει τις πλευρές του τριγώνου, προς έκπληξή του ο μαθητής μας αναφέρει ότι ***«Δηλαδή, τώρα ήθελες να το παίξω Πυθαγόρας;»***, συμπληρώνοντας ότι ***«Δεν το σκέφτεται κάποιος νορμάλ άνθρωπος αυτό. Αν βρεις παιδί που το σκέφτηκε αυτό κράτησε τον και πήγαινέ τον να πάρει νόμπελ»***. Από τις υπερβολικές εκφράσεις αυτού του μαθητή συμπεραίνουμε πόσο δύσκολο είναι να «ξεφύγει» από τον αλγεβρικό τρόπο προσέγγισης του άξονα, και να «προχωρήσει» στις γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα.

3.2. Ερωτηματολόγιο Ηλία

Α΄ Φάση – Συμπλήρωση Ερωτηματολογίου

Ο δεύτερος μαθητής στον οποίο δώσαμε το ερωτηματολόγιο και του οποίου στη συνέχεια πήραμε προσωπική συνέντευξη είναι ένας μαθητής Γ΄ Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης με το όνομα Ηλίας. Όταν μας ρώτησε στην αρχή του ερωτηματολογίου πόσην ώρα έχει για να το συμπληρώσει του απαντήσαμε και εκείνου ότι έχει αρκετή ώρα στη διάθεση του αλλά δε θα πρέπει να ξεπεράσει τα 45 λεπτά. Ο μαθητής αυτός έκανε συνολικά 20 λεπτά για να ολοκληρώσει το ερωτηματολόγιο. Η μόνη απορία που εξέφρασε κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ήταν ***«θα τοποθετήσουμε στην έκτη ερώτηση την λύση κατευθείαν στον άξονα;»***.

Η τελευταία ερώτηση του μαθητή μας οδήγησε στο να κάνουμε την εξής υπόθεση:

- Ο μαθητής αυτός για να μπορέσει να τοποθετήσει τις τιμές πάνω στον άξονα πρώτα θα προσπαθήσει να λύσει τις ανισώσεις μέσω αλγεβρικών αλγορίθμων και ύστερα θα προχωρήσει στην τοποθέτηση των τιμών πάνω στον άξονα.

Β΄ Φάση – Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Στην πρώτη ερώτηση η απάντηση που καταρχάς μας κάνει εντύπωση είναι ότι ***«0,333… < 0,333»***. Όταν του ζητάμε να μας εξηγήσει τι σημαίνει ο αριθμός 0,333… αυτός μας αναφέρει ότι ***«είναι ο αριθμός που τα ψηφία του συνεχίζονται επ' άπειρο. Δηλαδή τα 3 θα συνεχίζονται χωρίς να σταματήσει.»*** Για να μπορέσει να συνειδητοποιήσει την αντίθεση την οποία μας εκφράζει (ότι δηλαδή ο αριθμός 0,333333… είναι μικρότερος από τον αριθμό 0,333000) του γράψαμε το 0,333… με περισσότερα δεκαδικά ψηφία (0,3333333333…). Αμέσως κατανόησε το λάθος του και απάντησε ***«Αααα, το 0,333… είναι πιο μεγάλο»***. Στη επόμενη σύγκριση μεταξύ του 1,888… και του 1,9 μας απαντά ***«μεγαλύτερο είναι το 1,9 επειδή το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του 1,888… είναι το 8, ενώ του 1,9 είναι το 9 οπότε μεγαλύτερο θα είναι αυτό που έχει πιο μεγάλο το αντίστοιχο δεκαδικό ψηφίο»***. Παρόμοια απάντηση μας δίνει και στην τρίτη σύγκριση (***«4,999… και 5»***): ***«το 5 θα είναι μεγαλύτερο αφού το 5 θα είναι μεγαλύτερο από το 4»***. Συγκρίνει, δηλαδή, μόνο τα ακέραια τμήματα χωρίς να ασχοληθεί με το δεκαδικό τμήμα. Εφόσον το ακέραιο τμήμα 5 είναι μεγαλύτερο από το ακέραιο τμήμα 4, ο αριθμός 5 θα είναι μεγαλύτερος από τον 4,999… Με άλλα λόγια, ο μαθητής αυτός χρησιμοποιεί τον κανόνα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία (σύγκριση ίδιων δεκαδικών θέσεων των ψηφίων). Αυτόν τον κανόνα τον «μεταφέρει» και στους δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία (όπως είναι οι περιοδικοί αριθμοί), κάνοντας, λανθασμένα, αποκοπή των άπειρων ψηφίων.

Όσον αφορά τη δεύτερη ερώτηση, αξιόλογη είναι η απάντηση που μας έδωσε ο μαθητής για το τρίτο ζευγάρι αριθμών. Σε αυτό το ζευγάρι ο μαθητής μας αναφέρει ότι ***«δεν υπάρχει»*** ανάμεσα τους κανένας αριθμός. Ενώ δηλαδή στην παραπάνω ερώτηση μας είχε απαντήσει ότι το 5 είναι μεγαλύτερο από το 4,999…, εδώ με την απάντηση αυτή έρχεται σε αντίθεση με αυτό που είχε απαντήσει στη δεύτερη ερώτηση. Όταν του αναφέραμε την αντίθεση αυτή λέγοντας ***«αφού το 5 είναι μεγαλύτερο του 4,999… θα πρέπει να υπάρχει ένας αριθμός ανάμεσα τους»*** ακολουθεί ο επόμενος διάλογος:

Καθηγητής: «Ποιος μπορεί να είναι ανάμεσά τους;»

Ηλίας: «Το 0, όχι… Αν προσθέσουμε το 0,1 θα πάει στο 5»

Κ: «Ναι, θα πάει στο 5,0999…Άρα δεν είναι ίδιο με το 5»

Η: «Ναι…Αν προσθέταμε το 0,001;»

Κ: «Αν προσθέταμε το 0,001 θα αυξάνονταν πάλι στο σημείο αυτό ο αριθμός οπότε θα έβγαινε πάλι πάνω από 5»

Η: «Α ναι… Είπαμε ότι υπάρχει αριθμός;»

Κ: «Δεν ξέρω, εσύ τι πιστεύεις;»

Η: «Πιστεύω ότι δεν υπάρχει.»

Κ: «Όμως εδώ γιατί το έχεις βάλει το ένα (*ο καθηγητής δείχνει το τρίτο ζευγάρι της ερώτησης 2* ***) να είναι μεγαλύτερο από το άλλο άμα εξακολουθείς να μου λες ότι δεν υπάρχει;»***

Η: «Ίσως είναι οριακά»

Κ: «Τι σημαίνει οριακά;»

Η: «Δηλαδή ότι δεν υπάρχει ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς ίσως κάποιος άλλος»

Κ: «Άρα άμα δεν υπάρχει ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς κάποιος άλλος, θα πρέπει οι δύο αριθμοί αυτοί να είναι ίσοι»

Η: «Όχι αυτοί οι δύο αριθμοί δεν είναι ίσοι».

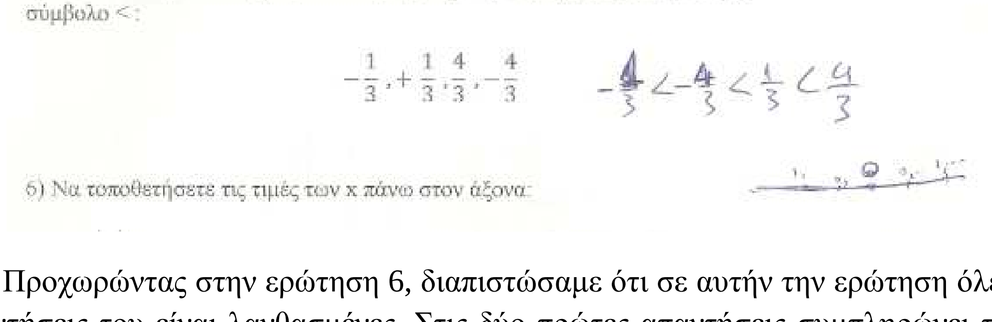
Από τον παραπάνω διάλογο αντιλαμβανόμαστε πόσο δύσκολο είναι για τον μαθητή αυτόν να δεχτεί ότι οι αριθμοί 4,999… και 5 είναι ίσοι. Αυτό οφείλεται στις λανθασμένες πεποιθήσεις της έννοιας του απείρου εν γένει, και πιο συγκεκριμένα των άπειρων ψηφίων ενός περιοδικού αριθμού, καθώς και στην βαθύτερη μη κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Επιπλέον, από την απάντηση του ***«Ίσως είναι οριακά»*** μπορούμε να διακρίνουμε τη παρερμηνεία ενός όρου από την πλευρά των μαθητών όταν οι καθηγητές κάνουν ανεπίσημη μεταγλώττιση της έννοιας ενός μαθηματικού όρου.

Ακόμα, αξιοσημείωτη είναι και η απάντηση στο τελευταίο ζευγάρι αριθμών (του 1/3 και του 2/3). Ο μαθητής μας απάντηση της εξής απάντηση: «1/3 ½ 2/3» (θεωρεί ότι ανάμεσα τους είναι ο αριθμός $\frac{1}{2}$). Για να μπορέσει να βρει τον αριθμό αυτό ο μαθητής δημιούργησε ισοδύναμα κλάσματα με τα 1/3 και 2/3, τα οποία ήταν τα 2/6 και 4/6 και είπε ότι ανάμεσα τους θα είναι ο αριθμός 3/6 που είναι απλοποιημένος ο 1/2. Παρατηρούμε ότι ο μαθητής αυτός μπορεί να διαχειριστεί αρκετά εύκολα την έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών «αφήνοντας» τον ρητό αριθμό στην κλασματική του αναπαράσταση.

Στην τρίτη ερώτηση ο μαθητής αυτός απάντησε ***«δεν υπάρχουν»***.

Στην τέταρτη ερώτηση ο μαθητής αυτός δεν έχει «ξεκαθαρισμένη» την έννοια των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, μας αναφέρει ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αυτό το οποίο δεν έχει δεκαδικούς. Όσον αφορά τα σύνολα των ρητών και των αρρήτων η απάντηση του είναι ότι οι ρητοί είναι αυτοί που μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα. Με αφορμή την απάντησή του αυτή τον ρωτάμε πως μπορεί ο αριθμός $\sqrt{2}$ να γραφτεί ως κλάσμα, αφού μας έχει δώσει την απάντηση στο ερωτηματολόγιο ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε ο μαθητής αυτός το σκέφτεται για λίγη ώρα και μας απαντά ***«δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα άρα είναι άρρητος»***. Στις επόμενες απαντήσεις του, θεωρεί του αριθμούς 0,78634343434… και 0,777… ως άρρητους αφού όπως ισχυρίζεται δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι η εν μέρει σωστή άποψη ενός ορισμού μπορεί να οδηγήσει έναν μαθητή σε μαθηματικές παρερμηνείες. Για να τον βοηθήσουμε να ξεπεράσει αυτή την παρερμηνεία τον οδηγήσαμε στο να εκτελέσει τη διαίρεση του $\frac{1}{3}$ οπότε και αντιλήφθηκε ότι αυτή η πράξη έχει ως αποτέλεσμα τον αριθμό 0,333… που σημαίνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ρητός εφόσον και το $\frac{1}{3}$ είναι ρητός. Με λίγα λόγια, ενώ ο μαθητής αυτός δεν έχει καμία δυσκολία στην μετατροπή ενός ρητού αριθμού από την κλασματική στη δεκαδική αναπαράσταση, δυσκολεύεται έως αδυνατεί στο να μετατρέψει έναν περιοδικού αριθμό σε κλάσμα.

Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι έδωσε λανθασμένη σειρά στην τοποθέτηση των αριθμών: $-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$. Ειδικότερα απάντησε ότι «$\boldsymbol{-\frac{1}{3} < -\frac{4}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}}$» . Όταν του ζητήσαμε να μας εξηγήσει την απάντησή του, ο μαθητής μας σύγκρινε πρώτα τους θετικούς αριθμούς $+\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$ αφού πρώτα τους μετέτρεψε σε δεκαδικούς αριθμούς. Η μετατροπή αυτή τον οδήγησε στο να τοποθετήσει με λανθασμένη σειρά τα κλάσματα $-\frac{1}{3} < -\frac{4}{3}$. Φέρνοντας όμως την εικόνα του άξονα των πραγματικών αριθμών στο μυαλό του συνειδητοποίησε ότι στους αρνητικούς αριθμούς η διάταξη αντιστρέφεται. Η εικόνα του άξονα των πραγματικών αριθμών παρατηρούμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση βοήθησε τον μαθητή στη σύγχυση που του προκάλεσε η μετατροπή της αναπαράστασης ενός αρνητικού αριθμού από κλάσμα σε δεκαδικό.

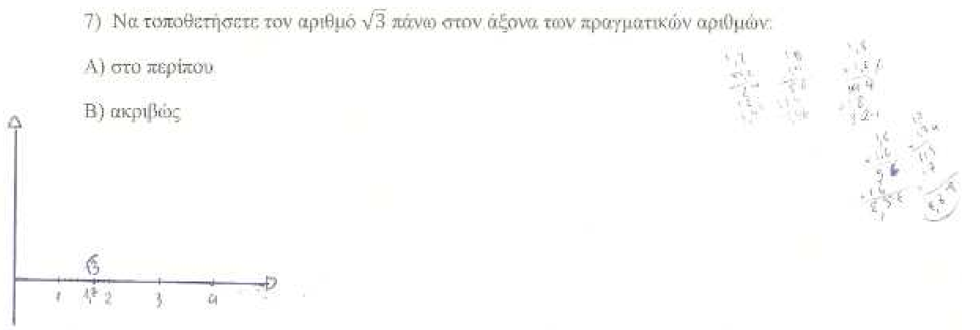

5) Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στη σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο <:

$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$ $-\frac{1}{3} < -\frac{4}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$

6) Να τοποθετήσετε τις τιμές των x πάνω στον άξονα:

Προχωρώντας στην ερώτηση 6, διαπιστώσαμε ότι σε αυτήν την ερώτηση όλες οι απαντήσεις του είναι λανθασμένες. Στις δύο πρώτες απαντήσεις συμπληρώνει τις τιμές που θα πάρει το x, κατευθείαν στον άξονα χωρίς να έχει σημειώσει καθόλου αλγεβρικές πράξεις στο χαρτί. Ειδικότερα, στην πρώτη ανίσωση μας αναφέρει ότι το x θα πάρει τιμές μικρότερες του 4 ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα πάρει τιμές μεγαλύτερες του 2. Η υπόθεση μας ότι α) έχει λύσει τις ανισώσεις αυτές αλγεβρικά νοητά στο μυαλό του και β) δεν έχει δώσει ιδιαίτερη σημασία στο γεγονός ότι το x έχει απόλυτο, έρχεται να επιβεβαιωθεί με την απάντηση του μαθητή ότι ***«πήγα το -1 από την άλλη μεριά και επειδή δεν τα πάω καλά με τα απόλυτα θεώρησα στην πρώτη περίπτωση ότι το x θα πάρει τιμές μικρότερες του 4 και στη δεύτερη περίπτωση ότι το x θα πάρει τιμές μεγαλύτερες του 2».*** Την τρίτη ανίσωση την έχει λύσει στο χαρτί, πρώτα αλγεβρικά και ύστερα τοποθετώντας τις τιμές του x πάνω στον άξονα. Η τελική του απάντηση είναι ότι το x θα πάρει τιμές μικρότερες του -2. Η λανθασμένη του απάντηση οφείλεται στο γεγονός ότι αλγεβρικά έχει θεωρήσει ότι το x θα παίρνει τιμές μικρότερες του 2 και μικρότερες του -2. Συναληθεύοντας τις λύσεις δέχεται ότι το $x < -2$. Μόνο όταν του θυμίζουμε τον πίνακα πρόσημων ως τρόπο επίλυσης αντιλαμβάνεται το λάθος της λύσης του. Παρόμοια συμπεριφορά εκδηλώνει και στη τέταρτη ανίσωση όπου θεωρεί ότι το $x > 2$. Συμπεραίνοντας, ο μαθητής αυτός οδηγείται στην τοποθέτηση των λύσεων επάνω στον άξονα αφού πρώτα έχει εκτελέσει αλγεβρικούς αλγορίθμους προκειμένου να βρει τη λύση. Το γεγονός ότι δεν έλυσε σωστά τις ανισώσεις οι οποίες σχετίζονται με απόλυτα και τετράγωνα αγνώστων μεταβλητών είναι ένα άλλο ζήτημα στο οποίο όμως δεν θα επιμείνουμε στην παρούσα έρευνα.

Τέλος, στην ερώτηση 7 ενώ μπορεί να τοποθετήσει προσεγγιστικά (*στο περίπου*) τον αριθμό $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα προσπαθώντας να βρει μια δεκαδική προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{3}$ (μέσω διαδοχικών πολλαπλασιασμών, πολλαπλασιάζει 1,2*1,2 , 1,3*1,3 , … , και βρίσκει ότι το 1,7*1,7 πλησιάζει τον 3), δεν καταλαβαίνει πως μπορεί να τοποθετήσει ακριβώς το $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα.



Μάλιστα μας δηλώνει ότι ***«δεν μπορώ να βρω έναν αριθμό που αν το πολλαπλασιάσω με τον εαυτό του να μας δώσει 3. Οπότε δεν μπορώ να το απεικονίσω ακριβώς πάνω στον άξονα».*** Παρατηρώντας τον προβληματισμό του μαθητή τον ρωτάμε αν είχε τον $\sqrt{2}$ αντί για τον $\sqrt{3}$ αν θα είχε το ίδιο πρόβλημα. Με αυτόν τον τρόπο προσπαθούμε να δούμε αν το $\sqrt{2}$ θα του ανακαλέσει στη μνήμη του προϋπάρχουσα γνώση κατασκευής του $\sqrt{2}$ την οποία είχε αποκτήσει όταν μάθαινε το πυθαγόρειο θεώρημα. Ο μαθητής απαντά κατηγορηματικά ***«ναι, θα είχα το ίδιο πρόβλημα».*** Όταν όμως ξεκινάμε να κάνουμε τη γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{2}$ ο μαθητής αυτός αντιλαμβάνεται τη γεωμετρική λύση του προβλήματος και προχωράει περαιτέρω τον προβληματισμό του ρωτώντας μας ***«αλγεβρική προσέγγιση υπάρχει ακριβής;»*** Από την τελευταία ερώτηση αυτού του μαθητή συμπεραίνουμε πόσο δύσκολο είναι και για αυτόν τον μαθητή, να «ξεφύγει» από τον αλγεβρικό τρόπο προσέγγισης του άξονα, και να «προχωρήσει» στις γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα.

3.3. Ερωτηματολόγιο Γιάννας

Α΄ Φάση – Συμπλήρωση Ερωτηματολογίου

Η τρίτη μαθήτρια στην οποία δώσαμε το ερωτηματολόγιο και της οποίας πήραμε συνέντευξη είναι μια μαθήτρια Γ΄ Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης με το όνομα Γιάννα. Όταν μας ρώτησε στην αρχή του ερωτηματολογίου πόσην ώρα έχει της απαντήσαμε και εκείνης ότι έχει αρκετή ώρα στη διάθεση της αλλά δε θα πρέπει να ξεπεράσει τα 45 λεπτά. Η μαθήτρια αυτή έκανε συνολικά 16 λεπτά να ολοκληρώσει το ερωτηματολόγιο. Η μόνη απορία που εξέφρασε κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ήταν ***«Πως θα κάνουμε την ερώτηση 7 ακριβώς;»***

Σύμφωνα με την ερώτηση αυτή υποθέτουμε ότι:

- Η μαθήτρια αυτή εστιάζει μόνο στην αλγεβρική προσέγγιση του $\sqrt{3}$ αγνοώντας εντελώς τη γεωμετρική του κατασκευή.

Β΄ Φάση – Απαντήσεις μαθήτριας & αποτελέσματα

Ξεκινώντας από την πρώτη ερώτηση η απάντηση που μας έκανε, καταρχάς, εντύπωση είναι η ακόλουθη: ***«0,333… = 0,333»***. Όταν τη ρωτήσαμε ***«τι σημαίνει ο αριθμός 0,333…»*** αυτή απάντησε ***«αυτός ο αριθμός συνεχίζεται είναι 0,3333333… και δεν τελειώνει πουθενά»***. Η προηγούμενη ερώτησή μας την οδήγησε στο συνειδητοποιήσει το λάθος της, δίνοντάς μας νέα απάντηση: ***«ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 0,333»***. Δηλαδή, η ανάλυση του αριθμού 0,333… σε περισσότερα επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία τη βοήθησε να συνειδητοποιήσει το λάθος της, δίνοντάς μας τελικά τη σωστή απάντηση. Επίσης, αξιοσημείωτη είναι και η απάντηση που έχει δώσει στο τρίτο ζευγάρι ***«4,999…. < 5»***. Όταν όμως της εξηγούμε την αντίθεση που δημιουργείται μεταξύ αυτής της απάντησης και της απάντησης που έχει δώσει στην επόμενη ερώτηση ***«ανάμεσα στους αριθμούς 4,999… και 5 δεν υπάρχει κανένας αριθμός»*** αυτή μας απαντά χαρακτηριστικά ***«Σωστό και αυτό»*** και ακολουθεί ο εξής διάλογος:

Γιάννα: «Είναι το 0,1»

Καθηγητής: « Τι εννοείς;»

Γ: «Αν προσθέσουμε στο 4,999… το 0,1»

Κ: «Αν προσθέσουμε το 4,999… με το 0,1 *(δείχνει την πράξη στο χαρτί)* ***ο αριθμός θα γίνει ο 5,0999»***

Γ: «Ναι… Άρα είναι το 0,01… όχι δεν είναι…δεν είναι έτσι….ίσως με κάποια αφαίρεση πρέπει να γίνεται…»

Κ: «Τι να αφαιρέσεις δηλαδή;»

Γ: «Αν αφαιρέσω από το 5 το 4,999…ίσως έτσι να βρούμε τον αριθμό»

Κ: «Και με τις τελίτσες πως θα κάνεις αφαίρεση;»

Γ: «Έτσι κι αλλιώς συνεχίζεται και στα δύο. Άρα ότι βρούμε στα τρία ψηφία που μας είναι φανερά θα είναι και η συνέχεια»

Κ: «Όταν έχουμε πεπερασμένα ψηφία το καταλαβαίνω, ξεκινάμε να κάνουμε την αφαίρεση και κρατάμε το κρατούμενο. Εδώ στις τελίτσες πως θα το κάνω;»

Γ: «………Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε, αλλά θα αναιρέσει το πρώτο είναι να στρογγυλοποιήσουμε το 4,999… και να γίνει 5»

Κ: «Δηλαδή με στρογγυλοποίηση θα είναι το ίδιο. Τώρα είναι το ίδιο;»

Γ: «Όχι»

Από τον παραπάνω διάλογο αντιλαμβανόμαστε πόσο δύσκολο είναι και για αυτήν τη μαθήτρια να δεχτεί ότι οι αριθμοί 4,999… και 5 είναι ίσοι. Αυτό οφείλεται, και σε αυτήν την περίπτωση, στις λανθασμένες πεποιθήσεις της έννοιας του απείρου εν γένει, και πιο συγκεκριμένα των άπειρων ψηφίων ενός περιοδικού αριθμού, καθώς και στην βαθύτερη μη κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Ακόμα, παρατηρούμε ότι η μαθήτρια λανθασμένα «μεταφέρει» τον μαθηματικό κανόνα στρογγυλοποίησης δεκαδικών αριθμών με πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, στους δεκαδικούς αριθμούς με άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

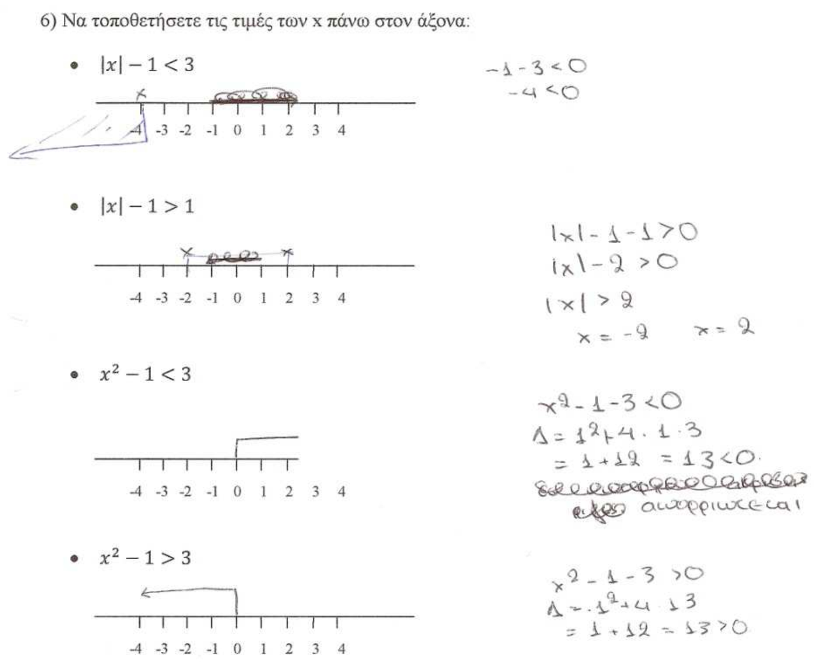
Επιπλέον, αξιόλογη είναι και η επόμενη απάντηση που έχει δώσει ***«ανάμεσα στο 0,2 και στο 0,22 δεν υπάρχει κανένας αριθμός».*** Όταν της ζητήσαμε να μας αναλύσει το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο του 0,2 αυτή μας απάντησε ***«είναι το 0»*** και τότε συνειδητοποίησε από τη σύγκριση του 0,20 και του 0,22 ότι υπάρχει το 0,21 ανάμεσά τους. Όταν επιμείναμε και της ζητήσαμε να μας πει αν υπάρχει ανάμεσα στο 0,20 και στο 0,21 κάποιος αριθμός αυτή μας είπε ότι ***«δεν υπάρχει»***. Παρεμφερή με αυτήν είναι η εξής απάντησή της ***«ανάμεσα στο 1/3 και στο 2/3 δεν υπάρχει κανένας αριθμός»***. Το συμπέρασμα που βγάζουμε από τις παραπάνω απαντήσεις είναι ότι στην μαθήτρια αυτή η προϋπάρχουσα γνώση της διάταξης των φυσικών αριθμών «μεταφέρεται» λανθασμένα στους πραγματικούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα «μεταφέρει» την έννοια του «επόμενου αριθμού» από το σύνολο των φυσικών στο σύνολο των ρητών. Για αυτό και θεωρεί ότι όπως στους φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει ανάμεσα στο 1 και στο 2 ένας αριθμός έτσι και στους ρητούς αριθμούς δεν υπάρχει ανάμεσα στο 0,20 και 0,21 κάποιος αριθμός. Τη διαπίστωσή μας αυτή έρχεται να επιβεβαιώσει και η ακόλουθη απάντηση της μαθήτριας στην ερώτηση 3: ***«Οι δύο πραγματικοί αριθμοί όπου δεν υπάρχει ανάμεσά τους κανένας άλλος είναι οι 1 , 2»***.

Προχωρώντας στην τέταρτη ερώτηση διαπιστώνουμε (από την πρώτη κιόλας πρόταση) ότι η μαθήτρια αυτή δεν έχει «ξεκάθαρη» εικόνα για το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, η Γιάννα θεωρεί ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι πραγματικός αριθμός. Η εξήγηση που έδωσε για την απάντηση αυτή είναι η ακόλουθη: ***«οι πραγματικοί αριθμοί είναι ο 1, ο 2, … και οι δεκαδικοί»***. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η μαθήτρια αυτή έχει δημιουργήσει μια παρανόηση για το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Μάλιστα είναι πολύ πιθανό να το ταυτίζει με το σύνολο των ρητών αριθμών. Για αυτό το λόγο δίνει ακριβώς την ίδιες απαντήσεις στις εκφράσεις ***«ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός» Λάθος***, ***«ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός» Λάθος***, ***«ο $\sqrt{4}$ είναι πραγματικός αριθμός» Σωστό***, ***«ο $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός» Σωστό***. Η παρανόηση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η μαθήτρια έχει χρησιμοποιήσει έναν «διαστρεβλωμένο» ορισμός (*distorted definition*) - ***«οι πραγματικοί αριθμοί είναι ο 1, ο 2, … και οι δεκαδικοί»***. Αυτό θεωρούμε ότι έχει συμβεί από την έλλειψη ενός κατάλληλου αυστηρού ορισμού των πραγματικών αριθμών. Βέβαια, θα ήταν πολύ δύσκολο να προχωρήσουμε σε έναν καθαρά φορμαλιστικό ορισμό των πραγματικών αριθμών μέσω των τομών *Dedekind*, επειδή το μαθηματικό επίπεδο των μαθητών Λυκείου είναι σε πρώιμο στάδιο. Από την άλλη μεριά, παρατηρούμε ότι ο «ανεπίσημος» ορισμός που δίνεται στα συγγράμματα του Λυκείου (***«Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που έχουμε μάθει»***, ***«Πραγματικοί αριθμοί είναι οι ρητοί και άρρητοι»***) δημιουργεί πολλές φορές στους μαθητές μία ανεπίσημη εικόνα (*informal imagery*) η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση συνάγει εν μέρει με την έννοια των πραγματικών αριθμών, αφού εξαιρεί το σύνολο των αρρήτων από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Επιπλέον, στην ερώτηση μας ***«ποιοι είναι οι ρητοί αριθμοί;»***, η μαθήτρια απάντησε ***«αυτοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος»***. Για αυτό το λόγο, όπως μας εξήγησε, έγραψε ότι οι αριθμοί 0,777 και 0,777… είναι άρρητοι. Επειδή δεν μπορούσε να τους γράψει ως κλάσμα. Μόνο μετά από δική μας καθοδήγηση (της δημιουργήσαμε το κλάσμα $\frac{777}{1000}$ και της εξηγήσαμε με κλασματική αναπαράσταση τον αριθμό 0,777…) συνειδητοποίησε ότι και αυτοί οι αριθμοί είναι ρητοί. Εν συντομία, και σε αυτήν την περίπτωση, ενώ ο μαθήτρια δεν έχει καμία δυσκολία στην μετατροπή ενός ρητού αριθμού από την κλασματική στη δεκαδική αναπαράσταση, δυσκολεύεται στο μετατροπή ενός περιοδικού αριθμό σε κλάσμα.

Όσον αφορά την πέμπτη ερώτηση η μαθήτρια απάντησε ορθά τοποθετώντας τους αριθμούς στη σωστή σειρά.

Στη συνέχεια, στην έκτη ερώτηση η μαθήτρια έχει τοποθετήσει τις απαντήσεις στον άξονα αφού προηγουμένως έχει προσπαθήσει να χρησιμοποιήσει αλγεβρικούς αλγορίθμους προκειμένω να βρει τις λύσεις των ανισώσεων. Παρόλα αυτά διαπιστώσαμε αλγεβρικές δυσκολίες και λάθη στον τρόπο επίλυσης των ανισώσεων, τις οποίες θα απλώς θα αναφέρουμε χωρίς να επεκταθούμε περαιτέρω. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη και στη δεύτερη ανίσωση προσπαθεί να βάλει τιμές στο απόλυτο αφού πρώτα έχει μεταφέρει όλους τους γνωστούς αριθμούς στο ένα μέλος. Για αυτό μας λέει ότι στην πρώτη το x θα πάρει τιμές μικρότερες του -4, ενώ στη δεύτερη το x θα πάρει τιμές ανάμεσα στο -2 και το 2. Στη τρίτη και τέταρτη ερώτηση χρησιμοποιεί λανθασμένα τον τύπο της διακρίνουσας και απλώς τοποθετεί τις τιμές να είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες του 0 με βάση αν η διακρίνουσα έχει «βγει» θετική ή αρνητική.



Τέλος, στην έβδομη ερώτηση η μαθήτρια αυτή δεν απάντησε σε κανένα υποερώτημα. Όταν τη ρωτήσαμε τι τη δυσκόλεψε, μας απάντησε χαρακτηριστικά ***«γενικά στις ρίζες και στους άξονες έχω ένα θέμα»***. Διαπιστώσαμε ακόμα ότι η μαθήτρια αυτή συναντά μεγάλη δυσκολία στο να προσεγγίσει έστω και τα πρώτα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{3}$. Μάλιστα, ισχυρίζεται ***«δεν μπορούμε να το τοποθετήσουμε ακριβώς γιατί δεν υπάρχει το $\sqrt{3}$ ακριβώς ως αριθμός».*** Μόνο με δική μας υπόδειξη γεωμετρικής κατασκευής η μαθήτρια συνειδητοποίησε ότι υπάρχει και γεωμετρική ερμηνεία του άξονα.

3.4. Ερωτηματολόγιο Ναταλίας

Η τέταρτη μαθήτρια στην οποία δώσαμε το ερωτηματολόγιο και της οποίας πήραμε συνέντευξη είναι μια μαθήτρια Γ΄ Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης με το όνομα Ναταλία. Όταν μας ρώτησε στην αρχή του ερωτηματολογίου πόσην ώρα έχει της απαντήσαμε ότι έχει αρκετή ώρα στη διάθεση της αλλά δε θα πρέπει να ξεπεράσει τα 45 λεπτά. Η μαθήτρια αυτή χρειάστηκε συνολικά 22 λεπτά για να ολοκληρώσει το ερωτηματολόγιο. Το μόνο σχόλιο που έκανε κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου είναι ***«Αν είχα κομπιουτεράκι θα έβρισκα τη λύση του $\sqrt{3}$ ακριβώς».***

Από την προηγούμενη παρατήρηση της μαθήτριας υποθέτουμε ότι:

- Η μαθήτρια θεωρεί ότι το $\sqrt{3}$ και οι άλλοι άρρητοι αριθμοί μπορούν να προσδιοριστούν ακριβώς μέσω του δεκαδικού τους αναπτύγματος. Απλώς εμείς, για λόγους ευκολίας, επιλέγουμε στις ασκήσεις να παίρνουμε προσεγγίσεις των πρώτων δεκαδικών ψηφίων του $\sqrt{3}$.

Β΄ Φάση – Απαντήσεις μαθήτριας & αποτελέσματα

Καταρχάς, αυτό που έκανε εντύπωση ήταν η μοναδική μαθήτρια που σύγκρινε όλους τους αριθμούς μεταξύ τους στην πρώτη ερώτηση. Όταν τη ρωτήσαμε γιατί το έκανε αυτό αφού η δομή της άσκησης ήταν ανά ζευγάρια, μας απάντησε: ***«Ήθελα να τους συγκρίνω όλους μεταξύ τους»***.

Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη ερώτηση η Ναταλία έδωσε σωστές απαντήσεις στα δύο πρώτα ζευγάρια αριθμών. Στο τρίτο, όμως, ζευγάρι μας απάντησε **«4,999….<5»**. Όταν την ρωτήσαμε γιατί ισχύει αυτό μας απάντησε ***«επειδή το 4,999…. είναι 0,111… φορές μικρότερο»***. Αυτό μας έδωσε την αφορμή να ξεκινήσουμε τον παρακάτω διάλογο:

Καθηγητής: «Αφού το 4,999… είναι μικρότερο από το 5 τότε ανάμεσα τους θα υπάρχει ένας αριθμός, γιατί στην επόμενη ερώτηση έγραψες ότι ανάμεσα στο 4,999… και 5 δεν υπάρχει κανένας αριθμός;»

Ναταλία: «Δεν ξέρω»

Κ: « Τι εννοείς δεν ξέρω;… Κάτι σε οδήγησε ενστικτωδώς να απαντήσεις.»

Ν: «Εδώ πέρα (*η μαθήτρια δείχνει το 4,999…της πρώτης ερώτησης****) μετά το 4,999… θα πάει το 5, έτσι όπως μετράμε. Ενώ εδώ πέρα (****δείχνει το 4,999…της δεύτερης ερώτησης****) είναι η διαφορά τους, αυτή που υπάρχει»***

Κ: « Τι εννοείς;»

Ν: «Δηλαδή όταν μετράμε από το 4,999… μετά θα πάμε στο 5»

Κ: «Άρα ποιος είναι ανάμεσα τους»

Ν: «Εδώ η διαφορά τους είναι 0,1»

Κ: «Αν ήταν 0,1 αν προσέθετα το 0,1 στο 4,999… θα ήταν 5,099… το οποίο είναι μεγαλύτερο του 5»

Ν: «Άρα δεν υπάρχει… Άρα είναι ΙΣΑ…;;;…….. Δεν είναι όμως!!»

Κ: «Γιατί δεν είναι ίσα;»

Ν: «δεν είναι ίσα γιατί πρώτον δε φαίνονται τα ίδια και υπολείπεται μια μικρή διαφορά για να γίνει το 5, όμως τώρα πια είναι αυτή δεν ξέρω»

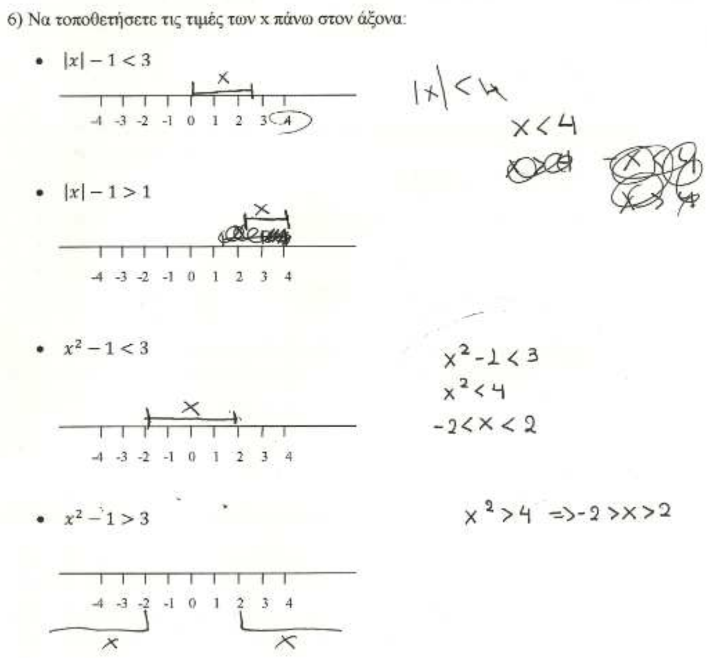
Από τον παραπάνω διάλογο αντιλαμβανόμαστε πόσο δύσκολο είναι για τη μαθήτρια αυτή να δεχτεί την ισότητα μεταξύ του αριθμού 4,999… και του 5. Η ανεπαρκής κατανόηση των άπειρων ψηφίων ενός περιοδικού αριθμού την οδηγεί στο να θεωρεί ότι τα ψηφία 999… του αριθμού 4,999… «πλησιάζουν» τον αριθμό 5 χωρίς να ισούνται με αυτόν. Στη συνέχεια, παρατηρήσαμε ότι η μαθήτρια στη δεύτερη ερώτηση μας έχει απαντήσει ***«0,2<0,21<0,22»***. Αξιοσημείωτο είναι το σχόλιο της όταν τη ρωτήσαμε αν υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσα στο 0,2 και στο 0,21: ***«όχι δεν υπάρχει γιατί είναι 0,2 0,21 0,22 έτσι πάνε μετά»***. Επομένως παρατηρούμε ότι και σε αυτή τη μαθήτρια υπάρχει η λανθασμένη «μεταφορά» της διάταξης των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ολοκληρώνοντας τις παρατηρήσεις μας για την δεύτερη ερώτηση, στο τέταρτο ζευγάρι η μαθήτρια έχει απαντήσει ***«1/3*** $\frac{1}{2}$ ***2/3»***. Η εξήγηση της για την απάντηση αυτή ότι δημιούργησε ισοδύναμα κλάσματα με τα 1/3 και 2/3. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η μαθήτρια αυτή χρησιμοποίησε την κλασματική αναπαράσταση για να μπορέσει να βρει κάποιον πραγματικό αριθμό ανάμεσα χωρίς να χρησιμοποιήσει καθόλου τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών. Άρα, φαίνεται ότι η μαθήτρια αυτή είναι ικανή να μπορεί να διαχειριστεί την έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών χωρίς τη μετατροπή τους από κλασματική σε δεκαδική αναπαράσταση.

Προχωρώντας στην ερώτηση 3, παραξενευτήκαμε από την απάντηση της μαθήτριας ***«1/3*** $\frac{1}{2}$ ***2/3»***. Όταν της ζητήσαμε να μας εξηγήσει την απάντηση αυτή η Ναταλία μας απάντησε ότι νόμιζε ότι η εκφώνηση έγραφε ***«Μπορείς να βρεις δύο πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε να ΥΠΑΡΧΕΙ κάποιος άλλος αριθμός ανάμεσά τους»***. Οπότε αυτό το λάθος ήταν ένα λάθος απροσεξίας στην εκφώνηση.

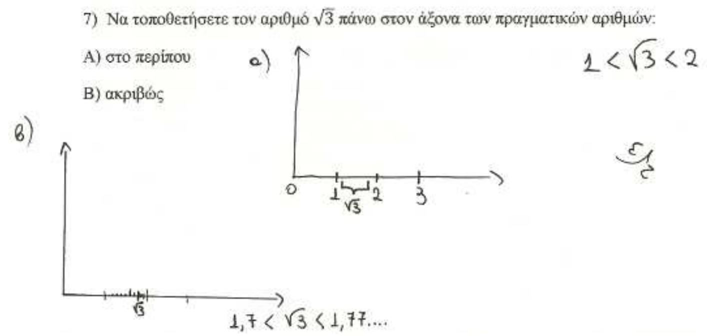
Εν συνεχεία, στην ερώτηση 4 η μαθήτρια αυτή έχει απαντήσει ορθά σε όλες τις προτάσεις εκτός από τις ακόλουθες: ***«ο 0,78634343434… είναι ρητός αριθμός»*** και ***«ο 0,777… είναι ρητός αριθμός»***. Η μαθήτρια αυτή έχει ταυτίσει την αρρητότητα με την απειρία ψηφίων. Αυτό το καταλαβαίνουμε από την εξής απάντηση της: ***«στην περίπτωση του 0,777 είναι ρητός γιατί είναι ένας στάνταρ αριθμός ξέρουμε πόσο 7 θα υπάρξουν αλλά στην περίπτωση του 0,777… δεν ξέρουμε πόσα 7 θα υπάρξουν»***. Για να βοηθήσουμε τη Ναταλία να κατανοήσει το λάθος της καθοδηγήσαμε στο να εκτελέσει τη διαίρεση του $\frac{2}{3}$ οπότε και αντιλήφθηκε ότι αυτή η πράξη έχει ως αποτέλεσμα τον αριθμό 0,666… που σημαίνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ρητός εφόσον και το $\frac{2}{3}$ είναι ρητός.

Όσον αφορά την πέμπτη ερώτηση η μαθήτρια απάντησε ορθά τοποθετώντας τους αριθμούς στη σωστή σειρά.

Στην επόμενη ερώτηση η μαθήτρια αυτή έχει προσπαθήσει να λύσει τις ανισώσεις χρησιμοποιώντας πρώτα αλγεβρικούς αλγορίθμους για να βρει τις λύσεις. Κατόπιν πηγαίνει και τοποθετεί τις τιμές του x πάνω στον άξονα. Τις δύο πρώτες ανισώσεις (αυτές με τα απόλυτα) τις έχει λύσει λανθασμένα ενώ τις δύο επόμενες (αυτές με τα τετράγωνα) τις έχει λύσει σωστά. Βέβαια το παράδοξο είναι ότι ενώ η μαθήτρια έχει τοποθετήσει σωστά τις τιμές πάνω στον άξονα, στις σημειώσεις της έχει παρουσιάσει τις εξής λύσεις : ***«$\boldsymbol{x^2} < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$» (για την τρίτη ανίσωση)*** ***«$\boldsymbol{x^2} > 4 \Rightarrow -2 > x > 2$» (για την τέταρτη ανίσωση)***. Όταν τη ρωτήσαμε πως προκύπτει αυτή η λύση η μαθήτρια μας απάντησε ***«κανονικά αυτή τη λύνουμε με πίνακα προσήμων αλλά επειδή είχε τον άξονα την έλυσα έτσι»***. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή, ο άξονας οδήγησε τη μαθήτρια στο να εκδηλώσει διαφορετική συμπεριφορά επίλυσης της άσκησης. Με άλλα λόγια, αν ήταν μόνη της η άσκηση (χωρίς να δίνεται ο άξονας) θα την έλυνε με πίνακα προσήμων αλλά επειδή της είχε δοθεί ο άξονας την έλυσε έτσι. Το παράδοξο που συνέβη (ενώ δηλαδή στον άξονα οι τιμές είναι σωστές ενώ στην αλγεβρική επίλυση της ανίσωσης δεν είναι) ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι η μαθήτρια ανέκτησε από τη μνήμη της τη γεωμετρική αναπαράσταση παρουσίασης μέσω άξονα της δευτεροβάθμιας ανίσωσης της μορφής $x^2 - a^2 < 0$ και $x^2 - a^2 > 0$.



Τέλος, στην ερώτηση 7 ενώ μπορεί να τοποθετήσει στο περίπου τον αριθμό ¯ πάνω στον άξονα ισχυριζόμενη ότι το ¯ είναι περίπου 1,7, δεν καταλαβαίνει πως μπορεί να τοποθετήσει ακριβώς το ¯ πάνω στον άξονα. Μάλιστα επιμένει λέγοντας ότι ***«δεν μπορούμε να τον τοποθετήσουμε ακριβώς γιατί άμα μπορούσαμε θα είχαμε βρει πόσος είναι ο αριθμός ¯ ακριβώς οπότε και θα τον βάζαμε πάνω στον άξονα»***. Ο ισχυρισμός της αυτός έρχεται σε αντίθεση με αυτό που μας είχε πει όταν συμπλήρωνε το ερωτηματολόγιο ***«Αν είχα κομπιουτεράκι θα έβρισκα τη λύση του ¯ ακριβώς»***. Αυτή η φράση υπονοεί την τάση που έχουν οι μαθητές να θεωρούν ότι το κομπιουτεράκι μπορεί να τους βοηθήσει σε όλα τα αριθμητικά τους προβλήματα. Επίσης, όταν τη ρωτήσαμε αν μπορεί να τοποθετήσει ακριβώς το ¯ πάνω στον άξονα, η Ναταλία μας απάντησε ***«όχι είναι το ίδιο με το ¯»***. Άρα η προσπάθεια ανάκλησης, της προϋπάρχουσας γνώσης κατασκευής του ¯, από τη μνήμη της μαθήτριας απέτυχε και σε αυτήν την περίπτωση. Μόνο όταν ξεκινήσαμε να κατασκευάζουμε τον ¯, δημιουργώντας κάθετες πλευρές μήκους 1cm ενός ορθογωνίου τρίγωνου, η μαθήτρια θυμήθηκε ότι ***«Μπορούμε να το κάνουμε με Πυθαγόρειο»***.



3.5. Ερωτηματολόγιο Σωτήρη

Α΄ Φάση – Συμπλήρωση Ερωτηματολογίου

Ο πέμπτος μαθητής στον οποίο δώσαμε το ερωτηματολόγιο και του οποίου στη συνέχεια πήραμε προσωπική συνέντευξη είναι ένας μαθητής Γ΄ Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης με το όνομα Σωτήρης. Όταν μας ρώτησε στην αρχή του ερωτηματολογίου πόσην ώρα έχει για να το συμπληρώσει του απαντήσαμε και εκείνου ότι έχει αρκετή ώρα στη διάθεση του αλλά δε θα πρέπει να ξεπεράσει τα 45 λεπτά. Ο μαθητής αυτός έκανε συνολικά 18 λεπτά για να ολοκληρώσει το ερωτηματολόγιο. Η μόνη απορία που εξέφρασε κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ήταν ***«θα τοποθετήσουμε στην έκτη ερώτηση την λύση κατευθείαν στον άξονα;»***.

Η τελευταία ερώτηση του μαθητή μας οδήγησε στο να κάνουμε την εξής υπόθεση:

- Ο μαθητής αυτός για να μπορέσει να τοποθετήσει τις τιμές πάνω στον άξονα πρώτα θα προσπαθήσει να λύσει τις ανισώσεις μέσω αλγεβρικών αλγορίθμων και ύστερα θα προχωρήσει στην τοποθέτηση των τιμών πάνω στον άξονα.

Β΄ Φάση – Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Ξεκινώντας από την πρώτη ερώτηση η απάντηση που μας έκανε, καταρχάς, εντύπωση είναι ίδια με αυτήν που μας είχε δώσει και η Γιάννα: ***«0,333… = 0,333»***. Όταν τον ρωτήσαμε ***«τι σημαίνει ο αριθμός 0,333…»*** αυτός απάντησε ***«τα τριάρια συνεχίζονται… το ίδιο ψηφίο… δε θα σταματήσω ποτέ… είναι άπειρο»***. Για να τον βοηθήσουμε να καταλάβει το λάθος του γράφουμε τον αριθμό 0,333… με περισσότερα από τρία δεκαδικά ψηφία. Τότε ο μαθητής συνειδητοποίησε το λάθος του, δίνοντάς μας νέα απάντηση: ***«Α ναι… λάθος… αυτός εδώ (****δείχνει τον αριθμό 0,333…****) είναι μεγαλύτερος»***. Όσον αφορά τα άλλα δύο ζευγάρια αριθμών της πρώτης ερώτησης ο Σωτήρης μας απαντά ως εξής: ***«1,888… < 1,9»*** και ***«4,999… < 5»***. Όταν του ζητάμε να μας εξηγήσει τις απαντήσεις του μας αναφέρει «το 1,9 είναι μεγαλύτερο γιατί έχουμε πάει στην επόμενη εκατοντάδα», «το ίδιο ισχύει και για το 5». Με λίγα λόγια, ο Σωτήρης, όπως και ο Ηλίας, χρησιμοποιεί τον κανόνα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία (σύγκριση ίδιων δεκαδικών θέσεων των ψηφίων). Αυτόν τον κανόνα τον «μεταφέρει» και στους δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία (όπως είναι οι περιοδικοί αριθμοί), κάνοντας, λανθασμένα, αποκοπή των άπειρων ψηφίων.

Η τελευταία του απάντηση (***«4,999… < 5»***) οδηγεί στον ακόλουθο διάλογο:

Καθηγητής: «Αφού το 4,999… είναι μικρότερο από το 5, αυτό σημαίνει ότι ανάμεσά τους θα υπάρχει κάποιος αριθμός»

Σωτήρης: «Ναι»

Κ: «Στην από κάτω ερώτηση όμως (*δείχνει την ερώτηση 2****), γράφεις ότι ανάμεσα στο 4,999… και 5 Δεν υπάρχει κανένας αριθμός»***

Σ: «Ναι….»

Κ: «Τι πιστεύεις τώρα ότι υπάρχει ή ότι δεν υπάρχει»

Σ: «Ίσως να υπάρχει…»

Κ: «Τότε γιατί έγραψες δεν υπάρχει…;»

Σ: «Όχι δεν υπάρχει»

Κ: «Άρα αφού δεν υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσά τους πως γίνεται το 4,999… να είναι μικρότερο από το 5;»

Σ: «Πωπω…!!!...... Αναλόγως πόσα ψηφία ακολουθούν μετά το από κει (*δείχνει τον αριθμό 4,999…****)»***

Κ: «Πόσα ψηφία ακολουθούν μετά από δω;»

Σ: «Δεν ξέρουμε… Ναι όμως ούτως η άλλως και να υπάρχει κάποιος αριθμός το 4,999… παραμένει ότι είναι μικρότερο του 5»

Κ: «Ωραία και ποιος είναι αυτός ο αριθμός»

Σ: «Από τη στιγμή που δεν βλέπουμε τα υπόλοιπα ψηφία (*εννοεί του 4,999…****) δεν ξέρουμε ποιος είναι ο αριθμός αυτός»***

Από τον παραπάνω διάλογο αντιλαμβανόμαστε πόσο δύσκολο είναι και για αυτόν τον μαθητή να δεχτεί την ισότητα μεταξύ του αριθμού 4,999… και του 5. Η ανεπαρκής κατανόηση των άπειρων ψηφίων ενός περιοδικού αριθμού τον οδηγεί στο να θεωρεί ότι μπορεί και να υπάρχει ένας πολύ μικρός αριθμός ανάμεσά τους. Απλώς δεν μπορούμε να τον γνωρίζουμε επειδή δεν ξέρουμε πόσα είναι τα υπόλοιπα ψηφία του 4,999…

Ακόμα, στην ερώτηση 2 ο Σωτήρης έχει απαντήσει ότι ανάμεσα στο 0,2 και στο 0,22 υπάρχει ο αριθμός 0,21. Παρατηρώντας την απάντηση αυτή, τον ρωτάμε αν υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσα στον 0,2 και 0,21. Ο μαθητής απαντά ***«το 0,201»***. Άρα συμπεραίνουμε ότι ο μαθητής αυτός, πράττει σωστά, μη «μεταφέροντας» την «ιδιότητα του επόμενου αριθμού» από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς αριθμούς με δεκαδική αναπαράσταση. Παρόλα αυτά, ελέγχοντας την απάντησή του στο τέταρτο ζευγάρι αριθμών (***«1/3 Δεν υπάρχει 2/3»***) υποθέτουμε ότι ο μαθητής «μεταφέρει», τελικά, την «ιδιότητα του επόμενου αριθμού» από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς αριθμούς όταν οι ρητοί βρίσκονται σε κλασματική αναπαράσταση. Για αυτό το λόγο του ζητάμε να μας δώσει εξήγηση σε αυτήν την απάντηση. Τότε ο μαθητής διορθώνει αμέσως την απάντησή του και μας λέει ότι έκανε λάθος, και ότι υπάρχει ο $\frac{1}{2}$ ανάμεσα στο 1/3 και στο 2/3. Πιο αναλυτικά:

Καθηγητής: «Πως το ξέρεις αυτό;»

Σωτήρης: «Το $\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από το 1/3 και μικρότερο από το 2/3»

Κ: «Πως μπορείς να το βρεις αυτό;»

Σ: «Αναλογικά με τα ποσοστά…»

Κ: «Δηλαδή;»

Σ: «Μπορούμε να το εξηγήσουμε με τη μέθοδο του δημοτικού… Πίτσα… (**υπονοεί να κάνουμε το γράφημα*****)»***

Κ: «Ναι» (**ο καθηγητής ξεκινάει να δημιουργεί το γράφημα*****)***

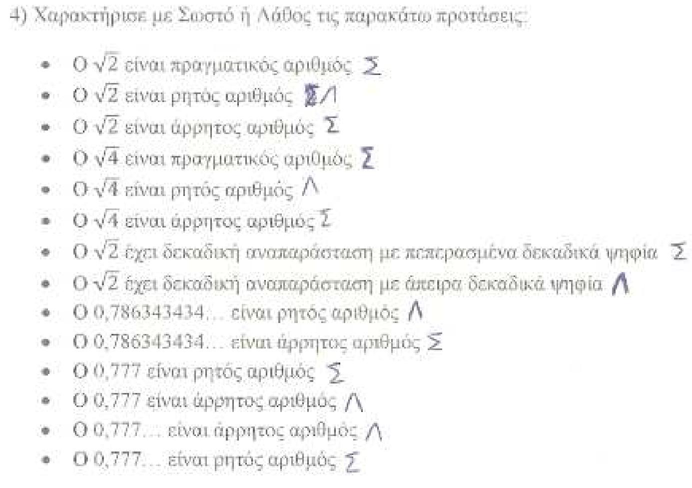
Σ: «Τρία κομμάτια έχουμε»

Κ: «Ίσα μεταξύ τους;»

Σ: «Ναι. Αν πάρουμε τα 2/3 της πίτσας και πάρουμε και το $\frac{1}{2}$ της πίτσας, τότε το $\frac{1}{2}$ θα είναι μικρότερο από τα 2/3»

Από την εξήγηση αυτή διαπιστώνουμε ότι η προϋπάρχουσα γνώση της οπτικής αναπαράστασης της έννοιας των κλασμάτων οδήγησε τον μαθητή στο να διορθώσει την απάντησή του.

Όσον αφορά την τέταρτη ερώτηση οι απαντήσεις του παρουσιάζονται στην επόμενη εικόνα:



4) Χαρακτήρισε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

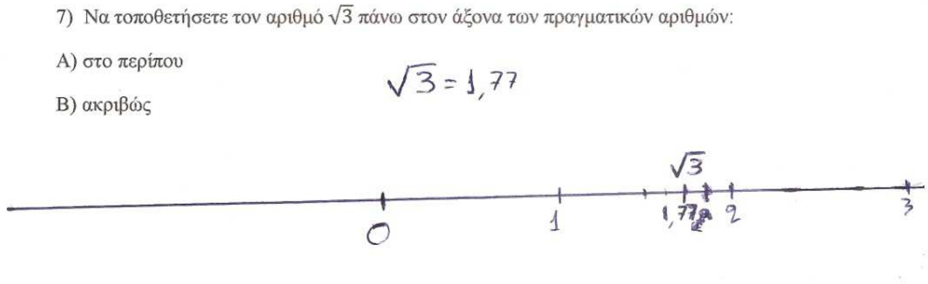
- Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός ~~Σ~~Λ
- Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{4}$ είναι πραγματικός αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός Λ
- Ο $\sqrt{4}$ είναι άρρητος αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία Σ
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία Λ
- Ο 0,786343434… είναι ρητός αριθμός Λ
- Ο 0,786343434… είναι άρρητος αριθμός Σ
- Ο 0,777 είναι ρητός αριθμός Σ
- Ο 0,777 είναι άρρητος αριθμός Λ
- Ο 0,777… είναι άρρητος αριθμός Λ
- Ο 0,777… είναι ρητός αριθμός Σ

Σύμφωνα με την 3η και 6η απάντησή του, υποθέτουμε ότι ο μαθητής αυτός θεωρεί ως άρρητους αριθμούς αυτούς που περιέχουν ρίζα. Για αυτό το λόγο, του ζητάμε να μας εξηγήσει ποιοι αριθμοί ονομάζονται ρητοί και ποιοι άρρητοι. Μετά από αρκετή σκέψη ο Σωτήρης μας απαντά: ***«οι άρρητοι έχουν να κάνουν με τις ρίζες και οι ρητοί με τα κλάσματα»***. Για να μπορέσει να αντιληφθεί τη λανθασμένη γενίκευση που έχει κάνει, δίνοντάς μας ένα διαστρεβλωμένο ορισμό για τους άρρητους (***«οι άρρητοι έχουν να κάνουν με τις ρίζες»***), του ζητάμε να μας πει πόσο κάνει ο αριθμός $\sqrt{4}$. Αμέσως, αντιλαμβάνεται το «μέγεθος» του λάθος του και γελώντας μας λέει «ο $\sqrt{4}$ μας κάνει 2 οπότε είναι ρητός». Στη συνέχεια, θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορεί να αναγνωρίσει την κλασματική αναπαράσταση των αριθμών 0,777 και 0,777… Για αυτό το λόγο του ζητάμε να μας γράψει τους αριθμούς 0,777 και 0,777… με μορφή κλάσματος, εφόσον τους έχει καταχωρήσει ως ρητούς αριθμούς στις απαντήσεις του. Μη μπορώντας να ανταπεξέλθει στην ερώτηση αυτή ο μαθητής απαντά ***«Έκανα λάθος είναι άρρητοι… γιατί δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα»***. Άρα, όπως στους προηγούμενους μαθητές έτσι και σε αυτόν, παρατηρούμε πόσο δύσκολο είναι να μετατρέψει έναν ρητό από την δεκαδική στην κλασματική του αναπαράσταση.

Όσον αφορά την πέμπτη ερώτηση ο μαθητής απάντησε ορθά τοποθετώντας τους αριθμούς στη σωστή σειρά.

Προχωρώντας στην έκτη ερώτηση, διαπιστώσαμε ότι και αυτός ο μαθητής, όπως και οι προηγούμενοι, έχει τοποθετήσει τις τιμές στον άξονα αφού προηγουμένως έχει λύσει τις ανισώσεις με αλγεβρικές μεθόδους. Στο σημείο αυτό, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι είναι ο πρώτος μαθητής που έχει λύσει όλες τις ανισώσεις σωστά (και αλγεβρικά και τοποθετώντας ορθά τις τιμές στον άξονα).

Τέλος, στην έβδομη ερώτηση παρατηρούμε ότι στο Α) υποερώτημα (*στο περίπου*) έχει τοποθετήσει τον αριθμό $\sqrt{3}$ ανάμεσα στο 1,5 και στο 2, ενώ στο Β) υποερώτημα (*ακριβώς*) έχει τοποθετήσει τον αριθμό $\sqrt{3}$ στο 1,77. Μάλιστα έχει σημειώσει **«$\boldsymbol{\sqrt{3} = 1,77}$»**. Αυτό μας έδωσε την αφορμή για τον ακόλουθο διάλογο:



Καθηγητής: «Που περίπου έβαλες το $\boldsymbol{\sqrt{3}}$;»

Σωτήρης: «Εδώ…** (δείχνει το σημείο στον άξονα)**»

Κ: «Και που έβαλες ακριβώς το $\boldsymbol{\sqrt{3}}$;»

Σ: «Στο 1,77»

Κ: «Το $\sqrt{3}$ ισούται με 1,77; Δηλαδή αν κάνω 1,77*1,77 θα βρω 3;»

Σ: «Δεν είμαι σίγουρος… αλλά νομίζω πως ναι…(*ο καθηγητής κάνει τον πολλαπλασιασμό* ***)… όχι δεν κάνει ακριβώς 3. Μπορούμε να το γνωρίζουμε ακριβώς;»***

Κ: «Τι εννοείς;»

Σ: «Εγώ με τις γνώσεις μου δεν ξέρω πόσο είναι ακριβώς;»

Κ: «Δηλαδή εγώ ξέρω με τις γνώσεις μου πόσο ακριβώς είναι το $\sqrt{3}$; Που σταματάει;»

Σ: «Ακριβώς δεν ξέρω αλλά ίσως με κάποιους υπολογισμούς μπορείτε να το βρείτε»

Κ: «Ακριβώς;»

Σ: «Βασικά ναι… για να υπάρχει, κάποιος λόγος θα υπάρχει… κάποιος πρέπει να το ξέρει»

Κ: «Άρα κάπου σταματάει;»

Σ: «Αυτό είναι σίγουρο»

Κ: «Άρα δεν έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία αλλά πεπερασμένα.»

Σ: «Για να υπάρχει σαν $\sqrt{3}$ ναι»

Κ: «Και άμα έχει πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία τότε γιατί δε σας λέγαμε εξ' αρχής ότι το $\sqrt{3}$ έχει για παράδειγμα ένα δισεκατομμύριο ψηφία που τελειώνουν με τον τάδε αριθμό; Γιατί σας ορίσαμε τους άρρητους;»

Σ: «Γιατί θα έβγαινε ένας τεράστιος δεκαδικός αριθμός και για ευκολία στους υπολογισμούς παίρνεις τον $\sqrt{3}$»

Από τον παραπάνω διάλογο συμπεραίνουμε ότι ο Σωτήρης δεν έχει «ξεκάθαρη» εικόνα της έννοιας του άρρητου αριθμού. Θεωρεί ότι αποτελείται από πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία απλώς δεν είναι σε θέση με τις γνώσεις του να τα γνωρίσει. Δεν έχει κατανοήσει τη βασική διαφορά μεταξύ των ρητών και των αρρήτων: ότι οι ρητοί γράφονται με κλασματική μορφή. Αν ένας δεκαδικός αριθμός έχει πεπερασμένα ψηφία τότε μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα με παρονομαστή δεκαδική δύναμη. Ακόμα, όσον αφορά τις γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα, χρειάστηκε να του παρουσιάσουμε τη γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{2}$ μέσω του πυθαγορείου θεωρήματος, ούτως ώστε να αντιληφθεί την ύπαρξή τους.

3.6. Ερωτηματολόγιο Χριστόφορου

Α΄ Φάση – Συμπλήρωση Ερωτηματολογίου

Ο έκτος και τελευταίος μαθητής στον οποίο δώσαμε το ερωτηματολόγιο και του οποίου στη συνέχεια πήραμε προσωπική συνέντευξη είναι ένας μαθητής Γ΄ Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης με το όνομα Χριστόφορος. Όταν μας ρώτησε στην αρχή του ερωτηματολογίου πόσην ώρα έχει για να το συμπληρώσει του απαντήσαμε και εκείνου ότι έχει αρκετή ώρα στη διάθεση του αλλά δε θα πρέπει να ξεπεράσει τα 45 λεπτά. Ο μαθητής αυτός έκανε συνολικά 12 λεπτά για να ολοκληρώσει το ερωτηματολόγιο. Κατά τη διάρκεια συμπλήρωσής του δεν εξέφρασε καμία απορία.

Β΄ Φάση – Απαντήσεις μαθητή & αποτελέσματα

Πρώτα από όλα, αυτό που μας έκανε εντύπωση στις απαντήσεις του μαθητή είναι ότι στην πρώτη ερώτηση χρησιμοποίησε το σύμβολο ≅ (περίπου ίσο) για να μπορέσει να κάνει τη σύγκριση μεταξύ των αριθμών. Όταν ζητήσαμε να μας κάνει σύγκριση με βάση τα σύμβολα < , > , =, ο μαθητής αυτός μας απάντησε: ***«0,333… > 0,333»*** , ***«1,888… < 1,9»*** , ***«4,999… < 5»***. Η τελευταία του απάντηση αποτελεί αφορμή για τον ακόλουθο διάλογο:

Καθηγητής: «Αφού το 4,999… < 5 αυτό σημαίνει ότι ανάμεσά τους πρέπει να υπάρχει κάποιος αριθμός. Στην παρακάτω απάντησή σου μου λες ότι ανάμεσά τους δεν υπάρχει κάποιος αριθμός»

Χριστόφορος: «Ναι….. Η αλήθεια είναι… ότι ανάμεσα στο 4,999… και στο 5 δεν υπάρχει κάποιος αριθμός νομίζω»

Κ: «Τότε πως το ένα είναι μικρότερο και το άλλο μεγαλύτερο;»

Χ: « Γιατί το 4,999… είναι ουσιαστικά το 5 – 0,111…»

Κ: «Δηλαδή… (*γράφει την πράξη της αφαίρεσης οριζόντια****)»***

Χ: «Όχι, δε θα βγει, γιατί εδώ γίνεται ένας χαμός… έχουμε κρατούμενα, βγαίνουν 8…»

Κ: «Άρα…;»

Χ: «Άρα δεν υπάρχει»

Κ: «Και πως γίνεται αυτό να είναι μικρότερο από αυτό (*δείχνει πρώτα το 4,999… και μετά το 5****)»***

Χ: «Η αλήθεια είναι ότι δεν έχει λογική απάντηση, απλώς επειδή βλέπω το 4 κόμμα κάτι και μετά το 5, αυτό ξέρω από το σχολείο, αυτή την πεποίθηση έχω ότι το 4,999… είναι μικρότερο του 5».

Από τον παραπάνω διάλογο αντιλαμβανόμαστε πόσο δύσκολο είναι και για αυτόν τον μαθητή να δεχτεί ότι οι αριθμοί 4,999… και 5 είναι ίσοι. Αυτό οφείλεται, και σε αυτήν την περίπτωση, στις λανθασμένες πεποιθήσεις της έννοιας του απείρου εν γένει, και πιο συγκεκριμένα των άπειρων ψηφίων ενός περιοδικού αριθμού. Επίσης από την τελευταία του απάντηση (***«Η αλήθεια είναι ότι δεν έχει λογική απάντηση, απλώς επειδή βλέπω το 4 κόμμα κάτι και μετά το 5, αυτό ξέρω από το σχολείο, αυτή την πεποίθηση έχω ότι το 4,999… είναι μικρότερο του 5»)*** αντιλαμβανόμαστε ότι έχει «μεταφέρει» λανθασμένα τον κανόνα σύγκρισης ρητών αριθμών με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία στους ρητούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Ακόμα, στη δεύτερη ερώτηση παρατηρούμε ότι έχει δώσει τις εξής απαντήσεις : ***«0,2 0,21 0,22» και «1/3*** $\frac{1}{2}$ ***2/3»***. Θέλοντας να ελέγξουμε αν «μεταφέρει» την ιδιότητα του «επόμενου αριθμού» από τους φυσικούς στους ρητούς, τον ρωτάμε αν υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσα στο 0,2 και στο 0,22. Ο μαθητής τότε μας απαντά ***«0,205»***. Οπότε φαίνεται ότι ο μαθητής αυτός δε «μεταφέρει» την παραπάνω ιδιότητα από το ένα σύνολο στο άλλο. Όσον αφορά την απάντηση του ***«1/3*** $\frac{1}{2}$ ***2/3»***, ο μαθητής μας εξηγεί ότι το βρήκε με ισοδύναμα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, μετέτρεψε τα κλάσματα 1/3 και 2/3 στα 30/90 και 60/90 αντίστοιχα, και πήρε το 45/90 (το οποίο είναι ανάμεσα τους) το οποίο το απλοποίησε στο $\frac{1}{2}$. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι ο Χριστόφορος, όπως ο Ηλίας και η Ναταλία, χρησιμοποίησε την κλασματική αναπαράσταση για να μπορέσει να βρει κάποιον πραγματικό αριθμό ανάμεσα, χωρίς να χρησιμοποιήσει καθόλου τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών. Άρα, φαίνεται ότι ο μαθητής αυτός είναι ικανός να μπορεί να διαχειριστεί την έννοια της πυκνότητας των ρητών αριθμών χωρίς τη μετατροπή τους από κλασματική σε δεκαδική αναπαράσταση.

Εν συνεχεία, στην τέταρτη ερώτηση έχει απαντήσει:

4) Χαρακτήρισε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

- Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός Λ
- Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός Λ
- Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{4}$ είναι πραγματικός αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός Σ
- Ο $\sqrt{4}$ είναι άρρητος αριθμός Λ
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία Λ
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία Σ
- Ο 0,786343434… είναι ρητός αριθμός Λ
- Ο 0,786343434… είναι άρρητος αριθμός Σ
- Ο 0,777 είναι ρητός αριθμός Σ
- Ο 0,777 είναι άρρητος αριθμός Λ
- Ο 0,777… είναι άρρητος αριθμός Σ
- Ο 0,777… είναι ρητός αριθμός Λ

Πιο αναλυτικά από τις έξι πρώτες απαντήσεις του, υποθέτουμε ότι δεν έχει «ξεκάθαρη» εικόνα της έννοιας των πραγματικών αριθμών. Μάλιστα, υποθέτουμε ότι ταυτίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών με το σύνολο των ρητών. Αυτό το επιβεβαιώνει και η απάντησή του ***«Ρητοί αριθμοί πιστεύω ότι είναι κάτι παρόμοιο με τους πραγματικούς»***. Όταν τον ρωτήσαμε να μας πει τι είναι ρητοί αριθμοί και τι είναι άρρητοι αυτός μας απάντησε ***«Δεν έχω ιδέα….. Αυτό που καταλαβαίνω είναι ότι οι άρρητοι θα είναι το αντίθετο των ρητών επειδή έχουν το στερητικό α στην αρχή»***. Χρειάστηκε στο σημείο αυτό να του υπενθυμίσουμε τον ορισμό των ρητών αριθμών και τότε ακολούθησε ο επόμενος διάλογος:

Καθηγητής: «Ο 0,777 είναι ρητός ή άρρητος;»

Χριστόφορος: «Ο 0,777 είναι… (*σκέφτεται πως μπορεί να το γράψει ως κλάσμα****) είναι άρρητος, γιατί δεν μπορούμε να το γράψουμε ως κλάσμα»***

Κ: «Να σε ρωτήσω κάτι άλλο. (*γράφει το κλάσμα* $\frac{777}{1000}$***) Αυτό εδώ τι πράξη είναι;***

Χ: «(*χαμογελάει****) Είναι διαίρεση…»***

Κ: «Άρα;»

Χ: «Άρα είναι ρητός»

Κ: «Το 0,777… τι είναι;»

Χ: «Το 0,777… είναι… θα μπορούσαμε να κάνουμε ουσιαστικά σαν κολπάκι εδώ και να πούμε ότι είναι 777… προς 1000…»

Κ: «Και εγώ μαθηματικά πως θα το εξηγήσω; Πως θα κάνω διαίρεση με τις τελίτσες;»

Χ: «Μμμ η αλήθεια είναι ότι οι τελίτσες δε διαιρούνται… Τον κάνουμε άρρητο αυτόν»

Κ: «Αν σου δώσω τον 2/3 πως τον κάνεις ως πράξη;»

Χ: «Διαιρώ τον 2 με τον 3 (*ξεκινάει να κάνει την πράξη και βρίσκει 0,666…****)***

Κ: «Αυτό δε θα είναι περιοδικός;»

Χ: «Ναι αλλά δε βγάζει 7»

Κ: «Κάτι αντίστοιχο θα μπορούσε να υπάρχει;»

Χ: «Μμμ… μισό λεπτό…όχι»

Κ: «Και εγώ που θα μπορώ να ξεχωρίσω αν ο περιοδικός είναι ρητός ή άρρητος; Δηλαδή στο 0,666… βρίσκεις ένα κλάσμα ενώ στο 0,777… δε βρίσκεις οπότε μου λες ότι είναι άρρητος»

Χ: «Δεν έχω ιδέα για το πώς μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε αλλά πιστεύω ότι πρέπει να υπάρχει κάποιος τρόπος»

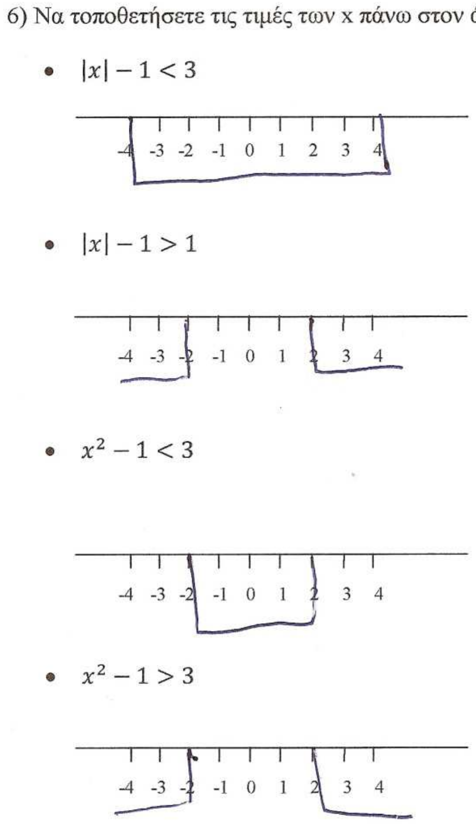
Κ: «…»

Χ: «Ή είναι όλα ρητοί και απλώς εμείς δεν μπορούμε να το καταλάβουμε»

Από τον διάλογο αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι και ο μαθητής αυτός ενώ δεν έχει καμία δυσκολία στην μετατροπή ενός ρητού αριθμού από την κλασματική στη δεκαδική αναπαράσταση, δυσκολεύεται έως αδυνατεί στο να μετατρέψει έναν περιοδικό αριθμό σε κλάσμα.

Όσον αφορά την πέμπτη ερώτηση ο Χριστόφορος απάντησε ορθά τοποθετώντας τους αριθμούς στη σωστή σειρά.

Συνεχίζοντας στην έκτη ερώτηση, αυτό που μας έκανε μεγάλη εντύπωση είναι ότι ο μαθητής τοποθέτησε κατευθείαν τις τιμές πάνω στους άξονες με σωστό τρόπο χωρίς να σημειώσει καθόλου αλγεβρικές πράξεις. Όταν τον ρωτήσαμε πως υπολόγισε τις τιμές αυτές διαπιστώσαμε ότι πρώτα έλυσε τις ανισώσεις με αλγεβρικούς αλγορίθμους στο μυαλό του και ύστερα τοποθέτησε τις τιμές στον άξονα.



Τέλος, στην ερώτηση 7$^{\alpha}$) θεωρεί ότι μία προσέγγιση του $\sqrt{3}$ είναι το 1,7, και για αυτό το λόγο τοποθετεί το $\sqrt{3}$ ανάμεσα στο 1,5 και στο 2, θεωρώντας ότι βρίσκεται περίπου εκεί. Όταν του ζητάμε να μας απαντήσει στο δεύτερο ερώτημα μας λέει χαρακτηριστικά: ***«Δώστε μου λίγο χρόνο γιατί νομίζω ότι έχει κάποιο τρικ»***. Μετά από λίγα λεπτά, και αφού παρατηρήσαμε ότι έκανε κάποιου είδους σχήματα στο χαρτί, μας απαντά: ***«Αν ήταν ρητός όπως είναι το 2/3 θα μπορούσαμε να το τοποθετήσουμε στον άξονα αν το χωρίζαμε (δείχνει το διάστημα από 0 έως 1 πάνω στον άξονα) σε τρία ίσα μέρη και τότε θα παίρναμε τα 2 από αυτά»***. Από την τελευταία του απάντηση διαπιστώνουμε ότι ο Χριστόφορος προσπάθησε να δώσει κάποιου είδους γεωμετρική λύση στο πρόβλημα αυτό. Απλώς επειδή δεν μπορούσε να σκεφτεί τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε έναν άρρητο στον άξονα, απλούστευσε τη σκέψη του και τοποθέτησε έναν ρητό περιοδικό αριθμό (το 2/3 = 0,666…) πάνω στον άξονα με γεωμετρικό τρόπο. Αυτός ήταν και ο μοναδικός μαθητής που μπόρεσε από μόνος του να σκεφτεί, έστω και απλουστευμένα, τις γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα Έρευνας – Διδακτικές Προτάσεις

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι μαθητές Γ΄ Λυκείου (Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης) τις αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών καθώς και τη συμπεριφορά που εκδηλώνουν όσον αφορά τις αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα των πραγματικών αριθμών. Βασιζόμενοι σε προηγούμενες έρευνες των α) ***Souyoul, Zachariades & Giannakoulias (2007)***, β) ***Pantsidis et al. (2005)*** και γ) ***Sirotic & Zazkis (2007)***, προσπαθήσαμε να δώσουμε απάντηση στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Πως συγκρίνουν οι μαθητές ρητούς αριθμούς με πεπερασμένα και ρητούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία (περιοδικούς αριθμούς);
- Μπορούν οι μαθητές να αναγνωρίσουν την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών; (όταν οι ρητοί βρίσκονται και σε κλασματική αλλά και σε δεκαδική αναπαράσταση)
- Μπορούν οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι οι αριθμοί 4,999… και 5 είναι ίσοι;
- Πως αντιμετωπίζουν οι μαθητές τα άπειρα ψηφία ενός περιοδικού αριθμού και τα άπειρα ψηφία ενός άρρητου αριθμού;
- «Μεταφέρουν» οι μαθητές την ιδιότητα του «επόμενου αριθμού» από το σύνολο των φυσικών αριθμών στο σύνολο των ρητών;
- Ταυτίζουν οι μαθητές το σύνολο των ρητών αριθμών με το σύνολο των πραγματικών αριθμών;
- Μπορούν οι μαθητές να μετατρέψουν έναν ρητό αριθμό από την κλασματική του μορφή στη δεκαδική του και το αντίστροφο;
- Μπορούν οι μαθητές να διατάξουν ρητούς αριθμούς όταν είναι σε κλασματική μορφή;
- Πως χρησιμοποιούν τον άξονα των πραγματικών αριθμών όταν λύνουν ανισώσεις;
- Μπορούν οι μαθητές να βρίσκουν προσεγγίσεις του $\sqrt{3}$ χωρίς τη χρησιμοποίηση οποιασδήποτε ηλεκτρονικής μηχανής (κομπιουτεράκι);
- Λαμβάνουν υπόψη τους οι μαθητές τις γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα των πραγματικών αριθμών;

Πιο αναλυτικά, πρώτα από όλα, αξίζει να σχολιάσουμε το γεγονός ότι όλοι οι μαθητές «έπεσαν» σε αντίφαση με τις εξής απαντήσεις:

- ***«4,999… είναι μικρότερο από το 5»***
- ***«Δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα στο 4,999… και στο 5»***

Μάλιστα, όταν σχολιάσαμε την αντίφαση αυτή, ενώ όλοι οι μαθητές κατανόησαν την αντίθεση ανάμεσα στις απαντήσεις τους, κανένας δεν ήταν σε θέση να δεχτεί ότι οι αριθμοί 4,999… και 5 είναι ίσοι. Θεωρούσαν ότι σίγουρα το ***«4,999… < 5»***, ακόμα και αν δεν υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσά τους. Αν, από την άλλη μεριά, υπάρχει κάποιος αριθμός ανάμεσά τους, οι μαθητές ισχυρίστηκαν ότι δεν είναι σε θέση με τις γνώσεις που έχουν να τον εντοπίσουν. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με την έρευνα των ***Souyoul, Zachariades & Giannakoulias (2007)***, όπου το 45% των προπτυχιακών φοιτητών έδωσαν τις ίδιες απαντήσεις. Αν υπολογίσουμε το γεγονός ότι το δείγμα μας αποτελούταν από μαθητές Γ΄ Λυκείου είναι φυσιολογικό το ποσοστό στην έρευνά μας να είναι μεγαλύτερο.

Για να μπορέσουμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να καταλάβουν την ισότητα μεταξύ των δύο αριθμών (4,999… και 5) προτείνουμε δύο διδακτικές προτάσεις:

<u>Α) Μέσω αλγεβρικών βασικών πράξεων</u>

Ο αριθμός 4,999… είναι ακριβώς ίσος με τον αριθμό 5.

Λύση

Συμβολίζουμε με κ τον αριθμό $4{,}999\ldots$ Δηλαδή $\kappa = 4{,}999\ldots$ Πολλαπλασιάζουμε τον κ με το 10 και παίρνουμε $10\kappa = 49{,}999\ldots$ (το αποτέλεσμα λαμβάνεται απλώς μεταφέροντας την υποδιαστολή του κ μια θέση προς τα δεξιά). Αφαιρώντας τον κ από τον 10κ παίρνουμε 9κ, του οποίου το δεκαδικό μέρος είναι μιας άπειρα ακολουθία μηδενικών. Με άλλα λόγια, ο αριθμός 9κ είναι ακέραιος αφού το δεκαδικό του ανάπτυγμα έχει μόνο ακέραιο μέρος. Διαιρώντας τον 9κ με το 9 παίρνουμε τον κ, ο οποίος είναι επίσης ακέραιος ίσος με το 5. Δηλαδή:

$$10\kappa = 49{,}999\ldots$$

$$-\ \kappa = 4{,}999\ldots$$

$$9\kappa = 45$$

$$\kappa = 5$$

<u>Β) Μέσω αθροίσματος απείρων όρων γεωμετρικής προόδου</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριθμός 4,999… είναι ίσος με το 5. Για να το απλουστεύσουμε αρκεί να δείξουμε ότι το δεκαδικό μέρος 0,999… είναι ίσο με το 1.

Μέσω αθροίσματος γεωμετρικής προόδου μπορούμε το 0,999… να το γράψουμε ως εξής:

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο του αθροίσματος των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = \frac{9}{10}$ και $\lambda = \frac{1}{10}$ θα έχουμε:

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Άρα αποδείξαμε ότι $0{,}999\ldots = 1$.

Αυτό που αξίζει να αναφέρουμε είναι ότι δυστυχώς ο παραπάνω τύπος, ο οποίος εισαγάγει τους μαθητές στα άπειρα αθροίσματα, τα τελευταία 3 χρόνια είναι εκτός σχολικής ύλης (διδάσκονταν στα Μαθηματική Γενικής Παιδείας της Β΄ Λυκείου).

Ακόμα, βασιζόμενοι στην έρευνα των ***Vamvakoussi & Vosniadou (2010)***, διαπιστώνουμε ότι και σε αυτήν την ηλικία και παρότι το μαθηματικό τους επίπεδο είναι σε προχωρημένο στάδιο, οι μαθητές εξακολουθούν α) να έχουν την τάση να «μεταφέρουν» τη διάταξη των φυσικών αριθμών (έννοια του «επόμενου αριθμού») στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και β) έχουν την τάση να συγκρίνουν τους ρητούς αριθμούς χωρίς να τους αλλάζουν την αναπαράστασή τους. Δηλαδή όταν είναι σε δεκαδική αναπαράσταση βρίσκουν έναν ρητό αριθμό ανάμεσα τους ο οποίος είναι σε δεκαδική αναπαράσταση. Όμοια εργάζονται όταν ο ρητός αριθμός είναι σε κλασματική αναπαράσταση. Μόνο ένας μαθητής (ο Βαγγέλης) μετέτρεψε τους ρητούς από κλασματική σε δεκαδική αναπαράσταση προκειμένου να βρει έναν αριθμό ανάμεσά τους.

Μια διδακτική προσέγγιση, προκειμένου να τους βοηθήσουμε να κατανοήσουν την έννοια της πυκνότητας μεταξύ δύο αριθμών, είναι μέσω του αριθμητικού μέσου δύο αριθμών. Ειδικότερα, αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$, ένας από τους άπειρους αριθμούς που βρίσκονται ανάμεσά τους και μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, είναι ο $\text{αριθμητικός μέσος των } \alpha \text{ και } \beta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν ότι ι) ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός και ιι) ότι η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς επ' άπειρο (***Zachariades, 2007***).

Επιπλέον, παρότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το βασικό σύνολο των πράξεων τους, διαπιστώνουμε αρκετές δυσκολίες στην αναγνώριση των δύο βασικότερων υποσυνόλων του, του σύνολο των ρητών αριθμών και του συνόλου των αρρήτων αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, αρκετοί μαθητές ταυτίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών με το σύνολο των ρητών αριθμών, εξαιρώντας με αυτό τον τρόπο, τους άρρητους από το σύνολο των πραγματικών. Μάλιστα, αξίζει να σημειώσουμε ότι κανένας μαθητής δεν μας έδωσε ορθή απάντηση όσον αφορά τον ορισμό των ρητών αριθμών. Οι ορισμοί που μας έδωσαν οι μαθητές ήταν «διαστρεβλωμένοι» *“distorted definitions”* ***(Pinto & Tall, 1996)***. Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις τους: ***«είναι αυτοί που γράφονται ως κλάσματα»***, ***«είναι αυτοί που έχουν ρίζες… εκτός αν αυτοί που έχουν ρίζες είναι οι άρρητοι».*** Ακόμη, δείχνουν να μην έχουν «ξεκάθαρη» εικόνα για την απειρία του δεκαδικού μέρους των πραγματικών αριθμών. Θεωρούν, δηλαδή, ότι αν ένας αριθμός έχει άπειρα ψηφία τότε είναι σίγουρα άρρητος αριθμός. Αυτός είναι και ο λόγος όπου θεωρούν τους περιοδικούς αριθμούς (όπως τον 0,777…) άρρητους. Για να μπορέσουν να ξεπεράσουν τη δυσκολία αυτή τους ζητήσαμε να διαιρέσουν τους ρητούς αριθμούς $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ και να μας πουν το αποτέλεσμα της πράξης. Τότε όλοι οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι εφόσον οι αριθμοί $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ είναι ρητοί, τότε και οι ισοδύναμοί τους αριθμοί, 0,333… και 0,666… αντίστοιχα, θα είναι και αυτοί ρητοί αριθμοί. Ένας μόνο μαθητής προέβαλλε αντίρρηση (ο Χριστόφορος) όταν μας είπε ***«Ναι αλλά δε βγάζει 7»***. Ο μαθητής (όπως έχουμε ήδη αναφέρει) υπονοούσε ότι ενώ τον 0,666… μπορούμε να τον γράψουμε με κλασματική μορφή, τον αριθμό 0,777… δε γίνεται να τον γράψουμε με τη μορφή κλάσματος. Εν συντομία, ενώ η μετατροπή της κλασματικής αναπαράστασης σε δεκαδική αναπαράσταση δείχνει να μην τους προβληματίζει (κάνουν αμέσως τη διαίρεση), η μετατροπή σε κλάσμα ενός περιοδικού αριθμού (όπως είναι ο 0,777…), τους δυσκολεύει πάρα πολύ. Μια διδακτική προσέγγιση με την οποία μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές στο να μπορούν εύκολα να μετατρέπουν έναν περιοδικό αριθμό σε κλάσμα είναι η ακόλουθη:

<u>Παράδειγμα μετατροπής ενός περιοδικού αριθμού σε κλάσμα</u>

Ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός 0,777… = $0,\overline{7}$ να γραφτεί με την κλασματική μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν είναι φυσικοί αριθμοί.

Λύση

Ισχύει ότι $0{,}777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \cdots$

Άρα ο αριθμός $0{,}777\ldots$ είναι το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = \frac{7}{10}$ και $\lambda = \frac{1}{10}$

Άρα, $0{,}777\ldots = S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$

Αυτό που αξίζει να αναφέρουμε, πάλι, είναι ότι δυστυχώς ο παραπάνω τύπος, ο οποίος εισαγάγει τους μαθητές στα άπειρα αθροίσματα, τα τελευταία 3 χρόνια είναι εκτός σχολικής ύλης (διδάσκονταν στα Μαθηματική Γενικής Παιδείας της Β΄ Λυκείου).

Επιπρόσθετα, αναφέρουμε ότι μαθητές δεν συνάντησαν δυσκολία ούτε α) στη σύγκριση των περιοδικών αριθμών με ρητούς αριθμούς πεπερασμένων δεκαδικών ψηφίων αλλά ούτε και β) στη διάταξη των ρητών αριθμών όταν αυτοί αναπαρίστανται με κλασματική μορφή.

Επιπλέον, όσον αφορά τη σχέση των μαθητών με τον άξονα των πραγματικών αριθμών μπορούμε να βγάλουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι μαθητές τοποθετούν τους αριθμούς (τις τιμές της μεταβλητής x) στον άξονα των πραγματικών αριθμών αφού έχουν λύσει πρώτα τις ανισώσεις μέσω αλγεβρικών αλγορίθμων (***Pantsidis et al., 2005***). Δηλαδή, ο άξονας αποτελεί για αυτούς έναν τρόπο παρουσίασης των λύσεων αφού πρώτα τις έχουν βρει μέσω αλγεβρικών διαδικασιών επίλυσης.
- Οι περισσότεροι μαθητές έκαναν αλγεβρικά λάθη στην επίλυση των ανισώσεων. Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με την έρευνα των ***Pantsidis et al. (2005)***, όπου οι τελευταίοι είχαν εντοπίσει ότι μόνο το 23,4 – 29,5% απάντησε σωστά στις ανισώσεις με απόλυτα, και μόνο το 7,8 – 9,8% απάντησε σωστά στις ανισώσεις με τετράγωνα.

Τέλος, θα πρέπει να σχολιάσουμε το γεγονός ότι κανένας μαθητής δεν είναι εξοικειωμένος με τη γεωμετρική ερμηνεία του άξονα (***Pantsidis et al. 2005***, ***Sirotic & Zazkis, 2007***). Όλοι οι μαθητές αναγνωρίζουν μόνο τις αριθμητικές ιδιότητες του άξονα, και για αυτό το λόγο τους ήταν πάρα πολύ δύσκολο να δώσουν μια γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{3}$. Μόνο ένας μαθητής (ο Χριστόφορος) σκέφτηκε τις γεωμετρικές ιδιότητες του άξονα προσπαθώντας να τοποθετήσει το 2/3 πάνω στον άξονα, αλλά δεν κατάφερε να «προχωρήσει» την ιδέα του στους άρρητους αριθμούς.

Συμπεραίνοντας, αν και οι πραγματικοί αριθμοί και ο άξονας τους διδάσκονται από την αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Β΄ Γυμνασίου), παρατηρούμε ότι μέχρι και το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτούς. Ειδικότερα, στην παρούσα έρευνα προσπαθήσαμε να ελέγξουμε αν τα συμπεράσματα προϋπαρχουσών ερευνών ισχύουν για μαθητές οι οποίοι έχουν προχωρημένο μαθηματικό επίπεδο (Γ΄ Λυκείου). Ελπίζουμε τα ευρήματά μας να αξιοποιηθούν ως βάση για μια περαιτέρω διδακτική έρευνα με στόχο τη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών μοντέλων τα οποία θα βοηθούν τους μαθητές στην πλήρη αφομοίωση της έννοιας των πραγματικών αριθμών.

Βιβλιογραφία

[1] Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Γ΄ Έκδοση. Αθήνα. Νεφέλη.

[2] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (1991). *Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα. ΟΕΔΒ.

[3] Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics, 7(2)*, 18-23.

[4] Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Π. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα. Εκδόσεις Πατάκη.

[5] Γιαννακούλιας, Ε., Γιωτόπουλος, Σ. & Νεγρεπόντης, Σ. (1991). *Απειροστικός Λογισμός. Τόμος Ι.* Αθήνα. Συμμετρία

[6] Dedekind, R. (1963). *Essays on the theory of numbers*. New York. Dover Publications.

[7] Duval, R. (1993). Registres de Representation Semiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensee. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 37-65.

[8] Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics, 16(4)*, 411-424.

[9] Ζαχαριάδης, Θ. (2007). *Σημειώσεις του μαθήματος Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού*. Τομέας Διδακτική των Μαθηματικών. Τμήμα Μαθηματικών. ΕΚΠΑ.

[10] Gagatsis, A. & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 447-454), Bergen, Norway: Bergen University College.

[11] Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *24 (5)*, 645 – 657.

[12] Gagatsis, A., Shiakalli, M. & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l’ addition et de la soustraction den nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8*, 95-112.

[13] Giannakoulias, E., Souyoul, A. & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

[14] Greeno, J. G., & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms, *Phi Delta Kappan*, *78*, 361-67.

[15] Heath, T. (1956). *The Thirteen Books of the Elements. Vol 2.* Book V. 2nd Edt. Dover Publications.

[16] Κάππου, Δ. (1962). *Μαθήματα αναλύσεως. Απειροστικό λογισμός*. Τεύχος Α΄. Έκδοση Β΄. Αθήνα.

[17] Landau, E. (2001). *Foundations of Analysis*. American Mathematical Society.

[18] Moise, E. (1990). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* 3rd ed. Boston: Addison-Wesley.

[19] Moseley, B. (2005). Students' early Mathematical Representation knowledge: The effects of emphasizing single of multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60, 1,* pp. 37-69.

[20] Νεγρεπόντης, Σ. (2009*). Σημειώσεις του μαθήματος Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά – Στοιχεία Ευκλείδη*. Τομέας Διδακτική των Μαθηματικών. Τμήμα Μαθηματικών. ΕΚΠΑ.

[21] Pantsidis, C., Zoulinaki, F., Spyrou, P., Gagatsis, A & Elia, I. (2004). Understanding of the ordering of numbers and the use of absolute value on the axis of real number. In Gagatsis et al. (eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, vol. 1*, Cyprus Mathematical Society, Palermo, pp. 341-353.

[22] Pinto, M. & Tall, D. (1996). Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* pp 139-146.

[23] Schwarzenberger, R. L.E & Tall, D. O. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching, 82,* 44-49.

[24] Shiakalli, M. (2004). The number line as a geometrical model for the teaching of addition and subtraction of natural numbers: Research application to students of first and second grade of primary school. In A. Gagatsis, A. Evangelidou, I. Elia & P. Spyrou (Eds.), *Representations and Learning in Mathematics, Vol. 1: Problem solving, models and functions* (pp. 51-78). Lefkosia: Intercollege Press (in Greek).

[25] Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of notion of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, (Vol. 25, pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

[26] Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line- where are they?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38:4*, 477-488.

[27] Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία – Στοιχεία*. Τόμος ΙΙ. Βιβλίο V. Αθήνα. ΟΕΔΒ.

[28] Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, pp 151-169.

[29] Tall, D. O. (1995). Mathematics Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Proceedings of PME 19, I*, 61-75.

[30] Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction, vol. 28, 2*, pp. 181-209.

[31] Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning Mathematics. In D. Tall (Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Dordrecht, 65-81.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Αξιώματα του «μεταξύ»

Α.1. Αν $A - B - C$, τότε $C - B - A$.

Α.2. Για κάθε τρία συγγραμμικά σημεία, το ένα μόνο βρίσκεται ανάμεσα στα άλλα δύο.

Α.3. Μπορούμε να διατάξουμε οποιαδήποτε τέσσερα συγγραμμικά σημεία έτσι ώστε να έχουμε τη διάταξη $A - B - C - D$.

Α.4. Για οποιαδήποτε σημεία A και B, υπάρχει α) ένα σημείο C τέτοιο ώστε $A - B - C$, και β) ένα σημείο D τέτοιο ώστε $A - D - B$.

Α.5. Αν ισχύει $A - B - C$, τότε τα A, B και C είναι τρία διαφορετικά σημεία της ίδιας γραμμής.

Αξιώματα ισότητας για τμήματα

Β.1. Στα τμήματα, η ισότητα είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Β.2. Το αξίωμα κατασκευής τμημάτων. Για δοσμένο ευθύγραμμο $\overline{AB}$ και διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$, υπάρχει ένα ακριβώς σημείο Ε του $\overrightarrow{CD}$ τέτοιο ώστε $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

Β.3. Το αξίωμα πρόσθεσης τμημάτων. Αν ισχύουν οι σχέσεις: $A - B - C,\ A' - B' - C',\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, και\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ τότε $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Β.4. Το αξίωμα αφαίρεσης τμημάτων. Αν ισχύουν οι σχέσεις: $A - B - C,\ A' - B' - C',\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, και\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ τότε $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Β.5. Κάθε τμήμα έχει μόνο ένα μέσο. Δηλαδή για κάθε τμήμα $\overline{AB}$ υπάρχει ένα σημείο C έτσι ώστε $A - C - B$ και $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

Αξιώματα ισότητας για γωνίες

Γ.1. Στις γωνίες, η ισότητα είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Γ.2. Το αξίωμα κατασκευής γωνιών. Έστω γωνία $\angle ABC$ και διάνυσμα $\overrightarrow{B'C'}$ και έστω H το ημιεπίπεδο που περιέχει το διάνυσμα $\overrightarrow{B'C'}$. Τότε υπάρχει ένα μόνο διάνυσμα $\overrightarrow{B'A'}$ με το σημείο A' στο H, τέτοιο ώστε $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

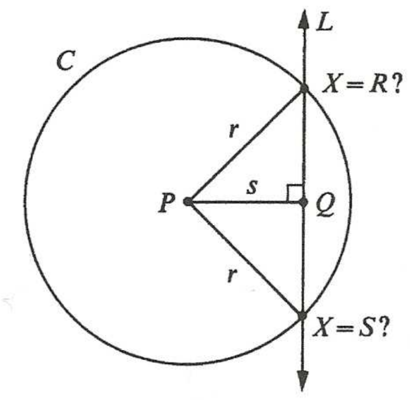
Γ.3. Το αξίωμα της πρόσθεσης γωνιών. Αν το D είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $\angle BAC$ και το D' είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $\angle B'A'C'$ και $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ και $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ τότε $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Γ.4. Το αξίωμα της αφαίρεσης γωνιών. Αν το D είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $\angle BAC$ και το D' είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $\angle B'A'C'$ και $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ και $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ τότε $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ B

Θεώρημα Γραμμής Κύκλου

Αν μια ευθεία τέμνει το εσωτερικό ενός κύκλου, τότε τέμνει τον κύκλο ακριβώς σε δύο σημεία.



Θεώρημα Δύο κύκλων

Έστω C και C' δύο κύκλοι με ακτίνες α και b, και έστω c η απόσταση μεταξύ των δύο κέντρων τους. Αν κάθε από τους αριθμούς α, b, c είναι μικρότερος από το άθροισμα των άλλων δύο, τότε οι κύκλοι C και C' τέμνονται σε δύο σημεία. Και αυτά τα δύο σημεία τομής βρίσκονται σε αντίθετες μεριές (σε διαφορετικά ημιεπίπεδα) από αυτές που ορίζει η ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1) Σύγκρινε τους αριθμούς:

- 0,333... 0,333
- 1,888… 1,9
- 4,999… 5

2) Σε κάθε ζευγάρι από τα παρακάτω γράψε έναν αριθμό που υπάρχει ανάμεσά τους. Αν δεν υπάρχει γράψε «Δεν υπάρχει».

- 0,2 0,22
- 1,888… 1,9
- 4,999… 5
- 1/3 2/3

3) Μπορείς να βρεις δύο πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε να μην υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσά τους; Αν ναι γράψε τους. Αν όχι γράψε «δεν υπάρχουν»

4) Χαρακτήρισε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

- Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός
- Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός
- Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός
- Ο $\sqrt{4}$ είναι πραγματικός αριθμός
- Ο $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός
- Ο $\sqrt{4}$ είναι άρρητος αριθμός
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία
- Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία
- Ο 0,786343434… είναι ρητός αριθμός
- Ο 0,786343434… είναι άρρητος αριθμός

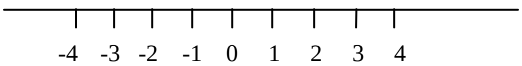
- Ο 0,777 είναι ρητός αριθμός
- Ο 0,777 είναι άρρητος αριθμός
- Ο 0,777… είναι άρρητος αριθμός
- Ο 0,777… είναι ρητός αριθμός

5) Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στη σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < :

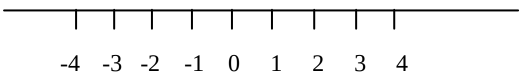
$$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$$

6) Να τοποθετήσετε τις τιμές των x πάνω στον άξονα:

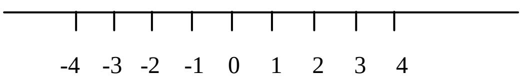
- $|x| - 1 < 3$



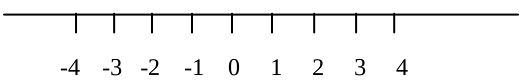
- $|x| - 1 > 1$



- $x^2 - 1 < 3$



- $x^2 - 1 > 3$



7) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

Α) στο περίπου

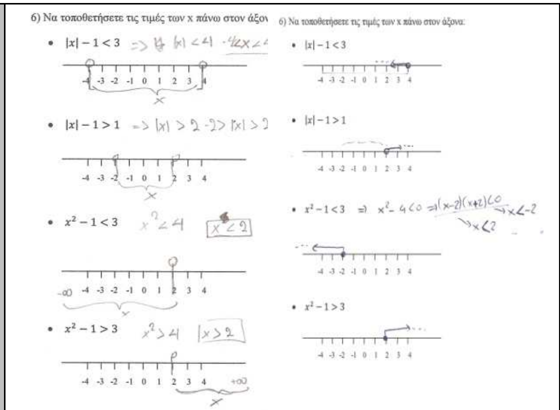
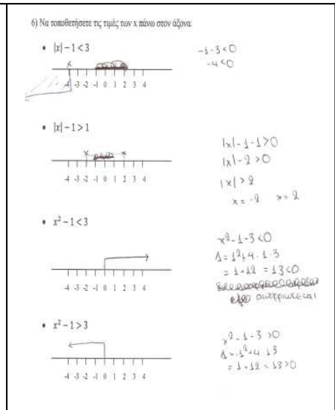
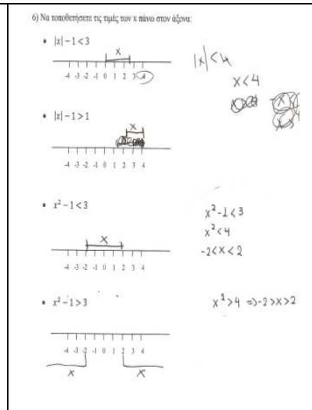
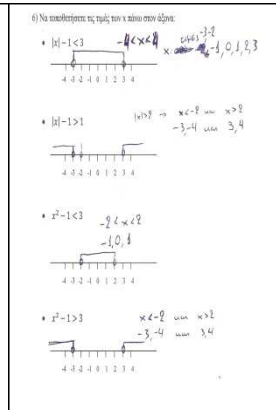
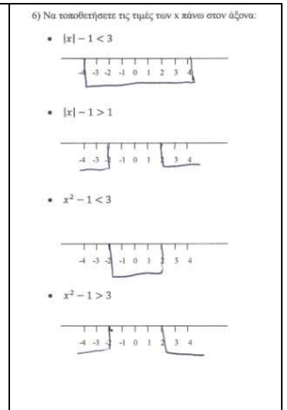
Β) ακριβώς

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

	Βαγγέλης	**Ηλίας**	**Γιάννα**	**Ναταλία**	**Σωτήρης**	**Χριστόφορος**
Ερώτηση 1^{η} : Σύγκρινε τους αριθμούς: 0,333... 0,333 1,888… 1,9 4,999… 5	0,333…> 0,333 1,888… < 1,9 4,999… < 5	0,333… < 0,333 1,888… < 1,9 4,999… < 5	0,333… = 0,333 1,888… < 1,9 4,999… < 5	0,333 < 0,333… < 1,888… < 1,9 < 4,999… < 5	0,333… = 0,333 1,888... < 1,9 4,999… < 5	0,333… ≅ 0,333 (>) 1,888… ≅ 1,9 (<) 4,999… ≅ 5 (<)
Ερώτηση 2^{η} : Σε κάθε ζευγάρι από τα παρακάτω γράψε έναν αριθμό που υπάρχει ανάμεσά τους. Αν δεν υπάρχει γράψε «Δεν υπάρχει». 0,2 0,22 1,888… 1,9 4,999… 5 1/3 2/3	0,21 1,89 Δεν υπάρχει 0,4	0,21 1,889… Δεν υπάρχει 1/2	Δεν υπάρχει Δεν υπάρχει Δεν υπάρχει Δεν υπάρχει	0,21 1,889 Δεν υπάρχει 1/2	0,21 1,889 Δεν υπάρχει Δεν υπάρχει	0,21 1,89 Δεν υπάρχει 1/2
Ερώτηση 3^{η} : Μπορείς να βρεις δύο πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε να μην υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσά τους; Αν ναι γράψε τους. Αν όχι γράψε «δεν υπάρχουν»	Δεν υπάρχουν	Δεν υπάρχουν	1 , 2	1/3 < ½ < 2/3	0 – 0,001	Δεν υπάρχουν

Ερώτηση 4η : Χαρακτήρισε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:	**Βαγγέλης**	**Ηλίας**	**Γιάννα**	**Ναταλία**	**Σωτήρης**	**Χριστόφορος**
Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ
Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ
Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ
Ο $\sqrt{4}$ είναι πραγματικός αριθμός	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ
Ο $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ
Ο $\sqrt{4}$ είναι άρρητος αριθμός	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ
Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία	Λ		Λ	Λ	Σ	Λ
Ο $\sqrt{2}$ έχει δεκαδική αναπαράσταση με άπειρα δεκαδικά ψηφία	Σ		Σ	Σ	Λ	Σ

Ο 0,786343434… είναι ρητός αριθμός	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ
Ο 0,786343434… είναι άρρητος αριθμός	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ
Ο 0,777 είναι ρητός αριθμός	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ
Ο 0,777 είναι άρρητος αριθμός	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ
Ο 0,777… είναι άρρητος αριθμός	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ
Ο 0,777… είναι ρητός αριθμός	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ
Ερώτηση 5η : Να τοποθετήσετε τους παρακάτω αριθμούς στη σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < : $-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3}, < \frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3} < -\frac{4}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$

Ερώτηση 6η : Να τοποθετήσετε τις τιμές των x πάνω στον άξονα:					
Ερώτηση 7η : Να τοποθετήσετε τον αριθμό $\sqrt{3}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών: Α) στο περίπου Β) ακριβώς